



**HAL**  
open science

# Analyse d'image geometrique et morphometrique par diagrammes de forme et voisinages adaptatifs generaux

Séverine Rivollier

► **To cite this version:**

Séverine Rivollier. Analyse d'image geometrique et morphometrique par diagrammes de forme et voisinages adaptatifs generaux. Autre. Ecole Nationale Supérieure des Mines de Saint-Etienne, 2010. Français. NNT : 2010EMSE0575 . tel-00560838v2

**HAL Id: tel-00560838**

**<https://theses.hal.science/tel-00560838v2>**

Submitted on 26 Jul 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



N d'ordre : 2010 EMSE 0575

## THESE

Présentée par

**Séverine RIVOLLIER**

pour obtenir le grade de

**Docteur de l'Ecole Nationale Supérieure des Mines de Saint-Etienne**

Spécialité : **Image, Vision, Signal**

# ANALYSE D'IMAGE GEOMETRIQUE ET MORPHOMETRIQUE PAR DIAGRAMMES DE FORME ET VOISINAGES ADAPTATIFS GENERAUX

Soutenue à Saint-Etienne le 5 juillet 2010

Membres du jury :

Président :	Gérard THOMAS	Professeur, ENSMSE, Saint-Etienne
Rapporteurs :	Laurent NAJMAN	Professeur, ESIEE, Paris
	Peter HAWKES	Directeur de Recherche, CNRS, CEMES, Toulouse
Examineurs :	Maria HERNANDEZ CIFRE	Assistant Professor, Universidad de Murcia, Espagne
	Kiên KIEU	Chargé de Recherche, INRA, Jouy-en-Josas
	Frederic GRUY	Maitre de Recherche, ENSMSE, Saint-Etienne
Co-encadrant :	Johan DEBAYLE	Chargé de Recherche, ENSMSE, Saint-Etienne
Directeur :	Jean-Charles PINOLI	Professeur, ENSMSE, Saint-Etienne

**Spécialités doctorales :**

SCIENCES ET GENIE DES MATERIAUX  
 MECANIQUE ET INGENIERIE  
 GENIE DES PROCEDES  
 SCIENCES DE LA TERRE  
 SCIENCES ET GENIE DE L'ENVIRONNEMENT  
 MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES  
 INFORMATIQUE  
 IMAGE, VISION, SIGNAL  
 GENIE INDUSTRIEL  
 MICROELECTRONIQUE

**Responsables :**

J. DRIVER	Directeur de recherche	Centre SMS
A. VAUTRIN	Professeur	Centre SMS
G. THOMAS	Professeur	Centre SPIN
B. GUY	Maître de recherche	Centre SPIN
J. BOURGOIS	Professeur	Centre SITE
E. TOUBOUL	Ingénieur	Centre G2I
O. BOISSIER	Professeur	Centre G2I
JC. PINOLI	Professeur	Centre CIS
P. BURLAT	Professeur	Centre G2I
P. COLLOT	Professeur	Centre CMP

**Enseignants-chercheurs et chercheurs autorisés à diriger des thèses de doctorat (titulaires d'un doctorat d'Etat ou d'une HDR)**

AVRIL	Stéphane	MA	Mécanique & Ingénierie	CIS
BATTON-HUBERT	Mireille	MA	Sciences & Génie de l'environnement	SITE
BENABEN	Patrick	PR 1	Sciences & Génie des Matériaux	CMP
BERNACHE-ASSOLANT	Didier	PR 0	Génie des Procédés	CIS
BIGOT	Jean-Pierre	MR	Génie des Procédés	SPIN
BILAL	Essaïd	DR	Sciences de la Terre	SPIN
BOISSIER	Olivier	PR 1	Informatique	G2I
BOUCHER	Xavier	MA	Génie Industriel	G2I
BOUDAREL	Marie-Reine	PR 2	Génie Industriel	DF
BOURGOIS	Jacques	PR 0	Sciences & Génie de l'environnement	SITE
BRODHAG	Christian	DR	Sciences & Génie de l'environnement	SITE
BURLAT	Patrick	PR 2	Génie industriel	G2I
COLLOT	Philippe	PR 1	Microélectronique	CMP
COURNIL	Michel	PR 0	Génie des Procédés	SPIN
DAUZERE-PERES	Stéphane	PR 1	Génie industriel	CMP
DARRIEULAT	Michel	IGM	Sciences & Génie des Matériaux	SMS
DECHOMETS	Roland	PR 1	Sciences & Génie de l'environnement	SITE
DESTRAYAUD	Christophe	MA	Mécanique & Ingénierie	SMS
DELAFOSSÉ	David	PR 1	Sciences & Génie des Matériaux	SMS
DOLGUI	Alexandre	PR 1	Génie Industriel	G2I
DRAPIER	Sylvain	PR 2	Mécanique & Ingénierie	SMS
DRIVER	Julian	DR 0	Sciences & Génie des Matériaux	SMS
FEILLET	Dominique	PR 2	Génie industriel	CMP
FOREST	Bernard	PR 1	Sciences & Génie des Matériaux	CIS
FORMISYN	Pascal	PR 1	Sciences & Génie de l'environnement	SITE
FORTUNIER	Roland	PR 1	Sciences & Génie des Matériaux	SMS
FRACZKIEWICZ	Anna	DR	Sciences & Génie des Matériaux	SMS
GARCIA	Daniel	MR	Génie des Procédés	SPIN
GIRARDOT	Jean-Jacques	MR	Informatique	G2I
GOEURIOT	Dominique	MR	Sciences & Génie des Matériaux	SMS
GRAILLOT	Didier	DR	Sciences & Génie de l'environnement	SITE
GROSSEAU	Philippe	MR	Génie des Procédés	SPIN
GRUY	Frédéric	MR	Génie des Procédés	SPIN
GUY	Bernard	MR	Sciences de la Terre	SPIN
GUYONNET	René	DR	Génie des Procédés	SPIN
HERRI	Jean-Michel	PR 2	Génie des Procédés	SPIN
INAL	Karim	MR	Microélectronique	CMP
KLÖCKER	Helmut	DR	Sciences & Génie des Matériaux	SMS
LAFOREST	Valérie	CR	Sciences & Génie de l'Environnement	SITE
LERICHE	Rodolphe	CR CNRS	Mécanique & Ingénierie	SMS
LI	Jean-Michel	EC (CCI MP)	Microélectronique	CMP
LONDICHE	Henry	MR	Sciences & Génie de l'Environnement	SITE
MALLIARAS	George Grégory		Microélectronique	CMP
MOLIMARD	Jérôme	MA	Mécanique & Ingénierie	SMS
MONTHEILLET	Frank	DR 1 CNRS	Sciences & Génie des Matériaux	SMS
PERIER-CAMBY	Laurent	PR 2	Génie des Procédés	SPIN
PIJOLAT	Christophe	PR 1	Génie des Procédés	SPIN
PIJOLAT	Michèle	PR 1	Génie des Procédés	SPIN
PINOLI	Jean-Charles	PR 0	Image, Vision, Signal	CIS
STOLARZ	Jacques	CR	Sciences & Génie des Matériaux	SMS
SZAFNICKI	Konrad	MR	Sciences & Génie de l'Environnement	SITE
THOMAS	Gérard	PR 0	Génie des Procédés	SPIN
TRIA	Assia		Microélectronique	CMP
VALDIVIESO	François	MA	Sciences & Génie des Matériaux	SMS
VAUTRIN	Alain	PR 0	Mécanique & Ingénierie	SMS
VIRICELLE	Jean-Paul	MR	Génie des procédés	SPIN
WOLSKI	Krzysztof	DR	Sciences & Génie des Matériaux	SMS
XIE	Xiaolan	PR 1	Génie industriel	CIS

**Glossaire :**

PR 0	Professeur classe exceptionnelle
PR 1	Professeur 1ère catégorie
PR 2	Professeur 2ème catégorie
MA(MDC)	Maître assistant
DR	Directeur de recherche
Ing.	Ingénieur
MR(DR2)	Maître de recherche
CR	Chargé de recherche
EC	Enseignant-chercheur
IGM	Ingénieur général des mines

**Centres :**

SMS	Sciences des Matériaux et des Structures
SPIN	Sciences des Processus Industriels et Naturels
SITE	Sciences Information et Technologies pour l'environnement
G2I	Génie Industriel et Informatique
CMP	Centre de Microélectronique de Provence
CIS	Centre Ingénierie et Santé

*A mes parents.*



# Remerciements

Mes remerciements s'adressent tout d'abord au directeur de cette thèse, Jean-Charles Pinoli, pour m'avoir fait confiance en me proposant ce sujet. Tout au long de ces années, il s'est montré disponible et a su orienter mes recherches en me guidant, m'inspirant, me conseillant et surtout en m'encourageant.

Mes remerciements s'adressent également à Johan Debayle, co-encadrant, pour tout le temps qu'il m'a consacré et l'aide qu'il m'a apportée. Il a également beaucoup contribué à l'amélioration de mes connaissances en traitement d'image.

Ces deux personnes m'ont ouvert les portes du monde de la recherche. Elles ont rendu ces quelques années enrichissantes et constructives, et m'ont aidée à prendre confiance en moi dans les moments difficiles. Je les en remercie sincèrement.

Je remercie Gérard Thomas pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury de soutenance. Je remercie également Peter Hawkes et Laurent Najman d'avoir accepté d'être les rapporteurs de cette thèse, Maria Hernandez Cifre, Kiên Kieu et Frédéric Gruy d'avoir examiné ce travail. Ils ont tous contribué par leurs jugements, analyses, remarques et suggestions à enrichir et ouvrir de nombreuses perspectives sur ces travaux de thèse. Je leur en suis très reconnaissante.

Je remercie mes collègues de l'équipe Imagerie et Morphologie - Yann Gavet\*, Laurent Navarro, Mathieu Fernandes, Marthe Lagarrigue, Benoît Presles et Hélène Gouinaud - pour leurs réponses à mes nombreuses questions et sollicitations, pour leurs encouragements et les discussions que nous avons pu avoir ensemble. Je remercie également Jérémie et Emilie Pourchez et David Marchat. Je les remercie tous pour leur sympathie et leur bonne humeur et leur souhaite une bonne continuation dans leurs vies personnelles et professionnelles.

Je remercie Françoise Bresson, Jérôme Mancuso et Andrée-Aimée Toucas pour leur disponibilité et par conséquent pour l'aide qu'ils m'ont apportée.

D'une manière plus générale, mes remerciements s'adressent à tous les membres des centres SPIN et CIS de l'EMSE que j'ai eu le plaisir de côtoyer quotidiennement durant cette thèse.

Je remercie mes parents et mes frères pour leurs encouragements, leur confiance et leur assistance morale qui ont grandement contribué à la réalisation de cette thèse. Je mentionnerai particulièrement ma mère pour ce qu'elle a toujours dit qui m'a incitée à faire de longues études. Je remercie également ma belle-famille pour son soutien.

\* Ces remerciements ne seraient pas complets sans une dédicace particulière à mon futur époux, Yann, également collègue de l'équipe Imagerie et Morphologie. Je le remercie pour son aide professionnelle, pour ses conseils, idées, suggestions et remarques pertinentes, pour la lecture de ce manuscrit, et en ce qui concerne la partie informatique de ce travail, pour sa participation à l'implémentation des algorithmes. Je le remercie également de m'avoir accompagnée et aidée dans cette aventure, pour le soutien et les encouragements qu'il a pu m'offrir, et surtout pour sa patience.



# Table des matières

<b>Table des matières</b>	<b>i</b>
<b>Propos liminaires</b>	<b>v</b>
Introduction générale au traitement et à l'analyse d'image . . . . .	vii
Organisation du manuscrit . . . . .	ix
<b>I Contexte</b>	<b>1</b>
<b>1 Problématique et contributions</b>	<b>5</b>
1.1 Présentation du problème . . . . .	5
1.2 Contributions et apports originaux . . . . .	6
1.2.1 Etat de l'art . . . . .	6
1.2.2 Solution à la problématique . . . . .	6
1.2.3 Diagrammes de forme . . . . .	6
1.2.4 Voisinages Adaptatifs Généraux . . . . .	6
1.2.5 Applications . . . . .	6
1.2.6 Publications scientifiques . . . . .	7
<b>2 Etat de l'art sur l'analyse géométrique et morphométrique</b>	<b>9</b>
2.1 Introduction par l'analyse ensembliste et topologique . . . . .	9
2.1.1 Théorie des ensembles et algèbre . . . . .	9
2.1.2 Théorie de la mesure . . . . .	10
2.1.3 Topologie générale . . . . .	10
2.1.4 Synthèse . . . . .	11
2.2 Analyse géométrique . . . . .	12
2.2.1 Géométrie intégrale . . . . .	12
2.2.2 Géométries différentielle et fractale . . . . .	12
2.2.3 Géométrie stochastique . . . . .	14
2.2.4 Intérêts et limites pour la caractérisation d'images . . . . .	15
2.3 Analyse morphométrique . . . . .	15
2.3.1 Morphologie mathématique . . . . .	15
2.3.2 Spectre de forme . . . . .	16
2.3.3 Paramètres de forme . . . . .	17
2.3.4 Intérêts et limites pour la caractérisation d'images . . . . .	18

2.4	Synthèse bibliographique . . . . .	18
<b>II</b>	<b>Analyse d'image binaire</b>	<b>19</b>
<b>3</b>	<b>Géométrie intégrale</b>	<b>23</b>
3.1	Introduction par la théorie de la mesure . . . . .	23
3.1.1	Algèbre . . . . .	23
3.1.2	Géométrie . . . . .	26
3.2	Fonctionnelles de Minkowski . . . . .	27
3.2.1	Définition et propriétés . . . . .	27
3.2.2	Topologie numérique et fonctionnelles de Minkowski mono-dimensionnelles . . . . .	28
3.2.3	Topologie numérique et fonctionnelles de Minkowski bi-dimensionnelles . . . . .	32
3.2.4	Estimation des fonctionnelles . . . . .	41
3.2.5	Synthèse . . . . .	42
3.3	Analyse multi-échelle par les fonctions de Minkowski . . . . .	42
3.3.1	Fonctions de Minkowski globales . . . . .	43
3.3.2	Fonctions de Minkowski locales . . . . .	43
3.4	Synthèse . . . . .	44
<b>4</b>	<b>Morphométrie</b>	<b>45</b>
4.1	Article 1 : Shape diagrams for compact convex sets . . . . .	46
4.1.1	Introduction . . . . .	46
4.1.2	Shape functionals . . . . .	47
4.1.3	Shape diagrams . . . . .	50
4.1.4	Shape diagrams dispersion quantification . . . . .	55
4.1.5	Shape diagrams overlapping quantification . . . . .	58
4.1.6	Synthesis . . . . .	68
4.1.7	Conclusion . . . . .	71
4.2	Article 2 : Shape diagrams for compact simply connected sets . . . . .	72
4.2.1	Introduction . . . . .	72
4.2.2	Shape functionals . . . . .	72
4.2.3	Shape diagrams . . . . .	74
4.2.4	Shape diagrams dispersion quantification . . . . .	76
4.2.5	Shape diagrams overlapping quantification . . . . .	81
4.2.6	Synthesis . . . . .	89
4.2.7	Conclusion . . . . .	90
4.3	Article 3 : Shape diagrams - convexity discrimination . . . . .	91
4.3.1	Introduction . . . . .	91
4.3.2	Shape convexity . . . . .	92
4.3.3	Convexity discrimination for analytic simply connected sets . . . . .	93
4.3.4	Shape functionals for a discretized simply connected set . . . . .	94
4.3.5	Shape diagrams for a basis of various discretized simply connected compact sets . . . . .	94
4.3.6	Shape diagrams for similar discretized simply connected compact sets . . . . .	98

4.3.7	Synthesis . . . . .	104
4.3.8	Global synthesis for the three parts of this study . . . . .	105
4.3.9	Conclusion . . . . .	105
4.4	Applications . . . . .	105
4.4.1	Classification de formes de graines . . . . .	105
4.4.2	Homogénéité des formes de cellules cornéennes segmentées . . . . .	107
<b>III</b>	<b>Analyse d'image à niveaux de gris</b>	<b>109</b>
<b>5</b>	<b>Introduction par la géométrie intégrale et la morphométrie</b>	<b>113</b>
5.1	Types de données manipulées . . . . .	113
5.2	Géométrie intégrale . . . . .	113
5.2.1	Fonctionnelles de Minkowski . . . . .	113
5.2.2	Analyse multi-échelle par les fonctions de Minkowski . . . . .	114
5.3	Morphométrie . . . . .	117
5.4	Synthèse . . . . .	117
<b>6</b>	<b>Voisinages Adaptatifs Généraux (VAG)</b>	<b>119</b>
6.1	Modèles vectoriels généralisés . . . . .	119
6.2	Approche GANIP (General Adaptive Neighborhood Image Processing) . . . . .	122
6.3	Voisinages adaptatifs généraux d'un point . . . . .	124
6.3.1	Voisinages adaptatifs généraux faibles d'un point . . . . .	124
6.3.2	Voisinages adaptatifs généraux forts d'un point . . . . .	127
6.4	Voisinages adaptatifs généraux d'un ensemble . . . . .	129
6.4.1	Voisinages Adaptatifs Généraux Faibles d'un ensemble . . . . .	129
6.4.2	Voisinages Adaptatifs Généraux Forts d'un ensemble . . . . .	133
6.5	Voisinages adaptatifs généraux itérés d'un point . . . . .	135
6.5.1	Voisinages Adaptatifs Généraux Faibles Itérés d'un point . . . . .	135
6.5.2	Voisinages Adaptatifs Généraux Forts Itérés d'un point . . . . .	137
6.6	Applications . . . . .	140
6.6.1	Surfaces . . . . .	140
6.6.2	Frontières . . . . .	140
<b>7</b>	<b>Géométrie Intégrale à VAG</b>	<b>143</b>
7.1	Analyse adaptative locale par les fonctionnelles de Minkowski à VAG . . . . .	143
7.1.1	Définitions et propriétés . . . . .	143
7.1.2	Cartographies . . . . .	149
7.1.3	Histogrammes et histogrammes conjoints . . . . .	153
7.2	Analyse multi-échelle adaptative locale par les fonctions de Minkowski à VAG . . . . .	156
7.2.1	Par rapport à la tolérance d'homogénéité . . . . .	157
7.2.2	Par rapport à un opérateur de morphologie mathématique . . . . .	160
7.3	Applications . . . . .	163
7.3.1	Segmentation . . . . .	163
7.3.2	Classification . . . . .	163

7.3.3 Filtrage . . . . .	169
<b>8 Morphométrie à VAG</b>	<b>173</b>
8.1 Introduction par les fonctionnelles géométriques à VAG . . . . .	173
8.2 Analyse adaptative locale par les fonctionnelles morphométriques à VAG . . . . .	177
8.2.1 Définition et propriétés . . . . .	177
8.2.2 Cartographies . . . . .	178
8.2.3 Histogrammes et diagrammes de forme . . . . .	179
8.3 Analyse multi-échelle adaptative locale par les fonctions morphométriques à VAG . . .	181
8.3.1 Par rapport à la tolérance d'homogénéité . . . . .	181
8.3.2 Par rapport à un opérateur de morphologie mathématique . . . . .	182
8.4 Applications . . . . .	186
8.4.1 Classification de formes de graines . . . . .	186
8.4.2 Homogénéité des formes de cellules cornéennes . . . . .	188
8.4.3 Cristallisation de l'acide adipique . . . . .	190
<b>IV Conclusions et perspectives</b>	<b>193</b>
<b>9 Conclusions</b>	<b>197</b>
<b>10 Perspectives</b>	<b>199</b>
<b>Listes, nomenclature et références</b>	<b>xi</b>
Liste des figures . . . . .	xiii
Liste des tableaux . . . . .	xvii
Nomenclature des symboles . . . . .	xix
Références bibliographiques . . . . .	xxi

# Propos liminaires



# Introduction générale au traitement et à l'analyse d'image

Le traitement d'image désigne l'ensemble des traitements automatisés permettant, à partir d'images, de produire d'autres images ou d'en extraire de l'information [Ros69, Pra78, GW08]. Dans le contexte de la vision artificielle [BB82], le traitement d'image se place après les étapes d'acquisition et de numérisation, assurant les transformations d'images permettant d'aller vers une interprétation des images traitées. Lors de cette phase d'interprétation, les connaissances du domaine (sur les informations à disposition à propos de ce que représentent les images traitées) sont manipulées.

Le mode et les conditions d'acquisition et de numérisation des images traitées conditionnent largement les opérations qu'il faudra réaliser pour extraire de l'information. En effet, de nombreux paramètres entrent en compte, les principaux étant :

- la résolution d'acquisition et le mode de codage utilisé lors de la numérisation, déterminant le degré de précision des éventuelles mesures de dimensions ;
- les réglages optiques utilisés (dont la mise au point), déterminant par exemple la netteté de l'image ;
- les conditions d'éclairage, déterminant une partie de la variabilité des images traitées ;
- le bruit de la chaîne d'acquisition et de transmission d'image.

Par analogie avec les opérateurs mathématiques, les opérateurs de traitement d'image sont des transformations plus ou moins complexes prenant en entrée une image ou un ensemble d'informations relatives à une image, et produisant une image ou un ensemble d'informations relatives aux données initiales. Les opérateurs sont généralement classés en différentes familles, en fonction des informations qu'ils acceptent en entrée et qu'ils fournissent en sortie, et en fonction des transformations qu'ils font subir aux données. Trois familles principales existent :

- Opérateurs image  $\rightarrow$  image : opérateurs de modifications pixel à pixel (changement de la dynamique de l'image, opérateurs binaires), opérateurs locaux (opérateurs de flou, opérateurs morphologiques, détecteurs de contours), opérateurs dans l'espace fréquentiel (réduction du bruit, opérateurs globaux (calcul des distances)) ;
- Opérateurs image  $\rightarrow$  ensemble d'informations : segmentation (de régions ou de contours), classification de pixels, calcul de paramètres ;
- Opérateurs ensemble d'informations  $\rightarrow$  image : construction d'une image à partir d'une carte de régions ou d'une liste de frontières.

Les objectifs des applications peuvent être de différentes natures : détecter la présence ou l'absence d'un objet d'une image, compter les objets et déterminer leurs caractéristiques, supprimer les objets indésirables, construire un panorama à partir d'une séquence d'images, ...

Au sens plus strict, la notion de traitement d'image diffère de celle d'analyse d'image. Le traitement fait appel à l'aspect qualitatif. Par exemple, la détection des contours d'objets dans une image est un de ses opérateurs. L'analyse est liée à l'aspect quantitatif, comme la caractérisation d'une image par calculs de mesures [CC85, GH95].

# Organisation du manuscrit

Le manuscrit est composé de quatre parties.

## Première partie : Contexte

Le contexte de cette thèse est tout d'abord présenté en exposant la problématique et les contributions apportées.

Ensuite, un état de l'art sur l'analyse d'image géométrique et morphométrique est exposé à travers une recherche sur les mesures d'ensembles et leurs conditions d'existence. Ce travail de recherche a permis de mieux appréhender la problématique. Les synthèses et critiques de ce travail bibliographique ont conduit à l'identification précise du sujet de cette thèse.

## Deuxième partie : Analyse d'image binaire

La deuxième partie de ce manuscrit est consacrée à l'analyse d'image binaire.

Le premier chapitre porte sur la géométrie intégrale. Ce domaine mathématique utilise des éléments de base provenant de la théorie de la mesure. Ces éléments sont les fonctionnelles de Minkowski, c'est-à-dire l'aire, le périmètre et le nombre d'Euler dans un espace bi-dimensionnel. Ces fonctionnelles sont définies sur des ensembles continus. Cependant, l'acquisition numérique de l'image représentant un tel ensemble implique une discrétisation. Des méthodes d'estimation des fonctionnelles sont alors utilisées. Une caractérisation globale de l'image est ainsi obtenue. Afin de rendre cette caractérisation multi-échelle, des transformations successives sont apportées à l'image et les fonctionnelles sont estimées à chaque étape, définissant ainsi les fonctions de Minkowski.

Le deuxième chapitre porte sur la morphométrie. Ce domaine mathématique utilise une gamme plus large de fonctionnelles : des fonctionnelles géométriques, dépendantes du facteur d'échelle, et des fonctionnelles morphométriques, indépendantes du facteur d'échelle. Un ensemble peut être représenté par un point dans un repère du plan euclidien dont les coordonnées sont des fonctionnelles morphométriques. Cette représentation détermine un diagramme de forme. Plusieurs diagrammes de forme peuvent ainsi être définis. Une étude comparative de ces diagrammes pour des ensembles convexes et pour des ensembles simplement connexes est réalisée dans le but d'analyser la pertinence de la représentation et la qualité de la discrimination des formes.

## Troisième partie : Analyse d'image à niveaux de gris

La troisième partie de ce manuscrit est consacrée à l'analyse d'image à niveaux de gris.

Le premier chapitre présente une extension des concepts utilisés dans la partie précédente à l'espace tri-dimensionnel, où la troisième dimension est le niveau de gris. Cette méthode présente un inconvénient lié à l'hétérogénéité des trois dimensions : les deux premières sont spatiales alors que la troisième représente une intensité lumineuse.

Le deuxième chapitre présente de manière théorique les Voisinages Adaptatifs Généraux (VAG). Ces voisinages locaux sont définis pour chaque point de l'image étudiée. Ils sont de nature adaptative en espace, en échelle et en intensité simultanément. Leur forme spatiale dépend des caractéristiques radiométriques, morphologiques, . . . à étudier, autrement dit ils sont définis suivant un critère d'analyse sélectionné. De plus, ils sont structurés suivant un modèle vectoriel compatible avec la nature physique et/ou psychophysique de l'image à analyser. Enfin, ils sont aussi de nature multi-échelle, puisqu'à chaque point de l'image est associée une famille croissante de VAG. Ce chapitre étend ces VAG d'un point aux VAG d'un ensemble puis à des VAG itérés d'un point, en présentant leurs définitions et propriétés. Enfin, une application originale de détection des contours d'une image, par l'intégration des frontières des VAG de tous ses points, est exposée.

Le troisième chapitre associe la géométrie intégrale aux Voisinages Adaptatifs Généraux. Des fonctionnelles de Minkowski à VAG sont ainsi définies, illustrées par des cartographies. Une étude sur leur comportement lors de la variation des critères axiomatiques des VAG est réalisée. Puis une analyse multi-échelle est effectuée en observant les cartographies déterminées sur une séquence d'images transformées à partir d'une image initiale. Des fonctions de Minkowski à VAG sont donc définies. Enfin, les histogrammes des cartographies des fonctionnelles de Minkowski à VAG sont considérés, dans le but d'obtenir une distribution basée sur la géométrie des structures présentes dans une image. Pour finir, trois applications de segmentation, de classification et de filtrage sont présentées, basées respectivement sur les fonctionnelles, leurs histogrammes et les fonctions de Minkowski à VAG.

Le quatrième chapitre associe la morphométrie aux Voisinages Adaptatifs Généraux de manière analogue au chapitre précédent. Des fonctionnelles de forme à VAG illustrées par des cartographies sont ainsi définies. De plus, l'aspect multi-échelle intervient lors de la détermination des fonctions de forme à VAG. Enfin, des diagrammes de forme à VAG sont également introduits pouvant servir par exemple à la classification des structures présentes dans une image sans effectuer au préalable une segmentation.

## Quatrième partie : Conclusion et perspectives

La quatrième et dernière partie de ce manuscrit présente tout d'abord une conclusion générale de l'analyse d'image géométrique et morphométrique par diagrammes de forme et voisinages adaptatifs en affichant ses avantages. Par la suite, les perspectives sont nombreuses et peuvent initier de futurs sujets de thèse dans différents axes de recherche.

Première partie

Contexte



# Sommaire de la Première partie

---

<b>1</b>	<b>Problématique et contributions</b>	<b>5</b>
1.1	Présentation du problème . . . . .	5
1.2	Contributions et apports originaux . . . . .	6
1.2.1	Etat de l'art . . . . .	6
1.2.2	Solution à la problématique . . . . .	6
1.2.3	Diagrammes de forme . . . . .	6
1.2.4	Voisinages Adaptatifs Généraux . . . . .	6
1.2.5	Applications . . . . .	6
1.2.6	Publications scientifiques . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Etat de l'art sur l'analyse géométrique et morphométrique</b>	<b>9</b>
2.1	Introduction par l'analyse ensembliste et topologique . . . . .	9
2.1.1	Théorie des ensembles et algèbre . . . . .	9
2.1.2	Théorie de la mesure . . . . .	10
2.1.3	Topologie générale . . . . .	10
2.1.4	Synthèse . . . . .	11
2.2	Analyse géométrique . . . . .	12
2.2.1	Géométrie intégrale . . . . .	12
2.2.2	Géométries différentielle et fractale . . . . .	12
2.2.3	Géométrie stochastique . . . . .	14
2.2.4	Intérêts et limites pour la caractérisation d'images . . . . .	15
2.3	Analyse morphométrique . . . . .	15
2.3.1	Morphologie mathématique . . . . .	15
2.3.2	Spectre de forme . . . . .	16
2.3.3	Paramètres de forme . . . . .	17
2.3.4	Intérêts et limites pour la caractérisation d'images . . . . .	18
2.4	Synthèse bibliographique . . . . .	18

---



# Chapitre 1

## Problématique et contributions

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Présentation du problème</b>	<b>5</b>
<b>1.2</b>	<b>Contributions et apports originaux</b>	<b>6</b>
1.2.1	Etat de l'art	6
1.2.2	Solution à la problématique	6
1.2.3	Diagrammes de forme	6
1.2.4	Voisinages Adaptatifs Généraux	6
1.2.5	Applications	6
1.2.6	Publications scientifiques	7

---

### 1.1 Présentation du problème

En analyse d'image à niveaux de gris, pour caractériser les structures présentes, une solution consiste à binariser l'image, afin de les identifier et les quantifier. Les deux étapes sont donc la binarisation de l'image et la mesure de l'image binaire obtenue. Finalement, la caractérisation d'une image est généralement globale et mono-échelle, et réalisée à partir d'image binaire. La problématique est donc de définir la notion de forme directement dans une image à niveaux de gris, dans le but d'en obtenir une caractérisation.

L'objectif de cette thèse est d'introduire, développer, étudier et appliquer les notions et techniques d'**analyse d'image** quantitative dans le cadre de l'approche GANIP (General Adaptive Neighborhood Image Processing) [Deb05, DP05a, DP05b, DP05c, DGP06, DP06a, DP06b, PD07, DP09a]. Cette approche fournit un cadre général et opérationnel pour le traitement d'image, basé sur le concept des **voisinages adaptatifs généraux**, qui sont adaptatifs à la fois en espace, en échelle et en intensité. La création et le développement de cette approche ont déjà fait l'objet de travaux de recherche effectués au sein de l'équipe dans laquelle cette thèse a été réalisée. Ceci explique le choix de ces voisinages particuliers, et pour cette même raison, une étude bibliographique sur les voisinages adaptatifs ne sera pas présentée dans ce manuscrit (voir [Deb05]). Par conséquent, il convient de mettre en place des mesures d'image adaptatives, relatives à des caractéristiques **géométriques et morphométriques** (aire, périmètre, épaisseur, nombre d'Euler, compacité, allongement, ...) [Riv06]. Ces mesures sont combinées pour la création de **diagrammes de forme** [Bla15, Bla16, San61], autrement dit de représentations

dans le plan euclidien permettant d'étudier les formes d'ensembles.

La problématique ciblée par cette thèse est à la fois théorique et pratique (applications dans les domaines des matériaux, des procédés, du bio-médical, ...).

## 1.2 Contributions et apports originaux

### 1.2.1 Etat de l'art

Face à cette problématique, une recherche bibliographique (Chapitre 2) a initialement été effectuée et naturellement orientée vers l'analyse d'image géométrique et morphométrique. Cette étude a contribué à la présentation d'un état de l'art concernant ces deux approches, favorisant l'appréhension de la problématique.

### 1.2.2 Solution à la problématique

Pour répondre à la problématique posée, une analyse géométrique et morphométrique est réalisée directement sur l'image à niveaux de gris, sans passer par une étape de binarisation. De plus, elle est dépendante des structures locales présentes dans l'image.

La synthèse et critique du travail bibliographique, avec l'ambition de cette analyse quantitative d'image à niveaux de gris, a conduit à conceptualiser cette approche et identifier précisément le sujet de cette thèse :

### **Analyse d'Image Géométrique et Morphométrique par Diagrammes de Forme et Voisinages Adaptatifs Généraux**

### 1.2.3 Diagrammes de forme

Les diagrammes de forme sont définis comme les diagrammes de Santaló [San61]. Une étude comparative de ces diagrammes pour les ensembles 2D est menée en trois étapes. Les deux premières considèrent les ensembles convexes et simplement connexes, respectivement. La troisième est une analyse sur les diagrammes de forme et leur faculté à discriminer les ensembles selon la convexité. L'objectif est d'extraire les diagrammes permettant de discriminer des ensembles en fonction de leur forme.

### 1.2.4 Voisinages Adaptatifs Généraux

Les Voisinages Adaptatifs Généraux (VAG) d'un point ont été définis lors de la création de l'approche GANIP (General Adaptive Neighborhood Image Processing) [Deb05, DP05a, DP05b, DP05c, DGP06, DP06a, DP06b, PD07, DP09a]. Une étude théorique plus approfondie est réalisée. Les VAG d'un ensemble puis les VAG itérés d'un point sont définis. Autrement dit, plusieurs définitions de Voisinages Adaptatifs Généraux sont proposées, donnant lieu à la mise en évidence de différentes propriétés.

### 1.2.5 Applications

Les deux concepts précédents ont été appliqués pour la résolution de divers problèmes rencontrés en traitement d'image, tant sur des images types ('Lena', ...) que sur des images issues de problèmes applicatifs concrets :

- classification des structures présentes dans une image,

- détection des contours des structures présentes dans une image,
- segmentation d'image,
- classification d'images,
- restauration d'image.

### 1.2.6 Publications scientifiques

Au cours de cette thèse, l'analyse géométrique et morphométrique par diagrammes de forme et voisinages adaptatifs généraux a fait l'objet de présentations dans des conférences à comité de lecture avec actes et d'articles dans des journaux scientifiques internationaux :

- Conférences internationales à comité de lecture avec proceedings :
  - S. Rivollier, J. Debayle and J.C. Pinoli. General Adaptive Neighborhood-based Minkowski maps for gray-tone image analysis. *European Congress of Stereology and Image Analysis*. Milan, Italy. June, 2009. (Chapitre 7)
  - S. Rivollier, J. Debayle and J.C. Pinoli. Shape representation and analysis of 2D compact sets by shape diagrams. *International Conference on Image Processing Theory, Tools and Applications*. Paris, France. July, 2010. (Chapitre 4)
- Conférences nationales à comité de lecture avec proceedings :
  - S. Rivollier, J. Debayle and J.C. Pinoli. Représentation intrinsèque multi-échelle des images à tons de gris par Voisinages Adaptatifs Généraux (VAG). *Conference of GRETSI*. Troyes, France. September, 2007. (Chapitre 7)
  - S. Rivollier, J. Debayle and J.C. Pinoli. Fonctionnelles et fonctions de Minkowski à Voisinages Adaptatifs Généraux pour l'analyse des images à tons de gris. *Conference of GRETSI*. Dijon, France. September, 2009. (Chapitre 7)
- Revues internationales à comité de lecture :
  - S. Rivollier, J. Debayle and J.C. Pinoli. A comparative study of shape diagrams for 2D compact sets - Part I : analytic convex sets. Accepted to *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics*. Published in a special issue of *Australian Journal of Mathematical Analysis and Applications*. **7(2-3)** : 1-27, 2010. (Chapitre 4)
  - S. Rivollier, J. Debayle and J.C. Pinoli. A comparative study of shape diagrams for 2D compact sets - Part II : analytic simply connected sets. Accepted to *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics*. Published in a special issue of *Australian Journal of Mathematical Analysis and Applications*. **7(2-4)** : 1-21, 2010. (Chapitre 4)
  - S. Rivollier, J. Debayle and J.C. Pinoli. A comparative study of shape diagrams for 2D compact sets - Part III : convexity discrimination for analytic and discretized simply connected sets. Accepted to *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics*. Published in a special issue of *Australian Journal of Mathematical Analysis and Applications*. **7(2-5)** : 1-18, 2010. (Chapitre 4)
  - S. Rivollier, J. Debayle and J.C. Pinoli. Integral geometry and General Adaptive Neighborhoods for multiscale image analysis. *International Journal of Signal and Image Processing*. **1(3)** : 141-150, 2010. (Chapitre 7)
- Conférence sans acte :
  - S. Rivollier, J. Debayle and J.C. Pinoli. Cartographies des fonctionnelles de Minkowski adaptatives pour l'analyse des images à tons de gris. *Seminar of the International Society for*

*Stereology*. Paris, France. January, 2009. (Chapitre 7)

D'autres articles sont en cours de rédaction :

- S. Rivollier, J. Debayle and J.C. Pinoli. General Adaptive Neighborhood-based shape diagrams. (Chapitre 8)
- S. Rivollier, J. Debayle and J.C. Pinoli. General Adaptive Neighborhood-based filtering. (Chapitre 7)
- J.C. Pinoli, S. Rivollier and J. Debayle. General Adaptive Neighborhood-based edge detection. (Chapitre 6)
- S. Rivollier, J. Debayle and J.C. Pinoli. Image analysis by shape diagrams and General Adaptive Neighborhood - Application to cells shape analysis. (Chapitres 4 et 8)

# Chapitre 2

## Etat de l'art sur l'analyse géométrique et morphométrique

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Introduction par l'analyse ensembliste et topologique</b>	<b>9</b>
2.1.1	Théorie des ensembles et algèbre	9
2.1.2	Théorie de la mesure	10
2.1.3	Topologie générale	10
2.1.4	Synthèse	11
<b>2.2</b>	<b>Analyse géométrique</b>	<b>12</b>
2.2.1	Géométrie intégrale	12
2.2.2	Géométries différentielle et fractale	12
2.2.3	Géométrie stochastique	14
2.2.4	Intérêts et limites pour la caractérisation d'images	15
<b>2.3</b>	<b>Analyse morphométrique</b>	<b>15</b>
2.3.1	Morphologie mathématique	15
2.3.2	Spectre de forme	16
2.3.3	Paramètres de forme	17
2.3.4	Intérêts et limites pour la caractérisation d'images	18
<b>2.4</b>	<b>Synthèse bibliographique</b>	<b>18</b>

---

## 2.1 Introduction par l'analyse ensembliste et topologique

### 2.1.1 Théorie des ensembles et algèbre

La théorie des ensembles [Can32] est une branche des mathématiques dont les concepts de base sont les notions d'"élément", d'"ensemble" et d'"appartenance" : à tout ensemble est associée une fonction caractéristique indiquant si un élément considéré lui appartient ou non.

Considérant une image comme une application d'un ensemble, appelé support physique, dans l'ensemble des intensités (l'échelle de gris), la théorie des ensembles s'applique alors à l'analyse d'image. La Figure 2.1 illustre le seuillage d'une image à niveaux de gris : à tous les pixels dont le niveau de gris

est supérieur à un seuil fixé est affecté le blanc, et à tous les autres, le noir ; ce principe est assimilable à l'utilisation d'une fonction caractéristique.

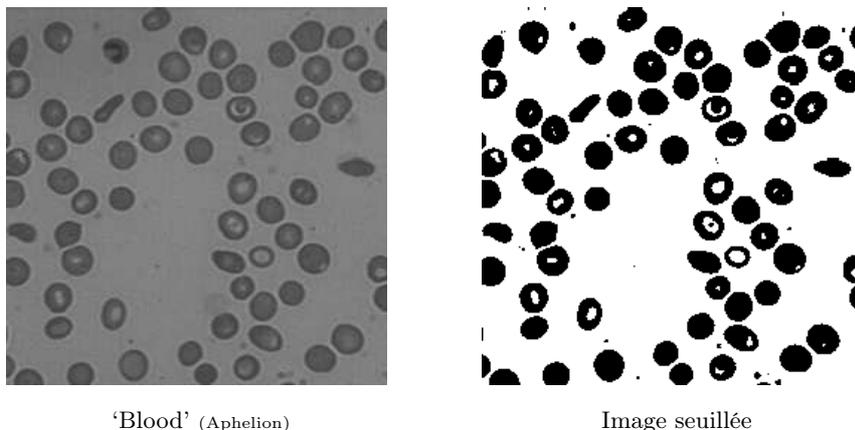


FIG. 2.1 – Seuillage de l'image 'Blood'. Niveaux de gris compris entre 0 et 255, seuil=105.

Entre ensembles, il est possible de réaliser des opérations ensemblistes telles que l'union, l'intersection, la complémentarité,  $\dots$ , ou des opérations algébriques telles que la somme, la différence, le produit,  $\dots$ , créant ainsi de nouveaux ensembles. Afin d'effectuer les opérations algébriques, il est nécessaire de définir un espace vectoriel (parmi les modèles GLIP, General Linear Image Processing [Opp67, Pin97a]) muni de ses lois d'addition vectorielle et de multiplication scalaire.

Cependant, la théorie des ensembles et l'algèbre ne permettent pas de caractériser ou de mesurer des ensembles ou des images, d'où l'utilité de la théorie de la mesure.

### 2.1.2 Théorie de la mesure

La théorie de la mesure a été introduite avec l'énonciation de la première définition d'ensemble négligeable [Bor95]. Vient ensuite celle d'ensembles mesurables, et enfin la notion de mesure [Hal74, Leb01, Coh94].

Une mesure est une fonction définie semi-positive associant une valeur à un ensemble et vérifiant la propriété d'additivité. Par conséquent, les fonctions associant le cardinal, la longueur, l'aire ou le volume à un ensemble, sont des mesures. Des mesures particulières ont également été définies ; par exemple, la mesure de Lebesgue, d'une importance capitale en théorie de l'intégration, la mesure de Hausdorff [Hau18] utilisée en géométrie fractale (Section 2.2.2), les mesures de probabilités, les mesures floues (mesures pas forcément additives) [GKN96, Sug74, TK90], et les mesures de Minkowski utilisée en géométrie intégrale [Min03] (Section 2.2.1).

La théorie de la mesure permet de définir des mesures sur des ensembles et par conséquent sur des images, et donc de les caractériser [Ama05, BGCH98, Het99, LCC04, SGC, TM99, ZBK01], mais elle reste peu utilisée en analyse d'image.

### 2.1.3 Topologie générale

La topologie est introduite avec l'un des premiers résultats de géométrie sans dimension (le nombre d'Euler [Eck06]) [Lis47, Cho64].

Ce concept est une branche des mathématiques où sont approfondies les notions de distance (et donc d'espace métrique), continuité, limite, voisinage, frontière, . . . Afin de caractériser un ensemble, des caractéristiques topologiques (sans unité) sont calculées. Ces caractéristiques sont, entre autres, le nombre de trous, le nombre de composantes connexes, mais également le nombre de concavités (ou de convexités) de la frontière, . . . Sont ensuite définis des opérateurs topologiques sur ces ensembles, c'est-à-dire des déformations préservant leur topologie. Puis une distance est calculée afin de mesurer la similarité [Vel01] entre les ensembles résultant et original.

La topologie discrète [EL03] permet d'appliquer ce concept au traitement d'images numériques [AT71, BC99, KR89, Ros70], et étudie en particulier les aspects liés à la connexité des objets d'une image [BN01, BNG03]; sur des images binaires, ceux-ci étant définis soit par l'ensemble des pixels blancs soit par l'ensemble des pixels noirs [Ros79]. Des opérateurs topologiques sont donc construits, transformant, simplifiant l'image / ses objets tout en préservant sa / leur topologie, c'est-à-dire en conservant les valeurs des caractéristiques topologiques. Le concept s'étend au traitement d'images à niveaux de gris [BC00, Bez01, CBB99, CBB01], considérant celles-ci comme empilement d'images binaires. Plus particulièrement, ont été présentées des méthodes de segmentation d'images [BEC97, Dok00], de ligne de partage des eaux [CB97], de lissage d'images 2D et 3D [CB04], et de détection de contours (frontières). Un exemple classique dans cette classe d'opérateurs est l'amincissement (Figure 2.2).

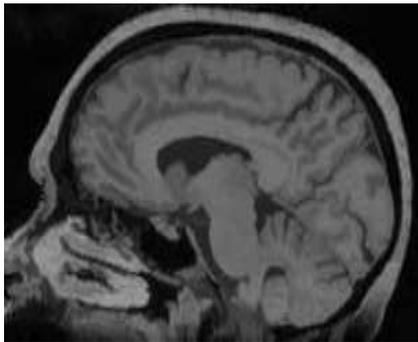


Image IRM d'un cerveau humain

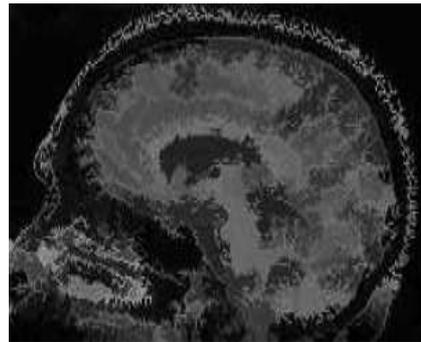


Image filtrée puis amincie

FIG. 2.2 – Amincissement d'une image IRM de cerveau [BC00].

Les caractéristiques topologiques fréquemment employées en analyse d'image sont peu nombreuses. Pour la caractérisation de la connexité, le nombre d'Euler, égal à la différence entre le nombre de composantes connexes et le nombre de trous, en deux dimensions, est le plus utilisé. La caractérisation de la proximité est réalisée à l'aide de mesure de distances, comme les distances d'Euclide, de Hausdorff, d'Asplund, . . . [DD06] De plus, les opérateurs sont limités par la préservation de la topologie.

#### 2.1.4 Synthèse

L'analyse ensembliste et topologique caractérise une image par la détermination de mesures et d'opérateurs de déformations. Cependant, les caractéristiques topologiques sont définies principalement sur des images binaires, et ne caractérisent que globalement l'image ou les structures présentes dans l'image. De plus, ils ne suffisent pas à une caractérisation complète, car deux ensembles visuellement différents peuvent être topologiquement équivalents. Afin de différencier de tels ensembles, d'autres mesures - géométriques et morphométriques - sont définies.

## 2.2 Analyse géométrique

### 2.2.1 Géométrie intégrale

La géométrie convexe, fondée sur les fonctionnelles de Minkowski [Min03], permet de caractériser géométriquement un ensemble convexe dans  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Il existe exactement  $n + 1$  fonctionnelles de Minkowski, vérifiant certaines propriétés (additivité, continuité, invariance par déplacements) et formant une base des mesures dans  $\mathbb{R}^n$  [Had57]. Elles sont donc linéairement indépendantes et toute autre fonctionnelle vérifiant ces propriétés est une combinaison linéaire de celles-ci. Par exemple, ces fonctionnelles sont l'aire, le périmètre et le nombre d'Euler sur  $\mathbb{R}^2$ , le volume, la surface, la courbure moyenne et le nombre d'Euler sur  $\mathbb{R}^3$ . La géométrie intégrale [Bla55, Mec98, San04] a généralisé la géométrie convexe aux unions finies d'ensembles convexes. Ce concept s'applique au traitement d'images numériques, puisque le plus petit élément (pixel en 2D) est en effet un ensemble convexe [MR01].

Cependant, les fonctionnelles de Minkowski ne suffisent pas à une caractérisation complète car elles peuvent être identiques pour deux ensembles visuellement différents [Sch03] (Figure 2.3).

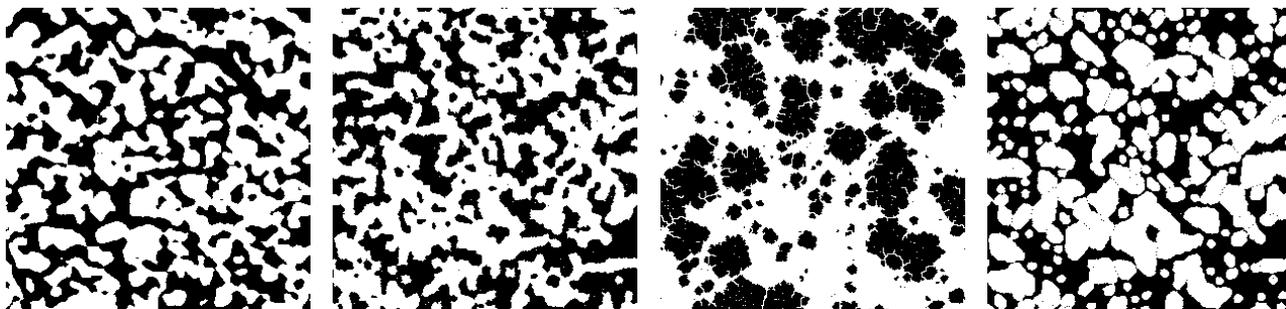


FIG. 2.3 – Quatre images binaires (de taille  $300 \times 300$  pixels ou  $1mm \times 1mm$ ) de verre de borosilicate visuellement différentes et ayant les mêmes fonctionnelles de Minkowski [Sch03] : aire  $0.437mm^2$ , périmètre  $30.28mm$ , nombre d'Euler 11 ou 16 selon la connexité (3.2.3).

Des fonctionnelles géométriques (mesures de dimension entière supérieure ou égale à 1) telles que l'aire et le périmètre en 2D ou la surface et le volume en 3D, sont ainsi définies. Elles permettent de caractériser un ensemble ou une image [Sev] et sont calculées globalement ou localement [Gra71, LKD07, NOP99].

### 2.2.2 Géométries différentielle et fractale

La géométrie différentielle [Cla41, DoC76, Mon99, Spi79] est l'application des outils du calcul différentiel à l'étude de la géométrie. Les éléments de base sont les variétés différentielles, ensembles ayant une régularité suffisante pour envisager la notion de dérivation, et les fonctions définies sur ces variétés. Cette géométrie permet d'étudier les propriétés d'une courbe dans le plan, ou d'une surface dans l'espace tri-dimensionnel, et de définir des notions géométriques, comme l'hyperplan, la tangente, la courbure ou la torsion. Les éléments de la géométrie différentielle sont donc utilisés pour l'analyse des courbes et des surfaces euclidiennes lisses (régulières).

Considérant une image en niveaux de gris 2D comme une surface topographique dans un espace à trois dimensions, en chaque point de l'image se calcule la courbure. Par exemple, la courbure gaussienne se détermine à partir des dérivées partielles de l'intensité. La géométrie différentielle présente diverses applications en traitement d'image [Sap01] : filtrage [SMR87], réhaussement de contraste, ...

Les mesures définies dans le cadre de la géométrie différentielle se limitent aux ensembles réguliers, c'est-à-dire aux ensembles de frontière lisse (dérivable) voire continue et dérivable par morceaux. La géométrie fractale est donc introduite afin de pallier cette limite, et ainsi caractériser des structures rugueuses.

La géométrie fractale [Man74] est une branche de la géométrie qui cherche à caractériser mathématiquement des ensembles ayant une forme complexe, très tortueuse ou fragmentée. L'adjectif "fractal" qualifie un ensemble naturel ou géométrique combinant les caractéristiques suivantes :

- ses parties ont la même forme ou structure que le tout, à l'exception du fait qu'elles sont à une échelle différente et peuvent être légèrement déformées ;
- sa forme est soit extrêmement fragmentée, soit extrêmement irrégulière, et reste inchangée quelle que soit l'échelle d'observation.

La géométrie fractale développe des outils mathématiques pour caractériser ce type d'ensembles, définis dans des espaces non euclidiens. En géométrie euclidienne, les figures ont une dimension entière : 0 pour un point, 1 pour une courbe, 2 pour une surface et 3 pour un volume. En revanche, la dimension d'une fractale peut prendre des valeurs fractionnaires. Il s'agit en fait de la vitesse de croissance de la longueur d'une courbe approximée par des segments de droites, lorsque le nombre de segments augmente.

Les fractales se sont révélées adaptées à la représentation de certaines structures naturelles complexes : structures ramifiées des vaisseaux sanguins de l'aorte aux capillaires, géométrie des poumons avec ses branches et leurs ramifications. Ces structures ont une surface très grande dans un volume limité.

Par conséquent, la géométrie fractale a trouvé de nombreuses applications dans les problèmes de traitement d'image. La dimension fractale caractérise la rugosité d'une image. Les dimensions fractales d'ordre supérieur, appelées dimensions multi-fractales, sont utilisées pour caractériser l'inhomogénéité sous-jacente de la texture présente dans une image. En traitement d'images bio-médicales, la dimension fractale peut permettre de diagnostiquer le diabète en analysant des images rétiniennes [CH03] (Figure 2.4), quelques maladies de cerveau [TW05], un cancer du sein [NR05],... La dimension fractale a également été utilisée pour développer des méthodes de traitement d'image, telles que la segmentation [LL97].



Rétine d'un patient sain



Rétine d'un patient diabétique

FIG. 2.4 – Comparaison de la rétine d'un patient normal à celle d'un patient diabétique. La dimension fractale de la distribution vasculaire d'un patient diabétique est plus grande.

La dimension fractale, directement liée à la théorie de la mesure (Section 2.1.2), sert donc à caractériser un ensemble de forme fragmentée ou irrégulière. Dans le traitement d'images numériques, le plus petit élément de l'image (le pixel) impose une limite à la fractalité, et donc à la discrétisation ou à la modélisation de tels ensembles.

### 2.2.3 Géométrie stochastique

Partant de la géométrie intégrale et des probabilités géométriques [San04], la géométrie stochastique [SKM87, Mat75] établit le lien entre la géométrie et les processus stochastiques (mouvement brownien [Bro28], chaînes de Markov [Mar06]). Elle permet de modéliser de façon probabiliste des ensembles ou configurations de points ou d'ensembles, en leur associant une loi de probabilité sur l'espace des configurations possibles (Figure 2.5). Elle consiste à étudier des ensembles de formes aléatoires situés à des positions aléatoires, en supposant que ces ensembles soient fermés et soient des classiques de géométrie euclidienne, tels des réunions de boules ou des pavages.

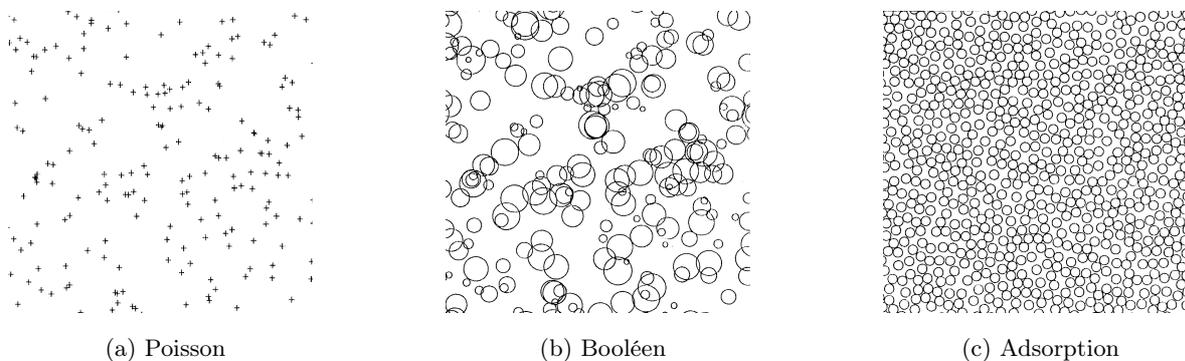


FIG. 2.5 – Simulations de trois modèles stochastiques. (a) Simulation d'un processus homogène de Poisson. (b) Simulation d'un modèle booléen avec des disques aléatoires dont les centres coïncident avec les points de l'image (a). (c) Simulation d'un modèle séquentiel aléatoire d'adsorption

La géométrie stochastique permet d'étudier les mesures d'ensembles distribués aléatoirement dans l'espace, comme, par exemple, les galaxies dans l'univers, les trous dans un milieu poreux, les bulles d'huile dans l'eau. Elle révèle les caractéristiques du modèle aléatoire sous-jacent.

Les images réelles et en particulier les images médicales ou biologiques font généralement apparaître une organisation géométrique visible mais aussi une variabilité importante, auxquelles se rajoute parfois la notion de texture. Cette notion de variabilité peut s'illustrer comme étant, par exemple, des variations de formes de cellules même si elles sont identiques au niveau biologique ou des variations de contraste dues par exemple à la technique d'acquisition. Cette notion de variabilité peut donc être prise en compte dans un modèle stochastique.

En traitement d'image, la géométrie stochastique est utilisée pour caractériser des microstructures [Sch06], simuler des structures métallographiques [MS00] ou extraire des lignes de réseaux à partir d'images satellites [LDZB04]. Elle permet de développer des méthodes d'identification d'objets, de détection de contour [BvL92] ou de segmentation d'image [DDMZ02]. De plus, à partir d'un modèle aléatoire, peuvent être extraites les mesures de Minkowski (Section 2.2.1) [GKM<sup>+</sup>07, Sch07, ACV08, Vil09]. Par conséquent, la géométrie stochastique sert à caractériser les espaces vides dans des emballages de particules supposée sphériques et dispersées aléatoirement [SCDS97, SDS97], à caractériser des grains

de formes arbitraires placés et orientés aléatoirement [BM02], à caractériser des modèles planaires de point [MS05]. Ces caractérisations d'ensemble aléatoires peut également être basée sur l'évolution des mesures pendant les opérations d'érosion et de dilatation (Section 2.3.1) [AKM04].

En traitement d'image, la géométrie stochastique est donc principalement utilisée pour la modélisation. Cependant, des difficultés apparaissent avec la complexité des images à simuler.

#### 2.2.4 Intérêts et limites pour la caractérisation d'images

Diverses mesures sur des ensembles ont été définies, ainsi que des méthodes de simulation d'images, permettant de caractériser un objet ou une image. Cependant, l'étude est principalement effectuée sur des images binaires, la détermination de l'objet étant aisée. De plus, la caractérisation obtenue est généralement globale et mono-échelle. Enfin, le problème de la définition de l'objet se pose toujours avec l'utilisation des images en niveaux de gris (et des images couleurs). Une solution consiste en l'intégration d'un critère de dimensionnalité dans le calcul des mesures [RSS92].

Par ailleurs, les mesures géométriques ne suffisent pas à une caractérisation complète d'images car deux ensembles visuellement différents peuvent avoir des mesures géométriques identiques. Afin de différencier de tels ensembles, d'autres caractéristiques - à savoir morphométriques - sont définies.

## 2.3 Analyse morphométrique

### 2.3.1 Morphologie mathématique

La morphologie mathématique est un ensemble de méthodes d'analyse d'image [Mat67, Ser69] dont le principe de base est de transformer l'image à analyser au moyen d'un ensemble géométrique de base connu, appelé élément structurant, pour mettre en évidence certaines caractéristiques de l'image. Les outils proposés ont été développés au départ pour traiter des images binaires, représentant une union d'ensembles, d'où la notion de morphologie mathématique ensembliste. Leur utilisation a été ensuite étendue aux images à niveaux de gris, parlant alors de morphologie mathématique fonctionnelle, puis aux images couleurs [Ser82, Ser88, CC85, Soi03].

Sur les principes de base de la morphologie mathématique sont définis les opérateurs de dilatation et d'érosion, et par composition de ceux-ci, des filtres morphologiques tels que les opérateurs d'ouverture et de fermeture. Il s'agit de transformations non linéaires d'ensemble. Dans le cas de la morphologie mathématique ensembliste, ces quatre opérateurs sont fondés sur les opérations de Minkowski [Min03]. La Figure 2.6 illustre l'application de ces opérateurs avec un disque de rayon 1 comme élément structurant sur une image binaire de taille  $128 \times 128$  pixels.

La morphologie mathématique a conduit à de nombreux outils pour le filtrage d'image, la segmentation d'image [MB90, Naj94], la détection de contours, la reconnaissance de formes, l'analyse de texture, ... De plus, les opérateurs sont facilement implémentables. Un inconvénient réside cependant dans le fait qu'en général, l'élément structurant est choisi *a priori* et ne dépend donc pas intrinsèquement de l'image.

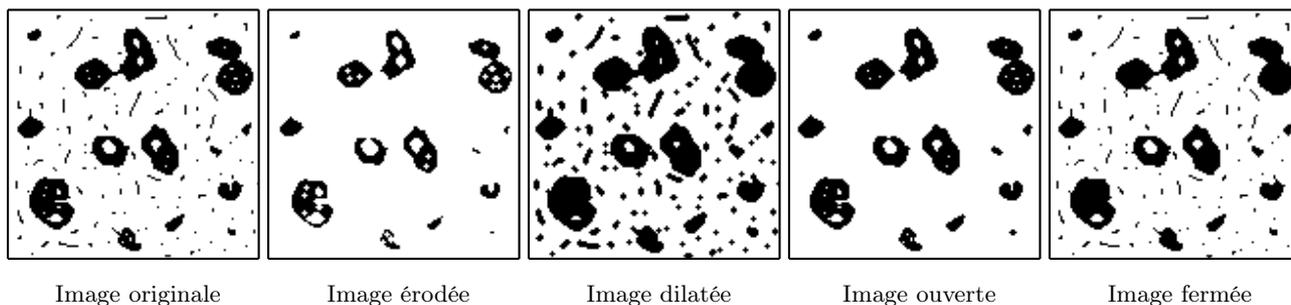


FIG. 2.6 – Opérateurs de morphologie mathématique ensembliste utilisant un disque de rayon 1 comme élément structurant sur une image binaire de taille  $128 \times 128$  pixels.

### 2.3.2 Spectre de forme

A l'origine du spectre de forme se trouve le spectre granulométrique, basé sur la distribution de taille [Del71] et la morphologie mathématique. Le principe du spectre granulométrique est d'observer la variation d'une mesure (l'aire, par exemple) d'un ensemble obtenu suite à une transformation de morphologie mathématique (Section 2.3.1) en fonction de la taille de l'élément structurant [KT98]. Ce spectre permet donc une caractérisation multi-échelle de l'ensemble [Mar87, Mar89]. Le spectre de forme, plus général, consiste donc en l'étude de la variation d'une mesure en fonction d'un paramètre associé à un opérateur. Par exemple, sur une image à niveaux de gris, l'opérateur considéré peut être le seuillage, le paramètre associé étant donc le seuil, et la mesure, la fraction surfacique de l'image seuillée (Figure 2.7).

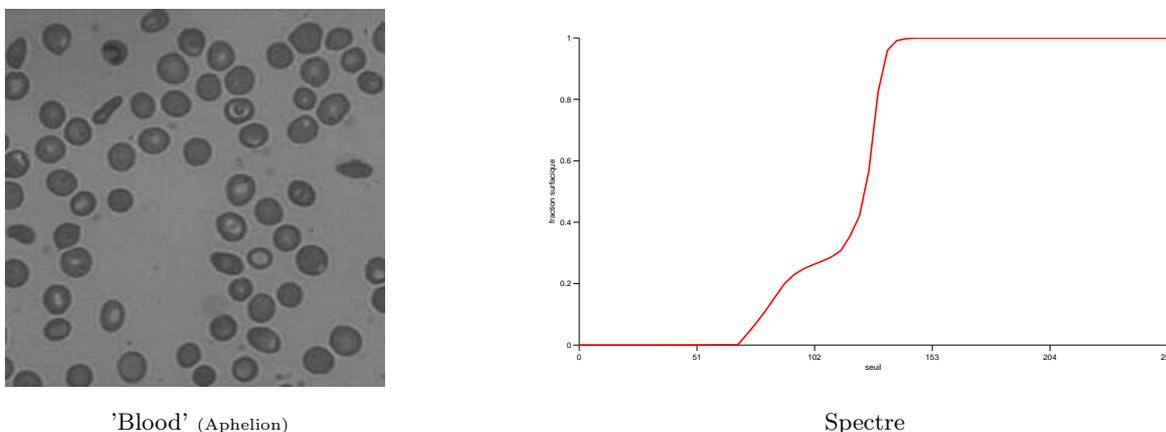


FIG. 2.7 – Spectre de la fraction surfacique de l'image 'Blood' seuillée en fonction de la valeur du seuil.

Dans le traitement et l'analyse d'image, ce concept est fréquemment employé [SG97, HVV07, TDL96], par exemple pour la segmentation, la classification de formes et de textures [ANKM<sup>+</sup>03, AD01, Asa99, DASMC07, VD94, TM02, URW07, VD94]. Il est également utilisé pour déterminer des méthodes de filtrage ou de représentations multi-échelle [DDM01]. De plus, tout spectre utilisant une mesure monotone définit une fonction de répartition (après normalisation de la mesure), et donc, par dérivation, une densité de probabilité, établissant ainsi un lien avec la géométrie stochastique (Section 2.2.3).

Le spectre de forme donne une caractérisation multi-échelle d'une image. Cependant, les mesures étant généralement calculées sur des images binaires, les spectres de forme sont donc eux aussi déterminés principalement sur de telles images. De plus, associant exactement une valeur de mesure à une image binaire, la caractérisation obtenue est globale. Afin de pallier cette limite, l'étude de la variation de la mesure en fonction du paramètre peut se faire sur une fenêtre locale [SD92, DKP89, Vin96].

### 2.3.3 Paramètres de forme

Les caractéristiques topologiques et géométriques ne suffisent pas à la caractérisation complète d'un ensemble. Des caractéristiques morphométriques sont calculées. Ils sont sans unité et invariants par similitude. Ce sont des coefficients compris entre 0 et 1 évaluant une des caractéristiques morphométriques de l'ensemble. Ces caractéristiques sont, entre autres, la compacité, la convexité, la circularité, l'allongement, . . . Pour certains, différentes formules de calculs sont possibles. L'utilisateur en choisit une (ou plusieurs) selon sa convenance et application considérée [AF04, Cla81, Fra03, HK06, LFJB96, Riv06, TDF<sup>+</sup>07, Ung03]. Par exemple, la compacité d'un ensemble peut être définie par le rapport entre son aire et, soit l'aire d'un cercle de périmètre identique, soit l'aire d'un cercle de périmètre égal à celui de son enveloppe convexe, les deux pouvant donner des résultats très différents (Figure 2.8).

Si compacité =  
rapport entre l'aire de l'en-  
semble et l'aire d'un cercle de  
périmètre identique  
alors compacité  $\ll 1$ .



Si compacité =  
rapport entre l'aire de l'en-  
semble et l'aire d'un cercle de  
périmètre égal à celui de son  
enveloppe convexe  
alors compacité  $\approx 1$ .

FIG. 2.8 – Deux déterminations de compacité d'un ensemble 2D donnant des résultats très différents.

En analyse d'image, la détermination de ces caractéristiques morphométriques permet de caractériser et classifier des structures présentes dans une image [BA01, CY05, RRB03, TGH04]. Ces caractéristiques sont donc déterminées sur des images numériques binaires, en considérant l'objet défini par l'ensemble des pixels blancs (ou noirs). Mais le problème de la définition de l'objet se pose avec l'utilisation des images à niveaux de gris. De plus, sur une image binaire, à chaque caractéristique est attribuée une seule valeur. La caractérisation obtenue est donc globale, les caractéristiques étant indépendantes du contexte local de l'image. A ces inconvénients vient s'ajouter le fait que certaines de ces caractéristiques sont définies pour un ensemble comprenant une seule composante connexe. Un problème intervient donc lorsque l'image binaire est composée d'une distribution de formes.

Il existe par conséquent de nombreuses caractéristiques morphométriques, mais nombre d'entre elles ont des définitions multiples et pas forcément rigoureuses. De plus, ils sont généralement définis pour des images binaires, et ne caractérisent que globalement l'image ou la structure présente dans l'image.

### 2.3.4 Intérêts et limites pour la caractérisation d'images

Le traitement multi-échelle est abordé grâce aux opérateurs de morphologie mathématique et aux spectres de forme, et l'utilisation de fenêtres locales permet de pallier la limite de globalité.

Les caractéristiques morphométriques sont généralement fonction (et plus précisément quotient) de caractéristiques géométriques. Une multitude de telles caractéristiques est donc définie, et le vocabulaire utilisé pour les nommer n'est parfois pas rigoureux. De plus, les caractéristiques géométriques et morphométriques renseignent respectivement sur la taille et sur la forme de l'ensemble. Par conséquent, elles fournissent des informations complémentaires.

## 2.4 Synthèse bibliographique

L'objectif général de cette thèse est de caractériser quantitativement les différentes structures présentes dans une image par la mise en place de mesures d'image adaptatives relatives à des caractéristiques géométriques et morphométriques. Un travail bibliographique ciblé volontairement sur ces deux domaines, a été effectué et a révélé les limites des caractérisations actuelles.

Les mesures, qu'elles soient géométriques ou morphométriques, sont au préalable définies pour des ensembles. Les caractéristiques topologiques sont définies rigoureusement mais sont peu nombreuses ; elles servent généralement à la caractérisation de la connexité de l'objet. La plus connue est le nombre d'Euler ; le nombre de convexité de la frontière est beaucoup moins utilisé. Des difficultés commencent à apparaître pour les caractéristiques géométriques, où plusieurs définitions sont valables pour une seule caractéristique (la longueur par exemple). La caractérisation est plus fine mais ne considère toujours pas la notion de forme. Pour cette raison, sont employées les caractéristiques morphométriques, mais le problème de multiplicité des définitions s'amplifie, car chaque utilisateur définit une caractéristique selon sa convenance, ce qui apporte des confusions.

Toutes ces mesures sont déterminées sur des images binaires (noir et blanc), 2D ou 3D, l'objet étant déterminé (arbitrairement) par la zone blanche. La caractérisation obtenue est généralement mono-échelle et globale. Les images à niveaux de gris sont caractérisées, soit en les considérant comme ensemble de sections binaires (et par la détermination du spectre de forme [SB05], cette caractérisation devenant par conséquent multi-échelle et éventuellement locale [SD92]), soit en considérant leur surface topographique (ajoutant alors une dimension à l'espace, non homogène aux précédentes [RSS92]). Cependant, ces caractérisations multi-échelles d'images à niveaux de gris ne sont pas adaptives en intensité. Autrement dit, un objet ne possède pas les mêmes caractéristiques selon qu'il apparaisse clair ou sombre sur une image.

Il apparait donc que les caractérisations des différentes structures présentes dans une image par la mise en place de mesures d'images ne sont pas jusqu'alors adaptatives à la fois en intensité (critère de dimensionnalité [RSS92], modèle LIP [Pin87, JP87, JP88]), en échelle (spectre de forme) et en espace (local). Par conséquent, elles ne peuvent pas être pertinentes sur des images présentant des structures hétérogènes.

Face à la problématique posée, ce travail bibliographique a révélé les limites des caractérisations d'images. Elles sont généralement globales et mono-échelles, et réalisée à partir d'images binaires. L'association de diagrammes de forme et des voisinages adaptatifs généraux va permettre de pallier ces limites en apportant une réponse originale.

Deuxième partie

Analyse d'image binaire



# Sommaire de la Deuxième partie

---

<b>3</b>	<b>Géométrie intégrale</b>	<b>23</b>
3.1	Introduction par la théorie de la mesure . . . . .	23
3.1.1	Algèbre . . . . .	23
3.1.2	Géométrie . . . . .	26
3.2	Fonctionnelles de Minkowski . . . . .	27
3.2.1	Définition et propriétés . . . . .	27
3.2.2	Topologie numérique et fonctionnelles de Minkowski mono-dimensionnelles . . . . .	28
3.2.3	Topologie numérique et fonctionnelles de Minkowski bi-dimensionnelles . . . . .	32
3.2.4	Estimation des fonctionnelles . . . . .	41
3.2.5	Synthèse . . . . .	42
3.3	Analyse multi-échelle par les fonctions de Minkowski . . . . .	42
3.3.1	Fonctions de Minkowski globales . . . . .	43
3.3.2	Fonctions de Minkowski locales . . . . .	43
3.4	Synthèse . . . . .	44
<b>4</b>	<b>Morphométrie</b>	<b>45</b>
4.1	Article 1 : Shape diagrams for compact convex sets . . . . .	46
4.1.1	Introduction . . . . .	46
4.1.2	Shape functionals . . . . .	47
4.1.3	Shape diagrams . . . . .	50
4.1.4	Shape diagrams dispersion quantification . . . . .	55
4.1.5	Shape diagrams overlapping quantification . . . . .	58
4.1.6	Synthesis . . . . .	68
4.1.7	Conclusion . . . . .	71
4.2	Article 2 : Shape diagrams for compact simply connected sets . . . . .	72
4.2.1	Introduction . . . . .	72
4.2.2	Shape functionals . . . . .	72
4.2.3	Shape diagrams . . . . .	74
4.2.4	Shape diagrams dispersion quantification . . . . .	76
4.2.5	Shape diagrams overlapping quantification . . . . .	81
4.2.6	Synthesis . . . . .	89
4.2.7	Conclusion . . . . .	90

4.3	Article 3 : Shape diagrams - convexity discrimination . . . . .	91
4.3.1	Introduction . . . . .	91
4.3.2	Shape convexity . . . . .	92
4.3.3	Convexity discrimination for analytic simply connected sets . . . . .	93
4.3.4	Shape functionals for a discretized simply connected set . . . . .	94
4.3.5	Shape diagrams for a basis of various discretized simply connected compact sets . . . . .	94
4.3.6	Shape diagrams for similar discretized simply connected compact sets . . . . .	98
4.3.7	Synthesis . . . . .	104
4.3.8	Global synthesis for the three parts of this study . . . . .	105
4.3.9	Conclusion . . . . .	105
4.4	Applications . . . . .	105
4.4.1	Classification de formes de graines . . . . .	105
4.4.2	Homogénéité des formes de cellules cornéennes segmentées . . . . .	107

---

# Chapitre 3

## Géométrie intégrale

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Introduction par la théorie de la mesure</b>	<b>23</b>
3.1.1	Algèbre	23
3.1.2	Géométrie	26
<b>3.2</b>	<b>Fonctionnelles de Minkowski</b>	<b>27</b>
3.2.1	Définition et propriétés	27
3.2.2	Topologie numérique et fonctionnelles de Minkowski mono-dimensionnelles	28
3.2.3	Topologie numérique et fonctionnelles de Minkowski bi-dimensionnelles	32
3.2.4	Estimation des fonctionnelles	41
3.2.5	Synthèse	42
<b>3.3</b>	<b>Analyse multi-échelle par les fonctions de Minkowski</b>	<b>42</b>
3.3.1	Fonctions de Minkowski globales	43
3.3.2	Fonctions de Minkowski locales	43
<b>3.4</b>	<b>Synthèse</b>	<b>44</b>

---

### 3.1 Introduction par la théorie de la mesure

#### 3.1.1 Algèbre

Cette section présente des rappels [GH07] de théorie de la mesure appliqués à des ensembles géométriques [Coh94, Edg90]. La définition d'espace mesurable est tout d'abord énoncée, afin d'y associer ensuite celle de mesure. Dans un premier temps, les espace considérés sont de dimension  $n = 1$ .

Soit  $X$  un ensemble quelconque et  $\mathcal{P}(X)$  l'ensemble des parties de  $X$ .

**Définition 3.1** [*Tribu, Espace mesurable, Ensemble mesurable*]

Soit  $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ .  $\mathcal{T}$  est une tribu sur  $X$  si et seulement si :

1.  $\emptyset \in \mathcal{T}, X \in \mathcal{T}$ .
2.  $\forall (Y_j)_{j \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{T}, \bigcup_{j \in \mathbb{N}} Y_j \in \mathcal{T}$  ( $\mathcal{T}$  est stable par union dénombrable).
3.  $\forall (Y_j)_{j \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{T}, \bigcap_{j \in \mathbb{N}} Y_j \in \mathcal{T}$  ( $\mathcal{T}$  est stable par intersection dénombrable).

4.  $\forall Y \in \mathcal{T}, Y^c \in \mathcal{T}$  où  $Y^c = X \setminus Y$  ( $\mathcal{T}$  est stable par passage au complémentaire).

Le couple  $(X, \mathcal{T})$  est alors appelé "espace mesurable". Les parties de  $X$  qui sont (respectivement, ne sont pas) des éléments de  $\mathcal{T}$  sont dites mesurables (respectivement, non mesurables).

**Définition 3.2** [*Tribu engendrée par un ensemble*]

Soient  $Y \subseteq \mathcal{P}(X)$ . La tribu engendrée par  $Y$  est la plus petite tribu contenant  $Y$ , c'est-à-dire la tribu  $\mathcal{T}(Y)$  intersection de toutes les tribus sur  $X$  contenant  $Y$  (cette intersection est non vide car  $\mathcal{P}(X)$  est une tribu contenant  $Y$ ).

**Définition 3.3** [*Topologie*]

Une topologie sur  $X$  est donnée par une famille de parties de  $X$ , appelées ouverts de  $X$ , contenant  $\emptyset$  et  $X$ , stable par union quelconque et par intersection finie.

**Définition 3.4** [*Tribu borélienne*]

Soit  $X$  muni d'une topologie (un espace métrique, par exemple). La tribu borélienne (ou tribu de Borel), notée  $\mathcal{B}(X)$ , est la tribu engendrée par l'ensemble des ouverts de  $X$ .

**Définition 3.5** [*Mesure*]

Soit  $(X, \mathcal{T})$  un espace mesurable et  $\mathcal{M} : \mathcal{T} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$  une application.  $\mathcal{M}$  est une mesure si et seulement si :

1.  $\mathcal{M}(\emptyset) = 0$
2.  $\mathcal{M}$  est additive, c'est-à-dire pour toute famille  $(Y_j)_{j \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{T}$  de parties disjointes deux à deux (i.e. telle que  $Y_{j^1} \cap Y_{j^2} = \emptyset$ , si  $j^1 \neq j^2$ ) :

$$\mathcal{M} \left( \bigcup_{j \in \mathbb{N}} Y_j \right) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \mathcal{M}(Y_j).$$

Le triplet  $(X, \mathcal{T}, \mathcal{M})$  est alors appelé "espace mesuré".

**Proposition 3.1** Soit  $(X, \mathcal{T}, \mathcal{M})$  un espace mesuré. La mesure  $\mathcal{M}$  vérifie les quatre propriétés suivantes :

1. Monotonie :

Si  $Y_1, Y_2 \in \mathcal{T}$  alors

$$Y_1 \subseteq Y_2 \Rightarrow \mathcal{M}(Y_1) \leq \mathcal{M}(Y_2). \quad (3.1)$$

2. Sous-additivité :

Si  $(Y_j)_{j \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{T}$  alors

$$\mathcal{M} \left( \bigcup_{j \in \mathbb{N}} Y_j \right) \leq \sum_{j \in \mathbb{N}} \mathcal{M}(Y_j). \quad (3.2)$$

3. Continuité croissante :

Si  $(Y_j)_{j \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{T}$  telle que  $Y_j \subseteq Y_{j+1}$  pour tout  $j \in \mathbb{N}$  alors

$$\mathcal{M} \left( \bigcup_{j \in \mathbb{N}} Y_j \right) = \lim_{j \rightarrow \infty} \mathcal{M}(Y_j) = \sup_{j \in \mathbb{N}} \mathcal{M}(Y_j). \quad (3.3)$$

4. *Continuité décroissante* :

Si  $(Y_j)_{j \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{T}$  telle que  $Y_{j+1} \subseteq Y_j$  pour tout  $j \in \mathbb{N}$  alors

$$\mathcal{M} \left( \bigcap_{j \in \mathbb{N}} Y_j \right) = \lim_{j \rightarrow \infty} \mathcal{M}(Y_j) = \inf_{j \in \mathbb{N}} \mathcal{M}(Y_j). \quad (3.4)$$

**Définition 3.6** [*Mesure de Lebesgue*]

*Théorème de Carathéodory* : Il existe une unique mesure sur  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ , notée  $\mathcal{L}^1$  et appelée mesure de Lebesgue sur les boréliens, telle que  $\mathcal{L}^1([\alpha, \beta]) = \beta - \alpha$ , pour tout  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $-\infty < \alpha < \beta < +\infty$ . Cette mesure de Lebesgue est définie, pour  $Y \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ , par

$$\mathcal{L}^1(Y) = \inf_{(Y_j)_{j \in \mathbb{N}} \in E_Y} \sum_{j \in \mathbb{N}} l(Y_j)$$

où  $E_Y = \left\{ (Y_j)_{j \in \mathbb{N}} : Y_j = ]a_j, b_j[, -\infty < a_j \leq b_j < \infty, \forall j \in \mathbb{N}, Y \subseteq \bigcup_{j \in \mathbb{N}} Y_j \right\}$  et  $l(Y) = b - a$  si  $Y = ]a, b[, -\infty < a \leq b < \infty$ .

L'objectif étant de travailler avec des images en deux dimensions ( $n = 2$ ), les notions de tribu produit et de mesure associée à de telles tribus sont nécessaires.

**Définition 3.7** [*Tribu produit*]

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  une famille d'espaces mesurables. La tribu produit  $\bigotimes_{i=1}^n \mathcal{T}_i$  sur  $\prod_{i=1}^n X_i$  est

la tribu engendrée par  $\prod_{i=1}^n \mathcal{T}_i = \left\{ \prod_{i=1}^n Y_i : \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, Y_i \in \mathcal{T}_i \right\}$ .

**Théorème 3.1** [*Mesure produit*]

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $(X_i, \mathcal{T}_i, \mathcal{M}_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  une famille d'espaces mesurés, alors il existe une unique mesure

$\mathcal{M} = \bigotimes_{i=1}^n \mathcal{M}_i$  sur  $\bigotimes_{i=1}^n \mathcal{T}_i$  telle que  $\mathcal{M} \left( \prod_{i=1}^n Y_i \right) = \prod_{i=1}^n \mathcal{M}_i(Y_i)$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket, Y_i \in \mathcal{T}_i$ .

**Remarque 3.1** [*Tribu produit borélienne, Mesure produit de Lebesgue*]

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , la tribu produit borélienne, notée  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ , et la mesure de Lebesgue sur  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ , notée  $\mathcal{L}^n$ , sont définies par  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) := \bigotimes_{i=1}^n \mathcal{B}(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{L}^n := \bigotimes_{i=1}^n \mathcal{L}^1$ .

Une image est une application d'un ensemble, appelé support physique, dans l'ensemble des intensités (l'échelle de gris). Afin de définir des mesures sur des images, il faudra préalablement savoir si l'image est mesurable.

**Définition 3.8** [*Fonction mesurable*]

Soient  $(X_1, \mathcal{T}_1)$  et  $(X_2, \mathcal{T}_2)$  deux espaces mesurables. Une fonction  $f : X_1 \rightarrow X_2$  est  $(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$ -mesurable si  $f^{-1}(Y_2) \in \mathcal{T}_1$  pour tout  $Y_2 \in \mathcal{T}_2$ . En l'absence d'ambiguïté possible, la fonction est dite "mesurable" au lieu de " $(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$ -mesurable".

### 3.1.2 Géométrie

L'utilisation de la mesure de Lebesgue dans  $\mathbb{R}^n$  permet de mesurer les ensembles ayant un volume  $n$ -dimensionnel, mais elle n'est pas suffisante pour mesurer les ensembles qui n'ont pas de volume dans  $\mathbb{R}^n$ . Par exemple, si  $n = 3$ , la mesure de Lebesgue  $\mathcal{L}^3$  permet d'attribuer à tous les boréliens de  $\mathbb{R}^3$  un volume. Mais, dans de nombreux problèmes, il est nécessaire de déterminer l'aire d'une surface ou la longueur d'une courbe tracée dans  $\mathbb{R}^3$ . La mesure de Lebesgue de tels ensembles (si ils sont mesurables) est nulle, ce qui conduit à l'introduction de nouvelles mesures pour définir les concepts d'aire ou de longueur de parties de  $\mathbb{R}^3$ . C'est dans cette perspective que des mesures de dimension  $d \in [0, n[$  sont construites : les mesures de Hausdorff [Hau18, Rog70].

#### Définition 3.9 [Mesure de Hausdorff]

Soient  $Y \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$  et  $d \in \mathbb{R}_+$ . La mesure de Hausdorff  $d$ -dimensionnelle de  $Y$  est définie par

$$\mathcal{H}_d^n(Y) = \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \alpha(d) r(C_k)^d : Y \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k, \text{diam}(C_k) \leq \epsilon \right\}$$

où, pour tout  $k \geq 1$ ,  $C_k \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ ,  $r(C_k) := \frac{\text{diam}(C_k)}{2} = \sup\{|x - y| : x, y \in C_k\}$  est le demi-diamètre de  $C_k$  et  $\alpha(d) := \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)}$  est le volume de la boule unité de dimension  $d$ .

#### Définition 3.10 [Courbe rectifiable, Longueur de courbe]

Soit  $Y$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $\gamma : Y \rightarrow \mathbb{R}^n$  une courbe continue injective.  $\gamma$  est rectifiable sur  $Y$  si et seulement si pour tout  $[a, b] \subset Y$  et pour toute suite croissante  $(t_k)_{k \in \llbracket 0, N+1 \rrbracket}$  telle que  $(a, b) = (t_0, t_{N+1})$  et  $N \in \mathbb{N}$  :

$$L_{[a,b]}(\gamma) := \sup \left\{ \sum_{k=0}^N |\gamma(t_{k+1}) - \gamma(t_k)| \right\} < +\infty$$

Dans ce cas,  $L(\gamma) := \sup_{[a,b] \subset Y} L_{[a,b]}(\gamma)$  est la longueur de  $\gamma$ .

**Théorème 3.2** Pour tout  $d \geq 0$ ,  $\mathcal{H}_d^n$  est une mesure borélienne sur  $\mathbb{R}^n$ .

**Proposition 3.2** 1. La mesure  $\mathcal{H}_0^n$  est une mesure de comptage (mesure cardinale).

2. Si  $Y$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $\gamma : Y \rightarrow \mathbb{R}^n$  une courbe rectifiable injective alors  $\mathcal{H}_1^1(\gamma(Y)) = |Y|$  où  $|Y| := L(\gamma)$  est la longueur de  $\gamma$ .
3. Si  $Y \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$  et  $\partial Y \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n-1})$  ( $\partial Y$  dénote la frontière de  $Y$ ) alors  $\mathcal{H}_{n-1}^n(Y)$  permet de calculer la "surface" ou le volume  $(n-1)$ -dimensionnel de  $Y$ .
4. Si  $Y \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$  alors  $\mathcal{H}_n^n(Y) = \mathcal{L}^n(Y)$ .

#### Définition 3.11 [Ensemble rectifiable]

Soit  $Y \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ .  $Y$  est  $d$ -rectifiable si et seulement s'il existe une famille dénombrable d'applications  $f_i : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $\mathcal{C}^1$  telle que  $\mathcal{H}_d^n \left( Y \setminus \bigcup_i f_i(\mathbb{R}^d) \right) = 0$ .

#### Proposition 3.3 [Fonctionnelles de Minkowski]

Soient  $(\mathcal{I}_d^n)_{d \in \llbracket 0, n \rrbracket}$  les fonctionnelles de Minkowski ou mesures de Favard ou mesures de Steinhaus

[Fav33, Fed69, Mor88, Min03, She42, Ste54] sur  $\mathbb{R}^n$  (Section 2.2.1) et  $Y \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ . Si  $Y$  est  $d$ -rectifiable alors, à une constance près,

$$\mathcal{I}_d^n(Y) = \mathcal{H}_d^n(Y)$$

La moyenne des mesures de Lebesgue  $\mathcal{L}^d$  de toutes les projections de  $Y$  sur un sous-espace  $d$ -dimensionnel de  $\mathbb{R}^n$  est une approximation  $\mathcal{I}_d^n(Y)$  (formule de Cauchy, 3.2.3) [AD97].

**Proposition 3.4** Soit  $Y \subset \mathbb{R}^n$ .

1.  $\exists d \geq 0, \mathcal{H}_d^n(Y) < +\infty \Rightarrow \forall d' > d, \mathcal{H}_{d'}^n(Y) = 0$
2.  $\exists d > 0, \mathcal{H}_d^n(Y) > 0 \Rightarrow \forall d' < d, \mathcal{H}_{d'}^n(Y) = +\infty$
3.  $\forall d < n, Y$  ouvert non vide de  $\mathbb{R}^n \Rightarrow \mathcal{H}_d^n(Y) = +\infty$
4.  $\forall d > n, \mathcal{H}_d^n(Y) = 0$

## 3.2 Fonctionnelles de Minkowski

### 3.2.1 Définition et propriétés

Dans un espace continu, tous les ensembles ne sont pas constitués d'une union finie de convexes. Cependant, en imagerie numérique, tout ensemble est constitué d'une union finie de pixels (convexes). Ceci explique le choix de la géométrie intégrale, domaine mathématique définissant des mesures vérifiant certaines propriétés sur des ensembles convexes, s'étendant sous certaines conditions aux unions finies de convexes.

Les fonctionnelles de Minkowski sont la base de la géométrie intégrale. En deux dimensions, elles sont l'aire, le périmètre, le nombre d'Euler, et en trois dimensions, le volume, la surface, l'intégrale de la courbure moyenne, le nombre d'Euler. Autrement dit, dans un espace  $n$ -dimensionnel,  $n \in \mathbb{N}$ , elles sont notées  $\mathcal{I}_d^n$  et sont les  $n + 1$  mesures de Hausdorff  $\mathcal{H}_n^d$ ,  $d \in \llbracket 0, n \rrbracket$ .

**Proposition 3.5** Les fonctionnelles de Minkowski vérifient les cinq propriétés suivantes sur des ensembles compacts convexes.

1. *Croissance* : Soient  $Y_1, Y_2$  deux ensembles compacts convexes de dimension  $n \in \mathbb{N}$ .

$$Y_1 \subseteq Y_2 \implies \mathcal{I}_d^n(Y_1) \leq \mathcal{I}_d^n(Y_2)$$

2. *Invariance par transformations rigides* (rotation, translation, réflexion, ...) : Soient  $Y$  un ensemble compact convexe de dimension  $n \in \mathbb{N}$  et  $Y_t$  le transformé de  $Y$  par la transformation rigide  $t$ .

$$\mathcal{I}_d^n(Y) = \mathcal{I}_d^n(Y_t)$$

3. *Homogénéité* : Soient  $Y$  un ensemble compact convexe de dimension  $n \in \mathbb{N}$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

$$\mathcal{I}_d^n(\lambda Y) = |\lambda|^d \mathcal{I}_d^n(Y)$$

4. *C-additivité* : Soient  $Y_1, Y_2$  deux ensembles compacts convexes de dimension  $n \in \mathbb{N}$ .

$$\mathcal{I}_d^n(Y_1) + \mathcal{I}_d^n(Y_2) = \mathcal{I}_d^n(Y_1 \cup Y_2) + \mathcal{I}_d^n(Y_1 \cap Y_2)$$

5. *Continuité* : Soient  $Y$  un ensemble compact convexe de dimension  $n \in \mathbb{N}$  et  $(Y_i)_{i \in \mathbb{N}}$  une famille d'ensembles compacts convexes de dimension  $n \in \mathbb{N}$ .

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} d_{(H)}(Y_i, Y) = 0 \implies \lim_{i \rightarrow +\infty} \mathcal{I}_d^n(Y_i) = \mathcal{I}_d^n(Y)$$

où  $d_{(H)}$  dénote la distance de Hausdorff [DD06].

Parmi les cinq propriétés précédentes, trois s'appliquent aux unions finies de convexes : l'invariance par transformations rigides, l'homogénéité, l'additivité. Le cas d'un secteur angulaire  $Y_i$  de rayon  $r \in \mathbb{R}_+^*$  et d'angle  $2\pi - 2\pi/i = 2\pi((i-1)/i)$ ,  $i \in ]1, +\infty[$  donne un contre-exemple pour la continuité. En effet, lorsque  $i$  tend vers l'infini, le secteur angulaire  $Y_i$  tend vers le disque  $Y$  de rayon  $r$  selon la distance de Hausdorff, autrement dit,  $\lim_{i \rightarrow +\infty} d_{(H)}(Y_i, Y) = 0$ . Cependant son périmètre  $\mathcal{I}_1^2(Y_i) = 2r + 2\pi r(i-1)/i$  tend vers  $2r + 2\pi r$  qui diffère du périmètre du disque  $\mathcal{I}_1^2(Y) = 2\pi r$ .

Partant de l'hypothèse que l'unité de calibration d'un ensemble  $Y$  est le mètre  $m$ , les fonctionnelles de Minkowski  $\mathcal{I}_d^n(Y)$  s'expriment en  $m^d$ . Ce sont alors les fonctionnelles d'intensité.

Pour des raisons théoriques et pratiques, les fonctionnelles de densité sont utilisées : chaque fonctionnelle est divisée par l'aire du support spatial de l'image considérée [SB05]. Ainsi, les fonctionnelles s'expriment en  $m^{d-n}$ .

Les fonctionnelles de Minkowski d'une image numérique (discrète) sont estimées. Son support spatial  $\mathcal{D}^n$  est un sous-ensemble de l'espace discret  $\mathbb{Z}^n$ . Il est recouvert [Bes45, Bes46] par des cellules dépendantes du plus petit élément de l'image. Ce recouvrement sert à la représentation de l'image, et les fonctionnelles de Minkowski sont estimées à partir de cette représentation.

### 3.2.2 Topologie numérique et fonctionnelles de Minkowski mono-dimensionnelles

#### Topologie numérique

Soit  $X^1$  une image binaire mono-dimensionnelle de taille  $l_1 \in \mathbb{N}$ . Le support spatial de  $X^1$  est noté  $\mathcal{D}^1 = \llbracket 0, l_1 \rrbracket$ .  $X^1$  est représentée par un vecteur  $B^1 = (b_x)_{x \in \mathcal{D}^1}$ , où  $b_x$ , appartenant à  $\{0, 1\}$ , est la valeur de l'intensité lumineuse du lixel (abréviation de "linear element", le plus petit élément de l'image) de coordonnée  $x \in \mathcal{D}^1$ . Par convention, l'*objet* et le *fond* de l'image sont représentés par les lixels d'intensité  $b_x = 1$  et  $b_x = 0$ , respectivement.

La notion de voisinage induit la topologie sur  $\mathcal{D}^1$ . Deux lixels de l'objet (ou du fond) de coordonnées  $x^1$  et  $x^2$  sont 2-adjacents si et seulement si  $|x^1 - x^2| = 1$ . Le 2-voisinage d'un lixel est donc défini comme l'ensemble des lixels 2-adjacents à celui-ci [Ros74].

La notion de voisinage permet d'établir celle de connexité [Ros70]. En effet, deux lixels de l'objet (ou du fond) sont 2-connectés s'il existe un chemin de lixels 2-adjacents les reliant. De manière analogue, une composante connexe dans une image binaire mono-dimensionnelle est un ensemble de lixels adjacents formant un chemin dans l'image. Afin de satisfaire le théorème de Jordan, la connexité doit être la même pour les lixels du fond et pour les lixels de l'objet [Ros75]. Par conséquent, cette connexité d'image mono-dimensionnelle est notée  $(2, 2)$ , la première coordonnée correspondant à l'objet, et la deuxième au fond.

Le support spatial 'physique' de l'image (c'est-à-dire le support spatial 'continu') est recouvert par des cellules associées aux lixels. Une cellule (segment de taille la distance interlixe) est composée d'une

arête et de deux sommets. Soit une cellule est centrée en un lixel (cellule intralixel), soit une cellule est construite en reliant des lixels (cellule interlixel). La Figure 3.1 illustre le recouvrement d'une image constituée de quatre lixels, et ses deux représentations possibles.

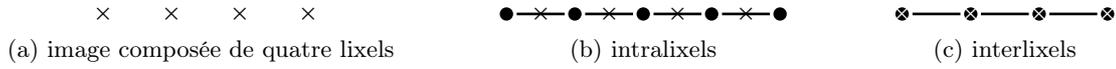


FIG. 3.1 – Image constituée de quatre lixels (a) représentés par des croix ( $\times$ ). L'image est recouverte par des cellules intralixels (b) ou interlixels (c), composées de sommets et d'arêtes (sommets= $\bullet$ , arête= $\text{---}$ ). Remarque : l'image (a) est recouverte par quatre cellules intralixels ou par trois cellules interlixels.

La 2-adjacence est associée à la représentation des cellules :

- En utilisant les cellules intralixels, deux lixels de l'objet (du fond) sont adjacents si et seulement si leurs cellules respectives possèdent un sommet en commun (2-adjacence).
- En utilisant les cellules interlixels, deux lixels de l'objet (du fond) sont adjacents si et seulement si ils partagent la même arête (2-adjacence).

La Figure 3.2 expose les deux représentations de cellules de l'image mono-dimensionnelle binaire  $X^1$  associée au vecteur  $B^1$ .

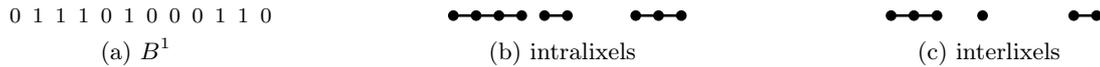


FIG. 3.2 – Représentations des cellules intralixels (b) et interlixels (c) de l'image binaire  $X^1$  associée au vecteur  $B^1$  (a).

Dans le but de calculer, de manière efficace, les nombres de sommets  $v^1$  et d'arêtes  $e^1$  de l'objet (lixels d'intensités égales à 1), les différentes configurations de voisinages (de taille deux lixels) de l'image originale  $X^1$  sont déterminées [NOP99, OM00, LOH01, ONS02, ONS03, OS06, SON06, SO09]. Ainsi, à chaque lixel correspond un voisinage. De plus, quatre configurations sont possibles : (10), (01), (00), et (11), où les valeurs 0 et 1 représentent l'intensité lumineuse des lixels (1 : objet, 0 : fond). Ensuite, chaque configuration contribue pour un nombre connu de sommets et d'arêtes (Equation 3.5). Pour déterminer les configurations de voisinages de tous les lixels, un algorithme efficace consiste en la convolution du vecteur binaire  $B^1$  (associé à l'image  $X^1$ ) par un masque  $F^1$  de dimension un, dont les valeurs sont des puissances de deux, et dont l'origine est le lixel à gauche et a pour valeur 1 (case grisée) :

$$F^1 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 \end{pmatrix}$$

Chaque valeur  $\alpha \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$  du vecteur résultant  $B^1 * F^1$ , où  $*$  dénote l'opérateur de convolution, correspond à une configuration de voisinage connue. La Table 3.1 expose les configurations possibles (1 : objet, 0 : fond) et les valeurs associées  $\alpha$  résultantes de la convolution.

	0	0	0	1	1	0	1	1
$\alpha$	0	1	2	3				

TAB. 3.1 – Configurations de voisinages et les valeurs de  $\alpha$  associées.

L'histogramme  $h^1$  de  $B^1 * F^1$  donne la distribution des configurations de voisinage de l'image  $X^1$ . Et chaque configuration contribue pour un nombre connu de sommets et d'arêtes :

$$v^1 = \sum_{\alpha=0}^3 v_{\alpha}^1 h^1(\alpha) \quad e^1 = \sum_{\alpha=0}^3 e_{\alpha}^1 h^1(\alpha) \quad (3.5)$$

où pour  $\alpha \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$ ,  $v_{\alpha}^1$  et  $e_{\alpha}^1$  sont les coefficients des combinaisons linéaires, dépendants du recouvrement de l'image, donnés dans la Table 3.2.

### Nombre d'Euler

#### Définition 3.12 [Nombre d'Euler]

Le nombre d'Euler  $\mathcal{I}_0^1$  est défini comme le nombre de composantes connexes  $C$  de l'objet :

$$\mathcal{I}_0^1 = C \quad (3.6)$$

La Figure 3.3 montre une image binaire 1D pour laquelle le nombre d'Euler est 3.



FIG. 3.3 – Le nombre d'Euler  $\mathcal{I}_0^1$  de cette image binaire 1D est 3.

Le nombre d'Euler  $\mathcal{I}_0^1$  se calcule aussi en utilisant le recouvrement de l'image par cellules :

$$\mathcal{I}_0^1 = v^1 - e^1 \quad (3.7)$$

où  $v^1$  et  $e^1$  sont respectivement les nombres de sommets et d'arêtes des cellules recouvrant l'objet.

Il est important de noter que l'Equation 3.7 donne le même nombre d'Euler  $\mathcal{I}_0^1$  avec les deux représentations de cellules (Figure 3.1) : le calcul dépend de la représentation, mais le résultat ne dépend que de la connexité (qui est la même pour les deux représentations). Chaque configuration de voisinages contribue pour un nombre connu de sommets et d'arêtes, et par conséquent pour le nombre d'Euler. Grâce aux formules 3.5 et 3.7, le nombre d'Euler se calcule comme suit :

$$\mathcal{I}_0^1 = \sum_{\alpha=0}^3 v_{\alpha}^1 h^1(\alpha) - \sum_{\alpha=0}^3 e_{\alpha}^1 h^1(\alpha) = \sum_{\alpha=0}^3 \chi_{\alpha}^1 h^1(\alpha) \quad (3.8)$$

où  $\chi_{\alpha}^1 = v_{\alpha}^1 - e_{\alpha}^1$  est donné dans la Table 3.2 pour  $\alpha \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$ . Ainsi, comme  $v^1$  et  $e^1$ ,  $\mathcal{I}_0^1$  est déterminé de manière efficace en utilisant les coefficients associés à chaque configuration, dépendant du recouvrement de l'image.

### Longueur

#### Définition 3.13 [Longueur]

La longueur  $\mathcal{I}_1^1$  de l'objet est généralement définie par le nombre de lixels constituant cet objet.

Selon la représentation des cellules, la longueur est alors égale au nombre de sommets  $v^1$  (cellules interlixels) ou au nombre d'arêtes  $e^1$  (cellules intralixels), le résultat étant toujours le même.

Grâce à l'Equation 3.5, la longueur  $\mathcal{I}_1^1$  se calcule comme suit :

$$\mathcal{I}_1^1 = \sum_{\alpha=0}^3 L_{\alpha}^1 h^1(\alpha) \quad (3.9)$$

où  $L_{\alpha}^1$  est donné dans la Table 3.2 pour  $\alpha \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$ .

### Synthèse

Ainsi, comme  $v^1$  et  $e^1$ ,  $\mathcal{I}_0^1$  et  $\mathcal{I}_1^1$  sont déterminés efficacement en associant un coefficient dépendant du recouvrement de l'image à chaque configuration. Ces coefficients sont donnés dans la Table 3.2.

	$\alpha$	0	1	2	3
cellules intralixels	$e_\alpha^1$	0	1	0	1
	$v_\alpha^1$	0	1	1	1
	$\chi_\alpha^1$	0	0	1	0
cellules interlixels	$e_\alpha^1$	0	0	0	1
	$v_\alpha^1$	0	1	0	1
	$\chi_\alpha^1$	0	1	0	0
indépendant de la représentation des cellules	$L_\alpha^1$	0	1	0	1

TAB. 3.2 – Coefficients des combinaisons linéaires, dépendant ou non de la représentation des cellules.

### Illustration

Soit  $X^1$  une image discrète binaire 1D représentée par un vecteur  $B^1$  et  $B^1 * F^1$  le vecteur résultant de la convolution de  $B^1$  par  $F^1$  (Figure 3.4).

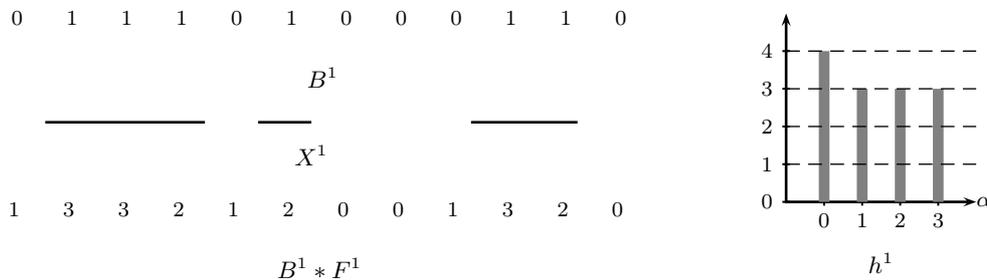


FIG. 3.4 – Une image discrète binaire 1D  $X^1$ , son vecteur associé  $B^1$  et l'histogramme  $h^1$  de ses différentes configurations de voisinages nommées dans le vecteur convolué  $B^1 * F^1$ .

Les équations 3.8 et 3.9, en utilisant la Table 3.2 et l'histogramme  $h^1$  de  $B^1 * F^1$ , donnent :

$$\mathcal{I}_0^1 = \sum_{\alpha=0}^3 \chi_\alpha^1 h^1(\alpha) = 3 \quad \text{et} \quad \mathcal{I}_1^1 = \sum_{\alpha=0}^3 L_\alpha^1 h^1(\alpha) = 6$$

Le même nombre d'Euler est obtenu avec les deux représentations de cellules. Par une analyse visuelle de l'image (b), l'Equation 3.6 confirme ce résultat.

La Figure 3.5 expose l'image binaire  $X^1$  associée à  $B^1$  et ses deux représentations. Les nombres de sommets et d'arêtes peuvent être comptés visuellement, et les résultats du nombre d'Euler et de la longueur obtenus avec l'Equation 3.7 sont confirmés.

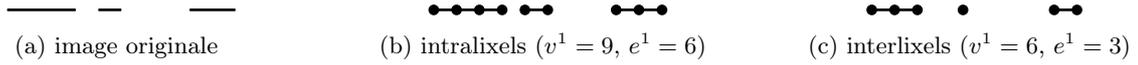


FIG. 3.5 – Deux représentations (b,c) de l'image (a) permettant d'estimer les fonctionnelles de Minkowski :  $\mathcal{I}_1^1 = 6$ ,  $\mathcal{I}_0^1 = 3$ .

Cette méthode de calcul des fonctionnelles de Minkowski s'étend aux images 2D.

### 3.2.3 Topologie numérique et fonctionnelles de Minkowski bi-dimensionnelles

#### Topologie numérique

Soit  $X^2$  une image binaire bi-dimensionnelle de taille  $l_1 \times l_2$ ,  $(l_1, l_2) \in \mathbb{N}^2$ . Le support spatial de  $X^2$  est noté  $\mathcal{D}^2 = \llbracket 0, l_1 \rrbracket \times \llbracket 0, l_2 \rrbracket$ .  $X^2$  est représentée par une matrice  $B^2 = (b_x)_{x \in \mathcal{D}^2}$ , où  $b_x$ , appartenant à  $\{0, 1\}$ , est la valeur de l'intensité lumineuse du pixel (abréviation de "picture element", le plus petit élément de l'image) de coordonnées  $x \in \mathcal{D}^2$ . Par convention, l'objet et le fond de l'image sont représentés par les pixels d'intensité  $b_x = 1$  et  $b_x = 0$ , respectivement. En particulier, un ensemble de pixels connectés inclus dans l'objet est un trou.

La notion de voisinage induit la topologie sur  $\mathcal{D}^2$ .

- Deux pixels de l'objet (ou du fond) de coordonnées  $x^1 = (x_1^1, x_2^1)$  et  $x^2 = (x_1^2, x_2^2)$  sont 4-adjacents si et seulement si  $|x_1^1 - x_1^2| + |x_2^1 - x_2^2| = 1$ .
- Deux pixels de l'objet (ou du fond) de coordonnées  $x^1 = (x_1^1, x_2^1)$  et  $x^2 = (x_1^2, x_2^2)$  sont 8-adjacents si et seulement si  $\max(|x_1^1 - x_1^2|, |x_2^1 - x_2^2|) = 1$ .

Le  $p$ -voisinage ( $p = 4$  ou  $p = 8$ ) d'un pixel est donc défini comme l'ensemble des pixels  $p$ -adjacents à celui-ci [Ros74].

La notion de voisinage permet d'établir celle de connexité [Ros70]. En effet, deux pixels de l'objet (ou du fond) sont  $p$ -connectés ( $p = 4$  ou  $p = 8$ ) s'il existe un chemin de pixels  $p$ -adjacents les reliant. De manière analogue, une composante connexe dans une image binaire bi-dimensionnelle est un ensemble de pixels adjacents formant un chemin dans l'image. Afin de satisfaire le théorème de Jordan, les connexités doivent être différentes pour les pixels du fond et pour les pixels de l'objet. Par conséquent, ces connexités d'image bi-dimensionnelle sont notées  $(4, 8)$  ou  $(8, 4)$ , la première coordonnée correspondant à l'objet, et la deuxième au fond [Ros75].

Le support spatial 'physique' de l'image (c'est-à-dire le support spatial 'continu') est recouvert par des cellules associées aux pixels. Une cellule (carré de taille la distance interpixel) est composée d'une face, de quatre arêtes et de quatre sommets. Soit une cellule est centrée en un pixel (cellule intrapixel), soit une cellule est construite en reliant des pixels (cellule interpixel). La Figure 3.6 illustre le recouvrement d'une image constituée de seize pixels, et ses deux représentations possibles.

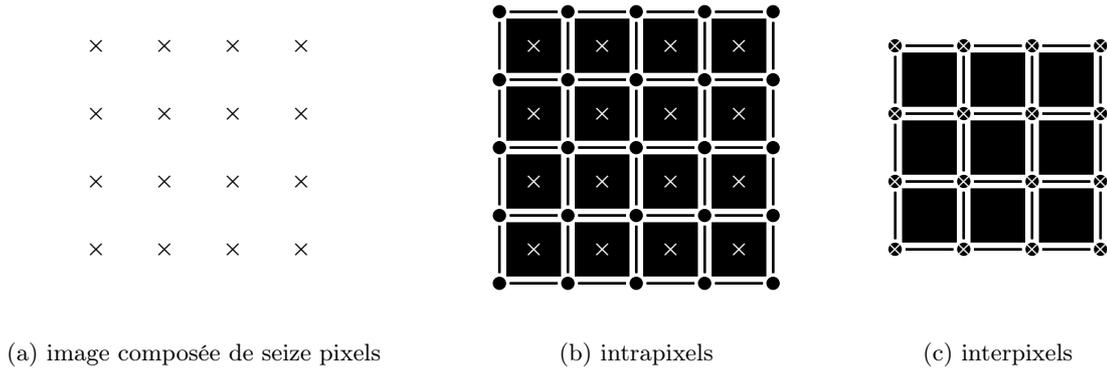


FIG. 3.6 – Image constituée de seize pixels (a) représentés par des croix ( $\times$ ). L'image est recouverte par des cellules intrapixels (b) ou interpixel (c), composées de sommets, d'arêtes et de faces (sommets= $\bullet$ , arête= $\text{---}$ , face= $\blacksquare$ ). Remarque : l'image (a) est recouverte par seize cellules intrapixels ou par neuf cellules interpixels.

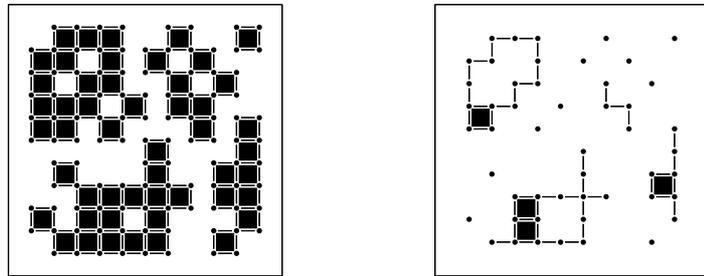
La 4- et la 8-adjacence sont associées à la représentation des cellules :

- En utilisant les cellules intrapixels, deux pixels de l'objet (du fond) sont adjacents si et seulement si leurs cellules respectives possèdent un sommet en commun (8-adjacence).
- En utilisant les cellules interpixels, deux pixels de l'objet (du fond) sont adjacents si et seulement si ils partagent la même arête (4-adjacence).

La Figure 3.7 expose les deux représentations de cellules de l'image bi-dimensionnelle binaire  $X^2$  associée à la matrice  $B^2$ .

```

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 1 1 1 0 0 1 0 0 1 0
0 1 1 0 1 0 1 0 1 0 0 0
0 1 0 1 1 0 0 1 0 1 0 0
0 1 1 1 0 1 0 1 1 0 0 0
0 1 1 0 1 0 0 0 1 0 1 0
0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 1 0
0 0 1 0 0 0 1 0 0 1 1 0
0 0 0 1 1 1 1 1 0 1 1 0
0 1 0 1 1 0 1 0 0 0 1 0
0 0 1 1 1 1 1 0 0 1 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
    
```



(a)  $B^2$ 
(b) intrapixels
(c) interpixels

FIG. 3.7 – Représentations des cellules intrapixels (b) et interpixels (c) de l'image binaire  $X^2$  associée à la matrice  $B^2$  (a).

Dans le but de calculer, de manière efficace, les nombres de sommets  $v^2$ , d'arêtes  $e^2$  et de faces  $f^2$  de l'objet (pixels d'intensités égales à 1), les différentes configurations de voisinages (de taille deux par deux pixels) de l'image originale  $X^2$  sont déterminées [NOP99, OM00, LOH01, ONS02, ONS03, OS06, SON06, SO09]. Ainsi, à chaque pixel correspond un voisinage. De plus, seize configurations sont possibles (Table 3.3 où les valeurs 0 et 1 représentent l'intensité lumineuse des pixels (1 : objet, 0 : fond)). Ensuite, chaque configuration contribue pour un nombre connu de sommets, d'arêtes et de faces (Equation 3.10). Pour déterminer les configurations de voisinages de tous les pixels, un algorithme efficace consiste en la convolution de la matrice binaire  $B^2$  (associée à l'image  $X^2$ ) par un masque  $F^2$  de dimension deux, dont les valeurs sont des puissances de deux, et dont l'origine est le pixel en haut

à gauche et a pour valeur 1 (case grisée) :

$$F^2 = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 4 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$$

Chaque valeur  $\alpha \in \llbracket 0, 15 \rrbracket$  de la matrice résultante  $B^2 * F^2$ , où  $*$  dénote l'opérateur de convolution, correspond à une configuration de voisinage connue. La Table 3.3 expose les configurations possibles (1 : objet, 0 : fond) et les valeurs associées  $\alpha$  résultantes de la convolution.

L'histogramme  $h^2$  de  $B^2 * F^2$  donne la distribution des configurations de voisinages de l'image  $X^2$ . Et chaque configuration contribue pour un nombre connu de sommets, d'arêtes et de faces :

$$v^2 = \sum_{\alpha=0}^{15} v_{\alpha}^2 h^2(\alpha) \quad e^2 = \sum_{\alpha=0}^{15} e_{\alpha}^2 h^2(\alpha) \quad f^2 = \sum_{\alpha=0}^{15} f_{\alpha}^2 h^2(\alpha) \quad (3.10)$$

où pour  $\alpha \in \llbracket 0, 15 \rrbracket$ ,  $v_{\alpha}^2$ ,  $e_{\alpha}^2$  et  $f_{\alpha}^2$  sont les coefficients des combinaisons linéaires, dépendants du recouvrement de l'image, donnés dans la Table 3.4.

	0 0	0 0	0 1	0 1	0 0	0 0	0 1	0 1
	0 0	0 1	0 0	0 1	1 0	1 1	1 0	1 1
$\alpha$	0	1	2	3	4	5	6	7
	1 0	1 0	1 1	1 1	1 0	1 0	1 1	1 1
	0 0	0 1	0 0	0 1	1 0	1 1	1 0	1 1
$\alpha$	8	9	10	11	12	13	14	15

TAB. 3.3 – Configurations de voisinages et les valeurs de  $\alpha$  associées.

### Nombre d'Euler

#### Définition 3.14 [Nombre d'Euler]

Le nombre d'Euler  $\mathcal{I}_0^2$  est défini comme la différence entre le nombre de composantes connexes  $C$  de l'objet et son nombre de trous  $T$  :

$$\mathcal{I}_0^2 = C - T \quad (3.11)$$

La Figure 3.8 montre une image binaire 2D pour laquelle le nombre d'Euler est 3.

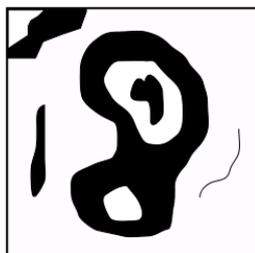


FIG. 3.8 – Le nombre d'Euler  $\mathcal{I}_0^2$  de cette image binaire 2D est égal à  $\mathcal{I}_0^2 = 5 - 2 = 3$ .

Le nombre d'Euler  $\mathcal{I}_0^2$  se calcule aussi en utilisant le recouvrement de l'image par cellules :

$$\mathcal{I}_0^2 = v^2 - e^2 + f^2 \quad (3.12)$$

où  $v^2$ ,  $e^2$  et  $f^2$  sont respectivement les nombres de sommets, d'arêtes et de faces des cellules recouvrant l'objet.

Il est important de noter que l'Equation 3.12 donne des nombres d'Euler  $\mathcal{I}_0^2$  différents, selon la représentation des cellules (Figure 3.11). La représentation des cellules intrapixels (respectivement interpixels) donne le résultat avec la (8, 4)-connexité (respectivement (4, 8)-connexité). Chaque configuration de voisinages contribue pour un nombre connu de sommets, d'arêtes et de faces, et par conséquent pour le nombre d'Euler. Grâce aux formules 3.10 et 3.12, le nombre d'Euler se calcule comme suit :

$$\mathcal{I}_0^2 = \sum_{\alpha=0}^{15} v_{\alpha}^2 h^2(\alpha) - \sum_{\alpha=0}^{15} e_{\alpha}^2 h^2(\alpha) + \sum_{\alpha=0}^{15} f_{\alpha}^2 h^2(\alpha) = \sum_{\alpha=0}^{15} \chi_{\alpha}^2 h^2(\alpha) \quad (3.13)$$

où  $\chi_{\alpha}^2 = v_{\alpha}^2 - e_{\alpha}^2 + f_{\alpha}^2$  est donné dans la Table 3.4 pour  $\alpha \in \llbracket 0, 15 \rrbracket$ . Ainsi, comme  $v^2$ ,  $e^2$  et  $f^2$ ,  $\mathcal{I}_0^2$  est déterminé de manière efficace en utilisant les coefficients associés à chaque configuration, dépendant du recouvrement de l'image.

### Périmètre

Deux méthodes, donnant des résultats différents, permettent d'estimer le périmètre d'un objet.

En utilisant les cellules intrapixels, le périmètre  $\mathcal{I}_1^2$  est déterminé en comptant le nombre d'arêtes communes à deux pixels d'intensités différentes, grâce à la formule suivante :

$$\mathcal{I}_1^2 = -4f^2 + 2e^2 \quad (3.14)$$

La discrétisation implique que ce périmètre est sur-estimé (Section 3.2.4).

Grâce à l'Equation 3.10, le périmètre  $\mathcal{I}_1^2$  se calcule comme suit :

$$\mathcal{I}_1^2 = -4 \sum_{\alpha=0}^{15} f_{\alpha}^2 h^2(\alpha) + 2 \sum_{\alpha=0}^{15} e_{\alpha}^2 h^2(\alpha) = \sum_{\alpha=0}^{15} P_{\alpha}^2 h^2(\alpha) \quad (3.15)$$

où  $P_{\alpha}^2 = -4f_{\alpha}^2 + 2e_{\alpha}^2$  est donné dans la Table 3.4 pour  $\alpha \in \llbracket 0, 15 \rrbracket$ .

Le périmètre de Crofton  $(\mathcal{I}_1^2)_c$ , indépendant de la représentation des cellules utilisée, donne une meilleure estimation. Il associe la longueur d'une courbe au nombre de fois qu'une ligne "aléatoire" l'intersecte [Cro68]. Soit  $\gamma$  une courbe plane,  $l$  une ligne orientée de direction  $\phi$  et de longueur  $p$ ,  $n_{\gamma}(l)$  le nombre de points auxquels  $\gamma$  et  $l$  intersectent. La formule de Crofton exprime la longueur d'arc de la courbe  $\gamma$  en termes d'intégrale dans l'espace de toutes les lignes orientées :

$$length(\gamma) = \frac{1}{4} \int \int n_{\gamma}(\phi, p) d\phi dp$$

Dans le cas discret, seules les orientations d'angles  $0$ ,  $\pi/4$ ,  $\pi/2$ , et  $3\pi/4$  sont considérées ; elles sont choisies en fonction de la connexité. Les nombres d'intercepts pour chacune de ces lignes sont comptés, et notés respectivement  $i_0^2$ ,  $i_{\pi/4}^2$ ,  $i_{\pi/2}^2$ ,  $i_{3\pi/4}^2$ . Ils sont ensuite normalisés par 1 ou  $\sqrt{2}$  selon l'orientation. La moyenne est enfin calculée en multipliant par  $\pi$ , valeur représentant l'intégrale des orientations, et en divisant par le nombre d'orientations utilisées. Le périmètre de Crofton se calcule alors comme suit :

$$\begin{aligned} (\mathcal{I}_1^2)_{c(4,8)} &= \frac{\pi}{2} \left( i_0^2 + i_{\pi/2}^2 \right) && \text{pour la (4, 8)-connexité} \\ (\mathcal{I}_1^2)_{c(8,4)} &= \frac{\pi}{4} \left( i_0^2 + \frac{i_{\pi/4}^2}{\sqrt{2}} + i_{\pi/2}^2 + \frac{i_{3\pi/4}^2}{\sqrt{2}} \right) && \text{pour la (8, 4)-connexité} \end{aligned}$$

La Figure 3.9 illustre cette procédure, en considérant un objet composée de cinq pixels.

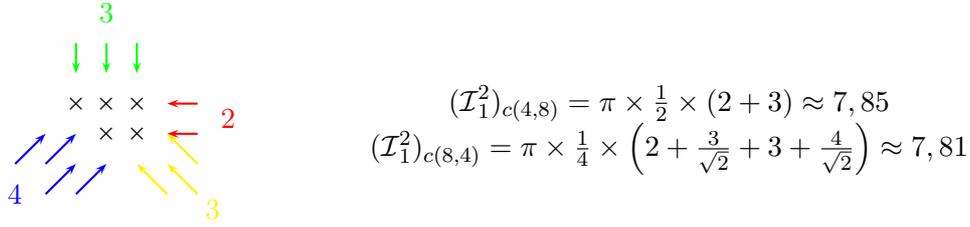


FIG. 3.9 – Périmètre de Crofton.

Ce périmètre  $(\mathcal{I}_1^2)_c$  se calcule grâce aux combinaisons linéaires suivantes qui attribuent des coefficients aux différents nombres d'intercepts :

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{I}_1^2)_{c(8,4)} &= \frac{\pi}{4} \left( \sum_{\alpha=0}^{15} (i_0^2)_\alpha h^2(\alpha) + \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{\alpha=0}^{15} (i_{\pi/4}^2)_\alpha h^2(\alpha) + \sum_{\alpha=0}^{15} (i_{\pi/2}^2)_\alpha h^2(\alpha) + \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{\alpha=0}^{15} (i_{3\pi/4}^2)_\alpha h^2(\alpha) \right) \\
 &= \sum_{\alpha=0}^{15} P c_{\alpha(8,4)}^2 h^2(\alpha) \tag{3.16}
 \end{aligned}$$

$$(\mathcal{I}_1^2)_{c(4,8)} = \frac{\pi}{2} \left( \sum_{\alpha=0}^{15} (i_0^2)_\alpha h^2(\alpha) + \sum_{\alpha=0}^{15} (i_{\pi/2}^2)_\alpha h^2(\alpha) \right) = \sum_{\alpha=0}^{15} P c_{\alpha(4,8)}^2 h^2(\alpha)$$

où  $P c_{\alpha(4,8)}^2 = \frac{\pi}{2} \left( (i_0^2)_\alpha + (i_{\pi/2}^2)_\alpha \right)$  et  $P c_{\alpha(8,4)}^2 = \frac{\pi}{4} \left( (i_0^2)_\alpha + \frac{1}{\sqrt{2}} (i_{\pi/4}^2)_\alpha + (i_{\pi/2}^2)_\alpha + \frac{1}{\sqrt{2}} (i_{3\pi/4}^2)_\alpha \right)$  sont donnés dans la Table 3.4 pour  $\alpha \in \llbracket 0, 15 \rrbracket$ .

Pour les objets filaires, considérés comme des objets de dimension une, les deux périmètres définis précédemment ne donnent pas des résultats robustes, puisqu'ils doublent la longueur d'une ligne.

### Aire

#### Définition 3.15 [Aire]

L'aire (ou la surface)  $\mathcal{I}_2^2$  de l'objet est généralement définie par le nombre de pixels le constituant.

Selon la représentation des cellules, elle est alors égale au nombre de sommets  $v^2$  (cellules interpixels) ou au nombre de faces  $f^2$  (cellules intrapixels), le résultat étant toujours le même. Généralement, ce calcul sur-estime l'aire.

Grâce à l'Equation 3.10, l'aire  $\mathcal{I}_2^2$  se calcule comme suit :

$$\mathcal{I}_2^2 = \sum_{\alpha=0}^{15} A_\alpha^2 h^2(\alpha) \tag{3.17}$$

où  $A_\alpha^2$  est donné dans la Table 3.4 pour  $\alpha \in \llbracket 0, 15 \rrbracket$ .

Il est également possible de compter le nombre de faces  $f^2$  obtenu avec la représentation des cellules interpixels. Dans ce cas, l'aire est généralement sous-estimée, mais les objets filaires ont une aire nulle (ils sont donc considérés comme des objets de dimension une), ce résultat étant plus robuste.

### Synthèse

Ainsi, comme  $v^2$ ,  $e^2$  et  $f^2$ ,  $(\mathcal{I}_0^2)_{(4,8)}$ ,  $(\mathcal{I}_0^2)_{(8,4)}$ ,  $\mathcal{I}_1^2$ ,  $(\mathcal{I}_1^2)_{c(4,8)}$ ,  $(\mathcal{I}_1^2)_{c(8,4)}$  et  $\mathcal{I}_2^2$  sont déterminés efficacement en associant les coefficients correspondants à chaque configuration, dépendant du recouvrement de l'image, donnés dans la Table 3.4.

### Illustration

Soit  $X^2$  une image discrète binaire 2D représentée par une matrice  $B^2$  et  $B^2 * F^2$  la matrice résultante de la convolution de  $B^2$  par  $F^2$  (Figure 3.10).

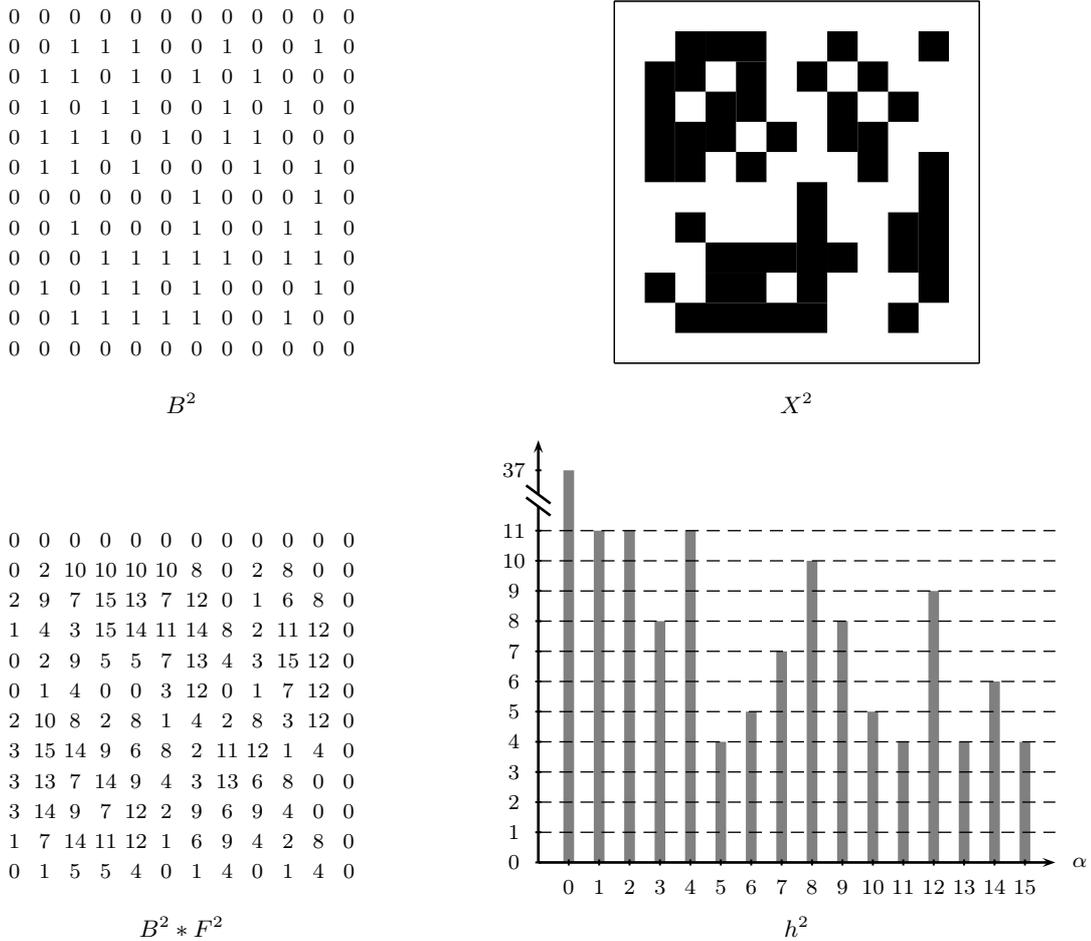


FIG. 3.10 – Une image discrète binaire 2D  $X^2$ , sa matrice associée  $B^2$  et l'histogramme  $h^2$  de ses différentes configurations de voisinages nommées dans la matrice convoluée  $B^2 * F^2$ .

Les équations 3.13, 3.15, 3.16 et 3.17, en utilisant la Table 3.4 et l'histogramme  $h^2$  de  $B^2 * F^2$ , donnent :

$$(\mathcal{I}_0^2)_{(4,8)} = \sum_{\alpha=0}^{15} \chi_{\alpha(4,8)}^2 h^2(\alpha) = 11 - 7 + 8 = 12 \quad \text{et} \quad (\mathcal{I}_0^2)_{(8,4)} = \sum_{\alpha=0}^{15} \chi_{\alpha(8,4)}^2 h^2(\alpha) = -5 + 10 - 6 = -1$$

$$(\mathcal{I}_1^2)_{c(4,8)} = \sum_{\alpha=0}^{15} P^2 c_{\alpha} h^2(\alpha) \approx 91,1 \quad \text{et} \quad (\mathcal{I}_1^2)_{c(8,4)} = \sum_{\alpha=0}^{15} P^2 c_{\alpha} h^2(\alpha) \approx 77,8$$

$$\mathcal{I}_1^2 = \sum_{\alpha=0}^{15} P_\alpha^2 h^2(\alpha) = -4 \times 50 + 2 \times 158 = 116 \quad \text{et} \quad \mathcal{I}_2^2 = \sum_{\alpha=0}^{15} A_\alpha^2 h^2(\alpha) = 50$$

Différents nombres d'Euler sont obtenus selon les deux représentations de cellules, et par conséquent selon la connexité. L'Equation 3.11 et la Figure 3.10.(b) confirment ces résultats.

La Figure 3.11 expose l'image binaire  $X^2$  associée à  $B^2$  et ses deux représentations. Les nombres de sommets, d'arêtes et de faces peuvent être comptés visuellement, et les résultats du nombre d'Euler, du périmètre et de l'aire obtenus avec l'Equation 3.12 sont confirmés.

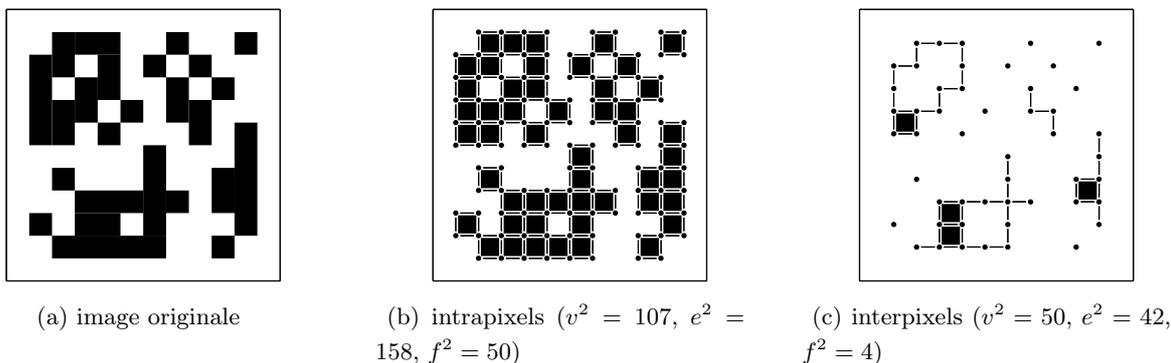


FIG. 3.11 – Deux représentations (b,c) de l'image (a) permettant d'estimer les fonctionnelles de Minkowski :  $\mathcal{I}_2^2 = 50, \mathcal{I}_1^2 = 116, (\mathcal{I}_1^2)_{c(4,8)} \approx 91,1, (\mathcal{I}_1^2)_{c(8,4)} \approx 77,8, (\mathcal{I}_0^2)_{(8,4)} = -1$  (b),  $(\mathcal{I}_0^2)_{(4,8)} = 12$  (c).

### Intérêts et limites

L'Equation 3.12 permet de calculer le nombre d'Euler soit avec la  $(8,4)$ -connexité par la représentation de cellules intrapixels soit avec la  $(4,8)$ -connexité par la représentation de cellules interpixels. Des modifications de la représentation de cellules interpixels sont apportées afin de déterminer le nombre d'Euler grâce à l'Equation 3.12 avec la  $(8,4)$ -connexité.

La Figure 3.12 montre que, dans cette représentation de cellules interpixels, des arêtes se croisent (b) et l'Equation 3.12 n'est alors plus valable. Alors, chaque fois que deux arêtes se croisent, une des deux doit être supprimée. Ainsi, l'Equation 3.12 est utilisée et fournit les résultats souhaités. Les coefficients des combinaisons linéaires correspondant à cette représentation des cellules interpixels modifiée sont donnés dans la Table 3.5.

	$\alpha$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	
cellules intrapixels	$f_\alpha^2$	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	
	$e_\alpha^2$	0	2	1	2	1	2	2	2	0	2	1	2	1	2	2	2	
	$v_\alpha^2$	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	$\chi_{\alpha(8,4)}^2$	0	0	0	0	0	0	-1	0	1	0	0	0	0	0	-1	0	
	$P_\alpha^2$	0	0	2	0	2	0	4	0	0	0	2	0	2	0	4	0	
cellules interpixels	$f_\alpha^2$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	
	$e_\alpha^2$	0	0	0	1	0	1	0	2	0	0	0	1	0	1	0	2	
	$v_\alpha^2$	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	
	$\chi_{\alpha(4,8)}^2$	0	1	0	0	0	0	0	-1	0	1	0	0	0	0	0	0	
indépendant de la représentation des cellules	$(i_0^2)_\alpha$	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	
	$(i_{\pi/4}^2)_\alpha$	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	
	$(i_{\pi/2}^2)_\alpha$	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	
	$(i_{3\pi/4}^2)_\alpha$	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	
	$Pc_{\alpha(4,8)}^2$	0	$\frac{\pi}{2}$	0	0	0	$\frac{\pi}{2}$	0	0	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	0	0	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	0	0	
	$Pc_{\alpha(8,4)}^2$	0	$\frac{\pi}{4} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$\frac{\pi}{4\sqrt{2}}$	$\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$	0	$\frac{\pi}{4} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	0	$\frac{\pi}{4\sqrt{2}}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4\sqrt{2}}$	$\frac{\pi}{4\sqrt{2}}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	0	0	
$A_\alpha^2$	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1		

TAB. 3.4 – Coefficients des combinaisons linéaires, dépendant ou non de la représentation des cellules.

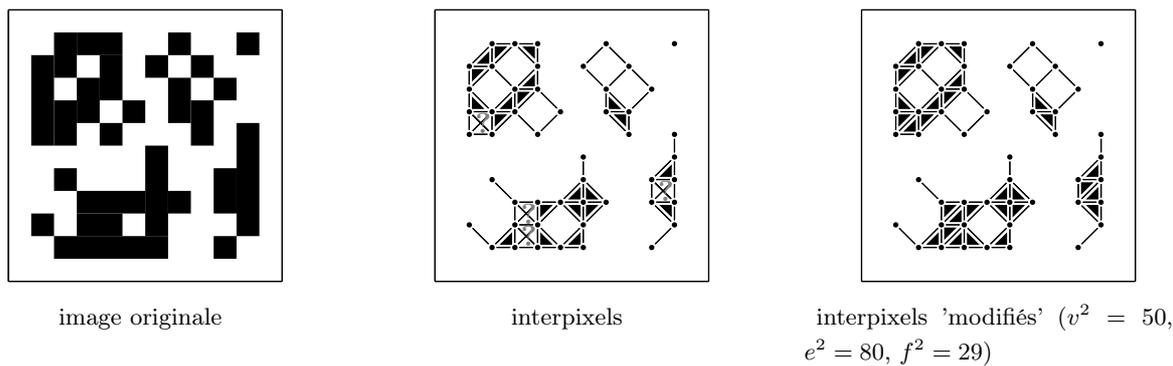
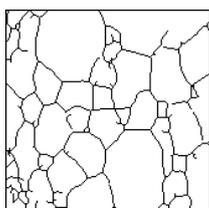


FIG. 3.12 – Représentation modifiée de cellules interpixels pour la (8,4)-connexité.

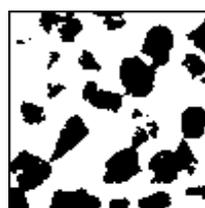
cellules interpixels 'modifiées'	$f_{\alpha}^2$	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	1	2
	$e_{\alpha}^2$	0	0	0	1	0	1	1	3	0	1	0	2	0	2	1	3
	$v_{\alpha}^2$	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
	$\chi_{\alpha(8,4)}^2$	0	1	0	0	0	0	-1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0

TAB. 3.5 – Coefficients des combinaisons linéaires, dépendant de la représentation modifiée de cellules interpixels.

Le choix de la connexité dépend de la forme des objets présents dans l'image. Si les objets de l'image sont (resp. ne sont pas) filiformes alors la (8,4)-connexité (resp. (4,8)-connexité) paraît plus appropriée, afin de garder la connexité entre deux pixels d'une même composante fine (resp. afin de séparer deux composantes proches) (Figure 3.13).



choix de la (8,4)-connexité



choix de la (4,8)-connexité

FIG. 3.13 – Le choix de la connexité est basé sur la forme des objets. S'ils sont (resp. ne sont pas) filiformes alors la (8,4)-connexité (resp. (4,8)-connexité) paraît plus appropriée, afin de garder la connexité entre deux pixels d'une même composante fine (ex : joints de grains métallurgiques (a)) (resp. afin de séparer deux composantes proches (ex : grains de sables (b))).

### Applications

La Figure 3.14 donne un exemple de détermination des fonctionnelles (de densité) de Minkowski sur une image de ciment contenant des bulles d'air. Par exemple, les bulles d'air représentent 25% de la surface de cet échantillon de ciment.

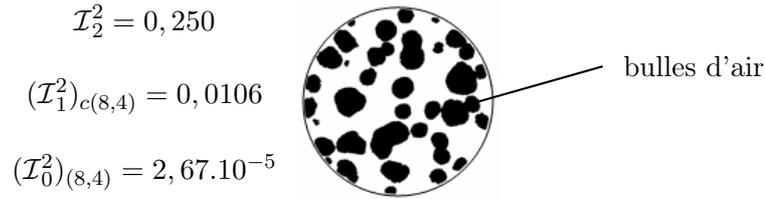


FIG. 3.14 – Fonctionnelles (de densité) de Minkowski des bulles d'air dans un échantillon de ciment.

### 3.2.4 Estimation des fonctionnelles

Dans un espace discret ( $\mathcal{D} \subset \mathbb{Z}$ ), les fonctionnelles de Minkowski sont estimées grâce aux formules énoncées dans la section précédente. Cette estimation dépend de deux choix préliminaires liés à la discrétisation.

Le premier choix concerne la connexité des pixels. Par exemple, la Figure 3.15.(a) expose une image discrète bi-dimensionnelle et deux de ses représentations réelles possibles : soit un seul objet troué soit trois objets distincts. La portion d'image discrète de la Figure 3.15.(b) révèle soit un objet rouge sur un fond noir soit un objet noir sur un fond rouge. Il faut donc faire un choix préliminaire sur la connexité.

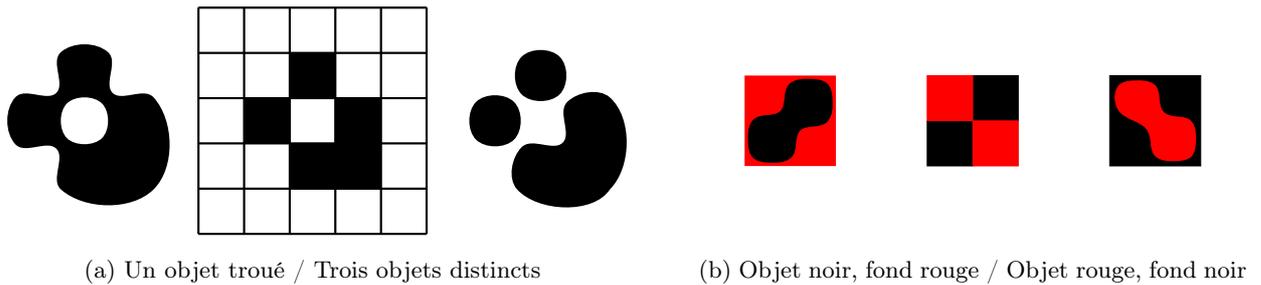


FIG. 3.15 – (a) L'image discrète représente soit un objet troué soit trois objets distincts. (b) La portion d'image discrète représente soit un objet noir sur un fond rouge soit un objet rouge sur un fond noir.

Le deuxième choix concerne le compromis entre le champ et la résolution spatiale du système d'acquisition, car pour une taille d'image fixée (nombre de pixels), il est possible d'avoir un petit champ avec une haute résolution, ou un grand champ avec une basse résolution (Figure 3.16). Le champ d'observation doit être suffisamment grand pour englober les objets à caractériser. Et plus la résolution est haute, meilleures sont les estimations des mesures de ces objets. La Figure 3.17 montre un objet avec une frontière continue, et sa représentation en tant qu'image discrète selon différentes résolutions spatiales. De façon évidente, la caractérisation de l'objet résultante de l'image obtenue avec la plus haute résolution spatiale est plus proche de la réalité.

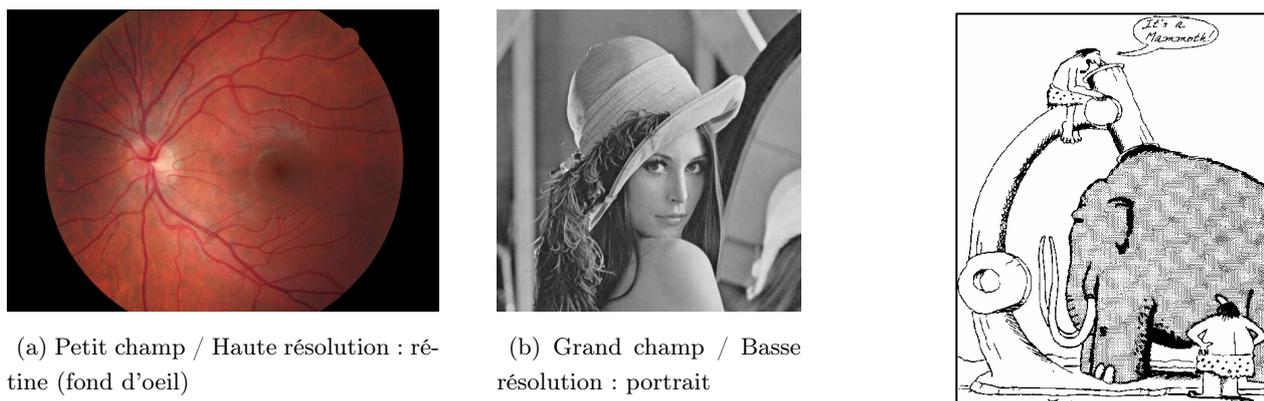
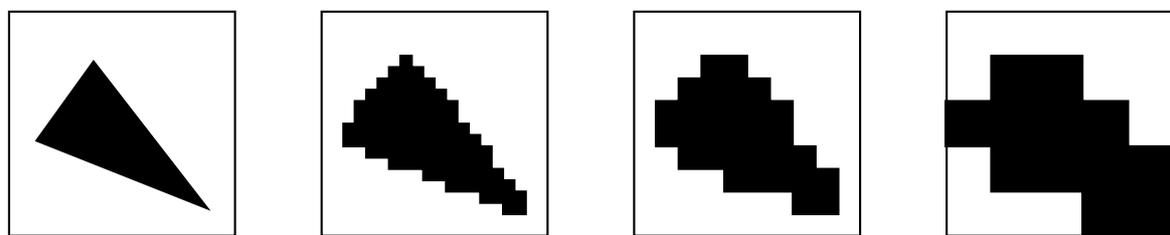


FIG. 3.16 – Il est possible d'effectuer des mesures sur l'image haute résolution de la rétine de Lena (a) mais pas à partir du portrait (b). Le compromis champ/résolution est choisi en fonction des objets à caractériser.



(a)  $\mathcal{I}_1^2 \approx 20,4, \mathcal{I}_2^2 \approx 16,5$     (b)  $\mathcal{I}_1^2 > (\mathcal{I}_1^2)_{c(4,8)} > (\mathcal{I}_1^2)_{c(8,4)} \approx 22,1, \mathcal{I}_2^2 = 24$     (c)  $\mathcal{I}_1^2 > (\mathcal{I}_1^2)_{c(4,8)} > (\mathcal{I}_1^2)_{c(8,4)} \approx 22,3, \mathcal{I}_2^2 = 31$     (d)  $\mathcal{I}_1^2 > (\mathcal{I}_1^2)_{c(4,8)} > (\mathcal{I}_1^2)_{c(8,4)} \approx 26,4, \mathcal{I}_2^2 = 48$

FIG. 3.17 – Discrétisations du triangle 'continu' (a) selon trois résolutions spatiales :  $20 \times 20$  (b),  $10 \times 10$  (c) et  $5 \times 5$  (d). Plus la résolution spatiale de l'image est élevée, meilleures sont les estimations des fonctionnelles de Minkowski de l'objet.

### 3.2.5 Synthèse

Dans la suite de ce manuscrit, les illustrations sont réalisées à partir d'images bi-dimensionnelles. Sauf mention contraire, le nombre d'Euler et l'aire sont estimés à partir de la représentation interpixels, le périmètre utilisé est celui de Crofton, et la  $(8, 4)$ -connexité est choisie. Afin de simplifier les notations, seul  $\mathcal{I}_d^n$  est conservé pour représenter ces fonctionnelles de Minkowski ( $n \in \mathbb{N}^*$  est la dimension de l'espace et  $d \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ).

## 3.3 Analyse multi-échelle par les fonctions de Minkowski

Les fonctionnelles de Minkowski fournissent donc une caractérisation d'image, mais cette caractérisation est insuffisante puisque des images différentes peuvent avoir des fonctionnelles de Minkowski identiques (Section 2.2.1).

Pour pallier cette limite, une transformation dépendant d'un paramètre est appliquée à l'image. La courbe représentative de l'évolution des fonctionnelles de Minkowski en fonction de ce paramètre donne alors une caractérisation multi-échelle de l'image.

### 3.3.1 Fonctions de Minkowski globales

Les fonctionnelles de Minkowski étant seulement définies sur des images binaires, la transformation utilisée ne doit donc pas modifier la classe 'binaire' de l'image originale. Par exemple, les opérateurs de morphologie mathématique ensembliste, tels que l'érosion ou la dilatation, conviennent. Les fonctionnelles sont calculées sur les images transformées morphologiquement par un élément structurant de rayon  $|r|$  ( $r \in \mathbb{R}$ ), ce qui implique l'obtention d'un graphe représentant les courbes des fonctionnelles de Minkowski en fonction de  $r$  (Figure 3.18).

**Définition 3.16** [*Fonctions de Minkowski globales*]

Les fonctions de Minkowski globales  $\Phi_d^n : \mathbb{R} \times \mathcal{I}_B \times \mathcal{P}(\mathcal{D}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $d \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , dépendantes des transformations fondamentales de morphologie mathématique, sont définies par :

$$\Phi_d^n(r, X, S) = \mathcal{I}_d^n(T_{r,S}(X))$$

où  $T_{r,S}(X)$  dénotent l'ouverture (ou l'érosion) si  $r < 0$  et la fermeture (ou la dilatation) si  $r \geq 0$ , de l'image  $X$  par l'élément structurant  $S$  de rayon  $|r| \in \mathbb{R}_+$ .

$\Phi_n^n$  est une fonction continue croissante par rapport à  $r \in \mathbb{R}$  bornée dans  $[0, 1]$  et atteint ses bornes, assimilable à une fonction de répartition de probabilité [KT98]. Sa dérivée  $\phi_n^n = \frac{\partial \Phi_n^n}{\partial r}$  est donc une densité de probabilité.  $\Phi_n^n$  et  $\phi_n^n$  définissent le spectre morphologique global de  $X$  relatif à  $S$ .

La Figure 3.18 montre deux images de verre de borosilicate ayant les mêmes fonctionnelles de Minkowski. Les courbes représentatives des fonctions de Minkowski, utilisant les opérateurs d'érosion et de dilatation, en fonction du rayon de l'élément structurant, permettent de différencier ces deux images par leur caractérisation multi-échelle.

Les caractérisations multi-échelles sont donc plus fines que les caractérisations mono-échelle. Cependant, jusqu'alors, seules des caractérisations d'images binaires et globales ont été effectuées.

### 3.3.2 Fonctions de Minkowski locales

Lorsque les fonctions de Minkowski sont restreintes à une fenêtre d'observation, elles définissent les fonctions de Minkowski locales. Soit  $W(x, t)$  une fenêtre de centre  $x \in \mathcal{D}^n$  et de rayon  $t \in \mathbb{R}_+$ .

**Définition 3.17** [*Fonctions de Minkowski locales*]

Les fonctions de Minkowski locales  $\Phi_{d,x}^n : \mathbb{R} \times \mathcal{I}_B \times \mathcal{P}(\mathcal{D}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $d \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , dépendantes des transformations fondamentales de morphologie mathématique, sont définies par :

$$\Phi_{d,x}^n(r, X, S) = \mathcal{I}_d^n(T_{r,S}(X) \cap W(x, t))$$

où  $T_{r,S}(X)$  dénotent l'ouverture (ou l'érosion) si  $r < 0$  et la fermeture (ou la dilatation) si  $r \geq 0$ , de l'image  $X$  par l'élément structurant  $S$  de rayon  $|r| \in \mathbb{R}_+$ .

$\Phi_{n,x}^n$  est une fonction continue croissante par rapport à  $r \in \mathbb{R}$  bornée dans  $[0, 1]$  et atteint ses bornes, assimilable à une fonction de répartition de probabilité [SD92, VD94]. Sa dérivée  $\phi_{n,x}^n = \frac{\partial \Phi_{n,x}^n}{\partial r}$  est donc une densité de probabilité.  $\Phi_{n,x}^n$  et  $\phi_{n,x}^n$  définissent le spectre morphologique local de  $X$  relatif à  $S$ .

La Figure 3.19 montre une image de verre de borosilicate et les courbes représentatives des fonctions de Minkowski locales, utilisant les opérateurs d'érosion et de dilatation, en fonction du rayon de l'élément structurant, pour deux points distincts du support spatial de l'image.

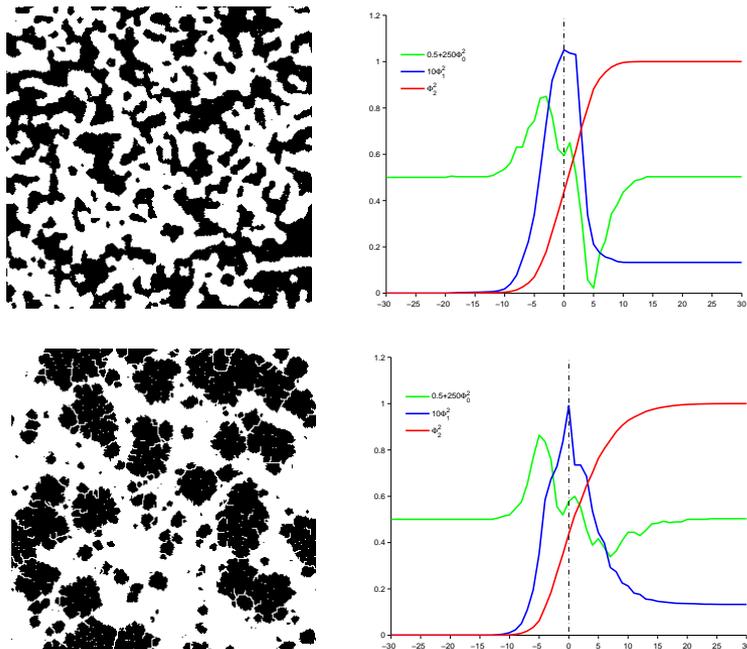


FIG. 3.18 – Images de verre de borosilicate [Sch03] ayant les mêmes fonctionnelles de Minkowski (intersections avec la ligne verticale en pointillés) et courbes représentatives des fonctions de Minkowski globales associées utilisant les opérateurs d'érosion ( $r < 0$ ) et de dilatation ( $r \geq 0$ ) par un disque de rayon  $|r| \in \mathbb{R}_+$ , en fonction de  $r$ .

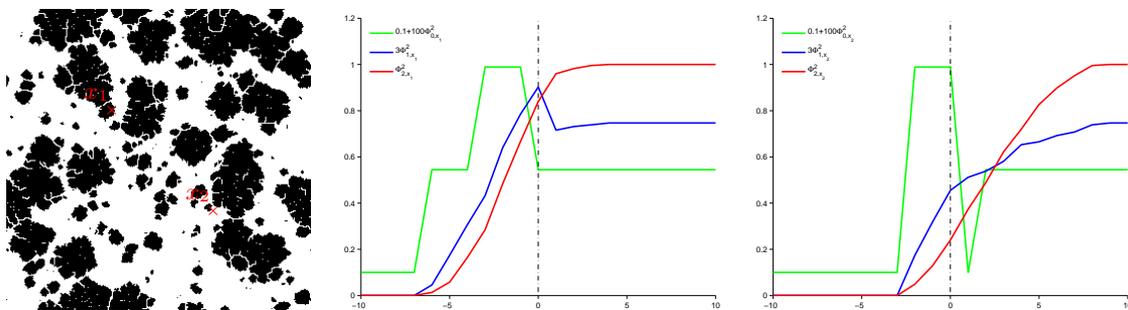


FIG. 3.19 – Image de verre de borosilicate [Sch03] et courbes représentatives des fonctions de Minkowski locales associées utilisant les opérateurs d'érosion ( $r < 0$ ) et de dilatation ( $r \geq 0$ ) par un disque de rayon  $|r| \in \mathbb{R}_+$ , en fonction de  $r$ , pour deux points  $x_1$  et  $x_2$  du support spatial de l'image.

### 3.4 Synthèse

Les fonctionnelles de Minkowski sont les éléments de base de la géométrie intégrale. En 2D, elles sont l'aire, le périmètre et le nombre d'Euler (à une constante près). Ces fonctionnelles donnent une caractérisation globale et mono-échelle d'une image binaire. Des fonctions de Minkowski sont définies lorsqu'une transformation est appliquée à l'image. Ces fonctions fournissent une caractérisation multi-échelle. Enfin, la restriction à une fenêtre d'observation permet de caractériser localement l'image.

Pour affiner la caractérisation d'une image binaire, d'autres fonctionnelles sont utilisées : les fonctionnelles de forme (Chapitre 4).

# Chapitre 4

## Morphométrie

### Sommaire

---

<b>4.1 Article 1 : Shape diagrams for compact convex sets . . . . .</b>	<b>46</b>
4.1.1 Introduction . . . . .	46
4.1.2 Shape functionals . . . . .	47
4.1.3 Shape diagrams . . . . .	50
4.1.4 Shape diagrams dispersion quantification . . . . .	55
4.1.5 Shape diagrams overlapping quantification . . . . .	58
4.1.6 Synthesis . . . . .	68
4.1.7 Conclusion . . . . .	71
<b>4.2 Article 2 : Shape diagrams for compact simply connected sets . . . . .</b>	<b>72</b>
4.2.1 Introduction . . . . .	72
4.2.2 Shape functionals . . . . .	72
4.2.3 Shape diagrams . . . . .	74
4.2.4 Shape diagrams dispersion quantification . . . . .	76
4.2.5 Shape diagrams overlapping quantification . . . . .	81
4.2.6 Synthesis . . . . .	89
4.2.7 Conclusion . . . . .	90
<b>4.3 Article 3 : Shape diagrams - convexity discrimination . . . . .</b>	<b>91</b>
4.3.1 Introduction . . . . .	91
4.3.2 Shape convexity . . . . .	92
4.3.3 Convexity discrimination for analytic simply connected sets . . . . .	93
4.3.4 Shape functionals for a discretized simply connected set . . . . .	94
4.3.5 Shape diagrams for a basis of various discretized simply connected compact sets . . . . .	94
4.3.6 Shape diagrams for similar discretized simply connected compact sets . . . . .	98
4.3.7 Synthesis . . . . .	104
4.3.8 Global synthesis for the three parts of this study . . . . .	105
4.3.9 Conclusion . . . . .	105
<b>4.4 Applications . . . . .</b>	<b>105</b>
4.4.1 Classification de formes de graines . . . . .	105
4.4.2 Homogénéité des formes de cellules cornéennes segmentées . . . . .	107

---

Les trois premières sections de ce chapitre, rédigées en anglais, sont les copies de trois articles acceptés pour publication dans une revue internationale à comité de lecture :

- A comparative study of shape diagrams for 2D compact sets - Part I : analytic convex sets [RDP10a]
- A comparative study of shape diagrams for 2D compact sets - Part II : analytic simply connected sets [RDP10b]
- A comparative study of shape diagrams for 2D compact sets - Part III : convexity discrimination for analytic and discretized simply connected sets [RDP10c]

La dernière section, en français, présente deux applications utilisant ces diagrammes de forme (shape diagrams).

### 4.1 A comparative study of shape diagrams for 2D compact sets - Part I : analytic convex sets

*Abstract* : Shape diagrams are representations in the Euclidean plane introduced to study 3-dimensional and 2-dimensional compact convex sets. Such a set is represented by a point within a shape diagram whose coordinates are morphometrical functionals defined as normalized ratios of geometrical functionals. Classically, the geometrical functionals are the area, the perimeter, the radii of the inscribed and circumscribed circles, and the minimum and maximum Feret diameters. They allow thirty-one shape diagrams to be built. Most of these shape diagrams can also be applied to more general compact sets than compact convex sets. Starting from these six classical geometrical functionals, a detailed comparative study has been performed in order to analyze the representation relevance and discrimination power of these thirty-one shape diagrams. The purpose of this paper is to present the first part of this study, by focusing on analytic compact convex sets. A set will be called analytic if its boundary is piecewise defined by explicit functions in such a way that the six geometrical functionals can be straightforwardly calculated. The second and third part of the comparative study are published in two following papers [RDP10b, RDP10c]. They are focused on analytic simply connected sets and convexity discrimination for analytic and discretized simply connected sets, respectively.

*Key words and phrases* : Analytic compact convex sets, Geometrical and morphometrical functionals, Shape diagrams, Shape discrimination.

#### 4.1.1 Introduction

The Blaschke's shape diagram [Bla15, Bla16] allows to represent a 3D compact convex set by a point in the Euclidean 2D plane from three geometrical functionals : the volume, the surface area and the integral of mean curvature. The axes of this shape diagram are defined from geometric inequalities relating these functionals. These geometric inequalities do not provide a complete system : for any range of numerical values satisfying them, a compact convex set with these values for the geometrical functionals does not necessarily exist (in other words, a point within the 2D Blaschke shape diagram does not necessarily describe a 3D compact convex set).

Following the approach of Blaschke, Santaló [San61] considered the shape diagrams of 2D compact convex sets from six geometrical functionals : the area, the perimeter, the radii of the inscribed and circumscribed circles, and the minimum and maximum Feret diameters [Fer30]. Several studies on

these shape diagrams have been performed [San61, Cif00, CG00, CSG01, Cif02, BCS03], but they were mainly restricted to the complete systems of inequalities for some triplets of these geometrical functionals.

This paper focuses on the study of shape diagrams for a wide range of 2D non-empty analytic compact convex sets. This study is not limited to complete systems of inequalities. The considered compact convex sets are mapped onto points in these shape diagrams, and through dispersion and overlapping quantifications, the shape diagrams are classified according to their ability to discriminate the compact convex sets.

### 4.1.2 Shape functionals

In this paper, the non-empty analytic compact convex sets in the Euclidean 2-space  $E^2$  are considered. A set will be called analytic if its boundary is piecewise defined by explicit functions in such a way that the geometrical functionals enumerated below can be calculated. These geometrical functionals are determined in order to characterize the sets. They are related by the so-called geometric inequalities, which allow to define morphometrical functionals.

#### Geometrical functionals

For a compact convex set in  $E^2$ , let  $A$ ,  $P$ ,  $r$ ,  $R$ ,  $\omega$ ,  $d$ , denote its area, its perimeter, the radii of its inscribed and circumscribed circles, its minimum and maximum Feret diameters [Fer30], respectively. Figure 4.1 illustrates some of these geometrical functionals.

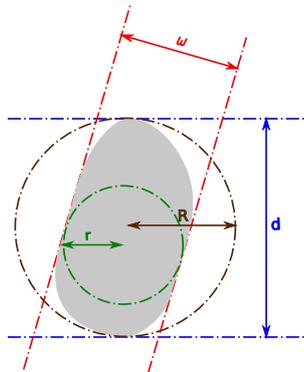


FIG. 4.1 – Geometrical functionals of a compact convex set : radii of inscribed ( $r$ ) and circumscribed ( $R$ ) circles, minimum ( $\omega$ ) and maximum ( $d$ ) Feret diameters.

For a compact convex set, these six geometrical functionals are greater than zero. The line segments provide null values for  $A$ ,  $r$  and  $\omega$ , and the points for  $P$ ,  $R$  and  $d$ .

#### Geometric inequalities

For a compact convex set in  $E^2$ , the relationships between these geometrical functionals are constrained by the geometric inequalities [BF48, BZ88, CHL<sup>+</sup>04, HS02, YB61, Oss78, Oss79, Sco79, SA00, Sie03] referenced in the second column of Table 4.1. These inequalities link geometrical functionals by pairs and determine the so-called extremal compact convex sets that satisfy the corresponding equalities (Table 4.1, fourth column). Furthermore, they allow to determinate morphometrical functionals.

### Morphometrical functionals

The morphometrical functionals are invariant under similitude transformations (consequently, they do not depend on the global size of the compact convex set) and are defined as ratios between geometrical functionals. In these ratios, the units of the numerator and the denominator are dimensionally homogeneous and the result has therefore no unit. Moreover, a normalization by a constant value (scalar multiplication) allows to have a ratio that ranges in  $[0, 1]$ . For each morphometrical functional, the scalar value depends directly on the associated geometric inequality. These morphometrical functionals are referenced in the third column of Table 4.1.

These morphometrical functionals are classified according to their concrete meanings namely :

- roundness :  $4\pi A / P^2$ ,  $4A / \pi d^2$ ,  $\pi r^2 / A$  and  $A / \pi R^2$  ;
- circularity :  $2\pi r / P$ ,  $P / 2\pi R$ ,  $r / R$ ,  $2r / d$  and  $\omega / 2R$  ;
- diameter constancy :  $\pi \omega / P$ ,  $P / \pi d$  and  $\omega / d$  ;
- thinness :  $2d / P$  and  $4R / P$  ;
- equilateral triangularity :  $\omega / 3r$  and  $\omega^2 / \sqrt{3} A$ .

The morphometrical functional  $\sqrt{3}R / d$  expresses both the equilateral triangularity and the diameter constancy. The ratios  $2r / \omega$  and  $d / 2R$  do not have concrete meaning, they are equal to one for some different compact convex sets.

For example, the morphometrical functionals values are represented in Figure 4.2 for some 2D elementary analytic compact convex sets represented in Figure 4.3. These elementary compact convex sets constitute the family  $\mathcal{F}_1^c$  :

- line segments ;
- equilateral triangles ;
- Reuleaux triangles [Reu63, Egg52] : curves of constant diameter constructed by taking the three points at the corners of an equilateral triangle and connecting each pair of points by a circular arc centered at the remaining point ;
- squares ;
- “Reuleaux” squares : curves by taking the four edge middles of a square and connecting each pair of opposite points by a circular arc centered at the remaining edge middle ;
- disks ;
- semi-disks ;
- isosceles rectangle triangles ;
- “1/2” diamonds : diamonds with  $\pi/3$  and  $\pi/6$  angles ;
- “1/2” rectangles : rectangles with length/width=1/2 ;
- “1/2” ellipses : ellipses with major axis length/minor axis length=1/2 ;
- regular pentagons ;
- regular hexagons.

For instance, let be a Reuleaux triangle constructed from an equilateral triangle of edge length denoted  $l$ . The Reuleaux triangle has a constant Feret diameter :  $d = \omega$ . Futhermore,

$$\omega = l, \quad d = l, \quad r = l \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \quad R = \frac{l}{\sqrt{3}}, \quad P = \pi l, \quad A = l^2 \left(\frac{\pi - \sqrt{3}}{2}\right).$$

All these geometrical functionals are expressed in function of  $l$ , term which disappears in the computation of the morphometrical functionals. For example,

$$\frac{A}{\pi R^2} = 3 \left( \frac{\pi - \sqrt{3}}{2\pi} \right), \quad \frac{P}{\pi d} = 1, \quad \frac{2d}{P} = 2/\pi, \quad \frac{\omega^2}{\sqrt{3} A} = \frac{2}{\sqrt{3}(\pi - \sqrt{3})}.$$

The line segments are particular compact convex sets in the sense that some morphometrical functionals are zero-valued and some other ones are undefined because  $A$ ,  $r$ ,  $\omega$  are equal to zero. Figure 4.2 does not differentiate the roundness of the line segments which is null, and their equilateral triangularity which is undefined.

Table 4.1 synthesizes the geometrical and morphometrical functionals, the geometric inequalities and the extremal 2D analytic compact convex sets.

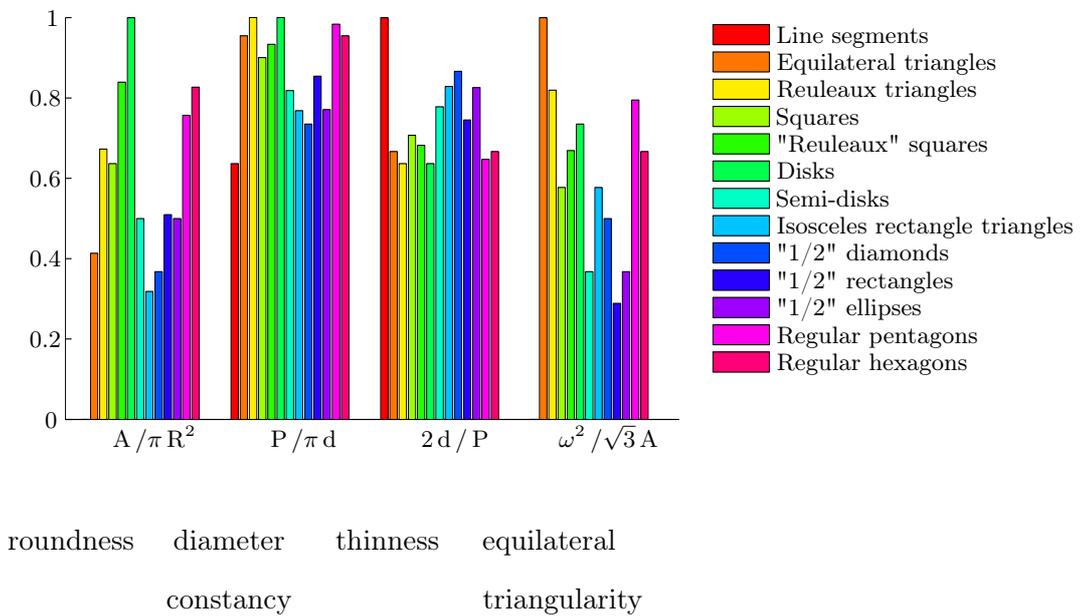


FIG. 4.2 – Values of several morphometrical functionals for elementary 2D compact convex sets.

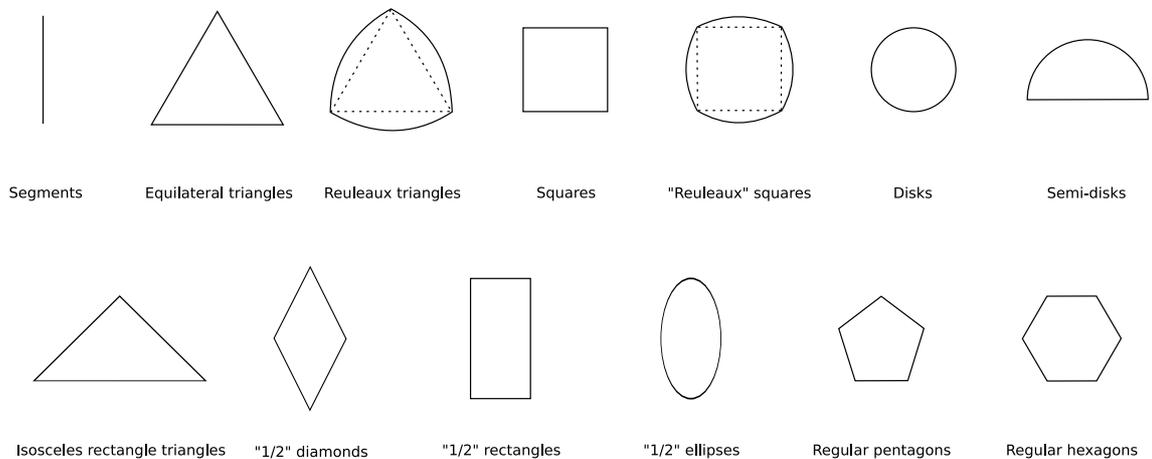


FIG. 4.3 – Family  $\mathcal{F}_1^c$  of 2D analytic compact convex sets.

Geometrical functionals	Geometric inequalities	Morphometrical functionals	Extremal sets
r, R	$r \leq R$	$r/R$	C
$\omega, R$	$\omega \leq 2R$	$\omega/2R$	C
A, R	$A \leq \pi R^2$	$A/\pi R^2$	C
P, R	$P \leq 2\pi R$	$P/2\pi R$	C
d, R	$d \leq 2R$	$d/2R$	X
r, d	$2r \leq d$	$2r/d$	C
$\omega, d$	$\omega \leq d$	$\omega/d$	W
A, d	$4A \leq \pi d^2$	$4A/\pi d^2$	C
P, d	$P \leq \pi d$	$P/\pi d$	W
R, d	$\sqrt{3}R \leq d$	$\sqrt{3}R/d$	Z
r, P	$2\pi r \leq P$	$2\pi r/P$	C
$\omega, P$	$\pi\omega \leq P$	$\pi\omega/P$	W
A, P	$4\pi A \leq P^2$	$4\pi A/P^2$	C
d, P	$2d \leq P$	$2d/P$	L
R, P	$4R \leq P$	$4R/P$	L
r, A	$\pi r^2 \leq A$	$\pi r^2/A$	C
$\omega, A$	$\omega^2 \leq \sqrt{3}A$	$\omega^2/\sqrt{3}A$	T
r, $\omega$	$2r \leq \omega$	$2r/\omega$	X
$\omega, r$	$\omega \leq 3r$	$\omega/3r$	T

Extremal sets are the sets for which an inequality becomes an equality.

C the disks

T the equilateral triangles

W the constant width compact convex sets

L the line segments

X some compact convex sets

Z every compact convex set of diameter d containing an equilateral triangle of side-length d

TAB. 4.1 – Shape functionals for compact convex sets. A, P, r, R,  $\omega$ , d, denote the area, perimeter, radii of the inscribed and circumscribed circles, minimum and maximum Feret diameters [Fer30], respectively.

### 4.1.3 Shape diagrams

From these morphometrical functionals, 2D shape diagrams can be defined. They enable to represent the morphology of any analytic compact convex sets in the Euclidean 2D plane from two morphometrical functionals (that is to say from three geometrical functionals because the two denominators use the same geometrical functionals).

**Definition**

Let be any triplet of the considered six geometrical functionals  $(A, P, r, R, \omega, d)$  and  $(M_1, M_2)$  be some particular morphometrical functionals valued in  $[0, 1]^2$  (Table 4.2).

Shape diagrams	Axes coordinates	
$\mathcal{D}_1 : (\omega, r, R)$	$x = \omega / 2 R$	$y = r / R$
$\mathcal{D}_2 : (\omega, A, R)$	$x = \omega / 2 R$	$y = A / \pi R^2$
$\mathcal{D}_3 : (r, A, R)$	$x = r / R$	$y = A / \pi R^2$
$\mathcal{D}_4 : (A, d, R)$	$x = A / \pi R^2$	$y = d / 2 R$
$\mathcal{D}_5 : (\omega, d, R)$	$x = \omega / 2 R$	$y = d / 2 R$
$\mathcal{D}_6 : (r, d, R)$	$x = r / R$	$y = d / 2 R$
$\mathcal{D}_7 : (A, P, R)$	$x = A / \pi R^2$	$y = P / 2\pi R$
$\mathcal{D}_8 : (\omega, P, R)$	$x = \omega / 2 R$	$y = P / 2\pi R$
$\mathcal{D}_9 : (r, P, R)$	$x = r / R$	$y = P / 2\pi R$
$\mathcal{D}_{10} : (P, d, R)$	$x = P / 2\pi R$	$y = d / 2 R$
$\mathcal{D}_{11} : (\omega, r, d)$	$x = \omega / d$	$y = 2 r / d$
$\mathcal{D}_{12} : (\omega, A, d)$	$x = \omega / d$	$y = 4 A / \pi d^2$
$\mathcal{D}_{13} : (r, A, d)$	$x = 2 r / d$	$y = 4 A / \pi d^2$
$\mathcal{D}_{14} : (A, R, d)$	$x = 4 A / \pi d^2$	$y = \sqrt{3} R / d$
$\mathcal{D}_{15} : (\omega, R, d)$	$x = \omega / d$	$y = \sqrt{3} R / d$
$\mathcal{D}_{16} : (r, R, d)$	$x = 2 r / d$	$y = \sqrt{3} R / d$
$\mathcal{D}_{17} : (A, P, d)$	$x = 4 A / \pi d^2$	$y = P / \pi d$
$\mathcal{D}_{18} : (\omega, P, d)$	$x = \omega / d$	$y = P / \pi d$
$\mathcal{D}_{19} : (r, P, d)$	$x = 2 r / d$	$y = P / \pi d$
$\mathcal{D}_{20} : (P, R, d)$	$x = P / \pi d$	$y = \sqrt{3} R / d$
$\mathcal{D}_{21} : (\omega, r, P)$	$x = \pi \omega / P$	$y = 2\pi r / P$
$\mathcal{D}_{22} : (\omega, A, P)$	$x = \pi \omega / P$	$y = 4\pi A / P^2$
$\mathcal{D}_{23} : (r, A, P)$	$x = 2\pi r / P$	$y = 4\pi A / P^2$
$\mathcal{D}_{24} : (A, R, P)$	$x = 4\pi A / P^2$	$y = 4 R / P$
$\mathcal{D}_{25} : (\omega, R, P)$	$x = \pi \omega / P$	$y = 4 R / P$
$\mathcal{D}_{26} : (r, R, P)$	$x = 2\pi r / P$	$y = 4 R / P$
$\mathcal{D}_{27} : (A, d, P)$	$x = 4\pi A / P^2$	$y = 2 d / P$
$\mathcal{D}_{28} : (\omega, d, P)$	$x = \pi \omega / P$	$y = 2 d / P$
$\mathcal{D}_{29} : (r, d, P)$	$x = 2\pi r / P$	$y = 2 d / P$
$\mathcal{D}_{30} : (d, R, P)$	$x = 2 d / P$	$y = 4 R / P$
$\mathcal{D}_{31} : (\omega, r, A)$	$x = \omega^2 / \sqrt{3} A$	$y = \pi r^2 / A$

TAB. 4.2 – Axes coordinates of the thirty-one shape diagrams for 2D compact convex sets.

A shape diagram  $\mathcal{D}$  is represented in the plane domain  $[0, 1]^2$  (whose axis coordinates are the morphometrical functionals  $M_1$  and  $M_2$ ) where any 2D compact set  $S$  is mapped onto a point  $(x, y)$ . Note that if  $M_1$  or  $M_2$  is in  $\{\omega / \sqrt{3} A, \pi r^2 / A, 2 r / \omega, \omega / 3 r\}$ , the line segments can not be mapped

onto a point because they provide null values for  $A$ ,  $r$  and  $\omega$ . In other terms, a shape diagram  $\mathcal{D}$  is obtained from the following mapping :

$$\mathcal{D} : \begin{cases} \mathcal{K}(E^2) & \rightarrow [0, 1]^2 \\ S & \mapsto (x, y) \end{cases}$$

where  $\mathcal{K}(E^2)$  denotes the compact sets of the Euclidean 2D plane. Using the morphometrical functionals listed in Table 4.1, thirty-one shape diagrams are defined, denoted  $(\mathcal{D}_k)_{k \in [1,31]}$ , respectively.

**Property** : The mapping which associates a 2D analytic compact convex set in  $E^2$  to a point in a shape diagram  $(\mathcal{D}_k)_{k \in [1,31]}$  is neither injective neither surjective.

*Proof* :

Non-injectivity : in each shape diagram, there exists points on which several 2D compact convex sets are mapped.

- Let be an ellipse with major and minor axes of length equal to 2 and 1 respectively, and a semi-disk of radius value equal to 1. These two sets have five similar geometrical functionals values :  $A = \pi/2$ ,  $\omega = 1$ ,  $d = 2$ ,  $r = 0.5$ ,  $R = 1$ . Thus, this ellipse and the semi-disk are mapped onto the same point in the shape diagrams  $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3, \mathcal{D}_4, \mathcal{D}_5, \mathcal{D}_6, \mathcal{D}_{11}, \mathcal{D}_{12}, \mathcal{D}_{13}, \mathcal{D}_{14}, \mathcal{D}_{15}, \mathcal{D}_{16}, \mathcal{D}_{31}$ .
- The diamond and ellipse perimeters are expressed in function of  $r$  and  $R$  by  $4\sqrt{R^2 + \frac{r^2 R^2}{R^2 - r^2}}$  and  $\pi \left( 3(R+r) - \sqrt{(R+3r)(3R+r)} \right)$  (Ramanujan), respectively. Notice that other approximations of the ellipse perimeter exist [Ram62, Vil06]. When  $R = 1$ , the equation

$$4\sqrt{R^2 + \frac{r^2 R^2}{R^2 - r^2}} = \pi \left( 3(R+r) - \sqrt{(R+3r)(3R+r)} \right)$$

has a unique solution  $r$  in  $\mathbb{R}_+$ . Thus, an ellipse and a diamond with the same perimeter values, and the same inscribed and circumscribed radii values are found. Futhermore, for these two sets,  $\omega = 2r$  and  $d = 2R$ . Therefore, these two sets have five similar geometrical functionals values :  $R$ ,  $d$ ,  $r$ ,  $\omega$ ,  $P$ . Consequently, this ellipse and this diamond are mapped onto the same point in the shape diagrams  $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_5, \mathcal{D}_6, \mathcal{D}_8, \mathcal{D}_9, \mathcal{D}_{10}, \mathcal{D}_{11}, \mathcal{D}_{15}, \mathcal{D}_{16}, \mathcal{D}_{18}, \mathcal{D}_{19}, \mathcal{D}_{20}, \mathcal{D}_{21}, \mathcal{D}_{25}, \mathcal{D}_{26}, \mathcal{D}_{28}, \mathcal{D}_{29}, \mathcal{D}_{30}$ .

- The diamond and ellipse areas are expressed in function of  $P$  and  $d$  by  $\frac{d^2 \sqrt{P^2 - 4d^2}}{2P}$  and  $\frac{d}{12} \left( 3P - 2\pi d - \sqrt{3P^2 + 6\pi P d - 5\pi^2 d^2} \right)$  (Ramanujan), respectively. When  $d = 2$ , the equation

$$\frac{d^2 \sqrt{P^2 - 4d^2}}{2P} = \frac{d}{12} \left( 3P - 2\pi d - \sqrt{3P^2 + 6\pi P d - 5\pi^2 d^2} \right)$$

has a unique solution  $P$  in  $\mathbb{R}_+$ . Thus, an ellipse and a diamond with the same area and perimeter values, and the same maximum Feret diameter values are found. Futhermore, for these two sets,  $d = 2R$ . Therefore, these two sets have four similar geometrical functionals values :  $R$ ,  $d$ ,  $P$ ,  $A$ . Consequently, this ellipse and this diamond are mapped onto the same point in the shape diagrams  $\mathcal{D}_4, \mathcal{D}_7, \mathcal{D}_{10}, \mathcal{D}_{14}, \mathcal{D}_{17}, \mathcal{D}_{20}, \mathcal{D}_{24}, \mathcal{D}_{27}, \mathcal{D}_{30}$ .

- The rectangle and ellipse areas are expressed in function of  $P$  and  $\omega$  by  $\omega(P/2 - \omega)$  and  $\frac{\omega}{12} \left( 3P - 2\pi \omega + \sqrt{3P^2 + 6\pi P \omega - 5\pi^2 \omega^2} \right)$  (Ramanujan), respectively. When  $\omega = 2$ , the equation

$$\omega(P/2 - \omega) = \frac{\omega}{12} \left( 3P - 2\pi \omega + \sqrt{3P^2 + 6\pi P \omega - 5\pi^2 \omega^2} \right)$$

has a unique solution  $P$  in  $\mathbb{R}_+$ . Thus, an ellipse and a rectangle with the same area and perimeter values, and the same minimum Feret diameter values are found. Furthermore, for these two sets,  $\omega = 2r$ . Therefore, these two sets have four similar geometrical functionals values :  $r$ ,  $\omega$ ,  $P$ ,  $A$ . Consequently, this ellipse and this rectangle are mapped onto the same point in the shape diagrams  $\mathcal{D}_{21}$ ,  $\mathcal{D}_{22}$ ,  $\mathcal{D}_{23}$ ,  $\mathcal{D}_{31}$ .

Non-surjectivity : in each shape diagram, there exists points on which none 2D compact convex set are mapped.

- $4R \leq P$  and  $P \leq 2\pi R$  imply  $\frac{2}{\pi} \leq \frac{4R}{P}$  and  $\frac{2}{\pi} \leq \frac{P}{2\pi R}$ .
- $2d \leq P$  and  $P \leq \pi d$  imply  $\frac{2}{\pi} \leq \frac{2d}{P}$  and  $\frac{2}{\pi} \leq \frac{P}{\pi d}$ .

In the shape diagrams  $\mathcal{D}_7$ ,  $\mathcal{D}_8$ ,  $\mathcal{D}_9$ ,  $\mathcal{D}_{17}$ ,  $\mathcal{D}_{18}$ ,  $\mathcal{D}_{19}$ ,  $\mathcal{D}_{24}$ ,  $\mathcal{D}_{25}$ ,  $\mathcal{D}_{26}$ ,  $\mathcal{D}_{27}$ ,  $\mathcal{D}_{28}$ ,  $\mathcal{D}_{29}$ ,  $\mathcal{D}_{30}$ , on all points below the line of equation  $y = 2/\pi$ , none compact convex set are mapped.

In the shape diagrams  $\mathcal{D}_{10}$ ,  $\mathcal{D}_{20}$ ,  $\mathcal{D}_{30}$ , on all points at the left of the line of equation  $x = 2/\pi$ , none compact convex set are mapped.

- $\sqrt{3}R \leq d$  and  $d \leq 2R$  imply  $\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \frac{\sqrt{3}R}{d}$  and  $\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \frac{d}{2R}$ .

In the shape diagrams  $\mathcal{D}_4$ ,  $\mathcal{D}_5$ ,  $\mathcal{D}_6$ ,  $\mathcal{D}_{14}$ ,  $\mathcal{D}_{15}$ ,  $\mathcal{D}_{16}$ ,  $\mathcal{D}_{10}$ ,  $\mathcal{D}_{20}$ , on all points below the line of equation  $y = \sqrt{3}/2$ , none compact convex set are mapped.

- $2r \leq \omega$  implies  $\frac{r}{R} \leq \frac{\omega}{2R}$  and  $\frac{2r}{d} \leq \frac{\omega}{d}$  and  $\frac{2\pi r}{P} \leq \frac{\pi\omega}{P}$  and  $\frac{\pi r^2}{A} \leq \frac{\pi\omega^2}{4A}$ .
- $\omega \leq 3r$  implies  $\frac{\omega}{2R} \leq \frac{3r}{2R}$  and  $\frac{\omega}{d} \leq \frac{3r}{d}$  and  $\frac{\pi\omega}{P} \leq \frac{3\pi r}{P}$  and  $\frac{\omega^2}{\sqrt{3}A} \leq \frac{9r^2}{\sqrt{3}A}$ .

In the shape diagrams  $\mathcal{D}_1$ ,  $\mathcal{D}_{11}$ ,  $\mathcal{D}_{21}$ , on all points above the line of equation  $y = x$  or below the line of equation  $y = \frac{2}{3}x$ , none compact convex set are mapped. In the shape diagram  $\mathcal{D}_{31}$ , on all points above the line of equation  $y = \frac{\pi\sqrt{3}}{4}x$  or below the line of equation  $y = \frac{\pi\sqrt{3}}{9}x$ , none compact convex set are mapped.

- $\omega^2 \leq \sqrt{3}A$  implies  $(\frac{\omega}{2R})^2 \leq \frac{\sqrt{3}A}{4R^2}$  and  $(\frac{\omega}{d})^2 \leq \frac{\sqrt{3}A}{d^2}$  and  $(\frac{\pi\omega}{P})^2 \leq \frac{\pi^2\sqrt{3}A}{P^2}$ .

In the shape diagrams  $\mathcal{D}_2$ ,  $\mathcal{D}_{12}$ ,  $\mathcal{D}_{22}$ , on all points below the line curve of equation  $y = \frac{4}{\pi\sqrt{3}}x^2$ , none compact convex set are mapped.

- $\pi r^2 \leq A$  implies  $(\frac{r}{R})^2 \leq \frac{A}{\pi R^2}$  and  $(\frac{2r}{d})^2 \leq \frac{4A}{\pi d^2}$  and  $(\frac{2\pi r}{P})^2 \leq \frac{4\pi A}{P^2}$ .

In the shape diagrams  $\mathcal{D}_3$ ,  $\mathcal{D}_{13}$ ,  $\mathcal{D}_{23}$ , on all points below the line curve of equation  $y = x^2$ , none compact convex set are mapped.  $\square$

### Complete systems of inequalities

A system of (two) geometric inequalities associated to a shape diagram is complete if and only if for any range of geometrical functionals values satisfying those conditions, a 2D compact convex set with these geometrical functionals values exists [San61, CG00]. In other words, such a system is complete if and only if the mapping which associates a 2D analytic compact convex set in  $E^2$  to a point in a shape diagram  $(\mathcal{D}_k)_{k \in \llbracket 1, 31 \rrbracket}$  can be surjective by restricting the arrival set. For a shape diagram, each of the two associated inequalities determines a part of the convex domain boundary (the domain in which all compact convex sets are mapped). These two inequalities determine the whole boundary of the convex domain if and only if they form a complete system. The compact convex sets mapped onto the boundary points are the extremal compact convex sets of each considered inequality.

For twenty-one among the thirty-one shape diagrams  $(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_3, \mathcal{D}_4, \mathcal{D}_5, \mathcal{D}_6, \mathcal{D}_7, \mathcal{D}_9, \mathcal{D}_{10}, \mathcal{D}_{11}, \mathcal{D}_{12}, \mathcal{D}_{14}, \mathcal{D}_{15}, \mathcal{D}_{16}, \mathcal{D}_{18}, \mathcal{D}_{20}, \mathcal{D}_{22}, \mathcal{D}_{23}, \mathcal{D}_{24}, \mathcal{D}_{26}, \mathcal{D}_{28}, \mathcal{D}_{30})$ , the completeness of systems of inequalities has been proved [San61, Cif00, CG00, CSG01, Cif02, BCS03]. Figure 4.4 illustrates the convex domain boundary for ten of them.

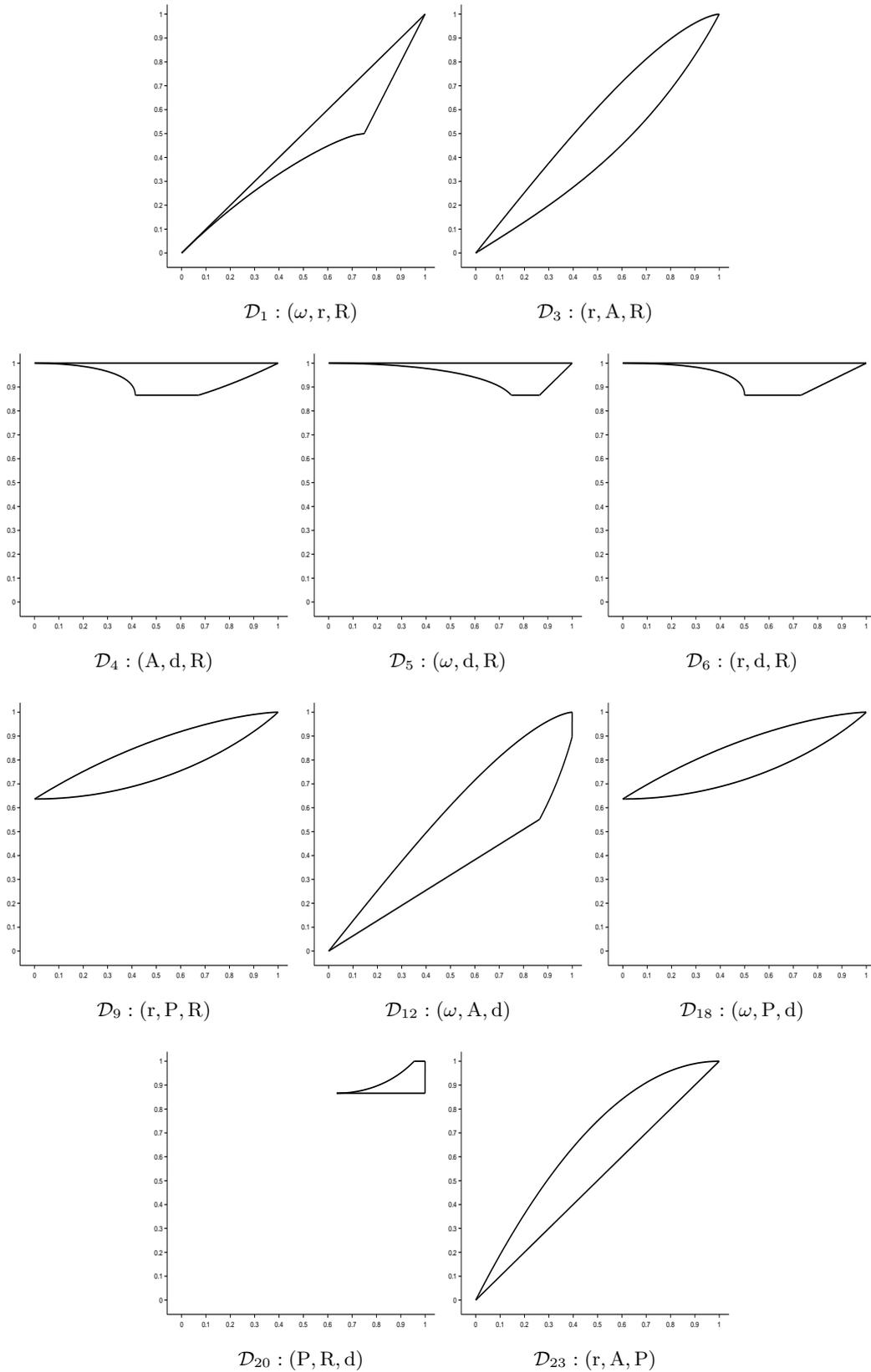


FIG. 4.4 – Convex domains of ten shape diagrams for which complete systems of inequalities have been established. For a given shape diagram, the bordered region represents the convex domain in which all compact convex sets lay.

#### 4.1.4 Shape diagrams dispersion quantification

##### Shape diagrams for compact convex sets

For the family  $\mathcal{F}_1^c$  of thirteen compact convex sets (Figure 4.3), the morphometrical functionals are straightforwardly computed. Each compact convex set  $i \in \llbracket 1, 13 \rrbracket$  is represented by one point denoted  $\mathcal{P}_{i,k}$ , in each shape diagram  $\mathcal{D}_k$ , for  $k \in \llbracket 1, 31 \rrbracket$ .

Figure 4.5 illustrates several of these shape diagrams, chosen according to the results synthesized in Section 4.1.6. Remember that the shape diagrams are included in  $[0, 1]^2$ . For a better visualization of the shapes drawn on a point of abscissa or ordinate equal to 0 or 1, the shape diagrams are illustrated in  $[-0.06, 1.04]^2$ . Whatever the morphometrical functional, the extremal value 1 is reached for extremal compact convex sets. Thus, in each shape diagram, there is at least one compact convex set mapped to a point of abscissa or ordinate equal to 1. Moreover, the extremal value 0 is not always reached.

The dispersion of compact convex set locations within each shape diagram will be studied after the analysis of similarities between shape diagrams.

##### Similarity

The fact that  $\omega = 2r$  for some compact convex sets implies that shape diagrams  $(\omega, x_1, x_2)$  are similar to shape diagrams  $(r, x_1, x_2)$  where  $x_1 \in \{d, R, P, A\}$  and  $x_2 \in \{d, R, P\}$ , that is to say  $\mathcal{D}_2 \sim \mathcal{D}_3$ ,  $\mathcal{D}_5 \sim \mathcal{D}_6$ ,  $\mathcal{D}_8 \sim \mathcal{D}_9$ ,  $\mathcal{D}_{12} \sim \mathcal{D}_{13}$ ,  $\mathcal{D}_{15} \sim \mathcal{D}_{16}$ ,  $\mathcal{D}_{18} \sim \mathcal{D}_{19}$ ,  $\mathcal{D}_{22} \sim \mathcal{D}_{23}$ ,  $\mathcal{D}_{25} \sim \mathcal{D}_{26}$ ,  $\mathcal{D}_{28} \sim \mathcal{D}_{29}$  where  $\sim$  denotes a strong similarity between shape diagrams.

In the same way, the fact that  $d = 2R$  for some compact convex sets implies that :

- shape diagrams  $(x_1, x_2, R)$  are similar to shape diagrams  $(x_1, x_2, d)$  where  $x_1 \in \{\omega, r, A\}$  and  $x_2 \in \{r, A, P\}$  ( $\mathcal{D}_1 \sim \mathcal{D}_{11}$ ,  $\mathcal{D}_2 \sim \mathcal{D}_{12}$ ,  $\mathcal{D}_3 \sim \mathcal{D}_{13}$ ,  $\mathcal{D}_7 \sim \mathcal{D}_{17}$ ,  $\mathcal{D}_8 \sim \mathcal{D}_{18}$ ,  $\mathcal{D}_9 \sim \mathcal{D}_{19}$ );
- shape diagrams  $(x_1, R, P)$  are similar to shape diagrams  $(x_1, d, P)$  where  $x_1 \in \{\omega, r, A\}$  ( $\mathcal{D}_{24} \sim \mathcal{D}_{27}$ ,  $\mathcal{D}_{25} \sim \mathcal{D}_{28}$ ,  $\mathcal{D}_{26} \sim \mathcal{D}_{29}$ ).

An algorithm of hierarchical classification [Did83] based on distances between shape diagrams allows to justify many of these similarities and to find other ones. Let  $k_1, k_2 \in \llbracket 1, 31 \rrbracket$ , the distance between shape diagrams  $\mathcal{D}_{k_1}$  and  $\mathcal{D}_{k_2}$ , based on the Euclidean distance  $d^E$ , is defined by Equation 4.1.

$$d^E(\mathcal{D}_{k_1}, \mathcal{D}_{k_2}) = \frac{1}{13} \sum_{i \in \llbracket 1, 13 \rrbracket} d^E(\mathcal{P}_{i,k_1}, \mathcal{P}_{i,k_2}) \quad (4.1)$$

For all  $k_1 \in \llbracket 1, 30 \rrbracket$  and  $k_2 \in \llbracket k_1 + 1, 31 \rrbracket$ , the distances  $d^E(\mathcal{D}_{k_1}, \mathcal{D}_{k_2})$  are computed. Among them, the minimum distance value gives the best similarity between two shape diagrams. From these two shape diagrams, a mean shape diagram is built. To each step of the algorithm, two shape diagrams are similar up to the distance computed and they are gathered to build a mean shape diagram. The algorithm can be run until all the shape diagrams are gathered. Figure 4.6 shows the first twenty-three steps of the hierarchical tree resulting from this algorithm. The remaining steps are not shown because the distance values are too high and do not present an interest in the study of similarities.

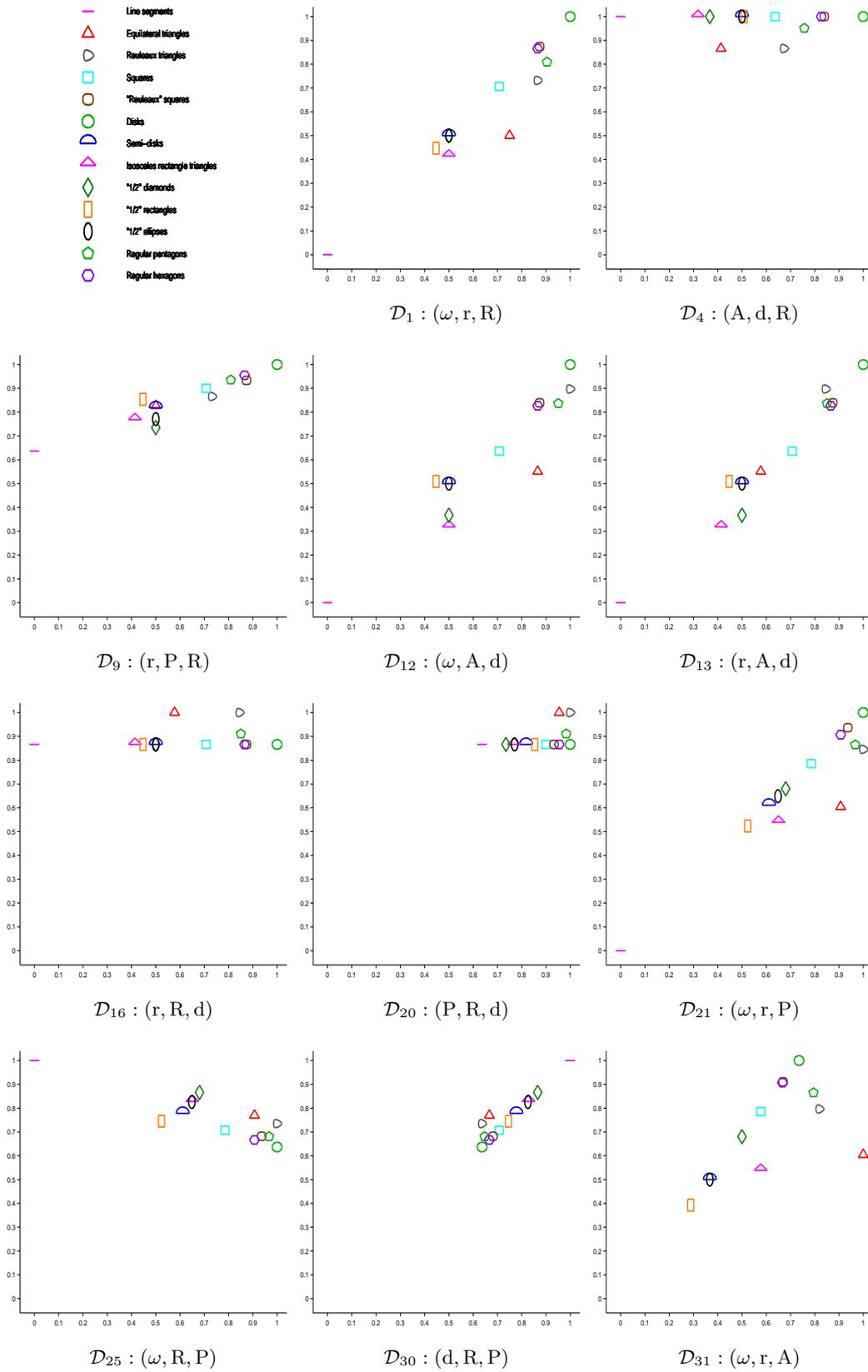


FIG. 4.5 – Family  $\mathcal{F}_1^c$  of analytic compact convex sets mapped into eleven shape diagrams (chosen according to the results synthesized in Section 4.1.6).

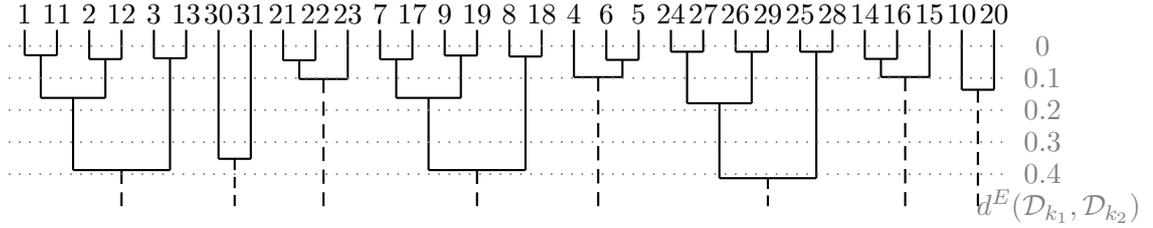


FIG. 4.6 – The first twenty-three steps of an algorithm of hierarchical classification based on distances between the shape diagrams. To each step, two shape diagrams are similar up to the distance value, whose the scale is indicated on the right.

For instance, if the algorithm is stopped before the distance value reaches 0.2, the following classification of shape diagrams is obtained :

$$\begin{array}{llllll}
 - \mathcal{D}_1, \mathcal{D}_{11}, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_{12} & - \mathcal{D}_{21}, \mathcal{D}_{22}, \mathcal{D}_{23} & - \mathcal{D}_4, \mathcal{D}_5, \mathcal{D}_6 & - \mathcal{D}_3, \mathcal{D}_{13} & - \mathcal{D}_{10}, \mathcal{D}_{20} & - \mathcal{D}_{30} \\
 - \mathcal{D}_7, \mathcal{D}_{17}, \mathcal{D}_9, \mathcal{D}_{19} & - \mathcal{D}_{24}, \mathcal{D}_{27}, \mathcal{D}_{26}, \mathcal{D}_{29} & - \mathcal{D}_{14}, \mathcal{D}_{15}, \mathcal{D}_{16} & - \mathcal{D}_8, \mathcal{D}_{18} & - \mathcal{D}_{25}, \mathcal{D}_{28} & - \mathcal{D}_{31}
 \end{array}$$

### Dispersion quantification

For each shape diagram, the dispersion of the locations of 2D analytic compact convex sets of the family  $\mathcal{F}_1^c$  is studied.

The spatial distribution of compact convex sets locations in each shape diagram is characterized and quantified from algorithmic geometry using Delaunay's graph (DG) and minimum spanning tree (MST) [BY98]. Some useful information about the disorder and the neighborhood relationships between sets can be deduced. From each geometrical model, it is possible to compute two values from the edge lengths, denoted  $\mu$  (average) and  $\sigma$  (standard deviation) for DG or MST. The simple reading of the coordinates in the  $(\mu, \sigma)$ -plane enables to determine the type of spatial distribution of the compact convex set (regular, random, cluster, ...) [RPG<sup>+</sup>01]. The decrease of  $\mu$  and the increase of  $\sigma$  characterize the shift from a regular distribution toward random and cluster distributions, respectively.

Figure 4.7 represents both values of parameters of the thirty-one shape diagrams for each model, DG and MST.

MST enables to visually distinguish five groups of shape diagrams, according to their dispersion measurements  $(\mu, \sigma)$  :

$$\begin{array}{lll}
 - \mathcal{D}_1, \mathcal{D}_{11}, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_{12}, \mathcal{D}_{21}, \mathcal{D}_{23} & - \mathcal{D}_{10}, \mathcal{D}_{20}, \mathcal{D}_{30} & - \text{the sixteen others} \\
 - \mathcal{D}_4, \mathcal{D}_{14}, \mathcal{D}_7, \mathcal{D}_{17}, \mathcal{D}_{31} & - \mathcal{D}_{22} &
 \end{array}$$

DG also extracts the shape diagrams  $\mathcal{D}_{10}, \mathcal{D}_{20}, \mathcal{D}_{30}$ , that have both low  $\mu$  and  $\sigma$  values. These three shape diagrams have a weak dispersion. Visually, the compact convex sets locations form a cluster (see Figure 4.5 for  $\mathcal{D}_{20}$  and  $\mathcal{D}_{30}$ ). The shape diagrams  $\mathcal{D}_{21}$  and  $\mathcal{D}_{22}$  have both high  $\mu$  and  $\sigma$  values, that is to say a strong dispersion. Visually, the compact convex sets are located within a large domain within  $[0, 1]^2$  and are well spaced from each other.

Finally, these statements are in agreement with those obtained for the similarities between shape diagrams.

A shape diagram with a strong dispersion (both high  $\mu$  and  $\sigma$  values), for both DG and MST, guarantees a strong discrimination of shapes : the compact convex sets are located within a large domain in  $[0, 1]^2$  and are well spaced from each other. However, remember that  $d = 2R$  and  $\omega = 2r$  for

some compact convex sets. This explains that the compact convex sets of the family  $\mathcal{F}_1^c$  - except for equilateral triangles, Reuleaux triangles, pentagons where  $d \neq 2R$  and  $\omega \neq 2r$  and isosceles rectangle triangles where  $\omega \neq 2r$  - are mapped onto a point on a line for some shape diagrams, namely :

- diagonal line from (0, 0) to (1, 1) on shape diagrams  $(x_1, x_2, x_3)$  where  $(x_1, x_2) \in \{(\omega, r), (d, R)\}$  and  $x_3 \in \{A, R, d, P\}$  ( $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_{11}, \mathcal{D}_{21}, \mathcal{D}_{30}, \mathcal{D}_{31}$ )
- horizontal line from (0, 1) to (1, 1) on shape diagrams  $(x_1, d, R)$  where  $x_1 \in \{\omega, r, P, A\}$  ( $\mathcal{D}_4, \mathcal{D}_5, \mathcal{D}_6, \mathcal{D}_{10}$ )
- horizontal line from  $(0, \sqrt{3}/2)$  to  $(1, \sqrt{3}/2)$  on shape diagrams  $(x_1, R, d)$  where  $x_1 \in \{\omega, r, P, A\}$  ( $\mathcal{D}_{14}, \mathcal{D}_{15}, \mathcal{D}_{16}, \mathcal{D}_{20}$ )

For a shape diagram, the fact that some compact convex sets are mapped onto a point on a line does not yield to allow a strong discrimination of the compact convex sets as quantified and illustrated in Figure 4.7.

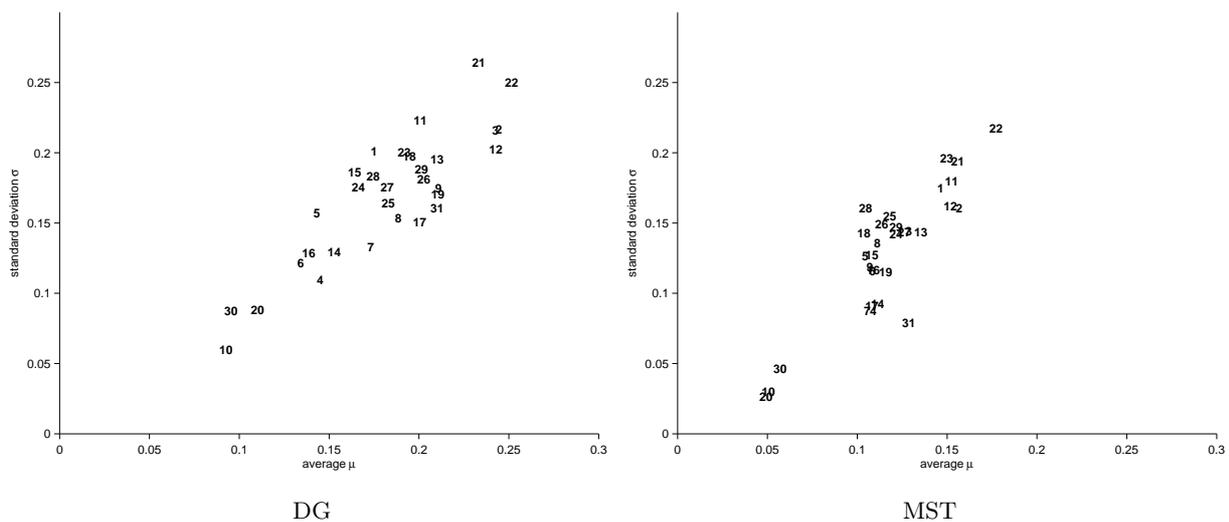


FIG. 4.7 – Two dispersion quantifications for all shape diagrams applied on the family  $\mathcal{F}_1^c$ . For each representation (according to the models DG and MST, respectively), indices  $k \in \llbracket 1, 31 \rrbracket$  of the shape diagrams  $\mathcal{D}_k$  are located according to their  $\mu$  and  $\sigma$  values.

#### 4.1.5 Shape diagrams overlapping quantification

##### Shape diagrams for compact convex sets with one degree of freedom

Let two 2D analytic compact convex sets of the family  $\mathcal{F}_1^c$ , and the compact convex set class allowing to switch from one to the other using one degree of freedom. For example, the line segment goes to the square through rectangles whose elongation decreases (or through diamonds, ...). Therefore, several classes of "compact convex sets with one degree of freedom" could be defined. Thus, a curve denoted  $\mathcal{C}_{i,k}$  from each compact convex set class  $\mathcal{C}_i$  is created in each shape diagram  $\mathcal{D}_k$ ,  $k \in \llbracket 1, 31 \rrbracket$ . This process is used for some pairs of compact convex sets of the family  $\mathcal{F}_1^c$ . The tendency of various curves are observed.

These analytic compact convex sets verify shape properties which are preserved only under similitude transformations and under the variation of one parameter  $t \in \mathbb{R}$ . These are, for example, isosceles triangles (the "isosceles" property is preserved when the top angle varies between 0 and  $\pi$ ), rectangles (the ratio width/length varies between 0 and 1), ... In other terms, the degree of freedom is the parameter  $t \in \mathbb{R}$ .

Twenty-three analytic compact convex set classes (chosen according to the faculty to compute analytically their geometrical (and morphometrical) functional values), gathered in four families, are considered :

- family  $\mathcal{F}_{2,1}^c \supseteq \{C_i\}_{i \in \llbracket 1,4 \rrbracket}$  : four classes of compact convex sets with one symmetrical axis (Figure 4.8),
- family  $\mathcal{F}_{2,2}^c \supseteq \{C_i\}_{i \in \llbracket 5,13 \rrbracket}$  : nine classes of compact convex sets with two symmetrical axes (Figure 4.9),
- family  $\mathcal{F}_{2,3}^c \supseteq \{C_i\}_{i \in \llbracket 14,18 \rrbracket}$  : five classes of compact convex sets with an odd number strictly greater to 1 of symmetrical axes (Figure 4.10),
- family  $\mathcal{F}_{2,4}^c \supseteq \{C_i\}_{i \in \llbracket 19,23 \rrbracket}$  : five classes of compact convex sets with an even number strictly greater to 2 of symmetrical axes (Figure 4.11).

There are :

- Family  $\mathcal{F}_{2,1}^c$  :

$C_1$  - Isosceles triangles : The top angle varies in  $[0, \pi]$ . When it reaches the bounds, the isosceles triangle becomes a line segment.

$C_2$  - Angular sectors : The angle varies in  $[0, \pi]$ . When it reaches the lower and upper bounds, the angular sector becomes a line segment and a semi-disk, respectively.

$C_3$  - Ungula : They are based on angular sectors whose angle varies in  $[0, \pi]$ . The extremal compact convex sets are the point (null angle) and the semi-disk (angle equals to  $\pi$ ).

$C_4$  - Semi-symmetrical disks with two peaks : They are the convex hulls of a semi-disk and two symmetrically placed points. The disk radius value varies between 0 and the half of the line segment length. The extremal compact convex sets are the line segment and the semi-disk, respectively.

- Family  $\mathcal{F}_{2,2}^c$  :

$C_5$  - Rectangles : The ratio between the width and the length varies in  $[0, 1]$ . When it reaches the lower and upper bounds, the rectangle becomes a line segment and a square, respectively.

$C_6$  - Symmetrical disk segments : They are the intersubsection of a disk and a symmetrically placed strip. The extremal compact convex sets are the line segment and the disk.

$C_7$  - Rectangles terminated by semi-disks : The ratio between the width and the length of the rectangle varies in  $[0, 1]$ . Semi-disks are placed on two opposite edges. When the ratio reaches the lower and upper bounds, the resulting compact convex set becomes a line segment and a disk, respectively.

$C_8$  - Ellipses : The ratio between the minor and major axes lengths varies in  $[0, 1]$ . When it reaches the lower and upper bounds, the ellipse becomes a line segment and a disk, respectively.

$C_9$  - Symmetrical lens : They are the intersubsection of two congruent circular disks. The extremal compact convex sets are the point and the disk.

$C_{10}$  - Symmetrical disks with two peaks : They are the convex hulls of a disk and two symmetrically placed points. The disk radius value varies between 0 and the half of the line segment length. The extremal compact convex sets are the line segment and the disk, respectively.

$C_{11}$  - Diamonds : The ratio between the top angles varies in  $[0, 1]$ . When it reaches the lower and upper bounds, the diamond becomes a line segment and a square, respectively.

$C_{12}$  - Rectangles terminated by equilateral triangles : The ratio between the width and the length of the rectangle varies in  $[0, 1]$ . Equilateral triangles are placed on two opposite edges. When the ratio reaches the lower and upper bounds, the resulting compact convex set becomes a line segment and a "1/2" diamond, respectively.

$C_{13}$  - Rectangles terminated by isosceles rectangle triangles : The ratio between the width and the length of the rectangle varies in  $[0, 1]$ . Isosceles rectangle triangles are placed on two opposite edges. When the ratio reaches the lower and upper bounds, the resulting compact convex set becomes a line segment and a square, respectively.

– Family  $\mathcal{F}_{2,3}^c$  :

$C_{14}$  - Yamanouti triangles [Yam32] : The radius value varies between the height and the edge length of an equilateral triangle. The extremal compact convex sets are the equilateral triangle and the Reuleaux triangle, respectively.

$C_{15}$  - Disk-equilateral triangle intersubsections : They are the intersubsections of an equilateral triangle and a disk centered on the center of mass with a radius varying between the radii of inscribed and circumscribed circles. The extremal compact convex sets are the disk and the equilateral triangle, respectively.

$C_{16}$  - Dilated (disk) equilateral triangles : They are obtained by the dilation of an equilateral triangle with a disk of radius included in  $[0, +\infty[$ . When the radius value reaches the lower bound, the resulting compact convex set becomes an equilateral triangle. When the radius tends to infinity, the resulting compact convex set tends to the disk.

$C_{17}$  - Regular odd polygons : They are regular polygons with a positive odd edge number. In the shape diagrams, the real positions of these compact convex sets do not describe a curve because it is not continuous (the edge number is necessarily an integer) but they are along a curve. Theoretically, the extremal compact convex sets are the point and the disk. In the following shape diagrams, only the curve from the equilateral triangle to the disk is drawn.

$C_{18}$  - Reuleaux odd polygons : They are Reuleaux polygons with a positive odd edge number. In the shape diagrams, the real positions of these compact convex sets do not describe a curve because it is not continuous (the edge number is necessarily an integer) but they are along a curve. Theoretically, the extremal compact convex sets are the point and the disk. In the following shape diagrams, only the curve from the Reuleaux triangle to the disk is drawn.

– Family  $\mathcal{F}_{2,4}^c$  :

$C_{19}$  - "Yamanouti" squares : They are defined in a similar way as the Yamanouti triangles, but from the middle of the opposite edges. The extremal compact convex sets are the square and the "Reuleaux" square.

$C_{20}$  - Disk-square intersubsections : They are the intersubsections of a square and a disk centered on the center of mass with a radius varying between the radii of inscribed and circumscribed circles. The extremal compact convex sets are the disk and the square, respectively.

$C_{21}$  - Dilated (disk) squares : They are obtained by the dilation of a square with a disk of radius included in  $[0, +\infty[$ . When the radius value reaches the lower bound, the resulting compact convex set becomes a square. When the radius tends to infinity, the resulting compact convex set tends to the disk.

$C_{22}$  - Regular even polygons : They are regular polygons with a positive even edge number. In the shape diagrams, the real positions of these compact convex sets do not describe a curve because it is not continuous (the edge number is necessarily an integer) but they are along a curve. Theoretically, the extremal compact convex sets are the line segment and the disk. In the following shape diagrams, only the curve from the square to the disk is drawn.

$C_{23}$  - "Reuleaux" even polygons : They are defined in a similar way as the Reuleaux odd polygons, but from the middle of the opposite edges. In the shape diagrams, the real positions of these compact convex sets do not describe a curve because it is not continuous (the edge number is necessarily an integer) but they are along a curve. Theoretically, the extremal compact convex sets are the line segment and the disk. In the following shape diagrams, only the curve from the "Reuleaux" square to the disk is drawn.

For the compact convex sets of each class, the morphometrical functionals are computed. In each shape diagram  $\mathcal{D}_k$ ,  $k \in \llbracket 1, 31 \rrbracket$ , a compact convex set class  $i \in \llbracket 1, 23 \rrbracket$  is represented by a parametric curve  $\mathcal{C}_{i,k}(t)$  since the class is infinite and bounded by the two extremal sets. For the considered compact convex set classes, the extremal compact convex set are in the family  $\mathcal{F}_1^c$  (Figure 4.3). For example, up to a similitude transformation, an infinite class of rectangles exists, from the line segment to the square.

Figures 4.12, 4.13, 4.14 and 4.15 illustrate some of these shape diagrams, chosen according to the results synthetized in Section 4.1.6.

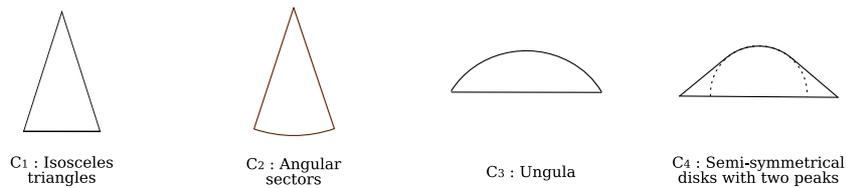


FIG. 4.8 – Family  $\mathcal{F}_{2,1}^c$  of 2D analytic compact convex sets with one degree of freedom and one symmetrical axis.

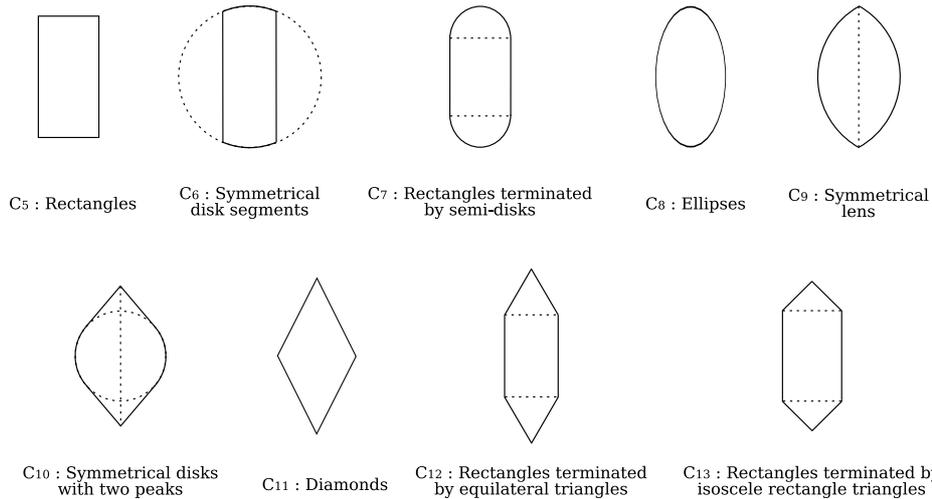


FIG. 4.9 – Family  $\mathcal{F}_{2,2}^c$  of 2D analytic compact convex sets with one degree of freedom and two symmetrical axes.

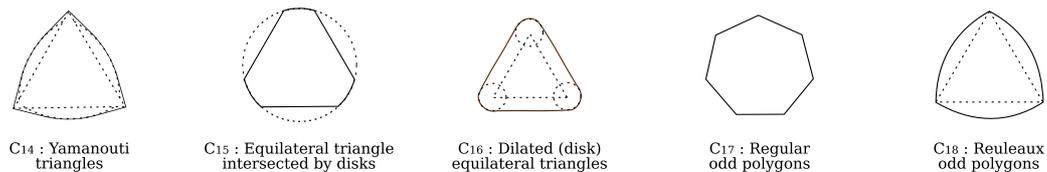


FIG. 4.10 – Family  $\mathcal{F}_{2,3}^c$  of 2D analytic compact convex sets with one degree of freedom and an odd number (strictly greater to 1) of symmetrical axes.

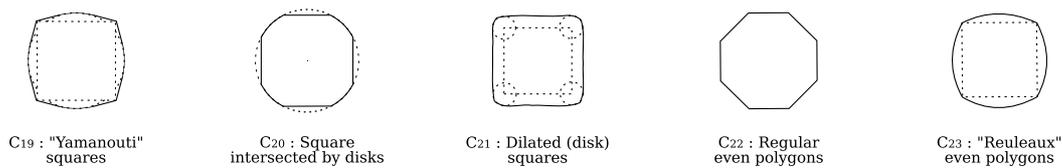


FIG. 4.11 – Family  $\mathcal{F}_{2,4}^c$  of 2D analytic compact convex sets with one degree of freedom and an even number (strictly greater to 2) of symmetrical axes.

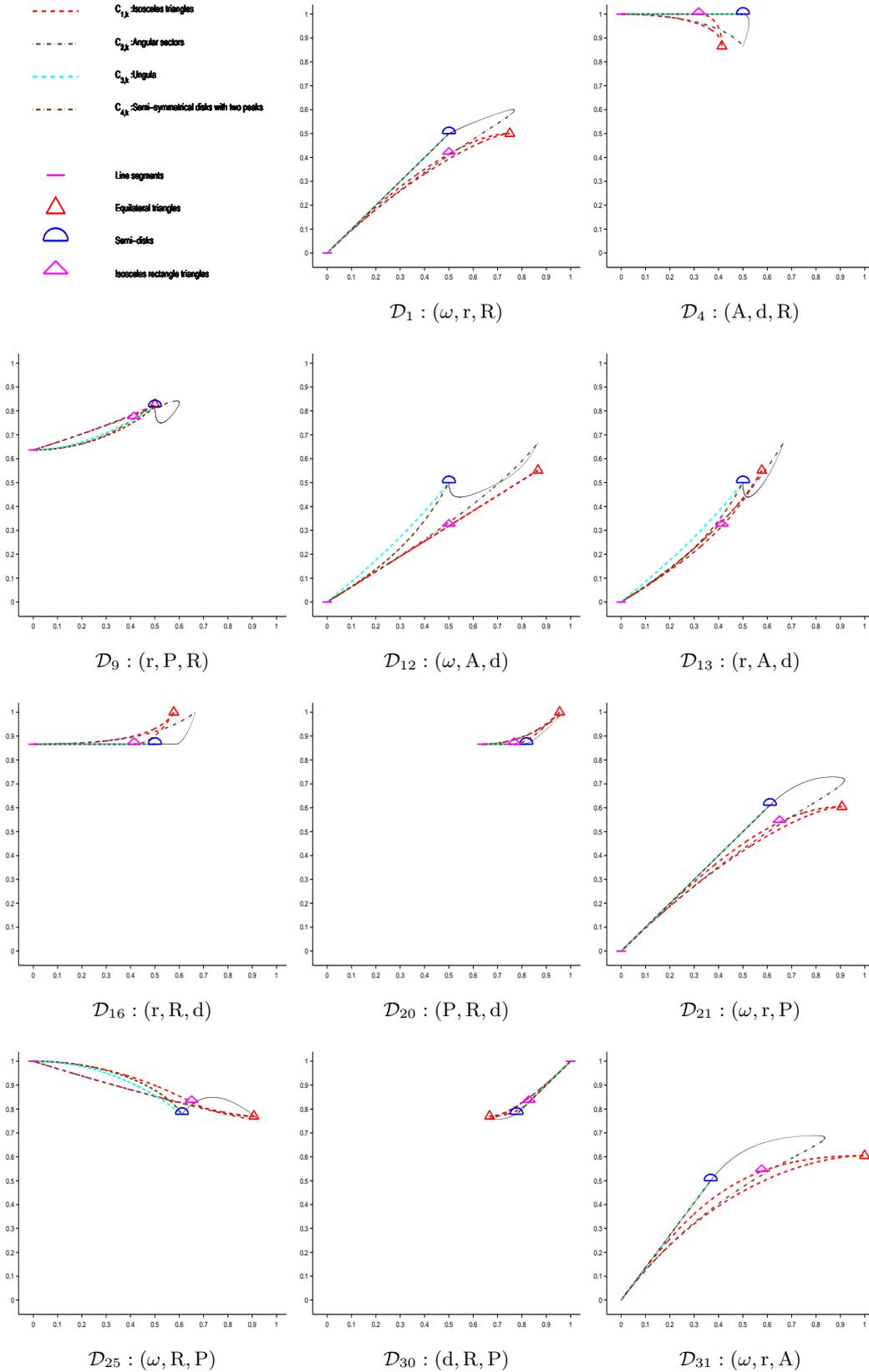


FIG. 4.12 – Family  $\mathcal{F}_{2,1}^c$  of analytic compact convex sets with one degree of freedom and one symmetrical axis mapped into eleven shape diagrams (chosen according to the results synthesized in Section 4.1.6).

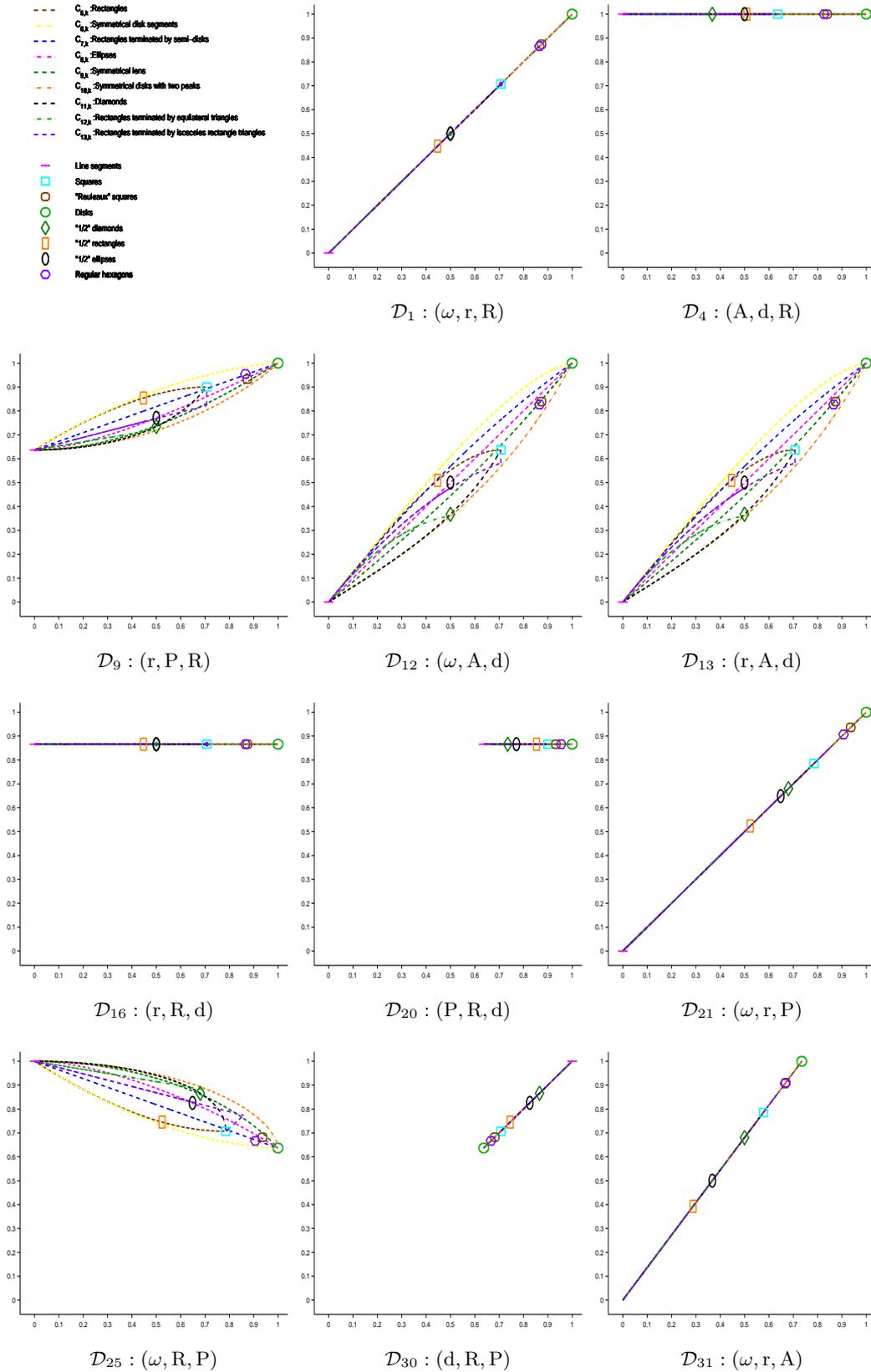


FIG. 4.13 – Family  $\mathcal{F}_{2,2}^c$  of analytic compact convex sets with one degree of freedom and two symmetrical axes mapped into eleven shape diagrams (chosen according to the results synthesized in Section 4.1.6).

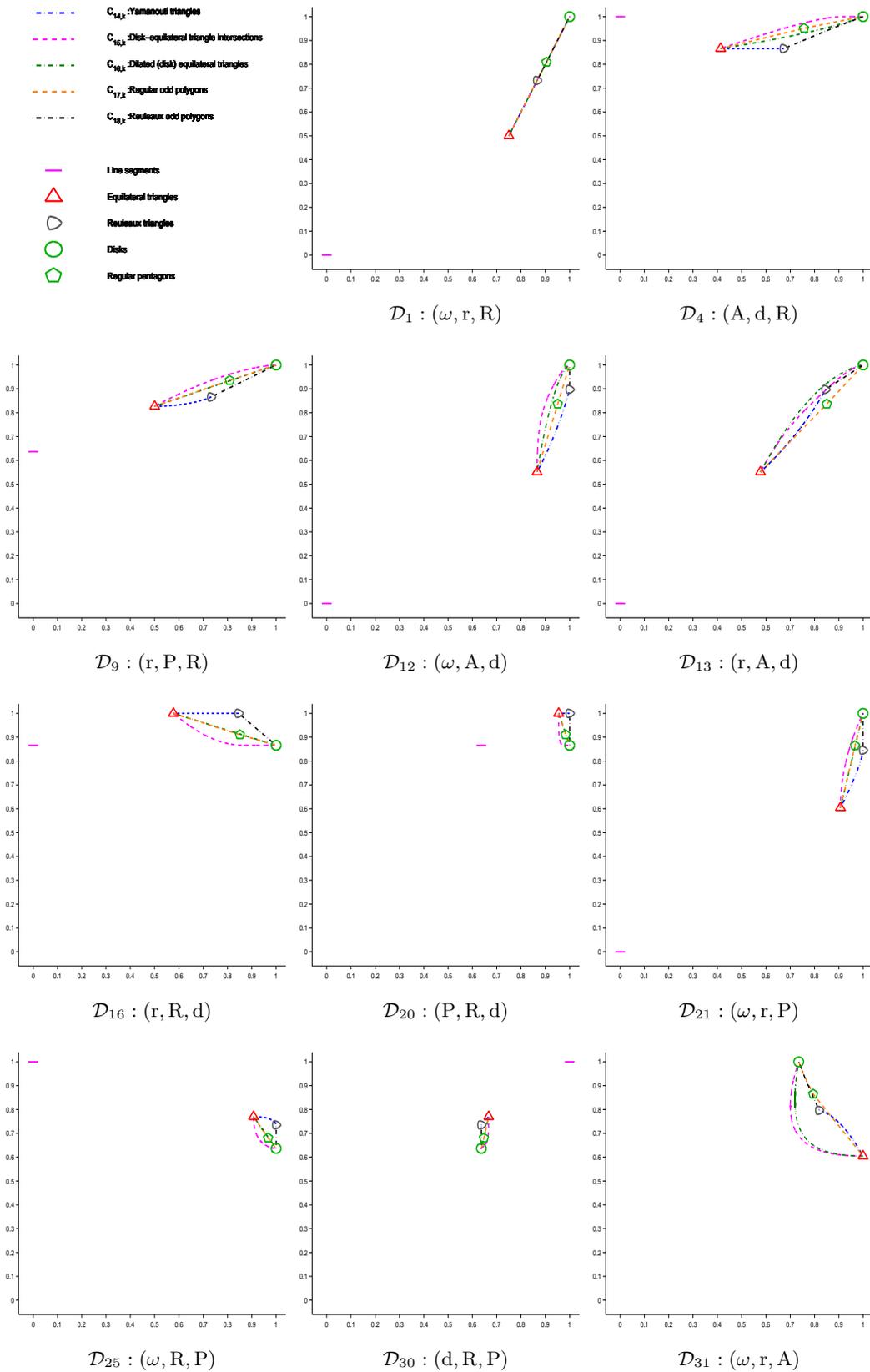


FIG. 4.14 – Family  $\mathcal{F}_{2,3}^c$  of analytic compact convex sets with one degree of freedom and an odd number strictly greater to 1 of symmetrical axes mapped into eleven shape diagrams (chosen according to the results synthetized in Section 4.1.6).

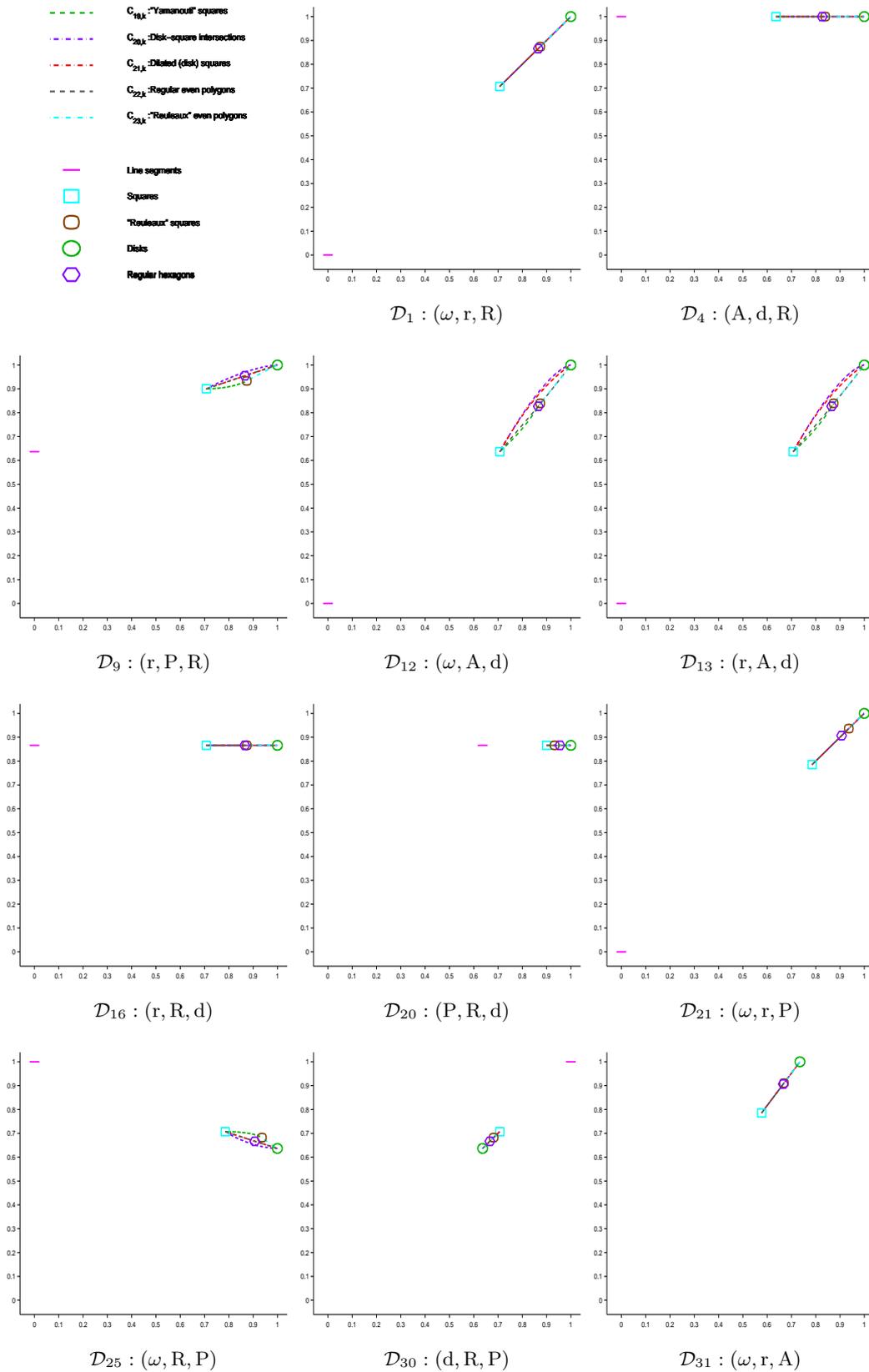


FIG. 4.15 – Family  $\mathcal{F}_{2,4}^c$  of analytic compact convex sets with one degree of freedom and an even number strictly greater to 2 of symmetrical axes mapped into eleven shape diagrams (chosen according to the results synthetized in Section 4.1.6).

### Overlapping quantification

An overlapping of curves is visible in some shape diagrams. Its quantification is based on a discretization of the spatial domain  $[0, 1]^2$  of the shape diagrams. Let  $n \in \mathbb{N}^*$ , the discretization of a curve  $\mathcal{C}_{i,k}$ ,  $i \in \llbracket 1, 23 \rrbracket$ ,  $k \in \llbracket 1, 31 \rrbracket$ , is denoted  $C_{i,k} : \llbracket 0, n \rrbracket^2 \rightarrow \{0, 1\}$  and defined as following,  $\forall (x, y) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$  :

$$C_{i,k}(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{if } \exists t_0 \in \mathbb{R} : \left( x - \frac{1}{2} \right) \frac{1}{n} \leq \mathcal{C}_{i,k}(t_0) \vec{u} \leq \left( x + \frac{1}{2} \right) \frac{1}{n} \text{ and} \\ & \left( y - \frac{1}{2} \right) \frac{1}{n} \leq \mathcal{C}_{i,k}(t_0) \vec{v} \leq \left( y + \frac{1}{2} \right) \frac{1}{n} \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

where  $\vec{u}$  and  $\vec{v}$  are the unit vectors along the abscissa and ordinate axes, respectively.

When all curves of a shape diagram are considered, two discretized shape diagrams are built (Figure 4.16) :

- the "binary" discretized shape diagram, indicating where the curves are located (Figure 4.16.(a)). It is denoted  $D_k^{max} : \llbracket 0, n \rrbracket^2 \rightarrow \{0, 1\}$  and defined  $\forall (x, y) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$  by :

$$D_k^{max}(x, y) = \max_{i \in \llbracket 1, 23 \rrbracket} C_{i,k}(x, y)$$

- the "intensity" discretized shape diagram, indicating the intensities of curves overlapping, i.e. the counts of curve overlaps (Figure 4.16.(b)).

It is denoted  $D_k^{sum} : \llbracket 0, n \rrbracket^2 \rightarrow \mathbb{N}$  and defined  $\forall (x, y) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$  by :

$$D_k^{sum}(x, y) = \sum_{i \in \llbracket 1, 23 \rrbracket} C_{i,k}(x, y)$$

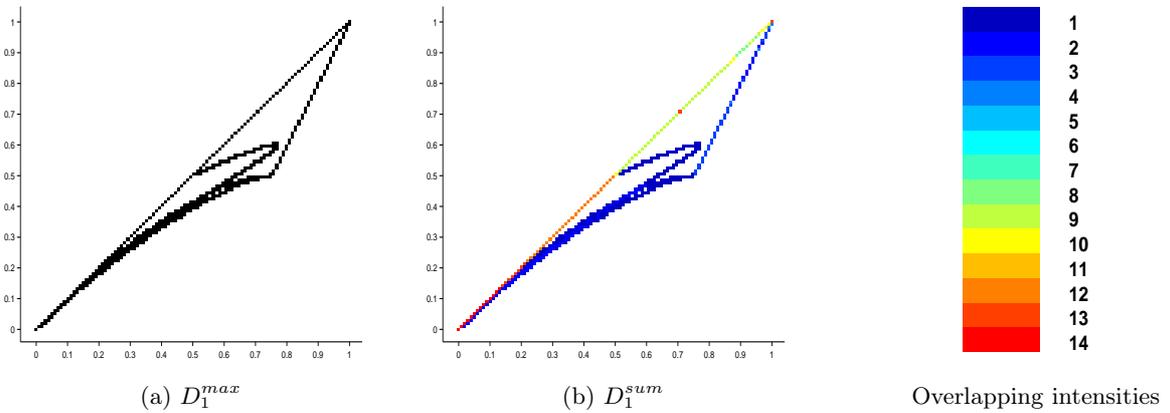


FIG. 4.16 – "Intensity" discretized shape diagram  $D_1 : (\omega, r, R)$  ( $n = 100$ ) with the twenty-three curves representing the compact convex set classes with one degree of freedom.

Finally, Equation 4.2 quantifies (by a measurement ranging between 0 and 1) the overlapping of all curves for each shape diagram  $\mathcal{D}_k$ ,  $k \in \llbracket 1, 31 \rrbracket$ . A high (resp. low) value for this ratio means a strong (resp. weak) overlapping. This quantification depends on the discretization level  $n$ . Thus, when the computation is done for various  $n$  values, not only the curves overlapping is considered but also the curves proximity (small  $n$  value).

$$\text{Overlapping}_n(\mathcal{D}_k) = 1 - \frac{\sum_{(x,y) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2} D_k^{max}(x, y)}{\sum_{(x,y) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2} D_k^{sum}(x, y)} \quad (4.2)$$

Figure 4.17 illustrates the discretized shape diagrams ( $n = 100$ ) with overlapping intensities, and Figure 4.18 shows the quantification of curves overlapping (representing the compact convex set classes) for some shape diagrams, according to the  $n$  values 100 and 1000.

Several informations can be extracted from these graphs :

- The graphs representing the 2D analytic compact convex set classes of the families  $\mathcal{F}_{2,2}^c$  and  $\mathcal{F}_{2,4}^c$  show a strong overlap (from  $n = 1000$ ) for the shape diagrams  $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_4, \mathcal{D}_5, \mathcal{D}_6, \mathcal{D}_{10}, \mathcal{D}_{11}, \mathcal{D}_{14}, \mathcal{D}_{15}, \mathcal{D}_{16}, \mathcal{D}_{20}, \mathcal{D}_{21}, \mathcal{D}_{30}$  and  $\mathcal{D}_{31}$ .
- The graphs representing the 2D analytic compact convex set classes of the family  $\mathcal{F}_{2,3}^c$  show a strong overlap (from  $n = 1000$ ) for the shape diagram  $\mathcal{D}_1$ . They are close to each other (strong overlap from  $n = 100$ ) in the shape diagrams  $\mathcal{D}_{17}, \mathcal{D}_{18}, \mathcal{D}_{19}, \mathcal{D}_{27}, \mathcal{D}_{28}$  and  $\mathcal{D}_{29}$ .

#### 4.1.6 Synthesis

To obtain a strong discrimination of 2D analytic compact convex sets, it is necessary to have both a strong dispersion and a weak overlapping.

- The shape diagrams  $\mathcal{D}_{10}, \mathcal{D}_{20}$  and  $\mathcal{D}_{30}$  are excluded due to their weak dispersion and overlapping results, whatever the considered compact convex sets.
- In the shape diagrams  $\mathcal{D}_4, \mathcal{D}_5, \mathcal{D}_6, \mathcal{D}_{14}, \mathcal{D}_{15}$  and  $\mathcal{D}_{16}$ , only the family  $\mathcal{F}_{2,3}^c$  shows a weak overlapping. Futhermore, their dispersion quantification is moderate and even somewhat below.
- In the shape diagram  $\mathcal{D}_{31}$ , the families of  $\mathcal{F}_{2,1}^c$  and  $\mathcal{F}_{2,3}^c$  show a weak overlapping. Futhermore, its dispersion quantification is moderate.
- In the shape diagrams  $\mathcal{D}_7, \mathcal{D}_8, \mathcal{D}_9, \mathcal{D}_{17}, \mathcal{D}_{18}, \mathcal{D}_{19}, \mathcal{D}_{24}, \mathcal{D}_{25}, \mathcal{D}_{26}, \mathcal{D}_{27}, \mathcal{D}_{28}$  and  $\mathcal{D}_{29}$ , all the families considered in this paper show a weak overlapping. But in  $\mathcal{D}_{17}, \mathcal{D}_{18}, \mathcal{D}_{19}, \mathcal{D}_{27}, \mathcal{D}_{28}$  and  $\mathcal{D}_{29}$ , the compact convex set classes of  $\mathcal{F}_{2,3}^c$  are located close together. However, the dispersion quantification of all these shape diagrams are moderate.
- The dispersion quantification of the shape diagrams  $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3, \mathcal{D}_{11}, \mathcal{D}_{12}, \mathcal{D}_{13}, \mathcal{D}_{21}, \mathcal{D}_{22}$  and  $\mathcal{D}_{23}$  gives strong values, particularly for  $\mathcal{D}_{22}$ . In the shape diagram  $\mathcal{D}_1$ , only the family  $\mathcal{F}_{2,1}^c$  shows a weak overlapping, and in the shape diagrams  $\mathcal{D}_{11}$  and  $\mathcal{D}_{21}$ , only the families of  $\mathcal{F}_{2,1}^c$  and  $\mathcal{F}_{2,3}^c$  show a weak overlapping. It remains the shape diagrams  $\mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3, \mathcal{D}_{12}, \mathcal{D}_{13}, \mathcal{D}_{22}, \mathcal{D}_{23}$  that, in addition to their strong dispersion, provide a weak overlapping of the compact convex set classes considered in this paper.

Futhermore, among the shape diagrams  $\mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3, \mathcal{D}_{12}, \mathcal{D}_{13}, \mathcal{D}_{22}$  and  $\mathcal{D}_{23}$  that obtain the best results for dispersion and overlapping quantifications, only  $\mathcal{D}_3, \mathcal{D}_{12}, \mathcal{D}_{22}$  and  $\mathcal{D}_{23}$  are based on known complete systems of inequalities. Observing in details the representation of quantifications for these four shape diagrams,  $\mathcal{D}_{12}$  is retained for shape discrimination of analytic compact convex sets.

This analysis is summarized in Table 4.3.

In this paper, only some shape diagrams have been illustrated. The choice was based on the results of shape discrimination (dispersion and overlapping studies) and on the results of similarities between shape diagrams (4.1.4). The aim was to illustrate dissimilar shape diagrams with different qualities of shape discrimination, and shape diagrams with different completeness of associated systems of inequalities. The framed shape diagrams of Table 4.3 are those illustrated throughout this paper.

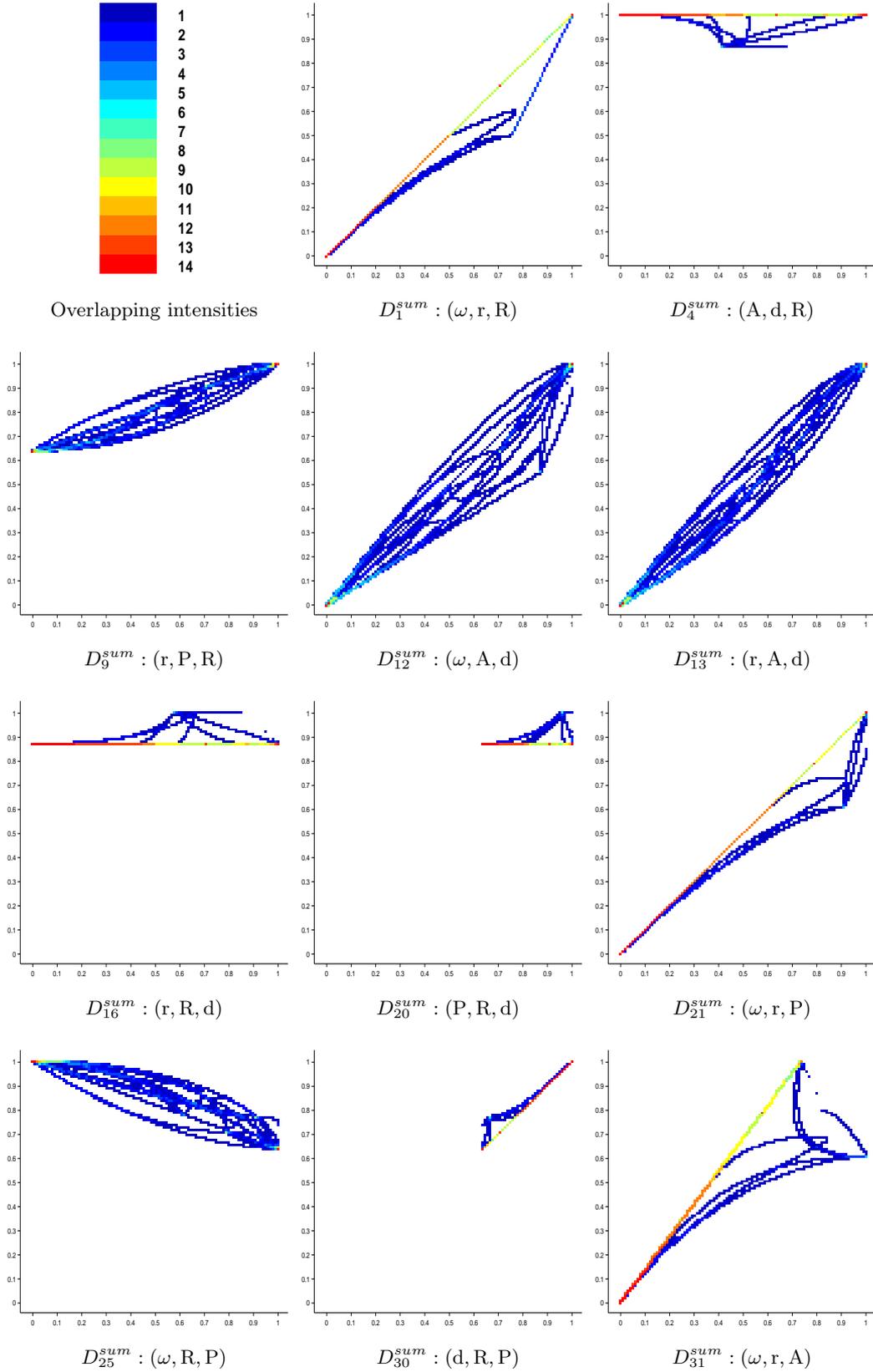
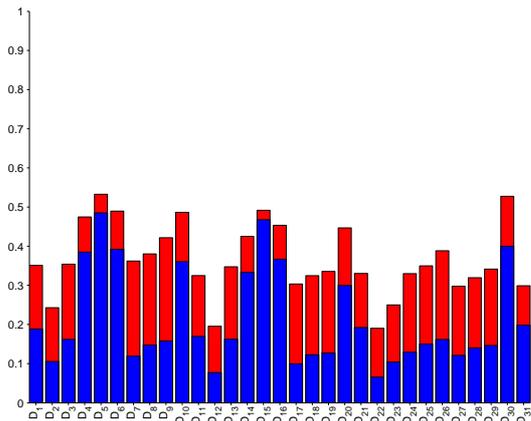
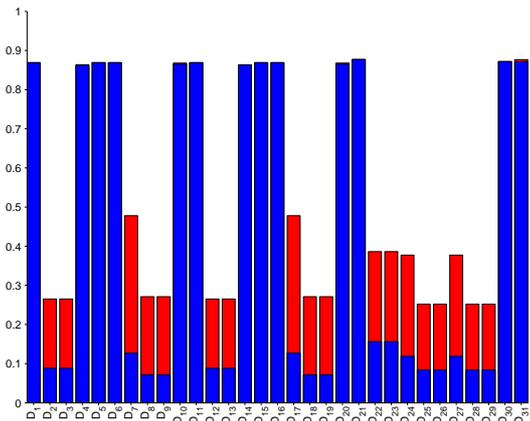


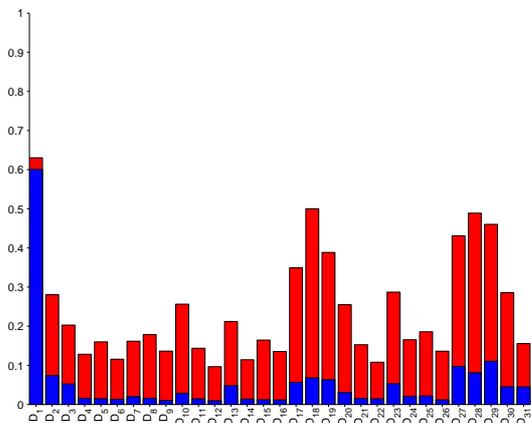
FIG. 4.17 – "Intensity" discretized shape diagram  $D_k^{sum}$  ( $n = 100$ ) with the twenty-three curves representing the compact convex set classes with one degree of freedom.



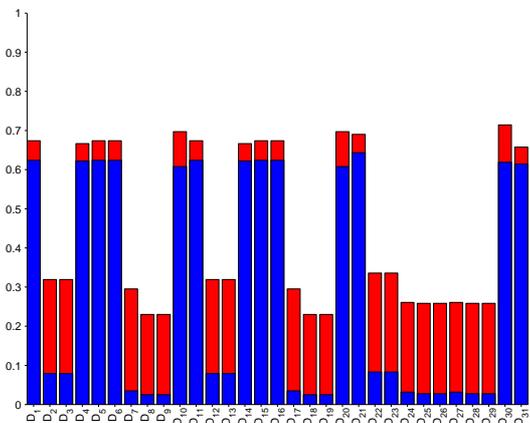
Overlapping quantification for the family  $\mathcal{F}_{2,1}^c$  of compact convex sets with one degree of freedom and one symmetrical axis.



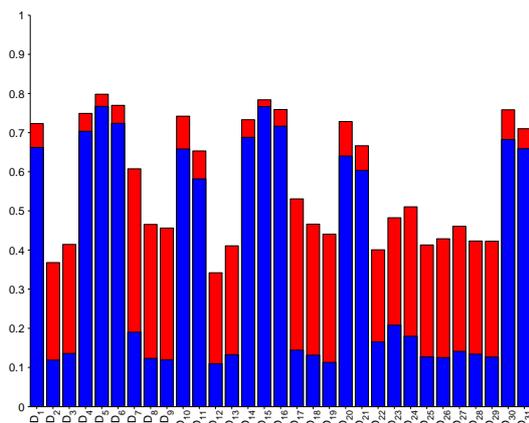
Overlapping quantification for the family  $\mathcal{F}_{2,2}^c$  of compact convex sets with one degree of freedom and two symmetrical axes.



Overlapping quantification for the family  $\mathcal{F}_{2,3}^c$  of compact convex sets with one degree of freedom and an odd number strictly greater to 1 of symmetrical axes.



Overlapping quantification for the family  $\mathcal{F}_{2,4}^c$  of compact convex sets with one degree of freedom and an even number strictly greater to 2 of symmetrical axes.



Overlapping quantification for the twenty-three classes of compact convex sets with one degree of freedom.

FIG. 4.18 – Overlapping quantification for the thirty-one shape diagrams  $\mathcal{D}_k$ ,  $k \in \llbracket 1, 31 \rrbracket$ , with  $n = 100$  in red, and  $n = 1000$  in blue.

	Complete system of inequalities	Non-complete system of inequalities
Strong discrimination	$\mathcal{D}_3, \boxed{\mathcal{D}_{12}}, \mathcal{D}_{22}, \mathcal{D}_{23}$	$\mathcal{D}_2, \boxed{\mathcal{D}_{13}}$
Moderate discrimination	$\boxed{\mathcal{D}_1}, \mathcal{D}_7, \boxed{\mathcal{D}_9}, \mathcal{D}_{11}, \mathcal{D}_{18}, \mathcal{D}_{24}, \mathcal{D}_{26}, \mathcal{D}_{28}$	$\mathcal{D}_8, \mathcal{D}_{17}, \mathcal{D}_{19}, \boxed{\mathcal{D}_{21}}, \boxed{\mathcal{D}_{25}}, \mathcal{D}_{27}, \mathcal{D}_{29}$
Weak discrimination	$\boxed{\mathcal{D}_4}, \mathcal{D}_5, \mathcal{D}_6, \mathcal{D}_{10}, \mathcal{D}_{14}, \mathcal{D}_{15}, \boxed{\mathcal{D}_{16}}, \boxed{\mathcal{D}_{20}}, \boxed{\mathcal{D}_{30}}$	$\boxed{\mathcal{D}_{31}}$

TAB. 4.3 – Shape diagrams classification according to their quality of shape discrimination of analytic compact convex sets and according to the completeness of associated systems of inequalities.

#### 4.1.7 Conclusion

This paper has dealt with shape diagrams of 2D non-empty analytic compact convex sets built from six geometrical functionals : the area, the perimeter, the radii of the inscribed and circumscribed circles, and the minimum and maximum Feret diameters. Each such a set is represented by a point within a shape diagram whose coordinates are morphometrical functionals defined as normalized ratios of geometrical functionals. From existing morphometrical functionals for these sets, thirty-one shape diagrams can be built. A detailed comparative study has been performed in order to analyze the representation relevance and discrimination power of these shape diagrams. It is based on the dispersion and overlapping quantifications from compact convex set locations in diagrams. Among all the shape diagrams, six present a strong shape discrimination of sets, four are based on complete system of inequalities. Among these four diagrams, the shape diagram  $\mathcal{D}_{12} : (\omega, A, d)$  is retained for its representation relevance and discrimination power.

This paper reports the first part of a general comparative study of shape diagrams. The focus was placed on analytic compact convex sets. However, most of these shape diagrams can also be applied to more general compact sets than compact convex sets. The second and third parts of the comparative study are published in two following papers [RDP10b, RDP10c]. They are focused on analytic simply connected compact sets and convexity discrimination for analytic and discretized simply connected compact sets, respectively.

## 4.2 A comparative study of shape diagrams for 2D compact sets - Part II : analytic simply connected sets

*Abstract* : Shape diagrams are representations in the Euclidean plane introduced to study 3-dimensional and 2-dimensional compact convex sets. However, they can also be applied to more general compact sets than compact convex sets. A compact set is represented by a point within a shape diagram whose coordinates are morphometrical functionals defined as normalized ratios of geometrical functionals. Classically, the geometrical functionals are the area, the perimeter, the radii of the inscribed and circumscribed circles, and the minimum and maximum Feret diameters. They allow twenty-two shape diagrams to be built. Starting from these six classical geometrical functionals, a detailed comparative study has been performed in order to analyze the representation relevance and discrimination power of these twenty-two shape diagrams. The first part of this study is published in a previous paper [RDP10a]. It focused on analytic compact convex sets. A set will be called analytic if its boundary is piecewise defined by explicit functions in such a way that the six geometrical functionals can be straightforwardly calculated. The purpose of this paper is to present the second part, by focusing on analytic simply connected compact sets. The third part of the comparative study is published in a following paper [RDP10c]. It is focused on convexity discrimination for analytic and discretized simply connected compact sets.

*Key words and phrases* : Analytic simply connected compact sets, Geometrical and morphometrical functionals, Shape diagrams, Shape discrimination.

### 4.2.1 Introduction

The Santaló's shape diagrams [San61] allow to represent a 2D compact convex set by a point in the Euclidean 2D plane from six geometrical functionals : the area, the perimeter, the radii of the inscribed and circumscribed circles, and the minimum and maximum Feret diameters [Fer30]. The axes of each shape diagram are defined from a pair of geometric inequalities relating these functionals. Sometimes, the two geometric inequalities provide a complete system : for any range of numerical values satisfying them, there exists a compact convex set with these values for the geometrical functionals (in other words, a point within the 2D Santaló shape diagram describes a 2D compact convex set). This is not valid for all the Santaló shape diagrams.

This paper deals with the study of shape diagrams for a wide range of 2D non-empty analytic simply connected compact sets. The first part [RDP10a] of this study focused on the compact convex sets. This second part generalizes to the simply connected compact sets. The considered simply connected compact sets are mapped onto points in these shape diagrams, and through dispersion and overlapping quantifications, the shape diagrams are classified according to their ability to discriminate the simply connected compact sets.

### 4.2.2 Shape functionals

In this paper, the non-empty analytic simply connected compact sets in the Euclidean 2-space  $E^2$  are considered. A set will be called analytic if its boundary is piecewise defined by explicit functions in such a way that the geometrical functionals enumerated below can be calculated. These geometrical functionals are determined in order to characterize the sets. They are related by the so-called

geometric inequalities, which allow to define morphometrical functionals.

### Geometrical functionals

For a simply connected compact set in  $E^2$ , let  $A$ ,  $P$ ,  $r$ ,  $R$ ,  $\omega$ ,  $d$ , denote its area, its perimeter, the radii of its inscribed and circumscribed circles, its minimum and maximum Feret diameters [Fer30], respectively. Figure 4.19 illustrates some of these geometrical functionals.

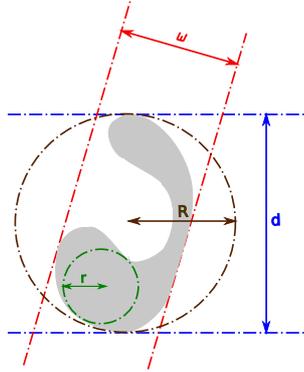


FIG. 4.19 – Geometrical functionals of a simply connected compact set : radii of inscribed ( $r$ ) and circumscribed ( $R$ ) circles, minimum ( $\omega$ ) and maximum ( $d$ ) Feret diameters.

For a simply connected compact set, these six geometrical functionals are greater than zero. The line curves provide null values for  $A$ ,  $r$  and  $\omega$ , and the points for  $P$ ,  $R$  and  $d$ . The sets with an infinite perimeter (the fractal sets) are not considered.  $P$  must be computed by a line integral.

### Geometric inequalities

For a simply connected compact set in  $E^2$ , the relationships between these geometrical functionals are constrained by the geometric inequalities [BF48, BZ88, CHL<sup>+</sup>04, HS02, YB61, Oss78, Oss79, Sco79, SA00, Sie03] referenced in the second column of Table 4.4. Some geometric inequalities are restricted to convex sets [RDP10a], that are not considered in this paper. These inequalities link geometrical functionals by pairs and determine the so-called extremal simply connected compact sets that satisfy the corresponding equalities (Table 4.4, fourth column). Furthermore, they allow to determinate morphometrical functionals.

### Morphometrical functionals

The morphometrical functionals are invariant under similitude transformations (consequently, they do not depend on the global size of the simply connected compact set) and are defined as ratios between geometrical functionals. In these ratios, the units of the numerator and the denominator are dimensionally homogeneous and the result has therefore no unit. Moreover, a normalization by a constant value (scalar multiplication) allows to have a ratio that ranges in  $[0, 1]$ . For each morphometrical functional, the scalar value depends directly on the associated geometric inequality. These morphometrical functionals are referenced in the third column of Table 4.4. These morphometrical functionals are classified according to their concrete meanings : roundness, circularity, diameter constancy and thinness [RDP10a].

Table 4.4 synthesizes the geometrical and morphometrical functionals, the geometric inequalities and the extremal 2D analytic simply connected compact sets.

Geometrical functionals	Geometric inequalities	Morphometrical functionals	Extremal sets
$r, R$	$r \leq R$	$r/R$	C
$\omega, R$	$\omega \leq 2R$	$\omega/2R$	C
$A, R$	$A \leq \pi R^2$	$A/\pi R^2$	C
$d, R$	$d \leq 2R$	$d/2R$	Y
$r, d$	$2r \leq d$	$2r/d$	C
$\omega, d$	$\omega \leq d$	$\omega/d$	W
$A, d$	$4A \leq \pi d^2$	$4A/\pi d^2$	C
$R, d$	$\sqrt{3}R \leq d$	$\sqrt{3}R/d$	Z
$r, P$	$2\pi r \leq P$	$2\pi r/P$	C
$\omega, P$	$\pi \omega \leq P$	$\pi \omega/P$	W
$A, P$	$4\pi A \leq P^2$	$4\pi A/P^2$	C
$d, P$	$2d \leq P$	$2d/P$	L
$R, P$	$4R \leq P$	$4R/P$	L
$r, A$	$\pi r^2 \leq A$	$\pi r^2/A$	C
$r, \omega$	$2r \leq \omega$	$2r/\omega$	X

Extremal sets are the sets for which an inequality becomes an equality.

C the disks

W the constant width compact convex sets

L the line segments

X some compact convex sets

Y some simply connected compact sets

Z every compact convex set of diameter  $d$  containing an equilateral triangle of side-length  $d$

TAB. 4.4 – Shape functionals for simply connected compact sets.  $A, P, r, R, \omega, d$ , denote the area, perimeter, radii of the inscribed and circumscribed circles, minimum and maximum Feret diameters [Fer30], respectively.

### 4.2.3 Shape diagrams

From these morphometrical functionals, 2D shape diagrams can be defined. They enable to represent the morphology of any analytic simply connected compact sets in the Euclidean 2D plane from two morphometrical functionals (that is to say from three geometrical functionals because the two denominators use the same geometrical functionals).

#### Definition

Let be any triplet of the considered six geometrical functionals  $(A, P, r, R, \omega, d)$  and  $(M_1, M_2)$  be some particular morphometrical functionals valued in  $[0, 1]^2$  (Table 4.5). A shape diagram  $\mathcal{D}$  is

represented in the plane domain  $[0, 1]^2$  (whose axis coordinates are the morphometrical functionals  $M_1$  and  $M_2$ ) where any 2D compact set  $S$  is mapped onto a point  $(x, y)$ . Note that if  $M_1$  or  $M_2$  is in  $\{\pi r^2 / A, 2r / \omega\}$ , the line curves can not be mapped onto a point because they provide null values for  $A$  and  $\omega$ . In other terms, a shape diagram  $\mathcal{D}$  is obtained from the following mapping :

$$\mathcal{D} : \begin{cases} \mathcal{K}(E^2) & \rightarrow [0, 1]^2 \\ S & \mapsto (x, y) \end{cases}$$

where  $\mathcal{K}(E^2)$  denotes the compact sets of the Euclidean 2D plane. Using the morphometrical functionals listed in Table 4.4, twenty-two shape diagrams are defined, denoted  $(\mathcal{D}_k)_{k \in \llbracket 1, 30 \rrbracket \setminus (\llbracket 7, 10 \rrbracket \cup \llbracket 17, 20 \rrbracket)}$ , respectively. Some geometric inequalities, and consequently some shape diagrams, are restricted to convex shapes [RDP10a], that are not considered in this paper.

Shape diagrams	Axes coordinates	
$\mathcal{D}_1 : (\omega, r, R)$	$x = \omega / 2R$	$y = r / R$
$\mathcal{D}_2 : (\omega, A, R)$	$x = \omega / 2R$	$y = A / \pi R^2$
$\mathcal{D}_3 : (r, A, R)$	$x = r / R$	$y = A / \pi R^2$
$\mathcal{D}_4 : (A, d, R)$	$x = A / \pi R^2$	$y = d / 2R$
$\mathcal{D}_5 : (\omega, d, R)$	$x = \omega / 2R$	$y = d / 2R$
$\mathcal{D}_6 : (r, d, R)$	$x = r / R$	$y = d / 2R$
$\mathcal{D}_{11} : (\omega, r, d)$	$x = \omega / d$	$y = 2r / d$
$\mathcal{D}_{12} : (\omega, A, d)$	$x = \omega / d$	$y = 4A / \pi d^2$
$\mathcal{D}_{13} : (r, A, d)$	$x = 2r / d$	$y = 4A / \pi d^2$
$\mathcal{D}_{14} : (A, R, d)$	$x = 4A / \pi d^2$	$y = \sqrt{3}R / d$
$\mathcal{D}_{15} : (\omega, R, d)$	$x = \omega / d$	$y = \sqrt{3}R / d$
$\mathcal{D}_{16} : (r, R, d)$	$x = 2r / d$	$y = \sqrt{3}R / d$
$\mathcal{D}_{21} : (\omega, r, P)$	$x = \pi \omega / P$	$y = 2\pi r / P$
$\mathcal{D}_{22} : (\omega, A, P)$	$x = \pi \omega / P$	$y = 4\pi A / P^2$
$\mathcal{D}_{23} : (r, A, P)$	$x = 2\pi r / P$	$y = 4\pi A / P^2$
$\mathcal{D}_{24} : (A, R, P)$	$x = 4\pi A / P^2$	$y = 4R / P$
$\mathcal{D}_{25} : (\omega, R, P)$	$x = \pi \omega / P$	$y = 4R / P$
$\mathcal{D}_{26} : (r, R, P)$	$x = 2\pi r / P$	$y = 4R / P$
$\mathcal{D}_{27} : (A, d, P)$	$x = 4\pi A / P^2$	$y = 2d / P$
$\mathcal{D}_{28} : (\omega, d, P)$	$x = \pi \omega / P$	$y = 2d / P$
$\mathcal{D}_{29} : (r, d, P)$	$x = 2\pi r / P$	$y = 2d / P$
$\mathcal{D}_{30} : (d, R, P)$	$x = 2d / P$	$y = 4R / P$

TAB. 4.5 – Axes coordinates of the twenty-two shape diagrams for 2D simply connected compact sets.

The property stated in [RDP10a] proving the non-injectivity and non-surjectivity of the mapping that associates a point in a shape diagram  $(\mathcal{D}_k)_{k \in \llbracket 1, 30 \rrbracket \setminus (\llbracket 7, 10 \rrbracket \cup \llbracket 17, 20 \rrbracket)}$  to a compact convex set in  $E^2$ , is necessarily truth for the 2D simply connected compact sets. The proof uses the same examples as in [RDP10a].

### Complete systems of inequalities

In this subsection, only 2D compact convex sets are considered. A system of (two) geometric inequalities associated to a shape diagram is complete if and only if for any range of geometrical functionals values satisfying those conditions, a 2D compact convex set with these geometrical functionals values exists [San61, CG00]. In other words, such a system is complete if and only if the mapping which associates a 2D analytic compact convex set in  $E^2$  to a point in a shape diagram  $(\mathcal{D}_k)_{k \in \llbracket 1, 30 \rrbracket \setminus (\llbracket 7, 10 \rrbracket \cup \llbracket 17, 20 \rrbracket)}$  can be surjective by restricting the arrival set. For a shape diagram, each of the two associated inequalities determines a part of the convex domain boundary (the domain in which all compact convex sets are mapped). These two inequalities determine the whole boundary of the convex domain if and only if they form a complete system. The compact convex sets mapped onto the boundary points are the extremal compact convex sets of each considered inequality.

For sixteen among the twenty-two shape diagrams  $(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_3, \mathcal{D}_4, \mathcal{D}_5, \mathcal{D}_6, \mathcal{D}_{11}, \mathcal{D}_{12}, \mathcal{D}_{14}, \mathcal{D}_{15}, \mathcal{D}_{16}, \mathcal{D}_{22}, \mathcal{D}_{23}, \mathcal{D}_{24}, \mathcal{D}_{26}, \mathcal{D}_{28}, \mathcal{D}_{30})$ , the completeness of systems of inequalities has been proved [San61, Cif00, CG00, CSG01, Cif02, BCS03]. Figure 4.21 illustrates the convex domain boundary for seven of them.

#### 4.2.4 Shape diagrams dispersion quantification

##### Shape diagrams for simply connected compact sets

For the family  $\mathcal{F}_1^{sc}$  of nineteen sets (Figure 4.20), the morphometrical functionals are straightforwardly computed. Each simply connected compact set  $i \in \llbracket 1, 19 \rrbracket$  is represented by one point denoted  $\mathcal{P}_{i,k}$ , in each shape diagram  $\mathcal{D}_k$ ,  $k \in \llbracket 1, 30 \rrbracket \setminus (\llbracket 7, 10 \rrbracket \cup \llbracket 17, 20 \rrbracket)$ .

These 2D analytic simply connected compact sets are (Figure 4.20) :

- line segments ;
- squares ;
- asterisks-3 ;
- regular pentagons ;
- semi-circles ;
- equilateral triangles ;
- asterisks-4 ;
- regular hexagons ;
- "1/2" semi-rings ;
- Reuleaux triangles [Reu63, Egg52] ;
- asterisks-7 ;
- regular pentagons ;
- semi-disks ;
- dual Reuleaux triangles ;
- asterisks-8 ;
- regular hexagons ;
- disks ;
- dual "Reuleaux" squares ;
- regular crosses : symmetrical (center) crosses whose the four branch length and width are equals.

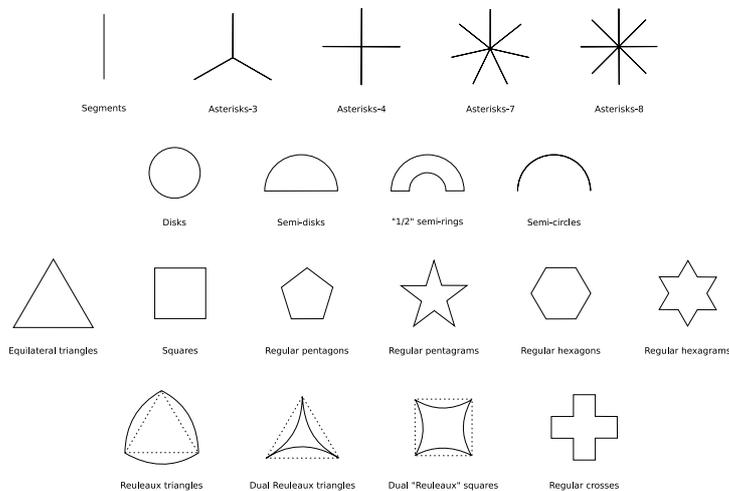


FIG. 4.20 – Family  $\mathcal{F}_1^{sc}$  of 2D analytic simply connected compact sets.

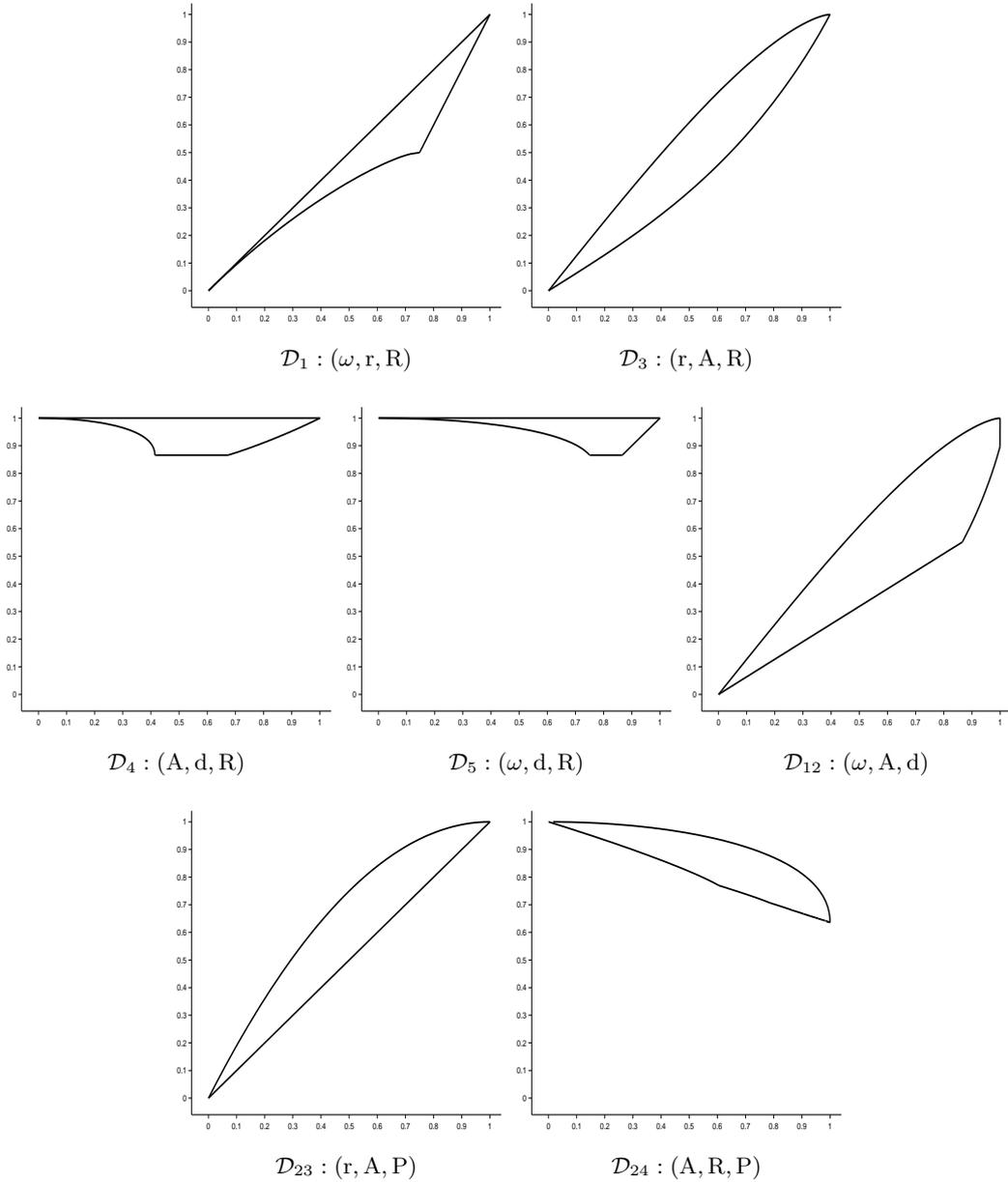


FIG. 4.21 – Convex domains of seven shape diagrams for which complete systems of inequalities have been established. For a given shape diagram, the bordered region represents the convex domain in which all compact convex sets lay.

Figure 4.22 illustrates several of these shape diagrams, chosen according to the results synthesized in Section 4.2.6. Remember that the shape diagrams are included in  $[0, 1]^2$ . For a better visualization of the shapes drawn on a point of abscissa or ordinate equal to 0 or 1, the shape diagrams are illustrated in  $[-0.06, 1.04]^2$ . Whatever the morphometrical functional, the extremal value 1 is reached for extremal simply connected compact sets. Thus, in each shape diagram, there is at least one simply connected compact set mapped to a point of abscissa or ordinate equal to 1. Moreover, the extremal value 0 is not always reached.

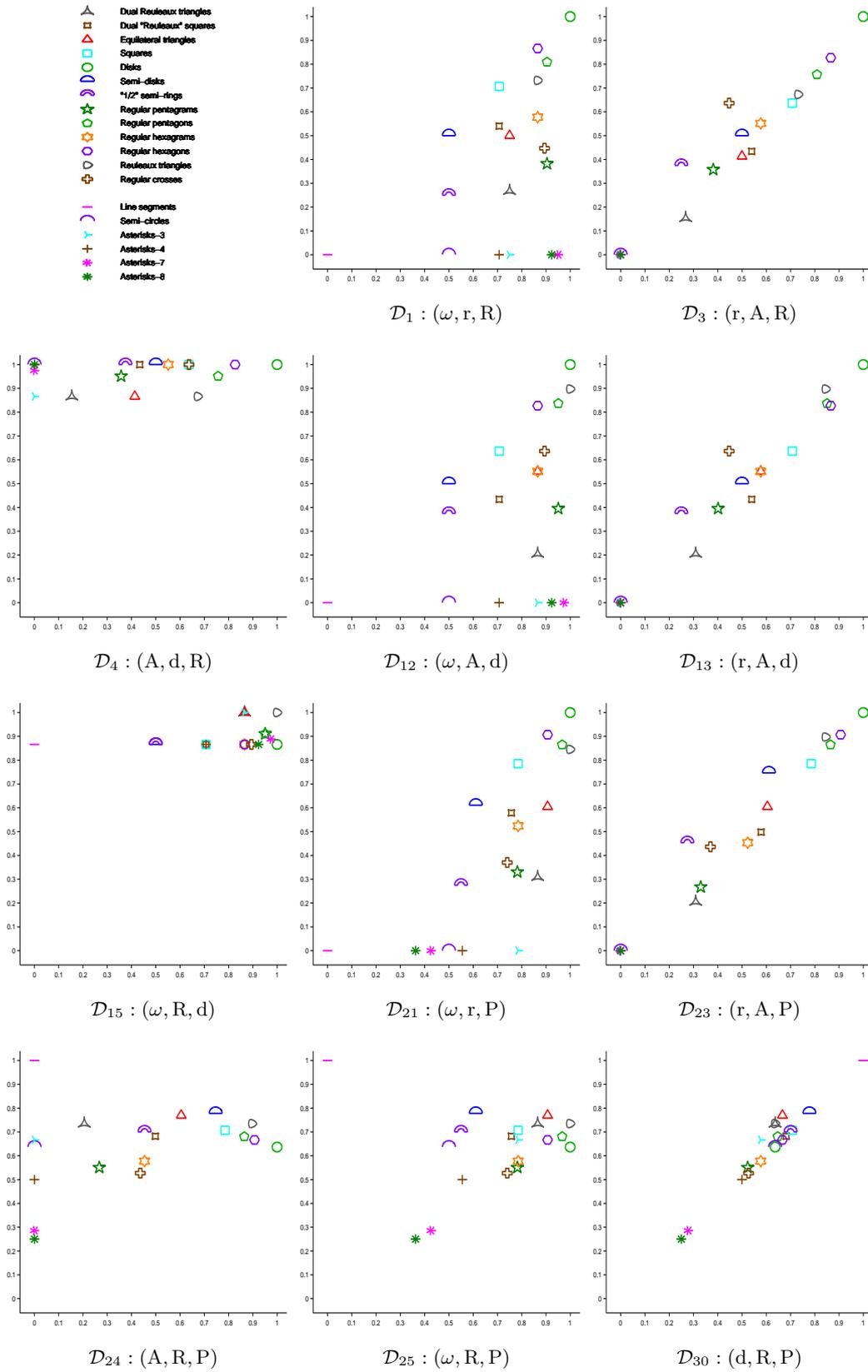


FIG. 4.22 – Family  $\mathcal{F}_1^{sc}$  of analytic simply connected compact sets mapped into eleven shape diagrams (chosen according to the results synthesized in Section 4.2.6).

The dispersion of simply connected compact set locations within each shape diagram will be studied after the analysis of similarities between shape diagrams.

### Similarity

The fact that  $\omega = 2r$  for some compact convex sets implies that shape diagrams  $(\omega, x_1, x_2)$  are similar to shape diagrams  $(r, x_1, x_2)$  where  $x_1 \in \{d, R, P, A\}$  and  $x_2 \in \{d, R, P\}$ , that is to say  $\mathcal{D}_2 \sim \mathcal{D}_3$ ,  $\mathcal{D}_5 \sim \mathcal{D}_6$ ,  $\mathcal{D}_{12} \sim \mathcal{D}_{13}$ ,  $\mathcal{D}_{15} \sim \mathcal{D}_{16}$ ,  $\mathcal{D}_{22} \sim \mathcal{D}_{23}$ ,  $\mathcal{D}_{25} \sim \mathcal{D}_{26}$ ,  $\mathcal{D}_{28} \sim \mathcal{D}_{29}$  where  $\sim$  denotes a strong similarity between shape diagrams.

In the same way, the fact that  $d = 2R$  for some simply connected compact sets implies that :

- shape diagrams  $(x_1, x_2, R)$  are similar to shape diagrams  $(x_1, x_2, d)$  where  $x_1 \in \{\omega, r, A\}$  and  $x_2 \in \{r, A, P\}$   
 $(\mathcal{D}_1 \sim \mathcal{D}_{11}, \mathcal{D}_2 \sim \mathcal{D}_{12}, \mathcal{D}_3 \sim \mathcal{D}_{13})$ ;
- shape diagrams  $(x_1, R, P)$  are similar to shape diagrams  $(x_1, d, P)$  where  $x_1 \in \{\omega, r, A\}$   
 $(\mathcal{D}_{24} \sim \mathcal{D}_{27}, \mathcal{D}_{25} \sim \mathcal{D}_{28}, \mathcal{D}_{26} \sim \mathcal{D}_{29})$ .

An algorithm of hierarchical classification [Did83] based on distances between shape diagrams allows to justify many of these similarities and to find other ones. Let  $k_1, k_2 \in \llbracket 1, 30 \rrbracket \setminus (\llbracket 7, 10 \rrbracket \cup \llbracket 17, 20 \rrbracket)$ , the distance between shape diagrams  $\mathcal{D}_{k_1}$  and  $\mathcal{D}_{k_2}$ , based on the Euclidean distance  $d^E$ , is defined by Equation 4.3.

$$d^E(\mathcal{D}_{k_1}, \mathcal{D}_{k_2}) = \frac{1}{19} \sum_{i \in \llbracket 1, 19 \rrbracket} d^E(\mathcal{P}_{i, k_1}, \mathcal{P}_{i, k_2}) \tag{4.3}$$

For all  $k_1 \in \llbracket 1, 29 \rrbracket \setminus (\llbracket 7, 10 \rrbracket \cup \llbracket 17, 20 \rrbracket)$  and  $k_2 \in \llbracket k_1 + 1, 30 \rrbracket \setminus (\llbracket 7, 10 \rrbracket \cup \llbracket 17, 20 \rrbracket)$ , the distances  $d^E(\mathcal{D}_{k_1}, \mathcal{D}_{k_2})$  are computed. Among them, the minimum distance value gives the best similarity between two shape diagrams. From these two shape diagrams, a mean shape diagram is built. To each step of the algorithm, two shape diagrams are similar up to the distance computed and they are gathered to build a mean shape diagram. The algorithm can be run until all the shape diagrams are gathered. Figure 4.23 shows the first fifteen steps of the hierarchical tree resulting from this algorithm. The remaining steps are not shown because the distance values are too high and do not present an interest in the study of similarities.

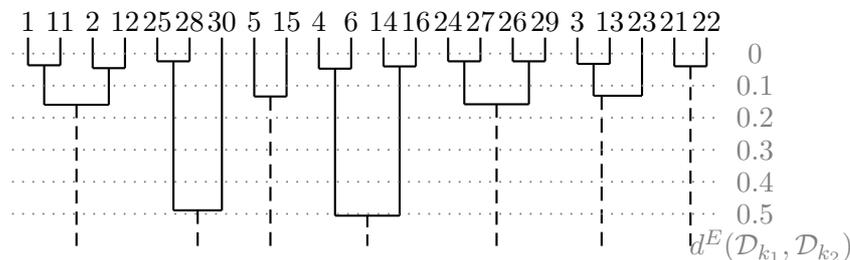


FIG. 4.23 – The first fifteen steps of an algorithm of hierarchical classification based on distances between the shape diagrams. To each step, two shape diagrams are similar up to the distance value, whose the scale is indicated on the right.

For instance, if the algorithm is stopped before the distance value reaches 0.2, the following classification of shape diagrams is obtained :

$$\begin{array}{ccccc}
 - \mathcal{D}_1 \mathcal{D}_{11} \mathcal{D}_2 \mathcal{D}_{12} & - \mathcal{D}_3 \mathcal{D}_{13} \mathcal{D}_{23} & - \mathcal{D}_4 \mathcal{D}_6 & - \mathcal{D}_{14} \mathcal{D}_{16} & - \mathcal{D}_5 \mathcal{D}_{15} \\
 - \mathcal{D}_{24} \mathcal{D}_{27} \mathcal{D}_{26} \mathcal{D}_{29} & - \mathcal{D}_{25} \mathcal{D}_{28} & - \mathcal{D}_{21} \mathcal{D}_{22} & - \mathcal{D}_{30} & 
 \end{array}$$

### Dispersion quantification

For each shape diagram, the dispersion of the locations of 2D analytic simply connected compact sets of the family  $\mathcal{F}_1^{sc}$  is studied.

The spatial distribution of simply connected compact sets locations in each shape diagram is characterized and quantified from algorithmic geometry using Delaunay's graph (DG) and minimum spanning tree (MST) [BY98]. Some useful information about the disorder and the neighborhood relationships between sets can be deduced. From each geometrical model, it is possible to compute two values from the edge lengths, denoted  $\mu$  (average) and  $\sigma$  (standard deviation) for DG or MST. The simple reading of the coordinates in the  $(\mu, \sigma)$ -plane enables to determine the type of spatial distribution of the simply connected compact set (regular, random, cluster, ...) [RPG<sup>+</sup>01]. The decrease of  $\mu$  and the increase of  $\sigma$  characterize the shift from a regular distribution toward random and cluster distributions, respectively.

Figure 4.24 represents both values of parameters of the twenty-two shape diagrams for each model, DG and MST.

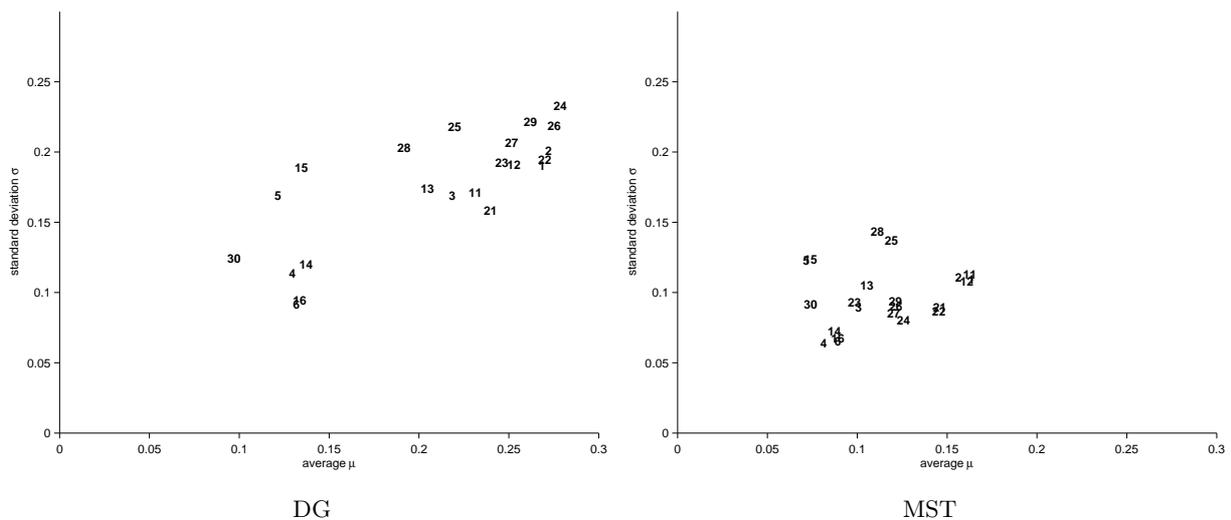


FIG. 4.24 – Two dispersion quantifications for all shape diagrams applied on the family  $\mathcal{F}_1^{sc}$ . For each representation (according to the models DG and MST, respectively), indices  $k \in \llbracket 1, 30 \rrbracket \setminus (\llbracket 7, 10 \rrbracket \cup \llbracket 17, 20 \rrbracket)$  of the shape diagrams  $\mathcal{D}_k$  are located according to their  $\mu$  and  $\sigma$  values.

Following the two models, the shape diagrams  $\mathcal{D}_4, \mathcal{D}_5, \mathcal{D}_6, \mathcal{D}_{14}, \mathcal{D}_{15}, \mathcal{D}_{16}$  and  $\mathcal{D}_{30}$  have a low average  $\mu$ . In these shape diagrams, the simply connected compact sets are located within a restricted domain in  $[0, 1]^2$ . Their shape discrimination is not strong, especially for  $\mathcal{D}_5$  and  $\mathcal{D}_{15}$  that have a higher standard deviation  $\sigma$ , which is translated visually by several sets at the same locations.

The shape diagrams  $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_{11}, \mathcal{D}_{12}, \mathcal{D}_{21}, \mathcal{D}_{22}, \mathcal{D}_{24}, \mathcal{D}_{26}, \mathcal{D}_{27}$  and  $\mathcal{D}_{29}$  have the highest averages. In these shape diagrams, the simply connected compact sets are located within a large domain in  $[0, 1]^2$  and are well spaced from each other.

Finally, these statements are in agreement with those obtained for the similarities between shape diagrams.

A shape diagram with a strong dispersion (both high  $\mu$  and  $\sigma$  values), for both DG and MST, guarantees a strong discrimination of shapes : the simply connected compact sets are located within a large domain in  $[0, 1]^2$  and are well spaced from each other. However, remember that  $d = 2R$  and  $\omega = 2r$  for some simply connected compact sets. This explains that some simply connected compact sets of the family  $\mathcal{F}_1^{sc}$  are mapped onto a point on a line for some shape diagrams, namely :

- diagonal line from  $(0, 0)$  to  $(1, 1)$  on shape diagrams  $(x_1, x_2, x_3)$  where  $(x_1, x_2) \in \{(\omega, r), (d, R)\}$  and  $x_3 \in \{A, R, d, P\}$  ( $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_{11}, \mathcal{D}_{21}, \mathcal{D}_{30}$ )
- horizontal line from  $(0, 1)$  to  $(1, 1)$  on shape diagrams  $(x_1, d, R)$  where  $x_1 \in \{\omega, r, P, A\}$  ( $\mathcal{D}_4, \mathcal{D}_5, \mathcal{D}_6$ )
- horizontal line from  $(0, \sqrt{3}/2)$  to  $(1, \sqrt{3}/2)$  on shape diagrams  $(x_1, R, d)$  where  $x_1 \in \{\omega, r, P, A\}$  ( $\mathcal{D}_{14}, \mathcal{D}_{15}, \mathcal{D}_{16}$ )

For a shape diagram, the fact that some simply connected compact sets are mapped onto a point on a line does not yield to allow a strong discrimination of the simply connected compact sets as quantified and illustrated in Figure 4.24.

Following this quantification, the shape diagrams  $\mathcal{D}_{24}, \mathcal{D}_{25}, \mathcal{D}_{26}, \mathcal{D}_{27}, \mathcal{D}_{28}$  and  $\mathcal{D}_{29}$ , have a strong dispersion. During the study restricted to convex sets [RDP10a], they appear more moderate. The other shape diagrams have dispersions quite similar to those obtained with the convex sets.

#### 4.2.5 Shape diagrams overlapping quantification

##### Shape diagrams for simply connected compact sets with one degree of freedom

Let two 2D analytic simply connected compact sets of the family  $\mathcal{F}_1^{sc}$ , and the simply connected compact set class allowing to switch from one to the other using one degree of freedom. For example, the semi-circle goes to the semi-disk through semi-rings whose the cavity radius decreases. Therefore, several classes of "simply connected compact sets with one degree of freedom" could be defined. Thus, a curve denoted  $C_{i,k}$  from each simply connected compact set class  $C_i$  is created in each shape diagram  $\mathcal{D}_k$ ,  $k \in \llbracket 1, 30 \rrbracket \setminus (\llbracket 7, 10 \rrbracket \cup \llbracket 17, 20 \rrbracket)$ . This process is used for some pairs of simply connected compact sets of the family  $\mathcal{F}_1^{sc}$ . The tendency of various curves are observed.

These analytic simply connected compact sets verify shape properties which are preserved only under similitude transformations and under the variation of one parameter  $t \in \mathbb{R}$ . For example, the cavity radius of semi-rings varies between 0 and the radius of the semi-disk. In other terms, the degree of freedom is the parameter  $t \in \mathbb{R}$ .

- Nineteen analytic simply connected compact set classes, gathered in three families, are considered :
- family  $\mathcal{F}_{2.1}^{sc} \supseteq \{C_i\}_{i \in \llbracket 1, 4 \rrbracket}$  : four classes of simply connected compact sets with one symmetrical axis (Figure 4.25),
  - family  $\mathcal{F}_{2.2}^{sc} \supseteq \{C_i\}_{i \in \{6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 19\}}$  : eight classes of simply connected compact sets with an even number of symmetrical axis (Figure 4.26),
  - family  $\mathcal{F}_{2.3}^{sc} \supseteq \{C_i\}_{i \in \{5, 7, 9, 11, 13, 15, 17\}}$  : seven classes of simply connected compact sets with an odd number strictly greater to 1 of symmetrical axis (Figure 4.27).

There are :

- Family  $\mathcal{F}_{2.1}^{sc}$  :

$C_1$  - Semi-rings : They are the complementary sets of a semi-disk in a larger semi-disk. The ratio between the radius of the small and the large semi-disks varies in  $[0, 1]$ . When it reaches the lower and upper bounds, the semi-ring becomes a semi-disk and a semi-circle, respectively.

$C_2$  - Semi-disks minus ungula : They are the complementary sets of an ungula [RDP10a] in a semi-disk. The ratio between the height of the ungula and the radius of the semi-disk varies in  $[0, 1]$ . When it reaches the lower and upper bounds, the semi-disk minus ungula becomes a semi-disk and a semi-circle, respectively.

$C_3$  - Semi-disks minus semi-symmetrical disks with two peaks : They are the complementary sets of a semi-symmetrical disk with two peaks [RDP10a] in a semi-disk. The ratio between the height of the semi-symmetrical disk with two peaks and the radius of the semi-disk varies in  $[0, 1]$ . When it reaches the lower and upper bounds, the semi-disk minus semi-symmetrical disk with two peaks becomes a semi-disk and a semi-circle, respectively.

$C_4$  - Arrows : They are the complementary sets of an isosceles triangle in an equilateral triangle. The ratio between the height of the isosceles and the equilateral triangles varies in  $[0, 1]$ . When it reaches the lower and upper bounds, the arrow becomes an equilateral triangle and a shape with two line segments forming an angle whose the value is equal to  $\pi/3$ , respectively.

– Family  $\mathcal{F}_{2.2}^{sc}$  :

$C_6$  - Dual "Yamanouti" squares : They are defined in a similar way as the "Yamanouti" squares [RDP10a]. The extremal simply connected compact sets are the square and the dual "Reuleaux" square.

$C_8$  - Four-stars : the filiformity coefficient varies between 0 ( $A = 0$ ) and 1 (square).

$C_{10}$  - Six-stars : the filiformity coefficient varies between 0 ( $A = 0$ ) and 1 (regular hexagon).

$C_{12}$  - Eight-stars : the filiformity coefficient varies between 0 ( $A = 0$ ) and 1 (regular octagon, not illustrated here).

$C_{14}$  - Even-stars, minimal filiformity : Their area value is null. They are asterisks with a branch even number.

$C_{16}$  - Regular even polygrams : They are regular polygrams (the filiformity coefficient is "perfect", involving parallelism between the edges) with a positive even edges number. In the shape diagrams, the real positions of these sets do not describe a curve because it is not continuous (the edge number is necessarily an integer) but they are along a curve, and this is drawn.

$C_{18}$  - Even-stars, maximal filiformity : They are regular even polygons [RDP10a].

$C_{19}$  - Crosses : They are symmetrical (center) crosses whose the four branch length varies in  $[0, +\infty[$ . When this length value reaches the lower bound, the resulting simply connected compact set becomes a square. When it tends to infinity, the resulting simply connected compact set tends to the asterisk-4.

– Family  $\mathcal{F}_{2.3}^{sc}$  :

$C_5$  - Dual Yamanouti triangles : They are defined in a similar way as the Yamanouti triangles [Yam32]. The extremal simply connected compact sets are the equilateral triangle and the dual Reuleaux triangle.

$C_7$  - Three-stars : the filiformity coefficient varies between 0 ( $A = 0$ ) and 1 (equilateral triangle).

$C_9$  - Five-stars : the filiformity coefficient varies between 0 ( $A = 0$ ) and 1 (regular pentagon).

$C_{11}$  - Seven-stars : the filiformity coefficient varies between 0 ( $A = 0$ ) and 1 (regular heptagon, not illustrated here).

$C_{13}$  - Odd-stars, minimal filiformity : Their area value is null. They are asterisks with a branch odd number.

$C_{15}$  - Regular odd polygrams : They are regular polygrams (the filiformity coefficient is "perfect", involving parallelism between the edges) with a positive odd edges number. In the shape diagrams, the real positions of these sets do not describe a curve because it is not continuous (the edge number is necessarily an integer) but they are along a curve, and this is drawn.

$C_{17}$  - Odd-stars, maximal filiformity : They are regular odd polygons [RDP10a].

For the simply connected compact sets of each class, the morphometrical functionals are computed. In each shape diagram  $\mathcal{D}_k$ ,  $k \in \llbracket 1, 30 \rrbracket \setminus (\llbracket 7, 10 \rrbracket \cup \llbracket 17, 20 \rrbracket)$ , a simply connected compact set class  $i \in \llbracket 1, 19 \rrbracket$  is represented by a parametric curve  $\mathcal{C}_{i,k}(t)$  since the class is infinite and bounded by the two extremal sets. For the considered simply connected compact set classes, the extremal simply connected compact sets are sets that would be able to be in the family  $\mathcal{F}_1^{sc}$  (Figure 4.20). For example, up to a similitude transformation, an infinite class of semi-rings exists, from the semi-circle to the semi-disk.

Figures 4.28, 4.29 and 4.30 illustrate some of these shape diagrams, chosen according to the results synthetized in Section 4.2.6.

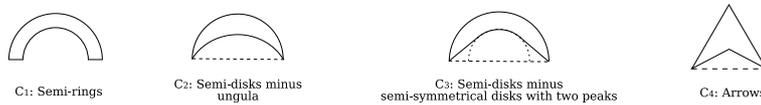


FIG. 4.25 – Family  $\mathcal{F}_{2,1}^{sc}$  of 2D analytic simply connected compact sets with one degree of freedom and one symmetrical axis.

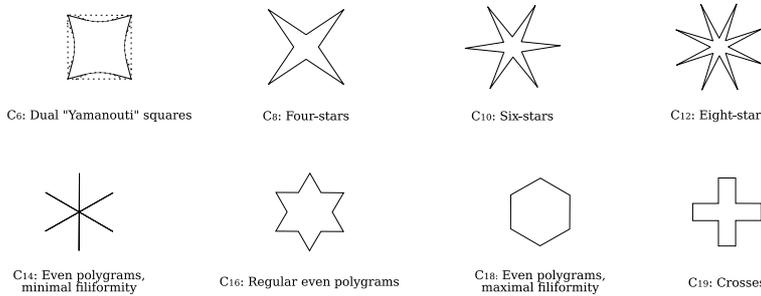


FIG. 4.26 – Family  $\mathcal{F}_{2,2}^{sc}$  of 2D analytic simply connected compact sets with one degree of freedom and an even number of symmetrical axes.

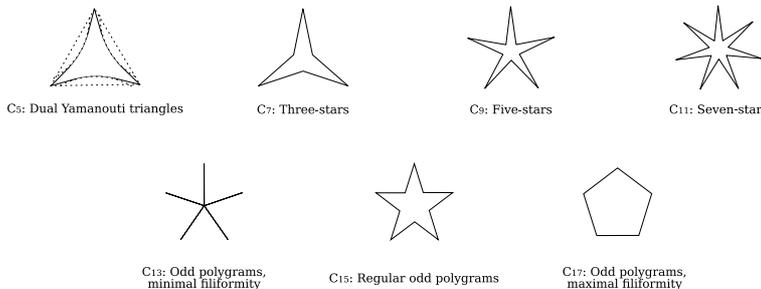


FIG. 4.27 – Family  $\mathcal{F}_{2,3}^{sc}$  of 2D analytic simply connected compact sets with one degree of freedom and an odd number (strictly greater to 1) of symmetrical axes.

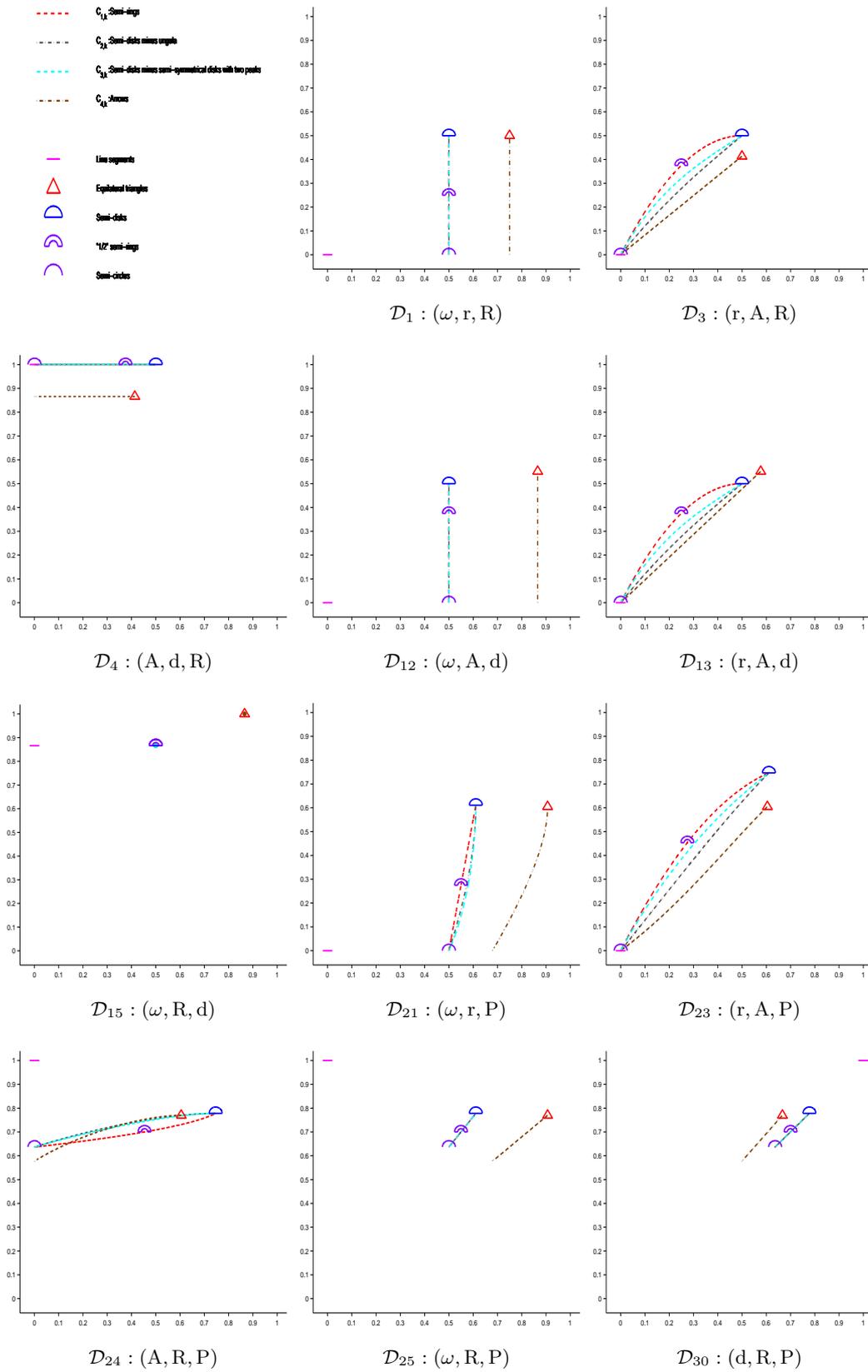


FIG. 4.28 – Family  $\mathcal{F}_{2,1}^{sc}$  of analytic simply connected compact sets with one degree of freedom and one symmetrical axis mapped into eleven shape diagrams (chosen according to the results synthesized in Section 4.2.6).

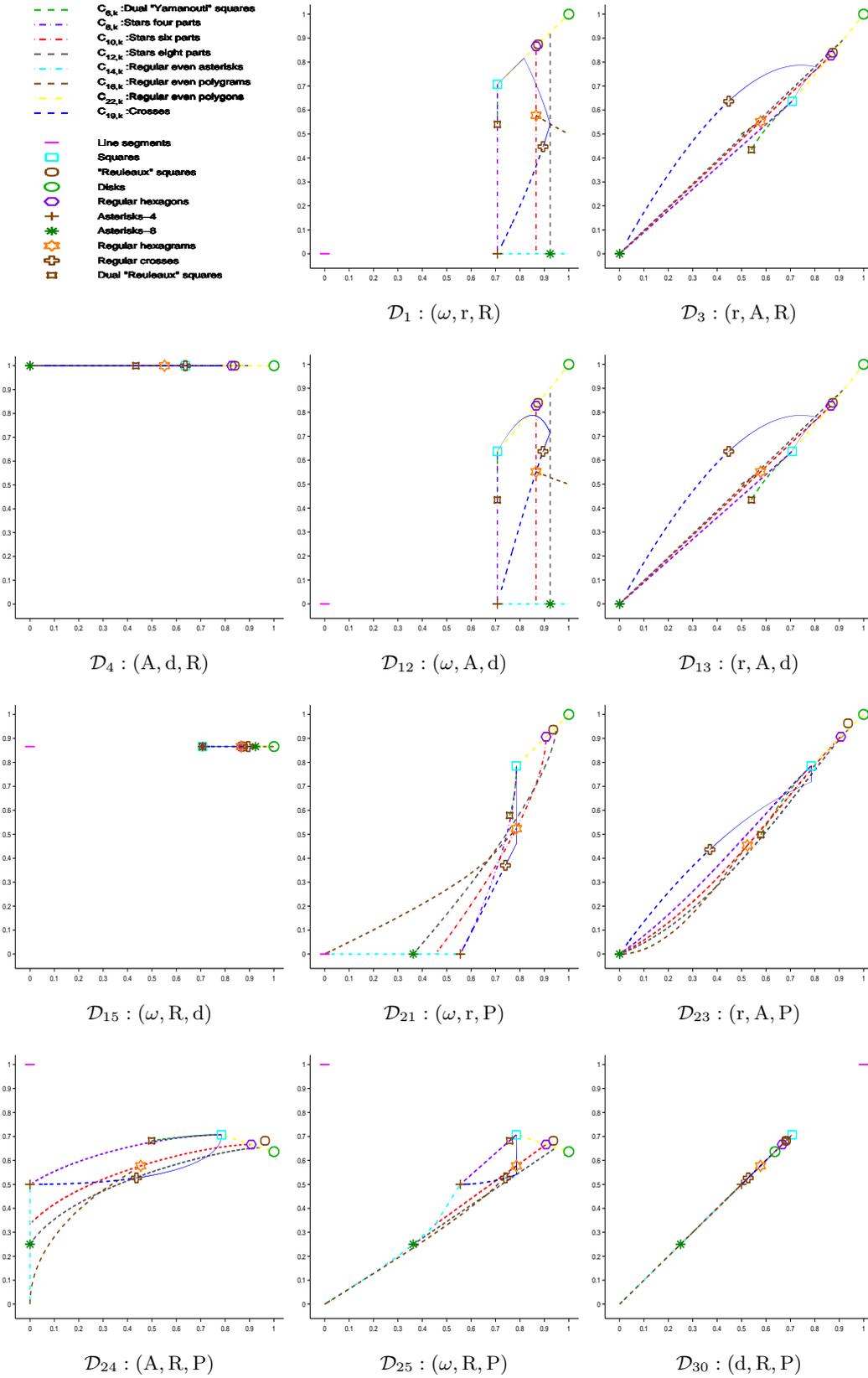


FIG. 4.29 – Family  $\mathcal{F}_{2,2}^{sc}$  of analytic simply connected compact sets with one degree of freedom and an odd number of symmetrical axes mapped into eleven shape diagrams (chosen according to the results synthetized in Section 4.2.6).

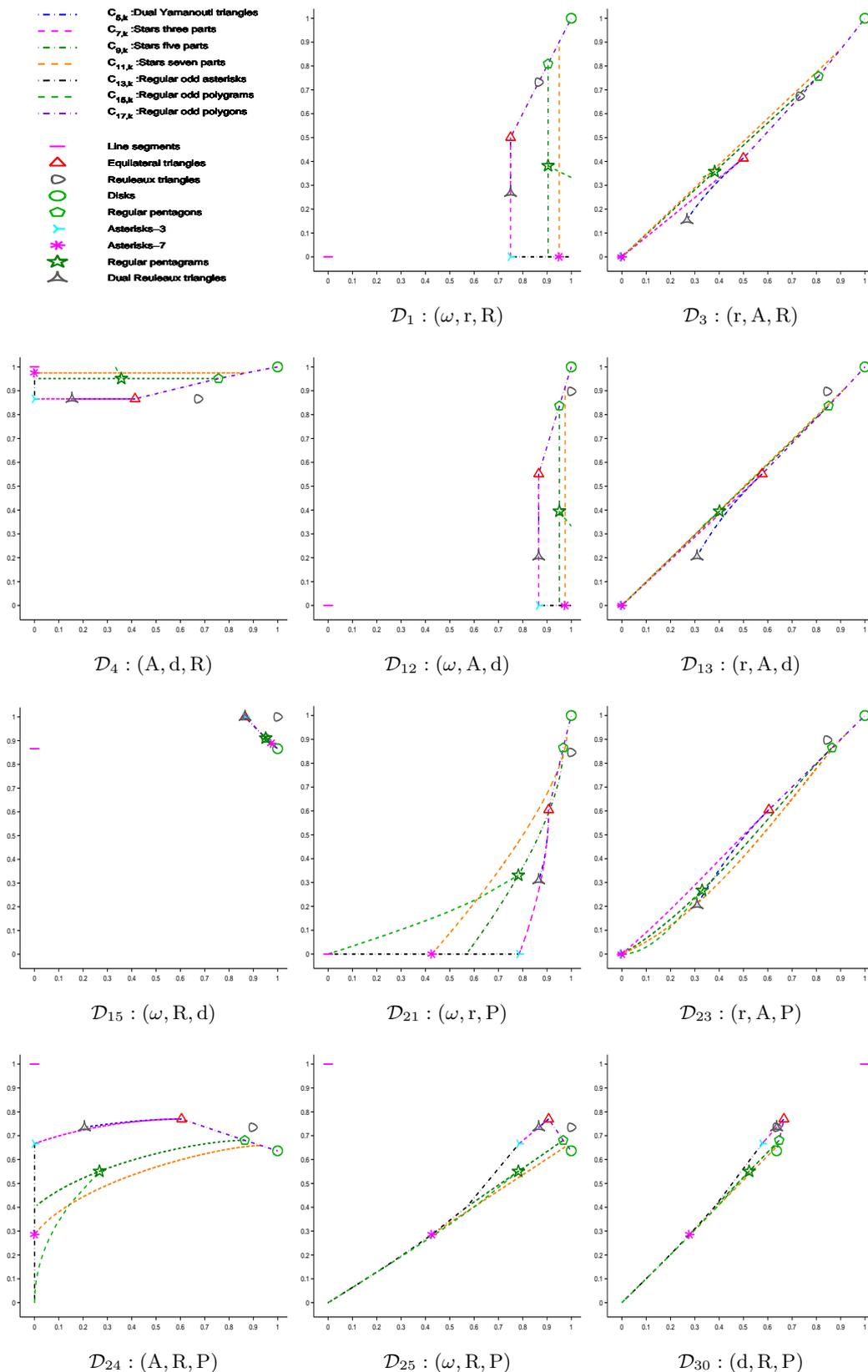


FIG. 4.30 – Family  $\mathcal{F}_{2,3}^{sc}$  of analytic simply connected compact sets with one degree of freedom and an even number strictly greater to 1 of symmetrical axes mapped into eleven shape diagrams (chosen according to the results synthetized in Section 4.2.6).

### Overlapping quantification

An overlapping of curves is visible in some shape diagrams. Its quantification is based on a discretization of the spatial domain  $[0, 1]^2$  of shape diagrams, depending on the discretization level  $n \in \mathbb{N}^*$  [RDP10a].

Equation 4.4 quantifies (by a measurement ranging between 0 and 1) the overlapping of all curves for each shape diagram  $\mathcal{D}_k$ ,  $k \in \llbracket 1, 30 \rrbracket \setminus (\llbracket 7, 10 \rrbracket \cup \llbracket 17, 20 \rrbracket)$ . A high (resp. low) value for this ratio means a strong (resp. weak) overlapping. When the computation is done for various discretization parameter  $n$  values, not only the curves overlapping is considered but also the curves proximity (small  $n$  value).

$$\text{Overlapping}_n(\mathcal{D}_k) = 1 - \frac{\sum_{(x,y) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2} D_k^{max}(x, y)}{\sum_{(x,y) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2} D_k^{sum}(x, y)} \quad (4.4)$$

where  $D_k^{max} : \llbracket 0, n \rrbracket^2 \rightarrow \{0, 1\}$  and  $D_k^{sum} : \llbracket 0, n \rrbracket^2 \rightarrow \mathbb{N}$  are defined  $\forall (x, y) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$  by :

$$D_k^{max}(x, y) = \max_{i \in \llbracket 1, 23 \rrbracket} C_{i,k}(x, y)$$

$$D_k^{sum}(x, y) = \sum_{i \in \llbracket 1, 23 \rrbracket} C_{i,k}(x, y)$$

Figure 4.31 illustrates the discretized shape diagrams ( $n = 100$ ) with overlapping intensities, and Figure 4.32 shows the quantification of curves overlapping (representing the simply connected compact set classes) for some shape diagrams, according to the  $n$  values 100 and 1000.

Several informations can be extracted from these graphs :

- The graphs representing the 2D analytic simply connected compact set classes of the family  $\mathcal{F}_{2.1}^{sc}$  show a strong overlap (from  $n = 1000$ ) for the shape diagrams  $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_4, \mathcal{D}_5, \mathcal{D}_6, \mathcal{D}_{11}, \mathcal{D}_{12}, \mathcal{D}_{14}, \mathcal{D}_{15}, \mathcal{D}_{16}, \mathcal{D}_{25}, \mathcal{D}_{28}$  and  $\mathcal{D}_{30}$ .
- The graphs representing the 2D analytic simply connected compact set classes of the family  $\mathcal{F}_{2.2}^{sc}$  show a strong overlap (from  $n = 1000$ ) in the shape diagrams  $\mathcal{D}_4, \mathcal{D}_6, \mathcal{D}_{14}, \mathcal{D}_{16}$  and  $\mathcal{D}_{30}$ . They are close to each other (strong overlap from  $n = 100$ ) in the shape diagrams  $\mathcal{D}_5$  and  $\mathcal{D}_{15}$ .
- The graphs representing the 2D analytic simply connected compact set classes of the family  $\mathcal{F}_{2.3}^{sc}$  show a strong overlap (from  $n = 1000$ ) in the shape diagrams  $\mathcal{D}_5$  and  $\mathcal{D}_{15}$ . They are close to each other (strong overlap from  $n = 100$ ) in the shape diagram  $\mathcal{D}_{13}$ .

Generally speaking, the results obtained with this quantification are quite different from those obtained during the study restricted to convex sets [RDP10a].

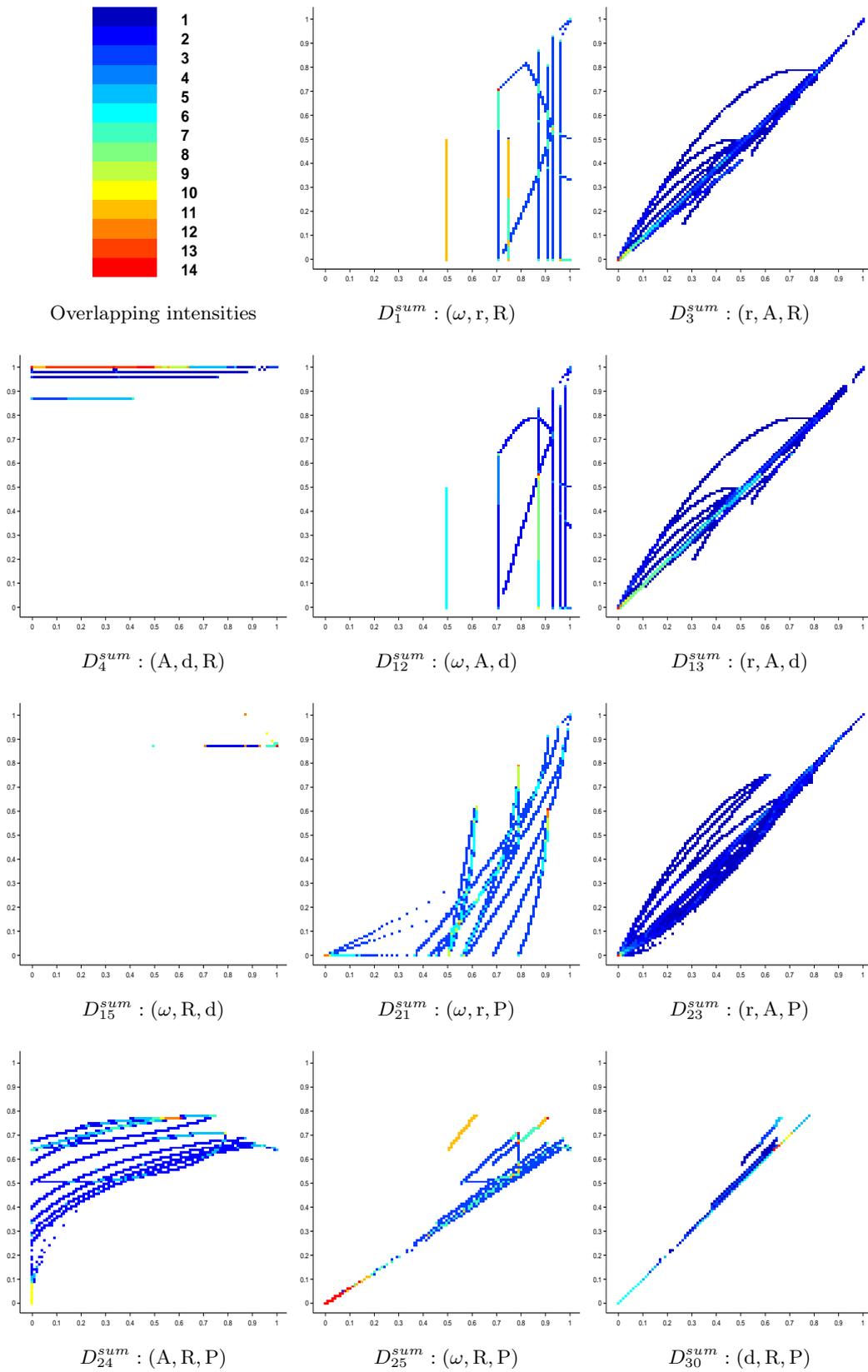
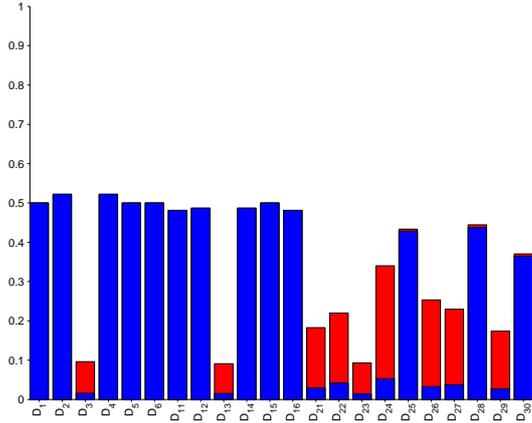
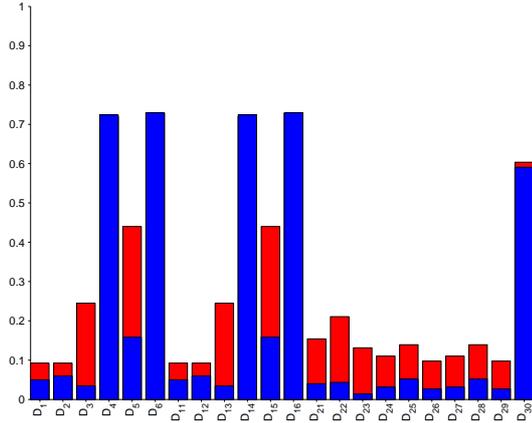


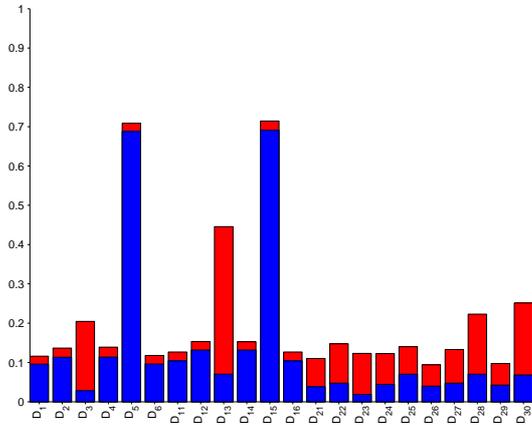
FIG. 4.31 – "Intensity" discretized shape diagram  $D_k^{sum}$  ( $n = 100$ ) with the nineteen curves representing the simply connected compact set classes with one degree of freedom.



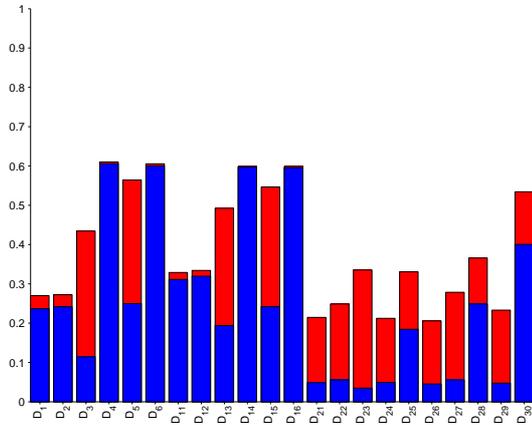
Overlapping quantification for the family  $\mathcal{F}_{2,1}^{sc}$  of simply connected compact sets with one degree of freedom and one symmetrical axis.



Overlapping quantification for the family  $\mathcal{F}_{2,2}^{sc}$  of simply connected compact sets with one degree of freedom and an even number of symmetrical axes.



Overlapping quantification for the family  $\mathcal{F}_{2,3}^{sc}$  of simply connected compact sets with one degree of freedom and an odd number strictly greater to 1 of symmetrical axes.



Overlapping quantification for the nineteen classes of simply connected compact sets with one degree of freedom.

FIG. 4.32 – Overlapping quantification for the twenty-two shape diagrams  $\mathcal{D}_k$ ,  $k \in \llbracket 1, 30 \rrbracket \setminus (\llbracket 7, 10 \rrbracket \cup \llbracket 17, 20 \rrbracket)$ , with  $n = 100$  in red, and  $n = 1000$  in blue.

### 4.2.6 Synthesis

To obtain a strong discrimination of 2D analytic simply connected compact sets, it is necessary to have both a strong dispersion and a weak overlapping.

- The shape diagrams  $\mathcal{D}_5$  and  $\mathcal{D}_{15}$  are excluded due to their weak dispersion and overlapping results, whatever the considered simply connected compact sets.
- In the shape diagrams  $\mathcal{D}_4$ ,  $\mathcal{D}_6$ ,  $\mathcal{D}_{14}$ ,  $\mathcal{D}_{16}$  and  $\mathcal{D}_{30}$ , only the family  $\mathcal{F}_{2,3}^{sc}$  shows a weak overlapping. Futhermore, their dispersion quantification is weak.
- In the shape diagrams  $\mathcal{D}_{25}$  and  $\mathcal{D}_{28}$ , the family  $\mathcal{F}_{2,1}^{sc}$  shows a strong overlapping. Futhermore, their dispersion quantification is moderate.
- In the shape diagrams  $\mathcal{D}_1$ ,  $\mathcal{D}_2$ ,  $\mathcal{D}_{11}$  and  $\mathcal{D}_{12}$ , the family  $\mathcal{F}_{2,1}^{sc}$  shows a strong overlapping. Futhermore, their dispersion quantification is strong.
- In addition to their strong dispersion, the shape diagrams  $\mathcal{D}_3$ ,  $\mathcal{D}_{13}$ ,  $\mathcal{D}_{21}$ ,  $\mathcal{D}_{22}$ ,  $\mathcal{D}_{23}$ ,  $\mathcal{D}_{24}$ ,  $\mathcal{D}_{26}$ ,  $\mathcal{D}_{27}$

and  $\mathcal{D}_{29}$  provide a weak overlapping of the simply connected compact set classes considered in this paper.

Futhermore, among the shape diagrams  $\mathcal{D}_3, \mathcal{D}_{13}, \mathcal{D}_{21}, \mathcal{D}_{22}, \mathcal{D}_{23}, \mathcal{D}_{24}, \mathcal{D}_{26}, \mathcal{D}_{27}$  and  $\mathcal{D}_{29}$  that obtain the best results for dispersion and overlapping quantifications, only  $\mathcal{D}_3, \mathcal{D}_{22}, \mathcal{D}_{23}, \mathcal{D}_{24}$  and  $\mathcal{D}_{26}$  are based on known complete systems of inequalities. Observing in details the representation of quantifications for these five shape diagrams,  $\mathcal{D}_{24}$  is retained for shape discrimination of analytic simply connected compact sets.

This analysis is summarized in Table 4.6.

	Complete system of inequalities	Non-complete system of inequalities
Strong discrimination	$\boxed{\mathcal{D}_3}, \mathcal{D}_{22}, \boxed{\mathcal{D}_{23}}, \boxed{\mathcal{D}_{24}}, \mathcal{D}_{26}$	$\boxed{\mathcal{D}_{13}}, \boxed{\mathcal{D}_{21}}, \mathcal{D}_{27}, \mathcal{D}_{29}$
Moderate discrimination	$\boxed{\mathcal{D}_1}, \mathcal{D}_{11}, \boxed{\mathcal{D}_{12}}, \mathcal{D}_{28}$	$\mathcal{D}_2, \boxed{\mathcal{D}_{25}}$
Weak discrimination	$\boxed{\mathcal{D}_4}, \mathcal{D}_5, \mathcal{D}_6, \mathcal{D}_{14}, \boxed{\mathcal{D}_{15}}, \mathcal{D}_{16},$ $\boxed{\mathcal{D}_{30}}$	

TAB. 4.6 – Shape diagrams classification according to their quality of shape discrimination of analytic simply connected compact sets and according to the completeness of associated systems of inequalities.

In this paper, only some shape diagrams have been illustrated. The choice was based on the results of shape discrimination (dispersion and overlapping studies) and on the results of similarities between shape diagrams (4.2.4). The aim was to illustrate dissimilar shape diagrams with different qualities of shape discrimination, and shape diagrams with different completeness of associated systems of inequalities. The framed shape diagrams of Table 4.6 are those illustrated throughout this paper.

#### 4.2.7 Conclusion

This paper has dealt with shape diagrams of 2D non-empty analytic simply connected compact sets built from six geometrical functionals : the area, the perimeter, the radii of the inscribed and circumscribed circles, and the minimum and maximum Feret diameters. Each such a set is represented by a point within a shape diagram whose coordinates are morphometrical functionals defined as normalized ratios of geometrical functionals. From existing morphometrical functionals for these sets, twenty-two shape diagrams can be built. A detailed comparative study has been performed in order to analyze the representation relevance and discrimination power of these shape diagrams. It is based

on the dispersion and overlapping quantifications from simply connected compact set locations in diagrams. Among all the shape diagrams, nine present a strong shape discrimination of sets, five are based on complete system of inequalities. Among these five diagrams, the shape diagram  $\mathcal{D}_{24} : (A, R, P)$  is retained for its representation relevance and discrimination power.

This paper reports the second part of a general comparative study of shape diagrams. The focus was placed on analytic simply connected compact sets. The first part [RDP10a] was restricted to the analytic compact convex sets. The main difference between the study of shape diagrams for the simply connected compact sets and those for the compact convex sets lies in the fact that some are not defined in the simply connected case. Moreover in this case, if the shape diagram is defined, the zone gathering the sets locations is necessarily larger in the simply connected case. The third part [RDP10c] of the comparative study is published in a following paper. It focuses on convexity discrimination for analytic and discretized simply connected compact sets.

### 4.3 A comparative study of shape diagrams for 2D compact sets - Part III : convexity discrimination for analytic and discretized simply connected sets

*Abstract* : Shape diagrams are representations in the Euclidean plane introduced to study 3-dimensional and 2-dimensional compact convex sets. However, they can also been applied to more general compact sets than compact convex sets. A compact set is represented by a point within a shape diagram whose coordinates are morphometrical functionals defined as normalized ratios of geometrical functionals. Classically, the geometrical functionals are the area, the perimeter, the radii of the inscribed and circumscribed circles, and the minimum and maximum Feret diameters. They allow twenty-two shape diagrams to be built. Starting from these six classical geometrical functionals, a detailed comparative study has been performed in order to analyze the representation relevance and discrimination power of these twenty-two shape diagrams. The two first parts of this study are published in previous papers [RDP10a, RDP10b]. They focus on analytic compact convex sets and analytic simply connected compact sets, respectively. The purpose of this paper is to present the third part, by focusing on the convexity discrimination for analytic and discretized simply connected compact sets.

*Key words and phrases* : Analytic and discretized simply connected compact sets, Convexity discrimination, Geometrical and morphometrical functionals, Shape diagrams, Shape discrimination.

#### 4.3.1 Introduction

The Santaló's shape diagrams [San61] allow to represent a 2D compact convex set by a point in the Euclidean 2D plane from six geometrical functionals : the area, the perimeter, the radii of the inscribed and circumscribed circles, and the minimum and maximum Feret diameters [Fer30]. The axes of each shape diagram are defined from a pair of geometric inequalities relating these functionals. Sometimes, the two geometric inequalities provide a complete system : for any range of numerical values satisfying them, there exists a compact convex set with these values for the geometrical functionals (in other words, a point within the 2D Santaló shape diagram describes a 2D compact convex set). This is not valid for all the Santaló shape diagrams.

This paper deals with the study of the convexity discrimination for shape diagrams of 2D non-empty analytic and discretized simply connected compact sets. The two first parts [RDP10a, RDP10b] of this study focus on the analytic compact convex sets and analytic simply connected compact sets, respectively. This third part presents an analysis of the convexity discrimination and extends the previous work to the discretized simply connected compact sets. The considered discretized simply connected sets are mapped onto points in these shape diagrams, and through dispersion quantification and convexity discrimination, the shape diagrams are classified according to their ability to discriminate the simply connected compact sets.

### 4.3.2 Shape convexity

The following study on the convexity discrimination first requires the definition of the shape convexity. A set is convex when the line segment which joins any two points in it lies totally within the set. In other terms, the shape convexity could be quantified with the probability that two points in the set lies totally within it.

Convexity parameters are commonly used in the analysis of shapes. The measurement value of the shape convexity of any set ranges between 0 and 1 (it is a probability). A convex set gives the value 1. Futhermore, the less the parameter value is high, the less the shape is convex. The convexity measurement can be computed, for instance, by the ratio  $A/A_C$  where  $A_C$  is the area of the convex hull of the set, but this is not sensitive to boundary small variations (Figure 4.33). A second convexity parameter is the ratio  $P_C/P$  where  $P_C$  is the Euclidean perimeter of the convex hull of the set.

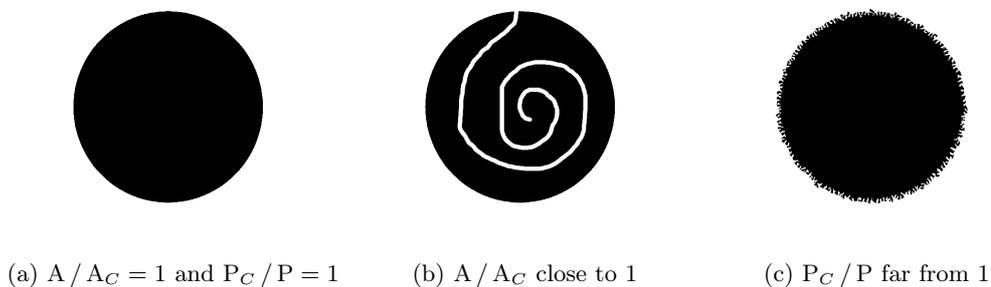


FIG. 4.33 –  $A/A_C$  gives result values equal to 1 for the set (a) and close to 1 for the sets (b) and (c). Nevertheless, the set (b) is far to check the convexity definition (the probability that two points in the set lies totally within it is low).  $P_C/P$  gives result values equal to 1 for the set (a) and far from 1 for the sets (b) and (c). Nevertheless, the set (c) is not very far to check the convexity definition.

Futhermore, a suitable convexity parameter is particularly required for discretized sets. For that purpose, the convexity parameter of Zunic and Rosin [ZR04] will be used for the following study on the convexity discrimination. For all polygon  $S$  of the Euclidean 2D plane  $E^2$ , it is defined by :

$$c(S) = \min_{\alpha \in [0, 2\pi]} \frac{P_2(R(S, \alpha))}{P_1(S, \alpha)} \quad (4.5)$$

$P_1(S, \alpha)$  denotes the perimeter of the set  $S$ , rotated by the angle  $\alpha$  with the origin as the center of rotation, in the sense of the  $l_1$  metric ( $l_1(e)$  equals the sum of the projections of the straight line segment  $e$  onto the coordinate axes).  $P_2(R(S, \alpha))$  denotes the Euclidean perimeter of the minimal

bounding rectangle  $R$  with edges parallel to the coordinate axes which includes the rotated set of  $S$  by the angle  $\alpha$ .

This convexity parameter  $c$  has the following desirable properties :

- its value is always a number within  $(0, 1]$
- its value is 1 if and only if the set is convex
- there are sets with its value arbitrarily close to 0
- it is invariant under similitude transformations
- there is a simple and fast procedure for computing it.

### 4.3.3 Convexity discrimination for analytic simply connected sets

Observing the 2D compact set locations in the shape diagrams  $\mathcal{D}_k$ ,  $k \in \llbracket 1, 30 \rrbracket \setminus (\llbracket 7, 10 \rrbracket \cup \llbracket 17, 20 \rrbracket)$  for the families  $\mathcal{F}_1^c$  and  $\mathcal{F}_1^{sc}$  [RDP10a, RDP10b] (Figures 4.3 and 4.20), some shape diagrams seem to stronger discriminate the convex shapes from the non-convex shapes than others.

Equation 4.6 quantifies (by values ranging between 0 and 1) this convexity discrimination for each shape diagram  $\mathcal{D}_k$ ,  $k \in \llbracket 1, 30 \rrbracket \setminus (\llbracket 7, 10 \rrbracket \cup \llbracket 17, 20 \rrbracket)$ . A high (respectively low) resulting value means a weak (respectively strong) convexity discrimination.

$$\text{Convexity\_discrimination}(\mathcal{D}_k) = \tag{4.6}$$

$$\frac{1}{\#\{\mathcal{F}_1^c \cup \mathcal{F}_1^{sc}\}} \left( \sum_{i=1}^{\#\mathcal{F}_1^c} |c(i) - c(\text{argmin}\{d_E(i, j) : j \in \mathcal{F}_1^c\})| + \sum_{i=1}^{\#\mathcal{F}_1^{sc}} |c(i) - c(\text{argmin}\{d_E(i, j) : j \in \mathcal{F}_1^{sc}\})| \right)$$

where  $c(i)$  denotes the convexity value of the shape indexed by  $i$  in Figure 4.36, and  $d_E$  is the Euclidean distance.

Figure 4.34 shows the results of this quantification for every shape diagrams  $\mathcal{D}_k$ ,  $k \in \llbracket 1, 30 \rrbracket \setminus (\llbracket 7, 10 \rrbracket \cup \llbracket 17, 20 \rrbracket)$ . The stronger convexity discrimination appears in the shape diagrams  $\mathcal{D}_{24}$ ,  $\mathcal{D}_{26}$ ,  $\mathcal{D}_{27}$ , and  $\mathcal{D}_{29}$ , that is in agreement with the visual interpretation [RDP10b], and the weaker discrimination appears for the shape diagrams  $\mathcal{D}_4$  and  $\mathcal{D}_{14}$ .

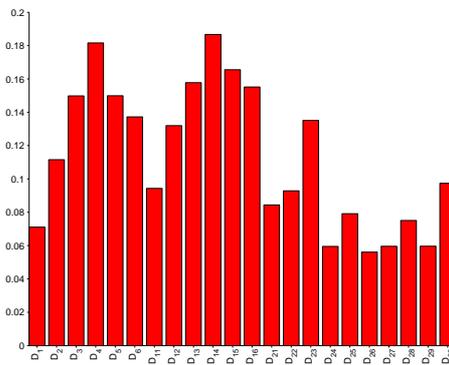


FIG. 4.34 – Convexity discrimination for the families  $\mathcal{F}_1^c$  and  $\mathcal{F}_1^{sc}$ .

These results have to be confirmed with more general sets. This is not easy to conclude with the restriction to analytic sets. For this reason, this study is extended to the discrete case.

#### 4.3.4 Shape functionals for a discretized simply connected set

In this paper, the non-empty discretized simply connected compact sets in the discrete Euclidean 2-space  $E_d^2$  are considered. They are represented by a group of pixels, themselves represented by points. The inter-pixel distance is the step discretization. The discretization is fine enough to preserve the simple connectivity [KR04]. For the characterization of these sets, six geometrical functionals are used allowing to define morphometrical functionals from geometric inequalities.

##### Geometrical functionals

For a discretized simply connected compact set in  $E_d^2$ , let  $A$ ,  $P$ ,  $r$ ,  $R$ ,  $\omega$ ,  $d$ , denote the estimations of its area, its perimeter, the radii of its inscribed and circumscribed circles, its minimum and maximum Feret diameters [Fer30], respectively. Figure 4.35 illustrates these geometrical functionals for a discretized simply connected compact set represented in a point lattice [KR04]. For all non-empty discretized simply connected compact sets, these geometrical functionals are greater or equal than zero.

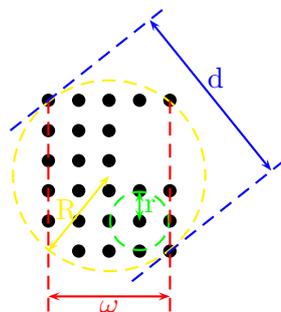


FIG. 4.35 – Geometrical functionals of a discretized simply connected compact set : radii of inscribed ( $r$ ) and circumscribed ( $R$ ) circles, minimum ( $\omega$ ) and maximum ( $d$ ) Feret diameters. The area  $A$  is given by the pixel number, and the perimeter is estimated thanks to the Cauchy-Crofton-Poincaré formula [Cau41, Cro68, Poi96].

##### Geometric inequalities and morphometrical functionals

Geometric inequalities and morphometrical functionals for analytic simply connected compact sets are referenced in [RDP10b]. There exists special cases where a discretized set has geometrical functional values that do not verify a geometric inequality, due to the estimation error (because of the discretization). This means that this set is a discretization of an extremal set for the associated geometric inequality. Consequently, for practical reasons, the morphometrical functional value greater than one is reduced to one. Thus, the twenty-two shape diagrams referenced in [RDP10b] can be used for discretized simply connected compact sets.

#### 4.3.5 Shape diagrams for a basis of various discretized simply connected compact sets

##### Shape diagrams

Figure 4.36 illustrates seventy-eight binary images constituting the family  $\mathcal{F}_1^{disc}$ . For each image, the black object represents a discretized simply connected compact set and the white pixels represents the



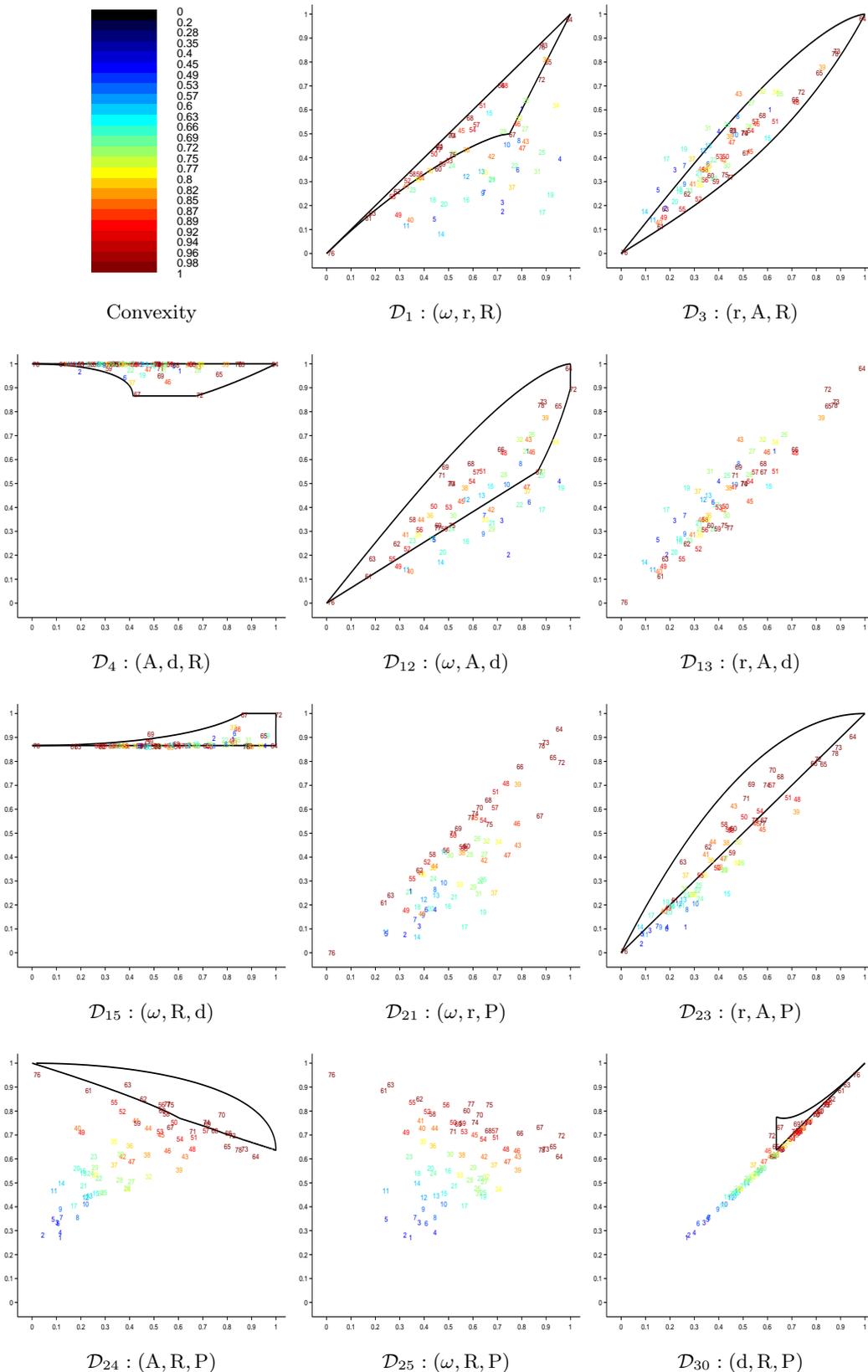


FIG. 4.37 – Family  $\mathcal{F}_1^{disc}$  of discretized simply connected compact sets mapped into eleven shape diagrams (chosen according to the results synthesized at the end of the part II of this study [RDP10b]).

### Dispersion quantification and convexity discrimination

A wider family  $\mathcal{F}_2^{dsc}$  of 1370 binary images is considered [SCTK98], but not illustrated here. These are twenty deformations of each of the sixty-eight first sets of the family  $\mathcal{F}_1^{dsc}$ , plus the ten last sets of  $\mathcal{F}_1^{dsc}$ ; Section 4.3.6 shows two examples of these deformations). For each binary image representing a discretized simply connected compact set, the morphometrical functionals are computed and located by a point in each shape diagram (Figure 4.40). The point color is associated to the convexity parameter value  $c$ , and the convex domain boundary, if it is known, is illustrated with black lines.

**Dispersion quantification** For each shape diagram, the dispersion of the locations of the 2D discretized simply connected compact sets of the family  $\mathcal{F}_2^{dsc}$  is studied.

The spatial distribution of discretized simply connected compact sets locations in each shape diagram is characterized and quantified from algorithmic geometry using Delaunay’s graph (DG) and minimum spanning tree (MST) [BY98]. Some useful information about the disorder and the neighborhood relationships between sets can be deduced. From each geometrical model, it is possible to compute two values from the edge lengths, denoted  $\mu$  (average) and  $\sigma$  (standard deviation) for DG or MST. The simple reading of the coordinates in the  $(\mu, \sigma)$ -plane enables to determine the type of spatial distribution of the discretized simply connected compact set (regular, random, cluster, ...) [RPG<sup>+</sup>01]. The decrease of  $\mu$  and the increase of  $\sigma$  characterize the shift from a regular distribution toward random and cluster distributions.

Figure 4.39 represents both values of parameters of the twenty-two shape diagrams for each model, DG and MST.

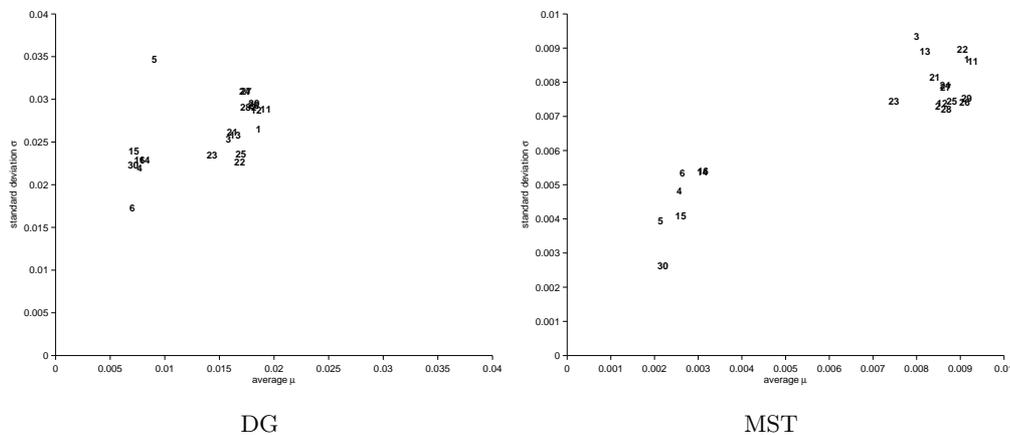


FIG. 4.39 – Two dispersion quantifications for all shape diagrams applied on the family  $\mathcal{F}_2^{dsc}$ . For each representation (according to the models DG and MST, respectively), indices  $k \in \llbracket 1, 30 \rrbracket \setminus (\llbracket 7, 10 \rrbracket \cup \llbracket 17, 20 \rrbracket)$  of the shape diagrams  $\mathcal{D}_k$  is located according to its  $\mu$  and  $\sigma$  values.

As in the part II [RDP10b], the DG model allows to divide the shape diagrams into two groups, mainly according to the average  $\mu$  value : the shape diagrams  $\mathcal{D}_4, \mathcal{D}_5, \mathcal{D}_6, \mathcal{D}_{14}, \mathcal{D}_{15}, \mathcal{D}_{16}$  and  $\mathcal{D}_{30}$  have a low average  $\mu$ , thus the discretized simply connected compact sets are located within a small domain in  $[0, 1]^2$ . In the part II, the MST model confirmed this tendency for the average. Figure 4.39 shows also a distribution of these two groups according to the standard deviation  $\sigma$ . Note that the constitution of each of the two groups is the same as in the part II.

**Convexity discrimination** Observing the colors dispersion in the shape diagrams of Figure 4.40, some shape diagrams seem to stronger discriminate the convex shapes from the non-convex shapes than others. This stronger discrimination is visually highlighted by a color gradient, from dark red to dark blue. Within a shape diagram, if the colors are irregularly distributed according to the color range, this means that convex sets and non-convex sets can not be discriminated.

Equation 4.7 quantifies (by values ranging between 0 and 1) this discrimination for each shape diagram  $\mathcal{D}_k$ ,  $k \in \llbracket 1, 30 \rrbracket \setminus (\llbracket 7, 10 \rrbracket \cup \llbracket 17, 20 \rrbracket)$ . A high (resp. low) resulting value means a weak (resp. strong) convexity discrimination.

$$\text{Convexity\_discrimination}(\mathcal{D}_k) = \frac{1}{\#\mathcal{F}_2^{dsc}} \sum_{i=1}^{\#\mathcal{F}_2^{dsc}} \left| c(i) - c \left( \operatorname{argmin} \left\{ d_E(i, j) : j \in \mathcal{F}_2^{dsc} \right\} \right) \right| \quad (4.7)$$

where  $c(i)$  denotes the convexity value of the shape indexed by  $i$  in Figure 4.36, and  $d_E$  is the Euclidean distance.

Figure 4.41 shows the results of this quantification for every shape diagrams. The stronger convexity discrimination appears in the shape diagrams  $\mathcal{D}_{24}$ ,  $\mathcal{D}_{25}$ ,  $\mathcal{D}_{26}$ ,  $\mathcal{D}_{27}$ ,  $\mathcal{D}_{28}$  and  $\mathcal{D}_{29}$ , that is in agreement with the visual interpretation. The weaker discrimination appears for the shape diagrams  $\mathcal{D}_4$ ,  $\mathcal{D}_6$ ,  $\mathcal{D}_{14}$  and  $\mathcal{D}_{16}$ . Even if the shape diagram  $\mathcal{D}_{30}$  is not strong for the general shape discrimination [RDP10a, RDP10b], it is not weak for the convexity discrimination. These two discriminations are independant.

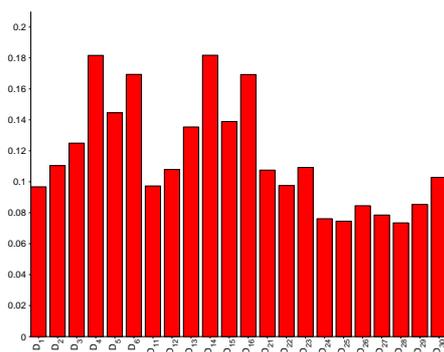


FIG. 4.41 – Convexity discrimination for the family  $\mathcal{F}_2^{dsc}$ .

### 4.3.6 Shape diagrams for similar discretized simply connected compact sets

This subsection focuses on the discrimination of shapes that are visually similar enough, so that they can be considered as the same global shape. The shape diagrams  $\mathcal{D}_4$ ,  $\mathcal{D}_5$ ,  $\mathcal{D}_6$ ,  $\mathcal{D}_{14}$ ,  $\mathcal{D}_{15}$ ,  $\mathcal{D}_{16}$  and  $\mathcal{D}_{30}$  provide a weak shape discrimination, whatever the visual similarity of the sets. Thus, they are not considered from this subsection and until the end of this paper. It remains the fifteen shape diagrams  $\mathcal{D}_k$ ,  $k \in \llbracket 1, 29 \rrbracket \setminus (\llbracket 4, 10 \rrbracket \cup \llbracket 14, 20 \rrbracket)$ .

Let be three families  $\mathcal{F}_3^{dsc}$ ,  $\mathcal{F}_4^{dsc}$  and  $\mathcal{F}_5^{dsc}$  of binary images representing triangles (Figure 4.41), disks (Figure 4.42) and crosses (Figure 4.43), respectively, that have undergone minor transformations, modifications, deformations. As previously mentioned, for each image, the black object represents a discretized simply connected compact set. The morphometrical functionals are computed, and the images are located by a point in each shape diagram (Figures 4.41, 4.42 and 4.43). The color of the number is related to the convexity parameter value  $c$ , and the convex domain boundary, if it is known, is illustrated with black lines.

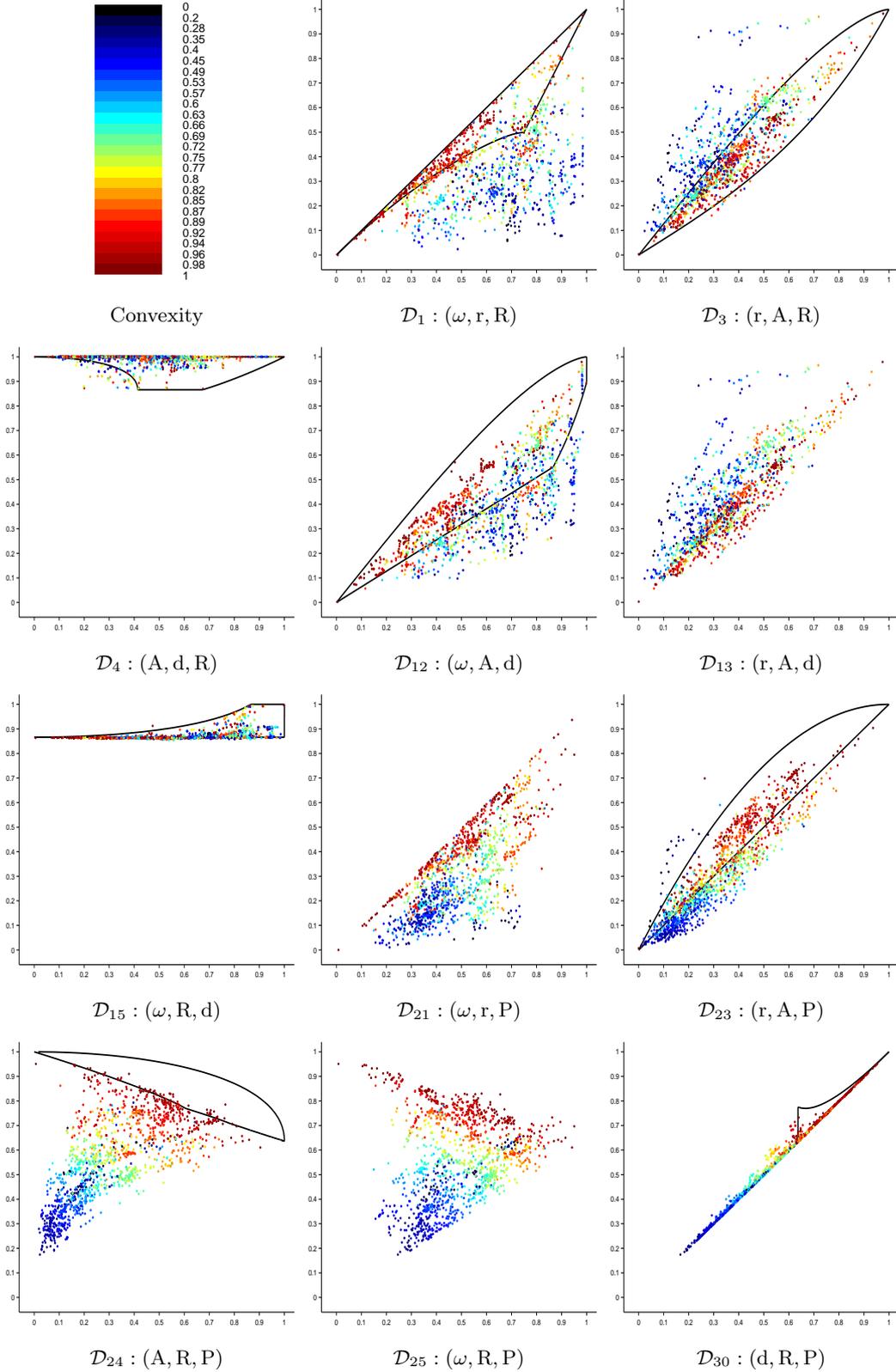


FIG. 4.40 – Family  $\mathcal{F}_2^{disc}$  of discretized simply connected compact sets mapped into eleven shape diagrams (chosen according to the results synthesized at the end of the part II of this study [RDP10b]).

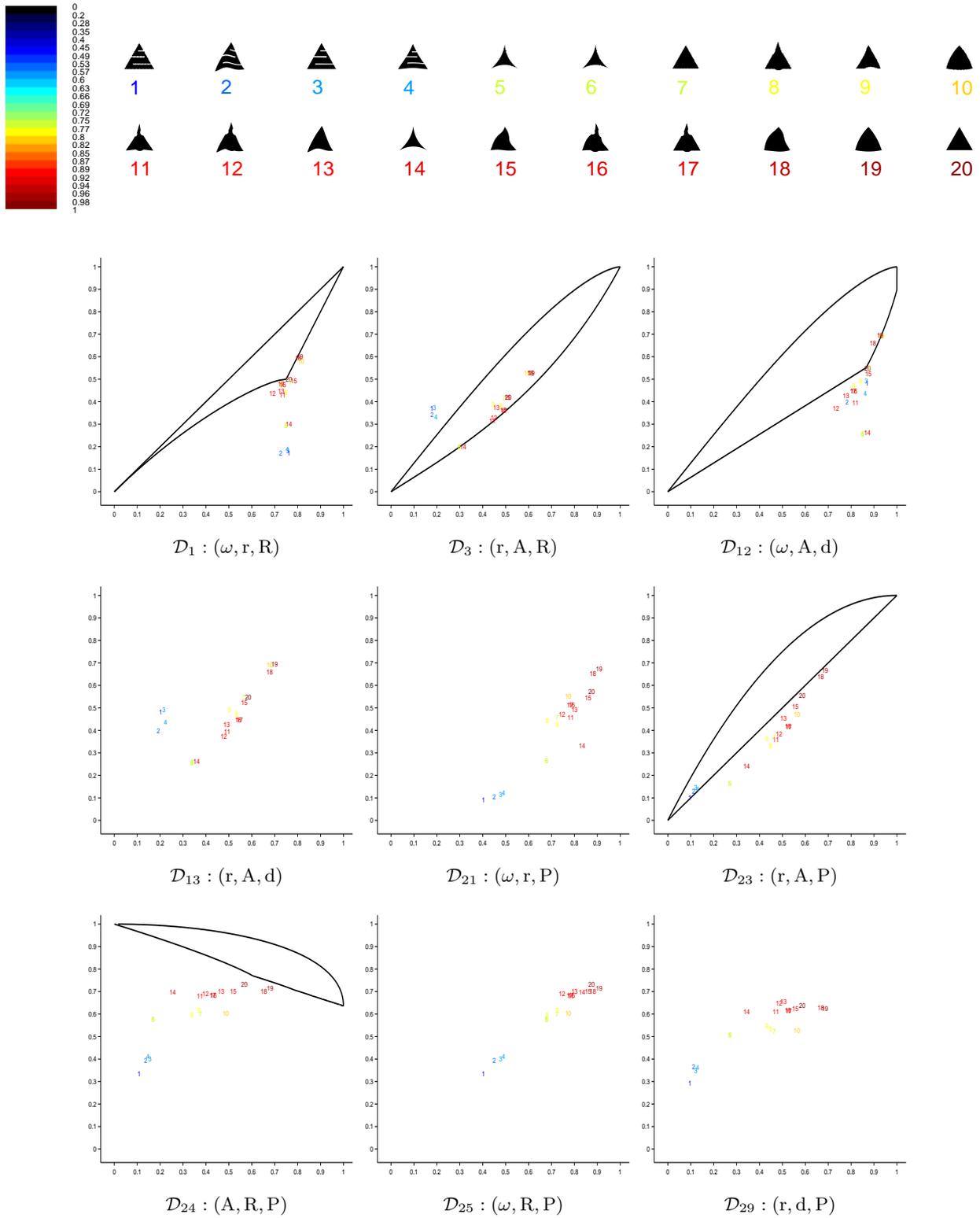


FIG. 4.41 – Family  $\mathcal{F}_3^{disc}$  of twenty 2D discretized simply connected compact sets with 'triangle' shape (represented in black in binary images), mapped into nine shape diagrams (chosen according to the results synthesized at the end of the part II of this study [RDP10b]). The color of the number is related to the convexity parameter value.

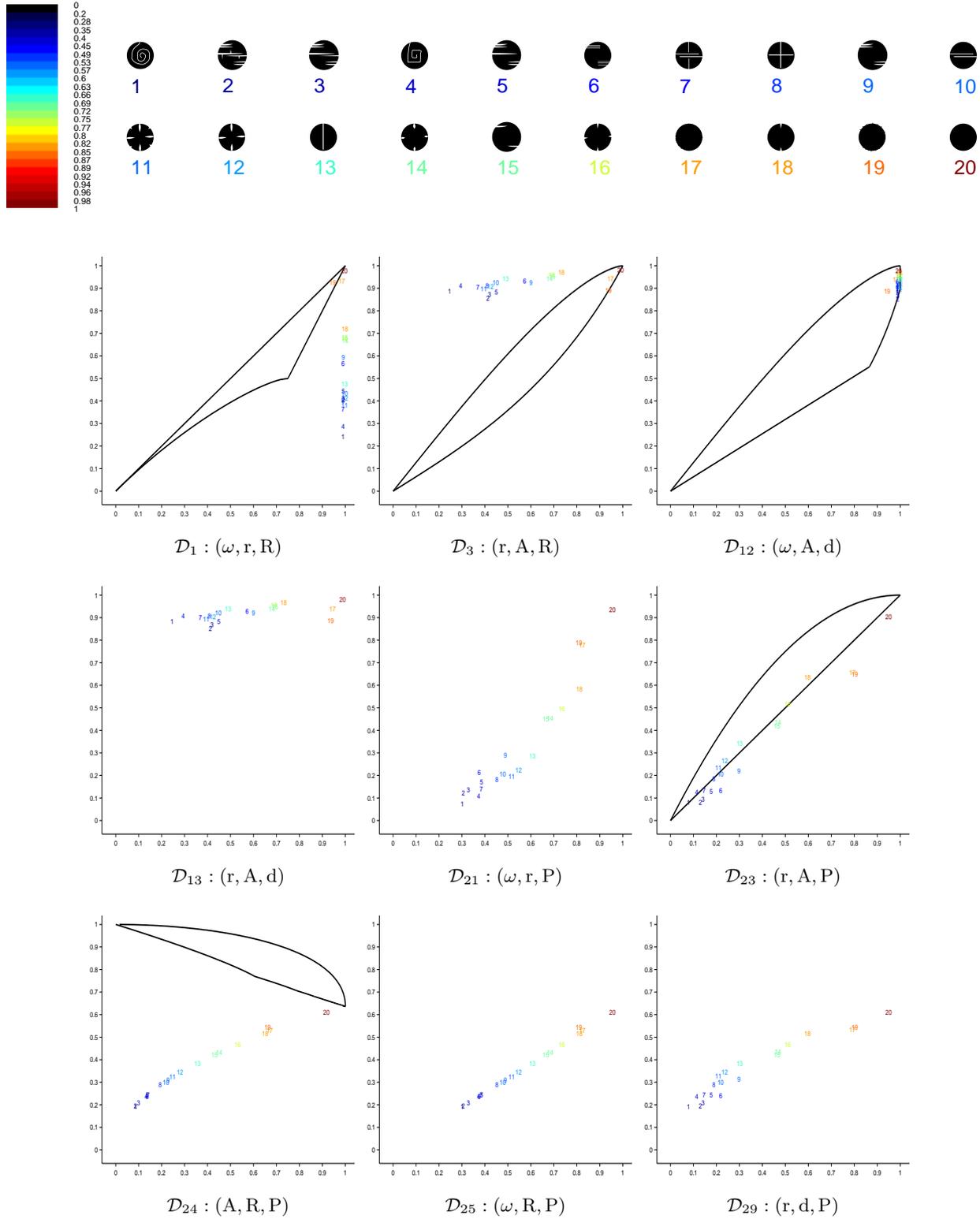


FIG. 4.42 – Family  $\mathcal{F}_4^{dsc}$  of twenty 2D discretized simply connected compact sets with 'disk' shape (represented in black in binary images), mapped into nine shape diagrams (chosen according to the results synthesized at the end of the part II of this study [RDP10b]). The color of the number is related to the convexity parameter value.

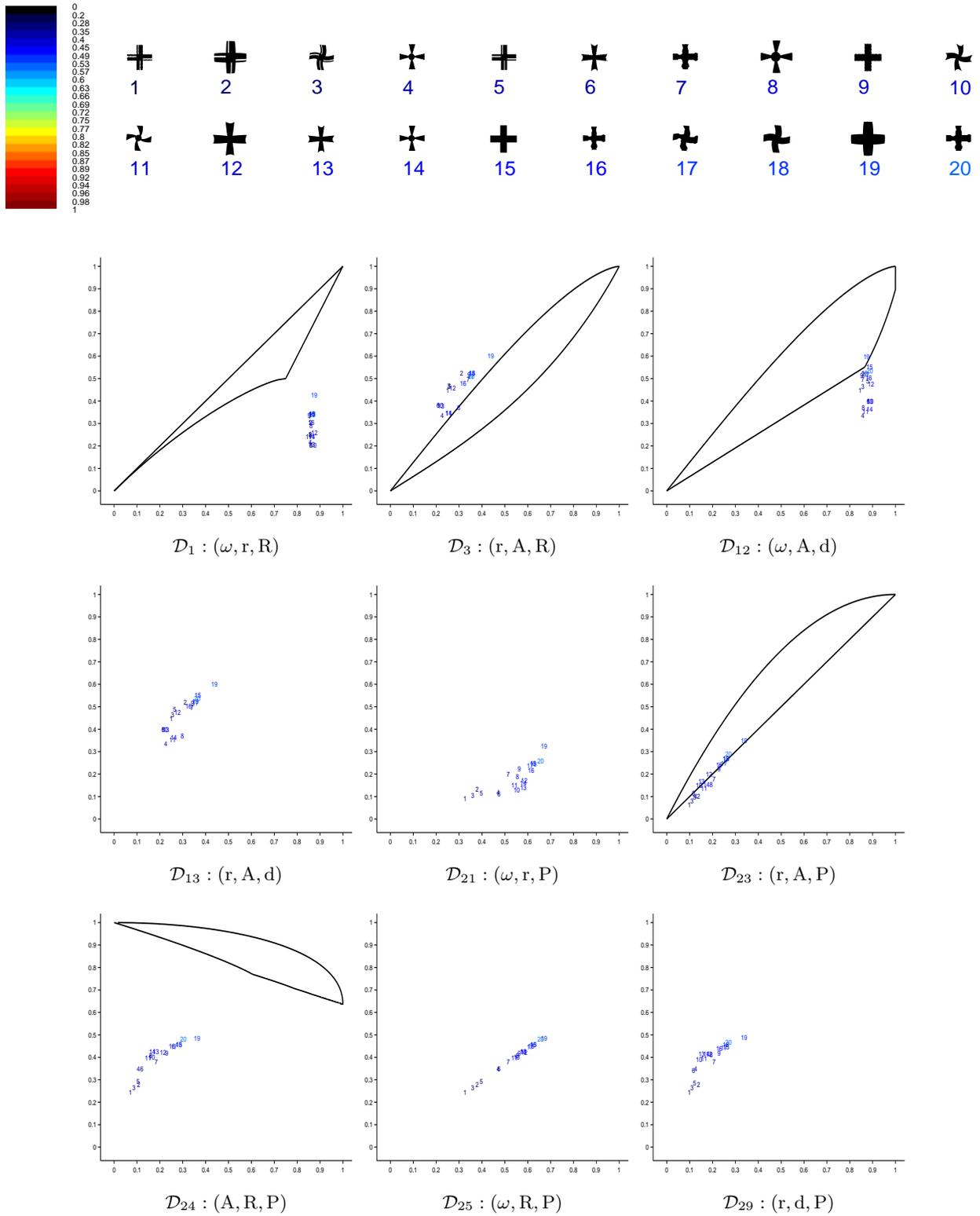


FIG. 4.43 – Family  $\mathcal{F}_5^{dsc}$  of twenty 2D discretized simply connected compact sets with 'cross' shape (represented in black in binary images), mapped into nine shape diagrams (chosen according to the results synthesized at the end of the part II of this study [RDP10b]). The color of the number is related to the convexity parameter value.

Figures 4.44, 4.45 and 4.46 give the dispersion quantification representation of the fifteen shape diagrams for each model, DG and MST (method described in 4.3.5).

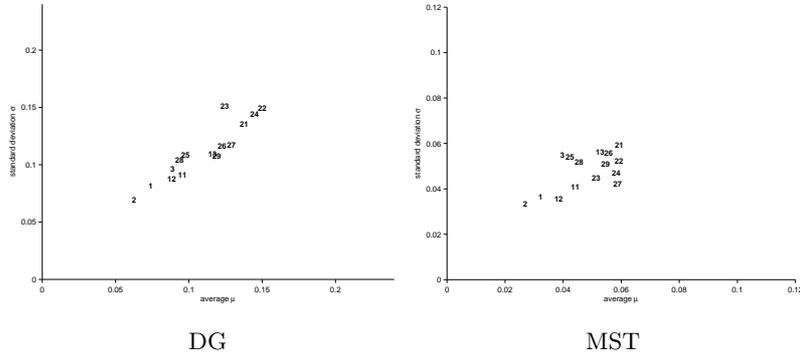


FIG. 4.44 – Two dispersion quantifications for all shape diagrams applied on the family  $\mathcal{F}_3^{disc}$ . For each representation (according to the models DG and MST, respectively), indices  $k \in \llbracket 1, 29 \rrbracket \setminus (\llbracket 4, 10 \rrbracket \cup \llbracket 14, 20 \rrbracket)$  of the shape diagrams  $\mathcal{D}_k$  is located according to its  $\mu$  and  $\sigma$  values.

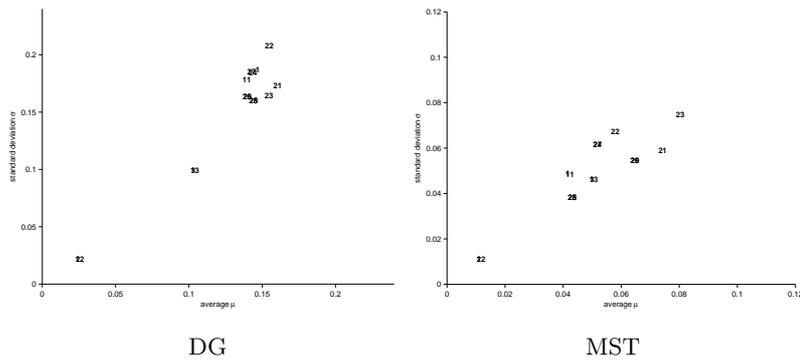


FIG. 4.45 – Two dispersion quantifications for all shape diagrams applied on the family  $\mathcal{F}_4^{disc}$ . For each representation (according to the models DG and MST, respectively), indices  $k \in \llbracket 1, 29 \rrbracket \setminus (\llbracket 4, 10 \rrbracket \cup \llbracket 14, 20 \rrbracket)$  of the shape diagrams  $\mathcal{D}_k$  is located according to its  $\mu$  and  $\sigma$  values.

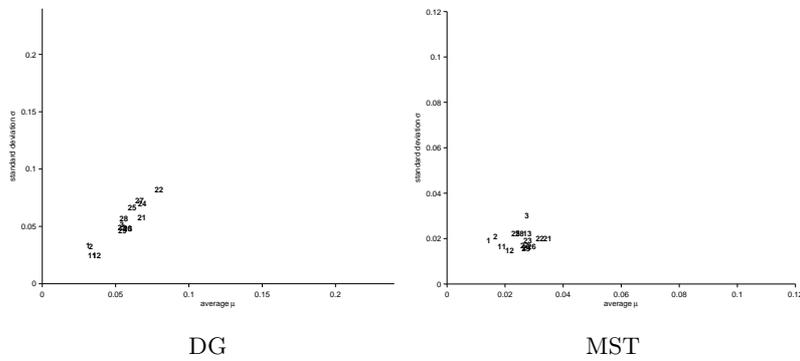


FIG. 4.46 – Two dispersion quantifications for all shape diagrams applied on the family  $\mathcal{F}_5^{disc}$ . For each representation (according to the models DG and MST, respectively), indices  $k \in \llbracket 1, 29 \rrbracket \setminus (\llbracket 4, 10 \rrbracket \cup \llbracket 14, 20 \rrbracket)$  of the shape diagrams  $\mathcal{D}_k$  is located according to its  $\mu$  and  $\sigma$  values.

The results obtained for all shape diagrams allows to reveal that the shape diagrams  $\mathcal{D}_2$  and  $\mathcal{D}_{12}$  do not discriminate the similar sets in each family  $\mathcal{F}_3^{disc}$ ,  $\mathcal{F}_4^{disc}$  and  $\mathcal{F}_5^{disc}$ . This discrimination appears little stronger for the shape diagrams  $\mathcal{D}_1$  and  $\mathcal{D}_{11}$ . From a global vision, the shape diagrams  $\mathcal{D}_{21}$  and  $\mathcal{D}_{22}$  strongest discriminate these sets.

### 4.3.7 Synthesis

To obtain a strong discrimination of 2D discretized simply connected compact sets, it is necessary to have both a strong dispersion and a strong convexity discrimination.

- The shape diagram  $\mathcal{D}_4$ ,  $\mathcal{D}_5$ ,  $\mathcal{D}_6$ ,  $\mathcal{D}_{14}$ ,  $\mathcal{D}_{15}$  and  $\mathcal{D}_{16}$  are excluded due to their weak dispersion and convexity discrimination results.
- The shape diagram  $\mathcal{D}_{30}$  presents a strong convexity discrimination although its weak dispersion result.
- The dispersion quantification of the shape diagrams  $\mathcal{D}_1$ ,  $\mathcal{D}_2$ ,  $\mathcal{D}_3$ ,  $\mathcal{D}_{11}$ ,  $\mathcal{D}_{12}$ ,  $\mathcal{D}_{13}$ ,  $\mathcal{D}_{21}$ ,  $\mathcal{D}_{22}$ ,  $\mathcal{D}_{23}$ ,  $\mathcal{D}_{24}$ ,  $\mathcal{D}_{25}$ ,  $\mathcal{D}_{26}$ ,  $\mathcal{D}_{27}$ ,  $\mathcal{D}_{28}$  and  $\mathcal{D}_{29}$  gives strong values.
- The convexity discrimination is stronger for  $\mathcal{D}_{24}$ ,  $\mathcal{D}_{25}$ ,  $\mathcal{D}_{26}$ ,  $\mathcal{D}_{27}$ ,  $\mathcal{D}_{28}$  and  $\mathcal{D}_{29}$ .
- The similar sets discrimination appears stronger for  $\mathcal{D}_{21}$  and  $\mathcal{D}_{22}$ .

Futhermore, among the shape diagrams  $\mathcal{D}_{24}$ ,  $\mathcal{D}_{25}$ ,  $\mathcal{D}_{26}$ ,  $\mathcal{D}_{27}$ ,  $\mathcal{D}_{28}$  and  $\mathcal{D}_{29}$  that obtain the best results for dispersion quantification and convexity discrimination, only  $\mathcal{D}_{24}$ ,  $\mathcal{D}_{26}$  and  $\mathcal{D}_{28}$  are based on known complete systems of inequalities. Observing in details the representation of quantifications for these three shape diagrams,  $\mathcal{D}_{24}$  retained for shape discrimination of analytic simply connected compact sets, is also retained for shape discrimination of discretized simply connected compact sets.

This analysis is summarized in Table 4.7.

	Complete system of inequalities	Non-complete system of inequalities
Strong discrimination	$\boxed{\mathcal{D}_{24}}$ , $\mathcal{D}_{26}$ , $\mathcal{D}_{28}$	$\boxed{\mathcal{D}_{25}}$ , $\mathcal{D}_{27}$ , $\mathcal{D}_{29}$
Moderate discrimination	$\boxed{\mathcal{D}_1}$ , $\boxed{\mathcal{D}_3}$ , $\mathcal{D}_{11}$ , $\boxed{\mathcal{D}_{12}}$ , $\mathcal{D}_{22}$ , $\boxed{\mathcal{D}_{23}}$	$\mathcal{D}_2$ , $\boxed{\mathcal{D}_{13}}$ , $\boxed{\mathcal{D}_{21}}$
Weak discrimination	$\boxed{\mathcal{D}_4}$ , $\mathcal{D}_5$ , $\mathcal{D}_6$ , $\mathcal{D}_{14}$ , $\boxed{\mathcal{D}_{15}}$ , $\mathcal{D}_{16}$ , $\boxed{\mathcal{D}_{30}}$	

TAB. 4.7 – Shape diagrams classification according to their quality of shape discrimination of discretized simply connected compact sets and according to the completeness of associated systems of inequalities.

### 4.3.8 Global synthesis for the three parts of this study

For each part of this study [RDP10a, RDP10b], the synthesis gives the shape diagrams that provide the strongest shape discrimination. These are  $\mathcal{D}_{12}$  and  $\mathcal{D}_{24}$ . Table 4.8 gathers the syntheses of the three parts.

### 4.3.9 Conclusion

This paper has dealt with shape diagrams of 2D non-empty compact sets built from six geometrical functionals : the area, the perimeter, the radii of the inscribed and circumscribed circles, and the minimum and maximum Feret diameters. Each set is represented by a point within a shape diagram whose coordinates are morphometrical functionals defined as normalized ratios of geometrical functionals. From existing morphometrical functionals for these sets, twenty-two shape diagrams can be built. A detailed comparative study has been performed in order to analyze the representation relevance and discrimination power of these shape diagrams. It is based on the dispersion quantification and convexity discrimination from compact set locations in diagrams. Among all the shape diagrams, six present a strong convexity discrimination of sets, three are based on complete system of inequalities. Among these three diagrams, the shape diagram  $\mathcal{D}_{24} : (A, R, P)$  is retained for its representation relevance and discrimination power.

The purpose of this paper was to present the third part of this study, by focusing on convexity discrimination of analytic and discretized simply connected compact sets. The two first parts [RDP10a, RDP10b] was restricted to the analytic compact convex and simply connected compact sets, respectively. For an analytic set, the geometrical functionals were accurately calculated. For a discretized set, they are estimated. Thus, the shape diagrams are based on estimated morphometrical functionals.

Actually, the authors work on the case of hollowed sets (analytic and discretized) which is not specifically considered in this paper.

## 4.4 Applications

### 4.4.1 Classification de formes de graines

Soit une image binaire comportant *a priori* trois classes de graines (Figure 4.47) : les graines circulaires, les graines petites et allongées, les graines en forme d'amande. Les composantes connexes correspondant aux graines sont numérotées. Ces ensembles discrets compacts simplement connexes sont localisés dans chaque diagramme de forme. La couleur du numéro de l'ensemble représente la classe à laquelle il appartient : rouge pour les graines circulaires, bleu pour les graines petites et allongées, et vert pour les graines en forme d'amande. Une remarque est à formuler concernant les graines 'vertes' et les graines 'bleues' : elles diffèrent essentiellement par leurs tailles, leurs formes étant plutôt similaires.

La Figure 4.49 illustre deux diagrammes de forme dans lesquels les graines sont localisées. Les localisations rouges forment un amas bien distinct des localisations vertes et bleues. Compte tenu de la remarque précédente, il est normal que les localisations vertes et bleues soient proches. Les formes des graines associées sont assez similaires. Elles diffèrent principalement en taille, les axes des diagrammes de forme représentent des fonctionnelles morphométriques qui ne dépendent donc pas de la taille globale de l'ensemble.

	Complete system of inequalities			Non-complete system of inequalities		
	Part I compact convex sets	Part II simply connec- ted compact sets	Part III convexity discrimination	Part I compact convex sets	Part II simply connec- ted compact sets	Part III convexity discrimination
Strong discrimination	$\mathcal{D}_3, \mathcal{D}_{12}, \mathcal{D}_{22},$ $\mathcal{D}_{23}$	$\mathcal{D}_3, \mathcal{D}_{22}, \mathcal{D}_{23},$ $\mathcal{D}_{24}, \mathcal{D}_{26}$	$\mathcal{D}_{24}, \mathcal{D}_{26}, \mathcal{D}_{28}$	$\mathcal{D}_2, \mathcal{D}_{13}$	$\mathcal{D}_{13}, \mathcal{D}_{21}, \mathcal{D}_{27},$ $\mathcal{D}_{29}$	$\mathcal{D}_{25}, \mathcal{D}_{27}, \mathcal{D}_{29}$
Moderate discrimination	$\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_7, \mathcal{D}_9, \mathcal{D}_{11},$ $\mathcal{D}_{18}, \mathcal{D}_{24}, \mathcal{D}_{26},$ $\mathcal{D}_{28}$	$\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_{11}, \mathcal{D}_{12},$ $\mathcal{D}_{28}$	$\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_3, \mathcal{D}_{11},$ $\mathcal{D}_{12}, \mathcal{D}_{22}, \mathcal{D}_{23}$	$\mathcal{D}_8, \mathcal{D}_{17}, \mathcal{D}_{19},$ $\mathcal{D}_{21}, \mathcal{D}_{25}, \mathcal{D}_{27},$ $\mathcal{D}_{29}$	$\mathcal{D}_2, \mathcal{D}_{25}$	$\mathcal{D}_2, \mathcal{D}_{13}, \mathcal{D}_{21}$
Weak discrimination	$\mathcal{D}_4, \mathcal{D}_5, \mathcal{D}_6, \mathcal{D}_{10},$ $\mathcal{D}_{14}, \mathcal{D}_{15}, \mathcal{D}_{16},$ $\mathcal{D}_{20}, \mathcal{D}_{30}$	$\mathcal{D}_4, \mathcal{D}_5, \mathcal{D}_6, \mathcal{D}_{14},$ $\mathcal{D}_{15}, \mathcal{D}_{16}, \mathcal{D}_{30}$	$\mathcal{D}_4, \mathcal{D}_5, \mathcal{D}_6, \mathcal{D}_{14},$ $\mathcal{D}_{15}, \mathcal{D}_{16}, \mathcal{D}_{30}$	$\mathcal{D}_{31}$		

TAB. 4.8 – Shape diagrams classification according to their quality of shape discrimination and according to the completeness of associated systems of inequalities.

#### 4.4.2 Homogénéité des formes de cellules cornéennes segmentées

Dans le cas des greffes de cornée, les ophtalmologistes valident qualitativement les greffons avant l'opération. Leur premier critère est la densité cellulaire, mais d'autres critères rentrent en jeu, tels le pléomorphisme (différentes formes) et le polymégéthisme (différentes tailles) des cellules. Un endothélium cornéen jeune et en bonne santé ne contient que des cellules hexagonales; son vieillissement entraîne une variabilité dans les formes et les tailles des cellules. Le critère principalement utilisé aujourd'hui par les ophtalmologistes pour estimer le pléomorphisme est le nombre de cellules voisines (critère simpliste et qui s'avère erroné). Les ophtalmologistes sont donc toujours à la recherche d'un critère d'estimation du pléomorphisme.

La Figure 4.48 montre trois images binaires de cellules cornéennes obtenues après segmentation [GP08, GP09].

Les cellules labellisées des images sont localisées dans chaque diagramme de forme (Figure 4.50). Pour une image, l'homogénéité de la distribution des formes des cellules est liée à la taille de l'amas des localisations des cellules dans le diagramme de forme. Plus l'amas est petit, plus la distribution des formes des cellules fournies avec la segmentation est homogène. C'est le cas pour les cellules de l'image C. Les amas dans les diagrammes de forme sont plus condensés que les autres. Les diagrammes de forme associés à l'image B présentent des amas plus éparpillés que ceux associés à l'image A.

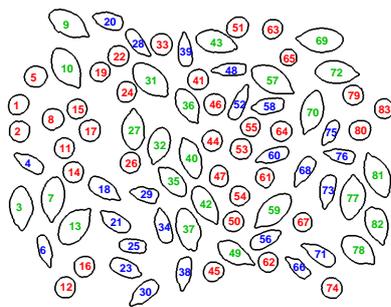


FIG. 4.47 – Image binaire de graines.

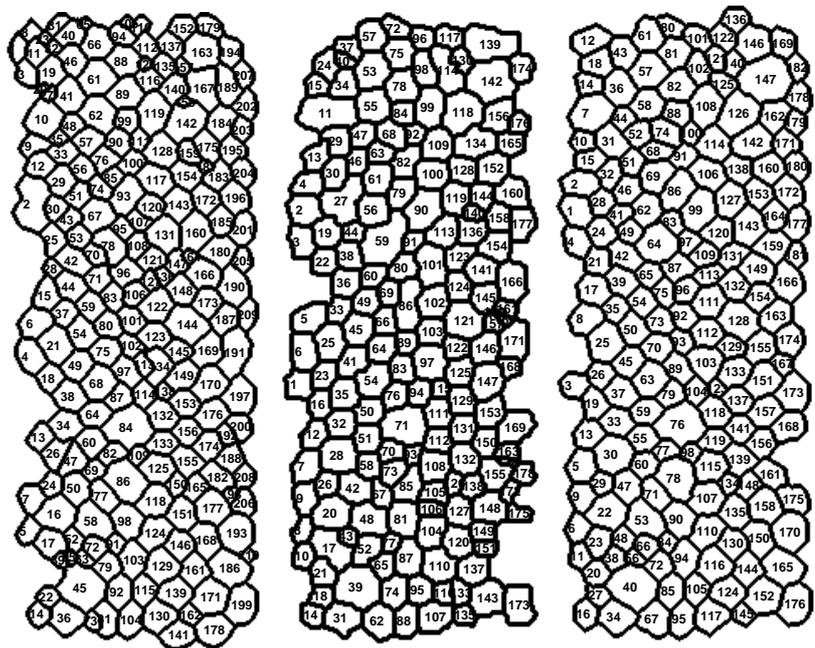


Image A

Image B

Image C

FIG. 4.48 – Trois images binaires d'endothélium cornéen humain.

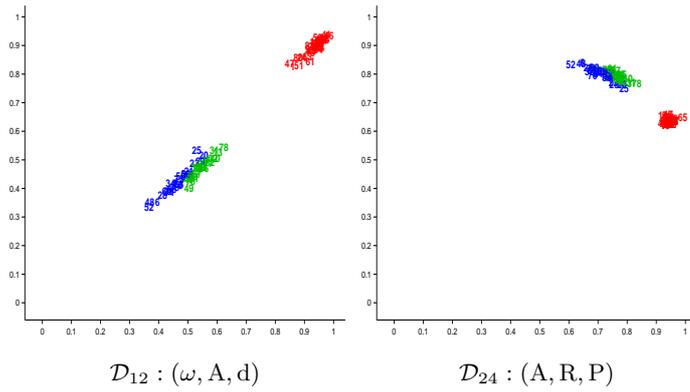


FIG. 4.49 – Composantes connexes labellisées de l’image de graines (Figure 4.47) placées dans deux diagrammes de forme (choisis en fonction des résultats de la Section 4.2.6).

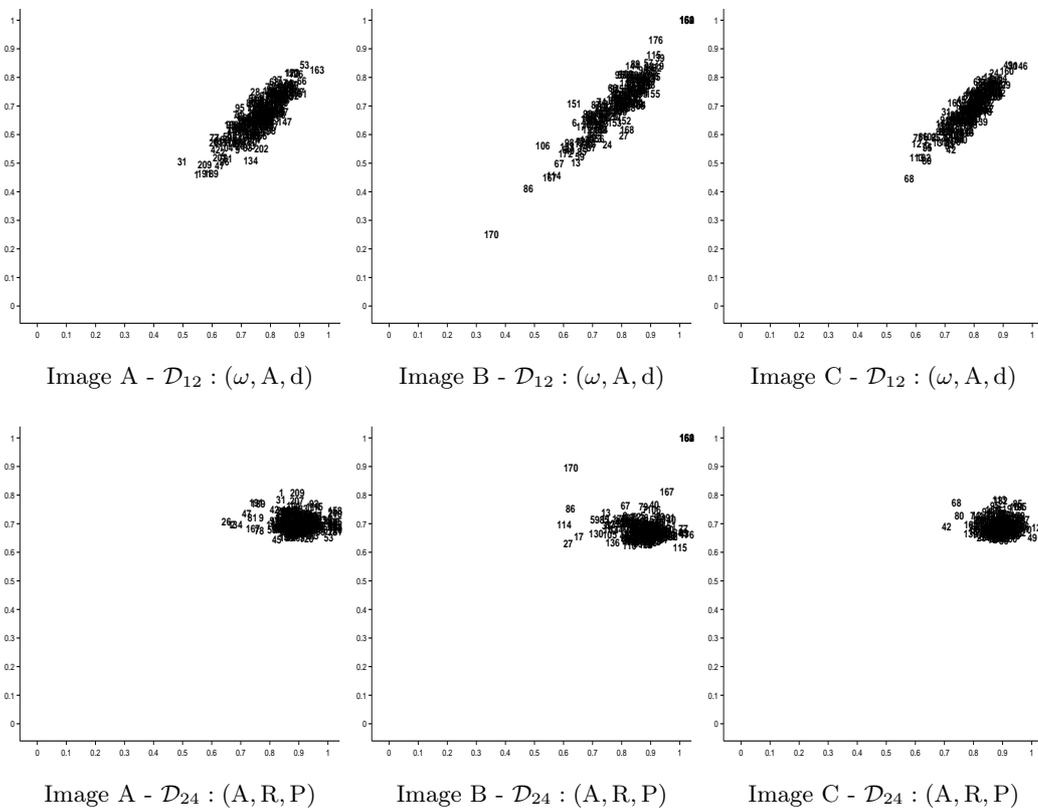


FIG. 4.50 – Cellules labellisées des images A, B et C (Figure 4.48) placées dans deux diagrammes de forme (choisis en fonction des résultats de la Section 4.2.6).

Le diagramme de forme  $\mathcal{D}_{12} : (\omega, A, d)$  a été présenté lors d’une conférence internationale à comité de lecture avec proceedings [RDP10e]. Le but de ce papier est d’analyser, grâce à ce diagramme de forme particulier, plusieurs familles d’ensembles 2D pour la discrimination de la convexité des formes et pour la discrimination d’ensembles similaires, et de proposer une application liée à cette étude.

## Troisième partie

# Analyse d'image à niveaux de gris



# Sommaire de la Troisième partie

---

<b>5</b>	<b>Introduction par la géométrie intégrale et la morphométrie</b>	<b>113</b>
5.1	Types de données manipulées . . . . .	113
5.2	Géométrie intégrale . . . . .	113
5.2.1	Fonctionnelles de Minkowski . . . . .	113
5.2.2	Analyse multi-échelle par les fonctions de Minkowski . . . . .	114
5.3	Morphométrie . . . . .	117
5.4	Synthèse . . . . .	117
<b>6</b>	<b>Voisinages Adaptatifs Généraux (VAG)</b>	<b>119</b>
6.1	Modèles vectoriels généralisés . . . . .	119
6.2	Approche GANIP (General Adaptive Neighborhood Image Processing) . . . . .	122
6.3	Voisinages adaptatifs généraux d'un point . . . . .	124
6.3.1	Voisinages adaptatifs généraux faibles d'un point . . . . .	124
6.3.2	Voisinages adaptatifs généraux forts d'un point . . . . .	127
6.4	Voisinages adaptatifs généraux d'un ensemble . . . . .	129
6.4.1	Voisinages Adaptatifs Généraux Faibles d'un ensemble . . . . .	129
6.4.2	Voisinages Adaptatifs Généraux Forts d'un ensemble . . . . .	133
6.5	Voisinages adaptatifs généraux itérés d'un point . . . . .	135
6.5.1	Voisinages Adaptatifs Généraux Faibles Itérés d'un point . . . . .	135
6.5.2	Voisinages Adaptatifs Généraux Forts Itérés d'un point . . . . .	137
6.6	Applications . . . . .	140
6.6.1	Surfaces . . . . .	140
6.6.2	Frontières . . . . .	140
<b>7</b>	<b>Géométrie Intégrale à VAG</b>	<b>143</b>
7.1	Analyse adaptative locale par les fonctionnelles de Minkowski à VAG . . . . .	143
7.1.1	Définitions et propriétés . . . . .	143
7.1.2	Cartographies . . . . .	149
7.1.3	Histogrammes et histogrammes conjoints . . . . .	153
7.2	Analyse multi-échelle adaptative locale par les fonctions de Minkowski à VAG . . . . .	156
7.2.1	Par rapport à la tolérance d'homogénéité . . . . .	157
7.2.2	Par rapport à un opérateur de morphologie mathématique . . . . .	160

7.3	Applications . . . . .	163
7.3.1	Segmentation . . . . .	163
7.3.2	Classification . . . . .	163
7.3.3	Filtrage . . . . .	169
<b>8</b>	<b>Morphométrie à VAG</b>	<b>173</b>
8.1	Introduction par les fonctionnelles géométriques à VAG . . . . .	173
8.2	Analyse adaptative locale par les fonctionnelles morphométriques à VAG . . . . .	177
8.2.1	Définition et propriétés . . . . .	177
8.2.2	Cartographies . . . . .	178
8.2.3	Histogrammes et diagrammes de forme . . . . .	179
8.3	Analyse multi-échelle adaptative locale par les fonctions morphométriques à VAG . . .	181
8.3.1	Par rapport à la tolérance d'homogénéité . . . . .	181
8.3.2	Par rapport à un opérateur de morphologie mathématique . . . . .	182
8.4	Applications . . . . .	186
8.4.1	Classification de formes de graines . . . . .	186
8.4.2	Homogénéité des formes de cellules cornéennes . . . . .	188
8.4.3	Cristallisation de l'acide adipique . . . . .	190

---

# Chapitre 5

## Introduction par la géométrie intégrale et la morphométrie

### Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Types de données manipulées</b>	<b>113</b>
<b>5.2</b>	<b>Géométrie intégrale</b>	<b>113</b>
5.2.1	Fonctionnelles de Minkowski	113
5.2.2	Analyse multi-échelle par les fonctions de Minkowski	114
<b>5.3</b>	<b>Morphométrie</b>	<b>117</b>
<b>5.4</b>	<b>Synthèse</b>	<b>117</b>

---

### 5.1 Types de données manipulées

Soit une image  $n$ -dimensionnelle à niveaux de gris dont le support spatial est noté  $\mathcal{D}^n$  ( $\emptyset \neq \mathcal{D}^n \subseteq \mathbb{R}^n$ ). A chaque point de ce support spatial (pixels si  $n = 2$ , contraction de "picture element"), repéré par ses coordonnées  $x = (x_i)_{i \in [1, n]} \in \mathcal{D}^n$ , est affectée une nuance de gris entre le blanc et le noir, notée  $f(x)$ . Une fonction de niveaux de gris  $f$  est ainsi définie, prenant ses valeurs dans un intervalle positif réel, appelé échelle de gris, et noté  $\tilde{\mathbb{E}} = [0, M[$ , où  $M \in \mathbb{R}_+^*$ . Une image peut donc être identifiée à une fonction  $f : \mathcal{D}^n \rightarrow \tilde{\mathbb{E}}$ , et cette fonction est assimilable à sa surface représentative (Figure 5.1). Cette surface  $(n + 1)$ -dimensionnelle correspond à la représentation topographique de l'image. Ainsi, toute analyse, tout traitement, toute interprétation d'une image peut être considéré comme l'étude d'une surface et donc de son relief. L'ensemble des images à niveaux de gris est noté  $\mathcal{I}$ .

### 5.2 Géométrie intégrale

#### 5.2.1 Fonctionnelles de Minkowski

A toute image à niveaux de gris 2D est associée sa surface topographique tri-dimensionnelle. Les fonctionnelles de Minkowski 3D (le volume, la surface, l'intégrale de la courbure moyenne, et le nombre d'Euler) de l'ensemble défini entre le support spatial et la surface topographique pourraient donc être calculées (Figure 5.1). Cependant, les trois dimensions de l'ensemble considéré ne sont pas homogènes.

Les fonctionnelles de cet ensemble ne seront donc pas considérées dans la suite de ce manuscrit, même si des méthodes de calcul incluant une notion de “dimensionnalité” ont déjà été proposées [RSS92, RS95].

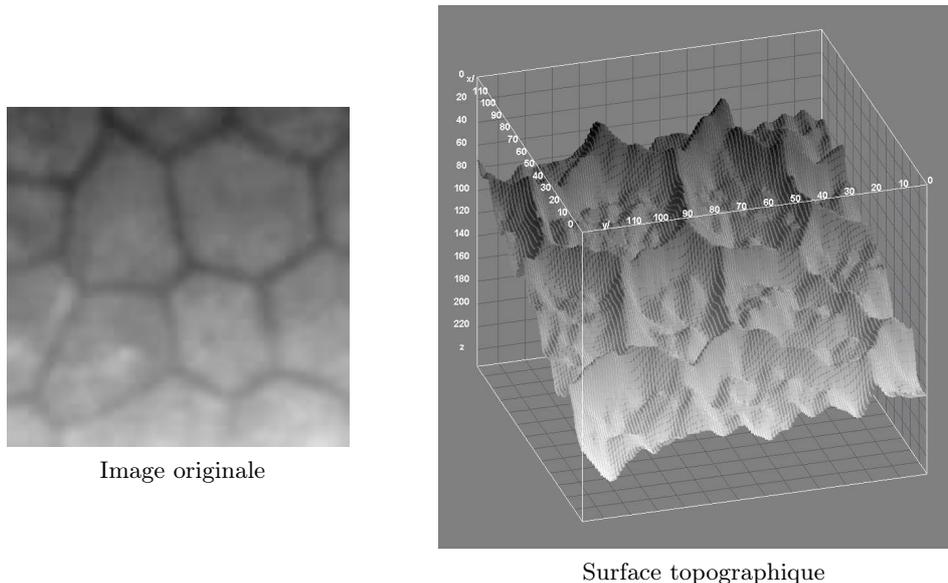


FIG. 5.1 – Image de taille  $128 \times 128$  de cellules d’endothélium cornéen humain représentée en 256 niveaux de gris et sa surface topographique.

### 5.2.2 Analyse multi-échelle par les fonctions de Minkowski

De manière analogue aux fonctions de Minkowski pour l’analyse d’image binaire (Section 3.3), des fonctions de Minkowski pour l’analyse d’image à niveaux de gris se définissent. Une transformation dépendant d’un paramètre est appliquée à l’image. La courbe représentative de l’évolution des fonctionnelles de Minkowski en fonction de ce paramètre donne alors une caractérisation multi-échelle de l’image à niveaux de gris. Cependant, jusqu’alors, les fonctionnelles de Minkowski ne sont calculées que sur des images binaires. La transformation appliquée à l’image à niveaux de gris doit alors fournir une image binaire quelle que soit la valeur du paramètre. Il peut s’agir par exemple d’un seuillage, le paramètre variable étant le seuil.

#### Fonctions de Minkowski globales

**Définition 5.1** [*Fonctions de Minkowski globales*]

Les fonctions de (densités de) Minkowski globales  $\Phi_d^n : \tilde{\mathbb{E}} \times \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $d \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , dépendantes du seuillage, sont définies par :

$$\Phi_d^n(s, f) = \mathcal{I}_d^n(T_s(f))$$

où  $T_s(f)$  est la section binaire relative au seuil  $s \in \tilde{\mathbb{E}}$  pour l’image  $f$ .

$\Phi_n^n$  est une fonction continue croissante par rapport à  $s \in \tilde{\mathbb{E}}$  bornée dans  $[0, 1]$  et atteint ses bornes, assimilable à une fonction de répartition de probabilité. Sa dérivée  $\phi_n^n = \frac{\partial \Phi_n^n}{\partial s}$  est donc une densité de probabilité.

La Figure 5.2 illustre une image à niveaux de gris de cellules de sang et les courbes représentatives des fonctions de Minkowski en fonction du seuil. Ceci donne une caractérisation multi-échelle de l’image.

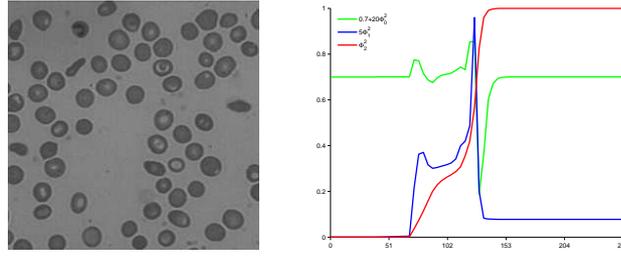


FIG. 5.2 – Image de cellules de sang et courbes représentatives des fonctions de Minkowski associées utilisant l’opérateur de seuillage, en fonction du seuil  $s \in \tilde{\mathbb{E}}$ .

Il est également possible de composer plusieurs opérateurs. Par exemple, une image à niveaux de gris peut être seuillée, et à chaque image seuillée peut être appliqué un opérateur de morphologie mathématique ensembliste. Les fonctions de Minkowski dépendent alors de deux paramètres (le rayon de l’élément structurant utilisé par l’opérateur morphologique, et le seuil) et sont donc représentées par un graphe en trois dimensions (Figure 5.3).

Une caractérisation multi-échelle d’image à niveaux de gris est ainsi obtenue. Mais elle reste globale et basée uniquement sur les sections binaires.

### Fonctions de Minkowski locales

Lorsque les fonctions de Minkowski sont restreintes à une fenêtre d’observation, elles définissent les fonctions de Minkowski locales.

Soit  $W(x, t)$  une fenêtre de centre  $x \in \mathcal{D}^n$  et de rayon  $t \in \mathbb{R}_+$ .

#### Définition 5.2 [Fonctions de Minkowski locales]

Les fonctions de Minkowski locales  $\Phi_{d,x}^n : \tilde{\mathbb{E}} \times \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $d \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , dépendantes du seuillage, sont définies par :

$$\Phi_{d,x}^n(s, f) = \mathcal{I}_d^n(T_s(f) \cap W(x, t))$$

où  $T_s(f)$  est la section binaire du seuil  $s \in \tilde{\mathbb{E}}$  de l’image  $f$ .

$\Phi_{n,x}^n$  est une fonction continue croissante par rapport à  $s \in \tilde{\mathbb{E}}$  bornée dans  $[0, 1]$  et atteint ses bornes, assimilable à une fonction de répartition de probabilité. Sa dérivée  $\phi_{n,x}^n = \frac{\partial \Phi_{n,x}^n}{\partial s}$  est donc une densité de probabilité.

La Figure 5.4 montre l’image de cellules de sang et les courbes représentatives des fonctions de Minkowski locales, utilisant l’opérateur de seuillage, en fonction du seuil, pour deux points distincts du support spatial de l’image.

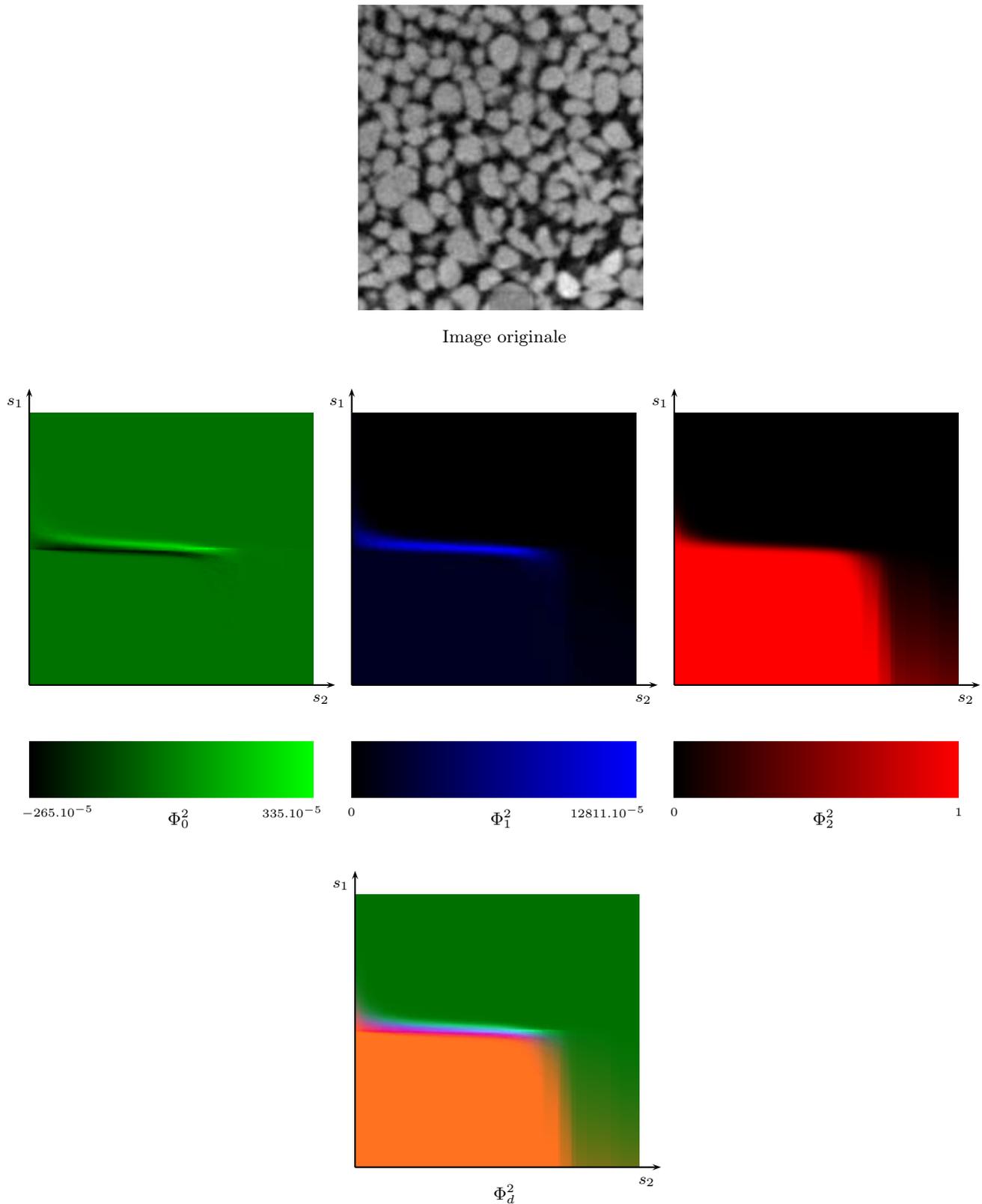


FIG. 5.3 – Image originale de grains de sable. Surfaces représentatives des fonctions de Minkowski associées à cette image originale utilisant les opérateurs d'érosion/dilatation et de seuillage, en fonction du rayon de l'élément structurant  $s_1$  et du seuil  $s_2$ . Les valeurs des fonctionnelles de Minkowski pour un rayon  $s_1$  et un seuil  $s_2$  sont représentées par des intensités de couleur (rouge pour l'aire, bleu pour le périmètre, vert pour l'aire).

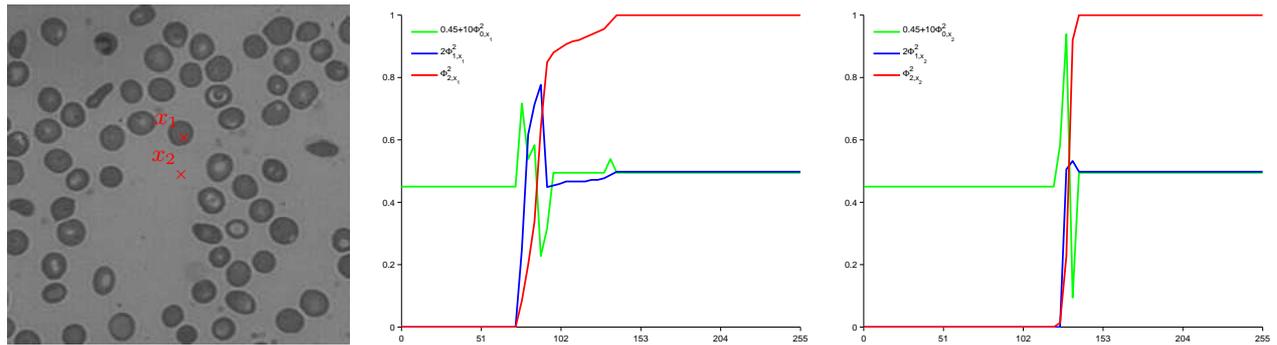


FIG. 5.4 – Image de cellules de sang et courbes représentatives des fonctions de Minkowski locales associées utilisant l’opérateur de seuillage, en fonction du seuil  $s$ , pour deux points  $x_1$  et  $x_2$  du support spatial de l’image.

### 5.3 Morphométrie

Les fonctionnelles géométriques 2D énoncées dans le Chapitre 4 (diamètres de Feret minimal et maximal, rayons des disques inscrit et circonscrit) se définissent également pour un ensemble 3D. Pour un ensemble bi-dimensionnel, un diamètre de Feret est égale à la distance entre deux droites parallèles tangentes à cet ensemble. Pour un ensemble tri-dimensionnel, la définition reste semblable en considérant des plans parallèles tangents. Les rayons des disques inscrit et circonscrit en 2D deviennent les rayons des boules inscrite et circonscrite en 3D. Des fonctionnelles morphométriques 3D sont donc définies grâce aux ratios des fonctionnelles géométriques.

Par conséquent, les fonctionnelles géométriques et morphométriques se calculent pour l’ensemble défini entre le support spatial et la surface topographique d’une image à niveaux de gris 2D. Mais le problème d’hétérogénéité des trois dimensions persiste. Des fonctions géométriques et morphométriques globales et locales sont définies de manière analogue aux fonctions de Minkowski, donnant une caractérisation multi-échelle de l’image.

### 5.4 Synthèse

Une caractérisation d’image à niveaux de gris, locale et multi-échelle est désormais possible. Cependant, elle reste basée sur les sections binaires de cette image. Ces sections binaires ne sont généralement pas représentatives des structures présentes dans l’image. Des voisinages adaptatifs sont utilisés afin de pallier cette limitation.



# Chapitre 6

## Voisinages Adaptatifs Généraux (VAG)

### Sommaire

---

<b>6.1</b>	<b>Modèles vectoriels généralisés</b>	<b>119</b>
<b>6.2</b>	<b>Approche GANIP (General Adaptive Neighborhood Image Processing)</b>	<b>122</b>
<b>6.3</b>	<b>Voisinages adaptatifs généraux d'un point</b>	<b>124</b>
6.3.1	Voisinages adaptatifs généraux faibles d'un point	124
6.3.2	Voisinages adaptatifs généraux forts d'un point	127
<b>6.4</b>	<b>Voisinages adaptatifs généraux d'un ensemble</b>	<b>129</b>
6.4.1	Voisinages Adaptatifs Généraux Faibles d'un ensemble	129
6.4.2	Voisinages Adaptatifs Généraux Forts d'un ensemble	133
<b>6.5</b>	<b>Voisinages adaptatifs généraux itérés d'un point</b>	<b>135</b>
6.5.1	Voisinages Adaptatifs Généraux Faibles Itérés d'un point	135
6.5.2	Voisinages Adaptatifs Généraux Forts Itérés d'un point	137
<b>6.6</b>	<b>Applications</b>	<b>140</b>
6.6.1	Surfaces	140
6.6.2	Frontières	140

---

### 6.1 Modèles vectoriels généralisés

Afin de pouvoir effectuer des opérations élémentaires [Lim90] sur une image, ou entre plusieurs images, il est nécessaire de situer ces images dans un cadre algébrique qui est typiquement un espace vectoriel.

Le modèle classique CLIP (Classic Linear Image Processing) est un espace vectoriel ordonné muni des lois d'addition vectorielle  $+$  et de multiplication scalaire  $\times$  usuelles. Un des inconvénients de ce modèle est que l'addition usuelle directe de deux valeurs de niveaux de gris peut se trouver en dehors de l'échelle de gris  $\tilde{E}$ , alors qu'elle devrait être à l'intérieur pour des raisons physiques ou pratiques.

Des modèles généralisés GLIP (General Linear Image Processing) ont alors été introduits. L'idée est de mettre en place un cadre algébrique spécifique au type d'image à étudier. Un modèle GLIP, symbolisé par la notation  $\diamond$ , est au minimum un espace vectoriel ordonné muni des lois d'addition vectorielle  $\oplus$  et de multiplication scalaire  $\otimes$  généralisées. Trois modèles GLIP ont particulièrement été étudiés et comparés [Pin97a] :

- MHIP (Multiplicative Homomorphic Image Processing) définit homomorphiquement une structure d'espace vectoriel sur l'ensemble des images à valeurs dans l'intervalle réel non borné  $]0, +\infty[$ , cohérentes avec les lois physiques des images multiplicatives [Opp67, OSS68] ;
- LRIP (Log-Ratio Image Processing), créé par un homomorphisme entre  $]0, M[$  et  $\mathbb{R}$ , définit un espace vectoriel topologique sur l'espace des images à valeurs dans  $]0, M[$ , dépendant de la numérisation des images, et a été introduit pour résoudre le problème des dépassements des valeurs limites [SP83, SP87] ;
- LIP (Logarithmic Image Processing) définit une opération d'addition stable sur l'intervalle réel borné  $]0, M[$ , qui soit mathématiquement bien définie et physiquement et/ou psychophysiquement compatible avec la nature des images, et a été développé pour traiter des images prenant des valeurs de niveaux de gris bornées [Pin87, JP87, JP88, Pin97b].

Le tableau 6.1 récapitule les structures et opérations de ces quatre modèles ; la figure 6.1 compare, en fonction du modèle utilisé, les résultats obtenus par multiplication scalaire d'une image.

Des extensions du modèle LIP ont également été développées.

- Le modèle 'Parametrized-LIP' [WPA07] remplace l'arithmétique linéaire par des opérations non-linéaires qui modélisent plus précisément les propriétés non-linéaires de traitement d'image. Ce modèle dépend de paramètres constants  $\beta$ ,  $A$  et  $B$ . L'homomorphisme avec l'espace vectoriel CLIP est défini par

$$f \mapsto -(AM + B) \cdot \ln^\beta \left( \frac{(AM + B) - f}{AM + B} \right).$$

Ainsi, l'addition vectorielle s'exprime par  $f_1 \oplus f_2 = f_1 + f_2 - \frac{f_1 f_2}{AM+B}$ .

- Le 'Homomorphic-LIP' [PBV03] fonctionne avec des ensembles bornés de réels. Les niveaux de gris d'une image à étudier à valeurs dans  $]0, M[$ , sont au préalable linéairement interpolés dans  $] - 1, 1[$ . Puis l'homomorphisme avec l'espace vectoriel CLIP est défini par

$$f \mapsto \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+f}{1-f} \right)$$

où  $f$  est à valeurs dans  $] - 1, 1[$ . Ainsi, l'addition vectorielle et la multiplication scalaire par  $\alpha \in \mathbb{R}$  s'expriment respectivement par  $f_1 \oplus f_2 = \frac{f_1+f_2}{1+f_1 f_2}$  et  $\alpha \otimes f = \frac{(1+f)^\alpha - (1-f)^\alpha}{(1+f)^\alpha + (1-f)^\alpha}$ .

- Le 'Pseudo-LIP' [VOFF08] définit des opérations d'addition et de soustraction vectorielles, et de multiplication scalaire stables sur l'intervalle réel borné  $]0, 1[$  (les niveaux de gris d'une image à étudier à valeurs dans  $]0, M[$ , sont au préalable linéairement interpolés dans  $]0, 1[$ ) :

$$f_1 \oplus f_2 = \frac{f_1+f_2-2f_1 f_2}{1-f_1 f_2}, \quad f_1 \ominus f_2 = \frac{f_2-f_1}{1+f_1 f_2-2f_1}, \quad \alpha \otimes f = \frac{\alpha f}{1+(\alpha-1)f},$$

avec  $\alpha \in \mathbb{R}$ . L'homomorphisme avec l'espace vectoriel CLIP est défini par :

$$f \mapsto \frac{f}{1-f}.$$

CLIP	MHIP	LRIP	LIP
Intervalle initial des tons de gris			
$]0, +\infty[$	$]0, +\infty[$	$]0, M[$	$]0, M[$
Intervalle étendu des tons de gris (définissant l'espace vectoriel)			
$] - \infty, +\infty[$	$]0, +\infty[$	$]0, M[$	$] - \infty, +M[$
Homomorphisme avec l'espace vectoriel CLIP			
$f \mapsto f$	$f \mapsto \ln(f)$	$f \mapsto \ln\left(\frac{f}{M-f}\right)$	$f \mapsto -M \times \ln\left(\frac{M-f}{M}\right)$
Addition vectorielle			
$f_1 + f_2$	$f_1 \boxplus f_2 = f_1 f_2$	$f_1 \diamond f_2 = \frac{M}{\left(\frac{M-f_1}{f_1}\right)\left(\frac{M-f_2}{f_2}\right)+1}$	$f_1 \triangle f_2 = f_1 + f_2 - \frac{f_1 f_2}{M}$
Multiplication scalaire			
$\alpha \times f$	$\alpha \boxtimes f = f^\alpha$	$\alpha \diamond f = \frac{M}{\left(\frac{M-f}{f}\right)^\alpha + 1}$	$\alpha \triangle f = M - M \left(\frac{M-f}{M}\right)^\alpha$
Opposé			
$-f$	$\boxminus f = \frac{1}{f}$	$\diamond f = M - f$	$\triangle f = \frac{-Mf}{M-f}$
Soustraction vectorielle			
$f_1 - f_2$	$f_1 \boxminus f_2 = \frac{f_1}{f_2}$	$f_1 \diamond f_2 = \frac{M}{\left(\frac{M-f_1}{f_1}\right)\left(\frac{f_2}{M-f_2}\right)+1}$	$f_1 \triangle f_2 = M \left(\frac{f_1 - f_2}{M - f_2}\right)$
Élément neutre de l'addition vectorielle			
0	$0_{\boxplus} = 1$	$0_{\diamond} = \frac{M}{2}$	$0_{\triangle} = 0$
Intervalle positif des tons de gris			
$]0, +\infty[$	$]1, +\infty[$	$]\frac{M}{2}, M[$	$]0, M[$
Module			
$ f $	$ f _{\boxplus} = \max_{\geq}(f, 0_{\boxplus}) \boxplus \max_{\geq}(\boxminus f, 0_{\boxplus})$	$ f _{\diamond} = \max_{\geq}(f, 0_{\diamond}) \diamond \max_{\geq}(\diamond f, 0_{\diamond})$	$ f _{\triangle} = \max_{\geq}(f, 0_{\triangle}) \triangle \max_{\geq}(\triangle f, 0_{\triangle})$
Élément neutre de la multiplication scalaire			
1	$1_{\boxplus} = 1$	$1_{\diamond} = 1$	$1_{\triangle} = 1$

TAB. 6.1 – Structures et opérations des modèles d'images vectoriels CLIP, MHIP, LRIP, et LIP.

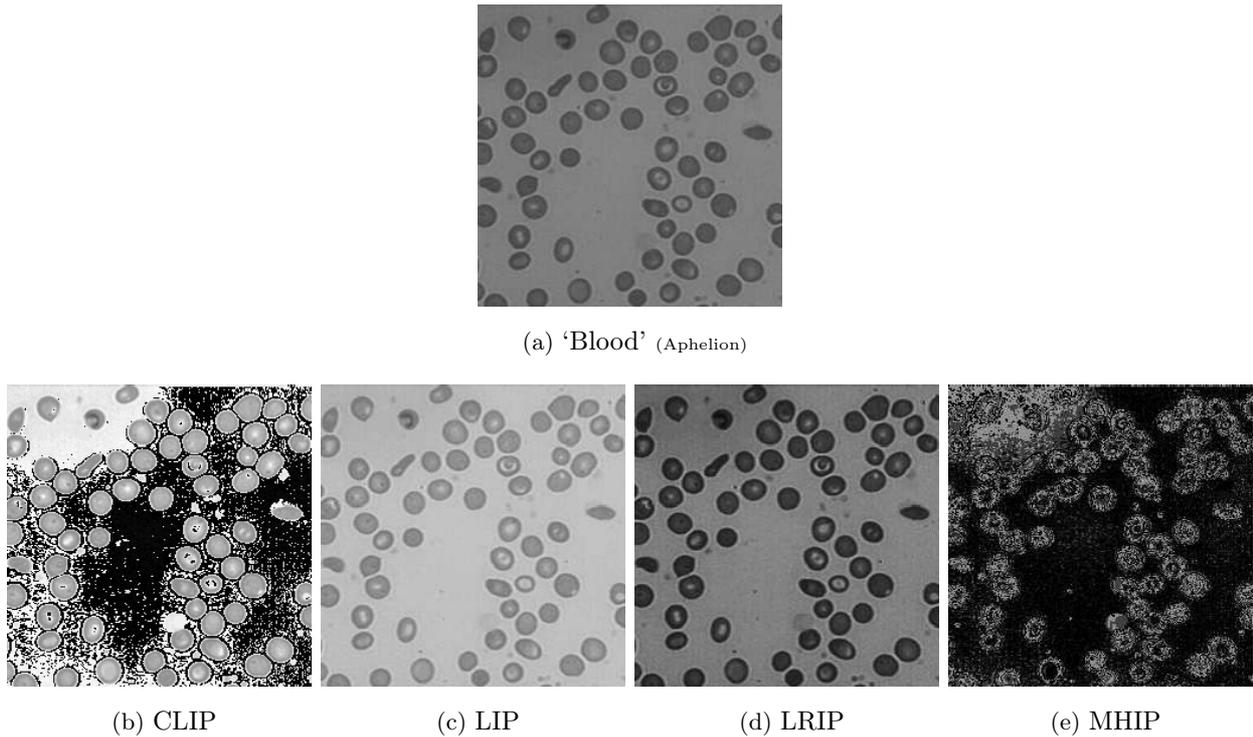


FIG. 6.1 – Affichage, en  $M = 256$  niveaux de gris, d’une image de cellules de sang (a) et des images résultantes de la multiplication scalaire de celle-ci par 2, pour les modèles d’images vectoriels CLIP (b), LIP (c), LRIP (d), MHIP (e). Les images (c) et (d) présentent un étirement de la dynamique. Certains niveaux de gris des images (b) et (e) ont une valeur théorique supérieure à  $M$ . Dans ce cas, le niveau de gris affiché est le résultat modulo  $M$ . Par conséquent, ces images ne conservent pas les structures de l’image originale (a).

## 6.2 Approche GANIP (General Adaptive Neighborhood Image Processing)

L’approche GANIP (General Adaptive Neighborhood Image Processing) ou TIVAG (Traitement d’Image par Voisinages Adaptatifs Généraux) [Deb05, DP06a, DP06b] fournit un cadre général et opérationnel pour le traitement et l’analyse d’image adaptative, locale et multi-échelle.

Elle est basée sur une représentation d’image par des voisinages spatiaux, adaptés aux structures locales de l’image. Ces Voisinages Adaptatifs Généraux (VAG) sont adaptatifs à la fois :

- en espace : les voisinages sont de taille et de forme adaptées au contexte local de l’image,
- en échelle : les échelles d’analyse sont fournies par l’image elle-même et non fixées *a priori*,
- en intensité : les voisinages sont définis suivant une structure GLIP (Section 6.1) permettant de considérer les caractéristiques physiques et/ou psychophysiques de l’image à étudier.

Les VAG dépendent d’un critère d’analyse représenté dans un modèle GLIP et d’une tolérance d’homogénéité fixés : pour chaque point d’une image, le VAG est la composante connexe contenant ce point et tous les points homogènes par rapport au critère et à la tolérance donnés. Autrement dit, à chaque point d’une image est associé un voisinage adaptatif, calculé avec un critère d’analyse  $T(f) : \mathcal{D}^n \rightarrow \mathbb{E}_{\square}$ , où  $\mathbb{E}_{\square}$  est un intervalle de nombres réels muni des lois vectorielles  $\oplus$  et  $\otimes$ , et

une tolérance d'homogénéité  $m_{\square} \in \mathbb{E}_{\oplus} := \{t_{\square} \in \mathbb{E}_{\square} : t_{\square} \geq 0_{\square}\}$ . Ce critère d'analyse est défini à l'aide d'un opérateur  $T$  appliqué sur l'image étudiée  $f$  (par exemple, pour le critère de luminance,  $T$  est l'opérateur 'identité'). L'ensemble de ces critères et l'ensemble des fonctions à niveaux de gris correspondant à l'ensemble des images, sont notés respectivement  $\mathcal{C}_r$  et  $\mathcal{I}$ . Le VAG d'un point  $x$  du support spatial  $\mathcal{D}^n$  est noté  $V_{m_{\square}}^{T(f)}(x)$  et défini mathématiquement dans la section suivante. La Figure 6.2 illustre les VAG de deux points calculés avec le critère de luminance selon le modèle CLIP sur une image de rétine.

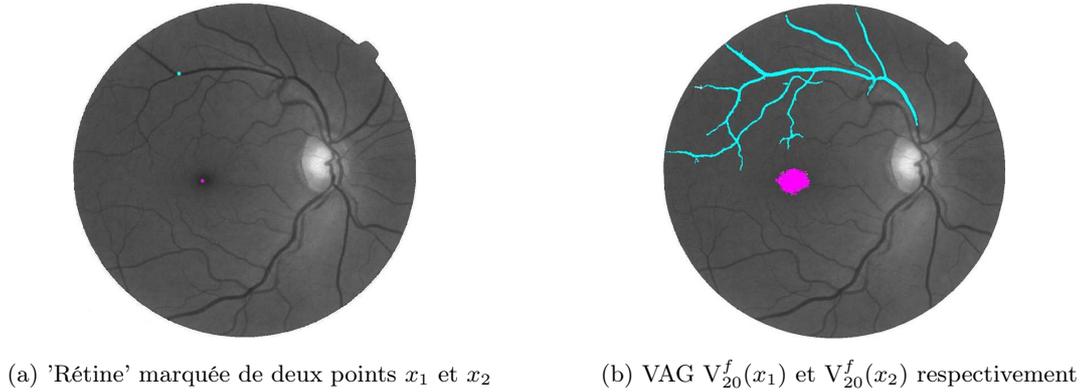


FIG. 6.2 – Les VAG des deux points  $x_1$  et  $x_2$  de l'image originale (a) sont connectés et homogènes (b) par rapport au critère de luminance, avec la tolérance d'homogénéité  $m = 20$  selon le modèle CLIP.

Les Voisinages Adaptatifs Généraux sont intrinsèquement définis par rapport aux structures locales de l'image. Ainsi, les VAG  $\{V_{m_{\square}}^{T(f)}(\cdot)\}_{m_{\square}}$  permettent de définir une représentation multi-échelle des images à niveaux de gris. A l'inverse, les voisinages  $\{B_r(\cdot)\}_r$  (disques isotropes homothétiques centrés de rayon  $r \in \mathbb{R}_+$ ), généralement utilisés comme fenêtres d'analyse pour la définition d'opérateurs de traitement d'image, sont de forme et de taille fixées *a priori* (Figure 6.3).

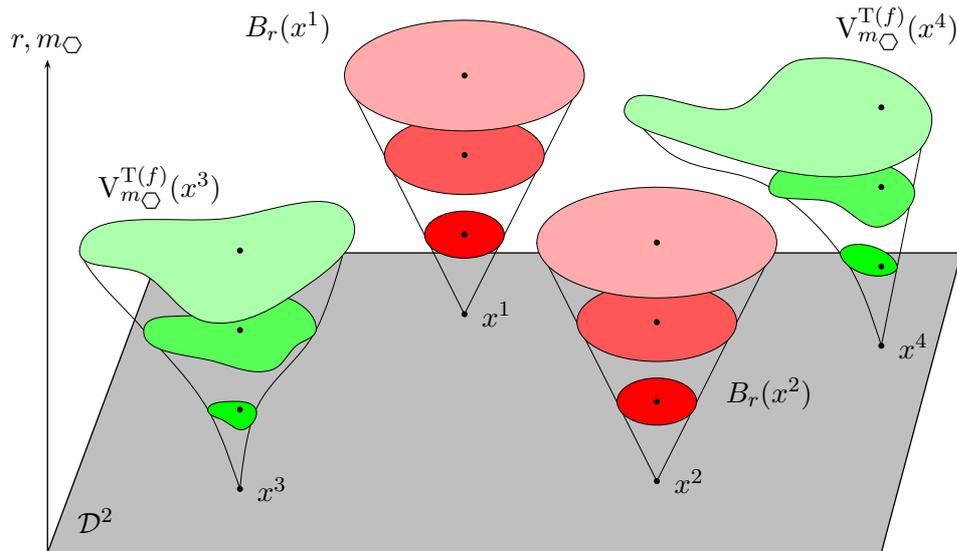


FIG. 6.3 – Comparaison entre les voisinages classiques  $\{B_r(x)\}_r$  et les voisinages adaptatifs  $\{V_{m_{\square}}^{T(f)}(x)\}_{m_{\square}}$ .

Comme les voisinages classiques, les VAG sont utilisés comme fenêtres opérationnelles ou éléments structurants. Par conséquent, suite à la détermination des VAG, ont été définis la morphologie mathématique adaptative, et le filtrage non-linéaire adaptatif, concepts permettant un traitement qualitatif d'images [DP05c, DP05b, DP05a, DP09a]. L'utilisation des VAG permet une caractérisation non seulement locale, mais adaptative d'une image ou d'un objet présent dans une image. Cependant, les concepts déjà développés ne donnent pas d'informations quantitatives.

Les sections suivantes présentent les définitions et propriétés mathématiques de ces voisinages adaptatifs. Certaines ont déjà été citées et prouvées [Deb05], d'autres viennent en complément afin de poursuivre leur étude théorique.

### 6.3 Voisins adaptatifs généraux d'un point

#### 6.3.1 Voisins adaptatifs généraux faibles d'un point

Les deux définitions suivantes sont équivalentes :

**Définition 6.1** [*VAG faibles d'un point*]/[Deb05]

Soit  $x \in \mathcal{D}^n$ . Le VAG faible du point  $x$ , noté  $V_{m_{\square}}^{\mathbb{T}(f)}(x)$ , est un ensemble connexe par chemins contenant les points homogènes à  $x$  par rapport à  $\mathbb{T}(f)$ , avec la tolérance  $m_{\square}$  :

$\forall (m_{\square}, \mathbb{T}, f, x) \in \mathbb{E}_{\oplus} \times \mathcal{C}r \times \mathcal{I} \times \mathcal{D}^n$ , peuvent être définis :

$$V_{m_{\square}}^{\mathbb{T}(f)}(x) = C_{\mathbb{T}(f)^{-1}([\mathbb{T}(f)(x) \ominus_{m_{\square}, \mathbb{T}(f)(x)} \oplus_{m_{\square}}])}(x) \quad (6.1)$$

où  $C_X(x)$  représente la composante connexe par chemins (avec la topologie usuelle euclidienne sur  $\mathcal{D}^n \subseteq \mathbb{R}^n$ ) de  $X \subseteq \mathcal{D}^n$  contenant  $x \in \mathcal{D}^n$ .

**Définition 6.2** [*VAG faibles d'un point*]/[Deb05]

$\forall (m_{\square}, \mathbb{T}, f, x) \in \mathbb{E}_{\oplus} \times \mathcal{C}r \times \mathcal{I} \times \mathcal{D}^n$

$$V_{m_{\square}}^{\mathbb{T}(f)}(x) = \{y \in \mathcal{D}^n : y \xrightarrow{\mathbb{T}(f), m_{\square}} x\} \quad (6.2)$$

où  $\forall y \in \mathcal{D}^n$  :

$$y \xrightarrow{\mathbb{T}(f), m_{\square}} x \Leftrightarrow \exists P_x^y : \forall z \in P_x^y([0, 1]) \quad |\mathbb{T}(f)(z) \ominus \mathbb{T}(f)(x)|_{\square} \leq m_{\square}$$

$P_x^y$  étant un chemin d'extrémités  $x$  et  $y$  respectivement, c'est-à-dire une application continue de  $[0, 1]$  dans  $\mathcal{D}^n$  (avec leurs topologies euclidiennes usuelles) tel que :

$$P_x^y : \begin{cases} [0, 1] & \rightarrow \mathcal{D}^n \\ 0 & \mapsto x \\ 1 & \mapsto y \end{cases}$$

Afin de fournir une impression visuelle de la construction de ces Voisins Adaptatifs Généraux, une représentation en dimension  $n = 1$  avec les opérations du modèle LIP ( $\oplus = \triangleleft$ ,  $\otimes = \triangleleft$ ,  $\ominus = \triangleleft$ ) est donnée dans la Figure 6.4.

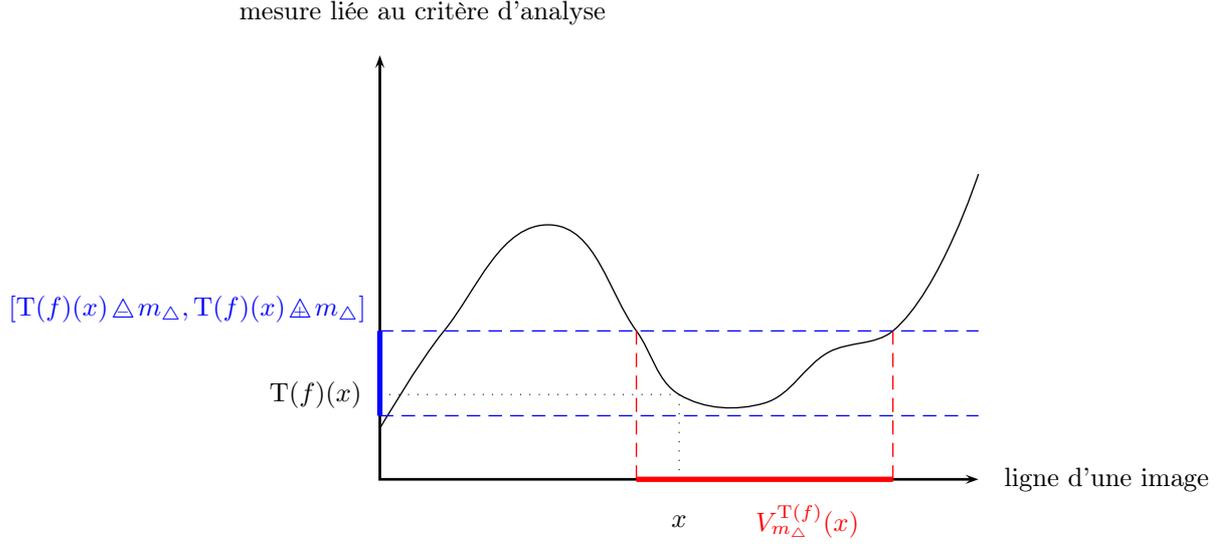


FIG. 6.4 – Construction en dimension 1 d'un VAG  $V_{m_{\Delta}}^{T(f)}(x)$  selon le modèle LIP. Pour un point  $x$ , un intervalle de tolérance  $m_{\Delta}$  est tout d'abord calculé autour de  $T(f)(x)$ . Ensuite, l'image inverse de cet intervalle donne un sous-ensemble du support spatial 1D. Enfin, la composante connexe contenant  $x$  fournit le VAG  $V_{m_{\Delta}}^{T(f)}(x)$ .

**Proposition 6.1**  $\forall (m_{\square}, m_{\square}^1, m_{\square}^2, T, f, x, x_1, x_2) \in (\mathbb{E}_{\oplus})^3 \times \mathcal{C}r \times \mathcal{I} \times (\mathcal{D}^n)^3$

1.

$$V_{m_{\square}}^{T(f)}(x) \subseteq \mathcal{D}^n \quad (6.3)$$

2. réflexivité :

$$x \in V_{m_{\square}}^{T(f)}(x) \quad (6.4)$$

3. égalité entre points voisins de même ton de gris :

$$\left( \begin{array}{l} x_1 \in V_{m_{\square}}^{T(f)}(x_2) \\ T(f)(x_1) = T(f)(x_2) \end{array} \right) \Rightarrow V_{m_{\square}}^{T(f)}(x_1) = V_{m_{\square}}^{T(f)}(x_2) \quad (6.5)$$

4. croissance par rapport à  $m_{\square}$  :

$$m_{\square}^1 \leq m_{\square}^2 \Rightarrow V_{m_{\square}^1}^{T(f)}(x) \subseteq V_{m_{\square}^2}^{T(f)}(x) \quad (6.6)$$

5. invariance par  $\oplus$ -addition vectorielle :

$$\forall c_{\square} \in \mathbb{E}_{\square} : V_{m_{\square}}^{T(f) \oplus c_{\square}}(x) = V_{m_{\square}}^{T(f)}(x) \quad (6.7)$$

6. compatibilité avec la  $\otimes$ -multiplication scalaire :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^* : V_{m_{\square}}^{\alpha \otimes T(f)}(x) = V_{\frac{1}{\alpha} \otimes m_{\square}}^{T(f)}(x) \quad (6.8)$$

7. compatibilité avec la  $k_1, k_2$ -lipschitzité :

$$\forall k_1, k_2 \in \mathbb{R}_+^* \text{ tels que } k_1 \leq k_2$$

$$\text{T } k_1, k_2\text{-lipschitzienne} \Rightarrow V_{m_\circ}^{k_2 f}(x) \subseteq V_{m_\circ}^{\text{T}(f)}(x) \subseteq V_{m_\circ}^{k_1 f}(x) \quad (6.9)$$

8. Si  $\text{T}(f) \in \mathcal{C}^0(\mathcal{D}^n)$  alors  $V_{m_\circ}^{\text{T}(f)}(x)$  est fermé pour la topologie usuelle sur  $\mathcal{D}^n$ .

9. Si  $\text{T}(f) \in \mathcal{C}^0(\mathcal{D}^n)$  alors le voisinage  $V_{|m_\circ|}^{\text{T}(f)}(x)$  défini par

$$V_{|m_\circ|}^{\text{T}(f)}(x) := C_{\text{T}(f)^{-1}([\text{T}(f)(x) \ominus m_\circ, \text{T}(f)(x) \oplus m_\circ])}(x) \text{ est ouvert pour la topologie usuelle sur } \mathcal{D}^n.$$

10. Soient  $\mathcal{V}$  la tribu engendrée par  $\left\{ V_{m_\circ}^{\text{T}(f)}(x) : x \in \mathcal{D}^n \right\}$ , et  $\text{T}(f) : (\mathcal{D}^n, \mathcal{V}) \rightarrow (\mathbb{E}_\circ, \mathcal{B}(\mathbb{E}_\circ))$ ,  $\mathcal{B}$  désignant la tribu borélienne. Alors  $\text{T}(f)$  est mesurable.

**Preuve :**  $\forall (m_\circ, m_\circ^1, m_\circ^2, \text{T}, f, x, x_1, x_2) \in (\mathbb{E}_\oplus)^3 \times \mathcal{C}r \times \mathcal{I} \times (\mathcal{D}^n)^3$

1. D'après (6.2),  $V_{m_\circ}^{\text{T}(f)}(x) \subseteq \mathcal{D}^n$ .

2. [Deb05]

3. [Deb05]

4. [Deb05]

5. [Deb05]

6. [Deb05]

7. compatibilité avec la  $k_1, k_2$ -lipschitzité :

Si  $\text{T}$  est  $k_1, k_2$ -lipschitzienne alors pour tout  $(x_1, x_2) \in \mathcal{D}^n$ ,

$$k_1 |f(x_2) \ominus f(x_1)| \leq |\text{T}(f)(x_2) \ominus \text{T}(f)(x_1)| \leq k_2 |f(x_2) \ominus f(x_1)|.$$

$$\text{T}(f)^{-1}([\text{T}(f)(x) \ominus m_\circ, \text{T}(f)(x) \oplus m_\circ])$$

$$= \{y \in \mathcal{D}^n : \text{T}(f)(y) \in [\text{T}(f)(x) \ominus m_\circ, \text{T}(f)(x) \oplus m_\circ]\}$$

$$= \{y \in \mathcal{D}^n : \text{T}(f)(x) \ominus m_\circ \leq \text{T}(f)(y) \leq \text{T}(f)(x) \oplus m_\circ\}$$

$$= \{y \in \mathcal{D}^n : \ominus m_\circ \leq \text{T}(f)(y) \ominus \text{T}(f)(x) \leq m_\circ\}$$

$$= \{y \in \mathcal{D}^n : |\text{T}(f)(y) \ominus \text{T}(f)(x)|_\circ \leq m_\circ\}$$

$$\text{Donc } \text{T}(f)^{-1}([\text{T}(f)(x) \ominus m_\circ, \text{T}(f)(x) \oplus m_\circ])$$

$$\supseteq \{y \in \mathcal{D}^n : k_2 |f(y) \ominus f(x)|_\circ \leq m_\circ\} \text{ par hypothèse}$$

$$= \{y \in \mathcal{D}^n : \ominus m_\circ \leq k_2 f(y) \ominus k_2 f(x) \leq m_\circ\}$$

$$= \{y \in \mathcal{D}^n : k_2 f(x) \ominus m_\circ \leq k_2 f(y) \leq k_2 f(x) \oplus m_\circ\}$$

$$= \{y \in \mathcal{D}^n : k_2 f(y) \in [k_2 f(x) \ominus m_\circ, k_2 f(x) \oplus m_\circ]\}$$

$$\text{Et } \text{T}(f)^{-1}([\text{T}(f)(x) \ominus m_\circ, \text{T}(f)(x) \oplus m_\circ])$$

$$\subseteq \{y \in \mathcal{D}^n : k_1 |f(y) \ominus f(x)|_\circ \leq m_\circ\} \text{ par hypothèse}$$

$$= \{y \in \mathcal{D}^n : \ominus m_\circ \leq k_1 f(y) \ominus k_1 f(x) \leq m_\circ\}$$

$$= \{y \in \mathcal{D}^n : k_1 f(x) \ominus m_\circ \leq k_1 f(y) \leq k_1 f(x) \oplus m_\circ\}$$

$$= \{y \in \mathcal{D}^n : k_1 f(y) \in [k_1 f(x) \ominus m_\circ, k_1 f(x) \oplus m_\circ]\}$$

Par définition,

$$V_{m_\circ}^{\text{T}(f)}(x) = C_{\text{T}(f)^{-1}([\text{T}(f)(x) \ominus m_\circ, \text{T}(f)(x) \oplus m_\circ])}(x)$$

$$V_{m_\circ}^{k_1 f}(x) = C_{(k_1 f)^{-1}([k_1 f(x) \ominus m_\circ, k_1 f(x) \oplus m_\circ])}(x)$$

$$V_{m_\circ}^{k_2 f}(x) = C_{(k_2 f)^{-1}([k_2 f(x) \ominus m_\circ, k_2 f(x) \oplus m_\circ])}(x),$$

$$\text{Par conséquent, } V_{m_\circ}^{k_2 f}(x) \subseteq V_{m_\circ}^{\text{T}(f)}(x) \subseteq V_{m_\circ}^{k_1 f}(x).$$

8. Soit  $T(f) \in \mathcal{C}^0(\mathcal{D}^n)$ . Par une application continue, l'image réciproque de tout fermé est fermé. Or  $[T(f)(x) \ominus m_{\square}, T(f)(x) \oplus m_{\square}]$  est fermé donc  $V_{m_{\square}}^{T(f)}(x)$  est fermé.
9. Soit  $T(f) \in \mathcal{C}^0(\mathcal{D}^n)$ . Par une application continue, l'image réciproque de tout ouvert est ouvert. Or  $]T(f)(x) \ominus m_{\square}, T(f)(x) \oplus m_{\square}[$  est ouvert donc  $V_{]m_{\square}[}^{T(f)}(x)$  est ouvert.
10. Soit  $Y \in \mathcal{B}(\mathbb{E}_{\square})$ . Alors  $Y \subseteq \mathbb{E}_{\square}$ . D'où  $T(f)^{-1}(Y) \subseteq T(f)^{-1}(\mathbb{E}_{\square}) = \mathcal{D}^n \subseteq \mathcal{V}$ .  
Donc  $T(f) : (\mathcal{D}^n, \mathcal{V}) \rightarrow (\mathbb{E}_{\square}, \mathcal{B}(\mathbb{E}_{\square}))$  est mesurable.

□

**Remarque 6.1**  $\forall (m_{\square}, T, T_1, T_2, f, x) \in \mathbb{E}_{\oplus} \times \mathcal{C}r^3 \times \mathcal{D}^n$

1. *pas de croissance par rapport à  $T(f)$  [Deb05] :*

$$T_1(f) \leq T_2(f) \not\Rightarrow V_{m_{\square}}^{T_1(f)}(x) \subseteq V_{m_{\square}}^{T_2(f)}(x) \quad (6.10)$$

2. *La fonction de  $\mathbb{E}_{\oplus}$  dans  $\mathcal{P}(\mathcal{D}^n)$  définie par  $m_{\square} \mapsto V_{m_{\square}}^{T(f)}(x)$  n'est pas semi-continue inférieurement. En effet, soit  $\mathcal{D}^n = [-2, 2]$ ,  $T(f)(x) = x^2$  pour tout  $x \in \mathcal{D}^n$ ,  $x_0 = 1$ , et  $\alpha = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ . Alors, en utilisant le modèle CLIP,  $\{m \in \mathbb{E}_+ : V_m^{T(f)}(x_0) \supseteq \alpha\} = [1, \infty[$  n'est pas ouvert.*
3.  $\{V_{m_{\square}}^{T(f)}(x) : x \in \mathcal{D}^n\}$  n'est pas une tribu, car l'union des voisinages de deux points distincts n'est pas nécessairement le voisinage d'un point.

Lors de la définition de la morphologie mathématique adaptative, ces VAG faibles d'un point n'ont pas été utilisés comme éléments structurants car ils ne satisfont pas la propriété de symétrie. Cette condition de symétrie est plus adaptée à l'analyse d'image pour des raisons topologiques et visuelles [DP05c]. Par conséquent, des VAG forts vérifiant cette condition ont été définis.

### 6.3.2 Voisinages adaptatifs généraux forts d'un point

**Définition 6.3** [VAG forts d'un point][Deb05]

Soit  $x \in \mathcal{D}^n$ . Le VAG fort du point  $x$ , noté  $R_{m_{\square}}^{T(f)}(x)$ , est réunion des VAG faibles de  $\mathcal{D}^n$  contenant  $x$  :  
 $\forall (m_{\square}, T, f, x) \in \mathbb{E}_{\oplus} \times \mathcal{C}r \times \mathcal{I} \times \mathcal{D}^n$

$$R_{m_{\square}}^{T(f)}(x) = \bigcup_{z \in \mathcal{D}^n} \{V_{m_{\square}}^{T(f)}(z) : x \in V_{m_{\square}}^{T(f)}(z)\} \quad (6.11)$$

**Proposition 6.2**  $\forall (m_{\square}, m_{\square}^1, m_{\square}^2, T, f, x, x_1, x_2) \in (\mathbb{E}_{\oplus})^3 \times \mathcal{C}r \times \mathcal{I} \times (\mathcal{D}^n)^3$

- 1.

$$R_{m_{\square}}^{T(f)}(x) \subseteq \mathcal{D}^n \quad (6.12)$$

2. *réflexivité :*

$$x \in R_{m_{\square}}^{T(f)}(x) \quad (6.13)$$

3. *symétrie :*

$$x_1 \in R_{m_{\square}}^{T(f)}(x_2) \Leftrightarrow x_2 \in R_{m_{\square}}^{T(f)}(x_1) \quad (6.14)$$

4. croissance par rapport à  $m_{\square}$  :

$$m_{\square}^1 \leq m_{\square}^2 \Rightarrow R_{m_{\square}^1}^{\mathsf{T}(f)}(x) \subseteq R_{m_{\square}^2}^{\mathsf{T}(f)}(x) \quad (6.15)$$

5. invariance par  $\oplus$ -addition vectorielle :

$$\forall c_{\square} \in \mathbb{E}_{\square} : R_{m_{\square}}^{\mathsf{T}(f) \oplus c_{\square}}(x) = R_{m_{\square}}^{\mathsf{T}(f)}(x) \quad (6.16)$$

6. compatibilité avec la  $\otimes$ -multiplication scalaire :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^* : R_{m_{\square}}^{\alpha \otimes \mathsf{T}(f)}(x) = R_{\frac{1}{\alpha} \otimes m_{\square}}^{\mathsf{T}(f)}(x) \quad (6.17)$$

7. emboîtement géométrique :

$$V_{m_{\square}}^{\mathsf{T}(f)}(x) \subseteq R_{m_{\square}}^{\mathsf{T}(f)}(x) \subseteq V_{2 \otimes m_{\square}}^{\mathsf{T}(f)}(x) \quad (6.18)$$

8. compatibilité avec la  $k_1, k_2$ -lipschitzité :

$\forall k_1, k_2 \in \mathbb{R}_+^*$  tels que  $k_1 \leq k_2$

$$\mathsf{T} \text{ } k_1, k_2\text{-lipschitzienne} \Rightarrow R_{\frac{1}{2} \otimes m_{\square}}^{k_2 f}(x) \subseteq R_{m_{\square}}^{\mathsf{T}(f)}(x) \subseteq R_{4 \otimes m_{\square}}^{k_1 f}(x) \quad (6.19)$$

9. Si  $\mathsf{T}(f) \in \mathcal{C}^0(\mathcal{D}^n)$  et si  $\{z \in \mathcal{D}^n : x \in V_{m_{\square}}^{\mathsf{T}(f)}(z)\}$  est fini alors  $R_{m_{\square}}^{\mathsf{T}(f)}(x)$  est fermé pour la topologie usuelle sur  $\mathcal{D}^n$ .

10. Si  $\mathsf{T}(f) \in \mathcal{C}^0(\mathcal{D}^n)$  alors  $R_{]m_{\square}[}^{\mathsf{T}(f)}(x) := \bigcup_{z \in \mathcal{D}^n} \{V_{]m_{\square}[}^{\mathsf{T}(f)}(z) : x \in V_{]m_{\square}[}^{\mathsf{T}(f)}(z)\}$  est ouvert pour la topologie usuelle sur  $\mathcal{D}^n$ .

11. Soient  $\mathcal{R}$  la tribu engendrée par  $\{R_{m_{\square}}^{\mathsf{T}(f)}(x) : x \in \mathcal{D}^n\}$ , et  $\mathsf{T}(f) : (\mathcal{D}^n, \mathcal{R}) \rightarrow (\mathbb{E}_{\square}, \mathcal{B}(\mathbb{E}_{\square}))$ ,  $\mathcal{B}$  désignant la tribu borélienne. Alors  $\mathsf{T}(f)$  est mesurable.

**Preuve :**  $\forall (m_{\square}, m_{\square}^1, m_{\square}^2, \mathsf{T}, f, x, x_1, x_2) \in (\mathbb{E}_{\oplus})^3 \times \mathcal{C}r \times \mathcal{I} \times \mathcal{P}(\mathcal{D}^n)^3$

1.  $\mathcal{P}(\mathcal{D}^n)$  est une tribu sur  $\mathcal{D}^n$  donc est stable par union quelconque. Par conséquent, et d'après (6.11),  $R_{m_{\square}}^{\mathsf{T}(f)}(x) \subseteq \mathcal{D}^n$ .

2. [Deb05]

3. [Deb05]

4. [Deb05]

5. [Deb05]

6. [Deb05]

7. [Deb05]

8. D'après (6.18) et (6.9),

$$R_{\frac{1}{2} \otimes m_{\square}}^{k_2 f}(x) \subseteq V_{m_{\square}}^{k_2 f}(x) \subseteq V_{m_{\square}}^{\mathsf{T}(f)}(x) \subseteq R_{m_{\square}}^{\mathsf{T}(f)}(x) \subseteq V_{2 \otimes m_{\square}}^{\mathsf{T}(f)}(x) \subseteq V_{2 \otimes m_{\square}}^{k_1 f}(x) \subseteq R_{4 \otimes m_{\square}}^{k_1 f}(x).$$

$$\text{Donc } R_{\frac{1}{2} \otimes m_{\square}}^{k_2 f}(x) \subseteq R_{m_{\square}}^{\mathsf{T}(f)}(x) \subseteq R_{4 \otimes m_{\square}}^{k_1 f}(x).$$

9. Soit  $\mathsf{T}(f) \in \mathcal{C}^0(\mathcal{D}^n)$ . Les fermés étant stables par union finie, si  $\{z \in \mathcal{D}^n : x \in V_{m_{\square}}^{\mathsf{T}(f)}(z)\}$  est fini, et d'après la proposition 6.1.8, alors  $R_{m_{\square}}^{\mathsf{T}(f)}(x)$  est fermé pour la topologie usuelle sur  $\mathcal{D}^n$ .

10. Soit  $T(f) \in \mathcal{C}^0(\mathcal{D}^n)$ . Les ouverts étant stables par union quelconque, et d'après la proposition 6.1.9,  $R_{]m_{\square}[}^{T(f)}(x)$  est ouvert pour la topologie usuelle sur  $\mathcal{D}^n$ .
11. Soit  $Y \in \mathcal{B}(\mathbb{E}_{\square})$ . Alors  $Y \subseteq \mathbb{E}_{\square}$ . D'où  $T(f)^{-1}(Y) \subseteq T(f)^{-1}(\mathbb{E}_{\square}) = \mathcal{D}^n \subseteq \mathcal{R}$ .  
Donc  $T(f) : (\mathcal{D}^n, \mathcal{R}) \rightarrow (\mathbb{E}_{\square}, \mathcal{B}(\mathbb{E}_{\square}))$  est mesurable.

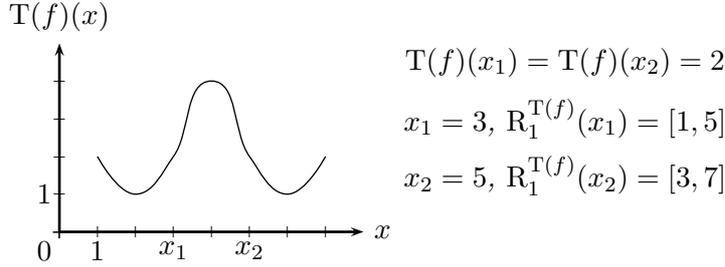
□

**Remarque 6.2**  $\forall (m_{\square}, T, f, x_1, x_2) \in \mathbb{E}_{\oplus} \times \mathcal{C}r \times \mathcal{I} \times (\mathcal{D}^n)^2$

1. pas d'égalité entre points voisins de même ton de gris :

$$\left( \begin{array}{l} x_1 \in R_{m_{\square}}^{T(f)}(x_2) \\ T(f)(x_1) = T(f)(x_2) \end{array} \right) \not\Rightarrow R_{m_{\square}}^{T(f)}(x_1) = R_{m_{\square}}^{T(f)}(x_2) \quad (6.20)$$

Voici un contre-exemple :



Cette illustration montre qu'il existe un critère  $T(f)$  tel que  $T(f)(x_1) = T(f)(x_2)$ ,  $x_1 \in R_{m_{\square}}^{T(f)}(x_2)$  et  $R_{m_{\square}}^{T(f)}(x_1) \neq R_{m_{\square}}^{T(f)}(x_2)$ .

Lors de la création des filtres alternés séquentiels de morphologie mathématique adaptative [DP05c], les compositions d'opérateurs de dilatation et érosion adaptatives ont été définies. Ceci conduit à la détermination de VAG itérés, autrement dit de 'voisinages de voisinages'. Au préalable, il est nécessaire de définir la notion de voisinage adaptatif d'un ensemble.

## 6.4 Voisinages adaptatifs généraux d'un ensemble

### 6.4.1 Voisinages Adaptatifs Généraux Faibles d'un ensemble

**Définition 6.4** [*VAG faibles d'un ensemble*]

$\forall (m_{\square}, T, f, X) \in \mathbb{E}_{\oplus} \times \mathcal{C}r \times \mathcal{I} \times \mathcal{P}(\mathcal{D}^n)$

$$V_{m_{\square}}^{T(f)}(X) = \bigcup_{x \in X} V_{m_{\square}}^{T(f)}(x) \quad (6.21)$$

**Proposition 6.3**  $\forall (m_{\square}, m_{\square}^1, m_{\square}^2, T, f, x, X, X_1, X_2) \in (\mathbb{E}_{\oplus})^3 \times \mathcal{C}r \times \mathcal{I} \times \mathcal{D}^n \times \mathcal{P}(\mathcal{D}^n)^3$

- 1.

$$V_{m_{\square}}^{T(f)}(X) \subseteq \mathcal{D}^n \quad (6.22)$$

2. réflexivité :

$$X \subseteq V_{m_{\square}}^{T(f)}(X) \quad (6.23)$$

3. croissance par rapport à  $m_{\square}$  :

$$m_{\square}^1 \leq m_{\square}^2 \Rightarrow V_{m_{\square}^1}^{\mathbb{T}(f)}(X) \subseteq V_{m_{\square}^2}^{\mathbb{T}(f)}(X) \quad (6.24)$$

4. croissance par rapport à  $X$  :

$$X_1 \subseteq X_2 \Rightarrow V_{m_{\square}}^{\mathbb{T}(f)}(X_1) \subseteq V_{m_{\square}}^{\mathbb{T}(f)}(X_2) \quad (6.25)$$

5. invariance par  $\oplus$ -addition vectorielle :

$$\forall c_{\square} \in \mathbb{E}_{\square} : V_{m_{\square}}^{\mathbb{T}(f) \oplus c_{\square}}(X) = V_{m_{\square}}^{\mathbb{T}(f)}(X) \quad (6.26)$$

6. compatibilité avec la  $\otimes$ -multiplication scalaire :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^* : V_{m_{\square}}^{\alpha \otimes \mathbb{T}(f)}(X) = V_{\frac{1}{\alpha} \otimes m_{\square}}^{\mathbb{T}(f)}(X) \quad (6.27)$$

7. compatibilité avec la  $k_1, k_2$ -lipschitzité :

$\forall k_1, k_2 \in \mathbb{R}_+^*$  tels que  $k_1 \leq k_2$

$$\mathbb{T} \text{ } k_1, k_2\text{-lipschitzienne} \Rightarrow V_{m_{\square}}^{k_2 f}(X) \subseteq V_{m_{\square}}^{\mathbb{T}(f)}(X) \subseteq V_{m_{\square}}^{k_1 f}(X) \quad (6.28)$$

8. Si  $\mathbb{T}(f) \in \mathcal{C}^0(\mathcal{D}^n)$  et si  $X$  est fini alors  $V_{m_{\square}}^{\mathbb{T}(f)}(X)$  est fermé pour la topologie usuelle sur  $\mathcal{D}^n$ .

9. Si  $\mathbb{T}(f) \in \mathcal{C}^0(\mathcal{D}^n)$  alors  $V_{m_{\square}}^{\mathbb{T}(f)}(X) := \bigcup_{x \in X} V_{m_{\square}}^{\mathbb{T}(f)}(x)$  est ouvert pour la topologie usuelle sur  $\mathcal{D}^n$ .

10. Soient  $\mathcal{V}$  la tribu engendrée par  $\{V_{m_{\square}}^{\mathbb{T}(f)}(X) : X \in \mathcal{P}(\mathcal{D}^n)\}$ , et  $\mathbb{T}(f) : (\mathcal{D}^n, \mathcal{V}) \rightarrow (\mathbb{E}_{\square}, \mathcal{B}(\mathbb{E}_{\square}))$ ,  $\mathcal{B}$  désignant la tribu borélienne. Alors  $\mathbb{T}(f)$  est mesurable.

11. union :

$$V_{m_{\square}}^{\mathbb{T}(f)}(X_1 \cup X_2) = V_{m_{\square}}^{\mathbb{T}(f)}(X_1) \cup V_{m_{\square}}^{\mathbb{T}(f)}(X_2) \quad (6.29)$$

12. intersection :

$$V_{m_{\square}}^{\mathbb{T}(f)}(X_1 \cap X_2) \subseteq V_{m_{\square}}^{\mathbb{T}(f)}(X_1) \cap V_{m_{\square}}^{\mathbb{T}(f)}(X_2) \quad (6.30)$$

13. composition :

$$V_{m_{\square}^1}^{\mathbb{T}(f)} \left( V_{m_{\square}^2}^{\mathbb{T}(f)}(x) \right) \subseteq V_{m_{\square}^1 \oplus m_{\square}^2}^{\mathbb{T}(f)}(x) \quad \text{et} \quad V_{m_{\square}^1}^{\mathbb{T}(f)} \left( V_{m_{\square}^2}^{\mathbb{T}(f)}(X) \right) \subseteq V_{m_{\square}^1 \oplus m_{\square}^2}^{\mathbb{T}(f)}(X) \quad (6.31)$$

**Preuve :**  $\forall (m_{\square}, m_{\square}^1, m_{\square}^2, \mathbb{T}, f, x, X, X_1, X_2) \in (\mathbb{E}_{\oplus})^3 \times \mathcal{C}r \times \mathcal{I} \times \mathcal{D}^n \times \mathcal{P}(\mathcal{D}^n)^3$

1.  $\mathcal{P}(\mathcal{D}^n)$  est une tribu sur  $\mathcal{D}^n$  donc est stable par union quelconque. Par conséquent, et d'après (6.21),  $V_{m_{\square}}^{\mathbb{T}(f)}(X) \subseteq \mathcal{D}^n$ .

2. réflexivité :

Soit  $x \in X$ . D'après (6.4),  $x \in V_{m_{\square}}^{\mathbb{T}(f)}(x)$  et d'après (6.21),  $V_{m_{\square}}^{\mathbb{T}(f)}(x) \subseteq V_{m_{\square}}^{\mathbb{T}(f)}(X)$ . Par conséquent  $X \subseteq V_{m_{\square}}^{\mathbb{T}(f)}(X)$ .

3. croissance par rapport à  $m_{\square}$  :

Soit  $m_{\square}^1 \leq m_{\square}^2$  et  $x \in V_{m_{\square}^1}^{\mathbb{T}(f)}(X)$ , alors d'après (6.21) il existe  $z \in X$  tel que  $x \in V_{m_{\square}^1}^{\mathbb{T}(f)}(z)$ .

De plus, d'après (6.6) et (6.21),  $V_{m_{\square}^1}^{\mathbb{T}(f)}(z) \subseteq V_{m_{\square}^2}^{\mathbb{T}(f)}(z) \subseteq V_{m_{\square}^2}^{\mathbb{T}(f)}(X)$ . Donc  $x \in V_{m_{\square}^2}^{\mathbb{T}(f)}(X)$ . Par conséquent,  $V_{m_{\square}^1}^{\mathbb{T}(f)}(X) \subseteq V_{m_{\square}^2}^{\mathbb{T}(f)}(X)$ .

4. croissance par rapport à  $X$  :

Soit  $X_1 \subseteq X_2$ , alors d'après (6.21),  $V_{m_\circ}^{\text{T}(f)}(X_1) \subseteq V_{m_\circ}^{\text{T}(f)}(X_2)$ .

5. invariance par  $\oplus$ -addition vectorielle :

Soit  $c_\circ \in \mathbb{E}_\circ$ . D'après (6.21) et (6.7),

$$V_{m_\circ}^{\text{T}(f) \oplus c_\circ}(X) = \bigcup_{x \in X} V_{m_\circ}^{\text{T}(f) \oplus c_\circ}(x) = \bigcup_{x \in X} V_{m_\circ}^{\text{T}(f)}(x) = V_{m_\circ}^{\text{T}(f)}(X).$$

6. compatibilité avec la  $\otimes$ -multiplication scalaire :

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ . D'après (6.21) et (6.8),

$$V_{m_\circ}^{\alpha \otimes \text{T}(f)}(X) = \bigcup_{x \in X} V_{m_\circ}^{\alpha \otimes \text{T}(f)}(x) = \bigcup_{x \in X} V_{\frac{1}{\alpha} \otimes m_\circ}^{\text{T}(f)}(x) = V_{\frac{1}{\alpha} \otimes m_\circ}^{\text{T}(f)}(X)$$

7. Pour tout  $x \in X$ , d'après (6.9),  $V_{m_\circ}^{k_2 f}(x) \subseteq V_{m_\circ}^{\text{T}(f)}(x) \subseteq V_{m_\circ}^{k_1 f}(x)$ . Le passage à l'union conserve la relation d'ordre, donc  $V_{m_\circ}^{k_2 f}(X) \subseteq V_{m_\circ}^{\text{T}(f)}(X) \subseteq V_{m_\circ}^{k_1 f}(X)$ .

8. Soit  $\text{T}(f) \in \mathcal{C}^0(\mathcal{D}^n)$ . Les fermés étant stables par union finie, si  $X$  est fini, et d'après la proposition 6.1.8, alors  $V_{m_\circ}^{\text{T}(f)}(X)$  est fermé pour la topologie usuelle sur  $\mathcal{D}^n$ .

9. Soit  $\text{T}(f) \in \mathcal{C}^0(\mathcal{D}^n)$ . Les ouverts étant stables par union quelconque, et d'après la proposition 6.1.9,  $V_{]m_\circ[}^{\text{T}(f)}(X)$  est ouvert pour la topologie usuelle sur  $\mathcal{D}^n$ .

10. Soit  $Y \in \mathcal{B}(\mathbb{E}_\circ)$ . Alors  $Y \subseteq \mathbb{E}_\circ$ . D'où  $\text{T}(f)^{-1}(Y) \subseteq \text{T}(f)^{-1}(\mathbb{E}_\circ) = \mathcal{D}^n \subseteq \mathcal{V}$ .

Donc  $\text{T}(f) : (\mathcal{D}^n, \mathcal{V}) \rightarrow (\mathbb{E}_\circ, \mathcal{B}(\mathbb{E}_\circ))$  est mesurable.

11. union :

$$\begin{aligned} \text{D'après (6.21), } V_{m_\circ}^{\text{T}(f)}(X_1 \cup X_2) &= \bigcup_{x \in X_1 \cup X_2} V_{m_\circ}^{\text{T}(f)}(x) = \left\{ \bigcup_{x \in X_1} V_{m_\circ}^{\text{T}(f)}(x) \right\} \cup \left\{ \bigcup_{x \in X_2} V_{m_\circ}^{\text{T}(f)}(x) \right\} \\ &= V_{m_\circ}^{\text{T}(f)}(X_1) \cup V_{m_\circ}^{\text{T}(f)}(X_2) \end{aligned}$$

12. intersection :

$$\text{D'après (6.21), } V_{m_\circ}^{\text{T}(f)}(X_1 \cap X_2) = \bigcup_{x \in X_1 \cap X_2} V_{m_\circ}^{\text{T}(f)}(x) \subseteq \bigcup_{x \in X_1} V_{m_\circ}^{\text{T}(f)}(x) = V_{m_\circ}^{\text{T}(f)}(X_1)$$

$$\text{et } V_{m_\circ}^{\text{T}(f)}(X_1 \cap X_2) = \bigcup_{x \in X_1 \cap X_2} V_{m_\circ}^{\text{T}(f)}(x) \subseteq \bigcup_{x \in X_2} V_{m_\circ}^{\text{T}(f)}(x) = V_{m_\circ}^{\text{T}(f)}(X_2).$$

$$\text{D'où } V_{m_\circ}^{\text{T}(f)}(X_1 \cap X_2) \subseteq \left\{ V_{m_\circ}^{\text{T}(f)}(X_1) \right\} \cap \left\{ V_{m_\circ}^{\text{T}(f)}(X_2) \right\}.$$

De plus, en utilisant le critère  $\text{T}(f)$  tel que pour tout  $x \in \mathcal{D}^n$ ,  $\text{T}(f)(x) = x^2$ , le modèle CLIP et la tolérance  $m = 1$ , avec  $X_1 = [0, 1]$  et  $X_2 = [-1, 0]$ , les voisinages sont  $V_{m_\circ}^{\text{T}(f)}(X_1) = V_{m_\circ}^{\text{T}(f)}(X_2) = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$  et  $V_{m_\circ}^{\text{T}(f)}(X_1 \cap X_2) = [-1, 1]$ . Par conséquent, ce contre-exemple montre la stricte inclusion.

13. Soit  $y \in V_{m_\circ^1}^{\text{T}(f)} \left( V_{m_\circ^2}^{\text{T}(f)}(x) \right) = \bigcup_{z \in V_{m_\circ^2}^{\text{T}(f)}(x)} V_{m_\circ^1}^{\text{T}(f)}(z)$ , alors  $\forall z \in V_{m_\circ^2}^{\text{T}(f)}(x)$ ,

$$\exists P_x^z([0, 1]) \text{ tel que } \forall u \in P_x^z([0, 1]), |\text{T}(f)(u) \ominus \text{T}(f)(x)| \leq m_\circ^2,$$

$$\text{et } \exists P_z^y([0, 1]) \text{ tel que } \forall v \in P_z^y([0, 1]), |\text{T}(f)(v) \ominus \text{T}(f)(z)| \leq m_\circ^1.$$

La première inégalité est vraie en particulier pour  $u = z$ , c'est-à-dire  $|\text{T}(f)(z) \ominus \text{T}(f)(x)| \leq m_\circ^2$ .

Les deux inégalités suivantes sont alors vérifiées :

$$\forall u \in P_x^z([0, 1]), |\text{T}(f)(u) \ominus \text{T}(f)(x)| \leq m_\circ^2 \leq m_\circ^1 \oplus m_\circ^2, \text{ et } \forall v \in P_z^y([0, 1]),$$

$$|\text{T}(f)(v) \ominus \text{T}(f)(x)| \leq |\text{T}(f)(v) \ominus \text{T}(f)(z)| + |\text{T}(f)(z) \ominus \text{T}(f)(x)| \leq m_\circ^1 \oplus m_\circ^2.$$

La "concaténation" des chemins  $P_x^z([0, 1])$  et  $P_z^y([0, 1])$  est un chemin  $P_x^y([0, 1])$ , et  $\forall t \in P_x^y([0, 1])$ ,

$$|\text{T}(f)(t) \ominus \text{T}(f)(x)| \leq m_\circ^1 \oplus m_\circ^2. \text{ Par conséquent, } y \in V_{m_\circ^1 \oplus m_\circ^2}^{\text{T}(f)}(x). \text{ D'où } V_{m_\circ^1}^{\text{T}(f)} \left( V_{m_\circ^2}^{\text{T}(f)}(x) \right) \subseteq$$

$$V_{m_{\ominus}^1 \oplus m_{\ominus}^2}^{\mathbb{T}(f)}(x).$$

La stricte inclusion se prouve par l'absurde. Soit l'hypothèse  $V_{m_{\ominus}^1}^{\mathbb{T}(f)}\left(V_{m_{\ominus}^2}^{\mathbb{T}(f)}(x)\right) = V_{m_{\ominus}^1 \oplus m_{\ominus}^2}^{\mathbb{T}(f)}(x)$ .

Alors par analogie,  $V_{m_{\ominus}^2}^{\mathbb{T}(f)}\left(V_{m_{\ominus}^1}^{\mathbb{T}(f)}(x)\right) = V_{m_{\ominus}^2 \oplus m_{\ominus}^1}^{\mathbb{T}(f)}(x)$ . Puisque  $m_{\ominus}^1 \oplus m_{\ominus}^2 = m_{\ominus}^2 \oplus m_{\ominus}^1$  alors

$V_{m_{\ominus}^1}^{\mathbb{T}(f)}\left(V_{m_{\ominus}^2}^{\mathbb{T}(f)}(x)\right) = V_{m_{\ominus}^2}^{\mathbb{T}(f)}\left(V_{m_{\ominus}^1}^{\mathbb{T}(f)}(x)\right)$ . Ceci contredit la remarque 6.33. L'hypothèse est donc

fausse, c'est-à-dire  $V_{m_{\ominus}^1}^{\mathbb{T}(f)}\left(V_{m_{\ominus}^2}^{\mathbb{T}(f)}(x)\right) \neq V_{m_{\ominus}^1 \oplus m_{\ominus}^2}^{\mathbb{T}(f)}(x)$ . Par conséquent, l'inclusion est stricte :

$$V_{m_{\ominus}^1}^{\mathbb{T}(f)}\left(V_{m_{\ominus}^2}^{\mathbb{T}(f)}(x)\right) \subsetneq V_{m_{\ominus}^1 \oplus m_{\ominus}^2}^{\mathbb{T}(f)}(x).$$

D'après (6.21) et la stricte inclusion précédente,  $V_{m_{\ominus}^1}^{\mathbb{T}(f)}\left(V_{m_{\ominus}^2}^{\mathbb{T}(f)}(X)\right) = V_{m_{\ominus}^1}^{\mathbb{T}(f)}\left(\bigcup_{x \in X} V_{m_{\ominus}^2}^{\mathbb{T}(f)}(x)\right)$

$= \bigcup_{x \in X} V_{m_{\ominus}^1}^{\mathbb{T}(f)}\left(V_{m_{\ominus}^2}^{\mathbb{T}(f)}(x)\right) \subsetneq \bigcup_{x \in X} V_{m_{\ominus}^1 \oplus m_{\ominus}^2}^{\mathbb{T}(f)}(x) = V_{m_{\ominus}^1 \oplus m_{\ominus}^2}^{\mathbb{T}(f)}(X)$ . De plus, la stricte inclusion pré-

cédente implique que  $V_{m_{\ominus}^1}^{\mathbb{T}(f)}\left(V_{m_{\ominus}^2}^{\mathbb{T}(f)}(X)\right) \subsetneq V_{m_{\ominus}^1 \oplus m_{\ominus}^2}^{\mathbb{T}(f)}(X)$ .

□

**Remarque 6.3**  $\forall (m_{\ominus}, \mathbb{T}, f, x, X, X_1, X_2) \in \mathbb{E}_{\oplus} \times \mathcal{C}r \times \mathcal{I} \times \mathcal{D}^n \times \mathcal{P}(\mathcal{D}^n)^3$

1. pas de symétrie :

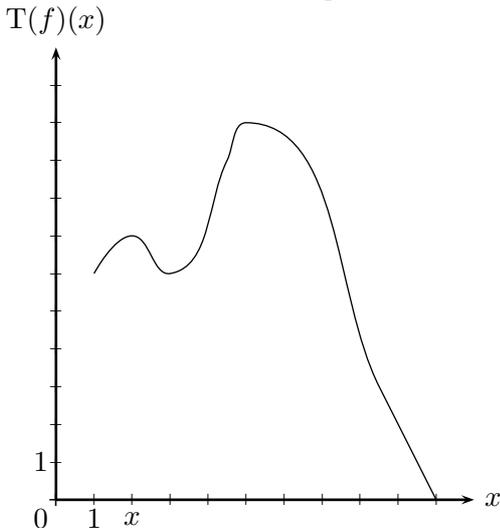
$$X_1 \subseteq V_{m_{\ominus}}^{\mathbb{T}(f)}(X_2) \not\Leftrightarrow X_2 \subseteq V_{m_{\ominus}}^{\mathbb{T}(f)}(X_1) \quad (6.32)$$

En effet, en utilisant le critère  $\mathbb{T}(f)$  tel que pour tout  $x \in \mathcal{D}^n$ ,  $\mathbb{T}(f)(x) = x$ , le modèle CLIP et la tolérance  $m = 3$ , avec  $X_1 = [4, 5]$  et  $X_2 = [0, 2]$ , les voisinages sont  $V_{m_{\ominus}}^{\mathbb{T}(f)}(X_1) = [1, 8] \not\supseteq X_2$  et  $V_{m_{\ominus}}^{\mathbb{T}(f)}(X_2) = [-1, 5] \supseteq X_1$ . Par conséquent, ce contre-exemple montre la non-équivalence.

2. pas de composition :

$$V_{m_{\ominus}^1}^{\mathbb{T}(f)}\left(V_{m_{\ominus}^2}^{\mathbb{T}(f)}(x)\right) \neq V_{m_{\ominus}^2}^{\mathbb{T}(f)}\left(V_{m_{\ominus}^1}^{\mathbb{T}(f)}(x)\right) \quad (6.33)$$

Voici un contre-exemple :



$$x = 2, \mathbb{T}(f)(x) = 7$$

$$V_4^{\mathbb{T}(f)}\left(V_2^{\mathbb{T}(f)}(x)\right) = V_4^{\mathbb{T}(f)}([1, 4.5]) = [1, 9]$$

$$V_2^{\mathbb{T}(f)}\left(V_4^{\mathbb{T}(f)}(x)\right) = V_2^{\mathbb{T}(f)}([1, 8.5]) = [1, 9.5]$$

Et ceci implique que :

$$V_{m_{\ominus}^1}^{\mathbb{T}(f)}\left(V_{m_{\ominus}^2}^{\mathbb{T}(f)}(X)\right) \neq V_{m_{\ominus}^2}^{\mathbb{T}(f)}\left(V_{m_{\ominus}^1}^{\mathbb{T}(f)}(X)\right) \quad (6.34)$$

Ces VAG faibles d'un ensemble ne satisfont pas la propriété de symétrie. Des VAG forts d'un ensemble sont définis.

### 6.4.2 Voisinages Adaptatifs Généraux Forts d'un ensemble

**Définition 6.5** [*VAG forts d'un ensemble*]

$\forall (m_{\square}, T, f, X) \in \mathbb{E}_{\oplus} \times \mathcal{C}r \times \mathcal{I} \times \mathcal{P}(\mathcal{D}^n)$

$$R_{m_{\square}}^{T(f)}(X) = \bigcup_{x \in X} R_{m_{\square}}^{T(f)}(x) \quad (6.35)$$

**Proposition 6.4**  $\forall (m_{\square}, m_{\square}^1, m_{\square}^2, T, f, X, X_1, X_2) \in (\mathbb{E}_{\oplus})^3 \times \mathcal{C}r \times \mathcal{I} \times \mathcal{P}(\mathcal{D}^n)^3$

1.

$$R_{m_{\square}}^{T(f)}(X) \subseteq \mathcal{D}^n \quad (6.36)$$

2. *réflexivité* :

$$X \in R_{m_{\square}}^{T(f)}(X) \quad (6.37)$$

3. *croissance par rapport à  $m_{\square}$*  :

$$m_{\square}^1 \leq m_{\square}^2 \Rightarrow R_{m_{\square}^1}^{T(f)}(X) \subseteq R_{m_{\square}^2}^{T(f)}(X) \quad (6.38)$$

4. *croissance par rapport à  $X$*  :

$$X_1 \subseteq X_2 \Rightarrow R_{m_{\square}}^{T(f)}(X_1) \subseteq R_{m_{\square}}^{T(f)}(X_2) \quad (6.39)$$

5. *invariance par  $\oplus$ -addition vectorielle* :

$$\forall c_{\square} \in \mathbb{E}_{\square} : R_{m_{\square}}^{T(f) \oplus c_{\square}}(X) = R_{m_{\square}}^{T(f)}(X) \quad (6.40)$$

6. *compatibilité avec la  $\otimes$ -multiplication scalaire* :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^* : R_{m_{\square}}^{\alpha \otimes T(f)}(X) = R_{\frac{1}{\alpha} \otimes m_{\square}}^{T(f)}(X) \quad (6.41)$$

7. *emboîtement géométrique* :

$$V_{m_{\square}}^{T(f)}(X) \subseteq R_{m_{\square}}^{T(f)}(X) \subseteq V_{2 \otimes m_{\square}}^{T(f)}(X) \quad (6.42)$$

8. *compatibilité avec la  $k_1, k_2$ -lipschitzité* :

$\forall k_1, k_2 \in \mathbb{R}_+^*$  tels que  $k_1 \leq k_2$

$$T \text{ } k_1, k_2\text{-lipschitzienne} \Rightarrow R_{\frac{1}{2} \otimes m_{\square}}^{k_2 f}(X) \subseteq R_{m_{\square}}^{T(f)}(X) \subseteq R_{4 \otimes m_{\square}}^{k_1 f}(X) \quad (6.43)$$

9. Si  $T(f) \in \mathcal{C}^0(\mathcal{D}^n)$ , si  $X$  est fini, et si pour tout  $x \in X$ ,  $\{z \in \mathcal{D}^n : x \in V_{m_{\square}}^{T(f)}(z)\}$  est fini alors  $R_{m_{\square}}^{T(f)}(X)$  est fermé pour la topologie usuelle sur  $\mathcal{D}^n$ .

10. Si  $T(f) \in \mathcal{C}^0(\mathcal{D}^n)$  alors  $R_{]m_{\square}[}^{T(f)}(X) := \bigcup_{x \in X} R_{]m_{\square}[}^{T(f)}(x)$  est ouvert pour la topologie usuelle sur  $\mathcal{D}^n$ .

11. Soient  $\mathcal{R}$  la tribu engendrée par  $\left\{R_{m_\square}^{\mathbb{T}(f)}(X) : X \in \mathcal{P}(\mathcal{D}^n)\right\}$ , et  $\mathbb{T}(f) : (\mathcal{D}^n, \mathcal{R}) \rightarrow (\mathbb{E}_\square, \mathcal{B}(\mathbb{E}_\square))$ ,  $\mathcal{B}$  désignant la tribu borélienne. Alors  $\mathbb{T}(f)$  est mesurable.

12. union :

$$R_{m_\square}^{\mathbb{T}(f)}(X_1 \cup X_2) = R_{m_\square}^{\mathbb{T}(f)}(X_1) \cup R_{m_\square}^{\mathbb{T}(f)}(X_2) \quad (6.44)$$

13. intersection :

$$R_{m_\square}^{\mathbb{T}(f)}(X_1 \cap X_2) \subsetneq R_{m_\square}^{\mathbb{T}(f)}(X_1) \cap R_{m_\square}^{\mathbb{T}(f)}(X_2) \quad (6.45)$$

**Preuve :**  $\forall (m_\square, m_\square^1, m_\square^2, \mathbb{T}, f, X, X_1, X_2) \in (\mathbb{E}_\oplus)^3 \times \mathcal{C}r \times \mathcal{I} \times \mathcal{P}(\mathcal{D}^n)^3$

1.  $\mathcal{P}(\mathcal{D}^n)$  est une tribu sur  $\mathcal{D}^n$  donc est stable par union quelconque. Par conséquent, et d'après (6.35),  $R_{m_\square}^{\mathbb{T}(f)}(X) \subseteq \mathcal{D}^n$ .

2. réflexivité :

Soit  $x \in X$ . D'après (6.13),  $x \in R_{m_\square}^{\mathbb{T}(f)}(x)$  et d'après (6.35),  $R_{m_\square}^{\mathbb{T}(f)}(x) \subseteq R_{m_\square}^{\mathbb{T}(f)}(X)$ . Par conséquent  $X \subseteq R_{m_\square}^{\mathbb{T}(f)}(X)$ .

3. croissance par rapport à  $m_\square$  :

Soit  $m_\square^1 \leq m_\square^2$  et  $x \in R_{m_\square^1}^{\mathbb{T}(f)}(X)$ , alors d'après (6.35) il existe  $z \in X$  tel que  $x \in R_{m_\square^1}^{\mathbb{T}(f)}(z)$ .

De plus, d'après (6.15) et (6.35),  $R_{m_\square^1}^{\mathbb{T}(f)}(z) \subseteq R_{m_\square^2}^{\mathbb{T}(f)}(z) \subseteq R_{m_\square^2}^{\mathbb{T}(f)}(X)$ . Donc  $x \in R_{m_\square^2}^{\mathbb{T}(f)}(X)$ . Par conséquent,  $R_{m_\square^1}^{\mathbb{T}(f)}(X) \subseteq R_{m_\square^2}^{\mathbb{T}(f)}(X)$ .

4. croissance par rapport à  $X$  :

Soit  $X_1 \subseteq X_2$ , alors d'après (6.35),  $R_{m_\square}^{\mathbb{T}(f)}(X_1) \subseteq R_{m_\square}^{\mathbb{T}(f)}(X_2)$ .

5. invariance par  $\oplus$ -addition vectorielle :

Soit  $c_\square \in \mathbb{E}_\square$ . D'après (6.35) et (6.16),

$$R_{m_\square}^{\mathbb{T}(f) \oplus c_\square}(X) = \bigcup_{x \in X} R_{m_\square}^{\mathbb{T}(f) \oplus c_\square}(x) = \bigcup_{x \in X} R_{m_\square}^{\mathbb{T}(f)}(x) = R_{m_\square}^{\mathbb{T}(f)}(X)$$

6. compatibilité avec la  $\otimes$ -multiplication scalaire :

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ . D'après (6.35) et (6.17),

$$R_{m_\square}^{\alpha \otimes \mathbb{T}(f)}(X) = \bigcup_{x \in X} R_{m_\square}^{\alpha \otimes \mathbb{T}(f)}(x) = \bigcup_{x \in X} R_{\frac{1}{\alpha} \otimes m_\square}^{\mathbb{T}(f)}(x) = R_{\frac{1}{\alpha} \otimes m_\square}^{\mathbb{T}(f)}(X)$$

7. emboîtement géométrique :

Soit  $y \in V_{m_\square}^{\mathbb{T}(f)}(X)$ , alors d'après (6.21), il existe  $x \in X$  tel que  $y \in V_{m_\square}^{\mathbb{T}(f)}(x)$ . Or d'après (6.18) et (6.35),  $V_{m_\square}^{\mathbb{T}(f)}(x) \subseteq R_{m_\square}^{\mathbb{T}(f)}(x) \subseteq R_{m_\square}^{\mathbb{T}(f)}(X)$ . Donc  $y \in R_{m_\square}^{\mathbb{T}(f)}(X)$ . Par conséquent,  $V_{m_\square}^{\mathbb{T}(f)}(X) \subseteq R_{m_\square}^{\mathbb{T}(f)}(X)$ .

Soit  $y \in R_{m_\square}^{\mathbb{T}(f)}(X)$ , alors d'après (6.35), il existe  $x \in X$  tel que  $y \in R_{m_\square}^{\mathbb{T}(f)}(x)$ . Or d'après (6.18) et (6.21),  $R_{m_\square}^{\mathbb{T}(f)}(x) \subseteq V_{2 \otimes m_\square}^{\mathbb{T}(f)}(x) \subseteq V_{2 \otimes m_\square}^{\mathbb{T}(f)}(X)$ . Donc  $y \in V_{2 \otimes m_\square}^{\mathbb{T}(f)}(X)$ . Par conséquent,  $R_{m_\square}^{\mathbb{T}(f)}(X) \subseteq V_{2 \otimes m_\square}^{\mathbb{T}(f)}(X)$ .

8. Pour tout  $x \in X$ , d'après (6.19),  $R_{\frac{1}{2} \otimes m_\square}^{k_2 f}(x) \subseteq R_{m_\square}^{\mathbb{T}(f)}(x) \subseteq R_{\frac{1}{4} \otimes m_\square}^{k_1 f}(x)$ . Le passage à l'union conserve la relation d'ordre, donc  $R_{\frac{1}{2} \otimes m_\square}^{k_2 f}(X) \subseteq R_{m_\square}^{\mathbb{T}(f)}(X) \subseteq R_{\frac{1}{4} \otimes m_\square}^{k_1 f}(X)$ .

9. Soit  $\mathbb{T}(f) \in \mathcal{C}^0(\mathcal{D}^n)$ . Les fermés étant stables par union finie, si  $X$  est fini et si pour tout  $x \in X$ ,  $\left\{z \in \mathcal{D}^n : x \in V_{m_\square}^{\mathbb{T}(f)}(z)\right\}$  est fini, et d'après (6.35) et la proposition 6.2.9, alors  $R_{m_\square}^{\mathbb{T}(f)}(X)$  est fermé pour la topologie usuelle sur  $\mathcal{D}^n$ .

10. Soit  $T(f) \in \mathcal{C}^0(\mathcal{D}^n)$ . Les ouverts étant stables par union quelconque, et d'après (6.11) et la proposition 6.2.10,  $R_{m_\circlearrowleft}^{T(f)}(X)$  est ouvert pour la topologie usuelle sur  $\mathcal{D}^n$ .

11. Soit  $Y \in \mathcal{B}(\mathbb{E}_\circlearrowleft)$ . Alors  $Y \subseteq \mathbb{E}_\circlearrowleft$ . D'où  $T(f)^{-1}(Y) \subseteq T(f)^{-1}(\mathbb{E}_\circlearrowleft) = \mathcal{D}^n \subseteq \mathcal{R}$ .  
Donc  $T(f) : (\mathcal{D}^n, \mathcal{R}) \rightarrow (\mathbb{E}_\circlearrowleft, \mathcal{B}(\mathbb{E}_\circlearrowleft))$  est mesurable.

12. union :

$$\begin{aligned} \text{D'après (6.35), } R_{m_\circlearrowleft}^{T(f)}(X_1 \cup X_2) &= \bigcup_{x \in X_1 \cup X_2} R_{m_\circlearrowleft}^{T(f)}(x) = \left\{ \bigcup_{x \in X_1} R_{m_\circlearrowleft}^{T(f)}(x) \right\} \cup \left\{ \bigcup_{x \in X_2} R_{m_\circlearrowleft}^{T(f)}(x) \right\} \\ &= R_{m_\circlearrowleft}^{T(f)}(X_1) \cup R_{m_\circlearrowleft}^{T(f)}(X_2) \end{aligned}$$

13. intersection :

$$\text{D'après (6.35), } R_{m_\circlearrowleft}^{T(f)}(X_1 \cap X_2) = \bigcup_{x \in X_1 \cap X_2} R_{m_\circlearrowleft}^{T(f)}(x) \subseteq \bigcup_{x \in X_1} R_{m_\circlearrowleft}^{T(f)}(x) = R_{m_\circlearrowleft}^{T(f)}(X_1)$$

$$\text{et } R_{m_\circlearrowleft}^{T(f)}(X_1 \cap X_2) = \bigcup_{x \in X_1 \cap X_2} R_{m_\circlearrowleft}^{T(f)}(x) \subseteq \bigcup_{x \in X_2} R_{m_\circlearrowleft}^{T(f)}(x) = R_{m_\circlearrowleft}^{T(f)}(X_2).$$

$$\text{D'où } R_{m_\circlearrowleft}^{T(f)}(X_1 \cap X_2) \subseteq \left\{ R_{m_\circlearrowleft}^{T(f)}(X_1) \right\} \cap \left\{ R_{m_\circlearrowleft}^{T(f)}(X_2) \right\}.$$

De plus, en utilisant le critère  $T(f)$  tel que pour tout  $x \in \mathcal{D}^n$ ,  $T(f)(x) = x^2$ , le modèle CLIP et la tolérance  $m = 1$ , avec  $X_1 = [0, 1]$  et  $X_2 = [-1, 0]$ , les voisinages sont  $R_{m_\circlearrowleft}^{T(f)}(X_1) = R_{m_\circlearrowleft}^{T(f)}(X_2) = [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$  et  $R_{m_\circlearrowleft}^{T(f)}(X_1 \cap X_2) = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ . Par conséquent, ce contre-exemple montre la stricte inclusion. □

**Remarque 6.4**  $\forall (m_\circlearrowleft, T, f, X, X_1, X_2) \in \mathbb{E}_\oplus \times \mathcal{C}r \times \mathcal{I} \times \mathcal{P}(\mathcal{D}^n)^3$

1. pas de symétrie :

$$X_1 \subseteq R_{m_\circlearrowleft}^{T(f)}(X_2) \not\Leftrightarrow X_2 \subseteq R_{m_\circlearrowleft}^{T(f)}(X_1) \quad (6.46)$$

Le contre-exemple est analogue à celui utilisé pour les voisinages adaptatifs généraux faibles d'un ensemble (voir (6.32)).

Les VAG (faibles ou forts) d'un ensemble ne satisfont donc pas la propriété de symétrie. Par conséquent, cette propriété ne sera pas vérifiée pour les voisinages adaptatifs itérés, définis comme des 'voisinages de voisinages' dans la prochaine section.

## 6.5 Voisinages adaptatifs généraux itérés d'un point

### 6.5.1 Voisinages Adaptatifs Généraux Faibles Itérés d'un point

**Définition 6.6** [VAG faibles itérés d'un point]

$\forall (m_\circlearrowleft, T, f, x, p) \in \mathbb{E}_\oplus \times \mathcal{C}r \times \mathcal{I} \times \mathcal{D}^n \times \mathbb{N}^*$

$$V_{m_\circlearrowleft, p}^{T(f)}(x) = \underbrace{V_{m_\circlearrowleft}^{T(f)} \circ \dots \circ V_{m_\circlearrowleft}^{T(f)}}_{p \text{ fois}}(x) = \left( V_{m_\circlearrowleft}^{T(f)} \right)^p(x) \quad (6.47)$$

**Proposition 6.5**  $\forall (m_\circlearrowleft, m_\circlearrowleft^1, m_\circlearrowleft^2, T, f, x, p, p_1, p_2) \in (\mathbb{E}_\oplus)^3 \times \mathcal{C}r \times \mathcal{I} \times \mathcal{D}^n \times (\mathbb{N}^*)^3$

1.

$$V_{m_\circlearrowleft, p}^{T(f)}(x) \subseteq \mathcal{D}^n \quad (6.48)$$

2. réflexivité :

$$x \in V_{m_{\square}, p}^{\mathbb{T}(f)}(x) \quad (6.49)$$

3. croissance par rapport à  $m_{\square}$  :

$$m_{\square}^1 \leq m_{\square}^2 \Rightarrow V_{m_{\square}^1, p}^{\mathbb{T}(f)}(x) \subseteq V_{m_{\square}^2, p}^{\mathbb{T}(f)}(x) \quad (6.50)$$

4. croissance par rapport à  $p$  :

$$p_1 \leq p_2 \Rightarrow V_{m_{\square}, p_1}^{\mathbb{T}(f)}(x) \subseteq V_{m_{\square}, p_2}^{\mathbb{T}(f)}(x) \quad (6.51)$$

5. invariance par  $\oplus$ -addition vectorielle :

$$\forall c_{\square} \in \mathbb{E}_{\square} : V_{m_{\square}, p}^{\mathbb{T}(f) \oplus c_{\square}}(x) = V_{m_{\square}, p}^{\mathbb{T}(f)}(x) \quad (6.52)$$

6. compatibilité avec la  $\otimes$ -multiplication scalaire :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^* : V_{m_{\square}, p}^{\alpha \otimes \mathbb{T}(f)}(x) = V_{\frac{1}{\alpha} \otimes m_{\square}, p}^{\mathbb{T}(f)}(x) \quad (6.53)$$

7. compatibilité avec la  $k_1, k_2$ -lipschitzité :

$\forall k_1, k_2 \in \mathbb{R}_+^*$  tels que  $k_1 \leq k_2$

$$\mathbb{T} \text{ } k_1, k_2\text{-lipschitzienne} \Rightarrow V_{m_{\square}, p}^{k_2 f}(x) \subseteq V_{m_{\square}, p}^{\mathbb{T}(f)}(x) \subseteq V_{m_{\square}, p}^{k_1 f}(x) \quad (6.54)$$

8. Soient  $\mathcal{V}$  la tribu engendrée par  $\left\{ V_{m_{\square}, p}^{\mathbb{T}(f)}(x) : x \in \mathcal{P}(\mathcal{D}^n) \right\}$ , et  $\mathbb{T}(f) : (\mathcal{D}^n, \mathcal{V}) \rightarrow (\mathbb{E}_{\square}, \mathcal{B}(\mathbb{E}_{\square}))$ ,  $\mathcal{B}$  désignant la tribu borélienne. Alors  $\mathbb{T}(f)$  est mesurable.

9.

$$V_{p \otimes m_{\square}}^{\mathbb{T}(f)}(x) \supseteq V_{m_{\square}, p}^{\mathbb{T}(f)}(x) \quad (6.55)$$

**Preuve :**  $\forall (m_{\square}, m_{\square}^1, m_{\square}^2, \mathbb{T}, f, x, p, p_1, p_2) \in (\mathbb{E}_{\oplus})^3 \times \mathcal{C}r \times \mathcal{I} \times \mathcal{D}^n \times (\mathbb{N}^*)^3$  Les propriétés seront prouvées par récurrence. L'initialisation de la récurrence, avec  $p = 1$  sera vérifiée car  $V_{m_{\square}, 1}^{\mathbb{T}(f)} = V_{m_{\square}}^{\mathbb{T}(f)}$ . Les propriétés seront supposées vraies pour  $p \in \mathbb{N}^*$ , ce qui constituera l'hypothèse de récurrence. Il sera ensuite prouver que les propriétés sont vraies pour  $p + 1$  (voir le détail ci-dessous pour chacune), ce qui permettra donc de conclure qu'elles sont prouvées.

1. Par hypothèse de récurrence, et d'après (6.22),  $V_{m_{\square}, p+1}^{\mathbb{T}(f)}(x) = V_{m_{\square}}^{\mathbb{T}(f)} \left( V_{m_{\square}, p}^{\mathbb{T}(f)}(x) \right) \subseteq \mathcal{D}^n$ .

2. réflexivité :

Par hypothèse de récurrence,  $x \in V_{m_{\square}, p}^{\mathbb{T}(f)}(x)$ , et d'après (6.23) et (6.47),

$$V_{m_{\square}, p}^{\mathbb{T}(f)}(x) \subseteq V_{m_{\square}}^{\mathbb{T}(f)} \left( V_{m_{\square}, p}^{\mathbb{T}(f)}(x) \right) = V_{m_{\square}, p+1}^{\mathbb{T}(f)}(x). \text{ Donc } x \in V_{m_{\square}, p+1}^{\mathbb{T}(f)}(x).$$

3. croissance par rapport à  $m_{\square}$  :

Soit  $m_{\square}^1 \leq m_{\square}^2$ . Par hypothèse de récurrence,  $V_{m_{\square}^1, p}^{\mathbb{T}(f)}(x) \subseteq V_{m_{\square}^2, p}^{\mathbb{T}(f)}(x)$ , et d'après (6.25) et (6.24),

$$V_{m_{\square}^1}^{\mathbb{T}(f)} \left( V_{m_{\square}^1, p}^{\mathbb{T}(f)}(x) \right) \subseteq V_{m_{\square}^1}^{\mathbb{T}(f)} \left( V_{m_{\square}^2, p}^{\mathbb{T}(f)}(x) \right) \subseteq V_{m_{\square}^2}^{\mathbb{T}(f)} \left( V_{m_{\square}^2, p}^{\mathbb{T}(f)}(x) \right).$$

$$\text{Donc } V_{m_{\square}^1, p+1}^{\mathbb{T}(f)}(x) \subseteq V_{m_{\square}^2, p+1}^{\mathbb{T}(f)}(x).$$

4. croissance par rapport à  $p$  :

Cette propriété ne peut pas être prouvée par récurrence sur  $p$  comme les autres. D'après (6.23),  $V_{m_{\square}}^{\mathbb{T}(f)}(x) \subseteq V_{m_{\square}}^{\mathbb{T}(f)}(V_{m_{\square}}^{\mathbb{T}(f)}(x))$ . Par passage à la puissance  $p$ , l'inclusion est conservée, donc  $(V_{m_{\square}}^{\mathbb{T}(f)})^{p+1}(x) \subseteq (V_{m_{\square}}^{\mathbb{T}(f)})^{p+2}(x)$ . Ceci prouve la croissance par rapport à  $p$ .

5. invariance par  $\oplus$ -addition vectorielle :

Soit  $c_{\square} \in \mathbb{E}_{\square}$ . D'après (6.47), l'hypothèse de récurrence, et (6.26),  $V_{m_{\square}, p+1}^{\mathbb{T}(f) \oplus c_{\square}}(x) = V_{m_{\square}}^{\mathbb{T}(f) \oplus c_{\square}}(V_{m_{\square}, p}^{\mathbb{T}(f) \oplus c_{\square}}(x)) = V_{m_{\square}}^{\mathbb{T}(f) \oplus c_{\square}}(V_{m_{\square}, p}^{\mathbb{T}(f)}(x)) = V_{m_{\square}}^{\mathbb{T}(f)}(V_{m_{\square}, p}^{\mathbb{T}(f)}(x)) = V_{m_{\square}, p+1}^{\mathbb{T}(f)}(x)$

6. compatibilité avec la  $\otimes$ -multiplication scalaire :

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}_{+}^*$ . D'après (6.47), l'hypothèse de récurrence, et (6.27),  $V_{m_{\square}, p+1}^{\alpha \otimes \mathbb{T}(f)}(x) = V_{m_{\square}}^{\alpha \otimes \mathbb{T}(f)}(V_{m_{\square}, p}^{\alpha \otimes \mathbb{T}(f)}(x)) = V_{m_{\square}}^{\alpha \otimes \mathbb{T}(f)}(V_{\frac{1}{\alpha} \otimes m_{\square}, p}^{\mathbb{T}(f)}(x)) = V_{\frac{1}{\alpha} \otimes m_{\square}}^{\mathbb{T}(f)}(V_{\frac{1}{\alpha} \otimes m_{\square}, p}^{\mathbb{T}(f)}(x)) = V_{\frac{1}{\alpha} \otimes m_{\square}, p+1}^{\mathbb{T}(f)}(x)$

7. compatibilité avec la  $k_1, k_2$ -lipschitzité :

Soit  $k_1, k_2 \in \mathbb{R}_{+}^*$  tels que  $k_1 \leq k_2$ . Si  $\mathbb{T}$  est  $k_1, k_2$ -lipschitzienne alors, d'après (6.47), l'hypothèse de récurrence, (6.25) et (6.28),

$V_{m_{\square}, p+1}^{k_2 f}(x) = V_{m_{\square}}^{k_2 f}(V_{m_{\square}, p}^{k_2 f}(x)) \subseteq V_{m_{\square}}^{k_2 f}(V_{m_{\square}, p}^{\mathbb{T}(f)}(x)) \subseteq V_{m_{\square}}^{\mathbb{T}(f)}(V_{m_{\square}, p}^{\mathbb{T}(f)}(x)) = V_{m_{\square}, p+1}^{\mathbb{T}(f)}(x)$ , et  $V_{m_{\square}, p+1}^{\mathbb{T}(f)}(x) = V_{m_{\square}}^{\mathbb{T}(f)}(V_{m_{\square}, p}^{\mathbb{T}(f)}(x)) \subseteq V_{m_{\square}}^{\mathbb{T}(f)}(V_{m_{\square}, p}^{k_1 f}(x)) \subseteq V_{m_{\square}}^{k_1 f}(V_{m_{\square}, p}^{\mathbb{T}(f)}(x)) = V_{m_{\square}, p+1}^{k_1 f}(x)$

8. Soit  $Y \in \mathcal{B}(\mathbb{E}_{\square})$ . Alors  $Y \subseteq \mathbb{E}_{\square}$ . D'où  $\mathbb{T}(f)^{-1}(Y) \subseteq \mathbb{T}(f)^{-1}(\mathbb{E}_{\square}) = \mathcal{D}^n \subseteq \mathcal{V}$ .

Donc  $\mathbb{T}(f) : (\mathcal{D}^n, \mathcal{V}) \rightarrow (\mathbb{E}_{\square}, \mathcal{B}(\mathbb{E}_{\square}))$  est mesurable.

9. D'après (6.47), (6.25), l'hypothèse de récurrence, et (6.31),  $V_{m_{\square}, p+1}^{\mathbb{T}(f)}(x) = V_{m_{\square}}^{\mathbb{T}(f)}(V_{m_{\square}, p}^{\mathbb{T}(f)}(x)) \subseteq V_{m_{\square}}^{\mathbb{T}(f)}(V_p^{\mathbb{T}(f)}(x)) \subseteq V_{m_{\square} \oplus (p \otimes m_{\square})}^{\mathbb{T}(f)}(x) = V_{(p+1) \otimes m_{\square}}^{\mathbb{T}(f)}(x)$ .

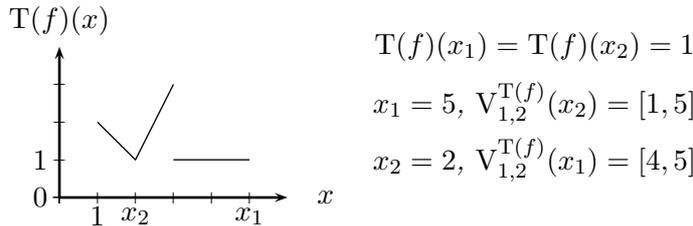
□

**Remarque 6.5**  $\forall (m_{\square}, \mathbb{T}, f, x_1, x_2, p) \in \mathbb{E}_{\oplus} \times \mathcal{C}r \times \mathcal{I} \times (\mathcal{D}^n)^2 \times \mathbb{N}^*$

1. pas d'égalité entre points voisins de même ton de gris :

$$\left( \begin{array}{l} x_1 \in V_{m_{\square}, p}^{\mathbb{T}(f)}(x_2) \\ \mathbb{T}(f)(x_1) = \mathbb{T}(f)(x_2) \end{array} \right) \not\Rightarrow V_{m_{\square}, p}^{\mathbb{T}(f)}(x_1) = V_{m_{\square}, p}^{\mathbb{T}(f)}(x_2) \quad (6.56)$$

Voici un contre-exemple :



Cette illustration montre qu'il existe un critère  $\mathbb{T}(f)$  tel que  $\mathbb{T}(f)(x_1) = \mathbb{T}(f)(x_2)$ ,  $x_1 \in V_{m_{\square}, p}^{\mathbb{T}(f)}(x_2)$  et  $V_{m_{\square}, p}^{\mathbb{T}(f)}(x_1) \neq V_{m_{\square}, p}^{\mathbb{T}(f)}(x_2)$ .

## 6.5.2 Voisinages Adaptatifs Généraux Forts Itérés d'un point

**Définition 6.7** [*VAG forts itérés d'un point*]

$\forall (m_{\square}, \mathbb{T}, f, x, p) \in \mathbb{E}_{\oplus} \times \mathcal{C}r \times \mathcal{I} \times \mathcal{D}^n \times \mathbb{N}^*$

$$R_{m_{\square}, p}^{\mathbb{T}(f)}(x) = \underbrace{R_{m_{\square}}^{\mathbb{T}(f)} \circ \dots \circ R_{m_{\square}}^{\mathbb{T}(f)}}_{p \text{ fois}}(x) = (R_{m_{\square}}^{\mathbb{T}(f)})^p(x) \quad (6.57)$$

**Proposition 6.6**  $\forall (m_{\square}, m_{\square}^1, m_{\square}^2, T, f, x, x_1, x_2, p, p_1, p_2) \in (\mathbb{E}_{\oplus})^3 \times \mathcal{C}r \times \mathcal{I} \times (\mathcal{D}^n)^3 \times (\mathbb{N}^*)^3$

1.

$$\mathbf{R}_{m_{\square}, p}^{\mathbf{T}(f)}(x) \subseteq \mathcal{D}^n \quad (6.58)$$

2. réflexivité :

$$x \in \mathbf{R}_{m_{\square}, p}^{\mathbf{T}(f)}(x) \quad (6.59)$$

3. croissance par rapport à  $m_{\square}$  :

$$m_{\square}^1 \leq m_{\square}^2 \Rightarrow \mathbf{R}_{m_{\square}^1, p}^{\mathbf{T}(f)}(x) \subseteq \mathbf{R}_{m_{\square}^2, p}^{\mathbf{T}(f)}(x) \quad (6.60)$$

4. croissance par rapport à  $p$  :

$$p_1 \leq p_2 \Rightarrow \mathbf{R}_{m_{\square}, p_1}^{\mathbf{T}(f)}(x) \subseteq \mathbf{R}_{m_{\square}, p_2}^{\mathbf{T}(f)}(x) \quad (6.61)$$

5. invariance par  $\oplus$ -addition vectorielle :

$$\forall c_{\square} \in \mathbb{E}_{\square} : \mathbf{R}_{m_{\square}, p}^{\mathbf{T}(f) \oplus c_{\square}}(x) = \mathbf{R}_{m_{\square}, p}^{\mathbf{T}(f)}(x) \quad (6.62)$$

6. compatibilité avec la  $\otimes$ -multiplication scalaire :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^* : \mathbf{R}_{m_{\square}, p}^{\alpha \otimes \mathbf{T}(f)}(x) = \mathbf{R}_{\frac{1}{\alpha} \otimes m_{\square}, p}^{\mathbf{T}(f)}(x) \quad (6.63)$$

7. emboîtement géométrique :

$$\mathbf{V}_{m_{\square}, p}^{\mathbf{T}(f)}(x) \subseteq \mathbf{R}_{m_{\square}, p}^{\mathbf{T}(f)}(x) \subseteq \mathbf{V}_{2 \otimes m_{\square}, p}^{\mathbf{T}(f)}(x) \quad (6.64)$$

8. compatibilité avec la  $k_1, k_2$ -lipschitzité :

$\forall k_1, k_2 \in \mathbb{R}_+^*$  tels que  $k_1 \leq k_2$

$$\mathbf{T} \text{ } k_1, k_2\text{-lipschitzienne} \Rightarrow \mathbf{R}_{\frac{1}{2} \otimes m_{\square}, p}^{k_2 f}(x) \subseteq \mathbf{R}_{m_{\square}, p}^{\mathbf{T}(f)}(x) \subseteq \mathbf{R}_{4 \otimes m_{\square}, p}^{k_1 f}(x) \quad (6.65)$$

9. Soient  $\mathcal{R}$  la tribu engendrée par  $\{\mathbf{R}_{m_{\square}, p}^{\mathbf{T}(f)}(x) : x \in \mathcal{P}(\mathcal{D}^n)\}$ , et  $\mathbf{T}(f) : (\mathcal{D}^n, \mathcal{R}) \rightarrow (\mathbb{E}_{\square}, \mathcal{B}(\mathbb{E}_{\square}))$ ,  $\mathcal{B}$  désignant la tribu borélienne. Alors  $\mathbf{T}(f)$  est mesurable.

**Preuve :**  $\forall (m_{\square}, m_{\square}^1, m_{\square}^2, T, f, x, x_1, x_2, p, p_1, p_2) \in (\mathbb{E}_{\oplus})^3 \times \mathcal{C}r \times \mathcal{I} \times (\mathcal{D}^n)^3 \times (\mathbb{N}^*)^3$  Les propriétés seront prouvées par récurrence. L'initialisation de la récurrence, avec  $p = 1$  sera vérifiée car  $\mathbf{R}_{m_{\square}, 1}^{\mathbf{T}(f)} = \mathbf{R}_{m_{\square}}^{\mathbf{T}(f)}$ . Les propriétés seront supposées vraies pour  $p \in \mathbb{N}^*$ , ce qui constituera l'hypothèse de récurrence. Il sera ensuite prouver que les propriétés sont vraies pour  $p + 1$  (voir le détail ci-dessous pour chacune), ce qui permettra donc de conclure qu'elles sont prouvées.

1. Par hypothèse de récurrence, et d'après (6.36),  $\mathbf{R}_{m_{\square}, p+1}^{\mathbf{T}(f)}(x) = \mathbf{R}_{m_{\square}}^{\mathbf{T}(f)}(\mathbf{R}_{m_{\square}, p}^{\mathbf{T}(f)}(x)) \subseteq \mathcal{D}^n$ .

2. réflexivité :

Par hypothèse de récurrence,  $x \in \mathbf{R}_{m_{\square}, p}^{\mathbf{T}(f)}(x)$ , et d'après (6.37) et (6.57),

$$\mathbf{R}_{m_{\square}, p}^{\mathbf{T}(f)}(x) \subseteq \mathbf{R}_{m_{\square}}^{\mathbf{T}(f)}(\mathbf{R}_{m_{\square}, p}^{\mathbf{T}(f)}(x)) = \mathbf{R}_{m_{\square}, p+1}^{\mathbf{T}(f)}(x). \text{ Donc } x \in \mathbf{R}_{m_{\square}, p+1}^{\mathbf{T}(f)}(x).$$

3. croissance par rapport à  $m_{\square}$  :

Soit  $m_{\square}^1 \leq m_{\square}^2$ . Par hypothèse de récurrence,  $\mathbf{R}_{m_{\square}^1, p}^{\mathbf{T}(f)}(x) \subseteq \mathbf{R}_{m_{\square}^2, p}^{\mathbf{T}(f)}(x)$ , et d'après (6.39) et (6.38),

$$\mathbf{R}_{m_{\square}^1}^{\mathbf{T}(f)}\left(\mathbf{R}_{m_{\square}^1, p}^{\mathbf{T}(f)}(x)\right) \subseteq \mathbf{R}_{m_{\square}^1}^{\mathbf{T}(f)}\left(\mathbf{R}_{m_{\square}^2, p}^{\mathbf{T}(f)}(x)\right) \subseteq \mathbf{R}_{m_{\square}^2}^{\mathbf{T}(f)}\left(\mathbf{R}_{m_{\square}^2, p}^{\mathbf{T}(f)}(x)\right).$$

Donc  $\mathbf{R}_{m_{\square}^1, p+1}^{\mathbf{T}(f)}(x) \subseteq \mathbf{R}_{m_{\square}^2, p+1}^{\mathbf{T}(f)}(x)$ .

4. croissance par rapport à  $p$  :

Cette propriété ne peut pas être prouvée par récurrence sur  $p$  comme les autres. D'après (6.37),

$\mathbf{R}_{m_{\square}}^{\mathbf{T}(f)}(x) \subseteq \mathbf{R}_{m_{\square}}^{\mathbf{T}(f)}\left(\mathbf{R}_{m_{\square}}^{\mathbf{T}(f)}(x)\right)$ . Par passage à la puissance  $p$ , l'inclusion est conservée, donc

$$\left(\mathbf{R}_{m_{\square}}^{\mathbf{T}(f)}\right)^{p+1}(x) \subseteq \left(\mathbf{R}_{m_{\square}}^{\mathbf{T}(f)}\right)^{p+2}(x). \text{ Ceci prouve la croissance par rapport à } p.$$

5. invariance par  $\oplus$ -addition vectorielle :

Soit  $c_{\square} \in \mathbb{E}_{\square}$ . D'après (6.57), l'hypothèse de récurrence, et (6.40),  $\mathbf{R}_{m_{\square}, p+1}^{\mathbf{T}(f) \oplus c_{\square}}(x)$

$$= \mathbf{R}_{m_{\square}}^{\mathbf{T}(f) \oplus c_{\square}}\left(\mathbf{R}_{m_{\square}, p}^{\mathbf{T}(f) \oplus c_{\square}}(x)\right) = \mathbf{R}_{m_{\square}}^{\mathbf{T}(f) \oplus c_{\square}}\left(\mathbf{R}_{m_{\square}, p}^{\mathbf{T}(f)}(x)\right) = \mathbf{R}_{m_{\square}}^{\mathbf{T}(f)}\left(\mathbf{R}_{m_{\square}, p}^{\mathbf{T}(f)}(x)\right) = \mathbf{R}_{m_{\square}, p+1}^{\mathbf{T}(f)}(x)$$

6. compatibilité avec la  $\otimes$ -multiplication scalaire :

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}_{+}^*$ . D'après (6.57), l'hypothèse de récurrence, et (6.41),  $\mathbf{R}_{m_{\square}, p+1}^{\alpha \otimes \mathbf{T}(f)}(x)$

$$\begin{aligned} &= \mathbf{R}_{m_{\square}}^{\alpha \otimes \mathbf{T}(f)}\left(\mathbf{R}_{m_{\square}, p}^{\alpha \otimes \mathbf{T}(f)}(x)\right) = \mathbf{R}_{m_{\square}}^{\alpha \otimes \mathbf{T}(f)}\left(\mathbf{R}_{\frac{1}{\alpha} \otimes m_{\square}, p}^{\mathbf{T}(f)}(x)\right) = \mathbf{R}_{\frac{1}{\alpha} \otimes m_{\square}}^{\mathbf{T}(f)}\left(\mathbf{R}_{\frac{1}{\alpha} \otimes m_{\square}, p}^{\mathbf{T}(f)}(x)\right) \\ &= \mathbf{R}_{\frac{1}{\alpha} \otimes m_{\square}, p+1}^{\mathbf{T}(f)}(x) \end{aligned}$$

7. emboîtement géométrique :

D'après (6.42), l'hypothèse de récurrence et (6.39),

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{m_{\square}, p+1}^{\mathbf{T}(f)}(x) &= \mathbf{V}_{m_{\square}}^{\mathbf{T}(f)}\left(\mathbf{V}_{m_{\square}, p}^{\mathbf{T}(f)}(x)\right) \subseteq \mathbf{R}_{m_{\square}}^{\mathbf{T}(f)}\left(\mathbf{V}_{m_{\square}, p}^{\mathbf{T}(f)}(x)\right) \subseteq \mathbf{R}_{m_{\square}}^{\mathbf{T}(f)}\left(\mathbf{R}_{m_{\square}, p}^{\mathbf{T}(f)}(x)\right) = \mathbf{R}_{m_{\square}, p+1}^{\mathbf{T}(f)}(x), \text{ et} \\ \mathbf{R}_{m_{\square}, p+1}^{\mathbf{T}(f)}(x) &= \mathbf{R}_{m_{\square}}^{\mathbf{T}(f)}\left(\mathbf{R}_{m_{\square}, p}^{\mathbf{T}(f)}(x)\right) \subseteq \mathbf{V}_{2 \otimes m_{\square}}^{\mathbf{T}(f)}\left(\mathbf{R}_{m_{\square}, p}^{\mathbf{T}(f)}(x)\right) \subseteq \mathbf{V}_{2 \otimes m_{\square}}^{\mathbf{T}(f)}\left(\mathbf{V}_{2 \otimes m_{\square}, p}^{\mathbf{T}(f)}(x)\right) \\ &= \mathbf{V}_{2 \otimes m_{\square}, p+1}^{\mathbf{T}(f)}(x). \end{aligned}$$

8. compatibilité avec la  $k_1, k_2$ -lipschitzité :

Soit  $k_1, k_2 \in \mathbb{R}_{+}^*$  tels que  $k_1 \leq k_2$ . Si  $\mathbf{T}$  est  $k_1, k_2$ -lipschitzienne alors, d'après (6.57), l'hypothèse de récurrence, (6.39) et (6.43),

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{\frac{1}{2} \otimes m_{\square}, p+1}^{k_2 f}(x) &= \mathbf{R}_{\frac{1}{2} \otimes m_{\square}}^{k_2 f}\left(\mathbf{R}_{\frac{1}{2} \otimes m_{\square}, p}^{k_2 f}(x)\right) \subseteq \mathbf{R}_{\frac{1}{2} \otimes m_{\square}}^{k_2 f}\left(\mathbf{R}_{m_{\square}, p}^{\mathbf{T}(f)}(x)\right) \subseteq \mathbf{R}_{m_{\square}}^{\mathbf{T}(f)}\left(\mathbf{R}_{m_{\square}, p}^{\mathbf{T}(f)}(x)\right) = \\ \mathbf{R}_{m_{\square}, p+1}^{\mathbf{T}(f)}(x) &= \mathbf{R}_{m_{\square}}^{\mathbf{T}(f)}\left(\mathbf{R}_{m_{\square}, p}^{\mathbf{T}(f)}(x)\right) \subseteq \mathbf{R}_{m_{\square}}^{\mathbf{T}(f)}\left(\mathbf{R}_{4 \otimes m_{\square}, p}^{k_1 f}(x)\right) \subseteq \mathbf{R}_{4 \otimes m_{\square}}^{k_1 f}\left(\mathbf{R}_{4 \otimes m_{\square}, p}^{k_1 f}(x)\right) \\ &= \mathbf{R}_{4 \otimes m_{\square}, p+1}^{k_1 f}(x) \end{aligned}$$

9. Soit  $Y \in \mathcal{B}(\mathbb{E}_{\square})$ . Alors  $Y \subseteq \mathbb{E}_{\square}$ . D'où  $\mathbf{T}(f)^{-1}(Y) \subseteq \mathbf{T}(f)^{-1}(\mathbb{E}_{\square}) = \mathcal{D}^n \subseteq \mathcal{R}$ .

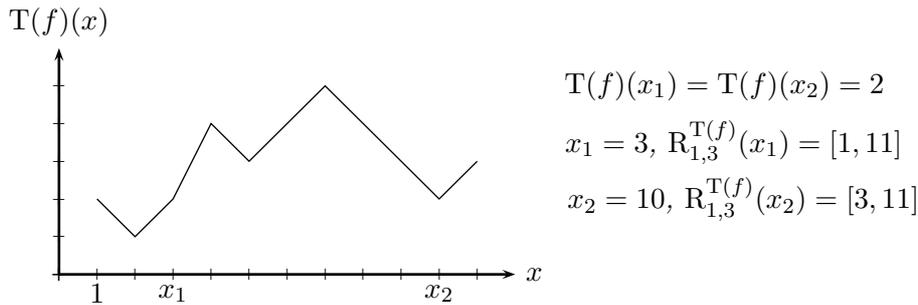
Donc  $\mathbf{T}(f) : (\mathcal{D}^n, \mathcal{R}) \rightarrow (\mathbb{E}_{\square}, \mathcal{B}(\mathbb{E}_{\square}))$  est mesurable. □

**Remarque 6.6**  $\forall (m_{\square}, \mathbf{T}, f, x_1, x_2, p) \in \mathbb{E}_{\oplus} \times \mathcal{C}r \times \mathcal{I} \times (\mathcal{D}^n)^2 \times \mathbb{N}^*$

1. pas d'égalité entre points voisins de même ton de gris :

$$\left( \begin{array}{c} x_1 \in \mathbf{R}_{m_{\square}, p}^{\mathbf{T}(f)}(x_2) \\ \mathbf{T}(f)(x_1) = \mathbf{T}(f)(x_2) \end{array} \right) \not\Rightarrow \mathbf{R}_{m_{\square}, p}^{\mathbf{T}(f)}(x_1) = \mathbf{R}_{m_{\square}, p}^{\mathbf{T}(f)}(x_2) \quad (6.66)$$

Voici un contre-exemple :



Cette illustration montre qu'il existe un critère  $T(f)$  tel que  $T(f)(x_1) = T(f)(x_2)$ ,  $x_1 \in R_{m_{\square},p}^{T(f)}(x_2)$  et  $R_{m_{\square},p}^{T(f)}(x_1) \neq R_{m_{\square},p}^{T(f)}(x_2)$ .

## 6.6 Applications

Les applications suivantes sont directement liées au caractère adaptatif des VAG. Elles sont réalisées à partir de VAG faibles d'un point. L'intérêt est de déterminer les VAG de tous les points du support spatial d'une image pour un critère d'analyse, une tolérance d'homogénéité et un modèle vectoriel fixés *a priori*, et d'intégrer les fonctions indicatrices de leurs surfaces ou frontières. Ce procédé permet d'extraire les structures présentes dans une image et ne présenterait aucun intérêt dans le cas des voisinages "classiques".

### 6.6.1 Surfaces

L'intégration des indicatrices des surfaces des VAG de chaque point  $x$  d'une image  $f$  pour un critère d'analyse  $T$ , et une tolérance d'homogénéité  $m_{\square}$  fixés est définie de  $\mathcal{D}^n$  dans  $\mathbb{N}$  par :

$$y \mapsto \int_{\mathcal{D}^n} V_{m_{\square}}^{T(f)}(x)(y) dx \quad (6.67)$$

pour tout  $y \in \mathcal{D}^n$ . La figure 6.5 illustre les résultats de cette intégration avec le critère de luminance ( $T(f) = f$ ) et le modèle LIP pour diverses tolérances d'homogénéités et diverses images.

Les zones à l'intérieur desquelles peu de VAG se rencontrent apparaissent en sombre. Il s'agit de zones de détails ou de petites structures de l'image originale. La taille de ces structures extraites augmente avec la tolérance d'homogénéité choisie. A l'inverse, les zones claires sont des zones à l'intérieur desquelles un grand nombre de VAG se rencontrent.

La sous-section suivante porte sur l'intégration des indicatrices des frontières des VAG de chaque point du support spatial d'une image.

### 6.6.2 Frontières

L'intégration des indicatrices des frontières des VAG de chaque point  $x$  d'une image  $f$  pour un critère d'analyse  $T$ , et une tolérance d'homogénéité  $m_{\square}$  fixés est définie de  $\mathcal{D}^n$  dans  $\mathbb{N}$  par :

$$y \mapsto \int_{\mathcal{D}^n} \partial V_{m_{\square}}^{T(f)}(x)(y) dx \quad (6.68)$$

pour tout  $y \in \mathcal{D}^n$ , où  $\partial V_{m_{\square}}^{T(f)}$  dénote la frontière du voisinage  $V_{m_{\square}}^{T(f)}$ . La figure 6.6 illustre les résultats de cette intégration avec le critère de luminance ( $T(f) = f$ ) et le modèle CLIP pour diverses tolérances d'homogénéités et diverses images.

Les zones claires sont des zones à l'intérieur desquelles un grand nombre de frontières de VAG se rencontrent. Les VAG sont adaptatifs aux structures locales de l'image. Par conséquent, des pixels appartenant à la même structure ont des voisinages proches, donc des frontières de voisinages proches. Autrement dit, les zones claires correspondent aux contours des structures de l'image. Et plus la tolérance d'homogénéité choisie est faible, plus les structures dont les contours sont détectés sont de petite taille. Cette intégration des indicatrices des frontières des VAG définit donc un contraste multi-échelle.

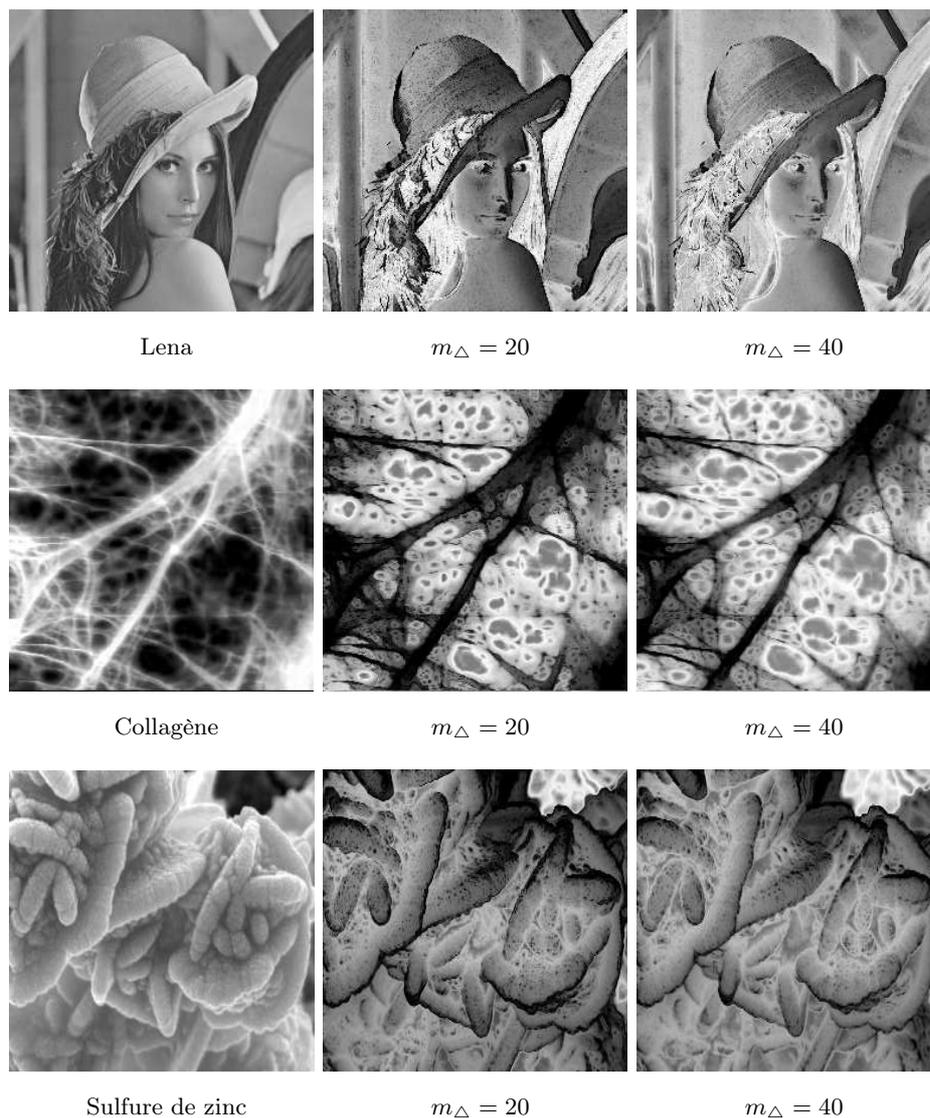


FIG. 6.5 – Intégration des indicatrices des surfaces des VAG faibles des images originales  $f$  (Lena, Collagène, Sulfure de zinc) par rapport au critère de luminosité ( $T(f) = f$ ) avec les tolérances d'homogénéité  $m_{\Delta} = 20, 40$  et le modèle LIP.

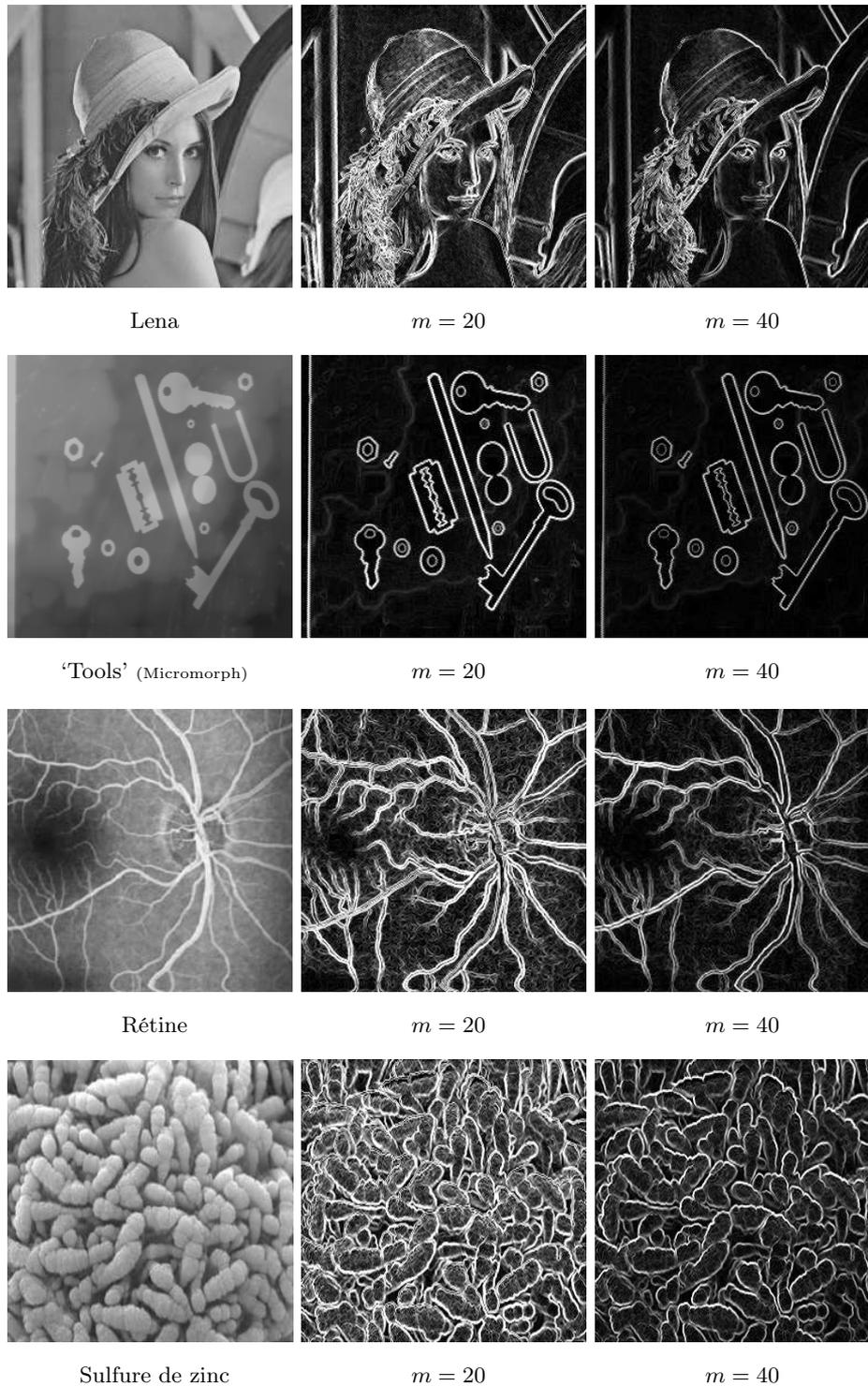


FIG. 6.6 – Intégration des indicatrices des frontières des VAG faibles des images originales  $f$  (Lena, ‘Tools’, Rétine, Sulfure de zinc) par rapport au critère de luminance ( $T(f) = f$ ) avec les tolérances d’homogénéité  $m = 20, 40$  et le modèle CLIP.

# Chapitre 7

## Géométrie Intégrale à VAG

### Sommaire

---

<b>7.1</b>	<b>Analyse adaptative locale par les fonctionnelles de Minkowski à VAG . . . . .</b>	<b>143</b>
7.1.1	Définitions et propriétés . . . . .	143
7.1.2	Cartographies . . . . .	149
7.1.3	Histogrammes et histogrammes conjoints . . . . .	153
<b>7.2</b>	<b>Analyse multi-échelle adaptative locale par les fonctions de Minkowski à VAG . .</b>	<b>156</b>
7.2.1	Par rapport à la tolérance d'homogénéité . . . . .	157
7.2.2	Par rapport à un opérateur de morphologie mathématique . . . . .	160
<b>7.3</b>	<b>Applications . . . . .</b>	<b>163</b>
7.3.1	Segmentation . . . . .	163
7.3.2	Classification . . . . .	163
7.3.3	Filtrage . . . . .	169

---

## 7.1 Analyse adaptative locale par les fonctionnelles de Minkowski à VAG

### 7.1.1 Définitions et propriétés

A un point du support spatial d'une image sont associées les fonctionnelles de Minkowski à VAG de celui-ci. Le VAG étant défini comme une partie du support spatial, trois fonctionnelles de Minkowski à VAG sont alors calculées lors de l'analyse d'une image bi-dimensionnelle. Cette section définit mathématiquement ces fonctionnelles de Minkowski à VAG, pour les VAG faibles et forts, d'un point et d'un ensemble ainsi que les VAG itérés d'un point (Chapitre 6). Ces fonctionnelles de Minkowski à VAG vérifient des propriétés liées à celles des VAG associés.

### Fonctionnelles de Minkowski à VAG faibles d'un point

**Définition 7.1** [*Fonctionnelles de Minkowski à VAG faibles d'un point*]

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $(m_{\square}, \mathbb{T}, f) \in \mathbb{E}_{\oplus} \times \mathcal{C}r \times \mathcal{I}$ . Les fonctionnelles de Minkowski à VAG faibles, notées

$\mathcal{I}_{d, V_{m_{\square}}^{\Gamma(f)}}^n$  pour tout  $d \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , sont définies de  $\mathcal{D}^n$  dans  $\mathbb{R}$  par :

$$\mathcal{I}_{d, V_{m_{\square}}^{\Gamma(f)}}^n : x \mapsto \mathcal{I}_d^n \left( V_{m_{\square}}^{\Gamma(f)}(x) \right) \quad (7.1)$$

**Proposition 7.1**  $\forall (m_{\square}, m_{\square}^1, m_{\square}^2, \Gamma, f, x, x_1, x_2, d) \in (\mathbb{E}_{\oplus})^3 \times \mathcal{C}r \times \mathcal{I} \times (\mathcal{D}^n)^3 \times \llbracket 0, n \rrbracket$

1. égalité entre points voisins de même ton de gris :

$$\left( \begin{array}{l} x_1 \in V_{m_{\square}}^{\Gamma(f)}(x_2) \\ \Gamma(f)(x_1) = \Gamma(f)(x_2) \end{array} \right) \Rightarrow \mathcal{I}_{d, V_{m_{\square}}^{\Gamma(f)}}^n(x_1) = \mathcal{I}_{d, V_{m_{\square}}^{\Gamma(f)}}^n(x_2) \quad (7.2)$$

2. croissance de la  $n$ -ième fonctionnelle de Minkowski à VAG par rapport à  $m_{\square}$  :

$$m_{\square}^1 \leq m_{\square}^2 \Rightarrow \mathcal{I}_{n, V_{m_{\square}^1}^{\Gamma(f)}}^n(x) \leq \mathcal{I}_{n, V_{m_{\square}^2}^{\Gamma(f)}}^n(x) \quad (7.3)$$

3. invariance par  $\oplus$ -addition vectorielle :

$$\forall c_{\square} \in \mathbb{E}_{\square} : \mathcal{I}_{d, V_{m_{\square}}^{\Gamma(f)} \oplus c_{\square}}^n(x) = \mathcal{I}_{d, V_{m_{\square}}^{\Gamma(f)}}^n(x) \quad (7.4)$$

4. compatibilité avec la  $\otimes$ -multiplication scalaire :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^* : \mathcal{I}_{d, V_{m_{\square}}^{\alpha \otimes \Gamma(f)}}^n(x) = \mathcal{I}_{d, V_{\frac{1}{\alpha} \otimes m_{\square}}^{\Gamma(f)}}^n(x) \quad (7.5)$$

5. compatibilité de la  $n$ -ième fonctionnelle de Minkowski à VAG avec la  $k_1, k_2$ -lipschitzité :

$\forall k_1, k_2 \in \mathbb{R}_+^*$  tels que  $k_1 \leq k_2$

$$\Gamma \text{ } k_1, k_2\text{-lipschitzienne} \Rightarrow \mathcal{I}_{n, V_{m_{\square}}^{k_2 f}}^n(x) \leq \mathcal{I}_{n, V_{m_{\square}}^{\Gamma(f)}}^n(x) \leq \mathcal{I}_{n, V_{m_{\square}}^{k_1 f}}^n(x) \quad (7.6)$$

**Preuve** : Les propriétés sont des conséquences directes de la proposition 6.1 énonçant les propriétés des VAG faibles d'un point, et du fait que la  $n$ -ième fonctionnelle de Minkowski correspond à la mesure de Lebesgue, qui vérifie donc la propriété de monotonie (Equation 3.1).  $\square$

## Fonctionnelles de Minkowski à VAG forts d'un point

**Définition 7.2** [*Fonctionnelles de Minkowski à VAG forts d'un point*]

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $(m_{\square}, \Gamma, f) \in \mathbb{E}_{\oplus} \times \mathcal{C}r \times \mathcal{I}$ . Les fonctionnelles de Minkowski à VAG forts, notées  $\mathcal{I}_{d, R_{m_{\square}}^{\Gamma(f)}}^n$  pour tout  $d \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , sont définies de  $\mathcal{D}^n$  dans  $\mathbb{R}$  par :

$$\mathcal{I}_{d, R_{m_{\square}}^{\Gamma(f)}}^n : x \mapsto \mathcal{I}_d^n \left( R_{m_{\square}}^{\Gamma(f)}(x) \right) \quad (7.7)$$

**Proposition 7.2**  $\forall (m_{\square}, m_{\square}^1, m_{\square}^2, \Gamma, f, x, x_1, x_2, d) \in (\mathbb{E}_{\oplus})^3 \times \mathcal{C}r \times \mathcal{I} \times (\mathcal{D}^n)^3 \times \llbracket 0, n \rrbracket$

1. croissance de la  $n$ -ième fonctionnelle de Minkowski à VAG par rapport à  $m_{\square}$  :

$$m_{\square}^1 \leq m_{\square}^2 \Rightarrow \mathcal{I}_{n, R_{m_{\square}^1}^{\Gamma(f)}}^n(x) \leq \mathcal{I}_{n, R_{m_{\square}^2}^{\Gamma(f)}}^n(x) \quad (7.8)$$

2. *invariance par  $\oplus$ -addition vectorielle :*

$$\forall c_{\square} \in \mathbb{E}_{\square} : \mathcal{I}_{d, \mathbb{R}_{m_{\square}}^{\oplus c_{\square}}}^n(x) = \mathcal{I}_{d, \mathbb{R}_{m_{\square}}^{\mathbb{T}(f)}}^n(x) \quad (7.9)$$

3. *compatibilité avec la  $\otimes$ -multiplication scalaire :*

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^* : \mathcal{I}_{d, \mathbb{R}_{m_{\square}}^{\alpha \otimes \mathbb{T}(f)}}^n(x) = \mathcal{I}_{d, \mathbb{R}_{\frac{1}{\alpha} \otimes m_{\square}}^{\mathbb{T}(f)}}^n(x) \quad (7.10)$$

4. *encadrement de la  $n$ -ième fonctionnelle de Minkowski à VAG :*

$$\mathcal{I}_{n, \mathbb{V}_{m_{\square}}^{\mathbb{T}(f)}}^n(x) \leq \mathcal{I}_{n, \mathbb{R}_{m_{\square}}^{\mathbb{T}(f)}}^n(x) \leq \mathcal{I}_{n, \mathbb{V}_2^{\mathbb{T}(f)} \otimes m_{\square}}^n(x) \quad (7.11)$$

5. *compatibilité de la  $n$ -ième fonctionnelle de Minkowski à VAG avec la  $k_1, k_2$ -lipschitzité :*

$\forall k_1, k_2 \in \mathbb{R}_+^*$  tels que  $k_1 \leq k_2$

$$\mathbb{T} \text{ } k_1, k_2\text{-lipschitzienne} \Rightarrow \mathcal{I}_{n, \mathbb{R}_{\frac{1}{2} \otimes m_{\square}}^{k_2 f}}^n(x) \leq \mathcal{I}_{n, \mathbb{R}_{m_{\square}}^{\mathbb{T}(f)}}^n(x) \leq \mathcal{I}_{n, \mathbb{R}_4^{k_1 f} \otimes m_{\square}}^n(x) \quad (7.12)$$

**Preuve :** Les propriétés sont des conséquences directes de la proposition 6.2 énonçant les propriétés des VAG forts d'un point, et du fait que la  $n$ -ième fonctionnelle de Minkowski correspond à la mesure de Lebesgue, qui vérifie donc la propriété de monotonie (Equation 3.1).  $\square$

### Fonctionnelles de Minkowski à VAG faibles d'un ensemble

**Définition 7.3** [*Fonctionnelles de Minkowski à VAG faibles d'un ensemble*]

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $(m_{\square}, \mathbb{T}, f) \in \mathbb{E}_{\oplus} \times \mathcal{C}r \times \mathcal{I}$ . Les fonctionnelles de Minkowski à VAG faibles, notées  $\mathcal{I}_{d, \mathbb{V}_{m_{\square}}^{\mathbb{T}(f)}}^n$  pour tout  $d \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , sont définies de  $\mathcal{P}(\mathcal{D}^n)$  dans  $\mathbb{R}$  par :

$$\mathcal{I}_{d, \mathbb{V}_{m_{\square}}^{\mathbb{T}(f)}}^n : X \mapsto \mathcal{I}_d^n \left( \mathbb{V}_{m_{\square}}^{\mathbb{T}(f)}(X) \right) \quad (7.13)$$

**Proposition 7.3**  $\forall (m_{\square}, m_{\square}^1, m_{\square}^2, \mathbb{T}, f, X, X_1, X_2, d) \in (\mathbb{E}_{\oplus})^3 \times \mathcal{C}r \times \mathcal{I} \times \mathcal{P}(\mathcal{D}^n)^3 \times \llbracket 0, n \rrbracket$

1.  *$n$ -ième fonctionnelle de Minkowski à VAG :*

$$\mathcal{I}_n^n(X) \leq \mathcal{I}_{n, \mathbb{V}_{m_{\square}}^{\mathbb{T}(f)}}^n(X) \quad (7.14)$$

2. *croissance de la  $n$ -ième fonctionnelle de Minkowski à VAG par rapport à  $m_{\square}$  :*

$$m_{\square}^1 \leq m_{\square}^2 \Rightarrow \mathcal{I}_{n, \mathbb{V}_{m_{\square}^1}^{\mathbb{T}(f)}}^n(X) \leq \mathcal{I}_{n, \mathbb{V}_{m_{\square}^2}^{\mathbb{T}(f)}}^n(X) \quad (7.15)$$

3. *croissance de la  $n$ -ième fonctionnelle de Minkowski à VAG par rapport à  $X$  :*

$$X_1 \subseteq X_2 \Rightarrow \mathcal{I}_{n, \mathbb{V}_{m_{\square}}^{\mathbb{T}(f)}}^n(X_1) \leq \mathcal{I}_{n, \mathbb{V}_{m_{\square}}^{\mathbb{T}(f)}}^n(X_2) \quad (7.16)$$

4. *invariance par  $\oplus$ -addition vectorielle :*

$$\forall c_{\square} \in \mathbb{E}_{\square} : \mathcal{I}_{d, \mathbb{V}_{m_{\square}}^{\mathbb{T}(f) \oplus c_{\square}}}^n(X) = \mathcal{I}_{d, \mathbb{V}_{m_{\square}}^{\mathbb{T}(f)}}^n(X) \quad (7.17)$$

5. compatibilité avec la  $\otimes$ -multiplication scalaire :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^* : \mathcal{I}_{d, V_{m_\square}^\alpha \otimes T(f)}^n(X) = \mathcal{I}_{d, V_{\frac{1}{\alpha} \otimes m_\square}^{T(f)}}^n(X) \quad (7.18)$$

6. compatibilité de la  $n$ -ième fonctionnelle de Minkowski à VAG avec la  $k_1, k_2$ -lipschitzité :

$\forall k_1, k_2 \in \mathbb{R}_+^*$  tels que  $k_1 \leq k_2$

$$T \text{ } k_1, k_2\text{-lipschitzienne} \Rightarrow \mathcal{I}_{n, V_{m_\square}^{k_2 f}}^n(X) \leq \mathcal{I}_{n, V_{m_\square}^{T(f)}}^n(X) \leq \mathcal{I}_{n, V_{m_\square}^{k_1 f}}^n(X) \quad (7.19)$$

7. union :

$$\mathcal{I}_{d, V_{m_\square}^{T(f)}}^n(X_1 \cup X_2) = \mathcal{I}_{d, V_{m_\square}^{T(f)}}^n(X_1) + \mathcal{I}_{d, V_{m_\square}^{T(f)}}^n(X_2) - \mathcal{I}_{d, V_{m_\square}^{T(f)}}^n(X_1 \cap X_2) \quad (7.20)$$

8. composition :

$$\mathcal{I}_{n, V_{m_\square^1}^{T(f)}}^n \left( V_{m_\square^2}^{T(f)}(x) \right) < \mathcal{I}_{n, V_{m_\square^1 \oplus m_\square^2}^{T(f)}}^n(x) \quad \text{et} \quad \mathcal{I}_{n, V_{m_\square^1}^{T(f)}}^n \left( V_{m_\square^2}^{T(f)}(X) \right) < \mathcal{I}_{n, V_{m_\square^1 \oplus m_\square^2}^{T(f)}}^n(X) \quad (7.21)$$

**Preuve :** Les propriétés sont des conséquences directes de la proposition 6.3 énonçant les propriétés des VAG faibles d'un ensemble, et du fait que la  $n$ -ième fonctionnelle de Minkowski correspond à la mesure de Lebesgue, qui vérifie donc la propriété de monotonie (Equation 3.1).  $\square$

### Fonctionnelles de Minkowski à VAG forts d'un ensemble

**Définition 7.4** [*Fonctionnelles de Minkowski à VAG forts d'un ensemble*]

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $(m_\square, T, f) \in \mathbb{E}_\oplus \times Cr \times \mathcal{I}$ . Les fonctionnelles de Minkowski à VAG forts, notées  $\mathcal{I}_{d, R_{m_\square}^{T(f)}}^n$  pour tout  $d \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , sont définies de  $\mathcal{P}(\mathcal{D}^n)$  dans  $\mathbb{R}$  par :

$$\mathcal{I}_{d, R_{m_\square}^{T(f)}}^n : X \mapsto \mathcal{I}_d^n \left( R_{m_\square}^{T(f)}(X) \right) \quad (7.22)$$

**Proposition 7.4**  $\forall (m_\square, m_\square^1, m_\square^2, T, f, X, X_1, X_2, d) \in (\mathbb{E}_\oplus)^3 \times Cr \times \mathcal{I} \times \mathcal{P}(\mathcal{D}^n)^3 \times \llbracket 0, n \rrbracket$

1.  $n$ -ième fonctionnelle de Minkowski à VAG :

$$\mathcal{I}_n^n(X) \leq \mathcal{I}_{n, R_{m_\square}^{T(f)}}^n(X) \quad (7.23)$$

2. croissance de la  $n$ -ième fonctionnelle de Minkowski à VAG par rapport à  $m_\square$  :

$$m_\square^1 \leq m_\square^2 \Rightarrow \mathcal{I}_{n, R_{m_\square^1}^{T(f)}}^n(X) \leq \mathcal{I}_{n, R_{m_\square^2}^{T(f)}}^n(X) \quad (7.24)$$

3. croissance de la  $n$ -ième fonctionnelle de Minkowski à VAG par rapport à  $X$  :

$$X_1 \subseteq X_2 \Rightarrow \mathcal{I}_{n, R_{m_\square}^{T(f)}}^n(X_1) \leq \mathcal{I}_{n, R_{m_\square}^{T(f)}}^n(X_2) \quad (7.25)$$

4. invariance par  $\oplus$ -addition vectorielle :

$$\forall c_\square \in \mathbb{E}_\square : \mathcal{I}_{d, R_{m_\square}^{T(f)} \oplus c_\square}^n(X) = \mathcal{I}_{d, R_{m_\square}^{T(f)}}^n(X) \quad (7.26)$$

5. compatibilité avec la  $\otimes$ -multiplication scalaire :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^* : \mathcal{I}_{d, \mathbb{R}_m^\alpha \otimes \mathbb{T}(f)}^n(X) = \mathcal{I}_{d, \mathbb{R}_{\frac{1}{\alpha}}^{\mathbb{T}(f)} \otimes m_\square}^n(X) \quad (7.27)$$

6. encadrement de la  $n$ -ième fonctionnelle de Minkowski à VAG :

$$\mathcal{I}_{n, \mathbb{V}_{m_\square}^{\mathbb{T}(f)}}^n(f)(X) \leq \mathcal{I}_{n, \mathbb{R}_{m_\square}^{\mathbb{T}(f)}}^n(f)(X) \leq \mathcal{I}_{n, \mathbb{V}_{2 \otimes m_\square}^{\mathbb{T}(f)}}^n(f)(X) \quad (7.28)$$

7. compatibilité de la  $n$ -ième fonctionnelle de Minkowski à VAG avec la  $k_1, k_2$ -lipschitzité :

$\forall k_1, k_2 \in \mathbb{R}_+^*$  tels que  $k_1 \leq k_2$

$$\mathbb{T} \text{ } k_1, k_2\text{-lipschitzienne} \Rightarrow \mathcal{I}_{n, \mathbb{R}_{\frac{k_2 f}{2} \otimes m_\square}^n}(X) \leq \mathcal{I}_{n, \mathbb{R}_{m_\square}^{\mathbb{T}(f)}}(X) \leq \mathcal{I}_{n, \mathbb{R}_4^{k_1 f} \otimes m_\square}^n(X) \quad (7.29)$$

8. union :

$$\mathcal{I}_{d, \mathbb{R}_{m_\square}^{\mathbb{T}(f)}}^n(X_1 \cup X_2) = \mathcal{I}_{d, \mathbb{R}_{m_\square}^{\mathbb{T}(f)}}^n(X_1) + \mathcal{I}_{d, \mathbb{R}_{m_\square}^{\mathbb{T}(f)}}^n(X_2) - \mathcal{I}_{d, \mathbb{R}_{m_\square}^{\mathbb{T}(f)}}^n(X_1 \cap X_2) \quad (7.30)$$

**Preuve :** Les propriétés sont des conséquences directes de la proposition 6.4 énonçant les propriétés des VAG forts d'un ensemble, et du fait que la  $n$ -ième fonctionnelle de Minkowski correspond à la mesure de Lebesgue, qui vérifie donc la propriété de monotonie (Equation 3.1).  $\square$

### Fonctionnelles de Minkowski à VAG faibles itérés d'un point

**Définition 7.5** [*Fonctionnelles de Minkowski à VAG faibles itérés d'un point*]

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $(m_\square, \mathbb{T}, f, p) \in \mathbb{E}_\oplus \times \mathcal{C}r \times \mathcal{I} \times \mathbb{N}^*$ . Les fonctionnelles de Minkowski à VAG faibles itérés, notées  $\mathcal{I}_{d, \mathbb{V}_{m_\square, p}^{\mathbb{T}(f)}}^n$  pour tout  $d \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , sont définies de  $\mathcal{D}^n$  dans  $\mathbb{R}$  par :

$$\mathcal{I}_{d, \mathbb{V}_{m_\square, p}^{\mathbb{T}(f)}}^n : x \mapsto \mathcal{I}_d^n \left( \mathbb{V}_{m_\square, p}^{\mathbb{T}(f)}(x) \right) \quad (7.31)$$

**Proposition 7.5**  $\forall (m_\square, m_\square^1, m_\square^2, \mathbb{T}, f, x, p, p_1, p_2, d) \in (\mathbb{E}_\oplus)^3 \times \mathcal{C}r \times \mathcal{I} \times \mathcal{D}^n \times (\mathbb{N}^*)^3 \times \llbracket 0, n \rrbracket$

1. croissance de la  $n$ -ième fonctionnelle de Minkowski à VAG par rapport à  $m_\square$  :

$$m_\square^1 \leq m_\square^2 \Rightarrow \mathcal{I}_{n, \mathbb{V}_{m_\square^1, p}^{\mathbb{T}(f)}}^n(x) \leq \mathcal{I}_{n, \mathbb{V}_{m_\square^2, p}^{\mathbb{T}(f)}}^n(x) \quad (7.32)$$

2. croissance de la  $n$ -ième fonctionnelle de Minkowski à VAG par rapport à  $p$  :

$$p_1 \leq p_2 \Rightarrow \mathcal{I}_{n, \mathbb{V}_{m_\square, p_1}^{\mathbb{T}(f)}}^n(x) \leq \mathcal{I}_{n, \mathbb{V}_{m_\square, p_2}^{\mathbb{T}(f)}}^n(x) \quad (7.33)$$

3. invariance par  $\oplus$ -addition vectorielle :

$$\forall c_\square \in \mathbb{E}_\square : \mathcal{I}_{d, \mathbb{V}_{m_\square, p}^{\mathbb{T}(f)} \oplus c_\square}^n(x) = \mathcal{I}_{d, \mathbb{V}_{m_\square, p}^{\mathbb{T}(f)}}^n(x) \quad (7.34)$$

4. compatibilité avec la  $\otimes$ -multiplication scalaire :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^* : \mathcal{I}_{d, \mathbb{V}_{m_\square, p}^\alpha \otimes \mathbb{T}(f)}^n(x) = \mathcal{I}_{d, \mathbb{V}_{\frac{1}{\alpha}}^{\mathbb{T}(f)} \otimes m_\square, p}^n(x) \quad (7.35)$$

5. compatibilité de la  $n$ -ième fonctionnelle de Minkowski à VAG avec la  $k_1, k_2$ -lipschitzité :

$\forall k_1, k_2 \in \mathbb{R}_+^*$  tels que  $k_1 \leq k_2$

$$\text{T } k_1, k_2\text{-lipschitzienne} \Rightarrow \mathcal{I}_{n, \mathbb{V}_{m_{\square}, p}^{k_2 f}}^n(x) \leq \mathcal{I}_{n, \mathbb{V}_{m_{\square}, p}^{\text{T}(f)}}^n(x) \leq \mathcal{I}_{n, \mathbb{V}_{m_{\square}, p}^{k_1 f}}^n(x) \quad (7.36)$$

6.

$$\mathcal{I}_{n, \mathbb{V}_p^{\text{T}(f)} \otimes m_{\square}}^n(x) \geq \mathcal{I}_{n, \mathbb{V}_{m_{\square}, p}^{\text{T}(f)}}^n(x) \quad (7.37)$$

**Preuve :** Les propriétés sont des conséquences directes de la proposition 6.5 énonçant les propriétés des VAG faibles itérés d'un point, et du fait que la  $n$ -ième fonctionnelle de Minkowski correspond à la mesure de Lebesgue, qui vérifie donc la propriété de monotonie (Equation 3.1).  $\square$

### Fonctionnelles de Minkowski à VAG forts itérés d'un point

**Définition 7.6** [*Fonctionnelles de Minkowski à VAG forts itérés d'un point*]

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $(m_{\square}, \text{T}, f, p) \in \mathbb{E}_{\oplus} \times \mathcal{C}r \times \mathcal{I} \times \mathbb{N}^*$ . Les fonctionnelles de Minkowski à VAG forts itérés, notées  $\mathcal{I}_{d, \mathbb{R}_{m_{\square}, p}^{\text{T}(f)}}^n$  pour tout  $d \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , sont définies de  $\mathcal{D}^n$  dans  $\mathbb{R}$  par :

$$\mathcal{I}_{d, \mathbb{R}_{m_{\square}, p}^{\text{T}(f)}}^n : x \mapsto \mathcal{I}_d^n \left( \mathbb{R}_{m_{\square}, p}^{\text{T}(f)}(x) \right) \quad (7.38)$$

**Proposition 7.6**  $\forall (m_{\square}, m_{\square}^1, m_{\square}^2, \text{T}, f, x, x_1, x_2, p, p_1, p_2, d) \in (\mathbb{E}_{\oplus})^3 \times \mathcal{C}r \times \mathcal{I} \times (\mathcal{D}^n)^3 \times (\mathbb{N}^*)^3 \times \llbracket 0, n \rrbracket$

1. croissance de la  $n$ -ième fonctionnelle de Minkowski à VAG par rapport à  $m_{\square}$  :

$$m_{\square}^1 \leq m_{\square}^2 \Rightarrow \mathcal{I}_{n, \mathbb{R}_{m_{\square}^1, p}^{\text{T}(f)}}^n(x) \leq \mathcal{I}_{n, \mathbb{R}_{m_{\square}^2, p}^{\text{T}(f)}}^n(x) \quad (7.39)$$

2. croissance de la  $n$ -ième fonctionnelle de Minkowski à VAG par rapport à  $p$  :

$$p_1 \leq p_2 \Rightarrow \mathcal{I}_{n, \mathbb{R}_{m_{\square}, p_1}^{\text{T}(f)}}^n(x) \leq \mathcal{I}_{n, \mathbb{R}_{m_{\square}, p_2}^{\text{T}(f)}}^n(x) \quad (7.40)$$

3. invariance par  $\oplus$ -addition vectorielle :

$$\forall c_{\square} \in \mathbb{E}_{\square} : \mathcal{I}_{d, \mathbb{R}_{m_{\square}, p}^{\text{T}(f)} \oplus c_{\square}}^n(x) = \mathcal{I}_{d, \mathbb{R}_{m_{\square}, p}^{\text{T}(f)}}^n(x) \quad (7.41)$$

4. compatibilité avec la  $\otimes$ -multiplication scalaire :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^* : \mathcal{I}_{d, \mathbb{R}_{m_{\square}, p}^{\alpha \otimes \text{T}(f)}}^n(x) = \mathcal{I}_{d, \mathbb{R}_{\frac{1}{\alpha} \otimes m_{\square}, p}^{\text{T}(f)}}^n(x) \quad (7.42)$$

5. encadrement de la  $n$ -ième fonctionnelle de Minkowski à VAG :

$$\mathcal{I}_{n, \mathbb{V}_{m_{\square}, p}^{\text{T}(f)}}^n(x) \leq \mathcal{I}_{n, \mathbb{R}_{m_{\square}, p}^{\text{T}(f)}}^n(x) \leq \mathcal{I}_{n, \mathbb{V}_2^{\text{T}(f)} \otimes m_{\square}, p}^n(x) \quad (7.43)$$

6. compatibilité de la  $n$ -ième fonctionnelle de Minkowski à VAG avec la  $k_1, k_2$ -lipschitzité :

$\forall k_1, k_2 \in \mathbb{R}_+^*$  tels que  $k_1 \leq k_2$

$$\text{T } k_1, k_2\text{-lipschitzienne} \Rightarrow \mathcal{I}_{n, \mathbb{R}_{\frac{1}{2} \otimes m_{\square}, p}^{k_2 f}}^n(x) \leq \mathcal{I}_{n, \mathbb{R}_{m_{\square}, p}^{\text{T}(f)}}^n(x) \leq \mathcal{I}_{n, \mathbb{R}_{4 \otimes m_{\square}, p}^{k_1 f}}^n(x) \quad (7.44)$$

**Preuve :** Les propriétés sont des conséquences directes de la proposition 6.6 énonçant les propriétés des VAG forts itérés d'un point, et du fait que la  $n$ -ième fonctionnelle de Minkowski correspond à la mesure de Lebesgue, qui vérifie donc la propriété de monotonie (Equation 3.1).  $\square$

### 7.1.2 Cartographies

#### Definition

A chaque point du support spatial d'une image sont associées les fonctionnelles de Minkowski à VAG de celui-ci. Des cartographies sont ainsi définies [RDP07, RDP10d]. Le VAG étant défini comme une partie du support spatial, trois fonctionnelles de Minkowski (nombre d'Euler  $\mathcal{I}_0^2$ , périmètre  $\mathcal{I}_1^2$ , aire  $\mathcal{I}_2^2$ ) à VAG, donc trois cartographies, sont alors calculées lors de l'analyse d'une image bi-dimensionnelle. Dans la suite de ce chapitre, les illustrations sont réalisées avec des VAG faibles d'un point. La mise en oeuvre pratique des autres VAG constitue une perspective de cette thèse.

La Figure 7.1 illustre les cartographies des fonctionnelles de Minkowski à VAG de l'image 'Lena'  $f$ . Les VAG sont homogènes par rapport au critère de luminance ( $T(f) = f$ ) avec la tolérance  $m = 40$  selon le modèle CLIP.

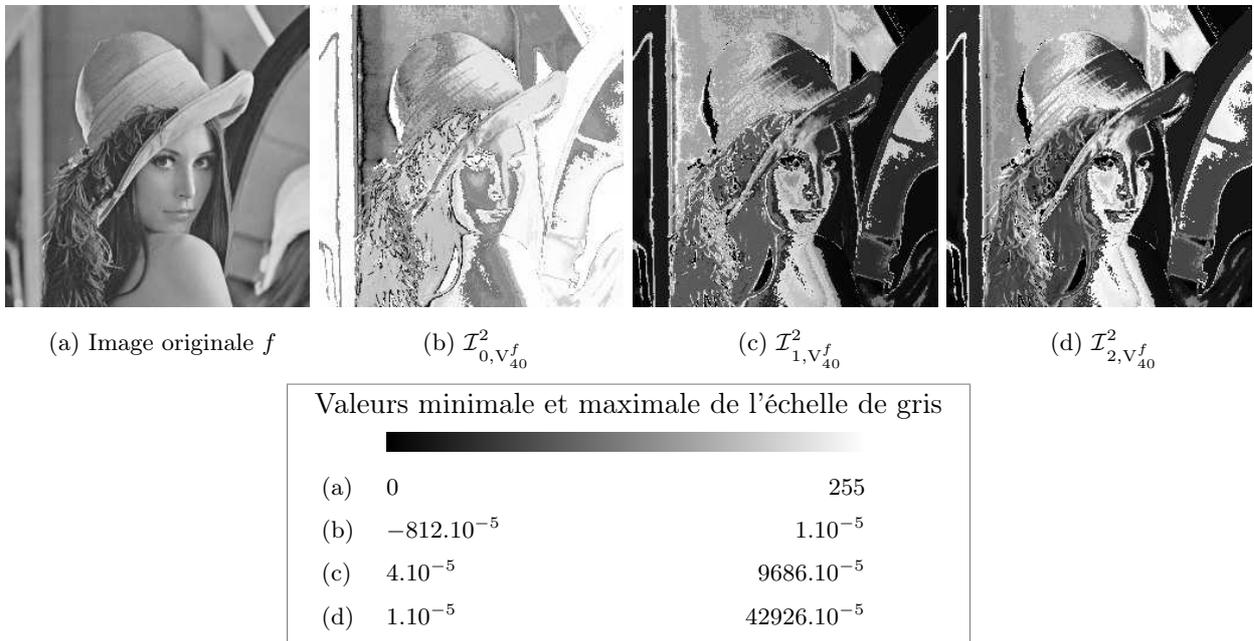


FIG. 7.1 – Cartographies des fonctionnelles de Minkowski à VAG (b-d) de l'image 'Lena'  $f$  (a) par rapport au critère de luminance ( $T(f) = f$ ) avec la tolérance d'homogénéité  $m = 40$  selon le modèle CLIP. Les extrema de l'échelle de gris correspondent aux extrema de l'image originale (a) et des fonctionnelles de densité de Minkowski (b-d).

Les VAG dépendent axiomatiquement de trois caractéristiques : un critère d'analyse, un modèle vectoriel et une tolérance d'homogénéité. Les deux sous-sections suivantes montrent, d'un point de vue visuel, l'impact des deux premières caractéristiques sur les cartographies des fonctionnelles de Minkowski à VAG [RDP09c]. L'impact de la tolérance d'homogénéité sera présenté dans la Section 7.2 [RDP09b, RDP09a].

### Influence du modèle vectoriel

Le critère d'analyse  $T$  est représenté dans un modèle GLIP (Section 6.2), c'est-à-dire dans un espace vectoriel muni de ses lois d'addition vectorielle  $\oplus$  et de multiplication scalaire  $\otimes$  (Section 6.1). La Figure 7.2 illustre les cartographies des fonctionnelles de Minkowski à VAG d'une image de sulfure de zinc  $f$  acquise par microscopie électronique à balayage, par rapport au critère de luminance ( $T(f) = f$ ) avec la tolérance d'homogénéité 50 selon les modèles CLIP et LIP.

### Influence du critère d'analyse

Les VAG sont homogènes par rapport au critère d'analyse  $T$  (tel que la luminance, le contraste, l'épaisseur, ...). Par exemple, le critère de luminance est défini par  $T(f) = f$  où  $f$  est l'image originale. Un critère de contraste peut également être utilisé. Par exemple, l'image de contraste, notée  $c(f)$ , selon le modèle CLIP, peut être définie par [JPZ89] :

$$c(f) : \begin{cases} \mathcal{D}^n & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{1}{\#N(x)} \sum_{y \in N(x)} |f(x) - f(y)| \end{cases} \quad (7.45)$$

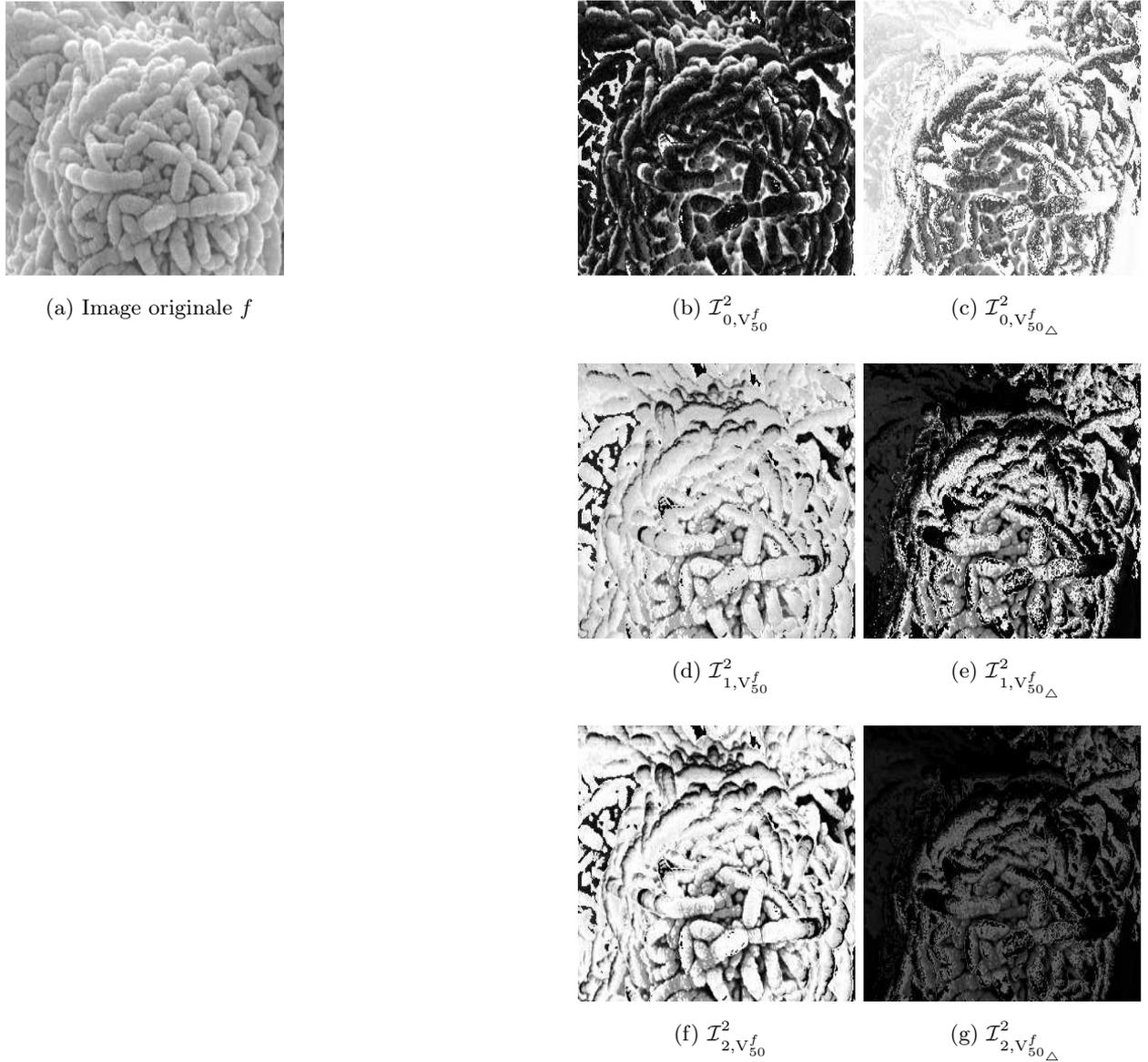
où  $N(x)$  est un voisinage du point  $x$  (par exemple en discret, les points de la fenêtre  $3 \times 3$  centrée en  $x$ ).

La Figure 7.3 illustre les cartographies des fonctionnelles de Minkowski à VAG d'une image de fibronectine  $f$  par rapport aux critères de luminance ( $T(f) = f$ ) et de contraste ( $T(f) = c(f)$ ) avec la tolérance d'homogénéité  $m = 20$  selon le modèle CLIP. Les résultats montrent que les structures révélées par les cartographies ne sont pas les mêmes pour les deux critères.

### Synthèse

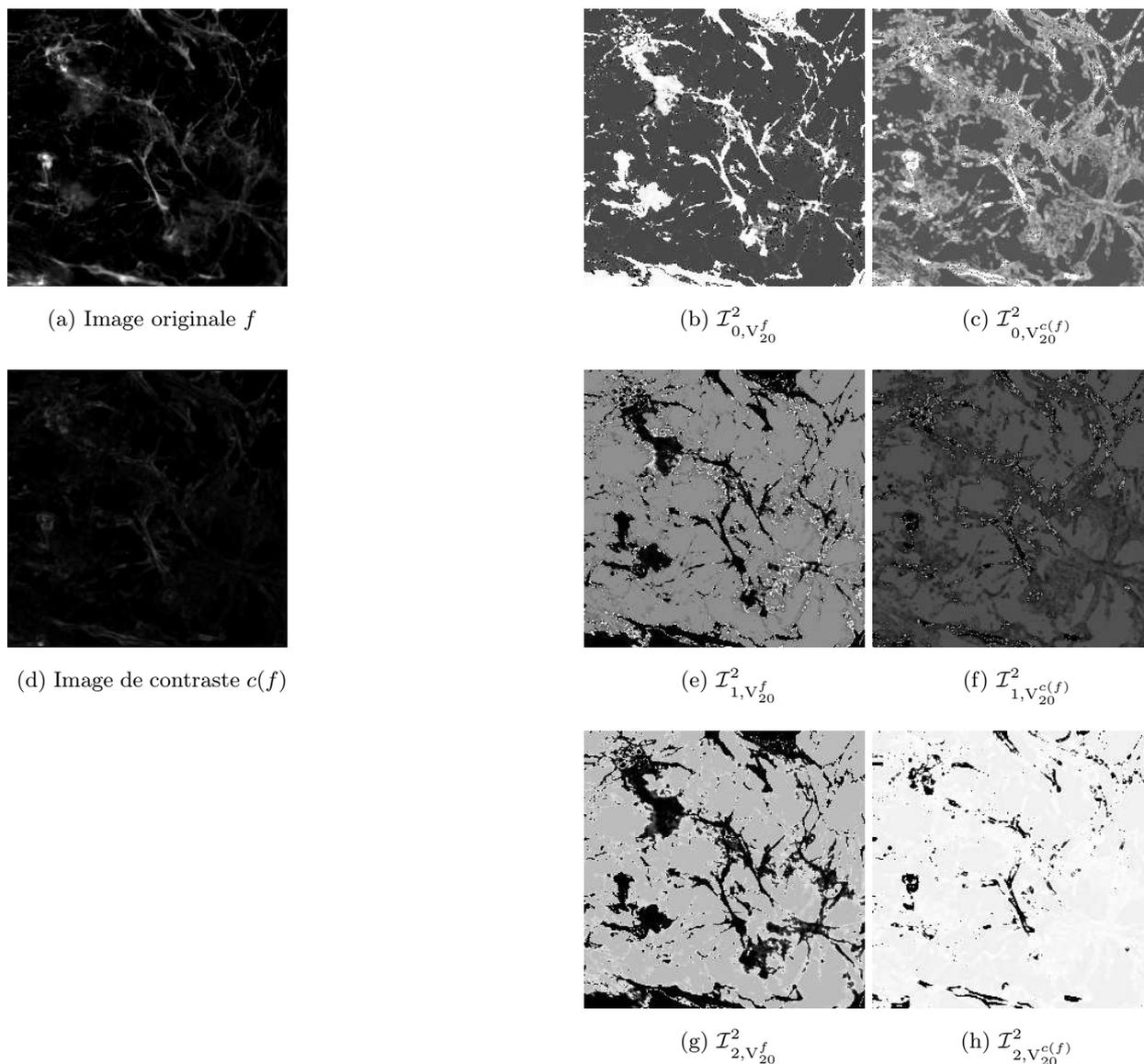
Les cartographies des fonctionnelles de Minkowski à VAG peuvent être utilisées pour la segmentation d'image. Une segmentation sur les niveaux de gris d'une image ne permet pas toujours d'extraire les structures désirées. En utilisant les caractéristiques axiomatiques appropriées des VAG (critère d'analyse, modèle vectoriel, tolérance d'homogénéité), les cartographies font apparaître ces structures et une segmentation telle qu'un simple seuillage peut fournir la segmentation souhaitée (Section 7.3.1).

La section suivante porte sur les distributions statistiques des fonctionnelles de Minkowski à VAG (histogrammes des cartographies).



Valeurs minimale et maximale de l'échelle de gris		
(a)	0	255
(b-c)	$-656.10^{-5}$	$1.10^{-5}$
(d-e)	$4.10^{-5}$	$13867.10^{-5}$
(f-g)	$1.10^{-5}$	$85569.10^{-5}$

FIG. 7.2 – Influence du modèle vectoriel sur les fonctionnelles de Minkowski à VAG. Cartographies des fonctionnelles de Minkowski à VAG d'une image  $f$  de sulfure de zinc (a) par rapport au critère de luminance ( $T(f) = f$ ) avec la tolérance d'homogénéité 50 selon les modèles CLIP (b,d,f) et LIP (c,e,g). Les extrema de l'échelle de gris correspondent aux extrema de l'image originale (a) et des fonctionnelles de densité de Minkowski (b-g).



(a) Image originale  $f$

(b)  $\mathcal{I}_{0, V_{20}^f}^2$

(c)  $\mathcal{I}_{0, V_{20}^{c(f)}}^2$

(d) Image de contraste  $c(f)$

(e)  $\mathcal{I}_{1, V_{20}^f}^2$

(f)  $\mathcal{I}_{1, V_{20}^{c(f)}}^2$

(g)  $\mathcal{I}_{2, V_{20}^f}^2$

(h)  $\mathcal{I}_{2, V_{20}^{c(f)}}^2$

Valeurs minimale et maximale de l'échelle de gris		
(a,d)	0	255
(b-c)	$-970 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-5}$
(e-f)	$4 \cdot 10^{-5}$	$23247 \cdot 10^{-5}$
(g-h)	$1 \cdot 10^{-5}$	$99213 \cdot 10^{-5}$

FIG. 7.3 – Influence du critère d'analyse sur les fonctionnelles de Minkowski à VAG. Cartographies des fonctionnelles de Minkowski à VAG (b,c,e,f,g,h) d'une image  $f$  de fibronectine (a) par rapport aux critères de luminance ( $T(f) = f$ ) (a) et de contraste  $T(f) = c(f)$  (d) avec la tolérance d'homogénéité  $m = 20$  selon le modèle CLIP. Les extrema de l'échelle de gris correspondent aux extrema de l'image originale (a), de l'image de contraste (d) et des fonctionnelles de densité de Minkowski (b,c,e,f,g,h).

### 7.1.3 Histogrammes et histogrammes conjoints

#### Introduction

Les cartographies des fonctionnelles de Minkowski à VAG permettent de caractériser géométriquement (aire, périmètre) et topologiquement (nombre d'Euler) les différentes structures présentes dans une image. Par conséquent, les histogrammes de ces cartographies définissent une signature topologique et géométrique des images à niveaux de gris.

Les histogrammes des cartographies des fonctionnelles de Minkowski à VAG fournissent une distribution statistique des différentes valeurs des fonctionnelles de Minkowski à VAG d'une image à niveaux de gris. Ils peuvent être définis comme la dérivée de l'histogramme cumulé (7.1.3) qui est une fonction croissante bornée dans  $[0, 1]$  atteignant ses bornes, assimilable une fonction de répartition de probabilité. Ainsi, la dérivée fournit l'histogramme, correspondant à une densité de probabilité.

#### Histogrammes et histogrammes conjoints

##### Définition 7.7 [Histogrammes des fonctionnelles de Minkowski à VAG]

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $(m_{\square}, T, f) \in \mathbb{E}_{\oplus} \times Cr \times \mathcal{I}$ . Lors de l'étude de l'image  $f$  de support spatial  $n$ -dimensionnel,  $n+1$  cartographies de fonctionnelles de Minkowski à VAG sont construites, et par conséquent,  $n+1$  histogrammes fournissant les distributions des valeurs des fonctionnelles de Minkowski à VAG. Ces histogrammes, notés  $H_{\mathcal{I}^n_{d, V_{m_{\square}}(f)}}^n$  lors de la considération des VAG faibles d'un point, pour tout  $d \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , sont définis de  $\mathbb{R}$  dans  $[0, 1]$  par :

$$H_{\mathcal{I}^n_{d, V_{m_{\square}}(f)}}^{cum}(t) = \frac{1}{\mathcal{L}^n(\mathcal{D}^n)} \mathcal{L}^n \left( \left\{ x \in \mathcal{D}^n : \mathcal{I}^n_{d, V_{m_{\square}}(f)}(x) < t \right\} \right) = \int_{-\infty}^t H_{\mathcal{I}^n_{d, V_{m_{\square}}(f)}}^n(u) du$$

où  $\mathcal{L}^n$  dénote la mesure de Lebesgue dans un espace  $n$ -dimensionnel. Les définitions des histogrammes lors de la considération des autres VAG sont similaires.

Ces histogrammes (mono-dimensionnels) peuvent être conjoints. D'autres histogrammes sont ainsi construits, de dimension supérieure.

##### Définition 7.8 [Histogrammes conjoints des fonctionnelles de Minkowski à VAG]

Soit  $k \in \llbracket 2, n+1 \rrbracket$ . Afin de déterminer un histogramme conjoint  $k$ -dimensionnel à partir des  $n+1$  cartographies de fonctionnelles de Minkowski à VAG,  $k$  fonctionnelles de Minkowski, notées  $d_k$  sont choisies, et représentent ainsi les  $k$  dimensions de l'histogramme. Par conséquent,  $C_{n+1}^k$  (où  $C$  désigne le nombre de combinaisons) histogrammes conjoints  $k$ -dimensionnels peuvent être obtenus, fournissant les distributions de chaque  $k$ -uplet de valeurs des fonctionnelles de Minkowski à VAG. Ces histogrammes conjoints, notés  $H_{\left( \mathcal{I}^n_{d_j, V_{m_{\square}}(f)} \right)_{j \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket}}$  pour tout  $d_j \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $j \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$  sont définis de  $\mathbb{R}^k$  dans  $[0, 1]$

par :

$$\begin{aligned} H_{\left( \mathcal{I}^n_{d_j, V_{m_{\square}}(f)} \right)_{j \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket}}^{cum} \left( (t_j)_{j \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket} \right) &= \frac{1}{\mathcal{L}^n(\mathcal{D}^n)} \mathcal{L}^n \left( \left\{ x \in \mathcal{D}^n : \mathcal{I}^n_{d_j, V_{m_{\square}}(f)}(x) < t_j, \forall j \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket \right\} \right) \\ &= \int_{\prod_{j \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket} ]-\infty, t_j[} H_{\left( \mathcal{I}^n_{d_j, V_{m_{\square}}(f)} \right)_{j \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket}} \left( (u_j)_{j \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket} \right) d(u_j)_{j \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket} \end{aligned}$$

Tout histogramme  $k - 1$ -dimensionnel ( $k \in \llbracket 2, n + 1 \rrbracket$ ) correspond à une projection particulière d'un histogramme  $k$ -dimensionnel. Par conséquent, l'histogramme  $(n + 1)$ -dimensionnel rassemble toutes les informations des histogrammes de dimension inférieure. Un lien avec les probabilités s'établit : les histogrammes  $k$ -dimensionnels normalisés sont assimilables aux densités conjointes de probabilités, et les histogrammes mono-dimensionnels normalisés sont assimilables aux densités marginales.

Par exemple, si  $n = 2$  alors trois histogrammes conjoints bi-dimensionnels ((périmètre, aire), (nombre d'Euler, aire), (nombre d'Euler, périmètre)) et un histogramme conjoint tri-dimensionnel ((nombre d'Euler, périmètre, aire)) sont déterminés. L'histogramme conjoint bi-dimensionnel (périmètre, aire) est défini de  $\mathbb{R}^2$  dans  $[0, 1]$  par :

$$\begin{aligned} \mathbb{H} \left( \begin{array}{c} \mathcal{I}_{1, \mathbb{V}_m^{\mathbb{T}(f)}}^2, \mathcal{I}_{2, \mathbb{V}_m^{\mathbb{T}(f)}}^2 \end{array} \right) (t_1, t_2) = \\ \frac{1}{\mathcal{L}^2(\mathcal{D}^2)} \left( \frac{\partial}{\partial t_1} \mathcal{L}^2 \left( \left\{ x \in \mathcal{D}^2 : \mathcal{I}_{1, \mathbb{V}_m^{\mathbb{T}(f)}}^2(x) < t_1 \right\} \right) + \frac{\partial}{\partial t_2} \mathcal{L}^2 \left( \left\{ x \in \mathcal{D}^2 : \mathcal{I}_{2, \mathbb{V}_m^{\mathbb{T}(f)}}^2(x) < t_2 \right\} \right) \right) \end{aligned}$$

Cet histogramme conjoint bi-dimensionnel (périmètre,aire) s'obtient également par la projection de l'histogramme conjoint tri-dimensionnel (nombre d'Euler, périmètre, aire) sur le plan défini par les axes associés au périmètre et à l'aire.

La Figure 7.4 illustre les cartographies et histogrammes des fonctionnelles de Minkowski à VAG de l'image 'Lena'  $f$ . Les VAG sont homogènes par rapport au critère de luminance ( $\mathbb{T}(f) = f$ ) avec la tolérance  $m = 40$  selon le modèle CLIP.

Les histogrammes des cartographies des fonctionnelles de Minkowski à VAG définissent une signature topologique et géométrique d'une image à niveaux de gris. Ils fournissent une distribution statistique de la topologie et de la géométrie des structures d'une image à niveaux de gris, et pas seulement des intensités de l'image comme les histogrammes classiques des niveaux de gris. Grâce à cette signature, des mesures de similarité entre des images à niveaux de gris sont déterminées (à savoir les distances entre histogrammes).

## Distance entre histogrammes

**Définition 7.9** [*Distance entre histogrammes des fonctionnelles de Minkowski à VAG*]

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $(m_{\square}, \mathbb{T}, f_1, f_2) \in \mathbb{E}_{\oplus} \times \mathcal{C}r \times \mathcal{I}^2$ . La similarité entre les deux images  $f_1$  et  $f_2$  peut se quantifier par la distance entre les histogrammes de leurs cartographies des fonctionnelles de Minkowski à VAG. La distance utilisée est la distance  $L^1$  entre les histogrammes cumulés [Riv08]. La distance entre les histogrammes des cartographies des fonctionnelles de Minkowski à VAG de  $f_1$  et  $f_2$  est donc définie pour tout  $d \in \llbracket 0, n \rrbracket$  par :

$$\text{dist} \left( \mathbb{H}_{d, \mathbb{V}_m^{\mathbb{T}(f_1)}}^n, \mathbb{H}_{d, \mathbb{V}_m^{\mathbb{T}(f_2)}}^n \right) = \int_{\mathbb{R}} \left| \mathbb{H}_{d, \mathbb{V}_m^{\mathbb{T}(f_1)}}^{cum} (t) - \mathbb{H}_{d, \mathbb{V}_m^{\mathbb{T}(f_2)}}^{cum} (t) \right| dt$$

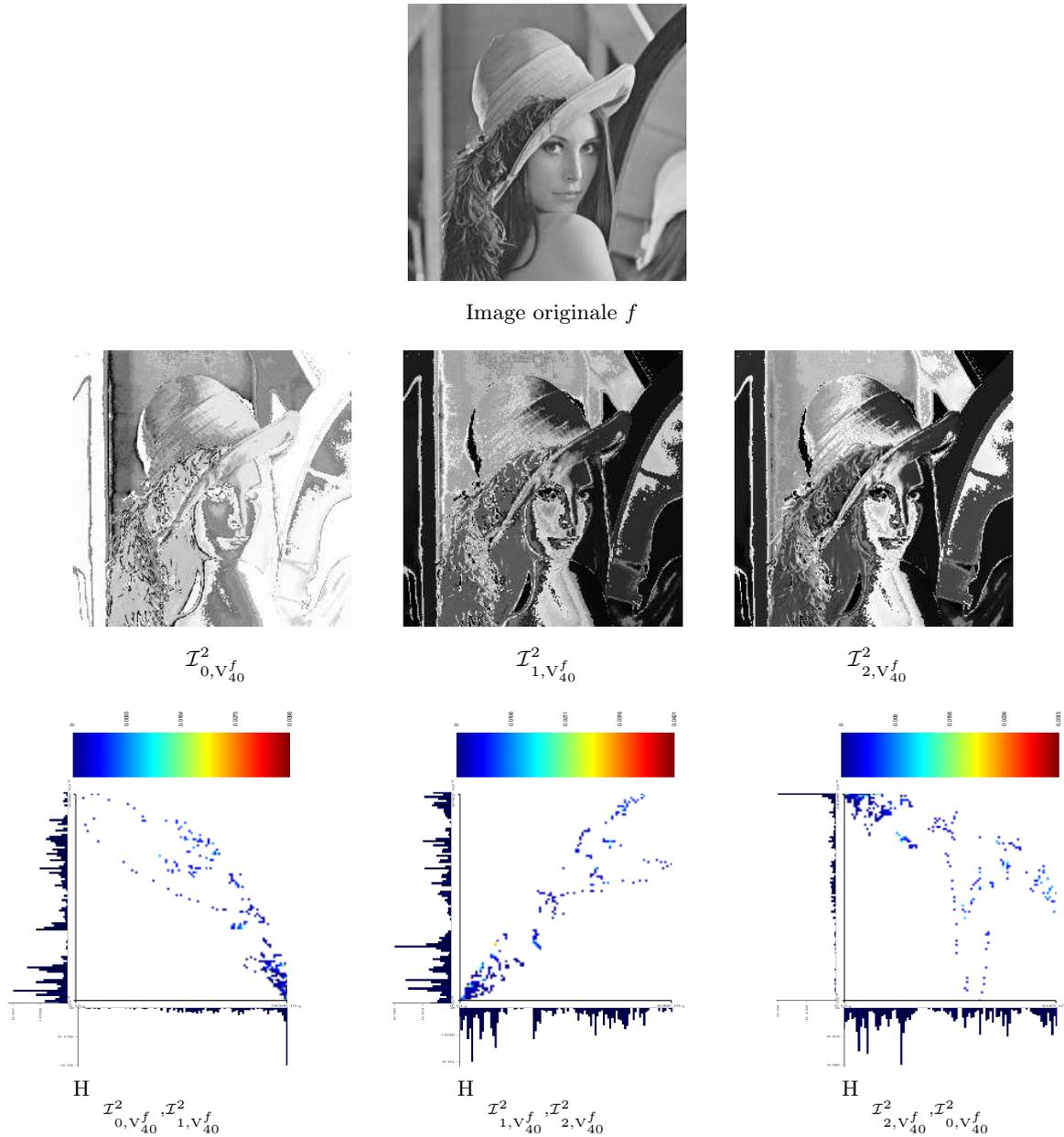


FIG. 7.4 – Cartographies et histogrammes (définis pour cent classes) des fonctionnelles de Minkowski à VAG de l'image 'Lena'  $f$  par rapport au critère de luminance ( $T(f) = f$ ) avec la tolérance d'homogénéité  $m = 40$  selon le modèle CLIP. Les bornes des axes des histogrammes sont les extrema des fonctionnelles de densité de Minkowski (Figure 7.1).

**Définition 7.10** [*Distance entre histogrammes conjoints des fonctionnelles de Minkowski à VAG*]

Soit  $k \in \llbracket 2, n + 1 \rrbracket$ . La similarité entre les deux images  $f_1$  et  $f_2$  se quantifie également par la distance  $L^1$  entre les histogrammes conjoints cumulés de leurs cartographies des fonctionnelles de Minkowski à VAG. Cette distance est donc définie définie par :

$$\text{dist} \left( \mathbf{H} \left( \mathcal{I}_{d_j, \mathbb{V}_m^{\mathbb{T}}(f_1)}^n \right)_{j \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket}, \mathbf{H} \left( \mathcal{I}_{d_j, \mathbb{V}_m^{\mathbb{T}}(f_2)}^n \right)_{j \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket} \right) = \int_{\mathbb{R}^k} \left| \mathbf{H}^{cum} \left( \mathcal{I}_{d_j, \mathbb{V}_m^{\mathbb{T}}(f_1)}^n \right)_{j \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket} \left( (t_j)_{j \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket} \right) - \mathbf{H}^{cum} \left( \mathcal{I}_{d_j, \mathbb{V}_m^{\mathbb{T}}(f_2)}^n \right)_{j \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket} \left( (t_j)_{j \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket} \right) \right| d \left( (t_j)_{j \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket} \right)$$

### Synthèse

Comparer les images à niveaux de gris à travers leurs cartographies de fonctionnelles de Minkowski à VAG peut fournir des informations supplémentaires majeures : des images qui ne peuvent pas être différenciées par leurs histogrammes d'intensités (deux images visuellement différentes peuvent avoir des histogrammes d'intensité similaires) peuvent être différenciées par les histogrammes de leurs cartographies de fonctionnelles de Minkowski à VAG. Par exemple, cette caractérisation géométrique et topologique d'image peut servir à la classification d'images (Section 7.3.2).

La section suivante définit les fonctions de Minkowski à VAG, permettant d'analyser une image à niveaux de gris de manière multi-échelle, locale et adaptative.

## 7.2 Analyse multi-échelle adaptative locale par les fonctions de Minkowski à VAG

En étudiant les cartographies des fonctionnelles de Minkowski à VAG lors de la variation de la tolérance d'homogénéité, comme cela a été fait précédemment pour les deux autres caractéristiques axiomatiques des GAN, une analyse multi-échelle locale et adaptative des images à niveaux de gris est réalisée. Ceci conduit à l'étude de l'impact d'une transformation multi-échelle sur ces cartographies [RDP09b].

### 7.2.1 Par rapport à la tolérance d'homogénéité

Les VAG sont des régions homogènes par rapport à un critère d'analyse dont la fonction est notée  $T$ , avec une tolérance d'homogénéité  $m_{\square}$  selon un modèle GLIP. Pour chaque point du support spatial d'une image à niveaux de gris, une famille croissante de VAG est obtenue avec l'augmentation de la valeur de la tolérance d'homogénéité  $m_{\square}$ . La variation de cette tolérance permet de construire des cartographies multi-échelles de fonctionnelles de Minkowski à VAG.

La Figure 7.5 expose les cartographies des fonctionnelles de Minkowski à VAG d'une IRM de cerveau humain  $f$ . Les VAG sont homogènes par rapport au critère de luminance ( $T(f) = f$ ) avec les tolérances d'homogénéité  $m = 20$ ,  $m = 30$  et  $m = 40$  selon le modèle CLIP. Ces cartographies multi-échelles définissent des fonctions de Minkowski à VAG (fonctions de Minkowski adaptatives) par rapport à la tolérance d'homogénéité  $m_{\square}$ .

**Définition 7.11** [*Fonctions de Minkowski adaptatives*]

Soit  $x \in \mathcal{D}^n$ . Les fonctions de Minkowski adaptatives  $\Phi_{d,x}^n : \mathbb{E}_{\oplus} \times \mathcal{I} \times \mathcal{C}r \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $d \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , dépendantes de la tolérance d'homogénéité, sont définies par :

$$\Phi_{d,x}^n(m_{\square}, f, T) = \mathcal{I}_{d, V_{m_{\square}}^{T(f)}}^n(x)$$

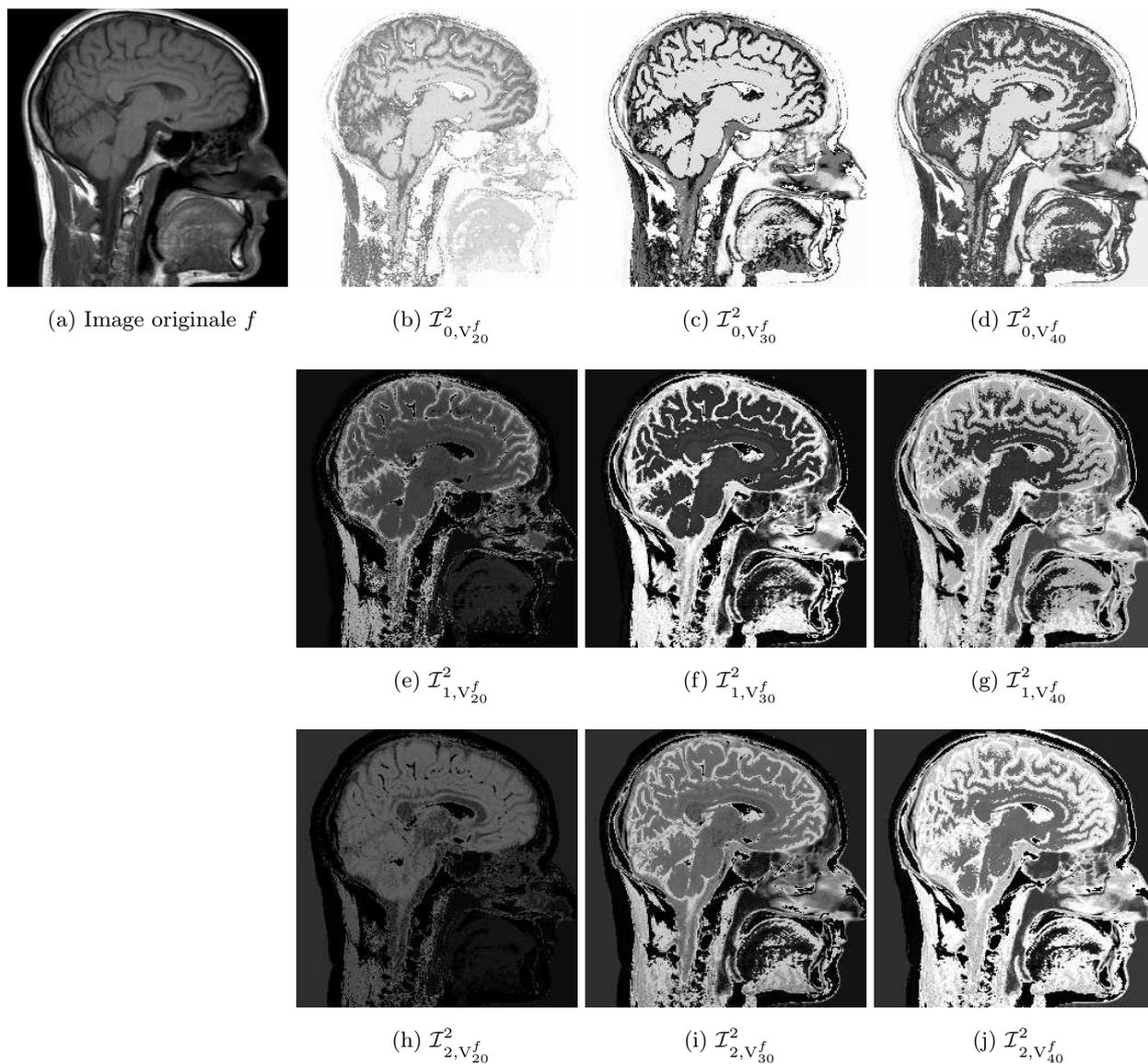
$\Phi_{n,x}^n$  est une fonction continue croissante par rapport à  $m_{\square} \in \mathbb{E}_{\oplus}$  bornée dans  $[0, 1]$  et atteint ses bornes, assimilable à une fonction de répartition de probabilité. Sa dérivée  $\phi_{n,x}^n = \frac{\partial \Phi_{n,x}^n}{\partial m_{\square}}$  est donc une densité de probabilité.

La Figure 7.6 montre les histogrammes cumulés des cartographies des fonctionnelles de Minkowski à VAG de l'IRM de cerveau humain (Figure 7.5.a) par rapport au critère de luminance ( $T(f) = f$ ) représenté dans le modèle CLIP, en fonction de la tolérance d'homogénéité  $m$ . Une représentation bi-dimensionnelle est obtenue où chaque ligne est un histogramme cumulé. La distribution statistique est représentée selon une échelle de couleurs.

La Figure 7.7 montre les courbes représentatives des fonctions de Minkowski adaptatives par rapport à la tolérance d'homogénéité pour un point  $x$  du support spatial de l'IRM de cerveau humain  $f$ . Les VAG de  $x$  sont déterminés par rapport au critère de luminance ( $T(f) = f$ ) selon le modèle CLIP.

L'éclaircissement en tout point du support spatial de la cartographie d'aire à VAG de la Figure 7.5 lorsque la tolérance augmente, en association avec la Figure 7.7 illustrent la croissance de la fonction  $\Phi_{n,x}^n$  par rapport à  $m_{\square} \in \mathbb{E}_{\oplus}$ , contrairement aux fonctions  $\Phi_{d,x}^n$  pour  $d \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . Ceci provient de la tortuosité de la frontière et du nombre de trous qui peuvent se trouver dans les VAG. La croissance de  $\Phi_{n,x}^n$  par rapport à  $m_{\square} \in \mathbb{E}_{\oplus}$  s'explique par l'Equation 6.6. De plus, les courbes de la Figure 7.7.(e) présentent quatre discontinuités permettant de distinguer cinq zones. Ainsi, pour le point  $x$ , les VAG révèlent quatre structures locales à différentes échelles (la cinquième est lorsque le VAG est égal au support spatial de l'image).

Grâce à cette variation de la tolérance d'homogénéité  $m_{\square}$ , des fonctions de Minkowski à VAG sont définies, fournissant une analyse multi-échelle adaptative et locale d'une image à niveaux de gris. La sous-section suivante porte sur l'étude de l'impact d'une transformation multi-échelle sur les cartographies de fonctionnelles de Minkowski à VAG.



Valeurs minimale et maximale de l'échelle de gris		
(a)	0	255
(b-d)	$-955.10^{-5}$	$1.10^{-5}$
(e-g)	$4.10^{-5}$	$14765.10^{-5}$
(h-j)	$1.10^{-5}$	$57701.10^{-5}$

FIG. 7.5 – Fonctions de Minkowski à VAG par rapport à la tolérance d'homogénéité. Cartographies des fonctionnelles de Minkowski à VAG (b-j) d'une IRM de cerveau humain  $f$  (a) par rapport au critère de luminosité ( $T(f) = f$ ) avec les tolérances d'homogénéité  $m = 20$ ,  $m = 30$  et  $m = 40$  selon le modèle CLIP. Les extrema de l'échelle de gris correspondent aux extrema des fonctionnelles de densité de Minkowski.

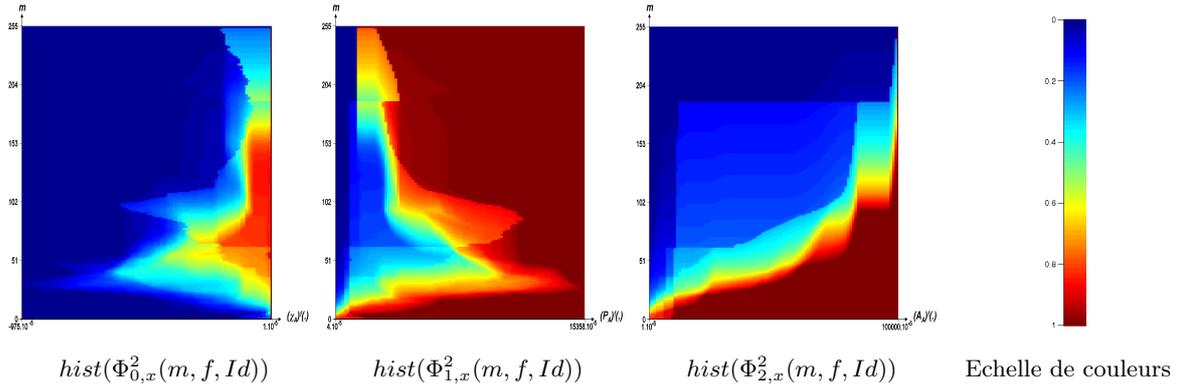


FIG. 7.6 – Histogrammes cumulés des cartographies des fonctionnelles de Minkowski à VAG de l’IRM de cerveau humain  $f$  (Figure 7.5.(a)) par rapport au critère de luminosité ( $T(f) = f$ ) représenté dans le modèle CLIP, en fonction de la tolérance d’homogénéité  $m$ . Une représentation bi-dimensionnelle est obtenue où chaque ligne est un histogramme cumulé. Les valeurs des fonctionnelles de Minkowski à VAG sont représentées selon l’axe des abscisses, et les tolérances d’homogénéité selon l’axe des ordonnées. La distribution statistique est représentée selon une échelle de couleurs.

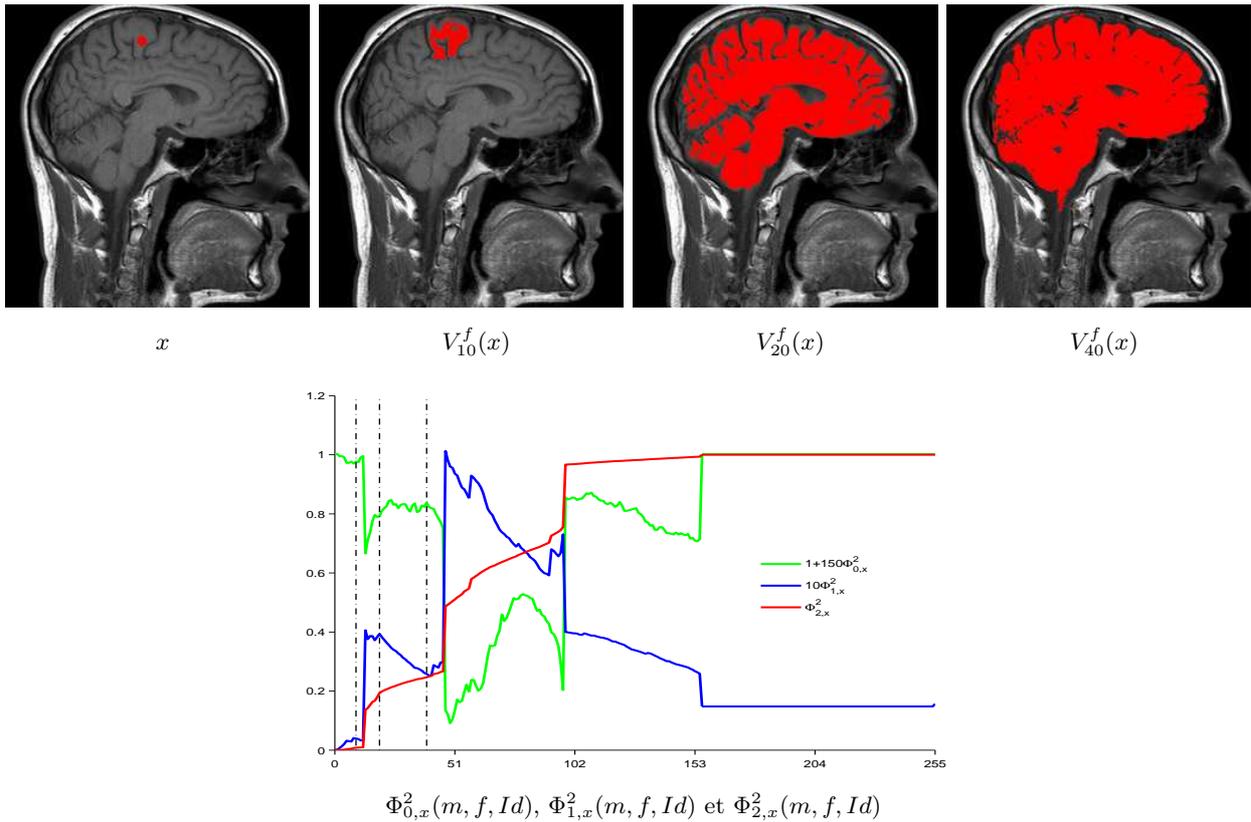


FIG. 7.7 – Image originale marquée d’un point  $x$  en rouge, puis des VAG de  $x$  déterminés par rapport au critère de luminosité ( $T(f) = f$ ) avec les tolérances d’homogénéité  $m = 10$ ,  $m = 20$  et  $m = 40$  selon le modèle CLIP. Représentation des fonctions de Minkowski adaptatives en fonction de  $m$  pour ce point  $x$ . Les lignes verticales en pointillés représentent les résultats des fonctionnelles de Minkowski à VAG du point  $x$  avec  $m = 10$ ,  $m = 20$  et  $m = 40$ .

### 7.2.2 Par rapport à un opérateur de morphologie mathématique

Les cartographies de fonctionnelles de Minkowski à VAG peuvent être calculées sur des images à niveaux de gris transformées par des opérateurs morphologiques. Par exemple, la Figure 7.8 illustre les transformations morphologiques  $T_{r,S}(f)$  ( $T_{r,S}$  est l'ouverture (resp. la fermeture) si  $r < 0$  (resp. si  $r \geq 0$ )) utilisant un disque  $S$  de rayon  $|r| \in \mathbb{R}_+$  comme élément structurant, d'une image à niveaux de gris  $f$  de cellules d'endothélium cornéen. Ensuite, cette figure montre les cartographies des fonctionnelles de Minkowski à VAG. Les VAG  $V_m^{T_{r,S}(f)}$  sont déterminés par rapport à cette transformation  $T_{r,S}$  avec la tolérance d'homogénéité  $m = 20$  selon le modèle CLIP.

La variation du rayon  $r$  permet de construire des cartographies multi-échelles de fonctionnelles de Minkowski à VAG. Ceci définit des fonctions de Minkowski à VAG par rapport au rayon  $r$  de l'élément structurant  $S$  utilisé pour la transformation morphologique.

**Définition 7.12** [*Fonctions de Minkowski adaptatives*]

Soit  $x \in \mathcal{D}^n$ . Les fonctions de Minkowski adaptatives  $\Phi_{d,x}^n : \mathbb{E}_{\oplus} \times \mathcal{I} \times \mathcal{C}r \times \mathbb{R} \times \mathcal{P}(\mathcal{D}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $d \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , dépendantes des transformations fondamentales de morphologie mathématique, sont définies par :

$$\Phi_{d,x}^n(m_{\square}, f, T, r, S) = \mathcal{I}_{d, V_m^{T_{r,S}(f)}(x)}^n$$

où  $T_{r,S}(f)$  sont l'ouverture (ou l'érosion) si  $r < 0$  et la fermeture (ou la dilatation) si  $r \geq 0$ , de l'image  $f$  par l'élément structurant  $S$  de rayon  $|r| \in \mathbb{R}_+$ .

La Figure 7.9 montre les histogrammes cumulés des cartographies des fonctionnelles de Minkowski à VAG de l'image de cellules d'endothélium cornéen (Figure 7.8.(b)) par rapport à une transformation morphologique  $T_{r,S}$  par un disque  $S$  de rayon  $r$  représentée dans le modèle CLIP, en fonction de  $r$ . Une représentation bi-dimensionnelle est obtenue où chaque ligne est un histogramme cumulé. La distribution statistique est représentée selon une échelle de couleurs.

La Figure 7.10 montre les courbes représentatives des fonctions de Minkowski adaptatives par rapport au rayon  $r$  de l'élément structurant  $S$  pour un point  $x$  du support spatial de l'image de cellules d'endothélium cornéen  $f$ . Les VAG de  $x$  sont déterminés par rapport à la transformation morphologique  $T_{r,S}$  selon le modèle CLIP. Cette figure montre que les fonctions  $\Phi_{d,x}^n$  ne sont pas monotones par rapport à  $r$ , contrairement à la fonction  $T_{r,S}$ .

Une analyse approfondie des fonctions de Minkowski à VAG (particulièrement sur les discontinuités) permettrait d'obtenir des informations de taille et/ou de forme des structures présentes dans une image à niveaux de gris.

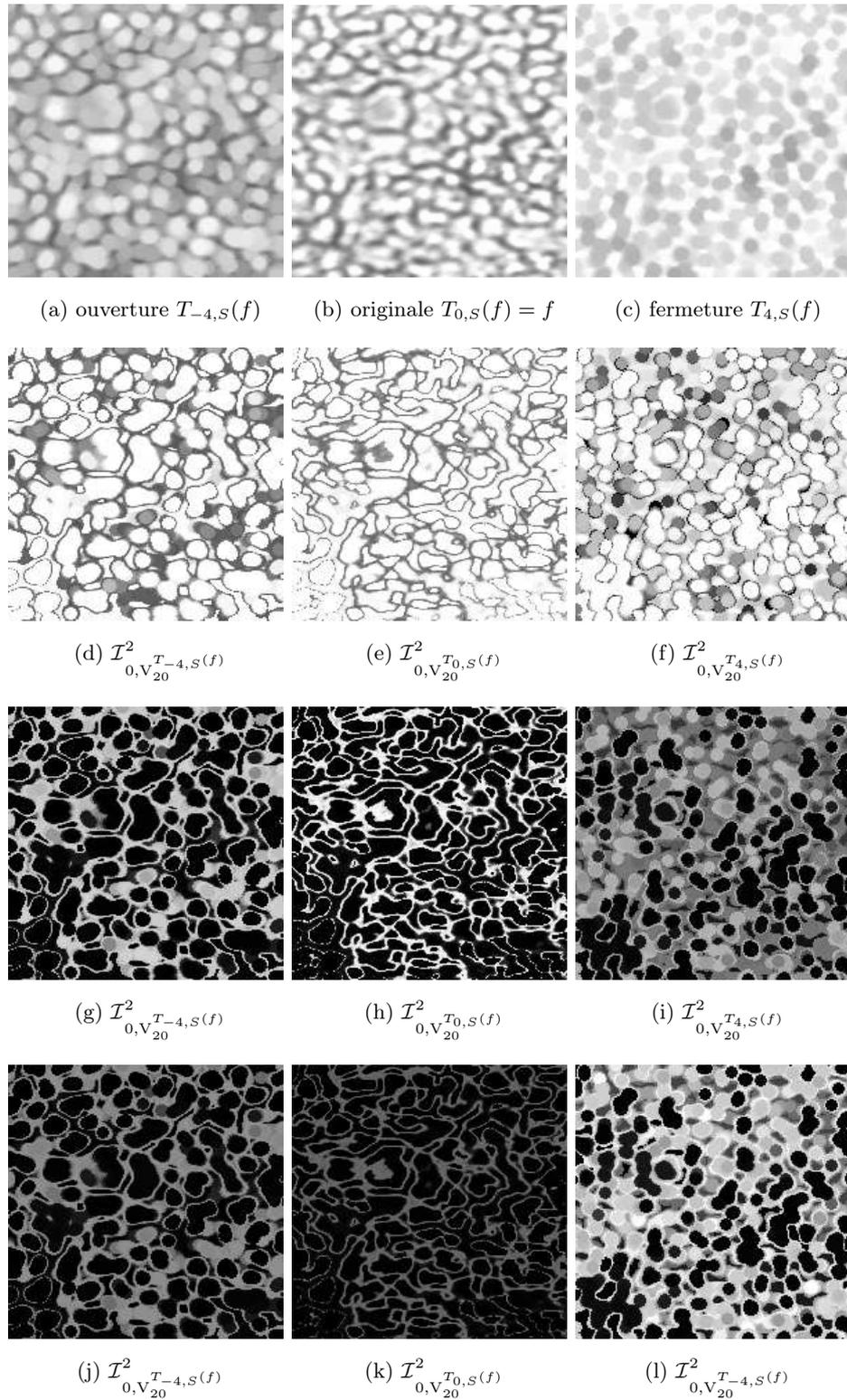


FIG. 7.8 – Fonctions de Minkowski à VAG par rapport au rayon de l'élément structurant d'une transformation morphologique. Cartographies des fonctionnelles de Minkowski à VAG (d-l) d'une image de cellules d'endothélium cornéen  $f$  (b) par rapport à une transformation morphologique  $T_{r,S}(f)$  (ouverture si  $r < 0$  (a), fermeture si  $r \geq 0$  (c)) avec un disque  $S$  de rayon  $|r| = 4$ , avec la tolérance d'homogénéité  $m = 20$  selon le modèle CLIP. Les extrema de l'échelle de gris correspondent aux extrema des fonctionnelles de densité de Minkowski.

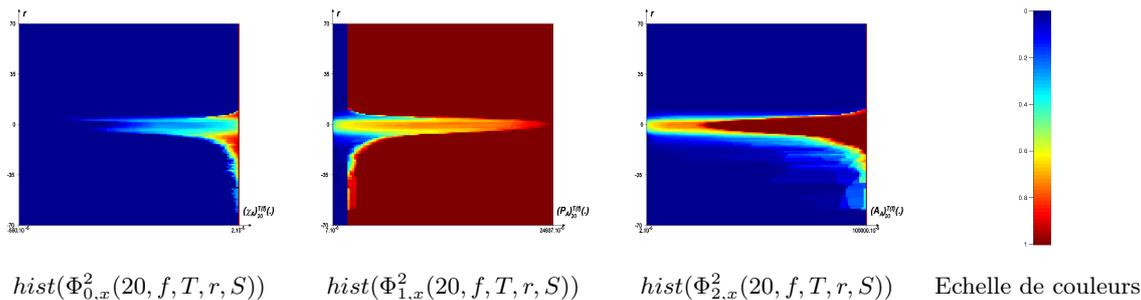


FIG. 7.9 – Histogrammes cumulés des cartographies des fonctionnelles de Minkowski à VAG de l’image de cellules d’endothélium cornéen  $f$  (Figure 7.8.(b)) par rapport à une transformation morphologique  $T_{r,S}$  (ouverture si  $r < 0$ , fermeture si  $r \geq 0$ ) par un disque  $S$  de rayon  $r$  représentée dans le modèle CLIP, en fonction de  $r$ . Une représentation bi-dimensionnelle est obtenue où chaque ligne est un histogramme cumulé. Les valeurs des fonctionnelles de Minkowski à VAG sont représentées selon l’axe des abscisses, et les rayons selon l’axe des ordonnées. La distribution statistique est représentée selon une échelle de couleurs.

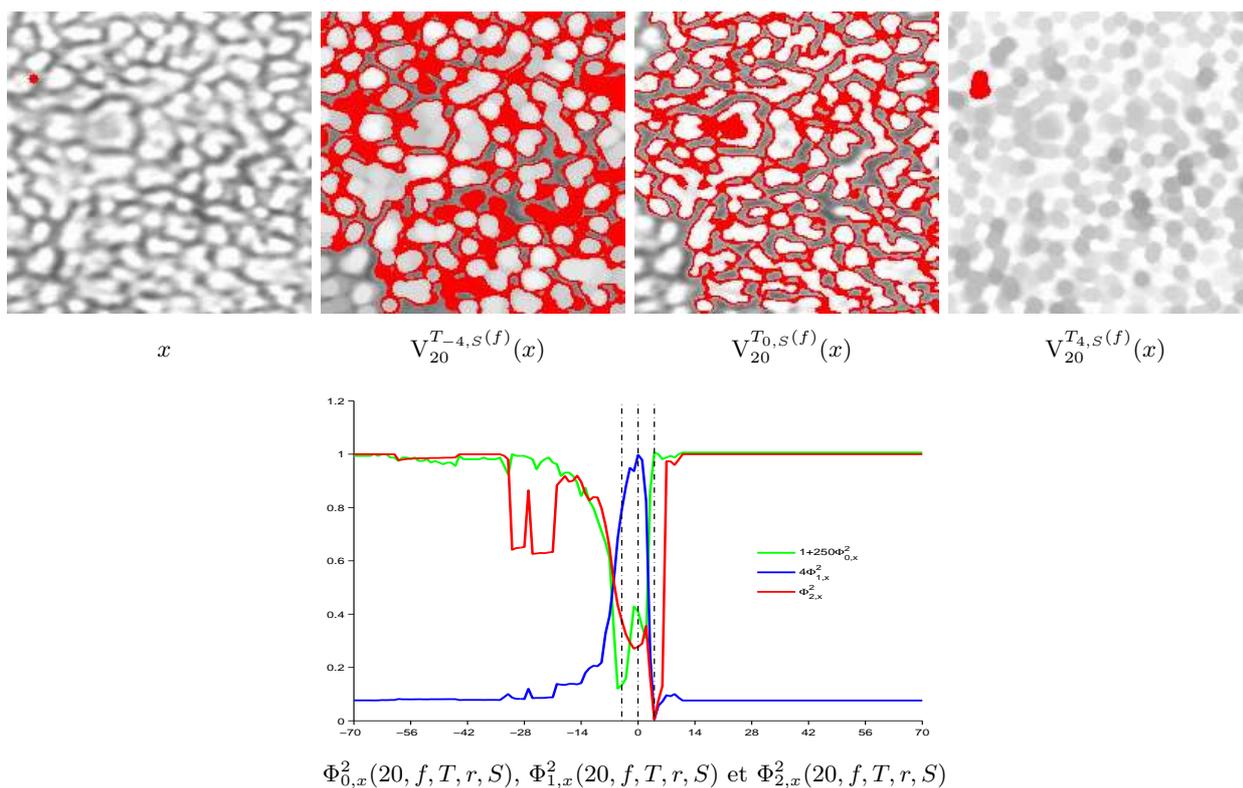


FIG. 7.10 – Image originale marquée d’un point  $x$  en rouge, puis des VAG de  $x$  déterminés par rapport à une transformation morphologique  $T_{r,S}$  (ouverture si  $r < 0$ , fermeture si  $r \geq 0$ ) par des disques  $S$  de rayons  $r = -4$ ,  $r = 0$  et  $r = 4$  avec la tolérance d’homogénéité  $m = 20$  selon le modèle CLIP. Représentation des fonctions de Minkowski adaptatives en fonction de  $r$  pour ce point  $x$ . Les lignes verticales en pointillés représentent les résultats des fonctionnelles de Minkowski à VAG du point  $x$  avec  $r = -4$ ,  $r = 0$  et  $r = 4$ .

## 7.3 Applications

### 7.3.1 Segmentation

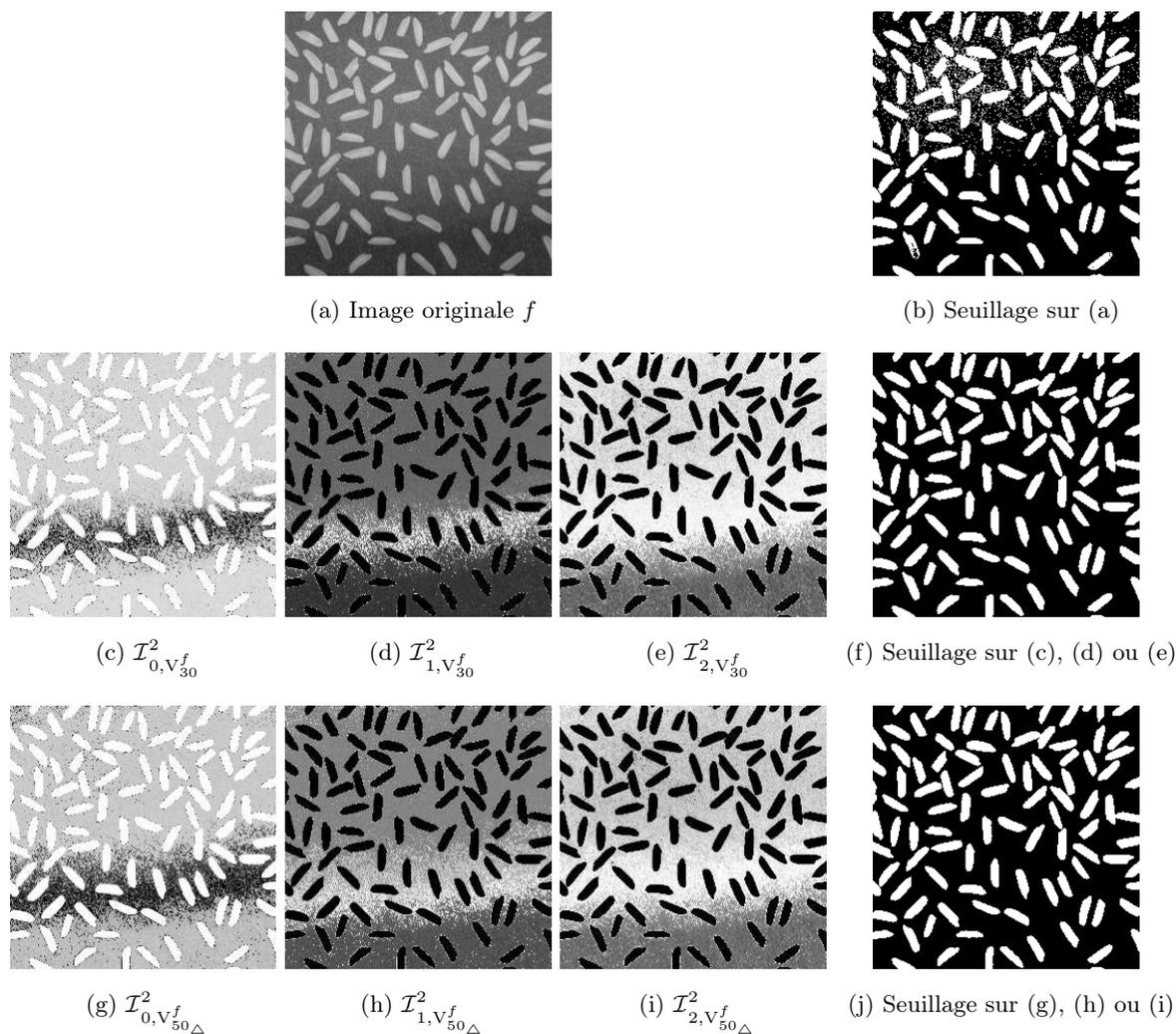
La Figure 7.11 montre une image 2D de grains de riz et les cartographies des fonctionnelles de Minkowski à VAG de cette image. L'image originale présente une dérive d'éclairage suffisamment forte pour qu'un seuillage sur les intensités ne permettent pas de segmenter les grains. Cependant, un seuillage réalisé sur les cartographies des fonctionnelles de Minkowski à VAG donne la segmentation désirée.

### 7.3.2 Classification

La Figure 7.12 montre trois images 2D de cellules séreuses et leurs histogrammes des niveaux de gris. Deux de ces images représentent un amas de cellules alors que dans la troisième, les cellules sont dispersées. Les distances  $L^1$  entre les histogrammes cumulés sont énoncées dans la Table 7.1. Ces distances ne révèlent pas la similarité des deux images d'amas de cellules.

La Figure 7.13 montre les cartographies des fonctionnelles de Minkowski à VAG de ces trois images et la Figure 7.14 montre les histogrammes mono-dimensionnels et bi-dimensionnels associés à ces cartographies. Les distances  $L^1$  entre les histogrammes cumulés sont énoncées dans la Table 7.2. Les valeurs des distances n'ont pas de signification absolue. Mais en comparant les distances indiquées dans cette table entre elles, la valeur minimum révèle les deux images les plus proches. Dans chaque cas, la distance entre les histogrammes des deux images d'amas de cellules est la plus faible (indiquée en cyan dans la Table 7.2), ce qui révèlent donc la similarité des deux images, contrairement au premier diagnostic n'utilisant pas les cartographies des fonctionnelles de Minkowski à VAG.

Cette méthode permet de distinguer des images différentes ayant des histogrammes d'intensité similaires. Ce peut être, par exemple, des images acquises à différentes échelles ou des images dont les structures présentes possèdent un agencement spatial différent. Les histogrammes des cartographies des fonctionnelles de Minkowski à VAG peuvent révéler cette distinction. De manière analogue, des images similaires peuvent avoir des histogrammes d'intensité différents. Et les histogrammes des cartographies des fonctionnelles de Minkowski à VAG peuvent révéler cette similarité. Par conséquent, cette méthode peut fournir une classification d'images à niveaux de gris suivant des critères géométriques et/ou topologiques.



Valeurs minimale et maximale de l'échelle de gris		
(a)	0	255
(b)	$-3772.10^{-5}$	$2.10^{-5}$
(c)	$4.10^{-5}$	$28381.10^{-5}$
(d)	$2.10^{-5}$	$58612.10^{-5}$
(f)	$-2646.10^{-5}$	$2.10^{-5}$
(g)	$4.10^{-5}$	$22156.10^{-5}$
(h)	$2.10^{-5}$	$69360.10^{-5}$

FIG. 7.11 – Cartographies des fonctionnelles de Minkowski à VAG de l'image 'rice'  $f$  (a) par rapport au critère de luminance ( $T(f) = f$ ) avec la tolérance d'homogénéité 30 selon le modèle CLIP (c-e) et avec la tolérance d'homogénéité 50 selon le modèle LIP (g-i). Les extrema de l'échelle de gris correspondent aux extrema de l'image originale et des fonctionnelles de densité de Minkowski. (b) Segmentation obtenue par seuillage sur les intensités de l'image originale (a). (f,j) Segmentations obtenues par seuillage sur les cartographies associées : quelque soit la fonctionnelle de Minkowski choisie, le seuillage fournit le résultat escompté.

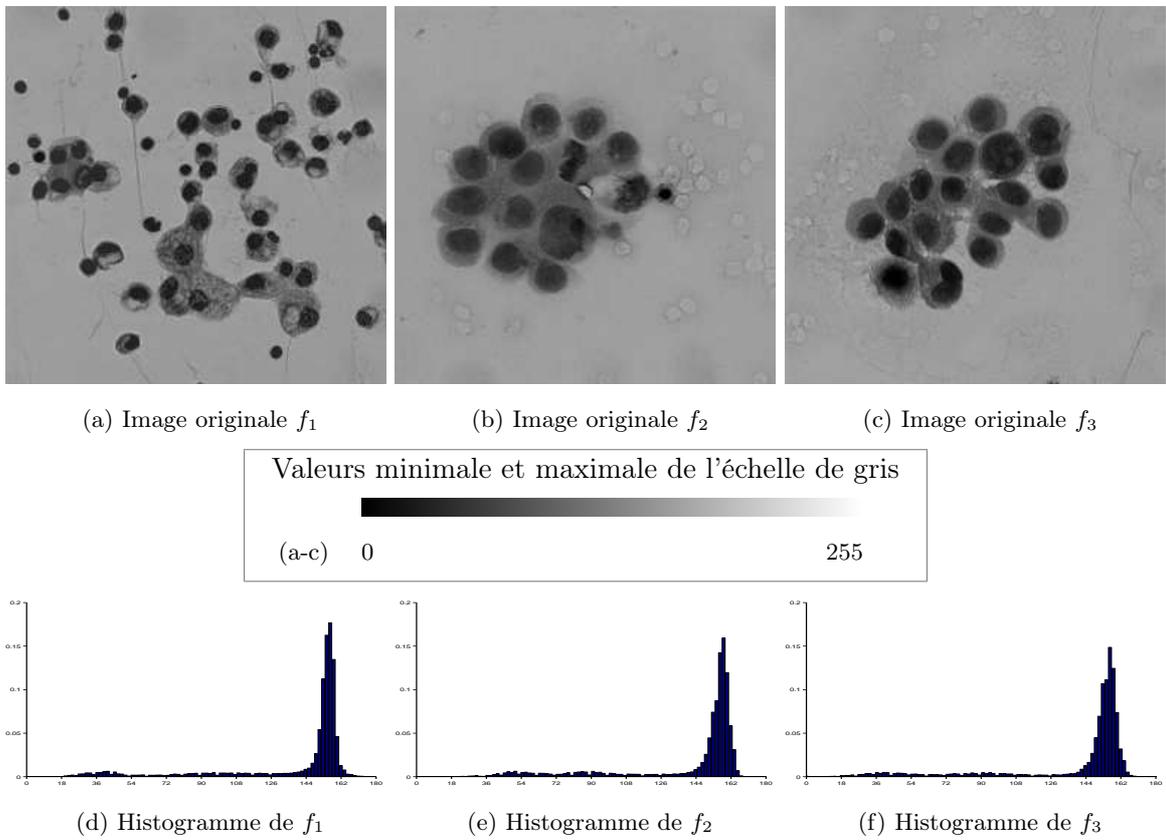
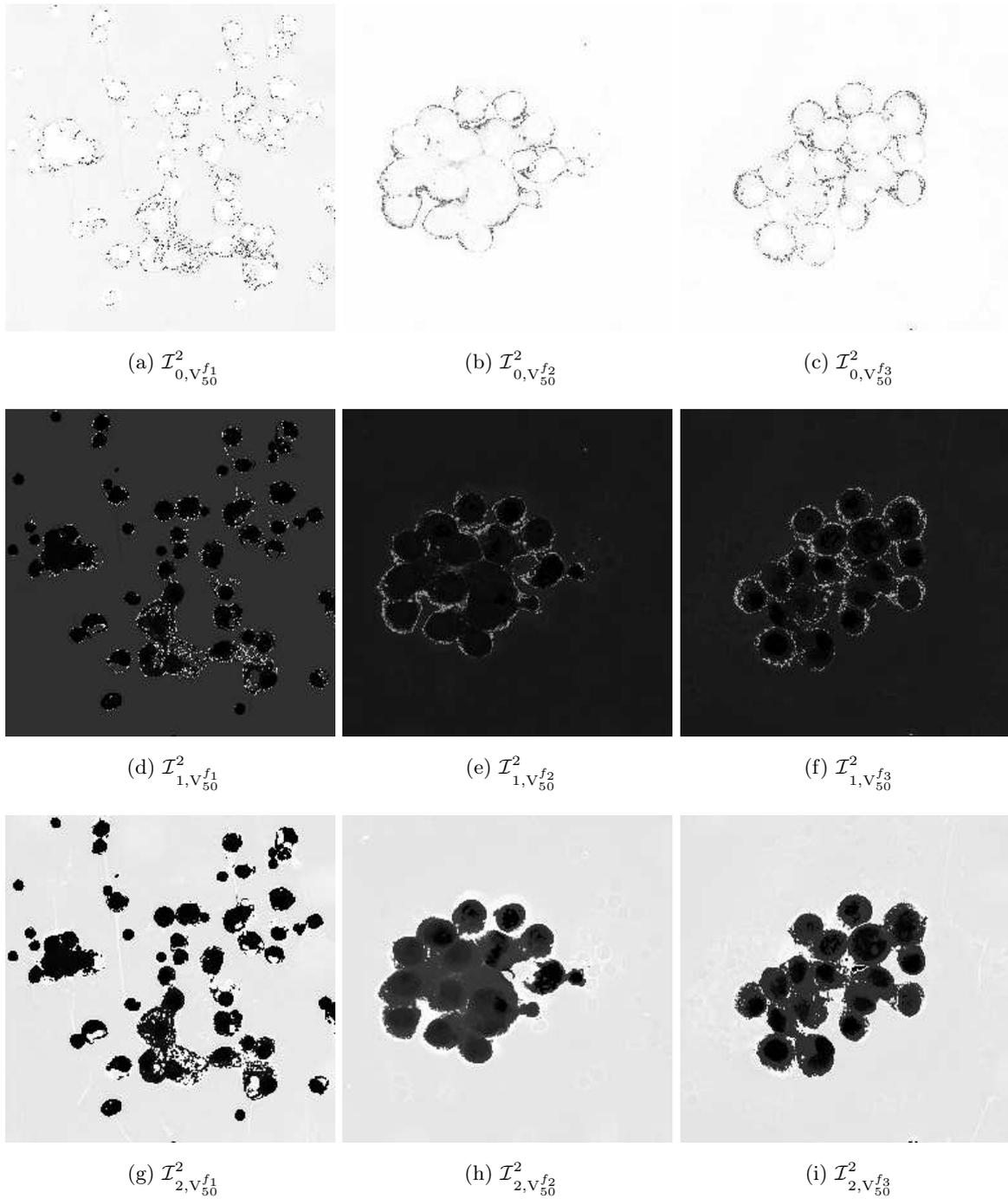


FIG. 7.12 – Images de cellules séreuses (a-c) et leurs histogrammes des niveaux de gris (d-f).

$f_u \backslash f_v$	$f_1$	$f_2$	$f_3$
$f_1$	0	1,34	0,79
$f_2$	1,34	0	1,31
$f_3$	0,79	1,31	0

TAB. 7.1 – Distances  $L^1$  ( $\times 10^2$ ) entre les histogrammes cumulés des niveaux de gris des images  $f_1$ ,  $f_2$  et  $f_3$  de cellules séreuses de la Figure 7.13. Ces distances ne permettent pas de mettre en évidence les similarités et dissimilarités : la distance entre  $f_2$  et  $f_3$  est supérieure à celle entre  $f_1$  et  $f_3$  alors que visuellement,  $f_2$  et  $f_3$  sont proches.



Valeurs minimale et maximale de l'échelle de gris		
(a-c)	$-5182.10^{-5}$	$3.10^{-5}$
(d-f)	$7.10^{-5}$	$35035.10^{-5}$
(g-i)	$3.10^{-5}$	$92651.10^{-5}$

FIG. 7.13 – Cartographies des fonctionnelles de Minkowski à VAG de trois images de cellules séreuses de la Figure 7.12 par rapport au critère de luminance ( $T(f) = f$ ) avec la tolérance d'homogénéité 50 selon le modèle CLIP. Les extrema de l'échelle de gris correspondent aux extrema des fonctionnelles de densité de Minkowski.

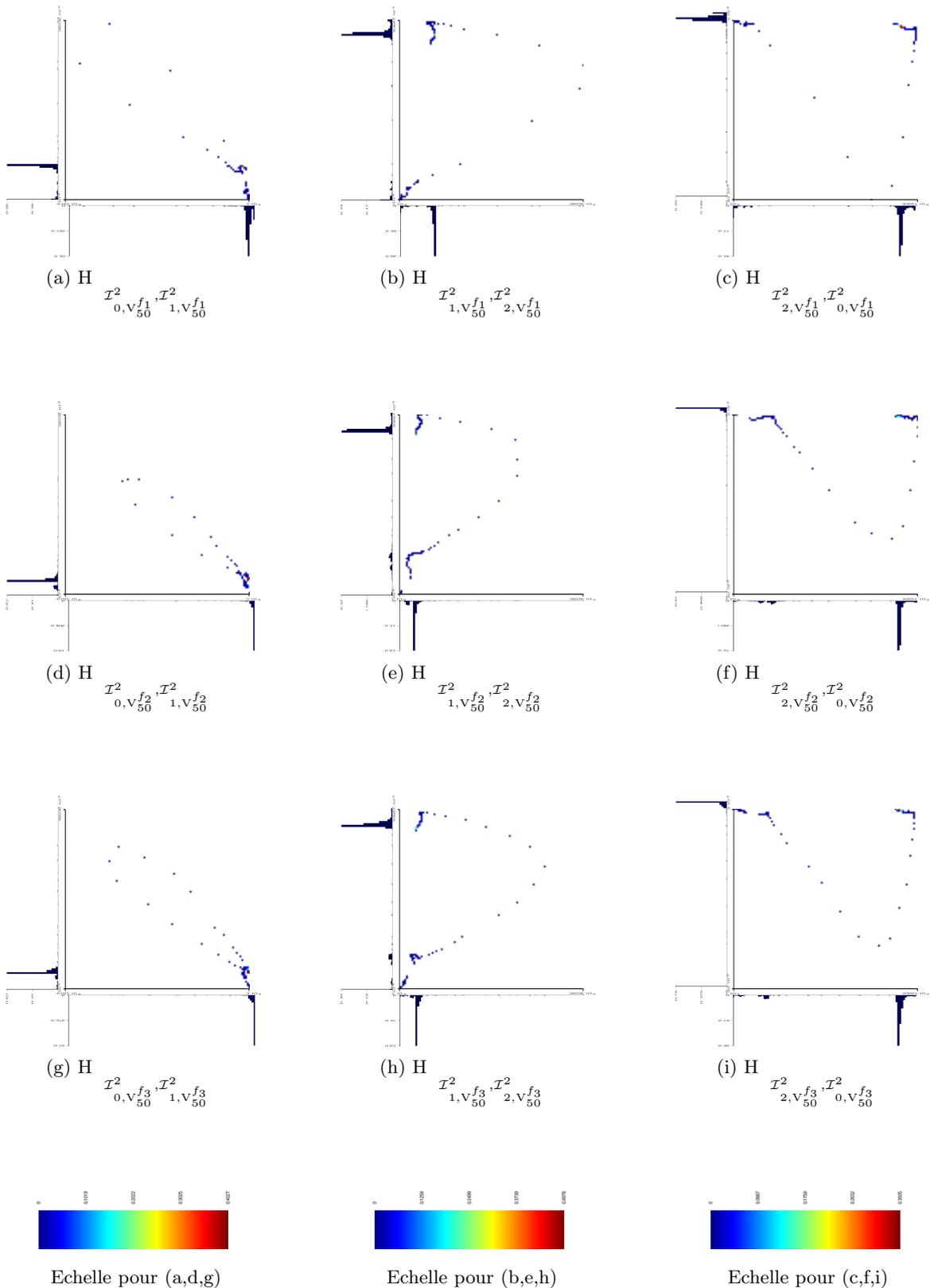


FIG. 7.14 – Histogrammes mono- et bi- dimensionnels des cartographies des fonctionnelles de Minkowski à VAG des images  $f_1$ ,  $f_2$  et  $f_3$  de cellules séreuses de la Figure 7.12. Les histogrammes mono-dimensionnels (définis pour cent classes) sont les projections sur chaque axe des histogrammes bi-dimensionnels. Les bornes des axes des histogrammes sont les extrema des fonctionnelles de densité de Minkowski (Figure 7.13).

(a)  $\text{dist} \left( H_{\mathcal{I}^2_{0, \mathcal{V}_m^{\mathcal{T}}(f_u)}} , H_{\mathcal{I}^2_{0, \mathcal{V}_m^{\mathcal{T}}(f_v)}} \right)$

$f_u \backslash f_v$	$f_1$	$f_2$	$f_3$
$f_1$	0	2,73	2,48
$f_2$	2,73	0	<b>0,31</b>
$f_3$	2,48	<b>0,31</b>	0

(b)  $\text{dist} \left( H_{\mathcal{I}^2_{0, \mathcal{V}_m^{\mathcal{T}}(f_u)}, \mathcal{I}^2_{1, \mathcal{V}_m^{\mathcal{T}}(f_u)}} , H_{\mathcal{I}^2_{0, \mathcal{V}_m^{\mathcal{T}}(f_v)}, \mathcal{I}^2_{1, \mathcal{V}_m^{\mathcal{T}}(f_v)}} \right)$

$f_u \backslash f_v$	$f_1$	$f_2$	$f_3$
$f_1$	0	2,31	2,09
$f_2$	2,31	0	<b>0,39</b>
$f_3$	2,09	<b>0,39</b>	0

(c)  $\text{dist} \left( H_{\mathcal{I}^2_{1, \mathcal{V}_m^{\mathcal{T}}(f_u)}} , H_{\mathcal{I}^2_{1, \mathcal{V}_m^{\mathcal{T}}(f_v)}} \right)$

$f_u \backslash f_v$	$f_1$	$f_2$	$f_3$
$f_1$	0	8,79	7,83
$f_2$	8,79	0	<b>1,37</b>
$f_3$	7,83	<b>1,37</b>	0

(d)  $\text{dist} \left( H_{\mathcal{I}^2_{1, \mathcal{V}_m^{\mathcal{T}}(f_u)}, \mathcal{I}^2_{2, \mathcal{V}_m^{\mathcal{T}}(f_u)}} , H_{\mathcal{I}^2_{1, \mathcal{V}_m^{\mathcal{T}}(f_v)}, \mathcal{I}^2_{2, \mathcal{V}_m^{\mathcal{T}}(f_v)}} \right)$

$f_u \backslash f_v$	$f_1$	$f_2$	$f_3$
$f_1$	0	4,79	3,98
$f_2$	4,79	0	<b>1,34</b>
$f_3$	3,98	<b>1,34</b>	0

(e)  $\text{dist} \left( H_{\mathcal{I}^2_{2, \mathcal{V}_m^{\mathcal{T}}(f_u)}} , H_{\mathcal{I}^2_{2, \mathcal{V}_m^{\mathcal{T}}(f_v)}} \right)$

$f_u \backslash f_v$	$f_1$	$f_2$	$f_3$
$f_1$	0	3,92	3,02
$f_2$	3,92	0	<b>1,06</b>
$f_3$	3,02	<b>1,06</b>	0

(f)  $\text{dist} \left( H_{\mathcal{I}^2_{2, \mathcal{V}_m^{\mathcal{T}}(f_u)}, \mathcal{I}^2_{0, \mathcal{V}_m^{\mathcal{T}}(f_u)}} , H_{\mathcal{I}^2_{2, \mathcal{V}_m^{\mathcal{T}}(f_v)}, \mathcal{I}^2_{0, \mathcal{V}_m^{\mathcal{T}}(f_v)}} \right)$

$f_u \backslash f_v$	$f_1$	$f_2$	$f_3$
$f_1$	0	0,54	0,52
$f_2$	0,54	0	<b>0,20</b>
$f_3$	0,52	<b>0,20</b>	0

(g)  $\text{dist} \left( H_{\mathcal{I}^2_{0, \mathcal{V}_m^{\mathcal{T}}(f_u)}, \mathcal{I}^2_{1, \mathcal{V}_m^{\mathcal{T}}(f_u)}, \mathcal{I}^2_{2, \mathcal{V}_m^{\mathcal{T}}(f_u)}} , H_{\mathcal{I}^2_{0, \mathcal{V}_m^{\mathcal{T}}(f_v)}, \mathcal{I}^2_{1, \mathcal{V}_m^{\mathcal{T}}(f_v)}, \mathcal{I}^2_{2, \mathcal{V}_m^{\mathcal{T}}(f_v)}} \right)$

$f_u \backslash f_v$	$f_1$	$f_2$	$f_3$
$f_1$	0	0,21	0,26
$f_2$	0,21	0	<b>0,19</b>
$f_3$	0,26	<b>0,19</b>	0

TAB. 7.2 – Distances  $L^1$  normalisées ( $\times 10^2$ ) entre les histogrammes cumulés mono- (a,c,e) bi- (b,d,f) et tri- (g) dimensionnels des cartographies des fonctionnelles de Minkowski à VAG des images  $f_1$ ,  $f_2$  et  $f_3$  de cellules sereuses de la Figure 7.12. Ces distances sont exposées dans des tableaux. Dans chaque tableau, les cases colorées représentent la distance minimale. Ainsi, elles indiquent les images les plus similaires. Tous les tableaux sont en accord pour conclure que la similarité la plus forte est entre les images  $f_2$  et  $f_3$ .

### 7.3.3 Filtrage

De la même façon que les voisinages classiques, les VAG sont utilisés comme fenêtres opérationnelles. Par conséquent, des filtrages spécifiques tels que les filtrages de Choquet à VAG [DP09a] et les opérateurs de morphologie mathématique à VAG [DP06a, DP06b, DP09b] ont été définis. La famille croissante de VAG associée à chaque point du support spatial d'une image permet de définir une fenêtre opérationnelle multi-échelle. Par conséquent, des fenêtrages adaptatifs de pondération positive décroissante avec l'éloignement par rapport au centre (filtrages passe-bas de type Gaussien, Hamming, ...) peuvent être déterminés.

#### Filtrage usuel

Soit une image à niveaux de gris  $f$  de support spatial  $\mathcal{D}^n \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $h$  une fonction définie de  $\mathcal{D}^n$  dans  $\mathbb{R}$ , et  $F$  le filtrage par convolution de  $f$  par  $h$ , c'est-à-dire pour tout  $x \in \mathcal{D}^n$ ,  $F(x) = (f * h)(x) = \int_{\mathcal{D}^n} f(y)h(x-y)dy$ . Si pour tout  $z \in \mathbb{R}^n$ , la fonction  $h$  vérifie

$$h(z) = g(r_0) \quad \text{avec} \quad r_0 = \inf \{r \in \mathbb{R}_+ : z \in B_r(0)\} = d_E(0, z) \quad (7.46)$$

où  $d_E$  dénote la distance euclidienne,  $B_\rho(x)$  la boule de centre  $x$  et de rayon  $\rho$ , et  $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  une fonction décroissante, alors la convolution  $F$  de  $f$  par  $h$  définit un filtrage passe-bas usuel.

Cette fonction décroissante  $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  peut être, par exemple, une fonction gaussienne ou une fonction rectangulaire conduisant respectivement au filtrage Gaussien et moyenneur classique (Figure 7.15.(a,b)). L'inverse de l'aire du voisinage peut également définir une fonction  $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  décroissante (Figure 7.15.(c)). Cependant, la décroissance de cette dernière fonction est trop rapide pour que les résultats de la convolution  $F$  de l'image  $f$  par  $h$  soient perceptibles. Autrement dit,  $g$  est proche d'une fonction de Dirac et la convolution  $F$  donne un résultat proche de  $f$ . Par conséquent, dans le but de ralentir sa décroissance, l'inverse du logarithme de l'aire du voisinage peut être défini (Figure 7.15.(d)) (en pratique, la normalisation  $\bar{g}$  de la fonction  $g$  est utilisée) (Equation 7.47).

$$\bar{g} = \frac{g}{\int_{\mathbb{R}_+} g} \quad \text{où} \quad \forall r \in \mathbb{R}_+, \quad g(r) = \frac{1}{\ln(1 + \mathcal{I}_n^n(B_r(x)))} \quad (7.47)$$

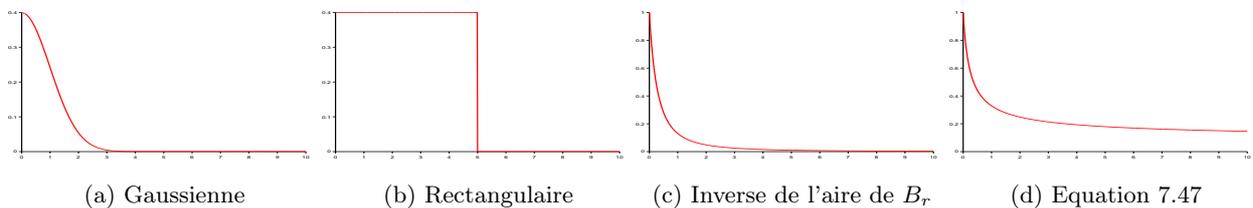


FIG. 7.15 – Courbes représentatives d'exemples de fonctions  $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  décroissantes.

La fonction  $h$  ainsi définie ne dépend pas du point  $x \in \mathcal{D}^n$ . L'utilisation des VAG et de leurs caractéristiques géométriques (en particulier l'aire) permet de pallier cette limite, et de définir une fonction  $h$  dépendante des structures locales de l'image.

### Filtrage adaptatif

Soit une image à niveaux de gris  $f$  de support spatial  $\mathcal{D}^n \subseteq \mathbb{R}^n$ , et pour tout  $x \in \mathcal{D}^n$ ,  $h_x$  une fonction définie de  $\mathcal{D}^n$  dans  $\mathbb{R}$ . Si pour tout  $z \in \mathcal{D}^n$ , la fonction  $h_x$  vérifie

$$h_x(z) = g_x(m_{\square}^0) \quad \text{avec} \quad m_{\square}^0 = \inf \left\{ m_{\square} \in \mathbb{E}_{\oplus} : x - z \in V_{m_{\square}}^{\mathcal{T}(f)}(x) \right\} \quad (7.48)$$

où pour tout  $x \in \mathcal{D}^n$ ,  $g_x : \mathbb{E}_{\oplus} \rightarrow \mathbb{R}_+$  est une fonction décroissante, alors la convolution de  $f$  par  $h_x$  en tout point  $x$  définit un filtrage passe-bas adaptatif. De manière analogue au cas usuel, la fonction  $g_x : \mathbb{E}_{\oplus} \rightarrow \mathbb{R}_+$  peut être définie par l'inverse du logarithme de l'aire du VAG ( $\overline{g}_x$  dénote la normalisation de la fonction  $g_x$ ) (Equation 7.49).

$$\overline{g}_x = \frac{g_x}{\int_{\mathbb{E}_{\oplus}} g_x} \quad \text{où} \quad \forall m_{\square} \in \mathbb{E}_{\oplus}, \quad g_x(m_{\square}) = \frac{1}{\ln \left( 1 + \mathcal{I}_{n, V_{m_{\square}}^{\mathcal{T}(f)}(x)}^n \right)} \quad (7.49)$$

La Figure 7.16 illustre les courbes représentatives des fonctions  $g_{x_1}$  et  $g_{x_2}$  pour deux points  $x_1$  et  $x_2$  du support spatial  $\mathcal{D}^2$  de l'image de Lena.



Image originale  $f$

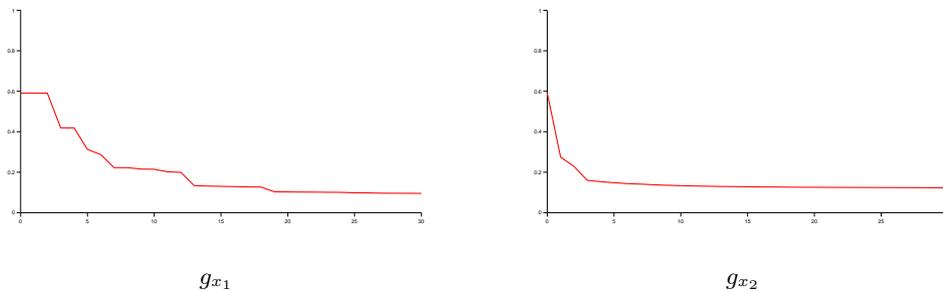


FIG. 7.16 – Courbes représentatives des fonctions  $g_{x_1}$  et  $g_{x_2}$  (Equation 7.49) pour deux points  $x_1$  et  $x_2$  du support spatial  $\mathcal{D}^2$  de l'image de Lena.

### Illustrations

En pratique, une tolérance d'homogénéité maximale  $m_{\square}^{\max}$  peut être fixée *a priori* dans le but de restreindre la fenêtre opérationnelle. Dans le cas contraire, cette fenêtre s'étend au support spatial de l'image. Les Figures 7.17 et 7.18 illustrent, à partir de diverses images à niveaux de gris, les résultats obtenus suite au filtrage adaptatif basé sur la convolution de  $f$  par  $h_x$  (Equations 7.48 et 7.49) en tout point  $x$  du support spatial. Les VAG sont déterminés par rapport au critère de luminance selon le modèle CLIP. Ces résultats sont comparés à ceux obtenus avec des voisinages usuels (Equations 7.46 et 7.47) (Figure 7.18). A l'inverse du filtrage passe-bas usuel qui laissent apparaître un flou, le filtrage passe-bas adaptatif ne dégrade pas les transitions.

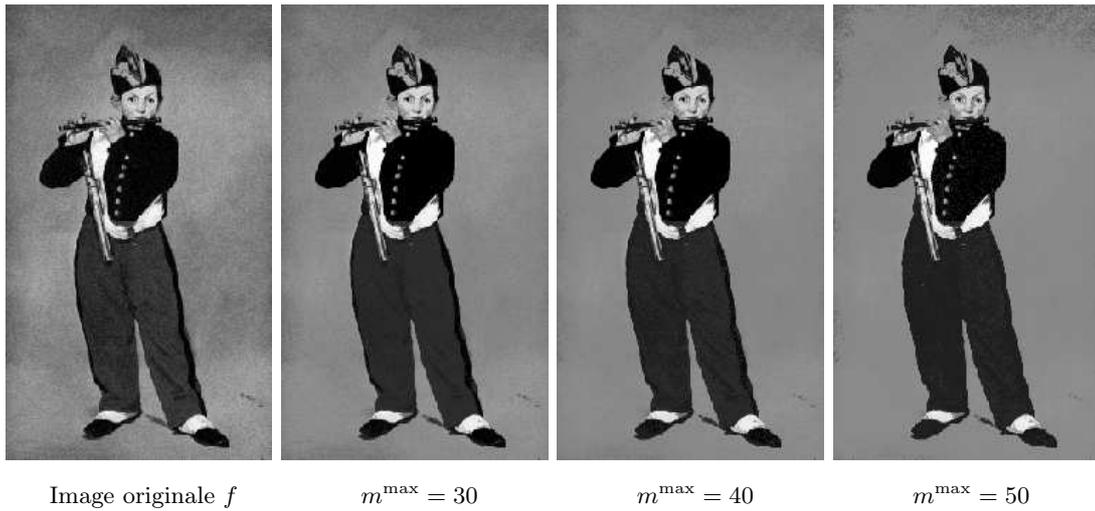


FIG. 7.17 – Filtrage passe-bas adaptatif de l'image 'fifre'  $f$  basé sur la convolution de  $f$  par  $h_x$  (Equations 7.48 et 7.49) en tout point  $x$  du support spatial. Les VAG sont déterminés par rapport au critère de luminance ( $T(f) = f$ ) avec les tolérances d'homogénéités maximales  $m^{\max} = 30$ ,  $m^{\max} = 40$  et  $m^{\max} = 50$  selon le modèle CLIP.

La fonction  $g_x$  (Equation 7.49), basée sur une caractéristique géométrique (l'aire) des VAG, dépend des structures locales de l'image. Par conséquent, ces filtrages à VAG montrent un avantage pratique dû au caractère spatialement adaptatif et intrinsèque de leurs fenêtres opérationnelles (VAG). Les illustrations montrent qu'ils peuvent être utilisés pour la restauration d'images.

La décroissance de la fonction  $g_x : \mathbb{E}_{\oplus} \rightarrow \mathbb{R}_+$  pour tout  $x \in \mathcal{D}^n$  permet de définir un filtrage adaptatif passe-bas. L'utilisation d'autres fonctions  $g_x$ , non nécessairement décroissantes, constitue une perspective de cette thèse, et permettrait de définir d'autres filtrages adaptatifs.



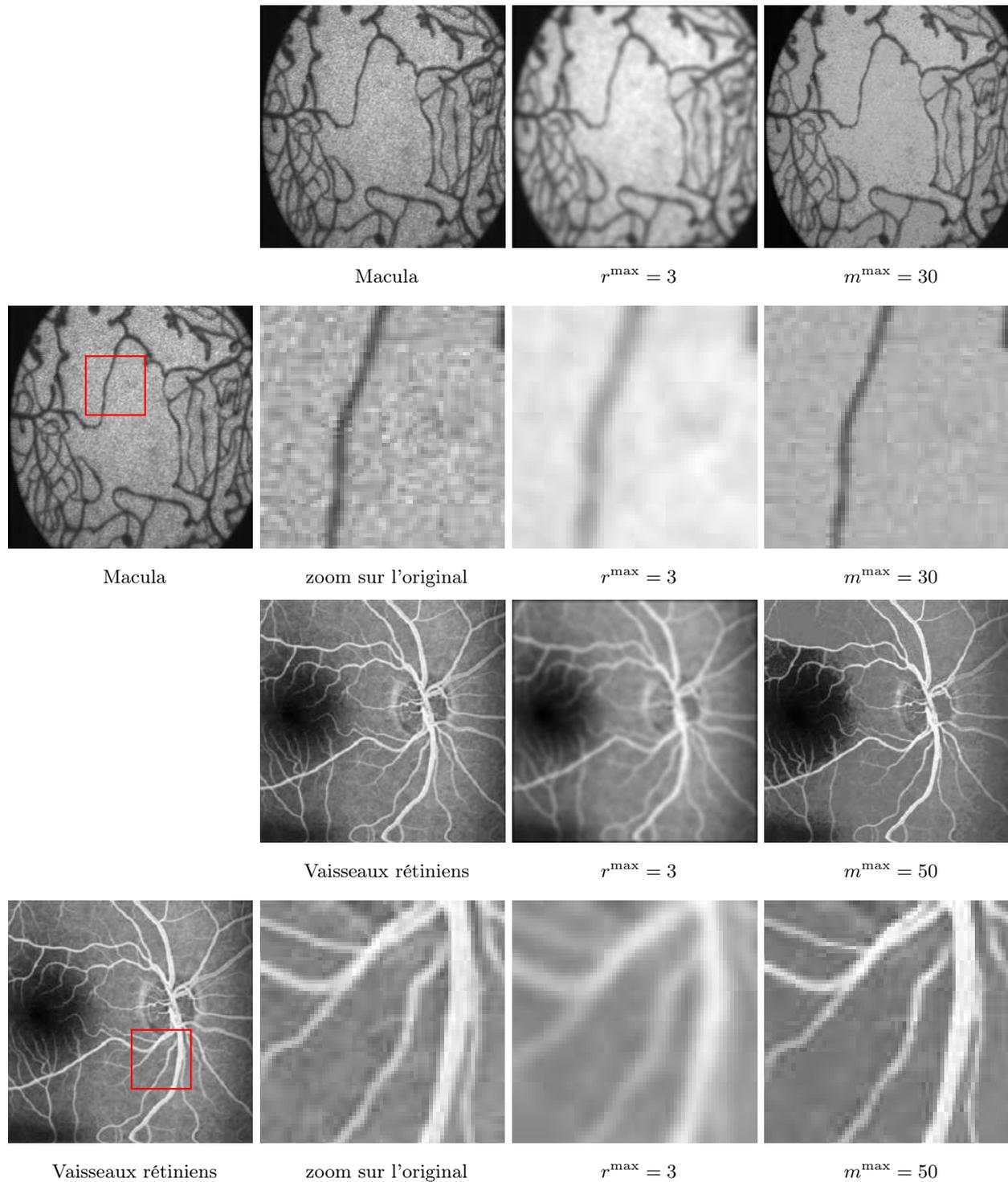


FIG. 7.18 – Comparaison entre les filtrages passe-bas adaptatif et usuel basés sur la convolution par une fenêtre opérationnelle (adaptative ou usuelle) pondérée par l'inverse du logarithme des aires des voisinages des différents niveaux. Les voisinages usuels sont des boules de rayon maximum  $r^{\max}$ . Les VAG sont déterminés par rapport au critère de luminance avec les tolérances d'homogénéités maximales  $m^{\max}$  selon le modèle CLIP.

# Chapitre 8

## Morphométrie à VAG

### Sommaire

---

<b>8.1</b>	<b>Introduction par les fonctionnelles géométriques à VAG</b>	<b>173</b>
<b>8.2</b>	<b>Analyse adaptative locale par les fonctionnelles morphométriques à VAG</b>	<b>177</b>
8.2.1	Définition et propriétés	177
8.2.2	Cartographies	178
8.2.3	Histogrammes et diagrammes de forme	179
<b>8.3</b>	<b>Analyse multi-échelle adaptative locale par les fonctions morphométriques à VAG</b>	<b>181</b>
8.3.1	Par rapport à la tolérance d'homogénéité	181
8.3.2	Par rapport à un opérateur de morphologie mathématique	182
<b>8.4</b>	<b>Applications</b>	<b>186</b>
8.4.1	Classification de formes de graines	186
8.4.2	Homogénéité des formes de cellules cornéennes	188
8.4.3	Cristallisation de l'acide adipique	190

---

### 8.1 Introduction par les fonctionnelles géométriques à VAG

La géométrie à VAG définit des fonctionnelles géométriques sur les VAG de chaque point du support spatial d'une image. Des fonctionnelles géométriques à VAG faibles ou forts d'un point, d'un ensemble ou itéré d'un point (Chapitre 6) sont déterminées.

Le Chapitre 4 énonce six fonctionnelles géométriques définies pour un espace bi-dimensionnel : l'aire, le périmètre, les diamètres de Feret minimal et maximal et les rayons des disques inscrit et circonscrit, notés  $A$ ,  $P$ ,  $\omega$ ,  $d$ ,  $r$  et  $R$ , respectivement. Soit  $\mathcal{M}^G$  une de ces fonctionnelles géométriques, autrement dit soit  $\mathcal{M}^G \in \{A, P, \omega, d, r, R\}$ .

#### Définition 8.1 [*Fonctionnelles géométriques à VAG*]

Soit  $(m_{\square}, T, f, p) \in \mathbb{E}^{\oplus} \times Cr \times \mathcal{I} \times \mathbb{N}^*$ .

Les fonctionnelles géométriques à VAG faibles (resp. forts) d'un point, notées  $\mathcal{M}_{V_{m_{\square}}^{T(f)}}^G$  (resp.  $\mathcal{M}_{R_{m_{\square}}^{T(f)}}^G$ ), sont définies de  $\mathcal{D}^2$  dans  $\mathbb{R}$  par :

$$\mathcal{M}_{V_{m_{\square}}^{T(f)}}^G : x \mapsto \mathcal{M}^G \left( V_{m_{\square}}^{T(f)}(x) \right) \quad \text{et} \quad \mathcal{M}_{R_{m_{\square}}^{T(f)}}^G : x \mapsto \mathcal{M}^G \left( R_{m_{\square}}^{T(f)}(x) \right)$$

Les fonctionnelles géométriques à VAG faibles (resp. forts) d'un ensemble, notées  $\mathcal{M}_{V_{m_{\square}}^{\mathbb{T}(f)}}^G$  (resp.  $\mathcal{M}_{R_{m_{\square}}^{\mathbb{T}(f)}}^G$ ), sont définies de  $\mathcal{P}(\mathcal{D}^2)$  dans  $\mathbb{R}$  par :

$$\mathcal{M}_{V_{m_{\square}}^{\mathbb{T}(f)}}^G : X \mapsto \mathcal{M}^G \left( V_{m_{\square}}^{\mathbb{T}(f)}(X) \right) \quad \text{et} \quad \mathcal{M}_{R_{m_{\square}}^{\mathbb{T}(f)}}^G : X \mapsto \mathcal{M}^G \left( R_{m_{\square}}^{\mathbb{T}(f)}(X) \right)$$

Les fonctionnelles géométriques à VAG faibles (resp. forts) itérés d'un point, notées  $\mathcal{M}_{V_{m_{\square},p}^{\mathbb{T}(f)}}^G$  (resp.  $\mathcal{M}_{R_{m_{\square},p}^{\mathbb{T}(f)}}^G$ ), sont définies de  $\mathcal{D}^2$  dans  $\mathbb{R}$  par :

$$\mathcal{M}_{V_{m_{\square},p}^{\mathbb{T}(f)}}^G : x \mapsto \mathcal{M}^G \left( V_{m_{\square},p}^{\mathbb{T}(f)}(x) \right) \quad \text{et} \quad \mathcal{M}_{R_{m_{\square},p}^{\mathbb{T}(f)}}^G : x \mapsto \mathcal{M}^G \left( R_{m_{\square},p}^{\mathbb{T}(f)}(x) \right)$$

**Proposition 8.1**  $\forall (m_{\square}, m_{\square}^1, m_{\square}^2, \mathbb{T}, f, x, x_1, x_2, X, X_1, X_2, p, p_1, p_2) \in (\mathbb{E}_{\oplus})^3 \times \mathcal{C}r \times \mathcal{I} \times (\mathcal{D}^2)^3 \times \mathcal{P}(\mathcal{D}^2)^3 \times (\mathbb{N}^*)^3$

1. Si  $\mathcal{M}^G \neq \mathbb{P}$  alors

$$\mathcal{M}^G(X) \leq \mathcal{M}_{V_{m_{\square}}^{\mathbb{T}(f)}}^G(X)$$

$$\mathcal{M}^G(X) \leq \mathcal{M}_{R_{m_{\square}}^{\mathbb{T}(f)}}^G(X)$$

2. égalité entre points voisins de même ton de gris :

$$\left( \begin{array}{l} x_1 \in V_{m_{\square}}^{\mathbb{T}(f)}(x_2) \\ \mathbb{T}(f)(x_1) = \mathbb{T}(f)(x_2) \end{array} \right) \Rightarrow \mathcal{M}_{V_{m_{\square}}^{\mathbb{T}(f)}}^G(x_1) = \mathcal{M}_{V_{m_{\square}}^{\mathbb{T}(f)}}^G(x_2)$$

3. croissance par rapport à  $m_{\square}$  (à l'exception du périmètre) :

Si  $\mathcal{M}^G \neq \mathbb{P}$  alors

$$m_{\square}^1 \leq m_{\square}^2 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{M}_{V_{m_{\square}^1}^{\mathbb{T}(f)}}^G(x) \leq \mathcal{M}_{V_{m_{\square}^2}^{\mathbb{T}(f)}}^G(x) \\ \mathcal{M}_{R_{m_{\square}^1}^{\mathbb{T}(f)}}^G(x) \leq \mathcal{M}_{R_{m_{\square}^2}^{\mathbb{T}(f)}}^G(x) \\ \mathcal{M}_{V_{m_{\square}^1}^{\mathbb{T}(f)}}^G(X) \leq \mathcal{M}_{V_{m_{\square}^2}^{\mathbb{T}(f)}}^G(X) \\ \mathcal{M}_{R_{m_{\square}^1}^{\mathbb{T}(f)}}^G(X) \leq \mathcal{M}_{R_{m_{\square}^2}^{\mathbb{T}(f)}}^G(X) \\ \mathcal{M}_{V_{m_{\square}^1,p}^{\mathbb{T}(f)}}^G(x) \leq \mathcal{M}_{V_{m_{\square}^2,p}^{\mathbb{T}(f)}}^G(x) \\ \mathcal{M}_{R_{m_{\square}^1,p}^{\mathbb{T}(f)}}^G(x) \leq \mathcal{M}_{R_{m_{\square}^2,p}^{\mathbb{T}(f)}}^G(x) \end{array} \right.$$

4. croissance par rapport à  $X$  (à l'exception du périmètre) :

Si  $\mathcal{M}^G \neq \mathbb{P}$  alors

$$X_1 \subseteq X_2 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{M}_{V_{m_{\square}}^{\mathbb{T}(f)}}^G(X_1) \leq \mathcal{M}_{V_{m_{\square}}^{\mathbb{T}(f)}}^G(X_2) \\ \mathcal{M}_{R_{m_{\square}}^{\mathbb{T}(f)}}^G(X_1) \leq \mathcal{M}_{R_{m_{\square}}^{\mathbb{T}(f)}}^G(X_2) \end{array} \right.$$

5. croissance par rapport à  $p$  (à l'exception du périmètre) :

Si  $\mathcal{M}^G \neq P$  alors

$$p_1 \leq p_2 \Rightarrow \begin{cases} \mathcal{M}_{V_{m\mathbb{O},p_1}}^{G, \mathbb{T}(f)}(x) \leq \mathcal{M}_{V_{m\mathbb{O},p_2}}^{G, \mathbb{T}(f)}(x) \\ \mathcal{M}_{R_{m\mathbb{O},p_1}}^{G, \mathbb{T}(f)}(x) \leq \mathcal{M}_{R_{m\mathbb{O},p_2}}^{G, \mathbb{T}(f)}(x) \end{cases}$$

6. invariance par  $\oplus$ -addition vectorielle :

$$\forall c_{\mathbb{O}} \in \mathbb{E}_{\mathbb{O}} : \begin{cases} \mathcal{M}_{V_{m\mathbb{O}}}^{G, \mathbb{T}(f) \oplus c_{\mathbb{O}}}(x) = \mathcal{M}_{V_{m\mathbb{O}}}^{G, \mathbb{T}(f)}(x) \\ \mathcal{M}_{R_{m\mathbb{O}}}^{G, \mathbb{T}(f) \oplus c_{\mathbb{O}}}(x) = \mathcal{M}_{R_{m\mathbb{O}}}^{G, \mathbb{T}(f)}(x) \\ \mathcal{M}_{V_{m\mathbb{O}}}^{G, \mathbb{T}(f) \oplus c_{\mathbb{O}}}(X) = \mathcal{M}_{V_{m\mathbb{O}}}^{G, \mathbb{T}(f)}(X) \\ \mathcal{M}_{R_{m\mathbb{O}}}^{G, \mathbb{T}(f) \oplus c_{\mathbb{O}}}(X) = \mathcal{M}_{R_{m\mathbb{O}}}^{G, \mathbb{T}(f)}(X) \\ \mathcal{M}_{V_{m\mathbb{O},p}}^{G, \mathbb{T}(f) \oplus c_{\mathbb{O}}}(x) = \mathcal{M}_{V_{m\mathbb{O},p}}^{G, \mathbb{T}(f)}(x) \\ \mathcal{M}_{R_{m\mathbb{O},p}}^{G, \mathbb{T}(f) \oplus c_{\mathbb{O}}}(x) = \mathcal{M}_{R_{m\mathbb{O},p}}^{G, \mathbb{T}(f)}(x) \end{cases}$$

7. compatibilité avec la  $\otimes$ -multiplication scalaire :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^* : \begin{cases} \mathcal{M}_{V_{m\mathbb{O}}}^{G, \alpha \otimes \mathbb{T}(f)}(x) = \mathcal{M}_{V_{\frac{1}{\alpha} \otimes m_{\mathbb{O}}}}^{G, \mathbb{T}(f)}(x) \\ \mathcal{M}_{R_{m\mathbb{O}}}^{G, \alpha \otimes \mathbb{T}(f)}(x) = \mathcal{M}_{R_{\frac{1}{\alpha} \otimes m_{\mathbb{O}}}}^{G, \mathbb{T}(f)}(x) \\ \mathcal{M}_{V_{m\mathbb{O}}}^{G, \alpha \otimes \mathbb{T}(f)}(X) = \mathcal{M}_{V_{\frac{1}{\alpha} \otimes m_{\mathbb{O}}}}^{G, \mathbb{T}(f)}(X) \\ \mathcal{M}_{R_{m\mathbb{O}}}^{G, \alpha \otimes \mathbb{T}(f)}(X) = \mathcal{M}_{R_{\frac{1}{\alpha} \otimes m_{\mathbb{O}}}}^{G, \mathbb{T}(f)}(X) \\ \mathcal{M}_{V_{m\mathbb{O},p}}^{G, \alpha \otimes \mathbb{T}(f)}(x) = \mathcal{M}_{V_{\frac{1}{\alpha} \otimes m_{\mathbb{O},p}}}^{G, \mathbb{T}(f)}(x) \\ \mathcal{M}_{R_{m\mathbb{O},p}}^{G, \alpha \otimes \mathbb{T}(f)}(x) = \mathcal{M}_{R_{\frac{1}{\alpha} \otimes m_{\mathbb{O},p}}}^{G, \mathbb{T}(f)}(x) \end{cases}$$

8. encadrement (à l'exception du périmètre) :

Si  $\mathcal{M}^G \neq P$  alors

$$\mathcal{M}_{V_{m\mathbb{O}}}^{G, \mathbb{T}(f)}(x) \leq \mathcal{M}_{R_{m\mathbb{O}}}^{G, \mathbb{T}(f)}(x) \leq \mathcal{M}_{V_{2 \otimes m_{\mathbb{O}}}}^{G, \mathbb{T}(f)}(x)$$

$$\mathcal{M}_{V_{m\mathbb{O}}}^{G, \mathbb{T}(f)}(X) \leq \mathcal{M}_{R_{m\mathbb{O}}}^{G, \mathbb{T}(f)}(X) \leq \mathcal{M}_{V_{2 \otimes m_{\mathbb{O}}}}^{G, \mathbb{T}(f)}(X)$$

$$\mathcal{M}_{V_{m\mathbb{O},p}}^{G, \mathbb{T}(f)}(x) \leq \mathcal{M}_{R_{m\mathbb{O},p}}^{G, \mathbb{T}(f)}(x) \leq \mathcal{M}_{V_{2 \otimes m_{\mathbb{O},p}}}^{G, \mathbb{T}(f)}(x)$$

9. compatibilité avec la  $k_1, k_2$ -lipschitzité (à l'exception du périmètre) :

Si  $\mathcal{M}^G \neq \mathbb{P}$  alors  $\forall k_1, k_2 \in \mathbb{R}_+^*$  tels que  $k_1 \leq k_2$

$$\text{T } k_1, k_2\text{-lipschitzienne} \Rightarrow \begin{cases} \mathcal{M}_{V_{m\mathbb{O}}}^{G, k_2 f}(x) \leq \mathcal{M}_{V_{m\mathbb{O}}}^{G, \text{T}(f)}(x) \leq \mathcal{M}_{V_{m\mathbb{O}}}^{G, k_1 f}(x) \\ \mathcal{M}_{R_{\frac{1}{2}} \otimes m\mathbb{O}}^{G, k_2 f}(x) \leq \mathcal{M}_{R_{m\mathbb{O}}}^{G, \text{T}(f)}(x) \leq \mathcal{M}_{R_{\frac{1}{4}} \otimes m\mathbb{O}}^{G, k_1 f}(x) \\ \mathcal{M}_{V_{m\mathbb{O}}}^{G, k_2 f}(X) \leq \mathcal{M}_{V_{m\mathbb{O}}}^{G, \text{T}(f)}(X) \leq \mathcal{M}_{V_{m\mathbb{O}}}^{G, k_1 f}(X) \\ \mathcal{M}_{R_{\frac{1}{2}} \otimes m\mathbb{O}}^{G, k_2 f}(X) \leq \mathcal{M}_{R_{m\mathbb{O}}}^{G, \text{T}(f)}(X) \leq \mathcal{M}_{R_{\frac{1}{4}} \otimes m\mathbb{O}}^{G, k_1 f}(X) \\ \mathcal{M}_{V_{m\mathbb{O}, p}}^{G, k_2 f}(x) \leq \mathcal{M}_{V_{m\mathbb{O}, p}}^{G, \text{T}(f)}(x) \leq \mathcal{M}_{V_{m\mathbb{O}, p}}^{G, k_1 f}(x) \\ \mathcal{M}_{R_{\frac{1}{2}} \otimes m\mathbb{O}, p}^{G, k_2 f}(x) \leq \mathcal{M}_{R_{m\mathbb{O}, p}}^{G, \text{T}(f)}(x) \leq \mathcal{M}_{R_{\frac{1}{4}} \otimes m\mathbb{O}, p}^{G, k_1 f}(x) \end{cases}$$

10. composition :

Si  $\mathcal{M}^G \neq \mathbb{P}$  alors

$$\mathcal{M}_{V_{m\mathbb{O}}}^{G, \text{T}(f)} \left( V_{m\mathbb{O}}^{\text{T}(f)}(x) \right) < \mathcal{M}_{V_{m\mathbb{O}} \oplus m\mathbb{O}}^{G, \text{T}(f)}(x) \quad \text{et} \quad \mathcal{M}_{V_{m\mathbb{O}}}^{G, \text{T}(f)} \left( V_{m\mathbb{O}}^{\text{T}(f)}(X) \right) < \mathcal{M}_{V_{m\mathbb{O}} \oplus m\mathbb{O}}^{G, \text{T}(f)}(X)$$

$$\mathcal{M}_{V_{m\mathbb{O}, p}}^{G, \text{T}(f)}(x) \leq \mathcal{M}_{V_p \otimes m\mathbb{O}}^{G, \text{T}(f)}(x)$$

11. inégalités géométriques :

Si  $\mathcal{M}^{G,1}$  et  $\mathcal{M}^{G,2}$  sont des fonctionnelles géométriques reliées par une inégalité de la forme  $k \mathcal{M}^{G,1} \leq \mathcal{M}^{G,2}$  avec  $k \in \mathbb{R}$  alors

$$\begin{aligned} k \mathcal{M}_{V_{m\mathbb{O}}}^{G,1}(x) &\leq \mathcal{M}_{V_{m\mathbb{O}}}^{G,2}(x) \\ k \mathcal{M}_{R_{m\mathbb{O}}}^{G,1}(x) &\leq \mathcal{M}_{R_{m\mathbb{O}}}^{G,2}(x) \\ k \mathcal{M}_{V_{m\mathbb{O}}}^{G,1}(X) &\leq \mathcal{M}_{V_{m\mathbb{O}}}^{G,2}(X) \\ k \mathcal{M}_{R_{m\mathbb{O}}}^{G,1}(X) &\leq \mathcal{M}_{R_{m\mathbb{O}}}^{G,2}(X) \\ k \mathcal{M}_{V_{m\mathbb{O}, p}}^{G,1}(x) &\leq \mathcal{M}_{V_{m\mathbb{O}, p}}^{G,2}(x) \\ k \mathcal{M}_{R_{m\mathbb{O}, p}}^{G,1}(x) &\leq \mathcal{M}_{R_{m\mathbb{O}, p}}^{G,2}(x) \end{aligned}$$

**Preuve :** Les propriétés sont des conséquences directes des propriétés des VAG (propositions 6.1, 6.2, 6.3, 6.4, 6.5 et 6.6), des inégalités géométriques (4.2.2), et du fait que l'aire, les diamètres de Feret minimal et maximal, et les rayons des disques inscrit et circonscrit vérifient la propriété de monotonie (Equation 3.1).  $\square$

Des ratios particuliers des fonctionnelles géométriques permettent de définir les fonctionnelles morphométriques (Chapitre 4). Suite à la détermination des fonctionnelles géométriques à VAG peuvent donc être définies les fonctionnelles morphométriques à VAG.

## 8.2 Analyse adaptative locale par les fonctionnelles morphométriques à VAG

### 8.2.1 Définition et propriétés

La morphométrie à VAG définit des fonctionnelles morphométriques sur les VAG de chaque point du support spatial d'une image. Des fonctionnelles morphométriques à VAG faibles ou forts d'un point, d'un ensemble ou itéré d'un point (Chapitre 6) sont déterminées.

Le Chapitre 4 énonce quinze fonctionnelles morphométriques définies pour un espace bi-dimensionnel. Soit  $\mathcal{M}^M$  une de ces fonctionnelles géométriques, autrement dit soit  $\mathcal{M}^M \in \left\{ \frac{r}{R}, \frac{\omega}{2R}, \frac{A}{\pi R^2}, \frac{d}{2R}, \frac{2r}{d}, \frac{\omega}{d}, \frac{4A}{\pi d^2}, \frac{\sqrt{3}R}{d}, \frac{2\pi r}{P}, \frac{\pi\omega}{P}, \frac{4\pi A}{P^2}, \frac{2d}{P}, \frac{4R}{P}, \frac{\pi r^2}{A}, \frac{2r}{\omega} \right\}$  où  $r, R, \omega, d, P$  et  $A$  dénotent les rayons des disques inscrit et circonscrit, les diamètres de Feret minimal et maximal, le périmètre et l'aire, respectivement.

#### Définition 8.2 [Fonctionnelles morphométriques à VAG]

Soit  $(m_{\square}, T, f, p) \in \mathbb{E}^{\oplus} \times \mathcal{C}r \times \mathcal{I} \times \mathbb{N}^*$ .

Les fonctionnelles morphométriques à VAG faibles (resp. forts) d'un point, notées  $\mathcal{M}_{V_{m_{\square}}^{T(f)}}^M$  (resp.  $\mathcal{M}_{R_{m_{\square}}^{T(f)}}^M$ ), sont définies de  $\mathcal{D}^2$  dans  $\mathbb{R}$  par :

$$\mathcal{M}_{V_{m_{\square}}^{T(f)}}^M : x \mapsto \mathcal{M}^M \left( V_{m_{\square}}^{T(f)}(x) \right) \quad \text{et} \quad \mathcal{M}_{R_{m_{\square}}^{T(f)}}^M : x \mapsto \mathcal{M}^M \left( R_{m_{\square}}^{T(f)}(x) \right)$$

Les fonctionnelles morphométriques à VAG faibles (resp. forts) d'un ensemble, notées  $\mathcal{M}_{V_{m_{\square}}^{T(f)}}^M$  (resp.  $\mathcal{M}_{R_{m_{\square}}^{T(f)}}^M$ ), sont définies de  $\mathcal{P}(\mathcal{D}^2)$  dans  $\mathbb{R}$  par :

$$\mathcal{M}_{V_{m_{\square}}^{T(f)}}^M : X \mapsto \mathcal{M}^M \left( V_{m_{\square}}^{T(f)}(X) \right) \quad \text{et} \quad \mathcal{M}_{R_{m_{\square}}^{T(f)}}^M : X \mapsto \mathcal{M}^M \left( R_{m_{\square}}^{T(f)}(X) \right)$$

Les fonctionnelles morphométriques à VAG faibles (resp. forts) itérés d'un point, notées  $\mathcal{M}_{V_{m_{\square},p}^{T(f)}}^M$  (resp.  $\mathcal{M}_{R_{m_{\square},p}^{T(f)}}^M$ ), sont définies de  $\mathcal{D}^2$  dans  $\mathbb{R}$  par :

$$\mathcal{M}_{V_{m_{\square},p}^{T(f)}}^M : x \mapsto \mathcal{M}^M \left( V_{m_{\square},p}^{T(f)}(x) \right) \quad \text{et} \quad \mathcal{M}_{R_{m_{\square},p}^{T(f)}}^M : x \mapsto \mathcal{M}^M \left( R_{m_{\square},p}^{T(f)}(x) \right)$$

**Proposition 8.2**  $\forall (m_{\square}, m_{\square}^1, m_{\square}^2, T, f, x, x_1, x_2, X, X_1, X_2, p, p_1, p_2) \in (\mathbb{E}^{\oplus})^3 \times \mathcal{C}r \times \mathcal{I} \times (\mathcal{D}^2)^3 \times \mathcal{P}(\mathcal{D}^2)^3 \times (\mathbb{N}^*)^3$

1. égalité entre points voisins de même ton de gris :

$$\left( \begin{array}{l} x_1 \in V_{m_{\square}}^{T(f)}(x_2) \\ T(f)(x_1) = T(f)(x_2) \end{array} \right) \Rightarrow \mathcal{M}_{V_{m_{\square}}^{T(f)}}^M(x_1) = \mathcal{M}_{V_{m_{\square}}^{T(f)}}^M(x_2)$$

2. *invariance par  $\oplus$ -addition vectorielle :*

$$\forall c_{\square} \in \mathbb{E}_{\square} : \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{M}_{V_{m_{\square}}^{\oplus} T(f)}^M(x) = \mathcal{M}_{V_{m_{\square}}^{\oplus} T(f)}^M(x) \\ \mathcal{M}_{R_{m_{\square}}^{\oplus} T(f)}^M(x) = \mathcal{M}_{R_{m_{\square}}^{\oplus} T(f)}^M(x) \\ \mathcal{M}_{V_{m_{\square}}^{\oplus} T(f)}^M(X) = \mathcal{M}_{V_{m_{\square}}^{\oplus} T(f)}^M(X) \\ \mathcal{M}_{R_{m_{\square}}^{\oplus} T(f)}^M(X) = \mathcal{M}_{R_{m_{\square}}^{\oplus} T(f)}^M(X) \\ \mathcal{M}_{V_{m_{\square},p}^{\oplus} T(f)}^M(x) = \mathcal{M}_{V_{m_{\square},p}^{\oplus} T(f)}^M(x) \\ \mathcal{M}_{R_{m_{\square},p}^{\oplus} T(f)}^M(x) = \mathcal{M}_{R_{m_{\square},p}^{\oplus} T(f)}^M(x) \end{array} \right.$$

3. *compatibilité avec la  $\otimes$ -multiplication scalaire :*

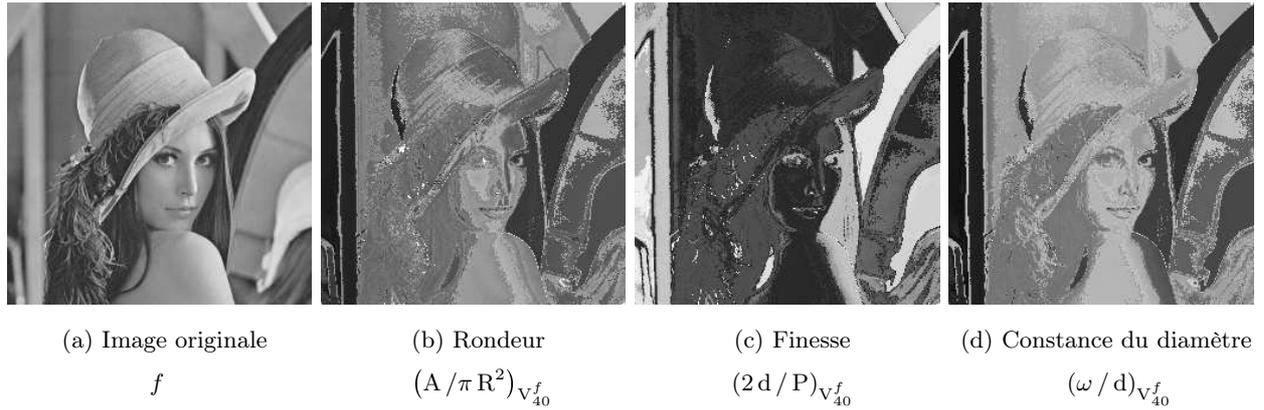
$$\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^* : \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{M}_{V_{m_{\square}}^{\alpha} \otimes T(f)}^M(x) = \mathcal{M}_{V_{\frac{1}{\alpha} \otimes m_{\square}}^{\alpha} T(f)}^M(x) \\ \mathcal{M}_{R_{m_{\square}}^{\alpha} \otimes T(f)}^M(x) = \mathcal{M}_{R_{\frac{1}{\alpha} \otimes m_{\square}}^{\alpha} T(f)}^M(x) \\ \mathcal{M}_{V_{m_{\square}}^{\alpha} \otimes T(f)}^M(X) = \mathcal{M}_{V_{\frac{1}{\alpha} \otimes m_{\square}}^{\alpha} T(f)}^M(X) \\ \mathcal{M}_{R_{m_{\square}}^{\alpha} \otimes T(f)}^M(X) = \mathcal{M}_{R_{\frac{1}{\alpha} \otimes m_{\square}}^{\alpha} T(f)}^M(X) \\ \mathcal{M}_{V_{m_{\square},p}^{\alpha} \otimes T(f)}^M(x) = \mathcal{M}_{V_{\frac{1}{\alpha} \otimes m_{\square},p}^{\alpha} T(f)}^M(x) \\ \mathcal{M}_{R_{m_{\square},p}^{\alpha} \otimes T(f)}^M(x) = \mathcal{M}_{R_{\frac{1}{\alpha} \otimes m_{\square},p}^{\alpha} T(f)}^M(x) \end{array} \right.$$

**Preuve :** Les propriétés sont des conséquences directes des propriétés des VAG (propositions 6.1, 6.2, 6.3, 6.4, 6.5 et 6.6).  $\square$

### 8.2.2 Cartographies

A chaque point du support spatial d'une image sont associées les fonctionnelles morphométriques à VAG de celui-ci. Des cartographies sont ainsi définies. Le VAG étant défini comme une partie du support spatial, quinze fonctionnelles morphométriques à VAG, donc quinze cartographies, sont alors calculées lors de l'analyse d'une image bi-dimensionnelle. Dans la suite de ce chapitre, les illustrations sont réalisées avec des VAG faibles d'un point. La mise en oeuvre pratique des autres VAG constitue une perspective de cette thèse.

La Figure 8.1 illustre des cartographies de fonctionnelles morphométriques à VAG de l'image 'Lena'  $f$ . Les VAG sont homogènes par rapport au critère de luminosité ( $T(f) = f$ ) avec la tolérance  $m = 40$  selon le modèle CLIP.



Valeurs minimale et maximale de l'échelle de gris		
(a)	0	255
(b)	0	0.6
(c,d)	0	1

FIG. 8.1 – Cartographies de fonctionnelles morphométriques à VAG de l'image 'Lena'  $f$  par rapport au critère de luminance ( $T(f) = f$ ) avec la tolérance d'homogénéité  $m = 40$  selon le modèle CLIP. Les extrema de l'échelle de gris correspondent aux extrema des fonctionnelles. Ces cartographies caractérisent la rondeur, l'épaisseur et la constance du diamètre (Section 4.1) des structures locales de l'image originale  $f$ .

L'étude réalisée sur les fonctionnelles de Minkowski à VAG s'applique aux fonctionnelles morphométriques à VAG. Cependant, la suite de ce chapitre se concentre sur les histogrammes et plus particulièrement sur les diagrammes (histogrammes conjoints) des cartographies des fonctionnelles morphométriques à VAG. Des histogrammes et diagrammes de forme (Chapitre 4) à VAG sont donc construits.

### 8.2.3 Histogrammes et diagrammes de forme

Les cartographies des fonctionnelles morphométriques à VAG permettent de caractériser les différentes structures présentes dans une image. Par conséquent, les histogrammes de ces cartographies définissent une signature morphométrique des images à niveaux de gris.

Ces histogrammes fournissent une distribution statistique des différentes valeurs des fonctionnelles morphométriques à VAG d'une image à niveaux de gris. Ils peuvent être définis comme la dérivée de l'histogramme cumulé qui est une fonction croissante bornée dans  $[0, 1]$  atteignant ses bornes, correspondant à une fonction de répartition de probabilité. Ainsi, la dérivée fournit l'histogramme, correspondant à une densité de probabilité.

**Définition 8.3** [*Histogrammes de forme à VAG*]

Soit  $(m_{\square}, T, f) \in \mathbb{E}_{\oplus} \times Cr \times \mathcal{I}$ . Lors de l'étude de l'image  $f$  de support spatial  $\mathcal{D}^2$ , 15 cartographies de fonctionnelles morphométriques à VAG sont construites, et par conséquent, 15 histogrammes fournissant les distributions des valeurs des fonctionnelles morphométriques à VAG. Ces histogrammes, notés  $H_{\mathcal{M}_{V_{m_{\square}}^T(f)}^M}$  lors de la considération des VAG faibles d'un point, où  $\mathcal{M}^M$  est une fonctionnelle morphométrique, sont définis de  $[0, 1]$  dans  $[0, 1]$  par :

$$H_{\mathcal{M}_{V_{m_{\square}}^T(f)}^M}^{cum}(t) = \frac{1}{\mathcal{L}^2(\mathcal{D}^2)} \mathcal{L}^2 \left( \left\{ x \in \mathcal{D}^2 : \mathcal{M}_{V_{m_{\square}}^T(f)}^M(x) < t \right\} \right) = \int_{-\infty}^t H_{\mathcal{M}_{V_{m_{\square}}^T(f)}^M}(u) du$$

où  $\mathcal{L}^2$  dénote la mesure de Lebesgue dans  $\mathbb{R}^2$ . Les définitions des histogrammes lors de la considération des autres VAG sont similaires.

Ces histogrammes (mono-dimensionnels) peuvent être conjoints. Ils définissent ainsi des diagrammes de forme à VAG.

**Définition 8.4** [*Diagrammes de forme à VAG*]

Afin de déterminer un diagramme de forme à VAG, deux fonctionnelles morphométriques, notées  $\mathcal{M}_1^M$  et  $\mathcal{M}_2^M$ , à VAG sont choisies de façon à ce que les dénominateurs de leurs ratios respectifs possèdent la même fonctionnelle géométrique (Section 4.2). Par conséquent, 22 diagrammes peuvent être obtenus, fournissant les distributions de chaque couple de valeurs des fonctionnelles morphométriques à VAG. Ces diagrammes de forme, notés  $\mathcal{D}_k(V_{m_{\square}}^T(f))$  pour tout  $k \in \llbracket 1, 22 \rrbracket$  (voir les correspondances des notations  $\mathcal{D}_k$  dans la Section 4.2), sont définis de  $[0, 1]^2$  dans  $[0, 1]$  par :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_k^{cum}(V_{m_{\square}}^T(f))(t_1, t_2) &= \frac{1}{\mathcal{L}^2(\mathcal{D}^2)} \mathcal{L}^2 \left( \left\{ x \in \mathcal{D}^2 : \mathcal{M}_{1, V_{m_{\square}}^T(f)}^M(x) < t_1, \mathcal{M}_{2, V_{m_{\square}}^T(f)}^M(x) < t_2 \right\} \right) \\ &= \int_{]-\infty, t_1[ \times ]-\infty, t_2[} \mathcal{D}_k(V_{m_{\square}}^T(f))(u_1, u_2) du_1 du_2 \end{aligned}$$

Tout histogramme correspond à une projection d'un diagramme sur l'un de ses deux axes. Par conséquent, les diagrammes rassemblent les informations des histogrammes. Un lien avec les probabilités s'établit : les diagrammes normalisés sont assimilables à des densités conjointes de probabilités, et les histogrammes normalisés sont assimilables aux densités marginales.

La Figure 8.2 illustre des histogrammes et diagrammes de forme (choisis suivant les résultats de la synthèse du Chapitre 4) à VAG de l'image 'Lena'  $f$ . Les VAG sont homogènes par rapport au critère de luminosité ( $T(f) = f$ ) avec la tolérance  $m = 20$  selon le modèle CLIP. Lorsque plusieurs VAG sont localisés au même endroit dans les diagrammes, la fréquence d'apparition est représentée selon une échelle de couleurs.

Les histogrammes et diagrammes de forme à VAG définissent une signature morphométrique d'une image à niveaux de gris. Ils fournissent une distribution statistique de la forme des structures d'une image à niveaux de gris, et pas seulement des intensités de l'image comme les histogrammes classiques des niveaux de gris.

La section suivante expose une analyse multi-échelle des histogrammes et diagrammes de forme à VAG.

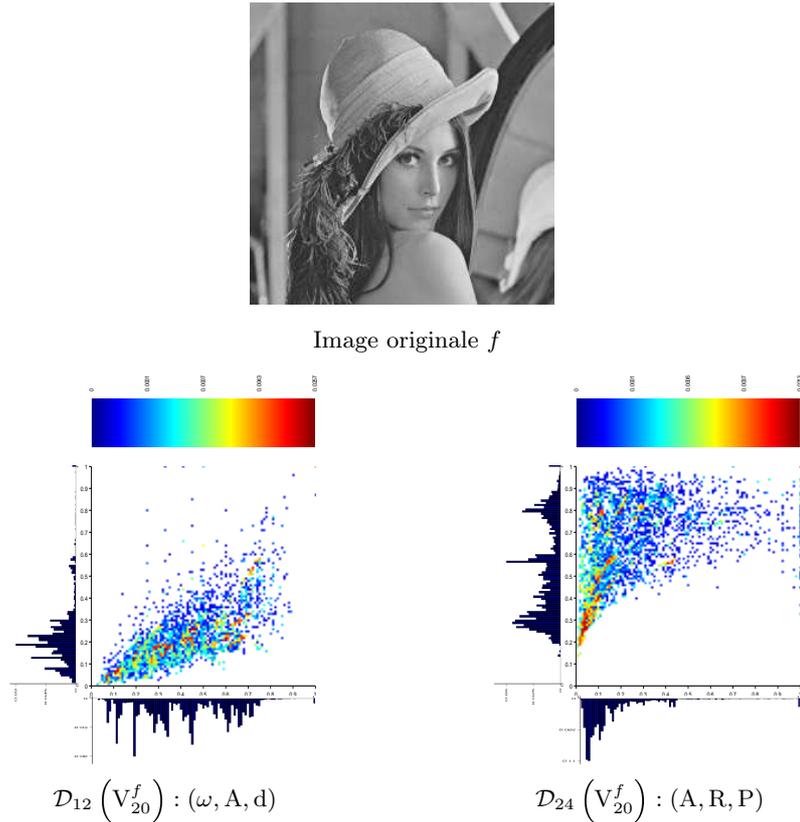


FIG. 8.2 – Histogrammes et diagrammes (définis pour cent classes) de forme (choisis suivant les résultats de la synthèse du Chapitre 4) à VAG de l'image 'Lena'  $f$  par rapport au critère de luminance ( $T(f) = f$ ) avec la tolérance d'homogénéité  $m = 20$  selon le modèle CLIP.

### 8.3 Analyse multi-échelle adaptative locale par les fonctions morphométriques à VAG

En étudiant les fonctionnelles morphométriques à VAG lors de la variation de la tolérance d'homogénéité, une analyse multi-échelle locale et adaptative des images à niveaux de gris est réalisée. Ceci conduit à l'étude de l'impact d'une transformation multi-échelle sur ces fonctionnelles.

#### 8.3.1 Par rapport à la tolérance d'homogénéité

Les VAG sont des régions homogènes par rapport à un critère d'analyse dont la fonction est notée  $T$ , avec une tolérance d'homogénéité  $m_{\square}$  selon un modèle GLIP. Pour chaque point du support spatial d'une image à niveaux de gris, une famille croissante de VAG est obtenue avec l'augmentation de la valeur de la tolérance d'homogénéité  $m_{\square}$ . La variation de ce paramètre permet de définir des fonctions morphométriques à VAG (fonctions morphométriques adaptatives).

**Définition 8.5** [*Fonctions morphométriques adaptatives*]

Soit  $x \in \mathcal{D}^2$ . Les fonctions morphométriques adaptatives  $\Phi_x^{\mathcal{M}^M} : \mathbb{E}_{\oplus} \times \mathcal{I} \times \mathcal{C}r \rightarrow \mathbb{R}$ , dépendantes de la tolérance d'homogénéité, sont définies par :

$$\Phi_x^{\mathcal{M}^M}(m_{\square}, f, T) = \mathcal{M}_{V_{m_{\square}}^{T(f)}}^M(x)$$

$\mathcal{M}^M$  désigne une fonctionnelle morphométrique, indépendante du facteur d'échelle (Chapitre 4). Par conséquent, même si les VAG sont croissants en fonction de la tolérance d'homogénéité, aucune monotonie ne peut être vérifiée par  $\Phi_x^{\mathcal{M}^M}(m_\square, f, T)$  en fonction de  $m_\square$ .

La Figure 8.3 expose des diagrammes de forme à VAG d'images originales diverses  $f$  par rapport au critère de luminance ( $T(f) = f$ ) représenté dans le modèle CLIP, en fonction de la tolérance d'homogénéité  $m$ . La distribution statistique dans les diagrammes est représentée selon une échelle de couleurs. Cette figure montre que l'étalement de la zone à l'intérieur de laquelle se trouve la distribution statistique des fonctionnelles morphométriques à VAG diminue lorsque la tolérance d'homogénéité augmente. Pour chaque point  $x$  du support spatial d'une image, la famille des VAG de  $x$  croît avec la tolérance  $m_\square$  (Equation 6.6). Par conséquent, la probabilité qu'un point  $y$  de même intensité se trouve dans le VAG de  $x$  croît également avec  $m_\square$ . Et ce point  $y$  possède le même VAG que  $x$  (Equation 6.5). Ainsi, les fonctionnelles morphométriques à VAG de ces deux points  $x$  et  $y$  ont des valeurs identiques. Autrement dit, le nombre de points possédant des VAG identiques augmente avec la tolérance  $m_\square$ .

Grâce à cette variation de la tolérance d'homogénéité  $m_\square$ , des fonctions morphométriques à VAG sont définies, fournissant une analyse multi-échelle adaptative et locale d'une image à niveaux de gris. La sous-section suivante porte sur l'étude de l'impact d'une transformation multi-échelle sur les fonctionnelles morphométriques à VAG.

### 8.3.2 Par rapport à un opérateur de morphologie mathématique

Les histogrammes et diagrammes de forme à VAG peuvent être déterminées à partir d'images à niveaux de gris transformées par des opérateurs morphologiques. Par exemple, la Figure 8.4 illustre des diagrammes de forme à VAG. Les VAG  $V_m^{T_{r,S}(f)}$  sont déterminés par rapport aux transformations morphologiques  $T_{r,S}(f)$  ( $T_{r,S}$  est l'érosion (resp. la dilatation) si  $r < 0$  (resp. si  $r \geq 0$ )) utilisant un disque  $S$  de rayon  $|r| \in \mathbb{R}_+$  comme élément structurant, avec la tolérance d'homogénéité  $m = 20$  selon le modèle CLIP. La distribution statistique dans les diagrammes est représentée selon une échelle de couleurs.

La variation du rayon  $r$  de l'élément structurant  $S$  utilisé pour la transformation morphologique permet de définir des fonctions morphométriques à VAG (fonctions morphométriques adaptatives).

#### Définition 8.6 [*Fonctions morphométriques adaptatives*]

Soit  $x \in \mathcal{D}^2$ . Les fonctions morphométriques adaptatives  $\Phi_x^{\mathcal{M}^M} : \mathbb{E}_{\oplus} \times \mathcal{I} \times \mathcal{C}r \times \mathbb{R} \times \mathcal{P}(\mathcal{D}^2) \rightarrow \mathbb{R}$ , dépendantes des transformations fondamentales de morphologie mathématique, sont définies par :

$$\Phi_x^{\mathcal{M}^M}(m_\square, f, T, r, S) = \mathcal{M}_{V_{m_\square}^{T_{r,S}(f)}}^M(x)$$

où  $T_{r,S}(f)$  sont l'ouverture (ou l'érosion) si  $r < 0$  et la fermeture (ou la dilatation) si  $r \geq 0$ , de l'image  $f$  par l'élément structurant  $S$  de rayon  $|r| \in \mathbb{R}_+$ .

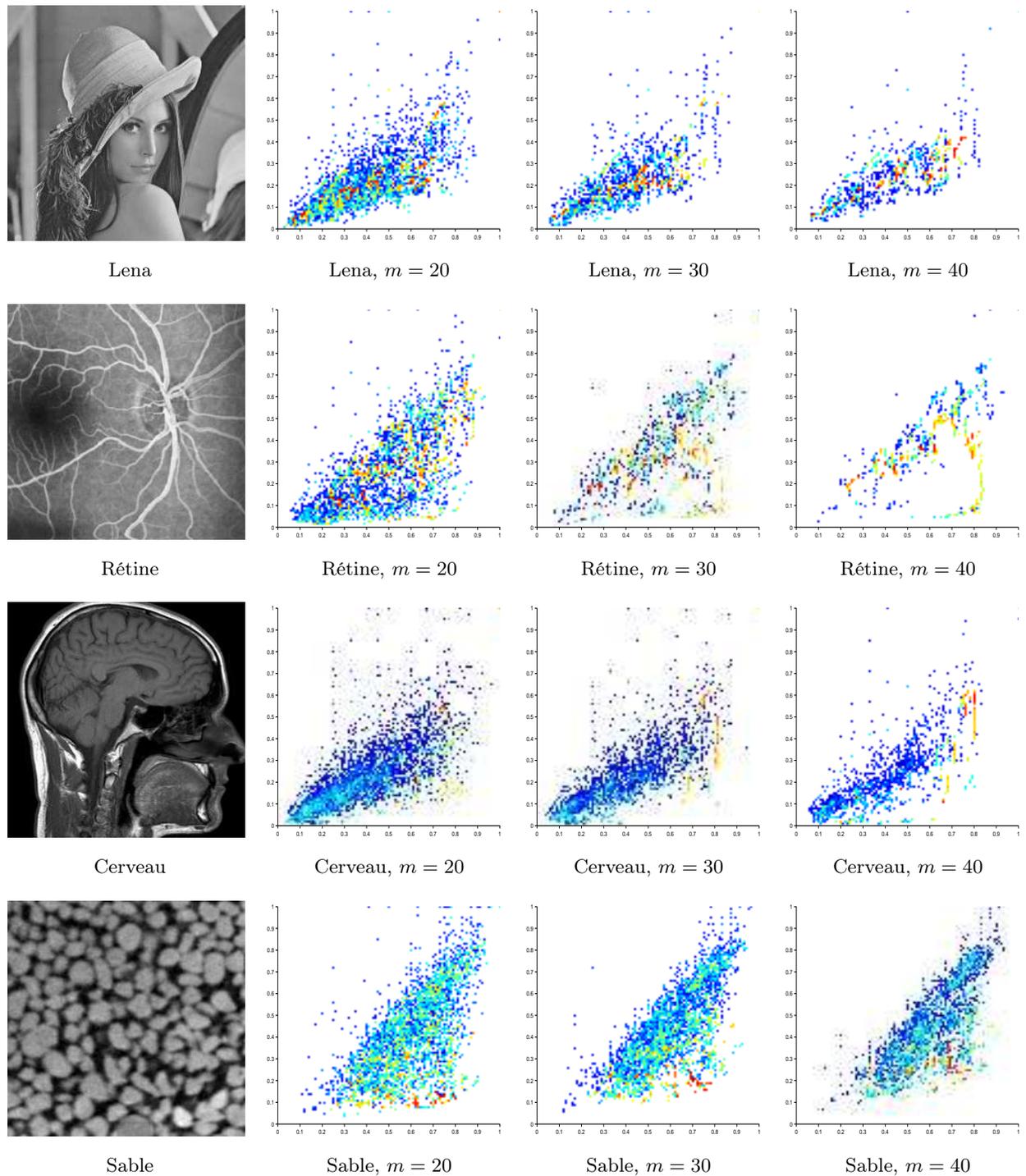


FIG. 8.3 – Diagrammes de forme,  $\mathcal{D}_{12} : (\omega, A, d)$  définis pour  $100 \times 100$  classes, à VAG des images originales  $f$  (Lena, Rétine, Cerveau, Sable) par rapport au critère de luminosité ( $T(f) = f$ ) avec les tolérances d’homogénéités  $m = 20$ ,  $m = 30$  et  $m = 40$  selon le modèle CLIP.

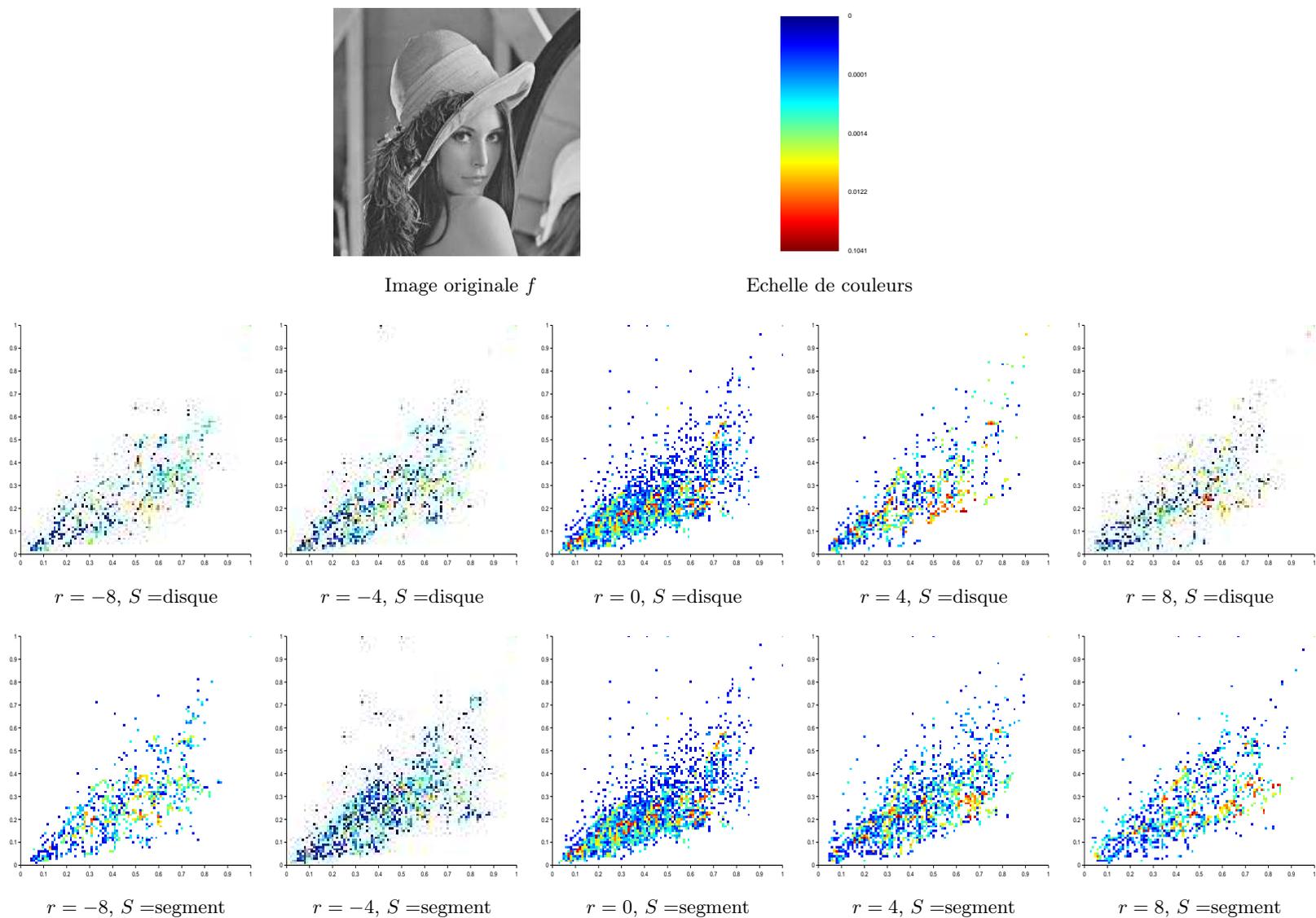


FIG. 8.4 – Diagrammes de forme,  $\mathcal{D}_{12}$  :  $(\omega, A, d)$  définis pour  $100 \times 100$  classes, à VAG de l'image 'Lena'  $f$  par rapport aux transformations morphologiques  $T_{r,S}(f)$  ( $T_{r,S}$  est l'érosion (resp. la dilatation) si  $r < 0$  (resp. si  $r \geq 0$ )) utilisant un élément structurant  $S$  (disque ou segment horizontal) de rayon  $|r| \in \mathbb{R}_+$ , avec la tolérance d'homogénéité  $m = 20$  selon le modèle CLIP.

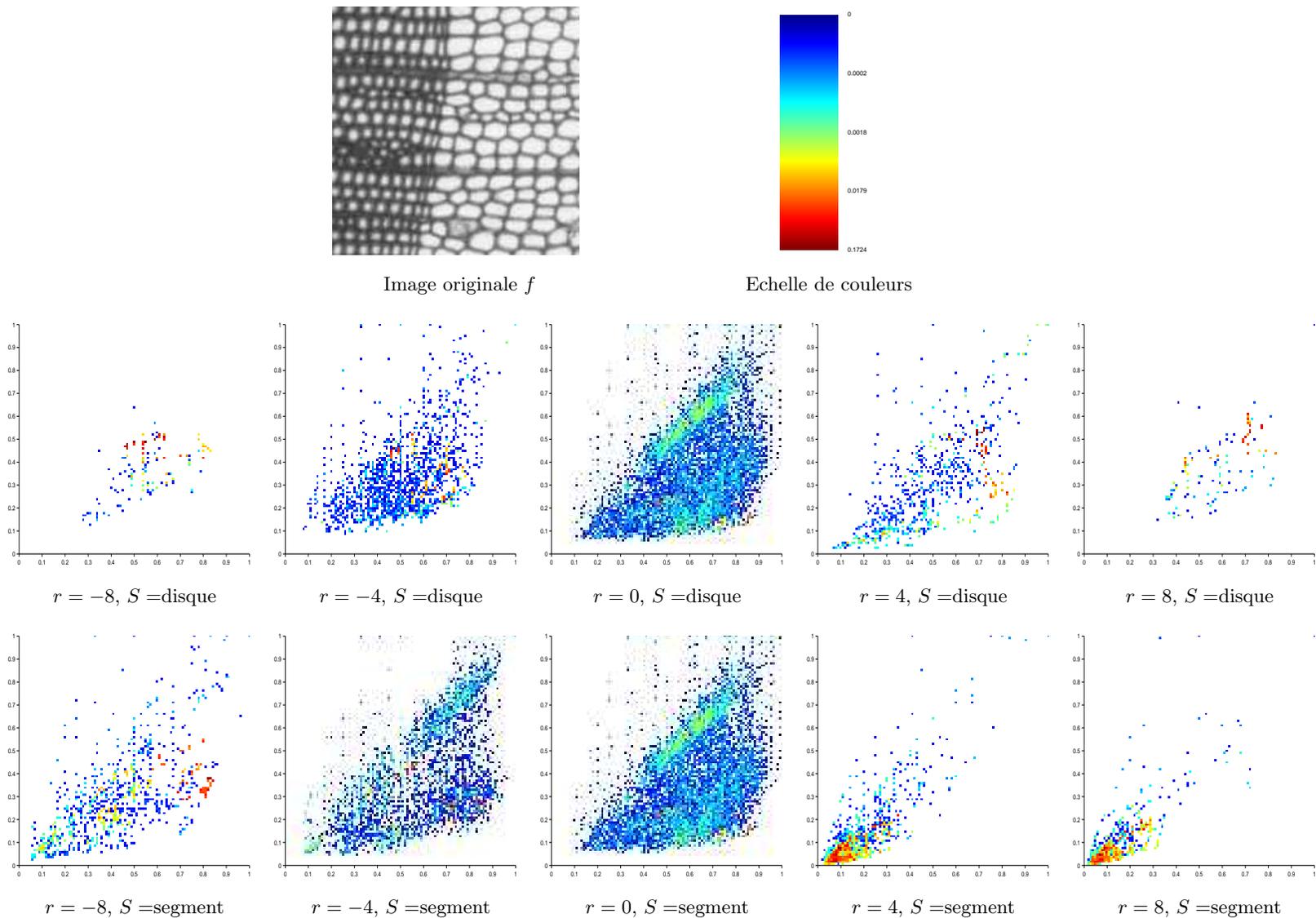


FIG. 8.4 – Diagrammes de forme,  $\mathcal{D}_{12} : (\omega, A, d)$  définis pour  $100 \times 100$  classes, à VAG de l'image de cellules de pin (coupe transversale)  $f$  par rapport aux transformations morphologiques  $T_{r,S}(f)$  ( $T_{r,S}$  est l'érosion (resp. la dilatation) si  $r < 0$  (resp. si  $r \geq 0$ )) utilisant un élément structurant  $S$  (disque ou segment horizontal) de rayon  $|r| \in \mathbb{R}_+$ , avec la tolérance d'homogénéité  $m = 20$  selon le modèle CLIP.

## 8.4 Applications

### 8.4.1 Classification de formes de graines

La Figure 8.5 illustre une image à niveaux de gris représentant des graines, et les cartographies de certaines de ses fonctionnelles morphométriques à VAG. L'image originale est celle à partir de laquelle l'image binaire de la Figure 4.47 a été obtenue. Cette application est donc directement liée à celle de la Section 4.4.

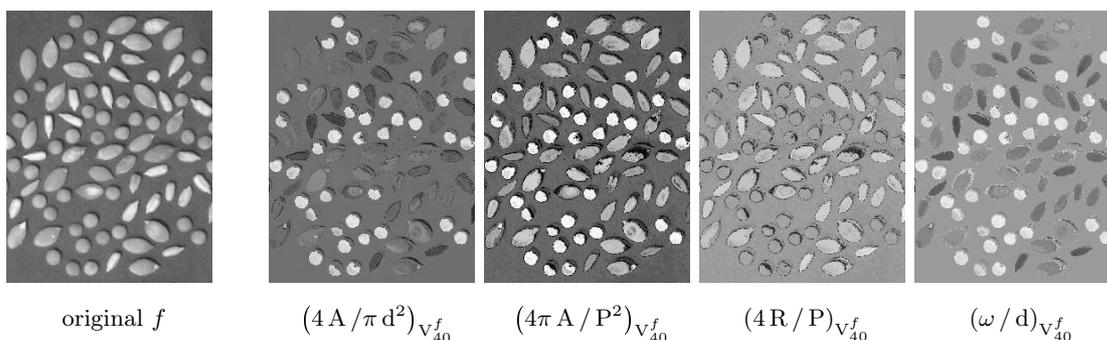


FIG. 8.5 – Cartographies de fonctionnelles morphométriques à VAG de l'image de graines  $f$ . Les VAG sont déterminés par rapport au critère de luminance ( $T(f) = f$ ) avec la tolérance d'homogénéité  $m = 40$  selon le modèle CLIP.

Cette figure montre les cartographies des quatre fonctionnelles morphométriques  $4A/\pi d^2$ ,  $4\pi A/P^2$ ,  $4R/P$  et  $\omega/d$  associées aux diagrammes de forme  $\mathcal{D}_{12} : (\omega, A, d)$  et  $\mathcal{D}_{24} : (A, R, P)$  (Chapitre 4). Pour chaque point du support spatial de l'image, le VAG par rapport au critère de luminance avec une tolérance d'homogénéité  $m$  selon le modèle CLIP est déterminé puis localisé dans les diagrammes de forme  $\mathcal{D}_{12}$  et  $\mathcal{D}_{24}$  (Figure 8.6).

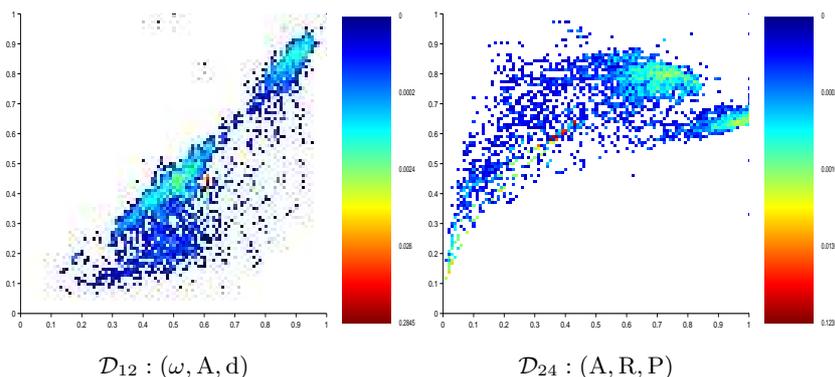


FIG. 8.6 – Diagrammes de forme, définis pour  $100 \times 100$  classes, à VAG de l'image de graines  $f$  (Figure 8.5) par rapport au critère de luminance ( $T(f) = f$ ) avec la tolérance d'homogénéité  $m = 40$  selon le modèle CLIP.

Ces diagrammes de forme à VAG permettent de regrouper les VAG de cette image selon leur forme en trois classes :

- Une petite tache rouge (hautes fréquences) est associée aux VAG correspondant au fond de l'image, c'est-à-dire aux VAG des pixels du fond, ce qui explique la haute fréquence d'apparition.

- Une première tache de couleur cyan à jaune se trouve sur la droite dans les diagrammes. L'emplacement de cette tache l'associe aux VAG de forme circulaire (Figures 4.5 et 4.22), c'est-à-dire aux VAG des pixels des graines circulaires.
- Une seconde tache de couleur cyan à jaune se trouve à gauche de la précédente dans les diagrammes. L'emplacement de cette tache l'associe aux VAG de forme un peu allongée (Figures 4.5 et 4.22), c'est-à-dire aux VAG des pixels des graines petites et allongées et des graines en forme d'amande.

Ces diagrammes de forme à VAG permettent donc de conclure que les graines de l'image se rassemblent en deux classes ce qui ne correspond pas au nombre de classes cité précédemment. Ceci s'explique par le fait que les graines petites et allongées et les graines en forme d'amande diffèrent essentiellement par leur taille, leurs formes étant plutôt similaires.

La Figure 8.7 illustre des seuillages effectués sur ces diagrammes de forme à VAG. Les résultats obtenus sont ensuite comparés aux diagrammes de forme de la Figure 4.49, construits à partir de l'image de graines préalablement segmentée. La similarité visuelle est évidente.

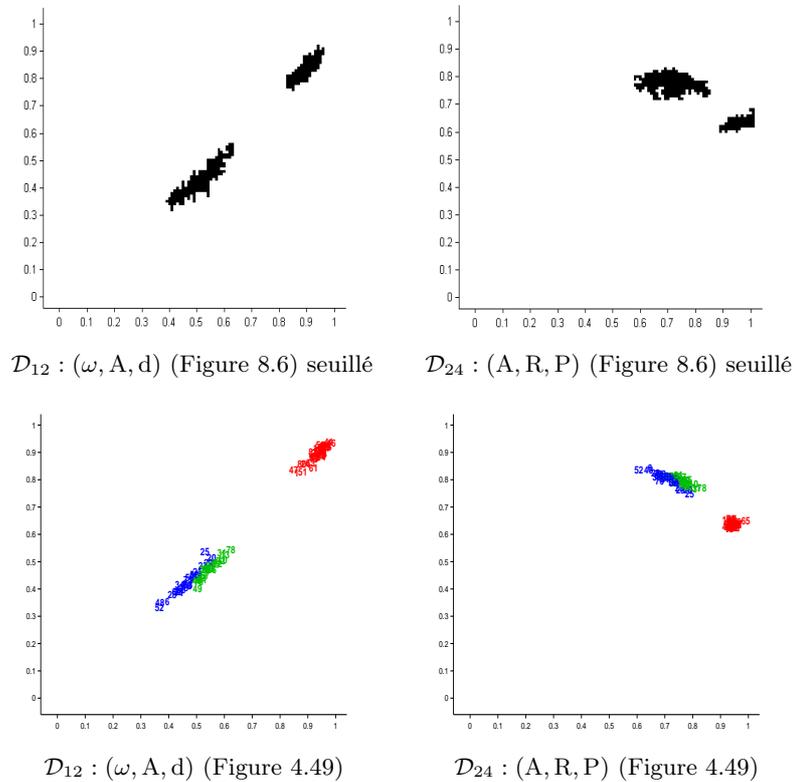


FIG. 8.7 – Seuillage (suivi d'une ouverture et d'une fermeture géodésiques permettant de supprimer les bruits) des diagrammes de forme à VAG de la Figure 8.6. Similarité visuelle avec les diagrammes de forme de la Figure 4.49.

Les diagrammes de forme à VAG permettent ainsi de classifier les structures présentes dans une image en fonction de leurs formes, sans passer au préalable par une étape de segmentation des structures.

### 8.4.2 Homogénéité des formes de cellules cornéennes

La Figure 8.8 illustre une image à niveaux de gris représentant des cellules d'endothélium cornéen humain, et les cartographies de certaines de ses fonctionnelles morphométriques à VAG. L'image originale est celle à partir de laquelle l'images binaire de la Figure 4.48 a été obtenue. Cette application est donc directement liée à celle de la Section 4.4.

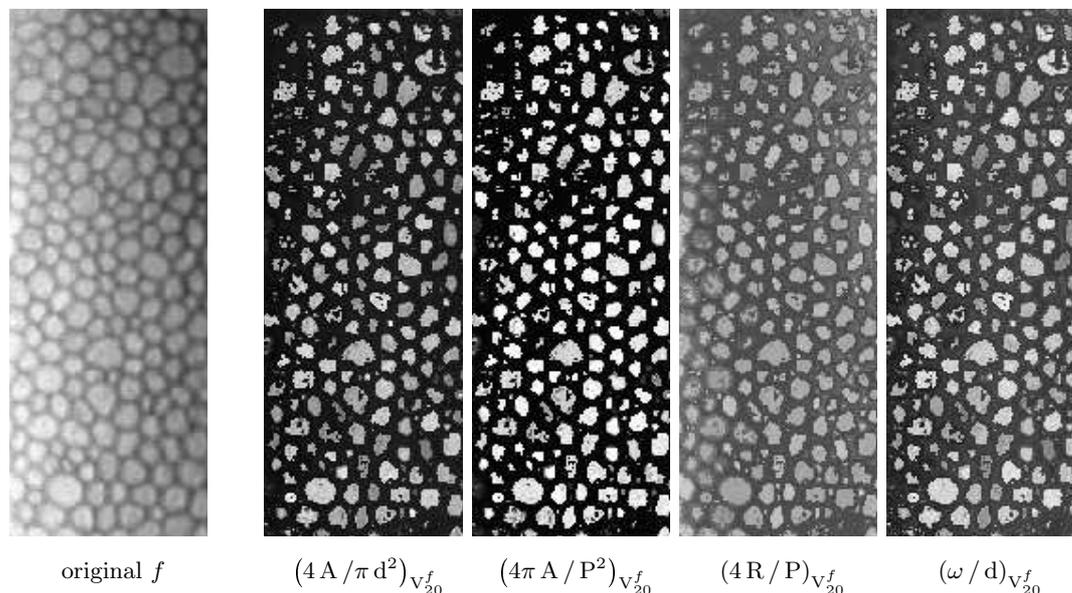


FIG. 8.8 – Cartographies de fonctionnelles morphométriques à VAG de l'image de cellules d'endothélium cornéen humain  $f$ . Les VAG sont déterminés par rapport au critère de luminosité ( $T(f) = f$ ) avec la tolérance d'homogénéité  $m = 20$  selon le modèle CLIP.

Cette figure montre les cartographies des quatre fonctionnelles morphométriques  $4A/\pi d^2$ ,  $4\pi A/P^2$ ,  $4R/P$  et  $\omega/d$  associées aux diagrammes de forme  $\mathcal{D}_{12} : (\omega, A, d)$  et  $\mathcal{D}_{24} : (A, R, P)$  (Chapitre 4). Pour chaque point du support spatial de l'image, le VAG par rapport au critère de luminosité avec une tolérance d'homogénéité  $m$  selon le modèle CLIP est déterminé puis localisé dans les diagrammes de forme  $\mathcal{D}_{12}$  et  $\mathcal{D}_{24}$  (Figure 8.9).

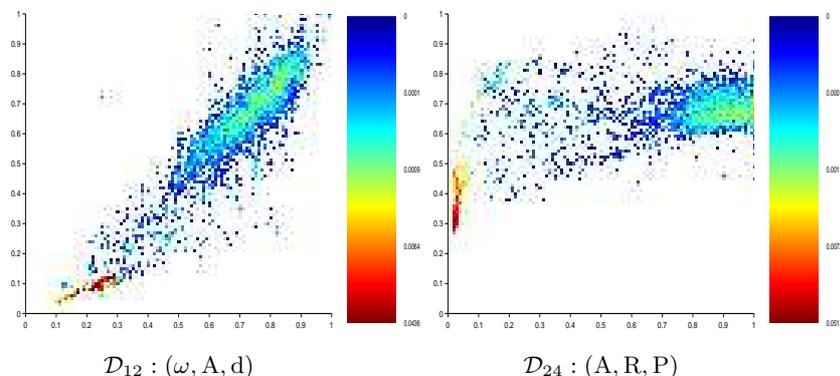


FIG. 8.9 – Diagrammes de forme, définis pour  $100 \times 100$  classes, à VAG de l'image de cornée  $f$  (Figure 8.8) par rapport au critère de luminosité ( $T(f) = f$ ) avec la tolérance d'homogénéité  $m = 20$  selon le modèle CLIP.

Ces diagrammes de forme à VAG permettent de regrouper les VAG de cette image selon leur forme en deux classes :

- Une petite tache rouge (hautes fréquences) est associée aux VAG correspondant au fond de l'image. Il s'agit des VAG des pixels des contours des cellules, ce qui explique la haute fréquence d'apparition.
- Une tache de couleur cyan à jaune associée aux VAG des pixels intérieurs aux cellules.

La Figure 8.10 illustre des seuillages effectués sur ces diagrammes de forme à VAG. Les résultats obtenus sont ensuite comparés aux diagrammes de forme de la Figure 4.50, construits à partir de l'image de cellules d'endothélium cornéen humain préalablement segmentée. La similarité visuelle est évidente.

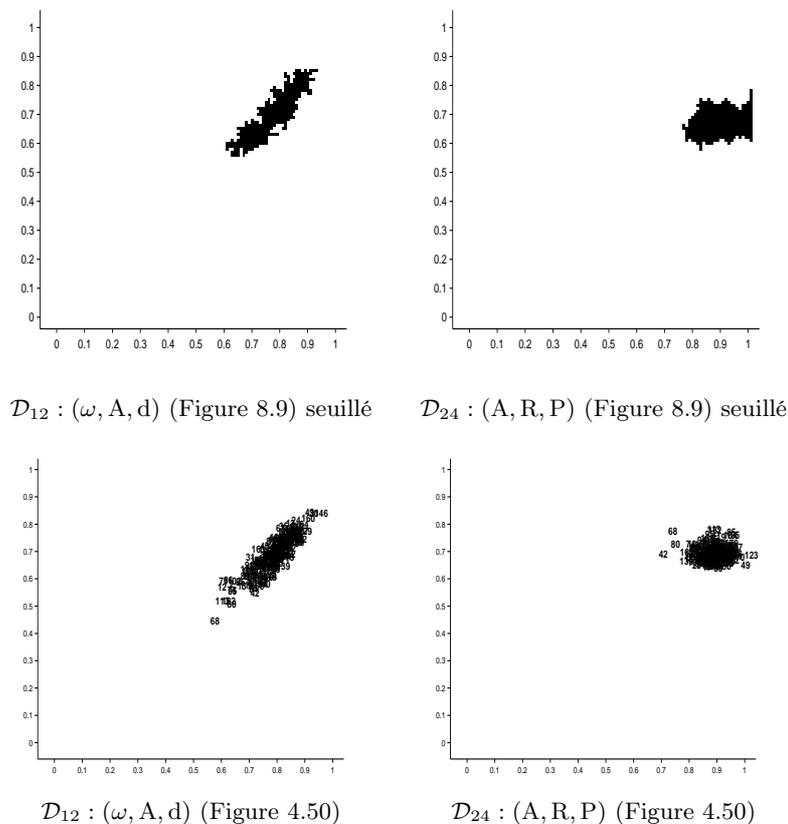


FIG. 8.10 – Seuillage (suivi d'une ouverture et d'une fermeture géodésiques permettant de supprimer les bruits) des diagrammes de forme à VAG de la Figure 8.9. Similarité visuelle avec les diagrammes de forme de la Figure 4.50.

Ces diagrammes de forme à VAG permettent donc de conclure que les formes des cellules cornéennes de l'image sont homogènes, sans passer au préalable par une étape de segmentation des structures.

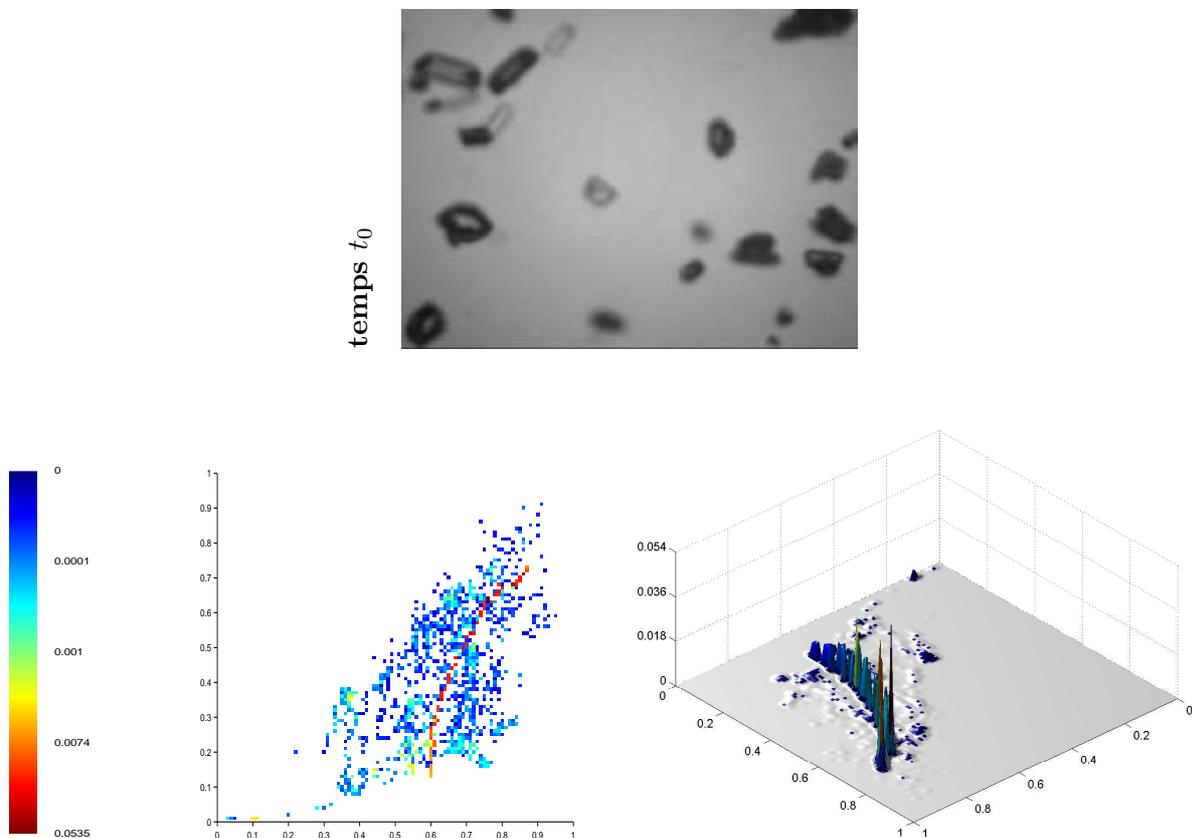
### 8.4.3 Cristallisation de l'acide adipique

Dans l'industrie, la cristallisation est une opération clé dont les performances sont essentielles pour séparer, purifier et mettre en forme les produits. En effet, les caractéristiques des particules (taille et forme) ont un impact considérable sur l'ensemble des propriétés d'usage des cristaux.

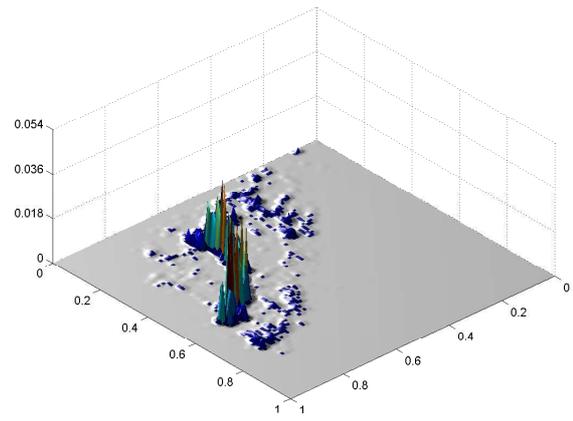
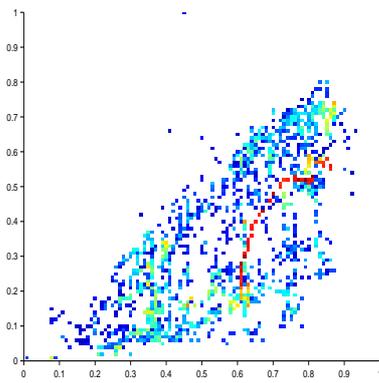
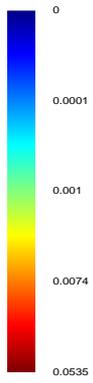
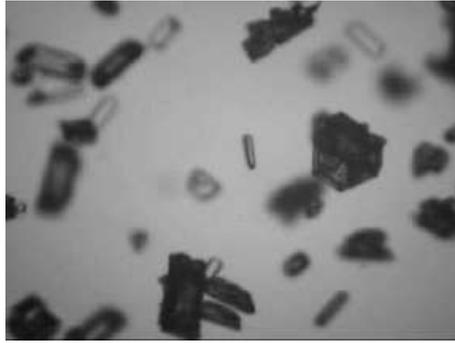
La Figure 8.11 montre une séquence d'images acquises par une caméra *in situ* durant le processus de cristallisation de l'acide adipique. A chacune de ces images est associé le diagramme de forme  $\mathcal{D}_{12} : (\omega, A, d)$  à VAG représenté soit dans le plan euclidien selon une échelle de couleurs soit grâce à sa surface. Les VAG sont déterminés par rapport au critère de luminance avec la tolérance d'homogénéité  $m = 20$  selon le modèle CLIP.

Dans les diagrammes de forme à VAG, les domes de faibles amplitudes localisent les cristaux. Leur nombre augmente avec le temps, ce qui s'explique par l'apparition de nouveaux cristaux. La courbe ayant une forte amplitude localisent les VAG des pixels du fond de l'image. Le rayon de cette courbure diminue avec le temps, autrement dit les fonctionnelles morphométriques  $4A/\pi d^2$  des VAG des pixels du fond de l'image diminuent. Ceci s'explique par la diminution de la superficie du fond due à l'apparition, l'agrégation et/ou la superposition de cristaux. De plus, l'augmentation du nombre de domes de faibles amplitudes favorise la diminution de l'amplitude de cette courbe.

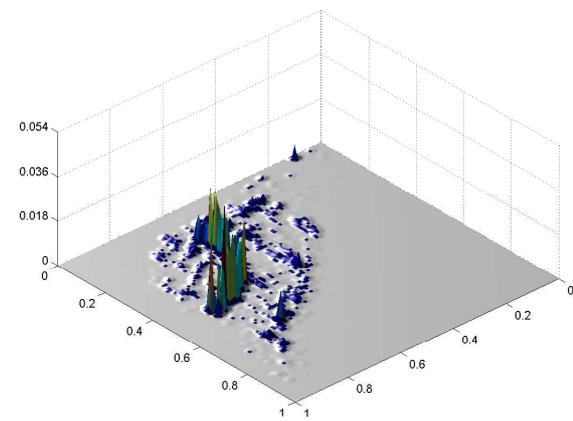
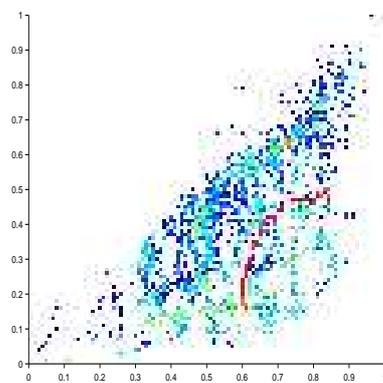
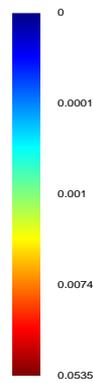
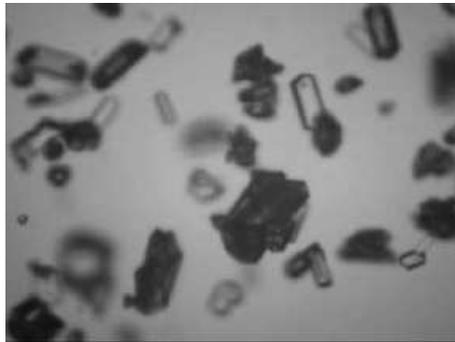
Les diagrammes de forme à VAG permettent ainsi de caractériser les formes des cristaux lors d'un processus de cristallisation. Et cette caractérisation ne nécessite pas de segmentation préalable des images à niveaux de gris.



temps  $\sim t_0 + 2s$



temps  $\sim t_0 + 4s$



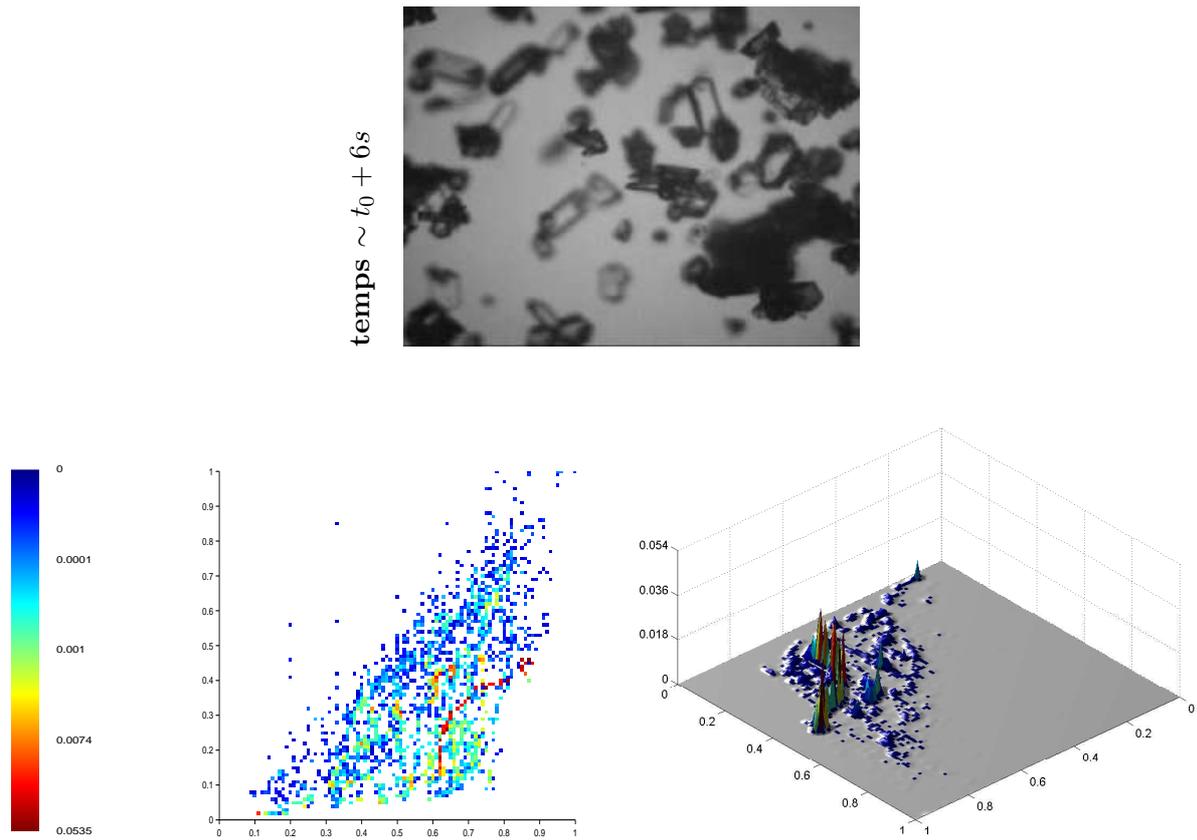


FIG. 8.11 – Diagrammes de forme,  $\mathcal{D}_{12}$  :  $(\omega, A, d)$  définis pour  $100 \times 100$  classes, à VAG des images d'acide adipique lors d'un processus de cristallisation, par rapport au critère de luminance avec la tolérance d'homogénéité  $m = 20$  selon le modèle CLIP. Les diagrammes de forme sont représentés soit dans un plan euclidien selon une échelle de couleurs soit grâce à leur surface (préalablement lissée).

## Quatrième partie

# Conclusions et perspectives



# Sommaire de la Quatrième partie

---

9	Conclusions	197
10	Perspectives	199

---



# Chapitre 9

## Conclusions

Ce mémoire de thèse a présenté l'analyse d'image géométrique et morphométrique par diagrammes de forme et voisinages adaptatifs généraux. La mise en place de cette approche a découlé de la problématique posée.

Pour répondre aux limitations des approches existantes, différentes étapes théoriques ont été nécessaires. Une recherche ciblée approfondie sur les éléments de la géométrie intégrale (fonctionnelles de Minkowski), de la morphométrie (diagrammes de forme), et sur les Voisinages Adaptatifs Généraux (VAG) a été menée. Ces étapes ont conduit à la définition de deux concepts originaux : la géométrie intégrale à VAG et la morphométrie à VAG.

La géométrie intégrale utilise les fonctionnelles de Minkowski permettant de caractériser globalement une image. Afin de rendre cette caractérisation multi-échelle, des transformations successives sont apportées à l'image et les fonctionnelles sont estimées à chaque étape, définissant ainsi les fonctions de Minkowski. La morphométrie utilise une gamme plus large de fonctionnelles : des fonctionnelles géométriques et des fonctionnelles morphométriques, respectivement dépendantes et indépendantes du facteur d'échelle. A partir des fonctionnelles morphométriques, des diagrammes de forme sont définis, dont la pertinence de la représentation et la qualité de la discrimination des formes sont étudiées.

Les Voisinages Adaptatifs Généraux respectent bien les conditions visées par la problématique. En effet, ils sont d'une part intrinsèquement adaptatifs en espace dans le sens où chaque voisinage coïncide spatialement avec la structure locale du point considéré sans aucune connaissance *a priori*, suivant les informations radiométriques, géométriques, morphologiques, ou texturales à analyser. D'autre part, ils sont physiquement cohérents puisqu'ils sont structurés suivant un modèle d'images algébrique GLIP qui peut être compatible avec la nature physique et/ou psychophysique de l'image étudiée. De plus, ils présentent une nature multi-échelle par la famille croissante de VAG qui est générée pour chaque point de l'image.

Lorsque la géométrie intégrale et la morphométrie sont associées aux Voisinages Adaptatifs Généraux, des fonctionnelles de Minkowski et de forme à VAG sont définies, illustrées par des cartographies. Une analyse multi-échelle est effectuée lors de la détermination des fonctions de Minkowski et de forme à VAG. Enfin, les histogrammes et diagrammes des fonctionnelles à VAG fournissent une distribution basée sur la géométrie et la morphométrie des structures présentes dans une image.

En pratique, diverses applications directes de l'analyse d'image géométrique et morphométrique par diagrammes de forme et voisinages adaptatifs ont été exposées : classification, détection des contours, segmentation, restauration.

Les différentes étapes de l'étude sur l'analyse d'image géométrique et morphométrique par diagrammes de forme et voisinages adaptatifs généraux ont fait l'objet de présentations dans des conférences à comité de lecture avec actes et d'articles dans des journaux scientifiques internationaux :

- Conférences internationales à comité de lecture avec proceedings :
  - S. Rivollier, J. Debayle and J.C. Pinoli. General Adaptive Neighborhood-based Minkowski maps for gray-tone image analysis. *European Congress of Stereology and Image Analysis*. Milan, Italy. June, 2009.
  - S. Rivollier, J. Debayle and J.C. Pinoli. Shape representation and analysis of 2D compact sets by shape diagrams. *International Conference on Image Processing Theory, Tools and Applications*. Paris, France. July, 2010.
- Conférences nationales à comité de lecture avec proceedings :
  - S. Rivollier, J. Debayle and J.C. Pinoli. Représentation intrinsèque multi-échelle des images à tons de gris par Voisinages Adaptatifs Généraux (VAG). *Conference of GRETSI*. Troyes, France. September, 2007.
  - S. Rivollier, J. Debayle and J.C. Pinoli. Fonctionnelles et fonctions de Minkowski à Voisinages Adaptatifs Généraux pour l'analyse des images à tons de gris. *Conference of GRETSI*. Dijon, France. September, 2009.
- Revues internationales à comité de lecture :
  - S. Rivollier, J. Debayle and J.C. Pinoli. A comparative study of shape diagrams for 2D compact sets - Part I : analytic convex sets. Accepted to *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics*. Published in a special issue of *Australian Journal of Mathematical Analysis and Applications*. **7(2-3)** : 1-27, 2010.
  - S. Rivollier, J. Debayle and J.C. Pinoli. A comparative study of shape diagrams for 2D compact sets - Part II : analytic simply connected sets. Accepted to *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics*. Published in a special issue of *Australian Journal of Mathematical Analysis and Applications*. **7(2-4)** : 1-21, 2010.
  - S. Rivollier, J. Debayle and J.C. Pinoli. A comparative study of shape diagrams for 2D compact sets - Part III : convexity discrimination for analytic and discretized simply connected sets. Accepted to *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics*. Published in a special issue of *Australian Journal of Mathematical Analysis and Applications*. **7(2-5)** : 1-18, 2010.
  - S. Rivollier, J. Debayle and J.C. Pinoli. Integral geometry and General Adaptive Neighborhoods for multiscale image analysis. *International Journal of Signal and Image Processing*. **1(3)** : 141-150, 2010.
- Conférence sans acte :
  - S. Rivollier, J. Debayle and J.C. Pinoli. Cartographies des fonctionnelles de Minkowski adaptatives pour l'analyse des images à tons de gris. *Seminar of the International Society for Stereology*. Paris, France. January, 2009.

D'autres articles sont en cours de rédaction :

- S. Rivollier, J. Debayle and J.C. Pinoli. General Adaptive Neighborhood-based shape diagrams.
- S. Rivollier, J. Debayle and J.C. Pinoli. General Adaptive Neighborhood-based filtering.
- J.C. Pinoli, S. Rivollier and J. Debayle. General Adaptive Neighborhood-based edge detection.
- S. Rivollier, J. Debayle and J.C. Pinoli. Image analysis by shape diagrams and General Adaptive Neighborhood - Application to cells shape analysis.

# Chapitre 10

## Perspectives

Ce mémoire a permis de montrer l'intérêt théorique et pratique de la géométrie et de la morphométrie à VAG (Voisinages Adaptatifs Généraux) en traitement et en analyse d'image. Il ouvre aussi des perspectives prometteuses dans de nombreux domaines.

### Fonctions géométriques et morphométriques à VAG

Des fonctions géométriques et morphométriques à VAG ont été définies, permettant une analyse multi-échelle des images à niveaux de gris. Ces fonctions dépendent de la tolérance d'homogénéité des VAG ou d'une transformation morphologique. La densité de l'aire à VAG en fonction de la tolérance d'homogénéité est une fonction croissante, bornée dans  $[0, 1]$  et atteignant ses bornes, assimilable à une fonction de répartition de probabilité. Cette monotonie n'est pas vérifiée pour l'aire à VAG en fonction d'une transformation morphologique. Il serait donc intéressant de trouver une transformation multi-échelle préservant la monotonie de l'aire à VAG.

Une autre perspective est de trouver une transformation qui préserve les propriétés des fonctionnelles géométriques et/ou morphométriques, autrement dit, une transformation telle que les cartographies des fonctionnelles à VAG associées à l'image transformée soit identiques aux cartographies des fonctionnelles à VAG associées à l'image originale.

### Filtrages adaptatifs

La famille croissante de VAG associée à chaque point du support spatial d'une image permet de définir une fenêtre opérationnelle multi-échelle. Par conséquent, des filtres adaptatifs par convolution ont été définis. Ces filtres utilisent une fonction décroissante, définie en chaque point du support spatial de l'image, basée sur une caractéristique géométrique (l'aire) des VAG, dépendant ainsi des structures locales de l'image. La décroissance de cette fonction implique le caractère passe-bas des filtres définis. L'utilisation d'autres fonctions, non nécessairement décroissantes, basées sur des caractéristiques géométriques et/ou morphométriques des VAG, constitue une perspective et permettrait de définir d'autres filtres adaptatifs.

### **Morphométrie (à VAG)**

Les diagrammes de forme sont construits dans un plan euclidien. Ils ont pour coordonnées deux fonctionnelles morphométriques. Des diagrammes tri-dimensionnels pourraient être introduits, ajoutant ainsi une troisième fonctionnelle morphométrique. La caractérisation d'image 2D obtenue serait alors plus fine et permettrait une discrimination plus importante des formes présentes dans l'image.

Il serait également intéressant de combiner les fonctionnelles géométriques et morphométriques. Par exemple, à partir d'un diagramme de forme bi-dimensionnel ayant pour coordonnées deux fonctionnelles morphométriques, une troisième dimension incluant une fonctionnelle géométrique pourrait être introduite. La caractérisation d'image 2D obtenue serait alors simultanément géométrique et morphométrique.

Dans le cas de l'extension de ce concept aux images tri-dimensionnelles, le diagramme de Blaschke, basé sur les fonctionnelles de Minkowski 3D, est une représentation dans le plan euclidien permettant de caractériser une image. L'utilisation de fonctionnelles morphométriques d'ensemble tri-dimensionnel permettrait de construire d'autres diagrammes de forme permettant de caractériser une image 3D.

Ces perspectives sur les diagrammes de forme s'étendent naturellement aux diagrammes de forme à VAG.

### **Voisins Adaptatifs Généraux**

Plusieurs définitions de Voisins Adaptatifs Généraux ont été énoncées dans ce manuscrit : les voisinages faibles vérifiant la propriété d'égalité entre points voisins de même niveau de gris, les voisinages forts vérifiant la propriété de symétrie, et les voisinages itérés propices à l'analyse d'images à variations bornées.

Les applications de ce manuscrit exigent le calcul des voisinages adaptatifs généraux de tous les points du support spatial de l'image à étudier. Cette détermination par l'approche naïve (parcours de tous les pixels et détermination du VAG de chacun d'eux) requiert beaucoup de mémoire et le temps de calcul est important. Une optimisation a été effectuée afin d'obtenir en même temps les VAG de plusieurs points ayant le même niveau de gris grâce à l'Equation 6.5. Cependant, cette optimisation n'est pas possible dans le cas des VAG forts ou des VAG itérés (faibles ou forts) car la propriété n'est plus respectée. Par conséquent, l'utilisation de tels VAG requiert un algorithme ingénieux afin de traiter et analyser des images avec des temps d'exécution raisonnables.

# Listes, nomenclature et références



# Liste des figures

2.1	Seuillage d'une image à niveaux de gris. . . . .	10
2.2	Amincissement d'une image à niveaux de gris. . . . .	11
2.3	Images binaires visuellement différentes ayant les mêmes fonctionnelles de Minkowski. . . . .	12
2.4	Fractalité des vaisseaux rétiens. . . . .	13
2.5	Trois modèles stochastiques. . . . .	14
2.6	Opérateurs de morphologie mathématique ensembliste. . . . .	16
2.7	Spectre de forme. . . . .	16
2.8	Différents calculs de compacité. . . . .	17
3.1	Recouvrements d'une image 1D par des cellules intralixels et interlixels. . . . .	29
3.2	Représentation des cellules intralixels et interlixels d'une image binaire 1D. . . . .	29
3.3	Nombre d'Euler d'une image binaire 1D. . . . .	30
3.4	Image discrète 1D et histogramme de ses configurations de voisinages. . . . .	31
3.5	Fonctionnelles de Minkowski 1D dépendant de la représentation des lixels. . . . .	32
3.6	Recouvrements d'une image 2D par des cellules intrapixels et interpixels. . . . .	33
3.7	Représentation des cellules intrapixels et interpixels d'une image binaire 2D. . . . .	33
3.8	Nombre d'Euler d'une image binaire 2D. . . . .	34
3.9	Périmètre de Crofton. . . . .	36
3.10	Image discrète 2D et histogramme de ses configurations de voisinages. . . . .	37
3.11	Fonctionnelles de Minkowski 2D dépendant de la représentation des pixels. . . . .	38
3.12	Représentation modifiée de cellules interpixels pour la $(8, 4)$ -connexité. . . . .	40
3.13	Choix de la connexité basé sur la forme des objets. . . . .	40
3.14	Fonctionnelles de Minkowski des bulles d'air dans un échantillon de ciment. . . . .	41
3.15	Importance de la connectivité des pixels. . . . .	41
3.16	Compromis champ/résolution. . . . .	42
3.17	Estimation des fonctionnelles de Minkowski dépendant de la résolution de l'image. . . . .	42
3.18	Fonctions de Minkowski globales utilisant des transformations morphologiques. . . . .	44
3.19	Fonctions de Minkowski locales utilisant des transformations morphologiques. . . . .	44
4.1	Geometrical functionals of a compact convex set. . . . .	47
4.2	Values of several morphometrical functionals for elementary 2D compact convex sets. . . . .	49
4.3	Family $\mathcal{F}_1^c$ of 2D analytic compact convex sets. . . . .	49
4.4	Complete systems of inequalities. . . . .	54
4.5	Family $\mathcal{F}_1^c$ mapped into shape diagrams. . . . .	56
4.6	Hierarchical classification based on distances between the shape diagrams. . . . .	57

4.7	Dispersion quantifications for shape diagrams applied on the family $\mathcal{F}_1^c$ .	58
4.8	Family $\mathcal{F}_{2,1}^c$ of 2D analytic compact convex sets.	62
4.9	Family $\mathcal{F}_{2,2}^c$ of 2D analytic compact convex sets.	62
4.10	Family $\mathcal{F}_{2,3}^c$ of 2D analytic compact convex sets.	62
4.11	Family $\mathcal{F}_{2,4}^c$ of 2D analytic compact convex sets.	62
4.12	Family $\mathcal{F}_{2,1}^c$ mapped into shape diagrams.	63
4.13	Family $\mathcal{F}_{2,2}^c$ mapped into shape diagrams.	64
4.14	Family $\mathcal{F}_{2,3}^c$ mapped into shape diagrams.	65
4.15	Family $\mathcal{F}_{2,4}^c$ mapped into shape diagrams.	66
4.16	"Intensity" discretized shape diagram.	67
4.17	"Intensity" discretized shape diagrams.	69
4.18	Overlapping quantification for the shape diagrams.	70
4.19	Geometrical functionals of a simply connected compact set.	73
4.20	Family $\mathcal{F}_1^{sc}$ of 2D analytic simply connected compact sets.	76
4.21	Complete systems of inequalities.	77
4.22	Family $\mathcal{F}_1^{sc}$ mapped into shape diagrams.	78
4.23	Hierarchical classification based on distances between the shape diagrams.	79
4.24	Dispersion quantifications for shape diagrams applied on the family $\mathcal{F}_1^{sc}$ .	80
4.25	Family $\mathcal{F}_{2,1}^{sc}$ of 2D analytic simply connected compact sets.	83
4.26	Family $\mathcal{F}_{2,2}^{sc}$ of 2D analytic simply connected compact sets.	83
4.27	Family $\mathcal{F}_{2,3}^{sc}$ of 2D analytic simply connected compact sets.	83
4.28	Family $\mathcal{F}_{2,1}^{sc}$ mapped into shape diagrams.	84
4.29	Family $\mathcal{F}_{2,2}^{sc}$ mapped into shape diagrams.	85
4.30	Family $\mathcal{F}_{2,3}^{sc}$ mapped into shape diagrams.	86
4.31	"Intensity" discretized shape diagrams.	88
4.32	Overlapping quantification for the shape diagrams.	89
4.33	Various convexity parameters.	92
4.34	Convexity discrimination for the families $\mathcal{F}_1^c$ and $\mathcal{F}_1^{sc}$ .	93
4.35	Geometrical functionals of a discretized simply connected compact set.	94
4.36	Family $\mathcal{F}_1^{dsc}$ of 2D discretized simply connected compact sets.	95
4.37	Family $\mathcal{F}_1^{dsc}$ mapped into shape diagrams.	96
4.39	Dispersion quantifications for shape diagrams applied on the family $\mathcal{F}_2^{dsc}$ .	97
4.41	Convexity discrimination for the family $\mathcal{F}_2^{dsc}$ .	98
4.40	Family $\mathcal{F}_2^{dsc}$ mapped into shape diagrams.	99
4.41	Family $\mathcal{F}_3^{dsc}$ of sets with 'triangle' shape, mapped into shape diagrams.	100
4.42	Family $\mathcal{F}_4^{dsc}$ of sets with 'disk' shape, mapped into shape diagrams.	101
4.43	Family $\mathcal{F}_5^{dsc}$ of sets with 'cross' shape, mapped into shape diagrams.	102
4.44	Dispersion quantifications for shape diagrams applied on the family $\mathcal{F}_3^{dsc}$ .	103
4.45	Dispersion quantifications for shape diagrams applied on the family $\mathcal{F}_4^{dsc}$ .	103
4.46	Dispersion quantifications for shape diagrams applied on the family $\mathcal{F}_5^{dsc}$ .	103
4.47	Image binaire de graines.	107
4.48	Images binaires de cellules cornéennes.	107
4.49	Graines placées dans les diagrammes de forme.	108

4.50	Cellules cornéennes placées dans les diagrammes de forme. . . . .	108
5.1	Image à niveaux de gris et surface topographique. . . . .	114
5.2	Fonctions de Minkowski utilisant l'opérateur de seuillage. . . . .	115
5.3	Fonctions de Minkowski dépendant de deux paramètres. . . . .	116
5.4	Fonctions de Minkowski locales utilisant l'opérateur de seuillage. . . . .	117
6.1	Multiplications scalaires GLIP d'une image à niveaux de gris. . . . .	122
6.2	Voisinages adaptatifs de luminance. . . . .	123
6.3	Comparaison entre les voisinages classiques et les voisinages adaptatifs. . . . .	123
6.4	Construction en dimension 1 d'un VAG. . . . .	125
6.5	Intégration des indicatrices des surfaces des VAG. . . . .	141
6.6	Intégration des indicatrices des frontières des VAG. . . . .	142
7.1	Fonctionnelles de Minkowski à VAG. . . . .	149
7.2	Influence du modèle vectoriel sur les fonctionnelles de Minkowski à VAG. . . . .	151
7.3	Influence du critère d'analyse sur les fonctionnelles de Minkowski à VAG. . . . .	152
7.4	Histogrammes des fonctionnelles de Minkowski à VAG. . . . .	155
7.5	Fonctions de Minkowski à VAG par rapport à la tolérance d'homogénéité $m_{\square}$ . . . . .	158
7.6	Histogrammes des fonctions de Minkowski à VAG par rapport à $m_{\square}$ . . . . .	159
7.7	Courbes représentatives des fonctions de Minkowski à VAG par rapport à $m_{\square}$ . . . . .	159
7.8	Fonctions de Minkowski à VAG par rapport à une transformation morphologique ( $r$ ). . . . .	161
7.9	Histogrammes des fonctions de Minkowski à VAG par rapport à $r$ . . . . .	162
7.10	Courbes représentatives des fonctions de Minkowski à VAG par rapport à $r$ . . . . .	162
7.11	Segmentation grâce aux fonctionnelles de Minkowski à VAG. . . . .	164
7.12	Images de cellules séreuses et leurs histogrammes des niveaux de gris. . . . .	165
7.13	Fonctionnelles de Minkowski à VAG associées aux images de cellules séreuses. . . . .	166
7.14	Histogrammes des cartographies des fonctionnelles de Minkowski à VAG. . . . .	167
7.15	Fonctions décroissantes utilisées pour des filtres passe-bas usuels. . . . .	169
7.16	Fonction utilisée pour la convolution d'un filtre passe-bas adaptatif. . . . .	170
7.17	Filtre passe-bas adaptatif. . . . .	171
7.18	Filtres passe-bas adaptatif et usuel. . . . .	172
8.1	Fonctionnelles morphométriques à VAG. . . . .	179
8.2	Histogrammes et diagrammes de forme à VAG. . . . .	181
8.3	Diagrammes de forme à VAG en fonction de la tolérance d'homogénéité. . . . .	183
8.4	Diagrammes de forme à VAG en fonction d'une transformation morphologique. . . . .	184
8.4	Diagrammes de forme à VAG en fonction d'une transformation morphologique. . . . .	185
8.5	Fonctionnelles morphométriques à VAG de l'image de graines. . . . .	186
8.6	Diagrammes de forme à VAG de l'image de graines. . . . .	186
8.7	Seuillage des diagrammes de forme à VAG de l'image de graines. . . . .	187
8.8	Fonctionnelles morphométriques à VAG de l'image de cornée. . . . .	188
8.9	Diagrammes de forme à VAG de l'image de cornée. . . . .	188
8.10	Seuillage des diagrammes de forme à VAG de l'image de cornée. . . . .	189
8.11	Diagrammes de forme à VAG des images de cristallisation d'acide adipique. . . . .	192



# Liste des tableaux

3.1	Configurations de voisinages dans une image 1D. . . . .	29
3.2	Coefficients des combinaisons linéaires pour les fonctionnelles de Minkowski 1D. . . . .	31
3.3	Configurations de voisinages dans une image 2D. . . . .	34
3.4	Coefficients des combinaisons linéaires pour les fonctionnelles de Minkowski 2D. . . . .	39
3.5	Coefficients des combinaisons linéaires pour la représentation des cellules interpixels. . . . .	40
4.1	Shape functionals for compact convex sets. . . . .	50
4.2	Axes coordinates of shape diagrams for compact convex sets. . . . .	51
4.3	Shape diagrams classification for analytic compact convex sets. . . . .	71
4.4	Shape functionals for simply connected compact sets. . . . .	74
4.5	Axes coordinates of shape diagrams axes coordinates for simply connected compact sets. . . . .	75
4.6	Shape diagrams classification for analytic simply connected compact sets. . . . .	90
4.7	Shape diagrams classification for discretized simply connected compact sets. . . . .	104
4.8	Shape diagrams general classification. . . . .	106
6.1	Structures et opérations des modèles d'images vectoriels GLIP. . . . .	121
7.1	Distances entre les histogrammes des niveaux de gris. . . . .	165
7.2	Distances entre les histogrammes des fonctionnelles de Minkowski à VAG. . . . .	168



# Nomenclature des symboles

## Ensembles et tribus

$\emptyset$	.....	ensemble vide
$\mathbb{N}$	.....	ensemble des entiers naturels
$\mathbb{Z}$	.....	ensemble des entiers relatifs
$\mathbb{R}$	.....	ensemble des réels
$E$	.....	espace euclidien
$\mathcal{P}$	.....	ensemble des parties
$\mathcal{T}$	.....	tribu
$\mathcal{B}$	.....	tribu borélienne

## Mesures et fonctionnelles

$\mathcal{H}_d^n$	.....	mesure de Hausdorff
$\mathcal{L}^n$	.....	mesure de Lebesgue
$\mathcal{I}_d^n$	.....	mesure de géométrie intégrale (fonctionnelle de Minkowski)
$\mathcal{M}^G$	.....	fonctionnelle géométrique
$\mathcal{M}^M$	.....	fonctionnelle morphométrique
$A$	.....	aire
$P$	.....	périmètre
$r$	.....	rayon du disque inscrit
$R$	.....	rayon du disque circonscrit
$\omega$	.....	diamètre de Féret minimum
$d$	.....	diamètre de Féret maximum
$A_C$	.....	aire de l'enveloppe convexe
$P_C$	.....	périmètre de l'enveloppe convexe

**Image**

$\mathcal{I}_B$  ..... ensemble des images binaires  
 $\mathcal{I}$  ..... ensemble des images à niveaux de gris  
 $\mathcal{D}^n$  ..... support spatial de dimension  $n$   
 $\tilde{\mathbb{E}}$  ..... échelle des niveaux de gris d'une image

**Opérateurs GLIP**

GLIP ..... General Linear Image Processing  
 $\otimes$  ..... multiplication scalaire GLIP  
 $\oplus$  ..... addition vectorielle GLIP  
 $\ominus$  ..... soustraction vectorielle GLIP ou opposé GLIP  
CLIP ..... Classical Linear Image Processing  
 $\otimes$  ..... multiplication scalaire CLIP  
 $\oplus$  ..... addition vectorielle CLIP  
 $\ominus$  ..... soustraction vectorielle CLIP ou opposé CLIP  
MLIP ..... Multiplicative Homomorphic Image Processing  
 $\boxtimes$  ..... multiplication scalaire MHIP  
 $\boxplus$  ..... addition vectorielle MHIP  
 $\boxminus$  ..... soustraction vectorielle MHIP ou opposé MHIP  
LRIP ..... Log-Ratio Image Processing  
 $\diamond$  ..... multiplication scalaire LRIP  
 $\diamond$  ..... addition vectorielle LRIP  
 $\diamond$  ..... soustraction vectorielle LRIP ou opposé LRIP  
LIP ..... Logarithmic Image Processing  
 $\triangle$  ..... multiplication scalaire LIP  
 $\triangle$  ..... addition vectorielle LIP  
 $\triangle$  ..... soustraction vectorielle LIP ou opposé LIP

**Voisinages Adaptatifs Généraux**

$f$  ..... image à niveaux de gris  
 $T$  ..... fonction critère d'analyse  
 $\mathcal{C}r$  ..... ensemble des fonctions critères d'analyse  
 $m_{\square}$  ..... tolérance d'homogénéité  
 $\mathbb{E}_{\oplus}$  ..... ensemble des tolérances d'homogénéité  
 $V_{m_{\square}}^{T(f)}(x)$  ..... voisinage adaptatif faible d'un point  
 $R_{m_{\square}}^{T(f)}(x)$  ..... voisinage adaptatif fort d'un point  
 $V_{m_{\square}}^{T(f)}(X)$  ..... voisinage adaptatif faible d'un ensemble  
 $R_{m_{\square}}^{T(f)}(X)$  ..... voisinage adaptatif fort d'un ensemble  
 $V_{m_{\square},p}^{T(f)}(x)$  ..... voisinage adaptatif faible itéré d'un point  
 $R_{m_{\square},p}^{T(f)}(x)$  ..... voisinage adaptatif fort itéré d'un point

# Références bibliographiques

(avec indication des pages où elles sont citées)

- [ACV08] L. Ambrosio, A. Colesanti, and E. Villa. Outer Minkowski content for some classes of closed sets and applications to stochastic geometry. *Mathematische Annalen*, 342 :727–748, 2008. 14
- [AD97] S. Ayari and S. Dubuc. La formule de Cauchy sur la longueur d’une courbe. *Canadian Mathematical Bulletin*, 40 :3–9, 1997. 27
- [AD01] G. Ayala and J. Domingo. Spatial size distributions : applications to shape and texture analysis. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 23(12) :1430–1442, December 2001. 16
- [AF04] A.L. Amaral and E.C. Ferreira. Activated sludge monitoring of a wastewater treatment plant using image analysis and partial least squares regression. *Analytica Chimica Acta*, 544 :246–253, December 2004. 17
- [AKM04] C.H. Arns, M.A. Knackstedt, and K.R. Mecke. Characterisation of irregular spatial structures by parallel sets and integral geometric measures. *Colloids and Surfaces A : Physicochemical and Engineering Aspects*, 241 :351–372, 2004. 15
- [Ama05] M. Amattouch. Théorie de la mesure et analyse d’image. Master’s thesis, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Saint-Etienne, September 2005. 10
- [ANKM<sup>+</sup>03] J. Angulo, T. Nguyen-Khoa, Z.A. Massy, T. Drüeke, and J. Serra. Morphological quantification of aortic calcification from low magnification images. *Image Analysis and Stereology*, 22 :81–89, May 2003. 16
- [Asa99] A. Asano. Texture analysis using morphological pattern spectrum and optimization of structuring elements. *Image Analysis and Processing*, 0 :209, 1999. 16
- [AT71] J.C. Alexander and A.I. Thaler. The boundary count of digital pictures. *Association for Computing Machinery*, 18(1) :105–112, January 1971. 11
- [BA01] K. Bunte and S.R. Abt. Sampling surface and subsurface particle-size distributions in wadable gravel- and cobble- bed streams for analyses in sediment transport, hydraulics, and streambed monitoring. general technical report rmrs-gtr-74, 2001. 17
- [BB82] D.H. Ballard and C.M. Brown. *Computer vision*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New-Jersey, U.S.A., 1982. vii
- [BC99] G. Bertrand and M. Couprie. A model for digital topology. *Discrete Geometry for Computer Imagery*, 1568 :229–241, 1999. 11

- [BC00] F.N. Bezerra and M. Couprie. Reducing anisotropy of topological operators for grayscale images. *SPIE Vision Geometry*, 4117(9) :46–57, 2000. 11
- [BCS03] K. Böröczky, M.A.H. Cifre, and G. Salinas. Optimizing area and perimeter of convex sets for fixed circumradius and inradius. *Monatshefte für Mathematik*, 138 :95–110, 2003. 47, 53, 76
- [BEC97] G. Bertrand, J.C. Everat, and M. Couprie. Image segmentation through operators based upon topology. *Electronic Imaging*, 6 :395–405, 1997. 11
- [Bes45] A.S. Besicovitch. A general form of the covering principle and relative differentiation of additive functions (I). *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 41 :103–110, 1945. 28
- [Bes46] A.S. Besicovitch. A general form of the covering principle and relative differentiation of additive functions (II). *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 42 :1–10, 1946. 28
- [Bez01] F.N. Bezerra. *Opérateurs topologiques pour le traitement d’images en niveaux de gris*. PhD thesis, Université Marne la Vallée, November 2001. 11
- [BF48] T. Bonnesen and W. Fenchel. *Theorie des konvexen körper*. Springer-Verlag, Berlin, 1934. Chelsea, 1974. New-York, 1948. 47, 73
- [BGCH98] A.J. Blanchard, P. Gader, A.C. Correa, and A.K. Hocaoglu. The use of spline based wavelet filtering to improve classification processing of SAR imagery. *IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium Proceedings*, 4 :1757–1759, July 1998. 10
- [Bla15] W. Blaschke. Konvexe Bereiche gegebener konstanter Breite und kleinsten Inhalts. *Mathematische Annalen*, 76 :504–513, 1915. 5, 46
- [Bla16] W. Blaschke. Eine frage über konvexe körper. *Jahresbericht Deutsch. Math.-Verein.*, 25 :121–125, 1916. 5, 46
- [Bla55] W. Blaschke. *Vorlesungen über integralgeometrie*. VEB, Berlin, 1955. 12
- [BM02] U. Brodatzi and K. Mecke. Simulating stochastic geometries : morphology of overlapping grains. *Computer Physics Communications*, 147 :218–221, 2002. 15
- [BN01] U. Braga-Neto. *Connectivity in image processing and analysis : theory, multiscale extensions and applications*. PhD thesis, John Hopkins University, 2001. 11
- [BNG03] U. Braga-Neto and J. Goutsias. A theoretical tour of connectivity in image processing and analysis. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 19(1) :5–31, July 2003. 11
- [Bor95] E. Borel. Sur quelques points de la théorie des fonctions. *Annales scientifiques de l’École Normale Supérieure*, 3(12) :9–55, 1895. 10
- [Bro28] R. Brown. A brief account of microscopical observations made in the months of june, july and august, 1827, on the particles contained in the pollen of plants, and on the general existence of active molecules in organic and inorganic bodies. *Philosophical Magazine*, 4 :161–173, 1828. 14
- [BvL92] A.J. Baddeley and M.N.M. van Lieshout. Object recognition using Markov spatial processes. *IEEE International Conference on Pattern Recognition*, 2 :136–139, September 1992. 14

- [BY98] J.D. Boissonnat and M. Yvinec. *Algorithmic geometry*. Cambridge University Press, 1998. 57, 80, 97
- [BZ88] Y.D. Burago and V.A. Zalgaller. *Geometric inequalities*. Springer-Verlag, 1988. 47, 73
- [Can32] G. Cantor. *Gesammelte abhandlungen mathematischen und philosophischen inhalts*. Berlin, Springer, 1932. 9
- [Cau41] A. Cauchy. Notes sur divers théorèmes relatifs à la rectification des courbes, et à la quadrature des surfaces. *Comptes-rendus à l'Académie des Sciences de Paris*, 13 :1060–1063, 1841. 94
- [CB97] M. Couprie and G. Bertrand. Topological grayscale watershed transformation. *SPIE Vision Geometry*, 3168(5) :136–146, 1997. 11
- [CB04] M. Couprie and G. Bertrand. Topology preserving alternating sequential filter for smoothing 2D and 3D objects. *Electronic Imaging*, 13 :720–732, 2004. 11
- [CBB99] M. Couprie, F.N. Bezerra, and G. Bertrand. Grayscale image processing using topological operators. *SPIE Vision Geometry*, 3811(8) :261–272, 1999. 11
- [CBB01] M. Couprie, F.N. Bezerra, and G. Bertrand. Topological operators for grayscale image processing. *Electronic Imaging*, 10(4) :1003–1015, 2001. 11
- [CC85] M. Coster and J.L. Chermant. *Précis d'analyse d'image*. Hermès, 1985. viii, 15
- [CG00] M.A.H. Cifre and S.S. Gomis. The missing boundaries of the Santalo diagrams for the cases (d,w,R) and (w,R,r). *Discrete and Computational Geometry*, 23 :381–388, 2000. 47, 53, 76
- [CH03] S.C. Cheng and Y.M. Huang. A novel approach to diagnose diabetes based on the fractal characteristics of retinal images. *IEEE Transactions on Information Technology in Biomedicine*, 7(3) :163–170, September 2003. 13
- [CHL<sup>+</sup>04] W. Chen, R. Howard, E. Lutwak, D. Yang, and G. Zhang. A generalized affine isoperimetric inequality. *Geometric Analysis*, 14(4) :597–612, 2004. 47, 73
- [Cho64] G. Choquet. *Topologie*. Masson, 1964. 10
- [Cif00] M.A.H. Cifre. Is there a planar convex set with given width, diameter, and inradius? *American Mathematical Monthly*, 107 :893–900, 2000. 47, 53, 76
- [Cif02] M.A.H. Cifre. Optimizing the perimeter and the area of convex sets with fixed diameter and circumradius. *Archiv der Mathematik*, 79 :147–157, 2002. 47, 53, 76
- [Cla41] A. Clairaut. *Eléments de géométrie*. David fils, 1741. 12
- [Cla81] M.W. Clark. Quantitative shape analysis : a review. *Mathematical Geology*, 13(4) :303–320, August 1981. 17
- [Coh94] D.L. Cohn. *Measure theory*. Springer, 1994. 10, 23
- [Cro68] M.W. Crofton. On the theory of local probability, applied to straight lines drawn at random in a plane. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 158 :181–199, 1868. 35, 94
- [CSG01] M.A.H. Cifre, G. Salinas, and S.S. Gomis. Complete systems of inequalities. *Inequalities in Pure and Applied Mathematics*, 2(1-10)(10) :1–12, 2001. 47, 53, 76

- [CY05] R.M. Carter and Y. Yan. Measurement of particle shape using digital imaging techniques. *Journal of Physics : Conference Series*, 15 :177–182, 2005. 17
- [DASMC07] M.E. Diaz, G. Alaya, R. Sebastian, and L. Martinez-Costa. Granulometric analysis of corneal endothelium specular images by using a germ-grain model. *Computers in Biology And Medicine*, 37(3) :364–375, March 2007. 16
- [DD06] E. Deza and M. Deza. *Dictionary of distances*. Elsevier, September 2006. 11, 28
- [DDM01] A. Doulamis, N. Doulamis, and P. Maragos. Generalized multiscale connected operators with applications to granulometric image analysis. *IEEE International Conference on Image Processing*, 3 :684–687, October 2001. 16
- [DDMZ02] S. Drot, X. Descombes, H. Le Men, and J. Zerubia. Object point processes for image segmentation. *IEEE International Conference on Pattern Recognition*, 2 :913–916, 2002. 14
- [Deb05] J. Debayle. *Traitement d'image à voisinages adaptatifs généraux*. PhD thesis, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Saint-Etienne, November 2005. 5, 6, 122, 124, 126, 127, 128
- [Del71] P. Delfiner. A generalization of the concept of size. *Journal of Microscopy*, 95 :203–216, 1971. 16
- [DGP06] J. Debayle, Y. Gavet, and J.C. Pinoli. General adaptive neighborhood image : restoration, enhancement and segmentation. *Image Analysis and Recognition*, 4141 :29–40, 2006. 5, 6
- [Did83] E. Diday. Croisements, ordres et ultramétries. *Mathématiques et Sciences Humaines*, 83 :31–54, 1983. 55, 79
- [DKP89] E.R. Dougherty, E.J. Kraus, and J.B. Pelz. Image segmentation by local morphological granulometries. *Geoscience and Remote Sensing Symposium*, 3 :1220–1223, July 1989. 17
- [DoC76] M. DoCarmo. *Differential geometry of curves and surfaces*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New-Jersey, U.S.A., 1976. 12
- [Dok00] P. Dokladal. *Grey-scale image segmentation : a topological approach*. PhD thesis, University Marne-la-Vallée, France, and University of Technology of Brno, Czech Republic, 2000. 11
- [DP05a] J. Debayle and J.C. Pinoli. Adaptive-neighborhood mathematical morphology and its applications to image filtering and segmentation. *European Congress of Stereology and Image Analysis*, pages 123–130, 2005. 5, 6, 124
- [DP05b] J. Debayle and J.C. Pinoli. Multiscale image filtering and segmentation by means of adaptive neighborhood mathematical morphology. *IEEE International Conference on Image Processing*, 3 :537–540, September 2005. 5, 6, 124
- [DP05c] J. Debayle and J.C. Pinoli. Spatially adaptive morphological image filtering using intrinsic structuring elements. *Image Analysis and Stereology*, 24(3) :145–158, 2005. 5, 6, 124, 127, 129
- [DP06a] J. Debayle and J.C. Pinoli. General adaptive neighborhood image processing. Part I : Introduction and theoretical aspects. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 25(2) :245–266, January 2006. 5, 6, 122, 169

- [DP06b] J. Debayle and J.C. Pinoli. General adaptive neighborhood image processing. Part II : Practical application examples. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 25(2) :267–284, January 2006. 5, 6, 122, 169
- [DP09a] J. Debayle and J.C. Pinoli. General adaptive neighborhood Choquet image filtering. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 35(3) :173–185, November 2009. 5, 6, 124, 169
- [DP09b] J. Debayle and J.C. Pinoli. General Adaptive Neighborhood Mathematical Morphology. *IEEE International Conference on Image Processing*, November 2009. 169
- [Eck06] B. Eckmann. *Mathematical Survey Lectures 1943-2004*, chapter The Euler characteristic - a few highlights in its long history, pages 177–188. Springer Berlin Heidelberg, 2006. 10
- [Edg90] G.A. Edgar. *Measure, topology, and fractal geometry*. Springer-Verlag, 1990. 23
- [Egg52] H.G. Eggleston. A proof of Blaschke’s theorem on the Reuleaux triangle. *Quarterly Journal of Mathematics, Oxford*, 3(2) :296–297, 1952. 48, 76
- [EL03] U. Eckhardt and L.J. Latecki. Topologies for the digital spaces  $\mathbb{Z}^2$  and  $\mathbb{Z}^3$ . *Computer Vision and Image Understanding*, 90(3) :295–312, June 2003. 11
- [Fav33] J. Favard. La longueur et l’aire d’après Minkowski. *Société Mathématique de France*, 61 :63–84, 1933. 27
- [Fed69] H. Federer. *Geometric measure theory*. Springer-Verlag, New-York, 1969. 27
- [Fer30] L.R. Feret. La grosseur des grains des matières pulvérulentes. *Premières Communications de la Nouvelle Association Internationale pour l’Essai des Matériaux, Groupe D*, pages 428–436, 1930. 46, 47, 50, 72, 73, 74, 91, 94
- [Fra03] P. Francus. *Image analysis, sediments and paleoenvironmental reconstructions*, chapter Image measurements. Kluwer academic publishers, 2003. 17
- [GH95] C.A. Glasbey and G.W. Horgan. *Image analysis for the biological sciences*. John Wiley and Sons, 1995. viii
- [GH07] T. Gallouët and R. Herbin. Mesure et intégration, October 2007. 23
- [GKM<sup>+</sup>07] R. Guderlei, S. Klenk, J. Mayer, V. Schmidt, and E. Spodarev. Algorithms for the computation of the Minkowski functionals of deterministic and random polyconvex sets. *Image and Vision Computing*, 25 :464–474, 2007. 14
- [GKN96] S. Grossert, M. Koppen, and B. Nickolay. A new approach to fuzzy morphology based on fuzzy integral and its application in image processing. *IEEE International Conference on Pattern Recognition*, 2 :625–630, 1996. 10
- [GP08] Y. Gavet and J.C. Pinoli. Visual perception based automatic recognition of cell mosaics in human corneal endothelium microscopy images. *Image Analysis and Stereology*, 27 :53–61, 2008. 107
- [GP09] Y. Gavet and J.C. Pinoli. Quantitative and qualitative evaluation of human endothelial cells image segmentation. *European Congress of Stereology and Image Analysis*, 2009. 107
- [Gra71] S.B. Gray. Local properties of binary images in two dimensions. *IEEE Transactions on Computers*, C20(5) :551–561, May 1971. 12

- [GW08] R.C. Gonzalez and R.E. Woods. *Digital image processing*. Prentice-Hall, Upper Saddle River, New-Jersey, U.S.A., 2008. vii
- [Had57] H. Hadwiger. *Vorlesungen über inhalt, oberfläche und isoperimetrie*. Springer-Verlag, 1957. 12
- [Hal74] P.R. Halmos. *Measure theory*. Springer-Verlag, 1974. 10
- [Hau18] F. Hausdorff. Dimension und äusseres Mass. *Mathematische Annalen*, 79 :157–179, 1918. 10, 26
- [Het99] H. Hetzheim. Separation of different textures in images using fuzzy measures and fuzzy functions and their fusion by fuzzy integrals. *European Symposium on Intelligent Techniques*, pages 34–36, June 1999. 10
- [HK06] R. Heilbronner and N. Keulen. Grain size and grain shape analysis of fault rocks. *Tectonophysics*, 427(1-4) :199–216, 2006. 17
- [HS02] P.W. Hillock and P.R. Scott. Inequalities for lattice constrained planar convex sets. *Inequalities in Pure and Applied Mathematics*, 3(2-23) :1–10, 2002. 47, 73
- [HVV07] C.L.L. Hendriks, G.M.P. VanKempen, and L.J. VanVliet. Improving the accuracy of isotropic granulometries. *Pattern Recognition Letters*, 28 :865–872, 2007. 16
- [JP87] M. Jourlin and J.C. Pinoli. Logarithmic image processing. *Acta Stereologica*, 6(3) :651–655, 1987. 18, 120
- [JP88] M. Jourlin and J.C. Pinoli. A Model For Logarithmic Image Processing. *Journal of Microscopy*, 149 :21–35, 1988. 18, 120
- [JPZ89] M. Jourlin, J.C. Pinoli, and R. Zeboudj. Contrast definition and contour detection for logarithmic images. *Journal of Microscopy*, 156 :33–40, October 1989. 150
- [KR89] T.Y. Kong and A. Rosenfeld. Digital topology : introduction and survey. *Comp. Vision, Graphics and Image Proc.*, 48 :357–393, 1989. 11
- [KR04] R. Klette and A. Rosenfeld. *Digital geometry : Geometric methods for digital picture analysis*. Morgan Kaufmann Publishers Inc. San Francisco, CA, USA, 2004. 94, 95
- [KT98] A. Kosir and J. Tasic. Pattern spectrum of binary image. *Signal Processing*, 2 :974–977, 1998. 16, 43
- [LCC04] J. Li, Z. Chi, and G. Chen. Image retrieval based on Sugeno fuzzy integral. *IEEE International Conference on Image and Graphics*, pages 160–163, December 2004. 10
- [LDZB04] C. Lacoste, X. Descombes, J. Zerubia, and N. Baghdadi. A Bayesian geometric model for line network extraction from satellite images. *IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 3 :565–568, May 2004. 14
- [Leb01] H. Lebesgue. Sur une généralisation de l’intégrale définie. *Comptes Rendus de l’Académie de Sciences*, 132 :1025–1028, 1901. 10
- [LFJB96] M.J. Labouré, I. Fillère, M. Jourlin, and J.M. Becker. Geometric shape recognition and classification. *Microscopy Microanalysis Microstructures*, 7(5-6) :447–451, 1996. 17
- [Lim90] J.S. Lim. *Two-dimensional signal and image processing*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New-Jersey, U.S.A., 1990. 119

- [Lis47] J.B. Listing. Vorstudien zur topologie, 1847. 10
- [LKD07] D. Legland, K. Kiêu, and M.F. Devaux. Computation of Minkowski measures on 2D and 3D binary images. *Image Analysis and Stereology*, 26 :83–92, June 2007. 12
- [LL97] Y. Liu and Y. Li. Image feature extraction and segmentation using fractal dimension. *IEEE International Conference on Information, Communications and Signal Processing*, 2 :975–979, September 1997. 13
- [LOH01] C. Lang, J. Ohser, and R. Hilfer. On the analysis of spatial binary images. *Journal of Microscopy*, 203(3) :303–313, 2001. 29, 33
- [Man74] B. Mandelbrot. Les objets fractals - forme, hasard et dimension, 1974. 13
- [Mar06] A.A. Markov. Rasprostranenie zakona bol'shikh chisel na velichiny, zavisyaschie drug ot druga. *Izvestiya Fiziko-matematicheskogo obschestva pri Kazanskom universitete*, 15 :135–156, 1906. 14
- [Mar87] P. Maragos. Pattern spectrum of images and morphological shape-size complexity. *IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 12 :241–244, April 1987. 16
- [Mar89] P. Maragos. Pattern spectrum and multiscale shape representation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 11(7) :701–716, July 1989. 16
- [Mat67] G. Matheron. *Éléments pour une théorie des milieux poreux*. Masson, Paris, 1967. 15
- [Mat75] G. Matheron. *Random sets and integral geometry*. John Wiley, New-York, 1975. 14
- [MB90] F. Meyer and S. Beucher. Morphological segmentation. *Journal of Visual Communication and Image Representation*, 1(1) :21–46, 1990. 15
- [Mec98] K.R. Mecke. Integral geometry in statistical physics. *Modern Physics*, 12(9) :861–899, 1998. 12
- [Min03] H. Minkowski. Volumen und Oberfläche. *Mathematische Annalen*, 57 :447–495, 1903. 10, 12, 15, 27
- [Mon99] G. Monge. *Géométrie descriptive*. Obeliane, 1799. 12
- [Mor88] F. Morgan. *Geometric measure theory - A beginner's guide*. Academic Press, 1988. 27
- [MR01] K. Michielsen and H. De Raedt. Integral-geometry morphological image analysis. *Physics Reports*, 347 :461–538, 2001. 12
- [MS00] K.R. Mecke and D. Stoyan. *Statistical physics and spatial statistics*. Springer-Verlag, 2000. 14
- [MS05] K.R. Mecke and D. Stoyan. Morphological characterization of point patterns. *Biometrical Journal*, 47(4) :473–488, 2005. 15
- [Naj94] L. Najman. *Morphologie mathématique : de la segmentation à l'analyse multivoque*. PhD thesis, Université Paris Dauphine, April 1994. 15
- [NOP99] W. Nagel, J. Ohser, and K. Pischang. An integral-geometric approach for the Euler-Poincaré characteristic of spatial images, 1999. 12, 29, 33
- [NR05] T.M. Nguyen and R.M. Rangayyan. Shape analysis of breast masses in mammograms via the fractal dimension. In *IEEE Engineering in Medicine and Biology*, pages 3210–3213, 2005. 13

- [OM00] J. Ohser and F. Mücklich. *Statistical analysis of microstructures in materials science*. John Wiley and Sons, November 2000. 29, 33
- [ONS02] J. Ohser, W. Nagel, and K. Schladitz. The Euler number of discretised sets - on the choice of adjacency in homogeneous lattices. In *K.R. Mecke and D. Stoyan eds. Morphology of condensed matter*. Springer-Verlag, 2002. 29, 33
- [ONS03] J. Ohser, W. Nagel, and K. Schladitz. The Euler number of discretised sets - surprising results in three dimensions. *Image Analysis and Stereology*, 22 :11–19, 2003. 29, 33
- [Opp67] A.V. Oppenheim. Generalized superposition. *Information and Control*, 11(5-6) :528–536, November-December 1967. 10, 120
- [OS06] J. Ohser and K. Schladitz. *Image processing and analysis*. Clarendon Press Oxford, 2006. 29, 33
- [OSS68] A.V. Oppenheim, R.W. Schafer, and T.G. Stockham. Nonlinear filtering of multiplied and convolved signals. *IEEE Proceedings*, 56(8) :1264–1291, August 1968. 120
- [Oss78] R. Osserman. The isoperimetric inequality. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 84 :1182–1238, 1978. 47, 73
- [Oss79] R. Osserman. Bonnesen style isoperimetric inequalities. *American Mathematical Monthly*, 86 :1–29, 1979. 47, 73
- [PBV03] V. Patrascu, V. Buzuloiu, and C. Vertan. *M. Nachtgaeel and E. Kerre. Fuzzy filters for image processing*, volume 122 of *Studies in fuzziness and soft computing*, chapter Fuzzy image enhancement in the framework of logarithmic model, pages 219–237. Springer, Heidelberg, 2003. 120
- [PD07] J.C. Pinoli and J. Debayle. Logarithmic Adaptive Neighborhood Image Processing (LANIP) : introduction, connections to human brightness perception and application issues. *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*, 2007. 5, 6
- [Pin87] J.C. Pinoli. *Contribution à la modélisation, au traitement et à l'analyse d'image*. PhD thesis, University of Saint-Etienne, 1987. 18, 120
- [Pin97a] J.C. Pinoli. A general comparative study of the multiplicative homomorphic, log-ratio and logarithmic image processing approaches. *Signal Processing*, 58 :11–45, January 1997. 10, 119
- [Pin97b] J.C. Pinoli. The Logarithmic Image Processing model : connections with human brightness perception and contrast estimators. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 7 :341–358, January 1997. 120
- [Poi96] H. Poincaré. *Calcul des probabilités*. Paris 1912, reprinted 1923., 1896. 94
- [Pra78] W.K. Pratt. *Digital image processing*. Wiley-Interscience Publication, New-York, Etats-Unis, 1978. vii
- [Ram62] S. Ramanujan. *Ramanujan's collected works*. Chelsea, New York, 1962. 52
- [RDP07] S. Rivollier, J. Debayle, and J.C. Pinoli. Représentation intrinsèque multi-échelle des images à tons de gris par Voisinages Adaptatifs Généraux (VAG). *Conference of GRETSI*, pages 781–784, September 2007. 149

- [RDP09a] S. Rivollier, J. Debayle, and J.C. Pinoli. Cartographies des fonctionnelles de Minkowski adaptatives pour l'analyse des images à tons de gris. *Seminar of the International Society for Stereology*, January 2009. 149
- [RDP09b] S. Rivollier, J. Debayle, and J.C. Pinoli. Fonctionnelles et fonctions de Minkowski à Voisinages Adaptatifs Généraux pour l'analyse des images à tons de gris. *Conference of GRETSI*, September 2009. 149, 156
- [RDP09c] S. Rivollier, J. Debayle, and J.C. Pinoli. General Adaptive Neighborhood-based Minkowski maps for gray-tone image analysis. *European Congress of Stereology and Image Analysis*, 2009. 149
- [RDP10a] S. Rivollier, J. Debayle, and J.C. Pinoli. A comparative study of shape diagrams for 2D compact sets - Part I : analytic convex sets. *Accepted to Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics. Published in a special issue of Australian Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 7(2-3) :1–27, 2010. 46, 72, 73, 75, 81, 82, 83, 87, 91, 92, 93, 95, 98, 105
- [RDP10b] S. Rivollier, J. Debayle, and J.C. Pinoli. A comparative study of shape diagrams for 2D compact sets - Part II : analytic simply connected sets. *Accepted to Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics. Published in a special issue of Australian Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 7(2-4) :1–21, 2010. 46, 71, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 102, 105
- [RDP10c] S. Rivollier, J. Debayle, and J.C. Pinoli. A comparative study of shape diagrams for 2D compact sets - Part III : convexity discrimination for analytic and discretized simply connected sets. *Accepted to Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics. Published in a special issue of Australian Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 7(2-5) :1–18, 2010. 46, 71, 72, 91
- [RDP10d] S. Rivollier, J. Debayle, and J.C. Pinoli. Integral geometry and General Adaptive Neighborhoods for multiscale image analysis. *International Journal of Signal and Image Processing*, 1(3) :141–150, 2010. 149
- [RDP10e] S. Rivollier, J. Debayle, and J.C. Pinoli. Shape representation and analysis of 2D compact sets by shape diagrams. *International Conference on Image Processing Theory, Tools and Applications*, July 2010. 108
- [Reu63] F. Reuleaux. *The kinematics of machinery : outlines of a theory of machines*. German original. Translated by A. Kennedy and MacMillan and Co., London. Reprinted by Dover, New-York., 1875-1876-1963. 48, 76
- [Riv06] S. Rivollier. Analyse spectrale morphologique adaptative d'images. Master's thesis, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Saint-Etienne, September 2006. 5, 17
- [Riv08] A. Rivoire. Analyse d'image par géométrie intégrale à voisinages adaptatifs généraux. Master's thesis, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Saint-Etienne, September 2008. 154
- [Rog70] C.A. Rogers. *Hausdorff measures*. Cambridge University Press, 1970. 26
- [Ros69] A. Rosenfeld. Picture processing by computer. *ACM Computing Surveys*, 1(3) :147–176, 1969. vii

- [Ros70] A. Rosenfeld. Connectivity in digital pictures. *Association for Computing Machinery*, 17(1) :146–160, January 1970. 11, 28, 32
- [Ros74] A. Rosenfeld. Adjacency in digital pictures. *Information and Control*, 26 :24–33, 1974. 28, 32
- [Ros75] A. Rosenfeld. A converse to the Jordan curve theorem for digital curves. *Information and Control*, 29 :292–293, 1975. 28, 32
- [Ros79] A. Rosenfeld. Digital topology. *American Mathematical Monthly*, 86(8) :621–630, October 1979. 11
- [RPG<sup>+</sup>01] B.N. Raby, M. Polette, C. Gilles, C. Clavel, K. Strumande, M. Matos, J.M. Zahm, Z. van Roy, N. Bonnet, and P. Birembaut. Quantitative cell dispersion analysis : new test to measure tumor cell aggressiveness. *International Union Against Cancer*, 93 :644–652, 2001. 57, 80, 97
- [RRB03] C.M. Riley, W.I. Rose, and G.J.S. Bluth. Quantitative shape measurements of distal volcanic ash. *Geophysical Research*, 108 :B10, 2003. 17
- [RS95] J.F. Rivest and P. Soille. Physical significance of image measurements. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 44(3) :751–754, June 1995. 114
- [RSS92] J.F. Rivest, J. Serra, and P. Soille. Dimensionality in image analysis. *Journal of Visual Communication and Image Representation*, 3(2) :137–146, June 1992. 15, 18, 114
- [SA00] P.R. Scott and P.W. Awyong. Inequalities for convex sets. *Inequalities in Pure and Applied Mathematics*, 1(1-6) :1–6, 2000. 47, 73
- [San61] L.A. Santalo. Sobre los sistemas completos de desigualdades entre tres elementos de una figura plana. *Math. Notae.*, 17 :82–104, 1961. 5, 6, 46, 47, 53, 72, 76, 91
- [San04] L.A. Santalo. *Integral geometry and geometric probability*. Cambridge University Press, 2004. 12, 14
- [Sap01] Guillermo Sapiro. *Geometric partial differential equations and image analysis*. Cambridge University Press, 2001. 13
- [SB05] M. Salerno and M. Banzato. Minkowski measures for image analysis in scanning probe microscopy. *Microscopy and Analysis*, 19 :13–15, 2005. 18, 28
- [SCDS97] S. Sastry, D.S. Corti, P.G. Debenedetti, and F.H. Stillinger. Statistical geometry of particle packings. I. Algorithm for exact determination of connectivity, volume, and surface areas of void space in monodisperse and polydisperse sphere packings. *Physical Review (Statistical Physics, Plasmas, Fluids, and Related Interdisciplinary Topics)*, 56(5) :5524–5532, 1997. 14
- [Sch03] V. Schulz. *Description and reconstruction of microscopic random heterogeneous media in order to estimate macroscopic hydraulic functions*. PhD thesis, University of Heidelberg, July 2003. 12, 44
- [Sch06] J. Schmähling. *Statistical characterization of technical surface microstructure*. University of Heidelberg, 2006. 14
- [Sch07] R. Schneider. Integral geometric tools for stochastic geometry. *Lecture Notes in Mathematics*, 1892 :119–184, 2007. 14

- [Sco79] P.R. Scott. A family of inequalities for convex sets. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 20 :237–245, 1979. 47, 73
- [SCTK98] D. Sharvit, J. Chan, H. Tek, and B.B. Kimia. Symmetry-based indexing of image databases. *Visual Communication and Image Representation*, 9 :366–380, 1998. 97
- [SD92] F. Sand and E.R. Dougherty. Statistics of the morphological pattern-spectrum moments for a random-grain model. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 1 :121–135, 1992. 17, 18, 43
- [SDS97] S. Sastry, P.G. Debenedetti, and F.H. Stillinger. Statistical geometry of particle packings. II. "Weak spots" in liquids. *Physical Review (Statistical Physics, Plasmas, Fluids, and Related Interdisciplinary Topics)*, 56(5) :5533–5543, 1997. 14
- [Ser69] J. Serra. *Introduction à la Morphologie Mathématique*. Cahiers du Centre de Morphologie Mathématique, 1969. 15
- [Ser82] J. Serra. *Image analysis and mathematical morphology - Volume 1*. Academic Press, London, U.K., 1982. 15
- [Ser88] J. Serra. *Image analysis and mathematical morphology - Volume 2*. Academic Press, London, U.K., 1988. 15
- [Sev] G.J.A. Sevink. Mathematical description of nanostructures with Minkowski functionals. 12
- [SG97] K. Sivakumar and J. Goutsias. Discrete morphological size distributions and densities : estimation techniques and applications. *Electronic Imaging*, 6(1) :31–53, 1997. 16
- [SGC] H. Shi, P.D. Gader, and W. Chen. Fuzzy integral filters : properties and parallel implementation. 10
- [She42] S. Sherman. A comparison of linear measures in the plane. *Duke Mathematical Journal*, 9 :1–9, 1942. 27
- [Sie03] A. Siegel. An isoperimetric theorem in plane geometry. *Discrete and Computational Geometry*, 29(2) :239–255, 2003. 47, 73
- [SKM87] D. Stoyan, W.S. Kendall, and J. Mecke. *Stochastic geometry and its applications*. John Wiley and Sons, 1987. 14
- [SMR87] P. Saint-Marc and M. Richetin. Filtrage structurel d'images grises par analyse des courbures principales des surfaces associées. *Traitement du signal*, 4(5) :411–427, 1987. 13
- [SO09] K. Sandfort and J. Oshser. Labeling of n-dimensional images with choosable adjacency of the pixels. *Image Analysis and Stereology*, 28 :45–61, 2009. 29, 33
- [Soi03] P. Soille. *Morphological image analysis : principles and applications*. Springer-Verlag, New-York, 2003. 15
- [SON06] K. Schladitz, J. Ohser, and W. Nagel. Measuring intrinsic volumes in digital 3D images. *Discrete Geometry for Computer Imagery*, 4245 :247–258, 2006. 29, 33
- [SP83] H. Shvaytser and S. Peleg. Pictures as elements in a vector space. *IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, pages 222–230, June 1983. 120
- [SP87] H. Shvaytser and S. Peleg. Inversion of picture operators. *Pattern Recognition Letters*, 5 :49–61, 1987. 120

- [Spi79] M. Spivak. *(A Comprehensive Introduction to) Differential Geometry*. Publish or Perish, Inc., 1979. 12
- [Ste54] H. Steinhaus. Length, shape, and area. *Colloquium Mathematicum*, 3 :1–13, 1954. 27
- [Sug74] M. Sugeno. *Theory of fuzzy integrals and its applications*. PhD thesis, Tokyo Institute of Technology, 1974. 10
- [TDF<sup>+</sup>07] G. Thibault, C. Devic, B. Fertil, J.L. Mari, and J. Sequeira. Indices de formes : de la 2D vers la 3D - Application au classement de noyaux de cellules. *Journées de l'Association Francophone d'Informatique Graphique*, 2007. 17
- [TDL96] E. Trettel and R. DeAlencar-Lotuf. The size-intensity diagram : a gray-scale granulometric analysis tool. *Simposio Brasileiro de Computacao Grafica e Processamento de Imagens*, 1 :259–264, 1996. 16
- [TGH04] K. Teknomo, G.P. Gerilla, and K. Hokao. Cellular urban descriptors of lowland urban model. *Proceedings of International Symposium of Lowland Technology*, pages 297–302, September 2004. 17
- [TK90] H. Thahani and J.M. Keller. Information fusion in computer vision using the fuzzy integral. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, 20(3) :733–741, 1990. 10
- [TM99] H.R. Tizhoosh and B. Michaelis. Image enhancement based on fuzzy aggregation techniques. *IEEE Instrumentation and Measurement Technology Conference*, 3 :1813–1817, 1999. 10
- [TM02] C.S. Tzafestas and P. Maragos. Shape connectivity : multiscale analysis and application to generalized granulometries. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 17 :109–129, 2002. 16
- [TW05] M. Tang and H.N. Wang. Feature analysis of brain MRI images based on fractal dimension. *IEEE International Conference of the Engineering in Medicine and Biology Society*, pages 3245–3248, September 2005. 13
- [Ung03] A. Ung. *Cartographie de la pollution atmosphérique en milieu urbain à l'aide de données multisources*. PhD thesis, Université Paris 7 - Denis Diderot, 2003. 17
- [URW07] E.R. Urbach, J.B.T.M. Roerdink, and M.H.F. Wilkinson. Connected shape-size pattern spectra for rotation and scale-invariant classification of gray-scale images. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 29(2) :272–285, February 2007. 16
- [VD94] L. Vincent and E.R. Dougherty. Morphological segmentation for textures and particles. *Digital Image Processing Methods*, 2 :43–102, 1994. 16, 43
- [Vel01] R.C. Veltkamp. Shape matching : similarity measures and algorithms. *IEEE International Conference on Shape Modeling and Applications*, pages 188–197, May 2001. 11
- [Vil06] M.B. Villarino. A note on the accuracy of Ramanujan's approximative formula for the perimeter of an ellipse. *Inequalities in Pure and Applied Mathematics*, 7(1), 2006. 52
- [Vil09] E. Villa. Specific area and mean surface density of inhomogeneous Boolean models. *Stereology and Image Analysis*, 4 :485–490, 2009. 14
- [Vin96] L. Vincent. Local grayscale granulometries based on opening trees. *International Symposium on Mathematical Morphology*, pages 273–280, May 1996. 17

- [VOFF08] C. Vertan, A. Oprea, C. Florea, and L. Florea. *Advanced concepts for intelligent vision systems*, volume 5259 of *Computer science*, chapter A pseudo-logarithmic image processing framework for edge detection, pages 637–644. Springer Berlin, Heidelberg, October 2008. 120
- [WPA07] E. Wharton, K. Panetta, and S. Agaian. Digital electronic arithmetics with applications. *IEEE International Conference on System of Systems Engineering*, pages 1–5, 2007. 120
- [Yam32] M. Yamanouti. Notes on closed convex sets. *Proceedings of the Physico-Mathematical Society of Japan Ser.*, 14 :605–609, 1932. 60, 82
- [YB61] I.M. Yaglom and V.G. Boltanskii. *Convex figures*. Translated by P.J. Kelly and L.F. Walton, Holt, Rinehart and Winton, 1961. 47, 73
- [ZBK01] H. Zhu, O. Basir, and F. Karray. Fuzzy integral based region merging for watershed image segmentation. *IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, 1 :27–30, December 2001. 10
- [ZR04] J. Zunic and P.L. Rosin. A new convexity measure for polygons. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 26(7) :923–934, July 2004. 92





N d'ordre : 2010 EMSE 0575

Séverine RIVOLLIER

**GEOMETRIC AND MORPHOMETRIC IMAGE ANALYSIS  
BY SHAPE DIAGRAMS AND GENERAL ADAPTIVE NEIGHBORHOODS**

**Speciality :** Image, Vision, Signal

**Keywords :** Shape Diagrams ; General Adaptive Neighborhoods (GAN) ;  
Minkowski, geometrical and morphometrical functionals ;  
GAN-based shape functionals, maps, histograms and diagrams ;  
Multiscale, locale and adaptive image analysis.

**Abstract :**

In quantitative image analysis, Minkowski functionals (Euler number, perimeter and area in a 2D space) are standard parameters for topological and geometrical measurements. However, they are insufficient for the characterization because two images may have the same Minkowski functionals, which leads to the use of other geometrical (radii of inscribed and circumscribed circles, minimal and maximal Feret diameters) and morphometrical (normalized particular ratios of geometrical functionals) functionals. A shape diagram is built into the Euclidean space and its coordinates are two morphometrical functionals. Thus, it provides a representation allowing the study of 2D set shapes. Nevertheless, these functionals and associated shape diagrams are often limited to binary images and achieved in a global and monoscale way. The use of General Adaptive Neighborhoods (GANs), simultaneously adaptive with the analyzing scales, the spatial structures and the image intensities, enables to overcome these limitations. The GAN-based Minkowski functionals are introduced, which allow a gray-tone image analysis to be realized in a local, adaptive and multiscale way.

The GANs are spatial neighborhoods defined around each point of the spatial support of a gray-tone image, homogeneous with respect to an analyzing criterion function represented in an algebraic model, according to an homogeneity tolerance. The shape functionals (Minkowski, geometrical and morphometrical) are computed on the GAN of each point of the spatial support of the image, enabling to define the so-called GAN-based shape maps. The map histograms and diagrams provide statistical distributions of the topology, geometry and morphometry of the gray-tone image local structures, contrary to the classical histogram that provides a global distribution of image intensities. The impact of axiomatic criteria variations (analyzing criterion, algebraic model, homogeneity tolerance) is analyzed through these maps, histograms and diagrams. Thus, multiscale maps are built, defining GAN-based shape functions.

Séverine RIVOLLIER

**ANALYSE D'IMAGE GEOMETRIQUE ET MORPHOMETRIQUE  
PAR DIAGRAMMES DE FORME ET VOISINAGES ADAPTATIFS GENERAUX**

**Spécialité** : Image, Vision, Signal

**Mots-clefs** : Diagrammes de forme ; Voisinages Adaptatifs Généraux (VAG) ;  
Fonctionnelles de Minkowski, géométriques et morphométriques ;  
Diagrammes et histogrammes des cartographies des fonctionnelles de forme à VAG ;  
Analyse d'image locale, adaptative et multi-échelle.

**Résumé :**

En analyse d'image, les fonctionnelles de Minkowski (le nombre d'Euler, le périmètre et l'aire en 2D) sont des paramètres standards de mesures topologiques et géométriques d'ensembles. Cependant, elles sont insuffisantes pour la caractérisation car deux images différentes peuvent avoir les mêmes fonctionnelles de Minkowski, ce qui conduit à l'utilisation d'autres fonctionnelles, géométriques (les rayons de disques inscrit et circonscrit, et les diamètres de Feret minimal et maximal) et morphométriques (ratios particuliers normalisés de fonctionnelles géométriques). Un diagramme de forme se construit dans un plan Euclidien et a pour coordonnées deux fonctionnelles morphométriques. Il fournit ainsi une représentation permettant d'étudier les formes d'ensembles 2D. Néanmoins, ces fonctionnelles et diagrammes associés sont souvent limités aux images binaires, et déterminés de manière globale et mono-échelle. L'utilisation des Voisinages Adaptatifs Généraux (VAG), simultanément adaptatifs avec les échelles d'analyse, les structures spatiales et les intensités des images, permet de pallier ces limites. Une analyse locale, adaptative et multi-échelle des images à tons de gris est donc proposée sous forme de cartographies des fonctionnelles de Minkowski à VAG.

Les VAG sont des voisinages définis en chaque point du support spatial d'une image à tons de gris, homogènes par rapport à un critère d'analyse représenté dans un modèle vectoriel, suivant une tolérance d'homogénéité. Les fonctionnelles de forme (de Minkowski, géométriques et morphométriques) sont calculées pour chaque VAG de l'image, permettant de définir les cartographies des fonctionnelles de forme adaptatives. Les histogrammes et diagrammes de ces cartographies fournissent des distributions statistiques des topologie, géométrie et morphométrie des structures locales de l'image à niveaux de gris, contrairement aux histogrammes classiques qui fournissent une distribution globale des intensités de l'image. L'impact de la variation des critères axiomatiques des VAG (critère d'analyse, modèle vectoriel, tolérance d'homogénéité) est analysé à travers ces cartographies, histogrammes et diagrammes. Des cartographies multi-échelles sont ainsi construites, définissant des fonctions de forme à VAG.