



**HAL**  
open science

## Schémas de Hilbert et décompositions de tenseurs

Jerome Brachat

► **To cite this version:**

Jerome Brachat. Schémas de Hilbert et décompositions de tenseurs. Mathématiques [math]. Université Nice Sophia Antipolis, 2011. Français. NNT: . tel-00620047

**HAL Id: tel-00620047**

**<https://theses.hal.science/tel-00620047>**

Submitted on 7 Sep 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE NICE-SOPHIA ANTIPOLIS - UFR Sciences  
École Doctorale Sciences Fondamentales et Appliquées

## THÈSE

Pour obtenir le titre de  
**Docteur en Sciences**  
de l'UNIVERSITÉ de Nice-Sophia Antipolis

Spécialité : **MATHÉMATIQUES**

présentée et soutenue par

**Brachat Jérôme**

# Schémas de Hilbert et Décomposition de tenseurs

Thèse dirigée par **Bernard Mourrain**  
Soutenue le Lundi 04 Juillet 2011

Mme. Maria-Emilia Alonso	Professeur, Université de Madrid	Examineur
M. André Galligo	Professeur, UNS	Examineur
M. Anthony Iarrobino	Professeur, Northeastern University, Etats-unis	Rapporteur
M. Bernard Mourrain	Directeur de Recherche, INRIA	Directeur
M. Kristian Ranestad	Professeur, Université d'Oslo, Norvège	Rapporteur
Mme. Margherita Roggero	Professeur, Université de Turin, Italie	Examineur
M. Carlos Simpsons	Directeur de Recherche, CNRS	Examineur

Equipe GALAAD  
INRIA Sophia-Antipolis  
2004 route des Lucioles, B.P. 93  
06902 Sophia-Antipolis Cedex, FRANCE



# Remerciements

Je tiens à remercier en premier lieu mon directeur de thèse, Bernard Mourrain, pour avoir dirigé mon doctorat tout en me laissant l'autonomie nécessaire afin d'approfondir les domaines qui m'intéressaient. Sa disponibilité, sa patience et son ouverture d'esprit m'ont été d'une aide précieuse tout au long de ces trois années.

Je remercie aussi vivement les rapporteurs : A. Iarrobino et K. Ranestad qui ont consacré un temps précieux à lire ma thèse et à me faire part de leurs impressions. Je remercie également les membres du jury de bien avoir voulu en faire partie.

Mes remerciements s'adressent également à tout l'équipe GALAAD de l'INRIA Sophia Antipolis pour m'avoir si chaleureusement accueilli et soutenu pendant ma thèse. Je remercie aussi les doctorants qui la composent et avec qui nous partageons le même bureau : merci Angelos pour le café frappé et les conseils informatiques en tout genre ; merci Thang (beaucoup force) pour ta bonne humeur et ta joie de vivre inébranlable.

J'exprime aussi mes remerciements aux membres du laboratoire J.A. Dieudonné pour m'avoir accueilli. Je remercie en particulier André Hirschovitz pour sa disponibilité et sa patience. Les discussions que nous avons pu avoir m'ont été d'une aide précieuse dans la compréhension de certains aspects géométriques de ma thèse. Je remercie également André Galligo pour le soutien qu'il m'a apporté. Je tiens aussi à remercier les doctorants du labo, en particulier mon co-bureau Hamad Hazim (beaucoup femmes) pour les bons moments studieux et de détente passés en sa compagnie. Je remercie enfin Monsieur Pradere pour sa disponibilité à chaque fois que j'ai eu besoin de sortir un photocopié.

Je tiens aussi à remercier Alicia Dickenstein, Nicolás Botbol et Santiago Laplagne, de l'université de Buenos Aires, pour m'avoir accueilli en décembre 2009. Ces trois semaines passées là bas ont été très enrichissantes.

Je remercie enfin mes proches et en particulier ma famille, pour leur soutien permanent, ainsi que ma compagne, Magali, pour son amour et sa patience.



# Introduction

La première partie de cette thèse est consacrée au schéma de Hilbert. Son étude est motivée par des problèmes pratiques concernant les solutions de systèmes polynomiaux donnés par des coefficients approchés. En effet, comprendre les déformations d'algèbres zéro-dimensionnelles qui conservent le nombre de solutions, est un véritable enjeu dans la recherche de solveurs polynomiaux stables et efficaces.

L'étude du schéma de Hilbert recouvre les chapitres 2 et 3, qui correspondent respectivement au cas des polynômes constants et à celui des polynômes de degré quelconque. L'idée simple qui se cache derrière le concept de schéma de Hilbert de  $\mu$  points, avec  $\mu \in \mathbb{N}$ , est la description algébrique de l'ensemble des familles de  $\mu$  points dans  $\mathbb{K}^{n+1}$ , avec  $n \in \mathbb{N}$  et  $\mathbb{K}$  un corps algébriquement clos. Il s'agit en effet de mettre en place une structure algébrique sur cet ensemble afin de le décrire. La construction algébrique qui apparaît naturellement est alors la suivante : il s'agit d'associer à chaque famille de  $\mu$  points de  $\mathbb{K}^{n+1}$ , l'idéal  $I \subset S := \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$  formé des polynômes homogènes qui s'annulent en ces points. Il est alors tout naturel de s'intéresser à l'ensemble des idéaux homogènes de polynôme de Hilbert constant égal à  $\mu$  et plus généralement de polynôme de Hilbert quelconque de degré  $d \geq 0$ . Nous sommes ainsi partis d'un énoncé géométrique, avec des familles de points dans  $\mathbb{K}^{n+1}$ , que nous transformons en un énoncé algébrique, avec des idéaux homogènes de polynôme de Hilbert donné. Le formalisme de la géométrie algébrique apparaît donc naturellement comme l'outil adéquat pour l'étude de ce problème. C'est donc ce langage que nous adopterons dans les chapitres 2 et 3.

En géométrie algébrique, le concept qui permet de décrire l'ensemble des idéaux homogènes de polynôme de Hilbert donné  $P \in \mathbb{K}[t]$  est le foncteur de Hilbert associé à  $P$  et noté  $\mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}^n}^P$ . Ce dernier est un foncteur contravariant de la catégorie des schémas vers celle des ensembles et fut introduit en premier par Grothendieck [41]. Il est défini de la manière suivante : à tout schéma  $S \in \mathcal{C}$ , où  $\mathcal{C}$  désigne la catégorie des  $\mathbb{K}$ -schémas de type fini, on associe l'ensemble  $\mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}^n}^P(S)$  des familles plates  $\chi \subset \mathbb{P}^n \times S$  de sous-schémas fermés de  $\mathbb{P}^n$ , paramétrés par  $S$  et dont les fibres ont pour polynôme de Hilbert  $P$ . Grothendieck [41] a montré que ce foncteur contravariant est représentable dans  $\mathcal{C}$ . Son représentant s'appelle le schéma de Hilbert associé à  $P$  et sera noté  $Hilb^P(\mathbb{P}^n)$ . C'est ce schéma qui sera l'objet du chapitre 2 pour le cas des polynômes constants égaux à  $\mu$  et du chapitre 3 pour le cas des polynômes de degré quelconque. Nous nous intéresserons en particulier aux équations qui le définissent comme sous-schéma fermé de la grassmannienne et plus précisément à leur degré. En effet, à l'heure actuelle, les résultats connus fournissent des équations de degré trop élevé pour pouvoir expliciter ces équations, même dans les cas les plus simples. En utilisant les résultats de Gotzmann [37], Iarrobino et Kleiman [49, Prop.C.30] ont par exemple déterminé un ensemble d'équations de degré  $Q(d+1)+1$ , où  $Q$  est le polynôme complémentaire

à  $P$ . Plus tard et indépendamment de [37], Bayer [5] a conjecturé qu'il existait un ensemble d'équations de degré  $n + 1$ . Haiman et Sturmfels [43] l'ont ensuite prouvé. Néanmoins ces deux bornes s'avèrent trop importantes, même dans les cas non-triviaux les plus simples. Nous allons ainsi montrer dans les chapitres 2 et 3, que nous pouvons définir globalement le schéma de Hilbert  $Hilb^P(\mathbb{P}^n)$  comme sous-schéma fermé de la grassmannienne, au moyen d'équations homogènes de degré  $\leq d + 2$  en les coordonnées de Plücker. C'est donc surtout au niveau de leur degré et de leur caractère global, que ces équations apportent une réelle nouveauté. Notons de plus que pour le cas de polynôme de Hilbert constant égal à  $\mu$ , nous fournirons au chapitre 2 une interprétation simple de ces équations en termes de relations de commutation et de réécriture.

L'objet du chapitre 2 est donc le schéma de Hilbert de  $\mu$  points :  $Hilb^\mu(\mathbb{P}^n)$ , où  $\mu \in \mathbb{N}$  et correspond à un papier en cour de soumission en collaboration avec M.E. Alonso et B. Mourrain : [3]. Ma contribution concerne principalement la démonstration des relations (2.4.7), (2.4.9) et (2.4.12) ainsi que la mise en place du formalisme fonctoriel et schématique afin de montrer que ces équations sont celles du schéma de Hilbert ponctuel. Nous commencerons ainsi section, 2.2, par donner la définition du schéma de Hilbert et énoncerons les théorèmes de Persistance et de Régularité de Gotzmann [37] sur lesquels nous baserons la construction de nos équations. Ensuite, section 2.3, nous montrerons l'existence du schéma de Hilbert (i.e la représentation du foncteur de Hilbert  $\mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}^n}^\mu$ ) par une approche locale. Nous exhiberons pour cela un recouvrement ouvert de sous-foncteurs représentables de  $\mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}^n}^\mu$ , dont les équations correspondent aux relations de commutation qui décrivent les algèbres zéro-dimensionnelles de  $R := \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$  [67]. Section 2.4, nous décrirons le plongement du schéma de Hilbert dans la Grassmannienne et expliciterons ses équations globales, exprimées en les coordonnées de Plücker. Ces équations se présentent sous la forme de polynômes homogènes de degré 2 et s'interprètent en termes de relations de commutation et de relations de réécriture. Nous concluons ce chapitre, section 2.5, en exploitant l'approche locale introduite dans la section 2.3, et en particulier les relations de commutation qui caractérisent les bases de bord [67]. Nous les utiliserons afin de retrouver un résultat connu concernant le plan tangent du schéma de Hilbert de  $\mu$  point [74, thm.4.3.5, p.270].

Le chapitre 3 concernera quant-à lui le cas plus général des schémas de Hilbert associés à des polynômes de degré quelconque  $d \geq 0$  et correspond à un papier en commun avec P. Lella, M. Roggero et B. Mourrain (voir [10]). Ma contribution dans cet article concerne essentiellement la section 3.2 sur les coordonnées de Plücker, la démonstration du théorème 3.5.3 et sa généralisation au cas des algèbres locales (voir proposition 3.5.6). Nous commencerons ainsi, section 3.2, par aborder les propriétés des coordonnées de Plücker. En particulier, en partant des coordonnées d'un point  $(\Delta_I) \in \mathbb{P}(\wedge^p V)$  correspondant à un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $F$  tel que  $\Delta := V/F$  soit de dimension  $p$ , nous construirons un ensemble de générateurs pour  $\wedge^l F$  pour tout  $l = 1, \dots, n - p$  qui dépend linéairement des coordonnées de Plücker de  $\Delta$ . Nous exploiterons ensuite ce système de générateurs afin d'exprimer plus simplement les conditions qui définissent le schéma de Hilbert comme sous-schéma fermé de la Grassmannienne. Sections 3.3 et 3.4 nous appliquerons cela pour retrouver (plus simplement), des systèmes d'équations déjà connus pour  $Hilb^P(\mathbb{P}^n)$  et dus à Iarrobino et Kleiman [49, Prop.C.30] et Bayer, Haiman et Sturmfels [43]. Enfin, section 3.5, nous donnerons de nouvelles équations pour  $Hilb^P(\mathbb{P}^n)$ . Ces équations se présentent sous la forme de polynômes homogènes de degré  $\leq d$  où  $d$  représente le degré de  $P$ .

La deuxième partie de cette thèse concerne la décomposition de tenseurs. Ce sujet n'est pas sans rapport avec le schéma de Hilbert. Comme nous le verrons, celui-ci entretient des liens étroits avec les notions d'algèbres zéro-dimensionnelles, de relations de commutation et plus généralement de schéma de Hilbert ponctuel. Bien que les équations obtenues dans les chapitres 2 et 3 ne soient pas directement utilisées pour la décomposition de tenseurs, il n'en reste pas moins que l'étude menée autour du schéma de Hilbert permet de répondre à un certain nombre de questions concernant la recherche du rang et d'une décomposition d'un tenseur donné ou encore son unicité. Nous verrons donc apparaître, tout au long du chapitre 4, des références à des propriétés et des définitions introduites dans le cadre de l'étude du schéma de Hilbert de  $\mu$  points.

Les tenseurs sont des objets qui apparaissent dans nombre de contextes et applications différentes. Les tenseurs les plus répandus sont ceux d'ordre deux, i.e les matrices. Néanmoins, dans beaucoup de problèmes, les tenseurs d'ordre plus élevé apparaissent naturellement, afin de collecter des informations dépendant de plus de deux variables. Ces données peuvent être, par exemple, des observations d'expériences ou de phénomènes physiques liées à plusieurs paramètres. Elles sont alors stockées dans des structures que l'on appelle tenseurs.

Le problème de décomposition de tenseurs consiste alors à écrire un tenseur donné, en une somme de tenseurs indécomposables (i.e de rang 1), avec le moins de termes possibles. Une telle décomposition sera dite minimale, et le nombre de termes correspondant s'appellera le rang du tenseur. Cette écriture permet alors de déduire des propriétés géométriques ou d'invariance associées aux observations. C'est pour cette raison que le problème de décomposition de tenseurs suscite un intérêt aussi vif dans de nombreux domaines. Le premier d'entre eux est lié au problème de Décomposition en Valeurs Singulières (SVD), pour le cas des matrices, avec des applications dans le domaine de l'Analyse de Composantes Indépendantes. Son extension au cas de tenseurs d'ordre plus grand, apparaît en ingénierie électrique [79], en traitement du signal [23] [19], en Traitement d'Antennes [29] [18] ou encore en télécommunication [84] [17] [76] [26], Chémométrie et Psychométrie [11] [53]. Citons également, d'un point de vue plus théorique, le domaine de la Complexité Arithmétique [57] [55] [78]. La décomposition de tenseurs sera ainsi l'objet du chapitre 4. Les résultats qui y sont présentés dans sont le fruit de différentes collaborations à savoir : [9] pour les sections 4.2 à 4.5 et plus récemment [6] pour les tenseurs généraux section 4.9. D'autres résultats (section 4.6 et 4.7) concernant le rang et l'unicité de la décomposition de tenseurs ne font pas encore l'objet de publication et sont le fruit d'une collaboration avec B. Mourrain.

La première partie traitera d'abord des tenseurs symétriques. Sur le plan mathématique, ceux-ci sont représentés par des éléments de  $S_d := \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]_d$ , i.e des polynômes homogènes de degré donné  $d \in \mathbb{N}$  en  $n + 1$  variables. Dans ce formalisme, le problème de décomposition consiste à écrire un polynôme homogène  $f$ , en une somme minimale de puissances  $d$ -ème de formes linéaires. Nous verrons, section 4.2, qu'il existe d'autres formalismes comme l'approche duale, où le problème de décomposition revient à écrire une forme linéaire de  $S_d^*$  en une somme d'évaluations en des points de  $\mathbb{K}^{n+1}$ . Nous traiterons aussi le point de vue géométrique. Nous définirons et décrirons les propriétés des variétés sécantes, de Véronèse et plus généralement de Segre. Section 4.3, nous présenterons l'algorithme de Sylvester qui permet de décomposer des polynômes homogènes de degré quelconque à deux variables. C'est ce que nous appellerons le cas binaire. Celui-ci sera notre point de départ à partir duquel nous chercherons à décomposer des polynômes en un nombre quelconque de



variables. Dans la section 4.4, nous adopterons l'approche duale. Il s'agira alors d'étudier les formes linéaires de  $R^*$  qui s'écrivent comme somme d'évaluations. Nous introduirons des propriétés relatives aux algèbres zéro-dimensionnelles afin d'explicitier les points d'évaluations. Nous concluons alors en montrant comment on peut se ramener à un simple calcul de valeurs/vecteurs propres généralisés. Section 4.5, nous verrons comment (modulo une dé-homogénéisation) notre problème de décomposition consiste à étendre une forme linéaire définie partiellement sur  $R_d := \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]_{\leq d}$  en une somme d'évaluations. Nous introduirons pour cela la notion d'opérateur de Hankel tronqué et fournirons des critères d'extension. Enfin, section 4.7, nous exploiterons le formalisme introduit précédemment afin de traiter le problème d'unicité de la décomposition minimale de tenseurs. Nous concluons cette première partie section 4.8, en fournissant des exemples qui illustreront les techniques jusque-là développées.

Dans la deuxième partie du chapitre 4, section 4.9, nous aborderons le cas des tenseurs généraux (non nécessairement symétriques) et correspond à un travail en collaboration avec A. Bernardi, P. Comon et B. Mourrain : [6] qui paraîtra dans les Proceedings de la conférence ISSAC 2011. Ces tenseurs multi-homogènes seront représentés par des éléments de  $S^{d_1}(E_1) \otimes \dots \otimes S^{d_l}(E_l)$ , où  $E_i := \langle x_{0,i}, \dots, x_{n_i,i} \rangle$ . Il s'agira alors d'écrire de tels polynômes comme somme de produits de  $l$  de formes linéaires, avec le minimum de termes. En reprenant l'approche utilisée dans la première partie de ce chapitre, nous montrerons comment les techniques et les algorithmes introduits pour le cas symétrique permettent d'apporter une réponse au problème. Nous fournirons, section 4.9.2, de nouveaux exemples pour le cas des tenseurs généraux.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Notations et préliminaires</b>	<b>11</b>
1.1	Notations . . . . .	11
1.2	Préliminaires . . . . .	14
1.2.1	Extension des coefficients . . . . .	14
1.2.2	Bases de Gröbner, idéaux initiaux et Borel-fixes . . . . .	18
1.2.3	Bases de bord et relations de commutation . . . . .	20
1.2.4	Foncteurs représentables . . . . .	26
1.2.5	La Grassmannienne . . . . .	28
<b>2</b>	<b>Le schéma de Hilbert ponctuel</b>	<b>33</b>
2.1	Introduction . . . . .	33
2.2	Le foncteur de Hilbert . . . . .	35
2.3	Représentation et description locale du foncteur de Hilbert de $\mu$ points . . . . .	37
2.3.1	Recouvrement ouvert du foncteur de Hilbert de $\mu$ points . . . . .	37
2.3.2	Représentation du foncteur de Hilbert de $\mu$ points . . . . .	43
2.4	Description globale du foncteur de Hilbert de $\mu$ points . . . . .	44
2.4.1	Le plongement dans la Grassmannienne . . . . .	44
2.4.2	Equations globales de $Hilb^\mu(\mathbb{P}^n)$ comme sous variété d'un produit de deux Grassmanniennes . . . . .	46
2.4.3	Equations globales de $Hilb^\mu(\mathbb{P}^n)$ comme sous variété d'une Grassmannienne . . . . .	49
2.5	L'espace tangent de $Hilb^\mu(\mathbb{P}^n)$ . . . . .	56
<b>3</b>	<b>Schémas de Hilbert quelconques</b>	<b>61</b>
3.1	Introduction . . . . .	61
3.2	Coordonnées de Plücker . . . . .	63
3.3	Equations de Iarrobino-Kleiman . . . . .	67
3.4	Equations de Bayer . . . . .	69
3.5	Equations BLMR . . . . .	71
3.5.1	Le cas d'un schéma $X = \text{Spec}(k)$ . . . . .	71
3.5.2	Cas général . . . . .	76
<b>4</b>	<b>Décomposition de tenseurs symétriques</b>	<b>83</b>
4.1	Introduction . . . . .	83
4.2	Formulations du problème . . . . .	85
4.2.1	Décomposition polynomiale . . . . .	85

4.2.2	Variétés sécantes et variétés de Véronèse . . . . .	86
4.2.3	Décomposition et dualité . . . . .	87
4.3	Le cas binaire ( $n = 1$ ) . . . . .	89
4.4	Opérateurs de Hankel et algèbre quotient . . . . .	90
4.5	Opérateurs de Hankel tronqués . . . . .	97
4.6	Les rangs d'un tenseur . . . . .	102
4.7	Unicité de la décomposition . . . . .	108
4.8	Algorithme de décomposition de tenseurs symétriques . . . . .	112
4.8.1	Premier exemple . . . . .	113
4.8.2	Deuxième exemple . . . . .	114
4.8.3	Troisième exemple . . . . .	116
4.9	Tenseurs généraux . . . . .	119
4.9.1	Formulations du problème . . . . .	119
4.9.2	Exemples et applications . . . . .	125

# Chapitre 1

## Notations et préliminaires

### 1.1 Notations

Soit  $\mathbb{K}$  un corps algébriquement clos de caractéristique zéro et  $R := \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] = \mathbb{K}[\underline{\mathbf{x}}]$  l'anneau des polynômes en  $n$  variables et à coefficients dans  $\mathbb{K}$ . On définit également  $S := \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n] = \mathbb{K}[\mathbf{x}]$  l'anneau des polynômes en  $n + 1$  variables. Pour tout  $\alpha \in \mathbb{N}^{n+1}$  (resp.  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ ) on pose  $\mathbf{x}^\alpha := x_0^{\alpha_0} \cdots x_n^{\alpha_n}$  (resp.  $\underline{\mathbf{x}}^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ ). Pour tout  $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_n)$  on notera également  $\underline{\alpha} := (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  et  $|\alpha|$  l'entier défini par :

$$|\alpha| := \sum_i \alpha_i.$$

Plus généralement, étant donné  $A$  une  $\mathbb{K}$ -algèbre, on définit  $R^A := R \otimes_{\mathbb{K}} A = A[x_1, \dots, x_n]$  et  $S^A := S \otimes_{\mathbb{K}} A = A[x_0, \dots, x_n]$  les anneaux de polynômes sur  $A$  en respectivement  $n$  et  $n + 1$  variables.

On note  $S_d^A \subset S^A$  l'ensemble des polynômes homogènes de degré  $d$  et  $R_{\leq d}^A \subset R^A$  (ou plus simplement  $R_d^A$ ) l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à  $d$  dans  $R^A$ .

Suivant le contexte,  $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$  (resp.  $\mathbb{A}_A^n$ ) représentera tantôt l'espace affine  $\mathbb{K}^n$  (resp.  $A^n$ ) de dimension  $n$  sur le corps  $\mathbb{K}$  (resp. sur l'anneau  $A$ ), tantôt le schéma affine  $\mathbf{Spec}(R)$  (resp.  $\mathbf{Spec}(R^A)$ ). De même,  $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$  (resp.  $\mathbb{P}_A^n$ ) désignera tantôt l'espace projectif de dimension  $n$  sur le corps  $\mathbb{K}$  (resp. sur l'anneau  $A$ ), tantôt le schéma projectif  $\mathbf{Proj}(S)$  (resp.  $\mathbf{Proj}(S^A)$ ).

On notera  $m \subset S$  (resp.  $m^A \subset S^A$ ) l'idéal homogène de  $S$  (resp.  $S^A$ ) engendré par  $x_0, \dots, x_n$ . Plus généralement, étant donné  $\zeta \in \mathbb{P}^n$  (resp.  $\zeta \in \mathbb{P}_A^n$ ) un point de l'espace projectif, on notera  $m_\zeta \subset S$  (resp.  $m_\zeta^A \subset S^A$ ) l'idéal homogène engendré par les polynômes homogènes qui s'annulent en  $\zeta$ . De même étant donné un point  $\varepsilon \in \mathbb{A}^n$  (resp.  $\varepsilon \in \mathbb{A}_A^n$ ) de l'espace affine, on notera également  $m_\varepsilon \subset R$  (resp.  $m_\varepsilon^A \subset R^A$ ) l'idéal engendré par les polynômes qui s'annulent en  $\varepsilon$ .

Etant donné  $B = \{\mathbf{x}^{\alpha_1}, \dots, \mathbf{x}^{\alpha_D}\}$  un ensemble de  $D$  monômes dans  $S$ , on identifiera  $B$  et l'ensemble de ses exposants  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_D\}$  (on procédera de même dans  $R$ ). On écrira par exemple " $\alpha \in B$ " au lieu de " $x^\alpha \in B$ ".

On désignera par  $\langle B \rangle$  le  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel engendré par  $B$  et plus généralement nous noterons  $\langle B \rangle_A$  le  $A$ -module libre engendré par  $B$  dans  $S^A$  (ou  $R^A$  suivant le contexte).

On appellera *déhomogénéisation* par rapport à  $x_0$  l'application de  $S$  dans  $R$  qui à un polynôme  $P \in S$  associe le polynôme  $\underline{P} := P(1, x_1, \dots, x_n) \in R$ . Pour tout  $I \subset S$ , on notera  $\underline{I} \subset R$  l'image de  $I$  par la déhomogénéisation.

Inversement, on définit l'*homogénéisation* en degré  $d$  (par rapport à  $x_0$ ), comme étant l'application qui à tout monôme :

$$\underline{\mathbf{x}}^\alpha \in R_d, |\alpha| = k \leq d$$

associe le monôme :

$$\underline{\mathbf{x}}^\alpha x_0^{d-k} \in S_d.$$

Etant donné un polynôme  $P \in R_d$ , on notera  $P^h \in S_d$  l'image de  $P$  par l'homogénéisation. On a alors pour tout  $P \in S_d$  (resp.  $P \in R_d$ ) :

$$(\underline{P})^h = P \text{ (resp. } \underline{(P^h)} = P \text{)}.$$

Nous serons amenés à utiliser la notion de *dualité*. Ainsi, étant donné  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, on notera  $E^* := \mathbf{Hom}_{\mathbb{K}}(E, \mathbb{K})$  l'ensemble des formes  $\mathbb{K}$ -linéaires de  $E$  vers  $\mathbb{K}$ .

Une base de l'espace dual  $R_d^*$  consiste par exemple en l'ensemble des formes linéaires qui calculent les coefficients des polynômes dans la base monomiale. Ces opérateurs seront notés  $(\underline{\mathbf{d}}^\alpha)_{|\alpha| \leq d}$  (c'est la base duale de celle des monômes) :

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{d}}^\alpha &: R \rightarrow \mathbf{k} \\ \mathbf{x}^\beta &\mapsto 1 \text{ si } \beta = \alpha, \\ &0 \text{ si } \beta \neq \alpha \end{aligned}$$

On identifiera alors  $R^*$  avec l'anneau des séries formelles, i.e  $\mathbb{K}[[\underline{\mathbf{d}}]] := \mathbb{K}[[d_1, \dots, d_n]]$ . Ainsi, tout élément  $\Lambda \in R^*$  se décompose de la manière suivante dans  $\mathbb{K}[[\underline{\mathbf{d}}]]$  :

$$\Lambda = \sum_{\alpha} \Lambda(\mathbf{x}^\alpha) \underline{\mathbf{d}}^\alpha.$$

On s'intéressera en particulier à certaines formes linéaires de  $R^*$  : les évaluations en un point  $\zeta \in \mathbb{K}^n$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_\zeta &: R \rightarrow \mathbb{K} \\ p &\mapsto p(\zeta). \end{aligned}$$

La décomposition de  $\mathbf{1}_\zeta$  dans  $\mathbb{K}[[\underline{\mathbf{d}}]]$  est

$$\mathbf{1}_\zeta = \sum_{\alpha} \zeta^\alpha \underline{\mathbf{d}}^\alpha.$$

On s'intéressera aussi aux compositions de ces évaluations avec les opérateurs de dérivation. Ainsi, si  $\theta(\partial_1, \dots, \partial_n)$  est un opérateur différentiel sur l'espace des polynômes, on considèrera la composition suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_\zeta \circ \theta(\partial_1, \dots, \partial_n) &: R \rightarrow \mathbb{K} \\ p &\mapsto \theta(\partial_1, \dots, \partial_n)(p)(\zeta). \end{aligned}$$

L'espace dual  $R^*$  a de plus une structure naturelle de  $R$ -module [32] que l'on définit ainsi : pour tout  $p \in R$  et tout  $\Lambda \in R^*$ , on considère l'opérateur linéaire suivant :

$$\begin{aligned} p * \Lambda &: R \rightarrow \mathbb{K} \\ q &\mapsto \Lambda(pq). \end{aligned}$$

En particulier, on a :

$$x_i * \underline{\mathbf{d}}^\alpha = \begin{cases} d_1^{\alpha_1} \dots d_{i-1}^{\alpha_{i-1}} d_i^{\alpha_i-1} d_{i+1}^{\alpha_{i+1}} \dots d_n^{\alpha_n} & \text{si } \alpha_i > 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Etant donné  $\mathbf{k} := (k_0, \dots, k_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ , on notera  $\mathbf{k}(\mathbf{x}) \in S_1$  la forme linéaire définie par :

$$\mathbf{k}(\mathbf{x}) := k_0.x_0 + \dots + k_n.x_n.$$

Comme dans le cas affine, étant donné un point  $\zeta \in \mathbb{K}^{n+1}$ , on notera  $\mathbf{1}_\zeta \in S^*$  la forme linéaire égale à l'évaluation en  $\zeta$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_\zeta &: S \rightarrow \mathbb{K} \\ p &\mapsto p(\zeta). \end{aligned}$$

Enfin, soit  $d \in \mathbb{N}$  et  $\alpha \in \mathbb{N}^{n+1}$  un multi-indice tel que  $|\alpha| = d$ , on notera  $\mathbf{d}^\alpha \in S_d^*$  la forme linéaire suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{d}^\alpha &: S_d \rightarrow \mathbb{K} \\ \mathbf{x}^\beta &\mapsto 1 \text{ si } \beta = \alpha, \\ &0 \text{ si } \beta \neq \alpha \end{aligned}$$

Enfin, étant donnée une forme linéaire  $\Lambda \in S_d^*$ , on notera  $\underline{\Lambda} \in R_d^*$  la forme linéaire définie par :

$$\underline{\Lambda}(P) := \Lambda(P^h). \quad (1.1.1)$$

Inversement, étant donné  $\Lambda \in R_d^*$ , on définit  $\Lambda^h \in S_d^*$  par :

$$\Lambda^h(P) := \Lambda(\underline{P}).$$

Remarquons alors que pour tout  $\Lambda \in S_d^*$  (resp.  $\Lambda \in R_d^*$ ), on a :

$$(\underline{\Lambda})^h = \Lambda \text{ (resp. } (\underline{\Lambda^h}) = \Lambda \text{ )}.$$

Etant donné une famille  $B = \{b_1, \dots, b_r\}$  de monômes de  $R$  (resp.  $S$ ), on notera

$$B^* := \{b_1^*, \dots, b_r^*\} \subset R^* \text{ (resp. } S^*),$$

la famille de formes linéaires vérifiant  $b_i^*(\underline{\mathbf{x}}^\alpha) = 1$  (resp.  $b_i^*(\mathbf{x}^\alpha) = 1$ ) si et seulement si  $\underline{\mathbf{x}}^\alpha = b_i$  (resp.  $\mathbf{x}^\alpha = b_i$ ).

On notera  $PGL(n+1)$  l'ensemble des changements de coordonnées dans  $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ . Cet ensemble s'identifie naturellement à celui des matrices inversibles de taille  $n+1 \times n+1$ . Etant donné  $g \in PGL(n+1)$  et  $E \subset S$  (resp.  $P \in S$ ), on notera  $g \circ E$  (resp.  $g \circ P$ ) l'image de  $E$  (resp.  $P$ ) dans  $S$  par le changement de coordonnées  $g$ .

Enfin, on définit l'action de  $PGL(N+1)$  sur  $S^*$  (resp.  $S_d^*$ ) par :

$$(g \circ \Lambda)(P) := \Lambda(g \circ P) \quad \forall \Lambda \in S^* \text{ (resp. } S_d^*), \quad \forall P \in S \text{ (resp. } S_d).$$

On notera  $(A, m)$  tout couple formé d'un anneau local  $A$  et de son idéal maximal  $m$ .

Etant donné  $A$  un anneau commutatif et  $t \in A$  un élément de  $A$ ,  $A_t$  désignera la localisation de  $A$  par rapport à la partie multiplicative  $\{1, t, t^2, \dots\}$ . De même, si  $p \in \mathbf{Spec}(A)$  un idéal premier de  $A$ , on notera  $A_p$  la localisation de  $A$  par rapport à  $p$ ,  $m_p$  son idéal maximal et  $k(p) := A_p/m_p A_p$  son corps résiduel. Etant donné  $M$  un  $A$ -module, on note  $M_p$  (resp.  $M_t$ ) le  $A_p$  (resp.  $A_t$ )-module égal à  $M \otimes_A A_p$  (resp.  $M \otimes_A A_t$ ).

De même si  $R = R_0 \oplus R_1 \oplus \dots$  est un anneau commutatif gradué et  $f \in R_d$  un élément de degré  $d$ ,  $R_{(f)}$  désignera l'anneau formé des éléments de degré 0 dans  $R_f$ . Si  $p \subset R$  est un idéal homogène, on notera  $R_{(p)}$  l'anneau local formé des éléments de degré 0 dans  $R_p$ . Plus généralement, si  $M$  un  $R$ -module gradué et  $p \subset R$  (resp.  $f \in R_d$ ) un idéal homogène gradué (resp. un élément de degré  $d$ )  $M_{(p)}$  (resp.  $M_{(f)}$ ) désignera les éléments de degré 0 dans  $M_p$  (resp.  $M_f$ ).

Etant donné un anneau  $A$  et un  $A$ -module  $M$ , on notera  $\widetilde{M}$  le faisceau quasi-cohérent associé à  $M$  sur  $\mathbf{Spec}(A)$  (voir [39][Def 1.3.4, p.85]). On dira de plus que  $M$  est localement libre de rang  $n$  si pour tout  $p \in \mathbf{Spec}(A)$ ,  $M_p$  est un  $A_p$ -module libre de rang  $\mu$ . Lorsque  $A$  est noethérien et que  $M$  est de type fini, alors  $\widetilde{M}$  est un faisceau cohérent (voir [39][5.3.1, p.47] et [39][Thm.1.5.1, p.92]) et  $M$  est localement libre de rang  $\mu$  si et seulement si  $\widetilde{M}$  est localement libre de rang  $\mu$  en tant que faisceau de modules (voir [39][5.4.1, p.48])

De même, étant donné un anneau gradué  $B := \bigoplus_{d \geq 0} B_d$  et un  $B$ -module gradué  $M := \bigoplus_{d \geq 0} M_d$ , on notera  $\widetilde{M}$  le faisceau quasi-cohérent associé à  $M$  sur  $\mathbf{Proj}(B)$  (voir [40][Prop.2.5.2, p.31])

## 1.2 Préliminaires

### 1.2.1 Extension des coefficients

L'objectif de cette section est d'étendre la notion de genericité dans les anneaux de polynômes sur  $\mathbb{K}$  aux anneaux de polynômes sur une  $\mathbb{K}$ -algèbre quelconque. Nous étudierons aussi dans cette section l'influence des extensions de corps sur les idéaux zéro-dimensionnels. Enfin nous fournirons une caractérisation des formes linéaires non-diviseurs de zéro dans ces algèbres zéro-dimensionnelles.

**Proposition 1.2.1.** *Soit  $A$  une  $\mathbb{K}$ -algèbre et  $n$  un entier positif. Soit  $P$  un polynôme de  $A[x_1, \dots, x_n]$  tel que  $P$  s'annule pour des valeurs génériques dans  $\mathbb{K}^n$ . Alors  $P = 0$  (dans  $A[x_1, \dots, x_n]$ ).*

*Démonstration.* Soit  $\mathbf{P}_d$  la proposition suivante : pour tout  $m \in \mathbb{N}$  et tout polynôme  $P \in A[x_1, \dots, x_m]$  de degré inférieur ou égal à  $d$ , si  $P$  s'annule pour des valeurs génériques dans  $\mathbb{K}^m$  alors  $P = 0$ . Nous allons prouver par récurrence que  $\mathbf{P}_d$  est vraie pour tout  $d \geq 0$ .

Pour  $d = 0$ ,  $\mathbf{P}_0$  est vraie.

Supposons  $\mathbf{P}_k$  vraie pour tout  $k \leq d$ , prouvons alors que  $\mathbf{P}_{d+1}$  est vraie. Soit  $m$  un entier

et  $P$  un polynôme dans  $A[x_1, \dots, x_m]$  de degré inférieur ou égal à  $d + 1$  tel que  $P$  s'annule pour des valeurs génériques dans  $\mathbb{K}^m$ . Soit  $U \subset \mathbb{K}^m$  l'ensemble des zéros de  $P$  dans  $\mathbb{K}^m$ . Soit  $Q_i \in A[x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m]$  le polynôme défini par :

$$Q_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{P(\mathbf{x}) - P(\mathbf{y})}{x_i - y_i}.$$

Comme  $P = (x_i - y_i) \cdot Q_i$ ,  $Q_i$  s'annule sur  $V := U \times U \setminus \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mid x_i - y_i = 0\} \subset \mathbb{K}^{2m}$ . Ainsi,  $Q_i$  s'annule pour des valeurs génériques dans  $\mathbb{K}^{2m}$  et son degré est inférieur ou égal à  $d$ . Par récurrence,  $Q_i$  est égal à 0 pour tout  $1 \leq i \leq m$ . Ainsi, toutes les dérivées partielles  $\partial_i P = Q_i(\mathbf{x}, \mathbf{x})$  de  $P$  sont égales à zéro. Comme  $\mathbb{K}$  est de caractéristique zéro, on conclut que  $P$  est égal à zéro.

Ainsi,  $\mathbf{P}_d$  est vraie pour tout  $d$  et  $m$  dans  $\mathbb{N}$ . Cela prouve la proposition 1.2.1.  $\square$

Dans la suite,  $\mathbb{K} \subset k$  désignera une extension de corps de  $\mathbb{K}$  et  $\bar{k}$  sa clôture algébrique. On rappelle que  $S^k := k[x_0, \dots, x_n]$  (resp.  $S^{\bar{k}} := S^k \otimes_k \bar{k}$ ) l'anneau des polynômes en  $n+1$  variables sur  $k$  (resp.  $\bar{k}$ ). On notera  $\mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}^n}^\mu(\mathbf{Spec}(k))$  (ou plus simplement  $\mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}^n}^\mu(k)$ ) l'ensemble des idéaux homogènes saturés  $I$  de  $S^k$  tels que  $S^k/I$  ait un polynôme de Hilbert constant égal à  $\mu$  (voir définition 2.2.3). Pour tout idéal  $I \in k[x_0, \dots, x_n]$ , on notera  $\bar{I}$  l'idéal de  $\bar{k}[x_0, \dots, x_n]$  défini par :

$$\bar{I} := I \otimes_k \bar{k}.$$

Etant donné  $P$  un point de l'espace projectif  $\mathbb{P}_k^n$ , on rappelle que  $m_P^k$  désigne l'idéal homogène de  $k[x_0, \dots, x_n]$  engendré par :

$$\{Q \text{ polynôme homogène de } k[x_0, \dots, x_n] \mid Q(P) = 0\}.$$

Enfin, on note  $m^k$  l'idéal homogène de  $k[x_0, \dots, x_n]$  engendré par :

$$\{Q \text{ polynôme homogène de } k[x_0, \dots, x_n] \text{ de degré } \geq 1\}.$$

**Définition 1.2.2.** Soit  $J$  un idéal homogène dans  $\mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}^n}^\mu(\bar{k})$ . D'après le théorème des zéros de Hilbert,  $J$  admet la décomposition primaire suivante :

$$J = \bigcap_i q_i$$

avec  $q_i$  idéal homogène  $m_{P_i}^{\bar{k}}$ -primaire, avec  $P_i$  dans l'espace projectif  $\mathbb{P}_{\bar{k}}^n$ . L'ensemble  $\{P_i\}$  sera appelé *ensemble des points définis par  $J$*  dans  $\mathbb{P}_{\bar{k}}^n$ .

Plus généralement, étant donné  $J$  un idéal homogène (non nécessairement saturé) de  $S^{\bar{k}}$  de polynôme de Hilbert constant égal à  $\mu$ , l'ensemble des points définis par  $J$  dans  $\mathbb{P}_{\bar{k}}^n$  est l'ensemble des points définis par son saturé (noté  $Sat(J)$ ) :

$$Sat(J) := \bigcup_{j \in \mathbb{N}} J : (m^{\bar{k}})^j$$

dans  $\mathbb{P}_{\bar{k}}^n$ .



**Proposition 1.2.3.** Soit  $I \subset S^k$  un idéal homogène de  $\mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}^n}^\mu(k)$ . Alors :

$$\bar{I} \cap S^k = I$$

*Démonstration.* Tout d'abord, on a  $I \subset \bar{I} \cap S^k$ . Ainsi, en tensorisant par  $\bar{k}$ , on a  $\bar{I} \subset (\bar{I} \cap S^k) \otimes \bar{k} \subset \bar{I}$ . Ainsi  $\bar{I} = (\bar{I} \cap S^k) \otimes \bar{k}$ . En raisonnant par dimension pour tout degré  $d \geq 1$ , on a :

$$\dim_k(S_d^k/(\bar{I} \cap S^k)_d) = \dim_{\bar{k}}(S_d^{\bar{k}}/(\bar{I} \cap S^k)_d \otimes \bar{k}) = \dim_{\bar{k}}(S_d^{\bar{k}}/I_d \otimes \bar{k}) = \dim_k(S_d^k/I_d).$$

On conclut alors que :

$$I = \bar{I} \cap S.$$

□

**Corollaire 1.2.4.** Soit  $I \subset S^k$  un idéal homogène de  $\mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}^n}^\mu(k)$ . Alors,  $\bar{I}$  appartient à  $\mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}^n}^\mu(\bar{k})$ .

*Démonstration.* Il suffit uniquement de montrer que  $\bar{I}$  est saturé (i.e  $\bar{I} : m^{\bar{k}} = \bar{I}$ ). On sait que  $\bar{I}$  est saturé si et seulement si  $m^{\bar{k}}$  n'est pas un idéal premier associé à  $\bar{I}$ . Raisonnons par l'absurde et supposons alors que  $\bar{I}$  n'est pas saturé. D'après le théorème des zéros de Hilbert,  $\bar{I}$  a une décomposition primaire de la forme :

$$\bar{I} = \bigcap_i q_i \cap q$$

avec  $q_i$  un idéal homogène  $m_{P_i}^{\bar{k}}$ -primaire où  $P_i$  est un point de l'espace projectif  $\mathbb{P}_{\bar{k}}^n$ , et avec  $q$  un idéal homogène  $m^{\bar{k}}$ -primaire. D'après la proposition 1.2.3, on a :

$$I = \bar{I} \cap S^k.$$

Ainsi :

$$I = \bigcap_i q_i \cap S^k \bigcap q \cap S^k$$

où  $q_i \cap S^k$  est un idéal homogène  $m_{P_i}^{\bar{k}} \cap S$ -primaire et  $q \cap S^k$  un idéal homogène  $m^{\bar{k}} \cap S^k = m^k$ -primaire. Comme  $I$  est saturé c'est impossible.

$\bar{I}$  est ainsi saturé. □

**Proposition 1.2.5.** Soit  $I$  un idéal homogène de  $\mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}^n}^\mu(k)$  et  $u$  une forme linéaire dans  $S_1^k$ . Alors,  $(I : u) = I$  si et seulement si  $u$  n'annule aucun point défini par  $\bar{I}$  dans  $\mathbb{P}_{\bar{k}}^n$ .

*Démonstration.* On sait déjà d'après la proposition 1.2.4 que  $\bar{I}$  admet une décomposition primaire de la forme :

$$\bar{I} = \bigcap_{i \in E} q_i$$

où  $q_i$  est un idéal homogène  $m_{P_i}^{\bar{k}}$ -primaire et  $\{P_i \mid i \in E\}$  est l'ensemble des points définis par  $\bar{I}$  dans  $\mathbb{P}_{\bar{k}}^n$ . D'après la proposition 1.2.3, on a :

$$I = \bigcap_{i \in E} q_i \cap S \tag{1.2.1}$$

où  $q_i \cap S$  est un idéal homogène  $m_{\bar{k}, P_i} \cap S$ -primaire. Ainsi, la décomposition primaire de  $I$  se déduit de (1.2.1) en éliminant les  $q_i \cap S$  qui contiennent  $\bigcap_{j \neq i} q_j \cap S$  et en intersectant les  $q_i \cap S$  qui sont  $m_{P_{i_0}}^{\bar{k}} \cap S$ -primaires pour le même point  $P_{i_0}$ . Mais si  $\bigcap_{j \neq i} q_j \cap S \subset q_i \cap S$  alors il existe  $j_0 \neq i$  tel que  $m_{P_{j_0}}^{\bar{k}} \cap S = m_{P_i}^{\bar{k}} \cap S$ , i.e  $P_{j_0}$  et  $P_i$  sont conjugués. De plus,  $q_i \cap S$  et  $q_j \cap S$  sont  $m_{P_{i_0}}^{\bar{k}} \cap S$ -primaires si et seulement si  $P_i, P_j$  et  $P_{i_0}$  sont conjugués. Ainsi,  $I$  a une décomposition primaire de la forme :

$$I = \bigcap_{i \in F} q_i \cap S$$

où  $F \subset E$  vérifie que pour tout  $i \in E$  il existe un unique  $j \in F$  tel que  $P_i$  et  $P_j$  sont conjugués. Ainsi,  $(I : u) = I$  si et seulement si  $u$  n'annule aucun point  $P_j$  pour tout  $j \in F$ , i.e  $u$  n'annule aucun point  $P_i$  pour tout  $i \in E$ .  $\square$

**Proposition 1.2.6.** Soient  $k \subset L$  une extension de corps,  $\bar{L}$  la clôture algébrique de  $L$  et  $I$  un idéal homogène de  $\mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}^n}^\mu(k)$  et  $I^L := I \otimes_k L$ . Alors, les points définis par  $I^{\bar{L}} := I \otimes_k \bar{L}$  dans  $\mathbb{P}_{\bar{L}}^n$  sont exactement les images par l'extension de corps :

$$\bar{k} \subset \bar{L}$$

des points définis par  $I^{\bar{k}} := I \otimes_k \bar{k}$  dans  $\mathbb{P}_{\bar{k}}^n$ .

*Démonstration.* Les points définis par  $I^{\bar{L}}$  dans  $\mathbb{P}_{\bar{L}}^n$  sont donnés par la décomposition primaire de  $I^{\bar{L}}$  dans  $S^{\bar{L}}$ . Il s'agit alors de montrer que ces points sont les mêmes que ceux obtenus en regardant la décomposition primaire de  $I^{\bar{k}}$  dans  $S^{\bar{k}}$ . En effet :

$$I^L \otimes_L \bar{L} = I^{\bar{k}} \otimes_{\bar{k}} \bar{L}.$$

Ainsi, comme :

$$I^{\bar{k}} = \bigcap_{i \in E} q_i$$

où  $q_i$  est un idéal homogène  $m_{P_i}^{\bar{k}}$ -primaire et  $\{P_i \mid i \in E\}$  l'ensemble des points définis par  $I^{\bar{k}}$  dans  $\mathbb{P}_{\bar{k}}^n$ ; on déduit que  $I^L \otimes_L \bar{L}$  peut s'écrire :

$$I^L \otimes_L \bar{L} = \bigcap_{i \in E} q_i \otimes \bar{L}$$

où  $q_i \otimes \bar{L}$  est un idéal homogène  $m_{P_i}^{\bar{k}} \otimes \bar{L}$ -primaire. Or,  $m_{P_i}^{\bar{k}} \otimes \bar{L} = m_{P_i}^{\bar{L}}$  ( $P_i$  étant considéré comme un point de  $\mathbb{P}_{\bar{L}}^n$  via l'extension de corps  $\bar{k} \subset \bar{L}$ ). Ainsi, l'ensemble des points définis par  $I^{\bar{L}}$  dans  $\mathbb{P}_{\bar{L}}^n$  est exactement l'image par l'extension de corps :

$$\bar{k} \subset \bar{L}$$

de  $\{P_i \in \mathbb{P}_{\bar{k}}^n \mid i \in E\}$ .  $\square$

## 1.2.2 Bases de Gröbner, idéaux initiaux et Borel-fixes

**Définition 1.2.7.** Un *ordre monomial*  $<$  sur  $S$  est un ordre total sur les monômes de  $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$  tel que pour tous monômes  $u, v, w$ , on ait  $1 < w$  et  $u < v \Rightarrow u.w < v.w$ .

**Définition 1.2.8.** Etant donné  $<$  un ordre monomial dans  $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$  et  $E \subset S_d$ , on appelle *initial* de  $E$  et l'on note  $\text{In}(E)$ , l'ensemble de monômes défini par :

$$\text{In}(E) := \{ \mathbf{x}^\alpha \mid \exists P = \mathbf{x}^\alpha + \sum_{\beta < \alpha} c_\beta \cdot \mathbf{x}^\beta \in E \}.$$

Si  $I \subset S$  est un idéal homogène, on appellera *idéal initial* de  $I$ , que l'on notera  $\text{In}(I)$ , l'idéal homogène défini par :

$$\text{In}(I) := \bigoplus_d \langle \text{In}(I_d) \rangle.$$

*Remarque 1.2.9.* Soit  $I \subset S$  est un idéal homogène. Il s'agit de montrer que l'espace vectoriel défini par :

$$\text{In}(I) := \bigoplus_d \langle \text{In}(I_d) \rangle.$$

est bien un idéal. Remarquons pour cela que :

$$S_1 \cdot \text{In}(I_d) \subset \text{In}(I_{d+1}).$$

En effet, soient  $\mathbf{x}^\alpha \in \text{In}(I_d)$  et  $x_i$  avec  $0 \leq i \leq n$ , alors il existe un polynôme de  $I_d$  de la forme suivante :

$$\mathbf{x}^\alpha + \sum_{\beta < \alpha} c_{\alpha, \beta} \mathbf{x}^\beta \in I_d.$$

En multipliant par  $x_i$  et en utilisant le fait que  $<$  est un ordre monomial (i.e  $\mathbf{x}^\beta < \mathbf{x}^\alpha \Rightarrow x_i \cdot \mathbf{x}^\beta < x_i \cdot \mathbf{x}^\alpha$ ), on déduit que  $x_i \cdot \mathbf{x}^\alpha \in \text{In}(I_{d+1})$ .

**Définition 1.2.10.** Etant donnés un idéal  $I \subset S$  et un ensemble de polynômes  $G \subset S$ , on dit que  $G$  est une base de Gröbner de l'idéal  $I$  si  $\text{In}(G)$  engendre  $\text{In}(I)$ .

**Proposition 1.2.11.** Etant donné un sous-espace vectoriel  $E \subset S_d$  et un ordre monomial  $<$  dans  $S$ , notons  $\mathcal{N}\text{In}(E)$  l'ensemble des monômes de  $S_d$  qui n'appartiennent pas à  $\text{In}(E)$ . Alors,  $\mathcal{N}\text{In}(E)$  est une base du quotient  $S_d/E$  en tant que  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

*Démonstration.* Prouvons pour commencer que  $\mathcal{N}\text{In}(E)$  est une famille génératrice de  $S_d/E$ . Remarquons pour cela que tout monôme de  $\text{In}(E)$  peut se réécrire sur  $\mathcal{N}\text{In}(E)$  modulo  $E$ . En effet, indiquons les monômes de  $\text{In}(E)$  par ordre croissant pour l'ordre monomial  $<$  :

$$\text{In}(E) = \{ \mathbf{x}^{\alpha_1}, \dots, \mathbf{x}^{\alpha_N} \}$$

avec :

$$\mathbf{x}^{\alpha_1} < \dots < \mathbf{x}^{\alpha_N}.$$

Montrons par récurrence sur  $1 \leq i \leq N$ , que pour tout  $k \leq i$ ,  $\mathbf{x}^{\alpha_k}$  se réécrit sur  $\mathcal{N}\text{In}(E)$  modulo  $E$ .

Pour  $i = 1$ , il existe par définition un polynôme de  $E$  de la forme suivante :

$$\mathbf{x}^{\alpha_1} + \sum_{\beta < \alpha_1} c_{\alpha_1, \beta} \mathbf{x}^\beta \in E.$$

Comme  $\mathbf{x}^{\alpha_1}$  est le plus petit monôme de  $\text{In}(E)$ , tous les monômes  $\mathbf{x}^\beta < \mathbf{x}^{\alpha_1}$  appartiennent à  $\mathcal{N}\text{In}(E)$ . La proposition est donc prouvée pour  $i = 1$ .

De  $i$  à  $i + 1$  : il existe par définition un polynôme de  $E$  de la forme suivante :

$$\mathbf{x}^{\alpha_{i+1}} + \sum_{k \leq i} c_{\alpha_{i+1}, \beta} \mathbf{x}^\beta \in E$$

Nous pouvons alors réécrire ce polynôme sous la forme suivante :

$$\mathbf{x}^{\alpha_{i+1}} + \sum_{\beta < \alpha_{i+1}} c_{\alpha_{i+1}, \alpha_k} \mathbf{x}^{\alpha_k} + \sum_{\beta < \alpha_i, \beta \notin \text{In}(E)} c_{\alpha_{i+1}, \beta} \mathbf{x}^\beta \in E.$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence, on peut facilement réécrire  $\mathbf{x}^{\alpha_{i+1}}$  sur  $\mathcal{N}\text{In}(E)$  modulo  $E$ .

Nous avons donc prouvé que tout monôme de  $\text{In}(E)$  peut se réécrire sur  $\mathcal{N}\text{In}(E)$  modulo  $E$ . Comme  $S_d = \langle \text{In}(E) \rangle \oplus \langle \mathcal{N}\text{In}(E) \rangle$ , cela prouve que  $\mathcal{N}\text{In}(E)$  est une famille génératrice du quotient  $S_d/E$ .

Montrons pour conclure que  $\mathcal{N}\text{In}(E)$  est une famille libre du quotient  $S_d/E$ . Raisonnons par l'absurde et supposons que cette famille soit liée dans  $S_d/E$ . Cela équivaut à dire qu'il existe un polynôme  $P$  de la forme suivante dans  $E$  :

$$P := \sum_{\beta \notin \text{In}(E)} c_\beta \mathbf{x}^\beta \in E$$

où les coefficients  $(c_\beta)$  ne sont pas tous nuls. Or, le monôme de plus haut degré qui apparaît dans  $P$  doit appartenir par définition à  $\text{In}(E)$ . C'est en contradiction avec la forme du polynôme  $P$ .  $\square$

**Corollaire 1.2.12.** *Etant donnés  $I \subset S$  un idéal et  $G$  une base de Gröbner de  $I$ , alors  $\mathcal{N}G$  constitue une base de  $S/I$ .*

**Définition 1.2.13.** Etant donné une  $\mathbb{K}$ -algèbre  $A$  et un idéal monomial  $I \subset A[x_0, \dots, x_n]$ , nous dirons que  $I$  est *Borel-fixe* si pour tout monôme de  $I$  de la forme  $x_i \cdot \mathbf{x}^\alpha \in I$ , on a :

$$x_j \cdot \mathbf{x}^\alpha \in I \quad \forall j \geq i.$$

Etant donné un sous  $A$ -module  $E \subset S_d^A$  engendré par des monômes, nous dirons aussi que  $E$  est *Borel-fixe* si pour tout monôme de  $E$  de la forme  $x_i \cdot \mathbf{x}^\alpha \in E$ , on a :

$$x_j \cdot \mathbf{x}^\alpha \in E \quad \forall j \geq i.$$

On remarque alors que  $(E) \subset S^A$  est Borel-fixe en tant qu'idéal monomial.

Enfin, une famille  $\mathcal{F}$  de monômes sera dite Borel-fixe si  $(\mathcal{F})$  est Borel-fixe en tant qu'idéal monomial.

**Proposition 1.2.14.** Soit  $E \subset S_d^A$  un sous  $A$ -module Borel-fixe. Notons  $\mathcal{N}E \subset S_d^A$  l'ensemble des monômes de  $S_d^A$  qui ne sont pas dans  $E$  et  $\mathcal{N}\underline{E} \subset R_d^A$  sa déhomogénéisation (i.e. en posant  $x_0 = 1$  dans  $\mathcal{N}E$ ). Alors,  $\mathcal{N}\underline{E}$  est connexe à 1.

*Démonstration.* Montrons tout d'abord que si  $E \neq S_d^A$ , alors  $1 \in \mathcal{N}\underline{E}$ . En effet,  $1 \notin \mathcal{N}E$  si et seulement si  $x_0^d \in E$ . Comme  $E$  est Borel-fixe,  $x_0^d \in E$  est équivalent à  $E = S_d^A$ . Ainsi,  $E \neq S_d^A$  implique  $1 \in \mathcal{N}\underline{E}$ .

Soit  $\underline{x}^\alpha \in \mathcal{N}\underline{E}$ , avec  $1 \leq k := |\alpha| \leq d$ . Il existe alors  $1 \leq i \leq n$  et  $\beta$  tels que  $\underline{x}^\alpha = x_i \cdot \underline{x}^\beta$ . Montrons que  $\underline{x}^\beta \in \mathcal{N}\underline{E}$ . Pour cela, il suffit de prouver que  $x_0^{d-k+1} \cdot \underline{x}^\beta \in S_d^A$  n'appartient pas à  $E$ . En effet, si  $x_0^{d-k+1} \cdot \underline{x}^\beta$  appartient à  $E$ , alors par propriété Borel-fixe, cela implique que  $x_i \cdot x_0^{d-k} \cdot \underline{x}^\beta$  appartient à  $E$ . Cela implique encore que  $\underline{x}^\alpha = x_i \cdot \underline{x}^\beta$  n'appartient pas à  $\mathcal{N}\underline{E}$ . Or c'est impossible.  $\square$

**Théorème 1.2.15.** Soit  $\langle$  un ordre monomial sur  $S$  tel que  $x_0 > \dots > x_n$  et  $I \subset S$  un idéal homogène. Alors, il existe un ouvert de Zariski  $U$  de  $PGL(n+1)$  et un idéal monomial  $J$  tel que pour tout  $g \in U$ ,  $\text{In}(g \circ I) = J$ .

Voir [31, Thm. 15.18, p.353].

**Définition 1.2.16.** Soit  $\langle$  un ordre monomial sur  $S$  tel que  $x_0 > \dots > x_n$  et  $I \subset S$  un idéal homogène. On appellera *idéal générique initial* (ou encore *initial générique*) de  $I$ , et l'on note  $\text{Gin}(I)$ , l'idéal monomial défini  $J$  dans le théorème 1.2.15 par :

$$\text{In}(g \circ I) = J, \forall g \in PGL(n+1) \text{ générique.}$$

De même, étant donné  $E$  un sous-espace vectoriel de  $S_d$ , on appellera *initial générique* de  $E$ , et l'on note  $\text{Gin}(E) \subset S_d$ , la famille de monômes définie par :

$$\langle \text{Gin}(E) \rangle := \text{Gin}((E))_d$$

où  $(E)$  désigne l'idéal engendré par  $E$ .

**Théorème 1.2.17** (Galligo, Bayer et Stillman). Soit  $\langle$  un ordre monomial sur  $S$  tel que  $x_0 > \dots > x_n$  et  $I \subset S$  un idéal homogène. Alors, l'idéal initial générique de  $I$  est Borel-fixe.

Voir [31, thm. 15.20, p.354].

*Remarque 1.2.18.* Ce théorème s'étend aussi au cas d'un sous-espace vectoriel  $E$  de  $S_d$ .

### 1.2.3 Bases de bord et relations de commutation

Dans cette section nous allons fournir une description des idéaux affines zéro-dimensionnels dont l'algèbre quotient admet une base monomiale connexe à 1 fixée. Nous utiliserons pour cela les relations de commutation caractérisant les bases de bord. Cette approche ainsi que le résultat principal : le théorème 1.2.26, sont tirés de [67]. Nous le redémontrons et en déduisons le théorème 1.2.30.

Commençons par donner quelques définitions utiles par la suite :

**Définition 1.2.19.** Une famille  $B \in R$  de monômes sera dite *connexe à 1* si :

- $1 \in B$ ,
- pour tout  $\underline{x}^\alpha \neq 1 \in B$ , il existe un entier  $1 \leq i \leq n$  et un monôme  $\underline{x}^\beta \in B$  tels que :

$$\underline{x}^\alpha = x_i * \underline{x}^\beta.$$

Une famille  $F \subset S_d$  de monômes sera dite *connexe à 1* si sa déhomogénéisation par rapport à  $x_0$  (i.e, en posant  $x_0 = 1$ ), noté  $\underline{F} \subset R$ , est connexe à 1 au sens précédent.

**Définition 1.2.20.** On désignera par  $\mathcal{B}_d^k$  l'ensemble des familles  $B$  de  $k$  monômes de  $S_d$ , telle que la déhomogénéisation  $\underline{B} \subset R$  de  $B$ , soit une famille de  $k$  monômes connexe à 1.

**Définition 1.2.21.** Etant donnée  $B$  une famille de monômes dans  $R$ , on pose :

$$B^+ := B \cup x_1 B \cup \dots \cup x_n B$$

et

$$\partial B := B^+ \setminus B.$$

**Définition 1.2.22.** Soit  $B \in R$  une famille de monômes. On appelle *famille de réécriture* associée à  $B$  une famille de polynômes de la forme  $(h_\alpha)_{\alpha \in \partial B}$  avec :

$$h_\alpha(\underline{x}) = \underline{x}^\alpha - \sum_{\beta \in B} z_{\alpha,\beta} \underline{x}^\beta$$

et  $z_{\alpha,\beta} \in \mathbb{K}$ . On l'appellera *base de bord* de  $B$  si de plus  $B$  est une base de l'algèbre  $\mathcal{A} = R/(h_\alpha(\underline{x}))$ .

Soit  $(A, m)$  un anneau local noethérien et une  $\mathbb{K}$ -algèbre, d'idéal maximal  $m$  et de corps résiduel  $k$ . Soit  $R^A := A[x_1, \dots, x_n]$  et  $\mu$  un entier positif. Nous définissons l'ensemble des idéaux  $I$  de  $R^A$  zéro-dimensionnels de multiplicité  $\mu$  par :

$$\mathbf{H}_0(A) := \{I \subset R^A \text{ idéal} \mid R^A/I \text{ soit un } A\text{-module libre de rang } \mu\}. \quad (1.2.2)$$

Nous allons pour cela décrire cet ensemble localement sous forme de variétés algébriques affines. On définit ainsi les sous-ensembles  $\mathbf{H}_0^B$  de  $\mathbf{H}_0(A)$  associés aux familles de monômes  $B$  de taille  $\mu$  par :

$$\mathbf{H}_0^B(A) := \{I \subset R^A \text{ idéal} \mid R^A/I \text{ soit un } A\text{-module libre de rang } \mu \text{ et de base } B\}. \quad (1.2.3)$$

**Proposition 1.2.23.** L'ensemble des  $(\mathbf{H}_0^B(A))$  pour  $B$  connexe à 1 constitue un recouvrement de  $\mathbf{H}_0(A)$  :

$$\mathbf{H}_0(A) = \bigcup_{B \text{ connexe à } 1} \mathbf{H}_0^B(A)$$

*Démonstration.* Il s'agit de remarquer que tout  $A$ -module libre de rang fini, de la forme  $R^A/I$  avec  $I \subset R^A$  idéal, admet une base de monômes connexe à 1.

D'après de Lemme de Nakayama, on peut se ramener au cas du corps :  $A = k$ . Soit  $I \in \mathbf{H}_0(k)$ . Construisons par récurrence sur  $i \leq \mu$  une famille  $\mathcal{F}_i$  de monômes libre dans

$R/I$  (en tant que  $k$ -espace vectoriel), connexe à 1 et qui engendre  $R_i/I_{\leq i} \subset R/I$ .

Pour  $i = 0$ , il suffit de prendre  $\mathcal{F}_0 = (1)$ . Pour  $i + 1$ , par hypothèse de récurrence, tout polynôme  $P$  de degré inférieur ou égal à  $i + 1$  est engendré par  $\mathcal{F}_i \cup \{x_j * \underline{x}^\alpha \mid \underline{x}^\alpha \in \mathcal{F}_i\}$  dans  $R/I$ . Il est donc possible d'extraire un sous-ensemble  $\mathcal{G}_{i+1}$  de  $\{x_j * \underline{x}^\alpha \mid \underline{x}^\alpha \in \mathcal{F}_i\}$  tel que  $\mathcal{F}_{i+1} := \mathcal{F}_i \cup \mathcal{G}_{i+1}$  soit une famille libre qui engendre  $R_{i+1}/I_{\leq i+1} \subset R/I$ . De plus, par construction et par hypothèse de récurrence,  $\mathcal{F}_{i+1}$  est connexe à 1 et permet ainsi de conclure. Enfin, l'algèbre  $R/I$  étant de dimension finie, il existe un entier  $i$  (ici  $i = \mu$  convient) à partir duquel :

$$R_i/I_{\leq i} = R_{i+1}/I_{\leq i+1} = \dots = R/I$$

et la famille  $\mathcal{F}_i$  constitue alors une base connexe à 1 de  $R/I$ .  $\square$

Fixons  $B \subset R^A$  une famille de  $\mu$  monômes connexe à 1. Nous allons montrer que  $(\mathbf{H}_0^B(A))$  est une variété affine. Soit  $N$  le nombre de coefficients  $(z_{\alpha,\beta})_{\alpha \in \partial B, \beta \in B}$  qui apparaissent dans toute famille de réécriture associée à  $B$  (voir définition 1.2.6).

**Définition 1.2.24.** Pour tout  $\mathbf{z} \in \mathbb{A}_A^N$  et tout entier  $1 \leq i \leq n$ , on définit l'application linéaire  $\mathcal{M}_i^B(\mathbf{z}) : \langle B \rangle \rightarrow \langle B \rangle$  par :

- $\mathcal{M}_i^B(\mathbf{z})(b) = x_i b$  pour  $b \in B$  si  $x_i b$  appartient à  $B$ ,
- $\mathcal{M}_i^B(\mathbf{z})(b) = \sum z_{x_i b, \beta} x^\beta$  pour  $b \in B$  si  $x_i b$  appartient à  $\partial B$ .

On note  $\mathbf{M}_i^B(\mathbf{z})$  la matrice de  $\mathcal{M}_i^B(\mathbf{z})$  dans la base  $B$ .

*Remarque 1.2.25.* Les matrices  $\mathbf{M}_i^B(\mathbf{z})$ , pour tout entier  $1 \leq i \leq n$ , dépendent linéairement de  $\mathbf{z} \in \mathbb{A}_A^N$ .

**Théorème 1.2.26.**  $\mathbf{H}_0^B(A)$  est une carte affine de  $\mathbf{H}_0(A)$ . En particulier,  $\mathbf{H}_0^B(A)$  est en bijection avec la variété de  $\mathbb{A}_A^N$  définie par les équations de commutations suivantes en  $\mathbf{z}$

$$\mathbf{M}_i^B(\mathbf{z}) \circ \mathbf{M}_j^B(\mathbf{z}) - \mathbf{M}_j^B(\mathbf{z}) \circ \mathbf{M}_i^B(\mathbf{z}) = 0 \quad (1.2.4)$$

pour tout entiers  $1 \leq i \leq j \leq n$ .

Cette description sous forme de relations de commutation caractérisant les bases de bord a été développée par B. Mourrain et P. Trebuchet dans le contexte des formes normales (voir [66] et [67]).

*Démonstration.* Notons  $V^B(A)$  la variété de  $\mathbb{A}_A^N$  définie par les relations (1.2.4). La bijection consiste alors en l'application  $\phi := \mathbf{H}_0^B(A) \rightarrow V^B(A)$  qui à tout idéal  $I$  de  $\mathbf{H}_0^B(A)$  associe le point  $\mathbf{z} = (z_{\alpha,\beta})_{\alpha \in \partial B, \beta \in B} \in \mathbb{A}_A^N$  défini de la manière suivante : pour tout  $\alpha \in \partial B$ , les  $(z_{\alpha,\beta})_{\beta \in B}$  s'obtiennent en écrivant l'unique décomposition de  $\underline{x}^\alpha$  sur  $B$  modulo  $I$  :

$$\underline{x}^\alpha = \sum_{\beta \in B} z_{\alpha,\beta} \underline{x}^\beta \pmod I. \quad (1.2.5)$$

Montrons tout d'abord que cette application est injective. Il s'agit en effet de montrer que pour tout idéal  $I \in \mathbf{H}_0^B(A)$ , la famille de réécriture suivante associée à  $B$  :

$$h_\alpha(\underline{x}) = \underline{x}^\alpha - \sum_{\beta \in B} z_{\alpha,\beta} \underline{x}^\beta,$$

où les  $(z_{\alpha,\beta})_{\beta \in B}$  sont donnés par (1.2.5), engendre l'idéal  $I$ .

Il est clair que  $(h_\alpha(\underline{\mathbf{x}})) \subset I$ . Inversement, montrons que  $I \subset (h_\alpha(\underline{\mathbf{x}}))$ . Définissons pour tout  $P = \sum_\gamma a_\gamma \cdot \underline{\mathbf{x}}^\gamma \in R^A$  l'application linéaire suivante :

$$P(\mathcal{M}) : \langle B \rangle_A \rightarrow \langle B \rangle_A$$

où  $P(\mathcal{M}) = \sum_\gamma a_\gamma \cdot (\mathcal{M}^B(\mathbf{z}))^\gamma$  avec :

$$(\mathcal{M}^B(\mathbf{z}))^\gamma := \mathcal{M}_1^B(\mathbf{z})^{\gamma_1} \circ \dots \circ \mathcal{M}_n^B(\mathbf{z})^{\gamma_n}.$$

Remarquons ici que l'application  $P(\mathcal{M})$  est bien définie car les opérateurs  $(\mathcal{M}_i^B(\mathbf{z}))_{1 \leq i \leq n}$  commutent deux à deux. En effet, ils correspondent aux opérateurs de multiplication par les variables  $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$  dans la  $A$ -algèbre commutative  $R^A/I$  (qui est aussi un  $A$ -module libre de base  $B$ ).

On remarque alors que  $P(\mathcal{M})(1)$  n'est autre que la décomposition de  $P$  sur  $B$ , dans  $R^A/I$  en tant que  $A$ -module libre de base  $B$ . On montre alors facilement par récurrence sur le degré de  $P$ , que

$$P - P(\mathcal{M})(1) \in (\{h_\alpha(\underline{\mathbf{x}})\}_{\alpha \in \partial B}).$$

Ainsi, si  $P \in I$ , alors  $P(\mathcal{M})(1) = 0$  et  $P$  appartient à  $(\{h_\alpha(\underline{\mathbf{x}})\}_{\alpha \in \partial B})$ .

On a donc montré que  $I$  est engendré par les relations de réécriture :

$$I = (\{h_\alpha(\underline{\mathbf{x}})\}_{\alpha \in \partial B}). \quad (1.2.6)$$

et que  $\phi$  est donc injective.

Afin de montrer la surjectivité nous allons construire une application inverse à gauche de  $\phi$ . Soit  $\mathbf{z} = (z_{\alpha,\beta})_{\alpha \in \partial B, \beta \in B} \in V^B(A)$ , on considère l'application suivante :

$$\sigma : R^A \longrightarrow \langle B \rangle_A$$

$$P \rightarrow P(\mathcal{M})(1).$$

Comme  $\mathbf{z}$  appartient à  $V^B(A)$ , les opérateurs  $(\mathcal{M}_i^B(\mathbf{z}))_{1 \leq i \leq n}$  commutent et  $\sigma$  est ainsi bien définie. Soit :

$$J(\mathbf{z}) = \text{Ker}(\sigma). \quad (1.2.7)$$

On remarque facilement que  $J(\mathbf{z})$  est un idéal. De plus,  $B$  étant connexe à 1, on a :

$$\forall b \in B, b(\mathcal{M})(1) = b.$$

L'application  $\sigma$  est donc surjective et  $R^A/J(\mathbf{z}) \simeq \langle B \rangle_A$ . Ainsi,  $J(\mathbf{z})$  appartient à  $\mathbf{H}_0^B(A)$ .

Montrons alors que :

$$J(-) : V^B(A) \longrightarrow \mathbf{H}_0^B(A)$$

$$\mathbf{z} \rightarrow J(\mathbf{z})$$

est inverse à gauche de  $\phi$  i.e  $\phi(J(\mathbf{z})) = \mathbf{z}$  pour tout  $\mathbf{z} \in V^B(A)$ . D'après ce qui précède,

$$\forall b \in B, b(\mathcal{M})(1) = b.$$



On montre alors facilement que pour tout  $\alpha \in \partial B$ , on a :

$$\underline{x}^\alpha = \sum_{\beta \in B} z_{\alpha,\beta} \underline{x}^\beta \text{ modulo } J(\mathbf{z}).$$

Ainsi, par définition,  $\phi(J(\mathbf{z})) = \mathbf{z}$  et  $\phi$  est une bijection.  $\square$

*Remarque 1.2.27.* Par construction, pour tout entier  $d \geq \max_{\beta \in B}(\deg(x^\beta))$  :

$$R_{\leq d}^A / J(\mathbf{z})_{\leq d} = R^A / J(\mathbf{z}).$$

On déduit en particulier que pour tout idéal  $I \in H_0^B(A)$  (avec  $B$  famille de  $\mu$  monômes connexe à 1) on a :

$$R_{\leq d}^A / I_{\leq d} = R^A / I.$$

**Corollaire 1.2.28.** Soit  $I \subset R^A$  un idéal appartenant à  $\mathbf{H}_0(A)$ . Alors, pour tout  $d \geq \mu - 1$  on a :

$$R_{\leq d}^A / I_{\leq d} = R^A / I.$$

*Démonstration.* Soit  $I \in \mathbf{H}_0(A)$ . Grâce à la proposition 1.2.23, il existe une famille  $B$  de  $\mu$  monômes connexe à 1 telle que :

$$I \in \mathbf{H}_0^B(A).$$

Il suffit alors d'appliquer la remarque 1.2.27 en notant que  $\max_{\beta \in B}(\deg(x^\beta)) < \mu$  pour toute famille  $B$  de  $\mu$  monômes connexe à 1.  $\square$

**Exemple 1.2.29.** Soit  $A = k$  un corps,  $\mu = 2$  et  $B = (1, x)$  une famille de 2 monômes connexe à 1 dans  $R^k = k[x_1, x_2]$ .

Dans ce cas  $\partial B = (x_2, x_1 x_2, x_1^2)$  et les règles de réécriture sont les suivantes :

- $h_{x_2} = x_2 - z_{x_2,1} \cdot 1 + z_{x_2,x_1} \cdot x$
- $h_{x_1 x_2} = x_1 x_2 - z_{x_1 x_2,1} \cdot 1 + z_{x_1 x_2,x_1} \cdot x_1$
- $h_{x_1^2} = x_1^2 - z_{x_1^2,1} \cdot 1 + z_{x_1^2,x_1} \cdot x_1$ .

Les matrices de multiplication sont :

$$M_1^B(\mathbf{z}) = \begin{pmatrix} 0 & z_{x_1^2,1} \\ 1 & z_{x_1^2,x_1} \end{pmatrix}, \quad M_2^B(\mathbf{z}) = \begin{pmatrix} z_{x_2,1} & z_{x_1 x_2,1} \\ z_{x_2,x_1} & z_{x_1 x_2,x_1} \end{pmatrix}.$$

On écrit alors  $M_1 \cdot M_2 - M_2 \cdot M_1 = 0$  pour obtenir les équations de  $\mathbf{H}_0^B(k)$  en temps que variété de l'espace affine  $\mathbb{A}_k^6$ . Les équations sont alors :

- $z_{x_1^2,1} z_{x_2,x_1} - z_{x_1 x_2,1} = 0,$
- $z_{x_1^2,1} z_{x_1 x_2,x_1} - z_{x_2,1} z_{x_1^2,1} - z_{x_1 x_2,1} z_{x_1^2,x_1} = 0,$
- $z_{x_2,1} + z_{x_1^2,x_1} z_{x_2,x_1} - z_{x_1 x_2,x_1} = 0,$
- $z_{x_1 x_2,1} + z_{x_1^2,x_1} z_{x_1 x_2,x_1} - z_{x_2,x_1} z_{x_1^2,1} - z_{x_1 x_2,x_1} z_{x_1^2,x_1} = 0.$

**Théorème 1.2.30.** Soit  $I \subset R^A$  un idéal de  $R^A$  et  $d \geq \mu$  un entier. Notons  $M := R^A / I$  et  $M_k := R_k^A / I_{\leq k}$  le sous  $A$ -module de  $M$  formé des polynômes de degré inférieur ou égal à  $k$ . Si  $M_i$  est libre de rang  $\mu$  pour  $i = d, d + 1$ , alors il en est de même pour tout  $i \geq d$  et  $I$  est engendré par  $I_{\leq d}$ .

*Démonstration.* Remarquons que la preuve de la proposition 1.2.23 s'adapte ici pour fournir une famille  $B$  de  $\mu$  monômes connexe à 1 qui soit une base de  $M_d$ . Comme  $d \geq \mu$ , tous les monômes de  $B$  sont de degré inférieur ou égal à  $d - 1$  :  $B \subset R_{d-1}$ . D'autre part, l'inclusion naturelle suivante :

$$M_d \subset M_{d+1}$$

implique que  $B$  est aussi une base de  $M_{d+1}$  en tant que  $A$ -module libre. Ainsi, il existe un unique point  $\mathbf{z} := (z_{\alpha,\beta})_{\alpha \in \partial B, \beta \in B} \in \mathbb{A}_A^N$  tel que pour tout  $\underline{\mathbf{x}}^\alpha \in \partial B$  :

$$\underline{\mathbf{x}}^\alpha = \sum_{\mathbf{x}^\beta \in B} z_{\alpha,\beta} \mathbf{x}^\beta \text{ modulo } I_{\leq d}.$$

Le point  $\mathbf{z}$  vérifie alors les équations de commutation (1.2.4). En effet, pour tout  $b \in B$ ,  $\mathcal{M}_i \circ \mathcal{M}_j(b)$  (resp.  $\mathcal{M}_j \circ \mathcal{M}_i(b)$ ) n'est autre que la décomposition de  $x_i x_j b$  (resp.  $x_j x_i b$ ) sur  $B$  dans  $M_{d+1}$  (en tant que  $A$  module libre de base  $B$ ). Or  $M$  étant une  $A$ -algèbre commutative,  $x_i x_j b = x_j x_i b \forall b \in B$  et  $\mathcal{M}_i \circ \mathcal{M}_j = \mathcal{M}_j \circ \mathcal{M}_i$ .

Considérons alors l'idéal  $J(\mathbf{z})$  défini par (1.2.7). Par définition  $J(\mathbf{z})$  appartient à  $\mathbf{H}_0^B(A)$ . De plus, d'après (1.2.6) :

$$J(\mathbf{z}) = (\{h_\alpha(\underline{\mathbf{x}})\}_{\alpha \in \partial B})$$

et par construction  $h_\alpha(\underline{\mathbf{x}}) \in I_{\leq d}$  pour tout  $\alpha \in \partial B$ . Ainsi  $J(\mathbf{z}) \subset I$ . Enfin, d'après le corollaire 1.2.28 on a :

$$R_{\leq d}/J(\mathbf{z})_{\leq d} = R_{\leq d+1}/J(\mathbf{z})_{\leq d+1} = \dots = R/J(\mathbf{z}).$$

Ainsi, grâce au diagramme commutatif suivant pour tout  $k \geq d$  :

$$\begin{array}{ccc} R_{\leq k}^A/J(\mathbf{z})_{\leq k} & \xrightarrow{=} & R_{\leq k+1}^A/J(\mathbf{z})_{\leq k+1} \\ \downarrow \phi_k & & \downarrow \phi_{k+1} \\ R_{\leq k}^A/I_{\leq k} & \xrightarrow{i_k} & R_{\leq k+1}^A/I_{\leq k+1} \end{array} \quad (1.2.8)$$

on déduit que  $i_k$  est surjective (et par définition injective) :

$$R_{\leq d}/I_{\leq d} = R_{\leq d+1}/I_{\leq d+1} = \dots = R/I.$$

Enfin, par considération de rang :

$$R_{\leq d}/I_{\leq d} = R_{\leq d}^A/J(\mathbf{z})_{\leq d}$$

et  $I = J(\mathbf{z})$ .  $I$  vérifie alors le théorème. □

*Remarque 1.2.31.* Le théorème 1.2.30 se généralise au cas d'idéaux homogènes et de polynômes de Hilbert non constant à travers les *théorèmes de Persistance et de régularité* de Gotzmann (voir théorèmes 2.2.11 et 2.2.9)

## 1.2.4 Foncteurs représentables

Nous allons décrire dans cette section, au moyen de sous foncteurs ouverts, des conditions qui garantissent le caractère représentable d'un foncteur contravariant. Cette section s'inspire largement de l'appendice E de [74].

On notera  $\mathcal{C}$  la catégorie des  $\mathbb{K}$ -schémas de type fini et  $\mathcal{C}^a$  celle des  $\mathbb{K}$ -schémas affines de type fini.

**Définition 1.2.32.** On appelle *foncteur contravariant* de la catégorie  $\mathcal{C}$  vers la catégorie des ensembles la donnée d'un application  $\mathcal{F}$  qui :

- à tout schéma  $X \in \mathcal{C}$  associe un ensemble  $\mathcal{F}(X)$ ,
- à tout morphisme de schémas  $g : X \rightarrow Y$  associe un morphisme (d'ensembles) de  $\mathcal{F}(g) : \mathcal{F}(Y) \rightarrow \mathcal{F}(X)$ ,

et qui de plus satisfait les conditions suivantes :

- $\mathcal{F}(Td_X) = Id_{\mathcal{F}(X)}$ ,
- pour tout morphismes de schémas  $g : X \rightarrow Y$  et  $h : Y \rightarrow Z$ ,  $\mathcal{F}(h \circ g) = \mathcal{F}(g) \circ \mathcal{F}(h)$ .

**Définition 1.2.33.** Etant donné un foncteur contravariant  $\mathcal{F}$  de la catégorie  $\mathcal{C}$  vers celle des ensembles,  $\mathcal{F}$  est dit *représentable* s'il existe un schéma  $Z \in \mathcal{C}$  tel que  $\mathcal{F}$  soit isomorphe au foncteur contravariant  $\text{Hom}(-, Z)$  où :

$$\text{Hom}(-, Z) : X \in \mathcal{C} \longrightarrow \text{Hom}(X, Z) := \{g : X \rightarrow Y \text{ morphisme de schémas dans } \mathcal{C}\}.$$

**Définition 1.2.34.** A tout foncteur contravariant  $\mathcal{F}$  de  $\mathcal{C}$  dans la catégorie des ensembles et à tout schéma  $Z \in \mathcal{C}$ , on associe un *préfaisceau* d'ensembles :

$$U \longrightarrow \mathcal{F}(U)$$

pour tout sous-schéma ouvert  $U \subset Z$  de  $Z$ .

On dit alors que  $\mathcal{F}$  est un *faisceau* si pour tout schéma  $Z \in \mathcal{C}$ , le préfaisceau associé à  $\mathcal{F}$  sur  $Z$  est un faisceau, i.e pour tout recouvrement ouvert  $(U_i)_{i \in I}$  de  $Z$  :

$$0 \rightarrow \mathcal{F}(Z) \rightarrow \prod_i \mathcal{F}(U_i) \longrightarrow \prod_{i,j} \mathcal{F}(U_i \cap U_j) \rightarrow 0.$$

**Définition 1.2.35.** Etant donnés  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  deux foncteurs contravariants de  $\mathcal{C}$  dans la catégorie des ensembles.  $\mathcal{G}$  est dit *sous-foncteur ouvert* (resp. fermé) de  $\mathcal{F}$  si pour tout schéma  $S \in \mathcal{C}$  et pour toute transformation naturelle :

$$\text{Hom}(-, S) \longrightarrow \mathcal{F},$$

le produit fibré  $\text{Hom}(-, S) \times_{\mathcal{F}} \mathcal{G}$  (qui est un sous-foncteur de  $\text{Hom}(-, S)$ ) est représenté par un sous-schéma ouvert (resp. fermé) de  $S$ .

Une famille de sous-foncteurs ouverts  $(\mathcal{G}_i)$  de  $\mathcal{F}$  constitue un *recouvrement ouvert* si pour tout schéma  $S \in \mathcal{C}$  et pour toute transformation naturelle  $\text{Hom}(-, S) \longrightarrow \mathcal{F}$ , la famille  $(S_i)$  de sous-schémas ouverts représentant les foncteurs  $(\text{Hom}(-, S) \times_{\mathcal{F}} \mathcal{G}_i)$  constitue un recouvrement ouvert de  $S$ .

**Proposition 1.2.36.** Soit  $\mathcal{F}$  un foncteur contravariant de  $\mathcal{C}$  dans la catégorie des ensembles. Si :

- i)  $\mathcal{F}$  est un faisceau,
  - ii)  $\mathcal{F}$  admet un recouvrement formé de sous-foncteurs ouverts représentables,
- alors  $\mathcal{F}$  est représentable.

Voir [74][Prop.E.10, p.318].

**Proposition 1.2.37.** Soit  $\mathcal{F}$  un foncteur contravariant et  $\mathcal{G}$  un sous-foncteur de  $\mathcal{F}$ . Si  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  sont des faisceaux et si pour tout schéma affine  $X$  dans  $\mathcal{C}$  et toute transformation naturelle :

$$\mathrm{Hom}(-, X) \longrightarrow \mathcal{F}$$

le foncteur  $\mathcal{H} := \mathrm{Hom}(-, X) \times_{\mathcal{F}} \mathcal{G}$ , restreint à la catégorie  $\mathcal{C}^a$  des schémas affines de type fini sur  $\mathbb{K}$ , est représenté par un sous-schéma ouvert de  $X$ , alors  $\mathcal{G}$  est un sous-foncteur ouvert de  $\mathcal{F}$  (dans la catégorie  $\mathcal{C}$ ).

*Démonstration.* Soient  $X$  et  $Y$  deux objets de  $\mathcal{C}$  et  $(U_i)_{i \in I}$  un recouvrement affine de  $X$ . Considérons une transformation naturelle

$$\mathrm{Hom}(-, X) \longrightarrow \mathcal{F}$$

donnée par un élément  $\lambda \in \mathcal{F}(X)$  (voir appendice E de [74][Lem.E.1, p.313]). Soit  $\mathcal{H}$  le foncteur contravariant donné par

$$\mathcal{H}(Y) := \{\phi \in \mathrm{Hom}(Y, X) \mid \mathcal{F}(\phi)(\lambda) \in \mathcal{G}(Y) \subset \mathcal{F}(Y)\}.$$

Soit  $(V_{i,j})_j$  un recouvrement affine de  $\phi^{-1}(U_i) \subset Y$  pour tout  $i$ . Soit  $\phi_{i,j}$  la restriction de  $\phi$  à  $V_{i,j}$  :

$$\phi_{i,j} : V_{i,j} \longrightarrow U_i.$$

Comme  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  sont des faisceaux,  $\mathcal{F}(\phi)(\lambda) \in \mathcal{F}(Y)$  si et seulement si  $\mathcal{F}(\phi_{i,j})(\lambda_i) \in \mathcal{F}(V_{i,j})$  pour tout  $i, j$  (où  $\lambda_i \in \mathcal{F}(U_i)$  est la restriction de  $\lambda \in \mathcal{F}(X)$  à  $\mathcal{F}(U_i)$ ). D'après les hypothèses sur  $\mathcal{G}$ , il existe pour tout  $i$  un sous-schéma ouvert  $\Omega_i$  du schéma affine  $U_i$  tel que :

$$\mathcal{F}(\phi)(\lambda) \in \mathcal{G}(Y) \Leftrightarrow \mathcal{F}(\phi_{i,j})(\lambda_i) \in \mathcal{G}(V_{i,j}) \forall i, j \Leftrightarrow \phi_{i,j} \text{ se relève à travers } \Omega_i \forall i, j : (1.2.9)$$

$$\begin{array}{ccc} V_{i,j} & \xrightarrow{\phi_{i,j}} & U_i \\ & \searrow & \nearrow \\ & \Omega_i & \end{array}$$

Ainsi, si  $\phi \in \mathrm{Hom}(Y, X)$  appartient à  $\mathcal{H}(Y)$ ,  $\phi$  se relève à travers  $\Omega := \cup_i \Omega_i$  :

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\phi} & X \\ & \searrow & \nearrow \\ & \Omega = \cup \Omega_i & \end{array}$$

Inversement, si  $\phi$  se relève à travers  $\Omega := \cup_i \Omega_i$ , considérons  $(W_{i,j})_j$  un recouvrement affine de  $\phi^{-1}(\Omega_i) \subset Y$  pour tout  $i$ . Notons alors  $\phi_{i,j}$  la restriction de  $\phi$  à  $W_{i,j}$  :

$$\begin{array}{ccc} W_{i,j} & \xrightarrow{\phi_{i,j}} & U_i \\ & \searrow & \nearrow \\ & \Omega_i & \end{array}$$

Ainsi, ce diagramme commutatif et l'équivalence (1.2.9) impliquent que :

$$\mathcal{F}(\phi_{i,j})(\lambda_i) \in \mathcal{F}(W_{i,j})$$

appartient à  $\mathcal{G}(W_{i,j})$  pour tout  $i, j$ . Comme  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  sont des faisceaux, cela implique que  $\mathcal{F}(\phi)(\lambda) \in \mathcal{F}(Y)$  appartient à  $\mathcal{G}(Y)$  et donc que  $\phi$  appartient à  $\mathcal{H}(Y)$ .

Le foncteur  $\mathcal{H}$  est donc isomorphe au foncteur  $\text{Hom}(-, \Omega)$  i.e  $\mathcal{H}$  est représenté par le sous-schéma ouvert  $\Omega$  de  $X$ .  $\mathcal{G}$  est donc un sous-foncteur ouvert de  $\mathcal{F}$  (dans  $\mathcal{C}$ ).  $\square$

**Proposition 1.2.38.** *Soit  $\mathcal{F}$  un foncteur contravariant de la catégorie  $\mathcal{C}$  vers celle des ensembles. Supposons que  $\mathcal{F}$  soit un faisceau. Alors,  $\mathcal{F}$  est représenté par un schéma  $X \in \mathcal{C}$  si et seulement si  $\mathcal{F}$  et  $\text{Hom}(-, X)$  restreints à  $\mathcal{C}^a$  sont isomorphes (dans  $\mathcal{C}^a$ ).*

*Démonstration.* C'est une conséquence directe du fait que  $\mathcal{F}$  est un faisceau et que tout schéma admet un recouvrement par des ouverts affines.  $\square$

## 1.2.5 La Grassmannienne

Le but de cette section est de définir le foncteur Grassmannien et de montrer son caractère représentable. Le schéma projectif qui le représente sera appelé Grassmannienne et sera utilisé afin de donner une description globale du schéma de Hilbert. Ces résultats sont bien connus et peuvent être par exemple trouvés dans la littérature à [74][Section.4.3.4]."

**Définition 1.2.39.** Etant donné un  $A$ -module  $E$ , on notera  $\mathbf{S}^A(E)$  la  $A$ -algèbre symétrique associée à  $E$  définie comme étant le quotient de l'algèbre graduée :

$$\mathbf{T}_A(E) := \bigoplus_i E^{\otimes i}$$

par l'idéal engendré par les relations :

$$x \otimes y - y \otimes x$$

où  $x$  et  $y$  parcourent  $E$  (pour plus de détails voir par exemple [40, 1.7.1, p.14]).

En particulier, lorsque  $E$  est un  $\mathbb{K}$  espace vectoriel de dimension finie  $N$ ,  $\mathbf{S}^{\mathbb{K}}(E)$  (que l'on notera simplement  $\mathbf{S}(E)$ ) sera une  $\mathbb{K}$ -algèbre graduée isomorphe à  $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_N]$ . On désignera alors aussi cette algèbre par  $\mathbb{K}[E]$ . On notera  $\mathbf{S}_d(E)$  la composante homogène de degré  $d$  de cette algèbre graduée.

**Définition 1.2.40.** Soit  $V$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $N$  et  $n \leq N$  un entier. Soit  $X$  un schéma de type fini sur  $\mathbb{K}$ . Le  $n$ -foncteur Grassmannien de  $V$  est le foncteur contravariant de la catégorie  $\mathcal{C}$  vers celle des ensembles qui à  $X$  associe l'ensemble  $\mathbf{Gr}_V^n(X)$  des faisceaux localement libres  $\Delta$  de rang  $n$  tels que  $\Delta$  est un quotient de  $V \otimes_{\mathbb{K}} \mathcal{O}_X$  sur  $X$  :

$$V \otimes_{\mathbb{K}} \mathcal{O}_X \longrightarrow \Delta \longrightarrow 0,$$

où  $\mathcal{O}_X$  désigne le faisceau structurel sur  $X$  (voir [46, def. p.74, chap. II]).

**Théorème 1.2.41.** Pour tout  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $V$  de dimension finie  $N$  et tout entier  $n \leq N$ , le  $n$ -foncteur Grassmannien de  $V$  est représentable. Il est représenté par un schéma projectif noté  $\mathbf{Gr}^n(V)$  :

$$\mathbf{Gr}^n(V) \sim \mathbf{Proj}(\mathbb{K}[\wedge^n V]/(\#)).$$

où  $(\#)$  désigne l'idéal engendré par les relations de Plücker.

*Démonstration.* Par définition, le  $n$ -foncteur Grassmannien de  $V$  est donné par :

$$X \longrightarrow \{V \otimes_{\mathbb{K}} \mathcal{O}_X \rightarrow \Delta \rightarrow 0 \mid \Delta \text{ est un faisceau localement libre de rang } n \text{ sur } \mathcal{O}_X\}.$$

Soit :

$$g := V \otimes_{\mathbb{K}} \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow 0$$

un élément de  $\mathbf{Gr}_V^n(X)$ . Notons  $\wedge$  le produit extérieur. Alors on a :

$$\wedge^n g := \wedge^n V \otimes_{\mathbb{K}} \mathcal{O}_X \rightarrow \wedge^n \Delta = \mathcal{L} \rightarrow 0$$

où  $\mathcal{L}$  est un faisceau inversible (voir définition [39][5.4.1, p.48]). Soit  $E = (e_0, \dots, e_N)$  une base de  $V$ . Soit  $s_i \in \Delta(X)$  l'image de  $e_i$  par  $g$  et  $\Delta_{i_1, \dots, i_n} := s_{i_1} \wedge \dots \wedge s_{i_n} \in \mathcal{L}(X)$ .  $(\Delta_{i_1, \dots, i_n})$  satisfait alors les relations suivantes :

$$\sum_{\lambda=1, \dots, n+1} (-1)^\lambda \Delta_{i_1, \dots, i_{n-1}, j_\lambda} \otimes \Delta_{j_1, \dots, \hat{j}_\lambda, \dots, j_{n+1}} = 0. \quad (1.2.10)$$

pour toutes familles d'indices  $(i_1, \dots, i_{n-1})$  et  $(j_1, \dots, j_{n+1})$ . Ainsi, d'après [40][Prop.4.2.3, p.73], on peut associer à  $\wedge^n g$  le morphisme suivant :

$$\Phi(\Delta, g) := X \longrightarrow \mathbf{Proj}(\mathbb{K}[\wedge^n V]/(\#_E)).$$

où  $\#_E$  désigne les relations de Plücker de  $\mathbf{Gr}^n(V)$  associées à  $E$  :

$$\#_E := \left\{ \sum_{\lambda=1, \dots, n+1} (-1)^\lambda (e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_{n-1}} \wedge e_{j_\lambda}) \cdot (e_{j_1} \wedge \dots \wedge \widehat{e_{j_\lambda}} \wedge \dots \wedge e_{j_{n+1}}) \right\}_{\substack{(i_1, \dots, i_{n-1}) \\ (j_1, \dots, j_{n+1})}} \subset \mathbf{S}^2(\wedge^\mu V) \quad (1.2.11)$$

où  $\mathbb{K}[\wedge^\mu V] = \bigoplus_i \mathbf{S}^i(\wedge^\mu V) := \mathbf{S}(\wedge^\mu V)$ .

On a ainsi construit une transformation naturelle du foncteur Grassmannien  $\mathbf{Gr}_V^n$  vers le foncteur  $\mathbf{Hom}(-, \mathbf{Proj}(\mathbb{K}[\wedge^n V]/(\#_E)))$  :

$$\Phi := \mathbf{Gr}_V^n \longrightarrow \mathbf{Hom}(-, \mathbf{Proj}(\mathbb{K}[\wedge^n V]/(\#_E)))$$

**Lemme 1.2.42.** *Le morphisme  $\Phi$  est un isomorphisme de foncteurs.*

*Démonstration.* Prouvons que :

$$\Phi(X) := \mathbf{Gr}_V^n(X) \rightarrow \mathbf{Hom}(X, \mathbf{Proj}(\mathbb{K}[\wedge^n V]/(\#_E)))$$

est une bijection naturelle.

Soient  $(\Delta, g)$  et  $(\Delta', g')$  deux éléments de  $\mathbf{Gr}_V^n(X)$  i.e  $\Delta$  et  $\Delta'$  sont des faisceaux localement libres de rang  $\mu$ ,  $g$  et  $g'$  sont des morphismes surjectifs :

$$g : V \otimes \mathcal{O}_X \rightarrow \Delta \rightarrow 0$$

et

$$g' : V \otimes \mathcal{O}_X \rightarrow \Delta' \rightarrow 0.$$

Soient  $(s_i)$  et  $(\Delta_{i_1, \dots, i_n})$  (resp.  $(s'_i)$  et  $(\Delta'_{i_1, \dots, i_n})$ ) les sections globales de  $\Delta$  et  $\mathcal{L} = \wedge^n \Delta$  (resp.  $\Delta'$  et  $\mathcal{L}' = \wedge^n \Delta'$ ) introduites précédemment. Supposons que  $\Phi(X)(\Delta, g)$  et  $\Phi(X)(\Delta', g')$  sont égaux dans  $\mathbf{Hom}(X, \mathbf{Proj}(\mathbb{K}[\wedge^n V]/(\#_E)))$ . Alors, il existe un isomorphisme  $\phi$  entre  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{L}'$  vérifiant le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \wedge^n V \otimes \mathcal{O}_X & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{L} \\ & \searrow & \downarrow \phi \\ & & \mathcal{L}' \end{array}$$

et tel que  $\phi(\Delta_{i_1, \dots, i_n}) = \Delta'_{i_1, \dots, i_n}$  (où  $(\Delta_{i_1, \dots, i_n})$  et  $(\Delta'_{i_1, \dots, i_n})$  satisfont les relations (1.2.10)). Considérons les ouverts  $X_{\Delta_{i_1, \dots, i_n}}$  où  $\Delta_{i_1, \dots, i_n} \neq 0$  (qui sont égaux aux ouverts  $X_{\Delta'_{i_1, \dots, i_n}}$  car  $\phi$  est un isomorphisme qui envoie  $\Delta_{i_1, \dots, i_n}$  sur  $\Delta'_{i_1, \dots, i_n}$ ). Sur  $X_{\Delta_{i_1, \dots, i_n}}$  (resp.  $X_{\Delta'_{i_1, \dots, i_n}}$ ),  $(s_{i_1}, \dots, s_{i_n})$  (resp.  $(s'_{i_1}, \dots, s'_{i_n})$ ) est une base de  $\mathcal{E}$  (resp.  $\mathcal{E}'$ ) et on a :

$$s_j = \sum_{k=1, \dots, n} a_{j,k} s_{i_k} \quad (\text{resp. } s'_j = \sum_{k=1, \dots, n} a'_{j,k} s'_{i_k})$$

où

$$a_{jk} = (-1)^{n-k} \frac{\Delta_{i_1, \dots, \hat{i}_k, \dots, i_n, j}}{\Delta_{i_1, \dots, i_n}} = a'_{jk}. \quad (1.2.12)$$

Ainsi, sur les ouverts  $X_{\Delta_{i_1, \dots, i_n}}$ , on a des isomorphismes naturels  $f_{i_1, \dots, i_n}$  de  $\Delta|_{X_{\Delta_{i_1, \dots, i_n}}}$  vers  $\Delta'|_{X_{\Delta_{i_1, \dots, i_n}}}$  qui envoient  $s_{i_k}|_{X_{\Delta_{i_1, \dots, i_n}}}$  vers  $s'_{i_k}|_{X_{\Delta_{i_1, \dots, i_n}}}$  pour tout  $k \leq n$ . Alors, d'après les relations (1.2.12), les morphismes  $(f_{i_1, \dots, i_n})$  se recollent pour former un isomorphisme  $f$  de  $\Delta$  vers  $\mathcal{E}'$  défini sur  $X$  tel que le diagramme commute :

$$\begin{array}{ccc} V \otimes \mathcal{O}_X & \xrightarrow{g} & \Delta \\ & \searrow g' & \downarrow f \\ & & \Delta' \end{array}$$

Ainsi,

$$g = V \otimes \mathcal{O}_X \rightarrow \Delta \rightarrow 0$$

et

$$g' = V \otimes \mathcal{O}_X \rightarrow \Delta' \rightarrow 0$$

sont égaux en tant qu'éléments de  $\mathbf{Hom}(X, \mathbf{Proj}(\mathbb{K}[\wedge^n V]/(\#_E)))$ .  $\Phi(X)$  est donc injective.

Prouvons maintenant que  $\Phi(X)$  est surjective. Soit :

$$\phi := \wedge^n V \otimes \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{L} \rightarrow 0$$

un élément de  $\mathbf{Hom}(X, \mathbf{Proj}(\mathbb{K}[\wedge^n V]/(\#_E)))$  où  $\mathcal{L}$  est un faisceau inversible sur  $X$  tel que  $(\Delta_{i_1, \dots, i_n})_{i_1, \dots, i_n} := (\phi(e_{i_1, \dots, i_n}))_{i_1, \dots, i_n} \in \mathbf{H}^0(X, \mathcal{L})$  satisfait les relations (1.2.10). Sur chaque ouvert  $X_{\Delta_{i_1, \dots, i_n}}$  on définit un faisceau libre de rang  $n$  noté  $\Delta^{i_1, \dots, i_n}$  de base  $(e_{i_1}, \dots, e_{i_n})$ . En utilisant les relations (1.2.12) et (1.2.10), on peut recoller les faisceaux  $(\Delta^{i_1, \dots, i_n})$  pour former un faisceau  $\Delta$  localement libre de rang  $n$  sur  $X$  ainsi qu'un morphisme surjectif :

$$g := V \otimes \mathcal{O}_X \rightarrow \Delta \rightarrow 0$$

qui vérifie :

$$\Phi(X)(\Delta, g) = (\mathcal{L}, \phi).$$

$\Phi(X)$  est donc surjective et  $\Phi$  est un isomorphisme de foncteurs. □

Enfin, grâce au lemme 1.2.42, le  $n$ -foncteur Grassmannien de  $V$  est représenté par :

$$\mathrm{Gr}^n(V) \sim \mathbf{Proj}(\mathbb{K}[\wedge^n V]/(\#_E)).$$

□





# Chapitre 2

## Le schéma de Hilbert ponctuel

### 2.1 Introduction

Un problème apparait naturellement lors de l'étude des systèmes polynomiaux : comment caractériser les idéaux définissant un nombre fini  $\mu$  de points, comptés avec multiplicité. Ce sont les idéaux *zéro-dimensionnels*. Cette question est motivée par des problèmes pratiques liés à l'étude des solutions de systèmes polynomiaux donnés par des coefficients approchés. Comprendre ainsi les déformations d'algèbres zéro-dimensionnelles qui conservent le nombre de solutions constitue un véritable challenge dans la recherche de solveurs polynomiaux numériques stables et efficaces. D'un point de vue théorique, cela revient à étudier le *Schéma de Hilbert* de  $\mu$  points noté  $Hilb^\mu(\mathbb{P}^n)$ , qui constitue un domaine de recherche actif en géométrie algébrique.

La notion de schéma de Hilbert a été introduite par [41] : il est défini comme étant un représentant d'un foncteur contravariant, appelé *foncteur de Hilbert* et noté  $\mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}^n}^\mu$ , de la catégorie des schémas vers celles des ensembles. Celui-ci associe à tout schéma  $S$  l'ensemble des familles plates  $\chi \subset \mathbb{P}^r \times S$  de sous-schémas fermés de  $\mathbb{P}^r$  paramétrés par  $S$  et dont les fibres ont un polynôme de Hilbert constant égal à  $\mu$ .

De nombreux travaux ont été menés afin d'analyser les propriétés géométriques du schéma de Hilbert (voir eg. [51]). Citons parmi elles le fait que  $Hilb^\mu(\mathbb{P}^n)$  est réductible pour  $n > 2$  [50], bien que ses composantes demeurent inconnues pour  $\mu \geq 8$  [16], ou encore sa connexité, qui a été prouvée en premier par Hartshorne (1965), puis étudiée dans [70] avec une approche plus constructive.

Bien que l'on sache que le foncteur de Hilbert soit représentable [41] ou plus récemment [74], ses représentations effectives font toujours l'objet de recherches actives. En utilisant par exemple le théorème de persistance de [37], on obtient une description explicite et globale du schéma de Hilbert en tant que sous-schéma d'un produit de deux grassmanniennes [49]. Les équations de  $Hilb^\mu(\mathbb{P}^n)$  en tant que sous-schéma fermé d'une seule grassmannienne sont aussi fournies dans [49]. Ces équations s'obtiennent par l'intermédiaire de conditions de rang sur des espaces vectoriels de polynômes en degré successifs. Elles se présentent sous la forme de polynômes homogènes de degré égal au nombre de monômes dans  $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]_\mu$  moins  $\mu$ .

Dans [5], un ensemble différent d'équations de degré  $n$  en les coordonnées de Plücker est proposé. Il y est conjecturé que ces équations définissent le schéma de Hilbert. Ceci est

prouvé dans [43]. Néanmoins, ces équations ne sont pas optimales en terme de degré.

En effet, comme dans l'exemple [43][p. 756] en dimension 3, les équations sont de degré 3 alors que le schéma de Hilbert correspondant peut être défini par des quadriques.

Le problème de représentation du foncteur  $\mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}^n}^\mu$  est aussi étudié à travers la construction de sous-foncteurs et de recouvrements ouverts du schéma de Hilbert. Ainsi, des recouvrements correspondant à des sous-ensembles d'idéaux d'initial donné pour un certain ordre monomial, sont introduits dans plusieurs travaux comme [34] et plus récemment [63]. Ces sous-ensembles s'identifient à des ouverts affines du schéma de Hilbert et correspondent à des idéaux dont les algèbres quotients admettent une base monomiale fixée. Les équations explicites de ces variétés affines sont développées dans [42] pour le cas du plan, [47], [48], en utilisant les syzygies ou encore dans [73]. Citons enfin [81], où les auteurs fournissent une preuve élémentaire de la représentation du foncteur de Hilbert. Les méthodes utilisées reposent essentiellement sur de simples constructions algébriques et évitent ainsi l'emploi de plongements dans des espaces de dimension élevée et le recours à la régularité de Castelnuovo-Mumford.

Dans ce chapitre, nous nous intéresserons au schéma de Hilbert de  $\mu$  points dans l'espace projectif  $\mathbb{P}_k^n$  et à sa représentation effective. Les résultats qui y sont présentés correspondent à l'article [3] en cours de soumission et sont le fruit d'une collaboration avec M.E. Alonso et B. Mourrain. Ma contribution a été tout d'abord de fournir, avec mes co-auteurs, deux ensembles d'équations décrivant parfaitement l'ensemble des idéaux homogènes saturés de polynôme de Hilbert constant dans le cas d'un corps  $\mathbb{K}$  algébriquement clos de caractéristiques zéro. Mon travail a ensuite consisté à adapter ce résultat au cas plus général d'une  $\mathbb{K}$ -algèbre locale noethérienne  $A$  et de montrer, via le formalisme des schémas et des foncteurs, que ces équations étaient bel et bien celles du schéma de Hilbert de  $\mu$  points.

Nous fournirons donc dans ce chapitre de nouvelles équations pour  $\mathbf{Hilb}^\mu(\mathbb{P}^n)$ , qui sont plus simples que celles de Bayer et de Iarrobino-Kanev. Ce sont des relations quadratiques en les coordonnées de Plücker. Elles définissent le schéma de Hilbert comme sous-variété fermée d'une seule Grassmannienne. Nous commencerons par donner une nouvelle preuve concernant la représentation du foncteur de Hilbert via un recouvrement de sous-foncteurs ouverts. En reformulant un résultat de [66], on rappellera comment ces ouverts correspondant à des algèbres quotients de base monomiale connexe à 1 peuvent être définis simplement par des relations de commutation caractérisant les bases de bord (voir aussi [72], [54]). Nous montrerons alors comment ces relations de commutation peuvent être exploitées davantage afin de fournir un ensemble explicite d'équations définissant  $\mathbf{Hilb}^\mu(\mathbb{P}^n)$  comme variété projective et plus précisément comme sous-variété fermée de la Grassmannienne. Ces équations sont de degré 2 en les coordonnées de Plücker et apportent une réelle nouveauté par rapport à celles de [5] et de [49], dont le degré est bien plus élevé.

Dans la section 2.2, nous commencerons par rappeler la définition et les propriétés fondamentales du foncteur de Hilbert de  $\mu$  points. Nous en fournirons ensuite, dans la section 2.3, une description locale en terme de recouvrement de sous-foncteurs ouverts, dont on montrera le caractère représentable grâce aux relations de commutation. Enfin, section 2.4, nous donnerons de nouvelles équations globales et explicites pour le schéma de Hilbert de  $\mu$  points. Celles-ci consistent en des polynômes homogènes de degré 2 en les coordonnées de Plücker et s'interprètent en terme de relations de commutation et de réécriture. Nous concluons section 2.5 en appliquant ces équations pour fournir une description du plan tangent du schéma

de Hilbert.

Nous ferons, tout au long de ce chapitre, régulièrement usage des préliminaires introduits dans la section 1.2. Les notations seront celles décrites dans la section 1.1.

## 2.2 Le foncteur de Hilbert

Dans cette section,  $\mu$  désignera un entier positif,  $P$  un polynôme de Hilbert et  $\mathbb{K} \subset K$  un corps quelconque. On notera  $(A, m)$  une  $\mathbb{K}$ -algèbre et un anneau local noethérien d'idéal maximal  $m$  et de corps résiduel  $k$ .

**Définition 2.2.1.** Etant donné  $B$  une  $\mathbb{K}$ -algèbre et  $I$  idéal homogène de  $S^B$ ,  $I$  est dit saturé si pour tous entiers  $k$  et  $d$  tels que  $k \leq d$ , on a :

$$I_d : S_k = I_{d-k}$$

**Définition 2.2.2.** Soient  $X, Y$  deux schémas et  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme de schémas. On dit que  $X$  est  $f$ -plat sur  $Y$  (ou encore que  $X$  est  $Y$ -plat) si  $\mathcal{O}_X$  est  $f$ -plat sur  $Y$  i.e pour tout  $x \in X$ ,  $\mathcal{O}_{X,x}$  est un  $\mathcal{O}_{Y,f(x)}$  module plat (voir [46][Chap.III, p.254]).

**Définition 2.2.3.** Le *foncteur de Hilbert* de  $\mathbb{P}^n$  associé à un polynôme de Hilbert  $P$ , noté  $\mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}^n}^P$ , est le foncteur contravariant de la catégorie  $\mathcal{C}$  vers celle des ensembles qui à tout schéma  $X$  de  $\mathcal{C}$  associe l'ensemble des sous-familles plates  $Z \subset X \times_{\mathbb{K}} \mathbb{P}^n$  de sous-schémas fermés de  $\mathbb{P}^n$  paramétrés par  $X$  et dont les fibres ont un polynôme de Hilbert constant égal à  $P$  ( $Z \subset X \times_{\mathbb{K}} \mathbb{P}^n$  est une sous-famille plate signifie que  $Z$  est plat sur  $X$ ).

**Proposition 2.2.4.** Soit  $R = R_0 \oplus R_1 \oplus \dots$  un anneau gradué tel que  $R_0$  est un anneau local noethérien et  $R$  une  $R_0$ -algèbre de type fini engendrée par ses éléments de degré 1. Soit  $M$  un  $R$ -module gradué de type fini et  $M_d$  sa composante de degré  $d$ . Alors,  $M_{(f)}$  est  $R_0$ -plat pour tout  $f \in R_1$  si et seulement si  $M_d$  est un  $R_0$ -module libre pour tout  $d \gg 0$ .

Voir [31][Ex.6.11.c, p176].

**Corollaire 2.2.5.** Soit  $X = \mathbf{Spec}(A)$ . Alors :

$$\mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}^n}^P(A) := \mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}^n}^P(\mathbf{Spec}(A)) = \mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}^n}^P(X) =$$

$$\{I \subset S^A \text{ idéal homogène saturé} \mid S_d^A/I_d \text{ soit un } A\text{-module libre de rang } P(d) \forall d \gg 0\}.$$

*Démonstration.* Ce corollaire est une conséquence directe de la proposition 2.2.4.  $\square$

**Définition 2.2.6.** Soit  $B$  une  $\mathbb{K}$ -algèbre. Let  $p \in \mathbf{Spec}(B)$  un idéal premier de  $B$  de corps résiduel  $k(p) := B_p/pB_p$ . Soit  $I$  un idéal homogène de  $S^B = B[x_0, \dots, x_n]$ . Considérons la suite exacte suivante :

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow B[x_0, \dots, x_n] \longrightarrow B[x_0, \dots, x_n]/I \longrightarrow 0.$$

En tensorisant par  $k(p)$  on obtient la suite exacte suivante :

$$I \otimes k(p) \longrightarrow k(p)[x_0, \dots, x_n] \longrightarrow B[x_0, \dots, x_n]/I \otimes k(p) \longrightarrow 0$$

On note alors  $I(p)$  l'idéal homogène de  $k(p)[x_0, \dots, x_n]$  qui est égal à l'image de  $I \otimes k(p)$  dans  $k(p)[x_0, \dots, x_n]$ . On a alors :

$$B[x_0, \dots, x_n]/I \otimes k(p) \sim k(p)[x_0, \dots, x_n]/I(p).$$

*Remarque 2.2.7.* En général,  $I(p)$  n'est pas isomorphe à  $I \otimes k(p)$  car le produit tensoriel par  $k(p)$  n'est pas un foncteur exact à gauche, i.e l'application suivante :

$$I \otimes k(p) \longrightarrow k(p)[x_0, \dots, x_n]$$

n'est pas injective.

**Théorème 2.2.8.** *Etant donné  $I$  un idéal homogène de  $S$  et  $d \in \mathbb{N}$  un entier positif, on a :*

$$\dim(I_{d+1}) \geq \dim(S_1 V(t, d))$$

où  $t = \dim(I_d)$  et  $V(t, d)$  désigne l'espace vectoriel engendré par les  $t$  premiers monômes de  $S_d$  pour l'ordre lexicographique.

Les théorèmes suivants sont attribués à Gotzmann et constituent un point essentiel de la construction du plongement du schéma de Hilbert dans la Grassmannienne :

**Théorème 2.2.9** (Théorème de Persistance, voir [37]). *Soit  $P$  un polynôme de Hilbert et  $a(P) \in \mathbb{N}$  son nombre de Gotzmann (voir [49, C.12, p.295]). Soit  $d \geq a(P)$  un entier. Soit  $B$  un anneau local noethérien et  $I$  un idéal homogène de  $S^B$  engendré par  $I_d$ . Notons  $M := S^B/I$  l'algèbre graduée définie par  $I \subset S^B$ . Si  $M_i$  est un  $B$ -module libre (i.e plat, voir [83][Lem.7.51, p.55]) de rang  $P(i)$  pour  $i = d, d + 1$ , alors  $M_i$  est libre de rang  $P(i)$  pour tout  $i \geq d$ .*

*Remarque 2.2.10.* En particulier, pour  $P = \mu$ , le nombre de Gotzmann de  $P$  est égal à  $\mu$  et le théorème de persistance s'énonce :

*Soient  $d \geq \mu$  un entier,  $B$  un anneau local noethérien et  $I$  l'idéal homogène de  $S^B$  engendré par  $I_d$ . Notons  $M := S^B/I$  l'algèbre graduée définie par  $I \subset S^B$ . Si  $M_i$  est un  $B$ -module libre de rang  $\mu$  pour  $i = d, d + 1$ , alors  $M_i$  est libre de rang  $\mu$  pour tout  $i \geq d$ .*

**Théorème 2.2.11** (Théorème de régularité de Gotzmann). *Soient  $P$  un polynôme de Hilbert,  $a(P) \in \mathbb{N}$  son nombre de Gotzmann et  $I$  un idéal homogène de  $S$  de polynôme de Hilbert  $P$ . Alors,  $I$  est  $a(P)$ -régulier :*

$$\mathbf{H}^i(\mathbb{P}^n, \tilde{I}(a(P) - i)) = 0$$

pour tout  $i > 0$ , où  $\tilde{I}$  est le faisceau quasi-cohérent associé à  $I$  dans  $\mathbb{P}^n$  et  $\mathbf{H}^i(\mathbb{P}^n, \tilde{I}(a(P) - i))$  désigne le  $i$ -ème foncteur de cohomologie (voir [46, def. p.207, chap. III]).

Voir [49, C.23, p.301].

Pour une définition précise de  $\mathbf{H}^i(\mathbb{P}^n, -)$ , voir [46, Chap.III, §8].

*Remarque 2.2.12.* Pour  $P = \mu$ , le théorème de régularité s'énonce :

Soit  $I \subset S$  un idéal homogène de  $S$  de polynôme de Hilbert  $\mu$ . Alors,  $I$  est  $\mu$ -régulier :

$$\mathbf{H}^i(\mathbb{P}^n, \tilde{I}(\mu - i)) = 0$$

pour tout  $i > 0$ , où  $\tilde{I}$  est le faisceau quasi-cohérent associé à  $I$  dans  $\mathbb{P}^n$ .

**Corollaire 2.2.13.** Soient  $\mathbb{K} \subset K$  un corps quelconque et  $I \subset S^K$  un idéal homogène saturé de  $S^K$  de polynôme de Hilbert  $P$ . Alors :

- (i)  $I$  est engendré en degré  $\leq a(P)$ ,
- (ii) la fonction de Hilbert de  $I$  coïncide avec  $P$  à partir du degré  $a(P)$ ,
- (iii) pour tout  $d \geq a(P)$ ,

$$I = (I_d) \oplus I_d : S_1 \oplus \dots \oplus I_d : S_{d-1}.$$

*Démonstration.* En utilisant la proposition 1.2.3, on remarque qu'il suffit de démontrer ce corollaire dans le cas d'un corps algébriquement clos. Les points (i) et (ii) sont alors des conséquences directes des théorèmes 2.2.9 et 2.2.11 et des propriétés induites par la régularité (voir [49, C.21, C.22, p.300]).

(iii) s'obtient quant-à lui grâce au théorème de Macaulay sur la croissance minimale d'un idéal homogène de  $S^K$  (voir 2.2.8).  $\square$

**Corollaire 2.2.14.** Soient  $\mathbb{K} \subset K$  un corps quelconque et  $I \subset S^K$  un idéal homogène de  $S^K$  de polynôme de Hilbert  $P$ . Soit  $N \geq a(P)$  tel que :

$$\dim_K S_d^K / I_d = P(d)$$

pour tout  $d \geq N$ . Alors :

$$\text{Sat}(I) = (I_N) \oplus I_N : S_1 \oplus \dots \oplus I_N : S_{N-1}.$$

*Démonstration.* Il s'agit simplement d'utiliser (iii) du corollaire 2.2.13 et le théorème de Macaulay sur la croissance minimale des idéaux homogènes de  $S^K$  (2.2.8).  $\square$

## 2.3 Représentation et description locale du foncteur de Hilbert de $\mu$ points

### 2.3.1 Recouvrement ouvert du foncteur de Hilbert de $\mu$ points

Nous allons tout d'abord généraliser le corollaire 2.2.13 au cas d'un anneau local noethérien  $(A, m)$  et d'un polynôme de Hilbert constant égal à  $\mu$  :

**Proposition 2.3.1.** Soit  $I \in \text{Hilb}_{\mathbb{P}^n}^{\mu}(A)$  un idéal homogène saturé de  $S^A$  de polynôme de Hilbert  $\mu$ . On note  $M := S^A / I$  l'algèbre quotient graduée associée à  $I$ . Alors :

- (i)  $I$  est engendré en degré  $\leq \mu$ ,
- (ii)  $M_d$  est un  $A$ -module libre de rang  $\mu$  pour tout  $d \geq \mu$ ,

(iii) pour tout  $d \geq \mu$ ,

$$I = (I_d) \oplus I_d : S_1^A \oplus \dots \oplus I_d : S_{d-1}^A.$$

*Démonstration.* Considérons  $I(m) \subset S \otimes_{\mathbb{K}} k$  l'idéal de  $S^k$  associé à  $m \subset A$  (voir définition 2.2.6). Alors,  $S^k/I(m)$  a pour polynôme de Hilbert  $\mu$ . D'après les corollaires 2.2.5 et 2.2.14, il existe un entier  $N$  tel que :

- $I(m)$  coïncide avec son saturé à partir du degré  $N$ .
- $A[x_0, \dots, x_n]_d/I_d$  est libre de rang  $\mu$  pour tout  $d \geq N$ .

Il existe alors une forme linéaire  $u \in S_1$  telle que :

$$k[x_0, \dots, x_n]_d/I(m)_d \xrightarrow{*u} k[x_0, \dots, x_n]_{d+1}/I(m)_{d+1} \quad (2.3.1)$$

est injective pour tout  $d \geq N$ . Nous pouvons supposer sans perte de généralité que  $u = x_0$ . On déduit alors le diagramme commutatif suivant pour tout  $d \geq N$  :

$$\begin{array}{ccc} (A[x_0, \dots, x_n]_d/I_d) \otimes k & \xrightarrow{*x_0} & (A[x_0, \dots, x_n]_{d+1}/I_{d+1}) \otimes k \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\ k[x_0, \dots, x_n]_d/I(m)_d & \xrightarrow{*x_0} & k[x_0, \dots, x_n]_{d+1}/I(m)_{d+1} \end{array} \quad (2.3.2)$$

Ainsi, par liberté, pour tout  $d \geq N$  la multiplication par  $x_0$  :

$$A[x_0, \dots, x_n]_d/I_d \xrightarrow{*x_0} A[x_0, \dots, x_n]_{d+1}/I_{d+1} \quad (2.3.3)$$

est un isomorphisme. Comme  $I$  est saturé, la multiplication par  $x_0$  dans  $A[x_0, \dots, x_n]/I$  est injective et  $x_0$  n'est donc pas un diviseur de zéro de  $I$  :

$$I : (x_0) = I. \quad (2.3.4)$$

Procédons alors par déhomogénéisation : nous allons poser  $x_0 = 1$  dans  $I$ . On notera ainsi  $\underline{I}$  l'image de  $I$  par cette déhomogénéisation. Comme  $x_0$  n'est pas un diviseur de zéro de  $I$ , on a :

$$A[x_0, \dots, x_n]_d/I_d \simeq A[x_1, \dots, x_n]_{\leq d}/\underline{I}_{\leq d}, \quad \forall d \geq 0. \quad (2.3.5)$$

Ainsi, la suite d'inclusions suivante :

$$A[x_1, \dots, x_n]_{\leq N}/\underline{I}_{\leq N} \subset A[x_1, \dots, x_n]_{\leq N+1}/\underline{I}_{\leq N+1} \subset \dots \subset A[x_1, \dots, x_n]/\underline{I}$$

implique que  $A[x_1, \dots, x_n]/\underline{I}$  est un  $A$ -module libre de rang  $\mu$ , donc  $I \in \mathbf{H}_0(A)$ . D'après le corollaire 1.2.28 :

$$A[x_1, \dots, x_n]_{\leq d}/\underline{I}_{\leq d} = A[x_1, \dots, x_n]/\underline{I}$$

pour tout  $d \geq \mu$  et (ii) est alors démontré.

De plus, grâce au théorème 1.2.30, on a :

$$\underline{I} = (\underline{I}_{\leq d})$$

pour tout  $d \geq \mu$ . Cela démontre (i) en utilisant (2.3.5).

(iii) se déduit alors de (i) et du fait que  $I$  est par définition saturé. □

*Remarque 2.3.2.* La proposition 2.3.1 se généralise facilement en :

Soient une  $\mathbb{K}$ -algèbre  $B$  de type fini (non nécessairement locale) et  $I \in \mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}^n}^\mu(B)$  un idéal.

Notons  $M$  le module gradué  $S^B/I$ , on a alors :

(i)  $I$  est engendré en degré  $\mu$ ,

(ii)  $\widetilde{M}_d$  est localement libre de rang  $\mu$  sur  $\mathbf{Spec}(B)$  pour tout  $d \geq \mu$ ,

(iii) pour tout  $d \geq \mu$ ,

$$I = (I_d) \oplus I_d : S_1^B \oplus \dots \oplus I_d : S_{d-1}^B.$$

En outre, grâce au corollaire 1.2.28 le point (ii) peut être amélioré en :

(ii)  $\widetilde{M}_d$  est localement libre de rang  $\mu$  sur  $\mathbf{Spec}(B)$  pour tout  $d \geq \mu - 1$ .

*Remarque 2.3.3.* Grâce au corollaire 2.2.5 et à la proposition 2.3.1, on déduit la propriété suivante :

Etant donnée une  $\mathbb{K}$ -algèbre  $B$  de type fini (non nécessairement locale), on a :

$$\mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}^n}^\mu(\mathbf{Spec}(A)) =$$

$$\{I \subset S^B \text{ idéal homogène saturé} \mid \widetilde{S_d^B/I_d} \text{ est localement libre de rang } \mu \text{ sur } \mathbf{Spec}(B), \forall d \geq \mu\}.$$

**Proposition 2.3.4.** Soient  $X = \mathbf{spec}(B)$  un schéma dans  $\mathcal{C}$  et  $Z = \mathbf{Proj}(B[x_0, \dots, x_n]/I)$  un élément de  $\mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}^n}^\mu(X)$ ,  $u \in S_1$  une forme linéaire et  $Z_u$  l'ouvert de  $Z$  associé à  $u$  en tant qu'élément de  $H^0(Z, \mathcal{O}_Z(1))$  (voir [39][0.5.5.2], p.53]. Soit  $\pi$  le morphisme naturel de  $Z$  vers  $X$  et  $p \in \mathbf{Spec}(B)$  un idéal premier de  $B$  et  $k(p) := B_p/pB_p$  son corps résiduel. Alors,  $\pi_*(\mathcal{O}_{Z_u})_p$  est un  $\mathcal{O}_{X,p}$ -module libre de rang  $\mu$  si et seulement si  $u$  n'annule aucun point défini par  $\overline{I(p)} = I(p) \otimes_{k(p)} \overline{k(p)}$  dans  $\mathbb{P}_{\overline{k(p)}}^n$  (voir définition 1.2.2 et 2.2.6), où  $\overline{k(p)}$  est la clôture algébrique de  $k(p)$ .

*Démonstration.* Par changement de variables dans  $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ , on peut supposer sans perte de généralité que  $u = x_0$ . En localisant on peut de plus se ramener au cas d'un anneau local noethérien  $(A, m)$  et d'un point  $p \in \mathbf{Spec}(A)$  égal à l'idéal maximal  $m$ . On notera  $k := A/m$  le corps résiduel de  $A$ .

Soit  $\underline{I} \subset A[x_1, \dots, x_n]$  la déhomogénéisation de  $I$  par rapport à  $x_0$  (on pose  $x_0 = 1$ ). On a alors  $\underline{I}(m) = \underline{I}(m)$  (voir définition 2.2.6) ainsi que les égalités suivantes :

$$(A[x_0, \dots, x_n]/I) \otimes_A k = k[x_0, \dots, x_n]/I(m)$$

$$(A[x_1, \dots, x_n]/\underline{I}) \otimes_A k = k[x_1, \dots, x_n]/\underline{I}(m).$$

On remarque dès lors que le polynôme de Hilbert de  $I(m)$  est constant égal à  $\mu$ .

On sait d'autre part que  $Z_{x_0} = D_+(x_0)$  (voir [40, Prop. (2.6.3), p.37]) et que  $Z|_{D_+(x_0)} = \mathbf{Spec}(A[x_1, \dots, x_n]/\underline{I})$ . Ainsi,  $\pi_*(\mathcal{O}_{Z|_{D_+(x_0)}})$  est le faisceau de  $\mathcal{O}_X$ -modules associé au  $A$ -module  $A[x_1, \dots, x_n]/\underline{I}$  sur  $\mathbf{Spec}(A)$ . Ainsi,  $\pi_*(\mathcal{O}_{Z_{x_0}})_m$  est un  $\mathcal{O}_{X,m}$ -module libre de rang  $\mu$  si et seulement si  $A[x_1, \dots, x_n]/\underline{I}$  est libre de rang  $\mu$ .

Supposons premièrement que  $x_0$  n'annule aucun des points définis par  $\overline{I(m)}$  dans  $\mathbb{P}_{\overline{k}}^n$  (voir définition 1.2.2). D'après la proposition 1.2.5,  $x_0$  n'est pas un diviseur de zéro du saturé de



$I(m)$ . Or d'après le corollaire 2.2.14, il existe un entier  $N \geq \mu$  tel que  $I(m)$  coïncide avec son saturé à partir du degré  $N$ . Ainsi, pour tout  $d \geq N$  :

$$k[x_0, \dots, x_n]_d / I(m)_d \xrightarrow{x_0} k[x_0, \dots, x_n]_{d+1} / I(m)_{d+1} \quad (2.3.6)$$

est un isomorphisme. Or, d'après la proposition 2.3.1, les  $A$ -modules  $A[x_0, \dots, x_n]_d / I_d$  sont libres de rang  $\mu$  pour tout  $d \geq \mu$ . Ainsi, par liberté, pour tout  $d \geq N \geq \mu$  la multiplication par  $x_0$  :

$$A[x_0, \dots, x_n]_d / I_d \xrightarrow{x_0} A[x_0, \dots, x_n]_{d+1} / I_{d+1} \quad (2.3.7)$$

est un isomorphisme. Les morphismes naturels suivants :

$$A[x_0, \dots, x_n]_d / I_d \longrightarrow A[x_1, \dots, x_n]_{d+1} / \underline{I}_{\leq d+1} \quad (2.3.8)$$

sont donc des isomorphismes pour tout  $d \geq N$ . Les  $A$ -modules  $A[x_1, \dots, x_n]_{d+1} / \underline{I}_{\leq d}$  sont donc libres de rang  $\mu$  pour tout  $d \geq N$ . La chaîne d'inclusion suivante :

$$A[x_1, \dots, x_n]_{\leq N} / \underline{I}_{\leq N} \subset A[x_1, \dots, x_n]_{\leq N+1} / \underline{I}_{\leq N+1} \subset \dots \subset A[x_1, \dots, x_n] / \underline{I}$$

permet de conclure que  $A[x_1, \dots, x_n] / \underline{I}$  est libre de rang  $\mu$ .

Réciproquement, supposons désormais que  $A[x_1, \dots, x_n] / \underline{I}$  est un  $A$ -module libre de rang  $\mu$ . Alors,  $A[x_1, \dots, x_n] / \underline{I} \otimes k = k[x_1, \dots, x_n] / \underline{I}(m)$  est de dimension  $\mu$  et d'après le corollaire 1.2.28 :

$$k[x_1, \dots, x_n]_{\leq \mu} / \underline{I}(m)_{\leq \mu} = k[x_1, \dots, x_n] / \underline{I}(m).$$

Ainsi, pour tout  $d \geq \mu$ , les inclusions naturelles :

$$k[x_1, \dots, x_n]_{\leq d} / \underline{I}(m)_{\leq d} \xrightarrow{i} k[x_1, \dots, x_n]_{\leq d+1} / \underline{I}(m)_{\leq d+1} \quad (2.3.9)$$

sont des isomorphismes. Comme  $\underline{I}(m) = \underline{I}(m)$ , cela implique que les multiplications par  $x_0$  :

$$k[x_0, \dots, x_n]_d / I(m)_d \xrightarrow{*x_0} k[x_0, \dots, x_n]_{d+1} / I(m)_{d+1} \quad (2.3.10)$$

sont des isomorphismes pour tout  $d \geq \mu$ . Cela implique enfin que  $x_0$  n'annule aucun point défini par  $\underline{I}(m)$  dans  $\mathbb{P}_k^n$ . □

**Définition 2.3.5.** Soit  $u \in S_1$  une forme linéaire. On définit alors  $\mathbf{H}_u$  comme le sous-foncteur de  $\mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}^n}^\mu$  qui, à tout schéma  $X$  dans  $\mathcal{C}$ , associe l'ensemble  $\mathbf{H}_u(X)$  des sous-familles plates  $Z \subset X \times \mathbb{P}^n$  de sous-schémas fermés de  $\mathbb{P}^n$  paramétrés par  $X$  dont les fibres ont un polynôme de Hilbert égal à  $\mu$  et tels que  $\pi_*(O_{Z_u})$  soit un faisceau localement libre de rang  $\mu$  sur  $X$ , où  $\pi$  est le morphisme naturel de  $Z$  dans  $X$  et  $Z_u$  est l'ouvert associé à  $u$  en tant qu'élément de  $H^0(Z, O_Z(1))$  (voir [39, (0.5.5.2) p.53]).

*Remarque 2.3.6.* Etant donnés une forme linéaire  $\mathbf{u} \in S_1$  et une  $\mathbb{K}$ -algèbre de type fini  $B$ , on remarque que :

$$\mathbf{H}_{\mathbf{u}}(B) = \{I \subset S^B \in \mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}^n}^{\mu}(B) \mid I : \mathbf{u} = I\}.$$

Voir remarque 2.3.3 pour l'identification de  $\mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}^n}^{\mu}(\mathbf{Spec}(B))$  avec :

$$\{I \subset S^B \text{ idéal homogène saturé} \mid \widetilde{S_d^B/I_d} \text{ est localement libre de rang } \mu \text{ sur } \mathbf{Spec}(B), \forall d \geq \mu\}.$$

**Proposition 2.3.7.** *La famille de sous-foncteurs  $(\mathbf{H}_{\mathbf{u}})_{\mathbf{u} \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]_1}$  consiste en un recouvrement ouvert de sous-foncteurs de  $\mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}^n}^{\mu}$  (voir définition 1.2.35).*

*Démonstration.* Montrons tout d'abord que  $\mathbf{H}_{\mathbf{u}}$  consiste en un sous-foncteur ouvert de  $\mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}^n}^{\mu}$ . Nous remarquons alors que, par construction, les foncteurs  $\mathbf{H}_{\mathbf{u}}$  et  $\mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}^n}^{\mu}$  sont des faisceaux (voir définition 1.2.34). Ainsi, d'après la proposition 1.2.37, il suffit de considérer des schémas affines  $X = \mathbf{Spec}(B)$  de type fini sur  $\mathbb{K}$  (où  $B$  est une  $\mathbb{K}$ -algèbre de type fini) et prouver qu'étant donnée une transformation naturelle du foncteur  $\mathbf{Hom}(-, X)$  vers le foncteur  $\mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}^n}^{\mu}$  (i.e étant donné un élément  $Z \in \mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}^n}^{\mu}(X)$ ) le foncteur :

$$G := \mathbf{Hom}(-, X) \times_{\mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}^n}^{\mu}} \mathbf{H}_{\mathbf{u}}$$

restreint à la catégorie  $\mathcal{C}^a$  de type fini sur  $\mathbb{K}$  est représenté par un sous-schéma ouvert de  $X$ . Soient  $X' = \mathbf{Spec}(B')$  un schéma affine de type fini sur  $\mathbb{K}$  et  $f$  un morphisme de  $\mathbb{K}$ -algèbres de  $B$  vers  $B'$ . Soient  $\phi$  le morphisme de schémas de  $X'$  vers  $X$  associé à  $f$ ,  $Z$  un élément de  $\mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}^n}^{\mu}(X)$  et  $I$  l'idéal homogène saturé de  $B[x_0, \dots, x_n]$  qui lui est associé. Notons  $Z'$  l'élément de  $\mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}^n}^{\mu}(X')$  donné par  $(\phi \times Id_{\mathbb{P}^n})^*(Z)$  et  $I'$  l'idéal homogène de  $B'[x_0, \dots, x_n]$  associé à l'algèbre quotient  $(B[x_0, \dots, x_n]/I) \otimes_B B'$  (i.e associé à  $Z'$ ).

Par changement de coordonnées dans  $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ , on peut supposer que  $u = x_0$ . Alors,  $Z'_{x_0} = (\phi \times Id_{\mathbb{P}^n})^*(Z_{x_0})$  est égal à  $\mathbf{Spec}(B'[x_1, \dots, x_n]/\underline{I}')$  (où  $\underline{I}'$  désigne la déhomogénéisation de  $I'$ ).

On doit alors prouver que pour tout  $B'$  et  $f$ , le faisceau de modules sur  $\mathbf{Spec}(B')$  associé au  $B'$ -module  $B'[x_1, \dots, x_n]/\underline{I}'$  est localement libre de rang  $\mu$  si et seulement si le morphisme :

$$\phi : \mathbf{Spec}(B') \rightarrow \mathbf{Spec}(B)$$

se factorise à travers un sous-schéma ouvert  $\Omega_{x_0}$  de  $\mathbf{Spec}(B)$ .

Soit  $q$  un idéal premier de  $B'$  et  $p$  son image dans  $\mathbf{Spec}(B)$ . D'après la proposition 2.3.4,  $B'_q[x_1, \dots, x_n]/\underline{I}'_q$  est libre de rang  $\mu$  si et seulement si  $x_0$  n'annule aucun point défini par  $\overline{I'(q)} = I'(q) \otimes_{k'(q)} \overline{k'(q)}$  dans  $\mathbb{P}_{k'(q)}^n$  (voir définition 2.2.6). Remarquons alors que :

$$I'(q) = I(p) \otimes_{k(p)} k'(q).$$

Ainsi, d'après la proposition 1.2.6, les points définis par  $\overline{I'(q)}$  sont les mêmes que ceux définis par  $\overline{I(p)} = I(p) \otimes_{k(p)} \overline{k(p)}$  dans  $\mathbb{P}_{k(p)}^n$  en utilisant les inclusions de corps naturelles :

$$\begin{array}{ccc} k(p) & \xrightarrow{i} & k'(q) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \overline{k(p)} & \xrightarrow{\bar{i}} & \overline{k'(q)} \end{array}$$

On déduit alors que  $x_0$  n'annule aucun point défini par  $\overline{I'(q)}$  si et seulement si  $x_0$  ne s'annule pas aux points définis par  $\overline{I(p)}$ . De manière équivalente :  $A'_q[x_1, \dots, x_n]/\underline{I}'_q$  est libre de rang  $\mu$  si et seulement si  $B_p[x_1, \dots, x_n]/\underline{I}_p$  est libre de rang  $\mu$  (avec  $p = \phi(q) = f^{-1}(q)$ ). Ainsi,  $B'[x_1, \dots, x_n]/\underline{I}'$  est libre de rang  $\mu$  si et seulement si  $\phi$  se factorise à travers l'ensemble  $\Omega_{x_0} \subset \mathbf{Spec}(B)$  formé des idéaux premiers  $p \in \mathbf{Spec}(B)$  tels que  $B_p[x_1, \dots, x_n]/\underline{I}_p$  est libre de rang  $\mu$  i.e  $\underline{I}_p \in \mathbf{H}_0(B_p)$ . D'après le théorème 1.2.30 et le corollaire 1.2.28, on a alors :

$$\Omega_{x_0} = \{p \in \mathbf{Spec}(B) \mid B_p[x_1, \dots, x_n]_{\leq d}/\underline{I}_{p \leq d} = B_p[x_1, \dots, x_n]_{\leq d+1}/\underline{I}_{p \leq d+1} \\ \text{et } B_p[x_1, \dots, x_n]_{\leq d}/\underline{I}_{p \leq d} \text{ est libre de rang } \mu\}.$$

Posons :

$$\Omega_1 = \{p \in \mathbf{Spec}(B) \mid B_p[x_1, \dots, x_n]_{\leq d}/\underline{I}_{p \leq d} \text{ est libre de rang } \mu\},$$

$$\Omega_2 = \{p \in \mathbf{Spec}(B) \mid B_p[x_1, \dots, x_n]_{\leq d+1}/\underline{I}_{p \leq d+1} \text{ est libre de rang } \mu\},$$

$$\Omega_3 = \{p \in \mathbf{Spec}(B) \mid B_p[x_1, \dots, x_n]_{\leq d}/\underline{I}_{p \leq d} = B_p[x_1, \dots, x_n]_{\leq d+1}/\underline{I}_{p \leq d+1}\}.$$

On a alors :

$$\Omega_{x_0} = \Omega_1 \cap \Omega_2 \cap \Omega_3.$$

On prouve alors, en utilisant le fait que  $B_p[x_1, \dots, x_n]_{\leq d}/\underline{I}_{p \leq d}$  est un  $B$ -module de type fini (resp.  $B_p[x_1, \dots, x_n]_{\leq d+1}/\underline{I}_{p \leq d+1}$  est de type fini) et que  $\overline{B}$  est noethérien, que  $\Omega_1$  (resp.  $\Omega_2$ ) est un ouvert de  $\mathbf{Spec}(B)$ . En effet, il s'agit d'un point de vue schématique de montrer qu'étant donné un faisceau cohérent  $\mathcal{F}$  sur  $\mathbf{Spec}(B)$ , avec  $B$  noethérien (voir [39, Thm.1.5.1, p.92] et [39, 5.3.1, p.47]), l'ensemble des idéaux premiers  $p \in \mathbf{Spec}(B)$  tels que  $\mathcal{F}_p$  est libre de rang  $\mu$  est un ouvert de  $\mathbf{Spec}(B)$ .

En ce qui concerne  $\Omega_3$ , considérons  $K$  le  $B$ -module de type fini égal au conoyau de l'inclusion suivante :

$$0 \longrightarrow B_p[x_1, \dots, x_n]_{\leq d}/\underline{I}_{p \leq d} \longrightarrow B_p[x_1, \dots, x_n]_{\leq d+1}/\underline{I}_{p \leq d+1} \longrightarrow K \longrightarrow 0.$$

Soit  $\mathcal{K}$  le faisceau cohérent associé à  $K$  sur  $\mathbf{Spec}(B)$ . Alors,  $\Omega_3$  est égal à l'ensemble des idéaux premiers  $p \in \mathbf{Spec}(B)$  tels que  $\mathcal{K}_p$  est nul.  $\Omega_3$  est donc lui aussi un ouvert de  $\mathbf{Spec}(B)$  en vertu du point précédent.

On a donc montré que  $\Omega_{x_0}$  est un ouvert de  $\mathbf{Spec}(B)$  et que  $\mathbf{H}_{x_0}$  est un sous-foncteur ouvert de  $\mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}^n}^\mu$ .

Il reste à montrer que  $(\mathbf{H}_u)_{u \in S_1}$  est un recouvrement (fonctoriel) de  $\mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}^n}^\mu$ . D'après la définition 1.2.35, il s'agit de montrer que  $(\Omega_u)_{u \in S_1}$  est un recouvrement (ensembliste) de  $\mathbf{Spec}(B)$ . Soit  $p$  un idéal de  $\mathbf{Spec}(B)$ . Considérons les points de  $\mathbb{P}_{k(p)}^n$  définis par  $I(p)$ . On peut alors trouver une forme linéaire  $u \in S_1$  qui ne s'annule en aucun de ces points. D'après la proposition 2.3.4,  $p$  appartient à  $\Omega_u$ . La famille  $(\Omega_u)_{u \in S_1}$  constitue donc un recouvrement de  $\mathbf{Spec}(B)$  et la famille de sous-foncteurs ouverts  $(\mathbf{H}_u)_{u \in S_1}$  est un recouvrement ouvert de  $\mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}^n}^\mu$ .  $\square$

### 2.3.2 Représentation du foncteur de Hilbert de $\mu$ points

Nous allons maintenant prouver que  $\mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}^n}^\mu$  est représentable.

**Définition 2.3.8.** Soit  $B$  une famille de  $\mu$  monômes de degré  $d \geq \mu$  dans  $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ . Soit  $\mathbf{H}_{x_0}^B$  le sous-foncteur de  $\mathbf{H}_{x_0}$  qui à tout schéma  $X$  dans  $\mathcal{C}$  associe l'ensemble  $\mathbf{H}_{x_0}^B(X)$  des sous-familles  $Z \subset X \times \mathbb{P}^n$  de sous-schémas fermés  $Y$  paramétrés par  $X$  dont les fibres ont un polynôme de Hilbert égal à  $\mu$  et tels que  $\pi_*(O_{Z_{x_0}})$  est un faisceau libre sur  $X$  de base  $\underline{B} := B/x_0^d \subset H^0(Z, O_{Z_{x_0}})$ .

*Remarque 2.3.9.* Etant données une famille  $B \in \mathcal{B}_d^\mu$  de  $\mu$  monômes et une  $\mathbb{K}$ -algèbre de type fini  $A$ , on remarque que :

$$\mathbf{H}_{x_0}^B(A) = \{I \subset S^A \in \mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}^n}^\mu(A) \mid I : x_0 = I \text{ et } B \text{ est une base du } A\text{-module libre } S_d^A/I_d\}.$$

Voir remarque 2.3.6 pour l'identification de  $\mathbf{H}_{x_0}(A)$  avec :

$$\{I \subset S^A \in \mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}^n}^\mu(A) \mid I : x_0 = I\}.$$

**Lemme 2.3.10.** Soit  $d \geq \mu$  un entier. Soit  $\mathcal{B}_d$  (voir définition 1.2.20) l'ensemble des familles  $B$  de  $\mu$  monômes de degré  $d$  dans  $S$  telles que  $\underline{B}$  connexe à 1 dans  $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] = R$ . Alors, la famille de foncteurs contravariants  $(\mathbf{H}_{x_0}^B)_{B \in \mathcal{B}_d}$  consiste en un recouvrement ouvert de sous-foncteurs représentables de  $\mathbf{H}_{x_0}$ .

*Démonstration.* La démonstration du fait que  $(\mathbf{H}_{x_0}^B)_{B \in \mathcal{B}_d}$  consiste en un recouvrement ouvert de sous-foncteurs de  $\mathbf{H}_{x_0}$  se calque sur celle de la proposition 2.3.7 en utilisant les points suivants :

Soit  $A$  une  $\mathbb{K}$ -algèbre de type fini et  $I \subset A[x_0, \dots, x_n]$  un idéal. Si  $A[x_1, \dots, x_n]/\underline{I}$  est localement libre de rang  $\mu$  alors :

- (i) l'ensemble des idéaux premiers  $p \in \mathbf{Spec}(A)$  tels que  $A_p[x_1, \dots, x_n]/\underline{I}_p$  soit un  $A_p$ -module libre de base  $\underline{B}$  est un ouvert de  $\mathbf{Spec}(A)$ .
- (ii) pour tout idéal premier  $p \in \mathbf{Spec}(A)$ , le  $A_p$ -module libre  $A_p[x_1, \dots, x_n]/\underline{I}_p$  admet une base qui est une famille de  $\mu$  monômes connexe à 1.

Il reste à montrer que  $\mathbf{H}_{x_0}^B$  est représentable pour tout  $B \in \mathcal{B}_d^\mu$ . D'après la proposition 1.2.38, on peut se ramener au cas de schémas affines de type fini sur  $\mathbb{K}$ . Etant donné  $d$  un entier,  $A$  une  $\mathbb{K}$ -algèbre de type fini et  $B$  une famille de  $\mu$  monômes de degré  $d$  tel que  $\underline{B}$  est connexe à 1, le morphisme suivant (voir (1.2.3)) :

$$\begin{aligned} \psi : \mathbf{H}_{x_0}^B(A) &\longrightarrow \mathbf{H}_0^B(A) \\ I &\longrightarrow \underline{I} \end{aligned} \tag{2.3.11}$$

est une bijection dont l'inverse consiste en l'homogénéisation par rapport à  $x_0$ .  $\psi$  définit alors un isomorphisme de foncteurs entre  $\mathbf{H}_{x_0}^B$  et  $\mathbf{H}_0^B$  dans  $\mathcal{C}^a$ . Or, d'après 1.2.26,  $\mathbf{H}_0^B$  est représenté (dans  $\mathcal{C}^a$ ) par  $\mathbf{Spec}(\mathbb{K}[(z_{\alpha,\beta})_{\alpha \in \delta_B, \beta \in \underline{B}}]/\mathcal{R})$  où  $\mathcal{R}$  désigne les relations de commutation (1.2.4). Enfin, d'après la proposition 1.2.38,  $\mathbf{H}_{x_0}^B$  est un foncteur représentable (dans  $\mathcal{C}$ ) et est représenté par  $\mathbf{Spec}(\mathbb{K}[(z_{\alpha,\beta})_{\alpha \in \delta_B, \beta \in \underline{B}}]/\mathcal{R})$ .  $\square$

*Remarque 2.3.11.* Etant donné  $\mathbf{u} \in S_1$ , le sous-foncteur ouvert  $\mathbf{H}_{\mathbf{u}}$  est donc représentable (voir proposition 1.2.36). On notera  $\mathcal{H}_{\mathbf{u}}$  le schéma qui représente ce foncteur. La famille  $(\mathcal{H}_{\mathbf{u}})_{\mathbf{u} \in S_1}$  constitue donc un recouvrement ouvert du schéma de Hilbert  $\mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}^n}^{\mu}$ , dont on montre l'existence dans le théorème suivant.

De même, pour toute famille  $B \in \mathcal{B}_d^{\mu}$ , le sous-foncteur ouvert de  $\mathcal{H}_{x_0}$  associé à  $B$ , noté  $\mathcal{H}_{x_0}^B$ , est représentable. On notera  $\mathcal{H}_{x_0}^B$  le schéma qui le représente. La famille  $(\mathcal{H}_{x_0}^B)_{B \in \mathcal{B}_d^{\mu}}$  constitue donc un recouvrement ouvert du schéma  $\mathcal{H}_{x_0}$ .

**Théorème 2.3.12.** *Le foncteur de Hilbert  $\mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}^n}^{\mu}$  de la catégorie  $\mathcal{C}$  vers celle des ensembles est représentable. On notera  $\mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}^n}^{\mu}$  et on appellera schéma de Hilbert, l'élément de  $\mathcal{C}$  qui le représente.*

*Démonstration.* D'après le lemme 2.3.10 et la proposition 1.2.36,  $\mathbf{H}_{x_0}$  est un foncteur représentable (dans  $\mathcal{C}$ ). Plus généralement, par changements de variables génériques dans  $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ ,  $\mathbf{H}_{\mathbf{u}}$  est un foncteur représentable (dans  $\mathcal{C}$ ) pour tout  $\mathbf{u} \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]_1$ . Enfin, d'après les propositions 2.3.7 et 1.2.36,  $\mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}^n}^{\mu}$  est représentable (dans  $\mathcal{C}$ ).  $\square$

## 2.4 Description globale du foncteur de Hilbert de $\mu$ points

### 2.4.1 Le plongement dans la Grassmannienne

Les résultats présentés ici sont des conséquences du théorème de persistance de Gotzmann [37]. On peut aussi les retrouver dans [49][Appendix C].

**Proposition 2.4.1.** *Soit  $d \geq \mu$  un entier, on définit  $\mathbf{W}_d$  comme étant le sous-foncteur de  $\mathbf{Gr}_{S_d}^{\mu} \times \mathbf{Gr}_{S_{d+1}}^{\mu}$  qui à tout schéma affine  $X = \mathbf{Spec}(A) \in \mathcal{C}^a$  associe :*

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_d(X) &= \{(S_d^A/I_d, S_{d+1}^A/I_{d+1}) \in \mathbf{Gr}_{S_d}^{\mu}(X) \times \mathbf{Gr}_{S_{d+1}}^{\mu}(X) \mid S_1 \cdot I_d = I_{d+1}\} \\ &= \{(S_d^A/I_d, S_{d+1}^A/I_{d+1}) \in \mathbf{Gr}_{S_d}^{\mu}(X) \times \mathbf{Gr}_{S_{d+1}}^{\mu}(X) \mid S_1 \cdot I_d \subset I_{d+1}\}. \end{aligned}$$

*Démonstration.* Premièrement, étant donné  $(S_d^A/I_d, S_{d+1}^A/I_{d+1}) \in \mathbf{Gr}_{S_d}^{\mu}(X) \times \mathbf{Gr}_{S_{d+1}}^{\mu}(X)$ , l'implication :

$$S_1 \cdot I_d \subset I_{d+1} \Rightarrow S_1 \cdot I_d = I_{d+1}$$

s'obtient grâce au lemme de Nakayama et au théorème de Macaulay sur la croissance minimale d'un idéal homogène de  $S^K$  (voir 2.2.8).

Deuxièmement, l'existence du sous-foncteur  $\mathbf{W}_d$  s'obtient grâce au fait que  $\mathbf{Gr}_{S_d}^{\mu} \times \mathbf{Gr}_{S_{d+1}}^{\mu}$  est un faisceau (voir définition 1.2.34) et que les ouverts affines constituent une base de la topologie de tout schéma  $Y \in \mathcal{C}$ .  $\square$

**Proposition 2.4.2.** *Soit  $d \geq \mu$  un entier, on définit  $\mathbf{G}_d$  comme étant le sous-foncteur de  $\mathbf{Gr}_{S_d}^{\mu}$  qui à tout schéma affine  $X = \mathbf{Spec}(A) \in \mathcal{C}^a$  associe :*

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_d(X) &= \{(S_d^A/I_d) \in \mathbf{Gr}_{S_d}^{\mu}(X) \mid S_{d+1}^A/S_1 \cdot I_d \in \mathbf{Gr}_{S_{d+1}}^{\mu}(X)\} \\ &= \{(S_d^A/I_d) \in \mathbf{Gr}_{S_d}^{\mu}(X) \mid \exists I_{d+1}, T_1 \cdot S_d^A \subset I_{d+1} \text{ et } S_{d+1}^A/I_{d+1} \in \mathbf{Gr}_{S_{d+1}}^{\mu}(X)\}. \end{aligned}$$

*Démonstration.* Les arguments sont les mêmes que ceux de la preuve de la proposition précédente 2.4.1.  $\square$

**Proposition 2.4.3.** *Etant donné un entier  $d \geq \mu$ , alors  $\mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}^n}^\mu$  est en bijection avec le sous-foncteur  $\mathbf{W}_d$  de  $\mathbf{Gr}_{S_d}^\mu \times \mathbf{Gr}_{S_{d+1}}^\mu$ .*

*Démonstration.* D'après le théorème de Persistance 2.2.9 et la remarque 2.3.2, étant donné un schéma  $X = \mathbf{Spec}(A) \in \mathcal{C}^a$  et un entier  $d \geq \mu$ ,  $\mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}^n}^\mu(X)$  est en bijection avec  $\mathbf{W}_d(A) \subset \mathbf{Gr}_{S_d}^\mu(X) \times \mathbf{Gr}_{S_{d+1}}^\mu(X)$ . Les foncteurs qui interviennent ici étant des faisceaux (voir définition 1.2.34) et les ouverts affines constituant une base de la topologie de n'importe quel schéma  $Y \in \mathcal{C}$ , cette bijection induit un isomorphisme de foncteurs entre  $\mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}^n}^\mu$  et  $\mathbf{W}_d$  dans  $\mathcal{C}$  pour tout entier  $d \geq \mu$ .  $\square$

**Proposition 2.4.4.** *Etant donné un entier  $d \geq \mu$ , alors  $\mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}^n}^\mu$  est en bijection avec le sous-foncteur  $\mathbf{G}_d$  de  $\mathbf{Gr}_{S_d}^\mu$ .*

*Démonstration.* D'après le théorème de Persistance 2.2.9 et la remarque 2.3.2, étant donné un schéma  $X = \mathbf{Spec}(A) \in \mathcal{C}^a$  et un entier  $d \geq \mu$ ,  $\mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}^n}^\mu(X)$  est en bijection avec  $\mathbf{W}_d(A) \subset \mathbf{Gr}_{S_d}^\mu(X) \times \mathbf{Gr}_{S_{d+1}}^\mu(X)$ . On conclut alors comme précédemment.  $\square$

*Remarque 2.4.5.* Soit  $X = \mathbf{Spec}(A) \in \mathcal{C}^a$  et  $d \geq \mu$  un entier, notons que la bijection introduite dans la preuve de la proposition 2.4.3 est la suivante :

$$\mathbf{W}_d(X) \longrightarrow \mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}^n}^\mu(X)$$

$$(I_d, I_{d+1}) \mapsto [I_d]$$

avec  $[I_d] = (I_d) + (I_d : S_1) + (I_d : S_2) + \dots + (I_d : S_{d-1}) \subset S^A$ .

De la même manière, la bijection introduite dans la preuve de la proposition 2.4.4 est la suivante :

$$\mathbf{G}_d(X) \longrightarrow \mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}^n}^\mu(X) \tag{2.4.1}$$

$$I_d \mapsto [I_d].$$

*Remarque 2.4.6.* Notons enfin que les isomorphismes de foncteurs précédents induisent le diagramme commutatif suivant pour tout  $d \geq \mu$  :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}^n}^\mu & \xrightarrow{\psi} & \mathbf{W}_d \subset \mathbf{Gr}_{S_d}^\mu \times \mathbf{Gr}_{S_{d+1}}^\mu \\ & \searrow \phi & \swarrow \pi \\ & & \mathbf{G}_d \subset \mathbf{Gr}_{S_d}^\mu \end{array} \tag{2.4.2}$$

où  $\phi$  et  $\psi$  sont des isomorphismes naturels et  $\pi$  est la projection sur la première Grassmannienne  $\mathbf{Gr}_{S_d}^\mu$ . Ainsi, on déduit que  $\pi$  est aussi un isomorphisme et que  $\mathbf{G}_d$  est exactement la projection de  $\mathbf{W}_d$  sur  $\mathbf{Gr}_{S_d}^\mu$ .

## 2.4.2 Equations globales de $Hilb^\mu(\mathbb{P}^n)$ comme sous variété d'un produit de deux Grassmanniennes

Dans cette section  $d$  désignera un entier supérieur ou égal à  $\mu$ . D'après la proposition 2.4.3, le foncteur de Hilbert  $Hilb_{\mathbb{P}^n}^\mu$  est isomorphe au sous-foncteur  $\mathbf{W}_d$  du produit  $\mathbf{Gr}_{S_d}^\mu \times \mathbf{Gr}_{S_{d+1}}^\mu$ . Nous allons montrer dans cette section que  $\mathbf{W}_d$  est représenté par un sous-schéma fermé noté  $W_d$  de :

$$\begin{aligned} Gr^\mu(S_d) \times_{\mathbb{K}} Gr^\mu(S_{d+1}) &= \mathbf{Proj}(\mathbb{K}[\wedge^\mu S_d]/\#_d) \times_{\mathbb{K}} \mathbf{Proj}(\mathbb{K}[\wedge^\mu S_{d+1}]/\#_{d+1}) \\ &= \mathbf{Proj}(\mathbb{K}[\wedge^\mu S_d \otimes \wedge^\mu S_{d+1}]/(\#_d, \#_{d+1})) \end{aligned}$$

où  $(\#_k) \subset \mathbf{S}^2(\wedge^\mu S_k) \subset \mathbb{K}[\wedge^\mu S_k]$  désigne les relations de Plücker associées à la famille des monômes de degré  $k$  (en tant que base de  $S_k$ , voir (1.2.11) et théorème 1.2.41). Nous fournirons ainsi les équations de ce sous-schéma fermé dans  $\mathbb{K}[\wedge^\mu S_d \otimes \wedge^\mu S_{d+1}]$ . Nous allons pour cela nous concentrer sur l'étude de  $\mathbf{W}_d(X)$  avec  $X \in \mathcal{C}$  est un  $\mathbb{K}$ -schéma de type fini. Ces résultats correspondent à la version schématique de [3][Thm.3.10, p.20] en collaboration avec M.E. Alonso et B.Mourrain.

**Définition 2.4.7.** Pour tout entier  $k \geq 0$  et toute famille  $(q_1, \dots, q_\mu)$  de polynômes homogènes de degré  $k$ , on définit  $\mathbb{X}_{q_1, \dots, q_\mu}^k \in \wedge^\mu S_k$  de la manière suivante :

$$\mathbb{X}_{q_1, \dots, q_\mu}^k := q_1 \wedge \dots \wedge q_\mu.$$

Nous appellerons *coordonnées de Plücker de  $Gr^\mu(S_k)$*  dans  $\wedge^\mu S_k \subset \mathbf{S}(\wedge^\mu S_k) = \mathbb{K}[\wedge^\mu S_k]$  la famille  $(\mathbb{X}_{\mathbf{x}^{\alpha_1}, \dots, \mathbf{x}^{\alpha_\mu}}^k)_{\mathbf{x}^{\alpha_1} < \dots < \mathbf{x}^{\alpha_\mu}}$  (que l'on notera aussi plus simplement  $(\mathbb{X}_{\alpha_1, \dots, \alpha_\mu}^k)_{\alpha_1 < \dots < \alpha_\mu}$ ) pour un ordre monomial  $<$  fixé.

*Remarque 2.4.8.* Pour tout  $k \geq 0$ , la  $\mathbb{K}$ -algèbre graduée  $\mathbf{S}(\wedge^\mu S_k) = \mathbb{K}[\wedge^\mu S_k]$  est alors isomorphe à l'algèbre polynomiale graduée  $\mathbb{K}[(\mathbb{X}_{\alpha_1, \dots, \alpha_\mu}^k)_{\alpha_1 < \dots < \alpha_\mu}]$ .

Soit  $\Delta \in \mathbf{Gr}_{S_d}^\mu(X)$  un faisceau d' $\mathcal{O}_X$ -modules localement libre de rang  $\mu$  :

$$g := S_d \otimes_{\mathbb{K}} \mathcal{O}_X \longrightarrow \Delta \longrightarrow 0.$$

Soit  $\mathcal{L}$  le faisceau inversible (voir [39, 5.4.1, p.48]) défini par :

$$\mathcal{L} := \wedge^\mu \Delta \tag{2.4.3}$$

sur  $X$ , on a alors :

$$\phi := \wedge^\mu S_d \otimes \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow 0.$$

Dans toute la suite, on notera  $\mathcal{S}_d^X$  le faisceau de  $\mathcal{O}_X$ -module défini par :

$$S_d \otimes_{\mathbb{K}} \mathcal{O}_X. \tag{2.4.4}$$

Etant donnée une famille  $B = (q_1, \dots, q_\mu) \subset S_d$  de  $\mu$  polynômes homogènes de degré  $d$ , on notera  $\Delta_{q_1, \dots, q_\mu} \in \mathbf{H}^0(X, \mathcal{L})$  l'image par  $\phi$  de  $q_1 \wedge \dots \wedge q_\mu \in \mathbf{H}^0(X, \wedge^\mu S_d)$  :

$$\Delta_B = \Delta_{q_1, \dots, q_\mu} = \phi(q_1 \wedge \dots \wedge q_\mu) \in \mathbf{H}^0(X, \mathcal{L}). \tag{2.4.5}$$

Considérons en particulier la famille de sections globales  $(\Delta_{\mathbf{x}^{\alpha_1}, \dots, \mathbf{x}^{\alpha_\mu}})_{\alpha_1 < \dots < \alpha_\mu}$  (que l'on notera aussi  $(\Delta_{\alpha_1, \dots, \alpha_\mu})_{\alpha_1 < \dots < \alpha_\mu}$ ) pour un ordre monomial  $<$  fixé. D'après le théorème 1.2.41, elles satisfont les relations (1.2.10) :

$$\sum_{\lambda=1, \dots, n+1} (-1)^\lambda \Delta_{\alpha_1, \dots, \alpha_{\mu-1}, \beta_\lambda} \otimes \Delta_{\beta_1, \dots, \hat{\beta}_\lambda, \dots, \beta_{\mu+1}} = 0$$

dans  $H^0(X, \mathcal{L}^{\otimes 2})$ .

*Remarque 2.4.9.* Dans le cas où  $X = \mathbf{Spec}(A) \in \mathcal{C}^a$ , avec la catégorie des faisceaux d' $\mathcal{O}_X$ -modules quasi-cohérents étant équivalente à celle des  $A$ -modules, on considèrera  $\Delta \in \mathbf{Gr}_{S_d}^\mu(X)$  comme un  $A$ -module localement libre de rang  $\mu$ .  $\Delta$  sera donc de la forme :

$$\Delta = S_d^A / I_d$$

où  $I_d \subset S_d^A$  est un  $A$ -module. On notera alors :

$$\mathbf{Ker} \Delta := I_d.$$

*Remarque 2.4.10.* Intéressons nous au cas d'un schéma affine  $X = \mathbf{Spec}(A)$  avec  $(A, m)$  un anneau local noethérien et une  $\mathbb{K}$ -algèbre (cela revient à regarder localement en un point  $p$  de  $X \in \mathcal{C}$ ). Dans ce cas, la catégorie des faisceaux quasi-cohérents d' $\mathcal{O}_X$ -modules étant équivalente à celle des  $A$ -modules, on peut écrire :

$$\mathbf{Gr}_{S_d}^\mu(X) = \{\Delta = S_d^A / I_d \mid \Delta \text{ est un } A\text{-module libre de rang } \mu\}.$$

Ainsi avec les notations précédentes,  $\mathcal{L}$  est isomorphe à  $\mathcal{O}_X$  et  $H^0(X, \mathcal{L}) \simeq A$ . Ainsi, étant donnée une famille  $B = (q_1, \dots, q_\mu) \subset S_d^A$  de  $\mu$  polynômes homogènes de degré  $d$ , les sections globales  $(\Delta_{q_1, \dots, q_\mu})$  s'identifient à des éléments de l'anneau local  $A$  (modulo le choix d'une base pour  $\Delta$ ). On peut alors les calculer de deux manières différentes :

- (i) soit  $(e_1, \dots, e_\mu)$  une base de  $\Delta$  en tant que  $A$ -module libre de rang  $\mu$ .  $e_1 \wedge \dots \wedge e_\mu$  est donc une base de  $\wedge^\mu \Delta$  en tant que  $A$ -module libre de rang 1. Etant donnée une famille  $B = (q_1, \dots, q_\mu) \subset S_d^A$  de  $\mu$  polynômes homogènes de degré  $d$ , la section globales  $\Delta_{q_1, \dots, q_\mu} \in A$  s'obtient alors en écrivant dans  $\wedge^\mu \Delta \simeq A$  :

$$q_1 \wedge \dots \wedge q_\mu = \Delta_{q_1, \dots, q_\mu} \cdot e_1 \wedge \dots \wedge e_\mu.$$

- (ii) On peut aussi considérer une base  $(\delta_1, \dots, \delta_\mu) \subset (S_d^A)^*$  du dual  $\Delta^* := \mathbf{Hom}_A(\Delta, A)$  (qui est aussi un  $A$ -module libre de rang  $\mu$ ). Etant donnée une famille  $B = (q_1, \dots, q_\mu) \subset S_d^A$  de  $\mu$  polynômes homogènes de degré  $d$ , la section globale  $\Delta_{q_1, \dots, q_\mu} \in A$  s'obtient alors de la manière suivante :

$$\Delta_{q_1, \dots, q_\mu} = \begin{vmatrix} \delta_1(q_1) & \dots & \delta_1(q_\mu) \\ \vdots & & \vdots \\ \delta_\mu(q_1) & \dots & \delta_\mu(q_\mu) \end{vmatrix}.$$

Dans la suite  $X \in \mathcal{C}$  désigne un  $\mathbb{K}$  schéma de type fini.



**Lemme 2.4.11.** Soient  $\Delta$  un élément  $\mathbf{Gr}_{S_d}^\mu(X)$  et  $B = (b_1, \dots, b_\mu) \subset S_d$  une famille de polynômes homogènes de degré  $d$ . Alors on a les relations suivantes pour tout  $a \in S_d$  :

$$\Delta_B \otimes_{\mathcal{O}_X} a - \sum_{i=1}^{\mu} \Delta_{B^{[b_i|a]}} \otimes_{\mathcal{O}_X} b_i = 0 \text{ dans } H^0(X, \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} S_d), \quad (2.4.6)$$

où  $B^{[b_i|a]} = (b_1, \dots, b_{i-1}, a, b_{i+1}, \dots, b_\mu)$  ( $\mathcal{L}$  étant défini par (2.4.3)).

*Démonstration.* Il s'agit tout d'abord de remarquer que la question est locale sur  $X$ . On peut donc supposer que  $X = \mathbf{Spec}A$  où  $A$  est une  $\mathbb{K}$ -algèbre locale noethérienne et que nous sommes donc dans les conditions de la remarque 2.4.10. Nous allons alors utiliser la description (ii) de cette remarque. Soit  $(\delta_1, \dots, \delta_\mu) \subset S_d^A$  une base du dual  $\Delta^*$  (qui est un  $A$ -module libre de rang  $\mu$ ). Les relations (2.4.6) sont alors des conséquences directes de propriétés élémentaires sur le déterminant. En effet, considérons la matrice suivante :

$$M := \begin{bmatrix} \delta_1(a) & \delta_1(b_1) & \cdots & \delta_1(b_\mu) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_\mu(a) & \delta_\mu(b_1) & \cdots & \delta_\mu(b_\mu) \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

et développons son déterminant par rapport à la dernière ligne. On a alors la relation suivante :

$$M \begin{bmatrix} \Delta_B \\ \Delta_{B^{[b_1|a]}} \\ \vdots \\ \Delta_{B^{[b_\mu|a]}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \det(M) \end{bmatrix}.$$

On conclut alors que  $\delta_k(\Delta_B a - \sum_{i=1}^{\mu} \Delta_{B^{[b_i|a]}} b_i) = 0$  pour tout  $1 \leq k \leq \mu$ . Cela prouve que  $\Delta_B a - \sum_{i=1}^{\mu} \Delta_{B^{[b_i|a]}} b_i = 0$  dans le quotient  $\Delta$ .  $\square$

**Lemme 2.4.12.** [3][Thm.3.10, p.20] Soit  $d \geq \mu$  un entier et  $(\Delta, \Delta')$  un couple d'éléments de  $\mathbf{Gr}_{S_d}^\mu(X) \times \mathbf{Gr}_{S_{d+1}}^\mu(X)$ . Alors,  $(\Delta, \Delta')$  appartient à  $\mathbf{W}_d(X)$  si et seulement si les relations suivantes :

$$\Delta_B \otimes \Delta'_{B', x_k a} - \sum_{b \in B} \Delta_{B^{[b|a]}} \otimes \Delta'_{B', x_k b} = 0, \quad (2.4.7)$$

sont vérifiées dans  $H^0(X, \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}')$  (avec les notations (2.4.5) et (2.4.3)), pour toute famille  $B$  (resp.  $B'$ ) de  $\mu$  (resp.  $\mu - 1$ ) monômes de degré  $d$  (resp.  $d + 1$ ), tout monôme  $a \in S_d$  et pour tout  $0 \leq k \leq n$  (où  $B', x_k a$  désigne la famille  $(b'_1, \dots, b'_{\mu-1}, x_k a)$ ).

*Démonstration.* La question est à nouveau locale sur  $X$ . On peut donc se ramener au cas où  $X = \mathbf{Spec}(A)$  avec  $A$  noethérien local.

On sait alors, d'après la proposition 2.4.1, que  $(\Delta, \Delta')$  appartient à  $\mathbf{W}_d(A)$  si et seulement si  $S_1 \cdot \ker \Delta \subset \ker \Delta'$ . Il s'agit donc de prouver que les relations (2.4.7) sont équivalentes à cette inclusion.

Supposons tout d'abord que  $(\Delta, \Delta')$  satisfait les relations (2.4.7). On va alors montrer que  $S_1 \cdot \ker \Delta \subset \ker \Delta'$ . Soient  $B$  une base de  $\Delta$  en tant que  $A$ -module libre de rang  $\mu$  (ainsi  $\Delta_B \notin m$

est inversible) et  $p$  un élément de  $\ker \Delta$ . Par linéarité, les relations (2.4.7) impliquent que  $\Delta'_{B', x_k p} = 0$  pour tout  $k = 0, \dots, n$  et toute famille  $B'$  de  $\mu - 1$  monômes de degré  $d + 1$  (car  $\Delta_{B[b|p]} = 0$ ). Ainsi, grâce au lemme 2.4.11,  $x_k \cdot p$  appartient à  $\ker \Delta'$  pour tout  $p \in \ker \Delta$  et tout  $k = 0, \dots, n$ . On a donc  $S_1 \cdot \ker \Delta \subset \ker \Delta'$ .

Réciproquement, supposons que  $(\Delta, \Delta')$  vérifie :

$$S_1 \cdot \ker \Delta \subset \ker \Delta'.$$

Prouvons alors que les relations (2.4.7) sont satisfaites. Ceci est en fait une conséquence directe du lemme 2.4.11 : pour toute famille  $B := (b_i)_i$  de  $\mu$  monômes dans  $S_d^A$  et tout polynôme  $a \in S_d^A$ , on a la relation suivante :

$$a \Delta_B = \sum_i \Delta_{B[b_i|a]} b_i$$

dans le quotient  $\Delta$ . Comme  $S_1 \cdot \ker \Delta \subset \ker \Delta'$ , on a aussi :

$$a x_k \Delta_B = \sum_i \Delta_{B[b_i|a]} b_i x_k$$

dans  $\Delta'$  pour tout  $0 \leq k \leq n$ .

Ainsi par linéarité, pour toute famille  $B'$  de  $\mu - 1$  monômes, on a les relations suivantes :

$$\Delta_B \Delta'_{B', x_k a} = \Delta'_{B', x_k} \Delta_B a = \sum_{b \in B} \Delta_{B[b|a]} \Delta'_{B', x_k b}$$

qui sont exactement les relations (2.4.7) dans le cas local. □

**Théorème 2.4.13.** *Le foncteur  $\mathbf{W}_d$  est représenté par le sous-schéma fermé de  $Gr^\mu(S_d) \times_{\mathbb{K}} Gr^\mu(S_{d+1}) = \mathbf{Proj}(\mathbb{K}[\wedge^\mu S_d \otimes \wedge^\mu S_{d+1}] / (\#_d, \#_{d+1}))$  défini par les relations :*

$$\mathbb{X}_B^d \otimes \mathbb{X}_{B', x_k a}^{d+1} - \sum_{b \in B} \mathbb{X}_{B[b|a]}^d \otimes \mathbb{X}_{B', x_k b}^{d+1} = 0,$$

dans  $\mathbb{K}[\wedge^\mu S_d \otimes \wedge^\mu S_{d+1}] / (\#_d, \#_{d+1})$ , pour toute famille  $B$  (resp.  $B'$ ) de  $\mu$  (resp.  $\mu - 1$ ) monômes de degré  $d$  (resp.  $d + 1$ ), tout monôme  $a \in S_d$  et pour tout  $0 \leq k \leq n$  (où  $B', x_k a$  désigne la famille  $(b'_1, \dots, b'_{\mu-1}, x_k a)$ ).

*Démonstration.* Le théorème est une conséquence directe du lemme 2.4.12. □

### 2.4.3 Equations globales de $Hilb^\mu(\mathbb{P}^n)$ comme sous variété d'une Grassmannienne

Dans cette section, fixons à nouveau un entier  $d \geq \mu$ . D'après la proposition 2.4.4, le foncteur de Hilbert  $\mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}^n}^\mu$  est isomorphe au sous-foncteur  $\mathbf{G}_d$  du foncteur  $\mathbf{Gr}_{S_d}^\mu$ . Nous

allons montrer dans cette section que  $\mathbf{G}_d$  est représenté par un sous-schéma fermé noté  $G_d$  de :

$$Gr^\mu(S_d) = \mathbf{Proj}(\mathbb{K}[\wedge^\mu S_d]/\#_d)$$

où  $(\#_d) \subset \mathbf{S}^2(\wedge^\mu S_d) \subset \mathbb{K}[\wedge^\mu S_d]$  désigne les relations de Plücker associées à la famille des monômes de degré  $d$  (en tant que base de  $S_d$ , voir relations (1.2.11) et théorème 1.2.41). Nous fournirons ainsi les équations de ce sous-schéma fermé dans  $\mathbb{K}[\wedge^\mu S_d]$ . Nous allons pour cela nous concentrer sur l'étude de  $\mathbf{G}_d(X)$  avec  $X \in \mathcal{C}$  un  $\mathbb{K}$ -schéma de type fini. Les résultats qui sont ici présentés, notamment les théorèmes 2.4.20 et 2.4.21, correspondent au papier en collaboration avec M.E. Alonso et B. Mourrain : [3][Thm.3.16, p.25 et Thm.3.17, p.27].

Les notations seront les mêmes que celles introduites dans la section 2.4.2. Soit en outre  $\Delta \in \mathbf{Gr}_{S_d}^\mu(X)$ ,  $\mathbf{u} = u_0 x_0 + \cdots + u_n x_n \in S_1$  une forme linéaire et  $B = (b_1, \dots, b_\mu)$  une famille de  $\mu$  monômes dans  $S_{d-1}$ , on considère alors la section globale  $\Delta_{\mathbf{u}, B} \in H^0(X, \mathcal{L})$  (où  $\mathcal{L} := \wedge^\mu \Delta$  sur  $X$ ) que l'on cherche à écrire comme un "polynôme" en  $\mathbf{u}$ . En effet, par multilinéarité il est possible d'écrire  $\Delta_{\mathbf{u}, B}$  comme un "polynôme" en  $\mathbf{u}$  dont les coefficients dépendent linéairement de sections de la forme  $\Delta_F \in H^0(X, \mathcal{L})$  où  $F$  est une famille de  $\mu$  monômes de degrés  $d$ . On pose ainsi :

$$\Delta_{\mathbf{u}, B} = \sum_{\mathcal{I} \in \{0, \dots, n\}^\mu} \mathbf{u}^{(\mathcal{I})} \Delta_{\mathcal{I}, B}, \quad (2.4.8)$$

où  $\Delta_{\mathcal{I}, B} = \Delta_{x_{\mathcal{I}_1} b_1, \dots, x_{\mathcal{I}_\mu} b_\mu}$  et  $(\mathcal{I}) \in \mathbb{N}^{n+1}$  et l'unique multi-indice qui vérifie  $\mathbf{u}^{(\mathcal{I})} = u_{\mathcal{I}_1} \cdots u_{\mathcal{I}_\mu}$  pour tout  $\mathcal{I} \in \{0, \dots, n\}^\mu$ . Dans ce contexte, on écrira également  $\mathcal{I}_i$  pour désigner  $\mathcal{I}_{b_i}$  et plus généralement  $\mathcal{I}_b$  pour tout  $b \in B$ .

Désormais, étant données deux familles  $B$  et  $B'$  de monômes de degré  $d - 1$ , on a :

$$\Delta_{\mathbf{u}, B} \otimes \Delta_{\mathbf{u}, B'} = \sum_{\mathcal{K} \in \mathbb{N}^{n+1}, |\mathcal{K}|=2\mu} \mathbf{u}^{\mathcal{K}} \otimes \sum_{\mathcal{I}, \mathcal{J} \in \{0, \dots, n\}^\mu, (\mathcal{I})+(\mathcal{J})=\mathcal{K}} \Delta_{\mathcal{I}, B} \Delta_{\mathcal{J}, B'}.$$

*Remarque 2.4.14.* En toute rigueur, pour pouvoir considérer  $\Delta_{\mathbf{u}, B}$  comme un polynôme en  $\mathbf{u}$ , il faut introduire la  $A$ -algèbre graduée :

$$\Gamma(X, \Delta) := \bigoplus_k H^0(X, \mathcal{L}^{\otimes k}).$$

$\Delta_{\mathbf{u}, B}$  est alors un polynôme en  $\mathbf{u}$  à coefficients dans  $\Gamma(X, \Delta)_1$  et  $\Delta_{\mathbf{u}, B} \otimes \Delta_{\mathbf{u}, B'}$  un polynôme en  $\mathbf{u}$  à coefficients dans  $\Gamma(X, \Delta)_2$ .

**Proposition 2.4.15.** *Soit  $\Delta \in \mathbf{G}_d(X) \subset \mathbf{Gr}_{S_d}^\mu(X)$ . Alors, pour toute famille  $B$  de  $\mu$  monômes de degré  $d - 1$ , pour tout  $\mathcal{K} \in \mathbb{N}^{n+1}$  avec  $|\mathcal{K}| = 2\mu$ , pour tout  $b, b'' \in B$  et tout  $0 \leq i < j \leq n$ , on a les relations suivantes dans  $H^0(X, \mathcal{L}^{\otimes 2})$  :*

$$\sum_{(\mathcal{I})+(\mathcal{J})=\mathcal{K}} \sum_{b' \in B} (\Delta_{\mathcal{I}, B}^{[x_{\mathcal{I}_b}, b' | x_j b]} \otimes \Delta_{\mathcal{J}, B}^{[x_{\mathcal{J}_{b''}}, b'' | x_j b']} - \Delta_{\mathcal{I}, B}^{[x_{\mathcal{I}_b}, b' | x_j b]} \otimes \Delta_{\mathcal{J}, B}^{[x_{\mathcal{J}_{b''}}, b'' | x_i b']}) = 0. \quad (2.4.9)$$

*Démonstration.* Remarquons d'abord (en utilisant les notations (2.4.8)) que les termes qui apparaissent dans les relations (2.4.9) sont exactement les coefficients du polynôme en  $\mathbf{u}$  :

$$\sum_{b' \in B} (\Delta_{\mathbf{u} \cdot B} [\mathbf{u}b' | x_i b] \otimes \Delta_{\mathbf{u} \cdot B} [\mathbf{u}b'' | x_j b'] - \Delta_{\mathbf{u} \cdot B} [\mathbf{u}b' | x_j b] \otimes \Delta_{\mathbf{u} \cdot B} [\mathbf{u}b'' | x_i b']) \in \Gamma(X, \Delta)[\mathbf{u}]. \quad (2.4.10)$$

Il s'agit alors de montrer que ce polynôme est nul. Or, d'après la proposition 1.2.1, cela équivaut à ce qu'il s'annule pour des valeurs génériques de  $\mathbf{u}$  dans  $S_1$ . Il s'agit donc de montrer que les section globales :

$$\sum_{b' \in B} (\Delta_{\mathbf{u} \cdot B} [\mathbf{u}b' | x_i b] \otimes \Delta_{\mathbf{u} \cdot B} [\mathbf{u}b'' | x_j b'] - \Delta_{\mathbf{u} \cdot B} [\mathbf{u}b' | x_j b] \otimes \Delta_{\mathbf{u} \cdot B} [\mathbf{u}b'' | x_i b']) \in \mathbf{H}^0(X, \mathcal{L}^{\otimes 2}) \quad (2.4.11)$$

sont nulles dans  $\mathbf{H}^0(X, \mathcal{L}^{\otimes 2})$  pour des valeurs génériques de  $\mathbf{u} \in S_1$ . Cette question est alors locale et on supposera dans la suite de la preuve que  $S = \mathbf{Spec}(A)$  avec  $A$  une  $\mathbb{K}$ -algèbre locale noethérienne d'idéal maximal  $m$ .

Soient  $I$  l'idéal homogène de  $\mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}^n}^\mu(X)$  associé à  $\Delta \in \mathbf{Gr}_{S_d}^\mu(X)$  et  $\Delta' = S_{d+1}^A / I_{d+1}$ .  $\Delta$  et  $\Delta'$  sont alors des  $A$ -modules libres de rang  $\mu$ . Soient  $F := (e_1, \dots, e_\mu)$  une base de  $\Delta$  et  $P_1 \in A[\mathbf{u}]$  le polynôme en  $\mathbf{u}$  défini par :

$$P_1(\mathbf{u}) := \Delta'_{\mathbf{u} \cdot F}.$$

Comme  $I$  est saturé, il existe  $\mathbf{v} \in S_1$  tel que  $\mathbf{v}$  n'est pas un diviseur de zéro de  $I$  et ainsi  $P_1(\mathbf{v}) \notin m$ . Le polynôme  $\overline{P_1} \in S^A \otimes (A/m) = k[x_0, \dots, x_n]$  n'est donc pas égal à zéro. Par conséquence, en vertu de la proposition 1.2.1,  $\Delta'_{\mathbf{u} \cdot F} \notin m$  pour des valeurs génériques de  $\mathbf{u}$  dans  $S_1$ . Fixons une forme linéaire générique  $\mathbf{u}$  telle que  $\Delta'_{\mathbf{u} \cdot F} \notin m$ .

Alors,  $F := (e_1, \dots, e_\mu)$  et  $\mathbf{u} \cdot F := (\mathbf{u} e_1, \dots, \mathbf{u} e_\mu)$  sont respectivement des bases de  $\Delta$  et  $\Delta'$ . Ainsi, pour toute famille  $B$  de  $\mu$  monômes de degré  $d - 1$  on a :

$$\frac{\Delta_{\mathbf{u} \cdot B}}{\Delta_F} = \frac{\Delta'_{\mathbf{u}^2 \cdot B}}{\Delta'_{\mathbf{u} \cdot F}}.$$

En effet, pour tout polynôme  $a$  de degré  $d$ , la décomposition suivante dans  $\Delta$  :

$$a = \sum_i z_i e_i \text{ dans } \Delta \quad (z_i \in A)$$

implique :

$$\mathbf{u} a = \sum_i z_i \mathbf{u} e_i \text{ dans } \Delta'$$

puisque  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{Ker} \Delta \subset \mathbf{ker} \Delta'$ . Pour toute famille  $B$  de  $\mu$  monômes de degré  $d - 1$  et tout  $b', b, b'' \in B$ , on a alors :

$$\sum_{b' \in B} \Delta_{\mathbf{u} \cdot B} [\mathbf{u}b' | x_i b] \Delta_{\mathbf{u} \cdot B} [x_0 b'' | x_j b'] = \frac{\Delta_F}{\Delta'_{\mathbf{u} \cdot F}} \sum_{b' \in B} \Delta_{\mathbf{u} \cdot B} [\mathbf{u}b' | x_i b] \Delta'_{\mathbf{u}^2 \cdot B} [\mathbf{u}^2 b'' | \mathbf{u} x_j b']$$

Mais d'après le lemme 2.4.11 on a :

$$\sum_{b' \in B} x_0 x_j b' \Delta_{\mathbf{u}.B}[\mathbf{u}b'|x_i b] = x_j x_i b \Delta_{\mathbf{u}.B} \text{ dans } \Delta'.$$

Enfin, par linéarité on obtient :

$$\sum_{b' \in B} \Delta_{\mathbf{u}.B}[\mathbf{u}b'|x_i b] \Delta_{\mathbf{u}.B}[\mathbf{u}b''|x_j b'] = \frac{\Delta_F}{\Delta'_{\mathbf{u}.F}} \Delta_{\mathbf{u}.B} \Delta'_{\mathbf{u}^2.B}[\mathbf{u}^2 b''|x_i x_j b]$$

Cette relation étant symétrique en  $i$  et  $j$ , on a alors :

$$\sum_{b' \in B} \Delta_{\mathbf{u}.B}[\mathbf{u}b'|x_i b] \Delta_{\mathbf{u}.B}[\mathbf{u}b''|x_j b'] = \sum_{b' \in B} \Delta_{\mathbf{u}.B}[\mathbf{u}b'|x_j b] \Delta_{\mathbf{u}.B}[\mathbf{u}b''|x_i b'],$$

ce qui prouve (2.4.10). □

*Remarque 2.4.16.* Supposons dans cette remarque que nous sommes dans le cas local :  $A$  est une  $\mathbb{K}$ -algèbre noethérienne locale. Etant données une forme linéaire  $\mathbf{u}$  et une famille  $B$  de  $\mu$  monômes de degré  $d - 1$  telles que  $\mathbf{u}.B$  est une base de  $\Delta$  (en tant que  $A$ -module libre), notons  $\pi$  la projection naturelle de  $\Delta$  sur  $\langle \mathbf{u}.B \rangle$ . Alors, les équations (2.4.9) impliquent que les opérateurs suivants :

$$\begin{aligned} M_i : \langle \mathbf{u}.B \rangle &\longrightarrow \langle \mathbf{u}.B \rangle \\ \mathbf{u}.b &\rightarrow \pi(x_i.b) \end{aligned}$$

commutent deux à deux pour tout  $0 \leq i \leq n$ .

**Proposition 2.4.17.** *Soit  $\Delta \in \mathbf{G}_d(X) \subset \mathbf{Gr}_{S_d}^\mu(X)$ . Alors, pour toute famille  $B$  de  $\mu$  monômes de degré  $d - 1$ , pour tout  $\mathcal{K} \in \mathbb{N}^{n+1}$  tel que  $|\mathcal{K}| = 2\mu$ , pour tout monôme  $a \in S_{d-1}$ , pour tout  $b \in B$  et tout  $k = 0, \dots, n$ , on a les relations suivantes dans  $H^0(X, \mathcal{L}^{\otimes 2})$  :*

$$\sum_{(\mathcal{I})+(\mathcal{J})=\mathcal{K}} \left( \Delta_{\mathcal{I}.B}[\mathbf{u}\mathcal{I}_b|x_k a] \otimes \Delta_{\mathcal{J}.B} - \sum_{b' \in B} \Delta_{\mathcal{I}.B}[\mathbf{u}\mathcal{I}_b|x_k b'] \otimes \Delta_{\mathcal{J}.B}[\mathbf{u}\mathcal{J}_{b'}|x_k a] \right) = 0, \quad (2.4.12)$$

*Démonstration.* Comme précédemment (en utilisant les notations (2.4.8)), les termes qui apparaissent dans les relations (2.4.12) sont exactement les coefficients du polynôme en  $\mathbf{u}$  :

$$\Delta_{\mathbf{u}.B}[\mathbf{u}b|x_k a] \otimes \Delta_{\mathbf{u}.B} - \sum_{b' \in B} \Delta_{\mathbf{u}.B}[\mathbf{u}b|x_k b'] \otimes \Delta_{\mathbf{u}.B}[\mathbf{u}b'|x_k a] \in \Gamma(X, \Delta)[\mathbf{u}]. \quad (2.4.13)$$

Il s'agira donc à nouveau de montrer que pour des valeurs génériques de  $\mathbf{u} \in S_1$  :

$$\Delta_{\mathbf{u}.B}[\mathbf{u}b|x_k a] \otimes \Delta_{\mathbf{u}.B} - \sum_{b' \in B} \Delta_{\mathbf{u}.B}[\mathbf{u}b|x_k b'] \otimes \Delta_{\mathbf{u}.B}[\mathbf{u}b'|x_k a] = 0 \text{ dans } H^0(X, \mathcal{L}). \quad (2.4.14)$$

Cette question est à nouveau locale et on supposera dans la suite de la preuve que  $X = \text{Spec}(A)$  avec  $A$  une  $\mathbb{K}$ -algèbre locale noethérienne d'idéal maximal  $m$ .

Soit  $I$  l'idéal homogène de  $\mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}^n}^\mu(X)$  associé à  $\Delta \in \mathbf{G}_d(X) \subset \mathbf{Gr}_{S_d}^\mu(X)$ . Soit  $\Delta' = S_{d+1}^A/I_{d+1}$ .  $\Delta$  et  $\Delta'$  sont donc des  $A$ -modules libres de rang  $\mu$ . Soit  $F := (e_1, \dots, e_\mu)$  une base de  $\Delta$ .

Comme dans la preuve de la proposition précédente 2.4.15, on pourra supposer que  $\mathbf{u}$  n'est pas un diviseur de zéro de  $I$  et que  $\mathbf{u}.F := (\mathbf{u}.e_1, \dots, \mathbf{u}.e_\mu)$  est une base de  $\Delta'$ . Alors, pour toute famille  $B$  de  $\mu$  monômes de degré  $d - 1$  on a encore :

$$\frac{\Delta_{\mathbf{u}.B}}{\Delta_F} = \frac{\Delta'_{\mathbf{u}^2.B}}{\Delta'_{\mathbf{u}.F}}$$

Ainsi, pour toute famille  $B$  de  $\mu$  monômes de degré  $d - 1$ , tout monôme  $a$  de degré  $d - 1$  et tout  $0 \leq k \leq n \in \mathbb{N}$  :

$$\Delta_{\mathbf{u}.B[\mathbf{u}.b|x_k b']} = \frac{\Delta_F}{\Delta'_{\mathbf{u}.F}} \Delta'_{\mathbf{u}^2.B[\mathbf{u}^2 b|x_k.\mathbf{u}.b']}$$

D'après le 2.4.11 on a aussi :

$$\sum_{b' \in B} \Delta_{\mathbf{u}.B[\mathbf{u}.b'|a]} \mathbf{u} b' x_k = \Delta_{\mathbf{u}.B} x_k a \text{ dans } \Delta'.$$

Enfin, par linéarité on a :

$$\sum_{b' \in B} \Delta_{\mathbf{u}.B[\mathbf{u}b|x_k b']} \Delta_{\mathbf{u}.B[\mathbf{u}.b'|a]} = \frac{\Delta_F}{\Delta'_{\mathbf{u}.F}} \Delta_{\mathbf{u}.B} \Delta'_{\mathbf{u}^2.B[\mathbf{u}^2 b|x_k.\mathbf{u}.a]} = \Delta_{\mathbf{u}.B[\mathbf{u}.b|x_k a]} \Delta_{\mathbf{u}.B}$$

ce qui prouve (2.4.17). □

*Remarque 2.4.18.* Supposons dans cette remarque que nous sommes dans le cas local :  $A$  est une  $\mathbb{K}$ -algèbre noethérienne locale. Soient  $\mathbf{u}$  une forme linéaire et  $B$  une famille de  $\mu$  monômes de degré  $d - 1$  telles que  $\mathbf{u}.B$  est une base de  $\Delta$  (en tant que  $A$ -module libre). Notons  $\pi$  la projection naturelle de  $\Delta$  sur  $\langle \mathbf{u}.B \rangle$ . Alors, étant donné  $a$  un monôme (ou plus généralement un polynôme) de degré  $d - 1$ , les équations (2.4.12) impliquent que :

$$\pi(x_i.a) = M_i(\pi(\mathbf{u}.a))$$

pour tout  $0 \leq i \leq n$ , où  $M_i$  est défini comme dans la remarque 2.4.16.

Afin de démontrer le théorème 2.4.20, nous avons besoin du lemme suivant :

**Lemme 2.4.19.** *Soit  $d \geq \mu$  un entier et  $E \subset S_d^A$  un sous- $A$ -module tel que  $S^A/E \in \mathbf{Gr}_{S_d}^\mu(A)$ . Alors, pour tout changement générique de coordonnées  $g \in \mathbf{PGL}(n+1)$ ,  $S_d^A/g \circ E$  admet une base de monômes de la forme  $x_0 B$ , avec  $B \subset S_{d-1}$ . On peut de plus supposer que le complémentaire de  $x_0 B$  dans l'ensemble des monômes de degré  $d$  est Borel-fixe.*

*Démonstration.* Soit  $I_d = \ker \Delta \subset S_d^A$ . En tensorisant par le corps résiduel  $k$  et en utilisant le lemme de Nakayama, on peut se ramener au cas où  $A = k$ . En outre, il suffit de prouver le résultat pour  $\Delta_{in} := S_d^k/J_d$  où  $J$  est l'idéal initial de  $(I_d)$  pour un ordre monomial  $<$  tel que  $x_i > x_{i+1}$ ,  $i = 0, \dots, n - 1$  (voir théorème 1.2.15 et définition 1.2.16). D'après [31, Thm. 15.20, p. 351], par changement générique de coordonnées, on peut supposer que  $J$  est Borel-fixe i.e si  $x_i x^\alpha \in J$  alors  $x_j x^\alpha \in J$  pour tout  $j > i$ .

Sous ces hypothèses, prouvons alors qu'il existe une famille  $B$  de  $\mu$  monômes de degré  $d-1$  telle que  $x_0 \cdot B$  soit une base de  $S_d^k/J_d$ . Il suffit pour cela de montrer que  $J_d + x_0 S_{d-1}^k = S_d^k$ . Posons  $J'_d := (J_d + x_0 S_{d-1}^k)/x_0 S_{d-1}^k$  en tant que sous-espace vectoriel de  $S'_d := S_d^k/x_0 S_{d-1}^k$  (qui est isomorphe à  $k[x_1, \dots, x_n]_d$ ). On doit alors prouver que  $S'_d = J'_d$ . Soit  $L \subset S_{d-1}^k$  l'ensemble défini par :

$$L := \{x \in S_{d-1}^k \mid x_0 x \in J_d\} = (J_d : x_0).$$

On a alors la suite exacte suivante :

$$0 \longrightarrow S_{d-1}/L \xrightarrow{*x_0} S_d^k/J_d \longrightarrow S'_d/J'_d \longrightarrow 0.$$

Supposons que  $\dim(S'_d/J'_d) > 0$ . Alors  $\dim(L) > s_{d-1} - \mu$  et comme  $d \geq \mu$ , d'après [37] [(2.10), p.66],  $\dim(S_1^k \cdot L) > s_d - \mu$ . De plus,  $J$  étant Borel-fixe,  $S_1 \cdot L \subset J_d$ . Ainsi,  $\dim(J_d) \geq \dim(S_1^k \cdot L) > s_d - \mu$ . Par hypothèse ceci est impossible et donc  $J'_d = S'_d$ . On déduit alors qu'il existe une famille  $B$  de  $\mu$  monômes de degré  $d-1$  telle que  $x_0 B$  est une base  $S_d^k/J_d$ . En particulier,  $x_0 B$  est le complémentaire de  $J_d$  (qui est Borel-fixe) dans l'ensemble des monômes de degré  $d$ .  $\square$

**Théorème 2.4.20.** [3][Thm.3.16, p.25] Soit  $\Delta \in \mathbf{Gr}_{S_d}^\mu(X)$ . Alors,  $\Delta$  appartient à  $\mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}^n}^\mu(X)$  si et seulement si il satisfait les relations (2.4.9) et (2.4.12).

*Démonstration.* La question est à nouveau locale, et nous supposons dans la suite de la preuve que  $X = \mathbf{Spec}(A)$  avec  $A$  une  $\mathbb{K}$ -algèbre locale noethérienne d'idéal maximal  $m$ .

D'après le lemme 2.4.19, il existe une famille  $B \subset S_{d-1}^A$  de  $\mu$  monômes de degré  $d-1$  et une forme linéaire  $\mathbf{u} \in S_1$  telles que  $\mathbf{u} \cdot B$  est une base de  $\Delta = T_d/I_d$ . Soit  $\pi : T_d/I_d \rightarrow \langle \mathbf{u} \cdot B \rangle$  l'isomorphisme naturel de  $A$ -modules de  $T_d/I_d$  vers  $\langle \mathbf{u} \cdot B \rangle$  (le sous  $A$ -module libre de base  $\mathbf{u} \cdot B$  de  $S_d^A$ ).

On introduit alors les opérateurs  $A$ -linéaires  $(M_i)_{i=1, \dots, n}$  sur  $\langle \mathbf{u} \cdot B \rangle$  définis de la manière suivante :

$$\begin{aligned} M_i &: \langle \mathbf{u} \cdot B \rangle \longrightarrow \langle \mathbf{u} \cdot B \rangle \\ \mathbf{u} \cdot b &\rightarrow \pi(x_i \cdot b). \end{aligned}$$

D'après les remarques 2.4.16 et 2.4.18, les relations (2.4.9) et (2.4.12) impliquent que :

- (i) les opérateurs  $(M_i)_{i=1, \dots, n}$  commutent deux à deux,
- (ii) pour tout  $0 \leq i \leq n$  et tout monôme  $a$  (ou plus généralement tout polynôme) de degré  $d-1$ , on a :

$$\pi(x_i \cdot a) = M_i(\pi(\mathbf{u} \cdot a)).$$

On définit alors pour tout  $k \geq 0$  les applications  $A$ -linéaires  $\sigma_k$  de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \sigma_k &: S_k^A \longrightarrow \langle \mathbf{u} \cdot B \rangle \\ P &\rightarrow P(M)(\pi(\mathbf{u}^d)) \end{aligned}$$

où  $P(M)$  désigne l'opérateur  $A$ -linéaire défini sur  $\langle \mathbf{u}.B \rangle$  en posant :

$$\sum_{\alpha} c_{\alpha} \cdot \mathbf{x}^{\alpha}(M) := \sum_{\alpha} c_{\alpha} \cdot M_0^{\alpha_0} \circ \dots \circ M_n^{\alpha_n}.$$

Notons que grâce au point (i)  $P(M)$  est bien défini et que par définition  $\mathbf{u}(M) = Id_{\langle \mathbf{u}.B \rangle}$ . On pose alors :

$$J := \bigoplus_k \text{Ker}(\sigma_k).$$

Remarquons tout d'abord que grâce au point (i),  $J$  est un idéal homogène de  $S^A$ . Montrons ensuite par récurrence sur  $0 \leq k \leq d$  que :

$$\sigma_d(\mathbf{u}^{d-k} P) = \pi(\mathbf{u}^{d-k} P) \forall P \in S_k^A.$$

Pour  $k = 0$ , cela découle de manière évidente du fait que  $\mathbf{u}(M) = Id_{\langle \mathbf{u}.B \rangle}$ . De  $k$  à  $k + 1$  : considérons un polynôme homogène de degré  $d$  de la forme  $\mathbf{u}^{d-k-1} x_i P$  pour  $0 \leq i \leq n$  et  $P \in S_k^A$ . Alors :

$$\begin{aligned} \sigma_d(\mathbf{u}^{d-k-1} x_i P) &= M_i \circ [\mathbf{u}^{d-k-1} P](M)(\mathbf{u}^d) = M_i \circ \mathbf{u}(M) \circ [\mathbf{u}^{d-k-1} P](M)(\mathbf{u}^d) \\ &= M_i \circ [\mathbf{u}^{d-k} P](M)(\mathbf{u}^d) = M_i(\sigma_d(\mathbf{u}^{d-k} P)). \end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence on déduit que :

$$\sigma_d(\mathbf{u}^{d-k-1} x_i P) = M_i(\sigma_d(\mathbf{u}^{d-k} P)) = M_i(\pi(\mathbf{u}^{d-k} P)).$$

Et enfin, en utilisant le point (ii) on a :

$$\sigma_d(\mathbf{u}^{d-k-1} x_i P) = M_i(\pi(\mathbf{u}^{d-k} P)) = \pi(\mathbf{u}^{d-k-1} x_i P).$$

On conclut donc que  $\sigma_d = \pi$  et comme  $\mathbf{u}(M) = Id_{\langle \mathbf{u}.B \rangle}$ , on déduit que  $\sigma_k$  est surjectif pour tout  $k \geq d$  (car  $\sigma_{d+k}(\mathbf{u}^k \mathbf{u} b) = \sigma_d(\mathbf{u} b) = \mathbf{u} b \forall b \in B$ ). Ainsi,  $J$  est un idéal homogène saturé (car  $\mathbf{u}$  est de manière évidente un non diviseur de zéro de  $J$ ) tel que  $S_k^A/J_k$  est libre de rang  $\mu$  pour tout  $k \geq d$ .  $J$  appartient donc à  $\mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}^n}^{\mu}(X)$ . Enfin, du fait que  $\sigma_d = \pi$ , on a :

$$I_d = J_d$$

et donc  $\Delta \in \mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}^n}^{\mu}(X)$ . □

**Théorème 2.4.21.** [3][Thm.3.17, p.27] Le foncteur  $\mathbf{G}_d$  est représenté par le sous-schéma fermé noté  $G_d$  de

$\mathbf{Proj}(\mathbb{K}[\wedge^{\mu} S_d / (\#_d)])$  défini par l'idéal engendré par les relations :

$$\sum_{(\mathcal{I})+(\mathcal{J})=\mathcal{K}} \sum_{b' \in B} (\mathbb{X}_{\mathcal{I}.B}^{d[x_{\mathcal{I}_b}, b'] | x_i b} \cdot \mathbb{X}_{\mathcal{J}.B}^{d[x_{\mathcal{J}_b}, b'' | x_j b']} - \mathbb{X}_{\mathcal{I}.B}^{d[x_{\mathcal{I}_b}, b'] | x_j b} \cdot \mathbb{X}_{\mathcal{J}.B}^{d[x_{\mathcal{J}_b}, b'' | x_i b']}) = 0. \quad (2.4.15)$$

pour toute famille  $B$  de  $\mu$  monômes de degré  $d - 1$ , pour tout  $\mathcal{K} \in \mathbb{N}^{n+1}$  avec  $|\mathcal{K}| = 2\mu$ , pour tout  $b, b' \in B$ , tout  $0 \leq i < j \leq n$ , ainsi que les relations :

$$\sum_{(\mathcal{I})+(\mathcal{J})=\mathcal{K}} \left( \mathbb{X}_{\mathcal{I}.B}^{d[x_{\mathcal{I}_b}, b] | x_k a} \cdot \mathbb{X}_{\mathcal{J}.B}^d - \sum_{b' \in B} \mathbb{X}_{\mathcal{I}.B}^{d[x_{\mathcal{I}_b}, b] | x_k b'} \cdot \mathbb{X}_{\mathcal{J}.B}^{d[x_{\mathcal{J}_b}, b' | x_b a]} \right) = 0. \quad (2.4.16)$$



pour toute famille  $B$  de  $\mu$  monômes de degré  $d - 1$ , pour tout  $\mathcal{K} \in \mathbb{N}^{n+1}$  tel que  $|\mathcal{K}| = 2\mu$ , pour tout monôme  $a \in S_{d-1}$ , pour tout  $b \in B$  et tout  $k = 0, \dots, n$ .

On a donc :

$$\text{Hilb}^\mu(\mathbb{P}^n) \simeq \mathbf{Proj}(\mathbb{K}[\wedge^\mu S_d]/(\#_d, (2.4.15), (2.4.16))).$$

*Démonstration.* Ce théorème est une conséquence du théorème 2.4.20. En effet, se donner un élément de  $\mathbf{G}_d(X)$  est équivalent à se donner un élément  $\Delta \in \mathbf{Gr}_{S_d}^\mu(X)$  dont les sections  $(\Delta_{\alpha_1, \dots, \alpha_\mu})_{\alpha_1 < \dots < \alpha_\mu} \in \mathbf{H}^0(X, \wedge^\mu \Delta)$  satisfont les relations (2.4.9) et (2.4.12). Cela équivaut encore à se donner un couple  $(\mathcal{L}, \phi)$  et des sections  $(l_{\alpha_1, \dots, \alpha_\mu})_{\alpha_1 < \dots < \alpha_\mu} \in \mathbf{H}^0(X, \mathcal{L})$  où  $\mathcal{L}$  est un faisceau inversible sur  $X$ ,  $\phi$  un morphisme surjectif :

$$\phi : \wedge^\mu S_d \otimes \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow 0$$

et  $(l_{\alpha_1, \dots, \alpha_\mu}) \in \mathbf{H}^0(X, \mathcal{L})$  engendrent  $\mathcal{L}$  et satisfont les relations  $\#_d, (2.4.9)$  et  $(2.4.12)$ . Enfin, c'est équivalent (voir par exemple [46, thm. 7.1, p. 150]) à se donner un morphisme de schémas :

$$X \longrightarrow \mathbf{Proj}(\mathbb{K}[\wedge^\mu S_d]/\#_d, (2.4.16), (2.4.15)).$$

Cette bijection naturelle induit donc un isomorphisme de foncteurs entre  $\mathbf{G}_d$  et le foncteur  $\mathbf{Hom}(-, \mathbf{Proj}(\mathbb{K}[\wedge^\mu S_d]/\#_d, (2.4.16), (2.4.15)))$  dans la catégorie  $\mathcal{C}$ .  $\mathbf{G}_d$  est donc représenté par  $\mathbf{Proj}(\mathbb{K}[\wedge^\mu S_d]/\#_d, (2.4.16), (2.4.15))$ .

Pour finir, d'après la proposition 2.4.4 :

$$\text{Hilb}^\mu(\mathbb{P}^n) \simeq G_d \simeq \mathbf{Proj}(\mathbb{K}[\wedge^\mu S_d]/\#_d, (2.4.16), (2.4.15)).$$

□

## 2.5 L'espace tangent de $\text{Hilb}^\mu(\mathbb{P}^n)$

L'objectif de cette section est de déterminer l'espace tangent au schéma de Hilbert  $\text{Hilb}^\mu(\mathbb{P}^n)$ . Bien que le résultat ne soit pas nouveau, nous fournirons une preuve originale utilisant essentiellement le formalisme des bases de bord ainsi que le théorème 1.2.26 qui en découle. Le résultat présenté ici ne constitue donc pas une réelle nouveauté à proprement parlé, mais illustre parfaitement l'intérêt des bases de bord et de l'approche développée section 1.2.3. Considérons un point  $\mathbb{K}$ -rationnel représenté par  $I_0 \subset \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$  via l'identification :

$$I_0 \in \mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}^n}^\mu(\mathbb{K}) \simeq \mathbf{Hom}(\mathbb{K}, \text{Hilb}^\mu(\mathbb{P}^n)).$$

On sait, d'après le théorème 2.4.21, que  $\text{Hilb}^\mu(\mathbb{P}^n)$  est un schéma projectif dont les équations sont données par (2.4.15) et (2.4.16) ainsi que les relation de Plücker  $\#$ . Dans toute cette section,  $d$  désignera un entier supérieur ou égal à  $\mu$ .

Pour  $\mathbf{u} \in S_1$ , on rappelle que l'on note  $\mathcal{H}_{\mathbf{u}}$  le sous-schéma ouvert de  $\mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}^n}^\mu$  qui représente le sous-foncteur ouvert  $\mathbf{H}_{\mathbf{u}}$  du foncteur de Hilbert (voir remarque 2.3.11). La famille  $(\mathcal{H}_{\mathbf{u}})_{\mathbf{u} \in S_1}$  constituant un recouvrement ouvert du schéma de Hilbert, il existe alors une forme linéaire  $\mathbf{v} \in S_1$  telle que :

$$I_0 \in \mathcal{H}_{\mathbf{v}},$$

ce qui revient à dire (voir remarque 2.3.6) que  $I_0 : \mathbf{v} = I_0$  (i.e  $\mathbf{v}$  n'est pas un diviseur de zéro de  $I_0$ ). Nous pouvons sans perte de généralité (après changement de coordonnées) nous ramener au cas où  $\mathbf{v} = x_0$ .

Rappelons enfin que pour toute famille  $B \in \mathcal{B}_d^\mu$  (voir remarque 2.3.11)  $\mathcal{H}_{x_0}^B$  représente le sous-foncteur ouvert  $\mathbf{H}_{x_0}^B$  du foncteur  $\mathbf{H}_{x_0}$ . La famille  $(\mathbf{H}_{x_0}^B)_{B \in \mathcal{B}_d^\mu}$  étant un recouvrement ouvert de  $\mathcal{H}_{x_0}$  et l'étude du plan tangent constituant une approche locale, on peut supposer que :

$$I_0 \in \mathcal{H}_{x_0}^B$$

pour une famille  $B \in \mathcal{B}_d^\mu$ .

On sait alors que l'affinisation (voir (2.3.11)) permet d'identifier  $\mathbf{H}_{x_0}^B$  et  $\mathbf{H}_0^B$  (voir (1.2.2)). D'après le théorème 1.2.26,  $\mathcal{H}_{x_0}^B$  n'est autre que le sous-schéma fermé de  $\mathbb{A}^N$  associé à l'idéal suivant :

$$\mathfrak{H}_{\underline{B}} := \{ \mathbf{z} \in \mathbb{K}^N; M_{x_i}(\mathbf{z}) \circ M_{x_j}(\mathbf{z}) - M_{x_j}(\mathbf{z}) \circ M_{x_i}(\mathbf{z}) = 0, 1 \leq i < j \leq n \} \subset \mathbb{K}[\mathbf{z}].$$

Rappelons (voir définition 1.2.6) que le système de coordonnées est ici le suivant :

$$\mathbf{z} = (z_{\alpha,\beta})_{\alpha \in \partial \underline{B}, \beta \in \underline{B}}.$$

Ce sont ces coordonnées que nous allons utiliser pour déterminer l'espace tangent au schéma de Hilbert  $Hilb^\mu(\mathbb{P}^n)$ .

Notons enfin que le point  $\mathbf{z}^0 := (z_{\alpha,\beta}^0)_{\alpha \in \partial \underline{B}, \beta \in \underline{B}}$  de  $\mathbb{A}^N$  associé à  $I_0 \in \mathbf{H}_0^B(\mathbb{K})$  s'obtient en écrivant pour tout  $\alpha \in \partial \underline{B}$ , la décomposition suivante :

$$\mathbf{x}^\alpha = \sum_{\beta \in \underline{B}} z_{\alpha,\beta} \mathbf{x}^\beta$$

dans l'algèbre quotient  $R/\underline{I}_0 := \mathbb{K}[\underline{\mathbf{x}}]/\underline{I}_0$  (qui par définition, a pour base  $\underline{B}$ ).

Fixons désormais  $B \in \mathcal{B}_d^\mu$  et considérons  $I_0$ , un  $\mathbb{K}$ -point de  $Hilb^\mu(\mathbb{P}^n)$ , tel que  $I_0 \in \mathbf{H}_{x_0}^B(\mathbb{K}) \simeq \mathbf{H}_0^B(\mathbb{K})$ . Notons  $\mathbf{z}^0 \in \mathbb{A}^N$  les coordonnées de  $I_0$  dans  $\mathbf{H}_0^B(\mathbb{K})$  et  $(h_\alpha^0)_{\alpha \in \partial \underline{B}}$  la famille de réécriture associée à  $\mathbf{z}^0$  :

$$h_\alpha^0(\underline{\mathbf{x}}) = \mathbf{x}^\alpha - \sum_{\beta \in \underline{B}} z_{\alpha,\beta}^0 \mathbf{x}^\beta \in \underline{I}_0 \subset R.$$

On rappelle que ces relations de réécriture engendrent l'idéal  $\underline{I}_0 \subset R$ .

Par définition, le plan tangent à  $\mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}^n}^\mu$  en  $I_0$ , est donné par l'ensemble des points :

$$\mathbf{z}^1 := (z^1)_{\alpha,\beta} \in \mathbb{A}^N$$

tels que le point  $\mathbf{z}^\varepsilon \in \mathbb{A}^N$  défini par :

$$z_{\alpha,\beta}^\varepsilon := z_{\alpha,\beta}^0 - \varepsilon z_{\alpha,\beta}^1, \quad \forall \alpha \in \partial \underline{B}, \quad \forall \beta \in \underline{B},$$

annule  $\mathfrak{H}_{\underline{B}}$  en  $\varepsilon = 0$ , avec multiplicité  $\geq 2$ . On notera alors :

$$h_\alpha^\varepsilon(\underline{\mathbf{x}}) := h_\alpha^0(\underline{\mathbf{x}}) + \varepsilon h_\alpha^1(\underline{\mathbf{x}})$$

avec :

$$h_\alpha^1(\underline{\mathbf{x}}) := \sum z_{\alpha,\beta}^1 \underline{\mathbf{x}}^\beta.$$

Enfin, pour  $1 \leq i \leq n$ , on notera  $M_i^\varepsilon$  (resp.  $M_i^0$ ) la matrice de multiplication par  $x_i$  dans  $\underline{B}$  qui est associée aux relations de réécriture  $(h_\alpha^\varepsilon)_{\alpha \in \partial B}$  ( resp.  $(h_\alpha^0)_{\alpha \in \partial B}$ ), voir définition 1.2.24. On obtient alors :

$$\begin{aligned} & M_i^\varepsilon \circ M_j^\varepsilon - M_j^\varepsilon \circ M_i^\varepsilon \\ &= (M_i^0 \circ M_j^0 - M_j^0 \circ M_i^0) \\ &\quad + \varepsilon (M_i^1 \circ M_j^0 + M_i^0 \circ M_j^1 - M_j^1 \circ M_i^0 - M_j^0 \circ M_i^1) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ &= \varepsilon (M_i^1 \circ M_j^0 + M_i^0 \circ M_j^1 - M_j^1 \circ M_i^0 - M_j^0 \circ M_i^1) + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

où  $M_{x_i}^\varepsilon = M_i^0 + \varepsilon M_i^1$ . On en déduit alors les équations du plan tangent à  $Hilb^\mu(\mathbb{P}^n)$  en le  $\mathbb{K}$ -point  $I_0 \in H_0^B(\mathbb{K})$ . Ce sont les équations linéaires suivantes en  $\mathbf{z}^1 \in \mathbb{A}^N$  :

$$M_i^1 \circ M_j^0 + M_i^0 \circ M_j^1 - M_j^1 \circ M_i^0 - M_j^0 \circ M_i^1 = 0 \quad (1 \leq i < j \leq n). \quad (2.5.1)$$

**Définition 2.5.1.** Soient  $\mathbf{z}^0 := (z_{\alpha,\beta})_{\alpha \in \partial B, \beta \in \underline{B}} \in \mathbb{A}^N$  un point,  $(h_\alpha^0(\underline{\mathbf{x}}))_{\alpha \in \partial B}$  la famille de réécriture associée à  $\mathbf{z}^0$  (i.e  $h_\alpha^0(\underline{\mathbf{x}}) := \underline{\mathbf{x}}^\alpha - \sum_{\beta \in \underline{B}} z_{\alpha,\beta} \underline{\mathbf{x}}^\beta$ ) et  $M_i^0$  la matrice de multiplication associée à ces règles de réécriture et à la variable  $x_i$  pour tout  $1 \leq i \leq n$ . On définit alors  $T_{\mathbf{z}^0}$  l'ensemble des  $\mathbf{z}^1 \in \mathbb{A}^N$  qui satisfont les équations linéaires (2.5.1).

On notera également  $H_{\mathbf{z}^0}^0 : \langle \underline{B}^+ \rangle \rightarrow \langle \underline{B}^+ \rangle$  l'application linéaire qui à  $\underline{\mathbf{x}}^\beta \in \underline{B}$  associe  $H_{\mathbf{z}^0}^0(\underline{\mathbf{x}}^\beta) := 0$  et qui à  $\underline{\mathbf{x}}^\alpha \in \partial \underline{B}$  associe  $H_{\mathbf{z}^0}^0(\underline{\mathbf{x}}^\alpha) := h_\alpha^0$ . Enfin,  $N_{\mathbf{z}^0} : \langle \underline{B}^+ \rangle \rightarrow \langle \underline{B} \rangle$  désignera la projection sur  $\langle \underline{B} \rangle$  le long de  $\langle h_\alpha^0 \rangle$ .

Pour finir, étant donné  $\mathbf{z}^1 \in \mathbb{A}^N$ , on notera  $H_{\mathbf{z}^1}^1 : \langle \underline{B}^+ \rangle \rightarrow \langle \underline{B} \rangle$  l'application qui à  $\underline{\mathbf{x}}^\beta \in \underline{B}$  associe  $H_{\mathbf{z}^1}^1(\underline{\mathbf{x}}^\beta) := 0$  et à  $\underline{\mathbf{x}}^\alpha \in \partial \underline{B}$  associe  $H_{\mathbf{z}^1}^1(\underline{\mathbf{x}}^\alpha) := h_\alpha^1(\underline{\mathbf{x}}) =: \sum_{\beta \in \underline{B}} z_{\alpha,\beta}^1 \underline{\mathbf{x}}^\beta$ .

*Remarque 2.5.2.* Avec les notations de la définition 2.5.1, remarquons que pour tout  $p = \sum_{\alpha \in \underline{B}^+} \lambda_\alpha \underline{\mathbf{x}}^\alpha \in \langle \underline{B}^+ \rangle$ , on a :

$$H_{\mathbf{z}^0}^0(p) = \sum_{\alpha \in \partial \underline{B}} \lambda_\alpha h_\alpha^0$$

et de plus :

$$N_{\mathbf{z}^0} + H_{\mathbf{z}^0}^0 = Id_{\langle \underline{B}^+ \rangle}.$$

Notons enfin que par définition, pour tout  $m \in \langle \underline{B} \rangle$  et tout  $1 \leq i \leq n$  on a :

$$M_i^0(m) = N_{\mathbf{z}^0}^0(x_i m).$$

De même, par construction, on a :

$$M_i^1(m) = H_{\mathbf{z}^1}^1(x_i m)$$

pour tout  $m \in \langle \underline{B} \rangle$ .

Nous fournissons ici une preuve plus simple d'un résultat bien connu [74][p. 217] concernant l'espace tangent. Nous utiliserons le formalisme et les résultats que nous avons introduits précédemment.

**Théorème 2.5.3.** [3][Thm.4.2, p.30] Soit  $I_0 \in \mathbb{H}_0^B$  un  $\mathbb{K}$ -point de  $\text{Hilb}^\mu(\mathbb{P}^n)$ . Notons  $\mathbf{z}^0 \in \mathbb{A}^N$  le point associé à  $I_0$  et  $(h_\alpha^0)_{\alpha \in \partial \underline{B}}$  les relations de réécriture correspondantes. Alors :

$$\begin{aligned} \phi : T_{\mathbf{z}^0} &\rightarrow \text{Hom}_R(\underline{I}_0, R/\underline{I}_0) \\ \mathbf{z}^1 &\rightarrow \phi(\mathbf{z}^1) : h_\alpha^0 \mapsto h_\alpha^1 \end{aligned}$$

où  $h_\alpha^1(\underline{\mathbf{x}}) = \sum_{\beta \in \underline{B}} z_{\alpha, \beta}^1 \underline{\mathbf{x}}^\beta$ , est un isomorphisme de  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

*Démonstration.* Rappelons que dans les conditions du théorème 2.5.3, on a :

$$\underline{I}_0 = (\{h_\alpha^0\}_{\alpha \in \partial \underline{B}}).$$

Etant donné  $\mathbf{z}^1 \in T_{\mathbf{z}^0}$ , commençons alors par prouver que  $\phi(\mathbf{z}^1)$  est bien défini, i.e si  $g = \sum_\alpha u_\alpha h_\alpha^0 = \sum_\alpha u'_\alpha h_\alpha^0 \in \underline{I}_0$  avec  $u_\alpha, u'_\alpha \in R$ , alors  $\sum_\alpha u_\alpha h_\alpha^1 = \sum_\alpha u'_\alpha h_\alpha^1$  dans  $R/\underline{I}_0$ . En d'autres termes, il s'agit de montrer que si  $\sum_\alpha v_\alpha h_\alpha^0 = 0$  dans  $R$ , alors  $\sum_\alpha v_\alpha h_\alpha^1 = 0$  dans  $R/\underline{I}_0$ . D'après [67, Thm.4.3], les syzygies des éléments de la base de bord  $\mathbf{h}^0 := (h_\alpha^0)_{\alpha \in \partial \underline{B}}$  sont engendrées par les polynômes de commutation :

$$x_i H_{\mathbf{z}^0}^0(x_{i'} m) - x_{i'} H_{\mathbf{z}^0}^0(x_i m) + H_{\mathbf{z}^0}^0(x_i N_{\mathbf{z}^0}(x_{i'} m)) - H_{\mathbf{z}^0}^0(x_{i'} N_{\mathbf{z}^0}(x_i m)),$$

pour tout  $m \in \underline{B}$ ,  $1 \leq i < i' \leq n$ . Montrons que ces relations sont encore satisfaites si l'on remplace  $H_{\mathbf{z}^0}^0$  par  $H_{\mathbf{z}^1}^1$ . Comme  $\mathbf{z}^1 \in T_{\mathbf{z}^0}$ , on a :

$$\begin{aligned} 0 &= M_i^0 \circ M_{i'}^1(m) - M_{i'}^0 \circ M_i^1(m) + M_i^1 \circ M_{i'}^0(m) - M_{i'}^1 \circ M_i^0(m) \\ &= N_{\mathbf{z}^0}(x_i H_{\mathbf{z}^1}^1(x_{i'} m)) - N_{\mathbf{z}^0}(x_{i'} H_{\mathbf{z}^1}^1(x_i m)) + H_{\mathbf{z}^1}^1(x_i N_{\mathbf{z}^0}(x_{i'} m)) - H_{\mathbf{z}^1}^1(x_{i'} N_{\mathbf{z}^0}(x_i m)) \\ &= x_i H_{\mathbf{z}^1}^1(x_{i'} m) - H_{\mathbf{z}^0}^0(x_i H_{\mathbf{z}^1}^1(x_{i'} m)) \\ &\quad - x_{i'} H_{\mathbf{z}^1}^1(x_i m) + H_{\mathbf{z}^0}^0(x_{i'} H_{\mathbf{z}^1}^1(x_i m)) \\ &\quad + H_{\mathbf{z}^1}^1(x_i N_{\mathbf{z}^0}(x_{i'} m)) - H_{\mathbf{z}^1}^1(x_{i'} N_{\mathbf{z}^0}(x_i m)) \\ &\equiv x_i H_{\mathbf{z}^1}^1(x_{i'} m) - x_{i'} H_{\mathbf{z}^1}^1(x_i m) + H_{\mathbf{z}^1}^1(x_i N_{\mathbf{z}^0}(x_{i'} m)) - H_{\mathbf{z}^1}^1(x_{i'} N_{\mathbf{z}^0}(x_i m)) \text{ modulo } \underline{I}_0. \end{aligned}$$

Cela prouve que les générateurs de syzygies s'envoient par le morphisme  $\phi(\mathbf{z}^1)$  sur  $0 \in R/\underline{I}_0$  et qu'ainsi, l'image par  $\phi(\mathbf{z}^1)$  de n'importe quelle syzygie de  $\mathbf{h}^0 := (h_\alpha^0)_{\alpha \in \partial \underline{B}}$  est 0. Le morphisme de  $R$ -algèbre  $\phi(\mathbf{z}^1)$  est donc bien défini dans  $\text{Hom}_R(\underline{I}_0, R/\underline{I}_0)$ .

Inversement, montrons que si  $\psi_0 \in \text{Hom}_R(\underline{I}_0, R/\underline{I}_0)$ , alors le point  $\mathbf{z}^1 = (z_{\alpha, \beta}^1)_{\alpha \in \partial \underline{B}, \beta \in \underline{B}}$  défini par :

$$\psi_0(h_\alpha^0)(\underline{\mathbf{x}}) = \sum_{\beta \in \underline{B}} z_{\alpha, \beta}^1 \underline{\mathbf{x}}^\beta \in R/\underline{I}_0,$$

appartient à  $T_{\mathbf{z}^0}$ . Comme  $\psi_0 \in \text{Hom}_R(\underline{I}_0, R/\underline{I}_0)$ , les syzygies de  $\mathbf{h}^0$  s'envoient sur 0 par  $\psi_0$ . Ainsi, pour tout  $m \in \underline{B}$ ,  $1 \leq i < i' \leq n$ , on a :

$$\begin{aligned} 0 &\equiv \psi_0(x_i H_{\mathbf{z}^0}^0(x_{i'} m) - x_{i'} H_{\mathbf{z}^0}^0(x_i m) + H_{\mathbf{z}^0}^0(x_i N_{\mathbf{z}^0}(x_{i'} m)) - H_{\mathbf{z}^0}^0(x_{i'} N_{\mathbf{z}^0}(x_i m))) \\ &\equiv x_i H_{\mathbf{z}^1}^1(x_{i'} m) - x_{i'} H_{\mathbf{z}^1}^1(x_i m) + H_{\mathbf{z}^1}^1(x_i N_{\mathbf{z}^0}(x_{i'} m)) - H_{\mathbf{z}^1}^1(x_{i'} N_{\mathbf{z}^0}(x_i m)) \text{ modulo } \underline{I}_0. \end{aligned}$$

Comme  $H_{\mathbf{z}^1}^1(p) \in \langle \underline{B} \rangle$  et  $N_{\mathbf{z}^0}(H_{\mathbf{z}^1}^1(p)) = H_{\mathbf{z}^1}^1(p)$  pour tout  $p \in \langle \underline{B}^+ \rangle$ , on a :

$$\begin{aligned} 0 &= N_{\mathbf{z}^0}(x_i H_{\mathbf{z}^1}^1(x_{i'} m)) - N_{\mathbf{z}^0}(x_{i'} H_{\mathbf{z}^1}^1(x_i m)) + H_{\mathbf{z}^1}^1(x_i N_{\mathbf{z}^0}(x_{i'} m)) - H_{\mathbf{z}^1}^1(x_{i'} N_{\mathbf{z}^0}(x_i m)) \\ &= M_i^0 \circ M_{i'}^1(m) - M_{i'}^0 \circ M_i^1(m) + M_i^1 \circ M_{i'}^0(m) - M_{i'}^1 \circ M_i^0(m), \end{aligned}$$

ce qui prouve que  $\mathbf{z}^1 \in T_{\mathbf{z}^0}$ . □

*Remarque 2.5.4.* Grâce au théorème 2.5.3 on montre que l'espace tangent à  $\text{Hilb}^\mu(\mathbb{P}^n)$ , qui est localement défini par les équations (2.5.1), est aussi isomorphe à  $\text{Hom}(\underline{I}_0/\underline{I}_0^2, R/\underline{I}_0)$ .



# Chapitre 3

## Schémas de Hilbert quelconques

### 3.1 Introduction

Ce chapitre correspond à un papier en cours de soumission et en collaboration avec P. Lella, M. Roggero et B. Mourrain intitulé "Low degree equations defining the Hilbert scheme" (voir [10]). La structure de ce chapitre est ainsi semblable à celle de l'article [10] à quelques changements de notations près. Ma contribution concerne principalement la démonstration du théorème 3.5.3, son extension au cas d'une  $\mathbb{K}$ -algèbre locale noethérienne  $A$  (voir proposition 3.5.6) et son application au théorème 3.5.7. J'ai aussi contribué avec P. Lella à la mise en forme de la section 3.2 et de son résultat principal : le corollaire 3.2.9.

Le schéma de Hilbert  $Hilb^P(\mathbb{P}^n)$ , associé à un polynôme de Hilbert admissible  $P(t)$  et à l'espace projectif  $\mathbb{P}^n$ , fut introduit initialement par [41]. Il paramètre l'ensemble des familles plates de sous-schémas fermés de  $X \times \mathbb{P}^n$  dont les fibres ont un polynôme de Hilbert égal à  $P(t)$  (où  $X \in \mathcal{C}$ ).

Rappelons que l'on note  $S = \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$  l'anneau des polynômes en  $n + 1$  variables dans un corps  $\mathbb{K}$  algébriquement clos de caractéristique zéro. On notera  $P(t)$  un polynôme de Hilbert admissible et  $Q(t) := \binom{t+n}{n} - P(t)$  son polynôme complémentaire. Comme dans le cas des polynômes constants égaux à  $\mu$  du chapitre 2, le schéma de Hilbert se présente naturellement comme un sous-schéma fermé du schéma Grassmannien  $Gr^{P(d)}(S_d)$  (voir [41, 74]) pour un entier  $d$  suffisamment grand.

Comme dans le chapitre 2, nous allons utiliser deux résultats importants de Gotzmann [37], connus sous le nom de Théorème de Régularité de Gotzmann [38, Thm.3.11] et de Théorème de Persistance de Gotzmann [38, Thm.3.8]. Ils permettent de déterminer l'entier  $d$  nécessaire au plongement du schéma  $Hilb^P(\mathbb{P}^n)$  dans la grassmannienne  $Gr^{P(d)}(S_d)$ . Le premier résultat permet aussi de calculer cet entier en décomposant simplement le polynôme de Hilbert en une somme de coefficients binomiaux. En utilisant le théorème de Macaulay sur la croissance minimale des idéaux polynomiaux 2.2.8, le deuxième théorème assure que  $I_d \in Gr^{P(d)}(S_d)$  a un polynôme de Hilbert  $P$  si et seulement si  $\dim I_{d+1} \leq Q(d+1)$ .

En appliquant ces résultats, de nombreux auteurs ont cherché à expliciter un ensemble d'équations définissant le schéma de Hilbert en tant que sous-schéma fermé de la Grassmannienne ou d'un produit de deux Grassmanniennes. On peut dégager deux motivations qui font de ce problème un domaine de recherche actif. La première d'entre elles est la question suivante :

*Peut-on déterminer un ensemble d'équations qui définissent le schéma de Hilbert comme sous-schéma fermé de la Grassmannienne  $Gr^{P(d)}(S_d)$  ?*

La deuxième motivation est plus pratique et concerne les méthodes concrètes permettant de calculer un tel ensemble d'équations. En effet, le nombre de variables mises en jeu dans de tels calculs est important et ne peut être réduit de par la complexité du problème. Le seul moyen de simplifier ces équations est alors de tenter de réduire leur degré, afin d'au moins pouvoir réaliser des calculs explicites pour certains cas simples non-triviaux.

A l'heure actuelle, les résultats connus fournissent des équations de degré trop élevé pour pouvoir mener à bien de tels calculs même dans les cas les plus simples. Iarrobino et Kleiman [49, Prop.C.30] ont par exemple déterminé un ensemble d'équations de degré  $Q(d+1) + 1$ . Plus tard, Bayer [5] a conjecturé qu'il existait un ensemble d'équations de degré  $n + 1$ . Haiman et Sturmfels [43] l'ont ensuite prouvé. Néanmoins ces deux bornes s'avèrent trop importantes, même dans les cas non-triviaux les plus simples. Ainsi, pour le schéma de Hilbert de 2 points dans  $\mathbb{P}^3$ , les équations de Iarrobino et Kleiman sont de degré 19 et celles de Bayer, Haiman et Sturmfels de degré 4.

Dans le chapitre 2 nous avons prouvé que le schéma de Hilbert ponctuel peut être défini par un ensemble d'équations de degré 2. Les outils utilisés étaient les bases de bord et la commutation de certains opérateurs de multiplication qui leurs sont associés. Néanmoins ces techniques se limitent au cas des idéaux zéro-dimensionnels.

D'un autre côté, d'un point de vue local, Bertone, Lella et Roggero [7] ont prouvé que  $Hilb^P(\mathbb{P}^n)$  peut être recouvert par des ouverts affines définis par des équations de degré inférieur ou égal à  $r + 2$  en les coordonnées de Plücker local, où  $r$  désigne le degré du polynôme de Hilbert  $P(t)$ . Les techniques utilisées sont semblables à celles que nous allons développer ici à savoir : les idéaux Borel-fixe et le résultat de Gotzmann [37].

Ces bornes coïncident avec celles fournies au chapitre 2 pour le cas des polynômes de Hilbert constants. Il est donc naturel de chercher à joindre ces deux points de vue afin de montrer que  $r + 2$  constitue aussi une borne pour le degré des équations globales du schéma de Hilbert.

Le résultat principal de ce chapitre est le suivant :

**Théorème 3.1.1.** *Soit  $P(t)$  un polynôme de Hilbert admissible de degré  $r$  dans  $\mathbb{P}^n$ . Alors,  $Hilb^P(\mathbb{P}^n)$  peut être défini comme un sous-schéma fermé de  $Gr_{S_d}^{P(d)}$  par un ensemble d'équations de degré  $\leq r + 2$  en les coordonnées de Plücker.*

Mis à part le cas trivial des hypersurfaces, cette borne est plus petite que celles de Iarrobino-Kleiman et Bayer-Haiman-Sturmfels. Elle semble de plus être d'avantage cohérente avec les objets que nous étudions. En effet, cette borne ne dépend que de la dimension des sous-schémas paramétrés par  $Hilb^P(\mathbb{P}^n)$ .

Dans la section 3.3 nous donnerons une preuve simple du résultat de Iarrobino et Kleiman. Nous utiliserons les propriétés des coordonnées de Plücker introduites à la section 1.2.5 du chapitre 1. Section 3.4, nous prouverons de la même manière l'existence de la borne obtenue par Bayer, Haiman et Sturmfels. En réalité, ces deux résultats découlent tous les deux de l'utilisation de la construction précédente sur le produit extérieur. La différence entre ces deux bornes est liée uniquement à l'application de deux stratégies distinctes. Enfin, dans la section 3.5, nous commencerons par introduire les notions et les propriétés nécessaires à la

preuve de notre résultat. Ce sont essentiellement des propriétés combinatoires sur les idéaux Borel-fixes ainsi que leur lien avec le schéma de Hilbert. Nous donnerons ensuite la démonstration de notre théorème en traitant d'abord le cas du corps puis celui des anneaux locaux, pour enfin conclure.

Une méthode permettant de calculer ces équations peut être directement déduite de la preuve de notre résultat. Néanmoins, même si ces équations sont plus simples que celles de Iarrobino-Kleiman et Bayer-Haiman-Sturmfels, leur calcul explicite demeure en général trop difficile pour être mené à bien.

Nous ferons, tout au long de ce chapitre, régulièrement usage des préliminaires introduits dans la section 1.2. Les notations seront celles décrites dans la section 1.1.

## 3.2 Coordonnées de Plücker

Les notations et définitions seront celles de la section 1.2.5. Nous rappelons la définition du foncteur Grassmannien :

**Définition 3.2.1.** Soit  $V$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $N$  et  $n \leq N$  un entier. Soit  $X$  un schéma de type fini sur  $\mathbb{K}$ . Le  $n$ -foncteur Grassmannien de  $V$  est le foncteur contravariant de la catégorie  $\mathcal{C}$  vers celle des ensembles qui à  $X$  associe l'ensemble  $\mathbf{Gr}_V^n(X)$  des faisceaux localement libres  $\Delta$  de rang  $n$ , tels que  $\Delta$  est un quotient de  $V \otimes_{\mathbb{K}} \mathcal{O}_X$  sur  $X$  :

$$V \otimes_{\mathbb{K}} \mathcal{O}_X \longrightarrow \Delta \longrightarrow 0.$$

Fixons  $V$  un  $K$ -espace vectoriel de dimension  $N$ ,  $E = (e_1, \dots, e_N)$  une base de  $V$ ,  $p \leq N$  un entier et  $X \in \mathcal{C}$  un schéma de type fini sur  $\mathbb{K}$ . Soit alors  $\Delta \in \mathbf{Gr}_V^p(X)$  :

$$g := V \otimes_{\mathbb{K}} \mathcal{O}_X \longrightarrow \Delta \longrightarrow 0.$$

Soit  $\mathcal{L} := \wedge^p \Delta$  et  $\phi := \wedge^p g$  :

$$\phi : \wedge^p V \otimes_{\mathbb{K}} \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow 0.$$

On rappelle qu'à toute famille  $v_1, \dots, v_p \in V$  de  $p$  vecteurs de  $V$ , on associe la section globale  $\Delta_{v_1, \dots, v_p} \in H^0(X, \mathcal{L})$  définie de la manière suivante :

$$\Delta_{v_1, \dots, v_p} = \phi(v_1, \dots, v_p).$$

Etant donné  $\mathcal{H} = (h_1, \dots, h_p)$  une famille de  $p$  indices deux à deux distincts compris entre 1 et  $N$ , on définit la section globale  $\Delta_{\mathcal{H}} \in H^0(X, \mathcal{L})$  par :

$$\Delta_{\mathcal{H}} := \Delta_{e_{h_1}, \dots, e_{h_p}}.$$

On notera  $\varepsilon_{\mathcal{H}}$  l'ordre de la permutation  $\sigma$  qui ordonne  $\mathcal{H}$ . On a donc :

$$\Delta_{\mathcal{H}} = \varepsilon_{\mathcal{H}} \cdot \Delta_{\sigma(\mathcal{H})}.$$

Etant données  $\mathcal{K} = \{k_1, \dots, k_a\}$  et  $\mathcal{H} = \{h_1, \dots, h_b\}$  deux familles d'indices deux à deux distincts compris entre 1 et  $N$ , on notera  $\mathcal{K}, \mathcal{H}$  la famille d'indices  $\{k_1, \dots, k_a, h_1, \dots, h_b\}$ ,



alors que l'on notera  $\mathcal{K} \cup \mathcal{H}$  la famille ordonnée dont les indices appartiennent à  $\mathcal{K}$  ou  $\mathcal{H}$ . Par exemple, étant donné  $\mathcal{K} = \{1, 5\}$  et  $\mathcal{H} = \{2\}$ ,  $\mathcal{K}, \mathcal{H} = \{1, 5, 2\}$ ,  $\mathcal{H}, \mathcal{K} = \{2, 1, 5\}$  et  $\mathcal{K} \cup \mathcal{H} = \mathcal{H} \cup \mathcal{K} = \{1, 2, 5\}$ . En revenant aux sections globales de  $\mathcal{L}$ , on a :

$$\Delta_{\mathcal{K}, \mathcal{H}} = \varepsilon_{\mathcal{K}, \mathcal{H}} \Delta_{\mathcal{K} \cup \mathcal{H}} \quad .$$

*Remarque 3.2.2.* Par la suite, nous serons amenés à nous intéresser au cas de schémas affines  $X = \mathbf{Spec}(A)$  où  $A$  est une  $K$ -algèbre noethérienne locale (cela correspond à l'étude locale en un point  $p$  de  $Y \in \mathcal{C}$ ). Comme dans la remarque 2.4.10, on peut identifier les faisceaux d' $\mathcal{O}_X$ -modules quasi-cohérents avec les  $A$ -modules et les sections  $\Delta_{v_1, \dots, v_p}$  avec des éléments de  $A$  par la construction suivante :

soit  $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in V^*$  une base de  $\Delta^\perp := \langle \lambda \in V^* \mid \lambda(\Delta) = 0 \rangle$ . On peut alors calculer les éléments  $\Delta_{v_1, \dots, v_p} \in A$  grâce au déterminant suivant :

$$\Delta_{v_1, \dots, v_p} = \begin{vmatrix} \lambda_1(v_1) & \dots & \lambda_1(v_p) \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_p(v_1) & \dots & \lambda_p(v_p) \end{vmatrix}. \quad (3.2.1)$$

*Remarque 3.2.3.* Dans la suite nous serons amenés à étudier  $\mathbf{Gr}_V^p(A)$  avec  $V = S_d$ . Dans ce cas là, comme dans la section 2.4, pour toute famille ordonnée  $\mathcal{H} = (h_1, \dots, h_p)$  de  $p$  multi-indices de taille  $d$ , nous désignerons par  $\Delta_{\mathcal{H}}$  l'élément :

$$\Delta_{\mathbf{x}^{h_1}, \dots, \mathbf{x}^{h_p}}$$

obtenu par (3.2.1).

*Remarque 3.2.4.* Dans le cas où  $X = \mathbf{Spec}(A)$  avec  $A$  une  $\mathbb{K}$ -algèbre locale noethérienne on a :

$$\mathbf{Gr}_V^p(A) := \mathbf{Gr}_V^p(X) = \{\Delta \text{ } A\text{-module libre de rang } p \mid \exists F \subset V^A, \Delta = V^A/F\}.$$

Cet ensemble s'identifie à

$$\mathbf{Gr}_V^p(A) \simeq \{F \subset V^A \text{ sous } A\text{-module libre de rang } N - p \mid V^A/F \text{ soit libre de rang } p\}.$$

Dans ce contexte, nous considèrerons donc les éléments de  $\mathbf{Gr}_V^p$  tantôt comme des  $A$ -modules libres de rang  $p$ , tantôt comme des sous  $A$ -modules libres de rang  $N - p$  de  $V^A$ .

Considérons pour commencer le cas d'un corps  $\mathbb{K} \subset k$ .

**Définition 3.2.5** ([4]). Un *extenseur* de taille  $l$  dans  $V^k := V \otimes_{\mathbb{K}} k$  est un élément de  $\wedge^l V^k$  de la forme  $v_1 \wedge \dots \wedge v_l$  avec  $v_1, \dots, v_l$  dans  $V^k$ .

Etant donné un  $F \subset V^k$ , un  $k$ -espace vectoriel de dimension  $l$ , on définit la notion d'*extenseur associé* à  $F$  comme étant un élément de la forme  $f_1 \wedge \dots \wedge f_l \in \wedge^l V$ , où  $\{f_1, \dots, f_l\}$  est une base de  $F$ . Notons que tous les extenseurs associés à  $F$  sont égaux à multiplication près par un scalaire non nul.

Dans la suite, comme dans [4], on identifiera tout sous-espace vectoriel  $F \subset V$  de dimension  $l$  avec un extenseur de taille  $l$  qui lui est associé.

Rappelons la Proposition 4.2 de [4].

**Proposition 3.2.6.** *Etant donnés des vecteurs  $a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_s$  dans  $V^k$  avec  $p+s > N$ , considérons les extenseurs suivants :*

$$T = a_1 \wedge \dots \wedge a_p \quad \text{et} \quad U = b_1 \wedge \dots \wedge b_s.$$

Soit  $[\ ] : V^N \rightarrow k$  une forme  $N$ -linéaire alternée. On a alors le relèvement suivant :

$$\begin{array}{ccc} (V)^N & \xrightarrow{[\ ]} & k \\ & \searrow & \nearrow \\ & \wedge^N V & \end{array}$$

Alors l'égalité suivante est satisfaite :

$$\sum_{\substack{\mathcal{H}=\{h_1, \dots, h_{N-s}\} \\ h_1 < \dots < h_{N-s} \\ \mathcal{K}=\{k_1, \dots, k_{p+s-N}\} \\ k_1 < \dots < k_{p+s-N} \\ \mathcal{H} \cup \mathcal{K} = \{1, \dots, p\}}} \varepsilon_{\mathcal{H}, \mathcal{K}} [a_{h_1} \wedge \dots \wedge a_{h_{N-s}}, U] a_{k_1} \wedge \dots \wedge a_{k_{p+s-N}} = \quad (3.2.2)$$

$$= \sum_{\substack{\mathcal{H}=\{h_1, \dots, h_{p+s-N}\} \\ h_1 < \dots < h_{p+s-N} \\ \mathcal{K}=\{k_1, \dots, k_{N-s}\} \\ k_1 < \dots < k_{N-s} \\ \mathcal{H} \cup \mathcal{K} = \{1, \dots, s\}}} \varepsilon_{\mathcal{H}, \mathcal{K}} [T, b_{k_1} \wedge \dots \wedge b_{k_{N-s}}] b_{h_1} \wedge \dots \wedge b_{h_{p+s-N}} \quad (3.2.3)$$

On note ces deux termes  $T * U$  et on appelle  $*$  l'opérateur d'intersection.

**Proposition 3.2.7** ([4]). *Soient  $T$  et  $U$  deux extenseurs associés aux sous-espaces vectoriels  $F \in \mathbf{Gr}_V^p(k)$  et  $G \in \mathbf{Gr}_V^l(k)$  tels que  $F + G = V^k$  et  $F \cap G \neq 0$  (on a donc  $p+l > N$ ). Soit  $*$  l'opérateur d'intersection associé à une forme  $N$ -linéaire alternée  $[\ ] \in (\wedge^N V^k)^* \simeq k$  non nulle, alors  $T * U$  est un extenseur associé à  $F \cap G$  (qui est de dimension  $p+l-N$ ).*

Voir Proposition 4.3, p.132 de [4].

**Proposition 3.2.8.** *Soit  $F \in \mathbf{Gr}_V^p(k)$  un sous-espace vectoriel de  $V$  de dimension  $s := N-p$  et  $1 \leq m \leq s$ . Soit  $\Delta := V/F$ , alors l'ensemble des éléments de la forme :*

$$\theta_{\mathcal{J}}^m(F) := \sum_{\substack{\mathcal{H}=\{h_1, \dots, h_p\} \\ h_1 < \dots < h_p \\ \mathcal{K}=\{k_1, \dots, k_m\} \\ k_1 < \dots < k_m \\ \mathcal{K} \cup \mathcal{H} = \mathcal{J}}} \Delta_{\mathcal{H}} \cdot e_{k_1} \wedge \dots \wedge e_{k_m} \cdot \varepsilon_{\mathcal{K}, \mathcal{H}} \in \wedge^m V^k$$

pour toute famille ordonnée  $\mathcal{J}$  de  $m+p$  indices compris entre 1 et  $N$  engendre  $\wedge^m F$ .

*Démonstration.* Utilisons l'équation (3.2.3) avec  $T = F \in \mathbf{Gr}_V^p(k)$  et  $U = B_{\mathcal{J}} = e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_{p+m}} \in \mathbf{Gr}_V^{N-p-m}(k)$ . On a alors :

$$\theta_{\mathcal{J}}^m(F) = F * B_{\mathcal{J}} = \sum_{\substack{\mathcal{H}=\{h_1, \dots, h_p\} \\ h_1 < \dots < h_p \\ \mathcal{K}=\{k_1, \dots, k_m\} \\ k_1 < \dots < k_m \\ \mathcal{K} \cup \mathcal{H} = \mathcal{J}}} [F, B_{\mathcal{H}}] B_{\mathcal{K}} \cdot \varepsilon_{\mathcal{K}, \mathcal{H}}$$

et d'après la proposition 3.2.7,  $\theta_{\mathcal{J}}^m(F)$  est un extenseur associé à  $F \cap \langle B_{\mathcal{J}} \rangle$ . Si l'on prend  $[, ]$  égal au déterminant dans la base de  $V^k$  qui consiste en l'union d'une base de  $F$  et d'une base de  $V^k/F$ , alors  $[V, B_{\mathcal{H}}] = \Delta_{\mathcal{H}}$ . Comme  $\theta_{\mathcal{J}}^m(F)$  est un extenseur associé à  $F \cap \langle B_{\mathcal{J}} \rangle$ , il engendre  $\wedge^m(F \cap \langle B_{\mathcal{J}} \rangle)$ . Ainsi, la famille :

$$\theta_{\mathcal{J}}^m(F) = \sum_{\substack{\mathcal{H}=\{h_1, \dots, h_p\} \\ h_1 < \dots < h_p \\ \mathcal{K}=\{k_1, \dots, k_m\} \\ k_1 < \dots < k_m \\ \mathcal{K} \cup \mathcal{H} = \mathcal{J}}} \Delta_{\mathcal{H}} e_{k_1} \wedge \dots \wedge e_{k_m} \cdot \varepsilon_{\mathcal{K}, \mathcal{H}}$$

pour tout  $\mathcal{J}$  engendre  $\langle \cup_{\mathcal{J}} \wedge^m(F \cap \langle B_{\mathcal{J}} \rangle) \rangle = \wedge^m F$ .  $\square$

Généralisons cette propriété au cas d'une  $\mathbb{K}$ -algèbre noethérienne locale  $A$  d'idéal maximal  $m$  et de corps résiduel  $k$ .

**Corollaire 3.2.9.** *Soit  $F \in \text{Gr}_V^p(A)$  un sous  $A$ -module libre de rang  $N-p$  de  $V^A := V \otimes_{\mathbb{K}} A$  tel que  $\Delta := V^A/F$  soit libre de rang  $p$ . Alors, l'ensemble des éléments de la forme :*

$$\theta_{\mathcal{J}}^m(F) := \sum_{\substack{\mathcal{H}=\{h_1, \dots, h_p\} \\ h_1 < \dots < h_p \\ \mathcal{K}=\{k_1, \dots, k_m\} \\ k_1 < \dots < k_m \\ \mathcal{K} \cup \mathcal{H} = \mathcal{J}}} \Delta_{\mathcal{H}} \cdot e_{k_1} \wedge \dots \wedge e_{k_m} \cdot \varepsilon_{\mathcal{K}, \mathcal{H}} \in \wedge^m V^A$$

pour toute famille ordonnée  $\mathcal{J}$  de  $m+p$  indices compris entre 1 et  $N$  engendre  $\wedge^m F$ .

*Démonstration.* Ce corollaire n'est qu'une conséquence de la proposition 3.2.8 qu'il s'agit de généraliser au cas d'un anneau local grâce au lemme de Nakayama.  $\square$

**Exemple 3.2.10.** Appliquons ces résultats à  $\text{Gr}_{\mathbb{K}^6}^2(k)$ . Soit  $\{e_1, \dots, e_6\}$  la base canonique de  $V^k = V \otimes_{\mathbb{K}} k = k^6$  et considérons le sous-espace vectoriel  $F = \langle f_1 = e_1, f_2 = e_2, f_3 = e_3 + 2e_4, f_4 = e_5 - e_6 \rangle$ . Une base du quotient  $E/F$  est donnée par  $\{e_4, e_6\}$  et une base de  $F^\perp$  est donnée par  $\{\lambda_1 = e_5^* + e_6^*, \lambda_2 = 2e_3^* - e_4^*\}$ .

Appliquons la méthode fournie par (3.2.1). On obtient :

$$\Delta_{35}(F) = -2, \Delta_{36}(F) = -2, \Delta_{45}(F) = 1, \Delta_{46}(F) = 1$$

et les 11 autres coefficients  $\Delta_{i,j}$  égaux à zéro.

Appliquons alors la proposition 3.2.8 afin de calculer un système de générateurs de  $\wedge^2 F$ .

$$\begin{aligned} \theta_{1235}^2(F) &= \Delta_{35}(F) e_1 \wedge e_2 = -2\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 = \theta_{1236}^2(F) = -2\theta_{1245}^2(F) = -2\theta_{1246}^2(F), \\ \theta_{1345}^2(F) &= \Delta_{45}(F) e_1 \wedge e_3 - \Delta_{35}(F) e_1 \wedge e_4 = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3 + 2\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_4 = \theta_{1346}^2(F), \\ \theta_{1345}^2(F) &= -\Delta_{36}(F) e_1 \wedge e_5 + \Delta_{35}(F) e_1 \wedge e_6 = 2\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_5 - 2\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_6 = -2\theta_{1456}^2(F), \\ \theta_{2345}^2(F) &= \Delta_{45}(F) e_2 \wedge e_3 - \Delta_{35}(F) e_2 \wedge e_4 = \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 + 2\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_4 = \theta_{2346}^2(F), \\ \theta_{2356}^2(F) &= -\Delta_{36}(F) e_2 \wedge e_5 + \Delta_{35}(F) e_2 \wedge e_6 = 2\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_5 - 2\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_6 = -2\theta_{2456}^2(F), \\ \theta_{3456}^2(F) &= -\Delta_{46}(F) e_3 \wedge e_5 + \Delta_{45}(F) e_3 \wedge e_6 + \Delta_{36}(F) e_4 \wedge e_5 - \Delta_{35}(F) e_4 \wedge e_6 = \\ &= -\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_5 + \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_6 - 2\mathbf{e}_4 \wedge \mathbf{e}_5 + 2\mathbf{e}_4 \wedge \mathbf{e}_6 \end{aligned}$$

**Définition 3.2.11.** Etant donné un polynôme de Hilbert  $P(t)$  de nombre de Gotzmann  $d = a(P)$ , nous considèrerons le  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $V = S_d$  pour un certain degré  $d \in \mathbb{N}$  muni de sa base monomiale. Soient  $A$  une  $\mathbb{K}$ -algèbre locale noethérienne et  $F \in \mathbf{Gr}_{S_d}^{P(d)}(A)$  un sous  $A$ -module libre de rang  $Q(d) = s_d - P(d)$  de  $S_d^A$ , tels que  $\Delta := S_d^A/F$  soit libre de rang  $P(d)$ . Les éléments  $\theta_{\mathcal{J}}^m(F)$  introduits dans le corolaire 3.2.9 sont :

$$\theta_{\mathcal{J}}^m(F) := \sum_{\substack{\mathcal{H}=\{h_1, \dots, h_p\} \\ h_1 < \dots < h_p \\ \mathcal{K}=\{k_1, \dots, k_m\} \\ k_1 < \dots < k_m \\ \mathcal{K} \cup \mathcal{H} = \mathcal{J}}} \Delta_{\mathcal{H}} \cdot x^{\alpha_{k_1}} \wedge \dots \wedge x^{\alpha_{k_m}} \cdot \varepsilon_{\mathcal{K}, \mathcal{H}}$$

et nous noterons  $\theta^m(F)$  l'ensemble des  $\theta_{\mathcal{J}}^m(F)$  pour tout  $\mathcal{J}$  de taille  $m + p$ . On définit de plus :

$$x_i \theta_{\mathcal{J}}^m(F) = \sum_{\substack{\mathcal{H}=\{h_1, \dots, h_p\} \\ h_1 < \dots < h_p \\ \mathcal{K}=\{k_1, \dots, k_m\} \\ k_1 < \dots < k_m \\ \mathcal{K} \cup \mathcal{H} = \mathcal{J}}} \Delta_{\mathcal{H}} \cdot (x_i x^{\alpha_{k_1}}) \wedge \dots \wedge (x_i x^{\alpha_{k_m}}) \cdot \varepsilon_{\mathcal{K}, \mathcal{H}},$$

$$\mathcal{B}_{x_i}^m(F) = \{x_i \theta_{\mathcal{J}}^m(F), \forall \mathcal{J}\} \text{ et } \mathcal{B}^m(F) = \{\mathcal{B}_{x_i}^m(F), \forall 0 \leq i \leq n\}.$$

### 3.3 Equations de Iarrobino-Kleiman

**Théorème 3.3.1** (Iarrobino, Kleiman [49]). *Soit  $\mathbb{K} \subset k$  un corps,  $P(t)$  un polynôme de Hilbert admissible dans  $k[x_0, \dots, x_n]$  et  $d := a(P)$  son nombre de Gotzmann (voir [49][C.12, p.295]). Posons  $Q(t) = \binom{n+t}{n} - P(t)$ . Alors  $\mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}^n}^P(k)$  peut être défini comme une sous-variété fermée de la Grassmannienne  $\mathbf{Gr}_{S_d}^{P(d)}(k)$  par des équations de degré  $Q(d+1) + 1$ .*

*Démonstration.* Rappelons la construction  $\mathbf{Gr}_{S_d}^{P(d)}(k)$  en tant que variété de  $\mathbb{P}_k^N$  avec :

$$N = \dim_k \wedge^{P(d)} S_d^k.$$

Dans  $\mathbb{P}_k^N$ , on considère les coordonnées de Plücker (voir définition 2.4.7) :

$$(\mathbb{X}_{\alpha_1, \dots, \alpha_{P(d)}}^k)_{\alpha_1 < \dots < \alpha_{P(d)}, |\alpha_i|=d}.$$

A tout point  $\Delta \in \mathbf{Gr}_{S_d}^{P(d)}(k)$  on associe le point de  $\mathbb{P}_k^N$  dont les coordonnées sont données par :

$$\mathbb{X}_{\alpha_1, \dots, \alpha_{P(d)}}^k = \Delta_{\alpha_1, \dots, \alpha_{P(d)}}.$$

où  $\Delta_{\alpha_1, \dots, \alpha_{P(d)}} \in k$  est donné par la remarque 3.2.3. On notera ces coordonnées  $\Delta_{\mathcal{H}}$  pour toute famille ordonnée  $\mathcal{H}$  de multi-indices de taille  $d$ .

On a alors le plongement suivant :

$$\phi : \mathbf{Gr}_{S_d}^{P(d)}(k) \longrightarrow \mathbb{P}_k^N \tag{3.3.1}$$

$$\Delta \rightarrow (\Delta_{\alpha_1, \dots, \alpha_{P(d)}}).$$

L'image de  $\phi$  dans  $\mathbb{P}_k^N$  est une variété projective (que l'on identifiera à  $\mathbf{Gr}_{S_d}^{P(d)}(k)$ ) dont les équations sont les relations de Plücker (voir (1.2.11)). Montrons alors que  $\mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}^n}^P(k)$  est une sous-variété de  $\mathbf{Gr}_{S_d}^{P(d)}(k)$  via le plongement  $\phi$ .

Soit  $\Delta = S_d^k/I_d \in \mathbf{Gr}_{S_d}^{P(d)}(k)$ , d'après la proposition 3.2.8 on a :

$$I_d = \langle (\theta_{\mathcal{J}}^1)_{\mathcal{J}}(\Delta) \rangle = \langle \theta^1(\Delta) \rangle.$$

Par définition du plongement de  $\mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}^n}^P(k)$  dans  $\mathbf{Gr}_{S_d}^{P(d)}(k)$  (voir la sous-section 2.4.1),  $\Delta \in \mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}^n}^P(k)$  si et seulement si  $S_1.I_d = \langle \mathcal{B}^1 \rangle$  est de dimension inférieure ou égale à  $Q(d+1)$ . Ainsi, l'écriture des mineurs de taille  $Q(d+1)+1$  de la matrice dont les lignes sont données par les éléments de  $\mathcal{B}^1$ , fournissent des équations de degré  $Q(d+1)+1$  en les coordonnées de  $(\Delta_{\alpha_1, \dots, \alpha_{P(d)}}) \in \mathbb{P}^N$ . Celles-ci définissent  $\mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}^n}^P(k)$  en tant que sous-variété fermée de  $\mathbf{Gr}_{S_d}^{P(d)}(k) \subset \mathbb{P}^N$ .  $\square$

**Exemple 3.3.2.** Calculons les équations de Iarrobino-Kleiman pour  $\mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}^2}^2(k)$ . Le nombre de Gotzmann étant ici égal à 2, nous considérons la Grassmannienne  $\mathbf{Gr}_{S_2}^2(k) \simeq \mathbf{Gr}_{\mathbb{K}^6}^2(k)$  comme dans l'exemple 3.2.10 avec la base monomiale  $\{e_1 = x^2, e_2 = xy, e_3 = y^2, e_4 = xz, e_5 = yz, e_6 = z^2\}$ . En suivant la preuve du théorème 3.3.1, on considère l'idéal  $I = \langle \theta^1 \rangle$  et on impose que toute famille de  $q(3)+1 = 9$  polynômes de  $\{\mathcal{B}_x^1, \mathcal{B}_y^1, \mathcal{B}_z^1\}$  soit dépendante. Considérons par exemple les polynômes représentés dans la matrice suivante :

	$x^3$	$x^2y$	$xy^2$	$y^3$	$x^2z$	$xyz$	$y^2z$	$xz^2$	$yz^2$	$z^3$
$x \theta_{126}^1$	$\Delta_{26}$	$-\Delta_{16}$	0	0	0	0	0	$\Delta_{12}$	0	0
$x \theta_{156}^1$	$\Delta_{56}$	0	0	0	0	$-\Delta_{16}$	0	$\Delta_{15}$	0	0
$x \theta_{234}^1$	0	$\Delta_{34}$	$-\Delta_{24}$	0	$\Delta_{23}$	0	0	0	0	0
$x \theta_{356}^1$	0	0	$\Delta_{56}$	0	0	$-\Delta_{36}$	0	$\Delta_{35}$	0	0
$y \theta_{123}^1$	0	$\Delta_{23}$	$-\Delta_{13}$	$\Delta_{12}$	0	0	0	0	0	0
$y \theta_{345}^1$	0	0	0	$\Delta_{45}$	0	$-\Delta_{35}$	$\Delta_{34}$	0	0	0
$z \theta_{146}^1$	0	0	0	0	$\Delta_{46}$	0	0	$-\Delta_{16}$	0	$\Delta_{14}$
$z \theta_{234}^1$	0	0	0	0	0	$\Delta_{34}$	$-\Delta_{24}$	$\Delta_{23}$	0	0
$z \theta_{456}^1$	0	0	0	0	0	0	0	$\Delta_{56}$	$-\Delta_{46}$	$\Delta_{45}$

(3.3.2)

Les conditions de dépendance correspondent à l'annulation des mineurs de taille 9 :

- $-\Delta_{16}\Delta_{23}\Delta_{24}^2\Delta_{26}\Delta_{35}\Delta_{45}\Delta_{46}^2 + \Delta_{13}\Delta_{16}\Delta_{24}\Delta_{26}\Delta_{34}\Delta_{35}\Delta_{45}\Delta_{46}^2 + \Delta_{15}\Delta_{23}\Delta_{24}^2\Delta_{26}\Delta_{36}\Delta_{45}\Delta_{46}^2 +$   
 $-\Delta_{13}\Delta_{15}\Delta_{24}\Delta_{26}\Delta_{34}\Delta_{36}\Delta_{45}\Delta_{46}^2 - \Delta_{16}^2\Delta_{23}^2\Delta_{24}\Delta_{26}\Delta_{45}\Delta_{46}\Delta_{56} + \Delta_{13}\Delta_{16}^2\Delta_{23}\Delta_{24}\Delta_{36}\Delta_{45}\Delta_{46}\Delta_{56} +$   
 $-\Delta_{12}\Delta_{16}\Delta_{23}\Delta_{26}\Delta_{34}^2\Delta_{46}^2\Delta_{56} - \Delta_{12}\Delta_{15}\Delta_{26}\Delta_{34}^3\Delta_{46}^2\Delta_{56} + \Delta_{12}\Delta_{15}\Delta_{24}\Delta_{26}\Delta_{34}\Delta_{35}\Delta_{46}^2\Delta_{56} +$   
 $+ \Delta_{12}\Delta_{16}\Delta_{24}\Delta_{34}^2\Delta_{35}\Delta_{46}^2\Delta_{56} - \Delta_{12}\Delta_{16}\Delta_{24}^2\Delta_{35}\Delta_{46}^2\Delta_{56} + \Delta_{12}\Delta_{16}\Delta_{23}\Delta_{24}\Delta_{34}\Delta_{36}\Delta_{46}^2\Delta_{56} +$   
 $-\Delta_{12}\Delta_{23}\Delta_{24}^2\Delta_{36}\Delta_{45}\Delta_{46}^2\Delta_{56} + \Delta_{12}\Delta_{13}\Delta_{24}\Delta_{34}\Delta_{36}\Delta_{45}\Delta_{46}^2\Delta_{56} + \Delta_{12}\Delta_{16}^2\Delta_{23}\Delta_{34}^2\Delta_{46}\Delta_{56}^2 +$   
 $-\Delta_{12}\Delta_{16}^2\Delta_{23}\Delta_{24}\Delta_{35}\Delta_{46}\Delta_{56}^2 + \Delta_{12}^2\Delta_{34}^3\Delta_{46}^2\Delta_{56}^2 - \Delta_{12}^2\Delta_{24}\Delta_{34}\Delta_{35}\Delta_{46}^2\Delta_{56}^2,$

- $\Delta_{16}\Delta_{23}\Delta_{24}^2\Delta_{26}\Delta_{35}\Delta_{45}^2\Delta_{46} - \Delta_{13}\Delta_{16}\Delta_{24}\Delta_{26}\Delta_{34}\Delta_{35}\Delta_{45}^2\Delta_{46} - \Delta_{15}\Delta_{23}\Delta_{24}^2\Delta_{26}\Delta_{36}\Delta_{45}^2\Delta_{46} +$   
 $+ \Delta_{13}\Delta_{15}\Delta_{24}\Delta_{26}\Delta_{34}\Delta_{36}\Delta_{45}^2\Delta_{46} + \Delta_{16}^2\Delta_{23}^2\Delta_{24}\Delta_{26}\Delta_{45}^2\Delta_{56} - \Delta_{13}\Delta_{16}^2\Delta_{23}\Delta_{24}\Delta_{36}\Delta_{45}^2\Delta_{56} +$   
 $+ \Delta_{12}\Delta_{16}\Delta_{23}\Delta_{26}\Delta_{34}^2\Delta_{45}\Delta_{46}\Delta_{56} + \Delta_{12}\Delta_{15}\Delta_{26}\Delta_{34}^3\Delta_{45}\Delta_{46}\Delta_{56} - \Delta_{12}\Delta_{15}\Delta_{24}\Delta_{26}\Delta_{34}\Delta_{35}\Delta_{45}\Delta_{46}\Delta_{56} +$   
 $- \Delta_{12}\Delta_{16}\Delta_{24}\Delta_{34}^2\Delta_{35}\Delta_{45}\Delta_{46}\Delta_{56} + \Delta_{12}\Delta_{16}\Delta_{24}^2\Delta_{35}^2\Delta_{45}\Delta_{46}\Delta_{56} - \Delta_{12}\Delta_{16}\Delta_{23}\Delta_{24}\Delta_{34}\Delta_{36}\Delta_{45}\Delta_{46}\Delta_{56} +$   
 $+ \Delta_{12}\Delta_{23}\Delta_{24}^2\Delta_{36}\Delta_{45}^2\Delta_{46}\Delta_{56} - \Delta_{12}\Delta_{13}\Delta_{24}\Delta_{34}\Delta_{36}\Delta_{45}^2\Delta_{46}\Delta_{56} + \Delta_{14}\Delta_{16}\Delta_{23}^2\Delta_{24}\Delta_{26}\Delta_{45}\Delta_{56}^2 +$   
 $- \Delta_{12}\Delta_{16}^2\Delta_{23}\Delta_{34}^2\Delta_{45}\Delta_{56}^2 + \Delta_{12}\Delta_{16}^2\Delta_{23}\Delta_{24}\Delta_{35}\Delta_{45}\Delta_{56}^2 - \Delta_{13}\Delta_{14}\Delta_{16}\Delta_{23}\Delta_{24}\Delta_{36}\Delta_{45}\Delta_{56}^2 +$   
 $- \Delta_{12}^2\Delta_{34}^3\Delta_{45}\Delta_{46}\Delta_{56}^2 + \Delta_{12}^2\Delta_{24}\Delta_{34}\Delta_{35}\Delta_{45}\Delta_{46}\Delta_{56}^2 - \Delta_{12}\Delta_{14}\Delta_{16}\Delta_{23}\Delta_{34}\Delta_{56}^3 +$   
 $+ \Delta_{12}\Delta_{14}\Delta_{16}\Delta_{23}\Delta_{24}\Delta_{35}\Delta_{56}^3,$
- $- \Delta_{14}\Delta_{16}\Delta_{23}^2\Delta_{24}\Delta_{26}\Delta_{45}\Delta_{46}\Delta_{56} + \Delta_{13}\Delta_{14}\Delta_{16}\Delta_{23}\Delta_{24}\Delta_{36}\Delta_{45}\Delta_{46}\Delta_{56} + \Delta_{12}\Delta_{14}\Delta_{16}\Delta_{23}\Delta_{34}^2\Delta_{46}\Delta_{56}^2 +$   
 $- \Delta_{12}\Delta_{14}\Delta_{16}\Delta_{23}\Delta_{24}\Delta_{35}\Delta_{46}\Delta_{56}^2,$
- $\Delta_{14}\Delta_{16}\Delta_{23}^3\Delta_{26}\Delta_{45}\Delta_{46}\Delta_{56} + \Delta_{14}\Delta_{15}\Delta_{23}^2\Delta_{26}\Delta_{34}\Delta_{45}\Delta_{46}\Delta_{56} - \Delta_{13}\Delta_{14}\Delta_{16}\Delta_{23}\Delta_{34}\Delta_{35}\Delta_{45}\Delta_{46}\Delta_{56} +$   
 $- \Delta_{13}\Delta_{14}\Delta_{16}\Delta_{23}^2\Delta_{36}\Delta_{45}\Delta_{46}\Delta_{56} + \Delta_{12}\Delta_{14}\Delta_{16}\Delta_{23}^2\Delta_{35}\Delta_{46}\Delta_{56}^2 - \Delta_{12}\Delta_{14}\Delta_{23}^2\Delta_{34}\Delta_{45}\Delta_{46}\Delta_{56}^2,$
- $- \Delta_{14}\Delta_{15}\Delta_{23}^2\Delta_{24}\Delta_{26}\Delta_{45}\Delta_{46}\Delta_{56} + \Delta_{13}\Delta_{14}\Delta_{16}\Delta_{23}\Delta_{24}\Delta_{35}\Delta_{45}\Delta_{46}\Delta_{56} - \Delta_{12}\Delta_{14}\Delta_{16}\Delta_{23}^2\Delta_{34}\Delta_{46}\Delta_{56}^2 +$   
 $+ \Delta_{12}\Delta_{14}\Delta_{23}^2\Delta_{24}\Delta_{45}\Delta_{46}\Delta_{56}^2,$
- $- \Delta_{14}\Delta_{16}\Delta_{23}\Delta_{24}^2\Delta_{26}\Delta_{35}\Delta_{45}\Delta_{46} + \Delta_{13}\Delta_{14}\Delta_{16}\Delta_{24}\Delta_{26}\Delta_{34}\Delta_{35}\Delta_{45}\Delta_{46} + \Delta_{14}\Delta_{15}\Delta_{23}\Delta_{24}^2\Delta_{26}\Delta_{36}\Delta_{45}\Delta_{46} +$   
 $- \Delta_{13}\Delta_{14}\Delta_{15}\Delta_{24}\Delta_{26}\Delta_{34}\Delta_{36}\Delta_{45}\Delta_{46} - \Delta_{12}\Delta_{14}\Delta_{16}\Delta_{23}\Delta_{26}\Delta_{34}^2\Delta_{46}\Delta_{56} - \Delta_{12}\Delta_{14}\Delta_{15}\Delta_{26}\Delta_{34}^3\Delta_{46}\Delta_{56} +$   
 $+ \Delta_{12}\Delta_{14}\Delta_{15}\Delta_{24}\Delta_{26}\Delta_{34}\Delta_{35}\Delta_{46}\Delta_{56} + \Delta_{12}\Delta_{14}\Delta_{16}\Delta_{24}\Delta_{34}^2\Delta_{35}\Delta_{46}\Delta_{56} - \Delta_{12}\Delta_{14}\Delta_{16}\Delta_{24}^2\Delta_{35}^2\Delta_{46}\Delta_{56} +$   
 $+ \Delta_{12}\Delta_{14}\Delta_{16}\Delta_{23}\Delta_{24}\Delta_{34}\Delta_{36}\Delta_{46}\Delta_{56} - \Delta_{12}\Delta_{14}\Delta_{23}\Delta_{24}^2\Delta_{36}\Delta_{45}\Delta_{46}\Delta_{56} + \Delta_{12}\Delta_{13}\Delta_{14}\Delta_{24}\Delta_{34}\Delta_{36}\Delta_{45}\Delta_{46}\Delta_{56} +$   
 $+ \Delta_{12}^2\Delta_{14}\Delta_{34}^3\Delta_{46}\Delta_{56}^2 - \Delta_{12}^2\Delta_{14}\Delta_{24}\Delta_{34}\Delta_{35}\Delta_{46}\Delta_{56}^2,$
- $\Delta_{14}\Delta_{16}\Delta_{23}^3\Delta_{26}\Delta_{34}\Delta_{46}\Delta_{56} + \Delta_{14}\Delta_{15}\Delta_{23}^2\Delta_{26}\Delta_{34}^2\Delta_{46}\Delta_{56} - \Delta_{14}\Delta_{15}\Delta_{23}^2\Delta_{24}\Delta_{26}\Delta_{35}\Delta_{46}\Delta_{56} +$   
 $- \Delta_{13}\Delta_{14}\Delta_{16}\Delta_{23}\Delta_{34}^2\Delta_{35}\Delta_{46}\Delta_{56} + \Delta_{13}\Delta_{14}\Delta_{16}\Delta_{23}\Delta_{24}\Delta_{35}^2\Delta_{46}\Delta_{56} - \Delta_{13}\Delta_{14}\Delta_{16}\Delta_{23}^2\Delta_{34}\Delta_{36}\Delta_{46}\Delta_{56} +$   
 $- \Delta_{12}\Delta_{14}\Delta_{23}^2\Delta_{34}^2\Delta_{46}\Delta_{56}^2 + \Delta_{12}\Delta_{14}\Delta_{23}^2\Delta_{24}\Delta_{35}\Delta_{46}\Delta_{56}^2,$
- $- \Delta_{14}\Delta_{16}\Delta_{23}^2\Delta_{24}\Delta_{26}\Delta_{35}\Delta_{45}\Delta_{46} + \Delta_{14}\Delta_{15}\Delta_{23}^2\Delta_{24}\Delta_{26}\Delta_{36}\Delta_{45}\Delta_{46} + \Delta_{12}\Delta_{14}\Delta_{16}\Delta_{23}\Delta_{34}^2\Delta_{35}\Delta_{46}\Delta_{56} +$   
 $- \Delta_{12}\Delta_{14}\Delta_{16}\Delta_{23}\Delta_{24}\Delta_{35}^2\Delta_{46}\Delta_{56} + \Delta_{12}\Delta_{14}\Delta_{16}\Delta_{23}^2\Delta_{34}\Delta_{36}\Delta_{46}\Delta_{56} - \Delta_{12}\Delta_{14}\Delta_{23}^2\Delta_{24}\Delta_{36}\Delta_{45}\Delta_{46}\Delta_{56},$
- $\Delta_{13}\Delta_{14}\Delta_{16}\Delta_{23}\Delta_{24}\Delta_{26}\Delta_{35}\Delta_{45}\Delta_{46} - \Delta_{13}\Delta_{14}\Delta_{15}\Delta_{23}\Delta_{24}\Delta_{26}\Delta_{36}\Delta_{45}\Delta_{46} - \Delta_{12}\Delta_{14}\Delta_{16}\Delta_{23}^2\Delta_{26}\Delta_{34}\Delta_{46}\Delta_{56} +$   
 $- \Delta_{12}\Delta_{14}\Delta_{15}\Delta_{23}\Delta_{26}\Delta_{34}^2\Delta_{46}\Delta_{56} + \Delta_{12}\Delta_{14}\Delta_{15}\Delta_{23}\Delta_{24}\Delta_{26}\Delta_{35}\Delta_{46}\Delta_{56} + \Delta_{12}\Delta_{13}\Delta_{14}\Delta_{23}\Delta_{24}\Delta_{36}\Delta_{45}\Delta_{46}\Delta_{56} +$   
 $+ \Delta_{12}^2\Delta_{14}\Delta_{23}\Delta_{34}^2\Delta_{46}\Delta_{56}^2 - \Delta_{12}^2\Delta_{14}\Delta_{23}\Delta_{24}\Delta_{35}\Delta_{46}\Delta_{56}^2,$
- $- \Delta_{13}\Delta_{14}\Delta_{16}^2\Delta_{23}\Delta_{24}\Delta_{35}\Delta_{45}\Delta_{46} + \Delta_{13}\Delta_{14}\Delta_{15}\Delta_{16}\Delta_{23}\Delta_{24}\Delta_{36}\Delta_{45}\Delta_{46} + \Delta_{12}\Delta_{14}\Delta_{16}^2\Delta_{23}^2\Delta_{34}\Delta_{46}\Delta_{56} +$   
 $+ \Delta_{12}\Delta_{14}\Delta_{15}\Delta_{16}\Delta_{23}\Delta_{34}^2\Delta_{46}\Delta_{56} - \Delta_{12}\Delta_{14}\Delta_{15}\Delta_{16}\Delta_{23}\Delta_{24}\Delta_{35}\Delta_{46}\Delta_{56} - \Delta_{12}\Delta_{14}\Delta_{16}\Delta_{23}^2\Delta_{24}\Delta_{45}\Delta_{46}\Delta_{56}.$

### 3.4 Equations de Bayer

Plaçons nous dans le même contexte que celui de la section 3.3 : soient  $\mathbb{K} \subset k$  un corps,  $P(t)$  un polynôme de Hilbert admissible dans  $k[x_0, \dots, x_n]$  et  $d := a(P)$  son nombre de Gotzmann (voir [49][C.12, p.295]). Posons  $Q(t) = \binom{n+t}{n} - P(t)$ . On a vu que  $\text{Hilb}_{\mathbb{P}^n}^P(k)$  peut être défini comme une sous-variété fermée de la Grassmannienne  $\text{Gr}_{S_d}^{P(d)}(k)$  par des équations de degré  $Q(d+1) + 1$ .

Le but est ici de réduire le degré de ces équations et d'atteindre la borne fournie par Bayer dans [5] et également démontrée dans [43][Thm.4.4, p.21] L'approche est la même : caractériser  $\Delta := S_d^k/I_d \in \text{Hilb}_{\mathbb{P}^n}^P(k)$  par une condition de rang sur  $I_d.S_1$ . Il s'agit ensuite de développer les mineurs associés à cette condition de rang en regroupant les polynômes issus d'éléments de  $I_d$  multipliés par une même variable  $x_i$ .

Dans l'exemple 3.3.2, il s'agit d'exprimer les mineurs de la matrice (3.3.2) en regroupant les 4 premières lignes, la cinquième avec la sixième et les 3 dernières afin d'obtenir des

équations de degré 3 en les  $\Delta_{i,j}$ .

**Théorème 3.4.1** (Conjecturé dans [5], démontré dans [43]). *Soient  $\mathbb{K} \subset k$  un corps,  $P(t)$  un polynôme de Hilbert admissible dans  $k[x_0, \dots, x_n]$  et  $d := a(P)$  son nombre de Gotzmann (voir [49][C.12, p.295]). Posons  $Q(t) = \binom{n+t}{n} - P(t)$ . Alors,  $\mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}^n}^P(k)$  peut être défini comme une sous-variété de  $\mathbf{Gr}_{S_d}^{P(d)}(k)$  par des équations de degré  $\leq n + 1$ .*

*Démonstration.* Soit  $\Delta = S_d^k/I_d \in \mathbf{Gr}_{S_d}^{P(d)}(k)$ . Comme on l'a rappelé dans la preuve du théorème 3.3.1,  $\Delta$  appartient à  $\mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}^n}^P(k)$  si et seulement si :

$$\dim_k S_1 \cdot I_d \leq Q(d+1).$$

Or, d'après la proposition 3.2.8,  $S_1 \cdot I_d = \langle \mathcal{B}^1 \rangle$ . Ainsi,  $\Delta \in \mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}^n}^P(k)$  si et seulement si :

$$\wedge^{Q(d+1)+1} \mathcal{B}^1 = 0.$$

Cela peut se réécrire de la manière suivante :

$$\wedge^{Q(d+1)+1} \mathcal{B}^1 = \left\langle x_0 \theta_{\mathcal{J}_0}^{m_0} \wedge \dots \wedge x_n \theta_{\mathcal{J}_n}^{m_n} \mid \begin{array}{l} \forall x_0 \theta_{\mathcal{J}_0}^{m_0} \in \mathcal{B}_{x_0}^{m_0}, \dots, x_n \theta_{\mathcal{J}_n}^{m_n} \in \mathcal{B}_{x_n}^{m_n} \\ \forall m_i \leq q(d) \text{ s.t. } \sum_i m_i = Q(d+1) + 1 \end{array} \right\rangle.$$

D'après la proposition 3.2.8, les vecteurs générateurs de ce sous-espace vectoriel de  $\wedge^{Q(d+1)+1} S_{d+1}$  ont des coefficients (dans la base usuelle  $x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_{Q(d+1)+1}}$ ) qui sont des polynômes homogènes de degré  $\leq n + 1$  en les  $(\Delta_{\mathcal{H}})_{|\mathcal{H}|=P(d)}$  (voir la remarque 3.2.3). L'annulation de ces coefficients fournit alors des équations de degrés  $\leq n + 1$  qui définissent  $\mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}^n}^P(k)$  comme une sous-variété fermée de  $\mathbf{Gr}_{S_d}^{P(d)}(k)$ .  $\square$

**Exemple 3.4.2.** Reprenons à nouveau le cas de  $\mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}^n}^2(k)$  avec les même notations que celles de l'exemple 3.3.2. Comme  $Q(2) = 4$  et  $Q(3) + 1 = 9$ , on doit calculer les produits extérieurs  $x\theta_{\mathcal{J}_0}^{m_0} \wedge y\theta_{\mathcal{J}_1}^{m_1} \wedge z\theta_{\mathcal{J}_2}^{m_2}$  pour  $(m_0, m_1, m_2) = (4, 4, 1), (4, 1, 4), (1, 4, 4), (4, 3, 2), (4, 2, 3), (3, 4, 2), (3, 2, 4), (2, 4, 3), (2, 3, 4), (3, 3, 3)$ .

Considérons par exemple le terme  $x\theta^4 \wedge y\theta_{1346}^2 \wedge z\theta_{23456}^3$  :

$$\begin{aligned} x\theta_{123456}^4 &= \Delta_{56} x^3 \wedge x^2 y \wedge x y^2 \wedge x^2 z - \Delta_{46} x^3 \wedge x^2 y \wedge x y^2 \wedge x y z + \Delta_{45} x^3 \wedge x^2 y \wedge x y^2 \wedge x z^2 + \\ &+ \Delta_{36} x^3 \wedge x^2 y \wedge x^2 z \wedge x y z - \Delta_{35} x^3 \wedge x^2 y \wedge x^2 z \wedge x z^2 + \Delta_{34} x^3 \wedge x^2 y \wedge x y z \wedge x z^2 + \\ &- \Delta_{26} x^3 \wedge x y^2 \wedge x^2 z \wedge x y z + \Delta_{25} x^3 \wedge x y^2 \wedge x^2 z \wedge x z^2 - \Delta_{24} x^3 \wedge x y^2 \wedge x y z \wedge x z^2 + \\ &+ \Delta_{23} x^3 \wedge x^2 z \wedge x y z \wedge x z^2 + \Delta_{16} x^2 y \wedge x y^2 \wedge x^2 z \wedge x y z - \Delta_{15} x^2 y \wedge x y^2 \wedge x^2 z \wedge x z^2 + \\ &+ \Delta_{14} x^2 y \wedge x y^2 \wedge x y z \wedge x z^2 - \Delta_{13} x^2 y \wedge x^2 z \wedge x y z \wedge x z^2 + \Delta_{12} x y^2 \wedge x^2 z \wedge x y z \wedge x z^2, \\ y\theta_{1346}^2 &= \Delta_{46} x^2 y \wedge y^3 - \Delta_{36} x^2 y \wedge x y z + \Delta_{34} x^2 y \wedge y z^2 + \Delta_{16} y^3 \wedge x y z - \Delta_{14} y^3 \wedge y z^2 + \Delta_{13} x y z \wedge y z^2, \\ z\theta_{23456}^3 &= \Delta_{56} x y z \wedge y^2 z \wedge x z^2 - \Delta_{46} x y z \wedge y^2 z \wedge y z^2 + \Delta_{45} x y z \wedge y^2 z \wedge z^3 + \Delta_{36} x y z \wedge x z^2 \wedge y z^2 + \\ &- \Delta_{35} x y z \wedge x z^2 \wedge z^3 + \Delta_{34} x y z \wedge y z^2 \wedge z^3 - \Delta_{26} y^2 z \wedge x z^2 \wedge y z^2 + \Delta_{25} y^2 z \wedge x z^2 \wedge z^3 + \\ &- \Delta_{24} y^2 z \wedge y z^2 \wedge z^3 + \Delta_{23} x z^2 \wedge y z^2 \wedge z^3. \end{aligned}$$

On déduit alors les coefficients de  $x\theta^4 \wedge y\theta_{1346}^2 \wedge z\theta_{23456}^3$ . Ce sont des polynômes homogènes

de degré 3 en les  $\Delta_{i,j}$  :

- $-\Delta_{26}^2\Delta_{46} + \Delta_{25}\Delta_{46}^2 + \Delta_{16}\Delta_{26}\Delta_{56} - \Delta_{14}\Delta_{56}^2,$
- $+\Delta_{25}\Delta_{26}\Delta_{46} - \Delta_{25}\Delta_{45}\Delta_{46} - \Delta_{16}\Delta_{25}\Delta_{56},$
- $-\Delta_{24}\Delta_{26}\Delta_{46} + \Delta_{16}\Delta_{24}\Delta_{56} + \Delta_{14}\Delta_{45}\Delta_{56},$
- $+\Delta_{23}\Delta_{26}\Delta_{46} + \Delta_{25}\Delta_{34}\Delta_{46} - \Delta_{16}\Delta_{23}\Delta_{56} - \Delta_{14}\Delta_{35}\Delta_{56},$
- $-\Delta_{24}\Delta_{25}\Delta_{46} + \Delta_{14}\Delta_{25}\Delta_{56},$
- $+\Delta_{16}\Delta_{24}\Delta_{45} + \Delta_{14}\Delta_{45}^2 + \Delta_{24}^2\Delta_{46} - \Delta_{14}\Delta_{25}\Delta_{46},$
- $+\Delta_{25}\Delta_{26}\Delta_{34} - \Delta_{24}\Delta_{25}\Delta_{36} - \Delta_{25}\Delta_{34}\Delta_{45} + \Delta_{13}\Delta_{25}\Delta_{56},$
- $+\Delta_{16}\Delta_{24}\Delta_{35} - \Delta_{14}\Delta_{25}\Delta_{36} + \Delta_{14}\Delta_{35}\Delta_{45} + \Delta_{23}\Delta_{24}\Delta_{46},$
- $-\Delta_{16}\Delta_{24}\Delta_{25} + \Delta_{14}\Delta_{25}\Delta_{26} - \Delta_{14}\Delta_{25}\Delta_{45},$
- $+\Delta_{15}\Delta_{16}\Delta_{24} - \Delta_{14}\Delta_{16}\Delta_{25} + \Delta_{14}\Delta_{15}\Delta_{45} - \Delta_{12}\Delta_{24}\Delta_{46}.$

Ces polynômes appartiennent à l'idéal définissant  $\mathbf{Hilp}_{\mathbb{P}^n}^2(k)$  comme sous-variété fermée de  $\mathbf{Gr}_{S_2}^2(k) \simeq \mathbf{Gr}_{\mathbb{K}^6}^2(k)$ .

## 3.5 Equations BLMR

Nous allons dans cette section fournir de nouvelles equations globales pour le schéma de Hilbert associé à un polynôme  $P$  de degré  $r$ . Celles-ci sont homogènes de degré inférieur ou égal à  $r + 2$  en les coordonnées de Plücker et sont donc de ce point de vue plus simple que celles de Iarrobino-Kleiman et Bayer. Nous commencerons par étudier le cas des schémas affines de la forme  $X = \mathbf{Spec}(k)$ , où  $K \subset k$  est un corps. Puis nous généraliserons les résultats aux cas des schémas quelconques  $X \in \mathcal{C}$ .

### 3.5.1 Le cas d'un schéma $X = \mathbf{Spec}(k)$

Tout au long de cette section,  $P(t)$  désignera un polynôme de Hilbert admissible dans  $\mathbb{P}^n$  de degré  $r$  et de nombre de Gotzmann  $d = a(P)$  et  $\mathbb{K} \subset k$  une extension de corps. On pose  $Q(t) = \binom{n+t}{n} - P(t)$  et on introduit :

$$Q'(t) := Q(t) - \binom{n-d-1+t}{n-d-1} = \binom{n+t}{n} - \binom{n-d-1+t}{n-d-1} - P(t)$$

de telle sorte que  $Q(t) - Q'(t) = \dim_k(k[x_n, \dots, x_{d+1}]_t)$ . Nous désignerons  $PGL(n+1)$  l'ensemble des changements de coordonnées dans  $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ .  $PGL(n+1)$  s'identifie donc naturellement à l'ensemble des matrices inversibles de taille  $(n+1) \times (n+1)$  à coefficients dans  $\mathbb{K}$ .

**Proposition 3.5.1.** *Soit  $\mathcal{U}'_x$  l'ensemble des éléments  $I_d \in \mathbf{Gr}_{S_d}^{P(d)}(k)$  (i.e  $S_d/I_d$  de dimension  $P(d)$ ) tels que  $I_d$  admet un ensemble de générateurs de la forme suivante :*

$$G_I^d = \{\mathbf{x}^{\alpha_l} + f_l \mid l = 1, \dots, l_0\} \cup \{g_j, j = 1, \dots, j_0\}$$

avec  $f_l, g_j \in (x_r, \dots, x_0)$  et  $\{\mathbf{x}^{\alpha_l} \mid l = 1, \dots, l_0\}$  un ensemble de monômes inclus dans  $k[x_n, \dots, x_{r+1}]_d$ .



Alors,  $\mathcal{U}'_{\mathbf{x}}$  est un ouvert non vide de  $\mathbf{Gr}_{S_d^*}^{P(d)}(k)$  (en tant que variété de  $\mathbb{P}_K^N$ , avec  $N = \dim \wedge^{P(d)} S_d$ , pour rappel voir (3.3.1)).

De plus,  $I_{d+1} := S_1 \cdot I_d$  admet un ensemble de générateurs  $G_I^{d+1}$  dont les coordonnées dans une base de  $S_{d+1}$  de la forme :

$$\{\text{monômes de } k[x_n, \dots, x_{r+1}]_{d+1}\} \cup \{\text{monômes de } (x_0, \dots, x_r)_{d+1}\}$$

et écrites en ligne forment la matrice suivante :

$$\mathcal{A}_{d+1} = \left( \begin{array}{c|ccc} \text{Id} & \bullet & \bullet & \bullet \\ \hline 0 & \mathcal{D}_1 & & \\ \hline 0 & \mathcal{D}_2 & & \end{array} \right) \quad (3.5.1)$$

où

- les colonnes de la partie gauche de la matrice correspondent à la décomposition sur les monômes de  $k[x_n, \dots, x_{r+1}]_{d+1}$  et ceux de la partie droite sur les monômes de  $(x_0, \dots, x_r)_{d+1}$ ;
- la sous-matrice en haut à gauche  $\text{Id}$  est l'identité de taille  $Q(d+1) - Q'(d+1)$ ;
- les lignes de  $\mathcal{D}_1$  contiennent les coefficients de  $x_h(\mathbf{x}^{\alpha_i} + f_i)$  ainsi que ceux de  $x_h g_j$ ,  $h = 0, \dots, d$ ;
- les lignes de  $\mathcal{D}_2$  contiennent les coefficients de  $x_a g_j$ ,  $a = r+1, \dots, n$  ainsi que les polynômes du type :  $x_{i'} f_{i'} - x_i f_i$  tels que  $x_{i'} \mathbf{x}^{\alpha_{i'}} = x_i \mathbf{x}^{\alpha_i}$  et  $i, i' \geq r+1$ .

Enfin, le sous-ensemble  $\mathcal{U}_{\mathbf{x}} \subset \mathcal{U}'_{\mathbf{x}}$  de tous les éléments  $I_d \in \mathcal{U}'_{\mathbf{x}}$  tels que  $\text{rang}(\mathcal{D}_1) \geq Q'(d+1)$  constitue un ouvert et  $\{g\mathcal{U}_{\mathbf{x}} / g \in \text{PGL}(n+1)\}$  est un recouvrement ouvert de  $\mathbf{Gr}_{S_d}^{P(d)}(k)$  (toujours via l'identification de  $\mathbf{Gr}_{S_d}^{P(d)}(k)$  à une sous-variété de  $\mathbb{P}_k^N$ , voir (3.3.1)).

*Démonstration.* Considérons la projection canonique :

$$\pi : k[x_0, \dots, x_n]_d \rightarrow (k[x_0, \dots, x_n]/(x_0, \dots, x_r))_r \simeq k[x_{r+1}, \dots, x_n]_d.$$

Soit  $\Delta = S_d^k / I_d \in \mathbf{Gr}_{S_d}^{P(d)}(k)$ . Le sous-ensemble  $\mathcal{U}'_{\mathbf{x}}$  de  $\mathbf{Gr}_{S_d}^{P(d)}(k)$  est donné par la condition :

$$\pi(I_d) = k[x_{r+1}, \dots, x_n]_d$$

qui est ouverte en les  $(\Delta_{\mathcal{H}})_{|\mathcal{H}|=P(d)}$  et  $\mathcal{U}'_{\mathbf{x}}$  est donc un ouvert de  $\mathbf{Gr}_{S_d}^{P(d)}(k)$  pour la topologie de Zariski (via le plongement (3.3.1)).

De plus cet ouvert est non vide car pour tout idéal Borel-fixe  $J \subset k[x_0, \dots, x_n]$  tel que  $J_d$  appartient à  $\mathbf{Gr}_{S_d}^{P(d)}(k)$ ,  $J_d$  appartient aussi à  $\mathcal{U}'_{\mathbf{x}}$ . En effet, si  $J$  est Borel-fixe tel que  $J_d \in \mathbf{Gr}_{S_d}^{P(d)}(k)$ , alors d'après le théorème 2.2.8 de Macaulay sur la croissance minimale des idéaux on a :

$$\dim(J_t) \geq Q(t), \quad \forall t \geq d.$$

Alors, le polynôme de Hilbert de  $k[x_0, \dots, x_n]/J$  est de degré  $\leq \deg(P(t)) = r$ . En utilisant la propriété Borel-fixe (voir définition 1.2.13) on déduit aisément que  $J_d \supseteq k[x_n, \dots, x_{r+1}]_d$  et  $J_d$  appartient donc à  $\mathcal{U}'_{\mathbf{x}}$ .

Enfin, il est clair que pour tout  $I_d \in \mathcal{U}'_{\mathbf{x}}$ , il existe une base  $G_I^d$  de  $I_d$  en tant que  $k$ -espace

vectorel de la forme souhaitée.

Pour tout  $I_d \in \mathcal{U}'_{\mathbf{x}}$ ,  $S_1 G_I^d = \bigcup_i x_i G_I^d$  est un ensemble générateur de  $I_{d+1} := S_1 \cdot I_d$ . L'ensemble des générateurs  $G_I^{d+1}$  que nous recherchons, se déduit alors facilement de  $S_1 G_I^d$  en modifiant seulement certains éléments : pour tout monôme  $\mathbf{x}^\gamma$  dans  $k[x_{r+1}, \dots, x_n]_{d+1}$  on choisit un seul élément  $x_i(\mathbf{x}^{\alpha_i} + f_i)$  avec  $\mathbf{x}^\gamma = x_i \mathbf{x}^{\alpha_i}$  que l'on garde dans  $G_I^{d+1}$  (cela correspond aux lignes du premier bloc  $\mathcal{A}_{d+1}$ ) tandis que tout autre élément  $x_{i'}(\mathbf{x}^{\alpha_{i'}} + f_{\alpha_{i'}})$  avec  $\mathbf{x}^\gamma = x_{i'} \mathbf{x}^{\alpha_{i'}}$  est remplacé par  $x_{i'} f_{\alpha_{i'}} - x_i f_{\alpha_i}$  (qui appartient à  $(x_0, \dots, x_r)$ ).

Enfin, montrons que  $\{g\mathcal{U}_{\mathbf{x}} / g \in PGL(n+1)\}$  est un recouvrement ouvert de  $\mathbf{Gr}_{S_d}^{P(d)}(k)$ . Fixons un ordre monomial  $\langle \text{vérifiant } x_0 > \dots > x_n \text{ et un élément } I_d \in \mathbf{Gr}_{S_d}^{P(d)}(k) \rangle$ . Nous allons montrer que pour des changements génériques de coordonnées  $g \in PGL(n+1)$  on a :

$$g \circ I_d \in \mathcal{U}_{\mathbf{x}}.$$

Rappelons que par changement générique de coordonnées on peut supposer que tout idéal admet un idéal initial Borel-fixe (voir théorème 1.2.15 et définition 1.2.16). Ainsi, pour un changement générique de coordonnées  $g \in PGL(n+1)$ ,  $J_d := \text{In}(g \circ I_d)$  est Borel-fixe (i.e si  $x_i \cdot \mathbf{x}^\alpha \in J_d$  alors  $x_j \cdot \mathbf{x}^\alpha \in J_d$  pour tout  $j \geq i$ ). D'après ce qui précède, on sait que :

$$k[x_n, \dots, x_{r+1}]_d \subset J_d.$$

On en déduit alors facilement que  $g \circ I_d$  admet un ensemble de générateurs de la forme souhaitée i.e  $g \circ I_d \in \mathcal{U}'_{\mathbf{x}}$ .

Notons que  $J_d \in \mathbf{Gr}_{S_d}^{P(d)}(k)$  et que  $\dim S_1 \cdot J_d \leq \dim S_1 \cdot I_d$ . De plus, comme  $J_d$  est Borel-fixe on a :

$$\begin{aligned} \dim(x_0 J_d + \dots + x_r J_d) &= \dim(S_1 \cdot J_d \cap (x_0, \dots, x_r)) = \\ &= \dim(S_1 \cdot J_d) - \dim(k[x_{r+1}, \dots, x_n]_{d+1}) \geq Q'(d+1). \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \dim(x_0(g \circ I_d) + \dots + x_r(g \circ I_d)) &\geq \dim(x_0 \text{In}(g \circ I_d) + \dots + x_r \text{In}(g \circ I_d)) = \\ &= \dim(x_0 J_d + \dots + x_r J_d) \geq Q'(d+1). \end{aligned}$$

On conclut alors que  $gI \in \mathcal{U}_{\mathbf{x}}$  car les générateurs de  $x_0(g \circ I)_d + \dots + x_r(g \circ I)_d$  correspondent aux lignes de  $\mathcal{D}_1$ .  $\square$

**Corollaire 3.5.2.** Soit  $I_d \in \mathcal{U}_{\mathbf{x}}$ , alors :

$$I_d \in \mathcal{U}_{\mathbf{x}} \cap \mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}^n}^P(k) \iff \text{rang}(\mathcal{D}) = \text{rang}(\mathcal{D}_1) = Q'(d+1). \quad (3.5.2)$$

*Démonstration.* On sait que  $I_d \in \mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}^n}^P(k)$  si et seulement si  $\dim(I_{d+1}) = \text{rang}(\mathcal{A}_{d+1}) = Q(d+1)$ . De par la forme de la matrice  $\mathcal{A}_{d+1}$ , cela équivaut à ce que  $\text{rang} \mathcal{D} = Q'(d+1)$ . Comme  $\text{rang} \mathcal{D}_1 \geq Q'(d+1)$ , on déduit (3.5.2).  $\square$

**Théorème 3.5.3.** [10][Thm.5.3, p.13] Soit  $P(t)$  un polynôme de Hilbert de degré  $r$  admissible sur  $\mathbb{P}^n$  et  $d$  son nombre de Gotzmann. Soit  $\mathbb{K} \subset k$  une extension de corps. Alors,  $\mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}^n}^P(k)$  peut être défini comme une sous-variété fermée de  $\mathbf{Gr}_{S_d}^{P(d)}(k)$  par un ensemble  $\mathbf{T} \subset \mathbb{K}[\wedge^{P(d)} S_d]$  formé de polynômes homogènes de degré  $\leq r+2$  ( $\mathbf{Gr}_{S_d}^{P(d)}(k)$  étant toujours considérée comme une sous-variété de  $\mathbb{P}_K^N$  via le plongement (3.3.1)).

*Démonstration.* On divise la preuve en deux étapes :

**Etape 1.** Il s'agit tout d'abord de construire un ensemble de polynômes  $\mathbf{T}_x$  inclus dans  $\mathbb{K}[\wedge^{P(d)} S_d]$  tel que pour tout  $I_d \in \mathcal{U}_x$ ,  $I_d \in \mathcal{U}_x \cap \mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}^n}^P(k)$  si et seulement  $\mathbf{T}_x(\Delta_{\mathcal{H}}) = 0$  avec  $\Delta := S_d^k/I_d$  (voir la remarque 3.2.3 pour la construction des éléments  $(\Delta_{\mathcal{H}})_{|\mathcal{H}|=P(d)}$ ).

Soit  $I_d \in \mathcal{U}_x$  et posons  $\Delta := S_d^k/I_d$ . Considérons alors un premier ensemble d'éléments de  $\wedge^{Q'(d+1)+1} S_d^k$  de la forme :

$$\left( \bigwedge_{h=0, \dots, r} x_h \theta_{\mathcal{J}_h}^{m_h}(\Delta) \right) \wedge x_a \theta_{\mathcal{K}}^1(\Delta) \in \wedge^{Q'(d+1)+1} S_d^k \quad (3.5.3)$$

pour toute famille  $(x_h \theta_{\mathcal{J}_h}^{m_h}(\Delta))_{\{h=0, \dots, d\}} \subset S_{d+1}^k$  telle que  $\sum_h m_h = Q'(d+1)$ , pour tout ensemble  $\mathcal{K}$  de  $P(d)+1$  monômes de degré  $d$  disjoint avec  $k[x_{r+1}, \dots, x_n]_d$  et enfin pour toute variable  $x_a$ ,  $a = r+1, \dots, n$ .

Considérons aussi un second ensemble d'éléments de  $\wedge^{Q'(d+1)+1} S_d^k$  de la forme :

$$\left( \bigwedge_{h=0, \dots, r} x_h \theta_{\mathcal{J}_h}^{m_h}(\Delta) \right) \wedge (x_i \theta_{\mathcal{K}_1}^1(\Delta) - x_{i'} \theta_{\mathcal{K}_2}^1(\Delta)) \quad (3.5.4)$$

à nouveau pour toute famille  $(x_h \theta_{\mathcal{J}_h}^{m_h}(\Delta))_{\{h=0, \dots, r\}} \subset S_{d+1}^k$  telle que  $\sum_h m_h = Q'(d+1)$  et pour toute famille  $\mathcal{H}$  de  $P(d)$  monômes de degré  $d$  disjoint avec  $k[x_{r+1}, \dots, x_n]_d$ , tout monôme  $\mathbf{x}^n k[x_{r+1}, \dots, x_n]_{d-1}$  et tout couple d'indices  $(i, i') \subset \{r+1, \dots, n\}$  tels que  $\mathcal{K}_1 = \mathcal{H} \cup \{x_{i'} \mathbf{x}^n\}$  et  $\mathcal{K}_2 = \mathcal{H} \cup \{x_i \mathbf{x}^n\}$  et  $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ .

D'après la proposition 3.2.8, (3.5.3) et (3.5.4) s'annulent pour  $\Delta = S_d^k/I_d$  si et seulement si, dans le contexte la proposition 3.5.1, toute famille formée de  $Q'(d+1)$  lignes de  $\mathcal{D}_1$  et d'une ligne de  $\mathcal{D}_2$  est liée (au sens où ses éléments sont linéairement dépendants). En notant que  $\mathcal{D}_2$  n'est pas réduit à 0 (voir remarque 3.5.4), on déduit que c'est équivalent au fait que  $\text{rang} \mathcal{D}_1 = \text{rang} \mathcal{D}_2 \leq Q'(d+1)$  i.e  $I_d \in \mathcal{U}_x \cap \mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}^n}^P(k)$  d'après le corollaire 3.5.2.

Remarquons alors que d'après la proposition 3.2.8, les coefficients des éléments de (3.5.3) et (3.5.4), dans la base usuelle  $(x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_{Q'(d+1)+1}})$  de  $\wedge^{Q'(d+1)+1} S_{d+1}^k$ , sont des polynômes homogènes de degré  $\leq r+2$  en les  $(\Delta_{\mathcal{H}})_{|\mathcal{H}|=P(d)}$ . C'est cet ensemble de polynômes homogènes que l'on note :

$$\mathbf{H}_x \subset \mathbb{K}[\wedge^{P(d)} S_d^k]. \quad (3.5.5)$$

**Etape 2.** Soit  $I_d$  un élément de  $\mathbf{Gr}_{S_d}^{P(d)}(k)$  et  $g$  un élément  $PGL(n+1)$  représentant un changement générique de coordonnées. Notons toujours  $\Delta := S_d^k/I_d$  et  $\Delta^g := S_d^k/(g \circ I_d)$ . On peut alors facilement montrer que pour toute famille  $\mathcal{J}$  de taille  $P(d)$ , les coefficients  $\Delta_{\mathcal{J}}^g$  (définis dans la remarque 3.2.3) s'écrivent comme polynômes bihomogènes de degré 1 en les  $(\Delta_{\mathcal{H}})_{|\mathcal{H}|=P(d)}$  et de degré  $Q(d) \times d$  en les coefficients  $(g_{i,j})$  de  $g$ . Ainsi, étant donné un polynôme homogène  $R$  de degré  $s \leq r+2$  dans  $\mathbf{H}_x$ ,  $R((\Delta_{\mathcal{J}}^g)_{|\mathcal{J}|=P(d)})$

est un polynôme bihomogène de degré  $s$  en les  $(\Delta_{\mathcal{H}})_{|\mathcal{H}|=P(d)}$  et de degré  $Q(d) \times d \times s$  en les  $(g_{i,j})$ . Les coefficients de  $R((\Delta^g)_{|\mathcal{J}|=P(d)})$  en tant que polynôme de degré  $Q(d) \times d \times s$  en  $(g_{i,j})$  sont donc des polynômes de degré  $s \leq r + 2$  en les  $(\Delta_{\mathcal{H}})_{|\mathcal{H}|=P(d)}$ . Notons  $C_R$  cet ensemble de polynômes.

D'après la proposition 3.5.1 et le corollaire 3.5.2,  $I_d \in \mathbf{Gr}_{S_d}^{P(d)}(k)$  appartient à  $\mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}^n}^P(k)$  si et seulement si pour des changements génériques de coordonnées  $g \in PGL(n+1)$  :

$$gI \in \mathcal{U}_{\mathbf{x}} \cap \mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}^n}^P(k)$$

i.e :

tous les polynômes homogènes  $R \in \mathbf{H}_{\mathbf{x}}$  s'annulent en  $(\Delta^g_{\mathcal{J}})_{|\mathcal{J}|=P(d)}$

ou de manière équivalente :

tous les polynômes  $C_R$  pour tout  $R \in \mathbf{H}_{\mathbf{x}}$  s'annulent pour  $(\Delta_{\mathcal{H}})_{|\mathcal{H}|=P(d)}$ .

On a donc prouvé que  $I \in \mathbf{Gr}_{S_d}^{P(d)}(k)$  appartient à  $\mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}^n}^P(k)$  si et seulement si  $(\Delta_{\mathcal{H}})_{|\mathcal{H}|=P(d)}$  annule les polynômes

$$\mathbf{H} := \bigcup_{R \in \mathbf{H}_{\mathbf{x}}} C_R \quad (3.5.6)$$

qui sont homogènes de degré inférieur ou égal à  $r + 2$ . □

*Remarque 3.5.4.* Soit  $I_d \in \mathcal{U}'_{\mathbf{x}}$ . Remarquons qu'une condition nécessaire pour que  $\mathcal{D}_2$  soit vide est que  $I_d$  n'ait pas de générateur dans  $G_{I_d}^d$  du type  $g_j$ . Prouvons que c'est impossible. En effet, cela implique que la dimension de  $I_d$  est égale à  $\tilde{p}(d) := \binom{n+r}{n} - \binom{n-r+d}{n-r}$ . Montrons alors que  $\tilde{p}(d)$  ne peut pas coïncider avec  $P(d)$  où  $P$  est un polynôme de Hilbert de nombre de Gotzmann égal à  $d$  et de degré  $r$ . Pour cela nous allons chercher à majorer  $P(d)$  pour un tel polynôme de Hilbert  $P$ .

D'après la décomposition de Green des polynômes de Hilbert [38, Thm. 3.11], le polynôme suivant :

$$p(t) = \binom{t+r}{r} + \binom{t+r-1}{r} + \cdots + \binom{t+r-d+1}{r},$$

est de degré  $r$  et de nombre de Gotzmann égal à  $d$ . De plus, tout autre polynôme de Hilbert  $P$  de degré  $r$  et de nombre de Gotzmann  $d$  s'obtient à partir de  $p(t)$  en remplaçant au moins un coefficient binomial  $\binom{t+r-j}{r}$  par un autre coefficient de la forme  $\binom{t+(r-i)-j}{r-i}$  (avec  $i, j > 0$ ).

Comme  $\binom{d+r-j}{r} > \binom{d+(r-i)-j}{r-i}$ ,  $P(d)$  est majoré par  $p(d) = \sum_{i=1}^d \binom{r+i}{r}$ .

Enfin, en utilisant la décomposition suivante :

$$k[x_0, \dots, x_n]_d = \bigcup_{i=0, \dots, d} k[x_0, \dots, x_r]_i \cdot k[x_{r+1}, \dots, x_n]_{d-i},$$

on déduit que :

$$\tilde{p}(d) = \binom{n+d}{n} - \binom{n-r+d+1}{n-r+1} = \sum_{i=1}^d \binom{r+i}{r} \binom{n-r+1+d-i}{n-r+1} > \sum_{i=1}^d \binom{r+i}{r}$$

et que :

$$\tilde{p}(d) > p(d) \geq P(d).$$

**Exemple 3.5.5.** Appliquons le théorème 3.5.3 au cas de l'exemple 3.3.2 et 3.4.2. Puisque le polynôme de Hilbert est constant, afin de calculer le premier ensemble d'équations (3.5.3), nous devons considérer le produit extérieur entre  $z\theta_{123456}^4$  et deux éléments  $x\theta_{456}^1, y\theta_{456}^1$  ne contenant pas de monôme dans  $k[x, y]$ . On obtient 12 polynômes :

- $-\Delta_{26}\Delta_{46} + \Delta_{45}\Delta_{46} + \Delta_{16}\Delta_{56},$
- $-\Delta_{24}\Delta_{46} + \Delta_{14}\Delta_{56},$
- $-\Delta_{24}\Delta_{45} + \Delta_{12}\Delta_{56},$
- $-\Delta_{36}\Delta_{46} + \Delta_{26}\Delta_{56} + \Delta_{45}\Delta_{56},$
- $-\Delta_{45}^2 - \Delta_{34}\Delta_{46} + \Delta_{24}\Delta_{56},$
- $-\Delta_{25}\Delta_{45} + \Delta_{23}\Delta_{46},$
- $-\Delta_{45}^2 + \Delta_{25}\Delta_{46} - \Delta_{15}\Delta_{56},$
- $\Delta_{34}\Delta_{45} + \Delta_{23}\Delta_{46} - \Delta_{13}\Delta_{56},$
- $\Delta_{14}\Delta_{45} - \Delta_{12}\Delta_{46},$
- $\Delta_{35}\Delta_{46} - \Delta_{25}\Delta_{56},$
- $\Delta_{35}\Delta_{45} - \Delta_{23}\Delta_{56},$
- $\Delta_{15}\Delta_{45} - \Delta_{13}\Delta_{46} + \Delta_{12}\Delta_{56}.$

De plus, pour calculer le second ensemble d'équations (3.5.4), nous devons considérer les coefficients du produit extérieur entre  $z\theta_{123456}^4$  et un élément appartenant à l'ensemble :

$$\{y\theta_{145}^1 - x\theta_{245}^1, y\theta_{245}^1 - x\theta_{345}^1, y\theta_{146}^1 - x\theta_{246}^1, y\theta_{246}^1 - x\theta_{346}^1, y\theta_{156}^1 - x\theta_{256}^1, y\theta_{256}^1 - x\theta_{356}^1\}.$$

On obtient 36 générateurs :

- $\Delta_{16}\Delta_{25} - \Delta_{15}\Delta_{26} - \Delta_{24}\Delta_{26} + \Delta_{14}\Delta_{36},$
- $-\Delta_{15}\Delta_{24} - \Delta_{24}^2 + \Delta_{14}\Delta_{25} + \Delta_{14}\Delta_{34},$
- $-\Delta_{14}\Delta_{23} + \Delta_{12}\Delta_{25},$
- $-\Delta_{25}\Delta_{26} - \Delta_{26}\Delta_{34} + \Delta_{16}\Delta_{35} + \Delta_{24}\Delta_{36},$
- $-\Delta_{24}\Delta_{25} + \Delta_{14}\Delta_{35},$
- $-\Delta_{23}\Delta_{24} + \Delta_{12}\Delta_{35},$
- $-\Delta_{24}\Delta_{46} + \Delta_{14}\Delta_{56},$
- $-\Delta_{16}\Delta_{24} + \Delta_{14}\Delta_{26} - \Delta_{14}\Delta_{45},$
- $\Delta_{24}^2 - \Delta_{14}\Delta_{25} + \Delta_{12}\Delta_{26},$
- $-\Delta_{26}^2 + \Delta_{16}\Delta_{36} - \Delta_{34}\Delta_{46} + \Delta_{24}\Delta_{56},$
- $-\Delta_{24}\Delta_{26} + \Delta_{14}\Delta_{36} - \Delta_{24}\Delta_{45},$
- $-\Delta_{24}\Delta_{25} + \Delta_{24}\Delta_{34} + \Delta_{12}\Delta_{36},$
- $\Delta_{26}^2 - \Delta_{16}\Delta_{36} - \Delta_{25}\Delta_{46} + \Delta_{15}\Delta_{56},$
- $\Delta_{24}\Delta_{26} - \Delta_{16}\Delta_{34} - \Delta_{15}\Delta_{45},$
- $\Delta_{16}\Delta_{23} - \Delta_{15}\Delta_{25} + \Delta_{24}\Delta_{25},$
- $-\Delta_{35}\Delta_{46} + \Delta_{25}\Delta_{56},$
- $-\Delta_{26}\Delta_{34} + \Delta_{24}\Delta_{36} - \Delta_{25}\Delta_{45},$
- $-\Delta_{25}^2 + \Delta_{23}\Delta_{26} + \Delta_{24}\Delta_{35},$
- $\Delta_{24}\Delta_{25} - \Delta_{14}\Delta_{35},$
- $\Delta_{15}\Delta_{23} + \Delta_{23}\Delta_{24} - \Delta_{13}\Delta_{25},$
- $\Delta_{13}\Delta_{14} - \Delta_{12}\Delta_{15} - \Delta_{12}\Delta_{24},$
- $\Delta_{25}^2 + \Delta_{25}\Delta_{34} - \Delta_{15}\Delta_{35} - \Delta_{24}\Delta_{35},$
- $\Delta_{23}\Delta_{25} + \Delta_{23}\Delta_{34} - \Delta_{13}\Delta_{35},$
- $\Delta_{13}\Delta_{24} - \Delta_{12}\Delta_{25} - \Delta_{12}\Delta_{34},$
- $\Delta_{16}\Delta_{25} - \Delta_{15}\Delta_{26} + \Delta_{24}\Delta_{45},$
- $\Delta_{16}\Delta_{23} - \Delta_{13}\Delta_{26} - \Delta_{24}\Delta_{34} + \Delta_{14}\Delta_{35},$
- $\Delta_{14}\Delta_{15} - \Delta_{12}\Delta_{16} - \Delta_{14}\Delta_{24},$
- $\Delta_{25}\Delta_{26} - \Delta_{15}\Delta_{36} + \Delta_{34}\Delta_{45},$
- $\Delta_{23}\Delta_{26} - \Delta_{34}^2 + \Delta_{24}\Delta_{35} - \Delta_{13}\Delta_{36},$
- $\Delta_{15}\Delta_{24} - \Delta_{12}\Delta_{26} - \Delta_{14}\Delta_{34},$
- $-\Delta_{25}\Delta_{26} + \Delta_{16}\Delta_{35} + \Delta_{25}\Delta_{45},$
- $-\Delta_{23}\Delta_{26} - \Delta_{25}\Delta_{34} + \Delta_{15}\Delta_{35},$
- $\Delta_{15}^2 - \Delta_{13}\Delta_{16} - \Delta_{14}\Delta_{25} + \Delta_{12}\Delta_{26},$
- $\Delta_{26}\Delta_{35} - \Delta_{25}\Delta_{36} + \Delta_{35}\Delta_{45},$
- $\Delta_{25}\Delta_{35} - \Delta_{34}\Delta_{35} - \Delta_{23}\Delta_{36},$
- $\Delta_{15}\Delta_{25} - \Delta_{13}\Delta_{26} - \Delta_{14}\Delta_{35} + \Delta_{12}\Delta_{36}.$

Pour finir, nous devons considérer l'action de  $PGL(3)$  pour obtenir toutes les équations.

### 3.5.2 Cas général

Dans cette sous-section,  $P$  désignera un polynôme de Hilbert admissible dans  $\mathbb{P}^n$  de degré  $r$  et de nombre de Gotzmann  $d = a(P)$  et  $X \in \mathcal{C}$  un schéma de type fini sur  $\mathbb{K}$ . On notera  $Q$  le polynôme défini par :

$$Q(t) = \binom{n+t}{n} - P(t)$$

et  $Q'$  par :

$$Q'(t) := Q(t) - \binom{n-d-1+t}{n-d-1} = \binom{n+t}{n} - \binom{n-d-1+t}{n-d-1} - P(t).$$

Etant donné un élément  $\Delta \in \mathbf{Gr}_{S_d}^{P(d)}(X)$  :

$$g := S_d \otimes \mathcal{O}_X \rightarrow \Delta \rightarrow 0,$$

rappelons brièvement (voir (2.4.5)) la construction des sections globales  $(\Delta_{q_1, \dots, q_{P(d)}}) \in \mathbf{H}^0(X, \mathcal{L})$  avec  $\mathcal{L} := \wedge^{P(d)} \Delta$  et  $(q_1, \dots, q_{P(d)})$  une famille de  $P(d)$  polynômes homogènes de degré  $d$ . Soit :

$$\phi := \wedge^{P(d)} S_d \otimes \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{L} \rightarrow 0$$

le morphisme obtenu à partir de  $g$ , par l'application du produit extérieur d'ordre  $P(d)$ . Pour toute famille  $(q_1, \dots, q_{P(d)})$  de  $P(d)$  polynômes homogènes de degré  $d$ , on définit  $\Delta_{q_1, \dots, q_{P(d)}} \in \mathbf{H}^0(X, \mathcal{L})$  par :

$$\Delta_{q_1, \dots, q_{P(d)}} := \phi(q_1 \wedge \dots \wedge q_{P(d)}).$$

D'après le théorème 1.2.41, ces sections globales satisfont les relations de Plücker (1.2.10) :

$$\sum_{\lambda=1, \dots, n+1} (-1)^\lambda \Delta_{\alpha_1, \dots, \alpha_{P(d)-1}, \beta_\lambda} \otimes \Delta_{\beta_1, \dots, \hat{\beta}_\lambda, \dots, \beta_{P(d)+1}} = 0$$

dans  $\mathbf{H}^0(X, \mathcal{L}^{\otimes 2})$ .

Par la suite, on notera  $\Delta \subset \mathbf{H}^0(X, \mathcal{L})$  la famille de sections globales de  $\Delta \in \mathbf{Gr}_{S_d}^{P(d)}(X)$  définie par :

$$\Delta := (\Delta_{\mathbf{x}^{\alpha_1}, \dots, \mathbf{x}^{\alpha_{P(d)}}})_{\mathbf{x}^{\alpha_1} < \dots < \mathbf{x}^{\alpha_{P(d)}}} \subset \mathbf{H}^0(X, \mathcal{L})$$

En outre, nous invitons le lecteur à se reporter à la sous-section 2.4.1 concernant le plongement du schéma de Hilbert dans la Grassmannienne. On remarquera alors que les propositions qui y sont énoncées peuvent sans difficulté se généraliser au cas d'un polynôme de Hilbert égal à  $P$  (et non uniquement constant égal à  $\mu$ ).

Il s'agit dans cette sous-section de fournir les équations du schéma de Hilbert  $\mathit{Hilb}^P(\mathbb{P}^n)$  en tant que sous-schéma fermé du schéma projectif  $\mathit{Gr}^{P(d)}(S_d)$  représentant le foncteur  $\mathbf{Gr}_{S_d}^{P(d)}$  et ainsi généraliser, à des polynômes de Hilbert  $P$  quelconques, le théorème 2.4.21 énoncé dans le cas de polynômes de Hilbert constants.

**Proposition 3.5.6.** [10][Thm.6.12, p.17] Soit  $\Delta \in \mathbf{Gr}_{S_d}^{P(d)}(X)$ . Alors,  $\Delta \in \mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}^n}^P(X)$  si et seulement si la famille de sections globales  $\Delta \subset \mathbf{H}^0(X, \mathcal{L})$  satisfait :

$$R(\Delta) = 0 \text{ dans } \Gamma(X, \mathcal{L}) := \bigoplus_i \mathbf{H}^0(X, \mathcal{L}^{\otimes i})$$

pour tout polynôme  $R \in \mathbf{H} \subset \mathbb{K}[\wedge^{P(d)} S_d]$  (voir (3.5.6)) avec  $\mathcal{L} := \wedge^{P(d)} \Delta$ .

*Démonstration.* L'annulation des sections globales d'un faisceau quasi-cohérent d' $\mathcal{O}_X$ -modules étant une propriété locale, nous pouvons nous ramener sans perte de généralité au cas où  $X = \mathbf{Spec}(A) \in \mathcal{C}^a$  avec  $A$  une  $\mathbb{K}$ -algèbre locale noethérienne d'idéal maximal  $m$  et de corps résiduel  $k := A/m$ . Dans ce cas là,  $\Delta$  s'identifie à un  $A$ -module de la forme  $S_d^A / I_d$  libre de rang  $P(d)$  avec  $I_d \subset S_d^A$  un sous  $A$ -module libre de rang  $Q(d)$  de  $S_d^A$ . La famille de sections globales  $\Delta$  s'identifie quant-à elle à la famille  $(\Delta_{\mathcal{H}})_{|\mathcal{H}|=P(d)} \subset \mathbb{P}_A^N$  (avec

$N = \dim_{\mathbb{K}} S_d$ ) formée d'éléments de  $A$  introduits dans la remarque 3.2.3. Il s'agit alors de montrer que ces éléments annulent les polynômes de l'ensemble  $\mathbf{T}$  (voir (3.5.6)) si et seulement si  $\Delta = S_d^A/I_d \in \mathbf{Gr}_{S_d}^{P(d)}(A)$  appartient à  $\mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}^n}^P(A)$ . Cela consiste à généraliser le théorème 3.5.3 au cas d'une  $\mathbb{K}$ -algèbre locale noethérienne  $A$ .

**Etape 1 :**

Supposons d'abord que  $\Delta = S_d^A/I_d \in \mathbf{Gr}_{S_d}^{P(d)}(X)$  satisfait les équations du théorème 3.5.3.

Considérons alors la suite exacte suivante :

$$0 \rightarrow I_d \rightarrow S_d^A \rightarrow S_d^A/I_d \rightarrow 0.$$

En tensorisant par  $k := A/m$  on obtient :

$$I_d \otimes k \rightarrow k[x_0, \dots, x_n]_d \rightarrow S_d^A/I_d \otimes k \rightarrow 0.$$

Notons  $I_d(k)$  l'image de  $I_d \otimes k$  dans  $k[x_0, \dots, x_n]_d := S_d^k$ . On a donc :

$$S_d^A/I_d \otimes k \simeq S_d^k/I_d(k).$$

Fixons un ordre monomial  $\langle \text{vérifiant } x_0 \rangle \cdots \langle x_n \rangle$ . D'après [31, Thm. 15.20, p.354], il existe un ensemble  $B \subset S_d$  de  $Q(d)$  monômes vérifiant la propriété Borel-fixe : si  $x_i \cdot \mathbf{x}^\alpha \in B$  alors  $x_j \cdot \mathbf{x}^\alpha \in B$  pour tout  $j \geq i$ ; tel que pour des changements génériques de coordonnées  $g \in PGL(n+1)$  on ait :

$$B = \text{In}(g \circ I_d(k)) \subset S_d.$$

Soit  $J_d \subset S_d^A$  le  $A$ -module libre de rang  $Q(d)$  engendré par  $B$ .  $J_d$  est donc Borel-fixe.

Notons que  $I_d(k)$  appartient à  $\mathbf{Gr}_{S_d}^{P(d)}(k)$  et satisfait aussi les équations du théorème 3.5.3. On déduit donc que :

$$I_d(k) \in \mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}^n}^P(k).$$

Soit  $I_{d+1} := S_1 \cdot I_d$  et comme précédemment notons  $I_{d+1}(k)$  l'image de  $I_{d+1} \otimes k$  dans  $S_d^k$ . On a alors  $I_{d+1}(k) = S_1 \cdot I_d(k)$ , et comme  $I_d(k)$  appartient à  $\mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}^n}^P(k)$ , on a :

$$\dim I_{d+1}(k) = Q(d+1).$$

Soit  $B'$  l'ensemble de  $Q(d+1)$  monômes de degré  $d+1$  égal à l'initial générique de  $I_{d+1}(k)$  introduit dans la définition 1.2.16. Notons  $J_{d+1}$  le  $A$ -module libre de rang  $Q(d+1)$  engendré par  $B'$ . D'après la remarque 1.2.9, on a :

$$S_1 B \subset B'$$

et que donc :

$$S_1 J_d \subset J_{d+1}.$$

Ainsi, par dimension,  $J_d$  appartient à  $\mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}^n}^P(A)$  et

$$S_1 J_d = J_{d+1} \text{ et } S_1 B = B'.$$

Fixons désormais un changement de coordonnées générique  $g \in PGL(n+1)$  pour lequel :

$$B = \text{In}(g \circ I_d(k)) \text{ et } B' = \text{In}(g \circ I_{d+1}(k)).$$

On supposera sans perte de généralité que  $g = \text{Id}_{n+1}$  (quitte à remplacer  $(I_d, I_{d+1})$  par  $(g \circ I_d, g \circ I_{d+1})$ ). Par construction de l'ensemble  $\mathbf{H}$  (voir (3.5.6)) on supposera aussi par la suite que  $(\Delta_{\mathcal{H}})_{|\mathcal{H}|=P(d)}$  annule les polynômes de l'ensemble  $\mathbf{H}_{\mathbf{x}}$  (voir (3.5.5)). Dans ce cas, par liberté,  $I_d$  est un  $A$ -module libre de rang  $Q(d)$  admettant une base de la forme :

$$\{\mathbf{x}^\alpha - \sum_{\mathbf{x}^\beta \notin J_d} c_{\alpha,\beta} \mathbf{x}^\beta \mid \mathbf{x}^\alpha \in J_d\}$$

Comme on l'a vu dans la preuve de la proposition 3.5.1,  $J_d = \langle B \rangle_A$  étant Borel-fixe libre de rang  $Q(d)$  on a :

$$A[x_{r+1}, \dots, x_n] \subset J_d$$

et alors  $I_d$  admet une base  $G_I^d$  de la forme suivante :

$$G_I^d = \{\mathbf{x}^{\alpha_l} + f_l \mid l = 1, \dots, l_0\} \cup \{g_j, j = 1, \dots, j_0\}$$

avec  $f_l, g_j \in (x_r, \dots, x_0)$  et  $\{\mathbf{x}^{\alpha_l} \mid l = 1, \dots, l_0\} \subset A[x_n, \dots, x_{r+1}]_d$ . On peut donc décrire  $I_{d+1} = S_1.I_d$  comme dans la proposition 3.5.1 au moyen de la matrice  $\mathcal{A}_{d+1}$ . Dans ces conditions et avec les mêmes notations, commençons par prouver que le  $A$ -module  $x_0 I_d + \dots + x_r I_d \simeq \langle \mathcal{D}_1 \rangle_A$  (où  $\langle \mathcal{D}_1 \rangle_A$  est engendré par les lignes de  $\mathcal{D}_1$ ) contient une famille de  $Q'(d+1)$  polynômes de la forme suivante :

$$(\mathbf{x}^\alpha - \sum_{\mathbf{x}^\beta \notin J_{d+1}} c_{\alpha,\beta} \mathbf{x}^\beta)_{\mathbf{x}^\alpha \in x_0.J_d + \dots + x_r.J_d}$$

Prouvons par récurrence sur  $0 \leq i \leq r$  que c'est vrai pour  $\mathbf{x}^\alpha \in x_i J_d$ .

Pour  $i = 0$ , soit  $\mathbf{x}^\alpha = x_0.\mathbf{x}^\gamma$  avec  $\mathbf{x}^\gamma$  dans  $J_d$ . Il existe alors un élément :

$$\mathbf{x}^\gamma - \sum_{\mathbf{x}^\beta \notin J_d} c_{\gamma,\beta} \mathbf{x}^\beta \in I_d$$

Ainsi,

$$\mathbf{x}^\gamma x_0 - \sum_{\mathbf{x}^\beta \notin J_d} c_{\gamma,\beta} \mathbf{x}^\beta x_0$$

appartient à  $x_0 I_d \subset x_0 I_d + \dots + x_r I_d$ . Comme  $(J_d)$  est Borel-fixe et que  $J_d$  appartient à  $\text{Hilb}_{\mathbb{P}^n}^P(A)$  (en particulier  $J_{d+1} : S_1 = J_d$ ) on peut facilement prouver que si  $\mathbf{x}^\beta \notin J_d$  alors  $x_0 \mathbf{x}^\beta \notin J_{d+1}$ . Ainsi, la proposition est prouvée pour  $i = 0$ .

De  $i$  à  $i + 1$  : soit  $\mathbf{x}^\alpha = x_{i+1}.\mathbf{x}^\gamma$  avec  $\mathbf{x}^\gamma \in J_d$ . Alors :

$$\mathbf{x}^\gamma - \sum_{\mathbf{x}^\beta \notin J_d} c_{\gamma,\beta} \mathbf{x}^\beta \in I_d.$$

Ainsi,

$$\mathbf{x}^\gamma x_{i+1} - \sum_{\mathbf{x}^\beta \notin J_d} c_{\gamma,\beta} \mathbf{x}^\beta x_{i+1} \in x_{i+1} I_d \subset x_0 I_d + \dots + x_r I_d.$$

Si  $\mathbf{x}^\beta x_{i+1}$  appartient à  $J_{d+1}$  avec  $\mathbf{x}^\beta \notin J_d$ , alors il existe  $0 \leq j \leq n$  tel que :

$$\mathbf{x}^\beta x_{i+1} = x_j \mathbf{x}^\omega$$



avec  $\mathbf{x}^\omega \in J_d$ . Comme  $(J_d)$  est Borel-fixe et comme  $\mathbf{x}^\beta \notin J_d$ ,  $j$  est strictement plus petit que  $i + 1$ . Alors, par récurrence, comme  $j \leq i$  et  $\mathbf{x}^\omega \in J_d$ , on peut réécrire  $\mathbf{x}^\beta x_{i+1} = x_j \mathbf{x}^\omega$  comme un élément du  $A$ -module engendré par  $B'$  modulo  $x_0 I_d + \dots + x_r I_d$ . La proposition est donc prouvée pour  $i + 1$ .

Le  $A$ -module  $\langle \mathcal{D}_1 \rangle_A \simeq (x_0 I_d + \dots + x_r I_d)$  contient donc une famille  $\mathcal{F}$  de la forme :

$$\mathcal{F} := (\mathbf{x}^\alpha - \sum_{\mathbf{x}^\beta \notin J_{d+1}} c_{\alpha,\beta} \mathbf{x}^\beta)_{\mathbf{x}^\alpha \in x_0 J_d + \dots + x_r J_d}.$$

Or par hypothèse,  $(\Delta_{\mathcal{H}})$  annule les polynômes de  $\mathbf{H}_x$ . On déduit donc que  $\Delta = S_d^A/I_d$  satisfait les équations (3.5.3) et (3.5.4).

Montrons premièrement que cela implique que  $\mathcal{F}$  engendre le  $A$ -module  $\langle \mathcal{D}_2 \rangle_A$ . En effet, les équations (3.5.4) impliquent que le produit extérieur entre  $Q'(d+1)$  polynômes de  $\langle \mathcal{D}_1 \rangle_A$  et un polynôme de  $\langle \mathcal{D}_2 \rangle_A$  est toujours égal à zéro. En particulier, le produit extérieur entre les  $Q'(d+1)$  polynômes de  $\mathcal{F}$  et n'importe quel polynôme  $g$  de  $\langle \mathcal{D}_2 \rangle_A$  est égal à zéro. On déduit alors facilement que  $g$  appartient à  $\langle \mathcal{F} \rangle_A$  et que  $\mathcal{F}$  engendre  $\langle \mathcal{D}_2 \rangle_A$  (on utilise en particulier le fait que le  $A$ -module libre  $S_{d+1}^A$  admet une base contenant  $\mathcal{F}$ ).

Montrons deuxièmement que  $\mathcal{F}$  engendre  $\langle \mathcal{D}_1 \rangle_A$ . En utilisant le même raisonnement que dans la preuve du théorème 3.5.3 ainsi que la remarque 3.5.4, on prouve facilement que les équations (3.5.3) et (3.5.4) impliquent que le produit extérieur entre  $Q'(d+1) + 1$  polynômes de  $\langle \mathcal{D}_1 \rangle_A$  est toujours égal à zéro. En particulier, le produit extérieur entre les  $Q'(d+1)$  polynômes de  $\mathcal{F}$  et n'importe quel autre polynôme  $g$  de  $\langle \mathcal{D}_1 \rangle_A$  est égal à zéro. On déduit alors facilement que  $g$  appartient à  $\langle \mathcal{F} \rangle_A$  et que  $\mathcal{F}$  engendre  $\langle \mathcal{D}_1 \rangle_A$  (on utilise à nouveau le fait que le  $A$ -module libre  $S_{d+1}^A$  admet une base contenant  $\mathcal{F}$ ).

Enfin, on conclut que  $I_{d+1}$  est un  $A$ -module libre de base :

$$\mathcal{F} \cup \{\text{les polynômes représentés par les lignes du premier bloc de } \mathcal{A}_{r+1}\}.$$

On peut alors facilement réécrire cette famille de polynômes en utilisant des combinaisons linéaires d'éléments  $\mathcal{F}$  pour obtenir une base de la forme :

$$(\mathbf{x}^\alpha - \sum_{\mathbf{x}^\beta \notin J_{d+1}} c_{\alpha,\beta} \mathbf{x}^\beta)_{\mathbf{x}^\alpha \in J_{d+1}}.$$

$S_{d+1}^A/I_{d+1}$  est donc un  $A$ -module libre de base  $\mathcal{N}J_{d+1}$  (l'ensemble des monômes qui ne sont pas dans  $J_{d+1}$ ) et  $I_d \in \mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}^n}^P(X)$ .

### Etape 2 :

Supposons que  $I_d \in \mathbf{Gr}_{S_d}^{P(d)}(X)$  appartient à  $\mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}^n}^P(X)$ . Prouvons alors qu'il satisfait les équations du théorème 3.5.3. Cela revient à prouver les relations (3.5.3) et (3.5.4) pour des changements génériques de coordonnées. Fixons un ordre monomial  $<$  tel que  $x_0 > \dots > x_n$ . D'après le théorème de Galligo [31, Thm. 15.20, p.354] et le lemme de Nakayama, il existe un idéal monomial Borel-fixe  $(J_d)$  de polynôme de Hilbert  $P$ , tel que, pour des changements génériques de coordonnées,  $\mathcal{N}J_d$  et  $\mathcal{N}J_{d+1}$  sont des bases respectives de  $T_d/I_d$  et  $T_{d+1}/I_{d+1}$  en tant que  $A$ -modules libres (où  $\mathcal{N}J_i$  désigne les monômes de  $S_i$  qui ne sont pas dans

$J_i$ ). Alors, comme dans l'Étape 1, on peut représenter  $I_{d+1}$  au moyen de la matrice  $\mathcal{A}_{r+1}$  introduite dans la proposition 3.5.1 et prouver l'existence d'une famille  $\mathcal{F} \supset \mathcal{D}_1$  de  $Q'(d+1)$  polynômes homogènes de degré  $d+1$  de la forme :

$$(\mathbf{x}^\alpha - \sum_{\mathbf{x}^\beta \notin J_{d+1}} c_{\alpha,\beta} \mathbf{x}^\beta)_{\mathbf{x}^\alpha \in x_0 \cdot J_d + \dots + x_r \cdot J_d}.$$

Comme  $\mathcal{N}J_{d+1}$  est une base de  $S_{d+1}^A/I_{d+1}$  en tant que  $A$ -module libre, tout polynôme associé à une ligne de  $\langle \mathcal{D}_1 \rangle_A$  ou de  $\langle \mathcal{D}_2 \rangle_A$  appartient à  $\langle \mathcal{F} \rangle_A$ . En conséquence, les relations (3.5.3) et (3.5.4) sont satisfaites pour des changements génériques de coordonnées. Les équations du théorème 3.5.3 sont donc vérifiées.  $\square$

**Théorème 3.5.7.** *Le foncteur de Hilbert  $\mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}^n}^P$  est représentable. Il est représenté par un sous-schéma fermé  $\mathbf{Hilb}^P(\mathbb{P}^n)$  du schéma Grassmannien  $\mathbf{Gr}^{P(d)}(S_d)$  représentant le foncteur Grassmannien  $\mathbf{Gr}_{S_d}^{P(d)}$ . En particulier, en notant  $\#_d$  les relations de Plücker associées à la famille des monômes de degré  $d$  (en tant que base de  $S_d$ , voir (1.2.11) et théorème 1.2.41), on a :*

$$\mathbf{Hilb}^P(\mathbb{P}^n) \simeq \mathbf{Proj}(\mathbb{K}[\wedge^{P(d)} S_d] / (\#_d, \mathbf{T}))$$

avec  $T$  défini par (3.5.6).

*Démonstration.* Ce théorème est une conséquence de la proposition 3.5.6. En effet, soit  $X \in \mathcal{C}$ , se donner un élément de  $\mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}^n}^P(X)$  est équivalent à se donner un élément  $\Delta \in \mathbf{Gr}_{S_d}^{P(d)}(X)$  dont les sections  $(\Delta_{\alpha_1, \dots, \alpha_{P(d)}})_{\alpha_1 < \dots < \alpha_{P(d)}} \in \mathbf{H}^0(X, \wedge^{P(d)} \Delta)$  annulent les polynômes de  $\mathbf{H}$ . C'est encore équivalent à se donner un couple  $(\mathcal{L}, \phi)$  et des sections  $(l_{\alpha_1 < \dots < \alpha_{P(d)}})_{\alpha_1 < \dots < \alpha_{P(d)}} \in \mathbf{H}^0(X, \mathcal{L})$  où  $\mathcal{L}$  est un faisceau inversible sur  $X$ ,  $\phi$  un morphisme surjectif :

$$\phi : \wedge^\mu S_d \otimes \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow 0$$

et  $(l_{\alpha_1 < \dots < \alpha_{P(d)}}) \in \mathbf{H}^0(X, \mathcal{L})$  engendrent  $\mathcal{L}$  et satisfont les relations  $\#_d, \mathbf{H}$ . Enfin, cela équivaut (voir par exemple [46][thm. 7.1, p. 150]) à se donner un morphisme de schémas :

$$X \longrightarrow \mathbf{Proj}(\mathbb{K}[\wedge^\mu S_d] / \#_d, \mathbf{H}).$$

Cette bijection naturelle induit donc un isomorphisme de foncteurs entre  $\mathbf{Hilb}^P(\mathbb{P}^n)$  et le foncteur  $\mathbf{Hom}(-, \mathbf{Proj}(\mathbb{K}[\wedge^\mu S_d] / \#_d, \mathbf{H}))$  dans la catégorie  $\mathcal{C}$ .  $\mathbf{Hilb}^P(\mathbb{P}^n)$  est donc représenté par  $\mathbf{Proj}(\mathbb{K}[\wedge^\mu S_d] / \#_d, \mathbf{H})$ .  $\square$



# Chapitre 4

## Décomposition de tenseurs symétriques

### 4.1 Introduction

Les tenseurs symétriques apparaissent essentiellement sous forme de fonctions multivariées. En statistiques par exemple, les tenseurs cumulants sont des dérivées de la seconde fonction caractéristique [65].

Les tenseurs sont aussi largement utilisés en électronique depuis les années quatre-vingt-dix [79], et en particulier dans le domaine de l'"Antenna Array Processing" [29] [18], ou encore celui des télécommunications [84] [17] [76] [33] [26]. Plus tôt encore, dans les années soixante-dix, les tenseurs ont été utilisés en Chémométrie [11] et en Psychométrie [53]. La complexité arithmétique est aussi un domaine important où la compréhension des tenseurs et de leurs décompositions ont fait d'importantes avancées [57] [55] [78]. Citons en particulier les tenseurs d'ordre trois qui représentent des applications bilinéaires [55] [8] [78] [57]. Enfin, l'Analyse de Données représente aussi un champ important d'application de la décomposition de tenseurs. Citons, par exemple, l'analyse des composantes indépendantes qui fut initialement introduite pour des tenseurs symétriques dont le rang n'excède pas la dimension [21] [15]. Néanmoins, il est désormais possible d'estimer plus de facteurs que la dimension [30] [52].

Dans certaines applications, les tenseurs peuvent être symétriques seulement dans certains modes [23], ou au contraire ne pas être symétriques, ni avoir la même dimension [19] [77]. De nombreuses autres applications de la décomposition de tenseurs peuvent être trouvées dans [19] [77].

Remarquons que dans certains cas, les tenseurs apparaissent sous forme d'une collection de matrices symétriques [28] [35] [84] [71] [82]. Inversement, certains algorithmes traitent les tenseurs symétriques en tant que collection de matrices symétriques [85] [87] [27].

Le problème de décomposition de tenseurs symétriques, que nous considérons dans ce chapitre, est un problème déterminantiel qui étend la Décomposition en Valeurs Singulières (SVD) pour les matrices symétriques. Cette méthode est un outil important en algèbre linéaire numérique qui concentre beaucoup d'attention et est régulièrement utilisée dans de nombreuses applications [36].

Comme on a pu le voir au dessus, l'extension à des tenseurs symétriques généraux apparaît dans beaucoup de domaines. Néanmoins, de nombreux problèmes, tant théoriques qu'algorithmiques, demeurent non résolus. Parmi les problèmes résolus, mentionnons la détermina-

tion du nombre minimal de termes dans la décomposition d'un tenseur générique [2], qui y est énoncée sous la forme d'un problème d'interpolation duale. Voir [49, chap. 2] pour un lien entre ces deux points de vue. En ce qui concerne les problèmes ouverts, citons par exemple la détermination du rang maximal de tenseurs de degré et de dimension donnés, ou encore la détermination de la stratification de l'ensemble des tenseurs symétriques "rang par rang". Voir néanmoins [20] pour une réponse dans le cas binaire. Pour une présentation détaillée du problème de décomposition de tenseurs symétriques du point de vue de la géométrie algébrique projective, nous renvoyons le lecteur à [49]. Les propriétés des matrices de Catalecticant, reliées à la dualité apolaire associée à un tenseur symétrique de degré donné, y sont largement étudiées.

En parallèle et de manière indépendante, probablement à cause de la barrière du langage, des recherches concernant ce problème ont été développées en analyse numérique. Elles sont principalement inspirées par le cas des tenseurs d'ordre 2, i.e des matrices. Malgré leur intérêt pratique évident, les algorithmes numériques actuellement utilisés par la plupart des communautés scientifiques sont sous-optimaux, dans le sens où ils n'exploitent pas complètement les symétries [1], minimisent différents critères de manière séquentielle [85] [27] ou sont itératifs et souffrent d'un manque de garantie concernant leur convergence globale [45] [69]. Ils requièrent de plus que le rang soit plus petit que le rang générique. Parmi ces méthodes, citons par exemple les techniques PARAFAC [11], largement appliquées pour résoudre les problèmes qui sont mal posés. En effet, contrairement au cas des matrices, l'ensemble des tenseurs symétriques de rang  $\leq r$  n'est pas fermé, et sa clôture admet des singularités correspondant à des tenseurs de rang  $> r$ . Cela explique pourquoi une approche numérique itérative rencontre des difficultés pour calculer une décomposition de tenseur. Pour plus de détails sur les problèmes ouverts concernant les tenseurs symétriques, voir [22].

Le but de ce chapitre est de décrire une nouvelle méthode capable de décomposer un tenseur symétrique d'ordre et de dimension quelconques en une somme de termes de rang un. L'algorithme proposé dans ce chapitre s'inspire du théorème de Sylvester [56], et l'étend à de plus grandes dimensions. En utilisant le produit apolaire sur les polynômes, on montrera que le problème de décomposition de tenseurs se ramène à écrire une forme linéaire comme une combinaison d'évaluations en des points distincts. Nous fournirons des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'une décomposition de rang  $r$ . Celles-ci sont basées sur des conditions de rang d'opérateurs de Hankel et des propriétés de commutation. Au lieu de travailler degré par degré, comme dans [49], on considèrera une situation affine afin de traiter en une seule fois les différentes composantes homogènes. Dans le cas binaire, le problème de décomposition peut être résolu directement en calculant les rangs des Catalecticants. En dimension plus grande, la situation est plus complexe. Une étape d'"extension" est nécessaire pour trouver une décomposition. Cela conduit à la résolution d'un système polynomial de petit degré à partir duquel on déduit une décomposition en résolvant un simple problème de valeurs propres.

Cet algorithme n'est pas restreint à des rangs sous-génériques comme pour la méthode proposée dans [49][chap. 5]. Dans les cas sous-génériques, la décomposition est néanmoins essentiellement unique (i.e à scalaire près et à permutation près) sous certaines conditions de rang. La méthode que nous proposons exploite pleinement les symétries du problème et fournit une réponse concernant l'unicité.

Les sections 4.2 à 4.5 de ce chapitre correspondent à un article en collaboration avec P. Comon, B. Mourrain et E. Tsigaridas : voir [9]. Les sections 4.6 et 4.7 apportent quant à elles une réelle nouveauté par rapport à l'article précédemment cité et n'apparaissent à l'heure actuelle dans aucune publication. Les résultats qui y sont exposés sont le fruit d'une collaboration avec B. Mourrain et, après approfondissement, feront certainement partie d'un article. Enfin, la section 4.9 correspond à un travail en collaboration avec A. Bernardi, P. Comon et B. Mourrain dont une version a été soumise et acceptée aux "Proceedings" de ISSAC 2011 : voir [6]. Cette section se contente de mettre en place le formalisme et les propriétés nécessaires afin d'adapter le cas multi-homogène aux techniques développées pour la décomposition de tenseurs symétriques. Celle-ci n'est pas moins complète que [6] qui est constitué essentiellement d'un rappel de ces techniques et d'une application au cas multi-homogène. La version correspondante qui sera publiée dans les "Proceedings" sera quant à elle moins précise que [6] puisqu'il a fallu s'adapter aux contraintes de taille imposées par ISSAC sur les papiers soumis. Enfin, ma contribution dans ce travail, au même titre que mes co-auteurs, a été de généraliser les résultats de [9] au cas multi-homogène.

Nous commencerons ainsi ce chapitre par exposer différentes formulations du problème de décomposition de tenseurs. Nous rappellerons ensuite le théorème de Sylvester et l'algorithme qui en découle pour le cas binaire. Dans la section 4.4, nous développerons le point de vue dual et nous introduirons les notions d'opérateur de Hankel et de décomposition généralisée. Puis, dans la section 4.5, nous verrons comment décomposer un tenseur revient à étendre une forme linéaire définie partiellement. Nous fournirons alors des critères d'existence pour de telles extensions. Nous aborderons ensuite la question de l'unicité et donnerons des conditions pour lesquelles la décomposition de tenseurs est essentiellement unique. Nous concluons alors ce chapitre en fournissant un algorithme de décomposition inspiré de celui de Sylvester pour le cas binaire et basé sur les critères d'extension de la section 4.5. Nous appliquerons cet algorithme à trois exemples dans les sous-sections respectives 4.8.1, 4.8.2 et 4.8.3. Enfin, nous montrerons section 4.9 comment ces techniques peuvent s'adapter afin de résoudre le problème de décomposition de tenseurs généraux (non nécessairement symétriques) et traiterons deux exemples dans la sous-section 4.9.2.

Nous ferons, tout au long de ce chapitre, régulièrement usage des préliminaires introduits dans la section 1.2. Les notations seront celles décrites dans la section 1.1.

## 4.2 Formulations du problème

Nous allons présenter dans cette section trois formulations différentes du même problème que nous considérons dans ce chapitre.

### 4.2.1 Décomposition polynomiale

On peut considérer un tenseur symétrique d'ordre  $d$  et de dimension  $n$  comme un polynôme  $f(\mathbf{x}) \in S_d$  homogène de degré  $d$  en  $n + 1$  variables :

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{j_0+j_1+\dots+j_n=d} a_{j_0,j_1,\dots,j_n} x_0^{j_0} x_1^{j_1} \dots x_n^{j_n}. \quad (4.2.1)$$

Il s'agit alors de décomposer  $f$  en une somme de puissances  $d$ -ème de formes linéaires, i.e :

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^r \lambda_i (k_{i,0}x_0 + k_{i,1}x_1 + \cdots + k_{i,n}x_n)^d = \lambda_1 \mathbf{k}_1(\mathbf{x})^d + \lambda_2 \mathbf{k}_2(\mathbf{x})^d + \cdots + \lambda_r \mathbf{k}_r(\mathbf{x})^d, \quad (4.2.2)$$

avec  $\lambda_i \neq 0$ ,  $\mathbf{k}_i \neq 0$ , et  $r$  le plus petit possible. Ce  $r$  minimal s'appellera le *rang* de  $f$ .

Une approche naïve consiste à résoudre le problème de décomposition de la manière suivante : soit  $f \in S_d$  un polynôme homogène de degré  $d$ . Supposons que le rang de  $f$  est connu et égal à  $r$ . Considérons alors la relation suivante :

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^r (k_{i,0}x_0 + k_{i,1}x_1 + \cdots + k_{i,n}x_n)^d$$

où les  $r(n+1)$  coefficients  $k_{i,j}$  des formes linéaires  $\mathbf{k}_i$  sont des inconnus. En développant le terme de droite et en identifiant ses coefficients avec ceux de  $f$ , on obtient un système d'équations polynomiales en les  $k_{i,j}$ . C'est un système surdéterminé de  $\binom{n+d}{d}$  équations en  $r(n+1)$  variables. Les polynômes de ce système sont homogènes de degré  $d$ . Cette description du problème n'est pas optimale, elle introduit en particulier  $r!$  solutions redondantes puisque toute permutation des formes linéaires solutions satisfait encore les équations de ce système polynomial. Un autre inconvénient majeur de cette approche est le degré élevé des polynômes qu'il s'agit de résoudre (degré  $d$ ). Le lecteur pourra ainsi comparer avec le système de polynômes de degré 2 décrit plus loin dans la section 4.5.

## 4.2.2 Variétés sécantes et variétés de Véronèse

Rappelons les liens qui existent entre la décomposition de tenseurs et les variétés sécantes dans le cas symétrique. En effet, l'ensemble des tenseurs symétriques de la forme  $\mathbf{k}(\mathbf{x})^d = (k_0x_0 + k_1x_1 + \cdots + k_nx_n)^d$  pour  $\mathbf{k} = (k_0, k_1, \dots, k_n)$  dans  $\mathbb{K}^{n+1}$  est une variété algébrique fermée.

**Définition 4.2.1.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n+1$ . L'image de l'application suivante :

$$\begin{array}{ccc} \nu_d : \mathbf{Proj}(E) & \rightarrow & \mathbf{Proj}(S^d(E)) \\ \mathbf{v} & \mapsto & \mathbf{v}^d \end{array}$$

s'appelle *la variété de Véronèse*. On la note  $\mathcal{V}_d(E)$ .

Voir [44, 86] pour une description de ces variétés.

Ainsi, en utilisant ce point de vue, un tenseur symétrique de rang 1 dans  $S_d(E)$  correspond à un point de la Véronèse  $\mathcal{V}_d(E)$ . De même, un tenseur symétrique de rang  $\leq r$  dans  $S_d(E)$  est une combinaison linéaire de  $r$  points sur la Véronèse  $\mathcal{V}_d(E)$ . Il appartient donc à l'espace linéaire engendré par  $r$  points sur  $\mathcal{V}_d(E)$ .

**Définition 4.2.2.** Soient  $X \subset \mathbb{P}^N$  une variété projective et  $\sigma_r^0(X)$  l'ensemble suivant :

$$\sigma_r^0(X) := \bigcup_{P_1, \dots, P_r \in X} \langle P_1, \dots, P_r \rangle.$$

La  $r$ -ème variété sécante  $\sigma_r(X)$  de  $X$  est la clôture (pour la topologie de Zariski) de  $\sigma_r^0(X)$ .

Voir [44, 86] pour des exemples et pour les propriétés générales de ces variétés.

### 4.2.3 Décomposition et dualité

**Définition 4.2.3.** Soit  $f, g \in S_d$ , avec  $f = \sum_{|\alpha|=d} f_\alpha x_0^{\alpha_0} \cdots x_n^{\alpha_n}$  et  $g = \sum_{|\alpha|=d} g_\alpha x_0^{\alpha_0} \cdots x_n^{\alpha_n}$ . On définit le *produit apolair* sur  $S_d$  comme suit :

$$\langle f, g \rangle = \sum_{|\alpha|=d} f_\alpha g_\alpha \binom{d}{\alpha_0, \dots, \alpha_n}^{-1}.$$

**Définition 4.2.4.** En utilisant le caractère non-dégénéré de ce produit apolair, on peut associer à tout élément de  $S_d$  un unique élément de  $S_d^*$  grâce à l'application suivante :

$$\begin{aligned} \tau : S_d &\rightarrow S_d^* \\ f &\mapsto f^*, \end{aligned}$$

où la forme linéaire  $f^*$  est définie par :

$$f^* : g \mapsto \langle f, g \rangle.$$

Ainsi,  $\tau$  associe au polynôme  $f = \sum_{|\alpha|=d} c_\alpha \binom{d}{\alpha} \mathbf{x}^\alpha \in S_d$  la forme linéaire  $f^* = \sum_{|\alpha|=d} c_\alpha \mathbf{d}^\alpha \in S_d^*$ .

**Proposition 4.2.5.** Soient  $f \in S_d$  et  $(\mathbf{k}_i)_{1 \leq i \leq r}$  une famille de points de  $\mathbb{A}^{n+1}$ . Alors,  $f$  s'écrit :

$$f = \sum_i \lambda_i (x_0 k_{i,0} + \cdots + x_n \cdot k_{i,n})^d$$

si et seulement si  $f^* \in S_d^*$  s'écrit :

$$f^* = \sum \lambda_i \mathbf{1}_{\mathbf{k}_i}$$

sur  $S_d$ .

*Démonstration.* Un calcul simple montre que  $\langle f, \mathbf{k}(\mathbf{x})^d \rangle = f(\mathbf{k})$  pour tout  $\mathbf{k} \in \mathbb{K}^{n+1}$ . On a donc :

$$\tau(\mathbf{k}(\mathbf{x})^d) = \mathbf{1}_{\mathbf{k}} \in S_d^*.$$

□

Le problème de décomposition peut se reformuler de la manière suivante :

*Etant donné  $\Lambda \in S_d^*$ , il s'agit de trouver le plus petit nombre de vecteurs non-nuls  $\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_r \in \mathbb{K}^{n+1}$  et de scalaires non-nuls  $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K} - \{0\}$  tels que :*

$$\Lambda = \sum_{i=1}^r \lambda_i \mathbf{1}_{\mathbf{k}_i}. \quad (4.2.3)$$



Par changement de variables générique, nous serons amenés à supposer sans perte de généralité que les coordonnées  $k_{i,0}$  sont égales à 1.

**Définition 4.2.6.** On appelle *décomposition affine* de  $\Lambda \in S_d^*$  (resp.  $f \in S_d$ ) la donnée d'une famille de points  $(\mathbf{k}_i)_{1 \leq i \leq r}$  de  $\mathbb{A}^{n+1}$  et d'une familles de scalaires  $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq r}$  telles que :

$$\Lambda = \sum_{i=1}^r \lambda_i \mathbf{1}_{\mathbf{k}_i} \text{ (resp. } f = \sum_{i=1}^r \lambda_i (x_0 k_{i,0} + x_1 k_{i,1} + \cdots + x_n k_{i,n})^d)$$

et  $k_{i,0} = 1$  pour tout  $1 \leq i \leq r$ .

*Remarque 4.2.7.* Notons que d'après la proposition 4.2.5,  $f \in S_d$  admet une décomposition affine si et seulement si  $f^*$  admet une décomposition affine.

**Définition 4.2.8.** Etant donné  $f \in S_d$ , on rappelle que l'on note  $\underline{f} \in R_d$  la déhomogénéisation de  $f$  par rapport à  $x_0$ , i.e :

$$\underline{f} = f(1, x_1, \dots, x_n).$$

On définit alors  $\underline{f}^* \in R_d^*$  de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \underline{f}^* : R_d &\rightarrow \mathbb{K} \\ p &\mapsto f^*(p^h) \end{aligned}$$

où  $p^h$  désigne l'homogénéisation en degré  $d$  de  $p$  par rapport à  $x_0$ . On a par définition :

$$\underline{f}^* = \underline{f}^* \text{ (voir notations, section 1.1).}$$

*Remarque 4.2.9.* Etant donné  $f \in S_d$ , on vérifie aisément que pour tout  $q \in S_d$ , on a :

$$f^*(q) = \underline{f}^*(\underline{q}) = \underline{f}^*(q(1, x_1, \dots, x_n)).$$

**Proposition 4.2.10.** Etant donné  $f \in S_d$ , et  $(\mathbf{k}_i)_i$  une famille de points dans  $\mathbb{K}^{n+1}$  telle que  $k_{i,0} = 1 \forall i$ . Alors,  $f$  admet la décomposition affine suivante :

$$f = \sum_i \lambda_i (k_{i,0} x_0 + \cdots + k_{i,n} x_n)^d$$

si et seulement si  $\underline{f}^*$  peut s'écrire :

$$\underline{f}^* = \sum_i \lambda_i \mathbf{1}_{\mathbf{k}_i} \in R_d^*$$

où  $\underline{\mathbf{k}}_i = (k_{i,1}, \dots, k_{i,n})$ .

*Démonstration.* Cela vient de la proposition 4.2.5 et du fait que  $f^*$  admet une décomposition affine de la forme suivante :

$$f^* = \sum_i \lambda_i \mathbf{1}_{\mathbf{k}_i}$$

(avec  $k_{i,0} = 1 \forall i$ ) si et seulement si  $\underline{f}^*$  peut s'écrire :

$$\underline{f}^* = \sum_i \lambda_i \mathbf{1}_{\underline{\mathbf{k}}_i} \in R_d^*.$$

□

*Remarque 4.2.11.* Ainsi, à changement générique de coordonnées près, décomposer  $f \in S_d$  en somme de puissances de formes linéaires, revient à décomposer  $\underline{f}^* \in R_d^*$  en somme d'évaluations. Notre problème de décomposition de tenseurs peut donc se reformuler de la manière suivante :

Soit  $\Lambda \in R_d^*$ , il s'agit de trouver le plus petit nombre de vecteurs non-nuls  $\underline{\mathbf{k}}_1, \dots, \underline{\mathbf{k}}_r \in \mathbb{K}^n$  et de scalaires non-nuls  $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K} - \{0\}$  tels que :

$$\Lambda = \sum_{i=1}^r \lambda_i \mathbf{1}_{\underline{\mathbf{k}}_i} \quad (4.2.4)$$

sur  $R_d$ .

**Définition 4.2.12.** Etant donné  $\Lambda \in S_d^*$  (resp.  $R_d^*$ ), on appellera *rang* de  $\Lambda$ , le plus petit entier  $r$  tel que  $\Lambda$  s'écrive :

$$\Lambda = \sum_{i=1}^r \lambda_i \mathbf{1}_{\underline{\mathbf{k}}_i} \text{ (resp. } \sum_{i=1}^r \lambda_i \mathbf{1}_{\underline{\mathbf{k}}_i} \text{)}.$$

Etant donné  $g \in R_d$ , on appellera *rang* de  $g$ , le plus petit entier  $r$  tel que  $g$  s'écrive :

$$g(\underline{\mathbf{x}}) = \sum_{i=1}^r \lambda_i \underline{\mathbf{k}}_i(\underline{\mathbf{x}}) = \sum_{i=1}^r \lambda_i (1 + k_{i,1}x_1 + \dots + k_{i,n}x_n)^d.$$

**Proposition 4.2.13.** Etant donné  $f \in S_d$ , on a :

- (i)  $\text{rang } f = \text{rang } f^*$ ,
- (ii)  $\text{rang } \underline{f} = \text{rang } \underline{f}^*$
- (iii)  $\text{rang } \underline{f} \geq \text{rang } f$ .

*Démonstration.* Les points (i) et (ii) sont des conséquences directes de définitions 4.2.4 et 4.2.8. (iii) vient du fait que si  $\underline{f}$  s'écrit :

$$\underline{f}(\underline{\mathbf{x}}) = \sum_{i=1}^r \lambda_i (1 + k_{i,1}x_1 + \dots + k_{i,n}x_n)^d,$$

alors  $f$  s'écrit :

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^r \lambda_i (x_0 + k_{i,1}x_1 + \dots + k_{i,n}x_n)^d$$

□

### 4.3 Le cas binaire ( $n = 1$ )

Le cas binaire se résout grâce à l'*algorithme de Sylvester* initialement énoncé afin de décomposer des polynômes homogènes en deux variables sous formes d'une somme de puissances de formes linéaires [80] [20]. Rappelons cet algorithme :

**Théorème 4.3.1** (Sylvester, 1886). Soit  $p(x_0, x_1) = \sum_{i=0}^d \binom{d}{i} c_i x_0^i x_1^{d-i}$  un polynôme homogène de degré  $d$  sur  $\mathbb{C}$ . Alors,  $p$  peut s'écrire comme une somme de puissances  $d$ -ème de  $r$  formes linéaires distinctes dans  $\mathbb{C}$  :

$$p(x_0, x_1) = \sum_{j=1}^r \lambda_j (\alpha_j x_0 + \beta_j x_1)^d, \quad (4.3.1)$$

si et seulement si :

(i) il existe un vecteur  $\mathbf{q}$  dans  $\mathbb{C}^{r+1}$  tel que :

$$\begin{bmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_r \\ \vdots & & & \vdots \\ c_{d-r} & \cdots & c_{d-1} & c_d \end{bmatrix} \mathbf{q} = \mathbf{0}. \quad (4.3.2)$$

(ii) le polynôme  $q(x_0, x_1) = \sum_{l=0}^r q_l x_0^l x_1^{r-l}$  admet  $r$  racines distinctes, i.e.  $q$  peut s'écrire sous la forme

$$q(x_0, x_1) = \prod_{j=1}^r (\beta_j^* x_0 - \alpha_j^* x_1).$$

La preuve de ce théorème est constructive et induit l'algorithme 1 page suivante. Etant donné un polynôme bivarié  $p(x_0, x_1)$  de degré  $d$  et de coefficients  $a_i = \binom{d}{i} c_i$ ,  $0 \leq i \leq d$ , il s'agit de calculer les matrices de Hankel notées  $H[r]$  de taille  $d - r + 1 \times r + 1$  et dont les entrées sont données par :

$$H[r]_{ij} = c_{i+j-2}$$

et de considérer leur noyau.

## 4.4 Opérateurs de Hankel et algèbre quotient

Dans cette section, nous rappellerons les outils algébriques nécessaires à la description et à l'analyse de notre algorithme.

Pour tout  $\Lambda \in R^*$ , on définit la forme bilinéaire  $Q_\Lambda$  de la manière suivante :

$$\begin{aligned} Q_\Lambda &: R \times R \rightarrow \mathbb{K} \\ (a, b) &\mapsto \Lambda(ab). \end{aligned}$$

La matrice de  $Q_\Lambda$  dans la base monomiale de  $R$  sera notée :

$$Q_\Lambda := (\Lambda(\mathbf{x}^{\alpha+\beta}))_{\alpha, \beta}$$

avec  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ .

Pour tout  $\Lambda \in R^*$ , on définit l'opérateur de Hankel  $\mathcal{H}_\Lambda$  de  $R$  dans  $R^*$  par :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\Lambda &: R \rightarrow R^* \\ p &\mapsto p * \Lambda. \end{aligned}$$

---

**Algorithm 1** DÉCOMPOSITION DE FORMES BINAIRES

---

**Entrée :** Un polynôme  $p(x_0, x_1)$  homogène de degré  $d$ .

**Sortie :** Une décomposition de  $p$  de la forme  $p(x_0, x_1) = \sum_{j=1}^r \lambda_j \mathbf{k}_j(\mathbf{x})^d$  avec  $r$  minimal.

1. Initialiser  $r = 0$
2. Incrémenter  $r \leftarrow r + 1$
3. Si le noyau de  $H[r]$  est réduit à  $\{0\}$ , alors on revient à l'étape 2
4. Autrement, on calcule une base  $\{\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_l\}$  du noyau de  $H[r]$ .
5. Spécialisation :
  - Prendre un vecteur générique  $\mathbf{q}$  dans le noyau, e.g.  $\mathbf{q} = \sum_i \mu_i \mathbf{k}_i$
  - Calculer les racines du polynôme associé à  $\mathbf{q}$  :  $q(x_0, x_1) = \sum_{l=0}^r q_l x_0^l x_1^{d-l}$ . Notons les  $(\beta_j, -\alpha_j)$ , où  $|\alpha_j|^2 + |\beta_j|^2 = 1$ .
  - Si les racines ne sont pas distinctes dans  $\mathbb{P}^1$  on essaie une autre spécialisation. Si des racines distinctes ne peuvent être obtenues on revient à l'étape 2.
  - Autrement, si  $q(x_0, x_1)$  admet  $r$  racines distinctes on calcule les coefficients  $\lambda_j$ ,  $1 \leq j \leq r$ , en résolvant le système linéaire suivant où  $a_i := \binom{d}{i} c_i$

$$\begin{bmatrix} \alpha_1^d & \dots & \alpha_r^d \\ \alpha_1^{d-1} \beta_1 & \dots & \alpha_r^{d-1} \beta_r \\ \alpha_1^{d-2} \beta_1^2 & \dots & \alpha_r^{d-2} \beta_r^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \beta_1^d & \dots & \beta_r^d \end{bmatrix} \lambda = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_d \end{bmatrix}$$

6. La décomposition est alors  $p(x_0, x_1) = \sum_{j=1}^r \lambda_j \mathbf{k}_j(\mathbf{x})^d$ , avec  $\mathbf{k}_j(\mathbf{x}) = (\alpha_j x_0 + \beta_j x_1)$ .
-

La matrice de l'application linéaire  $\mathcal{H}_\Lambda$  dans la base monomiale  $(\underline{\mathbf{x}}^\alpha)$  de  $R$  et dans sa base duale  $(\underline{\mathbf{d}}^\alpha)$  de  $R^*$  sera notée :

$$H_\Lambda = (\Lambda(\underline{\mathbf{x}}^{\alpha+\beta}))_{\alpha,\beta},$$

avec  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ .

On a alors :

$$Q_\Lambda(a, b) = \Lambda(ab) = a \cdot \Lambda(b) = b \cdot \Lambda(a) = \mathcal{H}_\Lambda(a)(b) = \mathcal{H}_\Lambda(b)(a).$$

**Définition 4.4.1.** Etant donnés  $B = \{b_1, \dots, b_r\}, B' = \{b'_1, \dots, b'_{r'}\} \subset R$  et  $\Lambda \in R^*$ , on définit :

$$\mathcal{H}_\Lambda^{B',B} : \langle B \rangle \rightarrow \langle B' \rangle^*,$$

comme la restriction de  $\mathcal{H}_\Lambda$  à l'espace vectoriel engendré par  $B$  (noté  $\langle B \rangle$ ) composée avec l'application naturelle de  $R^*$  dans  $\langle B' \rangle^*$ . Soit  $H_\Lambda^{B',B}$  la matrice de taille  $r \times r'$  définie par :

$$(\Lambda(b_i b'_j))_{1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq r'}.$$

Si  $B' = B$ , on notera  $\mathcal{H}_\Lambda^B$  et  $H_\Lambda^B$ . Enfin, on notera :

$$\mathcal{H}_\Lambda^{i,j} : R_i \rightarrow R_j^*,$$

la restriction de  $\mathcal{H}_\Lambda$  à  $R_i$  composée avec l'inclusion de  $R^*$  dans  $R_j^*$ . On notera alors  $H_\Lambda^{i,j}$  la matrice de  $\mathcal{H}_\Lambda^{i,j}$  dans les bases monomiales.

*Remarque 4.4.2.* Si  $B, B'$  sont des familles de polynômes linéairement indépendants, alors  $H_\Lambda^{B',B}$  est la matrice de  $\mathcal{H}_\Lambda^{B',B}$  dans la base  $B$  de  $\langle B \rangle$  et la base duale  $B'^*$  dans  $\langle B' \rangle^*$ . Les *matrices de Catalecticant* introduites dans [49] correspondent au cas où  $B$  et  $B'$  sont respectivement les ensembles de monômes de degré  $\leq k$  et  $\leq d - k$  pour  $k = 0, \dots, d$  (voir définition 4.6.2).

*Remarque 4.4.3.* Notons que les opérateurs de Hankel satisfont des propriétés de symétrie :

$$\mathcal{H}_\Lambda^{B',B} = {}^t \mathcal{H}_\Lambda^{B,B'}$$

pour toute famille de monômes  $B', B \subset R$ .

D'après la définition des opérateurs de Hankel, un polynôme  $p \in R$  appartient au noyau de  $\mathcal{H}_\Lambda$  si et seulement si  $p * \Lambda = 0$ , i.e  $\Lambda(pq) = 0 \forall q \in R$ .

**Proposition 4.4.4.** Etant donné  $\Lambda \in R^*$ , on note  $I_\Lambda$  le noyau de  $\mathcal{H}_\Lambda$ . Alors,  $I_\Lambda$  est un idéal de  $R$ .

*Démonstration.* Soit  $p_1, p_2 \in I_\Lambda$ . Alors pour tout  $q \in R$ ,  $\Lambda((p_1 + p_2)q) = \Lambda(p_1q) + \Lambda(p_2q) = 0$ . Ainsi,  $p_1 + p_2 \in I_\Lambda$ . De plus, si  $p \in I_\Lambda$  et  $p' \in R$ , alors pour tout  $q \in R$  on a  $\Lambda(pp'q) = 0$ . Ainsi  $pp' \in I_\Lambda$  et  $I_\Lambda$  est un idéal.  $\square$

Soit  $\mathcal{A}_\Lambda = R/I_\Lambda$  l'algèbre quotient associée à l'idéal  $I_\Lambda$ . Le rang de  $\mathcal{H}_\Lambda$  est égal à la dimension de  $\mathcal{A}_\Lambda$  en tant que  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

**Définition 4.4.5.** Une algèbre quotient de type fini  $\mathcal{A}$  est dite *Gorenstein* s'il existe une forme bilinéaire non-dégénérée  $Q$  sur  $\mathcal{A}$  telle que pour tout polynôme  $f, g, h \in \mathcal{A}$  on a  $Q(f, gh) = Q(fg, h)$  ou de manière équivalente s'il existe une forme linéaire  $\Lambda \in \mathcal{A}^*$  telle que  $(f, g) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A} \mapsto \Lambda(fg)$  est non-dégénérée.

On peut montrer (voir [32] pour plus de détails) que  $\mathcal{A}$  est Gorenstein si et seulement si  $\mathcal{A}^*$  est un  $\mathcal{A}$ -module libre de rang 1 engendré par un élément  $\Lambda \in \mathcal{A}^* : \mathcal{A}^* = \mathcal{A} * \Lambda$ . L'ensemble  $\mathcal{A} * \Lambda$  s'appellera le *système inverse* engendré par  $\Lambda$  [64].

**Proposition 4.4.6.** Soit  $\Lambda \in R^*$ . Le dual  $\mathcal{A}_\Lambda^*$  de  $\mathcal{A}_\Lambda$ , s'identifie avec l'ensemble  $D = \{q * \Lambda \mid q \in R\}$  et  $\mathcal{A}_\Lambda$  est une algèbre de Gorenstein.

*Démonstration.* Soit  $D = \{q * \Lambda \mid q \in R\}$  le système inverse engendré par  $\Lambda$ . Par définition :

$$D^\perp = \{p \in R \mid \forall q \in R, q * \Lambda(p) = \Lambda(pq) = 0\}.$$

Ainsi  $D^\perp = I_\Lambda$ . Puisque  $\mathcal{A}_\Lambda^* = I_\Lambda^\perp$  on déduit que  $\mathcal{A}_\Lambda^* = I_\Lambda^\perp = D^{\perp\perp} = D$ .  $\mathcal{A}_\Lambda$  est donc Gorenstein.  $\square$

**Proposition 4.4.7.** [9][Prop.3.5, p.7] Soient  $B = \{b_1, \dots, b_r\}, B' = \{b'_1, \dots, b'_r\} \subset R$  deux familles de polynômes et  $\Lambda \in R^*$ . Supposons que  $\mathcal{H}_\Lambda$  soit de rang fini égal à  $r$  et que  $\mathbb{H}_\Lambda^{B', B}$  soit inversible. Alors  $b_1, \dots, b_r$  est une base de  $\mathcal{A}_\Lambda$ . De plus, si  $1 \in \langle B \rangle$  l'idéal  $I_\Lambda$  est engendré par le noyau de  $\mathcal{H}_\Lambda^{B', B^+}$  (voir définition 1.2.19 pour  $B^+$ ).

*Démonstration.* Prouvons d'abord que  $\{b_1, \dots, b_r\} \cap I_\Lambda = \{0\}$ . Soit  $p \in \langle b_1, \dots, b_r \rangle \cap I_\Lambda$ . Alors,  $p = \sum_i p_i b_i$  avec  $p_i \in \mathbb{K}$  et  $\Lambda(p b'_j) = 0 \forall 1 \leq j \leq r$ . Cela implique que  $\mathbb{H}_\Lambda^{B', B} \cdot \mathbf{p} = \mathbf{0}$ , avec  $\mathbf{p} = [p_1, \dots, p_r] \in \mathbb{K}^r$ . Puisque  $\mathbb{H}_\Lambda^{B', B}$  est inversible, cela implique enfin que  $\mathbf{p} = \mathbf{0}$  et  $p = 0$ .

Ainsi, les opérateurs  $b_1 * \Lambda, \dots, b_r * \Lambda$  sont linéairement indépendants dans  $R^*$ . En effet, soit  $\mathbf{m} = [\mu_1, \dots, \mu_r]$  tel que  $\mu_1(b_1 * \Lambda) + \dots + \mu_r(b_r * \Lambda) = (\mu_1 b_1 + \dots + \mu_r b_r) * \Lambda = 0$ . Comme  $\{b_1, \dots, b_r\} \cap \text{Ker}(\mathbb{H}_\Lambda) = \{0\}$ , on a  $\mathbf{m} = \mathbf{0}$ .

Par dimension, on déduit donc que  $\{b_1 * \Lambda, \dots, b_r * \Lambda\}$  engendre l'image de  $\mathbb{H}_\Lambda$ . Pour tout  $p \in R$ , il existe  $\mu_1, \dots, \mu_r \in \mathbb{K}$  tels que  $p * \Lambda = \sum_{i=1}^r \mu_i (b_i * \Lambda)$ . On a donc  $p - \sum_{i=1}^r \mu_i b_i \in I_\Lambda$ . Cela induit la décomposition suivante  $R = B \oplus I_\Lambda$ , et montre que  $b_1, \dots, b_r$  est une base de  $\mathcal{A}_\Lambda$ .

De plus, si  $1 \in \langle B \rangle$ , l'idéal  $I_\Lambda$  est engendré par les relations  $x_j b_k - \sum_{i=1}^r \mu_i^{j,k} b_i \in I_\Lambda$ . Celles-ci appartiennent au noyau de  $\mathcal{H}_\Lambda^{B', B^+}$ .  $\square$

**Proposition 4.4.8.** Soit  $\Lambda \in R^*$ . Si  $\mathbb{H}_\Lambda$  est de rang fini  $r$ , alors  $\mathcal{A}_\Lambda$  est de dimension  $r$  sur  $\mathbb{K}$  et il existe  $\zeta_1, \dots, \zeta_d \in \mathbb{K}^n$  (avec  $d \leq r$ ), et  $p_i \in \mathbb{K}[\partial_1, \dots, \partial_n]$ , tels que :

$$\Lambda = \sum_{i=1}^d \mathbf{1}_{\zeta_i} \circ p_i(\partial) \quad (4.4.1)$$

En particulier, les points  $\zeta_1, \dots, \zeta_d \in \mathbb{K}^n$  sont exactement les racines de l'idéal zéro-dimensionnel  $I_\Lambda$  et la multiplicité de  $\zeta_i$  est égale à la dimension de l'espace vectoriel engendré par le système inverse associé à  $\mathbf{1}_{\zeta_i} \circ p_i(\partial)$ .

*Démonstration.* Puisque le rang de  $H_\Lambda$  est fini égal à  $r$ , la dimension de  $\mathcal{A}_\Lambda$  est aussi égale à  $r$ . Ainsi, le nombre de racines de l'idéal zéro-dimensionnel  $I_\Lambda$ , notées  $\zeta_1, \dots, \zeta_d$ , est au plus  $r$ , i.e  $d \leq r$ . Il suffit alors d'appliquer le théorème [32, Th. 7.34, p. 185] pour conclure.  $\square$

*Remarque 4.4.9.* Notons qu'en caractéristique zéro, le système inverse de  $\mathbf{1}_{\zeta_i} \circ p_i(\partial)$  est isomorphe à l'espace vectoriel engendré par le polynôme  $p_i$  et toutes ses dérivées.

**Définition 4.4.10.** Etant donné  $f \in S_d$  (resp.  $\Lambda \in S_d^*$ ), on appellera *décomposition affine généralisée* de  $f$  (resp.  $\Lambda$ ) la donnée de  $k$  polynômes  $p_i \in \mathbb{K}[\partial_1, \dots, \partial_n]$  et de  $k$  points  $\zeta_i \in \mathbb{A}^n$ , tels que :

$$\underline{f}^* = \sum_{i=1, \dots, k} \mathbf{1}_{\zeta_i} \circ p_i(\partial) \quad (\text{resp. } \underline{\Lambda} = \sum_{i=1, \dots, k} \mathbf{1}_{\zeta_i} \circ p_i(\partial)).$$

On appellera la *taille* (ou encore le rang) d'une telle décomposition l'entier  $r$  égal à la somme des dimensions des espaces vectoriels engendrés par les systèmes inverses associés aux formes linéaires  $\mathbf{1}_{\zeta_i} \circ p_i(\partial)$ .

De même, étant donné  $\Lambda \in R^*$  (ou plus généralement  $\Lambda \in R_d^*$ ), on appellera *décomposition généralisée* de  $\Lambda$  la donnée de  $k$  polynômes  $p_i \in \mathbb{K}[\partial_1, \dots, \partial_n]$  et de  $k$  points  $\zeta_i \in \mathbb{A}^n$ , tels que :

$$\Lambda = \sum_{i=1, \dots, k} \mathbf{1}_{\zeta_i} \circ p_i(\partial).$$

**Théorème 4.4.11.** [9][Thm.3.8, p.8] Soit  $\Lambda \in R^*$ . Alors, on a  $\Lambda = \sum_{i=1}^r \lambda_i \mathbf{1}_{\zeta_i}$  avec  $\lambda_i \neq 0$  et  $(\zeta_i)$  deux à deux distincts dans  $\mathbb{K}^n$ , si et seulement si le rang de  $H_\Lambda$  est égal à  $r$  et  $I_\Lambda$  est un idéal radical.

*Démonstration.* Si  $\Lambda = \sum_{i=1}^r \lambda_i \mathbf{1}_{\zeta_i}$ , avec  $\lambda_i \neq 0$  et  $(\zeta_i)$  deux à deux distincts dans  $\mathbb{K}^n$ , alors soit  $\{e_1, \dots, e_r\}$  une famille de polynômes d'interpolation en ces points :  $e_i(\zeta_j) = 1$  si  $i = j$  et 0 sinon. Soit  $I_\zeta$  l'idéal des polynômes qui s'annulent en  $\zeta_1, \dots, \zeta_r$ . Cet idéal est radical et on a  $I_\zeta \subset I_\Lambda$ . Pour tout  $p \in I_\Lambda$  et  $i = 1, \dots, r$ , on a  $p * \Lambda(e_i) = \Lambda(p e_i) = p(\zeta_i) = 0$ , ce qui prouve que  $I_\Lambda = I_\zeta$  est radical. Le quotient  $\mathcal{A}_\Lambda$  est alors de dimension  $r$ .

Inversement, si le rang de  $H_\Lambda$  est égal à  $r$ , d'après la proposition 4.4.8,  $\Lambda = \sum_{i=1}^r \mathbf{1}_{\zeta_i} \circ p_i(\partial)$  où  $p_i$  est de degré 0 pour tout  $1 \leq i \leq r$  (car la multiplicité de  $\zeta_i$  est 1). Cela démontre donc l'équivalence.  $\square$

Plus généralement, on a :

**Théorème 4.4.12.** Soit  $\Lambda \in R^*$ . Alors,  $\Lambda = \sum_{i=1}^m \lambda_i \mathbf{1}_{\zeta_i} \circ p_i(\partial)$  avec  $\lambda_i \neq 0$ ,  $(\zeta_i)$  deux à deux distincts dans  $\mathbb{K}^n$  et tel que la taille de cette décomposition généralisée soit égale à  $r$ , si et seulement si le rang de  $H_\Lambda$  est égal à  $r$ .

*Démonstration.* Commençons par remarquer que l'implication réciproque  $\Leftarrow$  est une conséquence directe de la proposition 4.4.8.

Réciproquement, montrons l'implication directe  $\Rightarrow$ . Soit  $\Lambda \in R^*$  de la forme :

$$\Lambda = \sum_{i=1}^m \lambda_i \mathbf{1}_{\zeta_i} \circ p_i(\partial)$$

tel que la somme des dimensions des systèmes inverses engendrés par les éléments  $\mathbf{1}_{\zeta_i} \circ p_i(\partial)$  soit égale à  $r$ . Pour tout  $1 \leq i \leq m$ , le polynôme  $p_i$  étant de degré fini, il existe un entier  $k_i$  tel que :

$$I_\Lambda \supset \bigcap_i m_{\zeta_i}^{k_i},$$

avec  $I_\Lambda := \{p \in R \mid p * \Lambda = 0\}$ . Ainsi,  $I_\Lambda$  est un idéal zéro-dimensionnel et admet une décomposition primaire (voir [32, Def.1.37, p.17]) de la forme :

$$I_\Lambda = \bigcap_{i=j, \dots, m'} Q_j$$

où  $Q_j$  est un idéal  $m_{\zeta'_j}$ -primaire pour tout  $1 \leq j \leq m'$ . Ainsi d'après la proposition 4.4.8,  $\Lambda$  admet la décomposition suivante :

$$\Lambda = \sum_{j=1}^{m'} \lambda'_j \mathbf{1}_{\zeta'_j} \circ q_j(\partial),$$

Avec  $\mathbf{1}_{\zeta'_j} \circ q_j(\partial) \in Q_j^\perp$  pour tout  $1 \leq j \leq m'$ . Notons  $E$  l'ensemble de points défini par :

$$E := \{\zeta_i\}_{1 \leq i \leq m} \cup \{\zeta'_j\}_{1 \leq j \leq m'}$$

Indiquons alors l'ensemble  $E$  :

$$E = (\varepsilon_k)_{1 \leq k \leq m''}.$$

Il existe alors un entier  $k$  (suffisamment grand), tel que pour tout  $1 \leq i \leq m$  (resp.  $1 \leq j \leq m'$ ), il existe  $1 \leq l \leq m''$  tel que

$$\mathbf{1}_{\zeta_i} \circ p_i(\partial) \in (m_{\varepsilon_l}^k)^\perp \text{ (resp. } \mathbf{1}_{\zeta'_j} \circ q_j(\partial) \in (m_{\varepsilon_l}^k)^\perp).$$

Or, d'après [32, Prop.7.12, p.176], on a la somme directe suivante :

$$\bigoplus_{l=1, \dots, m''} (m_{\varepsilon_l}^k)^\perp.$$

Ainsi, quitte à réindexer les points  $(\zeta'_j)_j$ , l'égalité :

$$\Lambda = \sum_{j=1}^{m'} \lambda'_j \mathbf{1}_{\zeta'_j} \circ q_j(\partial) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \mathbf{1}_{\zeta_i} \circ p_i(\partial)$$

implique que  $m = m'$  et  $\zeta_i = \zeta'_i$ ,  $\lambda_i = \lambda'_i$  et  $p_i = q_i$  pour tout  $1 \leq i \leq m$ . En appliquant alors une dernière fois la proposition 4.4.8, on déduit que la dimension de  $\mathcal{A}_\Lambda$  est égale à la taille de la décomposition généralisée :

$$\Lambda = \sum_{i=1}^m \lambda_i \mathbf{1}_{\zeta_i} \circ p_i(\partial),$$

i.e le rang de  $\mathcal{H}_\Lambda$  est égal à  $r$ . □



*Remarque 4.4.13.* Dans la preuve du théorème ci-dessus, on remarque que la multiplicité de  $\zeta_i$  dans  $I_\Lambda$  est exactement égale à la dimension de l'espace vectoriel engendré par le système inverse associé à :

$$\mathbf{1}_{\zeta_i} \circ p_i(\partial)$$

pour tout  $1 \leq i \leq m$ . On a aussi montré le corollaire suivant :

**Corollaire 4.4.14.** *Soit  $\Lambda \in R^*$  une forme linéaire. Alors,  $\Lambda$  admet une unique décomposition généralisée (voir définition 4.4.10).*

Afin de calculer les racines de l'idéal  $I_\Lambda$ , nous allons exploiter les propriétés des *opérateurs de multiplication* dans  $\mathcal{A}_\Lambda : M_a : \mathcal{A}_\Lambda \rightarrow \mathcal{A}_\Lambda$  tel que  $\forall b \in \mathcal{A}_\Lambda, M_a(b) = ab$ . Nous considérerons aussi leur transposée :  ${}^t M_a : \mathcal{A}_\Lambda^* \rightarrow \mathcal{A}_\Lambda^*$  telle que  $\forall \gamma \in \mathcal{A}_\Lambda^*, {}^t M_a(\gamma) = a * \gamma$ .

**Proposition 4.4.15.** *Pour toute forme linéaire  $\Lambda \in R^*$  telle que le rang de  $H_\Lambda$  soit fini et tout  $a \in \mathcal{A}_\Lambda$  on a :*

$$\mathcal{H}_{a*\Lambda} = {}^t M_a \circ \mathcal{H}_\Lambda = \mathcal{H}_\Lambda \circ M_a \quad (4.4.2)$$

*Démonstration.* Par définition,  $\forall p \in R, \mathcal{H}_{a*\Lambda}(p) = ap*\Lambda = a*(p*\Lambda) = {}^t M_a \circ \mathcal{H}_\Lambda(p)$ .  $\square$

**Théorème 4.4.16.** *Soit  $\Lambda \in R^*$ . Si  $\mathcal{A}_\Lambda$  est un espace vectoriel de dimension finie, alors  $\Lambda = \sum_{i=1}^d \mathbf{1}_{\zeta_i} \circ p_i(\partial)$  pour  $\zeta_i \in \mathbb{K}^n$  et  $p_i(\partial) \in \mathbb{K}[\partial_1, \dots, \partial_n]$  et :*

- l'ensemble des valeurs propres des opérateurs  $M_a$  et  ${}^t M_a$ , est égal à  $\{a(\zeta_1), \dots, a(\zeta_r)\}$ .
- les vecteurs propres communs des opérateurs  $({}^t M_{x_i})_{1 \leq i \leq n}$  sont exactement (à scalaire près) les formes linéaires  $\mathbf{1}_{\zeta_i}$ .

*Démonstration.* Voir [24, 25, 32]  $\square$

En utilisant la proposition précédente, on peut calculer les points  $\zeta_i \in \mathbb{K}^n$  à partir d'un calcul de vecteurs propres. En effet, étant donné  $\Lambda \in R^*$ , supposons que  $B', B \subset R$  avec  $|B| = |B'| = \text{rang}(\mathcal{H}_\Lambda) = \text{rang}(\mathcal{H}_\Lambda^{B', B})$ . Alors la relation (4.4.2) et sa transposée impliquent :

$$H_{a*\Lambda}^{B', B} = {}^t M_a^{B'} H_\Lambda^B = H_\Lambda^B M_a^B,$$

où  $M_a^B$  (resp.  $M_a^{B'}$ ) est la matrice de multiplication par  $a$  dans la base  $B$  (resp.  $B'$ ) de  $\mathcal{A}_\Lambda$ . D'après le théorème 4.4.16, les solutions communes des problèmes de valeurs propres généralisées :

$$(H_{a*\Lambda} - \lambda H_\Lambda) \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad (4.4.3)$$

pour tout  $a \in R$ , permettent de calculer les vecteurs propres communs des opérateurs  $M_a^t$  (qui sont exactement les formes linéaires  $\mathbf{1}_{\zeta_i}$ , avec  $\zeta_i$  racine de  $I_\Lambda$ ). Ces vecteurs propres communs sont donc de la forme  $[b_1(\zeta_i), \dots, b_r(\zeta_i)]$  ( $i = 1, \dots, r$ ). Notons qu'il suffit de calculer les vecteurs propres communs de  $(H_{x_i*\Lambda})$  pour  $i = 1, \dots, n$ .

Enfin, si  $\Lambda = \sum_{i=1}^d \lambda_i \mathbf{1}_{\zeta_i}$  ( $\lambda_i \neq 0$ ), les racines sont simples, et un seul calcul de vecteurs propres est suffisant. En effet, pour tout  $a \in R, M_a^B$  est diagonalisable et les vecteurs propres généralisés  $H_\Lambda^B \mathbf{v}$  sont (à scalaire près) les évaluations  $\mathbf{1}_{\zeta_i}$ .

## 4.5 Opérateurs de Hankel tronqués

Revenons au problème de décomposition de tenseurs symétriques : soit  $f = \sum_{|\alpha|=d} c_\alpha \binom{d}{\alpha} \mathbf{x}^\alpha \in S_d$  admet une décomposition de taille  $r$ , si et seulement si  $f^*$  peut s'écrire :

$$f^* = \sum_{i=1}^r \lambda_i \mathbf{1}_{\zeta_i},$$

où  $\zeta_1, \dots, \zeta_r \in \mathbb{K}^{n+1}$  sont des points distincts et  $\lambda_i \in \mathbb{K} - \{0\}$ .

Par changement générique de coordonnées, on peut se borner à chercher une *décomposition affine* de  $f \in S_d$  (voir définition 4.2.6). Cela revient alors (voir proposition 4.2.10) à trouver une forme linéaire  $\tilde{\Lambda} \in R^*$  telle que  $\tilde{\Lambda}$  coïncide avec  $\underline{f}^*$  en degré inférieur ou égal à  $d$  et :

$$\tilde{\Lambda} = \sum_{i=1}^r \lambda_i \mathbf{1}_{\zeta_i}$$

où  $\zeta_1, \dots, \zeta_r \in \mathbb{K}^n$  sont des points distincts et  $\lambda_i \in \mathbb{K} - \{0\}$ . D'après le théorème 4.4.11,  $H_{\tilde{\Lambda}}$  est alors de rang  $r$  et  $I_{\tilde{\Lambda}}$  est radical.

Inversement, s'il existe  $\tilde{\Lambda} \in R^*$  telle que  $\mathcal{H}_{\tilde{\Lambda}}$  soit de rang  $r$ ,  $I_{\tilde{\Lambda}}$  soit un idéal radical et  $\tilde{\Lambda}$  coïncide avec  $\underline{f}^* \in R_d^*$  en degré plus petit que  $d$ , alors d'après la proposition 4.4.8,  $\tilde{\Lambda} = \sum_{i=1}^r \lambda_i \mathbf{1}_{\zeta_i}$  et  $\underline{f}$  admet une décomposition affine en une somme de  $r$  puissances  $d$ -ème de formes linéaires. On a donc démontré le théorème suivant :

**Théorème 4.5.1.** *Etant donné  $f \in S_d$ ,  $f$  admet une décomposition affine de taille  $r$  (voir définition 4.2.6) si et seulement si  $\underline{f}^* \in R_d^*$  admet une extension  $\tilde{\Lambda} \in R^*$  telle que  $I_{\tilde{\Lambda}}$  est un idéal radical zéro-dimensionnel de multiplicité  $r$ .*

Si toute fois l'idéal  $I_{\tilde{\Lambda}}$  n'est pas radical, d'après le théorème 4.4.12 on a :

**Théorème 4.5.2.** *Etant donné  $f \in S_d$ ,  $f$  admet une décomposition affine généralisée de taille  $r$  (voir définition 4.4.10) si et seulement si  $\underline{f}^* \in R_d^*$  admet une extension  $\tilde{\Lambda} \in R^*$  telle que  $I_{\tilde{\Lambda}}$  est un idéal zéro-dimensionnel de multiplicité  $r$ .*

Le problème de décomposition de tenseurs symétriques peut alors se reformuler de la manière suivante :

*Soit  $\Lambda \in R_d^*$ , il s'agit de trouver le plus petit entier  $r$  tel qu'il existe une forme linéaire  $\tilde{\Lambda} \in R^*$  qui étende  $\Lambda$  et telle que  $\mathcal{H}_{\tilde{\Lambda}}$  soit de rang  $r$  et  $I_{\tilde{\Lambda}}$  soit un idéal radical.*

Dans cette section, nous allons donc chercher à caractériser sous quelles conditions une forme  $\Lambda \in R_d^*$  peut s'étendre en  $\tilde{\Lambda} \in R^*$  avec  $\mathcal{H}_{\tilde{\Lambda}}$  de rang  $r$ .

Soient  $\lambda \in R_d^*$  et  $B, B' \subset R_d$  deux familles de monômes de degré inférieur ou égal à  $d$  connexes à 1 (voir définition 1.2.19). On considère la *matrice de Hankel formelle* :

$$H_{\Lambda}^{B', B}(\mathbf{h}) = (h_{\alpha+\beta})_{\alpha \in B', \beta \in B},$$

avec  $h_\gamma = \lambda(\mathbf{x}^\gamma)$  si  $|\gamma| \leq d$  et  $h_\gamma$  une variable sinon. L'ensemble de ces nouvelles variables sera noté  $\mathbf{h}$ . On notera  $\mathcal{H}_{\Lambda}^{B', B}(\mathbf{h}) : \langle B \rangle \rightarrow \langle B' \rangle^*$  la *forme linéaire formelle* associée à

la matrice  $H_{\Lambda}^{B',B}(\mathbf{h})$  dans les bases  $B$  et  $B'^*$ . Lorsque  $B' = B$ , on adoptera les notations suivantes :  $H_{\Lambda}^B$  et  $\mathcal{H}_{\Lambda}^B$ .

Supposons que  $H_{\Lambda}^{B',B}(\mathbf{h})$  soit inversible dans  $\mathbb{K}(\mathbf{h})$ , alors on peut définir les *matrices de multiplication formelles* :

$$M_i^B(\mathbf{h}) := (H_{\Lambda}^{B',B})^{-1} H_{x_i * \Lambda}^{B',B}. \quad (4.5.1)$$

On notera alors  $\mathcal{M}_i^B(\mathbf{h}) : \langle B \rangle \longrightarrow \langle B \rangle$  l'application linéaire formelle associée à la matrice  $M_i^B(\mathbf{h})$  dans la base  $B$  pour tout  $1 \leq i \leq n$ .

**Théorème 4.5.3.** [6][Thm.3.2, p.11] Soient  $B = \{\underline{\mathbf{x}}^{\beta_1}, \dots, \underline{\mathbf{x}}^{\beta_r}\}$  et  $B' = \{\underline{\mathbf{x}}^{\beta'_1}, \dots, \underline{\mathbf{x}}^{\beta'_r}\}$  deux familles de monômes de degré inférieur ou égal à  $d$  et connexes à 1 (voir définition 1.2.19). Soit  $\Lambda$  une forme linéaire sur  $\langle B' \cdot B^+ \rangle_{\leq d}$  et  $\Lambda(\mathbf{h})$  la forme linéaire formelle de  $\langle B' \cdot B^+ \rangle^*$  définie par  $\Lambda(\mathbf{h})(\underline{\mathbf{x}}^\gamma) = \Lambda(\underline{\mathbf{x}}^\gamma)$  si  $|\gamma| \leq d$  et  $h_\gamma$  une variable sinon. Alors  $\Lambda$  admet une extension  $\tilde{\Lambda} \in R^*$  telle que  $\mathcal{H}_{\tilde{\Lambda}}$  est de rang  $r$  avec  $B'$  et  $B$  deux bases de  $A_{\tilde{\Lambda}}$  si et seulement si il existe une solution au problème suivant en  $\mathbf{h}$  :

$$(i) M_i^B(\mathbf{h}) \circ M_j^B(\mathbf{h}) - M_j^B(\mathbf{h}) \circ M_i^B(\mathbf{h}) = 0 \quad (1 \leq i < j \leq n)$$

$$(ii) \det(H_{\Lambda}^{B',B})(\mathbf{h}) \neq 0.$$

De plus, pour toute solution  $\mathbf{h}^0 \in \mathbb{K}^N$  (pour un certain  $N \in \mathbb{N}$ ), une telle extension  $\tilde{\Lambda}$  qui vérifie en outre  $\tilde{\Lambda} = \Lambda(\mathbf{h}^0)$  sur  $\langle B' \cdot B^+ \rangle_d$  existe de manière unique.

*Démonstration.* Supposons qu'il existe  $\tilde{\Lambda} \in R^*$  qui étende  $\Lambda$  avec  $\mathcal{H}_{\tilde{\Lambda}}$  de rang  $r$  et  $B', B$  des bases de  $A_{\tilde{\Lambda}}$ . Définissons  $\mathbf{h}^0 \in \mathbb{K}^N$  (pour un certain  $N \in \mathbb{N}$ ) de la manière suivante : pour tout  $\underline{\mathbf{x}}^\gamma \in \langle B' \cdot B^+ \rangle_{\leq d}$  et  $|\gamma| > d$  on pose :

$$h_\gamma^0 = \tilde{\Lambda}(\underline{\mathbf{x}}^\gamma).$$

Alors,  $\Lambda(\mathbf{h}^0) = \tilde{\Lambda}$  sur  $\langle B' \cdot B^+ \rangle$  et  $\mathcal{H}_{\Lambda(\mathbf{h}^0)}^{B',B} = \mathcal{H}_{\tilde{\Lambda}}^{B',B}$  est inversible. Par ailleurs, d'après la proposition 4.4.15, les matrices de multiplication par les variables  $x_i$  dans la base  $B$  de l'algèbre quotient  $\mathcal{A}_{\tilde{\Lambda}}$  sont données par (4.5.1) :

$$M_i^B(\mathbf{h}^0) = (H_{\Lambda}^{B',B})^{-1} H_{x_i * \Lambda}^{B',B}.$$

Comme  $\mathcal{A}_{\tilde{\Lambda}}$  est une algèbre commutative, ces opérateurs commutent.  $\mathbf{h}^0$  est donc une solution du problème.

Réciproquement, supposons qu'il existe  $\mathbf{h}^0 \in \mathbb{K}^N$  tel que les matrices de multiplication commutent et que  $\mathcal{H}_{\Lambda(\mathbf{h}^0)}^{B',B}$  soit inversible. D'après le théorème 1.2.26 et (1.2.6), il existe un unique idéal  $I \subset R$  engendré par l'ensemble des relations de réécriture :

$$K := \{x_i b - \mathcal{M}_i^B(\mathbf{h}^0)(b) \mid \forall 1 \leq i \leq n \text{ et } \forall b \in B\}$$

tel que  $R = \langle B \rangle \oplus I$ . Soit  $\pi_B$  la projection de  $R$  sur  $\langle B \rangle$  le long de  $I = (K)$ .

On définit alors  $\tilde{\Lambda} \in R^*$  comme suit :

$$\forall p \in R^*, \tilde{\Lambda}[p] = \Lambda(\mathbf{h}^0)[p(\mathcal{M})(1)]$$

où  $p(\mathcal{M})$  est l'application linéaire obtenue en remplaçant les variables  $x_i$  par les opérateurs commutatifs  $\mathcal{M}_i^B(\mathbf{h}^0)$ . Notons que  $p(\mathcal{M})$  est aussi l'opérateur de multiplication par  $p$  modulo  $I = (K)$ , exprimé dans la base  $B$ . Par construction,  $(K) \subset \text{Ker} \mathcal{H}_{\tilde{\Lambda}}$  et  $B$  est une famille

génératrice de  $\mathcal{A}_{\tilde{\Lambda}}$ .

Prouvons par récurrence sur le degré de  $b' \in B'$  que pour tout  $b \in B$ , on a :

$$\Lambda(\mathbf{h}^0)[b' b] = \Lambda(\mathbf{h}^0)[b'(\mathcal{M})(b)].$$

Cette propriété est vraie pour  $b' = 1$ . Comme  $B'$  est connexe à 1, si  $b' \neq 1 \in B'$ , il existe  $1 \leq i \leq n$  tel que  $b' = x_i b''$  avec  $b'' \in B'$  de degré plus petit strict que  $b'$ . Par construction des opérateurs  $\mathcal{M}_i^B(\mathbf{h}^0)$ , on a  $\Lambda(\mathbf{h}^0)[b'' . x_i . b] = \Lambda(\mathbf{h}^0)[b'' \mathcal{M}_i^B(\mathbf{h}^0)(b)]$ . Par hypothèse de récurrence, on déduit que :

$$\Lambda(\mathbf{h}^0)[b' b] = \Lambda(\mathbf{h}^0)[b''(\mathcal{M}) \circ \mathcal{M}_i^B(\mathbf{h}^0)(b)] = \Lambda(\mathbf{h}^0)[b'(\mathcal{M})(b)].$$

En outre, pour tout  $b^+ \in B^+$ , il existe  $1 \leq i \leq n$  et  $b \in B$  tels que,  $x_i . b = b^+$ . Par définition des opérateurs de multiplication, et en remarquant que pour tout  $b \in B$ , on a :

$$b(\mathcal{M})(1) = b,$$

on peut alors écrire :

$$\begin{aligned} \Lambda(\mathbf{h}^0)[b' . b^+] &= \Lambda(\mathbf{h}^0)[b' . x_i . b] = \Lambda(\mathbf{h}^0)[b' . \mathcal{M}_i^B(\mathbf{h}^0)(b)] = \\ &= \Lambda(\mathbf{h}^0)[b' . \mathcal{M}_i^B(\mathbf{h}^0) \circ b(\mathcal{M})(1)] = \Lambda(\mathbf{h}^0)[b'(\mathcal{M}) \circ \mathcal{M}_i^B(\mathbf{h}^0) \circ b(\mathcal{M})(1)] = \Lambda(\mathbf{h}^0)[(b' . b^+)(\mathcal{M})(1)]. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout  $b' \in B'$  et  $b^+ \in B^+$  on a :

$$\Lambda(\mathbf{h}^0)[b' b^+] = \tilde{\Lambda}[b' b^+].$$

Cela montre que  $\Lambda(\mathbf{h}^0) = \tilde{\Lambda}$  sur  $\langle B \cdot B^+ \rangle$  et que  $\tilde{\Lambda}$  est une extension de  $\Lambda$ . Enfin, comme  $\det(\mathcal{H}_{\tilde{\Lambda}}^B) = \det(\mathcal{H}_{\Lambda(\mathbf{h}^0)}^B) \neq 0$ , on déduit que  $B$  est une famille libre (et donc une base) de  $\mathcal{A}_{\tilde{\Lambda}}$  et que  $\mathcal{H}_{\tilde{\Lambda}}$  est de rang  $r$ .

S'il existe une autre forme linéaire  $\Lambda' \in R^*$  qui étend  $\Lambda(\mathbf{h}^0) \in \langle B' \cdot B^+ \rangle^*$  avec  $\text{rang} \mathcal{H}_{\Lambda'} = r$ , d'après la proposition 4.4.7,  $\ker \mathcal{H}_{\Lambda'}$  est engendré  $\ker \mathcal{H}_{\Lambda'}^{B' \cdot B^+}$  et coïncide ainsi avec  $\ker \mathcal{H}_{\tilde{\Lambda}}$ . De plus, comme  $\Lambda'$  coïncide avec  $\tilde{\Lambda}$  sur  $B$ , ces deux formes linéaires sont égales.  $\square$

Le degré de ces relations de commutation est inférieur ou égal à 2 en les variables  $\mathbf{h}$ . En effet, un calcul direct implique que pour tout  $m \in B$  :

- Si  $x_i . m \in B$ ,  $x_j . m \in B$  alors  $(\mathcal{M}_i^B \circ \mathcal{M}_j^B - \mathcal{M}_j^B \circ \mathcal{M}_i^B)(m) \equiv 0$  dans  $\mathbb{K}[\mathbf{h}]$ .
- Si  $x_i . m \in B$ ,  $x_j . m \notin B$  alors  $(\mathcal{M}_i^B \circ \mathcal{M}_j^B - \mathcal{M}_j^B \circ \mathcal{M}_i^B)(m)$  est de degré 1 dans  $\mathbb{K}[\mathbf{h}]$ .
- Si  $x_i . m \notin B$ ,  $x_j . m \notin B$  alors  $(\mathcal{M}_i^B \circ \mathcal{M}_j^B - \mathcal{M}_j^B \circ \mathcal{M}_i^B)(m)$  est de degré 2 dans  $\mathbb{K}[\mathbf{h}]$ .

Nous allons maintenant donner une caractérisation équivalente de ces extensions en termes de conditions de rang.

**Théorème 4.5.4.** [6][Thm.3.3, p.13] Soient  $B = \{\mathbf{x}^{\beta_1}, \dots, \mathbf{x}^{\beta_r}\}$  et  $B' = \{\mathbf{x}^{\beta'_1}, \dots, \mathbf{x}^{\beta'_r}\}$  deux familles de monômes de degré inférieur ou égal à  $d$ , connexe à 1 (voir définition 1.2.19). Soient  $\Lambda$  une forme linéaire sur  $\langle B'^+ \cdot B^+ \rangle_{\leq d}$  et  $\Lambda(\mathbf{h})$  la forme linéaire formelle de  $\langle B'^+ \cdot B^+ \rangle^*$  définie par  $\Lambda(\mathbf{h})(\mathbf{x}^\gamma) = \Lambda(\mathbf{x}^\gamma)$  si  $|\gamma| \leq d$  et  $h_\gamma$  une variable sinon. Alors,  $\Lambda$  admet une extension  $\tilde{\Lambda} \in R^*$  telle que  $\mathcal{H}_{\tilde{\Lambda}}$  est de rang  $r$ , avec  $B'$  et  $B$  des bases de  $\mathcal{A}_{\tilde{\Lambda}}$ , si et seulement si il existe une solution au problème suivant en  $\mathbf{h}$  :

- (i) les mineurs de taille  $(r + 1) \times (r + 1)$  de  $\mathcal{H}_\Lambda^{B'+,B^+}(\mathbf{h})$  s'annulent,
- (ii)  $\det(\mathcal{H}_\Lambda^{B',B})(\mathbf{h}) \neq 0$ .

De plus, pour toute solution  $\mathbf{h}^0 \in \mathbb{K}^M$  une telle forme linéaire  $\tilde{\Lambda}$  qui vérifie en outre que  $\tilde{\Lambda} = \Lambda(\mathbf{h}^0)$  sur  $\langle B'+ \cdot B^+ \rangle$  existe de manière unique.

*Démonstration.* Tout d'abord, supposons qu'il existe  $\tilde{\Lambda} \in R^*$  qui étende  $\Lambda$ . Définissons  $\mathbf{h}^0 \in \mathbb{K}^M$  (pour un certain entier  $M \in \mathbb{N}$ ) de la manière suivante : pour tout  $\underline{\mathbf{x}}^\gamma \in \langle B'+ \cdot B^+ \rangle$  tel que  $|\gamma| > d$ , on pose :

$$h_\gamma^0 := \tilde{\Lambda}(\underline{\mathbf{x}}^\gamma).$$

Comme  $\mathcal{H}_{\tilde{\Lambda}}$  est de rang  $r$  et  $\mathcal{A}_{\tilde{\Lambda}}$  a pour base  $B'$  et  $B$ , tous les mineurs de taille  $(r + 1) \times (r + 1)$  de  $\mathbb{H}_{\tilde{\Lambda}}^{B'+,B^+} = \mathbb{H}_{\Lambda(\mathbf{h}^0)}^{B'+,B^+}$  sont nuls et  $\mathbb{H}_{\tilde{\Lambda}}^{B'+,B^+} = \mathbb{H}_{\Lambda(\mathbf{h}^0)}^{B'+,B^+}$  est inversible.  $\mathbf{h}^0 \in \mathbb{K}^M$  est donc solution du problème.

Réciproquement, supposons qu'il existe une solution  $\mathbf{h}^0 \in \mathbb{K}^M$  au problème (i) et (ii). Définissons  $\mathbf{h}^1 \in \mathbb{K}^N$  (pour un certain entier  $N \leq M \in \mathbb{N}$ ) de la manière suivante : pour tout  $\gamma \in \mathbb{N}^n$  tel que  $\underline{\mathbf{x}}^\gamma \in \langle B' \cdot B^+ \rangle$  et  $|\gamma| > d$  on pose :

$$h_\gamma^1 := h_\gamma^0.$$

Alors  $\mathbf{h}^1 \in \mathbb{K}^N$  est une solution du problème du théorème 4.5.3. En effet, il s'agit de montrer que les opérateurs de multiplication  $(\mathcal{M}_i^B(\mathbf{h}^1))_i$  commutent deux à deux. Pour cela, remarquons d'abord que pour tout  $b' \in B'$ , tout  $b \in B$  et tout entier  $1 \leq i \leq n$  on a :

$$\Lambda(\mathbf{h}^1)[\mathcal{M}_i^B(\mathbf{h}^1)(b) b'] = \Lambda(\mathbf{h}^0)[\mathcal{M}_i^B(\mathbf{h}^1)(b) b'] = \Lambda(\mathbf{h}^0)[x_i \cdot b b'].$$

Ainsi,

$$\Lambda(\mathbf{h}^0)[(x_i b - \mathcal{M}_i^B(\mathbf{h}^1)(b)) b'] = 0$$

pour tout  $b' \in B'$ . Or, comme tous les mineurs de taille  $(r + 1) \times (r + 1)$  de  $\mathbb{H}_{\Lambda(\mathbf{h}^0)}^{B'+,B^+}$  sont nuls et que  $\mathbb{H}_{\Lambda(\mathbf{h}^0)}^{B',B}$  est inversible, on déduit que :

$$\Lambda(\mathbf{h}^0)[(x_i b - \mathcal{M}_i^B(\mathbf{h}^1)(b)) b''] = 0$$

pour tout  $b'' \in B'+$  i.e :

$$\Lambda(\mathbf{h}^0)[\mathcal{M}_i^B(\mathbf{h}^1)(b) b''] = \Lambda(\mathbf{h}^0)[x_i \cdot b b''] \tag{4.5.2}$$

pour tout  $b'' \in B^+$ .

Fixons alors  $b \in B$  et  $1 \leq i, j \leq n$ . On a :

$$\Lambda(\mathbf{h}^1)[\mathcal{M}_i^B(\mathbf{h}^1) \circ \mathcal{M}_j^B(\mathbf{h}^1)(b) \cdot b'] = \Lambda(\mathbf{h}^0)[\mathcal{M}_i^B(\mathbf{h}^1) \circ \mathcal{M}_j^B(\mathbf{h}^1)(b) b'] = \Lambda(\mathbf{h}^0)[\mathcal{M}_j^B(\mathbf{h}^1)(b) x_i b']$$

pour tout  $b' \in B'$ . D'après (4.5.2) on a donc :

$$\Lambda(\mathbf{h}^1)[\mathcal{M}_i^B(\mathbf{h}^1) \circ \mathcal{M}_j^B(\mathbf{h}^1)(b) b'] = \Lambda(\mathbf{h}^0)[\mathcal{M}_j^B(\mathbf{h}^1)(b) x_i b'] = \Lambda(\mathbf{h}^0)[x_j b \cdot x_i b']$$

pour tout  $b' \in B'$ . Par symétrie en  $i$  et  $j$  on déduit alors que :

$$\Lambda(\mathbf{h}^1)[\mathcal{M}_i^B(\mathbf{h}^1) \circ \mathcal{M}_j^B(\mathbf{h}^1)(b) b'] = \Lambda(\mathbf{h}^1)[\mathcal{M}_j^B(\mathbf{h}^1) \circ \mathcal{M}_i^B(\mathbf{h}^1)(b) b']$$

pour tout  $b' \in B'$ . Comme  $\mathcal{H}_{\Lambda(\mathbf{h}^1)}^{B',B} = \mathcal{H}_{\Lambda(\mathbf{h}^0)}^{B',B}$  est inversible on déduit que :

$$\mathcal{M}_j^B(\mathbf{h}^1) \circ \mathcal{M}_i^B(\mathbf{h}^1)(b) = \mathcal{M}_i^B(\mathbf{h}^1) \circ \mathcal{M}_j^B(\mathbf{h}^1)(b)$$

pour tout  $b \in B$  et  $1 \leq i, j \leq n$ . On applique alors le théorème 4.5.3 pour conclure.  $\square$

**Proposition 4.5.5.** [6][Prop.3.4, p.14] Soit  $B = \{\underline{\mathbf{x}}^{\beta_1}, \dots, \underline{\mathbf{x}}^{\beta_r}\}$  une famille de monômes de degré inférieur ou égal à  $d$  connexe à 1 et  $\Lambda \in \langle B^+ . B^+ \rangle_{\leq d}$  une forme linéaire. Soit  $\Lambda(\mathbf{h})$  la forme linéaire formelle sur  $\langle B^+ . B^+ \rangle$  définie de la manière suivante : pour tout  $\underline{\mathbf{x}}^\alpha \in B^+ . B^+$ , on pose  $\Lambda(\mathbf{h})(\underline{\mathbf{x}}^\alpha) = \Lambda(\underline{\mathbf{x}}^\alpha)$  si  $|\alpha| \leq d$  et  $\Lambda(\mathbf{h})(\underline{\mathbf{x}}^\alpha) = h_\alpha^0$  une variable sinon. Alors,  $\Lambda$  admet une extension  $\tilde{\Lambda} \in R^*$  telle que  $H_{\tilde{\Lambda}}$  soit de rang  $r$  et que  $B$  soit une base de  $\mathcal{A}_{\tilde{\Lambda}}$  si et seulement si le problème suivant en  $\mathbf{h}$  admet une solution :

(i) il existe une matrice  $W \in \mathbb{K}^{B \times \partial B}$  telle que :

$$H_{\Lambda(\mathbf{h})}^{B^+} = \begin{pmatrix} H & G \\ G^t & J \end{pmatrix}, \quad (4.5.3)$$

avec  $H = H_{\tilde{\Lambda}}^B = H_{\tilde{\Lambda}}^B$  et :

$$G = HW, J = W^t HW, \quad (4.5.4)$$

(ii)  $H_{\Lambda(\mathbf{h})}^B$  est inversible.

*Démonstration.* Tout d'abord, il est clair que s'il existe  $\mathbf{h}^0 \in \mathbb{K}^M$  tel que  $G = HW$ ,  $J = W^t HW$  et  $\det H_{\Lambda(\mathbf{h}^0)}^B \neq 0$ , alors :

$$H_{\Lambda(\mathbf{h}^0)}^{B^+} = \begin{pmatrix} H & HW \\ W^t H & W^t HW \end{pmatrix}$$

est clairement de rang  $r$  et  $\mathbf{h}^0$  est une solution du théorème 4.5.4. Il existe donc une extension  $\Lambda \in R^*$  de  $\Lambda \in \langle B^+ . B^+ \rangle_{\leq d}$  telle que  $\mathcal{H}_\Lambda$  soit de rang  $r$  et  $B$  soit une base de  $\mathcal{A}_\Lambda$ .

Réciproquement, supposons qu'il existe une extension  $\tilde{\Lambda}$  de  $\Lambda$  telle que  $H_{\tilde{\Lambda}}$  soit de rang  $r$  et que  $B$  soit une base de  $\mathcal{A}_{\tilde{\Lambda}}$ . Définissons alors  $\mathbf{h}^0 \in \mathbb{K}^M$  de la manière suivante : pour tout  $\underline{\mathbf{x}}^\alpha \in \langle B^+ . B^+ \rangle$  tel que  $|\alpha| > d$  on pose :

$$h_\alpha^0 = \tilde{\Lambda}(\underline{\mathbf{x}}^\alpha).$$

$\mathbf{h}^0$  est donc une solution du problème du théorème 4.5.4. Ainsi,  $H_{\Lambda(\mathbf{h}^0)}^{B^+}$  et  $H_{\Lambda(\mathbf{h}^0)}^B$  sont toutes deux de rang  $r$ . Décomposons alors  $H_{\Lambda(\mathbf{h}^0)}^{B^+}$  comme dans (4.5.3). L'image de  $G$  est alors contenue dans celle de  $H$ . Il existe donc une matrice  $W \in \mathbb{K}^{B \times \partial B}$  telle que  $G = HW$ .  $W$  n'est autre que la matrice de la projection  $\pi_{\partial B} : \langle \partial B \rangle \rightarrow \langle B \rangle$  modulo  $I_{\tilde{\Lambda}}$ . Or, pour tout  $b'', b' \in \partial B$  on a  $\tilde{\Lambda}[b'' . b'] = \tilde{\Lambda}[\pi_{\partial B}(b'') . \pi_{\partial B}(b')] = \lambda(\mathbf{h}^0)[\pi_{\partial B}(b'') . \pi_{\partial B}(b')]$ . On en déduit alors que :

$$J = W^t HW.$$

$\mathbf{h}^0 \in \mathbb{K}^M$  est donc une solution au problème de la proposition 4.5.5.  $\square$

## 4.6 Les rangs d'un tenseur

Dans cette section nous définirons la notion de variété Cactus introduite dans [13]. Nous développerons différentes propriétés concernant ces variétés. Citons parmi elles le théorème 4.6.14 dont on trouve un équivalent dans [13, Thm.1.7 , p.7] et que nous redémontrons dans le cadre de notre formalisme. Nous introduirons également différentes notions de rang et les comparerons les unes aux autres.

**Définition 4.6.1.** On notera  $\sigma_r^{0,d} \subset \mathbb{P}(S_d)$ , l'ensemble défini par :

$$\sigma_r^{0,d} := \{f \in \mathbb{P}(S_d) \mid \exists \mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_s \in S_1^* \text{ avec } s \leq r \text{ t.q. } f = \mathbf{k}_1(\mathbf{x})^d + \dots + \mathbf{k}_s(\mathbf{x})^d\}$$

et  $\sigma_r^d$  sa clôture dans  $\mathbb{P}(S_d)$  pour la topologie de Zariski (voir définition 4.2.2).

**Définition 4.6.2.** Etant donné un tenseur symétrique  $f \in S_d$  et un entier  $0 \leq k \leq d$ , on appelle *Catalecticant* d'ordre  $k$  de  $f$ , et on note  $\mathcal{C}_f^k$ , l'application suivante :

$$\begin{aligned} S_k &\longrightarrow S_{d-k}^* \\ p &\rightarrow p * f^*. \end{aligned}$$

où  $f^*$  est donné par la définition 4.2.4.

On appelle *matrice de Catalecticant* d'ordre  $k$ , et on note  $\mathcal{C}_f^k$ , la matrice de  $\mathcal{C}_f^k$  dans la base monomiale de  $S_k$  et dans la base duale de la base monomiale de  $S_{d-k}^*$ .

Etant données deux familles de monômes  $D \subset S_k$  et  $D' \subset S_{d-k}$ , on notera  $\mathcal{C}_f^{D',D}$  la matrice de  $\mathcal{C}_f^k$  associée à  $D$  et  $D'^*$ .

*Remarque 4.6.3.* Etant donné un tenseur symétrique  $f \in S_d$ , les Catalecticants ne sont rien d'autre que des versions homogènes des opérateurs de Hankel  $\mathcal{H}_{\underline{f}^*}^{B',B}$  introduits dans la définition 4.4.1 (voir définition 4.2.8 pour  $\underline{f}^*$ ). Plus précisément, étant donné un entier  $1 \leq i \leq d$  ainsi que deux familles de monômes  $\bar{D} \subset S_i$  et  $D' \subset S_{d-i}$ , notons  $B \subset R_i$  et  $B' \subset R_{d-i}$  les familles obtenues en déhomogénéisant  $\bar{D}$  et  $D'$  (i.e, en posant  $x_0 = 1$ ) :

$$B := \underline{\bar{D}} \text{ et } B' := \underline{D'}.$$

On a alors :

$$\mathcal{C}_f^{D',D} = \mathcal{H}_{\underline{f}^*}^{B',B}.$$

*Remarque 4.6.4.* Grâce aux propriétés de symétrie du produit apolaire, on déduit aisément que :

$$\mathcal{C}_f^k = {}^t \mathcal{C}_f^{d-k}$$

via l'identification  $S_{d-i} \simeq (S_{d-i}^*)^*$ . Matriciellement on a :

$$\mathcal{C}_f^k = {}^t \mathcal{C}_f^k.$$

Ou encore :

$$\mathcal{C}_f^{D',D} = {}^t \mathcal{C}_f^{D,D'}$$

pour toutes familles de monômes  $D \subset S_i$  et  $D' \subset S_{d-i}$

**Définition 4.6.5.** Etant donné un entier  $i \leq d$ , on définit pour tout  $r \in \mathbb{N}$  la variété  $\Gamma_r^{i,d-i} \subset \mathbb{P}(S_d)$  par :

$$\Gamma_r^{i,d-i} := \{f \in S_d \mid \text{rang}(\mathcal{C}_f^i) = \text{rang}(\mathcal{C}_f^{d-i}) \leq r\}.$$

*Remarque 4.6.6.* L'ensemble  $\Gamma_r^{i,d-i} \subset \mathbb{P}(S_d)$  est bien muni d'une structure de variété. En effet, ses équations sont données par l'annulation des mineurs de taille  $(r+1) \times (r+1)$  des matrices de Catalecticant  $\mathcal{C}_f^i$  (i.e des matrices  $\mathcal{C}_f^{d-i}$ )

Rappelons que  $\mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}^n}^s(\mathbb{K})$  s'identifie à l'ensemble des idéaux homogènes saturés  $I \subset S$  tels que l'algèbre graduée  $S/I$  soit de polynôme de Hilbert constant égal à  $s$  (voir section 2.2).

**Définition 4.6.7.** Etant donnés deux entiers  $r$  et  $d$ , on définit la  $r$ -variété Cactus (voir [13][(2.2), p.8]), et l'on note  $\mathcal{K}_d^r \subset \mathbb{P}(S_d)$ , comme étant la fermeture (pour la topologie de Zariski) du sous-ensemble  $\mathcal{K}_r^{0,d}$  défini par :

$$\mathcal{K}_r^{0,d} := \{f \in S_d \mid \exists s \leq r, \exists I \in \mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}^n}^s(\mathbb{K}), f^* \in I_d^\perp \subset S_d^*\}.$$

**Proposition 4.6.8.** Etant donné un entier  $r$ , on a les inclusions suivantes :

$$\sigma_r^{0,d} \subset \mathcal{K}_r^{0,d} \subset \Gamma_r^{i,d-i} \subset \mathbb{P}(S_d)$$

pour tout  $0 \leq i \leq d$ .

*Démonstration.* Rappelons que  $\sigma_r^{0,d}$  désigne le sous-ensemble suivant (voir définitions 4.2.2 et 4.2.1) :

$$\sigma_r^{0,d} := \{f \in S_d \mid \exists s \leq r, \exists (\mathbf{k}_i)_{i=1,\dots,s} \subset \mathbb{P}^n, f = \sum_{i=1,\dots,s} \mathbf{k}_i(\mathbf{x})^d\}.$$

Pour la première inclusion, il suffit de montrer que pour tout polynôme  $f \in S_d$  de la forme :

$$f = \sum_{i=1,\dots,s} \mathbf{k}_i(\mathbf{x})^d$$

avec  $s \leq r$ , il existe un idéal  $I \in \mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}^n}^s(\mathbb{K})$  tel que  $f^* \in I_d^\perp$ . Pour cela remarquons que  $f^*$  peut s'écrire sous la forme suivante :

$$f^* = \sum_{i=1,\dots,s} \mathbf{1}_{\mathbf{k}_i}.$$

Il est donc clair que  $f^* \in (\bigcap_{i=1,\dots,s} m_{\mathbf{k}_i})^\perp$ . On conclut alors en notant que  $\bigcap_{i=1,\dots,s} m_{\mathbf{k}_i}$  appartient à  $\mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}^n}^s(\mathbb{K})$  avec  $s \leq r$ .

Pour la seconde inclusion, il suffit de montrer que tout  $f \in S_d$  tel que  $f^* \in I_d^\perp$ , pour un idéal  $I \in \mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}^n}^s(\mathbb{K})$  avec  $s \leq r$ , vérifie :

$$\text{rang}(\mathcal{C}_f^{i,d-i}) \leq s \leq r$$



pour tout  $0 \leq i \leq d$ . En effet, posons :

$$J_i := \text{Ker } \mathcal{C}_f^{i,d-i}$$

pour tout  $0 \leq i \leq d$ . On remarque alors que par définition des Catalecticants :

$$J_{i+1} : S_1 = J_i \quad \forall 0 \leq i \leq d-1.$$

De plus, on a :

$$J_d \supset I_d.$$

L'idéal  $I$  étant saturé, on a par ailleurs :

$$I_d : S_{d-s} = I_s \quad \forall 0 \leq s \leq d.$$

On déduit alors que :

$$J_i \supset I_i \quad \forall 0 \leq i \leq d.$$

Enfin, l'étude de la fonction de Hilbert de  $I \in \mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}^n}^k(\mathbb{K})$  révèle que celle-ci est strictement croissante jusqu'au degré  $s$ , après quoi elle est constante égale à  $s$ . En particulier on a :

$$\dim S_i/I_i \leq s, \quad \forall 0 \leq i \leq d.$$

Cela implique donc par l'inclusion ci-dessus que :

$$\dim S_i/J_i \leq s, \quad \forall 0 \leq i \leq d,$$

i.e :

$$\text{rang}(\mathcal{C}_f^{i,d-i}) \leq s, \quad \forall 0 \leq i \leq d.$$

□

**Définition 4.6.9.** Etant donnés deux entiers  $r$  et  $d$ , on notera  $\Omega_r^{0,d} \subset \mathbb{P}(S_d^*)$  le sous-ensemble de  $S_d^*$  formé des éléments qui admettent une décomposition affine généralisée de taille inférieure ou égale à  $r$  (voir définition 4.4.10) :

$$\Omega_r^{0,d} := \{\Lambda \in S_d^* \mid \Lambda \text{ admet une décomposition affine généralisée de taille } \leq r\} \subset \mathbb{P}(S_d^*).$$

On pose également :

$$\Omega_r^d := \bigcup_{g \in PGL(n+1)} g \circ \Omega_r^{0,d} \subset \mathbb{P}(S_d^*).$$

On définit enfin  $\mathcal{H}_r^{0,d} \subset \mathbb{P}(S_d)$  par :

$$\mathcal{H}_r^{0,d} := \{f \in S_d \mid f^* \in \Omega_r^d\}$$

et  $\mathcal{H}_r^d$  sa fermeture (pour la topologie de Zariski) dans  $\mathbb{P}(S_d)$  :

$$\mathcal{H}_r^d := \overline{\{f \in S_d \mid f^* \in \Omega_r^d\}}.$$

**Proposition 4.6.10.** *Etant donnés deux entiers  $r$  et  $d$ , on a l'égalité suivante :*

$$\mathcal{K}_r^{0,d} = \mathcal{H}_r^{0,d}. \quad (4.6.1)$$

En particulier on a :

$$\mathcal{K}_r^d = \mathcal{H}_r^d.$$

*Démonstration.* Commençons par montrer l'inclusion direct :

$$\{f \in S_d \mid \exists s \leq r, \exists I \in \mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}^n}^s(\mathbb{K}), f^* \in I_d^\perp \subset S_d^*\} \subset \{f \in S_d \mid f^* \in \Omega_r^d\}.$$

Il suffit pour cela de montrer que pour tout  $\Lambda \in S_d^*$  tel que  $\Lambda \in I_d^\perp$ , avec  $I \in \mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}^n}^s(\mathbb{K})$  et  $s \leq r$ , on a :

$$\Lambda \in \Omega_r^d := \bigcup_{g \in PGL(n+1)} g \circ \Omega_r^{0,d} \subset \mathbb{P}(S_d^*).$$

Pour cela, fixons  $\mathbf{u} \in S^1$  une forme linéaire telle que  $I : \mathbf{u} = I$  (c'est possible car, par définition,  $I$  est saturé). On peut se ramener (par changement de coordonnées) au cas où  $\mathbf{u} = x_0$ . Montrons alors que  $\Lambda \in \Omega_r^{0,d}$ . Notons  $\underline{I}$  la déhomogénéisation de  $I$ . L'algèbre quotient  $R/\underline{I}$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $s$ . On a de plus les isomorphismes naturels suivants :

$$I_d^\perp \simeq (S_d/I_d)^* \simeq (R_d/\underline{I}_{\leq d})^*. \quad (4.6.2)$$

Ils associent en particulier à  $\Lambda \in I_d^\perp$  la forme linéaire  $\underline{\Lambda} \in (R_d/\underline{I}_{\leq d})^*$ . Grâce à l'inclusion suivante :

$$R_d/\underline{I}_{\leq d} \subset R/\underline{I},$$

la forme linéaire  $\underline{\Lambda} \in (R_d/\underline{I}_{\leq d})^*$  peut se prolonger (de manière non nécessairement unique) en une forme linéaire  $\tilde{\Lambda} \in (R/\underline{I})^*$ . L'idéal  $I_{\tilde{\Lambda}}$  contient donc  $\underline{I}$  et  $H_{\tilde{\Lambda}}$  est donc de rang inférieur ou égal à  $s$ . D'après le théorème 4.4.12,  $\tilde{\Lambda}$  s'écrit alors :

$$\tilde{\Lambda} = \sum_{i=1, \dots, m} \mathbf{1}_{\zeta_i} \circ p_i(\partial)$$

et la taille de cette décomposition généralisée est inférieure ou égale à  $s \leq r$ . La forme linéaire  $\underline{\Lambda}$  s'écrit donc elle aussi :

$$\underline{\Lambda} = \sum_{i=1, \dots, m} \mathbf{1}_{\zeta_i} \circ p_i(\partial)$$

sur  $R_d/\underline{I}_{\leq d}$ . Cela implique que  $\Lambda \in \Omega_r^{0,d}$ .

Montrons maintenant l'inclusion inverse :

$$\{f \in S_d \mid f^* \in \Omega_r^d\} \subset \{f \in S_d \mid \exists s \leq r, \exists I \in \mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}^n}^s(\mathbb{K}), f^* \in I_d^\perp \subset S_d^*\}.$$

Il suffit pour cela de montrer que :

$$\bigcup_{g \in PGL(n+1)} g \circ \Omega_r^{0,d} \subset \{\Lambda \in S_d^* \mid \exists s \leq r, \exists I \in \mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}^n}^s(\mathbb{K}), \Lambda \in I_d^\perp \subset S_d^*\}.$$

Soit  $\Lambda \in g \circ \Omega_r^{0,d}$  avec  $g \in PGL(n+1)$ . Par changement de coordonnées, on peut supposer sans perte de généralité que  $g = \text{Id}_{n+1}$ . Alors (voir définition 4.4.10), il existe une forme linéaire  $\underline{\Lambda}' \in R^*$  qui s'écrit :

$$\underline{\Lambda}' = \sum_{i=1, \dots, m} \mathbf{1}_{\zeta_i} \circ p_i(\partial)$$

où la somme des dimensions des systèmes inverses associés aux formes linéaires  $\mathbf{1}_{\zeta_i} \circ p_i(\partial)$  est égale à  $s \leq r$ , telle que :

$$\underline{\Lambda} = \underline{\Lambda}' \text{ sur } R_{\leq d}.$$

D'après le théorème 4.4.12,  $I_{\underline{\Lambda}'} \subset R$  est un idéal zéro-dimensionnel de multiplicité  $s \leq r$ . Notons  $I \subset S$  l'homogénéisation de  $I_{\underline{\Lambda}'}$  par rapport à  $x_0$ . On a alors :

$$I \in \mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}^n}^s(\mathbb{K}).$$

Comme  $\underline{\Lambda} = \underline{\Lambda}'$  sur  $R_{\leq d}$ , on a :

$$\Lambda \in I_d^\perp.$$

□

**Proposition 4.6.11.** *Etant donnés deux entiers  $r$  et  $d$  tels que  $d \geq r$  l'ensemble  $\mathcal{K}_r^{0,d} \subset \mathbb{P}(S_d)$  est fermé pour la topologie de Zariski i.e :*

$$\mathcal{K}_r^{0,d} = \mathcal{K}_r^d.$$

*Démonstration.* Fixons un entier  $s \leq r$  et montrons que l'ensemble :

$$\{f \in S_d \mid \exists I \in \mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}^n}^s(\mathbb{K}), f^* \in I_d^\perp \subset S_d^*\}$$

est fermé. Rappelons que pour tout entier  $d \geq s$ ,  $\mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}^n}^s(\mathbb{K})$  est une sous-variété fermée de  $\mathbf{Gr}_{S_d}^s(\mathbb{K})$  et plus généralement de  $\mathbb{P}(\wedge^s S_d)$  (voir théorème 2.4.20 chapitre 2). On montre alors aisément que pour tout couple d'entiers  $s \leq d$ , l'ensemble  $E$  défini par :

$$E := \{(f, \Delta) \in \mathbb{P}(S_d) \times \mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}^n}^s(\mathbb{K}) \mid f^* \in \Delta^*\} \subset \mathbb{P}(S_d) \times \mathbb{P}(\wedge^s S_d)$$

est une sous variété fermée de  $\mathbb{P}(S_d) \times \mathbb{P}(\wedge^s S_d)$ . Sa première projection sur  $\mathbb{P}(S_d)$  est exactement l'ensemble :

$$\{f \in S_d \mid \exists I \in \mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}^n}^s(\mathbb{K}), f^* \in I_d^\perp \subset S_d^*\}.$$

et d'après le théorème [75][Thm.3, p.58], celui-ci est donc fermé. L'ensemble  $\mathcal{K}_r^{0,d}$  est donc une réunion finie de tels fermés. □

**Définition 4.6.12.** Etant donné  $f \in S_d$  :

- on appelle *rang de bord* (ou encore *rang typique*, voir [14, 22, 82]), et l'on note  $r_\sigma^d(f)$ , le plus petit entier  $r$  tel que  $f \in \sigma_r^d$ , que l'on notera plus simplement  $\sigma_r^d$  (voir définition 4.6.1),
- on appelle *Cactus-rang* de  $f$ , et l'on notera  $r_{\mathcal{K}}^d(f)$ , le plus petit entier  $r$  tel que  $f \in \mathcal{K}_r^d = \mathcal{H}_r^d$ ,

- on appelle *h-rang* de  $f$ , et l'on notera  $r_{\mathcal{H}}^d(f)$ , le plus petit entier  $r$  tel que  $f \in \mathcal{H}_r^{0,d} = \mathcal{K}_r^{0,d}$  (voir aussi [49][Def.5.66, p.198]),
- on appelle *Gamma-rang* de  $f$ , et l'on notera  $r_{\Gamma}^d(f)$ , le plus petit entier  $r$  tel qu'il existe  $0 \leq i \leq d$  vérifiant  $f \in \Gamma_r^{i,d-i}$ , i.e :

$$r_{\Gamma}^d(f) := \sup_{0 \leq i \leq d} (\text{rang}(\mathbb{C}_f^{i,d-i})).$$

**Proposition 4.6.13.** *Etant donné  $f \in S_d$ , on a :*

$$r_{\Gamma}^d(f) \leq r_{\mathcal{K}}^d(f) \leq r_{\sigma}^d(f) \leq \text{rang } f$$

et

$$r_{\Gamma}^d(f) \leq r_{\mathcal{K}}^d(f) \leq r_{\mathcal{H}}^d \leq \text{rang } f.$$

*Démonstration.* La proposition est une conséquence directe de la définition 4.6.12 et de la proposition 4.6.8.  $\square$

**Théorème 4.6.14.** *Etant donnés deux entiers  $r$  et  $d$  tels que  $d \geq 2r$ , on a :*

$$\mathcal{K}_r^d = \Gamma_r^{i,d-i}$$

pour tout  $r \leq i \leq d - r$ .

Ce théorème est énoncé dans [13, Thm.1.7, p.4] et est aussi une conséquence de [49][C.33, p.309]. Nous allons ici en fournir une preuve en utilisant le formalisme des opérateurs de Hankel tronqués introduits précédemment (voir section 4.4).

*Démonstration.* Nous allons montrer l'inclusion suivante :

$$\Gamma_r^{i,d-i} \subset \bigcup_{g \in \text{PGL}(n+1)} \{f \in S_d \mid f^* \in g \circ \Omega_r^{0,d}\} = \{f \in S_d \mid f^* \in \Omega_r^d\} := \mathcal{H}_r^{0,d}. \quad (4.6.3)$$

Pour cela, fixons  $f \in \Gamma_r^{i,d-i}$  pour un entier  $r \leq i \leq d - r$ . Rappelons que :

$$\mathbb{C}_f^{i,d-i} = {}^t \mathbb{C}_f^{d-i,i},$$

et posons  $E := \text{Ker}(\mathbb{C}_f^{i,d-i})$  et  $F := \text{Ker}(\mathbb{C}_f^{d-i,i})$ . Notons  $k \leq r$  le rang de  $\mathbb{C}_f^{i,d-i}$ . Les quotients  $S_i/E$  et  $S_{d-i}/F$  sont donc de dimension  $k$ . Comme  $k \leq r \leq i$  et  $k \leq r \leq d - i$ , on peut appliquer le lemme 2.4.19 et supposer ainsi (par changement générique de coordonnées) qu'il existe une famille  $D$  (resp.  $D'$ ) de  $k$  monômes de  $S_i$  (resp.  $S_{d-i}$ ) telle que  $x_0 D$  (resp.  $x_0 D'$ ) soit une base de  $S_i/E$  (resp.  $S_{d-i}/F$ ). Le lemme 2.4.19 et la proposition 1.2.14 nous permettent en outre de supposer que la déhomogénéisation de  $x_0 D$  (resp.  $x_0 D'$ ) :

$$B := \underline{D} \subset R_{\leq i} \text{ (resp. } B' := \underline{D}' \subset R_{\leq d-i})$$

est connexe à 1. Dès lors on procède par déhomogénéisation et on remarque que :

$$\mathbb{H}_{f^*}^{B',B} = \mathbb{C}_f^{x_0 D', x_0 D}$$

est une matrice inversible de taille  $k \times k$ . De plus, comme la famille  $B$  (resp.  $B'$ ) est connexe à 1 et de taille  $k$ , les monômes qui y apparaissent sont de degré au plus  $k - 1 < r \leq i$  (resp.  $k - 1 < r \leq d - i$ ). Ainsi les monômes de  $B^+$  (resp.  $B'^+$ ) sont de degré inférieur ou égal à  $k \leq r \leq i$  (resp.  $k \leq r \leq d - i$ ). La matrice  $H_{f^*}^{B'^+, B^+}$  est donc entièrement connue. En particulier on a :

$$H_{f^*}^{B'^+, B^+} = C_f^{S_1 D', S_1 D}.$$

La matrice  $C_f^{S_1 D', S_1 D}$  étant une sous-matrice de  $C_f^{i, d-i}$ , son rang est donc lui aussi égal à  $k$ . On a donc :

$$\text{rang } H_{f^*}^{B'^+, B^+} = \text{rang } H_{f^*}^{B', B} = k.$$

Nous pouvons alors appliquer les théorèmes 4.5.2 et 4.5.4 pour conclure que  $f^* \in \Omega_k^{0, d} \subset \Omega_r^{0, d}$ .

Etant donné  $f \in \Gamma_r^{i, d-i}$ , nous avons donc montré que pour un changement générique de coordonnées  $g \in PGL(n + 1)$  :

$$g \circ f^* \in \Omega_r^{0, d}.$$

On a donc :

$$\Gamma_r^{i, d-i} \subset \{f \in S_d \mid f^* \in \Omega_r^d\} = \mathcal{H}_r^{0, d}.$$

D'après les propositions 4.6.10 et 4.6.8, on a alors :

$$\Gamma_r^{i, d-i} \subset \mathcal{H}_r^{0, d} = \mathcal{K}_r^{0, d} \subset \Gamma_r^{i, d-i}. \quad (4.6.4)$$

□

*Remarque 4.6.15.* Dans les conditions du théorème 4.6.14, la chaîne d'inclusions (4.6.4) fournit en plus le résultat suivant :

$$\mathcal{K}_r^d = \{f \in S_d \mid \exists k \leq r, \exists I \in \mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}^n}^k(\mathbb{K}), f^* \in I_d^\perp \subset S_d^*\} = \{f \in S_d \mid f^* \in \Omega_r^d\}$$

et les ensembles :

$$\{f \in S_d \mid \exists k \leq r, \exists I \in \mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}^n}^k(\mathbb{K}), f^* \in I_d^\perp \subset S_d^*\} = \{f \in S_d \mid f^* \in \Omega_r^d\}$$

sont donc fermés.

## 4.7 Unicité de la décomposition

Dans cette section nous mettrons en évidence des conditions dans lesquelles la décomposition de tenseurs symétrique est unique.

**Théorème 4.7.1.** *Soient deux entiers positifs  $d$  et  $r$  tels que  $d \geq 2r - 2$ . Soit  $f \in S_d$  tel que  $f^* \in \Omega_r^d$ . Alors, pour tout changement générique de coordonnées  $g \in PGL(n + 1)$ ,  $g \circ f^*$  admet une unique décomposition affine généralisée de taille  $\leq r$  (voir définition 4.4.10).*

*Démonstration.* Remarquons tout d'abord que comme  $f^* \in \Omega_r^d$ , pour tout changements de coordonnées génériques  $g \in PGL(n+1)$ , la forme linéaire  $g \circ f^*$  admet une décomposition affine généralisée de taille inférieure ou égale à  $r$  (voir définition 4.6.9). Il reste donc à traiter l'unicité. Pour cela, fixons un changement de coordonnées générique  $g$  pour lequel  $g \circ f^*$  admet une décomposition affine généralisée de taille inférieure ou égale à  $r$ . Montrons que celle-ci est unique. On peut supposer sans perte de généralité que  $g = \text{Id}$ . Notons alors :

$$\Lambda := \sum_{j=1}^k \mathbf{1}_{\zeta_j} \circ p_j(\partial) \in R^*$$

une décomposition affine de  $f^*$  de taille  $k \leq r$ , avec  $(\zeta_j)_{1 \leq j \leq k} \subset \mathbb{A}^n$  une famille de  $k$  points distincts deux à deux et  $(p_j)_{1 \leq j \leq k} \subset \mathbb{K}[\mathbf{x}]$  une famille de polynômes en  $n+1$  variables. On a donc par définition :

$$\Lambda = \underline{f^*} \text{ sur } R_d.$$

Considérons alors une autre décomposition affine généralisée de  $f^*$  de taille  $k' \leq r$  :

$$\Lambda' = \sum_{j=1}^{k'} \mathbf{1}_{\zeta'_j} \circ p'_j(\partial) \in R^*$$

avec  $(\zeta'_j)_{1 \leq j \leq k'} \subset \mathbb{A}^n$  une famille de  $k'$  points distincts deux à deux et  $(p'_j)_{1 \leq j \leq k'} \subset \mathbb{K}[\mathbf{x}]$  une famille de polynômes en  $n+1$  variables. On a donc :

$$\Lambda = \underline{f^*} = \Lambda' \text{ sur } R_d.$$

Les algèbres quotients  $R/I_\Lambda$  et  $R/I_{\Lambda'}$  sont de dimension finie inférieure ou égale à  $r$  (respectivement  $k$  et  $k'$ , voir théorème 4.4.12). D'après la proposition 1.2.23 il existe alors des familles de monômes  $B$  et  $B'$  connexe à 1 qui sont des bases de  $R/I_\Lambda$  et  $R/I_{\Lambda'}$  respectivement. Celles-ci étant de cardinal plus petit que  $r$ , on a alors :

$$B \subset R_{r-1} \text{ et } B' \subset R_{r-1}.$$

On déduit alors que :

$$\dim(R/I_\Lambda) = \text{rang}(\mathbb{H}_\Lambda^{r-1, r-1}) \text{ et } \text{rang}(\mathbb{H}_{\Lambda'}^{r-1, r-1}) = \dim(R/I_{\Lambda'}).$$

De plus, comme  $d \geq 2(r-1)$ , on a :

$$\text{rang}(\mathbb{H}_\Lambda^{r-1, r-1}) = \text{rang}(\mathbb{H}_{\underline{f^*}}^{r-1, r-1}) = \text{rang}(\mathbb{H}_{\Lambda'}^{r-1, r-1})$$

et donc :

$$\dim(R/I_\Lambda) = \dim(R/I_{\Lambda'}) = k = k' \leq r.$$

Les inclusions  $B \subset R_{r-1}$  et  $B' \subset R_{r-1}$  impliquent que :

$$(I_\Lambda)_{\leq r-1} = \text{Ker}(\mathbb{H}_\Lambda^{r-1, r-1}) \text{ et } (I_{\Lambda'})_{\leq r-1} = \text{Ker}(\mathbb{H}_{\Lambda'}^{r-1, r-1}).$$

mais aussi que :

$$R/I_\Lambda = R_{r-1}/(I_\Lambda)_{\leq r-1} \text{ et } R/I_{\Lambda'} = R_{r-1}/(I_{\Lambda'})_{\leq r-1}.$$

Enfin, comme  $H_{\Lambda}^{r-1, r-1} = H_{\Lambda}^{r-1, r-1} = H_{\Lambda'}^{r-1, r-1}$ , on a donc :

$$R/I_{\Lambda} = R_{r-1}/(I_{\Lambda})_{\leq r-1} = R_{r-1}/\text{Ker}(H_{f^*}^{r-1, r-1}) = R_{r-1}/(I_{\Lambda'})_{\leq r-1} = R/I_{\Lambda'}.$$

Comme  $\Lambda = \Lambda'$  sur  $R_{r-1}$  (car  $\Lambda = \Lambda'$  sur  $R_d$ ), on déduit que :

$$\Lambda = \Lambda'.$$

D'après le corollaire 4.4.14, on conclut (quitte à réindexer les ensembles  $\zeta'_j$ ) que  $\zeta_i = \zeta'_i$  et  $p_i = p'_i$  pour tout  $1 \leq i \leq k$ . On a donc montré que  $f^*$  admet une unique décomposition de taille inférieure ou égale à  $r$ .  $\square$

**Corollaire 4.7.2.** *Soient deux entiers  $r$  et  $d$  tels que  $d \geq 2r - 2$ , et  $f \in S_d$  de rang  $r$ . Alors,  $f$  admet une unique décomposition en somme de  $r$  formes linéaires à la puissance  $d$ .*

*Démonstration.* Si  $f$  est de rang  $r$ , alors  $f \in \sigma_r^{0, d} \subset \mathcal{K}_r^{0, d}$ . On peut donc appliquer le théorème 4.7.1 et déduire que  $f$  ne peut avoir deux décompositions affines généralisées.  $\square$

Le théorème suivant concerne encore l'unicité de la décomposition de tenseurs symétrique. On retrouve un résultat similaire dans [68, Thm.2.3, p.7] ainsi que [49][Thm.5.3.E, p.136] :

**Théorème 4.7.3.** *Soit deux entiers  $d$  et  $k$  tels que  $2k \leq d$ . Considérons  $r$  points non-nuls  $\zeta_1, \dots, \zeta_r$  de  $\mathbb{K}^{n+1}$  et notons  $I$  l'idéal homogène défini par :*

$$I := \bigcap_{1 \leq i \leq r} m_{\zeta_i}.$$

où  $m_{\zeta_i} \subset S$  désigne l'idéal engendré par les polynômes homogènes de  $S$  qui s'annulent en  $\zeta_i$ . Notons également  $f \in S_d$  le polynôme suivant :

$$f := \zeta_1(\mathbf{x})^d + \dots + \zeta_r(\mathbf{x})^d. \quad (4.7.1)$$

Si :

$$\dim S_k/I_k = r,$$

alors  $f$  est de rang  $r$  et (4.7.1) est son unique décomposition en somme de  $r$  puissances de formes linéaires.

*Démonstration.* Commençons par montrer que  $f$  est de rang  $r$ . Pour cela, nous allons prouver que :

$$\text{rang}(\mathcal{C}_f^{k, d-k}) = r.$$

Notons  $K_k \subset S_k$  le noyau du Catalecticant  $\mathcal{C}_f^{i, d-i}$  pour tout  $0 \leq i \leq d$ . On remarque facilement que  $I_k \subset K_k$ . Remarquons aussi que  $I \in \mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}^n}^r(\mathbb{K})$  et que sa fonction de Hilbert se stabilise à partir du degré  $k$  car  $\dim S_k/I_k = r$ . Considérons pour tout entier  $l$  les injections suivantes :

$$\begin{aligned} i_l : S_l/I_l &\rightarrow \mathbb{K}^r \\ p &\mapsto (p(\zeta_i))_{1 \leq i \leq r}. \end{aligned}$$

Comme  $\dim S_l/I_l = r$  pour tout  $l \geq k$ ,  $i_l$  est une bijection pour tout  $l \geq k$ . On déduit alors que pour tout  $l \geq k$ , les évaluations  $\mathbf{1}_{\zeta_1}, \dots, \mathbf{1}_{\zeta_r} \in S_l^*$  sont linéairement indépendantes. Rappelons enfin que  $f^* \in S_d^*$  s'écrit :

$$f^* = \mathbf{1}_{\zeta_1} + \dots + \mathbf{1}_{\zeta_r}$$

et que  $\mathcal{C}_f^{k,d-k}$  est défini par :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_f^{k,d-k} : S_m &\rightarrow S_{d-k}^* \\ p &\mapsto p * f^* = p(\zeta_1) \mathbf{1}_{\zeta_1} + \dots + p(\zeta_r) \mathbf{1}_{\zeta_r}. \end{aligned}$$

L'entier  $d - k$  étant supérieur ou égal à  $k$ , les formes linéaires  $\mathbf{1}_{\zeta_1}, \dots, \mathbf{1}_{\zeta_r} \in S_{d-k}^*$  sont linéairement indépendantes et le noyau de  $\mathcal{C}_f^{k,d-k}$  est exactement égal à  $I_k$ . Ainsi, le rang de  $\mathcal{C}_f^{k,d-k}$  est exactement égal à  $r$ , et d'après la proposition 4.6.13, le rang de  $f$  est supérieur ou égal à  $r$ . Celui-ci vaut donc  $r$ .

Montrons désormais que (4.7.1) est l'unique décomposition de taille  $r$  de  $f$ . Considérons une autre décomposition de  $f$  :

$$f := \lambda_1 \cdot \varepsilon_1(\mathbf{x})^d + \dots + \lambda_r \cdot \varepsilon_r(\mathbf{x})^d \quad (4.7.2)$$

pour des points non-nuls  $\varepsilon_i \in \mathbb{K}^{n+1}$ . Par changement générique de coordonnées, nous pouvons supposer que  $\zeta_{0,i} = \varepsilon_{0,i} = 1$  pour tout  $1 \leq i \leq r$  et que les décompositions (4.7.1) et (4.7.2) sont des décompositions affines de  $f$  de taille  $r$  (voir définition 4.2.6). D'après le théorème 4.5.1, ces deux décompositions correspondent à deux extensions :  $\tilde{\Lambda} \in R^*$  et  $\tilde{\Lambda}' \in R^*$  de  $\underline{f}^* \in R_d^*$  telles que  $I_{\tilde{\Lambda}} \subset R$  et  $I_{\tilde{\Lambda}'} \subset R$  sont des idéaux radicaux zéro-dimensionnels de multiplicité  $r$ . On sait de plus que  $\underline{H}_{\underline{f}^*}^{R_k, R_{d-k}} = \mathcal{C}_f^{k,d-k}$  (via la déhomogénéisation, voir remarque 4.6.3) est une sous-matrice de rang  $r$  de  $H_{\tilde{\Lambda}}$  et de  $H_{\tilde{\Lambda}'}$ . Comme :

$$\text{rang}(\underline{H}_{\underline{f}^*}^{R_k, R_{d-k}}) = \text{rang}(\mathcal{C}_f^{k,d-k}) = \text{rang}(H_{\tilde{\Lambda}}) = \text{rang}(H_{\tilde{\Lambda}'}) = r,$$

on déduit que :

$$\text{Ker}(\underline{H}_{\underline{f}^*}^{R_k, R_{d-k}}) = \underline{K}_k = \underline{I}_{\leq k} \subset I_{\tilde{\Lambda}}$$

et :

$$\text{Ker}(\underline{H}_{\underline{f}^*}^{R_k, R_{d-k}}) = \underline{K}_k = \underline{I}_{\leq k} \subset I_{\tilde{\Lambda}'}$$

Or, comme la fonction de Hilbert de  $I$  se stabilise à partir du degré  $k$ , on a :

$$I_{k+l} = S_l \cdot I_k \quad (\text{i.e. } \underline{I}_{\leq l+k} = R_l \cdot \underline{I}_{\leq k}).$$

Cela implique que les idéaux  $I_{\tilde{\Lambda}}$  et  $I_{\tilde{\Lambda}'}$  contiennent  $\underline{I}$  à partir du degré  $k$ . Par argument de dimension, cela implique que :

$$I_{\tilde{\Lambda}} = I_{\tilde{\Lambda}'} = \underline{I}$$

et que :

$$\tilde{\Lambda} = \tilde{\Lambda}'.$$

La décomposition (4.7.1) est donc l'unique décomposition de taille  $r$  de  $f$ . □



## 4.8 Algorithme de décomposition de tenseurs symétriques

Nous allons maintenant présenter l'algorithme de décomposition de tenseurs symétriques en somme de tenseurs de rang 1. Celui-ci généralise l'algorithme de Sylvester [80] proposé pour le cas binaire ( $n = 1$ ), voir aussi [20].

Considérons un polynôme homogène  $f(\mathbf{x})$  de degré  $d$  de la forme (4.2.1) que l'on souhaite décomposer. Comme on l'a vu précédemment, par changement générique de coordonnées, on peut se borner à chercher une décomposition affine de  $f$ . Il s'agit alors (voir proposition 4.2.10) de décomposer  $\underline{f}^* \in R_d^*$  de la façon suivante :

$$f^* = \sum_{i=1}^r \lambda_i \mathbf{1}_{\mathbf{k}_i}$$

où  $\mathbf{k}_i := (k_{i,1}, \dots, k_{i,n}) \in \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$  sont des points deux à deux distincts.

Supposons que l'on connaisse la valeur de  $r$ . La donnée de  $\underline{f}^*$  sur un ensemble de polynômes de degré suffisamment élevé nous permet de calculer les matrices de multiplication. D'après le théorème 4.4.16, en résolvant le problème des valeurs propres généralisées  $(H_{x_i \underline{f}^*} - \lambda H_{\underline{f}^*})\mathbf{v} = \mathbf{0}$  on retrouve les points  $\mathbf{k}_i$ . Enfin, en résolvant un simple système linéaire, on obtient les valeurs  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ . Ainsi, le but de l'algorithme suivant est d'étendre  $\underline{f}^*$  sur un ensemble de polynômes suffisamment grand afin de pouvoir lancer le calcul de valeurs propres généralisées.

---

### Algorithm 2 DÉCOMPOSITION DE TENSEURS SYMÉTRIQUES

---

**Entrée :** un polynôme homogène  $f(x_0, x_1, \dots, x_n)$  de degré  $d$ .

**Sortie :** une décomposition de  $f$  de la forme  $f = \sum_{i=1}^r \lambda_i \mathbf{k}_i(\mathbf{x})^d$  avec  $r$  minimal.

– Calculer les coefficients de  $\underline{f}^* \in R_d^*$  à partir de ceux de  $f \in S_d$ .

–  $r := 1$  ;

– **Répéter :**

1. Calculer un ensemble  $B$  de monômes de degré  $\leq d$  connexe à 1 avec  $|B| = r$ .

2. Trouver des paramètres  $\mathbf{h}$  tels que  $\det(H_{\underline{f}^*}^B(\mathbf{h})) \neq 0$  et les matrices  $M_i = H_{x_i \underline{f}^*}^B(\mathbf{h})(H_{\underline{f}^*}^B(\mathbf{h}))^{-1}$  commutent.

3. S'il n'y a pas de solution, on recommence pour  $r := r + 1$ .

4. Sinon on calcule les  $n \times r$  valeurs propres  $\zeta_{i,j}$  et les vecteurs propres  $\mathbf{v}_j$  tels que  $M_i \mathbf{v}_j = \zeta_{i,j} \mathbf{v}_j$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, r$ .

**jusqu'à ce que :** les valeurs propres soient simples.

– Résoudre alors le système linéaire en  $(\nu_j)_{j=1, \dots, k} : \Lambda = \sum_{j=1}^r \nu_j \mathbf{1}_{\zeta_j}$  où  $\zeta_j \in \mathbb{K}^n$  sont les vecteurs propres trouvés à l'étape 4.

---

Les exemples qui suivent illustrent l'algorithme ci-dessus. Les deux premiers sont tirés de [9][Ex.5.1, p.11 et Ex.5.2, p.13]. Les troisième exemple n'apparaît quant à lui dans aucun autre article préalablement rédigé.

## 4.8.1 Premier exemple

Considérons le tenseur symétrique de dimension  $n + 1 = 3$  et d'ordre  $d = 5$  correspondant au polynôme homogène suivant :

$$f = -1549440 x_0 x_1 x_2^3 + 2417040 x_0 x_1^2 x_2^2 + 166320 x_0^2 x_1 x_2^2 - 829440 x_0 x_1^3 x_2 - 5760 x_0^3 x_1 x_2 - 222480 x_0^2 x_1^2 x_2 + 38 x_0^5 - 497664 x_1^5 - 1107804 x_2^5 - 120 x_0^4 x_1 + 180 x_0^4 x_2 + 12720 x_0^3 x_1^2 + 8220 x_0^3 x_2^2 - 34560 x_0^2 x_1^3 - 59160 x_0^2 x_2^3 + 831840 x_0 x_1^4 + 442590 x_0 x_2^4 - 5591520 x_1^4 x_2 + 7983360 x_1^3 x_2^2 - 9653040 x_1^2 x_2^3 + 5116680 x_1 x_2^4.$$

Une décomposition minimale de ce polynôme en somme de puissances de formes linéaires est la suivante :

$$(x_0 + 2x_1 + 3x_2)^5 + (x_0 - 2x_1 + 3x_2)^5 + \frac{1}{3}(x_0 - 12x_1 - 3x_2)^5 + \frac{1}{5}(x_0 + 12x_1 - 13x_2)^5.$$

Le rang du tenseur est donc 4.

On calcule les coefficients  $(c_{j_1, \dots, j_n})$  de  $f^* \in R_{\leq d}^*$  dans la base duale  $\underline{d}^{(j_1, \dots, j_n)}$  à partir des coefficients  $(a_{j_0, \dots, j_n})$  de  $f \in S_d$  dans la base monomiale  $(x_0^{j_0} \dots x_n^{j_n})$  :

$$c_{j_1, \dots, j_n} := a_{j_0, \dots, j_n} \cdot \binom{d}{j_0, \dots, j_n}^{-1}.$$

On calcule ensuite  $\underline{f}^*$  ainsi que la matrice de Hankel formelle associée à  $\underline{f}^*(\mathbf{h})$  :

	1	$x_1$	$x_2$	$x_1^2$	$x_1 x_2$	$x_2^2$	$x_1^3$	$x_1^2 x_2$	$x_1 x_2^2$	$x_2^3$
1	38	-24	36	1272	-288	822	-3456	-7416	5544	-5916
$x_1$	-24	1272	-288	-3456	-7416	5544	166368	-41472	80568	-77472
$x_2$	36	-288	822	-7416	5544	-5916	-41472	80568	-77472	88518
$x_1^2$	1272	-3456	-7416	166368	-41472	80568	-497664	-1118304	798336	-965304
$x_1 x_2$	-288	-7416	5544	-41472	80568	-77472	-1118304	798336	-965304	1023336
$x_2^2$	822	5544	-5916	80568	-77472	88518	798336	-965304	1023336	-1107804
$x_1^3$	-3456	166368	-41472	-497664	-1118304	798336	$h_{6,0,0}$	$h_{5,1,0}$	$h_{4,2,0}$	$h_{3,3,0}$
$x_1^2 x_2$	-7416	-41472	80568	-1118304	798336	-965304	$h_{5,1,0}$	$h_{4,2,0}$	$h_{3,3,0}$	$h_{2,4,0}$
$x_1 x_2^2$	5544	80568	-77472	798336	-965304	1023336	$h_{4,2,0}$	$h_{3,3,0}$	$h_{2,4,0}$	$h_{1,5,0}$
$x_2^3$	-5916	-77472	88518	-965304	1023336	-1107804	$h_{3,3,0}$	$h_{2,4,0}$	$h_{1,5,0}$	$h_{0,6,0}$

Pour  $B = \{1, x_1, x_2, x_1^2\}$ , la matrice  $H_{\underline{f}^*}^B(\mathbf{h}) = H_{\underline{f}^*}^B$  est une matrice de taille  $4 \times 4$  inversible :

$$H_{\underline{f}^*}^B = \begin{bmatrix} 38 & -24 & 36 & 1272 \\ -24 & 1272 & -288 & -3456 \\ 36 & -288 & 822 & -7416 \\ 1272 & -3456 & -7416 & 166368 \end{bmatrix}$$

On calcule ensuite la matrice  $H_{x_1^* \underline{f}^*}^B$  :

$$H_{x_1^* \underline{f}^*}^B = \begin{bmatrix} -24 & 1272 & -288 & -3456 \\ 1272 & -3456 & -7416 & 166368 \\ -288 & -7416 & 5544 & -41472 \\ -3456 & 166368 & -41472 & -497664 \end{bmatrix}$$

On résout alors le problème de valeurs/vecteurs propres généralisés suivant :

$$(\Delta_1 - \lambda\Delta_0)X = 0.$$

Les vecteurs propres généralisés sont les suivants :

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -12 \\ -3 \\ 144 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 12 \\ -13 \\ 144 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Ils représentent les évaluations en 4 points distincts de  $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^3$  exprimées dans la base duale de  $\{1, x_1, x_2, x_1^2\}$ . Ces quatre points sont donc :

$$\zeta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -12 \\ -3 \end{pmatrix}, \zeta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 12 \\ -13 \end{pmatrix}, \zeta_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \zeta_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Il reste alors à résoudre le système linéaire suivant :

$$f = \ell_1(x_0 - 12x_1 - 3x_2)^5 + \ell_2(x_0 + 12x_1 - 13x_2)^5 + \ell_3(x_0 - 2x_1 + 3x_2)^5 + \ell_4(x_0 + 2x_1 + 3x_2)^5$$

en les  $(\ell_i)$ . On trouve alors  $\ell_1 = 3, \ell_2 = 15, \ell_3 = 15$  et  $\ell_4 = 5$ .

## 4.8.2 Deuxième exemple

Considérons le tenseur de dimension  $n + 1 = 3$  et d'ordre  $d = 4$  correspondant au polynôme homogène suivant :

$$f = 79x_0x_1^3 + 56x_0^2x_2^2 + 49x_1^2x_2^2 + 4x_0x_1x_2^2 + 57x_0^3x_1,$$

Ce tenseur est de rang 6.

Comme précédemment il s'agit tout d'abord de calculer la matrice de Hankel formelle associée à la forme linéaire formelle  $\underline{f}^*(\mathbf{h})$  :

	1	$x_1$	$x_2$	$x_1^2$	$x_1x_2$	$x_2^2$	$x_1^3$	$x_1^2x_2$	$x_1x_2^2$	$x_2^3$	$x_1^4$	$x_1^3x_2$	$x_1^2x_2^2$	$x_1x_2^3$	$x_2^4$
1	0	$\frac{57}{4}$	0	0	0	$\frac{28}{3}$	$\frac{79}{4}$	0	$\frac{1}{3}$	0	0	0	$\frac{49}{6}$	0	0
$x_1$	$\frac{57}{4}$	0	0	$\frac{79}{4}$	0	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{49}{6}$	0	$h_{500}$	$h_{410}$	$h_{320}$	$h_{230}$	$h_{140}$
$x_2$	0	0	$\frac{28}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{49}{6}$	0	0	$h_{410}$	$h_{320}$	$h_{230}$	$h_{140}$	$h_{050}$
$x_1^2$	0	$\frac{79}{4}$	0	0	0	$\frac{49}{6}$	$h_{500}$	$h_{410}$	$h_{320}$	$h_{230}$	$h_{600}$	$h_{510}$	$h_{420}$	$h_{330}$	$h_{240}$
$x_1x_2$	0	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{49}{6}$	0	$h_{410}$	$h_{320}$	$h_{230}$	$h_{140}$	$h_{510}$	$h_{420}$	$h_{330}$	$h_{240}$	$h_{150}$
$x_2^2$	$\frac{28}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{49}{6}$	0	0	$h_{320}$	$h_{230}$	$h_{140}$	$h_{050}$	$h_{420}$	$h_{330}$	$h_{240}$	$h_{150}$	$h_{060}$
$x_1^3$	$\frac{79}{4}$	0	0	$h_{500}$	$h_{410}$	$h_{320}$	$h_{600}$	$h_{510}$	$h_{420}$	$h_{330}$	$h_{700}$	$h_{610}$	$h_{520}$	$h_{430}$	$h_{340}$
$x_1^2x_2$	0	0	$\frac{49}{6}$	$h_{410}$	$h_{320}$	$h_{230}$	$h_{510}$	$h_{420}$	$h_{330}$	$h_{240}$	$h_{610}$	$h_{520}$	$h_{430}$	$h_{340}$	$h_{250}$
$x_1x_2^2$	$\frac{1}{3}$	$\frac{49}{6}$	0	$h_{320}$	$h_{230}$	$h_{140}$	$h_{420}$	$h_{330}$	$h_{240}$	$h_{150}$	$h_{520}$	$h_{430}$	$h_{340}$	$h_{250}$	$h_{160}$
$x_2^3$	0	0	0	$h_{230}$	$h_{140}$	$h_{050}$	$h_{330}$	$h_{240}$	$h_{150}$	$h_{060}$	$h_{430}$	$h_{340}$	$h_{250}$	$h_{160}$	$h_{070}$
$x_1^4$	0	$h_{500}$	$h_{410}$	$h_{600}$	$h_{510}$	$h_{420}$	$h_{700}$	$h_{610}$	$h_{520}$	$h_{430}$	$h_{800}$	$h_{710}$	$h_{620}$	$h_{530}$	$h_{440}$
$x_1^3x_2$	0	$h_{410}$	$h_{320}$	$h_{510}$	$h_{420}$	$h_{330}$	$h_{610}$	$h_{520}$	$h_{430}$	$h_{340}$	$h_{710}$	$h_{620}$	$h_{530}$	$h_{440}$	$h_{350}$
$x_1^2x_2^2$	$\frac{49}{6}$	$h_{320}$	$h_{230}$	$h_{420}$	$h_{330}$	$h_{240}$	$h_{520}$	$h_{430}$	$h_{340}$	$h_{250}$	$h_{620}$	$h_{530}$	$h_{440}$	$h_{350}$	$h_{260}$
$x_1x_2^3$	0	$h_{230}$	$h_{140}$	$h_{330}$	$h_{240}$	$h_{150}$	$h_{430}$	$h_{340}$	$h_{250}$	$h_{160}$	$h_{530}$	$h_{440}$	$h_{350}$	$h_{260}$	$h_{170}$
$x_2^4$	0	$h_{140}$	$h_{050}$	$h_{240}$	$h_{150}$	$h_{060}$	$h_{340}$	$h_{250}$	$h_{160}$	$h_{070}$	$h_{440}$	$h_{350}$	$h_{260}$	$h_{170}$	$h_{080}$

On remarque alors que pour  $B = \{1, x_1, x_2, x_1^2, x_1x_2, x_2^2\}$ , la matrice de taille  $6 \times 6$   $\underline{H}_{f^*}^B(\mathbf{h}) = \underline{H}_{f^*}^B$  est inversible :

$$\underline{H}_{f^*}^B = \begin{bmatrix} 0 & \frac{57}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{28}{3} \\ \frac{57}{4} & 0 & 0 & \frac{79}{4} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{28}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{79}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{49}{6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{49}{6} & 0 \\ \frac{28}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{49}{6} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On calcule ensuite la matrice  $\underline{H}_{x_1*f^*}^B(\mathbf{h})$  :

$$\underline{H}_{x_1*f^*}^B(\mathbf{h}) = \begin{bmatrix} \frac{57}{4} & 0 & 0 & \frac{79}{4} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{79}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{49}{6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{49}{6} & 0 \\ \frac{79}{4} & 0 & 0 & h_{500} & h_{410} & h_{320} \\ 0 & 0 & \frac{49}{6} & h_{410} & h_{320} & h_{230} \\ \frac{1}{3} & \frac{49}{6} & 0 & h_{320} & h_{230} & h_{140} \end{bmatrix}$$

De même on calcule la matrice  $\underline{H}_{x_2*f^*}^B(\mathbf{h})$  :

$$\underline{H}_{x_2*f^*}^B(\mathbf{h}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{28}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{49}{6} & 0 \\ \frac{28}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{49}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{49}{6} & h_{410} & h_{320} & h_{230} \\ \frac{1}{3} & \frac{49}{6} & 0 & h_{320} & h_{230} & h_{140} \\ 0 & 0 & 0 & h_{230} & h_{140} & h_{050} \end{bmatrix}$$

A partir des matrices  $\underline{H}_{x_1*f^*}^B(\mathbf{h})$ ,  $\underline{H}_{x_2*f^*}^B(\mathbf{h})$  et grâce à (4.5.1), on obtient les matrices de multiplication  $\underline{M}_1^B(\mathbf{h})$  et  $\underline{M}_2^B(\mathbf{h})$  :

$$\underline{M}_i^B(\mathbf{h}) := (\underline{H}_{f^*}^B)^{-1} \underline{H}_{x_i*f^*}^B(\mathbf{h}). \quad (4.8.1)$$

La relation matricielle :

$$\underline{M}_1^B(\mathbf{h}) \circ \underline{M}_2^B(\mathbf{h}) - \underline{M}_2^B(\mathbf{h}) \circ \underline{M}_1^B(\mathbf{h}) = 0$$

induit des relations polynomiales de degré 2 en les variables  $\{h_{500}, h_{410}, h_{320}, h_{230}, h_{140}, h_{050}\}$ . Une solution de ce système d'équation est la suivante :

$$\{h_{500} = 1, h_{410} = 2, h_{320} = 3, h_{230} = 1.5060, h_{140} = 4.960, h_{050} = 0.056\}.$$

On substitue ces valeurs dans  ${}^t\underline{M}_1^B(\mathbf{h})$  et  ${}^t\underline{M}_2^B(\mathbf{h})$  et on en calcule les vecteurs propres communs. On obtient 6 vecteurs représentant les évaluations en 6 points distincts de  $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^3$  exprimées dans la base duale de  $B = \{1, x_1, x_2, x_1^2, x_1x_2, x_2^2\}$  :

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -0.830 + 1.593i \\ -0.326 - 0.0501i \\ -1.849 - 2.645i \\ 0.350 - 0.478i \\ 0.103 + 0.0327i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -0.830 - 1.593i \\ -0.326 + 0.050i \\ -1.849 + 2.645i \\ 0.350 + 0.478i \\ 0.103 - 0.032i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1.0 \\ 1.142 \\ 0.836 \\ 1.305 \\ 0.955 \\ 0.699 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 10.956 \\ -0.713 \\ 0.914 \\ -0.682 \\ 0.509 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -0.838 + 0.130 i \\ 0.060 + 0.736 i \\ 0.686 - 0.219 i \\ -0.147 - 0.610 i \\ -0.539 + 0.089 i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -0.838 - 0.130 i \\ 0.060 - 0.736 i \\ 0.686 + 0.219 i \\ -0.147 + 0.610 i \\ -0.539 - 0.089 i \end{bmatrix}.$$

Les 6 points sont donc :

$$\zeta_1 \simeq \begin{pmatrix} 1 \\ -0.830 + 1.593 i \\ -0.326 - 0.050 i \end{pmatrix}, \zeta_2 \simeq \begin{pmatrix} 1 \\ -0.830 - 1.593 i \\ -0.326 + 0.050 i \end{pmatrix}, \zeta_3 \simeq \begin{pmatrix} 1.0 \\ 1.142 \\ 0.836 \end{pmatrix},$$

$$\zeta_4 \simeq \begin{pmatrix} 10.956 \\ -0.713 \end{pmatrix}, \zeta_5 \simeq \begin{pmatrix} 1 \\ -0.838 + 0.130 i \\ 0.060 + 0.736 i \end{pmatrix}, \zeta_6 \simeq \begin{pmatrix} 1 \\ -0.838 - 0.130 i \\ 0.060 - 0.736 i \end{pmatrix}.$$

Il s'agit pour finir de résoudre le système linéaire suivant en les  $(\lambda_i)$  :

$$f = \sum_i \lambda_i \zeta_i(\mathbf{x})^d$$

On trouve alors :

$$\begin{aligned} f \simeq & (0.517 + 0.044 i) (x_0 - (0.830 - 1.593 i)x_1 - (0.326 + 0.050 i)x_2)^4 \\ & + (0.517 - 0.044 i) (x_0 - (0.830 + 1.593 i)x_1 - (0.326 - 0.050 i)x_2)^4 \\ & + 2.958 (x_0 + (1.142)x_1 + 0.836x_2)^4 \\ & + 4.583 (x_0 + (0.956)x_1 - 0.713x_2)^4 \\ & - (4.288 + 1.119 i) (x_0 - (0.838 - 0.130 i)x_1 + (0.060 + 0.736 i)x_2)^4 \\ & - (4.288 - 1.119 i) (x_0 - (0.838 + 0.130 i)x_1 + (0.060 - 0.736 i)x_2)^4. \end{aligned}$$

### 4.8.3 Troisième exemple

Nous considèrerons dans cet exemple le cas de polynômes homogènes  $f$  de degré 3 en 4 variables sur  $\mathbb{C}$  :

$$S = \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3] \text{ et } f \in S_3.$$

Dans ces conditions là on a le théorème suivant (voir [68][Thm.3.9, p.13]) :

**Théorème 4.8.1** (Pentaèdre de Sylvester). *Tout polynôme générique  $f \in S_3$  est de rang 5 et admet une unique décomposition minimale i.e il existe une unique famille  $(\mathbf{k}_i)_{1 \leq i \leq 5}$  (à scalaire près) de 5 points de  $\mathbb{C}^4$  et des coefficients  $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq 5}$  tels que :*

$$f = \sum_{i=1}^5 \lambda_i \mathbf{k}_i(\mathbf{x}).$$

Nous appliquons alors notre algorithme à un polynôme générique  $f \in S_3$  donné par :

$$f := 5x_0^3 + 3x_0^2x_1 + 6x_0^2x_3 + 210x_1x_2x_3 + 9x_0^2x_2 + 165x_0x_1^2 - 6x_0x_1x_2 + 18x_0x_1x_3 + 39x_0x_2^2 - 24x_0x_2x_3 + 42x_0x_3^2 + 99x_1^2x_2 + 111x_1^2x_3 - 69x_1x_2^2 - 51x_1x_3^2 - 42x_2^2x_3 + 36x_2x_3^2 + 43x_1^3 + 27x_2^3 + 8x_3^3$$

afin de trouver son unique décomposition. En déhomogénéisant on obtient :

$$\underline{f} := 5 + 3x_1 + 6x_3 + 210x_1x_2x_3 + 9x_2 + 165x_1^2 - 6x_1x_2 + 18x_1x_3 + 39x_2^2 - 24x_2x_3 + 42x_3^2 + 99x_1^2x_2 + 111x_1^2x_3 - 69x_1x_2^2 - 51x_1x_3^2 - 42x_2^2x_3 + 36x_2x_3^2 + 43x_1^3 + 27x_2^3 + 8x_3^3.$$

On considère alors la famille  $B := (1, x_1, x_2, x_3, x_1^2)$ . On a alors :

$$B^+ = (1, x_1, x_2, x_3, x_1^2, x_1x_2, x_1x_3, x_2^2, x_2x_3, x_3^2, x_1^3, x_1^2x_2, x_1^2x_3).$$

Calculons la matrice de Hankel formelle associée à  $\underline{f}^*(\mathbf{h})$  dans les bases  $B \times B^+$  :

$$\begin{bmatrix} & 1 & x_1 & x_2 & x_3 & x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 & x_2^2 & x_2x_3 & x_3^2 & x_1^3 & x_1^2x_2 & x_1^2x_3 \\ 1 & 5 & 1 & 3 & 2 & 55 & -1 & 3 & 13 & -4 & 14 & 43 & 33 & 37 \\ x_1 & 1 & 55 & -1 & 3 & 43 & 33 & 37 & -23 & 35 & -17 & h_1 & h_2 & h_3 \\ x_2 & 3 & -1 & 13 & -4 & 33 & -23 & 35 & 27 & -14 & 12 & h_2 & h_4 & h_5 \\ x_3 & 2 & 3 & -4 & 14 & 37 & 35 & -17 & -14 & 12 & 8 & h_3 & h_5 & h_6 \\ x_1^2 & 55 & 43 & 33 & 37 & h_1 & h_2 & h_3 & h_4 & h_5 & h_6 & h_7 & h_8 & h_9 \end{bmatrix}$$

La sous-matrice  $H_{\underline{f}^*}^B$  vaut donc :

$$H_{\underline{f}^*}^B = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 & 2 & 55 \\ 1 & 55 & -1 & 3 & 43 \\ 3 & -1 & 13 & -4 & 33 \\ 2 & 3 & -4 & 14 & 37 \\ 55 & 43 & 33 & 37 & h_1 \end{bmatrix}$$

et son déterminant est égal à :

$$32768h_1 - 21030896.$$

La transposée de sa comatrice (i.e le produit de son inverse par son déterminant) vaut alors :

$$M := \begin{bmatrix} 9023h_1 - 2537349 & -102h_1 + 242518 & -2719h_1 + 1967061 & -2044h_1 + 1735484 & -326524 \\ -102h_1 + 242518 & 604h_1 - 378020 & 38h_1 - 12310 & -104h_1 + 89800 & -17768 \\ -2719h_1 + 1967061 & 38h_1 - 12310 & 3583h_1 - 2284469 & 1404h_1 - 872204 & -22276 \\ -2044h_1 + 1735484 & -104h_1 + 89800 & 1404h_1 - 872204 & 3056h_1 - 1906224 & -42512 \\ -326524 & -17768 & -22276 & -42512 & 32768 \end{bmatrix}.$$

On calcul ensuite les matrices  $H_{x_1^* \underline{f}^*}^B$ ,  $H_{x_2^* \underline{f}^*}^B$  et  $H_{x_3^* \underline{f}^*}^B$  :

$$H_{x_1^* \underline{f}^*}^B = \begin{bmatrix} 1 & 55 & -1 & 3 & 43 \\ 55 & 43 & 33 & 37 & h_1 \\ -1 & 33 & -23 & 35 & h_2 \\ 3 & 37 & 35 & -17 & h_3 \\ 43 & h_1 & h_2 & h_3 & h_7 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H}_{x_2^* \underline{f}^*}^B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 13 & -4 & 33 \\ -1 & 33 & -23 & 35 & h_2 \\ 13 & -23 & 27 & -14 & h_4 \\ -4 & 35 & -14 & 12 & h_5 \\ 33 & h_2 & h_4 & h_5 & h_8 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H}_{x_3^* \underline{f}^*}^B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 & 14 & 37 \\ 3 & 37 & 35 & -17 & h_3 \\ -4 & 35 & -14 & 12 & h_5 \\ 14 & -17 & 12 & 8 & h_6 \\ 37 & h_3 & h_5 & h_6 & h_9 \end{bmatrix}.$$

On calcule ensuite le produit des matrices de multiplication  $\mathbf{M}_1^B(\mathbf{h})$ ,  $\mathbf{M}_2^B(\mathbf{h})$  et  $\mathbf{M}_3^B(\mathbf{h})$  par le déterminant de  $\mathbf{H}_{\underline{f}^*}^B$  grâce aux relations suivantes pour tout  $1 \leq i \leq 3$  :

$$\det(\mathbf{H}_{\underline{f}^*}^B) \mathbf{M}_i^B(\mathbf{h}) = (32768 h_1 - 21030896) (\mathbf{H}_{\underline{f}^*}^B)^{-1} \mathbf{H}_{x_i^* \underline{f}^*}^B = \mathbf{M} \mathbf{H}_{x_i^* \underline{f}^*}^B. \quad (4.8.2)$$

Les 3 relations matricielles suivantes :

$$\begin{aligned} - \mathbf{M}_1^B(\mathbf{h}) \mathbf{M}_2^B(\mathbf{h}) - \mathbf{M}_2^B(\mathbf{h}) \mathbf{M}_1^B(\mathbf{h}) &= 0 \\ - \mathbf{M}_1^B(\mathbf{h}) \mathbf{M}_3^B(\mathbf{h}) - \mathbf{M}_3^B(\mathbf{h}) \mathbf{M}_1^B(\mathbf{h}) &= 0 \\ - \mathbf{M}_3^B(\mathbf{h}) \mathbf{M}_2^B(\mathbf{h}) - \mathbf{M}_2^B(\mathbf{h}) \mathbf{M}_3^B(\mathbf{h}) &= 0 \end{aligned}$$

multipliées par le  $\det(\mathbf{H}_{\underline{f}^*}^B)^2$  fournissent des équations polynomiales de degré  $\leq 4$  en les 9 variables  $\{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7, h_8, h_9\}$ . Sous la condition :

$$\det(\mathbf{H}_{\underline{f}^*}^B) \neq 0 \quad (\text{i.e } h_1 \neq \frac{21030896}{32768}),$$

ce système polynomial admet une unique solution donnée par :

$$(h_1 = 979, h_2 = 101, h_3 = 45, h_4 = 127, h_5 = -55, h_6 = 133, h_7 = 1891, h_8 = 597, h_9 = 961).$$

On substitue alors ces valeurs dans  $\mathbf{M}_1^B(\mathbf{h})^t$  :

$$\mathbf{M}_1^B(\mathbf{h})^t = \begin{bmatrix} 0 & 11048976 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 11048976 \\ -27881712 & 4108464 & -11288304 & 22018176 & 2074176 \\ -10330992 & 8595864 & 32109840 & -4028688 & -219384 \\ -289188000 & 183325248 & 98523360 & -3988800 & 26365968 \end{bmatrix}$$

et on en calcule les vecteurs propres dans la base duale de  $B = \{1, x_1, x_2, x_3, x_1^2\}$  :

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \\ 2 \\ 16 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \\ 1 \\ 25 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 12 \\ -1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ces 5 vecteurs propres représentent les évaluations en 5 points de  $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^3$  associées à la décomposition de  $\underline{f}^* \in R_3^*$  et exprimées dans la base duale de  $B = \{1, x_1, x_2, x_3, x_1^2\}$ . Ces 5 points sont donc donnés dans  $B$  par :

$$\zeta_1 \simeq \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \zeta_2 \simeq \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\zeta_3 \simeq \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \zeta_4 \simeq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \zeta_5 \simeq \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Il s'agit pour finir de résoudre le système linéaire suivant en les  $(\lambda_i)$  :

$$f = \sum_i \lambda_i \zeta_i(\mathbf{x})^d$$

On trouve alors :

$$f = (x_0 - 4x_1 - x_2 + 2x_3)^3 + (x_0 + 5x_1 + x_2 + x_3)^3 + (x_0 + 2x_1 - x_2 - x_3)^3 + (x_0 + x_1 + x_2 + 2x_3)^3 + (x_0 + 3x_1 - 3x_2 + 2x_3)^3.$$

## 4.9 Tenseurs généraux

Nous allons, dans cette section, présenter la décomposition de tenseurs généraux multilinéaires et multihomogènes. Il s'agit donc d'une généralisation des sections précédentes relatives à la décomposition de tenseurs purement symétriques. Nous montrerons en effet qu'il est à nouveau possible de se ramener à un problème de matrices de moment tronquées et ainsi appliquer les techniques de décomposition de tenseurs symétriques précédemment développées. Cette section correspond à l'article [6] qui contient en plus un rappel des théorèmes et propriétés introduites sections 4.2, 4.4 et 4.5.

Nous commencerons par fournir trois formulations différentes du problème de décomposition de tenseurs généraux qui permettront alors d'établir le lien avec les sections précédentes. Enfin, nous fournirons un exemple provenant du domaine du traitement d'antennes afin d'illustrer notre approche.

### 4.9.1 Formulations du problème

#### Décomposition polynomiale

Soit  $l \in \mathbb{N}$  et  $(n_1, \dots, n_l)$  une famille de  $l$  entiers. Notons  $E_i$  l'espace vectoriel engendré par les variables  $(x_{0,i}, \dots, x_{n_i,i})$  :

$$E_i := \langle x_{0,i}, \dots, x_{n_i,i} \rangle,$$

pour tout entier  $1 \leq i \leq l$ . Nous noterons alors :

$$\mathbf{x}_i := (x_{0,i}, \dots, x_{n_i,i})$$



et  $U$  l'anneau des polynômes en  $\sum_{1 \leq i \leq l} n_i + 1$  variables sur  $\mathbb{K}$  :

$$U := \mathbb{K}[\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_l].$$

Dans la suite,  $N$  désignera l'entier suivant :

$$N := n_1 + \dots + n_l.$$

Comme précédemment, nous noterons  $\underline{\mathbf{x}}_i$  l'affinisation de  $\mathbf{x}_i$  par rapport à sa première variable :

$$\underline{\mathbf{x}}_i := (x_{1,i}, \dots, x_{n_i,i}).$$

On notera également  $T$  l'anneau de polynômes suivant :

$$T := \mathbb{K}[\underline{\mathbf{x}}_1, \dots, \underline{\mathbf{x}}_l].$$

La  $\mathbb{K}$ -algèbre  $T$  s'identifie donc à l'anneau des polynômes en  $N := \sum_{1 \leq i \leq l} n_i$  variables :

$$T \simeq \mathbb{K}[x_1, \dots, x_N]. \quad (4.9.1)$$

Etant donné un multi-indice  $\delta = (d_1, \dots, d_l) \in \mathbb{N}^l$ , nous noterons  $U_\delta$  (ou bien  $U_{d_1, \dots, d_l}$ ) l'ensemble des polynômes multihomogènes de degré  $\delta$  :

$$U_\delta := \{f \in U \mid f = \sum_{\alpha=(\alpha_1, \dots, \alpha_l) \mid |\alpha_i|=d_i} f_\alpha \mathbf{x}_1^{\alpha_1} \cdots \mathbf{x}_l^{\alpha_l}\}.$$

De même, étant donné  $\delta = (d_1, \dots, d_l) \in \mathbb{N}^l$ , nous noterons  $T_\delta$  (ou bien  $T_{d_1, \dots, d_l}$ ) l'ensemble des polynômes de multi- degré "inférieur ou égal à"  $\delta$  :

$$T_\delta := \{g \in T \mid g = \sum_{\alpha=(\alpha_1, \dots, \alpha_l) \mid |\alpha_i| \leq d_i} g_\alpha \underline{\mathbf{x}}_1^{\alpha_1} \cdots \underline{\mathbf{x}}_l^{\alpha_l}\}.$$

Considérons  $f \in U_\delta$ , le problème auquel nous nous intéressons dans cette section est le suivant : il s'agit de décomposer  $f$  en une somme de  $r$  produits de puissances de formes linéaires :

$$f = \lambda_1 \mathbf{k}_{1,1}(\mathbf{x}_1)^{d_1} \cdots \mathbf{k}_{l,1}(\mathbf{x}_l)^{d_l} + \cdots + \lambda_r \mathbf{k}_{1,r}(\mathbf{x}_1)^{d_1} \cdots \mathbf{k}_{l,r}(\mathbf{x}_l)^{d_l}$$

où  $\mathbf{k}_{i,j}(\mathbf{x}_i) \in \mathbb{K}[\mathbf{x}_i]_1$  est une forme linéaire, pour tout  $1 \leq i \leq l$  et  $1 \leq j \leq r$  :

$$\mathbf{k}_{i,j}(\mathbf{x}_i) = k_0^{i,j} x_{0,i} + \cdots + k_{n_i}^{i,j} x_{n_i,i}.$$

Ce  $r$  minimal s'appellera le *rang* de  $f$ .

## Variété de Segre

Rappelons que (voir définition 4.2.1) que l'on note  $\nu_d(E) \subset \mathbb{P}(E)$  la variété de Véronèse associée au  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  et à l'entier  $d$  et définie par :

$$\begin{aligned} \nu_d : \mathbf{Proj}(E) &\rightarrow \mathbf{Proj}(S^d(E)) \\ \mathbf{v} &\mapsto \mathbf{v}^d. \end{aligned}$$

Rappelons aussi (voir définition 4.2.2) qu'étant donnée une variété projective  $X \in \mathbb{P}^N$ ,  $\sigma_r(X)$  désigne la  $r$ -ème variété sécante associée à  $X$ . Elle est définie comme étant la clôture de l'ensemble suivant :

$$\sigma_r^0(X) := \bigcup_{P_1, \dots, P_s \in X} \langle P_1, \dots, P_s \rangle.$$

Néanmoins, afin d'aborder d'un point de vue géométrique le problème de décomposition de tenseurs généraux, il est nécessaire d'introduire la notion de variété de Segre :

**Définition 4.9.1.** Etant donnés  $l$  espaces vectoriels  $E_1, \dots, E_l$  de dimension finie, l'image de l'application suivante :

$$\begin{aligned} s_k : \mathbb{P}(E_1) \times \dots \times \mathbb{P}(E_l) &\rightarrow \mathbb{P}(E_1 \otimes \dots \otimes E_l) \\ (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_l) &\mapsto \mathbf{v}_1 \otimes \dots \otimes \mathbf{v}_l \end{aligned}$$

s'appelle la variété de Segre de  $l$  facteurs et on appellera morphisme de Segre l'application  $s_k$ . On la notera  $\mathcal{S}(E_1 \otimes \dots \otimes E_l)$ .

**Définition 4.9.2.** Soient  $E_1, \dots, E_l$  des  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension respective  $n_1 + 1, \dots, n_l + 1$ . La variété de Segre-Véronèse notée  $\Xi(S^{d_1}(E_1) \otimes \dots \otimes S^{d_l}(E_l))$ , est définie comme étant l'image de  $\mathbb{P}(E_1) \times \dots \times \mathbb{P}(E_l)$  dans  $\mathbb{P}(S^{d_1}(E_1) \otimes \dots \otimes S^{d_l}(E_l))$  par la composition des deux applications suivantes :

$$\mathbb{P}(E_1) \times \dots \times \mathbb{P}(E_l) \xrightarrow{\nu_{d_1} \times \dots \times \nu_{d_l}} \mathbb{P}(S^{d_1} E_1) \times \dots \times \mathbb{P}(S^{d_l} E_l)$$

et :

$$\mathbb{P}(S^{d_1} E_1) \times \dots \times \mathbb{P}(S^{d_l} E_l) \xrightarrow{s_l} \mathbb{P}(S^{d_1}(E_1) \otimes \dots \otimes S^{d_l}(E_l)).$$

L'application  $\nu_{d_1} \times \dots \times \nu_{d_l}$  représente le produit des  $k$  morphismes de Véronèse associés aux espaces vectoriels  $E_i$  et aux entiers  $d_i$ . L'application  $s_l$ , quant-à elle, représente le morphisme de Segre associé aux  $k$  facteurs  $\mathbb{P}(S^{d_1} E_1), \dots, \mathbb{P}(S^{d_l} E_l)$  (voir définition 4.9.1). On a donc :

$$\Xi(S^{d_1}(E_1) \otimes \dots \otimes S^{d_l}(E_l)) := \text{Im}(s_l \circ (\nu_1 \times \dots \times \nu_l)).$$

Ainsi, d'un de point de vue géométrique, un tenseur  $T \in \mathbb{P}(S^{d_1}(E_1) \otimes \dots \otimes S^{d_l}(E_l))$  de rang 1 n'est rien d'autre qu'un point de la variété de Segre-Véronèse. Plus généralement, une combinaison linéaire de  $r$  points de la variété de Segre-Véronèse est un tenseur de rang inférieur ou égal à  $r$ . Il est donc naturel de s'intéresser à la  $r$ -ème variété sécante de la variété de Segre-Véronèse :

$$\sigma_r(\Xi(S^{d_1}(E_1) \otimes \dots \otimes S^{d_l}(E_l))).$$

**Définition 4.9.3.** Soient  $E_1, \dots, E_l$ ,  $l$   $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension respective  $n_1 + 1, \dots, n_l + 1$  et  $f \in S^{d_1}(E_1) \otimes \dots \otimes S^{d_l}(E_l) - \{0\}$ . Le plus petit entier  $r$  tel que  $f \in \sigma_r(\Xi(S^{d_1}(E_1) \otimes \dots \otimes S^{d_l}(E_l)))$  s'appelle le rang de bord (ou encore rang typique) de  $f$ .

## Décomposition et dualité

En suivant la même démarche que dans la section 4.2, nous allons reformuler problème en terme de décomposition de formes linéaires en sommes d'évaluations.

Soient  $E_1, \dots, E_l$ ,  $l$   $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension  $n_1 + 1, \dots, n_l + 1$  respectivement définis par :

$$E_i := \langle x_{0,i}, \dots, x_{n_i,i} \rangle$$

et fixons  $\delta = (d_1, \dots, d_l)$  un mutli-indice. Comme pour le cas symétrique dans la section 4.2, on définit le produit scalaire apolaire sur  $U_\delta$  :

**Définition 4.9.4.** Soient  $f$  et  $g$ , deux éléments de  $U_\delta = \mathbb{K}[\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_l]_\delta$  :

$$f = \sum_{\alpha=(\alpha_1, \dots, \alpha_l) \mid |\alpha_i|=d_i} f_\alpha \mathbf{x}_1^{\alpha_1} \cdots \mathbf{x}_l^{\alpha_l}$$

et :

$$g = \sum_{\alpha=(\alpha_1, \dots, \alpha_l) \mid |\alpha_i|=d_i} g_\alpha \mathbf{x}_1^{\alpha_1} \cdots \mathbf{x}_l^{\alpha_l}.$$

On définit le produit apolaire sur  $U_\delta$  comme suit :

$$\langle f, g \rangle := \sum_{\alpha=(\alpha_1, \dots, \alpha_l) \mid |\alpha_i|=d_i} f_\alpha g_\alpha \binom{d_1}{\alpha_1}^{-1} \cdots \binom{d_l}{\alpha_l}^{-1}.$$

**Définition 4.9.5.** En utilisant le caractère non-dégénéré de ce produit apolaire, on peut associer à tout élément de  $U_\delta$  un unique élément de  $U_\delta^*$  grâce à l'application suivante :

$$\begin{aligned} \tau : U_\delta &\rightarrow U_\delta^* \\ f &\mapsto f^*, \end{aligned}$$

où la forme linéaire  $f^*$  est définie par :

$$f^* : g \mapsto \langle f, g \rangle.$$

Ainsi, à tout polynôme :

$$f = \sum_{\alpha=(\alpha_1, \dots, \alpha_l) \mid |\alpha_i|=d_i} f_\alpha \binom{d_1}{\alpha_1} \cdots \binom{d_l}{\alpha_l} \mathbf{x}_1^{\alpha_1} \cdots \mathbf{x}_l^{\alpha_l} \in U_\delta,$$

$\tau$  associe la forme linéaire :

$$f^* = \sum_{\alpha=(\alpha_1, \dots, \alpha_l) \mid |\alpha_i|=d_i} f_\alpha \mathbf{d}^\alpha \in U_\delta^*.$$

*Remarque 4.9.6.* Rappelons (voir section notations 1.1) que pour tout  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_l) \in \mathbb{N}^{n_1+1} \times \cdots \times \mathbb{N}^{n_l+1}$  tel que  $|\alpha_i| = d_i$  pour tout  $1 \leq i \leq l$ ,  $\mathbf{d}^\alpha \in U_\delta^*$  désigne la forme linéaire définie par :

$$\begin{aligned} \mathbf{d}^\alpha &: U_\delta \rightarrow \mathbb{K} \\ \mathbf{x}^\beta &\mapsto 1 \text{ si } \beta = \alpha, \\ &0 \text{ si } \beta \neq \alpha. \end{aligned}$$

Comme dans la section 4.2, étant donné un point  $\mathbf{k} \in \mathbb{A}^{n_i+1}$ ,  $\mathbf{k}(\mathbf{x}_i) \in \mathbb{K}[\mathbf{x}_i]_1$  désignera la forme linéaire suivante :

$$\mathbf{k}(\mathbf{x}_i) := k_0 x_{0,i} + \cdots + k_{n_i} x_{n_i,i}$$

pour tout  $1 \leq i \leq l$ .

**Proposition 4.9.7.** Soient  $f \in U_\delta$  et  $((\mathbf{k}_i, j)_{1 \leq i \leq l})_{1 \leq j \leq r} \subset \mathbb{A}^{n_1+1} \times \cdots \times \mathbb{A}^{n_l+1}$  une famille de  $r$  points de  $\mathbb{A}^{n_1+1} \times \cdots \times \mathbb{A}^{n_l+1}$ . Alors,  $f$  s'écrit :

$$f = \sum_{1 \leq j \leq r} \lambda_j \mathbf{k}_{1,j}(\mathbf{x}_1)^{d_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{k}_{l,j}(\mathbf{x}_l)^{d_l}$$

si et seulement si  $f^* \in U_\delta^*$  s'écrit :

$$f^* = \sum_{1 \leq j \leq r} \lambda_j \mathbf{1}_{(\mathbf{k}_{1,j}, \dots, \mathbf{k}_{l,j})}$$

sur  $U_\delta = \mathbb{K}[\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_l]_\delta$ .

*Démonstration.* Un calcul simple montre que  $\langle f, \mathbf{k}_1(\mathbf{x}_1)^{d_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{k}_l(\mathbf{x}_l)^{d_l} \rangle = f(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_l)$  pour tout  $\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_l \in \mathbb{A}^{n_1+1} \times \cdots \times \mathbb{A}^{n_l+1}$  et  $f \in U_\delta$ . On a donc :

$$(\mathbf{k}_1(\mathbf{x}_1)^{d_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{k}_l(\mathbf{x}_l)^{d_l})^* = \mathbf{1}_{(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_l)} \in U_\delta^*.$$

□

Le problème de décomposition de tenseurs généraux peut se reformuler de la manière suivante :

*Etant donné  $\Lambda \in U_\delta^*$ , il s'agit de trouver le plus petit nombre  $r$ , de points non-nuls de  $\mathbb{A}^{n_1+1} \times \cdots \times \mathbb{A}^{n_l+1}$  :  $(\mathbf{k}_{i,1})_{1 \leq i \leq l}, \dots, (\mathbf{k}_{i,r})_{1 \leq i \leq l}$  et de scalaires non-nuls  $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K} - \{0\}$  tels que :*

$$\Lambda = \sum_{j=1}^r \lambda_j \mathbf{1}_{(\mathbf{k}_{1,j}, \dots, \mathbf{k}_{l,j})}. \quad (4.9.2)$$

Par changement de variables générique, nous serons amenés à supposer sans perte de généralité que la première coordonnée  $k_0^{i,j} \in \mathbb{K}$  du point  $\mathbf{k}_{i,j} \in \mathbb{A}^{n_i+1}$  est égale à 1 pour tout  $1 \leq i \leq l$  et tout  $1 \leq j \leq r$ . Notons qu'à la différence du cas symétrique, les changements de variables sont ici considérés comme des éléments de :

$$PGL(n_1 + 1) \times \cdots \times PGL(n_l + 1).$$

**Définition 4.9.8.** On dit que :

$$\Lambda = \sum_{j=1}^r \lambda_j \mathbf{1}_{(\mathbf{k}_{1,j}, \dots, \mathbf{k}_{l,j})} \in U_\delta^*$$

est une *décomposition affine* de  $\Lambda \in U_\delta^*$  si pour tout point  $\mathbf{k}_{i,j} \in \mathbb{A}^{n_i+1}$ , la première coordonnée  $k_0^{i,j} \in \mathbb{K}$  est non nulle :

$$k_0^{i,j} \neq 0, \forall 1 \leq i \leq l, 1 \leq j \leq r.$$

De même, étant donné  $f \in U_\delta$ , on dira que  $f$  admet une *décomposition affine* si :

$$f = \sum_{j=1}^r \lambda_j (x_{0,1} + x_{1,1} k_1^{1,j} + \cdots + x_{n_1,1} k_{n_1}^{1,j})^{d_1} \otimes \cdots \otimes (x_{0,l} + x_{1,l} k_1^{l,j} + \cdots + x_{n_l,l} k_{n_l}^{l,j})^{d_l}.$$

*Remarque 4.9.9.* Notons que d'après la proposition 4.9.7,  $f \in U_\delta$  admet une décomposition affine si et seulement si  $f^* \in U_\delta^*$  admet une décomposition affine.

Comme dans la section 4.2, nous sommes amenés à considérer la "déhomogénéisation". Étant donné un élément  $f \in U = \mathbb{K}[\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_l]$ , on appellera déhomogénéisation de  $f$ , et on notera  $\underline{f}$ , le polynôme de  $T = \mathbb{K}[\underline{\mathbf{x}}_1, \dots, \underline{\mathbf{x}}_l]$  défini par :

$$\underline{f}(\underline{\mathbf{x}}_1, \dots, \underline{\mathbf{x}}_l) := f(1, x_{1,1}, \dots, x_{n_1,1}, \dots, 1, x_{1,l}, \dots, x_{n_l,l}) \in T.$$

Étant donné  $g \in T_\delta$ , le processus inverse, i.e homogénéisation en degré  $\delta$ , par rapport aux variables  $(x_{0,i})_{1 \leq i \leq l}$ , sera encore notée  $g^h \in U_\delta$ .

Enfin, étant donnée une forme linéaire  $\Lambda \in U_\delta^*$ , on notera encore  $\underline{\Lambda} \in T_\delta^*$ , la forme linéaire définie par :

$$\underline{\Lambda}(p) := \Lambda(p^h). \quad (4.9.3)$$

**Définition 4.9.10.** Étant donné  $f \in U_\delta$ , on définit alors  $\underline{f}^* \in T_\delta^*$  de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \underline{f}^* : T_\delta &\rightarrow \mathbb{K} \\ p &\mapsto f^*(p^h) \end{aligned}$$

où  $p^h$  désigne l'homogénéisation en degré  $\delta = (d_1, \dots, d_l)$  de  $p$ . On a par définition :

$$\underline{f}^* = \underline{f}^* \text{ (voir (4.9.3)).}$$

*Remarque 4.9.11.* Étant donné  $f \in U_\delta$ , on vérifie aisément que pour tout  $q \in U_\delta$ , on a :

$$f^*(q) = \underline{f}^*(q).$$

**Proposition 4.9.12.** Étant donné  $f \in U_\delta$ , et  $(\mathbf{k}_{i,1})_{1 \leq i \leq l}, \dots, (\mathbf{k}_{i,r})_{1 \leq i \leq l}$  une famille de  $r$  points de  $\mathbb{A}^{n_1+1} \times \dots \times \mathbb{A}^{n_l+1}$ , telle que  $k_0^{i,j} = 1 \forall 1 \leq i \leq l, 1 \leq j \leq r$ . Alors,  $f$  admet la décomposition affine suivante :

$$f = \sum_j^r \lambda_j \mathbf{k}_{1,j}(\mathbf{x}_1)^{d_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{k}_{l,j}(\mathbf{x}_l)^{d_l}$$

si et seulement si  $\underline{f}^*$  peut s'écrire :

$$\underline{f}^* = \sum_j \lambda_j \mathbf{1}_{(\mathbf{k}_{1,j}, \dots, \mathbf{k}_{l,j})} \in T_\delta^*$$

où  $\underline{\mathbf{k}}_{i,j} := (k_1^{i,j}, \dots, k_{n_i}^{i,j})$  pour tout  $1 \leq i \leq l$  et  $1 \leq j \leq r$ .

*Démonstration.* Cela vient de la proposition 4.9.7 et du fait que  $f^*$  admet une décomposition affine de la forme suivante :

$$f = \sum_j^r \lambda_j \mathbf{k}_{1,j}(\mathbf{x}_1)^{d_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{k}_{l,j}(\mathbf{x}_l)^{d_l}$$

(avec  $k_0^{i,j} = 1 \forall 1 \leq i \leq l, 1 \leq j \leq r$ ) si et seulement si  $\underline{f}^*$  peut s'écrire

$$\underline{f}^* = \sum_j \lambda_j \mathbf{1}_{(\underline{\mathbf{k}}_{1,j}, \dots, \underline{\mathbf{k}}_{l,j})} \in T_\delta^*.$$

□

*Remarque 4.9.13.* Ainsi, à changement générique de coordonnées près dans  $PGL(n_1 + 1) \times \cdots \times PGL(n_l + 1)$ , décomposer  $f \in U_\delta$  en somme de produits tensoriels de puissances de formes linéaires revient à décomposer  $\underline{f}^* \in T_\delta^*$  en somme d'évaluations. Notre problème de décomposition de tenseurs peut donc se reformuler de la manière suivante :

Soit  $\Lambda \in T_\delta^*$ , il s'agit de trouver le plus petit nombre  $r$  de points non-nuls  $(\underline{\mathbf{k}}_{1,j}, \dots, \underline{\mathbf{k}}_{l,j}), \dots, (\underline{\mathbf{k}}_{1,j}, \dots, \underline{\mathbf{k}}_{l,j})$  de  $\mathbb{A}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{A}^{n_l}$  et de scalaires non-nuls  $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K} - \{0\}$  tels que :

$$\Lambda = \sum_{i=1}^r \lambda_i \mathbf{1}_{(\underline{\mathbf{k}}_{1,j}, \dots, \underline{\mathbf{k}}_{l,j})} \quad (4.9.4)$$

sur  $T_\delta$ .

Dès lors, en remarquant que  $T \simeq \mathbb{K}[x_1, \dots, x_N]$ , (voir (4.9.1)), notre problème de décomposition de tenseurs généraux se ramène à celui d'étendre une forme linéaire définie partiellement sur  $T^*$ , en une somme d'évaluations. En particulier, tout le formalisme ainsi que les techniques mis en place dans les sections 4.4 et 4.5 s'appliquent à notre problème. Les seules différences étant le nombres de variables :  $N = \sum_{i=1}^l n_i$  au lieu de  $n$ , et le domaine de définition des formes linéaires qu'il faut étendre : elles sont connues jusqu'au degré multi-homogène  $\delta = (d_1, \dots, d_l) \in \mathbb{N}^l$  au lieu de  $d \in \mathbb{N}$ .

## 4.9.2 Exemples et applications

L'algorithme que nous allons présenter ici est essentiellement le même que celui de la section 4.8 en tenant compte des différences sur le nombre de variables :  $N = \sum_{i=1}^l n_i$  au lieu de  $n$ , et sur le domaine de définition des formes linéaires à étendre.

Les exemples qui suivent sont tirés de [6][Section 4.3, p.16] :

### Premier exemple

Considérons pour commencer un tenseur de  $\mathbb{R}^4 \otimes \mathbb{R}^4 \otimes \mathbb{R}^4$  noté  $f$  dont la déhomogénéisation est donnée par :

$\underline{f} := 4 + 7a_1 + 8a_2 + 9a_3 + 5b_1 - 2b_2 + 11b_3 + 6c_1 + 8c_2 + 6c_3 + 21a_1b_1 + 28a_2b_1 + 11a_3b_1 - 14a_1b_2 - 21a_2b_2 - 10a_3b_2 + 48a_1b_3 + 65a_2b_3 + 28a_3b_3 + 26a_1c_1 + 35a_2c_1 + 14a_3c_1 + 18b_1c_1 - 10b_2c_1 + 40b_3c_1 + 36a_1c_2 + 48a_2c_2 + 18a_3c_2 + 26b_1c_2 - 9b_2c_2 + 55b_3c_2 + 38a_1c_3 + 53a_2c_3 + 14a_3c_3 + 26b_1c_3 - 16b_2c_3 + 58b_3c_3 + 68a_1b_1c_1 + 91a_2b_1c_1 + 48a_3b_1c_1 - 72a_1b_2c_1 - 105a_2b_2c_1 - 36a_3b_2c_1 + 172a_1b_3c_1 + 235a_2b_3c_1 + 112a_3b_3c_1 + 90a_1b_1c_2 + 118a_2b_1c_2 + 68a_3b_1c_2 - 85a_1b_2c_2 - 127a_2b_2c_2 - 37a_3b_2c_2 + 223a_1b_3c_2 + 301a_2b_3c_2 + 151a_3b_3c_2 + 96a_1b_1c_3 + 129a_2b_1c_3 + 72a_3b_1c_3 - 114a_1b_2c_3 - 165a_2b_2c_3 - 54a_3b_2c_3 + 250a_1b_3c_3 + 343a_2b_3c_3 + 166a_3b_3c_3 \in T.$

où  $T$  est ici donné par :

$$T := \mathbb{K}[a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3].$$

Considérons les familles de monômes  $B' := (1, b_1, b_2, b_3)$  et  $B := (1, a_1, a_2, a_3)$ . La matrice correspondante  $H_{\underline{f}^*}^{B', B}$  est égale à :

$$H_{\underline{f}^*}^{B', B} = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 21 & 28 & 11 \\ -2 & -14 & -21 & -10 \\ 11 & 48 & 65 & 28 \end{pmatrix}$$

et est inversible. De plus, les transposées des opérateurs de multiplication par les variables  $c_1, c_2, c_3$  sont connues :

$${}^tM_{c_1}^B = \begin{pmatrix} 0 & 11/6 & -2/3 & -1/6 \\ -2 & -41/6 & 20/3 & 19/6 \\ -2 & -85/6 & 37/3 & 29/6 \\ -2 & 5/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$${}^tM_{c_2}^B = \begin{pmatrix} -2 & 23/3 & -13/3 & -1/3 \\ -6 & 1/3 & 7/3 & 13/3 \\ -6 & -28/3 & 29/3 & 20/3 \\ -6 & 14 & -7 & 0 \end{pmatrix}$$

$${}^tM_{c_3}^B = \begin{pmatrix} 0 & 3/2 & 0 & -1/2 \\ -2 & -33/2 & 14 & 11/2 \\ -2 & -57/2 & 23 & 17/2 \\ -2 & 3/2 & 2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

et leurs valeurs propres respectives sont  $(-1, 2, 4, 1)$ ,  $(-2, 4, 5, 1)$  et  $(-3, 2, 6, 1)$ . Les vecteurs propres communs associés sont :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On déduit alors que les coordonnées  $(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3)$  des 4 points d'évaluation sont :

$$\zeta_1 := \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \\ ? \\ ? \\ ? \\ -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}, \zeta_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ ? \\ ? \\ ? \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \zeta_3 := \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 3 \\ ? \\ ? \\ ? \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \zeta_4 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ ? \\ ? \\ ? \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Enfin, en calculant de la même manière les opérateurs de multiplication  ${}^tM_{c_1}^{B'}$ ,  ${}^tM_{c_2}^{B'}$ ,  ${}^tM_{c_3}^{B'}$  ainsi que leurs vecteurs propres communs, on déduit que :

$$\zeta_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}, \zeta_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \zeta_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 3 \\ 3 \\ -4 \\ 8 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \zeta_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Finalement, il suffit de résoudre le système linéaire suivant en les variables  $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$  :

$$\begin{aligned} T &= \gamma_1 (1 + a_1 + a_2 + a_3) (1 + b_1 + b_2 + b_3) (1 + c_1 + c_2 + c_3) \\ &+ \gamma_2 (1 - a_1 - 2a_2 + 3a_3) (1 - b_1 - b_2 - b_3) (1 - c_1 - 2c_2 - 3c_3) \\ &+ \gamma_3 (1 + 2a_1 + 2a_2 + 2a_3) (1 + 2b_1 + 2b_2 + 3b_3) (1 + 2c_1 + 4c_2 + 2c_3) \\ &+ \gamma_4 (1 + 5a_1 + 7a_2 + 3a_3) (1 + 3b_1 - 4b_2 + 8b_3) (1 + 4c_1 + 5c_2 + 6c_3), \end{aligned}$$

On obtient  $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_4 = 1$ .

## Deuxième exemple

Considérons à présent un tenseur  $g \in \mathbb{R}^4 \otimes \mathbb{R}^4 \otimes \mathbb{R}^6$  dont la déhomogénéisation est donnée par :

$$\begin{aligned} g := & 1046 a_1 b_1 c_1 + 959 a_1 b_1 c_2 + 660 a_1 b_1 c_3 + 866 a_1 b_1 c_4 + 952 a_1 b_1 c_5 - 1318 a_1 b_2 c_1 - \\ & 1222 a_1 b_2 c_2 - 906 a_1 b_2 c_3 - 1165 a_1 b_2 c_4 - 1184 a_1 b_2 c_5 - 153 a_1 b_3 c_1 + 52 a_1 b_3 c_2 + 353 a_1 b_3 c_3 + \\ & 354 a_1 b_3 c_4 + 585 a_1 b_3 c_5 + 852 a_2 b_1 c_1 + 833 a_2 b_1 c_2 + 718 a_2 b_1 c_3 + 903 a_2 b_1 c_4 + 828 a_2 b_1 c_5 - \\ & 1068 a_2 b_2 c_1 - 1060 a_2 b_2 c_2 - 992 a_2 b_2 c_3 - 1224 a_2 b_2 c_4 - 1026 a_2 b_2 c_5 + 256 a_2 b_3 c_1 + \\ & 468 a_2 b_3 c_2 + 668 a_2 b_3 c_3 + 748 a_2 b_3 c_4 + 1198 a_2 b_3 c_5 - 614 a_3 b_1 c_1 - 495 a_3 b_1 c_2 - 276 a_3 b_1 c_3 - \\ & 392 a_3 b_1 c_4 - 168 a_3 b_1 c_5 + 664 a_3 b_2 c_1 + 525 a_3 b_2 c_2 + 336 a_3 b_2 c_3 + 472 a_3 b_2 c_4 + 63 a_3 b_2 c_5 + \\ & 713 a_3 b_3 c_1 + 737 a_3 b_3 c_2 + 791 a_3 b_3 c_3 + 965 a_3 b_3 c_4 + 674 a_3 b_3 c_5 - 95 a_1 b_1 + 88 a_1 b_2 + \end{aligned}$$



$193 a_1 b_3 + 320 a_1 c_1 + 285 a_1 c_2 + 134 a_1 c_3 + 188 a_1 c_4 + 382 a_1 c_5 - 29 a_2 b_1 - 2 a_2 b_2 +$   
 $198 a_2 b_3 + 292 a_2 c_1 + 269 a_2 c_2 + 138 a_2 c_3 + 187 a_2 c_4 + 406 a_2 c_5 + 119 a_3 b_1 - 139 a_3 b_2 +$   
 $20 a_3 b_3 - 222 a_3 c_1 - 160 a_3 c_2 + 32 a_3 c_3 + 9 a_3 c_4 - 229 a_3 c_5 + 122 b_1 c_1 + 119 b_1 c_2 +$   
 $112 b_1 c_3 + 140 b_1 c_4 + 108 b_1 c_5 - 160 b_2 c_1 - 163 b_2 c_2 - 176 b_2 c_3 - 214 b_2 c_4 - 117 b_2 c_5 +$   
 $31 b_3 c_1 + 57 b_3 c_2 + 65 b_3 c_3 + 73 b_3 c_4 + 196 b_3 c_5 - 35 a_1 - 21 a_2 + 54 a_3 - 3 b_1 - 3 b_2 +$   
 $24 b_3 + 50 c_1 + 46 c_2 + 20 c_3 + 29 c_4 + 63 c_5 - 6 \in T.$

où  $T$  est ici égal à :

$$T := \mathbb{K}[a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5]$$

En posant  $B = \{1, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2\}$  et  $B' = \{1, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5\}$  on obtient la sous-matrice de  $H_{\Lambda_g}$  suivante :

$$H_{\Lambda_g}^{B',B} = \begin{bmatrix} -6 & -35 & -21 & 54 & -3 & -3 \\ 50 & 320 & 292 & -222 & 122 & -160 \\ 46 & 285 & 269 & -160 & 119 & -163 \\ 20 & 134 & 138 & 32 & 112 & -176 \\ 29 & 188 & 187 & 9 & 140 & -214 \\ 63 & 382 & 406 & -229 & 108 & -117 \end{bmatrix}$$

qui est inversible. Le rang de ce tenseur est donc au moins 6. Cherchons alors à savoir s'il existe  $\Lambda \in T^*$  qui étende  $\Lambda_g$  telle que la matrice de Hankel  $H_\Lambda$  soit de rang 6. Si on regarde  $H_{\Lambda_g}^{B'+,B^+}$ , certains coefficients sont inconnus. Néanmoins, comme nous allons le voir, ils peuvent être déterminés en exploitant les relations de commutation.

Les colonnes  $H_{\Lambda_g}^{B',C}$  sont connues pour  $C = \{b_3, a_1 b_1, a_2 b_1, a_3 b_1, a_1 b_2, a_2 b_2, a_3 b_2\}$ . On peut alors déduire les relations entre ces monômes et ceux de  $B$  en résolvant le système suivant :

$$H_{g^*}^{B',B} X = H_{g^*}^{B',C}.$$

Cela induit alors les relations suivantes dans  $\mathcal{A}_\Lambda$  :

$$b_3 \equiv -1. - 0.02486 a_1 + 1.412 a_2 + 0.8530 a_3 - 0.6116 b_1 + 0.3713 b_2$$

$$a_1 b_1 \equiv -2. + 6.122 a_1 - 3.304 a_2 + .6740 a_3 + .7901 b_1 - 1.282 b_2$$

$$a_2 b_1 \equiv -2. + 4.298 a_1 - 1.546 a_2 + 1.364 a_3 + .5392 b_1 - 1.655 b_2$$

$$a_3 b_1 \equiv -2. - 3.337 a_1 + 5.143 a_2 + 1.786 a_3 - 2.291 b_1 + 1.699 b_2$$

$$a_1 b_2 \equiv -2. + 0.03867 a_1 - 0.1967 a_2 + 1.451 a_3 - 2.049 b_1 + 3.756 b_2$$

$$a_2 b_2 \equiv -2. + 3.652 a_1 - 3.230 a_2 + .9425 a_3 - 2.562 b_1 + 4.198 b_2$$

$$a_3 b_2 \equiv -2. + 6.243 a_1 - 7.808 a_2 - 1.452 a_3 + 5.980 b_1 + 0.03646 b_2$$

En utilisant la première pour  $b_3$ , on peut réduire  $a_1 b_3, a_2 b_3, a_3 b_3$  et ainsi obtenir 3 relations de dépendance linéaires entre les monômes de  $B \cup \{a_1^2, a_1 a_2, a_1 a_3, a_2^2, a_2 a_3, a_3^2\}$ . En utilisant les relations de commutation :

$$\frac{\text{lcm}(m_1, m_2)}{m_1} N(m_1) - \frac{\text{lcm}(m_1, m_2)}{m_2} N(m_2),$$

pour  $(m_1, m_2) \in \{(a_1 b_1, a_2 b_1), (a_1 b_2, a_2 b_2), (a_2 b_2, a_3 b_2)\}$ , où  $N(m_i)$  est la réduction de  $m_i$  par les 3 relations précédentes ; on obtient 3 nouvelles relations entre les monômes de

$B \cup \{a_1^2, a_1 a_2, a_1 a_3, a_2^2, a_2 a_3, a_3^2\}$ .

On déduit alors de ces 6 relations, l'expression des monômes de  $\{a_1^2, a_1 a_2, a_1 a_3, a_2^2, a_2 a_3, a_3^2\}$  comme combinaison linéaire des monômes de  $B$  :

$$\begin{aligned} a_1^2 &\equiv 12.08 a_1 - 5.107 a_2 + .2232 a_3 - 2.161 b_1 - 2.038 b_2 - 2. \\ a_1 a_2 &\equiv 8.972 a_1 - 1.431 a_2 + 1.392 a_3 - 3.680 b_1 - 2.254 b_2 - 2. \\ a_1 a_3 &\equiv -11.56 a_1 + 9.209 a_2 + 2.802 a_3 + 1.737 b_1 + .8155 b_2 - 2. \\ a_2^2 &\equiv -2. + 6.691 a_1 + 2.173 a_2 + 2.793 a_3 - 5.811 b_1 - 2.846 b_2 \\ a_2 a_3 &\equiv -2. - 11.87 a_1 + 9.468 a_2 + 2.117 a_3 + 3.262 b_1 + 0.01989 b_2 \\ a_3^2 &\equiv -2. + 16.96 a_1 - 8.603 a_2 + 1.349 a_3 - 6.351 b_1 - .3558 b_2. \end{aligned}$$

Nous sommes désormais à même de calculer la matrice de multiplication par  $a_1$  dans la base  $B$ . Celle-ci s'obtient en réduisant les monômes de  $B \cdot a_1 = \{a_1, a_1^2, a_1 a_2, a_1 a_3, a_1 b_1, a_1 b_2\}$  par les relations précédentes :

$$M_{a_1}^B := \begin{bmatrix} 0.0 & -2.0 & -2.0 & -2.0 & -2.0 & -2.0 \\ 1.0 & 12.08 & 8.972 & -11.56 & 6.122 & 0.03867 \\ 0.0 & -5.107 & -1.431 & 9.209 & -3.304 & -0.1967 \\ 0.0 & 0.2232 & 1.392 & 2.802 & 0.6740 & 1.451 \\ 0.0 & -2.161 & -3.680 & 1.737 & 0.7901 & -2.049 \\ 0.0 & -2.038 & -2.254 & 0.8155 & -1.282 & 3.756 \end{bmatrix}.$$

Les vecteurs propres de l'opérateur transposé, normalisés de telle sorte que leur première coordonnée vaut 1, sont :

$$\begin{bmatrix} 1.0 \\ 5.0 \\ 7.003 \\ 3.0 \\ 3.0 \\ -4.0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1.0 \\ 2.999 \\ 4.0 \\ -4.999 \\ -2.999 \\ 4.999 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1.0 \\ 2.0 \\ 2.0 \\ 2.0 \\ 2.0 \\ 2.0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1.0 \\ 8.001 \\ 6.002 \\ -7.002 \\ 4.001 \\ -5.001 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1.0 \\ -1.0 \\ -2.0 \\ 3.0 \\ -1.0 \\ -1.0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1.0 \\ 0.9999 \\ 0.9999 \\ 0.9999 \\ 0.9999 \\ 0.9999 \end{bmatrix}$$

Ils correspondent aux évaluations des monômes de  $B$  en les racines de  $I_\Lambda$  (voir théorème 4.4.16). On connaît ainsi les coordonnées  $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2$  de ces racines. En développant le polynôme suivant :

$$\gamma_1 (1 + a_1 + a_2 + a_3) (1 + b_1 + b_2 + b_3) (1 + \dots) + \gamma_2 (1 - a_1 - 2 a_2 + 3 a_3) (1 - b_1 - b_2 - b_3) (1 + \dots) + \gamma_3 (1 + 2 a_1 + 2 a_2 + 2 a_3) (1 + 2 b_1 + 2 b_2 + 3 b_3) (1 + \dots) + \gamma_4 (1 + 5 a_1 + 7 a_2 + 3 a_3) (1 + 3 b_1 - 4 b_2 + 8 b_3) (1 + \dots) + \gamma_5 (1 + 8 a_1 + 6 a_2 - 7 a_3) (1 + 4 b_1 - 5 b_2 - 3 b_3) (1 + \dots) + \gamma_6 (1 + 3 a_1 + 4 a_2 - 5 a_3) (1 - 3 b_1 + 5 b_2 + 4 b_3) (1 + \dots)$$

(où les points  $\dots$  représentent les termes linéaires en les  $c_i$ ) et en identifiant les coefficients de  $\underline{g}$  qui ne dépendent pas de  $c_1, \dots, c_5$ , on obtient un système linéaire en les  $\gamma_i$ , dont l'unique solution est  $(2, -1, -2, 3, -5, -3)$ . Cela nous permet de calculer la valeur de  $\Lambda$  pour tous les monômes de  $\{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3\} \times \{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3\}$ . En particulier, on peut calculer

les coefficients de  $H_{\Lambda}^{B,B}$ . En résolvant le système :

$$H_{\Lambda}^{B,B} X = H_{\underline{g}^*}^{B,B'},$$

on déduit les relations entre les monômes de  $B'$  et  $B$  dans l'algèbre  $\mathcal{A}_{\Lambda}$  et en particulier  $c_1, \dots, c_5$  exprimés comme combinaison linéaire des monômes de  $B$  modulo  $\cdot$ . Cela nous permet de retrouver les coordonnées manquantes et d'obtenir la décomposition suivante :

$$T := 2(1+a_1+a_2+a_3)(1+b_1+b_2+b_3)(1+c_1+c_2+c_3+c_4+c_5) - (1-a_1-2a_2+3a_3)(1-b_1-b_2-b_3)(1-c_1-2c_2-3c_3-4c_4+5c_5) - 2(1+2a_1+2a_2+2a_3)(1+2b_1+2b_2+3b_3)(1+2c_1+2c_2+2c_3+2c_4+2c_5) + 3(1+5a_1+7a_2+3a_3)(1+3b_1-4b_2+8b_3)(1+4c_1+5c_2+6c_3+7c_4+8c_5) - 5(1+8a_1+6a_2-7a_3)(1+4b_1-5b_2-3b_3)(1-6c_1-5c_2-2c_3-3c_4-5c_5) - 3(1+3a_1+4a_2-5a_3)(1-3b_1+5b_2+4b_3)(1-3c_1-2c_2+3c_3+3c_4-7c_5).$$

# Bibliographie

- [1] L. Albera, A. Ferreol, P. Comon, and P. Chevalier. Blind identification of overcomplete mixtures of sources (BIOME). *Lin. Algebra Appl.*, 391 :1–30, November 2004.
- [2] J. Alexander and A. Hirschowitz. La méthode d’Horace éclatée : application à l’interpolation en degré quatre. *Inventh. math.*, 107 :585–602, 1992.
- [3] Mariemi Alonso, Jerome Brachat, and Bernard Mourrain. The hilbert scheme of points and its link with border basis. Preprint, arXiv :0911.3503v2, August, 2010.
- [4] Marilena Barnabei, Andrea Brini, and Gian-Carlo Rota. On the exterior calculus of invariant theory. *J. Algebra*, 96(1) :120–160, 1985.
- [5] Dave Bayer. *The Division algorithm and the Hilbert Scheme*. PhD thesis, Havard University, Cambridge, 1982.
- [6] Alessandra Bernardi, Jérôme Brachat, Pierre Comon, and Bernard Mourrain. Multihomogeneous polynomial decomposition using moment matrices. In *ISSAC*, pages 35–42. ACM, 2011. Extended version in arXiv :1105.1229v2.
- [7] Cristina Bertone, Paolo Lella, and Margherita Roggero. Borel open covering of Hilbert schemes. Preprint, arXiv :0909.2184v2, May, 2011.
- [8] D. Bini, M. Capovani, F. Romani, and G. Lotti.  $O(n^{2.77})$  Complexity for  $n \times n$  approximate matrix multiplication. *Inform. Process. Lett.*, 8(5) :234–235, 1979.
- [9] Jerome Brachat, Pierre Comon, Bernard Mourrain, and Elias P. Tsigaridas. Symmetric tensor decomposition. *Linear Algebra and its Applications*, 433(11–12) :1851–1872, 2010.
- [10] Jerome Brachat, Paolo Lella, Margherita Roggero, and Bernard Mourrain. Low degree equations defining the hilbert scheme. Preprint, arXiv :1104.2007v1, April, 2011.
- [11] R. Bro. Parafac, tutorial and applications. *Chemom. Intel. Lab. Syst.*, 38 :149–171, 1997.
- [12] J. Buczyńska, A. Ginensky, and J.M. Landsberg. Determinantal equations for secant varieties and the Eisenbud-Koh-Stillman conjecture. 1007.0192, 2010.
- [13] Weronika Buczyńska and Jaroslaw Buczyński. Secant varieties to high degree veronese reembeddings, catalecticant matrices and smoothable gorenstein schemes, 2010. <http://arxiv.org/abs/1012.3563>.
- [14] Peter Bürgisser, Michael Clausen, and M. Amin Shokrollahi. *Algebraic complexity theory*, volume 315 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1997. With the collaboration of Thomas Lickteig.

- [15] J. F. Cardoso. Blind signal separation : statistical principles. *Proc. of the IEEE*, 90 :2009–2025, October 1998. special issue, R.W. Liu and L. Tong eds.
- [16] Dustin A. Cartwright, Daniel Erman, Mauricio Velasco, and Bianca Viray. Hilbert schemes of 8 points, 2008. arXiv :0803.0341v2.
- [17] P. Chevalier. Optimal separation of independent narrow-band sources - concept and performance. *Signal Processing, Elsevier*, 73(1) :27–48, February 1999. special issue on blind separation and deconvolution.
- [18] P. Chevalier, L. Albera, A. Ferreol, and P. Comon. On the virtual array concept for higher order array processing. *IEEE Trans. Sig. Proc.*, 53(4) :1254–1271, April 2005.
- [19] A. Cichocki and S-I. Amari. *Adaptive Blind Signal and Image Processing*. Wiley, New York, 2002.
- [20] Gonzalo Comas and Malena Seiguer. On the rank of a binary form. *Found. Comput. Math.*, 11(1) :65–78, 2011.
- [21] P. Comon. Independent Component Analysis. In J-L. Lacoume, editor, *Higher Order Statistics*, pages 29–38. Elsevier, Amsterdam, London, 1992.
- [22] P. Comon, G. Golub, L-H. Lim, and B. Mourrain. Symmetric tensors and symmetric tensor rank. *SIAM Journal on Matrix Analysis Appl.*, 30(3) :1254–1279, 2008.
- [23] P. Comon and M. Rajih. Blind identification of under-determined mixtures based on the characteristic function. *Signal Processing*, 86(9) :2271–2281, September 2006.
- [24] D. Cox, J. Little, and D. O’Shea. *Ideals, Varieties, and Algorithms*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 2nd edition, 1997.
- [25] D. Cox, J. Little, and D. O’Shea. *Using Algebraic Geometry*. Number 185 in Graduate Texts in Mathematics. Springer, New York, 2nd edition, 2005.
- [26] L. de Lathauwer and J. Castaing. Tensor-based technics for the blind separation of ds-cdma signals. *Signal Processing*, 87(2) :322–336, February 2007.
- [27] L. de Lathauwer, J. Castaing, and J.F. Cardoso. Fourth-order cumulant-based identification of underdetermined mixtures. *IEEE Trans. Sig. Proc.*, 55(6) :2965–2973, June 2007.
- [28] J. de Leeuw. A new computational method to fit the weighted euclidean distance model. *Psychometrika*, 43(4) :479–490, December 1978.
- [29] M. C. Dogan and J. Mendel. Applications of cumulants to array processing .I. aperture extension and array calibration. *IEEE Trans. Sig. Proc.*, 43(5) :1200–1216, May 1995.
- [30] D. L. Donoho and X. Huo. Uncertainty principles and ideal atomic decompositions. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 47(7) :2845–2862, November 2001.
- [31] David Eisenbud. *Commutative algebra*, volume 150 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1995. With a view toward algebraic geometry.
- [32] M. Elkadi and B. Mourrain. *Introduction à la résolution des systèmes polynomiaux*, volume 59 of *Mathématiques et Applications*. Springer, 2007.
- [33] A. Ferreol and P. Chevalier. On the behavior of current second and higher order blind source separation methods for cyclostationary sources. *IEEE Trans. Sig. Proc.*, 48 :1712–1725, June 2000. erratum in vol.50, pp.990, Apr. 2002.

- [34] Giuseppa Carrà Ferro. Gröbner Bases and Hilbert Schemes. I. *J. Symb. Comput.*, 6(2/3) :219–230, 1988.
- [35] B. N. Flury. Common principal components in  $k$  groups. *Journal of the American Statistical Association*, 79(388) :892–898, 1984.
- [36] G. H. Golub and C. F. Van Loan. *Matrix computations*. John Hopkins, Baltimore MD, 1983.
- [37] Gerd Gotzmann. Eine Bedingung für die Flachheit und das Hilbertpolynom eines graduerten Ringes. *Math. Z.*, 158(1) :61–70, 1978.
- [38] Mark L. Green. Generic initial ideals. In *Six lectures on commutative algebra (Bellaterra, 1996)*, volume 166 of *Progr. Math.*, pages 119–186. Birkhäuser, Basel, 1998.
- [39] A. Grothendieck. Éléments de géométrie algébrique. I. Le langage des schémas. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (4) :228, 1960.
- [40] A. Grothendieck. Éléments de géométrie algébrique. II. Étude globale élémentaire de quelques classes de morphismes. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (8) :222, 1961.
- [41] Alexander Grothendieck. Techniques de construction et théorèmes d’existence en géométrie algébrique. IV. Les schémas de Hilbert. In *Séminaire Bourbaki, Vol. 6*, pages Exp. No. 221, 249–276. Soc. Math. France, Paris, 1961.
- [42] Mark Haiman.  $t, q$ -Catalan numbers and the Hilbert scheme. *Discrete Math.*, 193(1-3) :201–224, 1998. Selected papers in honor of Adriano Garsia (Taormina, 1994).
- [43] Mark Haiman and Bernd Sturmfels. Multigraded Hilbert schemes. *J. Algebraic Geom.*, 13(4) :725–769, 2004.
- [44] J. Harris. *Algebraic Geometry : A First Course*. Number 133 in Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, 1992.
- [45] R. A. Harshman and M. Lundy. PARAFAC : Parallel factor analysis. *Computational Stat. Data Analysis*, 18 :39–72, 1994.
- [46] Robin Hartshorne. *Algebraic geometry*. Springer-Verlag, New York, 1977. Graduate Texts in Mathematics, No. 52.
- [47] Mark E. Huibregtse. A description of certain affine open subschemes that form an open covering of  $\text{Hilb}_{\mathbb{A}_k^n}$ . *Pacific J. Math.*, 204(1) :97–143, 2002.
- [48] Mark E. Huibregtse. An elementary construction of the multigraded hilbert scheme of points. *Pacific Journal of Mathematics*, 223(2) :269–315, 2006.
- [49] Anthony Iarrobino and Vassil Kanev. *Power sums, Gorenstein algebras, and determinantal loci*, volume 1721 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1999. Appendix C by Iarrobino and Steven L. Kleiman.
- [50] Anthony A. Iarrobino. Reducibility of the families of 0-dimensional schemes on a variety. *Invent. Math.*, 15 :72–77, 1972.
- [51] Anthony A. Iarrobino. Hilbert scheme of points : overview of last ten years. In *Algebraic geometry, Bowdoin, 1985 (Brunswick, Maine, 1985)*, volume 46 of *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 297–320. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987.

- [52] T. Jiang and N. Sidiropoulos. Kruskal’s permutation lemma and the identification of CANDECOMP/PARAFAC and bilinear models. *IEEE Trans. Sig. Proc.*, 52(9) :2625–2636, September 2004.
- [53] H. A. L. Kiers and W. P. Krijnen. An efficient algorithm for Parafac of three-way data with large numbers of observation units. *Psychometrika*, 56 :147, 1991.
- [54] Martin Kreuzer and Lorenzo Robbiano. Deformations of border bases. *Collect. Math.*, 3 :275–297, 2008.
- [55] J. B. Kruskal. Three-way arrays : Rank and uniqueness of trilinear decompositions. *Linear Algebra and Applications*, 18 :95–138, 1977.
- [56] J. Kung and G. Rota. The invariant theory of binary forms. *Bulletin of the American Mathematical Association*, pages 27–85, 1984.
- [57] J. Landsberg. Geometry and the complexity of matrix multiplication. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 45(2) :247–284, April 2008.
- [58] J. M. Landsberg and L. Manivel. On the ideals of secant varieties of Segre varieties. *Found. Comput. Math.*, 4(4) :397–422, 2004.
- [59] J. M. Landsberg and L. Manivel. Generalizations of Strassen’s equations for secant varieties of Segre varieties. *Comm. Algebra*, 36(2) :405–422, 2008.
- [60] J. M. Landsberg and G. Ottaviani. Equations for secant varieties to veronese varieties. arXiv 1006.0180, 2010.
- [61] J. M. Landsberg and G. Ottaviani. Equations for secant varieties via vector bundles. arXiv 1010.1825, 2010.
- [62] J. M. Landsberg and J. Weyman. On the ideals and singularities of secant varieties of Segre varieties. *Bull. Lond. Math. Soc.*, 39(4) :685–697, 2007.
- [63] Paolo Lella and Margherita Roggero. Rational components of hilbert schemes, 2009. <http://arxiv.org/abs/0903.1029>.
- [64] F.S. Macaulay. *The Algebraic Theory of Modular Systems*. Cambridge Univ. Press, 1916.
- [65] P. McCullagh. *Tensor Methods in Statistics*. Monographs on Statistics and Applied Probability. Chapman and Hall, 1987.
- [66] Bernard Mourrain. A new criterion for normal form algorithms. In *Applied algebra, algebraic algorithms and error-correcting codes (Honolulu, HI, 1999)*, volume 1719 of *Lecture Notes in Comput. Sci.*, pages 430–443. Springer, Berlin, 1999.
- [67] Bernard Mourrain and Philippe Trébuchet. Stable normal forms for polynomial system solving. *Theoretical Computer Science*, 409 :229–240, 2008.
- [68] Luke Oeding and Giorgio Ottaviani. Eigenvectors of tensors and algorithms for waring decomposition, 2011. <http://arxiv.org/abs/1103.0203>.
- [69] P. Paatero. The multilinear engine : A table-driven, least squares program for solving multilinear problems, including the n-way parallel factor analysis model. *Journal of Computational and Graphical Statistics*, 8(4) :854–888, December 1999.
- [70] Irena Peeva and Mike Stillman. Connectedness of Hilbert schemes. *J. Algebraic Geom.*, 14(2) :193–211, 2005.

- [71] D. T. Pham and J-F. Cardoso. Blind separation of instantaneous mixtures of nonstationary sources. *IEEE Trans. Sig. Proc.*, 49(9) :1837–1848, September 2001.
- [72] Lorenzo Robbiano. On border basis and groebner basis schemes, 2008.
- [73] Margherita Roggero. Borel open covering of hilbert schemes, 2009. <http://arxiv.org/abs/0909.2184>.
- [74] Edoardo Sernesi. *Deformations of algebraic schemes*, volume 334 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- [75] Igor R. Shafarevich. *Basic algebraic geometry. 2*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1994. Schemes and complex manifolds, Translated from the 1988 Russian edition by Miles Reid.
- [76] N. D. Sidiropoulos, G. B. Giannakis, and R. Bro. Blind PARAFAC receivers for DS-SS-CDMA systems. *IEEE Trans. on Sig. Proc.*, 48(3) :810–823, March 2000.
- [77] A. Smilde, R. Bro, and P. Geladi. *Multi-Way Analysis*. Wiley, 2004.
- [78] V. Strassen. Rank and optimal computation of generic tensors. *Linear Algebra Appl.*, 52 :645–685, July 1983.
- [79] A. Swami, G. Giannakis, and S. Shamsunder. Multichannel ARMA processes. *IEEE Trans. Sig. Proc.*, 42(4) :898–913, April 1994.
- [80] J. J. Sylvester. Sur une extension d’un théorème de Clebsch relatif aux courbes du quatrième degré. *Comptes Rendus, Math. Acad. Sci. Paris*, 102 :1532–1534, 1886.
- [81] D. Laksov T. S. Gustavsen and R. M. Skjelnes. An elementary, explicit, proof of the existence of the hilbert scheme of points, 2005. <http://arxiv.org/pdf/math/0506161>.
- [82] J. M. F. ten Berge, N. D. Sidiropoulos, and R. Rocci. Typical rank and INDSCAL dimensionality for symmetric three-way arrays of order  $I \times 2 \times 2$  or  $I \times 3 \times 3$ . *Linear Algebra Appl.*, 388 :363–377, 2004.
- [83] Kenji Ueno. *Algebraic geometry. 3*, volume 218 of *Translations of Mathematical Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2003. Further study of schemes, Translated from the 1998 Japanese original by Goro Kato, Iwanami Series in Modern Mathematics.
- [84] A. J. van der Veen and A. Paulraj. An analytical constant modulus algorithm. *IEEE Trans. Sig. Proc.*, 44(5) :1136–1155, May 1996.
- [85] A. Yeredor. Non-orthogonal joint diagonalization in the LS sense with application in blind source separation. *IEEE Trans. Sig. Proc.*, 50(7) :1545–1553, 2002.
- [86] F. L. Zak. *Tangents and secants of algebraic varieties*, volume 127 of *Translations of Mathematical Monographs*. AMS, Providence, RI, 1993.
- [87] A. Ziehe, G. Nolte, and K. R. Müller. A fast algorithm for joint diagonalization with non orthogonal transformations and its application to blind source separation. *Journal of Machine Learning Research*, 5 :777–800, December 2004.





## Schémas de Hilbert et décomposition de tenseurs

### Résumé

Cette thèse est constituée de deux parties. La première regroupe les chapitres 2 et 3 et traite du schéma de Hilbert. Ces chapitres correspondent respectivement à des travaux en collaboration avec M.E. Alonso et B. Mourrain : [3] et avec P. Lella, B. Mourrain et M. Roggero : [10]. Nous nous intéresserons aux équations qui le définissent comme sous-schéma fermé de la grassmannienne et plus précisément à leur degré. Nous fournirons ainsi de nouvelles équations globales, plus simples que celles qui existent déjà. Le chapitre 2 se concentre sur le cas des polynômes de Hilbert constants égaux à  $\mu$ . Après avoir rappelé les définitions et propriétés élémentaires du foncteur de Hilbert associé à  $\mu$ , noté  $\mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}^n}^\mu$ , nous montrerons que celui-ci est représentable. Nous adopterons pour cela une approche locale et construirons un recouvrement ouvert de sous-foncteurs représentables, dont les équations correspondent aux relations de commutation qui caractérisent les bases de bord. Son représentant s'appelle le schéma de Hilbert associé à  $\mu$ , noté  $Hilb^\mu(\mathbb{P}^n)$ . Nous fournirons ensuite, grâce aux théorèmes de Persistance et de Régularité de Gotzmann, une description globale de ce schéma. Nous donnerons un système d'équations homogènes de degré 2 en les coordonnées de Plücker qui caractérise  $Hilb^\mu(\mathbb{P}^n)$  comme sous-schéma fermé de la Grassmannienne. Nous concluons ce chapitre par une étude du plan tangent au schéma de Hilbert en exploitant l'approche locale et les relations de commutation précédemment introduites. Le chapitre 3 traite le cas général du schéma de Hilbert associé à un polynôme  $P$  de degré  $d \geq 0$ , noté  $Hilb^P(\mathbb{P}^n)$ . Nous généraliserons le chapitre précédent en fournissant des équations globales homogènes de degré  $d + 2$  en les coordonnées de Plücker.

La deuxième partie de cette thèse concerne la décomposition de tenseurs, chapitre 4. Nous commencerons par étudier le cas symétrique, qui correspond à l'article [9] en collaboration avec P. Comon, B. Mourrain et E. Tsigaridas. Nous étendrons pour cela l'algorithme de Sylvester proposé pour le cas binaire. Nous utiliserons une approche duale et fournirons des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'une décomposition de rang donné, en utilisant les opérateurs de Hankel. Nous en déduisons un algorithme pour le cas symétrique. Nous aborderons aussi la question de l'unicité de la décomposition minimale. Enfin, nous concluons en étudiant le cas des tenseurs généraux qui correspond à un article en collaboration avec A. Bernardi, P. Comon et B. Mourrain : [6]. Nous montrerons en particulier comment le formalisme introduit pour le cas symétrique peut s'adapter pour résoudre le problème.

### Hilbert schemes and tensors decomposition

#### Abstract

This thesis consists of two parts. The first one contains chapter 2 and 3 and is about the Hilbert scheme. These chapters correspond to joint works with M.E. Alonso and B. Mourrain : [3] and with P. Lella, B. Mourrain and M. Roggero : [10]. We are interested in the equations that define it as a closed sub-scheme of the Grassmannian and especially their degree. We will give new global equations, more simple than those already known. Chapter 2 is about the case of constant Hilbert polynomial equal to  $\mu$ . First, we will briefly recall the definitions and propositions related to the Hilbert functor associated to  $\mu$ , denoted by  $\mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}^n}^\mu$ . Then we will prove that it is representable, we will use a local approach and build a covering of open representable sub-functors whose equations correspond to commutation relations that characterize border basis. The scheme that represents  $\mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}^n}^\mu$  is called the Hilbert scheme associated to  $\mu$  and is denoted by  $Hilb^\mu(\mathbb{P}^n)$ . Then, thanks to the theorems of Persistence and Regularity of Gotzmann, we will give a global description of  $Hilb^\mu(\mathbb{P}^n)$ . We will provide a set of homogeneous equations of degree 2 in the Plücker coordinates that characterizes  $Hilb^\mu(\mathbb{P}^n)$  as a closed sub-scheme of the Grassmannian. We will finally conclude this chapter by studying the tangent plan of the Hilbert scheme. Chapter 3 deals with the general case of Hilbert scheme associated to a Hilbert polynomial  $P$  of degree  $d \geq 0$ , denoted by  $Hilb^P(\mathbb{P}^n)$ . We will generalize chapter 2, giving homogeneous equations of degree  $d + 2$  in the Plücker coordinates.

The second part of this thesis is concerned with tensors decomposition, chapter 4. We will begin with the symmetric case which corresponds to a joint work with P. Comon, B. Mourrain and E. Tsigaridas : [9]. We will extend the algorithm devised by Sylvester for the binary case. We will use a dual approach and give necessary and sufficient conditions for the existence of a decomposition of a given rank, using Hankel operators. We will deduce an algorithm for the symmetric case. Finally, we will conclude by studying the case of general tensors which corresponds to a joint work with A. Bernardi, P. Comon and B. Mourrain : [6]. In particular, we will prove how the formalism that as been used so far for the symmetric case, can be extended to solve the problem.