THÈSE DE DOCTORAT
UNIVERSITÉ PARIS 6

Spécialité
Mathématiques Appliquées

Présentée par
Pierre-Henri Cumenge

Pour obtenir le grade de
Docteur de l'université Paris 6

Sujet de la thèse
p-variations approchées et erreurs d'arrondis

Soutenue le 31 mai 2011 devant le jury composé de

M.	Sylvain Delattre	Examinateur
Mme	Valentine Genon-Catalot	Rapporteur
M.	Jean Jacod	Directeur de thèse
M.	Gilles Pagès	Examinateur
M.	Philip Protter	Examinateur
M.	Mathieu Rosenbaum	Rapporteur

Remerciements

Cette thèse doit beaucoup en premier lieu à mon directeur Jean Jacod qui a su me faire profiter lorsque nécessaire de sa profonde connaissance du monde des processus aléatoires, tout en me laissant une large part d'autonomie. Je lui en suis particulièrement reconnaissant.

Je remercie Valentine Genon-Catalot pour avoir accepté de relire attentivement un manuscrit dont les détails techniques étaient sans doute parfois pénibles à lire, ainsi que Mathieu Rosenbaum dont les nombreuses remarques ont certainement amélioré la version finale de ce manuscrit.

Je suis très honoré -et un peu anxieux- que Gilles Pagès et Philip Protter aient accepté de juger mon travail ; les travaux de Sylvain Delattre ont été à l'origine d'une grande partie de cette thèse, je suis donc particulièrement flatté qu'il ait lui aussi accepté de faire partie de mon jury.

Cette thèse a été commencée au sein de l'équipe d'analyse fonctionnelle de l'Institut de Mathématiques de Jussieu, et terminée dans le Laboratoire de Probabilités et Modèles Aléatoires ; je remercie l'ensemble des membres de ces deux entités pour l'ambiance très conviviale qui y régnait, et en particulier leurs équipes techniques, chaleureuses et efficaces.

Les préparations de TD et de sujets d'examens auraient sans doute été pénibles si je ne les avaient pas faites aux côtés d'enseignants dévoués et collègues chaleureux : merci à Gérard Biau, Sébastien Besnard, Karim Bounebache, Cédric Boutillier, Assane Diop, Aurélie Fischer, Agathe Guilloux, Frédéric Guilloux, Bertrand Michel, Daniel Pierre-Loti-Viaud et Abass Sagna.

Laetitia Borel-Mathurin, Dominique Lecomte et Robert Thai, puis Leif Döring et Mátyás Barczy ont partagé mon bureau et mes angoisses ; mes meilleurs souvenirs de toutes ces journées à Chevaleret et Jussieu sont certainement à chercher parmi nos nombreuses discussions, parfois mathématiques, parfois un peu moins.

J'ai une pensée évidemment pour l'ensemble des thésards du LPMA, dont la solidarité et l'enthousiasme m'ont souvent aidé à conserver ma motivation.

Merci aussi à Isabelle, Jérôme et Paul pour, entre autres, ces déjeuners du mercredi midi, respirations salutaires.

Enfin, pour m'avoir soutenu durant ces quelques années, merci...

...à Benoît, Bruno et Pierre, nous avons choisi des domaines bien différents pour nos thèses, mais la cohésion de notre groupe ne s'est jamais démentie et m'a été particulièrement précieuse.

...à tous les membres de la troupe de SCRIBE-Paris, entité chronophage, dont je suis néanmoins très heureux d'avoir pu faire partie. Avec une pensée toute particulière pour Gwennoline, toujours tellement vivante.

...à mes amis et ma famille, toujours présents pour moi, ainsi que mon parrain Alain.

...à mes parents Anne et Christian, à mes deux frères Gabriel et François-Boris. Votre affection sans faille m'est un soutien précieux depuis longtemps.

...à mon grand-père Pierre enfin.

Résumé

p-variations approchées et erreurs d'arrondis

Cette thèse porte sur l'étude des propriétés asymptotiques des p-variations de processus observés de manière discrète dans le temps et entachés d'une erreur d'arrondi en espace. Cette thèse comporte trois parties ; le chapitre 1 est consacré à des rappels sur les semimartingales et les types de convergences étudiés.
Dans le chapitre 2, nous étudions les p,q-variations associées à un mouvement brownien bidimensionnel arrondi lorsque les pas de temps et d'espace tendent vers 0. Leur comportement dépend de deux paramètres : le premier est le rapport entre le pas d'arrondi et la racine du pas de temps, les résultats différant radicalement selon que ce paramètre converge ou diverge ; le second est la matrice de covariance associée au mouvement brownien. Lorsque celle-ci est inversible, le comportement des p,q-variations avec arrondi est une généralisation naturelle de celui des p-variations d'un brownien unidimensionnel arrondi. Lorsque par contre la matrice de covariance est dégénérée, les deux composantes du brownien sont proportionnelles et nous obtenons des lois des grands nombres très différentes selon que le rapport entre les deux est ou non rationnel.
Le chapitre 3 s'intéresse au comportement asymptotique des p-variations d'une semimartingale arrondie. Nous montrons dans un premier temps des lois des grands nombres pour les p-variations renormalisée ou non renormalisées, ainsi qu'une généralisation à des semimartingales bidimensionnelles continues. Lorsque cela est possible, c'est-à-dire pour des p-variations non-renormalisées, nous prouvons ensuite des théorèmes centraux limites associés, au prix d'hypothèses supplémentaires sur la structure de la semimartingale.

Mots-clés
Semimartingales, Erreur d'arrondis, Brownien bidimensionnel, p-variations approchées, variations multipuissance, haute frequence.

Abstract

Realized power variations and round-off errors

In this thesis, we study the asymptotic properties of processes observed discretely in time, and with a round-off error, when both the time lag between two observations and the size of the round-off error go to 0. This thesis is divided into three parts ; in the first one we recall some elements about semimartingale and the different kinds of convergences we will use.

Chapter 2 is devoted to the study of p,q-variations for a 2-dimensional Brownian motion ; we find that two important parameters appear : the first is the quotient between the size of the round-off and the square root of the time lag and the second the covariance matrix associated with the brownian motion. We obtain different laws of large numbers, that depend whether the first parameter converges or diverges and whether this matrix is or is not invertible. When it is not, very different behaviours arise when the two components of the Brownian motion have a rational quotient and when it is irrational.

In chapter 3 we deal with asymptotic p-variations of rounded-off semimartingales. We first prove laws of large numbers for either renormalized or non-renormalized p-variations, as well as a law of large numbers for 2-dimensional continuous semimartingales, using some results from chapter 2. In some cases, namely in the non-renormalized one, we also prove, with some unavoidable further assumptions on the semimartingale, a central limit theorem.

Keywords

Semimartingale, 2-dimensional Brownian motion, Round-off error, realized power variation, bipower variation, high frequency

Table des matières

Introduction

Introduction

Dans de nombreuses situations, en particulier en finance, on connaît les valeurs d'un certain processus X en des temps discrets t_i ; les X_{t_i} sont supposées être les valeurs observées d'un processus X à temps continu. On s'intéresse alors aux propriétés de ce processus. Un outil particulièrement étudié lorsque le processus est supposé être une semimartingale est la p-variation approchée de ce processus, à savoir la somme (pour un exposant p donné) $\sum |X(t_i) - X(t_{i-1})|^p$. Ces p-variations permettent notamment d'obtenir des estimateurs de la volatilité de la semimartingale (citons parmi les plus récents [7], ou [3] pour une estimation de la volatilité instantanée). Aït-Sahalia et Jacod ont aussi montré, en comparant les p-variations d'un même processus sur des grilles de temps différentes (cf [1]), comment détecter la présence de sauts dans le processus X. Les limites des p-variations de semimartingales, lorsque le pas de la subdivision tend vers zéro ont été abondamment étudiées, depuis les premiers travaux sur le sujet de Lépingle [23]. Citons entre autres les résultats assez complets sur le sujet de [13] (Nous reprendrons ces résultats plus en détail ultérieurement). Différentes structures des temps d'observation ont été étudiés dans la littérature ; cependant nous considèrerons ici uniquement le cas classique d'observations régulièrement réparties : nous supposerons donc les subdivisions régulières : $t_i = i/n$. Nous nous intéresserons alors au comportement, lorsque n tend vers l'infini, et pour un temps t fixé, des p-variations approchées :

$$\sum_{i=1}^{[nt]} |X(i/n) - X((i-1)/n)|^p. \tag{0.0.1}$$

Un problème majeur, en particulier à haute fréquence, est celui des erreurs d'observation (ou ≪ bruit de microstructure ≫) : on n'observe pas en pratique les valeurs prises par le processus X mais celles d'un processus voisin Z ; deux types d'erreurs sont essentiellement considérés. Le premier revient à supposer qu'il existe une erreur additive Y_i commise à chaque observation : $Z(t_i) - X(t_i) = Y_i$ (par exemple un bruit blanc). Ce type d'erreur, que nous ne considérerons plus par la suite, a été largement étudié dans la littérature récente ; citons par exemple [34] ou [4]. Le second type de bruit, auquel nous nous attacherons, est l'erreur d'arrondi : les valeurs du processus sont observées sur une grille d'espace discrète elle aussi ; on fait alors l'hypothèse que l'on n'observe en fait que les valeurs arrondies d'un processus sous-jacent à valeurs a priori dans $\mathbb{R}$. Typiquement, en finance, lorsque X représente un prix, celui-ci n'est connu qu'à un certain nombre de décimales près (cf [22]). On ne connaît alors que les valeurs $X^{(\alpha)} := \alpha[X(t_i)/\alpha]$, où $[x]$ désigne la partie entière de x. Notons que dans [14], les auteurs étudient une combinaison de ces deux types d'erreurs, par exemple le processus d'origine peut être soumis à un bruit additif gaussien puis arrondi ; lorsque le bruit Y_i est suffisamment important par rapport à la taille du pas d'arrondi, la présence de ce bruit peut paradoxalement faciliter la reconstitution du processus initial. Citons aussi [28], dans lequel l'auteur introduit un "indice de bruit microstructure" à partir duquel il analyse différents modèles d'erreurs d'observations.

Nous considérerons par la suite exclusivement les erreurs d'arrondis. Plus précisément, nous allons étudier le comportement des p-variations du processus, lorsque celui-ci est entaché d'erreurs d'arrondi. Ce problème a été étudié dans le cas très particulier des variations quadratiques d'un mouvement brownien par Jacod dans [12], puis généralisé par Delattre et Jacod (cf [8] et [9]) au cas de diffusions. Citons aussi les travaux plus récents de Mykland et Li ([24]), et de Rosenbaum ([29], [30]), qui, en reprenant certains arguments de [8], obtiennent des estimateurs de la volatilité intégrée et de la volatilité relative intégrée, toujours dans le cadre diffusif. Le cas brownien (i.e. $X(t) = X(0)+\sigma W(t)$, avec σ constant et W un brownien standard) mérite que l'on s'y attarde pour expliquer les limites obtenues. Nous supposerons dans toute la suite que le pas de l'erreur d'arrondi est donné par une suite α_n soit constante, soit convergeant vers 0 (le pas de temps étant toujours $1/n$). L'ordre de grandeur d'un accroissement "typique" du brownien est $1/\sqrt{n}$; un paramètre naturel à prendre en compte est alors le rapport

$$\beta_n := \sqrt{n}\alpha_n \tag{0.0.2}$$

entre $1/\sqrt{n}$ et le pas d'arrondi α_n. Quitte à considérer des sous-suites, nous supposerons par la suite que β_n converge vers un certain β, qui peut être nul ou infini. Etudions heuristiquement les différents cas possibles. Commençons par une observation simple : les accroissements du processus arrondi peuvent se mettre sous la forme

$$\alpha_n \left[\frac{X(i/n)}{\alpha_n}\right] - \alpha_n \left[\frac{X(\frac{i-1}{n})}{\alpha_n}\right] = \alpha_n \left[\left\{\frac{X(\frac{i-1}{n})}{\alpha_n}\right\} + \frac{X(i/n) - X(\frac{i-1}{n})}{\alpha_n}\right], \tag{0.0.3}$$

où $\{x\} := x - [x]$ est la partie fractionnaire de x. Cette forme sera utilisée de manière systématique par la suite.

Deux termes apparaissent dans cette forme : le terme $(X(i/n) - X(\frac{i-1}{n}))/\alpha_n$ est simplement un accroissement brownien, de variance σ/β_n. Le second terme $\{X_{(i-1)/n}/\alpha_n\}$ est indépendant du premier ; rappelons un résultat ancien remontant à Kosulajeff.

Théorème 1 (Kosulajeff, 37)**.** *Soit A une variable aléatoire réelle admettant une densité. Soit U une variable uniforme sur $[0,1]$. Alors*

$$\{A/\alpha\} \xrightarrow[\alpha\longrightarrow 0]{\mathcal{L}} U.$$

Lorsque α_n converge vers 0, le comportement de chaque accroissement des arrondis doit donc être proche de celui de variables du type : $\alpha_n[U + \sigma Y/\beta_n]$, où U est uniforme sur $[0,1]$ et Y une variable normale centrée réduite indépendante de U. On peut alors s'attendre à quatre comportements :

1. β est nul. L'erreur d'arrondi devient alors, à la limite, négligeable devant les accroissements de X, et l'on devrait retrouver les mêmes limites qu'en l'absence d'arrondis.

2. $0 < \beta < +\infty$. Le terme générique aura alors un comportement proche de $\alpha_n[U + \sigma Y/\beta]$, et l'on peut espérer la convergence en probabilité suivante :
$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{[nt]} n^{p/2}\left|\alpha_n\left[\{X(\frac{i-1}{n})/\alpha_n\} + \frac{X(i/n) - X(\frac{i-1}{n})}{\alpha_n}\right]\right|^p \xrightarrow{\text{P}} E\left(|\beta[U + \sigma Y/\beta]|^p\right)$$

3. $\beta = +\infty$ et $\alpha_n \to 0$. Le terme Y/β_n est alors en général inférieur à 1 (en valeur absolue), et dans ce cas, conditionnellement à Y, $|[U + \sigma Y/\beta_n]|$ est simplement une variable de Bernoulli de paramètre $|Y/\beta_n|$. On s'attend donc à la convergence suivante :
$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{[nt]} \beta_n\left|\left[\{X(\frac{i-1}{n})/\alpha_n\} + \frac{X(i/n) - X(\frac{i-1}{n})}{\alpha_n}\right]\right|^p \xrightarrow{\text{P}} E\left(|Y|\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma$$

4. si $\alpha_n = \alpha$ est constant (donc $\beta_n \to +\infty$), le processus arrondi ne sera susceptible de varier que lorsque le processus d'origine se trouve dans une zone proche des seuils $k\alpha$ (pour k entier). On peut donc s'attendre, à la limite, à un comportement lié au temps local en ces seuils.

Les limites effectivement obtenues pour les variations quadratiques sont conformes à celles attendues d'après le bref raisonnement ci-dessus. Rappelons la notation classique pour les accroissements : $\Delta_i^n X := X_{i/n} - X_{(i-1)/n}$ et introduisons celle correspondant aux accroissements du processus arrondi :$\overline{\Delta}_i^n X := \Delta_i^n(X^{(\alpha_n)})$. En désignant par h la densité normale centrée réduite, Jacod prouve dans [12] le

Théorème 2. *[Jacod, 96] Soit X un mouvement brownien sur $\mathbb{R}$, de variance σ^2. Alors, pour tout $t > 0$, on a les convergences en probabilité suivantes :*

1. si $\beta_n \longrightarrow 0$,
$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{[nt]} (\overline{\Delta}_i^n X)^2 \underset{n}{\longrightarrow} t\sigma^2$$

2. si $\beta_n \longrightarrow \beta \in]0, +\infty[$,
$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{[nt]} (\overline{\Delta}_i^n X)^2 \underset{n}{\longrightarrow} t\int_0^1 \int_{\mathbb{R}} h(x)(\beta[u + \sigma x/\beta])^2 dx\, du$$

3. si $\beta_n \longrightarrow +\infty$ et $\alpha_n \longrightarrow 0$,
$$\frac{1}{\beta_n}\sum_{i=1}^{[nt]} (\overline{\Delta}_i^n X)^2 \underset{n}{\longrightarrow} t\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma$$

4. si $\alpha_n = \alpha$ est constant,

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{[nt]} (\overline{\Delta}_i^n X)^2 \underset{n}{\longrightarrow} t\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\sigma}\alpha^2 \sum_{k\in\mathbb{Z}} L_t^{k\alpha}(X),$$

où $L_t^a(X)$ désigne le temps local de X, au temps t et au niveau a.

Le cas où la suite α_n reste constante est on le voit très particulier puisqu'il ne donne en pratique de l'information que sur le temps local au niveau de la grille d'espace choisie. On supposera dans la suite, sauf mention particulière, que α_n tend vers 0. On constate par ailleurs que le cas où β est infini entraîne une modification de la vitesse de convergence. Celle-ci est comme attendu plus lente que la vitesse en l'absence d'arrondis ; tant que β_n reste bornée, par contre, la vitesse de convergence n'est pas modifiée, seule la limite varie.

Delattre et Jacod ont généralisé ces résultats aux p-variations avec arrondis de diffusion, avec les théorèmes centraux-limites associés, lorsque $\beta_n \to \beta$ dans [9] puis lorsque $\beta_n \to +\infty$ dans [8], avec certaines applications statistiques. Li et Mykland ([24]) lorsque $\beta_n \to 0$, puis Rosenbaum (([29], [30]) dans le cas général en ont déduit des estimateurs de la volatilité intégrée, et de la volatilité relative intégrée.

Présentation des résultats

Nous avons essayé dans ce travail d'obtenir des généralisations des résultats du théorème 2 et, quand cela était possible, d'expliciter le théorème central limite associé ; la direction la plus naturelle concerne évidemment le comportement asymptotique des p-variations de semimartingales avec erreur d'arrondis, déjà abordées par Delattre dans [8], pour le cas des semimartingales continues, lorsque $\alpha_n\sqrt{n} \to \beta < +\infty$.

En l'absence d'arrondis, l'étude des p-variations (sans arrondis) d'une semimartingale discontinue amème à distinguer trois cas, selon que l'influence de la partie brownienne de la semimartingale est ou non prédominante par rapport à celle des sauts. La somme des variations dues à la partie brownienne est de l'ordre de $n \times n^{-p/2}$; lorsque $p > 2$, l'influence de la partie brownienne est donc négligeble devant les variations induites par les "grands" sauts. Lorsque au contraire $p < 2$, l'ordre de grandeur des variations de la partie brownienne appelle une renormalisation en $n^{p/2-1}$ qui rend l'influence des sauts négligeable. Lorsque enfin $p = 2$, l'ordre de grandeur de la somme des petites variations et celui des sauts sont comparables. Nous obtenons des distinctions similaires pour le comportement asymptotique des p-variations d'une semimartingale arrondie, lorsque $\beta < +\infty$. En effet, nous montrons que le comportement n'est pas modifié lorsque $\beta = 0$ et, si $\beta > 0$, obtenons les convergences en probabilité suivantes (la première pour la topologie de la convergence localement uniforme et les deux autres pour la topologie de Skorokhod) :

$$\textit{Si } p < 2, \qquad n^{p/2-1} \sum_{i=1}^{[nt]} |\overline{\Delta}_i^n X|^p \stackrel{\text{l.u.P}}{\longrightarrow} \beta^p \int_0^t E(|[U + \sigma_s Y/\beta]|^p) \mathrm{d}s \tag{0.0.4}$$

$$\textit{Si } p = 2, \qquad \sum_{i=1}^{[nt]} |\overline{\Delta}_i^n X|^2 \stackrel{Sk\,P}{\longrightarrow} \beta^2 \int_0^t E(|[U + \sigma_s Y/\beta]|^2) \mathrm{d}s + \sum_{s \leq t} |\Delta X_s|^2 \tag{0.0.5}$$

$$\textit{Si } p > 2, \qquad \sum_{i=1}^{[nt]} |\overline{\Delta}_i^n X|^p \stackrel{Sk\,P}{\longrightarrow} \sum_{s \leq t} |\Delta X_s|^p \tag{0.0.6}$$

On retrouve les mêmes phénomènes qu'en l'absence d'arrondis ; de plus les termes limites dus aux sauts sont inchangés, par contre ceux dus à l'influence de la partie martingale continue de X sont modifiés par la présence des arrondis.

Lorsque β_n diverge, nous retrouvons la limite (0.0.6) dès que $n\alpha_n^p \longrightarrow 0$, par contre, nous n'avons obtenu que des résultats incomplets pour les autres cas.

Lorsque $p \geq 3$, nous avons par ailleurs dès que $n\alpha_n^{p-1}$ est bornée la tension des processus

$$\min(\sqrt{n}, \alpha_n^{-1}) \left(\sum_{i=1}^{[nt]} |\overline{\Delta}_i^n X|^p - \sum_{s \leq [nt]/n} |\Delta X_s|^p \right).$$

Il n'y a cependant pas unicité de la limite ; pour espérer obtenir une convergence, des hypothèses supplémentaires sur la structure des sauts sont nécessaires. En imposant que l'amplitude des sauts ait une densité, nous obtenons ainsi un théorème central limite associé à (0.0.6) ; la loi de la limite rappelle celle connue en l'absence d'arrondis, mais des termes supplémentaires apparaissent. A la fois les limites obtenues et les vitesses de convergence dépendent du comportement de β_n : lorsque la suite admet une limite finie, la vitesse de convergence est la plus grande que l'on puisse espérer, à savoir $\sqrt{n}$; lorsque par contre β_n converge vers l'infini, la vitesse de convergence est seulement $1/\alpha_n$.

Nous nous sommes par ailleurs intéressés au cas multidimensionnel dans le contexte simple des (p-q)-variations d'un mouvement brownien bidimensionnel, à savoir, pour un mouvement brownien (W^1, W^2), aux sommes variationnelles de la forme :

$$\sum_{i=1}^{[nt]} |\overline{\Delta_i^n} W^1|^p |\overline{\Delta_i^n} W^2|^q.$$

Après avoir établi quelques résultats concernant les parties fractionnaires d'un mouvement brownien en plusieurs dimensions, nous donnons les lois des grands nombres pour les p,q-variations, dont le comportement dépend à la fois de celui de β_n et de la loi du brownien. Plus précisément, nous serons amenés à distinguer trois cas, selon que la matrice de covariance est inversible ou non, et, lorsqu'elle ne l'est pas, selon que le rapport de proportionnalité entre les deux composantes du brownien est ou non rationnel. Lorsque la matrice est inversible, les parties fractionnaires de chacune des deux composantes du brownien convergent vers des lois uniformes indépendantes, ce qui ne pose pas de problème. Par contre, si les deux composantes du brownien sont proportionnelles, deux cas sont à envisager ; le rapport de proportionnalité r peut être irrationnel, dans ce cas, en dehors d'un ensemble négligeable d'irrationnels, les parties fractionnaires des multiples de r sur le segment $[0, 1]$ sont réparties de manière suffisamment régulière pour recréer une certaine indépendance entre les deux composantes, et l'ont peut retrouver le comportement du premier cas. Lorsque par contre le rapport r est rationnel, nous obtenons à la fois des limites et des vitesses de convergence différentes.

Du cas non dégénéré, nous déduisons enfin une généralisation de la loi des grands nombres pour les semimartingales aux bivariations de semimartingales arrondies.

Organisation de la thèse

Dans une première partie, nous rappelons brièvement quelques définitions et résultats concernant les différents types de convergences utilisés et les semimartingales, qui seront utilisés essentiellement pour la troisième partie. La seconde partie de cette thèse est consacrée à l'etude des p, q-variations pour un mouvement brownien bidimensionnel. Enfin, dans la troisième partie, nous nous intéresserons aux p-variations des semimartingales. Les parties deux et trois peuvent être lues indépendemment, à l'exception de la section 3.1.2 concernant les bivariations d'une semimartingale bidimensionnelle, qui utilise un résultat montré dans la deuxième partie.

Chapitre 1

Préliminaires

Nous nous placerons dans toute la suite sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{F}, P)$.

1.1 Quelques types de convergences

Nous rappelons dans cette section différents types de convergences pour les processus, et indiquons les notations employée par la suite. X^n et X sont ci-dessous des processus réels càdlàg.

1.1.1 Convergences en probabilité

Pour les lois des grands nombres, nous utiliserons la convergence localement uniforme en probabilité.

Définition-Notation. Convergence localement uniforme en probabilité

$$X^n \stackrel{\text{l.u.P}}{\longrightarrow} X \qquad \text{si} \qquad \forall t > 0, \sup_{s \le t} |X^n(s) - X(s)| \stackrel{\text{P}}{\longrightarrow} 0. \tag{1.1.1}$$

Lorsque la limite est discontinue, cette topologie est en général trop forte pour espérer obtenir des résultats, et l'on montrera plutôt des convergences en probabilité pour la topologie de Skorokhod. Nous ne rappelons ici que les éléments directement utiles, pour plus de détails concernant l'espace et la topologie de Skorokhod, on se réfèrera par exemple à [6] (chapitre 3) ou [17] (chapitre VI).

Définition-Notation. Convergence en probabilité pour la topologie de Skorokhod

$X^n \stackrel{Sk\,P}{\longrightarrow} X$ si X^n converge en probabilité vers X pour la topologie de Skorokhod.

La convergence pour la topologie de Skorokhod n'est pas compatible avec l'addition (i.e. on peut avoir $X^n \stackrel{Sk\,P}{\longrightarrow} X$ et $Y^n \stackrel{Sk\,P}{\longrightarrow} Y$ sans que la somme $X^n + Y^n$ ne converge vers $X + Y$). Si par contre l'une des deux convergences est localement uniforme, le résultat est vrai :

Proposition 3. *Soient X^n, Y^n, X et Y des processus càdlàg (sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$) tels que*

$$X^n \stackrel{Sk\,P}{\longrightarrow} X.$$

(i) Si de plus

$$Y^n \stackrel{l.u.P}{\longrightarrow} Y,$$

on a encore

$$X^n + Y^n \stackrel{Sk\,P}{\longrightarrow} X + Y.$$

(ii) Si le processus X est continu, la convergence des X^n a lieu pour la topologie de la convergence localement uniforme.

1.1.2 Convergences en loi

La notion de convergence classique pour un théorème central limite est la convergence en loi ; nous utiliserons un type de convergence un peu plus fort, la convergence en loi stable, introduite par Rényi en 1963 ([26]) (cf aussi l'article d'Aldous et Eagleson[2]). Couramment employée dans ce type de problèmes, cette convergence permet de prendre en compte la dépendance de la limite par rapport à $\mathcal{F}$. On suppose les X^n définis sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, et X défini sur une extension $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{F}}, \widetilde{P})$ de $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Définition-Notation. $\stackrel{\mathcal{L}\text{ st}}{\longrightarrow} X^n \stackrel{\mathcal{L}\text{ st}}{\longrightarrow} X$ si, pour toute variable aléatoire $\mathcal{F}$-mesurable Z bornée et toute fonction F bornée continue (pour la topologie de Skorokhod) sur l'ensemble des processus càdlàg, on a :

$$E(ZF(X^n)) \underset{n}{\longrightarrow} \widetilde{E}(ZF(X)).$$

Notons d'une part que la convergence en loi stable implique la convergence en loi, et d'autre part que, si $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{F}}, \widetilde{P}) = (\Omega, \mathcal{F}, P)$, elle équivaut à la convergence en probabilité.

1.2 Quelques rappels sur les semimartingales

Nous rappelons ici quelques points importants concernant les semimartingales. Pour plus de détails, citons entre autres les ouvrages [17] ou [10].

La notion d'unicité sera toujours entendue à l'indistinguabilité près. On définit les semimartingales (nous nous plaçons implicitement dans le cadre unidimensionnel ici, mais les définitions sont évidemment valables de manière plus générale) :

Définition. Un processus X est une semimartingale s'il peut se mettre sous la forme

$$X = X_0 + M + A, \tag{1.2.1}$$

où X_0 est une variable aléatoire $\mathcal{F}_0$-mesurable, M est une martingale locale issue de 0, et A un processus càdlàg à accroissements finis, nul en 0.

Les trajectoires de X sont alors par définition càdlàg, et l'ensemble de ses temps de saut est donc au plus dénombrable.

Notons que la décomposition (1.2.1) n'est pas unique. Il existe par contre au plus une décomposition telle que le processus A soit *prévisible*, si elle existe X est une *semimartingale spéciale* et cette décomposition sa *décomposition canonique*. Par ailleurs une semimartingale dont les sauts sont bornés est spéciale.

Etant donnée une semimartingale X il existe une unique martingale locale continue, notée X^c (la *partie martingale continue* de X) qui soit la partie continue de M, quelle que soit la décomposition (1.2.1) choisie.

Nous définissons ensuite la mesure de saut μ^X associée à X :

Définition. Une *mesure aléatoire* sur l'espace $\mathbb{R}_+ \times E$ est une fonction de Ω à valeurs dans l'ensemble des mesures positives sur $(\mathbb{R}_+ \times E, \mathcal{R}_+ \otimes \mathcal{E})$ (où $\mathcal{R}_+$ est la tribu des boréliens de $\mathbb{R}_+$), telle que $\mu(A)$ soit $\mathcal{F}$-mesurable pour tout $A \in \mathcal{R}_+ \otimes \mathcal{E}$.

La mesure de sauts associée à une semimartingale X est alors définie par :

$$\mu^X(\omega, dt, dx) = \sum 1\{\Delta X_s \neq 0\}\delta_{\{s,\Delta X_s\}}(ds, dx), \tag{1.2.2}$$

ce qui définit une mesure aléatoire à valeurs entières sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ (nous utilisons, ici uniquement, la notation classique δ pour la mesure de Dirac).

1.2.1 Caractéristiques d'une semimartingale

La loi d'un processus de Lévy X est décrite par les trois caractéristiques apparaissant dans la formule de Lévy-Khintchine : étant donnée une *fonction de troncature* k, c'est-à-dire une fonction bornée à support compact et égale à l'identité sur un voisinage de 0 (par exemple k(x) = $x1_{|x|\leq 1}$), on a

$$E(e^{iuX_t}) = e^{t\psi(u)} = \exp(t[iubt - cu^2/2 + \int (e^{iux} - 1 - iuk(x))F(\mathrm{d}x)]),$$

les trois caractéristiques de X sont alors $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}_+$ et F, mesure positive telle que $\int 1 \wedge x^2 F(\mathrm{d}x) < +\infty$. On peut de manière plus générale définir les caractéristiques d'une semimartingale, qui ne seront alors plus constantes (les accroissements de X n'étant plus stationnaires) ni déterministe (à cause de la non-indépendance des accroissements).

Il est nécessaire d'introduire dans un premier temps quelques notions préliminaires :

Définition. Un processus est *optionnel* (resp. *prévisible*) s'il est mesurable (en tant que fonction sur $\Omega \times \mathbb{R}_+$) pour la tribu optionnelle $\mathcal{O}$ (resp. prévisible $\mathcal{P}$), c'ets-à-dire la tribu engendrée par l'ensemble des processus càdlàg (resp. càg) adaptés.

Si le Y est une fonction sur $\widetilde{\Omega} := \Omega \times \mathbb{R}_+ \times E$, nous généralisons les notions de processus optionnel et prévisible ci-dessus en considérant les tribus produit $\widetilde{\mathcal{O}} := \mathcal{O} \otimes \mathcal{E}$ et $\widetilde{\mathcal{P}} := \mathcal{P} \otimes \mathcal{E}$.

Pour étudier la mesure de sauts μ^X, nous avons besoin d'étendre ces notions aux mesures aléatoires ; soit μ une mesure aléatoire sur $\mathbb{R}_+ \times E$.

Nous avons alors la définition :

Définition. Une mesure aléatoire μ est *optionnelle* (resp. *prévisible*) si, pour tout processus optionnel (resp. prévisible) Y, le processus intégré $Y * \mu_t$ est lui-même optionnel (resp. prévisible), avec

$$Y * \mu_t := \begin{cases} \int_{[0,t]\times\mathbb{R}} Y(\omega, s, x)\mu(\omega, \mathrm{d}s, \mathrm{d}x) & \text{dès qu'il y a intégrabilité} \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Définition. Une mesure optionnelle μ est une *mesure aléatoire intégrable* si $E(\mu(., \mathbb{R}_+ \times E)) < +\infty$. Elle est dite $\widetilde{\mathcal{P}}-\sigma$-finie s'il existe une fonction V sur $\widetilde{\Omega}$, prévisible et strictement positive, telle que $V * \mu_\infty$ soit intégrable.

Nous avons alors le résultat suivant

Théorème 4. *Soit μ une mesure aléatoire optionnelle $\widetilde{\mathcal{P}} - \sigma$-finie. Il existe une unique mesure aléatoire prévisible μ^p (à un ensemble de mesure nulle pour P près) telle que, pour tout processus prévisible Y, on ait :*

$$E(Y * \mu_{+\infty}) = E(Y * \mu^p_{+\infty})$$

Cette mesure aléatoire est la *mesure compensatrice prévisible* de μ (ou simplement le *compensateur* de μ). De plus si Y est un processus prévisible tel que le processus (croissant) $|Y| * \mu$ soit localement intégrable, $|Y| * \mu^p$ l'est aussi et $Y * \mu - Y * \mu^p$ est une martingale locale, i.e. $Y * \mu^p$ est le compensateur, en tant que processus, de $Y * \mu$.

Nous pouvons à présent définir les caractéristiques d'une semimartingale X. Choisissons une fonction de troncature k ; pour nous ramener à une semimartingale spéciale, remarquons que la semimartingale définie par

$$X(k)_t := X_t - \sum_{s \le t} (\Delta X_s - h(\Delta X_s))$$

a des sauts bornés. Il s'agit donc d'une semimartingale spéciale, qui admet une unique décomposition $X(k) := X_0 + M(k) + B(k)$ de la forme (1.2.1) avec $B(k)$ prévisible.

Définition. Soient X une semimartingale et k une fonction de troncature. Nous appellerons *caractéristiques* de X le triplet (B, C, ν) (unique à un ensemble de mesure nulle près) dans lequel :

- $B = B(k)$ est le processus prévisible à variations finies intervenant dans la décomposition canonique de $X(k)$;
- $C =< X^c, X^c >$ est la variation quadratique de la partie martingale continue de X ;
- ν est la mesure compensatrice prévisible de la mesure de sauts de X μ^X.

Remarquons que seule la première caractéristique B dépend de la fonction de troncature choisie, de même que seul le drift b dépend de la fonction de troncature choisie dans la formule de Lévy-Khintchine. Il peut parfois être utile de choisir une fonction de troncature continue ; nous choisirons cependant pour la suite la fonction habituelle $k(x) = x1_{\{|x| \le 1\}}$.

Nous avons alors la *représentation canonique* ci-dessous d'une semimartingale X :

Théorème 5. *Soit X une semimartingale de caractéristiques (B, C, ν) pour la fonction de troncature k. X admet alors la représentation suivante :*

$$X = X_0 + X^c + k * (\mu^X - \nu) + (x - k(x)) * \mu^X + B \tag{1.2.3}$$

Il est parfois plus utile de donner non pas la seconde caractéristique C mais la *seconde caractéristique modifiée* $\widetilde{C}$; en particulier elle intervient dans le critère de tension donné en fin de section. Rappelons la décomposition $X(k) = X_0 + M(k) + B(k)$.

Définition. La *seconde caractéristique modifiée* de X est le processus prévisible

$$\widetilde{C} :=< M(k), M(k) >= C + h^2 * \nu - \sum_{s \leq .} \Delta B(k)^2.$$

La donnée du triplet $B, \widetilde{C}, \nu$ est équivalente à celle de B, C, ν. Remarquons qu'à la différence de C, la seconde caractéristique modifiée dépend de la fonction de troncature considérée.

1.2.2 Semimartingales d'Itô

Nous aurons généralement, par la suite besoin de faire des hypothèses d'absolue continuité sur les caractéristiques des semimartingales étudiées. Nous appellerons semimartingale d'Itô une semimartingale dont les caractéristiques vérifient l'hypothèse suivante :

Hypothèse. *Les caractéristiques de la semimartingale X sont absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue, i.e. il existe des processus b, σ et une famille F_t de mesures aléatoire sur $\mathbb{R}$ tels que :*
- $B_t = \int_0^t b_s ds$
- $C_t = \int_0^t \sigma_s^2 ds$
- $\nu(dt, dx) = F_t(dx) dt$

Ceci est encore équivalent au fait de pouvoir exprimer la semimartingale sous la forme suivante (quitte éventuellement à agrandir l'espace Ω pour définir W et μ) :

$$X_t = X_0 + \int_0^t b_s \mathrm{d}s + \int_0^t \sigma_s \mathrm{d}W_s + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} h(\delta(x))(\underline{\mu} - \underline{\nu})(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} (1 - h(\delta(x)))\underline{\mu}(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x), \tag{1.2.4}$$

où W est un mouvement brownien, et $\underline{\mu}$ et $\underline{\nu}$ sont respectivement une mesure de Poisson sur $\mathbb{R}_+ \times E$ et son compensateur, tels que $\underline{\nu}(dt, dz) = dt\lambda(dz)$; $(E, \mathcal{E})$ est un espace auxiliaire et λ une mesure σ-finie sur E. On peut de plus sans perte de généralité supposer $\sigma \geq 0$, et nous ferons cette hypothèse dans tout ce qui suit.

1.2.3 Suite épuisant les sauts de X.

Si T est un temps d'arrêt, nous utiliserons la notation classique $[\![T]\!] := \{(\omega, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+, T(\omega) = t\}$.

Soit X un processus càdlàg adapté (par exemple une semimartingale). Alors il existe une suite de temps d'arrêts T_n telle que $\{(\omega,t), \Delta X_t(\omega) \neq 0\} = \bigcup [\![T_n]\!]$, avec, pour $n \neq m$, $[\![T_n]\!] \bigcap [\![T_m]\!] = \emptyset$. On dit qu'une telle suite *épuise les sauts de* X.

Pour une semimartingale d'Itô, il est parfois utile de considérer une suite T_n épuisant plutôt les sauts associés à $\underline{\mu}$, pour laquelle ΔX_{T_n} peut éventuellement être nul. Si l'on a seulement $\{(\omega,t), \Delta X_t(\omega)\} \subset \bigcup [\![T_n]\!]$, on parlera de suite *épuisant faiblement les sauts de* X.

1.2.4 Le temps local d'une semimartingale

Pour cette section, nous nous référons à [25]. (Nous donnons la définition générale du temps local d'une semimartingale, qui n'est pas beaucoup plus longue à énoncer, cependant nous n'utiliserons pour la suite que le temps local du mouvement brownien, pour lequel on peut aussi se référer à [27]). Soit X une semimartingale, f une fonction convexe, dont la dérivée à gauche est notée f' ; alors il existe un processus adapté, càd et croissant A tel que

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_{0^+}^{t} f'(X_{s-}) \mathrm{d}X_s + A_t$$

et $\Delta A_t = f(X_t) - f(X_{t-}) - f'(X_{t-})\Delta X_t$. Si l'on choisit $f(x) = |x-a|$ (d'où $f'(x) = sgn(x-a)$), on note A^a le processus croissant associé ; posons

$$L_t^a = A_t^a - \sum_{0<s\leq t} (|X_s - a| - |X_{s-} - a| - sgn(X_{s-} - a)\Delta X_s). \tag{1.2.5}$$

Le processus $L^a_.$ est appelé *temps local du processus* X *au point* a ; on peut en choisir une version continue en temps. Lorsque X est continu, les processus A^a et L^a sont confondus.

1.2.5 Tension pour la topologie de Skorokhod

Nous énonçons ici un critère de tension sur l'espace de Skorokhod (correspondant au théorème VI.4.18 de [17]). Soit A^n une suite de processus càdlàg (non nécessairement définis sur le même espace de probabilité) ; par définition, cette suite est tendue si la suite des lois $\mathcal{L}(A^n)$ de ces processus est elle même tendue. Rappelons que par le théorème de Prokhorov, la tension des A^n est alors équivalente à la relative compacité de la suite $\mathcal{L}(A^n)$. Avant de donner le critère de tension, nous avons besoin de définir une notion un peu plus contraignante :

Définition. Soit A^n une suite de processus càdlàg ; cette suite est dite C-tendue si elle est tendue et si tous les points d'accumulation de la suite $\mathcal{L}(A^n)$ sont des lois de processus continus.

Nous utiliserons plus précisément le critère suivant pour prouver la C-tension dans la partie 3 :

Proposition 6. *(Prop. 3.26 de [17]) La suite* A^n *est* C*-tendue si et seulement si* *(i) pour tous ε, $N > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$, $K \in \mathbb{R}_+$ tels que pour tout $n \geq n_0$, on ait*

$$P(\sup_{t \leq N} |A_t^n| > K) \leq \varepsilon;$$

(ii) pour tous ε, η, $N > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$, $\theta > 0$ tels que pour tout $n \geq n_0$, on ait

$$P\left(\sup_{0 \leq s,t \leq N, |t-s| \leq \theta} |A_t^n - A_s^n| > \eta\right) \leq \varepsilon.$$

De plus lorsque A^n est à variations finies et qu'il existe une suite de processus A'^n telle que les processus $A'^n - Var(A^n)$ soient croissants (i.e. le processus A'^n *majore fortement* A^n, pour tout n), la tension de la famille A'^n implique celle de la suite A^n.

Considérons ensuite le cas particulier d'une suite de semimartingales X^n issues de 0, que l'on supposera définies sur le même espace de probabilité (mais pas nécessairement pour la même filtration). Nous avons alors le critère de tension suivant :

Proposition 7. *La suite X^n est tendue si et seulement si*

1. *pour tous $N, \varepsilon > 0$,*

$$\lim_{a \to \infty} \limsup_n P(\nu^n([0,N] \times \{x, |x| > a\}) > \varepsilon) = 0;$$

2. *les suites de processus B^n, $\widetilde{C}^n$ et $(g_p * \nu^n)_n$ sont tendues, pour tout p, avec $g_p(x) = (p|x| - 1)^+ \wedge 1$.*

Chapitre 2

Bivariations du mouvement brownien bidimensionnel arrondi

2.1 Introduction

Lorsque le processus observé $X = (X^1, X^2, ...)$ est multidimensionnel, il est naturel de s'intéresser à une généralisation des p-variations mêlant les deux composantes, c'est-à-dire à des sommes de la forme :

$$\sum_{i=1}^{[nt]} |\Delta_i^n X^1|^{p_1} |\Delta_i^n X^2|^{p_2} ... \quad .$$

Jacod et Todorov ont par exemple récemment utilisé dans [18] des sommes variationnelles de ce type pour généraliser la méthode de [1] à la détection des temps de saut communs aux deux composantes d'une semimartingale bidimensionnelle.

Remarque. Notons qu'un autre type de bivariations a été défini par Barndorff-Nielsen et Shephard afin d'étudier la présence de sauts [31] ou de séparer, dans certains cas, l'influence de la partie continue de celle des sauts dans la variation quadratique ([5], cf aussi [33]). Ces bivariations mêlent non pas les accroissements des différentes composantes d'un processus multidimensionnel, mais les accroissements du même processus en des temps proches mais différents, du type : $\sum |\Delta_i^n X|^p |\Delta_{i-1}^n X|^q$.... Nous ne nous intéresserons pas à ce type de bivariations ici, notre objectif étant d'étudier les spécificités dues à un processus multidimensionnel en présence d'arrondis.

Cette partie est une première approche dans l'étude des bi-variations, et peut être vue comme un prolongement naturel de [12] : nous nous limiterons au cas d'un mouvement brownien bidimensionnel, dont la matrice de covariance est susceptible d'être dégénérée.

On considère un mouvement brownien bidimensionnel

$$X := X_0 + S.W,$$

où $S \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est une matrice réelle fixée, et $W = \begin{pmatrix} W^1 \\ W^2 \end{pmatrix}$, avec W^1 et W^2 deux mouvements browniens standards indépendants. Notons $X_t^{(\alpha)} := \alpha[\frac{X_t}{\alpha}]$le processus X arrondi (inférieurement) à α près,

$$\Delta_i^n A := A_{i/n} - A_{(i-1)/n}$$

les accroissements d'un processus quelconque A et

$$\overline{\Delta}_i^n A = A_{i/n}^{(\alpha_n)} - A_{(i-1)/n}^{(\alpha_n)}$$

les accroissements du processus A arrondi à α_n près.

On définit pour tous réels $p, q > 0$ les sommes (p, q)-variationnelles

$$V_n^{p,q}(X)_t = \sum_{i=1}^{[nt]} \left|\overline{\Delta}_i^n X^1\right|^p \left|\overline{\Delta}_i^n X^2\right|^q, \tag{2.1.1}$$

dont on cherche à déterminer le comportement.

Rappelons brièvement le comportement des p-variations d'un mouvement brownien unidimensionnel arrondi : les variations quadratiques de $W^{(\alpha_n)}$, où (α_n) est la suite de pas d'arrondis, ont été étudiées dans [12] en fonction du comportement de $\beta_n := \sqrt{n}\alpha_n$.

Notons $L_t^a(X)$ le temps local (au sens des semimartingales) d'une semimartingale réelle X, au temps t et au niveau a, h la densité d'une variable normale standard et μ_p son moment absolu d'ordre p. On introduit enfin la fonction

$$\Gamma(p, \beta, \sigma) := \int_0^1 \mathrm{d}u \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x h(x) |\beta[u + \frac{\sigma x}{\beta}]|^p$$

Quatre cas se présentent d'après [12] et [8], pour un mouvement brownien unidimensionnel W de variance σ^2, en fonction du comportement de la suite β_n (dont on peut supposer, quitte à considérer des sous-suites, qu'elle converge vers $\beta \in [0, +\infty]$) :

Théorème 8. *(Jacod, 96)*
(i) Si $\beta_n \to 0$

$$n^{p/2-1} V_n^p(W)_t \xrightarrow{L^2} t\sigma^p \mu_p$$

(ii) Si $\beta_n \to \beta \in]0, +\infty[$

$$n^{p/2-1} V_n^p(W)_t \xrightarrow{L^2} t\Gamma(p, \beta, \sigma)$$

(iii) Si $\beta_n \to +\infty$

$$\frac{n^{p/2-1}}{\beta_n^{p-1}} V_n^p(W)_t \xrightarrow{L^2} t\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma$$

(iv) Si $\alpha_n = \alpha \in]0, +\infty[$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} V_n^p(W)_t \xrightarrow{P} t\sqrt{\frac{2}{\pi}}\alpha^p \sum_{k \in \mathbb{Z}} L_t^{k\alpha}(W)$$

Le paramètre β_n peut être vu comme le rapport du pas d'arrondi α_n et de l'ordre de grandeur des accroissements de X, à savoir $\frac{1}{\sqrt{n}}$. Il est donc naturel que, dans le cas $\beta_n \longrightarrow 0$, on retrouve simplement les limites connues lorsqu'il n'y a pas d'arrondis : l'erreur commise en arrondissant est négligeable devant la taille typique des accroissements. De même, si $\beta_n \longrightarrow \beta$, l'erreur d'arrondi est du même ordre de grandeur que les accroissements, ce qui explique pourquoi la renormalisation n'est pas modifiée. La fonction Γ qui apparaît dans la limite s'explique par la remarque suivante : pour des réels a et b quelconques, on note $\{a\} := a - [a]$ la partie fractionnaire de a ; alors $[a] - [b] = [\{b\} + a - b]$. Par conséquent, on peut réécrire les accroissements sous la forme :

$$\Delta_i^n X^{(\alpha)} = \alpha[\{X_{(i-1)/n}/\alpha\} + \Delta_i^n X/\alpha], \tag{2.1.2}$$

dans laquelle, pour i assez grand, le terme $\{X_{(i-1)/n}/\alpha\}$ est proche d'une variable uniforme (cf de nouveau [32]).
Lorsque par contre $\beta_n \longrightarrow +\infty$, le comportement des $\overline{\Delta}_i^n X$ est très différent : la plupart de ces accroissements sont nuls ; ceux qui ne le sont pas seront de taille exactement α_n en général.

Dans le cadre bidimensionnel, le comportement des sommes $V_n^{p,q}(X)$ dépend toujours de celui de la suite β_n. Il dépend aussi de la matrice S, et en particulier de son rang. Lorsque celui-ci est égal à 1, les deux composantes sont proportionnelles et l'on traitera séparément les cas où leur rapport est rationnel et ceux où il est irrationnel.

Les principaux résultats sont donnés dans la deuxième section. Dans la section 2.3 on introduit les principales notations, et l'on vérifie trois lemmes généralisant [32] lorsque $\beta_n \to \beta$ et $\beta_n \to +\infty$. Les sections 2.4, 2.5, 2.6 et 2.7 sont enfin consacrées aux démonstrations des résultats, respectivement lorsque $\beta_n \to 0$, $\beta_n \to \beta \in]0, +\infty[$, $\beta_n \to +\infty$ et $\alpha_n = \alpha \in \mathbb{R}$.

2.2 Résultats

Lorsque $\beta_n \longrightarrow 0$, la convergence se déduit facilement de celle en l'absence d'arrondis, et l'on retrouve les mêmes limites :

Théorème 9. *Supposons que $\beta_n \longrightarrow 0$. Alors, pour tout entier $r \geq 1$,*

$$n^{(p+q)/2-1} V_n^{p,q}(X)_t \xrightarrow{L^r} tE(|X_1^1|^p |X_1^2|^q)$$

On suppose donc pour ce qui suit que β_n a une limite non nulle (mais éventuellement infinie).

2.2.1 Le cas non dégénéré : $\det S \neq 0$.

Lorsque β_n ne converge pas vers 0, considérons tout d'abord le cas où le processus bi-dimensionnel X est non-dégénéré, i.e. $\det S \neq 0$. Lorsque $\alpha_n \to 0$, les convergences obtenues pour $V_n^{p,q}(X)_t$ sont des généralisations assez naturelles des résultats du théorème

8, tandis que le passage en plusieurs dimensions induit un changement de comportement lorsque $\alpha_n = \alpha$ est constant. U, V désignent ici des variables uniformes sur $[0,1]$, indépendantes entre elles et de X.

On pose $S = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix}$, et l'on définit la fonction

$$\begin{aligned}\Gamma(p,q,\beta,S) &:= \int_{[0,1]^2} \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\; h(y)h(z)\beta^{p+q} \left|\left[u + \frac{\sigma_{11}y + \sigma_{12}z}{\beta}\right]\right|^p \left|\left[v + \frac{\sigma_{21}y + \sigma_{22}z}{\beta}\right]\right|^q \\ &= E\left(\left|\beta\left[U + X_1^1/\beta\right]\right|^p \; \left|\beta\left[V + X_1^2/\beta\right]\right|^q\right) \qquad (2.2.1)\end{aligned}$$

Théorème 10. *Supposons* $\det S \neq 0$.
(i) Si $\beta_n \to \beta \in]0, +\infty[$, *pour tout* $r \geq 1$ *on a*

$$n^{(p+q)/2-1} V_n^{p,q}(X)_t \xrightarrow{L^r} t\Gamma(p,q,\beta,S)$$

(ii) Si $\beta_n \to +\infty$ *et* $\alpha_n^2 \log n \to 0$ *on a*

$$\frac{n^{(p+q)/2-1}}{\beta_n^{p+q-2}} V_n^{p,q}(X)_t \xrightarrow{L^1} tE(|X_1^1||X_1^2|)$$

(iii) Si $\alpha_n = \alpha$ *constant, et* $X_0 \notin \alpha\mathbb{Z}^2$ *p.s., alors presque sûrement* $V_n^{p,q}(X)_t$ *est nul à partir d'un certain rang, qui dépend de* ω.

Remarques. Dans le dernier cas α_n constant, le résultat est encore vrai en dimension quelconque $d \geq 3$, sans condition sur X_0.
Ce théorème ne donne pas d'indication sur le comportement des $V_n^{p,q}(X)$ lorsque le pas d'arrondi converge très lentement vers 0 ($\alpha_n \to 0$ et $\alpha_n^2 \log n \nrightarrow 0$), ni lorsque le brownien est issu d'un point de la grille ($\alpha\mathbb{Z}^2$) quand α est constant.

2.2.2 Le cas dégénéré : $\det S = 0$.

Lorsque $\det S = 0$, les deux composantes $X^1 - X_0^1$ et $X^2 - X_0^2$ de X sont proportionnelles. On les écrit sous la forme $X^1 = X_0^1 + \sigma W$ et $X^2 = X_0^2 + \sigma' W$, où W est un mouvement brownien réel standard. σ et σ' sont supposés non nuls, le cas où l'un des deux au moins est nul se ramenant au cas unidimensionnel. On note θ le rapport σ'/σ, et Δ_θ la droite passant par l'origine et de pente θ. Les résultats diffèrent selon que θ est ou non rationnel.

Dans le cas rationnel, posons $\theta = a/b$, a, b entiers premiers entre eux. On définit la fonction $\widetilde{\Gamma}$:

$$\begin{aligned}\widetilde{\Gamma}(p,q,\beta,\theta) &:= \frac{1}{b}\int_0^b \mathrm{d}u \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\, h(x)\beta^{p+q} \left|\left[\{u\} + \frac{\sigma x}{\beta}\right]\right|^p \left|\left[\{\frac{a}{b}u\} + \frac{a}{b}\frac{\sigma x}{\beta}\right]\right|^q \qquad (2.2.2) \\ &= \beta^{p+q} E\left(\left|\left[\{bU\} + \frac{\sigma W_1}{\beta}\right]\right|^p \left|\left[\{aU\} + \frac{\sigma' W_1}{\beta}\right]\right|^q\right)\end{aligned}$$

On obtient les convergences suivantes :

Théorème 11. *Supposons que* $\det S = 0$ *avec* $\theta \in \mathbb{Q}$*, et que de plus* X_0 *est porté par* Δ_θ*.*
(i) Si $\beta_n \to \beta \in]0, +\infty[$*, pour tout* $r \geq 1$*,*

$$n^{(p+q)/2-1} V_n^{p,q}(X)_t \xrightarrow{L^r} t\widetilde{\Gamma}(p, q, \beta, \theta) \tag{2.2.3}$$

(ii) Si $\beta_n \to +\infty$*,*

$$\frac{n^{(p+q)/2-1}}{\beta_n^{p+q-1}} V_n^{p,q}(X)_t \xrightarrow{L^1} t\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sigma}{b} \tag{2.2.4}$$

(iii) Si $\alpha_n = \alpha$ *constant,*

$$\frac{1}{\sqrt{n}} V_n^{p,q}(X)_t \xrightarrow{P} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha^{p+q} L_t^{k\alpha}(\frac{X^1}{b}) \tag{2.2.5}$$

Par définition du temps local d'une semimartingale, $L_t^x(sX) = sL_t^{x/s}(X)$; la limite de (2.2.5) s'exprime donc immédiatement en fonction des temps locaux de X^1 et X^2, sous la forme :

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\alpha^{p+q}}{b} L_t^{kb\alpha}(X^1) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\alpha^{p+q}}{a} L_t^{ka\alpha}(X^2).$$

Remarques. Si l'on ne suppose pas que X_0 se trouve sur la droite Δ_θ, les résultats précédents ne sont plus valables, en effet :

1. Lorsque $\beta_n \to \beta$, supposons que α'_n soit une sous-suite de α_n telles que

$$(\{X_0^1/\alpha'_n\}, \{X_0^2/\alpha'_n\}) \longrightarrow (u', v').$$

   Alors la sous-suite des $n^{(p+q)/2-1} V_n^{p,q}(X)_t$ associée aux α'_n convergera vers

$$\beta^{p+q} E\left(\left| \left[\{u' + bU\} + \frac{\sigma W_1}{\beta} \right] \right|^p \left| \left[\{v' + aU\} + \frac{\sigma' W_1}{\beta} \right] \right|^q \right). \tag{2.2.6}$$

   Sauf à supposer que la suite $(\{X_0^1/\alpha_n\}, \{X_0^2/\alpha_n\})$ converge, on pourra donc construire des sous-suites de $n^{(p+q)/2-1} V_n^{p,q}(X)_t$ ayant des limites différentes.
2. Si $\beta_n \to +\infty$, la suite $n^{(p+q)/2-1} \beta_n^{p+q-1} V_n^{p,q}(X)_t$ converge vers 0 lorsque $P(X_0 \in \Delta_\theta) = 0$.
3. Elle est même nulle à partir d'un certain rang, p.s., lorsque α_n est constant.

Lorsque θ est irrationnel, on introduit une hypothèse sur ses approximations rationnelles :

Hypothèse $(\mathcal{H})$**.** *Il existe deux suites d'entiers* $a_n \in \mathbb{Z}$ *et* $b_n \in \mathbb{N}^*$*,* a_n *et* b_n *étant premiers entre eux pour tout* n*, telles que*

$$\begin{cases} n^{-1/2} b_n \longrightarrow 0 \\ n^{-1/2} b_n^2 \longrightarrow +\infty \\ \forall n \geq 1, \quad |\theta - a_n/b_n| < 1/b_n \end{cases}$$

Nous pouvons à présent énoncer les lois des grands nombres dans le cas irrationnel :

Théorème 12. *Supposons* $\det S = 0$ *et* $\theta \notin \mathbb{Q}$. *Alors*
(i) Si $\beta_n \to \beta \in]0, +\infty[$ *et* θ *vérifie* $\mathcal{H}$, *pour tout* $r \geq 1$,

$$n^{(p+q)/2-1} V_n^{p,q}(X)_t \xrightarrow{L^r} t\Gamma(p,q,\beta,S) \tag{2.2.7}$$

(ii) Si $\alpha_n = \alpha$ *est constant,*

$$\frac{1}{\sqrt{n}} V_n^{p,q}(X)_t \xrightarrow{P} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \alpha^{p+q} L_t^0(W) \tag{2.2.8}$$

De plus, ($\mathcal{H}$) est vérifiée par presque tout irrationnel θ *(pour la mesure de Lebesgue).*

Nous retrouvons la limite obtenue lorsque la matrice de covariance est inversible ; on peut le comprendre à partir de la limite (2.2.3). En effet, si l'on approche θ par une suite de fractions réduites $\frac{a_n}{b_n}$, les suites (a_n) et (b_n) divergeant, les parties fractionnaires $(\{a_n U\}, \{b_n U\})$ vont se comporter à la limite comme des couples de variables uniformes indépendantes, et l'on retrouve alors à partir de (2.2.3) la limite du cas non dégénéré. Cependant ce phénomène ne converge pas en général de façon suffisamment rapide pour assurer la convergence lorsque (β_n) diverge, ce qui explique que l'on n'ait obtenu de résultat que lorsque β_n converge.

2.3 Résultats préliminaires

Les processus et variables aléatoires considérés sont supposés définis sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

2.3.1 Quelques notations

On rappelle les notations précédentes : $[x]$ désigne la partie entière d'un réel x, $\{x\} = x - [x]$ sa partie fractionnaire et $x^{(\alpha)} = \alpha[\frac{x}{\alpha}]$ l'arrondi de x à α près. U et V sont deux variables aléatoires uniformes indépendantes et indépendantes de X. Le processus arrondi est noté $X^{(\alpha_n)} := \alpha_n[X/\alpha_n]$. et les accroissemnts de X et $X^{(\alpha_n)}$ respectivement

$$\Delta_i^n X := X_{i/n} - X_{(i-1)/n} \text{ et } \overline{\Delta}_i^n X = X_{i/n}^{\alpha_n} - X_{(i-1)/n}^{\alpha_n}.$$

Pour une fonction à valeurs réelles f définie sur un ensemble E, nous notons $M_f := \sup_E |f|$. Enfin, λ_k est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^k$, et $(\mathcal{F}_s)_s$ est la filtration engendrée par le processus X.

Dans la suite, C désignera une constante qui ne dépend, sauf indication contraire, que de S, p et q.

2.3.2 L'hypothèse $\mathcal{H}$

Montrons que λ-presque tout réel vérifie $(\mathcal{H})$:

Preuve du dernier résultat du théorème 12. On utilise deux résultats simples d'approximations diophantiennes (cf [21], II.1) ; le premier est une application du lemme de Borel-Cantelli, le second découle de la décomposition d'un irrationnel en fractions rationnelles (Des preuves succintes de ces deux résultats sont données dans l'annexe C).

1. D'après le théorème de convergence de Khintchine, si ψ est une fonction positive croissante telle que $\sum_{k=1}^{+\infty} 1/(k\psi(k)) < +\infty$, alors pour presque tout (pour la mesure de Lebesgue) réel ζ, l'inégalité $d(k\zeta, \mathbb{Z}) < 1/(k\psi(k))$ [1] est satisfaite par au plus un nombre fini d'entiers $k \in \mathbb{N}^*$.
2. Soit ψ une fonction positive croissante et ζ un réel satisfaisant la propriété ci-dessus (donc irrationnel). D'après le théorème II.2 de [21], il existe $B_\zeta > 0$ tel que, pour tout $B \geq B_\zeta$, il existe deux entiers premiers entre-eux a et b vérifiant :
$$\begin{cases} |\zeta - \frac{a}{b}| < \frac{1}{b^2} \\ \frac{B}{\psi(B)} \leq b < B \end{cases}.$$
3. On choisit $\psi(x) = x^{1/5}$, pour laquelle $\sum 1/(k\psi(k)) < +\infty$. Soit ζ vérifiant la propriété du 1. ; il existe un rang n_ζ tel que $n^{5/12} > B_\zeta$ dès que $n \geq n_\zeta$. D'après le 2., on trouve donc pour tout $n \geq n_\zeta$ un couple d'entiers premiers entre eux (a_n, b_n) tel que $|\zeta - a_n/b_n| < 1/b_n^2$ et $n^{1/3} \leq b_n < \alpha_n^{5/12}$. On peut par exemple compléter la suite en posant, pour tout $n < n_\zeta$, $(a_n, b_n) := (a_{n_\zeta}, b_{n_\zeta})$.

Nous avons ainsi construit, pour presque tout irrationnel ζ, une suite $(b_n)_n$ qui vérifie les hypothèses de $\mathcal{H}$. $\square$

2.3.3 Lemme principal

On montre trois majorations utilisées dans les sections 2.5 ($\beta_n \to \beta$ fini) et 2.6 ($\alpha_n \to 0$, $\beta_n \to +\infty$), correspondant à chacun des trois cas : $\det S \neq 0$, $\det S = 0$ et $\theta \in \mathbb{Q}$ et enfin $\det S = 0$ et $\theta \notin \mathbb{Q}$. Rappelons que U et V sont des variables uniformes sur $[0,1]$ indépendantes entre elles et indépendantes de X.

Lemme 13. *Soient u, v réels, $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable bornée. On note M_f le maximum et I_f l'intégrale de $|f|$ sur $[0,1]^2$. Soient $n \geq 1$ et $j \geq 1$ des entiers et $\alpha > 0$ un réel. Alors, il existe une constante C qui ne dépend que de la matrice S telle que pour tous réels u et v,*

(i) Si $\det S \neq 0$:
$$|E\big(f(\{\frac{u + X^1_{j/n}}{\alpha_n}\}, \{\frac{v + X^2_{j/n}}{\alpha_n}\})\big) - E\big(f(U,V)\big)| \leq C(M_f \frac{\beta_n}{\sqrt{j}} \wedge M_f \wedge I_f(\frac{\beta_n}{\sqrt{j}} + \frac{\beta_n^2}{j}) \quad (2.3.1)$$

1. $d(k\zeta, \mathbb{Z})$ désigne ici la distance usuelle $\inf\{|k\zeta - n|, n \in \mathbb{Z}\}$.

(ii) Si $\det S = 0$ *et* $\theta = a/b \in \mathbb{Q}$ *:*

$$|E\big(f(\{\frac{u+X^1_{j/n}}{\alpha_n}\},\{\frac{v+X^2_{j/n}}{\alpha_n}\})\big) - E\big(f(\{bU\},\{\frac{v-u(a/b)}{\alpha_n}+aU\})\big)| \leq C\frac{\beta_n}{\sqrt{j}}bM_f \quad (2.3.2)$$

(iii) Si $\det S = 0$ *et* $\theta \notin \mathbb{Q}$*, on suppose de plus que* f *est lipschitzienne en sa deuxième coordonnée, de constante de lipschitz* c*, et qu'en outre il existe* $a \in \mathbb{Z}^*, b \in \mathbb{N}^*$ *premiers entre eux tels que* $|\theta - a/b| < 1/b^2$*. On pose* $M'_f := \max(c, M_f)$*. Alors*

$$\begin{aligned}|E\big(f(\{\frac{u+X^1_{j/n}}{\alpha_n}\},\{\frac{v+X^2_{j/n}}{\alpha_n}\})\big) - E\big(f(U,V)\big)| & \quad (2.3.3)\\ \leq CM'_f\left(\frac{\sqrt{j}}{\beta_n b^2}+\frac{\beta_n}{\sqrt{j}}b+\frac{\beta_n^2|a|b}{j}+\frac{1}{b}+\int_{\beta_n b^2/(C\sqrt{j})}^{+\infty} dx h(x)\right).\end{aligned}$$

2.3.4 Démonstration du lemme

On montre un premier lemme, correspondant au cas non dégénéré, en dimension quelconque, avec des pas α qui peuvent différer suivant les directions de l'espace. On introduit pour cela la fonction

$$\begin{aligned} g : [0,1]^2 &\longrightarrow [-1,1] \\ (v,u) &\longmapsto v - 1_{\{v\geq u\}} \end{aligned}$$

id désigne l'opérateur identité sur l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}^d$ à valeurs réelles.

Lemme 14. *Soit* $\varphi \in \mathcal{C}^d(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$ *une densité de probabilité sur* $\mathbb{R}^d$*, dont les dérivées sont toutes intégrables. Soit* $f : [0,1]^d \longrightarrow \mathbb{R}$ *mesurable, bornée. Alors, pour tous* $\alpha = (\alpha_1,...,\alpha_d) \in]0,+\infty[^d$ *et* $x = (x_1,...,x_d) \in \mathbb{R}^d$*,*

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} d\lambda_d(w)\varphi(w)f(\{\frac{x_1+w_1}{\alpha_1}\},...,\{\frac{x_d+w_d}{\alpha_d}\}) = & \quad (2.3.4)\\ \int_{[0,1]^d} d\lambda_d(u)f(u)\int_{\mathbb{R}^d} d\lambda_d(w)\left(\prod_{i=1}^{d}\left(\mathrm{id}+\alpha_i g(\{\frac{x_i+w_i}{\alpha_i}\},u_i)\frac{\partial}{\partial w_i}\right)\right)(\varphi)(w)\end{aligned}$$

Démonstration. Notons $A := \prod_{i=1}^{d} \alpha_i$. Le membre de gauche de (2.3.4) vaut, après changement de variable,

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{d}\lambda_d(w)f(\{\frac{x_1+w_1}{\alpha_1}\},...,\{\frac{x_d+w_d}{\alpha_d}\})\varphi(w)\\ &= A\int_{\mathbb{R}^d}\mathrm{d}\lambda_d(w)\varphi\big(\alpha_1 w_1 - x_1,...,\alpha_d w_d - x_d\big)f(\{w_1\},...,\{w_d\})\\ &= A\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\int_{[0,1]^d}\mathrm{d}\lambda_d(u)\varphi\big(\alpha_1(k_1+u_1)-x_1,...,\alpha_d(k_d+u_d)-x_d\big)f(u) \quad (2.3.5)\end{aligned}$$

On compare ensuite $\varphi(\alpha_1(k_1+u_1),...,\alpha_d(k_d+u_d))$ à sa moyenne sur $[0,1]^d$: $\int_{[0,1]^d} \mathrm{d}v_1...\mathrm{d}v_d\, \varphi\big(\alpha_1(k_1+v_1)-x_1,...,\alpha_d(k_d+v_d)-x_d\big)$.
Pour cela, montrons, par récurrence sur d, que, pour toute fonction ψ vérifiant les hypothèses du lemme, et tout d-uplet $u \in [0,1]^d$,

$$\psi(u) = \int_{[0,1]^d} \mathrm{d}v_1...\mathrm{d}v_d \prod_{i=1}^{d} \big(\mathrm{id} + g(v_i,u_i)\frac{\partial}{\partial w_i}\big)(\psi)(v_1,...,v_d) \tag{2.3.6}$$

Pour $d=1$, on obtient en intégrant par parties :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \big(\psi(u)-\psi(v)\big)\mathrm{d}v &= \int_0^1 \int_v^u \psi'(w)\mathrm{d}w\mathrm{d}v \\ &= -\int_u^1 \psi'(w)\mathrm{d}w + \int_0^1 v\psi'(v)\mathrm{d}v \\ &= \int_0^1 \psi'(v)(v-1_{\{v\geq u\}})\mathrm{d}v = \int_0^1 g(v,u)\psi'(v)\mathrm{d}v\end{aligned}$$

(2.3.6) est donc vérifiée en dimension 1.

Soit maintenant $d \geq 2$. On suppose la propriété (2.3.6) vraie pour $d-1$. Fixons $u_1 \in [0,1]$ et appliquons l'hypothèse de récurrence à la fonction $\widetilde{\psi}$ définie par : $\widetilde{\psi}(w_2,...,w_d) = \psi(u_1,w_2,...,w_d)$. On obtient :

$$\psi(u_1,...,u_d) = \int_{[0,1]^{d-1}} \mathrm{d}w_2...\mathrm{d}w_d \Big(\prod_{i=2}^{d} \big(\mathrm{id} + g(w_i,u_i)\frac{\partial}{\partial w_i}\big)(\psi)(u_1,w_2,...w_d)\Big)$$

On définit à présent la fonction $\widehat{\psi}$: $\widehat{\psi}(w_1) = \prod_{i=2}^{d} \big(\mathrm{id} + g(w_i,u_i)\frac{\partial}{\partial w_i}\big)(\psi)(w_1,w_2,...,w_d)$, à laquelle on applique la propriété en dimension 1 :

$$\widehat{\psi}(u_1) = \int_0^1 \mathrm{d}w_1\big(\mathrm{id} + g(w_1,u_1)\frac{d}{dw_1}\big)(\widehat{\psi})(w_1),$$

d'où

$$\begin{aligned}&\psi(u_1,...,u_d) \\ &= \int_{[0,1]^{d-1}} \mathrm{d}w_2...\mathrm{d}w_d \int_0^1 \mathrm{d}w_1 \,(\mathrm{id} + \alpha_1 g(w_1,u_1)\frac{\partial}{\partial w_1})\big(\prod_{i=2}^{d} \big(\mathrm{id} + g(w_i,u_i)\frac{\partial}{\partial w_i}\big)(\psi)\big)(w_1,...,w_d)\end{aligned}$$

On en déduit (2.3.6), vu que les opérateurs id et $g(w_i,u_i)\frac{\partial}{\partial w_i}$ commutent.

En particulier, la fonction ψ : $\psi(u_1,...,u_d) = \varphi\,(\alpha_1(k_1+u_1)-x_1,...,\alpha_d(k_d+u_d)-x_d)$ vérifie les mêmes propriétés de régularité et d'intégrabilité que φ, et $\frac{\partial\psi}{\partial w_i}(w_1,...,w_d) = \alpha_i\frac{\partial\varphi}{\partial w_i}(\alpha.(k+w)-x)$, avec la notation habituelle pour le produit scalaire $x.y$. On déduit donc de (2.3.6) que

$$\varphi\big(\alpha.(k+u)-x\big) = \int_{[0,1]^d} \mathrm{d}v_1...\mathrm{d}v_d \prod_{i=1}^{d} \big(\mathrm{id} + \alpha_i g(v_i,u_i)\frac{\partial}{\partial v_i}\big)(\varphi)\Big(\alpha.(k+v)-x\Big). \tag{2.3.7}$$

De (2.3.5) et (2.3.7), on déduit l'égalité

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{d}\lambda_d(v)\varphi(v)f(\{\frac{x+v}{\alpha}\}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{[0,1]^d} \mathrm{d}\lambda_d(u)f(u)A \\ \times \int_{[0,1]^d} \mathrm{d}\lambda_d(v)\big(\prod_{i=1}^{d} \big(\mathrm{id} + \alpha_i g(v_i,u_i)\frac{\partial}{\partial v_i}\big)(\varphi)(\alpha.(k+v)-x).$$

Notons B_k les pavés $[\alpha_1 k_1 - x_1, \alpha_1(k_1+1) - x_1] \times ... \times [\alpha_d k_d - x_d, \alpha_d(k_d+1) - x_d]$, qui constituent une partition de $\mathbb{R}^d$. Alors, après changement de variables dans chaque terme de la somme,

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{d}\lambda_d(y)\varphi(v)f(\{\frac{x+v}{\alpha}\}) = \\ \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{[0,1]^d} \mathrm{d}\lambda_d(u)f(u) \int_{B_k} \mathrm{d}\lambda(v)\big(\prod_{i=1}^{d} (\mathrm{id} + \alpha_i g(\{\frac{v_i+x_i}{\alpha_i}\},u_i)\frac{\partial}{\partial v_i})(\varphi)(v)$$

La fonction g est bornée, de même, par hypothèse, que f ; φ et ses dérivées étant supposées intégrables, la série ci-dessus est sommable. En permutant la somme et la première intégrale, on obtient le résultat voulu. □

On en déduit, en dimension 2 :

Corollaire 15. *Soit φ une densité de probabilité sur $\mathbb{R}^2$, de classe $\mathcal{C}^2$, et dont les dérivées sont toutes intégrables. Soit $f : [0,1]^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurable, bornée, M_f le maximum et I_f l'intégrale de $|f|$. Alors, pour tous $\alpha \in \mathbb{R}$ et tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,*

$$\left| \int_{\mathbb{R}^2} dw dz \varphi(w,z) f(\{\frac{x+w}{\alpha}\},\{\frac{y+z}{\alpha}\}) - \int_{[0,1]^2} du dv f(u,v) \right| \leq \Phi(3\alpha M_f \wedge 3M_f \wedge (2\alpha+\alpha^2)I_f), \tag{2.3.8}$$

avec $\Phi := max\{1, \int |\frac{\partial\varphi}{\partial w}|, \int |\frac{\partial\varphi}{\partial z}|, \int |\frac{\partial^2\varphi}{\partial w\partial z}|\}$.

Remarque. De même qu'en dimension une, des hypothèses nettement plus faibles sur la loi du couple suffisent à assurer la convergence en loi : les arguments de la démonstration de Tukey ([32]) sont toujours valables en plusieurs dimensions (cf Annexe A). Nous avons cependant besoin de contrôler la vitesse de convergence, ce qui nécessite des hypothèses de régularité plus fortes.

Démonstration. La majoration par $2\Phi M_f$ est évidente. On applique le lemme 14 en dimension 2, dont les hypothèses sont vérifiées par les fonctions φ et f :

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{d}w\mathrm{d}z f(\{\frac{x+w}{\alpha}\},\{\frac{y+z}{\alpha}\}) = \qquad (2.3.9)\\
&\quad \int_{[0,1]^2} \mathrm{d}u\mathrm{d}v f(u,v) \int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{d}w\mathrm{d}z \,(\varphi(w,z) + \alpha g\left(\{\frac{x+w}{\alpha}\},u\right) \frac{\partial\varphi}{\partial w}(w,z)\\
&\qquad\qquad + \alpha g\left(\{\frac{y+z}{\alpha}\},v\right) \frac{\partial\varphi}{\partial z}(w,z)\\
&\qquad\qquad + \alpha^2 g\left(\{\frac{x+w}{\alpha}\},u\right) g\left(\{\frac{y+z}{\alpha}\},v\right) \frac{\partial^2\varphi}{\partial w\partial z}(w,z)\Big)
\end{aligned}$$

$|g|$ est bornée (par 1), et, par définition, $\int|\varphi|$, $\int|\frac{\partial\varphi}{\partial w}|$, $\int|\frac{\partial\varphi}{\partial z}|$ et $\int|\frac{\partial^2\varphi}{\partial w\partial z}|$ sont majorées par Φ. Par conséquent,

$$\Big|\int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{d}w\mathrm{d}z f(\{\frac{x+w}{\alpha},\frac{y+z}{\alpha}\}) - \big(\int_{[0,1]^2} \mathrm{d}u\mathrm{d}v f(u,v)\big)\Big| \le \Phi(2\alpha+\alpha^2)M_f.$$

La majoration par $3\alpha\Phi M_f$ s'en déduit lorsque $\alpha \le 1$. □

Le corollaire ci-dessus nous sera utile pour les preuves du cas où $\det S \neq 0$; montrons à présent une majoration similaire correspondant au cas rationnel, lorsque $\det S = 0$.

Lemme 16. *Soit φ une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ et dont la dérivée est intégrable, et soit f mesurable bornée sur $[0,1]^2$. Alors, pour tous réels x, y, tout réel $\alpha > 0$ et tout couple (a,b) d'entiers naturels premiers entre eux,*

$$\begin{aligned}
&\Big|\int_{\mathbb{R}} dw\, \varphi(w) f(\{\frac{x+w}{\alpha}\},\{\frac{y+w(a/b)}{\alpha}\}) - \frac{1}{b}\int_0^b dw\, f(\{w\},\{\frac{y-x(a/b)}{\alpha} + \frac{a}{b}w\})\Big|\\
&\qquad \le \alpha b \int_{\mathbb{R}} |\varphi'| M_f
\end{aligned}$$

Démonstration. On suit la même méthode que précédemment : la première intégrale du membre de gauche, après changement de variable, vaut

$$\begin{aligned}
&\sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{kb}^{(k+1)b} \mathrm{d}w \alpha\varphi(\alpha w - x) f(\{w\},\{\frac{y-x(a/b)}{\alpha} + \frac{a}{b}w\}) \qquad (2.3.10)\\
&\qquad = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_0^b \mathrm{d}w \alpha\varphi(\alpha(w+kb) - x) f(\{w\},\{\frac{y-x(a/b)}{\alpha} + \frac{a}{b}w\})
\end{aligned}$$

On compare ensuite $\varphi(\alpha(w+kb)-x)$ à sa moyenne lorsque l'on fait varier w dans

$[0,b]$, en intégrant par parties :

$$\begin{aligned}
\varphi(\alpha(w+kb)-x) - \frac{1}{b}\int_0^b \mathrm{d}v\,\varphi(\alpha(v+kb)-x) &= \frac{1}{b}\int_0^b \mathrm{d}v\,\alpha\int_v^w \mathrm{d}u\,\varphi'(\alpha(u+kb)-x) \\
&= \frac{1}{b}\Big(-\alpha b\int_w^b \mathrm{d}u\,\varphi'(\alpha(u+kb)-x) + \int_0^b \mathrm{d}v\,\alpha v\varphi'(\alpha(v+kb)-x)\Big) \\
&= \frac{1}{b}\int_0^b \mathrm{d}v\,\alpha(v-b1_{\{v\geq w\}})\varphi'(\alpha(v+kb)-x) \\
&= \frac{1}{b}\int_0^b \mathrm{d}v\,\alpha g_b(v,w)\varphi'(\alpha(v+kb)-x), \qquad (2.3.11)
\end{aligned}$$

en posant $g_b(v,w) := v - b1_{\{v\geq w\}} = bg(v/b, w/b)$. En injectant (2.3.11) dans (2.3.10), on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}w\,\varphi(w) f(\{\frac{w+x}{\alpha}\},\{\frac{y+w(a/b)}{\alpha}\}) \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_0^b \mathrm{d}w\,\left(f(\{w\},\{\frac{y-x(a/b)}{\alpha}+\frac{a}{b}w\})\right. \\
&\qquad\qquad \left.\times\left(\alpha\frac{1}{b}\int_0^b \mathrm{d}v\,\big(\varphi(\alpha(v+kb)-x)+\alpha g_b(v,w)\varphi'(\alpha(u+kb)-x)\big)\right)\right) \\
&= \frac{1}{b}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_0^b \mathrm{d}w\,f(\{w\},\{\frac{y-x(a/b)}{\alpha}+\frac{a}{b}w\})\Big(\int_{\alpha kb-x}^{\alpha(k+1)b-x}\mathrm{d}v\,\big(\varphi(v)+\alpha g_b(b\{\frac{v+x}{\alpha b}\},w)\varphi'(v)\big)\Big)
\end{aligned}$$

Cette série est sommable, et

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}w\,\varphi(w) f(\{\frac{w+x}{\alpha}\},\{\frac{y+w(a/b)}{\alpha}\}) &= \frac{1}{b}\int_0^b \mathrm{d}w\,f(\{w\},\{\frac{y-x(a/b)}{\alpha}+\frac{a}{b}w\}) \\
&+\frac{1}{b}\int_0^b \mathrm{d}w\,f(\{w\},\{\frac{y-x(a/b)}{\alpha}+\frac{a}{b}w\})\int_{\mathbb{R}}\mathrm{d}v\,\alpha g_b(b\{\frac{v+x}{\alpha b}\},w)\varphi'(v)
\end{aligned}$$

Le second terme du membre de droite peut bien être majoré par $\alpha b M_f \int_{\mathbb{R}}|\varphi'|$, d'où le résultat. □

On donne enfin une majoration dans le cas où la distribution de φ est portée par une droite de pente irrationnelle.

Lemme 17. *Soit $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}_+)$ d'intégrale 1 ; posons*

$$\Phi := \sup\{1, \sup_{\mathbb{R}}|\varphi'|\int_{\mathbb{R}}|\varphi(w)w|dw\}.$$

Soit $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable bornée, et lipschitzienne de constante c en sa seconde variable. Soit σ un irrationnel et $a \in \mathbb{Z}^*, b \in \mathbb{N}^*$ premiers entre-eux tels que

$|\sigma - a/b| < 1/b^2$. *Alors pour tout réel* $\alpha > 0$ *et tous réels* x *et* y, *on a :*

$$\begin{aligned}
&|\int_{\mathbb{R}} dw\varphi(w) f(\{\frac{x+w}{\alpha}\},\{\frac{y+\sigma w}{\alpha}\}) - \int_0^1 \int_0^1 dw dv f(w,v)| \qquad (2.3.12)\\
&\quad \le \Phi\left(\frac{c+4M_f}{\alpha b^2} + \alpha b M_f + \frac{c}{b} + 4M_f \frac{\alpha^2}{\sigma^2}|a|b\right) + 2M_f \int_{|w|\ge \alpha(ab-1)/(|\sigma|\vee|a/b|)} dw|\varphi(w)|
\end{aligned}$$

Démonstration. Si $\sigma < 0$, en considérant $\hat{y} := \alpha - y$ et $\hat{f}(u,v) := f(u, 1-v)$, qui vérifie les propriétés requises, on se ramène à montrer le résultat avec $-\sigma$. Nous pouvons donc supposer pour la démonstration que σ est positif. Posons $\sigma' := a/b$, qui est donc aussi strictement positif, et

$$A = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}w\varphi(w) f(\{\frac{x+w}{\alpha}\},\{\frac{y+\sigma w}{\alpha}\}).$$

On commence par se ramener au cas rationnel précédent en approchant $f(\{\frac{x+w}{\alpha}\},\{\frac{y+\sigma w}{\alpha}\})$ par $f(\{\frac{x+w}{\alpha}\},\{\frac{y+\sigma' w}{\alpha}\})$: signalons tout d'abord deux majorations utiles découlant immédiatement des hypothèses faites sur σ, a et b.

$$\begin{cases} |\dfrac{y+\sigma w}{\alpha} - \dfrac{y+\sigma' w}{\alpha}| \le |\dfrac{w}{\alpha b^2}| & (2.3.13a)\\ |\dfrac{1}{\sigma'} - \dfrac{1}{\sigma}| \le \dfrac{1}{\sigma a b} & (2.3.13b)\end{cases}$$

Comparons $f(u,\{v\})$ et $f(u,\{v'\})$ pour $u \in [0,1]$ et $v < v'$. On distingue trois cas :

1. $[v'] - [v] \ge 2$, auquel cas $v' - v \ge 1$, donc

$$|f(u,\{v\}) - f(u,\{v'\})| \le c \le c(v'-v),$$

2. $[v] = [v']$; alors $\{v'\} - \{v\} = v' - v$, et de nouveau $|f(u,\{v\}) - f(u,\{v'\})| \le c|v - v'|$.

3. $[v'] = [v] + 1$.

On peut alors majorer, en séparant l'intégrale ci-dessous en deux, selon que $|[\frac{y+\sigma w}{\alpha}] - [\frac{y+\sigma' w}{\alpha}]|$ est égal à 1 ou non, en utilisant (2.3.13a) dans le second cas :

$$\begin{aligned}
&|A - \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}w\varphi(w) f(\{\frac{x+w}{\alpha}\},\{\frac{y+\sigma' w}{\alpha}\})|\\
&\qquad\qquad \le c\Phi\frac{1}{\alpha b^2} + 2M_f \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}w\varphi(w) 1_{\{|[\frac{y+\sigma w}{\alpha}]-[\frac{y+\sigma' w}{\alpha}]|=1\}}
\end{aligned}$$

il reste à étudier l'intégrale dans le second terme du membre de droite, qui vaut encore :

$$A' := \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}w\varphi(w) 1_{\{|[\{\frac{y}{\alpha}\}+\frac{\sigma w}{\alpha}]-[\{\frac{y}{\alpha}\}+\frac{\sigma' w}{\alpha}]|=1\}} \qquad (2.3.14)$$

On note $y' := \{y/\alpha\}$. Alors $|[y' + \frac{\sigma w}{\alpha}] - [y' + \frac{\sigma' w}{\alpha}]| = 1$ est réalisé si et seulement s'il existe un entier k tel que

$$\begin{cases} \text{soit } k+1 > y' + \frac{\sigma w}{\alpha} \geq k > y' + \frac{\sigma' w}{\alpha} \geq k-1 \\ \text{soit } k+1 > y' + \frac{\sigma' w}{\alpha} \geq k > y' + \frac{\sigma w}{\alpha} \geq k-1. \end{cases} \tag{2.3.15}$$

Nous supposerons pour l'instant que $\sigma > a/b$, le cas $\sigma < a/b$ se traitant de manière similaire. L'alternative (2.3.15) implique alors l'existence d'un entier k tel que :

$$\frac{\alpha|(k-y')|}{\sigma'} \geq |w| \geq \frac{\alpha|(k-y')|}{\sigma}. \tag{2.3.16}$$

L'entier k est toujours du même signe que $k - y'$, puisque $0 \leq y' < 1$. On en déduit la majoration :

$$\begin{aligned} |A'| &\leq \int \mathrm{d}w\varphi(w) 1_{\{\exists k, |k|<ab, \frac{\alpha|(k-y')|}{\sigma'} > |w| \geq \frac{\alpha|(k-y')|}{\sigma}\}} + \int \mathrm{d}w\varphi(w) 1_{\{\exists k, |k|\geq ab, \frac{\alpha|(k-y')|}{\sigma'} > |w| \geq \frac{\alpha|(k-y')|}{\sigma}\}} \\ &\leq \sum_{0<k\leq ab} \int_{\alpha(k-y')/\sigma}^{\alpha(k-y')/\sigma'} \mathrm{d}w\varphi(w) + \sum_{-ab<k\leq 0} \int_{\alpha(k-y')/\sigma'}^{\alpha(k-y')/\sigma} \mathrm{d}w\varphi(w) + \int_{|w|\geq\alpha(ab-1)/\sigma} \mathrm{d}w\varphi(w). \end{aligned} \tag{2.3.17}$$

Comparons chacun des termes de la première somme ci-dessus à la valeur moyenne de φ sur un intervalle de taille α/σ. De manière générale, pour tout y et tous $z \geq t > 0$, on a : $\left| \int_s^{s+t} \mathrm{d}w\varphi(w) - \frac{t}{z} \int_s^{s+z} \mathrm{d}w\varphi(w) \right| \leq t(z-t)||\varphi'||_\infty$. En prenant $z = \alpha/\sigma$ et $t = \alpha(k-y')(1/\sigma' - 1/\sigma)$, vu (2.3.13b), on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{ab} \left| \int_{\alpha(k-y')/\sigma}^{\alpha(k-y')/\sigma'} \mathrm{d}w\varphi(w) - \left(\alpha(k-y')(\frac{1}{\sigma'} - \frac{1}{\sigma}) \right) \frac{\sigma}{\alpha} \int_{\alpha(k-y')/\sigma}^{\alpha(k+1-y')/\sigma} \mathrm{d}w\varphi(w) \right| \\ \leq \sum_{k=1}^{ab} ||\varphi'||_\infty \frac{\alpha^2}{\sigma^2} \left(1 - (k-y') \left(\frac{\sigma}{\sigma'} - 1 \right) \right) \\ \leq \Phi \frac{\alpha^2}{\sigma^2} ab. \end{aligned}$$

Par le même raisonnement, cette majoration vaut aussi pour la seconde somme de (2.3.17). Enfin,

$$|\sum_{k=1}^{ab} \left(\alpha(k-y')(\frac{1}{\sigma'} - \frac{1}{\sigma}) \right) \frac{\sigma}{\alpha} \int_{\alpha(k-y')/\sigma}^{\alpha(k+1-y')/\sigma} \mathrm{d}w\varphi(w)| \leq \frac{\sigma}{\alpha ab} \int_{\mathbb{R}_+} |w\varphi(w)| \mathrm{d}w \leq \frac{\Phi\sigma}{\alpha ab}. \tag{2.3.18}$$

On en déduit :

$$|A'| \leq 4\Phi \frac{\alpha^2}{\sigma^2} ab + \Phi \frac{\sigma}{\alpha ab} + \int_{\alpha(ab-1)/\sigma}^{+\infty} \mathrm{d}w(|\varphi(w)| + |\varphi(-w)|)).$$

Si $\sigma < \sigma'$, on obtient la même majoration, en remplaçant σ par σ' dans le majorant, et de plus $1/\sigma' < 1/\sigma$, donc ce remplacement n'est nécessaire que pour les termes ayant σ au numérateur. Dans les deux cas, nous obtenons donc pour A :

$$\left| A - \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}w\varphi(w) f\left(\left\{\frac{x+w}{\alpha}\right\}, \left\{\frac{y+\sigma' w}{\alpha}\right\}\right)\right| \tag{2.3.19}$$
$$\leq \Phi\left(\frac{c}{\alpha b^2} + 8M_f \frac{\alpha^2}{\sigma^2} ab + 2M_f \frac{\sigma \vee \sigma'}{\alpha b^2}\right) + 2M_f \int_{|w| \geq \alpha(ab-1)/(\sigma\vee\sigma'} \mathrm{d}w|\varphi(w)|).$$

On remarque en outre que

$$\frac{\sigma \vee \sigma'}{ab} \leq \frac{2}{b^2}.$$

Appliquons à présent le lemme 16 :

$$\Big| \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}w\, \varphi(w) f(\{\frac{x+w}{\alpha}\}, \{\frac{y+w(a/b)}{\alpha}\}) - \frac{1}{b}\int_0^b \mathrm{d}w\, f(\{w\}, \{\frac{y-x(a/b)}{\alpha} + \frac{a}{b}w\})\Big|.$$
$$\leq \alpha b \Phi M_f. \tag{2.3.20}$$

Il reste donc à vérifier que

$$|\frac{1}{b}\int_0^b \mathrm{d}w f(\{w\}, \{\frac{y-(a/b)x}{\alpha} + \frac{a}{b}w\}) - \int_0^1\int_0^1 \mathrm{d}u\mathrm{d}v\, f(u,v)| \leq \frac{c}{b}. \tag{2.3.21}$$

En effet,

$$\frac{1}{b}\int_0^b \mathrm{d}w f(\{w\}, \{\frac{y-(a/b)x}{\alpha} + \frac{a}{b}w\}) = \int_0^1 \mathrm{d}w\, \frac{1}{b}\sum_{k=0}^{b-1} f(w, \{\frac{y-\sigma x}{\alpha} + \frac{a}{b}w + \frac{ak}{b}\}). \tag{2.3.22}$$

Comme a est premier avec b, ak parcourt bien l'ensemble $\{1, ..., b-1\}$. (2.3.22) est donc de la forme : $\int_0^1 \mathrm{d}w\, \frac{1}{b}\sum_{i=0}^{b-1} f(w, \{z + \frac{i}{b}\})$, en posant $z := (y-\sigma x)/\alpha + aw/b$. Vu que f est supposée lipschitzienne par rapport à sa seconde coordonnée, $|\frac{1}{b}\sum_{i=0}^{b-1} f(w, \{z+\frac{i}{b}\}) - \int_0^1 \mathrm{d}v\, f(w,v)| \leq \frac{c}{b}$, donc on a bien (2.3.21).

On peut donc conclure, en rassemblant (2.3.19), (2.3.20) et (2.3.21). □

Le lemme 13 se déduit facilement du corollaire 15 et des lemmes 16 et 17 :

Preuve du lemme 13. Pour montrer (2.3.1) (resp. (2.3.2), resp. (2.3.3)), on applique le corollaire 15 (resp. le lemme 16, resp. le lemme 17), en prenant pour φ la densité de $X_1 - X_0$ (resp. $X^1_{j/n} - X^1_0$, resp. $X^1_{j/n} - X_0$), qui vérifie les propriétés d'intégrabilité requises, et $\alpha = \alpha_n\sqrt{\frac{n}{j}} = \frac{\beta_n}{\sqrt{j}}$, $x = (u+X_0)\sqrt{\frac{n}{j}}$ et $y = (v+X_0)\sqrt{\frac{n}{j}}$. On obtient ainsi une majoration portant sur les espérances conditionnellement à X_0, donc sur les espérances puisque le majorant ne dépend pas de X_0. Pour le terme intégral, on montre facilement qu'il existe une constante C ne dépendant que de la matrice S telle que $(|a|b-2)/|\sigma| \leq (b^2/C)$, à l'aide des hypothèses faites sur a, b et σ. □

2.4 Le cas $\beta_n \to 0$

On connaît la convergence des sommes sans arrondis : posons

$$U_n^{p,q}(X) := n^{(p+q)/2-1} \sum_{i=1}^{[nt]} |\Delta_i^n X^1|^p |\Delta_i^n X^2|^q. \tag{2.4.1}$$

Alors, pour $m \in \mathbb{N}^*$,

$$U_n^{p,q}(X) \xrightarrow{L^m} tE(|X_1^1 - X_0^1|^p |X_1^2 - X_0^2|^q). \tag{2.4.2}$$

Il suffit donc de montrer que

$$V_n^{p,q}(X) - U_n^{p,q}(X) \xrightarrow{L^m} 0 \tag{2.4.3}$$

On commence par se ramener à la convergence dans L^1 en prouvant l'uniforme intégrabilité (par rapport à n) des $n^{(p+q)/2-1} V_n^{p,q}(X)_t$. Par convexité, pour tout n-uplet de réels positifs $(a_1, ..., a_n)$ et tout $k \geq 1$, $\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^k \leq n^{k-1} \sum_{i=1}^n a_i^k$, et par ailleurs $|\overline{\Delta}_i^n X| \leq |\Delta_i^n X| + \alpha_n$ donc, ici,

$$\begin{aligned}\left(n^{(p+q)/2-1} \sum_{i=1}^{[nt]} |\overline{\Delta}_i^n X^1|^p |\overline{\Delta}_i^n X^2|^q\right)^m &\leq \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{[nt]} \left(\sqrt{n}|\Delta_i^n X^1| + \beta_n\right)^p \left(\sqrt{n}|\Delta_i^n X^2| + \beta_n\right)^q\right)^m \\ &\leq \left(\frac{[nt]}{n}\right)^{m-1} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{[nt]} \left(|\sqrt{n}\Delta_i^n X^1| + \beta_n\right)^{mp} \left(|\sqrt{n}\Delta_i^n X^2| + \beta_n\right)^{mq}.\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$E\left(\left(n^{(p+q)/2-1} V_n^{p,q}(X)_t\right)^m\right) \leq t^m E\Big(\left(|X_1^1 - X_0^1| + \beta_n\right)^{mp} \left(|X_1^2 - X_0^2| + \beta_n\right)^{mq}\Big). \tag{2.4.4}$$

Ces espérances sont bornées uniformément en n car $\{\beta_n, n \geq 0\}$ est borné. Il suffit donc de prouver la convergence dans L^1. Or

$$\begin{aligned}&|\overline{\Delta}_i^n X^1|^p |\overline{\Delta}_i^n X^2|^q - |\Delta_i^n X^1|^p |\Delta_i^n X^2|^q \\ &\quad = |\overline{\Delta}_i^n X^1|^p \big(|\overline{\Delta}_i^n X^2|^q - |\Delta_i^n X^2|^q\big) + |\Delta_i^n X^{2)}|^q \big(|\overline{\Delta}_i^n X^1|^p - |\Delta_i^n X^1|^p\big)\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}&E\big(V_n^{p,q}(X) - U_n^{p,q}(X)|\big) \\ &\quad \leq E\Big(\big||X_1^1 - X_0^1| + \beta_n\big|^p \times \big|(|X_1^2 - X_0^2| + \beta_n)^q - |X_1^2 - X_0^2|^q\big|\Big) + E\Big(|X_1^2 - X_0^2|^q \times \big|(|X_1^1 - X_0^1| + \beta_n)^p -\end{aligned}$$

Les espérances $E\Big(\big||X_1^1 - X_0^1| + \beta_n\big|^{2p}\Big)$, $E\Big(\big|X_1^1 - X_0^1\big|^{2p}\Big)$, $E\Big(\big||X_1^2 - X_0^2| + \beta_n\big|^{2q}\Big)$ et $E\Big(\big|X_1^2 - X_0^2\big|^{2q}\Big)$ sont bornées (uniformément en n), il reste donc à prouver la convergence vers 0 de $E\Big(\big|(|X_1^2 - X_0^2| + \beta_n)^q - |X_1^2 - X_0^2|^q\big|^2\Big)$ et $E\Big(\big|(|X_1^1 - X_0^1| + \beta_n)^p - |X_1^1 - X_0^1|^p\big|^2\Big)$, qui est assurée par le théorème de convergence dominée.

2.5 Le cas $\beta_n \to \beta \in]0, +\infty[$

On traite les trois cas possibles simultanément, en utilisant respectivement les majorations (2.3.1), (2.3.2) et (2.3.3) du lemme 13.

Les sommes renormalisées $V_n^{p,q}(X_t)$ sont comme précédemment uniformément intégrables, vu (2.4.4) et du fait que la suite $(\beta_n)_{n\geq 1}$ est toujours supposée bornée. Il suffit donc de montrer la convergence dans L^2. Γ_n (resp. Γ) désigne ici $\widetilde{\Gamma}(p,q,\beta_n,\theta)$ (resp. $\widetilde{\Gamma}(p,q,\beta,\theta)$) ou $\Gamma(p,q,\beta_n,S)$ (resp. $\Gamma(p,q,\beta,S)$), selon que l'on est dans le cas $\det S = 0$ et $\theta \in \mathbb{Q}$ ou dans l'un des deux autres cas. On pose alors

$$\eta_i^n := n^{(p+q)/2} |\overline{\Delta}_i^n X^1|^p |\overline{\Delta}_i^n X^2|^q - \Gamma_n. \tag{2.5.1}$$

Puisque $\beta_n \to \beta$, $\frac{[nt]}{n}\Gamma_n \to \Gamma$ par continuité de $\rho \mapsto \Gamma(p,q,\rho,S)$, et il suffit de montrer que

$$n^{(p+q)/2-1} V_n^{p,q}(X) - \frac{[nt]}{n}\Gamma_n \xrightarrow{L^2} 0. \tag{2.5.2}$$

Décomposons :

$$E\left(\left|n^{(p+q)/2-1} V_n^{p,q}(X) - \frac{[nt]}{n}\Gamma_n\right|^2\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{[nt]} E(|\eta_i^n|^2) + \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{[nt]-1}\sum_{j=1}^{[nt]-i} E(\eta_i^n \eta_{i+j}^n)). \tag{2.5.3}$$

On a :

$$\begin{aligned} E(n^{p+q} |\overline{\Delta}_i^n X^1|^\gamma |\overline{\Delta}_i^n X^2|^\zeta) &\leq E(n^{p+q}(|\Delta_i^n X^1| + \alpha_n)^{2p} (|\Delta_i^n X^2| + \alpha_n)^{2q}) \\ &\leq C(1+\beta_n^{2(p+q)}). \end{aligned}$$

Vu que la suite (β_n) est bornée, on en déduit que $E(|\eta_i^n|)$ et $E(|\eta_i^n|^2)$ sont bornées, uniformément en n (et en i). Par conséquent, la première somme du second membre, dans (2.5.3), converge vers 0. On majore ensuite $|E(\eta_i^n \eta_{i+j}^n))| \leq E(|\eta_i^n||E(\eta_{i+j}^n|\mathcal{F}_{i/n})|)$, en notant ($j$ étant fixé)

$$u_i^n := \left\{\frac{X^1_{(i+j-1)/n}}{\alpha_n}\right\} \text{ et } v_i^n := \left\{\frac{X^2_{(i+j-1)/n}}{\alpha_n}\right\}.$$

Rappelons que $\overline{\Delta}_{i+j}^n X^1 = \alpha_n [u_i^n + \frac{\Delta_{i+j}^n X^1}{\alpha_n}]$, et de même pour X^2. Par conséquent,

$$E(\eta_{i+j}^n|\mathcal{F}_{i/n}) = \beta_n^{p+q} E\Big(E\big(|[u_i^n + \frac{\Delta_{i+j}^n X^1}{\alpha_n}]|^p |[v_i^n + \frac{\Delta_{i+j}^n X^2}{\alpha_n}]|^q |\mathcal{F}_{(i+j-1)/n}\big)|\mathcal{F}_{i/n}\Big) - \Gamma_n.$$

Posons

$$f_n(u,v) = \beta_n^{p+q} E(|[u + \frac{X^1_{1/n}}{\alpha_n}]|^p |[v + \frac{X^2_{1/n}}{\alpha_n}]|^q). \tag{2.5.4}$$

On a alors

$$E(\eta_{i+j}^n|\mathcal{F}_{i/n}) = E(f_n(u_i^n, v_i^n)|\mathcal{F}_{i/n}) - \Gamma_n.$$

En vue d'appliquer le lemme 13, montrons (lorsque $\det S = 0$ et $\theta \neq \mathbb{Q}$) que f_n est liptschitzienne en sa seconde coordonnée.

Soient $u \in [0,1]$, et (v, v') tel que $0 \leq v < v' \leq 1$, alors [2]

$$\begin{aligned}
&|f_n(u,v) - f_n(u,v')| \\
&\quad = \left|\beta_n^{p+q}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\, h(x) |[u + \frac{\sigma x}{\beta_n}]|^p \big(|[v + \frac{\sigma' x}{\beta_n}]|^q - |[v' + \frac{\sigma' x}{\beta_n}]|^q\big)\right| \\
&\quad \leq \beta_n^{p+q}\int_{\mathbb{R}} h(x)|[u + \frac{\sigma x}{\beta_n}]|^p \left|\left|\left[\frac{\sigma' x}{\beta_n}\right] + 1\right|^q - \left|\left[\frac{\sigma' x}{\beta_n}\right]\right|^q\right| 1_{[-v', -v[+\mathbb{Z}}(\sigma' x/\beta_n)\mathrm{d}x. \\
&\quad \leq \int_{\mathbb{R}} h(\frac{\sqrt{2}\underline{\beta} x}{\sigma'}) 1_{[-v',-v[+\mathbb{Z}}(x) e^{-\frac{1}{4}(x\underline{\beta}/\sigma')^2} \beta_n^{p+q+1} P_n(x)\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

après changement de variable pour la seconde inégalité ; P est ici un polynôme en x, qui dépend de σ, σ', p et q. $\underline{\beta}$ est supposé non nul donc la fonction $x \mapsto e^{-\frac{1}{4}(x\underline{\beta}/\sigma')^2}\beta_n^{p+q+1}P_n(x)$ tend vers 0 en l'infini et est continue ; elle est donc bornée, uniformément en n puisque $\overline{\beta}$ est fini. Nous avons donc :

$$|f_n(u,v) - f_n(u,v')| \leq C \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{k-v}^{k-v'} h(\frac{\sqrt{2}\underline{\beta} x}{\sigma'})\mathrm{d}x.$$

Nous majorons les termes $k = 1$ et $k = 0$ par $C(v-v') \sup h$. La fonction h étant strictement décroissante (resp. croissante) sur $\mathbb{R}_+$ (resp. $\mathbb{R}_-$), nous pouvons encore majorer les termes en $k \geq 2$ par $C(v - v') \int_{k-2}^{k-1} h(\frac{\sqrt{2}\underline{\beta} x}{\sigma'})\mathrm{d}x$ et ceux en $k \leq -1$ par $C(v - v') \int_{k}^{k+1} h(\frac{\sqrt{2}\underline{\beta} x}{\sigma'})\mathrm{d}x$. Finalement il existe une constante C, qui ne dépend $C(v - v')$ pour $|f_n(u,v) - f_n(u,v')|$, et la fonction f est lipschitzienne en sa seconde variable, uniformément en n (remarquons que nous aurions évidemment pu faire le même raisonnement -y compris dans le lemme 17- en considérant la première variable).

La définition (2.5.4) des f_n assure qu'elles sont de plus bornées sur $[0,1]^2$, uniformément en n. Remarquons aussi que $\Gamma(p,q,\beta_n,S) = E(f_n(U,V))$ lorsque $\det S \neq 0$ ou $\det S = 0$ et $\theta \notin \mathbb{Q}$ et $\widetilde{\Gamma}(p,q,\beta_n,S) = E(f_n(bU,aU))$ si $\theta = a/b \in \mathbb{Q}$.

Appliquons aux fonctions f_n le lemme 13 ; pour $j \geq 2$, il existe une constante C (qui dépend de la suite β_n mais pas de n) telle que si $\det S \neq 0$,

$$|E(\eta^n_{i+j}|\mathcal{F}_{i/n})| \leq \frac{C}{\sqrt{j-1}});$$

si $\det S = 0$ et $\theta = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, (avec a et b premiers entre eux),

$$|E(\eta^n_{i+j}|\mathcal{F}_{i/n})| \leq \frac{C}{\sqrt{j-1}};$$

si $\det S = 0$ et $\theta \notin \mathbb{Q}$, et que θ vérifie $\mathcal{H}$, notons de nouveau $\frac{a_n}{b_n}$ la suite d'approximations rationnelles de θ obtenues grâce à l'hypothèse $\mathcal{H}$. Nous avons :

$$|E(\eta^n_{i+j}|\mathcal{F}_{i/n})| \leq C\left(\frac{\sqrt{j-1}}{b_n^2} + \frac{b_n}{\sqrt{j-1}} + \frac{1}{b_n} + \frac{b_n^2}{j} + \int_{b_n^2/(C\sqrt{j-1})}^{+\infty} \mathrm{d}x h(x)\right). \qquad (2.5.5)$$

2. En utilisant la notation classique $1_A(x) = 1$ si $x \in A$, 0 sinon.

La densité gaussienne vérifie, pour tout a positif, $\int_a^{+\infty} h(x)\mathrm{d}x \leq e^{-a^2/2}$, et ce terme est encore majoré par $1/a$ pour a suffisamment grand, donc à partir d'un certain rang, l'intégrale ci-dessus est majorée par $C\sqrt{j-1}/b_n^2$.

Finalement, on obtient une majoration de la double somme de (2.5.3) dans les deux premiers cas :

$$\begin{aligned}
|\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{[nt]-1}\sum_{j=1}^{[nt]-i} E(\eta_i^n\eta_{i+j}^n))| &\leq \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{[nt]-1}\sum_{j=2}^{[nt]-i} E(|\eta_i^n|)C(\frac{1}{\sqrt{j-1}}) + \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{[nt-1]} C \\
&\leq \frac{C}{n^2}\sum_{i=1}^{[nt]-1}\sqrt{[nt]-i} + t\frac{C}{n} \\
&\leq t^{1/2}\frac{C}{n^2}.(nt)^{3/2} + t\frac{C}{n} \\
&\leq \frac{C}{\sqrt{n}}t^2 + \frac{Ct}{n}.
\end{aligned}$$

Dans le troisième cas, on obtient de même pour les quatre premiers termes du majorant de (2.5.5) :

$$\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{[nt]-1}\sum_{j=2}^{[nt]-i} C\frac{\sqrt{j-1}}{b_n^2} \leq \frac{Ct^{5/2}\sqrt{n}}{b_n^2} \leq \frac{Ct^{5/2}}{\alpha_n b_n^2},$$

$$\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{[nt]-1}\sum_{j=2}^{[nt]-i} \frac{Cb_n}{\sqrt{j-1}} \leq \frac{Ct^{3/2}b_n}{\sqrt{n}},$$

$$\text{et } \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{[nt]-1}\sum_{j=2}^{[nt]-i} \frac{C}{b_n} \leq \frac{C}{b_n}.$$

$$\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{[nt]-1}\sum_{j=2}^{[nt]-i} \frac{Cb_n^2}{j-1} \leq \frac{C_t b_n^2\log(n)}{n},$$

Les deux sommes du membre de droite de (2.5.3) convergent bien vers 0 dans tous les cas (en utilisant les hypothèses $\alpha_n b_n \to 0$ et $\alpha_n b_n \to +\infty$ pour le troisième) ; on a donc la convergence (2.5.2).

2.6 Le cas $\beta_n \to +\infty$

2.6.1 Résultats préliminaires

On commence par vérifier que les "grands" accroissements (i.e. tels que $|\Delta_i^n X| > \alpha_n$) n'ont pas d'influence sur la limite. On définit les ensembles

$$R_\varepsilon^n = \cup_{k\in\mathbb{Z}}([k\alpha_n - \varepsilon\alpha_n, k\alpha_n[\times[k\alpha_n, k\alpha_n+\varepsilon\alpha_n]\cup[k\alpha_n, k\alpha_n+\varepsilon\alpha_n]\times[k\alpha_n-\varepsilon\alpha_n, k\alpha_n[) \quad (2.6.1)$$

R_ε^n est donc l'ensemble des couples (x, y) qui se trouvent de part et d'autre d'un seuil $k\alpha_n$, et tels que x et y soient tout deux à une distance inférieure à $\varepsilon\alpha_n$ de ce seuil. En pratique, seuls les accroissements du processus arrondi de taille exactement α_n (pour chacune des composantes) ont une influence, ainsi que le montre le lemme suivant :

Lemme 18. *Supposons que $\beta_n \to +\infty$. Alors, pour tout réel a et tous $0 < \varepsilon$, $\varepsilon' < 1$, les deux différences suivantes convergent (dans L^1) vers 0 :*

$$n^{(p+q)/2-1}\beta_n^a \left(\sum_{i=1}^{[nt]} |\overline{\Delta}_i^n X^1|^p |\overline{\Delta}_i^n X^2|^q - \sum_{i=1}^{[nt]} \alpha_n^{p+q} 1_{\{|\overline{\Delta}_i^n X^1|\geq\alpha_n} 1_{\{|\overline{\Delta}_i^n X^2|\geq\alpha_n\}}\right) \tag{2.6.2}$$

et

$$n^{(p+q)/2-1}\beta_n^a \left|\sum_{i=1}^{[nt]} |\overline{\Delta}_i^n X^1|^p\, |\overline{\Delta}_i^n X^2|^q \right. \tag{2.6.3}$$

$$\left. -\alpha_n^{p+q} \sum_{i=1}^{[nt]} 1_{\{(X^1_{(i-1)/n}, X^1_{i/n}\})\in R_\varepsilon^n} 1_{\{(X^2_{(i-1)/n}, X^2_{i/n}\})\in R_{\varepsilon'}^n}\right|.$$

Démonstration. On désigne par $||.||$ la norme sup de $\mathbb{R}^2$. Lorsque $||\overline{\Delta}_i^n X|| \geq 2\alpha_n$, on a $||\Delta_i^n X|| \geq \alpha_n$ donc $||\overline{\Delta}_i^n X|| \leq \alpha_n + ||\Delta_i^n X|| \leq 2||\Delta_i^n X||$. On en déduit que

$$|\overline{\Delta}_i^n X^1|^p |\overline{\Delta}_i^n X^2|^q - \alpha_n^{p+q} 1_{|\overline{\Delta}_i^n X^1|\geq\alpha_n} 1_{|\overline{\Delta}_i^n X^2|\geq\alpha_n} \leq C||\Delta_i^n X||^{p+q} 1_{\{||\Delta_i^n X||\geq\alpha_n\}}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\beta_n^a n^{(p+q)/2-1} E(|\sum_{i=1}^{[nt]} |\overline{\Delta}_i^n X^1|^p |\overline{\Delta}_i^n X^2|^q - \alpha_n^{p+q} 1_{|\overline{\Delta}_i^n X^1|\geq\alpha_n} 1_{|\overline{\Delta}_i^n X^2|\geq\alpha_n}|)& \\ \leq Ct\beta_n^a E\left(||X_1 - X_0||^{p+q} 1_{\{||X_1||\geq\beta_n\}}\right)& \\ \leq \frac{Ct}{\beta_n} E(||X_1 - X_0||^{p+q+a+1});&\end{aligned}$$

(2.6.2) est donc vérifié.

Par ailleurs nous avons, par définition des R_ε^n,

$$\begin{cases} \left((X^1_{(i-1)/n}, X^1_{i/n}) \in R_\varepsilon^n\right) \Longrightarrow \left(|\overline{\Delta}_i^n X^1| \geq \alpha_n\right) \\ |\overline{\Delta}_i^n X^1| \geq \alpha_n \text{ et } (X^1_{(i-1)/n}, X^1_{i/n}) \notin R_\varepsilon^n \Longrightarrow |\Delta_i^n X^1| \geq \varepsilon\alpha_n. \end{cases}$$

Les implications similaires pour X^2 et ε' sont aussi vérifiées, nous en déduisons que

$$\begin{aligned}&\frac{\beta_n^{a+p+q}}{n} E\Big(|\sum_{i=1}^{[nt]} 1_{|\overline{\Delta}_i^n X^1|\geq\alpha_n} 1_{|\overline{\Delta}_i^n X^2|\geq\alpha_n} - \sum_{i=1}^{[nt]} 1_{(X^1_{(i-1)/n}, X^1_{i/n})\in R_\varepsilon^n} 1_{(X^2_{(i-1)/n}, X^2_{i/n})\in R_{\varepsilon'}^n}|\Big) \\ &\leq \frac{\beta^{a+p+q}}{n} \sum_{i=1}^{[nt]} E\left(1_{\{|\overline{\Delta}_i^n X^1|\geq\alpha_n, (X^1_{(i-1)/n}, X^1_{i/n})\notin R_\varepsilon^n\}} + 1_{\{|\overline{\Delta}_i^n X^2|\geq\alpha_n, (X^2_{(i-1)/n}, X^2_{i/n})\notin R_{\varepsilon'}^n\}}\right) \\ &\leq \beta^{a+p+q}\left(\mathbb{P}\left(|\Delta_i^n X^1| \geq \varepsilon\alpha_n\right) + \mathbb{P}\left(|\Delta_i^n X^2| \geq \varepsilon'\alpha_n\right)\right).\end{aligned}$$

Ce terme converge vers 0 (dès que $\beta_n \to +\infty$). Vu (2.6.2), on en déduit (2.6.3). □

On rappelle par ailleurs un résultat montré dans [12], qui permet d'obtenir la convergence dans le cas dégénéré, lorsque $\theta \in \mathbb{Q}$:

Lemme 19. *(Jacod, 96) Si $\beta_n \longrightarrow +\infty$ et $\alpha_n \longrightarrow 0$,*

$$\frac{\beta_n}{n} \sum_{i=1}^{[nt]} 1_{|\overline{\Delta}_i^n(\sigma W)| \geq \alpha_n} \xrightarrow{L^2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma t. \tag{2.6.4}$$

2.6.2 Cas dégénéré lorsque $\theta \in \mathbb{Q}$

On montre tout d'abord la convergence dans le cas dégénéré, lorsque θ est rationnel.

D'après le lemme 18, il suffit de montrer la convergence (dans L^1) de

$$M_n := \frac{n^{(p+q)/2-1}}{\beta_n^{p+q-1}} \sum_{i=1}^{[nt]} \alpha_n^{p+q} \ 1_{R_\varepsilon^n}(X^1_{(i-1)/n}, X^1_{(i)/n}) \ 1_{R_{\varepsilon'}^n}(X^2_{(i-1)/n}, X^2_{(i)/n})$$

vers $t\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma/b$, pour ε et $\varepsilon' > 0$ judicieusement choisis.

On remarque que $M_n = \frac{\beta_n}{n} \sum_{i=1}^{[nt]} 1_{R_\varepsilon^n}(X^1_{(i-1)/n}, X^1_{(i)/n}) \, 1_{R_{\varepsilon'}^n}(X^2_{(i-1)/n}, X^2_{(i)/n})$. On est dans le cas dégénéré rationnel, donc il existe deux entiers premiers entre eux a et b tels que $aX^1 = bX^2$, car on a supposé que $X_0 \in \Delta_\theta$. On suppose dans le raisonnement qui suit que $0 < a \leq b$; les autres cas se démontrent exactement de la même manière. Fixons $1/(ab) > \delta > 0$; on choisit alors $\varepsilon = b\delta$ et $\varepsilon' = a\delta$. On se ramène à la dimension 1 pour appliquer le lemme 19 : montrons que

$$M_n = \frac{\beta_n}{n} \sum_{i=1}^{[nt]} 1_{R_\delta^n}(X^1_{(i-1)/n}/b, X^1_{i/n}/b). \tag{2.6.5}$$

Il suffit de prouver que $((X_s^1, X_t^1) \in R_\varepsilon^n)$ et $((X_s^2, X_t^2) \in R_{\varepsilon'}^n)) \iff ((X_s^1/b, X_t^1/b) \in R_\delta^n)$. Le sens réciproque ($\Leftarrow$) est évident. Montrons le sens direct : on suppose que $((X_s^1, X_t^1) \in R_\varepsilon^n)$ et $((X_s^2, X_t^2) \in R_{\varepsilon'}^n)$. On peut supposer sans perte de généralité que $X_s^1 < X_t^1$ (et donc $X_s^2 < X_t^2$). Il existe alors deux entiers k et l tels que

$$\begin{cases} k\alpha_n - \varepsilon\alpha_n \leq X_s^1 \leq k\alpha_n \quad \text{et} \quad k\alpha_n \leq X_t^1 \leq k\alpha_n + \varepsilon\alpha_n \\ l\alpha_n - \varepsilon'\alpha_n \leq X_s^2 \leq l\alpha_n \quad \text{et} \quad l\alpha_n \leq X_t^2 \leq l\alpha_n + \varepsilon'\alpha_n \ ; \end{cases}$$

des deux premiers encadrements, on déduit que $(a/b)k\alpha_n - \varepsilon'\alpha_n \leq X_s^2 \leq (a/b)k\alpha_n$ et $(a/b)k\alpha_n \leq X_t^2 \leq (a/b)k\alpha_n + \varepsilon'\alpha_n$. On a donc $[bl - b\varepsilon'] \cap [ak - b\varepsilon'] \neq \emptyset$, ce qui n'est possible (vu que $0 < b\varepsilon' < 1$) que si $ak = bl$. Par conséquent, b divise k, donc k/b est entier. Or on a encore $k\alpha_n/b - \delta\alpha_n \leq X_s^1/b \leq k\alpha_n/b$ et $k\alpha_n/b \leq X_t^1/b \leq k\alpha_n/b + \delta\alpha_n$. D'où $(X_s^1/b, X_t^1/b) \in R_\delta^n$. L'implication voulue est donc vérifiée, ainsi que (2.6.5).

Par ailleurs, d'après le lemme 19, $\frac{\beta_n}{n}\sum_{i=1}^{[nt]} 1_{|\Delta_i^n(\sigma W)^{\alpha_n}|\geq\alpha_n} \xrightarrow{L^1} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma t$. En appliquant le lemme 18 (en dimension 1), on en déduit que $\frac{\beta_n}{n}\sum_{i=1}^{[nt]} 1_{(X^1_{(i-1)/n}/b, X^1_{i/n}/b)\in R^n_\delta}$ converge vers $\sqrt{\frac{2}{\pi}}t\sigma/b$ dans L^1. On conclut avec (2.6.5).

2.6.3 Cas non dégénéré

On utilise encore le lemme 18 : il suffit de montrer la convergence dans L^1 de

$$\begin{aligned}
n^{(p+q)/2-1}\beta_n^{-(p+q-2)}\sum_{i=1}^{[nt]}\alpha_n^{p+q}1_{\{|\overline{\Delta}_i^n X^1|\geq\alpha_n\}}1_{\{|\overline{\Delta}_i^n X^2|\geq\alpha_n\}}\\
=(\beta_n^2/n)\sum_{i=1}^{[nt]}1_{\{|\overline{\Delta}_i^n X^1|\geq\alpha_n\}}1_{\{|\overline{\Delta}_i^n X^2|\geq\alpha_n\}}
\end{aligned}$$

vers $tE(|X_1^1X_1^2|)$. On procède de la même manière que dans la démonstration du cas $\beta_n\longrightarrow\beta$, en montrant la convergence dans L^2 à l'aide du lemme 13. Vu que $(|\overline{\Delta}_i^n X^1|\geq\alpha_n)\Longleftrightarrow(|\alpha_n[\{\frac{X^1_{(i-1)/n}}{\alpha_n}\}+\frac{\Delta_i^nX^1}{\alpha_n}]|\geq\alpha_n)$, on obtient, en reprenant la notation précédente (u_i^n,v_i^n) (avec $j=0$),

$$\frac{\beta_n^2}{n}\sum_{i=1}^{[nt]}1_{|\overline{\Delta}_i^n X^1|\geq\alpha_n}1_{|\overline{\Delta}_i^n X^2|\geq\alpha_n}=\frac{\beta_n^2}{n}\sum_{i=1}^{[nt]}1_{|[u_i^n+\Delta_i^nX^1/\alpha_n]|\geq1}1_{|[v_i^n+\Delta_i^nX^2/\alpha_n]|\geq1}$$

On définit f_n par $f_n(u,v):=E(1_{|[u+\Delta_1^nX^1/\alpha_n]|\geq1}1_{|[v+\Delta_1^nX^2/\alpha_n]|\geq1})$.

Pour tout $a\in\mathbb{R}$, on a :

$$\int_0^1 du\,1_{|[u+a]|\geq1}=\int_0^1 du\,1_{u+a\geq1}+\int_0^1 du\,1_{u+a<0}=1\wedge a_++1\wedge a_-=|a|\wedge1.$$

Calculons alors :

$$\begin{aligned}
\int_0^1\int_0^1 \mathrm{d}u\mathrm{d}v f_n(u,v)&=E\left(\int_0^1\int_0^1 1_{|[u+\Delta_1^nX^1/\alpha_n]|\geq1}1_{|[v+\Delta_1^nX^2/\alpha_n]|\geq1}\right)\text{ par Fubini}\\
&=E\Big((1\wedge\frac{|\Delta_1^1X^1|}{\beta_n})(1\wedge\frac{|\Delta_1^1X^2|}{\beta_n})\Big)\text{ vu le calcul ci-dessus.}\qquad(2.6.6)
\end{aligned}$$

En particulier, la suite $(\beta_n^2\int_0^1\int_0^1 f_n)_n$ est majorée par $E(|\Delta_1^1X^1||\Delta_1^1X^2|)$. D'après le théorème de convergence dominée, puisque $\beta_n\to+\infty$, nous avons

$$\beta_n^2\int_{[0,1]^2}f_n\longrightarrow tE\left(\left|\Delta_1^1X^1\Delta_1^1X^2\right|\right)=tE\left(\left|(X_1^1-X_0^1)(X_1^2-X_0^2)\right|\right).$$

Il suffit à présent de vérifier que

$$\frac{\beta_n^2}{n} \sum_{i=1}^{[nt]} \left(1_{|\overline{\Delta}_i^n X^1| \geq \alpha_n} 1_{|\overline{\Delta}_i^n X^2| \geq \alpha_n} - \int_0^1 \int_0^1 \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v \, f_n(u,v)\right) \xrightarrow{L^2} 0. \tag{2.6.7}$$

On pose donc $\eta_i^n := 1_{|\overline{\Delta}_i^n X^1| \geq \alpha_n} 1_{|\overline{\Delta}_i^n X^2| \geq \alpha_n} - \int_0^1 \int_0^1 \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v \, f_n(u,v)$, auquel cas

$$E(\eta_i^n | \mathcal{F}_{(i-1)/n}) = f_n(u_i^n, v_i^n) - \int_0^1 \int_0^1 \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v \, f_n(u,v).$$

Commençons par étudier les η_i^n. Par application du lemme 13 et de (2.6.6), nous obtenons (la constante C ne dépendant que de la matrice S) :

$$|E(\eta_{i+j}^n | \mathcal{F}_{i/n})| \leq C\left(\frac{1}{\beta_n \sqrt{j-1}} + \frac{1}{j-1}\right),$$

d'où, en notant de nouveau I_{f_n} l'intégrale de f_n (qui est positive) sur $[0,1]^2$:

$$\begin{aligned} E(|\eta_i^n|) &= (1 - I_{f_n}) E(1_{|\overline{\Delta}_i^n X^1| \geq \alpha_n} 1_{|\overline{\Delta}_i^n X^2| \geq \alpha_n}) + I_{f_n} E(1 - 1_{|\overline{\Delta}_i^n X^1| \geq \alpha_n} 1_{|\overline{\Delta}_i^n X^2| \geq \alpha_n}) \\ &\leq |E(\eta_i^n)| + 2 I_{f_n} \\ &\leq C\left(\frac{1}{\beta_n^2} + \frac{1}{\beta_n \sqrt{i-1}} + \frac{1}{i-1}\right). \end{aligned} \tag{2.6.8}$$

Comme précédemment, pour obtenir (2.6.7), on majore les deux termes $\beta_n^4 / n^2 \sum_{i=2}^{[nt]} E((\eta_i^n)^2)$ et $\beta_n^4 / n^2 \sum_{i=2}^{[nt]} \sum_{j=1}^{[nt]-i} E\left(|\eta_i^n| |E(\eta_{i+j}^n | \mathcal{F}_{i/n})|\right)$, le terme η_1^n étant borné.

Puisque $|\eta_i^n| \leq 1$, on peut majorer $|\eta_i^n|^2$ par $|\eta_i^n|$, et grâce à (2.6.8), nous obtenons (la constante C_t dépend ici seulement de S et de t) :

$$\frac{\beta_n^4}{n^2} \sum_{i=1}^{[nt]} E((\eta_i^n)^2) \leq C_t(\alpha_n^2 + \alpha_n^3 + \alpha_n^4 \log(nt)). \tag{2.6.9}$$

Vue les majorations obtenues pour $|E(\eta_i^n)|$ et $E(|\eta_i^n|)$, nous avons

$$\begin{aligned} \frac{\beta_n^4}{n^2} \sum_{i=2}^{[nt]} \sum_{j=1}^{[nt]-i} E\left(|\eta_i^n E(\eta_{i+j}^n | \mathcal{F}_{(i-1)/n})|\right) &\leq C \alpha_n^4 \sum_{i=1}^{[nt]} \left(\frac{1}{\beta_n^2} + \frac{1}{\beta_n \sqrt{i}} + \frac{1}{i}\right) \left(1 + \sum_{j=1}^{[nt]} \left(\frac{1}{\beta_n \sqrt{j}} + \frac{1}{j}\right)\right) \\ &\leq C\left(\alpha_n t^{3/2} + \alpha_n^2 t + \alpha_n t^{3/2} + \alpha_n^2 \log(nt)(\alpha_n^2 + \alpha_n \sqrt{t} + t) + (\alpha_n^2 \log(nt))^2\right). \end{aligned} \tag{2.6.10}$$

Les membres de droite de (2.6.9) et (2.6.10) convergent vers 0 dès que $\alpha_n^2 \log(n)$ converge lui aussi vers 0.

Sous cette hypothèse, la convergence dans L^2 (2.6.7) est donc vérifiée.

2.7 Le cas $\alpha_n = \alpha$ constant

2.7.1 Cas dégénéré

On suppose d'abord que $\det S = 0$ et $\theta \in \mathbb{Q}$. Nous reprenons les notations R_ε^n et les choix pour ε et ε' du paragraphe 2.6.2. Ici la suite α_n est constante donc les ensembles R_ε^n ne dépendent pas de n ; nous les notons R_ε. Par uniforme continuité des trajectoires sur $[0,t]$, il existe un rang $n_0(\omega, t)$ à partir duquel la différence

$$V_n^{p,q}(X_t) - \alpha_n^{p+q} \sum_{i=1}^{[nt]} 1_{R_\varepsilon}(X^1_{(i-1)/n}, X^1_{i/n}) 1_{R_{\varepsilon'}}(X^2_{(i-1)/n}, X^2_{i/n})$$

est nulle. De même qu'au paragraphe 2.6.2, la seconde somme est encore égale à

$$\sum_{i=1}^{[nt]} 1_{R_\delta}(X^1_{(i-1)/n}/b, X^1_{i/n}/b) = \sum_{i=1}^{[nt]} 1_{|\overline{\Delta}_i^n(X^1/a)| \geq \alpha},$$

cette dernière égalité étant vraie à partir d'un certain rang (aléatoire). Les sommes renormalisées $\frac{1}{\sqrt{n}} V_n^{p,q}(X)_t$ et $\frac{1}{\sqrt{n}} V_n^{p+q}(\frac{\sigma}{a} W^1)$ ont donc la même limite. On conclut en utilisant la convergence connue en dimension 1 (cf théorème 8) :

$$\frac{1}{\sqrt{n}} V_n^p(\gamma W)_t \xrightarrow{\mathrm{P}} t\sqrt{\frac{2}{\pi}} \alpha^p \sum_{k \in \mathbb{Z}} L_t^{k\alpha}(\gamma W),$$

avec ici $\gamma = \sigma/a = \sigma'/b$.

Supposons maintenant $\theta \notin \mathbb{Q}$. Pour $\varepsilon > 0$ quelconque, on peut trouver $M(\varepsilon)$ telle que $P(\sup_{s \leq t} |X_s| > M(\varepsilon)) < \varepsilon$. Puisque $\theta \notin \mathbb{Q}$, $\sigma\mathbb{Z} \cap \sigma'\mathbb{Z} = \{0\}$, et $\eta := \min\{|k\alpha - l\alpha/\theta|, |k\alpha| < M(\varepsilon), |l\alpha/\theta| < M(\varepsilon)\} > 0$. Par continuité des trajectoires, $\sup_{1 \leq i \leq [nt]} |\Delta_i^n W| \longrightarrow 0$ p.s. On en déduit que, avec une probabilité supérieure à $(1-\varepsilon)$, à partir d'un certain rang,

$$V_n(X^1, X^2)_t - \alpha^{p+q} \sum_{i=1}^{[nt]} 1_{X^1_{i/n} X^1_{(i-1)/n} < 0} 1_{X^2_{i/n} X^2_{(i-1)/n} < 0} = 0.$$

$\frac{1}{\sqrt{n}} V_n^{p,q}(X)_t$ a donc la même limite que $\frac{\alpha^{p+q}}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{[nt]} 1_{\{\sigma W_{i/n} \sigma W_{(i-1)/n} < 0\}}$ (avec $X^1 = \sigma W$). On sait que ce terme converge vers $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \alpha^{p+q} L_t^0(W)$, d'où le résultat.

2.7.2 Cas non dégénéré

Dans ce paragraphe, la norme utilisée sera la norme sup : $||(x,y)|| = |x| \vee |y|$. Nous pouvons pour l'essentiel reprendre le raisonnement ci-dessus ; fixons T et considérons tout d'abord le cas du mouvement brownien standard dans le plan : $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On suppose de plus que X n'est pas issu d'un point de le grille : $P(X_0 \in (\alpha\mathbb{Z})^2) = 0$ (on peut même supposer, puisque la loi de $V^{p,q}(.)$ est invariante par translation de $\alpha k, k \in \mathbb{Z}^2$, que presque sûrement $X_0 \in [0,1]^2$). Pour tout ε, on peut trouver $M(\varepsilon)$ tel que $\mathbb{P}(\sup_{s\leq T} ||X_s|| \geq M(\varepsilon)\alpha) < \varepsilon$. On sait par ailleurs que $\{X_s, s \geq 0\} \cap (\alpha\mathbb{Z})^2 = \emptyset$ p.s. (cf [27]). La trajectoire étant continue, il existe donc pour chacun de ces sommets du maillage une boule $B(\delta_{k,l}(\omega), (k\alpha, l\alpha))$ non atteinte par X sur le compact $[0; T]$. On note $\delta(\varepsilon) = inf\{\delta_{k,l}, (k\alpha, l\alpha), |k|, |l| < M(\varepsilon), (k,l) \neq (0,0)\}$. Vu ce qui précède, on ne peut avoir simultanément $[X_s^1/\alpha] \neq [X_t^1]$ et $[X_s^2/\alpha] \neq [X_t^2/\alpha]$ que si $||X_t - X_s|| \geq \delta(\varepsilon)$. Par continuité des trajectoires, $\sup\{||(X^1, X^2)_{i/n} - (X^1, X^2)_{(i-1)/n}||, 1 \leq i \leq [nT]\} \longrightarrow 0$ p.s. Par conséquent, avec une probabilité supérieure à $1 - \varepsilon$, $V_n^{p,q}(X)_T$ est nul à partir d'un certain rang, qui dépend de la trajectoire. Ceci est valable pour tout $\varepsilon > 0$, donc aussi presque sûrement.

Dès que le déterminant S est non nul, (2.7.1) reste vrai dans le cas général. En effet, les passages de niveaux de X^1 et X^2 se ramènent à des passages de niveaux des deux browniens indépendant W et W', avec un maillage déformé (par S^{-1}), et on peut encore appliquer le raisonnement ci-dessus.

Lorsque le processus X est de la forme $X = X_0 + S.W$, où $X_0/\alpha \notin \mathbb{Z}^2$ p.s., $V_n^{p,q}(X)_t$ est donc nul à partir d'un certain rang, $\mathbb{P}$-p.s.

Remarque. Nous avons supposé ici que X_0 n'appartient pas à $(\alpha\mathbb{Z})^2$. Si au contraire $X_0 = 0$ p.s., nous aurons seulement

$$V_n^{p,q}(X)_t - \alpha^{p+q} \sum_{i=1}^{[nt]} 1_{\{X^1_{i/n} X^1_{(i-1)/n} < 0\}} 1_{\{X^2_{i/n} X^2_{(i-1)/n} < 0\}} = 0 \qquad (2.7.1)$$

à partir d'un certain rang : les seuls passages de niveau simultanés de X^1 et X^2 se produisent autour du niveau 0. Si l'on considère un mouvement brownien plan dont les composantes sont indépendantes, issu de zéro, on peut calculer facilement l'espérance

$$E\left(\sum_{i=1}^{[nt]} 1_{\{W^1_{i/n} W^1_{(i-1)/n} < 0\}} 1_{\{W^2_{i/n} W^2_{(i-1)/n} < 0\}}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{\pi^2} \sum_{i=1}^{[nt]} \arctan^2\left(\frac{1}{\sqrt{i}}\right).$$

Ceci suggère pour $V_n^{p,q}(X)_t$ un comportement en $\ln n$, lorsque $n \to +\infty$ dès que $X_0 \in (\alpha\mathbb{Z})^2$.

A partir de la dimension 3 par contre, aucune renormalisation n'est nécesaire lorsque $X_0 = 0$ p.s., car on a par scaling :

$$\sum_{i=1}^{[nt]} 1_{\{X^1_{i/n} X^1_{(i-1)/n} < 0\}} \times ... \times 1_{\{X^d_{i/n} X^d_{(i-1)/n} < 0\}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \sum_{i\geq 1} 1_{\{X^1_i X^1_{i-1} < 0\}} \times ... \times 1_{\{X^d_i X^d_{i-1} < 0\}},$$

où la convergence a un sens car la limite est une variable aléatoire finie p.s. (à valeurs entières).

Chapitre 3

p-variations de semimartingales discontinues arrondies

Rappelons les notations concernant les arrondis utilisées dans toute la suite : $[x]$ est la partie entière du réel x, $\{x\} = x - [x]$ sa partie fractionnaire, et $\overline{\Delta}_i^n X$ représente l'accroissement $\alpha_n([X_{i/n}/\alpha_n] - [X_{(i-1)/n}/\alpha_n])$ du processus X arrondi à α_n près.

On considère dans cette partie une semimartingale réelle X et une suite de pas d'arrondis $(\alpha_n)_{n\geq 1}$; pour une fonction réelle donnée f, on s'intéresse aux comportements asymptotiques des sommes f-variationnelles avec arrondis de X, notées $V_n(f, X)$, éventuellement renormalisées $(V_n'(f, X))$:

$$V_n(f,X)_t = \sum_{i=1}^{[nt]} f\left(\overline{\Delta}_i^n X\right); \qquad V_n'(f,X)_t = \sum_{i=1}^{[nt]} f\left(\sqrt{n}\,\overline{\Delta}_i^n X\right).$$

Les fonctions les plus couramment utilisées en pratique sont les fonctions puissances, nous noterons dans ce cas particulier $V_n^p(X) = V_n(f, X)$ et $V_n'^p(X) = V_n'(f, X) = n^{p/2} V_n^p(X)$, lorsque f est la fonction : $f(x) = |x|^p$. On supposera dans toute la suite que $\alpha_n \longrightarrow 0$, et que la suite $\beta_n = \sqrt{n}\alpha_n$ converge dans $[0, +\infty]$:

$$\begin{aligned} &\beta_n := \alpha_n \sqrt{n} \\ &\beta_n \longrightarrow \beta \in [0, +\infty], \qquad \alpha_n \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

On note $\inf_n \beta_n = \underline{\beta}$, ainsi que, lorsque $\beta < +\infty$, $\sup_n \beta_n = \overline{\beta}$.

Pour un processus quelconque Z, on notera $Z_t^{(n)} = Z_{[nt]/n}$ les processus discrétisés associés.

On considèrera l'hypothèse classique suivante :

Hypothèse $(\mathcal{H}_1)$**.** *Les caractéristiques* (B, C, ν) *de* X *vérifient*

$$A_t = \int_0^t b_s ds, \qquad C_t = \int_0^t \sigma_s^2 ds, \qquad \nu(dt, dx) = dt F_t(dx)$$

où les processus considérés sont tous supposés adaptés, et σ *est càdlàg positive. De plus,* $|b|$ *et* $\int_{\mathbb{R}} (x^2 \wedge 1) F_t(dx)$ *sont localement bornés et l'ensemble des zéros de* σ *est de mesure de Lebesgue nulle.*

Le processus X est alors une semimartingale d'Itô et, quitte à élargir l'espace Ω, il existe une mesure de Poisson $\underline{p}$, de mesure d'intensité la mesure de Lebesgue $\underline{q} = \mathrm{d}t\mathrm{d}x$ sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, une fonction $\delta : \Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, et un mouvement brownien standard W tels que l'on ait la représentation suivante de X :

$$\begin{aligned} X_t =& X_0 + \int_0^t b_s \mathrm{d}s + \int_0^t \sigma_s \mathrm{d}W_s + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \delta(s,x) 1_{\{|\delta(s,x)|>1\}} \underline{p}(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x) \\ &+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \delta(s,x) 1_{\{|\delta(s,x)|\leq 1\}} (\underline{p} - \underline{q})(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x). \end{aligned} \tag{3.0.1}$$

3.1 Résultats

3.1.1 Lois des grands nombres

Lorsque X est une semimartingale continue, et f à croissance au plus quadratique, on connaît (d'après Delattre [8]) la convergence localement uniforme en probabilité de $\frac{1}{n} V'_n(f, X)$ vers $\int_0^t \Gamma(f, \beta, \sigma_s) \mathrm{d}s$, où l'on a noté, h désignant la densité d'une variable normale centrée réduite,

$$\Gamma(f, \beta, \sigma) := \int_0^1 \int_{\mathbb{R}} h(x) f(\beta[u + \frac{\sigma x}{\beta}]) \mathrm{d}x \mathrm{d}u \text{ si } \beta > 0, \tag{3.1.1}$$

$$\Gamma(f, 0, \sigma) := \int_{\mathbb{R}} h(x) f(\sigma x) \mathrm{d}x. \tag{3.1.2}$$

On notera encore $\Gamma^p(\beta, \sigma) := \Gamma(\beta, \sigma, f)$ lorsque f est la fonction puissance $x \mapsto |x|^p$. Remarquons que $\Gamma(f, \beta, \sigma) < +\infty$ pour toutes les fonctions considérées ici, qui sont au plus à croissance polynomiale.

Par ailleurs, en l'absence d'arrondis, le comportement asymptotique des p-variations de semimartingales est bien connu (cf par exemple [13] qui donne des résultats aussi exhaustifs que possible sur le sujet). Si X est une semimartingale, et f une fonction continue, notons $U_n(f, X)$ et $U'_n(f, X)$ les f-variations de X (non arrondi) :

$$U_n(f, X)_t = \sum_{i=1}^{[nt]} f\left(\Delta_i^n X\right); \qquad U'_n(f, X)_t = \sum_{i=1}^{[nt]} f\left(\sqrt{n}\, \Delta_i^n X\right).$$

Les convergences suivantes sont alors vérifiées :

(i) si X est une semimartingale d'Itô et $f(x) = o_{\pm\infty}(x^2)$ (ou simplement à croissance polynomiale lorsque X est continue), alors,

$$\frac{1}{n} U'_n(f, X)_t \overset{\text{l.u.P}}{\longrightarrow} \int_0^t \Gamma(f, 0, \sigma_s) \mathrm{d}s;$$

(ii)

$$V_n^2(X)_t \overset{Sk\,P}{\longrightarrow} \int_0^t \sigma_s^2 \mathrm{d}s + \sum_{s \leq t} |\Delta X_s|^2;$$

(iii) si f est une fonction continue, telle que $f(x) = \circ(x^2)$ en 0, alors :

$$U_n(f,X)_t \overset{Sk\,P}{\longrightarrow} \sum_{s\leq t} f(\Delta X_s). \tag{3.1.3}$$

Lorsque la semimartingale est de plus entachée d'erreurs d'arrondis, les mêmes cas sont à distinguer. Pour les p-variations renomalisées, la présence d'arrondis modifie la limite :

Théorème 20. *Soit X une semimartingale vérifiant l'hypothèse $\mathcal{H}_1$.*

(i) Supposons que $\beta < +\infty$. Alors, pour toute fonction réelle continue f telle que $f(x) = o_{\pm\infty}(x^2)$, nous avons :

$$\frac{1}{n} V'_n(f,X)_t \overset{l.u.P}{\longrightarrow} \int_0^t \Gamma(f,\beta,\sigma_s)\,ds. \tag{3.1.4}$$

Si on suppose en outre que X est continue, on peut affaiblir l'hypothèse sur f en supposant seulement que f est à croissance polynomiale.

(ii) Supposons que $\beta_n \to +\infty$ et $\alpha_n \to 0$. Alors, pour toute fonction f continue bornée,

$$\frac{1}{n} V'_n(f,X)_t \overset{l.u.P}{\longrightarrow} t f(0). \tag{3.1.5}$$

Remarques. Dans le cas continu, on retrouve la convergence montrée avec des hypothèses légèrement différentes dans [8].

Pour le *(i)*, on peut supposer seulement σ optionnel et non càdlàg. Nous effectuerons la démonstration sous cette hypothèse.

Pour les sommes non renormalisées, par contre, sauf dans le cas limite quadratique, la limite est la même qu'en l'absence d'arrondis.

Théorème 21. *Supposons que X vérifie $\mathcal{H}_1$ et $\beta < +\infty$. Alors*

$$\frac{1}{n} V'^2_n(X)_t = V^2_n(X)_t \overset{Sk\,P}{\longrightarrow} \int_0^t \Gamma^2(\beta,\sigma_s)\,ds + \sum_{s\leq t} |\Delta X_s|^2.$$

Théorème 22. *Si f est une fonction continue, telle que $f(x) = \circ(x^2)$ au voisinage de 0, et telle que de plus $n(|f(\alpha_n)| \vee |f(-\alpha_n)|) \underset{n}{\longrightarrow} 0$, alors dès que $\alpha_n \to 0$, on a :*

$$V_n(f,X)_t \overset{Sk\,P}{\longrightarrow} \sum_{s\leq t} f(\Delta X_s). \tag{3.1.6}$$

Lorsque β_n converge, on retrouve la condition $f(x) = \circ(x^2)$ en 0 requise en l'absence d'arrondis.

En particulier, pour les fonctions puissances, en supposant $\mathcal{H}_1$ vérifiée dans les deux premier cas, on obtient, en supposant de nouveau β fini :

$$\textit{Si } p < 2, \qquad n^{p/2-1} V_n^p(X) \overset{\text{l.u.P}}{\longrightarrow} \int_0^t \Gamma^p(\beta, \sigma_s) \mathrm{d}s \tag{3.1.7}$$

$$\textit{Si } p = 2, \qquad V_n^2(X) \overset{Sk\,P}{\longrightarrow} \int_0^t \Gamma^2(\beta, \sigma_s) \mathrm{d}s + \sum_{s \leq t} |\Delta X_s|^2 \tag{3.1.8}$$

$$\textit{Si } p > 2, \qquad V_n^p(X) \overset{Sk\,P}{\longrightarrow} \sum_{s \leq t} |\Delta X_s|^p \tag{3.1.9}$$

Remarques. Notons que dans le premier cas (théorème 20), on obtient la même limite que celle donnée dans par exemple [8], ce qui est naturel ; en l'absence d'arrondis déjà, la limite obtenue pour $p < 2$ est la même que celle d'une semimartingale continue : l'influence des sauts est, du fait de la renormalisation, négligeable. La renormalisation adéquate est en outre la même que celle requise lorsqu'il n'y a pas d'arrondis ; une nouvelle fois, cela s'explique assez naturellement : l'hypothèse faite sur β revient à considérer que l'erreur d'arrondi et la taille "typique" des accroissements de la semimartingale sont du même ordre de grandeur. Les accroissements de la semimartingale arrondie sont alors encore du même ordre de grandeur que ceux de la semimartingale non arrondie, d'où une renormalisation similaire. Le résultat lorsque β est infini est cohérent avec la limite obtenue lorsque l'on fait tendre β vers l'infini dans (3.1.4) ; il est cependant très insatisfaisant, vu la contrainte sur la fonction f et le peu d'informations données par la limite.

La limite pour les sommes non renormalisée (théorème 22) est par contre celle obtenue en l'absence d'arrondis (cf [13]), avec la même renormalisation (c'est à dire aucune). Ici, les sauts sont prépondérants devant les accroissements du brownien, et l'erreur d'arrondi, dès que $\alpha_n \to 0$, devient négligeable devant la taille des sauts, quel que soit le comportement de β_n. On notera néanmoins que cela n'est vrai qu'au premier ordre, la limite obtenue dans le théorème central limite -lorsqu'il y en a un- étant modifiée par la présence des arrondis, comme indiqué dans la section suivante.

De même qu'en l'absence d'arrondis, l'hypothèse $\mathcal{H}_1$ n'est pas utile lorsque la limite est uniquement due aux sauts, ce qui est assez naturel, la démonstration étant très similaire dans notre cas. Par contre nous avons besoin de cette hypothèse pour obtenir la limite des variations quadratiques, alors qu'en l'absence d'erreur d'arrondis la convergence vers le crochet de la semimartingale s'obtient sans hypothèse supplémentaire.

3.1.2 Une loi des grands nombres dans le cas multidimensionnel

Dans la deuxième partie, nous avons étudié en détail les différents comportements possibles des p, q-variations $\sum_{i=1}^{[nt]} |\overline{\Delta}_i^n X^1|^p |\overline{\Delta}_i^n X^2|^q$ d'un mouvement brownien bidimensionnel, en fonction du rang de la matrice de covariance. A l'aide des résultats préliminaires montrés dans cette deuxième partie, les lois des grands nombres montrées ci-dessus se généralisent assez aisément aux p, q-variations d'une semimartingale bidimensionnelle. Considérons $X = (X^1, X^2)$ une semimartingale bidimensionnelle dont les deux composantes vérifie chacune l'hypothèse $\mathcal{H}_1$. Pour $i = 1$ ou 2, X^i admet alors la décomposition suivante :

$$X_t^i = X_0^i + \int_0^t b_s^i \mathrm{d}s + \int_0^t \sigma_s^i \mathrm{d}W_s + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} 1_{|\delta^i(x)|\leq 1}(\underline{p}^i - \underline{q})(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x) \qquad (3.1.10)$$
$$+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}} 1_{|\delta^i(x)|>1}\underline{p}^i(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x)$$

avec les mêmes notations que précédemment, excepté pour W, σ^1 et σ^2 qui sont à présent bidimensionnels. Il est toujours possible de prendre $p^1 = p^2$, mais cela n'est pas nécessaire pour ce qui suit.

Considérons pour X l'hypothèse suivante :

Hypothèse ($\widetilde{\mathcal{H}}_1$)**.** *Chacune des composantes de* (X, Y) *vérifie* $\mathcal{H}_1$*. De plus* $|Det \begin{pmatrix} \sigma \\ \sigma' \end{pmatrix}|^{-1}$ *est localement borné.*

Notons, pour tous $\rho > 0, \theta, \theta' \in \mathbb{R}^2$, et toutes fonctions f, g pour lesquelles l'intégrale ci-dessous est bien définie (en particulier toute fonction continue à croissance polynomiale) :

$$\Gamma(f, g, \rho, \theta, \theta')$$
$$:= \int_0^1 \int_0^1 \mathrm{d}u\mathrm{d}v \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}y^1 \mathrm{d}y^2 h(y^1)h(y^2) f\left(\rho[u + (y^1, y^2).\theta/\rho]\right) g\left(\rho[v + (y^1, y^2).\theta'/\rho]\right),$$

et, pour toutes fonctions f, g, tous $\beta, t > 0$ et tout entier $n \geq 1$,

$$V_n'(f, g, \beta, X) := \sum_{i=1}^{[nt]} f(\sqrt{n}\, \overline{\Delta}_i^n X^1) g(\sqrt{n}\, \overline{\Delta}_i^n X^2).$$

Nous pouvons à présent énoncer le théorème :

Théorème 23. *Soit* X *une semimartingale bidimensionnelle vérifiant* $\widetilde{\mathcal{H}}_1$*. Supposons que* $0 < \beta < +\infty$*. Soient* f*,* g *deux fonctions telles que* $f(x) = \circ(x^2)$ *et* $g(x) = \circ(x^2)$ *en l'infini. Alors*

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{[nt]} V_n'(f, g, \beta, X) \xrightarrow{l.u.P} \int_0^t \Gamma(f, g, \beta, \sigma_s, \sigma_s') ds.$$

Ce résultat se démontre sans difficulté en suivant la démarche du cas unidimensionnel, grâce au corollaire 15 démontré dans la deuxième partie. Le passage aux dimensions supérieures ne pose en outre pas de problème particulier (sinon la lourdeur des notations...), une fois obtenu le lemme 14 qui généralise à une dimension quelconque le résultat sur l'approximation de la partie fractionnaire d'une variable, lorsque celle-ci a une densité suffisamment régulière.

3.1.3 Théorème central limite

Lorsque la limite est la somme des sauts (i.e. dans le cas de (3.1.6)), avec l'hypothèse supplémentaire $f = \circ_0(x^3)$, il existe, pour les semimartingales non arrondies, un théorème central limite associé avec la vitesse $\frac{1}{\sqrt{n}}$. Ce n'est pas le cas ici. En effet, un terme d'erreur supplémentaire dû aux parties fractionnaires des $\Delta X_s/\alpha_n$ intervient, qui n'a en général pas de limite, comme on peut le constater sur l'exemple élémentaire ci-dessous.

On suppose que $\alpha_n\sqrt{n} = 1$. Posons $X_t = W_t + 1_{[T,+\infty]}(t)$, où W est un mouvement brownien standard et T le premier temps de saut d'un processus de comptage indépendant. Soient par ailleurs m_l une suite d'entiers telle que $\{\sqrt{m_l}\} \to a$, $0 \leq a < 1$, et U, Y deux variables indépendantes (entre elles et de $\mathcal{F}$),suivant respectivement la loi uniforme sur $[0,1]$ et la loi normale centrée réduite. Alors pour tout temps $t > 0$ et toute fonction $\mathcal{C}^1$ telle que $f = \circ_0(x^3)$, on vérifie que :

$$\sqrt{m_l}(V_{m_l}(f,X)_t - f(1)1_{t\geq T}) \xrightarrow[l]{\mathcal{L}} (f'(1)[U+Y+a]-a)1_{t\geq T} \tag{3.1.11}$$

Selon les sous-suites choisies, on peut ainsi trouver des limites de la forme $f'(1)([U + Y+\eta]-\eta)$, pour tout $\eta \in [0,1[$, par exemple en considérant la sous-suite $m_l = n^2+2\eta n$. On ne peut donc espérer obtenir un théorème central limite avec les hypothèses très générales requises dans [13] ; il est par contre possible de prouver un résultat de tension. Introduisons à cet effet l'hypothèse suivante :

Hypothèse $(\mathcal{H}_2)$**.** *$\mathcal{H}_1$ est vérifiée, et de plus il existe une suite croissante de temps d'arrêt τ_n tendant vers $+\infty$ et une suite de fonctions déterministes G_n telles que $|\delta(\omega,t,x)| \leq G_n(x)$ si $t \leq \tau_n(\omega)$ et $\int_{\mathbb{R}} 1 \wedge G_n(x)^2 dx < +\infty$.*

L'hypothèse $\mathcal{H}_2$ est assez classique, et déjà requise lorsqu'il n'y a pas d'arrondis. Notons que la condition supplémentaire sur les sauts est strictement plus forte que la condition sur $\int F_t^2 \wedge 1$ de l'hypothèse $\mathcal{H}_1$. Nous avons alors le

Théorème 24. *Soit X une semimartingale vérifiant $\mathcal{H}_2$, (α_n) une suite de réels positifs tendant vers 0 et A^n une suite de processus adaptés tels que pour tout entier n et tout $(\omega,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+$, $|X_t - A_t^n| \leq \alpha_n$. Soit de plus f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $f(0) = f'(0) = 0$ et de plus $f''(x) = \mathcal{O}(x)$ au voisinage de 0. Si $\beta_n \to +\infty$, on suppose de plus que $|f'|$ est majorée par une fonction g symétrique, croissante sur $\mathbb{R}_+$ et telle que $g(x) = \mathcal{O}(x^2)$ au voisinage de 0, avec de plus $ng(4\alpha_n)$ bornée. Alors la suite de processus*

$$\sqrt{n} \wedge \frac{1}{\alpha_n}\left(U_n(f,A) - \sum_{s\leq[nt]/n} f(\Delta X_s)\right)$$

est tendue, relativement à la topologie de Skorokhod.

Remarquons que la condition supplémentaire lorsque β est infini est automatiquement vérifiée lorsque β est fini. Notons par ailleurs qu'ici la forme particulière de l'erreur n'a aucune importance, seule son amplitude maximale est à prendre en compte. En l'absence d'erreur par exemple nous retrouvons la tension de $\sqrt{n}(U_n(f,X) - \sum_{s\leq[nt]/n} f(\Delta X_s))$. Pour le cas particulier des erreurs d'arrondis auquel nous nous intéressons, nous déduisons du théorème 24 la tension de la suite $\sqrt{n}\wedge\alpha_n^{-1}\Big(V_n(f,X) - \sum_{s\leq[nt]/n} f(\Delta X_s)\Big)$. Il est sans doute possible d'affaiblir l'hypothèse de régularité de la fonction f et de la supposer de classe $\mathcal{C}^2$ sur un voisinage de 0 uniquement et $\mathcal{C}^1$ en-dehors.

Nous avons vu que $\mathcal{H}_2$ ne peut suffire à l'obtention d'un théorème central limite ; un tel théorème est néanmoins envisageable si l'on ajoute des hypothèses sur la structure des sauts. Nous utiliserons l'hypothèse $\mathcal{H}_3$:

Hypothèse ($\mathcal{H}_3$)**.** *$\mathcal{H}_2$ est vérifiée, et de plus la mesure F_t est, en tout temps et pour tout ω, absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. On suppose en outre que σ ne s'annule pas au voisinage des temps de saut et que la convergence vers 0 de $\int_{\mathbb{R}} \delta(x,s)^2 1_{|\delta(x,s)|\leq\eta} dx$ est uniforme en s.*

Remarques. L'hypothèse $\mathcal{H}_3$ est relativement contraignante sur F (donc δ) ; nous n'avons ici qu'une hypothèse suffisante pour que le théorème central limite soit valide, néanmoins on ne peut éviter des hypothèses de régularité (comme nous l'avons vu dans le contre-exemple élémentaire ci-dessus) pour assurer la convergence en loi de la partie fractionnaire de l'amplitude du saut.

Notons par ailleurs que l'hypothèse $\mathcal{H}_3$ présentée ici peut sans doute être très légèrement affaiblie, comme nous le verrons dans la démonstration. Cette hypothèse permet d'assurer la convergence de $\{\Delta X_s/\alpha_n\}$ vers la loi uniforme sur $[0,1]$, or Tukey a amélioré dans [32] le résultat de Kosulajeff en donnant une condition nécessaire et suffisante sur la fonction de répartition F de la variable A pour que la partie fractionnaire de σA converge vers la loi uniforme, à savoir la convergence vers 0 de la transformée de Fourier-Stieltjes de F en $\pm\infty$. (Le résultat de Kosulajeff s'en déduit immédiatement grâce au lemme de Riemann-Lebesgue.) La condition sur les sauts peut aussi être affaiblie puisque en pratique nous ne l'utilisons qu'au voisinage des temps de saut.

L'énoncé du résultat nécessite quelques notations supplémentaires. On considère une extension $(\widetilde{\Omega},\widetilde{\mathcal{F}},\widetilde{P})$ de $(\Omega,\mathcal{F},P)$ sur laquelle sont définies les variables suivantes : les U_q, U'_q et V_q sont des variables uniformes sur $[0,1]$, et les Y_q, Y'_q des variables normales centrées réduites, indépendantes entre elles et indépendantes de $\mathcal{F}$.

On note

$$Z^n(f) := V_n(f,X) - \sum_{s\leq[nt]/n} f(\Delta X_s). \tag{3.1.12}$$

On considère par ailleurs une suite S_q de temps d'arrêt épuisant faiblement les sauts de X. Posons alors

$$\zeta_q = \sigma_{S_q-}\sqrt{V_q}\,Y_q, \qquad \zeta'_q = \sigma_{S_q}\sqrt{1-V_q}\,Y'_q \qquad \text{et } \zeta''_q = \zeta_q + \zeta'_q$$

On définit enfin

$$L_q := [U_q + U'_q 1_{\{\Delta X_{S_q}\neq 0\}} + \zeta''_q/\beta] - U'_q 1_{\{\Delta X_{S_q}\neq 0\}} \quad \text{si } \beta_n \longrightarrow 0<\beta<+\infty, \tag{3.1.13}$$

$$L_q := [U_q + U'_q 1_{\{\Delta X_{S_q}\neq 0\}}] - U'_q 1_{\{\Delta X_{S_q}\neq 0\}} \quad \text{si } \beta_n \longrightarrow +\infty. \tag{3.1.14}$$

Nous pouvons à présent énoncer un théorème central limite associé à (3.1.6) :

Théorème 25. *Soit X une semimartingale vérifiant $\mathcal{H}_3$, soit f une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^1$ et $\mathcal{C}^2$ sur un voisinage de 0 telle que $f''(x) = \circ_0(x)$, et $f(0) = f'(0) = 0$. On suppose toujours que $\alpha_n \to 0$, et de plus, lorsque β_n diverge, on suppose que $|f'|$ est majorée par une fonction g symétrique, croissante sur $\mathbb{R}_+$ vérifiant : $g(x) = \circ(x^2)$ en 0 et $ng(2\alpha_n) \to 0$. Alors*

$$\text{Si } \beta_n \longrightarrow 0,\ \sqrt{n}Z^n(f) \overset{\mathcal{L}\ st}{\longrightarrow} \sum_{S_q \le t} f'(\Delta X_{S_q})\zeta''_q \tag{3.1.15}$$

$$\text{Si } \beta_n \longrightarrow \beta,\ \sqrt{n}Z^n(f) \overset{\mathcal{L}\ st}{\longrightarrow} \sum_{S_q \le t} f'(\Delta X_{S_q})\beta L_q \tag{3.1.16}$$

$$\text{Si } \beta_n \longrightarrow +\infty,\ \frac{1}{\alpha_n}Z^n(f) \overset{\mathcal{L}\ st}{\longrightarrow} \sum_{S_q \le t} f'(\Delta X_{S_q}) L_q \tag{3.1.17}$$

Notons que, si ce théorème central est valable dès que $\alpha_n \longrightarrow 0$, la vitesse de convergence est variable ; elle reste cependant (comme attendu !) inférieure ou égale à la vitesse $\sqrt{n}$ obtenue en l'absence d'arrondis.
Par ailleurs, comme pour la tension, seule la partie concernant la vitesse de convergence des $g(2\alpha_n)$ est une condition supplémentaire lorsque $\beta_n \to +\infty$ par rapport aux conditions lorsque β est fini, et elle est automatiquement vérifiée si β est fini.

Les sommes précédentes sont bien définies, et leurs lois, conditionnellement à $\mathcal{F}$, ne dépendent pas de la suite (S_q) choisie (cf [13] et la démonstration du théorème 25). Nous noterons par la suite $\widetilde{Z}(f)$ cette limite (dont la définition dépend du comportement de β_n considéré).

La limite lorsque $\beta = 0$ est celle déjà connue en l'absence d'arrondis (l'influence des erreurs d'arrondis est donc négligeable). Le remplacement des ζ''_q par les L_q dans les deux autres situations s'explique une nouvelle fois à partir de la forme (0.0.3) des accroissements. En effet, pour un temps de saut donné $S_q \in [(i-1)/n, i/n]$, la contribution à la limite du saut correspondant ΔX_{S_q} proviendra de la différence $\alpha_n[\{X_{(i-1)/n}/\alpha_n\} + \Delta_i^n X/\alpha_n] - \Delta X_{S_q}$, qui vaut encore

$$\alpha_n\left(\left[\{X_{(i-1)/n}/\alpha_n\} + \{\frac{\Delta X_{S_q}}{\alpha_n}\} + \Delta_i^n X/\alpha_n - \frac{\Delta X_{S_q}}{\alpha_n}\right] - \{\frac{\Delta X_{S_q}}{\alpha_n}\}\right). \tag{3.1.18}$$

Les ζ''_q obtenus lorsque $\beta_n \longrightarrow 0$ suivent une loi (conditionnellement à $\mathcal{F}$) gaussienne si σ et X n'ont pas de saut commun et ont pour variance, de manière générale, $(\sigma^2_{S_q^-} + \sigma^2_{S_q})/2$. Ce n'est plus le cas ici, mais nous pouvons toujours calculer les premiers moments des L_q, conditionnellement à $\mathcal{F}$: ces variables sont centrées et leur variance est égale (avec la convention $1/\infty = 0$) à

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{\beta^2}\frac{1}{2}(\sigma^2_{S_q-} + \sigma^2_{S_q}).$$

Il n'est pas évident a priori que ces variables soient centrées ; cela est simplement dû au fait que $E([U+x]) = x$ pour tout réel x. Le processus $\sqrt{n} \wedge \alpha_n Z^n(f)$ converge donc stablement en loi vers une variable dont la variance, conditionnellement à $\mathcal{F}$, est égale à

$$\sum_{S_q \leq t} f'(\Delta X_{S_q})^2 \left((\beta^2 \wedge 1)\frac{1}{6} + (1 \wedge \frac{1}{\beta^2})\frac{1}{2}(\sigma^2_{S_q-} + \sigma^2_{S_q}) \right).$$

Comme attendu, lorsque $\beta = 0$, seuls restent les termes $\frac{1}{2}(\sigma^2_{S_q-} + \sigma^2_{S_q})$, et la variance conditionnelle est celle observée en l'absence d'arrondis. Lorsque l'arrondi est important, dans le sens où $\beta = +\infty$, on constate qu'au contraire les arrondis éliminent l'influence de la partie martingale continue dans la limite. Enfin pour le cas intermédiaire $0 < \beta < +\infty$, la présence d'arrondis entraîne une limite dont la variance est strictement supérieure à celle obtenue en l'absence d'arrondis, et croissante en β.

3.1.4 Perspectives

Ces résultats sont malheureusement incomplets, et en particulier deux éléments manquent ici : d'une part un théorème central limite associé à la première loi des grands nombres (Théorème 20 (i)), et d'autre part certaines convergences lorsque $\beta_n \to +\infty$.

En ce qui concerne un éventuel théorème central limite, dans le cadre diffusif (donc $\sigma_s = \sigma(X_s)$), lorsque $\beta_n \to \beta$, la convergence en loi stable suivante est donnée dans [9] ou [8] :

$$\sqrt{n}(V'_n(f,X))_t - \int_0^t \Gamma(f,\beta,\sigma(X_s))) \overset{\mathcal{L}\text{ st}}{\longrightarrow} \int_0^t E(\widetilde{f}(X_s,U,Y)|\mathcal{F}_s)\mathrm{d}s + \int_0^t \frac{E(\beta[U+\sigma_s Y/\beta]Y|\mathcal{F}_s)}{\sigma_s^2}\mathrm{d}X_s + B',$$

où B' est une certaine martingale continue (définie sur l'espace élargi) dont la variation quadratique est une fonction (connue) de la trajectoire de $\sigma(X_s)$, et $\widetilde{f}(x,u,y) = \frac{\sigma'(x)}{2\sigma(x)}(\frac{y^2}{\sigma(x)^2} - 3)yf(\beta[u+y/\beta])$. La première intégrale est un drift qui est dû à l'ecart entre la densité des accroissements de la diffusion et la densité du brownien par lequel on les approxime. On peut donc s'attendre, s'il y en a une, à une limite similaire, mais avec un drift modifié, défini non plus à partir de la fonction σ mais plutôt en fonction de la trajectoire de σ. La difficulté réside ici dans l'absence (en général) de densité calculable pour les accroissements de la semimartingale.

Les difficultés lorsque $\beta_n \to +\infty$ sont assez similaires : pour une diffusion, un point clé de la démonstration est la comparaison entre la densité des accroissements de la diffusion et celle d'accroissements browniens. Il n'est évidemment plus possible de procéder ainsi avec une semimartingale, et la méthode utilisée lorsque $\beta_n \to +\infty$ consiste, pour étudier l'accroissement $\overline{\Delta}_i^n X$, à remplacer les processus X par un processus proche, mais dont les variations sont browniennes au voisinage du point $(i-1)/n$. Lorsque $\beta_n \to +\infty$, on approche $f(\overline{\Delta}_i^n X)$ par $\Gamma(f,\beta_n,\sigma_{(i-1)/n})$, qui converge simplement vers $f(0)$ lorsque f est bornée. Considérons maintenant un cas simple dans lequel f n'est pas bornée, et $f(0) = 0$ à savoir $f(x) = |x|$. Lorsque $n \to +\infty$, $\beta_n \Gamma(f,\beta_n,\sigma) \underset{n}{\longrightarrow} \sqrt{2/\pi}\sigma$. La renormalisation naturelle pour une loi des grands nombres serait donc non plus en $1/n$, mais en β_n/n, et dans ce cas, les approximations utilisées quand f est bornée ne sont plus suffisamment précises pour assurer la convergence.

3.2 Résultats préliminaires

3.2.1 Localisation

Commençons par montrer que l'on peut se placer sous les hypothèses plus fortes $\mathcal{H}_1'$, $\mathcal{H}_2'$, $\mathcal{H}_3'$ et $\widetilde{\mathcal{H}}_1'$:

Hypothèse ($\mathcal{H}_1'$)**.** *On a* $\mathcal{H}_1$*, et de plus,* σ*,* $|b|$ *et* $|X|$ *sont bornés (par une constante* $M < +\infty$*).*

Hypothèse ($\widetilde{\mathcal{H}}_1'$)**.** *Chacune des composantes de* (X, Y) *vérifie* $\widetilde{\mathcal{H}_1'}$*, et de plus* $\det(\sigma, \sigma')^{-1}$ *est borné.*

Hypothèse ($\mathcal{H}_2'$)**.** *On a* $\mathcal{H}_2$*,* $\mathcal{H}_1'$ *; de plus il existe une fonction* G *bornée vérifiant les mêmes hypothèses que les* G_n*, et en outre* $|\delta(\omega, t, x)| \leq G(x)$ *pour tous* ω, t, x*.*

Hypothèse ($\mathcal{H}_3'$)**.** $\mathcal{H}_2'$ *et* $\mathcal{H}_3$ *sont vérifiées.*

Lemme 26. *Si le théorème 20 (resp. 21, resp. 23, resp 25) est vérifié sous* $\mathcal{H}_1'$ *(resp* $\mathcal{H}_1'$*, resp.* $\widetilde{\mathcal{H}}_1'$*, resp.* $\mathcal{H}_2'$*, resp.* $\mathcal{H}_3'$*), il l'est aussi sous* $\mathcal{H}_1$ *(resp* $\mathcal{H}_1$*, resp.* $\widetilde{\mathcal{H}}_1$*, resp.* $\mathcal{H}_2$*, resp.* $\mathcal{H}_3$*) Si le lemme 31 et le théorème 25 sont vérifiés sous* $\mathcal{H}_2'$*, ils le sont aussi sous* $\mathcal{H}_2$*.*

Les démonstrations de ces résultats seront donc toutes faites sous ces hypothèses globales :$\mathcal{H}_1'$ et $\widetilde{\mathcal{H}}_1'$ pour les lois des grands nombres, $\mathcal{H}_2'$ pour la tension (théorème 24) et $\mathcal{H}_3'$ pour le théorème central limite et le lemme 31.

Démonstration. On reprend la démarche habituelle (cf par exemple [16]). Supposons $\mathcal{H}_1$; il existe alors une suite de temps d'arrêt (T_i) croissant vers $+\infty$ telle que pour tout $s < T_i$, $|\sigma_s|, |b_s|$, $|X_s|$ et $\int_{\mathbb{R}} (x^2 \wedge 1) F_s(\mathrm{d}x)$ et $|\Delta X_s|$ sont majorés par i. On construit des processus $b^i \sigma^i$ de la manière suivante :

$$\sigma_s^i = \sigma_s . 1_{\{s \leq T_i\}}, \; b_s^i = b_s 1_{\{s \leq T_i\}}. \tag{3.2.1}$$

La semimartingale X^i ci-dessous vérifie par construction $\mathcal{H}_1'$:

$$\begin{aligned} X_t^i = X_0 + \int_0^t b_s^i \mathrm{d}s + \int_0^t \sigma_s^i \mathrm{d}W_s + \int_0^{t \wedge T_i} \int_{\mathbb{R}} x 1_{\{1 < |x| \leq i\}} \mu(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x) \\ + \int_0^{t \wedge T_i} \int_{\mathbb{R}} x 1_{\{|x| \leq 1\}} (\mu - \nu)(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x). \end{aligned}$$

De plus, (cf [16]), les X^i ainsi construits coïncident avec X sur $[0, T_i[$:

$$s < T_i \implies X_s^i = X_s \, p.s. \tag{3.2.2}$$

Les sommes variationnelles, en tant que fonctions de la trajectoire de X (non anticipatives) vérifient alors la même propriété : par exemple pour V', $V'_n(f, X^i)_s = V'_n(f, X)_s$ pour tout $s < T_i$, presque sûrement (et pour tout entier n et toute fonction f). Si f_1 vérifie les hypothèses du théorème 20.*(i)* et f_2 celles du *(iii)*, et que l'on suppose le théorème vérifié sous $\mathcal{H}'_1$, alors, pour tout entier i,

$$\frac{1}{n}V'_n(f_1, X^i) \overset{\text{l.u.P}}{\longrightarrow} (\int_0^t \Gamma(f_1, \beta, \sigma_s^i)\mathrm{d}s)_t \tag{3.2.3}$$

$$V_n^2(X^i) \overset{Sk\,P}{\longrightarrow} (\int_0^t \Gamma^2(\beta, \sigma_s)\mathrm{d}s + \sum_{s\leq t} |\Delta X_s^i|^2)_t \tag{3.2.4}$$

$$V_n(f_2, X^i)_t \overset{Sk\,P}{\longrightarrow} (\sum_{s\leq t} f_2(\Delta X_s^i))_t \tag{3.2.5}$$

Posons $\Omega_{i,t} := \{\omega \in \Omega, t < T_i\}$. Considérons par exemple la première convergence. Vu la définition de la convergence localement uniforme en probabilité, il suffit de montrer le résultat pour des processus considérés seulement sur l'intervalle $[0, t]$, pour tout $t > 0$. On peut donc fixer t pour ce qui suit. Pour tout i, sur $\Omega_{i,t}$, on a $\frac{1}{n}V'_n(f_1, X^i)_t = \frac{1}{n}V'_n(f_1, X)_t$ et $\int_0^t \Gamma(f_1, \beta, \sigma_s^i)\mathrm{d}s = \int_0^t \Gamma(f_1, \beta, \sigma_s)\mathrm{d}s$; on conclut en utilisant (3.2.1) et le fait que, pour tout t, $P(\Omega_{i,t}) \underset{i}{\longrightarrow} 1$. On procède de même pour la convergence pour la topologie de Skorokhod, qui est elle aussi locale (i.e. il suffit de montrer la convergence sur $[0, t]$, pour tout $t > 0$).

Pour la convergence stable (et la tension), on définit de même les processus X^i, qui vérifient toujours (3.2.2), ainsi que $\mathcal{H}'_2$, en considérant cette fois-ci les temps d'arrêts $T'_i := T_i \wedge \tau_i$. Considérons par exemple la convergence en loi stable (3.1.15) dans laquelle on notera la limite Z. Il s'agit alors de montrer que pour toute variable aléatoire A $\mathcal{F}$-mesurable bornée et toute fonction H bornée continue sur l'espace de Skorokhod, on a

$$E(AH(\sqrt{n}Z^n)) \underset{n}{\longrightarrow} \widetilde{E}(AH(Z)).$$

On peut encore se restreindre sans perte de généralité à des fonctions H^t telles que $H^t(x)$ dépende uniquement des valeurs prises par x sur le segment $[0, t]$. Pour tout t et tout i, la convergence $E(AH^t(\sqrt{n}Z^{n,i})) \underset{n}{\longrightarrow} \widetilde{E}(AH^t(Z^i))$ est vérifiée par les processus $Z^{n,i}$ et Z^i associés à X^i. Sur l'ensemble $\{t < T_i\}$, pour tout $s \leq t$, on a encore $Z_s^n = Z_s^{n,i}$ et Z_s et Z_s^i ont la même loi conditionnelle, puisque celles-ci ne dépendent que des trajectoires de X et de σ pour le premier et de X^i et σ^i pour le second, sur l'intervalle $[0, s]$.Nous avons donc $E(AH^t(\sqrt{n}Z^n)1_{t<T_i}) \underset{n}{\longrightarrow} \widetilde{E}(AH^t(Z)1_{t<T_i})$ (l'indicatrice introduite étant elle aussi bornée et $\mathcal{F}$-mesurable). On peut conclure en faisant converger i vers l'infini, les variables considérées étant bornées.

□

3.2.2 Résultats préliminaires connus

Rappelons un résultats de [8] que l'on utilisera ; C désigne dans toute la suite une constante, qui peut éventuellement changer de ligne à ligne. On rappelle que h est ici la densité d'une variable normale centrée réduite.

Lemme 27. *(Delattre 1997)*

(i) Soit f une fonction intégrable : $[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$; il existe une constante C indépendante de f telle que

$$\left| \int_{\mathbb{R}} h(x) f(\{x/\alpha\}) dx - \int_0^1 f(u) du \right| \leq C\alpha \int_0^1 |f(u)| du \tag{3.2.6}$$

(ii) Soit f une fonction borélienne bornée, $N \in \mathbb{N} - \{0\}$. Alors, pour tous $\rho, \theta > 0$ et $u \in \mathbb{R}$,

$$\left| \int_{\mathbb{R}} h(x) \int_{\mathbb{R}} h(y) f(\rho[\{u + \frac{\sqrt{N}\theta x}{\rho}\} + \frac{\theta y}{\rho}]) dy dx - \int_0^1 \int_{\mathbb{R}} h(y) f(\rho[v + \theta y/\rho]) dy dv \right|$$
$$\leq \frac{C}{\sqrt{N}} ||f||_\infty .$$

(iii) Pour toute fonction f à croissance au plus polynomiale, la fonction $\theta, \eta \mapsto \Gamma(f, \theta, \eta)$ est continue.

Nous utiliserons surtout l'inégalité (3.2.6) sous la forme une peu plus générale (3.2.7) ci-dessous : soit f intégrable sur $[0,1]$, a un réel. La fonction $g : g(v) = f(\{a+v\})$ et f ont alors même intégrale : $\int_0^1 g(v)\mathrm{d}v = \int_0^1 f(u)\mathrm{d}u$. En appliquant (3.2.6) à la fonction g, on obtient

$$| \int_{\mathbb{R}} h(x) f(\{a + x/\alpha\}) \mathrm{d}x - \int_0^1 f(u) \mathrm{d}u | \leq C\alpha \int_0^1 |f(u)| \mathrm{d}u. \tag{3.2.7}$$

Notons aussi que le majorant du (ii) est très simple et en particulier ne dépend pas des paramètres θ et ρ.

Nous rappelons enfin deux résultats simples permettant de nous ramener à une volatilité continue et inférieurement bornée :

Lemme 28. *On se place sous l'hypothèse $\mathcal{H}_1'$. Alors*

(i) Il existe une suite uniformément bornée de processus $\widetilde{\sigma}^p$ continus tels que

$$E\left(\int_0^t (\sigma_s - \widetilde{\sigma}^p_s)^2 ds \right) \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

(ii) Pour tout $\theta > 0$

$$\frac{1}{\theta^2} E\left(\int_0^t (\sigma_s \vee \theta - \sigma_s)^2 \, ds \right) \underset{\theta\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Rappelons la preuve du *(ii)*, montré avec des hypothèses légèrement plus fortes dans [8]. Pour tout ω et tout $s > 0$,

$$\left(\frac{|\sigma_s| \vee \theta - |\sigma_s|}{\theta} \right)^2 = 1_{\{|\sigma_s| \leq \theta\}} (1 - \frac{|\sigma_s|}{\theta})^2 \leq 1.$$

Sous l'hypothèse $\mathcal{H}_1$, ce terme converge vers 0 pour presque tout s et tout ω lorsque θ tend vers 0. On conclut avec le théorème de Lebesgue.

3.2.3 Remplacement des accroissements de X par des accroissements browniens

Par la suite, les accroissements de X sur un petit intervalle seront souvent remplacés par les accroissements d'un mouvement brownien sur le même intervalle. Cette approximation est légitimée par le lemme 29 ci-dessous. Fixons pour ce qui suit une suite $\widetilde{\sigma}^p$ vérifiant les hypothèses du lemme 28.i. Soient p un entier et $\theta > 0$ un réel, nous noterons ci-dessous, $\widetilde{\sigma}^{p,\theta} = \widetilde{\sigma}^p \vee \theta$ (lorsque p et θ sont supposés fixés, on notera encore abusivement $\widetilde{\sigma} = \widetilde{\sigma}^{p,\theta}$). Définissons les processus

$$\widetilde{X}_s(t) := X_s + \widetilde{\sigma}_s(W_{s+t} - W_s) \text{ et } X'_s(t) = X_{s+t} - \widetilde{X}_s(t), \tag{3.2.8}$$

et, pour tout $0 < \delta < 1/2$, les ensembles

$$K^\delta := [0, \delta] \cup [1 - \delta, 1].$$

Encore une fois, précisons que les processus $\widetilde{X}$ et X' ci-dessus dépendent implicitement de p et de θ. Alors

Lemme 29. *Supposons $\mathcal{H}'_1$ vérifiée et $\underline{\beta} > 0$. Il existe une constante C telle que, pour tous $t > 0$, $0 < \delta \le 1/2$, $0 < \theta \le 1$ et tous $n, j \ge 1$,*

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{[nt]-j+1} E\left(1_{K^{\delta\theta}}(\{\frac{\widetilde{X}_{(i-1)/n}(j/n)}{\alpha_n}\}) \right) \right| \le Ct\delta(\theta + \overline{\beta}) \tag{3.2.9}$$

et

$$\limsup_n \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{[nt]-j+1} P(|X'_{(i-1)/n}(\frac{j}{n})| > \delta\alpha_n) \le \frac{Cj}{\underline{\beta}^2\delta^2} \int_0^t E\left(\sigma_s - \widetilde{\sigma}_s)^2\right) ds. \tag{3.2.10}$$

Démonstration. Supposons dans un premier temps vérifié le lemme 30 suivant :

Lemme 30. *Supposons $\mathcal{H}'_1$. Alors,*

(i) pour tous s, t, $\alpha > 0$ et tout $0 < \tau \le 1/2$,

$$\left| E\left(1_{K^\tau}(\{\frac{\widetilde{X}_s(t)}{\alpha}\}) | \mathcal{F}_s \right) \right| \le C\tau(1 + \frac{\alpha}{\widetilde{\sigma}_s\sqrt{t}}). \tag{3.2.11}$$

(ii) De plus, pour tous $s, t > 0$ et tous $0 < \eta < 1, \tau \le 1$,

$$\begin{aligned} P(|X'_s(t)| > \tau|\mathcal{F}_s) \le & \frac{C}{\tau^2} E\left(\int_s^{s+t} (\sigma_r - \widetilde{\sigma}_s)^2 dr + \int_s^{s+t} \int_{\mathbb{R}} x^2 1_{\{|x|\le\eta\}} \nu(dr, dx) \right) \\ & + \frac{Ct}{\tau}(1 + \frac{1}{\eta}) \end{aligned} \tag{3.2.12}$$

La majoration (3.2.9) est une conséquence immédiate de (3.2.11). Il reste donc à déduire (3.2.10) de (3.2.12). En appliquant (3.2.12) avec $\tau = \delta\alpha_n$, $t = j/n$ et $s = (i-1)/n$, puis en sommant pour un $T > 0$ donné, sur $i = 1...[nT] - j$, on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{[nT]-j} P(|X'_{(i-1)/n}(j/n)| > \alpha_n\delta) \leq{}& \frac{Cj}{\sqrt{n}\beta_n\delta}\left(T + \frac{T}{\eta}\right) \\ &+ \frac{C}{\beta_n^2\delta^2}\sum_{k=0}^{j-1} E\left(\int_{k/n}^{T}(\sigma_r - \widetilde{\sigma}_{([nr]-k)/n})^2 \mathrm{d}r\right) \\ &+ \frac{Cj}{\beta_n^2\delta^2}E\left(\int_0^T\int_{\mathbb{R}} x^2 1_{|x|\leq\eta}\nu(\mathrm{d}r, \mathrm{d}x)\right)\end{aligned} \tag{3.2.13}$$

La première partie du majorant converge vers 0 lorsque $n \to +\infty$. On majore la deuxième par

$$\frac{Cj}{\underline{\beta}^2\delta^2}E\left(\int_0^T(\sigma_r - \widetilde{\sigma_r})^2\mathrm{d}r\right) + \frac{Cj}{\underline{\beta}^2\delta^2}\sum_{k=0}^{j-1}E\left(\int_{k/n}^T(\widetilde{\sigma}_r - \widetilde{\sigma}_{[nr-k]/n})^2\mathrm{d}r\right).$$

Le second terme de cette expression converge lui aussi vers 0 lorsque n croît puisque $\widetilde{\sigma}$ est continue bornée. Les majorations précédentes sont valables pour tout $0 < \eta \leq 1$; il suffit donc pour conclure de prouver que

$$\limsup_n E\left(\int_0^T \mathrm{d}r\int_{\mathbb{R}} x^2 1_{|x|\leq\eta}F_r(\mathrm{d}x)\right) \underset{\eta\to 0}{\longrightarrow} 0. \tag{3.2.14}$$

Fixons ω ; grâce à l'hypothèse $\mathcal{H}'_1$, pour tout $0 \leq r \leq T$, $\int_{\mathbb{R}} x^2 1_{|x|\leq\eta}F_r(\mathrm{d}x) \leq M$. Cette intégrale converge aussi, pour tout r, vers 0 lorsque $\eta \to 0$. Par le théorème de Lebesgue, l'intégrale $\int_0^T \mathrm{d}r\int_{\mathbb{R}} x^2 1_{|x|\leq\eta}F_r(\mathrm{d}x)$ converge aussi vers 0 ; elle est de plus majorée par TM. Ceci est valable pour tout ω, et une nouvelle application du théorème de convergence dominée donne (3.2.14).

□

Il reste à démontrer le lemme 30.

Démonstration du lemme 30. Le premier résultat est une conséquence du lemme 27. En effet,

$$\begin{aligned}|E(1_{K^\tau}(\{\frac{\widetilde{X}_s(t)}{\alpha}\})|\mathcal{F}_s)| &= |\int_{\mathbb{R}} h(x)1_{K^\tau}(\{\frac{X_s + \widetilde{\sigma}_s x\sqrt{t}}{\alpha}\})\mathrm{d}x| \\ &\leq |\int_{\mathbb{R}} h(x)1_{K^\delta}(\{\frac{X_s + \widetilde{\sigma}_s x\sqrt{t}}{\alpha}\})\mathrm{d}x - \int_0^1 1_{K^\tau}(u)\mathrm{d}u| + \int_0^1 1_{K^\tau}(u)\mathrm{d}u \\ &\leq C\frac{\alpha}{\widetilde{\sigma}_s\sqrt{t}}\int_0^1 1_{K^\tau}(u)\mathrm{d}u + 2\delta \\ &\leq C\delta(1 + \frac{\alpha}{\widetilde{\sigma}_s\sqrt{t}}).\end{aligned}$$

Pour traiter la majoration (3.2.12), décomposons X' :

$$\begin{aligned}X'_s(t) = \int_s^{s+t}(\sigma_r - \widetilde{\sigma}_s)\mathrm{d}W_r + \int_s^{s+t} b_r \mathrm{d}r + \int_s^{s+t}\int_{\mathbb{R}} x1_{\{|x|\leq 1\}}(\mu-\nu)(\mathrm{d}r, \mathrm{d}x) \\ + \int_s^{s+t}\int_{\mathbb{R}} x1_{\{|x|>1\}}\mu(\mathrm{d}r, \mathrm{d}x).\end{aligned}$$

Fixons $\eta > 0$ quelconque. Alors, en modifiant la fonction de troncature, on obtient :

$$\begin{aligned}X'_s(t) = \int_s^{s+t}(\sigma_r - \widetilde{\sigma}_s)\mathrm{d}W_r + \int_s^{s+t} b_r \mathrm{d}r - \int_s^{s+t}\int_{\mathbb{R}} x1_{\eta<|x|\leq 1}\nu(\mathrm{d}x, \mathrm{d}r) \\ + \int_s^{s+t}\int_{\mathbb{R}} x1_{|x|>\eta}\mu(\mathrm{d}r, \mathrm{d}x) + \int_s^{s+t}\int_{\mathbb{R}} x1_{|x|\leq\eta}(\mu-\nu)(\mathrm{d}r, \mathrm{d}x).\end{aligned}$$

Il suffit pour conclure de majorer la probabilité pour que chacun de ces cinq termes soit supérieur à $\tau/5$. On étudie ces cinq probabilités séparément, en utilisant l'inégalité de Markov et l'hypothèse $\mathcal{H}'_1$ (pour la quatrième, rappelons que le processus X est supposé borné donc ses sauts le sont aussi) :

$$P\left(|\int_s^{s+t}(\sigma_r - \widetilde{\sigma}_s)\mathrm{d}W_r| > \tau/5\right) \leq \frac{C}{\tau^2}E(\int_s^{s+t}(\sigma_r - \widetilde{\sigma}_s)^2\mathrm{d}r);$$

$$P\left(|\int_s^{s+t} b_r\mathrm{d}r| > \tau/5\right) \leq \frac{C}{\tau}\int_s^{s+t} E(|b_r|)\mathrm{d}r \leq \frac{Ct}{\tau};$$

$$P\left(|\int_s^{s+t}\int_{\mathbb{R}} |x|1_{\eta<|x|\leq 1}\nu(\mathrm{d}r, \mathrm{d}x)| > \tau/5\right) \leq \frac{5}{\tau\eta}\int_s^{s+t} E\left(\int_{\mathbb{R}} x^2 1_{|x|<1}\nu(\mathrm{d}r, \mathrm{d}x)\right) \leq \frac{Ct}{\tau\eta};$$

$$P\left(|\int_s^{s+t}\int_{\mathbb{R}} |x|1_{|x|>\eta}\mu(\mathrm{d}r, \mathrm{d}x)| > \tau/5\right) \leq E(\frac{5}{\tau\eta}\int_s^{s+t}\int_{\mathbb{R}} x^2\nu(\mathrm{d}r, \mathrm{d}x)) \leq \frac{Ct}{\tau\eta};$$

$$\begin{aligned}P\left(|\int_s^{t}\int_{\mathbb{R}} x1_{|x|\leq\eta}(\mu-\nu)(\mathrm{d}r, \mathrm{d}x)| > \tau/5\right) &\leq E\left(\frac{25}{\tau^2}\left(\int_s^{t}\int_{\mathbb{R}} x1_{\{|x|<\eta\}}(\mu-\nu)(\mathrm{d}r, \mathrm{d}x)\right)^2\right) \\ &\leq E(\frac{25}{\tau^2}\int_s^{t}\int_{\mathbb{R}} x^2 1_{|x|\leq\eta}\nu(\mathrm{d}r, \mathrm{d}x)). \qquad (3.2.15)\end{aligned}$$

On obtient le résultat voulu en rassemblant ces cinq majorations.

□

3.3 Preuve des lois des grands nombres pour les p-variations renormalisées

3.3.1 Le cas $\beta_n \to 0$ (Théorème 20.i)

Nous traitons ici le cas $\beta = 0$, pour lequel la démonstration du cas général n'est pas valable, en nous ramenant à la convergence bien connue lorsqu'il n'y a pas d'arrondi (cf [13]). Sous l'hypothèse $\mathcal{H}'_1$, nous allons montrer dans un premier temps que $\frac{1}{n}V'_n(f,X)$ converge localement uniformément, en probabilité, vers $\int_0^t \Gamma(f,0,\sigma_s)\mathrm{d}s$ pour toute fonction f uniformément continue, puis nous en déduirons le résultat pour toute fonction continue telle que $f(x) = \circ(x^2)$ en l'infini.

1. f uniformément continue
   Supposons dans un premier temps f uniformément continue. Il suffit alors de remarquer que $|\overline{\Delta}_i^n X - \Delta_i^n X| \leq \alpha_n$. On en déduit la majoration :
   $$|\frac{1}{n}V'(f,X)_t - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{[nt]} f(\sqrt{n}\Delta_i^n X)| \leq t \sup_{s\in\mathbb{R},\varepsilon\leq\beta_n} |f(s+\varepsilon) - f(s)|.$$
   Puisque $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{[nt]} f(\sqrt{n}\Delta_i^n X)$ converge localement uniformément en probabilité vers $\int_0^t \Gamma(f,0,\sigma_s)\mathrm{d}s$, il en va de même de $n^{-1}V'(f,X)$, grâce à l'uniforme continuité de f.
2. Cas général
   Supposons à présent f continue et telle que $f(x) = \circ(x^2)$ en l'infini. Notons, pour $a > 0$, $\widetilde{f}_a$ la fonction continue égale à f sur $]-a,a[$ et constante en dehors, qui est uniformément continue. Vu ce qui précède, on a la convergence de $\frac{1}{n}V'_n(\widetilde{f}_a, X)$ vers $\Gamma(\widetilde{f}_a, 0, \sigma)_t$. Il reste à vérifier que d'une part, pour tout $a > 0$,
   $$\int_0^t \Gamma(\widetilde{f}_a, 0, \sigma_s)\mathrm{d}s \overset{\text{l.u.P}}{\underset{a\to 0}{\longrightarrow}} \int_0^t \Gamma(f,0,\sigma_s)\mathrm{d}s \tag{3.3.1}$$
   et que d'autre part, pour tout $\tau, \eta > 0$, il existe $a_0 > 0$, $n_0 \geq 1$, $\forall a \geq a_0, n \geq n_0$,
   $$P(\sup_{s\leq t} \frac{1}{n}|V'_n(f - \widetilde{f}_a, X)_s| > \tau) \leq \eta. \tag{3.3.2}$$

Pour tous $0 \leq u < 1$, $x \in \mathbb{R}$, on a : $|[u+x]| \leq |x| + 1$, donc, pour tout $\gamma > 0$,
$$|(f - \widetilde{f}_a)(\gamma[u+x])| \leq (|f(\gamma[u+x])| + |f(a)| \vee |f(-a)|)1_{\{\gamma|x|>a-\gamma\}}. \tag{3.3.3}$$

Puisque $f(x) = \circ_\infty(x^2)$, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe M' vérifiant : $\forall x \geq M'$, $|f(x)| \leq \varepsilon x^2$. On en déduit que pour tous $0 \leq u < 1$, $x \in \mathbb{R}$, $\gamma > 0$ et tout a suffisamment grand (i.e. $a \geq M' + \gamma$),
$$|(f - \widetilde{f}_a)(\gamma[u+x])| \leq 4\varepsilon\gamma^2(1+x^2)1_{\{\gamma|x|>a-\gamma\}}; \tag{3.3.4}$$
$$|(f - \widetilde{f}_a)(x)| \leq 2\varepsilon x^2 1_{|x|\geq a}. \tag{3.3.5}$$

De (3.3.5) on déduit

$$\sup_{s\leq t}\left|\int_0^s \Gamma(f-\widetilde{f}_a,0,\sigma_r)\mathrm{d}r\right| \leq 2\varepsilon\int_0^t \sigma_s^2\left(\int_{|x|\geq a} h(x)x^2\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}s.$$

Sous l'hypothèse $\mathcal{H}_1'$, σ est borné, la convergence presque sûre du membre de gauche vers 0 en découle par le théorème de Lebesgue, donc a fortiori (3.3.1).

De (3.3.4) nous déduisons par ailleurs qu'il existe une constante C_1 telle que, pour tout $a \geq M' - \overline{\beta}$,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{[nt]}\left|(f-\widetilde{f}_a)(\sqrt{n}\,\overline{\Delta}_i^n X)\right| \leq C_1\varepsilon(t\overline{\beta}^2 + \sum_{i=1}^{[nt]}|\Delta_i^n X|^2). \tag{3.3.6}$$

La somme des carrés des accroissements $\sum\limits_{i=1}^{[nt]}|\Delta_i^n X|^2$ converge en probabilité, donc est tendue. Il existe donc un réel $K>0$ et un entier $n_0 \geq 1$ tels que, pour tout $n \geq n_0$, nous ayons

$$P(\sum_{i=1}^{[nt]}(\Delta_i^n X)^2 \geq t(K-1)) \leq \eta/2.$$

On choisit alors $\varepsilon > 0$ tel que $C_1\varepsilon tK \leq \tau$. Il reste à fixer $a_0 \geq M'(\varepsilon)$, et pour tous $a \geq a_0$, $n \geq n_0$ on a bien (3.3.2).

3.3.2 Le cas $0 < \beta < +\infty$

La démarche globale est la même que lorsque X est continu (cf [8]) : pour contourner l'absence de densité des accroissement (contrairement au cas brownien ou diffusif) on approche chaque terme $f(\overline{\Delta}_i^n X)$ par $f(\overline{\Delta}_N^n \widetilde{X}_{(i-N)/n})$ pour se ramener à des accroissements ayant une densité, ce qui permet d'utiliser les résultats de convergence des parties fractionnaires énoncés précédemment.

Dans un premier temps, nous allons montrer (3.1.4) lorsque f est bornée, puis nous en déduirons le cas général, et enfin le cas où X est continu.

Démonstration lorsque f est bornée

Soit f une fonction réelle bornée continue, et $M_f := \sup|f|$. Montrons la convergence $\frac{1}{n}V_n'(f,X)_t \overset{\text{l.u.P}}{\longrightarrow} \int_0^t \Gamma(f,\beta,\sigma_s)\mathrm{d}s$, en reprenant la démarche de [8] dans le cas des semimartingales continues.

Pour un entier $N \geq 2$ donné, décomposons :

$$\frac{1}{n}V_n'(f,X)_s - \int_0^s \Gamma(f,\beta,\sigma_s)\mathrm{d}s = R_t^n + A_t^n + B_t^n + C_t^n, \tag{3.3.7}$$

avec, pour tout $s \geq N/n$,

$$R_s^n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{(N-1)} f(\sqrt{n}\,\overline{\Delta}_i^n X), \tag{3.3.8}$$

$$A_s^n := \frac{1}{n} \sum_{i=N}^{[ns]} f\left(\sqrt{n}\,\overline{\Delta}_i^n X\right) - E\left(f\left(\sqrt{n}\,\overline{\Delta}_N^n \widetilde{X}_{(i-N)/n}\right) | \mathcal{F}_{(i-N)/n}\right), \tag{3.3.9}$$

$$B_s^n := \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{[ns]-N} E\left(f(\sqrt{n}\,\overline{\Delta}_N^n \widetilde{X}_{i/n}) - \Gamma(f, \beta_n, \widetilde{\sigma}_{i/n}) | \mathcal{F}_{i/n}\right), \tag{3.3.10}$$

$$C_s^n := \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{[ns]-N} \Gamma(f, \beta_n, \widetilde{\sigma}_{i/n}) - \int_0^s \Gamma(f, \beta, \sigma_r)\mathrm{d}r. \tag{3.3.11}$$

Si $s < N/n$, on pose simplement $R_s^n = V_n'(f, X)_t/n$ et $A_s^n = B_s^n = C_s^n = 0$.

Notons que ces variables dépendent toutes de N et que A_s^n et B_s^n dépendent en outre de p et de θ. Nous les noterons le cas échéant $R_s^n(N)$, $C_s^n(N)$, $A_t^n(N, p, \theta)$ et $B_t^n(N, p, \theta)$.

Nous allons montrer que

$$\lim_N \limsup_\theta \limsup_p \limsup_n E\left(\sup_{s \leq t} \left| R_s^n(N) + A_s^n(N, p, \theta) + B_s^n(N, p, \theta) + C_s^n(N) \right| \right) = 0. \tag{3.3.12}$$

Pour cela, vérifions les quatre convergences ci-dessous :

$$\begin{cases} \forall N, \lim_{n \to +\infty} E(\sup_{s \leq t} |R_s^n(N)|) = 0 & (3.3.13a) \\ \forall N, \lim_{\theta \to 0} \limsup_{p \to +\infty} \limsup_n E(\sup_{s \leq t} |A_s^n(N, p, \theta)|) = 0 & (3.3.13b) \\ \lim_N \limsup_n \sup_{p,\theta} E(\sup_{s \leq t} |B_s^n(N, p, \theta)|) = 0 & (3.3.13c) \\ \forall N, \lim_n E(\sup_{s \leq t} |C_s^n(N)|) = 0 & (3.3.13d) \end{cases}$$

Montrons dans un premier temps les convergences de R_s^n, B_s^n et C_s^n. Le reste $R_t^n(N)$ est majoré par $M_f(N/n)$, d'où (3.3.13a). La convergence (3.3.13c) des B_t^n est une conséquence du lemme 27 ii, une fois explicités les termes de B_t^n sous la forme :

$$\begin{aligned} f(\sqrt{n}\,\overline{\Delta}_N^n \widetilde{X}_{i/n}) &- \Gamma(f, \beta_n, \widetilde{\sigma}_{i/n}) \\ &= f\left(\beta_n \left[\left\{\frac{X_{i/n} + \widetilde{\sigma}_{i/n}(W_{(i+N-1)/n} - W_{i/n})}{\alpha_n}\right\} + \widetilde{\sigma}_{i/n} \frac{\Delta_{i+N}^n W}{\alpha_n}\right]\right) \\ &\qquad - \int_0^1 \int_{\mathbb{R}} h(x) f(\beta_n[u + \frac{\widetilde{\sigma}_{i/n} x}{\alpha_n}])\mathrm{d}x\mathrm{d}u. \end{aligned}$$

Par application du lemme, il existe une constante C, telle que pour tous N, p, θ, $s \leq t$, et $n \geq N/s$,

$$E(|B_s^n(N)|) \leq C M_f \frac{t}{\sqrt{N}}.$$

On en déduit (3.3.13c). La fonction $(\beta,\sigma) \mapsto \Gamma(f,\beta,\sigma)$ est continue, et σ càdlàg donc $s \mapsto \Gamma(f,\beta,\sigma_s)$ l'est aussi, d'où la convergence (localement uniforme) des sommes de Riemann : $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{[nt]}\Gamma(f,\beta_n,\widetilde{\sigma}_{i/n})$ vers $\int_0^t \Gamma(f,\beta,\sigma_s)\mathrm{d}s$, i.e. $C_t^n(N) \xrightarrow{\text{l.u.P}} 0$.

Il reste à montrer (3.3.13b). Posons

$$A_s'^n := \frac{1}{n}\sum_{i=N}^{[ns]} f\left(\sqrt{n}\,\overline{\Delta}_i^n X\right) - f\left(\sqrt{n}\,\overline{\Delta}_N^n \widetilde{X}_{(i-N)/n}\right).$$

Si l'on note encore

$$\mu_{i,k}^{n,N} := f(\sqrt{n}\Delta_N^n \widetilde{X}_{(k+iN)/n}) - E\left(f(\sqrt{n}\Delta_N^n X_{(k+iN)/n})|\mathcal{F}_{(k+iN)/n}\right),$$

la différence $A_s^n - A_s'^n$ se décompose sous la forme $A_s^n - A_s'^n = n^{-1}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{i=1}^{[(ns-k)/N]}\mu_{i,k}^{n,N}$. On en déduit que

$$E\left((A_s^n - A_s'^n)^2\right) \leq \frac{N}{n^2}\sum_{k=1}^{N} E\left(\left(\sum_{i=1}^{[(ns-k)/N]}\mu_{i,k}^n\right)^2\right)$$

par l'inégalité de Jensen. Les sommes $\sum_{i=1}^{[(ns-k)/n]}\mu_{i,k}^{n,N}$ étant des martingales (relativement à la filtration $(\mathcal{F}_{[nt]/n})$), et f bornée, nous obtenons la majorations suivante :

$$E\left((A_s^n - A_s'^n)^2\right) \leq \frac{CsN^2}{n}.$$

On a donc $E(\sup_{s\leq t}|A_s'^n - A_s^n|) \underset{n}{\longrightarrow} 0$ pour tous N,θ, et il suffit de montrer la convergence (3.3.13b) en remplaçant A_s^n par A_s^n. Majorons alors $E(\sup_{s\leq t}|A_s'^n|)$ par

$$\frac{1}{n}\sum_{i=N}^{[nt]} E(|f(\sqrt{n}\,\overline{\Delta}_i^n X) - f(\sqrt{n}\,\overline{\Delta}_N^n \widetilde{X}_{(i-N)/n})|).$$

Il reste à étudier les termes de cette somme. f est supposée bornée, donc

$$E\left(\left|f(\sqrt{n}\,\overline{\Delta}_i^n X) - f(\sqrt{n}\Delta_N^n \widetilde{X}_{(i-N)/n}^{\alpha_n})\right|\right) \leq 2\sup|f| P(\overline{\Delta}_i^n X \neq \Delta_N^n \widetilde{X}_{(i-N)/n}^{\alpha_n}). \quad (3.3.14)$$

Vu la forme (0.0.3) des accroissements, l'inégalité $\overline{\Delta}_i^n X \neq \overline{\Delta}_N^n \widetilde{X}_{(i-N)/n}$ est équivalente à

$$[\{\frac{X_{(i-1)/n}}{\alpha_n}\} + \frac{\Delta_i^n X}{\alpha_n}] \neq [\{\frac{\widetilde{X}_{(i-N)/n}((N-1)/n)}{\alpha_n}\} + \frac{\widetilde{\sigma}_{(i-N)/n}\Delta_i^n W}{\alpha_n}].$$

Pour des réels quelconques a, a', b, b', on a :

$$\left.\begin{array}{c} |b-b'| < \delta\theta/2 \\ |a-a'| < \delta\theta/2 \\ \{a'\} \notin K^{\delta\theta} \\ \{a'+b'\} \notin K^{\delta\theta} \end{array}\right\} \Longrightarrow [\{a\}+b] = [\{a'\}+b'],$$

donc, pour des variables aléatoires réelles a, a', b et b',

$$P([\{a\}+b] \neq [\{a'\}+b']) \leq P(|a-a'| \geq \frac{\delta\theta}{2}) + P(|b-b'| \geq \frac{\delta\theta}{2}) \\ + P(\{a'\} \in K^{\delta\theta}) + P(\{a'+b'\} \in K^{\delta\theta}).$$

Par conséquent, si l'on note

$$\begin{cases} a_i^n := \frac{X_{(i-1)/n}}{\alpha_n}, & b_i^n := \frac{\Delta_i^n X}{\alpha_n} \\ a_i'^n := \frac{\widetilde{X}_{(i-N)/n}(\frac{N-1}{n})}{\alpha_n}, & b_i'^n := \widetilde{\sigma}_{(i-N)/n}\frac{\Delta_i^n W}{\alpha_n}, \end{cases} \tag{3.3.15}$$

on obtient, vu (3.3.14),

$$|E(A_s'^n)| \leq 2M_f E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=N}^{[nt]}\left(P(|a_i^n - a_i'^n| \geq \frac{\delta\theta}{2}) + P(|b_i^n - b_i'^n| \geq \frac{\delta\theta}{2})\right.\right. \\ \left.\left. + P(\{a_i'^n\} \in K^{\delta\theta}) + P(\{a_i'^n + b_i'^n\} \in K^{\delta\theta})\right)\right). \tag{3.3.16}$$

Il reste à majorer ces probabilités ; on a $\alpha_n(b_i^n - b_i'^n) = \Delta_N^n X'_{(i-N)/n}$ et $\alpha_n(a_i^n - a_i'^n) = X'_{(i-N)/n}(\frac{N-1}{n})$; par application de (3.2.10) (la partie concernant les b_i^n se déduit du lemme 30 de la même manière que (3.2.10)), il existe une constante C telle que :

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=N}^{[nt]} P(|a_i^n - a_i'^n| \geq \frac{\delta\theta}{2}) + P(|b_i^n - b_i'^n| \geq \frac{\delta\theta}{2}) \leq \frac{CN}{\delta^2\theta^2}E\left(\int_0^t (\sigma_s - \widetilde{\sigma}_s)^2 \mathrm{d}s\right);$$

on déduit par ailleurs du lemme 29 (3.2.9) une majoration des deux autres termes :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=N}^{[nt]} P(\{a_i'^n\} \in K^{\delta\theta}) + P(\{a_i'^n + b_i'^n\} \in K^{\delta\theta}) \leq Ct\delta(\theta + \overline{\beta}).$$

La limite supérieure (en n) de $|A_t^n|$ est donc majorée par

$$CM_f(t\delta(\theta+\overline{\beta})) + \frac{CN}{\delta^2\theta^2}E(\int_0^t (\sigma_s - \widetilde{\sigma}_s)^2\mathrm{d}s)).$$

Rappelons que $\widetilde{\sigma}_s = \widetilde{\sigma}_s^p \vee \theta$; on obtient alors

$$\frac{1}{\theta^2}E(\int_0^t (\sigma_s - \widetilde{\sigma}_s)^2\mathrm{d}s) \leq \frac{2}{\theta^2}E(\int_0^t (\sigma_s - \widetilde{\sigma}_s^p)^2\mathrm{d}s) + \frac{2}{\theta^2}E(\int_0^t (\sigma_s - \sigma_s \vee \theta)^2\mathrm{d}s)$$

Vues les convergences *(i)* et *(ii)* du lemme 27, le premier terme du majorant converge vers 0 lorsque $p \to +\infty$, le second lorsque $\theta \to 0$. Ceci étant valable pour tout $0 < \delta \leq 1$, on obtient finalement (3.3.13b).

Nous avons montré (3.3.12), le théorème 20.i est donc vrai pour toute fonction f continue bornée.

Cas général

Soit à présent f une fonction continue, telle que $f(x)/x^2 \underset{\infty}{\to} 0$. On fixe une famille $(\psi_a)_{a>0}$ de fonctions positives uniformément bornées et de classe $\mathcal{C}^1$, à valeurs dans $[0,1]$, égales à 1 sur $[-a,a]$ et nulles en dehors de $[-a-1,a+1]$.

Alors pour tout $a>0$, $f\psi_a$ est continue bornée ; donc

$$\frac{1}{n}V'_n(f\psi_a,X)_t \overset{\text{l.u.P}}{\longrightarrow} \int_0^t \Gamma(f\psi_a,\beta,\sigma_s)\mathrm{d}s. \tag{3.3.17}$$

Nous pouvons reprendre ensuite les arguments utilisés lorsque $\beta=0$, ainsi que la notation $M'(\varepsilon)$; au lieu de (3.3.3), nous avons simplement, pour tous $x\in\mathbb{R}$, $0\le u<1$, $\gamma>0$:

$$|f(1-\psi)(\gamma[u+x])| \le |f|(\gamma[u+x])1_{\{\gamma|x|>a-\gamma\}}. \tag{3.3.18}$$

Pour tous $\varepsilon>0$, $\sigma>0$ et $a\ge M'(\varepsilon)$, nous en déduisons :

$$|\Gamma(f(1-\psi_a),\beta,\sigma)| \le C\varepsilon\int_{\mathbb{R}} h(x)\beta^2(\sigma^2/\beta^2x^2+1)1_{|x|>(a-2)/\sigma}\mathrm{d}x.$$

Ce dernier terme converge vers 0 lorsque $a\to+\infty$, uniformément par rapport à $\sigma\in[0,M]$ (l'extension à $\sigma=0$ est évidente, puisque $\Gamma(g,\beta,0)$ est nul dès que $g(0)=0$). On obtient par application du théorème de Lebesgue

$$\int_0^t \Gamma(|f(1-\psi_a),\beta,\sigma_s)\mathrm{d}s \underset{a\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{3.3.19}$$

La convergence est vraie pour tout ω. Le raisonnement concernant les V'^n effectué lorsque $\beta=0$ est toujours valable, puisque l'on a ici, vu (3.3.18),

$$|(f(1-\psi_a))(\beta_n[u+x])| \le 2\varepsilon\beta_n^2(1+x^2)1_{\{\beta_n|x|>a-\beta_n\}},$$

dès que $a\ge M'(\varepsilon)+\beta_n$. De nouveau, pour tout $\tau>0$, $\eta>0$, nous pouvons trouver $a_0>0$ et $n_0\ge1$ tels que pour tout $a\ge a_0$, $n\ge n_0$,

$$P\left(\sup_{s\le t}\frac{1}{n}|V'_n(f(1-\psi_a),X)_t|>\tau\right)\le\eta. \tag{3.3.20}$$

On conclut en rassemblant (3.3.17), (3.3.19) et (3.3.20).

Cas où X est continu

Montrons enfin la seconde partie de la proposition 3.1.4. Si X est continue et f à croissance au plus polynomiale, on a toujours (3.3.17) et

$$\int_0^t \Gamma(f\psi_a,\beta,\sigma_s)\mathrm{d}s \underset{a\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^t \Gamma(f,\beta,\sigma_s)\mathrm{d}s$$

par convergence dominée. Fixons $q \geq 1$. En revenant à (3.3.18), on obtient :

$$\begin{aligned}
|\frac{1}{n}V'_n(X, f(1-\psi_a))| &\leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{[nt]}(f(1-\psi_a))(\sqrt{n}\,\overline{\Delta}_i^n X)1_{|\Delta_i^n X|>(a-2\overline{\beta})/\sqrt{n}} \quad (3.3.21)\\
&\leq \frac{C}{n}\sum_{i=1}^{[nt]}(1+n^{p/2}|\overline{\Delta}_i^n X|^q)1_{\{|\Delta_i^n X|>(a-2)\overline{\beta}/\sqrt{n}\}}\\
&\leq \frac{C}{n}\sum_{i=1}^{[nt]}(\overline{\beta}^q+n^{q/2}|\Delta_i^n X|^q)1_{|\Delta_i^n X|>(a-2\overline{\beta})/\sqrt{n}}\\
&\leq \frac{C}{a-2\overline{\beta}}\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{[nt]}\big(\sqrt{n}|\Delta_i^n X|+(\sqrt{n}|\Delta_i^n X|)^{q+1}\big)\Big)
\end{aligned}$$

D'après [13], cette dernière somme converge, localement uniformément en probabilité, vers

$$\frac{C}{a-\overline{\beta}}\int_0^t\int_{\mathbb{R}} h(x)(\sigma_s x+(\sigma_s x)^{p+1})\mathrm{d}x\mathrm{d}s.$$

La constante C ne dépend que de la suite α_n et de q et σ est supposé borné ; on conclut donc en faisant tendre a vers $+\infty$.

3.3.3 Le cas β infini

La preuve lorsque $\beta_n \to +\infty$ est proche de celle utilisée pour β fini, néanmoins certaines majorations un peu grossières utilisées précédemment ne sont plus suffisantes ici. Reprenons la décomposition (3.3.7), en modifiant seulement le dernier terme :

$$\frac{1}{n}V'_n(f,X)_t - tf(0) = R_t^n + A_t^n + B_t^n + D_t^n, \qquad (3.3.22)$$

où $R_t^n(N)$, $A_t^n(N,\theta)$ et $B_t^n(N,\theta)$ sont définis comme dans la section précédente, et

$$D_t^n(N) := \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{[ns]-N}\Gamma(f,\beta_n,\widetilde{\sigma}_{i/n}) - tf(0). \qquad (3.3.23)$$

Nous pouvons considérer ici $\widetilde{\sigma} := \sigma\vee\theta$, ce qui sera suffisant pour la démonstration car nous avons supposé σ càdlàg. Il suffit de nouveau d'étudier $A_t'^n$ au lieu de A_t^n ; en reprenant les notations précédentes pour les a_i^n, b_i^n, $a_i'^n$ et $b_i'^n$, nous avons toujours les majorations :

$$E(\sup_{s\leq t}|R_i^n(N)|) \leq \sup|f|\frac{N}{n},$$

$$E(\sup_{s\leq t}|B_i^n(N,\theta)|) \leq C\sup|f|\frac{t}{\sqrt{N}}$$

et, pour tout $0 < \delta < 1/2$,

$$E(\sup_{s\leq t}|A_s'^n|)| \leq 2\sup|f|E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{[nt]}\left(P(|a_i^n - a_i'^n| \geq \frac{\delta\theta}{2}) + P(|b_i^n - b_i'^n| \geq \frac{\delta\theta}{2}) \right.\right. \tag{3.3.24}$$
$$\left.\left. + P(\{a_i'^n\} \in K^{\delta\theta}) + P(\{a_i'^n + b_i'^n\} \in K^{\delta\theta})\right)\right).$$

Par la suite, nous remplacerons les constantes δ, η et θ par des suites δ_n, η_n et θ_n. Les processus A^n et B^n ne dépendent alors plus que de deux paramètres : n et N. Vus les lemmes 29 et 30, il existe une constante C (qui peut dépendre de f) telle que $E(\sup_{s\leq t}|A_s^n|)|$ ait pour majorant :

$$\begin{aligned}
&\frac{C}{\beta_n^2\delta_n^2\theta_n^2}E\left(\sum_{k=0}^{N-1}\int_{k/n}^t(\sigma_r - \sigma_{([nr]-k)/n})^2\mathrm{d}r\right.\\
&\qquad\left. +N\int_0^t(\sigma_r - \sigma_r\vee\theta_n)^2\mathrm{d}r + N\int_0^t\int_{\mathbb{R}}x^2 1_{\{|x|\leq\eta_n\}}\nu(\mathrm{d}r,\mathrm{d}x)\right)\\
&\qquad + \frac{CN}{\sqrt{n}\beta_n\delta_n\theta_n}E\left(\int_0^t|b_r|\mathrm{d}r + \frac{1}{\eta_n}\int_0^t\int_{\mathbb{R}}x^2 1_{\{|x|>\eta_n\}}\nu(\mathrm{d}r,\mathrm{d}x)\right)\\
&\qquad + Ct\delta_n(\theta_n+\beta_n)\\
= &\frac{C}{\beta_n^2\delta_n^2\theta_n^2}\left(\kappa_1^n(N) + \kappa_2^n(N) + \kappa_3^n(N)\right) + \frac{CN}{\sqrt{n}\beta_n\delta_n\theta_n}\left(\kappa_4^n(N) + \kappa_5^n(N)\right) + Ct\delta_n(\theta_n+\beta_n),
\end{aligned}$$

Notons $\kappa_1^n(N) := E\left(\sum_{k=0}^{N-1}\int_{k/n}^t(\sigma_r - \sigma_{([nr]-k)/n})^2\mathrm{d}r\right)$ et κ_2^n, κ_3^n, κ_4, κ_5^n les quatre autres espérances d'intégrales intervenant dans le majorant ci-dessus. Le processus σ étant supposé càdlàg et borné, grâce au théorème de Lebesgue, $\kappa_1^n \longrightarrow 0$; la suite κ_2^n/θ_n^2 converge elle aussi vers 0 vu le lemme 28. La suite κ_3^n converge quant-à-elle vers 0 dès que $\eta_n \to 0$, et κ_4 ne dépend pas de n. Enfin, la suite κ_5^n est majorée par C/η_n.

Nous pouvons à présent choisir une suite η_n telle que $\sqrt{n}\eta_n \to +\infty$, puis une suite θ_n telle que $\theta_n \to 0$ et $(\kappa_1^n + \kappa_3^n + \frac{1}{n\eta_n^2})/\theta_n^2 \to 0$. Enfin, on choisit δ_n telle que $\beta_n\delta_n \to 0$ et $(\kappa_1^n + \kappa_2^n + \kappa_3^n + \frac{1}{n\eta_n^2})/(\beta_n^2\delta_n^2\theta_n^2) \to 0$. Alors

$$\limsup_{n\to\infty}|E(A_t'^n(N))| = 0.$$

Il reste à étudier $D_t^n(N)$; en utilisant le fait que f est bornée pour la première inégalité ci-dessous, nous avons :

$$\begin{aligned}
|\Gamma(f,\beta_n,\sigma_{i/n}) - f(0)| &= |E(f(\beta_n[U + \sigma_{i/n}Y/\beta_n])1_{\{[U+\sigma_{i/n}Y/\beta_n]\neq 0\}})|\\
&\leq CP([U + \sigma_{i/n}Y/\beta_n] \neq 0)\\
&\leq C\left(E\left(\frac{\sigma_{i/n}|Y|}{\beta_n}\right) + P(\sigma_{i/n}|Y| \geq \beta_n)\right).
\end{aligned}$$

Nous en déduisons que $|D_t^n(N)| \leq Ct\left(\sqrt{2/\pi}/\beta_n + P(|Y| \geq \beta_n/M)\right)$, puisque σ est borné par M, et $D_t^n(N)$ tend vers 0 pour tout ω (uniformément en N et $t \in [0,T]$, pour tout $T > 0$).

3.4 Preuve des lois des grands nombres pour les f-variations sans renormalisation

Il suffit de démontrer que, sous l'hypothèse $\mathcal{H}_1'$,

$$\sum_{i=1}^{[nt]} |\overline{\Delta}_i^n X|^2 - \int_0^t \Gamma^2(\beta, \sigma_s) \mathrm{d}s - \sum_{s \leq [nt]/n} |\Delta X_s|^2 \xrightarrow{\text{l.u.P}} 0 \tag{3.4.1}$$

et, si $f(x) = \circ_0(x^2)$ (sans hypothèse particulière sur X),

$$\sum_{i=1}^{[nt]} f(\overline{\Delta}_i^n X) - \sum_{s \leq [nt]/n} f(\Delta X_s) \xrightarrow{\text{l.u.P}} 0. \tag{3.4.2}$$

Les théorèmes 21 et 22 en découlent immédiatement, vue la convergence en probabilité, pour la topologie de Skorokhod, de $\sum_{s \leq [nt]/n} |\Delta X_s|^2$ (respectivement $\sum_{s \leq [nt]/n} f(\Delta X_s)$) vers $\sum_{s \leq t} |\Delta X_s|^2$ (respectivement $\sum_{s \leq t} f(\Delta X_s)$).

3.4.1 Preuve de (3.4.2) quand f est nulle sur un voisinage de 0

Dans un premier temps, vérifions que (3.4.2) est vraie lorsque f est nulle sur un voisinage $[-2\varepsilon, 2\varepsilon]$ de 0, sans condition particulière sur X et en supposant seulement que $\alpha_n \to 0$. Les arguments sont les mêmes qu'en l'absence d'arrondis (cf [13]). L'ensemble des sauts sur $[0, t[$ d'amplitude supérieure à ε est fini, on note $S_1 < ... < S_N < t$ leurs temps de saut, et

$$i_q^n := \begin{cases} nS_q - 1 & \text{si } nS_q \text{ est entier} \\ [nS_q] & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par définition, $S_q \in]i_q^n/n, (i_q^n + 1)/n]$. On note encore $\overline{X}_s(t) := X_s + (X'_{t+s} - X'_s)$, où X' désigne le processus X duquel ont été soustraits les sauts de taille supérieure à ε. Presque sûrement, à partir d'un certain rang $n_0(\omega, \varepsilon)$, d'une part les i_q^n sont tous distincts et $(i_N^n + 1)/n < t$, d'autre part $|\Delta_1^n \overline{X}_{(i/n)}|$ est inférieur à 2ε pour tout $i \leq [nt] - 1$. Dès que $n \geq n_0$, nous avons :

$$\sup_{s \leq t} \left| \sum_{i=1}^{[ns]} f(\overline{\Delta}_i^n X) - \sum_{r \leq s} f(\Delta X_r) \right| \leq \sum_{q=1}^{N} \left| f(\overline{\Delta}_{i_q^n}^n X) - f(\Delta X_{S_q}) \right|.$$

Vue la définition de $\overline{X}$, nous avons $|\overline{\Delta}_{i_q^n}^n X - \Delta X_{S_q}| \leq \alpha_n + |\Delta_1^n \overline{X}_{i_q^n}|$. Comme X est càdlàg, le processus X' est continu en chacun des S_q, donc $|\Delta_1^n \overline{X}_{i_q^n}|$ converge vers 0 (presque sûrement) lorsque $n \to +\infty$. On conclut en utilisant la continuité de f.

Remarque. La continuité de f n'est requise qu'aux valeurs prises par les ΔX_s. Il est donc possible d'affaiblir légèrement l'hypothèse de continuité de f en supposant seulement que f est continue sur l'ensemble des valeurs que peuvent prendre les ΔX_s, ainsi que cela est montré par exemple dans [13] en l'absence d'arrondis. Cette remarque est cependant d'un intérêt limité dans notre contexte, puisque l'on suppose pour le théorème central limite associé que l'amplitude des sauts admet une densité.

3.4.2 Convergence des sommes quadratiques

On fixe dans ce qui suit une fonction réelle ψ de classe $\mathcal{C}^\infty$, telle que $1_{[-1,1]} \leq \psi \leq 1_{[-2,2]}$. On suppose en outre ψ paire, décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Etant donnée une fonction f, ainsi que deux réels $0 < a < b$, on définit alors les fonctions réelles f_a, f_a^b et f^b par :

$$f_a(x) = f(x)\psi(x/a),\ f_a^b(x) = f(x)(\psi(x/b) - \psi(x/a)) \text{ et } f^b(x) = f(x)(1 - \psi(x/b)).$$

Soit g la fonction $x \mapsto x^2$. Afin d'utiliser les résultats des sections précedentes, on décompose pour $0 < a < b$ donnés chaque terme $g(\overline{\Delta}_i^n X)$ sous la forme ci-dessous :

$$g(\overline{\Delta}_i^n X) = g_{a/\sqrt{n}}(\overline{\Delta}_i^n X) + g^b_{a/\sqrt{n}}(\overline{\Delta}_i^n X) + g^b(\overline{\Delta}_i^n X). \tag{3.4.3}$$

On isole ainsi en quelque sorte la contribution de la partie continue, correspondant aux petits accroissements (les $g_{a/\sqrt{n}}(\overline{\Delta}_i^n X)$) de celle due aux sauts (les $g^b(\overline{\Delta}_i^n X)$).

Pour conclure, il suffit de prouver les trois convergences suivantes, correspondant à chacun des trois termes du membre de droite de (3.4.3), pour tout $\rho > 0$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{a\to+\infty} \limsup\limits_{n\to+\infty} P\left(|\sum\limits_{i=1}^{[nt]} g_{a/\sqrt{n}}(\overline{\Delta}_i^n X) - \int_0^t \Gamma(g,\beta,\sigma_s)\mathrm{d}s| > \rho \right) & \text{(3.4.4a)} \\ \lim\limits_{b\to0} \lim\limits_{a\to+\infty} \limsup\limits_{n\to+\infty} P(\sum\limits_{i=1}^{[nt]} g^b_{a/\sqrt{n}}(\overline{\Delta}_i^n X) > \rho) = 0. & \text{(3.4.4b)} \\ \lim\limits_{b\to0} \limsup\limits_{n\to+\infty} P\left(|\sum\limits_{i=1}^{[nt]} g^b(\overline{\Delta}_i^n X) - \sum\limits_{s\leq[nt]/n} g(\Delta X_s)| > \rho \right) = 0 & \text{(3.4.4c)} \end{cases}$$

La première se déduit trivialement de (3.1.4). En effet, pour tout $a > 0$,

$$\sum_{i=1}^{[nt]} g_{a/\sqrt{n}}(\overline{\Delta}_i^n X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{[nt]} |\sqrt{n}\,\overline{\Delta}_i^n X|^2 \psi(\frac{\sqrt{n}\,\overline{\Delta}_i^n X}{a}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{[nt]} g_a(\sqrt{n}\,\overline{\Delta}_i^n X),$$

et g_a est une fonction continue bornée, à laquelle on applique (3.1.4) pour obtenir :

$$\sum_{i=1}^{[nt]} g_{a/\sqrt{n}}(\overline{\Delta}_i^n X) \overset{\text{l.u.P}}{\longrightarrow} \int_0^t \Gamma(g_a,\beta,\sigma_s)\mathrm{d}s.$$

On en déduit (3.4.4a) grâce à la convergence (3.4.5) ci-dessous, conséquence du théorème de Lebesgue.

$$\int_0^t \Gamma(g_a,\beta,\sigma_s)\mathrm{d}s \longrightarrow \int_0^t \Gamma(g,\beta,\sigma_s)\mathrm{d}s \text{ (pour tout } \omega). \tag{3.4.5}$$

Pour montrer (3.4.4b), on se ramène à des sommes portant sur les accroissements sans arrondis : dès que $a > \underline{\beta}$, $|\overline{\Delta}_i^n X| \geq a/\sqrt{n}$ implique que $|\Delta_i^n X| \geq \alpha_n$, et par conséquent

$|\overline{\Delta}_i^n X| \leq 2|\Delta_i^n X|$. On vérifie par ailleurs que $(a/\sqrt{n} \leq |\overline{\Delta}_i^n X| \leq 2b) \Longrightarrow (\frac{a-\overline{\beta}}{\sqrt{n}} \leq |\Delta_i^n X| \leq 4b)$. On a donc, en posant $a' = a - \overline{\beta}$ et $b' = 4b$,

$$g^b_{a/\sqrt{n}}(\overline{\Delta}_i^n X) \leq 4 g^{b'}_{a'/\sqrt{n}}(\Delta_i^n X)$$

Il ne reste plus qu'à appliquer le lemme 4.2 de [13], d'après lequel, pour tout $\rho > 0$,

$$\lim_{b\to 0}\lim_{a\to\infty}\limsup_{n\to\infty} P(\sum_{i=1}^{[nt]} E\big(g^b_{a/\sqrt{n}}(\Delta_i^n X)|\mathcal{F}_{(i-1)/n}\big) > \rho) = 0\,. \tag{3.4.6}$$

La seconde convergence (3.4.4b) est donc aussi vérifiée.

Nous avons par ailleurs vu en 3.4.1 que, g^b étant nulle au voisinage de 0,

$$\sum_{i=1}^{[nt]} g^b(\overline{\Delta}_i^n X) - \sum_{s\leq [nt]/n} g^b(\Delta X_s) \stackrel{\text{l.u.P}}{\longrightarrow} 0. \tag{3.4.7}$$

On conclut en remarquant que

$$\left|\sum_{s\leq[nt]/n} g^b(\Delta X_s) - \sum_{s\leq[nt]/n} g(\Delta X_s)\right| \leq \sum_{s\leq[nt]/n} 1_{\{|\Delta X_s|\leq 2b\}} g(\Delta X_s) \underset{b\to 0}{\longrightarrow} 0. \tag{3.4.8}$$

3.4.3 Preuve de (3.4.2) lorsque $f = \circ(x^2)$ en 0

Soit f continue, telle que $f = \circ_0(g)$. Supposons seulement que $\alpha_n \to 0$. On peut conclure de la même manière que ci-dessus une fois prouvé que, en probabilité, et pour tout $t > 0$,

$$\lim_{a\to 0}\limsup_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{[nt]} \big|f_a(\overline{\Delta}_i^n X)\big| = 0. \tag{3.4.9}$$

Vu les hypothèses faites sur f, il existe une fonction ε, qui tend vers 0 en 0, et telle que $|f_a| \leq \varepsilon(a) g_a$ pour tout $a > 0$. Distinguons une nouvelle fois les cas $\beta_n \longrightarrow \beta < +\infty$ et $\beta_n \longrightarrow +\infty$.

1. Supposons que $\beta < +\infty$. Alors $\sum\limits_{i=1}^{[nt]} |f_a(\overline{\Delta}_i^n X)| \leq 2\varepsilon(a) \sum\limits_{i=1}^{[nt]} \big((\Delta_i^n X)^2 + \alpha_n^2\big)$. On a donc bien (3.4.9), car $\left(\sum\limits_{i=1}^{[nt]} (\Delta_i^n X)^2 - \sum_{s\leq[nt]/n} f(\Delta X_s)^2\right) \longrightarrow 0$ en probabilité.
2. Traitons à présent le cas $\beta_n \to +\infty$. Nous décomposons la fonction f_a sous la forme : $f_a = f^a_{4\alpha_n/3} + f_{4\alpha_n/3}$. Or $f_{4\alpha_n/3}(\overline{\Delta}_i^n X)$ ne peut prendre que trois valeurs : $f(-\alpha_n)$, 0 ou $f(\alpha_n)$, donc $|\sum\limits_{i=1}^{[nt]} f_{4\alpha_n/3}| \leq nt|f(-\alpha_n)| \vee |f(\alpha_n)|$. Par hypothèse, ce majorant converge vers 0 lorsque n tend vers l'infini. Choisissons un réel $b > 0$. Si

$f^a_{4\alpha_n/3}(\overline{\Delta}^n_i X)$ est non nul, puisque $\overline{\Delta}^n_i X \in \alpha_n\mathbb{Z}$, nous avons de nouveau $|\overline{\Delta}^n_i X| \geq 2\alpha_n$, donc $|\Delta^n_i X| \geq \alpha_n$ et $|\overline{\Delta}^n_i X| \leq \Delta^n_i X$. Nous en déduisons que $|f^a_{4\alpha_n/3}(\overline{\Delta}^n_i X)| \leq C g^a_{b/\sqrt{n}}(\Delta^n_i X)$ à partir d'un certain rang qui ne dépend que de b et de la suite α_n. Nous pouvons donc appliquer de nouveau (3.4.6).

3.5 Preuve dans le cas bidimensionnel

La démonstration est très similaire à celle proposée pour la loi des grands nombres en dimension 1, nous n'en donnons donc ici que les éléments essentiels. On procède de nouveau en deux étapes, en supposant pour commencer que les fonctions f et g sont bornées. Fixons un entier N et posons, pour tout $s \geq N/n$, en utilisant la généralisation évidente de la notation (3.2.8) pour $\widetilde{X}$ et $\widetilde{X'}$ (hormis le fait que dans cette section, $\widetilde{\sigma} = \sigma$) :

$$R^n_s := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{(N-1)} f\left(\sqrt{n}\,\overline{\Delta}^n_i X^1\right) g\left(\sqrt{n}\,\overline{\Delta}^n_i X^2\right), \tag{3.5.1}$$

$$A^n_s := \frac{1}{n}\sum_{i=N}^{[ns]} f\left(\sqrt{n}\,\overline{\Delta}^n_i X^1\right) g\left(\sqrt{n}\,\overline{\Delta}^n_i X^2\right) \tag{3.5.2}$$

$$- E\left(f\left(\sqrt{n}\,\overline{\Delta}^n_N \widetilde{X^1}_{(i-N)/n}\right) g\left(\sqrt{n}\overline{\Delta}^n_i \widetilde{X^2}\right) |\mathcal{F}_{(i-N)/n}\right), \tag{3.5.3}$$

$$B^n_s := \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{[ns]-N} E\left(f\left(\sqrt{n}\,\overline{\Delta}^n_N \widetilde{X^1}_{i/n}\right) g\left(\sqrt{n}\,\overline{\Delta}^n_i \widetilde{X^2}\right) - \Gamma\left(f, g, \beta_n, \sigma^1_{i/n}, \sigma^2_{i/n}\right) |\mathcal{F}_{i/n}\right), \tag{3.5.4}$$

$$C^n_s := \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{[ns]-N} \Gamma\left(f, g, \beta_n, \sigma^1_{i/n}, \sigma^2_{i/n}\right) - \int_0^t \Gamma\left(f, \beta, \sigma^1_s, \sigma^2_s\right) \mathrm{d}s. \tag{3.5.5}$$

De même que dans le cas unidimensionnel, nous avons, pour tout N,

$$\lim_{n\to+\infty} E(\sup_{s\leq t}|R^n_s(N)| + |C^n_s(N)|) = 0.$$

Pour étudier $A^n_t(N)$, nous nous ramenons de nouveau à l'étude des termes de la forme :

$$E(|f(\sqrt{n}\,\overline{\Delta}^n_i X^1)g(\sqrt{n}\,\overline{\Delta}^n_i X^2) - f(\sqrt{n}\overline{\Delta}^n_N \widetilde{X^1}_{i/n})g(\sqrt{n}\Delta^n_i\overline{\Delta}^n_N \widetilde{X^2}_{i/n})|),$$

que nous majorons par :

$$\begin{aligned}E(|f(\sqrt{n}\,\overline{\Delta}^n_i X^1)(g(\sqrt{n}\,\overline{\Delta}^n_i X^2) - g(\sqrt{n}\,\overline{\Delta}^n_i \widetilde{X^2})|\\ + |g(\sqrt{n}\,\overline{\Delta}^n_i \widetilde{X^2})(f(\sqrt{n}\,\overline{\Delta}^n_i X^1) - f\left(\sqrt{n}\,\overline{\Delta}^n_N \widetilde{X^1}_{(i-N)/n}\right))|).\end{aligned}$$

Les fonctions f et g étant supposées bornées, il suffit de contrôler

$$E\left|f(\sqrt{n}\,\overline{\Delta}^n_i X^1) - f\left(\sqrt{n}\,\overline{\Delta}^n_N \widetilde{X^1}_{(i-N)/n}\right)\right|;$$

ces espérances ont déjà été étudiées dans la section 3.3.2, et nous obtenons ici aussi $\limsup_n E\left(\sup_{s\leq t}|A^n_s|\right)=0$.

La convergence de $\limsup_n E(\sup_{s\leq t}|B^n_s(N)|)$ vers 0 lorsque $N\to+\infty$ est une conséquence du corollaire 15 de la partie 3. Fixons i et n, et posons temporairement

$$\sigma=\sigma_{(i-N)/n},\qquad a=\sqrt{n}X^1_{(i-N)/n},\qquad b=\sqrt{n}X^2_{(i-N)/n}/n$$
$$\text{et } F(u,v):=\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(\beta_n[u+\sigma^1.\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}/\beta_n])g(\beta_n[v+\sigma^2.\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix})/\beta_n])h(x)h(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Le terme d'indice i dans la somme $B^n_t(N)$ est alors :

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\varphi(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix})F(\{(a+x)/\beta_n\},\{(b+y)/\beta_n\})\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_0^1\int_0^1 F(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v, \tag{3.5.6}$$

où φ est la densité du couple $\sqrt{N-1}(\sigma Y)$ (Y est ici une variable gaussienne standard dans $\mathbb{R}^2$). D'après le corollaire 15, la valeur absolue de (3.5.6) est majorée par $C\beta_n\left(\sup|F|\right)\Phi$, avec $\Phi:=max\{1,\int|\frac{\partial\varphi}{\partial w}|,\int|\frac{\partial\varphi}{\partial z}|,\int|\frac{\partial^2\varphi}{\partial w\partial z}|\}$. Notons D la valeur absolue du déterminant de la matrice σ. Un calcul rapide montre que

$$\Phi\leq CP(\sigma)/((N-1)^2D^3)+Q(\sigma)/((N-1)^{3/2}D^2),$$

où $P(\sigma)$ et $Q(\sigma)$ sont des polynômes en les composantes de σ. Par conséquent, D^{-1} étant borné sous l'hypothèse $\widetilde{\mathcal{H}}'_1$, nous avons $\lim_N\limsup_n E\left(\sup_{s\leq t}|B^n_s(N)|\right)=0$, et le théorème est vérifié pour des fonctions f et g bornées.

Lorsque $f(x)=\circ(x^2)$ et $g(x)=\circ(x^2)$ en l'infini, on a

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{[nt]}V'_n(f\psi_a,g\psi_a,\beta_n,X)\overset{\text{l.u.P}}{\longrightarrow}\int_0^t\Gamma(f\psi_a,g\psi_a,\beta,\sigma^1_s,\sigma^2_s)\mathrm{d}s;$$

nous pouvons conclure une fois montré que $\int_0^s\Gamma(f(1-\psi_a),g(1-\psi_a),\beta,\sigma^1_s,\sigma^2_s)\mathrm{d}s$ et $\limsup\frac{1}{n}V'_n(f(1-\psi_a),g(1-\psi_a),\beta,X)$ convergent localement uniformément en probabilité vers 0 lorsque $a\to+\infty$. Pour cela, remarquons de nouveau qu'il existe une fonction ε tendant vers 0 en l'infini -que l'on peut toujours choisir décroissante- telle que, pour tout réel x, $|f(1-\psi)(x)|\leq C\varepsilon(x)1_{|x|\geq a}x^2$ et de plus pour tout $0\leq u<1$, $|[u+x]|\leq 1+|x|$ (et de même pour g). Nous avons alors :

$$\begin{aligned}&\left|f(1-\psi)\left(\beta\left[u+\sigma^1_s\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}/\beta\right]\right)\,g(1-\psi)\left(\beta\left[v+\sigma^2_s\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}/\beta\right]\right)\right| \\ &\qquad\leq C1_{|\sigma^{1,1}_s x+\sigma^{1,2}_s y|>a-2\beta}1_{|\sigma^{2,1}_s x+\sigma^{2,2}_s y|>a-2\beta}(\beta^4+x^4+y^4).\end{aligned}\tag{3.5.7}$$

Posons, pour tous x,y, $X\chi=\sigma^{1,1}_s x+\sigma^{1,2}_s y$ et $\upsilon=\sigma^{2,1}_s x+\sigma^{2,2}_s y$. L'application $\Phi_s:(x,y)\mapsto(\chi,\upsilon)$ est bijective et sa norme d'application linéaire est bornée, vue l'hypothèse $\widetilde{\mathcal{H}}'_1$. Par conséquent, il existe une constante C telle que

$$1_{|\chi|>a,|\upsilon|>a}\leq 1_{||(\chi,\upsilon)||_\infty>a}\leq 1_{||(x,y)||_\infty>a/C}.$$

On peut donc majorer (3.5.7) par $C1_{||(x,y)||>a/C}(\beta^4+x^4+y^4)$. Nous en déduisons que

$$|\Gamma(f(1-\psi_a),g(1-\psi_a),\beta,\sigma_s^1,\sigma_s^2)| \le C\int\int_{\mathbb{R}^2} h(x)h(y)1_{||(x,y)||>(a-2\beta)/C}(\beta^4+x^4+y^4)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Le membre de droite converge bien vers 0 lorsque $a\to+\infty$. On majore enfin :

$$|\frac{1}{n}V_n'(f(1-\psi_a),g(1-\psi_a),\beta_n,(X,X'))| \le C\varepsilon(\frac{a}{C})\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{[nt]}(\overline{\beta}^4+(\sqrt{n}\Delta_i^nX^1)^4+(\sqrt{n}\Delta_i^nX^2)^4).$$

Le membre de droite converge en probabilité lorsque $n\longrightarrow+\infty$; nous pouvons conclure en faisant tendre a vers l'infini.

3.6 Preuve du théorème central limite

Rappelons la forme (3.1.18) de la différence entre l'accroissement $\overline{\Delta}_i^nX$ autour d'un temps de saut S_q et le saut ΔX_{S_q} lui-même :

$$\alpha_n\left[\{\frac{X_{(i_q^n-1)/n}}{\alpha_n}\}+\{\frac{\Delta X_{S_q}}{\alpha_n}\}+\frac{\Delta_{i_q^n}^nX}{\alpha_n}-\frac{\Delta X_{S_q}}{\alpha_n}\right]-\{\frac{\Delta X_{S_q}}{\alpha_n}\}.$$

Dans une première sous-section, nous montrons un lemme décrivant le comportement limite des différents termes composant (3.1.18). La deuxième sous-section est consacrée à la démonstration du théorème central limite (Théorème 25). Dans les deux dernières enfin nous justifions respectivement la tension lorsque l'on suppose seulement $\mathcal{H}_2'$ et le contre-exemple (3.1.11) à l'existence d'un théorème central limite lorsque l'on ne fait plus d'hypothèse sur la loi de l'amplitude des sauts.

3.6.1 Un lemme préliminaire

Pour traiter le terme $\Delta_{i_q^n}^nX/\alpha_n-\Delta X_{S_q}$ qui intervient dans (3.1.18), c'est à dire celui déjà présent en l'absence d'arrondi), on introduit trois variables qui n'apparaissent pas dans le théorème 25 mais sont utilisées dans sa démonstration (et en particulier dans le lemme 31 ci-dessous). Notons $i_q^n:=[nS_q]+1$ le premier temps de la grille suivant S_q. Lorsque nS_q est entier, on devrait poser plutôt $i_q^n:=nS_q$, néanmoins ce cas ne se produit pas car, sous l'hypothèse $\mathcal{H}_3'$ ($\mathcal{H}_1$ suffit), presque sûrement, aucun temps de saut n'est rationnel. On définit

$$\kappa_q^n:=n(S_q-\frac{i_q^n-1}{n})=\{nS_q\}$$

puis

$$w_q^n:=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\kappa_p^n}}(W_{S_q}-W_{(i_q^n-1)/n})\qquad\text{et}\quad w_q'^n:=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{1-\kappa_p^n}}(W_{i_q^n/n}-W_{S_q}).$$

La convergence stable de la suite $(w_q^n,w_q'^n,\kappa_q^n)_q$ vers $(Y_q,Y_q',V_q)_q$ a été démontrée dans [16] (cf aussi [15]). Plus généralement, on peut montrer la convergence suivante, sous l'hypothèse $\mathcal{H}_3'$:

$$\left(\{\frac{X_{i_q^n-1}}{\alpha_n}\},\{\frac{\Delta X_{S_q}}{\alpha_n}\},w_q^n,w_q'^n,\kappa_q^n\right)_q \xrightarrow{\mathcal{L}\text{ st}} \left(U_q,1_{\{\Delta X_{S_q}\neq 0\}}U_q',Y_q,Y_q',V_q\right)_q \tag{3.6.1}$$

Nous allons en pratique vérifier un résultat légèrement plus faible, mais suffisant pour la démonstration du théorème central limite. A partir de la représentation (3.0.1) de X on définit, pour tout entier $m\geq 1$, $A_m := \{x\in\mathbb{R}, G(x)\geq 1/m\}$. Le processus $1_{A_m\backslash A_{m-1}} * \underline{p}$ est un processus de Poisson sur $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}$, d'intensité la mesure $1_{A_m\backslash A_{m-1}}(G(x))\mathrm{d}s\mathrm{d}x$; ses temps de sauts sont indépendants de W (ce qui n'est pas forcément le cas des temps de saut de X). On note S_q^m ces temps de saut, classés par ordre croissant. Introduisons en outre les notations $i_{m,q}^n$, $\kappa_{m,q}^n$, $w_{m,q}^n$ et $w_{m,q}'^n$ associées comme précédemment à chaque temps S_q^m. Nous avons alors le lemme suivant :

Lemme 31. *Supposons $\mathcal{H}_3'$ vérifiée. Alors, pour tout $m\geq 1$,*

$$\left(\{\frac{X_{i_{m,q-1}}}{\alpha_n}\},\{\frac{\Delta X_{S_q^m}}{\alpha_n}\},w_{m,q}^n,w_{m,q}'^n,\kappa_{m,q}^n\right)_q \xrightarrow{\mathcal{L}\ st} \left(U_q,1_{\{\Delta X_{S_{m,q}}\neq 0\}}U_q',Y_q,Y_q',V_q\right)_q. \tag{3.6.2}$$

Notons que la démonstration de (3.6.1) est très similaire à celle du lemme ci-dessus, mais nécessite de réorganiser dans un premier temps les sauts par ordre croissant (voir l'annexe B).

Démontrons à présent le lemme 31. Le principe de la démonstration est proche de celle de [15] lorsqu'il n'y a pas d'arrondis : les contributions significatives au processus limite sont dues au comportement de la partie brownienne au voisinage de chacun des sauts. On commence donc par raisonner avec un nombre de sauts fini, et l'on isole les contributions correspondant à chacun de ces sauts, qui sont indépendantes pour deux sauts distincts. Cependant, la présence des deux parties fractionnaires $\{\frac{\Delta X_{S_q}}{\alpha_n}\}$ et $\{\frac{X_{(i_q^n-1)/n}}{\alpha_n}\}$ rend difficile un traitement simultané de tous les sauts similaire à la démonstration de [15]. En effet, la loi de ces deux variables est dépendante de $\mathcal{F}_{S_q-}$. Il faut donc, dans notre contexte, traiter chaque saut séparément, en conditionnant par rapport au passé, ce qui explique pourquoi nous avons besoin de temps S_q^m classés par ordre croissant.

Décomposition du problème

Le paramètre m étant fixé pour toute la suite, nous noterons pour alléger l'écriture $S_q, i_q^n, \kappa_q^n, w_q^n, w_q'^n$ à la place de $S_q^m, i_{m,q}^n, \kappa_{m,q}^n, w_{m,q}^n, w_{m,q}'^n$. Soient $l\geq 1$ un entier, Z une variable aléatoire $\mathcal{F}$-mesurable bornée et $g_q^1,...,g_q^5$ des fonctions lipschitziennes bornées. Posons, pour tous entiers $n,k\geq 1$,

$$A_k^n := \prod_{1\leq q\leq k} g_q^1(\{\frac{X_{(i_q^n-1)/n}}{\alpha_n}\})g_q^2(w_q^n)g_q^3(\{\frac{\Delta X_{S_q}}{\alpha_n}\}), \qquad A_k = \prod_{1\leq q\leq k} g_q^1(U_q)g_q^2(Y_q)g_q^3(U_q'),$$

$$B_k^n := \prod_{1\leq q\leq k} g_q^4(\kappa_q^n))g_q^5(w_q'^n) \qquad \text{et } B_l = \prod_{1\leq q\leq k} g_q^4(V_q)g_q^5(Y_q').$$

Montrons que, pour toute variable Z $\mathcal{F}$-mesurable bornée,

$$E(ZA_l^nB_l^n) \underset{n}{\longrightarrow} \widetilde{E}(ZA_lB_l).$$

On commence par fixer les temps de sauts : soit $(\mathcal{G}_t)$ la plus petite filtration contenant $(\mathcal{F}_t)$ et telle que $S_1, ..., S_l$, donc aussi les κ_q^n, soient mesurables par rapport à $\mathcal{G}_0$. Pour $\eta > 0$ fixé, on définit encore $\mathcal{G}_t^\eta$ comme la plus petite tribu contenant $(\mathcal{G}_t)$ telle que les processus $(W_s - W_{S_q})_{S_q \leq s \leq S_q+\eta}$ soient $\mathcal{G}_0^\eta$-mesurables. Dès que $n \geq 1/\eta$, les $w_q'^n$ sont $\mathcal{G}_0^\eta$-mesurables, et

$$E\left(ZA_l^nB_l^n \middle| \mathcal{G}_0^\eta\right) = E\left(B_l^n E\left(ZA_l^n \middle| \mathcal{G}_0^\eta\right)\right) \tag{3.6.3}$$

Les arguments d'indépendance entre w_q^n et $\mathcal{G}_0^\eta$ que nous utiliserons dans la preuve ne sont valables que si η est suffisamment petit par rapport à l'écart entre deux temps S_q successif. Pour traiter cette difficulté, associons à toute variable Z $\mathcal{F}$-mesurable bornée la variable $Z' := Z1_{2\eta \leq min\{S_{q+1}-S_q, S_q \leq t\}}$.

Schéma de la preuve

1. Pour un saut donné, à l'instant S_q, on sépare les variables à étudier en trois catégories : les variables ($\mathcal{F}_{S_q-}$-mesurables) $\{\frac{X_{(i_q^n-1)/n}}{\alpha_n}\}$ et w_q^n, le terme de saut $\{\frac{\Delta X_{S_q}}{\alpha_n}\}$ et enfin $w_q'^n$ et κ_q^n. Nous allons montrer pour tout $q \leq l$ les convergences (3.6.4) et (3.6.5) ci-dessous, ainsi que la convergence stable (3.6.6) :

$$\forall Z\ \mathcal{F}\text{-mesurable bornée, } E(Z'g_q^3(\{\frac{\Delta X_{S_q}}{\alpha_n}\})|\mathcal{G}_{S_q-}^\eta) \xrightarrow{L^1} \widetilde{E}\left(Z'g_q^3(1_{\{\Delta X_{S_q} \neq 0\}}U_q')|\mathcal{G}_{S_q-}^\eta\right); \tag{3.6.4}$$

$$\forall Z\ \mathcal{G}_{S_q-}^\eta\text{-mesurable bornée,}$$
$$E(Z'g_q^1(\{\frac{X_{(i_q^n-1)/n}}{\alpha_n}\})g_q^2(w_q^n)|\mathcal{G}_{S_{q-1}}^\eta) \xrightarrow{L^1} E(Z'|\mathcal{G}_{S_{q_1}}^\eta)\widetilde{E}(g_q^1(U_q)g_q^2(Y_q)); \tag{3.6.5}$$

$$(\kappa_q^n, w_q'^n)_q \xrightarrow{\mathcal{L}\text{ st}} (V_q, Y_q)_q. \tag{3.6.6}$$

2. Nous montrons ensuite que la convergence (3.6.7) ci-dessous (pour toute variable Z $\mathcal{F}$-mesurable bornée) se déduit de (3.6.4) et (3.6.5) :

$$E(Z'A_l^n|\mathcal{G}_0^\eta) \xrightarrow{L^1} \widetilde{E}(Z'\Pi_{q\leq l}g_q^3(1_{\{\Delta X_{S_q}\neq 0\}}U_q')|\mathcal{G}_0^\eta)\widetilde{E}(\Pi_{q\leq l}g_q^1(U_q)g_q^2(Y_q)). \tag{3.6.7}$$

3. Nous pouvons alors conclure en combinant (3.6.3), (3.6.7) et (3.6.6).

Le terme de saut

Montrons (3.6.4). On définit $\mathcal{G}'^{\eta}_q = \mathcal{G}^{\eta}_{S_q-} \vee \sigma(\Delta X_{S_q})$. Puisque ΔX_{S_q} est par construction mesurable par rapport à cette tribu, nous avons

$$E\left(Z' g^3_q(\{\frac{\Delta X_{S_q}}{\alpha_n}\})|\mathcal{G}^{\eta}_{S_q-}\right) = E\left(E(Z'|\mathcal{G}'^{\eta}_q) g^3_q(\{\frac{\Delta X_{S_q}}{\alpha_n}\})\Big|\mathcal{G}^{\eta}_{S_q-}\right);$$

on peut donc supposer Z $\mathcal{G}'^{\eta}_q$-mesurable. Vu la définition de $\mathcal{G}'^{\eta}_q$, il suffit de vérifier la convergence pour les variables de la forme $Z = \widetilde{Z} H(\Delta X_{S_q-})$, où $\widetilde{Z}$ est $\mathcal{G}^{\eta}_{S_q-}$-mesurable bornée, et H une fonction bornée lipschitzienne. On peut toujours (quitte à devoir ajouter une constante) supposer H positive. Finalement, il reste à vérifier que, pour toute fonction réelle H lipschitzienne positive bornée,

$$E\left(H(\Delta X_{S_q}) g^3_q(\{\frac{\Delta X_{S_q}}{\alpha_n}\})|\mathcal{G}^{\eta}_{S_q-}\right) \underset{n}{\longrightarrow} \widetilde{E}\left(H(\Delta X_{S_q}) g^3_q(1_{\{\Delta X_{S_q}\neq 0\}} U'_q)|\mathcal{G}^{\eta}_{S_q-}\right). \tag{3.6.8}$$

Conditionnellement à $\mathcal{G}^{\eta}_{S_q-}$, et sur $\{\Delta X_{S_q} \neq 0\}$, la variable ΔX_{S_q} admet une densité ; en effet, si A est un ensemble négligeable par rapport à la mesure de Lebesgue ne contenant pas 0, vu $\mathcal{H}'_3$, on a encore $P(\Delta X_{S_q} \in A|\mathcal{G}^{\eta}_{S_q-}) = 0$. Montrons pour conclure un lemme simple qui étend légèrement le résultat de Kosulajeff [20].

Lemme 32. *Soient X une variable admettant une densité, et U une variable uniforme sur $[0,1]$ indépendante de X. Alors le couple $(X, \{\sigma X\})$ converge en loi vers (X, U) lorsque $\sigma \longrightarrow +\infty$.*

Remarque. La convergence jointe d'une variable et de sa partie fractionnaire a déjà été étudiée par Delattre et Jacod, qui, sous des conditions de régularité suffisantes de la densité, contrôlent la vitesse de convergence de $(X, \{\sigma X\})$. Leurs hypothèses sont néanmoins nettement plus fortes (la densité doit être elle-même absolument continue) et nous n'avons pas ici besoin de précisions sur la vitesse de convergence de la partie fractionnaire de l'amplitude du saut vers une loi uniforme ; l'existence d'une densité est donc suffisante ici (mais sans doute pas nécessaire).

Preuve du lemme. Il suffit de prouver la convergence pour toutes fonctions g, k continues bornées sur $\mathbb{R}$ de $E(g(X^n)k(\{\sigma X\}))$ vers $E(g(X)k(U))$ (cf [11], p. 114). On peut toujours, quitte à ajouter une constante à la fonction g (qui est bornée), supposer que g est de plus strictement positive. Soit f la densité de X ; alors

$$E(g(X)k(\{\sigma X\})) = \int_{\mathbb{R}} g(x)k(\{\sigma X\})f(x)\mathrm{d}x = \left(\int_{\mathbb{R}} fg\right) \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)g(x)}{\int fg} k(\{\sigma x\})\mathrm{d}x.$$

L'intégrale de fg est finie puisque g est bornée et f une densité. La fonction $fg/\int(fg)$ est elle aussi une densité, d'après [20] la deuxième intégrale du terme de droite converge donc vers $\int_0^1 k(u)\mathrm{d}u$ lorsque $\sigma \to +\infty$; la première est simplement l'espérance de $g(X)$, d'où le résultat. □

Le lemme 32 ci-dessus appliqué à la loi conditionnelle de $(\Delta X_{S_q}, \{\Delta X_{S_q}/\alpha_n\})$ permet de conclure.

Les termes avant le saut

Montrons à présent (3.6.5). Vu que $\mathcal{G}^\eta_{S_q-} = \bigvee_{\varepsilon>0} \mathcal{G}^\eta_{S_q-1/m}$, il suffit de vérifier la propriété pour toute variable Z $\mathcal{G}^\eta_{S_q-\varepsilon}$-mesurable bornée, pour tout $\varepsilon > 0$. Supposons dans un premier temps que $\beta < +\infty$. Fixons $\varepsilon > 0$ et un entier N. Il existe un entier n_0, qui ne dépend que de ε et de N, tel que pour tout $n \geq n_0$, on ait : $(i^n_q - N)/n > S_q - \varepsilon$. Définissons en outre $\Omega^\eta := \{\omega \in \Omega, 2\eta \leq \min(\{S_{q+1} - S_q, S_q < t\})\}$. Sur Ω^η, la loi de w^n_q conditionnellement à $\mathcal{G}^\eta_{(i^n_q-1)/n}$ est la loi gaussienne standard, donc

$$\begin{aligned} E(Z' g^1_q(\{\frac{X_{(i^n_q-1)/n}}{\alpha_n}\}) g^2_q(w^n_q) | \mathcal{G}^\eta_{S_{q-1}}) &= E(Z' g^1_q(\{\frac{X_{(i^n_q-1)/n}}{\alpha_n}\}) E(g^2_q(w^n_q) | \mathcal{G}^\eta_{(i^n_q-1)/n}) | \mathcal{G}^\eta_{S_q-\varepsilon}) \\ &= E\left(Z' E\left(g^1_q(\{\frac{X_{(i^n_q-1)/n}}{\alpha_n}\}) | \mathcal{G}^\eta_{(i^n_q-N)/n} \right) | \mathcal{G}^\eta_{S_q-\varepsilon} \right) \widetilde{E}(g^2_q(Y_q)). \end{aligned}$$

Il reste seulement à montrer que :

$$E(g^1_q(\{\frac{X_{(i^n_q-1)/n}}{\alpha_n}\}) | \mathcal{G}^\eta_{(i^n_q-N)/n}) \xrightarrow{L^1} \widetilde{E}(g^1_q(U_q)), \tag{3.6.9}$$

et l'on peut réutiliser les arguments de la section 3.3.2. Nous reprenons la notation $\widetilde{X}$ précédente en posant : $\widetilde{X}_s(t) = X_s + \sigma_s(W_{s+t} - W_s)$. Sur Ω^η, conditionnellement à $\mathcal{G}^\eta_{(i^n_q-N)/n}$, la variable $W_{(i^n_q-1)/n} - W_{(i^n_q-N)/n}$ est encore une variable gaussienne centrée de variance $(N-1)/n$; nous pouvons donc appliquer (3.2.7) :

$$\begin{aligned} &\left| E(g^1_q(\{\frac{\widetilde{X}_{(i^n_q-N)/n}((N-1)/n)}{\alpha_n}\}) | \mathcal{G}^\eta_{(i^n_q-N)/n}) - \widetilde{E}(g^1_q(U_q)) \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}} h(x) g^1_q(\{\frac{X_{(i^n_q-N)/n} + \sigma_{(i^n_q-N)/n}\sqrt{(N-1)/n}\, x}{\alpha_n}\}) - \int_0^1 g^1_q(u) \mathrm{d}u \right| \\ &\leq \frac{C\beta_n}{\sqrt{N-1}\sigma_{(i^n_q-N)/n}}, \text{ où } C \text{ dépend seulement de la fonction } g^1_q. \end{aligned} \tag{3.6.10}$$

Le remplacement de X par $\widetilde{X}$ est de nouveau justifié par le lemme 29 ; en effet nous avons pour tout $0 < \delta < 1/2$

$$E(1_{K^\delta}(\{\frac{\widetilde{X}_{(i-N)/n}((N-1)/n)}{\alpha_n}\} | \mathcal{G}^\eta_{(i^n_q-N)/n}) \leq \frac{C\delta}{\sqrt{N-1}\sigma_{(i^n_q-N)/n}}(1+\beta_n)) \tag{3.6.11}$$

$$\text{et } P(|\frac{\widetilde{X}_{(i-N)/n}((N-1)/n) - X_{(i-1)/n}}{\alpha_n}| > \delta | \mathcal{G}^\eta_{(i^n_q-N)/n}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{3.6.12}$$

Le lemme 29 n'est pas donné conditionnellement à $\mathcal{G}^\eta_{(i^n_q-N)/n}$; cependant la première partie (3.6.11) est toujours valable car la loi de $(W_s - W_{(i^n_q-N)/n})$ pour $0 \leq s \leq (N-1)/n$ conditionnellement à $\mathcal{G}^\eta_{(i^n_q-N)/n}$ est encore celle d'un mouvement brownien. Pour (3.6.12), il faut revenir à la démonstration du lemme 29 : sous l'hypothèse $\mathcal{H}'_1$, nous obtenons une majoration similaire à (3.2.12), conditionnellement à $\mathcal{G}^\eta_{(i_q^n-N)/n}$, pour tout $0<\eta<1$ et tout $0<\delta<1/2$:

$$\begin{aligned} &P(|X'_{(i_q^n-N)/n}((N-1)/n)|>\delta\alpha_n|\mathcal{G}^\eta_{(i_q^n-N)/n}) \\ &\leq \frac{C}{\delta^2\alpha_n^2}E\left(\int_{(i_q^n-N)/n}^{(i_q^n-1)/n}(\sigma_r-\sigma_{(i_q^n-N)/n})^2\mathrm{d}r+\int_{(i_q^n-N)/n}^{(i_q^n-1)/n}\mathrm{d}r\int_{\mathbb{R}}x^2 1_{\{|x|\leq\eta\}}F_r(\mathrm{d}x)|\mathcal{G}^\eta_{(i_q^n-N)/n}\right) \\ &+\frac{CN}{n\delta\alpha_n}(1+\frac{1}{\eta}). \end{aligned} \tag{3.6.13}$$

Puisque σ est bornée et admet une limite à gauche en tout point, par le théorème de Lebesgue, nous avons la convergence vers 0 de

$$(N-1)/nE(\int_{(i_q^n-N)/n}^{(i_q^n-1)/n}(\sigma_r-\sigma_{(i_q^n-N)/n})^2\mathrm{d}r|\mathcal{G}^\eta_{(i_q^n-N)/n}),$$

Grâce à la troisième partie de l'hypothèse $\mathcal{H}_3$, on obtient (3.6.12) en faisant tendre n vers l'infini, puis η vers 0.

Vu la définition de K^δ, (3.6.11) et (3.6.12) impliquent

$$\limsup_n E\left(\left|\{\frac{X_{(i-1)/n}}{\alpha_n}\}-\{\frac{\widetilde{X}_{(i-N)/n}((N-1)/n)}{\alpha_n}\}\right||\mathcal{G}^\eta_{(i_q^n-N)/n}\right)\leq\frac{C\overline{\beta}}{\sqrt{N-1}\sigma_{S_q-}}. \tag{3.6.14}$$

La fonction test g_q^1 est lipschitzienne, de (3.6.14) et (3.6.10) on déduit donc

$$\limsup_n|E(g_q^1(\{\frac{X_{(i_q^n-1)/n}}{\alpha_n}\})|\mathcal{G}^\eta_{S_q-1/m})-\widetilde{E}(g_q^1(U_q)|\mathcal{G}^\eta_{S_q-1/m})|\leq\frac{C\overline{\beta}}{\sqrt{N-1}\sigma_{S_q-}},$$

puis (3.6.9) en faisant tendre N vers $+\infty$ (puisque σ_{S_q-} est non nul sous l'hypothèse $\mathcal{H}_3$).

Lorsque $\beta_n\to+\infty$, le raisonnement est le même, en considérant non plus N mais une suite N_n telle que $\beta_n^2/N_n\to0$ et $N_n/n\to0$. A partir d'un certain rang, déterministe, $(i_q^n-N_n)/n>S_q-\varepsilon$. On peut alors reprendre les arguments précédents, qui sont toujours valables car, sur Ω^η, la loi de $W_{(i_q^n-1)/n}-W_{(i_q^n-N_n)/n}$ conditionnellement à $\mathcal{G}^\eta_{(i_q^n-N_n)/n}$ est encore celle d'une gaussienne centrée de variance $(N_n-1)/n$. Pour traiter (3.6.13), on pose $N_n=\beta_n^2b_n$, puis on choisit une suite η_n tendant vers 0 telle que $\alpha_n/\eta_n\to0$, une suite b'_n tendant vers l'infini telle que $b'_n\int_{\mathbb{R}}\delta(x,s)^2 1_{|\delta(x,s)|\leq\eta_n}\mathrm{d}x\to0$ (uniformément en s, ce qui est possible grâce à l'hypothèse $\mathcal{H}_3$) et $b'_n\alpha_n^2\longrightarrow0$. Il reste alors à choisir des b_n tendant vers l'infini et inférieurs à b'_n tels que

$$b_n\sup_{0<x\leq b'_n}\frac{n}{\beta_n^2x}E\left(\int_{(i_q^n-\beta_n^2x)/n}^{(i_q^n-1)/n}(\sigma_r-\sigma_{(i_q^n-\beta_n^2x)/n})^2\mathrm{d}r|\mathcal{G}^\eta_{(i_q^n-\beta_n^2x)/n}\right)$$

tende encore vers 0 (pour tout ω).

Les termes $\mathcal{G}_0^\eta$-mesurables

Il reste à vérifier la convergence stable (3.6.6) de $(w_q'^n,\kappa_q^n)_q$ vers (Y'_q,V_q) ; celle-ci est déjà connue (cf [15]).

Conclusion

Prouvons maintenant que (3.6.7) découle bien de (3.6.4) et (3.6.5). On pose $S_0 = 0$, et l'on traite chaque saut séparément. Soit Z une variable $\mathcal{F}$-mesurable bornée. Alors

$$\begin{aligned} E(Z' A_l^n | \mathcal{G}_0^\eta) &= E\left(A_{l-1}^n E(Z' g_l^1(\{\frac{X_{(i_l-1)/n}}{\alpha_n}\}) g_l^2(w_l^n) g_l^3(\{\frac{\Delta X_{T_l}}{\alpha_n}\}) | \mathcal{G}_{S_{l-1}}^\eta)\right) \\ &= E\left(A_{l-1}^n E\left(g_l^1(\{\frac{X_{(i_l-1)/n}}{\alpha_n}\}) g_l^2(w_l^n) E\left(Z' g_l^3(\{\frac{\Delta X_{S_l}}{\alpha_n}\}) | \mathcal{G}_{S_l -}^\eta\right) | \mathcal{G}_{S_{l-1}}^\eta \right) \Big| \mathcal{G}_0^\eta \right) \end{aligned}$$

En appliquant successivement (3.6.4) puis (3.6.5), on est ramené à montrer la convergence de $E(Z' A_{l-1}^n | \mathcal{G}_0^\eta)$ vers $E(Z g_q^3(1_{\{\Delta X_{S_q}\}} U' q) | \mathcal{G}_0^\eta) \widetilde{E}(\Pi_{q \le l-1} g_q^1(U_q) g_q^2(Y_q))$. On conclut par récurrence sur l (le cas $l = 0$ est trivial), et (3.6.7) est vérifiée.

De (3.6.7) et de (3.6.6), nous déduisons la convergence voulue avec les variables Z'. Or

$$\begin{aligned} \left| E\left(Z A_l^n B_l^n\right) - \widetilde{E}\left(Z A_l B_l\right)\right| &\le C P\left(\min\{S_{q+1} - S_q, S_q < t\} \le 2\eta\right) \\ &\quad + \left| E\left(Z' A_l^n B_l^n\right) - \widetilde{E}\left(Z' A_l B_l\right)\right|. \end{aligned}$$

Le second terme du membre de droite converge vers 0 lorsque n tend vers l'infini, pour tout $\eta > 0$; le second lorsque $\eta \to 0$.

$\square$

3.6.2 Preuve du théorème

On procède de la manière habituelle, en prouvant dans un premier temps le théorème pour des fonctions nulles sur un voisinage de 0, puis dans le cas général. Notons, pour une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ s'annulant en 0,

$$Z(f) := \begin{cases} \sum_{S_q \le t} f(\Delta X_{S_q}) \zeta_q'' & \text{si } \beta_n \to 0, \\ \sum_{S_q \le t} f(\Delta X_{S_q}) L_q & \text{si } \beta_n \to \beta \in]0, +\infty]. \end{cases} \tag{3.6.15}$$

Cas où f est nulle sur $[-\varepsilon, \varepsilon]$

Soit $\varepsilon > 0$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ nulle sur $[-\varepsilon, \varepsilon]$. Soit r un entier tel que $1/r < \varepsilon$.

On définit l'ensemble, de cardinal presque sûrement borné, uniformément en n,

$$\mathfrak{I}_t^{r,n} := \{i_q^n \le [nt], \exists m \le r, \exists k, S_q = S_k^m\}.$$

On pose $X_t^r = X_t - \sum\limits_{i_q^n \in \mathfrak{I}_t^{r,n}} \Delta X_{S_q}$.

Alors, à partir d'un certain rang $n_0 = n_0(\omega, r, t)$, les i_q^n tels que $S_q = S_k^m \le t, m \le r$ sont tous distincts et, de plus, $|\Delta_i^n X^m| \le \varepsilon \ \forall i \le [nt]$, donc $f(\Delta_i^n X) = 0$ dès que $i \notin \mathfrak{I}_t^{r,n}$.

On a par conséquent pour tout $n \geq n_0$

$$\left(\sum_{i=1}^{[nt]} f(\overline{\Delta}_i^n X) - \sum_{s\leq t} f(\Delta X_s)\right) = \sum_{i_q^n \in \mathfrak{I}_t} (f(\overline{\Delta}_{i_q^n}^n X) - f(\Delta X_{S_q}))$$
$$= \alpha_n \sum_{i_q^n \in \mathfrak{I}_t} f'(\Delta X_{S_q} + r_q^n) \left(\left[\left\{\frac{X_{(i_q^n-1)/n}}{\alpha_n}\right\} + \left\{\frac{\Delta_{S_q} X}{\alpha_n}\right\} + \frac{\Delta_{i_q^n}^n X^\varepsilon}{\alpha_n}\right] - \left\{\frac{\Delta X_{S_q}}{\alpha_n}\right\}\right)$$

où r_q^n est compris entre 0 et $\Delta X_{S_q} - \overline{\Delta}_i^n X$ (et donc inférieur à $\alpha_n + |\Delta_{i_q^n}^n X^m|$).

Il reste donc à montrer les convergences suivantes :
Si $\beta \to 0$, $\left(\beta_n \left[\left\{\frac{X_{(i_q^n-1)/n}}{\alpha_n}\right\} + \left\{\frac{\Delta_{S_q} X}{\alpha_n}\right\} + \frac{\Delta_{i_q^n}^n X^\varepsilon}{\alpha_n}\right] - \left\{\frac{\Delta X_{S_q}}{\alpha_n}\right\}\right)_q \xrightarrow{\mathcal{L}\text{ st}} (\zeta_q'')_q$.
Si $\beta \to \beta$, $\left(\beta_n \left[\left\{\frac{X_{(i_q^n-1)/n}}{\alpha_n}\right\} + \left\{\frac{\Delta_{S_q} X}{\alpha_n}\right\} + \frac{\Delta_{i_q^n}^n X^\varepsilon}{\alpha_n}\right] - \left\{\frac{\Delta X_{S_q}}{\alpha_n}\right\}\right)_q \xrightarrow{\mathcal{L}\text{ st}} (\beta L_q)_q$.
Si $\beta \to +\infty$, $\left(\left[\left\{\frac{X_{(i_q^n-1)/n}}{\alpha_n}\right\} + \left\{\frac{\Delta_{S_q} X}{\alpha_n}\right\} + \frac{\Delta_{i_q^n}^n X^\varepsilon}{\alpha_n}\right] - \left\{\frac{\Delta X_{S_q}}{\alpha_n}\right\}\right)_q \xrightarrow{\mathcal{L}\text{ st}} (L_q)_q$.

Supposons que $\beta_n \to 0$. Alors

$$\sup_q \left|\beta_n \left[\left\{\frac{X_{(i_q^n-1)/n}}{\alpha_n}\right\} + \left\{\frac{\Delta_{S_q} X}{\alpha_n}\right\} + \frac{\Delta_{i_q^n}^n X^\varepsilon}{\alpha_n}\right] - \left\{\frac{\Delta X_{S_q}}{\alpha_n}\right\} - \sqrt{n}\Delta_{i_q^n}^n X^\varepsilon\right| \leq 2\beta_n \longrightarrow 0.$$

Il suffit donc de vérifier la convergence de $(\sqrt{n}\Delta_{i_q^n}^n X^\varepsilon)_q$ vers $(\zeta_q'')_q$, qui est précisément celle démontrée dans [13] pour le cas non arrondi. L'hypothèse $\mathcal{H}_2$ est en outre suffisante ici.

Supposons ensuite que β_n converge vers $\beta \in]0, +\infty[$. L'ensemble des points de discontinuité de la fonction (définie sur $[0,1]\times[0,1]\times\mathbb{R}$) $(u, v, y) \mapsto [u+v+y]-v$ est de probabilité nulle pour la loi de (U, V, ζ_q''). Par conséquent, il suffit de montrer la convergence en loi stable suivante :

$$\left(\{\frac{X_{i_q^n-1}}{\alpha_n}\}, \{\frac{\Delta X_{S_q}}{\alpha_n}\}, \frac{\sqrt{n}\Delta_{i_q^n}^n X^\varepsilon}{\beta_n}\right) \xrightarrow{\mathcal{L}\text{ st}} \left(U_q, 1_{\{\Delta X_{S_q}\neq 0\}} U_q', \frac{\zeta_q''}{\beta}.\right) \tag{3.6.16}$$

Posons :

$$\begin{aligned} \xi_q^n &:= (\sqrt{\kappa_q^n}\sigma_{S_q-} w_q^n + \sqrt{1-\kappa_q^n}\sigma_{S_q} w_q'^n) \qquad (3.6.17) \\ &= \sqrt{n}\left(\sigma_{S_q-}\left(W_{S_q} - W_{(i_q^n-1)/n}\right) + \sigma_{S_q}\left(W_{i_q^n} - W_{S_q}\right)\right). \end{aligned}$$

Par définition,

$$\frac{\Delta^n_{i^n_q} X^\varepsilon}{\alpha_n} - \frac{\xi^n_q}{\beta_n} = \frac{\sqrt{n}}{\beta_n}\Bigg(\int_{(i^n_q-1)/n}^{i^n_q/n} b_s \mathrm{d}s + \int_{(i^n_q-1)/n}^{i^n_q/n}\int_{\mathbb{R}} \delta(s,x) 1_{\{G(x)\leq 1/r\}}(\underline{p}-\underline{q})(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)$$
$$- \int_{(i^n_q-1)/n}^{i^n_q/n}\int_{\mathbb{R}} \delta(s,x) 1_{\{|\delta(s,x)\leq 1|, G(x)>1/r\}}\underline{q}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)$$
$$+ \int_{(i^n_q-1)/n}^{S_q} (\sigma_s - \sigma_{S_q-})\mathrm{d}W_s + \int_{S_q}^{i^n_q/n} (\sigma_s - \sigma_{S_q})\mathrm{d}W_s\Bigg).$$

On vérifie que chacun des termes du second membre converge (en probabilité) vers 0. C'est évident pour le premier, puisque b est borné, et les deux derniers, car σ est càdlàg. Par ailleurs, pour tout $\tau < 1/r$ fixé,

$$\int_{(i^n_q-1)/n}^{i^n_q/n}\int_{\mathbb{R}} \delta(s,x) 1_{\{G(x)\leq 1/r\}}(\underline{p}-\underline{q})(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x) =$$
$$\int_{(i^n_q-1)/n}^{i^n_q/n}\int_{\mathbb{R}} \delta(s,x) 1_{\{\tau<G(x)\leq 1/r\}}(\underline{p}-\underline{q})(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x) + \int_{(i^n_q-1)/n}^{i^n_q/n}\int_{\mathbb{R}} \delta(s,x) 1_{\{G(x)\leq \tau\}}(\underline{p}-\underline{q})(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x).$$

Or

$$E(|\sqrt{n}\int_{(i^n_q-1)/n}^{i^n_q/n}\int_{\mathbb{R}} \delta(s,x) 1_{\{\tau<G(x)\leq 1/r\}}(\underline{p}-\underline{q})(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)|)$$
$$\leq 2\sqrt{n}E(|\int_{(i^n_q-1)/n}^{i^n_q/n}\int_{\mathbb{R}} G(x)\frac{G(x)}{\tau} 1_{\{\tau<G(x)\leq 1/r\}}\underline{q}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)|).$$

Pour tout τ, on a donc

$$\int_{(i^n_q-1)/n}^{i^n_q/n}\int_{\mathbb{R}} \delta(s,x) 1_{\{\tau<G(x)\leq 1/r\}}(\underline{p}-\underline{q})(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x) \xrightarrow{L^1} 0. \tag{3.6.18}$$

En outre,

$$E\left(n\left(\int_{(i^n_q-1)/n}^{i^n_q/n}\int_{\mathbb{R}} \delta(s,x) 1_{\{G(x)\leq \tau\}}(\underline{p}-\underline{q})(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\right)^2\right)$$
$$\leq nE(\int_{(i^n_q-1)/n}^{i^n_q/n}\int_{\mathbb{R}} G(x)^2 1_{\{G(x)\leq \tau\}}\underline{q}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x))$$
$$\leq \int_{\mathbb{R}} G(x)^2 1_{G(x)\leq\tau}\mathrm{d}x.$$

Vu (3.6.18), finalement,

$$\lim_{\tau\to 0}\limsup_n E(|\int_{(i^n_q-1)/n}^{i^n_q/n}\int_{\mathbb{R}} \delta(s,x) 1_{\{G(x)\leq 1/r\}}(\underline{p}-\underline{q})(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)|) = 0.$$

Nous avons donc, pour tout $\varepsilon, \eta > 0$ et tout $q \geq 1$,

$$\limsup_n P\left(\left|\frac{\Delta^n_{i^n_q} X^\varepsilon}{\alpha_n} - \frac{\xi^n_q}{\beta_n}\right| > \eta\right) = 0. \tag{3.6.19}$$

Le lemme 31 permet de conclure.

On procède de même lorsque $\beta_n \longrightarrow +\infty$, en remarquant simplement que, vu la convergence (3.6.16) et $\frac{1}{\beta_n} \to 0$, on a ici

$$\left(\{\frac{X_{i^n_q-1}}{\alpha_n}\}, \{\frac{\Delta X_{S_q}}{\alpha_n}\}, \frac{\Delta^n_{i^n_q} X^\varepsilon}{\alpha_n}\right) \xrightarrow{\mathcal{L}\text{ st}} \left(U_q, 1_{\{\Delta X_{S_q} \neq 0\}} U'_q, 0\right) \tag{3.6.20}$$

Cas général

Soit à présent $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, telle que $f''(x) = \circ_0(x)$. On rappelle les notations précédentes, $f_b = f\psi_b$ et $f^b = f.(1-\psi_b)$. f^b vérifie les conditions du *i.* D'après le *i.* (avec les notations (3.1.12) et (3.6.15)), les convergences (3.1.15), (3.1.16) et (3.1.17) sont donc vérifiées par f^b. Vérifions brièvement, en suivant les arguments de [13], que $Z(g)$ est bien défini pour toute fonction telle que $g(x) = \circ_0(|x|)$, et que sa loi, conditionnellement à $\mathcal{F}$, est indépendante de la suite S_q considérée. Soit en effet $g = \circ_0(|x|)$. Fixons $\omega \in \Omega$. Les variables $L_q(\omega, .)$ sont (conditionnellement à $\mathcal{F}$) centrées, de carré intégrable. On peut construire le processus (toujours sur Ω')

$$Z(g)(\omega, .)_t := \sum_q g(\Delta X_{S_q}) L_q 1_{t \leq S_q}$$

qui définit alors une martingale de carré intégrable, purement discontinue, dont l'ensemble des temps de sauts est inclus dans celui de X, avec égalité lorsque g ne s'annule pas en dehors de 0. La loi de son saut en S_q dépend en outre uniquement du processus X et de σ.
Nous avons montré dans la section précédente que, pour tout $b > 0$, $\sqrt{n} \wedge \alpha_n^{-1} Z^n(f^b) \xrightarrow{\mathcal{L}\text{ st}} Z((f^b)')$. Par ailleurs, nous avons

$$\widetilde{E}(Z(f'_b)^2_t | \mathcal{F}) = \sum_q f'_b(\Delta X_{S_q})^2 \widetilde{E}(A_q(\omega)^2 | \mathcal{F}) \underset{b \to 0}{\longrightarrow} 0$$

pour tout t et tout ω. On en déduit, en utilisant l'inégalité de Doob, que $Z((f_b)') \xrightarrow[b]{\text{luP}} 0$.

Il reste à vérifier, comme dans le cas sans arrondis, que pour tout $\rho > 0$,

$$\lim_{b \to 0} \limsup_{n \to +\infty} P(\sup_{s \leq t} \sqrt{n} \wedge \frac{1}{\alpha_n} |Z^n_s(f_b)| > \rho) = 0 \tag{3.6.21}$$

Traitons tout d'abord le cas $\beta_n \longrightarrow \beta < +\infty$ (éventuellement nul). On compare $\sqrt{n} Z^n(f_b)$ avec son équivalent non arrondi : $\sqrt{n} \hat{Z}^n(f) = \sqrt{n}(\sum_{i=1}^{[nt]} f(\Delta^n_i X) - \sum_{S_q \leq t} f(\Delta X_{S_q}))$.

$$\sqrt{n} \left| Z^n_t(f_b) - \hat{Z}^n_t(f_b) \right| = \sqrt{n} \sum_{i=1}^{[nt]} (\overline{\Delta}^n_i X - \Delta^n_i X) f'_b(\Delta^n_i X + r^n_i),$$

où r_i^n est compris entre 0 et $\Delta_i^n X - \overline{\Delta}_i^n X$. Dans tous les cas, $|r_i^n| \leq \alpha_n$. On peut toujours trouver une fonction g réelle symétrique, croissante sur $\mathbb{R}_+$, continue, telle que $g(x) = \circ_0(x^2)$ et $g_b \geq |(f_b)'|$. (On peut toujours en trouver une, vu les hypothèses faites sur f). Alors pour tout $s \leq t$,

$$\begin{aligned}\sqrt{n}\left|Z_s^n(f_b) - \hat{Z}_s^n(f_b)\right| &\leq \beta_n \sum_{i=1}^{[nt]} (g(|\Delta_i^n X| + \alpha_n)\psi((\Delta_i^n X + r_i^n)/(b))) \\ &\leq \beta_n \sum_{i=1}^{[nt]} (g(2\Delta_i^n X) + g(2\alpha_n))\,\psi((\Delta_i^n X + r_i^n)/(b)).\end{aligned}$$

Par hypothèse, $\sum\limits_{i=1}^{[nt]} g(2\alpha_n) \underset{n}{\longrightarrow} 0$. Comme en outre $2\beta_n \sum\limits_{i=1}^{[nt]} g(2\Delta_i^n X)\psi((\Delta_i^n X + r_i^n)/(b))$ converge en probabilité vers $2\beta \sum_{s\leq t} g_{2b}(2\Delta X_s)$, on a :

$$\lim_{b\to 0}\limsup_{n\to+\infty} P(|Z^n(f_b) - \hat{Z}^n(f_b)| > \rho) = 0.$$

On obtient enfin (3.6.21) en appliquant le résultat correspondant pour $\hat{Z}^n(f)$, montré dans [13] :

$$\lim_{b\to 0}\limsup_{n\to+\infty} P(\sup_{s\leq t}\sqrt{n}|\hat{Z}^n(f_b)_s| > \rho) = 0.$$

Lorsque $\beta_n \longrightarrow +\infty$, on choisit la fonction g telle que de plus $ng(2\alpha_n) \to 0$; on majore comme précédemment

$$\frac{1}{\alpha_n}\left|Z^n(f_b) - \hat{Z}^n(f_b)\right| \leq \sum_{i=1}^{[nt]} (g(2\Delta_i^n X) + g(2\alpha_n))\psi((\Delta_i^n X + r_i^n)/(b)),$$

et la propriété supplémentaire vérifiée par g permet de conclure de même.

3.6.3 Preuve de la tension sous $\mathcal{H}_2$

Supposons ici que X vérifie seulement l'hypothèse $\mathcal{H}_2'$, et que de plus la fonction test f est de classe $\mathcal{C}^2$, telle que $f(0) = f'(0) = 0$ et $f''(x)\mathcal{O}(x)$ au voisinage de 0. En particulier, pour tout $a > 0$, il existe une constante C qui ne dépend que de la fonction f et de a tel que pour tout réel $-a \leq x \leq a$, $|f(x)| \leq C|x|^3$. Rappelons que les processus A^n vérifient $|A^n - X_t| \leq \alpha_n$ pour tous n, ω, t et notons en outre

$$D^n(f)_t := \sqrt{n} \wedge \frac{1}{\alpha_n}\left(U_n(f, A^n)_t - \sum_{s\leq[nt]/n} f(\Delta X_s)\right).$$

Le processus $D^n(f)$ est une semimartingale adaptée à la filtration $\mathcal{F}_{(i-1)/n}$, qui se décompose sous la forme :

$$D^n(f)_t = \sum_{i=1}^{[nt]} \left(\Delta_i^n D^n(f) 1_{\{|\Delta_i^n D^n(f)| \leq 1\}} - E\left(\Delta_i^n D^n(f) 1_{\{|\Delta_i^n D^n(f)| \leq 1\}} | \mathcal{F}_{(i-1)/n} \right) \right)$$
$$+ \sum_{i=1}^{[nt]} \left(\Delta_i^n D^n(f) 1_{\{|\Delta_i^n D^n(f)| > 1\}} + E\left(\Delta_i^n D^n(f) 1_{\{|\Delta_i^n D^n(f)| \leq 1\}} | \mathcal{F}_{(i-1)/n} \right) \right),$$

où la première somme est la partie martingale locale (purement discontinue) et le second la partie à variation finie. La semimartingale $D^n(f)$ admet donc comme caractéristiques associées à la fonction de troncation $x 1_{|x| \leq 1}$:

$$\begin{cases} B_t^n = \sum_{i=1}^{[nt]} E\left(\Delta_i^n D^n(f) 1_{\{|\Delta_i^n D^n(f)| \leq 1\}} | \mathcal{F}_{(i-1)/n} \right), \\ C_t^n = 0, \\ \nu^n([0,t] \times D) = \sum_{i=1}^{[nt]} P\left(\Delta_i^n D^n(f) \in D | \mathcal{F}_{(i-1)/n} \right). \end{cases}$$

La seconde caractéristique modifiée de $D^n(f)$ vaut alors

$$\widetilde{C}_t^n = \sum_{i=1}^{[nt]} \mathrm{Var}\left(\Delta_i^n D^n(f) 1_{\{|\Delta_i^n D^n(f)|\} \leq 1} | \mathcal{F}_{(i-1)/n} \right).$$

Pour appliquer le critère de tension de la proposition 7, nous devons prouver que :

(i) $\forall \varepsilon, N > 0, \lim_{a \to \infty} \limsup_n P(\nu^n([0,N] \times \{x, |x| > a\}) > \varepsilon) = 0$;

(ii) Les suites B^n, $\widetilde{C}^n$ et $\sum_{i=1}^{[nt]} E\left((p|\Delta_i^n D^n(f)| - 1)^+ \wedge 1 | \mathcal{F}_{(i-1)/n} \right)$ sont C-tendues (pour tout $p > 0$).

Les trois processus du (ii) sont à variations finies, et tous trois fortement majorés par $C_p \sum_{i=1}^{[nt]} E\left(|\Delta_i^n D^n(f)| \wedge 1 | \mathcal{F}_{(i-1)/n} \right)$. Il suffit donc de prouver la C-tension de ce dernier processus (cf section 1.2.5). Par ailleurs

$$\nu^n([0,N] \times \{x, |x| > a\}) = \sum_{i=1}^{[nN]} P\left(|\Delta_i^n D^n(f)| > a | \mathcal{F}_{(i-1)/n} \right),$$

donc la probabilité du (i) est majorée, via l'inégalité de Markov, par

$$\frac{1}{a\varepsilon} \sum_{i=1}^{[nN]} E\left(|\Delta_i^n D^n(f)| \right).$$

Il reste donc à prouver, au vu du critère de C-tension du théorème 6, que pour tout $t > 0$,

$$\limsup_n \sum_{i=1}^{[nt]} E\left(|\Delta_i^n D^n(f)|\right) < +\infty; \tag{3.6.22}$$

$$\forall \eta, \varepsilon > 0, \exists \theta > 0, n_0 \geq 1, \forall n \geq n_0,$$

$$P\left(\sup_{|0\leq r<s\leq t|, |s-r|\leq\theta} \left(\sum_{i=[nr]+1}^{[ns]} E\left(|\Delta_i^n D^n(f)| |\mathcal{F}_{(i-1)/n}\right)\right) > \eta\right) \leq \varepsilon. \tag{3.6.23}$$

Etudions plus précisément chaque accroissement $\Delta_i^n D^n(f)$; remarquons que jusqu'ici, la forme particulière de ces accroissements n'a pas été utilisée. On utilise la décomposition habituelle $f = f_a + f^a$ pour un $a > 0$ donné. Vu $\mathcal{H}_2'$, le processus X est borné, donc ses sauts et ses accroissements le sont aussi. Il existe par conséquent un $a > 0$ tel que pour tous ω, s, n, i, $f^a(\Delta_i^n A) = f^a(\Delta X_s) = 0$. Nous pouvons donc nous restreindre à l'étude de $D^n(f_a)$ (ou, ce qui revient au même, supposer dès le départ que f est à support compact). Nous avons :

$$|\Delta_i^n D^n(f_a)| \leq \sqrt{n} \wedge \frac{1}{\alpha_n} |f_a(\Delta_i^n A^n) - f_a(\Delta_i^n X)| + \sqrt{n} \wedge \frac{1}{\alpha_n} \left| f_a(\Delta_i^n X) - \sum_{i-1<ns\leq i} f_a(\Delta X_s) \right|.$$

Le premier terme, qui traduit l'erreur due aux arrondis, est inférieur à $|f_a'(\Delta_i^n X + r_i^n)|$, où $|r_i^n| \leq 2\alpha_n$. Étant données les hypothèses faites sur f, nous pouvons majorer ce terme par $C(|\Delta_i^n X|^2 + 1/n)$, de même que pour la démonstration du théorème central limite. Le second terme peut être étudié à l'aide de la formule d'Itô, de manière similaire à la démonstration du théorème 12.i de [13]. En effet par hypothèse f_a est de classe $\mathcal{C}^2$; la différence $f_a(\Delta_i^n X) - \sum_{i-1<ns\leq i} f_a(\Delta X_s)$ est alors égale à :

$$\sqrt{n}\left(\int_{[ns]/n}^{[nt]/n}\left(f_a'(X_r - X_r^{(n)})b_r + \frac{1}{2} f_a''(X_r - X_r^{(n)})\sigma_r^2 + \int_{\mathbb{R}} g_a\left(X_{r^-} - X_r^{(n)}, \delta(r,x)\right) \mathrm{d}x\right) \mathrm{d}s\right.$$
$$\left. + \int_{[ns]/n}^{[nt]/n} f_a'(X_r - X_r^{(n)})\sigma_r \mathrm{d}W_r + \int_{[ns]/n}^{[nt]/n} \int_{\mathbb{R}} k_a\left(X_{r^-} - X_r^{(n)}, \delta(r,x)\right)(\underline{p} - \underline{q})(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x)\right),$$

où l'on a noté en suivant [13] : $k_a(x,y) = f_a(x+y) - f_a(x) - f_a(y)$ et $g_a(x,y) = k_a(x,y) - f_a'(x)y$. Nous avons seulement supposé ici que $f = \mathcal{O}(x^3)$; par conséquent, on peut majorer $f_a'(x)$, $f_a''(x)$, k_a et g_a par respectivement $C|x|^2$, $C|x|$, $C|x||y|$ et $C|x||y|^2$. Grâce à l'hypothèse $\mathcal{H}_2'$, b et σ sont bornés, et de plus, pour tout $0 \leq \gamma \leq 2$, $E(|X_{t+s} - X_t|^\gamma | \mathcal{F}_t) \leq Cs^{\gamma/2}$. Nous pouvons à présent majorer les espérances conditionnelles, directement pour la partie à variation finie, et en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour la partie martingale locale :

$$E\left|\left(\sqrt{n}(f_a(\Delta_i^n X) - \sum_{i-1<ns\leq i} f_a(\Delta X_s))\right| |\mathcal{F}_{(i-1)/n}\right) \leq \frac{C}{n}. \tag{3.6.24}$$

Nous en déduisons immédiatement (3.6.22), ainsi que (3.6.23), en choisissant θ et n_0 tels que $C\theta + 1/n$ soit inférieur à η, C étant ici la constante obtenue dans (3.6.24). La tension de la suite de processus $D^n(f)$ est donc prouvée.

3.6.4 Preuve de (3.1.11)

En modifiant légèrement la preuve du théorème central limite (section 3.6.2), on peut plus généralement vérifier que, si l'amplitude des sauts de X est constante (égale à a), alors, en conservant les notations précédentes,

$$\sqrt{n_l}\left(V_{n_l} - \sum_{s \leq t} f(a) 1_{\{\Delta X_s \neq 0\}}\right) \xrightarrow{\mathcal{L}\text{ st}} f'(a) \sum_{S_q \leq t} \left([U_q + b + \zeta''_q/\beta] - b\right) 1_{\Delta X_{S_q} \neq 0},$$

pour toute suite n_l telle que $\{\sqrt{n_l} a\} \to b$. En effet, la convergence (3.6.4) est dans ce contexte trivialement remplacée par

$$\forall Z \mathcal{F}\text{-mesurable bornée, } E(Z g_q^3(\{\frac{\Delta X_{S_q}}{\alpha_n}\})|\mathcal{G}^\eta_{S_q-}) \xrightarrow{L^1} \widetilde{E}(Z g_q^3(b 1_{\{\Delta X_{S_q} \neq 0\}})|\mathcal{G}^\eta_{S_q-}),$$

et le lemme 31 par

$$\left(\{\frac{X_{i_{m,q-1}}}{\alpha_n}\}, \{\frac{\Delta X_{S_q^m}}{\alpha_n}\}, w^n_{m,q}, w'^n_{m,q}, \kappa^n_{m,q}\right)_q \xrightarrow{\mathcal{L}\text{ st}} \left(U_q, b 1_{\{\Delta X_{S_{m,q}} \neq 0\}}, Y_q, Y'_q, V_q\right)_q.$$

La fin de la démonstration est identique à celle du théorème central limite.

Annexe A

La convergence vers la loi uniforme en plusieurs dimensions

Nous développons ici la remarque faite à l'occasion du corollaire 15 : la démonstration de Tukey concernant la convergence de la partie fractionnaire d'une variable aléatoire vers la loi uniforme se généralise assez facilement aux dimensions supérieures. Soit X une variable aléatoire, F sa fonction de répartition et F^* celle de sa partie fractionnaire. La démonstration repose sur deux éléments. D'une part (cf [35], p. 140) la convergence en loi a lieu si et seulement si les coefficients de Fourier-Stieltjes (sur $[0,1]$) de F^* convergent vers ceux de la fonction de répartition de la loi uniforme (à savoir 1 pour le coefficient constant, 0 pour les autres), d'autre part le coefficient de degré n de Fourier-Stieltjes de F^* est égal à la transformée de Fourier-Stieltjes de F prise en $2\pi n$.

Nous pouvons généraliser cette méthode à des variables multidimensionnelles. Considérons une variable aléatoire d-dimensionnelle $X = (X^1, ..., X^d)$, notons pour $\sigma > 0$ F_σ la fonction de répartition de σX et F_σ^* (resp. F_0^*) celle de $\{\sigma X\}$:)$(\{\sigma X^1\}, ..., \{\sigma X^d\})$ (resp. de la loi uniforme sur $[0,1]^d$). On définit les coefficients de Fourier-Stieltjes associés, pour tout $n \in \mathbb{Z}^d$, par : $c_n(F_\sigma^*) = \int_{[0,1]^d} e^{2i\pi n.x} \mathrm{d}F_\sigma^*(x)$. On a toujours $c_0(F_0^*) = 1$, les autres coefficients étant de nouveau nuls pour la loi uniforme. Notons de plus $\Lambda(u, F_\sigma) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{\imath u.x} \mathrm{d}F_\sigma(x)$. Nous avons alors le résultat :

Proposition 33. *Soit X une variable aléatoire d-dimensionnelle, F sa fonction de répartition. La partie fractionnaire $(\{\sigma X^1\}, ..., \{\sigma X^d\})$ de σX converge (en loi) vers la loi uniforme sur $[0,1]^d$ si et seulement si, pour tout d-uplet d'entiers $n \in \mathbb{Z}^d$, la fonction caractéristique $\Lambda(\sigma n, F)$ converge vers 0 lorsque σ tend vers l'infini.*

Démonstration. Nous pouvons ici aussi nous ramener à l'étude des coefficients de Fourier grâce au lemme suivant :

Lemme 34. *Soit $(X, Y)_n$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $[0,1]^2$, et μ une loi sur $[0,1]^2$ de fonction de répartition F. Alors la suite $(X, Y)_n$ converge en loi vers μ si et seulement si les coefficients de Fourier-Stieltjes de la fonction de répartition de $(X, Y)_n$ convergent vers ceux de F.*

Ce résultat est vrai en dimension 1, comme montré dans [35] ; ceci signifie que les fonctions $x \mapsto e^{2i\pi x}, k \in \mathbb{Z}$ déterminent entièrement la convergence en loi sur $[0,1]$; d'après la proposition 4.6 de [11], c'est encore le cas, pour $[0,1]^d$, des fonctions de la forme $x \mapsto \Pi_{k=1}^d e^{2i\pi n_k x_k} = e^{2i\pi n.x}, n \in \mathbb{Z}^d$.

Les coefficients $c_{n,m}(F_\sigma^*)$ peuvent par ailleurs s'exprimer en fonction des transformées $\Lambda(2\pi n, 2\pi m, F_\sigma)$:

$$\begin{aligned}\Lambda(2\pi n, F_\sigma) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{2i\pi n.x} \mathrm{d}F_\sigma(x) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \int_{[0,1]^d} e^{2i\pi n.x} d(F_\sigma(x+k) - F_\sigma(k)) \\ &= \int_{[0,1]^d} e^{2i\pi n.u} \mathrm{d}F_\sigma^*(u) \qquad (A.0.1) \\ &= c_n(F_\sigma^*). \qquad (A.0.2)\end{aligned}$$

□

Nous retrouvons bien sûr les différents comportements rencontrées précédemment : si F_a est la fonction de répartition de la loi de (W_1, aW_1), $\Lambda(\sigma, r\sigma, F_a) = e^{-\sigma^2(1+ar)/2}$. Cette fonction (de σ) converge vers 0 en l'infini pour tout rationnel $r \neq -1/a$: le couple (W_1, aW_1) converge donc en loi vers un couple de variables uniformes indépendantes si et seulement si a est irrationnel. Remarquons que le résultat est encore vrai pour les irrationnels ne vérifiant pas la condition $\mathcal{H}$, mais avec une vitesse de convergence éventuellement très faible. Lorsque la matrice de covariance $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ est inversible, son déterminant est strictement négatif par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, et le binôme $a + 2br + cr^2$ de $\Lambda(\sigma, r\sigma, F) = e^{-\sigma^2(a+2br+cr^2)}$ n'a pas de racine réelle, donc la convergence vers 0 a lieu pour tout rationnel (et même tout réel) r.

Annexe B

La convergence stable (3.6.1)

La démonstration est pour l'essentiel la même que celle du lemme 31, à ceci près que la suite de temps d'arrêt S_q n'est en général pas croissante, ce qui est pourtant nécessaire dans la d'emonstration du lemme, afin de pouvoir conditionner par rapport au passé. Dans un premier temps, nous allons donc devoir réorganiser les sauts par ordre croissant. Il suffit de prouver que pour tout entier l, toute variable aléatoire Z $\mathcal{F}$-mesurable bornée et toutes fonctions $g_q^1, ..., g_q^5$ lipschitziennes bornées,

$$E(Z \prod_{1 \leq q \leq l} g_q^1(\{\frac{X_{(i_q-1)/n}}{\alpha_n}\}) g_q^2(w_q^n) g_q^3(\{\frac{\Delta X_{S_q}}{\alpha_n}\}) g_q^4(\kappa_q^n)) g_q^5(w_q'^n) \\ \longrightarrow \widetilde{E}\left(Z \prod_{1 \leq q \leq l} g_q^1(U_q) g_q^2(Y_q) g_q^3(1_{\{\Delta X_{S_q}\}} U_q') g_q^4(V_q) g_q^5(Y_q')\right). \tag{B.0.1}$$

Soit $(\mathcal{G}_t)$ la plus petite filtration contenant $(\mathcal{F}_t)$ et telle que $S_1, ..., S_l$ soient mesurables par rapport à $\mathcal{G}_0$. On note $T_1 < ... < T_l$ les $S_1, ...S_l$ réorganisés par ordre croissant. Il existe donc une permutation aléatoire $\pi \in \mathfrak{S}_l$ telle que $T_q = S_{\pi(q)}$. On note aussi, pour $q \leq l$, $j_q := i_{\pi(q)} = [nT_q] + 1$, $\hat{w}_q^n := w_{\pi(q)}^n$. Remarquons que j_q est $\mathcal{G}_0$-mesurable, de même que π. Pour $\eta > 0$ fixé, on définit encore $\mathcal{G}_t^\eta$ comme la plus petite tribu contenant $(\mathcal{G}_t)$ telle que les processus $(W_s)_{j_q \leq s \leq j_q + \eta}$ soient $\mathcal{G}_0^\eta$-mesurables. On définit comme précédemment

$$A_k^n := \prod_{1 \leq q \leq k} g_q^1(\{\frac{X_{(i_q-1)/n}}{\alpha_n}\}) g_q^2(w_q^n) g_q^3(\{\frac{\Delta X_{S_q}}{\alpha_n}\}), \tag{B.0.2}$$

et de plus on pose :

$$\hat{A}_k^n := \prod_{1 \leq q \leq k} g_q^1(\{\frac{X_{(j_q-1)/n}}{\alpha_n}\}) g_q^2(\hat{w}_q^n) g_q^3(\{\frac{\Delta X_{T_q}}{\alpha_n}\}). \tag{B.0.3}$$

Comme dans la démonstration du lemme, on montre qu'il suffit enfin de prouver la convergence :

$$E(ZA_q^n | \mathcal{G}_0^\eta) \xrightarrow{L^1} E(Z g_q^3(1_{\{\Delta X_{S_q} \neq 0\}} U_q') | \mathcal{G}_0^\eta) \widetilde{E}(\Pi_{q \leq l} g_q^1(U_q) g_q^2(Y_q)). \tag{B.0.4}$$

Pour cela, on prouve dans un premier temps la convergence pour les $\hat{A}^n_q$:

$$E(Z\hat{A}^n_q|\mathcal{G}^\eta_0) \xrightarrow{L^1} E(Zg^3_q(1_{\{\Delta X_{T_q}\neq 0\}}U'_q)|\mathcal{G}^\eta_0)\widetilde{E}(\Pi_{q\leq l}g^1_q(U_q)g^2_q(Y_q)). \tag{B.0.5}$$

Cette dernière se montre là encore de la même manière que dans le lemme. Il suffit donc finalement de vérifier que (B.0.4) se déduit de (B.0.5). En effet,

$$\begin{aligned}
E(ZA^n_l|\mathcal{G}^\eta_0) &= \sum_{\tau\in\mathfrak{S}_l} 1_{\{\pi(\omega)=\tau\}}E(ZA^n_l|\mathcal{G}^\eta_0)\\
&= \sum_{\tau\in\mathfrak{S}_l} 1_{\{\pi(\omega)=\tau\}}E(Z\prod_{q\leq l} g^1_{\tau(q)}(\{\frac{X_{(j_q-1)/n}}{\alpha_n}\})g^2_{\tau(q)}(\hat{w}^n_q)g^3_{\tau(q)}(\{\frac{\Delta X_{T_q}}{\alpha_n}\})|\mathcal{G}^\eta_0).
\end{aligned}$$

De cette égalité et de (3.6.7), on déduit la convergence dans L^1 de $E(ZA^n_l|\mathcal{G}^\eta_0)$ vers

$$\begin{aligned}
&\sum_{\tau\in\mathfrak{S}_l} 1_{\{\pi(\omega)=\tau\}}\widetilde{E}\left(Zg^3_{\tau(q)}(1_{\{\Delta X_{T_q}\neq 0\}}U'q)|\mathcal{G}^\eta_0\right)\\
&\qquad\qquad \times \widetilde{E}\left(\prod_{q\leq l} g^1_{\tau(q)}(U_q)g^2_{\tau(q)}(Y_q)g^3_{1_{\{\Delta X_{T_q}\neq 0\}}\tau(q)}(U'q)\right).
\end{aligned}$$

Rappelons que $T_q = S_{\pi(q)}$. Les l-uplets $(U_q, U'_q, Y_q)_{1\leq q\leq l}$ et $(U_{\tau(q)}, U'_{\tau(q)}, Y_{\tau(q)})_{1\leq q\leq l}$ ayant même loi, et chaque τ constituant une bijection sur $\{1,...,l\}$, les deux espérances

$$\begin{aligned}
&\widetilde{E}\left(1_{\{\pi(\omega)=\tau\}}Z\prod_{q\leq l} g^1_{\tau(q)}(U_q)g^2_{\tau(q)}(Y_q)g^3_{\tau(q)}(1_{\{\Delta X_{T_q}\neq 0\}}U'_q)|\mathcal{G}^\eta_0\right)\\
&\text{et } \widetilde{E}\left(1_{\{\pi(\omega)=\tau\}}Z\prod_{q\leq l} g^1_q(U_q)g^2_q(Y_q)g^3_q(1_{\{\Delta X_{S_q}\neq 0\}}U'q)|\mathcal{G}^\eta_0\right)
\end{aligned}$$

sont égales quelle que soit la permutation τ. Par conséquent,

$$E(ZA^n_l|\mathcal{G}^\eta_0) \xrightarrow{L^1} \sum_{\tau\in\mathfrak{S}_l} 1_{\{\pi(\omega)=\tau\}}\widetilde{E}(Zg^3_q(1_{\{\Delta X_{S_q}\neq 0\}}U'q)|\mathcal{G}^\eta_0)\widetilde{E}(\prod_{q\leq l} g^1_q(U_q)g^2_q(Y_q)). \tag{B.0.6}$$

(B.0.4) est donc démontré.

Annexe C

L'hypothèse $\mathcal{H}$

Nous donnons ici brièvement les démonstrations des deux résultats simples liés aux approximations diophantiennes utilisés dans la dernière partie (cf [19] ou [21] pour le premier, [21] pour le second).

C.1 Théorème de convergence de Khintchine

Soit ψ une fonction croissante telle que $\sum 1/(k\psi(k))$ soit finie. Il s'agit de montrer que l'ensemble des réels ζ tels que, pour une infinité d'entiers k, on ait $d(k\zeta, \mathbb{Z}) \leq 1/(k\psi(k))$ est de mesure nulle pour la mesure de Lebesgue, notée λ. Il suffit évidemment de montrer le résultat pour tout intervalle de la forme $[m, m+1]$, où m est un entier quelconque. Posons, pour un entier m fixé,

$$A_k := \{\zeta \in [m, m+1], \exists n \in \mathbb{Z}, |\zeta - \frac{n}{k}| < \frac{1}{k^2\psi(k)}\}.$$

Cet ensemble est la réunion de $k-1$ intervalles de taille $2/(k^2\psi(k))$, et des deux intervalles sur les bords, de longueur moitié moindre, donc $\lambda(A_k) = \frac{2}{k\psi(k)}$, et vu l'hypothèse faite sur ψ, on a $\sum_{k\geq 1} \lambda(A_k) < +\infty$. Par application du lemme de Borel-Cantelli, l'ensemble des ζ appartenant à une infinité de A_k est donc de mesure nulle pour la mesure de Lebesgue, ce qui est le résultat recherché.

C.2 Preuve du second résultat

A un réel ζ et une fonction croissante ψ, on associe l'entier (éventuellement infini)

$$K_\psi(\zeta) := \sup\{k \geq 1, \mathrm{d}(k\zeta, \mathbb{Z}) \leq 1/(k\psi(k))\} \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\},$$

avec la convention habituelle $\sup \emptyset = 0$. Remarquons que quelle que soit la fonction ψ, un réel vérifiant la condition $K_\psi(\zeta) < +\infty$ est nécessairement irrationnel. Nous allons montrer le résultat suivant :

Proposition 35. *Soit $\zeta \in \mathbb{R}$, ψ une fonction croissante. Si $K_\psi(\zeta)$ est fini, alors il existe $M > 0$ tel que pour tout $z > B$, il existe deux entiers premiers entre eux a et b vérifiant :*

$$\begin{cases} |a - b\zeta| < 1/b \\ \frac{z}{\psi(z)} \leq b \leq z \end{cases}. \tag{C.2.1}$$

Nous commençons par montrer le lemme suivant :

Lemme 36. *Soient γ un réel et $N \geq 1$ un entier ; alors il existe $b < N$, $d(b\gamma, \mathbb{Z}) \leq 1/N$.*

Démonstration. Si $n\gamma$ et $m\gamma$ ont la même partie fractionnaire, $(n - m)\gamma$ est entier et le résultat est évident. On peut donc supposer les $\{n\gamma\}, n = 1, ..., N$ tous distincts. On note $a_i, i = 1, ..., N$ les parties fractionnaires des $n\gamma$ réorganisées par ordre croissant, puis $\delta_i = a_i - a_{i-1}$ pour $i \geq 2$, et $\delta_1 = 1 + a_1 - a_n$. La somme des δ_i est égale à 1, donc l'un au moins des δ_i est inférieur à $1/N$ (strictement inférieur sauf si les a_i sont uniformément répartis), et le lemme est démontré. (Autrement dit, si l'on place N points sur le tore $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, au moins deux d'entre eux sont à distance inférieure à $1/N$). □

Preuve de la proposition. Fixons la fonction ψ et considérons un ζ tel que $K_\psi(\zeta) \neq 0$. En particulier, ζ est irrationnel donc pour tout entier b, $\mathrm{d}(b\zeta, \mathbb{Z})$ est non nul, et on peut trouver un entier $N > 1/\mathrm{d}(b\zeta, \mathbb{Z})$. D'après le lemme 36, l'ensemble $\{q \geq 1, \mathrm{d}(q\zeta, \mathbb{Z}) < \mathrm{d}(b\zeta, \mathbb{Z})\}$ est alors non vide. La suite b_n ci-dessous est donc bien définie :

$$\begin{aligned} b_0 &= 1 \\ b_{n+1} &= \min\{b \geq 1, \mathrm{d}(b\zeta, \mathbb{Z}) < \mathrm{d}(b_n\zeta, \mathbb{Z})\}, \quad \forall n \geq 0. \end{aligned} \tag{C.2.2}$$

Cette suite est par définition strictement croissante. De plus, pour tout n, d'après le lemme 36, il existe $b < b_{n+1}$ tel que $\mathrm{d}(b\zeta, \mathbb{Z}) \leq 1/b_{n+1}$. Par définition des b_n, nous avons $\mathrm{d}(b_n\zeta, \mathbb{Z}) \leq \mathrm{d}(b\zeta, \mathbb{Z})$. Nous avons donc construit une suite infinie d'entiers b_n strictement croissante telle que pour tout n, on ait :

$$\mathrm{d}(b_n\zeta, \mathbb{Z}) \leq 1/b_{n+1}. \tag{C.2.3}$$

Soit B le premier b_n supérieur à K. Soit $z \geq B$. Il existe m tel que $K \leq b_m \leq z < b_{m+1}$. De plus,

$$\frac{z}{\psi(z)} \leq \frac{z}{\psi(b_m)} < \frac{b_{m+1}}{\psi(b_m)} \leq \frac{1}{\mathrm{d}(b_m\zeta, \mathbb{Z})\psi(b_m)} \leq b_m.$$

La première inégalité est due à la croissance de ψ, la troisième à la propriéte (C.2.3) et la dernière au fait que $b_m \geq K$. Nous avons donc trouvé un entier vérifiant (C.2.1), à savoir b_m.

En particulier, $\mathrm{d}(b_m\zeta, \mathbb{Z}) < 1/b_m$, donc il existe un entier a tel que $|b_m\zeta - a| < 1/b_m$. Vérifions pour conclure que a et b_m sont premiers entre eux. Supposons que $a = ka'$ et $b_m = kb'$, avec $k \geq 2$. Alors $k|b'\zeta - a'| = |b_m\zeta - a|$, donc $b' < b_m$ et $d(b'\zeta, \mathbb{Z}) < d(b_m\zeta, \mathbb{Z})$, ce qui est impossible, par définition de la suite b_n. □

Remarque. Dans [21], l'auteur définit la suite b_n à partir du développement en fraction continue de ζ ; nous avons choisi une approche un peu plus directe en définissant les b_n comme *meilleures approximations* de ζ (c'est-à-dire vérifiant la propriété (C.2.2)), largement suffisante dans notre contexte puisque la seule propriété utilisée est la condition (C.2.3).

Index des notations

Bibliographie

[1] Yacine Aït-Sahalia et Jean Jacod. Testing for jumps in a discretely observed process. *Ann. Statist.*, 37(1) :184–222, 2009.

[2] D. J. Aldous et G. K. Eagleson. On mixing and stability of limit theorems. *Ann. Probability*, 6(2) :325–331, 1978.

[3] Alexander Alvarez, Fabien Panloup, Monique Pontier, et Nicolas Savy. Estimation of the instantaneous volatility. arXiv :0812.3538v3.

[4] Frederico Bandi et Jeffrey Russell. Microstructure noise, realized variance, and optimal sampling. *Review of Economic Studies*, 75(2) :339–369, 2008.

[5] Ole E. Barndorff-Nielsen et Neil Shephard. Power and bipower variation with stochastic volatility and jumps. *Journal of financial econometrics*, 2(1) :1–37, 2004.

[6] Patrick Billingsley. *Convergence of probability measures*. Wiley Series in Probability and Statistics : Probability and Statistics. John Wiley & Sons Inc., New York, Édition second, 1999. A Wiley-Interscience Publication.

[7] F. Comte, V. Genon-Catalot, et Y. Rozenholc. Nonparametric estimation for a stochastic volatility model. *Finance Stoch.*, 14(1) :49–80, 2010.

[8] Sylvain Delattre. *Estimation du coefficient de diffusion d'un processus de diffusion avec erreurs d'arrondis*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, 1997.

[9] Sylvain Delattre et Jean Jacod. A central limit theorem for normalized functions of the increments of a diffusion process, in the presence of round-off errors. *Bernoulli*, 3 :1–28, 1997.

[10] Claude Dellacherie et Paul-André Meyer. *Probabilités et potentiel. Chapitres V à VIII*. Hermann, Paris, Édition révisée, 1980. Théorie des martingales.

[11] Stewart N. Ethier et Thomas G. Kurtz. *Markov processes*. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics : Probability and Mathematical Statistics. John Wiley & Sons Inc., New York, 1986. Characterization and convergence.

[12] Jean Jacod. La variation quadratique du brownien en présence d'erreurs d'arrondis. *Astérisque*, 236 :155–161, 1996.

[13] Jean Jacod. Asymptotic properties of realized power variations and related functionals of semimartingales. *Stochastic processes and Applications*, 118 :517–559, 2008.

[14] Jean Jacod, Yingying Li, Per A. Mykland, Mark Podolskij, et Mathias Vetter. Microstructure noise in the continuous case : the pre-averaging approach. *Stochastic Process. Appl.*, 119(7) :2249–2276, 2009.

[15] Jean Jacod et Philip Protter. *Discretization of processes.*

[16] Jean Jacod et Philip Protter. Asymptotic error distributions for the Euler method for stochastic differential equations. *Ann. Proba.*, 26 :267–307, 1998.

[17] Jean Jacod et Albert Shiryaev. *Limit theorems for stochastic processes, 2nd ed.* Springer-Verlag, Berlin, 2003.

[18] Jean Jacod et Viktor Todorov. Testing for common arrivals of jumps for discretely observed multidimensional processes. *Ann. Statist.*, 37(4) :1792–1838, 2009.

[19] A. Ya. Khintchine. *Continued fractions.* Translated by Peter Wynn. P. Noordhoff Ltd., Groningen, 1963.

[20] Petr A. Kosulajeff. Sur la répartition de la partie fractionnaire d'une variable. *Mat. Sb. (NS)*, 2 (44) :1017–1019, 1937.

[21] Serge Lang. *Introduction to diophantine approximations.* Addison-Wesley Series in Mathematics, 1967.

[22] Jeremy Large. Estimating quadratic variation when quoted prices change by a constant increment. Economics Series Working Papers 340, University of Oxford, Department of Economics, 2007.

[23] D. Lépingle. La variation d'ordre p des semi-martingales. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete*, 36(4) :295–316, 1976.

[24] Y. Li et P. Mykland. Determining the volatility of a price process in the presence of rounding errors. *Preprint*, 2006.

[25] Philip E. Protter. *Stochastic integration and differential equations*, volume 21 of *Applications of Mathematics (New York).* Springer-Verlag, Berlin, Édition second, 2004. Stochastic Modelling and Applied Probability.

[26] Alfréd Rényi. On stable sequences of events. *Sankhyā Ser. A*, 25 :293 302, 1963.

[27] Daniel Revuz et Marc Yor. *Continuous Martingales and Brownian Motion.* Springer Grundlehren der Math. Wissenschaften, 1999.

[28] Mathieu Rosenbaum. A new microstructure noise index (2007). A paraître dans *Quantitative Finance.*

[29] Mathieu Rosenbaum. *Etude de quelques problèmes d'estimation statistique en finance.* Thèse de doctorat, Université Paris-Est, 2007.

[30] Mathieu Rosenbaum. Integrated volatility and round-off error. *Bernoulli*, 15(3) :687–720, 2009.

[31] Neil Shephard. Are there discontinuities in financial prices ? In *Celebrating statistics*, volume 33 of *Oxford Statist. Sci. Ser.*, pages 213–231. Oxford Univ. Press, Oxford, 2005.

[32] John W. Tukey. On the distribution of the fractional part of a statistical variable. *Mat. Sb. (NS)*, 4 (46) :561–562, 1938.

[33] Jeannette H. C. Woerner. Power and multipower variation : inference for high frequency data. In *Stochastic finance*, pages 343–364. Springer, New York, 2006.

[34] Lan Zhang, Per A. Mykland, et Yacine Aït-Sahalia. A tale of two time scales : determining integrated volatility with noisy high-frequency data. *J. Amer. Statist. Assoc.*, 100(472) :1394–1411, 2005.

[35] A. Zygmund. *Trigonometric series. Vol. I, II.* Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, Cambridge, Édition third, 2002. With a foreword by Robert A. Fefferman.