



**HAL**  
open science

# Propagation acoustique non linéaire dans les guides monodimensionnels

Ludovic Menguy

► **To cite this version:**

Ludovic Menguy. Propagation acoustique non linéaire dans les guides monodimensionnels. Acoustique [physics.class-ph]. Université du Maine, 2001. Français. NNT: . tel-00608755

**HAL Id: tel-00608755**

**<https://theses.hal.science/tel-00608755>**

Submitted on 14 Jul 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE de DOCTORAT de L'UNIVERSITE du MAINE

Spécialité :  
ACOUSTIQUE

présentée  
par  
Ludovic MENGUY

pour obtenir le grade de  
DOCTEUR de L'UNIVERSITE du MAINE

Sujet de la thèse :

PROPAGATION ACOUSTIQUE NON LINEAIRE  
DANS LES GUIDES MONODIMENSIONNELS

Soutenue le 15 Mai 2001  
devant la commission d'examen :

M. Ph. BLANC-BENON (Rapporteur)	Directeur de Recherche, Ecole Centrale de Lyon
M. M. CAMPBELL	Professeur, Université d'Edimbourg (Ecosse)
M. P. CERVENKA (Rapporteur)	Directeur de Recherche, Université Paris 6
M. F. COULOUVRAT	Chargé de Recherche, Université Paris 6
M. J. GILBERT	Chargé de Recherche, Université du Maine
M. V. GUSEV	Professeur, Université du Maine
M. J. KERGOMARD	Directeur de Recherche, L.M.A. Marseille

## Remerciements

Cette thèse a été effectuée au sein de l'équipe ondes guidées du Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine UMR-CNRS 6613 (LAUM), dans le cadre d'une bourse d'Allocation Moniteur Normalien.

Je tiens d'abord à remercier M. Jean Kergomard, Directeur de Recherche d'avoir été le responsable de ce travail et de m'avoir accueilli au Laboratoire. Je remercie vivement encore Joël Gilbert, Chargé de Recherche, d'avoir encadré cette thèse, et d'avoir toujours été disponible, attentif et plein de conseils avisés.

Ces travaux ont été effectués en collaboration avec l'équipe de thermoacoustique du LAUM. L'étude des effets non linéaires affectant le fonctionnement des réfrigérateurs acoustiques (utilisant des niveaux sonores élevés) nous a amené à entretenir avec Vitaly Gusev (Professeur à l'Université du Maine) et Hélène Bailliet des discussions scientifiques fructueuses; je les en remercie.

Je remercie également Raymond Burvingt (PAST à l'Université du Maine) et François Coulouvrat, Chargé de Recherches (Laboratoire de Modélisation en Mécanique à l'Université de Pierre et Marie Curie, Paris 6) qui se sont toujours montrés intéressés par nos travaux.

Cette étude a profité aussi d'intervenants en stages de DEA. Nelly Jallerat a mis en fonctionnement le dispositif expérimental sur les effets non linéaires en guide d'onde sans écoulement et Julien Anfosso les expériences en pavillon. Ces dernières ont été l'occasion d'échanges avec Philippe Béquin, Maître de Conférences (LAUM), auteur d'études en pavillon.

J'adresse également mes remerciements à Régis Msallam de l'IRCAM (doctorant de Paris 6); ses travaux sur les effets non linéaires dans les trombones nous ont naturellement amené à des échanges fructueux.

Je remercie enfin particulièrement Pascal Durrieu et Mico Hirschberg de nous avoir accueillis et d'avoir effectué avec nous des campagnes de mesures à l'Université Technologique de Eindhoven, en guide sans écoulement, puis en guide avec écoulement.

Je remercie également Dawn Rockliff et Murray Campbell du département de physique de l'Université d'Edimbourg pour les discussions concernant le vent acoustique non linéaire, ainsi que pour les mesures de PIV qu'ils ont effectuées à Edimbourg.

Merci encore à MM. Philippe Blanc-Benon, Directeur de Recherche (Ecole Centrale de Lyon) et Pierre Cervenka, Directeur de Recherche (Université de Paris 6) d'avoir accepté d'être rapporteurs de cette thèse, ainsi qu'à MM. les membres du Jury qui ont accepté de juger ce travail.

Un grand remerciement enfin à tous ceux qui m'ont aidé et encouragé pendant la rédaction de cette thèse, ma famille et belle famille, avec une pensée particulière pour Cécile afin de me faire pardonner pour les "vacances" passées à la maison en fin de parcours, car il y avait une thèse à terminer...

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
1.1	Les phénomènes de propagation non linéaire en acoustique . . . . .	3
1.1.1	L'approximation de l'acoustique linéaire . . . . .	3
1.1.2	L'acoustique faiblement non linéaire . . . . .	5
1.1.3	L'acoustique fortement non linéaire . . . . .	6
1.1.4	Les interactions acoustique-écoulement . . . . .	6
1.2	Les objectifs du travail de thèse; plan du rapport . . . . .	7
1.2.1	Les motivations du travail de recherche . . . . .	7
1.2.2	Le plan du rapport . . . . .	8
1.3	Principales conventions et notations utilisées . . . . .	10
<b>2</b>	<b>L'écoulement redressé non linéaire en guide d'onde monodimensionnel</b>	<b>13</b>
2.1	L'état de l'art . . . . .	13
2.1.1	Les premières observations et théories . . . . .	14
2.1.2	Les différents types d'écoulements redressés . . . . .	14
2.1.3	L'approche classique et les méthodes de résolution. . . . .	16
2.1.4	Les limites de l'approche classique. . . . .	18
2.1.5	Les conséquences du vent acoustique, domaines d'application. . . . .	19
2.2	L'article "Non-linear Acoustic Streaming Accompanying a Plane Stationary Wave in a Guide" . . . . .	21
<b>3</b>	<b>La propagation non linéaire en guide monodimensionnel</b>	<b>26</b>
3.1	L'état de l'art . . . . .	26
3.1.1	Présentation du phénomène et premières théories. . . . .	26
3.1.2	Les équations de base. . . . .	27
3.1.3	L'onde plane sans pertes : l'analyse de Riemann ou méthode des caractéristiques. . . . .	28
3.1.4	L'acoustique faiblement non linéaire : la méthode des échelles multiples (MEM) . . . . .	32
3.1.5	Les ondes stationnaires : l'interaction des ondes . . . . .	37
3.2	L'article "Weakly Nonlinear Gas Oscillations in Air-filled Tubes; Solutions and Experiments" . . . . .	40

3.3	La présence d'un écoulement laminaire . . . . .	41
3.3.1	L'état de l'art et objectif . . . . .	41
3.3.2	Des équations de base aux équations de Burgers généralisées . . . . .	44
3.3.3	La résolution des équations de Burgers . . . . .	48
3.3.4	Les expériences . . . . .	48
3.4	Le pavillon . . . . .	51
3.4.1	Etude bibliographique . . . . .	51
3.4.2	Des équations de base aux équations de Burgers généralisées . . . . .	53
3.4.3	La résolution des équations de Burgers généralisées . . . . .	57
3.4.4	Les expériences . . . . .	58
<b>4</b>	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>62</b>
<b>A</b>	<b>Solutions analytiques des équations de Burgers</b>	<b>65</b>
A.1	L'équation de Burgers non dissipative . . . . .	65
A.1.1	Source quelconque . . . . .	65
A.1.2	Source sinusoïdale . . . . .	66
A.2	L'équation de Burgers avec pertes volumiques . . . . .	68
A.2.1	Source quelconque : la solution intégrale . . . . .	68
A.2.2	Source sinusoïdale : la méthode de Laplace ( $\Gamma \gg 1$ ) . . . . .	68
A.3	Les autres équations de Burgers généralisées . . . . .	69
<b>B</b>	<b>Premiers résultats du modèle de propagation non linéaire</b>	<b>71</b>
B.1	L'onde plane progressive sans pertes de couche limite . . . . .	71
B.2	L'onde plane progressive avec pertes de couche limite . . . . .	73
<b>C</b>	<b>La déformation d'une onde : résultats expérimentaux préliminaires (sans écoulement)</b>	<b>75</b>
C.1	Le dispositif expérimental . . . . .	75
C.2	La comparaison théorie-expérience . . . . .	76
<b>D</b>	<b>Solutions du vent acoustique linéaire en guide d'onde</b>	<b>80</b>
D.1	La couche limite . . . . .	80
D.2	Le guide d'onde cylindrique . . . . .	82
D.3	Le guide bidimensionnel (deux plans parallèles) . . . . .	83
D.4	Le guide à section rectangulaire . . . . .	84
<b>E</b>	<b>Méthode de résolution numérique du vent acoustique non linéaire</b>	<b>85</b>
<b>F</b>	<b>Méthode de résolution numérique des équations de propagation non linéaires en tube</b>	<b>88</b>
F.1	Cas de l'onde purement progressive . . . . .	88
F.2	Cas de l'onde non purement progressive . . . . .	90

# Chapitre 1

## Introduction

### 1.1 Les phénomènes de propagation non linéaire en acoustique

#### 1.1.1 L'approximation de l'acoustique linéaire

L'approximation de l'acoustique linéaire permet de décrire de nombreux phénomènes de l'acoustique avec une précision suffisante : propagation, réflexion, réfraction, atténuations dues aux effets visqueux et thermiques, diffraction. Toutefois cette approximation se trouve mise en défaut dès que le niveau sonore devient important (avertisseurs sonores, sons intenses provoqués par les fusées, jets par exemple) ou que l'onde se propage à suffisamment grande distance (sonars par exemple). De nombreux phénomènes ne peuvent alors être expliqués que par un traitement non linéaire des équations de l'acoustique : déformation de l'onde, formation d'ondes de choc, interaction entre différentes ondes (non additivité), absorption supplémentaire en présence du choc, cavitation, sonoluminescence.... Le domaine d'application de l'acoustique non linéaire est très vaste et concerne de nombreux cas d'études.

Les guides d'onde sont également le siège de niveaux sonores élevés. C'est le cas de certains instruments de musique à vent. Par exemple, la sonorité cuivrée est déterminée par des phénomènes de propagation non linéaire dans les instruments à vent de type cuivre (Hirschberg *et coll.* [48]; voir figure 1.1). Des niveaux sonores élevés sont également atteints dans les silencieux d'automobiles ou les machines thermiques acoustiques (Gusev *et coll.* [47]). Les effets non linéaires sont responsables de certains phénomènes en médecine (écoulement du périlymphe par exemple : voir Lighthill [71]).

De très nombreux exemples pourraient encore être cités, parfois plus originaux comme les phénomènes utilisant l'écoulement moyen créé par une onde sonore de niveau élevé. Cet écoulement, appelé vent acoustique, est utile dans de nombreux phénomènes biologiques (Davidson [29], Secomb [110]), dans l'oreille par exemple (Lighthill [71]; voir le chapitre 2 pour plus de détails). Le vent

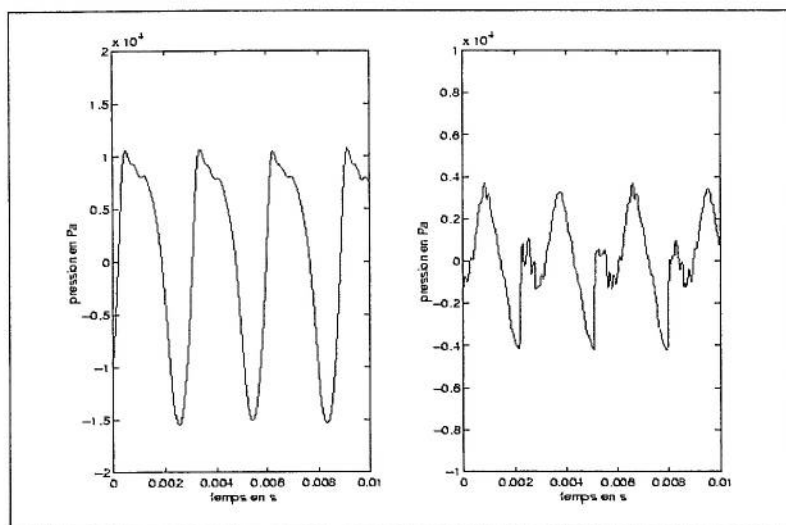


FIG. 1.1: Pression acoustique (en Pascal) à l'entrée de la coulisse (figure de gauche) et en sortie de coulisse (figure de droite). La déformation progressive du signal lors de la propagation dans la coulisse a mené à l'apparition d'ondes de choc.

acoustique est utilisé également pour la lévitation acoustique ou la manipulation d'objets dans l'espace.

C'est au milieu du 18<sup>ème</sup> siècle que sont posées les fondations de la théorie de la propagation du son dans l'air par Euler [36]. Mais ce n'est qu'un siècle plus tard en 1858 que les équations de propagation non linéaires unidimensionnelles sans pertes sont déterminées, indépendamment par Earnshaw [33] et Riemann [101].

L'approximation de l'acoustique linéaire s'appuie sur l'hypothèse suivante : la vitesse acoustique  $U_a$  est très petite devant la vitesse du son  $c_0$ . Un nombre de Mach acoustique  $M$ , nombre sans dimension, est alors introduit :  $M = U_a/c_0 \ll 1$ . Les équations de base peuvent ensuite être linéarisées.

Sous certaines conditions, l'hypothèse de l'acoustique linéaire ne peut plus être effectuée. Dans le cas d'un niveau sonore très intense, pour lequel  $M \sim 1$ , cette approximation n'est évidemment plus valable : c'est le cas de l'acoustique **fortement non linéaire**. Il n'est alors pas possible de linéariser les équations.

Toutefois, même pour des nombres de Mach acoustiques très petits ( $M \ll 1$ ), il est possible d'observer des phénomènes non linéaires très marqués, voire dominants. Ces effets sont *localement* négligeables (c'est-à-dire sur des distances petites devant la longueur d'onde), mais s'accroissent progressivement soit dans le temps soit dans l'espace au cours de la propagation. C'est le cas de l'acoustique dite **faiblement non linéaire**. Par exemple, une onde plane progressive sans pertes aboutit inévitablement à la formation d'une onde de choc, quelle que soit l'intensité du signal au départ, même très faible, et quelle que soit la forme

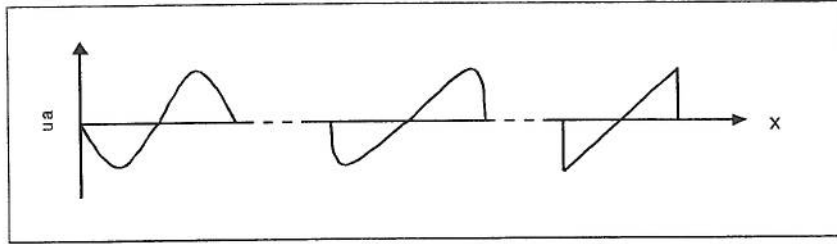


FIG. 1.2: déformation d'un signal sinusoïdal

du signal, pour peu que l'onde se propage suffisamment loin (voir figure 1.2 dans le cas d'une onde sinusoïdale).

Dans tout ce document, les termes "fortement" ou "faiblement" non linéaires sont définis à l'aide de la comparaison du nombre de Mach acoustique avec l'unité. Pour éviter toute confusion, il est utile de noter que l'expression "faiblement" non linéaire est parfois utilisée dans la littérature pour désigner des ondes pour lesquelles les termes de dissipation sont prédominants sur les termes non linéaires (Coulouvrat [23]). Dans ce cas, la déformation de l'onde peut être néanmoins perceptible (effet cumulatif), mais reste peu importante. Les pertes atténuent le signal avant que ce dernier ne se soit trop déformé.

### 1.1.2 L'acoustique faiblement non linéaire

La plupart des modèles développés dans le cadre de l'acoustique faiblement non linéaire repose sur des raisonnements par perturbation ou itération à l'aide du petit paramètre  $M$ .

Les effets les plus fréquemment étudiés apparaissent lors de la propagation d'une onde progressive, et ont pour conséquence une déformation de la forme d'onde. La vitesse de propagation étant plus élevée pour des pressions plus importantes, le maximum de pression acoustique se propage plus rapidement que le minimum, jusqu'à formation de l'onde de choc. Ceci se traduit par une modification du spectre. Par exemple une onde purement sinusoïdale au départ subit un enrichissement en harmoniques supérieures jusqu'à atteindre une forme en dents de scie (voir figure 1.2). Ce phénomène a été décrit analytiquement en 1858 par Earnshaw [33] et Riemann [101] dans le cas sans pertes. Plus de détails sont donnés dans le chapitre 3 de ce document, ou par Lighthill [70], Pierce [95], Rudenko & Soluyan [106].

Par ailleurs, deux ondes progressives se croisant ne s'additionnent pas : une interaction apparaît. Celle-ci dépend de l'angle d'incidence relatif entre ces deux ondes. L'interaction est maximale si les deux ondes se propagent dans une même direction et un même sens. Inversement, elle peut généralement être négligée dans le cadre de l'acoustique faiblement non linéaire si les deux ondes se croisent dans la même direction mais en sens opposés, comme nous allons le montrer dans ce document (cas de l'onde stationnaire, publication reportée au paragraphe



3.2).

Ensuite, un écoulement redressé se manifeste à niveau sonore élevé : l'onde acoustique (signal alternatif) provoque un déplacement moyen de l'air (signal continu). Ce phénomène, appelé aussi vent acoustique, et noté "acoustic streaming" en langue anglaise, est observé au XIXième siècle (Faraday [37]) et a fait l'objet de nombreuses recherches : Lighthill [69], Nyborg [85], Rudenko & Soluyan [106] ou Zarembo [127] en sont quelques références récentes.

Enfin, les pertes du signal acoustique se transforment en chaleur qui se cumulent dans le temps et peuvent induire des effets importants sur la température. Ce phénomène appelé "acoustic heating" peut être traduit par "échauffement acoustique".

### 1.1.3 L'acoustique fortement non linéaire

Les études effectuées sont essentiellement restreintes au domaine faiblement non linéaire. Peu de références concernant l'acoustique fortement non linéaire peuvent être citées. Earnshaw [33] a étudié en 1860 le problème d'une onde simple produite par le mouvement arbitraire d'un piston dans un long tube. Landau [62] en 1945 puis Courant & Friedrich [24] en 1948 ont mis en évidence l'apparition d'ondes réfléchies derrière le choc, ce qui rend l'hypothèse de l'onde simple incorrecte à partir du moment où le choc est formé, ceci même pour une onde au départ purement propagative.

Inoue & Yano [53] en 1997 ont étudié la formation des ondes dites en dent de scie. Ils en arrivent aux conclusions suivantes. En plus de la production d'entropie au front du choc et de l'apparition des ondes de choc, le profil des ondes dites en dent de scie devient asymétrique contrairement au cas faiblement non linéaire.

Plus récemment, des travaux concernant les cavités résonnantes ont été menés par Ilinskii *et coll.* [50] et Lawrenson *et coll.* [64] en 1998.

D'autres phénomènes tels la cavitation (transition de phase lors des phases de dépression au passage de l'onde sonore dans un liquide, et provoquant l'apparition de bulles gazeuses), ou la sonoluminescence peuvent être cités.

Le vent acoustique réagit également à des niveaux sonores très élevés. L'écoulement devient très important, et peut même excéder la vitesse acoustique de l'onde lui ayant donné naissance, et devenir turbulent (Lighthill [69]).

### 1.1.4 Les interactions acoustique-écoulement

L'écoulement d'un fluide et le son ne sont pas nécessairement deux phénomènes distinctement séparables. Ce fait est particulièrement marqué dans le cadre de l'acoustique non linéaire. En effet, les forts niveaux sonores dans l'air sont souvent créés par des sources aéro-acoustiques, comme par exemple les sirènes, les avertisseurs sonores sur les trains ou encore les instruments du musique de type cuivre. Ensuite, lors de sa propagation, le son peut être perturbé par la présence de cet écoulement moyen. Un troisième type d'interaction évoqué précédemment intervient, spécifiquement en acoustique non linéaire : le vent

acoustique ou écoulement redressé créé par les niveaux sonores élevés. Il devient donc difficile a priori de dissocier l'écoulement moyen de l'onde acoustique. Une classification, sans doute un peu réductrice, est proposée ci-dessous.

(1) Un fort écoulement (jet) ou une simple instabilité dans l'écoulement crée une onde acoustique. Le son est produit dans les régions de fortes turbulences et est appelé bruit aérodynamique. Après les recherches de Lighthill [67] en 1952, beaucoup de travaux ont été effectués dans ce domaine (Crighton [25] ou Goldstein [43] par exemple pour les moteurs d'avion). Cette étude est exclue du présent document.

(2) A l'inverse, un niveau acoustique suffisant (typiquement  $150dB$  ou plus dans les guides pour des ondes sonores) crée un vent acoustique. Dans le cas de l'acoustique faiblement non linéaire, la vitesse de l'écoulement est faible devant les vitesses acoustiques. Typiquement, en notant  $M = U_a/c_0 \ll 1$  le nombre de Mach acoustique, la vitesse de l'écoulement ainsi créé est  $M$  fois inférieure à la vitesse acoustique. Toutefois, dans certaines configurations, ou dans le cas de l'acoustique fortement non linéaire, le jet créé peut être très fort, et mettre en jeu des vitesses d'écoulement supérieures aux vitesses acoustiques (Lighthill [69]) ! Une étude bibliographique plus détaillée est proposée dans le chapitre 2 de ce document.

(3) Enfin, la présence simultanée d'un écoulement moyen et d'une onde acoustique dont les vitesses respectives sont du même ordre de grandeur nécessite une étude particulière. Un modèle très simplifié validé expérimentalement est proposé dans ce document (fin du chapitre 3).

## 1.2 Les objectifs du travail de thèse ; plan du rapport

### 1.2.1 Les motivations du travail de recherche

L'étude proposée ici a pour titre **la propagation acoustique non linéaire dans les guides monodimensionnels**.

La configuration typique ayant motivé cette étude est la suivante. Un tube de rayon de l'ordre du centimètre, dont les parois sont supposées rigides, est excité par une source aéro-acoustique (sirène, valves, lèvres, donc présence d'écoulement permanent) ou par un haut parleur électro-acoustique (pas d'écoulement). La fréquence est de l'ordre de quelques centaines de Hertz, (voire quelques milliers de Hertz) et le niveau sonore se situe dans la gamme  $140 - 160dB$  (donc  $M \ll 1$ ) ; le fluide utilisé est l'air. Ces conditions permettent de restreindre l'étude au cadre de l'acoustique *faiblement* non linéaire. De plus, seul le régime permanent est considéré dans ce rapport (aucune analyse de transitoire n'a été envisagée). L'écoulement éventuel dû à la source ne dépasse pas quelques mètres par seconde. Il est à noter que le but n'est pas d'étudier la source en elle-même, son couplage avec le guide, ou d'éventuelles non linéarités localisées, mais seulement les effets non linéaires dûs à la propagation dans le guide, le signal étant supposé imposé par la source (guide d'onde en oscillations forcées).

Un premier effet observable à niveau sonore élevé (mais assez difficilement mesurable) est ici étudié : le vent acoustique. Il est apparu que la plupart des modèles existants dans la littérature se limitent aux très faibles écoulements. L'effet de l'inertie du fluide n'est pas pris en compte dans les guides d'onde. Or une analyse dimensionnelle permet de conclure que l'inertie du fluide peut difficilement être négligée dès que l'écoulement devient "perceptible" (de l'ordre de quelques mm/s, voir Lighthill [69]), ce qui en pratique est le cas dans les conditions expérimentales ci-avant précisées. Il devient alors nécessaire de proposer un nouveau modèle prenant en compte cette inertie afin de pouvoir décrire la distorsion des lignes de courant de l'écoulement : le modèle du vent acoustique non linéaire.

Par ailleurs, à des niveaux sonores de 140 – 160dB, bien que la distorsion du profil d'une onde progressive sonore reste négligeable sur des distances de propagation de l'ordre du mètre, les multiples réflexions aux extrémités du tube sont à l'origine d'une accumulation de ces effets non linéaires qui peuvent alors devenir importants et provoquer une déformation de l'onde. Cette dernière a fait l'objet de nombreuses études, mais seulement dans des configurations très restreintes : guide infini (onde purement progressive Riemann [101], Earnshaw [33]), guide d'onde fermé avec terminaison rigide (Chester [18]) ou guide d'onde ouvert (Van Wijngaarden [119]). De plus, les sources utilisées dans toutes ces références sont sinusoïdales. Pourtant, de nombreuses applications n'utilisent pas des sources sinusoïdales (silencieux d'automobile, sirène, instruments de musique...). La motivation de ce travail est de proposer une modélisation capable de s'adapter à un guide de longueur finie, comportant n'importe qu'elle terminaison, et utilisant une source périodique mais non nécessairement sinusoïdale.

Enfin, les sources utilisées étant souvent de type aéro-acoustiques (sirène), et les guides parfois des pavillons, il s'est avéré nécessaire d'effectuer deux études complémentaires : la première envisageant la présence d'un écoulement ; la seconde prenant en compte une section variable (pavillon).

### 1.2.2 Le plan du rapport

Une première étude (chapitre 2) concerne le vent acoustique non linéaire en guide d'onde. Le premier paragraphe 2.1 présente une synthèse bibliographique des travaux effectués et expose les modèles classiques utilisés. Les résultats de ces modèles concernant l'écoulement redressé dans un guide d'onde sont rappelés en annexe D. Il s'est avéré que les résultats obtenus en guide d'onde sont limités aux très faibles écoulements, alors qu'une distorsion du champ de vitesse de l'écoulement moyen est mise en évidence dès que l'onde acoustique atteint 150dB ( $\sim 1m/s$  de vitesse acoustique et  $\sim 1cm/s$  de vitesse d'écoulement), cette distorsion devenant rapidement importante. Un calcul permettant de décrire la distorsion des lignes de courant créés par une onde stationnaire sinusoïdale de niveau sonore voisin de 150dB est présenté en paragraphe 2.2 par l'intermédiaire de la publication "Non-Linear Acoustic Streaming Accompanying a Plane Stationary Wave in a Guide" (reportée au paragraphe 2.2). Une coopération est en cours avec Dawn Rockliff et Murray Campbell du département de physique

de l'Université d'Edimbourg en Ecosse afin de confronter les résultats théoriques obtenus dans ce document avec des expériences réalisées à Edimbourg utilisant la technique de la P.I.V. (Particle Image Velocity).

Le chapitre 3 propose ensuite une étude de la déformation de l'onde liée aux niveaux sonores élevés dans le guide d'onde. Le premier paragraphe 3.1 effectue une synthèse des études existantes à ce sujet. La plupart des modèles existants s'appliquant uniquement à des cas particuliers (conditions aux limites précises et source sinusoïdale), un nouveau calcul a été développé et présenté dans la publication "Weakly Nonlinear Gas Oscillations in Air-filled Tubes" (reportée au paragraphe 3.2). L'objectif a été de prendre en compte et de mettre en évidence les effets des termes non linéaires des équations de l'acoustique, mais aussi des pertes visqueuses et thermiques, que l'onde soit purement propagative, purement stationnaire, ou intermédiaire entre ces deux cas. La théorie développée repose en partie sur le fait que les interactions entre les ondes aller et retour, bien qu'existantes, peuvent être négligées sans compromettre la précision recherchée. Des expériences préliminaires présentées en annexe C utilisant une sirène ont été réalisées au Laboratoire de Dynamique des Fluides de l'Université Technologique de Eindhoven aux Pays-Bas, avec la collaboration de Pascal Durrieu et Avraham Hirschberg. D'autres expériences présentées en dernière partie de la publication (paragraphe 3.2) ont été réalisées au LAUM, et permettent de confirmer que l'objectif d'un accord théorie - expériences d'au moins 1% a bien été atteint. Enfin, une étude en paragraphe 3.3 adapte le modèle précédemment proposé dans le cas de la présence préalable d'un écoulement moyen de l'ordre de quelques mètres par seconde. En dernier lieu (paragraphe 3.4), une rapide adaptation à des guides à section lentement variable est effectuée. Des validations expérimentales sont proposées.

Tous les modèles développés dans ce rapport reposent sur des calculs par perturbation. Les petits nombres sans dimension utilisés sont  $M$ , le nombre de Mach acoustique (domaine faiblement non linéaire), l'inverse du nombre de Reynolds  $1/Re$  caractéristique des pertes volumiques, et le nombre de cisaillement  $Sh$  caractéristique des pertes de couche limite (voir définitions paragraphe 1.3). C'est la compétition entre les différents phénomènes (pertes et non linéarités) qui est essentielle pour décrire la déformation de l'onde. Une partie importante du travail repose donc sur une analyse dimensionnelle justifiant les approximations effectuées et les phénomènes négligés, ou au contraire justifiant le fait de ne pas pouvoir ignorer tel ou tel phénomène. Cette analyse dimensionnelle permet de simplifier au maximum les équations à résoudre tout en gardant une très bonne précision (de l'ordre de 1% sur l'amplitude du signal acoustique). Cette analyse est par ailleurs très utile afin de cerner les limites de validité du modèle proposé.

## 1.3 Principales conventions et notations utilisées

### Les variables

$\rho$	masse volumique
$P$	pression
$T$	température
$\vec{u}$	vitesse (acoustique et/ou vent acoustique selon les indices)
$u$	composante longitudinale de la vitesse
$v$	composante radiale de la vitesse
$U_{éc}$	composante longitudinale de la vitesse d'un écoulement moyen (hors vent acoustique)
$V_{éc}$	composante radiale de la vitesse d'un écoulement moyen (hors vent acoustique)
$S$	entropie

Ces variables  $X$  sont notées ( $X$  peut être  $\rho$ ,  $P$ ,  $T$ ,  $S$  ou les vitesses) :

$\tilde{X}$  : pour les variables comprenant composante acoustique et composante statique, avec dimension ;

$X_0$  : pour la composante statique (au repos) de  $\tilde{X}$  (sauf pour les vitesses ; hors vent acoustique), avec dimension ;

$\tilde{X}_a$  : pour la composante acoustique de  $\tilde{X}$  (hors couche limite), avec dimension ;

$X_a$  : pour la composante acoustique de  $X$  (hors couche limite), sans dimension ;

$X_{ab}$  : pour la composante acoustique de  $X$  dans la couche limite, sans dimension ;

$\tilde{X}_s$  : pour la partie invariante temporellement de  $\tilde{X}$  créée par l'onde acoustique (vent acoustique), avec dimension.

$X_s$  : écriture de  $\tilde{X}_s$  sans dimension.

$c = \sqrt{\gamma \tilde{P} / \tilde{\rho}}$	célérité du son locale (pour un gaz parfait isentropique)
$q = \tilde{u}_a / U_a$	variable sans dimension dans l'équation de Burgers
$\tilde{t}, t$	temps (avec ou sans dimension, selon le tilde)
$\tilde{\tau} = \tilde{t} - \tilde{x} / c_0$	temps retardé (avec dimension)
$\theta = \omega \tilde{\tau}$	phase
$\tilde{x}, x$	variable d'espace longitudinale (avec ou sans dimension, selon le tilde)
$\tilde{r}$	variable d'espace radiale (avec dimension)
$\sigma = \frac{(\gamma+1)}{2} \frac{M \omega \tilde{x}}{c_0}$	variable d'espace longitudinale sans dimension
$r, r_1, r_{b1}$ ou $r_{b2}$	variable d'espace radiale sans dimension

## Les constantes thermodynamiques

$c_o = \sqrt{\gamma P_0 / \rho_0}$	célérité moyenne du son dans un fluide au repos
$\mu$	première viscosité (ou viscosité de cisaillement)
$\eta$	deuxième viscosité (ou viscosité de volume)
$\nu = \mu / \rho_0$	viscosité cinématique
$k_h$	conductibilité thermique
$R_g$	constante du gaz parfait
$C_V$	capacité calorifique à volume constant
$C_P$	capacité calorifique à pression constante
$\gamma$	rapport des capacités calorifiques ( $\gamma = 1,4$ pour l'air)

## Les autres paramètres

$R$	rayon du tube
$U_a$ ou $\tilde{u}_{a0}$	vitesse de référence de la source acoustique
$\omega$	pulsation de référence (fondamental)
$\lambda$	longueur d'onde
$k = \omega / c_o$	nombre d'onde
$\xi = \sqrt{\nu / \omega}$	épaisseur de la couche limite visqueuse
$\xi_h = \sqrt{k_h / (\rho_0 \omega C_P)}$	épaisseur de la couche limite thermique
$q_0 = 2 / (\gamma + 1) \bar{U}_{éc}$	écriture sans dimension de l'écoulement moyen dans l'équation de Burgers

## Les nombres sans dimension

$M = U_a / c_o$	nombre de Mach acoustique
$Re = c_o^2 / \nu \omega$	nombre de Reynolds acoustique
$Sh = \xi / R = \sqrt{(\nu / \omega)} / R$	nombre de cisaillement
$Pr = \nu C_p / k_h$	nombre de Prandtl ( $Pr \simeq 0,7$ pour l'air) ( $Pr^{1/2}$ est le rapport des épaisseurs des deux couches limites)
$\epsilon = M(\gamma + 1) / 2$	mesure les non linéarités
$S = \frac{1}{2} (1 / Re) \left( \frac{4}{3} + \frac{\eta}{\mu} + \frac{\gamma - 1}{Pr} \right)$	nombre de Stokes (paramètre mesurant la dissipation volumique)
$T = Sh \left( 1 + (\gamma - 1) / \sqrt{Pr} \right)$	paramètre mesurant la dissipation de couche limite
$\Gamma = \epsilon / S$	nombre de Gol'dberg (compare les effets non linéaires et de pertes volumiques)

*A noter que ces notations peuvent ponctuellement être adaptées dans ce rapport pour les besoins spécifiques de quelques parties. Dans ce cas, les nouvelles notations y sont alors précisées.*

*Par ailleurs, l'entropie  $S$  contient toujours un tilde ou un indice et ne peut donc pas être confondue avec  $S$  le nombre de Stokes. Il en est de même respectivement pour  $T$  température et  $T$  paramètre défini ci-dessus mesurant la dissipation de couche limite.*

## Chapitre 2

# L'écoulement redressé non linéaire en guide d'onde monodimensionnel

Une description de l'apparition de l'écoulement moyen créé par une onde acoustique stationnaire et sinusoïdale de niveau sonore élevé est ici proposée dans un guide d'onde cylindrique. Ce phénomène est généralement appelé vent acoustique ou écoulement redressé ("streaming" ou "acoustic wind" en langue anglaise). Les résultats du vent acoustique créé par une onde stationnaire en guide d'onde de diverses géométries sont rappelés en annexe D.

Une première partie 2.1 propose une étude bibliographique de ce sujet. Les principaux travaux publiés y sont présentés, puis l'approche classique de résolution ainsi que ses limites sont rappelées. Enfin, quelques domaines d'application du vent acoustique sont cités.

Notre travail est ensuite présenté en partie 2.2 par l'intermédiaire d'une publication<sup>1</sup>.

### 2.1 L'état de l'art

L'écoulement redressé est le mouvement moyen (secondaire), créé par le déplacement oscillatoire dominant d'un fluide. Cet écoulement peut lui même varier "lentement" dans le temps mais atteint généralement un régime permanent au bout d'un certain temps. L'étude proposée dans ce document reste limitée à ce régime permanent. Dans certaines configurations particulières (faisceau acoustique ultrasonore intense par exemple) le vent acoustique atteint de grandes vitesses et donc perturbe à son tour le mouvement oscillant lui ayant donné naissance (Lighthill [69]).

---

<sup>1</sup>MENGUY L., GILBERT J. (2000). Non-linear Acoustic Streaming Accompanying a Plane Stationnary Wave in a Guide. *Acustica* **86**, 249-259.



Ce redressement secondaire n'est pas propre à l'acoustique sonore ou ultrasonore mais peut être observé dans tout phénomène oscillatoire. Le caractère non linéaire d'un mécanisme est à la base de l'apparition d'une composante continue à partir d'un phénomène alternatif. En électronique par exemple, une composante continue est obtenue à l'aide d'un courant alternatif par l'utilisation d'un composant non linéaire comme une diode ou un transistor. En dynamique des fluides, l'inertie du fluide est à l'origine de l'avancée du poisson par le mouvement oscillant de sa queue.

### 2.1.1 Les premières observations et théories

Les premières observations semblent avoir été faites par Faraday [37] en 1831 : il observa les figures formées par de fines particules placées sur une surface élastique mise en vibration, ce qui lui permit d'avancer de premières explications qualitatives. C'est la vibration de la plaque qui engendre une vibration de l'air à proximité de sa surface, dans la couche limite, et crée un écoulement moyen à l'origine des figures. Les bases de l'analyse théorique des écoulements redressés sont posées par Rayleigh [99] en 1883. Rayleigh a pour la première fois mis en évidence l'effet des termes quadratiques dans les équations de base, à l'origine de l'apparition d'un écoulement redressé. Ce travail est complété dans un ouvrage [100] en 1896 dans lequel il considère en particulier l'écoulement redressé au voisinage d'une plaque ainsi que l'écoulement redressé créé par une onde stationnaire entre deux plaques infinies. Cet ouvrage a servi de référence quasiment jusqu'à nos jours. Seules des corrections furent ensuite apportées : Schlichting [109] (1932), Westerwelt [121] (1953) Nyborg [85] (1965) ou Rudenko & Soluyan (1977) [106] ont, entre autres, contribué à améliorer ces connaissances. Des études plus récentes peuvent encore être citées, comme Sharpe *et coll.* [111] ou Rockliff *et coll.* [104].

Un second type d'écoulement, appelé le "quartz wind" (vent du quartz) n'est observé que bien plus tard, lors du développement de l'utilisation des ondes ultrasonores. Toute source créant un faisceau acoustique de forte intensité dans un fluide est à l'origine d'un vent acoustique, souvent turbulent. Les premières observations sont réalisées à l'aide d'une source à quartz, d'où le nom de ce type d'écoulement. Les réalisations expérimentales de Walker & Allen [120] en 1950 méritent d'être citées, ainsi que les premières solutions publiées par Eckart [34] en 1948.

### 2.1.2 Les différents types d'écoulements redressés

Ces deux types d'écoulement ont une origine commune : l'*atténuation* du signal acoustique. Ceci permet de classer les différents types d'écoulement redressé selon l'origine de l'atténuation : pertes volumiques ou de couche limite.

Les couches limites acoustiques à la surface d'obstacles solides (écoulement de type (1)) sont à l'origine de pertes visqueuses et thermiques. Celles-ci sont le "moteur" de l'écoulement redressé. Une étude détaillée est proposée par Schlichting [109] en 1932 : ce dernier a parfois donné son nom à ce type d'écoulement

(voir Zarembo [127]). Le vent acoustique étudié par Rayleigh [100] entre deux plaques infinies, se situe, lui, hors de la couche limite, dans tout le corps du fluide. C'est pourquoi il est parfois distingué de l'écoulement de type Schlichting (voir par exemple Zarembo [127]). Toutefois, le vent de Rayleigh prend naissance dans les couches limites, et se transmet ensuite au reste du fluide, par continuité. Ces deux types d'écoulement doivent donc être regroupés dans une même catégorie (1) (de type couche limite). Quelques travaux furent également effectués dans des géométries différentes. En 1978, pour des recherches dans le domaine de la biomécanique (flux sanguin dans les artères coronariennes de mammifères), Secomb [110] a étudié l'effet d'oscillations radiales des parois d'un tube, et a obtenu des résultats similaires à ceux de Rayleigh [100]. Riley [102] en 1987 étudie l'écoulement moyen créé par une source linéique placée au voisinage d'un obstacle cylindrique ; Amin & Riley [2] en 1990 étudient l'écoulement moyen créé par une source ponctuelle au voisinage d'une sphère. L'étude du vent acoustique dans un tube cylindrique proposée dans ce rapport se situe dans cette catégorie.

L'autre type d'écoulement (type (2) : le "quartz wind") est créé hors de tout obstacle, en espace libre, généralement par un faisceau ultrasonore de forte intensité. Il est créé par les pertes volumiques. Les expériences sont généralement réalisées dans des liquides où elles donnent lieu à des phénomènes spectaculaires comme les fontaines acoustiques (voir par exemple Squire [113] 1951), mais des observations sont également effectuées dans des gaz comme l'air. Eckart fut un des pionniers et sa publication [34] de 1948 est une référence. Le nom d'Eckart est utilisé pour désigner ce type d'écoulement. Des expériences sont réalisées par Walker & Allen [120] en 1950. Plus récemment, les travaux de Nyborg [85] en 1965, d'Ostrovskii & Papilova [87] en 1974, de Lighthill [69]-[70] en 1978, ou encore de Kamakura *et coll.* [55] en 1996 méritent d'être cités. Ce type d'écoulement a de nombreuses conséquences et donne lieu à quelques applications, comme le jet acoustique cité précédemment, ou la pompe acoustique (voir par exemple Rudenko & Sukhorukov [107] en 1998), et peut être utilisé pour mélanger différents fluides, ou déplacer des objets en apesanteur. De nombreux exemples sont donnés à la fin de cette première partie.

Une classification différente des phénomènes d'écoulements redressés peut être effectuée à partir de leur intensité. La vitesse de l'écoulement redressé est généralement très faible devant les vitesses acoustiques. C'est le cas habituellement étudié dans la littérature. Par exemple, pour une onde sonore de l'ordre de  $150dB$  dans un tube cylindrique (soit une vitesse acoustique de l'ordre de  $1m/s$ ), les écoulements induits sont de l'ordre de quelques millimètres à 1 centimètre par seconde. Toutefois, dans certaines configurations, ou dans le cas de l'acoustique fortement non linéaire, le vent acoustique ainsi créé peut atteindre de fortes intensités et prendre la forme d'un jet turbulent, mettant en jeu des vitesses d'écoulement supérieures aux vitesses acoustiques (Lighthill [69]) ! Ce jet, appelé le vent acoustique rapide, peut à son tour perturber l'onde lui ayant donné naissance. Le couplage entre onde acoustique et écoulement moyen est donc très important. Une modélisation appropriée à ce cas est alors indispensable, mais non traité dans ce document. Enfin, un cas intermédiaire entre vent

acoustique et vent rapide doit être envisagé : c'est "le vent acoustique non linéaire" (étudié en premier par Stuart [114] en 1966; voir Gusev [45] pour la terminologie, voir aussi partie 2.1.3), et qui est l'objet de notre étude. Ce vent dit "non linéaire" est suffisamment rapide pour que les effets d'inertie soient non négligeables, mais pas assez pour perturber le signal acoustique.

### 2.1.3 L'approche classique et les méthodes de résolution.

Le vent acoustique a pour origine les forces de Reynolds, valeurs moyennes non nulles des termes quadratiques acoustiques intervenant dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement (terme convectif). Ces termes sont d'autant plus importants que la dissipation de l'énergie est importante, modifiant le signal acoustique. Cette force motrice est compensée par la force de viscosité du fluide; l'équilibre de ces deux actions impose le profil de l'écoulement.

L'approche classique de Rayleigh [100] en 1896, a ensuite été développée par Schlichting [109] en 1932, Westerwelt [121] en 1953 et Nyborg [85] en 1965. Bien que l'apparition du redressement ait pour origine les termes non linéaires des équations de l'acoustique, les équations décrivant l'écoulement restent elles-mêmes linéaires tant que le signal acoustique n'atteint pas des niveaux sonores trop élevés. C'est pourquoi ce phénomène est appelé "vent acoustique linéaire"<sup>2</sup>. L'approche théorique est basée sur des calculs par perturbation. Il est donc essentiel de connaître les divers ordres de grandeur des termes intervenant dans les équations de base afin de les simplifier de manière adéquate.

La méthode de détermination des équations de l'écoulement est la suivante. Les équations de base (conservation de la quantité de mouvement, de la matière et de l'énergie) sont simplifiées après étude des divers ordres de grandeur des termes qu'elles contiennent. Puis une moyenne temporelle permet d'en éliminer les termes purement acoustiques.

L'équation de conservation de la quantité de mouvement (dite de Navier-Stokes) est la suivante :

$$\tilde{\rho} \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \cdot \vec{u} \right) = -grad \tilde{P} + \left( \eta + \frac{1}{3} \mu \right) grad (div \vec{u}) + \mu \Delta \vec{u}. \quad (2.1)$$

$\vec{u}$  représente la vitesse totale du fluide, avec une partie dominante alternative et éventuellement une partie continue en cas de vent acoustique,  $\tilde{\rho}$  la densité volumique et  $\tilde{P}$  la pression totale.  $\mu$  et  $\eta$  sont respectivement les première et deuxième viscosités (ou viscosités de cisaillement et de dilatation). Le membre de gauche contient des termes quadratiques que l'on doit étudier de plus près. En supposant l'absence de composante continue dans  $\vec{u}$ , le membre de droite de l'équation (2.1) a une moyenne temporelle nulle. Il doit donc en être de même du membre de gauche. Or les termes quadratiques qui y sont présents ne peuvent

<sup>2</sup> A niveaux sonores plus élevés, les équations du mouvement du vent acoustique ne sont plus linéaires (terme d'inertie); on l'appellera alors "le vent acoustique non linéaire"; voir partie suivante.

s'annuler que si les parties variables (supposées sinusoïdales) des deux termes le composant sont toujours en quadrature de phase. Ceci n'est exact qu'en absence de dissipation. Il est donc absurde d'admettre l'absence de composante continue dans un signal subissant de la dissipation, sous quelque forme que ce soit. Ce résultat se généralise pour toute onde périodique non nécessairement sinusoïdale.

Les deux termes à l'origine du vent acoustique sont les suivants<sup>3</sup> :

$$\left\langle \tilde{\rho} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right\rangle_t \quad \text{et} \quad \left\langle \tilde{\rho} \left( \vec{u} \cdot \nabla \right) \cdot \vec{u} \right\rangle_t. \quad (2.2)$$

$\langle \rangle_t$  désigne la moyenne temporelle. En présence de dissipation visqueuse ou thermique, cette moyenne est non nulle : le membre de droite de l'équation (2.1) doit donc être non nul. Une composante continue dans la vitesse  $\vec{u}$  apparaît donc. Celle-ci est alors décomposée en  $\vec{u} = \vec{u}_s + \vec{u}_a$ . L'indice  $a$  désigne la partie alternative (acoustique), et l'indice  $s$  la partie continue (redressée, ou "streaming"). L'indice  $0$  est utilisé pour désigner les grandeurs du fluide au repos avant présence de l'onde acoustique.  $M = U_a/c_0$  est le nombre de Mach acoustique, comparant l'ordre de grandeur de la vitesse acoustique  $U_a$  avec celle du son  $c_0$ . Un raisonnement simple consiste à argumenter que les termes (2.2) à l'origine de l'écoulement redressé sont quadratiques, et donc  $\tilde{u}_s/c_0$  est d'ordre  $M^2$ . La vitesse de l'écoulement redressé est alors d'ordre 2 en  $M$ . L'écriture des termes d'ordre 2 de l'équation (2.1) moyennée temporellement aboutit à :

$$\left\langle \tilde{\rho}_a \frac{\partial \vec{u}_a}{\partial t} + \tilde{\rho}_0 \left( \vec{u}_a \cdot \nabla \right) \cdot \vec{u}_a \right\rangle_t = -\text{grad} \tilde{P}_s \quad (2.3)$$

$$+ \left( \eta + \frac{1}{3} \mu \right) \text{grad} \left( \text{div} \vec{u}_s \right) + \mu \Delta \vec{u}_s.$$

Le membre de gauche de l'équation (2.3) est accélérateur (et constant pour un signal acoustique invariant), et rencontre une réaction exprimée par le terme visqueux à droite de l'équation (2.3). Cette dernière augmente au fur et à mesure que la vitesse d'écoulement  $\tilde{u}_s$  augmente : un régime permanent est donc atteint. C'est l'équilibre de ces deux forces qui impose le profil de l'écoulement. Les solutions de l'équation (2.3) décrivent alors le vent acoustique linéaire. Le terme *linéaire* est utilisé ici, bien que l'écoulement redressé ait une origine acoustique non linéaire, pour souligner la linéarité de l'équation (2.3) en  $\tilde{u}_s$ . Les termes non linéaires ne font intervenir que des grandeurs acoustiques (supposées imposées en considérant un signal acoustique non perturbé par l'écoulement).

Il est intéressant de noter qu'avec de faibles viscosités les termes accélérateurs de l'équation (2.3) deviennent très faibles, mais cela n'empêche pas la création d'un écoulement redressé. En effet, les forces visqueuses (membre de droite) s'opposant au mouvement deviennent alors également très faibles : l'écoulement redressé ne disparaît pas quand  $\mu$  et  $\eta$  tendent vers 0 (voir Rayleigh [100], Nyborg [85] ou Lighthill [69]).

<sup>3</sup>Seul le terme de droite est généralement considéré (voir par exemple Lighthill [69]); Qi [97] propose de prendre en compte l'effet de la compressibilité du fluide dans la production du vent acoustique, ce qui a pour effet d'ajouter le premier terme de l'équation (2.2).

### 2.1.4 Les limites de l'approche classique.

Ce raisonnement considère en particulier que  $\tilde{u}_s$  est d'ordre  $M^2 c_0$  (désigné par "ordre 2") et que par conséquent l'inertie du fluide

$$\left( \vec{u}_s \cdot \nabla \right) \cdot \vec{u}_s \quad (2.4)$$

présente dans le membre de gauche de l'équation (2.1) est d'ordre 4, et donc négligé. Pourtant, même pour des écoulements redressés particulièrement lents (de l'ordre du centimètre par seconde dans un guide), les effets de l'inertie du fluide deviennent rapidement importants (Lighthill [69] en 1978). L'analyse dimensionnelle précédente doit donc être reprise. En réalité, des gradients et divergences interviennent dans divers termes de l'équation (2.1) et l'ordre de grandeur des variations spatiales des vitesses doit être prise en compte. Une analyse dimensionnelle pertinente doit faire intervenir d'autres nombres sans dimension contenant les grandeurs spatiales caractéristiques du problème considéré. Un nouveau nombre sans dimension est alors introduit : le nombre de Reynolds noté  $Re_s$  (voir par exemple Stuart [114]). L'écriture plus explicite de ce nombre de Reynolds dépend de la géométrie du problème. La question qui se pose est de savoir quelles grandeurs spatiales caractéristiques doivent être choisies pour calculer  $Re_s$ . En considérant l'exemple du guide d'onde cylindrique étudié dans ce rapport, diverses grandeurs peuvent intervenir : le rayon du tube, la longueur d'onde, ou bien encore l'épaisseur de la couche limite viscothermique. L'analyse théorique réalisée dans ce chapitre se focalise en partie sur ces études dimensionnelles, qui sont importantes pour pouvoir donner un critère fiable permettant ou non de négliger l'inertie du fluide, ce dernier étant susceptible de distordre fortement les lignes de courant du vent acoustique. Le terme d'inertie peut difficilement être négligé quand  $Re_s$  devient de l'ordre de l'unité ou supérieur. Ceci limite le domaine de validité des modèles classiques. Les nouvelles équations obtenues contiennent des termes quadratiques (2.4) en  $\tilde{u}_s$  et l'écoulement correspondant est alors qualifié d'écoulement redressé *non linéaire*. Stuart [114] est le premier en 1966 à considérer l'effet de l'inertie du fluide dans le vent acoustique. Ce type d'écoulement porte ainsi parfois son nom. De nombreuses études concernant le "vent acoustique non linéaire" sont effectuées, mais essentiellement en espace libre ou semi-infini. En 1973 et 1974 respectivement, Bertelsen *et coll.* [6] et Bertelsen [7] prennent en compte l'inertie du fluide dans le cas d'un cylindre oscillant. Les travaux de Ostrovskii & Papilova [87] en 1974 et Gusev & Rudenko [44]-[45] en 1979 et 1981 en espace libre peuvent être cités, ainsi que Riley [102] en 1987 (écoulement autour d'un cylindre), ou encore Kamakura *et coll.* [55] en 1996. Duck & Smith [31] en 1979 ont effectué des études d'écoulement non linéaire en espace clos, mais pas en guide d'onde. L'inexistence à notre connaissance de traitement du cas du vent acoustique non linéaire en guide d'onde a motivé le travail présenté dans ce chapitre. Etant donné la géométrie et les longueurs d'onde concernant l'étude effectuée dans ce rapport (fréquence de l'ordre de 1000 Hz et rayon de l'ordre du centimètre) l'inertie du fluide doit être pris en compte dès des niveaux sonores

de l'ordre de 145 dB, correspondant à des écoulements de l'ordre de quelques millimètres à un centimètre par seconde seulement !

Il est également intéressant de noter que ce vent acoustique non linéaire est probablement le début de la transition entre le vent acoustique linéaire classiquement étudié, et le vent acoustique rapide turbulent précédemment évoqué correspondant à une forte inertie du fluide.

### 2.1.5 Les conséquences du vent acoustique, domaines d'application.

Les conséquences (parfois gênantes) et applications (effet recherché) du vent acoustique sont nombreuses.

Tout d'abord, elles existent naturellement. Elles concernent en particulier de nombreux processus biologiques où l'écoulement redressé peut jouer un rôle fondamental. Il est probable que le vent acoustique soit utile au fonctionnement de l'oreille. Le mouvement des osselets produit des ondes dans la périlymphe (liquide contenu dans la cochlée). Lighthill [71] suggère que l'écoulement associé à ces ondes produit le stimulus sur les cellules ciliées permettant de transformer le signal acoustique en influx nerveux. A une fréquence donnée, l'écoulement est maximal à "l'endroit caractéristique". De manière générale, le rôle du vent acoustique est intéressant dans de nombreux problèmes de transport dans les fluides biophysiques (voir par exemple Davidson [29] 1971, Secomb [110] 1978).

L'utilisation de cet écoulement redressé comme moyen de transport pourrait également être exploité dans les milieux à faible gravité, par exemple dans l'espace. La lévitation acoustique ainsi produite ou le positionnement acoustique utilisent les forces de Reynolds pour manipuler des objets (Riley [102]). Dans le même registre, l'écoulement redressé peut servir de pompe acoustique (voir Rudenko & Sukhorukov [107], 1998).

Le déplacement d'air peut encore mélanger des substances différentes. C'est ainsi que lors d'une solidification, les flux internes dans un mélange influent fortement la cinétique de cristallisation aussi bien que la macrostructure du solide résultant.

Ce flux d'air pourrait également être utilisé pour refroidir un objet. Davidson [29] a réalisé des travaux théoriques et expérimentaux démontrant analytiquement une influence significative du vent acoustique dans les transferts thermiques, particulièrement à nombre de Reynolds élevé.

Inversement, cet effet peut poser des problèmes. Par exemple, le fonctionnement des machines thermiques acoustiques utilise des niveaux sonores élevés (voir Gusev *et coll.* [47] pour le réfrigérateur acoustique) et peut être perturbé par ce phénomène.

Enfin, il faut citer les premières observations effectuées au XIX<sup>ème</sup> siècle. Faraday [37] en 1831 observa les figures formées par de fines particules (suffisamment fines pour être sensibles au vent acoustique) placées sur une surface élastique mise en vibration. Ces figures sont à distinguer des figures de Chladni observées en 1787 à l'aide de grains de sables, de grosseur suffisante pour être

peu sensibles à l'écoulement redressé (écoulement lent) ; ces grains de sable réagissent directement à la vibration de la plaque par rebond. Dans ce domaine d'application, l'expérience réalisée par Kundt [60] en 1868 pour mesurer la vitesse du son reste une référence. Une poudre légère est répartie à l'intérieur d'un tube de verre. La présence d'une onde acoustique stationnaire crée des tourbillons toroïdaux dans le tube. Le flux moyen se dirige des noeuds de vitesse acoustique vers les ventres le long de l'axe du tube et inversement le long des parois. Cela a pour effet de rassembler la poudre par paquets au niveau des noeuds de vitesse. La mesure de la distance entre ces noeuds donne accès à la longueur d'onde et donc à la vitesse acoustique.

Enfin, le vent acoustique peut être utilisé à bon escient pour mesurer des coefficients d'absorption dans les liquides usuels à l'aide d'un faisceau d'ultrasons (Piercy & Lamb [96], 1954). La source ultrasonore est placée dans un tube rempli du liquide considéré, ce qui crée un écoulement unidirectionnel. Un tube latéral permet le retour du liquide. La mesure de la vitesse d'écoulement dans ce tube latéral permet d'accéder à ces coefficients d'absorption.

## 2.2 L'article "Non-linear Acoustic Streaming Accompanying a Plane Stationary Wave in a Guide"

Dans ce paragraphe<sup>4</sup>, nous proposons un calcul théorique du vent acoustique non linéaire créé par une onde stationnaire dans un guide cylindrique. La détermination des équations de l'écoulement redressé est basé sur une analyse dimensionnelle dans le but de ne conserver que les termes prédominants. Ces derniers sont ensuite moyennés temporellement. Une distorsion notable des lignes de courant due à l'inertie du fluide est observée. Une comparaison entre vent acoustique linéaire et non-linéaire est ensuite effectuée.

Des précisions sur la méthode numérique utilisée pour résoudre les équations obtenues dans cette publication sont proposées en annexe (E)

---

<sup>4</sup>Ce paragraphe est présenté sous la forme d'un article dont les références sont les suivantes : MENGUY L., GILBERT J. (2000). Non-linear Acoustic Streaming Accompanying a Plane Stationary Wave in a Guide. *Acustica* **86**, 249-259.



# Non-linear Acoustic Streaming Accompanying a Plane Stationary Wave in a Guide

Ludovic Menguy, Joël Gilbert

Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine (UMR CNRS 6613) Avenue O. Messiaen, 72085 Le Mans cedex 9, France

## Summary

An acoustic standing wave in a guide can generate a significant localised mean flow: acoustic streaming. A dimensional analysis followed by a perturbation calculation using asymptotic expansions permits a simplification of the conservation equations by keeping the leading terms. A time averaging then leads to equations describing the behaviour of the mean velocity field in a cylindrical waveguide. A noticeable distortion of the field due to the fluid inertia is demonstrated. This is non-linear streaming, mainly studied for free or semi-infinite spaces. In the case of a waveguide, the nonlinear effect is determined by an appropriate Reynolds number. A comparison of slow and nonlinear acoustic streaming is finally presented.

PACS no. 43.25.Nm

## 1. Introduction

An acoustic source can generate a localised mean flow, a phenomenon known as acoustic streaming. This flow is created by the Reynolds forces, non-zero time-averaged values of the quadratic acoustic terms arising in the equations of conservation of momentum. Acoustic streaming appears when the acoustic signal is non uniform. This is the case in free space for non-homogeneous media, or for a non planar wave – a beam for example –, and also near an obstacle, since a gradient arises in the boundary layer close to the obstacle [1].

The first observations related to the phenomenon of acoustic streaming appear to have been made by Faraday [2]. He observed the figures formed by very light particles (a fine powder) lying on an elastic plate undergoing vibrations. The powder collected near the regions of maximum vibration on the plate. His explanation of this was as follows: the plate makes the air in its vicinity vibrate. The nodes of displacement of the plate correspond to the antinodes of the velocity of the oscillating air. The existence of a boundary layer generates a displacement of the air, which sweeps the particles towards the displacement nodes of the plate.

The first models were developed by Rayleigh [3] describing the Dvorak's phenomenon (dust patterns in Kundt's tubes). He proposed a model in which the mean flow was generated by the non-zero time-averaged quadratic acoustic terms called Reynolds stress. This argument was repeated in his "Theory of sound" [4], and developed by Schlichting [5], Westervelt [6], Nyborg [7], Eckart [8], Rudenko and Soluyan [9] and others. Its basis is the assumption that the profile of the mean flow results from the action of the Reynolds stress, opposed by viscosity. In the case of a standing wave in a cylindrical waveguide, there is a steady motion from velocity antinodes to nodes along the inner wall of the tube, and in the opposite direction along the axis of the tube. The

flow thus appears in the form of toroidal vortices. More recent discussion in acoustic streaming can be found in [10]; they suggest that there are two unresolved issues concerning acoustic streaming:

1. the effect of fluid compressibility and
2. the effect of non linearity.

Concerning the first point, the inconsistency of supposing that the fluid is incompressible while studying acoustic streaming should be emphasized (see for example [9]): streaming is itself generated by acoustic waves which can propagate because of fluid compressibility. Some authors [6, 11, 12] solved this problem near a rigid boundary by fully including the effects of compressibility. This leads to a larger streaming velocity outside the boundary layer.

It is the study of point (2), the effect of non-linearity, which motivates the work described here. The classical treatment called slow streaming [13] ignores the effect of fluid inertia, which limits the discussion to weak acoustic sources. It was Stuart [14] who pioneered the idea that, when the Reynolds number  $Re_s = \text{inertia/viscosity} = v_s d / \nu$  is large, the inertia of the fluid must be taken into account ( $v_s$  is a characteristic magnitude of the streaming motion,  $d$  is a characteristic dimension of the system and  $\nu$  the kinematic viscosity). This is the case which is described as nonlinear streaming [15, 16, 17]. Lighthill [18] notices that it is hardly an exaggeration to say that all really noticeable acoustic streaming motions are nonlinear streaming. Non linear streaming in infinite or semi-infinite space has also been treated by Ostrovskii and Papilova [17], Gusev and Rudenko [19, 20], Riley [21] and more recently by Kamakura *et al.* [22], and in bounded spaces by Duck and Smith [23]. The present work deals with a sinusoidal standing wave in a cylindrical waveguide. In such a guide, the acoustic temperature and velocity variations are zero along the boundary. The passage of a plane wave thus creates a significant gradient in these quantities close to the wall. This is the acoustic boundary layer. Several characteristic quantities with different orders of magnitude are relevant: the radius of the tube, the thickness of the acoustic boundary layer and the acoustic wavelength [9]. A

Reynolds number appropriate to the system is thus necessary [24]. The Reynolds number  $Re_{nl} = M^2/Sh^2$  will appear from the calculations described in the following chapter 2 and depends both on the tube radius and the wavelength (or the angular pulsation;  $M$  and  $Sh$ , the Mach acoustic number and the Shear number are defined in chapter 2).  $Re_{nl}$  compares inertia and viscosity but is different from  $Re_s$  given by Stuart [14]. The inertia of the fluid must be considered once  $Re_{nl}$  is of the order of unity. Typically, in the conditions which pertain to our study –frequencies of the order of 1kHz and radius of the order of 1cm–, the fluid inertia must be taken into account above sound levels around 145 dB –therefore  $M \approx Sh \approx 4 \cdot 10^{-3}$ –, corresponding to flow velocities of a few millimetres per second.

The acoustic wave is assumed stationary and sinusoidal. A preliminary discussion allows us to consider the order of magnitude of all variables, acoustic and streaming, as well as their spatial variations. Two zones can be distinguished: the acoustic boundary layer along the wall, and the main acoustic field in the rest of the tube. The basic equations, the conservation of mass and momentum, are set dimensionless separately in the acoustic boundary layer and in the main flow. Dimensionless numbers then appear in front of each term, which are characteristic of the order of magnitude of the corresponding terms. A perturbation method using asymptotic expansions, followed by a time averaging, leads to the equations of streaming. In the boundary layer, the flow equations remain linear: inertial effects are negligible. The analytical solution is obtained with the hypothesis of non-slip conditions for the flow velocity at the wall. In the main acoustic field, the equations of nonlinear streaming are obtained. The solution is obtained by matching both the axial and radial flow velocities in the boundary layer and in the main acoustic flow. The solutions show the effect of fluid inertia, distorting the flow velocity field in the tube, and rendering the toroidal vortex pattern unsymmetrical.

## 2. From the fundamental equations to the equations of acoustic streaming

### 2.1. Hypotheses and dimensional analysis

The fluid is newtonian, in the laminar regime and in steady state. The plane wave assumption is adopted. The problem is axisymmetric. The axis (Ox) is aligned along the tube axis and (Or) along the radius. The axial and radial components of the velocity  $\vec{u}$  are denoted  $u$  and  $v$  respectively.  $P$  is the pressure and  $\rho$  the volumic density. The indexes  $a$  and  $s$  denote the acoustic and streaming quantities respectively.  $\mu$ ,  $\eta$ ,  $\nu$ ,  $c_0$ ,  $\lambda$  and  $\omega$  denote respectively the first and second viscosities, the kinematic viscosity, the speed of sound, the wavelength and the acoustic angular frequency. Dimensional and dimensionless variables are written respectively with tilde and without tilde in the following text.

The fundamental equations are as follows [25, 9, 26].

The conservation of mass is:

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \tilde{t}} + \text{div}(\tilde{\rho} \tilde{\vec{u}}) = 0 \quad (1)$$

and the conservation of momentum is:

$$\tilde{\rho} \frac{d\tilde{\vec{u}}}{d\tilde{t}} = -\text{grad} \tilde{P} + \left( \eta + \frac{1}{3} \mu \right) \text{grad}(\text{div} \tilde{\vec{u}}) + \mu \Delta \tilde{\vec{u}}. \quad (2)$$

The conservation of energy is here not considered: it would be necessary in a study of the temperature variation associated with the streaming.

The dimensional analysis relies on the existence of three dimensionless numbers which are much less than 1:

$$M = \frac{\tilde{u}_{a0}}{c_0} \ll 1, \quad \frac{1}{Re} = \frac{\nu \omega}{c_0^2} \ll 1,$$

$$Sh = \frac{\xi}{R} = \sqrt{\frac{\nu}{\omega}} \frac{1}{R} \ll 1.$$

$M$  is the acoustic Mach number,  $Re$  the acoustic Reynolds number, and  $Sh$  the Shear number, the ratio of the boundary layer thickness  $\xi$  and the tube radius  $R$  (using the large tube radius approximation).  $u_{a0}$  is a typical value (constant) of the acoustic velocity, for example the velocity of the fundamental component near the source.

The conditions which motivate our study relate to frequencies in the audible range, radii of order a centimetre, and high sound levels (150-160 dB). It can thus be assumed that  $1/Re$  is around three orders of magnitude smaller than  $M$  and  $Sh$ :

$$M^2 Re = \frac{\tilde{u}_{a0}^2}{\nu \omega} \gg 1 \quad \text{and} \quad Sh^2 Re = \left( \frac{c_0}{R \omega} \right)^2 \gg 1.$$

The first condition is contradictory with the condition  $Re_s = M^2 Re \ll 1$ , which corresponds to normal slow acoustic streaming [14, 18]. In fact, in our conditions, as soon as streaming becomes of the order of a few millimetres per second, the slow acoustic streaming hypothesis is no longer valid.

The second condition reflects the fact that the wavelength is large in comparison to the tube radius: higher modes are evanescent, according to the plane wave assumption. The hypotheses can be summarized as follows:

$$1 \gg M, Sh \gg M^2, Sh^2, MSh \\ \gg 1/Re, M^3, M^2 Sh, MSh^2, Sh^3. \quad (3)$$

These orders of magnitude are denoted order 0, 1, 2 and 3 respectively in the following text.

The fundamental equations (conservation of mass and momentum) are expressed in cylindrical coordinates, since the problem is axisymmetric. The equations are simplified by considering the order of magnitude of each term. For that purpose the equations are converted into a dimensionless form. The aim is to rewrite each term in the form of a variable of the order of magnitude 1, preceded by a dimensionless number characterising the order of magnitude of the term in question.

The acoustic quantities are locally of order  $M$ ; we assume that the streaming quantities are of the order  $M^2$  [4] corresponding to experimental measurements of streaming velocities [27].

The following changes of variable are made:

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \text{ becomes } \bar{\rho} &= \rho_0(1 + M\rho_a + M^2\rho_s), \text{ where} \\ \rho_a &= \rho_{1a} + M\rho_{2a} + \dots, \quad \rho_s = \rho_{2s} + M\rho_{3s} + \dots; \\ \bar{P} \text{ becomes } \bar{P} &= P_0(1 + MP_a + M^2P_s), \text{ where} \\ P_a &= P_{1a} + MP_{2a} + \dots, \quad P_s = P_{2s} + MP_{3s} + \dots; \\ \bar{u} \text{ becomes } \bar{u} &= c_0(Mu_a + M^2u_s), \text{ where} \\ u_a &= u_{1a} + Mu_{2a} + \dots, \quad u_s = u_{2s} + Mu_{3s} + \dots; \end{aligned}$$

$\rho_0, P_0$  are the static values of  $\bar{\rho}$  and  $\bar{P}$  in the absence of an acoustic field. Every indexed dimensionless variable is of order unity by definition.

The dimensional analysis of the radial components  $\bar{v}_a, \bar{v}_s$  and  $\partial/\partial r$  is not straightforward. Their order of magnitude can be obtained from the linear results. Another argument for  $\bar{v}_s$  could be given as follows: streamlines are toroidal vortices of radial dimension  $R/2$  and axial dimension  $\lambda/4$  in the main acoustic field, and  $\xi/2$  and  $\lambda/4$  respectively in the boundary layer. The axial streaming velocity  $\bar{u}_s$  is of order  $M^2c_0$ . Considering mass flux conservation in one vortex,  $O(\bar{u}_s)R/2 = O(\bar{v}_s)\lambda/4$  in the main acoustic field. We can conclude that

$$\bar{v}_s = O\left(\frac{2RM^2c_0}{\lambda}\right) = O(c_0kRM^2),$$

and in the main acoustic field

$$\begin{aligned} \bar{v} \text{ becomes } \bar{v} &= \frac{c_0}{\sqrt{Re}}Mv_a + c_0kRM^2v_s \\ \text{or } \bar{v} &= \frac{c_0}{\sqrt{Re}}Mv_a + \omega RM^2v_s. \end{aligned}$$

The same argument leads in the boundary layer to  $v_s = O(c_0k\xi M^2)$ . The following changes of variables are therefore made in the boundary layer:

$$\begin{aligned} \bar{v} \text{ becomes } \bar{v} &= \frac{c_0}{\sqrt{Re}}Mv_a + c_0k\xi M^2v_s \\ \text{or } \bar{v} &= \frac{c_0}{\sqrt{Re}}Mv_a + \frac{c_0}{\sqrt{Re}}M^2v_s. \end{aligned}$$

Moreover, there are three different orders of magnitude among the spatial variables. Thus  $x$  is set dimensionless using  $c_0/\omega$ , and  $r$  using  $R$  (denoted  $r_1$ ) or  $\xi$  (denoted  $r_{b1}$ ) respectively in the main acoustic field or the boundary layer.

A further problem is to render dimensionless the spatial derivatives. The gradients with respect to  $(r)$  of the variables in the tube are not all of the same order. In the boundary layer, for example,  $u_a$  varies from 0 at the wall to a velocity of the order of  $Mc_0$  (the acoustic velocity in the main field) far from the wall:  $\partial\bar{u}_a/\partial\bar{r}$  is thus of the order of  $\bar{u}_a/\xi$ . But notice that the order of magnitude of  $\partial X/\partial Y$  is not necessarily the same as that of  $X/Y$ : for example the acoustic pressure varies little over the cross-section of the tube. The order of magnitude of  $\partial\bar{P}_a/\partial\bar{r}$  is not  $\bar{P}_a/R$  but much less. The results of linear acoustic and linear streaming guided our choice for the derivative of quantities. Radial derivatives are set dimensionless. Taking into account the actual radial variation of variables in rendering equations dimensionless is

one of the originalities of the present work, which improves the validity of the perturbation method compared with using only  $\xi$  in the boundary layer and  $R$  in the main acoustic field.

In the boundary layer

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\bar{r}} \text{ becomes } \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial r_{b1}} &= \sqrt{\frac{\rho_0\omega}{\mu}} \frac{\partial}{\partial r_{b1}} \\ \text{applied to } \rho_a, u_a, v_a, u_s \text{ and } v_s, \\ \frac{\partial}{\partial\bar{r}} \text{ becomes } \frac{1}{Re} \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial r_{b2}} &= \frac{1}{Re} \sqrt{\frac{\rho_0\omega}{\mu}} \frac{\partial}{\partial r_{b2}} \\ \text{applied to } P_a \text{ and } P_s, \end{aligned}$$

and in the main acoustic field

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\bar{r}} \text{ becomes } \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial r_1} \\ \text{applied to } v_a, u_s \text{ and } v_s, \\ \frac{\partial}{\partial\bar{r}} \text{ becomes } \frac{1}{Re} \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial r_{b2}} &= \frac{1}{Re} \sqrt{\frac{\rho_0\omega}{\mu}} \frac{\partial}{\partial r_{b2}} \\ \text{applied to } P_a, \rho_a, u_a \text{ and } P_s, \end{aligned}$$

with

$$r_1 = \frac{\bar{r}}{R}, \quad r_{b1} = \frac{\bar{r}}{\xi}, \quad r_{b2} = \frac{\bar{r}}{Re\xi}.$$

## 2.2. Boundary layer equations

### 2.2.1. Non dimensional conservation equations

The conservation laws (1) and (2) are written in cylindrical coordinates. The angular coordinate is ignored because of the axisymmetry of the problem. Dimensionless variables defined in the acoustic boundary layer are inserted.  $\gamma$  is the specific heat ratio for a gas.

The mass conservation law is:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\rho_a}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( (1 + M\rho_a + M^2\rho_s)(u_a + Mu_s) \right) \\ + \frac{\partial}{\partial r_{b1}} \left( (1 + M\rho_a + M^2\rho_s)(v_a + Mv_s) \right) \\ + Sh \frac{1}{r_1} (1 + M\rho_a + M^2\rho_s)(v_a + Mv_s) = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

The axial component of momentum conservation is

$$\begin{aligned} (1 + M\rho_a + M^2\rho_s) \frac{\partial u_a}{\partial t} + (1 + M\rho_a + M^2\rho_s) \\ \cdot M \left[ (u_a + Mu_s) \frac{\partial}{\partial x} (u_a + Mu_s) \right. \\ \left. + (v_a + Mv_s) \frac{\partial}{\partial r_{b1}} (u_a + Mu_s) \right] + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial P_a}{\partial x} + \frac{M}{\gamma} \frac{\partial P_s}{\partial x} \\ = \frac{\partial u_a^2}{\partial r_{b1}^2} + Sh \frac{1}{r_1} \frac{\partial u_a}{\partial r_{b1}} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\eta}{\mu} + \frac{4}{3} \right) \frac{\partial^2 u_a}{\partial x^2} \\ + \frac{1}{Re} \left( \frac{\eta}{\mu} + \frac{1}{3} \right) \frac{\partial^2 v_a}{\partial r_{b1} \partial x} + \left( \frac{Sh}{Re} \right) \left( \frac{\eta}{\mu} + \frac{1}{3} \right) \frac{1}{r_1} \frac{\partial v_a}{\partial x} \\ + M \left[ \frac{\partial u_s^2}{\partial r_{b1}^2} + Sh \frac{1}{r_1} \frac{\partial u_s}{\partial r_{b1}} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\eta}{\mu} + \frac{4}{3} \right) \frac{\partial^2 u_s}{\partial x^2} \right. \\ \left. + \frac{1}{Re} \left( \frac{\eta}{\mu} + \frac{1}{3} \right) \frac{\partial^2 v_s}{\partial r_{b1} \partial x} + \left( \frac{Sh}{Re} \right) \left( \frac{\eta}{\mu} + \frac{1}{3} \right) \frac{1}{r_1} \frac{\partial v_s}{\partial x} \right], \end{aligned} \quad (5)$$

and the radial component is

$$\begin{aligned}
& (1 + M\rho_a + M^2\rho_s) \frac{\partial v_a}{\partial t} + (1 + M\rho_a + M^2\rho_s) \\
& \cdot M \left[ (u_a + Mu_s) \frac{\partial}{\partial x} (v_a + Mv_s) \right. \\
& \left. + (v_a + Mv_s) \frac{\partial}{\partial r_{b1}} (v_a + Mv_s) \right] + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial P_a}{\partial r_{b2}} + \frac{M}{\gamma} \frac{\partial P_s}{\partial r_{b2}} \\
& = \left( \frac{\eta}{\mu} + \frac{4}{3} \right) \left( \frac{\partial^2 v_a}{\partial r_{b1}^2} + Sh \frac{1}{r_1} \frac{\partial v_a}{\partial r_{b1}} \right. \\
& \quad \left. - Sh^2 \frac{1}{r_1^2} v_a \right) + \left( \frac{\eta}{\mu} + \frac{1}{3} \right) \frac{\partial^2 u_a}{\partial r_{b1} \partial x} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 v_a}{\partial x^2} \\
& \quad + M \left[ \left( \frac{\eta}{\mu} + \frac{4}{3} \right) \left( \frac{\partial^2 v_s}{\partial r_{b1}^2} + Sh \frac{1}{r_1} \frac{\partial v_s}{\partial r_{b1}} - Sh^2 \frac{1}{r_1^2} v_s \right) \right. \\
& \quad \left. + \left( \frac{\eta}{\mu} + \frac{1}{3} \right) \frac{\partial^2 u_s}{\partial r_{b1} \partial x} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 v_s}{\partial x^2} \right]. \quad (6)
\end{aligned}$$

### 2.2.2. Order 0

An expansion in the small parameters  $M$ ,  $Sh$  and  $1/Re$  is performed. At order 0, conservation laws (4) and (5) become:

$$\frac{\partial \rho_{1a}}{\partial t} + \frac{\partial u_{1a}}{\partial x} + \frac{\partial v_{1a}}{\partial r_{b1}} = 0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial u_{1a}}{\partial t} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial P_{1a}}{\partial x} = \frac{\partial^2 u_{1a}}{\partial r_{b1}^2}. \quad (8)$$

These are the dimensionless linear acoustic equations in the boundary layer. They are independent of streaming, which doesn't disturb the acoustic signal.

Notice that the only usefulness of equation (6) is to check the coherence between the scales of  $\bar{v}_a$  and radial variations of  $\bar{P}_a$  (when writing (6) at order 0).

### 2.2.3. Order 1

The conservation laws (4) and (5) become at order 1 ( $O(M, Sh)$ ) after time averaging:

$$\frac{\partial u_{2s}}{\partial x} + \frac{\partial v_{2s}}{\partial r_{b1}} = - \frac{\partial}{\partial x} \overline{(\rho_{1a} u_{1a})} - \frac{\partial}{\partial r_{b1}} \overline{(\rho_{1a} v_{1a})}, \quad (9)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u_{2s}}{\partial r_{b1}^2} - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial P_{2s}}{\partial x} &= \overline{\left( \rho_{1a} \frac{\partial u_{1a}}{\partial t} \right)} + \overline{\left( u_{1a} \frac{\partial u_{1a}}{\partial x} \right)} \\
&\quad + \overline{\left( v_{1a} \frac{\partial u_{1a}}{\partial r_{b1}} \right)}. \quad (10)
\end{aligned}$$

These are the acoustic streaming equations in the boundary layer. Notice that the fluid inertia ( $u_s \partial u_s / \partial x + v_s \partial u_s / \partial r_{b1}$ ) is of order 3 ( $O(M^3)$ ) and therefore negligible: this is an expected result in the boundary layer because of the large viscous forces due to the large radial gradients.

$(1/\gamma) \partial P_{2s} / \partial x$  is an unknown function. Since  $P_{2s}$  is independent of  $r_1$ —see the beginning of the annex A—, this function depends on  $x$  only; it is denoted  $h(x)$ . Equation (10)

can be written:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u_{2s}}{\partial r_{b1}^2} - h(x) &= \\
&= \overline{\left( \rho_{1a} \frac{\partial u_{1a}}{\partial t} \right)} + \overline{\left( u_{1a} \frac{\partial u_{1a}}{\partial x} \right)} + \overline{\left( v_{1a} \frac{\partial u_{1a}}{\partial r_{b1}} \right)}. \quad (11)
\end{aligned}$$

Function  $h(x)$  will be determined with the help of the boundary conditions; thus equations(9) and (11) are sufficient to determine the streaming in the boundary layer. The fact that  $h(x)$  does not depend on  $r$  is useful to the resolution.

$\rho_{1a} \partial u_{1a} / \partial t$  in equation (11) is necessary to take into account the compressibility of the fluid, often neglected. Some authors considered the effect of the compressibility of the fluid, see for example [6] or [11]. It solves the former inconsistency of supposing that the fluid is incompressible while studying a phenomenon created by an acoustic wave.

Rudenko and Soluyan [9] get  $\text{div}(\vec{U}) = 0$  with  $\vec{U} = \bar{u}_{2s} + \rho_{1a} \bar{u}_{1a}$  from equation (9). They notice that the mass transfer of the medium is characterized by  $\vec{U}$  and not  $\bar{u}_s$ . Moreover, we will see in next chapter that contrary to the boundary layer,  $\bar{\rho}_{1a} \bar{u}_{1a} = 0$  in the main acoustic field:  $\vec{U}$  and  $\bar{u}_{2s}$  are there equivalent.

## 2.3. Main acoustic field equations

### 2.3.1. Non dimensional conservation equations

The conservation laws (1) and (2) are written in cylindrical coordinates. Dimensionless variables defined in the main acoustic field are inserted.

The mass conservation law becomes:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho_a}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( (1 + M\rho_a + M^2\rho_s)(u_a + Mu_s) \right) \\
+ (1 + M\rho_a + M^2\rho_s) \\
\cdot \left( Sh \frac{1}{r_1} \frac{\partial}{\partial r_1} (r_1 v_a) + Mv_s + M \frac{\partial v_s}{\partial r_1} \right) \\
+ \frac{M}{Re} (v_a + \frac{M}{Sh} v_s) \frac{\partial}{\partial r_{b2}} (\rho_a + M\rho_s) = 0. \quad (12)
\end{aligned}$$

The axial component of the momentum conservation law is:

$$\begin{aligned}
(1 + M\rho_a + M^2\rho_s) \frac{\partial u_a}{\partial t} + (1 + M\rho_a + M^2\rho_s) M \\
\cdot \left[ (u_a + Mu_s) \frac{\partial}{\partial x} (u_a + Mu_s) + \frac{1}{Re} (v_a + \frac{M}{Sh} v_s) \right. \\
\left. \frac{\partial u_a}{\partial r_{b2}} + (MShv_a + M^2v_s) \frac{\partial v_s}{\partial r_1} \right] + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial P_a}{\partial x} + \frac{M}{\gamma} \frac{\partial P_s}{\partial x} \\
= \left( \frac{1}{Re} \right)^2 \frac{\partial u_a^2}{\partial r_{b2}^2} + \frac{Sh}{Re} \frac{1}{r_1} \frac{\partial v_a}{\partial r_{b2}} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\eta}{\mu} + \frac{4}{3} \right) \frac{\partial^2 u_a}{\partial x^2} \\
+ \frac{Sh}{Re} \left( \frac{\eta}{\mu} + \frac{1}{3} \right) \frac{1}{r_1} \frac{\partial}{\partial r_1} \left( r_1 \frac{\partial v_a}{\partial x} \right) + MSh^2 \frac{\partial^2 u_s}{\partial r_1^2} \\
+ MSh^2 \frac{1}{r_1} \frac{\partial u_s}{\partial r_1} + \frac{M}{Re} \left( \frac{\eta}{\mu} + \frac{4}{3} \right) \frac{\partial^2 u_s}{\partial x^2} \\
+ \frac{M}{Re} \left( \frac{\eta}{\mu} + \frac{1}{3} \right) \frac{1}{r_1} \frac{\partial v_s}{\partial x} + \frac{M}{Re} \left( \frac{\eta}{\mu} + \frac{1}{3} \right) \frac{\partial^2 v_s}{\partial r_1 \partial x}, \quad (13)
\end{aligned}$$

and the radial component is:

$$\begin{aligned}
 & (1 + M\rho_a + M^2\rho_s)\frac{\partial v_a}{\partial t} + (1 + M\rho_a + M^2\rho_s)M \\
 & \cdot \left[ (u_a + Mu_s)\frac{\partial v_a}{\partial x} + \frac{M}{Sh}(u_a + Mu_s)\frac{\partial v_s}{\partial x} \right. \\
 & \quad \left. + (Shv_a + Mv_s)\left(\frac{\partial v_a}{\partial r_1} + \frac{M}{Sh}\frac{\partial v_s}{\partial r_1}\right) \right] \\
 & \quad + \frac{1}{\gamma}\frac{\partial P_a}{\partial r_{b2}} + \frac{M}{\gamma}\frac{\partial P_s}{\partial r_{b2}} = \quad (14) \\
 & Sh^2\left(\frac{\eta}{\mu} + \frac{4}{3}\right)\frac{\partial}{\partial r_1}\left(\frac{1}{r_1}\frac{\partial}{\partial r_1}(r_1v_a)\right) \\
 & + \frac{1}{Re}\left(\frac{\eta}{\mu} + \frac{1}{3}\right)\frac{\partial^2 u_a}{\partial r_{b2}\partial x} + \left(\frac{1}{Re}\right)\frac{\partial^2 v_a}{\partial x^2} \\
 & + MSh\left(\frac{\eta}{\mu} + \frac{4}{3}\right)\frac{\partial}{\partial r_1}\left(\frac{1}{r_1}\frac{\partial}{\partial r_1}(r_1v_s)\right) \\
 & + MSh\left(\frac{\eta}{\mu} + \frac{1}{3}\right)\frac{\partial^2 u_s}{\partial r_1\partial x} + \left(\frac{M}{ReSh}\right)\frac{\partial^2 v_s}{\partial x^2}.
 \end{aligned}$$

### 2.3.2. Order 0 and 1

From the equations (12) and (13), an expansion in small parameters  $M$  and  $Sh$  is performed. Order 0 leads to dimensionless linear acoustic equations, which are not disturbed by the streaming:

$$\frac{\partial \rho_{1a}}{\partial t} + \frac{\partial u_{1a}}{\partial x} = 0 \quad (15)$$

$$\frac{\partial u_{1a}}{\partial t} + \frac{1}{\gamma}\frac{\partial P_{1a}}{\partial x} = 0. \quad (16)$$

At order 1 ( $O(M, Sh)$ ), conservation laws (12) and (13) become:

$$\begin{aligned}
 & M\frac{\partial \rho_{2a}}{\partial t} + M\frac{\partial}{\partial x}(u_{2a} + \rho_{1a}u_{1a} + u_{2s}) \quad (17) \\
 & + \left(Sh\frac{1}{r_1}\frac{\partial}{\partial r_1}(r_1v_{1a}) + Mv_{2s} + M\frac{\partial v_{2s}}{\partial r_1}\right) = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & M\frac{\partial u_{2a}}{\partial t} + M\rho_{1a}\frac{\partial u_{1a}}{\partial t} + Mu_{1a}\frac{\partial u_{1a}}{\partial x} \quad (18) \\
 & + M\frac{1}{\gamma}\frac{\partial P_{2a}}{\partial x} + M\frac{1}{\gamma}\frac{\partial P_{2s}}{\partial x} = 0.
 \end{aligned}$$

These equations are now time averaged over a period to lead to equations describing the behaviour of the mean flow velocity –the streaming– in the main acoustic field, and acoustic variables are injected into equations (17) and (18) as follows. Only the lowest acoustic mode is considered. We assume that the sound level is not high enough to create significant higher harmonics by acoustic nonlinear propagation from the initial sinusoidal source. We have studied theoretically the effect of higher harmonics and shown that they don't significantly perturb the streaming as long as the amplitudes of harmonics 2 or 3 are less than 20% of the amplitude of the fundamental harmonic –Notice that the amplitude of the

streaming created by these harmonics decreases as the square of their amplitude–.

The acoustic signal for a stationary wave is:

$$u_{1a} = \cos(t)\cos(x), \quad \rho_{1a} = \sin(t)\sin(x). \quad (19)$$

It leads to:

$$\overline{\rho_{1a}u_{1a}} = 0, \quad \frac{\partial u_{1a}}{\partial t} = -\sin(t)\cos(x),$$

and  $\frac{\partial u_{1a}}{\partial x} = -\cos(t)\sin(x).$

We can conclude that

$$\overline{\rho_{1a}\frac{\partial u_{1a}}{\partial t}} = -\frac{1}{4}\sin(2x),$$

$$\overline{u_{1a}\frac{\partial u_{1a}}{\partial x}} = -\frac{1}{4}\sin(2x),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\overline{\rho_{1a}u_{1a}}) = 0.$$

The time average of (17) and (18) in the standing wave hypothesis is therefore:

$$\frac{\partial u_{2s}}{\partial x} + \frac{1}{r_1}\frac{\partial}{\partial r_1}(r_1v_{2s}) = 0 \quad (20)$$

and

$$\frac{1}{\gamma}\frac{\partial P_{2s}}{\partial x} = -\overline{\rho_{1a}\frac{\partial u_{1a}}{\partial t}} - \overline{u_{1a}\frac{\partial u_{1a}}{\partial x}} = \frac{1}{2}\sin 2x, \quad (21)$$

that is

$$P_{2s} = -\frac{\gamma}{4}\cos 2x. \quad (22)$$

At this stage of calculation, there is only one relation – equation (20)– between the two streaming velocity variables  $u_s$  and  $v_s$ . Momentum conservation law doesn't lead to a relation between streaming velocities and acoustic variables at this order. But it determines the pressure associated with the streaming in the main acoustic field. At leading order,  $P_s$  depends only on  $x$  and not on  $r_1$ . This pressure was created directly by the acoustic wave which is quasi-plane, and not by the mean flow. To get another relation using streaming velocities, equation (13) is written at higher order.

Notice that the only usefulness of the equation (14) is to check the coherence between the scales of  $\tilde{v}_a$  and radial variations of  $\tilde{P}_a$  (when writing (14) at order 0).

### 2.3.3. Order 2 and 3

At order 2 ( $O(M^2, Sh^2, MSh)$ ), momentum conservation equation (13) becomes after time averaging:

$$\begin{aligned}
 & \overline{\rho_{2a}\frac{\partial u_{1a}}{\partial t}} + \overline{\rho_{1a}\frac{\partial u_{2a}}{\partial t}} + \overline{u_{2a}\frac{\partial u_{1a}}{\partial x}} \\
 & + \overline{u_{1a}\frac{\partial u_{2a}}{\partial x}} + \overline{\rho_{1a}u_{1a}\frac{\partial u_{1a}}{\partial x}} + \frac{1}{\gamma}\frac{\partial P_{3s}}{\partial x} = 0, \quad (23)
 \end{aligned}$$

which still has no dependence on  $u_{2s}$  and  $v_{2s}$ .

At order 3, the time averaged equation (13) becomes:

$$\begin{aligned}
 M^3 & \left( \overline{\rho_{3a} \frac{\partial u_{1a}}{\partial t}} + \overline{\rho_{2a} \frac{\partial u_{2a}}{\partial t}} + \overline{\rho_{1a} \frac{\partial u_{3a}}{\partial t}} \right. \\
 & \left. + \overline{u_{3a} \frac{\partial u_{1a}}{\partial x}} + \overline{u_{2a} \frac{\partial u_{2a}}{\partial x}} + \overline{u_{1a} \frac{\partial u_{3a}}{\partial x}} \right. \\
 & \left. + \overline{\rho_{1a} u_{1a} \frac{\partial u_{2a}}{\partial x}} + \overline{\rho_{1a} u_{2a} \frac{\partial u_{1a}}{\partial x}} + \overline{\rho_{2a} u_{1a} \frac{\partial u_{1a}}{\partial x}} \right) \\
 & + M^3 \left( u_{2s} \frac{\partial u_{2s}}{\partial x} + v_{2s} \frac{\partial u_{2s}}{\partial r_1} \right) + M^3 \frac{1}{\gamma} \frac{\partial P_{4s}}{\partial x} \\
 & = MSh^2 \frac{1}{r_1} \frac{\partial}{\partial r_1} \left( r_1 \frac{\partial u_{2s}}{\partial r_1} \right).
 \end{aligned}$$

All terms depending on acoustic variables and streaming pressure are now gathered into a function *f*, unknown because of *P<sub>4s</sub>*. The only usefulness of the radial component of the momentum conservation law (14) is to prove that *f* does not depend on *r<sub>1</sub>* (see annex A): this function depends only on *x*.

In conclusion, the equations of the streaming (20) and (24) in the main acoustic field are summarised below:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u_{2s}}{\partial x} + \frac{1}{r_1} \frac{\partial}{\partial r_1} (r_1 v_{2s}) &= 0, \\
 \frac{1}{r_1} \frac{\partial}{\partial r_1} \left( r_1 \frac{\partial u_{2s}}{\partial r_1} \right) &= \\
 \frac{M^2}{Sh^2} (u_{2s} \frac{\partial u_{2s}}{\partial x} + v_{2s} \frac{\partial u_{2s}}{\partial r_1}) + f(x). & \quad (24)
 \end{aligned}$$

Compared with the equations of slow streaming (see [9]), there is a nonlinear term, due to the fluid inertia in the streaming field: the nonlinear hydrodynamic effect is controlled by the dimensionless parameter *M<sup>2</sup>/Sh<sup>2</sup>*. This parameter can be seen as a Reynolds number *Re<sub>nl</sub>*:

$$\begin{aligned}
 Re_{nl} &= \frac{\text{inertia}}{\text{viscosity}} = \frac{[\partial/\partial x][u_s]^2}{\nu[\partial/\partial r_1]^2[u_s]} \\
 &= \frac{\omega/c_0(Mu_a)^2}{\nu(1/R)^2(Mu_a)} = \frac{M^2}{Sh^2}, \quad (25)
 \end{aligned}$$

according to (24). In other words, the slow streaming approximation is valid if *Re<sub>nl</sub>* ≪ 1. Notice that such nonlinear effects have been pointed out by some authors, see for example Stuart's pioneering work [14], or [17, 18, 19, 20].

### 3. Solving the nonlinear streaming equations

In a first step, the streaming equations in the boundary layer (9) and (11) are solved from the acoustic field with a non slip condition at the wall. Then the asymptotic velocity far from the wall is deduced. This part of the solving has been already done by Qi [11] and is briefly given in annex. In a second step, the streaming equations in the main acoustic field (20) and (24) are solved from the asymptotic velocities –axial and radial– previously calculated at the interface between the acoustic boundary layer and the main acoustic field.

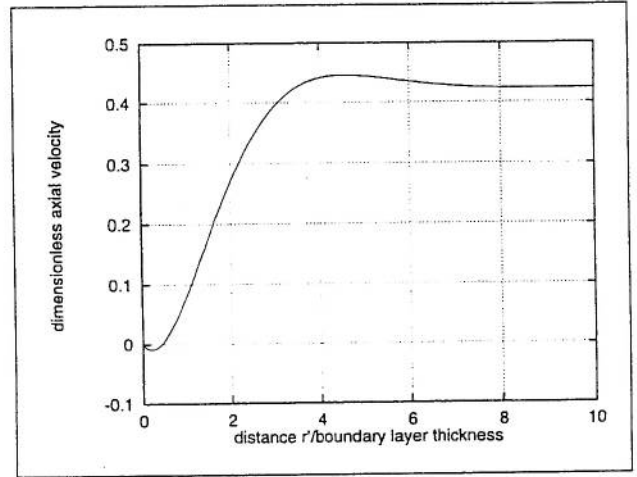


Figure 1. Evolution of dimensionless axial streaming velocity in the boundary layer; *Pr*=0.7 (*r* = 0 at the rigid wall). The asymptotic value (*r* ≫ 1) gives the velocity at the interface with the main acoustic field taking into account the effect of fluid compressibility in the viscothermal boundary layer (—).

#### 3.1. Streaming velocity in the boundary layer

Streaming equations (9) and (11) are solved in the boundary layer in the case of a standing wave, and yields to the streaming longitudinal velocity in the boundary layer given by equation (A13) in annex B. Figure 1 represents the evolution of the longitudinal velocity across the boundary layer at *x* = *π*/4. A negative velocity close to the wall shows the existence of a small vortex which appears in the boundary layer.

The longitudinal velocity tends to an asymptotic value:

$$u_{2s\text{lim}} = \lim_{r' \rightarrow \infty} u_{2s} = \frac{\sin 2x}{4} \left( \frac{3}{2} + (\gamma - 1) \frac{\sqrt{Pr}}{1 + Pr} \right). \quad (26)$$

Taking into account the thermal effect in the boundary layer and the compressibility of the fluid Qi [11] derived a correction of 13% on the classical value given by Rayleigh [4] which is:

$$u_{2s\text{lim}} = \frac{3}{8} \sin(2x). \quad (27)$$

Notice that the streaming radial velocity could be calculated from equation (9); this kind of streaming is called Schlichting streaming [5, 13].

In conclusion, we can notice that even for high sound levels, to the extent that the hypotheses (3) of section 2.1 are respected, the streaming in the acoustic boundary layer remains linear. Equations of the streaming can therefore be analytically solved. The usefulness of the former calculation is to determine asymptotic values of the streaming to be used as boundary conditions for the streaming in the main acoustic field as follows.

1. The continuity of the pressure associated with the streaming is still valid –see equations (22) and (A14)–.
2. The axial streaming velocity (26) will be used to match the streaming in the main acoustic field in the next chapter.

3. Now we have to calculate the matching condition concerning the radial streaming velocity in the boundary layer.  $\tilde{v}_s = O((c_0/\sqrt{Re})M^2)$  in the boundary layer –the proof is the equation (9) obtained after setting  $v_{2s}$  dimensionless–. The asymptotic value  $v_{2slim}$  of the velocity  $v_{2s}$  was not calculated, but we know  $\tilde{v}_{slim} = O((c_0/\sqrt{Re})M^2)$  in the boundary layer. The dimensionless velocity in the main acoustic field –expressed using dimensionless variables of the main acoustic field– is  $v_{slim} = O((c_0M^2/\sqrt{Re})(1/\omega RM^2)) = O(Sh)$ . But  $v_{2s} = O(1)$  by definition. In other words, the radial velocity is one order smaller in the boundary layer compared with the main acoustic field.

It can be concluded that in the main acoustic field, at the interface with the boundary layer  $v_{2s}(r_1 = 1) = 0$ . This result and the equation (26) will be used to match the leading order of the streaming velocities  $u_{2s}$  and  $v_{2s}$  in the main acoustic field.

### 3.2. Streaming velocity in the main acoustic field

This part gives a method to solve the equations of streaming in the main acoustic field knowing the asymptotic values at the interface with the boundary layer. The aim is to give a quite simple resolution method to visualize the phenomenon.

First, some hypotheses on the solution are formulated. The acoustic field which creates the streaming is spatially periodic along the longitudinal axis with a period of  $\lambda$  and the amplitude of the signal has a period of  $\lambda/2$ . The streaming is created by the variation of the amplitude of the acoustic signal –Reynolds forces–. We assume therefore that the nonlinear streaming is spatially periodic with a period  $\lambda/2$ , like the known solution of the slow streaming. The solution is then written in a spatial Fourier series. Moreover, we assume that the dependence on the radial component  $r_1$  can be represented as a power series keeping the parity of each velocity component, like the analytical known solution for the slow streaming –even parity for the axial component  $u_s$ , odd parity for the radial component  $v_s$ –. The solution of the nonlinear streaming is therefore assumed to be:

$$u_{2s} = \sum_{i=1}^{\infty} \left( \sum_{j=0}^{\infty} c_{i,j} r_1^{2j} \right) \sin(2ix), \quad (28)$$

$$v_{2s} = \sum_{i=1}^{\infty} \left( \sum_{j=0}^{\infty} d_{i,j} r_1^{2j+1} \right) \cos(2ix). \quad (29)$$

$c_{i,j}$  and  $d_{i,j}$  are the unknown coefficients. The solution for slow acoustic streaming follows these properties with only two terms ( $i = 1; j = 0, 1$ ):

$$u_s = -\frac{\alpha}{4} \sin 2x(1 - 2r_1^2), \quad (30)$$

$$v_s = \frac{\alpha}{4} \cos 2x(r_1 - r_1^3), \quad (31)$$

with  $\alpha = \frac{3}{2} + (\gamma - 1)\sqrt{Pr}/(1 + Pr)$ .

This particular solution corresponding to  $Re_{nl} = 0$  will be the initial solution useful for the iterative method described

below. Nonlinear solutions are obtained from this one by a continuation method.  $Re_{nl}$  is increased step by step from 0, and at each step, coefficients  $c_{i,j}$  are calculated by a Newton-Raphson method of convergence on the set of  $c_{i,j}$  parameters, knowing these coefficients at the former step. Notice that  $d_{i,j}$  are directly calculated from the  $c_{i,j}$  (see following equation (32)).

The streaming velocities  $u_{2s}$  and  $v_{2s}$  are solution of the main acoustic field equations (20) and (24):

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{2s}}{\partial x} + \frac{1}{r_1} \frac{\partial}{\partial r_1} (r_1 v_{2s}) &= 0, \\ \frac{1}{r_1} \frac{\partial}{\partial r_1} \left( r_1 \frac{\partial u_{2s}}{\partial r_1} \right) &= \\ \frac{M^2}{Sh^2} (u_{2s} \frac{\partial u_{2s}}{\partial x} + v_{2s} \frac{\partial u_{2s}}{\partial r_1}) &+ f(x). \end{aligned}$$

Assuming (28),  $v_{2s}$  is defined from  $u_{2s}$  parameters using (20). After an integration, we obtain:

$$v_{2s} = - \sum_{i=1}^{\infty} \left( \sum_{j=0}^{\infty} c_{i,j} \frac{r_1^{2j+1}}{2j+2} \right) 2i \cos(2ix) + \frac{D}{r_1}, \quad (32)$$

where  $D$  is equal to zero because of the finite velocity on the axis ( $r_1 = 0$ ). Now, (28) and (32) are inserted into (24) to obtain the following equation for each  $(i, j)$ :  $\forall i \neq 0, \forall j \neq 0, 1$ :

$$\begin{aligned} c_{i,j}(2j)^2 &= \sum_{m=0}^{j-1} \frac{j-2m}{j-m} \left( \sum_{n=1}^{i-1} (i-n)c_{n,m}c_{i-n,j-m-1} \right. \\ &+ \sum_{n=i+1}^{\infty} (n-i)c_{n,m}c_{n-i,j-m-1} \\ &\left. - (n)c_{n-i,m}c_{n,j-m-1} \right), \quad (33) \end{aligned}$$

and equations for  $j = 1$  containing  $f(x)$ .

Furthermore, the streaming velocities have to satisfy the continuity conditions. In one hand, there is a continuity condition between the axial velocity in the main acoustic field and the asymptotic value in the boundary layer (26). After an identification term to term, we obtain:

$$\begin{aligned} \text{for } i = 1 : \sum_{j=0}^{\infty} c_{i,j} &= \frac{\alpha}{4}, \quad (34) \\ \text{for } i \neq 1 : \sum_{j=0}^{\infty} c_{i,j} &= 0. \end{aligned}$$

On the other hand, the matching condition of the radial velocity is:

$$\forall x \quad v_{2s}(r_1 = 1) = 0. \quad (35)$$

Incorporating (32) at  $r_1 = 1$  for all  $x$  into the relation (35) leads to:

$$\forall i, \quad \sum_{j=0}^{\infty} \left( \frac{c_{i,j}}{2j+2} \right) = 0. \quad (36)$$

Notice that instead of matching the radial velocity, an equivalent condition is the global mass conservation for the cross section of the tube:

$$\int_{\text{section}} \overline{\rho_{\text{total}} u_{\text{total}}} dS = \int_0^1 u_s(r_1) 2\pi r_1 dr_1 + \int_0^1 \overline{\rho_{1a} u_{1a}} 2\pi r_1 dr_1 = 0. \quad (37)$$

The mass conservation is limited to the main acoustic section: to forget the flux across the boundary layer is equivalent to neglecting higher order terms –of order  $Sh$ –.

In the particular case of a standing wave (see part 2.3.2),

$$\overline{\rho_{1a} u_{1a}} = 0; \quad (38)$$

the mass flux conservation is therefore only:

$$\int_0^1 u_s 2\pi r_1 dr_1 = 0. \quad (39)$$

Inserting the definition (28) of  $u_{2s}$  into (39) leads to equation (36).

In practice, equations (33), (34), (36) are truncated to  $I$  and  $J$ . (33) contains  $I * (J - 1)$  equations (excluding  $j = 1$ ); (34) and (36) contain  $I$  equations each. Finally, to calculate the streaming field, we have to solve  $N=I(J+1)$  nonlinear functions of  $N$  variables  $c_{i,j}$  for each particular value of the control parameter  $Re_{nl}$ . As suggested in the beginning of this chapter, this set of nonlinear equations is solved step by step by a continuation method, increasing  $Re_{nl}$  starting from  $Re_{nl} = 0$  (the known slow streaming case).  $I$  equations of (33) are not used (corresponding to  $j = 1$  and containing  $f(x)$ ), and could be used to calculate the  $I$  first coefficients of the Fourier series of  $f(x)$ .

In the main acoustic field, equations (17) and (24) were used to calculate the streaming. These equations depend only on streaming variables and not on acoustic variables, except  $f(x)$ , but  $f(x)$  was not useful to determine the streaming. It can be concluded that the streaming in the main acoustic field is not directly created by the acoustic wave but induced by the streaming in the boundary layer, by continuation. A zero streaming velocity at the interface would lead to the solution  $u_s = v_s = 0$  everywhere in the main acoustic field.

### 3.3. Simulations and discussion

The nonlinear hydrodynamic effect of the fluid inertia is shown on Figures 2 to 4 for simulations with particular values  $Re_{nl} = 2$  and  $Re_{nl} = 4$  comparing with the slow streaming, using simulations based on the method described in the previous chapter.  $Pr$  is set to 0.7 (air). The infinite series (28) and (29) are truncated to  $I=20$  and  $J=4$ . Some tests have been done using higher values of  $I$  and  $J$  (for example  $I=50$  and  $J=20$ ) and lead to the same results but much increase the computing time. Larger values of  $Re_{nl}$  than 6 can't be considered using this method because numerical problems arise: convergence becomes more difficult to obtain. Another resolution method should then be used. Notice that  $M$  and  $Sh$

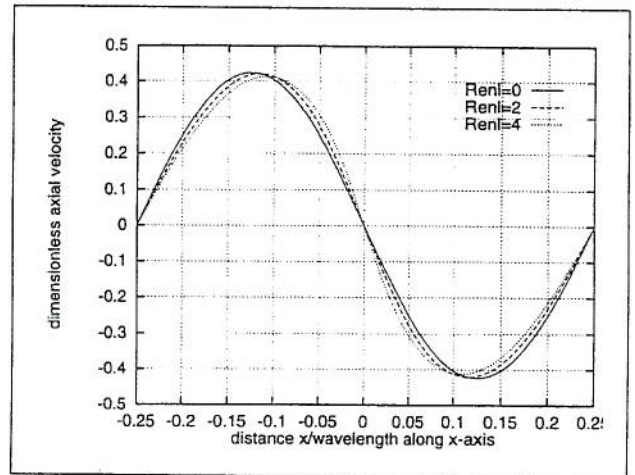


Figure 2. Streaming axial dimensionless velocity ( $/M^2 c_0$ ) along  $x$ -axis ( $Pr=0.7$ ). Maximum acoustic velocity amplitude is at  $x/\lambda = 0$ , maxima at  $x/\lambda = \pm 0.25$ .

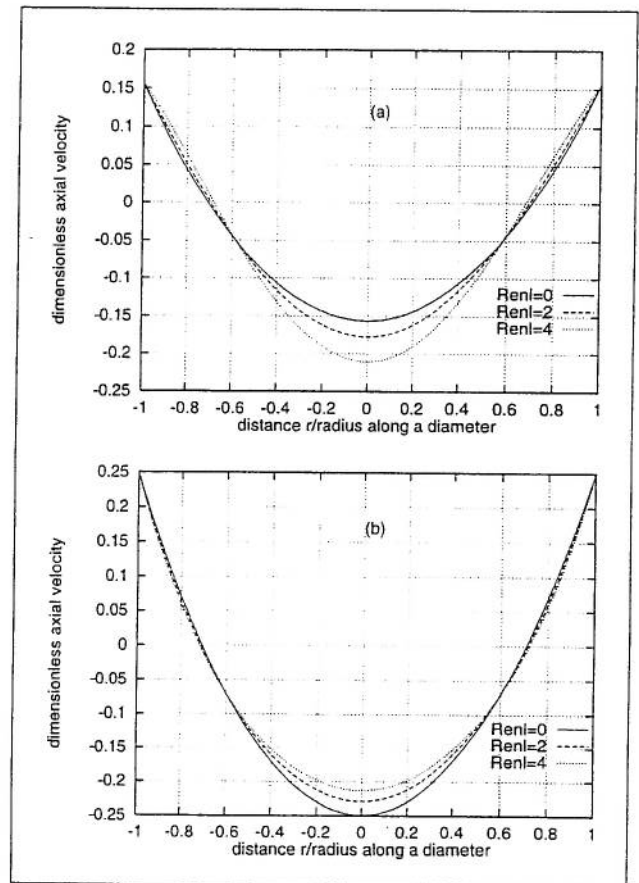


Figure 3. Streaming axial dimensionless velocity ( $/M^2 c_0$ ) along a diameter at (a)  $x/\lambda = 0.03$  and (b)  $x/\lambda = 0.2$  ( $Pr = 0.7$ ).

are supposed to be of the same order of magnitude.  $Re_{nl}$  is therefore of the order of unity. For larger values of  $Re_{nl}$  (for example 10 or more), another perturbation method using different orders of magnitude ( $M \gg Sh$ ) should be applied, leading to a different asymptotic regime.



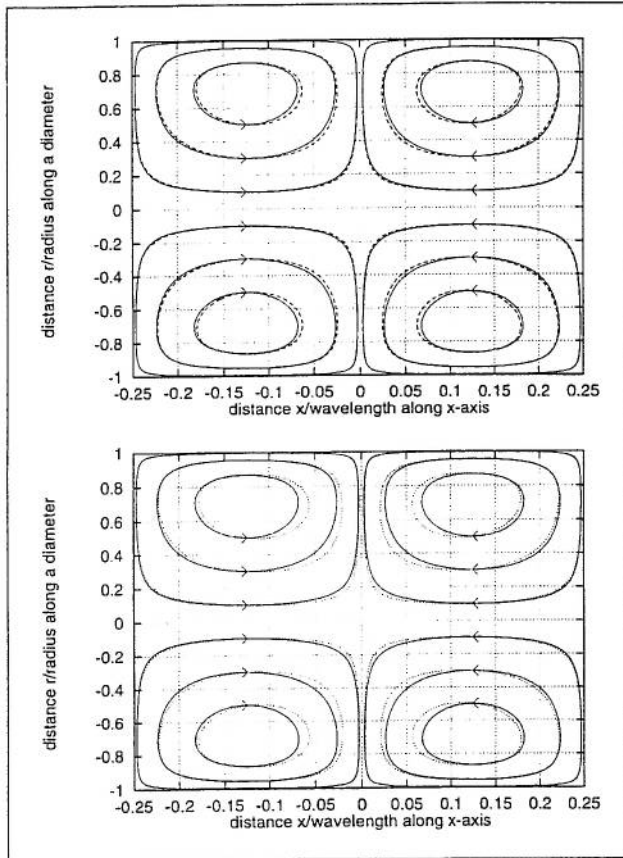


Figure 4. Streamlines on a longitudinal section of the tube between two minima of acoustic velocity ( $x/\lambda = \pm 0.25$ ). Maximum of acoustic velocity is at  $x/\lambda = 0$ . Axisymmetry is around the axis  $r = 0$ ; tube wall is at  $r = 1$ ;  $x$ -periodicity is  $x/\lambda = 1/2$  ( $Pr=0.7$ ). (a) Comparison between slow streaming  $Re_{nl} = 0$  (—) and nonlinear streaming  $Re_{nl} = 2$  (---). (b) Comparison between  $Re_{nl} = 0$  (—) and  $Re_{nl} = 4$  (· · · ·).

For all figures, dimensionless distances and velocities are used. For the  $x$ -axis, a distance of 1 is equal to the wavelength, and for the  $r$ -coordinate a distance of 1 is equal to the radius of the tube. The axial velocity is set dimensionless with  $M^2 c_0$ . Streamlines are represented on Figure 4: these are longitudinal sections of the tube. The maximum of acoustic velocity is situated at  $x = 0$  and minimum at  $x/\lambda = \pm 0.25$ . Each toroidal vortex is symmetrical for the slow streaming –continuous lines– and becomes more and more unsymmetrical –dotted lines– as  $Re_{nl}$  increases ( $Re_{nl} = 2$  on Figure 4a and  $Re_{nl} = 4$  on Figure 4b) because of the effect of the fluid inertia. On Figure 2, we can see axial components of the acoustic streaming velocity along the  $x$ -axis. It is sinusoidal for slow acoustic streaming, and becomes distorted for nonlinear streaming. Figures 3a and 3b represent the radial evolution of the axial component of the streaming velocity at two different  $x$  positions: we can notice that the effect of the fluid inertia is maximum at  $r_1 = 0$  (axis of the tube). The difference in dimensionless amplitude from the slow streaming velocity is more than 20% for  $Re_{nl} = 4$ . The difference is obviously not perceptible close to the wall of the tube because the velocity is there imposed by the boundary layer which is linear.

## Appendix

### A1. Non dependence on $r_1$ of the function $f$ and $h$

In section 2.1, we noticed that in the main acoustic field, variations of  $P_a$ ,  $\rho_a$ ,  $u_a$  and  $P_s$  are small along a radius  $R$ . Thus, the radial derivatives were set dimensionless using  $(1/Re\xi)(\partial/\partial r_{b2})$ , so that  $\partial/\partial r_{b2}$  is of order of unity applied to the variables  $P_a$ ,  $\rho_a$ ,  $u_a$  and  $P_s$ . The problem is that it introduces different radial variables  $r_1$  and  $r_{b2}$  instead of one,  $\bar{r}$ . Notice that an alternative way to solve this problem is to use only one variable  $r_1$  –more adapted to the main acoustic field, because it is rendered dimensionless with  $R$ – and consider, for example for  $u_a$ , that  $u_{1a}$  and  $u_{2a}$  don't depend on  $r_1$ , but only  $u_{3a}$ . The demonstration is as follows.

We know:

$$\frac{\partial \bar{u}_a}{\partial r} = \left( \frac{M c_0}{Re \xi} \right) \frac{\partial u_a}{\partial r_{b2}} \quad \text{and} \quad \frac{\partial u_{1a}}{\partial r_{b2}} = O(1). \quad (A1)$$

$r_{b2}$  was chosen for that. That is equivalent to using  $r_1$  instead of  $r_{b2}$  with:

$$\frac{\partial u_{1a}}{\partial r_1} = \frac{\partial u_{2a}}{\partial r_1} = 0, \quad \frac{\partial u_{3a}}{\partial r_1} \neq 0$$

and

$$\frac{\partial \bar{u}_a}{\partial r} = \left( \frac{M^3 c_0}{R} \right) \frac{\partial u_{3a}}{\partial r_1}$$

at leading order, therefore

$$\frac{\partial u_{3a}}{\partial r_1} = \left( \frac{R}{M^3 c_0} \right) \left( \frac{M c_0}{Re \xi} \right) \frac{\partial u_{1a}}{\partial r_{b2}} = O\left( \frac{1}{M^2 Sh Re} \right).$$

$1/Re$  is of order 3, therefore  $1/(M^2 Sh Re)$  is of order unity. We can conclude that  $P_{1a}$ ,  $P_{2a}$ ,  $u_{1a}$ ,  $u_{2a}$ ,  $\rho_{1a}$  and  $\rho_{2a}$  are independent of  $r_1$ , but not necessarily  $P_{3a}$ ,  $u_{3a}$  and  $\rho_{3a}$ .

The same arguments are applied to  $P_s$ :

$$\frac{\partial \bar{P}_s}{\partial r} = \left( \frac{M^2 P_0}{Re \xi} \right) \frac{\partial P_s}{\partial r_{b2}} \quad \text{and} \quad \frac{\partial P_{2s}}{\partial r_{b2}} = O(1). \quad (A2)$$

That is equivalent to using  $r_1$  instead of  $r_{b2}$  with:

$$\frac{\partial P_{2s}}{\partial r_1} = \frac{\partial P_{3s}}{\partial r_1} = 0, \quad \frac{\partial P_{4s}}{\partial r_1} \neq 0.$$

Notice that this last result is the same in the boundary layer, therefore

$$\gamma h(x) = \frac{\partial P_{2s}}{\partial r_1} = 0.$$

Moreover

$$\frac{\partial \bar{P}_s}{\partial r} = \left( \frac{M^4 P_0}{R} \right) \frac{\partial P_{4s}}{\partial r_1},$$

therefore

$$\frac{\partial P_{4s}}{\partial r_1} = \left( \frac{R}{M^4 P_0} \right) \left( \frac{M^2 P_0}{Re \xi} \right) \frac{\partial P_{2s}}{\partial r_{b2}} = O\left( \frac{1}{M^2 Sh Re} \right).$$

We can conclude that  $P_{2s}$  and  $P_{3s}$  are independent of  $r_1$ , but not  $P_{4s}$ .

The goal is to study variations with  $r_1$  of function  $f(x, r_1)$  defined in equation (24). Only  $u_{3a}$ ,  $\rho_{3a}$  and  $P_{4s}$  depend on  $r_1$ :

$$\frac{\partial}{\partial r_1}(f(x, r)) = \frac{\partial \rho_{3a}}{\partial r_1} \frac{\partial u_{1a}}{\partial t} + \rho_{1a} \frac{\partial^2 u_{3a}}{\partial r_1 \partial t} + \frac{\partial u_{3a}}{\partial r_1} \frac{\partial u_{1a}}{\partial x} + u_{1a} \frac{\partial^2 u_{3a}}{\partial x \partial r_1} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial P_{4s}}{\partial x \partial r_1}. \quad (\text{A3})$$

To calculate the former expression, it is necessary to determine some relations from equations (13) and (14).

The radial component of the momentum conservation law (14) at lower acoustic order ( $O(1)$ ) is

$$\frac{1}{\gamma} \frac{\partial P_{3a}}{\partial r_1} = \frac{1}{M^2 ShRe} \frac{1}{\gamma} \frac{\partial P_{1a}}{\partial r_{b2}} = -\frac{1}{M^2 ShRe} \frac{\partial v_{1a}}{\partial t}, \quad (\text{A4})$$

and isentropy leads to

$$\frac{1}{\gamma} \frac{\partial P_{3a}}{\partial r_1} = \frac{\partial \rho_{3a}}{\partial r_1}, \quad (\text{A5})$$

therefore

$$\frac{\partial \rho_{3a}}{\partial r_1} = -\frac{1}{M^2 ShRe} \frac{\partial v_{1a}}{\partial t}. \quad (\text{A6})$$

The radial component of the time averaged momentum conservation law (14) at lower order ( $O(M)$ ) is

$$\begin{aligned} \frac{1}{\gamma} \frac{\partial P_{4s}}{\partial r_1} &= \frac{1}{M^2 ShRe} \frac{1}{\gamma} \frac{\partial P_{2s}}{\partial r_{b2}} \\ &= \frac{1}{M^2 ShRe} \left( -\frac{\partial}{\partial x} \left( \rho_{1a} \frac{\partial v_{1a}}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( u_{1a} \frac{\partial v_{1a}}{\partial x} \right) \right). \end{aligned} \quad (\text{A7})$$

The acoustical part of the radial component of the momentum conservation law (13) at second order ( $O(M^2)$ ), derived using  $r_1$  is

$$\frac{\partial}{\partial r_1} \left( \frac{\partial u_{3a}}{\partial t} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial P_{3a}}{\partial x} \right) = 0, \quad (\text{A8})$$

therefore

$$\frac{\partial^2 u_{3a}}{\partial r_1 \partial t} = -\frac{1}{\gamma} \frac{\partial^2 P_{3a}}{\partial r_1 \partial x} = \frac{1}{M^2 ShRe} \frac{\partial^2 v_{1a}}{\partial x \partial t}. \quad (\text{A9})$$

The mass conservation law (12) and the axial component conservation law (13) at lower acoustic order ( $O(1)$ ) is

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_{1a}}{\partial t} + \frac{\partial u_{1a}}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial u_{1a}}{\partial t} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial P_{1a}}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A10})$$

Substitution of  $P_{4s}$  and acoustic variables indexed 3 in equation (A3) with the help of (A6), (A7) and (A9) and taking into account (A10) leads to:

$$\frac{\partial f(x, r_1)}{\partial r_1} = 0. \quad (\text{A11})$$

In conclusion,  $f$  doesn't depend on  $r_1$  but only on  $x$ .

## A2. Streaming velocity in the boundary layer

The following new variable  $r'$  is introduced in the boundary layer to simplify calculations:  $r'$  is equal to 0 at the wall of the tube and positive inside:

$$r' = \frac{1}{\xi} (R - \bar{r}) = \frac{R}{\xi} - r_{b1}.$$

The sign of  $v_{2s}$  is therefore changed and  $\partial/\partial r' = -\partial/\partial r_{b1}$ . Streaming equations (9) and (11) are not altered:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{2s}}{\partial x} + \frac{\partial v_{2s}}{\partial r'} &= -\frac{\partial}{\partial x} (\rho_{1a} u_{1a}) - \frac{\partial}{\partial r'} (\rho_{1a} v_{1a}) \\ \frac{\partial^2 u_{2s}}{\partial r'^2} - h(x) &= \rho_{1a} \frac{\partial u_{1a}}{\partial t} + u_{1a} \frac{\partial u_{1a}}{\partial x} + v_{1a} \frac{\partial u_{1a}}{\partial r'}. \end{aligned}$$

The acoustical boundary layer signal of the standing wave (19)–see for example [11]–is known:

$$\begin{aligned} u_{1a} &= \cos t \cos x - \exp(-r'/\sqrt{2}) \cos(t - r'/\sqrt{2}) \cos x \\ v_{1a} &= \left( \frac{\gamma - 1}{\sqrt{Pr}} \right) \exp\left(-\frac{r'\sqrt{Pr}}{\sqrt{2}}\right) \\ &\quad \cdot \sin\left(t + \frac{\pi}{4} - \frac{r'\sqrt{Pr}}{\sqrt{2}}\right) \sin x \\ &\quad + \exp(-r'/\sqrt{2}) \sin\left(t + \frac{\pi}{4} - \frac{r'}{\sqrt{2}}\right) \sin x \\ &\quad - \left(1 + \frac{\gamma - 1}{\sqrt{Pr}}\right) \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) \sin x \\ \rho_{1a} &= \sin t \sin x + (\gamma - 1) \exp\left(-\frac{r'\sqrt{Pr}}{\sqrt{2}}\right) \\ &\quad \cdot \sin\left(t - \frac{r'\sqrt{Pr}}{\sqrt{2}}\right) \sin x, \end{aligned} \quad (\text{A12})$$

coming from the zero velocity and temperature fluctuation on the wall.  $Pr = (\mu C_p / k_h)$  is the Prandtl number which is of the order of unity ( $Pr \simeq 0.7$  for the air;  $C_p$  is the specific heat at constant pressure and  $k_h$  the thermal conductivity).  $Pr^{1/2}$  is the ratio of the thickness of the viscous and the thermal boundary layers.

Including the acoustical signal in the streaming equations (9) and (11), and integrating twice (11) yields the following result:

$$\begin{aligned} u_{2s} &= \frac{1}{2} \sin x \cos x \\ &\quad \cdot \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \exp(-\sqrt{2}r') + \left(1 + \frac{\gamma - 1}{\sqrt{Pr}}\right) \right. \\ &\quad + \exp\left(-\frac{r'}{\sqrt{2}}\right) \left( -3 \sin\left(\frac{r'}{\sqrt{2}}\right) \right. \\ &\quad \left. \left. - \left(1 + \frac{\gamma - 1}{\sqrt{Pr}}\right) \cos\left(\frac{r'}{\sqrt{2}}\right) \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\gamma - 1}{Pr}\right) \exp\left(-\frac{r'\sqrt{Pr}}{\sqrt{2}}\right) \right. \\ &\quad \left. \cdot \sin\left(\frac{r'\sqrt{Pr}}{\sqrt{2}}\right) - \frac{(\gamma - 1)(1 + Pr)}{(1 + Pr)^2 \sqrt{Pr}} \right] \end{aligned} \quad (\text{A13})$$

$$+ \frac{(\gamma - 1)}{(1 + Pr)^2} \exp\left(-\frac{r'(1 + \sqrt{Pr})}{\sqrt{2}}\right) \cdot \left( \frac{(Pr + 1)}{\sqrt{Pr}} \cos\left(\frac{r'(1 - \sqrt{Pr})}{\sqrt{2}}\right) + (Pr + 1) \sin\left(\frac{r'(1 - \sqrt{Pr})}{\sqrt{2}}\right) \right) \Bigg].$$

This result has been obtained considering that the axial streaming velocity is zero at the wall ( $r'=0$ ), and the derivative  $\partial u_{2s}/\partial r'$  is zero far from the wall when  $r'$  becomes infinite –asymptotic matching–. This second condition implies

$$h(x) = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial P_{2s}}{\partial x} = \sin x \cos x. \tag{A14}$$

It gives the pressure associated with the streaming in the boundary layer. This result is the same as the pressure calculated in the main acoustic field (22). The leading order of this pressure matches automatically.

Then the asymptotic value of the longitudinal streaming velocity is:

$$u_{2s} \lim = \lim_{r' \rightarrow \infty} u_{2s} \tag{A15}$$

$$= \frac{\sin 2x}{4} \left( \frac{3}{2} + (\gamma - 1) \frac{\sqrt{Pr}}{1 + Pr} \right)$$

Rewriting the solution with the initial coordinates ( $r_1$  instead of  $r'$ ) doesn't change this result.

### Acknowledgement

The authors thank R. Burvingt, M. Campbell, F. Coulouvrat and V. Gusev for useful discussions.

### References

[1] L. Petit, P. Gondret: Redressement d'un écoulement alternatif. *J. Phys. II France* **2** (1992) 2115–2144.  
 [2] M. Faraday: On a peculiar class of acoustical figures; and on certain forms assumed by groups of particles upon vibrating elastic surfaces. *Philos. Trans.* **121** (1831) 299–340.  
 [3] J. W. S. Rayleigh: On the circulation of air observed in Kundt's tubes and some allied acoustical problems. *Philos. Trans. R. Soc. London* **175** (1884) 1–21.  
 [4] J. W. S. Rayleigh: *The theory of sound*. Dover Publications, 2nd edition, New York, 1896, Vol.2, 333–342.

[5] H. Schlichting: Berechnung ebener periodischer Grenzschichtströmungen [calculation of plane periodic boundary layer streaming]. *Phys. Zeit.* **33** (1932) 327–335.  
 [6] P. J. Westervelt: The theory of steady rotational flow generated by sound fields. *J. Acoust. Soc. Am.* **25** (1953) 60–67.  
 [7] W. L. Nyborg: Acoustic streaming. – In: *Physical acoustics*. W. Mason (ed.). Academic Press, New York, 1965, Vol.II, part B, 265–331.  
 [8] C. Eckart: Vortices and streams caused by sound waves. *Phys. Rev.* **73** (1948) 68–76.  
 [9] O. V. Rudenko, S. I. Soluyan: *Theoretical foundations of non-linear acoustics*. English translation. Plenum, New York, 1977, 187–211.  
 [10] J. N. Tjøtta, S. Tjøtta: Nonlinear equations of acoustics. *Proc. 12th Int. Symp. Nonlinear acoustics*, 1990. 80–97.  
 [11] Q. Qi: The effect of compressibility on acoustic streaming near a rigid boundary for a plane traveling wave. *J. Acoust. Soc. Am.* **94** (1993) 1090–1098.  
 [12] Q. Qi, R. E. Johnson, J. G. Harris: Boundary layer attenuation and acoustic streaming accompanying plane-wave propagation in a tube. *J. Acoust. Soc. Am.* **97** (1995) 1499–1509.  
 [13] L. K. Zarembo: Acoustic streaming. – In: *High-Intensity Ultrasonic Fields*. L. D. Rozenberg (ed.). Plenum, New York, 1971, part III, 137–199.  
 [14] J. T. Stuart: Double boundary layer in oscillatory viscous flow. *J. Fluid Mech.* **24** (1966) 673–987.  
 [15] A. Bertelsen, A. Svoldal, S. Tjøtta: Nonlinear effects associated with oscillating cylinders. *J. Fluid Mech.* **59** (1973) 493–511.  
 [16] A. Bertelsen: An experimental investigation of high Reynolds number steady streaming generated by oscillating cylinders. *J. Fluid Mech.* **64** (1974) 589–597.  
 [17] L. A. Ostrovskii, I. A. Papilova: Nonlinear acoustic streaming. *Sov. Phys. Acoust.* **20** (1974) 45–49.  
 [18] J. Lighthill: Acoustic streaming. *J. Sound Vib.* **61** (1978) 391–418.  
 [19] V. E. Gusev, O. V. Rudenko: Nonsteady quasi-one-dimensional acoustic streaming in unbounded volumes with hydrodynamic nonlinearity. *Sov. Phys. Acoust.* **25** (1979) 493–497.  
 [20] V. E. Gusev, O. V. Rudenko: Evolution of nonlinear two-dimensional acoustic streaming in the field of a highly attenuated sound beam. *Sov. Phys. Acoust.* **27** (1981) 481–484.  
 [21] N. Riley: Streaming from a cylinder due to an acoustic source. *J. Fluid Mech.* **180** (1987) 319–326.  
 [22] T. Kamakura, T. Sudo, K. Matsuda, Y. Kumamoto: Time evolution of acoustic streaming from a planar ultrasound source. *J. Acoust. Soc. Am.* **100** (1996) 132–138.  
 [23] P. W. Duck, F. T. Smith: Steady streaming induced between oscillating cylinders. *J. Fluid Mech.* **91** (1979) 93–110.  
 [24] L. Menguy, J. Gilbert: Vent acoustique non linéaire en guide d'onde cylindrique. *C. R. Acad. Sci. Paris, t.326, Série IIb* (1998) 643–648.  
 [25] L. D. Landau, E. M. Lifschitz: *Fluid mechanics* (English translation). Pergamon, 1959.  
 [26] G. K. Batchelor: *An introduction to fluid dynamics*. Cambridge U.P., Cambridge, 1970.  
 [27] J. P. Sharpe, C. A. Greated, C. Gray, D. M. Campbell: The measurement of acoustic streaming using particle image velocimetry. *Acustica* **68** (1989) 168–172.

### Compléments à l'article.

Cette publication ne comporte pas de validation expérimentale, celle-ci étant en cours de réalisation grâce à une coopération avec Dawn Rockliff et Murray Campbell (voir Rockliff *et coll.* [104]) du département de physique de l'Université d'Edimbourg en Ecosse. La technique utilisée est la P.I.V. (Particle Image Velocity, voir Sharpe *et coll.* [111]). Aucune comparaison quantitative n'a encore été effectuée à ce jour, mais une observation des lignes de courant permet de remarquer une déformation des tourbillons (voir figure 2.1 ci après : les tourbillons ne sont plus symétriques dès que le niveau sonore devient élevé). Toutefois, dans le cas de la figure 2.1, la déformation des tourbillons ne se produit pas dans le sens prévu par la théorie du vent acoustique non linéaire. Il s'est avéré qu'en plus de la distorsion des lignes de courant liée à l'inertie du fluide, s'ajoute une autre distorsion, celle liée aux harmoniques supérieurs nécessairement présents dans le signal acoustique à niveau sonore élevé, mais dont l'effet est inverse : l'asymétrie du tourbillon entre ventre et noeud de vitesse acoustique est renversée. Il reste à comparer l'importance relative des deux distorsions en concurrence afin de pouvoir effectuer des confrontations quantitatives avec les expériences. La figure 2.2 représente la déformation liée seulement à l'inertie du fluide ; la figure 2.3 représente la déformation du tourbillon liée à la présence d'un harmonique de rang 2 sans prendre en compte l'inertie ; la figure 2.4 représente l'effet conjugué de la présence d'un harmonique de rang 2 et de l'inertie du fluide dans le cas particulier où les deux effets se compensent. La méthode utilisée pour calculer le vent acoustique avec prise en compte d'un harmonique de rang supérieur est explicitée en fin de l'annexe (E).

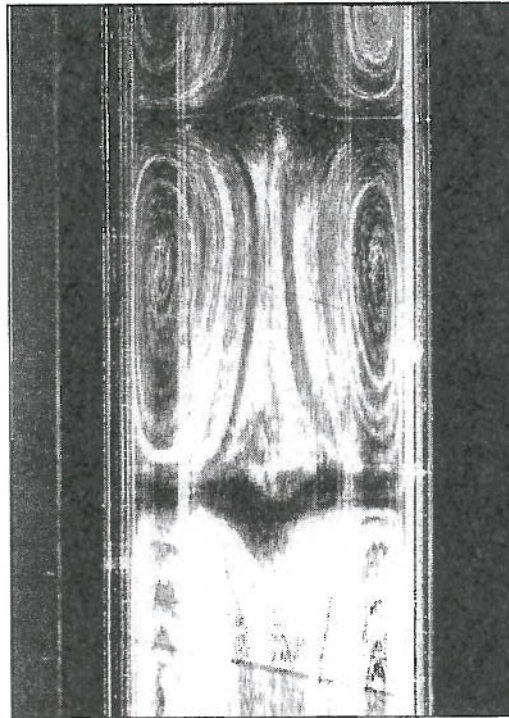


FIG. 2.1: Lignes du vent acoustique en guide d'onde, D. Rockliff et M. Campbell, Université d'Edimbourg.

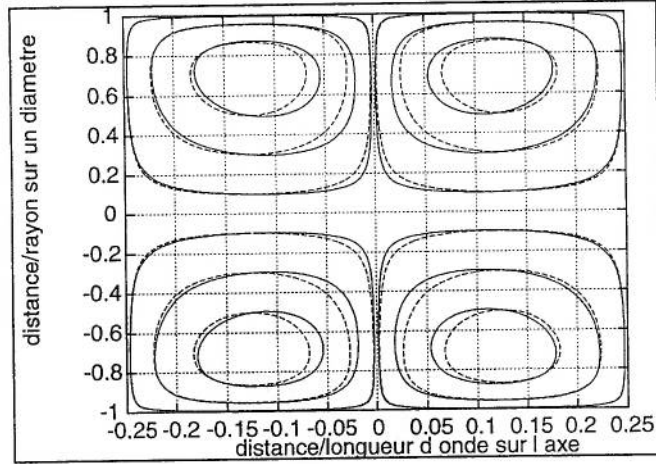


FIG. 2.2: Lignes de courant sur une section du tube pour un signal acoustique purement stationnaire et sinusoïdal. Le ventre de vitesse acoustique se situe au centre ( $x = 0$ ) et les noeuds en  $x = \pm 0,25$ . Comparaison entre le vent linéaire (- -) et le vent non linéaire avec  $Re_{nl} = 5$  (—).

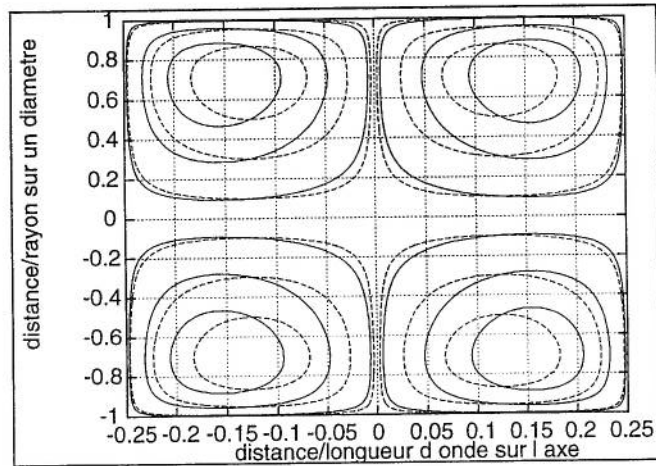


FIG. 2.3: Comparaison des lignes de courant du vent linéaire sur une section du tube pour un signal acoustique purement stationnaire et sinusoïdal (- -) puis composé d'un harmonique de rang 2 égal à 50% en amplitude du fondamental (—). Les noeuds de vitesse acoustique des harmoniques de rang 1 et 2 se situent en  $x = \pm 0,25$ . Le centre ( $x = 0$ ) correspond à un ventre de vitesse du fondamental et un noeud pour l'harmonique de rang 2.

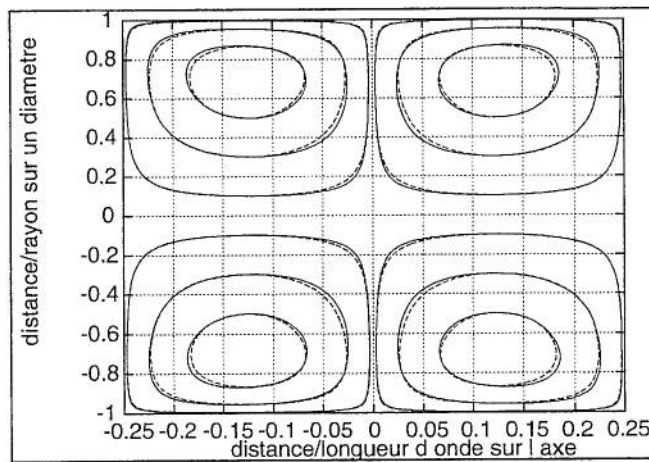


FIG. 2.4: Lignes de courant sur une section du tube pour un signal acoustique purement stationnaire. Comparaison des lignes de courant du vent linéaire pour un signal acoustique purement sinusoïdal (---) puis du vent acoustique non linéaire ( $Re_{nl} = 5$ ) composé d'un harmonique de rang 2 égal à 30% en amplitude du fondamental (—). Les noeuds de vitesse acoustique des harmoniques de rang 1 et 2 se situent en  $x = \pm 0,25$ . Le centre ( $x = 0$ ) correspond à un ventre de vitesse du fondamental et un noeud pour l'harmonique de rang 2.

## Chapitre 3

# La propagation non linéaire en guide monodimensionnel

Une description de la déformation non linéaire de l'onde acoustique est ici proposée dans un guide d'onde cylindrique quelles que soient sa terminaison et sa source (périodique). L'étude s'effectue dans le cadre de l'acoustique faiblement non linéaire avant formation d'onde de choc.

Une première partie 3.1 propose une étude bibliographique de ce sujet, tout d'abord concernant l'onde progressive, puis l'onde stationnaire.

Notre travail dans un guide de section constante sans écoulement est présenté en partie 3.2 par l'intermédiaire de la publication suivante : "Weakly nonlinear gas oscillations in air-filled tubes; solutions and experiments" (Acta Acustica).

Une troisième et quatrième parties (3.3 et 3.4) proposent respectivement une généralisation de ce travail en présence d'écoulement, puis dans le cas d'un tube de section variable (pavillon).

### 3.1 L'état de l'art

#### 3.1.1 Présentation du phénomène et premières théories.

Les phénomènes d'origine non linéaire les plus fréquemment rencontrés et étudiés en acoustique sont les effets liés à la propagation. Ils ont pour conséquence une déformation de l'onde modifiant la composition spectrale du signal, et peuvent mener par exemple à la formation d'ondes de choc. L'étude présentée ici a pour but d'étudier cette déformation, mais pas de décrire un éventuel choc. Cette description mériterait à elle seule une étude spécifique à cause de la présence de très forts gradients de pression ou de vitesse : ceux-ci engendrent par exemple des phénomènes de relaxation proche du choc.

L'hypothèse de l'acoustique linéaire considère les grandeurs acoustiques comme étant "petites" devant les grandeurs stationnaires. Le nombre de Mach acoustique  $M$ , rapport entre la vitesse acoustique et la vitesse du son est très petit



devant 1. Les équations de base sont les équations de conservation (quantité de mouvement, matière et énergie); elles contiennent des termes quadratiques. L'approximation de l'acoustique linéaire consiste à linéariser ces équations en argumentant que les termes négligés (multiplication de deux termes acoustiques) sont du deuxième ordre. Suivant ce raisonnement, les effets des termes quadratiques ne sont donc perceptibles que pour de grandes amplitudes du signal, pour lesquelles  $M$  n'est plus tout à fait négligeable devant 1. Dans ce cas, ceux-ci sont perceptibles même sur de très courtes distances (moins d'une longueur d'onde) : ils sont dits *locaux*. C'est le domaine de l'acoustique *fortement non linéaire*. Toutefois, même pour des nombres de Mach très inférieurs à 1, il est possible d'observer des déformations très marquées de la forme d'onde, et même des ondes de choc (Hirschberg *et coll.* [48]). C'est la conséquence de leur effet *cumulatif*. La déformation n'est pas ou peu perceptible sur de très courtes distances de propagation (inférieures à la longueur d'onde), mais observable à plus grande distance. La propagation de l'onde est localement linéaire, et devient non linéaire par accumulation. C'est le domaine de l'acoustique *faiblement non linéaire*, objet de l'étude proposée ici.

L'obtention des équations d'onde non linéaires est relativement récente, puisqu'il faut attendre 1858 pour que Riemann [101] et Earnshaw [33] les proposent, de manière indépendante pour une onde unidimensionnelle dans un milieu sans pertes, alors que les équations de l'acoustique linéaire sont posées déjà depuis un siècle (Euler [36]). Les études concernant l'onde plane progressive sans pertes sont alors nombreuses et des solutions sont aussitôt proposées (voir partie suivante), mais aucune solution n'est obtenue pour des ondes stationnaires. Ce n'est qu'en 1948 qu'Eckart [34] introduit les méthodes de résolution par perturbation en acoustique. D'autres études relatives à l'onde stationnaire suivirent (Chester [18]). Toutefois, comme le notent Maa & Liu [72], les résultats des études théoriques restèrent peu satisfaisantes. Les méthodes classiques par perturbation ou itération permettent d'obtenir des solutions souvent instables, c'est à dire divergeant assez rapidement des observations dès que les déformations de l'onde deviennent importantes. Les efforts récents se concentrent sur ce problème (voir par exemple Maa & Liu [72] en 1995). L'utilisation de la méthode des échelles multiples aboutissant aux équations de Burgers permet de résoudre ce problème.

Le travail proposé dans ce chapitre est la généralisation des équations de Burgers à tous types d'ondes planes en guide (onde progressive, stationnaire ou tout cas intermédiaire), avec ou sans écoulement, de section constante ou lentement variable (pavillon).

### 3.1.2 Les équations de base.

Les équations fondamentales de conservations sur lesquelles sont basées les études acoustiques sont les suivantes (voir par exemple Landau & Lifschitz [63], Rudenko & Soluyan [106], Batchelor [4], Bruneau [13]).

La conservation de la masse est :

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \tilde{t}} + \text{div}(\tilde{\rho} \vec{\tilde{u}}) = 0. \quad (3.1)$$

La conservation de la quantité de mouvement est :

$$\tilde{\rho} \frac{d \vec{\tilde{u}}}{d \tilde{t}} = -\overrightarrow{\text{grad}} \tilde{P} + (\eta + \frac{1}{3} \mu) \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div} \vec{\tilde{u}}) + \mu \overrightarrow{\Delta} \vec{\tilde{u}}. \quad (3.2)$$

En supposant que le flux de chaleur suit la loi de Fourier, la conservation de l'énergie est :

$$\tilde{\rho} \tilde{T} \frac{d \tilde{S}}{d \tilde{t}} = F_d + k_h \Delta \tilde{T}. \quad (3.3)$$

$F_d$  est le taux de dissipation de l'énergie du fluide  $\mu$ ,  $\eta$ ,  $\nu$  et  $k_h$  représentent respectivement les première et seconde viscosité, la viscosité cinématique ( $\nu = \mu/\rho_0$ ) et la conductibilité thermique.  $\vec{\tilde{u}}$  est la vitesse particulaire,  $\tilde{S}$  l'entropie,  $\tilde{T}$  la température,  $\tilde{P}$  la pression et  $\tilde{\rho}$  la densité volumique. Ces trois dernières grandeurs peuvent être décomposées en une partie stationnaire (indicée 0), et une partie variable acoustique (indicée a).

### 3.1.3 L'onde plane sans pertes : l'analyse de Riemann ou méthode des caractéristiques.

L'objectif est ici de donner quelques arguments physiques simples permettant d'expliquer la déformation de l'onde et les principes de l'analyse de Riemann (Riemann [101]). Le détail des calculs est effectué par exemple par Pierce [95], Lighthill [70], ou encore Blackstock [11].

#### L'onde plane progressive

L'acoustique linéaire sans pertes consiste à linéariser les équations (3.1) et (3.2). Les composantes d'ordre 2 en  $M$  sont donc négligées mais également les termes visqueux. L'hypothèse d'évolution isentropique (adiabatique réversible) du fluide est également effectuée. Cela permet de déterminer l'équation de propagation suivante :

$$\nabla^2 \vec{\tilde{u}}_a - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \vec{\tilde{u}}_a}{\partial \tilde{t}^2} = 0, \quad (3.4)$$

avec  $c_0 = \sqrt{\gamma P_0 / \rho_0}$  la vitesse du son adiabatique. Pour une onde plane progressive se propageant selon l'axe des  $x$  dans la direction positive, l'équation (3.4) se simplifie :

$$\frac{\partial \tilde{u}_a}{\partial \tilde{t}} + c_0 \frac{\partial \tilde{u}_a}{\partial \tilde{x}} = 0. \quad (3.5)$$

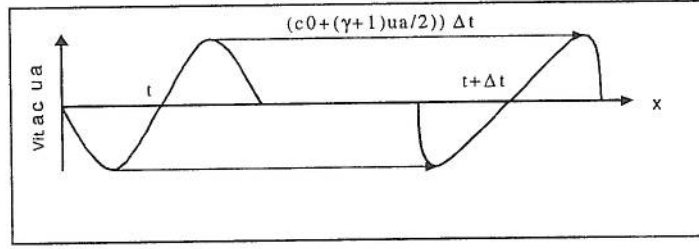


FIG. 3.1: Evolution d'un signal sinusoïdal pour une onde plane progressive. Chaque point de la courbe se déplace à une vitesse caractéristique donnée, dépendante de l'amplitude, ce qui entraîne une déformation du signal.

$\tilde{u}_a$  représente la vitesse acoustique supposée de faible amplitude ( $M \ll 1$ ). La pression acoustique  $\tilde{P}_a$  vérifie la même équation. L'équation (3.5) indique que chaque point du front d'onde se déplace à la même vitesse  $c_0$  : l'onde se propage alors sans changer de forme, sans distorsion.

En réalité, deux causes de distorsion interviennent. D'une part, il y a les effets de convection (entraînement du fluide). Pour un observateur fixe, chaque point de l'onde (défini par  $\tilde{P}_a = cte$  ou  $\tilde{u}_a = cte$ ), au lieu de se déplacer à la même vitesse  $c$  ( $d/\tilde{d}t \neq \partial/\partial \tilde{t}$  dans l'équation (3.2)), se déplace en fait à la vitesse :

$$\frac{d\tilde{x}}{d\tilde{t}} = (c + \tilde{u}_a)$$

( $\tilde{u}_a$  vitesse acoustique), donc plus rapidement pour les maximums de vitesse acoustique, et plus lentement pour les minimums. D'autre part, les variations de pression acoustique provoquent des zones de compression et d'expansion qui augmentent et diminuent respectivement la température. Or la vitesse du son locale  $c$  dépend de la température : pour un gaz,  $c$  varie en  $\sqrt{\tilde{T}}$ , où  $\tilde{T}$  est la température absolue. La description mathématique de ce fait sur la vitesse adiabatique du son est :

$$c = c_0 + \frac{(\gamma - 1)}{2} \tilde{u}_a.$$

$c_0$  est une constante représentant la vitesse moyenne de propagation et  $\gamma$  le rapport des chaleurs spécifiques. La vitesse d'un point du signal se propageant unidimensionnellement selon  $\tilde{x}$  pour un observateur fixe est alors, compte tenu de ces deux phénomènes :

$$\frac{d\tilde{x}}{d\tilde{t}} = c_0 + \frac{(\gamma + 1)}{2} \tilde{u}_a.$$

Le maximum de vitesse acoustique se propage donc plus rapidement que le minimum (voir figure 3.1). Tout signal (onde plane), pour peu que l'on considère

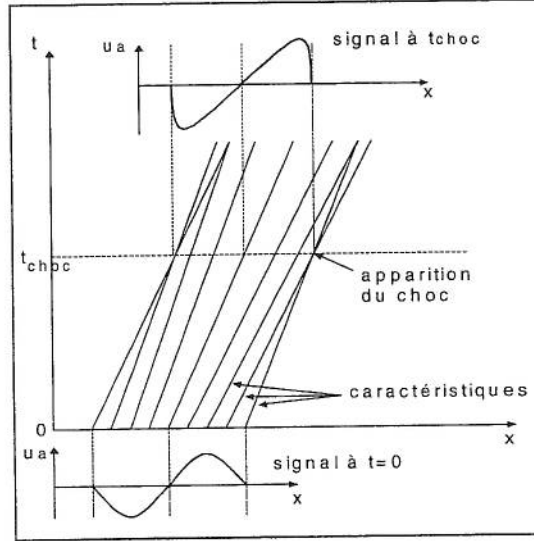


FIG. 3.2: Courbes caractéristiques dans le plan  $(x,t)$  d'un signal initialement sinusoïdal se propageant vers les  $x$  positifs. Chaque caractéristique correspond à une amplitude donnée se déplaçant à une vitesse différente : leurs pentes sont donc différentes. L'apparition d'un choc se produit quand deux caractéristiques se croisent.

son amplitude comme finie (c'est-à-dire non infinitésimale) aboutit nécessairement à une onde de choc dans le cas où les pertes sont négligées, même si le niveau sonore est très faible : il suffit de le propager plus longtemps ou plus loin. Il est évident que plus l'amplitude du signal est importante ( $\tilde{u}_a$  grande), plus l'onde se déforme rapidement, et plus la distance de formation de l'onde de choc est courte. L'équation non linéaire de propagation pour l'onde progressive sans perte a été donnée par Earnshaw [33] en 1860 :

$$\frac{\partial \tilde{u}_a}{\partial t} + \left( c_0 + \frac{(\gamma + 1)}{2} \tilde{u}_a \right) \frac{\partial \tilde{u}_a}{\partial x} = 0. \quad (3.6)$$

$\tilde{P}_a$  vérifie une équation du même type. A noter que cette équation est exacte (sans approximation, hormis l'absence de pertes).

L'équation (3.6) peut se résoudre de manière exacte en utilisant les invariants de Riemann (ou méthode des caractéristiques). En effet, l'équation (3.6) permet d'écrire  $d\tilde{u}_a/d\tilde{t} = 0$  le long de  $C^+$  défini par  $d\tilde{x}/d\tilde{t} = c_0 + \tilde{u}_a(\gamma + 1)/2$ . Dans le plan  $(x,t)$ , les caractéristiques  $C^+$  sont des droites de pente  $(c_0 + \tilde{u}_a(\gamma + 1)/2)$ , représentant un point du front d'onde (de vitesse acoustique  $\tilde{u}_a$  constante ou pression  $\tilde{P}_a$  constante). L'intersection de deux caractéristiques dans ce plan correspond à deux valeurs possibles de pression acoustique en un même point en même temps : c'est la formation d'une onde de choc (voir figure 3.2).

### L'onde plane non progressive

La première étape de l'analyse de Riemann consiste à écrire les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement d'un fluide idéal. La combinaison des équations de conservation aboutit à :

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + (\tilde{u}_a \pm c) \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \right) (\tilde{u}_a \pm Q) = 0, \quad (3.7)$$

avec

$$Q = \int_{\tilde{\rho}_0}^{\tilde{\rho}} \frac{c(\tilde{\rho})}{\tilde{\rho}} d\tilde{\rho} = \int_{\tilde{P}_0}^{\tilde{P}} \frac{d\tilde{P}}{\tilde{\rho}c}$$

une fonction d'état homogène à une vitesse, où  $c = \left( d\tilde{P}/d\tilde{\rho} \right)^{1/2}$  est la vitesse locale du son, avec  $Q = 0$  dans un fluide au repos.

L'équation (3.7) peut s'interpréter de la manière suivante. Dans le plan  $(x, t)$ , les courbes  $C^\pm$  appelées caractéristiques sont définies par  $d\tilde{x}/d\tilde{t} = \tilde{u} \pm c$ . Le long des caractéristiques  $C^+$ , l'invariant de Riemann  $R^+ = \tilde{u}_a + Q$  est constant ; il en est de même pour  $R^- = \tilde{u}_a - Q$  le long de  $C^-$ .

Pour un gaz parfait et une évolution isentropique ( $\tilde{P}\tilde{\rho}^{-\gamma} = cte$ ) :

$$c = \sqrt{\frac{\gamma\tilde{P}}{\tilde{\rho}}}; R^\pm = \tilde{u}_a \pm \frac{2c}{\gamma-1}. \quad (3.8)$$

Partant de conditions initiales données (problème de Cauchy) ou de conditions aux limites (source acoustique par exemple), les courbes sont tracées pas à pas. Betchov [8] en 1958 fut un des premiers à appliquer cette méthode à un tube. Van Wijngaarden [119] dix ans plus tard propose également une résolution par perturbation dans le plan caractéristique, dans le cas d'un guide ouvert.

Une onde avec  $R^+$  ou  $R^-$  constant dans tout le plan est une onde simple (progressive) ; les équations (3.7) et (3.8) peuvent se simplifier en (3.6).

En conclusion, la méthode de Riemann décrit de manière exacte la propagation d'une onde plane progressive sans pertes. Une résolution exacte par la méthode des caractéristiques avant formation du choc est possible, et ceci quelle que soit l'amplitude du signal acoustique. Les équations exactes de l'onde plane non progressive sans pertes sont également données, mais la résolution exacte analytique n'est alors plus possible. De plus, cette méthode n'est plus applicable dès lors que les pertes sont incluses. La description d'une telle onde, en particulier dans les guides où les pertes peuvent être importantes le long des parois, demande donc le développement d'une autre modélisation. Dans le cadre de l'acoustique faiblement non linéaire, des méthodes approchées utilisant le plus souvent des calculs par perturbation ou itération sont alors développées (voir partie suivante). Ces méthodes aboutissent généralement à des équations très complexes à résoudre, toujours de manière approchée. Leur simplification

par application de la méthode des échelles multiples dans le cas d'ondes quasi-planes permet de les ramener à des équations de type Burgers généralisées. Dans le cadre de l'acoustique faiblement non linéaire, cette opération s'effectue le plus souvent sans approximations supplémentaires.

### 3.1.4 L'acoustique faiblement non linéaire : la méthode des échelles multiples (MEM)

**Le principe de la méthode des échelles multiples ; l'équation de Burgers sans perte**

La résolution exacte des équations de l'acoustique non linéaire n'est plus possible en présence de pertes ou quand l'onde n'est pas parfaitement plane (diffraction pour un faisceau par exemple). Les solutions sont donc obtenues de manière approchée. Les résolutions s'effectuent à l'aide d'approches différentes en acoustique fortement non linéaire ( $M$  de l'ordre de l'unité), et en acoustique faiblement non linéaire ( $M \ll 1$ ).

Seule l'acoustique faiblement non linéaire est abordée ici. Il est possible d'utiliser des méthodes par perturbation ou itération reposant sur le nombre de Mach acoustique  $M \ll 1$ . Partant des équations de conservation, les divers termes sont écrits sous forme de développements limités basés sur ce petit nombre sans dimension. Le premier ordre  $M$  représente l'acoustique linéaire, les termes en  $M^2$  et supérieurs l'acoustique non linéaire.

Les méthodes "classiques" par perturbation ou itération permettent d'obtenir une bonne description des effets non linéaires pour de faibles distorsions. Celles-ci ne sont pas décrites ici, car elles ne répondent pas au problème que l'on souhaite résoudre : ces méthodes ne donnent pas une description satisfaisante des déformations dès lors que ces dernières deviennent importantes (voir par exemple Crighton [27]). En effet, ce n'est que par accumulation à grande distance que la distorsion devient importante. Ceci signifie mathématiquement sur le développement limité effectué que les termes non linéaires en  $M^2$  se cumulent au cours de la propagation pour devenir importants. Il en est de même pour les termes dits d'ordre supérieur (en  $M^3, M^4, \dots$ ) qui deviennent donc séculaires (tendent vers l'infini). Le développement limité n'a alors plus aucune signification : le terme en facteur devant  $M^2$  devenant au moins ( $M^{-1}$ ) fois plus grand que le terme en facteur devant  $M$  ! Il est alors nécessaire d'utiliser une méthode de résolution appropriée à ce cas, appelée la méthode des échelles multiples (notée MEM). Elle a pour principe de distinguer les termes séculaires (c'est à dire prenant de l'importance au fur et à mesure de la propagation) et de ne conserver que ceux-ci au détriment des termes non séculaires (effets ne se cumulant pas au cours de la propagation, donc négligés). Deux échelles spatiales (ou temporelles) sont alors distinguées : une courte (ou rapide) décrivant la propagation de l'onde localement, et une longue (ou lente) prenant en compte la déformation de l'onde par effets cumulatifs (distorsion ou pertes). Cela revient mathématiquement à considérer que localement  $\partial \tilde{u}_a / \partial \tilde{t} + c_0 \partial \tilde{u}_a / \partial \tilde{x} \simeq 0$ . Un changement de variables  $\tilde{t} \rightarrow \tilde{\tau} = \tilde{t} - \tilde{x}/c_0$  permet de simplifier l'équation (3.6)

sous la forme suivante :

$$\frac{\partial \tilde{u}_a}{\partial \tilde{x}} - \frac{(\gamma + 1)}{2c_0^2} \tilde{u}_a \frac{\partial \tilde{u}_a}{\partial \tilde{\tau}} = 0. \quad (3.9)$$

Pour plus de détails, il est utile de se référer à Rudenko & Soluyan [106] ou Crighton [27]. Cette équation de Burgers est généralement écrite sous sa forme adimensionnée. En notant  $q = \tilde{u}_a/U_a$ , ( $U_a$  est par exemple l'amplitude de la vitesse acoustique au niveau de la source),  $M = U_a/c_0$ ,  $\sigma = ((\gamma + 1)/2) M\omega\tilde{x}/c_0$ , et  $\theta = \omega\tilde{\tau}$  ( $\omega$  est la pulsation du fondamental), l'équation (3.9) s'écrit simplement sous la forme d'une équation de type Burgers (onde plane progressive sans pertes), plus généralement nommée équation d'onde de Riemann :

$$\frac{\partial q}{\partial \sigma} - q \frac{\partial q}{\partial \theta} = 0. \quad (3.10)$$

Il est important de noter que cette équation (3.10) n'est qu'approchée, ne tenant pas compte des effets non linéaires locaux.  $q$  représente la vitesse acoustique adimensionnée, mais la masse volumique acoustique ou la pression acoustique vérifient la même équation. Ces dernières peuvent se déduire de la vitesse acoustique par les équations de base linéarisées puisque la méthode des échelles multiples considère que les équations d'onde sont localement linéaires.

L'équation de Riemann (3.10) admet une solution exacte dans le cas d'une onde sinusoïdale en  $\sigma = 0$ , donnée par Fubini [39] en 1935 :

$$q(\sigma, \theta) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_n(n\sigma)}{n\sigma} \sin n\theta \quad (3.11)$$

valable tant que  $\sigma < 1$  ( $\sigma = 1$  correspond à la formation de l'onde de choc).  $J_n$  est la fonction de Bessel d'ordre  $n$  (voir figure 3.3 ainsi que l'annexe A ; voir aussi par exemple Rudenko & Soluyan [106]).

### L'équation de Burgers avec pertes volumiques

Lorsque que l'étude concerne un fluide réel, les pertes doivent être prises en compte. Ces dernières sont dues aux effets diffusifs (viscosité et conduction de la chaleur), appelées pertes de volume par la suite. Ces pertes sont cumulatives, puisque mêmes faibles, elles finissent par faire disparaître le signal. La méthode des échelles multiples se généralise donc sans problème à l'onde plane progressive avec pertes volumiques (voir par exemple Crighton [27], Blackstock [11], Rudenko & Soluyan [106]). L'équation de Burgers correspondante est :

$$\frac{\partial q}{\partial \sigma} - q \frac{\partial q}{\partial \theta} = \frac{S}{\epsilon} \frac{\partial^2 q}{\partial \theta^2}, \quad (3.12)$$

où

$$S = \frac{1}{2} \left( \frac{\nu\omega}{c_0^2} \right) \left( \frac{4}{3} + \frac{\eta}{\mu} + \frac{\gamma-1}{\text{Pr}} \right) \quad \text{et} \quad \epsilon = M \left( \frac{\gamma+1}{2} \right). \quad (3.13)$$

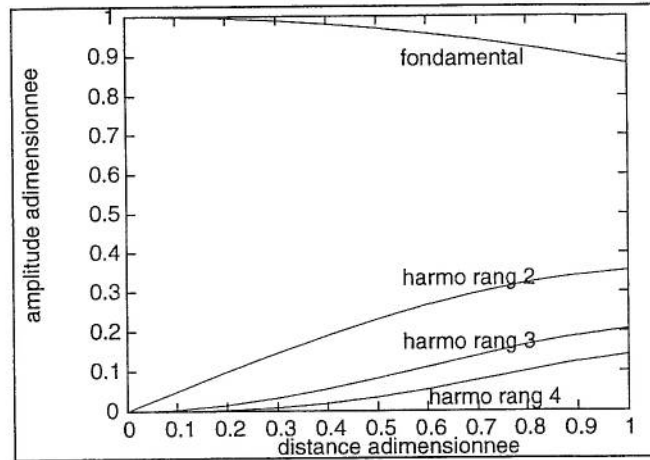


FIG. 3.3: Solution de Fubini

$S$  est le nombre de Stokes ;  $Pr = \nu C_p / k_h$  est le nombre de Prandtl, avec  $C_p$  la capacité thermique à pression constante.

Cette équation (3.12) a été proposée par Burgers en 1948 [14], à l'origine comme équation modèle de turbulence, et ne l'a pas utilisée en acoustique. Mendousse [75] a été le premier à utiliser cette équation en acoustique non linéaire. Une transformation dite de Hopf-Cole (décrite en 1950 et 1951 respectivement par Hopf [49] et Cole [21], mais connue depuis 1906) permet d'intégrer de manière *exacte* cette équation (3.12) (voir annexe A). La résolution détaillée est proposée par exemple par Lighthill [68] en 1956, Whitham [123] en 1974 ou encore Rudenko & Soluyan [106]. La dérivée double traduit le fait que les pertes volumiques augmentent proportionnellement à la fréquence au carré pour une onde sinusoïdale. Ces pertes jouent un rôle critique dans la description de la structure d'un choc.

### La présence de diffraction

Les premières observations des déformations non linéaires du signal ont été effectuées à l'aide de faisceaux ultrasonores, pour lesquels l'onde est considérée comme quasi-plane, mais dont l'amplitude décroît à cause de la diffraction. Pour de tels faisceaux, les fréquences sont élevées et donc les pertes volumiques plus importantes que pour les ondes sonores. Dans le domaine des ultrasons, il est usuel d'appeler acoustique *faiblement* non linéaire les études pour lesquelles les pertes volumiques prédominent sur les effets non linéaires ( $M \ll 1/Re$ ), ce qui aboutit aux équations dites de Lighthill-Westerwelt (Lighthill [67] et Westerwelt [122]). Quand les pertes et les effets non linéaires sont du même ordre de grandeur ( $M \sim 1/Re$ ), l'équation de référence a été établie par Kuznetsov [61] en 1970. L'utilisation de la méthode des échelles multiples à cette dernière aboutit à l'équation de KZK (Kuznetsov [61], Zabolotskaya et Khokhlov [126])



reproduite ci-dessous :

$$\frac{\partial^2 q}{\partial \sigma \partial \theta} - \frac{\partial}{\partial \theta} \left( q \frac{\partial q}{\partial \theta} \right) = \frac{N}{4} \Delta_{\perp} q + \frac{S}{\epsilon} \frac{\partial^3 q}{\partial \theta^3}, \quad (3.14)$$

avec

$$N = \frac{2}{\epsilon (ka^2)}.$$

$\Delta_{\perp}$  est le Laplacien transversal,  $a$  le rayon de la source et  $k$  le nombre d'onde. Une revue détaillée de ces types d'équations non linéaires est proposée par Cou-louvrat [23]. Le premier terme du membre de droite dans l'équation (3.14) décrit les effets de diffraction. Pour une source d'étendue tendant vers l'infini (onde plane)  $N$  tend vers 0, ce qui permet de retrouver alors l'équation (3.12) après intégration en  $\theta$ . Des solutions approchées ont été proposées par exemple par Burvingt [15] ou Cavanagh & Cook [17].

#### L'équation de Burgers généralisée dans un guide d'onde : les pertes de couche limite

Dans le cas particulier qui nous intéresse, à savoir la propagation guidée, des pertes pouvant être importantes se produisent dans les couches limites visco-thermiques acoustiques, conséquence des forts gradients de vitesse et de température imposés le long des parois (conditions de vitesse et de température acoustique nulles sur les parois). Une première équation de propagation prenant en compte l'effet des couches limites a été donnée par Chester [18] en 1964. L'application de la méthode des échelles multiples permet d'obtenir une équation de Burgers généralisée prenant en compte à la fois les pertes volumiques (deuxième terme de droite) et de couche limite (premier terme de droite) :

$$\frac{\partial q}{\partial \sigma} - q \frac{\partial q}{\partial \theta} = -\frac{T}{\epsilon} \frac{\partial^{1/2} q}{\partial \theta^{1/2}} + \frac{S}{\epsilon} \frac{\partial^2 q}{\partial \theta^2}, \quad (3.15)$$

où

$$T = \sqrt{\frac{\nu}{\omega}} \frac{1}{R} \left( 1 + \frac{\gamma-1}{\sqrt{Pr}} \right) \quad \text{et} \quad \epsilon = M \left( \frac{\gamma+1}{2} \right). \quad (3.16)$$

La dérivée fractionnaire  $1/2$  est définie par le produit de convolution suivant (noté\*) :

$$\frac{\partial^{1/2} q}{\partial \theta^{1/2}} = \frac{\partial q}{\partial \theta} * \frac{1}{\sqrt{\pi \theta}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\theta} \frac{1}{\sqrt{\theta - \theta'}} \frac{\partial q(\theta', \sigma)}{\partial \theta'} d\theta'. \quad (3.17)$$

Il n'existe aucune solution exacte de cette équation de Burgers. Une méthode de résolution approchée est proposée par Sugimoto [116] en 1991. Une méthode de résolution spectrale est proposée dans ce document. La dérivée  $1/2$  traduit le fait que les pertes volumiques augmentent proportionnellement à la racine carrée de la fréquence pour une onde sinusoïdale.

### L'équation de Burgers généralisée en guide cylindrique de section lentement variable

La variation de la section d'un guide (pavillon) est susceptible de modifier fortement le signal. Afin de pouvoir continuer à considérer l'onde comme quasi-plane, l'étude est restreinte aux guides de section lentement variable. Seuls sont retenus les guides dont la variation relative de l'aire de la section sur une distance d'une longueur d'onde  $\lambda$  est petite :  $1/\lambda(d\ln(R^2)/d\tilde{x}) \ll 1$  avec  $R$  le rayon du tube en  $\tilde{x}$ . La généralisation des équations de Burgers permet d'écrire (voir par exemple Crighton [27]) :

$$\frac{\partial q}{\partial \sigma} - q \frac{\partial q}{\partial \theta} = -q \frac{\partial \ln(R)}{\partial \sigma}. \quad (3.18)$$

Le rayon  $R$  peut être ou non adimensionné, ce qui n'a aucune importance, étant donné que  $R$  intervient dans la dérivée d'un logarithme.

L'équation (3.18) peut s'écrire sous la forme de l'équation de Burgers sans pertes (3.10) à l'aide d'un changement de variable.

La prise en compte des pertes se traduit par l'ajout dans l'équation (3.18) des termes explicités dans les paragraphes précédents, dérivée fractionnaire pour les couches limites, et/ou dérivée double pour les pertes volumiques. Il n'existe alors pas de transformation de type Hopf-Cole permettant de se ramener à une équation linéaire (voir Nimmo & Crighton [83]). Une méthode de résolution spectrale approchée est proposée dans ce document (voir paragraphe 3.4).

### L'équation de Burgers généralisée en présence d'écoulement

Pour terminer la généralisation des équations de Burgers, la présence d'un écoulement moyen lent (vitesse d'écoulement inférieure ou égale à la vitesse acoustique) et cisailé (non turbulent) dans un guide d'onde est envisagée dans ce document. Ceci aboutit à l'écriture suivante :

$$\frac{\partial q}{\partial \sigma} - (q + q_0) \frac{\partial q}{\partial \theta} = -\frac{T}{\epsilon} \frac{\partial^{1/2} q}{\partial \theta^{1/2}}, \quad (3.19)$$

avec

$$q_0 = \frac{\overline{\tilde{U}}_{éc}}{c_0 \epsilon}.$$

$\overline{\tilde{U}}_{éc}$  est la vitesse d'écoulement moyennée sur la section du guide (avec dimension);  $\overline{U}_{éc}$  est son équivalent sans dimension. Le dernier membre de gauche prend en compte la présence de l'écoulement et le membre de droite les pertes de couche limite. Quelques arguments justifiant l'obtention de ce terme sont proposés en partie 3.3 de ce document. A noter qu'à l'ordre de grandeur où le calcul est effectué dans le paragraphe 3.3, seule la valeur moyennée de la vitesse sur la section du tube intervient, et non le gradient transversal de  $\tilde{U}_{éc}$ . Une méthode de résolution spectrale est ensuite décrite, et les solutions sont confrontées à des mesures.

## Conclusion sur les équations de Burgers et la déformation de l'onde

Chacun des phénomènes entrant en concurrence peut être pris en compte par l'ajout d'un seul terme indépendant dans l'équation de Burgers généralisée : la prise en compte des pertes volumiques, des pertes visco-thermiques de couche limite, de la section variable d'un guide ou encore de la présence d'un écoulement moyen. Tous ces éléments peuvent être présents simultanément dans un guide d'onde. Les équations de Burgers généralisées sont donc les équations les plus simples permettant de décrire la déformation d'une onde plane progressive faiblement non-linéaire. Il devient alors aisé de distinguer l'effet relatif de chaque phénomène. L'évolution de l'onde est en effet dictée par la compétition entre ces différents effets, dont l'importance relative est mesurée par un nombre sans dimension :  $\epsilon$  pour la déformation non linéaire,  $S$  pour les pertes volumiques,  $T$  pour les pertes de couche limite et  $1/(ka)^2$  pour la diffraction. Ainsi,  $N = 2/(\epsilon(ka)^2)$  mesure par exemple le rapport entre la distance de formation de l'onde de choc et la distance de Rayleigh (caractéristique de la diffraction). L'étude qui suit a principalement pour objet la compétition entre non linéarités et pertes visco-thermiques. Les pertes augmentent avec la fréquence. Elles ont donc pour conséquence, en plus de l'atténuation de l'onde, de "radoucir" la forme de l'onde en supprimant préférentiellement les plus hautes fréquences, à l'inverse de la déformation non linéaire. Des pertes importantes ne permettent pas à une éventuelle onde de choc de se former. Cette compétition entre pertes et non linéarités est mesurée par le terme  $\Gamma = \epsilon/S$  (nombre de Gol'dberg : non linéarités / pertes volumiques) et  $T/\epsilon$  (pertes de couche limite / non linéarités). Ces nombres sans dimension et échelles caractéristiques apparaissent naturellement lors de l'écriture des équations de Burgers généralisées sans dimension dans chacun des termes correspondants.

Enfin, d'autres sources de déformation de l'onde pourraient être citées, notamment les inhomogénéités du milieu dans lequel se propage l'onde, mais sont exclues de cette étude.

### 3.1.5 Les ondes stationnaires : l'interaction des ondes

Un résonateur amplifie les niveaux sonores à l'aide d'ondes stationnaires. C'est pourquoi les déformations des signaux acoustiques y sont parfois importantes. De nombreuses applications industrielles font intervenir des ondes stationnaires : les silencieux de tuyaux d'échappement des moteurs à combustion interne, les machines thermo-acoustiques ou les compresseurs acoustiques en sont des exemples. Dans le cadre de l'acoustique linéaire, l'onde stationnaire peut être décomposée en deux ondes aller et retour. A niveau sonore élevé il devient *a priori* impossible d'additionner simplement les signaux aller et retour car il existe une interaction entre ces derniers. C'est pourquoi, de manière générale, les calculs théoriques obtenus pour des ondes progressives ne sont pas transposables aux ondes stationnaires. Comme le notent Ochmann & Makarov [86] ou Maa & Liu [72], la description mathématique des ondes stationnaires n'est pas aussi développée et satisfaisante que pour les ondes progressives. Chaque cas

particulier est étudié séparément. En guide, les plus anciennes études concernent les tubes fermés avec une terminaison rigide et source purement sinusoïdale. Un des premiers articles publiés est celui de Betchov [8] en 1958 utilisant la méthode des caractéristiques. Chester [18] en 1964 publie ensuite un article qui a servi pendant longtemps de référence utilisant à la fois la méthode des caractéristiques et des approximations successives. Celui-ci prend en compte non seulement la déformation de la forme d'onde, mais également les pertes volumiques, ainsi que les pertes de couche limite le long des parois dues aux frottements visqueux ainsi qu'à la conduction thermique. Quelques auteurs comme Jimenez [54] ou Keller [56] ont prolongé ce travail. Les premières expériences sont réalisées par Lettau [66] en 1939 et Saenger & Hudson [108] en 1960. D'autres expériences (Cruikshank [28], Sturtevant [115], Zaripov & Ilhamov [128]) ont été réalisées plus récemment et confrontées avec les travaux théoriques cités précédemment. Toutefois, les résultats des travaux théoriques restent souvent peu satisfaisants quand ils sont confrontés aux expériences. Ceci motive encore aujourd'hui, même sur une configuration aussi "classique" que le tube fermé, certains auteurs à développer de nouvelles études théoriques (Maa & Liu [72]). Les tubes ouverts ont également fait l'objet d'études aussi bien théoriques qu'expérimentales. Les travaux de Wijngaarden [119], Jimenez [54], Keller [57] ou Chester [19] méritent d'être cités. Enfin, Gusev [46] étudie l'onde non linéaire dans un résonateur comportant une extrémité avec un coefficient de réflexion dépendant de la fréquence.

Ces modèles sont souvent assez complexes et, outre leur manque de précision, ne s'appliquent qu'aux cas particuliers cités précédemment. De plus, ils ne prennent souvent en compte que des sources sinusoïdales. Les modèles existant dans la littérature sont donc inadaptés à notre problème, à savoir le calcul de l'onde dans un guide avec une source périodique *non nécessairement sinusoïdale* à une extrémité, et une *terminaison quelconque* à l'autre extrémité. Il convient donc de développer un nouveau calcul théorique.

De manière générale, l'interaction entre deux ondes planes se croisant dépend de l'angle  $\theta$  d'incidence entre ces deux ondes. Elle ne peut en aucun cas être négligée dans le cas de deux ondes fortement non linéaires. Il convient toutefois de réexaminer la situation dans le cas d'ondes faiblement non linéaires. En effet, deux ondes se croisant en sens opposé (cas particulier  $\theta = \pi$ ) inter-agissent bien localement, mais de manière non cumulative, comme la suite de ce document le montre. En les négligeant, cela revient à introduire des imprécisions de l'ordre de  $M$  (en notant  $M$  le nombre de Mach acoustique). Typiquement pour des niveaux sonores de l'ordre de 140 à 160dB ( $M \sim 10^{-2}$  à  $10^{-3}$ ), l'imprécision est au maximum de l'ordre de 1%, ce qui est acceptable compte tenu de la précision obtenue par les théories "classiques". C'est ce qui a motivé l'étude ici proposée. Cela a des conséquences importantes, puisque que l'on va pouvoir séparer l'onde stationnaire en deux ondes progressives totalement indépendantes l'une de l'autre. Une méthode de résolution basée sur des équations beaucoup plus simples à résoudre (2 équations de Burgers totalement découplées) que celles proposées habituellement est ainsi développée, tout en obtenant une excellente précision de l'ordre de 1%. De plus, la résolution étant plus simple, son appli-

cation ne s'arrête pas aux seuls cas particuliers traités dans la littérature, mais à n'importe quelle onde non nécessairement purement propagative ou purement stationnaire, et quelles que soient les conditions d'impédance ou de signal (par exemple source) imposées aux extrémités du tube.

### 3.2 L'article "Weakly Nonlinear Gas Oscillations in Air-filled Tubes; Solutions and Experiments"

Dans ce paragraphe<sup>1</sup>, nous présentons les résultats d'une étude théorique et expérimentale sur la propagation non linéaire d'une onde plane dans un guide cylindrique. Des équations de Burgers généralisées prenant en compte à la fois les effets de propagation non linéaires et les pertes de couche limite sont obtenues. Pour cela, une analyse dimensionnelle sur les équations de conservation est effectuée et est suivie d'un développement asymptotique. Une méthode de résolution par rééquilibrage harmonique est utilisée pour résoudre ces équations de Burgers. Cette méthode de résolution présente l'intérêt de pouvoir s'appliquer quelles que soient les conditions aux limites (source non nécessairement sinusoïdale mais périodique et terminaison quelconque). Ces résultats sont comparés à une série de mesures, et permettent de vérifier que la précision de 1% prévue par l'analyse dimensionnelle est bien obtenue.

#### Compléments à l'article (présentés en annexes B et C).

Quelques travaux préliminaires à la partie 4 "experiments" de la publication (expériences réalisées au LAUM) ont été effectués, mais ne figurent pas dans cette dernière.

Tout d'abord, les résultats théoriques obtenus ont été confrontés aux solutions analytiques connues pour une source sinusoïdale dans quelques configurations particulières. Ceci a permis d'effectuer une pré-validation du modèle, avant la réalisation d'expériences. Les résultats sont reproduits en annexe B.

Ensuite, une série de mesures préliminaires (notamment avec source non sinusoïdale et terminaison quelconque) a été effectuée en collaboration avec P. Durrieu au Laboratoire de Dynamique des Fluides de l'Université Technologique de Eindhoven afin d'aller plus loin dans la validation du modèle. Une partie de ces résultats est reproduite en annexe C (voir aussi Menguy *et coll.* [77], ou Menguy & Gilbert [76]).

Des précisions sur la méthode numérique utilisée pour résoudre les équations obtenues dans cette publication sont par ailleurs proposées en annexe (F)

---

<sup>1</sup> Ce paragraphe est présenté sous la forme d'un article dont les références sont les suivantes : MENGUY L., GILBERT J. (2000). Weakly Nonlinear Gas Oscillations in Air-filled Tubes; Solutions and Experiments. *Acustica* **86**, 798-810.

# Weakly Nonlinear Gas Oscillations in Air-Filled Tubes; Solutions and Experiments

Ludovic Menguy, Joël Gilbert

Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine (UMR CNRS 6613), Av. O. Messiaen, 72085 Le Mans cedex 9, France

## Summary

The results of a theoretical and experimental investigation into the nonlinear, planar propagation of an acoustic signal in a cylindrical air-filled tube is presented. Assuming weakly nonlinear propagation and the distance of propagation smaller than the shock formation distance, the validity of the generalised Burgers' equation is analysed. The theoretical study is based on a dimensional analysis of the conservation equations followed by a calculation using asymptotic expansions. The deduced generalised Burgers' equations are solved *whatever* the boundary conditions are, with a numerical finite-difference method and using a harmonic balance method. Two cases are investigated experimentally: the purely progressive case, and the standing wave with an unknown termination. The results are compared successfully with theoretical predictions on the three first harmonics of a periodic signal in a high degree of accuracy, when the effects of the thermoviscous dissipation and of the non-linear propagation have the same order of magnitude.

PACS no. 43.25.C, 43.25.G, 43.25.J

## 1. Introduction

For small amplitude disturbances, the plane wave deformation during propagation in an acoustic wave guide is mainly controlled by thermoviscous losses in the wall boundary layers. In the last century, Kirchhoff [1] proposed a description of linear sound propagation in guides. From this work Zwicker and Kosten [2] obtained a general solution of the problem in  $\omega$ -space including both absorption and dispersion due to these thermoviscous effects along the tube walls.

It is well known that for high amplitude disturbances, the acoustic wave can be highly distorted [3] [4] leading to shock formation (see for example the unexpected shock waves observed in musical brass instruments, Hirschberg et al [5], Gilbert and Petiot [6]). These kind of spectacular effects cannot be explained with linear acoustic approximations. The present work deals with weakly nonlinear acoustic propagation (acoustic velocity much smaller than the speed of the sound) in cylindrical air-filled tubes.

Local small nonlinear perturbations of the acoustic wave due to high sound levels are cumulative along the propagation and may distort the wave form considerably at sufficiently large distances. Work in nonlinear propagation in free space has previously been subjected to extensive investigations because of research in underwater acoustics using ultrasound or more recently bioacoustics. We can cite Whitham [7], Kuznetsov [8], Blackstock [9], Rudenko and Soluyan [10]. Coulouvrat [11] presents an exhaustive review of works concerning the propagation of an acoustic beam in a thermo-viscous fluid. The nonlinear propagation of a plane wave (uni-dimensional propagation) in a perfect fluid is solved with the method of Riemann invariants. Taking into account volumetric losses leads to a description of the wave in the neighbourhood of the shock.

In ducts, theoretical foundations of nonlinear wave propagation with wall friction can be found in [12]. Chester derived nonlinear equations and solved them using a perturbation method. Nonlinear equations are usually solved for specific cases, e.g., progressive waves [13, 14]; closed tube with a rigid termination [12] or open tubes [15]. The aim of our study is to solve the nonlinear equations in a tube not only in specific cases but with any periodic source and any termination.

A classical perturbation method can lead to unsatisfactory results because of cumulative effects: a small local phenomenon can become perceptible at sufficiently large distances. A good description of cumulative effects is obtained using a Multiple Scale Method (MSM), which separates non cumulative effects remaining negligible, and cumulative effects. This leads to generalized Burgers' equations. The effect of boundary layer losses is taken into account by a convolution product (Blackstock [9]) which can be formally written with a fractional derivative [16, 14].

Experiments in tubes were performed by Cruikshank [17] in a closed tube (results are compared with Chester's theory [12]), Sturtevant [18] (closed and open tubes) and Zaripov and Ilhamov [19] (closed tubes, higher oscillations). Gaete-Garreton and Gallego-Juarez [20] studied the progressive wave. More recent experiments were performed by Maa and Liu [21] in closed tubes.

The objective of this work is to give solutions of a standing weakly nonlinear acoustic wave propagating in a cylindrical guide, filled with a thermo-viscous fluid (air), with a good accuracy, within a certain validity domain (see figure), *whatever* the boundary conditions and not only closed tubes or open tubes or sinusoidal sources. At our knowledge, this has not been done before in such extensive cases. Boundary conditions at one end are acoustic pressure or velocity (a periodic signal which is not necessarily sinusoidal) and impedance or acoustic signal at the other end. In a first part, hypotheses and approximations are studied. The order of magnitude of all variables as well as their spatial variations are discussed.

The validity domain of each approximation is studied. This will be useful to verify the agreement between the validity domain of the theoretical solutions obtained and experiments performed (typically frequencies of the order of 1 kHz, a radius of the order of 1 cm and sound levels around 150 dB). Equations of conservation (mass, momentum and energy) are then written and rendered dimensionless separately in the acoustic boundary layer and in the main acoustic flow. Dimensionless numbers appear in front of each term in the equations and are characteristic of the order of magnitude of the corresponding terms. A perturbative calculation using asymptotic expansions is then performed. Equations are simplified and averaged over a cross section of the main acoustic field of the tube. An asymptotic matching with the boundary layer is then performed, leading to nonlinear propagation equations similar to those obtained by Chester [12]. The application of the Multiple Scale Method leads to two Burgers' equations in the case of a standing wave. These two Burgers' equations are independent of each other: it is possible to consider the standing wave as the sum of two independent progressive waves. Each progressive wave is governed by one of the independent Burgers' equations. This is obtained because the interaction between the two progressive waves exists locally, but according to the MSM it does not cumulate, and therefore stays negligible. This is a new and original result, not obtained before to our knowledge. Resolution of these Burgers' equations is performed numerically from two boundary conditions (impedance or signal imposed) at both ends of the tube. A harmonic balance method (Newton-Raphson) is used to calculate the two traveling waves. The signal at any point in the tube is then deduced and compared with experiments (see also Menguy et al. [22]). The discrepancy between theory and experiments is of order 0.1 dB for the fundamental and the harmonic number 2, and within 0.5 dB for the harmonic 3.

## 2. From the fundamental equations to the nonlinear equations of acoustic propagation

### 2.1. Hypotheses and dimensional analysis

The motion of a classical fluid is governed:

- by the conservation laws (mass, momentum, and energy conservation);
- by relations and conditions who specify the mechanical and thermodynamical properties of the fluid;
- by the geometry and boundary conditions.

The fundamental conservation equations are as follows (see for example [23, 10, 24]).

The conservation of mass is:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \bar{t}} + \text{div}(\bar{\rho} \vec{u}) = 0; \quad (1)$$

the conservation of momentum is:

$$\bar{\rho} \frac{d \vec{u}}{d \bar{t}} = -\text{grad} \bar{P} + (\eta + \frac{1}{3} \mu) \text{grad}(\text{div} \vec{u}) + \mu \Delta \vec{u}; \quad (2)$$

and assuming the heat flux satisfies the Fourier law, the conservation of energy is:

$$\bar{\rho} \bar{T} \frac{d \bar{S}}{d \bar{t}} = F_d + k_h \Delta \bar{T}. \quad (3)$$

$F_d$  is the rate of dissipation of mechanical energy of the fluid.  $\mu, \eta, \nu, k_h, c_0, \lambda$  and  $\omega$  denote respectively the first and second viscosities, the kinematic viscosity, the thermal conductivity, a typical value of the speed of the sound in air, the wavelength and the acoustic angular frequency.  $\vec{u}$  is the particle velocity,  $\bar{S}$  the specific entropy,  $\bar{T}$  the temperature,  $\bar{P}$  the pressure and  $\bar{\rho}$  the volumic density.

Properties of the fluid are as following. The fluid (air) is newtonian, in the laminar regime, in steady state and is considered as a perfect gas (the fluid is bivalent). Heat exchange satisfies the Fourier law. Relaxation phenomenon are neglected. The plane wave assumption is adopted.

The problem is axisymmetric. The axis (Ox) is aligned along the tube axis and (Or) along the radius. The axial and radial components of the acoustic velocity  $\vec{u}_a$  are denoted  $\tilde{u}_a$  and  $\tilde{v}_a$  respectively. The wall of the tube is supposed rigid and conducts heat perfectly; non slip condition is assumed along the walls. On the wall, velocities and acoustic temperature are therefore equal to zero. These conditions create large gradients of acoustic temperature and velocities close to the wall; this region is called the boundary layer. The thickness of the viscous boundary layer is  $\xi = \sqrt{\nu/\omega}$  and the ratio of the thickness of the viscous and the thermal boundary layers is  $Pr^{1/2}$  with  $Pr = (\mu C_p)/(k_h)$  the Prandtl number, which is of order unity ( $Pr \simeq 0.7$  for the air;  $C_p$  is the specific heat at constant pressure). The two regions (boundary layer and the rest of the tube called main acoustic field) are studied separately.

The dimensional analysis relies on the existence of three dimensionless numbers which are much less than unity:

$$M = \frac{u_{a0}}{c_0} \ll 1, \quad \frac{1}{Re} = \frac{\nu \omega}{c_0^2} \ll 1, \\ Sh = \frac{\xi}{R} = \sqrt{\frac{\nu}{\omega}} \frac{1}{R} \ll 1.$$

$M$  is the acoustic Mach number,  $Re$  the acoustic Reynolds number, and  $Sh$  the Shear number (see for example [25]), the ratio of the boundary layer thickness  $\xi$  and the tube radius  $R$  (using the large tube radius approximation).  $u_{a0}$  is a typical value (constant) of the acoustic velocity (for example the velocity of the fundamental component near the source).

The conditions which motivate our study relate to frequencies in the audible range, radii of order a centimeter, and high sound levels (140-160 dB). It can thus be assumed that  $1/Re$  is around three orders of magnitude smaller than  $M$  and  $Sh$ :

$$M^2 Re = \frac{\tilde{u}_a^2}{\nu \omega} \gg 1 \quad \text{and} \quad Sh^2 Re = \left(\frac{c_0}{R \omega}\right)^2 \gg 1.$$

The second condition reflects the fact that the wavelength is large in comparison with the tube radius. Then the plane wave approximation is easily verified:

$$\frac{R}{\lambda} < 0.29.$$



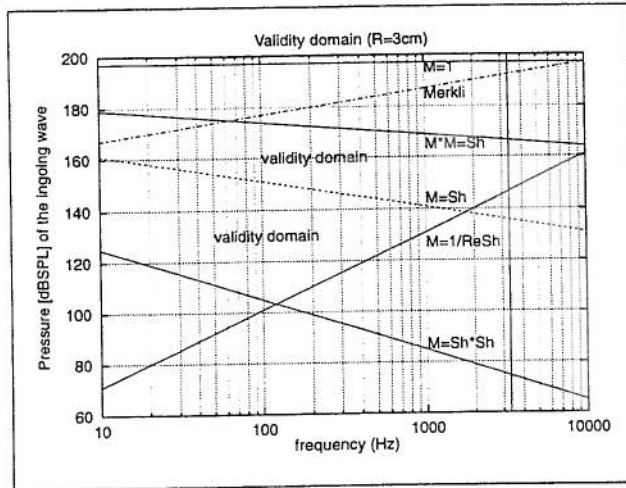


Figure 1. Validity domain of the theoretical results. The tube radius is 3 cm. Each line represents the limit of predominance of one term over another. The vertical line is the limit of the plane wave approximation. Merkli gives the condition for laminar flow.

The former two conditions imply that

$$MRe = \frac{\bar{u}_a^2}{\nu\omega} \gg 1 \quad \text{and} \quad \frac{1}{ReSh} = \sqrt{\frac{\omega\mu}{\rho_0 c_0^2}} \frac{\omega R}{c_0} \ll 1.$$

This last condition means that thermoviscous effects are only boundary layer effects and not volumetric losses.

The hypotheses can be summarized as follows:

$$\begin{aligned} 1 &\gg M, Sh \gg M^2, Sh^2, MSh \\ &\gg 1/Re, M^3, M^2Sh, MSh^2, Sh^3. \end{aligned} \quad (4)$$

These orders of magnitude are denoted order 0, 1, 2 and 3 respectively in the following text.

A predominance diagram (see Figure 1) is used to verify the validity domain. The tube radius is imposed at 3 cm (our experimental conditions) and the competition between different terms is represented on a logarithmic scaled graph, pressure [dB] on  $y$ -scale and frequency on  $x$ -scale. For example the line  $M^2 = Sh$  means that above this line  $M^2$  is predominant compared to  $Sh$ , and conversely under. A first order theory on  $M$  and  $Sh$  is optimal only under this line but not above. Nonlinear second order phenomenon should be much more important than thermoviscous boundary layer losses above this line, and then the classical exact nonlinear theory for a plane wave in a perfect fluid (Riemann invariants) would be more precise. Lines  $M = 1/(ReSh)$  and  $M = Sh^2$  indicate the limit under which a nonlinear theory is not useful because nonlinear phenomena are negligible compared to other linear phenomena neglected, such as the effect of the curvature of the boundary layer or the effect of volumetric losses, for example. Lastly, the Merkli condition ( $\bar{u}/\sqrt{\nu\omega} < 350 - 700$ ) to have a laminar acoustic boundary layer is valid under the line represented.

All these conditions are valid in a certain zone (see Figure 1), and all experimental measurements are placed on this graph to verify the validity of the hypotheses.

The fundamental equations (conservation of mass and momentum) are expressed in cylindrical coordinates, since the problem is axisymmetric. The equations are simplified separately in the boundary layer and in the main acoustic field by considering the order of magnitude of each term. For that purpose the equations are converted into a dimensionless form. The aim is to rewrite each term in the form of a variable of order 1, preceded by a dimensionless number characterising the order of magnitude of the term studied.

The acoustic quantities are locally of order  $M$ . The following changes of variables are made respectively in the main acoustic field, respectively in the boundary layer. Dimensional and dimensionless variables are written respectively with tilde and without tilde in the following text.

$$\begin{aligned} \bar{\rho} &\text{ becomes } \tilde{\rho} = \rho_0(1 + M\rho_a), \\ &\text{ respectively } \bar{\rho} = \rho_0(1 + M\rho_{ab}); \\ \bar{P} &\text{ becomes } \tilde{P} = P_0(1 + MP_a), \\ &\text{ respectively } \tilde{P} = P_0(1 + MP_{ab}); \\ \bar{T} &\text{ becomes } \tilde{T} = T_0(1 + MT_a), \\ &\text{ respectively } \tilde{T} = T_0(1 + MT_{ab}); \\ \bar{u} &\text{ becomes } \tilde{u} = c_0(Mu_a), \\ &\text{ respectively } \tilde{u} = c_0(Mu_{ab}); \\ \bar{S} &\text{ becomes } \tilde{S} = S_0 + MR_g S_a, \\ &\text{ respectively } \tilde{S} = S_0 + MR_g S_{ab}. \end{aligned}$$

$\rho_0, P_0$  are the static values of  $\bar{\rho}$  and  $\bar{P}$  in the absence of an acoustic field. Every indexed dimensionless variable is of order unity by definition. Only  $S_a$  is not necessarily of order of unity (it will be pointed out in the main acoustic field in the following text) and is therefore noted between  $\langle \rangle$  to differentiate it from other terms.

The dimensional analysis of the radial components  $\bar{v}_a$  and  $\partial/\partial\bar{r}$  is not straightforward. Their order of magnitude can be obtained from the linear results:

$$\bar{v} \text{ becomes } \tilde{v} = \frac{c_0}{\sqrt{Re}} M v_a.$$

Moreover, there are three different orders of magnitude among the spatial variables. Thus  $(\tilde{x})$  is set dimensionless using  $c_0/\omega$ , and  $(\tilde{r})$  using  $R$  (denoted  $r_1$ ) or  $\xi$  (denoted  $r_{b1}$ ) respectively in the main acoustic field and the boundary layer.

A further problem is to render dimensionless the spatial derivatives. The gradients with respect to  $r$  of the variables in the tube are not all of the same order. In the boundary layer, for example,  $u_a$  varies from 0 at the wall to a velocity of order of  $M c_0$  (the acoustic velocity in the main field) far from the wall:  $\partial\bar{u}_a/\partial\bar{r}$  is thus of order of  $\bar{u}_a/\xi$ , while  $\partial\tilde{T}_a/\partial\tilde{r}$  and  $\partial\tilde{v}_a/\partial\tilde{r}$  are of order  $\tilde{T}_a/\xi$  and  $\tilde{v}_a/\xi$  respectively.  $v_a = 0$  on the axis of the tube because of axisymmetry of the tube: therefore  $\partial\bar{v}_a/\partial\bar{r}$  is of order  $(\bar{v}_a/R)$  in the main acoustic field. But notice that the order of magnitude of  $\partial X/\partial Y$  is not necessarily the same as that of  $X/Y$ : for example the acoustic pressure varies little over the cross-section of the tube. The order of magnitude of  $\partial\bar{P}_a/\partial\bar{r}$  is not  $\bar{P}_a/R$  but much less. The results of linear acoustics guided our choice

for the derivatives of quantities. Radial derivatives are set dimensionless. Taking into account the actual radial variation of variables in rendering equations dimensionless is where the present work differs from Chesters. Doing so improves the validity of the perturbation method compared with using only  $\xi$  in the boundary layer and  $R$  in the main acoustic field.

In the boundary layer

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} & \text{ becomes } \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial r_{b1}} = \sqrt{\frac{\rho_0 \omega}{\mu}} \frac{\partial}{\partial r_{b1}} \\ & \text{ applied to } T_a, S_a, \rho_a, u_a, \text{ and } v_a, \\ \frac{\partial}{\partial \bar{r}} & \text{ becomes } \frac{1}{Re} \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial r_{b2}} = \frac{1}{Re} \sqrt{\frac{\rho_0 \omega}{\mu}} \frac{\partial}{\partial r_{b2}} \\ & \text{ applied to } P_a, \end{aligned}$$

and in the main acoustic field

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} & \text{ becomes } \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial r_1} \\ & \text{ applied to } v_a, \\ \frac{\partial}{\partial \bar{r}} & \text{ becomes } \frac{1}{Re} \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial r_{b2}} = \frac{1}{Re} \sqrt{\frac{\rho_0 \omega}{\mu}} \frac{\partial}{\partial r_{b2}} \\ & \text{ applied to } T_a, S_a, P_a, \rho_a, \text{ and } u_a. \\ & \text{ with } r_1 = \frac{\bar{r}}{R}, r_{b1} = \frac{\bar{r}}{\xi} \text{ and } r_{b2} = \frac{\bar{r}}{Re\xi}. \end{aligned}$$

Then, conservation laws (1), (2) and (3) are written dimensionless in cylindrical coordinates, both in the boundary layer and in the main acoustic field. The order of magnitude of each term is therefore given explicitly by a dimensionless number. It becomes easy to justify the reason why one term or one effect should be neglected or not. Equations can therefore be rigorously simplified, and the order of magnitude of each neglected term is known. Obtained equations are then solved in the boundary layer and matched asymptotically with the main acoustic field. An averaging across a section of the tube leads to two non linear equations (see Appendix).

### 2.2. Nonlinear equations of propagation

The setting of the nonlinear equations with only two variables  $u_a$  and  $\rho_a$  leads to (see appendix A, and equations (A43) and (A44)):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_a}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} ((1 + M\rho_a)u_a) \\ - 2Sh \left( 1 + \frac{\gamma-1}{\sqrt{Pr}} \right) \frac{\partial u_a}{\partial x} * \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \\ = O \left( MSh, Sh^2, \frac{1}{ReSh} \right), \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_a}{\partial t} + Mu_a \frac{\partial u_a}{\partial x} + (1 + M\rho_a)^{\gamma-2} \frac{\partial \rho_a}{\partial x} \\ = O \left( \frac{1}{ReSh} \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Notice that if the variable

$$c = (1 + M\rho)^{\frac{\gamma-1}{2}} \quad (7)$$

is introduced, multiplying (5) by  $M(1 + M\rho)^{(\gamma-3)/2}$  and (6) by  $M$ , an addition and a subtraction of the two equations lead to two propagation equations (\* is the convolution product):

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + (Mu \pm c) \frac{\partial}{\partial x} \right\} \left( Mu \pm \frac{2c}{\gamma-1} \right) \\ = \pm 2MSh \left( 1 + \frac{\gamma-1}{\sqrt{Pr}} \right) \frac{\partial u}{\partial x} * \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \\ + O \left( M^2 Sh, MSh^2, \frac{M}{ReSh} \right). \end{aligned} \quad (8)$$

These are close to equations obtained by Chester [12] in their dimensionless form.

Two points are different from Chester's equations.

(1) Neglected terms are there evaluated, and appear in the right hand side of equation (8). For example, nonlinearities in the boundary layers are of order  $(M^2 Sh)$  and the effect of the radius of curvature in the boundary layer is of order  $(MSh^2)$ . Notice that no terms  $(M^n)$  with  $n$  integer are neglected: this equation is exact on propagation nonlinearities in the main acoustic field. The evaluation of neglected terms leads to the validity domain of equation (8) (see Figure 1).

(2) Volumetric losses are obtained by Chester [12] but do not appear in equation (8). Only thermoviscous losses in the boundary layer should be kept and not volumetric losses (as far as shock waves have not appeared). This conclusion is obtained by the evaluation of order of magnitude of the different terms: volumetric losses (of order  $(1/Re)$ ) are neglectible compared to other neglected terms such as non linearities in the boundary layers for example (of order  $(M^2 Sh)$ ).

## 3. Burgers' equations and solutions

### 3.1. Burgers' equations

Equations (5) and (6) are spatially local equations (on  $x$ ). But nonlinear phenomena and losses are cumulative: even if effects are locally of order  $M$  or  $Sh$ , these effects can increase along propagation and can distort the acoustic signal strongly if the tube is long, even if  $M$  is small ( $M \ll 1$ ). A classical perturbative calculus to solve equations (5) and (6) is based on an asymptotic expansion, and will not correspond any more to physical problems, because higher terms become too large. An adapted method for cumulative phenomena is necessary: it is the Multiple Scale Method (MSM), which permits a good description of the distortion of the wave until distances  $x = O(1/M)$  (distance of order of the critical shock wave distance).  $M$  and  $Sh$  are considered to be each other of the same order in this part.

$\partial/\partial x$  is replaced by  $\partial/\partial x + M\partial/\partial X$  with  $x$  the rapid scale and  $X$  the slow scale, where  $X = Mx$ .

An expansion of the variables in the small parameter  $M$  is:

$$\begin{aligned} \rho_a &= \rho_{1a} + M\rho_{2a} + O(M^2), \\ P_a &= P_{1a} + MP_{2a} + O(M^2), \\ u_a &= u_{1a} + Mu_{2a} + O(M^2). \end{aligned}$$

The different orders of magnitude are now separated.

**Order 0:**

Equations (5), (6) and (A10) become respectively:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_{1a}}{\partial t} + \frac{\partial u_{1a}}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial u_{1a}}{\partial t} + \frac{\partial \rho_{1a}}{\partial x} &= 0, \\ \text{and } P_{1a} &= \gamma \rho_{1a}, \end{aligned}$$

which are the equations of ordinary linear non-dissipative acoustics. They give:

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right\} (u_{1a}, \rho_{1a}, P_{1a}) = 0.$$

Let us introduce the notation  $\theta^+ = t - x$  and  $\theta^- = t + x$ . Solutions of the equations are at order 0:

$$\begin{aligned} u_{1a} &= q^+(\theta^+, X) - q^-(\theta^-, X), \\ \rho_{1a} &= q^+(\theta^+, X) + q^-(\theta^-, X), \\ P_{1a} &= \gamma(q^+(\theta^+, X) + q^-(\theta^-, X)). \end{aligned}$$

The order 0 is not enough to make explicit the dependence of  $q^+$  on  $\theta^+$  and  $X$ , or the dependence of  $q^-$  on  $\theta^-$  and  $X$ : it is necessary to continue on to order 1.

**Order 1:**

Introducing the new dimensionless number  $T = Sh(1 + (\gamma - 1)/\sqrt{Pr})$ , (5) and (6) are in order 1:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_{2a}}{\partial t} + \frac{\partial u_{2a}}{\partial x} &= -\frac{\partial}{\partial X}(q^+ - q^-) - 2q^+ \frac{\partial q^+}{\partial x} \\ &\quad + 2q^- \frac{\partial q^-}{\partial x} + \frac{2T}{M} \frac{\partial}{\partial x}(q^+ - q^-) * \frac{1}{\sqrt{\pi t}}, \quad (9) \\ \frac{\partial u_{2a}}{\partial t} + \frac{\partial \rho_{2a}}{\partial x} &= -\frac{\partial}{\partial X}(q^+ + q^-) - (\gamma - 1)q^+ \frac{\partial q^+}{\partial x} \\ &\quad - (\gamma - 1)q^- \frac{\partial q^-}{\partial x} - (\gamma - 3)q^+ \frac{\partial q^-}{\partial x} \\ &\quad - (\gamma - 3)q^- \frac{\partial q^+}{\partial x}, \quad (10) \end{aligned}$$

Applying  $\partial/\partial t(9) - \partial/\partial x(10)$ , and changing variables from  $(x, t, X)$  to  $(\theta^+, \theta^-, X)$  leads to:

$$\begin{aligned} 4 \frac{\partial^2 \rho_{2a}}{\partial \theta^+ \partial \theta^-} &= \frac{\partial}{\partial \theta^+} \left( (\gamma + 1)q^+ \frac{\partial q^+}{\partial \theta^+} - 2 \frac{\partial q^+}{\partial X} \right. \\ &\quad \left. - 2 \frac{T}{M} \frac{\partial q^+}{\partial \theta^+} * \frac{1}{\sqrt{\pi \theta^+}} \right) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial \theta^-} \left( (\gamma + 1)q^- \frac{\partial q^-}{\partial \theta^-} + 2 \frac{\partial q^-}{\partial X} \right. \\ &\quad \left. - 2 \frac{T}{M} \frac{\partial q^-}{\partial \theta^-} * \frac{1}{\sqrt{\pi \theta^-}} \right) \\ &\quad + (\gamma - 3) \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta^+} - \frac{\partial}{\partial \theta^-} \right\}^2 (q^+ q^-). \quad (11) \end{aligned}$$

A similar equation satisfied by  $u_{2a}$  is obtained from  $\partial(10)/\partial t - \partial(9)/\partial x$ .

The first term in equation (11) is independent of  $\theta^-$ . An integration on  $\theta^-$  would therefore contain a secular term in

the expression of  $\rho_2$ . The same thing is true for the second term with an integration on  $\theta^+$ . But the third term is not secular when integrated by  $\theta^+$  or  $\theta^-$ . Secular terms must equal 0 to keep a correct result when non linearities increase. After an integration this leads to (the constant of integration is chosen equal to 0):

$$\frac{\partial q^+}{\partial \sigma} = q^+ \frac{\partial q^+}{\partial \theta^+} - \frac{T}{\epsilon} \frac{\partial q^+}{\partial \theta^+} * \frac{1}{\sqrt{\pi \theta^+}} \quad (12)$$

$$\frac{\partial q^-}{\partial \sigma} = -q^- \frac{\partial q^-}{\partial \theta^-} + \frac{T}{\epsilon} \frac{\partial q^-}{\partial \theta^-} * \frac{1}{\sqrt{\pi \theta^-}} \quad (13)$$

with  $\sigma = (\gamma + 1)X/2$  and  $\epsilon = (\gamma + 1)M/2$ . \* is the convolution product.

3.1.1. Traveling waves:

If a traveling wave is propagating in the positive  $x$ -direction:

$$q^- = 0 \quad \text{and} \quad u_{1a} = \rho_{1a} = \frac{1}{\gamma} P_{1a} = q^+(\theta^+, X).$$

$q^+$  satisfies the single generalized Burgers' equation (12).

This result was obtained by Blackstock [9]. This Burgers' equation does not contain the second-order derivative, which describes the effect of the volumetric losses. Volumetric losses are negligible as long as the shock wave has not appeared (Sugimoto [14]). It would be necessary to describe the profile of the shock structure of the early portion of the weak shock (Pierce [26]).

3.1.2. Standing waves:

The most important result to be applied to standing waves is the fact that the two Burgers' equations (12) and (13) are independent and the standing wave can therefore be considered as the sum of two independent progressive waves, the incident wave and the reflected wave. The interaction between these two waves exists locally (given by the third term of the equation (11)), but it is not a cumulative phenomenon and it therefore remains negligible. This idea is essential for the resolution of these equations in the following section. Notice that Burgers' equations (12) and (13) are obviously similar if  $\theta^+$  and  $X$  are changed respectively on  $\theta^-$  and  $-X$ .

3.2. Solution of Burgers' equations

Generalized Burger's equations (12) and (13) have no analytical known solutions. Solutions are therefore done numerically. Solutions are performed in  $\omega$ -space. Fractional derivative becomes a multiplication by  $(j\omega)^{1/2}$ .

3.2.1. Traveling waves

The following traveling wave is considered:

$$q = \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n(\sigma) \sin n\theta + b_n(\sigma) \cos n\theta). \quad (14)$$

The nonlinear term of the Burgers' equations is therefore in Fourier series:

$$\begin{aligned}
 q \frac{\partial q}{\partial \theta} &= \left( \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n(\sigma) \sin n\theta + b_n(\sigma) \cos n\theta) \right) \\
 &\cdot \left( \sum_{p=1}^{+\infty} (-pb_p(\sigma) \sin p\theta + pa_p(\sigma) \cos p\theta) \right) \\
 &= \sum_{m=1}^{+\infty} \left( m \sin m\theta \left( \sum_{p=1}^{m-1} \left( \frac{a_p a_{m-p}}{2} - \frac{b_p b_{m-p}}{2} \right) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \sum_{p=m+1}^{+\infty} (a_{p-m} a_p + b_{p-m} b_p) \right) \right) \\
 &+ \sum_{m=1}^{+\infty} \left( m \cos m\theta \left( \sum_{p=1}^{m-1} \left( \frac{a_p b_{m-p}}{2} + \frac{b_p a_{m-p}}{2} \right) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \sum_{p=m+1}^{+\infty} (b_{p-m} a_p - a_{p-m} b_p) \right) \right) \quad (15)
 \end{aligned}$$

and the fractional derivative is:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^{1/2} q}{\partial^{1/2} \theta} &= \sum_{m=1}^{+\infty} \sqrt{\frac{m}{2}} \left( (a_m - b_m) \sin m\theta \right. \\
 &\quad \left. + (a_m + b_m) \cos m\theta \right). \quad (16)
 \end{aligned}$$

Equalizing each term of the Fourier series leads to the set of equations:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial a_n}{\partial \sigma} &= n \left( \sum_{p=1}^{n-1} \left( \frac{a_p a_{n-p}}{2} - \frac{b_p b_{n-p}}{2} \right) \right. \\
 &\quad \left. - \sum_{p=n+1}^{+\infty} (a_{p-n} a_p + b_p b_{p-n}) \right) \\
 &\quad - \frac{T}{\epsilon} \sqrt{\frac{n}{2}} (a_n - b_n), \\
 \frac{\partial b_n}{\partial \sigma} &= n \left( \sum_{p=1}^{n-1} \left( \frac{a_p b_{n-p}}{2} + \frac{b_p a_{n-p}}{2} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{p=n+1}^{+\infty} (b_{p-n} a_p - b_p a_{p-n}) \right) \\
 &\quad - \frac{T}{\epsilon} \sqrt{\frac{n}{2}} (a_n + b_n).
 \end{aligned}$$

These Fourier series are truncated to N harmonics. Then a resolution on  $\sigma$  by small steps  $\Delta\sigma$  (finite difference method) knowing the initial condition at  $\sigma = 0$  is performed. The resolution method used is a prediction correction method. At first order, the classical method called Euler is used, and correction is performed using the Adams Moulton second order method.

### 3.2.2. Standing waves

Two boundary conditions are used to solve the two Burgers' equations: the acoustic pressure at the input (E), and pressure or impedance at (S). Everywhere the acoustic signal is

considered as the sum of the incoming  $q_+$  and the outgoing  $q_-$  waves. These two periodic waves are assumed to be a Fourier sum of N harmonics. The iterative method is based on a numerical convergence (Newton Raphson method) of the components of  $q_+$  towards the solution of a set of nonlinear equations. At each loop,  $q_+$  is propagated from (E) to (S) using a finite different approximation of the equation (12) as in the former paragraph. For the first loop, an arbitrary wave  $q_+$  at (E) is chosen: the signal of the source for example, or better the incident wave of the linear solution if known. Using the known value of the acoustic pressure at (S), the reflected wave  $q_-$  is deduced and then propagated from (S) to (E) by applying equation (13). Finally  $q_+$  is induced in (E) from the known value of the acoustic pressure at this point. The comparison between the components of  $q_+$  at the beginning and at the end of the loop gives the set of nonlinear equations. A harmonic balance method called Newton-Raphson is used to solve this set of equations, and converges quite rapidly.

Similar solutions are used for nonlinear propagation without losses, or linear propagation with losses. The same Burgers equations are used (and therefore the same numerical resolution), removing respectively the term corresponding to the thermoviscous boundary layer losses or the nonlinearities. It is useful in order to compare the respective effect of these two phenomena on the acoustic wave. The linear solutions are validated with classical known methods. Notice that nonlinear stationary case without losses doesn't converge (losses are necessary for numerical convergence). Obtained nonlinear solutions are compared with Chester's results in the particular case of a closed tube with a rigid termination ( $|q^+| = |q^-|$ ), and lead to quite similar predictions. The main contribution of this work is that these predictions can be applied whatever the termination is, and not only to closed tubes with rigid terminations or open tubes. The following experiments (standing waves part 4-3) are not performed in a particular case but with an unknown termination. This kind of case cannot be predicted by Chester's theory or other classical theories.

Only results in part 4-1 (traveling wave) can be predicted by classical theories.

## 4. Experiments

### 4.1. Experimental setup and procedure

Experiments are performed in a cylindrical air-filled tube 6m long and 58mm internal diameter with an absorbing termination. The tube is composed of different sections connected by flanges. Some sections have a port in which a microphone can be mounted. The three microphones used to measure the internal sound pressure level are acceleration compensated piezo-electrical gauges, type PCB M116B. The microphones (8mm external diameter) are mounted flush with the pipe wall. Calibration of each installed microphone involves a reference microphone (B&K model 4138, 1/4 in.) mounted flush in a closed pipe end. This closed pipe end is placed near each microphone from the first one (near the source) to

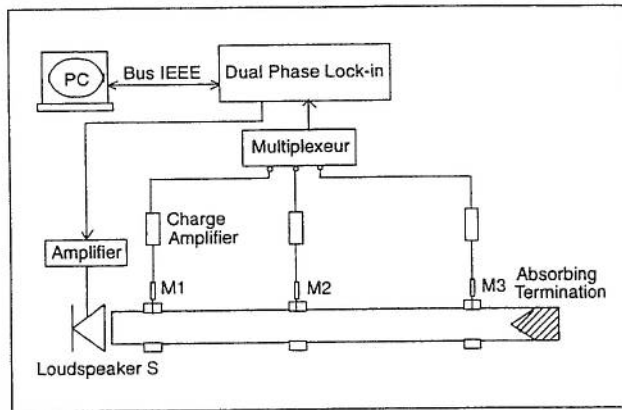


Figure 2. Block diagram of the experimental setup. M are microphones (Piezo-electrical gauges).

the last one (near the absorbing termination), the complete tube being assembled after the last calibration. The reference microphone is calibrated using a pistonphone B&K 4420. The source is a compression loudspeaker driver, JBL model 2446H. The loudspeaker output is as close as possible to the tube without contact to minimize wall vibrations. The frequency and the level of the pure harmonic excitation signal is produced by the internal generator of a dual phase lock-in amplifier (type Stanford SR 850). A block diagram of the experimental setup is shown in Figure 2.

The procedure is to generate sinusoidal signals at the source ranging from low to high amplitude. For each source level, the amplitude and the phase of the first harmonics from each microphone signal (typically 3) are measured accurately with the lock-in amplifier. The measurements are conducted for two fundamental frequencies: firstly at 2000 Hz, secondly at 500 Hz. Notice that the cut-off frequency below which the plane wave approximation is valid is around 3300 Hz. At 2000 Hz the absorbing termination is efficient, the outgoing wave reflected from the end of the tube is negligible, the experimental results are compared with a traveling wave theory (see the following section 4.2). At 500 Hz the absorbing termination is not so efficient, the outgoing wave is not negligible, the experimental results are compared with a standing wave theory (see section 4.3).

#### 4.2. Traveling wave

As explained in the previous section, a sinusoidal signal at frequency 2000 Hz is produced by the source. Two microphone signals are analysed: the first one M1 is near the source, the second one M3 is near the absorbing termination (4.98 m from M1). Thirteen measurements are performed for different acoustic levels from 125 to 152 dB (amplitude of the first harmonic in M1). Because of the absorbing termination, a purely progressive travelling wave is present in the tube. The nonlinear propagating theory in tubes is checked as follows. The measured pressure in M1 is propagated theoretically as far as the M3 position, and then compared with the measured pressure in M3. The comparison between the calculated and the measured M3 pressure is displayed in the

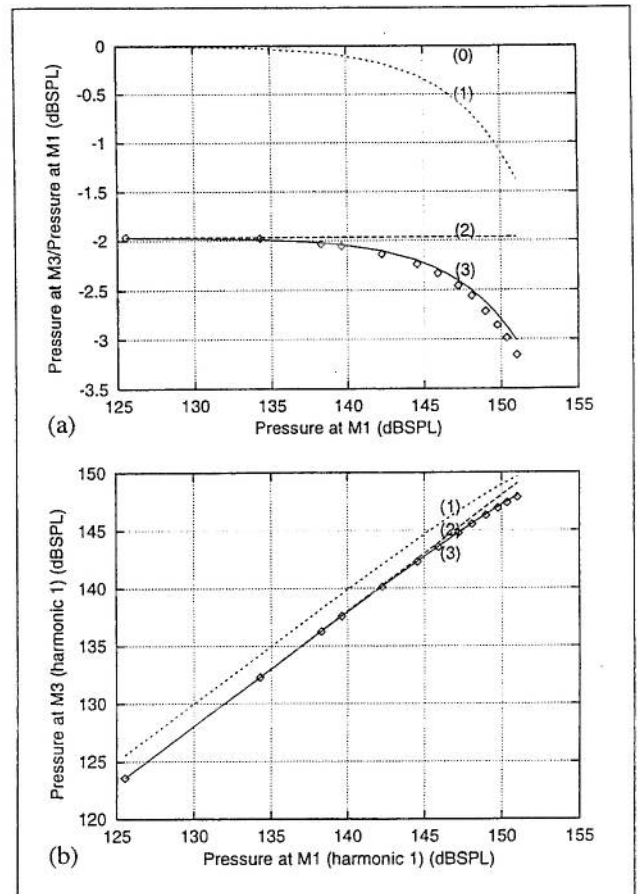


Figure 3. Traveling wave case. (a) Ratio of the fundamental pressure amplitudes of M3 over M1 (dB scale display), as a function of the fundamental pressure amplitude of M1 (dB scale display). (b) Fundamental pressure amplitude of M3 (dB scale display) as a function of the fundamental of M1 (dB scale display). Experimental results ( $\diamond$ ) are compared with four theoretical results: (0) Lossless linear propagative case; (1) Lossless nonlinear propagative case; (2) Lossy linear propagative case; (3) Lossy nonlinear propagative case.

Figures 3 and 4. The calculated pressure is based on the computing procedure described in section 3. The two measured pressure are defined with their first 3 harmonics (amplitude and phase).

More precisely, in Figure 3(a), the ratio of the fundamental pressure amplitudes of M3 over M1 are displayed in a decibel scale, as a function of the fundamental pressure amplitude of M1 in a decibel scale (dBSPL). The experimental results are compared with four theoretical results (cases 0, 1, 2 and 3 Figure 3): (0) the lossless linear propagation case (the straight line equal to 0 dB), (1) the lossless nonlinear propagation case, (2) the lossy linear propagation case (the straight line at  $-1.95$  dB represents attenuation due to the thermoviscous losses near the wall of the tube), (3) the lossy nonlinear propagation case. The theoretical results corresponding to the nonlinear theories, cases (1) and (3), are computed with the method described in section 3. Notice that the lossless case (1) can be directly obtained with the well known Fubini analytical results. To check the validity of the theory when the effect of nonlinear propagation are small

and comparable to the thermoviscous effects, a carefully calibration of the microphones and an accurate knowledge of the temperature are essential. The accuracy of the absolute calibration can be estimated as  $\pm 0.1$  dB. Notice that because of the calibration procedure described section 4.1, the relative calibration accuracy between the microphones M3 and M1 is most probably less than 0.1 dB. The temperature determination (equivalent to the velocity of sound determination) is estimated in an indirect way: for the lowest source level (125 dB SPL) the linear propagation theory is valid. Then the attenuation measurement between M3 and M1 allows the estimation of the temperature. Figure 3(a) illustrates particularly well the good agreement between the lossy nonlinear propagation theory based on the generalized Burgers' equation, and the experimental results. Nevertheless, there is a small but significant discrepancy between the theory and the experiment (0.2 dB at the largest source sound pressure level 152 dB). This systematic discrepancy increasing from 0 to 0.2 dB as a function of the source sound pressure level, can be understood according to the accuracy of the calibration of the microphone M1. In Figure 3(b), the fundamental pressure amplitude of M3 is displayed as a function of the fundamental pressure amplitude of M1 in decibel scales, the experimental results are compared to the theoretical results in the same way as in Figure 3(a).

For source sound pressure levels higher than 140 dB, there are losses on the fundamental due to the nonlinear effects (see Figure 3), acoustic energy is transferred to higher harmonics: the growth in amplitude of harmonic 2 and harmonic 3 in M3 as a function of the source level increase is presented Figure 4(b) and Figure 4(c) respectively; the fundamental amplitude is presented again in Figure 4(a) (the axes are linear in units of Pascal).

The experimental results are compared with two theoretical results (cases 1 and 3 Figure 4): (1) the lossless nonlinear propagation case, (3) the lossy nonlinear propagation case. These theoretical results corresponding to the nonlinear theories are computed with the method described in section 3. The Figure 4(b) illustrates the good agreement between the lossy nonlinear propagation theory based on the generalized Burgers' equation (12), and the experimental results for harmonic 2. The agreement for harmonic 3 is not so good. It is not so surprising, this harmonic corresponding to a frequency of 6000 Hz clearly above the cutoff frequency of the tube, the plane wave approximation is not valid anymore. Incidentally, theoretical results corresponding to the lossy linear propagation theory (2) are displayed on figures 4(b) and (c). These results come from the linear propagation of small components of harmonics 2 and 3 being present in the signal due to the source signal not being perfectly sinusoidal (slight nonlinear behavior of the loudspeaker).

#### 4.3. Standing wave

A sinusoidal signal at frequency 500 Hz is produced by the source. Three microphone signals are analysed: the first one M1 is near the source, the third one M3 is near the absorbing termination (4.98 m from M1), the second one M2 is between

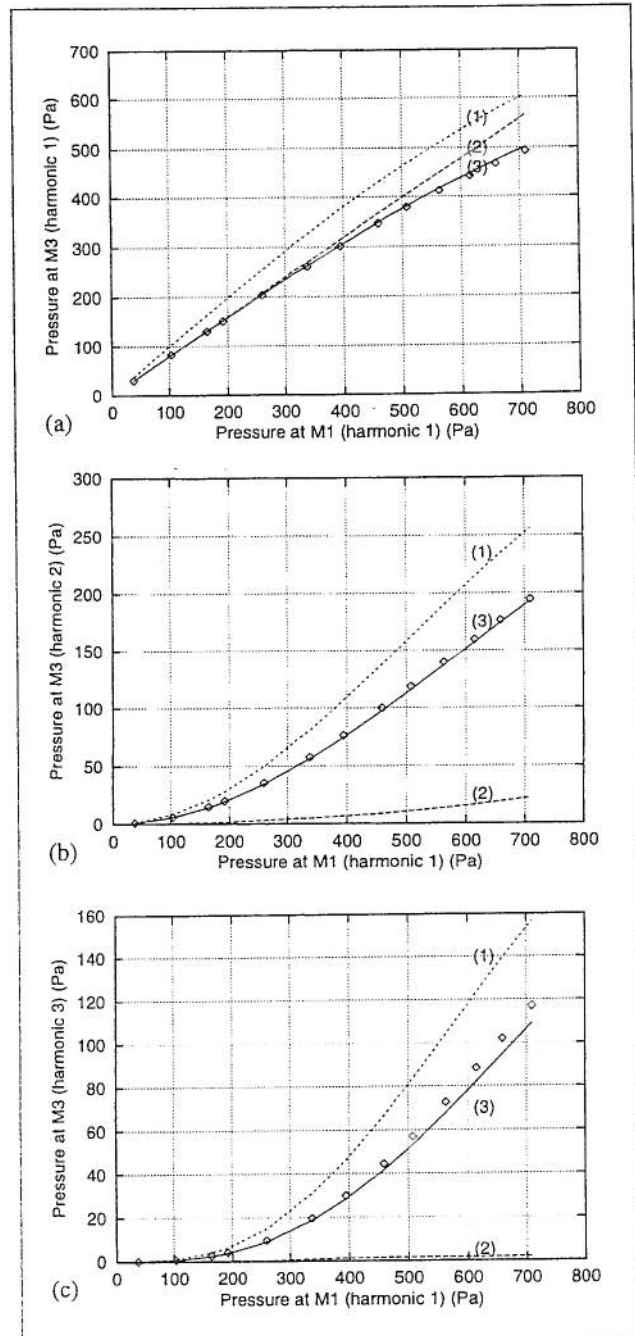


Figure 4. Traveling wave case. First harmonic (a), second harmonic (b) and third harmonic (c) pressure amplitudes of M3 (linear scale display), as a function of the fundamental pressure amplitude of M1 (linear scale display). Experimental results ( $\diamond$ ) are compared with three theoretical results: (1) Lossless nonlinear propagative case; (2) Lossy linear propagative case; (3) Lossy nonlinear propagative case.

M1 and M3, 3.955m from M1. Ten measurements are performed for different acoustic levels from 127 to 152 dB, 45 to 790 Pa (amplitude of the first harmonic in M1). The three measured pressures are defined with their first 3 harmonics (amplitude and phase).

At 500 Hz, the absorbing termination is less efficient than at 2000 Hz, the outgoing wave traveling in the tube has to be taken into account. The experimental results are examined

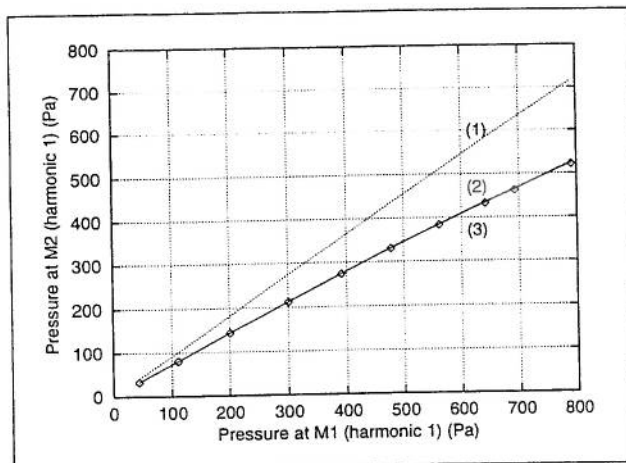


Figure 5. Stationary wave case. First harmonic pressure amplitude of M3 (linear scale display), as a function of the fundamental pressure amplitude of M1 (linear scale display). Experimental results ( $\diamond$ ) are compared with three theoretical results: (1) Lossy nonlinear propagative case; (2) Lossy linear stationary case; (3) Lossy nonlinear stationary case.

with a stationary wave theory. According to the simulation procedure described in section 3 for the standing wave case, two reference pressure signals are necessary to calculate the pressure field between them. The measured pressure signals in M1 and M3 are the reference, the pressure at the position of M2 is calculated, and then compared with the M2 measured pressure. The comparison between the calculated and the measured M2 pressures is displayed in the Figures 5 and 6.

More precisely, in Figure 5, the fundamental pressure amplitude of M2 is displayed as a function of the fundamental pressure amplitude of M1 using linear scales (pascal units). The experimental results are compared with three theoretical results (cases 1, 2 and 3 Figure 5): (1) the lossy nonlinear propagation case, (2) the lossy linear standing wave case, (3) the lossy nonlinear standing wave case. The theoretical results corresponding to the standing theories, cases (2) and (3), are similar and in agreement with the experimental results. The effect of nonlinearities are not noticeable on the fundamental pressure amplitude at 500 Hz. Furthermore, the propagative theory is not applicable to this study as was assumed at the beginning of this section (see the discrepancy between the curves (1) and the experimental results Figure 5).

Effects of nonlinearities are noticeable in harmonic 2 of the pressure, they are considered below and displayed Figure 6. In Figure 6, the harmonic 2 pressure amplitude of M2 is displayed as a function of the fundamental pressure amplitude of M1 using linear scales (pascal units). The experimental results are compared with three theoretical results (cases 1, 2 and 3 Figure 6): (1) the lossy nonlinear propagation case, (2) the lossy linear standing wave case, (3) the lossy nonlinear standing wave case. These theoretical results are computed with the method described in section 3. Figure 6 illustrates good agreement between the lossy nonlinear standing wave theory, case (3), and the experimental results for harmonic 2. Having a look at the discrepancy between curves (2) and the experimental results Figure 6, the effects of nonlinearities

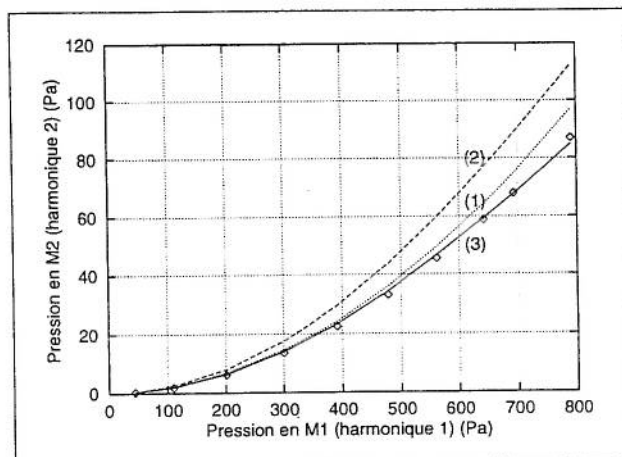


Figure 6. Stationary wave case. Second harmonic pressure amplitude of M3 (linear scale display), as a function of the fundamental pressure amplitude of M1 (linear scale display). Experimental results ( $\diamond$ ) are compared with three theoretical results: (1) Lossy nonlinear propagative case; (2) Lossy linear stationary case; (3) Lossy nonlinear stationary case.

are noticeable on harmonic 2 of the pressure. It is confirmed that the propagative theory is not applicable to this study (see the discrepancy between the curves (1) and the experimental results Figure 6).

## 5. Conclusion

The propagation of finite-amplitude plane waves in a cylindrical air-filled tube has been investigated between 500 and 3000 Hz for levels of 140–160 dB, in the case of weakly nonlinear propagation. The analysis separates cumulative effects which increase with propagation distance and lead to important distortion of the signal, and non cumulative effects which depend on the order of  $M$  and  $Sh$ . In order to simplify the resolution, non cumulative effects are neglected: the accuracy of the theoretical results may therefore be of order  $M$  and  $Sh$ . This theory is valid as long as a shock has not formed and for any boundary conditions (the wave needs not be purely propagating or stationary).

The experimental findings confirm the theoretical predictions developed in this paper. Experiments are performed up to 152 dB (the limit of the electro-acoustic source), and errors remain of order of 0.1 dB on the fundamental and the harmonic number 2. Notice that the highest sound levels of the experiments correspond to  $M \sim 10^{-2}$ : neglected non cumulative effects are therefore of order of 1% (0.1 dB), corresponding to the order of magnitude of the discrepancy between the predictions and the experiments.

## Acknowledgement

The authors thank R. Burvingt, F. Coulouvrat and V. Gusev for useful discussions.

**Appendix**

**A1. Setting of non linear equations of propagation**

**A1.1. Main acoustic field equations**

**A1.1.1. Non dimensional equations**

The conservation laws (1), (2) and (3) are written in cylindrical coordinates. The angular coordinate is ignored. Dimensionless variables defined in the main acoustic field are inserted.  $\gamma$  is the specific heat ratio for a gas.

The mass conservation law becomes:

$$\frac{\partial \rho_a}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( (1 + M\rho_a)u_a \right) + (1 + M\rho_a)Sh \frac{1}{r_1} \frac{\partial}{\partial r_1} (r_1 v_a) + \frac{M}{Re} v_a \frac{\partial \rho_a}{\partial r_{b2}} = 0. \tag{A1}$$

The axial component of the momentum conservation law is:

$$(1 + M\rho_a) \frac{\partial u_a}{\partial t} + (1 + M\rho_a)M \cdot \left( u_a \frac{\partial u_a}{\partial x} + \frac{1}{Re} v_a \frac{\partial u_a}{\partial r_{b2}} \right) + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial P_a}{\partial x} = \left( \frac{1}{Re} \right)^2 \frac{\partial u_a^2}{\partial r_{b2}^2} + \frac{Sh}{Re} \frac{1}{r_1} \frac{\partial u_a}{\partial r_{b2}} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\eta}{\mu} + \frac{4}{3} \right) \frac{\partial^2 u_a}{\partial x^2} + \frac{Sh}{Re} \left( \frac{\eta}{\mu} + \frac{1}{3} \right) \frac{1}{r_1} \frac{\partial}{\partial r_1} \left( r_1 \frac{\partial v_a}{\partial x} \right) \tag{A2}$$

and the radial component is:

$$(1 + M\rho_a) \frac{\partial v_a}{\partial t} + (1 + M\rho_a)M \cdot \left( u_a \frac{\partial v_a}{\partial x} + Sh v_a \frac{\partial v_a}{\partial r_1} \right) + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial P_a}{\partial r_{b2}} = Sh^2 \left( \frac{\eta}{\mu} + \frac{4}{3} \right) \frac{\partial}{\partial r_1} \left( \frac{1}{r_1} \frac{\partial}{\partial r_1} (r_1 v_a) \right) + \frac{1}{Re} \left( \frac{\eta}{\mu} + \frac{1}{3} \right) \frac{\partial^2 u_a}{\partial r_{b2} \partial x} + \left( \frac{1}{Re} \right) \frac{\partial^2 v_a}{\partial x^2}. \tag{A3}$$

Coming from the energy conservation, the equation of entropy is:

$$\frac{1}{\gamma} (1 + M\rho_a) (1 + MT_a) \cdot \left( \left\langle \frac{\partial S_a}{\partial t} \right\rangle + M u_a \left\langle \frac{\partial S_a}{\partial x} \right\rangle + \frac{1}{Re} M v_a \left\langle \frac{\partial S_a}{\partial r_{b1}} \right\rangle \right) = \frac{1}{(\gamma-1)Pr} \left( \left( \frac{1}{Re} \right)^2 \frac{\partial^2 T_a}{\partial r_{b2}^2} + \frac{Sh}{Re} \frac{1}{r_1} \frac{\partial T_a}{\partial r_{b2}} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 T_a}{\partial x^2} \right) + \frac{M}{Re} \left( \frac{\eta}{\mu} + \frac{4}{3} \right) \left( \frac{\partial u_a}{\partial x} \right)^2 + \frac{M}{Re^2} \left( \left( \frac{\partial v_a}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_a}{\partial r_{b2}} \right)^2 \right) + \frac{MSh}{Re} \left( \left( \frac{\eta}{\mu} - \frac{2}{3} \right) \frac{\partial u_a}{\partial x} \left( \frac{\partial v_a}{\partial r_1} + \frac{1}{r_1} \frac{\partial (r_1 v_a)}{\partial r_1} \right) \right) + \frac{MSh^2}{Re} \left( 2 \left( \frac{\partial v_a}{\partial r_1} \right)^2 + \left( \frac{\eta}{\mu} - \frac{2}{3} \right) \frac{\partial v_a}{\partial r_1} \frac{1}{r_1} \frac{\partial (r_1 v_a)}{\partial r_1} \right).$$

Gas is perfect:

$$(1 + MP_a) = (1 + M\rho_a)(1 + MT_a), \tag{A5}$$

therefore  $P_a = \rho_a + T_a + M\rho_a T_a. \tag{A6}$

According to the state principle, the local thermodynamic state is fixed by any two independent thermodynamic variables. It implies for a perfect gas:

$$dS_a = \left( \frac{\gamma}{\gamma-1} \right) \frac{dT_a}{1 + MT_a} - \frac{dP_a}{1 + MP_a} \tag{A7}$$

or

$$dS_a = - \left( \frac{\gamma}{\gamma-1} \right) \frac{d\rho_a}{1 + M\rho_a} + \left( \frac{1}{\gamma-1} \right) \frac{dP_a}{1 + MP_a}. \tag{A8}$$

**A1.1.2. Leading orders**

The equation of entropy is written at leading order:

$$\frac{1}{\gamma} \left\langle \frac{\partial S_a}{\partial t} \right\rangle = \frac{1}{(\gamma-1)Pr} \left( \frac{1}{Re} \right) \frac{\partial^2 T_a}{\partial x^2}.$$

Variation of the entropic term is of order  $1/Re$  in the main acoustic field. This is the adiabatic hypothesis valid up to the order 2 (order 0, 1 and 2 on  $M$  and  $Sh$ ) which leads to (using (A7)):

$$\left( \frac{\gamma}{\gamma-1} \right) \frac{dT_a}{1 + MT_a} = \frac{dP_a}{1 + MP_a} + O\left( \frac{1}{Re} \right), \tag{A9}$$

as well as

$$(1 + MP_a) = (1 + M\rho_a)^\gamma + O\left( \frac{1}{Re} \right) \tag{A10}$$

and

$$\frac{\partial P_a}{\partial x} = \gamma(1 + M\rho_a)^{\gamma-1} \frac{\partial \rho_a}{\partial x} + O\left( \frac{1}{Re} \right). \tag{A11}$$

From the equations (A2) and (A3) ((A3) divided by  $(1 + M\rho_a)$ ), we get an expansion in small parameters  $M$  and  $Sh$ . Order 0 and 1 on  $M$  and  $Sh$  leads to dimensionless conservation of mass and momentum:

$$\frac{\partial \rho_a}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( (1 + M\rho_a)u_a \right) + Sh \frac{1}{r_1} \frac{\partial}{\partial r_1} (r_1 v_a) = O\left( MSh, \frac{M}{Re} \right), \tag{A12}$$

$$\frac{\partial u_a}{\partial t} + M u_a \frac{\partial u_a}{\partial x} + \frac{1}{\gamma} \frac{1}{(1 + M\rho_a)} \frac{\partial P_a}{\partial x} = O\left( \frac{1}{Re} \right). \tag{A13}$$

Equation (A13) is written with variables  $u_a$ ,  $v_a$  and  $\rho_a$  with the help of (A10):

$$\frac{\partial u_a}{\partial t} + M u_a \frac{\partial u_a}{\partial x} + (1 + M\rho_a)^{\gamma-2} \frac{\partial \rho_a}{\partial x} = O\left( \frac{1}{Re} \right). \tag{A14}$$

Nonlinear equations in the main acoustic field are the set of two equations (A12) and (A14) depending on variables  $u_a$  and  $\rho_a$ , and on variable  $v_a$  which will be used to match the boundary layer. The matching term is  $(Sh(1/r_1)\partial(r_1 v_a)/\partial r_1)$  (of order  $Sh$ ):  $v_a$  will be calculated only at order 0. This justify the fact that boundary layers can be considered as linear in our conditions. The following calculations in the boundary layer are therefore given at order 0 only.

Notice that the only usefulness of equation (A4) is to check the coherence between the scales of  $\tilde{v}_a$  and radial variations of  $\tilde{P}_a$  (when writing (A4) at order 0).



A1.2. Boundary layer equations

A1.2.1. Non dimensional equations

The conservation laws (1), (2) and (3) are written in cylindrical coordinates. Dimensionless variables defined in the acoustic boundary layer are inserted.

The mass conservation law is:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_{ab}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( (1 + M \rho_{ab}) u_{ab} \right) \\ + \frac{\partial}{\partial r_{b1}} \left( (1 + M \rho_{ab}) v_{ab} \right) \\ + Sh \frac{1}{r_1} (1 + M \rho_{ab}) v_{ab} = 0. \end{aligned} \quad (A15)$$

The axial component of momentum conservation is

$$\begin{aligned} (1 + M \rho_{ab}) \frac{\partial u_{ab}}{\partial t} + (1 + M \rho_{ab}) M \\ \cdot \left( u_{ab} \frac{\partial u_{ab}}{\partial x} + v_{ab} \frac{\partial u_{ab}}{\partial r_{b1}} \right) + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial P_{ab}}{\partial x} \\ = \frac{\partial u_{ab}^2}{\partial r_{b1}^2} + Sh \frac{1}{r_1} \frac{\partial u_{ab}}{\partial r_{b1}} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\eta}{\mu} + \frac{4}{3} \right) \frac{\partial^2 u_{ab}}{\partial x^2} \\ + \frac{1}{Re} \left( \frac{\eta}{\mu} + \frac{1}{3} \right) \frac{\partial^2 v_{ab}}{\partial r_{b1} \partial x} + \left( \frac{Sh}{Re} \right) \left( \frac{\eta}{\mu} + \frac{1}{3} \right) \frac{1}{r_1} \frac{\partial v_{ab}}{\partial x}, \end{aligned} \quad (A16)$$

and the radial component is

$$\begin{aligned} (1 + M \rho_{ab}) \frac{\partial v_{ab}}{\partial t} + (1 + M \rho_{ab}) M \\ \cdot \left( u_{ab} \frac{\partial v_{ab}}{\partial x} + v_{ab} \frac{\partial v_{ab}}{\partial r_{b1}} \right) + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial P_{ab}}{\partial r_{b2}} \\ = \left( \frac{\eta}{\mu} + \frac{4}{3} \right) \left( \frac{\partial^2 v_{ab}}{\partial r_{b1}^2} + Sh \frac{1}{r_1} \frac{\partial v_{ab}}{\partial r_{b1}} - Sh^2 \frac{1}{r_1^2} v_{ab} \right) \\ + \left( \frac{\eta}{\mu} + \frac{1}{3} \right) \frac{\partial^2 u_{ab}}{\partial r_{b1} \partial x} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 v_{ab}}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (A17)$$

Coming from energy conservation, the equation of entropy is:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\gamma} (1 + M \rho_{ab}) (1 + M T_{ab}) \\ \cdot \left( \left\langle \frac{\partial S_{ab}}{\partial t} \right\rangle + M u_{ab} \left\langle \frac{\partial S_{ab}}{\partial x} \right\rangle + M v_{ab} \left\langle \frac{\partial S_{ab}}{\partial r_{b1}} \right\rangle \right) \\ = \frac{1}{(\gamma - 1) Pr} \left( \frac{\partial^2 T_{ab}}{\partial r_{b1}^2} + Sh \frac{1}{r_1} \frac{\partial T_{ab}}{\partial r_{b1}} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 T_{ab}}{\partial x^2} \right) \\ + M \left( \frac{\partial u_{ab}}{\partial r_{b1}} \right)^2 + \frac{M}{Re} \left( \left( \frac{\eta}{\mu} + \frac{4}{3} \right) \left( \frac{\partial u_{ab}}{\partial x} \right)^2 \right. \\ \left. + 2 \left( \frac{\partial v_{ab}}{\partial r_{b1}} \right)^2 + \left( \frac{\eta}{\mu} - \frac{2}{3} \right) \frac{\partial u_{ab}}{\partial x} \left( \frac{\partial v_{ab}}{\partial r_{b1}} \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{r_1} \frac{\partial (r_1 v_{ab})}{\partial r_1} \right) + \left( \frac{\eta}{\mu} - \frac{2}{3} \right) \frac{\partial v_{ab}}{\partial r_1} \left( \frac{1}{r_1} \frac{\partial (r_1 v_{ab})}{\partial r_{b1}} \right) \\ + M \left( \frac{1}{Re} \right)^2 \left( \frac{\partial v_{ab}}{\partial x} \right)^2. \end{aligned}$$

The perfect gas equation and thermodynamic bivarience are not changed from the main acoustic field equations (A5) and (A7).

A1.2.2. Order 0

The equation of entropy (A18) points out that variations of  $S$  are of order of unity in the boundary layer: isentropy would not be valid there.

We get an expansion in the small parameters  $M$ ,  $Sh$  and  $1/Re$ . At order 0, conservation laws (A15), (A16), (A18) and thermodynamic equations respectively lead to:

$$\frac{\partial \rho_{ab}}{\partial t} + \frac{\partial u_{ab}}{\partial x} + \frac{\partial v_{ab}}{\partial r_{b1}} = O(M, Sh), \quad (A18)$$

$$\frac{\partial u_{ab}}{\partial t} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial P_{ab}}{\partial x} = \frac{\partial^2 u_{ab}}{\partial r_{b1}^2} + O\left(M, Sh, \frac{1}{Re}\right), \quad (A19)$$

$$\frac{1}{\gamma} \frac{\partial S_{ab}}{\partial t} = \frac{1}{(\gamma - 1) Pr} \frac{\partial^2 T_{ab}}{\partial r_{b1}^2} + O\left(M, Sh, \frac{1}{Re}\right), \quad (A20)$$

$$dS_{ab} = \left( \frac{\gamma}{\gamma - 1} \right) dT_{ab} - dP_{ab} \quad (A21)$$

$$P_{ab} = \rho_{ab} + T_{ab} + O(M). \quad (A22)$$

This set of equations will be used to calculate the acoustic signal in the boundary layer verifying boundary conditions.

A1.3. Asymptotic matching

A1.3.1. Spatial averaging

Acoustic quantities are quasi-uniform across a section of the tube in the main acoustic field. To obtain a spatially one dimensional problem, equations in the main acoustic field are averaged across a section of the tube. The average is written:

$$\bar{X} = \frac{1}{S} \int \int_S X \, dS. \quad (A23)$$

Equations (A12) and (A14) become:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\rho}_a}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \overline{(1 + M \rho_a) u_a} \right) \\ + Sh \frac{1}{r_1} \frac{\partial}{\partial r_1} (r_1 v_a) = O\left(M Sh, \frac{M}{Re}\right), \\ \frac{\partial \bar{u}_a}{\partial t} + M u_a \frac{\partial u_a}{\partial x} \\ + \overline{(1 + M \rho_a)^{\gamma-2} \frac{\partial \rho_a}{\partial x}} = O\left(\frac{1}{Re}\right). \end{aligned} \quad (A24)$$

Stokes formula imply

$$\int \int_S \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r f) \, dS = \oint_{\Gamma} f \, dl. \quad (A25)$$

Applied to  $v_a$ , it leads to:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_1} \frac{\partial}{\partial r_1} (r_1 v_a) \, dS &= \frac{1}{S} \int \int_S \frac{1}{r_1} \frac{\partial}{\partial r_1} (r_1 v_a) \, dS \\ &= \frac{1}{S} \oint_{\Gamma} v_a \, dl = \frac{\Gamma}{S} v_L. \end{aligned} \quad (A26)$$

$v_L$  is the radial velocity component at the interface between the boundary layer and the main acoustic field.  $\Gamma$  is the dimensionless perimeter and  $S$  the dimensionless surface of a section.  $\Gamma/S$  depends on the geometry of the tube. For a cylinder:

$$\frac{\Gamma}{S} = \frac{\frac{1}{R}2\pi R}{\frac{1}{R^2}\pi R^2} = 2. \quad (A27)$$

$v_L$  is determined by asymptotic matching with the boundary layer. Variation of acoustic dimensionless variables across a section in the main field is of order  $1/(ReSh)$ . To replace the value at any point along a radius with the cross section average implies an approximation of order  $1/(ReSh)$ . Equations (A24) and (A24) can therefore be written:

$$\frac{\partial \rho_a}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}((1 + M\rho_a)u_a) + 2Shv_L = O\left(MSh, \frac{1}{ReSh}\right), \quad (A28)$$

$$\frac{\partial u_a}{\partial t} + Mu_a \frac{\partial u_a}{\partial x} + (1 + M\rho_a)^{\gamma-2} \frac{\partial \rho_a}{\partial x} = O\left(\frac{1}{ReSh}\right). \quad (A29)$$

### A1.3.2. The asymptotic matching velocity in the boundary layer

The aim of this paragraph is to write explicitly the velocity  $v_L$ , the asymptotic value of the radial component  $v_{ab}$  of the acoustic velocity in the boundary layer. Energy conservation (A20) and the thermodynamic equation (A21) lead to:

$$\frac{\partial T_{ab}}{\partial t} - \left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right) \frac{\partial P_{ab}}{\partial t} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 T_{ab}}{\partial r_{b1}^2} + O\left(M, Sh, \frac{1}{Re}\right) \quad (A30)$$

Let us write indexed acoustic values  $\rho_a, P_a, T_a$  and  $u_a$  averaged across a section in the main acoustic field (they depend only on  $x$  and  $t$ ), and let us expand variables as following:

$$\rho_{ab} = \rho_a + \rho_b, \quad T_{ab} = T_a + T_b, \\ P_{ab} = P_a + P_b, \quad u_{ab} = u_a + u_b.$$

Variation of  $P_a$  and  $P_{ab}$  is respectively across the section of the main acoustic field ( $1/ReSh$ ), and across the boundary layer ( $1/Re$ ) (according to dimensional analysis in part 1). It implies  $P_{ab} = P_a + O(1/ReSh)$  and equation of perfect gas (A5) is in the boundary layer:

$$P_a = \rho_a + \rho_b + T_a + T_b + O\left(M, \frac{1}{ReSh}\right)$$

and in the main acoustic field:

$$P_a = \rho_a + T_a + O(M),$$

therefore

$$\rho_b = -T_b + O\left(M, \frac{1}{ReSh}\right). \quad (A31)$$

The same arguments with equations of conservation of momentum (A13) and (A19) lead to, after a subtraction:

$$\frac{\partial u_b}{\partial t} = \frac{\partial^2 u_b}{\partial r_{b1}^2} + O\left(M, Sh, \frac{1}{ReSh}\right), \quad (A32)$$

and by addition of equations of entropy (A9) and (A20) (with the help of (A21)):

$$\frac{\partial T_b}{\partial t} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 T_b}{\partial r_{b1}^2} + O\left(M, Sh, \frac{1}{ReSh}\right), \quad (A33)$$

and by subtraction of equations of conservation of mass (A12) and (A18):

$$\frac{\partial \rho_b}{\partial t} + \frac{\partial u_b}{\partial x} + \frac{\partial v_{ab}}{\partial r_{b1}} = O(M, Sh). \quad (A34)$$

Equations (A32) and (A33) are solved taking into account the boundary layer conditions. In order to simplify the resolution,  $r_{b1}$  is replaced with  $r'$ , with  $r'=0$  at the tube wall and positive inside:

$$r' = \frac{1}{\xi}(R - \bar{r}) = \frac{R}{\xi} - r_{b1}.$$

These conditions are at  $r' = 0$ :

$$u_b = -u_a, \quad T_b = -T_a, \quad (A35)$$

and according to the asymptotic matching method, for  $r' \rightarrow \infty$

$$u_b \rightarrow 0, \quad T_b \rightarrow 0. \quad (A36)$$

Equations (A32), (A33) and (A34) are converted in  $\omega$ -space to be solved.

The solutions of the equations (A32) and (A33) are:

$$u_b = -u_a(x, \omega) \exp(-\sqrt{i\omega}r') + O\left(M, Sh, \frac{1}{ReSh}\right), \quad (A37)$$

$$T_b = -T_a(x, \omega) \exp(-\sqrt{i\omega}\sqrt{Pr}r') + O\left(M, Sh, \frac{1}{ReSh}\right). \quad (A38)$$

Equation (A34) is:

$$i\omega\rho_b + \frac{\partial u_b}{\partial x} + \frac{\partial v_{ab}}{\partial r_{b1}} = O(M, Sh). \quad (A39)$$

Using (A37) and (A38), an integration on  $r_{b1}$  of equation (A34) leads to:

$$v_{ab} = \frac{\gamma-1}{\sqrt{Pr}} \frac{(-1)}{\sqrt{i\omega}} \frac{\partial u_a}{\partial x} \left( \exp(-\sqrt{i\omega}\sqrt{Pr}r') - 1 \right) + \frac{(-1)}{\sqrt{i\omega}} \frac{\partial u_a}{\partial x} \left( \exp(-\sqrt{i\omega}r') - 1 \right) + O\left(M, Sh, \frac{1}{ReSh}\right). \quad (A40)$$

The velocity  $v_L$  is the asymptotic value of  $v_{ab}$  at  $r' \rightarrow \infty$ . Expressed with  $r_{b1}$  instead of  $r'$  and in  $t$ -space, the result is

equivalent to that obtained by Chester [12] (\* is the convolution product):

$$v_L = -\left(1 + \frac{\gamma - 1}{\sqrt{Pr}}\right) \frac{\partial u_a}{\partial x} * \frac{1}{\sqrt{\pi t}} + O\left(M, Sh, \frac{1}{ReSh}\right). \quad (\text{A41})$$

This velocity can be written in the equivalent following form:

$$v_L = -\left(1 + \frac{\gamma - 1}{\sqrt{Pr}}\right) \frac{\partial^{-1/2}}{\partial t^{-1/2}} \left[ \frac{\partial u_a}{\partial x} \right] + O\left(M, Sh, \frac{1}{ReSh}\right). \quad (\text{A42})$$

### A1.3.3. Nonlinear equations of propagation

Equations (A28), (A29) and (A41) are a set of three equations with three variables. To replace the velocity  $v_L$  in the equation (A28) leads to the two following equations with only two variables  $u_a$  and  $\rho_a$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_a}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} ((1 + M\rho_a)u_a) \\ - 2Sh \left(1 + \frac{\gamma - 1}{\sqrt{Pr}}\right) \frac{\partial u_a}{\partial x} * \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \\ = O\left(MSh, Sh^2, \frac{1}{ReSh}\right), \end{aligned} \quad (\text{A43})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_a}{\partial t} + Mu_a \frac{\partial u_a}{\partial x} \\ + (1 + M\rho_a)^{\gamma-2} \frac{\partial \rho_a}{\partial x} = O\left(\frac{1}{ReSh}\right). \end{aligned} \quad (\text{A44})$$

### References

- [1] G. Kirschhoff: Über den Einfluss der Wärmeleitung in einem Gas auf die Schallbewegung [in german]. *Poggendorfen Annalen* **134** (1868) 177–193.
- [2] G. Zwickker, C. Kosten: *Sound absorbing materials*. Elsevier, Amsterdam, 1949.
- [3] D. G. Crighton: Nonlinear acoustics. – In: *Modern Methods in analytical acoustics (lecture notes)*. Springer-Verlag, London, 1992, 648–670.
- [4] S. Makarov, M. Ochmann: Nonlinear and thermoviscous phenomena in acoustics, Part II. *Acustica* **83** (1997) 197–222.
- [5] A. Hirschberg, J. Gilbert, R. Msallam, A. P. J. Wijnands: Shock waves in trombones. *J. Acoust. Soc. Am.* **99** (1996) 1754–1758.
- [6] J. Gilbert, J. F. Petiot: Brass instruments, some theoretical and experimental results. *Proceedings of the Institut of Acoustics, ISMA 97, Edinburgh, 1997*.
- [7] G. B. Whitham: On the propagation of weak shock waves. *J. Fluid Mech.* **1** (1956) 290–318.
- [8] V. P. Kuznetsov: Equations of nonlinear acoustics. *Sov. Phys. Acoust.* **19** (1971) 467–470.
- [9] D. T. Blackstock: Nonlinear acoustics (theoretical). – In: *American Institute of Physics Handbook*. Mac Graw Hill, New York, 1972, 3rd ed. Chap. 3n, 183–205.
- [10] O. V. Rudenko, S. I. Soluyan: *Theoretical foundations of nonlinear acoustics*. Consultant Bureau, New York, 1977.
- [11] F. Coulouvrat: On the equations of nonlinear acoustics. *J. d'Acoustique* **5** (1992) 321–359.
- [12] W. Chester: Resonant oscillations in closed tubes. *J. Fluid. Mech.* **18** (1964) 44–64.
- [13] D. F. Pernet, R. C. Peyne: Non-linear propagation of signals in air. *J. Sound Vib.* **17** (1971) 383–396.
- [14] N. Sugimoto: Burgers equations with a fractional derivative; hereditary effects on nonlinear acoustic waves. *J. Fluid Mech.* **225** (1991) 631–651.
- [15] W. Chester: Resonant oscillations of a gas in an open-ended tube. *Proc. R. Soc. Lond.* **A377** (1981) 449–497.
- [16] D. T. Blackstock: Generalized Burgers equations for plane waves. *J. Acoust. Soc. Am.* **77** (1985) 2050–2053.
- [17] D. B. Cruikshank: Experimental investigation of finite-amplitude acoustics oscillations in a closed tube. *J. Acoust. Soc. Am.* **52** (1972) 1024–1036.
- [18] B. Sturtevant: Nonlinear gas oscillations in pipes, Part 2. Experiments. *J. Fluid Mech.* **63** (1974) 97–120.
- [19] R. G. Zaripov, M. A. Ilhamov: Non-linear gas oscillations in a pipe. *J. Sound Vib.* **46** (1976) 245–257.
- [20] L. Gaete-Garreton, J. A. Gallego-Juarez: Propagation of finite-amplitude ultrasonic waves in air – II. Plane waves in a tube. *J. Acoust. Soc. Am.* **73** (1983) 768–773.
- [21] D.-Y. Maa, K. Liu: Nonlinear standing waves: Theory and experiments. *J. Acoust. Soc. Am.* **98** (1995) 2753–2763.
- [22] L. Menguy, P. Durrieu, J. Gilbert: Propagation acoustique non-linéaire dans les guides cylindriques, théorie et résultats expérimentaux préliminaires [text in french]. *Actes du 13ième Congrès Français de Mécanique, Poitiers, 1997*. Vol.1, 11–14.
- [23] L. D. Landau, E. M. Lifschitz: *Fluid mechanics*. Pergamon, 1959.
- [24] G. K. Batchelor: *An introduction to fluid dynamics*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1970.
- [25] J. H. M. Disselhorst, L. van Wijngaarden: Flow in the exit of open pipes during acoustic resonance. *J. Fluid Mech.* **99** (1980) 293–319.
- [26] A. D. Pierce: Nonlinear effects in sound propagation. – In: *Acoustics – an introduction to its physical principles and application*. Acoust. Soc. Am., New York, 1989, 566–615.

## 3.3 La présence d'un écoulement laminaire

### 3.3.1 L'état de l'art et objectif

La propagation acoustique à niveau sonore élevé engendre des déformations de l'onde, comme étudié au chapitre précédent. Mais les calculs reposent sur un certain nombre d'hypothèses, notamment l'absence d'écoulement moyen. Or les sons intenses sont parfois provoqués par des sources aéro-acoustiques (sirène, souffle de l'instrumentiste par exemple). Ces dernières sont aussi à l'origine d'un écoulement moyen de vitesse généralement du même ordre de grandeur que la vitesse acoustique. Il s'agit ici d'étudier l'influence de ce flux moyen sur l'onde acoustique.

L'étude proposée dans cette partie se limite à l'écoulement stationnaire et laminaire. Seuls les effets de l'écoulement sur l'onde acoustique sont abordés. La perturbation créée par l'onde sur l'écoulement (vent acoustique étudié précédemment) n'est pas prise en compte. Les interactions peuvent être séparées en deux catégories : les effets de convection et les effets de réfraction. La convection modifie entre autres la longueur d'onde. La réfraction n'est présente que dans des milieux pour lesquels la vitesse d'écoulement n'est pas homogène (phénomène identique à l'optique pour un milieu d'indice variable).

#### La convection

Les conséquences de la convection sont multiples. Tout d'abord, le nombre d'onde est modifié. En effet, la vitesse de propagation  $c_0$  dans un liquide au repos vient s'ajouter à la vitesse du fluide proprement dit. Par exemple, une onde plane progressive de pulsation  $\omega$  se propageant dans la même direction et le même sens qu'un écoulement de vitesse homogène  $u_0$  est accélérée, se propageant à la vitesse  $c_e = c_0 + u_0$ . Son nombre d'onde devient alors :

$$k = \frac{\omega}{c_e} = \frac{\omega/c_0}{1 + u_0/c_0} = \frac{k_0}{1 + u_0/c_0}. \quad (3.20)$$

La longueur d'onde augmente ou diminue donc suivant les directions respectives, mais la fréquence de l'onde émise par une source fixe et perçue par un observateur fixe ne subit aucun changement (seule la phase à un instant  $t$  est translatée par l'écoulement). Toutefois, cet effet peut avoir une grande importance dans un guide d'onde de longueur finie. En effet, en bout de tube, la phase de l'onde aller est modifiée par la présence de l'écoulement. Pour une impédance en bout du tube imposée, l'onde réfléchie est donc différente. C'est dans ce cadre que se situe l'étude qui suit.

Par contre, si la source se déplace par rapport à l'observateur, cet effet appelé Doppler se traduit par une modification de la fréquence (Lighthill [70]) perçue par l'observateur. Cette situation n'est pas étudiée ici.

L'effet Doppler n'est pas le seul effet de convection. Un changement de volume de la source peut aussi se produire. Une source se rapprochant de l'observateur voit son volume effectif augmenter durant l'émission tandis que les

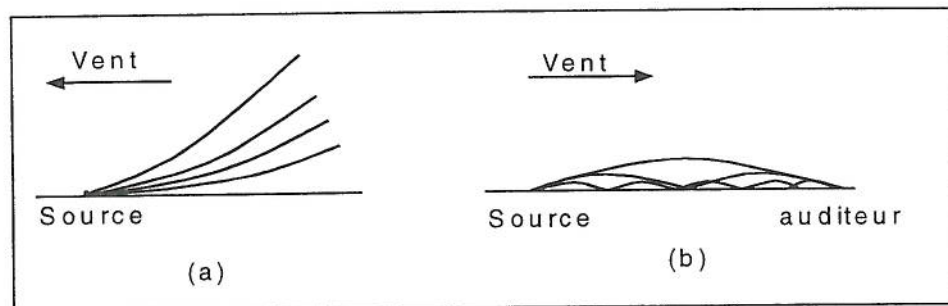


FIG. 3.4: Effet du vent sur la propagation du son au voisinage du sol. (a) vent contraire; (b) vent portant.

autres dimensions ne sont pas modifiées (voir Lighthill [67]). L'intensité du son est ainsi modifiée.

### La réfraction

Les gradients de vitesse d'écoulement ont également une influence sur la trajectoire de l'onde acoustique. Cette dernière subit des réfractions du fait de la présence de stratifications dans l'océan ou des gradients de vitesse des vents, pouvant créer par exemple des zones d'ombre, ou des zones de son plus intense. En effet, la célérité de l'onde acoustique augmente ou diminue selon la vitesse d'écoulement (voir paragraphe précédent). Il se produit alors un phénomène analogue aux rayons optiques traversant des milieux d'indice  $n$  variable, où la célérité de l'onde est inversement proportionnelle à l'indice  $n$  du milieu.

Une manifestation concrète de ce phénomène se produit par le son dit porté par le vent. Un son est perçu distinctement quand le vent se déplace de la source vers l'auditeur, et est très peu audible si le sens du vent est inversé. C'est en réalité le gradient du vent (dans la couche limite créée par la présence du sol) qui ramène le son vers le bas dans le cas favorable (créant ainsi un guide d'onde), et envoie le son "vers le ciel" dans le cas défavorable (voir figure 3.4). Des expériences effectuées avec des vents sans gradient montrent que le son perçu par l'auditeur est identique quel que soit le sens du vent.

Ce phénomène est le même dans un guide d'onde acoustique. En supposant le profil d'écoulement parabolique dans un tube cylindrique, une onde acoustique se propageant dans le sens de l'écoulement est déviée vers les parois par la présence du gradient de l'écoulement moyen (voir schéma 3.4). Au contraire, si le sens de propagation de l'onde est inverse de celui de l'écoulement, le son a tendance à se focaliser vers le centre du conduit. Dans le cas d'un mode plan par exemple, cet effet se traduit par une distorsion de la forme d'onde.

## Le guide d'onde

L'étude proposée ici se limite aux guides d'ondes. Les effets de l'écoulement  $y$  sont les suivants. Tout d'abord, la convection peut jouer un rôle très important modifiant l'onde réfléchie comme décrit dans le paragraphe précédent. C'est l'effet prédominant. Ensuite, l'écoulement peut être à l'origine d'une atténuation supplémentaire, venant s'ajouter aux pertes de couche limite. Celle-ci est particulièrement marquée si l'écoulement est turbulent.

Aucune description mathématique complète n'a pu être proposée concernant les interactions entre le son et un écoulement turbulent dans un guide, du fait de la complexité de l'étude. Quelques théories portant sur l'étude de l'atténuation peuvent toutefois être citées. Ingard & Singhal [52] en 1974, puis Ronneberg & Ahrens [105] en 1977 ont déterminé des équations importantes et les ont confirmées expérimentalement. Toute quantité est décomposée en trois parties : la partie stationnaire (moyenne temporelle), les fluctuations dues aux perturbations cohérentes (l'onde acoustique), et la fluctuation turbulente.

De nombreuses études ont été effectuées en considérant que l'écoulement est laminaire, soit uniforme sur toute la section du tube, soit cisailé. Les travaux proposés en partie 3.3.2 se situent dans ce cadre. Les effets d'un écoulement uniforme sur la transmission et la génération du son ont été étudiées en 1971 par Morfey [80]. Une étude expérimentale a été proposée par Ingard [51] en 1973.

Une revue bibliographique détaillée, une étude récente dans le cadre de la théorie modale ainsi que des expériences ont été effectuées par Pagneux [89].

## Cadre de l'étude

L'objectif visé ici n'est absolument pas de fournir une théorie complète prenant en compte l'écoulement du fluide dans le tube. L'étude est toujours centrée autour des effets non linéaires de propagation. La présence éventuelle d'un écoulement n'est considérée que comme une perturbation. Le développement théorique en partie 3.3.2 ne propose qu'une adaptation des équations de Burgers classiques afin de prendre en compte la présence d'un écoulement et aboutit à l'équation de Burgers généralisée (3.19).

De nombreuses hypothèses sont effectuées.

- L'écoulement est lent (au maximum nombre de Mach associé à l'écoulement de l'ordre de  $10^{-2}$ , à ne pas confondre avec le nombre de Mach acoustique), et donc considéré comme une perturbation.

- L'écoulement est supposé stationnaire et sans turbulence. Aucun effet de pertes supplémentaires n'est envisagé. Ceci limite les vitesses d'écoulement à environ  $1m/s$ , (voir 3.3.2). En réalité, cette hypothèse est difficile à vérifier, en particulier pour les sources aéro-acoustiques utilisées ici. En effet, les sources aéro-acoustiques produisent un écoulement moyen dont la vitesse est du même ordre de grandeur que la vitesse acoustique, typiquement quelques mètres par seconde dans les conditions expérimentales dans lesquelles nous nous plaçons. Toutefois, les résultats expérimentaux présentés dans cette partie ne semblent pas trop affectés par une éventuelle présence de turbulence dans cette gamme

de vitesse.

- L'onde est supposée plane. La théorie développée est restreinte à l'onde unidimensionnelle : les effets de diffraction ne sont pas pris en compte.

- Enfin, les émetteurs et récepteurs sont fixes. Il n'y a donc pas d'effet Doppler.

En conclusion, seuls les effets convectifs sont envisagés : la vitesse de phase est plus grande, donc la réflexion est affectée en bout de tube, et donc l'onde stationnaire s'établissant est modifiée.

La démarche adoptée ici est la suivante. L'écoulement moyen est supposé imposé par la source, c'est à dire non modifié par l'onde acoustique. L'étude de son influence sur l'onde acoustique est prise en compte par le biais des équations de base, les grandeurs liées à l'écoulement étant considérées comme des constantes imposées et non des variables. En réalité, l'onde acoustique et le flux moyen sont couplés et, pour une résolution exacte, il serait nécessaire de partir des équations de base complètes avec écoulement moyen, et d'en déterminer à la fois l'onde acoustique et l'écoulement moyen, connaissant les conditions aux frontières. Ceci aboutit en pratique à des équations de résolution analytique trop complexe.

### 3.3.2 Des équations de base aux équations de Burgers généralisées

Tout ce paragraphe 3.3.2 est une extension du travail précédemment effectué et exposé dans la publication à Acta Acustica "Weakly Nonlinear Gas Oscillations in Air-Filled Tubes; Solutions and Experiments" en partie 3.2 de ce document. Il est donc nécessaire de s'y reporter pour ce qui suit.

#### Hypothèses et analyse dimensionnelle

Les hypothèses de base sont les mêmes que dans la partie 3.2 sans écoulement. Les équations de base (1), (2) et (3)<sup>2</sup> sont conservées, ainsi que la géométrie. Les ordres de grandeur des différents paramètres sont les mêmes, ainsi que les nombres sans dimension et leurs ordres de grandeur relatifs. Les variables sans dimension introduites sont identiques. La vitesse d'écoulement moyen est supposée du même ordre de grandeur que la vitesse acoustique. L'écriture sans dimension de la vitesse totale s'effectue donc comme suit dans le flux acoustique principal et la couche limite :

$$\begin{array}{ll}
 \tilde{u} & \text{devient} & \tilde{u} = c_0(Mu_a + MU_{éc}), \\
 & \text{respectivement} & \tilde{u} = c_0(Mu_{ab} + MU_{éc}); \\
 \tilde{v} & \text{devient} & \tilde{v} = c_0\left(\frac{M}{\sqrt{Re}}v_a + MV_{éc}\right), \\
 & \text{respectivement} & \tilde{v} = c_0\left(\frac{M}{\sqrt{Re}}v_{ab} + MV_{éc}\right).
 \end{array}$$

---

<sup>2</sup> Les numérotations des équations sont celles de l'article.

$U_{éc}$  et  $V_{éc}$  sont les composantes longitudinale et axiale respectivement de la vitesse de l'écoulement moyen.

A noter que  $M$  est défini ici toujours à partir de la vitesse acoustique, et non de la vitesse d'écoulement, ce qui n'est pas habituel mais ne pose aucun problème puisque ces deux vitesses sont supposées être du même ordre de grandeur. Cela évite de manipuler deux nombres de Mach différents.

### L'écoulement moyen

**Les hypothèses** L'écoulement moyen est supposé préétabli, c'est-à-dire que le signal acoustique vient s'y ajouter sans perturber ce premier (par hypothèse).

Pour l'écoulement moyen, les hypothèses suivantes sont effectuées.

(1) Le fluide est incompressible.

Thompson [117] estime que cette hypothèse est bien vérifiée tant que la vitesse d'écoulement est inférieure à  $Mach = 0.3$  (soit environ  $100m/s$ ). Ceci est en pratique largement vérifié dans les conditions expérimentales qui suivent.

(2) Le régime est laminaire.

D'après Padet [88], la turbulence apparaît pour  $Re_f = \hat{U}D/\nu = 2000$  valable pour un tube à section circulaire, avec  $D$  le diamètre du tube,  $\hat{U}$  la vitesse débitante, et  $\nu$  la viscosité cinématique. Ceci correspond pour un tube de 3cm de rayon à une vitesse d'écoulement de  $1m/s$ ! La non présence de turbulence est donc l'hypothèse la plus restrictive; elle peut dans certaines configurations être mise à défaut.

(3) Le régime est établi.

En partant d'un écoulement de vitesse uniforme à l'entrée du tube, la zone d'établissement  $L_e$  à l'entrée du tube pour que les couches limites se rejoignent est donnée par Padet [88] dans le cas d'un régime laminaire :

$$L_e \simeq 0.06 \frac{D^2}{\nu} \hat{U}. \quad (3.21)$$

Ceci représente quelques dizaines de centimètres pour une vitesse de l'ordre de  $1m/s$  et un rayon de quelques centimètres. Cette remarque est utile pour les expériences réalisées : le premier microphone sera placé à au moins un mètre ou deux de la source.

**La résolution** La résolution dans le cas laminaire est classique (voir par exemple Padet [88]) et aboutit à l'écoulement de Poiseuille :

$$\tilde{U}_{éc}(\tilde{r}) = \frac{2D_e}{\pi R^4} (R^2 - \tilde{r}^2), \quad (3.22)$$

$$\tilde{V}_{éc}(\tilde{r}) = 0 \quad (3.23)$$

avec  $D_e$  le débit et  $R$  le rayon du tube, ce qui s'écrit sous forme adimensionnée :

$$U_{éc}(r_1) = \frac{2D_e}{\pi R^2 M c_0} (1 - r_1^2). \quad (3.24)$$



L'ordre de grandeur de  $\partial/\partial\tilde{r}$  appliqué à  $\tilde{U}_{éc}$  est donc  $1/R$ . Il est utile de noter que  $\tilde{V}_{éc}$  ne dépend pas de  $x$ .

### L'obtention des équations de propagation

**Dans le flux principal** Les équations (A1) à (A6) (voir annexe A de la publication en partie 3.2) du flux principal sont adaptées en ajoutant les termes d'écoulement. Les équations (A12) et (A13) sont alors modifiées et deviennent :

$$\frac{\partial\rho_a}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}((1 + M\rho_a)(u_a + U_{éc})) + Sh\frac{1}{r_1}\frac{\partial}{\partial r_1}(r_1v_a) = O(MSh, \frac{M}{Re}), \quad (3.25)$$

$$\frac{\partial u_a}{\partial t} + M(u_a + U_{éc})\frac{\partial u_a}{\partial x} + (1 + M\rho_a)^{\gamma-2}\frac{\partial\rho_a}{\partial x} = O(\frac{1}{Re}, MSh, Sh^2). \quad (3.26)$$

Les calculs intermédiaires ne sont pas donnés ici, car les expressions sont très lourdes et sans difficulté (mêmes types de calculs qu'en annexe de l'article en partie 3.2).

Il est intéressant de constater que le profil des vitesses n'intervient pas dans les équations (3.25) et (3.26) à l'ordre 1 par rapport à la vitesse acoustique  $u_a$ , mais seulement à l'ordre 2 (ce sont les termes en  $MSh$  et  $Sh^2$ ).

**Dans la couche limite** Un traitement similaire à la partie 3.2 est effectué avec les équations de couche limite sans dimension (A15) et suivantes. Il est aisé de vérifier que les nouveaux termes introduits sont d'ordre supérieur et qu'en conséquent la vitesse  $v_L$  obtenue est inchangée :

$$v_L = -\left(1 + \frac{\gamma-1}{\sqrt{Pr}}\right)\frac{\partial u_a}{\partial x} * \frac{1}{\sqrt{\pi t}} + O(M, Sh, \frac{1}{ReSh}). \quad (3.27)$$

\* est le produit de convolution. Cette vitesse peut s'écrire sous la forme équivalente suivante :

$$v_L = -\left(1 + \frac{\gamma-1}{\sqrt{Pr}}\right)\frac{\partial^{-1/2}}{\partial t^{-1/2}}\left[\frac{\partial u_a}{\partial x}\right] + O(M, Sh, \frac{1}{ReSh}). \quad (3.28)$$

**Le raccordement** Le raccordement couche limite-flux principal est effectué à l'aide des relations précédentes : les équations (3.25) et (3.26) sont moyennées transversalement dans le flux principal, puis le raccordement est effectué à l'aide de la vitesse  $v_L$ . Le système d'équations obtenu est (au lieu de (5) et (6) partie 3.2 sans écoulement) :

$$\frac{\partial\rho_a}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}((1 + M\rho_a)(u_a + \bar{U}_{éc})) - 2Sh\left(1 + \frac{\gamma-1}{\sqrt{Pr}}\right)\frac{\partial u_a}{\partial x} * \frac{1}{\sqrt{\pi t}} = \quad (3.29)$$

$$O(MSh, Sh^2, \frac{1}{ReSh}),$$

$$\frac{\partial u_a}{\partial t} + M(u_a + \bar{U}_{éc})\frac{\partial u_a}{\partial x} + (1 + M\rho_a)^{\gamma-2}\frac{\partial\rho_a}{\partial x} = O(MSh, Sh^2, \frac{1}{ReSh}). \quad (3.30)$$

$\bar{U}_{éc}$  est la vitesse moyenne d'écoulement à travers la section du tube.

**L'équation de Chester** En introduisant la variable

$$c = (1 + M\rho_a)^{\frac{\gamma-1}{2}} \quad (3.31)$$

une équation de "Chester généralisée" est obtenue :

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} + (Mu_a + M\bar{U}_{éc} \pm c) \frac{\partial}{\partial x} \right] \left( Mu_a \pm \frac{2c}{\gamma-1} \right) = \quad (3.32)$$

$$\pm 2MSh \left( 1 + \frac{\gamma-1}{\sqrt{Pr}} \right) \frac{\partial u_a}{\partial x} * \frac{1}{\sqrt{\pi t}} + O \left( M^2Sh, MSh^2, \frac{M}{ReSh} \right)$$

où \* représente le produit de convolution.

L'équation de Chester [18] classique (sans écoulement) est semblable à l'équation (3.32) dans laquelle  $\bar{U}_{éc} = 0$ . L'effet de l'écoulement est donc pris en compte par l'ajout d'un terme supplémentaire. Il est intéressant de souligner que seule la vitesse moyenne de l'écoulement intervient. Le profil de la vitesse n'a à cet ordre aucune influence. Les gradients de vitesse (et donc le profil) interviennent en  $MSh$  et  $Sh^2$  par rapport à l'acoustique linéaire, et sont donc d'ordre supérieur.

**L'application des échelles multiples** L'application de la MEM aux équations (3.29) et (3.30) aboutit à l'ordre le plus bas à l'équation de propagation classique linéaire pour une onde plane sans perte et sans écoulement. L'ordre suivant permet d'obtenir des équations de type Burgers généralisées de la forme suivante :

$$\frac{\partial q^+}{\partial \sigma} = (q^+ + \bar{U}_{éc}) \frac{\partial q^+}{\partial \theta^+} - \frac{T}{\epsilon} \frac{\partial q^+}{\partial \theta^+} * \frac{1}{\sqrt{\pi \theta^+}}; \quad (3.33)$$

$$\frac{\partial q^-}{\partial \sigma} = -(q^- - \bar{U}_{éc}) \frac{\partial q^-}{\partial \theta^-} + \frac{T}{\epsilon} \frac{\partial q^-}{\partial \theta^-} * \frac{1}{\sqrt{\pi \theta^-}}; \quad (3.34)$$

$$\text{avec } \sigma = \frac{\gamma+1}{2} Mx, \quad \epsilon = \frac{\gamma+1}{2} M, \quad T = Sh \left( 1 + \frac{(\gamma-1)}{\sqrt{Pr}} \right), \quad q_0 = \frac{2}{\gamma+1} \bar{U}_{éc},$$

et

$$\begin{aligned} u_{1a} &= q^+ - q^-, \\ \rho_{1a} &= q^+ + q^-, \\ P_{1a} &= \gamma(q^+ + q^-). \end{aligned}$$

La prise en compte de l'écoulement intervient à l'ordre 1 en M et non 0. Cela revient à négliger *localement* l'effet de l'écoulement moyen, et de ne prendre en compte que ses effets cumulatifs au bout d'une distance de propagation suffisante, par l'intermédiaire du terme  $q_0 \partial q / \partial \theta$ .

### 3.3.3 La résolution des équations de Burgers

Les nouvelles équations de Burgers généralisées n'ont aucune solution connue. La méthode numérique de résolution utilisée reste inchangée, et se généralise sans difficulté. La résolution s'effectue dans le domaine fréquentiel après décomposition en série de Fourier du signal. Seul un terme supplémentaire intervient dans les équations. La décomposition en série de Fourier de ce dernier est la suivante, pour une onde aller simple :

$$q_0 \frac{\partial q}{\partial \theta} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-nq_0 b_n(\sigma) \sin n\theta + nq_0 a_n(\sigma) \cos n\theta). \quad (3.35)$$

Ceci permet d'écrire le système d'équations suivant pour une onde aller simple :

$$\begin{cases} \frac{\partial a_n}{\partial \sigma} = n \left( \sum_{p=1}^{n-1} \left( \frac{a_p a_{n-p}}{2} - \frac{b_p b_{n-p}}{2} \right) - \sum_{p=n+1}^{+\infty} (a_{p-n} a_p + b_p b_{p-n}) \right) \\ \quad - nq_0 b_n - \frac{T}{\epsilon} \sqrt{\frac{\pi}{2}} (a_n - b_n), \\ \frac{\partial b_n}{\partial \sigma} = n \left( \sum_{p=1}^{n-1} \left( \frac{a_p b_{n-p}}{2} + \frac{b_p a_{n-p}}{2} \right) + \sum_{p=n+1}^{+\infty} (b_{p-n} a_p - b_p a_{p-n}) \right) \\ \quad + nq_0 a_n - \frac{T}{\epsilon} \sqrt{\frac{\pi}{2}} (a_n + b_n). \end{cases}$$

Ces séries de Fourier sont tronquées à N harmoniques. La résolution est identique au cas sans écoulement.

Pour une onde progressive simple, une résolution sur  $\sigma$  par pas  $\Delta\sigma$  (méthode des différences finies) connaissant la condition initiale  $\sigma = 0$  est utilisée, à l'aide d'une méthode de type prédiction-correction. La prédiction est la méthode d'ordre 1 classique appelée Euler, et la correction est effectuée avec la méthode d'ordre 2 dite de Adams Moulton. Des précisions sur cette méthode de résolution sont données en annexe F.

Pour l'onde stationnaire, une décomposition onde aller et onde retour est effectuée. Celles-ci sont obtenues en effectuant une série d'allers et retours. La convergence est obtenue à l'aide de la méthode de Newton Raphson (voir l'annexe F).

### 3.3.4 Les expériences

Les expériences<sup>3</sup> sont réalisées à l'aide d'un tube cylindrique (contenant de l'air) d'environ 8 à 9 mètres de longueur et de diamètre interne 30mm. L'extrémité est laissée ouverte pour permettre le passage de l'écoulement. Le tube est composé de différentes sections connectées entre elles par des collerettes. Certaines de ces sections contiennent un orifice à l'intérieur duquel un microphone peut être monté. Cinq microphones de type PCB 116A sont répartis tout le long du tube pour mesurer la pression acoustique interne. Les microphones sont fixés de manière à affleurer la surface interne du tube. Les deux microphones extrêmes sont distants de 6,7m.

<sup>3</sup>Ces expériences ont été réalisées au Laboratoire de Dynamique des Fluides de l'Université Technologique de Eindhoven, avec la collaboration de P. Durrieu et A. Hirschberg.

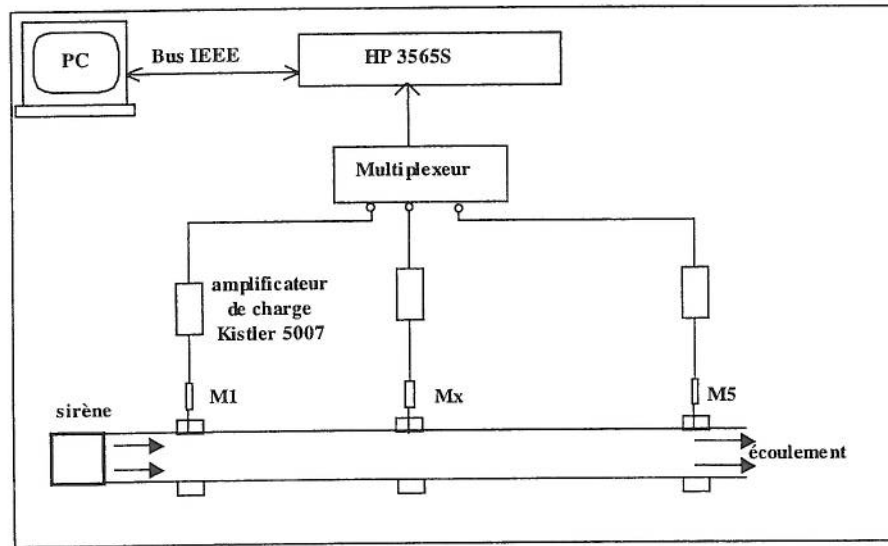


FIG. 3.5: dispositif expérimental (avec écoulement)

La calibration est effectuée en tube fermé (terminaison parfaitement rigide) sans écoulement et à faible niveau sonore. La calibration de chaque microphone est réalisée pour chacune des fréquences utilisées (fondamental et harmoniques) à l'aide d'un microphone de référence fixé sur la terminaison rigide du dernier tube. Ce tube fermé est d'abord placé proche du premier microphone (à  $1,5m$  de la source), puis progressivement derrière les microphones suivants. Le tube dans sa configuration finale (pour les mesures) est donc assemblé au fur et à mesure de la calibration, le tube fermé étant déplacé après chaque calibration.

Les mesures sont effectuées à l'aide d'une source (sirène), permettant d'obtenir des niveaux sonores jusqu'à  $165dB$ , et l'extrémité du tube est laissée ouverte pour permettre l'écoulement (vitesse d'écoulement jusqu'à  $15m/s$ ). Le premier microphone est placé assez loin ( $1,5m$ ) de la source pour limiter au maximum les turbulences et obtenir un régime d'écoulement établi (voir hypothèses paragraphe 3.3.2). Le niveau sonore de la source est progressivement augmenté d'une faible à une forte amplitude, en augmentant la vitesse d'écoulement dans la sirène, les deux paramètres étant liés. Pour chaque niveau sonore de la source, l'amplitude et la phase des premiers harmoniques du signal (typiquement 3) sont mesurées avec un maximum de précision pour chaque microphone à l'aide d'un amplificateur de charge Kistler 5007. L'acquisition et le traitement des signaux sont réalisés avec un frontal d'acquisition HP 3565S. La vitesse d'écoulement également est mesurée à l'aide d'un débitmètre placé en amont de la sirène.

Un schéma du dispositif est donné en figure 3.5. Des renseignements complémentaires sont donnés dans la référence [78].

La vitesse d'écoulement est progressivement augmentée de  $1m/s$  à  $15m/s$ , le

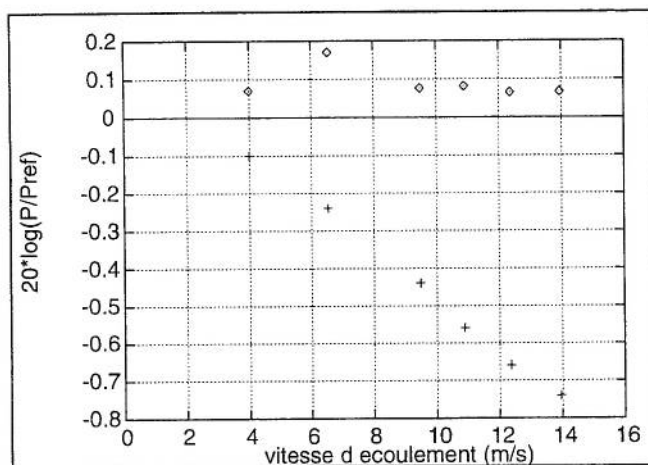


FIG. 3.6: Amplitude du premier harmonique de la pression acoustique en M3. La pression de référence  $P_{ref}$  est obtenue par la théorie faiblement non linéaire avec pertes de couche limite et écoulement (trait plein horizontal) en fonction de la vitesse moyenne d'écoulement (en m/s). ( $\diamond$ ) résultats expérimentaux comparés à  $P_{ref}$ ; (+) résultats théoriques calculés à partir de la théorie faiblement non linéaire avec pertes de couche limite mais sans écoulement.

niveau sonore augmentant quasiment proportionnellement. Il est utile de noter qu'à cette vitesse, l'hypothèse de l'écoulement non turbulent est probablement non valide. La fréquence du signal est de  $144Hz$ , ce qui est très largement inférieur à  $3300Hz$ , fréquence de coupure en dessous de laquelle l'approximation de l'onde plane reste valide. Des microphones notés M2 à M5 sont situés respectivement à  $0,263m$ ,  $3,276m$ ,  $4,790m$ , et  $6,745m$  du premier microphone M1. Pour chaque niveau sonore, la vitesse d'écoulement est mesurée, ainsi que les phases et les amplitudes des trois premiers harmoniques du signal acoustique au niveau de tous les microphones. L'onde étant stationnaire, une méthode à deux microphones est utilisée : les mesures effectuées en M1 et M5 servent de référence (conditions aux limites dans le modèle). Une évaluation du signal au niveau des microphones intermédiaires M2, M3 et M4 est effectuée à l'aide du modèle développé en partie 3.2 *sans* écoulement, et est comparée avec le nouveau modèle développé ici *avec* écoulement. Enfin, ces résultats sont confrontés aux mesures effectuées.

Quelques résultats du microphone M3 sont représentés sur la figure 3.6. Huit mesures sont effectuées. La pression de référence notée "Pref" est la pression du fondamental du signal obtenu à l'aide du modèle de propagation non linéaire avec pertes de couche limite et avec écoulement, et admettant en tant que conditions aux limites les pressions mesurées au niveau de M1 et de M5. La pression réellement mesurée en M3 est comparée à cette référence, puis la pression calculée par le modèle sans écoulement est également comparée à cette pression

de référence. La différence entre mesures et modèle sans écoulement peut également être visualisée sur la figure 3.6 (écart "carrés / croix"). Le même travail est effectué pour tous les microphones intermédiaires et à différentes fréquences voisines de 100 à 200 Hz. Les résultats obtenus sont à chaque fois semblables. L'écart entre mesures et modèle non linéaire avec écoulement sur l'amplitude du fondamental est généralement inférieur à 0.2 dB (de l'ordre de 1 à 2%), alors que les théories non linéaires avec et sans écoulement diffèrent jusqu'à 10% pour les vitesses d'écoulement les plus élevées ( $\sim 15 m/s$ ).

## 3.4 Le pavillon

### 3.4.1 Etude bibliographique

L'étude se limite ici aux guides de section lentement variable.

Dans le cadre de l'acoustique non linéaire, les premières recherches ont été effectuées sur des pavillons exponentiels dès les années 1930 (Rocard [103], Goldstein & McLachlan [42]). Les modèles développés sont simples, et permettent d'estimer l'amplitude de l'onde prenant aussi bien en compte la variation de l'amplitude due à la section variable du tube, que la distorsion liée aux niveaux sonores élevés. Les ondes réfléchies par les discontinuités ou l'extrémité du tube sont par contre exclues.

Il faut attendre les années 1960 pour voir émerger des modèles décrivant de manière plus quantitative l'amplitude de l'onde, mais dans un premier temps dans le domaine de l'acoustique linéaire. La résolution classique s'effectue à l'aide de l'équation de l'onde plane des pavillons (unidimensionnelle), généralement appelée équation de Webster (voir par exemple Eisner [35] en 1967, ou Campos [16] en 1984) :

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \tilde{P}_a}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \tilde{P}_a}{\partial \tilde{x}^2} - \left[ \frac{1}{A(\tilde{x})} \frac{dA(\tilde{x})}{d\tilde{x}} \right] \frac{\partial \tilde{P}_a}{\partial \tilde{x}} = 0.$$

De très bons résultats sont généralement obtenus. Toutefois, les conditions aux limites ne peuvent pas être vérifiées sur les parois. En effet, la condition de paroi rigide impose que les lignes isobares soient perpendiculaires à ces parois, ce qui n'est pas possible pour une onde plane et une paroi non droite (voir figure 3.7). De même, la courbure des fronts d'onde présente dans un guide à section variable n'est pas décrite. Des adaptations de la méthode ont ensuite été proposées. En 1972 par exemple, Alfredson [1] suggère de discrétiser le guide à section continûment variable par une suite de sections droites (voir figure 3.8). Plus récemment, Pagneux *et coll.* [90]-[91] proposent une description plus fine du champ acoustique interne à partir d'une méthode multimodale.

Les premiers modèles quantitatifs dans le cadre de l'acoustique non linéaire ne tardèrent pas à se développer à leur tour. Ils font généralement appel à une équation de type Burgers généralisée qui permet de prendre en compte à la fois

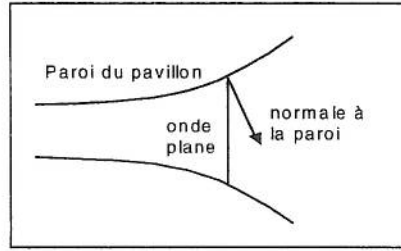


FIG. 3.7: La condition limite du mur rigide impose aux lignes isobares d'être orthogonales à la paroi.

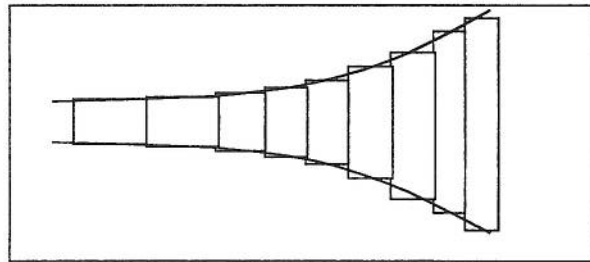


FIG. 3.8: Méthode des escaliers successifs

les pertes volumiques, la variation de la section du tube, et la déformation non linéaire :

$$\frac{\partial \tilde{u}_a}{\partial \tilde{x}} - \frac{\gamma + 1}{2c_0^2} \tilde{u}_a \frac{\partial \tilde{u}_a}{\partial \tilde{\tau}} + \frac{1}{2} \tilde{u}_a \frac{d}{d\tilde{x}} \ln A(\tilde{x}) = \frac{\delta}{2c_0^3} \frac{\partial^2 \tilde{u}_a}{\partial \tilde{\tau}^2},$$

avec  $\delta = \nu(4/3 + \eta/\mu + (\gamma - 1)/\text{Pr})$  et  $A(\tilde{x})$  l'aire de la section du tube en  $\tilde{x}$ . Les autres notations sont définies en introduction de la thèse.

Il semblerait que ce soit Lighthill [68] en 1956 qui ait déterminé pour la première fois cette équation de Burgers. En 1974 Leibovich & Seebass [65] ont obtenu à nouveau ce type d'équation en utilisant la méthode des échelles multiples. D'autres auteurs l'introduisent également, comme Blackstock [11] en 1972, Whitham [124] en 1974, puis Rudenko & Soluyan [106] ou Crighton *et coll.* [27]. Toutefois, cette équation de Burgers généralisée n'admet pas de solution exacte connue. Crighton & Scott [26], puis Nimmo & Crighton en [84] proposent des méthodes de résolution asymptotiques de cette équation dans certains cas particuliers. Dans toutes ces publications, les résolutions ne prennent pas en compte les pertes de couche limite, et se limitent à l'onde progressive. Chester [20] en 1994 prend en compte les pertes de couche limite et considère l'onde stationnaire. Il propose une méthode de résolution par perturbation, mais dans le cas particulier d'une tube fermé. Il développe pour cela sa théorie de 1964 en tube de section constante (Chester [18]). Plus récemment, des travaux prolongeant

le travail de Rocard [103] ont été développés par Béquin & Morfey [5]. Enfin, des méthodes de résolution basées sur des analyses numériques sont proposées (voir par exemple Young-Doo & Yang-Hann [125] en tube fermé, ou Msallam [82] pour l'application au trombone).

Les modèles précédemment cités ne prennent pas en compte à la fois la distorsion de l'onde liée aux niveaux sonores élevés, la variation d'amplitude liée à la variation de la section, les pertes de couche limites et l'onde réfléchie en bout de tube, le tout dans une configuration autre qu'un tube fermé par une paroi rigide. C'est pour répondre à ce problème (les pavillons étant généralement ouverts) qu'une adaptation du modèle exposé en section 3.2 est proposée dans les paragraphes qui suivent, ainsi qu'une confrontation expérimentale de ce modèle.

### 3.4.2 Des équations de base aux équations de Burgers généralisées

#### Les hypothèses

- Les hypothèses suivantes sont posées :
- l'écoulement moyen est supposé nul ;
  - la section du tube  $A$  varie lentement ( $1/\lambda(d\ln(R^2)/d\tilde{x}) \ll 1$  avec  $R$  le rayon du tube en  $\tilde{x}$  et  $\lambda$  longueur d'onde) ;
  - l'onde est quasi-plane.

#### L'obtention des équations de propagation

Le calcul de la section 3.2 est repris. Les équations de conservation locales restent inchangées, ainsi que leur écriture sans dimension et leur simplification, aussi bien dans la couche limite que dans le flux principal.

**Dans le flux acoustique principal** Dans le flux acoustique principal, les équations de conservation locales de la matière et de la quantité de mouvement sont respectivement rappelées :

$$\frac{\partial \rho_a}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} ((1 + M\rho_a)u_a) + Sh \frac{1}{r_1} \frac{\partial}{\partial r_1} (r_1 v_a) = O\left(MSh, \frac{M}{Re}\right), \quad (3.36)$$

$$\frac{\partial u_a}{\partial t} + Mu_a \frac{\partial u_a}{\partial x} + (1 + M\rho_a)^{\gamma-2} \frac{\partial \rho_a}{\partial x} = O\left(\frac{1}{Re}\right). \quad (3.37)$$

L'étape suivante consiste à effectuer une moyenne de ces équations sur un section  $A$  du tube en  $x$ . Tant que la section reste constante, il est possible d'écrire ( $\bar{f}$  est la moyenne de  $f$  sur une section) :

$$\overline{\frac{\partial}{\partial x} f(x)} = \frac{\partial}{\partial x} \overline{f(x)}.$$



Cette écriture n'est plus possible quand la section  $A$  varie en fonction de  $x$  :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \overline{f(x)}}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{A(x)} \iint_A f(x) dS \right] & (3.38) \\
&= -\frac{1}{A^2(x)} \frac{dA(x)}{dx} \iint_A f(x) dS + \frac{1}{A(x)} \iint_A \frac{\partial f(x)}{\partial x} dS \\
&= -\frac{1}{A(x)} \frac{dA(x)}{dx} \overline{f(x)} + \frac{\partial}{\partial x} \overline{f(x)}.
\end{aligned}$$

Les équations (3.36) et (3.37) sont moyennées transversalement en tenant compte de la relation (3.38). Compte tenu du fait que l'on peut confondre les variables acoustiques en n'importe quel point du tube d'abscisse  $x$  avec leur moyenne transversale en  $x$  au premier ordre en  $M$  ou  $Sh$  (car leur variation sur une section est d'ordre de grandeur  $1/(\text{Re}Sh)$ ; voir paragraphe 3.2), (3.36) et (3.37) deviennent respectivement à l'ordre 1 :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho_a}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} ((1 + M\rho_a)u_a) + \frac{1}{A(x)} \frac{dA(x)}{dx} (1 + M\rho_a)u_a & & (3.39) \\
+ Sh \frac{1}{r_1} \frac{\partial}{\partial r_1} (r_1 v_a) = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_a}{\partial t} + M u_a \frac{\partial u_a}{\partial x} + (1 + M\rho_a)^{\gamma-2} \frac{\partial \rho_a}{\partial x} & & (3.40) \\
+ \frac{1}{A(x)} \frac{dA(x)}{dx} [M u_a^2 + (1 + M\rho_a)^{\gamma-2} \rho_a] = 0.
\end{aligned}$$

Or l'hypothèse d'une section lentement variable se traduit par :

$$\frac{1}{A(x)} \frac{dA(x)}{dx} \ll 1,$$

quantité qui peut être considérée du premier ordre (comme  $M$  ou  $Sh$ ), et donc notée :

$$M \left( \frac{1}{A(X)} \frac{dA(X)}{dX} \right) \ll 1,$$

avec  $X = Mx$ . L'expression entre parenthèses est d'ordre de grandeur de l'unité.

Remarque :  $A(X)$  intervient à la fois au numérateur et au dénominateur dans l'expression ci-dessus ; garder  $A$  avec dimension ou l'écrire sans dimension ne change pas l'écriture des équations. Cette remarque reste valable pour tous les calculs qui suivent.

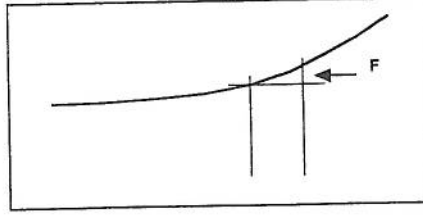


FIG. 3.9: force  $F$  s'appliquant sur le pavillon

Les équations (3.36) et (3.37) peuvent être simplifiées en ne conservant que les termes d'ordre 0 et 1 en  $M$  ou  $Sh$  :

$$\frac{\partial \rho_a}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} ((1 + M\rho_a)u_a) + M \frac{1}{A(X)} \frac{dA(X)}{dX} u_a + Sh \overline{\frac{1}{r_1} \frac{\partial}{\partial r_1} (r_1 v_a)} = 0, \quad (3.41)$$

$$\frac{\partial u_a}{\partial t} + M u_a \frac{\partial u_a}{\partial x} + (1 + M\rho_a)^{\gamma-2} \frac{\partial \rho_a}{\partial x} + M \frac{1}{A(X)} \frac{dA(X)}{dX} \rho_a = 0. \quad (3.42)$$

Plusieurs commentaires s'imposent à propos de ces deux équations. La variation de la section du tube a pour effet d'ajouter un terme dans l'équation de conservation de la matière (3.41). Celui-ci s'interprète aisément : la conservation du flux de matière à travers une section a pour effet de diminuer la vitesse si la section augmente, et inversement. Un terme supplémentaire apparaît également dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement (3.42) :

$$M \frac{1}{A(X)} \frac{dA(X)}{dX} \rho_a.$$

Ce dernier représente la force notée  $\overline{F}$  sur la figure 3.9 qui n'est pas supposée s'appliquer à la tranche de gaz considérée, la réaction provenant du pavillon lui-même (Voir Bruneau [13]).

**Le raccordement** Enfin, il reste à effectuer le raccordement de l'équation (3.41) en notant que :

$$\overline{\frac{1}{r_1} \frac{\partial}{\partial r_1} (r_1 v_a)} = 2 \frac{R_o}{R(x)} v_L.$$

Cette relation est obtenue à l'aide de la formule de Stokes de manière identique à la section 3.2. L'écriture sans dimension s'effectue à l'aide d'un rayon constant  $R_0$ , par exemple le rayon du pavillon en entrée. Le nombre de cisaillement  $Sh$  doit être défini également à l'aide de ce rayon  $R_0$ .  $R(x)$  est le rayon du tube en  $x$ . Compte tenu de toutes ces remarques, il vient alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_a}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} ((1 + M\rho_a)u_a) + M \frac{1}{A(x)} \frac{dA(x)}{dX} u_a \\ - 2Sh \frac{R_o}{R(x)} \left(1 + \frac{\gamma-1}{\sqrt{Pr}}\right) \frac{\partial u_a}{\partial x} * \frac{1}{\sqrt{\pi t}} = 0, \end{aligned} \quad (3.43)$$

$$\frac{\partial u_a}{\partial t} + M u_a \frac{\partial u_a}{\partial x} + (1 + M\rho_a)^{\gamma-2} = 0. \quad (3.44)$$

\* représente le produit de convolution.

**L'équation de Chester généralisée** En introduisant la variable

$$c = (1 + M\rho_a)^{\frac{\gamma-1}{2}}, \quad (3.45)$$

une équation de type "Chester généralisée" est obtenue (déterminée sous une forme équivalente par Chester [20] en 1994 avec pertes volumiques, mais sans les pertes de couche limite) :

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial}{\partial t} + (M u_a \pm c) \frac{\partial}{\partial x} \right] \left( M u_a \pm \frac{2c}{\gamma-1} \right) = \\ \pm 2MSh \frac{R_o}{R(x)} \left(1 + \frac{\gamma-1}{\sqrt{Pr}}\right) \frac{\partial u_a}{\partial x} * \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \mp M^2 \frac{1}{A(x)} \frac{dA(x)}{dX} u_a. \end{aligned} \quad (3.46)$$

La présence d'une section variable se traduit par l'ajout d'un terme supplémentaire (dernier terme du membre de droite de l'équation (3.46)).

**L'application des échelles multiples** L'application de la MEM aux équations (3.43) et (3.44) aboutit à l'ordre le plus bas à l'équation de propagation classique linéaire pour une onde plane sans perte et de section constante. L'ordre suivant permet d'obtenir des équations de type Burgers généralisées de la forme suivante :

$$\frac{\partial q^+}{\partial \sigma} = q^+ \frac{\partial q^+}{\partial \theta^+} - \frac{T}{\epsilon} \frac{R_o}{R(\sigma)} \frac{\partial q^+}{\partial \theta^+} * \frac{1}{\sqrt{\pi \theta^+}} - \frac{q^+}{2} \frac{d \ln(A)}{d \sigma}; \quad (3.47)$$

$$\frac{\partial q^-}{\partial \sigma} = -q^- \frac{\partial q^-}{\partial \theta^-} + \frac{T}{\epsilon} \frac{R_o}{R(\sigma)} \frac{\partial q^-}{\partial \theta^-} * \frac{1}{\sqrt{\pi \theta^-}} + \frac{q^-}{2} \frac{d \ln(A)}{d \sigma}; \quad (3.48)$$

$$\text{avec } \sigma = \frac{\gamma+1}{2} Mx, \quad \epsilon = \frac{\gamma+1}{2} M, \quad T = Sh \left(1 + \frac{\gamma-1}{\sqrt{Pr}}\right),$$

et

$$\begin{aligned} u_{1a} &= q^+ - q^-, \\ \rho_{1a} &= q^+ + q^-, \\ P_{1a} &= \gamma(q^+ + q^-). \end{aligned}$$

Les équations de Burgers généralisées (3.47) et (3.48) peuvent s'écrire encore sous la forme :

$$q \frac{\partial q^\pm}{\partial \sigma} \mp q^\pm \frac{\partial q^\pm}{\partial \theta^\pm} = \mp \frac{T}{\epsilon} \frac{R_0}{R(\sigma)} \frac{\partial^{1/2} q^\pm}{\partial (\theta^\pm)^{1/2}} \mp q^\pm \frac{\partial \ln(R)}{\partial \sigma}. \quad (3.49)$$

Le rayon  $R(\sigma)$  indifféremment être ou non écrit sans dimension.

### 3.4.3 La résolution des équations de Burgers généralisées

Les nouvelles équations de Burgers généralisées n'ont aucune solution connue. La méthode numérique de résolution utilisée reste inchangée, et se généralise sans difficulté. La résolution s'effectue dans le domaine fréquentiel après décomposition en série de Fourier du signal. Seul un terme supplémentaire intervient dans les équations. La décomposition en série de Fourier de ce dernier est la suivante, pour une onde aller simple :

$$q \frac{\partial \ln(R)}{\partial \sigma} = \left[ \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n(\sigma) \sin n\theta + b_n(\sigma) \cos n\theta) \right] \left( \frac{\partial \ln(R)}{\partial \sigma} \right). \quad (3.50)$$

Ceci permet d'écrire le système d'équations suivant pour une onde aller simple :

$$\begin{cases} \frac{\partial a_n}{\partial \sigma} = n \left( \sum_{p=1}^{n-1} \left( \frac{a_p a_{n-p}}{2} - \frac{b_p b_{n-p}}{2} \right) - \sum_{p=n+1}^{+\infty} (a_{p-n} a_p + b_p b_{p-n}) \right) \\ \quad - a_n \left( \frac{\partial \ln(R)}{\partial \sigma} \right) - \frac{T}{\epsilon} \frac{R_0}{R(\sigma)} \sqrt{\frac{n}{2}} (a_n - b_n) \\ \frac{\partial b_n}{\partial \sigma} = n \left( \sum_{p=1}^{n-1} \left( \frac{a_p b_{n-p}}{2} + \frac{b_p a_{n-p}}{2} \right) + \sum_{p=n+1}^{+\infty} (b_{p-n} a_p - b_p a_{p-n}) \right) \\ \quad - b_n \left( \frac{\partial \ln(R)}{\partial \sigma} \right) - \frac{T}{\epsilon} \frac{R_0}{R(\sigma)} \sqrt{\frac{n}{2}} (a_n + b_n) \end{cases}$$

Ces séries de Fourier sont tronquées à  $N$  harmoniques. La résolution est identique au cas section constante. Deux changements interviennent : tout d'abord, un terme est ajouté pour prendre en compte la variation de la section. Ensuite, il est nécessaire de réévaluer à chaque  $\sigma$  le terme de pertes visco-thermiques de couche limite en fonction du nouveau rayon  $R(\sigma)$ .

Pour une onde progressive simple, une résolution sur  $\sigma$  par pas  $\Delta\sigma$  (méthode des différences finies) connaissant la condition initiale  $\sigma = 0$  est utilisée, à l'aide d'une méthode de type prédiction-correction. La prédiction est la méthode d'ordre 1 classique appelée Euler, et la correction est effectuée avec la méthode d'ordre 2 dite de Adams Moulton.

Pour l'onde stationnaire, une décomposition onde aller et onde retour est effectuée. Celles-ci sont obtenues en effectuant une série d'allers et retours. La convergence est obtenue à l'aide de la méthode de Newton Raphson.

### 3.4.4 Les expériences

Les expériences sont réalisées à l'aide d'un pavillon exponentiel de  $300\text{mm}$  de longueur et de diamètre d'entrée  $D_0 = 49,2\text{mm}$ . Le rayon varie selon la relation

$$\tilde{R} = (D_0/2) \exp(1,56\tilde{x}).$$

$\tilde{x}$  est la distance sur l'axe du pavillon mesurée à partir de l'entrée de celui-ci. Un microphone B&K 1/8 pouce (type 4138) est utilisé sur un support mobile (tige de  $8\text{mm}$  de diamètre) le long de l'axe du pavillon. Cette dernière est fixée sur la table d'un robot de déplacement "un axe" (Charly Robot, C10). Ce robot permet d'effectuer des déplacements du microphone avec une très grande précision. Les signaux sont conditionnés par des amplificateurs de charge B&K (type 2609).

La source est un haut parleur à chambre de compression JBL modèle 2446H. Le haut parleur est placé le plus proche possible de l'entrée du pavillon, sans contact pour éviter les vibrations sur les parois. La fréquence et le niveau sonore du signal sinusoïdal est produit par un voltmètre vectoriel (type Stanford SR 850). Un schéma du dispositif expérimental est proposé figure 3.10; une description complémentaire de ce dispositif est proposée par Anfosso [3].

Pour un signal donné (fréquence et niveau sonore fixés), le microphone mesure la pression acoustique tous les  $5\text{ millimètres}$  depuis le voisinage de la source (entrée du pavillon) jusqu'à la sortie du pavillon. Pour chaque position, l'amplitude et la phase des trois premiers harmoniques sont mesurées par le voltmètre vectoriel (méthode de détection synchrone). Un programme HP BASIC permet de gérer le déplacement du microphone, via le robot 1-D, et l'acquisition des données issues du détecteur synchrone.

Une pression acoustique de  $1000\text{Hz}$  est produite par la source. Pour chaque série, deux mesures sont utilisées en tant que conditions aux limites dans le modèle. Les modèles linéaires et non linéaires (prenant en compte les pertes de couche limite ainsi que l'onde réfléchie) sont utilisés pour comparaison avec les mesures effectuées en tout point de l'axe du pavillon.

Une première série de mesure est représentée sur la figure 3.11 pour les deux premiers harmoniques (un agrandissement est proposé en figure 3.12 pour l'harmonique de rang 2). Les positions servant de références sont le premier point de mesure (le plus à gauche), et le 7ième (en partant de la gauche). Les mesures (losanges) sont comparées à la théories non linéaire (trait continu) et linéaire (trait pointillé). Dans tous les cas, les pertes de couche limite sont prises en compte.

Les deux théories linéaire et non linéaire donnent des résultats similaires en ce qui concerne le fondamental. Par contre, les effets de propagation non linéaire sont perceptibles sur l'harmonique de rang 2 (voir figure 3.12). La théorie non linéaire permet d'obtenir des résultats un peu plus proches des mesures que la théorie linéaire. Toutefois au delà de  $25\text{cm}$  pour le fondamental et  $20\text{cm}$  pour l'harmonique de rang 2, la théorie non linéaire s'éloigne des mesures. Des phénomènes non-linéaires localisés en sortie du pavillon, phénomènes ignorés dans notre modèle, pourraient être la cause du fort taux d'harmonique de rang

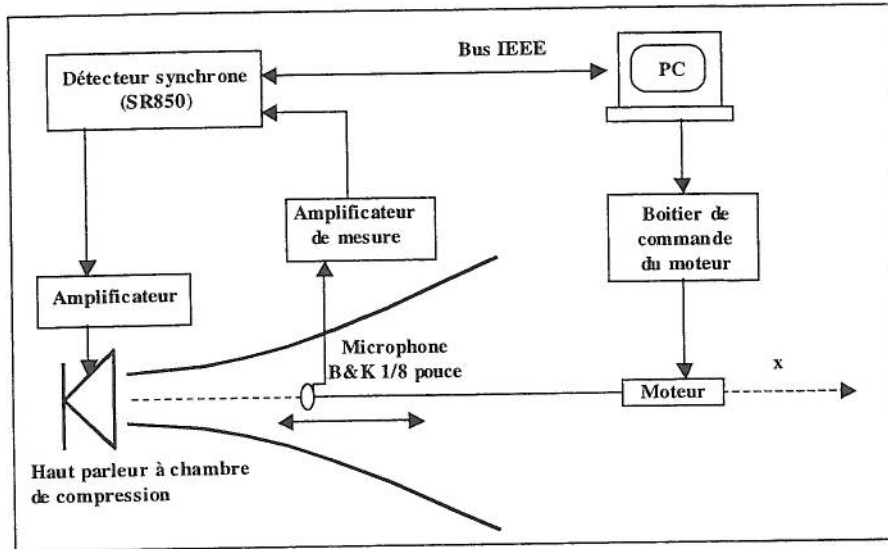


FIG. 3.10: Dispositif expérimental

2 dans le champ de pression après la position 0.22mm de la figure 3.12 (voir par exemple Disselhorst [30]).

Une autre série de mesures (figures 3.13 et 3.14) a été effectuée en plaçant une terminaison absorbante au bout du pavillon afin de limiter l'importance relative de l'onde réfléchie et les effets non linéaires localisés. Les résultats et conclusions obtenus sont sensiblement les mêmes que dans la série de mesures précédente. Les effets non linéaires de propagation ne se font pas sentir sur le fondamental, mais plutôt sur l'harmonique de rang 2. Toutefois, la théorie non linéaire, bien que permettant d'obtenir des résultats plus proches des mesures que la théorie linéaire, n'est pas pleinement satisfaisante : un écart théorie / expérience est visible au niveau des noeuds de pression de l'harmonique de rang 2. Parmi les explications possibles de ces écarts, l'hypothèse de l'onde plane peut être mise en cause et produit des erreurs systématiques, estimées par Béquin & Morfey [5].

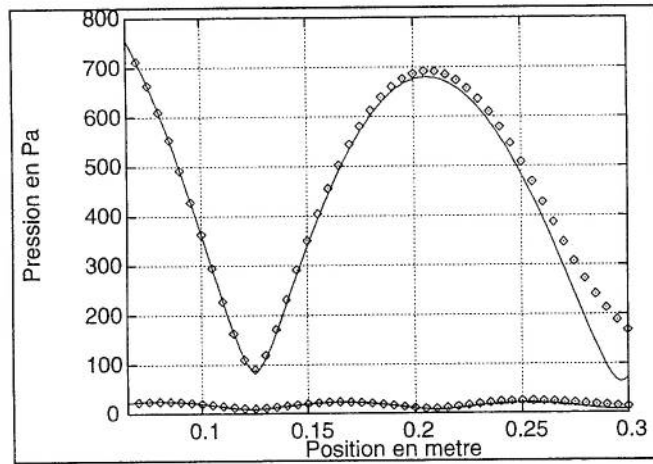


FIG. 3.11: Evolution de la pression acoustique du fondamental (courbe supérieure) et de l'harmonique de rang 2 le long de l'axe du pavillon (signal de 1000Hz) : mesures ( $\diamond$ ); théorie non linéaire avec pertes (—) et théorie linéaire avec pertes (- - -) (les deux théories se superposent pour le fondamental). Les microphones de référence sont la mesure en début de pavillon (le point le plus à gauche) et le 7ième point de mesure. Un agrandissement concernant l'harmonique de rang 2 est proposé ci-dessous.

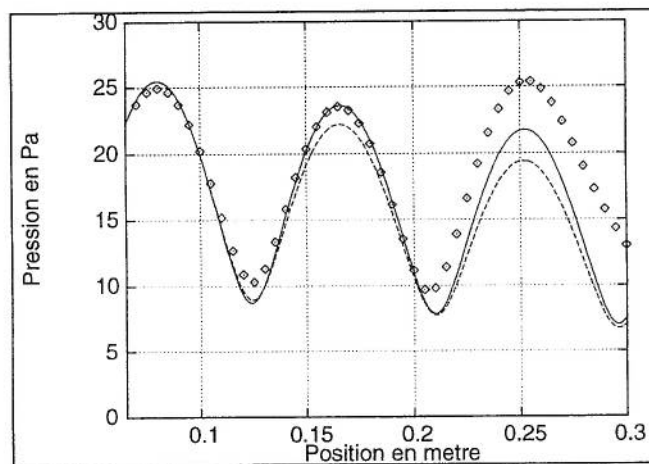


FIG. 3.12: Evolution de la pression acoustique de l'harmonique de rang 2 le long de l'axe du pavillon (signal de 1000Hz) : mesures ( $\diamond$ ), théorie non linéaire avec pertes (—); théorie linéaire avec pertes (- - -). Les points de référence sont la mesure en début de pavillon (le point le plus à gauche) et le 7ième point de mesure.

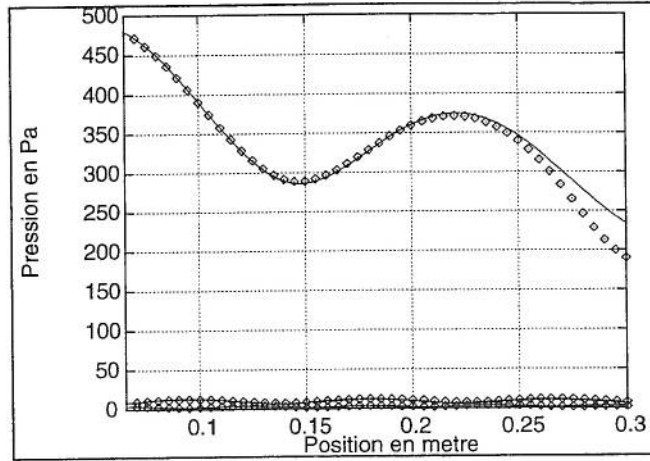


FIG. 3.13: Evolution de la pression acoustique du fondamental (courbe supérieure) et des harmoniques de rang 2 et 3 le long de l'axe du pavillon (signal de 1000Hz) : mesures ( $\diamond$ ), théorie non linéaire avec pertes (—) et théorie linéaire avec pertes (- - -) (les deux théories se superposent pour le fondamental). Les microphones de référence sont la mesure en début de pavillon (le point le plus à gauche) et le 10ième point de mesure. Un agrandissement permettant de visualiser les harmoniques de rang 2 et 3 est proposé ci-dessous.

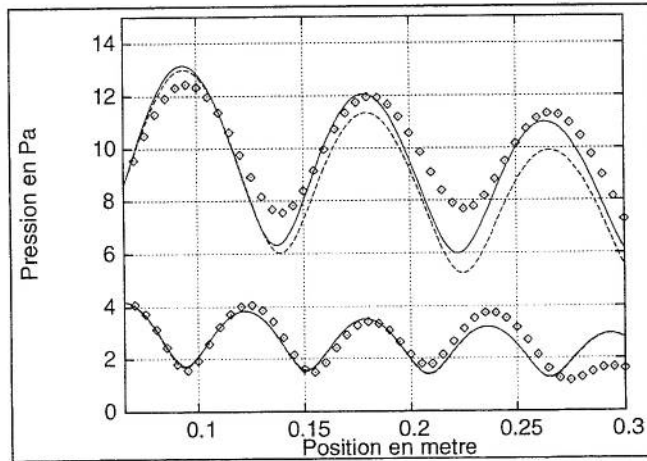


FIG. 3.14: Evolution de la pression acoustique des harmoniques de rang 2 (courbe supérieure) et de rang 3 le long de l'axe du pavillon (signal de 1000Hz) : mesures ( $\diamond$ ), théorie non linéaire avec pertes (—) ; théorie linéaire avec pertes (- - -). Les microphones de référence sont la mesure en début de pavillon (le point le plus à gauche) et le 10ième point de mesure.



## Chapitre 4

# Conclusion et perspectives

Divers phénomènes d'acoustique faiblement non linéaire en guide d'onde monodimensionnel ont été étudiés.

Tout d'abord le vent acoustique dans un guide d'onde cylindrique forme des tourbillons toroïdaux dans le cas d'une onde stationnaire. Ce phénomène est observé et étudié depuis plus d'un siècle. Les théories proposées ont été progressivement affinées, mais dans le cadre d'équations linéaires de l'écoulement. Or une analyse dimensionnelle a permis de mettre en évidence le fait que l'inertie de cet écoulement (termes convectifs dans les équations du vent acoustique) devient très rapidement important, même pour des vitesses aussi faibles que quelques millimètres par seconde. Un calcul aboutissant à des équations non linéaires décrivant l'écoulement ainsi qu'une méthode de résolution dans la géométrie particulière nous intéressant ont été proposées. Il apparaît que les lignes de courant subissent bien une distorsion du fait de l'inertie du fluide. Toutefois, la méthode de résolution proposée trouve ses limites pour des vitesses d'écoulement plus rapides (à cause de problèmes de convergence numérique dans la résolution des équations), ce qui n'a pas permis d'étudier des distorsions trop importantes. Il serait intéressant de proposer une autre méthode de résolution spécialement adaptée au plus forts écoulements, en partant des mêmes équations non linéaires.

D'un point de vue expérimental, la coopération en cours avec Dawn Rockliff et Murray Campbell du département de physique de l'Université d'Edimbourg a permis d'observer une distorsion des lignes de courant, notamment pour des nombres de Reynolds plus importants (de 5 à 10), sans pouvoir effectuer de comparaison quantitative. Il s'est avéré qu'en plus de la distorsion des lignes de courant liée à l'inertie du fluide, s'ajoute une autre distorsion dont l'effet est inverse. Celle-ci est due aux harmoniques supérieurs qui apparaissent dans le signal acoustique à niveau sonore élevé, notamment l'harmonique de rang 2. Il reste à comparer l'importance relative des deux distorsions venant en concurrence, en fonction des différentes configurations expérimentales. Il serait également intéressant d'observer la transition avec l'écoulement turbulent afin de cerner les limites de validité de ces équations non linéaires.

Il est apparu enfin que l'écoulement moyen créé reste très faible (toujours un ordre de grandeur en dessous du signal acoustique) et donc ne vient pas perturber à son tour le signal acoustique. Malgré l'incohérence apparente qu'il y a de supposer la vitesse du fluide sans valeur moyenne (donc sans écoulement) à niveau sonore élevé, il est toutefois raisonnable de négliger cet écoulement pour décrire la distorsion de l'onde acoustique, compte tenu de la précision recherchée; ceci constitue donc une hypothèse de départ pour l'étude de la seconde partie.

La seconde partie de l'étude a concerné la distorsion de l'onde à niveau sonore élevé dans le guide, sans écoulement moyen. Une attention particulière a été portée à l'étude de l'ordre de grandeur respectifs de chacun des termes intervenant dans les équations. Ceci a permis d'effectuer des simplifications notables dans le cadre de l'acoustique faiblement non linéaire, ce qui aboutit à des équations de Burgers généralisées. Cette étude a également permis de cerner le domaine de validité de la théorie. Il est apparu en particulier que deux ondes planes se croisant dans le guide peuvent être considérées comme indépendantes dans le cadre des hypothèses effectuées ( $M \ll 1$ ), malgré la non linéarité des équations décrivant ces phénomènes. Une méthode de résolution des équations de Burgers a ensuite été proposée dans le cas des régimes permanents périodiques. Son avantage et son originalité réside dans le fait qu'elle permet d'obtenir des résultats quelle que soit la source utilisée (périodique mais non nécessairement sinusoïdale) et quelle que soit la terminaison (tous les cas intermédiaires entre l'onde purement progressive et stationnaire sont accessibles). Une validation expérimentale a été effectuée, montrant un excellent accord avec les résultats théoriques pour les deux premiers harmoniques. Toutefois, un certain nombre d'hypothèses ont été effectuées et peuvent être discutées, comme par exemple l'hypothèse onde plane. Les modes supérieurs ont été négligés et pourraient être pris en compte. Ceci est apparu lors des expériences effectuées : la précision non satisfaisante obtenue sur les harmoniques de rang 3 (de fréquence parfois supérieure à la fréquence de coupure) pourrait s'expliquer par l'apparition de modes supérieurs. La distorsion lors de la propagation se traduisant généralement par l'apparition d'harmoniques supérieurs, ces derniers dépassent souvent la fréquence de coupure.

Une généralisation de l'étude précédente a été effectuée dans le cas de la présence d'un écoulement moyen dont la vitesse est du même ordre de grandeur que la vitesse acoustique. L'objectif est ici d'appliquer la théorie précédemment développée au cas de sources aéro-acoustiques, ce qui permet des obtenir de nouvelles équations de Burgers généralisées. Des expériences ont été réalisées, et montrent que les résultats sont satisfaisants, malgré des hypothèses de départ non nécessairement vérifiées, comme la présence d'un écoulement cisailé. Une généralisation a été également proposée dans le cas d'un pavillon de section lentement variable (avec ou sans écoulement). Les calculs théoriques ainsi que des mesures ont été effectués. Leur confrontations montrent un accord satisfaisant, malgré quelques divergences, comme par exemple en bout de pavillon, probablement dues à des phénomènes non linéaires localisés (voir par exemple Wijngaarden [119], Disselhorst [30]). L'intérêt pratique de ces généralisations

est important : citons par exemple les instruments de musique de type cuivre, les avertisseurs sonores ou les enceintes acoustiques.

Les effets non linéaires localisés (se produisant en bout de tube ouvert, proche de la source ou à l'extrémité d'un pavillon), bien qu'observés, n'ont pas été abordés. Toutes les mesures ont été effectuées loin de la source (distance supérieure au diamètre d'entrée) et loin de l'extrémité du tube pour éviter ces effets. L'étude de ces effets non linéaires localisés serait un prolongement souhaitable de cette thèse afin d'affiner le modèle proposé ici.

## Annexe A

# Solutions analytiques des équations de Burgers

Cette annexe a pour objectif de rappeler quelques solutions analytiques des équations de Burgers généralisées décrites en paragraphe 3.1.4. Les cas sans pertes, avec pertes volumiques, avec diffraction puis avec pertes de couche limite sont successivement envisagés. Une synthèse détaillée est proposée par Coulouvrat [22], ou Rudenko & Soluyan [106].

Les équations de Burgers sont habituellement utilisées pour décrire la déformation d'une onde purement *progressive*. Les résultats présentés ici sont donc limités aux ondes purement progressives.

Pour les notations, il est utile de se référer au paragraphe 3.1.4 de ce document.

### A.1 L'équation de Burgers non dissipative

L'équation de Burgers non dissipative (ou équation d'onde de Riemann) est la suivante (voir équation (3.10)) :

$$\frac{\partial q}{\partial \sigma} - q \frac{\partial q}{\partial \theta} = 0. \quad (\text{A.1})$$

#### A.1.1 Source quelconque

Une source quelconque est placée en  $\sigma = 0$  :  $q(\sigma = 0, \theta) = f(\theta)$ .

La solution exacte (mais implicite) de l'équation (A.1) est connue. Elle est donnée par :

$$q(\sigma, \theta) = f(\theta + \sigma q) = f(\phi) \quad (\text{A.2})$$

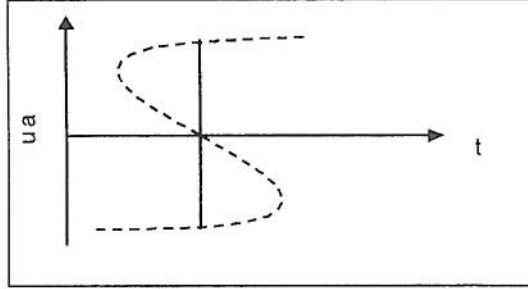


FIG. A.1: loi des aires égales

avec

$$\theta = \phi - \sigma f(\phi). \quad (\text{A.3})$$

L'onde se déplace avec une vitesse du son dépendant de l'amplitude de l'onde. La vitesse  $q$  est constante sur les courbes  $\phi = cte$  qui sont des droites de pentes différentes dans le plan  $(\sigma, \theta)$ . C'est ce que l'on appelle l'analyse de Riemann ou méthode des caractéristiques. L'intersection de ces droites traduit la présence d'une onde de choc (voir figure 3.2).

**Tant que  $\sigma < \sigma_c = 1/(\max(f'(\phi)))$** , le changement de variable  $\phi \rightarrow \theta$  donné par la relation (A.3) est inversible ( $\sigma_c$  correspond au point d'apparition du premier choc). Dans ce cas, la décomposition spectrale de l'onde peut être donnée explicitement :

$$q(\sigma, \theta) = \frac{1}{i\omega\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega\phi} e^{i\omega\sigma f(\phi)} d\phi.$$

**Pour  $\sigma > \sigma_c$** , des discontinuités du profil d'onde apparaissent pour certaines valeurs de  $\tau$ . Le changement de variable  $\phi \rightarrow \theta$  n'est plus inversible : la solution (A.2-A.3) est alors multivaluée. Il est alors nécessaire de poser une nouvelle condition pour décrire le choc. Celle-ci est donnée par la loi de conservation de la masse à travers l'onde de choc, appelée aussi loi des aires égales (voir la figure A.1 ; voir aussi Coulouvrat [22], Rudenko & Soluyan [106] ou Whitham [124]).

### A.1.2 Source sinusoïdale

Dans le cas d'une source sinusoïdale  $f(\theta) = \sin(\theta)$ , une méthode de calcul basée sur la décomposition en série de Fourier permet d'obtenir un résultat à la fois explicite et simple.

**Pour  $\sigma < \sigma_c = 1$** , la décomposition spectrale de la solution, obtenue par

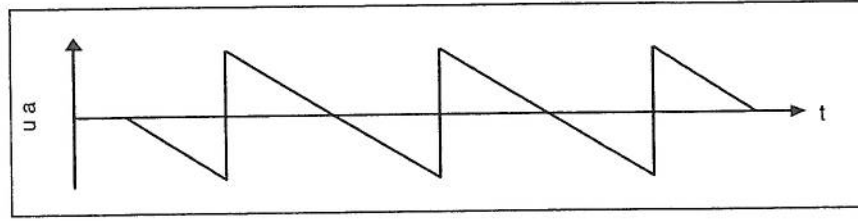


FIG. A.2: Solution en dent de scie

Fubini-Ghiron [39] en 1935, est connue sous le nom de Fubini ou Bessel-Fubini :

$$q(\sigma, \theta) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_n(n\sigma)}{n\sigma} \sin n\theta. \quad (\text{A.4})$$

$J_n$  est la fonction de Bessel d'ordre  $n$  (voir par exemple Rudenko & Soluyan [106]). Une représentation graphique de la solution de Fubini est proposée en annexe B figure B.1, et également en paragraphe 3.1.4 figure 3.3.

Pour  $\sigma > \sigma_c = 1$ , la solution, dite de Blackstock [10] est :

$$q(\sigma, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left( 2 \frac{J_n(n\sigma)}{n\sigma} - 2 \frac{\sin(\phi_m)}{n\pi} \right) \sin n\theta \right] \quad (\text{A.5})$$

où  $\phi_m$  est la plus petite solution strictement positive de l'équation  $\phi_m - \sigma \sin(\phi_m) = 0$ .  $\sin(\phi_m)$  représente la moitié de l'amplitude de la discontinuité de la vitesse en  $\theta = 0$ .

Le premier terme de (A.5) est la solution de Fubini (A.4), le deuxième terme est une fonction en dent de scie. Pour  $\sigma \sim 1$ , la solution de Fubini prédomine ; pour  $\sigma > \sim 3$ , c'est la solution en dent de scie qui prédomine. L'expression est donc une transition entre ces deux solutions.

Pour  $\sigma > \sim 3$ , la solution en dents de scie prédomine :

$$q(\sigma, \theta) \simeq -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\phi_m)}{n\pi} \sin n\theta, \quad (\text{A.6})$$

qui peut être approchée avec une bonne précision par :

$$q(\sigma, \theta) \simeq \frac{\pi - \theta}{1 + \sigma}, \quad \text{pour } 0 < \theta < 2\pi. \quad (\text{A.7})$$

A noter que cette solution approchée (A.7) loin de la source, est elle même une solution *exacte* de l'équation de Burgers non dissipative A.1 (mais ne vérifiant pas la condition aux limites à la source).

## A.2 L'équation de Burgers avec pertes volumiques

L'équation de Burgers "classique" (avec pertes volumiques) est la suivante :

$$\frac{\partial q}{\partial \sigma} - q \frac{\partial q}{\partial \theta} = \frac{1}{\Gamma} \frac{\partial^2 q}{\partial \theta^2}, \quad (\text{A.8})$$

où

$$\Gamma = \frac{\epsilon}{S}$$

est le nombre de Gol'dberg, comparant les effets non linéaires et les pertes volumiques.

### A.2.1 Source quelconque : la solution intégrale

Une source quelconque est placée en  $\sigma = 0$  :  $q(\sigma = 0, \theta) = f(\theta)$ .

La solution exacte est connue. Pour l'obtenir, la transformation de Hopf-Cole (obtenue par Hopf [49] en 1950 et Cole [21] en 1951) est appliquée à l'équation de Burgers (A.8) :

$$\varphi(\sigma, \theta) = \exp \left( \frac{\Gamma}{2} \int^{\theta} q(\sigma, \theta') d\theta' \right); \quad (\text{A.9})$$

elle se ramène alors à une équation de diffusion de solution connue :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} = \frac{1}{\Gamma} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2}.$$

La solution exacte de l'équation de Burgers (A.8) est :

$$q(\sigma, \theta) = \frac{2}{\Gamma} \frac{\partial(\ln \varphi)}{\partial \theta} = -\frac{1}{\sigma} \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} ((\theta - \omega) \exp(\frac{\Gamma}{2} G(\omega, \theta, \sigma)) d\omega)}{\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(\frac{\Gamma}{2} G(\omega, \theta, \sigma)) d\omega}, \quad (\text{A.10})$$

avec  $G$  qui se calcule à partir de la source  $f$  :

$$G(\omega, \theta, \sigma) = \int^{\omega} f(\eta) d\eta - \frac{(\theta - \omega)^2}{2\sigma}.$$

### A.2.2 Source sinusoïdale : la méthode de Laplace ( $\Gamma \gg 1$ )

La solution exacte (A.10) est sous forme intégrale et difficile à calculer ; il est donc intéressant de déterminer des solutions plus explicites, bien qu'approchées, mais restreintes à des cas particuliers. L'étude est limitée ici au cas faiblement dissipatif ( $\Gamma \gg 1$  ou  $1/\text{Re} \ll M$ ) et à une source sinusoïdale  $f(\theta) = \sin(\theta)$  ( $\sigma_c = 1$ ).

La méthode de Laplace a pour départ la solution (A.10) et donne un équivalent aux intégrales dans le cas  $\Gamma \gg 1$ . Voici les solutions obtenues (approchées) :

Pour  $\sigma < 1$  (zone I), la solution de Fubini est à nouveau obtenue. Cela revient à dire qu'avant la formation du choc, et dans le cadre des hypothèses effectuées, la dissipation volumique a peu d'effet sur la forme de l'onde.

Pour  $1 < \sigma < \sim 3$ , la solution de Blackstock est à nouveau obtenue, comme dans le cas sans pertes. Là encore, la dissipation volumique a peu d'influence sur la forme d'onde.

Pour  $\sim 3 < \sigma \ll \Gamma$  (zone II), la solution de Khoklov et Soluyan [112]-[58] est obtenue ( $0 \leq \theta \leq \pi$ ) :

$$q(\sigma, \theta) \simeq \frac{1}{1 + \sigma} \left[ \pi \tanh \left( \frac{\Gamma \pi \theta}{2(1 + \sigma)} \right) - \theta \right]. \quad (\text{A.11})$$

L'allure de cette solution est proche de la fonction en dents de scie ; la discontinuité au niveau du choc devient un front montant d'épaisseur non nulle, conséquence de la prise en compte des pertes volumiques.

Il est remarquable de vérifier que la solution de Khokhlov-Soluyan (A.11), bien qu'approchée, est une solution *exacte* de l'équation de Burgers (A.8) (mais ne vérifie pas exactement les conditions aux limites à la source).

Pour  $\sigma > \sim 3$  (zone II, et zone III  $\sigma \sim \Gamma$ ), la solution est connue sous le nom de Fay-Blackstock :

$$q(\sigma, \theta) \simeq \frac{2}{\Gamma} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\theta)}{\sinh [n(1 + \sigma)/\Gamma]}. \quad (\text{A.12})$$

Cette solution est obtenue par Blackstock [9] en 1964 et Fay [38] en 1934. Elle décrit l'élargissement du front d'onde dû aux pertes volumiques. La forme d'onde redevient alors progressivement plus proche d'un sinus d'amplitude très atténuée pour  $\sigma$  grand. Une représentation graphique de la solution de Fay-Blackstock est proposée en annexe B figure B.1.

Les solutions de Fay-Blackstock et de Khoklov et Soluyan sont très proches l'une de l'autre dans la zone II.

La solution de Fubini (zone I) et de Fay-Blackstock (Zones II et III) sont représentées en annexe B, paragraphe B.1.

### A.3 Les autres équations de Burgers généralisées

Pour les notations, il est utile de se référer au paragraphe 3.1.4 de ce document.

L'équation de KZK (avec diffraction) est la suivante :

$$\frac{\partial^2 q}{\partial \sigma \partial \theta} - \frac{\partial}{\partial \theta} \left( q \frac{\partial q}{\partial \theta} \right) = \frac{N}{4} \Delta_{\perp} q + \frac{1}{\Gamma} \frac{\partial^3 q}{\partial \theta^3}. \quad (\text{A.13})$$



Cette équation de KZK s'applique à un faisceau sonore subissant à la fois de la diffraction et des pertes visqueuses et thermiques. Elle a été obtenue initialement par Zabolotskaya et Khokhlov [126] en 1969 dans le cas non dissipatif, puis généralisée par Kuznetsov [61] en 1970 dans le cas dissipatif.

Des solutions approchées de ces types d'équations sont proposées par exemple par Burvingt [15] ou Cavanagh & Cook [17].

**L'équation de Burgers généralisée avec pertes de couche limite est :**

$$\frac{\partial q}{\partial \sigma} - q \frac{\partial q}{\partial \theta} = -\frac{T}{\epsilon} \frac{\partial^{1/2} q}{\partial \theta^{1/2}} + \frac{S}{\epsilon} \frac{\partial^2 q}{\partial \theta^2}, \quad (\text{A.14})$$

Il n'existe aucune solution exacte de cette équation de Burgers. Une méthode de résolution approchée est proposée par Sugimoto [116] en 1991. Nous proposons également une méthode de résolution dans ce document en partie 3.2.

**L'équation de Burgers généralisée en guide cylindrique de section lentement variable est :**

$$\frac{\partial q}{\partial \sigma} - q \frac{\partial q}{\partial \theta} = -q \frac{\partial \ln(R)}{\partial \sigma}. \quad (\text{A.15})$$

Cette équation possède des solutions exactes (uniquement quand les pertes sont exclues, ce qui est le cas de l'équation (A.15)) après linéarisation à l'aide d'une transformation de type Hopf-Cole. Nous proposons également une méthode de résolution dans ce document en paragraphe 3.4.3, applicable également en présence de pertes.

**L'équation de Burgers généralisée en présence d'écoulement et avec pertes de couche limite est :**

$$\frac{\partial q}{\partial \sigma} - (q + q_0) \frac{\partial q}{\partial \theta} = -\frac{T}{\epsilon} \frac{\partial^{1/2} q}{\partial \theta^{1/2}}. \quad (\text{A.16})$$

Cette équation de Burgers n'a à notre connaissance pas encore été donnée dans la littérature ; il n'existe pas de solutions analytiques explicites. Nous proposons une méthode de résolution dans ce document en paragraphe 3.4.3.

## Annexe B

# Premiers résultats du modèle de propagation non linéaire

Cette annexe a pour objectif de confronter les résultats du modèle développé en partie 3.2 aux solutions analytiques connues dans le cas particulier de l'onde plane progressive créée par une source sinusoïdale, successivement sans, puis avec pertes de couche limite.

### B.1 L'onde plane progressive sans pertes de couche limite

La source est sinusoïdale et placée en  $\sigma = 0$ , d'amplitude normalisée à 1. La distance de formation de l'onde de choc correspond alors à  $\sigma_c = 1$ . Les pertes volumiques sont considérées comme étant très faibles devant les non linéarités :  $\Gamma = \epsilon/S \gg 1$ .

Le modèle décrit en partie 3.2 est utilisé pour calculer l'évolution de l'onde au cours de la propagation. Le domaine de validité est restreint à  $\sigma < 1$  (voir hypothèses de base), mais un test de ce modèle est également proposé pour  $\sigma > 1$ . Une extrapolation au delà de la formation du choc permet d'obtenir des résultats satisfaisants (voir figures B.1 et B.2). La présence de pertes, même très faibles, est toutefois indispensable pour permettre la convergence du calcul numérique. En effet, un développement en série de Fourier tronqué à  $N$  (de l'ordre de 100) est utilisé. Les pertes volumiques sont proportionnelles à  $\omega^2$ , donc très importantes sur les harmoniques supérieurs : l'élimination des harmoniques de rang élevés facilite la convergence numérique du modèle.

Sur la figure B.1, l'évolution des quatre premiers harmoniques est représentée à la fois avant l'onde de choc ( $\sigma < 1$ ) et après (jusqu'à  $\sigma = 10$ ) pour un nombre de Gol'dberg  $\Gamma$  égal à 100. Une comparaison est effectuée avec les solutions

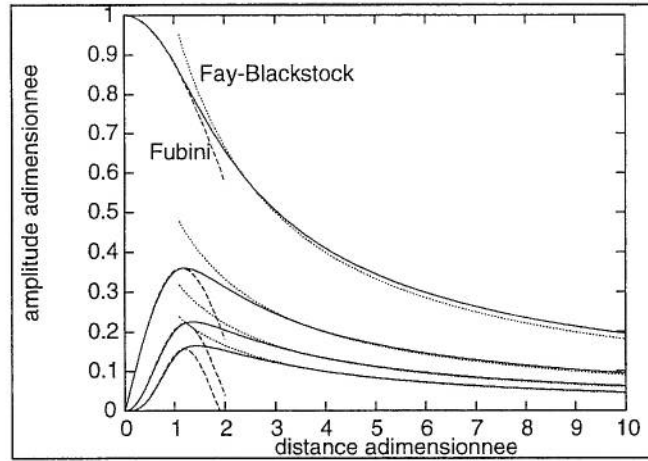


FIG. B.1: Evolution des premiers harmoniques d'une onde initialement sinusoïdale. Le nombre de Gol'dberg est égal à 100. (—) résultat du modèle; (---) solution de Fubini; (.....) solution de Fay-Blackstock.

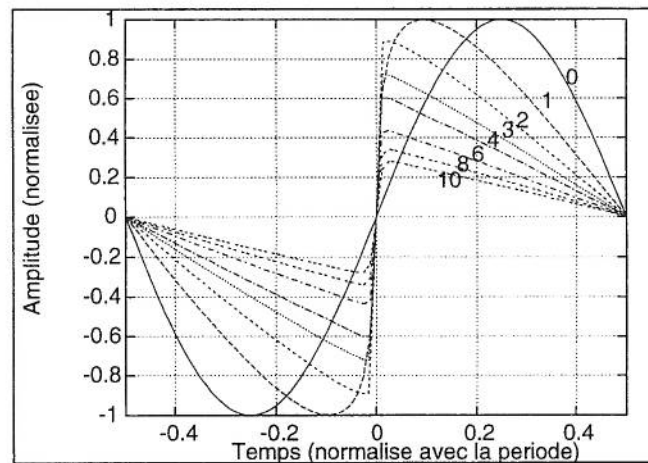


FIG. B.2: Déformation sans perte d'une onde initialement sinusoïdale, de  $\sigma = 0$  à  $\sigma = 10$ .

analytiques approchées connues (voir annexe A) :

-pour  $\sigma < 1$  : la solution de Fubini (voir équation (A.4), identique à la solution sans pertes) ;

-pour  $\sigma \gtrsim 3$  la solution de Fay-Blackstock (voir équation (A.12)), prenant en compte l'effet des pertes dans la structure du choc.

Les résultats obtenus à l'aide du modèle sont très proches de la solution de Fubini avant le choc ; à partir de  $\sigma = 2,5$  le modèle se rapproche de la solution de Fay-Blackstock, sans être parfaitement égal.

Sur la figure B.2, l'évolution de la forme d'onde est représentée de  $\sigma = 0$  à  $\sigma = 10$ , dans le cas (quasi) sans pertes. En réalité, de très faibles pertes volumiques ont été introduites (suffisamment faibles pour ne pas affecter la forme de l'onde, mais suffisantes pour permettre la convergence du calcul).

La déformation de l'onde jusqu'à l'apparition d'un choc ( $\sigma = 1$ ) s'observe sur la figure B.2, puis le choc se développe très rapidement (voir  $\sigma = 2$ ) : un front d'onde important se forme. L'onde prend ensuite une forme dite en dent de scie (voir  $\sigma = 3$ ), dont l'amplitude décroît progressivement (voir de  $\sigma = 3$  à  $\sigma = 9$ ). Ce sont les pertes liées à la présence du choc. Ces pertes adoucissent la forme du choc (un peu observable en  $\sigma = 10$ ).

## B.2 L'onde plane progressive avec pertes de couche limite

La source est sinusoïdale et placée en  $\sigma = 0$ , d'amplitude normalisée à 1. Les pertes volumiques sont considérées comme étant très faibles devant les non linéarités :  $\Gamma = \epsilon/S \gg 1$  ; des pertes de couche limite sont également introduites. Aucune solution analytique des équations de Burgers généralisées correspondantes n'est connue et peu de résolutions ont été proposées ; les coefficients de viscosité ont donc été choisis identiques à ceux utilisés par Sugimoto [116] afin de permettre une comparaison des résultats :  $\Gamma = 100$  pour les pertes de volume et  $\epsilon/T = 10$  pour les pertes de couche limite (voir notations en paragraphe 3.1.4).

La figure B.3 est identique à celle obtenue par Sugimoto [116]. L'évolution de la forme d'onde est représentée de  $\sigma = 0$  à  $\sigma = 10$ . Les effets des pertes de couche limite sont aisément observables en comparant les figures B.2 et B.3. Tout d'abord, l'amplitude de l'onde décroît plus rapidement. Ensuite la forme du choc s'adoucit beaucoup plus rapidement (très visible sur  $\sigma = 10$ ) : ce sont donc les pertes de couche limite qui, ajoutées aux pertes visco-thermiques de volume, permettent de décrire la forme du choc. Enfin, le décalage progressif du passage à zéro est la conséquence du phénomène de dispersion (dérivée  $1/2$  ; pertes en  $\sqrt{\omega}$ ) due à la présence de couches limites.

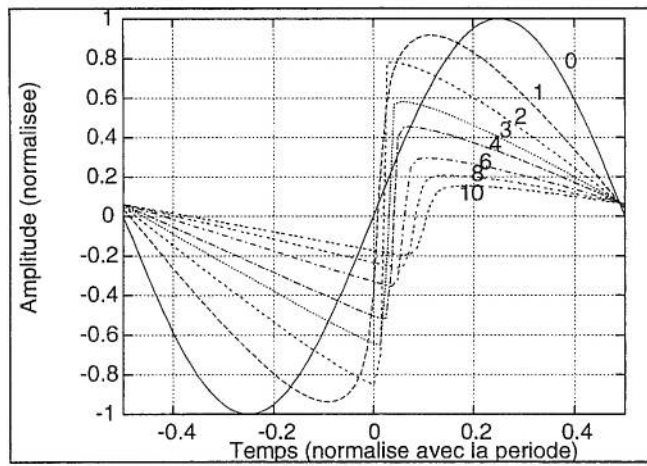


FIG. B.3: Déformation avec pertes d'une onde initialement sinusoïdale, de  $\sigma = 0$  à  $\sigma = 10$ . Le nombre de Gold'berg est égal à 100 (pertes de volume), et  $\epsilon/T$  est égal à 10 (pertes de couche limite).

## Annexe C

# La déformation d'une onde : résultats expérimentaux préliminaires (sans écoulement)

Des résultats expérimentaux préliminaires sont présentés dans cette annexe. Ces expériences ont été réalisées au Laboratoire de Dynamique des Fluides de l'Université Technologique de Eindhoven, avec la collaboration de P. Durrieu et A. Hirschberg. L'objectif s'est limité ici à réaliser une série de mesures<sup>1</sup> permettant de proposer une première validation du modèle ; ce travail a ensuite été suivi de mesures plus nombreuses réalisées au Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine et présentées en dernière partie de la publication intitulée "Weakly nonlinear gas oscillations in air-filled tubes ; solutions and experiments", publication reprise au paragraphe 3.2 du présent document<sup>2</sup>.

### C.1 Le dispositif expérimental

Le dispositif expérimental (voir figure C.1) est constitué d'un tube cylindrique d'une dizaine de mètres, de rayon interne 15mm, avec une terminaison absorbante. Le tube est composé de différentes sections connectées entre elles par des collerettes. Certaines de ces sections contiennent un orifice à l'intérieur duquel un microphone peut être monté. Cinq capteurs de pression PCB 116A

---

<sup>1</sup>Ces mesures ont été présentées au 13ième congrès français de mécanique, dont la référence est : MENGUY L., DURRIEU P. and GILBERT J. (1997), Propagation acoustique non-linéaire dans les guides cylindriques, théorie et résultats expérimentaux préliminaires, *Actes du 13ième Congrès Français de Mécanique, Poitiers*, Vol.1, 11-14.

<sup>2</sup>MENGUY L., GILBERT J. (2000). Weakly Nonlinear Gas Oscillations in Air-filled Tubes ; Solutions and Experiments. *Acustica* **86**, 798-810.

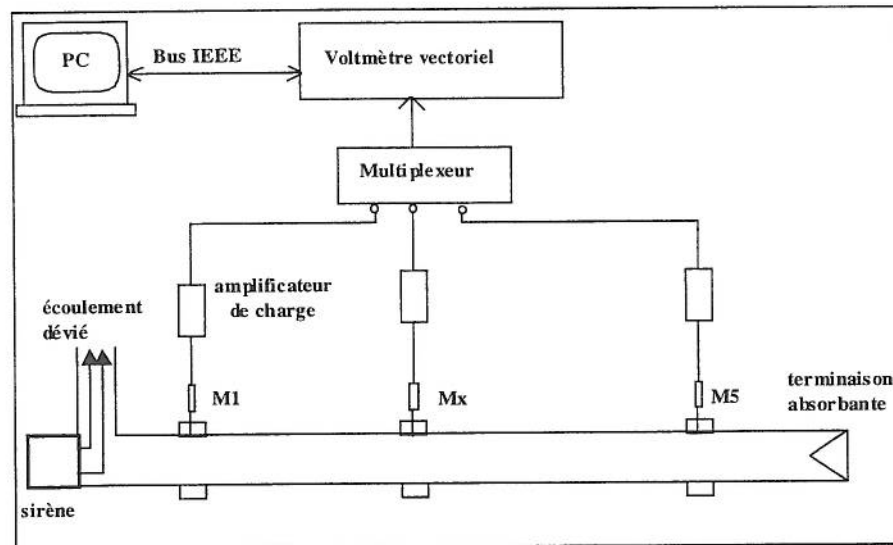


FIG. C.1: dispositif expérimental

sont répartis tout le long du tube pour mesurer la pression acoustique interne. Les deux capteurs extrêmes sont distants de 6.735m. Deux des cinq capteurs sont utilisés comme références (conditions aux limites du calcul) dans la modélisation ; les trois autres sont utilisés pour la comparaison modèle / expérience. Les signaux sont conditionnés avec des amplificateurs de charge Kistler 5007. Pour chaque mesure, l'amplitude et la phase des trois premiers harmoniques sont mesurées.

La calibration relative des voies capteurs est effectuée sur site grâce à un capteur de référence positionné successivement au voisinage de chacun des capteurs de mesure ; les calibrations sont effectuées à faible niveau sonore (acoustique linéaire) pour chacune des fréquences utilisées (fondamentale et harmoniques) lors des mesures.

L'acquisition et le traitement des signaux sont réalisés avec un frontal d'acquisition HP 3565S. La source sonore est une sirène : elle permet de produire des niveaux sonores allant jusqu'à 175dB. L'écoulement moyen résultant est "détourné" du tube grâce à une cheminée latérale ouverte placée à l'entrée de ce dernier.

Le dispositif expérimental est reproduit en figure C.1. Pour obtenir une description détaillée du dispositif, voir Peters *et coll.* [93].

## C.2 La comparaison théorie-expérience

Quelques résultats significatifs sont représentés pour un signal de 112.5 Hz. Les capteurs numérotés de M1 à M5 sont respectivement situés à  $x = 0$ ,

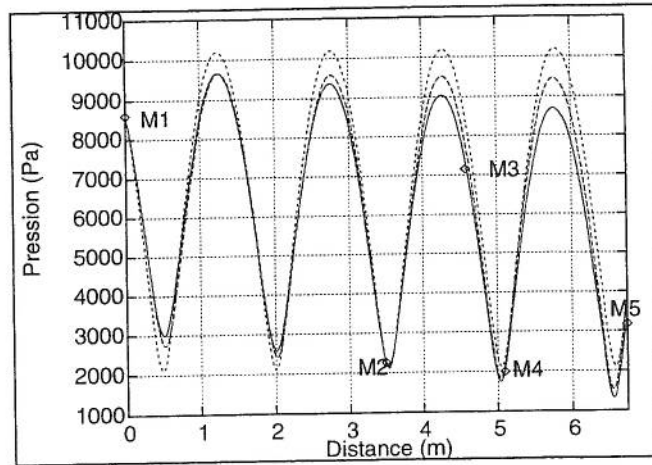


FIG. C.2: Amplitude de la composante fondamentale (112,5Hz) de la pression acoustique (en Pascal) le long du tube cylindrique (position repérée en mètres). Les microphones de référence sont M1 et M2. ( $\diamond$ ) mesures; (—) modèle non linéaire avec pertes; (---) modèle linéaire avec pertes; (- - -) modèle linéaire sans pertes.

$x = 3.490m$ ,  $x = 4.580m$ ,  $x = 5.095m$  et  $x = 6.735m$ . Les capteurs M1 et M2 donnent les pressions acoustiques de référence (conditions aux limites). Ces dernières sont périodiques en régime permanent; elles sont caractérisées par leurs trois premiers harmoniques (amplitude et phase). Le champ de pression en tout point entre M1 et M5 est calculé selon la méthode décrite en partie 3.2, ceci pour trois théories acoustiques : les théories linéaire sans perte, linéaire avec pertes et faiblement non linéaire avec pertes. L'amplitude des deux premiers harmoniques du champ de pression est calculé à l'aide des trois modèles cités ci-dessus.

L'évolution du fondamental est représenté sur la figure C.2 pour l'ensemble du tube. Afin de faciliter la comparaison autour des microphones M3, M4, et M5, une échelle différente est utilisée figure C.3. Le résultat au niveau du microphone M4 montre l'effet des pertes visco-thermiques de couche limite : les modèles linéaire et non linéaire avec pertes permettent d'obtenir un bon accord avec la mesure contrairement au modèle sans perte. Le point M3 quant-à-lui se rapproche beaucoup plus de la théorie non linéaire avec pertes que des modèles linéaires : il met en évidence l'effet de la déformation non linéaire.

Une comparaison similaire est effectuée à l'aide de l'harmonique de rang 2. Sur la figure C.4, seul le microphone M3 permet une distinction nette entre les trois modèles : la prise en compte simultanée des pertes et des effets de distorsion est nécessaire pour retrouver la pression mesurée en M3. Des résultats complémentaires sont présentés sur la référence [76].

Ces mesures sont répétées pour les fréquences 61,4Hz, 77,5Hz, 92,8Hz et 112,5Hz et pour des niveaux sonores au niveau de la source variant entre 140dB



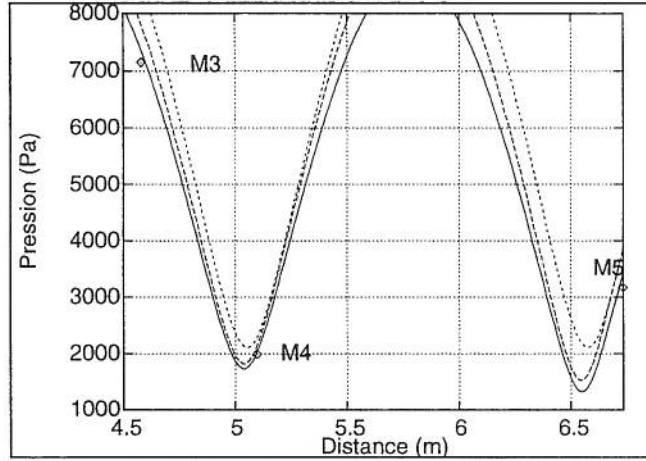


FIG. C.3: Amplitude de la composante fondamentale (112,5Hz) de la pression acoustique (en Pascal) le long du tube cylindrique (position repérée en mètres). (o) mesures ; (—) modèle non linéaire avec pertes ; (---) modèle linéaire avec pertes ; (- - -) modèle linéaire sans pertes.

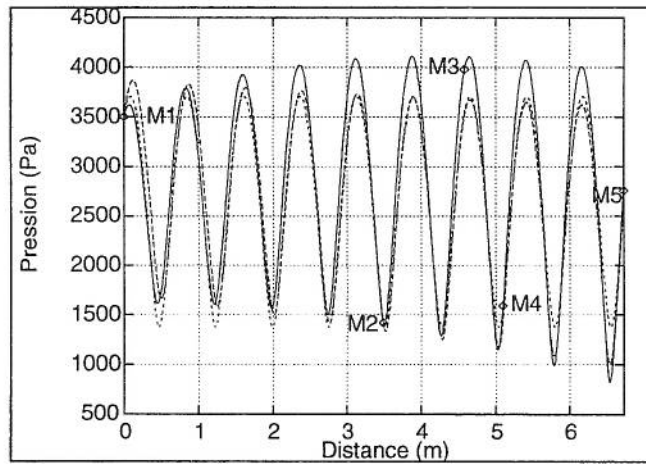


FIG. C.4: Amplitude de l'harmonique de rang 2 (225Hz) de la pression acoustique (en Pascal) le long du tube cylindrique (position repérée en mètres). Les microphones de référence sont M1 et M2. (o) mesures ; (—) modèle non linéaire avec pertes ; (---) modèle linéaire avec pertes ; (- - -) modèle linéaire sans pertes.

et  $175dB$ . Les résultats sont semblables à ceux représentés dans ce paragraphe. L'accord entre les résultats expérimentaux et ceux calculés à l'aide du modèle est satisfaisant. Au niveau de chaque microphone intermédiaire, l'écart est inférieur à 1% dans l'amplitude de la composante fondamentale. A noter que l'écart de 1% correspond à l'incertitude qui a été évaluée dans le modèle. Enfin, il est utile de remarquer que les théories linéaires et non linéaires diffèrent jusqu'à 10% au niveau de certains microphones.

En conclusion, ces résultats préliminaires sont encourageants mais ne constituent qu'une première étape. Une comparaison systématique sur un plus grand nombre de points de mesures est ensuite effectuée (voir partie 3.2) afin de valider le modèle de propagation non linéaire sans pertes.

## Annexe D

# Solutions du vent acoustique linéaire en guide d'onde

Cette annexe se limite au rappel des résultats analytiques du vent acoustique linéaire (faible nombre de Reynolds), de type Rayleigh, en guide d'onde, et pour une onde acoustique stationnaire. Les résultats du vent acoustique sont rappelés tout d'abord dans les couches limites, puis dans le reste du tube, pour les géométries cylindriques, bidimensionnels (entre deux plans infinis) et rectangulaires.

### D.1 La couche limite

Les écoulements redressés dans un guide d'onde ont pour origine principale les pertes visco-thermiques de couche limite. Cet écoulement est créé par le gradient transversal important de la vitesse acoustique dans la couche limite. Un vent acoustique se produit alors dans cette dernière, et ce n'est que par continuité que l'écoulement se transmet au reste du fluide. La première étape consiste donc à calculer le vent acoustique dans la couche limite. Cette dernière est considérée comme étant quasi-plane tant que les rayons courbure restent élevés (grands devant l'épaisseur de la couche limite). L'écoulement ne dépend alors pas de la géométrie du guide. Le raccordement s'effectue ensuite avec l'extérieur, où la résolution des équations du vent acoustique dépend de la géométrie.

Les premières solutions analytiques du vent acoustique créé par une onde stationnaire dans un guide ont été proposées par Rayleigh [100] en 1896. La vitesse au niveau de l'interface couche limite - extérieur est :

$$\tilde{u}_{s \text{ lim}} = \frac{-3}{4\omega} A \frac{dA}{dx}, \quad (\text{D.1})$$

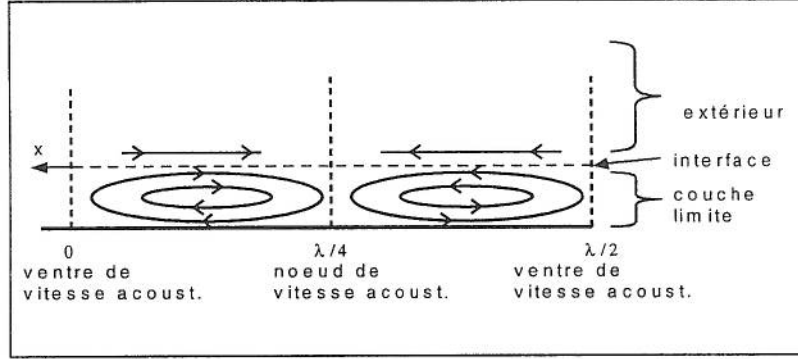


FIG. D.1: Lignes du vent acoustique dans la couche limite

où  $A$  est l'amplitude de la vitesse acoustique particulière de pulsation  $\omega$  en dehors de la couche limite aux points d'abscisse  $\tilde{x}$  (l'onde se propage suivant  $\tilde{x}$ ). La vitesse  $\tilde{u}_{s \text{ lim}}$  est dirigée parallèlement aux parois (la composante de la vitesse perpendiculaire à l'interface couche limite - extérieur est nulle au niveau de cette interface), et des ventres de vitesse acoustique vers les noeuds. Le profil des lignes de courant est décrit par Schlichting [109] en 1932 (voir figure D.1).

Partant d'une onde acoustique stationnaire

$$\tilde{u}_a(\tilde{x}, \tilde{t}) = A(\tilde{x}) \cos(\omega \tilde{t}) = A_0 \cos\left(\frac{2\pi\tilde{x}}{\lambda}\right) \cos(\omega \tilde{t}), \quad (\text{D.2})$$

avec  $A_0$  l'amplitude de la vitesse acoustique au niveau d'un ventre, les relations (D.1) et (D.2) aboutissent à :

$$\tilde{u}_{s \text{ lim}} = \frac{3A_0^2}{8c} \sin\left(\frac{4\pi\tilde{x}}{\lambda}\right). \quad (\text{D.3})$$

$c$  est la vitesse du son.

Quelques travaux récents sont venus corriger les résultats précédents. En particulier Qi [97] en 1993 prend en compte les pertes thermiques et la compressibilité du fluide dans la couche limite, ce qui apporte une correction de 13%. Il propose le résultat suivant (annexe B de Qi [97]) :

$$\tilde{u}_{s \text{ lim}} = \frac{-1}{2\omega} A \frac{dA}{d\tilde{x}} \left( \frac{3}{2} + (\gamma - 1) \left( \frac{1}{\sqrt{\text{Pr}}} + \frac{\text{Pr} - 1}{(1 + \text{Pr}^2)\sqrt{\text{Pr}}} - \frac{2\sqrt{\text{Pr}}}{(1 + \text{Pr}^2)} \right) \right). \quad (\text{D.4})$$

Ce résultat est identique à celui que nous avons obtenu (voir équation (26) de la partie 2.2) sous une forme simplifiée :

$$\tilde{u}_{s \text{ lim}} = \frac{-1}{2\omega} A \frac{dA}{d\tilde{x}} \left( \frac{3}{2} + (\gamma - 1) \frac{\sqrt{\text{Pr}}}{(1 + \text{Pr})} \right). \quad (\text{D.5})$$

Le coefficient constant entre parenthèses est égal à 1,6969 pour l'air au lieu de 1,5 (valeur donnée par Rayleigh [100]). En prenant en compte cette correction, la solution (D.3) pour l'onde sinusoïdale et stationnaire (D.2) devient (équation (A15) de la partie 2.2) :

$$\tilde{u}_{s \text{ lim}} = \frac{A_0^2}{4c} \left( \frac{3}{2} + (\gamma - 1) \frac{\sqrt{\text{Pr}}}{(1 + \text{Pr})} \right) \sin \left( \frac{4\pi\tilde{x}}{\lambda} \right). \quad (\text{D.6})$$

## D.2 Le guide d'onde cylindrique

La configuration la plus fréquemment utilisée pour observer un vent acoustique de type Rayleigh est le tube cylindrique. Les coordonnées cylindriques sont notées  $\tilde{r}$  (distance radiale de l'axe du tube),  $\tilde{x}$  (distance le long de l'axe) et  $\varphi$  angle de rotation autour de l'axe. Le problème est axisymétrique, c'est à dire invariant en  $\varphi$ . Sur toute section du tube ( $\tilde{x} = \text{const.}$ ), la vitesse du vent est donnée par :

$$\tilde{u}_s = \tilde{u}_{s \text{ lim}} \left( \frac{2\tilde{r}^2}{R^2} - 1 \right), \quad (\text{D.7})$$

avec  $\tilde{r}$  la distance radiale depuis l'axe du tube ( $\tilde{r} = R$  au niveau de la couche limite).

L'expression de la vitesse d'écoulement en tout point du guide, créée par une onde stationnaire (D.2), est proposée par Rayleigh [100] (voir lignes de courant figure D.2) :

$$\tilde{u}_s(\tilde{x}, \tilde{r}) = \frac{3A_0^2}{8c} \left( \frac{2\tilde{r}^2}{R^2} - 1 \right) \sin \left( \frac{4\pi\tilde{x}}{\lambda} \right), \quad (\text{D.8})$$

$$\tilde{v}_s(\tilde{x}, \tilde{r}) = \frac{3A_0^2\omega R}{8c^2} \left( \frac{\tilde{r}}{R} - \left( \frac{\tilde{r}}{R} \right)^3 \right) \cos \left( \frac{4\pi\tilde{x}}{\lambda} \right). \quad (\text{D.9})$$

$\tilde{u}_s$  est la composante longitudinale de la vitesse d'écoulement et  $\tilde{v}_s$  la composante radiale.

En tenant compte de la compressibilité du fluide et des pertes thermiques dans la couche limite, ce résultat devient :

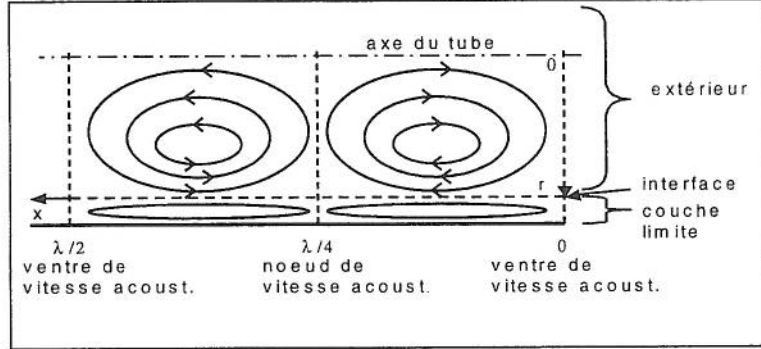


FIG. D.2: Lignes de courant du vent acoustique sur une section d'un tube cylindrique

$$\tilde{u}_s(\tilde{x}, \tilde{r}) = \frac{A_0^2}{4c} \left( \frac{3}{2} + (\gamma - 1) \frac{\sqrt{\text{Pr}}}{(1 + \text{Pr})} \right) \left( \frac{2\tilde{r}^2}{R^2} - 1 \right) \sin \left( \frac{4\pi\tilde{x}}{\lambda} \right), \quad (\text{D.10})$$

$$\tilde{v}_s(\tilde{x}, \tilde{r}) = \frac{A_0^2 \omega R}{4c^2} \left( \frac{3}{2} + (\gamma - 1) \frac{\sqrt{\text{Pr}}}{(1 + \text{Pr})} \right) \left( \frac{\tilde{r}}{R} - \left( \frac{\tilde{r}}{R} \right)^3 \right) \cos \left( \frac{4\pi\tilde{x}}{\lambda} \right). \quad (\text{D.11})$$

La vitesse  $\tilde{u}_s$  change de signe entre  $\tilde{r} = 0$  (axe du tube) et  $\tilde{r} = R$  (interface avec la couche limite). Elle est dirigée des ventres de vitesse acoustique vers les noeuds le long de la couche limite, et inversement au centre du tube par où s'effectue le retour des particules (figure D.2).

### D.3 Le guide bidimensionnel (deux plans parallèles)

Les coordonnées cartésiennes sont notées  $\tilde{x}$  (direction de propagation de l'onde plane),  $\tilde{y}$  et  $\tilde{z}$ . Le premier plan est situé en  $\tilde{z} = 0$ , le second en  $\tilde{z} = \tilde{z}_1$ . Le problème est invariant en  $\tilde{y}$ .

La vitesse d'écoulement à l'interface avec la couche limite reste inchangée par rapport au guide à section circulaire. La vitesse du vent acoustique entre les deux plans a respectivement comme composantes en  $\tilde{x}$  et en  $\tilde{z}$  :

$$\tilde{u}_s(\tilde{x}, \tilde{z}) = -\frac{\alpha A_0^2}{8c} \left( 1 - 3 \left( 1 - \frac{\tilde{z}}{\tilde{z}_1} \right)^2 \right) \sin \left( \frac{4\pi\tilde{x}}{\lambda} \right), \quad (\text{D.12})$$

$$\tilde{v}_s(\tilde{x}, \tilde{z}) = -\frac{\alpha A_0^2 \omega \tilde{z}_1}{8c^2} \left( \left( 1 - \frac{\tilde{z}}{\tilde{z}_1} \right) - \left( 1 - \frac{\tilde{z}}{\tilde{z}_1} \right)^3 \right) \cos \left( \frac{4\pi\tilde{x}}{\lambda} \right). \quad (\text{D.13})$$

Le coefficient  $\alpha$  donné dans la littérature (voir Rayleigh [100], Zarembo [127] ou Nyborg [85]) est généralement  $3/2$ . La prise en compte des pertes thermiques et de la compressibilité du fluide dans la couche limite devrait amener à corriger ce coefficient en :

$$\alpha = \left( 3/2 + (\gamma - 1)\sqrt{\text{Pr}}/(1 + \text{Pr}) \right) = 1.6969. \quad (\text{D.14})$$

## D.4 Le guide à section rectangulaire

Les coordonnées cartésiennes sont notées  $\tilde{x}$  (direction de propagation de l'onde plane),  $\tilde{y}$  et  $\tilde{z}$ . Les deux premiers plans sont situés en  $\tilde{z} = 0$  et  $\tilde{z} = \tilde{z}_1$ , les deux derniers en  $\tilde{y} = 0$  et  $\tilde{y} = \tilde{y}_1$ .

La vitesse d'écoulement à l'interface avec la couche limite reste inchangée. La vitesse du vent acoustique dans le guide a respectivement comme composantes en  $\tilde{x}$ ,  $\tilde{y}$  et  $\tilde{z}$  :

$$\tilde{u}_s(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \frac{\alpha A_0^2}{4c} \left( 1 - \frac{9}{4} \left( \frac{\tilde{y}^2}{\tilde{y}_1^2} - 1 \right) \left( \frac{\tilde{z}^2}{\tilde{z}_1^2} - 1 \right) \right) \sin \left( \frac{4\pi\tilde{x}}{\lambda} \right), \quad (\text{D.15})$$

$$\tilde{v}_s(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = -\frac{3\alpha A_0^2 \omega \tilde{y}_1}{16c^2} \left( \frac{\tilde{y}}{\tilde{y}_1} - \frac{\tilde{y}^3}{\tilde{y}_1^3} \right) \left( \frac{\tilde{z}^2}{\tilde{z}_1^2} - \frac{5}{3} \right) \cos \left( \frac{4\pi\tilde{x}}{\lambda} \right), \quad (\text{D.16})$$

$$\tilde{w}_s(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = -\frac{3\alpha A_0^2 \omega \tilde{z}_1}{16c^2} \left( \frac{\tilde{z}}{\tilde{z}_1} - \frac{\tilde{z}^3}{\tilde{z}_1^3} \right) \left( \frac{\tilde{y}^2}{\tilde{y}_1^2} - \frac{5}{3} \right) \cos \left( \frac{4\pi\tilde{x}}{\lambda} \right). \quad (\text{D.17})$$

Pour des raisons identiques à celles exposées dans le paragraphe précédent (guide bidimensionnel), même si  $\alpha$  est généralement pris égal à  $3/2$ , il devrait en fait être corrigé à l'aide de la relation (D.14).

## Annexe E

# Méthode de résolution numérique du vent acoustique non linéaire

Cette annexe a pour objectif de fournir quelques éléments sur la méthode numérique utilisée pour résoudre les équations suivantes du vent acoustique non linéaire en dehors de la couche limite, obtenues en partie 2.2 :

$$\frac{\partial u_{2s}}{\partial x} + \frac{1}{r_1} \frac{\partial}{\partial r_1} (r_1 v_{2s}) = 0, \quad (\text{E.1})$$

$$\frac{1}{r_1} \frac{\partial}{\partial r_1} (r_1 \frac{\partial u_{2s}}{\partial r_1}) = \frac{M^2}{Sh^2} (u_{2s} \frac{\partial u_{2s}}{\partial x} + v_{2s} \frac{\partial u_{2s}}{\partial r_1}) + f(x), \quad (\text{E.2})$$

où  $u_{2s}$  et  $v_{2s}$  sont respectivement les composantes longitudinales et radiales de la vitesse de l'écoulement redressé. Ces vitesses doivent également respecter les conditions aux limites imposées par la continuité avec la couche limite (méthode des raccordements asymptotiques) :

$$u_{2s} = \left( \frac{3}{2} + (\gamma - 1) \frac{\sqrt{Pr}}{1 + Pr} \right) \frac{\sin 2x}{4} = \alpha \frac{\sin 2x}{4}, \quad (\text{E.3})$$

$$v_{2s} = 0. \quad (\text{E.4})$$

Une solution de la forme

$$u_{2s} = \sum_{i=1}^{\infty} \left( \sum_{j=0}^{\infty} c_{i,j} r_1^{2j} \right) \sin(2ix), \quad (\text{E.5})$$

$$v_{2s} = \sum_{i=1}^{\infty} \left( \sum_{j=0}^{\infty} d_{i,j} r_1^{2j+1} \right) \cos(2ix) \quad (\text{E.6})$$



est recherchée.

Dans un premier temps, les décompositions (E.5) et (E.6) sont injectées dans l'équation de conservation de la matière (E.1) qui, après une intégration en  $r_1$  permet d'écrire les coefficients  $d_{i,j}$  en fonction des coefficients  $c_{i,j}$  :

$$d_{i,j} = -c_{i,j} \frac{2i}{2j+2}. \quad (\text{E.7})$$

Il ne reste donc plus qu'à déterminer les coefficients  $c_{i,j}$  en injectant les séries (E.5) et (E.6) dans les équations de conservation de la quantité de mouvement (E.2), et dans les conditions aux limites (E.3) et (E.4).

L'équation de conservation de la quantité de mouvement s'écrit ( $j = 1$  n'est pas utilisée car  $f(x)$  est inconnue) :  $\forall i \neq 0, \forall j \neq 0, 1$  :

$$\begin{aligned} c_{i,j}(2j)^2 - \sum_{m=0}^{j-1} \left( \frac{j-2m}{j-m} \left( \sum_{n=1}^{i-1} (i-n)c_{n,m}c_{i-n,j-m-1} \right. \right. \\ \left. \left. - \sum_{n=i+1}^{\infty} (n-i)c_{n,m}c_{n-i,j-m-1} \right. \right. \\ \left. \left. - \sum_{n=i+1}^{\infty} (n)c_{n-i,m}c_{n,j-m-1} \right) \right) = 0. \end{aligned} \quad (\text{E.8})$$

L'équation de continuité de la composante longitudinale de la vitesse devient :

$$\begin{aligned} \text{pour } i = 1 : \sum_{j=0}^{\infty} c_{i,j} - \frac{\alpha}{4} = 0, \\ \text{pour } i \neq 1 : \sum_{j=0}^{\infty} c_{i,j} = 0, \end{aligned} \quad (\text{E.9})$$

et l'équation de continuité de la composante radiale de la vitesse est :

$$\forall i, \sum_{j=0}^{\infty} \left( \frac{c_{i,j}}{2j+2} \right) = 0. \quad (\text{E.10})$$

En tronquant la série à  $i = N$  et  $j = M$ , il y a  $N * (M + 1)$  coefficients  $c_{i,j}$  inconnus à déterminer à l'aide des  $N * (M + 1)$  équations (E.8), (E.9) et (E.10) formant un jeu d'équations non linéaires de la forme  $F_n(c_{i,j}) = 0$ . Un certain nombre de programmes existants permettent de résoudre ce type de problème (exemple en Fortran : la subroutine NEQNF dans la bibliothèque de programmes IMSL).

A noter que les valeurs initiales données aux coefficients  $c_{i,j}$  pour  $\text{Re}_{nt} = 0$  sont les coefficients de la solution du vent acoustique linéaire :

$$c_{1,0} = -\frac{\alpha}{4}; c_{1,1} = \frac{\alpha}{2},$$

tous les autres coefficients étant nuls.

**Remarque concernant l'ajout d'harmoniques supérieurs dans le signal acoustique.**

Un signal acoustique non sinusoïdal est ici considéré (c'est à dire qu'il contient des harmoniques supérieurs), mais en se limitant au tube fermé avec terminaison parfaitement rigide. L'extrémité du tube correspond alors à un noeud de vitesse acoustique de chacune des composantes harmoniques. En remplaçant ce signal dans la relation (19) de la page 253 en partie (2.2), et en menant les calculs dans les équations qui suivent, la composante longitudinale de la vitesse à l'interface avec la couche limite devient (en remplacement de l'équation (26) page 254 de la même partie) :

$$u_{2s} = \frac{\alpha}{4} (\sin 2x - H_2^2 \sin 4x + H_3^2 \sin 6x + \dots + (-1)^{2i+1} H_i^2 \sin 2ix + \dots).$$

La résolution numérique s'effectue alors aisément en remplaçant l'équation (E.9) par :

$$\forall i : \sum_{j=0}^{\infty} c_{i,j} + (-1)^{2i} H_i^2 \frac{\alpha}{4} = 0.$$

Quelques résultats correspondants sont présentés dans les compléments à l'article au paragraphe (2.2).

## Annexe F

# Méthode de résolution numérique des équations de propagation non linéaires en tube

### F.1 Cas de l'onde purement progressive

L'équation de Burgers généralisée avec pertes visqueuses et thermiques de couche limite est :

$$\frac{\partial q^+}{\partial \sigma} = q^+ \frac{\partial q^+}{\partial \theta^+} - \frac{T}{\epsilon} \frac{\partial q^+}{\partial \theta^+} * \frac{1}{\sqrt{\pi \theta^+}}. \quad (\text{F.1})$$

La résolution s'effectue numériquement et dans le domaine fréquentiel en décomposant  $q$  en série de Fourier :

$$q = \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n(\sigma) \sin n\theta + b_n(\sigma) \cos n\theta). \quad (\text{F.2})$$

En introduisant (F.1) dans l'équation (F.2), il vient les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_n}{\partial \sigma} = & n \left( \sum_{p=1}^{n-1} \left( \frac{a_p a_{n-p}}{2} - \frac{b_p b_{n-p}}{2} \right) - \sum_{p=n+1}^{+\infty} (a_{p-n} a_p + b_p b_{p-n}) \right) \\ & - \frac{T}{\epsilon} \sqrt{\frac{n}{2}} (a_n - b_n), \end{aligned} \quad (\text{F.3})$$

$$\frac{\partial b_n}{\partial \sigma} = n \left( \sum_{p=1}^{n-1} \left( \frac{a_p b_{n-p}}{2} + \frac{b_p a_{n-p}}{2} \right) + \sum_{p=n+1}^{+\infty} (b_{p-n} a_p - b_p a_{p-n}) \right) - \frac{T}{\epsilon} \sqrt{\frac{n}{2}} (a_n + b_n). \quad (\text{F.4})$$

Ces séries de Fourier sont en pratique tronquées à N harmoniques. Connaissant le signal au niveau de la source ou en entrée du tube (c'est à dire en  $\sigma = 0$ ), ces équations différentielles du premier ordre sont résolues pas à pas à l'aide une méthode de type prédiction correction, en discrétisant l'espace en pas de  $\Delta\sigma$ .

La première étape (prédiction) consiste à estimer les coefficients  $a_n$  et  $b_n$  en  $(\sigma + \Delta\sigma)$  connaissant la valeur de ces mêmes coefficients en  $\sigma$  par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \text{pentea}(\sigma) &= n \sum_{p=1}^{n-1} \left( \frac{a_p(\sigma) a_{n-p}(\sigma)}{2} - \frac{b_p(\sigma) b_{n-p}(\sigma)}{2} \right) \\ &\quad - n \sum_{p=n+1}^{+\infty} ((a_{p-n}(\sigma) a_p(\sigma) + b_p(\sigma) b_{p-n}(\sigma))) \\ &\quad - \frac{T}{\epsilon} \sqrt{\frac{n}{2}} (a_n(\sigma) - b_n(\sigma)), \end{aligned} \quad (\text{F.5})$$

$$\begin{aligned} \text{penteb}(\sigma) &= n \sum_{p=1}^{n-1} \left( \frac{a_p(\sigma) b_{n-p}(\sigma)}{2} + \frac{b_p(\sigma) a_{n-p}(\sigma)}{2} \right) \\ &\quad + n \sum_{p=n+1}^{+\infty} ((b_{p-n}(\sigma) a_p(\sigma) - b_p(\sigma) a_{p-n}(\sigma))) \\ &\quad - \frac{T}{\epsilon} \sqrt{\frac{n}{2}} (a_n(\sigma) + b_n(\sigma)), \end{aligned} \quad (\text{F.6})$$

puis

$$a_n(\sigma + \Delta\sigma) = a_n(\sigma) + \Delta\sigma * \text{pentea}(\sigma), \quad (\text{F.7})$$

$$b_n(\sigma + \Delta\sigma) = b_n(\sigma) + \Delta\sigma * \text{penteb}(\sigma). \quad (\text{F.8})$$

La deuxième étape (facultative.... et dans la plupart des cas non nécessaire) consiste à corriger cette estimation.  $\text{pentea}(\sigma + \Delta\sigma)$  et  $\text{penteb}(\sigma + \Delta\sigma)$  sont estimés à l'aide des coefficients  $a_n(\sigma + \Delta\sigma)$  et  $b_n(\sigma + \Delta\sigma)$  obtenus dans l'étape précédente. Une correction de ces derniers coefficients est ensuite effectuée en écrivant :

$$a_n(\sigma + \Delta\sigma) = a_n(\sigma) + \Delta\sigma * \frac{\text{pentea}(\sigma) + \text{pentea}(\sigma + \Delta\sigma)}{2}, \quad (\text{F.9})$$

$$b_n(\sigma + \Delta\sigma) = b_n(\sigma) + \Delta\sigma * \frac{\text{penteb}(\sigma) + \text{penteb}(\sigma + \Delta\sigma)}{2}. \quad (\text{F.10})$$

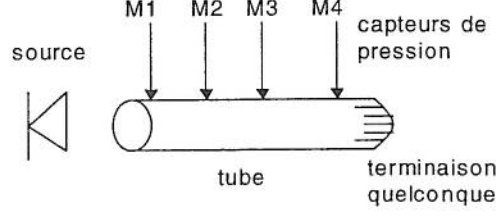


FIG. F.1: Configuration type pour l'étude d'une onde non purement progressive.

## F.2 Cas de l'onde non purement progressive

Le problème à résoudre ici est le suivant. Le signal est supposé connu au niveau de la source ou en entrée du tube (la mesure est donnée par un microphone M1, voir figure F.1). Une terminaison quelconque est placée à l'autre extrémité du tube : son impédance est supposée connue, ou à défaut, le signal au niveau du microphone M4 est mesuré et donc supposé connu. L'objectif est alors de calculer le signal en tout point intermédiaire entre M1 et M4 et de comparer ce calcul à la mesure (au niveau des microphones M2 et M3 sur la figure F.1).

Le signal acoustique se décompose en deux ondes aller et retour  $q^+$  et  $q^-$  indépendantes, vérifiant respectivement les équations de propagation suivantes :

$$\frac{\partial q^+}{\partial \sigma} = q^+ \frac{\partial q^+}{\partial \theta^+} - \frac{T}{\epsilon} \frac{\partial q^+}{\partial \theta^+} * \frac{1}{\sqrt{\pi \theta^+}}, \quad (\text{F.11})$$

$$\frac{\partial q^-}{\partial \sigma} = -q^- \frac{\partial q^-}{\partial \theta^-} + \frac{T}{\epsilon} \frac{\partial q^-}{\partial \theta^-} * \frac{1}{\sqrt{\pi \theta^-}}, \quad (\text{F.12})$$

auxquelles sont ajoutées deux conditions aux limites données par les mesures des signaux acoustiques en M1 et M4.

Les signaux  $q^+$  et  $q^-$  (vitesses acoustiques par exemple) sont décomposés en série de Fourier :

$$q^+(\sigma) = \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^+(\sigma) \sin n\theta + b_n^+(\sigma) \cos n\theta), \quad (\text{F.13})$$

$$q^-(\sigma) = \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^-(\sigma) \sin n\theta + b_n^-(\sigma) \cos n\theta). \quad (\text{F.14})$$

La méthode de résolution numérique est alors la suivante.

Soient  $a_n^+(\sigma) = A_n$  et  $b_n^+(\sigma) = B_n$  les coefficients de la série de Fourier de l'onde aller au niveau du microphone M1 (choisis arbitrairement au début du calcul).

L'onde aller vérifiant l'équation (F.11) est d'abord propagée de part en part, par pas de  $\Delta\sigma$  comme une simple onde progressive en utilisant la méthode numérique proposée dans le premier paragraphe de cette annexe. Les coefficients de l'onde aller sont donc obtenus en bout de tube. Compte tenu de la condition d'impédance de la terminaison ou de la mesure du signal en M4, les coefficients de l'onde retour sont déduits à partir des coefficients de l'onde aller, en M4. L'onde retour est alors propagée par la méthode de l'onde progressive (résolution de l'équation (F.12)) de part en part jusqu'à  $\sigma = 0$ . Le signal total ainsi déduit au niveau de M1 (onde aller + onde retour en  $\sigma = 0$ ) doit être égal au signal réel de la source :

$$F_n(A_n) = a_{source} - (a_n^+(\sigma = 0) - a_n^-(\sigma = 0)) = 0,$$

$$F_n(B_n) = b_{source} - (b_n^+(\sigma = 0) - b_n^-(\sigma = 0)) = 0.$$

Les fonctions  $F_n$  dépendent des paramètres  $A_n$  et  $B_n$  et constituent un jeu d'équations non linéaires à résoudre de la forme  $F_n(A_n, B_n) = 0$ . Un certain nombre de programmes existants permettent de résoudre ce type de problème (exemple en Fortran : la subroutine NEQNF dans la bibliothèque de programmes IMSL). La connaissance des coefficients  $A_n$  et  $B_n$  vérifiant les équations  $F_n$  permettent de calculer le signal en tout point.

# Bibliographie

- [1] ALFREDSON R.J. (1972). The propagation of sound in a circular duct of continuously varying cross-sectional area, *J. Sound Vib.*, **23** (4), 433-442.
- [2] AMIN N. and RILEY N. (1990). Streaming from a sphere due to a pulsating source, *J. Fluid Mech.* **180**, 319-326.
- [3] ANFOSSO J. (1999). Propagation acoustique faiblement non-linéaire en pavillon exponentiel. *Rapport de D.E.A. d'acoustique appliquée de l'université du Maine.*
- [4] BATCHELOR G.K. (1970). *An introduction to fluid dynamics*. Cambridge Univ. Press, Cambridge.
- [5] BEQUIN P. and MORFEY C.L. (2001). Weak nonlinear propagation of sound in a finite exponential horn, *J. Acoust. Soc. Am.* **109** (6), 2649-2659.
- [6] BERTELSEN A., SVARDAL A. and TJØTTA S. (1973). Nonlinear streaming effects associated with oscillating cylinders, *J. Fluid Mech.* **59** (3), 493-511.
- [7] BERTELSEN A. (1974). An experimental investigation of high Reynolds number steady streaming generated by oscillating cylinders, *J. Fluid Mech.* **64** (3), 589-597.
- [8] BETCHOV R. (1958). Nonlinear oscillations of a column of gas. *Phys. Fluids* **1**, 205-212.
- [9] BLACKSTOCK D.T. (1964). Thermoviscous attenuation of plane, periodic, finite amplitude sound waves, *J. Acoust. Soc. Am.* **36**, 534-542.
- [10] BLACKSTOCK D.T. (1966). Connection between the Fay and Fubini solutions for plane sound waves, *J. Acoust. Soc. Am.* **39**, 1019-1026.
- [11] BLACKSTOCK D.T. (1972). Nonlinear acoustics (theoretical). *American Institute of Physics Handbook*, Mc Graw Hill, New York, 3rd ed. Chap. 3n, 183-205.
- [12] BLACKSTOCK D.T. (1985). Generalized Burgers equations for plane waves, *J. Acoust. Soc. Am.* **77** (6), 2050-2053.
- [13] BRUNEAU M. (1998). *Manuel d'Acoustique Fondamentale*. Edition Hermes, collection Etudes en Mécanique des Matériaux et des Structures, Paris.

- [14] BURGERS J.M. (1948). A mathematical model illustrating the theory of turbulence, *Adv. Appl. Mech.* **1**, 171-199.
- [15] BURVINGT R. (1976). Solution approchée pour le rayonnement d'une antenne paramétrique à l'émission. *Rev. CETHEDDEC* **48**, 195-218.
- [16] CAMPOS L.M.B.C. (1984). Some general properties of the exact acoustic fields in horns and baffles, *J. Sound Vib.* **95** (2), 177-201.
- [17] CAVANAGH E. and COOK B.D. (1980). Gaussian-Laguerre description of ultrasonic fields. Numerical example : a circular piston, *J. Acoust. Soc. Am.* **67**, 1136-1140.
- [18] CHESTER W. (1964). Resonant oscillations in closed tubes, *J. Fluid. Mech.* **18**, 44-64.
- [19] CHESTER W. (1981). Resonant oscillations of a gas in an open-ended tube, *Proc. Roy. Soc. Lond.* **A377**, 449-467.
- [20] CHESTER W. (1994). Nonlinear resonant oscillations of a gas in a tube of varying cross-section, *Proc. Roy. Soc. Lond.* **A444**, 591-604.
- [21] COLE J.D. (1951). On a quasilinear parabolic equation occurring in aerodynamics, *Quat. Appl. Math.* **9**, 225-236.
- [22] COULOVRAT F. (1991). Méthodes asymptotiques en acoustique non linéaire. *Thèse de doctorat de l'université de Paris 6*.
- [23] COULOVRAT F. (1992). On the equations of nonlinear acoustics, *J. Acoustique* **5**, 321-359.
- [24] COURANT R. and FRIEDRICH K.O. (1948). *Supersonic flow and shock waves*. Wiley Intersciences, New York.
- [25] CRIGHTON D.G. (1975). Basic principles of aerodynamic noise generation, *Prog. Aerospace Sci.* **16**, 31-96.
- [26] CRIGHTON D.G. and SCOTT J.F. (1979). Asymptotic solutions of model equations in nonlinear acoustics, *Phil. Trans. R. Soc. London* **A292**, 101-134.
- [27] CRIGHTON D.G., DOWLING A.P., FLOWKS WILLIAMS J.E., HECKL M. and LEPPINGTON F.G. (1992). *Modern Methods in analytical acoustics*. Lecture notes, Springer-Verlag, Berlin, 648-670.
- [28] CRUIKSHANK D.B. (1972). Experimental investigation of finite-amplitude acoustic oscillations in a closed tube, *J. Acoust. Soc. Am.* **52** (3), 1024-1036.
- [29] DAVIDSON B.J. (1971). Mass Transfer Due to Cavitation Microstreaming, *J. Sound. Vib* **17**, 261-270.
- [30] DISSELHORST J.H.M and VAN WIJNGAARDEN L. (1980). Flow in the exit of open pipes during acoustic resonance, *J. Fluid Mech.* **99** (2), 293-319.
- [31] DUCK P. W. and SMITH F. T. (1979). Steady streaming induced between oscillating cylinders, *J. Fluid Mech.* **91**, 93-110.



- [32] DVORAK (1883) On the circulation of air observed in Kundt's tubes, and on some allied acoustical problems, *Phil. Trans.* **175**.
- [33] EARNSHAW S. (1860). On the mathematical theory of sound, *Phil. Trans. R. Soc. London* **150**, 133-148.
- [34] ECKART C. (1948). Vortices and streams caused by sound waves, *Phys. Rev.* **73** (1), 68.
- [35] EISNER E. (1967). Complete solution of the Webster horn equation, *J. Acoust. Soc. Am.* **41**, 1126-1146.
- [36] EULER L. (1750). De la propagation du son, *Mem. Acad. Sci. Berlin* **15**, 185-209.
- [37] FARADAY M. (1831). On a peculiar class of acoustical figures; and on certain forms assumed by groups of particles upon vibrating elastic surfaces. *Philos. Trans.* **121**, 299-340.
- [38] FAY R.D. (1931). Plane sound waves of finite amplitude, *J. Acoust. Soc. Am.* **3**, 222-241.
- [39] FUBINI E. (1935). Anomalies in the propagation of acoustic waves of great amplitude [in italian], *Alta frequenza.* **4**, 530-581.
- [40] GAETE-GARRETON L. and GALLEGO-JUAREZ J.A. (1983). Propagation of finite-amplitude ultrasonic waves in air. Plane waves in a tube, *J. Acoust. Soc. Am.* **73** (3), 768-773.
- [41] GILBERT J. and PETIOT J.F. (1997). Brass instruments, some theoretical and experimental results, *In Proceedings of the Institut of Acoustics*, ISMA 97, Edinburgh.
- [42] GOLDSTEIN S. and McLACHLAN N.W. (1935). Sound Waves of Finite Amplitude in an Exponential Horn, *J. Acoust. Soc. Am.* **6**, 275-278.
- [43] GOLDSTEIN M.E. (1984). Aeroacoustics of turbulent shear flows, *Ann. Rev. Fluid Mech.* **16**, 263-285.
- [44] GUSEV V. and RUDENKO O.V. (1979). Nonsteady quasi-one-dimensional acoustic streaming in unbounded volumes with hydrodynamic nonlinearity, *Sov. Phys. Acoust.* **25** (6), 493-497.
- [45] GUSEV V. and RUDENKO O.V. (1981). Evolution of nonlinear two-dimensional acoustic streaming in the field of a highly attenuated sound beam, *Sov. Phys. Acoust.* **27** (6), 481-484.
- [46] GUSEV V. (1984). Buildup of forced oscillations in acoustic resonators, *Sov. Phys. Acoust.* **30**, 121-125.
- [47] GUSEV V., BAILLET H., LOTTON P. and BRUNEAU M. (2000). Theory of Nonlinear Acoustic Waves in a Thermoacoustics Prime-Mover, *Acustica.* **86**, 25-38.
- [48] HIRSCHBERG A., GILBERT J., MSALLAM R. and WIJNANDS A.P.J. (1996). Shock waves in trombones, *J. Acoust. Soc. Am.* **99** (3), 1754-1758.
- [49] HOPF E. (1950). The partial differential equation  $u_t + u.u_x = \mu u_{xx}$ , *Commun. Pure. Appl. Math.* **3**, 201-230.

- [50] ILINSKII Y., LIPKENS B., LUCAS T., VAN DOREN T. and ZABOLOTSKAYA E. (1998). Nonlinear standing waves in an acoustical resonator, *J. Acoust. Soc. Am.* **104** (5), 2664-2674.
- [51] INGARD U. and SINGHAL V.K. (1973). Upstream and downstream sound radiation into a moving fluid, *J. Acoust. Soc. Am.* **54** (5).
- [52] INGARD U. and SINGHAL V.K. (1974). Sound attenuation in turbulent pipe flow, *J. Acoust. Soc. Am.* **55** (3), 535.
- [53] INOUE Y. and YANO T. (1997). Propagation of strongly nonlinear plane N-waves, *J. Fluid Mech.* **341**, 59-76.
- [54] JIMENEZ B.J. (1973). Non-linear gas oscillations in pipes. Part I. Theory, *J. Fluid Mech.* **59**, 23-46.
- [55] KAMAKURA T., SUDO T., MATSUDA K. and KUMAMOTO Y. (1996). Time evolution of acoustic streaming from a planar ultrasound source, *J. Acoust. Soc. Am.* **100** (1), 132-138.
- [56] KELLER J. (1976). Resonant oscillations in closed tubes : the solutions of Chester's equations, *J. Fluid Mech.* **77** (2), 279-304.
- [57] KELLER J. (1977). Resonant oscillations in open tubes, *Z. angew. Math. Phys.* **28**, 237-263.
- [58] KHOKHLOV R.V. and SOLUYAN S.I. (1964). Propagation of acoustic waves of moderate amplitude through dissipative and relaxing media, *Acustica* **14**, 241-247.
- [59] KIRSCHHOFF G. (1968). Über den Einfluss der Wärmeleitung in einem gas auf die Schalbewegung [in german], *Poggendorfen Annalen* **134**, 177-193.
- [60] KUNDT A. (1868). Untersuchungen über die Schallgeschwindigkeit der Luft in Röhren, *Ann. Phys. Chem.* **85**, 337.
- [61] KUZNETSOV V.P. (1971). Equations of nonlinear acoustics, *Sov. Phys. Acoust.* **16**, 467-470.
- [62] LANDAU L.D. (1945). On shock waves at large distances from the place of their origin, *J. Phys. USSR* **9**, 496-500.
- [63] LANDAU L.D. and LIFSCHITZ E.M. (1963). *Course of theoretical physics : Fluid Mechanics*. Pergamon Press, Oxford. 2nd edition.
- [64] LAWRENSON C., LIPKENS B., LUCAS T., PERKINS D. and VAN DOREN T. (1998). Measurements of macrosonic standing waves in oscillating closed cavities, *J. Acoust. Soc. Am.* **104** (2), 623-636.
- [65] LEIBOVICH S. and SEEBASS A. R., editors (1974). *In Nonlinear waves*. Cornell Univ. Press, Ithaca, New York, 103-138.
- [66] LETTAU E. (1939). Messungen an Schwingungen von Gässaulen mit steilen Fronten in Rohrleitungen, *Deutsche Kraftfahrforchung* **39**, 1-10.
- [67] LIGHTHILL J. (1952). On sound generated aerodynamically, general theory, *Proc. Roy. Soc.*, **221A**, 564-587.

- [68] LIGHTHILL J. (1956). Viscosity Effects in Sound Waves of Finite Amplitude. In *Surveys in Mechanics* (eds. G.K. Batchelor & R.M. Davies). Cambridge University Press, 250-351.
- [69] LIGHTHILL J. (1978). Acoustic streaming. *J. Sound Vib.* **61** (3), 391-418.
- [70] LIGHTHILL J. (1978). *Waves in fluids*. Cambridge University Press.
- [71] LIGHTHILL J. (1992). Acoustic Streaming in the Ear Itself, *J. Fluid Mech.* **239**, 551-601.
- [72] MAA D-Y. and LIU K. (1995). Nonlinear standing waves : Theory and experiments, *J. Acoust. Soc. Am.* **98** (5), 2753-2763.
- [73] MAKAROV S. and OCHMANN M. (1996). Nonlinear and thermoviscous phenomena in acoustics, Part I. *Acustica* **82**, 579-606.
- [74] MAKAROV S. and OCHMANN M. (1997). Nonlinear and thermoviscous phenomena in acoustics, Part II. *Acustica* **83**, 197-222.
- [75] MENDOUSSE J.S. (1953). Nonlinear dissipative distortion of propagative sound waves at moderate amplitude, *J. Acoust. Soc. Am.* **25**, 51-54.
- [76] MENGUY L., DURRIEU P. and GILBERT J. (1997). Propagation acoustique non-linéaire dans les guides cylindriques, théorie et résultats expérimentaux préliminaires, *Actes du 13ième Congrès Français de Mécanique, Poitiers*. Vol.1, 11-14.
- [77] MENGUY L. and GILBERT J. (1998). Non linear wave propagation in cylindrical air-filled tubes, *Proceedings of the 16th International Congress on acoustics and 135th Meeting of the Acoustical Society of America, Seattle, USA*. vol. IV, 2295-2296.
- [78] MENGUY L., GILBERT J. and BURVINGT R. (2000). Propagation acoustique faiblement non linéaire en guide d'onde unidimensionnel : variation expérimentale sur le thème des équations de Burgers, *Actes du 5ième Congrès Français d'Acoustique, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Lausanne, Suisse*. 137-140.
- [79] MENGUY L. and GILBERT J. (1998). Vent acoustique non linéaire en guide d'onde cylindrique, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **326**, Série IIb, 643-648.
- [80] MORFEY C.L. (1971). Sound transmission and generation in ducts with flow, *J. Sound Vib.* **14**, 37-55.
- [81] MSALLAM R., DEQUIDT S., CAUSSE R., TASSART S. (2000). Physical model of the trombone including nonlinear effects. Application to the sound synthesis of loud tones. *Acustica* **86**, 725-736.
- [82] MSALLAM R. (1998). Modèles et simulations numériques de l'acoustique non-linéaire dans les conduits. Application à l'étude des effets non-linéaires dans le trombone et à la synthèse sonore par modèle physique. *Thèse de doctorat de l'université de Paris 6*.
- [83] NIMMO J.J.C., CRIGHTON D.G. (1982). Bäcklund transformation for nonlinear parabolic equations : the general results, *Proc. Roy. Soc.*, **A384**, 351-401.

- [84] NIMMO J.J.C. and CRIGTHON D.G. (1986). Geometrical and diffusive effects in nonlinear acoustic propagation over long ranges, *Philos. Trans. R. Soc. London Vol.A*, **320**, 1-35.
- [85] NYBORG W.L. (1965). Acoustic streaming. Mason, W.P., editor, *Physical acoustics*, Vol.II B, Academic press, New York, 265-331.
- [86] OCHMANN M. and MAKAROV S., (1997). Nonlinear and thermoviscous phenomena in acoustics, Part III. *Acustica* **83**, 827-846.
- [87] OSTROVSKII L.A. and PAPILOVA I.A. (1974). Nonlinear acoustic streaming, *Sov. Phys. Acoust.* **20** (1), 45-49.
- [88] PADET J. (1990). *Fluides en écoulement, méthodes et modèles*. Masson, Paris.
- [89] PAGNEUX V. (1996). Propagation acoustique dans les guides à section variable et effets d'écoulement. *Thèse de doctorat de l'université du Maine*.
- [90] PAGNEUX V., AMIR N. and KERGMARD J. (1996). A study of wave propagation in varying cross-section waveguides by modal decomposition. Part I theory and validation, *J. Acoust. Soc. Am.* **100**, 2034-2048.
- [91] PAGNEUX V., AMIR N. and KERGMARD J. (1997). A study of wave propagation in varying cross-section waveguides by modal decomposition. Part II results, *J. Acoust. Soc. Am.* **101**, 2504-2517.
- [92] PERNET D.F. and PAYNE R.C. (1971). Non-linear propagation of signals in air, *J. Sound Vib.* **17** (3), 383-396.
- [93] PETERS M., HIRSCHBERG A., REIJNEN A. and WIJNANDS A. (1993). Damping and reflexion coefficient measurements for an open pipe at low Mach and low Helmholtz numbers, *J. Fluid Mech.* **256**, 499-534.
- [94] PETIT L. and GONDRET P. (1992). Redressement d'un écoulement alternatif, *J. Phys.II France* **2**, 2115-2144.
- [95] PIERCE A.D. (1989). *Acoustics - an introduction to its physical principles and applications*. Acoust. Soc. Am., New York, 2nd edition.
- [96] PIERCY J.E. and LAMB J. (1954). Acoustic Streaming in Liquids, *Proc. Roy. Soc. A* **226**, 43-50.
- [97] Qi Q. (1993). The effect of compressibility on acoustic streaming near a rigid boundary for a plane traveling wave, *J. Acoust. Soc. Am.* **94** (2), 1090-1098.
- [98] QI Q., JOHNSON R.E. and HARRIS J.G. (1995). Boundary layer attenuation and acoustic streaming accompanying plane-wave propagation in a tube, *J. Acoust. Soc. Am.* **97** (3), 1499-1509.
- [99] RAYLEIGH J.W.S. (1883). On the circulation of air observed in Kundt's tubes and some allied acoustical problems, *Philos. Trans. R. Soc. London* **75**, 1-21.
- [100] RAYLEIGH J.W.S. (1896). *The theory of sound*. Dover Publications, 2nd edition, New York. Vol.2, 333-342.

- [101] RIEMANN G.B.F. (1858). Ueber die fortpflanzung ebener luftwellen von endlichen swingunsweite, *Goettingen Abh.* **8**, 43.
- [102] RILEY N. (1987). Streaming from a cylinder due to an acoustic source, *J. Fluid Mech.* **180**, 319-326.
- [103] ROCARD Y. (1933). Sur la Propagation des Ondes Sonores d'Amplitude Finie. *C. R. Acad. Sci. Paris*, **196**, 161.
- [104] ROCKLIFF D., CAMPBELL D.M., GREATED C.A. (2000). PIV Experimental Study on Acoustic Streaming in Cylindrical Air-Filled Tubes using High Intensity Sound Fields, *Actes du 5ième Congrès Français d'Acoustique, Lausanne, Suisse*, 199-202.
- [105] RONNENBERG D. and AHRENS C. (1977). Wall shear stress caused by small amplitude perturbation of turbulent boundary-layer flow : an experimental investigation, *J. Fluid Mech.* **83**, 433.
- [106] RUDENKO O.V. and SOLUYAN S.I. (1977). *Theoretical foundations of nonlinear acoustics*. Consultant Bureau, New York, English edition.
- [107] RUDENKO O.V. and SUKHORUKOV A.A. (1998). Nonstationary Eckart streaming and pumping of liquids in an ultrasonic field, *Acoust. Phys.* **44** (5), 565-570.
- [108] SAENGER R.A. and HUDSON G.E. (1960). Periodic shock waves in resonating gas columns, *J. Acoust. Soc. Am.* **32**, 961-971.
- [109] SCHLICHTING H. (1932). Berechnung ebener periodischer Grenzschichtströmungen [calculation of plane periodic boundary layer streaming], *Phys. Zeit.* **33**, 327-335.
- [110] SECOMB T.W. (1978). Flow in a channel with pulsating walls, *J. Fluid Mech.* **88** (2), 273-288.
- [111] SHARPE J.P., GREATED C.A., GRAY C. and CAMPBELL D.M. (1989). The Measurement of acoustic streaming using Particle Image Velocimetry, *Acustica* **68**, 168-172.
- [112] SOLUYAN S.I. and KHOKHLOV R.V. (1961). The propagation of acoustic waves of finite amplitude in dissipative medium, *Vestnik Moscow State Univ., Phys., Astron.* **3**, 52-61.
- [113] SQUIRE H.B. (1951). The round Laminar Jet, *Q.J. Mech. Appl. Math.* **4**, 321-329.
- [114] STUART J.T. (1966). Double boundary layers in oscillatory viscous flow, *J. Fluid Mech.* **24** (4), 673-987.
- [115] STURTEVANT B. (1974). Nonlinear gas oscillations in pipes. Part 2. Experiments, *J. Fluid Mech.* **63** (1), 97-120.
- [116] SUGIMOTO N. (1991). Burgers equations with a fractional derivative; hereditary effects on nonlinear acoustic waves, *J. Fluid Mech.* **225**, 631-653.
- [117] THOMPSON P. (1972). *Compressible fluid dynamics*. New York : Mc Graw-Hill.

- [118] TJØTTA J.N. and TJØTTA S. (1990). Nonlinear equations of acoustics. *Proc. 12th Int. Symp. Nonlinear Acoustics*, 80-97.
- [119] VAN WIJNGAARDEN L. (1968). On the oscillation near and at resonance in open pipes, *J. of Eng. Math.* Vol.II **3**, 224-240.
- [120] WALKER J.P. and ALLEN C.H. (1950). Sonic wind and static pressure in intense sound fields, *J. Acoust. Soc. Am.* **22**, 680A.
- [121] WESTERVELT P.J. (1953). The theory of steady rotational flow generated by a sound fields, *J. Acoust. Soc. Am.* **25** (1), 60-67.
- [122] WESTERVELT P.J. (1963). Parametric acoustic array, *J. Acoust. Soc. Am.* **35** (1), 535-537.
- [123] WHITHAM G.B. (1956). On the propagation of weak shock waves, *J. Fluid Mech.* **1**, 290-318.
- [124] WHITHAM G.B. (1974). *Linear and nonlinear waves*. Wiley Interscience, New York.
- [125] YOUNG-DOO C. and YANG-HANN K. (2000). Numerical analysis for non linear resonant oscillations of gas in axisymmetric closed tubes, *J. Acoust. Soc. Am.* **108** (6), 2765-2774.
- [126] ZABOLOTSKAYA E.A. and KHOKHLOV R.V. (1969). Quasi-plane waves in the nonlinear acoustics of confined beams, *Sov. Phys. Acoust.* **15**, 35-40.
- [127] ZAREMBO L.K. (1971). Acoustic streaming. Rozenberg, L.D., editor, *High-Intensity Ultrasonic Fields*. part III, Plenum Press, New York, 137-199.
- [128] ZARIPOV R.G. and ILHAMOV M.A. (1976). Non-linear gas oscillations in a pipe, *J. Sound Vib.* **46** (2), 245-257.
- [129] ZWICKER G. and KOSTEN C. (1949). *Sound absorbing materials*, Elsevier, Amsterdam.

**Abstract :** The acoustic streaming and the wave deformation are two known phenomena concerned with nonlinear acoustics. The aim of this work is to study them within the framework of the propagation slightly nonlinear in monodimensional waveguides.

Under high noise level, the nonlinearity of the acoustic basic equations implies the appearance of a continuous component, resulting in the presence of an average flow : the streaming. A dimensional analysis underlines the role of the inertia of the fluid, particularly marked in waveguides : the current lines can be correctly described only by taking into account this inertia. Nonlinear equations of the flow are obtained, and solutions are described, allowing to observe a distortion of the current lines dependent on a suitable Reynolds number. This flow remains nevertheless slow, and does not disturb in its turn the acoustic signal.

The nonlinear terms of the acoustic equations are in addition at the origin of a progressive deformation of the signal shape, which, although negligible locally, cumulates during the propagation and can lead to the shock waves formation. This deformation, described by generalized Burgers equations, is the result of the competition between the nonlinear effects and the thermo-viscal losses. The resolution presented is based on a harmonic balance method, also applicable for a nonsinusoidal periodic source and an unspecified termination. The model is then adapted so as to take into account the presence of an average flow, then this work is generalized with the case of the horn. The results of the models are confronted with experiments in the various configurations quoted previously.

**Keywords :** Nonlinear acoustics, Propagation in wave guides, Acoustic streaming, Wave distortion, Burgers equations