



Hétérogénéité spatiale en dynamique des populations

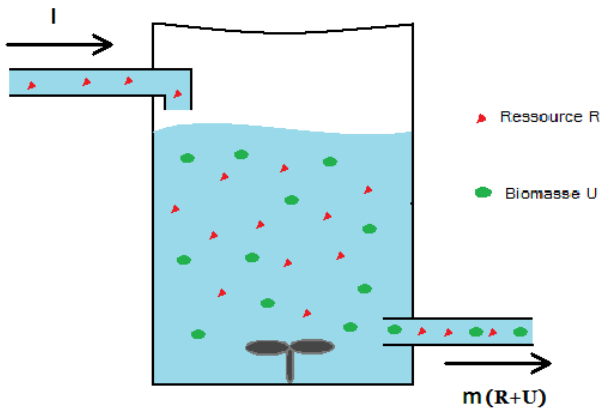
Soutenance de Thèse

Sten Madec

Université de Rennes 1, IRMAR, CAREN, Ecobio

10 juin 2011

Le chemostat homogène



Chemostat homogène : (Hsu, Hubbell, et Waltman, 1977)

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \mathbf{R}(t) = \mathcal{I} - m_0 \mathbf{R} - \sum_i F_i(\mathbf{R}(t)) \mathbf{U}_i(t), & t > 0 \\ \frac{d}{dt} \mathbf{U}_i(t) = (F_i(\mathbf{R}(t)) - m_i) \mathbf{U}_i(t), & t > 0, \quad i = 1, \dots, N \end{cases}$$

- N espèces (concentration \mathbf{U}_i)
- 1 ressource (concentration \mathbf{R})
- Fonctions de consommation $F_i(\mathbf{R})$
- Taux de mortalité m_i
- Taux de perte de la ressource m_0
- Entrée de la ressource \mathcal{I}

Exclusion compétitive

Les fonctions de consommation sont croissantes
(Typiquement, $f_i(\mathbf{R}) = C_i \mathbf{R}$ ou $f_i(\mathbf{R}) = \frac{C_i \mathbf{R}}{b_i + \mathbf{R}}$)

Exclusion compétitive

Les fonctions de consommation sont croissantes

(Typiquement, $f_i(\mathbf{R}) = C_i \mathbf{R}$ ou $f_i(\mathbf{R}) = \frac{C_i \mathbf{R}}{b_i + \mathbf{R}}$)

Caractéristique d'une espèce : $\mathbf{R}_i^* = f_i^{-1}(m_i)$

\mathbf{R}_i^* minimal $\Rightarrow i^{\text{ème}}$ espèce est la meilleure compétitrice

Exclusion compétitive

Les fonctions de consommation sont croissantes

(Typiquement, $f_i(\mathbf{R}) = C_i \mathbf{R}$ ou $f_i(\mathbf{R}) = \frac{C_i \mathbf{R}}{b_i + \mathbf{R}}$)

Caractéristique d'une espèce : $\mathbf{R}_i^* = f_i^{-1}(m_i)$

\mathbf{R}_i^* minimal $\Rightarrow i^{\text{ème}}$ espèce est la meilleure compétitrice

Proposition

Chemostat homogène \Rightarrow Exclusion compétitive

(Hsu, Hubbell, et Waltman, 1977) (Hsu, 1978)

(Armstrong et McGehee, 1980)

Le paradoxe du plancton (Hutchinson, 1961)

Un facteur limitant = Une espèce survivante
Pourquoi observe-t-on autant d'espèces ?

Hypothèse de travail : l'hétérogénéité spatiale permet la coexistence

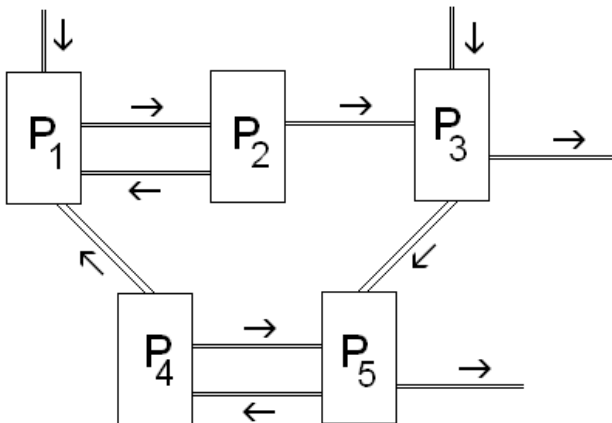
Le paradoxe du plancton (Hutchinson, 1961)

Un facteur limitant = Une espèce survivante
Pourquoi observe-t-on autant d'espèces ?

Hypothèse de travail : l'hétérogénéité spatiale permet la coexistence

Le gradostat

(Lovitt et Wimpenny, 1979), (Jäger, So, Tang, et Waltman, 1987),
(Smith, Tang, et Waltman, 1991)



Le modèle discret

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \mathbf{R} = \mathcal{I} - m_0 \mathbf{R} - \sum_i F_i(\mathbf{R}) \mathbf{U}_i + a_0 \mathbf{K} \mathbf{R} \\ \frac{d}{dt} \mathbf{U}_i = (F_i(\mathbf{R}) - m_i) \mathbf{U}_i + a_i \mathbf{K} \mathbf{U}_i \end{cases}$$

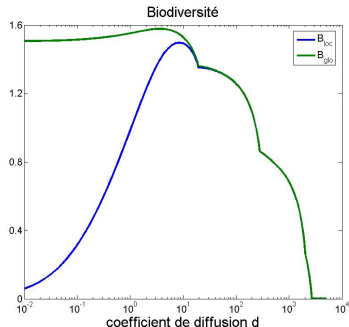
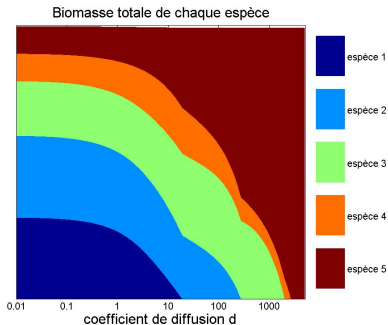
- $\mathbf{R}, \mathbf{U}_i, \mathbf{m}_i, \mathcal{I}$ vecteurs de \mathbb{R}^P
- $[F_i(\mathbf{R})]^j = F_i^j(\mathbf{R}^j)$
- \mathbf{K} matrice irréductible modélisant les déplacements
- $a_i \in \mathbb{R}_+$ vitesses de migration

Le modèle continu

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{R} = \mathcal{I} - m_0 \mathbf{R} - \sum_i F_i(\mathbf{R}) \mathbf{U}_i + a_0 \Delta \mathbf{R} & \text{sur } \Omega \\ \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{U}_i = (F_i(\mathbf{R}) - m_i) \mathbf{U}_i + a_i \Delta \mathbf{U}_i & \text{sur } \Omega \\ \partial_n \mathbf{U}_i(t) = \partial_n \mathbf{R}(t) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right.$$

- $m_i, \mathcal{I}, m_0, C_i \in C^1(\Omega)$
- $F_i(\mathbf{R})(x) = F_i(x, \mathbf{R}(x))$
- $a_i \in \mathbb{R}_+$ vitesses de diffusion

Biodiversité locale = $\int_{\Omega} \sum_i \frac{U_i(x)}{P(x)} \log \frac{U_i(x)}{P(x)} dx$ où $P(x) = \sum_i U_i(x)$
 Biodiversité globale = $\sum \frac{u_i}{p} \log \frac{u_i}{p}$ où $u_i = \int_{\Omega} U_i(x) dx$ et $p = \sum_i u_i$.



Objectifs :

Objectifs :

- **Borne uniforme des solutions**

Objectifs :

- **Borne uniforme des solutions**
- **Comprendre les diffusions extrêmes**
 - Petite diffusion (Inversion locale)
 - Grande diffusion (Théorème de la variété centrale)

Objectifs :

- **Borne uniforme des solutions**
- **Comprendre les diffusions extrêmes**
 - Petite diffusion (Inversion locale)
 - Grande diffusion (Théorème de la variété centrale)
- **Comprendre les phénomènes de coexistence**
 - Solutions du système stationnaire (Méthodes de bifurcation)

Objectifs :

- **Borne uniforme des solutions**
- **Comprendre les diffusions extrêmes**
 - Petite diffusion (Inversion locale)
 - Grande diffusion (Théorème de la variété centrale)
- **Comprendre les phénomènes de coexistence**
 - Solutions du système stationnaire (Méthodes de bifurcation)
- Caractéristiques R_i^* des espèces non appropriées :
Trouver une caractéristique adaptée
 - (Méthodes de bifurcation)

Borne uniforme des solutions

- Si $m_j = m$ et $a_j = a$, alors

$$(\partial_t - (a\Delta - m))(\mathbf{R} + \sum_i \mathbf{U}_i) = \mathcal{I}$$

Principe du maximum \Rightarrow borne uniforme dans L^∞

Borne uniforme des solutions

- Si $m_i = m$ et $a_i = a$, alors

$$(\partial_t - (a\Delta - m))(\mathbf{R} + \sum_i \mathbf{U}_i) = \mathcal{I}$$

Principe du maximum \Rightarrow borne uniforme dans L^∞

- Sinon, uniquement conservation de masse (structure L^1)

$$\partial_t \int_{\Omega} (\mathbf{R} + \sum_i \mathbf{U}_i) \leq \int_{\Omega} \mathcal{I} - \alpha \int_{\Omega} (\mathbf{R} + \sum_i \mathbf{U}_i)$$

† Système triangulaire \rightarrow estimations L^p successives
(Hollis, Martin, et Pierre, 1987)

Solution stationnaire pour les petits taux de migration

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \mathbf{R} = \mathcal{I} - m_0 \mathbf{R} - \sum_i F_i(\mathbf{R}) \mathbf{U}_i + \varepsilon \mathbf{K} \mathbf{R} \\ \frac{d}{dt} \mathbf{U}_i = (F_i(\mathbf{R}) - m_i) \mathbf{U}_i + \varepsilon \mathbf{K} \mathbf{U}_i \end{cases}$$

Solution stationnaire pour les petits taux de migration

- $\varepsilon = 0 \Rightarrow P$ systèmes de chemostat homogène indépendant
 - \Rightarrow Exclusion compétitive sur chaque site $j = 1, \dots, P$
 - \Rightarrow Une unique solution stationnaire stable \mathbf{W}^0

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} R^j = \mathcal{I}^j - m_0^j R^j - \sum_i F_i^j(R^j) U_i^j \\ \frac{d}{dt} U_i^j = (F_i^j(R^j) - m_i^j) U_i^j \end{cases}$$

Solution stationnaire pour les petits taux de migration

- $\varepsilon = 0 \Rightarrow P$ systèmes de chemostat homogène indépendant
 - \Rightarrow Exclusion compétitive sur chaque site $j = 1, \dots, P$
 - \Rightarrow Une unique solution stationnaire stable \mathbf{W}^0
- ε petit \Rightarrow perturbation de la solution stable \mathbf{W}^0

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \mathbf{R} = \mathcal{I} - m_0 \mathbf{R} - \sum_i F_i(\mathbf{R}) \mathbf{U}_i + \varepsilon \mathbf{K} \mathbf{R} \\ \frac{d}{dt} \mathbf{U}_i = (F_i(\mathbf{R}) - m_i) \mathbf{U}_i + \varepsilon \mathbf{K} \mathbf{U}_i \end{cases}$$

Preuve : Inversion locale

Difficulté : Montrer que la solution ainsi obtenue est positive ou nulle

Système avec grandes diffusions ($d = \frac{1}{\varepsilon}$)

$$\frac{d}{dt} \mathbf{W} = \mathcal{F}(\mathbf{W}) + \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{K} \mathbf{W}, \quad \mathbf{K} = \text{diag}(a_i \Delta)$$

Décomposition : $\ker(\mathbf{K}) \approx \mathbb{R}^{N+1}$; $E_0 = \ker(\mathbf{K})^\perp$

$$\begin{cases} (L^2)^{N+1} &= \text{Ker}(\mathbf{K}) \oplus E_0 \\ \mathbf{W} &= w + \widetilde{\mathbf{W}} \end{cases}$$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{W} = \mathcal{F}(\mathbf{W}) + \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{K} \mathbf{W} \xrightarrow{\text{lente-rapide}} (\mathcal{S}_\varepsilon) \begin{cases} \frac{d}{dt} w = f_0(w, \widetilde{\mathbf{W}}) \\ \frac{d}{dt} \widetilde{\mathbf{W}} = \mathcal{F}_1(w, \widetilde{\mathbf{W}}) + \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{K} \widetilde{\mathbf{W}} \end{cases}$$

Théorème (Variété centrale)

Il existe une fonction $h : [0, 1] \times \ker(\mathbf{K}) \rightarrow E_0$ telle que $(w, h(w, \varepsilon))$ est invariant sous le flot de $(\mathcal{S}_\varepsilon)$

Théorème (Variété centrale)

Il existe une fonction $h : [0, 1] \times \ker(\mathbf{K}) \rightarrow E_0$ telle que $(w, h(w, \varepsilon))$ est invariant sous le flot de (S_ε)

Système agrégé (calcul de h à l'ordre 0)

$$\tilde{m}_i = \int_{\Omega} \mathbf{m}_i, \quad \tilde{C}_i = \int_{\Omega} \mathbf{C}_i, \quad \tilde{\mathcal{I}} = \int_{\Omega} \mathcal{I},$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} r(t) = \tilde{\mathcal{I}} - \left(\tilde{m}_0 + \sum_i \tilde{C}_i u_i(t) \right) r(t) \\ \frac{d}{dt} u_i(t) = \left(\tilde{C}_i r(t) - \tilde{m}_i \right) u_i(t) \end{cases}$$

Chemostat homogène \Rightarrow Exclusion compétitive

Estimation d'erreur

$\mathbf{W}(\varepsilon, t)$ = solution du système $(\mathcal{S}_\varepsilon)$

$w_{ag}(t)$ = solution du système agrégé

μ plus petite valeur propre non nulle de $-\mathbf{K}$

Proposition (Estimation d'erreur)

$\exists \varepsilon_0 > 0, \exists k > 0, \forall t > 0, \forall \varepsilon < \varepsilon_0$

$$\|\mathbf{W}(\varepsilon, t) - w_{ag}(t)\| \leq k \left(\varepsilon + e^{-\mu \frac{t}{\varepsilon}} \right)$$

Dynamique globale pour les grandes diffusions

$$\frac{d}{dt} \mathbf{W} = \mathcal{F}(\mathbf{W}) + \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{K} \mathbf{W}$$

Théorème (Exclusion compétitive pour les grandes diffusions)

Il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que si $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ alors le système (S_ε) vérifie le principe d'exclusion compétitive

Preuve : estimation d'erreur, convergence globale de $w_{ag}(t)$, stabilité locale de la solution

Dynamique globale pour les grandes diffusions

$$\frac{d}{dt}W = \mathcal{F}(W) + \frac{1}{\varepsilon}KW$$

Théorème (Exclusion compétitive pour les grandes diffusions)

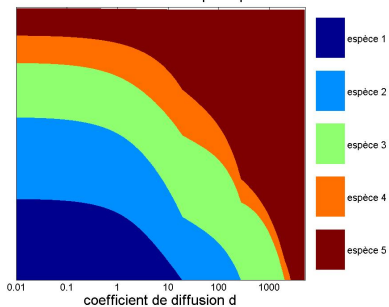
Il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que si $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ alors le système (S_ε) vérifie le principe d'exclusion compétitive

Preuve : estimation d'erreur, convergence globale de $w_{ag}(t)$, stabilité locale de la solution

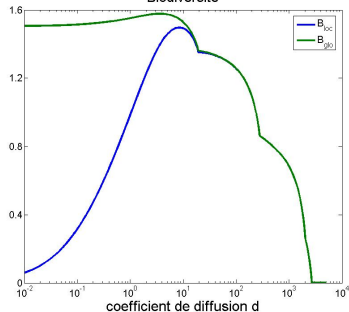
Grandes diffusions \Rightarrow un seul compétiteur survit : le meilleur compétiteur en moyenne

[Retour à la simulation](#)

Biomasse totale de chaque espèce



Biodiversité



- **Bifurcation locale en une valeur propre simple (Crandall et Rabinowitz, 1971)**

Equation à résoudre : $\mathcal{F}(c, \mathbf{W}) = 0$

Solution triviale : $\forall c, \mathcal{F}(c, 0) = 0$

0 valeur propre simple du linéarisé pour $c = c^0$:

$$D_W \mathcal{F}(c^0, 0) \psi = 0$$

Au voisinage de $(c^0, 0)$, il existe une solution non triviale $\mathbf{W}(c)$ tangente à ψ en $c = c^0$

- **Bifurcation locale en une valeur propre simple (Crandall et Rabinowitz, 1971)**

Equation à résoudre : $\mathcal{F}(c, \mathbf{W}) = 0$

Solution triviale : $\forall c, \mathcal{F}(c, 0) = 0$

0 valeur propre simple du linéarisé pour $c = c^0$:

$$D_W \mathcal{F}(c^0, 0) \psi = 0$$

Au voisinage de $(c^0, 0)$, il existe une solution non triviale $\mathbf{W}(c)$ tangente à ψ en $c = c^0$

- **Bifurcation globale (Rabinowitz, 1971) (Blat et Brown, 1984)**

Prolongement maximal de cette solution non triviale

La solution de bifurcation est soit non bornée, soit elle rejoint la solution triviale en un point $\hat{c} \neq c^0$

Méthodes de bifurcation

Paramètres de bifurcation : $F_i(\mathbf{R}) = c_i f_i(\mathbf{R})$ (Hsu et Waltman, 1993) (Wu, 2000)

Problème stationnaire (2 espèces)

$$\left\{ \begin{array}{ll} m_0 \mathbf{R} + \sum_i c_i f_i(\mathbf{R}) \mathbf{U}_i - a_0 \Delta \mathbf{R} = \mathcal{I} & \text{sur } \Omega \\ (m_1 - c_1 f_1(\mathbf{R})) \mathbf{U}_1 - a_1 \Delta \mathbf{U}_1 = 0 & \text{sur } \Omega \\ (m_2 - c_2 f_2(\mathbf{R})) \mathbf{U}_2 - a_2 \Delta \mathbf{U}_2 = 0 & \text{sur } \Omega \\ \partial_n \mathbf{U}_1 = \partial_n \mathbf{U}_2 = \partial_n \mathbf{R} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right.$$

Méthodes de bifurcation

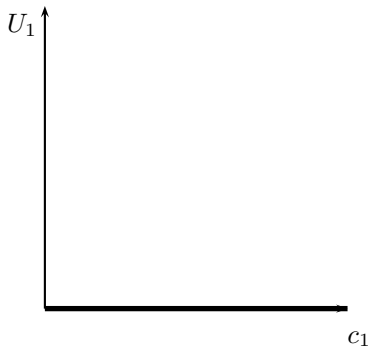
Paramètres de bifurcation : $F_i(\mathbf{R}) = c_i f_i(\mathbf{R})$ (Hsu et Waltman, 1993) (Wu, 2000)

Problème stationnaire (2 espèces)

$$\begin{cases} m_0 \mathbf{R} + \sum_i c_i f_i(\mathbf{R}) \mathbf{U}_i - a_0 \Delta \mathbf{R} = \mathcal{I} & \text{sur } \Omega \\ (m_1 - c_1 f_1(\mathbf{R})) \mathbf{U}_1 - a_1 \Delta \mathbf{U}_1 = 0 & \text{sur } \Omega \\ (m_2 - c_2 f_2(\mathbf{R})) \mathbf{U}_2 - a_2 \Delta \mathbf{U}_2 = 0 & \text{sur } \Omega \\ \partial_n \mathbf{U}_1 = \partial_n \mathbf{U}_2 = \partial_n \mathbf{R} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

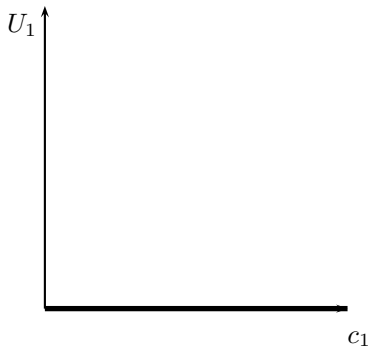
1ère étape, 0 espèce : solution triviale

$$\mathbf{R} = (m_0 - a_0 \Delta)^{-1}(\mathcal{I}) := S, \mathbf{U}_1 \equiv \mathbf{U}_2 \equiv 0.$$



Linéarisation

$$\begin{cases} (\mathbf{m}_0 - a_0 \Delta) \rho + c_1 f_1(S) \phi = 0 \\ (\mathbf{m}_1 - c_1 f_1(S) - a_1 \Delta) \phi = 0 \end{cases}$$

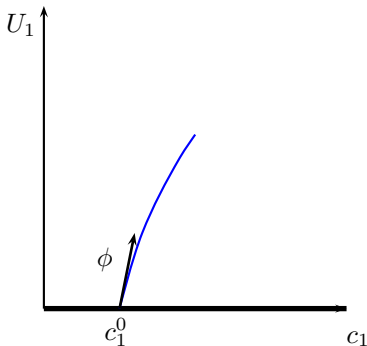


Linéarisation

$$\begin{cases} (\mathbf{m}_0 - a_0 \Delta) \rho + c_1 f_1(S) \phi = 0 \\ (\mathbf{m}_1 - c_1 f_1(S) - a_1 \Delta) \phi = 0 \end{cases}$$

$\exists ! c_1^0 > 0$ tel que

$$\lambda_1(\mathbf{m}_1 - c_1^0 f_1(S) - a_1 \Delta) = 0$$



Linéarisation

$$\begin{cases} (\mathbf{m}_0 - a_0\Delta)\rho + c_1^0 f_1(S)\phi = 0 \\ (\mathbf{m}_1 - c_1^0 f_1(S) - a_1\Delta)\phi = 0 \end{cases}$$

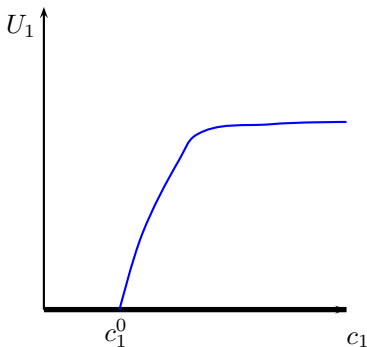
$\exists! c_1^0 > 0$ tel que

$$\lambda_1(\mathbf{m}_1 - c_1^0 f_1(S) - a_1\Delta) = 0$$

$$\mathbf{m}_0 - a_0\Delta \text{ inversible} \Rightarrow \rho = -(\mathbf{m}_0 - a_0\Delta)^{-1} (c_1^0 f_1(S)\phi)$$

Proposition

Si $c_1 = c_1^0$, 0 est valeur propre simple du système



Linéarisation

$$\begin{cases} (\mathbf{m}_0 - a_0\Delta)\rho + c_1^0 f_1(S)\phi = 0 \\ (\mathbf{m}_1 - c_1^0 f_1(S) - a_1\Delta)\phi = 0 \end{cases}$$

 $\exists! c_1^0 > 0$ tel que

$$\lambda_1(\mathbf{m}_1 - c_1^0 f_1(S) - a_1\Delta) = 0$$

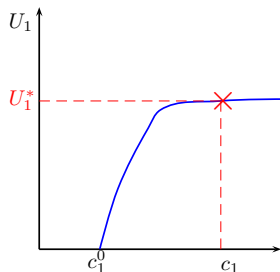
$$\mathbf{m}_0 - a_0\Delta \text{ inversible} \Rightarrow \rho = -(\mathbf{m}_0 - a_0\Delta)^{-1} (c_1^0 f_1(S)\phi)$$

Proposition

Si $c_1 = c_1^0$, 0 est valeur propre simple du système

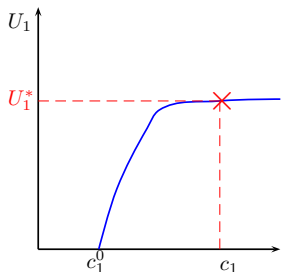
Solution semi-triviale si $c_1 > c_1^0$

Principe : on fixe $c_1 > c_1^0$



Hypothèses : Unicité et hyperbolicité des solutions semi-triviales

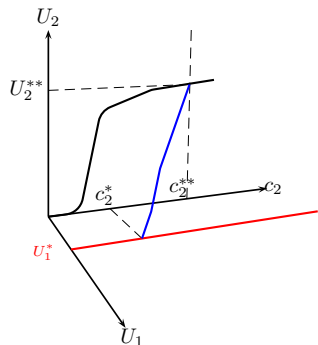
Principe : on fixe $c_1 > c_1^0$



Hypothèses : Unicité et hyperbolicité des solutions semi-triviales

c_2 = paramètre de bifurcation

$$\begin{cases} T_1 \begin{pmatrix} \rho \\ \phi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_2 \mathbf{f}_2(\mathbf{R}_1^*) \phi_2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ (\mathbf{m}_2 - a_2 \Delta - c_2 \mathbf{f}_2(\mathbf{R}_1^*)) \phi_2 = 0 \end{cases}$$



Théorème (Unicité et hyperbolicité des solutions semi-triviales)

Si $m_1 a_0 \leq m_0 a_1$ alors pour tout $c_1 > c_1^0$ il existe une unique solution semi-triviale $(R_1^(c_1), U_1^*(c_1), 0)$ et elle est hyperbolique*

(idem pour l'espèce 2)

Théorème (Unicité et hyperbolicité des solutions semi-triviales)

Si $\mathbf{m}_1 a_0 \leq \mathbf{m}_0 a_1$ alors pour tout $c_1 > c_1^0$ il existe une unique solution semi-triviale $(\mathbf{R}_1^(c_1), \mathbf{U}_1^*(c_1), 0)$ et elle est hyperbolique*

(idem pour l'espèce 2)

Théorème (Solutions de coexistence)

Si $\mathbf{m}_i a_0 \leq \mathbf{m}_0 a_i$ pour $i = 1, 2$ alors il existe $c_2^ > c_2^0$ et $c_2^{**} > c_2^0$ (dépendants de c_1) et une famille de solutions de coexistence liant $(c_2^*, \mathbf{R}_1^*(c_1), \mathbf{U}_1^*(c_1), 0)$ à $(c_2^{**}, \mathbf{R}_2^*(c_2^{**}), 0, \mathbf{U}_2^*(c_2^{**}))$*

Preuve

- Equation de conservation $(m_0 - a_0\Delta)R + (m_1 - a_1\Delta)U_1 = \mathcal{I}$
d'où

$$R(U_1) = S - \frac{a_1}{a_0}U_1 + \underbrace{\frac{1}{a_0}(m_0 - a_0\Delta)^{-1}([m_0a_1 - m_1a_0]U_1)}_{\text{terme non local}}$$

Preuve

- Equation de conservation $(m_0 - a_0\Delta)R + (m_1 - a_1\Delta)U_1 = \mathcal{I}$
d'où

$$R(U_1) = S - \frac{a_1}{a_0}U_1 + \underbrace{\frac{1}{a_0}(m_0 - a_0\Delta)^{-1}([m_0a_1 - m_1a_0]U_1)}_{\text{terme non local}}$$

- Une seule équation pour U_1

$$(m_1 - a_1\Delta)U_1 - c_1f_1(R(U_1)) = 0$$

Preuve

- Equation de conservation $(\mathbf{m}_0 - a_0\Delta)\mathbf{R} + (\mathbf{m}_1 - a_1\Delta)\mathbf{U}_1 = \mathcal{I}$
d'où

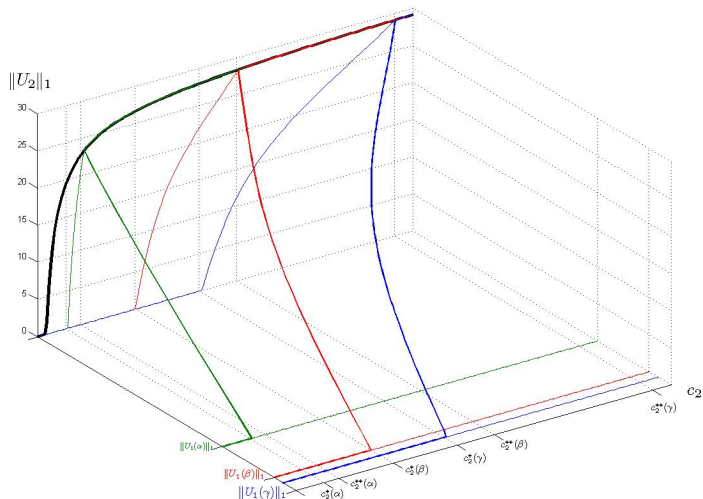
$$R(\mathbf{U}_1) = S - \frac{a_1}{a_0}\mathbf{U}_1 + \underbrace{\frac{1}{a_0}(\mathbf{m}_0 - a_0\Delta)^{-1}([\mathbf{m}_0 a_1 - \mathbf{m}_1 a_0]\mathbf{U}_1)}_{\text{terme non local}}$$

- Une seule équation pour \mathbf{U}_1

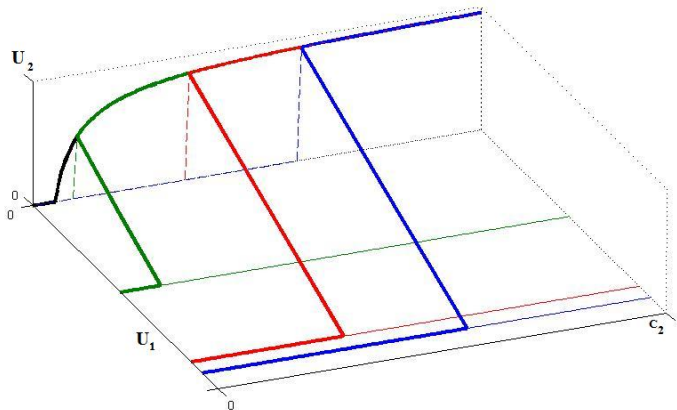
$$(\mathbf{m}_1 - a_1\Delta)\mathbf{U}_1 - c_1\mathbf{f}_1(R(\mathbf{U}_1)) = 0$$

- Terme non local positif \Rightarrow sur et sous-solutions

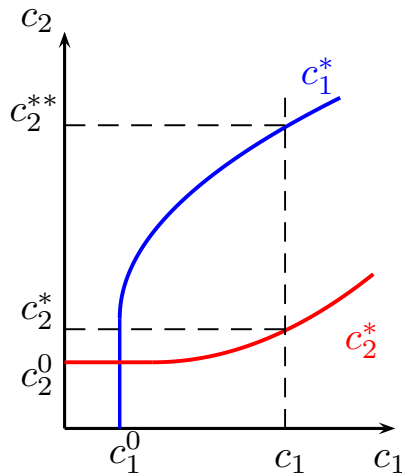
Cas générique



Cas dégénéré



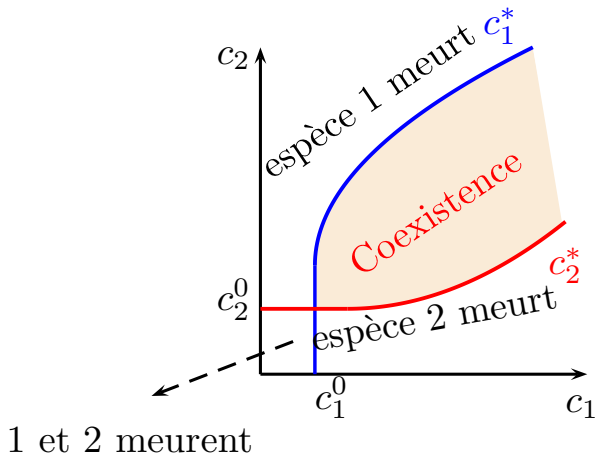
Domaine de coexistence pour 2 espèces



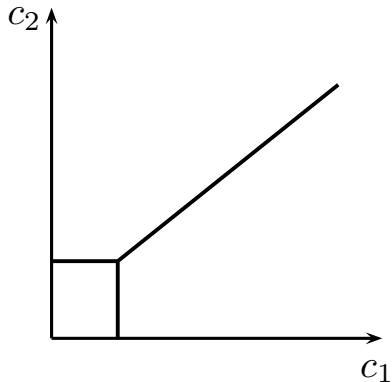
$c_2^{**}(c_1)$ caractérisé par

$$c_1^*(c_2^{**}(c_1)) = c_1$$

Domaine de coexistence pour 2 espèces

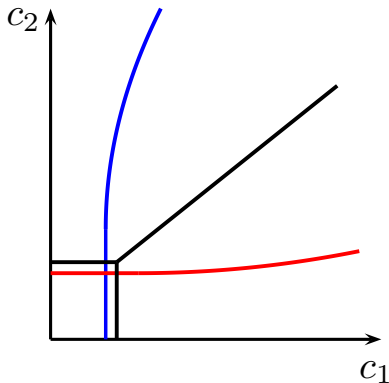


Domaine de coexistence lorsque la diffusion croît



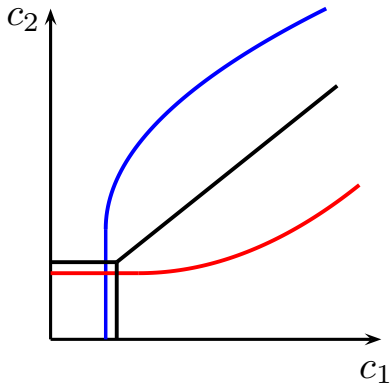
- Système agrégé : $c_1^* = c_2^*$

Domaine de coexistence lorsque la diffusion croît



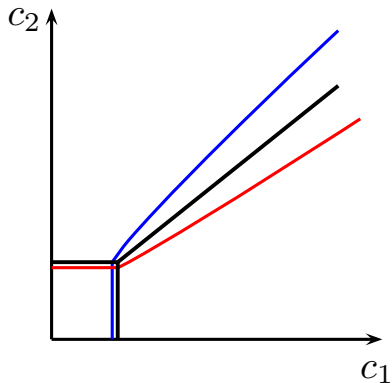
- Système agrégé : $c_1^* = c_2^*$
- Evolution de $c_1^*(c_2)$ et $c_2^*(c_1)$

Domaine de coexistence lorsque la diffusion croît



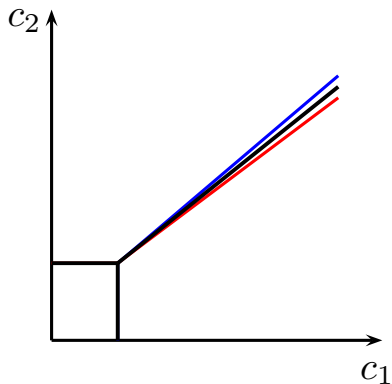
- Système agrégé : $c_1^* = c_2^*$
- Evolution de $c_1^*(c_2)$ et $c_2^*(c_1)$

Domaine de coexistence lorsque la diffusion croît



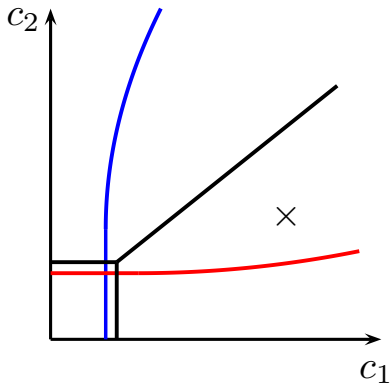
- Système agrégé : $c_1^* = c_2^*$
- Evolution de $c_1^*(c_2)$ et $c_2^*(c_1)$

Domaine de coexistence lorsque la diffusion croît



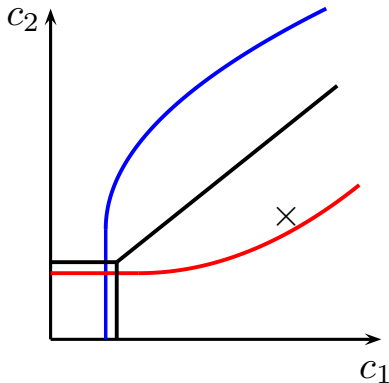
- Système agrégé : $c_1^* = c_2^*$
- Evolution de $c_1^*(c_2)$ et $c_2^*(c_1)$

Domaine de coexistence lorsque la diffusion croît



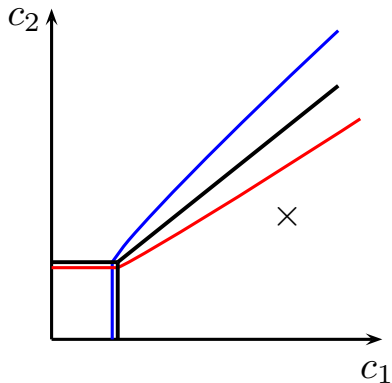
- Système agrégé : $c_1^* = c_2^*$
- Evolution de $c_1^*(c_2)$ et $c_2^*(c_1)$
- (c_1, c_2) fixé : X

Domaine de coexistence lorsque la diffusion croît



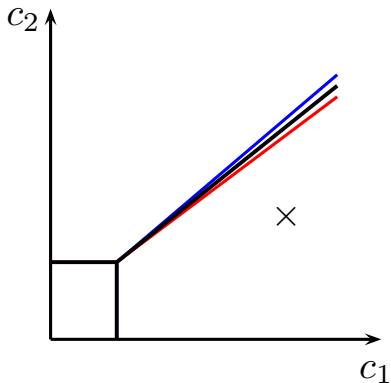
- Système agrégé : $c_1^* = c_2^*$
- Evolution de $c_1^*(c_2)$ et $c_2^*(c_1)$
- (c_1, c_2) fixé : x

Domaine de coexistence lorsque la diffusion croît



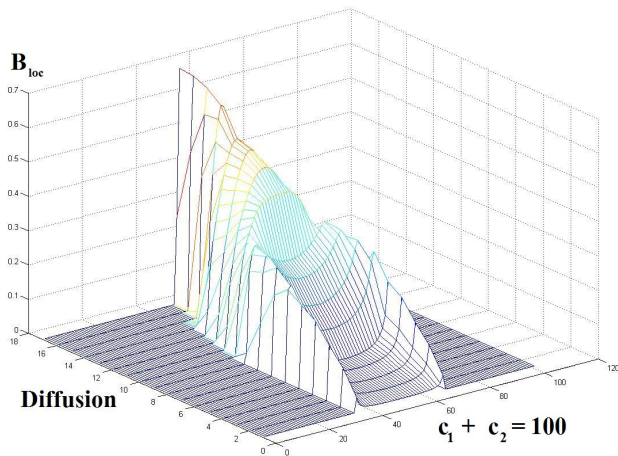
- Système agrégé : $c_1^* = c_2^*$
- Evolution de $c_1^*(c_2)$ et $c_2^*(c_1)$
- (c_1, c_2) fixé : X
- Espèce 2 meurt

Domaine de coexistence lorsque la diffusion croît



- Système agrégé : $c_1^* = c_2^*$
- Evolution de $c_1^*(c_2)$ et $c_2^*(c_1)$
- (c_1, c_2) fixé : \times
- Espèce 2 meurt

Biodiversité en fonction de la diffusion sur une section du plan (c_1, c_2)



■ Espèce 1 dominante

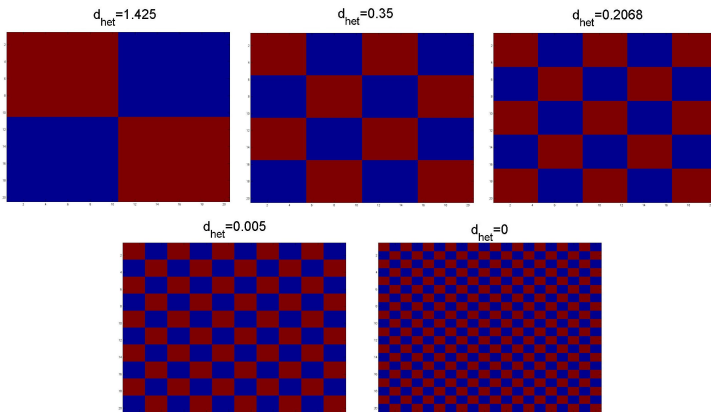
■ Espèce 2 dominante

d_{het} = moyenne des distances entre les zones bleues et rouges

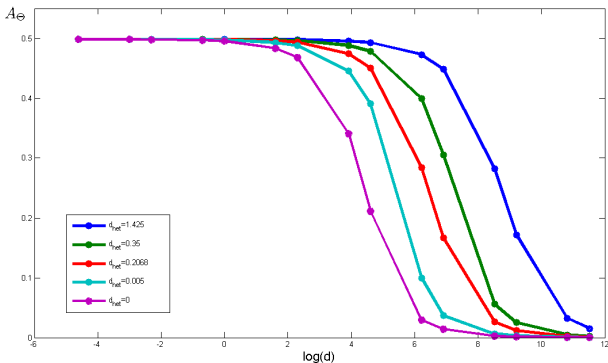
■ Espèce 1 dominante

■ Espèce 2 dominante

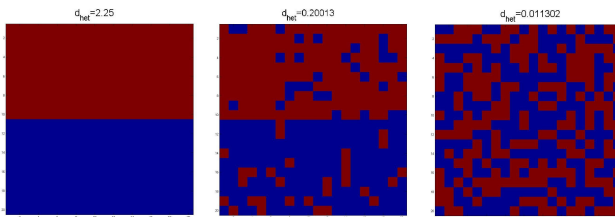
d_{het} = moyenne des distances entre les zones bleues et rouges

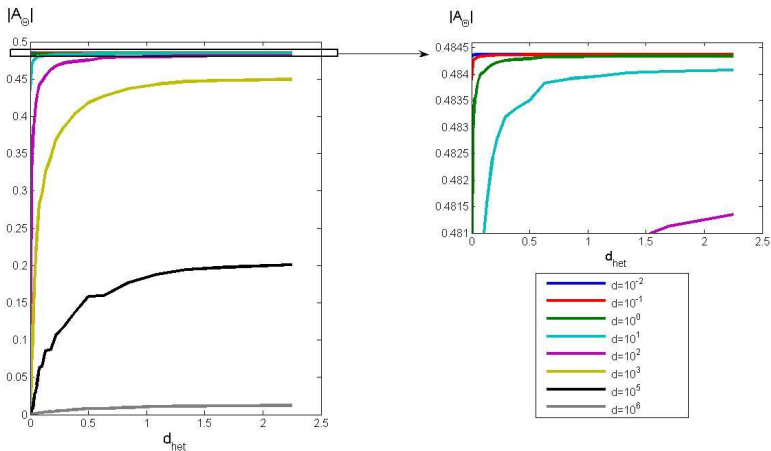


Taille du domaine de coexistence en fonction de la diffusion pour 5 domaines de type damier



Domaines générés aléatoirement





Résultats

- Compréhension du fait que les grandes diffusions conduisent à l'exclusion compétitive (Hypothèse "well-stirred")
- Solutions du problème stationnaire et mise en évidence des phénomènes conduisant à la coexistence
- Mise en évidence d'un domaine géométrique "caractérisant" la coexistence (Venail et al., 2008), (Massol et al., 2011)

Perspectives

- Etendre les résultats pour $a_i \mathbf{m}_0 \leq a_0 \mathbf{m}_i$
- Montrer que $c_i^* \leq c_i^{**}$ (bifurcation vers la droite)
- Caractérisation des solutions dégénérées (extension à 3 espèces ou plus)
- Comportement global en temps (persistance, convergence globale)

Merci de votre attention

- R. A. Armstrong et R. McGehee. Competitive exclusion. *The American Naturalist*, 115 :151–170, 1980.
- J. Blat et K. J. Brown. Bifurcation of steady-state solutions in predator-prey and competition systems. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, Section : A Mathematics*, 97 :21–34, 1984.
- M. G. Crandall et P. H. Rabinowitz. Bifurcation from simple eigenvalue. *Journal of Functional Analysis*, 8 :321–340, 1971.
- S. L. Hollis, R. H. Martin, et M. Pierre. Global existence and boundedness in reaction-diffusion systems. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 18 No. 3 :744–761, 1987.
- S. B. Hsu. Limiting behavior for competing species. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 34 :760–763, 1978.
- S. B. Hsu, S. P. Hubbell, et P. Waltman. A mathematical theory for single nutrient competition in continuous culture of micro-organisms. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 32 : 366–783, 1977.

- S. B. Hsu et P. Waltman. On a system of reaction-diffusion equations arising from competition in an unstirred chemostat. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 53 :1026–1044, 1993.
- G. E. Hutchinson. The paradox of the plankton. *American Naturalist*, 95 :137–145, 1961.
- W. Jäger, J. W. H. So, B. Tang, et P. Waltman. Competition in the gradostat. *Journal of Mathematical Biology*, 25 :23–42, 1987.
- R. W. Lovitt et J. W. T. Wimpenny. The gradostat : A tool for investigating microbial growth and interactions in solute gradients. *Society of General Microbiology Quartely*, 6 :80, 1979.
- F. Massol, D. Gravel, N. Mouquet, M. W. Cadotte, T. Fukami, et M. A. Leibold. Linking community and ecosystem dynamics through spatial ecology. *Ecology Letters*, 14 :313–323, 2011.
- P. H. Rabinowitz. Some global results for nonlinear eigenvalue problems. *Journal of Functional Analysis*, 7 :487–513, 1971.

- H. L. Smith, B. Tang, et P. Waltman. Competition in an n-vessels gradostat. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 5 : 1451–1471, 1991.
- P. A. Venail, R. C. MacLean, T. Bouvier, M. A. Brockhurst, M. E. Hochberg, et N. Mouquet. Diversity and productivity peak at intermediate dispersal rate in evolving metacommunities. *Nature*, 452 :210–215, 2008.
- J. H. Wu. Global bifurcation of coexistence state for the competition model in the chemostat. *Nonlinear Analysis*, 39 : 817–835, 2000.