Sur l'action des coopérations homologiques sur l'homologie de Brown-Peterson de l'espace classifiant d'un p-groupe abélien élémentaire

Sylvain Rairat

UNIVERSITÉ PARIS 13 - Institut Galilée
Laboratoire Analyse, Géométrie et Applications, UMR 7539

Numéro attribué par la bibliothèque

THÈSE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PARIS 13

Discipline : **Mathématiques**

présentée et soutenue publiquement par

Sylvain RAIRAT

le 6 juillet 2011

Sur l'action des coopérations homologiques sur l'homologie de Brown-Peterson de l'espace classifiant d'un p-groupe abélien élémentaire

Directeur de thèse

M. Geoffrey POWELL	Université Paris 13

Rapporteurs

M. Andrew BAKER	Université de Glasgow
M. Hans-Werner HENN	Université de Strasbourg

Jury

M. Lawrence BREEN	Université Paris 13
M. Hans-Werner HENN	Université de Strasbourg
M. Takuji KASHIWABARA	Université Grenoble I
M. Minh Hà LÊ	Université Nationale du Vietnam
M. Geoffrey POWELL	Université Paris 13
M. Lionel SCHWARTZ	Université Paris 13

Remerciements

Cette thèse n'aurait pas pu voir le jour sans le concours de nombreuses personnes. Je tiens à toutes les remercier.

En premier lieu, je remercie Geoffrey Powell qui a guidé mes premiers pas dans la recherche et dirigé cette thèse. Je le remercie pour ses nombreux conseils, son soutien constant et la rigueur mathématique qu'il m'a apportés. Je lui suis particulièrement reconnaissant pour sa disponibilité tout au long de ma thèse ainsi que ses nombreuses relectures qui ont grandement amélioré la qualité de mon mémoire.

Je suis très reconnaissant envers Andrew Baker et Hans-Werner Henn pour avoir accepté la tâche de rapporter mon mémoire.

Avant mon doctorat, j'ai eu la chance d'effectuer mon mémoire de Master sous la direction de Lionel Schwartz. Je tiens à le remercier pour m'avoir initié à la topologie algébrique.

Je remercie également Lawrence Breen, Takuji Kashiwabara et Minh Hà Lê d'avoir accepté de participer au jury de ma thèse.

Je remercie les membres du LAGA et plus particulièrement l'équipe de topologie algébrique qui m'a accueilli. L'activité scientifique dynamique de ce laboratoire m'a permis de découvrir la richesse du monde de la recherche. Je tiens à remercier mes amis (ex-)thésard avec qui j'ai eu plaisir à discuter de mathématiques ou d'autre chose : Christophe Cazanave, Gabriel Faraud, Ngyuen Dang Ho Hai, David Hebert, Abdelaziz Marjane, Benjamin Mussat, Antoine Touzé... Ma gratitude va également à Isabelle Barbotin et Yolande Jimenez qui m'ont aidé à effectuer certaines tâches administratives.

Pour le soutien qu'ils m'ont apporté pendant cette thèse, je remercie mes amis et plus particulièrement Basile, Gaël et Pierre. Je remercie également tous les membres de ma famille, mes parents pour m'avoir toujours soutenu dans mes études, mes deux petites sœurs Élise et Amélie pour leur soutien moral et ma chère Anaïs pour ses encouragements.

Table des matières

Introduction

Introduction générale

La topologie algébrique est le domaine des mathématiques qui étudie des problèmes de nature topologique à l'aide d'outils algébriques. Pour cela, on utilise le formalisme des catégories et des foncteurs (cf. [Bor94a], par exemple). Soit $\mathscr{T}_*$ la catégorie des espaces topologiques pointés et des applications continues pointées, et $\mathcal{A}\mathrm{b}$ la catégorie des groupes abéliens et des morphismes de groupes. Eilenberg et Steenrod ont axiomatisé la notion d'invariant topologique (cf. [ES52]) :

Définition. *Une théorie homologique réduite est la donnée de foncteurs $k_n : \mathscr{T}_* \longrightarrow \mathcal{A}\mathrm{b}$, avec $n \in \mathbb{Z}$, tels que :*

- *L'invariance par homotopie : si f et g sont deux applications continues pointées homotopes $(X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $k_n(f) = k_n(g)$.*
- *Axiome de suspension : pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a un isomorphisme fonctoriel :*

$$k_{n+1}X \simeq k_n\Sigma X,$$

où ΣX est la suspension réduite de l'espace pointé X.
- *Si A est un sous-espace de X, alors on a une suite exacte longue de groupes abéliens :*

$$\cdots \longrightarrow k_nA \longrightarrow k_nX \longrightarrow k_n(X/A) \longrightarrow k_{n-1}A \longrightarrow \cdots$$

où X/A désigne la cofibre homotopique de l'inclusion de A dans X.

On définit les théories cohomologiques réduites à l'aide d'axiomes analogues, en utilisant des foncteurs contravariants. Il existe de nombreuses théories homologiques ; parmi celles-ci, on peut notamment citer l'homologie singulière à coefficients dans un anneau A, $\tilde{\mathrm{H}}_*(-, A)$, et les groupes d'homotopie stables $\pi_*^s(-)$.

Le Théorème de représentabilité de Brown (cf. [Bro62] et [Bro63]) démontre que les théories cohomologiques sont représentables. C'est-à-dire que si $(k^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une théorie cohomologique réduite, alors il existe une suite d'espaces pointés $(E_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ tels que :

$$k^nX = [X, E_n]\,,$$

où $[X, Y]$ est l'ensemble des classes d'homotopies pointées d'applications de X vers Y. L'axiome de suspension impose alors l'existence d'une application continue :

$$\epsilon_n : \Sigma E_n \longrightarrow E_{n+1},$$

telle que l'application obtenue par adjonction $E_n \longrightarrow \Omega E_{n+1}$ soit une équivalence d'homotopie. La donnée des espaces E_n et des applications ϵ_n définit un spectre E (plus précisément, un Ω-spectre). De la même façon, une théorie homologique $(k_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ détermine aussi un spectre E.

Les spectres forment une catégorie qui contient la catégorie des espaces topologiques (pour plus de détail on renvoie à [Ada95], [Swi02] ou [Vog70]). Intuitivement, on obtient la catégorie des spectres à partir de la catégorie des espaces topologiques pointés en inversant le foncteur de suspension. Comme dans la catégorie des espaces topologiques, on peut définir la notion d'homotopie entre deux morphismes de spectres. Plus généralement, dans [Qui67], Quillen introduit la notion de structure de catégorie de modèles sur une catégorie et la catégorie homotopique associée. Goerss et Jardine construisent ainsi la catégorie d'homotopie stable $\mathscr{S}$ dans le livre [GJ99] suivant la méthode de Bousfield et Friedlander (cf. [BF78]). Cette catégorie est additive et triangulée. On peut noter qu'il existe d'autres constructions plus sophistiquées telles que les spectres symétriques (cf. [HSS00]) et les S-modules (cf. [EKMM97]) dont on a pas besoin ici.

Étant donné un spectre E, on peut définir une théorie homologique E_* et une théorie cohomologique E^*. La catégorie $\mathscr{S}$ possède un produit monoïdal symétrique $\wedge$. Par la suite nous nous intéresserons aux spectres munis d'une structure de monoïde commutatif dans cette catégorie : les spectres en anneau commutatifs. Si E est un spectre en anneau commutatif, l'ensemble des coefficients du spectre E, $E_* = E_*\mathrm{S}^0$ est un anneau commutatif gradué et les théories homologiques E_* et cohomologiques E^* sont à valeurs dans la catégorie des E_*-modules gradués. De plus, E^*E s'identifie à l'algèbre des opérations cohomologiques stables. Dans le cas où E est le spectre d'Eilenberg-Maclane à coefficients dans $\mathbb{F}_p$, $\mathrm{H}\,\mathbb{F}_p$, l'algèbre des opérations cohomologiques stables $\mathrm{H}\,\mathbb{F}_p^*\,\mathrm{H}\,\mathbb{F}_p$ est l'algèbre de Steenrod $\mathcal{A}^*$ (cf. [Ste62]). C'est une algèbre de Hopf non commutative sur $\mathbb{F}_p$. De plus, la cohomologie singulière à coefficients dans $\mathbb{F}_p$ est à valeurs dans la catégorie des $\mathcal{A}^*$-modules gradués sur l'algèbre de Steenrod. L'algèbre $\mathcal{A}^*$ ainsi que la catégorie des $\mathcal{A}^*$-modules a fait l'objet de nombreux travaux dont ceux de Margolis (cf. [Mar83]) et de Lionel Schwartz (cf. [Sch94]).

Néanmoins, si les coefficients de la théorie cohomologique E^* ne sont pas bornés, on doit prendre en compte la topologie naturelle définie sur la cohomologie d'un espace. C'est pour cette raison que nous préférerons utiliser les théories homologiques. On peut considérer que, si E_*E est un E_*-module plat, alors E_*E représente l'ensemble des coopérations homologiques stables. Autrement dit, (E_*, E_*E) est muni d'une structure d'algébroïde de Hopf gradué et la théorie homologique E_* est à valeurs dans la catégorie des E_*E-comodules à gauche. C'est la raison qui motive notre étude des algébroïdes de Hopf et de la catégorie des comodules sur un algébroïde de Hopf. Si E est le spectre d'Eilenberg-Maclane à coefficients dans $\mathbb{F}_p$, $(\mathrm{H}\,\mathbb{F}_p)_*\,(\mathrm{H}\,\mathbb{F}_p)$ est l'algèbre de Steenrod duale $\mathcal{A}_*$. Dans ce cas, c'est une algèbre de Hopf commutative sur $\mathbb{F}_p$.

Soit E un spectre en anneau commutatif. Une orientation complexe pour E est un élément $x \in E^2\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty$ tel que l'application $E^*\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty \longrightarrow E^*\mathrm{S}^2 \simeq \Sigma^2 E_*$ induite par l'inclusion de $\mathrm{S}^2 \simeq \mathbb{C}\mathrm{P}^1$ dans $\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty$ envoie x sur $1 \in \Sigma^2 E_*$. On a alors :

$$E^*\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty_+ \simeq E_*[\![x]\!].$$

Si E est muni d'une orientation complexe, on dit que le spectre E est complexe orienté. Soit X un espace paracompact et Pic(X) le groupe des classes d'isomorphismes de fibrés en droite sur X, muni du produit tensoriel de fibrés. Le foncteur $X \longmapsto \mathrm{Pic(X)}$ est représenté par $\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty$. C'est-à-dire qu'on a un isomorphisme :

$$[X, \mathbb{C}\mathrm{P}^\infty] \xrightarrow{\sim} \mathrm{Pic(X)}.$$

La structure de groupe commutatif sur Pic(X) se réalise par une structure de H-groupe commutatif sur $\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty$. Cette structure donne lieu à l'existence d'une loi de groupe formel $F_E(x, y) \in E_*[\![x, y]\!]$. Le groupoïde des lois de groupe formel et des isomorphismes stricts est représenté par un algébroïde de Hopf $(\mathsf{L}, \mathsf{LB})$. Lazard a explicité la structure de l'anneau L dans [Laz55] : c'est un anneau de polynômes à coefficients dans $\mathbb{Z}$ sur des générateurs x_i de degré $2i$, avec $i \geq 1$.

$$\mathsf{L} \simeq \mathbb{Z}\left[x_i; i \geq 1\right].$$

Cependant, il n'existe aucun choix canonique de générateurs et les morphismes de structure de l'algébroïde de Hopf $(\mathsf{L}, \mathsf{LB})$ ne s'expriment pas facilement en fonction de ces générateurs.

Soit p un nombre premier fixé. Le groupoïde des lois de groupe formel p-typiques et des isomorphismes stricts est représenté par un algébroïde de Hopf $(\mathsf{V}, \mathsf{VT})$. Le théorème de Cartier montre que sur une $\mathbb{Z}_{(p)}$-algèbre, toute loi de groupe formel est canoniquement isomorphe à une loi de groupe formel p-typique. L'anneau V admet une description analogue à celle de L : c'est un anneau de polynômes à coefficients dans $\mathbb{Z}_{(p)}$ sur des générateurs v_i de degré $2(p^i - 1)$, $i \geq 1$:

$$\mathsf{V} \simeq \mathbb{Z}_{(p)}\left[v_i; i \geq 1\right].$$

Les générateurs v_i ne sont pas uniquement déterminés. Néanmoins les idéaux $\mathfrak{I}_n = (v_0 = p, \ldots, v_{n-1})$ ne dépendent pas des choix des générateurs. De plus, Araki et Hazewinkel ont construit deux ensembles de générateurs et on dispose de formules explicites pour décrire les applications de structure de l'algébroïde de Hopf $(\mathsf{V}, \mathsf{VT})$. On peut donc, à l'aide d'un ordinateur, mener à bien certains calculs.

Quillen a démontré dans [Qui69] que l'algébroïde de Hopf $(\mathsf{L}, \mathsf{LB})$ se réalise topologiquement par le spectre du cobordisme complexe MU précédemment étudié par Thom et Milnor dans [Tho95] et [Mil60] :

$$(\mathsf{MU}_*, \mathsf{MU}_*\mathsf{MU}) \simeq (\mathsf{L}, \mathsf{LB}).$$

Le spectre MU est un spectre en anneau commutatif complexe orienté et si E est un spectre en anneau commutatif complexe orienté, alors à homotopie près, il existe un unique morphisme de spectres en anneau $\mathsf{MU} \longrightarrow E$ qui induit l'orientation (cf. [Ada95]). On a donc un morphisme d'algébroïdes de Hopf $(\mathsf{MU}_*, \mathsf{MU}_*\mathsf{MU}) \longrightarrow (E_*, E_*E)$, et si E est Landweber exact pour MU alors la E-homologie se déduit directement de la MU-homologie :

$$E_*X = E_* \otimes_{\mathsf{MU}_*} \mathsf{MU}_*X.$$

Par exemple, le spectre d'Eilenberg-Maclane HA à coefficients dans un anneau commutatif A, est un spectre en anneau commutatif complexe orienté dont la loi de groupe formel associée est la loi additive $\mathbb{G}_{\mathrm{a}}(x, y) = x + y$, mais ce n'est pas un spectre Landweber exact en général. Le spectre de la K-théorie complexe $K\mathcal{U}$ est un exemple de spectre en anneau commutatif complexe orienté qui est Landweber exact. La loi de groupe formel associée à ce spectre est la loi de groupe formel multiplicative $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}(x, y) = x + y - uxy$, où $u \in K_2$ est l'élément de Bott.

Soit p un nombre premier. Au lieu d'utiliser directement le spectre MU, on utilise le spectre de Brown-Peterson BP (qui dépend de p), introduit dans l'article [BP66]. Le spectre BP est un spectre en anneau commutatif, complexe orienté. Ce spectre réalise l'algébroïde de Hopf $(\mathsf{V}, \mathsf{VT})$:

$$(\mathsf{BP}_*, \mathsf{BP}_*\mathsf{BP}) \simeq (\mathsf{V}, \mathsf{VT}).$$

De plus, la localisation du spectre MU au nombre premier p est homotopiquement équivalente à un bouquet de suspensions du spectre BP :

$$\mathsf{MU}_{(p)} \simeq \bigvee_i \Sigma^{n_i}\mathsf{BP}.$$

Ainsi, si X est p-local, la MU-homologie de X est entièrement déterminée par la BP-homologie de X.

Dans les années 70-80, Miller, Morava, Ravenel et Wilson notamment ont développé des méthodes pour calculer des classes d'homotopies d'applications continues à partir de calculs de BP-homologie. Ces méthodes se basent sur les suites spectrales d'Adams et d'Adams-Novikov, et sur la filtration chromatique de BP. Soit E un spectre en anneau tel que E_*E est plat sur E_* et X un spectre. La E_*-suite spectrale d'Adams $(E_r^{s,t}, d_r : E_r^{s,t} \longrightarrow E_r^{s-r,t+r+1})$ a pour terme E_2 :

$$E_2^{s,t} = \mathrm{Ext}_{E_*E}^{s,t}(E_*, E_*X).$$

Sous certaines conditions, elle converge vers les groupes d'homotopie stables de X, $\pi_{s+t}^s(X)$. Le premier problème est de calculer explicitement le terme E_2 de cette suite spectrale, qui peut être très compliqué.

Dans l'article [Mor85], Morava introduit une filtration chromatique de la catégorie des $\mathsf{BP}_*\mathsf{BP}$-comodules, qui provient de la filtration par la hauteur de l'espace de modules des lois de groupe formel p-typiques. Cette filtration permet de définir une suite spectrale qui converge vers le terme E_2 de la suite spectrale d'Adams pour $E = \mathsf{BP}$. Morava utilise dans cet article un langage géométrique et introduit la notion de champ algébrique en topologie algébrique (cf. les travaux de Naumann [Nau07] et Hollander [Hol08]). À un algébroïde de Hopf, on peut associer un champ algébrique. Un comodule sur un algébroïde de Hopf s'interprète alors comme un faisceau quasi-cohérent sur le champ associé.

Motivations

Soit G un groupe topologique. Les classes d'isomorphismes de G-fibrés principaux sur un espace paracompact X sont en bijection avec l'ensemble des classes d'homotopies d'applications continues de X vers l'espace classifiant $\mathrm{B}G$. Les espaces classifiants sont utilisés dans la construction des spectres de la K-théorie et du cobordisme complexe. Il est donc naturel de s'y intéresser et de connaître leurs invariants topologiques.

Soient p un nombre premier, n un entier et V un p-groupe abélien élémentaire de rang n. La cohomologie singulière modulo p de $\mathrm{B}V$ ainsi que l'action de l'algèbre de Steenrod et du groupe linéaire sur cette cohomologie est bien connue. La conjecture de Sullivan, démontrée par Miller dans [Mil87] dit que l'espace des applications continues pointées de $\mathrm{B}G$ vers X est faiblement contractile. Miller énonce aussi le résultat suivant démontré par Lannes dans l'article [Lan92]. Si X est un espace simplement connexe de type fini, on a alors l'isomorphisme suivant :

$$[\mathrm{B}V, X] \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}\left(\mathrm{H}^*\mathrm{X}, \mathrm{H}^*\mathrm{BV}\right),$$

où $\mathcal{U}$ désigne la catégorie des modules instables sur l'algèbre de Steenrod. Il est naturel de chercher à étendre ces résultat à d'autres théories homologiques. Dans l'article [JW85], Johnson et Wilson déterminent une filtration de la BP-homologie de $(\mathrm{B}\mathbb{Z}/p)^{\wedge n}$ dans la catégorie des BP_*-modules, puis qu'elle est additivement scindée, dans [JWY94]. Ce résultat est utilisé dans l'article [Min99] de Minami. Il utilise le morphisme de Thom $\mathsf{BP} \longrightarrow \mathrm{H}\mathbb{F}_\mathrm{p}$ et les opérations d'Adams pour étudier les groupes d'homotopie stables de $\mathrm{B}V$.

Dans ce travail, j'étudie les catégories de comodules sur un algébroïde de Hopf, les foncteurs de localisation sur ces catégories ainsi que la notion de produit semi-direct d'algébroïdes de Hopf, afin de compléter les résultats de Johnson et Wilson.

Plan de la thèse

Le premier chapitre de ma thèse est consacré au rappel des définitions et des résultats importants qui seront utilisés par la suite. La première partie est consacrée aux algébroïdes de Hopf et aux comodules. La fin de ce chapitre est consacrée aux lois de groupe formel. En particulier, je rappelle les définitions des algébroïdes de Hopf $(\mathsf{L}, \mathsf{LB})$ et $(\mathsf{V}, \mathsf{VT})$. Des références standards pour ces sujets sont les annexes $A1$ et $A2$ de [Rav86].

Soit $\Bbbk$ un anneau. Le deuxième chapitre est consacré à l'étude des catégories de comodules sur un $\Bbbk$-algébroïde de Hopf (A, Γ). À la section 2.2, je rappelle la définition du produit cotensoriel $M \square_\Gamma N$ d'un Γ-comodule à droite M et d'un Γ-comodule à gauche N, étudié par Ravenel à l'annexe $A1$ de [Rav86]. Le produit cotensoriel n'est, en général, qu'un $\Bbbk$-module. Mais si M et N ont une structure de bicomodule sur des algébroïdes de Hopf plats, alors leur produit cotensoriel admet aussi une structure de bicomodule. Le produit cotensoriel de comodules généralise ainsi le produit tensoriel de bimodules. Par contre, il n'est en général pas associatif (cf. l'exemple 2.2.16). Le théorème 2.2.19 donne des conditions suffisantes pour avoir l'associativité du produit cotensoriel.

Si $f : (A, \Gamma) \longrightarrow (B, \Sigma)$ est un morphisme de $\Bbbk$-algébroïdes de Hopf. On peut définir un foncteur f_* entre les catégories de Γ-comodules et de Σ-comodules :

$$f_* : {}_{\Gamma}\mathcal{C}\mathrm{omod} \longrightarrow {}_{\Sigma}\mathcal{C}\mathrm{omod}.$$

De plus, si (A, Γ) est un algébroïde de Hopf plat, ce foncteur admet un adjoint à droite f^* :

$$f_* : {}_{\Gamma}\mathcal{C}\mathrm{omod} \leftrightarrows {}_{\Sigma}\mathcal{C}\mathrm{omod} : f^*.$$

Ces foncteurs s'expriment à l'aide du produit cotensoriel de bicomodules :

$$f_* \simeq (B \otimes_A \Gamma) \Box_{\Gamma} - \quad ; \quad f^* \simeq (\Gamma \otimes_A B) \Box_{\Sigma} - .$$

Plus généralement, à la section 2.6, j'étudie les foncteurs additifs entre catégories de comodules. Le corollaire 2.6.5 donne une condition suffisante pour qu'un foncteur additif entre catégories de comodules s'exprime à l'aide d'un produit cotensoriel de comodules. Ce résultat permet d'expliciter une condition pour que deux catégories de comodules soient équivalentes, analogue à la condition de Morita pour les catégories de bimodules :

Théorème (Théorème 2.6.7)**.** *Soient (A, Γ) et (B, Σ) deux algébroïdes de Hopf plats. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*
- *(A, Γ) et (B, Σ) sont Morita équivalents.*
- *Il existe un Γ-Σ bicomodule W, coplat en tant que Σ-comodule, et un Σ-Γ bicomodule T, coplat en tant que Γ-comodule, tels qu'on ait les isomorphismes de bicomodules suivant :*

$$W \Box_{\Sigma} T \simeq \Gamma;$$

$$T \Box_{\Gamma} W \simeq \Sigma.$$

Finalement, je rappelle à la section 2.7 la définition d'un morphisme d'algébroïdes de Hopf Landweber exact. Si $f : (A, \Gamma) \longrightarrow (B, \Sigma)$ est Landweber exact, alors le foncteur $L_f = f^* \circ f_* : {}_{\Gamma}\mathcal{C}\mathrm{omod} \longrightarrow {}_{\Gamma}\mathcal{C}\mathrm{omod}$ est un foncteur de localisation. Au chapitre 3, je rappelle la définition générale de foncteur de localisation sur une catégorie $\mathcal{C}$ quelconque. Dans les articles [HS05a] et [HS05b], Hovey et Strickland étudient ces foncteurs dans le cas particulier des catégories de comodules, et plus spécifiquement la catégorie des $\mathsf{BP}_*\mathsf{BP}$-comodules. Ils montrent que les seuls foncteurs de localisation sur la catégorie des $\mathsf{BP}_*\mathsf{BP}$-comodules que l'on peut obtenir à partir d'un morphisme d'algébroïdes de Hopf sont les foncteurs de localisation L_n, avec $n \geq 0$, par rapport aux théories de torsion héréditaires $\mathcal{T}_n$:

$$\mathcal{T}_n = \left\{ M \in {}_{\mathsf{BP}_*\mathsf{BP}}\mathcal{C}\mathrm{omod} \mid \ v_n^{-1} M = 0 \right\}.$$

Soit (A, Γ) un algébroïde de Hopf plat et M et N deux Γ-comodules à gauche. En général, il n'y a pas assez d'objets projectifs dans une catégorie de comodules, on ne peut donc pas dériver le foncteur de produit de tensoriel dans la catégorie des Γ-comodules. Néanmoins, à la section 3.3, on définit une structure fonctorielle de Γ-comodule sur $\mathrm{Tor}_i^A(M, N)$. Cela est nécessaire pour déterminer, à la section 3.4, un isomorphisme de comodules entre les foncteurs dérivés des foncteurs de localisation L_n^i et les foncteurs $\mathrm{Tor}_{n+1-i}^{\mathsf{BP}_*}(K_n, -)$. En tant que BP_*-module, on a un isomorphisme :

$$K_n \simeq \mathsf{BP}_*/(v_0^\infty, \ldots, v_n^\infty).$$

On remarque de plus que $J_{n+1} = v_{n+1}^{-1} K_n$ est le terme d'indice $n+1$ de la résolution chromatique de BP_* :

$$\mathsf{BP}_* \longrightarrow J_0 \longrightarrow J_1 \longrightarrow \cdots \qquad .$$

Au début du chapitre 4, j'étudie une généralisation aux catégories du produit semi-direct de groupes. Soient (A, Γ) un $\Bbbk$-algébroïde de Hopf plat et K une A-algèbre de Hopf dans la catégorie des Γ-comodules à droite qui est plate. À la section 4.6, je définis alors un $\Bbbk$-algébroïde de Hopf (A, Λ) qui représente le foncteur en groupoïdes, produit semi-direct des foncteur en groupoïdes représenté par les algébroïdes de Hopf (A, Γ) et (A, K). Le $\Bbbk$-algébroïde de Hopf (A, Λ) est un cas particulier d'extension d'algébroïdes de Hopf, et on a des morphismes de $\Bbbk$-algébroïdes de Hopf ι, π et s, section de π :

$$\begin{tikzcd} (A, K) & (A, \Lambda) \arrow[l, "\iota"'] & (A, \Gamma). \arrow[l, "\pi"] \arrow[l, bend right, dashed, "s"'] \end{tikzcd}$$

À la section 4.7, j'explicite les foncteurs induits par ces morphismes d'algébroïdes de Hopf, au niveau des catégories de comodules à gauche. Enfin je démontre à la section 4.8 que la catégorie des Λ-comodules est équivalente à la catégorie des K-comodules dans la catégorie des Γ-comodules. À la section 4.9, je montre qu'on peut étendre à la catégorie des Λ-comodules, les foncteurs de localisations définis sur la catégorie des Γ-comodules.

La construction introduite dans ce chapitre est motivée par le fait que si ξ est un fibré en sphères sur un espace X, alors on a un morphisme $T\xi \longrightarrow X_+ \wedge T\xi$, où $T\xi$ est l'espace de Thom de ξ. En remarquant que $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p$ est l'espace total d'un fibré en sphère sur $\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty$, on obtient une application :

$$\mathrm{B}\mathbb{Z}/p \longrightarrow \mathbb{C}\mathrm{P}^\infty_+ \wedge \mathrm{B}\mathbb{Z}/p.$$

Cela permet de définir sur la BP-homologie de $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p$ une structure de comodule sur la BP_*-algèbre de Hopf $\mathsf{BP}_*\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty$. Plus généralement, $(\mathrm{B}\mathbb{Z}/p)^{\wedge n}$ a une structure naturelle de comodule sur l'algèbre de Hopf $(\mathsf{BP}_*\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty)^{\otimes n}$.

Au chapitre 5, j'étudie la BP_*-homologie de $\mathrm{B}V$ où V est un p-groupe abélien élémentaire de rang n. Aux sections 5.1, 5.2 et 5.3, je considère le cas $n = 1$: $\mathrm{B}V = \mathrm{B}\mathbb{Z}/p$. J'explicite la structure de $\mathsf{BP}_*\mathsf{BP}$-comodule de $\mathsf{BP}_*\mathrm{B}\mathbb{Z}/p$, ainsi que l'action du groupe $(\mathbb{Z}/p)^\times$ sur cette homologie, en fonction des coefficients de la p-série de la loi de groupe formel p-typique universelle. À la section 5.4, je rappelle les résultats obtenus par Johnson et Wilson dans l'article [JW85]. Le résultat principal de cet article est le théorème suivant :

Théorème (Théorème 5.1 de [JW85])**.** *Il existe une filtration de* BP_**-modules sur* $\mathsf{BP}_*\left(\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^{\wedge n}\right)$ *dont le gradué associé est :*

$$\bigoplus_{k=0}^{n} \bigoplus_{i_1+\cdots+i_k=n-k} L_1^{\otimes i_1} \otimes_{\mathsf{BP}_*} \cdots \otimes_{\mathsf{BP}_*} L_k^{\otimes i_k} \otimes_{\mathsf{BP}_*} \mathsf{BP}_*\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^{\otimes k},$$

où L_m*,* $m \geq 1$ *est le* BP_**-module libre sur les générateurs* y_h *homogènes de degré* $2h$*,* $0 < h < p^m$*.*

Plusieurs questions se posent alors. Cette filtration est-elle scindée ? Est-ce une filtration dans la catégorie des $\mathsf{BP}_*\mathsf{BP}$-comodules et qu'elle est la structure de comodule du gradué ? Dans [JWY94], Johnson, Wilson et Yan montrent que la filtration est scindée dans la catégorie des groupes abéliens. Je me suis plutôt intéressé à la structure de comodule. À la section 5.4, j'énonce un résultat analogue concernant la structure de $\mathsf{BP}_*\mathsf{BP}$-comodule. Puis, je détaille à la section 5.5 le cas $n = 2$. Pour $n > 2$, la structure de $\mathsf{BP}_*\mathsf{BP}$-comodule des quotients successifs n'est pas totalement explicitée. Les quotients successifs de cette filtration font intervenir les $\mathsf{BP}_*\mathsf{BP}$-comodules $\Sigma\,\mathrm{Tor}_1^{\mathsf{BP}_*}(N, N^{\otimes n})$, où $N = \mathsf{BP}_*\mathrm{B}\mathbb{Z}/p$. Ce comodule est le noyau d'un morphisme directement défini à partir des coefficients de la p-série de la loi de groupe formel p-typique universelle. Le fait que ces coefficients ne soient pas algébriquement indépendants nous empêchent d'avoir une expression explicite des générateurs de ce comodule. Néanmoins, à l'aide d'un ordinateur, on peut mener à bien certain calculs en bas degré.

Au chapitre 6, j'introduis l'algébroïde de Hopf $(\mathsf{S}, \mathsf{S}\Lambda)$. Soient R un anneau et G_1 le groupe des séries formelles f à coefficients dans R, inversibles (pour la loi de composition) et telles que $f'(0) = 1$. L'algébroïde de Hopf $(\mathsf{S}, \mathsf{S}\Lambda)$ représente le groupoïde défini par l'action de G_1 sur l'ensemble des séries formelles. L'ensemble G_n des séries formelles f telles que $f(0) = n$ est stabilisé par cette action et le groupoïde correspondant est représenté par l'algébroïde de Hopf $(\mathsf{S}_n, \mathsf{S}_n\Lambda)$ où S_n est le quotient de S par un idéal invariant. D'autre part, si F est une loi de groupe formel, on peut lui associer fonctoriellement sa n-série. Par le lemme de Yoneda, on obtient un morphisme d'algébroïdes de Hopf :

$$\overline{\kappa_n} : (\mathsf{S}_n, \mathsf{S}_n\Lambda) \longrightarrow (\mathsf{L}, \mathsf{LB}),$$

et ce morphisme devient un isomorphisme, si on le tensorise avec $\mathbb{Q}$. Enfin, pour $n = p$, on obtient un morphisme $(\mathsf{S}, \mathsf{S}\Lambda) \longrightarrow (\mathsf{BP}_*, \mathsf{BP}_*\mathsf{BP})$ et la série formelle $\mathfrak{a}(x) = \sum_{i\geq 0} a_i x^{i+1} \in \mathsf{S}[\![x]\!]$ est l'analogue de la p-série universelle sur BP_*. À la section 6.3, je définis un comodule N sur l'algébroïde de Hopf $(\mathsf{S}, \mathsf{S}\Lambda)$ tel que $\mathsf{BP}_* \otimes_{\mathsf{S}} N = \mathsf{BP}_* \mathrm{B}\mathbb{Z}/p$. Les morphismes de structure de cet algébroïde de Hopf $(\mathsf{S}, \mathsf{S}\Lambda)$ sont explicites et les coefficients de la série univerelle $\mathfrak{a}(x)$ ont l'avantage d'être algébriquement indépendants. Cette propriété permet d'expliciter les relations entre les générateurs de $N^{\otimes n}$ à la section 6.7, puis d'expliciter les générateurs du comodule $\Sigma\,\mathrm{Tor}_1^{\mathsf{S}}(N, N^{\otimes n})$ à la section 6.10. Ensuite, à la section 6.11, on a un premier résultat concernant la structure de comodule de $\Sigma\,\mathrm{Tor}_1^{\mathsf{S}}(N, N^{\otimes n})$. À la section 6.12, pour $n = 2$, je détermine une décomposition en somme directe :

$$\Sigma\,\mathrm{Tor}_1^{\mathsf{S}}(N, N^{\otimes 2}) \simeq W_1 \oplus W_2,$$

où W_1 et W_2 sont deux sous-comodules de $\Sigma\,\mathrm{Tor}_1^{\mathsf{S}}(N, N^{\otimes 2})$, isomorphes respectivement en tant que S-modules à $\Sigma^2 N^{\otimes 2}$ et $\Sigma^4 N^{\otimes 2}$. Dans le cas général, je ne parviens pas à déterminer une telle décomposition, mais je définis un complexe de $\mathsf{S}\Lambda$-comodules, dont on connaît la structure de comodule. Je conjecture que ce complexe est une résolution de $\Sigma\,\mathrm{Tor}_1^{\mathsf{S}}(N, N^{\otimes n})$.

En utilisant les foncteurs de changement de base, on devrait pouvoir en déduire des résultats sur la BP-homologie de $\mathrm{B}V$ dans la catégorie des $\mathsf{BP}_*\mathsf{BP}$-comodules. Ceci pourra faire l'objet de travaux futurs.

Chapitre 1

Généralités

Dans toute la suite, les anneaux seront supposés commutatifs et unitaires. La catégorie des anneaux sera notée $\mathcal{A}$nn. On fixe un anneau de base noté $\Bbbk$; ce sera très souvent $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}_{(p)}$, où p est un nombre premier. Les $\Bbbk$-algèbres seront toujours supposées associatives, commutatives et unitaires et nous noterons ${}_{\Bbbk}\mathcal{A}$lg la catégorie des $\Bbbk$-algèbres. La catégorie des $\Bbbk$-algèbres $\mathbb{Z}$-graduées commutatives, associatives et unitaires et des morphismes d'algèbres homogènes de degré 0 sera notée ${}_{\Bbbk}\mathcal{A}\mathrm{lg}^{\mathrm{gr}}$. Rappelons que, dans le cadre des algèbres graduées, commutatif signifie que, si x et y sont deux éléments homogènes de degrés respectif m et n, alors :

$$xy = (-1)^{mn} yx.$$

1.1 Algébroïdes de Hopf

Dans cette section, nous rappelons la notion d'algébroïde de Hopf. Pour cela, rappelons tout d'abord la définition d'un groupoïde.

Définition 1.1.1. *Un groupoïde est une petite catégorie dans laquelle tout morphisme est un isomorphisme. Nous noterons* $\mathcal{G}$rpd *la sous catégorie pleine de la catégorie des petites catégories* $\mathcal{C}$at*, constituée des groupoïdes.*

Exemple 1.1.2. La catégorie des groupes $\mathcal{G}$rp peut être vue comme une sous-catégorie pleine de la catégorie des groupoïdes. En effet, si G est un groupe, on peut lui associer le groupoïde $\widetilde{G}$ à un seul objet (noté $\star_G$) et dont l'ensemble des morphismes est G. La loi de composition est donnée par la loi de groupe de G.

La catégorie des ensembles $\mathcal{S}$et peut aussi être vue comme une sous-catégorie pleine de la catégorie des groupoïdes. En effet, si X est un ensemble, on peut lui associer le groupoïde dont l'ensemble des objets est X, et les seuls morphismes sont les morphismes identités.

Proposition 1.1.3. *Un groupoïde est la donnée de deux ensembles, l'ensemble $\mathcal{O}$ des objets et l'ensemble $\mathcal{M}$ des morphismes, ainsi que des applications suivantes :*

- *la source et le but :*

$$s : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{O},$$

$$t : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{O};$$

- *la composition des morphismes :*

$$\circ : \mathcal{M}\,{}^{t}\!\times^{s}_{\mathcal{O}}\mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M};$$

- *l'application d'identité :*

$$u : \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{M};$$

– *l'inversion des morphismes :*

$$\iota : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}.$$

De plus, ces applications vérifient les axiomes suivants :

(G1) la source et le but d'un morphisme identité est l'objet sur lequel il est défini :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O} \arrow[r, "u"] \arrow[dr, equal] & \mathcal{M} \arrow[d, shift right, "t"'] \arrow[d, shift left, "s"] \\ & \mathcal{O}, \end{tikzcd}$$

(G2) le diagramme suivant commute (π_1 et π_2 désignent respectivement la projection sur le premier et second facteur du produit fibré) :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O} & \mathcal{M}\,{}^t\!\times^s_{\mathcal{O}}\mathcal{M} \arrow[l, "s\circ\pi_1"'] \arrow[r, "t\circ\pi_2"] \arrow[d, "\circ"] & \mathcal{O} \\ & \mathcal{M}, \arrow[ul, "s"] \arrow[ur, "t"'] & \end{tikzcd}$$

(G3) les morphismes identités sont neutres à droite et à gauche pour la composition :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M} \arrow[r, "\alpha_1\times id_{\mathcal{M}}"] \arrow[dr, equal] & \mathcal{M}\,{}^t\!\times^s_{\mathcal{O}}\mathcal{M} \arrow[d, "\circ"] & \mathcal{M} \arrow[l, "id_{\mathcal{M}}\times\alpha_2"'] \arrow[dl, equal] \\ & \mathcal{M}, & \end{tikzcd}$$

où les applications α_1 et α_2 sont définies par les composées :

$$\alpha_1 : \mathcal{M} \xrightarrow{s} \mathcal{O} \xrightarrow{u} \mathcal{M},$$

$$\alpha_2 : \mathcal{M} \xrightarrow{t} \mathcal{O} \xrightarrow{u} \mathcal{M},$$

(G4) inverser un morphisme échange source et but :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M} \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "s"'] & \mathcal{M} \arrow[d, "t"] \\ & \mathcal{O}, \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{M} \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "t"'] & \mathcal{M} \arrow[d, "s"] \\ & \mathcal{O}, \end{tikzcd}$$

(G5) l'inversion est une involution :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M} \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, equal] & \mathcal{M} \arrow[d, "\iota"] \\ & \mathcal{M}, \end{tikzcd}$$

(G6) l'inversion est un inverse pour la composition :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M} \arrow[r, "\beta_1"] \arrow[dr, "\alpha_1"'] & \mathcal{M}\,{}^t\!\times^s_{\mathcal{O}}\mathcal{M} \arrow[d, "\circ"] & \mathcal{M} \arrow[l, "\beta_2"'] \arrow[dl, "\alpha_2"] \\ & \mathcal{M}, & \end{tikzcd}$$

avec $\beta_1 = id_{\mathcal{M}} \times \iota$ et $\beta_2 = \iota \times id_{\mathcal{M}}$, *(G7) la composition est associative :*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}\,{}^t\!\times^s_{\mathcal{O}}\mathcal{M}\,{}^t\!\times^s_{\mathcal{O}}\mathcal{M} \arrow[r, "id\times\circ"] \arrow[d, "\circ\times id"'] & \mathcal{M}\,{}^t\!\times^s_{\mathcal{O}}\mathcal{M} \arrow[d, "\circ"] \\ \mathcal{M}\,{}^t\!\times^s_{\mathcal{O}}\mathcal{M} \arrow[r, "\circ"'] & \mathcal{M}. \end{tikzcd}$$

Un algébroïde de Hopf est un objet dans la catégorie des $\Bbbk$-algèbres qui représente un groupoïde. Avant de détailler un peu plus, nous allons brièvement rappeler les notions de préfaisceau et de représentabilité.

Définition 1.1.4. *Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux catégories, avec $\mathcal{C}$ petite. Un préfaisceau sur $\mathcal{C}$ à valeurs dans $\mathcal{D}$ est un foncteur $F : \mathcal{C}^{op} \longrightarrow \mathcal{D}$. La catégorie des préfaisceaux et des transformations naturelles est notée $\mathcal{P}(\mathcal{C};\mathcal{D})$.*

Définition 1.1.5. *Soit $\mathcal{C}$ une petite catégorie. Le plongement de Yoneda est le foncteur suivant :*

$$h : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \longrightarrow & \mathcal{P}(\mathcal{C};\mathcal{S}\mathrm{et}) \\ X & \longmapsto & h_X = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,X), \end{array} \right.$$

où $\mathcal{S}\mathrm{et}$ est la catégorie des ensembles.

Lemme 1.1.6 (Yoneda)**.** *Soient $F \in \mathcal{P}(\mathcal{C};\mathcal{S}\mathrm{et})$ et $X \in \mathcal{C}$. Alors l'application suivante est une bijection :*

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(h_X, F) & \longrightarrow & F(X) \\ \alpha & \longmapsto & \alpha_X(id_X). \end{array} \right.$$

Corollaire 1.1.7. *Le foncteur h de la définition 1.1.5 est pleinement fidèle.*

Définition 1.1.8. *Soient $F \in \mathcal{P}(\mathcal{C};\mathcal{S}\mathrm{et})$, $X \in \mathcal{C}$ et $x \in F(X)$. On dit que F est représenté par (X,x) si la transformation naturelle suivante associée à x par le lemme de Yoneda est un isomorphisme :*

$$\left\{ \begin{array}{ccc} h_X(Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,X) & \longrightarrow & F(Y) \\ f & \longmapsto & F(f)(x). \end{array} \right.$$

On dit que F est représentable si il existe un couple (X,x) qui représente F.

Remarque 1.1.9. La transformation naturelle x sera souvent omise de la notation et on dira que F est représenté par X.

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie et $\mathcal{F} \in \mathcal{P}(\mathcal{C};\mathcal{G}\mathrm{rpd})$ un préfaisceau en groupoïdes. De la même manière que pour un groupoïde (cf. la proposition 1.1.3), $\mathcal{F}$ est déterminé par la donnée de deux préfaisceaux d'ensembles $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$ et $\mathcal{M}_{\mathcal{F}}$ qui représentent les objets et les morphismes, ainsi que de morphismes de préfaisceaux qui représentent la source, le but, la composition, l'unité et l'inverse.

Définition 1.1.10. *Soit $\mathcal{F} \in \mathcal{P}(\mathcal{C};\mathcal{G}\mathrm{rpd})$. On dit que $\mathcal{F}$ est représentable si les préfaisceaux d'ensembles $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$ et $\mathcal{M}_{\mathcal{F}}$ le sont.*

Proposition et définition 1.1.11. *Soit $\mathcal{F} \in \mathcal{P}({}_{\Bbbk}\mathcal{A}\mathrm{lg};\mathcal{G}\mathrm{rpd})$ un préfaisceau représentable. L'objet qui représente $\mathcal{F}$ est appelé un $\Bbbk$-algébroïde de Hopf. Ainsi, un $\Bbbk$-algébroïde de Hopf est la donné d'un couple de $\Bbbk$-algèbres (A,Γ) représentant respectivement les faisceaux des objets et des morphismes, ainsi que de morphismes de $\Bbbk$-algèbres qui représentent :*

– *la source et le but :*

$$\eta_L : A \longrightarrow \Gamma,$$

$$\eta_R : A \longrightarrow \Gamma;$$

– *la composition des morphismes :*

$$\Delta : \Gamma \longrightarrow \Gamma^{\eta_R}\!\otimes_A^{\eta_L}\Gamma;$$

– *les morphismes identités :*

$$\epsilon : \Gamma \longrightarrow A;$$

– *l'inversion des morphismes :*

$$c : \Gamma \longrightarrow \Gamma.$$

On muni Γ de la structure de A-bimodule où l'action à droite est donnée par η_R et l'action à gauche par η_L. Le produit tensoriel intervenant dans la définition de Δ est alors un produit tensoriel de bimodule. C'est aussi le push-out dans la catégorie des $\Bbbk$-algèbres (produit fibré dans la catégorie opposée) du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\eta_L"] \arrow[d, "\eta_R"'] & \Gamma \\ \Gamma & \end{tikzcd}.$$

Ces applications doivent de plus vérifier les axiomes suivants :

(HA1) le morphisme de $\Bbbk$-algèbres ϵ est aussi un morphisme de A-bimodule. Cela est équivalent à la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} A & \Gamma \arrow[l, "\epsilon"'] \\ & A. \arrow[ul, equal] \arrow[u, shift left, "\eta_R"'] \arrow[u, shift right, "\eta_L"] \end{tikzcd}$$

(HA2) Le morphisme Δ est un morphisme de A-bimodules.

(HA3) Le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} \Gamma & \Gamma^{\eta_R}\!\otimes_A^{\eta_L}\Gamma \arrow[l, "\epsilon\otimes id_\Gamma"'] \arrow[r, "id_\Gamma\otimes\epsilon"] & \Gamma \\ & \Gamma \arrow[ul, "id_\Gamma"] \arrow[u, "\Delta"'] \arrow[ur, "id_\Gamma"'] & \end{tikzcd}.$$

(HA4) Les diagrammes suivants commutent :

$$\begin{tikzcd} \Gamma & \Gamma \arrow[l, "c"'] \\ & A, \arrow[ul, "\eta_L"] \arrow[u, "\eta_R"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \Gamma & \Gamma \arrow[l, "c"'] \\ & A. \arrow[ul, "\eta_R"] \arrow[u, "\eta_L"'] \end{tikzcd}$$

(HA5) Le morphisme d'inversion est une involution :

$$\begin{tikzcd} \Gamma \arrow[r, "c"] \arrow[dr, equal] & \Gamma \arrow[d, "c"] \\ & \Gamma. \end{tikzcd}$$

(HA6) L'inversion est un inverse pour la composition :

$$\begin{tikzcd} \Gamma & \Gamma^{\eta_R}\!\otimes_A^{\eta_L}\Gamma \arrow[l, "\beta_1"'] \arrow[r, "\beta_2"] & \Gamma \\ & \Gamma \arrow[ul, "\eta_R\circ\epsilon"] \arrow[u, "\Delta"'] \arrow[ur, "\eta_L\circ\epsilon"'] & \end{tikzcd},$$

où β_1 et β_2 sont les morphismes de $\mathbb{k}$-algèbres induit par les diagrammes suivants :

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\eta_L"] \arrow[d, "\eta_R"'] & \Gamma \arrow[d] \arrow[ddr, bend left, "id_\Gamma"] & \\
\Gamma \arrow[r] \arrow[drr, bend right, "c"'] & \Gamma {}^{\eta_R}\!\otimes_A^{\eta_L} \Gamma \arrow[dr, dashed, "\beta_1"] & \\
 & & \Gamma,
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\eta_L"] \arrow[d, "\eta_R"'] & \Gamma \arrow[d] \arrow[ddr, bend left, "c"] & \\
\Gamma \arrow[r] \arrow[drr, bend right, "id_\Gamma"'] & \Gamma {}^{\eta_R}\!\otimes_A^{\eta_L} \Gamma \arrow[dr, dashed, "\beta_2"] & \\
 & & \Gamma.
\end{tikzcd}$$

(HA7) Le morphisme de composition est coassociatif :

$$\begin{tikzcd}
\Gamma \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & \Gamma {}^{\eta_R}\!\otimes_A^{\eta_L} \Gamma \arrow[d, "id_\Gamma \otimes \Delta"] \\
\Gamma {}^{\eta_R}\!\otimes_A^{\eta_L} \Gamma \arrow[r, "\Delta \otimes id_\Gamma"'] & \Gamma {}^{\eta_R}\!\otimes_A^{\eta_L} \Gamma {}^{\eta_R}\!\otimes_A^{\eta_L} \Gamma.
\end{tikzcd}$$

Exemple 1.1.12. 1. Si $\mathcal{F} : {}_{\mathbb{k}}\mathcal{A}\mathrm{lg} \longrightarrow \mathcal{S}\mathrm{et}$ est un préfaisceau représenté par la $\mathbb{k}$-algèbre A, alors, d'après l'exemple 1.1.2, c'est aussi un préfaisceau en groupoïde représentable. L'algébroïde de Hopf qui le représente est l'algébroïde de Hopf dite triviale (A, A).

2. Une $\mathbb{k}$-algèbre de Hopf avec antipode H représente un préfaisceau sur ${}_{\mathbb{k}}\mathcal{A}\mathrm{lg}$ à valeur dans la catégorie des groupes. En particulier, $(\mathbb{k}, H)$ est un $\mathbb{k}$-algébroïde de Hopf.

3. Soit G un groupe commutatif, et R une $\mathbb{k}$-algèbre. L'ensemble des morphismes de groupes de G vers $R^\times$ est naturellement muni d'une structure de groupe commutatif. De plus, le foncteur $R \longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}\mathrm{rp}}(G, R^\times)$ est représenté par une $\mathbb{k}$-algèbre de Hopf, notée $\mathbb{k}[G]$. En tant que $\mathbb{k}$-module, $\mathbb{k}[G]$ est libre de base $([g])_{g\in G}$. La structure de $\mathbb{k}$-algèbre est donnée par la multiplication du groupe :
$$[g] \cdot [h] = [gh],$$
les morphismes de structure de l'algèbre de Hopf Δ, ϵ et c sont donnés par les relations suivantes :
$$\begin{aligned}
\Delta([g]) &= [g] \otimes_{\mathbb{k}} [g], \\
\epsilon([g]) &= 1, \\
c([g]) &= \left[g^{-1}\right].
\end{aligned}$$

Remarque 1.1.13. Une autre manière de voir les algébroïdes de Hopf est de définir la notion de groupoïde dans une catégorie $\mathcal{C}$ qui admet des produits fibrés. Un groupoïde dans $\mathcal{C}$ est la donnée de deux objets $\mathcal{O}$ et $\mathcal{M}$, et de morphismes $s, t, \circ, \iota, u$ vérifiant les axiomes analogues à ceux de la proposition 1.1.3. Un algébroïde de Hopf sur un anneau $\mathbb{k}$ est alors un groupoïde dans la catégorie opposée des $\mathbb{k}$-algèbres ${}_{\mathbb{k}}\mathcal{A}\mathrm{lg}$.

Définition 1.1.14. *Soit $\mathcal{F} \in \mathcal{P}\left({}_{\mathbb{k}}\mathcal{A}\mathrm{lg}^{\mathrm{gr}}; \mathcal{G}\mathrm{rpd}\right)$ un préfaisceau représentable. L'objet qui représente $\mathcal{F}$ est appelé $\mathbb{k}$-algébroïde de Hopf gradué. Ainsi, un $\mathbb{k}$-algébroïde de Hopf gradué est la donnée d'un $\mathbb{k}$-algébroïde de Hopf (A, Γ), où A et Γ sont des $\mathbb{k}$-algèbres graduées et les applications de structure $\eta_L, \eta_R, \Delta, \epsilon, c$ sont des morphismes de $\mathbb{k}$-algèbres graduées homogènes de degré 0.*

Définition 1.1.15. *Soient (A, Γ) et (B, Σ) deux $\mathbb{k}$-algébroïdes de Hopf. Un morphisme de $\mathbb{k}$-algébroïde de Hopf $f : (A, \Gamma) \longrightarrow (B, \Sigma)$ est un morphisme entre les préfaisceaux en groupoïde associés. D'après le lemme de Yoneda, un morphisme f est représenté par un couple (f_1, f_2) de morphismes de $\mathbb{k}$-algèbres $f_1 : A \longrightarrow B$, $f_2 : \Gamma \longrightarrow \Sigma$ qui commutent aux applications de structure $\eta_L, \eta_R, \Delta, c$ et ϵ.*

La catégorie des groupoïdes admet des produits et des produit fibrés, il en est donc de même pour les catégories de préfaisceaux en groupoïdes. Par représentabilité, on peut définir le coproduit de deux algébroïdes de Hopf, qui est donné par le produit tensoriel.

Proposition 1.1.16. *Soient (A, Γ) et (B, Σ) deux $\Bbbk$-algébroïdes de Hopf. Leur coproduit dans la catégorie des $\Bbbk$-algébroïdes de Hopf est le $\Bbbk$-algébroïde de Hopf :*

$$(A \otimes_{\Bbbk} B, \Gamma \otimes_{\Bbbk} \Sigma).$$

Démonstration : Soient $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ deux préfaisceaux en groupoïdes. On a :

$$\mathcal{O}_{\mathcal{G}\times\mathcal{H}} = \mathcal{O}_{\mathcal{G}} \times \mathcal{O}_{\mathcal{H}} \ \text{ et } \ \mathcal{M}_{\mathcal{G}\times\mathcal{H}} = \mathcal{M}_{\mathcal{G}} \times \mathcal{M}_{\mathcal{H}}.$$

Si $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ sont représentés respectivement par les algébroïdes de Hopf (A, Γ) et (B, Σ), le faisceau des objets de $\mathcal{G} \times \mathcal{H}$ est représenté par $A \otimes_{\Bbbk} B$ et que celui des morphismes par $\Gamma \otimes_{\Bbbk} \Sigma$. On en déduit le résultat. □

1.2 Comodules

Soit (A, Γ) un $\Bbbk$-algébroïde de Hopf. D'après la définition 1.1.11, la $\Bbbk$-algèbre Γ est naturellement muni d'une structure de A-bimodule. Le morphisme $\eta_L : A \longrightarrow \Gamma$ définit la structure de A-module à gauche et $\eta_R : A \longrightarrow \Gamma$ sa structure à droite. On considère le foncteur de produit tensoriel avec Γ, défini sur la catégorie des A-modules à gauche :

$$\Gamma \otimes_A - : \left\{ \begin{array}{ccc} {}_A\mathcal{M}\text{od} & \longrightarrow & {}_A\mathcal{M}\text{od} \\ M & \longmapsto & \Gamma \otimes_A M. \end{array} \right.$$

Comme (A, Γ) est un $\Bbbk$-algébroïde de Hopf, ce foncteur définit une comonade $(\Gamma \otimes_A -, \epsilon, \Delta)$ sur la catégorie ${}_A\mathcal{M}\text{od}$. Rappelons les définitions de monade et de comonade, ainsi que leurs principales propriétés. Une référence classique est [ML98].

Définition 1.2.1. *Soit $\mathcal{X}$ une catégorie. Une monade sur $\mathcal{X}$ est un triplet (T, η, μ), où $T : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}$ est un foncteur, et η, μ des transformations naturelles :*

$$\eta : id_{\mathcal{X}} \longrightarrow T \qquad \mu : T^2 \longrightarrow T,$$

qui font commuter les diagrammes d'associativité et d'unité suivants :

$$\begin{tikzcd} T^3 \arrow[r, "\mu T"] \arrow[d, "T\mu"'] & T^2 \arrow[d, "\mu"] \\ T^2 \arrow[r, "\mu"'] & T \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} T \arrow[r, "\eta T"] \arrow[dr, "="'] & T^2 \arrow[d, "\mu"] & T \arrow[l, "T\eta"'] \arrow[dl, "="] \\ & T & \end{tikzcd} .$$

Une comonade sur $\mathcal{X}$ est un triplet (U, ϵ, Δ), où $U : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}$ est un foncteur, et ϵ, Δ des transformations naturelles :

$$\epsilon : U \longrightarrow id_{\mathcal{X}} \qquad \Delta : U \longrightarrow U^2,$$

qui font commuter les diagrammes de coassociativité et counité suivants :

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & U^2 \arrow[d, "\Delta U"] \\ U^2 \arrow[r, "U\Delta"'] & U^3 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} U & U^2 \arrow[l, "U\epsilon"'] \arrow[r, "\epsilon U"] & U \\ & U \arrow[ul, "="] \arrow[u, "\Delta"] \arrow[ur, "="'] & \end{tikzcd} .$$

Remarque 1.2.2. A toute comonade (U, ϵ, Δ) sur une catégorie $\mathcal{X}$ correspond une monade sur la catégorie opposée $\mathcal{X}^{op}$. On aura donc des énoncés analogues pour les monades et les comonades. Pour plus de clarté, on énoncera les deux.

Quand on a une monade (T, η, μ) (resp. une comonade) sur une catégorie $\mathcal{X}$, on peut définir la catégorie des T-algèbres (resp. coalgèbres) de $\mathcal{X}$. De plus, le foncteur T définit une adjonction entre $\mathcal{X}$ et la catégorie des T-algèbres.

Définition 1.2.3. *Soient $\mathcal{X}$ une catégorie, (T, η, μ) une monade et (U, ϵ, δ) une comonade sur $\mathcal{X}$.*

- *Une T-algèbre est un couple (X, x) où X est un objet de $\mathcal{X}$ et $x : TX \longrightarrow X$ est un morphisme tel que les diagrammes d'associativité et d'unité suivants commutent :*

$$\begin{tikzcd} T^2X \arrow[r, "Tx"] \arrow[d, "\mu_X"'] & TX \arrow[d, "x"] \\ TX \arrow[r, "x"'] & X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[dr, "="'] & TX \arrow[d, "x"] \\ & X. \end{tikzcd}$$

- *Soient (X, x), (Y, y) deux T-algèbres. Un morphisme de T-algèbres $f : (X, x) \longrightarrow (Y, y)$ est un morphisme $f : X \longrightarrow Y$ dans $\mathcal{X}$ qui fait commuter le diagramme suivant :*

$$\begin{tikzcd} TX \arrow[r, "Tf"] \arrow[d, "x"'] & TY \arrow[d, "y"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y. \end{tikzcd}$$

- *Une U-coalgèbre est un couple (X, x) où X est un objet de $\mathcal{X}$ et $x : X \longrightarrow UX$ est un morphisme tel que les diagrammes de coassociativité et de counité suivants commutent :*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "x"] \arrow[d, "x"'] & UX \arrow[d, "Ux"] \\ UX \arrow[r, "\delta_X"'] & U^2X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} UX \arrow[r, "\epsilon_X"] & X \\ X \arrow[u, "x"] \arrow[ur, "="'] & \end{tikzcd} .$$

- *Soient (X, x), (Y, y) deux U-coalgèbres. Un morphisme de U-coalgèbres $f : (X, x) \longrightarrow (Y, y)$ est un morphisme $f : X \longrightarrow Y$ dans $\mathcal{X}$ qui fait commuter le diagramme suivant :*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "x"'] & Y \arrow[d, "y"] \\ UX \arrow[r, "Uf"'] & UY. \end{tikzcd}$$

On note $\mathcal{X}^T$ la sous-catégorie de $\mathcal{X}$ constituée des T-algèbres et des morphismes de T-algèbres, et $\mathcal{X}^U$ la sous-catégorie de $\mathcal{X}$ constituée des U-coalgèbres et des morphismes de U-coalgèbres.

Proposition 1.2.4. *Soit $\mathcal{X}$ une catégorie. Si (T, η, μ) est une monade sur $\mathcal{X}$, alors on a une adjonction $\left(F^T, G^T, \eta^T, \varepsilon^T\right)$:*

$$F^T : \mathcal{X} \leftrightarrows \mathcal{X}^T : G^T$$

dans laquelle, les foncteurs F^T, G^T sont définis par :

$$F^T : \left\{ \begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"'] & (TX, \mu_X) \arrow[d, "Tf"] \\ Y \arrow[r, phantom, "\longmapsto" very near start, shift left=20] & (TY, \mu_Y), \end{tikzcd} \right. \qquad G^T : \left\{ \begin{tikzcd} (X, x) \arrow[d, "f"'] & X \arrow[d, "f"] \\ (Y, y) & Y, \end{tikzcd} \right.$$

alors que $\eta^T = \eta$ *et* $\varepsilon^T_{(X,x)} = x : (TX, \mu_X) \longrightarrow (X, x)$. *De la même manière, si* (U, ϵ, δ) *est une comonade sur* $\mathcal{X}$*, alors il existe une adjonction* $\left(G^U, F^U, \eta^U, \varepsilon^U\right)$ *:*

$$G^U : \mathcal{X}^U \leftrightarrows \mathcal{X} : F^U,$$

dans laquelle, les foncteurs G^U, F^U *sont définis par :*

$$F^U : \left\{ \begin{array}{ccc} X & & (UX, \delta_X) \\ {\scriptstyle f}\downarrow & \longmapsto & \downarrow{\scriptstyle Uf} \\ Y & & (UY, \delta_Y), \end{array} \right. \qquad G^U : \left\{ \begin{array}{ccc} (X, x) & & X \\ {\scriptstyle f}\downarrow & \longmapsto & \downarrow{\scriptstyle f} \\ (Y, y) & & Y, \end{array} \right.$$

alors que $\varepsilon^U = \epsilon$ *et* $\eta^U_{(X,x)} = x : (X, x) \longrightarrow (UX, \delta_X)$.

Démonstration : Pour démontrer qu'on a bien des adjonctions, on peut utiliser le théorème 2, (v) de la page 81 de [ML98]. Dans le cas d'une monade (T, η, μ), on vérifie aisément que F^T et G^T sont bien des foncteurs, que η^T est une transformation naturelle $id_{\mathcal{X}} \longrightarrow G^T F^T = T$. De plus, comme (X, x) est une T-algèbre, l'axiome d'associativité doit être vérifié. Le diagramme suivant commute donc, ce qui montre que $\varepsilon^T_{(X,x)} = x : (TX, \mu_X) \longrightarrow (X, x)$ est une transformation naturelle.

$$\begin{tikzcd} T^2X \arrow[r, "Tx"] \arrow[d, "\mu_X"'] & TX \arrow[d, "x"] \\ TX \arrow[r, "x"'] & X. \end{tikzcd}$$

Il ne nous reste plus qu'à vérifier que les deux diagrammes suivants commutent :

$$\begin{tikzcd} G^T \arrow[r, "\eta^T G^T"] \arrow[dr, "="'] & G^T F^T G^T \arrow[d, "G^T \varepsilon^T"] \\ & G^T, \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} F^T \arrow[r, "F^T \eta^T"] \arrow[dr, "="'] & F^T G^T F^T \arrow[d, "\varepsilon^T F^T"] \\ & F^T. \end{tikzcd}$$

pour cela, on considère un objet X de $\mathcal{X}$ et (Y, y) une T-algèbre. La commutativité de ces deux diagrammes équivaut à la commutativité des deux suivants :

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\eta_Y"] \arrow[dr, "="'] & TY \arrow[d, "y"] \\ & Y, \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (TX, \mu_X) \arrow[r, "T(\eta_X)"] \arrow[dr, "="'] & (T^2X, \mu_{TX}) \arrow[d, "\mu_X"] \\ & (TX, \mu_X). \end{tikzcd}$$

Le premier diagramme commute parce que (Y, y) est une T-algèbre, le deuxième commute car T est une monade et vérifie l'axiome d'unité. Un raisonnement analogue démontre l'adjonction avec les comonades. □

La réciproque est vraie :

Proposition 1.2.5. *Soient* $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ *deux catégories et* $(F, G, \eta, \varepsilon)$ *une adjonction :*

$$F : \mathcal{X} \leftrightarrows \mathcal{Y} : G.$$

Alors $(GF, \eta, \mu = G\varepsilon F)$ *est une monade sur* $\mathcal{X}$ *et* $(FG, \varepsilon, \delta = F\eta G)$ *est une comonade sur* $\mathcal{Y}$*.*

Revenons à l'algébroïde de Hopf (A, Γ). Nous avons défini une comonade sur la catégorie des A-modules à gauche. Une coalgèbre sur cette comonade sera appelée Γ-comodule à gauche. Plus précisément :

Définition 1.2.6. *Soit M un A-module à gauche. Une structure de Γ-comodule à gauche sur M est la donnée d'un morphisme de A-modules à gauche :*

$$\psi_M : M \longrightarrow \Gamma \otimes_A M,$$

qui est coassociatif et counitaire. C'est-à-dire que les diagrammes suivants commutent :

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\psi_M"] \arrow[d, "\psi_M"'] & \Gamma\otimes_A M \arrow[d, "\Delta\otimes id_M"] \\
\Gamma\otimes_A M \arrow[r, "id_\Gamma\otimes\psi_M"'] & \Gamma\otimes_A\Gamma\otimes_A M,
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\psi_M"] \arrow[dr, "id_M"'] & \Gamma\otimes_A M \arrow[d, "\epsilon\otimes id_M"] \\
 & M.
\end{tikzcd}$$

Définition 1.2.7. *Soient M et N deux Γ-comodules à gauche. Un morphisme de Γ-comodules à gauche de M vers N est une application A-linéaire $f : M \longrightarrow N$ qui fait commuter le diagramme suivant :*

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\psi_M"'] & N \arrow[d, "\psi_N"] \\
\Gamma\otimes_A M \arrow[r, "id_\Gamma\otimes f"'] & \Gamma\otimes_A N.
\end{tikzcd}$$

On note $\mathrm{Hom}_\Gamma(M, N)$ *l'ensemble des morphismes de Γ-comodules à gauche de M vers N, et* ${}_\Gamma\mathcal{C}\mathrm{omod}$ *la catégorie des Γ-comodules à gauche.*

Exemple 1.2.8. Soit A une $\Bbbk$-algèbre. La catégorie des comodules à gauche sur le $\Bbbk$-algébroïde de Hopf trivial (A, A) est équivalente à la catégorie des A-modules à gauche.

Remarque 1.2.9. On peut définir de manière analogue un Γ-comodule à droite comme étant un A-module à droite R muni d'un morphisme de A-module à droite coassociatif et counitaire :

$$\psi_R : R \longrightarrow R \otimes_A \Gamma.$$

On note $\mathcal{C}\mathrm{omod}_\Gamma$ la catégorie des Γ-comodules à droite.

De plus, comme A est commutatif, la catégorie des A-modules à gauche est naturellement équivalente à la catégorie des A-modules à droite et si M est un Γ-comodule à gauche, la composée suivante définit une structure de Γ-comodule à droite sur M :

$$M \xrightarrow{\psi_M} \Gamma\otimes_A M \xrightarrow[\simeq]{c\otimes M} M\otimes_A\Gamma,$$

où $c\otimes M$ est l'isomorphisme défini par $(c\otimes M)(\lambda\otimes m) = m\otimes c(\lambda)$. Cela démontre la proposition suivante :

Proposition 1.2.10. *La catégorie des Γ-comodules à gauche est naturellement équivalente à la catégorie des Γ-comodules à droite.*

Remarque 1.2.11. En raison de la proposition 1.2.10, pour toute propriété vérifiée dans la catégorie des Γ-comodules à gauche, il existe une propriété analogue dans la catégorie des Γ-comodules à droite. Par la suite, nous préférerons utiliser des Γ-comodules à gauche.

Voilà quelques exemples de comodules :

Exemple 1.2.12.
- $\eta_L : A \longrightarrow \Gamma$ munit A d'une structure de Γ-comodule à gauche (cf. les axiomes HA1 et HA2 de la proposition 1.1.11).
- $\eta_R : A \longrightarrow \Gamma$ munit A d'une structure de Γ-comodule à droite.

– $\Delta : \Gamma \longrightarrow \Gamma^{\eta_R}\otimes_A^{\eta_L}\Gamma$ munit Γ à la fois d'une structure de Γ-comodule à droite et d'une structure de comodule à gauche (cf. les axiomes HA1, HA2 et HA7 de la proposition 1.1.11).

Exemple 1.2.13. Soit G un groupe commutatif. Un comodule M à gauche sur l'algèbre de Hopf $\Bbbk[G]$ n'est rien d'autre qu'un $\Bbbk$-module gradué sur G :

$$M \simeq \bigoplus_{g\in G} M(g).$$

En effet, si M est un comodule sur $\Bbbk[G]$, on pose :

$$M(g) = \{m \in M \mid \psi(m) = [g] \otimes m\}.$$

Soit $m \in M$. Comme $\Bbbk[G]$ est un $\Bbbk$-module libre, alors il existe une unique famille $(m_g)_{g\in G}$ à support fini telle que :

$$\psi(m) = \sum_{g\in G} [g] \otimes m_g.$$

En utilisant la coassociativité de ψ, on montre que $m_g \in M(g)$, ce qui montre l'isomorphisme.

Définition 1.2.14. *Un Γ-comodule est dit étendu s'il est de la forme $\Gamma\otimes_A X$, avec X un A-module. La structure de comodule est donnée par le morphisme :*

$$\psi_{\Gamma\otimes X} = \Delta_\Gamma \otimes X : \Gamma\otimes_A X \longrightarrow \Gamma\otimes_A\Gamma\otimes_A X.$$

On note ${}_\Gamma\mathcal{E}$ la sous-catégorie pleine des Γ-comodules étendus.

La proposition suivante redémontre l'adjonction de la proposition 1.2.4 dans le cas particulier des Γ-comodules :

Proposition 1.2.15. *Soit (A, Γ) un algébroïde de Hopf. On a une adjonction entre le foncteur oubli $\mathcal{O} : {}_\Gamma\mathcal{C}\mathrm{omod} \longrightarrow {}_A\mathcal{M}\mathrm{od}$ et le foncteur comodule étendu :*

$$\Gamma\otimes_A - : \begin{cases} {}_A\mathcal{M}\mathrm{od} & \longrightarrow & {}_\Gamma\mathcal{C}\mathrm{omod} \\ X & \longmapsto & \Gamma\otimes_A X \end{cases}$$

$$\mathcal{O} : {}_\Gamma\mathcal{C}\mathrm{omod} \leftrightarrows {}_A\mathcal{M}\mathrm{od} : \Gamma\otimes_A - .$$

Démonstration : Soit M un Γ-comodule, et X un A-module. On va définir deux applications :

$$\Phi : \mathrm{Hom}_A(M, X) \leftrightarrows \mathrm{Hom}_\Gamma(M, \Gamma\otimes_A X) : \Psi.$$

Soient $u : M \longrightarrow X$, un morphisme de A-modules, et $v : M \longrightarrow \Gamma\otimes_A X$ un morphisme de Γ-comodules. On pose :

$$\Psi(v) = (\epsilon\otimes X) \circ v : M \xrightarrow{v} \Gamma\otimes_A X \xrightarrow{\epsilon\otimes X} X,$$

$$\Phi(u) = (\Gamma\otimes u) \circ \psi_M : M \xrightarrow{\psi_M} \Gamma\otimes_A M \xrightarrow{\Gamma\otimes u} \Gamma\otimes_A X.$$

Le morphisme $\Phi(u)$ est bien un morphisme de comodules car le diagramme suivant commute grâce à la coassociativité de ψ_M :

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\psi_M"] \arrow[d, "\psi_M"'] & \Gamma\otimes_A M \arrow[r, "\Gamma\otimes u"] \arrow[d, "\Delta\otimes M"'] & \Gamma\otimes_A X \arrow[d, "\Delta\otimes X"] \\ \Gamma\otimes_A M \arrow[r, "\Gamma\otimes\psi_M"'] & \Gamma\otimes_A\Gamma\otimes_A M \arrow[r, "\Gamma\otimes\Gamma\otimes u"'] & \Gamma\otimes_A\Gamma\otimes_A X. \end{tikzcd}$$

On a $\Psi \circ \Phi(u) = u$ car le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\psi_M"] \arrow[dr, equal] & \Gamma\otimes_A M \arrow[r, "\Gamma\otimes u"] \arrow[d, "\epsilon\otimes M"] & \Gamma\otimes_A X \arrow[d, "\epsilon\otimes X"] \\
& M \arrow[r, "u"'] & X.
\end{tikzcd}$$

Finalement, comme v est un morphisme de comodules, le diagramme suivant commute, ce qui montre que $\Phi \circ \Psi(v) = v$:

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "v"] \arrow[d, "\psi_M"'] & \Gamma\otimes_A X \arrow[d, "\Delta\otimes X"'] \arrow[dr, equal] & \\
\Gamma\otimes_A M \arrow[r, "\Gamma\otimes v"'] & \Gamma\otimes_A\Gamma\otimes_A X \arrow[r, "\Gamma\otimes\epsilon\otimes X"'] & \Gamma\otimes_A X.
\end{tikzcd}$$

$\square$

L'image du foncteur de comodule étendu $\Gamma\otimes_A - : {}_A\mathcal{M}\mathrm{od} \longrightarrow {}_\Gamma\mathcal{C}\mathrm{omod}$ n'est pas la sous-catégorie pleine des Γ-comodules étendus ${}_\Gamma\mathcal{E}$. Le lemme suivant, qui sera utile par la suite, montre qu'il ne manque que les morphismes de comodules induit par $\Delta : \Gamma \longrightarrow \Gamma\otimes_A\Gamma$.

Lemme 1.2.16. *Soit (A, Γ) un algébroïde de Hopf, X et Y deux A-modules et $f : \Gamma\otimes_A X \longrightarrow \Gamma\otimes_A Y$ un morphisme de comodules entre comodules étendus. Alors f est égal à la composition de morphismes de Γ-comodules à gauche suivante :*

$$\Gamma\otimes_A X \xrightarrow{\Delta\otimes X} \Gamma\otimes_A\Gamma\otimes_A X \xrightarrow{\Gamma\otimes f} \Gamma\otimes_A\Gamma\otimes_A Y \xrightarrow{\Gamma\otimes\epsilon\otimes Y} \Gamma\otimes_A Y.$$

Démonstration : On a le diagramme de morphismes de comodules suivant :

$$\begin{tikzcd}
\Gamma\otimes_A X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Delta\otimes X"'] & \Gamma\otimes_A Y \arrow[d, "\Delta\otimes Y"] \\
\Gamma\otimes_A\Gamma\otimes_A X \arrow[r, "\Gamma\otimes f"] & \Gamma\otimes_A\Gamma\otimes_A Y \arrow[d, "\Gamma\otimes\epsilon\otimes Y"] \\
& \Gamma\otimes_A Y.
\end{tikzcd}$$

Le résultat découle de l'égalité : $(\Gamma\otimes\epsilon) \circ \Delta = id_\Gamma$. $\square$

On peut définir une structure naturelle de Γ-comodule à gauche sur le produit tensoriel (de A-modules à gauche) de deux Γ-comodules à gauche :

Proposition et définition 1.2.17. *Soient M et N deux Γ-comodules à gauche. Le produit tensoriel de A-modules à gauche $M\otimes_A N$ est naturellement muni d'une structure de Γ-comodule à gauche. Le morphisme de structure $\psi_{M\otimes N}$ est obtenu en considérant le diagramme suivant :*

$$\begin{tikzcd}
M\otimes_{\Bbbk} N \arrow[r, "\psi_M\otimes\psi_N"] \arrow[d, "\pi_{M,N}"'] & (\Gamma\otimes_A M)\otimes_{\Bbbk}(\Gamma\otimes_A N) \arrow[r, "\simeq"] & (\Gamma\otimes_{\Bbbk}\Gamma)\otimes_{A\otimes A}(M\otimes_{\Bbbk} N) \arrow[d, "\mu_\Gamma\otimes\pi_{M,N}"] \\
M\otimes_A N \arrow[rr, dashed, "\psi_{M\otimes N}"'] & & \Gamma\otimes_A(M\otimes_A N),
\end{tikzcd}$$

où $\Gamma\otimes_{\Bbbk}\Gamma$ est un $A\otimes_{\Bbbk}A$-module à droite par $\eta_R\otimes\eta_R$, $\pi_{M,N}$ est la projection canonique et μ_Γ est la multiplication de $\Gamma \in {}_{\Bbbk}\mathcal{A}\mathrm{lg}$. Pour éviter toute confusion, ce produit tensoriel de comodules est noté $M \wedge_A N$ dans [Hov04].

Le lemme suivant, tiré de [Hov04] montre que si M est un comodule étendu, alors $M \wedge_A N$ est isomorphe à un comodule étendu :

Lemme 1.2.18. *Soit (A, Γ) un $\Bbbk$-algébroïde de Hopf, X un A-module à gauche et N un Γ-comodule à gauche. Alors il existe un isomorphisme naturel de Γ-comodules à gauche :*

$$(\Gamma \otimes_A X) \wedge_A N \simeq \Gamma \otimes_A (X \otimes_A N).$$

En particulier, pour $X = A$, on a :

$$\Gamma \wedge_A N \simeq \Gamma \otimes_A N.$$

Définition 1.2.19. *Soit (A, Γ) un $\Bbbk$-algébroïde de Hopf. Alors Γ est plat sur A en tant que A-module à gauche si et seulement si il est plat en tant que A-module à droite, car c échange ces deux structures (cf. la remarque 1.2.11). Dans ce cas, on dit que (A, Γ) est un $\Bbbk$-algébroïde de Hopf plat.*

Théorème 1.2.20. *Soit (A, Γ) un $\Bbbk$-algébroïde de Hopf. La catégorie ${}_\Gamma\mathcal{C}\mathrm{omod}$ des Γ-comodules à gauche, munie du produit tensoriel, est une catégorie additive cocomplète monoïdale symétrique. Si de plus (A, Γ) est plat, alors ${}_\Gamma\mathcal{C}\mathrm{omod}$ est abélienne et le foncteur oubli $\mathcal{O} : {}_\Gamma\mathcal{C}\mathrm{omod} \longrightarrow {}_A\mathcal{M}\mathrm{od}$ est un foncteur exact.*

Corollaire 1.2.21. *Soit (A, Γ) un algébroïde de Hopf plat. Si I est un A-module injectif, alors le comodule $\Gamma \otimes_A I$ est injectif dans la catégorie des Γ-comodules. De plus, la catégorie des Γ-comodules possède suffisamment d'injectifs.*

Démonstration : La première assertion découle directement de l'adjonction de la proposition 1.2.15. Si M est un Γ-comodule, on sait qu'il existe un A-module injectif I et une injection $i : M \longrightarrow I$. Comme Γ est un A-module plat, le morphisme $\Gamma \otimes i$ est injectif. De plus, comme ψ_M admet une section dans la catégorie des A-modules, c'est un monomorphisme. Le morphisme suivant est donc un morphisme injectif de Γ-comodules, ce qui démontre que la catégorie des Γ-comodules possède assez d'injectifs.

$$M \xrightarrow{\psi_M} \Gamma \otimes_A M \xrightarrow{\Gamma \otimes i} \Gamma \otimes_A I.$$

□

1.3 Bicomodules

Soient A et B deux $\Bbbk$-algèbres. Un A-B bimodule W permet définir le foncteur additif :

$$W \otimes - : {}_B\mathcal{M}\mathrm{od} \longrightarrow {}_A\mathcal{M}\mathrm{od}$$

et le théorème de Watts (cf. le théorème 2.6.3 et [Wat60]) caractérise les foncteurs de cette forme. De la même manière, si (A, Γ) et (B, Σ) sont deux $\Bbbk$-algébroïdes de Hopf, un Γ-Σ bicomodule permettra de définir un foncteur additif :

$${}_\Sigma\mathcal{C}\mathrm{omod} \longrightarrow {}_\Gamma\mathcal{C}\mathrm{omod}.$$

À la section 2.6 nous énoncerons quelques résultats concernant ces foncteurs.

Définition 1.3.1. *Soient (A,Γ) et (B,Σ) deux $\Bbbk$-algébroïdes de Hopf. Un (A,Γ)-(B,Σ) bicomodule (ou bien, lorsqu'aucune confusion n'est possible, Γ-Σ bicomodule) est un A-B bimodule M muni d'une structure de Γ-comodule à gauche ψ_M^g et d'une structure de Σ-comodule à droite ψ_M^d qui commutent ; c'est-à-dire que le diagramme de A-B-bimodules suivant commute :*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\psi_M^g"] \arrow[d, "\psi_M^d"'] & \Gamma\otimes_A M \arrow[d, "\Gamma\otimes\psi_M^d"] \\ M\otimes_B\Sigma \arrow[r, "\psi_M^g\otimes\Sigma"'] & \Gamma\otimes_A M\otimes_B\Sigma. \end{tikzcd}$$

Soient M et N deux Γ-Σ bicomodules. Un morphisme de Γ-Σ bicomodules de M vers N est un morphisme de A-B bimodules $f : M \longrightarrow N$ qui est à la fois un morphisme de Γ-comodules à gauche et un morphisme de Σ-comodules à droite.

On notera ${}_\Gamma\mathcal{C}\mathrm{omod}_\Sigma$ la catégorie des Γ-Σ bicomodules.

Remarque 1.3.2. La catégorie des (A,Γ)-$(\Bbbk,\Bbbk)$ bicomodules est naturellement équivalente à la catégorie des (A,Γ)-comodules à gauche. De plus, une construction analogue à celle de la remarque 1.2.9 montre que la catégorie des Γ-Σ bicomodules est naturellement équivalente à la catégorie des Σ-Γ bicomodules.

Proposition 1.3.3. *Comme à la proposition 1.2.15, on dispose des foncteurs oublis suivants et de leurs adjoints à droite.*

$$\mathcal{O} : {}_\Gamma\mathcal{C}\mathrm{omod}_\Sigma \leftrightarrows {}_\Gamma\mathcal{C}\mathrm{omod}_B : -\otimes_B\Sigma,$$

$$\mathcal{O} : {}_\Gamma\mathcal{C}\mathrm{omod}_\Sigma \leftrightarrows {}_A\mathcal{C}\mathrm{omod}_\Sigma : \Gamma\otimes_A - .$$

De plus, le diagramme d'adjonctions suivant commute :

$$\begin{tikzcd} {}_\Gamma\mathcal{C}\mathrm{omod}_\Sigma \arrow[r, shift left, "\mathcal{O}"] \arrow[d, shift left, "\mathcal{O}"] & {}_\Gamma\mathcal{C}\mathrm{omod}_B \arrow[l, shift left, "-\otimes_B\Sigma"] \arrow[d, shift left, "\mathcal{O}"] \\ {}_A\mathcal{C}\mathrm{omod}_\Sigma \arrow[r, shift left, "\mathcal{O}"] \arrow[u, shift left, "\Gamma\otimes_A -"] & {}_A\mathcal{M}\mathrm{od}_B. \arrow[l, shift left, "-\otimes_B\Sigma"] \arrow[u, shift left, "\Gamma\otimes_A -"] \end{tikzcd}$$

Exemple 1.3.4. Soit (A,Γ) un $\Bbbk$-algébroïde de Hopf. Alors :
- Γ est un Γ-Γ bicomodule dont les structures à droite et à gauche sont données par le morphisme Δ.
- A est muni d'une structure de Γ comodule à droite par $\eta_R : A \longrightarrow \Gamma$ et d'une structure de Γ-comodule à gauche par $\eta_L : A \longrightarrow \Gamma$ (cf. l'exemple 1.2.12), mais n'est pas un Γ-Γ bicomodule, car η_R et η_L ne sont pas, en général, des morphismes de bimodules.

Proposition 1.3.5. *Soient (A,Γ) et (B,Σ) deux algébroïdes de Hopf plats. La catégorie des Γ-Σ bicomodules est une catégorie abélienne.*

1.4 Idéaux invariants

Dans cette section, nous rappelons la notion d'idéal invariant.

Définition 1.4.1. *Soit (A,Γ) un $\Bbbk$-algébroïde de Hopf. On dit que :*

- *Un élément $a \in A$ est invariant si $\eta_L(a) = \eta_R(a)$ et on note A^Γ la sous $\Bbbk$-algèbre de A constituée des éléments invariants. A^Γ est l'égalisateur des morphismes η_L et η_R :*

$$0 \longrightarrow A^\Gamma \longrightarrow A \underset{\eta_R}{\overset{\eta_L}{\rightrightarrows}} \Gamma.$$

- *Un idéal I de A est invariant si $I\Gamma = \Gamma I$.*
- *Si I est un idéal invariant de A, on dit qu'un élément $a \in A$ est invariant modulo I si :*

$$\eta_L(a) - \eta_R(a) \in I\Gamma.$$

Remarque 1.4.2. Soit (A, Γ) un $\Bbbk$-algébroïde de Hopf. Alors (A, Γ) est un A^Γ-algébroïde de Hopf. De plus, A^Γ est la plus grande sous-algèbre B de A telle que (A, Γ) est un B-algébroïde de Hopf.

Proposition 1.4.3. *Soient (A, Γ) un $\Bbbk$-algébroïde de Hopf et I un idéal de A. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *I est un idéal invariant,*
2. *I est un sous Γ-comodule de A,*
3. *A/I est un quotient de A dans la catégorie des Γ-comodules.*

Définition 1.4.4. *Soient A une $\Bbbk$-algèbre, I un idéal de A et M un A-module. On dit qu'un élément $x \in M$ est de I-torsion si :*

$$\forall \lambda \in I \; \exists n \in \mathbb{N} \; \lambda^n x = 0.$$

On dit que M est de I-torsion si tout élément x de M est de I-torsion.

Lemme 1.4.5. *Soient (A, Γ) un $\Bbbk$-algébroïde de Hopf, I un idéal invariant, X un A-module à gauche de I-torsion et $a \in A$ un élément invariant modulo I. Alors la structure de A-module à gauche sur $\Gamma \otimes_A \left(X\left[\frac{1}{a}\right]\right)$ s'étend naturellement en une structure de $A\left[\frac{1}{a}\right]$-module à gauche.*

Démonstration : On pose $\lambda = \eta_R(a) - \eta_L(a)$. Comme a est invariant modulo I, $\lambda \in I\Gamma$. Soient $\gamma \in \Gamma$, $x \in X$ et $k \in \mathbb{N}$. Si le résultat est vrai, alors nécessairement, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a^k} \cdot \gamma \otimes x &= \frac{\gamma}{\eta_L(a)^k} \otimes x \\
&= \frac{\gamma}{(\eta_R(a) + \lambda)^k} \otimes x \\
&= \frac{\gamma}{\left(1 + \frac{\lambda}{\eta_R(a)}\right)^k} \otimes \frac{x}{a^k} \\
&= \sum_{t \geq 0} (-1)^t \binom{k+t-1}{t} \gamma \lambda^t \otimes \frac{x}{a^{k+t}}.
\end{aligned}$$

La somme est finie car $\lambda \in \Gamma I$ et x est de I-torsion. Réciproquement, on pose :

$$\frac{1}{a^k} \cdot \gamma \otimes x = \sum_{t \geq 0} (-1)^t \binom{k+t-1}{t} \gamma \lambda^t \otimes \frac{x}{a^{k+t}}.$$

Cela définit bien une structure de $A\left[\frac{1}{a}\right]$-module à gauche car :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a^{k+1}}\cdot(\eta_L(a)\gamma)\otimes x &= \sum_{t\geq 0}(-1)^t\binom{k+t}{t}\eta_L(a)\gamma\lambda^t\otimes\frac{x}{a^{k+t+1}}\\
&= \sum_{t\geq 0}(-1)^t\binom{k+t}{t}(\eta_R(a)-\lambda)\gamma\lambda^t\otimes\frac{x}{a^{k+t+1}}\\
&= \sum_{t\geq 0}(-1)^t\binom{k+t}{t}\gamma\lambda^t\otimes\frac{x}{a^{k+t}}-\sum_{t\geq 0}(-1)^t\binom{k+t}{t}\gamma\lambda^{t+1}\otimes\frac{x}{a^{k+t+1}}\\
&= \sum_{t\geq 0}(-1)^t\left(\binom{k+t}{t}-\binom{k+t-1}{t-1}\right)\gamma\lambda^t\otimes\frac{x}{a^{k+t}}\\
&= \sum_{t\geq 0}(-1)^t\binom{k+t-1}{t}\gamma\lambda^t\otimes\frac{x}{a^{k+t}}\\
&= \frac{1}{a^k}\cdot\gamma\otimes x.
\end{aligned}$$

□

Lemme 1.4.6 (2.9, [JY80]). *Soient (A,Γ) un $\Bbbk$-algébroïde de Hopf, I un idéal invariant, M un Γ-comodule à gauche de I-torsion et $a\in A$ un élément invariant modulo I. Alors il existe une unique structure de Γ-comodule à gauche sur $M\left[\frac{1}{a}\right]$ telle que le morphisme canonique soit un morphisme de Γ-comodules à gauche :*

$$M\longrightarrow M\left[\frac{1}{a}\right].$$

Démonstration : D'après le lemme 1.4.5 précédent, $\Gamma\otimes_A M\left[\frac{1}{a}\right]$ est muni d'une structure de $A\left[\frac{1}{a}\right]$-module. Or, si $X\longrightarrow Y$ est un morphisme de A-modules où Y est un $A\left[\frac{1}{a}\right]$-module, il existe un unique morphisme de $A\left[\frac{1}{a}\right]$-module $X\left[\frac{1}{a}\right]\longrightarrow Y$ qui fait commuter le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[d] & Y \\
X\left[\frac{1}{a}\right] \arrow[ur, dashed] &
\end{tikzcd}.$$

Il existe donc un unique morphisme de $A\left[\frac{1}{a}\right]$-modules $\psi_{M\left[\frac{1}{a}\right]}$ qui factorise le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\psi_M"] \arrow[d] & \Gamma\otimes_A M \arrow[d] \\
M\left[\frac{1}{a}\right] \arrow[r, dashed, "\psi_{M\left[\frac{1}{a}\right]}"'] & \Gamma\otimes_A M\left[\frac{1}{a}\right]
\end{tikzcd}.$$

Pour montrer la coassociativité et la counitarité, on utilise encore une fois l'unicité et le fait que les morphismes $\Delta\otimes M\left[\frac{1}{a}\right]$ et $\epsilon\otimes M\left[\frac{1}{a}\right]$ sont des morphismes de A-modules et donc aussi de $A\left[\frac{1}{a}\right]$-modules. Les diagrammes suivants sont donc commutatifs :

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\psi_M"] \arrow[d] & \Gamma\otimes_A M \arrow[r, shift left, "\Delta\otimes M"] \arrow[r, shift right, "\Gamma\otimes\psi_M"'] \arrow[d] & \Gamma\otimes_A\Gamma\otimes_A M \arrow[d] \\
M\left[\frac{1}{a}\right] \arrow[r, "\psi_{M\left[\frac{1}{a}\right]}"'] & \Gamma\otimes_A M\left[\frac{1}{a}\right] \arrow[r, shift left, "\Delta\otimes M\left[\frac{1}{a}\right]"] \arrow[r, shift right, "\Gamma\otimes\psi_{M\left[\frac{1}{a}\right]}"'] & \Gamma\otimes_A\Gamma\otimes_A M\left[\frac{1}{a}\right]
\end{tikzcd},$$

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\psi_M"] \arrow[d] & \Gamma\otimes_A M \arrow[r, "\epsilon\otimes M"] \arrow[d] & M \arrow[d] \\
M\left[\frac{1}{a}\right] \arrow[r, "\psi_{M\left[\frac{1}{a}\right]}"'] & \Gamma\otimes_A M\left[\frac{1}{a}\right] \arrow[r, "\epsilon\otimes M\left[\frac{1}{a}\right]"'] & M\left[\frac{1}{a}\right].
\end{tikzcd}$$

On en déduit le résultat. □

1.5 Séries formelles

Soient $\Bbbk$ un anneau commutatif, R une $\Bbbk$-algèbre graduée, E et F des R-modules gradués, n un entier strictement positif, et $x_1, \dots, x_n$ des indéterminées. Dans les sections suivantes, nous manipulerons des applications linéaires entre R-modules gradués. Pour des commodités d'écriture, nous utiliserons des séries formelles afin de caractériser ses applications linéaires. Dans cette section, nous rappelons brièvement les définitions et les propriétés dont nous aurons besoin.

Définition 1.5.1. *Une série formelle en les indéterminés $x_1, \dots, x_n$ et à coefficients dans E est une application $e : \mathbb{N}^n \longrightarrow E \in \mathrm{Map}(\mathbb{N}^n, E)$. Nous noterons alors $e(x_1, \dots, x_n)$ la série suivante :*

$$e(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i_1,\dots,i_n \geq 0} e(i_1, \dots, i_n) x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}.$$

On note $E[\![x_1, \dots, x_n]\!]$ l'ensemble des séries formelles en $x_1, \dots, x_n$ à coefficients dans E.

Remarque 1.5.2. On peut définir des séries formelles en considérant un ensemble quelconque au lieu de $\mathbb{N}^n$, mais on perd la structure multiplicative, définie ci-après. Nous n'en aurons pas besoin par la suite.

Notation 1.5.3. Soit $I = (i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^n$. Par commodité, nous noterons x^I le monôme $x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}$. Ainsi, si $e \in E[\![x_1, \dots, x_n]\!]$, on a :

$$e(x_1, \dots, x_n) = \sum_{I \in \mathbb{N}^n} e(I) x^I.$$

La graduation sur E s'étend naturellement en une graduation sur $E[\![x_1, \dots, x_n]\!]$. Pour $1 \leq l \leq n$, on choisit un degré pour chacune des indeterminées x_l : $|x_l| \in \mathbb{Z}$. En général, on posera $|x_l| = -1$ (ou -2 si E est concentré en degré pair ou impair).

Définition 1.5.4. *Soit $d \in \mathbb{Z}$. On dit qu'une série formelle $e(x_1, \dots, x_n) \in E[\![x_1, \dots, x_n]\!]$ est homogène de degré d, si pour tout $(i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^n$, $e(i_1, \dots, i_n)$ est homogène de degré*

$$d - \sum_{l=1}^{n} i_l |x_l|.$$

Définition 1.5.5. *Soit E un R-module gradué libre. Une R-série génératrice (ou série génératrice si il n'y a pas de confusion possible) pour E est une série formelle homogène à coefficients dans E : $e(x_1, \dots, x_n) \in E[\![x_1, \dots, x_n]\!]$, telle que ses coefficients non nuls forment une R-base de E.*

Proposition 1.5.6. *L'ensemble $E[\![x_1, \dots, x_n]\!]$ des séries formelles à coefficients dans E est naturellement muni d'une structure de R-module et le morphisme suivant est une application R-linéaire appelé évaluation en 0 :*

$$\begin{cases} E[\![x_1, \dots, x_n]\!] & \longrightarrow & E \\ e(x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & e(0, \dots, 0) \end{cases}$$

Proposition et définition 1.5.7. *Considérons le foncteur suivant :*

$$\mathrm{Map}(\mathbb{N}^n, -) : \begin{cases} {}_R\mathcal{M}\mathrm{od} & \longrightarrow & {}_R\mathcal{M}\mathrm{od} \\ E & \longmapsto & E[\![x_1, \ldots, x_n]\!]. \end{cases}$$

Soit $u : E \longrightarrow F$, une application R-linéaire et $e(x_1, \ldots, x_n) \in E[\![x_1, \ldots, x_n]\!]$ une série formelle. On note alors $u(e)(x_1, \ldots, x_n)$ la série formelle à coefficients dans F induite par ce foncteur :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{N}^n \arrow[r, "e"] \arrow[dr, "u(e)"'] & E \arrow[d, "u"] \\ & F. \end{tikzcd}$$

$$u(e)(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{I \in \mathbb{N}^n} u(e(I))x^I.$$

De plus, si e est homogène de degré d et u est homogène de degré k, alors $u(e)$ est homogène de degré $d + k$.

Définition 1.5.8 (Produit tensoriel de séries formelles)**.** *Soient m, n deux entiers strictement positifs. Le produit tensoriel extérieur de deux séries formelles est défini par :*

$$\otimes : \begin{cases} E[\![x_1, \ldots, x_m]\!] \otimes_R F[\![x_{m+1}, \ldots, x_{m+n}]\!] & \longrightarrow & E \otimes_R F[\![x_1, \ldots, x_{m+n}]\!] \\ e(x_1, \ldots, x_m) \otimes f(x_{m+1}, \ldots, x_{m+n}) & \longmapsto & (e \otimes f)(x_1, \ldots, x_{m+n}), \end{cases}$$

où :

$$(e \otimes f)(x_1, \ldots, x_{m+n}) = \sum_{I \in \mathbb{N}^{n+m}} e(i_1, \ldots, i_m) \otimes f(i_{m+1}, \ldots, i_{m+n})x^I.$$

Si $m = n$ on peut définir le produit tensoriel standard de deux séries formelles, noté $\otimes$, par :

$$\otimes : \begin{cases} E[\![x_1, \ldots, x_n]\!] \otimes_R F[\![x_1, \ldots, x_n]\!] & \longrightarrow & E \otimes_R F[\![x_1, \ldots, x_n]\!] \\ e(x_1, \ldots, x_n) \otimes f(x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & (e \otimes f)(x_1, \ldots, x_n), \end{cases}$$

avec :

$$(e \otimes f)(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{I \in \mathbb{N}^n} \sum_{I_1 + I_2 = I} e(I_1) \otimes f(I_2)x^I.$$

De plus, si e est homogène de degré d_1 et f est homogène de degré d_2, alors $e \otimes f$ est homogène de degré $d_1 + d_2$.

Les isomorphismes R-linéaires $R \otimes_R E \simeq E$ permettent de définir des structures d'algèbre et de module sur l'ensemble des séries formelles :

Proposition 1.5.9. *L'ensemble des séries formelles à coefficients dans R, $R[\![x_1, \ldots, x_n]\!]$ est canoniquement muni d'une structure de R-algèbre. Les séries inversibles pour cette multiplication sont exactement les séries $e(x_1, \ldots, x_n)$ telles que $e(0, \ldots, 0)$ est inversible dans R. De la même façon, $E[\![x_1, \ldots, x_n]\!]$ est muni d'une structure de $R[\![x_1, \ldots, x_n]\!]$-module.*

Soit $u : E \longrightarrow F$, une application R-linéaire. L'application $E[\![x_1, \ldots, x_n]\!] \longrightarrow F[\![x_1, \ldots, x_n]\!]$ définie par le foncteur de la définition 1.5.7 est une application $R[\![x_1, \ldots, x_n]\!]$-linéaire. Ainsi, on a un foncteur :

$$\begin{cases} {}_R\mathcal{M}\mathrm{od} & \longrightarrow & {}_{R[\![x_1, \ldots, x_n]\!]}\mathcal{M}\mathrm{od} \\ E & \longmapsto & E[\![x_1, \ldots, x_n]\!]. \end{cases}$$

Soient m, n deux entiers strictement positifs, $e(x_1, \ldots, x_n) \in E[\![x_1, \ldots, x_n]\!]$, Γ une R-algèbre gradué et pour $1 \leq l \leq n$, $f_l(y_1, \ldots, y_m) \in \Gamma[\![y_1, \ldots, y_m]\!]$ telles que $f_l(0, \ldots, 0) = 0$ pour tout l.

Définition 1.5.10 (Composition extérieure)**.** *Nous noterons $e \rhd (f_1, \ldots, f_n)$ la série formelle suivante :*

$$e \rhd (f_1, \ldots, f_n)(y_1, \ldots, y_m) \in \Gamma \otimes_R E[\![y_1, \ldots, y_m]\!],$$

$$e \rhd (f_1, \ldots, f_n)(y_1, \ldots, y_m) = \sum_{i_1, \ldots, i_n \geq 0} f_1^{i_1}(y_1, \ldots, y_m) \cdots f_n^{i_n}(y_1, \ldots, y_m) \otimes e(i_1, \ldots, i_n).$$

Soit $f \in \Gamma[\![x]\!]$ tel que $f(0) = 0$. Si pour tout $1 \leq l \leq n$, $f_l(x_1, \ldots, x_n) = f(x_n) \in \Gamma[\![x_1, \ldots, x_n]\!]$, alors, par abus de notation, on note $e \rhd f$ la série formelle :

$$e \rhd f = e \rhd (f_1, \ldots, f_n) \in \Gamma \otimes_R E[\![x_1, \ldots, x_n]\!].$$

Enfin, si e est homogène de degré d et f_l est homogène de degré $|x_l|$ pour tout l, alors $e \rhd (f_1, \ldots, f_n)$ est homogène de degré d.

Remarque 1.5.11. La définition précédente est valide car chaque coefficient s'écrit comme une somme finie de termes, à cause de l'hypothèse sur les f_l. De plus, si $E = \Gamma = R$, alors la composition $\rhd$ est la composition usuelle des séries formelles $\circ$.

Dans les chapitre suivant, nous verrons que certains morphismes de structure d'algébroïdes de Hopf et de comodules se caractérisent par une relation faisant intervenir cette composition extérieure.

Proposition 1.5.12. *L'application suivante est un morphisme de R-modules :*

$$\begin{cases} E[\![x_1, \ldots, x_n]\!] & \longrightarrow & \Gamma \otimes_R E[\![y_1, \ldots, y_m]\!] \\ e & \longmapsto & e \rhd (f_1, \ldots, f_n). \end{cases}$$

Cette application est fonctorielle en E, c'est-à-dire que, si $u : E \longrightarrow F$ est une application R-linéaire, on a :

$$(id \otimes u)(e \rhd (f_1, \ldots, f_n)) = u(e) \rhd (f_1, \ldots, f_n).$$

De plus, si $\lambda(x_1, \ldots, x_n) \in R[\![x_1, \ldots, x_n]\!]$, on a alors l'égalité :

$$(\lambda e) \rhd (f_1, \ldots, f_n) = \lambda \rhd (f_1, \ldots, f_n) \cdot e \rhd (f_1, \ldots, f_n),$$

où le produit dans le second membre provient de la structure de Γ-module de $\Gamma \otimes_R E$. Si $\phi : \Gamma_1 \longrightarrow \Gamma_2$ est un morphisme de R-algèbre, alors on a :

$$(\phi \otimes id)(e \rhd (f_1, \ldots, f_n)) = e \rhd (\phi(f_1), \ldots, \phi(f_n)).$$

Remarque 1.5.13. Si $E = R$, l'application de la proposition précédente est un morphisme de R-algèbre. On peut aussi énoncer un résultat plus général qui dit que la composition extérieure $\rhd$ commute avec le produit tensoriel extérieur.

Proposition 1.5.14. *La composition extérieure est associative. Plus précisément, soient m, n, p trois entiers strictements positifs et Γ_1,Γ_2 deux R-algèbres. Soient :*

$$e(x_1, \ldots, x_n) \in E[\![x_1, \ldots, x_n]\!],$$

$$f_l(y_1, \ldots, y_m) \in \Gamma_1[\![y_1, \ldots, y_m]\!]\ ,\ 1 \leq l \leq n,$$

$$g_s(z_1, \ldots, z_p) \in \Gamma_2[\![z_1, \ldots, z_p]\!]\ ,\ 1 \leq s \leq m.$$

Alors les deux séries formelles de $\Gamma_2 \otimes \Gamma_1 \otimes E[\![z_1, \ldots, z_p]\!]$ suivantes sont égales :

$$(e \rhd (f_1, \ldots, f_n)) \rhd (g_1, \ldots, g_m),$$

$$e \rhd (f_1 \rhd (g_1, \ldots, g_m), \ldots, f_n \rhd (g_1, \ldots, g_m))\,.$$

Notation 1.5.15. Soit $f \in \Gamma[\![x]\!]$ tel que $f(0) = 0$. La série formelle suivante est appelée série formelle réduite de f :

$$\overline{f}(x) = \frac{f(x)}{x}.$$

Proposition 1.5.16. *Soient E_1, E_2 deux R-modules, $e_1 \in E_1[\![x]\!]$, $e_2 \in E_2[\![x]\!]$ et $u : E_1 \longrightarrow E_2$, une application R-linéaire. Si $e_1(0) = 0$, on a les relations :*
- $\overline{u(e_1)} = u(\overline{e_1})$,
- $\overline{e_1 \otimes e_2}(x) = (\overline{e_1} \otimes e_2)(x)$,
- $\overline{e_1 \rhd f} = \overline{f} \cdot (\overline{e_1} \rhd f)$.

Démonstration : Posons :

$$e_1(x) = \sum_{i \geq 0} e_{1,i} x^{i+1} \in E_1[\![x]\!] \quad .$$

Pour la troisième relation, on a :

$$\begin{aligned} \overline{e_1 \rhd f}(x) &= \frac{1}{x} \sum_{i \geq 0} f(x)^{i+1} \otimes e_i \\ &= \frac{f(x)}{x} \cdot \sum_{i \geq 0} f(x)^i \otimes e_i \\ &= \overline{f} \cdot (\overline{e_1} \rhd f). \end{aligned}$$

□

Le monoïde $\mathbb{N}^n$ possède une action naturelle du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ par permutations. On a donc une action induite sur l'ensemble des séries formelles :

Définition 1.5.17. *Le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ agit à gauche sur $E[\![x_1, \ldots, x_n]\!]$ par :*

$$\begin{cases} \mathfrak{S}_n \times E[\![x_1, \ldots, x_n]\!] & \longrightarrow \quad E[\![x_1, \ldots, x_n]\!] \\ (\sigma, e) & \longmapsto \quad (\sigma \cdot e)(x_1, \ldots, x_n) = e(x_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, x_{\sigma^{-1}(n)}) \end{cases}$$

Pour $1 \leq i \neq j \leq n$, on notera (i,j) la permutation qui échange i et j. De plus, si $e \in E[\![x_1, \ldots, x_n]\!]$, alors :
- *e est une série symétrique si, $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n,\ \sigma \cdot e = e$,*
- *e est une série antisymétrique si, $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n,\ \sigma \cdot e = \epsilon(\sigma) e$, où ϵ désigne le morphisme de signature $\epsilon : \mathfrak{S}_n \longrightarrow \{\pm 1\}$.*

Lemme 1.5.18. *Soient E un R-module gradué, $n \in \mathbb{N}$ et $e \in E[\![x_1, x_2]\!]$, une série formelle telle que $e(x,x) = 0$. Alors il existe une unique série formelle $g \in E[\![x_1, x_2]\!]$ telle que $e(x_1, x_2) = (x_1 - x_2) g(x_1, x_2)$. La série g sera notée :*

$$g(x_1, x_2) = \frac{e(x_1, x_2)}{x_1 - x_2}.$$

Démonstration : Si $e(x_1, x_2) = P(x_1, x_2)$ est un polynôme homogène, alors le résultat est clair en effectuant une division euclidienne. Par linéarité, le lemme en découle. □

La définition suivante sera utile à la section 6.6.

Définition 1.5.19. *Soient E un R-module gradué, $n \geq 1$ et $k \geq 2$ deux entiers, $N = \max(k, n)$ et*

$$e(x_1, \ldots, x_n) \in E[\![x_1, \ldots, x_n]\!].$$

On définit la série formelle $\delta_k e \in E[\![x_1, \ldots, x_N]\!]$ *par :*

$$\delta_k e = \frac{e - (1,k) \cdot e}{x_1 - x_k}.$$

Pour $m \geq 0$*, on pose* $M = \max(n, m+1)$ *et on définit par récurrence la série formelle* $\tau_m e \in E[\![x_1, \ldots, x_M]\!]$ *par :*

$$\tau_0 e = e \text{ et } \tau_{m+1} e = \delta_{m+2} \tau_m e.$$

1.6 Lois de groupe formel

Dans cette section, nous définissons le groupoïde des lois de groupe formel. Ce groupoïde est représenté par un algébroïde de Hopf introduit implicitement par Lazard dans l'article [Laz55]. Quillen a montré dans l'article [Qui69] que le spectre du cobordisme complexe MU réalise géométriquement le groupoïde des lois de groupe formel. Étant un objet universel, le cobordisme complexe a une importance capitale en topologie algébrique. En particulier, la suite spectrale d'Adams relie les groupes d'homotopies des sphères aux coefficients du spectre MU. Malheureusement, le calcul explicite de cette suite spectrale est très compliqué, notamment parce que l'anneau MU_* est trop gros. Pour simplifier ce calcul, on peut introduire le spectre de Brown-Peterson BP qui contient les renseignement p-locaux de MU. L'algébroïde de Hopf associé à ce spectre représente le groupoïde des lois de groupe formel p-typiques. L'intérêt principal du spectre BP est que, en général, les calculs sont plus simples que sur MU. Pour plus de renseignements sur les lois de groupe formel, on peut consulter [Frö68] de Frohlich, [Str03] de Strickland ou l'annexe $A2$ du livre [Rav86] de Ravenel.

Définition 1.6.1. *Soit* R *une* $\mathbb{k}$*-algèbre. Une loi de groupe formel (commutative, de dimension* 1*) sur un anneau* R *est une série formelle en deux indéterminées*

$$F(x,y) = \sum_{i,j \geq 0} a_{i,j} x^i y^j \in R[\![x,y]\!]$$

qui vérifie les axiomes suivants :
- $F(x, 0) = x$,
- $F(x, y) = F(y, x)$,
- $F(x, F(y, z)) = F(F(x, y), z)$.

Exemple 1.6.2. Les lois de groupe formel suivantes sont définies sur $\mathbb{Z}$:
- la loi additive : $\mathbb{G}_{\mathrm{a}}(x,y) = x + y$.
- la loi multiplicative : $1 + \mathbb{G}_{\mathrm{m}}(x,y) = (1+x)(1+y)$.

Les axiomes de la définition 1.6.1 assurent l'existence d'une série inverse :

Proposition 1.6.3 (Proposition A2.1.2 de [Rav86])**.** *Soit* R *une* $\mathbb{k}$*-algèbre et* F *une loi de groupe formel sur* R*. Alors il existe une unique série formelle* $i_F(x) \in R[\![x]\!]$ *telle que :*
- $i_F(0) = 0$,
- $F(x, i_F(x)) = 0$.

Notation 1.6.4. Nous utiliserons les notations suivantes :

$$F(x,y) = x +_F y,$$

$$x_1 +_F x_2 +_F \cdots +_F x_n = \sum_{i=1}^{n}{}^{F} x_i.$$

Définition 1.6.5. *Soit R une $\Bbbk$-algèbre et F une loi de groupe formel sur R. Pour tout entier $n \geq 0$, on définit la n-série de F par :*

$$[n]_F(x) = \sum_{i=1}^{n} {}^F x.$$

Si n est un entier négatif, on définit la n-série de F par :

$$[n]_F(x) = i_F([-n]_F(x)) = \sum_{i=1}^{-n} {}^F i_F(x).$$

Plus généralement, on a la proposition suivante :

Proposition 1.6.6 (Proposition A2.1.20 de [Rav86])**.** *Soient R une $\Bbbk$-algèbre avec $\Bbbk \subset \mathbb{Q}$ et F une loi de groupe formel sur R. Alors, pour tout $r \in \Bbbk$, il existe une unique série formelle $[r]_F(x) \in R[\![x]\!]$ telle que, pour tous $r, s \in \Bbbk$:*

1. *Si $r \in \mathbb{Z}$, $[r]_F(x)$ est la r-série de la définition 1.6.5,*
2. *$[r+s]_F(x) = [r]_F(x) +_F [s]_F(x)$,*
3. *$[rs]_F(x) = [r]_F([s]_F(x))$.*

Définition 1.6.7. *Soient R une $\Bbbk$-algèbre et F, G deux lois de groupe formel sur R. Un morphisme de lois de groupe formel $f : F \longrightarrow G$ est une série formelle $f(x) \in R[\![x]\!]$ telle que :*

- *$f(0) = 0$,*
- *$f(x +_F y) = f(x) +_G f(y)$.*

Si $g : G \longrightarrow H$ est un autre morphisme de lois de groupe formel sur R, alors la série formelle composée $g \circ f$ est un morphisme de lois de groupe formel de F vers H. On note $\mathrm{Fgl}(R)$ la catégorie des lois de groupe formel et des morphismes de lois de groupe formel.

Proposition et définition 1.6.8 (Définition A2.1.5 de [Rav86])**.** *Soient R une $\Bbbk$-algèbre et F, G deux lois de groupe formel sur R. Un morphisme de lois de groupe formel $f : F \longrightarrow G$ est un isomorphisme si et seulement si $f'(0)$ est inversible dans R. On dit qu'un isomorphisme de lois de groupe formel est un isomorphisme strict si $f'(0) = 1$.*

Un logarithme de F est un isomorphisme strict de F vers la loi additive $\mathbb{G}_{\mathrm{a}}$.

Proposition 1.6.9 (Théorème A2.1.6 de [Rav86])**.** *Soient R une $\Bbbk$-algèbre avec $\Bbbk \subset \mathbb{Q}$, ϕ le morphisme naturel $R \longrightarrow \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} R$ et F une loi de groupe formel sur R. Alors :*

- *si ϕ est injectif, alors F admet au plus un logarithme sur R ;*
- *si ϕ est un isomorphisme (c'est-à-dire R est une $\mathbb{Q}$-algèbre), alors F admet un unique logarithme sur R.*

On note $\log_F$ le logarithme de F sur R s'il existe et est unique.

Démonstration : Soit f un logarithme de F. Par définition, on a :

- $f(0) = 0$,
- $f'(0) = 1$,
- $f(x +_F y) = f(x) + f(y)$.

En dérivant par rapport à y cette égalité entre séries formelles, on obtient :

$$f'(x +_F y) \cdot \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = f'(y).$$

En évaluant en $y = 0$, on a :

$$f'(x) \cdot \frac{\partial F}{\partial y}(x, 0) = 1.$$

Comme $\frac{\partial F}{\partial y}(0,0) = 1$, $\frac{\partial F}{\partial y}(x,0)$ est une série formelle inversible et :

$$f'(x) = \frac{1}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,0)}.$$

Si ϕ est injectif, il existe au plus une seule série formelle vérifiant cette identité et $f(0) = 0$. Si de plus ϕ est un isomorphisme, l'existence est claire. □

1.7 L'algébroïde de Hopf $(\mathsf{L}, \mathsf{LB})$

Définition 1.7.1. *Soit R une $\mathbb{Z}$-algèbre. On définit :*
- $\mathrm{Fgl}\,(R)$*, l'ensemble des lois de groupe formel sur R.*
- $\mathrm{RPS}^1(R)$*, l'ensemble des séries formelles f sur R telles que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$.*
- $\mathcal{F}\mathrm{gl}^1\,(R)$*, le groupoïde des lois de groupe formel sur R et des isomorphismes stricts de lois de groupe formel.*

Théorème 1.7.2. *Les foncteurs* RPS^1 *et* $\mathrm{Fgl} : {}_{\mathbb{Z}}\mathcal{A}\mathrm{lg} \longrightarrow \mathcal{S}\mathrm{et}$ *sont représentés respectivement par les anneaux $\mathbb{Z}[m_1, m_2, \ldots]$ et L, l'anneau de Lazard. De plus, si R est une $\mathbb{Q}$-algèbre, alors le morphisme Ψ_R suivant est un isomorphisme :*

$$\Psi_R : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{RPS}^1(R) & \longrightarrow & \mathrm{Fgl}\,(R) \\ f & \longmapsto & f^{-1}(f(x) + f(y)) \end{array} \right. .$$

On a donc un isomorphisme de $\mathbb{Q}$-algèbres :

$$\mathsf{L} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \simeq \mathbb{Q}[m_1, m_2, \ldots].$$

Démonstration : Soit $L_0 = \mathbb{Z}[a_{i,j>0}]$ et $F_0 = x + y + \sum_{i,j>0} a_{i,j} x^i y^j \in L_0[\![x, y]\!]$. Soient $b_{i,j,k} \in L_0$ tels que :

$$F_0(F_0(x,y), z) - F_0(x, F_0(y,z)) = \sum_{i,j,k} b_{i,j,k} x^i y^j z^k \in L_0[\![x, y, z]\!].$$

Soit I l'idéal de L_0 engendré par $a_{i,j} - a_{j,i}$ et les $b_{i,j,k}$. On pose $L = L_0/I$ et F l'image de F_0 dans L. Alors le couple (L, F) représente bien le foncteur Fgl.

Le fait que si R est une $\mathbb{Q}$-algèbre implique que Ψ_R est un isomorphisme découle directement de la proposition 1.6.9. Enfin, l'isomorphisme de $\mathbb{Q}$-algèbres se déduit de ce qui précède et du lemme de Yoneda. □

Notation 1.7.3. On notera $\mathrm{F_u}(x, y)$ la loi de groupe formel universelle sur L. Par convention on posera $m_0 = 1$ et on notera $\log_{\mathrm{u}}(x)$ le logarithme de la loi de groupe formelle universelle $\mathrm{F_u}$:

$$\log_{\mathrm{u}}(x) = \sum_{i \geq 0} m_i x^{i+1} \in \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathsf{L}[\![x]\!].$$

Le théorème suivant, dû à Lazard (cf. l'article [Laz55]), démontre que L est un anneau de polynômes sur des générateurs x_i, $i \geq 1$:

Théorème 1.7.4 (Lazard, [Laz55]). *Il existe un isomorphisme d'algèbres :*

$$\mathbb{Z}[x_i; i \geq 1] \xrightarrow{\sim} \mathsf{L},$$

De plus, on peut choisir les x_i tels que, dans $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathsf{L}$, modulo des éléments décomposables, on a :

$$x_i = \left\{ \begin{array}{ll} p m_i & \text{si } i = p^k - 1 \text{ pour un nombre premier } p \\ m_i & \text{sinon} \end{array} \right.$$

Théorème 1.7.5. *Le foncteur* $\mathcal{F}\mathrm{gl}^1 : {}_{\mathbb{Z}}\mathcal{A}\mathrm{lg} \longrightarrow \mathcal{G}\mathrm{rpd}$ *est représenté par l'algébroïde de Hopf* (L,LB)*, où, vue comme une* L*-algèbre à gauche par* η_L*, on a l'isomorphisme suivant :*

$$\mathsf{LB} \simeq \mathsf{L}\left[b_i, i \geq 1\right].$$

Démonstration : L'ensemble des triplets (F, f, G), où f est un isomorphisme strict de loi de groupe formel de F vers G est en bijection avec l'ensemble des couples (F, f), où F est une loi de groupe formelle et f une série formelle de $R[\![x]\!]$ telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$. En effet, si f est un isomorphisme, alors G est entièrement déterminée par F et f car on a la relation :

$$G(x, y) = f(f^{-1}(x) +_F f^{-1}(y)).$$

Le résultat suit. □

Notation 1.7.6. Par convention on pose $b_0 = 1 \in \mathsf{LB}$. On définit de plus la série formelle suivante :

$$\mathrm{b_u}(x) = \sum_{i\geq 0} b_i x^{i+1} \in \mathsf{LB}[\![x]\!].$$

C'est l'isomorphisme de lois de groupe formel universel :

$$\mathrm{b_u} : \eta_L(\mathrm{F_u}) \longrightarrow \eta_R(\mathrm{F_u}).$$

On peut munir l'algébroïde de Hopf (L,LB) d'une graduation naturelle. Pour cela, on considère le foncteur en groupoïdes suivant :

$$\mathcal{F}\mathrm{gl}^{1,\mathrm{gr}} : {}_{\mathbb{Z}}\mathcal{A}\mathrm{lg}^{\mathrm{gr}} \longrightarrow \mathcal{G}\mathrm{rpd}.$$

Soit R une $\mathbb{Z}$-algèbre graduée. Le groupoïde $\mathcal{F}\mathrm{gl}^{1,\mathrm{gr}}(R)$ est alors le groupoïde des lois de groupe formel $F \in R[\![x, y]\!]$ homogènes de degré -2 et des isomorphismes stricts $f \in R[\![x]\!]$ homogènes de degré -2 (x et y sont des indéterminées de degré -2).

Le foncteur oubli $\mathcal{O} : {}_{\mathbb{Z}}\mathcal{A}\mathrm{lg}^{\mathrm{gr}} \longrightarrow {}_{Z}\mathcal{A}\mathrm{lg}$ admet pour foncteur adjoint à gauche le foncteur :

$$\mathbb{Z}\left[u^{\pm}\right] \otimes_{\mathbb{Z}} - : \left\{ \begin{array}{ccc} {}_{\mathbb{Z}}\mathcal{A}\mathrm{lg} & \longrightarrow & {}_{\mathbb{Z}}\mathcal{A}\mathrm{lg}^{\mathrm{gr}} \\ R & \longmapsto & R\left[u^{\pm}\right] \end{array} \right. ,$$

où u est un élément de degré 2.

$$\mathcal{O} : {}_{\mathbb{Z}}\mathcal{A}\mathrm{lg}^{\mathrm{gr}} \leftrightarrows {}_{\mathbb{Z}}\mathcal{A}\mathrm{lg} : \mathbb{Z}\left[u^{\pm}\right] \otimes_{\mathbb{Z}} -$$

Or, si $R \in {}_{\mathbb{Z}}\mathcal{A}\mathrm{lg}$, on a un isomorphisme de groupoïde naturel :

$$\mathcal{F}\mathrm{gl}^1(R) \simeq \mathcal{F}\mathrm{gl}^{1,\mathrm{gr}}\left(R\left[u^{\pm}\right]\right).$$

Par une démonstration analogue à celle du théorème 1.7.5, on montre que le foncteur $\mathcal{F}\mathrm{gl}^{1,\mathrm{gr}}$ est représenté par un algébroïde de Hopf gradué. L'adjonction entre les catégories ${}_{\mathbb{Z}}\mathcal{A}\mathrm{lg}$ et ${}_{\mathbb{Z}}\mathcal{A}\mathrm{lg}^{\mathrm{gr}}$ montre alors que l'algébroïde de Hopf non gradué sous-jacent est l'algébroïde de Hopf (L,LB). De plus, pour $i, j \geq 1$ on a :
- $a_{i,j} \in \mathsf{L}$ est homogène de degré $2(i + j - 1)$,
- $b_i \in \mathsf{LB}$ est homogène de degré $2i$,
- $m_i \in \mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathsf{L} \simeq \mathbb{Q}\left[m_i, i \geq 1\right]$ est homogène de degré $2i$,
- $x_i\mathsf{L}$ est homogène de degré $2i$.

Ainsi les séries formelles $\mathrm{F_u}(x,y)$, $\log_{\mathrm{u}}(x)$ et $\mathrm{b_u}(x)$ sont des séries formelles homogènes de degré -2.

L'anneau de Lazard L est un anneau de polynômes, néanmoins ses générateurs ne sont pas très explicites. Pour expliciter la structure de l'algébroïde de Hopf (L,LB), nous allons tensoriser avec $\mathbb{Q}$ et utiliser le théorème 1.7.2 qui montre que $\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathsf{L}$ est isomorphe à $\mathbb{Q}\,[m_i; i\geq 1]$, où les m_i sont les coefficients du logarithme de la loi de groupe formel universelle. Comme (L,LB) n'a pas de torsion, le morphisme naturel $(\mathsf{L},\mathsf{LB})\longrightarrow \mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}}(\mathsf{L},\mathsf{LB})$ est injectif et la structure d'algébroïde de Hopf de $\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}}(\mathsf{L},\mathsf{LB})$ détermine celle de (L,LB). On a le théorème suivant :

Théorème 1.7.7. *Les applications de structures ϵ, η_L, η_R, Δ et c de l'algébroïde de Hopf $\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}}(\mathsf{L},\mathsf{LB})$ sont déterminées par les relations suivantes :*

1. $\eta_R(\log_{\mathrm{u}})\circ \mathrm{b_u}(x)=\eta_L(\log_{\mathrm{u}}(x))$,
2. $\epsilon(\mathrm{b_u}(x))=x$,
3. $c(\mathrm{b_u}(x))={\mathrm{b_u}}^{-1}(x)$,
4. $\Delta(\mathrm{b_u}(x))=\mathrm{b_u}\rhd \mathrm{b_u}(x)$, *c'est-à-dire :*

$$\sum_{i\geq 0}\Delta(b_i)x^{i+1}=\sum_{i\geq 0}\mathrm{b_u}(x)^{i+1}\otimes b_i.$$

Démonstration : D'après le théorème 1.7.2, $\mathrm{F_u}\in\mathsf{L}[\![x,y]\!]$ est la loi de groupe formel universelle et les coefficients de son logarithme $\log_{\mathrm{u}}(x)$ engendrent $\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathsf{L}$. De plus, les coefficients de l'isomorphisme strict universel $\mathrm{b_u}(x)$ engendrent LB en tant que L-algèbre. Cela démontre que ces relations déterminent entièrement l'algébroïde de Hopf $(\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathsf{L},\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathsf{LB})$.

On a le diagramme commutatif suivant dans le groupoïde $\mathcal{F}\mathrm{gl}^1\,(\mathsf{LB})$:

$$\begin{tikzcd}
\eta_L(\mathrm{F_u}) \arrow[dd, "\mathrm{b_u}"'] \arrow[dr, bend left, "\eta_L(\log_{\mathrm{u}})"] & \\
& \mathbb{G}_{\mathrm{a}} \\
\eta_R(\mathrm{F_u}) \arrow[ur, bend right, "\eta_R(\log_{\mathrm{u}})"'] & .
\end{tikzcd}$$

Cela démontre la première relation. Enfin, les relations 2 à 4 viennent du fait que la composition des morphismes de loi de groupe formel correspond à la composition des séries formelles. □

1.8 L'algébroïde de Hopf (V,VT)

Soit R un anneau, F une loi de groupe formel sur R et $q\in\mathbb{Z}\subset R$ un entier inversible dans R. On pose :

$$\alpha_q^F(x)=\left[\frac{1}{q}\right]_F\left(\sum_{i=1}^{q}{}^{F}\,\zeta_q^i x\right),$$

où ζ_q est une racine q-ème primitive de l'unité. A priori, c'est une série formelle sur $R\,[\zeta_q]$, mais comme elle est symétrique en les ζ_q^i, elle est à coefficients dans R. On peut en outre remarquer que :

$$\alpha_q^F(x)\equiv 0\,[x^q]\,.$$

Dans toute la suite, on fixe un nombre premier p.

Lemme 1.8.1. *Soit R une $\mathbb{Z}_{(p)}$-algèbre, F une loi de groupe formel sur R et q un nombre premier différent de p. Si $\alpha_q^F(x) = 0$ alors, pour tout entier $r > 0$ non divisible par p, on a $\alpha_{qr}^F(x) = 0$.*

Démonstration :

$$\begin{aligned}
[qr]_F\left(\alpha_{qr}^F(x)\right) &= \sum_{i=1}^{qr}{}^F \zeta_{qr}^i x \\
&= \sum_{k=1}^{r}{}^F \sum_{j=0}^{q-1}{}^F \zeta_{qr}^{jr+k} x \\
&= \sum_{k=1}^{r}{}^F \left(\sum_{j=0}^{q-1}{}^F \zeta_q^j \zeta_{qr}^k x \right) \\
&= \sum_{k=1}^{r}{}^F [q]_F \left(\alpha_q(\zeta_{qr}^k x) \right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

Définition 1.8.2 (Définition A2.1.22 de [Rav86])**.** *Soit R une $\mathbb{Z}_{(p)}$-algèbre et F une loi de groupe formel sur R. On dit que F est p-typique si $\alpha_q^F(x) = 0$ pour tout q premier différent de p. On définit alors :*

- $\mathrm{Fgl}_p(R)$, *l'ensemble des lois de groupe formel p-typiques sur R.*
- $\mathcal{F}\mathrm{gl}_p^1(R)$, *le groupoïde des lois de groupe formel p-typiques sur R et des isomorphismes stricts. C'est la sous-catégorie pleine de $\mathcal{F}\mathrm{gl}^1(R)$ constituée des lois de groupe formel p-typiques.*

Proposition 1.8.3. *Soient R une $\mathbb{Z}_{(p)}$-algèbre telle que le morphisme naturel $R \longrightarrow \mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}} R$ est injectif et F une loi de groupe formel sur R. Alors F est une loi de groupe formel p-typique si et seulement si son logarithme sur $\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}} R$ est de la forme :*

$$\log_F(x) = \sum_{i \geq 0} l_i x^{p^i},$$

où $l_0 = 1$.

Démonstration : D'après le proposition 1.6.9, on sait que F admet un logarithme sur $\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}} R$:

$$\log_F(x) = \sum_{i \geq 0} m_i x^{i+1} \in \mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}} R[\![x]\!],$$

où $m_0 = 1$. Nous avons alors :

$$\begin{aligned}
\log_F(\alpha_q^F(x)) &= \frac{1}{q} \sum_{i=1}^{q} \log_F(\zeta^i x) \\
&= \frac{1}{q} \sum_{i=1}^{q} \sum_{j \geq 0} m_j \zeta^{i(j+1)} x^{j+1} \\
&= \frac{1}{q} \sum_{j \geq 0} m_j x^{j+1} \sum_{i=1}^{q} \zeta^{i(j+1)}
\end{aligned}$$

Or $\sum_{i=1}^{q} \zeta^{i(j+1)}$ vaut 0 si et seulement si $j+1$ est divisible par q. Dans le cas contraire, cette somme vaut q. D'où :

$$\log_F(\alpha_q^F(x)) = \sum_{l>0} m_{ql-1} x^{ql}.$$

Or d'après la définition 1.8.2, F est p-typique si et seulement si $\alpha_q^F(x) = 0$ pour tout premier $q \neq p$. Donc F est p-typique si et seulement si $m_j = 0$ pour tout $j \neq p^k - 1$. □

Cartier montre dans [Car67] le théorème suivant. Ce théorème est aussi démontré dans le livre de ravenel [Rav86] au théorème A2.1.18.

Théorème 1.8.4 (Cartier)**.** *Soit R une $\mathbb{Z}_{(p)}$-algèbre. Toute loi de groupe formel sur R est canoniquement strictement isomorphe à une loi p-typique.*

Démonstration : Tout d'abord, montrons qu'il existe un isomorphisme strict entre l'image de la loi de groupe formel universelle $\mathrm{F_u}$ sur $\mathbb{Z}_{(p)} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathsf{L}$ et une loi de groupe formel p-typique F. Soit F une loi de groupe formel sur $\mathbb{Z}_{(p)} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathsf{L}$ et $f : \mathrm{F_u} \longrightarrow F$ un isomorphisme strict. Rappelons que $\log_{\mathrm{u}}(x) = \sum_{i \geq 0} m_i x^{i+1}$ est le logarithme de $\mathrm{F_u}$ sur $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathsf{L}$. On a donc le diagramme commutatif suivant dans $\mathcal{F}\mathrm{gl}^1 (\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathsf{L})$:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{F_u} \arrow[dd, "f"'] \arrow[dr, bend left, "\log_{\mathrm{u}}"] & \\
& \mathbb{G}_{\mathrm{a}} \\
F \arrow[ur, bend right, "\log_F"'] &
\end{tikzcd}.$$

Le logarithme de F est donc :

$$\log_F(x) = \log_{\mathrm{u}} \circ f^{-1}(x).$$

On veut trouver un f tel que F soit une loi de groupe formel p-typique. Or, d'après la proposition 1.8.3, F est p-typique si et seulement si :

$$\log_F(x) = \sum_{i \geq 0} l_i x^{p^i} \in \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathsf{L}[\![x]\!].$$

Soit ζ_q une racine primitive q-ième de l'unité et :

$$\alpha_q^{\mathrm{F_u}} = \left[\frac{1}{q}\right]_{\mathrm{F_u}} \left(\sum_{i=1}^{q}{}^{\mathrm{F_u}} \zeta_q^i x \right).$$

Rappelons la fonction de Möbius $\mu : \mathbb{N} \longrightarrow \{-1, 0, 1\}$ définie par :

$$\mu(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est divisible par un carré} \\ (-1)^r & \text{si } n \text{ est le produit de } r \text{ nombres premier distincts.} \end{cases}$$

On pose finalement :

$$f_{\mathrm{F_u}}^{-1}(x) = \sum_{p \nmid q}{}^{\mathrm{F_u}} [\mu(q)]_{\mathrm{F_u}} \left(\alpha_q^{\mathrm{F_u}}(x) \right),$$

où la somme est prise sur tous les entiers non divisibles par p. Cette série formelle est bien définie car $\alpha_q^{\mathrm{F_u}}(x) \equiv 0\,[x^q]$ et on a bien $f(x) \equiv x\left[x^2\right]$ car $\alpha_1^{\mathrm{F_u}}(x) \equiv x\left[x^2\right]$. On a alors :

$$\begin{array}{rcl} \log_{\mathrm{u}}(f_{\mathrm{F_u}}^{-1}(x)) & = & \sum\limits_{p \nmid q} \mu(q) \log_{\mathrm{u}}(\alpha_q^{\mathrm{F_u}}(x)) \\ & = & \sum\limits_{p \nmid q} \mu(q) \sum\limits_{j>0} m_{qj-1} x^{qj} \\ & = & \sum\limits_{n>0} \left(\sum\limits_{p \nmid q | n} \mu(q) \right) m_{n-1} x^n \end{array}$$

Or, on peut vérifier facilement que :

$$\sum_{p \nmid q | n} \mu(q) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = p^k \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cela montre bien que F est une loi de groupe formel p-typique. Nous noterons $\mathrm{F_{u,p}}$ cette loi de groupe formel p-typique sur $\mathbb{Z}_{(p)} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathsf{L}$. La série formelle $f_{\mathrm{F_u}}$ définit donc un isomorphisme strict sur $\mathbb{Z}_{(p)} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathsf{L}$:

$$f_{\mathrm{F_u}} : \mathrm{F_u} \longrightarrow \mathrm{F_{u,p}}.$$

Cet isomorphisme strict de lois de groupe formel est représenté par un morphisme d'algèbres :

$$\phi_{f_{\mathrm{F_u}}} : \mathsf{LB} \longrightarrow \mathbb{Z}_{(p)} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathsf{L}.$$

Soit R une $\mathbb{Z}_{(p)}$-algèbre et F une loi de groupe formel sur R représentée par un morphisme d'algèbres $\phi_F : \mathsf{L} \longrightarrow R$. On a une factorisation :

$$\begin{tikzcd} \mathsf{L} \arrow[d] \arrow[dr, "\phi_F"] & \\ \mathbb{Z}_{(p)} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathsf{L} \arrow[r, "\overline{\phi_F}"'] & R. \end{tikzcd}$$

La composée $\overline{\phi_F} \circ \phi_{f_{\mathrm{F_u}}} : \mathsf{LB} \longrightarrow R$ défini alors un isomorphisme strict $f_F : F \longrightarrow F_p$ sur R entre F et une loi de groupe formel p-typique F_p :

$$\begin{tikzcd} \mathsf{L} \arrow[dr, "\eta_L"'] \arrow[drrr, bend left, "\phi_F"] & & & \\ & \mathsf{LB} \arrow[r, "\phi_{f_{\mathrm{F_u}}}"] & \mathbb{Z}_{(p)} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathsf{L} \arrow[r, "\overline{\phi_F}"] & R \\ \mathsf{L} \arrow[ur, "\eta_R"] \arrow[urrr, bend right, "\phi_{F_p}"'] & & & . \end{tikzcd}$$

□

Soit R une $\mathbb{Z}_{(p)}$-algèbre. Le théorème de Cartier 1.8.4 démontre que toute loi de groupe formel F est canoniquement strictement isomorphe par f_F à une loi de groupe formel p-typique F_p. Si $f : F \longrightarrow G$ est un isomorphisme strict de lois de groupe formel, alors on définit $f_p : F_p \longrightarrow G_p$ par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f_F"', "\simeq"] & G \arrow[d, "f_G", "\simeq"'] \\ F_p \arrow[r, "f_p"'] & G_p. \end{tikzcd}$$

On vérifie facilement que cela définit un foncteur :

$$\left\{\begin{array}{ccc} \mathcal{F}\mathrm{gl}^1(R) & \longrightarrow & \mathcal{F}\mathrm{gl}^1_p(R) \\ F & \longmapsto & F_p \end{array}\right. .$$

D'après le lemme de Yoneda, on a un morphisme Φ au niveau des algébroïdes de Hopf qui représentent ces groupoïdes :

$$\Phi = (\Phi_1, \Phi_2) : (\mathbb{Z}_{(p)} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathsf{L}, \mathbb{Z}_{(p)} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathsf{LB}) \longrightarrow (\mathbb{Z}_{(p)} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathsf{L}, \mathbb{Z}_{(p)} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathsf{LB}).$$

Lemme 1.8.5. *Soient R une $\mathbb{Z}_{(p)}$-algèbre et F une loi de groupe formel p-typique. Alors $F_p = F$ et l'isomorphisme strict $f_F : F \longrightarrow F_p$ est l'identité de F. Autrement dit, le foncteur $\mathcal{F}\mathrm{gl}^1(R) \longrightarrow \mathcal{F}\mathrm{gl}^1_p(R)$ est une rétraction de $\mathcal{F}\mathrm{gl}^1(R)$ sur le sous-groupoïde plein $\mathcal{F}\mathrm{gl}^1_p(R)$.*

Démonstration : La loi de groupe formel F est représenté par un morphisme d'algèbres :

$$\overline{\phi_F} : \mathbb{Z}_{(p)} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathsf{L} \longrightarrow R.$$

On a donc :

$$\begin{aligned} f_F^{-1}(x) &= \overline{\phi_F}(f_{\mathrm{F_u}}^{-1}(x)) \\ &= \sum_{p \nmid q}^{F} [\mu(q)]_F \left(\alpha_q^F(x)\right). \end{aligned}$$

Or, comme F est p-typique, $\alpha_q^F(x) = 0$ pour tout $q \neq 1$ et $p \nmid q$. Donc

$$f_F(x) = x$$

et $F_p = F$. □

Lemme 1.8.6. *Le morphisme d'algébroïdes de Hopf Φ est idempotent. De plus, après avoir étendu Φ_1 à $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathsf{L} \simeq \mathbb{Q}[m_i; i \geq 1]$, on a :*

$$\Phi_1(m_i) = \left\{\begin{array}{ccc} m_i & si & i = p^k - 1 \\ 0 & sinon & . \end{array}\right.$$

Démonstration : D'après la première égalité du théorème 1.7.7, on sait que $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathsf{LB}$ est engendré en tant qu'algèbre par les images de η_L et η_R. Il suffit donc de vérifier que Φ_1 est idempotent sur $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathsf{L}$. Or le morphisme $\Phi_1 : \mathbb{Z}_{(p)} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathsf{L} \longrightarrow \mathbb{Z}_{(p)} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathsf{L}$ représente la loi de groupe formel $\mathrm{F_{u,p}}$ introduit dans la démonstration du théorème 1.8.4 de Cartier et on sait que le logarithme de $\mathrm{F_{u,p}}$ sur $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathsf{L}$ est :

$$\log_{\mathrm{F_{u,p}}}(x) = \sum_{i \geq 0} m_{p^i - 1} x^{p^i}.$$

On en déduit donc le résultat. □

Théorème 1.8.7. *Le foncteur $\mathcal{F}\mathrm{gl}^1_p$ qui à une $\mathbb{Z}_{(p)}$-algèbre associe le groupoïde des lois de groupe formel p-typiques et des isomorphismes stricts est représentable par un algébroïde de Hopf gradué* $(\mathsf{V}, \mathsf{VT})$. *De plus,* $(\mathsf{V}, \mathsf{VT})$ *est un rétracte de l'algébroïde de Hopf* $\mathbb{Z}_{(p)} \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathsf{L}, \mathsf{LB})$, *c'est à dire qu'il existe des morphismes d'algébroïdes de Hopf tel que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd} (\mathsf{V}, \mathsf{VT}) \arrow[r] \arrow[dr, equal] & \mathbb{Z}_{(p)} \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathsf{L}, \mathsf{LB}) \arrow[d] \\ & (\mathsf{V}, \mathsf{VT}). \end{tikzcd}$$

On note $\mathrm{F_{u,p}}$ *la loi de groupe formel p-typique universelle à coefficients dans* V *et* $\mathrm{b_{u,p}}$ *l'isomorphisme strict de loi de groupe formel p-typique universel.*

Démonstration : On définit (V,VT) comme étant l'image du morphisme d'algébroïdes de Hopf Φ. C'est bien un rétracte de $\mathbb{Z}_{(p)}\otimes_{\mathbb{Z}}(\mathsf{L},\mathsf{LB})$ car, d'après le lemme 1.8.6, Φ est idempotent. Il suffit de vérifier que cet algébroïde de Hopf représente bien le groupoïde des lois de groupe formel p-typiques. Soit R une $\mathbb{Z}_{(p)}$-algèbre et F une loi de groupe formel p-typique, représentée par un morphisme :

$$\overline{\phi_F} : \mathbb{Z}_{(p)}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathsf{L} \longrightarrow R.$$

D'après le lemme 1.8.5, on sait que $F_p = F$; autrement dit, le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}_{(p)}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathsf{L} \arrow[d, "\Phi_1"'] \arrow[dr, "\overline{\phi_F}"] & \\ \mathbb{Z}_{(p)}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathsf{L} \arrow[r, "\overline{\phi_F}"'] & R. \end{tikzcd}$$

Cela démontre bien que V représente l'ensemble des lois de groupe formel p-typiques. En utilisant le lemme 1.8.5 pour les morphismes, on montre de la même manière que VT représente l'ensemble des isomorphismes strict entre les lois de groupe formel p-typiques. □

Théorème 1.8.8. *On a un isomorphisme de $\mathbb{Q}$-algèbres graduées :*

$$\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathsf{V} \simeq \mathbb{Q}\left[m_i; i \geq 1\right],$$

où m_i est homogène de degré $2(p^i-1)$. De plus, si $\log_{\mathrm{u,p}}$ désigne le logarithme de la loi de groupe formel p-typique universelle $\mathrm{F}_{\mathrm{u,p}}$ sur $\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathsf{V}$, alors :

$$\log_{\mathrm{u,p}}(x) = \sum_{i\geq 0} m_i x^{p^i},$$

où, par convention, $m_0 = 1$.

Remarque 1.8.9. Les éléments $m_i \in \mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathsf{V}$ correspondent en fait aux éléments $m_{p^i-1} \in \mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathsf{L}$ par le morphisme d'algèbre :

$$\mathbb{Q}\otimes\Phi_1 : \mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathsf{L} \longrightarrow \mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathsf{V}.$$

Théorème 1.8.10. *Il existe des éléments $v_i \in \mathsf{V}$, $i \geq 1$ homogènes de degré $2(p^i-1)$ tels que :*

$$\mathbb{Z}_{(p)}\left[v_i; i\geq 1\right] \xrightarrow{\sim} \mathsf{V}.$$

Nous noterons v_i les générateurs d'Hazewinkel que nous utiliserons par la suite et u_i les générateurs d'Araki. Ils sont définis par les relations équivalentes suivantes dans $\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathsf{V}$:

$$pm_n = \sum_{0\leq i<n} m_i v_{n-i}^{p^i} \text{ avec } n > 0 \tag{1.8.1}$$

$$[p]_{\mathrm{F_{u,p}}}(x) = \log_{\mathrm{u,p}}{}^{-1}(px) +_{\mathrm{F_{u,p}}} \sum_{i\geq 1}^{\mathrm{F_{u,p}}} v_i x^{p^i} \tag{1.8.2}$$

$$pm_n = \sum_{0\leq i\leq n} m_i u_{n-i}^{p^i} \text{ avec } n \geq 0 \tag{1.8.3}$$

$$[p]_{\mathrm{F_{u,p}}}(x) = \sum_{i\geq 0}^{\mathrm{F_{u,p}}} u_i x^{p^i}. \tag{1.8.4}$$

Par convention, $v_0 = u_0 = p$.

Démonstration : Commençons par démontrer que les deux couples de relations sont équivalentes en appliquant la série formelle $\log_{\mathrm{u,p}}$ aux équations (1.8.2) et (1.8.4). Pour les générateurs d'Araki, on a :

$$\begin{aligned}
[p]_{\mathrm{F_{u,p}}}(x) &= \sum_{i\geq 0}^{\mathrm{F_{u,p}}} u_i x^{p^i} \\
p\log_{\mathrm{u,p}}(x) &= \sum_{i\geq 0} \log_{\mathrm{u,p}}(u_i x^{p^i}) \\
p\sum_{n\geq 0} m_n x^{p^n} &= \sum_{i\geq 0}\sum_{j\geq 0} m_j u_i^{p^j} x^{p^{i+j}}.
\end{aligned}$$

En identifiant les coefficients des séries formelles, on obtient la relation (1.8.3). De même, pour les générateurs de Hazewinkel, on obtient la relation (1.8.1) :

$$\begin{aligned}
[p]_{\mathrm{F_{u,p}}}(x) &= {\log_{\mathrm{u,p}}}^{-1}(px) +_{\mathrm{F_{u,p}}} \sum_{i\geq 1}^{\mathrm{F_{u,p}}} v_i x^{p^i} \\
p\log_{\mathrm{u,p}}(x) &= px + \sum_{i\geq 1} \log_{\mathrm{u,p}}(v_i x^{p^i}) \\
p\sum_{n\geq 0} m_n x^{p^n} &= px + \sum_{i\geq 1}\sum_{j\geq 0} m_j v_i^{p^j} x^{p^{i+j}}.
\end{aligned}$$

On démontre ensuite par récurrence sur $n \geq 0$ que les éléments u_i et v_i définis par les relations (1.8.2) et (1.8.4) sont bien dans V et qu'ils engendrent le même idéal $\mathfrak{I}_n$.

Le résultat est clair pour $n = 0$. Si le résultat est vrai pour tout $i < n$, on démontre que u_n et v_n sont des éléments de V en considérant les équations (1.8.2) et (1.8.4) modulo u_i (ou v_i) pour $i < n$ et modulo x^{p^n+1}.

$$[p]_{\mathrm{F_{u,p}}}(x) -_{\mathrm{F_{u,p}}} {\log_{\mathrm{u,p}}}^{-1}(px) \equiv v_n x^{p^n} \left[v_0, \cdots, v_{n-1}, x^{p^n+1}\right],$$

$$[p]_{\mathrm{F_{u,p}}}(x) \equiv u_n x^{p^n} \left[u_0, \cdots, u_{n-1}, x^{p^n+1}\right].$$

D'après le théorème de Lazard 1.7.4, la série formelle ${\log_{\mathrm{u,p}}}^{-1}(px)$ est à coefficients dans V, ce qui achève la récurrence.

Le fait que ces éléments soient algébriquement indépendants et engendrent V découle directement du théorème de Lazard 1.7.4 et du théorème 1.8.8, car, modulo des éléments décomposables, $v_n \equiv pm_n$ et $u_n \equiv pm_n$. □

Définition 1.8.11. *Soit $n \geq 0$ on notera $\mathfrak{I}_n$ l'idéal de V engendré par $v_0, \cdots, v_{n-1}$ et $\mathfrak{I}_\infty$ leur réunion. Ces idéaux sont indépendants du choix des générateurs.*

Théorème 1.8.12. *On a l'isomorphisme de V-algèbres à gauche graduées suivant :*

$$\mathsf{V}[t_i; i \geq 1] \xrightarrow{\sim} \mathsf{VT},$$

où VT est une algèbre sur V par $\eta_L : \mathsf{V} \longrightarrow \mathsf{VT}$ et où les éléments t_i sont homogènes de degré $2(p^i-1)$. De plus, si $\mathrm{b_{u,p}}$ désigne l'isomorphisme strict de loi de groupe formel p-typique universel, alors :

$${\mathrm{b_{u,p}}}^{-1}(x) = \sum_{i\geq 0}^{\mathrm{F_{u,p}}} t_i x^{p^i}.$$

Démonstration : Soit R une $\mathbb{Z}_{(p)}$-algèbre. Démontrons que l'ensemble des triplets (F, f, G), où F et G sont des lois de groupe formel p-typiques sur R et f est un isomorphisme strict $F \longrightarrow G$, est représentable par l'anneau VT. La loi de groupe formel G est déterminée par la donnée de F et f. Soit $f : F \longrightarrow G$ un isomorphisme strict entre deux lois de groupe formel sur R, avec F p-typique. On cherche une condition sur f pour que G soit p-typique. On peut écrire la série formelle f^{-1} de manière unique sous la forme :

$$f^{-1}(x) = \sum_{i>0}^{F} c_i x^i,$$

avec $c_i \in R$ et $c_1 = 1$. Par définition, G est p-typique si et seulement si pour tout nombre premier q différent de p :

$$\alpha_q^G(x) = \left[\frac{1}{q}\right]_G \left(\sum_{i=1}^{q}{}^{G} \zeta_q^i x\right) = 0.$$

Or :

$$\begin{aligned} f^{-1}(\alpha_q^G(x)) &= \left[\frac{1}{q}\right]_F \left(\sum_{i=1}^{q}{}^{F} f^{-1}(\zeta_q^i x)\right) \\ &= \left[\frac{1}{q}\right]_F \left(\sum_{i=1}^{q}{}^{F} \sum_{j>0}^{F} c_j \zeta_q^{ij} x^j\right) \\ &= \sum_{j>0}^{F} \left[\frac{1}{q}\right]_F \left(\sum_{i=1}^{q}{}^{F} \zeta_q^{ij} c_j x^j\right) \\ &= \sum_{k>0}^{F} c_{qk} x^{qk} +_F \sum_{q\nmid j}^{F} \alpha_q^F(c_j x^j) \\ &= \sum_{k>0}^{F} c_{qk} x^{qk} \end{aligned}$$

Donc G est p-typique si et seulement si $c_j = 0$ pour tout $j \neq p^i$. Donc il existe des éléments t_i, $i \geq 0$ dans R, avec $t_0 = 1$ tels que :

$$f^{-1}(x) = \sum_{i\geq 0}^{F} t_i x^{p^i}.$$

Cela démontre le théorème. □

Théorème 1.8.13. *Les applications de structure η_L,η_R,Δ,ϵ et c de l'algébroïde de Hopf* (V, VT) *sont caractérisées par les relations suivantes dans* $(\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathsf{V}, \mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathsf{VT})$ *:*

1. $\eta_R(\log_{\mathrm{u,p}}) \circ \mathrm{b}_{\mathrm{u,p}}(x) = \eta_L(\log_{\mathrm{u,p}}(x))$, *ou de manière équivalente :*

$$\eta_R(m_n) = \sum_{i+j=n} m_i t_j^{p^i}. \tag{1.8.5}$$

2. $\epsilon(\mathrm{b}_{\mathrm{u,p}}(x)) = x$, *c'est-à-dire* $\epsilon(t_i) = 0$ *pour tout* $i > 0$.
3. $c(\mathrm{b}_{\mathrm{u,p}}(x)) = {\mathrm{b}_{\mathrm{u,p}}}^{-1}(x)$, *ou de manière équivalente :*

$$\sum_{i,j\geq 0}^{\mathrm{F_{u,p}}} t_i c(t_j)^{p^i} x^{p^{i+j}} = x;$$

$$\sum_{i+j+k=n} m_k t_i^{p^k} c(t_j)^{p^{i+k}} = m_n.$$

4. $\Delta(\mathrm{b_{u,p}}(x)) = \mathrm{b_{u,p}} \rhd \mathrm{b_{u,p}}(x)$, *ou de manière équivalente :*

$$\sum_{k\geq 0}^{\mathrm{F_{u,p}}} \Delta(t_k)x^{p^k} = \sum_{i,j\geq 0}^{\mathrm{F_{u,p}}} t_i \otimes t_j^{p^i} x^{p^{i+j}};$$

$$\sum_{k+l=n} m_l \Delta(t_k)^{p^l} = \sum_{i+j+h=n} m_h t_i^{p^h} \otimes t_j^{p^{i+h}}.$$

Démonstration : Ces relations découlent directement du morphisme d'algébroïdes de Hopf :

$$\Phi : (\mathsf{L}, \mathsf{LB}) \longrightarrow (\mathsf{V}, \mathsf{VT})$$

et du théorème 1.7.7. Démontrons la relation (1.8.5) :

$$\begin{aligned}
\eta_R(\log_{\mathrm{u,p}}) \circ \mathrm{b_{u,p}}(x) &= \eta_L(\log_{\mathrm{u,p}}(x)) \\
\eta_R(\log_{\mathrm{u,p}})(x) &= \eta_L(\log_{\mathrm{u,p}}) \circ \mathrm{b_{u,p}}^{-1}(x) \\
\sum_{n\geq 0} \eta_R(m_n)x^{p^n} &= \sum_{j\geq 0} \log_{\mathrm{u,p}}(t_j x^{p^j}) \\
&= \sum_{i,j\geq 0} m_i t_j^{p^i} x^{p^{i+j}}
\end{aligned}$$

Démontrons les relations de (3). D'après le théorème 1.8.12 :

$$\mathrm{b_{u,p}}^{-1}(x) = \sum_{i\geq 0}^{\mathrm{F_{u,p}}} t_i x^{p^i}.$$

En appliquant c de chaque côté de l'égalité, on obtient :

$$\mathrm{b_{u,p}}(x) = \sum_{i\geq 0}^{\eta_R(\mathrm{F_{u,p}})} c(t_i)x^{p^i}.$$

En composant ces deux séries, on a :

$$\begin{aligned}
x &= \mathrm{b_{u,p}}^{-1} \circ \mathrm{b_{u,p}}(x) \\
&= \mathrm{b_{u,p}}^{-1} \left(\sum_{j\geq 0}^{\eta_R(\mathrm{F_{u,p}})} c(t_j)x^{p^j} \right) \\
&= \sum_{j\geq 0}^{\mathrm{F_{u,p}}} \mathrm{b_{u,p}}^{-1} \left(c(t_j)x^{p^j} \right) \\
&= \sum_{i,j\geq 0}^{\mathrm{F_{u,p}}} t_i c(t_j)^{p^i} x^{p^{i+j}}.
\end{aligned}$$

Cela démontre la première égalité. Pour obtenir la seconde, on applique le logarithme $\log_{\mathrm{u,p}}$:

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 0} m_n x^{p^n} &= \sum_{i,j\geq 0} \log_{\mathrm{u,p}} \left(t_i c(t_j)^{p^i} x^{p^{i+j}} \right) \\
&= \sum_{i,j,k\geq 0} m_k t_i^{p^k} c(t_j)^{p^{i+k}} x^{p^{i+j+k}}.
\end{aligned}$$

Enfin, pour démontrer les relations de (4), on considère une $\mathbb{Z}_{(p)}$-algèbre R et des isomorphismes stricts entre lois de groupe formel p-typiques sur R :

$$F \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} H.$$

D'après le théorème 1.8.12, il existe des éléments t_i et r_i, $i \geq 0$ tels que :

$$f^{-1}(x) = \sum_{i\geq 0}^{F} t_i x^{p^i},$$

$$g^{-1}(x) = \sum_{i\geq 0}^{G} r_i x^{p^i}.$$

Calculons $(g \circ f)^{-1}$:

$$\begin{aligned}
(g \circ f)^{-1}(x) &= f^{-1} \circ g^{-1}(x) \\
&= f^{-1}\left(\sum_{j\geq 0}^{G} r_j x^{p^j}\right) \\
&= \sum_{j\geq 0}^{F} f^{-1}(r_j x^{p^j}) \\
&= \sum_{i,j\geq 0}^{F} t_i r_j^{p^i} x^{p^{i+j}}.
\end{aligned}$$

Cela démontre que :

$$\sum_{k\geq 0}^{\mathrm{F_{u,p}}} \Delta(t_k) x^{p^k} = \sum_{i,j\geq 0}^{\mathrm{F_{u,p}}} t_i \otimes t_j^{p^i} x^{p^{i+j}}.$$

Pour appliquer la seconde égalité, on applique de chaque côté $\log_{\mathrm{u,p}}$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k\geq 0} \log_{\mathrm{u,p}}(\Delta(t_k) x^{p^k}) &= \sum_{i,j\geq 0} \log_{\mathrm{u,p}}(t_i \otimes t_j^{p^i} x^{p^{i+j}}) \\
\sum_{k,l\geq 0} m_l \Delta(t_k)^{p^l} x^{p^{k+l}} &= \sum_{i,j,h\geq 0} m_h t_i^{p^h} \otimes t_j^{p^{i+h}} x^{p^{i+j+h}}.
\end{aligned}$$

Cela termine la démonstration du théorème. □

Théorème 1.8.14. *Soit M_* un VT-comodule gradué. Alors M_* est somme directe de $2(p-1)$ sous-comodules $M\langle i\rangle_*$ pour $i \in \mathbb{Z}/(2(p-1))$, avec :*

$$M\langle i\rangle_* = \bigoplus_{j\equiv i[2(p-1)]} M_j.$$

Démonstration : Cela découle directement du fait que V (resp. VT) est engendré, en tant que $\mathbb{Z}_{(p)}$-algèbre, par les éléments v_n (resp. v_n et t_n) homogènes de degré $2(p^n-1)$, pour $n \geq 0$ et que $2(p-1) \mid 2(p^n-1)$ pour tout entier $n \geq 0$. □

Rappelons les deux théorèmes suivants, issus des travaux de Landweber, Johnson et Wilson notamment (cf. les articles [Lan73a], [Lan73b], [Lan79] et [JW75]). Nous en aurons besoin dans les chapitres suivants.

Théorème 1.8.15.

- *Pour tout entier $n \geq 0$, l'élément v_n est invariant et régulier modulo l'idéal $\mathfrak{I}_n$.*
- *L'idéal $\mathfrak{I}_n$ est premier et invariant pour tout $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.*
- *De plus, les idéaux $\mathfrak{I}_n$ avec $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ sont les seuls idéaux premiers invariants de l'algébroïde de Hopf $(\mathsf{V}, \mathsf{VT})$.*

Théorème 1.8.16. *Soit M un comodule à gauche gradué sur l'algébroïde de Hopf* $(\mathsf{BP}_*, \mathsf{BP}_*\mathsf{BP})$, *alors :*
- *M est colimite filtrante de $\mathsf{BP}_*\mathsf{BP}$-comodules gradués de présentation finie ;*
- *si M est de type fini, alors il existe une filtration de M par des sous-comodules gradués :*

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_n = M,$$

telle que pour tout $1 \leq i \leq n$, il existe $k_i \in \mathbb{Z}$ et $n_i \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$:

$$M_i/M_{i-1} \simeq \Sigma^k \mathsf{BP}_*/\mathfrak{I}_n.$$

Notation 1.8.17. On notera $a_i \in \mathsf{V}$ le coefficient devant x^{i+1} dans la p-série de la loi de groupe formel p-typique universel :

$$[p]_{\mathrm{F_{u,p}}}(x) = \sum_{i \geq 0} a_i x^{i+1} \in \mathsf{V}[\![x]\!].$$

De plus, a_i est homogène de degré $2i$.

Proposition 1.8.18. *Soit $n \geq 0$. On a :*

$$a_{p^n-1} \equiv v_n \left[\mathfrak{I}_n\right],$$

$$a_i \in \mathfrak{I}_n, \quad \textit{pour } i < p^n - 1,$$

$$a_i = 0, \ \ \textit{si } p - 1 \nmid i.$$

Démonstration : Ce résultat découle directement de la définition des générateurs d'Araki (cf. le théorème 1.8.10). □

Exemple 1.8.19. Voici quelques valeurs pour les coefficients de la p-série en fonction des générateurs de Hazewinkel v_i, $i \geq 0$. Giambalvo en avait calculé quelques autres dans [Gia78].
- $a_0 = p$,
- $a_{p-1} = (1 - p^{p-1})v_1$,
- $a_{2p-2} = (p^{p-1} - 1)p^{p-1}v_1^2$,
- $a_{3p-3} = (1 - p^{p-1})\left(\frac{3p^p - p^{p-1} - p + 1}{2}\right)p^{p-2}v_1^3$ si $p \geq 3$.

De plus, pour $p = 2$, on a :
- $a_1 = -v_1$,
- $a_2 = 2v_1^2$,
- $a_3 = -(7v_2 + 8v_1^3)$,
- $a_4 = 30v_1v_2 + 26v_1^4$,
- $a_5 = -(111v_1^2v_2 + 84v_1^5)$,
- $a_6 = 502v_1^3v_2 + 300v_1^6 + 112v_2^2$,
- $a_7 = -(127v_3 + 960v_1v_2^2 + 2299v_1^4v_2 + 1140v_1^7)$,
- $a_8 = 766v_1v_3 + 5414v_1^2v_2^2 + 9958v_1^5v_2 + 4334v_1^8$.

Pour $p = 3$, on a :
- $a_2 = -8v_1$,
- $a_4 = 72v_1^2$,
- $a_6 = -840v_1^3$,
- $a_8 = -6560v_2 + 9000v_1^4$,
- $a_{10} = 216504v_1v_2 - 88992v_1^5$,
- $a_{12} = -5360208v_1^2v_2 + 658776v_1^6$,
- $a_{14} = 119105576v_1^3v_2 + 1199088v_1^7$.

Chapitre 2

Catégories de comodules

Soit $f : (A, \Gamma) \longrightarrow (B, \Sigma)$ un morphisme de $\Bbbk$-algébroïdes de Hopf. Nous définissons un foncteur
$$f_* : {}_{\Gamma}\mathcal{C}\mathrm{omod} \longrightarrow {}_{\Sigma}\mathcal{C}\mathrm{omod}$$
induit par f. Ce foncteur admet pour adjoint à droite le foncteur f^* qui s'écrit à l'aide du produit cotensoriel de comodules étudié par Ravenel dans [Rav86]. Dans ce chapitre, nous étudions cette adjonction qui permet de définir les foncteurs de localisation sur les catégories de comodules.

2.1 Le foncteur f_*

Définition 2.1.1. *Soit M un Γ-comodule à gauche. La composée suivante définit une structure de Σ-comodule à gauche sur $B \otimes_A M$:*

$$B \otimes_A M \xrightarrow{B \otimes \psi_M} B \otimes_A^{\eta_L} \Gamma^{\eta_R} \otimes_A M \xrightarrow{f_2 \otimes M} \Sigma^{f_2 \eta_R} \otimes_A M \simeq \Sigma^{\eta_R} \otimes_B B \otimes_A M.$$

Ainsi f induit le foncteur f_* au niveau des catégories de comodules à gauche :

$$f_* : \left\{ \begin{array}{ccc} {}_{\Gamma}\mathcal{C}\mathrm{omod} & \longrightarrow & {}_{\Sigma}\mathcal{C}\mathrm{omod} \\ M & \longmapsto & B \otimes_A M \end{array} \right.$$

Remarque 2.1.2. Soit (C, Λ) un $\Bbbk$-algébroïde de Hopf. Si M est un Γ-Λ bicomodule, alors $f_* M$ a naturellement une structure de Σ-Λ bicomodule. Autrement dit, le foncteur $f_* : {}_{\Gamma}\mathcal{C}\mathrm{omod} \longrightarrow {}_{\Sigma}\mathcal{C}\mathrm{omod}$ se factorise en un foncteur, encore noté f_*, qui envoie la catégorie des Γ-Λ bicomodules dans la catégorie des Σ-Λ bicomodules.

Proposition et définition 2.1.3. *Soit (A, Γ) un $\Bbbk$-algébroïde de Hopf et $f : A \longrightarrow B$ un morphisme d'anneaux. On appelle algébroïde de Hopf induite par f, l'algébroïde de Hopf (B, Γ_B) avec $\Gamma_B = B \otimes_A^{\eta_L} \Gamma^{\eta_R} \otimes_A B$. On note encore f le morphisme d'algébroïdes de Hopf naturel induit par $f : A \longrightarrow B$:*
$$f : (A, \Gamma) \longrightarrow (B, \Gamma_B).$$
De plus, si $g = (g_1, g_2) : (A, \Gamma) \longrightarrow (B, \Sigma)$ est un morphisme de $\Bbbk$-algébroïde de Hopf, alors g se factorise de manière unique par l'algébroïde de Hopf (B, Γ_B) induit par $g_1 : A \longrightarrow B$:

$$\begin{tikzcd} (A, \Gamma) \arrow[rr, "g"] \arrow[dr] & & (B, \Sigma) \\ & (B, \Gamma_B). \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Remarque 2.1.4. L'algébroïde de Hopf de la définition 2.1.3 précédente découle d'une construction naturelle au niveau des groupoïdes. Soit $\mathcal{G}$ un groupoïde dont l'ensemble des objets est X, et soit $f : Y \longrightarrow X$ une application. Soit $f^*\mathcal{G}$ le groupoïde dont l'ensemble des objets est Y et l'ensemble des morphismes est l'ensemble des triplets (y_1, α, y_2) où y_1 et y_2 sont des éléments de Y et α un morphisme dans $\mathcal{G} : f(y_1) \longrightarrow f(y_2)$. Ainsi, tout morphisme de groupoïde $F : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{G}$ se factorise de manière unique par $f^*\mathcal{G}$, où f est l'application induite par F sur l'ensemble des objets de $\mathcal{H}$.

Définition 2.1.5 (cf. [HS05a], définition 2.1)**.** *Soit (A, Γ), un algébroïde de Hopf plat, et $f : A \longrightarrow B$, un morphisme d'anneaux. On dit que f est Landweber exact pour l'algébroïde de Hopf (A, Γ) si $B \otimes_A - : {}_\Gamma\mathcal{C}\mathrm{omod} \longrightarrow {}_B\mathcal{M}\mathrm{od}$ est un foncteur exact.*

Remarque 2.1.6. Nous verrons à la proposition 2.7.3 que si (A, Γ) est plat et $f : A \longrightarrow B$ est Landweber exact pour (A, Γ), alors (B, Γ_B) est plat. En particulier, la catégorie ${}_{\Gamma_B}\mathcal{C}\mathrm{omod}$ est une catégorie abélienne.

2.2 Produit cotensoriel de comodules

Dans cette section, nous rappelons la définition et les principales propriétés du produit cotensoriel de comodules. Avant cela, voici quelques définitions générales concernant les égalisateurs, qu'on peut retrouver dans [ML98], chapitre VI, section 6.

Définition 2.2.1. *Soit $\mathcal{A}$, une catégorie. Une fourche dans $\mathcal{A}$ est un diagramme dans $\mathcal{A}$ de la forme :*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "e"] & X \arrow[r, shift left, "d_0"] \arrow[r, shift right, "d_1"'] & Y \end{tikzcd}$$

tel que $d_1 e = d_0 e$. On dit alors que :

- *e est un égalisateur pour la paire de flèches (d_0, d_1), si pour toute flèche $f : F \longrightarrow X$ telle que $d_0 f = d_1 f$, il existe une unique flèche $f' : F \longrightarrow E$ tel que $f = ef'$:*

$$\begin{tikzcd} & F \arrow[dl, dashed, "f'"'] \arrow[d, "f"] & \\ E \arrow[r, "e"'] & X \arrow[r, shift left, "d_0"] \arrow[r, shift right, "d_1"'] & Y. \end{tikzcd}$$

- *e est un égalisateur absolu, si pour tout foncteur $T : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$, la fourche induite par T est encore un égalisateur :*

$$\begin{tikzcd} TE \arrow[r, "Te"] & TX \arrow[r, shift left, "Td_0"] \arrow[r, shift right, "Td_1"'] & TY. \end{tikzcd}$$

- *La fourche est scindée, s'il existe deux flèches $s : X \longrightarrow E$ et $t : Y \longrightarrow X$ telles que $se = id_E$, $td_0 = id_X$ et $td_1 = es$:*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "e"'] & X \arrow[l, bend right, "s"'] \arrow[r, shift left, "d_0"] \arrow[r, shift right, "d_1"'] & Y. \arrow[l, bend right=60, "t"'] \end{tikzcd}$$

La proposition suivante permet de comprendre l'intérêt des fourches scindées, qui sont plus faciles à exhiber en pratique que les fourches absolues :

Proposition 2.2.2 (cf. chapitre VI, section 6 de [ML98])**.** *Toute fourche scindée est un égalisateur absolu.*

Remarque 2.2.3. En considérant des fourches dans la catégorie opposée, on obtient des définitions analogues pour les coégalisateurs et les cofourches.

Définition 2.2.4. *Soit $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ un foncteur et $d_0, d_1 : X \rightrightarrows Y$, une paire de flèches dans $\mathcal{A}$. On dit que :*

- *F préserve les égalisateurs pour la paire (d_0, d_1), si pour tout égalisateur $e : E \longrightarrow X$, $F(e)$ est un égalisateur de $(F(d_0), F(d_1))$.*
- *F crée les égalisateurs pour la paire (d_0, d_1), si pour tout égalisateur $e' : E' \longrightarrow F(X)$ de $(F(d_0), F(d_1))$, il existe un unique objet E et une unique flèche $e : E \longrightarrow X$ dans $\mathcal{A}$ tel que $F(E) = E'$ et $F(e) = e'$ et si de plus cette unique flèche est un égalisateur de (d_0, d_1).*
- *F réfléchit les égalisateurs pour la paire (d_0, d_1), si toute flèche $e : E \longrightarrow X$, telle que $F(e)$ est un égalisateur de $(F(d_0), F(d_1))$ dans $\mathcal{B}$, est déjà un égalisateur de (d_0, d_1).*

Remarque 2.2.5. On a des définitions analogues pour les coégalisateurs et même plus généralement les limites et colimites.

Définition 2.2.6. *Soient N un Γ-comodule à gauche et M un Γ-comodule à droite. Le produit cotensoriel de M et N est le $\Bbbk$-module $M\square_\Gamma N$ égalisateur du diagramme suivant :*

$$0 \longrightarrow M\square_\Gamma N \longrightarrow M\otimes_A N \underset{\psi_M \otimes id_N}{\overset{id_M \otimes \psi_N}{\rightrightarrows}} M\otimes_A^{\eta_L} \Gamma^{\eta_R}\otimes_A N.$$

Le produit cotensoriel définit un foncteur :

$$\begin{cases} \mathcal{C}\mathrm{omod}_\Gamma \times {}_\Gamma\mathcal{C}\mathrm{omod} & \longrightarrow \quad {}_k\mathcal{M}\mathrm{od} \\ (M, N) & \longmapsto \quad M\square_\Gamma N. \end{cases}$$

Exemple 2.2.7.

1. Si $(A, \Gamma) = (A, A)$ est un algébroïde de Hopf trivial, alors le produit cotensoriel de comodules n'est rien d'autre que le produit tensoriel de A-bimodules.
2. Soit (A, Γ) un $\Bbbk$-algébroïde de Hopf. Le produit cotensoriel $A\square_\Gamma A$ est la sous-$\Bbbk$-algèbre de A constituée des éléments invariants : A^Γ (cf. la définition 1.4.1).
3. Soit G un groupe commutatif et $(A, \Gamma) = (\Bbbk, \Bbbk[G])$. Soit M un $\Bbbk[G]$-comodule à droite et N un $\Bbbk[G]$-comodule à gauche. D'après l'exemple 1.2.13, M et N ne sont rien d'autre que des $\Bbbk$-modules G-gradués. L'égalisateur qui définit le produit cotensoriel est scindé et on a :
$$M\square_{\Bbbk[G]} N \simeq \bigoplus_{g\in G} M(g)\otimes_\Bbbk N(g).$$
4. Soit G un groupe fini et $(A, \Gamma) = (\Bbbk, \Bbbk^G)$. Par adjonction, la catégorie des Γ-comodule à gauche est équivalente à la catégorie des $\Bbbk[G]$-modules à gauche. Le produit cotensoriel correspond alors au produit tensoriel de bimodules sur $\Bbbk[G]$.

Commençons par établir quelques propriétés du produit cotensoriel qui seront utiles dans les sections suivantes.

Lemme 2.2.8. *Soient (A, Γ), (B, Σ) et (C, Λ) trois algébroïdes de Hopf avec (A, Γ) et (C, Λ) plats, M un Γ-Σ bicomodule et N un Σ-Λ bicomodule. Le A-C bimodule $M\otimes_B N$ est naturellement muni d'une structure de Γ-Λ bicomodule, induite par les morphismes de structure de Γ-comodule à droite de M, ψ_M^g et de Λ-comodule à gauche de N, ψ_N^d :*

$$M\otimes_B N \xrightarrow{\psi_M^g \otimes N} \Gamma\otimes_A M\otimes_B N$$

$$M\otimes_B N \xrightarrow{M\otimes\psi_N^d} M\otimes_B N\otimes_C \Lambda.$$

De plus, le produit cotensoriel $M\square_\Sigma N$ a naturellement une structure de Γ-Λ bicomodule unique telle que :

$$M\square_\Sigma N \longrightarrow M\otimes_B N$$

est un morphisme de Γ-Λ *bicomodules. Le produit cotensoriel définit donc un foncteur :*

$$ {}_{\Gamma}\mathcal{C}\mathrm{omod}_{\Sigma} \times {}_{\Sigma}\mathcal{C}\mathrm{omod}_{\Lambda} \longrightarrow {}_{\Gamma}\mathcal{C}\mathrm{omod}_{\Lambda}. $$

Démonstration : Par définition, on a le diagramme égalisateur suivant :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M\Box_{\Sigma}N \arrow[r] & M\otimes_B N \arrow[r, shift left, "d_1"] \arrow[r, shift right, "d_0"'] & M\otimes_B\Sigma\otimes_B N \end{tikzcd},$$

où $d_0 = \psi^d_M\otimes N$ et $d_1 = M\otimes\psi^g_N$. D'après la proposition 1.3.5, la catégorie des Γ-Λ bicomodules est abélienne. Il suffit donc de voir que ces deux morphismes sont des morphismes de bicomodules. Comme M est un Γ-Σ bicomodule, le diagramme suivant commute, c'est-à-dire que ψ^d_M est un morphisme de Γ-comodules à gauche :

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\psi^d_M"] \arrow[d, "\psi^g_M"'] & M\otimes_B\Sigma \arrow[d, "\psi^g_M\otimes\Sigma"] \\ \Gamma\otimes_A M \arrow[r, "\Gamma\otimes\psi^d_M"'] & \Gamma\otimes_A M\otimes_B\Sigma. \end{tikzcd}$$

Il suffit alors d'appliquer le foncteur $-\otimes_B N : {}_{\Gamma}\mathcal{C}\mathrm{omod} \longrightarrow {}_{\Gamma}\mathcal{C}\mathrm{omod}_{\Sigma}$ pour en déduire que $d_0 = \psi^d_M\otimes N$ est un morphisme de bicomodules. De la même manière, on démontre le résultat pour d_1. $\Box$

Dans la section 2.6, nous chercherons à quelles conditions un foncteur $F : {}_{\Sigma}\mathcal{C}\mathrm{omod} \longrightarrow {}_{\Gamma}\mathcal{C}\mathrm{omod}$ peut s'écrire sous la forme $M\Box_{\Sigma}-$, pour un certain Γ-Σ bicomodule M.

Lemme 2.2.9. *Soient* (A,Γ), (B,Σ) *et* (C,Λ) *trois algébroïdes de Hopf,* M *un* Γ-Σ *bicomodule et* X *un* (B,B)-(C,Λ) *bicomodule. Alors le diagramme suivant est un égalisateur scindé dans la catégorie des* Γ-Λ *bicomodules :*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M\otimes_B X \arrow[r, "\psi^d_M\otimes X"] & M\otimes_B\Sigma\otimes_B X \arrow[r, shift left, "d_0"] \arrow[r, shift right, "d_1"'] & M\otimes_B\Sigma\otimes_B\Sigma\otimes_B X, \end{tikzcd}$$

avec $d_0 = M\otimes\Delta\otimes X$ *et* $d_1 = \psi^d_M\otimes\Sigma\otimes X$*. De plus, on a un isomorphisme fonctoriel de* Γ-Λ *bicomodules :*

$$M\otimes_B X \simeq M\Box_{\Sigma}(\Sigma\otimes_B X).$$

Démonstration : On a le diagramme suivant, où la ligne est un égalisateur :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M\Box_{\Sigma}(\Sigma\otimes_B X) \arrow[r] & M\otimes_B\Sigma\otimes_B X \arrow[r, shift left, "d_0"] \arrow[r, shift right, "d_1"'] \arrow[d, bend left, "M\otimes\epsilon\otimes X"] & M\otimes_B\Sigma\otimes_B\Sigma\otimes_B X \arrow[l, bend right, "\sigma_0"'] \\ & & M\otimes_B X \arrow[u, "\psi^d_M\otimes X"] \arrow[ul, dashed] & \end{tikzcd}.$$

Dans ce diagramme, on a $d_0 = M\otimes\Delta\otimes X$, $d_1 = \psi^d_M\otimes\Sigma\otimes X$ et $\sigma_0 = M\otimes\Sigma\otimes\epsilon\otimes X$. Comme $\psi^d_M\otimes X$ égalise la fourche, le morphisme se factorise par le produit cotensoriel. De plus, on sait que ψ^d_M admet pour rétraction le morphisme $M\otimes\epsilon$, le morphisme $\psi_M\otimes X$ est donc injectif. Enfin les relations $\sigma_0\circ d_0 = id$ et $\sigma_0\circ d_1 = (\psi^d_M\otimes X)\circ(M\otimes\epsilon\otimes X)$ montrent que c'est bien un égalisateur scindé. $\Box$

Remarque 2.2.10. Le lemme 2.2.9 précédent se traduit par le diagramme de foncteur suivant commutatif à isomorphisme naturel près :

$$\begin{tikzcd} {}_{(B,B)}\mathcal{C}\mathrm{omod}_\Lambda \arrow[r, "\Sigma\otimes_B -"] \arrow[dr, "M\otimes_B -"'] & {}_\Sigma\mathcal{C}\mathrm{omod}_\Lambda \arrow[d, "M\square_\Gamma -"] \\ & {}_\Gamma\mathcal{C}\mathrm{omod}_\Lambda. \end{tikzcd}$$

Remarque 2.2.11. Soit $f : (A,\Gamma) \longrightarrow (B,\Sigma)$ un morphisme de $\Bbbk$-algébroïdes de Hopf. Le A-bimodule Γ est un Γ-Γ bicomodule. Par conséquent, $B\otimes_A\Gamma$ est muni d'une structure de Σ-Γ bicomodule. De plus, on a l'isomorphisme fonctoriel de Σ-comodules suivant :

$$f_*(-) \simeq (B\otimes_A\Gamma)\square_\Gamma - \,.$$

La proposition suivante montre qu'un foncteur F, défini sur une catégorie de Γ-comodules et qui préserve les égalisateurs du lemme 2.2.9 est entièrement déterminé par sa restriction sur la sous-catégorie pleine des comodules étendus. Hovey utilise ce résultat dans le théorème 1.3.1 de [Hov04] pour définir sur la catégorie des Γ-comodules, un foncteur Hom interne, adjoint à droite au produit tensoriel de comodules. Nous utiliserons ce résultat dans les sections 2.5 et 2.6.

Proposition 2.2.12. *Soient (A,Γ) un algébroïde de Hopf, $e_\Gamma : {}_\Gamma\mathcal{E} \longrightarrow {}_\Gamma\mathcal{C}\mathrm{omod}$ l'inclusion de la sous-catégorie pleine formée des Γ-comodules étendus dans la catégorie des Γ-comodules à gauche et $G : {}_\Gamma\mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{C}$ un foncteur à valeurs dans une catégorie $\mathcal{C}$ admettant des égalisateurs. Alors il existe un foncteur $F : {}_\Gamma\mathcal{C}\mathrm{omod} \longrightarrow \mathcal{C}$, unique à unique isomorphisme près, tel que :*

1. *F préserve les égalisateurs du type :*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\psi_M"] & \Gamma\otimes_A M \arrow[r, shift left, "\Gamma\otimes\psi_M"] \arrow[r, shift right, "\Delta_\Gamma\otimes M"'] & \Gamma\otimes_A\Gamma\otimes_A M, \end{tikzcd} \tag{2.2.1}$$

2. *on a un isomorphisme naturel $\alpha : G \Longrightarrow F\circ e_\Gamma$.*

$$\begin{tikzcd} {}_\Gamma\mathcal{E} \arrow[r, "e_\Gamma"] \arrow[dr, "G"'] & {}_\Gamma\mathcal{C}\mathrm{omod} \arrow[d, "F"] \arrow[dl, phantom, "\Nearrow\alpha"] \\ & \mathcal{C} \end{tikzcd}$$

De plus, si on a un autre triplet (G',F',α') vérifiant les mêmes hypothèses que (G,F,α), et une transformation naturelle $g : G \Longrightarrow G'$, alors il existe une unique transformation naturelle $f : F \Longrightarrow F'$ qui fait commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, Rightarrow, "g"] \arrow[d, Rightarrow, "\alpha"'] & G' \arrow[d, Rightarrow, "\alpha'"] \\ F\circ e_\Gamma \arrow[r, Rightarrow, "f\cdot e_\Gamma"'] & F'\circ e_\Gamma. \end{tikzcd}$$

En particulier, étant donné G, le couple (F,α) est unique à unique isomorphisme près.

Démonstration : Démontrons l'existence du foncteur F et de l'isomorphisme α. Soit M un Γ-comodule, on a l'égalisateur (2.2.1) suivant dans la catégorie des Γ-comodules, avec les flèches d_0 et d_1 dans la sous-catégorie pleine ${}_\Gamma\mathcal{E}$ des comodules étendus.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\psi_M"] & \Gamma\otimes_A M \arrow[r, shift left, "d_1"] \arrow[r, shift right, "d_0"'] & \Gamma\otimes_A\Gamma\otimes_A M. \end{tikzcd}$$

On définit alors $F(M)$ comme étant l'égalisateur dans $\mathcal{C}$ des flèches $G(d_0)$ et $G(d_1)$:

$$\begin{tikzcd} F(M) \arrow[r] & G(\Gamma\otimes_A M) \arrow[r, shift left, "G(d_1)"] \arrow[r, shift right, "G(d_0)"'] & G(\Gamma\otimes_A\Gamma\otimes_A M). \end{tikzcd}$$

Si $f : M \longrightarrow N$ est un morphisme de comodules, on définit naturellement $F(f)$ grâce à la propriété universelle des égalisateurs, et l'unicité démontre bien que cela définit un foncteur F.

Si M est un comodule étendu, d'après le lemme 2.2.9, l'égalisateur (2.2.1) est scindé dans la catégorie ${}_\Gamma\mathcal{E}$ et $G(M)$ est alors un égalisateur des flèches $G(d_0)$ et $G(d_1)$. On en déduit donc qu'il existe un unique isomorphisme $\alpha_M : G(M) \longrightarrow F(M)$, fonctoriel en M. Cela démontre de plus que F préserve les égalisateurs du type (2.2.1).

On considère maintenant deux triplets (F, G, α) et (F', G', α') vérifiant les hypothèses du théorème, et $g : G \Longrightarrow G'$ une transformation naturelle. Soit M un Γ-comodule à gauche. Comme F et F' préservent les égalisateurs du type (2.2.1), on a le diagramme suivant où les lignes sont des égalisateurs :

$$\begin{tikzcd} F(M) \arrow[r] \arrow[ddd, dashed, "f_M"'] & F(\Gamma\otimes_A M) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & F(\Gamma\otimes_A\Gamma\otimes_A M) \\ & G(\Gamma\otimes_A M) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[u, "\alpha", "\simeq"'] \arrow[d, "g_{\Gamma\otimes M}"'] & G(\Gamma\otimes_A\Gamma\otimes_A M) \arrow[u, "\alpha", "\simeq"'] \arrow[d, "g_{\Gamma\otimes\Gamma\otimes M}"] \\ & G'(\Gamma\otimes_A M) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, "\alpha'"', "\simeq"] & G'(\Gamma\otimes_A\Gamma\otimes_A M) \arrow[d, "\alpha'"', "\simeq"] \\ F'(M) \arrow[r] & F'(\Gamma\otimes_A M) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & F'(\Gamma\otimes_A\Gamma\otimes_A M). \end{tikzcd}$$

De plus, si M est lui même un comodule étendu, on peut alors étendre le diagramme précédent de la manière suivante :

$$\begin{tikzcd} F(M) \arrow[r] \arrow[ddd, dashed, bend right=60, "f_M"'] & F(\Gamma\otimes_A M) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & F(\Gamma\otimes_A\Gamma\otimes_A M) \\ G(M) \arrow[r] \arrow[u, "\simeq", "\alpha_M"'] \arrow[d, "g_M"] & G(\Gamma\otimes_A M) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[u, "\alpha", "\simeq"'] \arrow[d, "g_{\Gamma\otimes M}"'] & G(\Gamma\otimes_A\Gamma\otimes_A M) \arrow[u, "\alpha", "\simeq"'] \arrow[d, "g_{\Gamma\otimes\Gamma\otimes M}"] \\ G'(M) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"', "\alpha'_M"] & G'(\Gamma\otimes_A M) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, "\alpha'"', "\simeq"] & G'(\Gamma\otimes_A\Gamma\otimes_A M) \arrow[d, "\alpha'"', "\simeq"] \\ F'(M) \arrow[r] & F'(\Gamma\otimes_A M) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & F'(\Gamma\otimes_A\Gamma\otimes_A M). \end{tikzcd}$$

L'unicité du morphisme f démontre alors la relation $(f \cdot e_\Gamma) \circ \alpha = \alpha' \circ g$. □

Définition 2.2.13. *Soit (A, Γ) un algébroïde de Hopf et M un Γ-comodule à droite. On dit que M est un Γ-comodule coplat si le foncteur $M\square_\Gamma - : {}_\Gamma\mathcal{C}\mathrm{omod} \longrightarrow {}_\Bbbk\mathcal{M}\mathrm{od}$ est exact.*

Exemple 2.2.14. Le lemme 2.2.9 montre que les Γ-comodules étendus par un A-module plat sont des Γ-comodules coplats. De plus, si $f : A \longrightarrow B$ est un morphisme de $\Bbbk$-algèbres Landweber exact pour (A, Γ), alors le foncteur f_* est exact. Or on peut remarquer d'après la proposition 2.2.9 que $f_* = (B\otimes_A\Gamma)\square_\Gamma -$ et donc que $B\otimes_A\Gamma$ est coplat en tant que Γ-comodule à droite.

Lemme 2.2.15. *Soit (A, Γ) un algébroïde de Hopf plat et M un Γ-comodule à droite. Alors le foncteur $M\square_\Gamma -$ est exact à gauche si et seulement si M est un A-module plat.*

Démonstration : La catégorie des Γ-comodules à gauche est abélienne, car Γ est un A-module plat (cf. le théorème 1.2.20). Supposons que M est plat. Il suffit de démontrer que le foncteur $M\Box_\Gamma-$ commute aux noyaux. On considère une suite exacte courte de Γ-comodules à gauche :

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z.$$

Comme M et Γ sont des A-modules plats, on a le diagramme commutatif suivant où les lignes sont des suites exactes dans la catégorie des $\Bbbk$-modules :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M\otimes_A X \arrow[r] \arrow[d, shift right, "\psi_M\otimes X"'] \arrow[d, shift left, "M\otimes\psi_X"] & M\otimes_A Y \arrow[r] \arrow[d, shift right, "\psi_M\otimes Y"'] \arrow[d, shift left, "M\otimes\psi_Y"] & M\otimes_A Z \arrow[d, shift right, "\psi_M\otimes Z"'] \arrow[d, shift left, "M\otimes\psi_Z"] \\ 0 \arrow[r] & M\otimes_A\Gamma\otimes_A X \arrow[r] & M\otimes_A\Gamma\otimes_A Y \arrow[r] & M\otimes_A\Gamma\otimes_A Z. \end{tikzcd}$$

Par une chasse au diagramme, on en déduit que la suite suivante est exacte :

$$0 \longrightarrow M\Box_\Gamma X \longrightarrow M\Box_\Gamma Y \longrightarrow M\Box_\Gamma Z.$$

Réciproquement, supposons que le foncteur $M\Box_\Gamma-$ est exact à gauche. D'après la remarque 2.2.10, le diagramme suivant commute à isomorphisme naturel près :

$$\begin{tikzcd} {}_A\mathcal{M}\mathrm{od} \arrow[r, "\Gamma\otimes_A-"] \arrow[dr, "M\otimes_A-"'] & {}_\Gamma\mathcal{C}\mathrm{omod} \arrow[d, "M\Box_\Gamma-"] \\ & {}_\Bbbk\mathcal{M}\mathrm{od}. \end{tikzcd}$$

Comme Γ est un A-module plat, alors le foncteur de comodule étendu $\Gamma\otimes_A-$ est exact, la composé avec le foncteur $M\Box_\Gamma-$ est donc exact à gauche, ce qui montre bien que M est un A-module plat. $\Box$

Soient (C,Λ), (A,Γ), (B,Σ) et (D,Ω) quatre $\Bbbk$-algébroïdes de Hopf plats, M un Λ-Γ bicomodule, W un Γ-Σ bicomodule et N un Σ-Ω bicomodule. D'après le lemme 2.2.8, les produits cotensoriels suivants possèdent une structure de bicomodule canonique :

$$M\Box_\Gamma W \in {}_\Lambda\mathcal{C}\mathrm{omod}_\Sigma \quad ; \quad W\Box_\Sigma N \in {}_\Gamma\mathcal{C}\mathrm{omod}_\Omega.$$

On peut alors se demander si le produit cotensoriel est associatif. C'est-à-dire, a-t-on un isomorphisme entre les Λ-Ω bicomodules suivants :

$$(M\Box_\Gamma W)\Box_\Sigma N \simeq M\Box_\Gamma(W\Box_\Sigma N)?$$

La réponse est négative. Considérons d'abord le cas particulier où (B,Σ) est un algébroïde de Hopf trivial, c'est-à-dire $\Sigma = B$. Ainsi, le produit cotensoriel $\Box_\Sigma$ n'est rien d'autre que le produit tensoriel de bimodules $\otimes_B$. Nous allons détailler un contre-exemple dans ce cadre.

Exemple 2.2.16. Soit p un nombre premier. On considère le $\mathbb{Z}_{(p)}$-algébroïde de Hopf (V,VT) défini à la sous-section 1.8, et on pose $B = \mathbb{Z}$. D'après le théorème 5.2.1 de [Rav86], la sous-algèbre des invariants de cet algébroïde de Hopf est triviale. C'est-à-dire :

$$\mathsf{V}\Box_{\mathsf{VT}}\mathsf{V} \simeq \mathbb{Z}_{(p)}.$$

On a donc :

$$(\mathsf{V}\Box_{\mathsf{VT}}\mathsf{V})\otimes_\mathbb{Z}\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}.$$

D'autre part, $v_1 \in V$ est primitif modulo p et on a :

$$\mathsf{V}\Box_{\mathsf{VT}}(\mathsf{V}\otimes_\mathbb{Z}\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[v_1].$$

En fait, pour cet exemple on a pas besoin de considérer l'algébroïde de Hopf $(\mathsf{V}, \mathsf{VT})$ tout entier. Soit R une $\mathbb{Z}$-algèbre, on considère le groupoïde $\mathcal{G}(R)$ dont l'ensemble des objets est l'ensemble des éléments $v \in R$ et l'ensemble des morphismes $v \longrightarrow v'$ est l'ensemble des $t \in R$ tels que $v' = v + pt$. Cela nous défini un foncteur :

$$\mathcal{G} : {}_{\mathbb{Z}}\mathcal{A}\mathrm{lg} \longrightarrow \mathcal{G}\mathrm{rpd}.$$

Ce foncteur est représentable par le sous-algébroïde de Hopf $(A, \Gamma) = (\mathbb{Z}[v], \mathbb{Z}[v,t])$ de $(\mathsf{V}, \mathsf{VT})$ tel que :

$$\eta_R(v) = v + pt \ ; \ \Delta(t) = t \otimes 1 + 1 \otimes t \ ; \ c(t) = -t.$$

On vérifie alors facilement que la sous-algèbre des invariant de A est triviale et on a :

$$(A \square_\Gamma A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z},$$

alors que, comme v est invariant modulo p, on a :

$$A \square_\Gamma (A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[v].$$

Cet exemple montre le produit cotensoriel n'est en général pas associatif. Cependant, il l'est sous certaines hypothèses d'exactitude que nous expliciterons. Dans le cas particulier où l'algébroïde de Hopf $(B, \Sigma) = (B, B)$ est trivial, on a le résultat suivant :

Lemme 2.2.17. *Soient (A, Γ), (C, Λ) et (D, Ω) trois $\Bbbk$-algébroïdes de Hopf, avec (C, Λ) et (D, Ω) plats et B une $\Bbbk$-algèbre considérée comme un algébroïde de Hopf trivial. Soient M un Λ-Γ bicomodule, W un Γ-B bicomodule et N un B-Ω bicomodule. On a un morphisme naturel de Λ-Ω bicomodules :*

$$(M \square_\Gamma W) \otimes_B N \longrightarrow M \square_\Gamma (W \otimes_B N)$$

unique tel que le diagramme de Λ-Ω bicomodules suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
(M \square_\Gamma W) \otimes_B N \arrow[r] \arrow[dr] & M \square_\Gamma (W \otimes_B N) \arrow[d] \\
& M \otimes_A W \otimes_B N.
\end{tikzcd}$$

De plus, si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

1. *N est un B-module plat ;*
2. *l'égalisateur de Λ-B bicomodules suivant est scindé dans la catégorie des B-modules :*

$$0 \longrightarrow M \square_\Gamma W \longrightarrow M \otimes_A W \rightrightarrows M \otimes_A \Gamma \otimes_A W; \tag{2.2.2}$$

3. *le foncteur $M \square_\Gamma -$ est exact à droite ;*

alors ce morphisme est un isomorphisme de Λ-Ω bicomodules :

$$(M \square_\Gamma W) \otimes_B N \simeq M \square_\Gamma (W \otimes_B N).$$

Démonstration : On a le diagramme suivant de Λ-Ω bicomodules où la ligne est un égalisateur :

$$\begin{tikzcd}
& & (M \square_\Gamma W) \otimes_B N \arrow[d] \arrow[dl, dashed] & \\
0 \arrow[r] & M \square_\Gamma (W \otimes_B N) \arrow[r] & M \otimes_A (W \otimes_B N) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & M \otimes_A \Gamma \otimes_A (W \otimes_B N).
\end{tikzcd}$$

En tensorisant l'égalisateur (2.2.2) avec N, on en déduit que la flèche verticale égalise la fourche. On a donc une flèche naturelle $(M\square_\Gamma W)\otimes_B N \longrightarrow M\square_\Gamma(W\otimes_B N)$ qui fait commuter le diagramme. Si la première ou la deuxième condition du lemme est vérifiée, le foncteur $-\otimes_B N$ préserve cet égalisateur, ce qui démontre l'isomorphisme dans ces cas.

Supposons enfin que le foncteur $M\square_\Gamma-$ est exact à droite. Pour démontrer que la flèche

$$(M\square_\Gamma W)\otimes_B N \longrightarrow M\square_\Gamma(W\otimes_B N)$$

est un isomorphisme, on peut oublier la structure de Ω-comodule à droite. On considère alors une présentation libre de N en tant que B-module :

$$L_1 \longrightarrow L_0 \longrightarrow N \longrightarrow 0.$$

On a le diagramme de Λ-comodules à droite suivant :

$$\begin{tikzcd}
(M\square_\Gamma W)\otimes_B L_1 \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"'] & (M\square_\Gamma W)\otimes_B L_0 \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"'] & (M\square_\Gamma W)\otimes_B N \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
M\square_\Gamma(W\otimes_B L_1) \arrow[r] & M\square_\Gamma(W\otimes_B L_0) \arrow[r] & M\square_\Gamma(W\otimes_B N) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Les deux lignes sont exactes car les foncteurs $M\square_\Gamma(W\otimes_B -)$ et $(M\square_\Gamma W)\otimes_B -$ sont exacts à droite et les deux premières flèches sont des isomorphismes car L_0 et L_1 sont des B-modules libres donc plats. D'après le lemme des cinq, la dernière flèche verticale est un isomorphisme. $\square$

Revenons au cas général. Le diagramme de Λ-Ω comodules suivant, où les flèches horizontales sont définies par le lemme 2.2.17 précédent, commute :

$$\begin{tikzcd}
& M\otimes_A(W\square_\Sigma N) \arrow[rr] & & (M\otimes_A W)\square_\Sigma N \arrow[dr, hook] & \\
M\square_\Gamma(W\square_\Sigma N) \arrow[ur, hook] \arrow[rrrddd, dashed] & & & & \\
& & & & M\otimes_A W\otimes_B N \\
(M\square_\Gamma W)\square_\Sigma N \arrow[uuurrr, dashed] \arrow[dr, hook] & & & & \\
& (M\square_\Gamma W)\otimes_B N \arrow[rr] \arrow[dr, shift left] \arrow[dr, shift right] & & M\square_\Gamma(W\otimes_B N) \arrow[uur, hook] \arrow[dr, shift left] \arrow[dr, shift right] & \\
& & (M\square_\Gamma W)\otimes_B \Sigma\otimes_B N \arrow[rr] & & M\square_\Gamma(W\otimes_B\Sigma\otimes_B N)
\end{tikzcd} \tag{2.2.3}$$

D'après le lemme 2.2.17, si N est un B-module plat ou bien si l'égalisateur (2.2.2) est scindé dans la catégorie des B-modules, alors on a les isomorphismes suivants :

$$(M\square_\Gamma W)\otimes_B N \simeq M\square_\Gamma(W\otimes_B N);$$

$$(M\square_\Gamma W)\otimes_B \Sigma\otimes_B N \simeq M\square_\Gamma(W\otimes_B\Sigma\otimes_B N).$$

On a alors le diagramme égalisateur suivant :

$$(M\square_\Gamma W)\square_\Sigma N \longrightarrow M\square_\Gamma(W\otimes_B N) \rightrightarrows M\square_\Gamma(W\otimes_B\Sigma\otimes_B N),$$

et donc, la factorisation suivante :

$$M\square_\Gamma(W\square_\Sigma N) \longrightarrow (M\square_\Gamma W)\square_\Sigma N.$$

En résumé, on a la proposition suivante :

Proposition 2.2.18. *Soient (A,Γ), (B,Σ), (C,Λ) et (D,Ω) quatre $\Bbbk$-algébroïdes de Hopf plats, M un Λ-Γ bicomodule, W un Γ-Σ bicomodule et N un Σ-Ω bicomodule. Si l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

1. *N est un B-module plat ;*
2. *l'égalisateur de Λ-Σ bicomodules suivant est scindé dans la catégorie des B-modules à droite :*
$$0 \longrightarrow M\square_\Gamma W \longrightarrow M\otimes_A W \rightrightarrows M\otimes_A \Gamma\otimes_A W;$$
3. *le foncteur $M\square_\Gamma -$ est exact à droite.*

Alors, il existe un unique morphisme de Λ-Ω bicomodule
$$M\square_\Gamma(W\square_\Sigma N) \longrightarrow (M\square_\Gamma W)\square_\Sigma N,$$
qui rend commutatif le diagramme (2.2.3)*.*

Si une de ces conditions est vérifiée, alors, d'après le lemme 2.2.17, on a l'isomorphisme de Λ-Ω bicomodules :
$$(M\square_\Gamma W)\otimes_B N \simeq M\square_\Gamma(W\otimes_B N),$$
On en déduit alors que $(M\square_\Gamma W)\square_\Sigma N$ s'injecte dans $M\otimes_A W\otimes_B N$. D'après la proposition précédente, le diagramme de Λ-Ω bicomodules suivant commute, avec j_2 injectif :

$$\begin{tikzcd} M\square_\Gamma(W\square_\Sigma N) \arrow[r, "j_1"] \arrow[d, "f"'] & M\otimes_A W\otimes_B N \\ (M\square_\Gamma W)\square_\Sigma N \arrow[ur, "j_2"'] & \end{tikzcd}.$$

Si, de plus, on a un morphisme $g : (M\square_\Gamma W)\square_\Sigma N \longrightarrow M\square_\Gamma(W\square_\Sigma N)$ qui fait commuter le diagramme précédent, avec j_1 injectif, alors on en déduit que f et g sont des isomorphismes inverses l'un de l'autre. En particulier, on a le théorème suivant :

Théorème 2.2.19. *Soient (A,Γ), (B,Σ), (C,Λ) et (D,Ω) quatre $\Bbbk$-algébroïdes de Hopf plats, M un Λ-Γ bicomodule, W un Γ-Σ bicomodule et N un Σ-Ω bicomodule. Alors il existe un unique isomorphisme de Λ-Ω bicomodules*
$$M\square_\Gamma(W\square_\Sigma N) \simeq (M\square_\Gamma W)\square_\Sigma N$$
qui rend commutatif le diagramme (2.2.3)*, dès que l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

1. *M est coplat en tant que Γ-comodule à droite.*
2. *N est coplat en tant que Σ-comodule à gauche.*
3. *M est un A-module plat et N est un B-module plat.*
4. *L'égalisateur suivant est scindé dans la catégorie des A-modules et N est un B-module plat :*
$$0 \longrightarrow W\square_\Sigma N \longrightarrow W\otimes_B N \rightrightarrows W\otimes_B \Sigma\otimes_B N. \tag{2.2.4}$$
5. *L'égalisateur suivant est scindé dans la catégorie des B-modules et M est un A-module plat*
$$0 \longrightarrow M\square_\Gamma W \longrightarrow M\otimes_A W \rightrightarrows M\otimes_A \Gamma\otimes_A W. \tag{2.2.5}$$
6. *L'égalisateur* (2.2.4) *est scindé dans la catégorie des A-modules et l'égalisateur* (2.2.5) *est scindé dans la catégorie des B-modules.*

Démonstration : Pour la première condition, il suffit de remarquer que si M est un Γ-comodule à droite coplat, alors le foncteur $M\square_\Gamma -$ est exact à droite et d'après le lemme 2.2.15, M est un A-module plat. $\square$

Le lemme suivant (cf. [Rav86]) permet d'établir un lien entre les foncteurs $\hom_\Gamma$ et $\square_\Gamma$ et ainsi d'effectuer des calculs de foncteurs Ext^Γ en fonction des foncteur dérivés du produit cotensoriel.

Lemme 2.2.20 (cf. [Rav86])**.** *Soient (A,Γ) un algébroïde de Hopf, M et N deux Γ-comodules à gauche, avec M projectif en tant que A-module. Alors :*
- $\mathrm{Hom}_A(M,A)$ *admet une structure naturelle de Γ-comodule à droite.*
- $\mathrm{Hom}_\Gamma(M,N) = \mathrm{Hom}_A(M,A)\square_\Gamma N$. *En particulier,* $\mathrm{Hom}_\Gamma(A,N) = A\square_\Gamma N$.

2.3 Le foncteur f^*

Soient (A,Γ), (B,Σ) deux $\mathbb{k}$-algébroïdes de Hopf et $f : (A,\Gamma) \longrightarrow (B,\Sigma)$ un morphisme de $\mathbb{k}$-algébroïdes de Hopf. Dans cette section, on montre que si (A,Γ) est plat, le foncteur f_* admet un adjoint à droite :

$$f^* : {}_\Sigma\mathcal{C}\mathrm{omod} \longrightarrow {}_\Gamma\mathcal{C}\mathrm{omod}.$$

Proposition 2.3.1. *Soient $f : (A,\Gamma) \longrightarrow (B,\Sigma)$ un morphisme de $\mathbb{k}$-algébroïdes de Hopf, avec (A,Γ) plat et N un Σ-comodule à gauche. Alors $(\Gamma^{\eta_R}\otimes_A B)\square_\Sigma N$ a naturellement une structure de Γ-comodule à gauche.*

Démonstration : On sait que Γ est un Γ-Γ bicomodule. Par conséquent, $\Gamma\otimes_A^{\eta_R} B$ admet une structure de $\Gamma - \Sigma$ bicomodule. D'après le lemme 2.2.8, on obtient le résultat. $\square$

Définition 2.3.2. *Soit $f : (A,\Gamma) \longrightarrow (B,\Sigma)$ un morphisme de $\mathbb{k}$-algébroïdes de Hopf, avec (A,Γ) plat. Alors f induit le foncteur f^* au niveau des catégories de comodules à gauche, défini par :*

$$f^* : \left\{ \begin{array}{ccc} {}_\Sigma\mathcal{C}\mathrm{omod} & \longrightarrow & {}_\Gamma\mathcal{C}\mathrm{omod} \\ N & \longmapsto & (\Gamma\otimes_A B)\square_\Sigma N \end{array} \right.$$

Remarque 2.3.3 ([MR77])**.** Soient (A,Γ) un algébroïde de Hopf plat et M un Γ-comodule à gauche. D'après le lemme 2.2.9, le produit cotensoriel $\Gamma\square_\Gamma M$ s'identifie naturellement à M, comme Γ-comodule à gauche. C'est-à-dire que si $id_{(A,\Gamma)}$ désigne le morphisme d'algébroïdes de Hopf identité $(A,\Gamma) \longrightarrow (A,\Gamma)$, alors $id^*_{(A,\Gamma)} = id : {}_\Gamma\mathcal{C}\mathrm{omod} \longrightarrow {}_\Gamma\mathcal{C}\mathrm{omod}$.

Lemme 2.3.4. *Soient $f : (A,\Gamma) \longrightarrow (B,\Sigma)$, un morphisme de $\mathbb{k}$-algébroïdes de Hopf avec (A,Γ) plat et X un B-module. Alors le foncteur f^* envoie le comodule étendu $\Sigma\otimes_B X$ sur le comodule étendu $\Gamma\otimes_A X$:*

$$f^*(\Sigma\otimes_B X) \simeq \Gamma\otimes_A X.$$

Démonstration : Par définition :

$$f^*(\Sigma\otimes_B X) = (\Gamma\otimes_A B)\square_\Sigma(\Sigma\otimes_B X).$$

On applique alors le lemme 2.2.9 à l'algébroïde de Hopf (B,Σ) avec $M = \Gamma\otimes_A B$. On obtient le résultat :

$$\begin{array}{rcl} f^*(\Sigma\otimes_B X) & = & (\Gamma\otimes_A B)\otimes_B X \\ & = & \Gamma\otimes_A X. \end{array}$$

$\square$

Théorème 2.3.5 ([MR77]). *Soit $f : (A, \Gamma) \longrightarrow (B, \Sigma)$ un morphisme d'algébroïdes de Hopf, avec (A, Γ) plat. Alors (f_*, f^*) est une paire de foncteurs adjoints. L'unité de cette adjonction sera noté η, la counité ε.*

$$f_* : {}_\Gamma\mathcal{C}\mathrm{omod} \leftrightarrows {}_\Sigma\mathcal{C}\mathrm{omod} : f^*.$$

Voici une démonstration directe de ce théorème. La remarque 2.6.2 donnera une démonstration alternative plus élégante.

Démonstration : Soient M un Γ-comodule à gauche et N un Σ-comodule à gauche. Pour démontrer cette adjonction, nous allons définir les morphismes fonctoriels Φ_f et Ψ_f suivants, et montrer qu'ils sont bien inverses l'un de l'autre.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_\Sigma(B \otimes_A M, N) \arrow[r, shift left, "\Phi_f"] & \mathrm{Hom}_\Gamma(M, (\Gamma \otimes_A B) \square_\Sigma N). \arrow[l, shift left, "\Psi_f"] \end{tikzcd}$$

Soit $u : B \otimes_A M \longrightarrow N$ un morphisme de Σ-comodules. Par la suite, on notera toujours u sa restriction à M, $M \longrightarrow B \otimes_A M \xrightarrow{u} N$. On a le diagramme de Γ-comodules suivants, où les doubles flèches sont celles pour définir les produits cotensoriels $\Gamma \square_\Gamma M$ et $(\Gamma \otimes_A B) \square_\Sigma N$ respectivement :

$$\begin{tikzcd} \Gamma \otimes_A M \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, "\Gamma \otimes u"'] & \Gamma \otimes_A \Gamma \otimes_A M \arrow[d] \\ \Gamma \otimes_A N \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \Gamma \otimes_A \Sigma \otimes_B N. \end{tikzcd}$$

En utilisant le lemme précédent, on sait que $M \simeq \Gamma \square_\Gamma M$. On obtient alors un morphisme de Γ-comodules $\Phi(u)$ entre les égalisateurs :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "\psi_M"] \arrow[d, dashed, "\Phi(u)"'] & \Gamma \otimes_A M \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, "\Gamma \otimes u"'] & \Gamma \otimes_A \Gamma \otimes_A M \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] & (\Gamma \otimes_A B) \square_\Sigma N \arrow[r] & \Gamma \otimes_A N \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \Gamma \otimes_A \Sigma \otimes_B N. \end{tikzcd}$$

Soit $v : M \longrightarrow (\Gamma \otimes_A B) \square_\Sigma N$, un morphisme de Γ-comodules. Le diagramme suivant permet de définir le morphisme de Σ-comodules $\Psi(v)$:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "v"] \arrow[d] & (\Gamma \otimes_A B) \square_\Sigma N \arrow[r, "f \square_\Sigma N"] & \Sigma \square_\Sigma N \arrow[d, "\simeq"] \\ B \otimes_A M \arrow[rr, dashed, "\Psi(v)"'] & & N. \end{tikzcd}$$

Le fait que $\Psi(v)$ soit bien un morphisme de Σ-comodules découle directement du fait que v soit un morphisme de Γ-comodules, et du diagramme précédent.

Pour montrer que $\Psi \circ \Phi(u) = u$, on considère le diagramme suivant, où les lignes sont des diagrammes égalisateurs :

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[r, "\psi_M"] \arrow[dl, bend right] \arrow[d, dashed, "\Phi(u)"'] & \Gamma \otimes_A M \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, "\Gamma \otimes u"] & \Gamma \otimes_A \Gamma \otimes_A M \arrow[d, "\Gamma \otimes f \otimes u"] \\ B \otimes_A M \arrow[dr, dashed, "\Psi \circ \Phi(u)"'] & (\Gamma \otimes_A B) \square_\Sigma N \arrow[r] \arrow[d, dashed] & \Gamma \otimes_A N \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, "f \otimes N"] & \Gamma \otimes_A \Sigma \otimes_B N \arrow[d, "f \otimes \Sigma \otimes N"] \\ & N \arrow[r, "\psi_N"'] & \Sigma \otimes_B N \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \Sigma \otimes_B \Sigma \otimes_B N. \end{tikzcd}$$

On en déduit le diagramme commutatif suivant, qui démontre bien que $\Psi \circ \Phi(u) = u$:

$$\begin{tikzcd} B\otimes_A M \arrow[r, "\psi_{B\otimes_A M}"] \arrow[d, "\Psi\circ\Phi(u)"'] & \Sigma\otimes_A M \arrow[r, "\epsilon\otimes B\otimes M"] \arrow[d, "\Sigma\otimes u"] & B\otimes_A M \arrow[d, "u"] \\ N \arrow[r, "\psi_N"'] & \Sigma\otimes_B N \arrow[r, "\epsilon\otimes N"'] & N. \end{tikzcd}$$

Soit $v : M \longrightarrow (\Gamma \otimes_A B)\square_\Sigma N$, un morphisme de Γ-comodules. Montrons que $\Phi\circ\Psi(v) = v$, qui terminera la preuve de cette adjonction. Soit $i : (\Gamma\otimes_A B)\square_\Sigma N \longrightarrow \Gamma\otimes_A N$ l'inclusion canonique. Le diagramme ci-dessous permet d'identifier $i\circ\Phi\circ\Psi(v)$ avec le morphisme w, qui est la composée suivante (β désigne $f\square_\Sigma N$ et α l'isomorphisme $N \xrightarrow{\sim} \Sigma\square_\Sigma N$) :

$$M \xrightarrow{\psi_M} \Gamma\otimes_A M \xrightarrow{\Gamma\otimes v} \Gamma\otimes_A((\Gamma\otimes_A B)\square_\Sigma N) \xrightarrow{\Gamma\otimes\beta} \Gamma\otimes_A(\Sigma\square_\Sigma N) \underset{\simeq}{\xrightarrow{\Gamma\otimes\alpha^{-1}}} \Gamma\otimes_A N.$$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\psi_M"] \arrow[d, dashed, "\Phi\circ\Psi(v)"'] & \Gamma\otimes_A M \arrow[r, "\Gamma\otimes v"] \arrow[d, "\Gamma\otimes\Psi(v)"'] & \Gamma\otimes_A((\Gamma\otimes_A B)\square_\Sigma N) \arrow[d, "\Gamma\otimes\beta"] \\ (\Gamma\otimes_A B)\square_\Sigma N \arrow[r, "i"'] & \Gamma\otimes_A N \arrow[r, "\simeq", "\Gamma\otimes\alpha"'] & \Gamma\otimes_A(\Sigma\square_\Sigma N). \end{tikzcd}$$

Comme i est injectif, il suffit de montrer que w s'identifie à $i \circ v$. Pour cela, on considère le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\psi_M"] \arrow[d, "v"'] & \Gamma\otimes_A M \arrow[d, "\Gamma\otimes v"] & & \\ (\Gamma\otimes_A B)\square_\Sigma N \arrow[r, "\psi_{f^*N}"] \arrow[d, "i"'] & \Gamma\otimes_A((\Gamma\otimes_A B)\square_\Sigma N) \arrow[r, "\Gamma\otimes\beta"] \arrow[d] & \Gamma\otimes_A(\Sigma\square_\Sigma N) \arrow[d] & \Gamma\otimes_A N \arrow[l, "\simeq"', "\alpha"] \arrow[dl, "\Gamma\otimes\psi_N"] \\ \Gamma\otimes_A N \arrow[r, "\Delta\otimes N"'] \arrow[rr, dashed, bend right, "\Gamma\otimes\psi_N"'] & \Gamma\otimes_A\Gamma\otimes_A N \arrow[r, "\Gamma\otimes f\otimes N"'] & \Gamma\otimes_A\Sigma\otimes_B N. & \end{tikzcd}$$

La flèche en pointillés $\Gamma\otimes\psi_N$ n'est pas égale à la composée $(\Gamma\otimes f\otimes N) \circ (\Delta \otimes N)$, mais i les égalise. D'autre part, $\Gamma\otimes\psi_N$ est injectif, car ψ_N est injectif et admet une rétraction $\epsilon\otimes N$. De ces deux diagrammes, on déduit donc bien que $\Phi \circ \Psi(v) = v$, et l'adjonction est démontrée.

$\square$

Remarque 2.3.6. Dans le cas où (A, Γ) est plat, le théorème précédent 2.3.5 permet de retrouver l'adjonction de la proposition 1.2.15. En effet, on a un morphisme d'algébroïdes de Hopf :

$$\epsilon = (id_A, \epsilon) : (A, \Gamma) \longrightarrow (A, A).$$

Il est clair que ϵ_* s'identifie au foncteur oubli. Pour identifier ϵ^*, on considère un A-module M. On a alors l'égalisateur suivant :

$$0 \longrightarrow \epsilon^* M \longrightarrow \Gamma\otimes_A M \underset{d_1}{\overset{d_0}{\rightrightarrows}} \Gamma\otimes_A M\ . \tag{2.3.1}$$

Comme les deux morphismes d_0 et d_1 sont égaux à $id_{\Gamma\otimes_A M}$, on en déduit que ϵ^* correspond bien au foncteur comodule étendu.

2.4 Fonctorialité de l'adjonction

Proposition 2.4.1. *Soient $(A,\Gamma) \xrightarrow{f} (B,\Sigma) \xrightarrow{g} (C,\Lambda)$ deux morphismes d'algébroïdes de Hopf, avec (A,Γ) et (B,Σ) plats, M un Γ-comodule et N un Λ-comodule. Alors on a :*

i) $(gf)_*M \simeq g_*f_*M$,

ii) $(gf)^*N \simeq f^*g^*N$ et le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(M,(gf)^*N) \arrow[rr, shift left, "\Psi_{gf}"] \arrow[d, "\simeq"] & & \mathrm{Hom}((gf)_*M,N) \arrow[ll, shift left, "\Phi_{gf}"] \arrow[d, "\simeq"] \\
\mathrm{Hom}(M,f^*g^*N) \arrow[dr, shift left, "\Psi_f"] & & \mathrm{Hom}(g_*f_*M,N) \arrow[dl, shift left, "\Phi_g"] \\
& \mathrm{Hom}(f_*M,g^*N) \arrow[ul, shift left, "\Phi_f"] \arrow[ur, shift left, "\Psi_g"] &
\end{tikzcd}$$

Démonstration : Le $i)$ dit juste que $C \otimes_B B \otimes_A - \simeq C \otimes_A -$. Le $ii)$ est une conséquence du lemme de Yoneda et du diagramme qui explicite une bijection : $\mathrm{Hom}(M,(gf)^*N) \simeq \mathrm{Hom}(M,f^*g^*N)$.
$\square$

Remarque 2.4.2. On peut définir une catégorie $\mathcal{A}$dj dont les objets sont les catégories et les morphismes, les paires de foncteurs adjoints. La proposition précédente 2.4.1 et la remarque 2.3.3 permettent ainsi de définir un foncteur de la catégorie des $\Bbbk$-algébroïdes de Hopf à valeur dans $\mathcal{A}$dj qui à une algébroïde de Hopf (A,Γ) associe la catégorie des Γ-comodules à gauche, et à un morphisme d'algébroïdes de Hopf $f : (A,\Gamma) \longrightarrow (B,\Sigma)$ associe la paire de foncteurs adjoints (f_*, f^*).

Remarque 2.4.3. On peut retrouver le résultat du lemme 2.3.4 grâce à la proposition 2.4.1. On a le diagramme commutatif d'algébroïdes de Hopf suivant :

$$\begin{tikzcd}
(A,\Gamma) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\epsilon_\Gamma"'] & (B,\Sigma) \arrow[d, "\epsilon_\Sigma"] \\
(A,A) \arrow[r, "f_1"'] & (B,B).
\end{tikzcd}$$

Ces morphismes d'algébroïdes de Hopf induisent des foncteurs au niveau des catégories de comodules, et on a :

$$\epsilon_{\Sigma *} f_* = (\epsilon_\Sigma f)_* = (f_1 \epsilon_\Gamma)_* = f_{1*}\epsilon_{\Gamma *}.$$

Comme ces foncteurs admettent tous des adjoints à droite d'après le théorème 2.3.5 et la remarque 2.3.6, on a donc pour un B-module X :

$$f^*(\Sigma \otimes_B X) = f^*\epsilon_\Sigma^* X = \epsilon_\Gamma^* f_1^* X = \Gamma \otimes_A X.$$

Nous allons maintenant démontrer un autre théorème sur cette adjonction. Pour cela, nous avons besoin du lemme suivant qui est un résultat général sur les adjonctions de foncteurs. C'est une conséquence du théorème 3.1.5 de [Bor94a].

Lemme 2.4.4. *Soit (F,G,η,ε), une adjonction de foncteurs entre deux catégories.*

$$F : \mathcal{C} \leftrightarrows \mathcal{D} : G$$

Soient X, X' des objets de $\mathcal{C}$ et Y, Y' des objets de $\mathcal{D}$. Alors on a les diagrammes commutatifs suivants :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}(X,X') \arrow[d, "F"'] \arrow[dr, "\eta_{X'}\circ -"] & \\ \mathrm{Hom}(FX,FX') \arrow[r, "\simeq"'] & \mathrm{Hom}(X,GFX') \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathrm{Hom}(Y,Y') \arrow[d, "G"'] \arrow[dr, "-\circ\varepsilon_Y"] & \\ \mathrm{Hom}(GY,GY') \arrow[r, "\simeq"'] & \mathrm{Hom}(FGY,Y') \end{tikzcd}$$

Théorème 2.4.5. *Considérons le diagramme commutatif de $\Bbbk$-algébroïdes de Hopf suivant, où (A,Γ) et (C,Λ) sont plats :*

$$\begin{tikzcd} (A,\Gamma) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & (B,\Sigma) \arrow[d, "g"] \\ (C,\Lambda) \arrow[r, "k"'] & (D,\Omega) \end{tikzcd}$$

Soit M un Σ-comodule.

1. *Si (B,Σ) est plat, on note $\eta_M : M \longrightarrow g^*g_*M$ l'unité de l'adjonction induite par g. Alors $\Psi_h(f^*\eta_M)$ définit une transformation naturelle $h_*f^*M \longrightarrow k^*g_*M$:*

$$\mathrm{Hom}(M, g^*g_*M) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}(f^*M, (gf)^*g_*M) \xrightarrow{\Psi_h} \mathrm{Hom}(h_*f^*M, k^*g_*M).$$

2. *Soit $\varepsilon_M : f_*f^*M \longrightarrow M$ la counité de l'adjonction induite par f. Alors $\Phi_k(g_*\varepsilon_M)$ définit aussi une transformation naturelle $h_*f^*M \longrightarrow k^*g_*M$:*

$$\mathrm{Hom}(f_*f^*M, M) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}((gf)_*f^*M, g_*M) \xrightarrow{\Phi_k} \mathrm{Hom}(h_*f^*M, k^*g_*M).$$

De plus, si (B,Σ) est plat, ces deux transformations naturelles coïncident.

Démonstration : Les transformations naturelles sont produites par les composées verticales de gauche et de droite dans le diagramme suivant en considérant les morphismes unité $\eta_M : M \longrightarrow g^*g_*M$ et counité $\varepsilon_M : f_*f^*M \longrightarrow M$. De plus, on sait que le triangle du bas commute grâce à la proposition 2.4.1.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}(M, g^*g_*M) \arrow[d, "f^*"'] & & \mathrm{Hom}(f_*f^*M, M) \arrow[d, "g_*"] \\ \mathrm{Hom}(f^*M, (gf)^*g_*M) \arrow[rr, shift left, "\Psi_{gf}"] \arrow[dr, shift left, "\Psi_h"] & & \mathrm{Hom}((gf)_*f^*M, g_*M) \arrow[ll, shift left, "\Phi_{gf}"] \arrow[dl, shift left, "\Phi_k"] \\ & \mathrm{Hom}(h_*f^*M, k^*g_*M). \arrow[ul, shift left, "\Phi_h"] \arrow[ur, shift left, "\Psi_k"] & \end{tikzcd}$$

Pour vérifier que les deux transformations naturelles coïncident quand (B,Σ) est plat, il suffit de considérer le diagramme commutatif suivant. Dans ce diagramme, on obtient les deux transformations naturelles en considérant le morphisme $id_M \in \mathrm{Hom}(M,M)$, et en appliquant les composées verticales de gauche et de droite. Il est clair que le carré du milieu commute. Les quatre triangles qui bordent ce carré commutent grâce au lemme 2.4.4.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(g_*M,g_*M) \arrow[d, shift left, "\Phi_g"] & & \mathrm{Hom}(M,M) \arrow[ll, "g_*"'] \arrow[rr, "f^*"] \arrow[dll, "\eta_M\circ -"] \arrow[drr, "-\circ\varepsilon_M"] & & \mathrm{Hom}(f^*M,f^*M) \arrow[d, shift left, "\Psi_f"] \\
\mathrm{Hom}(M,g^*g_*M) \arrow[u, shift left, "\Psi_g"] \arrow[drr, "-\circ\varepsilon_M"] \arrow[dd, "f^*"'] & & \bullet & & \mathrm{Hom}(f_*f^*M,M) \arrow[u, shift left, "\Phi_f"] \arrow[dll, "\eta_M\circ -"'] \arrow[dd, "g_*"] \\
& & \mathrm{Hom}(f_*f^*M,g^*g_*M) \arrow[dll, shift left, "\Phi_f"] \arrow[drr, shift left, "\Psi_g"] & & \\
\mathrm{Hom}(f^*M,(gf)^*g_*M) \arrow[urr, shift left, "\Psi_f"] \arrow[rrrr, shift left, "\Psi_{gf}"] \arrow[drr, shift left, "\Phi_h"] & & & & \mathrm{Hom}((gf)_*f^*M,g_*M) \arrow[ull, shift left, "\Phi_g"] \arrow[llll, shift left, "\Phi_{gf}"] \arrow[dll, shift left, "\Phi_k"] \\
& & \mathrm{Hom}(h_*f^*M,k^*g_*M). \arrow[ull, shift left, "\Psi_h"] \arrow[urr, shift left, "\Psi_k"] & &
\end{tikzcd}$$

□

Remarque 2.4.6. En fait, ce théorème est vrai dans le cadre plus général où on considère un foncteur d'une catégorie $\mathcal{C}$ quelconque à valeurs dans la catégorie $\mathcal{A}$dj des adjonctions. Ici, nous n'avons énoncé le résultat que pour le foncteur particulier de la remarque 2.4.2.

On peut se demander à quelle condition sur le diagramme d'algébroïdes de Hopf, la transformation naturelle du théorème 2.4.5 est un isomorphisme. Considérons le cas particulier du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
(A,\Gamma) \arrow[r, "\epsilon_\Gamma"] \arrow[d, "f"'] & (A,A) \arrow[d, "f_1"] \\
(B,\Sigma) \arrow[r, "\epsilon_\Sigma"'] & (B,B)
\end{tikzcd}$$

Soit M un A-module à gauche. Le morphisme naturel du théorème 2.4.5 est le morphisme évident induit par f :

$$B\otimes_A\Gamma\otimes_A M \longrightarrow \Sigma\otimes_A M.$$

Ce n'est donc un isomorphisme que si $\Sigma \simeq B\otimes_A\Gamma$.

2.5 Adjonction, produit tensoriel et cotensoriel

Définition 2.5.1. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie munie d'un produit monoïdal unitaire $\wedge$, d'unité S. Un monoïde dans $\mathcal{C}$ est un objet $E \in \mathcal{C}$, muni des morphismes :*

$$\mu : E\wedge E \longrightarrow E \quad et \quad i : S \longrightarrow E,$$

tels que les diagrammes suivant commutent :

$$\begin{tikzcd}
E\wedge E\wedge E \arrow[r, "\mu\wedge id_E"] \arrow[d, "id_E\wedge\mu"'] & E\wedge E \arrow[d, "\mu"] \\
E\wedge E \arrow[r, "\mu"'] & E,
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
S\wedge E \arrow[r, "i\wedge id_E"] \arrow[dr, "\simeq"'] & E\wedge E \arrow[d, "\mu"] & E\wedge S \arrow[l, "id_E\wedge i"'] \arrow[dl, "\simeq"] \\
& E. &
\end{tikzcd}$$

Si de plus le produit $\wedge$ est symétrique, on dira que E est une algèbre commutative si le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} E \wedge E \arrow[rr, "\tau", "\simeq"'] \arrow[dr, "\mu"'] & & E \wedge E \arrow[dl, "\mu"] \\ & E & \end{tikzcd},$$

où τ est l'isomorphisme qui échange les facteurs du produit monoïdal $\wedge$.

Remarque 2.5.2. On peut définir de manière analogue les comonoïdes. De plus, si la catégorie $\mathcal{C}$ est additive, on parle plutôt d'algèbre et de coalgèbre.

Exemple 2.5.3.
- Les $\Bbbk$-algèbres associatives et unitaires sont les algèbres au sens de 2.5.1 dans la catégorie des $\Bbbk$-modules muni du produit tensoriel.
- Les spectres en anneaux commutatifs sont les algèbres commutatives de la catégorie homotopique des spectres, muni du smash-produit $\wedge$.

Soit (A, Γ) un algébroïde de Hopf. D'après le théorème 1.2.20, la catégorie des Γ-comodules à gauche est une catégorie monoïdale symétrique pour le produit tensoriel des comodules. En particulier, on peut définir la notion d'algèbre dans cette catégorie (cf. la définition A1.1.2 de [Rav86] de comodule-algèbre). On peut se demander si cette structure est préservée par l'adjonction entre les catégories de comodules.

Proposition 2.5.4. *Soient $(A, \Gamma) \xrightarrow{f} (B, \Sigma)$ un morphisme de $\Bbbk$-algébroïdes de Hopf avec (A, Γ) plat, M, M' des Γ-comodules et N, N' des Σ-comodules. Alors :*

i) $f_*(M \otimes_A M') \simeq (f_*M) \otimes_B (f_*M')$.

ii) Il existe un morphisme naturel de Γ-comodules $(f^*N) \otimes_A (f^*N') \longrightarrow f^*(N \otimes_B N')$.

Démonstration : Le *i)* est évident, et le *ii)* vient en utilisant l'adjonction. □

Corollaire 2.5.5.
- *Si M est une algèbre (resp. une coalgèbre) dans la catégorie des Γ-comodules, alors f_*M est une algèbre (resp. une coalgèbre) dans la catégorie des Σ-comodules.*
- *Si N est une algèbre dans la catégorie des Σ-comodules, alors f^*N est une algèbre dans la catégorie des Γ-comodules.*

Soit $f : (A, \Gamma) \longrightarrow (B, \Sigma)$ un morphisme de $\Bbbk$-algébroïdes de Hopf, avec (A, Γ) plat. Le lemme 2.2.20 relie le produit cotensoriel au foncteur Hom_Γ. On peut donc se demander, si sous certaines conditions, une relation du type suivant existe pour $M \in \mathcal{C}\mathrm{omod}_\Gamma$ et $N \in {}_\Sigma\mathcal{C}\mathrm{omod}$:

$$f_*M \Box_\Sigma N \simeq M \Box_\Gamma f^*N.$$

Proposition 2.5.6. *Soient M, M' des Γ-comodules respectivement à droite et à gauche, et N, N' des Σ-comodules respectivement à droite et à gauche. On a alors les morphismes de $\Bbbk$-modules naturels suivants :*

$$M \Box_\Gamma M' \longrightarrow f_*M \Box_\Sigma f_*M'$$

$$f^*N \Box_\Gamma f^*N' \longrightarrow N \Box_\Sigma N'$$

Démonstration : On a les morphismes de A-modules naturels $M \xrightarrow{u_M} f_*M$ et $f^*N \xrightarrow{v_N} N$ (v_N est juste la composée de $f \Box_\Sigma N$ avec l'isomorphisme $\Sigma \Box_\Sigma N \simeq N$). Il suffit alors de vérifier que les diagrammes suivants commutent :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M\square_\Gamma M' \arrow[r] \arrow[d, dashed] & M\otimes_A M' \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d] & M\otimes_A\Gamma\otimes_A M' \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & f_*M\square_\Sigma f_*M' \arrow[r] & M\otimes_A B\otimes_A M' \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & M\otimes_A\Sigma\otimes_A M',
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & f^*N\square_\Gamma f^*N' \arrow[r] \arrow[d, dashed] & f^*N\otimes_A f^*N' \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d] & f^*N\otimes_A\Gamma\otimes_A f^*N' \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & N\square_\Sigma N' \arrow[r] & N\otimes_B N' \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & N\otimes_B\Sigma\otimes_B N'.
\end{tikzcd}$$

□

Proposition 2.5.7. *Soient M un Γ-comodule à droite et N un Σ-comodule à gauche. Le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd}
M\square_\Gamma f^*N \arrow[r] \arrow[d] & f_*M\square_\Sigma f_*f^*N \arrow[d] \\
f^*f_*M\square_\Gamma f^*N \arrow[r] & f_*M\square_\Sigma N,
\end{tikzcd}$$

où les flèches verticales de ce diagramme sont données respectivements par l'unité et la counité de l'adjonction induite par f et les morphismes horizontaux sont ceux de la proposition 2.5.6 précédente. On a donc un morphisme naturel :

$$\lambda_{M,N} : M\square_\Gamma f^*N \longrightarrow f_*M\square_\Sigma N.$$

De plus, le diagramme d'égalisateurs suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
M\square_\Gamma f^*N \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\lambda_{M,N}"'] & M\otimes_A f^*N \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, "M\otimes v_N"'] & M\otimes_A\Gamma\otimes_A f^*N \arrow[d, "M\otimes f\otimes v_N"] \\
f_*M\square_\Sigma N \arrow[r] & M\otimes_A N \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & M\otimes_A\Sigma\otimes_B N.
\end{tikzcd}$$

Démonstration : Il suffit de voir que les diagrammes de A-modules suivants commutent :

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[d, "\eta_M"'] \arrow[dr, "u_M"] & \\
f^*f_*M \arrow[r, "v_{f_*M}"'] & f_*M
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
f^*N \arrow[r, "u_{f^*N}"] \arrow[dr, "v_N"'] & f_*f^*N \arrow[d, "\varepsilon_N"] \\
& N
\end{tikzcd}$$

□

Proposition 2.5.8. *Si M est plat en tant que A-module, alors le morphisme naturel*

$$\lambda_{M,N} : M\square_\Gamma f^*N \longrightarrow f_*M\square_\Sigma N$$

est un isomorphisme.

Démonstration : Si $N = \Sigma$, on a le diagramme commutatif suivant où les lignes sont des égalisateurs :

$$\begin{tikzcd}
M \otimes_A B \arrow[r, "\psi_M \otimes B"] & M \otimes_A \Gamma \otimes_A B \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & M \otimes_A \Gamma \otimes_A \Gamma \otimes_A B \\
M \square_\Gamma f^*\Sigma \arrow[u, "\simeq"] \arrow[r] \arrow[d, "\lambda_{M,\Sigma}"'] & M \otimes_A f^*\Sigma \arrow[u, "\simeq"'] \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d] & M \otimes_A \Gamma \otimes_A f^*\Sigma \arrow[u, "\simeq"'] \arrow[d] \\
f_* M \square_\Sigma \Sigma \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"'] & M \otimes_A \Sigma \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & M \otimes_A \Sigma \otimes_B \Sigma. \\
M \otimes_A B \arrow[ur, "\psi_{M \otimes_A B}"'] & &
\end{tikzcd} \tag{2.5.1}$$

Comme M est plat, les flèches verticales sont injectives, ce qui implique que $\lambda_{M,\Sigma}$ est injectif. Or d'après la définition 2.1.1, $\psi_{M \otimes B} : M \otimes_A B \longrightarrow M \otimes_A \Sigma$ se factorise par $M \otimes_A \Gamma \otimes_A B$, on en déduit que $\lambda_{M,\Sigma}$ est surjectif. Donc le morphisme $\lambda_{M,\Sigma}$ est un isomorphisme.

Soit X un B-module. Les morphismes du diagramme (2.5.1) sont des morphismes de B-modules à droite et les égalisateurs sont scindés dans la catégorie des B-modules à droite. En tensorisant ce diagramme par X, on montre que $\lambda_{M,\Sigma \otimes X}$ est un isomorphisme.

On a démontré que $\lambda_{M,N}$ est un isomorphisme quand N est un Σ-comodule à gauche étendu. On sait que le foncteur f^* préserve les égalisateurs puisqu'il admet un adjoint à gauche. Comme M est plat et d'après le lemme 2.2.15, le foncteur $M \square_\Gamma -$ préserve aussi les égalisateurs, donc $M \square_\Gamma f^*(-)$ préserve les égalisateurs. Comme de plus, $M \otimes_A B$ est un B-module plat, le foncteur $f_* M \square_\Sigma -$ préserve aussi les égalisateurs. On peut donc appliquer la proposition 2.2.12 à la transformation naturelle $\lambda_{M,-} : M \square_\Gamma f^*(-) \longrightarrow f_* M \square_\Sigma -$, ce qui démontre le résultat. □

Remarque 2.5.9. On peut également démontrer ce résultat en utilisant la proposition 2.2.19. En effet, on a les isomorphismes suivants :

$$M \square_\Gamma f^* N \simeq M \square_\Gamma \left((\Gamma \otimes_A B) \square_\Sigma N \right);$$

$$f_* M \square_\Sigma N \simeq \left(M \square_\Gamma (\Gamma \otimes_A B) \right) \square_\Sigma N.$$

Le lemme 2.2.9 montre que l'égalisateur suivant est scindé dans la catégorie des B-modules à droite :

$$0 \longrightarrow M \square_\Gamma (\Gamma \otimes_A B) \longrightarrow M \otimes_A \Gamma \otimes_A B \rightrightarrows M \otimes_A \Gamma \otimes_A \Gamma \otimes_A B.$$

D'après la proposition 2.2.18, il existe donc un morphisme naturel :

$$M \square_\Gamma f^* N \longrightarrow f_* M \square_\Sigma N.$$

De plus, d'après le théorème 2.2.19, si M est un A-module plat ou bien si l'égalisateur suivant est scindé dans la catégorie des A-modules à gauche :

$$0 \longrightarrow f^* N \longrightarrow \Gamma \otimes_A N \rightrightarrows \Gamma \otimes_A \Sigma \otimes_B N,$$

alors ce morphisme est un isomorphisme :

$$M \square_\Gamma f^* N \simeq f_* M \square_\Sigma N.$$

2.6 Bicomodules et foncteurs entre catégories de comodules

Théorème 2.6.1. *Soient (A,Γ) et (B,Σ) deux algébroïdes de Hopf plats. Soit W un Γ-Σ bicomodule plat en tant que B-module à droite et $F : {}_\Sigma\mathcal{C}\mathrm{omod} \longrightarrow {}_\Gamma\mathcal{C}\mathrm{omod}$ un foncteur exact à gauche. On suppose qu'on a un morphisme de foncteurs ${}_B\mathcal{M}\mathrm{od} \longrightarrow {}_\Gamma\mathcal{C}\mathrm{omod}$:*

$$\alpha_X : F(\Sigma\otimes_B X) \longrightarrow W\otimes_B X,$$

tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} F(\Sigma\otimes_B X) \arrow[r, "\alpha_X"] \arrow[d, "F(\Delta_\Sigma\otimes X)"'] & W\otimes_B X \arrow[d, "\psi_W^d\otimes X"] \\ F(\Sigma\otimes_B\Sigma\otimes_B X) \arrow[r, "\alpha_{\Sigma\otimes X}"'] & W\otimes_B\Sigma\otimes_B X. \end{tikzcd}$$

Alors il existe un unique morphisme $\beta : F \longrightarrow W\square_\Sigma-$ tel que, pour un B-module X, le morphisme $\beta_{\Sigma\otimes_B X}$ soit la composée :

$$F(\Sigma\otimes_B X) \xrightarrow{\alpha_X} W\otimes_B X \xrightarrow{\simeq} W\square_\Sigma(\Sigma\otimes_B X).$$

Si de plus, α est un isomorphisme fonctoriel, alors β aussi.

Démonstration : Soit X un B-module à gauche. Si M est le comodule étendu $\Sigma\otimes_B X$, on définit β_M comme étant la composée :

$$\beta_M :\ F(\Sigma\otimes_B X) \xrightarrow{\alpha_X} W\otimes_B X \xrightarrow{\simeq} W\square_\Sigma(\Sigma\otimes_B X).$$

Montrons tout d'abord, que β définit une transformation naturelle de foncteurs ${}_\Sigma\mathcal{E} \longrightarrow {}_\Gamma\mathcal{C}\mathrm{omod}$. Ensuite, nous utiliserons la proposition 2.2.12 pour étendre β à la catégorie des Γ-comodules. Soit $f : M \longrightarrow N$ un morphisme de Σ-comodules étendus. On doit montrer que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} F(M) \arrow[r, "\beta_M"] \arrow[d, "F(f)"'] & W\square_\Sigma M \arrow[d, "W\square_\Sigma f"] \\ F(N) \arrow[r, "\beta_N"'] & W\square_\Sigma N. \end{tikzcd} \tag{2.6.1}$$

D'après le lemme 1.2.16, il suffit de considérer les morphismes de la forme :

$$\Delta\otimes X : \Sigma\otimes_B X \longrightarrow \Sigma\otimes_B\Sigma\otimes_B X,$$

ou bien de la forme :

$$\Sigma\otimes u : \Sigma\otimes_B X \longrightarrow \Sigma\otimes_B Y,$$

avec u un morphisme de B-modules $X \longrightarrow Y$.

Si $f = \Sigma\otimes u$, le diagramme (2.6.1) commute car l'égalisateur du lemme 2.2.9 est fonctoriel en X. Si $f = \Delta\otimes X$, le diagramme suivant où les lignes sont les égalisateurs qui définissent les produit cotensoriels

$$W\otimes_B X \simeq W\square_\Sigma\Sigma\otimes_B X \quad \text{et} \quad W\otimes_B\Sigma\otimes_B X \simeq W\square_\Sigma\Sigma\otimes_B\Sigma\otimes_B X,$$

commute :

$$\begin{tikzcd} W\otimes_B X \arrow[r, "\psi_W^d\otimes X"] \arrow[d, "\psi_W^d\otimes X"'] & W\otimes_B\Sigma\otimes_B X \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, "W\otimes\Delta\otimes X"] & W\otimes_B\Sigma\otimes_B\Sigma\otimes_B X \arrow[d, "W\otimes\ \Sigma\otimes\Delta\otimes X"] \\ W\otimes_B\Sigma\otimes_B X \arrow[r, "\psi_W^d\otimes id"'] & W\otimes_B\Sigma\otimes_B\Sigma\otimes_B X \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & W\otimes_B\Sigma\otimes_B\Sigma\otimes_B\Sigma\otimes_B X. \end{tikzcd}$$

Cela montre la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
W\otimes_B X \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "\psi_W^d\otimes X"'] & W\square_\Sigma(\Sigma\otimes_B X) \arrow[d, "W\square_\Sigma(\Delta\otimes X)"] \\
W\otimes_B\Sigma\otimes_B X \arrow[r, "\simeq"'] & W\square_\Sigma(\Sigma\otimes_B\Sigma\otimes_B X).
\end{tikzcd}$$

D'après l'hypothèse du théorème, le diagramme suivant commute donc :

$$\begin{tikzcd}
F(\Sigma\otimes_B X) \arrow[r, "\alpha_X"] \arrow[d, "F(\Delta\otimes X)"'] \arrow[rr, bend left, "\beta_{\Sigma\otimes X}"] & W\otimes_B X \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "\psi_W^d\otimes X"] & W\square_\Sigma(\Sigma\otimes_B X) \arrow[d, "W\square_\Sigma(\Delta\otimes X)"] \\
F(\Sigma\otimes_B X) \arrow[r, "\alpha_{\Sigma\otimes X}"'] \arrow[rr, bend right, "\beta_{\Sigma\otimes\Sigma\otimes X}"'] & W\otimes_B\Sigma\otimes_B X \arrow[r, "\simeq"'] & W\square_\Sigma(\Sigma\otimes_B\Sigma\otimes_B X).
\end{tikzcd}$$

Cela montre que β définit un morphisme de foncteur sur la sous-catégorie pleine des comodules étendus. Finalement, d'après le lemme 2.2.15 , le foncteur $W\square_\Sigma-$ est exact à gauche car W est un B-module plat. La proposition 2.2.12 permet d'étendre β de manière unique à la catégorie des Σ-comodules. L'unicité de la proposition 2.2.12 montre que si α est un isomorphisme fonctoriel, alors β aussi. $\square$

Remarque 2.6.2. Le théorème précédent avec la remarque 2.4.3 permet de démontrer que l'adjoint à droite de f_* est nécessairement le foncteur $(\Gamma\otimes_A B)\square_\Sigma-$.

Rappelons le théorème suivant :

Théorème 2.6.3 (théorème de Watts [Wat60])**.** *Soient A et B deux anneaux et $F : {}_B\mathcal{M}\mathrm{od} \longrightarrow {}_A\mathcal{M}\mathrm{od}$ un foncteur additif qui préserve les colimites. Alors il existe un A-B bimodule W tel que :*

$$F \simeq W\otimes_B - .$$

Théorème 2.6.4. *Soient (A,Γ) et (B,Σ) deux algébroïdes de Hopf et $F : {}_\Sigma\mathcal{C}\mathrm{omod} \longrightarrow {}_\Gamma\mathcal{C}\mathrm{omod}$ un foncteur additif qui préserve les colimites. Alors il existe un unique Γ-Σ bicomodule W tel qu'on ait un isomorphisme de Γ-comodules à gauche, fonctoriel en $X \in {}_B\mathcal{M}\mathrm{od}$:*

$$\alpha_X : F(\Sigma\otimes_B X) \xrightarrow{\sim} W\otimes_B X.$$

et tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
F(\Sigma\otimes_B X) \arrow[r, "\alpha_X"] \arrow[d, "F(\Delta_\Sigma\otimes X)"'] & W\otimes_B X \arrow[d, "\psi_W^d\otimes X"] \\
F(\Sigma\otimes_B\Sigma\otimes_B X) \arrow[r, "\alpha_{\Sigma\otimes X}"'] & W\otimes_B\Sigma\otimes_B X.
\end{tikzcd}$$

Démonstration : Soit $G : {}_B\mathcal{M}\mathrm{od} \longrightarrow {}_A\mathcal{M}\mathrm{od}$ le foncteur défini par la composition suivante, où $\mathcal{O}$ désigne le foncteur oubli :

$$\begin{tikzcd}
{}_\Sigma\mathcal{C}\mathrm{omod} \arrow[r, "F"] & {}_\Gamma\mathcal{C}\mathrm{omod} \arrow[d, "\mathcal{O}"] \\
{}_B\mathcal{M}\mathrm{od} \arrow[u, "\Sigma\otimes_B-"] \arrow[r, "G"'] & {}_A\mathcal{M}\mathrm{od}.
\end{tikzcd}$$

Comme les foncteurs F, $\mathcal{O}$ et $\Sigma\otimes_B -$ préservent les colimites, il en est de même pour G. On en déduit, d'après le théorème de Watts 2.6.3, qu'il existe un A-B bimodule W tel que $G \simeq W \otimes_B -$.

On a donc un isomorphisme de A-modules $\alpha_X : F(\Sigma\otimes_B X) \simeq W\otimes_B X$. Nous allons montrer que c'est un isomorphisme de Γ-comodules. On sait que $W = G(B) = F(\Sigma)$. De plus, comme B agit à droite sur Σ par des morphismes de Σ-comodules à gauche, W possède une structure de (A,Γ)-(B,B) bicomodule. On a donc une structure naturelle de Γ-comodule sur le produit tensoriel de bimodules $W \otimes_B X$, pour tout B-module X. Par hypothèse, α_B est un isomorphisme de Γ-comodules. Comme F préserve les sommes directes, α_X est un isomorphisme de Γ-comodules pour tout B-module X libre. Enfin, F préserve les conoyaux, cela implique donc que α est un isomorphisme de Γ-comodules.

On définit le morphisme de structure de Σ-comodule à droite sur W, ψ^d_W par le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
F(\Sigma) \arrow[r, "\alpha_B", "\simeq"'] \arrow[d, "F(\Delta_\Sigma)"'] & W \arrow[d, "\psi^d_W"] \\
F(\Sigma\otimes_B\Sigma) \arrow[r, "\simeq", "\alpha_\Sigma"'] & W\otimes_B\Sigma.
\end{tikzcd}$$

Par fonctorialité de α, le diagramme suivant commute. Cela montre que le morphisme ψ^d_W est counitaire :

$$\begin{tikzcd}
F(\Sigma) \arrow[rrrr, equal] \arrow[dr, "\simeq", "\alpha_B"'] \arrow[ddddrr, bend right, "F(\Delta_\Sigma)"'] & & & & F(\Sigma) \arrow[dl, "\simeq"', "\alpha_B"] \\
& W \arrow[rr, equal] \arrow[dr, "\psi^d_W"'] & & W & \\
& & W\otimes_B\Sigma \arrow[ur, "W\otimes\epsilon"'] & & \\
& & & & \\
& & F(\Sigma\otimes_B\Sigma) \arrow[uu, "\alpha_\Sigma", "\simeq"'] \arrow[uuuurr, bend right, "F(\Sigma\otimes\epsilon)"'] & &
\end{tikzcd}$$

Il ne reste plus qu'à démontrer la coassociativité de ψ^d_W. Montrons tout d'abord la commutativité du diagramme de Γ-comodules suivant, fonctoriellement en $X \in {}_B\mathcal{M}\mathrm{od}$:

$$\begin{tikzcd}
F(\Sigma\otimes_B X) \arrow[r, "\alpha_X"] \arrow[d, "F(\Delta_\Sigma\otimes X)"'] & W\otimes_B X \arrow[d, "\psi^d_W\otimes X"] \\
F(\Sigma\otimes_B\Sigma\otimes_B X) \arrow[r, "\alpha_{\Sigma\otimes X}"'] & W\otimes_B\Sigma\otimes_B X.
\end{tikzcd}$$

Par définition de ψ^d_W, on sait que ce diagramme commute pour $X = B$. Comme F préserve les sommes directes, il commute aussi pour tout B-module libre. Enfin, comme F préserve les conoyaux, on en déduit la commutativité pour tout B-module X.

La coassociativité de ψ^d_W découle directement de la commutativité du diagramme précédent pour $X = \Sigma$, car le diagramme suivant commute alors :

$$\begin{tikzcd}
F(\Sigma) \arrow[rrr, "F(\Delta_\Sigma)"] \arrow[dr, "\alpha_B", "\simeq"'] \arrow[ddd, "F(\Delta_\Sigma)"'] & & & F(\Sigma\otimes_B\Sigma) \arrow[dl, "\alpha_\Sigma"', "\simeq"] \arrow[ddd, "F(\Delta_\Sigma\otimes\Sigma)"] \\
& W \arrow[r, "\psi^d_W"] \arrow[d, "\psi^d_W"'] & W\otimes_B\Sigma \arrow[d, "\psi^d_W\otimes\Sigma"] & \\
& W\otimes_B\Sigma \arrow[r, "W\otimes\Delta_\Sigma"'] & W\otimes_B\Sigma\otimes_B\Sigma & \\
F(\Sigma\otimes_B\Sigma) \arrow[ur, "\alpha_\Sigma", "\simeq"'] \arrow[rrr, "F(\Sigma\otimes_B\Delta_\Sigma)"'] & & & F(\Sigma\otimes_B\Sigma\otimes_B\Sigma). \arrow[ul, "\alpha_{\Sigma\otimes\Sigma}"', "\simeq"]
\end{tikzcd}$$

Cela démontre que W a bien une structure de Σ-comodule à droite. Or, par définition de ψ^d_W, on sait que ψ^d_W est un morphisme de Γ-comodules. Donc W a une structure de Γ-Σ bicomodule. $\square$

Corollaire 2.6.5. *Soient (A,Γ) et (B,Σ) deux algébroïdes de Hopf plats et $F : {}_\Sigma\mathcal{C}\mathrm{omod} \longrightarrow {}_\Gamma\mathcal{C}\mathrm{omod}$ un foncteur additif exact qui préserve les sommes directes. Alors il existe un Γ-Σ bicomodule W, coplat en tant que Σ-comodule à droite tel que :*

$$F \simeq W\square_\Sigma - .$$

Démonstration : Comme F est exact et préserve les sommes directes, il préserve aussi toutes les colimites. On peut donc appliquer le théorème 2.6.4. Comme de plus F est exact à gauche, on en déduit que que le foncteur $X \mapsto F(\Sigma\otimes_B X) \simeq W\otimes_B X$ est exact à gauche, et donc que W est un B-module plat. D'après le théorème 2.6.1 on a donc $F \simeq W\square_\Sigma -$. Comme F est exact, W est un Σ-bicomodule coplat. $\square$

Définition 2.6.6. *Deux algébroïdes de Hopf (A,Γ) et (B,Σ) sont dits Morita équivalents si les catégories de comodules à gauches ${}_\Gamma\mathcal{C}\mathrm{omod}$ et ${}_\Sigma\mathcal{C}\mathrm{omod}$ sont des catégories additives équivalentes.*

Théorème 2.6.7. *Soient (A,Γ) et (B,Σ) deux algébroïdes de Hopf plats. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*
- *(A,Γ) et (B,Σ) sont Morita équivalents.*
- *Il existe un Γ-Σ bicomodule W, coplat en tant que Σ-comodule, et un Σ-Γ bicomodule T, coplat en tant que Γ-comodule, tels qu'on ait les isomorphismes de bicomodules suivant :*

$$W\square_\Sigma T \simeq \Gamma;$$

$$T\square_\Gamma W \simeq \Sigma.$$

Démonstration : Supposons (A,Γ) et (B,Σ) Morita équivalents. Soient F et G les équivalences de catégories inverses l'une de l'autre :

$$F : {}_\Gamma\mathcal{C}\mathrm{omod} \leftrightarrows {}_\Sigma\mathcal{C}\mathrm{omod} : G.$$

Alors, d'après le corollaire 2.6.5, il existe un Γ-Σ bicomodule W coplat en tant que Σ-comodule, et un Σ-Γ bicomodule T coplat en tant que Γ-comodule tels qu'on ait les isomorphismes suivants :

$$F \simeq T\square_\Gamma -;$$

$$G \simeq W\square_\Sigma - .$$

Soit M un Γ-comodule à gauche. On a alors les isomorphismes suivants :

$$M \simeq G\circ F(M) \simeq W\square_\Sigma(T\square_\Gamma M).$$

Comme W est coplat en tant que Σ-comodule à droite, on peut appliquer le théorème 2.2.19 d'associativité du produit cotensoriel. On obtient donc l'isomorphisme fonctoriel :

$$M \simeq (W\square_\Sigma T)\square_\Gamma M.$$

L'unicité du théorème 2.6.4 démontre l'isomorphisme de Γ-Γ bicomodule $W\square_\Sigma T \simeq \Gamma$. On en déduit de la même manière le deuxième isomorphisme.

Réciproquement, on pose $F = T\square_\Gamma -$ et $G = W\square_\Sigma -$. Ce sont des foncteur exacts puisque W et T sont coplats pour leur structure de comodule à droite. L'hypothèse de coplatitude nous permet d'utiliser le théorème 2.2.19 pour démontrer que $G\circ F \simeq id$ et $F\circ G \simeq id$. $\square$

Remarque 2.6.8. Le théorème 2.6.7 est faux sans l'hypothèse de coplatitude. Pour expliciter un contre-exemple, on pose $(A, \Gamma) = (\mathsf{V}, \mathsf{VT})$, $B = v_1^{-1}\mathsf{V}$, $\Sigma = \Gamma_B$ et $f : (A, \Gamma) \longrightarrow (B, \Gamma_B)$ le morphisme d'algébroïdes de Hopf induit par l'inclusion de A dans B. Soit $W = \Gamma \otimes_A B$ et $T = B \otimes_A \Gamma$. On a alors $f_* = T \Box_\Gamma -$ et $f^* = W \Box_{\Gamma_B} -$. Nous verrons à la section 3.2 que $f_* \circ f^* = id$ et $f^* \circ f_*$ est le foncteur de localisation L_1. On en déduit que $T \Box_\Gamma W = \Gamma_B$ et que $W \Box_{\Gamma_B} T = L_1 \Gamma = \Gamma$ alors que les catégories de Γ-comodules et de Γ_B-comodules ne sont pas équivalentes.

Ravenel a défini à la définition A.1.11 de [Rav86] les algébroïdes de Hopf unicursals, étudiés aussi par Baker à la section 4 de [Bak09]. Le théorème 2.6.7 nous donne une condition pour que la catégorie des comodules sur un algébroïde de Hopf unicursal soit équivalente à une catégorie de modules.

Définition 2.6.9 (A.1.11 de [Rav86])**.** *Soit (A, Γ) un $\Bbbk$-algébroïde de Hopf. On dit que (A, Γ) est unicursal si $\Gamma \simeq A \otimes_D A$ en tant que Γ-bicomodule, où D est la $\Bbbk$-algèbre suivante :*

$$D = A \Box_\Gamma A = \{x \in A \mid \eta_L(x) = \eta_R(x)\}.$$

Lemme 2.6.10. *Soient $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ et $G : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C}$ deux foncteurs additifs entre catégories abéliennes. Si $G \circ F$ est un foncteur exact et G est un foncteur exact et fidèle, alors F est exact.*

Démonstration : Comme G est exact et fidèle, pour tous morphismes $f : X \longrightarrow Y$ et $g : Y \longrightarrow Z$ dans $\mathcal{B}$ les assertions suivantes sont équivalentes :

– La suite suivante est exacte dans $\mathcal{B}$:

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0.$$

– La suite suivante est exacte dans $\mathcal{C}$:

$$0 \longrightarrow G(X) \xrightarrow{G(f)} G(Y) \xrightarrow{G(g)} G(Z) \longrightarrow 0.$$

Soit

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0,$$

une suite exacte courte dans $\mathcal{A}$. Comme $G \circ F$ est exact, on a la suite exacte courte dans $\mathcal{C}$:

$$0 \longrightarrow G \circ F(A) \longrightarrow G \circ F(B) \longrightarrow G \circ F(C) \longrightarrow 0.$$

D'après ce qui précède, la suite suivante est exacte :

$$0 \longrightarrow F(A) \longrightarrow F(B) \longrightarrow F(C) \longrightarrow 0,$$

ce qui montre que F est un foncteur exact. □

Corollaire 2.6.11. *Soit A une $\Bbbk$-algèbre, (B, Σ) un algébroïde de Hopf plat, M un A-module à droite et W un (A, A)-(B, Σ) bicomodule. Si $M \otimes_A W$ est un Σ-comodule coplat et M est fidèlement plat sur A, alors W est un Σ-comodule coplat.*

Démonstration : Comme M est un A-module plat, d'après la proposition 2.2.17, on a l'isomorphisme :

$$M \otimes_A (W \Box_\Gamma -) \simeq (M \otimes_A W) \Box_\Gamma - .$$

On peut donc appliquer le lemme 2.6.10, avec $F = W \Box_\Gamma -$ et $G = M \otimes_A -$. □

Soit (A, Γ) un $\Bbbk$-algébroïde de Hopf et D la sous-$\Bbbk$-algèbre des éléments invariants ($D = A^\Gamma = A\Box_\Gamma A$). Alors (A, Γ) est un D-algébroïde de Hopf et on a un morphisme de $\Bbbk$-algébroïde de Hopf :

$$f : (D, D) \longrightarrow (A, \Gamma).$$

D'après le théorème 2.3.5, on a donc une adjonction :

$$f_* : {}_D\mathcal{M}\mathrm{od} \leftrightarrows {}_\Gamma\mathcal{C}\mathrm{omod} : f^*,$$

avec $f_* = A\otimes_D -$ et $f^* = A\Box_\Gamma -$. Ici A est muni de ses structures canoniques de (A, Γ)-(D, D) et (D, D)-(A, Γ) bicomodule.

Rappelons que la catégorie des (D, D)-comodules est la catégorie des D-modules et que le produit cotensoriel dans cette catégorie est juste le produit tensoriel sur D. Si on suppose que (A, Γ) est unicursal, on a $\Gamma \simeq A\otimes_D A$. Donc, si on a les hypothèse de coplatitude, le théorème 2.6.7 montre que la catégorie des Γ-comodules à gauche est équivalente à la catégorie des D-modules à gauche et que l'adjonction (f_*, f^*) est une équivalence de catégories. Plus précisément, on a la proposition suivante :

Proposition 2.6.12. *Soit (A, Γ) un $\Bbbk$-algébroïde de Hopf unicursal et $D = A\Box_\Gamma A$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- *Les foncteurs de l'adjonction du théorème 2.3.5 sont des équivalences de catégories inverses l'une de l'autre :*
$$f_* : {}_D\mathcal{M}\mathrm{od} \leftrightarrows {}_\Gamma\mathcal{C}\mathrm{omod} : f^*;$$
- *A est une D-algèbre fidèlement plate.*

Démonstration : Si $f_* = A\otimes_D -$ est une équivalence de catégories, il est en particulier exact et fidèle. Donc A est une D-algèbre fidèlement plate. Réciproquement, supposons que A est une D-algèbre fidèlement plate. A est naturellement muni de structures de (A, Γ)-(D, D) et (D, D)-(A, Γ) bicomodule. Puisque $f_* = A\otimes_D -$ et $f^* = A\Box_\Gamma -$, on peut utiliser le théorème 2.6.7, en prenant $W = T = A$. Par hypothèse :

$$A\otimes_D A \simeq \Gamma,$$

$$A\Box_\Gamma A \simeq D.$$

Comme A est un D-module plat, il est en particulier coplat à droite en tant que (A, Γ)-(D, D) comodule. Il reste plus qu'à démontrer qu'il est coplat à droite en tant que (D, D)-(A, Γ) bicomodule. On sait que A est fidèlement plat sur D et que $A\otimes_D A = \Gamma$ est un Γ-comodule coplat à droite. On en déduit alors le résultat en utilisant le corollaire 2.6.11. □

2.7 Morphisme d'anneaux Landweber exact

Soit (A, Γ) un algébroïde de Hopf et $f : A \longrightarrow B$ un morphisme d'anneau. La définition 2.1.5 a introduit la notion de morphisme Landweber exact. Nous allons étudier quelques-unes de leurs propriétés dans cette sous-section.

Proposition 2.7.1. *Soit $f = (f_1, f_2) : (A, \Gamma) \longrightarrow (B, \Sigma)$ un morphisme d'algébroïdes de Hopf avec f_1 Landweber exact pour (A, Γ), et $g : B \longrightarrow C$ un morphisme d'anneaux. Si g est Landweber exact pour (B, Σ), alors $g \circ f_1$ l'est aussi pour (A, Γ).*

Démonstration : Cela vient du fait que f_* est exact et que la composée de foncteurs exacts est exact. □

Lemme 2.7.2 (G.Laures, [Lau99]). *Si (A,Γ) est plat, alors le morphisme f est Landweber exact pour (A,Γ) si et seulement si $B\otimes_A\Gamma$ est plat en tant que A-module à droite.*

Démonstration : On considère une suite exacte de A-modules :

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0.$$

Comme Γ est un A-module plat, on obtient une suite exacte de Γ-comodules à gauche étendus :

$$0 \longrightarrow \Gamma\otimes_A M' \longrightarrow \Gamma\otimes_A M \longrightarrow \Gamma\otimes_A M'' \longrightarrow 0.$$

Enfin, comme f est Landweber exact pour (A,Γ), le foncteur f_* est exact sur la catégorie des Γ-comodules à gauche, on a donc la suite exacte suivante qui démontre que $B\otimes_A\Gamma$ muni de sa structure à droite est un A-module plat :

$$0 \longrightarrow B\otimes_A\Gamma\otimes_A M' \longrightarrow B\otimes_A\Gamma\otimes_A M \longrightarrow B\otimes_A\Gamma\otimes_A M'' \longrightarrow 0.$$

Pour la réciproque, on considère une suite exacte de Γ-comodules à gauche :

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0.$$

On sait que f_* est obtenu par rétraction du foncteur $B\otimes_A\Gamma\otimes_A -$. Si $B\otimes_A\Gamma$ est un A-module plat, on a alors le diagramme de modules suivants où les composées verticales donnent l'identité et les lignes sont exactes :

$$\begin{tikzcd}
 & B\otimes_A M' \arrow[r] \arrow[d, "B\otimes\psi_{M'}"'] & B\otimes_A M \arrow[r] \arrow[d, "B\otimes\psi_M"] & B\otimes_A M'' \arrow[r] \arrow[d, "B\otimes\psi_{M''}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & B\otimes_A\Gamma\otimes_A M' \arrow[r] \arrow[d, "B\otimes\epsilon\otimes M'"'] & B\otimes_A\Gamma\otimes_A M \arrow[r] \arrow[d, "B\otimes\epsilon\otimes M"] & B\otimes_A\Gamma\otimes_A M'' \arrow[r] \arrow[d, "B\otimes\epsilon\otimes M''"] & 0 \\
 & B\otimes_A M' \arrow[r] & B\otimes_A M \arrow[r] & B\otimes_A M'' \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Cela permet de démontrer facilement que $B\otimes M' \longrightarrow B\otimes M$ est injectif, et donc que f_* est un foncteur exact. □

Proposition 2.7.3. *Si (A,Γ) est plat et f est Landweber exact pour (A,Γ), alors (B,Γ_B) est plat.*

Démonstration : Cela découle directement du lemme de Laures et du fait que pour tout B-module M,

$$\Gamma_B\otimes_B M = B\otimes_A\Gamma\otimes_A M.$$

□

Définition 2.7.4. *Soit (A,Γ) un $\Bbbk$-algébroïde de Hopf plat et $f : A \longrightarrow B$ un morphisme de $\Bbbk$-algèbres. On sait que f induit un morphisme d'algébroïdes de Hopf $f : (A,\Gamma) \longrightarrow (B,\Gamma_B)$. On appelle foncteur de localisation par rapport à f, le foncteur $L_f = f^* \circ f_* : {}_\Gamma\mathcal{C}\mathrm{omod} \longrightarrow {}_\Gamma\mathcal{C}\mathrm{omod}$.*

Proposition 2.7.5. *Soit (A,Γ) un $\Bbbk$-algébroïde de Hopf plat et $f : A \longrightarrow B$ un morphisme de $\Bbbk$-algèbres. Si f est Landweber exact, alors on a :*
- *Le foncteur $f^* : {}_{\Gamma_B}\mathcal{C}\mathrm{omod} \longrightarrow {}_\Gamma\mathcal{C}\mathrm{omod}$ est un plongement pleinement fidèle.*
- *La composée $f_* \circ f^*$ est isomorphe à l'identité de ${}_{\Gamma_B}\mathcal{C}\mathrm{omod}$.*

– *le foncteur L_f est idempotent et exact à gauche.*

Démonstration : Comme f est Landweber exact, on sait que f_* est un foncteur exact. Or f^* est exact à gauche puisqu'il admet un adjoint à gauche. La composée est donc bien exacte à gauche. Montrons que L_f est idempotent. On considère pour cela un Γ_B-comodule à gauche étendu $M \simeq \Gamma_B \otimes_B X$ pour un certain B-module X. On a alors :

$$f_* f^*(M) \simeq f_*(\Gamma \otimes_A X) \simeq B \otimes_A \Gamma \otimes_A B \otimes_B X \simeq M.$$

La transformation naturelle $\varepsilon : f_* \circ f^* \longrightarrow id$ est un isomorphisme naturel sur les comodules étendus, et la composée $f_* \circ f^*$ est exacte à gauche. D'après la proposition 2.2.12, on a donc $f_* \circ f^* \simeq id$. On en déduit donc que :

$$L_f \circ L_f = (f^* \circ f_*) \circ (f^* \circ f_*) = f^* \circ (f_* \circ f^*) \circ f_* \simeq f^* \circ f_* = L_f.$$

Il reste à montrer que f^* est plein. Soit $u : f^*M \longrightarrow f^*N$ un morphisme de Γ-comodules. Par adjonction, il correspond à un morphisme $\Psi(u) : f_* f^* M \longrightarrow N$, et on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} f^*M \arrow[r, "\eta_{f^*M}"] \arrow[dr, "u"'] & f^*f_*f^*M \arrow[d, "f^*\Psi(u)"] \\ & f^*N. \end{tikzcd}$$

Comme ε_M est un isomorphisme, $\eta_{f^*M} = f^*(\varepsilon_M^{-1})$, ce qui démontre que f^* est un plongement pleinement fidèle. □

Remarque 2.7.6. Le théorème 2.2.19 permet de démontrer directement que $f_* \circ f^* \simeq id$. Si M est un Γ_B-comodule, on a :

$$f_* \circ f^*(M) = (B \otimes_A \Gamma) \square_\Gamma \left((\Gamma \otimes_A B) \square_{\Gamma_B} M\right).$$

Comme f est Landweber exact pour (A, Γ), $B \otimes_A \Gamma$ est un Γ-comodule à droite coplat (cf. l'exemple 2.2.14). On peut donc appliquer le théorème 2.2.19 et on obtient :

$$\begin{aligned} f_* \circ f^*(M) &= ((B \otimes_A \Gamma) \square_\Gamma (\Gamma \otimes_A B)) \square_{\Gamma_B} M \\ &= \Gamma_B \square_{\Gamma_B} M \\ &= M. \end{aligned}$$

Soit (A, Γ) un $\Bbbk$-algébroïde de Hopf plat et $f : A \longrightarrow B$, $f' : A \longrightarrow B'$ deux morphismes de $\Bbbk$-algèbres Landweber exacts pour (A, Γ). On définit les foncteurs $F_{BB'}$ et $F_{B'B}$ par :

$$F_{BB'} = f'_* \circ f^* : {}_{\Gamma_B}\mathcal{C}\mathrm{omod} \longrightarrow {}_{\Gamma_{B'}}\mathcal{C}\mathrm{omod},$$

$$F_{B'B} = f_* \circ f'^* : {}_{\Gamma_{B'}}\mathcal{C}\mathrm{omod} \longrightarrow {}_{\Gamma_B}\mathcal{C}\mathrm{omod}.$$

Comme f et f' sont Landweber exacts, on peut appliquer le théorème 2.2.19 et on montre que :

$$F_{BB'} = (B' \otimes_A \Gamma \otimes_A B) \square_{\Gamma_B} -,$$

$$F_{B'B} = (B \otimes_A \Gamma \otimes_A B') \square_{\Gamma_{B'}} - .$$

Définition 2.7.7. *Soient $(F_1, G_1, \eta_1, \varepsilon_1)$ et $(F_2, G_2, \eta_2, \varepsilon_2)$ deux adjonctions de foncteurs :*

$$F_1 : \mathcal{A} \leftrightarrows \mathcal{B} : G_1,$$

$$F_2 : \mathcal{A}' \leftrightarrows \mathcal{B} : G_2.$$

Un foncteur $K : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}'$ est un foncteur de comparaison à gauche entre ces adjonctions si $KG_1 = G_2$ et $F_2K = F_1$.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[dr, shift left, "F_1"] \arrow[dd, "K"'] & \\
& \mathcal{B} \arrow[ul, shift left, "G_1"] \arrow[dl, shift left, "G_2"] \\
\mathcal{A}' \arrow[ur, shift left, "F_2"] &
\end{tikzcd}$$

En particulier, $(K, id_{\mathcal{B}})$ est un morphisme d'adjonction.

Proposition 2.7.8. *Si les foncteurs de localisation L_f et $L_{f'}$ sont naturellement isomorphes, alors les foncteur F et G sont des équivalences de catégories inverses l'un de l'autre et sont des foncteurs de comparaisons entres les adjonctions induites par f et f' :*

$$\begin{tikzcd}
& {}_{\Gamma_B}\mathcal{C}\mathrm{omod} \arrow[dl, shift left, "f^*"] \arrow[dd, shift left, "F_{BB'}"] \\
{}_{\Gamma}\mathcal{C}\mathrm{omod} \arrow[ur, shift left, "f_*"] \arrow[dr, shift left, "f'_*"] & \\
& {}_{\Gamma_{B'}}\mathcal{C}\mathrm{omod} \arrow[ul, shift left, "f'^*"] \arrow[uu, shift left, "F_{B'B}"]
\end{tikzcd}$$

Démonstration : Par hypothèse, on a $f^* \circ f_* \simeq f'^* \circ f'_*$. On en déduit donc, en utilisant la proposition 2.7.5, que :

$$\begin{aligned}
F_{BB'} \circ f_* = f'_* \circ f^* \circ f_* & \\
& \simeq f'_* \circ f'^* \circ f'_* \\
& \simeq f'_*.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f'^* \circ F_{BB'} = f'^* \circ f'_* \circ f^* & \\
& \simeq f^* \circ f_* \circ f^* \\
& \simeq f^*.
\end{aligned}$$

De la même manière on montre que $F_{B'B}$ est un foncteur de comparaison. Enfin :

$$\begin{aligned}
F_{B'B} \circ \circ F_{BB'} = f_* \circ f'^* \circ f'_* \circ f^* & \\
& \simeq f_* \circ f^* \circ f_* \circ f^* \\
& \simeq id.
\end{aligned}$$

De le même manière on montre que $F_{BB'} \circ F_{B'B} \simeq id$. Donc $F_{BB'}$ et $F_{B'B}$ sont des équivalences de catégories inverses l'une de l'autre. □

Chapitre 3

Foncteurs de localisation

Dans ce chapitre, nous présentons quelques généralités concernant les foncteurs de localisation. Nous verrons que si (A, Γ) est un $\Bbbk$-algébroïde de Hopf plat et $f : A \longrightarrow B$ est Landweber exact par rapport à (A, Γ), alors le foncteur L_f de la définition 2.7.4 est un foncteur de localisation de la catégorie des Γ-comodules. Puis nous nous intéresserons au cas particulier où (A, Γ) est l'algébroïde de Hopf $(\mathsf{BP}_*, \mathsf{BP}_*\mathsf{BP})$. Hovey et Strickland ont montré dans les articles [HS05a] et [HS05b] que les seuls foncteurs de localisation non triviaux que l'on peut obtenir de cette manière sont les foncteurs de localisation L_n, avec $n \geq 0$, par rapport aux v_n-équivalences. Nous rappellerons leurs principaux résultats. Enfin dans une dernière section nous démontrerons un isomorphisme entre les foncteurs dérivés des foncteurs de localisation et les foncteurs $\mathrm{Tor}^{\mathsf{BP}_*}(K_n, -)$. Le comodule K_n intervient dans la résolution chromatique de BP_* et, en tant que BP_*-module, on a l'égalité :

$$K_n = \mathsf{BP}_*/(v_0^\infty, \ldots, v_n^\infty).$$

3.1 Généralités

En algèbre commutative, la localisation d'un anneau par rapport à un idéal premier revient à considérer les éléments qui ne sont pas dans cet idéal premier comme étant inversibles. De la même manière, considérons $\mathcal{C}$ une catégorie et $\mathcal{E}$ la classe des morphismes que l'on souhaite inverser. Sous certaines conditions, on peut former la catégorie $\mathcal{C}\left[\mathcal{E}^{-1}\right]$, muni d'un foncteur $\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}\left[\mathcal{E}^{-1}\right]$. Cette catégorie vérifie la propriété universelle suivante : tout foncteur F de $\mathcal{C}$ vers une catégorie $\mathcal{D}$ qui envoie les morphismes de $\mathcal{E}$ vers des isomorphismes se factorise de manière unique (à unique isomorphisme de foncteur près) à travers $\mathcal{C}\left[\mathcal{E}^{-1}\right]$.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "F"] \arrow[d] & \mathcal{D} \\ \mathcal{C}\left[\mathcal{E}^{-1}\right] \arrow[ur, "\overline{F}"'] & \end{tikzcd} .$$

Par exemple, en topologie algébrique, on inverse les morphismes de la catégorie des espaces topologiques qui sont des équivalences d'homotopies. En algèbre homologique, ce sont les morphismes de la catégorie des complexes de chaînes qui induisent un isomorphisme en homologie, ...

Une alternative à cette construction est d'utiliser un foncteur de localisation. C'est un foncteur $L : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ qui se factorise à travers la catégorie $\mathcal{C}\left[\mathcal{E}^{-1}\right]$. Pour le définir, on a besoin de la notion d'objet $\mathcal{E}$-local qui se comporte avec les morphismes de $\mathcal{E}$ comme si ils étaient inversibles. Dans les articles [Bou75] et [Bou79] définit des foncteurs de localisation sur la catégorie d'homotopie stable par rapport à une théorie homologique. Hovey et Strickland ont défini une version algébrique de ces foncteurs.

Définition 3.1.1. *Soit $\mathcal{E}$ une classe de morphismes d'une catégorie $\mathcal{C}$.*
- *Un objet X de $\mathcal{C}$ est $\mathcal{E}$-local si, pour tout $f \in \mathcal{E}$, $\mathrm{Hom}(f, X)$ est une bijection. On note alors $L_{\mathcal{E}}\mathcal{C}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}$ constituée des objets $\mathcal{E}$-locaux.*
- *Un morphisme $f : X \longrightarrow Y$ est une $\mathcal{E}$-localisation de X, si $f \in \mathcal{E}$ et Y est $\mathcal{E}$-local.*
- *On dit que les $\mathcal{E}$-localisations existent dans la catégorie $\mathcal{C}$ si tout objet X de $\mathcal{C}$ admet une $\mathcal{E}$-localisation.*

Définition 3.1.2. *Un foncteur de localisation sur une catégorie $\mathcal{C}$ est un couple (L, ρ) où L est un foncteur $\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ et ρ une transformation naturelle $id \longrightarrow L$ tels que les deux morphismes de foncteurs :*

$$\rho \circ L : L \longrightarrow L^2 \quad et \quad L \circ \rho : L \longrightarrow L^2$$

sont égaux et sont des isomorphismes.

La proposition suivante montrent que les deux définitions précédentes sont liés. Si $\mathcal{E}$ est une classe de morphismes d'une catégorie $\mathcal{C}$ telle que les localisations existent, alors on peut définir un foncteur de localisation. Réciproquement si on a un foncteur de localisation (L, ρ), alors pour tout $X \in \mathcal{C}$, ρ_X est une $\mathcal{E}$-localisation où $\mathcal{E}$ est la classe des morphismes f tels que $L(f)$ est un isomorphisme.

Proposition 3.1.3 (1.3, [HS05a]). *Soit (L, ρ) un foncteur de localisation sur une catégorie $\mathcal{C}$. Soit $\mathcal{E}$ la classe des morphismes f tels que Lf est un isomorphisme. Alors ρ_X est une $\mathcal{E}$-localisation pour tout objet $X \in \mathcal{C}$. Réciproquement, si $\mathcal{E}$ est une classe de morphismes telle que tout objet $X \in \mathcal{C}$ admet une $\mathcal{E}$-localisation, alors il existe un foncteur de localisation (L, ρ) appelé foncteur de localisation par rapport à $\mathcal{E}$.*

De plus, $L : \mathcal{C} \longrightarrow L_{\mathcal{E}}\mathcal{C}$ est adjoint à gauche au foncteur d'inclusion . L'unité de cette adjonction est le morphisme ρ et la counité est un isomorphisme naturel.

Proposition 3.1.4. *Soit (L, ρ) un foncteur de localisation sur une catégorie $\mathcal{C}$ et soit*

$$\mathcal{E} = \{f \mid \ Lf \text{ est un isomorphisme}\}.$$

Si X est $\mathcal{E}$-local, alors ρ_X est un isomorphisme.

Démonstration : Comme X est $\mathcal{E}$-local, il existe un morphisme $f : LX \longrightarrow X$ tel que $f \circ \rho_X = id_X$. Par définition, LX est $\mathcal{E}$-local. Donc si u est un morphisme $LX \longrightarrow LX$, alors :

$$u \circ \rho_X = \rho_X \Leftrightarrow u = id_{LX}.$$

Comme $(\rho_X \circ f) \circ \rho_X = \rho_X$, on en déduit que $\rho_X \circ f = id_{LX}$ et que ρ_X est un isomorphisme. $\square$

Nous avons vu à la proposition 3.1.3 que tout foncteur de localisation sur $\mathcal{C}$ induit une adjonction entre $\mathcal{C}$ et la sous-catégorie pleine des objets locaux. La proposition suivante démontre une réciproque : à partir d'une adjonction dont la counité est un isomorphisme, on peut retrouver un foncteur de localisation. Ensuite, nous appliquerons cette proposition à l'adjonction induite entre les catégories de comodules par un morphisme d'anneaux Landweber exact (cf. la proposition 2.7.5).

Proposition 3.1.5 (1.4, [HS05a]). *Soit $(F, G, \eta, \varepsilon)$ une adjonction entre deux catégories $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$:*

$$F : \mathcal{C} \leftrightarrows \mathcal{D} : G.$$

On suppose que la counité de l'adjonction $\varepsilon : FG \longrightarrow id_{\mathcal{D}}$ est un isomorphisme naturel. Alors (GF, η) est un foncteur de localisation sur $\mathcal{C}$ par rapport à $\mathcal{E} = \{f | Ff \text{ est un isomorphisme}\}$. De plus, le foncteur G induit une équivalence de catégorie $G : \mathcal{D} \longrightarrow L_{\mathcal{E}}\mathcal{C}$.

Démonstration : On pose $L = GF$ et $\rho = \eta$, l'unité de l'adjonction. Soient M et N des objets de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ respectivement. Les diagrammes suivants commutent :

$$\begin{tikzcd} FM \arrow[r, "F\eta_M"] \arrow[dr, "id_{FM}"'] & FGFM \arrow[d, "\simeq"', "\varepsilon_{FM}"] \\ & FM \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} GN \arrow[r, "\eta_{GN}"] \arrow[dr, "id_{GN}"'] & GFGN \arrow[d, "\simeq"', "G(\varepsilon_N)"] \\ & GN. \end{tikzcd}$$

Comme ε est un isomorphisme naturel, on en déduit que $GF\eta_M = (G\varepsilon_{FM})^{-1} = \eta_{GFM}$, c'est-à-dire que $L \circ \rho = \rho \circ L$ et que ce morphisme est un isomorphisme. D'après la proposition 3.1.3, (L, ρ) est un foncteur de localisation par rapport à $\mathcal{E} = \{f | Lf \text{ est un isomorphisme}\}$. Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de la catégorie $\mathcal{C}$. Si Ff est un isomorphisme alors $GFf = Lf$ est un isomorphisme. Réciproquement, si Lf est un isomorphisme, le diagramme commutatif suivant montre que Ff est aussi un isomorphisme, puisque ε est un isomorphisme de foncteurs :

$$\begin{tikzcd} FGFX \arrow[r, "FLf"] \arrow[d, "\epsilon_{FX}"', "\simeq"] & FGFY \arrow[d, "\simeq"', "\epsilon_{FY}"] \\ FX \arrow[r, "Ff"'] & FY. \end{tikzcd}$$

Soit N un objet de $\mathcal{D}$. Pour tout morphisme $f : X \longrightarrow Y$ de $\mathcal{E}$, le diagramme commutatif suivant commute :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}(Y, GN) \arrow[r, "-\circ f"] \arrow[d, "\simeq"'] & \mathrm{Hom}(X, GN) \arrow[d, "\simeq"] \\ \mathrm{Hom}(FY, N) \arrow[r, "\simeq", "-\circ Ff"'] & \mathrm{Hom}(FX, N). \end{tikzcd}$$

On en déduit donc que GN est un objet $\mathcal{E}$-local. Cela démontre qu'on a une adjonction :

$$F : L_{\mathcal{E}}\mathcal{C} \leftrightarrows \mathcal{D} : G.$$

On sait déjà que ε est un isomorphisme naturel. Le lemme précédent démontre que $\eta = \rho$ est un isomorphisme pour les objets $\mathcal{E}$-locaux. On en déduit donc que G induit une équivalence de catégories entre $\mathcal{D}$ et $L_{\mathcal{E}}\mathcal{C}$. □

Nous allons maintenant supposer que $\mathcal{C}$ est une catégorie abélienne et que $\mathcal{E}$ est défini à l'aide d'une théorie de torsion héréditaire ; sous-catégorie épaisse stable par coproduit arbitraire. Les foncteurs de localisations ont été étudié dans ce cadre par Gabriel dans [Gab62].

Définition 3.1.6. *Soit $\mathcal{T}$ une sous-catégorie pleine d'une catégorie abélienne $\mathcal{C}$. On dit que $\mathcal{T}$ est une théorie de torsion héréditaire si $\mathcal{T}$ est stable par sous-objet, quotient, extension et coproduit arbitraire. Un morphisme f de $\mathcal{C}$ est une $\mathcal{T}$-équivalence si son noyau et son conoyau sont dans $\mathcal{T}$. On note $\mathcal{E}_{\mathcal{T}}$ la classe des $\mathcal{T}$-équivalences, et on dit par abus de notation qu'un objet X de $\mathcal{C}$ est $\mathcal{T}$-local si il est $\mathcal{E}_{\mathcal{T}}$-local. On note $L_{\mathcal{T}}\mathcal{C}$ la sous-catégorie pleine constituée des objets $\mathcal{T}$-locaux.*

Remarque 3.1.7. Une intersection de théories de torsion héréditaires est encore une théorie de torsion héréditaire. On peut donc parler de plus petite théorie de torsion héréditaire contenant une classe d'objet.

La proposition suivante précise la proposition 3.1.5 dans le cadre des catégories abéliennes. Sous réserve d'une hypothèse d'exactitude, le foncteur de localisation est défini par une théorie de torsion héréditaire.

Proposition 3.1.8 (1.6, [HS05a]). *Soit $(F, G, \eta, \varepsilon)$ une adjonction entre deux catégories abéliennes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$:*

$$F : \mathcal{C} \leftrightarrows \mathcal{D} : G.$$

On suppose que F est un foncteur exact et que la counité de l'adjonction $\varepsilon : FG \longrightarrow id_{\mathcal{D}}$ est un isomorphisme. Alors la sous-catégorie pleine $\mathcal{T} = \{M \in \mathcal{C} \mid \ F(M) = 0\}$ est une théorie de torsion héréditaire et (GF, η) est un foncteur de localisation sur $\mathcal{C}$ par rapport à $\mathcal{T}$. De plus, le foncteur G réalise une équivalence de catégorie $G : \mathcal{D} \longrightarrow L_{\mathcal{T}}\mathcal{C}$.

Démonstration : Le fait que $\mathcal{T}$ est une théorie de torsion héréditaire découle directement du fait que F est un foncteur exact. La proposition 3.1.5 démontre que le foncteur GF est un foncteur de localisation par rapport $\mathcal{E} = \{f | Ff$ est un isomorphisme$\}$. Mais, comme F est un foncteur exact, Ff est un isomorphisme si et seulement si $F(\operatorname{Ker} f) = F(\operatorname{Coker} f) = 0$, c'est-à-dire f est une $\mathcal{T}$-équivalence. □

Remarque 3.1.9. Soit (A, Γ) un $\Bbbk$-algébroïde de Hopf plat et $f : A \longrightarrow B$ un morphisme d'anneau Landweber exact. Alors l'adjonction

$$f_* : {}_{\Gamma}\mathcal{C}\text{omod} \leftrightarrows {}_{\Gamma_B}\mathcal{C}\text{omod} : f^*$$

du théorème 2.3.5 vérifie les hypothèses de la proposition 3.1.8. Le foncteur $L_f = f^* \circ f_*$ de la définition 2.7.4 est donc un foncteur de localisation par rapport à la théorie de torsion héréditaire :

$$\mathcal{T} = \{M \in {}_{\Gamma}\mathcal{C}\text{omod} \mid \ B \otimes_A M = 0\}.$$

Il n'est pas toujours facile d'expliciter un foncteur de localisation. Pour cela, on doit connaître les objets locaux. Le lemme suivant caractérise les objets locaux par rapport à une théorie de torsion héréditaire $\mathcal{T}$.

Lemme 3.1.10 (1.8, [HS05a]). *Soit $\mathcal{T}$ une théorie de torsion héréditaire dans une catégorie abélienne $\mathcal{C}$. Un objet X de $\mathcal{C}$ est $\mathcal{T}$-local si et seulement si, pour tout objet T de $\mathcal{T}$, on a :*

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(T, X) = \operatorname{Ext}^1_{\mathcal{C}}(T, X) = 0.$$

Démonstration : Soit X un objet $\mathcal{T}$-local. Pour tout $T \in \mathcal{T}$, $0 \longrightarrow T$ est une $\mathcal{T}$-équivalence, donc $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(T, X) = 0$. Considérons une extension dans $\mathcal{C}$:

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow T \longrightarrow 0.$$

Le morphisme f est alors une $\mathcal{T}$-équivalence. Comme X est $\mathcal{T}$-local, l'application

$$- \circ f : \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$$

est une bijection. Ainsi, la suite exacte courte admet une section, et par conséquent $\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{C}}(T, X) = 0$.

Réciproquement, supposons que $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(T, X) = \operatorname{Ext}^1_{\mathcal{C}}(T, X) = 0$ pour tout objet $T \in \mathcal{T}$, et soit $f : A \longrightarrow B$ une $\mathcal{T}$-équivalence. On a alors les suites exactes courtes suivantes :

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker} f \longrightarrow A \longrightarrow \operatorname{Im} f \longrightarrow 0 \quad \text{et}$$

$$0 \longrightarrow \operatorname{Im} f \longrightarrow B \longrightarrow \operatorname{Coker} f \longrightarrow 0.$$

En appliquant le foncteur $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X)$ à ces suites exactes courtes, et en utilisant l'hypothèse, on obtient que $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(f, X)$ est une bijection, et donc que X est $\mathcal{T}$-local. □

Nous allons terminer cette section par la définition du foncteur de torsion T.

Définition 3.1.11. *Soit (L, ρ) un foncteur de localisation sur une catégorie abélienne $\mathcal{C}$. On note T le noyau de ρ, c'est le foncteur de torsion associé à L. Ainsi, si $X \in \mathcal{C}$, on a la suite exacte courte :*

$$0 \longrightarrow T(X) \longrightarrow X \xrightarrow{\rho_X} L(X).$$

Remarque 3.1.12. Soit (L, ρ) un foncteur de localisation par rapport à une théorie de torsion héréditaire $\mathcal{T}$. Par hypothèse, ρ_X est une $\mathcal{T}$-équivalence, donc pour tout $X \in \mathcal{C}$, $T(X) \in \mathcal{T}$.

Le lemme suivant démontre que $T(X)$ est le plus grand sous-objet de X qui est dans $\mathcal{T}$:

Lemme 3.1.13. *Soit (L, ρ) un foncteur de localisation par rapport à une théorie de torsion héréditaire $\mathcal{T}$ et T le foncteur de torsion associé. Alors, pour tout objet $T \in \mathcal{T}$ et tout $X \in \mathcal{C}$, on a :*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T, X/T(X)) = 0.$$

Démonstration : Soient $T \in \mathcal{T}$, $X \in \mathcal{C}$ et $f : T \longrightarrow X/T(X) \in \mathcal{C}$. Comme $L(X)$ est $\mathcal{T}$-local, on a :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(T, L(X)) = 0.$$

La composée $T \xrightarrow{f} X/T(X) \hookrightarrow L(X)$ est nulle, donc $f = 0$. □

3.2 Foncteurs L_n de Hovey-Strickland

Considérons maintenant les foncteurs de localisation définis sur la catégorie des comodules à gauche gradués sur l'algébroïde de Hopf $(\mathsf{BP}_*, \mathsf{BP}_*\mathsf{BP})$. Ces foncteurs ont été étudiés par Ravenel dans [Rav92] et Hovey et Strickland dans [HS05a] et [HS05b]. Tout d'abord, définissons les foncteurs de localisation L_n par rapports aux théories de torsion héréditaire $\mathcal{T}_n$, pour $n \geq 0$.

Définition 3.2.1. *Soit $n \geq -1$. On note $\mathcal{T}_n$ la théorie de torsion héréditaire de la catégorie des $\mathsf{BP}_*\mathsf{BP}$-comodules constituée des comodules de v_n-torsion (par convention, $v_{-1} = 0$) :*

$$\mathcal{T}_n = \left\{ M \in {}_{\mathsf{BP}_*\mathsf{BP}}\mathcal{C}\mathrm{omod} \mid \ v_n^{-1}M = 0 \right\}.$$

Remarque 3.2.2. D'après le lemme 2.3 de [JY80], un $\mathsf{BP}_*\mathsf{BP}$-comodule M est de v_n-torsion si et seulement si il est de $\mathfrak{I}_{n+1}$-torsion, où $\mathfrak{I}_{n+1}$ est l'idéal invariant $(v_0, \cdots, v_n)$ (cf. la définition 1.8.11). Comme cet idéal ne dépend pas du choix des générateurs v_i, il en est de même pour la théorie de torsion héréditaire $\mathcal{T}_n$.

Le théorème suivant montre que les $\mathcal{T}_n$ sont les seules théories de torsion héréditaire simples.

Théorème 3.2.3 (3.1, [HS05a])**.** *Soit $\mathcal{T}$ une théorie de torsion héréditaire de la catégorie des $\mathsf{BP}_*\mathsf{BP}$-comodules à gauche. Si $\mathcal{T}$ contient un comodule de présentation finie non nul, alors il existe un entier $n \geq -1$ tel que $\mathcal{T} = \mathcal{T}_n$.*

Définition 3.2.4. *Soit M un BP_*-module gradué. On définit la hauteur de M comme étant le plus grand entier n tel que $M/\mathfrak{I}_n M \neq 0$:*

$$\mathrm{ht}\,(\mathrm{M}) = \sup\{\mathrm{n} \in \mathbb{N} \mid \ \mathrm{M}/\mathfrak{I}_\mathrm{n}\mathrm{M} \neq 0\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}.$$

Exemple 3.2.5. Soit $n \geq 0$ un entier et $E(n)_* = v_n^{-1}\mathsf{BP}_*$. On note $\Phi_n : \mathsf{BP}_* \longrightarrow E(n)_*$. Le morphisme Φ_n est Landweber exact pour l'algébroïde de Hopf $(\mathsf{BP}_*, \mathsf{BP}_*\mathsf{BP})$ et $E(n)_*$ est de hauteur n.

Le théorème suivant montre qu'en utilisant une BP_*-algèbre Landweber exacte, on ne peux pas obtenir d'autres théories de torsions héréditaires sur la catégorie des $\mathsf{BP}_*\mathsf{BP}$-comodules que les théories de torsion héréditaires $\mathcal{T}_n$.

Théorème 3.2.6 (4.2, [HS05a]). *Soient $f : \mathsf{BP}_* \longrightarrow B$ et $f' : \longrightarrow B'$ deux morphismes d'algèbres Landweber exacts pour l'algébroïde de Hopf $(A, \Gamma) = (\mathsf{BP}_*, \mathsf{BP}_*\mathsf{BP})$ tels que :*

$$\mathrm{ht}\,(\mathrm{B}) = \mathrm{ht}\,(\mathrm{B}') = \mathrm{n} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}.$$

Alors les foncteurs de localisations L_f et $L_{f'}$ sont naturellement isomorphes et, les catégories de Γ_B-comodules et de $\Gamma_{B'}$-comodules sont équivalentes. De plus :
- *Si $n < \infty$, ces catégories sont équivalentes à la localisation de la catégorie des $\mathsf{BP}_*\mathsf{BP}$-comodules par rapport à la théorie de torsion héréditaire $\mathcal{T}_n$.*
- *Si $n = \infty$, ces catégories sont équivalentes à la catégorie des $\mathsf{BP}_*\mathsf{BP}$-comodules.*

Remarque 3.2.7. Sous les hypothèses du théorème 3.2.6 et d'après le théorème 2.6.7 on peut trouver un Γ_B-$\Gamma_{B'}$ bicomodule W coplat en tant que $\Gamma_{B'}$-comodule à droite et un $\Gamma_{B'}$-Γ_B bicomodule T coplat en tant que Γ_B-comodule à droite qui réalisent cette équivalence de catégorie. D'après la proposition 2.7.8 on peut choisir :

$$W = B \otimes_A \Gamma \otimes_A B' \quad \text{et} \quad T = B' \otimes_A \Gamma \otimes_A B.$$

Définition 3.2.8. *Soit $n \geq 0$. On notera L_n et T_n les foncteurs de localisation et de torsion (cf. la définition 3.1.11) par rapport à la théorie de torsion héréditaire $\mathcal{T}_n$.*

$$L_n, T_n : {}_{\mathsf{BP}_*\mathsf{BP}}\mathcal{C}\mathrm{omod} \longrightarrow {}_{\mathsf{BP}_*\mathsf{BP}}\mathcal{C}\mathrm{omod}.$$

Par abus de langage, on dira qu'un $\mathsf{BP}_*\mathsf{BP}$-comodule est L_n-local s'il est $\mathcal{T}_n$-local.

Remarque 3.2.9. On peut remarquer que $L_n \simeq \Phi_n^* \circ \Phi_{n*}$, où Φ est le morphisme d'anneau de l'exemple 3.2.5.

La proposition suivante précise le lemme 3.1.10 : elle caractérise les $\mathsf{BP}_*\mathsf{BP}$-comodules L_n-locaux par des foncteurs Hom et Ext^1 calculés dans la catégorie des BP_*-modules, au lieu de la catégorie des $\mathsf{BP}_*\mathsf{BP}$-comodules. Elle est énoncée dans [HS05a] et [HS05b] ; sa démonstration utilise des résultats de l'article [JY80].

Proposition 3.2.10 (4.6, [HS05b]). *Soit M un $\mathsf{BP}_*\mathsf{BP}$-comodule. Alors M est L_n-local si et seulement si :*

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{BP}_*}(\mathsf{BP}_*/\mathfrak{I}_{n+1}, M) = \mathrm{Ext}^1_{\mathsf{BP}_*}(\mathsf{BP}_*/\mathfrak{I}_{n+1}, M) = 0.$$

Ce résultat permet de démontrer les deux propositions suivantes qui exhibent des comodules L_n-locaux. Cela permet de calculer L_nM pour des comodules M particuliers.

Proposition 3.2.11 (1.2, [HS05b]). *Soit $0 \leq j < n$ deux entiers. Soit M un $\mathsf{BP}_*\mathsf{BP}$-comodule de v_{j-1}-torsion sur lequel (v_j, v_{j+1}) est une suite régulière. Alors M est L_n-local.*

Proposition 3.2.12 (1.6, [HS05b]). *Soit $0 \leq j \leq n$ deux entiers. Soit M un $\mathsf{BP}_*\mathsf{BP}$-comodule tel que $v_j : \Sigma^{|v_j|}M \longrightarrow M$ est une bijection. Alors M est L_n-local.*

Lemme 3.2.13. *Soit M un $\mathsf{BP}_*\mathsf{BP}$-comodule de v_{n-1}-torsion. Il existe une unique structure de $\mathsf{BP}_*\mathsf{BP}$-comodule sur $v_n^{-1}M$ telle que le morphisme $M \longrightarrow v_n^{-1}M$ soit un morphisme de comodules.*

Démonstration : D'après la remarque 3.2.2, M est de $\mathfrak{I}_n$-torsion. Comme v_n est invariant modulo $\mathfrak{I}_n$ (cf. le théorème 1.8.15), le lemme 1.4.6 implique le résultat. □

Corollaire 3.2.14 (1.7, [HS05b]). *Soit $n \geq 0$ un entier et M un $\mathsf{BP}_*\mathsf{BP}$-comodule de v_{n-1}-torsion. Alors $L_nM \simeq v_n^{-1}M$. En particulier, pour tout $\mathsf{BP}_*\mathsf{BP}$-comodule M,*

$$L_0M = \mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}}M.$$

Démonstration : D'après le lemme 3.2.13, il existe une unique structure de comodule sur $v_n^{-1}M$ telle que le morphisme $M \longrightarrow v_n^{-1}M$ soit un morphisme de $\mathsf{BP}_*\mathsf{BP}$-comodules. Ce morphisme est une $\mathcal{T}_n$ équivalence et, d'après la proposition 3.2.12, $v_n^{-1}M$ est L_n-local. On en déduit que $L_nM \simeq v_n^{-1}M$. □

Corollaire 3.2.15. *Soient $k, n \geq 0$ deux entiers. Alors :*

$$L_n\mathsf{BP}_*/\mathfrak{I}_k = \begin{cases} \mathsf{BP}_*/\mathfrak{I}_k & si \quad k < n \\ v_n^{-1}\mathsf{BP}_*/\mathfrak{I}_n & si \quad k = n \\ 0 & si \quad k > n. \end{cases}$$

D'après la proposition 2.7.5, le foncteur L_n est exact à gauche. Il en est donc de même pour le foncteur T_n. Pour $i \geq 0$, nous noterons L_n^i et T_n^i leurs i-ème foncteur dérivé à droite. Nous allons maintenant étudier ces foncteurs.

Définition 3.2.16. *Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne. On dit qu'un monomorphisme $M \hookrightarrow N$ de $\mathcal{A}$ est une extension essentielle si pour tout $X \in \mathcal{A}$ tel que $M \oplus X \hookrightarrow N$ alors $X = 0$.*

Exemple 3.2.17. Si $\mathcal{A}$ est la catégorie des groupes abélien $\mathcal{A}$b, alors les morphismes suivants sont des extensions essentielles :
- $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$,
- $2\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}$,

La proposition essentielle est la suivante :

Proposition 3.2.18 (2.2, [HS05b]). *La théorie de torsion héréditaire $\mathcal{T}_n$ est stable par extension essentielle. En particulier, $\mathcal{T}_n$ est stable par enveloppe injective.*

Démonstration : Soit M un $\mathsf{BP}_*\mathsf{BP}$-comodule de v_n-torsion et $M \hookrightarrow N$ une extension essentielle. Soit $x \in N$ et $I = \sqrt{\mathrm{Ann(x)}}$. D'après le théorème 1 de [Lan79], I est un idéal invariant de BP_*. Si x n'est pas de v_n-torsion, $v_n \notin I$ et on doit avoir $I = I_k$ pour un certain $k \leq n$. Le théorème 2 de [Lan79] implique alors qu'il existe un élément primitif $y \in N$ tel que $\mathrm{Ann(y)} = \mathrm{I_k}$. Autrement dit, $\mathsf{BP}_*/\mathfrak{I}_k$ est un sous-comodule de N. Comme $\mathsf{BP}_*/\mathfrak{I}_k$ n'a pas de v_n-torsion, son intersection avec M doit être triviale. Cela contredit le fait que N est une extension essentielle de M. Donc N est de v_n-torsion. □

Corollaire 3.2.19 (2.3 et 2.4, [HS05b]). *Soit I un $\mathsf{BP}_*\mathsf{BP}$-comodule injectif. Alors :*
- *T_nI et I/T_nI sont des $\mathsf{BP}_*\mathsf{BP}$-comodules injectifs,*
- *$I \simeq T_nI \oplus I/T_nI$,*
- *$L_nI \simeq I/T_nI$.*

Démonstration : L'enveloppe injective de T_nI est un sous-comodule de I, car I est un injectif, et de v_n-torsion, d'après la proposition 3.2.18. L'enveloppe injective de T_nI est donc T_nI, et T_nI est injectif. On en déduit donc que I/T_nI est injectif et que la suite exacte courte :

$$0 \longrightarrow T_nI \longrightarrow I \longrightarrow I/T_nI \longrightarrow 0.$$

est scindée. Pour la dernière assertion, on remarque que le morphisme $I \longrightarrow I/T_nI$ est une $\mathcal{T}_n$ équivalence et que, d'après le lemme 3.1.10, I/T_nI est L_n-local puisque c'est un comodule injectif sans v_n-torsion. On a donc $L_nI = I/T_nI$. □

Corollaire 3.2.20 (3.1, [HS05b]). *Soit $n \geq 0$ et M un $\mathsf{BP}_*\mathsf{BP}$-comodule. On a une suite exacte courte naturelle de comodules :*

$$0 \longrightarrow T_n M \longrightarrow M \longrightarrow L_n M \longrightarrow T_n^1 M \longrightarrow 0$$

et, pour $i \geq 1$, l'isomorphisme naturel :

$$L_n^i M \simeq T_n^{i+1} M.$$

En particulier, pour $n = 0$, on a :

$$L_0 M = \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} M \quad , \quad T_0^1 M = \mathsf{BP}_*/p^\infty \otimes_{\mathsf{BP}_*} M \ ,$$
$$T_0 M = \mathrm{Tor}_1^{\mathsf{BP}_*}(\mathsf{BP}_*/p^\infty, M) \qquad et \qquad L_0^i M = T_n^{i+1} M = 0 \ pour \ i \geq 0.$$

Démonstration : Soit $M \longrightarrow I_\bullet$ une résolution injective de M. D'après le corollaire 3.2.19, on a la suite exacte courte de complexes suivante :

$$0 \longrightarrow T_n I_\bullet \longrightarrow I_\bullet \longrightarrow L_n I_\bullet \longrightarrow 0.$$

La suite exacte longue induite en homologie donne le résultat. Pour $n = 0$, on sait déjà grâce au corollaire 3.2.14 que $L_0 = \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} -$. Le foncteur L_0 est donc un foncteur exact et $L_0^i = T_0^{i+1} = 0$ pour tout $i \geq 0$. Enfin, d'après ce qui précède, on a la suite exacte courte de comodules :

$$0 \longrightarrow T_0 M \longrightarrow M \longrightarrow L_0 M \longrightarrow T_0^1 M \longrightarrow 0.$$

On peut remarquer que $L_0 = \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} - = p^{-1}\mathsf{BP}_* \otimes_{\mathsf{BP}_*} -$ et que cette suite exacte est la suite exacte longue des foncteurs $\mathrm{Tor}^{\mathsf{BP}_*}(-, M)$ du théorème 3.3.14 appliqué à la suite exacte courte :

$$0 \longrightarrow \mathsf{BP}_* \longrightarrow p^{-1}\mathsf{BP}_* \longrightarrow \mathsf{BP}_*/p^\infty \longrightarrow 0.$$

On en déduit les isomorphismes pour T_0 et T_0^1. □

Corollaire 3.2.21. *Soit M un $\mathsf{BP}_*\mathsf{BP}$-comodule de v_n-torsion. Alors M admet une résolution injective $M \longrightarrow I_\bullet$ dans la catégorie des $\mathsf{BP}_*\mathsf{BP}$-comodules telle que I_m est de v_n-torsion pour tout $m \geq 0$. En particulier, on en déduit que pour tous $i \geq 0$ et tout $k \leq n$:*

$$L_k^i M = T_k^{i+1} M = 0.$$

Démonstration : Soit M un $\mathsf{BP}_*\mathsf{BP}$-comodule de v_n-torsion. D'après la proposition 3.2.18, il existe un $\mathsf{BP}_*\mathsf{BP}$-comodule injectif I_0 de v_n-torsion qui contient M. Soit M_1 le quotient de I_0 par M :

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow I_0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow 0.$$

Comme I_0 est de v_n-torsion, M_1 est alors de v_n torsion. On en déduit alors, par récurrence, l'existence d'une résolution injective de M :

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow I_0 \longrightarrow I_1 \longrightarrow I_2 \longrightarrow \cdots$$

telle que pour tout $m \geq 0$, I_m est de v_n-torsion. Soit $k \geq n$. D'après la remarque 3.2.2, $T_k I_m = I_m$ pour tout $m \geq 0$. D'après le corollaire 3.2.20, pour $i \geq 0$:

$$L_k^i M = T_k^{i+1} M = \mathrm{H}_{i+1}(T_k I_\bullet) = \mathrm{H}_{i+1}(I_\bullet) = 0.$$

□

Théorème 3.2.22 (3.5, [HS05b]). *Soit M un $\mathsf{BP}_*\mathsf{BP}$-comodule et $j \geq 0$ tel que $v_j : \Sigma^{|v_j|} M \longrightarrow M$ est une bijection. Alors, pour tous $n \geq 0$ et tout $i > 0$,*

$$L_n^i M = 0.$$

De plus, $L_n M = 0$ si $j > n$ et $L_n M = M$ si $j \leq n$.

3.3 Structure de comodule sur les foncteur Tor

On considère dans cette section un $\Bbbk$-algébroïde de Hopf plat (A, Γ). Comme A est commutatif, le produit tensoriel de deux A-modules à gauche est naturellement muni d'une structure de A-module à gauche. De plus, pour tout A-module M le produit tensoriel avec M définit un foncteur exact à droite :

$$M \otimes_A - : {}_A\mathcal{M}\mathrm{od} \longrightarrow {}_A\mathcal{M}\mathrm{od}.$$

Comme la catégorie des A-modules à gauche admet assez de projectifs, on peut définir les foncteurs dérivés à gauche $\mathrm{Tor}_n^A(-,-)$ du produit tensoriel pour $n \geq 0$. Or, d'après la définition 1.2.17, pour tous Γ-comodules à gauche M et N, il existe une structure fonctorielle de Γ-comodule à gauche sur le produit tensoriel de A-modules à gauche, notée $M \wedge_A N$. D'après le théorème 1.2.20, si (A, Γ) est un $\Bbbk$-algébroïde de Hopf plat, la catégorie des Γ-comodules à gauche est abélienne mais n'admet pas, en général, suffisamment de projectifs et on ne peut pas espérer dériver directement ce foncteur dans cette catégorie.

On note $\mathrm{Ch}_{\geq 0}(A)$ la catégorie des complexes de chaîne de A-modules et $\mathrm{K}_{\geq 0}(A)$ la catégorie des complexes de chaîne de A-modules et des classes d'homotopies de morphismes de complexe de chaîne (cf. la définition 1.1.1 et l'exercice 1.4.5 de [Wei94]). Nous avons vu dans la sous-section 1.2 qu'un Γ-comodule est une coalgèbre sur la comonade $(\Gamma \otimes -, \epsilon, \Delta)$. On peut remarquer que cette comonade sur la catégorie des A-modules à gauche s'étend naturellement à la catégorie homotopique $\mathrm{K}_{\geq 0}(A)$. On dira qu'un complexe de chaîne $C_\bullet$ est un Γ-comodule à homotopie près si, vu dans la catégorie $\mathrm{K}_{\geq 0}(A)$, c'est une coalgèbre sur cette comonade induite. Plus précisément :

Définition 3.3.1. *Un Γ-comodule à gauche à homotopie près est un complexe de chaîne de A-modules à gauche, $C_\bullet \in \mathrm{Ch}_{\geq 0}(A)$, muni d'un morphisme de complexes de chaîne :*

$$\psi_C : C_\bullet \longrightarrow \Gamma \otimes_A C_\bullet,$$

tel que les diagrammes de coassociativité et de counitarité suivants commutent à homotopie près dans la catégorie $\mathrm{Ch}_{\geq 0}(A)$:

$$\begin{tikzcd} C_\bullet \arrow[r, "\psi_C"] \arrow[d, "\psi_C"'] \arrow[dr, phantom, "\Nearrow"] & \Gamma \otimes_A C_\bullet \arrow[d, "\Delta \otimes C_\bullet"] \\ \Gamma \otimes_A C_\bullet \arrow[r, "\Gamma \otimes \psi_C"'] & \Gamma \otimes_A \Gamma \otimes_A C_\bullet, \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C_\bullet \arrow[r, "\psi_C"] \arrow[dr, equal] & \Gamma \otimes_A C_\bullet \arrow[d, "\epsilon \otimes C_\bullet"] \\ & C_\bullet. \end{tikzcd}$$

Soient $C_\bullet$ et $D_\bullet$ deux Γ-comodules à gauche à homotopie près. On dit qu'un morphisme de complexes de chaîne $f : C_\bullet \longrightarrow D_\bullet$ est un morphisme de Γ-comodules à homotopie près si le diagramme suivant commute à homotopie près :

$$\begin{tikzcd} C_\bullet \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\psi_C"'] \arrow[dr, phantom, "\Nearrow"] & D_\bullet \arrow[d, "\psi_D"] \\ \Gamma \otimes_A C_\bullet \arrow[r, "\Gamma \otimes f"'] & \Gamma \otimes_A D_\bullet. \end{tikzcd}$$

On notera $\mathrm{Ch}_{\geq 0}(A)^\Gamma$ la catégorie des Γ-comodules à gauche à homotopie près.

Proposition 3.3.2. *Soient (A, Γ) un $\Bbbk$-algébroïde de Hopf plat et $C_\bullet$ un Γ-comodule à gauche à homotopie près. Alors, pour tout entier $n \geq 0$, le morphisme suivant définit une structure de Γ-comodule à gauche sur l'homologie du complexe $C_\bullet$, $\mathrm{H}_n(C)$:*

$$\psi_{\mathrm{H}_n(C)} : \mathrm{H}_n(C) \xrightarrow{\mathrm{H}_n(\psi_{C_\bullet})} \mathrm{H}_n(\Gamma \otimes_A C) \simeq \Gamma \otimes_A \mathrm{H}_n(C).$$

Démonstration : Comme $C_\bullet$ est un Γ-comodule à homotopie près, les diagrammes suivants commutent à homotopie près :

$$\begin{tikzcd} C_\bullet \arrow[r, "\psi_C"] \arrow[d, "\psi_C"'] \arrow[dr, phantom, "\Nearrow"] & \Gamma \otimes_A C_\bullet \arrow[d, "\Delta \otimes C_\bullet"] \\ \Gamma \otimes_A C_\bullet \arrow[r, "\Gamma \otimes \psi_C"'] & \Gamma \otimes_A \Gamma \otimes_A C_\bullet, \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C_\bullet \arrow[r, "\psi_C"] \arrow[dr, equal] & \Gamma \otimes_A C_\bullet \arrow[d, "\epsilon \otimes C_\bullet"] \arrow[dl, phantom, "\Rrightarrow"] \\ & C_\bullet. \end{tikzcd}$$

Soit $n \geq 0$. Par hypothèse, Γ est un A-module plat. On a donc l'isomorphisme fonctoriel :

$$\Gamma \otimes_A \mathrm{H}_n(C) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{H}_n(\Gamma \otimes_A C).$$

Considérons les diagrammes de A-modules à gauche suivants :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{H}_n(C) \arrow[r, "\mathrm{H}_n(\psi_C)"] \arrow[d, "\mathrm{H}_n(\psi_C)"] \arrow[rr, bend left, "\psi_{\mathrm{H}_n(C)}"] \arrow[dd, bend right=60, "\psi_{\mathrm{H}_n(C)}"'] & \mathrm{H}_n(\Gamma \otimes_A C) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "\mathrm{H}_n(\Delta \otimes C)"] & \Gamma \otimes_A \mathrm{H}_n(C) \arrow[dd, "\Delta \otimes \mathrm{H}_n(C)"] \\ \mathrm{H}_n(\Gamma \otimes_A C) \arrow[r, "\mathrm{H}_n(\Gamma \otimes \psi_C)"] \arrow[d, "\simeq"'] & \mathrm{H}_n(\Gamma \otimes_A \Gamma \otimes_A C) \arrow[d, "\simeq"'] \arrow[dr, "\simeq"] \arrow[d, phantom, shift left=6ex, "(1)"] & \\ \Gamma \otimes_A \mathrm{H}_n(C) \arrow[r, "\Gamma \otimes \mathrm{H}_n(\psi_C)"] \arrow[rr, bend right, "\Gamma \otimes \psi_{\mathrm{H}_n(C)}"'] & \Gamma \otimes_A \mathrm{H}_n(\Gamma \otimes_A C) \arrow[r, "\simeq"'] & \Gamma \otimes_A \Gamma \otimes_A \mathrm{H}_n(C) \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \mathrm{H}_n(C) \arrow[r, "\mathrm{H}_n(\psi_C)"] \arrow[dr, equal] & \mathrm{H}_n(\Gamma \otimes_A C) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "\mathrm{H}_n(\epsilon \otimes C)"'] \arrow[dr, phantom, "(2)"] & \Gamma \otimes_A \mathrm{H}_n(C) \arrow[dl, "\epsilon \otimes \mathrm{H}_n(C)"] \\ & \mathrm{H}_n(C). & \end{tikzcd}$$

Deux morphismes de complexes de chaîne homotopes induisent le même morphisme en homologie. Comme les triangles (1) et (2) commutent, on en déduit que les deux diagrammes précédents commutent dans la catégorie des A-modules à gauche, ce qui démontre le résultat. □

Rappelons le théorème d'algèbre homologique classique suivant :

Théorème 3.3.3 (Théorème de comparaison, 2.2.6 de [Wei94])**.** *Soient A une $\Bbbk$-algèbre, $f : M \longrightarrow N$ un morphisme de A-modules à gauche, $P_\bullet \longrightarrow M$ une résolution projective de M et $C_\bullet \longrightarrow N$ une résolution acyclique de N. Alors il existe un morphisme $\tilde{f} : P_\bullet \longrightarrow C_\bullet$ de complexes de chaîne qui relève f :*

$$\begin{tikzcd} P_\bullet \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d] & C_\bullet \arrow[d] \\ M \arrow[r, "f"'] & N. \end{tikzcd}$$

De plus, si $\tilde{f}_1$ et $\tilde{f}_2$ sont deux tels relèvements de f, alors il existe une homotopie entre ces *morphismes de complexes de chaîne* $\alpha : \tilde{f}_1 \Longrightarrow \tilde{f}_2$.

$$\begin{tikzcd}
P_\bullet \arrow[r, bend left, "\tilde{f}_1"] \arrow[r, bend right, "\tilde{f}_2"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] \arrow[d] & C_\bullet \arrow[d] \\
M \arrow[r, "f"'] & N.
\end{tikzcd}$$

Proposition 3.3.4. *Soient* (A, Γ) *un* $\Bbbk$*-algébroïde de Hopf plat,* M *un* Γ*-comodule à gauche et* $P_\bullet$ *une résolution projective de* M *par des* A*-modules à gauche. Soit* ψ_P *un relèvement de* ψ_M *:*

$$\begin{tikzcd}
P_\bullet \arrow[r, "\psi_P"] \arrow[d] & \Gamma \otimes_A P_\bullet \arrow[d] \\
M \arrow[r, "\psi_M"'] & \Gamma \otimes_A M.
\end{tikzcd}$$

Alors ψ_P *définit une structure de* Γ*-comodule à gauche à homotopie près sur* $P_\bullet$*. De plus, si* $Q_\bullet$ *est une autre résolution projective de* M *par des* A*-modules à gauche et* ψ_Q *est un relèvement de* ψ_M*, alors il existe une équivalence d'homotopie* $f : P_\bullet \longrightarrow Q_\bullet$*, unique à homotopie près telle que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd}
P_\bullet \arrow[r, "f"] \arrow[d] & Q_\bullet \arrow[d] \\
M \arrow[r, "id_M"'] & M,
\end{tikzcd}$$

et f *est un morphisme de* Γ*-comodules à homotopie près.*

Démonstration : Comme Γ est un A-module plat et $P_\bullet$ est une résolution de M, le complexe de chaîne $\Gamma \otimes_A P_\bullet$ est une résolution de $\Gamma \otimes_A M$. Par hypothèse, $P_\bullet$ est une résolution projective de M ; d'après le théorème 3.3.3 précédent, il existe un morphisme de complexes de chaîne $\psi_P : P_\bullet \longrightarrow \Gamma \otimes_A P_\bullet$ qui relève ψ_M. On doit démontrer que les diagrammes de coassociativité et de counitarité suivants commutent à homotopie près :

$$\begin{tikzcd}
P_\bullet \arrow[r, "\psi_P"] \arrow[d, "\psi_P"'] \arrow[dr, phantom, "\Nearrow"] & \Gamma \otimes_A P_\bullet \arrow[d, "\Delta \otimes P_\bullet"] \\
\Gamma \otimes_A P_\bullet \arrow[r, "\Gamma \otimes \psi_P"'] & \Gamma \otimes_A \Gamma \otimes_A P_\bullet,
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
P_\bullet \arrow[r, "\psi_P"] \arrow[dr, equal] & \Gamma \otimes_A P_\bullet \arrow[d, "\epsilon \otimes P_\bullet"] \arrow[dl, phantom, "\Rightarrow"] \\
 & P_\bullet.
\end{tikzcd}$$

On utilise alors la propriété d'unicité du relèvement du théorème 3.3.3. En effet, les morphismes $(\Gamma \otimes \psi_P) \circ \psi_P$ et $(\Delta \otimes P_\bullet) \circ \psi_P$ relèvent le même morphisme de A-modules :

$$(\Gamma \otimes \psi_M) \circ \psi_M = (\Delta \otimes M) \circ \psi_M : M \longrightarrow \Gamma \otimes_A \Gamma \otimes_A M.$$

Il existe donc une homotopie entre ces morphismes de complexes de chaîne. De la même façon, on montre la commutativité à homotopie près du diagramme de counitarité.

Enfin, si $Q_\bullet$ est une autre résolution projective de M et ψ_Q est un relèvement de ψ_M. Alors, d'après le théorème 3.3.3, $id_M : M \longrightarrow M$ se relève en un morphisme de complexe de chaîne $f : P_\bullet \longrightarrow Q_\bullet$. Comme $Q_\bullet$ est aussi une résolution projective de M, f est une équivalence d'homotopie. De même, la propriété d'unicité du relèvement du théorème 3.3.3 permet de montrer que le diagramme de A-modules à gauche suivant commute, ce qui montre que f est un morphisme de Γ-comodules à homotopie près.

$$\begin{tikzcd} P_\bullet \arrow[r, "\psi_P"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\nearrow\!\!\!\nearrow"] & \Gamma\otimes_A P_\bullet \arrow[d, "\Gamma\otimes f"] \\ Q_\bullet \arrow[r, "\psi_Q"'] & \Gamma\otimes_A Q_\bullet, \end{tikzcd}$$

□

Pour la suite, nous avons besoin de définir le produit tensoriel entre un Γ-comodule à gauche à homotopie près $C_\bullet$ et un Γ-comodule à gauche N. Pour cela, on généralise la construction de la définition 1.2.17. Soit K une $A\otimes_{\Bbbk}A$-algèbre, c'est-à-dire une $\Bbbk$-algèbre munie de deux morphismes de $\Bbbk$-algèbre $\eta_L, \eta_R : A \longrightarrow K$. L'algèbre K est naturellement un A-bimodule où la structure à gauche est donnée par η_L et la structure à droite par η_R. On définit alors la catégorie $\mathcal{M}_K$ suivante :

Définition 3.3.5. *Un objet de la catégorie $\mathcal{M}_K$ est un morphisme de A-modules à gauche :*

$$\psi : M \longrightarrow K\otimes_A M',$$

où M et M' sont des A-modules à gauche. Si $\psi_1 : M_1 \longrightarrow K \otimes_A M_1'$ et $\psi_2 : M_2 \longrightarrow K \otimes_A M_2'$ sont deux objets de $\mathcal{M}_K$, alors un morphisme $\psi_1 \longrightarrow \psi_2$ est un couple de morphismes de A-modules $(f : M_1 \longrightarrow M_2, f' : M_1' \longrightarrow M_2')$ tel que le diagramme de A-module suivant commute :

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\psi_1"'] & M_2 \arrow[d, "\psi_2"] \\ K\otimes_A M_1' \arrow[r, "K\otimes f'"'] & K\otimes_A M_2'. \end{tikzcd}$$

Remarque 3.3.6.
- Si (A,Γ) est un algébroïde de Hopf, on utilisera $\mathcal{M}_K$ avec $K \in \{A, \Gamma, \Gamma\otimes_A\Gamma\}$.
- Si $K = A$, alors $\mathcal{M}_A$ est naturellement équivalente à la catégorie des morphismes de A-modules.

La catégorie $\mathcal{M}_K$ est muni d'un produit monoïdal symétrique $\star_K$, défini de la façon suivante :

Définition 3.3.7. *Soient K une $A\otimes_{\Bbbk}A$-algèbre et ψ_1, ψ_2 deux objets de la catégorie $\mathcal{M}_K$:*

$$\psi_1 : M_1 \longrightarrow K\otimes_A M_1' \ , \ \psi_2 : M_2 \longrightarrow K\otimes_A M_2'.$$

On note :

$$\psi_1 \star_K \psi_2 : M_1\otimes_A M_2 \longrightarrow K\otimes_A(M_1' \otimes_A M_2'),$$

l'objet de $\mathcal{M}_K$ qui fait commuter le diagramme de $A\otimes_{\Bbbk}A$-modules suivant :

$$\begin{tikzcd} M_1\otimes_{\Bbbk}M_2 \arrow[r, "\psi_1\otimes\psi_2"] \arrow[d, "\pi_{M_1,M_2}"'] & (K\otimes_A M_1')\otimes_{\Bbbk}(K\otimes_A M_2') \arrow[r, "\simeq"] & (K\otimes_{\Bbbk}K)\otimes_{A\otimes A}(M_1'\otimes_{\Bbbk}M_2') \arrow[d, "\mu_K\otimes\pi_{M_1',M_2'}"] \\ M_1\otimes_A M_2 \arrow[rr, dashed, "\psi_1\star_K\psi_2"'] & & K\otimes_A(M_1'\otimes_A M_2'), \end{tikzcd}$$

où les morphismes π sont les projections canoniques et μ_K est la multiplication de la $A\otimes_{\Bbbk}A$-algèbre K. Plus explicitement, pour $m_1 \in M_1$ et $m_2 \in M_2$, si :

$$\psi_1(m_1) = \sum_i k_i\otimes m_{1,i}',$$

$$\psi_2(m_2) = \sum_j l_j \otimes m'_{2,j},$$

Alors :

$$\psi_1 \star_K \psi_2(m_1 \otimes m_2) = \sum_{i,j} k_i l_j \otimes m'_{1,i} \otimes m'_{2,j}.$$

Quand il n'y a pas d'ambiguïté possible, nous noterons $\star$ ce produit, au lieu de $\star_K$.

Lemme 3.3.8. *Soit K une $A \otimes_{\Bbbk} A$-algèbre. L'opération $\star_K$ définit un foncteur :*

$$\star_K : \mathcal{M}_K \times \mathcal{M}_K \longrightarrow \mathcal{M}_K.$$

Démonstration : Soient ψ_1, ψ_2, ϕ_1 et ϕ_2 quatre objets de la catégorie $\mathcal{M}_K$ et $(f_1, f'_1) : \phi_1 \Longrightarrow \psi_1$, $(f_2, f'_2) : \phi_2 \Longrightarrow \psi_2$ deux morphismes. Par définition, les diagrammes suivants commutent :

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\phi_1"'] & N_1 \arrow[d, "\psi_1"] \\ K \otimes_A M'_1 \arrow[r, "K \otimes f'_1"'] & K \otimes_A N'_1, \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "\phi_2"'] & N_2 \arrow[d, "\psi_2"] \\ K \otimes_A M'_2 \arrow[r, "K \otimes f'_2"'] & K \otimes_A N'_2. \end{tikzcd}$$

On vérifie facilement que le diagramme suivant commute et que $\star_K$ est bien un foncteur.

$$\begin{tikzcd} M_1 \otimes_A M_2 \arrow[r, "f_1 \otimes f_2"] \arrow[d, "\phi_1 \star_K \phi_2"'] & N_1 \otimes_A N_2 \arrow[d, "\psi_1 \star_K \psi_2"] \\ K \otimes_A (M'_1 \otimes_A M'_2) \arrow[r, "K \otimes f'_1 \otimes f'_2"'] & K \otimes_A (N'_1 \otimes_A N'_2). \end{tikzcd}$$

□

Proposition 3.3.9. *Soit K une $A \otimes_{\Bbbk} A$-algèbre. La catégorie $\mathcal{M}_K$, muni de $\star_K$ est une catégorie monoïdale symétrique dont l'unité est le morphisme de A-modules à gauche :*

$$\eta_L : A \longrightarrow K.$$

Démonstration : Le produit $\star_K$ est associatif et commutatif car K est une $\Bbbk$-algèbre associative et commutative. Le morphisme $\eta_L : A \longrightarrow K$ est l'unité de ce morphisme car A est l'unité du produit tensoriel. □

Proposition 3.3.10. *Soient K et L deux $A \otimes_{\Bbbk} A$-algèbres et $\alpha : K \longrightarrow L$ un morphisme de $A \otimes_{\Bbbk} A$-algèbres. Le morphisme α induit un foncteur monoïdal :*

$$\alpha_* : \left\{ \begin{array}{ccc} (\mathcal{M}_K, \star_K) & \longrightarrow & (\mathcal{M}_L, \star_L) \\ (\psi : M \longrightarrow K \otimes_A M') & \longmapsto & ((\alpha \otimes M) \circ \psi : M \longrightarrow L \otimes_A M') \,. \end{array} \right.$$

Démonstration : Cela découle directement de la définition 3.3.7 du produit $\star$. □

Lemme 3.3.11. *Soient K une $A\otimes_{\Bbbk}A$-algèbre, $\psi : M \longrightarrow K\otimes_A M'$ un objet de $\mathcal{M}_K$, $C_\bullet$ et $C'_\bullet$ deux complexes de chaîne de A-modules, $\phi_1, \phi_2 : C_\bullet \longrightarrow K\otimes_A C'_\bullet$ deux morphismes de complexes de chaîne et $\alpha : \phi \Longrightarrow \psi$ une homotopie entre ces deux morphismes :*

$$\begin{tikzcd}
C_\bullet \arrow[rr, bend left, "\phi_1"] \arrow[rr, bend right, "\phi_2"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow\alpha"] & & K\otimes_A C'_\bullet
\end{tikzcd}$$

Alors $\phi_1 \star_K \psi$ et $\phi_2 \star_K \psi$ définissent deux morphismes de complexes de chaîne et $\alpha \star_K \psi$ définit une homotopie de $\phi_1 \star_K \psi$ vers $\phi_2 \star_K \psi$:

$$\begin{tikzcd}
C_\bullet\otimes_A M \arrow[rr, bend left, "\phi_1\star_K\psi"] \arrow[rr, bend right, "\phi_2\star_K\psi"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow\alpha\star_K\psi"] & & K\otimes_A(C'_\bullet\otimes_A M')
\end{tikzcd}$$

Démonstration : Commençons par montrer que $\phi_1 \star_K \psi$ et $\psi_2 \star_K \psi$ sont des morphismes de complexes de chaîne. Par hypothèse, pour tout entier n, le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
C_{n+1} \arrow[r, "\phi_{1,n+1}"] \arrow[d, "d_{n+1}"'] & K\otimes_A C'_{n+1} \arrow[d, "K\otimes d'_{n+1}"] \\
C_n \arrow[r, "\phi_{1,n}"'] & K\otimes_A C'_n.
\end{tikzcd}$$

C'est-à-dire que (d_{n+1}, d'_{n+1}) est un morphisme de $\phi_{1,n+1}$ vers $\phi_{1,n}$ dans la catégorie $\mathcal{M}_K$. Par fonctorialité de $\star_K$, on en déduit que $(d_{n+1}\otimes M, d'_{n+1}\otimes M')$ est un morphisme de $\phi_{1,n+1} \star_K \psi$ vers $\phi_{1,n} \star_K \psi$ et que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
C_{n+1}\otimes_A M \arrow[r, "\phi_{1,n+1}\star_K\psi"] \arrow[d, "d_{n+1}\otimes M"'] & K\otimes_A(C'_{n+1}\otimes_A M') \arrow[d, "K\otimes d_{n+1}\otimes M'"] \\
C_n\otimes_A M \arrow[r, "\phi_{1,n}\star_K\psi"'] & K\otimes_A(C'_n\otimes_A M').
\end{tikzcd}$$

Cela démontre que $\phi_1 \star_K \psi$ et $\phi_2 \star_K \psi$ sont des morphismes de complexes de chaîne. Montrons maintenant que $\alpha \star_K \psi$ définit une homotopie de $\phi_1 \star_K \psi$ vers $\phi_2 \star_K \psi$. Par hypothèse, pour tout entier n, on a :

$$(K\otimes d'_{n+1}) \circ \alpha_n + \alpha_{n-1} \circ d_n = \phi_{1,n} - \phi_{2,n}.$$

$$\begin{tikzcd}
 & K\otimes_A C'_{n+1} \arrow[d, "K\otimes d'_{n+1}"] \\
C_n \arrow[ur, "\alpha_n"] \arrow[r, shift left, "\phi_{1,n}"] \arrow[r, shift right, "\phi_{2,n}"'] \arrow[d, "d_n"'] & K\otimes_A C'_n \\
C_{n-1} \arrow[ur, "\alpha_{n-1}"'] & .
\end{tikzcd}$$

D'après la fonctorialité de $\star_K$, on a :

$$((K\otimes d'_{n+1}) \circ \alpha_n) \star_K \psi = (K\otimes d'_{n+1}\otimes M') \circ (\alpha_n \star_K \psi),$$

$$(\alpha_{n-1} \circ d_n) \star_K \psi = (\alpha_{n-1} \star_K \psi) \circ (d_n \otimes M).$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \phi_{1,n} \star_K \psi - \phi_{2,n} \star_K \psi &= \left[(K \otimes d'_{n+1}) \circ \alpha_n + \alpha_{n-1} \circ d_n\right] \star_K \psi \\ &= (K \otimes d'_{n+1} \otimes M') \circ (\alpha_n \star_K \psi) + (\alpha_{n-1} \star_K \psi) \circ (d_n \otimes M). \end{aligned}$$

Cela démontre que $\alpha \star_K \psi$ est une homotopie de $\phi_1 \star_K \psi$ vers $\phi_2 \star_K \psi$. $\square$

Lemme 3.3.12. *Soient K, L deux $A \otimes_{\Bbbk} A$-algèbres et $\psi_i : M_i \longrightarrow K \otimes_A M'_i$, $\phi_i : M'_i \longrightarrow L \otimes_A M''_i$ pour $i = 1, 2$ des objets de, respectivement, $\mathcal{M}_K$ et $\mathcal{M}_L$. On a alors l'égalité suivante dans $\mathcal{M}_{K \otimes_A L}$*

$$((K \otimes \phi_1) \circ \psi_1) \star_{K \otimes L} ((K \otimes \phi_2) \circ \psi_2) = (K \otimes (\phi_1 \star_L \phi_2)) \circ (\psi_1 \star_K \psi_2).$$

Démonstration : D'après la définition 3.3.7, le diagramme de $A \otimes_{\Bbbk} A$-modules suivant commute :

$$\begin{tikzcd} M'_1 \otimes_{\Bbbk} M'_2 \arrow[r, "\phi_1 \otimes \phi_2"] \arrow[d, "\pi_{M'_1, M'_2}"'] & (L \otimes_A M''_1) \otimes_{\Bbbk} (L \otimes_A M''_2) \arrow[r, "\simeq"] & (L \otimes_{\Bbbk} L) \otimes_{A \otimes A} (M''_1 \otimes_{\Bbbk} M''_2) \arrow[d, "\mu_L \otimes \pi_{M''_1, M''_2}"] \\ M'_1 \otimes_A M'_2 \arrow[rr, "\phi_1 \star_L \phi_2"'] & & L \otimes_A (M''_1 \otimes_A M''_2). \end{tikzcd}$$

On applique le foncteur $(K \otimes_{\Bbbk} K) \otimes_{A \otimes A} -$ à ce diagramme, où $K \otimes_{\Bbbk} K$ est un $A \otimes_{\Bbbk} A$-module à droite par le morphisme de $\Bbbk$-algèbres : $\eta_R \otimes \eta_R : A \otimes_{\Bbbk} A \longrightarrow K \otimes_{\Bbbk} K$. On obtient alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} (K \otimes_{\Bbbk} K) \otimes_{A \otimes A} (M'_1 \otimes_{\Bbbk} M'_2) \arrow[r, "K \otimes K \otimes \phi_1 \otimes \phi_2"] \arrow[d, "K \otimes K \otimes \pi_{M'_1, M'_2}"'] & (K \otimes_{\Bbbk} K) \otimes_{A \otimes A} (L \otimes_{\Bbbk} L) \otimes_{A \otimes A} (M''_1 \otimes_{\Bbbk} M''_2) \arrow[d, "K \otimes K \otimes \mu_L \otimes \pi_{M''_1, M''_2}"] \\ (K \otimes_{\Bbbk} K) \otimes_{A \otimes A} (M'_1 \otimes_A M'_2) \arrow[r, "K \otimes K \otimes (\phi_1 \star_L \phi_2)"'] \arrow[d, "\mu_K \otimes M'_1 \otimes M'_2"'] & (K \otimes_{\Bbbk} K) \otimes_{A \otimes A} L \otimes_A (M''_1 \otimes_A M''_2) \arrow[d, "\mu_K \otimes L \otimes M''_1 \otimes M''_2"] \\ K \otimes_A (M'_1 \otimes_A M'_2) \arrow[r, "K \otimes (\phi_1 \star_L \phi_2)"'] & K \otimes_A L \otimes_A (M''_1 \otimes_A M''_2). \end{tikzcd}$$

Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & & (K\otimes_A M'_1)\otimes_{\Bbbk}(K\otimes_A M'_2) \arrow[ddrr, "(K\otimes\phi_1)\otimes(K\otimes\phi_2)"] \arrow[dd, "\simeq"] & & & \\
M_1\otimes_{\Bbbk}M_2 \arrow[urr, "\psi_1\otimes\psi_2"] \arrow[drr] \arrow[ddd, "\pi_{M_1,M_2}"'] & & & & (K\otimes_A L\otimes_A M''_1)\otimes_{\Bbbk}(K\otimes_A L\otimes_A M''_2) \arrow[dd, "\simeq"] & \\
 & & (K\otimes_{\Bbbk}K)\otimes_{A\otimes A}(M'_1\otimes_{\Bbbk}M'_2) \arrow[drr, "K\otimes K\otimes\phi_1\otimes\phi_2"] \arrow[ddd, "\mu_K\otimes\pi_{M'_1,M'_2}"'] & & & \\
 & & & & (K\otimes_{\Bbbk}K)\otimes_{A\otimes A}(L\otimes_{\Bbbk}L)\otimes_{A\otimes A}(M''_1\otimes_{\Bbbk}M''_2) \arrow[ddr, "\simeq"] \arrow[ddd, "\mu_K\otimes\mu_L\otimes\pi_{M''_1,M''_2}"'] & \\
M_1\otimes_A M_2 \arrow[uurr, phantom, "(a)"] \arrow[drr, "\psi_1\star_K\psi_2"] \arrow[ddrrrr, dashed, bend right, "((K\otimes\phi_1)\circ\psi_1)\star_{K\otimes L}((K\otimes\phi_2)\circ\psi_2)"'] & & & & & \\
 & & K\otimes_A(M'_1\otimes_A M'_2) \arrow[uurr, phantom, "(b)"] \arrow[drr, "K\otimes(\phi_1\star_L\phi_2)"'] & & & ((K\otimes_A L)\otimes_{\Bbbk}(K\otimes_A L))\otimes_{A\otimes A}(M''_1\otimes_{\Bbbk}M''_2) \arrow[dl, "\mu_{K\otimes L}\otimes\pi_{M''_1,M''_2}"] \\
 & & & & K\otimes_A L\otimes_A(M''_1\otimes_A M''_2) &
\end{tikzcd}$$

Le carré (b) commute d'après ce qui précède et le carré (a) commute d'après la définition 3.3.7 appliquée aux objets ψ_1 et ψ_2 de $\mathcal{M}_K$. On en déduit donc que le diagramme commute. Or, en considérant les flèches du bord de ce diagramme, on reconnaît le diagramme de la définition 3.3.7 appliquée aux objets $(K\otimes\phi_1)\circ\psi_1$ et $(K\otimes\phi_2)\circ\psi_2$ de la catégorie $\mathcal{M}_{K\otimes_A L}$. On en déduit donc que la flèche en pointillé est égale à la composée de $K\otimes(\phi_1\star_L\phi_2)$ et $\psi_1\star_K\psi_2$, ce qui est le résultat voulu. $\square$

Proposition 3.3.13. *Soit (A,Γ) un $\Bbbk$-algébroïde de Hopf, $C_\bullet$ un Γ-comodule à homotopie près et N un Γ-comodule à gauche. Alors le morphisme :*

$$\psi_{C_\bullet}\star_\Gamma\psi_N : C_\bullet\otimes_A N \longrightarrow \Gamma\otimes_A(C_\bullet\otimes_A N).$$

définit une structure de Γ-comodule à homotopie près sur $C_\bullet\otimes_A N$, que nous noterons $C_\bullet\wedge_A N$.

Démonstration : D'après le lemme précédent, $\psi_{C_\bullet}\star_\Gamma\psi_N$ est bien un morphisme dans la catégorie des complexes de chaîne de A-modules à gauche $\mathrm{Ch}_{\geq 0}(A)$. Il faut maintenant montrer que $\psi_{C_\bullet}\star_\Gamma\psi_N$ définit une structure de Γ-comodule à homotopie près sur $C_\bullet\otimes_A N$. Par hypothèse, il existe des homotopies α et β entre les composées suivantes :

$$\begin{tikzcd}
C_\bullet \arrow[r, "\psi_C"] \arrow[d, "\psi_C"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\alpha}{\Rrightarrow}"] & \Gamma\otimes_A C_\bullet \arrow[d, "\Delta\otimes C"] \\
\Gamma\otimes_A C_\bullet \arrow[r, "\Gamma\otimes\psi_C"'] & \Gamma\otimes_A\Gamma\otimes_A C_\bullet,
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
C_\bullet \arrow[r, "\psi_C"] \arrow[dr, equal] \arrow[dr, phantom, shift left=3, "\overset{\beta}{\Rightarrow}"] & \Gamma\otimes_A C_\bullet \arrow[d, "\epsilon\otimes C"] \\
 & C_\bullet.
\end{tikzcd}$$

On doit montrer qu'il existe des homotopies α' et β' qui font commuter les diagrammes suivants :

$$\begin{tikzcd}
C_\bullet \otimes_A N \arrow[r, "\psi_C \star_\Gamma \psi_N"] \arrow[d, "\psi_C \star_\Gamma \psi_N"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\alpha'}{\Rrightarrow}"] & \Gamma \otimes_A C_\bullet \otimes_A N \arrow[d, "\Delta \otimes C \otimes N"] \\
\Gamma \otimes_A C_\bullet \otimes_A N \arrow[r, "\Gamma \otimes (\psi_C \star_\Gamma \psi_N)"'] & \Gamma \otimes_A \Gamma \otimes_A C_\bullet \otimes_A N,
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
C_\bullet \otimes_A N \arrow[r, "\psi_C \star_\Gamma \psi_N"] \arrow[dr, equal] & \Gamma \otimes_A C_\bullet \otimes_A N \arrow[d, "\epsilon \otimes C \otimes N"] \arrow[dl, phantom, "\overset{\beta'}{\Rightarrow}"] \\
& C_\bullet \otimes_A N.
\end{tikzcd}$$

Par hypothèse, β est une homotopie de $id_{C_\bullet}$ vers $\epsilon \otimes C_\bullet \circ \psi_C$. On pose :

$$\beta' = \beta \star_A N = \beta \otimes_A N.$$

D'après le lemme 3.3.11, β' définit une homotopie entre les morphismes $id_{C_\bullet \otimes_A N}$ et $(\epsilon \otimes C_\bullet \circ \psi_C) \otimes_A N$. Or, $\epsilon : \Gamma \longrightarrow A$ est un morphisme de $A \otimes_{\Bbbk} A$-algèbre et :

$$\epsilon_*(\psi_C) = (\epsilon \otimes C_\bullet \circ \psi_C),$$

où $\epsilon_* : \mathcal{M}_\Gamma \longrightarrow \mathcal{M}_A$ est le foncteur de la proposition 3.3.10. Comme ce foncteur est monoïdal et $\epsilon_*(\psi_N) = (\epsilon \otimes N) \circ \psi_N = id_N$, on en déduit que :

$$\begin{aligned}
(\epsilon \otimes C_\bullet \circ \psi_C) \otimes_A N &= \epsilon_*(\psi_C) \star_A \epsilon_*(\psi_N) \\
&= \epsilon_*(\psi_C \star_\Gamma \psi_N) \\
&= (\epsilon \otimes C \otimes N) \circ (\psi_C \star_\Gamma \psi_N).
\end{aligned}$$

Cela démontre que $\psi_C \star_\Gamma \psi_N$ est bien counitaire à homotopie près. Il reste à démontrer la coassociativité à homotopie près. Par hypothèse :

$$\alpha : (\Gamma \otimes \psi_C) \circ \psi_C \Longrightarrow (\Delta \otimes C) \circ \psi_C.$$

On pose :

$$\alpha' = \alpha \star_{\Gamma \otimes \Gamma} ((\Delta \otimes N) \circ \psi_N).$$

D'après le lemme 3.3.11 et comme N est un Γ-comodule à gauche, α' définit une homotopie entre les morphismes suivants :

$$((\Gamma \otimes \psi_C) \circ \psi_C) \star_{\Gamma \otimes \Gamma} (\Gamma \otimes \psi_N) \circ \psi_N,$$

$$((\Delta \otimes C) \circ \psi_C) \star_{\Gamma \otimes \Gamma} ((\Delta \otimes N) \circ \psi_N).$$

Or, $\Delta : \Gamma \longrightarrow \Gamma \otimes_A \Gamma$ est un morphisme de $A \otimes_{\Bbbk} A$-algèbres et on a :

$$\begin{aligned}
((\Delta \otimes C) \circ \psi_C) \star_{\Gamma \otimes \Gamma} ((\Delta \otimes N) \circ \psi_N) &= (\Delta_* \psi_C) \star_{\Gamma \otimes \Gamma} (\Delta_* \psi_N) \\
&= \Delta_*(\psi_C \star_\Gamma \psi_N) \\
&= (\Delta \otimes C \otimes N) \circ (\psi_C \otimes \psi_N).
\end{aligned}$$

D'après le lemme 3.3.12, on a l'égalité suivante :

$$((\Gamma \otimes \psi_C) \circ \psi_C) \star_{\Gamma \otimes \Gamma} ((\Gamma \otimes \psi_N) \circ \psi_N) = (\Gamma \otimes (\psi_C \star_\Gamma \psi_N)) \circ (\psi_C \star_\Gamma \psi_N).$$

Cela démontre que le diagramme de coassociativité commute à homotopie près. □

Soient (A, Γ) un $\Bbbk$-algébroïde de Hopf plat, M et N deux Γ-comodules à gauche et $P_\bullet$ une résolution projective de M par des A-modules à gauche. D'après les propositions 3.3.4 et 3.3.13, les complexes de chaîne $P_\bullet$ et $P_\bullet \wedge_A N$ sont munis d'une structure de Γ-comodule à homotopie près. Or, pour tout entier $n \geq 0$, on a :

$$\mathrm{H}_n(P_\bullet \wedge_A N) = \mathrm{Tor}_n^A(M, N).$$

D'après la proposition 3.3.2, on a donc une structure de Γ-comodule sur $\mathrm{Tor}_n^A(M, N)$ et cette structure est indépendante de la résolution projective choisie, d'après la proposition 3.3.4.

Théorème 3.3.14. *Soient (A,Γ) un $\Bbbk$-algébroïde de Hopf plat, M un Γ-comodule à gauche et une suite exacte de Γ-comodules à gauche :*

$$0 \longrightarrow N_1 \longrightarrow N_3 \longrightarrow N_2 \longrightarrow 0.$$

Alors la suite exacte longue des foncteurs Tor^A *est une suite exacte de Γ-comodules à gauche :*

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{Tor}^A_{n+1}(M,N_2) \longrightarrow \mathrm{Tor}^A_n(M,N_1) \longrightarrow \mathrm{Tor}^A_n(M,N_3) \longrightarrow \mathrm{Tor}^A_n(M,N_2) \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{Tor}^A_1(M,N_2) \longrightarrow M \wedge_A N_1 \longrightarrow M \wedge_A N_3 \longrightarrow M \wedge_A N_2 \longrightarrow 0.$$

Démonstration : Soit $P_\bullet \longrightarrow M$, une résolution projective de M par des A-modules. D'après les propositions 3.3.4 et 3.3.13, le complexe de chaîne $P_\bullet$ ainsi que les complexes de chaîne $P_\bullet \wedge_A N_i$, pour $i = 1, 2, 3$, sont munis de structures de Γ-comodule à homotopie près. Comme, pour tout $n \geq 0$, P_n est un A-module projectif, on a une suite exacte de complexes de chaîne :

$$0 \longrightarrow P_\bullet \wedge_A N_1 \longrightarrow P_\bullet \wedge_A N_3 \longrightarrow P_\bullet \wedge_A N_2 \longrightarrow 0$$

et les morphismes de cette suite exacte sont des morphismes de Γ-comodules à homotopie près. De plus, le diagramme de complexes de chaîne suivant commute exactement :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & P_\bullet \wedge_A N_1 \arrow[r] \arrow[d, "\psi_P \star_\Gamma \psi_{N_1}"'] & P_\bullet \wedge_A N_3 \arrow[r] \arrow[d, "\psi_P \star_\Gamma \psi_{N_3}"'] & P_\bullet \wedge_A N_2 \arrow[r] \arrow[d, "\psi_P \star_\Gamma \psi_{N_2}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Gamma \otimes_A (P_\bullet \wedge_A N_1) \arrow[r] & \Gamma \otimes_A (P_\bullet \wedge_A N_3) \arrow[r] & \Gamma \otimes_A (P_\bullet \wedge_A N_2) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Par fonctorialité de la suite exacte longue induite en homologie et d'après la proposition 3.3.2, on en déduit que la suite exacte longue des foncteurs Tor est une suite exacte longue de Γ-comodules à gauche. □

Proposition 3.3.15. *Soient (A,Γ) un $\Bbbk$-algébroïde de Hopf plat, M, N deux Γ-comodules à gauche et*

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_{m-1} \subset M_m = M$$

une filtration de M par des sous-comodules. Alors il existe une suite spectrale homologique de Γ-comodules

$$(E^r_{s,t}, d^r : E^r_{s,t} \longrightarrow E^r_{s-r,t+r-1}),$$

telle que :

$$E^1_{s,t} \simeq \mathrm{Tor}^A_{s+t}(N, M_s/M_{s-1}) \Longrightarrow \mathrm{Tor}^A_{s+t}(N, M).$$

Démonstration : Soit $D^1_{s,t} = \mathrm{Tor}^A_{s+t}(N, M_s)$. On a alors un couple exacte dans la catégorie des Γ-comodules :

$$\begin{tikzcd}
D^1 \arrow[rr, "i"] & & D^1 \arrow[dl, "j"] \\
& E^1 \arrow[ul, "k"] &
\end{tikzcd}$$

Avec i, j, k de bidegré respectifs $(1,-1), (0,0)$ et $(-1,0)$. Ce couple exact détermine une suite spectrale qui est bornée, et donc converge. (On renvoie à [Wei94] pour la convergence.) □

3.4 Isomorphisme entre les foncteurs T_n^i et $\mathrm{Tor}_{n-i+1}^{\mathsf{BP}_*}(K_n,-)$

D'après le théorème 1.8.15, la suite $(p = v_0, v_1, \dots, v_n, \dots)$ est une suite régulière invariante de l'algébroïde de Hopf $(\mathsf{BP}_*, \mathsf{BP}_*\mathsf{BP})$. Nous allons construire par récurrence les $\mathsf{BP}_*\mathsf{BP}$-comodule K_n, pour $n \geq -1$, de la façon suivante :

Proposition et définition 3.4.1. *Soit $n \geq -1$. On considère le BP_*-module K_n suivant :*

$$K_n = \mathsf{BP}_*/(v_0^\infty, \dots, v_n^\infty).$$

Il existe une unique structure de $\mathsf{BP}_*\mathsf{BP}$-comodule à gauche sur K_n telle que pour tout $n \geq -1$, la suite exacte courte suivante est une suite exacte dans la catégorie des $\mathsf{BP}_*\mathsf{BP}$-comodules :

$$0 \longrightarrow K_n \longrightarrow v_{n+1}^{-1}K_n \longrightarrow K_{n+1} \longrightarrow 0.$$

Démonstration : Supposons qu'on ait une structure de $\mathsf{BP}_*\mathsf{BP}$-comodule sur K_n. Comme K_n est de v_n-torsion, d'après le lemme 3.2.13, il existe une unique structure de comodule sur $v_{n+1}^{-1}K_n$ telle que le morphisme $K_n \longrightarrow v_{n+1}^{-1}K_n$ soit un morphisme de comodule. La suite exacte courte

$$0 \longrightarrow K_n \longrightarrow v_{n+1}^{-1}K_n \longrightarrow K_{n+1} \longrightarrow 0$$

détermine alors de manière unique la structure de comodule sur K_{n+1}. □

Les résultats de la section 3.3 permettent de définir, pour tout $\mathsf{BP}_*\mathsf{BP}$-module M et tout entier $i \geq 0$, une structure de $\mathsf{BP}_*\mathsf{BP}$-comodule sur $\mathrm{Tor}_i^{\mathsf{BP}_*}(K_n, M)$. Nous allons démontrer qu'il existe un isomorphisme fonctoriel de $\mathsf{BP}_*\mathsf{BP}$-comodules : $T_n^i \longrightarrow \mathrm{Tor}_{n+1-i}^{\mathsf{BP}_*}(K_n,-)$, pour tout $0 \leq i \leq n+1$.

Proposition 3.4.2. *Pour tout comodule M, et pour tout $n \geq -1$, on a :*
- $\mathrm{Tor}_j^{\mathsf{BP}_*}(K_n, M) = 0$ *pour* $j \geq n+2$.
- $\mathrm{Tor}_{n+1}^{\mathsf{BP}_*}(K_n, M) = T_nM$

Démonstration : On démontre le résultat par récurrence sur $n \geq -1$. Pour $n = -1$, T_{-1} est le foncteur identité et $K_{-1} = \mathsf{BP}_*$, donc le résultat est immédiat. Supposons le résultat est vrai pour n. D'après la proposition 3.4.1, on a la suite exacte courte de $\mathsf{BP}_*\mathsf{BP}$-comodules :

$$0 \longrightarrow K_n \longrightarrow v_{n+1}^{-1}K_n \longrightarrow K_{n+1} \longrightarrow 0.$$

Comme $\mathrm{Tor}_i^{\mathsf{BP}_*}(v_{n+1}^{-1}K_n, M) \simeq v_{n+1}^{-1}\,\mathrm{Tor}_i^{\mathsf{BP}_*}(K_n, M)$, on a la suite exacte longue :

$$\cdots \longrightarrow v_{n+1}^{-1}\,\mathrm{Tor}_j^{\mathsf{BP}_*}(K_n, M) \longrightarrow \mathrm{Tor}_j^{\mathsf{BP}_*}(K_{n+1}, M) \longrightarrow \mathrm{Tor}_{j-1}^{\mathsf{BP}_*}(K_n, M) \longrightarrow \cdots.$$

En particulier, pour $j \geq n+3$, d'après l'hypothèse de récurrence :

$$\mathrm{Tor}_j^{\mathsf{BP}_*}(K_n, M) = \mathrm{Tor}_{j-1}^{\mathsf{BP}_*}(K_n, M) = 0.$$

On a donc :

$$\mathrm{Tor}_j^{\mathsf{BP}_*}(K_{n+1}, M) = 0.$$

Enfin, pour $j = n+2$, on a la suite exacte courte :

$$0 \longrightarrow \mathrm{Tor}_{n+2}^{\mathsf{BP}_*}(K_{n+1}, M) \longrightarrow T_nM \longrightarrow v_{n+1}^{-1}T_nM \longrightarrow \cdots.$$

La remarque 3.2.2 nous permet alors d'en déduire que $\mathrm{Tor}_{n+2}^{\mathsf{BP}_*}(K_{n+1}, M) = T_{n+1}M$. □

Nous allons maintenant définir des morphismes de foncteurs $\phi_{i,n} : T_n^i \longrightarrow \mathrm{Tor}_{n+1-i}^{\mathsf{BP}_*}(K_n,-)$. Pour cela, nous allons utiliser le résultat suivant sur les δ-foncteurs.

Définition 3.4.3 (2.1.1, [Wei94]). *Un δ-foncteur cohomologique entre deux catégories abéliennes $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ est la donnée d'une famille de foncteurs additifs $F^n : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ pour $n \geq 0$, et de morphismes :*

$$\delta^n : F^n C \longrightarrow F^{n+1} A,$$

définis pour chaque suite exacte courte dans la catégorie $\mathcal{A}$:

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0.$$

Avec la convention $F^n = 0$ pour $n < 0$, ces données doivent de plus vérifier les deux conditions suivantes :

- *Pour chaque suite exacte courte comme ci-dessus, on a la suite exacte longue dans la catégorie $\mathcal{B}$:*

$$\cdots \longrightarrow F^{n-1}C \xrightarrow{\delta^{n-1}} F^n A \xrightarrow{F^n f} F^n B \xrightarrow{F^n g} F^n C \xrightarrow{\delta^n} \cdots .$$

  En particulier, F^0 est exact à gauche.
- *Les morphismes δ^n sont fonctoriels, c'est-à-dire que si on a un diagramme commutatif de suites exactes courtes :*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "b"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "c"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "f'"'] & B' \arrow[r, "g'"'] & C' \arrow[r] & 0, \end{tikzcd}$$

  alors le diagramme suivant commute pour tout $n \geq 0$:

$$\begin{tikzcd} F^n C \arrow[r, "\delta^n"] \arrow[d, "F^n c"'] & F^{n+1} A \arrow[d, "F^{n+1} a"] \\ F^n C' \arrow[r, "\delta^n"'] & F^{n+1} A'. \end{tikzcd}$$

Définition 3.4.4 (2.1.4, [Wei94]). *Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux catégories abéliennes et $F = (F^n)_{n\geq 0}$ et $G = (G^n)_{n\geq 0}$ deux δ-foncteurs cohomologiques. Un morphisme de δ-foncteur $F \longrightarrow G$ est la donnée de morphismes de foncteurs $\phi^n : F^n \longrightarrow G^n$ tels que pour toute suite exacte courte*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

dans la catégorie $\mathcal{A}$, les diagrammes suivants commutent pour tout $n \geq 0$:

$$\begin{tikzcd} F^n C \arrow[r, "\delta^n_F"] \arrow[d, "\phi^n_C"'] & F^{n+1} A \arrow[d, "\phi^{n+1}_A"] \\ G^n C \arrow[r, "\delta^n_G"'] & G^{n+1} A. \end{tikzcd}$$

Un δ-foncteur F est universel si pour tout δ-foncteur G, tout morphisme de foncteur ϕ^0 : $F^0 \longrightarrow G^0$ se prolonge de manière unique en un morphisme de δ-foncteurs $\phi : F \longrightarrow G$.

Le résultat suivant a été démontré pour la première fois par Cartan et Eilenberg dans [CE99] puis par Grothendieck dans [Gro57], qui utilise pour la première fois le terme δ-foncteur universel.

Théorème 3.4.5 (2.4.7, [Wei94]). *Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux catégories abéliennes et $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ un foncteur exact à gauche. Si $\mathcal{A}$ admet suffisamment d'objets injectifs, alors les foncteurs dérivés de F, $(F^i)_{i,\geq 0}$ forment un δ-foncteur cohomologique universel.*

D'après le corollaire 1.2.21, la catégorie des $\mathsf{BP}_*\mathsf{BP}$-comodules admet assez d'injectifs. D'après le théorème 3.3.14 et la proposition 3.4.2, les foncteurs

$$\left(\mathrm{Tor}^{\mathsf{BP}_*}_{n+1-i}(K_n,-)\right)_{i\geq 0},$$

avec la convention $\mathrm{Tor}^{\mathsf{BP}_*}_{n+1-i}(K_n,-)=0$ si $i>n+1$, forment un δ-foncteur cohomologique de la catégorie des $\mathsf{BP}_*\mathsf{BP}$-comodules dans elle même. On a donc le résultat suivant :

Corollaire 3.4.6. *Soient $0\leq i\leq n+1$ deux entiers. Il existe un morphisme de foncteurs :*

$$\phi_{i,n}: T_n^i \longrightarrow \mathrm{Tor}^{\mathsf{BP}_*}_{n+1-i}(K_n,-),$$

tel que, pour toute suite exacte courte de comodules :

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} P \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0,$$

le diagramme de comodules suivant dans lequel les lignes horizontales sont exactes, commute :

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & T_n^iM \arrow[r]\arrow[d] & T_n^iP \arrow[r]\arrow[d] & T_n^iN \arrow[r]\arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \mathrm{Tor}^{\mathsf{BP}_*}_{n+1-i}(K_n,M) \arrow[r] & \mathrm{Tor}^{\mathsf{BP}_*}_{n+1-i}(K_n,P) \arrow[r] & \mathrm{Tor}^{\mathsf{BP}_*}_{n+1-i}(K_n,N) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Nous allons maintenant démontrer que ces morphismes sont des isomorphismes pour tous i,n.

Proposition 3.4.7. *Soit M un $\mathsf{BP}_*\mathsf{BP}$-comodule. Si M est plat en tant que BP_*-module, alors pour tout i,n, les morphismes $\phi_{i,n}(M)$ sont des isomorphismes. En particulier,*

$$T_n^iM=\begin{cases} K_n\otimes M & \text{si } i=n+1\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

Démonstration : Nous allons utiliser la résolution chromatique de BP_* (cf. la définition 5.1.7 de [Rav86]) :

$$\mathsf{BP}_* \longrightarrow J_\bullet,$$

où $J_k=v_k^{-1}K_{k-1}$ pour $k\geq 0$. Comme M est un BP_*-module plat, on obtient la résolution suivante en tensorisant par M :

$$M \longrightarrow J_\bullet\otimes_{\mathsf{BP}_*}M. \tag{3.4.1}$$

Comme la multiplication par v_k est bijective sur J_k, d'après le théorème 3.2.22, pour tout $n\geq 0$ et tout $i>0$, $L_n^iJ_k=0$. Pour la même raison, $L_n^i\left(J_k\otimes_{\mathsf{BP}_*}M\right)=0$. La résolution (3.4.1) est donc une résolution L_n-acyclique de M. On a donc :

$$L_n^iM=\mathrm{H}^i\left(L_n(J_\bullet\otimes M)\right).$$

Or, d'après le théorème 3.2.22, on a :

$$L_n(J_k\otimes_{\mathsf{BP}_*}M)=\begin{cases} J_k\otimes_{\mathsf{BP}_*}M & \text{si } k\leq n\\ 0 & \text{sinon,}\end{cases}$$

donc pour $n>0$:

$$L_n^i(M)=\begin{cases} K_n\otimes_{\mathsf{BP}_*}M & \text{si } i=n\\ M & \text{si } i=0\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Si $n = 0$, on a :

$$L_0^i(M) = \begin{cases} \mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}} M & \text{si } i = 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Finalement, on utilise le corollaire 3.2.20. Pour $i \geq 1$, $L_n^i = T_n^{i+1}$ et la suite

$$0 \longrightarrow T_n M \longrightarrow M \longrightarrow L_n M \longrightarrow T_n^1 M \longrightarrow 0$$

est exacte. On en déduit alors le résultat. □

Lemme 3.4.8. *Soit*

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} P \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

une suite exacte courte de comodules. On suppose que pour deux de ces trois comodules, les morphismes $\phi_{i,n}$ sont des isomorphismes, alors il en est de même pour le troisième.

Démonstration : C'est le lemme des 5. □

Proposition 3.4.9. *Pour tous $n, i, k \geq 0$, le morphisme $\phi_{i,n}(\mathsf{BP}_*/\mathfrak{I}_k)$ est un isomorphisme.*

Démonstration : On démontre le résultat par récurrence sur k. Pour $k = 0$, $\mathfrak{I}_k = (0)$ et $\mathsf{BP}_*/\mathfrak{I}_0 = \mathsf{BP}_*$: le résultat découle de la proposition 3.4.7 car BP_* est un BP_*-module plat. Supposons le résultat vrai pour k. On a la suite exacte courte de comodules suivante :

$$0 \longrightarrow \Sigma^{|v_k|}\mathsf{BP}_*/\mathfrak{I}_k \xrightarrow{v_k} \mathsf{BP}_*/\mathfrak{I}_k \longrightarrow \mathsf{BP}_*/\mathfrak{I}_{k+1} \longrightarrow 0.$$

Le lemme 3.4.8 démontre alors le résultat. □

Théorème 3.4.10. *Les morphismes de foncteur $\phi_{i,n}$ sont des isomorphismes pour tout $i \geq 0$ et tout $n \geq 0$.*

$$\phi_{i,n} : T_n^i \longrightarrow \mathrm{Tor}_{n+1-i}^{\mathsf{BP}_*}(K_n, -).$$

Démonstration : D'après le théorème 1.8.16, si M est de présentation finie, il admet une filtration de comodules dont les quotients succesifs sont isomorphes à une suspension de $\mathsf{BP}_*/\mathfrak{I}_k$ pour un certain $k \geq 0$. D'après le corollaire 3.4.9 et le lemme 3.4.8, on en déduit donc que $\phi_{i,n}(M)$ est un isomorphisme pour tous $i, n \geq 0$ si M est de présentation finie.

Enfin, comme tout $\mathsf{BP}_*\mathsf{BP}$-comodule M est colimite filtrante de BP_*-comodules de présentation finie et que les foncteurs T_n^i et $\mathrm{Tor}_{n+1-i}^{\mathsf{BP}_*}(K_n, -)$ commutent aux colimites filtrantes (théorème 3.8 de [HS05b]), on en déduit le résultat. □

Corollaire 3.4.11. *Soit M un $\mathsf{BP}_*\mathsf{BP}$-comodule et $n \geq 0$ un entier. Alors, on a une suite exacte longue de $\mathsf{BP}_*\mathsf{BP}$-comodules :*

$$0 \longrightarrow T_{n+1}M \longrightarrow T_n M \longrightarrow v_{n+1}^{-1}T_n M \longrightarrow T_{n+1}^1 M \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow T_{n+1}^i M \longrightarrow T_n^i M \longrightarrow v_{n+1}^{-1}T_n^i M \longrightarrow T_{n+1}^{i+1} M \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow T_{n+1}^{n+1} M \longrightarrow T_n^{n+1} M \longrightarrow v_{n+1}^{-1}T_n^{n+1} M \longrightarrow T_{n+1}^{n+2} M \longrightarrow 0.$$

Démonstration : D'après la définition 3.4.1 des comodules K_n, on a la suite exacte courte de $\mathsf{BP}_*\mathsf{BP}$-comodules :

$$0 \longrightarrow K_n \longrightarrow v_{n+1}^{-1}K_n \longrightarrow K_{n+1} \longrightarrow 0.$$

On applique alors le foncteur $-\otimes_{\mathsf{BP}_*} M$ à cette suite exacte. D'après le théorème 3.3.14 et les isomorphismes du théorème 3.4.10 précédent, le résultat suit. $\square$

Chapitre 4

Produit semi-direct de groupoïdes

4.1 La catégorie $\mathcal{C} \ltimes \Phi$

Soit $\mathcal{C}$at la catégorie des petites catégories et des foncteurs et $\mathcal{C}$ une petite catégorie. Je vais rappeler une construction de Grothendieck qui est utilisée pour démontrer l'équivalence entre la catégorie des foncteurs de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}$at et la catégorie des catégories fibrées au-dessus de $\mathcal{C}$. On peut retrouver cette construction plus en détails dans [Bor94b], [MLM94] ou [Vis05]. Si $\Phi : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}\mathrm{at}$ est un foncteur, je noterai alors $\mathcal{C} \ltimes \Phi$ la catégorie fibrée au-dessus de $\mathcal{C}$ associée, car cette construction généralise en un certain sens le produit semi-direct des groupes. De plus, Higgins et Taylor ont définit dans [HT82] le produit semi-direct d'un groupoïde par un groupe agissant dessus, qui est un cas particulier de cette construction.

Définition 4.1.1. *Soient $\mathcal{C}$ une petite catégorie et $\Phi : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}\mathrm{at}$ un foncteur. La catégorie $\mathcal{C} \ltimes \Phi$, appelé produit semi-direct de $\mathcal{C}$ par Φ, est la catégorie telle que :*
- *Un objet de $\mathcal{C} \ltimes \Phi$, est un couple (X, x) où X est un objet de $\mathcal{C}$ et x un objet de $\Phi(X)$.*
- *Soient (X, x) et (Y, y) deux objets de $\mathcal{C} \ltimes \Phi$. Un morphisme de (X, x) vers (Y, y) est un couple (f, θ) où $f : X \longrightarrow Y$ est un morphisme de $\mathcal{C}$ et $\theta : \Phi(f)(x) \longrightarrow y$ est un morphisme de $\Phi(Y)$.*
- *Soient $(X, x) \xrightarrow{(f,\theta)} (Y, y) \xrightarrow{(g,\nu)} (Z, z)$, deux morphismes composables de $\mathcal{C} \ltimes \Phi$. La composition de ces deux morphismes est le couple formé de :*
  - *la composée : $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ dans $\mathcal{C}$, et*
  - *la composée : $\Phi(g \circ f)(x) = \Phi(g)\left(\Phi(f)(x)\right) \xrightarrow{\Phi(g)(\theta)} \Phi(g)(y) \xrightarrow{\nu} z$ dans $\Phi(Z)$.*

Le foncteur $\pi : \mathcal{C} \ltimes \Phi \longrightarrow \mathcal{C}$ défini par : $\pi(X, x) = X$ et $\pi(f, \theta) = f$ est la projection sur $\mathcal{C}$.

Proposition 4.1.2. *Soient $\mathcal{G}$ un petit groupoïde et $\Phi : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}\mathrm{rpd}$ un foncteur à valeurs dans la catégorie des petits groupoïdes. Alors la catégorie $\mathcal{G} \ltimes \Phi$ est un groupoïde. De plus, si $(f, \theta) : (X, x) \longrightarrow (Y, y)$ est un morphisme de $\mathcal{G} \ltimes \Phi$, alors :*

$$(f, \theta)^{-1} = (f^{-1}, \Phi(f^{-1})(\theta^{-1})).$$

Démonstration : Cela découle directement de la définition 4.1.1 de la catégorie $\mathcal{G} \ltimes \Phi$. □

Rappelons que la catégorie des groupe peut être vue comme une sous-catégorie pleine de la catégorie des groupoïdes. Si G est un groupe, on note $\widetilde{G}$ le groupoïde à un seul objet noté $\star_G$ et dont l'ensemble des morphisme est G (cf. l'exemple 1.1.2).

Pour définir le produit semi-direct de deux groupes G et H, on se donne un morphisme de groupe $\phi : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(H)$. On remarque que se donner un tel morphisme revient à se donner un foncteur $\Phi : \widetilde{G} \longrightarrow \mathcal{G}\mathrm{rpd}$ tel que $\Phi(\star_G) = \widetilde{H}$. Le théorème suivant montre que la construction de la définition 4.1.1 généralise aux catégories le produit semi-direct.

Théorème 4.1.3. *Soient G, H deux groupes et $\phi : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(H)$ un morphisme de groupes. Soit $\Phi : \widetilde{G} \longrightarrow \mathcal{G}\mathrm{rpd}$ le foncteur associé à ϕ : $\Phi(\star_G) = \widetilde{H}$ et $\Phi(g) = \phi(g) : \widetilde{H} \longrightarrow \widetilde{H}$. Alors :*

$$\widetilde{G} \ltimes \Phi = \widetilde{G \ltimes_\phi H}.$$

Démonstration : D'après la définition 4.1.1, $\widetilde{G} \ltimes \Phi$ a un unique objet $(\star_G, \star_H)$ et un morphisme est un couple $(g, h) \in G \times H$. De plus, si (g, h) et $g', h')$ sont deux morphismes de $\widetilde{G} \ltimes \Phi$, alors :

$$(g, h) \circ (g', h') = (g \circ g', h \circ \phi(g)(h')).$$

□

4.2 Fonctorialité

Définition 4.2.1. *On note $\mathcal{I}$ la catégorie dont les objets sont les couples $(\mathcal{C}, \Phi)$ où $\mathcal{C}$ est une petite catégorie et Φ un foncteur de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}\mathrm{at}$. Un morphisme de $(\mathcal{C}, \Phi)$ vers $(\mathcal{D}, \Psi)$ est un couple (F, α) où $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ est un foncteur et $\alpha : \Phi \Longrightarrow \Psi \circ F$ est une transformation naturelle :*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[dr, "\Phi"] \arrow[dd, "F"'] & \\ \arrow[r, phantom, "\alpha\Downarrow"] & \mathcal{C}\mathrm{at}. \\ \mathcal{D} \arrow[ur, "\Psi"'] & \end{tikzcd}$$

On définit les sous-catégories pleines de $\mathcal{I}$ suivantes :
- *$\mathcal{I}'$, formée des objets $(\mathcal{C}, \Phi)$ où $\mathcal{C}$ est un groupoïde et Φ est à valeurs dans la sous-catégorie des groupoïdes.*
- *$\mathcal{I}''$, formée des objets $(\mathcal{C}, \Phi)$ où $\mathcal{C}$ est un groupoïde et Φ est à valeurs dans la sous-catégorie des groupes.*

Théorème et définition 4.2.2. *Soit $(F, \alpha) : (\mathcal{C}, \Phi) \longrightarrow (\mathcal{D}, \Psi)$ un morphisme de la catégorie $\mathcal{I}$. Soit $(F, \alpha)_*$ le foncteur*

$$(F, \alpha)_* : \mathcal{C} \ltimes \Phi \longrightarrow \mathcal{D} \ltimes \Psi$$

tel que :
- *Si (X, x) est un objet de $\mathcal{C} \ltimes \Phi$, alors $(F, \alpha)_*(X, x) = (F(X), \alpha_X(x))$.*
- *Si $(f, \theta) : (X, x) \longrightarrow (Y, y)$ est un morphisme de $\mathcal{C} \ltimes \Phi$, alors $(F, \alpha)_*(f, \theta) = (F(f), \alpha_Y(\theta))$.*

Cela définit un foncteur :

$$\ltimes : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{I} & \longrightarrow & \mathcal{C}\mathrm{at} \\ (\mathcal{C}, \Phi) & \longmapsto & \mathcal{C} \ltimes \Phi \\ (F, \alpha) & \longmapsto & (F, \alpha)_*. \end{array} \right.$$

De plus, la restriction de $\ltimes$ à la catégorie $\mathcal{I}'$ est à valeurs dans la catégorie des groupoïdes.

Démonstration : Vérifions que $(F, \alpha)_*$ définit un foncteur de $\mathcal{C} \ltimes \Phi$ vers $\mathcal{D} \ltimes \Psi$. Soient $(f, \theta) : (X, x) \longrightarrow (Y, y)$ et $(g, \nu) : (Y, y) \longrightarrow (Z, z)$ deux morphismes de $\mathcal{C} \ltimes \Phi$.
- Tout d'abord, comme α est une transformation naturelle de Φ vers $\Psi \circ F$ et comme $x \in \Phi(X)$, $\alpha_X(x) \in \Psi(F(X))$ et $(F(X), \alpha_X(x))$ est bien un objet de $\mathcal{D} \ltimes \Psi$.
- Le diagramme suivant commute exactement dans $\mathcal{C}\mathrm{at}$:

$$\begin{tikzcd} \Phi(X) \arrow[r, "\alpha_X"] \arrow[d, "\Phi(f)"'] & \Psi(F(X)) \arrow[d, "\Psi(F(f))"] \\ \Phi(Y) \arrow[r, "\alpha_Y"'] & \Psi(F(Y)). \end{tikzcd}$$

Donc $\Psi(F(f))(\alpha_X(x)) = \alpha_Y(\Phi(f)(x))$ et $(F(f), \alpha_Y(\theta))$ est bien un morphisme dans la catégorie $\mathcal{D} \ltimes \Psi$ de $(F(X), \alpha_X(x))$ vers $(F(Y), \alpha_Y(y))$.

– De même, dans la catégorie $\Psi(F(Z))$, les morphismes $\alpha_Z(\Phi(g)(\theta))$ et $\Psi(F(g))(\alpha_Y(\theta))$ sont égaux. Comme α_Z est un foncteur, on en déduit que :

$$\begin{aligned}
(F,\alpha)_*((g,\nu)\circ(f,\theta)) &= (F,\alpha)_*(g\circ f, \nu\circ\Phi(g)(\theta))\\
&= (F(g\circ f), \alpha_Z(\nu\circ\Phi(g)(\theta)))\\
&= (F(g)\circ F(f), \alpha_Z(\nu)\circ\alpha_Z(\Phi(g)(\theta)))\\
&= (F(g)\circ F(f), \alpha_Z(\nu)\circ\Psi(F(g))(\alpha_Y(\theta)))\\
&= (F(g), \alpha_Z(\nu))\circ(F(f), \alpha_Y(\theta))\\
&= (F,\alpha)_*(g,\nu)\circ(F,\alpha)_*(f,\theta).
\end{aligned}$$

Donc $(F,\alpha)_*$ définit un foncteur de $\mathcal{C} \ltimes \Phi$ vers $\mathcal{D} \ltimes \Psi$.

Soit $(\mathcal{E}, \Xi)$ un objet de $\mathcal{I}$ et $(G,\beta) : (\mathcal{D}, \Psi) \longrightarrow (\mathcal{E}, \Xi)$ un morphisme de $\mathcal{I}$. Alors :

$$\begin{aligned}
((G,\beta)\circ(F,\alpha))_*(X,x) &= (G\circ F, (\beta_F)\circ\alpha)_*(X,x)\\
&= (G\circ F(X), \beta_{F(X)}\circ\alpha_X(x))\\
&= (G,\beta)_*\circ(F,\alpha)_*(X,x),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
((G,\beta)\circ(F,\alpha))_*(f,\theta) &= (G\circ F, (\beta_F)\circ\alpha)_*(f,\theta)\\
&= (G\circ F(f), \beta_{F(Y)}\circ\alpha_Y(\theta))\\
&= (G,\beta)_*\circ(F,\alpha)_*(f,\theta).
\end{aligned}$$

Cela montre que $\ltimes$ définit bien un foncteur de $\mathcal{I}$ vers $\mathcal{C}$at. De plus, d'après la proposition 4.1.2, la restriction de $\ltimes$ à la catégorie $\mathcal{I}'$ est bien à valeurs dans la catégorie des groupoïdes. □

Le théorème suivant démontre que le produit semi-direct est invariant par équivalence de catégories :

Théorème 4.2.3. *Soit* $(F,\alpha) : (\mathcal{C}, \Phi) \longrightarrow (\mathcal{D}, \Psi)$ *un morphisme de la catégorie* $\mathcal{I}$ *tel que :*

– F *est une équivalence de catégories ;*

– *pour tout objet* X *de* $\mathcal{C}$*,* $\alpha_X : \Phi(X) \longrightarrow \Psi(FX)$ *est une équivalence de catégories.*

Alors $(F,\alpha)_* : \mathcal{C} \ltimes \Phi \longrightarrow \mathcal{D} \ltimes \Psi$ *est une équivalence de catégories.*

Démonstration : Comme les catégories que nous considérons sont petites, le foncteur $(F,\alpha)_*$ est une équivalence de catégories si et seulement si il est essentiellement surjectif et pleinement fidèle. Commençons par montrer que $(F,\alpha)_*$ est essentiellement surjectif.

Soit (Y, y) un objet de $\mathcal{D} \ltimes \Psi$. Comme F est essentiellement surjectif, il existe un objet X de $\mathcal{C}$ et un isomorphisme $f : FX \xrightarrow{\sim} Y$ dans $\mathcal{D}$. Donc $\Psi(f) : \Psi(FX) \xrightarrow{\sim} \Psi(Y)$ est un isomorphisme de catégories. Or $\alpha_X : \Phi(X) \longrightarrow \Psi(FX)$ est une équivalence de catégories, il existe donc un objet x de $\Phi(X)$ et un isomorphisme $\theta : \alpha_X(x) \xrightarrow{\sim} \Psi(f)^{-1}(y)$ dans $\Psi(FX)$. On a donc $(F,\alpha)_*(X,x) = (FX, \alpha_X(x))$ et un isomorphisme dans $\mathcal{D} \ltimes \Psi$:

$$(f, \Psi(f)(\theta)) : (F,\alpha)_*(X,x) \xrightarrow{\sim} (Y, y).$$

Montrons maintenant que $(F,\alpha)_*$ est pleinement fidèle. Soient (X_1, x_1) et (X_2, x_2) deux objets de $\mathcal{C} \ltimes \Phi$. On a le diagramme suivant, où les flèches verticales sont induites par les foncteurs de projection :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}\ltimes\Phi}((X_1,x_1),(X_2,x_2)) \arrow[r, "(F,\alpha)_*"] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}\ltimes\Psi}((FX_1,\alpha_{X_1}(x_1)),(FX_2,\alpha_{X_2}(x_2))) \arrow[d]\\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_1,X_2) \arrow[r, "F"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FX_1,FX_2)
\end{tikzcd}$$

Par hypothèse, F est pleinement fidèle. Donc la flèche du bas est une bijection. Il suffit donc de vérifier que $(F,\alpha)_*$ est une bijection sur chacune des fibres. Soit $f : X_1 \longrightarrow X_2$ un morphisme de $\mathcal{C}$, et $(f,\theta) : (X_1,x_1) \longrightarrow (X_2,x_2)$, un morphisme de $\mathcal{C} \ltimes \Phi$ au dessus de f. Alors

$$(F,\alpha)_*(f,\theta) = (F(f), \alpha_{X_2}(\theta)).$$

Ainsi, $(F,\alpha)_*$, restreint à la fibre au dessus de f, s'identifie à l'application suivante :

$$\alpha_{X_2} : \mathrm{Hom}_{\Phi(X_2)}(\Phi(f)(x_1), x_2) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\Psi(FX_2)}(\Psi(Ff)(\alpha_{X_1}(x_1)), \alpha_{X_2}(x_2)).$$

Comme α_X est pleinement fidèle pour tout objet X de $\mathcal{C}$, $(F,\alpha)_*$ est pleinement fidèle. □

4.3 Les foncteurs d'inclusion de projection et de section : ι, π et s

Soient G, H deux groupes et $\phi : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(H)$ un morphisme de groupe. On a la suite exacte courte scindée suivante :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & H \arrow[r, "\iota"] & G \ltimes_\phi H \arrow[r, "\pi"'] & G \arrow[l, bend right, "s"'] \arrow[r] & 0. \end{tikzcd} \tag{4.3.1}$$

Pour généraliser ce diagramme aux produit semi-direct de catégories, on définit des foncteurs T et U, ainsi que des transformations naturelles p et i, de la manière suivante :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{I} \arrow[r, bend left=50, "T"] \arrow[r, "id_{\mathcal{I}}" description] \arrow[r, bend right=50, "U"'] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\Uparrow p"] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\Uparrow i"] & \mathcal{I}. \end{tikzcd}$$

Soit $\mathcal{C}$, une catégorie. On note $* : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}\mathrm{at}$, le foncteur terminal, c'est le foncteur constant égal à l'objet terminal $*$ de $\mathcal{C}\mathrm{at}$, c'est-à-dire la catégorie qui n'a qu'un seul objet et qu'un seul morphisme. Si $F : \mathcal{C}_1 \longrightarrow \mathcal{C}_2$ est un foncteur, (F, id) définit un morphisme dans $\mathcal{I}$ de $(\mathcal{C}_1, *)$ vers $(\mathcal{C}_2, *)$.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}_1 \arrow[d, "F"'] \arrow[dr, "*"] \arrow[dr, phantom, shift right=3, "id\Downarrow"] & \\ \mathcal{C}_2 \arrow[r, "*"'] & \mathcal{C}\mathrm{at} \end{tikzcd}$$

De plus, pour tout foncteur $\Phi : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}\mathrm{at}$, il existe une unique transformation naturelle $\Phi \Longrightarrow *$ qu'on note encore $*$.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[d, "id_{\mathcal{C}}"'] \arrow[dr, "\Phi"] \arrow[dr, phantom, shift right=3, "*\Downarrow"] & \\ \mathcal{C} \arrow[r, "*"'] & \mathcal{C}\mathrm{at} \end{tikzcd}$$

Définition 4.3.1. *Le foncteur $T : \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{I}$ est défini de la manière suivante :*

$$T : \left\{ \begin{array}{ccc} (\mathcal{C}_1, \Phi_1) & & (\mathcal{C}_1, *) \\ {\scriptstyle (F,\alpha)}\downarrow & \longmapsto & \downarrow{\scriptstyle (F,id)} \\ (\mathcal{C}_2, \Phi_2) & & (\mathcal{C}_2, *). \end{array} \right.$$

Soit $(\mathcal{C}, \Phi)$ un objet de $\mathcal{I}$. On définit la transformation naturelle $p : id_{\mathcal{I}} \Longrightarrow T$ par :

$$p_{(\mathcal{C},\Phi)} = (id_{\mathcal{C}}, *).$$

Définition 4.3.2. *Soit $\mathcal{C}^\delta$ la catégorie discrète qui a les mêmes objets que $\mathcal{C}$ et $j_{\mathcal{C}} : \mathcal{C}^\delta \longrightarrow \mathcal{C}$ l'inclusion canonique. Si $\Phi : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}\mathrm{at}$ est un foncteur, on note $\Phi^\delta : \mathcal{C}^\delta \longrightarrow \mathcal{C}\mathrm{at}$ la composée $\Phi \circ j_{\mathcal{C}}$. Le couple $(j_{\mathcal{C}}, id)$ définit un morphisme dans $\mathcal{I}$ de $(\mathcal{C}^\delta, \Phi^\delta)$ vers $(\mathcal{C}, \Phi)$.*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}^\delta \arrow[dd, "j_{\mathcal{C}}"'] \arrow[dr, "\Phi^\delta"] & \\
{} \arrow[r, phantom, "id \Downarrow"] & \mathcal{C}\mathrm{at} \\
\mathcal{C} \arrow[ur, "\Phi"'] &
\end{tikzcd}$$

On définit le foncteur $U : \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{I}$ de la manière suivante :

$$U : \begin{cases} (\mathcal{C}_1, \Phi_1) & (\mathcal{C}_1^\delta, \Phi_1^\delta) \\ {\scriptstyle (F,\alpha)}\Big\downarrow \qquad \longmapsto & \Big\downarrow{\scriptstyle (F^\delta,\alpha^\delta)} \\ (\mathcal{C}_2, \Phi_2) & (\mathcal{C}_2^\delta, \Phi_2^\delta). \end{cases}$$

La transformation naturelle $i : U \Longrightarrow id_{\mathcal{I}}$ est définie, pour tout objet $(\mathcal{C}, \Phi)$ de $\mathcal{I}$, par :

$$i_{(\mathcal{C},\Phi)} = (j_{\mathcal{C}}, id).$$

En appliquant le foncteur $\ltimes : \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{C}\mathrm{at}$, on obtient deux foncteurs $\ltimes \circ T$ et $\ltimes \circ U$ de $\mathcal{I}$ vers $\mathcal{C}\mathrm{at}$ ainsi que deux transformations naturelles π et ι, induites par les transformations naturelles p et i :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{I} \arrow[r, bend left=50, "T", ""{name=T, below}] \arrow[r, "id_{\mathcal{I}}" description, ""{name=M}] \arrow[r, bend right=50, "U"', ""{name=U, above}] \arrow[Rightarrow, from=M, to=T, "p"'] \arrow[Rightarrow, from=U, to=M, "i"'] & \mathcal{I} \arrow[r, "\ltimes"] & \mathcal{C}\mathrm{at},
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{I} \arrow[r, bend left=50, "\ltimes\circ T", ""{name=T, below}] \arrow[r, "\ltimes" description, ""{name=M}] \arrow[r, bend right=50, "\ltimes\circ U"', ""{name=U, above}] \arrow[Rightarrow, from=M, to=T, "\pi"'] \arrow[Rightarrow, from=U, to=M, "\iota"'] & \mathcal{C}\mathrm{at}.
\end{tikzcd}$$

Proposition 4.3.3. *La composée $\ltimes \circ T$ est naturellement équivalent au foncteur oubli $\mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{C}\mathrm{at}$:*

$$\ltimes \circ T : \begin{cases} (\mathcal{C}_1, \Phi_1) & \mathcal{C}_1 \\ {\scriptstyle (F,\alpha)}\Big\downarrow \qquad \longmapsto & \Big\downarrow{\scriptstyle F} \\ (\mathcal{C}_2, \Phi_2) & \mathcal{C}_2. \end{cases}$$

Soit $(\mathcal{C}, \Phi) \in \mathcal{I}$. Le foncteur induit par $\pi : \ltimes \Longrightarrow \ltimes \circ T$ est naturellement équivalent au foncteur de projection canonique :

$$\pi_{(\mathcal{C},\Phi)} : \begin{cases} \mathcal{C} \ltimes \Phi \longrightarrow \mathcal{C} \\ (X, x) & X \\ {\scriptstyle (f,\theta)}\Big\downarrow \qquad \longmapsto & \Big\downarrow{\scriptstyle f} \\ (Y, y) & Y. \end{cases}$$

Démonstration : Cela découle directement des définitions 4.3.1 et 4.1.1. $\square$

Théorème 4.3.4. *Les foncteurs T, U et les transformations naturelles p, i admettent des restrictions aux sous-catégories de $\mathcal{I}$: $\mathcal{I}'$ et $\mathcal{I}''$ (cf. la définition 4.2.1). De plus, la restriction de p à $\mathcal{I}''$ admet une section notée q et la restriction de π admet une section s.*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{I}'' \arrow[rr, bend left, "T"] \arrow[rr, bend right, "id_{\mathcal{I}}"'] \arrow[rr, phantom, "\overset{q}{\Downarrow}\ \overset{p}{\Uparrow}"] & & \mathcal{I}'' \end{tikzcd} \quad ; \quad \begin{tikzcd} \mathcal{I}'' \arrow[rr, bend left, "\ltimes\circ T"] \arrow[rr, bend right, "\ltimes"'] \arrow[rr, phantom, "\overset{s}{\Downarrow}\ \overset{\pi}{\Uparrow}"] & & \mathcal{C}\mathrm{at}, \end{tikzcd}$$

Soient $(\mathcal{C}, \Phi)$ un objet de $\mathcal{I}''$ et X un objet de $\mathcal{C}$, on a :

$$s_{(\mathcal{C},\Phi)} = (q_{(\mathcal{C},\Phi)})_* : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C} \ltimes \Phi.$$

$$s_{(\mathcal{C},\Phi)} : \left\{ \begin{array}{ccc} X & & (X, \star_{\Phi(X)}) \\ f\Big\downarrow & \longmapsto & \Big\downarrow(f, id_{\Phi(Y)}) \\ Y & & (Y, \star_{\Phi(Y)}), \end{array} \right.$$

où $\star_{\Phi(X)}$ est l'unique objet du groupoïde associé au groupe $\Phi(X)$ (cf. l'exemple 1.1.2).

Démonstration : D'après les définitions 4.3.1 et 4.3.2 des foncteurs T et U, il est clair que, si $(\mathcal{C}, \Phi)$ est un objet de $\mathcal{I}'$ (resp. $\mathcal{I}''$), alors son image par T et U est un objet de $\mathcal{I}'$ (resp. $\mathcal{I}''$).

Soit $(\mathcal{C}, \Phi)$ un objet de $\mathcal{I}''$. D'après la définition du foncteur T, $T(\mathcal{C}, \Phi) = (\mathcal{C}, *)$, où $*$ désigne le foncteur $\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{G}\mathrm{rp}$, constant égal au groupe trivial. Comme le foncteur $*$ est initial parmi les foncteurs $\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{G}\mathrm{rp}$, il existe une unique transformation naturelle $e_\Phi : * \Longrightarrow \Phi$. On pose alors :

$$q_{(\mathcal{C},\Phi)} = (id_{\mathcal{C}}, e_\Phi) : (\mathcal{C}, *) \longrightarrow (\mathcal{C}, \Phi),$$

qui définit bien une section de p. L'expression de s découle directement du théorème 4.2.2. □

Soient A un ensemble et $(\mathcal{C}_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille de catégories. Le coproduit dans $\mathcal{C}\mathrm{at}$ des catégories $\mathcal{C}_\alpha$ est la catégorie :

$$\mathcal{B} = \coprod_{\alpha \in A} \mathcal{C}_\alpha,$$

telle que :
- Un objet de $\mathcal{B}$ est un couple (α, x), où $\alpha \in A$ et x est un objet de la catégorie $\mathcal{C}_\alpha$,
- Soient (α, x) et (β, y) deux objets de $\mathcal{B}$. Si $\alpha \neq \beta$, alors il n'y a aucun morphisme de (α, x) vers (β, y) et si $\alpha = \beta$, alors un morphisme de (α, x) vers (α, y) est un morphisme $f : x \longrightarrow y$ dans la catégorie $\mathcal{C}_\alpha$.

Théorème 4.3.5. *Notons $\mathcal{D} = \ltimes \circ U : \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{C}\mathrm{at}$ et soit $(\mathcal{C}, \Phi)$ un objet de $\mathcal{I}$. Alors :*

$$\mathcal{D}(\mathcal{C}, \Phi) = \coprod_{X \in \mathcal{O}_{\mathcal{C}}} \Phi(X).$$

Les catégories $\mathcal{D}(\mathcal{C}, \Phi)$ et $\mathcal{C} \ltimes \Phi$ ont même ensemble d'objets et $\mathcal{D}(\mathcal{C}, \Phi)$ est naturellement une sous-catégorie de $\mathcal{C} \ltimes \Phi$: un morphisme $f : (X, x) \longrightarrow (X, y)$ de la catégorie $\mathcal{D}(\mathcal{C}, \Phi)$ s'identifie au morphisme (id_X, f) de $\mathcal{C} \ltimes \Phi$. De plus, le morphisme naturel $\iota_{(\mathcal{C},\Phi)} = (i_{(\mathcal{C},\Phi)})_*$ est le foncteur d'inclusion :

$$\mathcal{D}(\mathcal{C}, \Phi) \longrightarrow \mathcal{C} \ltimes \Phi.$$

En résumé, si $(\mathcal{C}, \Phi)$ est un objet de $\mathcal{I}$, on a le diagramme suivant, analogue au diagramme 4.3.1. Si de plus, $(\mathcal{C}, \Phi)$ est un objet de $\mathcal{I}''$, π admet une section s.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D}(\mathcal{C}, \Phi) \arrow[r, "\iota"] & \mathcal{C} \ltimes \Phi \arrow[r, "\pi"'] & \mathcal{C} \arrow[l, bend right, dashed, "s"'] \end{tikzcd} \tag{4.3.2}$$

4.4 Un exemple de produit semi-direct de groupoïdes

Soient R un anneau commutatif et $\mathcal{G} = \mathcal{F}\mathrm{gl}^1(R)$ le groupoïde des lois de groupe formel sur R et des isomorphismes stricts (cf. la définition 1.7.1). On note $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ la loi multiplicative sur R et Φ le foncteur $\mathcal{G}^{op} \longrightarrow \mathcal{G}\mathrm{rpd}$ qui à une loi de groupe formel F associe le groupe $\mathrm{Hom}(F, \mathbb{G}_{\mathrm{m}})$ des morphismes de lois de groupe formel : $F \longrightarrow \mathbb{G}_{\mathrm{m}}$. La structure de groupe sur $\mathrm{Hom}(F, \mathbb{G}_{\mathrm{m}})$ est donnée par la loi de groupe formelle $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$: si $\theta, \nu \in \mathrm{Hom}(F, \mathbb{G}_{\mathrm{m}})$, alors :

$$\theta \cdot \nu = \theta +_{\mathbb{G}_{\mathrm{m}}} \nu \in \mathrm{Hom}(F, \mathbb{G}_{\mathrm{m}}).$$

Soit c l'isomorphisme fonctoriel entre $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}^{op}$ tel que, pour tout isomorphisme strict f de loi de groupe formel, $c(f) = f^{-1}$. On pose $\Phi' = \Phi \circ c$

Soit $\mathcal{G} \ltimes \Phi'$ le groupoïde produit semi-direct de $(\mathcal{G}, \Phi')$. L'ensemble des objets de $\mathcal{G}_{\Phi'}$ est en bijection avec l'ensemble des objets de $\mathcal{G}$ puisque Φ est à valeurs dans la catégorie des groupes (cf. l'exemple 1.1.2). Soient F, G deux lois de groupe formel sur R. Un morphisme de F vers G dans $\mathcal{G} \ltimes \Phi'$ est un couple (f, θ), où $f : F \longrightarrow G$ est un isomorphisme strict de lois de groupe formel et $\theta : G \longrightarrow \mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ est un morphisme de lois de groupe formel.

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "f"] & G \arrow[d, "\theta"] \\ & \mathbb{G}_{\mathrm{m}} \end{tikzcd}$$

Soient $F \xrightarrow{(f,\theta)} G \xrightarrow{(g,\nu)} H$ deux morphismes de $\mathcal{G} \ltimes \Phi'$. Leur composée est le couple :

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "g\circ f"] & H \arrow[d, "\nu\cdot(\theta\circ g^{-1})"] \\ & \mathbb{G}_{\mathrm{m}}. \end{tikzcd}$$

Soit S une R-algèbre. La loi de groupe formel F sur R peut être vue à coefficient dans S, notons la $F \otimes_R S$. Le théorème de cartier montre que le foncteur :

$$\begin{cases} {}_R\mathcal{A}\mathrm{lg} & \longrightarrow & \mathcal{G}\mathrm{rp} \\ S & \longmapsto & \mathrm{Hom}_{\mathrm{Fgl}(S)}(F \otimes_R S, \mathbb{G}_{\mathrm{m}}) \end{cases}$$

est représenté par une R-algèbre de Hopf notée Diff(F) (cf. le théorème 1.6 de [Kat81]). Dans le cas où $R = \mathsf{MU}_*$ et F est la loi de groupe formel universelle $\mathrm{F_u}$, on peut montrer que l'algèbre de Hopf Diff(F) est représenté topologiquement par le H-groupe $\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty$:

$$\mathrm{Diff(F)} \simeq \mathsf{MU}_*\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty.$$

Nous reviendrons sur cet exemple à la section 5.6.

4.5 Représentabilité

Soit $\mathbb{k}$ un anneau commutatif et F un foncteur ${}_k\mathcal{A}\mathrm{lg} \longrightarrow \mathcal{C}\mathrm{at}$. Comme pour les foncteurs à valeurs dans la catégorie des groupoïdes (cf. la définition 1.1.10), F est dit représenté par (A, Γ) si les foncteurs objets $\mathcal{O}_F$ et morphismes $\mathcal{M}_F$: ${}_k\mathcal{A}\mathrm{lg} \longrightarrow \mathcal{S}$et sont représentables respectivement par les k-algèbres A et Γ. Dans ce cas, d'après le lemme de Yoneda, il existe des applications η_L, η_R, Δ et ϵ qui représentent respectivement la source, le but, la composition des morphismes et le morphisme identité.

Théorème 4.5.1. *Soit* $F : {}_{\Bbbk}\mathcal{A}\mathrm{lg} \longrightarrow \mathcal{I}$ *un foncteur :*

$$F : \left\{ \begin{array}{ccc} {}_{k}\mathcal{A}\mathrm{lg} & \longrightarrow & \mathcal{I} \\ R & \longmapsto & (\mathcal{C}(R), \Phi(R)) \end{array} \right. .$$

On suppose que :
– *Le foncteur* $\mathcal{C}(-) : {}_{k}\mathcal{A}\mathrm{lg} \longrightarrow \mathcal{C}\mathrm{at}$ *est représenté par* (A, Γ).
– *Le foncteur* $\mathcal{D} \circ F = \ltimes \circ U \circ F$ *est représenté par* (B, Σ).
Alors le foncteur $\mathcal{C} \ltimes \Phi = \ltimes \circ F$ *est représenté par* $(B, \Gamma^{\eta_R}\otimes_A \Sigma)$.

Démonstration : D'après la définition 4.3.2 et le diagramme (4.3.2), on a les morphismes de foncteurs suivants :

$$\mathcal{C}^{\delta} \xrightarrow{j_{\mathcal{C}}} \mathcal{C},$$
$$\mathcal{D} \xrightarrow{\iota} \mathcal{C} \ltimes \Phi \xrightarrow{\pi} \mathcal{C}.$$

Soit R une k-algèbre et $F(R) = (\mathcal{C}(R), \Phi(R))$. D'après le théorème 4.3.5, $\mathcal{C} \ltimes \Phi(R)$ a les mêmes objets que $\mathcal{D}(R)$. Or le foncteur des objets de $\mathcal{D}$ est représentable par B, il en est donc de même pour le foncteur des objets de $\mathcal{C} \ltimes \Phi$.

Soient (X, x) et (Y, y) deux objets de $\mathcal{C} \ltimes \Phi(R)$. Un morphisme dans $\mathcal{C} \ltimes \Phi(R)$ de (X, x) vers (Y, y) est la donnée d'un morphisme $f : X \longrightarrow Y$ dans $\mathcal{C}(R)$, ainsi que d'un morphisme $\theta : \Phi(f)(x) \longrightarrow y$ dans $\Phi(Y)$. La catégorie $\Phi(Y)$ est une sous-catégorie pleine de $\mathcal{D}(R)$ et tout morphisme de $\mathcal{D}(R)$ est dans $\Phi(Y)$ pour un unique Y. La composée $\pi \circ \iota : \mathcal{D}(R) \longrightarrow \mathcal{C}(R)$ envoie θ sur id_Y ce qui nous donne une transformation naturelle : $\mathcal{M}_{\mathcal{D}} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{C}}$. Ainsi :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{C}\ltimes\Phi} = \mathcal{M}_{\mathcal{C}}{}^{t}\times_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}} \mathcal{M}_{\mathcal{D}}.$$

Donc $\mathcal{M}_{\mathcal{C}\ltimes\Phi}$ est représentable par la k-algèbre $\Gamma^{\eta_R}\otimes_A \Sigma$. □

4.6 L'algébroide de Hopf (A, Λ)

Soient $\Bbbk$ un anneau, (A, Γ) un $\Bbbk$-algébroïde de Hopf et $\mathcal{L}$ le foncteur représenté par cet algébroïde de Hopf (cf. la définition 1.1.11) :

$$\mathcal{L} : {}_{k}\mathcal{A}\mathrm{lg} \longrightarrow \mathcal{G}\mathrm{rpd}$$

Soit R une $\Bbbk$-algèbre. Rappelons que :
– un objet X de $\mathcal{L}(R)$ est un morphisme de $\Bbbk$-algèbres, $X : A \longrightarrow R$;
– un morphisme $f : X \longrightarrow Y$ de $\mathcal{L}(R)$ est un morphisme de $\Bbbk$-algèbres $f : \Gamma \longrightarrow R$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\eta_L"] \arrow[dr, "X"'] & \Gamma \arrow[d, "f"] & A \arrow[l, "\eta_R"'] \arrow[dl, "Y"] \\ & R & \end{tikzcd} ;$$

– la composition, l'unité et l'inversion des morphismes dans le groupoïde $\mathcal{L}(R)$ sont donnés respectivement par les morphismes Δ_Γ, ϵ_Γ et c_Γ de l'algébroïde de Hopf (A, Γ).

Soit K un Γ-comodule à droite tel que K est une A-algèbre de Hopf dont les morphismes de structures sont des morphismes de Γ-comodules à droite :

$$\begin{array}{rcl} \eta_K & : & A \longrightarrow K, \\ \Delta_K & : & K \longrightarrow K\otimes_A K, \\ c & : & K \longrightarrow K, \\ \epsilon_K & : & K \longrightarrow A, \\ \mu_K & : & K\otimes_A K \longrightarrow K. \end{array}$$

En particulier, le morphisme $\psi_K^d : K \longrightarrow K\otimes_A^{\eta_L}\Gamma$ est un morphisme de $\Bbbk$-algèbres. On note $\mathcal{K} : {}_{\Bbbk}\mathcal{A}\mathrm{lg} \longrightarrow \mathcal{G}\mathrm{rpd}$ le foncteur représenté par le $\Bbbk$-algébroïde de Hopf (A,K) :

- Un objet X de $\mathcal{K}(R)$ est un objet de $\mathcal{L}(R)$, c'est-à-dire un morphisme de $\Bbbk$-algèbres $X : A \longrightarrow R$.
- Un morphisme $\theta : X \longrightarrow Y$ de $\mathcal{K}(R)$ est un morphisme de $\Bbbk$-algèbres $\theta : K \longrightarrow R$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\eta_K"] \arrow[dr, "X"'] & K \arrow[d, "\theta"] & A \arrow[l, "\eta_K"'] \arrow[dl, "Y"] \\ & R & \end{tikzcd} .$$

  En particulier, comme les morphismes de source et de but sont les mêmes dans l'algébroïde de Hopf (A,K), on a nécessairement $X = Y$.
- La composition et l'unité dans le groupoïde $\mathcal{K}(R)$ sont donnés par les morphismes Δ_K et ϵ_K de la structure d'algèbre de Hopf de K.

Définition 4.6.1. *Soient R une $\Bbbk$-algèbre, $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme dans $\mathcal{L}(R)$ et θ un automorphisme de X dans $\mathcal{K}(R)$. Alors la composée suivante définit l'automorphisme $f_*\theta$ de Y dans $\mathcal{K}(R)$:*

$$K \xrightarrow{\psi_K^d} K\otimes_A\Gamma \xrightarrow{\theta\otimes f} R$$

Remarque 4.6.2. On peut aussi travailler avec une A-algèbre de Hopf K, muni d'une structure de Γ-comodule à gauche :

$$\psi_K^g : K \longrightarrow \Gamma^{\eta_R}\otimes_A K.$$

Soient R une $\Bbbk$-algèbre, $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme dans $\mathcal{L}(R)$ et θ un automorphisme de Y dans $\mathcal{K}(R)$. Le morphisme ψ_K^g représente alors l'application $(f,\theta) \longrightarrow f_*^{-1}\theta$ et le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "\psi_K^d"] \arrow[dr, "\psi_K^g"'] & K\otimes_A\Gamma \arrow[d, "K\otimes c_\Gamma"] \\ & \Gamma\otimes_A K. \end{tikzcd}$$

De plus, si K est un Γ-comodule à droite, d'après la remarque 1.2.9, la composée suivante définit une structure de Γ-comodule à gauche sur K :

$$\psi_K^g : \; K \xrightarrow{\psi_K^d} K\otimes_A\Gamma \underset{\simeq}{\xrightarrow{K\otimes c_\Gamma}} \Gamma\otimes_A K.$$

Proposition 4.6.3. *Soient $f : X \longrightarrow Y$ et $g : Y \longrightarrow Z$ deux morphismes dans $\mathcal{L}(R)$. Soit θ,ν deux automorphismes de X dans $\mathcal{K}(R)$. On a les égalités suivantes :*

- $(g\circ f)_*\theta = g_*f_*\theta$,
- $f_*(\theta\circ\nu) = (f_*\theta)\circ(f_*\nu)$,
- $f_*(id_X) = id_Y \in \mathcal{K}(R)$,
- $(id_X)_*(\theta) = \theta$.

Démonstration : Comme K est un comodule à droite sur (A,Γ), le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "\psi_K^d"] \arrow[d, "\psi_K^d"'] & K\otimes_A\Gamma \arrow[d, "K\otimes\Delta_\Gamma"] & \\ K\otimes_A\Gamma \arrow[r, "\psi_K^d\otimes\Gamma"'] & K\otimes_A\Gamma\otimes_A\Gamma \arrow[dr, "\theta\otimes f\otimes g"] & \\ & & R. \end{tikzcd}$$

La composée du bas représente $g_*f_*\theta$ et celle du haut $(g\circ f)_*\theta$ ce qui démontre la première égalité. La dernière égalité est démontrée par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "\psi_K^d"] \arrow[dr, equal] & K\otimes_A\Gamma \arrow[d, "K\otimes\epsilon_\Gamma"] \\ & K. \end{tikzcd}$$

Comme Δ_K est un morphisme de Γ-comodules à droite, le diagramme suivant commute ; la flèche diagonale étant induite par la multiplication de Γ :

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "\psi_K"] \arrow[d, "\Delta_K"'] & K\otimes_A\Gamma \arrow[d, "\Delta_K\otimes\Gamma"] \\ K\otimes_A K \arrow[r, "\psi_{K\otimes K}"] \arrow[d, "\psi_K\otimes\psi_K^d"'] & K\otimes_A K\otimes_A\Gamma \arrow[d, "\nu\otimes\theta\otimes f"] \\ (K\otimes_A\Gamma)\otimes_A(K\otimes_A\Gamma) \arrow[ur] \arrow[r, "(\nu\otimes f)\otimes(\theta\otimes f)"'] & R. \end{tikzcd}$$

La composée du bas représente $(f_*\theta)\circ(f_*\nu)$ alors que celle du haut $f_*(\theta\circ\nu)$, ce qui démontre la deuxième égalité.

Enfin, comme ϵ_K est un morphisme de Γ-comodules à droite, le diagramme suivant commute, ce qui démontre la troisième égalité :

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "\psi_K^d"] \arrow[d, "\epsilon_K"'] & K\otimes_A\Gamma \arrow[d, "\epsilon_K\otimes\Gamma"] \\ A \arrow[r, "\eta_R"'] & \Gamma. \end{tikzcd}$$

□

Le lemme suivant introduit un isomorphisme $\omega : \Gamma^{\eta_R}\otimes_A K \longrightarrow K\otimes_A^{\eta_L}\Gamma$ qui étend ψ_K^d. Il nous sera utile par la suite.

Lemme 4.6.4. *Il existe un unique isomorphisme de* $\Bbbk$*-algèbres*

$$\omega : \Gamma^{\eta_R}\otimes_A K \longrightarrow K\otimes_A^{\eta_L}\Gamma,$$

qui rende le diagramme de $\Bbbk$*-algèbres suivant commutatif :*

$$\begin{tikzcd} & K \arrow[dr, "1\otimes K"] \arrow[drr, bend left, "\psi_K^d"] & & \\ A \arrow[ur, "\eta_K"] \arrow[dr, "\eta_R"'] & & \Gamma^{\eta_R}\otimes_A K \arrow[r, dashed, "\omega"] & K\otimes_A^{\eta_L}\Gamma \\ & \Gamma \arrow[ur, "\Gamma\otimes 1"] \arrow[urr, bend right, "1\otimes\Gamma"'] & & \end{tikzcd}$$

De plus, les produits tensoriels de A*-bimodules* $\Gamma^{\eta_R}\otimes_A K$ *et* $K\otimes_A^{\eta_L}\Gamma$ *sont naturellement munis d'une structure de* A*-bimodule et le morphisme* ω *est un morphisme de* A*-bimodules. Explicitement, si* $\gamma\in\Gamma$*,* $x\in K$ *et si*

$$\psi_K(x) = \sum_i x_i\otimes\gamma_i,$$

alors :
$$\omega(\gamma \otimes x) = \sum_i x_i \otimes \gamma\gamma_i.$$

Démonstration : L'existence découle du fait que ψ_K^d et $1 \otimes \Gamma$ sont des morphismes de $\Bbbk$-algèbres et le produit tensoriel est le produit cocartésien dans la catégorie des $\Bbbk$-algèbres. Pour démontrer que c'est un isomorphisme, il suffit de voir à quoi correspond géométriquement ce morphisme. Soit R une k-algèbre, alors :

- Un morphisme de k-algèbre $K \otimes_A^{\eta_L} \Gamma \longrightarrow R$ est la donnée de (θ, f) où $f : X \longrightarrow Y$ est un morphisme de $\mathcal{L}(R)$ et θ est un automorphisme de X dans $\mathcal{K}(R)$.
- Un morphisme de k-algèbre $\Gamma^{\eta_R} \otimes_A K \longrightarrow R$ est la donnée de (f, ν) où $f : X \longrightarrow Y$ est un morphisme de $\mathcal{L}(R)$ et où ν est un automorphisme de Y dans $\mathcal{K}(R)$.

Le morphisme ω représente donc l'application $(\theta, f) \longmapsto (f, f_*(\theta))$ qui admet pour inverse $(f, \nu) \longmapsto (f_*^{-1}(\nu), f)$. Le fait que ω est un morphisme de A-bimodules vient de la commutativité du diagramme inférieur et du fait que $1 \otimes \Gamma$ et $\Gamma \otimes 1$ sont des morphismes de A-bimodules. $\square$

Lemme 4.6.5. *Les diagrammes suivants commutent :*

$$\begin{tikzcd} \Gamma \otimes_A K \arrow[r, "\omega"] \arrow[dr, "\epsilon_\Gamma \otimes K"'] & K \otimes_A \Gamma \arrow[d, "K \otimes \epsilon_\Gamma"] \\ & K \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \Gamma \otimes_A K \arrow[r, "\omega"] \arrow[d, "\Delta_\Gamma \otimes K"'] & K \otimes_A \Gamma \arrow[dr, "K \otimes \Delta_\Gamma"] & \\ \Gamma \otimes_A \Gamma \otimes_A K \arrow[r, "\Gamma \otimes \omega"'] & \Gamma \otimes_A K \otimes_A \Gamma \arrow[r, "\omega \otimes \Gamma"'] & K \otimes_A \Gamma \otimes_A \Gamma. \end{tikzcd}$$

Démonstration : Soient R une k-algèbre, $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow Z$ des morphismes de $\mathcal{L}(R)$ et θ un automorphisme de X dans $\mathcal{K}(R)$. Le premier diagramme commute car, d'après la proposition 4.6.3, $(id_X)_* \theta = \theta$. Le deuxième commute car $(g \circ f)_* \theta = g_* f_* \theta$. $\square$

Théorème 4.6.6. *Soit $\mathcal{G}$ le foncteur ${}_k\mathcal{A}\mathrm{lg} \longrightarrow \mathcal{G}\mathrm{rpd}$ défini par :*

- *Un objet X de $\mathcal{G}(R)$ est un objet de $\mathcal{L}(R)$, c'est-à-dire un morphisme de k-algèbre $X : A \longrightarrow R$.*
- *Un morphisme $X \longrightarrow Y$ de $\mathcal{G}(R)$ est un couple (f, θ) où f est un morphisme $X \longrightarrow Y$ de $\mathcal{L}(R)$ et θ un morphisme $Y \longrightarrow Y$ de $\mathcal{K}(R)$.*
- *Soient $(f, \theta) : X \longrightarrow Y$ et $(g, \nu) : Y \longrightarrow Z$ deux morphismes de $\mathcal{G}(R)$. Leur composition est le couple (h, λ) ; avec $h = g \circ f$ et $\lambda = \nu \circ (g_* \theta)$.*

Ce foncteur est représenté par l'algébroïde de Hopf (A, Λ), où $\Lambda = \Gamma^{\eta_R} \otimes_A K$ et le morphisme de structure
$$\Delta_\Lambda : \Lambda \longrightarrow \Lambda \otimes_A \Lambda$$
est égal à la composée suivante :

$$\Gamma^{\eta_R} \otimes_A K \xrightarrow{\Delta_\Gamma \otimes \Delta_K} \Gamma^{\eta_R} \otimes_A^{\eta_L} \Gamma^{\eta_R} \otimes_A K \otimes_A K \xrightarrow[\simeq]{\Gamma \otimes \omega \otimes K} \Gamma^{\eta_R} \otimes_A K \otimes_A^{\eta_L} \Gamma^{\eta_R} \otimes_A K. \qquad (4.6.1)$$

Démonstration : Soit F le foncteur suivant :

$$F : \left\{ \begin{array}{ccc} {}_k\mathcal{A}\mathrm{lg} & \longrightarrow & \mathcal{I} \\ R & \longmapsto & (\mathcal{C}(R), \Phi(R)) \end{array} \right. ,$$

où $\mathcal{C}(R) = \mathcal{L}(R)$ et $\Phi(R)$ est le foncteur qui à un objet X de $\mathcal{L}(R)$ associe la catégorie avec un objet X, et dont les morphismes sont les automorphismes de X dans $\mathcal{K}(R)$. Si $f : X \longrightarrow Y$ est un morphisme de $\mathcal{L}(R)$, on pose $\Phi(f) = f_*$, ce qui, d'après la proposition 4.6.3, définit bien un foncteur.

On remarque alors, d'après la définition 4.1.1, que le groupoïde $\mathcal{G}$ n'est rien d'autre que le produit semi-direct $\mathcal{C} \ltimes \Phi$.

Le foncteur $\mathcal{C} : {}_{\Bbbk}\mathcal{A}\mathrm{lg} \longrightarrow \mathcal{G}\mathrm{rpd}$ est représenté par le $\Bbbk$-algébroïde de Hopf (A, Γ) et le foncteur $\mathcal{D} \circ F$ du théorème 4.5.1 est représenté par le $\Bbbk$-algébroïde de Hopf (A, K). On applique alors le théorème 4.5.1 qui démontre que $\mathcal{G}$ est représenté par un algébroïde de Hopf (A, Λ) avec $\Lambda = \Gamma {}^{\eta_R}\!\otimes_A K$.

Pour expliciter le morphisme Δ_Λ, il nous suffit de comprendre la composition dans le groupoïde $\mathcal{G}(R)$. Soient R, une k-algèbre et $(X, x) \xrightarrow{(f,\theta)} (Y, y) \xrightarrow{(g,\nu)} (Z, z)$ deux morphismes composables de $\mathcal{G}(R)$. Leur composée est le morphisme $(g \circ f, \nu \circ (g_*\theta))$, obtenu par les applications successives suivantes :

$$(f, \theta, g, \nu) \longmapsto (f, g, g_*(\theta), \nu) \longmapsto (g \circ f, \nu \circ g_*(\theta)).$$

Ces applications sont représentées par les morphismes de $\Bbbk$-algèbres utilisés dans la composition (4.6.1). $\square$

4.7 Adjonctions induites par les foncteurs ι, π et s

Dans cette section, on considère, comme à la section 4.6, un $\Bbbk$-algébroïde de Hopf (A, Γ) qui représente un foncteur $\mathcal{L} : {}_{\Bbbk}\mathcal{A}\mathrm{lg} \longrightarrow \mathcal{G}\mathrm{rpd}$ et K un Γ-comodule à droite tel que K est une A-algèbre de Hopf dont les morphismes de structure sont des morphismes de Γ-comodule à droite. L'algébroïde de Hopf représente un foncteur $\mathcal{K} : {}_{\Bbbk}\mathcal{A}\mathrm{lg} \longrightarrow \mathcal{G}\mathrm{rpd}$ et on note $\mathcal{G}$ le foncteur défini au théorème 4.6.6 et représenté par l'algébroïde de Hopf (A, Λ). D'après la démonstration de ce théorème, les transformations naturelles ι, π et s définies à la section 4.3 induisent les transformations naturelles entre les foncteurs $\mathcal{L}$, $\mathcal{K}$ et $\mathcal{G}$:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{K} \arrow[r, "\iota"] & \mathcal{G} \arrow[r, "\pi"] & \mathcal{L}. \arrow[l, bend right, "s"'] \end{tikzcd}$$

Soient R une k-algèbre, X, Y deux objets de $\mathcal{K}(R)$ (qui a même ensemble d'objets que $\mathcal{L}(R)$ et $\mathcal{G}(R)$) et $(f, \theta) : X \longrightarrow Y$ un morphisme de $\mathcal{G}(R)$. Les foncteurs ι_R, π_R et s_R induisent l'identité sur les objets et sont définis par les relations suivantes sur les morphismes :

$$\begin{aligned} \pi(f, \theta) &= f, \\ \iota(\theta) &= (id_Y, \theta), \\ s(f) &= (f, id_Y). \end{aligned}$$

D'après le lemme de Yoneda, les transformations naturelles ι, π et s induisent des morphismes entre les algébroïdes de Hopf qui représentent les foncteurs $\mathcal{L}$, $\mathcal{K}$ et $\mathcal{G}$. Comme la $\Bbbk$-algèbre A qui représente les objets est commune aux trois algébroïdes de Hopf, nous ferons l'abus de notation qui consiste à nommer ι, π et s les morphismes correspondants entre les $\Bbbk$-algèbres qui représentent les morphismes :

$$\begin{tikzcd} K & \Gamma^{\eta_R}\!\otimes_A K \arrow[l, "\iota"'] \arrow[r, bend left, dashed, "s"] & \Gamma. \arrow[l, "\pi"] \end{tikzcd}$$

Remarque 4.7.1. On a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \iota = \epsilon_\Gamma \otimes K &: \Gamma^{\eta_R}\!\otimes_A K \longrightarrow K \\ \pi = \Gamma \otimes \eta_K &: \Gamma \longrightarrow \Gamma^{\eta_R}\!\otimes_A K \\ s = \Gamma \otimes \epsilon_K &: \Gamma^{\eta_R}\!\otimes_A K \longrightarrow \Gamma \end{aligned}$$

$$s \circ \pi = id_\Gamma$$

Dans la suite de cette section nous supposerons que Γ et K sont plats en tant que A-modules. Il en est donc de même pour $\Lambda \simeq \Gamma^{\eta_R} \otimes_A K$. D'après le théorème 2.3.5, les morphismes d'algébroïdes de Hopf ι, π et s induisent donc des adjonctions entre les catégories de comodules à gauche que nous allons expliciter.

$$\iota_* : {}_{\Lambda}\mathcal{C}\mathrm{omod} \leftrightarrows {}_{K}\mathcal{C}\mathrm{omod} : \iota^*,$$

$$\pi_* : {}_{\Gamma}\mathcal{C}\mathrm{omod} \leftrightarrows {}_{\Lambda}\mathcal{C}\mathrm{omod} : \pi^*,$$

$$s_* : {}_{\Lambda}\mathcal{C}\mathrm{omod} \leftrightarrows {}_{\Gamma}\mathcal{C}\mathrm{omod} : s^*.$$

Proposition 4.7.2. *Soient M, N et P respectivement des Γ, Λ et K-comodules à gauche. Alors :*

- *Le foncteur ι_* est le foncteur oubli de ${}_{\Lambda}\mathcal{C}\mathrm{omod}$ vers ${}_{K}\mathcal{C}\mathrm{omod}$. C'est-à-dire que $\iota_* N = N$, avec comme structure de K-comodule :*

$$N \xrightarrow{\psi_N} \Gamma \otimes_A K \otimes_A N \xrightarrow{\iota \otimes N} K \otimes_A N,$$

- *$\iota^* P \simeq \Gamma^{\eta_R} \otimes_A P$, avec comme structure de Λ-comodule l'application :*

$$\Gamma \otimes_A P \xrightarrow{\Delta_\Gamma \otimes \psi_P} \Gamma \otimes_A \Gamma \otimes_A K \otimes_A P \xrightarrow[\simeq]{\Gamma \otimes \omega \otimes P} \Gamma \otimes_A K \otimes_A \Gamma \otimes_A P,$$

- *Le foncteur s_* est le foncteur oubli de ${}_{\Lambda}\mathcal{C}\mathrm{omod}$ vers ${}_{\Gamma}\mathcal{C}\mathrm{omod}$. C'est-à-dire que $s_* N = N$, avec comme structure de Γ-comodule :*

$$N \xrightarrow{\psi_N} \Gamma \otimes_A K \otimes_A N \xrightarrow{s \otimes N} \Gamma \otimes_A N,$$

- *$s^* M \simeq K \otimes_A M$, avec comme structure de Λ-comodule :*

$$\begin{tikzcd} K \otimes_A M \arrow[r, "\Delta_K \otimes \psi_M"] & K \otimes_A K \otimes_A \Gamma \otimes_A M \arrow[r, "K \otimes \omega^{-1} \otimes M", "\simeq"'] & K \otimes_A \Gamma \otimes_A K \otimes_A M \arrow[d, "\omega^{-1} \otimes K \otimes M", "\simeq"'] \\ & & \Gamma \otimes_A K \otimes_A K \otimes_A M. \end{tikzcd}$$

- *La composée $s_* \circ s^* : {}_{\Gamma}\mathcal{C}\mathrm{omod} \longrightarrow {}_{\Gamma}\mathcal{C}\mathrm{omod}$ est naturellement isomorphe au produit tensoriel de Γ-comodules à gauche avec K, vu comme Γ-comodule à gauche par $\psi^g_K : K \longrightarrow \Gamma \otimes_A K$.*

Démonstration : Le calcul des foncteurs ι_* et s_* découle directement de la définition 2.1.1. Soit P un K-comodule à gauche. D'après la définition 2.3.2, on a l'égalisateur de Λ-comodules suivant :

$$0 \longrightarrow \iota^* P \longrightarrow \Gamma \otimes_A K \otimes_A P \underset{d_1}{\overset{d_0}{\rightrightarrows}} \Gamma \otimes_A K \otimes_A K \otimes_A P, \tag{4.7.1}$$

où $d_1 = \Lambda \otimes \psi_P$ et d_0 est la composition suivante :

$$\Gamma \otimes_A K \otimes_A P \xrightarrow{\Delta_\Lambda \otimes P} \Gamma \otimes_A K \otimes_A \Gamma \otimes_A K \otimes_A P \xrightarrow{\Lambda \otimes \iota \otimes P} \Gamma \otimes_A K \otimes_A K \otimes_A P.$$

D'après la proposition 4.6.6 et le lemme 4.6.5, le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} & & \Gamma \otimes_A K \otimes_A \Gamma \otimes_A K \arrow[dd, "\Lambda \otimes \iota"] \\ \Gamma \otimes_A K \arrow[urr, bend left, "\Delta_\Lambda"] \arrow[r, "\Delta_\Lambda \otimes \Delta_K"] \arrow[drr, bend right, "\Gamma \otimes \Delta_K"'] & \Gamma \otimes_A \Gamma \otimes_A K \otimes_A K \arrow[ur, "\Gamma \otimes \omega \otimes K", "\simeq"'] \arrow[dr, "\Gamma \otimes \epsilon_\Gamma \otimes K \otimes K"'] & \\ & & \Gamma \otimes_A K \otimes_A K. \end{tikzcd}$$

Cela nous démontre $d_0 = \Gamma \otimes \Delta_K \otimes P$. On en déduit donc que le diagramme égalisateur (4.7.1) est obtenu en tensorisant par Γ le diagramme suivant qui, d'après le lemme 2.2.9, est scindé dans la catégorie des A-modules à gauche :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & P \arrow[r, "\psi_P"] & K \otimes_A P \arrow[r, shift left, "\Delta_K \otimes P"] \arrow[r, shift right, "K \otimes \psi_P"'] & K \otimes_A K \otimes_A P. \end{tikzcd}$$

On a donc démontré que $\iota^* P = \Gamma \otimes_A P$ et que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \iota^* P \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"'] & \Gamma \otimes_A K \otimes_A P \arrow[r, shift left, "d_0"] \arrow[r, shift right, "d_1"'] & \Gamma \otimes_A K \otimes_A K \otimes_A P \\ & \Gamma \otimes_A P \arrow[ur, "\Gamma \otimes \psi_P"'] & & . \end{tikzcd}$$

En particulier, le morphisme $\Gamma \otimes \psi_P$ est un morphisme de Λ-comodules :

$$\Gamma \otimes \psi_P : \Gamma \otimes_A P \longrightarrow \Gamma \otimes_A K \otimes_A P.$$

Le diagramme commutatif suivant, où les isomorphismes verticaux sont induits par ω, permet de déterminer la structure de Λ-comodule de $\iota^* P$:

$$\begin{tikzcd} \Gamma \otimes_A P \arrow[r, "\Gamma \otimes \psi_P"] \arrow[dr, "\Delta_\Gamma \otimes \psi_P"] \arrow[ddr, bend right, "\psi_{\iota^* P}"'] & \Gamma \otimes_A K \otimes_A P \arrow[l, dashed, bend right, "id \otimes \epsilon_K \otimes P"'] \arrow[d, "\Delta_\Gamma \otimes K \otimes P"] \arrow[dr, bend left, "\Delta_\Gamma \otimes \Delta_K \otimes P"] & \\ & \Gamma \otimes_A \Gamma \otimes_A K \otimes_A P \arrow[r, "id \otimes \Delta_K \otimes P"'] \arrow[d, "\simeq"'] & \Gamma \otimes_A \Gamma \otimes_A K \otimes_A K \otimes_A P \arrow[d, "\simeq"] \\ & \Lambda \otimes_A \Gamma \otimes_A P \arrow[r, "\Lambda \otimes \Gamma \otimes \psi_P"] & \Lambda \otimes_A \Lambda \otimes_A P. \arrow[l, dashed, bend left, "id \otimes \epsilon_K \otimes P"] \end{tikzcd}$$

Soit M un Γ-comodule à gauche. L'égalisateur suivant de Λ-comodules définit $s^* M$:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & s^* M \arrow[r] & \Gamma \otimes_A K \otimes_A M \arrow[r, shift left, "d_0"] \arrow[r, shift right, "d_1"'] & \Gamma \otimes_A K \otimes_A \Gamma \otimes_A M, \end{tikzcd}$$

où $d_1 = \Lambda \otimes \psi_M$ et d_0 est égal à la composition suivante :

$$\Gamma \otimes_A K \otimes_A M \xrightarrow{\Delta_\Lambda \otimes M} \Gamma \otimes_A K \otimes_A \Gamma \otimes_A K \otimes_A M \xrightarrow{\Lambda \otimes s \otimes P} \Gamma \otimes_A K \otimes_A \Gamma \otimes_A M.$$

On considère alors le diagramme suivant qui, d'après le lemme 4.6.5, commute :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & s^* M \arrow[r] & \Gamma \otimes_A K \otimes_A M \arrow[r, shift left, "d_0"] \arrow[r, shift right, "d_1"'] \arrow[d, "\omega \otimes M"', "\simeq"] & \Gamma \otimes_A K \otimes_A \Gamma \otimes_A M \arrow[d, "\simeq"', "\omega \otimes \Gamma \otimes M"] \\ & & K \otimes_A \Gamma \otimes_A M \arrow[r, shift left, "d'_0"] \arrow[r, shift right, "d'_1"'] & K \otimes_A \Gamma \otimes_A \Gamma \otimes_A M, \end{tikzcd}$$

où $d'_0 = K \otimes \Delta_\Gamma \otimes M$ et $d'_1 = K \otimes \Gamma \otimes \psi_M$. On constate alors que les morphismes d'_0 et d'_1 sont obtenu en tensorisant par K l'égalisateur suivant, scindé dans la catégorie des A-modules :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "\psi_M"] & \Gamma \otimes_A M \arrow[r, shift left, "\Delta_\Gamma \otimes M"] \arrow[r, shift right, "\Gamma \otimes \psi_M"'] & \Gamma \otimes_A \Gamma \otimes_A M. \end{tikzcd}$$

Cela démontre bien que $s^*M \simeq K\otimes_A M$. Sous cet isomorphisme, le morphisme

$$K\otimes\psi_M : K\otimes_A M \longrightarrow K\otimes_A\Gamma\otimes_A M$$

est un morphisme de Λ-comodules. Le diagramme commutatif suivant explicite la structure de comodule de s^*M :

$$\begin{tikzcd}
K\otimes_A M \arrow[rr, "K\otimes\psi_M"] \arrow[dr, "\Delta_K\otimes\psi_M"'] \arrow[dddd, bend right, "\psi_{s^*M}"'] & & K\otimes_A\Gamma\otimes_A M \arrow[r, "\omega^{-1}\otimes M", "\simeq"'] \arrow[dl, "\Delta_K\otimes M"] \arrow[dddd, "\psi_{K\otimes\Gamma\otimes M}"] & \Gamma\otimes_A K\otimes_A M \arrow[dd, "\Delta_\Gamma\otimes\Delta_K\otimes M"] \\
& K\otimes_A K\otimes_A\Gamma\otimes_A M \arrow[dd, "K\otimes\omega^{-1}\otimes M"', "\simeq"] & & \\
& & & \Gamma\otimes_A\Gamma\otimes_A K\otimes_A K\otimes_A M \arrow[dd, "\Gamma\otimes\omega\otimes K\otimes M", "\simeq"'] \\
& K\otimes_A\Gamma\otimes_A K\otimes_A M \arrow[dl, "\simeq"', "\omega^{-1}\otimes K\otimes M"] & & \\
\Gamma\otimes_A K\otimes_A K\otimes_A M \arrow[rr, "id\otimes\psi_M"'] & & \Gamma\otimes_A K\otimes_A K\otimes_A\Gamma\otimes_A M \arrow[r, "\simeq", "id\otimes\omega^{-1}\otimes M"'] \arrow[ll, dashed, bend left, "id\otimes\epsilon_\Gamma\otimes M"] & \Gamma\otimes_A K\otimes_A\Gamma\otimes_A K\otimes_A M.
\end{tikzcd}$$

Le diagramme commutatif suivant démontre que le morphisme de structure de Γ-comodule à gauche de s_*s^*M est donnée par la composée :

$$K\otimes_A M \xrightarrow{K\otimes\psi_M} K\otimes_A\Gamma\otimes_A M \xrightarrow{\omega^{-1}} \Gamma\otimes_A K\otimes_A M.$$

$$\begin{tikzcd}
K\otimes_A M \arrow[r, "\Delta_K\otimes\psi_M"] \arrow[rrr, bend left, "\psi_{s^*M}"] \arrow[dr, "K\otimes\psi_M"] \arrow[ddrrr, bend right, "\psi_{s_*s^*M}"'] & K\otimes_A K\otimes_A\Gamma\otimes_A M \arrow[r, "K\otimes\omega^{-1}\otimes M", "\simeq"'] \arrow[d, "\epsilon_K\otimes id"] & K\otimes_A\Gamma\otimes_A K\otimes_A M \arrow[r, "\omega^{-1}\otimes K\otimes M", "\simeq"'] \arrow[ddr, "\epsilon_K\otimes id"'] & \Gamma\otimes_A K\otimes_A K\otimes_A M \arrow[dd, "\Gamma\otimes\epsilon_K\otimes id"] \\
& K\otimes_A\Gamma\otimes_A M \arrow[drr, "\omega^{-1}\otimes M", "\simeq"'] & & \\
& & & \Gamma\otimes_A K\otimes_A M.
\end{tikzcd}$$

D'après la définition de ψ^g_K (cf. la remarque 4.6.2), le diagramme suivant commute, ce qui démontre que s_*s^* est naturellement isomorphe au produit tensoriel avec K, vu comme Γ-comodule à gauche.

$$\begin{tikzcd}
K\otimes_A M \arrow[rr, "\psi^g_K\otimes\psi_M"] \arrow[dr, "K\otimes\psi_M"'] & & (\Gamma\otimes_A K)\otimes_A(\Gamma\otimes_A M) \arrow[d, "\mu_\Gamma\otimes id"] \\
& K\otimes_A\Gamma\otimes_A M \arrow[r, "\omega^{-1}\otimes M", "\simeq"'] & \Gamma\otimes_A K\otimes_A M
\end{tikzcd}$$

$\square$

Proposition 4.7.3. *Soient M et N respectivement des Γ et Λ comodules à gauche. Alors :*

– $\pi_* M = M$, *avec comme structure de* Λ*-comodule :*

$$M \xrightarrow{\psi_M} \Gamma \otimes_A M \xrightarrow{\pi \otimes M} \Gamma \otimes_A K \otimes_A M,$$

– *Il existe un isomorphisme de* A*-modules :*

$$\pi^* N = \Gamma \Box_\Lambda N \simeq A \Box_K \iota_* N.$$

– *de plus, on a un morphisme naturel injectif de* Γ*-comodules :*

$$\pi^* N \longrightarrow \pi^* s^* s_* N \simeq s_* N,$$

et le diagramme suivant, où les flèches verticales sont des isomorphismes de A*-modules, commute :*

$$\begin{tikzcd} \pi^* N \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"'] & s_* N \arrow[d, "\simeq"] \\ A \Box_K \iota_* N \arrow[r] & N. \end{tikzcd}$$

Démonstration : On a vu à l'exemple 1.3.4 que Λ est naturellement un Λ-Λ bicomodule. En appliquant ι_* à sa structure de Λ-comodule à gauche, on obtient une structure de K-Λ bicomodule. De plus, A est naturellement un A-K bicomodule car K est une A-algèbre de Hopf. On peut donc considérer les produits cotensoriels $(A \Box_K \Lambda) \Box_\Lambda N$ et $A \Box_K (\Lambda \Box_\Lambda N)$. D'après le lemme 2.2.9, on a un isomorphisme de A-modules :

$$A \Box_K (\Lambda \Box_\Lambda N) \simeq A \Box_K \iota_* N.$$

D'autre part, le diagramme suivant définit un égalisateur dans la catégorie des A-Λ bicomodules, scindé dans la catégorie des A-bimodules :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \Gamma \arrow[r, "\pi"'] & \Lambda \arrow[l, bend right, dashed, "s=\Gamma\otimes\epsilon_K"'] \arrow[r, shift left, "\eta_K \otimes \Lambda"] \arrow[r, shift right, "(\iota\otimes\Lambda)\circ\Delta_\Lambda"'] & K \otimes_A \Lambda. \arrow[l, bend right, dashed, "\omega^{-1}\otimes\epsilon_K"'] \end{tikzcd} \tag{4.7.2}$$

Cela démontre que $\Gamma = A \Box_K \Lambda$ et donc que $\pi^* N = \Gamma \Box_\Lambda N = (A \Box_K \Lambda) \Box_\Lambda N$. Comme l'égalisateur (4.7.2) est scindé dans la catégorie des A-modules à droite et que A est un A-module plat, on peut appliquer le théorème 2.2.19, qui démontre l'isomorphisme :

$$\pi^* N = \Gamma \Box_\Lambda N \simeq A \Box_K \iota_* N.$$

L'unité de l'adjonction induite par le morphisme d'algébroïdes de Hopf $s : (A, \Lambda) \longrightarrow (A, \Gamma)$ nous donne un morphisme de Λ-comodules :

$$\eta_N : N \longrightarrow s^* s_* N.$$

D'après la remarque 4.7.1, $s \circ \pi = id_{(A,\Gamma)}$. On en déduit que $\pi^* \circ s^* = id$. Donc $\pi^*(\eta_N)$ nous donne le morphisme naturel de Γ-comodules :

$$\pi^* N \longrightarrow \pi^* s^* s_* N \simeq s_* N.$$

D'après ce qui précède, on a l'isomorphisme naturel de A-module $\pi^* \simeq A \Box_K \iota_* -$. On a donc le diagramme suivant, où les flèches verticales sont des isomorphismes de A-modules :

$$\begin{tikzcd} \pi^* N \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"'] & s_* N \arrow[d, "\simeq"] \\ A \Box_K \iota_* N \arrow[r] & A \Box_K \iota_* s^* s_* N. \end{tikzcd}$$

Or, d'après la proposition 4.7.2, $\iota_* s^* s_* N$ est le K-comodule étendu $K \otimes_A N$. Le lemme 2.2.9 montre alors que $A \Box_K \iota_* s^* s_* N \simeq N$, ce qui achève la démonstration. $\Box$

4.8 La catégorie des K-comodules dans la catégorie des Γ-comodules

Dans cette section, on utilise les hypothèses de la section 4.6. Soit (A, Γ) un $\Bbbk$-algébroïde de Hopf plat et K un Γ-comodule à droite, plat en tant que A-module, et tel que K est une A-algèbre de Hopf, dont les morphismes de structure sont des morphismes de Γ-comodules à droite. Le théorème 4.6.6 a introduit l'algébroïde de Hopf (A, Λ) et on a l'adjonction suivante :

$$s_* : {}_\Lambda\mathcal{C}\mathrm{omod} \leftrightarrows {}_\Gamma\mathcal{C}\mathrm{omod} : s^*.$$

De plus, d'après la proposition 4.7.2, le foncteur $s_* \circ s^*$ est naturellement isomorphe au produit tensoriel avec K, vu comme Γ-comodule à gauche. Le théorème de Beck, démontré dans [ML98] à la page 147 et rappelé ci-après, va nous permettre de démontrer que la catégorie de comodules à gauche sur (A, Λ) s'identifie à la catégorie des K-comodules dans la catégorie des Γ-comodules.

Théorème 4.8.1 (Théorème de Beck)**.** *Soit $(G, F, \eta, \varepsilon)$ une adjonction :*

$$G : \mathcal{A} \leftrightarrows \mathcal{X} : F.$$

Soit $(U = GF, \epsilon, \delta)$ la comonade sur $\mathcal{X}$ associée à cette adjonction et $(G^U, F^U, \eta^U, \varepsilon^U)$ l'adjonction associée (cf. la définition 1.2.1 et la proposition 1.2.4) :

$$G^U : \mathcal{X}^U \leftrightarrows \mathcal{X} : F^U.$$

Les assertions suivantes sont alors équivalentes :

i) Il existe un foncteur de comparaison $K : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{X}^U$ qui est une équivalence de catégories (cf. la définition 2.7.7).

ii) Pour toute paire de morphismes $d_0, d_1 : X \longrightarrow Y$ dans $\mathcal{A}$ telle que (Gd_0, Gd_1) admette un égalisateur absolu dans $\mathcal{X}$, il existe un égalisateur pour (d_0, d_1) dans $\mathcal{A}$. De plus, G préserve et réfléchit les égalisateurs pour cette paire de morphismes (cf. les définitions 2.2.1 et 2.2.4).

iii) Pour toute paire de morphismes $d_0, d_1 : X \longrightarrow Y$ dans $\mathcal{A}$ telle que (Gd_0, Gd_1) admette un égalisateur scindé dans $\mathcal{X}$, il existe un égalisateur pour (d_0, d_1) dans $\mathcal{A}$. De plus, G préserve et réfléchit les égalisateurs pour cette paire de morphismes.

De plus, si ces conditions sont vérifiées alors le foncteur de comparaison K est unique.

Le foncteur s_* vérifie les hypothèses du théorème de Beck, on a donc le théorème suivant :

Théorème 4.8.2. *Le foncteur $s_* : {}_\Lambda\mathcal{C}\mathrm{omod} \longrightarrow {}_\Gamma\mathcal{C}\mathrm{omod}$ induit une équivalence de catégories entre la catégorie des Λ-comodules à gauche et la catégorie des K-comodules dans la catégorie des Γ-comodules à gauche.*

Démonstration : D'après les résultats de la section 4.7, on a un morphisme de $\Bbbk$-algébroïdes de Hopf :

$$s : (A, \Lambda) \longrightarrow (A, \Gamma).$$

D'après le théorème 2.3.5, ce morphisme induit une adjonction entre les catégories de comodules à gauche :

$$s_* : {}_\Lambda\mathcal{C}\mathrm{omod} \leftrightarrows {}_\Gamma\mathcal{C}\mathrm{omod} : s^*.$$

Or, d'après la proposition 4.7.2, le diagramme suivant, où les foncteurs oublis sont noté $\mathcal{O}$ commute :

$$\begin{tikzcd}
{}_\Lambda\mathcal{C}\mathrm{omod} \arrow[rr, "s_*"] \arrow[dr, "\mathcal{O}_\Lambda"'] & & {}_\Gamma\mathcal{C}\mathrm{omod} \arrow[dl, "\mathcal{O}_\Gamma"] \\
& {}_A\mathcal{M}\mathrm{od} &
\end{tikzcd}$$

Par hypothèse, Γ et K sont des A-modules plat. Il en est donc de même pour Λ et les catégories ${}_{\Lambda}\mathcal{C}\mathrm{omod}$ et ${}_{\Gamma}\mathcal{C}\mathrm{omod}$ sont des sous-catégories abéliennes de ${}_{A}\mathcal{M}\mathrm{od}$. Comme les foncteurs oublis préservent et réfléchissent les égalisateurs, il en est de même pour s_*.

D'après la proposition 4.7.2, la composition s_*s^* est naturellement isomorphe au foncteur $K\otimes_A-$: produit tensoriel de Γ-comodule à gauche avec K. De plus, la catégorie des comodules sur la comonade associée est la catégorie $\mathcal{K}$ des K-comodules dans la catégorie des Γ-comodules. D'après le théorème de Beck, il existe un foncteur de comparaison $K : {}_{\Lambda}\mathcal{C}\mathrm{omod} \longrightarrow \mathcal{K}$ qui est une équivalence de catégorie, ce qui démontre le théorème. $\square$

La catégorie des Λ-comodules admet un produit cotensoriel interne, défini à la proposition suivante. Nous ferons l'abus de notation qui consiste à le noter $\square_K$.

Proposition et définition 4.8.3. *Soient M, N deux Λ-comodules à gauche. Si on munit $M\otimes_A N$ et $K\otimes_A M\otimes_A N$ de la structure de Γ-comodules du produit tensoriel, alors les morphismes $M\otimes\psi_N^K$ et $\psi_M^K\otimes N$ de $M\otimes_A N$ vers $K\otimes_A M\otimes_A N$ sont des morphismes de Γ-comodules à gauche. De plus, l'égalisateur dans la catégorie des Γ-comodules des flèches suivantes, noté $M\square_K N$ est muni d'une structure de Λ-comodule à gauche :*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M\square_K N \arrow[r] & M\otimes_A N \arrow[r, shift left, "\psi_M^K\otimes N"] \arrow[r, shift right, "M\otimes\psi_N^K"'] & K\otimes_A M\otimes_A N, \end{tikzcd}$$

où la structure de K-comodule de $M\square_K N$ est donnée par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} M\square_K N \arrow[r] \arrow[d] & M\otimes_A N \arrow[d, shift right, "\psi_M^K\otimes N"'] \arrow[d, shift left, "M\otimes\psi_N^K"] \\ K\otimes_A(M\square_K N) \arrow[r] & K\otimes_A M\otimes_A N. \end{tikzcd}$$

On a donc le foncteur suivant :

$$-\square_K- : {}_{\Lambda}\mathcal{C}\mathrm{omod}\times {}_{\Lambda}\mathcal{C}\mathrm{omod} \longrightarrow {}_{\Lambda}\mathcal{C}\mathrm{omod}.$$

Démonstration : On doit montrer que les morphismes

$$\begin{tikzcd} M\otimes_A N \arrow[r, shift left, "\psi_M^K\otimes N"] \arrow[r, shift right, "M\otimes\psi_N^K"'] & K\otimes_A M\otimes_A N, \end{tikzcd}$$

admettent une restriction au sous Γ-comodule $M\square_K N$ de $M\otimes_A N$, c'est-à-dire que la flèche en pointillé dans le diagramme suivant existe. Par hypothèse, K est plat en tant que A-module. Les lignes sont donc exactes.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M\square_K N \arrow[r] \arrow[d, dashed] & M\otimes_A N \arrow[r, shift left, "M\otimes\psi_N^K"] \arrow[r, shift right, "\psi_M^K\otimes N"'] \arrow[d, shift right, "\psi_M^K\otimes N"'] \arrow[d, shift left, "M\otimes\psi_N^K"] & K\otimes_A M\otimes_A N \\ 0 \arrow[r] & K\otimes_A(M\square_K N) \arrow[r] & K\otimes_A M\otimes_A N \arrow[r, shift left, "K\otimes M\otimes\psi_N^K"] \arrow[r, shift right, "K\otimes\psi_M^K\otimes N"'] & K\otimes_A K\otimes_A M\otimes_A N. \end{tikzcd}$$

Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
M\square_K N \arrow[dr] & & & \\
& M\otimes_A N \arrow[rr, shift left, "M\otimes\psi_N^K"] \arrow[rr, shift right, "\psi_M^K\otimes N"'] \arrow[dr, shift left, "\psi_M^K\otimes N"] \arrow[dr, shift right, "M\otimes\psi_N^K"'] \arrow[dd, shift right, "\psi_M^K\otimes N"'] \arrow[dd, shift left, "M\otimes\psi_N^K"] & & K\otimes_A M\otimes_A N \arrow[dd, "K\otimes\psi_M^K\otimes N"] \\
& & K\otimes_A M\otimes_A N \arrow[dr, "\Delta_K\otimes M\otimes N"] & \\
& K\otimes_A M\otimes_A N \arrow[rr, "K\otimes M\otimes\psi_N^K"'] & & K\otimes_A K\otimes_A M\otimes_A N
\end{tikzcd}$$

Comme les morphismes ψ_M^K et ψ_N^K sont coassociatifs, les deux triangles commutent. De plus, par définition, $M\square_K N$ égalise chacune des fourches. Cela montre l'existence de la restriction et donc que $M\square_K N$ est un sous K-comodule de $M\otimes_A N$ dans la catégorie des Γ-comodules, où $M\otimes_A N$ est muni de sa structure de K-comodule donné par $\psi_M^K\otimes N$. $\square$

Remarque 4.8.4.
- Si $M\otimes_A N$ est muni de la structure de produit tensoriel de Λ-comodules, le morphisme naturel $M\square_K N \longrightarrow M\otimes_A N$ n'est pas un morphisme de Λ-comodules.
- A priori, en toute généralité, le produit cotensoriel interne n'est pas associatif.
- Si K est cocommutative, le produit cotensoriel interne admet K pour unité.

4.9 Extension des foncteurs de localisation

Soient (A,Γ) un $\Bbbk$-algébroïde de Hopf plat, K un Γ-comodule à droite muni d'une structure de A-algèbre de Hopf plate dont les morphismes de structure sont des morphismes de Γ-comodules à droite (cf. la section 4.6).

Le théorème 4.8.2 démontre que la catégorie des K-comodule à gauche dans la catégorie des Γ-comodules à gauche est équivalente à la catégorie des comodules à gauche sur l'algébroïde de Hopf (A,Λ), avec $\Lambda = \Gamma\otimes_A K$. Soit $f : A \longrightarrow B$ un morphisme de $\Bbbk$-algèbres Landweber exact pour (A,Γ). D'après la proposition 2.7.1, f est aussi Landweber exact pour (A,Λ). Nous noterons f^Γ et f^Λ les morphismes d'algébroïdes de Hopf, induits par f :

$$f^\Gamma : (A,\Gamma) \longrightarrow (B,\Gamma_B),$$

$$f^\Lambda : (A,\Lambda) \longrightarrow (B,\Lambda_B).$$

Soit $f_*K = K_B = K\otimes_A B$. D'après le corollaire 2.5.5, K_B est une algèbre de Hopf sur B dont les morphismes de structure sont des morphismes de Γ_B-comodules. De plus, l'algébroïde de Hopf (B,Λ_B) du théorème 4.8.2 associée à K_B est l'algébroïde de Hopf induite par (A,Λ) et $f : A \longrightarrow B$:

$$\Lambda_B \simeq \Gamma_B\otimes_B K_B \simeq B\otimes_A \Lambda\otimes_A B.$$

Comme K_B est un B-module plat, et que l'algébroïde de Hopf (B,Γ_B) est plat, l'algébroïde de Hopf (B,Λ_B) est plat.

Lemme 4.9.1. *Le diagramme de $\Bbbk$-algébroïdes de Hopf suivant commute :*

$$\begin{tikzcd} (A,\Lambda) \arrow[r, "f^\Lambda"] \arrow[d, "s_A"'] & (B,\Lambda_B) \arrow[d, "s_B"] \\ (A,\Gamma) \arrow[r, "f^\Gamma"'] & (B,\Gamma_B). \end{tikzcd}$$

D'après le théorème 2.4.5, on a deux transformations naturelles :

$$(s_A)_* \circ (f^\Lambda)^* \longrightarrow (f^\Gamma)^* \circ (s_B)_*,$$

$$f_*^\Lambda \circ s_A^* \longrightarrow s_B^* \circ f_*^\Gamma.$$

La proposition suivante montre que ce sont des isomorphismes naturels.

Proposition 4.9.2. *On a les isomorphismes de foncteurs suivants :*

$$(s_A)_* \circ (f^\Lambda)^* \simeq (f^\Gamma)^* \circ (s_B)_*,$$

$$s_B^* \circ f_*^\Gamma \simeq f_*^\Lambda \circ s_A^*.$$

Démonstration : Puisque f est Landweber exact, les foncteurs f_*^Γ et f_*^Λ sont exacts à gauche. Les foncteurs en présence sont donc tous exacts à gauche. D'après la proposition 2.2.12, il nous suffit alors de démontrer qu'ils coïncident sur la sous-catégorie pleine des comodules étendus pour démontrer ces isomorphismes. Soit $M = \Lambda_B \otimes_B X$, un Λ_B-comodule étendu. On a alors :

$$\begin{array}{rcl} (s_A)_* \circ (f^\Lambda)^*(\Lambda_B \otimes_B X) & \simeq & (s_A)_*(\Lambda \otimes_A X) \\ & \simeq & \Gamma \otimes_A K \otimes_A X. \end{array}$$

et :

$$\begin{array}{rcl} (f^\Gamma)^* \circ (s_B)_*(\Lambda_B \otimes_B X) & \simeq & (f^\Gamma)^*(\Gamma_B \otimes_B K_B \otimes_B X) \\ & \simeq & \Gamma \otimes_A K_B \otimes_B X \\ & \simeq & \Gamma \otimes_A K \otimes_A X. \end{array}$$

Pour le deuxième isomorphisme, on rappelle que pour un Γ-comodule N, $s_A^* N \simeq K \otimes_A N$. Si $N \simeq \Gamma \otimes_A Y$ est un Γ-comodule étendu, on a donc :

$$\begin{array}{rcl} s_B^* \circ f_*^\Gamma(\Gamma \otimes_A Y) & \simeq & s_B^*(B \otimes_A \Gamma \otimes_A Y) \\ & \simeq & K_B \otimes_B B \otimes_A \Gamma \otimes_A Y \\ & \simeq & K_B \otimes_A \Gamma \otimes_A Y. \end{array}$$

et :

$$\begin{array}{rcl} f_*^\Lambda \circ s_A^*(\Gamma \otimes_A Y) & \simeq & f_*^\Lambda(K \otimes_A \Gamma \otimes_A Y) \\ & \simeq & K_B \otimes_A \Gamma \otimes_A Y. \end{array}$$

□

Soient L_f^Γ et L_f^Λ les foncteurs de localisation induits par f sur les catégories de comodules sur (A,Γ) et (A,Λ) (cf. la définition 2.7.4).

Théorème 4.9.3. *Le foncteur de localisation induit par f commute aux foncteurs $(s_A)_*$ et s_A^*, c'est à dire que :*

$$L_f^\Gamma \circ (s_A)_* \simeq (s_A)_* \circ L_f^\Lambda,$$

$$s_A^* \circ L_f^\Gamma \simeq L_f^\Lambda \circ s_A^*.$$

Démonstration : C'est une conséquence immédiate de la proposition précédente. On a les isomorphismes :

$$\begin{array}{rcl} L_f^\Gamma \circ (s_A)_* & = & (f^\Gamma)^* \circ f_*^\Gamma \circ (s_A)_* \\ & \simeq & (f^\Gamma)^* \circ (s_B)_* \circ f_*^\Lambda \\ & \simeq & (s_A)_* \circ (f^\Lambda)^* \circ f_*^\Lambda \\ & = & (s_A)_* \circ L_f^\Lambda, \end{array}$$

et :

$$\begin{array}{rcl} s_A^* \circ L_f^\Gamma & = & s_A^* \circ (f^\Gamma)^* \circ (f^\Gamma)_* \\ & \simeq & (f^\Lambda)^* \circ s_B^* \circ f_*^\Gamma \\ & \simeq & (f^\Lambda)^* \circ (f^\Lambda)_* \circ s_A^* \\ & = & L_f^\Lambda \circ s_A^*, \end{array}$$

□

Chapitre 5

Homologie de $\mathrm{B}V$

5.1 Résultats généraux sur l'homologie de $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p$

Dans cette section, on considère un spectre en anneau commutatif E et un nombre premier p tels que :

– E est muni d'une orientation complexe.
– Le morphisme naturel $f_E : \mathsf{MU}_* \longrightarrow E_*$ est Landweber exact.

Comme le morphisme $f_E : \mathsf{MU}_* \longrightarrow E_*$ est Landweber exact, E_* n'a pas de p-torsion. De plus, on a l'isomorphisme suivant :

$$E_*E \simeq E_* \otimes_{\mathsf{MU}_*} \mathsf{MU}_*\mathsf{MU} \otimes_{\mathsf{MU}_*} E_*.$$

D'après la proposition 2.7.3 et le théorème 1.2.20, l'algébroïde de Hopf (E_*, E_*E) est plat donc la catégorie des E_*E-comodules à gauche est abélienne. Dans ce chapitre, tous les comodules seront des comodules à gauche.

Soit F_E la loi de groupe formelle sur E_* associée à l'orientation. On note, par abus de notation (cf. 1.8.17) $a_i \in E_{2i}$ le coefficient de x^{i+1} de la p-série :

$$[p]_{F_E}(x) = \sum_{i \geq 0} a_i x^{i+1}.$$

On note $\langle p \rangle_{F_E}$ la p-série réduite :

$$\langle p \rangle_{F_E}(x) = \sum_{i \geq 0} a_i x^i = \frac{\langle p \rangle_{F_E}}{x}.$$

Nous allons étudier la E_*-homologie de l'espace classifiant $\mathrm{B}V$ où V est un p-groupe abélien élémentaire de rang n. On a la suite exacte courte de groupes commutatifs :

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{p} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/p \longrightarrow 0.$$

Cette suite exacte courte se réalise par une suite de fibrations :

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{K}(\mathbb{Z}, n) \longrightarrow \mathrm{K}(\mathbb{Z}, n) \longrightarrow \mathrm{K}(\mathbb{Z}/p, n) \longrightarrow \mathrm{K}(\mathbb{Z}, n+1) \longrightarrow \cdots$$

En particulier $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p$, qui est un $\mathrm{K}(\mathbb{Z}/p, 1)$, est l'espace total d'un fibré en cercle ξ_p sur $\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty$, qui est un $\mathrm{K}(\mathbb{Z}, 2)$. On notera T_p l'espace de Thom associé à ce fibré (cf. [Rud98]). Ainsi, on a une suite cofibre :

$$\mathrm{B}\mathbb{Z}/p \xrightarrow{\rho} \mathbb{C}\mathrm{P}^\infty \longrightarrow T_p. \tag{5.1.1}$$

On a donc la suite exacte longue de E_*E-comodules suivante :

$$\cdots \longrightarrow E_*\mathrm{B}\mathbb{Z}/p \longrightarrow E_*\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty \xrightarrow{\sigma} E_*T_p \xrightarrow{\pi} E_{*-1}\mathrm{B}\mathbb{Z}/p \longrightarrow \cdots \tag{5.1.2}$$

Comme E est muni d'une orientation complexe, on a la proposition suivante :

Proposition 5.1.1 (cf. [JW85]).
- *$E_*\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty$ est un E_*-module libre sur des générateurs β_i homogènes de degré $2i$, pour $i \geq 1$; on notera $\beta(x)$ la série génératrice homogène de degré 0 :*

$$\beta(x) = \sum_{i\geq 1} \beta_i x^i.$$

- *E_*T_p est un E_*-module libre sur des générateurs γ_i homogènes de degré $2i$, pour $i \geq 1$; on notera $\gamma(x)$ la série génératrice homogène de degré 0 :*

$$\gamma(x) = \sum_{i\geq 1} \gamma_i x^i.$$

- *On a les relations équivalentes suivantes :*

$$\sigma(\beta(x)) = \langle p \rangle_{F_E}(x)\gamma(x),$$

$$\sigma(\beta_i) = \sum_{j=1}^{i} a_{i-j}\gamma_j.$$

Corollaire 5.1.2. *On a la suite exacte courte de E_*E-comodules suivante :*

$$0 \longrightarrow E_*\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty \xrightarrow{\sigma} E_*T_p \xrightarrow{\pi} \Sigma E_*\mathrm{B}\mathbb{Z}/p \longrightarrow 0.$$

Démonstration : Par hypothèse, E_* n'a pas de p-torsion. Comme $a_0 = p$, le morphisme σ est injectif et donc la suite exacte longue (5.1.2) se scinde en suites exactes courtes. □

Cette suite exacte est une présentation libre de $E_*\mathrm{B}\mathbb{Z}/p$ en tant que E_*-module. On a donc le corollaire immédiat :

Corollaire 5.1.3. *$E_*\mathrm{B}\mathbb{Z}/p$ est engendré comme E_*-module par des éléments $[i] = \pi(\gamma_i)$ homogènes de degré $2i-1$, pour $i \geq 1$ (par convention, $[i] = 0$ pour $i \leq 0$) , avec comme relations :*

$$\sum_{k=1}^{i} a_{i-k}\,[i] = 0.$$

On notera $\zeta(x)$ la série génératrice homogène de degré 1 suivante :

$$\zeta(x) = \sum_{i\geq 1} [i]\, x^{i-1}.$$

On peut aussi voir $E_*\mathrm{B}\mathbb{Z}/p$ comme le noyau d'un morphisme de E_*E-comodules :

Proposition 5.1.4. *On a la suite exacte courte de E_*E-comodules suivante :*

$$0 \longrightarrow \Sigma E_*\mathrm{B}\mathbb{Z}/p \xrightarrow{\delta} E_*\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty/p^\infty \xrightarrow{\sigma/p^\infty} E_*T_p/p^\infty \longrightarrow 0,$$

et on a l'identité de séries formelles :

$$\delta(\zeta) = \frac{1}{\langle p \rangle_{F_E}} \cdot \overline{\beta}.$$

Démonstration : D'après le corollaire 5.1.2, on a la suite exacte courte suivante :

$$0 \longrightarrow E_*\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty \xrightarrow{\sigma} E_*T_p \xrightarrow{\pi} \Sigma E_*\mathrm{B}\mathbb{Z}/p \longrightarrow 0,$$

où σ est déterminé par la relation :

$$\sigma(\beta) = \langle p \rangle_{F_E} \gamma.$$

Ainsi, si on inverse p, σ devient un isomorphisme. On peut donc appliquer le lemme du serpent au diagramme suivant, et la proposition suit car E_* n'a pas de p-torsion.

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[r, dotted] \arrow[d, dotted] & \Sigma E_*\mathrm{B}\mathbb{Z}/p \arrow[d, dotted] \arrow[dddll, dotted, bend left] & \\
0 \arrow[r] & E_*\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d] & E_*T_p \arrow[r, "\pi"] \arrow[d] & \Sigma E_*\mathrm{B}\mathbb{Z}/p \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & E_*\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty\left[\frac{1}{p}\right] \arrow[r, "\sigma\left[\frac{1}{p}\right]", "\simeq"'] \arrow[d, dotted] & E_*T_p\left[\frac{1}{p}\right] \arrow[r] \arrow[d, dotted] & 0 \arrow[d, dotted] & \\
 & E_*\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty/p^\infty \arrow[r, dotted, "\sigma/p^\infty"'] & E_*T_p/p^\infty \arrow[r, dotted] & 0 &
\end{tikzcd}$$

□

Nous allons définir l'homomorphisme de Smith algébrique. Tout d'abord, on définit les morphismes de E_*-modules suivant :

$$\partial_{\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty} : \left\{ \begin{array}{ccc} E_*\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty & \longrightarrow & E_{*-2}\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty \\ \beta(x) & \longmapsto & x\beta(x) \end{array} \right. ,$$

$$\partial_{T_p} : \left\{ \begin{array}{ccc} E_*T_p & \longrightarrow & E_{*-2}T_p \\ \gamma(x) & \longmapsto & x\gamma(x) \end{array} \right. .$$

On vérifie alors facilement que le diagramme de E_*-modules suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
E_*\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\partial_{\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty}"'] & E_*T_p \arrow[d, "\partial_{T_p}"] \\
E_{*-2}\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty \arrow[r, "\sigma"] & E_{*-2}T_p.
\end{tikzcd}$$

On a donc :

Proposition et définition 5.1.5 (Homomorphisme de Smith algébrique, [CF64]). *Il existe un unique morphisme de E_*-modules*

$$\partial_N : E_*\mathrm{B}\mathbb{Z}/p \longrightarrow E_{*-2}\mathrm{B}\mathbb{Z}/p,$$

tel que $\partial_N[i] = [i-1]$ pour tout $i \geq 1$.

Remarque 5.1.6. L'homomorphisme de Smith algébrique n'est pas un morphisme de E_*E-comodules.

5.2 Structure de comodule de l'homologie de $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p$

Dans cette section, nous allons expliciter le morphisme de structure de comodule de la MU-homologie de $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p$:

$$\psi_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/p} : \mathsf{MU}_*\mathrm{B}\mathbb{Z}/p \longrightarrow \mathsf{MU}_*\mathsf{MU}\otimes_{\mathsf{MU}_*}\mathsf{MU}_*\mathrm{B}\mathbb{Z}/p.$$

Si E est un spectre vérifiant les propriétés énoncées à la section 5.1, la structure de E_*E-comodule de $E_*\mathrm{B}\mathbb{Z}/p$ s'obtient grâce au foncteur f_{E*} induit par $f_E : \mathsf{MU} \longrightarrow E$ sur les catégories de comodules :

$$f_{E*} : {}_{\mathsf{MU}_*\mathsf{MU}}\mathcal{C}\mathrm{omod} \longrightarrow {}_{E_*E}\mathcal{C}\mathrm{omod}.$$

Tout d'abord, rappelons le résultat suivant concernant la MU-homologie de $\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty$. On utilise ici la notation $\rhd$ introduite à définition 1.5.10.

Proposition 5.2.1. *Le morphisme de structure de comodule de la* MU*-homologie de* $\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty$ *est déterminé par l'identité de séries formelles suivante :*

$$\psi_{\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathsf{MU}_*\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty & \longrightarrow & \mathsf{MU}_*\mathsf{MU}\otimes_{\mathsf{MU}_*}\mathsf{MU}_*\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty \\ \beta(x) & \longmapsto & \beta \rhd \mathrm{b_u}(x). \end{array} \right.$$

Proposition 5.2.2. *Le morphisme de structure de comodule de la* MU*-homologie de* T_p *est déterminé par l'identité de séries formelles suivante :*

$$\psi_{T_p} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathsf{MU}_*T_p & \longrightarrow & \mathsf{MU}_*\mathsf{MU}\otimes_{\mathsf{MU}_*}\mathsf{MU}_*T_p \\ \overline{\gamma}(x) & \longmapsto & \overline{\mathrm{b_u}} \circ [p]_{\mathrm{F_u}}(x) \cdot \overline{\gamma} \rhd \mathrm{b_u}(x), \end{array} \right.$$

où $\overline{\gamma}$ est la série formelle réduite de γ (cf. la notation 1.5.15).

Démonstration : D'après le corollaire 5.1.2, le morphisme de comodule

$$\sigma : \mathsf{MU}_*\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty \longrightarrow \mathsf{MU}_*T_p$$

devient un isomorphisme si on tensorise avec $\mathbb{Q}$. Comme MU_* n'a pas de p-torsion, le diagramme suivant, où toutes les flèches obliques sont injectives, commute :

$$\begin{tikzcd}
 & \mathsf{MU}_*\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty \arrow[rr, "\sigma"] \arrow[dl] & & \mathsf{MU}_*T_p \arrow[dl] \arrow[dd, "\psi_{T_p}"] \\
\mathbb{Q}\otimes\mathsf{MU}_*\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty \arrow[rr, "\mathbb{Q}\otimes\sigma", "\simeq"'] \arrow[dd, "\psi_{\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty}"'] & & \mathbb{Q}\otimes\mathsf{MU}_*T_p \arrow[dd, "\psi_{T_p}"'] & \\
 & & & \mathsf{MU}_*\mathsf{MU}\otimes\mathsf{MU}_*T_p \arrow[dl] \\
\mathbb{Q}\otimes\mathsf{MU}_*\mathsf{MU}\otimes\mathsf{MU}_*\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty \arrow[rr, "id\otimes\sigma", "\simeq"'] & & \mathbb{Q}\otimes\mathsf{MU}_*\mathsf{MU}\otimes\mathsf{MU}_*T_p &
\end{tikzcd}$$

On a donc :

$$\psi_{T_p}(\overline{\gamma})(x) = (id \otimes \sigma) \circ \psi_{\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty} \circ \sigma^{-1}(\overline{\gamma}(x)).$$

D'après la proposition 5.1.1, on a :

$$\sigma(\beta)(x) = \langle p \rangle_{\mathrm{F_u}}(x)\gamma(x).$$

On en déduit donc :

$$\sigma(\overline{\beta})(x) = \langle p \rangle_{\mathrm{F_u}}(x)\overline{\gamma}(x)$$

et, comme la série $\langle p\rangle_{\mathrm{F_u}}(x)$ est inversible dans $\mathbb{Q}\otimes\mathsf{MU}_*$:

$$\sigma^{-1}(\overline{\gamma})(x) = \frac{1}{\langle p\rangle_{\mathrm{F_u}}(x)}\overline{\beta}(x).$$

En utilisant les propositions 5.2.1 et 1.5.16, on a :

$$\begin{aligned}
\psi_{\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty}\left(\frac{1}{\langle p\rangle_{\mathrm{F_u}}(x)}\overline{\beta}(x)\right) &= \psi_{\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty}\left(\frac{1}{[p]_{\mathrm{F_u}}(x)}\beta(x)\right)\\
&= \frac{1}{[p]_{\mathrm{F_u}}(x)}\psi_{\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty}(\beta)(x)\\
&= \frac{1}{[p]_{\mathrm{F_u}}(x)}\beta \rhd \mathrm{b_u}(x)
\end{aligned}$$

On applique alors le morphisme $id\otimes\sigma$:

$$\begin{aligned}
(id\otimes\sigma)(\beta \rhd \mathrm{b_u})(x) &= \sigma(\beta)\rhd \mathrm{b_u}(x) && \text{(cf. la proposition 1.5.12)}\\
&= (\langle p\rangle_{\mathrm{F_u}}\cdot\gamma)\rhd \mathrm{b_u}(x)\\
&= (\eta_R\langle p\rangle_{\mathrm{F_u}})\circ \mathrm{b_u}(x)\cdot\gamma\rhd \mathrm{b_u}(x). && \text{(cf. la remarque 1.5.13)}
\end{aligned}$$

On utilise maintenant le fait que $\mathrm{b_u}$ est le morphisme universel $\eta_L\mathrm{F_u}\longrightarrow\eta_R\mathrm{F_u}$. On a donc :

$$\mathrm{b_u}\circ[p]_{\mathrm{F_u}} = \eta_R([p]_{\mathrm{F_u}})\circ\mathrm{b_u}.$$

On en déduit alors :

$$\begin{aligned}
(\eta_R\langle p\rangle_{\mathrm{F_u}})\circ\mathrm{b_u}(x) &= \frac{\eta_R[p]_{\mathrm{F_u}}(x)}{x}\circ\mathrm{b_u}(x)\\
&= \frac{\eta_R[p]_{\mathrm{F_u}}\circ\mathrm{b_u}(x)}{\mathrm{b_u}(x)}\\
&= \frac{\mathrm{b_u}\circ[p]_{\mathrm{F_u}}(x)}{\mathrm{b_u}(x)}
\end{aligned}$$

Finalement :

$$\begin{aligned}
\psi_{T_p}(\overline{\gamma})(x) &= \frac{1}{[p]_{\mathrm{F_u}}(x)}\cdot(id\otimes\sigma)(\beta\rhd\mathrm{b_u})(x)\\
&= \frac{1}{[p]_{\mathrm{F_u}}(x)}\cdot(\eta_R\langle p\rangle_{\mathrm{F_u}})\circ\mathrm{b_u}(x)\cdot\gamma\rhd\mathrm{b_u}(x)\\
&= \frac{\mathrm{b_u}\circ[p]_{\mathrm{F_u}}(x)}{[p]_{\mathrm{F_u}}(x)}\cdot\frac{1}{\mathrm{b_u}(x)}\cdot\gamma\rhd\mathrm{b_u}(x)\\
&= \overline{\mathrm{b_u}}\circ[p]_{\mathrm{F_u}}(x)\cdot\overline{\gamma}\rhd\mathrm{b_u}(x).
\end{aligned}$$

□

Corollaire 5.2.3. *Le morphisme de structure de comodule de la* MU*-homologie de* $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p$ *est déterminé par l'identité de séries formelles suivante :*

$$\psi_{\mathrm{B}\mathbb{Z}/p}:\begin{cases}\mathsf{MU}_*\mathrm{B}\mathbb{Z}/p & \longrightarrow \quad \mathsf{MU}_*\mathsf{MU}\otimes_{\mathsf{MU}_*}\mathsf{MU}_*\mathrm{B}\mathbb{Z}/p\\ \zeta(x) & \longmapsto \quad \overline{\mathrm{b_u}}\circ[p]_{\mathrm{F_u}}(x)\cdot\zeta\rhd\mathrm{b_u}(x).\end{cases}$$

Démonstration : Cela vient du fait que $\pi(\overline{\gamma})=\zeta$. □

5.3 Action de $(\mathbb{Z}/p)^{\times}$ sur l'homologie de $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p$

Par naturalité des espaces d'Eilenberg-Maclane et du classifiant d'un groupe abélien, le groupe $\mathbb{Z}$ agit sur la E-homologie de ces espaces dans la catégorie des E_*E-comodules. Soit $k \in \mathbb{Z}$ et G un groupe commutatif. Nous noterons θ_k l'action induite par la multiplication par k sur $\mathrm{B}G$ et sur $\mathrm{K}(G,n)$. On a le diagramme commutatif à homotopie près suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{B}\mathbb{Z}/p \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\theta_k"'] & \mathbb{C}\mathrm{P}^\infty \arrow[d, "\theta_k"] \\
\mathrm{B}\mathbb{Z}/p \arrow[r, "\rho"'] & \mathbb{C}\mathrm{P}^\infty.
\end{tikzcd}$$

On peut prolonger ce diagramme à la suite cofibre :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty \arrow[r] \arrow[d, "\theta_k"'] & T_p \arrow[r] \arrow[d, "\theta_k"'] & \Sigma\mathrm{B}\mathbb{Z}/p \arrow[d, "\Sigma\theta_k"] \\
\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty \arrow[r] & T_p \arrow[r] & \Sigma\mathrm{B}\mathbb{Z}/p.
\end{tikzcd}$$

Si on note toujours θ_k le morphisme de E_*E-comodules induit par θ_k, on a le diagramme commutatif suivant où les lignes sont exactes :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & E_*\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\theta_k"'] & E_*T_p \arrow[r] \arrow[d, "\theta_k"'] & \Sigma E_*\mathrm{B}\mathbb{Z}/p \arrow[r] \arrow[d, "\Sigma\theta_k"] & 0 \\
0 \arrow[r] & E_*\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty \arrow[r, "\sigma"'] & E_*T_p \arrow[r] & \Sigma E_*\mathrm{B}\mathbb{Z}/p \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Proposition 5.3.1. *Soit $k \in \mathbb{Z}$. On a les relations suivantes :*
- $\theta_k\beta = \beta \circ [k]_{F_E}$,
- $\theta_k\overline{\gamma} = \langle k\rangle_{F_E} \circ [p]_{F_E} \cdot \overline{\gamma} \circ [k]_{F_E}$,
- $\theta_k\zeta = \langle k\rangle_{F_E} \circ [p]_{F_E} \cdot \zeta \circ [k]_{F_E}$.

Démonstration : k agit sur $E^*\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty$ par le morphisme d'algèbre θ_k^* qui envoie x sur $[k]_{F_E}(x)$. En utilisant la dualité, on obtient :

$$\begin{aligned}
\theta_k\beta(t) &= \sum_{i\geq 1}\langle\theta_k\beta(t), x^i\rangle\beta_i \\
&= \sum_{i\geq 1}\langle\beta(t), \theta_k^*(x^i)\rangle\beta_i \\
&= \sum_{i\geq 1}\langle\beta(t), [k]_{F_E}(x)^i\rangle\beta_i \\
&= \sum_{i\geq 1}[k]_{F_E}(t)^i\,\beta_i \\
&= \beta\circ[k]_{F_E}(t)\,.
\end{aligned}$$

Pour démontrer les deux relations suivantes, on utilise la même méthode que pour la démonstration de la proposition 5.2.2. Le morphisme σ devient un isomorphisme si on inverse p. On obtient donc :

$$\begin{aligned}
\theta_k\overline{\gamma} &= \sigma\circ\theta_k\circ\sigma^{-1}\overline{\gamma}\\
&= \sigma\circ\theta_k\left(\frac{1}{\langle p\rangle_{F_E}}\cdot\overline{\beta}\right)\\
&= \sigma\circ\theta_k\left(\frac{1}{[p]_{F_E}}\cdot\beta\right)\\
&= \sigma\left(\frac{1}{[p]_{F_E}}\cdot\beta\circ[k]_{F_E}\right)\\
&= \frac{1}{[p]_{F_E}}\cdot\sigma(\beta)\circ[k]_{F_E}\\
&= \frac{\langle p\rangle_{F_E}\circ[k]_{F_E}}{[p]_{F_E}}\cdot\gamma\circ[k]_{F_E}\\
&= \frac{[p]_{F_E}\circ[k]_{F_E}}{[p]_{F_E}\cdot[k]_{F_E}}\cdot\gamma\circ[k]_{F_E}\\
&= \langle k\rangle_{F_E}\circ[p]_{F_E}\cdot\overline{\gamma}\circ[k]_{F_E}.
\end{aligned}$$

□

On peut remarquer directement que les relations suivantes attendues sont bien vérifiées :
- $\theta_k\zeta = 0$ si $p \mid k$,
- $\theta_{k+p}\zeta = \theta_k\zeta$.

En effet, pour la première égalité si $k = pk'$, alors :

$$\langle k\rangle_{F_E}\circ[p]_{F_E} = \langle p\rangle_{F_E}\circ[k]_{F_E}\cdot\langle k'\rangle_{F_E}\circ[p]_{F_E}.$$

d'où :

$$\begin{aligned}
\theta_k\zeta &= \langle k\rangle_{F_E}\circ[p]_{F_E}\cdot\zeta\circ[k]_{F_E}\\
&= \langle p\rangle_{F_E}\circ[k]_{F_E}\cdot\langle k'\rangle_{F_E}\circ[p]_{F_E}\cdot\zeta\circ[k]_{F_E}\\
&= \langle k'\rangle_{F_E}\circ[p]_{F_E}\cdot\left(\langle p\rangle_{F_E}\cdot\zeta\right)\circ[k]_{F_E}\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Pour la seconde égalité, on a :

$$\begin{aligned}
\theta_{k+p}\beta(x)-\theta_k\beta(x) &= \beta\circ[k+p]_{F_E}(x)-[k]_{F_E}(x)\\
&= \sum_{i\geq 1}\left([k+p]_{F_E}(x)^i-[k]_{F_E}(x))^i\right)\beta_i
\end{aligned}$$

Il existe donc des séries formelles $\lambda_i(x)\in E_*[\![x]\!]$ pour $i\geq 1$ telles que :

$$\theta_{k+p}\beta(x)-\theta_k\beta(x) = [p]_{F_E}(x)\cdot\sum_{i\geq 1}\lambda_i(x)\beta_i.$$

En appliquant σ, on en déduit donc que $\theta_{k+p}\gamma-\theta_k\gamma$ est dans l'image de σ.

5.4 Homologie de $(\mathrm{B}\mathbb{Z}/p)^{\wedge n}$

Dans cette section nous allons énoncer les résultats généraux connus sur la E-homologie de $\mathrm{B}V$, où V est le p-groupe abélien élémentaire de rang n, pour $n\geq 1$. :

$$V = (\mathbb{Z}/p)^{\times n}.$$

On a alors l'équivalence d'homotopie suivante :

$$\mathrm{B}V \simeq (\mathrm{B}\mathbb{Z}/p)^{\times n}.$$

La proposition suivante permet de ramener l'étude de l'homologie de BV à celle de l'espace $(\mathrm{B}\mathbb{Z}/p)^{\wedge n}$:

Proposition 5.4.1. *Soient X et Y deux espaces topologiques. Alors les espaces suivants sont homotopiquement équivalents :*

$$\Sigma(X \times Y) \simeq \Sigma X \vee \Sigma Y \vee \Sigma(X \wedge Y).$$

Corollaire 5.4.2. *Soit $V = (\mathbb{Z}/p)^{\times n}$. Alors on a la décomposition en somme directe suivante dans la catégorie des E_*E-comodules :*

$$E_*\mathrm{B}V \simeq \bigoplus_{k=1}^{n} \binom{n}{k} E_* \left(\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^{\wedge k}\right).$$

Rappelons la suite spectrale de Künneth. Rezk démontre l'existence de cette suite spectrale dans [Rez98], dans le cas où E est un spectre en anneau commutatif muni d'une orientation complexe Landweber exact.

Théorème 5.4.3 (Suite spectrale de Künneth, [Ada69])**.** *Soient X, Y deux CW-complexes et E un spectre en anneau commutatif vérifiant la condition d'Adams. Il existe une suite spectrale $(E^r_{s,t}, d^r_{s,t})$, pour $r \geq 2$ telle que :*

$$E^2_{s,t} = \mathrm{Tor}^{E_*}_{s,t}(E_*X, E_*Y) \Longrightarrow E_{s+t}\left(X \wedge Y\right).$$

Ce théorème nous permet de calculer l'homologie de $(\mathrm{B}\mathbb{Z}/p)^{\wedge n}$ par récurrence sur n. D'après le corollaire 5.1.3, $E_*\mathrm{B}\mathbb{Z}/p$ admet une résolution libre par des E_*E-comodules de longueur 1. La suite spectrale de Künneth dégénère donc en suites exactes courtes.

Corollaire 5.4.4 (5.6 et 5.7 de [JW85])**.** *Soit X un CW-complexe. On a la suite exacte courte de E_*E-comodules suivante, naturelle en X, où le premier morphisme est le produit extérieur :*

$$0 \longrightarrow E_*\mathrm{B}\mathbb{Z}/p \otimes_{E_*} E_*X \longrightarrow E_*\left(\mathrm{B}\mathbb{Z}/p \wedge X\right) \longrightarrow \Sigma\,\mathrm{Tor}^{E_*}_1\left(E_*\mathrm{B}\mathbb{Z}/p, E_*X\right) \longrightarrow 0.$$

Par conséquent, l'image du morphisme :

$$E_*(\rho \wedge id) : E_*\left(\mathrm{B}\mathbb{Z}/p \wedge X\right) \longrightarrow E_*\left(\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty \wedge X\right)$$

est $\Sigma\,\mathrm{Tor}^{E_*}_1\left(E_*\mathrm{B}\mathbb{Z}/p, E_*X\right)$.

Démonstration : D'après (5.1.1), nous avons la suite cofibre suivante :

$$\mathrm{B}\mathbb{Z}/p \xrightarrow{\rho} \mathbb{C}\mathrm{P}^\infty \longrightarrow T_p.$$

On en déduit la suite cofibre suivante :

$$\mathrm{B}\mathbb{Z}/p \wedge X \xrightarrow{\rho} \mathbb{C}\mathrm{P}^\infty \wedge X \longrightarrow T_p \wedge X,$$

et la suite exacte longue de E_*E-comodules :

$$\cdots \longrightarrow E_*\left(\mathrm{B}\mathbb{Z}/p \wedge X\right) \longrightarrow E_*\left(\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty \wedge X\right) \longrightarrow E_*\left(T_p \wedge X\right) \longrightarrow \cdots$$

Puisque $E_*\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty$ et E_*T_p sont des E_*-modules libres, on a les isomorphismes :

$$E_*\left(\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty \wedge X\right) \simeq E_*\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty \otimes_{E_*} E_*X,$$

$$E_*\left(T_p \wedge X\right) \simeq E_*T_p \otimes_{E_*} E_*X.$$

La suite exacte longue s'identifie alors à :

$$\cdots \longrightarrow E_*\left(\mathrm{B}\mathbb{Z}/p \wedge X\right) \longrightarrow E_*\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty \otimes_{E_*} E_*X \xrightarrow{\sigma \otimes id} E_*T_p \otimes_{E_*} E_*X \longrightarrow \cdots$$

On en déduit alors le résultat. □

Nous avons vu au corollaire 5.1.3 que $E_*\mathrm{B}\mathbb{Z}/p$ est engendré comme E_*-module par les éléments $[i]$ homogènes de degré $2i-1$, pour $i \geq 1$.

Définition 5.4.5. *Soit $n \geq 1$. On note $\mathcal{J}^n$ l'ensemble des n-uplets d'entiers strictements positifs. Soit $I = (i_1, \ldots, i_n) \in \mathcal{J}^n$. On définit l'élément :*

$$[I] = [i_1] \otimes \cdots \otimes [i_n] \in \left(E_*\mathrm{B}\mathbb{Z}/p\right)^{\otimes n}$$

et on appellera poids de I l'entier :

$$|I| = i_1 + \cdots + i_n.$$

Lemme 5.4.6. *La famille $([I])_{I \in \mathcal{J}^n}$ engendre $\left(E_*\mathrm{B}\mathbb{Z}/p\right)^{\otimes n}$ comme E_*-module.*

Le produit extérieur nous donne le morphisme de E_*E-comodules suivant :

$$\chi : \left(E_*\mathrm{B}\mathbb{Z}/p\right)^{\otimes n} \longrightarrow E_*\left(\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^{\wedge n}\right). \tag{5.4.1}$$

On notera $\omega_n = [1 \ldots, 1] \in \left(E_*\mathrm{B}\mathbb{Z}/p\right)^{\otimes n}$ et ω_n' l'élément $\chi(\omega_n) \in E_n\left(\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^{\wedge n}\right)$.

Définition 5.4.7. *Soit $1 \leq i \leq n$. En agissant sur le i-ème facteur du produit tensoriel, le morphisme de Smith algébrique définit un morphisme :*

$$\partial_i : \left(E_*\mathrm{B}\mathbb{Z}/p\right)^{\otimes n} \longrightarrow \Sigma^2\left(E_*\mathrm{B}\mathbb{Z}/p\right)^{\otimes n}.$$

Nous allons maintenant étudier plus particulièrement le cas $E = \mathsf{BP}$. On peut trouver les résultats suivants dans les articles [JW85] de Johnson et Wilson et [JWY94] de Johnson, Wilson et Yan. Afin d'alléger la notation, les produits tensoriels sur BP_* seront omis et nous adopterons les notations suivantes :

$$M = \mathsf{BP}_*\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty, T = \mathsf{BP}_*T_p,$$

$$N = \mathsf{BP}_*\mathrm{B}\mathbb{Z}/p,$$

$$Z(n) = \mathsf{BP}_*\left(\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^{\wedge n}\right) \text{ pour } n \geq 1.$$

On a alors les suites exactes courtes (cf. les corollaires 5.1.2 et 5.4.4) :

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\sigma} T \xrightarrow{\pi} \Sigma N \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow NZ(n) \longrightarrow Z(n+1) \longrightarrow \Sigma\,\mathrm{Tor}_1^{\mathsf{BP}_*}(N, Z(n)) \longrightarrow 0.$$

Conner et Floyd ont énoncé la conjecture suivante dans [CF64]. Elle a été démontrée par Ravenel et Wilson dans [RW80] puis, de façon plus concise par Mitchell dans [Mit84]. Cette conjecture joue un rôle crucial dans toute la suite.

Théorème 5.4.8 (Conjecture de Conner-Floyd [CF64], Ravenel-Wilson [RW80], Mitchell [Mit84]). *Soit $n \geq 1$ un entier. Alors :*

$$\mathrm{Ann}(\omega'_{\mathrm{n}}) = \left\{ \lambda \in \mathsf{BP}_* \mid \ \lambda\omega'_{\mathrm{n}} = 0 \right\} = \mathfrak{I}_{\mathrm{n}}.$$

Cette conjecture a pour conséquences les deux résultats essentiels suivants :

Théorème 5.4.9 (3.2, [JW85]). *Le produit tensoriel itéré N^n admet une présentation de Landweber (cf. le théorème 1.8.16) libre sur $\mathsf{BP}_*/\mathfrak{I}_n$ sur des classes représentées par les éléments $[I]$ pour $I \in \mathcal{J}^n$. C'est-à-dire que tout élément $z \in N^n$ s'écrit de manière unique :*

$$z = \sum_{I \in \mathcal{J}^n} \lambda_I \, [I] \, ,$$

où $\lambda_I \in \mathsf{BP}_*$ est un polynôme en les indéterminés v_i pour $i \geq n$ et dont les coefficients sont des entiers compris entre 0 et $p-1$.

Corollaire 5.4.10 (3.3, [JW85]). *Soit $n \geq 1$. Le morphisme χ (cf. (5.4.1)) est injectif :*

$$\chi : N^n \longrightarrow Z(n).$$

Le théorème 5.4.9 permet de démontrer le résultat suivant qui sera utile pour la suite. Il va aussi nous permettre de calculer $L^i_k N^n$, localisé des comodules N^n par rapport aux théories de torsions héréditaires $\mathcal{T}_k$, introduites à la section 3.2.

Proposition 5.4.11. *Soient $n \geq 1$ et $x_i \in N^n$ pour $1 \leq i \leq n$. Supposons que pour tout $1 \leq j \leq n$,*

$$\partial_i x_j = \partial_j x_i.$$

Alors il existe $x \in N^n$ tel que $\partial_i x = x_i$ pour tout $1 \leq i \leq n$. De plus, si x' vérifie aussi cette propriété, alors il existe $\lambda \in \mathsf{BP}_*$ tel que :

$$x - x' = \lambda\omega_n.$$

Théorème 5.4.12. *Soient $k, i, n \geq 0$ trois entiers. On a les isomorphismes de $\mathsf{BP}_*\mathsf{BP}$-comodules suivants :*

$$T^i_k N^n \simeq \begin{cases} N^n & si \quad i = 0 \quad et \quad k \leq n-1, \\ N^n/(v_n^\infty, \dots, v_k^\infty) & si \quad i = k+1-n \quad et \quad k \geq n, \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

$$L^i_k N^n \simeq \begin{cases} N^n/(v_n^\infty, \dots, v_k^\infty) & si \quad i = k-n \quad et \quad k \geq n, \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

Démonstration : Le calcul de $L^i_k N^n$ découle directement de celui de $T^i_k N^n$ et du corollaire 3.2.20. Pour le calcul de $T^i_k N^n$, nous allons faire une récurrence sur $k \geq 0$ et utiliser le corollaire 3.4.11. Pour $k = 0$, comme N^n est de p-torsion pour $n \geq 1$, on peut appliquer le corollaire 3.2.21 et donc $T^i_0 N^n = 0$ pour i≥ 1 et $T_0 N^n = N^n$. D'autre part, pour $n = 0$, en utilisant le corollaire 3.2.20, on trouve bien $T^1_0 \mathsf{BP}_* = \mathsf{BP}_*/p^\infty$ et $T^i_0 \mathsf{BP}_* = 0$ pour $i \neq 1$.

Supposons le résultat vrai pour k. D'après le corollaire 3.4.11, on a la suite exacte longue de $\mathsf{BP}_*\mathsf{BP}$-comodules :

$$\cdots \longrightarrow T^i_{k+1} N^n \longrightarrow T^i_k N^n \longrightarrow v_{k+1}^{-1} T^i_k N^n \longrightarrow T^{i+1}_{k+1} N^n \longrightarrow \cdots$$

Si $k \leq n-1$, on a donc $T^i_{k+1} N^n = 0$ pour $i \geq 2$ et on a la suite exacte courte :

$$0 \longrightarrow T_{k+1} N^n \longrightarrow N^n \longrightarrow v_{k+1}^{-1} N^n \longrightarrow T^1_{k+1} N^n \longrightarrow 0.$$

D'après le théorème 5.4.9, le morphisme $N^n \longrightarrow v_{k+1}^{-1}N^n$ est injectif si $k = n-1$ et nul si $k < n-1$. On en déduit alors que $T_{k+1}N^n = N^n$ et $T_{k+1}^1 N^n = 0$ si $k < n-1$ et que $T_n N^n = 0$ et $T_n^1 N_n = N^n/v_n^\infty$.

Si $k \geq n$, on a donc $T_{k+1}^i N^n = 0$ pour $i \neq k+1-n, k+2-n$ et on a la suite exacte courte :

$$0 \longrightarrow T_{k+1}^{k+1-n}N^n \longrightarrow N^n/(v_n^\infty, \ldots, v_k^\infty) \longrightarrow v_{k+1}^{-1}N^n/(v_n^\infty, \ldots, v_k^\infty) \longrightarrow T_{k+1}^{k+2-n}N^n \longrightarrow 0.$$

Toujours d'après le théorème 5.4.9, le morphisme

$$N^n/(v_n^\infty, \ldots, v_k^\infty) \longrightarrow v_{k+1}^{-1}N^n/(v_n^\infty, \ldots, v_k^\infty)$$

est injectif. Cela termine la récurrence et achève la démonstration. □

Dans la suite exacte courte de Künneth, apparaissent des foncteurs $\mathrm{Tor}_1^{\mathsf{BP}_*}(N, -)$. Nous allons donc étudier les comodules du type $\mathrm{Tor}_1^{\mathsf{BP}_*}(N, N^n)$. En utilisant le corollaire 5.1.3, on obtient la suite exacte courte de comodules :

$$0 \longrightarrow \Sigma\, \mathrm{Tor}_1^{\mathsf{BP}_*}(N, N^n) \longrightarrow MN^n \longrightarrow TN^n \longrightarrow \Sigma N^{n+1} \longrightarrow 0. \tag{5.4.2}$$

Définition 5.4.13. *Soit $n \geq 1$ un entier. On notera $M_{<n} = \mathsf{BP}_*\mathbb{C}\mathrm{P}^{n-1}$; c'est le sous-comodule de M engendré par les éléments β_i pour $1 \leq i < n$. On notera $M_{\geq n}$ le comodule quotient $M/M_{<n}$. On a alors la suite exacte courte de $\mathsf{BP}_*\mathsf{BP}$-comodules suivante :*

$$0 \longrightarrow M_{<n} \longrightarrow M \longrightarrow M_{\geq n} \longrightarrow 0.$$

Cette suite exacte est scindée dans la catégorie des BP_*-modules et $M_{\geq n}$ est isomorphe au sous-module de M engendré par les éléments β_i pour $i \geq n$.

Nous allons avoir besoin du lemme technique suivant :

Lemme 5.4.14 (4.8, [JW85])**.** *Soient $n \geq 1$ et $w \in T$ tel que $(\pi \otimes N^n)(w \otimes \omega_n) = 0$. Alors il existe $y \in M_{\geq p^n}$ tel que :*

$$(\sigma \otimes N^n)(y \otimes \omega_n) = w \otimes \omega_n.$$

Théorème 5.4.15. *Soit $n \geq 1$. La restriction de $\sigma \otimes N^n$ au sous-module $M_{\geq p^n}N^n$ dans la suite exacte courte* (5.4.2) *induit la suite exacte courte de BP_*-modules :*

$$0 \longrightarrow M_{\geq p^n}N^n \xrightarrow{\sigma \otimes N^n} TN^n \xrightarrow{\pi \otimes N^n} \Sigma N^{n+1} \longrightarrow 0.$$

Démonstration : L'injectivité du morphisme $\sigma \otimes N^n$ restreint à $M_{\geq p^n}N^n$ découle directement de la conjecture de Connor-Floyd 5.4.8. En effet, si $x \in M_{\geq p^n}N^n$ est un élément non nul dans le noyau, alors en utilisant le morphisme de Smith, on peut supposer que $x = y \otimes \omega_n$, avec $y \in M_{\geq p^n}$. D'après le théorème de Connor-Floyd 5.4.8, on peut supposer que y s'écrit $y = \sum_{i \geq p^n} \lambda_i \beta_i$, où les $\lambda_i \in \mathsf{BP}_*$ sont des polynômes en v_j pour $j \geq n$ à coefficients compris entre 0 et $p-1$. On remarque que $\sigma(\beta_i) \otimes \omega_n = 0$ pour $i < p^n$. Quitte à appliquer l'homomorphisme $\partial_{\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty}$, on peut supposer que $x = \lambda \beta_{p^n} \otimes \omega_n$. Alors :

$$(\sigma \otimes N^n)(x) = \sum_{j \geq 1} a_{p^n - j} \lambda\ \gamma_j \otimes \omega_n.$$

Or, d'après la proposition 1.8.18, si $i < p^n - 1$, $a_i \in \mathfrak{I}_n$ et $a_{p^n-1} \equiv v_n\, [\mathfrak{I}_n]$. D'après le théorème de Connor-Floyd 5.4.8, on en déduit que :

$$(\sigma \otimes N^n)(x) = v_n \lambda\ \gamma_1 \otimes \omega_n \neq 0.$$

Cela démontre l'injectivité.

Il reste à démontrer l'exactitude au milieu de la suite exacte. Soit $x \in TN^n$ tel que

$$(\pi \otimes N^n)(x) = 0.$$

L'élément x s'écrit de manière unique sous la forme du théorème 5.4.9 :

$$x = \sum_{i \geq 1} \sum_{I \in \mathcal{J}^n} \lambda_{i,I} \gamma_i \otimes [I]\,.$$

Nous allons montrer par récurrence sur le poids maximal $m(x)$:

$$m(x) = \sup_{(i,I)|\lambda_{i,I} \neq 0} |I|$$

qu'il existe $y \in M_{\geq p^n} N^n$ tel que $(\sigma \otimes N^n)(y) = x$. Le cas $m(x) = n$ est exactement le lemme 5.4.14. Supposons le résultat vrai pour tout x' tel que $m(x') < m(x)$. En particulier, pour tout $1 \leq j \leq n$, il existe $y_j \in M_{\geq p^n} N^n$ tel que :

$$(\sigma \otimes N^n)(y_j) = (T \otimes \partial_j)(x).$$

Comme $\sigma \otimes N^n$ restreint à $M_{\geq p^n} N^n$ est injectif, pour tous $1 \leq k, j \leq n$, on a :

$$(M_{\geq p^n} \otimes \partial_k) y_j = (M_{\geq p^n} \otimes \partial_j) y_k.$$

D'après la proposition 5.4.11, il existe donc $y \in M_{\geq p^n} N^n$ tel que, pour tout $1 \leq j \leq n$, $(M_{\geq p^n} \otimes \partial_j y) = y_j$. On a donc :

$$\begin{aligned} (T \otimes \partial_j)(x - (\sigma \otimes N^n)(y)) &= (T \otimes \partial_j)(x) - (\sigma \otimes N^n)(y_j) \\ &= (T \otimes \partial_j)(x) - (T \otimes \partial_j)(x) \\ &= 0. \end{aligned}$$

D'après la proposition 5.4.11, il existe donc $w \in T$ tel que :

$$x = (\sigma \otimes N^n)(y) + w \otimes \omega_n.$$

Le lemme 5.4.14 permet alors de conclure. □

Soit L_n le BP_*-module libre sur les générateurs y_i en degré $2i$ pour $1 \leq i \leq p^n - 1$ (Á ne pas confondre avec le foncteur de localisation L_n). On a le résultat suivant :

Théorème 5.4.16 (4.1, [JW85])**.** *Il existe un unique isomorphisme de* BP_**-modules*

$$\phi_n : L_n N^n \longrightarrow \Sigma \operatorname{Tor}_1^{\mathsf{BP}_*}(N, N^n) \subset MN^n$$

tel que, pour tout $1 \leq k \leq p^n - 1$ *et tout* $I \in \mathcal{J}^n$ *:*

$$\phi_n(y_k \otimes [I]) - \beta_k \otimes [I] \in M_{\geq p^n} N^n.$$

De plus, pour tout $1 \leq i \leq n$ *le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd} L_n N^n \arrow[r, "\phi_n"] \arrow[d, "L_n \otimes \partial_i"'] & MN^n \arrow[d, "M \otimes \partial_i"] \\ L_n N^n \arrow[r, "\phi_n"'] & MN^n. \end{tikzcd}$$

Démonstration : D'après le théorème 5.4.15, la suite exacte (5.4.2) se scinde en deux suites exactes courtes de BP_*-modules :

$$0 \longrightarrow M_{\geq p^n} N^n \xrightarrow{\sigma \otimes N^n} TN^n \xrightarrow{\pi \otimes N^n} \Sigma N^{n+1} \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow \Sigma\, \mathrm{Tor}_1^{\mathsf{BP}_*}(N, N^n) \longrightarrow MN^n \xrightarrow{\nu_n} M_{\geq p^n} N^n \longrightarrow 0.$$

Par construction, le morphisme ν_n restreint à $M_{\geq p^n} N^n$ est l'identité, la deuxième suite exacte est donc une suite exacte courte scindée dans la catégorie des BP_*-modules. Le résultat découle du fait que $MN^n = M_{<p^n} N^n \oplus M_{\geq p^n} N^n$. Explicitement, pour $1 \leq k \leq p^n - 1$ et $I \in \mathcal{J}^n$, l'isomorphisme ϕ_n vérifie :

$$\phi_n(y_k \otimes [I]) = \beta_k \otimes [I] - \nu_n(\beta_k \otimes [I]).$$

Finalement, le diagramme commute car ν_n commute avec les homomorphismes de Smith. □

Remarque 5.4.17. Il n'y a pas, à priori, de structure de comodule sur L_n tel que l'isomorphisme du théorème 5.4.16 soit un isomorphisme de $\mathsf{BP}_*\mathsf{BP}$-comodules.

Lemme 5.4.18. *Soient m, n deux entiers strictement positifs. Les morphismes naturels de $\mathsf{BP}_*\mathsf{BP}$-comodules suivants sont injectifs :*

$$\Sigma\, \mathrm{Tor}_1^{\mathsf{BP}_*}(N, N^n) \otimes N^m \longrightarrow MN^{n+m},$$
$$\Sigma\, \mathrm{Tor}_1^{\mathsf{BP}_*}(N, N^n) \otimes N^m \longrightarrow \Sigma\, \mathrm{Tor}_1^{\mathsf{BP}_*}(N, N^{n+m}).$$

Démonstration : Le diagramme commutatif suivant démontre que l'injectivité du deuxième morphisme découle directement du premier.

$$\begin{tikzcd}
 & \Sigma\, \mathrm{Tor}_1^{\mathsf{BP}_*}(N, N^n) \otimes N^m \arrow[d] \arrow[dr] & & & \\
0 \arrow[r] & \Sigma\, \mathrm{Tor}_1^{\mathsf{BP}_*}(N, N^{n+m}) \arrow[r] & MN^{n+m} \arrow[r] & TN^{n+m} \arrow[r] & \Sigma N^{n+m+1} \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Pour démontrer l'injectivité du premier morphisme, on utilise l'isomorphisme ϕ_n du théorème 5.4.16. On a alors :

$$\begin{tikzcd}
\Sigma\, \mathrm{Tor}_1^{\mathsf{BP}_*}(N, N^n) \otimes N^m \arrow[dr] & \\
L_n N^{n+m} \arrow[u, "\phi_n \otimes N^m", "\simeq"'] \arrow[r] & MN^{n+m}.
\end{tikzcd}$$

Le résultat découle alors directement du théorème 5.4.9 et du fait que pour $1 \leq k \leq p^n - 1$ et $I \in \mathcal{J}^{n+m}$,

$$(\phi_n \otimes N^m)(y_k \otimes [I]) - \beta_k \otimes [I] \in M_{\geq p^n} N^{n+m}.$$

□

Le théorème suivant est une généralisation du théorème 5.1 de [JW85] :

Théorème 5.4.19. *Le $\mathsf{BP}_*\mathsf{BP}$-comodule $Z(n)$ admet une filtration de $\mathsf{BP}_*\mathsf{BP}$-comodules :*

$$0 = F_{-1}Z(n) \subset F_0 Z(n) \subset \cdots \subset F_{2^{n-1}-1} Z(n) = Z(n),$$

telle que pour $i = \sum_{k=0}^{n-2} l_k 2^k$, avec $l_k \in \{0, 1\}$:

$$F_i Z(n) / F_{i-1} Z(n) = T^{l_{n-2}} \circ \cdots \circ T^{l_0}(N),$$

où T^l est le foncteur :

$$T^l = \Sigma^l\, \mathrm{Tor}_l^{\mathsf{BP}_*}(N, -).$$

Démonstration : Le résultat découlera de cette suite exacte pour $n+1$, si le résultat est connu pour n et si on démontre que la suite spectrale de la proposition 3.3.15 dégénère au rang 1.

Nous allons démontrer par récurrence sur $n \geq 0$ que :

– le $\mathsf{BP}_*\mathsf{BP}$-comodule $Z(n)$ admet une filtration de $\mathsf{BP}_*\mathsf{BP}$-comodules :

$$0 = F_{-1}Z(n) \subset F_0Z(n) \subset \cdots \subset F_{2^{n-1}-1}Z(n) = Z(n),$$

telle que pour $i = \sum_{k=0}^{n-2} l_k 2^k$, avec $l_k \in \{0,1\}$:

$$F_iZ(n)/F_{i-1}Z(n) = T^{l_{n-2}} \circ \cdots \circ T^{l_0}(N),$$

– la suite spectrale de la proposition 3.3.15 dégénère au rang 1 :

$$E^1_{s,t} \simeq \mathrm{Tor}^{\mathsf{BP}_*}_{s+t}(N, F_sZ(n)/F_{s-1}Z(n)) \Longrightarrow \mathrm{Tor}^{\mathsf{BP}_*}_{s+t}(N, Z(n)) \tag{5.4.3}$$

Pour $n=1$, le résultat est trivial. Soit $n \geq 2$. Supposons le résultat vrai pour $n-1$ et montrons le pour n. D'après le corollaire 5.4.4, nous avons une suite exacte courte de $\mathsf{BP}_*\mathsf{BP}$-comodules :

$$0 \longrightarrow N \otimes Z(n-1) \longrightarrow Z(n) \longrightarrow \Sigma\, \mathrm{Tor}^{\mathsf{BP}_*}_1(N, Z(n-1)) \longrightarrow 0.$$

L'hypothèse de récurrence implique alors que $Z(n)$ admet une filtration de $\mathsf{BP}_*\mathsf{BP}$-comodules :

$$0 = F_{-1}Z(n) \subset F_0Z(n) \subset \cdots \subset F_{2^{n-1}-1}Z(n) = Z(n),$$

telle que pour $i = \sum_{k=0}^{n-2} l_k 2^k$, avec $l_k \in \{0,1\}$:

$$F_iZ(n)/F_{i-1}Z(n) = T^{l_{n-2}} \circ \cdots \circ T^{l_0}(N).$$

Pour démontrer que la suite spectrale (5.4.3) dégénère au rang 1, introduisons les $\mathsf{BP}_*\mathsf{BP}$-comodules suivants pour $1 \leq i \leq n$:

$$X(i,n) = \mathsf{BP}_*\left(\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^{\wedge(i-1)} \wedge \mathbb{C}\mathrm{P}^\infty \wedge \mathrm{B}\mathbb{Z}/p^{\wedge(n-i)}\right).$$

Comme $M = \mathsf{BP}_*\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty$ est un BP_*-module libre, on a un isomorphisme :

$$X(i,n) \simeq M \otimes Z(n-1).$$

D'après l'hypothèse de récurrence, $X(i,n)$ admet donc une filtration dont les quotient successifs sont de la forme

$$M \otimes T^{l_{n-3}} \circ \cdots \circ T^{l_0}(N).$$

Soit U^0 le foncteur nul et U^1 le foncteur $M \otimes -$. Les foncteurs U^0 et U^1 commutent avec les foncteurs T^0 et T^1. Quitte à réindexer, $X(i,n)$, pour $1 \leq i \leq n-1$ admet donc une filtration :

$$0 = F_{-1}X(i,n) \subset F_0X(i,n) \subset \cdots \subset F_{2^{n-1}-1}X(i,n) = X(i,n),$$

telle que pour $j = \sum_{k=0}^{n-2} l_k 2^k$, avec $l_k \in \{0,1\}$:

$$F_jX(i,n)/F_{j-1}X(i,n) = T^{l_{n-2}} \circ \cdots \circ T^{l_{i+1}} \circ U^{l_i} \circ T^{l_{i-1}} \circ \cdots \circ T^{l_0}(N).$$

D'après la proposition 3.3.15, on a la suite spectrale suivante qui, d'après l'hypothèse de récurrence, dégénère au rang 1 :

$$\overline{E}(i)^1_{s,t} \simeq \mathrm{Tor}^{\mathsf{BP}_*}_{s+t}(N, F_sX(i,n)/F_{s-1}X(i,n)) \Longrightarrow \mathrm{Tor}^{\mathsf{BP}_*}_{s+t}(N, X(i,n)) \tag{5.4.4}$$

Le morphisme naturel (cf. (5.1.1)) $\rho : \mathrm{B}\mathbb{Z}/p \longrightarrow \mathbb{C}\mathrm{P}^\infty$ induit un morphisme de $\mathsf{BP}_*\mathsf{BP}$-comodules :

$$\rho_i = \mathsf{BP}_*(id \wedge \rho \wedge id) : Z(n) \longrightarrow X(i,n).$$

Les morphismes de $\mathsf{BP}_*\mathsf{BP}$-comodules $\rho_i : Z(n) \longrightarrow X(i,n)$ préservent les filtrations pour tout $1 \leq i \leq n-1$. On obtient donc un morphisme de suites spectrales :

$$E^r_{s,t} \longrightarrow \overline{E}(i)^r_{s,t}.$$

Comme $\mathrm{Tor}_q^{\mathsf{BP}_*}(N,-) = 0$ pour $q \notin \{0,1\}$, les seules différentielles éventuellement non nulles sont de la forme

$$d^r_{s',t'} : E^r_{s',t'} \longrightarrow E^r_{s,t},$$

avec $s'+t' = 1$ et $s+t = 0$. Soit $0 < s \leq 2^{n-1}-1$. On écrit :

$$s = \sum_{j=0}^{n-2} l_j 2^j,$$

avec $l_j \in \{0,1\}$. D'après l'hypothèse de récurrence,

$$E^1_{s,-s} = T^0 \circ T^{l_{n-2}} \circ \cdots \circ T^{l_0}(N).$$

Soit $k = \max\{j \mid l_j = 1\}$ et $m = 1 + \sum_{j=0}^{k-1}(1-l_j)$. D'après le théorème 5.4.16, il existe un BP_*-module libre L tel que :

$$E^1_{s,-s} \simeq N^{n-1-k} \otimes \Sigma\,\mathrm{Tor}_1^{\mathsf{BP}_*}(N, LN^m)$$

$$\overline{E}(k)^1_{s,-s} \simeq N^{n-1-k} \otimes M \otimes LN^m$$

D'après le lemme 5.4.18 et le corollaire 5.4.4, le morphisme de suites spectrales induit par ρ_k envoie $E^1_{s,-s}$ dans $\overline{E}(k)^1_{s,-s}$ de manière injective. Comme la suite spectrale $\overline{E}(k)$ dégénère au rang 1, aucune différentielle non nulle ne peut avoir pour but $E^1_{s,-s}$.

Il reste le terme pour $s = 0$, $E^1_{0,0} \simeq N^{n+1}$. D'après le corollaire 5.4.10, il s'injecte dans $Z(n+1)$, il ne peut pas être le but d'une différentielle non nulle. □

5.5 Le cas $n = 2$

Dans cette section, nous allons expliciter la structure de $\mathsf{BP}_*\mathsf{BP}$-comodule de $Z(2) = \mathsf{BP}_*\left(\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^{\wedge 2}\right)$. D'après le corollaire 5.4.4 et (5.4.2), on a les suites exactes courte de $\mathsf{BP}_*\mathsf{BP}$-comodules suivantes :

$$0 \longrightarrow N^2 \longrightarrow Z(2) \longrightarrow \Sigma\,\mathrm{Tor}_1^{\mathsf{BP}_*}(N,N) \longrightarrow 0. \tag{5.5.1}$$

$$0 \longrightarrow \Sigma\,\mathrm{Tor}_1(N,N) \longrightarrow MN \longrightarrow TN \longrightarrow \Sigma N^2 \longrightarrow 0. \tag{5.5.2}$$

Comme M est concentré en degré pair et N est concentré en degré impair, N^2 est concentré en degré pair alors que $\Sigma\,\mathrm{Tor}_1(N,N)$ est concentré en degré impair. On en déduit donc que la suite exacte courte (5.5.1) est scindée et on a l'isomorphisme de $\mathsf{BP}_*\mathsf{BP}$-comodules suivant :

$$Z(2) \simeq N^2 \oplus \Sigma\,\mathrm{Tor}_1(N,N).$$

Nous allons maintenant déterminer la structure de comodule de $\Sigma\,\mathrm{Tor}_1(N,N) \subset MN$, en explicitant ces éléments. Afin de simplifier les calculs, on introduit des comodules $M^{\langle i\rangle}$, $T^{\langle i\rangle}$ et $N^{\langle i\rangle}$ pour $i \in \mathbb{Z}$. D'un point de vue topologique, le $\mathsf{BP}_*\mathsf{BP}$-comodule $M^{\langle i\rangle}$ est la BP_*-homologie du spectre de Thom $\mathbb{CP}_i^\infty$, étudié par Miller dans [Mil82].

Proposition et définition 5.5.1. *Soit $i \in \mathbb{Z}$ et $I_i = \{j \in \mathbb{Z} \mid j \geq i$ et $j \equiv i\,[p-1]\}$. On définit les comodules $M^{\langle i\rangle}$, $T^{\langle i\rangle}$ de la façon suivante :*

– *En tant que* BP_**-module,* $M^{\langle i\rangle}$ *(respectivement* $T^{\langle i\rangle}$*) est libre de base* $\left(\beta_j^{\langle i\rangle}\right)_{j\in I_i}$*, avec* $\beta_j^{\langle i\rangle}$ *de degré* $2j$ *(resp.* $\left(\gamma_j^{\langle i\rangle}\right)_{j\in I_i}$*).*
– *Soit* $\beta^{\langle i\rangle}(x) = \sum_{j\in I_i}\beta_j^{\langle i\rangle}x^j$ *(resp.* $\gamma^{\langle i\rangle}(x) = \sum_{j\in I_i}\gamma_j^{\langle i\rangle}x^j$*). Les structures de comodules de* $M^{\langle i\rangle}$ *et* $T^{\langle i\rangle}$ *sont entièrement déterminées par les relations suivantes, analogues à celles des propositions 5.2.1 et 5.2.2 :*

$$\psi_{M^{\langle i\rangle}}\left(\beta^{\langle i\rangle}(x)\right) = \beta^{\langle i\rangle} \triangleright \mathrm{b_{u,p}}(x),$$

$$\psi_{T^{\langle i\rangle}}\left(\overline{\gamma^{\langle i\rangle}}(x)\right) = \overline{\mathrm{b_{u,p}}} \circ [p]_{\mathrm{F_{u,p}}}(x)\cdot\overline{\gamma^{\langle i\rangle}} \triangleright \mathrm{b_{u,p}}(x).$$

Remarque 5.5.2. Le comodule $M^{\langle i+p-1\rangle}$ est le quotient de $M^{\langle i\rangle}$ par le sous-$\mathsf{BP}_*\mathsf{BP}$-comodule engendré par $\beta_i^{\langle i\rangle}$, et la projection canonique $M^{\langle i\rangle} \longrightarrow M^{\langle i+p-1\rangle}$ admet la section évidente dans la catégorie des BP_*-modules qui envoie $\beta_k^{\langle i+p-1\rangle}$ sur $\beta_k^{\langle i\rangle}$, pour $k\in I_{i+p-1}$.

Remarque 5.5.3. Comme M et T sont concentrés en degré pair, les comodules $M^{\langle i\rangle}$ et $T^{\langle i\rangle}$ pour $1\le i\le p-1$ sont ceux de la décomposition du théorème 1.8.14. On a les isomorphismes de $\mathsf{BP}_*\mathsf{BP}$-comodules suivants :

$$M \simeq \bigoplus_{i=1}^{p-1} M^{\langle i\rangle},$$

$$T \simeq \bigoplus_{i=1}^{p-1} T^{\langle i\rangle}.$$

Le morphisme de comodules $\sigma : M \longrightarrow T$ respecte cette décomposition en somme directe par les degrés. Plus généralement, on peut définir $\sigma^{\langle i\rangle}$ pour $i\in\mathbb{Z}$ quelconque.

Proposition et définition 5.5.4. *Soit* $i\in\mathbb{Z}$*. La relation :*

$$\sigma^{\langle i\rangle}\left(\beta^{\langle i\rangle}\right) = \langle p\rangle_{\mathrm{F_{u,p}}}\gamma^{\langle i\rangle},$$

définit un morphisme injectif de comodules :

$$\sigma^{\langle i\rangle} : M^{\langle i\rangle} \longrightarrow T^{\langle i\rangle}.$$

On définit le comodule $N^{\langle i\rangle}$ *comme étant le conoyau de* $\Sigma^{-1}\sigma^{\langle i\rangle}$*, c'est-à-dire qu'on a la suite exacte courte de comodules suivante :*

$$0 \longrightarrow M^{\langle i\rangle} \xrightarrow{\sigma^{\langle i\rangle}} T^{\langle i\rangle} \xrightarrow{\pi^{\langle i\rangle}} \Sigma N^{\langle i\rangle} \longrightarrow 0$$

Remarque 5.5.5. On a l'isomorphisme de comodule suivant :

$$N \simeq \bigoplus_{i=1}^{p-1} N^{\langle i\rangle}.$$

Proposition 5.5.6. *Soit* $i\in\mathbb{Z}$*. Le comodule* $N^{\langle i\rangle}$ *est engendré comme* BP_**-module par des éléments* $[j]^{\langle i\rangle} = \pi^{\langle i\rangle}\left(\gamma_j^{\langle i\rangle}\right)$ *homogènes de degré* $2j-1$*, pour* $j\in I_i$*. Soit* $\zeta^{\langle i\rangle}(x) = \sum_{j\in I_i}[j]^{\langle i\rangle}x^{j-1}$*, série génératrice de* $N^{\langle i\rangle}$*. Les relations entre les éléments* $[j]^{\langle i\rangle}$ *sont donnés par l'égalité de séries formelles :*

$$\langle p\rangle_{\mathrm{F_{u,p}}}\zeta^{\langle i\rangle} = 0.$$

La structure de comodule de $N^{\langle i\rangle}$ *est entièrement déterminée par la relation :*

$$\psi_{N^{\langle i\rangle}}\left(\zeta^{\langle i\rangle}(x)\right) = \overline{\mathrm{b_{u,p}}} \circ [p]_{\mathrm{F_{u,p}}}(x)\cdot\zeta^{\langle i\rangle} \triangleright \mathrm{b_{u,p}}(x).$$

Remarque 5.5.7. De la même manière que pour $M^{\langle i\rangle}$ et $T^{\langle i\rangle}$, on a un morphisme surjectif de $\mathsf{BP}_*\mathsf{BP}$-comodules $N^{\langle i\rangle} \longrightarrow N^{\langle i+p-1\rangle}$ qui envoie $\zeta^{\langle i\rangle}$ sur $\zeta^{\langle i+p-1\rangle}$. Ce morphisme admet la section dans la catégorie des BP_*-modules qui envoie $[k]^{\langle i+p-1\rangle}$ sur $[k]^{\langle i\rangle}$ pour $k \in I_{i+p-1}$.

Grâce à ces décompositions en sommes directes, la suite exacte courte (5.5.2) se scinde en $(p-1)^2$ suites exactes courtes. Plus généralement, pour $i, j \in \mathbb{Z}$, on a la suite exacte courte de $\mathsf{BP}_*\mathsf{BP}$-comodules :

$$0 \longrightarrow \Sigma \operatorname{Tor}_1\left(N^{\langle i\rangle}, N^{\langle j\rangle}\right) \longrightarrow M^{\langle i\rangle}\otimes N^{\langle j\rangle} \longrightarrow T^{\langle i\rangle}\otimes N^{\langle j\rangle} \longrightarrow \Sigma N^{\langle i\rangle}\otimes N^{\langle j\rangle} \longrightarrow 0. \tag{5.5.3}$$

Théorème 5.5.8. *Soient $i, j \in \mathbb{Z}$, on a l'isomorphisme de $\mathsf{BP}_*\mathsf{BP}$-comodules suivant :*

$$\Sigma \operatorname{Tor}_1(N^{\langle i\rangle}, N^{\langle j\rangle}) \simeq N^{\langle i+j\rangle}$$

Démonstration : Si on oublie la structure de comodule, ce théorème n'est rien d'autre que le théorème 5.4.16 pour $n = 1$, énoncé pour chaque composante $N^{\langle i\rangle}$ de la somme directe $N \simeq \bigoplus_{i=1}^{p-1} N^{\langle i\rangle}$.

Soient $i, j \in \mathbb{Z}$ et $f_{i,j} : N^{\langle i+j\rangle} \longrightarrow M^{\langle i\rangle}\otimes N^{\langle j\rangle}$, le morphisme de BP_*-modules tel que :

$$f_{i,j}\left(\zeta^{\langle i+j\rangle}\right) = \beta^{\langle i\rangle}\otimes\zeta^{\langle j\rangle}.$$

D'après la proposition 5.5.6, on a :

$$\langle p\rangle_{\mathrm{F_{u,p}}}(x)\cdot\left(\beta^{\langle i\rangle}(x)\otimes\zeta^{\langle j\rangle}(x)\right) = \beta^{\langle i\rangle}(x)\otimes\left(\langle p\rangle_{\mathrm{F_{u,p}}}(x)\zeta^{\langle j\rangle}(x)\right) = 0.$$

Donc le morphisme $f_{i,j}$ est bien défini. Pour la même raison, le diagramme suivant commute. Cela démontre que $f_{i,j}$ est à valeurs dans $\Sigma \operatorname{Tor}_1\left(N^{\langle i\rangle}, N^{\langle j\rangle}\right)$.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Sigma \operatorname{Tor}_1\left(N^{\langle i\rangle}, N^{\langle j\rangle}\right) \arrow[r] & M^{\langle i\rangle}\otimes N^{\langle j\rangle} \arrow[r, "\sigma^{\langle i\rangle}\otimes id"] & T^{\langle i\rangle}\otimes N^{\langle j\rangle} \arrow[r] & \Sigma N^{\langle i\rangle}\otimes N^{\langle j\rangle} \arrow[r] & 0 \\
 & & N^{\langle i+j\rangle} \arrow[u, "f_{i,j}"] \arrow[ul, dashed] \arrow[ur, "0"'] & & &
\end{tikzcd}$$

Pour démontrer que $f_{i,j}$ réalise un isomorphisme sur $\Sigma \operatorname{Tor}_1\left(N^{\langle i\rangle}, N^{\langle j\rangle}\right)$, il suffit de démontrer que la restriction de $\sigma^{\langle i\rangle}\otimes id$ au sous-module $M^{\langle i+p-1\rangle}\otimes N^{\langle j\rangle}$ est injective.

C'est l'analogue du théorème 5.4.15. Nous allons donc suivre la même démonstration. Soit $x \in M^{\langle i+p-1\rangle}\otimes N^{\langle j\rangle}$ un élément non nul tel que $(\sigma^{\langle i\rangle}\otimes id)(x) = 0$. On dispose sur $N^{\langle j\rangle}$ d'un homomorphisme de Smith :

$$\partial_N^{\langle j\rangle} : \left\{ \begin{array}{ccc} N^{\langle j\rangle} & \longrightarrow & N^{\langle j\rangle} \\ \zeta^{\langle j\rangle}(x) & \longmapsto & x^{p-1}\zeta^{\langle j\rangle}(x) \end{array} \right. .$$

Quitte à l'appliquer, on peut supposer que $x = y\otimes[j]^{\langle j\rangle}$, avec $y \in M^{\langle i+p-1\rangle} \subset M^{\langle i\rangle}$. De la même manière, on a l'homorphisme de Smith sur $M^{\langle i\rangle}$:

$$\partial_M^{\langle i\rangle} : \left\{ \begin{array}{ccc} M^{\langle i\rangle} & \longrightarrow & M^{\langle i\rangle} \\ \beta^{\langle i\rangle}(x) & \longmapsto & x^{p-1}\beta^{\langle i\rangle}(x) \end{array} \right. .$$

Comme $\partial_M^{\langle i\rangle}\otimes id$ préserve le noyau de $\sigma^{\langle i\rangle}\otimes id$ et que

$$\left(\sigma^{\langle i\rangle}\otimes id\right)\left(\beta_i^{\langle i\rangle}\otimes[j]^{\langle j\rangle}\right) = p\gamma_i^{\langle i\rangle}\otimes[j]^{\langle j\rangle} = \gamma_i^{\langle i\rangle}\otimes\left(p\,[j]^{\langle j\rangle}\right) = 0,$$

on peut supposer, grâce au théorème 5.4.9, que $x = \lambda\beta_{i+p-1}^{\langle i\rangle}\otimes [j]^{\langle j\rangle}$, avec λ non divisible par p. Mais alors :

$$\begin{aligned}\left(\sigma^{\langle i\rangle}\otimes id\right)(x) &= p\lambda\gamma_{i+p-1}^{\langle i\rangle}\otimes [j]^{\langle j\rangle} + a_{p-1}\lambda\gamma_i^{\langle i\rangle}\otimes [j]^{\langle j\rangle} \\ &= \gamma_i^{\langle i\rangle}\otimes \left(a_{p-1}\lambda\, [j]^{\langle j\rangle}\right) \\ &\neq 0.\end{aligned}$$

Donc la restriction de $\sigma^{\langle i\rangle}\otimes id$ au sous-module $M^{\langle i+p-1\rangle}\otimes N^{\langle j\rangle}$ est injective.

De la même façon, on démontre que $f_{i,j}$ est injectif. Reste à démontrer la surjectivité. Soit $x \in M^{\langle i\rangle}\otimes N^{\langle j\rangle}$ tel que $(\sigma^{\langle i\rangle}\otimes id)(x) = 0$. On peut écrire x sous la forme :

$$x = \beta_i^{\langle i\rangle}\otimes y + x',$$

avec $x' \in M^{\langle i+p-1\rangle}\otimes N^{\langle j\rangle}$ et $y \in N^{\langle j\rangle}$. Il existe des éléments $\lambda_k \in \mathsf{BP}_*$ tels que :

$$y = \sum_{k\in I_j} \lambda_k\, [k]^{\langle j\rangle}.$$

On pose alors :

$$z = \sum_{k\in I_j} \lambda_k\, [i+k]^{\langle i+j\rangle} \in N^{\langle i+j\rangle}.$$

On vérifie facilement que $f_{i,j}(z) - \beta_i^{\langle i\rangle}\otimes y \in M^{\langle i+p-1\rangle}\otimes N^{\langle j\rangle}$. Donc $f_{i,j}(z) - x \in M^{\langle i+p-1\rangle}\otimes N^{\langle j\rangle}$. Comme $(\sigma^{\langle i\rangle}\otimes id)(f_{i,j}(z) - x) = 0$, on a $f_{i,j}(z) = x$, ce qui démontre que $f_{i,j}$ est bien un isomorphisme.

Pour terminer la démonstration, il ne reste plus qu'à vérifier que $f_{i,j}$ est bien un morphisme de $\mathsf{BP}_*\mathsf{BP}$-comodules. D'après les propositions 5.5.1 et 5.5.6, on a les égalités :

$$\psi_{M^{\langle i\rangle}}\left(\beta^{\langle i\rangle}(x)\right) = \beta^{\langle i\rangle} \rhd \mathrm{b_{u,p}}(x),$$

$$\psi_{N^{\langle j\rangle}}\left(\zeta^{\langle j\rangle}(x)\right) = \overline{\mathrm{b_{u,p}}} \circ [p]_{\mathrm{F_{u,p}}}(x)\cdot \zeta^{\langle j\rangle} \rhd \mathrm{b_{u,p}}(x),$$

On a donc :

$$\psi\left(\beta^{\langle i\rangle}(x)\otimes\zeta^{\langle j\rangle}(x)\right) = \overline{\mathrm{b_{u,p}}} \circ [p]_{\mathrm{F_{u,p}}}(x)\cdot \left(\beta^{\langle i\rangle}\otimes\zeta^{\langle j\rangle}\right) \rhd \mathrm{b_{u,p}}(x),$$

Or, d'autre part on a :

$$\psi_{N^{\langle i+j\rangle}}\left(\zeta^{\langle i+j\rangle}(x)\right) = \overline{\mathrm{b_{u,p}}} \circ [p]_{\mathrm{F_{u,p}}}(x)\cdot \zeta^{\langle i+j\rangle} \rhd \mathrm{b_{u,p}}(x).$$

D'après la définition de $f_{i,j}$,

$$f_{i,j}\left(\beta^{\langle i\rangle}(x)\otimes\zeta^{\langle j\rangle}(x)\right) = \zeta^{\langle i+j\rangle}(x),$$

donc $f_{i,j}$ est bien un morphisme de $\mathsf{BP}_*\mathsf{BP}$-comodules. □

Théorème 5.5.9. *On a l'isomorphisme de* $\mathsf{BP}_*\mathsf{BP}$*-comodules suivant :*

$$\Sigma\,\mathrm{Tor}_1(N,N) \simeq \bigoplus_{i=1}^{p-1} N/\langle [1], \ldots, [i]\rangle$$

Démonstration : D'après la remarque 5.5.5, N se décompose comme une somme directe :

$$N \simeq \bigoplus_{i=1}^{p-1} N^{\langle i\rangle}.$$

Le théorème découle alors du théorème 5.5.8 et de la remarque 5.5.7 :

$$\begin{aligned}
\Sigma\,\mathrm{Tor}_1(N,N) &\simeq \bigoplus_{i=1}^{p-1}\bigoplus_{j=1}^{p-1}\Sigma\,\mathrm{Tor}_1\left(N^{\langle i\rangle},N^{\langle j\rangle}\right)\\
&\simeq \bigoplus_{i=1}^{p-1}\left(\bigoplus_{j=1}^{p-1} N^{\langle i+j\rangle}\right)\\
&\simeq \bigoplus_{i=1}^{p-1} N/\langle [1],\ldots,[i]\rangle
\end{aligned}$$

□

Corollaire 5.5.10. *Soit $n \geq 1$. On a l'isomorphisme de $\mathsf{BP}_*\mathsf{BP}$-comodule suivant :*

$$\left(\Sigma\,\mathrm{Tor}_1\,(N,-)\right)^{\circ n}(N) = \bigoplus_{1\leq i_l\leq p-1\ ;\ 1\leq l\leq n} N/\langle [1],\ldots,[i_1+\cdots+i_n]\rangle.$$

Démonstration : Cela découle directement du théorème précédent, par récurrence sur n. □

5.6 Comodules sur $\mathsf{BP}_*\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty$ dans la catégorie des $\mathsf{BP}_*\mathsf{BP}$-comodules

Soient $\Bbbk = \mathbb{Z}_{(p)}$ et (A,Γ) l'algébroïde de Hopf $(\mathsf{BP}_*,\mathsf{BP}_*\mathsf{BP})$. On pose $K = \mathsf{BP}_*\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty_+ \simeq A\oplus M$.

Théorème 5.6.1. *Le Γ-comodule à gauche K est un A-module libre de générateurs β_i, $i \geq 0$ homogènes de degré $2i$. On note $\tilde\beta(x)$ la série génératrice homogène de degré 0 :*

$$\tilde\beta(x) = \sum_{i\geq 0}\beta_i x^i.$$

Le morphisme de structure ψ^g_K vérifie :

$$\psi^g_K : \begin{cases} K & \longrightarrow & \Gamma\otimes_A K\\ \tilde\beta(x) & \longmapsto & \tilde\beta \rhd \mathrm{b}_{\mathrm{u,p}}(x).\end{cases}$$

C'est une A-algèbre de Hopf dans la catégorie des Γ-comodules à gauche, où la multiplication $\mu_K : K\otimes_A K \longrightarrow K$ est induite par la structure de H-groupe sur $\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty$ et vérifie :

$$\mu_K : \begin{cases} K\otimes_A K & \longrightarrow & K\\ \tilde\beta(x)\otimes\tilde\beta(y) & \longmapsto & \tilde\beta\circ \mathrm{F}_{\mathrm{u,p}}(x,y),\end{cases}$$

la comultiplication $\Delta_K : K \longrightarrow K\otimes_A K$ est induite par l'application diagonale :

$$\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty_+ \longrightarrow (\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty\times\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty)_+ \simeq \mathbb{C}\mathrm{P}^\infty_+\wedge\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty_+,$$

$$\Delta_K : \begin{cases} K & \longrightarrow & K\otimes_A K\\ \tilde\beta(x) & \longmapsto & \tilde\beta(x)\otimes\tilde\beta(x).\end{cases}$$

Théorème 5.6.2. *Le $\mathbb{k}$-algébroïde de Hopf (A, K) représente le foncteur $\mathcal{K} : {}_{\mathbb{k}}\mathcal{A}\mathrm{lg} \longrightarrow \mathcal{G}\mathrm{rpd}$ tel que pour toute $\mathbb{k}$-algèbre R :*
- *un objet de $\mathcal{K}(R)$ est une loi de groupe formel p-typique F sur R,*
- *si F et G sont deux objets distincts de $\mathcal{K}(R)$, alors $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}(R)}(F, G) = \emptyset$,*
- *un endomorphisme de F dans $\mathcal{K}(R)$ est un morphisme de loi de groupe formel de F vers la loi multiplicative $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}(x, y) = x + y + xy$.*

Démonstration : D'après le théorème 1.8.7, un morphisme de $\mathbb{k}$-algèbre de A vers R représente une loi de groupe formel F. Soit $\phi : K \longrightarrow R$ un morphisme de K-algèbre. Soit f la série formelle à coefficients dans R telle que :

$$\phi(\tilde{\beta}(x)) = 1 + f(x).$$

Comme ϕ est un morphisme de $\mathbb{k}$-algèbre, on doit avoir :

$$(1 + f(x))(1 + f(y)) = f(F(x, y)).$$

Autrement dit, f est un morphisme de loi de groupe formel de F vers la loi multiplicative. □

Remarque 5.6.3. On a un théorème analogue si on remplace BP par MU, les objets de $\mathcal{K}(R)$ sont alors toutes les lois de groupe formel sur R.

Rappelons les résultats du chapitre 4. Soit (A, Λ) l'algébroïde de Hopf défini par le théorème 4.6.6. Cet algébroïde de Hopf représente le foncteur en groupoïde défini à la section 4.4. On a les morphismes d'algébroïdes de Hopf suivants :

$$\begin{tikzcd} (A, K) & (A, \Lambda) \arrow[l, "\iota"'] \arrow[r, bend left, "s"] & (A, \Gamma), \arrow[l, "\pi"'] \end{tikzcd}$$

et le théorème 4.8.2 montre que le foncteur s_* induit une équivalence de catégorie entre la catégorie des comodules sur l'algébroïde de Hopf (A, Λ) et la catégorie des K-comodules dans la catégorie des Γ-comodules. Si X est un Λ-comodule, nous noterons ψ_X le morphisme de structure de Γ-comodule $X \longrightarrow \Gamma \otimes_A X$ et ψ_X^K le morphisme de structure de K-comodule $X \longrightarrow K \otimes_A X$.

Proposition et définition 5.6.4. *Soit X un K-comodule à gauche et $x \in X$, alors il existe un unique morphisme A-linéaire $\partial_X : X \longrightarrow \Sigma^2 X$, appelé homomorphisme de Smith de X tel que :*

$$\psi_X^K(x) = \sum_{n \geq 0} \beta_n \otimes \partial_X^n(x), \text{ et}$$

$$\bigcup_{n \geq 0} \mathrm{Ker}\, \partial_X^n = X.$$

L'ensemble des éléments primitifs de X est donc $\mathrm{Ker}\, \partial_X$.

Démonstration : Soit X un K-comodule à gauche et $x \in X$. Soient $\partial_n : \Sigma^{2n} X \longrightarrow X$ tels que :

$$\psi_X^K(x) = \sum_{n \geq 0} \beta_n \otimes \partial_n(x).$$

Comme $\epsilon_K(\beta_n) = 0$ si $n > 0$ et $\epsilon_K(\beta_0) = 1$, $\partial_0 = id_X$. Comme ψ_X^K est coassociatif, le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\psi_X^K"] \arrow[d, "\psi_X^K"'] & K \otimes_A X \arrow[d, "\Delta_K \otimes X"] \\ K \otimes_A X \arrow[r, "K \otimes \psi_X^K"'] & K \otimes_A K \otimes_A X. \end{tikzcd}$$

D'où :

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0}\Delta_K(\beta_n)\otimes\partial_n(x) &= \sum_{i\geq 0}\beta_i\otimes\psi_X^K(\partial_i x)\\ \sum_{i,j\geq 0}\beta_i\otimes\beta_j\otimes\partial_{i+j}(x) &= \sum_{i,j\geq 0}\beta_i\otimes\beta_j\otimes\partial_j\circ\partial_i(x).\end{aligned}$$

Donc pour tous $i,j\geq 0$, $\partial_j\circ\partial_i=\partial_{i+j}$, ce qui démontre le résultat. $\square$

Le corollaire suivant découle directement de la proposition 4.7.3.

Corollaire 5.6.5. *Soit X un Λ-comodule à gauche, on a un isomorphisme fonctoriel de Γ-comodules :*

$$\pi^*X\simeq\operatorname{Ker}\partial_X.$$

Proposition 5.6.6. *Soit ξ un fibré en sphère sur $\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty$, d'espace total $E(\xi)$ et soit $T(\xi)$ l'espace de Thom associé. Alors $\mathsf{BP}_*T(\xi)$ et $\mathsf{BP}_*E(\xi)$ sont naturellement munis d'une structure de Λ-comodule.*

Démonstration : Par définition de l'espace de Thom d'un fibré en sphère, on a une suite cofibre :

$$E(\xi)\longrightarrow\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty\longrightarrow T(\xi).$$

L'application diagonale $\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty\longrightarrow\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty_+\wedge\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty$ induit donc des morphismes $T(\xi)\longrightarrow\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty_+\wedge T(\xi)$, $\Sigma E(\xi)\longrightarrow\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty_+\wedge\Sigma E(\xi)$ et le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} E(\xi) \arrow[r] & \mathbb{C}\mathrm{P}^\infty \arrow[r] \arrow[d] & T(\xi) \arrow[r] \arrow[d, dashed] & \Sigma E(\xi) \arrow[d, dashed] \\ \mathbb{C}\mathrm{P}^\infty_+\wedge E(\xi) \arrow[r] & \mathbb{C}\mathrm{P}^\infty_+\wedge\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty \arrow[r] & \mathbb{C}\mathrm{P}^\infty_+\wedge T(\xi) \arrow[r] & \mathbb{C}\mathrm{P}^\infty_+\wedge\Sigma E(\xi). \end{tikzcd}$$

Ce diagramme munit la BP-homologie de $T(\xi)$ et de $E(\xi)$ d'une structure de comodule sur K, ce qui démontre le résultat. $\square$

Remarque 5.6.7. Les $\mathsf{BP}_*\mathsf{BP}$-comodules M, T_p et N définis à la section 5.4 sont munis d'une structure de Λ-comodule. La proposition suivante démontre que la définition de l'homorphisme de Smith pour un K-comodule est compatible avec les définitions des morphismes ∂_M, ∂_T et ∂_N de la définition 5.1.5.

Proposition 5.6.8. *Les morphismes ψ_M^K, $\psi_{T_p}^K$ et ψ_N^K vérifient les relations suivantes :*

$$\begin{aligned}\psi_M^K(\beta(x)) &= \tilde\beta(x)\otimes\beta(x)\\ \psi_{T_p}^K(\gamma(x)) &= \tilde\beta(x)\otimes\gamma(x)\\ \psi_N^K(\zeta(x)) &= \tilde\beta(x)\otimes\zeta(x).\end{aligned}$$

Démonstration : La première égalité découle directement du théorème 5.6.1. D'après la démonstration de la proposition 5.6.6, la suite exacte courte suivante est une suite exacte de Λ-comodules et que $\mathbb{Q}\otimes\sigma$ est un isomorphisme.

$$0\longrightarrow M\xrightarrow{\sigma}T\xrightarrow{\pi}\Sigma N\longrightarrow 0.$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
\psi^K_{T_p}(\gamma(x)) &= (K\otimes\sigma)\circ\psi^K_M\left(\frac{1}{\langle p\rangle_{\mathrm{F_{u,p}}}}\beta(x)\right) \\
&= \frac{1}{\langle p\rangle_{\mathrm{F_{u,p}}}}(K\otimes\sigma)\psi^K_M(\beta(x)) \\
&= \frac{1}{\langle p\rangle_{\mathrm{F_{u,p}}}}\tilde{\beta}(x)\otimes\langle p\rangle_{\mathrm{F_{u,p}}}\gamma(x) \\
&= \tilde{\beta}(x)\otimes\gamma(x).
\end{aligned}$$

Cela démontre les deux dernières égalités. □

Proposition 5.6.9. *Soit X un K-comodule à gauche et $\psi_X : X \longrightarrow \Gamma\otimes_A X$ un morphisme de A-modules coassociatif et counitaire. Alors ψ^K_X est un morphisme de Γ-comodules ($K\otimes_A X$ étant muni de la structure de Γ-comodule du produit tensoriel) si et seulement si pour tout $x \in X$:*

$$(id\otimes\partial_X)\psi_X(x) = \sum_{i\geq 0} b_i\psi_X\partial_X^{i+1}x.$$

Démonstration : ψ^K_X est un morphisme de Γ-comodule à gauche si et seulement si le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\psi^K_X"] \arrow[d, "\psi_X"'] & K\otimes_A X \arrow[d, "\psi_{K\otimes X}"] \\
\Gamma\otimes_A X \arrow[r, "\Gamma\otimes\psi^K_X"'] & \Gamma\otimes_A K\otimes_A X.
\end{tikzcd}$$

Soit $x \in X$ et $\psi(x) = \sum_i \lambda_i\otimes x_i$. Alors :

$$\sum_i\sum_{n\geq 0}\lambda_i\otimes\beta_n\otimes\partial^n_X x_i = \sum_{m\geq 0}\psi(\beta_n)\otimes\psi(\partial^m_X x).$$

En utilisant le fait que $\psi(\tilde{\beta}) = \tilde{\beta}\triangleright \mathrm{b_{u,p}}$ et en considérant le coefficient devant $\beta_1 \in K$, on obtient l'égalité voulue. □

Théorème 5.6.10. *Soit X un Λ-comodule tel que :*
- *∂_X est surjectif,*
- $\mathrm{Ker}\,\partial_X \simeq \mathsf{BP}_*$.

Alors :
- *X est un BP_*-module libre et admet une base $(\zeta_i)_{i\geq 0}$, où ζ_i est homogène de degré $2i$, et telle que :*
$$\partial_X\zeta(x) = x\zeta(x),$$
où $\zeta(x)$ est la série génératrice $\zeta(x) = \sum_{i\geq 0}\zeta_i x^i$.
- *Il existe une unique série formelle $\alpha(x)$ à coefficients dans $\mathsf{BP}_*\mathsf{BP}$ homogène de degré 0 telle que :*
$$\psi_X\zeta(x) = \alpha(x)\cdot\zeta\triangleright\mathrm{b_{u,p}}(x)$$
Cette série vérifie en outre l'égalité :
$$\Delta\alpha = (\alpha\otimes 1)\cdot\alpha\triangleright\mathrm{b_{u,.}}$$

Si de plus, ζ' *et* α' *sont deux séries formelles vérifiant les conditions ci-dessus, alors il existe une unique série formelle inversible* $\lambda(x)$ *à coefficients dans* BP_* *homogène de degré* 0 *telle que :*

$$\zeta'(x) = \lambda(x)\zeta(x),$$

$$\eta_R(\lambda)(x)\alpha'(x) = \lambda(x)\alpha(x).$$

Démonstration : Soit $X_n = \operatorname{Ker} \partial_X^n$. On sait que $X = \bigcup_{n\geq 0} X_n$. Comme, par hypothèse, ∂_X est surjectif, pour tout $n \geq 0$, on a la suite exacte courte suivante de BP_*-modules suivante :

$$0 \longrightarrow X_1 \longrightarrow X_{n+1} \xrightarrow{\partial_X} \Sigma^2 X_n \longrightarrow 0.$$

Comme $X_1 = \operatorname{Ker} \partial_X$ est libre de rang 1 sur un générateur homogène de degré 0, on montre par récurrence que X_n est libre de rang n sur des générateurs $\zeta_0, \ldots, \zeta_{n-1}$, avec ζ_i homogène de degré $2i$ et tels que $\partial_X \zeta_i = \zeta_{i-1}$.

Il existe des séries formelles $(\alpha_i)_{i\geq 0}$ à coefficients dans $\mathsf{BP}_*\mathsf{BP}$ telles que :

$$\psi_X \zeta(x) = \sum_{i\geq 0} \alpha_i(x) \otimes \zeta_i.$$

D'après la proposition 5.6.9, on doit avoir l'égalité :

$$(id \otimes \partial_X)\psi_X \zeta(x) = \sum_{i\geq 0} b_i \psi_X \partial_X^{i+1} \zeta(x).$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \sum_{i\geq 0} \alpha_{i+1}(x) \otimes \zeta_i &= \sum_{i\geq 0} b_i x^{i+1} \psi_X \zeta(x) \\ &= \mathrm{b}_{\mathrm{u,p}}(x) \psi_X \zeta(x) \\ &= \sum_{i\geq 0} \mathrm{b}_{\mathrm{u,p}}(x) \alpha_i(x) \otimes \zeta_i. \end{aligned}$$

Donc pour tout $i \geq 0$, $\alpha_i(x) = \mathrm{b}_{\mathrm{u,p}}(x)^i \alpha(x)$, avec $\alpha = \alpha_0$, et on a :

$$\psi_X \zeta(x) = \alpha_0(x) \cdot \zeta \rhd \mathrm{b}_{\mathrm{u,p}}(x).$$

L'égalité vérifiée par α découle de la condition de coassociativité :

$$\begin{aligned} (\Delta \otimes id) \circ \psi_X \zeta(x) &= (id \otimes \psi_X) \circ \psi_X \zeta(x) \\ \Delta(\alpha(x)) \cdot \zeta \rhd \Delta(\mathrm{b}_{\mathrm{u,p}}(x)) &= (\alpha \otimes 1) \cdot \psi_X \zeta \rhd \mathrm{b}_{\mathrm{u,p}}(x) \\ \Delta(\alpha(x)) \cdot \zeta \rhd \mathrm{b}_{\mathrm{u,p}} \rhd \mathrm{b}_{\mathrm{u,p}}(x) &= (\alpha \otimes 1) \cdot (\alpha \rhd \mathrm{b}_{\mathrm{u,p}}(x)) \cdot \zeta \rhd \mathrm{b}_{\mathrm{u,p}} \rhd \mathrm{b}_{\mathrm{u,p}}(x). \end{aligned}$$

Comme X est un A-module libre, on a le résultat.

Enfin, si on a choisi une autre série génératrice ζ' pour X. Alors on peut montrer par récurrence qu'il existe des éléments $(\lambda_i)_{i\geq 0}$ dans BP_*, homogènes de degré $2i$ et avec λ_0 inversible tels que pour tout $j \geq 0$:

$$\zeta'_j = \lambda_0 \zeta_j + \cdots + \lambda_j \zeta_0.$$

Autrement dit, $\zeta'(x) = \lambda(x)\zeta(x)$. Cette égalité implique alors directement la relation vérifiée par α et α'. $\square$

Soit G l'ensemble des séries formelles $\alpha(x) \in \mathsf{BP}_*\mathsf{BP}[\![x]\!]$, homogènes de degré 0 telles que $\alpha(0) = 1$ et :

$$\Delta(\alpha) = (\alpha \otimes 1) \cdot \alpha \rhd \mathrm{b}_{\mathrm{u},\cdot}$$

G est un sous-groupe de l'ensemble des séries formelles inversibles pour la multiplication de $\mathsf{BP}_*\mathsf{BP}[\![x]\!]$. On dit que deux séries formelles α et α' sont équivalentes si et seulement si il existe une série formelle $\lambda(x) \in \mathsf{BP}_*[\![x]\!]$ homogène de degré 0 telle que $\lambda(0)$ est inversible et

$$\eta_R(\lambda)(x)\alpha'(x) = \lambda(x)\alpha(x).$$

Cette relation d'équivalence est compatible avec la multiplication de G et on note H le quotient de G par cette relation d'équivalence. Le théorème 5.6.10 montre qu'on a une bijection entre H et les classes d'isomorphismes de Λ-comodules X tels que ∂_X est surjectif et $\operatorname{Ker}\partial_X = \mathsf{BP}_*$:

$$X \longmapsto [\alpha_X] \in H.$$

Proposition 5.6.11. *Soient X et X' deux Λ-comodules vérifiant les hypothèses du théorème 5.6.10. Alors $X\square_K X'$ vérifie les hypothèses du théorème 5.6.10 et :*

$$[\alpha_{X\square_K X'}] = [\alpha_X]\cdot[\alpha_{X'}]\,.$$

Démonstration : Soient ζ et ζ' les séries génératrices de X et X' telles que :

$$\psi_X\zeta = \alpha\cdot\zeta \rhd \mathrm{b_{u,p}},$$

$$\psi_{X'}\zeta' = \alpha'\cdot\zeta' \rhd \mathrm{b_{u,p}}.$$

D'après la définition du produit cotensoriel interne (cf. la définition 4.8.3), on a la suite exacte courte de $\mathsf{BP}_*\mathsf{BP}$-comodules :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & X\square_K X' \arrow[r] & X\otimes X' \arrow[r, shift left, "X\otimes\psi^K_{X'}"] \arrow[r, shift right, "\psi^K_X\otimes X'"'] & K\otimes X\otimes X' \end{tikzcd}$$

et le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} X\square_K X' \arrow[r] \arrow[d, "\psi^K_{X\square_K X'}"'] & X\otimes_A X' \arrow[d, shift right, "\psi^K_X\otimes X'"'] \arrow[d, shift left, "X\otimes\psi^K_{X'}"] \\ K\otimes(X\square_K X') \arrow[r] & K\otimes X\otimes X'. \end{tikzcd}$$

Comme X et X' sont des BP_*-modules libres, on a :

$$\operatorname{Ker}(\partial_X\otimes X') \simeq (\operatorname{Ker}\partial_X)\otimes X' \simeq \mathsf{BP}_*\zeta_0\otimes X',$$

$$\operatorname{Ker}(X\otimes\partial_{X'}) \simeq X\otimes(\operatorname{Ker}\partial_{X'}) \simeq X\otimes\mathsf{BP}_*\zeta_0'.$$

Donc $\operatorname{Ker}(\partial_{X\square_K X'}) \subset (\mathsf{BP}_*\zeta_0\otimes X')\cap(X\otimes\mathsf{BP}_*\zeta_0') \simeq \mathsf{BP}_*\zeta_0\otimes\zeta_0'$. On montre par une chasse aux diagramme que $\partial_{X\square_K X'}$ est surjectif. On en déduit, d'après le théorème 5.6.10 que $X\square_K X'$ est un BP_*-module libre qui admet $\zeta(x)\otimes\zeta'(x)$ comme série génératrice. Le calcul suivant montre alors le résultat :

$$\begin{aligned} \psi(\zeta(x)\otimes\zeta'(x)) &= \psi\zeta(x)\otimes\psi\zeta'(x) \\ &= \alpha(x)\alpha'(x)\cdot(\zeta\rhd \mathrm{b_{u,p}}(x))\otimes(\zeta'\rhd \mathrm{b_{u,p}}(x)) \\ &= \alpha(x)\alpha'(x)\cdot(\zeta\otimes\zeta'\rhd \mathrm{b_{u,p}}(x)). \end{aligned}$$

□

Chapitre 6

L'algébroïde de Hopf $(\mathsf{S}, \mathsf{S}\Lambda)$

Dans ce chapitre, $\Bbbk$ désignera l'anneau $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}_{(p)}$.

6.1 Le groupoïde des séries formelles

Définition 6.1.1. *Soit R une $\Bbbk$-algèbre. On note $\mathfrak{m}(R)$ l'idéal des séries formelles à coefficients dans R engendré par x et $\mathfrak{m}_1(R)$, l'ensemble des séries formelles $f(x) \in R[\![x]\!]$ telles que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$. La composition des séries formelles définit une structure de groupe sur $\mathfrak{m}_1(R)$ et ce groupe agit par conjugaison sur $\mathfrak{m}(R)$. On note $\mathcal{G}$ le foncteur ${}_{\Bbbk}\mathcal{A}\mathrm{lg} \longrightarrow \mathcal{G}\mathrm{rpd}$ défini par :*

- *un objet de $\mathcal{G}(R)$ est un élément de $\mathfrak{m}(R)$.*
- *un morphisme $f : a(x) \longrightarrow b(x)$ est une série formelle $f(x) \in \mathfrak{m}_1(R)$ telle que*

$$f \circ a = b \circ f.$$

Proposition 6.1.2. *Le foncteur $\mathcal{G} : {}_{\Bbbk}\mathcal{A}\mathrm{lg} \longrightarrow \mathcal{G}\mathrm{rpd}$ est représenté par un algébroïde de Hopf scindé $(\mathsf{S}, \mathsf{S}\otimes_{\Bbbk}\Lambda)$, où :*

$$\mathsf{S} \simeq \Bbbk\left[a_i, i \geq 0\right],$$

$$\Lambda \simeq \Bbbk\left[f_i, i \geq 1\right].$$

La série formelle $\mathfrak{a}(x) = \sum_{i\geq 0} a_i x^{i+1} \in \mathsf{S}[\![x]\!]$ représente la série formelle universelle et $\mathfrak{f}(x) = \sum_{i\geq 0} f_i x^{i+1}$ (avec $f_0 = 1$) représente le morphisme universel : $\eta_L\mathfrak{a} \longrightarrow \eta_R\mathfrak{a}$ où η_L et η_R sont les morphismes de source et de but de l'algébroïde de Hopf. De plus, les morphismes de structure de l'algébroïde de Hopf $(\mathsf{S}, \mathsf{S}\otimes_{\Bbbk}\Lambda)$ sont caractérisés par les relations suivantes :

- *le morphisme de source η_L :*

$$\eta_L : \begin{cases} \mathsf{S} & \longrightarrow & \mathsf{S}\Lambda \\ \mathfrak{a}(x) & \longmapsto & \mathfrak{a}(x); \end{cases}$$

- *le morphisme de but η_R :*

$$\eta_R : \begin{cases} \mathsf{S} & \longrightarrow & \mathsf{S}\Lambda \\ \mathfrak{a}(x) & \longmapsto & \mathfrak{f} \circ \mathfrak{a} \circ \mathfrak{f}^{-1}(x); \end{cases}$$

- *le morphisme de composition Δ :*

$$\Delta : \begin{cases} \mathsf{S}\Lambda & \longrightarrow & \mathsf{S}\Lambda\otimes_{\mathsf{S}}\mathsf{S}\Lambda \\ \mathfrak{f}(x) & \longmapsto & \sum_{i\geq 0} \mathfrak{f}(x)^{i+1}\otimes f_i = \mathfrak{f} \rhd \mathfrak{f}(x); \end{cases}$$

- *le morphisme d'inversion c :*

$$c : \begin{cases} \mathsf{S}\Lambda & \longrightarrow & \mathsf{S}\Lambda \\ \mathfrak{f}(x) & \longmapsto & \mathfrak{f}^{-1}(x); \end{cases}$$

– *le morphisme d'unité* ϵ :

$$\epsilon : \begin{cases} \mathsf{S}\Lambda & \longrightarrow & \mathsf{S} \\ \mathfrak{f}(x) & \longmapsto & x; \end{cases}$$

Démonstration : Le foncteur $\mathfrak{m}(-) : {}_{\Bbbk}\mathcal{A}\mathrm{lg} \longrightarrow \mathcal{S}\mathrm{et}$ est représenté par la $\Bbbk$-algèbre $\mathsf{S} \simeq \Bbbk[a_i, i \geq 0]$, avec pour série universelle la série $\mathfrak{a}(x) = \sum_{i\geq 0} a_i x^{i+1}$. Le foncteur $\mathfrak{m}_1(-) : {}_{\Bbbk}\mathcal{A}\mathrm{lg} \longrightarrow \mathcal{S}\mathrm{et}$ est représenté par la $\Bbbk$-algèbre $\Lambda \simeq \Bbbk[f_i, i \geq 1]$, avec pour série inversible stricte universelle la série $\mathfrak{f}(x) = \sum_{i\geq 0} f_i x^{i+1}$, où $f_0 = 1$.

Par définition, le foncteur $\mathcal{G}$ est défini par l'action du groupe $\mathfrak{m}_1(-)$ sur l'ensemble $\mathfrak{m}(-)$. On en déduit que $\mathcal{G}$ est représenté par un algébroïde de Hopf scindé $(\mathsf{S}, \mathsf{S}\otimes_{\Bbbk}\Lambda)$. Les relations vérifiées par les morphismes de structure s'en déduisent par le lemme de Yoneda. □

Remarque 6.1.3. L'algébroïde de Hopf $(\mathsf{S}, \mathsf{S}\Lambda)$ est plat. D'après le théorème 1.2.20, la catégorie des $\mathsf{S}\Lambda$-comodules à gauche est donc une catégorie abélienne.

Définition 6.1.4. *On munit la* $\Bbbk$*-algèbre* S *du bidegré défini par* $|a_i| = (2i, 1)$*. Le premier degré est le degré standard, simplement appelé degré par la suite. Le second degré sera appelé degré polynomial. Ce bidegré s'étend naturellement à l'ensemble des séries formelles* $\mathsf{S}[\![x]\!]$ *en considérant* x *homogène de bidegré* $(-2, 0)$*. La série universelle* $\mathfrak{a}(x)$ *est donc homogène de bidegré* $(-2, 0)$*.*

La $\Bbbk$*-algèbre* $\mathsf{S}\Lambda$ *est muni du degré standard défini par* $|f_i| = 2i$*. Le morphisme universel* $\mathfrak{f}(x)$ *est donc homogène de degré* -2*.*

Supposons ici que $\Bbbk = \mathbb{Z}$. Rappelons que $\mathcal{F}\mathrm{gl}^1(R)$ désigne le groupoïde des lois de groupes formels et des isomorphismes stricts (cf. la définition 1.7.1). Pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, la n-série définit un morphisme de groupoïdes qui à une loi de groupe formelle F associe sa n-série $[n]_F(x)$:

$$[n]_- : \mathcal{F}\mathrm{gl}^1(R) \longrightarrow \mathcal{G}(R).$$

D'après le théorème 1.7.5, le foncteur $\mathcal{F}\mathrm{gl}^1(-)$ est représenté par l'algébroïde de Hopf $(\mathsf{L}, \mathsf{LB})$, où L est l'anneau de Lazard. D'après le lemme de Yoneda, on a donc un morphisme d'algébroïdes de Hopf :

$$\kappa_n : (\mathsf{S}, \mathsf{S}\Lambda) \longrightarrow (\mathsf{L}, \mathsf{LB}).$$

Ce morphisme envoie les élément a_i sur les coefficients de la n-série de la loi de groupe formel universelle sur L, et les éléments f_i sur les coefficients $b_i \in \mathsf{LB}$ de l'isomorphisme strict universel $\mathrm{b_u}(x)$. L'élément $a_0 - n \in \mathsf{S}$ est primitif. Le morphisme κ_n se factorise donc à travers l'algébroïde de Hopf $(\mathsf{S}_n, \mathsf{S}_n\Lambda)$, où $\mathsf{S}_n = \mathsf{S}/(a_0 - n)$:

$$\begin{tikzcd} (\mathsf{S}, \mathsf{S}\Lambda) \arrow[r, "\kappa_n"] \arrow[d] & (\mathsf{L}, \mathsf{LB}) \\ (\mathsf{S}_n, \mathsf{S}_n\Lambda) \arrow[ur, dashed, "\overline{\kappa_n}"'] & \end{tikzcd}.$$

Lemme 6.1.5. *Soit* R *une* $\mathbb{Q}$*-algèbre et* $n \in \mathbb{Q}$*. Soit* G_n *l'ensemble des séries formelles* $f \in R[\![x]\!]$ *telles que* $f(0) = 0$ *et* $f'(0) = n$*. L'ensemble* G_1 *forme un groupe pour la composition des séries formelles et agit sur* G_n *par l'action de conjugaison suivante :*

$$\begin{cases} G_1 \times G_n & \longrightarrow & G_n \\ (f, \alpha) & \longmapsto & f \bullet \alpha = f \circ \alpha \circ f^{-1} \end{cases}$$

Si n *est différent de* $0, 1, -1$ *alors cette action est simple et transitive.*

Démonstration : Soit $\alpha \in G_n$. Montrons qu'il existe des séries formelles $f_m \in G_1$, avec $m \geq 0$ telles que :

$$nf_m(x) \equiv f_m \circ \alpha(x) \left[x^{m+1}\right] \quad \text{et} \quad f_{m+1}(x) \equiv f_m(x) \left[x^{m+1}\right].$$

On pose $f_1(x) = x$ et on suppose avoir défini $f_2, \ldots, f_m$. Il existe donc $a \in R$ tel que :

$$nf_m(x) \equiv f_m \circ \alpha(x) + ax^{m+1} \left[x^{m+2}\right].$$

On pose alors $f_{m+1}(x) = f_m(x) + \frac{a}{n^{m+1}-n}x^{m+1}$, qui vérifie les conditions souhaitées. Il existe donc une série formelle $f \in G_1$ telle que $\alpha = f^{-1} \bullet nx$, ce qui montre que l'action est transitive.

Pour montrer que l'action est simple, il suffit de vérifier que le stabilisateur de $nx \in G_n$ est trivial. Soit $f(x) = \sum_{i \geq 0} f_i x^{i+1} \in G_1$ telle que :

$$f(nx) = nf(x).$$

Alors pour tout $i \geq 0$, $n^{i+1} f_i = nf_i$, donc $f_i = 0$ pour tout $i \geq 1$, ce qui montre que l'action est simple. □

Théorème 6.1.6. *Soit $n \in \mathbb{Z}$ tel que $|n| \geq 2$. Le morphisme $\overline{\kappa_n}$ induit un isomorphisme d'algébroïdes de Hopf :*

$$\mathbb{Q} \otimes \overline{\kappa_n} : \mathbb{Q} \otimes (\mathsf{S}_n, \mathsf{S}_n \Lambda) \longrightarrow \mathbb{Q} \otimes (\mathsf{L}, \mathsf{LB}).$$

Démonstration : D'après les théorèmes 1.7.2 et 1.7.5, l'algébroïde de Hopf $\mathbb{Q} \otimes (\mathsf{L}, \mathsf{LB})$ représente le foncteur qui à une $\mathbb{Q}$-algèbre R associe le groupoïde $\mathcal{E}$ tel que :

- un objet de $\mathcal{E}$ est une série formelle $f \in G_1$,
- si f et g sont deux objets de $\mathcal{E}$, un morphisme dans $\mathcal{E}$ de f vers g est une série formelle $u \in G_1$ telle que
$$g \circ u = f.$$

D'autre part, d'après la définition 6.1.2, l'algébroïde de Hopf $\mathbb{Q} \otimes_{\Bbbk} (\mathsf{S}_n, \mathsf{S}_n \Lambda)$ représente le foncteur qui à une $\mathbb{Q}$-algèbre R associe le groupoïde $\mathcal{F}$ tel que :

- un objet de $\mathcal{F}$ est une série formelle $\alpha \in G_n$,
- si α et β sont deux objets de $\mathcal{F}$, un morphisme dans $\mathcal{F}$ de α vers β est une série formelle $v \in G_1$ telle que
$$\beta = v \bullet \alpha.$$

De plus, le morphisme $\mathbb{Q} \otimes \overline{\kappa_n}$ représente le foncteur suivant de $\mathcal{E}$ vers $\mathcal{F}$:

$$\left\{ \begin{tikzcd} f \arrow[d, "u"'] & & f^{-1} \bullet (nx) \arrow[d, "u"] \\ g & \longmapsto & g^{-1} \bullet (nx) \end{tikzcd} \right.$$

Or, d'après le lemme 6.1.5, l'action de G_1 sur G_n est transitive, ce foncteur réalise un isomorphisme sur les objets. Comme de plus l'action est simple, ce foncteur est aussi pleinement fidèle. D'après le lemme de Yoneda, on en déduit que le morphisme d'algébroïdes de Hopf est un isomorphisme. □

Si $\Bbbk = \mathbb{Z}_{(p)}$ et $n \in \mathbb{Z}_{(p)}$, on a de la même manière un morphisme d'algébroïdes de Hopf $\kappa'_n : (\mathsf{S}, \mathsf{S}\Lambda) \longrightarrow (\mathsf{V}, \mathsf{VT})$, qui représente le morphisme de groupoïde qui à une loi de groupe formel p-typique associe sa n-série.

Proposition 6.1.7. *Le morphisme $\kappa'_p : \mathsf{S} \longrightarrow \mathsf{V}$ est surjectif.*

Démonstration : D'après la proposition 1.8.18 :

$$a_{p^n-1} \equiv v_n \left[v_0, \ldots, v_{n-1}\right],$$

où a_{p^n-1} est le coefficient de x^{p^n} de la p-série de la loi de groupe formel p-typique universelle. On en déduit que l'image du morphisme κ'_p contient les éléments v_n pour $n \geq 0$. Comme V est engendré en tant que $\mathbb{Z}_{(p)}$-algèbre par ces éléments (cf. le théorème 1.8.10), on en déduit le résultat. □

6.2 Les idéaux $\mathfrak{J}_n$

Dans cette section, on définit les idéaux $\mathfrak{J}_n$ pour $0 \leq n \leq \infty$ et on montre que ce sont des idéaux invariants réguliers de l'algébroïde de Hopf $(\mathsf{S}, \mathsf{S}\Lambda)$. Ces idéaux correspondent, par le morphisme κ'_p, aux idéaux invariants $\mathfrak{I}_n$ de l'algébroïde de Hopf $(\mathsf{V}, \mathsf{VT})$ de la définition 1.8.11.

Proposition et définition 6.2.1. *Soit $n \geq 0$. On note $\mathfrak{J}_n$ l'idéal de S engendré par les éléments $a_0, \ldots, a_{n-1}$, $\mathfrak{J} = \bigcup_{n \geq 0} \mathfrak{J}_n$ et on note R_n l'anneau quotient $\mathsf{S}/\mathfrak{J}_n$. La projection canonique $\mathsf{S} \longrightarrow \mathsf{R}_n$ admet une section qui identifie R_n au sous-anneau $\Bbbk\left[a_i, i \geq n\right]$ de S.*

Proposition 6.2.2. *Soient $n \geq 0$ et R une $\Bbbk$-algèbre. L'action du groupe $\mathfrak{m}_1(R)$ sur $\mathfrak{m}(R)$ stabilise l'ensemble $\mathfrak{m}^n(R)$ constitué des séries formelles divisibles par x^n. Soit $\mathcal{G}_n(R)$ le sous-groupoïde plein de $\mathcal{G}(R)$ dont l'ensemble des objets est $\mathfrak{m}^n(R)$. Alors $R \longmapsto \mathcal{G}_n(R)$ définit un foncteur*

$$\mathcal{G}_n : {}_{\Bbbk}\mathcal{A}\mathrm{lg} \longrightarrow \mathcal{G}\mathrm{rpd}$$

qui est représenté par l'algébroïde de Hopf gradué scindé $(\mathsf{R}_n, \mathsf{R}_n \otimes_{\Bbbk} \Lambda)$.

Démonstration : Le foncteur $R \longmapsto \mathfrak{m}^n(R)$ est représenté par $\mathsf{R}_n = \mathsf{S}/\mathfrak{J}_n$. Comme le groupoïde $\mathcal{G}_n$ provient de l'action d'un groupe représenté par Λ, le résultat suit. □

Corollaire 6.2.3. *L'idéal $\mathfrak{J}_n$ est un idéal homogène premier invariant régulier de l'algébroïde de Hopf $(\mathsf{S}, \mathsf{S}\Lambda)$.*

Démonstration : L'idéal $\mathfrak{J}_n$ est engendré par les éléments a_i pour $0 \leq i \leq n-1$ qui sont homogènes de bidegré $(2i, 1)$, c'est donc un idéal homogène. La suite $(a_0, a_1, \ldots)$ forme une suite régulière car, pour tout $n \geq 0$, l'anneau quotient $\mathsf{R}_n = \mathsf{S}/\mathfrak{J}_n \simeq \Bbbk\left[a_i \mid i \geq n\right]$ est intègre. Donc l'idéal $\mathfrak{J}_n$ est premier et régulier. C'est un idéal invariant d'après la proposition 6.2.2. □

Proposition 6.2.4. *Pour tout $n \geq 0$, a_n est invariant modulo $\mathfrak{J}_n$, c'est-à-dire :*

$$\eta_L(a_n) \equiv \eta_R(a_n) \left[\mathfrak{J}_n\right].$$

Démonstration : D'après la proposition 6.1.2 :

$$\mathfrak{f} \circ \eta_L(\mathfrak{a}) = \eta_R(\mathfrak{a}) \circ \mathfrak{f}$$

D'où, modulo $\mathfrak{J}_n$:

$$\mathfrak{f}\left(\sum_{i \geq n} \eta_L(a_i) x^{i+1}\right) = \sum_{i \geq n} \eta_R(a_i) \mathfrak{f}(x)^{i+1}$$

En considérant le coefficient de x^{n+1}, on obtient le résultat. □

Sur l'algébroïde de Hopf $(\mathsf{S}, \mathsf{S}\Lambda)$, il existe des $\mathsf{S}\Lambda$-comodules K_n pour $n \geq -1$, analogues à ceux définis à la proposition 3.4.1 sur l'algébroïde de Hopf $(\mathsf{V}, \mathsf{VT})$.

Proposition et définition 6.2.5. *Soit $n \geq -1$. On considère le* S*-module K_n suivant :*

$$K_n = \mathsf{S}/(a_0^\infty, \dots, a_n^\infty).$$

Pour tout $n \geq -1$, il existe une unique structure de SΛ*-comodule à gauche sur K_n telle que la suite exacte courte de* S*-modules suivante est une suite exacte courte dans la catégorie des* SΛ*-comodules :*

$$0 \longrightarrow K_n \longrightarrow a_{n+1}^{-1}K_n \longrightarrow K_{n+1} \longrightarrow 0.$$

Démonstration : On montre le résultat par récurrence sur n, le cas $n = -1$ étant évident. Supposons qu'on ait une structure de SΛ-comodule sur K_n. Comme K_n est de a_n-torsion, d'après le lemme 3.2.13, il existe une unique structure de comodule sur $a_{n+1}^{-1}K_n$ telle que le morphisme $K_n \longrightarrow a_{n+1}^{-1}K_n$ soit un morphisme de comodule. La suite exacte courte

$$0 \longrightarrow K_n \longrightarrow a_{n+1}^{-1}K_n \longrightarrow K_{n+1} \longrightarrow 0$$

détermine alors de manière unique la structure de comodule sur K_{n+1}. □

Proposition 6.2.6. *Soit $n \geq -1$ et X un* SΛ*-comodule, alors :*

- *pour tout $j \geq n+2$,* $\mathrm{Tor}_j^{\mathsf{S}}(X, K_n) = 0$,
- $\mathrm{Tor}_{n+1}^{\mathsf{S}}(X, K_n)$ *est le sous-comodule de X constitué des éléments de $\mathfrak{J}_{n+1}$-torsion.*

Démonstration : Le résultat est vrai pour $n = -1$ car $K_{-1} = \mathsf{S}$ qui est un S-module plat. On démontre le résultat pour $n \geq -1$ par récurrence. D'après la définition de K_n, on a une suite exacte courte de SΛ-comodules :

$$0 \longrightarrow K_n \longrightarrow a_{n+1}^{-1}K_n \longrightarrow K_{n+1} \longrightarrow 0.$$

Donc, d'après le théorème 3.3.14, on a la suite exacte longue de comodule suivante :

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{Tor}_{j+1}^{\mathsf{S}}(X, K_{n+1}) \longrightarrow \mathrm{Tor}_j^{\mathsf{S}}(X, K_n) \longrightarrow a_{n+1}^{-1}\,\mathrm{Tor}_j^{\mathsf{S}}(X, K_n) \to \mathrm{Tor}_j^{\mathsf{S}}(X, K_{n+1}) \longrightarrow \cdots$$

Par conséquent et d'après l'hypothèse de récurrence, $\mathrm{Tor}_j^{\mathsf{S}}(X, K_{n+1}) = 0$ pour $j \geq n+3$. Pour $j = n+1$, on a la suite exacte suivante :

$$0 \longrightarrow \mathrm{Tor}_{n+2}^{\mathsf{S}}(X, K_{n+1}) \to \mathrm{Tor}_{n+1}^{\mathsf{S}}(X, K_n) \longrightarrow a_{n+1}^{-1}\,\mathrm{Tor}_{n+1}^{\mathsf{S}}(X, K_n) \to \mathrm{Tor}_{n+1}^{\mathsf{S}}(X, K_{n+1}) \longrightarrow 0$$

Donc $\mathrm{Tor}_{n+2}^{\mathsf{S}}(X, K_{n+1})$ est le sous-comodule de $\mathrm{Tor}_{n+1}^{\mathsf{S}}(X, K_n)$ constitué des éléments de a_{n+1}-torsion. Or, d'après l'hypothèse de récurrence, $\mathrm{Tor}_{n+1}^{\mathsf{S}}(X, K_n)$ est le sous-comodule de X constitué des éléments de $\mathfrak{J}_{n+1}$-torsion, $\mathrm{Tor}_{n+2}^{\mathsf{S}}(X, K_{n+1})$ est donc le sous-comodule de X constitué des éléments de $\mathfrak{J}_{n+2}$-torsion. □

6.3 Les S-modules M,T et N

Dans cette section et la suivante, on définit des comodules M, T et N sur l'algébroïde de Hopf $(\mathsf{S}, \mathsf{S}\Lambda)$ qui correspondent aux $\mathsf{BP}_*\mathsf{BP}$-comodules $\mathsf{BP}_*\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty$, BP_*T_p et $\mathsf{BP}_*\mathrm{B}\mathbb{Z}/p$ étudiés à la section 5.1.

Définition 6.3.1. *On note M (resp. T) le S-module libre bigradué de base les éléments β_i (resp. γ_i) en degré $(2i, 0)$ pour $i \geq 1$. On note $\beta(x)$ et $\gamma(x)$ respectivement les séries génératrices homogènes de degré 0 :*

$$\beta(x) = \sum_{i \geq 1} \beta_i x^i \quad et \quad \gamma(x) = \sum_{i \geq 1} \gamma_i x^i.$$

On note $\sigma : M \longrightarrow T$ le morphisme de S-modules de bidegré $(0,1)$ défini par :

$$\sigma(\beta(x)) = \overline{\mathfrak{a}}(x)\gamma(x).$$

De manière équivalente, pour tout $n \geq 1$, on a :

$$\sigma(\beta_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{n-i}\gamma_i.$$

Définition 6.3.2. *Soit X un S-module gradué et X_n le sous-groupe de X constitué des éléments homogènes de degré n. Nous noterons ΣX la suspension de X, c'est-à-dire le S-module gradué tel que :*

$$(\Sigma X)_{n+1} = X_n.$$

De plus, si X est un S-module bigradué et $X_{n,k}$ est le sous-groupe des éléments homogènes de bidegré (n, k), alors la suspension de X désigne le S-module bigradué tel que :

$$(\Sigma X)_{n+1,k} = X_{n,k}.$$

Si $x \in X_n$ (resp. $X_{n,k}$), nous ferons l'abus de notation qui consiste à noter x l'élément correspondant de degré $n+1$ (resp. de bidegré $(n+1, k)$) dans ΣX.

Proposition et définition 6.3.3. *Soit N le S-module bigradué $N = \Sigma^{-1}\operatorname{Coker}(\sigma)$. On a une suite exacte courte de S-modules bigradués :*

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\sigma} T \xrightarrow{\pi} \Sigma N \longrightarrow 0. \tag{6.3.1}$$

Le S-module N est engendré par des éléments $[n] = \pi(\gamma_n)$ de bidegré $(2n-1, 0)$ pour $n \geq 1$ (à ne pas confondre avec la n-série d'une loi de groupe formel F : $[n]_F(x)$), avec les relations :

$$\sum_{i=1}^{n} a_{n-i}\,[i] = 0.$$

On note $\zeta(x)$ la série formelle réduite $\sum_{i\geq 1} [i]\, x^{i-1}$ homogène de bidegré $(1, 0)$. On a alors les relations :

$$\pi(\overline{\gamma}) = \zeta \quad et \quad \overline{\mathfrak{a}}(x)\zeta(x) = 0.$$

Démonstration : Il suffit de vérifier que σ est injectif. Soit $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\beta_i \in M$, avec $\lambda_i \in \mathsf{S}$ et $\lambda_n \neq 0$. Alors :

$$\begin{aligned}
\sigma(x) &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sigma(\beta_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} a_{i-j}\lambda_i\gamma_j \\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=j}^{n} a_{i-j}\lambda_i\right)\gamma_j \\
&= a_0\lambda_n\gamma_n + \sum_{j=1}^{n-1}\left(\sum_{i=j}^{n} a_{i-j}\lambda_i\right)\gamma_j
\end{aligned}$$

Comme S est un anneau intègre, $a_0\lambda_n \neq 0$ et on a $\sigma(x) \neq 0$, ce qui montre le résultat. □

Tout comme sur la BP-homologie de $\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty$ et sur T_p, on peut définir sur M et T des homomorphismes de Smith.

Définition 6.3.4. *On note ∂_M (resp. ∂_T) l'endomorphisme du S-module M (resp. T), homogènes de bidegré $(-2,0)$ et tels que :*

$$\partial_M\beta(x) = x\beta(x) \quad et \quad \partial_T\gamma(x) = x\gamma(x).$$

Remarque 6.3.5. Soit $K = \mathsf{S}\beta_0 \oplus M$. Ce S-module admet une structure de coalgèbre analogue à l'homologie de $\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty_+$ (cf. le théorème 5.6.1), mais ce n'est pas une S-algèbre de Hopf. Néanmoins, comme à la proposition 5.6.4, une structure de comodule sur un S-module X est déterminée par un homomorphisme de Smith ∂.

Proposition 6.3.6. *On a $\partial_T \circ \sigma = \sigma \circ \partial_M$. Il existe donc un endomorphisme ∂_N de N tel que :*

$$\partial_N\zeta(x) = x\zeta(x) \qquad et \qquad \pi \circ \partial_T = \partial_N \circ \pi.$$

Démonstration : Par linéarité, il suffit de vérifier que l'égalité $\partial_T \circ \sigma = \sigma \circ \partial_M$ est vérifiée sur les générateurs β_n de M pour $n \geq 1$. Pour cela, on utilise la série génératrice $\beta(x)$:

$$\begin{aligned}
(\sigma \circ \partial_M)(\beta(x)) &= \sigma(x\beta(x)) \\
&= x\sigma(\beta(x)) \\
&= \bar{\mathfrak{a}}(x) \cdot x\gamma(x) \\
&= \bar{\mathfrak{a}}(x) \cdot \partial_T(\gamma(x)) \\
&= \partial_T\left(\bar{\mathfrak{a}}(x) \cdot \gamma(x)\right) \\
&= (\partial_T \circ \sigma)(\beta(x)).
\end{aligned}$$

Cela démontre le résultat. □

Proposition 6.3.7. *Le noyau de ∂_M (resp. ∂_T) est le sous-S-module de M (resp. T) engendré par β_1 (resp. γ_1). Le noyau de ∂_N est le sous-S-module de N engendré par* $[1]$.

Démonstration : Le résultat est clair pour ∂_M et ∂_T. Soient $x \in \mathrm{Ker}\ \partial_N$ et $y \in T$ tel que $\pi(y) = x$. On a alors :

$$\pi(\partial_T y) = \partial_N\pi(y) = \partial_N x = 0.$$

D'après la suite exacte courte (6.3.1), il existe $z \in M$ tel que $\sigma(z) = \partial_T y$. De plus, comme M est un S-module libre de base $(\beta_i)_{i\geq 1}$, z s'écrit de manière unique comme une somme finie :

$$z = \sum_{i\geq 1} \lambda_i\beta_i,$$

où $\lambda_i \in \mathsf{S}$ est nul sauf pour un nombre fini d'indices. On pose alors :

$$y' = y - \sum_{i\geq 1} \lambda_i\sigma(\beta_{i+1})$$

On a alors $\pi(y') = \pi(y) = x$ et :

$$\partial_T y' = \partial_T y - \sum_{i\geq 1} \lambda_i\sigma(\beta_i) = \partial_T y - \sigma(z) = 0$$

Il existe donc $\mu \in \mathsf{S}$ tel que $y' = \mu\gamma_1$. Donc $x = \pi(y') = \mu\,[1]$, ce qui démontre le résultat. □

Proposition 6.3.8. *Pour tout $x \in N$,*

i) il existe i_0 tel que pour tout $i \geq i_0$, $\partial_N^i x = 0$;

ii) la somme $\sum_{i \geq 0} a_i \partial_N^i x$ est bien définie et :

$$\sum_{i \geq 0} a_i \partial_N^i x = 0.$$

Démonstration : Le i), est vérifié pour $x = [k]$, pour tout $k \geq 1$, et le résultat pour tout $x \in N$ en découle par S-linéarité. Cela montre que la somme $\sum_{i \geq 0} a_i \partial_N^i x$ est bien définie pour tout élément $x \in N$. Pour tout $k \geq 1$, et d'après la proposition 6.3.3 on a :

$$\sum_{i \geq 0} a_i \partial_N^i [k] = \sum_{i \geq 0} a_i [k - i] = 0.$$

On en déduit donc par linéarité pour tout $x \in N$, $\sum_{i \geq 0} a_i \partial_N^i x = 0$. □

Théorème 6.3.9.

i) Pour tout $n \geq 1$, on a $a_0^n [n] = 0$.

ii) Tout élément de N est de $\mathfrak{J}_1$-torsion. ($\mathfrak{J}_1 = (a_0)$, cf. la définition 6.2.1)

Démonstration : Nous allons montrer le i) par récurrence sur n :

- Pour $n = 1$, on a $\sigma(\beta_1) = a_0\gamma_1$ et $\pi(\gamma_1) = [1]$, ce qui implique $a_0 [1] = 0$.
- Soit $x = a_0^n [n + 1]$. Par l'hypothèse de récurrence, on sait que $\partial_N(x) = 0$. Donc x appartient au sous-module de N engendré par $[1]$ (cf. proposition 6.3.7). On en déduit que $a_0 x = 0$, ce qu'il fallait démontrer.

Le ii) découle de i) par linéarité car N est engendré par les $[n]$, $n \geq 1$. □

Corollaire 6.3.10. *Le morphisme $\sigma \otimes_{\mathsf{S}} \mathsf{S}\left[a_0^{-1}\right] : M\left[a_0^{-1}\right] \longrightarrow T\left[a_0^{-1}\right]$ est un isomorphisme.*

Démonstration : D'après la proposition 6.3.3, σ est injectif. Comme $\mathsf{S}\left[a_0^{-1}\right]$ est un S-module plat, il en est de même pour $\sigma \otimes_{\mathsf{S}} \mathsf{S}\left[a_0^{-1}\right]$. D'après le théorème précédent 6.3.9, $N = \Sigma^{-1} \operatorname{Coker} \sigma$ est de a_0-torsion. On a donc :

$$N \otimes_{\mathsf{S}} \mathsf{S}\left[a_0^{-1}\right] = 0.$$

On en déduit que $\sigma \otimes_{\mathsf{S}} \mathsf{S}\left[a_0^{-1}\right]$ est surjectif. □

Corollaire 6.3.11. *L'idéal annulateur de $[1]$ est $\mathfrak{J}_1$.*

Démonstration : D'après le théorème 6.3.9, $\mathfrak{J}_1$ est inclus dans l'idéal annulateur de $[1]$. Soit $\lambda \in \mathsf{S}$ tel que $\lambda [1] = 0$. Il existe donc un élément $x = \sum_{i \geq 1} \mu_i \beta_i \in M$ tel que $\sigma(x) = \lambda\gamma_1$, avec $(\mu_i)_{i \geq 1}$ une famille à support fini d'éléments de S. Supposons qu'il existe $i > 1$ avec $\mu_i \neq 0$, et soit i_0 le plus grand d'entre eux. En appliquant l'endomorphisme $\partial_T^{i_0 - 1}$ à $\sigma(x) = \lambda\gamma_1$, on obtient alors :

$$\begin{aligned}
\partial_T^{i_0-1} \circ \sigma(x) &= \sigma \circ \partial_M^{i_0-1}(x) \\
&= \sigma\left(\sum_{i \geq 1} \mu_i \partial_M^{i_0-1} \beta_i\right) \\
&= \sigma(\mu_{i_0} \beta_1) \\
&= a_0 \mu_{i_0} \gamma_1
\end{aligned}$$

Mais $\partial_T^{i_0-1} \circ \sigma(x) = \partial_T^{i_0-1} \lambda\gamma_1 = 0$ puisque $i_0 > 1$. Comme T est un S-module libre, on en déduit que $a_0\mu_{i_0} = 0$ et donc $\mu_{i_0} = 0$, ce qui est une contradiction. Donc $x = \mu_1\beta_1$, et $\lambda = a_0\mu_1 \in \mathfrak{J}_1$. $\square$

Pour le prochain théorème, rappelons que l'anneau R_1 est par définition (cf. 6.2.1) le quotient de S par l'idéal $\mathfrak{J}_1 = (a_0)$, et que le morphisme canonique $\mathsf{S} \longrightarrow \mathsf{R}_1$ admet une section qui permet d'identifier R_1 au sous-anneau $\Bbbk\,[a_i \mid i \geq 1]$ de S. Ainsi, tout S-module peut être considéré comme un R_1-module par restriction.

Théorème 6.3.12. *Le module* N*, vu comme* R_1*-module par restriction, est libre de base* $([n])_{n\geq 1}$*. La série formelle* $\zeta(x)$ *est donc une* R_1*-série génératrice (cf. la définition 1.5.5).*

Démonstration : Soit N' le R_1-sous-module de N engendré par la famille $([n])_{n\geq 1}$. D'après la proposition 6.3.3, pour tout $n \geq 1$, on a :

$$a_0\,[n] = -\sum_{i=1}^{n-1} a_i\,[n-i] \in N'.$$

On en déduit que N' est stable par multiplication par a_0, c'est donc un sous S-module de N, et $N' = N$.

Montrons maintenant que $([n])_{n\geq 1}$ forme une famille libre sur R_1. Supposons que l'on ait une relation linéaire $\sum_n \lambda_n\,[n] = 0$, avec $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ une famille à support fini d'éléments de R_1. On pose $l = \sup\{k \mid \lambda_k \neq 0\}$, et on applique l'endomorphisme ∂_N^{l-1}. On obtient alors $\lambda_l\,[1] = 0$. D'après le corollaire 6.3.11, cela implique que $\lambda_l \in \mathfrak{J}_1$, qui contredit $\lambda_l \in \mathsf{R}_1$. On en déduit donc que la famille $([n])_{n\geq 1}$ est une famille R_1-libre. $\square$

6.4 Les structures de $\mathsf{S}\Lambda$-comodule de M, T et N

Dans cette section, on définit une structure de $\mathsf{S}\Lambda$-comodule à gauche sur les S-modules M, T et N. Rappelons que, d'après la définition 6.1.2, la série universelle

$$\mathfrak{f}(x) = \sum_{i\geq 0} f_i x^{i+1} \in \mathsf{S}\Lambda[\![x]\!]$$

représente le morphisme universel $\eta_L(\mathfrak{a}) \longrightarrow \eta_R(\mathfrak{a})$. Nous ferons l'abus de notation qui consiste à noter $\mathfrak{a}(x)$ la série formelle

$$\eta_L(\mathfrak{a}(x)) \in \mathsf{S}\Lambda[\![x]\!].$$

Proposition et définition 6.4.1. *Le morphisme* ψ_M *suivant définit une structure de* $\mathsf{S}\Lambda$*-comodule à gauche sur* M *:*

$$\psi_M : \left\{ \begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & \mathsf{S}\Lambda \otimes_{\mathsf{S}} M \\ \beta(x) & \longmapsto & \sum_{i\geq 1} \mathfrak{f}(x)^i \otimes \beta_i = \beta \rhd \mathfrak{f}(x). \end{array} \right.$$

Démonstration : On sait que $\epsilon : \mathsf{S}\Lambda \longrightarrow \mathsf{S}$ est un morphisme de S-algèbre, et que $\epsilon(\mathfrak{f}(x)) = x$. D'après la proposition 1.5.12, on a :

$$\begin{array}{rcl} (\epsilon \otimes id_M) \circ \psi_M(\beta(x)) & = & (\epsilon \otimes id_M)(\beta \rhd \mathfrak{f}(x)) \\ & = & \beta \rhd \epsilon(\mathfrak{f}(x)) \\ & = & \beta \rhd x \\ & = & \beta(x). \end{array}$$

Donc le diagramme de counité commute :

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\psi_M"] \arrow[dr, "id_M"'] & \mathsf{S}\Lambda \otimes M \arrow[d, "\epsilon \otimes id_M"] \\ & M. \end{tikzcd}$$

Pour la coassociativité, on sait que Δ est un morphisme de S-algèbres, et que $\Delta(\mathfrak{f}(x)) = \mathfrak{f} \rhd \mathfrak{f}(x)$. En utilisant les propositions 1.5.12, 1.5.14 et 1.5.12, on a :

$$\begin{aligned} (\Delta \otimes id_M) \circ \psi_M(\beta(x)) &= (\Delta \otimes id_M)(\beta \rhd \mathfrak{f}(x)) \\ &= \beta \rhd (\mathfrak{f} \rhd \mathfrak{f}(x)) \\ &= (\beta \rhd \mathfrak{f}) \rhd \mathfrak{f}(x) \\ &= (id \otimes \psi_M) \circ \psi_M(\beta(x)). \end{aligned}$$

Le diagramme de coassociativité commute donc :

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\psi_M"] \arrow[d, "\psi_M"'] & \mathsf{S}\Lambda \otimes M \arrow[d, "\Delta \otimes id_M"] \\ \mathsf{S}\Lambda \otimes M \arrow[r, "id \otimes \psi_M"'] & \mathsf{S}\Lambda \otimes \mathsf{S}\Lambda \otimes M. \end{tikzcd}$$

□

Pour la proposition suivante, rappelons la notation 1.5.15. Soit R un groupe abélien et $f(x) \in R[\![x]\!]$ une série formelle telle que $f(0) = 0$, on note $\overline{f}(x)$ la série formelle réduite :

$$\overline{f}(x) = \frac{f(x)}{x}.$$

Proposition 6.4.2. *Il existe une unique structure de $\mathsf{S}\Lambda$-comodule à gauche sur T telle que $\sigma : M \longrightarrow T$ soit un morphisme de comodules. De plus, le morphisme de structure ψ_T est caractérisé par :*

$$\psi_T : \left\{ \begin{array}{ccc} T & \longrightarrow & \mathsf{S}\Lambda \otimes_{\mathsf{S}} T \\ \overline{\gamma}(x) & \longmapsto & \overline{\mathfrak{f}} \circ \mathfrak{a}(x) \cdot \overline{\gamma} \rhd \mathfrak{f}(x) \end{array} \right. .$$

Démonstration : D'après le corollaire 6.3.10, on sait que $\sigma : M \longrightarrow T$ tensorisé par $\mathsf{S}[a_0^{-1}]$ est un isomorphisme. Supposons qu'il existe une structure de comodule sur T telle que σ soit un morphisme de comodules. Alors, le diagramme suivant, où toutes les flèches obliques sont injectives (car il n'y a pas de a_0-torsion), doit commuter :

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[rr, "\sigma"] \arrow[dl] & & T \arrow[dl] \arrow[d, "\psi_T"] \\ M\left[a_0^{-1}\right] \arrow[rr, "\sigma\left[a_0^{-1}\right]", "\simeq"'] \arrow[d, "\psi_M"'] & & T\left[a_0^{-1}\right] \arrow[d, "\psi_T"] & \mathsf{S}\Lambda \otimes T \arrow[dl] \\ \mathsf{S}\Lambda \otimes M\left[a_0^{-1}\right] \arrow[rr, "id \otimes \sigma\left[a_0^{-1}\right]", "\simeq"'] & & \mathsf{S}\Lambda \otimes T\left[a_0^{-1}\right] & \end{tikzcd}$$

On a donc :

$$\psi_T(\overline{\gamma})(x) = (id \otimes \sigma\left[a_0^{-1}\right]) \circ \psi_M \circ \left(\sigma\left[a_0^{-1}\right]\right)^{-1}(\overline{\gamma}(x)).$$

D'après la définition 6.3.1, on a :

$$\sigma(\beta)(x) = \overline{\mathfrak{a}}(x)\gamma(x).$$

On en déduit donc :

$$\sigma(\overline{\beta})(x) = \overline{\mathfrak{a}}(x)\overline{\gamma}(x)$$

et, comme la série $\overline{\mathfrak{a}}(x)$ est inversible (pour le produit) dans $\mathsf{S}[a_0^{-1}]$:

$$\left(\sigma\left[a_0^{-1}\right]\right)^{-1}(\overline{\gamma})(x) = \frac{1}{\overline{\mathfrak{a}}(x)}\overline{\beta}(x).$$

En utilisant la proposition et définition 6.4.1, et la proposition 1.5.16, on a :

$$\begin{aligned}
\psi_M\left(\frac{1}{\overline{\mathfrak{a}}(x)}\overline{\beta}(x)\right) &= \frac{1}{\overline{\mathfrak{a}}(x)}\psi_M(\overline{\beta})(x) \\
&= \frac{1}{\overline{\mathfrak{a}}(x)}\overline{\psi_M(\beta)}(x) \\
&= \frac{1}{\overline{\mathfrak{a}}(x)}\overline{\beta \rhd \mathfrak{f}}(x) \\
&= \frac{\overline{\mathfrak{f}}(x)}{\overline{\mathfrak{a}}(x)}\overline{\beta} \rhd \mathfrak{f}(x).
\end{aligned}$$

On applique le morphisme $id\otimes\sigma\left[a_0^{-1}\right]$. On a :

$$\begin{aligned}
(id\otimes\sigma)(\overline{\beta} \rhd \mathfrak{f})(x) &= \sigma(\overline{\beta}) \rhd \mathfrak{f}(x) && \text{(cf. la proposition 1.5.12)} \\
&= (\overline{\mathfrak{a}}\cdot\overline{\gamma}) \rhd \mathfrak{f}(x) \\
&= (\eta_R\overline{\mathfrak{a}})\circ\mathfrak{f}(x)\cdot\overline{\gamma} \rhd \mathfrak{f}(x) && \text{(cf. la remarque 1.5.13).}
\end{aligned}$$

Or, d'après la proposition 6.1.2, $\mathfrak{f}$ représente le morphisme universel $\eta_L\mathfrak{a} \longrightarrow \eta_R\mathfrak{a}$, c'est-à-dire $\mathfrak{f}\circ\mathfrak{a} = \eta_R(\mathfrak{a})\circ\mathfrak{f}$. On obtient :

$$\begin{aligned}
(\eta_R\overline{\mathfrak{a}})\circ\mathfrak{f}(x) &= \frac{\eta_R\mathfrak{a}(x)}{x}\circ\mathfrak{f}(x) \\
&= \frac{\eta_R\mathfrak{a}\circ\mathfrak{f}(x)}{\mathfrak{f}(x)} \\
&= \frac{\mathfrak{f}\circ\mathfrak{a}(x)}{\mathfrak{f}(x)} \\
&= \frac{\mathfrak{a}(x)\cdot\overline{\mathfrak{f}}\circ\mathfrak{a}(x)}{\mathfrak{f}(x)}.
\end{aligned}$$

Finalement :

$$\begin{aligned}
\psi_T(\overline{\gamma})(x) &= \frac{\overline{\mathfrak{f}}(x)}{\overline{\mathfrak{a}}(x)}\cdot(id\otimes\sigma)(\overline{\beta} \rhd \mathfrak{f})(x) \\
&= \frac{\overline{\mathfrak{f}}(x)}{\overline{\mathfrak{a}}(x)}\cdot(\eta_R\overline{\mathfrak{a}})\circ\mathfrak{f}(x)\cdot\overline{\gamma} \rhd \mathfrak{f}(x) \\
&= \frac{\overline{\mathfrak{f}}(x)}{\overline{\mathfrak{a}}(x)}\frac{\mathfrak{a}(x)\cdot\overline{\mathfrak{f}}\circ\mathfrak{a}(x)}{\mathfrak{f}(x)}\cdot\overline{\gamma} \rhd \mathfrak{f}(x) \\
&= \overline{\mathfrak{f}}\circ\mathfrak{a}(x)\cdot\overline{\gamma} \rhd \mathfrak{f}(x).
\end{aligned}$$

Cette formule définit un morphisme $\psi_T : T \longrightarrow \mathsf{S}\Lambda\otimes_{\mathsf{S}}T$. Comme $\sigma\left[a_0^{-1}\right]$ est un isomorphisme, ce morphisme est coassociatif et counitaire et définit donc une structure de comodule sur T. $\square$

Corollaire 6.4.3. *Il existe une unique structure de* $\mathsf{S}\Lambda$*-comodule sur le* S*-module* N *telle que la suite exacte courte* (6.3.1) *soit une suite exacte courte de* $\mathsf{S}\Lambda$*-comodule :*

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\sigma} T \xrightarrow{\pi} \Sigma N \longrightarrow 0.$$

De plus, le morphisme de structure ψ_N *vérifie la relation :*

$$\psi_N : \left\{ \begin{array}{ccc} N & \longrightarrow & \mathsf{S}\Lambda \otimes_{\mathsf{S}} N \\ \zeta(x) & \longmapsto & \bar{\mathfrak{f}} \circ \mathfrak{a}(x) \cdot \zeta \triangleright \mathfrak{f}(x). \end{array} \right.$$

Démonstration : Comme $\mathsf{S}\Lambda$ est un S-module plat, la catégorie ${}_{\mathsf{S}\Lambda}\mathcal{C}\mathrm{omod}$ est une catégorie abélienne et le foncteur oubli ${}_{\mathsf{S}\Lambda}\mathcal{C}\mathrm{omod} \longrightarrow {}_{\mathsf{S}}\mathcal{M}\mathrm{od}$ est un foncteur exact qui crée les conoyaux. □

La démonstration de la proposition 6.4.2 peut s'effectuer de manière alternative en utilisant le lemme suivant et le comodule $K_0 \simeq \mathsf{S}/a_0^{\infty}$ de la proposition 6.2.5 :

Lemme 6.4.4. *On a la suite exacte courte de comodules suivante qui envoie la série* $\zeta(x)$ *sur* $\frac{1}{\mathfrak{a}(x)}\overline{\beta}(x)$ *:*

$$0 \longrightarrow \Sigma N \longrightarrow M/a_0^{\infty} \longrightarrow T/a_0^{\infty} \longrightarrow 0,$$

$$\zeta(x) \longmapsto \frac{1}{\mathfrak{a}(x)}\overline{\beta}(x)$$

avec $M/a_0^{\infty} \simeq M \otimes_{\mathsf{S}} K_0$ *et* $T/a_0^{\infty} \simeq T \otimes_{\mathsf{S}} K_0$.

Démonstration : D'après le théorème 6.3.9, N est de a_0-torsion. Donc, d'après la proposition 6.2.6, on a :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Tor}_1^{\mathsf{S}}(N, K_0) & \simeq & N \\ N \otimes_{\mathsf{S}} K_0 & \simeq & 0. \end{array}$$

La suite exacte courte voulue s'obtient en tensorisant la suite exacte courte (6.3.1) avec N et en appliquant le théorème 3.3.14. Pour expliciter l'inclusion de ΣN dans M/a_0^{∞}, on applique le lemme du serpent au diagramme de comodules suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[r, dotted] \arrow[d, dotted] & \Sigma N \arrow[d, dotted] \arrow[dddll, dotted, bend left] & \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d] & T \arrow[r, "\pi"] \arrow[d] & \Sigma N \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & M\left[a_0^{-1}\right] \arrow[r, "\sigma\left[a_0^{-1}\right]", "\simeq"'] \arrow[d, dotted] & T\left[a_0^{-1}\right] \arrow[r] \arrow[d, dotted] & 0 \arrow[d, dotted] & \\
 & M/a_0^{\infty} \arrow[r, dotted] & T/a_0^{\infty} \arrow[r, dotted] & 0 &
\end{tikzcd}$$

La série génératrice $\zeta(x)$ provient de $\overline{\gamma}(x)$ par π et cette série admet pour antécédent par $\sigma\left[a_0^{-1}\right]$ la série $\frac{1}{\mathfrak{a}(x)}\overline{\beta}(x)$, une fois que a_0 a été inversé. On en déduit alors le résultat. □

6.5 Les S-modules N^n

Par la suite, nous noterons le produit tensoriel de deux S-modules X et Y simplement XY. Ainsi, pour $n \geq 1$, le produit tensoriel itéré de n copies de X sera noté X^n. Dans cette section, on s'intéresse à la structure de S-module de N^n.

Définition 6.5.1. *L'ensemble des n-uplets $I = (i_1, \ldots, i_n)$ d'entiers strictement positifs est noté $\mathcal{J}^n \subset \mathbb{Z}^n$. Si $I = (i_1, \ldots, i_n) \in \mathcal{J}^n$, l'élément $[i_1] \otimes \cdots \otimes [i_n]$ de N^n est noté $[I] = [i_1, \ldots, i_n]$. On notera aussi ω_n, l'élément $[1, \ldots, 1] \in N^n$. Par convention, on a $[I] = 0$ si $I \in \mathbb{Z}^n$ et $I \notin \mathcal{J}^n$. Soit $I \in \mathbb{Z}^n$. On appelle longueur du n-uplet I l'entier :*

$$|I| = i_1 + \cdots + i_n.$$

Le S*-module N^n est naturellement muni d'une bigraduation et pour $I \in \mathcal{J}^n$, l'élément $[I]$ est homogène de bidegré $(2|I| - n, 0)$.*
On munit $\mathbb{Z}^n$ et $\mathcal{J}^n$ de l'ordre lexicographique naturel :

$$(i_1, \ldots, i_n) \prec (j_1, \ldots, j_n) \Leftrightarrow \exists k \leq n \ \forall l < k \ i_l = j_l \text{ et } i_k < j_k.$$

Cet ordre est bien fondé sur $\mathcal{J}^n$.

Proposition et définition 6.5.2. *La famille des éléments $([I])_{I \in \mathcal{J}^n}$ engendre N^n comme* S*-module. On note $\zeta(x_1, \ldots, x_n)$ la série à coefficients dans N^n et homogène de bidegré $(n, 0)$ suivante :*

$$\zeta(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{I \in \mathcal{J}^n} [I] \, x_1^{i_1 - 1} \cdots x_n^{i_n - 1} = \zeta(x_1) \otimes \cdots \otimes \zeta(x_n).$$

À la proposition 6.3.6, on a défini l'homorphisme de Smith sur N, qui provient d'une structure de comodule sur la coalgèbre K. On peut donc définir sur N^n une structure de comodule sur K^n. On a donc n homorphismes de Smith sur N^n associés.

Définition 6.5.3. *Soit $1 \leq i \leq n$ et $J = (j_1, \ldots, j_n) \in \mathbb{Z}^n$. On note alors :*

$$\partial_i J = (j_1, \ldots, j_{i-1}, j_i - 1, j_{i+1}, \ldots, j_n).$$

On note aussi ∂_i l'endomorphisme de N^n induit par ∂ sur la i-ème coordonnée. Pour $I \in \mathcal{J}^n$, on a alors :

$$\partial_i [I] = [\partial_i I].$$

De plus :

$$\partial_i \zeta(x_1, \ldots, x_n) = x_i \zeta(x_1, \ldots, x_n).$$

Lemme 6.5.4. *Soit $n \geq 1$ un entier. L'idéal $\mathfrak{I}_n$ annule l'élément ω_n.*

Démonstration : Nous allons démontrer le lemme par récurrence sur n.
- Pour $n = 1$, le résultat découle du théorème 6.3.9.
- Supposons le résultat vrai pour n. Pour $i \geq 0$, on a :

  $$a_i \omega_{n+1} = (a_i \omega_n) \otimes [1].$$

  Donc, d'après l'hypothèse de récurrence, $\mathfrak{I}_n$ annule ω_{n+1}. Il nous reste à vérifier que a_n annule aussi ω_{n+1}. Or, d'après la proposition 6.3.3, on a :

  $$a_n [1] = -\sum_{i=0}^{n-1} a_i [n + 1 - i] \in \mathfrak{I}_n N.$$

  donc $\mathfrak{I}_{n+1}$ annule ω_{n+1}.

$\square$

Proposition 6.5.5. *Soit* $n \geq 1$. *Alors :*

i) N^n*, vu comme* R_n*-module par restriction, est engendré par la famille* $([I])_{I\in\mathcal{J}^n}$.

ii) Le S*-module* N^n *est de* $\mathfrak{J}_n$*-torsion.*

Démonstration : On démontre la première assertion par récurrence sur n. Le cas $n = 1$ est démontré par le théorème 6.3.12.

Supposons le résultat vrai pour n. D'après la proposition 6.5.2, la famille $([I])$, avec $I \in \mathcal{J}^{n+1}$ engendre le S-module N^{n+1}. Soit N' le sous R_{n+1}-module de N^{n+1} engendré par cette famille. Montrer le résultat revient à montrer que N' est stable par multiplication par a_k, avec $0 \leq k \leq n$. Il suffit donc de démontrer que, pour tout $0 \leq k \leq n$ et tout $I \in \mathcal{J}^{n+1}$, il existe une famille à support fini $(\lambda_J)_{J\in\mathcal{J}^{n+1}}$ de R_{n+1} telle que :

$$a_k\,[I] = \sum_{J\in\mathcal{J}^{n+1}} \lambda_J\,[J]\,,$$

Soit $I = (i_1, \ldots, i_{n+1}) \in \mathcal{J}^{n+1}$. D'après l'hypothèse de récurrence, pour $k < n$, $a_k\,[i_1, \ldots, i_n] = \sum_{J\in\mathcal{J}^n} \lambda_J\,[J]$ avec $\lambda_J \in \mathsf{R}_n$. Il nous suffit donc de démontrer le résultat pour $k = n$. On pose $K = (i_1, \ldots, i_n)$. On va montrer le résultat par récurrence sur $|K|$.

– Si $[K] = \omega_n$, d'après la proposition 6.3.3, on a :

$$a_n\,[1, \ldots, 1, i_{n+1}] = -\sum_{j=1}^{i_{n+1}-1} a_{n+j}\,[1, \ldots, 1, i_{n+1} - j] - \sum_{j=1}^{n} a_{n-j}\,[1, \ldots, 1, i_{n+1} + j]\,.$$

Dans la première somme, on a $n+j > n$ et $a_{n+j} \in \mathsf{R}_{n+1}$. Dans la deuxième, on a $n-j < n$. Or, d'après le lemme 6.5.4, $a_k\omega_n = 0$ pour $k < n$. On en déduit donc le résultat.

– Soit $K \in \mathcal{J}^n$ tel que le résultat est vrai pour tous les $J \in \mathcal{J}^n$ avec $|J| < |K|$. On a alors :

$$a_n\,[K, i_{n+1}] = -\sum_{j=1}^{i_{n+1}-1} a_{n+j}\,[K, i_{n+1} - j] - \sum_{j=1}^{n} a_{n-j}\,[K, i_{n+1} + j]\,.$$

Dans la première somme, on a $n + j > n$ et $a_{n+j} \in \mathsf{R}_{n+1}$. Considérons maintenant les termes de la deuxième somme. D'après l'hypothèse de récurrence, si $k < n$ alors $a_k\,[K] = \sum_{J\in\mathcal{J}^n} \lambda_J\,[J]$ avec $\lambda_J \in \mathsf{R}_n$. De plus, comme $a_k\,[K]$ est un élément homogène de bidegré $(2|K| - n, 1)$, on peut supposer que les $\lambda_J\,[J]$ sont homogènes de même bidegré. On en déduit donc que $\lambda_J = \mu a_{k+|K|-|J|}$ où μ est un scalaire de $\Bbbk$. Nécessairement, si $\lambda_J \neq 0$, alors $|J| < |K|$. L'hypothèse de récurrence pour J permet alors de démontrer que les termes de la forme $a_n\,[J, j]$ peuvent s'écrire sous la forme voulue.

Montrons maintenant la deuxième assertion. Soient $i < n$, $I \in \mathcal{J}^n$ et $l \in \mathbb{N}$. On pose $x = a_i^l\,[I]$. L'élément x est homogène de bidegré $(2(il + |I|) - n, l)$. D'après le $i)$, il existe des éléments $\lambda_J \in \mathsf{R}_n$ homogènes de bidegré $(2(il + |I| - |J|), l)$ tels que :

$$x = \sum_J \lambda_J\,[J]\,.$$

Comme $\lambda_J \in \mathsf{R}_n$, on doit avoir :

$$2(il + |I| - |J|) \geq 2nl.$$

D'où :

$$|J| \leq |I| + l(i - n).$$

Pour $l > \frac{|I|}{n-i}$, on doit avoir $|J| < 0$, ce qui implique que $a_i^l\,[I] = 0$. $\square$

6.6 Un avatar algébrique de la conjecture de Connor-Floyd

L'objectif de cette partie est de démontrer le théorème 6.6.12, qui établit la propriété $(\mathcal{P}_n)$ suivante :

$(\mathcal{P}_n)$: Le S-module N^n, vu comme R_n-module par restriction est libre de base $([I])_{I\in\mathcal{J}^n}$.

Ce théorème correspond au théorème 5.4.9 qui énonce que $\mathsf{BP}_*\mathrm{B}\mathbb{Z}/p^{\otimes n}$ admet une présentation de Landweber libre sur $\mathsf{BP}_*/\mathfrak{I}_n$. Commençons par démontrer le lemme suivant :

Lemme 6.6.1. *Soit $n\geq 1$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) $(\mathcal{P}_n)$: Le S-module N^n, vu comme R_n-module par restriction est libre de base $([I])_{I\in\mathcal{J}^n}$.

ii) L'idéal annulateur de ω_n est $\mathfrak{I}_n$.

Démonstration : Il est clair que $i) \implies ii)$ puisque le lemme 6.5.4 montre que $\mathfrak{I}_n$ annule ω_n. Montrons la réciproque. D'après la proposition 6.5.5, la famille $([I])_{I\in\mathcal{J}^n}$ engendre N^n sur R_n. Il suffit de voir que c'est une famille libre. Supposons que l'on ait une relation non triviale :

$$\sum_{I\in\mathcal{J}^n}\lambda_I\,[I]=0,\ \text{avec}\ \forall I,\ \lambda_I\in\mathsf{R}_n\ \text{et}\ \exists I,\ \lambda_I\neq 0.$$

On considère alors le n-uplet $J=(j_1,\dots,j_n)$ maximal parmi les I tels que $\lambda_I\neq 0$, pour l'ordre lexicographique sur les n-uplets. On applique alors l'endomorphisme de N^n : $\partial_1^{j_1-1}\cdots\partial_n^{j_n-1}$. Par maximalité, on obtient alors $\lambda_J\omega_n=0$. Or l'assertion $ii)$ implique $\lambda_J=0$, ce qui contredit notre hypothèse. Cela montre le résultat. □

Le théorème 6.3.12 montre que $\mathcal{P}_1$ est vraie. On démontre alors $\mathcal{P}_n$ par récurrence sur n. L'idée générale de la démonstration est la suivante :

D'après la proposition 6.3.3, on a une suite exacte courte de S-modules :

$$0\longrightarrow M\xrightarrow{\sigma}T\xrightarrow{\pi}\Sigma N\longrightarrow 0,$$

et la relation :

$$\sigma(\overline{\beta}(x_1))=\overline{\mathfrak{a}}(x_1)\overline{\gamma}(x_1).$$

Si on tensorise cette suite exacte par N au dessus de S, on obtient la suite exacte :

$$MN\xrightarrow{\sigma\otimes id}TN\xrightarrow{\pi\otimes id}\Sigma N^2\longrightarrow 0,$$

et la relation :

$$(\sigma\otimes id)\left(\overline{\beta}(x_1)\otimes\zeta(x_2)\right)=\overline{\mathfrak{a}}(x_1)\overline{\gamma}(x_1)\otimes\zeta(x_2).$$

Comme $\overline{\mathfrak{a}}(x_2)\zeta(x_2)=0$, on en déduit que :

$$\sigma\otimes id\left(\overline{\beta}(x_1)\otimes\zeta(x_2)\right)=(\overline{\mathfrak{a}}(x_1)-\overline{\mathfrak{a}}(x_2))\overline{\gamma}(x_1)\otimes\zeta(x_2).$$

On pose $\alpha_1(x_1,x_2)=\frac{\overline{\mathfrak{a}}(x_1)-\overline{\mathfrak{a}}(x_2)}{x_1-x_2}$, série formelle à coefficients dans R_1. Le noyau du morphisme $TN\longrightarrow\Sigma N^2$ est alors engendré, en tant que S-module, par les coefficients de la série formelle $\alpha_1(x_1,x_2)\overline{\gamma}(x_1)\otimes\zeta(x_2)$, cela motive la définition d'un S-module libre L_1' et d'un morphisme ρ_1 : $L_1'N\longrightarrow TN$ défini par cette série. On montre alors qu'on a une suite exacte courte :

$$0\longrightarrow L_1'N\longrightarrow TN\longrightarrow\Sigma N^2\longrightarrow 0,$$

qui nous permet de démontrer $\mathcal{P}_2$. Pour $n\geq 1$, on utilise la définition 1.5.19, pour définir des séries formelles α_n :

Définition 6.6.2. *Soit $n \geq 0$. On définit la série formelle α_n à coefficients dans S et homogène de bidegré $(2n, 1)$ par :*

$$\alpha_n(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \tau_n\left(\bar{\mathfrak{a}}(x_1)\right) \in \mathsf{S}[\![x_1, \ldots, x_n]\!].$$

Proposition 6.6.3. *Soit $n \geq 0$. Alors :*

i) La série α_n est à coefficients dans $\mathsf{R}_n \subset \mathsf{S}$.

ii) $\alpha_n(x_1, \ldots, x_{n+1}) \equiv a_n\,[x_1, \ldots, x_{n+1}]$.

iii) La série $\alpha_n \in \mathsf{S}[\![x_1, \ldots, x_n]\!]$ est une série formelle symétrique.

iv) On a :

$$\alpha_n(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \sum_{k \geq n} a_k \left(\sum_{I \in \mathbb{N}^{n+1}\ ,\ |I| = k-n} x^I \right),$$

où, d'après la notation 1.5.3, $x^I = x_1^{i_1} \cdots x_{n+1}^{i_{n+1}}$ si $I = (i_1, \ldots, i_{n+1})$.

Pour démontrer cette proposition, on introduit l'algèbre de polynômes $\mathsf{S}\,[t]$, considérée comme S-module :

Définition 6.6.4. *Soit χ le morphisme de S-modules suivant :*

$$\chi : \begin{cases} \mathsf{S}\,[t] & \longrightarrow & \mathsf{S} \\ t^n & \longmapsto & a_n. \end{cases}$$

On munit $\mathsf{S}\,[t]$ de la graduation telle que t^k est homogène de bidegré $(2k, 1)$. Ainsi, χ est un morphisme de S-modules bigradués.

Démonstration de la proposition 6.6.3 : L'assertion *iv)* implique les trois autres. On considère la série formelle homogène de bidegré $(0, 1)$ à coefficients dans $\mathsf{S}\,[t]$ suivante :

$$\alpha'_0(x_1) = \frac{1}{1 - tx_1} = \sum_{k \geq 0} t^k x_1^k \in \mathsf{S}\,[t]\,[\![x_1]\!].$$

On pose $\alpha'_n(x_1, \ldots, x_n) = \tau_n(\alpha'_0)$ pour $n \geq 0$. Par construction, on a $\chi(\alpha'_0(x_1)) = \bar{\mathfrak{a}}(x_1) = \alpha_0(x_1)$. Par fonctorialité de τ_n, on en déduit que :

$$\chi(\alpha'_n) = \alpha_n.$$

Montrons par récurrence sur $n \geq 0$ que :

$$\alpha'_n(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \frac{t^n}{\prod_{i=1}^{n+1}(1 - tx_i)}.$$

– Pour $n = 0$, le résultat est vrai par définition de α'_0.
– Supposons le résultat vrai pour n. D'après la définition 1.5.19 de τ, on a :

$$\begin{aligned}
\alpha'_{n+1} &= \delta_{n+2}\alpha'_n \\
&= \frac{1}{x_1 - x_{n+2}} \left(\frac{t^n}{\prod_{i=1}^{n+1}(1 - tx_i)} - \frac{t^n}{\prod_{i=2}^{n+2}(1 - tx_i)} \right) \\
&= \frac{t^n}{\prod_{i=2}^{n+1}(1 - tx_i)} \frac{1}{x_1 - x_{n+2}} \left(\frac{1}{1 - tx_1} - \frac{1}{1 - tx_{n+2}} \right) \\
&= \frac{t^n}{\prod_{i=2}^{n+1}(1 - tx_i)} \frac{t}{(1 - tx_1)(1 - tx_{n+2})} \\
&= \frac{t^{n+1}}{\prod_{i=1}^{n+2}(1 - tx_i)}.
\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}\alpha'_n(x_1,\ldots,x_{n+1}) &= \frac{t^n}{\prod_{i=1}^{n+1}(1-tx_i)}\\ &= \sum_{l\geq 0}\sum_{|I|=l} t^{n+l}x^I\\ &= \sum_{k\geq n} t^k \sum_{|I|=k-n} x^I.\end{aligned}$$

En appliquant le morphisme χ, on obtient l'égalité recherchée, ce qui démontre la proposition. □

Corollaire 6.6.5. *Soit $n \geq 0$, on a :*

$$(x_1 - x_{n+2})\alpha_{n+1}(x_1,\ldots,x_{n+2}) = \alpha_n(x_1,\ldots,x_{n+1}) - \alpha_n(x_2,\ldots,x_{n+2}).$$

Démonstration : D'après la définition 6.6.2, on sait que :

$$(x_1 - x_{n+2})\alpha_{n+1}(x_1,\ldots,x_{n+2}) = \alpha_n(x_1,\ldots,x_{n+1}) - \alpha_n(x_{n+2},x_2,\ldots,x_{n+1}).$$

Le résultat découle directement de la symétrie de α_n, démontrée à la proposition précédente. □

Définition 6.6.6. *Soit $n \geq 0$. On note L'_n le S-module bigradué libre sur les générateurs y_i homogènes de bidegré $(2i,0)$ pour $i > n$:*

$$L'_n = \mathsf{S}\langle y_i | i > n\rangle.$$

On note $Y_n(x) \in L'_n[\![x]\!]$ la série génératrice homogène de bidegré $(2n+2,0)$ suivante :

$$Y_n(x) = \sum_{i>n} y_i x^{i-n-1}.$$

Lemme 6.6.7. *Soient E un S-module gradué, $n \geq 1$ un entier et $k \in \mathbb{Z}$. On a la suite exacte suivante, naturelle en E :*

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathsf{S}}(\Sigma^k N^n, E) \longrightarrow E[\![x_1,\ldots,x_n]\!]_{n+k} \longrightarrow \prod_{j=1}^n E[\![x_1,\ldots,x_n]\!]_{n+k}$$

$$u(x_1,\ldots,x_n) \longmapsto (\overline{\mathfrak{a}}(x_j)u(x_1,\ldots,x_n))_{1\leq j\leq n},$$

où $\mathrm{Hom}_{\mathsf{S}}(\Sigma^k N^n, E)$ désigne l'ensemble des morphismes de S-modules gradués, homogènes de degré 0, et $E[\![x_1,\ldots,x_n]\!]_{n+k}$ l'ensemble des séries formelles en n indéterminées, homogènes de degré $n+k$ et à coefficients dans E.

Démonstration : On a la suite exacte courte suivante :

$$\bigoplus_{j=1}^n \Sigma^{-n}T^{j-1}MT^{n-j} \longrightarrow \Sigma^{-n}T^n \longrightarrow N^n \longrightarrow 0.$$

En appliquant Σ^k et $\mathrm{Hom}_{\mathsf{S}}(-,E)$, on obtient la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathsf{S}}(\Sigma^k N^n, E) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathsf{S}}(\Sigma^{k-n}T^n, E) \longrightarrow \prod_{j=1}^n \mathrm{Hom}_{\mathsf{S}}(\Sigma^{k-n}T^{j-1}MT^{n-j}, E).$$

Or, comme T est un S-module libre de base $(\gamma_i)_{i\geq 1}$, le morphisme suivant est un isomorphisme :

$$\left\{\begin{array}{ccc}\mathrm{Hom}_{\mathsf{S}}(\Sigma^{k-n}T^n, E) & \longrightarrow & E[\![x_1,\ldots,x_n]\!]_{n+k}\\ f & \longmapsto & f\left(\overline{\gamma}(x_1)\otimes\cdots\otimes\overline{\gamma}(x_n)\right).\end{array}\right.$$

De la même façon, on a $\mathrm{Hom}_{\mathsf{S}}(\Sigma^{k-n}T^{j-1}MT^{n-j}, E) \simeq E[\![x_1,\ldots,x_n]\!]_{n+k}$. Le lemme découle finalement du fait que $\sigma(\overline{\beta}(x)) = \overline{\mathfrak{a}}(x)\overline{\gamma}(x)$. □

Proposition 6.6.8. *Soit $n \geq 0$. Il existe un unique morphisme de S-modules $\rho_n : L'_n N^n \longrightarrow TN^n$ homogène de bidegré $(0,1)$, tel que :*

$$\rho_n\left(Y_n(x_1)\otimes\zeta(x_2,\ldots,x_{n+1})\right) = \alpha_n(x_1,\ldots,x_{n+1})\overline{\gamma}(x_1)\otimes\zeta(x_2,\ldots,x_{n+1}).$$

Démonstration : Par définition, L'_n est le S-module libre de base $(y_i)_{i>n}$. Définir un morphisme $L'_n N^n \longrightarrow TN^n$ revient à définir, pour tout $i > n$ un morphisme $\Sigma^i N^n \longrightarrow TN^n$. On décompose la série formelle $\alpha_n(x_1,\ldots,x_{n+1})\overline{\gamma}(x_1)\otimes\zeta(x_2,\ldots,x_{n+1})$ selon les puissances de x_1 :

$$\alpha_n(x_1,\ldots,x_{n+1})\overline{\gamma}(x_1)\otimes\zeta(x_2,\ldots,x_{n+1}) = \sum_{l\geq 0} x_1^j u_l(x_2,\ldots,x_{n+1}).$$

Pour $l \geq 0$, u_l est une série formelle homogène de bidegré $(3n+2+2l,1)$ à coefficients dans TN^n. D'après la proposition 6.3.3, pour tout $2 \leq j \leq n+1$, on a :

$$\overline{\mathfrak{a}}(x_j)\alpha_n(x_1,\ldots,x_{n+1})\overline{\gamma}(x_1)\otimes\zeta(x_2,\ldots,x_{n+1}) = 0,$$

d'où

$$\overline{\mathfrak{a}}(x_j)u_l(x_2,\ldots,x_{n+1}) = 0.$$

D'après le lemme 6.6.7, il existe un unique morphisme de S-modules $\Sigma^i N^n \longrightarrow TN^n$ qui envoie $y_i\otimes\zeta(x_2,\ldots,x_{n+1})$ sur u_{i-l-1}. On en déduit l'existence et l'unicité du morphisme ρ_n. □

Remarque 6.6.9. Si $n=0$, il existe un isomorphisme de S-modules entre L'_0 et M qui envoie y_i sur β_i. De plus, le diagramme suivant, où la ligne est exacte commute :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L'_0 \arrow[r, "\rho_0"] \arrow[d, "\simeq"'] & T \arrow[r, "\pi"] & \Sigma N \arrow[r] & 0 \\ & M \arrow[ur, "\sigma"'] & & & \end{tikzcd}.$$

Les deux lemmes suivants montrent que les images des morphismes $\rho_n : L'_n N^n \longrightarrow TN^n$ et $\sigma\otimes id : MN^n \longrightarrow TN^n$ coïncident.

Lemme 6.6.10. *Soit $n \geq 0$. Alors :*

i) $\alpha_n(x_1,\ldots,x_{n+1})\zeta(x_1,\ldots,x_{n+1}) = 0$ *;*

ii) la composée suivante est nulle :

$$L'_n N^n \xrightarrow{\rho_n} TN^n \xrightarrow{\pi\otimes id} \Sigma N^{n+1};$$

iii) $\mathrm{Im}\ \rho_n \subset \mathrm{Im}\,(\sigma\otimes id)$.

Démonstration : Comme $\mathrm{Im}\,(\sigma\otimes id) = \mathrm{Ker}\,(\pi\otimes id)$, les assertions *ii)* et *iii)* sont équivalentes. De plus, *i)* est équivalente à *ii)* car, d'après la proposition 6.6.8 :

$$(\pi\otimes id)\circ\rho_n\left(Y_n(x_1)\otimes\zeta(x_2,\ldots,x_{n+1})\right) = \alpha_n(x_1,\ldots,x_{n+1})\zeta(x_1,\ldots,x_{n+1}).$$

On démontre *i)* par récurrence sur $n \geq 0$.

- Si $n=0$, $\alpha_0(x_1) = \overline{\mathfrak{a}}(x_1)$ et, d'après la proposition 6.3.3, $\overline{\mathfrak{a}}(x_1)\zeta(x_1) = 0$.

– Supposons le résultat vrai pour n. D'après le corollaire 6.6.5, on a :

$$(x_1 - x_{n+2})\alpha_{n+1}(x_1, \dots, x_{n+2}) = \alpha_n(x_1, \dots, x_{n+1}) - \alpha_n(x_2, \dots, x_{n+2}).$$

D'après l'hypothèse de récurrence, on sait que $\alpha_n(x_1, \dots, x_{n+1})\zeta(x_1, \dots, x_{n+1}) = 0$, donc :

$$\alpha_n(x_1, \dots, x_{n+1})\zeta(x_1, \dots, x_{n+2}) = 0,$$

et :

$$\alpha_n(x_2, \dots, x_{n+2})\zeta(x_1, \dots, x_{n+2}) = \zeta(x_1)\otimes\alpha_n(x_2, \dots, x_{n+2})\zeta(x_2, \dots, x_{n+2}) = 0.$$

On en déduit que $(x_1 - x_{n+2})\alpha_{n+1}(x_1, \dots, x_{n+2})\zeta(x_1, \dots, x_{n+2}) = 0$, ce qui démontre le résultat.

□

Lemme 6.6.11. *Soit $n \geq 0$. Alors :*

i) On a l'égalité de séries formelles à coefficients dans TN^n suivante :

$$\left(\prod_{k=2}^{n+1}(x_1 - x_k)\right)\rho_n\left(Y_n(x_1)\otimes\zeta(x_2, \dots, x_{n+1})\right) = (\sigma\otimes id)\left(\overline{\beta}(x_1)\otimes\zeta(x_2, \dots, x_{n+1})\right);$$

ii) $\mathrm{Im}\,(\sigma\otimes id) \subset \mathrm{Im}\ \rho_n$.

Démonstration : On démontre l'assertion $i)$ par récurrence sur $n \geq 0$. La remarque 6.6.9 démontre le cas $n = 0$.

Supposons le résultat vrai pour n. D'après la proposition 6.6.8, on a :

$$\begin{aligned}&(x_1 - x_{n+2})\rho_{n+1}\left(Y_{n+1}(x_1)\otimes\zeta(x_2, \dots, x_{n+2})\right) = \\ &\quad (x_1 - x_{n+2})\alpha_{n+1}(x_1, \dots, x_{n+2})\overline{\gamma}(x_1)\otimes\zeta(x_2, \dots, x_{n+2})\end{aligned}$$

Or, d'après le corollaire 6.6.5 et le lemme 6.6.10, on a :

$$(x_1 - x_{n+2})\alpha_{n+1}(x_1, \dots, x_{n+2})\zeta(x_2, \dots, x_{n+2}) = \alpha_n(x_1, \dots, x_{n+1})\zeta(x_2, \dots, x_{n+2}).$$

D'où :

$$\begin{aligned}(x_1 - x_{n+2})\rho_{n+1}\left(Y_{n+1}(x_1)\otimes\zeta(x_2, \dots, x_{n+2})\right) &= \alpha_n(x_1, \dots, x_{n+1})\overline{\gamma}(x_1)\otimes\zeta(x_2, \dots, x_{n+2}) \\ &= \rho_n\left(Y_n(x_1)\otimes\zeta(x_2, \dots, x_{n+1})\right)\otimes\zeta(x_{n+2}).\end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}&\left(\prod_{k=2}^{n+2}(x_1 - x_k)\right)\rho_{n+1}\left(Y_{n+1}(x_1)\otimes\zeta(x_2, \dots, x_{n+2})\right) \\ &= \left(\prod_{k=2}^{n+1}(x_1 - x_k)\right)\rho_n\left(Y_n(x_1)\otimes\zeta(x_2, \dots, x_{n+1})\right)\otimes\zeta(x_{n+2})\end{aligned}$$

Finalement, en utilisant l'hypothèse de récurrence, on obtient :

$$\begin{aligned}&\left(\prod_{k=2}^{n+2}(x_1 - x_k)\right)\rho_{n+1}\left(Y_{n+1}(x_1)\otimes\zeta(x_2, \dots, x_{n+2})\right) \\ &= (\sigma\otimes id)\left(\overline{\beta}(x_1)\otimes\zeta(x_2, \dots, x_{n+1})\right)\otimes\zeta(x_{n+2}) \\ &= (\sigma\otimes id)\left(\overline{\beta}(x_1)\otimes\zeta(x_2, \dots, x_{n+2})\right).\end{aligned}$$

Cela achève la récurrence.

L'assertion *ii*) découle directement de *i*). En effet, l'image de $\sigma \otimes id$ est engendré par les coefficients de la série formelle $(\sigma \otimes id)\left(\overline{\beta}(x_1)\otimes\zeta(x_2,\ldots,x_{n+1})\right)$. L'égalité nous assure qu'ils s'écrivent comme des combinaisons linéaires de coefficients de la série formelle $\rho_n\left(Y_n(x_1)\otimes\zeta(x_2,\ldots,x_{n+1})\right)$, qui sont tous dans l'image de ρ_n. On a donc bien $\mathrm{Im}\,(\sigma\otimes id) \subset \mathrm{Im}\ \rho_n$. □

Théorème 6.6.12. *Soit $n \geq 1$. Alors :*

i) Le S-module N^n, vu comme R_n-module est libre de base $[I]$ où $I \in \mathcal{J}^n$.

ii) Le morphisme $\rho_n : L'_nN^n \longrightarrow TN^n$ est injectif et on a la suite exacte courte de S-modules suivante :

$$0 \longrightarrow L'_nN^n \xrightarrow{\rho_n} TN^n \xrightarrow{\pi\otimes id} \Sigma N^{n+1} \longrightarrow 0.$$

Démonstration : Les lemmes 6.6.10 et 6.6.11 montrent que $\mathrm{Im}\,(\sigma\otimes id) = \mathrm{Im}\ \rho_n$. Pour démontrer que *ii*) est une suite exacte courte, il ne reste plus qu'à démontrer l'injectivité de ρ_n. Pour cela, on montre par récurrence sur $n \geq 1$ que ρ_{n-1} est injectif et que N^n, vu comme R_n-module est libre.

La proposition 6.3.3 et le théorème 6.3.12 montrent que le résultat est vrai pour $n = 1$.

Supposons le résultat vrai pour n. Comme N^n est un R_n-module libre et α_n est une série formelle à coefficients dans R_n dont le coefficient constant est a_n, on en déduit que ρ_n est injectif. De plus, d'après la proposition 6.5.5, le conoyau de ρ_n, ΣN^{n+1}, est de a_n-torsion. Donc, ρ_n devient un isomorphisme une fois a_n inversé. D'après le lemme 6.6.1, pour démontrer que N^{n+1} est un R_{n+1}-module libre, il ne nous reste qu'à démontrer que l'idéal annulateur de ω_{n+1} est $\mathfrak{I}_{n+1}$. On a le diagramme de S-modules suivant, dont les lignes sont exactes :

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[r, dotted] \arrow[d, dotted] & \Sigma N^{n+1} \arrow[d, dotted] \arrow[dddll, dotted, bend left] & \\
0 \arrow[r] & L'_nN^n \arrow[r, "\rho_n"] \arrow[d] & TN^n \arrow[r, "\pi\otimes id"] \arrow[d] & \Sigma N^{n+1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & L'_nN^n\left[a_n^{-1}\right] \arrow[r, "\rho_n", "\simeq"'] \arrow[d, dotted] & TN^n\left[a_n^{-1}\right] \arrow[r] \arrow[d, dotted] & 0 \arrow[d, dotted] & \\
 & L'_nN^n/a_n^{\infty} \arrow[r, dotted] & TN^n/a_n^{\infty} \arrow[r, dotted] & 0 &
\end{tikzcd}$$

D'après le lemme du serpent, on a la suite exacte courte :

$$0 \longrightarrow \Sigma N^{n+1} \longrightarrow L'_nN^n/a_n^{\infty} \longrightarrow TN^n/a_n^{\infty} \longrightarrow 0.$$

De plus, grâce à la proposition 6.6.8, on sait que la série génératrice $\zeta(x_1,\ldots,x_{n+1})$ de N^{n+1} est envoyée sur la série formelle suivante à coefficients dans L'_nN^n/a_n^{∞} :

$$\frac{1}{\alpha_n(x_1,\ldots,x_{n+1})}Y_n(x_1)\otimes\zeta(x_2,\ldots,x_{n+1}).$$

En particulier, en considérant le coefficient constant, ω_{n+1} est envoyé sur

$$\frac{1}{a_n}y_{n+1}\otimes\omega_n \in L'_nN^n/a_n^{\infty}.$$

L'idéal annulateur de ω_{n+1} est celui de $\frac{1}{a_n}y_{n+1}\otimes\omega_n$, c'est-à-dire $\mathfrak{I}_{n+1}$. Cela achève la démonstration. □

Notation 6.6.13. On notera H_n le noyau du morphisme $\pi \otimes id : TN^n \longrightarrow \Sigma N^{n+1}$ dans la catégorie des $\mathsf{S}\Lambda$-comodules. D'après le théorème 6.6.12, H_n est isomorphe en tant que S-module à $L'_n N^n$.

Le résultat technique suivant nous servira au lemme 6.9.4 pour déterminer la structure de S-module de $\mathrm{Tor}_1(N, N^n)$.

Lemme 6.6.14. *Soit $n \geq 1$ et $z_1, \ldots, z_n \in N^n$ tels que :*

$$\forall 1 \leq i, j \leq n, \ \partial_i z_j = \partial_j z_i.$$

Alors il existe $z \in N^n$ tel que pour tout $1 \leq i \leq n$, $\partial_i z = z_i$. De plus, si pour tout $1 \leq i \leq n$, $z_i = 0$ alors il existe $\lambda \in \mathsf{R}_n$ tel que $z = \lambda \ \omega_n$.

Démonstration : D'après le théorème 6.6.12, pour tout $1 \leq i \leq n$, on peut écrire de manière unique :

$$z_i = \sum_{I \in \mathcal{J}^n} \lambda_{i,I} [I], \text{ avec } \lambda_{i,I} \in \mathsf{R}_n.$$

Soit $L = (l_1, \ldots, l_n) \in \mathcal{J}^n$ avec $L \neq (1, \ldots, 1)$. Il existe donc $1 \leq i \leq n$ tel que $l_i > 1$. On a donc $[\partial_i L] \neq 0$. On pose alors $\mu_L = \lambda_{i, \partial_i L}$. Si $j \neq i$ vérifie aussi $l_j > 1$. On a alors :

$$[\partial_i \partial_j L] = [\partial_j \partial_i L] \neq 0.$$

D'après l'hypothèse on doit avoir :

$$\lambda_{i, \partial_i L} = \lambda_{j, \partial_j L},$$

ce qui montre que la définition de μ_L ne dépend pas du choix de l'indice i tel que $l_i > 1$. L'élément $z = \sum_{L \neq (1,\ldots,1)} \mu_L [L]$ vérifie bien, pour tout $1 \leq i \leq n$, $\partial_i z = z_i$.

Le fait que $([I])_{I \in \mathcal{J}^n}$ forme une base sur R_n de N^n implique que les éléments μ_L pour $L \neq (1, \ldots, 1)$ dont déterminés de manière unique par les z_i. Cela démontre la deuxième partie de la proposition. □

Remarque 6.6.15. Si X est un S-module, nous noterons ∂_i l'endomorphisme $id \otimes \partial_i$ de XN^n lorsqu'il n'y aura pas d'ambigüité. De plus, si X est un S-module libre, la proposition 6.6.14 précédente se généralise à XN^n.

6.7 Relations explicites dans N^n

Soit $n \geq 1$. D'après le théorème 6.6.12 N^n, vu comme R_n-module est libre de base $([J])_{J \in \mathcal{J}^n}$. Soit $0 \leq k < n$ et $I \in \mathcal{J}^n$. Dans cette section, nous expliciterons l'expression de $a_k [I]$ dans cette base. Comme $a_k [I]$ est homogène de bidegré $(2k + 2|I| - n, 1)$, il existe des scalaires $\lambda_{k,I,J} \in \mathbb{k}$ tels que :

$$a_k [I] = \sum_{J \in \mathcal{J}^n} \lambda_{k,I,J} a_{k+|I|-|J|} [J], \tag{6.7.1}$$

avec nécessairement $\lambda_{k,I,J} = 0$ si $|J| > k + |I| - n$. D'après la proposition 6.6.3 et le lemme 6.6.10, il existe une série formelle symétrique $\alpha_{n-1} \in \mathsf{S}[\![x_1, \ldots, x_n]\!]$, homogène de bidegré $(2n-2, 1)$ telle que :

1. $\alpha_{n-1}(x_1, \ldots, x_n) - a_{n-1} \in \mathsf{R}_n[\![x_1, \ldots, x_n]\!]$;
2. $\alpha_{n-1}(x_1, \ldots, x_n)\zeta(x_1, \ldots, x_n) = 0$;
3. $\alpha_{n-1}(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k \geq n-1} a_k \left(\sum_{i_1 + \cdots + i_n = k-n+1} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n} \right)$.

De plus, le théorème 6.6.12 montre que la suite suivante est une suite exacte courte :

$$0 \longrightarrow L'_n N^n \xrightarrow{\rho_n} TN^n \xrightarrow{\pi \otimes id} \Sigma N^{n+1} \longrightarrow 0,$$

où, d'après la proposition 6.6.8, ρ_n est défini par :

$$\rho_n\left(Y_n(x_1) \otimes \zeta(x_2, \ldots, x_{n+1})\right) = \alpha_n(x_1, \ldots, x_{n+1}) \overline{\gamma}(x_1) \otimes \zeta(x_2, \ldots, x_{n+1}).$$

La proposition détermine les coefficients $\lambda_{k,I,J}$, pour $k = n-1$, grâce à cette série formelle.

Proposition 6.7.1. *Soit $I \in \mathcal{J}^n$. Soit $A_I = \{J = (j_1, \ldots, j_n) \in \mathcal{J}^n \mid j_l \leq i_l$ et $J \neq I\}$. Alors :*

$$a_{n-1}[I] = -\sum_{J \in A_I} a_{n-1+|I|-|J|}[J].$$

Démonstration : Cela découle directement de l'expression de la série formelle :

$$\alpha_{n-1}(x_1, \ldots, x_n) \zeta(x_1, \ldots, x_n) = 0.$$

En effet, d'après la proposition 6.6.3, on a :

$$\begin{aligned} \alpha_{n-1}(x_1, \ldots, x_n) &= \sum_{k \geq n-1} a_k \left(\sum_{i_1 + \cdots + i_n = k-n+1} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n} \right) \\ &= \sum_{K = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{N}^n} a_{|K|+n-1} x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}. \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \alpha_{n-1}(x_1, \ldots, x_n) \zeta(x_1, \ldots, x_n) &= \sum_{K \in \mathbb{N}^n, J \in \mathcal{J}^n} a_{|K|+n-1}[J]\, x_1^{k_1+j_1-1} \cdots x_n^{k_n+j_n-1} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Soit $I = (i_1, \ldots, i_n) \in \mathcal{J}^n$. En considérant le coefficient du monôme $x_1^{i_1-1} \cdots x_n^{i_n-1}$ dans cette série formelle, on obtient :

$$a_{n-1}[I] + \sum_{J \in A_I} a_{n-1+|I|-|J|}[J] = 0.$$

$\square$

Nous voulons généraliser ce résultat pour $0 \leq k < n$. Il nous suffit donc de trouver une série formelle $h_{k,n} \in \mathsf{S}[\![x_1, \ldots, x_n]\!]$ homogène de bidegré $(2k, 1)$ telle que :

1. $h_{k,n}(x_1, \ldots, x_n) - a_k \in \mathsf{R}_n[\![x_1, \ldots, x_n]\!]$,
2. $h_{k,n}(x_1, \ldots, x_n) \zeta(x_1, \ldots, x_n) = 0$.

Comme pour la démonstration de la proposition 6.6.3, on utilise le S-module bigradué $\mathsf{S}[t]$, où t^n est homogène de bidegré $(2n, 1)$, et le morphisme de S-modules χ, de la définition 6.6.4 :

$$\chi : \begin{cases} X & \longrightarrow & \mathsf{S} \\ t^n & \longmapsto & a_n. \end{cases}$$

Notation 6.7.2. Soient $n \geq 1$ et $0 \leq j \leq n$, on note $\sigma_{j,n} \in \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$, le polynôme symétrique élémentaire de degré total j sur les indéterminées $x_1, \ldots, x_n$, de telle sorte qu'on ait :

$$\prod_{i=1}^{n} (1 - tx_i) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \sigma_{j,n} t^j \in \Bbbk[t, x_1, \ldots, x_n].$$

Définition 6.7.3. *Soient $n \geq 1$ et $0 \leq k < n$. On définit les séries formelles en $x_1, \ldots, x_n$, homogènes de bidegré $(2k, 1)$ suivantes :*

$$\begin{aligned} h'_{k,n}(t, x_1, \ldots, x_n) &= \frac{\sum_{j=0}^{n-1-k}(-1)^j \sigma_{j,n} t^{k+j}}{\prod_{i=1}^n (1 - tx_i)} \in \mathsf{S}\,[t]\,[\![x_1, \ldots, x_n]\!], \\ h_{k,n}(x_1, \ldots, x_n) &= \chi(h'_{k,n}) \in \mathsf{S}[\![x_1, \ldots, x_n]\!]. \end{aligned}$$

Lemme 6.7.4. *Soit $n \geq 1$ et $0 \leq k < n$. Alors la série formelle $h'_{k,n}(x_1, \ldots, x_n) - t^k \in \mathsf{S}[\![t, x_1, \ldots, x_n]\!]$ est divisible par t^n.*

Démonstration : On a :

$$\begin{aligned} h'_{k,n}(x_1, \ldots, x_n) - t^k &= \frac{\sum_{j=0}^{n-1-k}(-1)^j \sigma_{j,n} t^{k+j}}{\prod_{i=1}^n (1 - tx_i)} - t^k \\ &= \frac{\sum_{j=0}^{n-1-k}(-1)^j \sigma_{j,n} t^{k+j} - \sum_{j=0}^{n}(-1)^j \sigma_{j,n} t^{j+k}}{\prod_{i=1}^n (1 - tx_i)} \\ &= \frac{-\sum_{j=n-k}^{n}(-1)^j \sigma_{j,n} t^{k+j}}{\prod_{i=1}^n (1 - tx_i)} \\ &= \frac{-\sum_{l=n}^{n+k}(-1)^{l-k} \sigma_{l-k,n} t^{l}}{\prod_{i=1}^n (1 - tx_i)}. \end{aligned}$$

Cela montre bien que $h'_{k,n}(x_1, \ldots, x_n) - t^k$ est divisible par t^n. □

Lemme 6.7.5. *Soit $n \geq 1$, et $P(t, x_1, \ldots, x_n) \in \mathsf{S}[\![x_1, \ldots, x_n]\!]\,[t] \subset \mathsf{S}\,[t]\,[\![x_1, \ldots, x_n]\!]$, un polynôme de degré en t au plus $n-1$. Alors :*

$$\chi\left(\frac{P(t, x_1, \ldots, x_n)}{\prod_{i=1}^n (1 - tx_i)}\right) \zeta(x_1, \ldots, x_n) = 0.$$

Démonstration : Soit $0 \leq k < n$. Par linéarité, il suffit de démontrer le résultat pour des polynômes P du type :

$$P(t, x_1, \ldots, x_n) = t^k.$$

On fait alors une récurrence sur n. Comme $\chi\left(\frac{1}{1-tx_1}\right) = \overline{\mathfrak{a}}(x_1)$, la proposition 6.3.3 montre le cas $n = 1$ et $k = 0$.

Supposons le résultat vrai pour $n-1$, montrons le pour n. On fait alors une récurrence descendante sur k. D'après la démonstration de la proposition 6.6.3, on a :

$$\chi\left(\frac{t^{n-1}}{\prod_{i=1}^n (1 - tx_i)}\right) = \alpha_{n-1}(x_1, \ldots, x_n).$$

D'après le lemme 6.6.10, le résultat est vrai pour $k = n-1$. Soit $0 \leq k < n-1$ tel que le résultat est vrai pour $k+1$. On a :

$$\begin{aligned} \frac{t^k}{\prod_{i=1}^n (1 - tx_i)} &= \frac{t^k(1 - tx_n + tx_n)}{\prod_{i=1}^n (1 - tx_i)} \\ &= \frac{t^k}{\prod_{i=1}^{n-1} (1 - tx_i)} + x_n \frac{t^{k+1}}{\prod_{i=1}^n (1 - tx_i)} \end{aligned}$$

Les hypothèses de récurrence pour $(k, n-1)$ et $(k+1, n)$ permettent alors de conclure. □

Remarque 6.7.6. On peut démontrer le lemme précédent en utilisant une décomposition en éléments simples. On peut alors écrire la fraction $\frac{P(t,x_1,\ldots,x_n)}{\prod_{i=1}^n(1-tx_i)}$ comme une somme de fractions du type $\frac{R_i(x_1,\ldots,x_n)}{1-tx_i}$ où R_i est une fraction rationnelle en les x_i, avec pour dénominateur un produit de polynômes du type $(x_i - x_j)$. Le résultat suit simplement parce que $\chi\left(\frac{1}{1-tx_i}\right) = \overline{\mathfrak{a}}(x_i)$.

Proposition 6.7.7. *Soient $n \geq 1$ et $0 \leq k < n$. On a :*

i) la série formelle $h_{k,n}(x_1, \ldots, x_n) - a_k$ est à coefficients dans R_n ;

ii) $h_{k,n}(x_1, \ldots, x_n)\zeta(x_1, \ldots, x_n) = 0$.

Démonstration : D'après le lemme 6.7.4, on sait que la série formelle $h'_{k,n}(x_1, \ldots, x_n) - t^k$ est divisible par t^n. En appliquant le morphisme $\chi : \mathsf{S}[t] \longrightarrow \mathsf{S}$, on obtient directement le *i*). Le *ii*) découle du lemme 6.7.5. □

Pour la proposition ci-après, nous avons besoin d'introduire les ensembles B_I^l suivants, pour $I \in \mathcal{J}^n$ et $0 \leq l \leq n$.

Définition 6.7.8. *Soit $I = (i_1, \ldots, i_n) \in \mathcal{J}^n$ et $0 \leq l \leq n$ un entier. On pose :*

$$B_I^l = \{J = (j_1, \ldots, j_n) \in \mathcal{J}^n \mid \forall m \leq n \ j_m \leq i_m \ \text{et} \ \sharp\{m | j_m = i_m\} = l\}$$

Proposition 6.7.9. *Soit $I \in \mathcal{J}^n$, et $0 \leq k < n$. Alors :*

$$a_k[I] = (-1)^{n+k} \sum_{l=0}^{k} \binom{n-1-l}{k-l} \sum_{J \in B_I^l} a_{k+|I|-|J|}[J].$$

Démonstration : Soit $D = (d_1, \ldots, d_n) \in \mathbb{N}^n$. On note $h_{k,n,D}$ le coefficient de $x_1^{d_1} \cdots x_n^{d_n}$ dans $h_{k,n}$. D'après la proposition 6.7.7, on sait que :

$$h_{k,n,D} = a_k \ \text{si} \ D = (0, \ldots, 0) \ \text{et} \ h_{k,n,D} \in \mathsf{R}_n \ \text{si} \ D \neq (0, \ldots, 0).$$

De plus :

$$\begin{aligned} 0 &= h_{k,n}(x_1, \ldots, x_n)\zeta(x_1, \ldots, x_n) \\ &= \sum_{D \in \mathbb{N}^n} \sum_{J=(j_1,\ldots,j_n) \in \mathcal{J}^n} h_{k,n,D}[J]\, x_1^{j_1+d_1-1} \cdots x_n^{j_n+d_n-1} \\ &= \sum_{I \in \mathcal{J}^n} \sum_{D+J=I} h_{k,n,D}[J]\, x_1^{i_1-1} \cdots x_n^{i_n-1} \end{aligned}$$

Soit $J = (j_1, \ldots, j_n) \in \mathcal{J}^n$, tel que pour tout $1 \leq m \leq n$, $j_m \leq i_m$ et soit $l = \sharp\{m | j_m = i_m\} < n$. On a alors l'égalité suivante (cf. l'équation (6.7.1)) :

$$\lambda_{k,I,J} a_{k+|I|-|J|} = -h_{k,n,I-J}.$$

Or, d'après la définition 6.7.3, on a :

$$\begin{aligned} h'_{k,n}(x_1, \ldots, x_n) &= \frac{\sum_{j=0}^{n-1-k}(-1)^j \sigma_{j,n} t^{k+j}}{\prod_{i=1}^n(1-tx_i)} \\ &= t^k - \frac{\sum_{j=n-k}^{n}(-1)^j \sigma_{j,n} t^{j+k}}{\prod_{i=1}^n(1-tx_i)} \end{aligned}$$

Soient $n-k \leq a \leq n$ et $1 \leq b_1 < \cdots < b_a \leq n$. Le coefficient de $x_1^{i_1-j_1}\cdots x_n^{i_n-j_n}$ dans $\frac{x_{b_1}\cdots x_{b_a}}{\prod_{i=1}^n(1-x_i)}$ est donc 1 si pour tout $1 \leq m \leq a$, $i_{k_m} - j_{k_m} > 1$, et 0 sinon. Par conséquent, le coefficient de $x_1^{i_1-j_1}\cdots x_n^{i_n-j_n}$ dans $\frac{\sigma_{j,n}}{\prod_{i=1}^n(1-x_i)}$ est $\binom{n-l}{a}$. On a donc :

$$\begin{aligned} h_{k,n,I-J} &= -\sum_{a=n-k}^{n}(-1)^a\binom{n-l}{a} \\ &= -\sum_{a=n-k}^{n}(-1)^a\binom{n-l-1}{a-1} - \sum_{a=n-k}^{n}(-1)^a\binom{n-l-1}{a} \\ &= \sum_{a=n-k-1}^{n-1}(-1)^a\binom{n-l-1}{a} - \sum_{a=n-k}^{n}(-1)^a\binom{n-l-1}{a} \\ &= (-1)^{n-k-1}\binom{n-l-1}{n-k-1} \\ &= -(-1)^{n+k}\binom{n-l-1}{k-l} \end{aligned}$$

Cela achève la démonstration. □

6.8 Structure de $\mathsf{S}\Lambda$-comodule de H_n

Dans cette section, nous explicitons la structure de comodule de H_n, noyau du morphisme $\pi\otimes id : TN^n \longrightarrow \Sigma N^{n+1}$ dans la catégorie des $\mathsf{S}\Lambda$-comodules (cf. la notation 6.6.13). Pour cela, rappelons la suite exacte de comodules (6.3.1) :

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\sigma} T \xrightarrow{\pi} \Sigma N \longrightarrow 0.$$

En tensorisant par N^n dans la catégorie des $\mathsf{S}\Lambda$-comodules, on obtient la suite exacte de comodules suivante qui, de plus, permet d'identifier $\Sigma\,\mathrm{Tor}_1^{\mathsf{S}}(N, N^n)$ avec un sous-comodule de MN^n :

$$0 \longrightarrow \Sigma\,\mathrm{Tor}_1^{\mathsf{S}}(N, N^n) \longrightarrow MN^n \xrightarrow{\sigma\otimes id} TN^n \xrightarrow{\pi\otimes id} \Sigma N^{n+1} \longrightarrow 0. \qquad (6.8.1)$$

En introduisant le comodule H_n, on obtient la factorisation suivante :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \Sigma\,\mathrm{Tor}_1^{\mathsf{S}}(N, N^n) \arrow[r] & MN^n \arrow[r, "\sigma\otimes id"] \arrow[dr, dashed, "\nu_n"'] & TN^n \arrow[r, "\pi\otimes id"] & \Sigma N^{n+1} \arrow[r] & 0 \\ & & & H_n \arrow[u, "\rho_n"'] & & \end{tikzcd},$$

ainsi que les deux suites exactes courtes de comodules suivantes :

$$0 \longrightarrow \Sigma\,\mathrm{Tor}_1^{\mathsf{S}}(N, N^n) \longrightarrow MN^n \xrightarrow{\nu_n} H_n \longrightarrow 0 \qquad (6.8.2)$$

$$0 \longrightarrow H_n \xrightarrow{\rho_n} TN^n \xrightarrow{\pi\otimes id} \Sigma N^{n+1} \longrightarrow 0. \qquad (6.8.3)$$

D'après le théorème 6.6.12, on sait que $H_n \simeq L_n' N^n$ en tant que S-module. Cet isomorphisme permet de considérer la série formelle $Y_n(x_1)\otimes\zeta(x_2,\ldots,x_{n+1})$ comme étant une R_n-série génératrice de H_n. La proposition suivante explicite le morphisme ν_n, ce qui nous permettra d'en déduire le morphisme de structure de comodule

$$\psi_{H_n} : H_n \longrightarrow \mathsf{S}\Lambda\otimes_{\mathsf{S}} H_n.$$

Proposition 6.8.1. *On a l'égalité de séries formelles à coefficients dans H_n suivante :*

$$\nu_n\left(\overline{\beta}(x_1)\otimes\zeta(x_2,\ldots,x_{n+1})\right) = \left(\prod_{k=2}^{n+1}(x_1-x_k)\right) Y_n(x_1)\otimes\zeta(x_2,\ldots,x_{n+1}).$$

De plus, ν_n commute avec les endomorphismes ∂_i de N^n, pour $1 \leq i \leq n$.

Démonstration : D'après le lemme 6.6.11, on a :

$$\begin{aligned}(\sigma\otimes id)\left(\overline{\beta}(x_1)\otimes\zeta(x_2,\ldots,x_{n+1})\right) &= \left(\prod_{k=2}^{n+1}(x_1-x_k)\right)\rho_n\left(Y_n(x_1)\otimes\zeta(x_2,\ldots,x_{n+1})\right)\\ &= \rho_n\left(\left(\prod_{k=2}^{n+1}(x_1-x_k)\right)Y_n(x_1)\otimes\zeta(x_2,\ldots,x_{n+1})\right)\end{aligned}$$

Or d'après le théorème 6.6.12, ρ_n est injectif. On en déduit donc le résultat. Enfin, ν_n commute avec ∂_i, pour $1 \leq i \leq n$ car ils agissent sur $\zeta(x_2,\ldots,x_{n+1})$ par multiplication par x_{i+1}. □

Théorème 6.8.2. *On a :*

$$\psi_{H_n}\left(Y_n(x_1)\otimes\zeta(x_2,\ldots,x_{n+1})\right) = \bar{\mathfrak{f}}(x_1)\cdot\prod_{i=2}^{n+1}\bar{\mathfrak{f}}\circ\mathfrak{a}(x_i)\cdot\prod_{i=2}^{n+1}\frac{\mathfrak{f}(x_1)-\mathfrak{f}(x_i)}{x_1-x_i}\cdot(Y_n\otimes\zeta)\rhd\mathfrak{f}(x_1,\ldots,x_{n+1}),$$

avec :

$$(Y_n\otimes\zeta)\rhd\mathfrak{f}(x_1,\ldots,x_{n+1}) = Y_n\rhd\mathfrak{f}(x_1)\otimes\zeta\rhd(\mathfrak{f}(x_2),\ldots,\mathfrak{f}(x_{n+1})).$$

Démonstration : Par construction, ν_n est un morphisme de comodules, donc on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} MN^n \arrow[r, "\nu_n"] \arrow[d, "\psi_{MN^n}"'] & H_n \arrow[d, "\psi_{H_n}"] \\ \mathsf{S}\Lambda\otimes_{\mathsf{S}}MN^n \arrow[r, "id\otimes\nu_n"'] & \mathsf{S}\Lambda\otimes_{\mathsf{S}}H_n. \end{tikzcd}$$

D'après la proposition et définition 6.4.1 et le corollaire 6.4.3, on sait que :

$$\psi_{MN^n}\left(\overline{\beta}(x_1)\otimes\zeta(x_2,\ldots,x_{n+1})\right) = \bar{\mathfrak{f}}(x_1)\cdot\prod_{i=2}^{n+1}\bar{\mathfrak{f}}\circ\mathfrak{a}(x_i)\cdot(\overline{\beta}\otimes\zeta)\rhd\mathfrak{f}(x_1,\ldots,x_{n+1}).$$

En appliquant $id_{\mathsf{S}\Lambda}\otimes\nu_n$ et la proposition 6.8.1, on obtient :

$$\psi_{H_n}\left(\prod_{k=2}^{n+1}(x_1-x_k)\cdot Y_n(x_1)\otimes\zeta(x_2,\ldots,x_{n+1})\right) = \bar{\mathfrak{f}}(x_1)\cdot\prod_{i=2}^{n+1}\bar{\mathfrak{f}}\circ\mathfrak{a}(x_i)\cdot\left(\nu_n(\overline{\beta}\otimes\zeta)\right)\rhd\mathfrak{f}(x_1,\ldots,x_{n+1}).$$

D'où :

$$\prod_{i=2}^{n+1}(x_1-x_i)\cdot\psi_{H_n}\left(Y_n(x_1)\otimes\zeta(x_2,\ldots,x_{n+1})\right) = \bar{\mathfrak{f}}(x_1)\cdot\prod_{i=2}^{n+1}\bar{\mathfrak{f}}\circ\mathfrak{a}(x_i)\cdot\prod_{i=2}^{n+1}(\mathfrak{f}(x_1)-\mathfrak{f}(x_i))\cdot(Y_n\otimes\zeta)\rhd\mathfrak{f}(x_1,\ldots,x_{n+1}).$$

Ce qui termine la démonstration. □

6.9 Structure de S-module de $\Sigma\operatorname{Tor}_1^{\mathsf{S}}(N, N^n)$

On fixe un entier $n \geq 1$. Dans cette section, nous explicitons la structure de S-module de $\operatorname{Tor}_1^{\mathsf{S}}(N, N^n)$. Nous obtenons un résultat analogue au théorème 5.4.16 pour l'algébroïde de Hopf $(\mathsf{BP}_*, \mathsf{BP}_*\mathsf{BP})$. Rappelons la suite exacte de comodules (6.8.1) :

$$0 \longrightarrow \Sigma\operatorname{Tor}_1^{\mathsf{S}}(N, N^n) \longrightarrow MN^n \xrightarrow{\sigma\otimes id} TN^n \xrightarrow{\pi\otimes id} \Sigma N^{n+1} \longrightarrow 0,$$

et la suite exacte courte de comodules :

$$0 \longrightarrow \Sigma\operatorname{Tor}_1^{\mathsf{S}}(N, N^n) \longrightarrow MN^n \xrightarrow{\nu_n} H_n \longrightarrow 0. \tag{6.9.1}$$

Notation 6.9.1. On notera $M_{>n}$ le sous-S-module de M engendré par les éléments β_i pour $i > n$.

Remarque 6.9.2. Le S-module $M_{>n}$ n'est pas un sous-comodule de M.

Les deux lemmes suivants montrent que la restriction de ν_n à $M_{>n}N^n$ est un isomorphisme et donc que la suite exacte (6.9.1) est une suite exacte scindée dans la catégorie des S-modules.

Lemme 6.9.3. *Soient $l > n$, et $w \in N^n$. Alors :*

$$\nu_n(\beta_l\otimes w) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k y_{l+k}\otimes w_k,$$

où :

$$w_k = \sum_{1\leq j_1<\cdots<j_k\leq n} \partial_{j_1}\cdots\partial_{j_k} w \in N^n.$$

Démonstration : Par linéarité, il suffit de démontrer ce lemme pour $w = [I]$, avec $I \in \mathcal{J}^n$. Soit $I = (i_1, \ldots, i_n) \in \mathcal{J}^n$. On utilise la relation de la proposition 6.8.1 :

$$\begin{aligned}
\nu_n\left(\overline{\beta}(x_1)\otimes\zeta(x_2, \ldots, x_{n+1})\right) &= \prod_{i=2}^{n+1}(x_1 - x_i)Y_n(x_1)\otimes\zeta(x_2, \ldots, x_{n+1}) \\
&= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x_1^{n-k}\sigma_{k,n}(x_2, \ldots, x_{n+1})Y_n(x_1)\otimes\zeta(x_2, \ldots, x_{n+1}) \\
&= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x_1^{n-k}Y_n(x_1)\otimes\sigma_{k,n}(x_2, \ldots, x_{n+1})\zeta(x_2, \ldots, x_{n+1}).
\end{aligned}$$

On considère alors le coefficient de $x_1^{l-1}x_2^{i_1-1}\cdots x_{n+1}^{i_n-1}$, ce qui nous donne le résultat. $\square$

Lemme 6.9.4. *La restriction de ν_n à $M_{>n}N^n$ induit un isomorphisme de* S*-modules :*

$$M_{>n}N^n \simeq H_n.$$

En particulier, la suite exacte courte (6.9.1) *est scindée dans la catégorie des* S*-modules.*

$$0 \longrightarrow \Sigma\operatorname{Tor}_1^{\mathsf{S}}(N, N^n) \longrightarrow MN^n \xrightarrow{\nu_n} H_n \longrightarrow 0.$$

Démonstration : Soit x un élément non nul de $M_{>n}N^n$. On peut écrire x de manière unique :

$$x = \sum_{n<l_0\leq l} \beta_l \otimes w_l,$$

avec $w_l \in N^n$ et $w_{l_0} \neq 0$. D'après le lemme 6.9.3,il existe alors des éléments $w'_i \in N^n$ tels que :

$$\nu_n(x) = y_{l_0} \otimes w_{l_0} + \sum_{i>l_0} y_i \otimes w'_i.$$

Cela démontre l'injectivité. Pour démontrer la surjectivité, il suffit de montrer que, pour tout $l > n$ et tout $I \in \mathcal{J}^n$, il existe un élément $x \in M_{>n}N^n$ tel que $\nu_n(x) = y_l \otimes [I]$. Nous allons le faire par récurrence sur $|I|$.

- Si $[I] = \omega_n$, alors d'après le lemme 6.9.3, on a $\nu_n(\beta_l \otimes \omega_n) = y_l \otimes \omega_n$.
- Supposons le résultat vrai pour tout J tel que $|J| < |I|$. Il existe donc des éléments $x_i \in M_{>n}N^n$ pour $1 \leq i \leq n$ tels que :

  $$\nu_n(x_i) = y_l \otimes \partial_i [I].$$

  Soit $1 \leq j \leq n$. On a alors :

  $$\begin{aligned} \nu_n(\partial_j x_i) &= \partial_j \nu_n(x_i) \\ &= y_l \otimes \partial_j \partial_i [I] \\ &= y_l \otimes \partial_i \partial_j [I] \\ &= \partial_i \nu_n(x_j) \\ &= \nu_n(\partial_i x_j). \end{aligned}$$

  Comme ν_n restreint à $M_{>n}N^n$ est injectif, on a pour tout $1 \leq i, j \leq n$, $\partial_i x_j = \partial_j x_i$. D'après le lemme 6.6.14, il existe donc un élément $x \in M_{>n}N^n$ tel que, pour tout $1 \leq i \leq n$, $\partial_i x = x_i$. On a donc $\partial_i(\nu_n(x) - y_l \otimes [I]) = 0$, il existe donc $z \in L'_n$ tel que :

  $$\nu_n(x) = y_l \otimes [I] + z \otimes \omega_n.$$

  Or d'après l'initialisation de la récurrence, $z \otimes \omega_n$ est dans l'image de la restriction de ν_n à $M_{>n}N^n$. Cela achève donc la récurrence et démontre le résultat.

□

Notation 6.9.5. On note L_n le S-module libre de rang n sur des générateurs y_i de bidegré $(2i, 0)$ pour $1 \leq i \leq n$.

Théorème 6.9.6. *Il existe un unique isomorphisme de* S*-modules*

$$\phi_n : L_n N^n \longrightarrow \Sigma\,\mathrm{Tor}_1^{\mathsf{S}}(N, N^n) \subset MN^n,$$

tel que, pour tout $1 \leq k \leq n$ *et tout* $w \in N^n$ *:*

$$\phi_n(y_k \otimes w) - \beta_k \otimes w \in M_{>n}N^n.$$

De plus, ϕ *commute aux endomorphismes* ∂_i *de* N^n *pour* $1 \leq i \leq n$.

Démonstration : Soit $M_{\leq n}$ le sous-module de M engendré par $(\beta_k)_{k\leq n}$. On a alors la décomposition suivante dans la catégorie des S-modules :

$$MN^n \simeq M_{\leq n}N^n \oplus M_{>n}N^n.$$

Comme le lemme 6.9.4 démontre que ν_n restreint à $M_{>n}N^n$ est un isomorphisme, on en déduit que la suite exacte courte (6.9.1) est une suite exacte de S-module scindée, et que $\Sigma\,\mathrm{Tor}_1^{\mathsf{S}}(N, N^n)$ est isomorphe à $M_{\leq n}N^n$ en tant que S-module. On en déduit alors l'existence et l'unicité du morphisme ϕ_n. Le fait que ϕ_n commute aux morphismes ∂_i découle directement du fait que ν_n aussi (cf. la proposition 6.8.1). □

6.10 Générateurs explicites de $\Sigma\operatorname{Tor}_1^{\mathsf{S}}(N, N^n)$

Dans cette section, nous explicitons le morphisme

$$\phi_n : L_n N^n \longrightarrow \Sigma\operatorname{Tor}_1^{\mathsf{S}}(N, N^n) \subset MN^n$$

du théorème 6.9.6. Pour cela, nous utiliserons l'indéterminée t et le morphisme χ introduits à la définition 6.6.4. On peut étendre naturellement le morphisme χ pour des puissances de t négatives, en posant :

$$\chi : \begin{cases} \mathsf{S}\left[t^{\pm 1}\right] & \longrightarrow & \mathsf{S} \\ t^k & \longmapsto & \begin{cases} a_k & \text{si } k \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{cases}$$

Rappelons que t^k est un élément homogène de bidegré $(2k, 0)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, et que χ est un morphisme homogène de bidegré $(0, 1)$.

Définition 6.10.1. *Soit κ le morphisme de S-modules, homogène de bidegré $(2, -1)$, suivant :*

$$\kappa : \begin{cases} \mathsf{S}\left[t^{\pm 1}\right] & \longrightarrow & M \\ t^k & \longmapsto & \begin{cases} \beta_{k+1} & \textit{si } k \geq 0 \\ 0 & \textit{sinon.} \end{cases} \end{cases}$$

Proposition 6.10.2. *Soit $P(t) \in \mathsf{S}\left[t^{\pm 1}\right]$, alors $\chi\left(\frac{P(t)}{t^i}\right) = 0$ pour i suffisamment grand et on a la relation suivante :*

$$\sigma \circ \kappa(P(t)) = \sum_{i \geq 1} \chi\left(\frac{P(t)}{t^{i-1}}\right) \gamma_i.$$

Démonstration : Comme $\chi(t^k) = 0$ pour $k < 0$, pour i suffisamment grand, on a :

$$\chi\left(\frac{P(t)}{t^{i-1}}\right) = 0.$$

La somme de droite est donc finie.

Par linéarité, il suffit de vérifier cette relation pour $P(t) = t^k$, avec $k \in \mathbb{Z}$. On a alors :

$$\begin{aligned} \sigma \circ \kappa(t^k) &= \sigma(\beta_{k+1}) \\ &= \sum_{i=1}^{k+1} a_{k+1-i}\gamma_i \\ &= \sum_{i \geq 1} \chi(t^{k+1-i})\gamma_i \end{aligned}$$

Ce qui démontre la résultat. □

Le lemme suivant généralise le lemme 6.7.5 aux puissances de t négatives.

Lemme 6.10.3. *Soit $n \geq 1$, et $P(t, x_1, \ldots, x_n) \in \mathsf{S}[\![x_1, \ldots, x_n]\!]\left[t^{\pm 1}\right] \subset \mathsf{S}\left[t^{\pm 1}\right][\![x_1, \ldots, x_n]\!]$, un polynôme de Laurent de degré en t au plus $n - 1$. Alors :*

$$\chi\left(\frac{P(t, x_1, \ldots, x_n)}{\prod_{i=1}^n (1 - tx_i)}\right) \zeta(x_1, \ldots, x_n) = 0.$$

Démonstration : Par linéarité, il suffit de démontrer le résultat pour des polynômes P du type :

$$P(t, x_1, \ldots, x_n) = t^k,$$

avec $k \in \mathbb{Z}$ tel que $k < n$. On fait alors une récurrence sur n. Pour $n = 1$ et $k \leq 0$, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{t^k}{1 - tx_1} &= \frac{t^k - x_1^{-k}}{1 - tx_1} + \frac{x_1^{-k}}{1 - tx_1} \\
&= \sum_{i=0}^{-k-1} t^{k+i} x_1^i + \frac{x_1^{-k}}{1 - tx_1}
\end{aligned}$$

Comme $\chi(t^l) = 0$ pour $l < 0$ et $\chi\left(\frac{1}{1-tx_1}\right) = \overline{\mathfrak{a}}(x_1)$, on a :

$$\chi\left(\frac{t^k}{1 - tx_1}\right) = x_1^{-k} \overline{\mathfrak{a}}(x_1),$$

d'où le résultat.

La suite de la démonstration est formellement identique à celle du lemme 6.7.5. Supposons le résultat vrai pour $n - 1$, montrons le pour n. On fait une récurrence descendante sur k. D'après la proposition 6.6.3, on a :

$$\chi\left(\frac{t^{n-1}}{\prod_{i=1}^{n}(1 - tx_i)}\right) = \alpha_{n-1}(x_1, \ldots, x_n).$$

Le résultat est donc vrai pour $k = n - 1$. Soit $k < n - 1$, et supposons le résultat vrai pour $k + 1$. On a :

$$\begin{aligned}
\frac{t^k}{\prod_{i=1}^{n}(1 - tx_i)} &= \frac{t^k(1 - tx_n + tx_n)}{\prod_{i=1}^{n}(1 - tx_i)} \\
&= \frac{t^k}{\prod_{i=1}^{n-1}(1 - tx_i)} + x_n \frac{t^{k+1}}{\prod_{i=1}^{n}(1 - tx_i)}
\end{aligned}$$

Les hypothèses de récurrence pour $(k, n - 1)$ et $(k + 1, n)$ permettent alors de conclure. $\square$

Avant d'énoncer le théorème qui explicite le morphisme ϕ_n, on a besoin du lemme suivant qui utilise les séries formelles $h'_{k,n} \in \mathsf{S}[t][\![x_1, \ldots, x_n]\!]$ introduites à la définiton 6.7.3.

Lemme 6.10.4. *Soit $n \geq 1$ et $0 \leq k < n$. Alors on a :*

$$(\sigma \otimes id)\left(\kappa(h'_{k,n}) \otimes \zeta(x_1, \ldots, x_n)\right) = 0.$$

Démonstration : D'après la proposition 6.10.2, on a :

$$\begin{aligned}
(\sigma \otimes id)\left(\kappa(h'_{k,n}) \otimes \zeta(x_1, \ldots, x_n)\right) &= \sigma \circ \kappa(h'_{k,n}) \otimes \zeta(x_1, \ldots, x_n) \\
&= \sum_{i \geq 1} \gamma_i \otimes \chi\left(\frac{h'_{k,n}}{t^{i-1}}\right) \zeta(x_1, \ldots, x_n)
\end{aligned}$$

Comme le degré en t de $h'_{k,n}$ est $n - 1$, on peut appliquer le lemme 6.10.3 qui conclue. $\square$

Théorème 6.10.5. *Soit $n \geq 1$ et $1 \leq k \leq n$. On a :*

$$\phi_n\left(y_k \otimes \zeta(x_1, \ldots, x_n)\right) = \kappa(h'_{k-1,n}) \otimes \zeta(x_1, \ldots, x_n).$$

Démonstration : Le lemme 6.7.4 implique que :

$$\kappa(h'_{k-1,n}) - \beta_k \in M_{>n}[\![x_1, \dots, x_n]\!].$$

On a alors :

$$\kappa(h'_{k-1,n})\zeta(x_1, \dots, x_n) - \beta_k \otimes \zeta(x_1, \dots, x_n) \in M_{>n}N^n[\![x_1, \dots, x_n]\!].$$

Le lemme 6.10.4 et la propriété d'unicité du théorème 6.9.6 permettent de conclure. □

Corollaire 6.10.6. *Soit* $I \in \mathcal{J}^n$ *et* $0 \leq k < n$. *On a :*

$$\phi_n(y_k \otimes [I]) = \beta_{k+1} \otimes [I] - (-1)^{n+k} \sum_{l=0}^{k} \binom{n-1-l}{k-l} \sum_{J \in B_I^l} \beta_{k+1+|I|-|J|} \otimes [J]\,.$$

Démonstration : La démonstration de ce corollaire est analogue à celle de la proposition 6.7.9. □

6.11 Structure de $\mathsf{S}\Lambda$-comodule de $\Sigma\operatorname{Tor}_1^{\mathsf{S}}(N, N^n)$

A la section précédente, nous avons explicité le morphisme ϕ_n du théorème 6.9.6 :

$$\phi_n : L_n N^n \xrightarrow{\sim} \Sigma\operatorname{Tor}_1^{\mathsf{S}}(N, N^n) \subset MN^n,$$

Dans cette section nous nous intéresserons à la structure de comodule de $\Sigma\operatorname{Tor}_1^{\mathsf{S}}(N, N^n)$. Commençons par le cas $n = 1$. D'après le théorème 6.3.12, N est un R_1-module libre, il en est donc de même pour $L_1 N \simeq \Sigma^2 N$.

Proposition 6.11.1. *La série formelle* $\overline{\beta}(x) \otimes \zeta(x) \in MN[\![x]\!]$ *est une* R_1*-série génératrice, homogène de bidegré* $(3, 0)$*, pour* $\Sigma\operatorname{Tor}_1^{\mathsf{S}}(N, N)$.

Démonstration : D'après le théorème 6.9.6, $\Sigma\operatorname{Tor}_1^{\mathsf{S}}(N, N)$ est isomorphe en tant que S-module à $\Sigma^2 N$. Soit $i \geq 1$ un entier. D'après le corollaire 6.10.6, on a :

$$\begin{aligned}
\phi_n(y_1 \otimes [i]) &= \beta_1 \otimes [i] + \sum_{1 \leq j < i} \beta_{1+i-j} \otimes [j] \\
&= \sum_{1 \leq j \leq i} \beta_{1+i-j} \otimes [j]\,.
\end{aligned}$$

On en déduit alors :

$$\begin{aligned}
\phi_n(y_1 \otimes \zeta(x)) &= \sum_{i \geq 1} \phi_n(y_0 \otimes [i]) x^{i-1} \\
&= \sum_{i \geq 1} \sum_{1 \leq j \leq i} \beta_{1+i-j} \otimes [j]\, x^{i-1} \\
&= \sum_{j \geq 1} \sum_{l \geq 1} \beta_l \otimes [j]\, x^{j+l-2} \\
&= \overline{\beta}(x) \otimes \zeta(x).
\end{aligned}$$

□

Proposition 6.11.2. *Il existe un isomorphisme de* $\mathsf{S}\Lambda$*-comodules entre* $\Sigma\,\mathrm{Tor}_1^{\mathsf{S}}(N,N)$ *et le quotient du comodule* N *par le sous-comodule engendré par l'élément* $[1]$.

Démonstration : D'après la proposition 6.3.7, $\partial_N : N \longrightarrow \Sigma^2 N$ induit un isomorphisme S-linéaire entre $N/\langle[1]\rangle$ et $\Sigma^2 N$. De plus, la série $\lambda(x)$ suivante est une R_1-série génératrice de $N/\langle[1]\rangle$:

$$\lambda(x) = \sum_{i\geq 2} [i]\, x^{i-2} = \frac{\zeta(x)-[1]}{x}.$$

La projection canonique $N \longrightarrow N/\langle[1]\rangle$ envoie la série génératrice $\zeta(x)$ sur la série génératrice $x\lambda(x)$. D'après le corollaire 6.4.3, on a donc :

$$\begin{aligned}\psi(x\lambda(x)) &= \bar{\mathfrak{f}} \circ \mathfrak{a}(x)\cdot(x\lambda) \rhd \mathfrak{f}(x)\\ &= \bar{\mathfrak{f}} \circ \mathfrak{a}(x)\cdot \mathfrak{f}(x)\cdot\lambda \rhd \mathfrak{f}(x).\end{aligned}$$

Donc :

$$\psi(\lambda(x)) = \bar{\mathfrak{f}} \circ \mathfrak{a}(x)\cdot \bar{\mathfrak{f}}(x)\cdot\lambda \rhd \mathfrak{f}(x).$$

D'autre part, d'après la proposition 6.11.1 précédente, la série $\overline{\beta}(x)\otimes\zeta(x)$ est une série génératrice de $\Sigma\,\mathrm{Tor}_1^{\mathsf{S}}(N,N)$. Or, d'après la proposition 6.4.1 et le corollaire 6.4.3, on a :

$$\psi(\overline{\beta}(x)\otimes\zeta(x)) = \bar{\mathfrak{f}} \circ \mathfrak{a}(x)\cdot \bar{\mathfrak{f}}(x)\cdot(\overline{\beta}\otimes\zeta) \rhd \mathfrak{f}(x).$$

Il existe donc un isomorphisme de $\mathsf{S}\Lambda$-comodules entre $\Sigma\,\mathrm{Tor}_1^{\mathsf{S}}(N,N)$ et $N/\langle[1]\rangle$. □

Revenons maintenant au cas général. D'après le théorème 6.9.6, le morphisme de S-modules $\phi_n : L_n N^n \longrightarrow \Sigma\,\mathrm{Tor}_1^{\mathsf{S}}(N,N^n)$ est un isomorphisme. De plus, d'après le théorème 6.6.12, $L_n N^n$ est un R_n-module libre de base $y_{k+1}\otimes[I]$ avec $0\leq k\leq n-1$ et $I\in\mathcal{J}^n$.

Définition 6.11.3. *Pour* $n\geq 1$ *et* $0\leq k<n$, *soit* $u_{k,n}(x_1,\ldots,x_n)$ *la série formelle homogène de bidegré* $(2k+2+n,0)$ *à coefficients dans* $\Sigma\,\mathrm{Tor}_1(N,N^n)$, *définie par :*

$$u_{k,n}(x_1,\ldots,x_n) = \phi_n\left(y_{k+1}\otimes\zeta(x_1,\ldots,x_n)\right).$$

Les coefficients des séries formelles $u_{k,n}(x_1,\ldots,x_n)$ forment une R_n-base de $\Sigma\,\mathrm{Tor}_1(N,N^n)$ et le corollaire 6.10.6 donne l'expression de chacun des coefficients des séries $u_{k,n}$. Les propositions suivantes donnent une autre démonstration de ce résultat.

Proposition 6.11.4. *Le groupe symétrique* $\mathfrak{S}_n$ *agit à gauche par permutation des facteurs sur le comodule* N^n. *Plus précisément, soit* $I=(i_1,\ldots,i_n)\in\mathcal{J}^n$ *et* $\sigma\in\mathfrak{S}_n$. *On a :*

$$\sigma\cdot[i_1,\ldots,i_n] = \left[i_{\sigma^{-1}(1)},\ldots,i_{\sigma^{-1}(n)}\right].$$

Par naturalité, le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ *agit sur le comodule* $\mathrm{Tor}_1(N,N^n)$.

Soient $k,m\geq 0$. D'après le lemme 6.9.4, la suite exacte courte de comodules suivante est scindée dans la catégorie des S-modules :

$$0 \longrightarrow \Sigma\,\mathrm{Tor}_1^{\mathsf{S}}(N,N^k) \longrightarrow MN^k \xrightarrow{\nu_k} H_k \longrightarrow 0.$$

En tensorisant par N^m, on obtient donc une suite exacte courte de comodules, scindée dans la catégorie des S-modules :

$$0 \longrightarrow \Sigma\,\mathrm{Tor}_1^{\mathsf{S}}(N,N^k)\otimes N^m \longrightarrow MN^{k+m} \xrightarrow{\nu_k\otimes id} H_k\otimes N^m \longrightarrow 0.$$

On a alors le diagramme de comodules suivant :

$$\begin{tikzcd}
& \Sigma\,\mathrm{Tor}_1^{\mathsf{S}}(N,N^{k+m}) \arrow[dr] & & & \\
0 \arrow[r] & \Sigma\,\mathrm{Tor}_1^{\mathsf{S}}(N,N^{k})\otimes N^m \arrow[u, dashed] \arrow[r] & MN^{k+m} \arrow[r, "\nu_k\otimes id"] \arrow[dr, "\sigma\otimes id"'] & H_k\otimes N^m \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& & & TN^{k+m} &
\end{tikzcd}.$$

On obtient alors un morphisme injectif de comodules, homogène de bidegré $(0,0)$:

$$\Sigma\,\mathrm{Tor}_1^{\mathsf{S}}(N,N^k)\otimes N^m \longrightarrow \Sigma\,\mathrm{Tor}_1^{\mathsf{S}}(N,N^{k+m}).$$

Pour $k=1$, $m=n-1$ et $1\leq l\leq n$, on définit alors des morphismes

$$\vartheta_{l:n} : \Sigma\,\mathrm{Tor}_1^{\mathsf{S}}(N,N)\otimes N^{n-1} \longrightarrow \Sigma\,\mathrm{Tor}_1^{\mathsf{S}}(N,N^n)$$

de la manière suivante :

Définition 6.11.5. *Soient* $n\geq 1$ *et* $1\leq l\leq n$. *Soit* $\sigma_l\in\mathfrak{S}_n$ *l'unique permutation qui préserve l'ordre de* $\{2,\ldots,n\}$ *et telle que* $\sigma(1)=l$. *On notera* $\vartheta_{l:n}$ *la composée des morphismes de* $\mathsf{S}\Lambda$*-comodules suivants :*

$$\vartheta_{l:n} : \Sigma\,\mathrm{Tor}_1^{\mathsf{S}}(N,N)\otimes N^{n-1} \longrightarrow \Sigma\,\mathrm{Tor}_1^{\mathsf{S}}(N,N^n) \xrightarrow{\ \sigma_l\cdot-\ } \Sigma\,\mathrm{Tor}_1^{\mathsf{S}}(N,N^n).$$

On notera $Z_{l:n}$ *l'image de* $\vartheta_{l:n}$.

D'après le théorème 6.9.6, $\Sigma\,\mathrm{Tor}_1^{\mathsf{S}}(N,N)\simeq L_1N^n$ en tant que S-module. On a donc l'isomorphisme de S-modules :

$$Z_{l:n}\simeq \Sigma\,\mathrm{Tor}_1^{\mathsf{S}}(N,N)\otimes N^{n-1}\simeq L_1N^n. \tag{6.11.1}$$

Par conséquent, d'après le théorème 6.6.12, $Z_{l:n}$ est un R_n-module libre.

Proposition 6.11.6. *Le sous-comodule* $Z_{l:n}$ *de* $\Sigma\,\mathrm{Tor}_1^{\mathsf{S}}(N,N^n)\subset MN^n$ *admet pour* R_n*-série génératrice la série formelle* $\overline{\beta}(x_l)\otimes\zeta(x_1,\ldots,x_n)$.

Démonstration : D'après la proposition 6.11.1, la série $\overline{\beta}(x)\otimes\zeta(x)$ est une R_1-série génératrice de $\Sigma\,\mathrm{Tor}_1(N,N)$. Les coefficients de la série formelle $\overline{\beta}(x_l)\otimes\zeta(x_1,\ldots,x_n)$ engendrent donc $\Sigma\,\mathrm{Tor}_1^{\mathsf{S}}(N,N^n)$ en tant que R_1-module. Le résultat découle du fait que l'isomorphisme S-linéaire (6.11.1) envoie $\overline{\beta}(x_l)\otimes\zeta(x_1,\ldots,x_n)$ sur la R_n-série génératrice $y_1\otimes\zeta(x_1,\ldots,x_n)$. □

Proposition 6.11.7. *Soit* $1\leq i\leq n$. *Les séries* $u_{k,n}$ *vérifient les relations :*

$$\sum_{k=0}^{n-1} x_i^k u_{k,n}(x_1,\ldots,x_n)=\overline{\beta}(x_i)\otimes\zeta(x_1,\ldots,x_n).$$

De manière équivalente, si $V_n(x_1,\ldots,x_n)$ *est la matrice de van der Monde :*

$$V_n=\begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1}\\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1}\end{pmatrix},$$

et U_n *et* Z_n *sont les vecteurs colonnes suivants :*

$$U_n=(u_{i-1,n})_{1\leq i\leq n}\ ,\ Z_n=(\overline{\beta}(x_i)\otimes\zeta(x_1,\ldots,x_n))_{1\leq i\leq n}.$$

Alors les relations précédentes s'écrivent :

$$V_nU_n=Z_n.$$

Démonstration : On considère la série formelle suivante :

$$f(x_1, \dots, x_n) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} x_i^k u_{k,n}(x_1, \dots, x_n)\right) - \overline{\beta}(x_i) \otimes \zeta(x_1, \dots, x_n).$$

C'est une série formelle homogène de bidegré $(2+n, 0)$, à coefficients dans $\Sigma\,\mathrm{Tor}_1(N, N^n)$. De plus :

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) &= \sum_{k=0}^{n-1} x_i^k u_{k,n}(x_1, \dots, x_n) - \sum_{k=0}^{\infty} x_i^k \beta_{k+1} \otimes \zeta(x_1, \dots, x_n) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} x_i^k \Big(\phi(y_{k+1} \otimes \zeta(x_1, \dots, x_n)) - \beta_{k+1} \otimes \zeta(x_1, \dots, x_n)\Big) \\ &\quad - \sum_{k=n}^{\infty} x_i^k \beta_{k+1} \otimes \zeta(x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

La série formelle $\sum_{k=n}^{\infty} x_i^k \beta_{k+1} \otimes \zeta(x_1, \dots, x_n)$ est à coefficients dans $M_{>n}N^n$. Or, d'après le théorème 6.9.6, la série formelle $\phi(y_{k+1} \otimes \zeta(x_1, \dots, x_n)) - \beta_{k+1} \otimes \zeta(x_1, \dots, x_n)$ est aussi à coefficients dans $M_{>n}N^n$. Il en est donc de même pour $f(x_1, \dots, x_n)$. Enfin, d'après le lemme 6.9.4, et comme f est à coefficients dans $\Sigma\,\mathrm{Tor}_1(N, N^n)$, on a nécessairement $f = 0$. □

Corollaire 6.11.8. *Le morphisme de* $\mathsf{S}\Lambda$*-comodules suivant est surjectif :*

$$\bigoplus_{l=1}^{n} \vartheta_{l:n} : \bigoplus_{l=1}^{n} Z_{l:n} \longrightarrow \Sigma\,\mathrm{Tor}_1(N, N^n).$$

Démonstration : D'après la définition 6.11.3, les coefficients des séries formelles $u_{k,n}$, avec $0 \leq k \leq n-1$ engendrent $\Sigma\,\mathrm{Tor}_1(N, N^n)$. Comme la matrice de van der Monde est inversible, on en déduit que les coefficients des séries $u_{k,n}$ peuvent s'écrire comme des combinaisons linéaires des coefficients des séries génératrices de $Z_{l:n}$, avec $1 \leq l \leq n$ (cf. la proposition 6.11.6). On en déduit alors le résultat. □

Corollaire 6.11.9. *La structure de* $\mathsf{S}\Lambda$*-comodule de* $\Sigma\,\mathrm{Tor}_1(N, N^n)$ *est déterminée par la relation matricielle suivante :*

$$\psi U_n = \lambda_n V_n^{-1} \cdot D_n \cdot (V_n \circ \mathfrak{f}) \cdot U_n \rhd \mathfrak{f},$$

où :

$$\lambda_n(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} \bar{\mathfrak{f}} \circ \mathfrak{a}(x_i),$$

$$D_n(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} \bar{\mathfrak{f}}(x_1) & & & & \\ & \ddots & & 0 & \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & \bar{\mathfrak{f}}(x_n) \end{pmatrix}.$$

Démonstration : D'après la proposition 6.11.7, on a :

$$V_n U_n = Z_n,$$

avec $Z_n = (\overline{\beta}(x_i)\otimes\zeta(x_1,\ldots,x_n))_{1\le i\le n}$. Or, d'après la proposition 6.4.1 et le corollaire 6.4.3, pour $1\le i\le n$, on a :

$$\psi\left(\overline{\beta}(x_i)\otimes\zeta(x_1,\ldots,x_n)\right) = \lambda_n\bar{\mathfrak{f}}(x_i)\cdot\left(\overline{\beta}(x_i)\otimes\zeta(x_1,\ldots,x_n)\right)\triangleright\mathfrak{f}.$$

D'où :

$$\psi Z_n = \lambda_n D_n\cdot Z_n\triangleright\mathfrak{f}.$$

On en déduit donc :

$$\begin{aligned}
\psi U_n &= \psi(V_n^{-1}Z_n)\\
&= V_n^{-1}\psi Z_n\\
&= \lambda_n V_n^{-1}\cdot D_n\cdot Z_n\triangleright\mathfrak{f}\\
&= \lambda_n V_n^{-1}\cdot D_n\cdot(V_nU_n)\triangleright\mathfrak{f}\\
&= \lambda_n V_n^{-1}\cdot D_n\cdot(V_n\circ\mathfrak{f})\cdot U_n\triangleright\mathfrak{f}.
\end{aligned}$$

□

Considérons le cas particulier $n=2$. On a alors :

$$V_2=\begin{pmatrix}1 & x_1\\ 1 & x_2\end{pmatrix}\quad,\quad D_2=\begin{pmatrix}\bar{\mathfrak{f}}(x_1) & 0\\ 0 & \bar{\mathfrak{f}}(x_2)\end{pmatrix}.$$

On en déduit :

$$V_2^{-1}\cdot D_2\cdot(V_2\circ\mathfrak{f}) = \frac{1}{x_2-x_1}\begin{pmatrix} x_2\bar{\mathfrak{f}}(x_1)-x_1\bar{\mathfrak{f}}(x_2) & x_1x_2\left(\bar{\mathfrak{f}}(x_1)^2-\bar{\mathfrak{f}}(x_2)^2\right)\\ \bar{\mathfrak{f}}(x_2)-\bar{\mathfrak{f}}(x_1) & x_2\bar{\mathfrak{f}}(x_2)^2-x_1\bar{\mathfrak{f}}(x_1)^2\end{pmatrix}.$$

Finalement on a la proposition suivante :

Proposition 6.11.10. *La structure de* $\mathsf{S}\Lambda$*-comodule sur* $\Sigma\,\mathrm{Tor}_1^{\mathsf{S}}(N,N^2)$ *est déterminée par :*

$$\left\{\begin{array}{llll}
\psi u_{0,2}(x_1,x_2) = & \lambda_2\cdot\frac{x_2\bar{\mathfrak{f}}(x_1)-x_1\bar{\mathfrak{f}}(x_2)}{x_2-x_1}\cdot u_{0,2}\triangleright\mathfrak{f} & + & \lambda_2\cdot\frac{x_1x_2\left(\bar{\mathfrak{f}}(x_1)^2-\bar{\mathfrak{f}}(x_2)^2\right)}{x_2-x_1}\cdot u_{1,2}\triangleright\mathfrak{f}\\
\psi u_{1,2}(x_1,x_2) = & \lambda_2\cdot\frac{\bar{\mathfrak{f}}(x_2)-\bar{\mathfrak{f}}(x_1)}{x_2-x_1}\cdot u_{0,2}\triangleright\mathfrak{f} & + & \lambda_2\cdot\frac{x_2\bar{\mathfrak{f}}(x_2)^2-x_1\bar{\mathfrak{f}}(x_1)^2}{x_2-x_1}\cdot u_{1,2}\triangleright\mathfrak{f}
\end{array}\right.,$$

avec $\lambda_2(x_1,x_2)=\prod_{i=1}^2\bar{\mathfrak{f}}\circ\mathfrak{a}(x_i)$.

6.12 Décomposition des $\mathsf{S}\Lambda$-comodules $\Sigma\,\mathrm{Tor}_1^{\mathsf{S}}(N,N^n)$

Le comodule $\Sigma\,\mathrm{Tor}_1^{\mathsf{S}}(N,N^2)$ admet une décomposition en une somme directe de deux sous-comodules. Pour cela, considérons le complexe de comodules suivant, exact d'après le corollaire 6.11.8 :

$$0\longrightarrow Z_{1:2}\cap Z_{2:2}\longrightarrow Z_{1:2}\oplus Z_{2:2}\longrightarrow\Sigma\,\mathrm{Tor}_1^{\mathsf{S}}(N,N^2)\longrightarrow 0.\qquad(6.12.1)$$

Soit $\tau\in\mathfrak{S}_2$ la permutation $(1,2)$. L'action de τ sur $\Sigma\,\mathrm{Tor}_1^{\mathsf{S}}(N,N^2)$ induit l'isomorphisme de comodules :

$$\tau: Z_{1:2}\xrightarrow{\sim}Z_{2:2}.$$

Lemme 6.12.1. *On a :*

$$Z_{1:2}\cap Z_{2:2}=\{x\in Z_{1:2}\mid\ \tau x=x\}.$$

De plus, $Z_{1:2}\cap Z_{2:2}$ *est un* R_2*-module libre et la série formelle*

$$\overline{\beta}(x)\otimes\zeta(x,x)=\sum_{a+b+c=m}\beta_a\otimes[b,c]\,x^{m-3},$$

est une R_2*-série génératrice, homogène de bidegré* $(4,0)$*, de* $Z_{1:2}\cap Z_{2:2}$.

Démonstration : Il est clair que $Z_{1:2} \cap Z_{2:2} \supset \{x \in Z_{1:2} \mid \tau x = x\}$. Réciproquement, soit $x \in Z_{1:2} \cap Z_{2:2} \subset MN^2$. D'après le théorème 6.6.12, x s'écrit de manière unique comme une somme finie :

$$x = \sum_{a,b,c \geq 1} \lambda_{a,b,c} \beta_a \otimes [b, c] \,,$$

avec $\lambda_{a,b,c} \in \mathsf{R}_2$. Comme $x \in Z_{1:2}$, qui admet pour série génératrice $\overline{\beta}(x_1) \otimes \zeta(x_1, x_2)$, nécessairement :

$$\lambda_{a,b,c} = \lambda_{a',b',c'} \tag{6.12.2}$$

dès que $a + b = a' + b'$ et $c = c'$. De même, comme $x \in Z_{2:2}$, l'égalité (6.12.2) est vérifiée si $a + c = a' + c'$ et $b = b'$. Par conséquent, si $a + b + c = a' + b' + c'$:

$$\lambda_{a,b,c} = \lambda_{a+b-1,1,c} = \lambda_{a+b+c-2,1,1} = \lambda_{a'+b'-1,1,c'} = \lambda_{a',b',c'}.$$

Donc, $\tau x = x$ et $\overline{\beta}(x) \otimes \zeta(x, x)$ est une série R_2-génératrice de $Z_{1:2} \cap Z_{2:2}$. □

Considérons les séries formelles homogènes à coefficients dans $\Sigma \operatorname{Tor}_1^{\mathsf{S}}(N, N^2) \subset MN^2$ et de bidegré respectivement $(4, 0)$ et $(6, 0)$:

$$\xi_1(x_1, x_2) = \overline{\beta}(x_1) \otimes \zeta(x_1, x_2),$$

$$\xi_2(x_1, x_2) = \overline{\beta}(x_1) \otimes \frac{\zeta(x_2, x_1) - \zeta(x_1, x_2)}{x_1 - x_2}.$$

Soient W_1 et W_2 les sous-modules de $\Sigma \operatorname{Tor}_1^{\mathsf{S}}(N, N^2)$ engendrés sur S par, respectivements, les coefficients de ξ_1 et de ξ_2. D'après la proposition 6.11.6, $W_1 = Z_{1:2}$ et ξ_1 est une R_2-série génératrice de W_1.

Lemme 6.12.2. *On a :*
- $W_2 = \{y = x - \tau x \mid x \in W_1\}$,
- $W_1 \cap W_2 = \{0\}$,
- $\Sigma \operatorname{Tor}_1^{\mathsf{S}}(N, N^2) \simeq W_1 \oplus W_2$.

Démonstration : La première égalité découle directement de l'expression de ξ_2. Soit $y \in W_1 \cap W_2$; alors, il existe $x \in W_1 = Z_{1:2}$ tel que $y = x - \tau x$. Donc $\tau x \in Z_{1:2} \cap Z_{2:2}$. D'après le lemme 6.12.1 précédent, on a donc $\tau x = x$ et $y = 0$. Enfin, d'après le corollaire 6.11.8, les coefficients des séries formelles $\overline{\beta}(x_1) \otimes \zeta(x_1, x_2)$ et $\overline{\beta}(x_2) \otimes \zeta(x_1, x_2)$ engendrent le S-module $\Sigma \operatorname{Tor}_1^{\mathsf{S}}(N, N^2)$. Or, on a les relations :

$$\overline{\beta}(x_1) \otimes \zeta(x_1, x_2) = \xi_1(x_1, x_2),$$

$$\overline{\beta}(x_2) \otimes \zeta(x_1, x_2) = (x_2 - x_1)\xi_2(x_2, x_1) + \xi_1(x_2, x_1).$$

Donc le morphisme $W_1 \oplus W_2 \longrightarrow \Sigma \operatorname{Tor}_1^{\mathsf{S}}(N, N^2)$ est surjectif. Comme $W_1 \cap W_2 = \{0\}$,

$$\Sigma \operatorname{Tor}_1^{\mathsf{S}}(N, N^2) \simeq W_1 \oplus W_2.$$

□

Théorème 6.12.3. *Les deux sous* S*-modules* W_1 *et* W_2 *sont des sous-comodules supplémentaires de* $\Sigma \operatorname{Tor}_1^{\mathsf{S}}(N, N^2)$*. De plus, les structures de comodules de* W_1 *et* W_2 *sont déterminées par les relations :*

$$\psi\xi_1 = \lambda_2 \bar{\mathfrak{f}}(x_1) \cdot \xi_1 \rhd \mathfrak{f},$$

$$\psi\xi_2 = \lambda_2 \bar{\mathfrak{f}}(x_1) \cdot \frac{\bar{\mathfrak{f}}(x_1) - \bar{\mathfrak{f}}(x_2)}{x_1 - x_2} \cdot \xi_2 \rhd \mathfrak{f}.$$

Démonstration : La proposition 6.11.6 montre que $W_1 = Z_{1:2}$ est un sous-comodule de

$$\Sigma\,\mathrm{Tor}_1^{\mathsf{S}}(N, N^2).$$

Le calcul de $\psi\xi_1$ découle directement de la proposition 6.4.1 et du corollaire 6.4.3. Pour le calcul de $\psi\xi_2$, on a :

$$\begin{array}{rcl}
(x_1 - x_2)\xi_2 & = & \overline{\beta}(x_1)\otimes(\zeta(x_2,x_1) - \zeta(x_1,x_2)) \\
(x_1 - x_2)\psi\xi_2 & = & \lambda_2\bar{\mathfrak{f}}(x_1)\cdot\left(\overline{\beta}(x_1)\otimes(\zeta(x_2,x_1) - \zeta(x_1,x_2))\right) \rhd \mathfrak{f} \\
\psi\xi_2 & = & \lambda_2\bar{\mathfrak{f}}(x_1)\cdot\dfrac{\bar{\mathfrak{f}}(x_1) - \bar{\mathfrak{f}}(x_2)}{x_1 - x_2}\cdot\left(\overline{\beta}(x_1)\otimes\dfrac{\zeta(x_2,x_1) - \zeta(x_1,x_2)}{x_1 - x_2}\right) \rhd \mathfrak{f} \\
\psi\xi_2 & = & \lambda_2\bar{\mathfrak{f}}(x_1)\cdot\dfrac{\bar{\mathfrak{f}}(x_1) - \bar{\mathfrak{f}}(x_2)}{x_1 - x_2}\cdot\xi_2 \rhd \mathfrak{f}.
\end{array}$$

Cela montre que W_2 est un sous-comodule de $\Sigma\,\mathrm{Tor}_1^{\mathsf{S}}(N, N^2)$. □

Pour un entier n quelconque, à défaut d'obtenir une décomposition de $\Sigma\,\mathrm{Tor}_1(N, N^n)$ en une somme directe de sous-comodules, on peut définir un complexe de $\mathsf{S}\Lambda$-comodules qui généralise la suite exacte courte (6.12.1).

Définition 6.12.4. *Soit $1 \leq h \leq n$ et $B = (b_0, \ldots, b_n)$ un élément de $\mathcal{J}^{n+1}$, on note $B_h = (b_1, \ldots, b_h)$ et $B^h = (b_{h+1}, \ldots, b_n)$. On définit les relations d'équivalences sur $\mathcal{J}^{n+1}$ suivantes :*

$$B \sim_h C \Longleftrightarrow b_0 + b_h = c_0 + c_h \quad , \quad B^h = C^h \quad \text{et} \quad B_{h-1} = C_{h-1}.$$

$$B \simeq_h C \Longleftrightarrow b_0 + |B_h| = c_0 + |C_h| \quad \text{et} \quad B^h = C^h.$$

Par convention, $B \simeq_0 C$ si et seulement si $B = C$. Enfin, pour $I \subset [\![1, n]\!]$, on définit la relation d'équivalence $\simeq_I$ sur $\mathcal{J}^{n+1}$ suivante :

$$B \simeq_I C \Longleftrightarrow b_0 + \sum_{i\in I} b_i = c_0 + \sum_{i\in I} c_i \quad \text{et} \quad b_i = c_i \text{ si } i \in [\![1, n]\!] \smallsetminus I.$$

Lemme 6.12.5. *Soient $1 \leq h \leq n$ et B, C deux éléments de $\mathcal{J}^{n+1}$. Alors :*
- *$B \simeq_h C \Longleftrightarrow \exists D \in \mathcal{J}^{n+1}$, $B \simeq_{h-1} D$ et $D \sim_h C$,*
- *$B \simeq_h C$ si et seulement si $\exists D_0, \ldots, D_h \in \mathcal{J}^{n+1}$ tels que $D_0 = B$, $D_h = C$ et pour tout $1 \leq k \leq h$, $D_{k-1} \sim_k D_k$.*

Démonstration : Soient $1 \leq h \leq n$ et B, C deux éléments de $\mathcal{J}^{n+1}$ tels que $B \simeq_h C$. Soit D tel que :

1. $D^{h-1} = B^{h-1}$,
2. $D_{h-1} = C_{h-1}$,
3. $d_0 + |D_{h-1}| = b_0 + |B_{h-1}|$.

Les relations 1 et 3 impliquent que $B \simeq_{h-1} D$. La première relation implique que $d_h = b_h$ et $D^h = B^h = C^h$. On a donc :

$$\begin{array}{rcl}
d_0 + d_h & = & b_0 + |B_{h-1}| - |D_{h-1}| + b_h \\
& = & b_0 + |B_h| - |C_{h-1}| \\
& = & c_0 + |C_h| - |C_{h-1}| \\
& = & c_0 + c_h.
\end{array}$$

Ce qui montre que $D \sim_h C$. Par récurrence, la deuxième équivalence découle directement de la première. □

Définition 6.12.6. *Soit $I \subset [\![1,n]\!]$. On note $Z_{I:n}$ le sous $\mathsf{S}\Lambda$-comodule de MN^n :*

$$Z_{I:n} = \bigcap_{i \in I} Z_{i:n}.$$

Si $I = \emptyset$, alors $Z_{\emptyset:n} = MN^n$. Si $I \neq \emptyset$, alors $Z_{I:n} \subset \Sigma \operatorname{Tor}_1(N, N^n)$.

Soit $x \in MN^n$. Comme MN^n est un R_n-module libre, x s'écrit de manière unique :

$$x = \sum_{B=(b_0,\dots,b_n)\in \mathcal{J}^{n+1}} \lambda_B \beta_{b_0} \otimes [b_1, \dots, b_n],$$

où $(\lambda_B)_{B \in \mathcal{J}^{n+1}}$ est une famille à support fini d'éléments de R_n. De plus :

Lemme 6.12.7. *Soit $1 \leq h \leq n$. Alors $x \in Z_{h:n}$ si et seulement si pour tous $B, C \in \mathcal{J}^{n+1}$:*

$$B \sim_h C \Longrightarrow \lambda_B = \lambda_C.$$

Soit $I = \{1, \dots, h\}$. Alors $x \in Z_{I:n}$ si et seulement si pour tous $B, C \in \mathcal{J}^{n+1}$:

$$B \simeq_h C \Longrightarrow \lambda_B = \lambda_C.$$

Plus généralement, si $I \subset [\![1,n]\!]$, alors $x \in Z_{I:n}$ si et seulement si pour tous $B, C \in \mathcal{J}^{n+1}$:

$$B \simeq_I C \Longrightarrow \lambda_B = \lambda_C.$$

Démonstration : La première assertion découle directement de la proposition 6.11.6. Pour la seconde assertion, soit $I = \{1, \dots, h\}$, $x \in Z_{I:n}$ et $B, C \in \mathcal{J}^{n+1}$ tels que $B \simeq_h C$. D'après le lemme 6.12.5, il existe $D_0, \dots, D_h \in \mathcal{J}^{n+1}$ tels que $D_0 = B$, $D_h = C$ et pour tout $1 \leq k \leq h$, $D_{k-1} \sim_k D_k$. D'après la définition 6.12.6, pour tout $1 \leq k \leq h$, $x \in Z_{k:n}$. Donc, d'après la première assertion, $\lambda_{D_{k-1}} = \lambda_{D_k}$. Par conséquent, $\lambda_B = \lambda_C$.

Réciproquement, soit $x \in MN^n$ tel que que pour tous $B, C \in \mathcal{J}^{n+1}$:

$$B \simeq_h C \Longrightarrow \lambda_B = \lambda_C.$$

Soient $B, C \in \mathcal{J}^{n+1}$ et $1 \leq k \leq h$. Si $B \sim_k C$, alors $B \simeq_h C$ et donc $\lambda_B = \lambda_C$. D'après la première assertion, $x \in Z_{k:n}$ pour tout $1 \leq k \leq h$, d'où $x \in Z_{I:n}$.

Par un argument de symétrie, la dernière assertion est équivalente à la deuxième (cf. la proposition 6.11.4). □

Soit $B \in \mathcal{J}^{n+1}$. On pose :

$$z_{I:n}(B) = \sum_{C \simeq_I B} \beta_{c_0} \otimes [c_1, \dots, c_n] \in MN^n.$$

L'élément $z_{I:n}(B)$ ne dépend que de la classe de B modulo $\simeq_I$. D'après le lemme précédent, $z_{I:n}(B) \in Z_{I:n}$ et la famille $(z_{I:n}(B))_{B \in \mathcal{J}^{n+1}/\simeq_I}$ forme une R_n-base de $Z_{I:n}$. On a donc le théorème suivant :

Théorème 6.12.8. *Soit $I \subset [\![1,n]\!]$. Alors $Z_{I:n}$ est un R_n-module libre et admet pour série génératrice l'image par le morphisme suivant de la série génératrice $\overline{\beta}(x) \otimes \zeta(x_1, \dots, x_n)$ de MN^n :*

$$\left\{ \begin{array}{ccc} MN^n[\![x, x_1, \dots, x_n]\!] & \longrightarrow & MN^n[\![x, x_i\ ,\ i \notin I]\!] \\ x_j & \longmapsto & x_j \text{ si } j \notin I \\ x_j & \longmapsto & x \text{ si } j \in I \\ x & \longmapsto & x. \end{array} \right.$$

Soient I et J deux parties de $[\![1, n]\!]$. On note $\delta_{I,J}$ le morphisme de $\mathsf{S}\Lambda$-comodules $Z_{J:n} \longrightarrow Z_{I:n}$ tel que :

- $\delta_{I,J} = 0$ si $I \not\subseteq J$ ou $|J| \neq |I| + 1$,
- dans le cas contraire, il existe $j \in [\![1, n]\!]$ tel que $J = I \cup \{j\}$. Posons :

$$\epsilon_{I,J} = (-1)^{\sharp\{i \in I \ | \ i \leq j\}}.$$

Le morphisme $\delta_{I,J}$ est alors l'inclusion canonique de $Z_{J:n}$ dans $Z_{I:n}$ multiplié par le signe $\epsilon_{I,J}$.

Soit $0 \leq h \leq n$. On pose :

$$D_h = \bigoplus_{|I|=h} Z_{I:n}.$$

Soit d_h le morphisme $D_h \longrightarrow D_{h-1}$ tel que, sur $Z_{I:n}$, où I est une partie de $[\![1, n]\!]$ de cardinal h, on a :

$$d_h = \sum_J \delta_{I,J}.$$

On vérifie alors aisément que la suite de morphismes suivante forme un complexe de $\mathsf{S}\Lambda$-comodules :

$$0 \longrightarrow D_n \xrightarrow{d_n} D_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots \xrightarrow{d_3} D_2 \xrightarrow{d_2} D_1 \longrightarrow \Sigma\,\mathrm{Tor}_1(N, N^n) \longrightarrow 0,$$

où le morphisme $D_1 \longrightarrow \Sigma\,\mathrm{Tor}_1(N, N^n)$ est le morphisme surjectif du corollaire 6.11.8.

Question. *Le complexe* $D_\bullet$ *est-il exact ?*

Je n'ai pas de démonstration, mais je pense que la réponse est oui. D'ailleurs, la caractéristique d'Euler-Poincaré de ce complexe est nulle. Soit X est un R_n-module libre, concentré en degré congru à n modulo 2. On pose :

$$P_X(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \dim_{\mathbb{Q}} \left(\mathbb{Q} \otimes_{\mathsf{R}_n} X\right)_{n+2(m+1)} t^m.$$

Le décalage en degré introduit par $n + 2(m+1)$ permet de simplifier les calculs qui suivent.

Proposition 6.12.9. *La caractéristique d'Euler-Poincaré du complexe* $D_\bullet$ *est nulle :*

$$c(D) = P_{\Sigma\,\mathrm{Tor}_1(N,N^n)}(t) + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k P_{D_k}(t) = 0.$$

Démonstration : D'après le théorème 6.6.12, N^n est un R_n-module libre de base $([I])_{I \in \mathcal{J}^{n+1}}$. On a donc :

$$P_{N^n}(t) = \frac{1}{t(1-t)^n}.$$

De plus, d'après le théorème 6.9.6, $\Sigma\,\mathrm{Tor}_1(N, N^n) \simeq L_n N^n$, où L_n est un S-module libre de base y_i, $1 \leq i \leq n$ homogène de bidegré $(2i, 0)$. D'où :

$$P_{\Sigma\,\mathrm{Tor}_1(N,N^n)}(t) = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} t^k}{(1-t)^n}.$$

D'autre part, le théorème 6.12.8 implique que pour $I \subset [\![1, n]\!]$, de cardinal k :

$$P_{Z_{I:n}}(t) = \frac{1}{(1-t)^{n+1-k}}.$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
c(D) &= \frac{\sum_{k=0}^{n-1} t^k}{(1-t)^n} + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{1}{(1-t)^{n+1-k}} \\
&= \frac{1}{(1-t)^n} \left(\sum_{k=0}^{n-1} t^k + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (1-t)^{k-1} \right) \\
&= \frac{1}{(1-t)^n} \left(\sum_{k=0}^{n-1} t^k + \frac{(1-(1-t))^n - 1}{1-t} \right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

Index

Bibliographie

[Ada69] J. F. Adams. Lectures on generalised cohomology. In *Category Theory, Homology Theory and their Applications, III (Battelle Institute Conference, Seattle, Wash., 1968, Vol. Three)*, pages 1–138. Springer, Berlin, 1969.

[Ada95] J. F. Adams. *Stable homotopy and generalised homology.* Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, Chicago, IL, 1995. Reprint of the 1974 original.

[Bak09] Andrew Baker. L-complete Hopf algebroids and their comodules. In *Alpine perspectives on algebraic topology*, volume 504 of *Contemp. Math.*, pages 1–22. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009.

[BF78] A. K. Bousfield and E. M. Friedlander. Homotopy theory of Γ-spaces, spectra, and bisimplicial sets. In *Geometric applications of homotopy theory (Proc. Conf., Evanston, Ill., 1977), II*, volume 658 of *Lecture Notes in Math.*, pages 80–130. Springer, Berlin, 1978.

[Bor94a] Francis Borceux. *Handbook of categorical algebra. 1*, volume 50 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications.* Cambridge University Press, Cambridge, 1994. Basic category theory.

[Bor94b] Francis Borceux. *Handbook of categorical algebra. 2*, volume 51 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications.* Cambridge University Press, Cambridge, 1994. Categories and structures.

[Bou75] A. K. Bousfield. The localization of spaces with respect to homology. *Topology*, 14 :133–150, 1975.

[Bou79] A. K. Bousfield. The localization of spectra with respect to homology. *Topology*, 18(4) :257–281, 1979.

[BP66] Edgar H. Brown, Jr. and Franklin P. Peterson. A spectrum whose Z_p cohomology is the algebra of reduced p^{th} powers. *Topology*, 5 :149–154, 1966.

[Bro62] Edgar H. Brown, Jr. Cohomology theories. *Ann. of Math. (2)*, 75 :467–484, 1962.

[Bro63] Edgar H. Brown, Jr. Correction to "Cohomology theories". *Ann. of Math. (2)*, 78 :201, 1963.

[Car67] Pierre Cartier. Modules associés à un groupe formel commutatif. Courbes typiques. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, 265 :A129–A132, 1967.

[CE99] Henri Cartan and Samuel Eilenberg. *Homological algebra.* Princeton Landmarks in Mathematics. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1999. With an appendix by David A. Buchsbaum, Reprint of the 1956 original.

[CF64] P. E. Conner and E. E. Floyd. *Differentiable periodic maps.* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, N. F., Band 33. Academic Press Inc., Publishers, New York, 1964.

[EKMM97] A. D. Elmendorf, I. Kriz, M. A. Mandell, and J. P. May. *Rings, modules, and algebras in stable homotopy theory*, volume 47 of *Mathematical Surveys and Monographs.*

American Mathematical Society, Providence, RI, 1997. With an appendix by M. Cole.

[ES52] Samuel Eilenberg and Norman Steenrod. *Foundations of algebraic topology.* Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1952.

[Frö68] A. Fröhlich. *Formal groups.* Lecture Notes in Mathematics, No. 74. Springer-Verlag, Berlin, 1968.

[Gab62] Pierre Gabriel. Des catégories abéliennes. *Bull. Soc. Math. France*, 90 :323–448, 1962.

[Gia78] V. Giambalvo. Some tables for formal groups and BP. In *Geometric applications of homotopy theory (Proc. Conf., Evanston, Ill., 1977), II*, volume 658 of *Lecture Notes in Math.*, pages 169–176. Springer, Berlin, 1978.

[GJ99] Paul G. Goerss and John F. Jardine. *Simplicial homotopy theory*, volume 174 of *Progress in Mathematics.* Birkhäuser Verlag, Basel, 1999.

[Gro57] Alexander Grothendieck. Sur quelques points d'algèbre homologique. *Tôhoku Math. J. (2)*, 9 :119–221, 1957.

[Hol08] Sharon Hollander. A homotopy theory for stacks. *Israel J. Math.*, 163 :93–124, 2008.

[Hov04] Mark Hovey. Homotopy theory of comodules over a Hopf algebroid. In *Homotopy theory : relations with algebraic geometry, group cohomology, and algebraic K-theory*, volume 346 of *Contemp. Math.*, pages 261–304. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004.

[HS05a] Mark Hovey and Neil Strickland. Comodules and Landweber exact homology theories. *Adv. Math.*, 192(2) :427–456, 2005.

[HS05b] Mark Hovey and Neil Strickland. Local cohomology of $\mathrm{BP}_*\mathrm{BP}$-comodules. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 90(2) :521–544, 2005.

[HSS00] Mark Hovey, Brooke Shipley, and Jeff Smith. Symmetric spectra. *J. Amer. Math. Soc.*, 13(1) :149–208, 2000.

[HT82] P. J. Higgins and J. Taylor. The fundamental groupoid and the homotopy crossed complex of an orbit space. In *Category theory (Gummersbach, 1981)*, volume 962 of *Lecture Notes in Math.*, pages 115–122. Springer, Berlin, 1982.

[JW75] David Copeland Johnson and W. Stephen Wilson. BP operations and Morava's extraordinary K-theories. *Math. Z.*, 144(1) :55–75, 1975.

[JW85] David Copeland Johnson and W. Stephen Wilson. The Brown-Peterson homology of elementary p-groups. *Amer. J. Math.*, 107(2) :427–453, 1985.

[JWY94] David Copeland Johnson, W. Stephen Wilson, and Dung Yung Yan. Brown-Peterson homology of elementary p-groups. II. *Topology Appl.*, 59(2) :117–136, 1994.

[JY80] David Copeland Johnson and Zen-ichi Yosimura. Torsion in Brown-Peterson homology and Hurewicz homomorphisms. *Osaka J. Math.*, 17(1) :117–136, 1980.

[Kat81] Nicholas M. Katz. Divisibilities, congruences, and Cartier duality. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.*, 28(3) :667–678 (1982), 1981.

[Lan73a] Peter S. Landweber. Annihilator ideals and primitive elements in complex bordism. *Illinois J. Math.*, 17 :273–284, 1973.

[Lan73b] Peter S. Landweber. Associated prime ideals and Hopf algebras. *J. Pure Appl. Algebra*, 3 :43–58, 1973.

[Lan79] Peter S. Landweber. New applications of commutative algebra to Brown-Peterson homology. In *Algebraic topology, Waterloo, 1978 (Proc. Conf., Univ. Waterloo, Waterloo, Ont., 1978)*, volume 741 of *Lecture Notes in Math.*, pages 449–460. Springer, Berlin, 1979.

[Lan92] Jean Lannes. Sur les espaces fonctionnels dont la source est le classifiant d'un p-groupe abélien élémentaire. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (75) :135–244, 1992. With an appendix by Michel Zisman.

[Lau99] Gerd Laures. The topological q-expansion principle. *Topology*, 38(2) :387–425, 1999.

[Laz55] Michel Lazard. Sur les groupes de Lie formels à un paramètre. *Bull. Soc. Math. France*, 83 :251–274, 1955.

[Mar83] H. R. Margolis. *Spectra and the Steenrod algebra*, volume 29 of *North-Holland Mathematical Library*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1983. Modules over the Steenrod algebra and the stable homotopy category.

[Mil60] J. Milnor. On the cobordism ring Ω^* and a complex analogue. I. *Amer. J. Math.*, 82 :505–521, 1960.

[Mil82] Haynes Miller. Universal Bernoulli numbers and the S^1-transfer. In *Current trends in algebraic topology, Part 2 (London, Ont., 1981)*, volume 2 of *CMS Conf. Proc.*, pages 437–449. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1982.

[Mil87] Haynes Miller. The Sullivan conjecture and homotopical representation theory. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Berkeley, Calif., 1986)*, pages 580–589, Providence, RI, 1987. Amer. Math. Soc.

[Min99] Norihiko Minami. The iterated transfer analogue of the new doomsday conjecture. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 351(6) :2325–2351, 1999.

[Mit84] Stephen A. Mitchell. A proof of the Conner-Floyd conjecture. *Amer. J. Math.*, 106(4) :889–891, 1984.

[ML98] Saunders Mac Lane. *Categories for the working mathematician*, volume 5 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1998.

[MLM94] Saunders Mac Lane and Ieke Moerdijk. *Sheaves in geometry and logic*. Universitext. Springer-Verlag, New York, 1994. A first introduction to topos theory, Corrected reprint of the 1992 edition.

[Mor85] Jack Morava. Noetherian localisations of categories of cobordism comodules. *Ann. of Math. (2)*, 121(1) :1–39, 1985.

[MR77] Haynes R. Miller and Douglas C. Ravenel. Morava stabilizer algebras and the localization of Novikov's E_2-term. *Duke Math. J.*, 44(2) :433–447, 1977.

[Nau07] Niko Naumann. The stack of formal groups in stable homotopy theory. *Adv. Math.*, 215(2) :569–600, 2007.

[Qui67] Daniel G. Quillen. *Homotopical algebra*. Lecture Notes in Mathematics, No. 43. Springer-Verlag, Berlin, 1967.

[Qui69] Daniel Quillen. On the formal group laws of unoriented and complex cobordism theory. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 75 :1293–1298, 1969.

[Rav86] Douglas C. Ravenel. *Complex cobordism and stable homotopy groups of spheres*, volume 121 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press Inc., Orlando, FL, 1986.

[Rav92] Douglas C. Ravenel. *Nilpotence and periodicity in stable homotopy theory*, volume 128 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1992. Appendix C by Jeff Smith.

[Rez98] Charles Rezk. Notes on the Hopkins-Miller theorem. In *Homotopy theory via algebraic geometry and group representations (Evanston, IL, 1997)*, volume 220 of *Contemp. Math.*, pages 313–366. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998.

[Rud98] Yuli B. Rudyak. *On Thom spectra, orientability, and cobordism*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1998. With a foreword by Haynes Miller.

[RW80] Douglas C. Ravenel and W. Stephen Wilson. The Morava K-theories of Eilenberg-Mac Lane spaces and the Conner-Floyd conjecture. *Amer. J. Math.*, 102(4) :691–748, 1980.

[Sch94] Lionel Schwartz. *Unstable modules over the Steenrod algebra and Sullivan's fixed point set conjecture*. Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, Chicago, IL, 1994.

[Ste62] N. E. Steenrod. *Cohomology operations*. Lectures by N. E. STeenrod written and revised by D. B. A. Epstein. Annals of Mathematics Studies, No. 50. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1962.

[Str03] N. P. Strickland. Formal groups. 2003.

[Swi02] Robert M. Switzer. *Algebraic topology—homotopy and homology*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2002. Reprint of the 1975 original [Springer, New York ; MR0385836 (52 #6695)].

[Tho95] René Thom. Travaux de Milnor sur le cobordisme. In *Séminaire Bourbaki, Vol. 5*, pages Exp. No. 180, 169–177. Soc. Math. France, Paris, 1995.

[Vis05] Angelo Vistoli. Grothendieck topologies, fibered categories and descent theory. In *Fundamental algebraic geometry*, volume 123 of *Math. Surveys Monogr.*, pages 1–104. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.

[Vog70] Rainer Vogt. *Boardman's stable homotopy category*. Lecture Notes Series, No. 21. Matematisk Institut, Aarhus Universitet, Aarhus, 1970.

[Wat60] Charles E. Watts. Intrinsic characterizations of some additive functors. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 11 :5–8, 1960.

[Wei94] Charles A. Weibel. *An introduction to homological algebra*, volume 38 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

Sur l'action des coopérations homologiques sur l'homologie de Brown-Peterson de l'espace classifiant d'un p-groupe abélien élémentaire

Soient p un nombre premier, n un entier, V un p-groupe abélien élémentaire de rang n et E un spectre en anneau commutatif muni d'une orientation complexe Landweber exact. Le but de ce travail est d'étudier la structure de comodule de la E-homologie de $\mathrm{B}V$ sur l'algébroïde de Hopf (E_*, E_*E). Pour cela, nous étudions les foncteurs de localisation sur les catégories de comodules, ainsi que la notion de produit semi-direct d'algébroïdes de Hopf. Dans le cas particulier où E est le spectre de Brown-Peterson BP, Johnson et Wilson ont déterminé une filtration de la BP-homologie de $(\mathrm{B}\mathbb{Z}/p)^{\wedge n}$ dans la catégorie des BP_*-modules. Nous démontrons un résultat analogue dans la catégorie des $\mathsf{BP}_*\mathsf{BP}$-comodules ; les quotients de cette filtration dépendent de la p-série universelle. Afin de mener des calculs explicites, nous introduisons un algébroïde de Hopf $(\mathsf{S}, \mathsf{S}\Lambda)$ qui représente le groupoïde associé à l'action par conjugaison des séries formelles strictes sur l'ensemble des séries formelles.

On the action of homology cooperations on the Brown-Peterson homology of the classifying space of an elementary abelian p-group

Let p be a prime, n an integer, V an elementary abelian p-group of rank n and E a commutative, complex-oriented Landweber exact ring spectrum. The goal of this work is to study the comodule structure of the E-homology of $\mathrm{B}V$ over the Hopf algebroid (E_*, E_*E). To do this, we study localisation fonctors on comodule categories and the semi-direct product of Hopf algebroids. In the case where E is the Brown-Peterson spectrum BP, Johnson and Wilson have exhibited a filtration of the BP-homology of $(\mathrm{B}\mathbb{Z}/p)^{\wedge n}$ in the category of BP_*-modules. We prove an analogous result in the category of $\mathsf{BP}_*\mathsf{BP}$-comodules ; the filtration quotients depend on the universal p-series. In order to carry out explicit calculations, we introduce a Hopf algebroid $(\mathsf{S}, \mathsf{S}\Lambda)$ which represents the groupoid associated to the action by conjugation of strict formal series on all formal series.

Mots clés : algébroïde de Hopf ; comodule ; homologie ; Brown-Peterson ; espace classifiant ; localisation ; produit semi-direct.
Keywords : Hopf algebroid ; comodule ; homology ; Brown-Peterson ; classifying space ; localisation ; semi-direct product.

Discipline : Mathématiques
Laboratoire Analyse, Géométrie et Applications, UMR 7539
Institut Galilée
Université Paris 13
99, avenue Jean-Baptiste Clément
93430 VILLETANEUSE