



HAL
open science

Delaunay-admissibilité en dimensions 2 et 3

Philippe Pébay

► **To cite this version:**

Philippe Pébay. Delaunay-admissibilité en dimensions 2 et 3. Mathématiques [math]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2000. Français. NNT: . tel-00607168

HAL Id: tel-00607168

<https://theses.hal.science/tel-00607168>

Submitted on 8 Jul 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse

présentée pour obtenir le grade de **Docteur**
de l'Université Pierre et Marie Curie - Paris VI.

Spécialité : **Analyse Numérique**

Directeur : **Frédéric Hecht**

Delaunay-admissibilité *a priori* en dimensions 2 et 3.

Philippe Pébay

14 Juin 2000

À ma femme.

Remerciements

Avant d'entrer dans le vif du sujet, qu'il me soit d'abord permis d'exprimer ma gratitude aux membres du jury, en particulier pour l'honneur qu'ils me font d'y siéger :

- Monsieur O. PIRONNEAU, Professeur des Universités, directeur du LAN/UP6¹, Correspondant de l'Académie des Sciences. C'est un grand privilège pour moi que de vous compter parmi les membres du présent jury ; je tiens, de plus, à vous remercier d'avoir bien voulu le présider.
- Monsieur F. HECHT, Professeur des Universités, membre du LAN/UP6. Je vous remercie d'avoir accepté de diriger mes recherches et, plus encore, de m'avoir accordé votre confiance en me donnant une complète liberté de travail.
- Monsieur P.-L. GEORGE, Directeur de Recherches à l'INRIA² de Rocquencourt, responsable du projet GAMMA³. Je vous suis particulièrement reconnaissant de m'avoir permis, malgré mon éloignement géographique, de travailler avec vous-même et votre équipe à la préparation de cette thèse. Les orientations que vous m'avez conseillées ont été déterminantes pour l'aboutissement de celle-ci et votre humour, souvent corrosif, a été pour moi un aiguillon constant.
- Monsieur J. POUSIN, Professeur des Universités, directeur de la composante sise à l'INSA⁴ de Lyon de l'UMR CNRS⁵ 5585. J'ai été recruté, comme Professeur Agrégé, au sein du laboratoire que vous dirigez, alors même que j'entamais un travail de thèse avec une équipe extérieure ; loin d'en prendre ombrage, vous y avez trouvé un intérêt scientifique qui m'a valu votre soutien constant. Je vous en remercie sincèrement.
- Monsieur T.J. BAKER, Senior Research Scientist, membre du MAE⁶ at Princeton University, rapporteur de thèse. *I am very grateful and honoured that you have accepted to serve as a referee of my thesis board. I also wish to acknowledge that your comments during a visit to Princeton influenced some major parts of my thesis work.*

Mes vifs remerciements vont également à Monsieur J.-D. BOISSONNAT, Directeur de Recherches à l'INRIA de Sophia-Antipolis, responsable du projet Prisme, pour avoir accepté d'être rapporteur de cette thèse. Par ailleurs, je tiens à ajouter que votre invitation à un séminaire à Sophia-Antipolis m'a permis, grâce aux discussions qui suivirent, de voir sous un jour nouveau certains aspects de mon travail.

Il m'est agréable d'exprimer, sur un ton plus personnel, mon amicale reconnaissance à Monsieur P. FREY, Chargé de Recherches à l'INRIA de Rocquencourt, membre de l'équipe GAMMA. J'ai abordé le problème posé par la génération automatique de maillages en travaillant avec toi sur un tout autre sujet, dans des circonstances fort différentes. Tes encouragements et ton appui m'ont permis, alors même que les conditions semblaient peu propices, de m'engager dans la préparation de cette thèse ; par la suite, tes conseils, critiques et relectures ont été une aide précieuse. Sans toi, cette thèse n'existerait pas.

Enfin, j'ai eu beaucoup de profit à travailler et mener de fructueuses discussions, en des périodes diverses, avec Monsieur E. SALTEL, Directeur de Recherches à l'INRIA de Rocquencourt, membre de l'équipe GAMMA, ainsi qu'avec Monsieur H. BOROUSHAKI, Professeur des Universités, membre du LASMI⁷ de l'Université Technologique de Troyes.

¹Laboratoire d'Analyse Numérique de l'Université Paris-VI.

²Institut National de Recherche en Informatique et Automatique.

³Génération Automatique de Maillages et Maillages Adaptatifs.

⁴Institut National des Sciences Appliquées.

⁵Unité Mixte de Recherche du Centre National de la Recherche Scientifique.

⁶Mechanical and Aerospace Engineering department.

⁷Laboratoire des Systèmes Mécaniques et d'Ingénierie Simultanée.

Résumé

Delaunay-admissibilité *a priori* en dimensions 2 et 3.

La méthode des éléments finis, largement utilisée en analyse numérique, requiert que le domaine considéré soit préalablement maillé, c'est-à-dire partitionné en un ensemble de polytopes généralement, mais pas nécessairement, simpliciaux. Parmi les méthodes permettant la génération de tels maillages, la triangulation de Delaunay présente le double intérêt d'avoir un support théorique fondant la robustesse des algorithmes, ainsi que de produire des éléments de qualité, conditionnant fortement la précision des calculs ultérieurs. Elle présente cependant l'inconvénient de ne pas être à même de prendre en compte des considérations topologiques, lui interdisant *de facto* d'être utilisée en l'état pour produire des maillages. Un certain nombre de méthodes ont été proposées pour tenter de résoudre ce problème, mais aucune ne constitue une solution générale. Par ailleurs, les maillages qu'elles restituent ne possèdent plus la propriété de Delaunay.

Ce travail étudie les conditions dans lesquelles une contrainte, en dimensions 2 et 3, apparaîtra dans toute triangulation de Delaunay du nuage de points auquel elle est associée. En particulier, des théorèmes de Delaunay-admissibilité *a priori* sont établis. A l'aide de ces résultats, des algorithmes de redéfinition de contraintes sont proposés, de telle sorte que les nouvelles discrétisations, recouvrements des anciennes, soient construites par toute triangulation de Delaunay. Ainsi, les contraintes étant satisfaites automatiquement, aucune opération de forçage *a posteriori* n'est requise, et les maillages produits sont de Delaunay. En raison du coût prohibitif de la convergence en dimension 3, deux algorithmes efficaces sont proposés, sans qu'aucune conjecture sur leur convergence ne soit formulée.

A titre d'application de la méthode en dimension 3, l'interfaçage avec un mailleur de Delaunay contraint existant est étudié. En particulier, la pertinence de la méthode est illustrée grâce au déblocage d'une configuration que ce mailleur ne parvient pas à résoudre. D'autres applications possibles, ainsi que les développements en cours sont également évoqués.

Abstract

***A priori* Delaunay-conformity in 2 and 3 dimensions.**

The finite elements method, widely used within the field of numerical analysis, requires first the generation of a mesh of the domain of interest, *i.e.*, a covering up with polytopes, generally, but not necessarily, simplices. Among the methods designed for mesh generation, Delaunay-triangulation is based on strong theoretical results, guaranteeing convergent algorithms. In addition, it provides good quality meshes, on which the accuracy of the numerical solutions closely depends. However, it is not able, intrinsically, to take into account topological conditions, prohibiting its direct use for practical mesh generation. Various techniques have been proposed to try to solve this problem, without any general solution. Moreover, final meshes are no longer Delaunay-conforming.

This work examines under which conditions a given constraint, in 2 or 3 dimensions, will appear in any Delaunay-triangulation of the related set of vertices. In particular, *a priori* Delaunay-conformity theorems are established. Provided these results, constraint redefinition algorithms are proposed, allowing to produce new discretizations, recovering the initial ones, which will be built by any Delaunay-triangulation. Hence, being automatically satisfied, the new constraints do not require any *a posteriori* forcing transformation. Moreover, the resulting meshes are Delaunay-conforming. Because of the excessive cost of convergence in 3 dimensions, two efficient algorithms are proposed, which are not assumed to be convergent in general.

As an application, the 3 dimensional algorithm is interfaced with an existing constrained Delaunay mesh generator. In particular, the resolution of a jammed configuration for this mesher emphasizes the validity of the method. Some other applications are suggested, as well as further and ongoing developments.

Table des matières

Introduction	1
1 Rappels	5
1.1 Généralités	5
1.1.1 Diagramme de Voronoï	5
1.1.2 Triangulation de Delaunay	6
1.1.3 Triangulation contrainte	9
1.2 Récupération <i>a posteriori</i> de la contrainte	9
1.2.1 Forçage des contraintes	10
1.2.2 Cassage des contraintes	11
1.3 Construction <i>a priori</i> d'une contrainte Delaunay-admissible	12
1.3.1 En dimension 2	12
1.3.2 En dimension 3	13
2 Delaunay-admissibilité de segments en dimension 2	15
2.1 Classification	15
2.1.1 L'indicatrice de classification	15
2.1.2 Une condition suffisante de Delaunay-admissibilité	18
2.1.3 Delaunay-admissibilité forte	19
2.2 Construction	22
2.2.1 Résultats préliminaires	23
2.2.2 Un algorithme brutal	28
2.2.3 Un algorithme plus subtil	31
2.3 Exemples d'illustration	37
3 Delaunay-admissibilité en dimension 3 : aspects géométriques	45
3.1 Facettes	45
3.1.1 Classification	45
3.1.2 Une condition suffisante de Delaunay-admissibilité	50
3.1.3 Delaunay-admissibilité forte	51
3.2 Segments	54
3.2.1 Résultats préliminaires	54

3.2.2	Ne pas se fier aux apparences	56
3.2.3	Une condition nécessaire de Delaunay-admissibilité	59
3.2.4	Classification et forte Delaunay-admissibilité <i>a priori</i>	60
3.3	Arêtes et facettes	61
3.3.1	Le masque tombe	62
3.3.2	La chasse aux trous	64
4	Delaunay-admissibilité en dimension 3 : aspects algorithmiques	67
4.1	Redéfinition de segments en dimension 3	67
4.1.1	Extensions	67
4.1.2	Un algorithme convergent	70
4.2	Bascules d'arêtes	71
4.3	Le coût de la convergence	73
4.3.1	Impossibilité d'une extension simple	73
4.3.2	Existence d'un algorithme convergent	74
4.4	Un algorithme sous-convergent, mais utilisable	75
4.4.1	Schéma général	76
4.4.2	Exemples d'illustration	76
4.5	Un algorithme heuristique	78
4.5.1	Découpages pilotés	78
4.5.2	Schéma général	80
4.5.3	Exemples d'illustration	81
4.6	Application au maillage volumique	82
4.6.1	Delaunay-admissibilité effective des contraintes redéfinies	83
4.6.2	Résolution de configurations bloquées	85
5	Conclusions et perspectives	97
5.1	Conclusions	97
5.2	Perspectives	98
5.2.1	Améliorations	98
5.2.2	Applications	99
	Bibliographie	101

Introduction

Les simulations numériques basées sur des méthodes d'éléments finis, appliquées à des domaines Ω quelconques de \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 nécessitent au préalable d'obtenir un maillage \mathcal{T}_Ω , qui constitue un recouvrement polygonal ou polyédrique de Ω . De tels domaines sont, en général, représentés par une discrétisation (*i.e.*, une triangulation) de leur frontière $\partial\Omega$ qui constitue une contrainte Γ . Généralement, et ce sera le cas dans ce travail, on considère uniquement des recouvrements simpliciaux, appelés simplement *maillages*. Dans ce cadre, la méthode de Delaunay est une approche parmi d'autres, comme l'utilisation des "octrees" [Shephard,Georges-1991], le recours à des méthodes frontales [Löhner-1996] ou l'emploi des voxels [Frey-1993] pour le développement de générateurs automatiques de maillages. D'un point de vue théorique, de nombreux travaux sur les propriétés des triangulations de Delaunay sont à citer, du fondamental [Delaunay-1934] à [Boissonnat,Yvinec-1995], en passant par [Shamos,Preparata-1985], [Joe-1991] ou [Rajan-1994]. D'un point de vue pratique, les principaux atouts des maillages de Delaunay résident d'une part dans la rapidité et la robustesse des algorithmes, d'autre part dans la qualité des éléments produits, en termes d'effet sur la précision du calcul par éléments finis [Ciarlet-1991]. Plusieurs approches algorithmiques ont été proposées, comme par exemple [Lawson-1977], [Hermeline-1980], [Baker-1989], [Weatherill,Hassan-1994] ou encore [George,Borouchaki-1997].

Il n'est pas inutile de rappeler qu'une triangulation de Delaunay d'un nuage de points \mathcal{S} est une triangulation de son enveloppe convexe dont les sommets des éléments sont dans \mathcal{S} , possédant de plus certaines propriétés remarquables :

- la dualité avec le diagramme de Voronoï associé à \mathcal{S} ;
- la boule ouverte circonscrite à tout élément de la triangulation ne contient aucun point de \mathcal{S} ;
- elle maximise le minimum des angles aux sommets en dimension 2, des angles solides en dimension 3.

Cependant, la méthode de Delaunay ne peut pas tenir compte, intrinsèquement, d'une contrainte topologique Γ , triangulation dont les sommets forment un sous-ensemble \mathcal{S} . En effet, un algorithme de triangulation de Delaunay de l'ensemble \mathcal{S} ne conduit généralement pas à un maillage \mathcal{T}_Ω de Ω (dès lors que celui-ci n'est pas convexe). En particulier cette triangulation ne contiendra pas nécessairement toutes les faces de Γ . L'application numérique envisagée n'est donc possible que si la triangulation résultante \mathcal{T}_Ω préserve l'intégrité de la contrainte Γ , ou à défaut en contient un équivalent topologique et géométrique.

Dans ce contexte, il est donc nécessaire de contraindre la méthode de Delaunay à respecter, en un certain sens, la contrainte Γ , ce qui conduit à envisager deux types d’approches :

- récupération *a posteriori* des exigences topologiques de la contrainte, si la préservation de l’intégrité de celle-ci est requise ;
- redéfinition *a priori* de la contrainte, si un équivalent topologique et géométrique de celle-ci satisfait l’utilisateur, de telle sorte qu’elle apparaisse dans la triangulation de Delaunay de l’enveloppe convexe du nuage des sommets⁸.

Les méthodes de récupération *a posteriori* de la frontière peuvent être considérées comme abouties en dimension 2, voir par exemple [Borouchaki-1994]. En revanche, elles sont plus délicates en dimension 3, car certaines des propriétés d’existence ou d’optimalité de la solution valables dans \mathbb{R}^2 ne s’étendent pas à \mathbb{R}^3 . Dans certains cas particuliers, par exemple si toutes les arêtes de la contrainte sont construites, il est néanmoins possible de trouver des transformations locales permettant de retrouver l’intégralité de la contrainte [Shewchuck-1998]. Cependant, l’inexistence d’algorithmes de complexité polynomiale en général a d’ailleurs été mise en évidence [Ruppert,Seidel-1992]. Des algorithmes de robustesse raisonnable ont été proposés entre autres par [Baker-1989], [Weatherill,Hassan-1994] ou encore [George-1997],

mais ils ne résolvent le problème de certaines configurations bloquées qu’au prix d’heuristiques sans garantie de succès. De surcroît, la triangulation résultante n’est pas de Delaunay en général, dès lors qu’elle est obtenue par modifications locales d’une triangulation initiale vérifiant cette propriété. Cet aspect peut être sans importance, mais est rédhibitoire pour certaines méthodes d’approximation du squelette d’un polygone ou d’un polyèdre, qui se basent en théorie sur une triangulation exactement de Delaunay [Armstrong *et al.* 1995].

La redéfinition *a priori* de la contrainte consiste à construire un équivalent topologique et géométrique de la contrainte, de telle sorte que celui-ci soit construit par un algorithme basé sur la méthode de Delaunay. De plus, une triangulation de Delaunay de l’enveloppe convexe de \mathcal{S} n’étant pas nécessairement unique (cas des points cocycliques ou cosphériques), il est généralement exigé que la nouvelle contrainte soit construite par tout algorithme basé sur la méthode de Delaunay. En tout état de cause, le maillage produit possède la propriété de Delaunay. En dimension 2, [George,Borouchaki-1997] ont proposé une méthode de subdivision des arêtes ; néanmoins, sa convergence n’est établie que dans le cas de lignes polygonales sans intersection multiple ni angle aigu. Par ailleurs, elle ne prend pas en compte la non-unicité d’une triangulation de Delaunay. Ainsi, des bascules d’arêtes *a posteriori* peuvent être nécessaires. En dimension 3, le problème reste encore plus largement ouvert. En effet, l’inclusion du disque minimal contenant une portion d’un segment dans le disque de celui-ci, fondement de la convergence pour la méthode citée n’est plus valable dans le cas des faces. Ce résultat essentiel pour les segments ne s’étendant pas aux faces triangulaires, une extension simple de la méthode à \mathbb{R}^3 est impossible.

Néanmoins, [Murphy,Mount,Gable-2000] ont établi qu’il est toujours possible, au moins théoriquement, de subdiviser en un nombre fini de sous-facettes la contrainte pour la rendre Delaunay-admissible. Malheureusement, aux dires mêmes des auteurs,

⁸Ainsi, étant satisfaite automatiquement, la contrainte n’en est plus une.

ce résultat n'est pas exploitable en pratique. Il conduirait en effet à une subdivision beaucoup trop importante, en tout cas irréaliste d'un point de vue

numérique. Il est enfin à signaler une méthode de redéfinition de la contrainte en dimension 2, préservant la conformité au sens de Delaunay, proposée par [Sapidis,Perruccio-1991]. On peut la qualifier d'hybride dans la mesure où la récupération intervient après triangulation, bien que l'intégrité de la contrainte ne soit pas préservée. Elle n'a pas, semble-t-il, été étendue en dimension 3.

Considérant que, pour certains problèmes, les méthodes *a posteriori* sont soit inadaptées (en raison de la non-admissibilité au sens de Delaunay par exemple), soit sous-optimales ou sans résultat (cas des configurations bloquées de \mathbb{R}^3), cette thèse a pour objet d'établir des conditions nécessaires et suffisantes de Delaunay-admissibilité *a priori* en dimensions 2 et 3, ainsi que de proposer des algorithmes de redéfinition d'une contrainte de \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 , de telle sorte que la nouvelle contrainte soit construite par toute triangulation de l'enveloppe convexe du nuage de points auquel elle se rapporte. Une étude approfondie de la Delaunay-admissibilité *a priori* est donc nécessaire, permettant de distinguer dans un champ de contraintes donné quels éléments seront construits par un mailleur de Delaunay. Sur cette base théorique peuvent se fonder des algorithmes de redéfinition *a priori*, devant allier robustesse, rapidité et faible coût combinatoire.

Plan de la thèse

Le plan choisi reflète l'articulation nécessaire entre aspects théoriques et aspects algorithmiques. Par ailleurs, le cas de la dimension 2 est traité en premier, d'une part en raison de sa plus grande simplicité, d'autre part parce qu'il fournit des intuitions (pas toujours heureuses) pour la résolution du problème en dimension 3. Ainsi, en plus de la présente Introduction, cette thèse comporte cinq chapitres :

- Le Chapitre 1 rappelle les principales définitions et propriétés des triangulations de Delaunay. Dans un souci de concision, on ne prétendra évidemment pas à l'exhaustivité, qui n'est d'aucun intérêt dans le cadre de cette thèse. Ensuite, les notions relatives aux triangulations contraintes sont présentées, ainsi que leurs éventuelles limitations. Pour plus de détails, le lecteur est invité à se reporter aux références précédemment mentionnées.
- Le Chapitre 2 étudie le cas de la dimension 2 en un seul bloc, c'est-à-dire aussi bien les aspects géométriques qu'algorithmiques. Deux algorithmes convergents sont proposés, la convergence n'étant ici pas excessivement coûteuse. Des exemples illustrent le propos, essentiellement dans un but académique, les problèmes de maillage bidimensionnel étant considérés comme résolus depuis longtemps en ce qui concerne les applications pratiques.
- Le Chapitre 3 s'intéresse aux propriétés géométriques de la Delaunay-admissibilité en dimension 3. Plus précisément, des classifications géométriques sont proposées afin de décider de la Delaunay-admissibilité *a priori* des segments et faces triangulaires. Par ailleurs, le lien est fait entre l'admissibilité d'une face triangulaire et celles de ses trois arêtes.

- Le Chapitre 4 est consacré aux aspects algorithmiques de la redéfinition *a priori* d'une contrainte en vue de la rendre fortement Delaunay-admissible. A cette fin, deux algorithmes de redéfinition sont proposés, l'un reposant sur la subdivision des arêtes, l'autre sur celle des facettes. Leur convergence théorique n'est pas prouvée, et semble d'ailleurs peu vraisemblable. Néanmoins, leur robustesse pratique est illustrée par un jeu représentatif d'exemples de contraintes rencontrées en analyse numérique. D'un point de vue pratique, l'interfaçage de l'algorithme de redéfinition avec un mailleur de Delaunay existant⁹ et faisant l'objet d'applications industrielles est étudié. En particulier, un exemple typique de contrainte que le mailleur ne parvient pas à trianguler, mais qui est débloquée grâce à une redéfinition illustre l'intérêt en tant que pré-processeur de l'algorithme de redéfinition *a priori*.
- Le Chapitre 5 conclut la présente thèse et évoque quelques développements en cours où à attendre.

Enfin, une bibliographie vient compléter ce travail.

⁹*GHS3D*, développé à l'I.N.R.I.A. de Rocquencourt [George *et al.* 1992].

Chapitre 1

Rappels

1.1 Généralités

Dans tout ce qui suit, \mathcal{S} désigne un ensemble fini de points, notés P_i , deux à deux distincts dans \mathbb{R}^d , pour $d \in \{2; 3\}$. Par ailleurs, on rappelle qu'un *maillage conforme* d'une partie Ω de \mathbb{R}^d est un recouvrement polytopal de celle-ci, tel que toute d -face¹ d'un des polytopes constitutifs soit face d'un autre élément ou appartienne à la frontière, comme l'illustre en dimension 2 la Figure 1.1. En particulier, une *triangulation* est un maillage conforme dont tous les éléments sont des simplexes de \mathbb{R}^d . Dans tout ce qui suit ne sont considérés que des maillages simpliciaux de \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 , c'est-à-dire que leurs éléments sont respectivement des triangles ou des tétraèdres. Notons que les figures de ce chapitre sont extraites de [George,Borouchaki-1997].

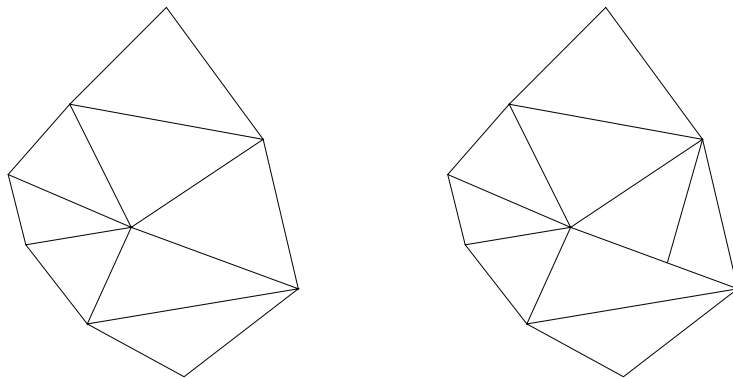


FIG. 1.1 – *Maillages conforme (à gauche) et non conforme (à droite) en dimension 2.*

1.1.1 Diagramme de Voronoï

Seul un bref rappel est donné. On se reportera à [Voronoi-1908] ou à l'abondante littérature connexe (et plus disponible), comme [Boissonnat,Yvinec-1995], pour plus de détails.

¹Au sens général du terme : arête en dimension 2, face en dimension 3.

Définition 1.1. Pour tout point $P_i \in \mathcal{S}$, la cellule de Voronoï de P_i relative à \mathcal{S} est définie comme :

$$V_i^{\mathcal{S}} = \{M \in \mathbb{R}^d : (\forall P_j \in \mathcal{S}) MP_i \leq MP_j\}$$

Définition 1.2. On appelle points, arêtes et éventuellement faces de Voronoï de \mathcal{S} les intersections de cellules de dimensions respectives 1, 2 et 3.

L'ensemble des points, arêtes et éventuellement faces de Voronoï constitue le diagramme de Voronoï de \mathcal{S} , noté $\mathcal{V}(\mathcal{S})$.

Définition 1.3. Si, pour $d = 2$, \mathcal{S} ne contient aucun quadruplet de points cocycliques, ou si, pour $d = 3$, \mathcal{S} ne contient aucun quintuplet de points cosphériques, on dit que les points de \mathcal{S} sont en position générale.

La position générale assure que dans \mathbb{R}^2 toutes les intersections de quatre cellules deux à deux distinctes sont vides, et toutes les intersections de trois cellules deux à deux distinctes sont de dimension inférieure ou égale à un ; dans \mathbb{R}^3 toutes les intersections de cinq cellules deux à deux distinctes sont vides, et toutes les intersections de quatre cellules deux à deux distinctes sont de dimension inférieure ou égale à un. La Figure 1.2 illustre en dimension 2 les cellules de Voronoï associées à un nuage de points ; on remarquera que ceux-ci ne sont pas en position générale.

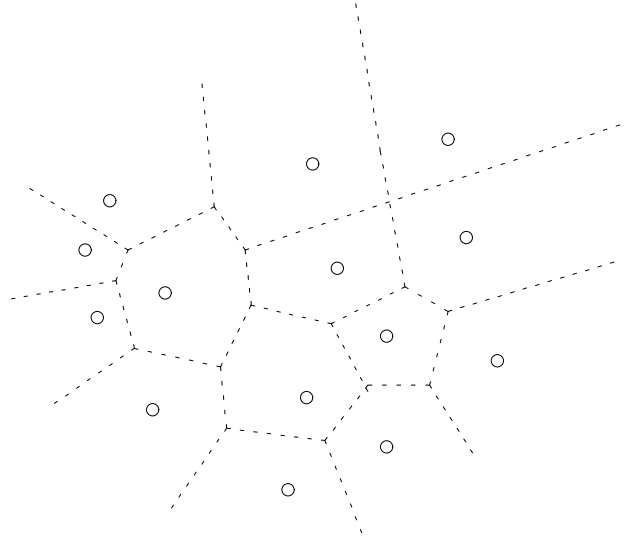


FIG. 1.2 – Diagramme de Voronoï (exemple en dimension 2).

1.1.2 Triangulation de Delaunay

On rappelle les principales propriétés de la triangulation de Delaunay. On note \mathcal{S}_k , pour $1 \leq k \leq \text{card}(\mathcal{S})$, le sous-ensemble constitué des k premiers points de \mathcal{S} .

Définition 1.4. Pour tout couple (P_i, P_j) de points distincts de \mathcal{S} , le segment $[P_i P_j]$ est appelé arête de Delaunay si, pour $d = 2$ (respectivement $d = 3$), $V_i^{\mathcal{S}} \cap V_j^{\mathcal{S}}$ est une arête (respectivement une face) de $\mathcal{V}(\mathcal{S})$.

Pour tout triplet (P_i, P_j, P_k) de points distincts de \mathcal{S} , le triangle ou la face $P_i P_j P_k$ est de Delaunay ou Delaunay-admissible si, pour $d = 2$ (respectivement $d = 3$), $V_i^{\mathcal{S}} \cap V_j^{\mathcal{S}} \cap V_k^{\mathcal{S}}$ est un sommet (respectivement une arête) de $\mathcal{V}(\mathcal{S})$.

Exclusivement en dimension 3, un tétraèdre est Delaunay-admissible dès lors que ses quatre faces le sont.

On énonce à présent quelques résultats essentiels, en vue de l'obtention d'une méthode pratique de génération de triangulations de Delaunay.

Théorème 1.1. (Propriété de la boule vide) Sous les hypothèses précédentes, $\mathcal{D}_{\mathcal{S}}$ constitue un maillage conforme de l'enveloppe convexe $\text{Conv}(\mathcal{S})$ de \mathcal{S} , appelé recouvrement de Delaunay de \mathcal{S} . En particulier, c'est une triangulation appelée triangulation de Delaunay de \mathcal{S} si et seulement si les points de \mathcal{S} sont en position générale.

De plus, T est un élément (pas nécessairement simplicial) de $\mathcal{D}_{\mathcal{S}}$ si et seulement si \mathcal{B}_T , la boule fermée circonscrite à T , ne contient pas d'autre point de \mathcal{S} que les sommets de T .

On peut donc déduire de l'unique recouvrement de Delaunay (Figure 1.3) $\mathcal{D}_{\mathcal{S}}$ au moins une triangulation de Delaunay (Figure 1.4), même si les points ne sont pas en position générale, en subdivisant en triangles en dimension 2, tétraèdres en dimension 3, les éléments non simpliciaux de $\mathcal{D}_{\mathcal{S}}$. Il n'y a par conséquent plus unicité du recouvrement simplicial.

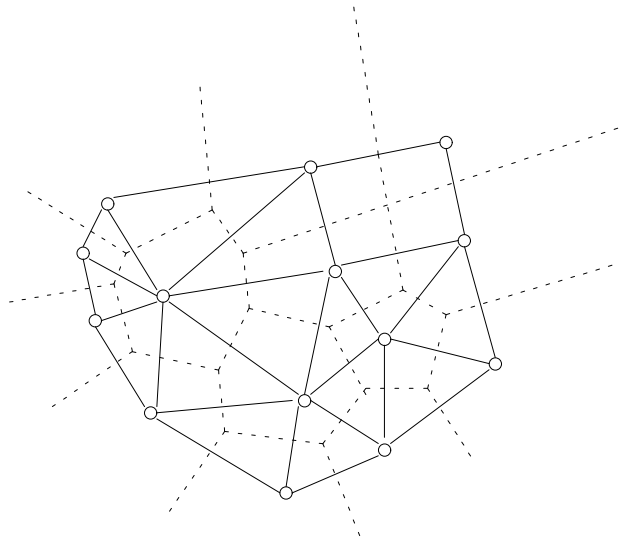


FIG. 1.3 – Recouvrement de Delaunay (exemple en dimension 2).

Théorème 1.2. (Lemme Général de Delaunay) Soit \mathcal{T} une triangulation de l'enveloppe convexe d'un ensemble fini de points \mathcal{S} . Si la propriété de la boule vide est satisfaite pour toute configuration de deux éléments adjacents de \mathcal{T} , alors elle est vraie sur tout \mathcal{T} et celle-ci est une triangulation de Delaunay de \mathcal{S} .

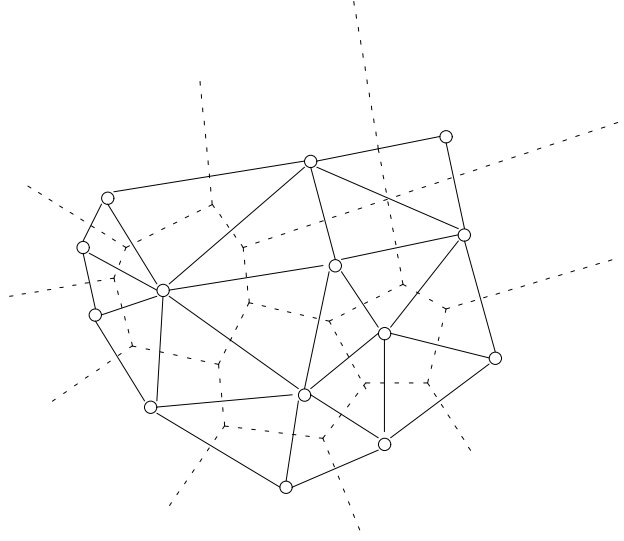


FIG. 1.4 – Une triangulation de Delaunay (exemple en dimension 2).

On trouvera une preuve de ces théorèmes dans [Delaunay-1934]. Le théorème suivant permet le développement d’algorithmes incrémentaux de maillage automatique, basés sur l’insertion itérative des sommets de l’objet considéré. Il est énoncé ici dans \mathbb{R}^3 , en convenant de désigner par fP le tétraèdre dont les sommets sont ceux de la face f et le point P .

Théorème 1.3. *Pour $4 \leq k \leq \text{card}(\mathcal{S})$, on suppose connu $\mathcal{D}_{\mathcal{S}_{k-1}}$, et on appelle, lorsqu’ils existent, T_1, T_2, \dots, T_p les éléments de $\mathcal{D}_{\mathcal{S}_{k-1}}$ tels que $\overset{\circ}{\mathcal{B}}_{T_i}$ contienne P_k . Alors :*

- Si $P_k \in \text{Conv}(\mathcal{S}_{k-1})$, alors $C = \bigcup_{1 \leq i \leq p} T_i$ est un polyèdre étoilé par rapport à P_k , appelé cavité de celui-ci. De plus, considérant les s faces f_j^C de C :

$$(\mathcal{D}_{\mathcal{S}_{k-1}} \setminus C) \cup \left(\bigcup_{1 \leq j \leq s} f_j^C P_k \right) \text{ est une triangulation de Delaunay de } \mathcal{D}_{\mathcal{S}_k}.$$

- Si $P_k \notin \text{Conv}(\mathcal{S}_{k-1})$ et s’il existe au moins T_1 , alors $C = \bigcup_{1 \leq i \leq p} T_i$ est un polyèdre dont s' faces f_j^C ne sont pas visibles de P_k , et de plus :

$$(\mathcal{D}_{\mathcal{S}_{k-1}} \setminus C) \cup \left(\bigcup_{1 \leq j \leq s'} f_j^C P_k \right) \text{ est une triangulation de Delaunay de } \mathcal{D}_{\mathcal{S}_k}.$$

- Si $P_k \notin \text{Conv}(\mathcal{S}_{k-1})$ et s’il n’existe aucun T_i , alors, considérant les s'' faces f_j de $\mathcal{D}_{\mathcal{S}_{k-1}}$ visibles par P_k :

$$\mathcal{D}_{\mathcal{S}_{k-1}} \cup \left(\bigcup_{1 \leq j \leq s''} f_j P_k \right) \text{ est une triangulation de Delaunay de } \mathcal{D}_{\mathcal{S}_k}.$$

On a bien évidemment le théorème homologue dans \mathbb{R}^2 en remplaçant les faces par les arêtes, et les tétraèdres par les triangles.

1.1.3 Triangulation contrainte

On cherche à ce que la triangulation de Delaunay de l'enveloppe convexe d'un ensemble fini de points respecte, en un sens que nous allons préciser, une contrainte d'ordre topologique. La condition la plus forte consiste naturellement à exiger de la triangulation qu'elle contienne exactement les éléments de la contrainte.

Définition 1.5. *On appelle champ de contraintes d'un ensemble fini de points distincts \mathcal{S} un ensemble fini d'arêtes en dimension 2, d'arêtes et de faces en dimension 3 dont les extrémités sont dans \mathcal{S} , et qui ne s'intersectent pas, hormis éventuellement sur leurs bords.*

Définition 1.6. *On dit qu'une triangulation vérifie exactement un champ de contraintes si toute entité de celui-ci existe exactement dans celle-là.*

Au sens de la Définition 1.6, deux cas de figure peuvent se présenter concernant la triangulation de Delaunay $\mathcal{D}_{\mathcal{S}}$ de \mathcal{S} et un champ de contraintes associé Γ :

- soit $\mathcal{D}_{\mathcal{S}}$ vérifie exactement Γ ;
- soit $\mathcal{D}_{\mathcal{S}}$ ne vérifie pas exactement Γ ; dans ce cas, on peut modifier localement $\mathcal{D}_{\mathcal{S}}$ pour faire apparaître les constituants de Γ .

Par conséquent, compte tenu de l'unicité du recouvrement de Delaunay, la satisfaction forte de la contrainte conduit à une triangulation qui n'est pas de Delaunay en général, dès lors qu'après modifications locales elle ne contient plus nécessairement le recouvrement de Delaunay.

Consécutivement, on est amené à proposer une définition plus faible, mais d'application plus générale :

Définition 1.7. *On dit qu'une triangulation vérifie faiblement un champ de contraintes si toute entité de celui-ci existe exactement ou par recouvrement dans celle-là.*

En ce dernier sens, deux approches permettent de produire une triangulation vérifiant la contrainte. Elles consistent à :

- donner une subdivision de la contrainte plus aisée à retrouver par modifications locales de $\mathcal{D}_{\mathcal{S}}$;
- subdiviser Γ en un nouveau champ de contraintes Γ' dont tous les éléments soient Delaunay-admissibles. Ainsi, ceux-ci seront tous construits par une triangulation de Delaunay de l'enveloppe convexe de \mathcal{S}' , nuage de points obtenu par ajout à \mathcal{S} des sommets de Γ' non présents dans Γ .

Pour les mêmes raisons que celles relatives à la Définition 1.6, la première approche ne peut satisfaire une exigence générale de Delaunay-admissibilité. En revanche, une éventuelle solution obtenue par la seconde est par définition Delaunay-admissible. La difficulté est de déterminer \mathcal{S}' , en ajoutant un nombre raisonnable de points supplémentaires.

1.2 Récupération *a posteriori* de la contrainte

Nous exposons brièvement les principales méthodes de récupération *a posteriori* de la frontière, qui conduisent à affirmer que le problème est résolu en dimension 2.

1.2.1 Forçage des contraintes

En dimension 2

Soit une triangulation \mathcal{T} de $\text{Conv}(\mathcal{S})$ ne vérifiant pas exactement un champ de contraintes Γ . On rappelle (cf. Figure 1.5) que le retournement d'arêtes est un opérateur topologique local en dimension 2, et qu'il ne peut être appliqué que si la réunion des deux faces adjacentes concernées est convexe de bord quadrilatéral². La méthode de forçage des contraintes repose sur les deux résultats suivants (cf. [Boissonnat, Yvinec-1995]).

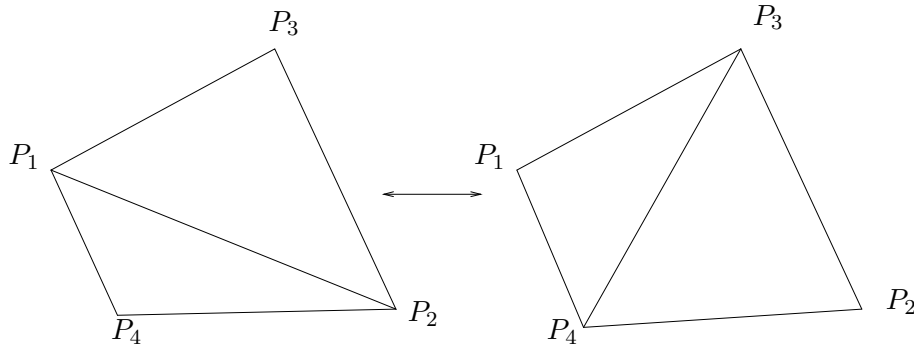


FIG. 1.5 – Bascule d'arête (exemple en dimension 2).

Théorème 1.4. *Pour tout domaine de frontière polygonale simple non croisée, il existe une triangulation sans point interne.*

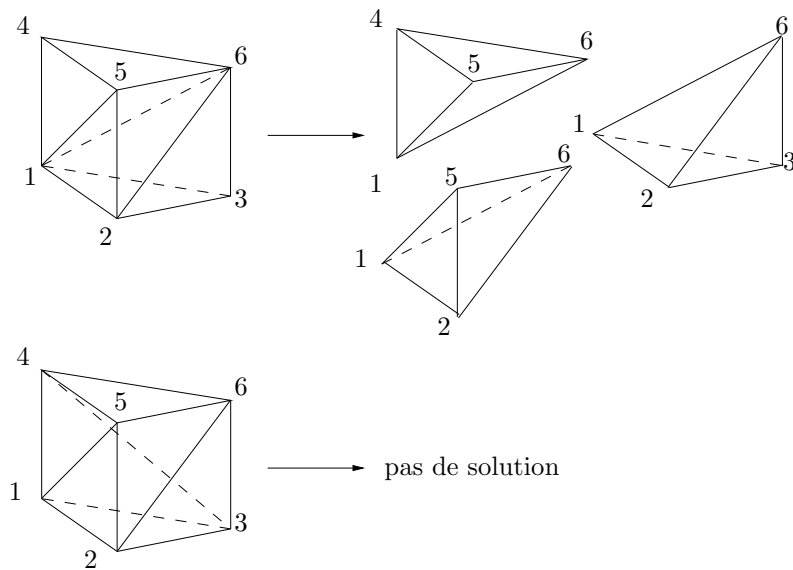
Théorème 1.5. *À partir d'une triangulation quelconque de l'enveloppe convexe d'un ensemble fini de points \mathcal{S} , on peut construire toute triangulation de cette enveloppe par bascules successives d'arêtes.*

En corollaire, [George, Borouchaki-1997] proposent un algorithme *a posteriori*, récupérant exactement la frontière par un nombre fini d'échanges d'arêtes. La triangulation résultante satisfait exactement le champ de contraintes ; dès lors elle n'est pas en général de Delaunay.

En dimension 3

L'obstacle majeur à une telle méthode en dimension 3 réside dans le fait que le Théorème 1.4 n'a pas d'équivalent pour un domaine de frontière polyédrique, et en particulier triangulaire. Le polyèdre de Schönhart (cf. [Schönhart-1928], bas de la Figure 1.6), impossible à trianguler avec des tétraèdres non dégénérés dont les sommets sont ceux du polyèdre fournit un contre-exemple simple. Cette figure montre que le même polyèdre défini par deux jeux de faces différents peut être soit immédiat, soit impossible à trianguler.

²C'est-à-dire dont le bord ne peut être recouvert par trois segments, ce qui aboutirait, après bascule, à la création d'un triangle dégénéré.

FIG. 1.6 – *Prisme triangulaire et polyèdre de Schönhart non triangulable.*

Dès lors, il n'existe pas en général de solution exacte au problème, à moins de s'autoriser à ajouter des points internes, appelés *points de Steiner*, au sens défini par [Borouchaki-1994]. Par exemple, dans le cas du polyèdre de Schönhart, l'ajout d'un seul point interne³ règle le problème.

Aucune réponse n'a pour l'heure été apportée concernant le nombre minimal de points de Steiner à ajouter, ni sur la possibilité de trouver leur position en un temps polynomial, cf. [Ruppert,Seidel-1992].

Cependant, une méthode empirique a été proposée par [George,Borouchaki-1997], basée sur des opérateurs de transformation locale d'une triangulation. Cette approche est relativement technique et, si elle conduit au résultat dans la plupart des cas, elle fournit nécessairement une triangulation qui n'est pas de Delaunay⁴.

1.2.2 Cassage des contraintes

Les méthodes de cassage des contraintes établies par [Borouchaki-1994] sont brièvement présentées ici en dimensions 2 et 3.

En dimension 2

Dans ce cas, on va se contenter de produire une triangulation vérifiant faiblement la contrainte. Supposons donc donnée une triangulation \mathcal{T} de $\text{Conv}(\mathcal{S})$ ne vérifiant pas faiblement un champ de contraintes Γ . Le principe proposé par [Borouchaki-1994] consiste en la retriangulation de chaque triangle intersecté par une arête contrainte, de telle sorte qu'une subdivision de celle-ci

³Tout point interne de ce polyèdre est visible de chacune de ses faces. Par suite, la connexion à ce seul point permet la construction de huit tétraèdres.

⁴Ce qui, en fonction des applications envisagées, n'est pas forcément un problème.

existe dans la triangulation finale (voir la Figure 1.7). Cette méthode *a posteriori* produit une triangulation qui n'est pas de Delaunay. Elle ne respecte pas l'intégrité de la contrainte, puisqu'elle ne la satisfait qu'au sens faible. Il s'agit donc d'une approche de transition entre forçage de la contrainte et reformulation *a priori* sous exigence de Delaunay-admissibilité, méthode qui va à présent être développée.

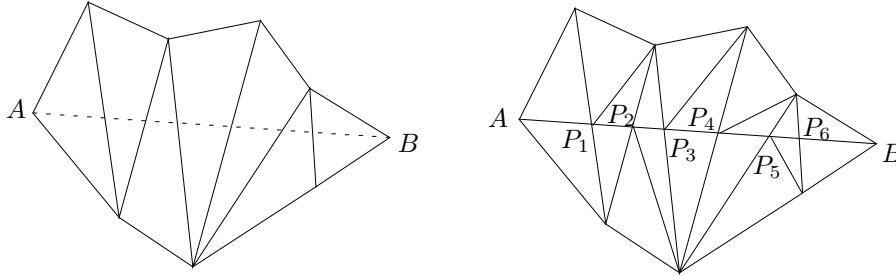


FIG. 1.7 – Cassage des arêtes en dimension 2.

Plus particulièrement, l'exigence de Delaunay-admissibilité qui nous préoccupe porte ici sur un champ de contraintes constitué d'arêtes et de faces, ces dernières posant de redoutables difficultés.

En dimension 3

La méthode décrite en dimension 2 a été étendue à la dimension 3 à partir des constatations suivantes [Borouchaki-1994] :

- l'existence des trois arêtes d'une faces n'impliquant pas que cette dernière soit présente dans une triangulation, il faut donc agir directement sur les faces ;
- à la différence de la dimension 2, il existe plusieurs types d'intersection entre une face et l'intérieur de l'un des éléments, il faut donc définir différents opérateurs de cassage.

Cette extension ne change évidemment pas la nature de la méthode, qui reste une récupération *a posteriori* et au sens faible de la frontière.

1.3 Construction *a priori* d'une contrainte Delaunay-admissible

Il a été vu qu'en dimension 2, le problème de la vérification exacte d'une triangulation quelconque est résolu. Cependant, si une triangulation finale qui soit Delaunay-admissible est requise, seule une approche a été proposée par [George,Borouchaki-1997], et ne converge de manière évidente que pour des lignes polygonales simples sans angle aigu.

En dimension 3, le problème est encore plus ouvert. En effet, certains résultats naturels en dimension 2, détaillés dans le chapitre qui suit, ne s'étendent pas à la dimension 3. Par suite, une extension simple de la méthode est donc exclue.

1.3.1 En dimension 2

Par définition, on exige que la triangulation finale soit de Delaunay ; sous cet impératif, on ne peut se satisfaire que d'une vérification faible du champ de contraintes. [George,Borouchaki-1997] proposent un critère de décision concernant la Delaunay-admissibilité d'un segment en dimension 2. Néanmoins, celui-ci ne traite pas le cas où les points ne sont pas en position générale, ce qui peut conduire à des bascules d'arêtes *a posteriori*, afin de retrouver l'intégralité de la contrainte initiale.

Se basant sur ce critère, les mêmes auteurs proposent un algorithme de redéfinition par subdivision des arêtes de la contrainte, basé sur une remarque élémentaire :

Remarque 1.1. *Si P_i, P_2 et P_j sont trois points tels que $P_i \neq P_j$ et $P_2 \in]P_iP_j[$, alors les cercles de diamètres respectifs $[P_iP_2]$ et $[P_2P_j]$ sont tangents intérieurement au cercle de diamètre $[P_iP_j]$.*

Cependant, la convergence de l'algorithme proposé n'est claire que dans le cas où la contrainte est une ligne polygonale simple⁵, en particulier sans angle aigu ni intersections multiples de segments en un même point. Dans le chapitre qui suit, une condition nécessaire et suffisante d'existence d'un segment dans toute triangulation de Delaunay de l'enveloppe convexe d'un ensemble de points donné est établie. Ce résultat est valable même si l'hypothèse restrictive de position générale n'est pas faite, ce qui permet corollairement de proposer un algorithme de redéfinition *a priori*. La convergence de ce dernier est démontrée, pour une contrainte bidimensionnelle quelconque.

Une autre approche, présentée par [Sapidis,Perruccio-1991], consiste à subdiviser les arêtes manquantes *a posteriori*, ce qui implique la construction d'une triangulation initiale. L'idée générale est, pour une arête manquante donnée, de détecter les triangles dont le disque circonscrit contient une partie non vide de celle-ci, puis d'insérer un point par composante connexe des intersections non vides de ces disques. Lors d'une triangulation ultérieure, les subdivisions de l'arête seront retrouvées automatiquement.

1.3.2 En dimension 3

Comme en dimension 2, on exige que la triangulation finale soit de Delaunay ; compte tenu des remarques qui précèdent, on doit donc se contenter d'une vérification faible du champ de contraintes.

De plus, comme on l'a vu précédemment, l'existence exacte ou par subdivision des trois arêtes d'une face n'implique pas l'existence de celle-ci (alors que l'inverse est évidemment vrai). Par conséquent, ce sont les faces qu'il convient de rendre faiblement admissibles. Or, et ici se trouve le point d'achoppement, la Remarque 1.1 n'a pas d'équivalent pour les sphères minimales circonscrites aux faces. Dès lors, une extension mécanique de la méthode est impossible. Une approche nouvelle, et c'est l'objet principal de cette thèse, doit être trouvée, conciliant robustesse et efficacité en termes de calcul comme de vitesse.

⁵*i.e.* sans intersection multiple.

Chapitre 2

Delaunay-admissibilité de segments en dimension 2

Dans ce chapitre est établie une condition nécessaire et suffisante d'existence d'un segment dans toute triangulation de Delaunay d'un certain ensemble de points contenant ses extrémités, ainsi qu'une méthode de redéfinition *a priori* du champ de contraintes, de telle sorte que la subdivision obtenue soit retrouvée par toute triangulation de Delaunay, assurant la vérification faible de la contrainte initiale.

2.1 Classification

On considère un ensemble fini de points distincts \mathcal{S} et un champ de contraintes associé Γ et l'on se propose de donner une classification discriminant les segments de Γ qui seront dans toute triangulation de Delaunay de $\text{Conv}(\mathcal{S})$ de ceux qui ne le seront pas. Pour tout couple (P_i, P_j) de points distincts de \mathcal{S} , on désigne par \mathcal{H}_{ij} , \mathcal{H}_{ij}^+ et \mathcal{H}_{ij}^- respectivement la droite $(P_i P_j)$ et les deux demi-plans ouverts limités par cette dernière.

2.1.1 L'indicatrice de classification

L'indicatrice Θ_2 présentée dans ce paragraphe a pour objet la classification des segments de Γ , permettant de décider de leur Delaunay-admissibilité et par suite, de leur traitement éventuel.

Définition 2.1. *On appelle petit cercle (respectivement petit disque) d'un segment non dégénéré le cercle (respectivement le disque) ayant pour diamètre ce segment.*

Il est clair qu'un cercle ayant pour corde un segment donné a un diamètre de longueur supérieure ou égale à celle du segment ; par suite, le petit cercle est le plus petit des cercles passant par les extrémités du segment. Pour tout couple (P_i, P_j) de points distincts de \mathcal{S} , on convient de noter \mathcal{C}_{ij} (respectivement Δ_{ij}) le petit cercle (respectivement le petit disque fermé) du segment $[P_i P_j]$.

Définition 2.2. Soit f un segment dont les extrémités P_i et P_j sont des points distincts de \mathcal{S} . En posant $\mathcal{S}_{ij} = \Delta_{ij} \cap \mathcal{S}$, on définit le type de f , noté $\Theta_2(f)$, de la façon suivante :

- Si $\mathcal{S}_{ij} = \{P_i, P_j\}$, alors $\Theta_2(f) = 0$ (Figure 2.1).
- Si $\mathcal{S}_{ij} \setminus \{P_i, P_j\} = \mathcal{E} \neq \emptyset$, tel que $\mathcal{E} \subset \mathcal{H}_{ij}^+$ ou $\mathcal{E} \subset \mathcal{H}_{ij}^-$, on désigne par Q^* un point de \mathcal{E} tel que $\widehat{P_i Q^* P_j}$ soit maximal et par Δ_t le disque fermé circonscrit au triangle $t = P_i P_j Q^*$,
- si $Q^* \in \mathcal{C}_{ij}$ ou si $\Delta_t \cap \mathcal{S} = \{P_i, P_j, Q^*\}$, alors $\Theta_2(f) = 1.0$ (Figure 2.2) ;
- si $\overset{\circ}{\Delta}_t \cap \mathcal{S} \neq \emptyset$, alors $\Theta_2(f) = 1.1$ (Figure 2.5) ;
- si $Q^* \notin \mathcal{C}_{ij}$, $\overset{\circ}{\Delta}_t \cap \mathcal{S} = \emptyset$ et $(\Delta_t \cap \mathcal{S}) \setminus \{P_i, P_j, Q^*\} = \mathcal{F} \neq \emptyset$, alors :
 - si $\mathcal{F} \cup \{Q^*\} \subset \mathcal{H}_{ij}^+$ ou si $\mathcal{F} \cup \{Q^*\} \subset \mathcal{H}_{ij}^-$, alors $\Theta_2(f) = 1.2.0$ (Figure 2.3) ;
 - si $(\mathcal{F} \cup \{Q^*\}) \cap \mathcal{H}_{ij}^+ \neq \emptyset$ et $(\mathcal{F} \cup \{Q^*\}) \cap \mathcal{H}_{ij}^- \neq \emptyset$, alors $\Theta_2(f) = 1.2.1$ (Figure 2.6).
- Si $\mathcal{S}_{ij} \cap \mathcal{H}_{ij} = \{P_i, P_j\}$, $\mathcal{S}_{ij} \cap \mathcal{H}_{ij}^+ \neq \emptyset$ et $\mathcal{S}_{ij} \cap \mathcal{H}_{ij}^- \neq \emptyset$, alors $\Theta_2(f) = 2$ (Figure 2.4).

Cette définition appelle plusieurs remarques ; tout d'abord, les deux cas conduisant à $\Theta_2(f) = 1.0$ admettent une unique situation commune, pour $Q^* \in \mathcal{C}_{ij}$ et $\mathcal{E} = \{Q^*\}$. Par ailleurs, pour $\Theta_2(f) \notin \{0; 2\}$, le rayon du disque circonscrit au triangle $t = P_i P_j Q^*$ est donné par la formule suivante :

$$R_t = \frac{P_i P_j}{2 \sin \widehat{P_i Q^* P_j}}.$$

Or, puisque $\{Q^*\} \in \mathcal{E}$, on a $\widehat{P_i Q^* P_j} \geq \frac{\pi}{2}$. La fonction sinus étant strictement positive et décroissante sur $[\frac{\pi}{2}, \pi[$, R_t est donc minimal lorsque $\widehat{P_i Q^* P_j}$ est maximal, et réciproquement en raison de la bijectivité du sinus de $[\frac{\pi}{2}, \pi[$ sur $]0, 1]$. Il est donc équivalent de définir Q^* comme un point de \mathcal{E} tel que le disque circonscrit au triangle $P_i P_j Q^*$ soit de rayon maximal.

Enfin, si $\Theta_2(f) = 1.1$, on montre aisément que $Q^* \notin \mathcal{C}_{ij}$. En effet, si $Q^* \in \mathcal{C}_{ij}$, alors $\mathcal{E} \subset \mathcal{C}_{ij}$, donc $\Delta_t = \Delta_{ij}$. Or $\overset{\circ}{\Delta}_t \cap \mathcal{S} \neq \emptyset$, donc $\overset{\circ}{\Delta}_t \cap \mathcal{S} = \overset{\circ}{\Delta}_{ijk} \cap \mathcal{S} \neq \emptyset$, ce qui contredit l'hypothèse selon laquelle Q^* est le point de \mathcal{E} tel que Δ_t soit de rayon maximal ; par l'absurde, on a donc nécessairement $Q^* \notin \mathcal{C}_{ij}$.

Pour $\Theta_2(f) \notin \{0; 2\}$, la définition de Q^* parmi les points de \mathcal{E} n'est pas anodine ; en effet, si le disque ouvert circonscrit à $P_i P_j P_n$ contient des points de \mathcal{S} , alors ce triangle n'est pas Delaunay-admissible, donc f ne peut pas être construite comme segment de celui-ci. L'admissibilité de $P_i P_j Q^*$ requiert par suite que $\overset{\circ}{\Delta}_t \cap \mathcal{S}$ soit vide, ce qui implique que $\overset{\circ}{\Delta}_t \cap \mathcal{H}_{ij}^+ \cap \mathcal{S}$ et $\overset{\circ}{\Delta}_t \cap \mathcal{H}_{ij}^- \cap \mathcal{S}$ le soient. Le résultat suivant établit une partie de cette exigence, justifiant le choix de Q^* .

Lemme 2.1. Pour $\Theta_2(f) \notin \{0; 2\}$, avec les notations de la Définition 2.2, on a :

- si $\mathcal{E} \subset \mathcal{H}_{ij}^+$ alors $\overset{\circ}{\Delta}_t \cap \mathcal{H}_{ij}^+ \cap \mathcal{S} = \emptyset$;
- si $\mathcal{E} \subset \mathcal{H}_{ij}^-$ alors $\overset{\circ}{\Delta}_t \cap \mathcal{H}_{ij}^- \cap \mathcal{S} = \emptyset$.

Preuve : Sans perte de généralité, il suffit de montrer l'assertion dans le cas où $\mathcal{E} \subset \mathcal{H}_{ij}^+$, en distinguant deux cas.

- Dans le cas où $Q^* \in \mathcal{C}_{ij}$, alors $\Delta_t = \Delta_{ij}$, et en particulier $\Delta_t \cap \mathcal{H}_{ij}^+ = \Delta_{ij} \cap \mathcal{H}_{ij}^+$.
- Dans le cas où $Q^* \notin \mathcal{C}_{ij}$, alors \mathcal{C}_t , cercle circonscrit à t , est sécant à \mathcal{C}_{ij} en P_i et P_j , et par suite, $\Delta_t \cap \mathcal{H}_{ij}^+ \subsetneq \Delta_{ij} \cap \mathcal{H}_{ij}^+$ ou $\Delta_t \cap \mathcal{H}_{ij}^- \subsetneq \Delta_{ij} \cap \mathcal{H}_{ij}^-$. Or, par hypothèse, $Q^* \in \mathcal{C}_t \cap \mathcal{H}_{ij}^+$, donc $\Delta_t \cap \mathcal{H}_{ij}^+ \subsetneq \Delta_{ij} \cap \mathcal{H}_{ij}^+$.

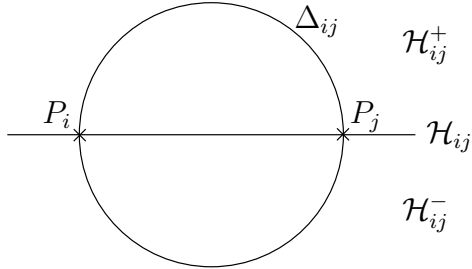


FIG. 2.1 - $\Theta_2(f) = 0$

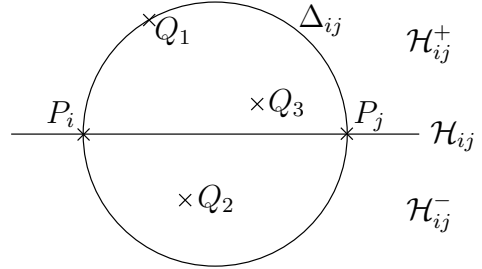


FIG. 2.4 - $\Theta_2(f) = 2$

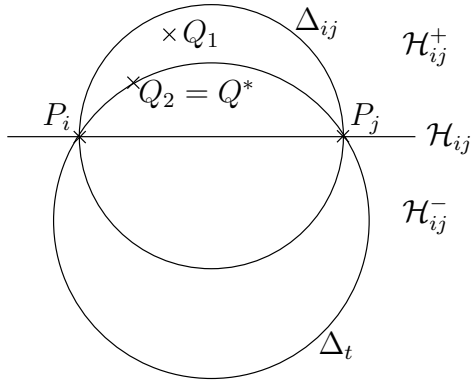


FIG. 2.2 - $\Theta_2(f) = 1.0$

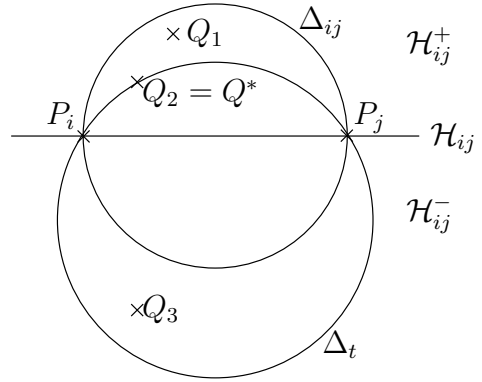


FIG. 2.5 - $\Theta_2(f) = 1.1$

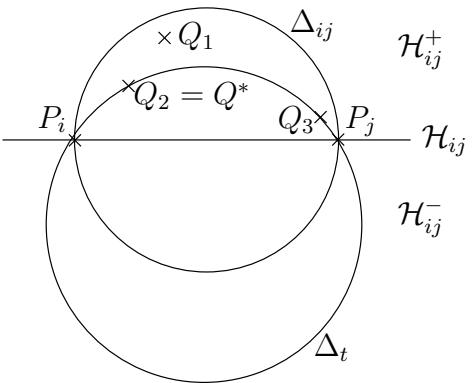


FIG. 2.3 - $\Theta_2(f) = 1.2.0$

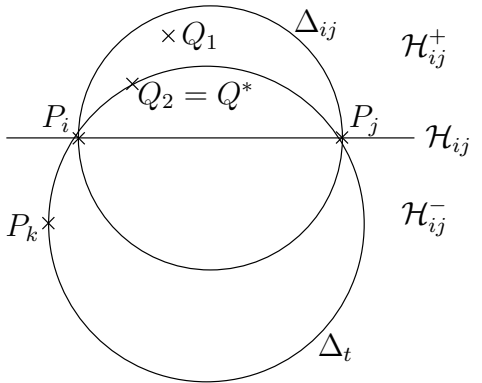


FIG. 2.6 - $\Theta_2(f) = 1.2.1$

Supposons alors que

$$(\exists M \in \mathcal{S}) \quad M \in \overset{\circ}{\Delta}_t \cap \mathcal{H}_{ij}^+$$

ce qui entraîne en particulier que $\widehat{P_i M P_j} < \widehat{P_i Q^* P_j}$. D'après ce qui précède, $M \in \mathcal{E}$; par hypothèse, on a donc $\widehat{P_i M P_j} \geq \widehat{P_i Q^* P_j}$. Par l'absurde, on en déduit qu'il ne peut pas exister de tel point M , d'où

$$\overset{\circ}{\Delta}_t \cap \mathcal{H}_{ij}^+ \cap \mathcal{S} = \emptyset.$$

□

2.1.2 Une condition suffisante de Delaunay-admissibilité

Le présent paragraphe a pour objet d'établir des conditions assez fortes pour s'assurer de la forte Delaunay-admissibilité d'un segment, donc de sa présence dans toute triangulation de Delaunay.

Lemme 2.2. *Si $\Theta_2(f) \in \{0; 1.0; 1.2.0\}$, alors f est contenue dans toute triangulation de Delaunay de l'enveloppe convexe de \mathcal{S} .*

Preuve : Il suffit de prouver que f est contenue dans le recouvrement de Delaunay de $\text{Conv}(\mathcal{S})$ pour s'assurer qu'elle sera présente dans toute triangulation de Delaunay de celle-ci. On utilise les notations de la Définition 2.2, et l'on désigne par O_f le milieu de $[P_i P_j]$.

1. Si $\Theta_2(f) = 0$, alors

$$(\forall P_n \in \mathcal{S} \setminus \{P_i, P_j\}) \quad O_f P_i = O_f P_j < O_f P_n$$

ce qui entraîne, d'une part $O_f \in V_i^{\mathcal{S}} \cap V_j^{\mathcal{S}} \neq \emptyset$, c'est-à-dire que $V_i^{\mathcal{S}} \cap V_j^{\mathcal{S}}$ contient au moins O_f ; d'autre part

$$(\forall P_n \in \mathcal{S} \setminus \{P_i, P_j\}) \quad O_f \notin V_n^{\mathcal{S}}$$

ce qui prouve que O_f ne peut être un point de Voronoï. Par suite, $V_i^{\mathcal{S}} \cap V_j^{\mathcal{S}}$ est un segment de Voronoï passant par O_f ; en d'autres termes $f = [P_i P_j] \in \mathcal{D}_{\mathcal{S}}$.

2. Si $\Theta_2(f) = 1.0$ alors, en employant les notations de la Définition 2.2, on distingue les deux cas suivants :
 - si $Q^* \in \mathcal{C}_{ij}$, alors $\overset{\circ}{\Delta}_{ij}$ ne contient aucun point de \mathcal{S} , donc, d'après le Théorème 1.1,

$$\Pi = \text{Conv}(\{P_i, P_j\} \cup \mathcal{E}) \in \mathcal{D}_{\mathcal{S}}$$

or, tous les Q_m se trouvant dans un même demi-plan ouvert limité par la droite $(P_i P_j)$, $[P_i P_j]$ est donc un segment de Π . Par suite, $f \in \mathcal{D}_{\mathcal{S}}$.

- si $\Delta_t \cap \mathcal{S} = \{P_i, P_j, Q^*\}$, alors, d'après le Théorème 1.1, $P_i P_j Q^* \in \mathcal{D}_{\mathcal{S}}$ donc, en particulier, $f = [P_i P_j] \in \mathcal{D}_{\mathcal{S}}$.

3. Si $\Theta_2(f) = 1.2.0$ alors, pour la même raison que ci-dessus,

$$\Pi = \text{Conv}(\{P_i, P_j, Q^*\} \cup \mathcal{F}) \in \mathcal{D}_{\mathcal{S}}$$

et comme précédemment, puisque $\mathcal{F} \cup \{Q^*\} \subset \mathcal{H}_{ij}^+$ ou $\mathcal{F} \cup \{Q^*\} \subset \mathcal{H}_{ij}^-$, f est donc un segment de Π , entraînant que $f \in \mathcal{D}_{\mathcal{S}}$. □

Le Lemme 2.2 étant établi, on est légitimement fondé à s'interroger sur sa réciproque. Or, en raison de la non-unicité de la triangulation de Delaunay construite pour un ensemble de points \mathcal{S} quelconque, se présentent, pour une segment f donnée, les cas disjoints suivants :

1. Soit $f \in \mathcal{D}_{\mathcal{S}}$, et par suite f appartient à toute triangulation de Delaunay de $\text{Conv}(\mathcal{S})$; le Lemme 2.2 montre que c'est en particulier le cas si $\Theta_2(f) \in \{0; 1.0; 1.2.0\}$.
2. Soit $f \notin \mathcal{D}_{\mathcal{S}}$, ce qui ne permet pas de conclure quant à l'existence de f dans une certaine triangulation de Delaunay de $\text{Conv}(\mathcal{S})$, puisque l'on est face à l'alternative suivante :
 - (a) si, pour tout polygone (pas forcément triangulaire) de $\mathcal{D}_{\mathcal{S}}$, f n'en est ni un côté, ni une diagonale, alors on peut affirmer qu'elle n'est pas Delaunay-admissible, quelle que soit la triangulation de Delaunay déduite de $\mathcal{D}_{\mathcal{S}}$;
 - (b) si f est une diagonale d'un polygone non triangulaire Π de $\mathcal{D}_{\mathcal{S}}$, alors il existe au moins deux triangulations de Π , l'une contenant f et l'autre pas ; par suite, f est Delaunay-admissible relativement à au moins une triangulation de Delaunay de $f \in \mathcal{D}_{\mathcal{S}}$, mais pas à toutes.

Il résulte de ces remarques que le Lemme 2.2 n'est pas nécessaire à l'admissibilité dans une triangulation de Delaunay particulière ; en particulier, les segments relevant du cas 2.(a), qui ne satisfont donc pas aux conditions requises, peuvent cependant toujours être retrouvées *a posteriori* par des bascules de segments, sans faire perdre à la triangulation sa Delaunay-admissibilité. La recherche d'une condition nécessaire n'a donc, dans ce contexte, pas de sens puisque la détermination de la triangulation à partir du recouvrement de Delaunay n'est pas prévisible dans le cadre théorique actuel dès lors que celle-ci est, par définition, arbitraire.

2.1.3 Delaunay-admissibilité forte

Dans le paragraphe précédent est apparue la nécessité d'un cadre dans lequel l'admissibilité des segments ne dépende pas du choix de la triangulation de Delaunay, subdivision particulière obtenue à partir du recouvrement du même nom. C'est la raison pour laquelle est à présent introduite une hypothèse plus forte de Delaunay-admissibilité, pour laquelle une condition nécessaire peut être établie.

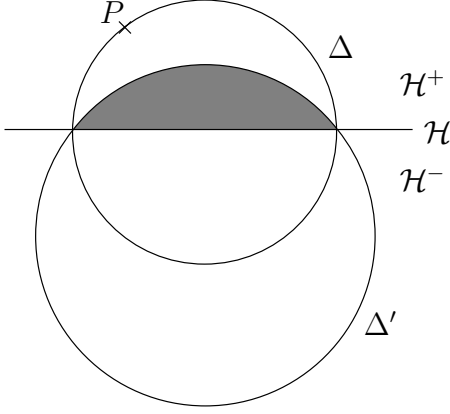
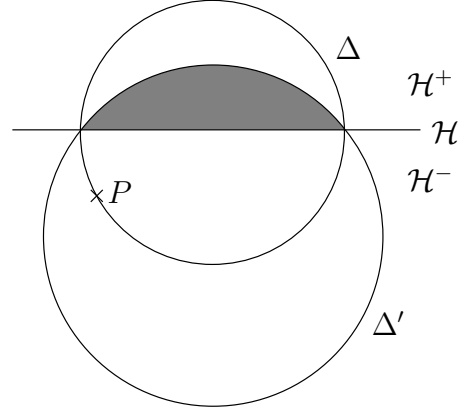
Définition 2.3. *On dit qu'un segment est fortement Delaunay-admissible si il appartient au recouvrement de Delaunay de $\text{Conv}(\mathcal{S})$.*

Une définition équivalente consiste à dire qu'une face est fortement Delaunay-admissible si elle est contenue dans toute triangulation de Delaunay de $\text{Conv}(\mathcal{S})$, puisque d'une part les éléments du recouvrement de Delaunay sont contenus dans toute telle triangulation, d'autre part l'intersection de toutes les triangulations de Delaunay est égale au recouvrement. Le Lemme 2.2 constitue donc une condition suffisante de Delaunay-admissibilité forte.

Préalablement à l'établissement de la condition nécessaire de Delaunay-admissibilité forte, un important résultat concernant la configuration formée par deux cercles sécants est établi.

Lemme 2.3. *Soient \mathcal{C} et \mathcal{C}' deux cercles, sécants sur la droite \mathcal{H} . On désigne par Δ et Δ' les disques limités respectivement par \mathcal{C} et \mathcal{C}' . Considérant un point $P \in \mathcal{C}$, on a alors*

- Si $P \in \mathcal{H}^+$ et $P \notin \Delta'$, ou si $P \in \mathcal{H}^-$ et $P \in \Delta'$, alors $\Delta' \cap \mathcal{H}^+ \subsetneq \Delta \cap \mathcal{H}^+$;
- si $P \in \mathcal{H}^-$ et $P \notin \Delta'$, ou si $P \in \mathcal{H}^+$ et $P \in \Delta'$, alors $\Delta' \cap \mathcal{H}^- \subsetneq \Delta \cap \mathcal{H}^-$.

FIG. 2.7 – Cas $P \in \mathcal{H}^+$ et $P \notin \Delta'$.FIG. 2.8 – Cas $P \in \mathcal{H}^-$ et $P \in \Delta'$.

Le Lemme 2.3 montre en particulier que la connaissance de la position relative d'un point d'un cercle relativement à un deuxième cercle sécant permet de déterminer les domaines d'inclusions réciproques des disques limités par ces cercles.

Preuve : Seule la preuve de la première assertion est détaillée ici ; on en déduit la seconde par réflexion d'axe \mathcal{H} . On distingue les deux cas de figure possibles : $P \in \mathcal{H}^+$ et $P \notin \Delta'$ d'une part ; $P \in \mathcal{H}^-$ et $P \in \Delta'$ d'autre part.

1. Si $P \in \mathcal{H}^+$ et $P \notin \Delta'$ (Figure 2.7) alors, sachant que $P \in \mathcal{C} \subset \Delta$, on a d'une part $P \in \Delta \cap \mathcal{H}^+$, d'autre part $P \notin \Delta' \cap \mathcal{H}^+$ donc $\Delta \cap \mathcal{H}^+ \not\subset \Delta' \cap \mathcal{H}^+$. Or \mathcal{C} et \mathcal{C}' sont des cercles sécants sur \mathcal{H} , donc $\Delta' \cap \mathcal{H}^+ \subsetneq \Delta \cap \mathcal{H}^+$ ou $\Delta \cap \mathcal{H}^+ \subsetneq \Delta' \cap \mathcal{H}^+$ d'où, nécessairement, $\Delta' \cap \mathcal{H}^+ \subsetneq \Delta \cap \mathcal{H}^+$.
2. Si $P \in \mathcal{H}^-$ et $P \in \Delta'$ (Figure 2.8), on sait également, par hypothèse, que $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}' \subset \mathcal{H}$ et $P \in \mathcal{C}$. Par suite, $P \notin \mathcal{C}'$ et

$$P \in (\Delta' \setminus \mathcal{C}') \cap \mathcal{H}^- = \overset{\circ}{\Delta'} \cap \mathcal{H}^-$$

ce qui entraîne, $\overset{\circ}{\Delta'} \cap \mathcal{H}^-$ étant ouvert, donc en particulier voisinage de P , qu'il existe un disque non vide Δ_P centré en P tel que

$$\Delta_P \subset \overset{\circ}{\Delta'} \cap \mathcal{H}^- \subset \Delta' \cap \mathcal{H}^-$$

d'où

$$(\forall M \in \Delta_P) \quad M \in \Delta' \cap \mathcal{H}^-$$

or, puisque $P \in \mathcal{C} \cap \mathcal{H}^-$, on a $\Delta_P \not\subset \Delta \cap \mathcal{H}^-$ donc

$$(\exists M_0 \in \Delta_P) \quad M_0 \notin \Delta \cap \mathcal{H}^-$$

ce qui entraîne que $\Delta' \cap \mathcal{H}^- \not\subseteq \Delta \cap \mathcal{H}^-$. De plus, comme \mathcal{C} et \mathcal{C}' sont des cercles sécants sur \mathcal{H} , $\Delta' \cap \mathcal{H}^- \subsetneq \Delta \cap \mathcal{H}^-$ ou $\Delta \cap \mathcal{H}^- \subsetneq \Delta' \cap \mathcal{H}^-$, donc nécessairement $\Delta \cap \mathcal{H}^- \subsetneq \Delta' \cap \mathcal{H}^-$. Par réflexion d'axe \mathcal{H} , ceci équivaut à $\Delta' \cap \mathcal{H}^+ \subsetneq \Delta \cap \mathcal{H}^+$.

□

Le théorème qui suit fournit une condition nécessaire et suffisante de Delaunay-admissibilité. Il assure l'existence d'un segment donné dans toute triangulation de Delaunay de l'enveloppe convexe de l'ensemble de points auquel elle se rapporte ou, au contraire, son absence dans au moins une telle triangulation.

Théorème 2.1. *f est fortement Delaunay-admissible si et seulement si*

$$\Theta_2(f) \in \{0; 1.0; 1.2.0\}.$$

Preuve : On distingue les différents cas, liés à la valeur de Θ_2 . Les notations sont celles de la Définition 2.2, et O_f désigne le milieu de $[P_i P_j]$.

1. Si $\Theta_2(f) \in \{0; 1.0; 1.2.0\}$ alors le Lemme 2.2 entraîne que f est fortement Delaunay-admissible.

2. Si $\Theta_2(f) = 1.1$, fixons les idées en considérant que $Q^* \in \mathcal{H}_{ij}^+$; on ne détaille pas le raisonnement si $Q^* \in \mathcal{H}_{ij}^-$, puisqu'il est similaire à réflexion par rapport à $(P_i P_j)$ près. Pour tout $P_n \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{H}_{ij}$ on note $t_n = P_i P_j P_n$, et on distingue deux sous-cas.

(a) Si $P_n \in \mathcal{H}_{ij}^+$ (c'est en particulier le cas si $P_n \in \mathcal{E}$) alors, d'après le Lemme 2.1,

$P_n \notin \overset{\circ}{\Delta}_t \cap \mathcal{H}_{ij}^+$, et deux cas de figure se présentent alors : soit $P_n \in \Delta_t$, soit $P_n \notin \Delta_t$.

i. si $P_n \in \Delta_t$ alors $P_n \in \mathcal{C}_t$, le cercle circonscrit à t . Par suite, $\Delta_{t_n} = \Delta_t$ donc $\overset{\circ}{\Delta}_{t_n} \cap \mathcal{S} = \overset{\circ}{\Delta}_t \cap \mathcal{S} \neq \emptyset$;

ii. si $P_n \notin \Delta_t$ alors, d'après le Lemme 2.3, $\Delta_t \cap \mathcal{H}_{ij}^+ \subsetneq \Delta_{t_n} \cap \mathcal{H}_{ij}^+$, et en particulier $Q^* \in \overset{\circ}{\Delta}_{t_n}$, d'où $\overset{\circ}{\Delta}_{t_n} \cap \mathcal{S} \neq \emptyset$.

(b) Si $P_n \in \mathcal{H}_{ij}^-$, on doit alors distinguer trois hypothèses :

i. si $P_n \in \overset{\circ}{\Delta}_t$ alors, d'après le Lemme 2.3, $\Delta_t \cap \mathcal{H}_{ij}^+ \subsetneq \Delta_{t_n} \cap \mathcal{H}_{ij}^+$ donc, de même qu'en (a)-ii, $\overset{\circ}{\Delta}_{t_n} \cap \mathcal{S} \neq \emptyset$;

ii. si $P_n \in \mathcal{C}_t$ alors, pour les mêmes raisons qu'en (a)-i,

$$\overset{\circ}{\Delta}_{t_n} \cap \mathcal{S} = \overset{\circ}{\Delta}_t \cap \mathcal{S} \neq \emptyset ;$$

iii. si $P_n \notin \Delta_t$ alors, d'après le Lemme 2.3, $\Delta_t \cap \mathcal{H}_{ij}^- \subsetneq \Delta_{t_n} \cap \mathcal{H}_{ij}^-$. Or, d'après le Lemme 2.1, $\overset{\circ}{\Delta}_t \cap \mathcal{S} \subset \mathcal{H}_{ij}^- \subset \Delta_t \cap \mathcal{H}_{ij}^-$ donc

$$(\forall M \in \overset{\circ}{\Delta}_t \cap \mathcal{S}) \quad M \in \Delta_{t_n}$$

d'où $\overset{\circ}{\Delta}_{t_n} \cap \mathcal{S} \neq \emptyset$.

On a donc prouvé que de façon générale

$$(\forall P_n \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{H}_{ij}) \quad \overset{\circ}{\Delta}_{t_n} \cap \mathcal{S} \neq \emptyset$$

cependant, l'existence de f dans $\mathcal{D}_{\mathcal{S}}$ implique celle d'un polygone Π ayant $P_i P_j$ pour segment. Par suite Π , dont les sommets pris dans \mathcal{S} sont nécessairement cocycliques, admet un disque circonscrit Δ_{Π} vérifiant, d'après le Théorème 1.1,

$$\overset{\circ}{\Delta}_{\Pi} \cap \mathcal{S} = \emptyset$$

or, en raison de la cocyclicité des sommets de Π , son disque circonscrit est confondu avec celui de $P_i P_j P_n$, P_n étant un sommet quelconque de Π , distinct de P_i et P_j , donc

$$(\exists P_n \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{H}_{ij}) \quad \overset{\circ}{\Delta}_{t_n} \cap \mathcal{S} = \emptyset$$

ce qui contredit ce qui a été montré précédemment ; un tel polygone Π ne pouvant exister, il vient donc que $f \notin \mathcal{D}_{\mathcal{S}}$.

3. Si $\Theta_2(f) = 1.2.1$ alors, d'après le Théorème 1.1, $\Pi = \text{Conv}(\{P_i, P_j, Q^*\} \cup \mathcal{F}) \in \mathcal{D}_{\mathcal{S}}$. Or, puisque $(\mathcal{F} \cup \{Q^*\}) \cap \mathcal{H}_{ij}^+ \neq \emptyset$ et $(\mathcal{F} \cup \{Q^*\}) \cap \mathcal{H}_{ij}^- \neq \emptyset$, on a $]P_i P_j[\subset \overset{\circ}{\Pi}$ et, par suite, $f \notin \mathcal{D}_{\mathcal{S}}$.
4. Si $\Theta_2(f) = 2$, alors soit $\mathcal{E} = \mathcal{S}_{ij} \setminus \{P_i, P_j\}$. On distingue deux sous-cas :
 - (a) si $\mathcal{E} \subset \mathcal{C}_{ij}$, alors $\Pi = \text{Conv}(\mathcal{S}_{ij}) \in \mathcal{D}_{\mathcal{S}}$, or $\mathcal{S}_{ij} \cap \mathcal{H}_{ij}^+ \neq \emptyset$ et $\mathcal{S}_{ij} \cap \mathcal{H}_{ij}^- \neq \emptyset$, donc $]P_i P_j[\subset \overset{\circ}{\Pi}$ et, par suite, $f \notin \mathcal{D}_{\mathcal{S}}$;
 - (b) si $\mathcal{E} \not\subset \mathcal{C}_{ij}$, alors pour tout $P_n \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{H}_{ij}$ on note $t_n = P_i P_j P_n$. Puisque \mathcal{C}_{ij} et \mathcal{C}_{t_n} sont sécants sur \mathcal{H}_{ij} , $\Delta_{ij} \cap \mathcal{H}_{ij}^- \subsetneq \Delta_{t_n} \cap \mathcal{H}_{ij}^-$ ou $\Delta_{ij} \cap \mathcal{H}_{ij}^+ \subsetneq \Delta_{t_n} \cap \mathcal{H}_{ij}^+$ donc, puisque $\mathcal{S}_{ij} \cap \mathcal{H}_{ij}^+ \neq \emptyset$ et $\mathcal{S}_{ij} \cap \mathcal{H}_{ij}^- \neq \emptyset$, il vient que $\overset{\circ}{\Delta}_{t_n} \cap \mathcal{S} \neq \emptyset$. De façon générale, on a donc

$$(\forall P_n \in \mathcal{S}) \quad P_i P_j P_n \notin \mathcal{D}_{\mathcal{S}}$$

et, par suite, $f \notin \mathcal{D}_{\mathcal{S}}$. □

La condition nécessaire et suffisante de forte Dealaunay-admissibilité est donc bien établie.

2.2 Construction

La classification des segments étant effectuée, cette section a pour objet de proposer une méthode de redéfinition *a priori* de la contrainte Γ constituée par l'ensemble de ces segments. La méthode proposée consiste à partitionner Γ en Γ' , dont tous les segments doivent être fortement Delaunay-admissible. Ainsi, Γ' sera construite par toute triangulation de Delaunay de l'enveloppe convexe de \mathcal{S}' , ce qui revient à dire que Γ sera satisfaite faiblement¹. Après avoir établi certains résultats essentiels, un algorithme est proposé, ainsi que la preuve de sa convergence.

¹Les triangulations de Delaunay des enveloppes convexes sont calculées par le mailleur du programme EMC2 développé à l'I.N.R.I.A., voir [Hecht,Saltel-1990], qui utilise un algorithme incrémental de triangulation de Delaunay de l'enveloppe convexe d'un nuage de points.

Dans cette section, on se donne \mathcal{S} , ensemble fini de points, et un champ de contraintes Γ relatif à \mathcal{S} . Γ est donc constitué de segments dont les extrémités sont dans \mathcal{S} , et ne s'intersectant qu'en celles-ci.

2.2.1 Résultats préliminaires

Une méthode de subdivision d'un segment isolé vidant les petits disques associés aux nouvelles segments des points de \mathcal{S} est tout d'abord établie. L'influence d'une telle subdivision sur les autres segments du champ de contraintes est ensuite étudiée ; les configurations locales de deux segments incidents sont discutées, en fonction de l'angle qu'ils forment. Le cas des segments disjoints est enfin présenté, montrant que des subdivisions finies de ces segments deviennent sans effet l'une sur l'autre. Préalablement, on énonce le résultat suivant, conséquence immédiate de la Remarque 1.1 :

Lemme 2.4. *Soit $[P_i P_j]$ un segment non dégénéré de Γ , dont le petit disque Δ_{ij} contient au moins un point $P_n \in \mathcal{S} \setminus \{P_i, P_j\}$. Alors, désignant par M , Δ et Δ' respectivement le projeté orthogonal de P_n sur $[P_i P_j]$ et les petits disques de $[P_i M]$ et $[M P_j]$, on a :*

$$\text{card}(\Delta \cap \mathcal{S}) + \text{card}(\Delta' \cap \mathcal{S}) < \text{card}(\Delta_{ij} \cap \mathcal{S})$$

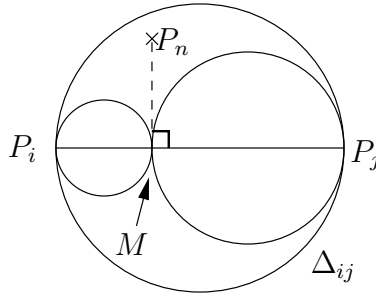


FIG. 2.9 – Insertion d'un point sur un segment et petits disques créés.

À tout segment f dont le petit disque contient r points de \mathcal{S} , le Lemme 2.4 permet donc d'associer une partition en deux segments f_1 et f_2 dont les petits disques contiennent au total au plus $r - 1$ points de \mathcal{S} . Par suite, au plus r tels partitionnement itérés permettent de construire une subdivision de f en sous-segments dont tous les petits disques sont vides de points de \mathcal{S} . Cependant, les points ainsi créés peuvent être contenus dans le petit disque d'un autre segment f' , et par suite lui faire perdre dans certains cas son éventuelle Delaunay-admissibilité². Les considérations qui suivent ont donc pour objet d'étudier l'effet de la subdivision d'un segment sur les autres.

Lemme 2.5. *Soient $[P_h P_i]$, $[P_i P_j]$ et $[P_j P_k]$ trois segments non dégénérés de Γ , tels que $\widehat{P_h P_i P_j}$ et $\widehat{P_i P_j P_k}$ soient obtus ou droits. On a alors*

$$(\forall M \in]P_i P_j[) \quad M \notin \Delta_{hi} \cup \Delta_{jk}.$$

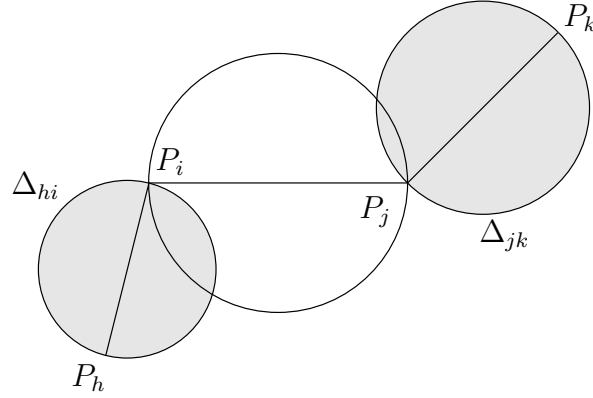


FIG. 2.10 – Exemple de segments formant des angles obtus.

Preuve : Pour tout $M \in]P_i P_j[$, le triangle $P_h P_i M$ est non dégénéré donc en particulier $\widehat{MP_h P_i} \neq 0$. Or, par hypothèse,

$$\widehat{P_h P_i M} = \widehat{P_h P_i P_j} \geq \frac{\pi}{2}$$

donc, en considérant la somme des angles du triangle $P_h P_i M$,

$$\widehat{P_i M P_h} < \widehat{P_i M P_h} + \widehat{M P_h P_i} \leq \frac{\pi}{2}$$

ce qui entraîne que $M \notin \Delta_{hi}$. De plus, utilisant un raisonnement similaire, on montre que $M \notin \Delta_{jk}$, d'où la conclusion. \square

Le Lemme 2.5 assure donc que la partition d'un segment dont les voisins forment avec lui des angles obtus ou droits n'ajoute aucun point dans les petits disques de ces derniers ; leurs indicatrices Θ_2 respectives ne sont donc pas affectées ainsi que, par suite, leurs caractéristiques de Delaunay-admissibilité.

En revanche, une telle propriété n'est pas vraie si deux segments forment un angle aigu ; le résultat qui suit précise dans ce cas quelle portion d'un segment est contenue dans le petit disque de son voisin.

Lemme 2.6. Soient $[P_h P_i]$ et $[P_i P_j]$ deux segments non dégénérés de Γ formant un angle aigu, et M le projeté orthogonal de P_h sur $(P_i P_j)$. On a alors

$$\Delta_{hi} \cap]P_i P_j[\neq \emptyset$$

et plus précisément,

- si $P_h P_i \times \cos \widehat{P_h P_i M} \geq P_i P_j$, alors $\Delta_{hi} \cap]P_i P_j[=]P_i P_j[$;
- si $P_h P_i \times \cos \widehat{P_h P_i M} < P_i P_j$, alors $\Delta_{hi} \cap]P_i P_j[=]P_i M] \subsetneq]P_i P_j[$.

Preuve : En considérant le produit scalaire euclidien il vient, par définition de M , que

$$\overrightarrow{P_i P_j} \cdot \overrightarrow{P_i P_h} = P_i P_j \times P_i P_h \times \cos \widehat{P_h P_i P_j}$$

²Par exemple, si $\Theta_2(f') = 1.0$, en ajoutant un point dans le petit disque de f' de telle sorte que $\Theta_2(f') = 2$.

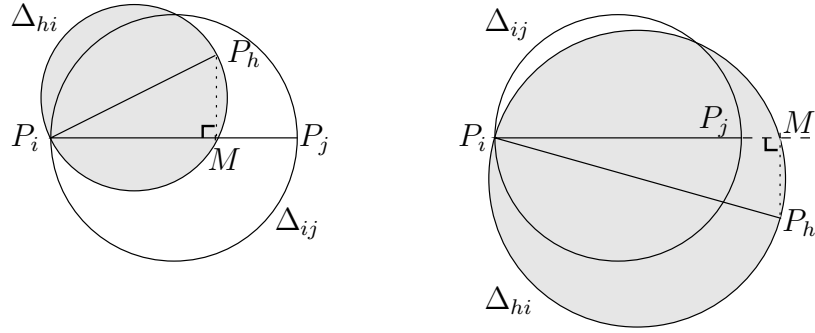


FIG. 2.11 – Exemples de segments formant un angle aigu.

or, l'angle $\widehat{P_h P_i P_j}$ étant aigu par hypothèse, le cosinus est donc strictement positif, $\overrightarrow{P_i P_j}$ et $\overrightarrow{P_i M}$ ont donc même sens et par suite,

$$\overrightarrow{P_i M} = \cos \widehat{P_h P_i P_j} \times \frac{P_i P_h}{P_i P_j} \cdot \overrightarrow{P_i P_j}$$

ce qui entraîne en particulier que

- si $P_h P_i \times \cos \widehat{P_h P_i P_j} \geq P_i P_j$, alors $]P_i P_j[\subset]P_i M[$, d'où $[P_i M] \cap]P_i P_j[=]P_i P_j[$;
- si $P_h P_i \times \cos \widehat{P_h P_i P_j} < P_i P_j$, alors $]P_i M[\subset]P_i P_j[$, d'où $[P_i M] \cap]P_i P_j[=]P_i M[$.

De plus, le triangle $P_i M P_h$ étant rectangle en M , M appartient à \mathcal{C}_{hi} ; par suite, $[P_i M]$ est une corde de ce cercle, donc

$$\Delta_{hi} \cap]P_i P_j[= \Delta_{hi} \cap (P_i P_j) \cap]P_i P_j[= [P_i M] \cap]P_i P_j[$$

d'où le résultat. \square

Corollairement au Lemme 2.6, l'insertion d'un point sur le segment $[P_i P_j]$ peut, sous certaines conditions, modifier la Delaunay-admissibilité de $[P_h P_i]$, de telle sorte que celui-ci doive à son tour être partitionné. Pour les mêmes raisons, tout point inséré sur $[P_h P_i]$ peut affecter l'admissibilité de son voisin issu de la partition de $[P_i P_j]$; dès lors, il convient d'éviter que de telles subdivisions alternées ne tendent vers la création de segments nuls.

Lemme 2.7. Soient $[P_h P_i]$ et $[P_i P_j]$ deux segments non dégénérés de Γ formant un angle aigu non nul et $\mathcal{S}_{hij} = (\mathcal{S}_{hi} \cup \mathcal{S}_{ij}) \setminus \{P_i\}$. En convenant que

$$d_i = \min_{M \in \mathcal{S}_{hij}} MP_i$$

on définit P_{hi} (respectivement P_{ij}) comme le point de $[P_h P_i]$ (respectivement de $[P_i P_j]$) situé à une distance $d < d_i$ de P_i , et l'on pose $\mathcal{S}' = \mathcal{S} \cup \{P_{hi}, P_{ij}\}$. Alors le petit disque de $[P_i P_{hi}]$ (respectivement de $[P_i P_{ij}]$) ne contient pas d'autre point de \mathcal{S}' que P_i et P_{hi} (respectivement P_{ij}).

Preuve : Seule la preuve concernant Δ_j , petit disque de $[P_i P_{ij}]$ est détaillée; on en déduit l'homologue pour Δ_h par transposition des indices h et j . Par définition de \mathcal{S}' , on a

$$\Delta_j \cap \mathcal{S}' = (\Delta_j \cap \mathcal{S}) \cup (\Delta_j \cap \{P_{hi}, P_{ij}\})$$

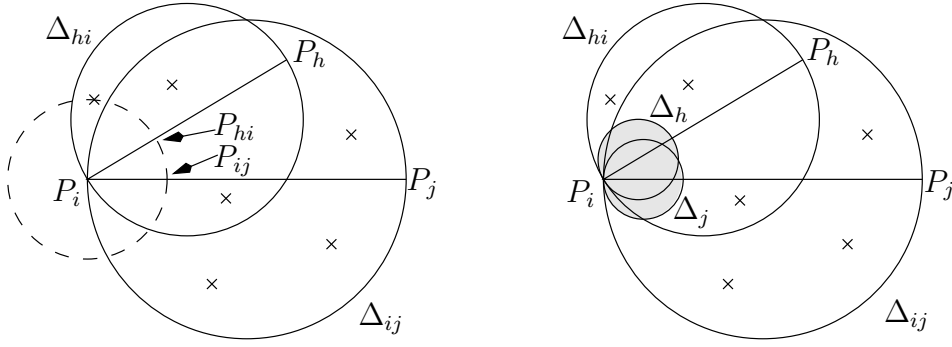


FIG. 2.12 – Insertions sur deux segments formant un angle aigu.

or, d'après la Remarque 1.1, $\Delta_j \subset \Delta_{ij}$ donc

$$\Delta_j \cap \mathcal{S} \subset \Delta_{ij} \cap \mathcal{S} = \mathcal{S}_{ij}$$

de plus, $[P_i P_{ij}]$ étant un diamètre de Δ_j ,

$$(\forall M \in \Delta_j) \quad P_i M \leq P_i P_{ij} = d < d_i$$

or, si $P_i M < d_i$ alors $M \notin \mathcal{S}_{hi}$; par suite,

$$\Delta_j \cap \mathcal{S} \subset \mathcal{S}_{ij} \setminus ((\mathcal{S}_{hi} \cup \mathcal{S}_{ij}) \setminus \{P_i\}) = (\mathcal{S}_{ij} \setminus (\mathcal{S}_{hi} \cup \mathcal{S}_{ij})) \cup (\mathcal{S}_{ij} \cap \{P_i\}) = \emptyset \cup \{P_i\} = \{P_i\}$$

d'où l'on déduit, puisque naturellement $P_i \in \Delta_j \cap \mathcal{S}$, que $\Delta_j \cap \mathcal{S} = \{P_i\}$. Par ailleurs, sachant que $P_{ij} \in \Delta_j$, il ne reste qu'à étudier la position de P_{hi} par rapport à Δ_j . Si $P_{hi} \in \Delta_j$, alors $[P_i P_{hi}] \subset \Delta_j$ puisque P_{ij} est sur le cercle limitant Δ_j ; dès lors que $P_i P_{hi} = d$, diamètre de Δ_j , $[P_i P_{hi}]$ est donc un diamètre de Δ_j , donc $P_{hi} = P_{ij}$ et par suite $\widehat{P_h P_i P_j} = 0$, ce qui contredit l'hypothèse. La première égalité se simplifie donc en

$$\Delta_j \cap \mathcal{S}' = \{P_i\} \cup \{P_{ij}\}$$

ce qui achève la démonstration. \square

Les résultats qui précèdent permettent de prouver que pour toute configuration locale de deux segments concourants, il est possible de proposer une subdivision en segments dont les petits disques ne contiennent aucun point de \mathcal{S} augmenté des points insérés. Pour pouvoir généraliser cette proposition à la totalité de Γ , il convient d'abord de remarquer que les segments issus de deux segments disjoints n'ont d'effets réciproques que jusqu'à un nombre fini d'itérations; c'est précisément l'objet du lemme suivant :

Lemme 2.8. *Pour tout couple (f, f') de segments disjoints et non dégénérés de Γ , un nombre fini de projections orthogonales quelconques de points distincts de f' sur f donne une subdivision de f en segments non dégénérés dont les petits disques associés ne rencontrent pas f' .*

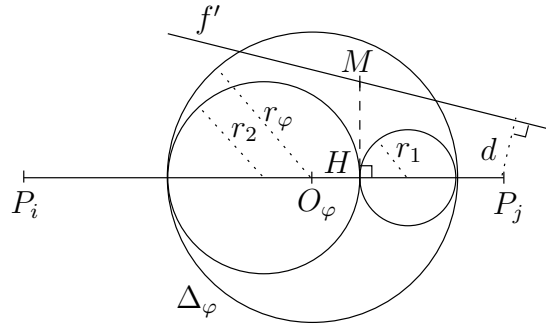


FIG. 2.13 – Segments disjoints, subdivision de l'un par projection et petits disques associés.

Preuve : Convenons que $f = [P_i P_j]$, et considérons un segment $\varphi \subset [P_i P_j]$, obtenu après un nombre fini de subdivisions de f ; on désigne respectivement par Δ_φ , O_φ et r le petit disque de φ , son centre et son rayon. Par ailleurs, on définit la distance d de f à f' par

$$d = \min_{(M,N) \in (f,f')} MN$$

il est donc évident que tout disque centré sur f , de rayon $r < d$, ne rencontre pas f' , et inversement. Si $M \in f' \cap \Delta_\varphi$, en désignant par H le projeté orthogonal de M sur f , il est clair que $H \in \varphi$; on a, de plus,

$$0 < d \leq MH \leq O_\varphi M \leq r < P_i P_j$$

donc

$$0 \leq O_\varphi H = \sqrt{O_\varphi M^2 - MH^2} < \sqrt{P_i P_j^2 - d^2}$$

par suite, les rayons $r_1 = \frac{r - O_\varphi H}{2}$ et $r_2 = \frac{r + O_\varphi H}{2}$ des petits disques associés aux segments obtenus par subdivision de φ de part et d'autre de H vérifient

$$0 < r_1 \leq r_2 < \frac{P_i P_j + \sqrt{P_i P_j^2 - d^2}}{2} = \frac{P_i P_j}{2} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{d^2}{P_i P_j^2}} \right) = \varepsilon P_i P_j$$

avec $0 < \varepsilon < 1$, puisque $0 < d < P_i P_j$, ce qui assure que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon^n = 0$, et donc qu'à partir d'un certain rang n_0 , on a $\varepsilon^n P_i P_j < d$. Pour tout disque nouvellement créé rencontrant f' , il suffit de réitérer le raisonnement, et l'on est donc certain qu'au plus un nombre fini de projections de points de f' sur $[P_i P_j]$ suffit à ce qu'aucun des petits disques associés aux segments subdivisant f ne rencontre f' . \square

Il est clair que le Lemme 2.8 est une condition suffisante, et qu'en fait la disjonction n'est pas requise en général. Il suffit en fait que les petits disques associés à la subdivision de f ne contiennent aucun point de f' qui soit également dans \mathcal{S} augmenté des points insérés.

2.2.2 Un algorithme brutal

Les résultats qui précèdent permettent de proposer un algorithme itératif de subdivisions du champ de contraintes initial Γ , produisant un champ de contraintes final Γ' associé à un nouveau nuage de points \mathcal{S}' , réunion de \mathcal{S} avec l'ensemble des nouveaux points insérés.

On définit, pour tout segment $f = [P_i P_j]$ dont le petit disque contient un point $P_n \in \mathcal{S}$, la fonction **projection** (P_i, P_j, P_n) (Figure 2.9), qui divise f en $[P_i M]$ et $[M P_j]$, où M est la projection orthogonale de P_n sur f . Par ailleurs, la discussion qui précède met en évidence la nécessité d'un traitement spécifique à appliquer au cas des segments adjacents formant un angle aigu, puisque subdiviser l'un peut affecter l'autre. Plus précisément, les angles aigus contenant au moins un segment non admissible doivent être "nettoyés", afin d'éviter une suite de subdivisions alternées qui pourraient entraîner une divergence, en particulier lorsque de nombreux segments convergent en un même sommet. Pour cette raison est introduite la fonction **nettoyage** (P_i, P_j, d) , pour tout réel non nul $d < P_i P_j$, qui subdivise f en deux nouveaux segments $[P_i M]$ et $[M P_j]$ tels que $P_i M = d$, et qui retourne le point M .

L'algorithme proposé requiert en entrée un champ de contraintes Γ ; pour tout segment $[P_i P_j]$, on rappelle que $\mathcal{S}_{ij} = \widehat{\Delta_{ij} \cap \mathcal{S}}$. On convient, lorsque deux segments ϕ et ψ partagent une extrémité P_* , de désigner par $\widehat{\phi P_* \psi}$ la mesure de l'angle de droites qu'ils définissent. Enfin, on note $\Gamma|_{P_*}$ l'ensemble des segments de Γ admettant P_* pour extrémité.

Algorithme 2.1 (Subdivision brutale des segments en dimension 2).

1. *Initialisation* : Tester la Delaunay-admissibilité forte des segments de Γ et constituer le tas $\mathcal{H}(\Gamma)$ de ceux qui ne sont pas fortement-admissibles.
2. Tant que $\mathcal{H}(\Gamma)$ est non vide, faire :
 - (a) Pour chaque segment $f = [P_i P_j]$ de $\mathcal{H}(\Gamma)$, faire :
 - si f ne forme pas d'angle aigu avec ses éventuels segments incidents,
 - i. choisir $P_n \in \mathcal{S}_{ij} \setminus \{P_i, P_j\}$.
 - ii. **projection** (P_i, P_j, P_n) ;
 - sinon, pour chaque extrémité P_* de f en laquelle il existe au moins un angle aigu,
 - i. $\mathcal{L} = \left\{ \phi \in \Gamma|_{P_*} : (\exists \psi \in \Gamma|_{P_*} \setminus \{\phi\}) \widehat{\phi P_* \psi} < \frac{\pi}{2} \right\}$;
 - ii. $d_* = \min MP_*$, $M \in \mathcal{S} \cap \bigcup_{\phi \in \mathcal{L}} \Delta_\phi \setminus \{P_*\}$;
 - iii. fixer $0 < d < d_*$;
 - iv. pour chaque $\phi = [P_* M] \in \mathcal{L}$, **nettoyage** (P_*, M, d) .
 - (b) Mettre à jour \mathcal{S} , Γ et $\mathcal{T}(\Gamma)$.

La liste \mathcal{L} est constituée par tous les segments incidents en P_* , formant un angle aigu avec au moins un autre tel segment. Si plus de trois segments concourent en un point, ce qui est en particulier le cas lorsque Γ est obtenue par discrétisation d'un arc géométrique non simple, plusieurs "paquets" de segments, séparés par des angles aigus, peuvent ainsi être trouvés.

On établit à présent la convergence de cet algorithme grâce au théorème qui suit :

Théorème 2.2. *L'Algorithme 2.1 termine en un nombre fini d'itérations.*

Preuve : Considérons un segment $f \in \Gamma$ qui n'est pas Delaunay-admissible, on désigne respectivement par n et \mathcal{I}_f le nombre de points de \mathcal{S} privé des extrémités de f qui sont contenus dans le petit disque fermé associé à ce segment et l'ensemble, éventuellement vide, des segments de Γ qui sont incidents à f . Le Lemme 2.8 montre qu'en temps fini deux segments disjoints n'ont plus d'effets réciproques sur leur Delaunay-admissibilité, ce qui entraîne qu'après un certain nombre d'itérations, seules les configurations de segments incidents sont susceptibles d'entraîner une divergence. Il suffit donc de n'étudier que ces seuls cas.

1. si f ne forme un angle aigu avec aucun segment de \mathcal{I}_f , alors le Corollaire 2.4 assure qu'en un nombre maximal de n itérations, l'algorithme produit une subdivision de f en segments de type 0, donc fortement Delaunay-admissibles. De plus, le Lemme 2.5 montre que cette partition n'est d'aucun effet sur les segments de \mathcal{I}_f .
2. si f forme en au moins une de ses extrémités, notée P_* , un angle aigu avec au moins un segment de \mathcal{I}_f , alors chaque $\phi_k \in \mathcal{L}$ est partagé en ϕ_k^1 , d'extrémité P_* , et ϕ_k^2 , qui forment entre eux un angle plat, donc obtus. La configuration formée par les ϕ_k^1 est donc à nouveau celle d'une succession d'angles aigus mais, d'après le Lemme 2.6, $\Theta_2(\phi_k^1) = 0$, les ϕ_k^1 sont donc fortement Delaunay-admissibles, ce qui est alors en particulier le cas de f^1 . Quant à f^2 , qui peut éventuellement former un angle aigu en son autre extrémité, au plus un autre tel traitement ramène le problème au cas 1., traité en un nombre fini d'itérations ; l'algorithme produit donc une subdivision de f en segments de type 0, donc fortement Delaunay-admissibles, sans influence sur les segments qui lui sont incidents.

Les angles aigus étant en nombre fini et fixé, puisque les subdivisions ne créent pas d'autres angles que des angles plats, le problème sera au plus ramené, en un nombre fini d'itérations, à celui de segments non fortement Delaunay-admissibles ne formant avec leurs incidents que des angles obtus ou droits, l'algorithme terminant alors après un nombre fini d'itérations. \square

L'Algorithme 2.1 est robuste, mais coûteux en termes d'insertion de points, en particulier lorsque plusieurs segments convergent en un même sommet, comme le montre l'exemple suivant.

Le champ de contraintes Γ présenté Figure 2.14-(i) n'est pas fortement Delaunay-admissible ; en effet, les segments $[P_2P_3]$ et $[P_3P_4]$ n'apparaissent pas dans le recouvrement de Delaunay de l'enveloppe convexe des sept points constituant \mathcal{S} (Figure 2.14-(ii)).

L'Algorithme 2.1 redéfinit Γ en Γ' , nouveau champ de contraintes associé à \mathcal{S}' , ensemble de points créé par ajout de $\{P_7, P_8, P_9, P_{10}\}$ à \mathcal{S} . Comme le montre la Figure 2.15-(i), la fonction **nettoyage** a été utilisée autour du point P_3 , conformément au traitement prévu pour les angles aigus. Puisque Γ' est fortement Delaunay-admissible, elle apparaît effectivement dans la triangulation de Delaunay de l'enveloppe convexe de \mathcal{S}' présentée Figure 2.15-(ii).

On est cependant légitimement fondé à s'interroger sur le nombre de nouveaux points insérés pour traiter un cas aussi simple. En particulier, de simples applications itérées de la fonction **projection** convergent également vers une contrainte Γ'' fortement Delaunay-admissible, qui de surcroît requiert un nombre inférieur d'insertions de points. On voit en effet, Figure 2.16, que les deux points P_7 et P_8 suffisent à assurer une satisfaction faible de Γ .

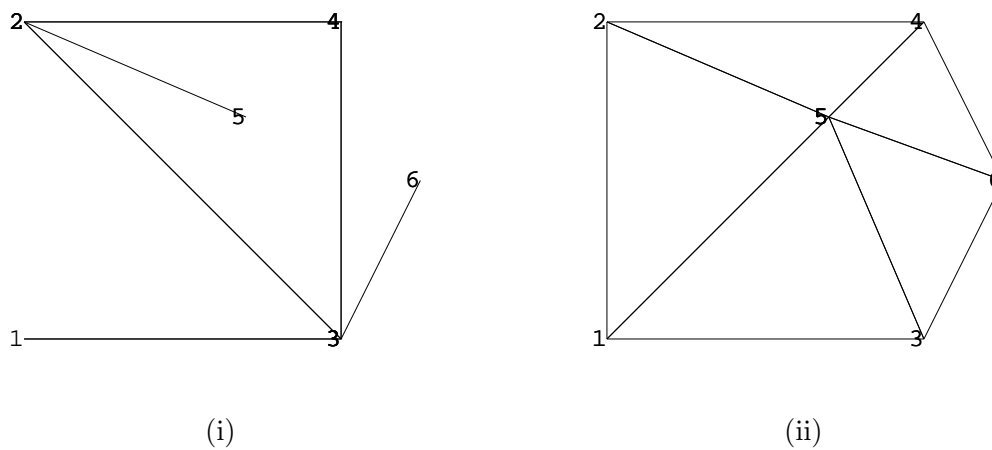


FIG. 2.14 – (i) : contrainte initiale Γ , (ii) : triangulation de Delaunay de $\text{Conv}(S)$.

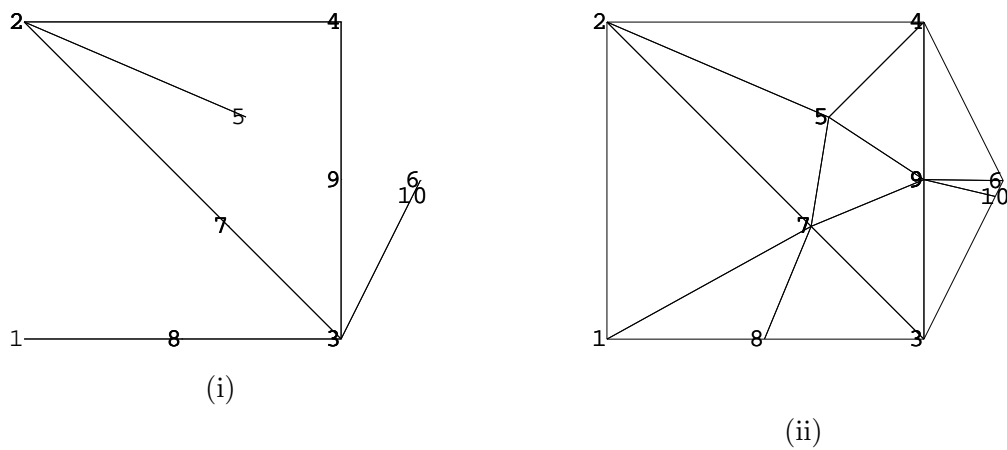


FIG. 2.15 – (i) : contrainte redéfinie Γ' , (ii) : triangulation de Delaunay de $\text{Conv}(S')$.

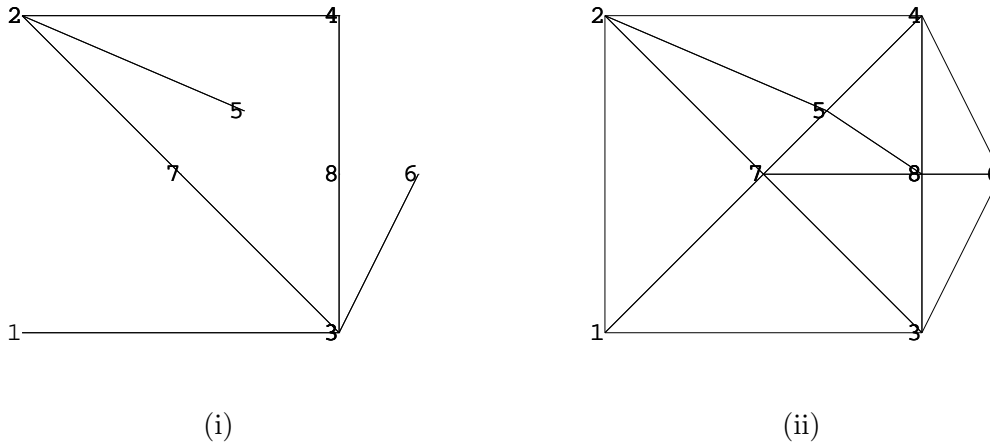


FIG. 2.16 – (i) : contrainte redéfinie Γ'' , (ii) : triangulation de Delaunay de $\text{Conv}(\mathcal{S}'')$.

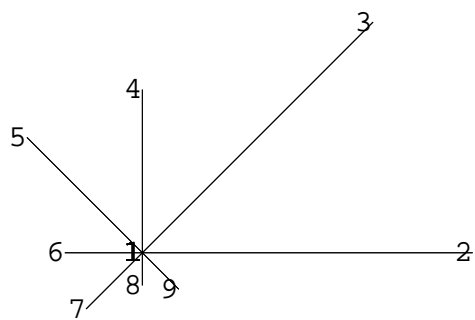
Il ressort de l'étude de cet exemple que si l'Algorithme 2.1 est robuste, comme le montre le Théorème 2.2, il est en revanche trop brutal. Plus précisément, la condition suffisante de convergence pour les champs de contraintes comportant des angles aigus introduite par le Lemme 2.7 est beaucoup trop forte. Or, un algorithme appliquant itérativement la fonction **projection** ne converge pas, comme le montre le contre-exemple présenté Figure 2.17 : la contrainte initiale Γ , (i), n'est pas fortement Delaunay-admissible, (ii), mais l'Algorithme 2.1 permet une satisfaction faible de Γ , (iii), par nettoyage autour du point P_1 . En revanche, le même algorithme, privé de son traitement spécifique des angles aigus par **projection** ne converge pas, comme l'illustre la Figure 2.18 : après chaque "tour" de P_1 , le même motif est retrouvé, aboutissant rapidement, au regard de la précision numérique, à la création d'une singularité. On est donc amené à s'interroger sur une condition suffisante plus faible que la simple existence d'un angle aigu, limitant l'emploi de la fonction **nettoyage** tout en conservant la robustesse de l'algorithme.

2.2.3 Un algorithme plus subtil

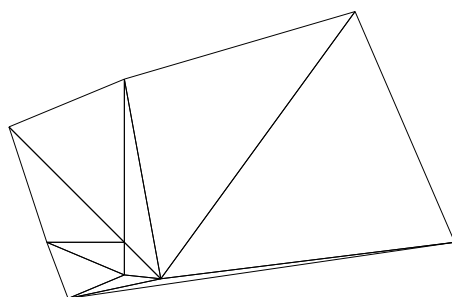
Préalablement à l'introduction d'un tel algorithme, on introduit le vocabulaire suivant :

Définition 2.4. *Si un point $P_i \in \mathcal{S}$ est extrémité d'au moins deux segments de Γ formant un angle aigu, on appelle nœud associé à P_i l'ensemble de tous les segments de la contrainte concourant en ce point, qualifié de centre nodal. S'il est possible de trouver une suite de ces segments, formée de telle sorte que deux termes successifs forment toujours un angle aigu, qui soit cyclique, on dit que ce nœud est fermé. Dans le cas contraire, il est qualifié d'ouvert. Enfin, on appelle support du nœud associé à P_i l'ensemble minimal de demi-droites d'origine P_i contenant ce nœud.*

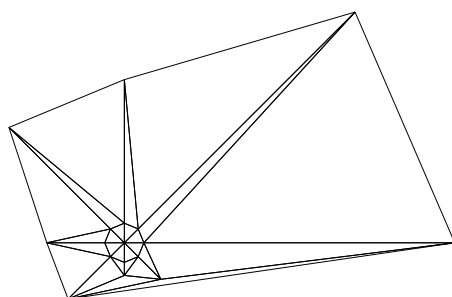
Il est à noter que la configuration formée par deux segments partageant une extrémité ne constitue un nœud que si l'angle qu'ils forment est aigu. Par ailleurs, il est clair que pour qu'un nœud soit fermé, il est nécessaire qu'au moins cinq arêtes concourent en son centre.



(i)



(ii)



(iii)

FIG. 2.17 – (i) : contrainte initiale Γ associée à \mathcal{S} , (ii) et (iii) : triangulations de Delaunay respectives de $\text{Conv}(\mathcal{S})$ et $\text{Conv}(\mathcal{S}')$.

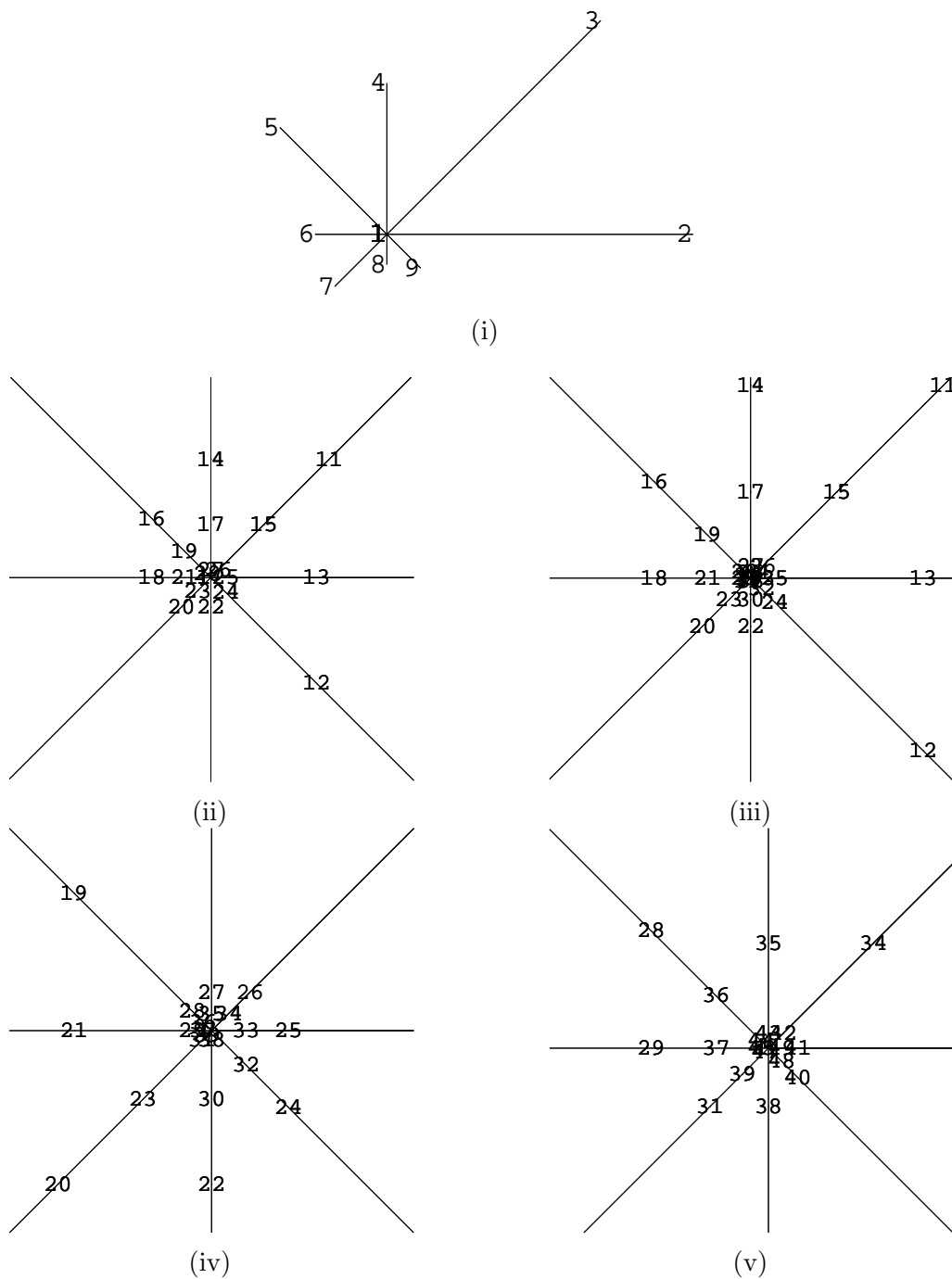


FIG. 2.18 – (i) : contrainte initiale Γ , (ii) à (v) : projections seules, agrandissements successifs autour de P_1 .

Le but des quelques résultats qui suivent est d'établir que pour un nœud ouvert, l'emploi de la fonction **nettoyage** est inutile. On prouve d'abord qu'en un nombre fini d'itérations, les points de \mathcal{S} contenus dans la réunion des petits disques des segments constitutifs d'un nœud se trouvent sur le support de celui-ci. On note $\mathcal{S}_0 = \mathcal{S}$, et l'on convient de désigner par \mathcal{S}_n le nuage de points obtenus après n applications de **projection** ou **nettoyage**.

Lemme 2.9. *Soit \mathcal{N} le nœud associé à un point $P_i \in \mathcal{S}$, de support η . Pour toute suite d'applications quelconques de **projection** sur les segments reliés à P_i , il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ à partir duquel les petits disques des segments de \mathcal{N}_n , nœud associé à P_i et de support η produit à l'itération n , ne contiennent pas de points de $\mathcal{S}_n \setminus \eta$.*

Preuve : Soit une suite quelconque d'applications de **projection** sur les segments du nœud de support η . D'après le Lemme 2.8, après un nombre fini de projections orthogonales, les petits disques associés aux segments d'extrémité P_i ne rencontrent plus les segments disjoints de ce point. Par suite, les points insérés sur ces derniers ne sont dans aucun des petits disques du nœud associé à P_i , à partir d'un certain rang m . Désignons par Q^* le point de $\mathcal{S}_m \setminus \eta$ le plus proche de P_i . Une démonstration similaire à celle du Lemme 2.8 montre que la suite des (l_n^i) , longueur du plus grand des segments reliés à P_i à l'itération n , tend vers 0 et par suite, qu'à partir d'un certain rang $n_0 \geq m$ on a $l_n^i < P_i Q^*$. Ainsi, pour tout segment ϕ_n d'extrémité P_i à l'itération $n \geq n_0$, on a $Q^* \notin \Delta_{\phi_n}$, donc pour tout $M \in \mathcal{S}_m \setminus \eta$, nécessairement $M \notin \Delta_{\phi_n}$. Or, tout Δ_{ϕ_n} est inclus dans un Δ_{ϕ_m} , et il a été montré qu'aucun des points de $\mathcal{S}_{n_0} \setminus \mathcal{S}_m$ n'appartient à η , ce qui entraîne qu'aucun des Δ_{ϕ_n} , pour $n \geq n_0$, ne contient de point de $\mathcal{S}_m \setminus \eta$, d'où le résultat. \square

Le Lemme 2.9 a pour importante conséquence la certitude qu'en au plus un nombre fini d'itérations de la fonction **projection** sur les segments reliés à un centre nodal, il suffit d'examiner les positions relatives des petits disques des segments du nœud et des extrémités de ces segments. En particulier, dans le cas le plus simple de nœud, *i.e.*, lorsque celui-ci est composé de deux segments formant un angle aigu, on montre que la fonction **nettoyage** n'est pas nécessaire à la convergence de l'Algorithme 2.1.

Lemme 2.10. *Si le champ de contraintes Γ est simple, c'est-à-dire si chaque point de \mathcal{S} est extrémité d'au plus deux segments de Γ , alors des applications itérées de **projection**, telles qu'elles sont décrites dans l'Algorithme 2.1 terminent en un temps fini.*

Preuve : En raison des Théorème 2.2 et Lemme 2.9, il suffit de prouver qu'une configuration formée par un nœud simple ne peut conduire l'algorithme à la divergence. Considérons un nœud simple quelconque de Γ , soit une configuration de deux segments formant un angle aigu en un point P_i . D'après le Lemme 2.9, on a la certitude que pour toute suite d'applications de **projection** sur ce nœud, on est ramené en un nombre fini d'itérations à l'une des deux configurations de la Figure 2.19. Dans le cas correspondant à (i), les deux segments du nœud sont de type 0, donc tous deux fortement Delaunay-admissibles. La configuration représentée en (ii) est sensiblement plus complexe : $[P_i P_h]$ est de type 0, alors que $[P_i P_j]$ est de type 1.0 ou 1.1. Dans le premier cas, les deux segments sont fortement Delaunay-admissibles. Dans le

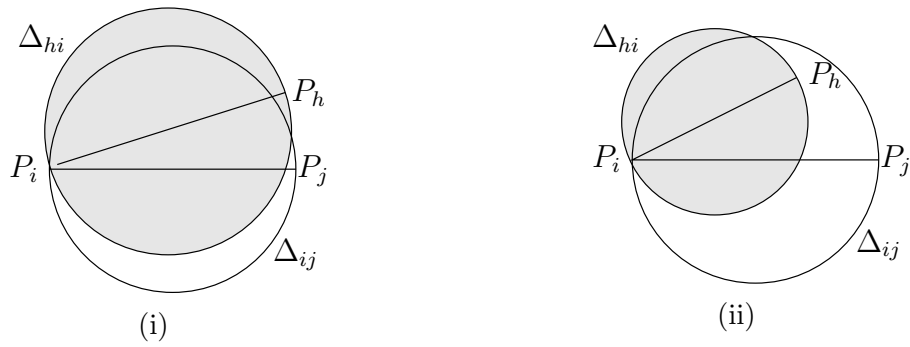


FIG. 2.19 – Nœud simple : configuration formée par un seul angle aigu.

second cas, P_h sera projeté orthogonalement en un nouveau point M , intersection de $[P_i P_j]$ et de \mathcal{C}_{ih} . Ne s'intéressant alors, selon les Lemme 2.5 et Lemme 2.8, qu'aux segments constitutifs du nœud, *i.e.*, $[P_i P_h]$ et $[P_i M]$, il est clair que le premier est de type 1.0 (à cause du point M), alors que le second est de type 0, ce qui entraîne leur forte Delaunay-admissibilité. \square

L'exemple présenté Figure 2.20 illustre le Lemme 2.10 : le champ de contraintes Γ considéré n'est pas fortement Delaunay-admissible, puisque ses segments $[P_2 P_3]$ et $[P_5 P_6]$ manquent dans la triangulation de Delaunay de son enveloppe convexe. La succession d'angles aigus est donc un cas typique d'inutilité de la fonction **nettoyage**.

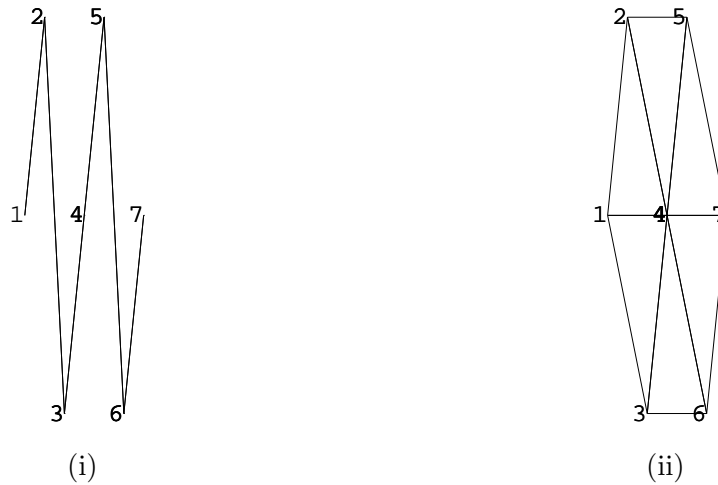


FIG. 2.20 – Contrainte non fortement Delaunay-admissible. (i) : contrainte initiale, (ii) : triangulation de Delaunay.

Comme le montre la Figure 2.20, l'Algorithme 2.1, privé du traitement des nœuds par la fonction **nettoyage**, redéfinit *a priori* Γ en Γ' , relativement à un ensemble de points augmenté. Les points insérés (P_8 et P_9) assurent la satisfaction faible de Γ , puisque ses segments manquants (au sens de la satisfaction forte) sont représentés par leurs subdivisions.

Afin de limiter encore l'emploi de **projection**, la condition suffisante de convergence est à

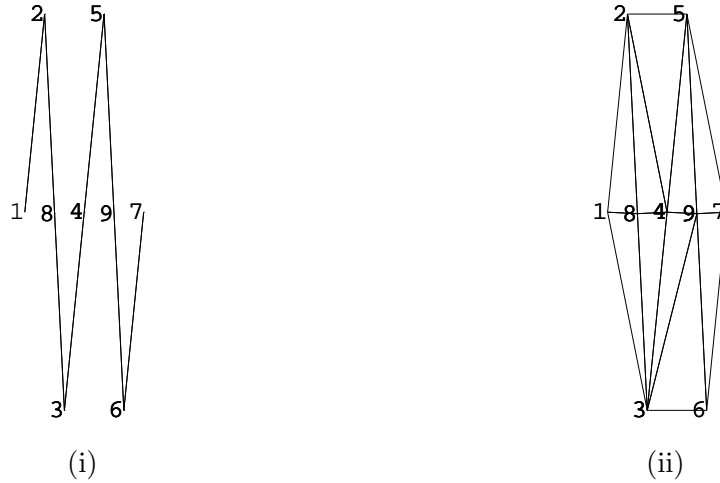


FIG. 2.21 – Contrainte fortement Delaunay-admissible. (i) : contrainte redéfinie, (ii) : triangulation de Delaunay.

nouveau affaiblie : un algorithme n'employant **nettoyage** que sur les nœuds fermés est proposé, et sa convergence établie. On suppose donné en entrée un champ de contraintes Γ ; pour tout segment $[P_i P_j]$, on rappelle que $\mathcal{S}_{ij} = \Delta_{ij} \cap \mathcal{S}$.

Algorithme 2.2 (Subdivision des segments en dimension 2).

1. *Initialisation* :

- (a) Tester la Delaunay-admissibilité forte des segments de Γ et constituer le tas $\mathcal{H}(\Gamma)$ de ceux qui ne sont pas fortement-admissibles ;
- (b) Détecter les nœuds fermés de Γ .

2. Tant que $\mathcal{H}(\Gamma)$ est non vide, faire :

- (a) Pour chaque segment $f = [P_i P_j]$ de $\mathcal{H}(\Gamma)$, faire :
 - si l'une au moins des extrémités P_* de f est un centre nodal, faire :
 - i. constituer le nœud \mathcal{N} associé à P_* ;
 - ii. $d_* = \min MP_*$, $M \in \mathcal{S} \cap \bigcup_{\phi \in \mathcal{N}} \Delta_\phi \setminus \{P_*\}$;
 - iii. fixer $0 < d < d_*$;
 - iv. pour chaque $[P_* M] \in \mathcal{N}$, **nettoyage**(P_* , M , d).
 - v. mettre à jour \mathcal{S} et Γ .
 - sinon, faire :
 - i. choisir $P_n \in \mathcal{S}_{ij} \setminus \{P_i, P_j\}$;
 - ii. **projection**(P_i, P_j, P_n).
 - iii. mettre à jour \mathcal{S} et Γ .

(b) Mettre à jour $\mathcal{T}(\Gamma)$.

Théorème 2.3. *L'Algorithme 2.2 termine en un nombre fini d'itérations.*

Preuve : Il suffit d'itérer le raisonnement proposé pour la démonstration du Lemme 2.10, qui termine nécessairement puisque, pour tout nœud ouvert, le nombre de projections récursives dans le même sens de parcours autour du centre nodal est fini. □

L'implémentation de cet algorithme utilise quelques astuces, afin d'accroître sa rapidité. Un tri par boîtes³ est en particulier utilisé, afin d'optimiser la recherche des points de \mathcal{S} contenus dans un petit disque donné. Par ailleurs, d est fixée à $0,6d_*$, ce qui est un choix parfaitement arbitraire, mais pour lequel on constate une nette amélioration globale des résultats corollairement à son emploi.

2.3 Exemples d'illustration

Quelques exemples de redéfinitions *a priori* de champs de contraintes sont présentés ici, ainsi que des tableaux donnant les principales caractéristiques des contraintes avant et après redéfinition d'une part, de leurs triangulations de Delaunay d'autre part. On désigne par Algorithme 2.1' une version modifiée de l'Algorithme 2.1, qui limite l'emploi de la fonction **nettoyage** aux nœuds formés de plus de deux segments incidents. Comme le prouve le Lemme 2.3, ceci conduit à employer cette fonction "plus" que ne l'exige la convergence ; néanmoins, comme le montrent certains des exemples qui suivent, cette sur-utilisation sur des nœuds ouverts à trois segments ou plus peut parfois améliorer la vitesse de convergence.

Par souci de concision, si Γ_i est un champ de contraintes, on désignera par Γ'_i et Γ''_i ses redéfinitions respectives par les Algorithmes 2.2 et 2.1' ; ces contraintes seront naturellement associées respectivement aux ensembles de points \mathcal{S}_i , \mathcal{S}'_i et \mathcal{S}''_i . Enfin, on désignera naturellement par N_p , N'_p , N''_p , N_f , N'_f et N''_f les nombre de points et de segments correspondants.

	N_p	N_f	N'_p	N'_f	N''_p	N''_f
1	8	7	17	16	16	15
2	21	20	174	173	134	133
3	22	24	58	60	81	83
4	19	19	22	22	22	22
5	18	19	45	46	45	46

TAB. 2.1 – Statistiques relatives à la redéfinition *a priori* de la contrainte.

Les temps de calcul nécessaires sur un Pentium II à 300 MHz sont tous inférieurs à une seconde. Concernant les triangulations de Delaunay des enveloppes convexes, N_t , N'_t et N''_t désignent les nombres de triangles construits respectivement pour $\text{Conv}(\mathcal{S}_i)$, $\text{Conv}(\mathcal{S}'_i)$ et $\text{Conv}(\mathcal{S}''_i)$.

³Méthode plus connue sous sa dénomination en langue anglaise de *bucket-sorting*.

On note N_m le nombre de segments de la contrainte initiale Γ_i absents de la triangulation de Delaunay de $\text{Conv}(\mathcal{S}_i)$; cette quantité n'est pas présentée pour les triangulations des nuages de points associés aux contraintes redéfinies, puisqu'elle vaut alors toujours 0. La *qualité* d'un triangle est donnée par la formule suivante :

$$Q_t = \alpha \frac{h_t}{r_t}$$

où r_t , h_t et α désignent respectivement le rayon du cercle inscrit, la longueur maximale de ses arêtes et une constante choisie de telle sorte qu'un triangle équilatéral soit de dégradation unité⁴. Ainsi définie, la qualité d'un triangle appartient à $[1 ; +\infty]$, et l'on désignera par Q'_+ , Q'_- , \overline{Q}' , Q''_+ , Q''_- et \overline{Q}'' respectivement la meilleure, la plus mauvaise et la moyenne des qualités.

	N_t	N_m	N'_t	Q'_+	Q'_-	\overline{Q}'	N''_t	Q''_+	Q''_-	\overline{Q}''
1	9	3	27	1,01	14,2	2,54	25	1,01	14,2	2,89
2	33	15	339	1,06	151	5,48	258	1,06	$2,69 \cdot 10^8$	$1,04 \cdot 10^6$
3	34	13	106	1,09	24,8	3,10	152	1,05	$7,85 \cdot 10^6$	$8,37 \cdot 10^4$
4	30	2	36	1,04	64,1	8,66	36	1,04	64,1	8,66
5	27	8	81	1,02	36,4	3,92	81	1,02	36,4	3,92

TAB. 2.2 – Statistiques relatives aux Delaunay-triangulations des ensembles de points.

Les Figures 2.22-(i), 2.23-(i) et 2.24-(i) présentent trois exemples de champs de contraintes, respectivement Γ_1 , Γ_2 et Γ_3 , qui ne sont pas fortement Delaunay-admissibles relativement aux ensembles de points initiaux, comme le montrent les sous-figures (ii). Après redéfinitions par les deux algorithmes, les triangulations des enveloppes convexes des nouveaux nuages de points construisent les nouvelles contraintes, ce qui assure une satisfaction simple des contraintes initiales. Il est très clair que les résultats obtenus par les deux algorithmes diffèrent notablement dans chaque cas. Par ailleurs, bien qu'il ait été établi que **nettoyage** ne soit pas nécessaire pour les nœuds ouverts, on voit ici que la simple interdiction de son emploi aux nœuds de moins de trois segments peut parfois conduire à de meilleurs résultats que ceux de l'Algorithme 2.2, en termes de nombre de points créés (Tableau 2.1). En revanche, si l'on considère la qualité des triangulations construites, force est de constater que ce dernier algorithme conduit à de très mauvais résultats (Tableau 2.2). Cette dernière remarque mérite cependant d'être nuancée, dans la mesure où le choix de la distance d du Lemme 2.7 n'a pas été discuté, sa valeur ayant été arbitrairement fixée à la moitié de d_i . Par conséquent, d'inévitables chocs de taille se produisent ; une détermination plus fine de d améliorerait vraisemblablement les résultats. Il est enfin à remarquer, Figure 2.23, que lorsqu'un grand nombre de segments convergent en un même centre de nœud ouvert, les itérations successives de **projection** tendent à reproduire le motif obtenu en une seule application de **nettoyage**, ce qui explique pourquoi l'Algorithme 2.1' est dans ce cas le plus rapide.

La contrainte Γ_4 (Figure 2.25) est obtenue par discrétisation d'un arc simple constituant la frontière d'une partie à deux composantes connexes de \mathbb{R}^2 . La triangulation de l'enveloppe

⁴Un calcul élémentaire montre que $\alpha = \frac{\sqrt{3}}{6}$.

convexe des points de \mathcal{S}_4 n'est pas fortement Delaunay-admissible. L'arc discrétisé étant simple, la contrainte ne contient donc pas de nœud à plus de deux segments et les deux algorithmes aboutissent par suite au même résultat, à savoir une nouvelle contrainte fortement Delaunay-admissible.

Le dernier exemple proposé est constitué par la contrainte Γ_5 , Figure 2.26, qui comporte deux nœuds fermés. Ici encore, les deux algorithmes obtiennent la même solution, mais pour une raison différente : les deux nœuds sont d'une part fermés, d'autre part à plus de deux segments, donc nettoyés par l'Algorithme 2.2 comme par l'Algorithme 2.1.

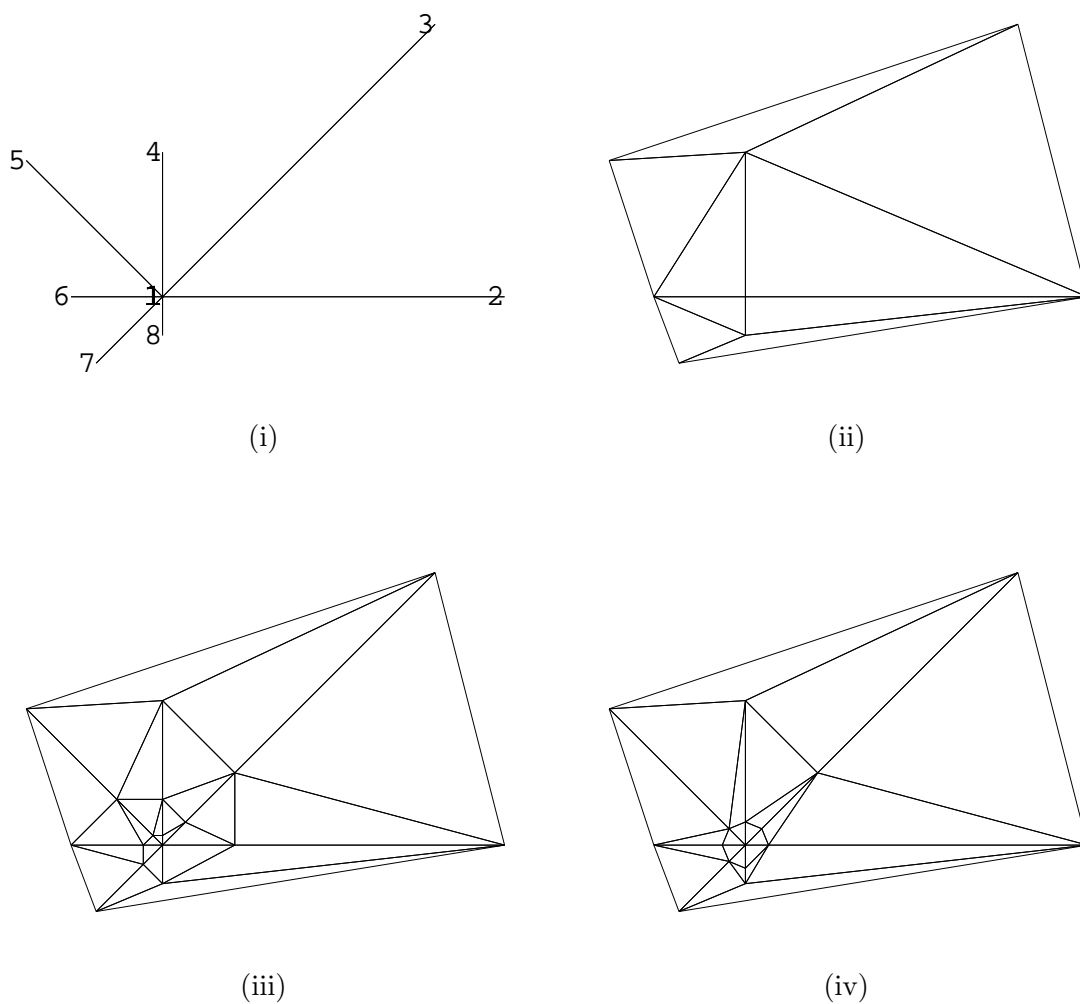


FIG. 2.22 – Exemple de redéfinition a priori d'un champ de contraintes. (i) : la contrainte Γ_1 associée à \mathcal{S}_1 , (ii), (iii) et (iv) : triangulations de Delaunay respectives de $\text{Conv}(\mathcal{S}_1)$, $\text{Conv}(\mathcal{S}'_1)$ et $\text{Conv}(\mathcal{S}''_1)$.

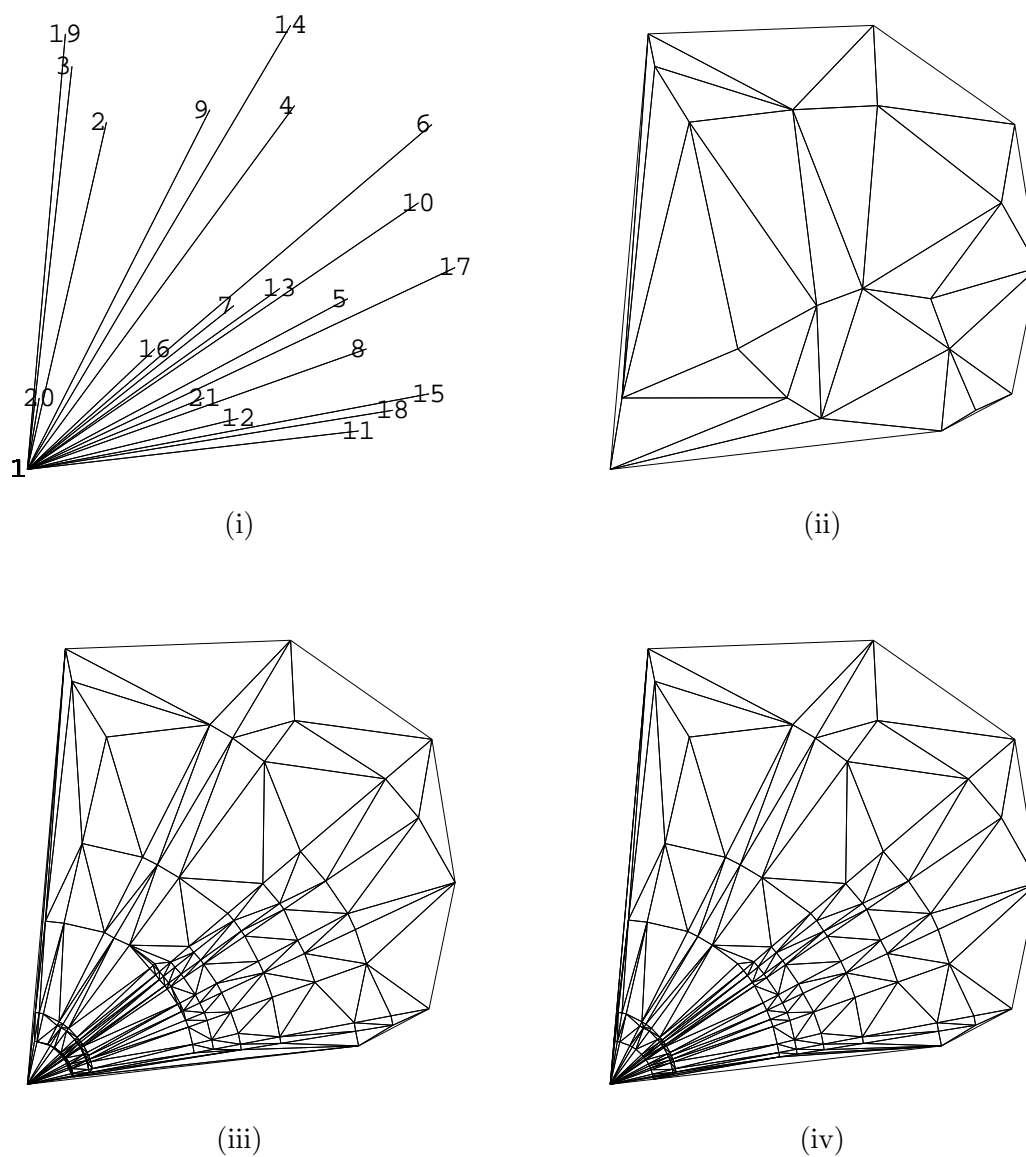


FIG. 2.23 – Exemple de redéfinition a priori d'un champ de contraintes. (i) : la contrainte Γ_2 associée à \mathcal{S}_2 , (ii), (iii) et (iv) : triangulations de Delaunay respectives de $\text{Conv}(\mathcal{S}_2)$, $\text{Conv}(\mathcal{S}'_2)$ et $\text{Conv}(\mathcal{S}''_2)$.

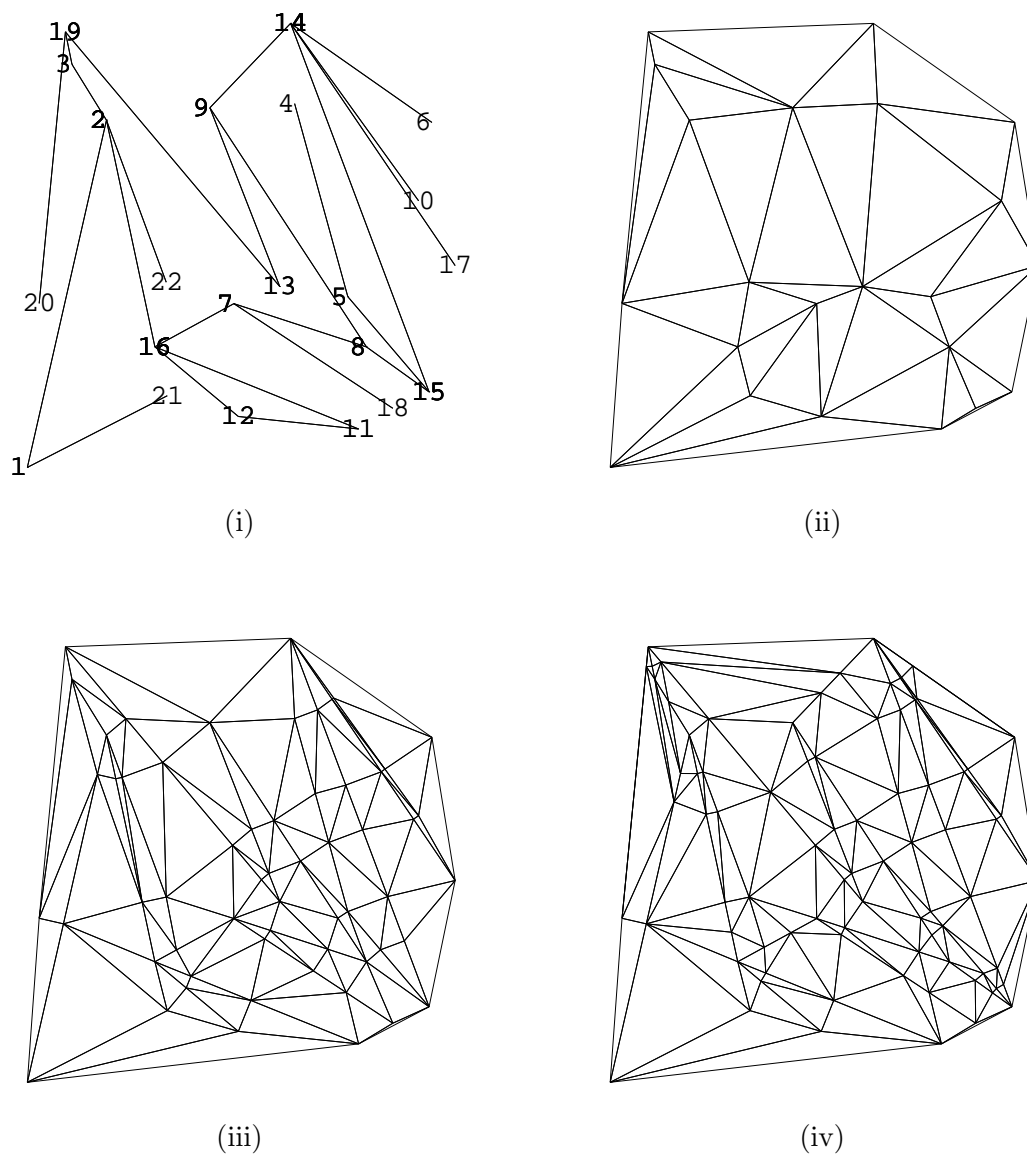
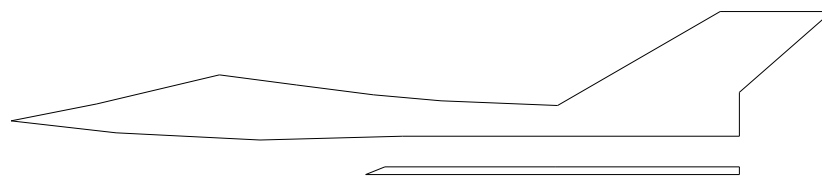
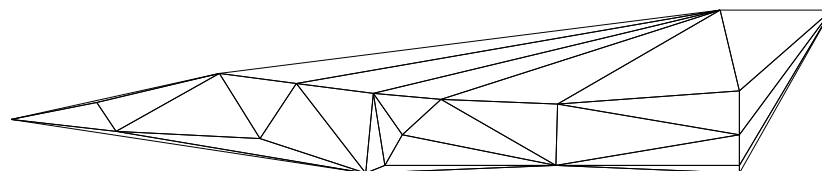


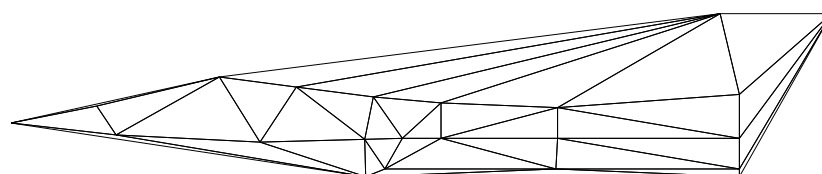
FIG. 2.24 – Exemple de redéfinition a priori d'un champ de contraintes. (i) : la contrainte Γ_3 associée à \mathcal{S}_3 , (ii), (iii) et (iv) : triangulations de Delaunay respectives de $\text{Conv}(\mathcal{S}_3)$, $\text{Conv}(\mathcal{S}'_3)$ et $\text{Conv}(\mathcal{S}''_3)$.



(i)

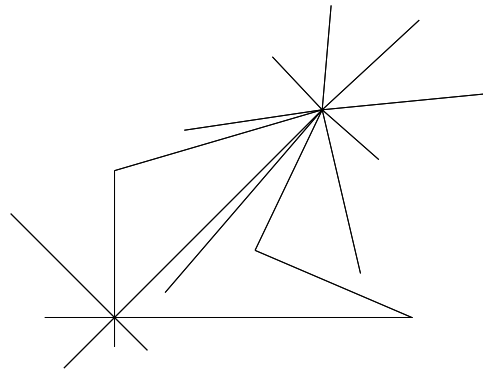


(ii)

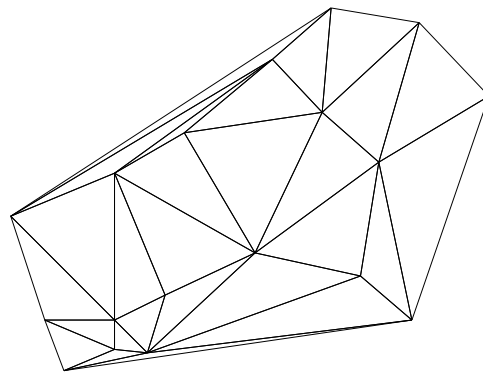


(iii)

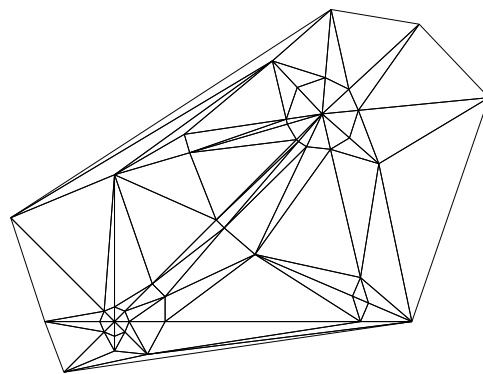
FIG. 2.25 – Exemple de redéfinition a priori d'une contrainte de frontière. (i) : Frontière devant être respectée, (ii) et (iii) : triangulations de Delaunay de $\text{Conv}(\mathcal{S}_3)$ et $\text{Conv}(\mathcal{S}'_3)$.



(i)



(ii)



(iii)

FIG. 2.26 – Exemple de redéfinition a priori d'une contrainte de frontière. (i) : la contrainte Γ_5 associée à \mathcal{S}_5 , (ii) et (iii) : triangulations de Delaunay de $\text{Conv}(\mathcal{S}_5)$ et $\text{Conv}(\mathcal{S}'_5)$.

Chapitre 3

Delaunay-admissibilité en dimension 3 : aspects géométriques

L'objet de ce chapitre est d'étudier les conditions de forte Delaunay-admissibilité *a priori* en dimension 3. Plus précisément, une classification du même type qu'en dimension 2 est proposée pour les arêtes de faces triangulaires, ainsi qu'une autre pour les segments. Par ailleurs, les relations entre Delaunay-admissibilité d'une face triangulaire et Delaunay-admissibilité de ses trois arêtes sont étudiées.

Dans tout ce chapitre, \mathcal{S} désigne un ensemble fini de points distincts de \mathbb{R}^3 . Dans un souci de concision, l'appellation *facette* est utilisée pour désigner les faces triangulaires.

3.1 Facettes

L'objet de cette section est d'introduire une classification *a priori* basée sur des propriétés géométriques des facettes, puis d'en déduire des conditions nécessaires et suffisantes de forte Delaunay-admissibilité. Γ désigne ici un champ de contraintes constitué de facettes dont les sommets sont dans \mathcal{S} .

3.1.1 Classification

L'indicatrice Θ précédemment introduite en dimension 2 est généralisée dans ce paragraphe aux facettes en dimension 3. Pour ce faire, on introduit la définition suivante :

Définition 3.1. *On appelle petite sphère (respectivement petite boule) d'un triangle non dégénéré la sphère (respectivement la boule) ayant pour grand cercle le cercle circonscrit à ce triangle. Par extension, on parlera de petite boule ou de petite sphère d'une facette.*

Remarquons que la petite sphère est la plus petite des sphères passant par les trois sommets du triangle. En revanche, sa petite boule n'est la plus petite des boules le contenant que dans le cas où il est aigu (*i.e.*, aucun de ses trois angles n'est obtus)¹. On convient de noter $\partial\mathcal{B}_{ijk}$

¹Un triangle aigu est parfois appelé *auto-centré*, dans la mesure où le centre de son cercle circonscrit lui est intérieur.

(respectivement \mathcal{B}_{ijk}) la petite sphère (respectivement la petite boule) fermée associée à la facette limitée par le triangle non dégénéré $P_iP_jP_k$. Similairement à ce qui a été introduit en dimension 2, on pose $\mathcal{S}_{ijk} = \mathcal{B}_{ijk} \cap \mathcal{S}$.

Définition 3.2. Soit f une facette dont les sommets P_i, P_j et P_k sont des points de \mathcal{S} deux à deux distincts. On convient de noter \mathcal{H}_{ijk}^+ et \mathcal{H}_{ijk}^- les deux demi-espaces ouverts limités par le plan $(P_iP_jP_k) = \mathcal{H}_{ijk}$. On définit alors le type de f , noté $\Theta_3(f)$, de la façon suivante :

- Si $\mathcal{S}_{ijk} = \{P_i, P_j, P_k\}$, alors $\Theta_3(f) = 0$ (Figure 3.1).
- Si $\mathcal{S}_{ijk} \setminus \{P_i, P_j, P_k\} = \mathcal{E} \neq \emptyset$, tel que $\mathcal{E} \subset \mathcal{H}_{ijk}^+$ ou $\mathcal{E} \subset \mathcal{H}_{ijk}^-$, on désigne par Q^* un point de \mathcal{E} tel que la boule \mathcal{B}_t circonscrite au tétraèdre $t = P_iP_jP_kQ^*$ soit de rayon maximal ;
- si $Q^* \in \partial\mathcal{B}_{ijk}$ ou si $\mathcal{B}_t \cap \mathcal{S} = \{P_i, P_j, P_k, Q^*\}$, alors $\Theta_3(f) = 1.0$ (Figure 3.2) ;
- si $\overset{\circ}{\mathcal{B}}_t \cap \mathcal{S} \neq \emptyset$, alors $\Theta_3(f) = 1.1$ (Figure 3.3) ;
- si $Q^* \notin \partial\mathcal{B}_{ijk}$ et $\overset{\circ}{\mathcal{B}}_t \cap \mathcal{S} = \emptyset$ et $(\mathcal{B}_t \cap \mathcal{S}) \setminus \{P_i, P_j, P_k, Q^*\} = \mathcal{F} \neq \emptyset$, alors :
 - si $\mathcal{F} \cup \{Q^*\} \subset \mathcal{H}_{ijk}^+$ ou si $\mathcal{F} \cup \{Q^*\} \subset \mathcal{H}_{ijk}^-$, alors $\Theta_3(f) = 1.2.0$ (Figure 3.4) ;
 - si $(\mathcal{F} \cup \{Q^*\}) \cap \mathcal{H}_{ijk}^+ \neq \emptyset$ et $(\mathcal{F} \cup \{Q^*\}) \cap \mathcal{H}_{ijk}^- \neq \emptyset$, alors $\Theta_3(f) = 1.2.1$ (Figure 3.5).
- Si $\mathcal{S}_{ijk} \cap \mathcal{H}_{ijk} = \{P_i, P_j, P_k\}$, $\mathcal{S}_{ijk} \cap \mathcal{H}_{ijk}^+ \neq \emptyset$ et $\mathcal{S}_{ijk} \cap \mathcal{H}_{ijk}^- \neq \emptyset$, alors $\Theta_3(f) = 2$ (Figure 3.6).
- Si $\mathcal{S}_{ijk} \cap \mathcal{H}_{ijk} \neq \{P_i, P_j, P_k\}$, alors $\Theta_3(f) = 3$ (Figure 3.7).

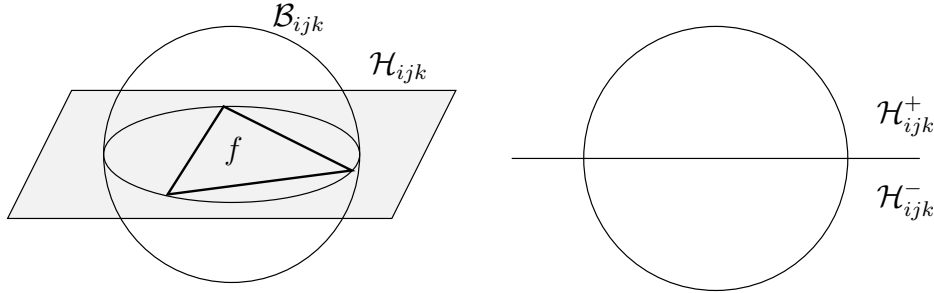


FIG. 3.1 – Cas $\Theta_3(f) = 0$: représentation perspective et projection sur un plan perpendiculaire à \mathcal{H}_{ijk} .

On remarquera que les deux cas conduisant à $\Theta_3(f) = 1.0$ admettent une unique situation commune, pour $Q^* \in \partial\mathcal{B}_{ijk}$ et $\mathcal{E} = \{Q^*\}$.

Par ailleurs, si $\Theta_3(f) = 1.1$, on montre aisément que $Q^* \notin \partial\mathcal{B}_{ijk}$. En effet, si $Q^* \in \partial\mathcal{B}_{ijk}$, alors $\mathcal{E} \subset \partial\mathcal{B}_{ijk}$, donc $\mathcal{B}_t = \mathcal{B}_{ijk}$. Or, $\overset{\circ}{\mathcal{B}}_t \cap \mathcal{S} \neq \emptyset$, donc

$$\overset{\circ}{\mathcal{B}}_t \cap \mathcal{S} = \overset{\circ}{\mathcal{B}}_{ijk} \cap \mathcal{S} \neq \emptyset$$

ce qui contredit l'hypothèse selon laquelle Q^* est le point de \mathcal{E} tel que \mathcal{B}_t soit de rayon maximal, et par suite, $Q^* \notin \partial\mathcal{B}_{ijk}$.

Enfin, pour $\Theta_3(f) = 1.1$, l'importante propriété qui suit entraîne en particulier que Q^* est le seul point parmi les Q_s de \mathcal{E} pour lequel la boule ouverte circonscrite à $P_iP_jP_kQ_s$ puisse être vide.

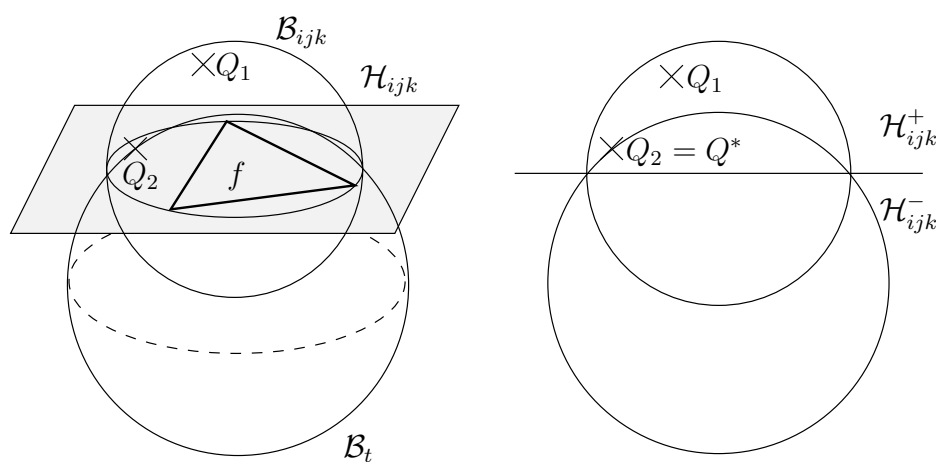


FIG. 3.2 – Cas $\Theta_3(f) = 1.0$: représentation perspective et projection sur un plan perpendiculaire à \mathcal{H}_{ijk} .

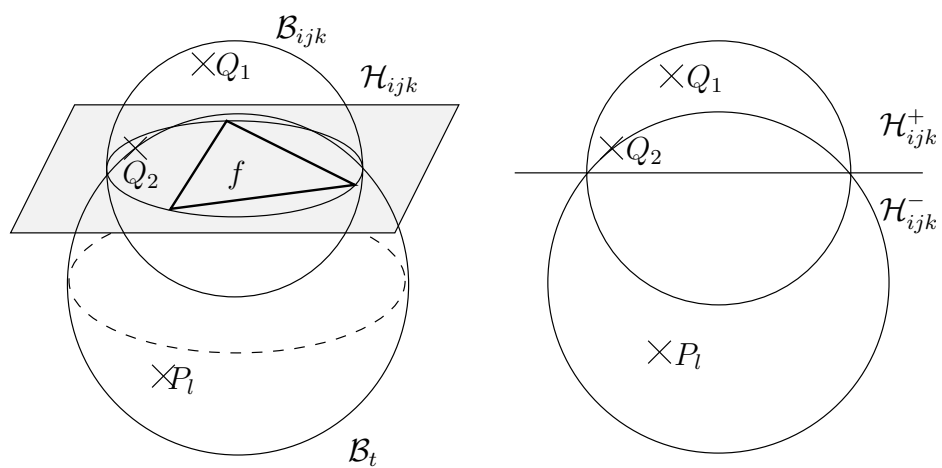


FIG. 3.3 – Cas $\Theta_3(f) = 1.1$: représentation perspective et projection sur un plan perpendiculaire à \mathcal{H}_{ijk} .

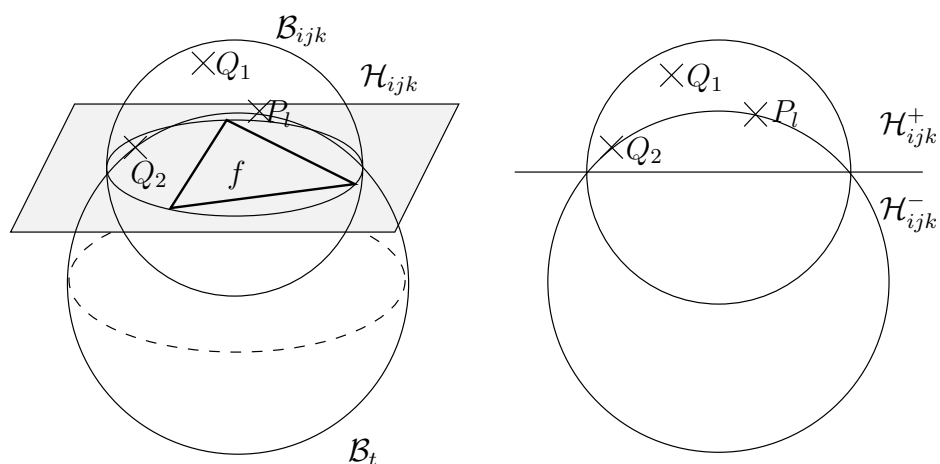


FIG. 3.4 – Cas $\Theta_3(f) = 1.2.0$: représentation perspective et projection sur un plan perpendiculaire à \mathcal{H}_{ijk} .

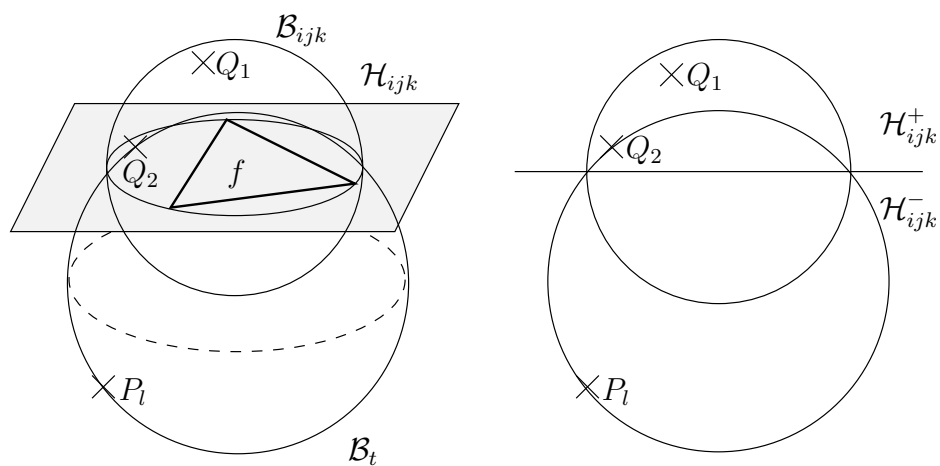


FIG. 3.5 – Cas $\Theta_3(f) = 1.2.1$: représentation perspective et projection sur un plan perpendiculaire à \mathcal{H}_{ijk} .

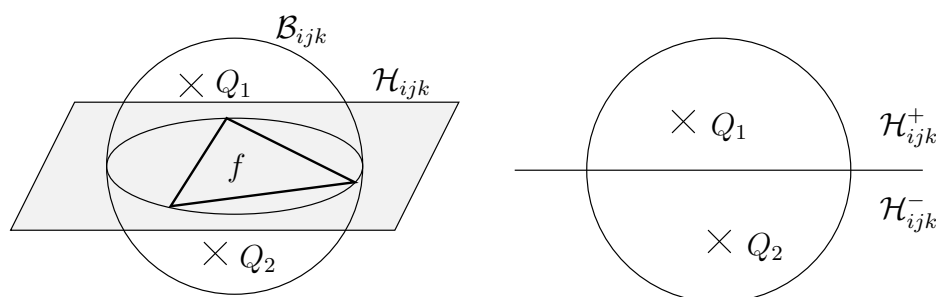


FIG. 3.6 – Cas $\Theta_3(f) = 2$: représentation perspective et projection sur un plan perpendiculaire à \mathcal{H}_{ijk} .

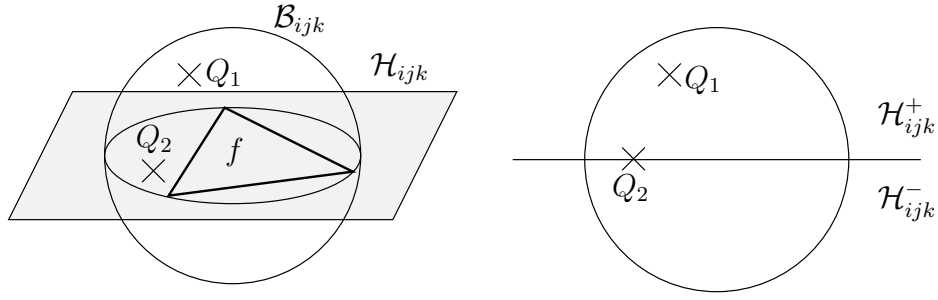


FIG. 3.7 – Cas $\Theta_3(f) = 3$: représentation perspective et projection sur un plan perpendiculaire à \mathcal{H}_{ijk} .

Lemme 3.1. Pour $\Theta_3(f) = 1.1$, avec les notations correspondantes de la Définition 3.2, on a :

- si $\mathcal{E} \subset \mathcal{H}_{ijk}^+$ alors $\overset{\circ}{\mathcal{B}}_t \cap \mathcal{H}_{ijk}^+ \cap \mathcal{S} = \emptyset$;
- si $\mathcal{E} \subset \mathcal{H}_{ijk}^-$ alors $\overset{\circ}{\mathcal{B}}_t \cap \mathcal{H}_{ijk}^- \cap \mathcal{S} = \emptyset$.

Preuve : Sans perte de généralité, il suffit de montrer l'assertion dans le cas où $\mathcal{E} \subset \mathcal{H}_{ijk}^+$. Puisque \mathcal{B}_t et \mathcal{B}_{ijk} sont des boules sécantes en Δ_{ijk} , on a

$$\mathcal{B}_t \cap \mathcal{H}_{ijk}^+ \subsetneq \mathcal{B}_{ijk} \cap \mathcal{H}_{ijk}^+ \quad \text{ou} \quad \mathcal{B}_t \cap \mathcal{H}_{ijk}^- \subsetneq \mathcal{B}_{ijk} \cap \mathcal{H}_{ijk}^-$$

or, il a été montré dans les remarques suivant la Définition 3.2 que

$$Q^* \in \overset{\circ}{\mathcal{B}}_{ijk}$$

de plus, en notant $\partial\mathcal{B}_t$ la sphère frontière de \mathcal{B}_t ,

$$Q^* \in \partial\mathcal{B}_t \cap \mathcal{H}_{ijk}^+$$

donc

$$\mathcal{B}_t \cap \mathcal{H}_{ijk}^+ \subsetneq \mathcal{B}_{ijk} \cap \mathcal{H}_{ijk}^+.$$

Supposons alors que

$$(\exists M \in \mathcal{S}) \quad M \in \overset{\circ}{\mathcal{B}}_t \cap \mathcal{H}_{ijk}^+$$

donc, d'après ce qui précède

$$M \in \mathcal{E}$$

or, en convenant que $t' = P_i P_j P_k M$, on a

$$\mathcal{B}_t \cap \mathcal{B}_{t'} = \Delta_{ijk}$$

donc, en appliquant le même raisonnement que ci-dessus,

$$\mathcal{B}_{t'} \cap \mathcal{H}_{ijk}^+ \subsetneq \mathcal{B}_t \cap \mathcal{H}_{ijk}^+$$

ce qui entraîne en particulier que l'arc $\partial\mathcal{B}_{t'} \cap \mathcal{H}_{ijk}^+$ a un rayon de courbure plus grand que celui de $\partial\mathcal{B}_t \cap \mathcal{H}_{ijk}^+$, contredisant l'hypothèse de maximalité du rayon de $\partial\mathcal{B}_t$. Par suite, il ne peut pas exister de tel point M , d'où

$$\overset{\circ}{\mathcal{B}}_t \cap \mathcal{H}_{ijk}^+ \cap \mathcal{S} = \emptyset.$$

□

3.1.2 Une condition suffisante de Delaunay-admissibilité

Le résultat qui suit est une simple extension du Lemme 2.2 et constitue de ce fait une bonne entrée en matière pour la dimension 3 ; pour cette raison, sa preuve est donnée intégralement, ce qui ne sera pas nécessairement le cas par la suite lorsque les extensions sont immédiates.

Théorème 3.1. *Si $\Theta_3(f) \in \{0; 1.0; 1.2.0\}$, alors f est contenue dans toute triangulation de Delaunay de l'enveloppe convexe de \mathcal{S} .*

Preuve : Il suffit de prouver que f est contenue dans le recouvrement de Delaunay de $\text{Conv}(\mathcal{S})$ pour s'assurer qu'elle sera présente dans toute triangulation de Delaunay de celle-ci. On utilise les notations de la Définition 3.2, et l'on désigne par O_f le centre de \mathcal{B}_{ijk} .

1. Si $\Theta_3(f) = 0$, alors

$$(\forall P \in \mathcal{S} \setminus \{P_i, P_j, P_k\}) \quad O_f P_i = O_f P_j = O_f P_k < O_f P$$

ce qui entraîne que $O_f \in V_i^{\mathcal{S}} \cap V_j^{\mathcal{S}} \cap V_k^{\mathcal{S}} \neq \emptyset$. Or, puisque les cellules de Voronoï sont des polyèdres d'intérieurs disjoints, une 3-intersection est de dimension au plus un. De plus, $\mathcal{V}(\mathcal{S})$ formant un pavage de polyèdres convexes de l'espace, une 3-intersection réduite à un point implique que celui-ci appartienne à au moins une autre cellule, ce qui est incompatible avec l'inégalité stricte ci-dessus. Cette 3-intersection est donc une arête de $\mathcal{V}(\mathcal{S})$. Par suite, $f = P_i P_j P_k \in \mathcal{D}_{\mathcal{S}}$.

2. Si $\Theta_3(f) = 1.0$, alors

– si $Q^* \in \partial\mathcal{B}_{ijk}$, l'intérieur de \mathcal{B}_{ijk} ne contient aucun point de \mathcal{S} , donc d'après le Théorème 1.1,

$$\Pi = \text{Conv}(\{P_i, P_j, P_k\} \cup \mathcal{E}) \in \mathcal{D}_{\mathcal{S}}$$

or, tous les sommets de Π distincts de P_i, P_j et P_k se trouvant dans un même demi-espace ouvert limité par le plan $(P_i P_j P_k)$, f est donc une facette de Π . Par suite, $f \in \mathcal{D}_{\mathcal{S}}$;

– si \mathcal{B}_t ne contient pas d'autres points de \mathcal{S} que les sommets de t , alors, pour les mêmes raisons que ci-dessus,

$$(\exists Q^* \in \mathcal{S}) \quad P_i P_j P_k Q^* \in \mathcal{D}_{\mathcal{S}}$$

donc, en particulier, $f = [P_i P_j P_k] \in \mathcal{D}_{\mathcal{S}}$.

3. Si $\Theta_3(f) = 1.2.0$ alors, d'après le Théorème 1.1,

$$\Pi = \text{Conv}(\{P_i, P_j, P_k, Q^*\} \cup \mathcal{F}) \in \mathcal{D}_{\mathcal{S}}$$

et comme précédemment, puisque $\mathcal{F} \cup \{Q^*\} \subset \mathcal{H}_{ijk}^+$ ou $\mathcal{F} \cup \{Q^*\} \subset \mathcal{H}_{ijk}^-$, f est donc une facette de Π , entraînant $f \in \mathcal{D}_{\mathcal{S}}$. □

Il est clair que le théorème établi ci-dessus ne constitue pas une condition nécessaire dès lors que les points de \mathcal{S} ne sont pas en position générale, condition que l'on ne peut supposer satisfaite sous peine de perdre en généralité, et surtout d'être peu réaliste eu égard aux applications numériques. Par exemple, supposons donnée une facette $f = P_i P_j P_k$ telle que, outre P_i, P_j et P_k , \mathcal{B}_{ijk} contienne des points de \mathcal{S} tous sur $\partial\mathcal{B}_{ijk}$, mais pas tous dans le même demi-espace limité par $(P_i P_j P_k)$. Le recouvrement de Delaunay de $\text{Conv}(\mathcal{S})$ contient alors un polyèdre Π inscrit dans $\partial\mathcal{B}_{ijk}$. Par suite, tout recouvrement simplicial de Π s'appuyant sur les sommets de celui-ci satisfait le critère de la boule (ouverte) vide, donc toute triangulation de Π s'appuyant sur les sommets de celui-ci et dont au moins un élément a f pour facette permet de retrouver celle-ci tout en étant Delaunay-admissible. Or, d'après la Définition 3.2, $\Theta_3(f) = 2$, qui n'est donc pas contradictoire avec la Delaunay-admissibilité de f , au moins pour une certaine triangulation.

D'après ce qui précède, le Théorème 3.1 n'est pas nécessaire à l'admissibilité; en particulier, il a été mis en évidence que dans certains cas, une triangulation sous contrainte forte du recouvrement de Delaunay permet de retrouver la facette recherchée. Cependant, puisque dans le cadre d'une approche *a priori*, toute intervention pendant ou après la triangulation est interdite, il faut donc être certain que toute triangulation de Delaunay de $\text{Conv}(\mathcal{S})$ contienne f .

3.1.3 Delaunay-admissibilité forte

Pour les mêmes raisons qu'en dimension 2, on se donne une définition renforcée de la Delaunay-admissibilité en dimension 3.

Définition 3.3. *On dit qu'une arête ou une facette est fortement Delaunay-admissible si elle appartient au recouvrement de Delaunay de $\text{Conv}(\mathcal{S})$.*

On remarquera que la Delaunay-admissibilité forte d'une facette entraîne celle de chacune de ses arêtes, la réciproque étant évidemment fautive. Par ailleurs, puisque les éléments du recouvrement de Delaunay sont contenus dans toute triangulation du même nom, une facette est donc fortement Delaunay-admissible si et seulement si elle est contenue dans toute triangulation de Delaunay de $\text{Conv}(\mathcal{S})$, ce qui est précisément la condition exigée. On établit d'abord un lemme géométrique, d'une importance cruciale pour la suite.

Lemme 3.2. *Soient deux boules \mathcal{B} et \mathcal{B}' sécantes en un disque contenu dans le plan \mathcal{H} et un point $P_l \in \partial\mathcal{B}$, sphère frontière de \mathcal{B} .*

- Si $P_l \in \mathcal{H}^+$ et $P_l \notin \mathcal{B}'$, ou si $P_l \in \mathcal{H}^-$ et $P_l \in \mathcal{B}'$, alors $\mathcal{B}' \cap \mathcal{H}^+ \subsetneq \mathcal{B} \cap \mathcal{H}^+$;
- si $P_l \in \mathcal{H}^-$ et $P_l \notin \mathcal{B}'$, ou si $P_l \in \mathcal{H}^+$ et $P_l \in \mathcal{B}'$, alors $\mathcal{B}' \cap \mathcal{H}^- \subsetneq \mathcal{B} \cap \mathcal{H}^-$.

Preuve : Seule la preuve de la première assertion est détaillée ici; on en déduit la seconde par symétrie. On distingue les deux cas de figure :

1. Si $P_l \in \mathcal{H}^+$ et $P_l \notin \mathcal{B}'$ (Figure 3.8) alors, sachant que $P_l \in \partial\mathcal{B} \subset \mathcal{B}$, on a $P_l \in \mathcal{B} \cap \mathcal{H}^+$ et $P_l \notin \mathcal{B}' \cap \mathcal{H}^+$, donc $\mathcal{B} \cap \mathcal{H}^+ \not\subset \mathcal{B}' \cap \mathcal{H}^+$. Or, \mathcal{B} et \mathcal{B}' sont des boules sécantes en un disque de support \mathcal{H} , donc $\mathcal{B}' \cap \mathcal{H}^+ \subsetneq \mathcal{B} \cap \mathcal{H}^+$ ou $\mathcal{B} \cap \mathcal{H}^+ \subsetneq \mathcal{B}' \cap \mathcal{H}^+$. Par suite, $\mathcal{B}' \cap \mathcal{H}^+ \subsetneq \mathcal{B} \cap \mathcal{H}^+$.
2. Si $P_l \in \mathcal{H}^-$ et $P_l \in \mathcal{B}'$ (Figure 3.9), on sait également, par hypothèse, que $\mathcal{B} \cap \mathcal{B}' \subset \mathcal{H}$ et $P_l \in \partial\mathcal{B}$. Par suite, $P_l \notin \partial\mathcal{B}'$ et $P_l \in (\mathcal{B}' \setminus \partial\mathcal{B}') \cap \mathcal{H}^- = \overset{\circ}{\mathcal{B}'} \cap \mathcal{H}^-$, ce qui entraîne, $\overset{\circ}{\mathcal{B}'} \cap \mathcal{H}^-$

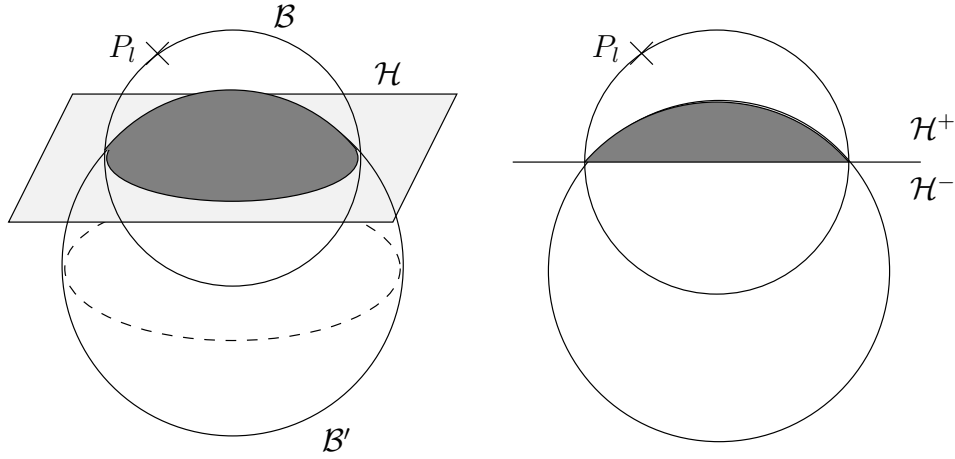


FIG. 3.8 – Cas $P_l \in \mathcal{H}^+$ et $P_l \notin \mathcal{B}'$: représentation perspective et projection sur un plan perpendiculaire à \mathcal{H} ; $\mathcal{B}' \cap \mathcal{H}^+$ est en gris foncé.

étant ouvert, qu'il existe une boule \mathcal{B}_{P_l} centrée en P_l telle que $\mathcal{B}_{P_l} \subset \mathcal{B}' \cap \mathcal{H}^-$. En d'autres termes,

$$(\forall M \in \mathcal{B}_{P_l}) \quad M \in \mathcal{B}' \cap \mathcal{H}^-$$

Or, puisque $P_l \in \partial \mathcal{B} \cap \mathcal{H}^-$, $\mathcal{B}_{P_l} \not\subset \mathcal{B} \cap \mathcal{H}^-$ donc

$$(\exists M_0 \in \mathcal{B}_{P_l}) \quad M_0 \notin \mathcal{B} \cap \mathcal{H}^-$$

ce qui entraîne $\mathcal{B}' \cap \mathcal{H}^- \not\subset \mathcal{B} \cap \mathcal{H}^-$. \mathcal{B} et \mathcal{B}' étant des boules sécantes en un disque de support \mathcal{H} , alors $\mathcal{B}' \cap \mathcal{H}^- \subsetneq \mathcal{B} \cap \mathcal{H}^-$ ou $\mathcal{B} \cap \mathcal{H}^- \subsetneq \mathcal{B}' \cap \mathcal{H}^-$ donc, nécessairement, $\mathcal{B} \cap \mathcal{H}^- \subsetneq \mathcal{B}' \cap \mathcal{H}^-$ ce qui équivaut (par réflexion de plan \mathcal{H}) à $\mathcal{B}' \cap \mathcal{H}^+ \subsetneq \mathcal{B} \cap \mathcal{H}^+$.

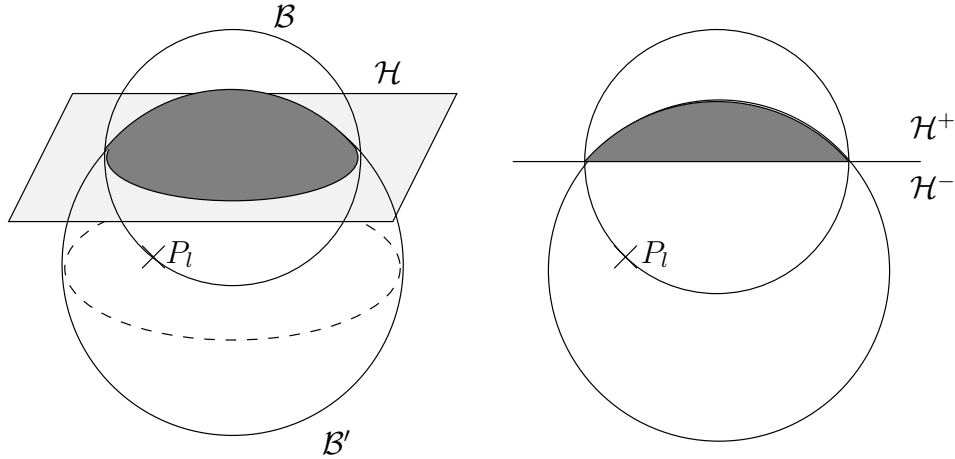


FIG. 3.9 – Cas $P_l \in \mathcal{H}^-$ et $P_l \in \mathcal{B}'$: représentation perspective et projection sur un plan perpendiculaire à \mathcal{H} ; $\mathcal{B}' \cap \mathcal{H}^+$ est en gris foncé.

□

Pour le sens fort de la Delaunay-admissibilité, on énonce une condition nécessaire et suffisante :

Théorème 3.2. *Une facette f est fortement Delaunay-admissible si et seulement si*

$$\Theta_3(f) \in \{0; 1.0; 1.2.0\}.$$

Preuve : On distingue les différents cas, liés à la valeur de Θ_3 . O_f désigne le centre de \mathcal{B}_{ijk} , et les notations sont celles de la Définition 3.2.

1. Si $\Theta_3(f) \in \{0; 1.0; 1.2.0\}$ alors le Théorème 3.1 appliqué à la Définition 3.3 entraîne que f est fortement Delaunay-admissible.
2. Si $\Theta_3(f) = 1.1$, fixons les idées en considérant que $Q^* \in \mathcal{H}_{ijk}^+$; on ne détaille pas le raisonnement si $Q^* \in \mathcal{H}_{ijk}^-$, puisqu'il est similaire à réflexion par rapport à $(P_i P_j P_k)$ près. Pour tout $P_l \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{H}_{ijk}$ on note $t_l = P_i P_j P_k P_l$, et l'on distingue deux sous-cas.
 - (a) Si $P_l \in \mathcal{H}_{ijk}^+$ (c'est en particulier le cas si $P_l \in \mathcal{E}$) alors, d'après le Lemme 3.1,

$$P_l \notin \overset{\circ}{\mathcal{B}}_t \cap \mathcal{H}_{ijk}^+$$

et deux cas de figure se présentent alors :

- i. si $P_l \in \mathcal{B}_t$ alors $P_l \in \partial \mathcal{B}_t$, la sphère circonscrite à t . Par suite, $\mathcal{B}_{t_l} = \mathcal{B}_t$ donc $\overset{\circ}{\mathcal{B}}_{t_l} \cap \mathcal{S} = \overset{\circ}{\mathcal{B}}_t \cap \mathcal{S} \neq \emptyset$;
 - ii. si $P_l \notin \mathcal{B}_t$ alors, d'après le Lemme 3.2, $\mathcal{B}_t \cap \mathcal{H}_{ijk}^+ \subsetneq \mathcal{B}_{t_l} \cap \mathcal{H}_{ijk}^+$ et en particulier $Q^* \in \overset{\circ}{\mathcal{B}}_{t_l}$, d'où $\overset{\circ}{\mathcal{B}}_{t_l} \cap \mathcal{S} \neq \emptyset$.
- (b) Si $P_l \in \mathcal{H}_{ijk}^-$, on doit alors distinguer trois hypothèses :
- i. si $P_l \in \overset{\circ}{\mathcal{B}}_t$ alors, d'après le Lemme 3.2, $\mathcal{B}_t \cap \mathcal{H}_{ijk}^+ \subsetneq \mathcal{B}_{t_l} \cap \mathcal{H}_{ijk}^+$ et en particulier $Q^* \in \overset{\circ}{\mathcal{B}}_{t_l}$, d'où $\overset{\circ}{\mathcal{B}}_{t_l} \cap \mathcal{S} \neq \emptyset$;
 - ii. si $P_l \in \partial \mathcal{B}_t$ alors, pour les mêmes raisons qu'en (a)-i, $\overset{\circ}{\mathcal{B}}_{t_l} \cap \mathcal{S} = \overset{\circ}{\mathcal{B}}_t \cap \mathcal{S} \neq \emptyset$;
 - iii. si $P_l \notin \mathcal{B}_t$ alors, d'après le Lemme 3.2, $\mathcal{B}_t \cap \mathcal{H}_{ijk}^- \subsetneq \mathcal{B}_{t_l} \cap \mathcal{H}_{ijk}^-$. Or, d'après le Lemme 3.1, $\overset{\circ}{\mathcal{B}}_t \cap \mathcal{S} \subset \mathcal{H}_{ijk}^-$, donc

$$(\forall M \in \overset{\circ}{\mathcal{B}}_t \cap \mathcal{S}) \quad M \in \mathcal{B}_{t_l}$$

d'où $\overset{\circ}{\mathcal{B}}_{t_l} \cap \mathcal{S} \neq \emptyset$.

On a donc prouvé que de façon générale

$$(\forall P_l \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{H}_{ijk}) \quad \overset{\circ}{\mathcal{B}}_{t_l} \cap \mathcal{S} \neq \emptyset$$

et par suite, compte tenu du fait que si $P_l \in \mathcal{H}_{ijk}$ alors $P_i P_j P_k P_l$ est dégénéré,

$$(\forall P_l \in \mathcal{S}) \quad P_i P_j P_k P_l \notin \mathcal{D}_{\mathcal{S}}$$

soit finalement $f \notin \mathcal{D}_{\mathcal{S}}$.

3. Si $\Theta_3(f) = 1.2.1$ alors, d'après le Théorème 1.1,

$$\Pi = \text{Conv}(\{P_i, P_j, P_k, Q^*\} \cup \mathcal{F}) \in \mathcal{D}_S$$

or, puisque $(\mathcal{F} \cup \{Q^*\}) \cap \mathcal{H}_{ijk}^+ \neq \emptyset$ et $(\mathcal{F} \cup \{Q^*\}) \cap \mathcal{H}_{ijk}^- \neq \emptyset$, on a $\overset{\circ}{f} \subset \overset{\circ}{\Pi}$, $\overset{\circ}{f}$ désignant l'intérieur de f au sens bidimensionnel. Par suite, $f \notin \mathcal{D}_S$.

4. Si $\Theta_3(f) = 2$, alors soit $\mathcal{E} = (\mathcal{B}_{ijk} \cap \mathcal{S}) \setminus \{P_i, P_j, P_k\}$. On distingue deux sous-cas :

- (a) si $\mathcal{E} \subset \partial \mathcal{B}_{ijk}$, alors

$$\Pi = \text{Conv}(\mathcal{E}) \in \mathcal{D}_S$$

or \mathcal{E} contient des points dans \mathcal{H}_{ijk}^+ et \mathcal{H}_{ijk}^- , donc $\overset{\circ}{f} \subset \overset{\circ}{\Pi}$ et, par suite, $f \notin \mathcal{D}_S$;

- (b) si $\mathcal{E} \not\subset \partial \mathcal{B}_{ijk}$, alors pour tout $P_l \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{H}_{ijk}$ on note $t_l = P_i P_j P_k P_l$. De la même manière que pour $\Theta_3(f) = 1.1$, l'utilisation du Lemme 3.2 permet d'écrire que $\mathcal{B}_{ijk} \cap \mathcal{H}_{ijk}^- \subsetneq \mathcal{B}_{t_l} \cap \mathcal{H}_{ijk}^-$ ou $\mathcal{B}_{ijk} \cap \mathcal{H}_{ijk}^+ \subsetneq \mathcal{B}_{t_l} \cap \mathcal{H}_{ijk}^+$. Or, puisque \mathcal{B}_{ijk} contient des points de part et d'autre de \mathcal{H}_{ijk} , on en déduit que $\overset{\circ}{\mathcal{B}}_{t_l} \cap \mathcal{S} \neq \emptyset$. De façon générale, on a donc

$$(\forall P_l \in \mathcal{S}) \quad P_i P_j P_k P_l \notin \mathcal{D}_S$$

et, par suite, $f \notin \mathcal{D}_S$.

5. Si $\Theta_3(f) = 3$, il suffit de considérer les seuls points de $\mathcal{E} \cap \Delta_{ijk}$. On se ramène alors à un problème de Delaunay-admissibilité bidimensionnelle du triangle $P_i P_j P_k$ dans le plan $(P_i P_j P_k)$ (voir le chapitre précédent). Le critère du disque vide appliqué au triangle $P_i P_j P_k$ prouve que celui-ci n'appartient pas au recouvrement de Delaunay de l'enveloppe convexe de $\mathcal{S} \cap (P_i P_j P_k)$, ce qui permet d'affirmer que, *a fortiori*, $f \notin \mathcal{D}_S$. \square

3.2 Segments

Cette section présente, comme pour les facettes, une classification *a priori* des segments en dimension 3 conduisant à une condition nécessaire et suffisante de Delaunay-admissibilité forte pour de tels segments.

Γ désigne ici un champ de contraintes constitué de segments dont les extrémités sont dans \mathcal{S} . De plus, ces segments ne s'intersectent, le cas échéant, qu'en leurs extrémités.

3.2.1 Résultats préliminaires

La littérature géométrique est pauvre en résultats sur les sphères admettant une corde donnée. Il est donc nécessaire, avant de classifier les segments en dimension 3, d'établir quelques propriétés essentielles. Pour ce faire, une nouvelle notion est introduite.

Définition 3.4. Soient A et B deux points distincts de \mathbb{R}^3 et $\Theta \in [0, \pi]$. On appelle surface capable d'angle Θ relativement à $[AB]$ l'ensemble

$$\Sigma_{AB}^\Theta = \{M \in \mathbb{R}^3 : \widehat{AMB} = \Theta\} \cup \{A ; B\}$$

et domaine capable d'angle Θ relativement à $[AB]$ le domaine fermé D_{AB}^Θ limité par Σ_{AB}^Θ .

Dans le cas où les points sont indexés, et si aucune confusion n'est possible, l'écriture est allégée en notant Σ_{ij}^Θ pour $\Sigma_{P_i P_j}^\Theta$, et D_{ij}^Θ pour $D_{P_i P_j}^\Theta$. Comme le montre la Figure 3.10, la surface capable est obtenue par révolution d'un arc capable autour de $[AB]$.

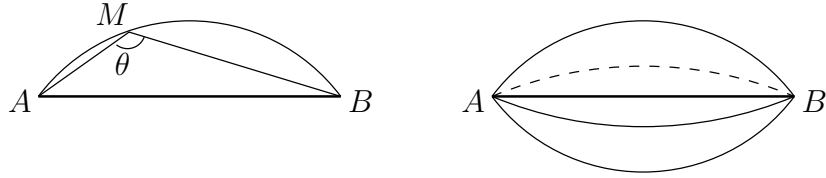


FIG. 3.10 – Arc (gauche) et surface (droite) capables.

Si $\Theta = 0$ (resp. $\Theta = \frac{\pi}{2}$, $\Theta = \pi$) il est clair que la surface capable est $[AB]$ (resp. la sphère de diamètre $[AB]$, $(AB) \setminus]AB[$). On remarque également que D_{AB}^Θ est convexe si et seulement si $\Theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$. On a alors un résultat intéressant, illustré par la Figure 3.11.

Lemme 3.3. *Soit, pour A et B distincts donnés dans \mathbb{R}^3 , un point Q contenu dans la boule de diamètre $[AB]$ privée de $[AB]$. Alors l'unique domaine capable relativement à $[AB]$ passant par Q est contenu dans \mathcal{B}_Q , la petite boule de AQB .*

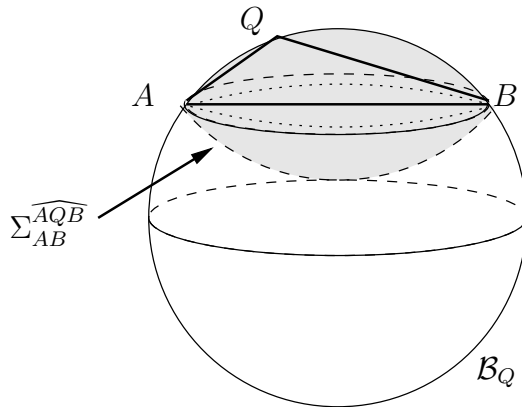


FIG. 3.11 – Pour $\widehat{AQB} \in [\frac{\pi}{2}, \pi[$, $D_{AB}^{\widehat{AQB}}$ (grisé et pointillés) est inclus dans \mathcal{B}_Q .

Preuve : Il est clair que dès lors que \widehat{AQB} est fixé, alors $D_{AB}^{\widehat{AQB}}$ est définie de manière unique. Par ailleurs, tout cercle tracé sur $\partial\mathcal{B}_Q$ a un rayon inférieur ou égal à celui du cercle circonscrit à ABQ , qui vaut $\frac{AB}{2 \sin \widehat{AQB}}$. Par suite, pour tout $M \in \partial\mathcal{B}_Q$, $\sin \widehat{AMB} \geq \sin \widehat{AQB}$. Or, par hypothèse $\widehat{AQB} \in [\frac{\pi}{2}, \pi[$, donc $\widehat{AMB} \in [\pi - \widehat{AQB}, \widehat{AQB}]$ ce qui entraîne en particulier que $\widehat{AMB} \leq \widehat{AQB}$, d'où la conclusion. \square

Ceci permet, lorsque la boule de diamètre $[AB]$ contient plusieurs points du nuage considéré, de s'interroger à propos d'un candidat naturel à la construction d'une facette Delaunay-admissible comportant le segment $[AB]$. En effet, comme représenté Figure 3.12, on a le lemme suivant :

Lemme 3.4. Soient, pour A et B distincts donnés dans \mathbb{R}^3 , deux points P et Q contenus dans la boule de diamètre $[AB]$ privée de A et de B , tels que $\widehat{APB} > \widehat{AQB}$. Alors P est intérieur à \mathcal{B}_Q , la petite boule de AQB .

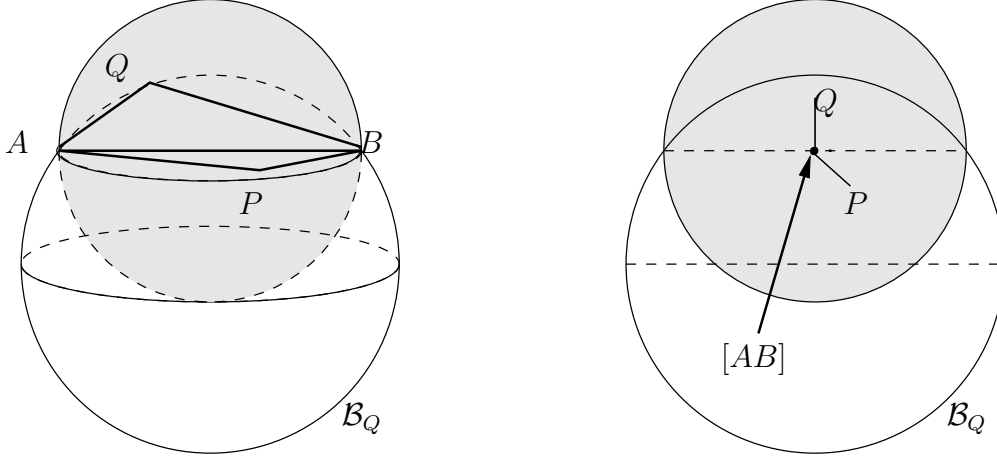


FIG. 3.12 – P est intérieur à \mathcal{B}_Q ; A , B , P et Q ne sont pas nécessairement coplanaires. Représentation perspective et projection sur le plan perpendiculaire à $[AB]$ en son milieu.

Preuve : Par hypothèse, on a $\widehat{APB} > \widehat{AQB} \geq \frac{\pi}{2}$, donc d'une part $P \in D_{AB}^{\widehat{APB}} \subsetneq D_{AB}^{\widehat{AQB}}$, ce qui est trivial, d'autre part $D_{AB}^{\widehat{AQB}} \subset \mathcal{B}_Q$ en raison du Lemme 3.3. Par suite, $P \in \mathring{\mathcal{B}}_Q$. \square

Grâce à ce résultat, il est tentant de conjecturer une condition nécessaire d'existence d'un segment donné dans le recouvrement de Delaunay de l'enveloppe convexe du nuage de points auquel ce segment se rapporte. On se donne tout d'abord une définition, dans un souci de concision :

Définition 3.5. On appelle petite sphère (respectivement petite boule) d'un segment la sphère (respectivement la boule) ayant pour diamètre ce segment.

Il est clair que, comme en dimension 2, la petite boule d'un segment est la plus petite des boules le contenant. Pour tout couple (P_i, P_j) de points distincts de \mathcal{S} , on convient de noter $\partial\mathcal{B}_{ij}$ (respectivement \mathcal{B}_{ij}) la petite sphère (respectivement la petite boule) fermée associée au segment $[P_i P_j]$. De même qu'en dimension 2, on pose $\mathcal{S}_{ij} = \mathcal{B}_{ij} \cap \mathcal{S}$.

Puisque, d'après le Lemme 3.4, tout point $Q^* \in \mathcal{S}_{ij}$ tel que $\widehat{P_i Q^* P_j}$ soit maximal est contenu dans la petite boule de toute facette s'appuyant sur $[P_i P_j]$, il semble naturel d'extrapoler les résultats obtenus en dimension 2, et de penser que l'existence de $[P_i P_j Q^*]$ dans $\mathcal{D}_{\mathcal{S}}$ est nécessaire à celle de $[P_i P_j]$. Malheureusement, cette conjecture s'avère fausse.

3.2.2 Ne pas se fier aux apparences

L'objet de cette partie est précisément de construire un contre-exemple à la conjecture proposée précédemment. Pour faire simple, il s'agit de construire un segment $[P_1 P_2]$, dont la petite

boule contient trois points P_3 , P_4 et P_5 choisis de telle sorte que P_3 joue le rôle de Q^* , à la condition que $[P_1Q^*P_2]$ ne soit pas fortement Delaunay-admissible bien que $[P_1P_2]$ le soit.

Considérons (Figure 3.13) la facette f définie par les points $P_1(-2; 0; 0)$, $P_2(2; 0; 0)$ et $P_3(0; 1; 0)$. La petite boule \mathcal{B}_{12} du segment $[P_1P_2]$ a donc pour centre $O_{12}(0; 0; 0)$ et pour rayon 2; par suite, P_3 lui est intérieur.

On détermine tout d'abord les coordonnées $(x_o; y_o; 0)$ de O_f , centre de la petite boule \mathcal{B}_f de f et qui appartient nécessairement au plan $(P_1P_2P_3)$. De $P_1O_f^2 = P_2O_f^2$ et $P_1O_f^2 = P_3O_f^2$, il vient que $(-2 - x_o)^2 + y_o^2 = (2 - x_o)^2 + y_o^2$ et $(-2 - x_o)^2 + y_o^2 = x_o^2 + (y_o - 1)^2$, d'où $x_o = 0$ et $y_o = -\frac{3}{2}$. Par suite, le rayon de \mathcal{B}_f vaut $\frac{5}{2}$.

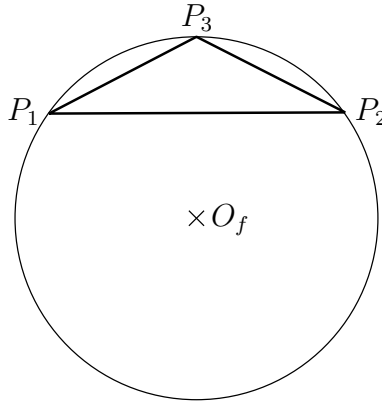


FIG. 3.13 – Triangle $P_1P_2P_3$ et cercle circonscrit. Représentation dans le plan $z = 0$.

On cherche ensuite un point P_4 qui soit intérieur à \mathcal{B}_{12} et au quart de boule $\mathcal{B}_f \cap \{y > -\frac{3}{2}, z > 0\}$, tout en étant le plus proche possible de la sphère $\partial\mathcal{B}_f$, afin de minimiser l'angle $\widehat{P_1P_4P_2}$. Par souci de simplicité, on le cherche de telle sorte que ses coordonnées soient de la forme $(0; t; t)$, avec $t > 0$. On a donc, d'une part

$$P_4O_{12}^2 = 2t^2 < 4$$

d'où $t \in]-\sqrt{2}; \sqrt{2}[$; d'autre part

$$P_4O_f^2 = (t + \frac{3}{2})^2 + t^2 < \frac{25}{4}$$

ce qui revient à déterminer l'intervalle sur lequel $2t^2 + 3t - 4 < 0$. Le polynôme $2X^2 + 3X - 4$ admettant deux racines réelles distinctes, à savoir $\alpha_1 = \frac{-3-\sqrt{41}}{4}$ et $\alpha_2 = \frac{-3+\sqrt{41}}{4}$, t convient si et seulement si il appartient à $] -\sqrt{2}; \sqrt{2}[\cap]\alpha_1, \alpha_2[\cap \mathbb{R}_+^* =]0, \alpha_2[$. Or, puisque $6^2 < 41 < 7^2$, il est clair que $\frac{3}{4} < \alpha_2 < 1 < \sqrt{2}$. On peut donc choisir $t = \frac{3}{4}$, ce qui conduit à $P_4O_f^2 = \frac{45}{8} < \frac{50}{8} = \frac{25}{4}$. Il faut à présent comparer $\widehat{P_1P_3P_2}$ et $\widehat{P_1P_4P_2}$. On a, d'une part

$$\cos \widehat{P_1P_3P_2} = \frac{\overrightarrow{P_3P_1} \cdot \overrightarrow{P_3P_2}}{P_3P_1 \times P_3P_2} = \frac{(-2; -1; 0) \cdot (2; -1; 0)}{4 + 1} = -\frac{3}{5} = -\frac{123}{205}$$

d'autre part

$$\cos \widehat{P_1P_4P_2} = \frac{\overrightarrow{P_4P_1} \cdot \overrightarrow{P_4P_2}}{P_4P_1 \times P_4P_2} = \frac{(-2; -\frac{3}{4}; -\frac{3}{4}) \cdot (2; -\frac{3}{4}; -\frac{3}{4})}{4 + \frac{9}{16} + \frac{9}{16}} = -\frac{23}{41} = -\frac{115}{205}$$

ce qui prouve que l'on a bien $\widehat{P_1P_4P_2} < \widehat{P_1P_3P_2}$ (en fait, $\widehat{P_1P_4P_2} \approx 124, 12^\circ$ et $\widehat{P_1P_3P_2} \approx 126, 86^\circ$, à 10^{-2} près.).

Enfin, il faut placer P_5 de telle sorte que f ne soit pas fortement Delaunay-admissible d'une part, que $\widehat{P_1P_5P_2} < \widehat{P_1P_3P_2}$ d'autre part. Il suffit, pour satisfaire à ces deux conditions, de prendre pour P_5 le symétrique de P_4 par rapport à $(P_1P_2P_3)$; ainsi $\Theta_3(f) = 2$ et $\widehat{P_1P_5P_2} = \widehat{P_1P_4P_2} < \widehat{P_1P_3P_2}$. On pose donc $P_5(0; \frac{3}{4}; -\frac{3}{4})$.

D'après ce qui précède, les points P_3, P_4 et P_5 sont intérieurs à la petite boule de $[P_1P_2]$ et parmi eux, P_3 est le point Q^* tel que $\widehat{P_1Q^*P_2}$ soit maximal. Puisque la petite boule ouverte de $P_1P_3P_2$ contient P_4 et P_5 , de part et d'autre de $(P_1P_3P_2)$, il est clair que $\Theta_3([P_1P_3P_2]) = 2$ et donc que $[P_1P_3P_2]$ n'est pas fortement Delaunay-admissible. Cependant, $[P_1P_2]$ est une arête saillante de l'enveloppe convexe de $\{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\}$ (Figure 3.14), donc est fortement Delaunay-admissible. Plus précisément, il est aisé de prouver que le tétraèdre $P_1P_2P_4P_5$ appartient à \mathcal{D}_S , ce qui entraîne l'admissibilité de $[P_1P_2]$ et la non-admissibilité de $[P_1P_3P_2]$, percée par $[P_4P_5]$. En effet, les coordonnées du centre $\Omega(x_\Omega; y_\Omega; z_\Omega)$ de la boule \mathcal{B}_{1245} circonscrite à $P_1P_2P_4P_5$ vérifient

$$\begin{cases} P_1\Omega^2 = P_2\Omega^2 & \Leftrightarrow (x_\Omega + 2)^2 + y_\Omega^2 + z_\Omega^2 = (x_\Omega - 2)^2 + y_\Omega^2 + z_\Omega^2 \\ P_4\Omega^2 = P_5\Omega^2 & \Leftrightarrow x_\Omega^2 + (y_\Omega - \frac{3}{4})^2 + (z_\Omega - \frac{3}{4})^2 = x_\Omega^2 + (y_\Omega + \frac{3}{4})^2 + (z_\Omega + \frac{3}{4})^2 \\ P_1\Omega^2 = P_4\Omega^2 & \Leftrightarrow (x_\Omega + 2)^2 + y_\Omega^2 + z_\Omega^2 = x_\Omega^2 + (y_\Omega - \frac{3}{4})^2 + (z_\Omega - \frac{3}{4})^2 \end{cases}$$

ce qui amène $x_\Omega = z_\Omega = 0$ et $4 = -\frac{3}{2}y_\Omega + \frac{9}{8}$, d'où $y_\Omega = -\frac{23}{12}$. Le carré du rayon de \mathcal{B}_{1245} vaut donc $4 + (\frac{23}{12})^2 = (\frac{23}{12})^2 + \frac{23}{12} \times \frac{3}{2} + \frac{9}{8}$ et $P_3\Omega^2 = (\frac{23}{12} + 1)^2 = (\frac{23}{12})^2 + \frac{29}{6}$. Or, $4 = \frac{24}{6} < \frac{29}{6}$ donc P_3 est extérieur à \mathcal{B}_{1245} ce qui prouve, en vertu du Théorème 1.1, que $P_1P_2P_4P_5 \in \mathcal{D}_S$. On a donc $[P_1P_2] \in \mathcal{D}_S$ bien que $[P_1P_2Q^*] = [P_1P_2P_3] \notin \mathcal{D}_S$.

On le voit, la conjecture proposée est fausse.

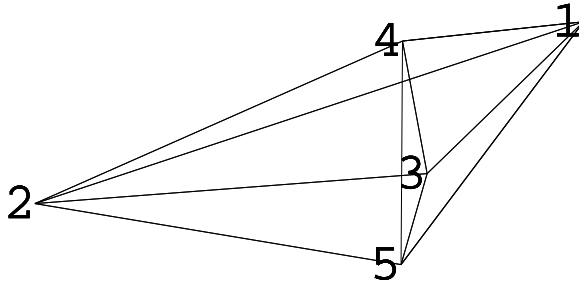


FIG. 3.14 – Triangulation de Delaunay de $\text{Conv}(\{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\})$: la facette $[P_1P_2Q^*] = [P_1P_2P_3]$, percée par $[P_4P_5]$, n'est pas construite bien que $[P_1P_2]$ le soit. Sur la figure, un point P_i est noté i .

Il apparaît donc que la Delaunay-admissibilité de $[P_iP_jQ^*]$ n'est pas nécessaire à celle de $[P_iP_j]$, alors qu'elle y suffit évidemment.

3.2.3 Une condition nécessaire de Delaunay-admissibilité

La condition sur $[P_i P_j Q^*]$ proposée précédemment étant trop forte, il faut donc tester, pour un segment $[P_i P_j]$ donné, d'autres facettes. Le résultat suivant permet de limiter le nombre de celles-ci.

Lemme 3.5. *Soit (P_i, P_j) un couple de points distincts de \mathcal{S} , tel que $\mathcal{S}_{ij} \setminus \{P_i, P_j\} = \mathcal{E} \neq \emptyset$. Si $[P_i P_j]$ est fortement Delaunay-admissible alors il existe $Q \in \mathcal{E}$ tel que $[P_i P_j Q]$ le soit.*

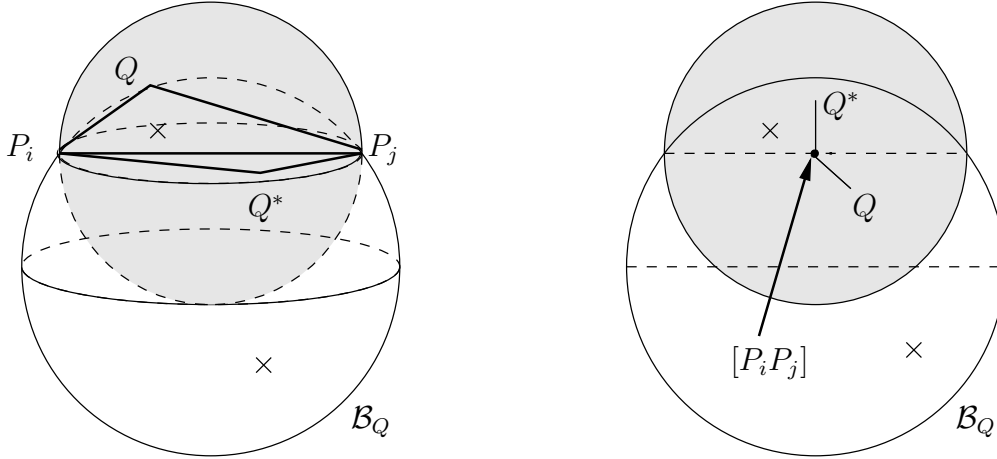


FIG. 3.15 – Si $[P_i P_j Q^*] \notin \mathcal{D}_{\mathcal{S}}$, alors $[P_i P_j] \notin \mathcal{D}_{\mathcal{S}}$.

Preuve : On a, par hypothèse,

- (i) $[P_i P_j] \in \mathcal{D}_{\mathcal{S}}$
- (ii) $\mathcal{S}_{ij} \setminus \{P_i, P_j\} = \mathcal{E} \neq \emptyset$.

Supposons que, de surcroît,

- (iii) $(\forall Q \in \mathcal{E}) [P_i P_j Q] \notin \mathcal{D}_{\mathcal{S}}$.

On désigne par \mathcal{B}_Q , \mathcal{C}_Q et \mathcal{H}_Q^+ respectivement la petite boule de $[P_i P_j Q]$, le cercle intersection de $\partial \mathcal{B}_Q$ avec $\partial \mathcal{B}_{ij}$ et le demi-espace fermé contenant Q et limité par le plan de \mathcal{C}_Q . Il est clair, en raison des propriétés des intersections de sphères, que \mathcal{C}_Q est contenu dans le plan perpendiculaire à $(P_i P_j Q)$ contenant $[P_i P_j]$ et a pour diamètre ce segment. Par ailleurs, puisque $P \in \mathcal{B}_{ij}$, on a $\mathcal{B}_Q \cap \mathcal{H}_Q^+ \subset \mathcal{B}_{ij} \cap \mathcal{H}_Q^+$.

De (i) et (iii), on déduit qu'il existe un tétraèdre $P_i P_j P_k P_l \in \mathcal{D}_{\mathcal{S}}$ tel que $[P_k P_l]$ perce $[P_i P_j Q]$. Par conséquent, l'un au moins de P_k et P_l appartient à $\mathcal{B}_Q \cap \mathcal{H}_Q^+$, donc à $\mathcal{B}_{ij} \cap \mathcal{H}_Q^+$. Or, aucun de ces deux points n'appartient à \mathcal{E} , faute de quoi l'hypothèse (iii) serait contredite, donc il est impossible que l'un d'eux appartienne à $\mathcal{B}_{ij} \cap \mathcal{H}_Q^+$, ce qui amène une contradiction. (i) et (ii) n'étant pas incompatibles, on en déduit, d'après le principe du tiers exclu, que (iii) est impossible sous les hypothèses (i) et (ii). \square

Au vu des résultats obtenus, il est à présent possible d'introduire une classification *a priori* des segments en dimension 3.

3.2.4 Classification et forte Delaunay-admissibilité *a priori*

L'indicatrice Θ est à présent définie pour les segments en dimension 3.

Définition 3.6. Soit e un segment dont les extrémités P_i et P_j sont des points distincts de \mathcal{S} . On définit alors le type de e , noté $\Theta_{2.5}(e)$, de la façon suivante² :

- Si $\mathcal{S}_{ij} = \{P_i, P_j\}$, alors $\Theta_{2.5}(e) = 0$ (Figure 3.16).
- Si $\mathcal{S}_{ij} \setminus \{P_i, P_j\} = \mathcal{E} \neq \emptyset$, alors :
 - si $(\exists Q \in \mathcal{E}) \quad \Theta_3([P_i P_j Q]) \in \{0; 1.0; 1.2.0\}$, alors $\Theta_{2.5}(e) = 1.0$ (Figure 3.17) ;
 - sinon, $\Theta_{2.5}(e) = 1.1$ (Figure 3.18).

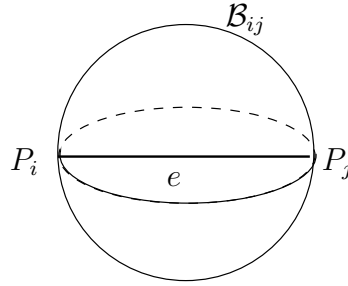


FIG. 3.16 – $\Theta_{2.5}(e) = 0$ (représentation perspective)

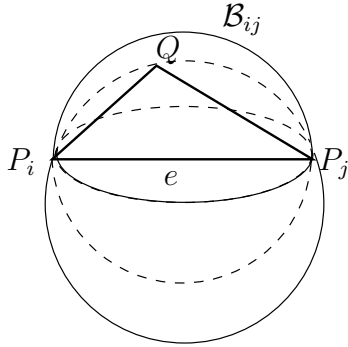


FIG. 3.17 – $\Theta_{2.5}(e) = 1.0$ (représentation perspective)

Plus précisément, la Figure 3.17 correspond au cas où $\Theta_3([P_i P_j Q]) = 0$, Q étant le seul élément de \mathcal{E} . Par souci de clarté, les autres cas n'ont pas été représentés. On se reportera au chapitre précédent pour plus de détails. De manière générale, il est à noter que les petites sphères respectives de e et de $[P_i P_j Q]$ se coupent dans le plan perpendiculaire à la facette contenant le segment, puisque l'intersection de deux sphères sécantes est contenue dans un plan orthogonal au segment reliant leurs centres.

De même, pour éviter de surcharger le dessin avec une troisième sphère, la Figure 3.18 représente le cas où $\Theta_{2.5}(e) = 1.1$ avec $\Theta_3([P_i P_j Q]) = 2$.

Le théorème qui suit permet d'établir une classification *a priori* des segments en dimension 3.

²La notation 2.5 est utilisée pour éviter la confusion avec les segments en dimension 2.

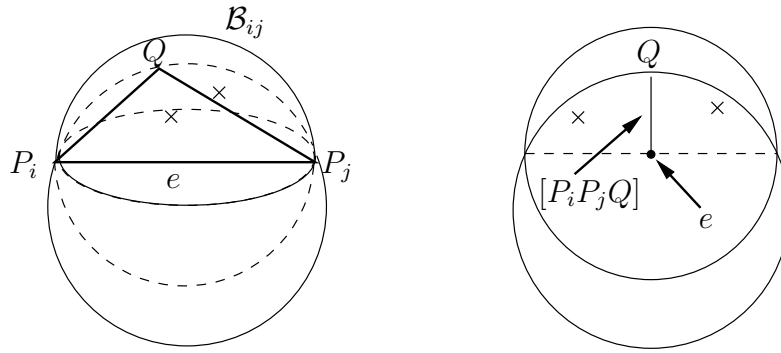


FIG. 3.18 – $\Theta_{2.5}(e) = 1.1$ (représentation perspective et projection sur le plan perpendiculaire à e en O_e)

Théorème 3.3. *Un segment e est fortement Delaunay-admissible si et seulement si*

$$\Theta_{2.5}(e) \in \{0; 1.0\}.$$

Preuve : De même que ce qui a été fait pour les facettes, il suffit de prouver que e est contenu dans le recouvrement de Delaunay de $\text{Conv}(\mathcal{S})$ si et seulement si il est de type 0 ou 1.0. On utilise les notations de la Définition 3.6, et l'on désigne par O_e le milieu de e .

1. Si $\Theta_{2.5}(e) = 0$, alors

$$(\forall P \in \mathcal{S} \setminus \{P_i, P_j\}) \quad O_e P_i = O_e P_j < O_e P$$

ce qui entraîne que $O_e \in V_i^{\mathcal{S}} \cap V_j^{\mathcal{S}} \neq \emptyset$, ainsi que

$$(\forall P_n \in \mathcal{S} \setminus \{P_i, P_j\}) \quad O_e \notin V_n^{\mathcal{S}}$$

donc $V_i^{\mathcal{S}} \cap V_j^{\mathcal{S}}$ ne peut être réduite à $\{O_e\}$, et est donc nécessairement une face de Voronoï. Par suite, $e \in \mathcal{D}_{\mathcal{S}}$.

2. Si $\Theta_{2.5}(e) = 1.0$ alors, d'après le Théorème 3.2, $[P_i P_j Q] \in \mathcal{D}_{\mathcal{S}}$, ce qui implique en particulier que $e = [P_i P_j] \in \mathcal{D}_{\mathcal{S}}$.
3. Si $\Theta_{2.5}(e) = 1.1$ alors $[P_i P_j Q] \notin \mathcal{D}_{\mathcal{S}}$ donc, d'après le Lemme 3.5, $e = [P_i P_j] \notin \mathcal{D}_{\mathcal{S}}$. □

3.3 Arêtes et facettes

On considère à présent un champ de contraintes Γ de \mathbb{R}^3 constitué de segments et de facettes, sous les mêmes conditions que précédemment. Pour chaque facette $f \in \Gamma$, trois segments apparaissent³ également dans la contrainte, en l'occurrence les trois arêtes de f . Bien entendu, une même arête peut être partagée par plusieurs facettes.

La forte Delaunay-admissibilité de toutes les arêtes d'une facette f est, de manière évidente, une condition nécessaire à celle de f . Il est naturel de s'interroger sur la réciproque de cette proposition.

³Sans qu'il soit besoin de les fournir explicitement.

3.3.1 Le masque tombe

Un contre-exemple très simple (Figure 3.19) peut être construit à partir de la facette équilatérale f définie par les points $P_1(2; 0; 0)$, $P_2(\sqrt{3}; -1; 0)$ et $P_3(\sqrt{3}; 1; 0)$. Sa petite boule \mathcal{B}_{123} est évidemment centrée à l'origine $O = O_f$ et a pour rayon 2. Il est également clair que les points $P_4(0; 0; 1)$ et $P_5(0; 0; -1)$ sont inclus strictement dans \mathcal{B}_f , puisque $OP_4 = OP_5 = 1 < 2$. Or, ces deux points n'appartiennent pas au même demi-espace limité par $\mathcal{H}_f = (xOy)$, donc relativement à $\mathcal{S} = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\}$ on a $\Theta_3(f) = 2$. En d'autres termes, la facette f n'appartient à aucune triangulation de Delaunay de $\text{Conv}(\{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\})$. En revanche, les arêtes de f sont fortement Delaunay-admissibles puisqu'elles appartiennent à la frontière de cette enveloppe convexe.

Il est facile de prouver que l'unique triangulation de Delaunay est composée de $[P_1P_2P_4P_5]$, $[P_1P_3P_4P_5]$ et $[P_2P_3P_4P_5]$; concernant par exemple ce dernier tétraèdre, les coordonnées du centre $\Omega(x_\Omega; y_\Omega; z_\Omega)$ de la boule \mathcal{B}_{2345} sont aisément déterminables. D'une part, $x_\Omega = z_\Omega = 0$ en raison des symétries du tétraèdre; d'autre part

$$P_2\Omega^2 = P_4\Omega^2 \Leftrightarrow 3 + (y_\Omega + 1)^2 = y_\Omega^2 + 1$$

d'où $y_\Omega = -\frac{3}{2}$. Le carré du rayon de \mathcal{B}_{2345} vaut donc $(\frac{3}{2})^2 + 1 = \frac{13}{4}$ et $P_1\Omega^2 = (\frac{3}{2})^2 + 2^2 = \frac{25}{4}$. P_1 est donc extérieur à \mathcal{B}_{2345} ce qui prouve, en vertu du Théorème 1.1, que $P_2P_3P_4P_5 \in \mathcal{D}_S$. On a donc $[P_1P_2] \in \mathcal{D}_S$ bien que $[P_1P_2P_3] \notin \mathcal{D}_S$. La Delaunay-admissibilité des deux autres tétraèdres est immédiate, par rotation d'axe (P_4P_5) et d'angle $\pm\frac{\pi}{3}$.

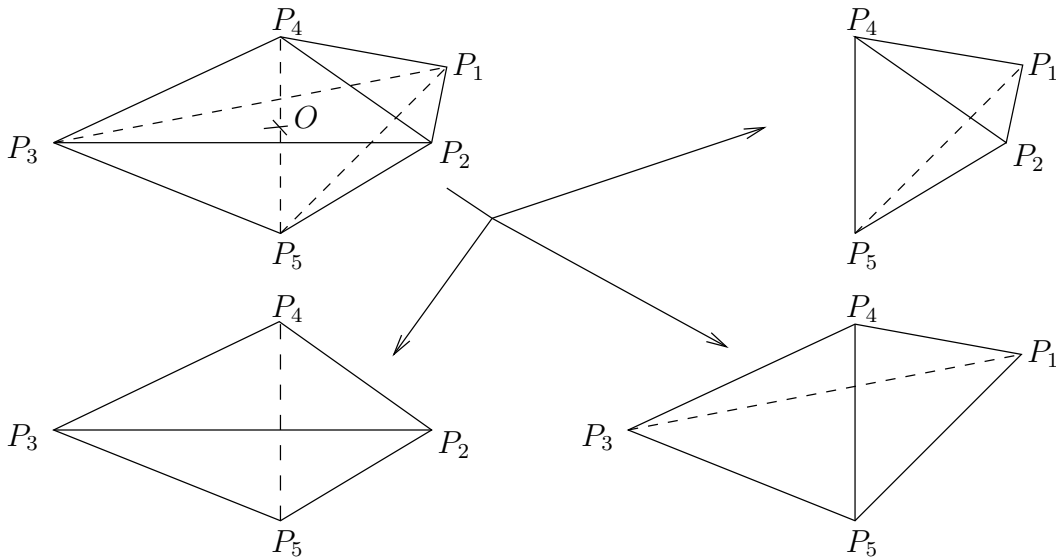


FIG. 3.19 – La facette $P_1P_2P_3$ n'est pas fortement Delaunay-admissible bien que ses trois arêtes le soient.

L'exemple de la facette $[P_1P_2P_3]$ est instructif, mais reste académique. On peut en effet se demander si une bonne contrainte simple, dont toutes les arêtes admettent exactement deux facettes adjacentes, sans points "parasites" non utilisés du type de P_4 et P_5 peut contenir des

facettes non Delaunay-admissibles mais dont les trois arêtes le soient. La réponse est également affirmative : il suffit par exemple de considérer la contrainte Γ constituée des facettes $[P_1P_2P_3]$, $[P_1P_2P_4]$ et $[P_5P_2P_3]$. La topologie de la contrainte de change rien aux résultats concernant $[P_1P_2P_3]$ et ses trois arêtes, puisque la Delaunay-admissibilité ne dépend que du nuage de points.

En tout état de cause, il apparaît que la facette manquante $[P_1P_2P_3]$ est percée par l'arête $[P_4P_5]$ en O . L'unique triangulation de Delaunay de $\text{Conv}(\{O, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\})$ contient en revanche les facettes $[OP_1P_2]$, $[OP_1P_3]$ et $[OP_2P_3]$, assurant la satisfaction faible de la contrainte initiale (Figure 3.20).

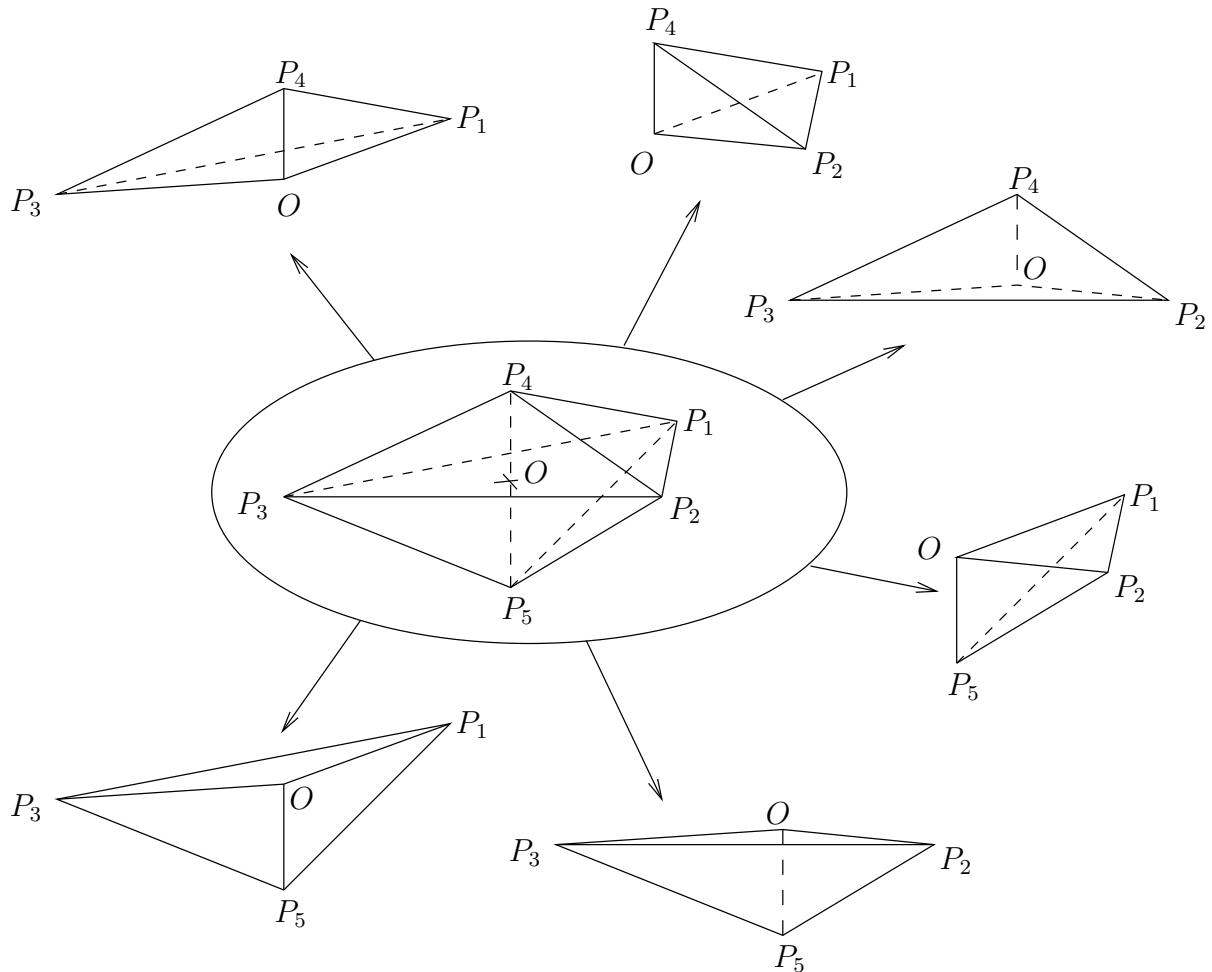


FIG. 3.20 – La facette $[P_1P_2P_3]$ est faiblement Delaunay-admissible, relativement à $\{O, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\}$.

Il est aisé de prouver que l'un au choix des six tétraèdres construits est fortement Delaunay-admissible⁴. La Delaunay-admissibilité des autres se déduit par rotation d'axe (P_4P_5) et d'angle $\pm\frac{\pi}{3}$ et éventuelle réflexion de plan $(P_1P_2P_3)$. Par exemple, dans le cas de $[OP_2P_3P_4]$, les coordonnées du centre de sa boule circonscrite \mathcal{B}_{0234} sont notées $\Omega(x_\Omega; y_\Omega; z_\Omega)$. Tout d'abord, il est

⁴relativement au nouveau nuage de points, bien entendu.

clair que $y_\Omega = 0$ en raison de l'invariance du tétraèdre par réflexion de plan $(yOz) = (OP_4P_5)$. De plus, $O\Omega = P_4\Omega$ donc $z_\Omega = \frac{1}{2}$. Enfin,

$$P_2\Omega^2 = O\Omega^2 \Leftrightarrow 3 + (y_\Omega + 1)^2 + \frac{1}{4} = y_\Omega^2 + \frac{1}{4}$$

d'où $y_\Omega = -2$. Le carré du rayon de \mathcal{B}_{0234} vaut donc $(-2)^2 + \frac{1}{4} = \frac{17}{4}$. Or, $P_1\Omega^2 = 4^2 + \frac{1}{4} = \frac{65}{4}$ et $P_5\Omega^2 = 4 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$. P_1 et P_5 sont donc extérieurs à \mathcal{B}_{0234} ce qui prouve, en vertu du Théorème 1.1, que $OP_2P_3P_4 \in \mathcal{D}_S$.

Cet exemple suggère la conjecture suivante : il semble naturel de supposer que si une facette est manquante alors que ses trois arêtes sont présentes, alors elle est nécessairement percée par au moins une arête fortement Delaunay-admissible n'appartenant pas à la contrainte. Il reste à la prouver.

3.3.2 La chasse aux trous

Cette partie s'intéresse à la démonstration de la conjecture. À cet effet, une définition est tout d'abord introduite, en conservant les notations usuelles ; en particulier, on se souvient que \mathcal{S}_{ijk} désigne $\mathcal{B}_{ijk} \cap \mathcal{S}$.

Définition 3.7. Soient P_i , P_j et P_k trois points deux à deux distincts dans \mathcal{S} . On dit que la facette $f = [P_iP_jP_k]$ est un trou lorsqu'elle vérifie les deux conditions suivantes :

- (i) \mathcal{S}_{ijk} ne contient que les trois sommets de f ;
- (ii) f n'est pas fortement Delaunay-admissible alors que ses trois arêtes $[P_iP_j]$, $[P_iP_k]$ et $[P_jP_k]$ le sont.

L'exemple de la Figure 3.19 fournit évidemment un cas de trou, en l'occurrence la facette $[P_1P_2P_3]$.

Le premier axiome de la définition permet d'évincer les cas quelque peu artificiels, rencontrés dans des cas de cosphéricité, comme illustré Figure 3.21. Dans cet exemple, la facette $f = [P_1P_2P_3]$ n'est pas fortement Delaunay-admissible, relativement à $\mathcal{S} = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\}$, bien que ses trois arêtes le soient. Plus précisément, f est une face interne du polyèdre $P_1P_2P_3P_4P_5$, élément du recouvrement de Delaunay de \mathcal{S} . Elle est appartient donc à certaines, mais pas à toutes les triangulations de Delaunay de l'enveloppe convexe de \mathcal{S} . En tout état de cause, elle n'est pas percée par une arête de ce recouvrement, raison pour laquelle ce type de configuration est éliminé de la définition. Pour ces raisons, il est tentant de qualifier de telles facettes de *faux trous*.

Afin de préciser les conditions d'existence de tels trous, une condition nécessaire est formulée.

Théorème 3.4. Si la facette $f = [P_iP_jP_k]$ est un trou, alors elle est percée par au moins une arête fortement admissible.

Preuve : Par dualité avec le diagramme de Voronoï de $\text{Conv}(\mathcal{S})$, tout point de f appartient à au moins un polyèdre de \mathcal{D}_S . De plus, il existe au moins deux points de f appartenant à deux polyèdres distincts, sans quoi f appartiendrait à \mathcal{D}_S ou serait face interne d'un polyèdre de ce recouvrement, contredisant alors l'hypothèse. En outre, l'intersection de deux polyèdres étant

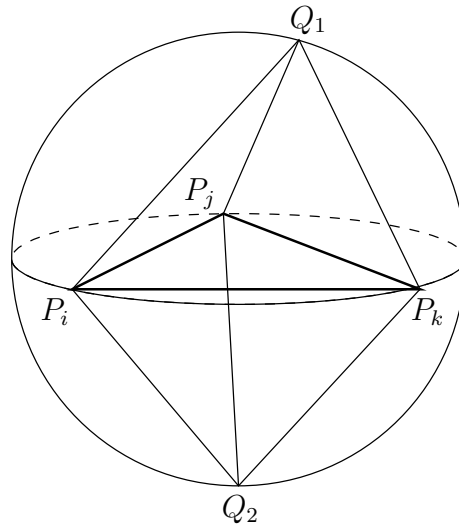


FIG. 3.21 – Les trois arêtes de $[P_i P_j P_k]$ sont fortement Delaunay-admissibles, bien que cette facette ne le soit pas. Néanmoins, P_i, P_j, P_k, Q_1 et Q_2 sont cosphériques donc $[P_i P_j P_k]$ n'est pas un trou; elle existe en fait dans une triangulation de Delaunay de l'enveloppe convexe du nuage de points, mais pas dans toutes.

au plus une face, deux polyèdres contenant à eux deux seuls f intersecteraient au moins l'une de ses arêtes, ce qui est impossible puisque les trois sont fortement Delaunay-admissibles. Par conséquent, trois polyèdres au moins intersectent f ; en d'autres termes, $f \cap \mathcal{D}_S$ contient au moins trois triangles $P_i P_j M_1, P_i P_k M_2$ et $P_j P_k M_3$, les points M_1, M_2 et M_3 étant contenus dans f , mais n'étant pas forcément disjoints. Ceci qui entraîne que la facette f est percée en au moins un point. Or, par définition d'une facette, f n'a pas de point interne dans \mathcal{S} , il existe donc une arête de \mathcal{D}_S perçant f en M_1 . \square

Ce résultat pourrait suggérer des opérations de récupération *a posteriori*, lorsque trois arêtes d'une facette manquante f sont construites. En effet, le cas des faux trous peut être rectifié par de simples bascules de facettes à l'intérieur du polyèdre de Delaunay admettant f comme face interne. Ne restent alors que les vrais trous, pour lesquels existent des arêtes perçantes. Il suffit alors de subdiviser f par ajout de tous les points de percement, et de construire les tétraèdres s'appuyant sur les sommets de f , les points de percement ainsi que les sommets des arêtes perçantes. Naturellement, les tétraèdres obtenus n'ont aucune raison d'être Delaunay-admissibles ce qui, comme cela a été expliqué Chapitre 1, est le cas général des méthodes de récupération *a posteriori*. Par ailleurs, des difficultés numériques dans la mise en œuvre d'une telle méthode sont à attendre, car de telles facettes correspondent souvent à des cas très pathologiques, avec des arêtes perçantes de très petites tailles relativement à celle des arêtes de la facette, ou encore avec de faibles angles d'incidence. En pratique, cela se traduit par des points de percement sensés, d'un point de vue géométrique, appartenir à la facette mais, numériquement, se trouvant à l'extérieur. En tout état de cause, cette piste est susceptible d'être exploitée par les maillurs de Delaunay contraints par forçage.

Chapitre 4

Delaunay-admissibilité en dimension 3 : aspects algorithmiques

Les conditions de forte Delaunay-admissibilité *a priori* en dimension 3 étant connues, l'objet de ce chapitre est d'étudier la pertinence, en termes de convergence mais aussi d'efficacité, d'algorithmes de redéfinition *a priori* de facettes en dimension 3. Il est d'abord établi que l'algorithme de redéfinition des segments s'étend sans problème à la dimension 3. Ensuite, le cas des facettes adjacentes coplanaires est étudié du point de vue de la Delaunay-admissibilité bidimensionnelle qu'il induit, avec son éventuel traitement par des bascules d'arêtes. Ensuite, un algorithme convergent est proposé dans le cas général. Cependant, en raison des limitations entraînées par la complexité de ce dernier, un algorithme heuristique est proposé. Enfin, le problème de l'interface avec un mailleur de Delaunay contraint existant est étudié. Des exemples illustrent le propos.

De même que précédemment, on considère un ensemble fini de points $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ auquel est associé un champ de contraintes Γ , sous les conditions habituelles.

4.1 Redéfinition de segments en dimension 3

Comme en dimension 2, les résultats nécessaires à l'établissement d'un algorithme convergent de redéfinition *a priori* sont présentés. Ensuite, l'Algorithme 2.2 est étendu, au prix d'une réévaluation du problème des nœuds en dimension 3.

4.1.1 Extensions

Il est clair que les lemmes 2.4 à 2.9 s'étendent naturellement aux petites sphères en dimension 3. Il suffit en effet de reprendre point par point les démonstrations en dimension 2, ce qui ne présente aucun intérêt et n'est donc pas détaillé, dans un souci de concision.

Lemme 4.1. *Soit $[P_i P_j]$ un segment non dégénéré de Γ , dont la petite boule \mathcal{B}_{ij} contient au moins un point $P_n \in \mathcal{S} \setminus \{P_i, P_j\}$. Alors, désignant par M , \mathcal{B} et \mathcal{B}' respectivement le projeté*

orthogonal de P_n sur $[P_i P_j]$ et les petites boules de $[P_i M]$ et $[M P_j]$, on a :

$$\text{card}(\mathcal{B} \cap \mathcal{S}) + \text{card}(\mathcal{B}' \cap \mathcal{S}) < \text{card}(\mathcal{B}_{ij} \cap \mathcal{S})$$

Lemme 4.2. Soient $[P_h P_i]$, $[P_i P_j]$ et $[P_j P_k]$ trois segments non dégénérés de Γ , tels que $\widehat{P_h P_i P_j}$ et $\widehat{P_i P_j P_k}$ soient obtus ou droits. On a alors

$$(\forall M \in]P_i P_j[) \quad M \notin \mathcal{B}_{hi} \cup \mathcal{B}_{jk}.$$

Lemme 4.3. Soient $[P_h P_i]$ et $[P_i P_j]$ deux segments non dégénérés de Γ formant un angle aigu, et M le projeté orthogonal de P_h sur $(P_i P_j)$. On a alors

$$\mathcal{B}_{hi} \cap]P_i P_j[\neq \emptyset$$

et plus précisément,

- si $P_h P_i \times \cos \widehat{P_h P_i M} \geq P_i P_j$, alors $\mathcal{B}_{hi} \cap]P_i P_j[=]P_i P_j[$;
- si $P_h P_i \times \cos \widehat{P_h P_i M} < P_i P_j$, alors $\mathcal{B}_{hi} \cap]P_i P_j[=]P_i M[\subsetneq]P_i P_j[$.

Lemme 4.4. Soient $[P_h P_i]$ et $[P_i P_j]$ deux segments non dégénérés de Γ formant un angle aigu non nul et $\mathcal{S}_{hij} = (\mathcal{S}_{hi} \cup \mathcal{S}_{ij}) \setminus \{P_i\}$. En convenant que

$$d_i = \min_{M \in \mathcal{S}_{hij}} MP_i$$

on définit P_{hi} (respectivement P_{ij}) comme le point de $[P_h P_i]$ (respectivement de $[P_i P_j]$) situé à une distance $d < d_i$ de P_i , et l'on pose $\mathcal{S}' = \mathcal{S} \cup \{P_{hi}, P_{ij}\}$. Alors la petite boule de $[P_i P_{hi}]$ (respectivement de $[P_i P_{ij}]$) ne contient pas d'autre point de \mathcal{S}' que P_i et P_{hi} (respectivement P_{ij}).

Lemme 4.5. Pour tout couple (f, f') de segments disjoints et non dégénérés de Γ , un nombre fini de projections orthogonales quelconques de points distincts de f' sur f procure une subdivision de f en segments non dégénérés dont les petites boules associées ne rencontrent pas f' .

Les résultats qui précèdent montrent que l'on peut étendre l'Algorithme 2.1 à la dimension 3, et établir immédiatement sa convergence. Néanmoins, la question du sur-emploi de **nettoyage**, avec création de points supplémentaires superflus se pose de la même manière qu'en dimension 2. Pour cette raison, on étend la notion de nœud à la dimension 3 :

Définition 4.1. Si un point $P_i \in \mathcal{S}$ est extrémité d'au moins deux segments de Γ formant un angle aigu, on appelle nœud associé à P_i l'ensemble de tous les segments de Γ concourant en ce point, qualifié de centre nodal. S'il est possible de trouver une suite de ces arêtes, formée de telle sorte que deux termes successifs forment toujours un angle aigu, qui soit cyclique, on dit que ce nœud est fermé. Dans le cas contraire, il est qualifié d'ouvert. Enfin, on appelle support du nœud associé à P_i l'ensemble minimal de demi-droites d'origine P_i contenant ce nœud.

Il a été vu, Chapitre 2, que pour qu'un nœud soit fermé en dimension 2, il est nécessaire qu'au moins cinq arêtes concourent en son centre. Un exemple simple va cependant montrer que cette condition nécessaire, fort utile d'un point de vue algorithmique pour accélérer la détection

de tels nœuds fermés, ne s'étend malheureusement pas à la dimension 3. Considérons en effet les points $P_1(2; 0; 0)$, $P_2(-1; \sqrt{3}; 0)$, $P_3(-1; -\sqrt{3}; 0)$, $P_4(0; 0; -1)$ et $P_5(0; 0; -2)$ (Figure 4.1). Il est clair que la facette $[P_1P_2P_3]$ est équilatérale et que (P_4P_5) la perce orthogonalement en son centre. f est donc invariante par rotations d'axe (P_4P_5) et d'angles $\pm\frac{2\pi}{3}$ et, par suite, $\widehat{P_1P_4P_2} = \widehat{P_2P_4P_3} = \widehat{P_1P_4P_3}$ d'une part, $\widehat{P_1P_5P_2} = \widehat{P_2P_5P_3} = \widehat{P_1P_5P_3}$ d'autre part. Or,

$$\cos \widehat{P_1P_4P_2} = \frac{\overrightarrow{P_4P_1} \cdot \overrightarrow{P_4P_2}}{P_4P_1 \times P_4P_2} = \frac{(2; 0; 1) \cdot (-1; \sqrt{3}; 1)}{5} = -\frac{1}{5} < 0$$

ce qui prouve que $\widehat{P_1P_4P_2}$ est obtus, donc que le nœud associé à P_4 est ouvert, alors que

$$\cos \widehat{P_1P_5P_2} = \frac{\overrightarrow{P_5P_1} \cdot \overrightarrow{P_5P_2}}{P_5P_1 \times P_5P_2} = \frac{(2; 0; -2) \cdot (-1; \sqrt{3}; -2)}{8} = \frac{1}{4} > 0$$

entraînant que $\widehat{P_1P_5P_2}$ est aigu ; le nœud associé à P_5 est donc fermé.

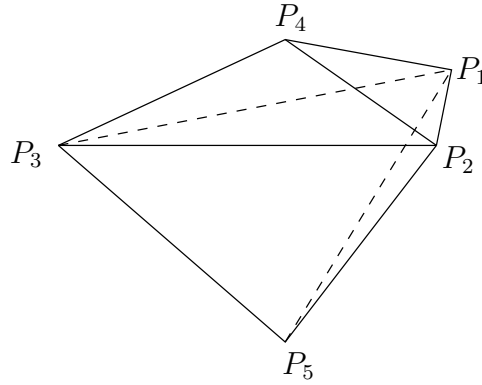


FIG. 4.1 – Nœuds en dimension 3 : ouvert autour de P_4 , fermé autour de P_5 .

Ce dernier exemple montre en particulier qu'en dimension 3, les nœuds fermés sont susceptibles d'être, proportionnellement, plus nombreux qu'en dimension 2 puisque, dès lors que les arêtes d'un nœud ne sont pas coplanaires, il suffit qu'elles soient au nombre de trois pour fermer celui-ci. D'autres conditions nécessaires peuvent être formulées, en particulier en utilisant l'angle solide formé par ses arêtes ; néanmoins, leur intérêt d'un point de vue calculatoire apparaît être au mieux discutable. En tout état de cause, les lemmes permettant d'éviter un **nettoyage** aux nœuds ouverts s'étendent trivialement en dimension 3 :

Lemme 4.6. *Soit \mathcal{N} le nœud associé à un point $P_i \in \mathcal{S}$, de support η . Pour toute suite d'applications quelconques de **projection** sur les segments reliés à P_i , il existe un rang n_0 à partir duquel les petites boules des segments de \mathcal{N}_n , nœud associé à P_i et de support η produit à l'itération n , ne contiennent pas de points de $\mathcal{S}_n \setminus \eta$.*

Lemme 4.7. *Si le champ de contraintes Γ est simple, c'est-à-dire si chaque point de \mathcal{S} est extrémité d'au plus un segment de Γ , alors des applications itérées de **projection**, telles qu'elles sont décrites dans l'Algorithme 2.1 transposé en dimension 3 terminent en un temps fini.*

Par suite, l'Algorithme 2.2 peut être étendu naturellement.

4.1.2 Un algorithme convergent

Dans ce qui suit, **projection** et **nettoyage** désignent les extensions à la dimension 3 des fonctions homonymes introduites pour les arêtes en dimension 2. On considère une contrainte Γ composée de segments, associée à un nuage de points \mathcal{S} de \mathbb{R}^3 .

Algorithme 4.1 (Subdivision des segments en dimension 3).

1. *Initialisation :*

- (a) *Tester la Delaunay-admissibilité forte des segments de Γ et constituer le tas $\mathcal{T}(\Gamma)$ de ceux qui ne sont pas fortement-admissibles ;*
- (b) *Détecter les nœuds fermés de Γ .*

2. *Tant que $\mathcal{T}(\Gamma)$ est non vide, faire :*

- (a) *Pour chaque segment $e = [P_i P_j]$ de $\mathcal{T}(\Gamma)$, faire :*
 - *si l'une au moins des extrémités P_* de e est un centre nodal, faire :*
 - i. *constituer le nœud \mathcal{N} associé à P_* ;*
 - ii. $d_* = \min MP_*$, $M \in \mathcal{S} \cap \bigcup_{\phi \in \mathcal{N}} \mathcal{B}_\phi \setminus \{P_*\}$;
 - iii. *fixer $0 < d < d_*$;*
 - iv. *pour chaque $[P_* M] \in \mathcal{N}$, **nettoyage**(P_* , M , d).*
 - v. *mettre à jour \mathcal{S} et Γ .*
 - *sinon, faire :*
 - i. *choisir $P_n \in \mathcal{S}_{ij} \setminus \{P_i, P_j\}$;*
 - ii. **projection**(P_i, P_j, P_n).
 - iii. *mettre à jour \mathcal{S} et Γ .*
- (b) *Mettre à jour $\mathcal{T}(\Gamma)$.*

Comme pour les Lemmes 4.1 à 4.7, le Théorème 2.3 est étendu immédiatement à la dimension 3.

Théorème 4.1. *L'Algorithme 4.1 termine en un nombre fini d'itérations.*

L'Algorithme 4.1 permet de subdiviser un ensemble de segments de telle sorte que la contrainte résultante soit fortement Delaunay-admissible. Si l'on s'intéresse à présent à un ensemble d'arêtes de facettes, le problème est substantiellement plus complexe. En effet, pour des raisons de conformité¹ de la triangulation, il ne peut y avoir de point à l'intérieur d'une arête de facette. Ceci signifie en particulier pour pour chaque arête subdivisée, au moins une nouvelle arête doit être créée², comme le montre la Figure 4.2. Or, la méthode présentée ci-dessus ne dit rien de la Delaunay-admissibilité de cette, ou de ces, nouvelle(s) arête(s). En d'autres termes, ceci signifie

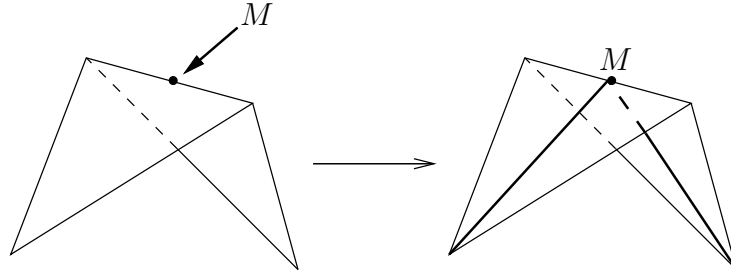


FIG. 4.2 – *Subdivision par insertion du point M d'une arête partagée par deux faces, conduisant à la création de deux nouvelles arêtes hors du support des segments initiaux.*

que l'on est capable, moyennant un nombre fini de subdivisions, de rendre fortement Delaunay-admissible tout support géométrique linéaire constant, mais pas un support géométrique évoluant à chaque itération.

De manière générale, un champ de contraintes Γ en dimension 3 ne contient pas seulement des segments. Le plus souvent, ceux-ci ne constituent en effet qu'une partie de la contrainte, et ne sont fréquemment que les avatars des facettes. Par conséquent, l'Algorithme 4.1 constitue une réponse à un problème académique avec peu d'applications pratiques. Dans un souci de concision, il semble donc superflu d'illustrer avec des exemples de contraintes constituées seulement d'arêtes.

4.2 Bascules d'arêtes

On utilise ici les propriétés des triangulations de Delaunay en dimension 2, puisque la configuration locale formée par deux facettes coplanaires adjacentes s'identifie à celle de deux triangles de \mathbb{R}^2 . L'opérateur de bascule d'arête défini en dimension 2 s'étend donc naturellement à de telles facettes, sous conditions de convexité et de quadrilatéralité stricte du domaine qu'elles limitent.

Définition 4.2. *Soient deux facettes coplanaires f et f' de Γ partageant une arête e n'appartenant à aucune autre facette. on dit que e est fortement Delaunay-basculable si le recouvrement de Delaunay de $\text{Conv}(f \cup f')$ est composé de deux facettes adjacentes dont aucune ne possède e pour arête. Par abus de langage et lorsqu'aucune confusion n'est possible, on dira aussi que la paire $\{f, f'\}$ est fortement Delaunay-basculable.*

Il est à noter que l'on parle de paire et non de couple, puisque la relation est évidemment reflexive. En d'autres termes, si deux facettes f et f' sont coplanaires, adjacentes en une arête n'appartenant à aucune autre face, telles que $\Theta_3(f) = 3$ et que le sommet de f' non partagé avec f est intérieur à Δ_f , la paire $\{f, f'\}$ est dite *basculable*.

Par ailleurs, le cadre général étant ici celui de la forte Delaunay-admissibilité, les paires de facettes adjacentes et coplanaires mais dont les sommets sont cocycliques ne sont donc pas fortement Delaunay-basculables, comme l'illustre l'exemple de Figure 4.3.

¹Au sens des éléments finis.

²En fait, autant de nouvelles arêtes qu'il y a de faces partageant l'arête subdivisée.

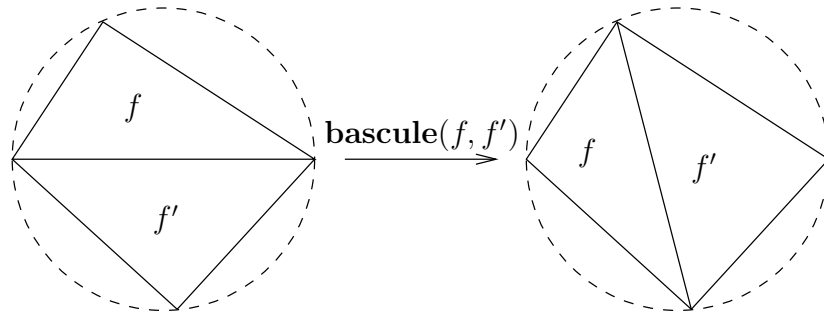


FIG. 4.3 – Deux configurations alternées d’une paire de facettes basculables : risque de boucle.

Il est clair que la forte Delaunay-admissibilité de la configuration formée par deux facettes adjacentes et coplanaires constitue un critère local, qui ne peut donc pas suffire à assurer la forte Delaunay-admissibilité de f ou f' relativement à \mathcal{S} tout entier. Cependant, il permet d’énoncer une condition nécessaire.

Lemme 4.8. *Si une paire de facettes est fortement Delaunay-basculable, alors aucune de celles-ci n’est fortement Delaunay-admissible.*

Preuve : Elle est immédiate puisque, par hypothèse, la réunion des deux facettes forme un convexe quadrilatéral \mathcal{C} dont le recouvrement de Delaunay \mathcal{D} est formé des deux facettes triangulaires partageant sa diagonale différente de e . Par suite, \mathcal{D} ne contient ni f , ni f' ; dès lors, la propriété de la boule vide (Théorème 1.1) n’étant vérifiée localement ni pour f , ni pour f' , elle ne peut *a fortiori* l’être sur $\text{Conv}(\mathcal{S})$ tout entier. \square

Par conséquent, on définit la fonction $\text{bascule}(f, f')$ pour toute paire $\{f, f'\}$ de facettes fortement Delaunay-basculables comme l’opération remplaçant f et f' par f_1 et f_2 , facettes constitutives du recouvrement de Delaunay de $\text{Conv}(f \cup f')$. D’un point de vue algorithmique, la notion de forte Delaunay-basculabilité permet d’éviter une boucle de bascules sur une configuration locale de deux facettes.

Par ailleurs, cette même notion requiert que l’on s’attarde sur le sens donné, toujours d’un point de vue algorithmique, à la coplanarité. En effet,

1. Quatre points sont coplanaires si et seulement si le déterminant associé est nul. Cependant, un déterminant nul n’a de sens en calcul numérique qu’aux erreurs d’arrondis près. Par conséquent, ce mode de calcul ne permet pas de déterminer les cas de coplanarité exacte. Une condition suffisante de coplanarité exacte peut néanmoins être fournie par l’artifice des “couleurs”, consistant à affecter à chaque facette originelle une valeur (couleur) qu’elle est la seule à posséder, et dont hériteront successivement ses descendantes éventuelles, qui sont exactement coplanaires. Le partage d’une même couleur n’est évidemment pas une condition nécessaire de coplanarité.
2. La notion de coplanarité étant très restrictive, eu égard en particulier aux applications numériques auxquelles sont destinés les maillages, il est également possible de définir une coplanarité relative à la courbure locale de la contrainte, contrôlée à ε près, celui-ci étant choisi par l’utilisateur.

La restriction du basculement d'arête aux couples de facettes adjacentes exactement coplanaires assure que l'approximation du support géométrique n'est pas dégradée par cette opération. Cependant, la coplanarité exacte n'étant assurée que pour des facettes issues des subdivisions successives d'une même facette-mère, cette condition limite de façon drastique son emploi et donc son efficacité à prévenir la prolifération.

Or, de nombreuses applications concernent des supports contenant des portions de plans et donc des coplanarités quasi-exactes ou des objets à courbure localement très faible. Il semble donc cohérent avec l'objectif recherché de s'autoriser des bascules sur des facettes non coplanaires, la tolérance relative à la courbure locale étant prédéfinie par l'utilisateur. En pratique, une solution raisonnable consiste en un pré-traitement détectant les coplanarités à une tolérance près définie par l'utilisateur.

Enfin, il est à noter que le support géométrique des arêtes initiales n'est pas conservé, dès lors qu'au moins une bascule est appliquée et non annulée par une bascule ultérieure.

4.3 Le coût de la convergence

Dans cette section sont mises en évidence les raisons pour lesquelles la méthode utilisée pour traiter les segments ne s'étend pas aux facettes. Une solution radicale est néanmoins possible, mais est incompatible avec les exigences quant au nombre facettes créés, la rendant inutilisable en pratique. Ceci motive le choix de définir des algorithmes de redéfinition *a priori* de facettes, dont il ne semble pas raisonnable de conjecturer qu'ils soient convergents d'un point de vue théorique, mais dont le coût soit réaliste.

4.3.1 Impossibilité d'une extension simple

Le Théorème 3.2 permettant de discriminer les facettes qui seront présentes dans toute triangulation de Delaunay de $Conv(\mathcal{S})$ de celles qui ne le seront pas nécessairement, il convient de se donner une méthode de traitement de ces dernières. Malheureusement, le Lemme 2.4 n'a pas d'équivalent en dimension 3. *A contrario*, on a le résultat qui suit, illustré Figure 4.4.

Lemme 4.9. *Soient t et t' deux triangles non dégénérés partageant deux sommets et tels que le troisième sommet de t' appartienne à l'intérieur d'une des arêtes de t . Alors, en désignant par \mathcal{B}_t et $\mathcal{B}_{t'}$ leurs petites boules respectives :*

1. $\mathcal{B}_t \cap \mathcal{B}_{t'} \neq \emptyset$
2. $\mathcal{B}_{t'} \not\subset \mathcal{B}_t$

Preuve : Par hypothèse, $\mathcal{B}_t \neq \mathcal{B}_{t'}$ et $\mathcal{B}_t \cap \mathcal{B}_{t'}$ contient au moins deux points distincts, donc ces deux boules sont sécantes en un disque ayant pour support le plan \mathcal{H} , qui coupe perpendiculairement le plan des triangles selon une droite ayant pour support l'arête commune de ceux-ci. Par suite, $\mathcal{B}_t \cap \mathcal{B}_{t'} \neq \emptyset$. De plus, en désignant par P , \mathcal{H}^+ et $\partial\mathcal{B}$ respectivement le sommet de t' appartenant à l'intérieur d'une des arêtes de t , le demi-espace ouvert limité par \mathcal{H} et contenant P et la sphère frontière de $\mathcal{B}_{t'}$, on a $P \in \partial\mathcal{B} \cap \mathcal{B}_t \cap \mathcal{H}^+$ donc, d'après le Lemme 3.2 $\mathcal{B}_t \cap \mathcal{H}^+ \subsetneq \mathcal{B}_{t'} \cap \mathcal{H}^+$, ce qui entraîne en particulier que $\mathcal{B}_{t'} \not\subset \mathcal{B}_t$. \square

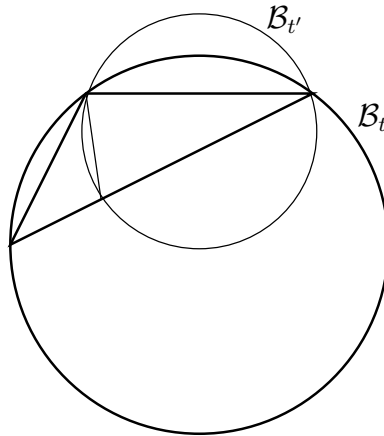


FIG. 4.4 – La petite boule de t' n'est pas incluse dans celle de t : projection sur le plan de t .

Une conséquence immédiate de ce résultat est que les petites boules associées aux deux sous-facettes obtenues par subdivision d'une facette donnée sont susceptibles de contenir des points qui n'appartenaient pas à la petite boule de cette dernière. Par suite, il est impossible de formuler un équivalent du Théorème 2.4 en dimension 3 ; dès lors, la convergence d'une méthode basée sur des subdivisions successives de facettes n'est en rien naturelle.

4.3.2 Existence d'un algorithme convergent

Il est clair que le problème peut être résolu de façon drastique, grâce à une subdivision uniforme de la contrainte, découpée en une seule fois ³ en un ensemble de sous-facettes dont les petites boules ne contiennent pas d'autres points. En pratique, une telle méthode requiert que le rayon des petites boules soit contrôlé, ce qui impose des exigences sur la taille des arêtes ainsi que sur les angles aux sommets.

Intuitivement, on voit bien que les problèmes d'influences croisées vont, ainsi que pour la redéfinition des segments, se produire aux intersections de facettes, donc aux sommets et aux arêtes. Par voie de conséquence, la procédure de nettoyage introduite précédemment permet de résoudre le problème pour les sommets. Concernant les arêtes, un mécanisme de protection similaire peut être utilisé, basé non plus sur des boules mais sur des cylindres. Des polyèdres, entourant les sommets et les arêtes vont donc être créés, avec une discrétisation assez fine pour ne pas influencer l'extérieur de ces zones de protection. Subsisteront alors des parties de facettes deux à deux disjointes, devant être re-triangulées sous les conditions de majoration des rayons de petites boules.

En pratique, un résultat théorique intéressant, se fondant sur le même type de considérations, a été établi par [Murphy,Mount,Gable-2000]. Il est en particulier prouvé qu'il existe un pas h , suffisamment petit, pour rediscrétiser les arêtes initiales ainsi que les arêtes de protection et de nettoyage, de telle sorte que la triangulation résultante soit Delaunay-admissible ⁴. Il est donc

³et non de manière itérative.

⁴mais pas fortement Delaunay-admissible.

clair que même pour un h comparable à la longueur des arêtes initiales, celles-ci étant en outre de longueurs voisines, le nombre de subdivisions est hors de propos. Aux dires mêmes des auteurs, ce résultat théorique n'est pas exploitable. On est donc fondé, à défaut de faire apparaître un algorithme convergent utilisable, à tenter de mettre au point des méthodes moins coûteuses.

4.4 Un algorithme sous-convergent, mais utilisable

Il semble tout d'abord souhaitable de ne pas subdiviser les facettes fortement Delaunay-admissibles. Or, la méthode précédente conduit à une subdivision complète de la contrainte initiale, aucune facette n'étant épargnée. Il est donc fondé d'aborder le problème d'un point de vue différent, en laissant de côté la convergence théorique.

Le Théorème 4.1 montre que l'Algorithme 4.1 permet, après un nombre fini de subdivisions, de rendre fortement Delaunay-admissibles tous les segments de la contrainte initiale, en particulier les arêtes des facettes initiales. Cette procédure ne restitue cependant pas un ensemble de facettes conformes au sens du maillage, puisque leurs arêtes contiennent des points internes. Chaque facette initiale dont au moins une arête a été découpée doit donc être elle-même subdivisée, en s'appuyant sur les seuls points créés par l'Algorithme 4.1, pour les raisons de coût précédemment évoquées. Une méthode raisonnable consiste donc à fabriquer des triangulation localement Delaunay-admissibles, ainsi qu'illustré par la Figure 4.5.

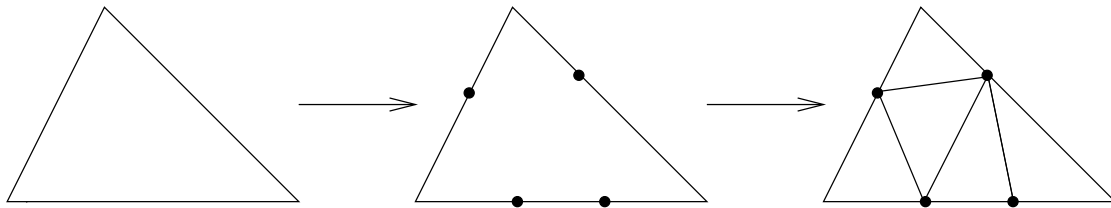


FIG. 4.5 – *Triangulation localement Delaunay-admissible d'une facette dont les arêtes ont été subdivisées.*

Les motivations sont bien entendu les mêmes que pour l'algorithme convergent, mais cette fois, sans contrôle sur la taille des petites boules associées aux nouvelles facettes. La seule certitude est que les sous-facettes issues d'une même facette n'interfèrent pas entre elles, sauf en des cas particuliers de cocyclicité. Ceux-ci peuvent d'ailleurs être résolus en déplaçant légèrement les points insérés sur les arêtes, dans les limites autorisées par les Lemmes 4.3 et 4.4 pour que les segments demeurent fortement Delaunay-admissibles.

Le problème de la convergence est donc posé par le fait qu'un certain nombre des nouvelles facettes, bien que localement Delaunay-admissibles, ne le soient pas au regard de l'ensemble du nuage de points associé à la contrainte. L'utilisation de la fonction **bascule** ne considérant que des facettes coplanaires, avec une ampleur variable, liée au choix du type de coplanarité, n'apporte qu'une réponse partielle à ce problème. Néanmoins, l'objectif de réalisme semble atteint, en particulier parce que seules les facettes qui ne sont pas fortement Delaunay-admissibles sont concernées par les subdivisions.

Cette approche n'a aucune raison claire d'être convergente. Néanmoins, il n'a pas été possible d'exhiber un contre-exemple, seulement des cas de singularités numériques créées par un trop grand nombre de subdivisions, ce qui n'est pas, d'un point de vue algorithmique, une preuve de divergence. En tout état de cause, la convergence de la méthode semble pour le moins être très difficile, le cas échéant, à établir. Il ne paraît donc pas raisonnable de formuler une conjecture en ce sens. Pour ces raisons, l'algorithme proposé est qualifié de sous-convergent.

4.4.1 Schéma général

On considère un champ de contraintes initial Γ , associé à un nuage de points \mathcal{S} . La fonction **Delaunay_arêtes**(Γ) applique aux arêtes de Γ l'Algorithme 4.1, de sorte de les redéfinir en un ensemble d'arêtes fortement Delaunay-admissibles. En particulier, Γ n'est plus, après application de cette fonction, une triangulation conforme ; il faut reconstruire des facettes s'appuyant sur les nouveaux points et segments, comme l'illustre la Figure 4.5. C'est précisément la tâche de la fonction **Delaunay_local**(Γ) qui, de surcroît, construit des facettes localement Delaunay-admissibles. Bien entendu, les mises à jour de \mathcal{S} comme de Γ sont effectuées par ces fonctions.

Algorithme 4.2 (Subdivision sous-convergente des facettes).

1. *Initialisation* : Tester la Delaunay-admissibilité des facettes de Γ et constituer le tas $\mathcal{T}(\Gamma)$ de celles qui ne sont pas fortement Delaunay-admissibles ;
2. Tant que $(\mathcal{T}(\Gamma) \neq \emptyset)$, faire pour chaque f de $\mathcal{T}(\Gamma)$:
 - (a) tant qu'il existe des paires basculables $\{f, f'\}$ non basculés à cette itération, **swap**(f, f') ;
 - (b) mettre à jour \mathcal{S} , Γ et $\mathcal{T}(\Gamma)$. Si $\mathcal{T}(\Gamma)$ est vide, **FIN**.
 - (c) **Delaunay_arêtes**(Γ) ;
 - (d) **Delaunay_local**(Γ) ;
 - (e) Mettre à jour $\mathcal{T}(\Gamma)$.

D'un point de vue pratique, **Delaunay_arêtes** n'est appliquée qu'aux seules facettes qui sont dans $\mathcal{T}(\Gamma)$. En effet, la forte Delaunay-admissibilité d'une facette entraînant celle de ses arêtes, il est inutile de leur appliquer le test de Delaunay-admissibilité reposant sur le Théorème 3.3. Le gain est évident en termes de temps de calcul.

4.4.2 Exemples d'illustration

Comme cela a été évoqué dans le chapitre précédent, la notion de paire basculable est liée à ce que l'on entend par coplanarité en calcul numérique. En particulier, si seule la coplanarité exacte⁵ est retenue, il est clair que **basculer** est moins utilisée que si l'on se donne une définition plus large, liée à la courbure locale par exemple. En pratique, l'Algorithme 4.2 est très coûteux, et pour éviter une explosion combinatoire, le choix a été fait d'utiliser, pour les exemples choisis, une coplanarité relative. Plus précisément, la coplanarité de deux facettes est déterminée ici par

⁵*i.e.* pour des facettes issues d'une même facette initiale.

un calcul de déterminant. On sait que les facettes $[P_i P_j P_k]$ et $[P_i P_j P_l]$ sont coplanaires si et seulement si $\det(\overrightarrow{P_i P_j}, \overrightarrow{P_i P_k}, \overrightarrow{P_i P_l})$ est nul. Cependant, la nullité de ce déterminant n'ayant pas réellement de sens en calcul numérique, la coplanarité est acceptée dès lors que ce déterminant est plus petit qu'un certain ε choisi par l'utilisateur. Dans le cas présent, ε est fixé à 10^{-16} . Ceci revient d'ailleurs à se donner une borne inférieure, en-dessous de laquelle le volume d'un tétraèdre est considéré comme nul. Bien entendu, il s'agit ici d'un choix arbitraire, dans le simple but d'illustrer l'application de l'Algorithme 4.2 ; d'autres considérations pourraient être prises en compte, comme la courbure locale ou encore une interpolation d'un support géométrique sous-jacent.

Le Tableau 4.1 présente les résultats fournis par l'Algorithme 4.2 pour un jeu représentatif de champs de contraintes. Initialement, le nuage de points \mathcal{S}_i est constitué des N_p sommets de la discrétisation de l'objet, le recouvrement triangulaire de celle-ci définissant les N_f facettes du champ de contraintes Γ_i .

À une contrainte initiale Γ_i , l'Algorithme 4.2 fournit une contrainte redéfinie Γ'_i associée à un nuage de points enrichi \mathcal{S}'_i . Les quantités correspondantes pour celle-ci sont notées N'_p , N'_f , \mathcal{Q}'_+ , \mathcal{Q}'_- et $\overline{\mathcal{Q}'}$. Le rapport N'_f/N_f , coefficient d'augmentation de taille du champ de contraintes, est noté r .

Il est intéressant, en particulier dans la perspective d'une application au calcul par éléments finis, d'étudier l'impact de l'Algorithme 4.2 sur la qualité des facettes de la contrainte. À cette fin, l'estimateur de qualité \mathcal{Q}_f d'une facette f proposé par [George,Borouchaki-1997] est utilisé, à savoir :

$$\mathcal{Q}_f = \alpha \frac{h_f}{\rho_f}$$

où ρ_f , h_f et α désignent respectivement le rayon du cercle circonscrit à f , la longueur maximale de ses arêtes et une constante choisie de telle sorte que la qualité d'une facette équilatérale soit égale à 1. Ainsi définie, la qualité d'une facette appartient à $[1 ; +\infty]$, et l'on désignera par \mathcal{Q}_+ , \mathcal{Q}_- et $\overline{\mathcal{Q}}$ respectivement la meilleure, la plus mauvaise et la moyenne des qualités.

	N_p	N_f	\mathcal{Q}_+	\mathcal{Q}_-	$\overline{\mathcal{Q}}$	N'_p	N'_f	\mathcal{Q}'_+	\mathcal{Q}'_-	$\overline{\mathcal{Q}'}$	r
Γ_1	30	56	1.12	2.11	1.61	34	64	1.07	4.81	1.61	1.14
Γ_2	66	128	1.11	6.45	1.78	128	252	1.03	8.83	1.56	1.97
Γ_3	220	436	1.03	6.63	2.07	1 169	2 334	1.01	41.8	1.79	5.35
Γ_5	760	1 520	1.00	5.20	1.38	791	1 582	1.00	1798	3.50	1.04
Γ_6	2 506	5 008	1.01	14.3	1.58	3 665	7 326	1.01	17.6	1.66	1.46
Γ_7	2 649	5 290	1.00	12.1	1.89	6 816	13 624	1.00	39.5	1.69	2.58
Γ_8	3 503	7 018	1.00	10.0	1.35	4 897	9 806	1.00	42.8	1.48	1.40
Γ_9	3 605	7 302	1.00	11.4	1.72	6 782	13 656	1.00	1649	2.34	1.87
Γ_{10}	5 157	10 354	1.00	6.58	1.26	5 377	10 794	1.00	5.13	1.17	1.04
Γ_{11}	10 714	21 476	1.00	5.14	1.17	10 782	21 612	1.00	5.13	1.17	1.01
Γ_{12}	13 183	26 406	1.00	6.63	1.21	13 290	26 620	1.00	6.47	1.20	1.01

TAB. 4.1 – Statistiques relatives à la subdivision de champs de contraintes par l'Algorithme 4.2.

Il apparaît que malgré la souplesse permise par la coplanarité relative, l’Algorithme 4.2 est coûteux en termes d’augmentation de la taille de la contrainte. Les mêmes contraintes traitées en coplanarité exacte ne sont d’ailleurs pas présentées, aboutissant dans plusieurs cas à un dépassement de la précision des calculs en flottants doubles. C’est précisément la raison pour laquelle l’Algorithme 4.2 semble trop coûteux, et ce qui motive le volonté de mettre au point un algorithme plus rapide.

Par ailleurs, il est remarquable que l’Algorithme 4.2 a tendance à dégrader les qualités, ce qui est lié en particulier aux points de nettoyage utilisés sur les noeuds fermés par la fonction `Delaunay_arêtes`.

On remarque enfin que la contrainte Γ_4 , présentée Figure 4.11, est manquante. Il s’agit d’un exemple pour lequel l’Algorithme 4.2 n’aboutit pas. Il n’est d’ailleurs pas certain qu’il s’agisse d’une divergence au sens strict du terme, puisque l’arrêt intervient en raison de la création d’une singularité numérique, une arête étant subdivisée au-delà de la précision en flottants doubles.

4.5 Un algorithme heuristique

Le but de cette section est de proposer un algorithme de redéfinition *a priori* de facettes peu coûteux. L’efficacité d’un point de vue calculatoire étant ici l’objectif principal, il ne lui est pas imposé d’être convergent en général. On se satisfait en revanche d’une robustesse raisonnable, en l’occurrence d’un algorithme qui termine pour un large jeu représentatif d’exemples rencontrés en analyse numérique. Cette approche, bien qu’heuristique, présente le double avantage d’être algorithmiquement simple tout en donnant d’excellents résultats.

4.5.1 Découpages pilotés

Le problème de non-inclusion posé par le Lemme 4.9 se pose quelle que soit la méthode de subdivision des facettes choisie, puisqu’au moins un point est inséré sur l’une des arêtes. L’idée générale est ici d’accepter cet état de fait tout en conciliant deux exigences précises :

- d’une part, et c’était d’ailleurs la motivation exposée en début de section, utiliser un mode de subdivision simple à mettre en œuvre, assurant la rapidité des opérations ;
- d’autre part, se donner un méthode heuristique pour piloter les subdivisions, afin de conserver un contrôle sur le rayon des petites sphères associées aux facettes nouvellement créées.

La méthode la plus simple et la plus rapide pour subdiviser une facette est évidemment de s’appuyer sur l’une de ses médianes pour obtenir deux sous-facettes. Ceci conduit donc à l’ajout du milieu de l’arête découpée à \mathcal{S} . Ce choix étant motivé par des considérations n’assurant pas la convergence des subdivisions itérées, il est donc nécessaire de les gouverner.

Une facette f à subdiviser étant fixée, se pose le problème du choix de l’arête e à découper, *i.e.*, celle dont le milieu sera ajouté au nuage de points. Or, afin de préserver la conformité au sens des éléments finis de la contrainte, condition nécessaire à sa Delaunay-admissibilité, le découpage de e en e_1 et e_2 entraîne la subdivision de toutes les éventuelles facettes qui lui sont adjacentes en e . En particulier, si la contrainte est un polyèdre, chaque arête admet exactement deux facettes adjacentes. Par conséquent, il convient d’examiner les trois possibilités de subdivision possibles

pour une facette donnée, ainsi que leurs effets sur les facettes adjacentes ; une nouvelle définition est introduite, illustrée par la Figure 4.6 dans le cas d'une facette ne comportant pas d'adjacences multiples.

Définition 4.3. Soit une facette f dont les adjacences relativement à ses arêtes e_1 , e_2 et e_3 constituent les ensembles de facettes (éventuellement vides) respectifs E^1 , E^2 et E^3 . Pour $i \in \{1; 2; 3\}$, on appelle i -ème motif de subdivision de f l'ensemble Φ_f^i constitué des facettes issues de la décomposition selon l'arête e_i de f et de toutes les facettes de E^i .

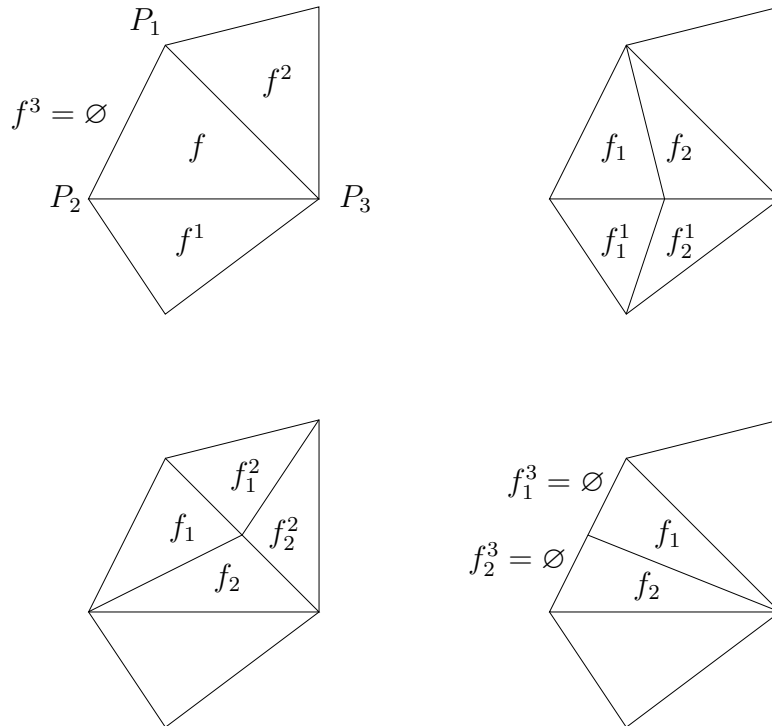


FIG. 4.6 – Une facette comportant deux adjacences simples et ses trois motifs de subdivision.

Le choix du motif de subdivision est le point-clé de la convergence de la méthode, puisque s'il est fait aléatoirement à chaque itération ou au contraire fixé au départ, alors l'algorithme diverge presque systématiquement, à l'exception de cas géométriquement très simples. Par conséquent, il apparaît nécessaire de formuler une heuristique de choix, à défaut d'un résultat théorique général, dont l'existence même semble peu évidente.

Plusieurs fonctions d'évaluation ont été testées, permettant à l'algorithme de décider du motif optimal au sens défini par un seul ou une combinaison de ces évaluateurs. Quelques exemples sont présentés, d'autant plus succinctement qu'ils se sont révélés inopérants ou peu efficaces.

- augmentation du nombre de facettes Delaunay-admissibles ;
- rapport du nombre de facettes produites non Delaunay-admissibles (de 0 à 4) au nombre initial (1 ou 2) ;
- rapport du nombre total de points du nuage dans les petites boules finales au nombre dans les petites boules initiales ;

– rapport du rayon maximal des petites boules finales sur le rayon maximal initial.

En fait, s'ils paraissent intéressants *a priori*, ces estimateurs comportent cependant des *optima* locaux correspondant à des cas dégénérés induisant une divergence de l'algorithme. Par exemple, le deuxième estimateur cité admet un cas limite pour lequel le rapport vaut 1, lorsque l'arête commune est réduite à un point. Or cette valeur correspond à un motif n'aggravant pas la situation, en termes de nombre de facettes Delaunay-admissibles ; par suite, un motif se rapprochant de cette valeur 1 peut être considéré comme meilleur que les deux autres, conduisant rapidement (décroissance en $1/2^n$) à la création d'une facette dégnérée, à la précision des calculs près.

Une propriété fondamentale des triangulations de Delaunay est qu'elles maximisent les *minima* des angles des éléments créés, ce qui a pour effet de minimiser les sphères ou cercles circonscrits. Il est clair par exemple qu'à périmètre fixé, le triangle dont le cercle circonscrit est de rayon minimal est équilatéral. Par conséquent, il semble pertinent de s'intéresser aux angles des facettes composant les motifs.

Définition 4.4. À tout motif Φ_f^i on associe son angle minimal α_f^i défini par

$$\alpha_f^i = \min_{\substack{\phi \in \Phi_f^i \\ \phi \neq \emptyset}} \min_{1 \leq j \leq 3} \widehat{\phi}^j$$

où $\widehat{\phi}^j$ désigne l'angle au sommet j de la facette ϕ .

L'heuristique proposée consiste à choisir un motif dont l'angle minimal est maximal parmi les trois motifs possibles ; pour cette raison, cette méthode est dite de type *max-min*. Cette approche s'est révélée très efficace, sans pour autant prétendre à la convergence en général. Par exemple, certains cas se ramenant à des problèmes locaux de Delaunay-admissibilité bidimensionnelle aboutissent à des subdivisions récursives des sous-facettes issues d'un même facette originelle, jusqu'à créer des singularités, à la précision des calculs près. Ces cas sont en particulier traités par la fonction **bascule**.

4.5.2 Schéma général

L'algorithme proposé requiert en entrée un champ de contraintes Γ d'un nuage de points \mathcal{S} . Pour toute facette $f \in \Gamma$ et tout $i \in \{1, 2, 3\}$, la fonction **divise_mediane**(f, i) est définie comme **divise**(f, M_i), où M_i désigne le milieu de l'arête e_i de f .

Algorithme 4.3 (Subdivision heuristique des facettes).

1. *Initialisation* : Tester la Delaunay-admissibilité des facettes de Γ et constituer le tas $\mathcal{T}(\Gamma)$ de celles qui ne sont pas fortement Delaunay-admissibles ;
2. Tant que ($\mathcal{T}(\Gamma) \neq \emptyset$), faire pour chaque f de $\mathcal{T}(\Gamma)$:
 - (a) tant qu'il existe des paires basculables $\{f, f'\}$ non basculés à cette itération, **swap**(f, f') ;
 - (b) mettre à jour \mathcal{S} , Γ et $\mathcal{T}(\Gamma)$. Si $\mathcal{T}(\Gamma)$ est vide, **FIN**.
 - (c) Pour chaque facette $f \in \mathcal{T}(\Gamma)$, faire :

- i. déterminer le motif de subdivision Φ_f^i maximisant l'angle minimal ;
- ii. **divise_mediane**(f, i) ;
- iii. mettre à jour \mathcal{S} et Γ .

(d) Mettre à jour $\mathcal{T}(\Gamma)$.

Concernant la coplanarité, le moindre coût de l'Algorithme 4.3 permet de travailler en coplanarité exacte, ce qui facilitera l'interfaçage ultérieur avec *GHS3D*. En pratique, à chaque facette de la contrainte initiale est attribuée une couleur, en l'occurrence son indice dans la liste des facettes. A chaque application de **divise_mediane**, les deux sous-facettes issues de la décomposition d'une même facette héritent de la couleur de celle-ci. Ne sont donc considérées comme coplanaires que deux facettes ayant la même couleur. Cette acception de la coplanarité est très restrictive ; la différence avec la coplanarité relative proposée précédemment est en particulier très sensible sur des objets mécaniques, comportant des faces planes subdivisées initialement en un grand nombre de facettes.

4.5.3 Exemples d'illustration

Quelques exemples dans l'absolu

Le Tableau 4.2 présente les résultats fournis par l'Algorithme 4.3, appliqué aux contraintes Γ_1 à Γ_{12} , utilisant les mêmes notations que le Tableau 4.1. Dans l'optique d'un interfaçage avec un mailleur de Delaunay, l'impact sur les qualités des triangulations résultantes est également étudié.

	N_p	N_f	Q_+	Q_-	\overline{Q}	N'_p	N'_f	Q'_+	Q'_-	\overline{Q}'	r
Γ_1	30	56	1.12	2.11	1.61	39	74	1.04	2.86	1.58	1.32
Γ_2	66	128	1.11	6.45	1.78	117	230	1.03	8.83	1.58	1.80
Γ_3	220	436	1.03	6.63	2.07	404	804	1.03	6.63	1.76	1.84
Γ_4	658	1 312	1.01	7.37	2.19	1 822	3 640	1.00	12.9	1.78	2.77
Γ_5	760	1 520	1.00	5.20	1.38	831	1 662	1.00	6.49	1.37	1.09
Γ_6	2 506	5 008	1.01	14.3	1.58	2 719	5 434	1.01	14.3	1.62	1.09
Γ_7	2 649	5 290	1.00	12.1	1.89	5 410	10 812	1.00	19.7	1.68	2.04
Γ_8	3 503	7 018	1.00	10.0	1.35	3 717	7 446	1.00	10.0	1.36	1.06
Γ_9	3 605	7 302	1.00	11.4	1.72	5 596	11 284	1.00	8.46	1.69	1.55
Γ_{10}	5 157	10 354	1.00	6.58	1.26	5 281	10 602	1.00	6.48	1.26	1.02
Γ_{11}	10 714	21 476	1.00	5.14	1.17	10 889	21 826	1.00	5.13	1.17	1.01
Γ_{12}	13 183	26 406	1.00	6.63	1.21	13 278	26 596	1.00	6.47	1.21	1.01

TAB. 4.2 – Statistiques relatives à la subdivision de champs de contraintes par l'Algorithme 4.3.

Les temps de calcul nécessaires sur un Pentium II à 300 MHz sont tous inférieurs à 20 secondes. De plus, bien qu'en coplanarité exacte, les augmentations de tailles sont nettement inférieures à celles obtenues par l'Algorithme 4.2. L'objectif principal est donc atteint.

On remarque par ailleurs qu'à une exception près, les qualités ne sont pas dégradées par l'Algorithme 4.3 ; on constate même une amélioration globale. Cette observation est cohérente avec la motivation initiale de l'heuristique, qui est précisément de construire les facettes les moins aplaties possibles à chaque itération, ce qui tend à éloigner leurs aires de 0.

L'augmentation du nombre de facettes est très variable ; elle est en effet liée au champ de contraintes initial, dès lors que celui-ci peut comporter un nombre N_c compris entre 0 et N_f de facettes Delaunay-admissibles. Il est clair que plus N_c est petit, plus le nombre de subdivisions potentielles est grand. Par ailleurs, le nombre de coplanarités locales initiales n'intervient pas ici, puisque les bascules d'arêtes ont pour effet d'éviter les subdivisions.

Les champs de contraintes $\Gamma_1, \Gamma_3, \Gamma_4, \Gamma_6$ et Γ_{11} ainsi que leurs redéfinitions par l'Algorithme 4.3 sont présentés respectivement par les Figures 4.9, 4.10, 4.11, 4.12 et 4.13.

Quelques exemples dans une perspective de maillage

Le but initial de l'Algorithme 4.3 est de fournir une contrainte redéfinie qui soit retrouvée par toute triangulation de Delaunay de l'enveloppe convexe du nuage de points associé. Une excellente méthode pour éprouver sa validité consiste donc à l'interfacer avec un mailleur de Delaunay existant. En l'occurrence, *GHS3D* utilise une méthode de Delaunay incrémentale [George *et al.* 1992] et fournit dans sa première phase une triangulation de Delaunay d'une boîte englobante contenant les points de \mathcal{S} . Cependant, le mailleur n'a pas, dans un sens ou dans l'autre, la même précision numérique que l'implémentation de l'Algorithme 4.3. Le même problème se pose pour l'ordre des calculs, qui affecte *in fine* le calcul des centres et rayons des boules circonscrites, à moins de n'implémenter ce dernier qu'en fonction du mailleur, ce qui serait contradictoire avec l'objectif affiché de généralité. Par conséquent, si l'on souhaite que la contrainte redéfinie soit effectivement considérée comme fortement Delaunay-admissible⁶, il faut "durcir" les tests de Delaunay-admissibilité. En pratique, les rayons des sphères associées aux petites boules ou circonscrites aux tétraèdres sont majorés de 5%. Le renforcement des exigences sur la Delaunay-admissibilité a évidemment un impact en termes de nombre de points créés et de faces subdivisées.

Les résultats de la redéfinition des champs de contraintes Γ_1 à Γ_{12} dans ce contexte sont donnés par le Tableau 4.3. Comme prévu, les contraintes résultantes sont de tailles supérieures à celles du Tableau 4.2.

4.6 Application au maillage volumique

GHS3D est un mailleur de Delaunay contraint par forçage développé à l'INRIA de Rocquencourt et qui fait d'ores et déjà l'objet d'applications industrielles. Comme cela a été expliqué Chapitre 1, ce type de mailleur utilise une première triangulation de Delaunay de l'enveloppe convexe du nuage de points associé au champ de contraintes. En pratique, le nuage est enrichi des huit sommets d'une boîte englobante ainsi que d'un certain nombre de points dits de *blindage* dont le rôle consiste à accélérer la phase de forçage. En effet, dès lors que la contrainte de

⁶et donc construite immédiatement.

	N_p	N_f	Q_+	Q_-	\overline{Q}	N'_p	N'_f	Q'_+	Q'_-	\overline{Q}'	r
Γ_1	30	56	1.12	2.11	1.61	44	84	1.04	2.96	1.55	1.50
Γ_2	66	128	1.11	6.45	1.78	145	286	1.03	8.83	1.55	2.23
Γ_3	220	436	1.03	6.63	2.07	516	1 028	1.03	6.63	1.73	2.36
Γ_4	658	1 312	1.01	7.37	2.19	2 033	4 062	1.00	13.1	1.75	3.10
Γ_5	760	1 520	1.00	5.20	1.38	839	1 678	1.00	6.49	1.37	1.10
Γ_6	2 506	5 008	1.01	14.3	1.58	2 779	5 554	1.01	14.3	1.63	1.11
Γ_7	2 649	5 290	1.00	12.1	1.89	5 630	11 252	1.00	20.0	1.67	2.13
Γ_8	3 503	7 018	1.00	10.0	1.35	3 763	7 538	1.00	10.0	1.36	1.07
Γ_9	3 605	7 302	1.00	11.4	1.72	5 786	11 664	1.00	9.41	1.69	1.60
Γ_{10}	5 157	10 354	1.00	6.58	1.26	5 289	10 618	1.00	6.46	1.26	1.03
Γ_{11}	10 714	21 476	1.00	5.14	1.17	10 884	21 816	1.00	5.14	1.17	1.02
Γ_{12}	13 183	26 406	1.00	6.63	1.21	13 291	26 622	1.00	6.63	1.21	1.01

TAB. 4.3 – Statistiques relatives à la subdivision de champs de contraintes par l’Algorithme 4.3 “durci”.

bord définit un objet non convexe, elle n’a aucune raison *a priori* d’apparaître dans le recouvrement de Delaunay. C’est à ce stade qu’interviennent les opérations de forçage *a posteriori* qui, comme cela a été indiqué dans l’Introduction, ne résolvent pas tous les cas sans insertion de points de Steiner. De plus, la triangulation finale n’est plus de Delaunay. Dans ce contexte, l’Algorithme 4.3, permet de redéfinir la contrainte de frontière *a priori* de telle sorte qu’aucune opération de forçage ne soit nécessaire, la contrainte étant satisfaite d’emblée.

Les paragraphes qui suivent ont pour objet d’une part de valider les résultats obtenus sur les exemples du Tableau 4.3, d’autre part d’illustrer la pertinence de l’Algorithme 4.3 pour débloquer certaines configurations non résolues par *GHS3D* dans la phase de forçage *a posteriori*.

4.6.1 Delaunay-admissibilité effective des contraintes redéfinies

Dans une optique de validation des résultats précédents, il ressort que le module de triangulation de Delaunay de *GHS3D* peut être utilisé afin d’éprouver les contraintes redéfinies par l’Algorithme 4.3, au prix toutefois de deux aménagements :

- Les points de blindage sont susceptibles d’appartenir aux petites boules associées aux facettes de la contrainte et, par suite, d’interférer avec leur Delaunay-admissibilité. Il faut donc les supprimer.
- Concernant les sommets de la boîte englobante, le même problème risque de se poser. Cependant, en raison même de l’algorithme utilisé par le mailleur⁷, il est impossible de les éliminer. Un pis-aller consiste donc à les éloigner suffisamment du nuage, par exemple à une distance au moins supérieure au rayon de la plus grande des petites boules associées aux facettes de la contrainte. En pratique, un facteur 2 a été suffisant pour les contraintes du Tableau 4.3.

⁷Triangulation de Delaunay par insertions successives des points du nuage dans la boîte englobante.

Toutefois, ces modifications ne changent rien aux problèmes numériques précédemment évoqués, liés en particulier aux arrondis et aux algorithmes utilisés pour la détermination des petites boules. La solution retenue, en l'occurrence la majoration des rayons d'un facteur de 5% est apparue comme relativement peu coûteuse.

Dans le Tableau 4.4, N_f et N_m désignent respectivement le nombre de facettes de la frontière de l'objet initial et le nombre de facettes manquantes après génération d'une triangulation de Delaunay ; ces dernières sont retrouvées par forçage, le maillage final n'étant par conséquent pas de Delaunay. Les N_e éléments tétraédriques générés par le mailleur ont pour meilleure et pire qualités respectivement Q_+ et Q_- , la qualité d'un tétraèdre K étant donnée par :

$$Q_K = \beta \frac{h_K}{\rho_K}$$

où ρ_K , h_K et β désignent respectivement le rayon de la boule circonscrite à K , la longueur maximale de ses arêtes et une constante choisie de telle sorte que la qualité d'un tétraèdre régulier soit égale à 1.

Les objets dont la contrainte de frontière a été modifiée *a priori* sont également proposés au générateur de maillage, et les résultats correspondants sont présentés dans la partie droite du Tableau 4.4.

	N_f	N_m	N_e	Q_+	Q_-	N'_f	N'_m	N'_e	Q'_+	Q'_-
Γ_1	56	16	62	1.31	4.31	84	0	92	1.24	3.10
Γ_2	128	50	203	1.11	47.5	286	0	713	1.10	53.4
Γ_3	436	130	628	1.10	9.15	1 028	0	2 354	1.07	9.15
Γ_4	1 312	436	2 291	1.15	21.1	4 062	0	19 622	1.03	18.0
Γ_5	1 520	72	5 129	1.05	97.9	1 678	0	5 875	1.04	41.3
Γ_6	5 008	74	18 217	1.05	24.9	5 554	0	20 785	1.03	19.3
Γ_7	5 290	1083	8 469	1.06	17.3	11 252	0	26 386	1.04	16.4
Γ_8	7 018	98	28 135	1.02	11.4	7 538	0	30 347	1.03	15.8
Γ_9	7 302	720	9 620	1.03	18.3	11 664	0	23 064	1.05	12.6
Γ_{10}	10 354	52	36 754	1.04	12.2	10 618	0	38 342	1.03	10.7
Γ_{11}	21 476	97	111 556	1.02	5.83	21 816	0	113 492	1.02	5.14
Γ_{12}	26 406	30	131 803	1.03	5.29	26 622	0	133 190	1.03	5.75

TAB. 4.4 – Statistiques relatives à la triangulation de Delaunay des contraintes.

Les champs de contraintes initiaux ne sont pas fortement Delaunay-admissibles, un nombre variable des facettes qui les constituent n'apparaît donc dans les triangulations de Delaunay générées par le mailleur ; dès lors, celui-ci doit appliquer les méthodes de forçage afin de retrouver la contrainte. Les triangulations produites vérifient donc exactement cette dernière, mais ne sont pas de Delaunay.

En revanche, les champs de contraintes redéfinis *a priori* par l'Algorithme 4.3 sont fortement Delaunay-admissibles, et à ce titre sont trouvés directement par la triangulation, comme l'atteste la valeur de N'_m dans le Tableau 4.4. Aucune opération de forçage n'étant alors nécessaire,


```
#####  
END OF MODULE GHS3D-INRIA  
#####
```

Comme prévu, la redéfinition de la contrainte n'est pas construite immédiatement, en raison des problèmes d'arrondis intervenant dans l'interfaçage puisque le choix a été délibérément fait de ne pas durcir les conditions de Delaunay-admissibilité. Néanmoins, les facettes manquantes (de type 3) sont retrouvées en une seule itération de bascules d'arêtes, et la contrainte est immédiatement retrouvée. Le problème posé par Γ_{13} est résolu.

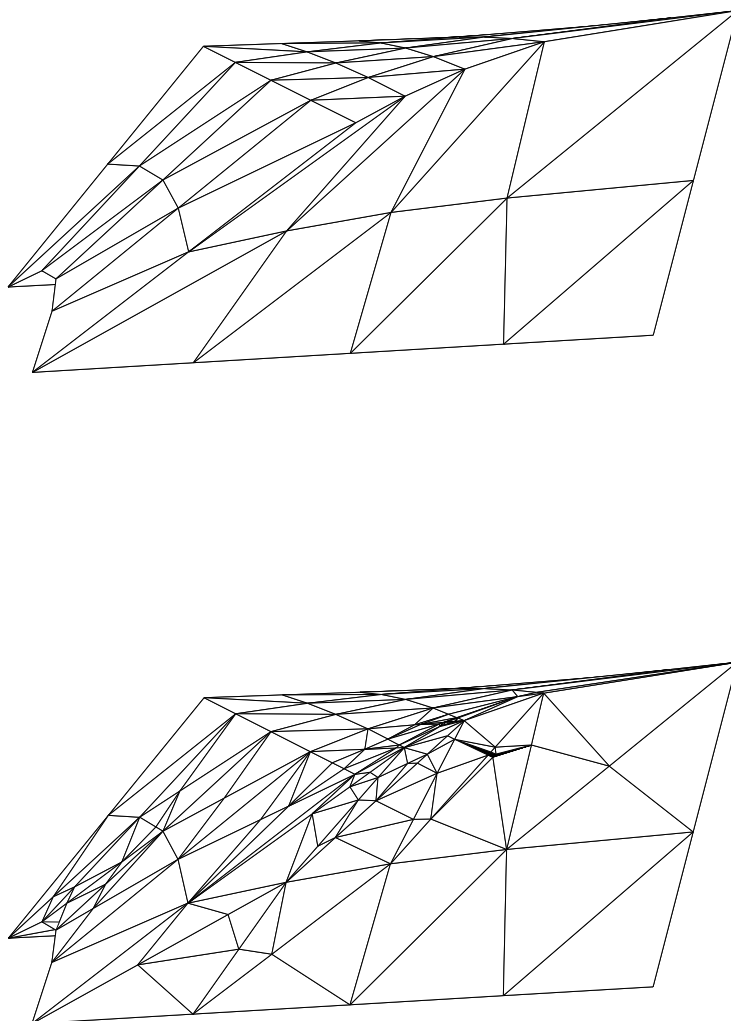


FIG. 4.7 – Exemple de redéfinition par l'Algorithme 4.2 : Γ_2 . Haut : contrainte originale, bas : contrainte fortement Delaunay-admissible.

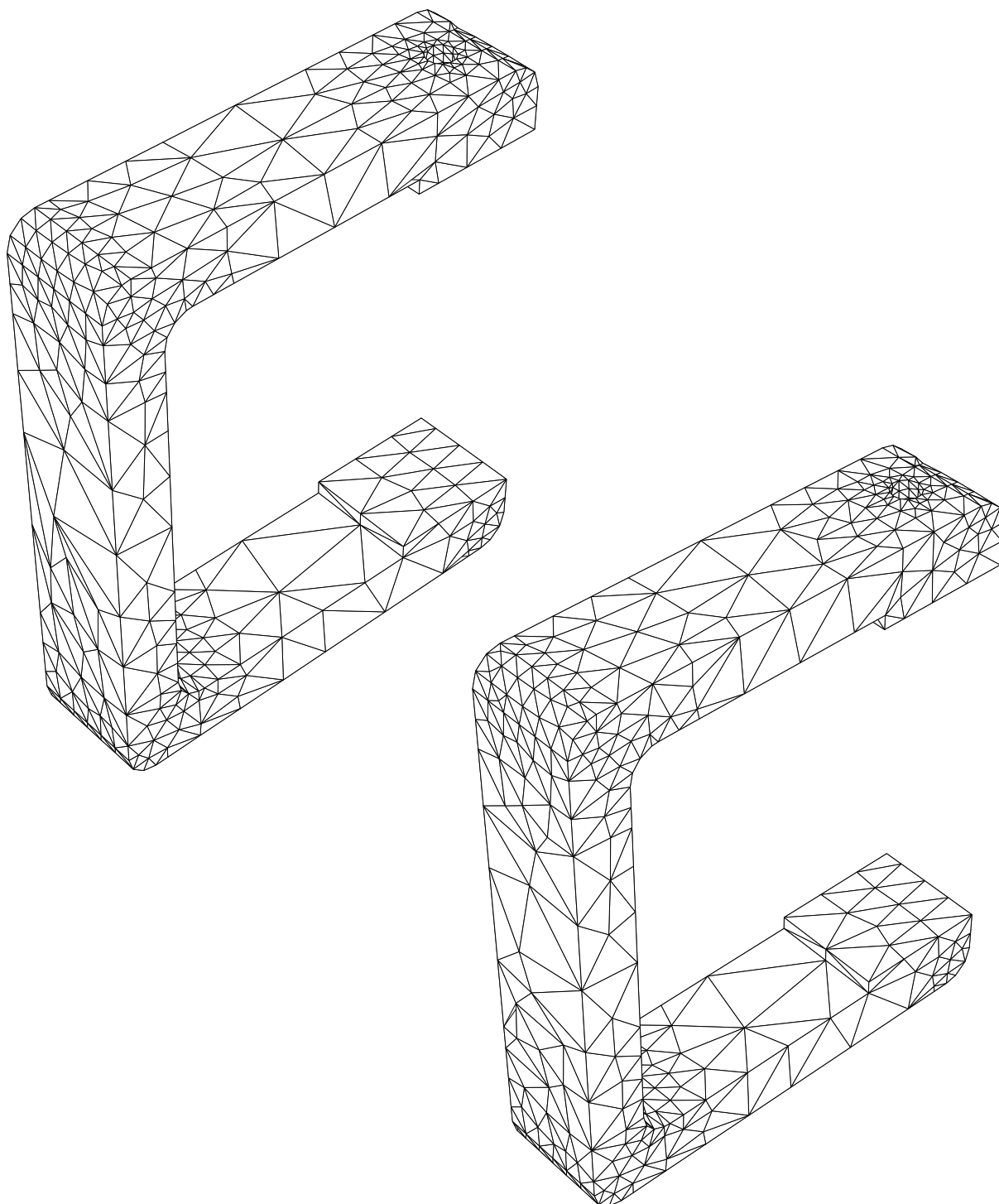


FIG. 4.8 – Exemple de redéfinition par l'Algorithme 4.2 : Γ_5 . Haut : contrainte originale, bas : contrainte fortement Delaunay-admissible.

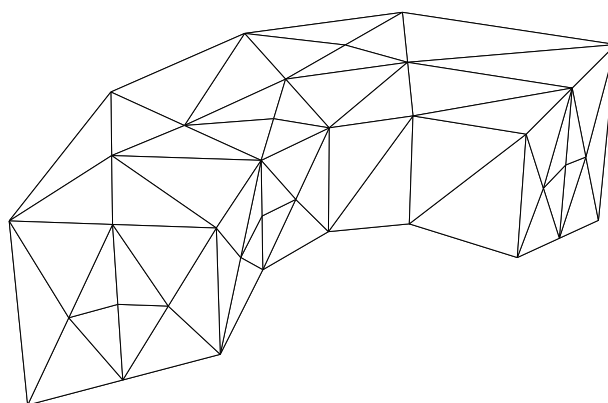
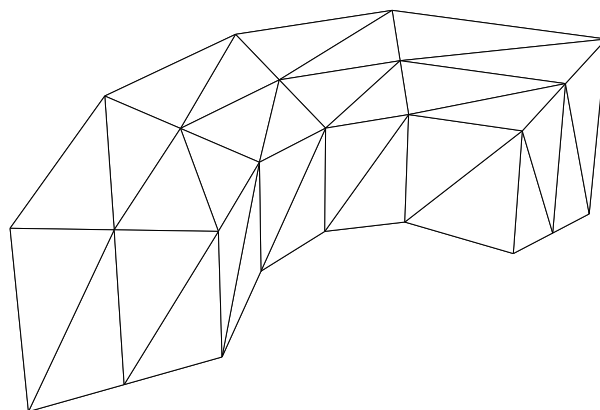


FIG. 4.9 – Exemple de redéfinition par l'Algorithme 4.3 : Γ_1 . Haut : contrainte originale, bas : contrainte fortement Delaunay-admissible.

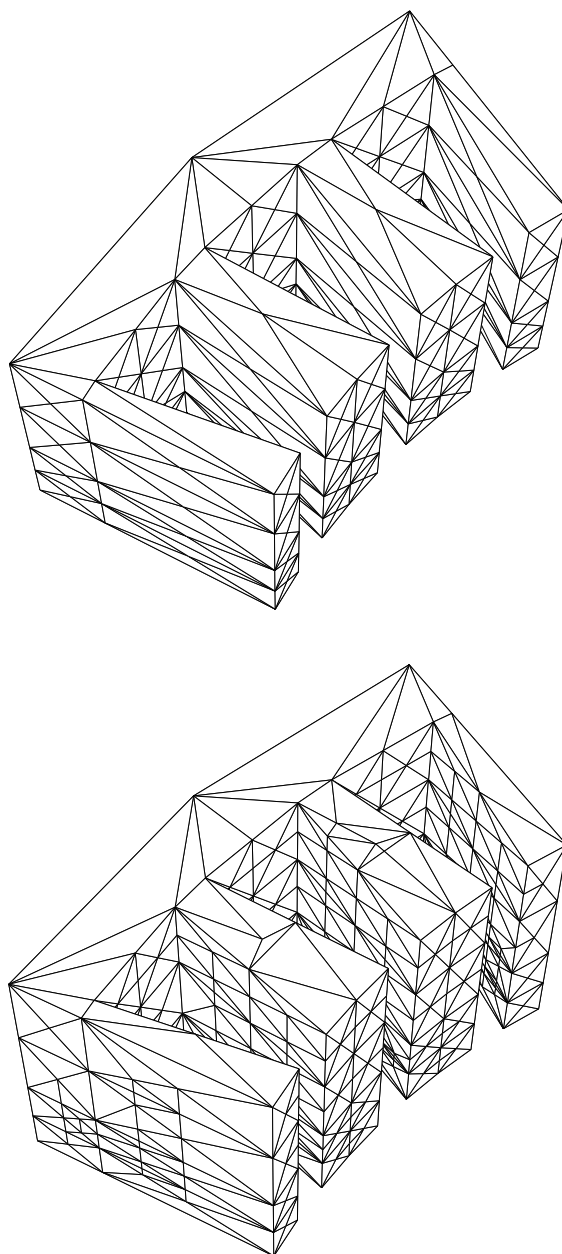


FIG. 4.10 – Exemple de redéfinition par l'Algorithme 4.3 : Γ_3 . Haut : contrainte originale, bas : contrainte fortement Delaunay-admissible ; des **swaps** sont également à remarquer.

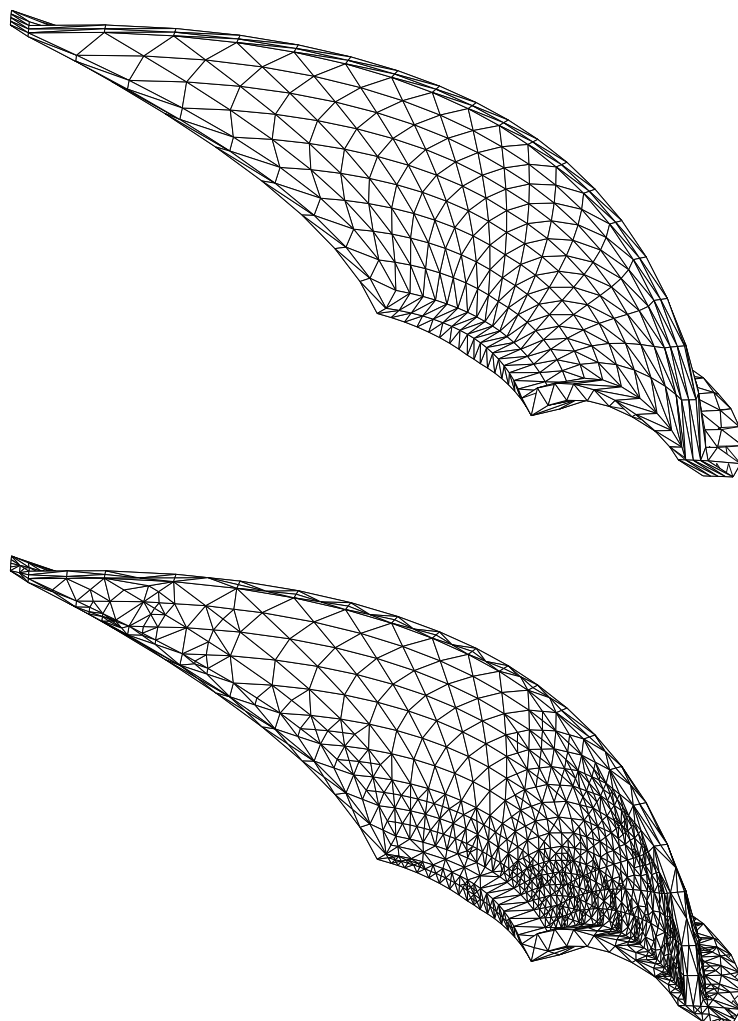


FIG. 4.11 – Exemple de redéfinition par l'Algorithme 4.3 : Γ_4 . Haut : contrainte originale, bas : contrainte fortement Delaunay-admissible.

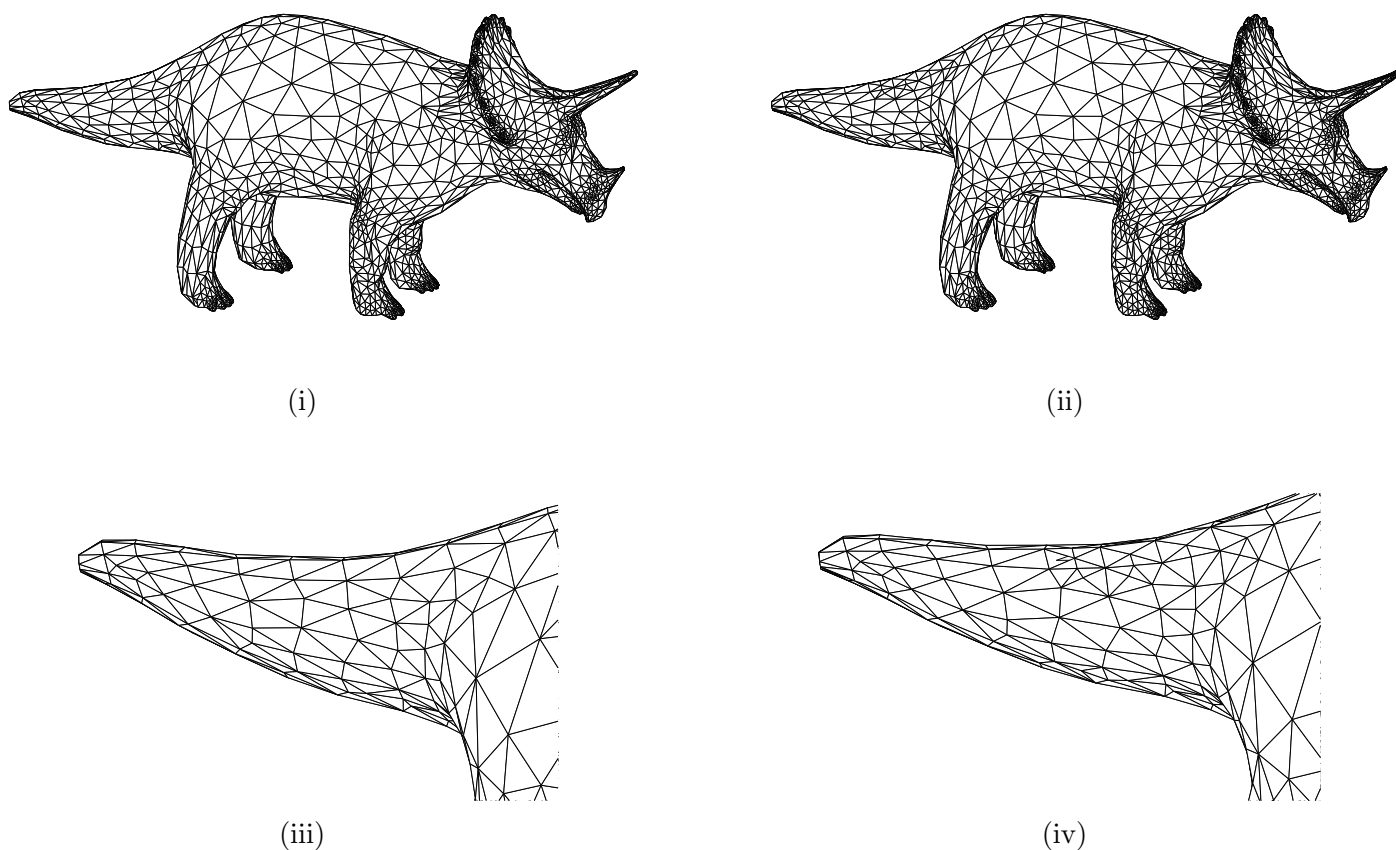


FIG. 4.12 – Exemple de redéfinition par l'Algorithme 4.3 : Γ_6 . (i) : contrainte originale, (ii) : contrainte fortement Delaunay-admissible, (iii) et (iv) : agrandissements d'une même zone dans (i) et (ii).

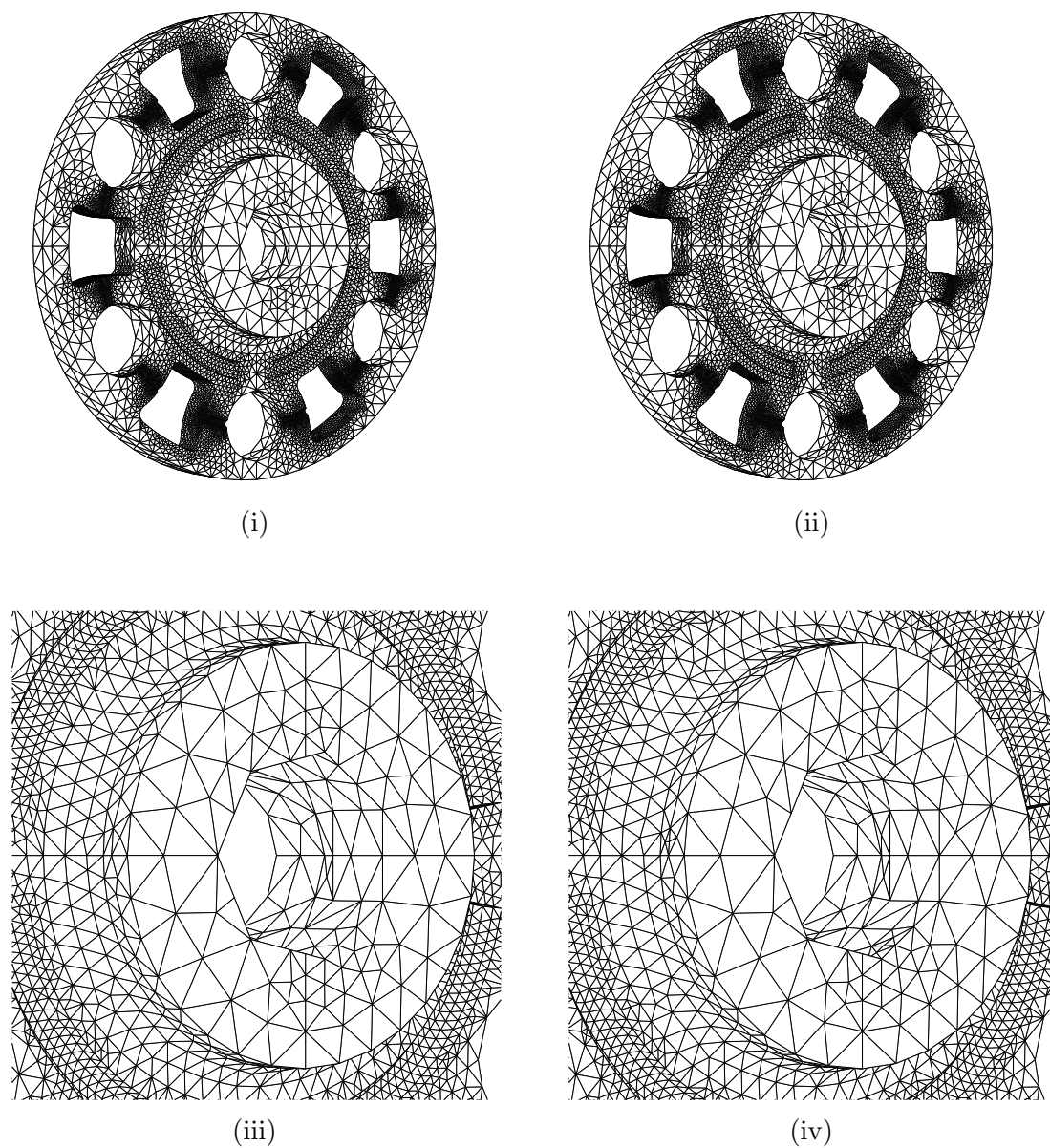


FIG. 4.13 – Exemple de redéfinition par l'Algorithme 4.3 : Γ_{11} . (i) : contrainte originale, (ii) : contrainte fortement Delaunay-admissible, (iii) et (iv) : agrandissements d'une même zone dans (i) et (ii) (données fournies par ANSYS).

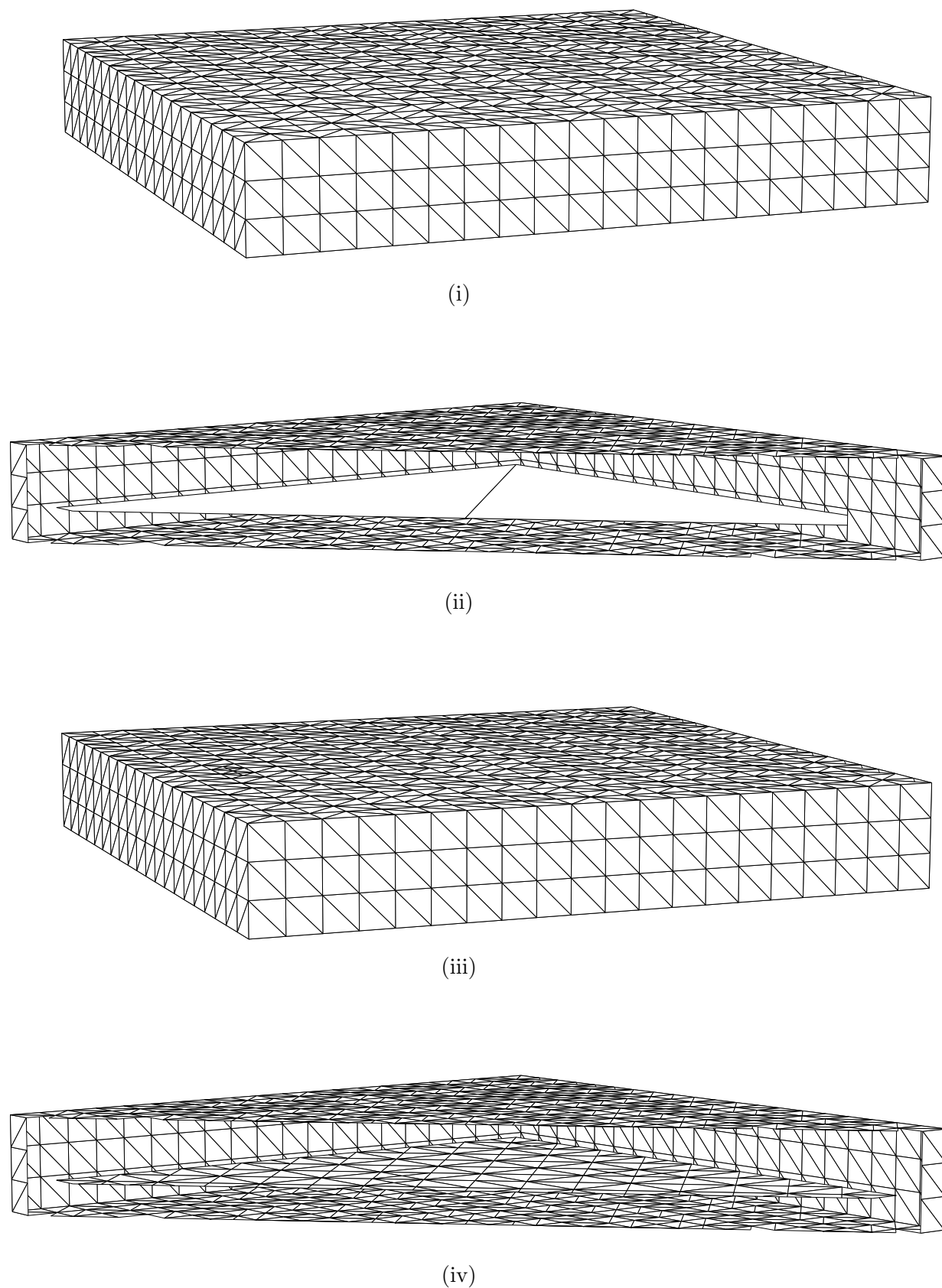


FIG. 4.14 – Exemple de redéfinition par l'Algorithme 4.2 : Γ_{13} . Contrainte originale : (i) : frontière externe, (ii) : coupe. Contrainte fortement Delaunay-admissible : (iii) : frontière externe, (iv) : coupe.

Chapitre 5

Conclusions et perspectives

5.1 Conclusions

Cette thèse a un double objet, académique et applicatif. D'un point de vue théorique, les limitations des méthodes de récupération *a posteriori* d'un champ de contraintes après triangulation du nuage de points associé ont conduit à s'intéresser à la façon même dont la contrainte est formulée et, par suite, à la manière d'introduire une contrainte qui soit construite directement et à tout coup par un générateur de triangulations de Delaunay. Ce problème de redéfinition *a priori* d'un champ de contraintes en vue de le rendre fortement Delaunay-admissible constituait en soi un problème théorique et à ce titre méritait d'être adressé. D'un point de vue pratique, il a été mentionné que les mailleurs de Delaunay contraints ne sont, par essence, pas capables de résoudre *toutes* les configurations qui leur sont proposées. Dans ce cadre, le problème théorique devient d'un intérêt pratique immédiat, permettant de fournir, le cas échéant, un pré-processeur évitant les blocages du mailleur. Par ailleurs, les méthodes de récupération *a posteriori* fournissent des triangulations finales qui ne possèdent plus la propriété de Delaunay, ce qui leur interdit certaines utilisations comme la détermination du squelette d'un objet. Dans ce cas encore, la redéfinition *a priori* apporte une réponse au problème, puisque la triangulation finale est de Delaunay.

L'approche choisie dans cette thèse a consisté à séparer d'une part le cas des dimensions 2 et 3, d'autre part à distinguer les aspects théoriques des aspects algorithmiques. En tout état de cause, des résultats généraux sur la forte Delaunay-admissibilité *a priori* ont été établis dans les Chapitres 2 et 3. Un algorithme simple de redéfinition *a priori* en dimension 2 a été proposé et sa convergence démontrée Chapitre 2. La faisabilité théorique d'un tel algorithme en dimension 3 a également été évoquée dans le Chapitre 4 mais, son coût étant prohibitif, deux algorithmes de robustesse tout à fait satisfaisante en pratique ont été proposés. Enfin, dans ce même Chapitre 4, l'interfaçage avec le mailleur de Delaunay *GHS3D* a été étudié, mettant en particulier en évidence la pertinence des résultats acquis comme la possibilité de débloquer ce mailleur, lorsque nécessaire. En ce sens, l'approche de redéfinition *a priori* a fait la preuve de son intérêt pratique.

5.2 Perspectives

Les évolutions potentielles ou en cours ressortent de deux catégories, à savoir améliorations et applications. Les améliorations sont principalement à attendre sur l’algorithme heuristique de redéfinition *a priori* de facettes en dimension 3.

5.2.1 Améliorations

Tout d’abord, l’heuristique de pilotage des subdivisions peut manifestement être améliorée ou modulée lorsque la convergence se fait attendre. La fonction `divise_mediane` utilisée jusqu’à présent pour sa simplicité peut certainement, afin de résoudre certaines configurations en demandant de nombreuses répétitions, être complétée par d’autres transformations. Ce développement est d’ailleurs en cours.

Concernant précisément la rapidité et le coût des algorithmes proposés, il serait certainement intéressant d’étudier leur complexité. Toutefois, ce problème semble, pour le moins, relativement ardu : les quelques exemples présentés ici montrent en effet un fort lien avec la topologie et surtout la géométrie initiales. Dans le contexte du présent travail, de telles investigations auraient conduit à s’éloigner inutilement du sujet ; néanmoins, elles pourraient être le prélude à des développements ultérieurs.

Par ailleurs, le mode d’insertion des points au cours des subdivisions mériterait également d’être discuté. La méthode utilisée pour ajouter des points au champ de contraintes considère en effet celui-ci comme la seule donnée utilisable, et construit donc un recouvrement triangulaire de celui-ci. Cependant, dans la plupart des applications, le champ de contraintes initial Γ_0 n’est qu’une approximation géométrique linéaire¹ d’un objet dont on n’a en général pas de définition analytique. On associe alors de façon unique un modèle géométrique paramétré \mathcal{G} à Γ_0 , au moyen d’une fonction d’interpolation. Par conséquent, les arêtes et facettes de Γ_0 ou de l’un des Γ_n fournis par les itérations successives n’ont *a priori* pas d’existence dans \mathcal{G} et, sauf cas particulier, tout point inséré sur une arête n’appartient pas à \mathcal{G} . Dans ce cadre, il est envisageable d’insérer les points sur \mathcal{G} , ou à une distance maximale ε de celui-ci, afin d’assurer un contrôle sur la validité de l’approximation de \mathcal{G} que constitue la contrainte finale Γ . Il est par exemple envisageable d’utiliser la paramétrisation de \mathcal{G} , qui permet d’associer à toute arête de Γ_n un arc tracé sur \mathcal{G} sur lequel sera inséré le nouveau point, comme l’illustre la Figure 5.1.

Cependant, un tel mode d’insertion des points est susceptible, en particulier dans le cas de courbures localement fortes, de “déplacer” tellement les boules nouvellement créées que son influence sur l’éventuelle convergence d’une méthode ne peut être négligée. Pour cette raison, cette option n’est pour l’instant pas encore implémentée, des travaux théoriques supplémentaires semblant indispensables.

Enfin, le problème du choix de ce qui est considéré comme coplanaire doit également être approfondi. Les exemples du Chapitre 4 ont en effet montré les variations à attendre en fonction du type de coplanarité retenu. Aucune des deux approches proposées, coplanarité dite exacte²

¹La triangulation de surface donnée est généralement une discrétisation du bord d’un domaine fini.

²Bien qu’elle ne le soit pas d’un point de vue numérique

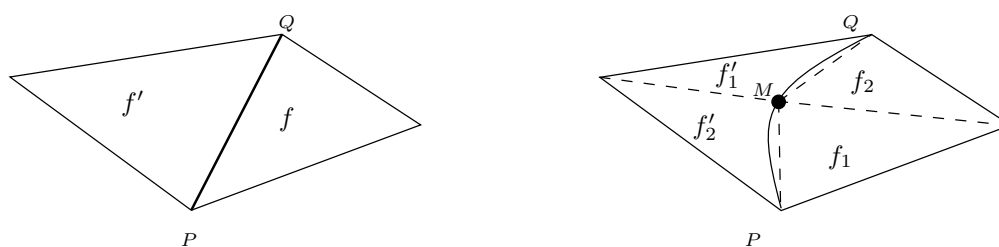


FIG. 5.1 – Insertion d'un point M sur l'arc associé à l'arête $[PQ]$.

ou à ε près, n'a d'arguments décisifs en sa faveur par rapport à l'autre. Des tests sont d'ailleurs en cours afin d'optimiser le mode de choix.

5.2.2 Applications

Dans un souci de concision, il ne semble pas souhaitable d'évoquer des application potentielles qui ne soient pas suffisamment mûries. En revanche, deux approches naturelles et tout à fait réalistes sont à mentionner :

- D'une part l'intégration pratique de l'algorithme de redéfinition *a priori* comme pré-processeur du mailleur *GHS3D*. Dans ce contexte, tous les problèmes d'interfaçage évoqués Chapitre 4 doivent être adressés, et le durcissement arbitraire de 5% des conditions de forte Delaunay-admissibilité discuté et affiné. Une solution raisonnable consisterait à ré-écrire tous les calculs de distances et de rayons de la même façon que dans le mailleur, ainsi qu'à éviter l'intermédiaire d'un fichier de sortie.
- D'autre part, l'utilisation des triangulations de Delaunay finales comme support topologique à l'approximation des squelettes d'objets en dimension 3. Des pistes en ce sens sont proposées par [Frey,George-1999].

Bien entendu, ces deux propositions ne sont pas limitatives, et l'auteur est *a priori* intéressé par toute suggestion d'application.

Bibliographie

- [Armstrong *et al.* 1995] C.G. ARMSTRONG, D.J. ROBINSON, R.M. MC KEAG, T.S. LI, S.J. BRIDGETT, R.J. DONAGHY AND C.A. MC GLEENAN, Medials for meshing and more, *Proc. 4th Int. Meshing Roundtable*, Albuquerque, NM, 277-288.
- [Baker-1989] T.J. BAKER, Automatic mesh generation for complex three-dimensional regions using a constrained Delaunay triangulation, *Eng. Comp.*, **5**, 161-175, 1989.
- [Boissonnat, Yvinec-1995] J.D. BOISSONNAT ET M. YVINEC, Géométrie Algorithmique, *Ediscience*, Paris, 1995.
- [Borouchaki-1994] H. BOROUCAKI, Triangulation sous contrainte en dimension quelconque, *Rapport de Recherche INRIA*, **2373**, 1994.
- [Ciarlet-1991] P.G. CIARLET, Basic error estimates for elliptic problems, in Handbook of numerical analysis, **II**, Finite element methods (Part 1), P.G. Ciarlet and J.L. Lions Eds, *North Holland*, 17-352, 1991.
- [Delaunay-1934] B. DELAUNAY, Sur la sphère vide, *Bul. Acad. Sci. URSS, Class. Sci. Nat.*, 793-800, 1934.
- [Frey-1993] P.J. FREY, Génération automatique de maillages 3D dans des ensembles discrets. Application biomédicale aux méthodes d'éléments finis. Thèse, Université de Strasbourg, 1993.
- [Frey, George-1999] P.J. FREY ET P.L. GEORGE, Maillages, applications aux éléments finis, *Hermès*, Paris, 1999.
- [George *et al.* 1992] P.L. GEORGE, F. HECHT AND E. SALTEL, Automatic mesh generator with specified boundary, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **92**, 269-288, 1992.
- [George-1997] P.L. GEORGE, Improvement on Delaunay based tridimensional automatic mesh generator, *Finite Elements in Analysis and Design*, **25** (3-4), 297-317, 1997.
- [George, Borouchaki-1997] P.L. GEORGE ET H. BOROUCAKI, Triangulation de Delaunay et maillage, *Hermès*, Paris, 1997.
- [Hermeline-1980] F. HERMELINE, Une méthode automatique de maillage en dimension n , Thèse, Université Paris VI, Paris, 1980.
- [Hecht, Saltel-1990] F. HECHT ET E. SALTEL, EMC2 un logiciel d'édition de maillages et de contours bidimensionnels, *Rapport Technique INRIA*, **118**, avril 1990.
- [Joe-1991] B. JOE, Construction of three-dimensional Delaunay triangulations using local transformations, *Comput. Aided Geom. Design* **8**, 123-142, 1991.
- [Lawson-1977] C.L. LAWSON, Software for C^1 surface interpolation, *Math. Soft.*, **3**, J. Rice ed., Academic press, New York, 1977.
- [Löhner-1996] R. LÖHNER, Extensions and improvements of the advancing-front grid generation technique, *Commun. numer. methods eng.*, **12**, 683-702, 1996.

- [Murphy,Mount,Gable-2000] M. MURPHY, D.M. MOUNT AND C.W. GABLE, A point-placement strategy for conforming Delaunay tetrahedralization, *Proc. of 11th Annu. ACM-SIAM Sympos. Discrete Algorithms*, à paraître, 2000.
- [Pébay-1998a] PH.P. PÉBAY, Construction d'une triangulation surfacique Delaunay-admissible, *Rapport de Recherche INRIA*, **3369**, mars 1998.
- [Pébay-1998b] PH.P. PÉBAY, Construction d'une contrainte Delaunay-admissible en dimension 2, *Rapport de Recherche INRIA*, **3492**, septembre 1998.
- [Pébay,Frey-1998a] PH.P. PÉBAY ET P.J. FREY, Delaunay-admissibilité des triangulations de surfaces, *C.R. Acad. Sci. Paris, Série I Mathématiques*, **327** (3), 313-318, 1998.
- [Pébay,Frey-1998b] PH.P. PÉBAY AND P.J. FREY, *A priori* Delaunay-conformity, *Proc. of 7th Int. Meshing Roundtable*, Dearborn, Mi, USA, october 26-28, 321-333, 1998.
- [Rajan-1994] V.T. RAJAN, Optimality of the Delaunay triangulations in \mathbb{R}^d , *Discrete Comput. Geom.* **12**, 189-202, 1994.
- [Ruppert,Seidel-1992] J. RUPPERT AND R. SEIDEL, On the difficulty of triangulating three dimensional nonconvex polyhedra, *Discrete Computational Geometry* **7**, 227-253, 1992.
- [Sapidis,Perrucio-1991] N. SAPIDIS AND R. PERUCCHIO, Delaunay triangulations of arbitrarily shaped planar domains, *Computer Aided Geometric Design* **8**, 412-437, 1991.
- [Shamos,Preparata-1985] F.P. SHAMOS AND M.I. PREPARATA, Computational Geometry, an introduction, *Springer-Verlag*, 1985.
- [Shephard,Georges-1991] M.S. SHEPHARD AND M.K. GEORGES, Automatic three dimensional Mesh Generation by the Finite Octree Technique, *Int. j. numer. meth. eng.*, **32**, 709-749, 1991.
- [Shewchuck-1998] R.J. SHEWCHUCK, A condition guaranteeing the existence of higher-dimensional constrained Delaunay triangulations, *Proc. of 14th Annu. ACM Sympos. Comput. Geom.*, 1998.
- [Schönhart-1928] E. SCHÖNHART, Über die Zerlegung von Dreieckspolyedern, *Mathematisch Annalen* **98**, 309-312, 1928.
- [Voronoi-1908] G. VORONOÏ, Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie des formes quadratiques. Recherches sur les paralléloèdres primitifs. *Journal Reine angew. Math.*, **134**, 1908.
- [Weatherill,Hassan-1994] N.P. WEATHERILL AND O.HASSAN, Efficient three dimensionnal Delaunay triangulation with automatic point creation and imposed boundary constraints, *Int. j. numer. methods eng.*, **37**, 2005-2039, 1994.