

Schémas numériques pour les modèles de turbulence statistiques en un point.

Soutenance de thèse

Aurélien Larcher, sous la direction du Pr. Philippe Angot et de Jean-Claude Latché

Jury :	Philippe Angot	Université Aix–Marseille 1	Directeur de thèse
	Michel Belliard	CEA/DEN Cadarache	Examineur
	Stéphane Clain	Université Toulouse 3	Rapporteur
	Jérôme Droniou	Université Montpellier 2	Rapporteur
	Thierry Gallouët	Université Aix–Marseille 1	Examineur
	Cédric Galusinski	Université Toulon	Examineur
	Jean-Claude Latché	IRSN/DPAM Cadarache	Encadrant

IRSN/DPAM/SEMIC/LIMSI

05 Novembre 2010

Plan

- 1 Introduction
- 2 Modèle physique
- 3 Discrétisations et schéma numérique
- 4 Étude de convergence pour un problème modèle stationnaire
- 5 Étude de convergence pour l'équation de convection–diffusion à donnée L^1

Contexte

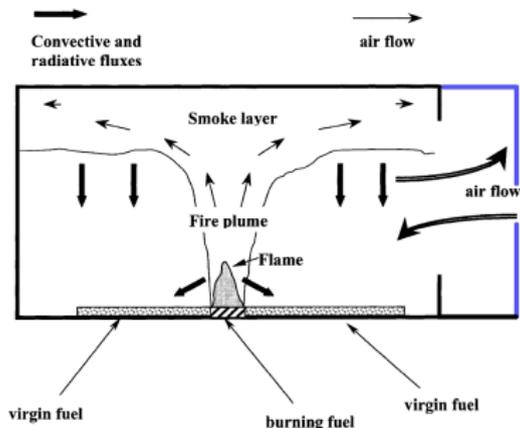
Contexte au sein de la DPAM : la simulation des incendies dans les milieux confinés.

Des écoulements caractérisés par :

- 1 des domaines de calcul de grande dimension : \approx mètres
- 2 des structures d'écoulements de très petite taille : \approx millimètres-microns

Les écoulements à décrire sont complexes :

- Géométries complexes
⇒ recirculations, séparations
- Convection naturelle
⇒ stratification



⇒ Traiter la turbulence dans le cas d'écoulements complexes ?

Un modèle physique :

- permettant une prédiction pertinente sur une large gamme d'écoulements
- ayant un coût en temps de calcul raisonnable

⇒ Choix de deux modèles de turbulence de type RANS

Un schéma numérique :

- garantissant la positivité des grandeurs turbulentes décrivant la turbulence.
- présentant de préférence une stabilité inconditionnelle.

⇒ Développer un schéma numérique adéquat

⇒ Implémenter le schéma dans le code de calcul ISIS

Plan

- 1 Introduction
- 2 **Modèle physique**
- 3 Discrétisations et schéma numérique
- 4 Étude de convergence pour un problème modèle stationnaire
- 5 Étude de convergence pour l'équation de convection–diffusion à donnée L^1

Modèle RANS → Modèle à viscosité tourbillonnaire

- Décomposition de Reynolds/Favre : moyenne + fluctuation

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}' \quad ; \quad p = \bar{p} + p'$$

Modèle RANS → Modèle à viscosité tourbillonnaire

- Décomposition de Reynolds/Favre : moyenne + fluctuation

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}' \quad ; \quad \rho = \bar{\rho} + \rho'$$

- Équations de Navier-Stokes moyennées (RANS) :

$$\left| \begin{array}{l} \partial_t(\rho\bar{\mathbf{u}}) + \nabla \cdot (\rho\bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{u}}) = \nabla \cdot \left(2\mu_\ell (\mathbf{D}(\bar{\mathbf{u}}) - \frac{1}{3}\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}) \right) - \nabla \bar{p} - \nabla \cdot \mathbf{R} \\ \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho\bar{\mathbf{u}}) = 0 \end{array} \right.$$

avec le tenseur de Reynolds $\mathbf{R} = -\overline{\rho \mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}'}$ et $\mathbf{D}(\bar{\mathbf{u}}) = \frac{\nabla \bar{\mathbf{u}} + \nabla^t \bar{\mathbf{u}}}{2}$.

Modèle RANS → Modèle à viscosité tourbillonnaire

- Décomposition de Reynolds/Favre : moyenne + fluctuation

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}' \quad ; \quad \rho = \bar{\rho} + \rho'$$

- Équations de Navier-Stokes moyennées (RANS) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t(\rho\bar{\mathbf{u}}) + \nabla \cdot (\rho\bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{u}}) = \nabla \cdot \left(2\mu_\ell (\mathbf{D}(\bar{\mathbf{u}}) - \frac{1}{3}\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}) \right) - \nabla \bar{p} - \nabla \cdot \mathbf{R} \\ \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho\bar{\mathbf{u}}) = 0 \end{array} \right.$$

avec le tenseur de Reynolds $\mathbf{R} = -\overline{\rho \mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}'}$ et $\mathbf{D}(\bar{\mathbf{u}}) = \frac{\nabla \bar{\mathbf{u}} + \nabla^t \bar{\mathbf{u}}}{2}$.

- Modéliser les corrélations des fluctuations de vitesse $\overline{u'_i u'_j}$, $1 \leq i, j \leq d$?

→ processus de diffusion pour le champ moyen:

$$\mathbf{R} = 2\mu_t (\mathbf{D}(\bar{\mathbf{u}}) - \frac{1}{3}\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}) - \frac{2}{3}\rho k \mathbf{Id} \quad (\text{Boussinesq})$$

Modèle RANS → Modèle à viscosité tourbillonnaire

- Décomposition de Reynolds/Favre : moyenne + fluctuation

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}' \quad ; \quad \rho = \bar{\rho} + \rho'$$

- Équations de Navier-Stokes moyennées (RANS) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t(\rho\bar{\mathbf{u}}) + \nabla \cdot (\rho\bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{u}}) = \nabla \cdot \left(2\mu_\ell(\mathbf{D}(\bar{\mathbf{u}}) - \frac{1}{3}\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}) \right) - \nabla\bar{p} - \nabla \cdot \mathbf{R} \\ \partial_t\rho + \nabla \cdot (\rho\bar{\mathbf{u}}) = 0 \end{array} \right.$$

avec le tenseur de Reynolds $\mathbf{R} = -\overline{\rho\mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}'}$ et $\mathbf{D}(\bar{\mathbf{u}}) = \frac{\nabla\bar{\mathbf{u}} + \nabla^t\bar{\mathbf{u}}}{2}$.

- Modéliser les corrélations des fluctuations de vitesse $\overline{u'_i u'_j}$, $1 \leq i, j \leq d$?

→ processus de diffusion pour le champ moyen:

$$\mathbf{R} = 2\mu_t(\mathbf{D}(\bar{\mathbf{u}}) - \frac{1}{3}\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}) - \frac{2}{3}\rho k \mathbf{Id} \quad (\text{Boussinesq})$$

⇒ Comment évaluer la viscosité turbulente μ_t ?

Modèle RANS → Modèle à viscosité tourbillonnaire

- Décomposition de Reynolds/Favre : moyenne + fluctuation

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}' \quad ; \quad \rho = \bar{\rho} + \rho'$$

- Équations de Navier-Stokes moyennées (RANS) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t(\rho\bar{\mathbf{u}}) + \nabla \cdot (\rho\bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{u}}) = \nabla \cdot \left(2(\mu_\ell + \mu_t)(\mathbf{D}(\bar{\mathbf{u}}) - \frac{1}{3}\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}) \right) - \nabla(\bar{p} + \frac{2}{3}k) \\ \partial_t\rho + \nabla \cdot (\rho\bar{\mathbf{u}}) = 0 \end{array} \right.$$

avec le tenseur de Reynolds $\mathbf{R} = -\overline{\rho\mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}'}$ et $\mathbf{D}(\bar{\mathbf{u}}) = \frac{\nabla\bar{\mathbf{u}} + \nabla^t\bar{\mathbf{u}}}{2}$.

- Modéliser les corrélations des fluctuations de vitesse $\overline{u'_i u'_j}$, $1 \leq i, j \leq d$?

→ processus de diffusion pour le champ moyen:

$$\mathbf{R} = 2\mu_t(\mathbf{D}(\bar{\mathbf{u}}) - \frac{1}{3}\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}) - \frac{2}{3}\rho k \mathbf{Id} \quad (\text{Boussinesq})$$

⇒ Comment évaluer la viscosité turbulente μ_t ?

Exemple du modèle $k - \varepsilon$

- Fermeture au premier ordre
 - calculer μ_t par une relation algébrique
- Analyse dimensionnelle
 - choix d'échelles turbulentes caractéristiques pour modéliser μ_t

Exemple du modèle $k - \varepsilon$

- Fermeture au premier ordre
→ calculer μ_t par une relation algébrique
- Analyse dimensionnelle
→ choix d'échelles turbulentes caractéristiques pour modéliser μ_t
- Cas du modèle $k - \varepsilon$:

- ▶ *Vitesse* : Énergie cinétique turbulente (ECT)

$$k = \frac{1}{2} \overline{|u'|^2}$$

- ▶ *Temps* : Taux de dissipation de la ECT

$$\varepsilon = 2\nu \overline{|\mathbf{D}(u')|^2}$$

Exemple du modèle $k - \varepsilon$

- Fermeture au premier ordre
→ calculer μ_t par une relation algébrique
- Analyse dimensionnelle
→ choix d'échelles turbulentes caractéristiques pour modéliser μ_t
- Cas du modèle $k - \varepsilon$:

- ▶ *Vitesse* : Énergie cinétique turbulente (ECT)

$$k = \frac{1}{2} \overline{|u'|^2}$$

- ▶ *Temps* : Taux de dissipation de la ECT

$$\varepsilon = 2\nu \overline{|\mathbf{D}(u')|^2}$$

- Calcul de μ_t par la relation de Prandtl-Kolmogorov

$$\mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$$

Exemple du modèle $k - \varepsilon$

- Fermeture au premier ordre
→ calculer μ_t par une relation algébrique
- Analyse dimensionnelle
→ choix d'échelles turbulentes caractéristiques pour modéliser μ_t
- Cas du modèle $k - \varepsilon$:

- ▶ *Vitesse* : Énergie cinétique turbulente (ECT)

$$k = \frac{1}{2} \overline{|u'|^2}$$

- ▶ *Temps* : Taux de dissipation de la ECT

$$\varepsilon = 2\nu \overline{|\mathbf{D}(u')|^2}$$

- Calcul de μ_t par la relation de Prandtl-Kolmogorov

$$\mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$$

⇒ Comment évaluer les échelles k et ε ?

Équations de bilan turbulentes

$$\text{Production turbulente : } \mathbf{P} = \mathbf{R} : \nabla \bar{\mathbf{u}} = 2\mu_t |\mathbf{D}(\bar{\mathbf{u}})|^2 - \frac{2}{3}(\mu_t |\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}|^2 + \rho k \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}})$$

- Énergie cinétique turbulente :

$$\underbrace{\partial_t(\rho k) + \nabla \cdot (\rho k \bar{\mathbf{u}})}_{(1)} - \underbrace{\nabla \cdot \left(\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla k \right)}_{(2)} = \underbrace{\mathbf{P}}_{(3)} - \underbrace{\rho \varepsilon}_{(4)}$$

- Convection
- Diffusion moléculaire + Diffusion turbulente
- Production turbulente
- Dissipation

Équations de bilan turbulentes

$$\text{Production turbulente : } \mathbf{P} = \mathbf{R} : \nabla \bar{\mathbf{u}} = 2\mu_t |\mathbf{D}(\bar{\mathbf{u}})|^2 - \frac{2}{3}(\mu_t |\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}|^2 + \rho k \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}})$$

- Énergie cinétique turbulente :

$$\underbrace{\partial_t(\rho k) + \nabla \cdot (\rho k \bar{\mathbf{u}})}_{(1)} - \underbrace{\nabla \cdot \left(\left(\mu + \frac{\mu_t(k, \varepsilon)}{\sigma_k} \right) \nabla k \right)}_{(2)} = \underbrace{\mathbf{P}(k, \varepsilon)}_{(3)} - \underbrace{\rho \varepsilon}_{(4)}$$

- Convection
- Diffusion moléculaire + Diffusion turbulente
- Production turbulente
- Dissipation

Non-linéarités

Équations de bilan turbulentes

$$\text{Production turbulente : } \mathbf{P} = \mathbf{R} : \nabla \bar{\mathbf{u}} = 2\mu_t |\mathbf{D}(\bar{\mathbf{u}})|^2 - \frac{2}{3}(\mu_t |\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}|^2 + \rho k \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}})$$

- Énergie cinétique turbulente :

$$\underbrace{\partial_t(\rho k) + \nabla \cdot (\rho k \bar{\mathbf{u}})}_{(1)} - \underbrace{\nabla \cdot \left(\left(\mu + \frac{\mu_t(k, \varepsilon)}{\sigma_k} \right) \nabla k \right)}_{(2)} = \underbrace{\mathbf{P}(k, \varepsilon)}_{(3)} - \underbrace{\rho \varepsilon}_{(4)}$$

- Convection
- Diffusion moléculaire + Diffusion turbulente
- Production turbulente
- Dissipation

Non-linéarités

- Taux de dissipation de l'ECT :

$$\underbrace{\partial_t(\rho \varepsilon) + \nabla \cdot (\rho \varepsilon \bar{\mathbf{u}})}_{(1)} - \underbrace{\nabla \cdot \left(\left(\mu + \frac{\mu_t(k, \varepsilon)}{\sigma_\varepsilon} \right) \nabla \varepsilon \right)}_{(2)} = \underbrace{\frac{\varepsilon}{k} \left(C_{\varepsilon 1} \mathbf{P}(k, \varepsilon) - C_{\varepsilon 2} \rho \varepsilon \right)}_{(3+4)}$$

avec $\bar{\mathbf{u}}$ et ρ vérifiant le bilan de masse : $\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \bar{\mathbf{u}}) = 0$

Équations de bilan turbulentes

$$\text{Production turbulente : } \mathbf{P} = \mathbf{R} : \nabla \bar{\mathbf{u}} = 2\mu_t |\mathbf{D}(\bar{\mathbf{u}})|^2 - \frac{2}{3}(\mu_t |\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}|^2 + \rho k \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}})$$

- Énergie cinétique turbulente :

$$\underbrace{\partial_t(\rho k) + \nabla \cdot (\rho k \bar{\mathbf{u}})}_{(1)} - \underbrace{\nabla \cdot \left(\left(\mu + \frac{\mu_t(k, \varepsilon)}{\sigma_k} \right) \nabla k \right)}_{(2)} = \underbrace{\mathbf{P}(k, \varepsilon)}_{(3)} - \underbrace{\rho \varepsilon}_{(4)}$$

- Convection
- Diffusion moléculaire + Diffusion turbulente
- Production turbulente
- Dissipation

Non-linéarités
+
Couplage

- Taux de dissipation de l'ECT :

$$\underbrace{\partial_t(\rho \varepsilon) + \nabla \cdot (\rho \varepsilon \bar{\mathbf{u}})}_{(1)} - \underbrace{\nabla \cdot \left(\left(\mu + \frac{\mu_t(k, \varepsilon)}{\sigma_\varepsilon} \right) \nabla \varepsilon \right)}_{(2)} = \underbrace{\frac{\varepsilon}{k} \left(C_{\varepsilon 1} \mathbf{P}(k, \varepsilon) - C_{\varepsilon 2} \rho \varepsilon \right)}_{(3+4)}$$

avec $\bar{\mathbf{u}}$ et ρ vérifiant le bilan de masse : $\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \bar{\mathbf{u}}) = 0$

En résumé : Équations de bilan pour le modèle RANS $k - \varepsilon$ complet

(Par souci de clarté, \mathbf{u} et p désignent désormais les champs moyens.)

- 1 Bilan de quantité de mouvement :

$$\partial_t(\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) - \nabla \cdot (\mu(k, \varepsilon) \nabla \mathbf{u}) + \nabla p = \mathbf{g}$$

avec \mathbf{g} terme de forçage.

- 2 Conservation de la masse :

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0$$

- 3 Équations de bilan couplées pour les échelles k et ε :

$$\partial_t(\rho k) + \nabla \cdot (\rho k \mathbf{u}) - \nabla \cdot (\mu_k(k, \varepsilon) \nabla k) = f_k(\mathbf{u}, k, \varepsilon)$$

$$\partial_t(\rho \varepsilon) + \nabla \cdot (\rho \varepsilon \mathbf{u}) - \nabla \cdot (\mu_\varepsilon(k, \varepsilon) \nabla \varepsilon) = f_\varepsilon(\mathbf{u}, k, \varepsilon)$$

Plan

- 1 Introduction
- 2 Modèle physique
- 3 Discrétisations et schéma numérique**
- 4 Étude de convergence pour un problème modèle stationnaire
- 5 Étude de convergence pour l'équation de convection–diffusion à donnée L^1

Maillage admissible et partition en temps

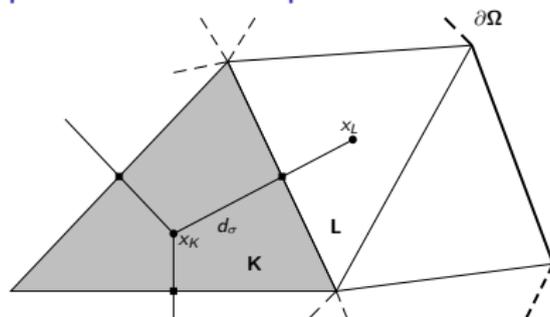


Figure: Maillage triangulaire non-structuré

- \mathcal{M} : famille de volumes de contrôles K , polygones ($d = 2$) ou polyèdres ($d = 3$) convexes et disjoints.

Maillage admissible et partition en temps

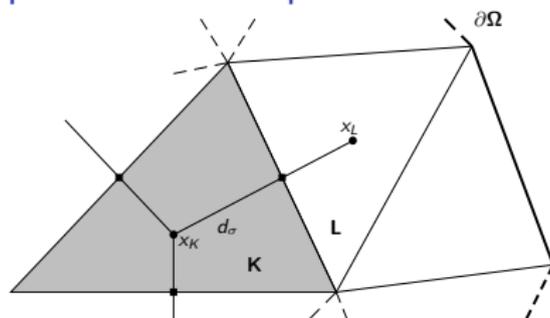


Figure: Maillage triangulaire non-structuré

- \mathcal{M} : famille de volumes de contrôles K , polygones ($d = 2$) ou polyèdres ($d = 3$) convexes et disjoints.
- $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\text{int}} \cup \mathcal{E}_{\text{ext}}$: ensemble des faces du maillage

Maillage admissible et partition en temps

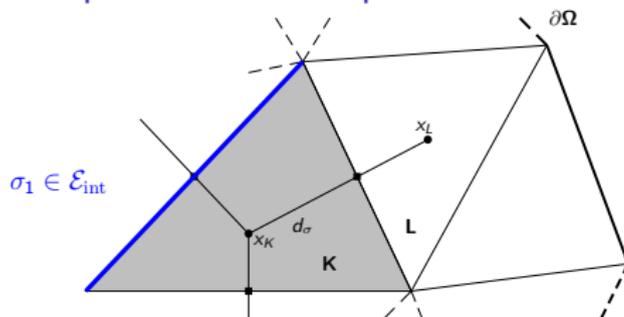


Figure: Maillage triangulaire non-structuré

- \mathcal{M} : famille de volumes de contrôles K , polygones ($d = 2$) ou polyèdres ($d = 3$) convexes et disjoints.
- $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\text{int}} \cup \mathcal{E}_{\text{ext}}$: ensemble des faces du maillage
 - ▶ \mathcal{E}_{int} ensemble des faces internes

Maillage admissible et partition en temps

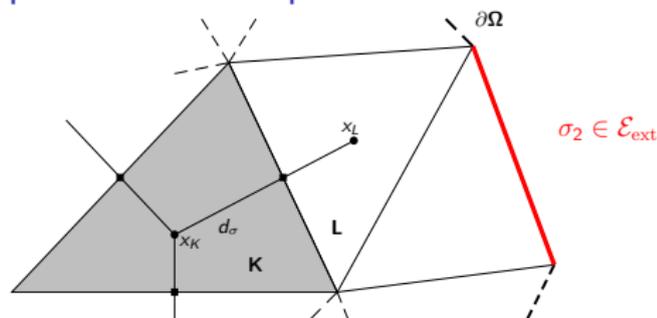


Figure: Maillage triangulaire non-structuré

- \mathcal{M} : famille de volumes de contrôles K , polygones ($d = 2$) ou polyèdres ($d = 3$) convexes et disjoints.
- $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\text{int}} \cup \mathcal{E}_{\text{ext}}$: ensemble des faces du maillage
 - ▶ \mathcal{E}_{int} ensemble des faces internes
 - ▶ \mathcal{E}_{ext} ensemble des faces externes

Maillage admissible et partition en temps

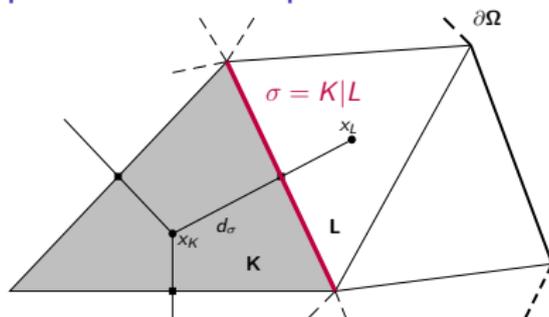


Figure: Maillage triangulaire non-structuré

- \mathcal{M} : famille de volumes de contrôles K , polygones ($d = 2$) ou polyèdres ($d = 3$) convexes et disjoints.
- $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\text{int}} \cup \mathcal{E}_{\text{ext}}$: ensemble des faces du maillage
 - ▶ \mathcal{E}_{int} ensemble des faces internes
 - ▶ \mathcal{E}_{ext} ensemble des faces externes
 - ▶ Pour tout L voisin de K , $\sigma = K|L$ face commune à K et L

Maillage admissible et partition en temps

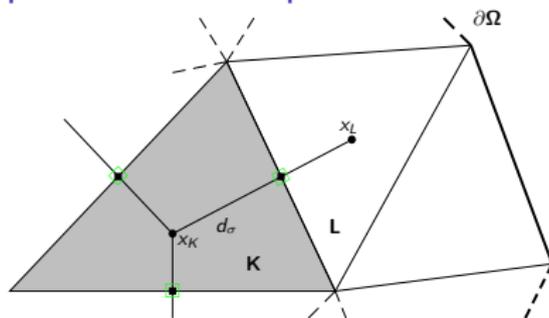


Figure: Maillage triangulaire non-structuré

- \mathcal{M} : famille de volumes de contrôles K , polygones ($d = 2$) ou polyèdres ($d = 3$) convexes et disjoints.
- $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\text{int}} \cup \mathcal{E}_{\text{ext}}$: ensemble des faces du maillage
 - ▶ \mathcal{E}_{int} ensemble des faces internes
 - ▶ \mathcal{E}_{ext} ensemble des faces externes
 - ▶ Pour tout L voisin de K , $\sigma = K|L$ face commune à K et L
- $\mathcal{P} = (x_K)_{K \in \mathcal{M}}$: famille de points vérifiant une condition d'orthogonalité
 - ▶ $x_K \in K$
 - ▶ $[x_K, x_L]$ orthogonal à $\sigma_{K|L}$

Maillage admissible et partition en temps

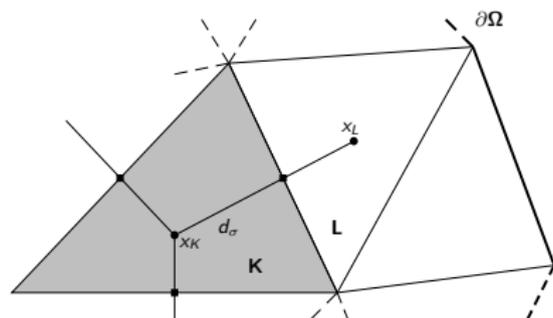
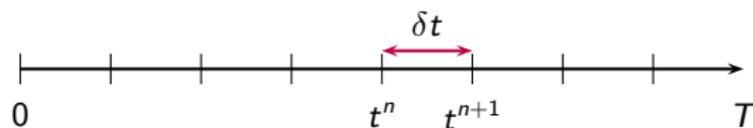


Figure: Maillage triangulaire non-structuré

- \mathcal{M} : famille de volumes de contrôles K , polygones ($d = 2$) ou polyèdres ($d = 3$) convexes et disjoints.
- $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\text{int}} \cup \mathcal{E}_{\text{ext}}$: ensemble des faces du maillage
- $\mathcal{P} = (x_K)_{K \in \mathcal{M}}$: famille de points vérifiant une condition d'orthogonalité
- Partition uniforme de l'intervalle de temps $[0, T]$ en intervalles $[t^{n-1}, t^n]_{1 \leq n \leq N}$



Discretisations régulières

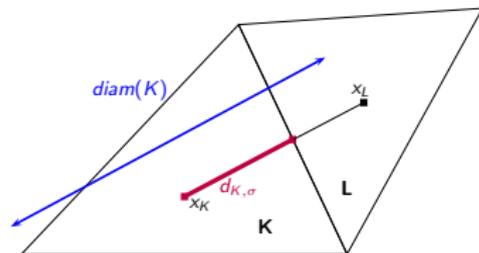
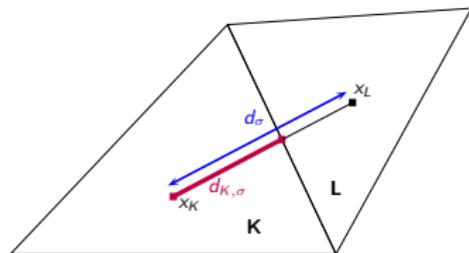
Pour les analyses de convergence et pour avoir des estimations uniformes par rapport au maillage, on définit une suite de discrétisations régulières par :

Definition

$(\mathcal{M}^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ de Ω est une suite de discrétisations régulières

- 1 $h_{\mathcal{M}}^{(m)} \rightarrow 0$ quand $m \rightarrow \infty$,
- 2 il existe un paramètre de régularité $\theta_0 > 0$ tel que $\theta_{\mathcal{M}}^{(m)} \geq \theta_0, \forall m \in \mathbb{N}$, avec:

$$(2) \quad \theta_{\mathcal{M}} = \inf_{K \in \mathcal{M}} \left\{ \frac{d_{K,\sigma}}{d_{\sigma}}; \sigma \in \mathcal{E}(K) \right\} \cup \left\{ \frac{d_{K,\sigma}}{\text{diam}(K)}; \sigma \in \mathcal{E}(K) \right\}$$



- Espace discret pour la pression : approx. constante par maille

$$H_{\mathcal{M}} = \{q_h \in L^2(\Omega) : q_h|_K = \text{constant}, \forall K \in \mathcal{M}\}$$

- Espace discret pour la vitesse : approx. affine par maille

$$\mathbf{V}_h = \left\{ \mathbf{v}_h \in L^2(\Omega)^d : \begin{array}{l} v_h|_K \text{ affine}, \forall K \in \mathcal{M}; \\ v_{\sigma,i} = \frac{1}{|\sigma|} \int_{\sigma} u_i \, d\gamma \text{ continu à travers } \sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}, 1 \leq i \leq d; \\ v_{\sigma,i} = 0, \forall \sigma \in \mathcal{E}_{\text{ext}}, 1 \leq i \leq d; \end{array} \right\}$$

Pas de continuité de la solution à travers les faces σ

Méthode de volumes finis standard

- Approximation constante par maille.
- Discrétisation “2 points” standard pour les gradients discrets :

$$[u, v]_{\mathcal{D}} = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}} \sigma=K|L} \frac{|\sigma|}{d_{\sigma}} (u_K - u_L)(v_K - v_L) + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\text{ext}} \cap \mathcal{E}(K)} \frac{|\sigma|}{d_{\sigma}} u_K v_K$$

Algorithme de résolution : un schéma à pas fractionnaire

Itération à t^{n+1} , $0 \leq n < N$:

- Trouver $(k^{n+1}, \varepsilon^{n+1})$ tel que:

$$\frac{\rho^n k^{n+1} - \rho^{n-1} k^n}{\delta t} + \nabla \cdot (k^{n+1} \rho^n \mathbf{u}^n) - \nabla \cdot (\mu_k(k^n, \varepsilon^n) \nabla k^{n+1}) = f_k(\mathbf{u}^n, k^{n+1}, k^n, \varepsilon^{n+1}, \varepsilon^n)$$

$$\frac{\rho^n \varepsilon^{n+1} - \rho^{n-1} \varepsilon^n}{\delta t} + \nabla \cdot (\varepsilon^{n+1} \rho^n \mathbf{u}^n) - \nabla \cdot (\mu_\varepsilon(k^n, \varepsilon^n) \nabla \varepsilon^{n+1}) = f_\varepsilon(\mathbf{u}^n, k^{n+1}, k^n, \varepsilon^{n+1}, \varepsilon^n)$$

Algorithme de résolution : un schéma à pas fractionnaire

Itération à t^{n+1} , $0 \leq n < N$:

- 1 Trouver $(k^{n+1}, \varepsilon^{n+1})$ tel que: [Schéma VF + Méthode de Newton]

$$\frac{\rho^n k^{n+1} - \rho^{n-1} k^n}{\delta t} + \nabla \cdot (k^{n+1} \rho^n \mathbf{u}^n) - \nabla \cdot (\mu_k(k^n, \varepsilon^n) \nabla k^{n+1}) = f_k(\mathbf{u}^n, k^{n+1}, k^n, \varepsilon^{n+1}, \varepsilon^n)$$

$$\frac{\rho^n \varepsilon^{n+1} - \rho^{n-1} \varepsilon^n}{\delta t} + \nabla \cdot (\varepsilon^{n+1} \rho^n \mathbf{u}^n) - \nabla \cdot (\mu_\varepsilon(k^n, \varepsilon^n) \nabla \varepsilon^{n+1}) = f_\varepsilon(\mathbf{u}^n, k^{n+1}, k^n, \varepsilon^{n+1}, \varepsilon^n)$$

- 2 Trouver $(\mathbf{u}^{n+1}, p^{n+1})$ tel que:

- 1 Prédiction :

$$\frac{\rho^n \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} - \rho^{n-1} \mathbf{u}^n}{\delta t} + \nabla \cdot (\rho^n \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} \otimes \mathbf{u}^n) - \nabla \cdot (\mu(k, \varepsilon) \nabla \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}) + \nabla p^n = \mathbf{f}^{n+1}$$

- 2 Projection L^2 :

$$\rho^n \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}}{\delta t} + \nabla (p^{n+1} - p^n) = 0$$

- 3 Conservation de la masse à l'instant t^n :

$$\frac{\rho^n - \rho^{n-1}}{\delta t} + \nabla \cdot (\rho^n \mathbf{u}^n) = 0$$

Algorithme de résolution : un schéma à pas fractionnaire

Itération à t^{n+1} , $0 \leq n < N$:

- 1 Trouver $(k^{n+1}, \varepsilon^{n+1})$ tel que: [Schéma VF + Méthode de Newton]

$$\frac{\rho^n k^{n+1} - \rho^{n-1} k^n}{\delta t} + \nabla \cdot (k^{n+1} \rho^n \mathbf{u}^n) - \nabla \cdot (\mu_k(k^n, \varepsilon^n) \nabla k^{n+1}) = f_k(\mathbf{u}^n, k^{n+1}, k^n, \varepsilon^{n+1}, \varepsilon^n)$$

$$\frac{\rho^n \varepsilon^{n+1} - \rho^{n-1} \varepsilon^n}{\delta t} + \nabla \cdot (\varepsilon^{n+1} \rho^n \mathbf{u}^n) - \nabla \cdot (\mu_\varepsilon(k^n, \varepsilon^n) \nabla \varepsilon^{n+1}) = f_\varepsilon(\mathbf{u}^n, k^{n+1}, k^n, \varepsilon^{n+1}, \varepsilon^n)$$

- 2 Trouver $(\mathbf{u}^{n+1}, p^{n+1})$ tel que: [Schéma EF + Méthode de projection]

- 1 Prédiction :

$$\frac{\rho^n \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} - \rho^{n-1} \mathbf{u}^n}{\delta t} + \nabla \cdot (\rho^n \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} \otimes \mathbf{u}^n) - \nabla \cdot (\mu(k, \varepsilon) \nabla \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}) + \nabla p^n = \mathbf{f}^{n+1}$$

- 2 Projection L^2 :

$$\rho^n \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}}{\delta t} + \nabla (p^{n+1} - p^n) = 0$$

- 3 Conservation de la masse à l'instant t^n :

$$\frac{\rho^n - \rho^{n-1}}{\delta t} + \nabla \cdot (\rho^n \mathbf{u}^n) = 0$$

Algorithme de résolution : un schéma à pas fractionnaire

Itération à t^{n+1} , $0 \leq n < N$:

- 1 Trouver $(k^{n+1}, \varepsilon^{n+1})$ tel que: [Schéma VF + Méthode de Newton]

$$\frac{\rho^n k^{n+1} - \rho^{n-1} k^n}{\delta t} + \nabla \cdot (k^{n+1} \rho^n \mathbf{u}^n) - \nabla \cdot (\mu_k(k^n, \varepsilon^n) \nabla k^{n+1}) = f_k(\mathbf{u}^n, k^{n+1}, k^n, \varepsilon^{n+1}, \varepsilon^n)$$

$$\frac{\rho^n \varepsilon^{n+1} - \rho^{n-1} \varepsilon^n}{\delta t} + \nabla \cdot (\varepsilon^{n+1} \rho^n \mathbf{u}^n) - \nabla \cdot (\mu_\varepsilon(k^n, \varepsilon^n) \nabla \varepsilon^{n+1}) = f_\varepsilon(\mathbf{u}^n, k^{n+1}, k^n, \varepsilon^{n+1}, \varepsilon^n)$$

- 2 Trouver $(\mathbf{u}^{n+1}, p^{n+1})$ tel que: [Schéma EF + Méthode de projection]

- 1 Prédiction :

$$\frac{\rho^n \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} - \rho^{n-1} \mathbf{u}^n}{\delta t} + \nabla \cdot (\rho^n \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} \otimes \mathbf{u}^n) - \nabla \cdot (\mu(k, \varepsilon) \nabla \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}) + \nabla p^n = \mathbf{f}^{n+1}$$

- 2 Projection L^2 :

$$\rho^n \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}}{\delta t} + \nabla (p^{n+1} - p^n) = 0$$

- 3 Conservation de la masse à l'instant t^n :

$$\frac{\rho^n - \rho^{n-1}}{\delta t} + \nabla \cdot (\rho^n \mathbf{u}^n) = 0$$

⇒ la positivité de k et ε doit-être assurée.

Discrétisation du système $k - \varepsilon$ (1)

- **Bilan de masse** : ρ^n, ρ^{n-1} (positifs) et $(\rho\bar{u})_\sigma^n$, connus à t^{n+1} et vérifiant,

$$(4) \quad \text{pour tout } K \in \mathcal{M}, \quad |K| \frac{\rho_K^n - \rho_K^{n-1}}{\delta t} + \sum_{\sigma=K|L} |\sigma| (\rho\bar{u})_\sigma^n = 0$$

- **Équation semi-discrète pour k** :

$$\frac{\rho^n k^{n+1} - \rho^{n-1} k^n}{\delta t} + \nabla_{\mathcal{M}} \cdot ((\rho\bar{u})^n k^{n+1}) - \Delta_{\mathcal{M}, \mu^n}(k^{n+1}) = S^{n+1}$$

- **Opérateur de convection VF** :

$$[\nabla_{\mathcal{M}} \cdot \rho\bar{u}k]_K = \frac{1}{|K|} \sum_{\sigma=K|L} |\sigma| (\rho\bar{u})_\sigma k_\sigma$$

avec $(\rho\bar{u})_\sigma$ les flux massiques vérifiant le bilan de masse (4) et k_σ est la discrétisation *upwind*.

- **Terme de diffusion VF**:

$$-[\Delta_{\mathcal{M}, \mu}(k)]_K = \frac{1}{|K|} \left[\sum_{\sigma=K|L} \mu_\sigma \frac{|\sigma|}{d_\sigma} (k_K - k_L) + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K) \cap \mathcal{E}_{\text{ext}}} \mu_\sigma \frac{|\sigma|}{d_\sigma} k_K \right]$$

Linéarisation: $\mu(k, \varepsilon)$ calculée grâce aux valeurs de k et ε évalués au pas de temps précédent.

Discrétisation du système $k - \varepsilon$ (2)

- **Termes sources** : stratégie de discrétisation en temps (pour l'équation de k)

- ▶ Si S est constant:

$$\begin{aligned} S = C > 0 &\Rightarrow S^{n+1} = C \\ S = C < 0 &\Rightarrow S^{n+1} = -|C| k^{n+1}/k^n \end{aligned}$$

- ▶ Si $S = g(k)$ est une fonction donnée de k , même raisonnement en supposant $k^n > 0$:

$$\begin{aligned} g \text{ fonction positive} &\Rightarrow S^{n+1} = g(k^{n+1}, k^n) \\ g \text{ fonction négative} &\Rightarrow S^{n+1} = -|g(k^{n+1}, k^n)| k^{n+1}/k^n \end{aligned}$$

Dans tous les cas, on peut écrire S sous la forme :

$$(5) \quad S^{n+1} = \beta(k^n, \varepsilon^n) - \alpha(k^{n+1}, \varepsilon^{n+1}, k^n, \varepsilon^n) k^{n+1}$$

où β et α sont deux fonctions positives.

\Rightarrow Diagonale de la matrice du système, surchargée par les termes sources négatifs.

Positivité ou “de l'importance du bilan de masse”

Lemme

A matrice de $\mathbb{R}^{M \times M}$, $M \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq M$:

- 1 $A_{i,i} > 0$
- 2 $A_{i,j} \leq 0$, $\forall 1 \leq j \leq M$, $j \neq i$
- 3 $\sum_{1 \leq j \leq M} A_{i,j} > 0$

A est une matrice non-singulière appelée M-matrice, admettant une matrice inverse A^{-1} positive.

Positivité ou “de l'importance du bilan de masse”

Pour tout $K \in \mathcal{M}$, l'équation volumes finis s'écrit:

$$(6) \quad \left[\frac{|K| \rho_K^n}{\delta t} + \sum_{\sigma=K|L} |\sigma| \left((\rho \bar{u})_{\sigma}^{n,+} + \frac{\mu_{\sigma}^n}{d_{\sigma}} \right) + |K| \alpha(k, \varepsilon)^{n+1} \right] k_K^{n+1} \\ - \sum_{\sigma=K|L} \left[|\sigma| (\rho \bar{u})_{\sigma}^{n,-} + \frac{\mu_{\sigma}^n}{d_{\sigma}} \right] k_L^{n+1} = |K| \left[\beta(k^n, \varepsilon^n) + \frac{\rho_K^{n-1} k_K^n}{\delta t} \right]$$

Positivité ou “de l'importance du bilan de masse”

Pour tout $K \in \mathcal{M}$, l'équation volumes finis s'écrit:

$$(6) \quad \left[\frac{|K| \rho_K^n}{\delta t} + \sum_{\sigma=K|L} |\sigma| \left((\rho \bar{u})_{\sigma}^{n,+} + \frac{\mu_{\sigma}^n}{d_{\sigma}} \right) + |K| \alpha(k, \varepsilon)^{n+1} \right] k_K^{n+1} \\ - \sum_{\sigma=K|L} \left[|\sigma| (\rho \bar{u})_{\sigma}^{n,-} + \frac{\mu_{\sigma}^n}{d_{\sigma}} \right] k_L^{n+1} = |K| \left[\beta(k^n, \varepsilon^n) + \frac{\rho_K^{n-1} k_K^n}{\delta t} \right]$$

- Éléments diagonaux strictement positifs

Positivité ou “de l'importance du bilan de masse”

Pour tout $K \in \mathcal{M}$, l'équation volumes finis s'écrit:

$$(6) \quad \left[\frac{|K| \rho_K^n}{\delta t} + \sum_{\sigma=K|L} |\sigma| \left((\rho \bar{u})_{\sigma}^{n,+} + \frac{\mu_{\sigma}^n}{d_{\sigma}} \right) + |K| \alpha(k, \varepsilon)^{n+1} \right] k_K^{n+1} \\ - \sum_{\sigma=K|L} \left[|\sigma| (\rho \bar{u})_{\sigma}^{n,-} + \frac{\mu_{\sigma}^n}{d_{\sigma}} \right] k_L^{n+1} = |K| \left[\beta(k^n, \varepsilon^n) + \frac{\rho_K^{n-1} k_K^n}{\delta t} \right]$$

- Éléments diagonaux strictement positifs
- Éléments hors-diagonaux négatifs

Positivité ou “de l'importance du bilan de masse”

Pour tout $K \in \mathcal{M}$, l'équation volumes finis s'écrit:

$$(6) \quad \left[\frac{|K| \rho_K^n}{\delta t} + \sum_{\sigma=K|L} |\sigma| \left((\rho \bar{u})_{\sigma}^{n,+} + \frac{\mu_{\sigma}^n}{d_{\sigma}} \right) + |K| \alpha(k, \varepsilon)^{n+1} \right] k_K^{n+1} \\ - \sum_{\sigma=K|L} \left[|\sigma| (\rho \bar{u})_{\sigma}^{n,-} + \frac{\mu_{\sigma}^n}{d_{\sigma}} \right] k_L^{n+1} = |K| \left[\beta(k^n, \varepsilon^n) + \frac{\rho_K^{n-1} k_K^n}{\delta t} \right]$$

- Éléments diagonaux strictement positifs
- Éléments hors-diagonaux négatifs
- Second membre strictement positif

Positivité ou “de l'importance du bilan de masse”

Pour tout $K \in \mathcal{M}$, l'équation volumes finis s'écrit:

$$(6) \quad \left[\frac{|K| \rho_K^n}{\delta t} + \sum_{\sigma=K|L} |\sigma| \left((\rho \bar{u})_{\sigma}^{n,+} + \frac{\mu_{\sigma}^n}{d_{\sigma}} \right) + |K| \alpha(k, \varepsilon)^{n+1} \right] k_K^{n+1} \\ - \sum_{\sigma=K|L} \left[|\sigma| (\rho \bar{u})_{\sigma}^{n,-} + \frac{\mu_{\sigma}^n}{d_{\sigma}} \right] k_L^{n+1} = |K| \left[\beta(k^n, \varepsilon^n) + \frac{\rho_K^{n-1} k_K^n}{\delta t} \right]$$

- Éléments diagonaux strictement positifs
- Éléments hors-diagonaux négatifs
- Second membre strictement positif

En sommant tous les éléments d'une rangée de la matrice, **si le bilan de masse est vérifié**:

$$(7) \quad |K| \alpha(k, \varepsilon)^{n+1} + |K| \frac{\rho_K^n}{\delta t} + \sum_{\sigma} |\sigma| (\rho \bar{u})_{\sigma}^{n,+} - (\rho \bar{u})_{\sigma}^{n,-} = |K| \alpha(k, \varepsilon)^{n+1} + \underbrace{|K| \frac{\rho_K^{n-1}}{\delta t}}_{>0} k_K^n$$

Positivité ou “de l'importance du bilan de masse”

Pour tout $K \in \mathcal{M}$, l'équation volumes finis s'écrit:

$$(6) \quad \left[\frac{|K| \rho_K^n}{\delta t} + \sum_{\sigma=K|L} |\sigma| \left((\rho \bar{u})_{\sigma}^{n,+} + \frac{\mu_{\sigma}^n}{d_{\sigma}} \right) + |K| \alpha(k, \varepsilon)^{n+1} \right] k_K^{n+1} \\ - \sum_{\sigma=K|L} \left[|\sigma| (\rho \bar{u})_{\sigma}^{n,-} + \frac{\mu_{\sigma}^n}{d_{\sigma}} \right] k_L^{n+1} = |K| \left[\beta(k^n, \varepsilon^n) + \frac{\rho_K^{n-1} k_K^n}{\delta t} \right]$$

- Éléments diagonaux strictement positifs
- Éléments hors-diagonaux négatifs
- Second membre strictement positif

En sommant tous les éléments d'une rangée de la matrice, **si le bilan de masse est vérifié**:

$$(7) \quad |K| \alpha(k, \varepsilon)^{n+1} + |K| \frac{\rho_K^n}{\delta t} + \sum_{\sigma} |\sigma| (\rho \bar{u})_{\sigma}^{n,+} - (\rho \bar{u})_{\sigma}^{n,-} = |K| \alpha(k, \varepsilon)^{n+1} + \underbrace{|K| \frac{\rho_K^{n-1}}{\delta t}}_{>0} k_K^n$$

⇒ La matrice associée à l'opérateur de convection VF est une M-matrice.

Rôle essentiel du bilan de masse pour assurer la positivité - Larrouturou [JCP 1991]

Discretisation des termes sources: un exemple

Modèle $k - \varepsilon$ RNG :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{S}_k^{n+1} = \mathbf{P}^n - \frac{\rho^n |\varepsilon^{n+1}|}{\max(k^n, k^*)} k^{n+1} \\ \mathbf{S}_\varepsilon^{n+1} = \gamma^n C_{\varepsilon 1} \mathbf{P}^n - \frac{\rho^n (C_{\varepsilon 2} + C_{\text{rng}} \text{sgn}(C_{\varepsilon r}^+)) |\varepsilon^{n+1}|}{\max(k^n, k^*)} \varepsilon^{n+1} + \frac{\rho^n C_{\text{rng}} \text{sgn}(C_{\varepsilon r}^-)}{\max(k^n, k^*)} (\varepsilon^n)^2 \end{array} \right.$$

avec,

- $x^+ = \max(x, 0)$ et $x^- = \max(-x, 0)$
- $\gamma^n = \frac{\rho^{n-1} C_\mu k^n}{\mu_t^n}$
- $C_{\text{rng}} = C_\mu C_\eta \eta^2$
- $C_{\varepsilon r} = C_{\varepsilon 2} + C_{\text{rng}}$
- k^* fixé pour limiter les termes sources

Théorème

Existence, unicité et positivité stricte de $(k^{n+1}, \varepsilon^{n+1})$, $0 \leq n < N$ si (k^0, ε^0) strictement positives.

Preuve

- 1 Positivité : argument de M-Matrice précédent.
- 2 Existence : théorème de degré topologique, appliqué en utilisant une estimation L^∞ donnée par le principe du maximum pour une équation de convection–diffusion–réaction.
- 3 Unicité : on suppose deux solutions (k_1, ε_1) et (k_2, ε_2) et on note $\delta x = x_1 - x_2$, $x = k, \varepsilon$. En soustrayant les équations pour x_1 et x_2 , on obtient :

$$(8) \quad A(k_1, k_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2, k^*, \varepsilon^*) \begin{pmatrix} \delta k \\ \delta \varepsilon \end{pmatrix} = 0$$

or A est une M-matrice.

Plan

- 1 Introduction
- 2 Modèle physique
- 3 Discrétisations et schéma numérique
- 4 Étude de convergence pour un problème modèle stationnaire
- 5 Étude de convergence pour l'équation de convection–diffusion à donnée L^1

Problème étudié

Ω ouvert borné connexe de \mathbb{R}^d , $d = 2, 3$.

Équations de Stokes stationnaires + convection–diffusion modèle pour k :

$$(9a) \quad -\nabla \cdot (\lambda(k) \nabla \mathbf{u}) + \nabla p = \mathbf{f}$$

$$(9b) \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

$$(9c) \quad -\nabla \cdot (\lambda(k) \nabla k) + \nabla \cdot (k \mathbf{u}) = \lambda(k) |\nabla \mathbf{u}|^2$$

$$(9d) \quad \mathbf{u}(\mathbf{x}) = 0, \quad k(\mathbf{x}) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega$$

avec :

- $\mathbf{f} \in L^2(\Omega)^d$
- $\lambda(k) = \min(\lambda_\infty, (\mu^2 + \ell^2 k)^{1/2})$, avec ℓ réel positif et deux réels μ et λ_∞ , tels que $\lambda_\infty \geq \lambda(k) > \mu > 0$

Peut-on montrer la convergence du schéma éléments finis/volumes finis sur ce problème ?

Un résultat de convergence

Convergence du schéma numérique ?

- $(\mathbf{u}^{(m)}, p^{(m)}, k^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ suite de solutions approchées telle que $(\mathcal{M}^{(m)})$ suite de discrétisations régulières

- (\mathbf{u}, p, k) solution de (9) au sens faible :

(10)

$(\mathbf{u}, p, k) \in H_0^1(\Omega)^d \times L_0^2(\Omega) \times W_0^{1,\alpha}(\Omega)$, pour tout $\alpha \in [1, d/(d-1))$ and,
for all $(\mathbf{v}, q, \psi) \in H_0^1(\Omega)^d \times L^2(\Omega) \times C_c^\infty(\Omega)$:

$$\int_{\Omega} \lambda(k) \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} \, dx - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \mathbf{v} \, dx = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, dx,$$

$$\int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{u} \, dx = 0,$$

$$\int_{\Omega} \lambda(k) \nabla k \cdot \nabla \psi \, dx - \int_{\Omega} k \mathbf{u} \cdot \nabla \psi \, dx = \int_{\Omega} \lambda(k) |\nabla \mathbf{u}|^2 \psi \, dx.$$

\Rightarrow Montrer que $(\mathbf{u}^{(m)}, p^{(m)}, k^{(m)}) \rightarrow (\mathbf{u}, p, k)$ quand $m \rightarrow \infty$

Une difficulté : régularité du terme de production turbulente

Terme de production turbulente : $\lambda(k) |\nabla \mathbf{u}|^2$

Remarque : prenons $\mathbf{v} = \mathbf{u}$ dans (10)

$$\int_{\Omega} \lambda(k) |\nabla \mathbf{u}|^2 \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} p \, \nabla \cdot \mathbf{u} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \, d\mathbf{x}$$

alors, classiquement, il existe $C > 0$ tel que :

$$\|\lambda(k) |\nabla \mathbf{u}|^2\|_{L^1(\Omega)} \leq C$$

→ Le second membre de l'équation de k n'est pas dans $L^2(\Omega)$ mais $L^1(\Omega)$ seulement !

Conséquences :

- *Estimations* : $k \in W_0^{1,\alpha}(\Omega)$ avec α vérifiant une condition de type exposant critique d'injection de Sobolev.
- *Convergence* : Passage à la limite dans le second membre de l'équation de k ?

Problème discret

- Trouver $(\mathbf{u}, p, k) \in \mathbf{V}_h \times H_M \times H_M$ vérifiant :

$$\forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_h, \quad \int_{\Omega} \lambda(k) \nabla_h \mathbf{u} : \nabla_h \mathbf{v} \, dx - \int_{\Omega} p \nabla_h \cdot \mathbf{v} \, dx = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, dx,$$

$$\forall q \in H_M, \quad \int_{\Omega} q \nabla_h \cdot \mathbf{u} \, dx = 0,$$

$$\forall K \in \mathcal{M}, \quad \sum_{\sigma=K|L} \frac{|\sigma|}{d_{\sigma}} \lambda(k)_{\sigma} (k_K - k_L) + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K) \cap \mathcal{E}_{\text{ext}}} \frac{|\sigma|}{d_{K,\sigma}} \lambda(k)_{\sigma} (k_K) \\ + \sum_{\sigma=K|L} (v_{\sigma,K}^+ k_K - v_{\sigma,K}^- k_L) = |K| \left[\lambda(k) |\nabla \mathbf{u}|^2 \right]_K,$$

- Avec les discrétisations volumes finis suivantes :

- ▶ Flux convectif *upwind*, avec $v_{\sigma,K}^+ = \max(v_{K,\sigma}, 0)$ et $v_{\sigma,K}^- = -\min(v_{K,\sigma}, 0)$.
- ▶ Terme source : intégration maille par maille de la dissipation

$$\left[\lambda |\nabla_h \mathbf{u}|^2 \right]_K = \frac{\lambda(k_K)}{|K|} \int_K |\nabla_h \mathbf{u}|^2 \, dx.$$

- ▶ Terme de diffusion : on suppose juste que λ_{σ} satisfait,

$$\forall \sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}, \sigma = K|L, \quad \min [\lambda(k_K), \lambda(k_L)] \leq \lambda(k)_{\sigma} \leq \max [\lambda(k_K), \lambda(k_L)], \\ \forall \sigma \in \mathcal{E}_{\text{ext}} \cap \mathcal{E}(K) \quad \lambda(k)_{\sigma} = \lambda(k_K).$$

- Opérateur d'interpolation :

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} r_h : H_0^1(\Omega) \rightarrow V_h \\ v \mapsto v_h = r_h v = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} v_\sigma \phi_\sigma = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} \left(\frac{1}{|\sigma|} \int_\sigma v(\mathbf{x}) d\gamma \right) \phi_\sigma \end{array} \right.$$

L'opérateur r_h est continu, vérifie les inégalités d'approximation usuelles et la conservation faible de la divergence :

$$\forall K \in \mathcal{M}, \quad \int_K q_h \nabla \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = \int_K q_h \nabla \cdot r_h \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \quad \forall q_h \in H_M$$

- Condition inf-sup : il existe $C > 0$

$$\|p\|_{L^2(\Omega)} \leq C \sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{V}_h} \frac{1}{\|\mathbf{v}\|_{1,b}} \int_\Omega p \nabla \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x}$$

avec p de moyenne nulle sur Ω

Estimations *a priori*

Soit $(\mathcal{M}^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$, une suite de discrétisations régulières de paramètre de régularité $\theta_0 > 0$.

Pour tout $m \in \mathbb{N}$, $(\mathbf{u}^{(m)}, p^{(m)}, k^{(m)})$ vérifie les estimations *a priori* suivantes :

Théorème

$(\mathbf{u}^{(m)}, p^{(m)}, k^{(m)}) \in \mathbf{V}_h^{(m)} \times H_{\mathcal{M}}^{(m)} \times H_{\mathcal{M}}^{(m)}$ solution du problème (11) satisfait:

$$\|\mathbf{u}^{(m)}\|_{1,b} + \|k^{(m)}\|_{1,\alpha,\mathcal{M}} + \|p^{(m)}\|_{L^2(\Omega)} \leq C,$$

avec:

- $\alpha \in [1, d/(d-1))$
- C dépendant de \mathbf{f} , Ω , μ , θ_0 and α

Preuve

- L'estimation de \mathbf{u} est classique car λ est bornée inférieurement par $\mu > 0$.
- L'estimation de p est une conséquence de la condition *inf-sup*.
- L'estimation de k s'obtient de manière similaire au cas du Laplacien – [Gallouët–Herbin, FVCA2 1999]

Compacité

Les estimations précédentes ainsi que les estimations usuelles sur les translatées en espace permettent de déduire par Kolmogorov :

Lemme (Compacité des solutions discrètes)

$(\mathcal{M}^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ suite de discrétisations régulières de Ω .

$(\mathbf{u}^{(m)}, \mathbf{p}^{(m)}, k^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ suite de solutions approchées correspondantes.

À l'extraction d'une sous-suite près :

- 1 $(\mathbf{u}^{(m)})_{m \in \mathbb{N}} \rightarrow \mathbf{u} \in H_0^1(\Omega)^d$, dans $L^2(\Omega)^d$
- 2 $(\mathbf{p}^{(m)})_{m \in \mathbb{N}} \rightarrow \mathbf{p} \in L^2(\Omega)$, dans $L^2(\Omega)$
- 3 $(k^{(m)})_{m \in \mathbb{N}} \rightarrow k \in W_0^{1,\alpha}(\Omega)$, dans $L^\beta(\Omega)$, pour tout $\alpha \in [1, d/(d-1))$ et $\beta \in [1, d/(d-2))$
- 4 $(\nabla_h \mathbf{u}^{(m)})_{m \in \mathbb{N}} \rightarrow \nabla \mathbf{u}$, dans $L^2(\Omega)^{d \times d}$
- 5 $(\nabla_{\mathcal{M}} k^{(m)})_{m \in \mathbb{N}} \rightarrow \nabla k$ dans $L^\alpha(\Omega)^d$, pour tout $\alpha \in [1, d/(d-1))$

De plus, on montre que :

Lemme

$\lambda(k^{(m)})_{m \in \mathbb{N}} \rightarrow \lambda(k)$ dans $L^\beta(\Omega)$, pour $\beta \in [1, +\infty)$.

Passage à la limite : Équations de Stokes (1)

Soit $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)^d$ et $\varphi^{(m)} = r_h^{(m)}\varphi$ son interpolée dans $\mathbf{V}_h^{(m)}$.

$$\underbrace{\int_{\Omega} \lambda(k^{(m)}) \nabla_h \mathbf{u}^{(m)} : \nabla_h \varphi^{(m)} \, dx}_{T_1} - \underbrace{\int_{\Omega} p^{(m)} \nabla_h \cdot \varphi^{(m)} \, dx}_{T_2} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \varphi^{(m)} \, dx.$$

- Terme de diffusion :

$$T_1 = \int_{\Omega} \lambda(k^{(m)}) \nabla_h \mathbf{u}^{(m)} : \nabla \varphi \, dx + \int_{\Omega} \lambda(k^{(m)}) \nabla_h \mathbf{u}^{(m)} : \nabla_h (\varphi^{(m)} - \varphi) \, dx.$$

$$T_{1,1} = \int_{\Omega} \underbrace{\lambda(k^{(m)})}_{\text{fort } L^2(\Omega)} \underbrace{\nabla_h \mathbf{u}^{(m)}}_{\text{faible } L^2(\Omega)} : \nabla \varphi \, dx \quad \rightarrow \quad \int_{\Omega} \lambda(k) \nabla \mathbf{u} : \nabla \varphi \, dx.$$

$$T_{1,2} = \underbrace{\int_{\Omega} \lambda(k^{(m)}) \nabla_h \mathbf{u}^{(m)} : \nabla_h (\varphi^{(m)} - \varphi) \, dx}_{\leq C_\varphi h^{(m)}} \quad \rightarrow \quad 0$$

- Terme de pression : intérêt de la préservation de la divergence par r_h

$$T_2 = \int_{\Omega} p^{(m)} \nabla_h \cdot \varphi_h^{(m)} \, dx = \int_{\Omega} \underbrace{p^{(m)}}_{\text{faible } L^2(\Omega)} \nabla \cdot \varphi \, dx \rightarrow \int_{\Omega} p \nabla \cdot \varphi \, dx$$

Passage à la limite : Équations de Stokes (2)

- Terme source :

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \varphi^{(m)} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \varphi \, d\mathbf{x}.$$

- Contrainte d'incompressibilité :

$$\int_{\Omega} \pi^{(m)} \varphi \, \nabla_h \cdot \mathbf{u}^{(m)} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \varphi \underbrace{\nabla_h \cdot \mathbf{u}^{(m)}}_{\text{faible } L^2(\Omega)} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\pi^{(m)} \varphi - \varphi) \underbrace{\nabla_h \cdot \mathbf{u}^{(m)}}_{\text{borne } L^2(\Omega)} \, d\mathbf{x} = 0.$$

Passage à la limite : Équations de k (1)

- Le passage à la limite dans le second membre pose problème :
 - d'après les résultats $(\lambda(k^{(m)})^{1/2} \nabla_h \mathbf{u}^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $L^2(\Omega)^{d \times d}$, donc converge faiblement dans $L^2(\Omega)^{d \times d}$ vers une certaine limite.
- Ceci ne suffit pas :
 - on doit montrer la convergence forte de $(\lambda(k^{(m)})^{1/2} \nabla_h \mathbf{u}^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ dans $L^2(\Omega)^{d \times d}$
- Le terme source est obtenu en prenant $\mathbf{u}^{(m)}$ comme fonction test dans le terme de diffusion de l'équation de Stokes,

$$\int_{\Omega} \lambda(k^{(m)}) \nabla_h \mathbf{u}^{(m)} : \nabla_h \varphi^{(m)} \, d\mathbf{x}$$

ce qui suggère d'utiliser la première équation pour montrer la convergence.

Passage à la limite : Équations de k (2)

$\lambda(k^{(m)})^{1/2} \nabla_h \mathbf{u}^{(m)}$ converge faiblement vers $\overline{\lambda(k)^{1/2} \nabla \mathbf{u}}$ dans $L^2(\Omega)^{d \times d}$.

La limite satisfait donc, $\forall \varphi \in L^2(\Omega)^{d \times d}$:

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \lambda(k^{(m)})^{1/2} \nabla_h \mathbf{u}^{(m)} : \varphi \, dx = \int_{\Omega} \overline{\lambda(k)^{1/2} \nabla \mathbf{u}} : \varphi \, dx$$

Mais également, $\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)^{d \times d}$:

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \lambda(k^{(m)})^{1/2} \nabla_h \mathbf{u}^{(m)} : \varphi \, dx = \int_{\Omega} \lambda(k)^{1/2} \nabla \mathbf{u} : \varphi \, dx, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)^{d \times d},$$

D'où, on déduit:

$$\lambda(k^{(m)})^{1/2} \nabla_h \mathbf{u}^{(m)} \rightharpoonup \lambda(k)^{1/2} \nabla \mathbf{u}, \quad m \rightarrow \infty$$

Convergence faible de $(\lambda(k^{(m)})^{1/2} \nabla_h \mathbf{u}^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ vers $\lambda(k)^{1/2} \nabla \mathbf{u}$

Passage à la limite : Équations de k (3)

Prenons \mathbf{u}^m comme fonction test dans Stokes :

$$\int_{\Omega} \lambda(k^{(m)}) \nabla_h \mathbf{u}^{(m)} : \nabla_h \mathbf{u}^{(m)} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}^{(m)} \, d\mathbf{x}.$$

Les résultats de compacité ne suffisent pas pour passer à la limite à gauche... mais comme $\mathbf{u}^{(m)}$ converge dans $L^2(\Omega)^d$, on peut donc le faire à droite :

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \lambda(k^{(m)}) \nabla_h \mathbf{u}^{(m)} : \nabla_h \mathbf{u}^{(m)} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \, d\mathbf{x}.$$

De plus, \mathbf{u} satisfait l'équation de Stokes :

$$\int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \lambda(k) \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{u} \, d\mathbf{x}.$$

Convergence de la norme $\|(\lambda(k^{(m)})^{1/2} \nabla_h \mathbf{u}^{(m)})\|_{L^2(\Omega)}$ vers $\|\lambda(k)^{1/2} \nabla \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}$

Passage à la limite : Équations de k (4)

Le passage à la limite dans les termes de diffusion et de convection font appel aux résultats usuels de l'analyse des méthodes volumes finis :

- Diffusion : similaire aux technique développées dans [Eymard–Gallouët–Herbin, Handbook of Num. Ana. 2000] en adaptant avec une viscosité variable et en utilisant la convergence faible du gradient VF “gonflé”.
- Convection : preuve similaire à l'étape 3 de la preuve du Théorème 6.1 de [Gallouët–Herbin–Latché, Math. of Comp. 2009] pour le terme $\nabla \cdot (\rho \mathbf{u})$.

Plan

- 1 Introduction
- 2 Modèle physique
- 3 Discrétisations et schéma numérique
- 4 Étude de convergence pour un problème modèle stationnaire
- 5 Étude de convergence pour l'équation de convection–diffusion à donnée L^1

Problème étudié

Ω ouvert borné connexe de \mathbb{R}^d , $d = 2, 3$.

Équation de convection–diffusion instationnaire à donnée L^1 :

$$\begin{aligned}\partial_t u + \nabla \cdot (u \mathbf{v}) - \Delta u &= f && \text{in } \Omega \times (0, T), \\ u(\mathbf{x}, 0) &= u_0(\mathbf{x}) && \text{a.e. in } \Omega, \\ u(\mathbf{x}, t) &= 0 && \text{a.e. in } \partial\Omega \times (0, T),\end{aligned}$$

avec $f \in L^1(\Omega \times (0, T))$ et $u_0 \in L^1(\Omega)$.

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &\in C^1(\bar{\Omega} \times [0, T]), \\ \nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) &= 0, \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times (0, T), \\ \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) &= 0, \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \partial\Omega \times (0, T).\end{aligned}$$

Peut-on montrer la convergence du schéma de volumes finis pour ce problème ?

$\forall K \in \mathcal{M}$, for $0 \leq n < N$,

$$(13) \quad \frac{|K|}{\delta t} (u_K^{n+1} - u_K^n) + \sum_{\sigma=K|L} v_{K,\sigma}^{n+1/2} u_\sigma^{n+1} + \sum_{\sigma=K|L} \frac{|\sigma|}{d_\sigma} (u_K^{n+1} - u_L^{n+1}) \\ + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K) \cap \mathcal{E}_{\text{ext}}} \frac{|\sigma|}{d_\sigma} u_K^{n+1} = \frac{1}{\delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_K f(\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x} \, dt$$

tel que pour $\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}$ et $0 \leq n \leq N$, on note $v_{K,\sigma}^{n+1/2}$ l'approximation du champ de vitesse est défini par:

$$(14) \quad v_{K,\sigma}^{n+1/2} = \frac{1}{\delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\sigma=K|L} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma} \, d\gamma(\mathbf{x}) \, dt$$

et la discrétisation de u sur les faces internes est la discrétisation décentrée amont.

Convergence du schéma

- 1 Estimations
- 2 Compacité $L^1(\Omega \times (0, T))$ par **Aubin–Simon discret**
- 3 Régularité de la limite par passage à la limite dans les estimations des translatées
- 4 Passage à la limite VF classique

⇒ **Convergence**

Que peut-on montrer en discret ?

- u bornée en norme $L^q(0, T; W_0^{1,q}(\Omega))$ discrète, pour $q \in [1, (d+2)/(d+1))$
- $\partial_{t,\mathcal{D}}(u) \in W^{-1,1}(\Omega)$

Que peut-on montrer en discret ?

- u bornée en norme $L^q(0, T; W_0^{1,q}(\Omega))$ discrète, pour $q \in [1, (d+2)/(d+1))$
- $\partial_{t,\mathcal{D}}(u) \in W^{-1,1}(\Omega)$

⇒ Peut-on obtenir la compacité $L^1(\Omega \times (0, T))$?

Théorème

$(u^k)_{k \in \mathbb{N}}$ suite de fonctions discrètes, avec $(\mathcal{M}^k)_{k \in \mathbb{N}}$ suite de discrétisations admissibles.

Il existe $C > 0$, $q \geq 1$ et $r \geq 1$ tels que:

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \sum_{n=1}^{N^k} \delta t^k \|(u^k)^n\|_{1,q,\mathcal{M}} \leq C, \quad \sum_{n=2}^{N^k} \delta t^k \|(\partial_{t,\mathcal{D}}(u)^k)^n\|_{-1,r,\mathcal{M}} \leq C.$$

Alors, à une sous-suite près $u^k \rightarrow u \in L^1(0, T; W_0^{1,q}(\Omega))$ dans $L^1(\Omega \times (0, T))$

Un lemme d'Aubin–Simon discret : preuve

- En continu : preuve utilisant le Lemme de Lions

Lemme

B_0, B_1, B_2 espaces de Banach avec $B_0 \subset\subset B_1 \subset B_2$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $C(\varepsilon) > 0$ tel que :

$$\forall u \in B_0, \quad \|u\|_{B_1} \leq \varepsilon \|u\|_{B_0} + C(\varepsilon) \|u\|_{B_2}.$$

- En discret :

Lemme

$q, r \in [1, \infty)$

$(u^k)_{k \in \mathbb{N}}$ suite de fonctions discrètes avec $(\mathcal{M}^k)_{k \in \mathbb{N}}$ suite de discrétisations régulières.

$\exists C > 0$ tel que $\forall k \in \mathbb{N}, \|u^k\|_{1,q,\mathcal{M}} \leq C$

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $C(\varepsilon) > 0$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\|u^k\|_{L^q(\Omega)} \leq \varepsilon \|u^k\|_{1,q,\mathcal{M}} + C(\varepsilon) \|u^k\|_{-1,r,\mathcal{M}}.$$

Un lemme d'Aubin–Simon discret : preuve

- En continu : preuve utilisant le Lemme de Lions

Lemme

B_0, B_1, B_2 espaces de Banach avec $B_0 \subset\subset B_1 \subset B_2$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $C(\varepsilon) > 0$ tel que :

$$\forall u \in B_0, \quad \|u\|_{B_1} \leq \varepsilon \|u\|_{B_0} + C(\varepsilon) \|u\|_{B_2}.$$

- En discret :

Lemme

$q, r \in [1, \infty)$

$(u^k)_{k \in \mathbb{N}}$ suite de fonctions discrètes avec $(\mathcal{M}^k)_{k \in \mathbb{N}}$ suite de discrétisations régulières.

$\exists C > 0$ tel que $\forall k \in \mathbb{N}, \|u^k\|_{1,q,\mathcal{M}} \leq C$

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $C(\varepsilon) > 0$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\|u^k\|_{L^q(\Omega)} \leq \varepsilon^k \|u^k\|_{1,q,\mathcal{M}} + C(\varepsilon^k) \|u^k\|_{-1,r,\mathcal{M}}.$$

Vérifié quelles que soient les normes en dimension finie

→ Question : peut-on obtenir une estimation uniforme en k ?

Un lemme d'Aubin–Simon discret : preuve

- En continu : preuve utilisant le Lemme de Lions

Lemme

B_0, B_1, B_2 espaces de Banach avec $B_0 \subset\subset B_1 \subset B_2$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $C(\varepsilon) > 0$ tel que :

$$\forall u \in B_0, \quad \|u\|_{B_1} \leq \varepsilon \|u\|_{B_0} + C(\varepsilon) \|u\|_{B_2}.$$

- En discret :

Lemme

$q, r \in [1, \infty)$

$(u^k)_{k \in \mathbb{N}}$ suite de fonctions discrètes avec $(\mathcal{M}^k)_{k \in \mathbb{N}}$ suite de discrétisations régulières.

$\exists C > 0$ tel que $\forall k \in \mathbb{N}, \|u^k\|_{1,q,\mathcal{M}} \leq C$

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $C(\varepsilon) > 0$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\|u^k\|_{L^q(\Omega)} \leq \varepsilon \|u^k\|_{1,q,\mathcal{M}} + C(\varepsilon) \|u^k\|_{-1,r,\mathcal{M}}.$$

Compacité au sens discret de $W_0^{1,q}(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$

→ Estimation uniforme en k

Modélisation physique:

- Modèles $k - \varepsilon$, $k - \varepsilon$ RNG et $k - \varepsilon - \overline{v^2} - f$ implémentés dans ISIS, logiciel opensource développé au LIMSIS.
- Validation nécessaire.

Analyse numérique :

- Extension de l'analyse de convergence aux éléments finis de Rannacher–Turek associés à une discrétisation VF MAC.
- Étude de convergence du problème modèle avec Navier-Stokes stationnaire.
- Extension à l'instationnaire ?