Les propriétés homologiques des algèbres elliptiques de petite dimension

Serge Roméo Tagne Pelap

UNIVERSITÉ D'ANGERS
UFR SCIENCES

Année 2008
N^o d'ordre **908**

Les propriétés homologiques des algèbres elliptiques de petite dimension

THÈSE DE DOCTORAT

Spécialité : Mathématiques

ÉCOLE DOCTORALE D'ANGERS

Présentée et soutenue publiquement
le 27 octobre 2008
à l'Université d'Angers
par
Serge Roméo TAGNE PELAP
devant le Jury ci-dessous

Rapporteurs :	
Jacques ALEV	Professeur à l'Université de Reims
Michel Van den BERGH	Professeur à Limburgs Universitair Centrum (Belgique)
Examinateurs :	
Michel GRANGER	Professeur à l'Université d'Angers
Jean-Claude THOMAS	Professeur à l'Université d'Angers
Directeur de thèse :	
Bitjong NDOMBOL	Professeur à l'Université de Yaoundé 1 (Cameroun)
Vladimir ROUBTSOV	Professeur à l'Université d'Angers

LAREMA, U.M.R 6093 associée au CNRS
2 Bd Lavoisier, 49045 Angers cedex 01, France

ED 363

Les propriétés homologiques des algèbres elliptiques de petite dimension

Tagne Pelap Serge Roméo

A mes parents

Remerciements

Je voudrais tout d'abord dire merci à Mon Seigneur Jesus-Christ. Il est pour moi un réfuge, la tour forte dans laquelle je me trouve en sûreté.

Le support financier du project SARIMA a été déterminant pour l'aboutissement de cette thèse, sans cela cette thèse n'aurait peut-être jamais vu le jour. Je remercie tout particulièrement les gestionnaires de ce project pour toute leur disponibilité et leurs encouragements.

Je tiens à témoigner ma profonde reconnaissance à Bitjong Ndombol. Merci d'avoir accepté diriger ce travail. Ma gratitude va ensuite à Vladimir Roubsov. Il a été pour moi un formidable superviseur. Ses suggestions, ses encouragements, sa disponibilité et ses qualités sur le plan humain ont été pour moi d'une grande utilité. C'est une chance immense de l'avoir eu comme directeur de thèse.

Jacques Alev et Michel Van den Bergh m'ont fait l'honneur d'être les rapporteurs de cette thèse. Je leur remercie très sincèrement.

Michel Granger et Jean-Claude Thomas ont accepté d'être examinateurs. Je leur suis très reconnaissant.

Mes remerciements vont également à tous les membres du LAREMA ainsi qu'à tous mes amis aussi bien au Cameroun qu'en France et particulièrement ceux d'Angers.

Un grand Merci à mes parents, mes frères et soeurs, toute ma famille et familles amies pour leur soutien et amour.

Enfin Merci à Christelle pour ses encouragements et son soutien sans faille. Tu es tout d'abord pour moi une véritable amie.

Table des matières

Introduction

Cette thèse est consacrée à l'étude des propriétés homologiques d'une famille d'algèbres associatives attachée aux courbes elliptiques. Chaque algèbre de cette famille admet un nombre fini de générateurs subordonnés aux relations quadratiques. Elles sont aujourd'hui connues sous le nom d'algèbres elliptiques de Sklyanin-Odesskii-Feigin. Il convient toutefois de souligner que le cas le plus simple, la famille d'algèbres elliptiques avec trois générateurs, était déjà connue de Artin et Shelter.

Sklyanin a trouvé sa célèbre algèbre de quatre générateurs dans une approche hamiltonienne aux modèles intégrables continus et discrets. Il a montré que la structure hamiltonienne du modèle (en approche de "l'école de Leningrad" de Faddeev) est complètement déterminée par deux "Casimirs" quadratiques.

Depuis les articles originaux de Sklyanin (1982-83), les algèbres elliptiques sont devenues objet d'une grande attention de mathématiciens et de physiciens théoriciens. En dehors des travaux fondamentaux de B. Feigin avec A. Odesskii après 1985, il faut bien reconnaître que l'idéee de M. Artin-Schelter-Tate a donné naissance à une théorie efficace en dimensions 3. Ces résultats (ainsi que ceux de Stafford, Smith, Van den Bergh, Levasseur) sont déterminés par une approche algébrique. L'approche d'Odesskii-Feigin a été plutôt basée sur une vision géométrique et de déformation. Ils ont régardé les algèbres elliptiques comme une déformation de l'algèbre de polynômes. Polischuk a proposé un jolie amalgame des méthodes algébro-géométriques aux études des algèbres elliptiques. Il a développé les idées de Odesskii-Feigin et a interprété "la limite quasi-classique" d'algèbres elliptiques comme une structure de Poisson sur l'espace des modules de fibrés vectoriels sur la courbe elliptique initiale.

Le calcul de (co)homologie (de Hochschild, cyclique et de Poisson) de cette classe d'algèbres est un problème qui apparaît naturelement. Récemment (2005), le problème de calcul des traces de l'algèbre de Sklyanin de quatre générateurs a été considéré par le groupe de physiciens et de mathématiciens (Boos-Jimbo-Miwa- Smirnov-Takeyama) dans le contexte du calcul des correlateurs du modèle 8-vertex. M. Van den Bergh (et puis N. Marconnet dans sa thèse en 2004 à St.-Etienne) a calculé l'homologie de Poisson de l'algèbre elliptique "quasi-classique" et puis l'homologie de Hochschild de l'algèbre associative elliptique à trois générateurs. Un autre point de vue a été élaboré dans sa thèse par A. Pichereau à Poitiers en 2006. Elle a notamment calculé l'homologie et la cohomologie d'une algèbre de Poisson en dimension trois associée à une singularité isolée "elliptique", déterminée par un Casimir quasi-homogène.

L'un des objectifs principaux de cette thèse est de calculer l'homologie et cohomologie de Poisson de "la limite quasi-classique" de l'algèbre elliptique à quatre générateurs (la "vrai" algèbre de Sklyanin) ainsi que l'homologie de Hochschild de cette dernière.

Considérons $\tau \in \mathbb{C}$ tel que $Im(\tau) > 0$, $\Gamma = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\tau$, le réseau associé et un point $\eta \in \mathbb{C}$ qui n'est pas d'ordre 4 dans $\mathcal{E} = \mathbb{C}/\Gamma$. Notons θ_{00}, θ_{01}, θ_{10}, θ_{11}, les fonctions théta-Jacobi associées à la courbe elliptique $\mathcal{E}$. Soit V un espace vectoriel de dimension 4 avec S_0, S_1, S_2, S_3 comme base.
L'algèbre de Sklyanin associée à la courbe $\mathcal{E}$ et au point η est l'algèbre $A(\mathcal{E}, \eta) = T(V)/(I_2)$ où $T(V)$ est l'algèbre tensorielle de V et (I_2) est l'idéal bilatère engendré par le sous-espace I_2 de $V \otimes V$ ayant pour base :

$$\begin{aligned} f_{0i} &= S_0 \otimes S_i - S_i \otimes S_0 - \alpha_i(S_j \otimes S_k + S_k \otimes S_j); \\ f_{jk} &= S_j \otimes S_k - S_k \otimes S_j - (S_0 \otimes S_i + S_i \otimes S_0), \end{aligned} \tag{1}$$

où $\alpha_1 = \alpha_{00}$, $\alpha_2 = \alpha_{01}$, $\alpha_1 = \alpha_{10}$, et (i, j, k) forme une permutation cyclique de $(1, 2, 3)$,

$$\alpha_{ab} = (-1)^{a+b} \left[\frac{\theta_{11}(\eta)\theta_{ab}(\eta)}{\theta_{ij}(\eta)\theta_{kl(\eta)}}\right]^2,$$

(ab, ij, kl) est une permutation cyclique de $(00, 01, 10)$.

On peut tout d'abord noter que cette algèbre est une déformation de l'algèbre de polynômes à 4 variables.

Rappelons qu'un $K[[h]]$-module M, K étant un corps de caractéristique nulle, est une déformation formelle s'il est de la forme $E[[h]]$, où E est un K-espace vectoriel. On dit alors que M est une déformation formelle du $K[[h]]$-module E. Les éléments de $E[[h]]$ sont notés

$$\sum_{n \geq 0} u_n h^n.$$

Si nous considérons deux déformations formelles M_1, M_2 de $K[[h]]$-modules, un morphisme $f : M_1 \longrightarrow M_2$ de $K[[h]]$-modules sera appelé une déformation formelle de l'application K-linéaire, déduite de f, $f' : M_1/hM_1 \longrightarrow M_2/hM_2$, si f peut se mettre sous la forme

$$f(\sum_{n \geq 0} u_n h^n) = \sum_{n \geq 0} \sum_{m+p=n} f_m(u_p) h^n.$$

En d'autres termes $f' = f_0$.

Notons aussi qu'une $K[[h]]$-algèbre A est une déformation formelle d'une K-algèbre R si A est une déformation formelle de R en tant que $K[[h]]$-module et si en outre A/hA est isomorphe à R en tant que K-algèbre. On peut alors écrire

$A = R[[h]]$ avec une multiplication (encore appelée produit $\star$) de la forme

$$(\sum_{n\geq 0} u_n h^n, \sum_{n\geq 0} v_n h^n) \longmapsto \sum_{n\geq 0} \sum_{l+m+p=n} b_l(u_m, v_p) h^n,$$

où les b_l sont des applications bilinéaires $R \times R \longrightarrow R$ et $b_0(u,v) = ab$.

Il est important de souligner que lorsque R est commutative, l'application

$$\begin{array}{ccc} R \times R & \longrightarrow & R \\ (u,v) & \mapsto & b_1(u,v) - b_1(v,u) \end{array}$$

est une structure de Poisson sur R, indépendant de la réalisation choisie $A = R[[h]]$.

Une structure de Poisson sur une algèbre commutative R est tout simplement la donnée d'un crochet de Lie sur R qui est une bidérivation. En d'autres, c'est la donnée d'une application K-bilinéaire $\{\cdot,\cdot\} : R \times R \longrightarrow R$ telle que les propriétés suivantes soient vérifiées :

$$\{a, bc\} = \{a,b\}c + b\{a,c\} \qquad \text{(régle de Leibniz);}$$

$$\{a,b\} = -\{b,a\} \qquad \text{(antisymétrie);}$$

$$\{a,\{b,c\}\} + \{b,\{c,a\}\} + \{c,\{a,b\}\} = 0 \quad \text{(identité de Jacobi).}$$

où $a, b, c \in R$.
Ce crochet de Lie est dès lors appelé crochet de Poisson.

On appellera variété de Poisson, toute variété différentiable M dont l'algèbre des fonctions régulières $C^\infty(M)$ est munie d'une structure de Poisson.

Les premières structures de Poisson sont apparues en mécanique classique. L'importance de ces structures en mécanique classique fût graduellement reconnue par Lagrange, Poisson et Jacobi. La remarque cruciale originale fût que si deux quantités mécaniques F et G sont des constantes de mouvement pour un certain système dynamique, alors une combinaison convenable, $\{F,G\}$, des produits de leurs dérivées premières est également une constante de mouvement. Une fois les équations du mouvement écrites sous la forme Hamiltonienne, le crochet de Poisson apparaît en premier plan et la forme la plus synthétique de la loi de la dynamique est :

$$\dot{F} = \{H, F\} \tag{2}$$

où H est l'Hamiltonien (l'énergie totale) du système et $\dot{F}$ est la dérivée par rapport au temps de la quantité mécanique F.

Le résultat ci-dessus sur les constantes du mouvement est alors une conséquence directe de l'identité de Jacobi :

$$\{H,\{F,G\}\} = \{\{H,F\},G\} + \{F,\{H,G\}\},$$

c'est-à-dire

$$\{F,\dot{G}\} = \{\dot{F}, G\} + \{F, \dot{G}\}.$$

Puisque si $\dot{F} = \dot{G} = 0$, alors $\{F,\dot{G}\} = 0$.

Revenons à notre algèbre de Sklyanin. Il est important de souligner qu'elle est une algèbre de Koszul ([29]), satisfait la condition de Poincaré-Birkhoff-Witt et le centre est constitué des fonctions de deux éléments centraux quadratiques ([27]) :

$$P_1 = \sum_{i=1}^{3} S_i^2, \quad P_2 = S_0^2 + \sum_{i=1}^{3} \alpha_i S_i^2. \tag{3}$$

Par ailleurs, l'algèbre de Poisson associée à la déformation de l'algèbre de Sklyanin appartient à la classe des structures de Poisson dites Jacobiennes. Considérant l'algèbre des polynômes $\mathcal{R} = K[x_1, x_2, \cdots, x_n]$, $n \geq 3$ et $P_1, P_2, \cdots, P_{n-2}$, $n-2$ éléments de $\mathcal{R}$, on définit une application $\{\cdot,\cdot\} : \mathcal{R} \times \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}$ par :

$$\{f, g\} = \frac{df \wedge dg \wedge dP_1 \wedge \ldots \wedge dP_{n-2}}{dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_n}, \quad f, g \in K[x_1, \ldots, x_n]. \tag{4}$$

Cette application est une structure de Poisson sur $\mathcal{R}$ appelée structure Jacobienne de Poisson (JPS). Pour cette structure la sous-algèbre, $\mathcal{C}as(\mathcal{R}, \{\cdot,\cdot\})$, des Casimirs (centre d'une l'algèbre de Poisson) de $\mathcal{R}$ est la sous-algèbre des polynômes $K[P_1, P_2, \cdots, P_{n-2}]$ de $\mathcal{R}$.

Les structures Jacobiennes de Poisson possédent de belles propriétés. En effet, on montre ([15], [16], [14]), que ces structures appartiennent à la classe des structures de Poisson unimodilaires (celles dont la classe modulaire cohomologique de Weinstein est trivial ([37])). Pour de telles structures, il y a une dualité de type Poincaré entre leur homologie de Poisson et cohomologie de Poisson.

On ne saurait oublier de mentionner que l'algèbre de Sklyanin appartient également à la classe des structures de Poisson ayant un feuilletage symplectique régulier. Cette classe a été introduite et étudiée par Odesskii et Roubtsov ([24]) comme une généralisation des structures de Poisson régulières.

En 1988-1989, c'est-à-dire environ 5 ans après les travaux de E. K. Sklyanin, Odesskii et Feigin ont défini une classe, plus grande, d'algèbres associées aux courbes elliptiques et ceci en toute dimension.

Partant toujours d'un réseau $\Gamma = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau \subset \mathbb{C}$, engendré par 1 et $\tau \in \mathbb{C}$, avec $\mathrm{Im}\tau > 0$, considérant un point η sur la courbe elliptique $\mathcal{E} = \mathbb{C}/\Gamma$, dans leur article ([23]), Odesskii et Feigin construisent une algèbre associative graduée $Q_{n,k}(\mathcal{E}, \eta)$, ($k$ et n étant des entiers naturels premiers entre eux) associée à la courbe elliptique $\mathcal{E}$ et au point η sur cette courbe comme le quotient de l'algèbre libre à n générateurs $\{x_i, i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\}$ et les relations quadratiques

$$\sum_{r \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \frac{\theta_{j-i+r(k-1)}(0)}{\theta_{kr}(\eta)\theta_{j-i-r}(-\eta)} x_{j-r} x_{i+r} = 0, \quad i \neq j, i, j \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}. \tag{5}$$

Ces algèbres généralisent les algèbres de Sklyanin, notamment $A(\mathcal{E},\eta) = Q_{4,1}(\mathcal{E},\eta)$. Notons aussi que $Q_{3,1}(\mathcal{E},\eta)$ correspond à l'algèbre quadratique de Artin et Schelter définie un an plus tôt.

Les algèbres de Sklyanin et celles d'Odesskii-Feigin possédent un certain nombre de propriétés communes :

1. Le centre de l'algèbre $Q_{n,k}(\mathcal{E},\eta)$, pour $\mathcal{E}$ et η génériques, est l'algèbre des polynômes à $m = pgcd(n, k+1)$ variables de degré n/m;

2. $Q_{n,k}(\mathcal{E}, 0) = \mathbb{C}[x_0, \cdots, x_{n-1}]$ est commutative ;

3. $Q_{n,n-1}(\mathcal{E},\eta) = \mathbb{C}[x_0, \cdots, x_{n-1}]$ est commutative pour tout η ;

4. $Q_{n,k}(\mathcal{E},\eta) \cong Q_{n,k'}(\mathcal{E},\eta)$, si $kk' \equiv 1 \pmod{n}$;

5. Les applications $x_i \mapsto x_{i+1}$ et $x_i \mapsto \varepsilon^i x_i$, où ε est une racine de l'unité, définissent des automorphismes de l'algèbre $Q_{n,k}(\mathcal{E},\eta)$;

6. L'algèbre $Q_{n,k}(\mathcal{E},\eta)$, pour $\mathcal{E}$ et η génériques, est une déformation de l'algèbre des polynômes à n variables, l'algèbre de Poisson obtenue est notée $q_{n,k}(\mathcal{E})$;

7. L'algèbre $Q_{n,k}(\mathcal{E},\eta)$, pour $\mathcal{E}$ et η génériques, satisfait la condition de Poincaré-Birkhorff-Witt.

Dans leur article ([24]), Odesskii et Roubtsov montrent que l'algèbre des Casimirs de l'algèbre de Poisson $q_{n,k}(\mathcal{E})$ est une $\mathbb{C}$-sous-algèbre de $\mathbb{C}[x_0, \cdots, x_{n-1}]$ engendrée par des polynômes homogènes et que la "dimension" de cette algèbre est égale à la somme des degrés des Casimirs générateurs. Soulignons aussi que les structures de Poisson $q_{n,k}(\mathcal{E})$ s'identifient de manière naturelle à des structures de Poisson sur $\mathbb{P}^{n-1} = \mathbb{P}\mathrm{Ext}^1(E, \mathcal{O})$, où E est un fibré vectoriel stable de rang k et de degré n sur la courbe elliptique $\mathcal{E}$ ([8]).

On peut à une algèbre donnée, associer un certain nombre de groupes homologiques. Nous parlerons dans cette thèse de la homologie de Hochschild pour les algèbres associatives, de l'homologie et la cohomologie de Poisson pour les algèbres de Poisson.

L'homologie de Hochschild

Soit A une algèbre associative unitaire sur le corps K, de caractéristique nulle. Posons

$$C_n(A) = A^{\otimes(n+1)}$$

et

$$C_*(A) = \oplus_{n\in\mathbb{N}} C_n(A).$$

Considérons l'opérateur $b : C_*(A) \longrightarrow C_*(A)$ donné par la formule :

$$b(a_0 \otimes \cdots \otimes a_n) = (-1)^n a_n a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n-1} + \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i a_0 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n.$$

Un calcul simple montre que $b^2 = 0$ et b est ainsi un opérateur de bord. L'homologie de Hochschild de A à coefficients dans A est l'homologie du complexe de chaîne $(C_*(A), b)$, appelé complexe de Hochschild. Elle est notée $HH_*(A)$.

L'homologie de Poisson

Soit $(\mathcal{R}, \{\cdot,\cdot\})$ une algèbre de Poisson, $\Omega^\bullet(\mathcal{R})$ le $\mathcal{R}$-module des formes différentielles de Kähler de $\mathcal{R}$.
L'opérateur de bord de Poisson associé à l'algèbre de Poisson $(\mathcal{R}, \{\cdot,\cdot\})$, encore appelé la différentielle de Brylinski ou de Koszul et noté $\partial_k : \Omega^k(\mathcal{R}) \longrightarrow \Omega^{k-1}(\mathcal{R})$ est donné par :

$$\partial_k(F_0 dF_1 \wedge ... \wedge dF_k) = \sum_{1\leq i\leq k} (-1)^{i+1}\{F_0, F_i\} dF_1 \wedge ... \wedge \widehat{dF_i} \wedge ... \wedge dF_k$$

$$+ \sum_{1\leq i<j\leq k} (-1)^{i+j} F_0 d\{F_i, F_j\} \wedge dF_1 \wedge ... \wedge \widehat{dF_i} \wedge ... \widehat{dF_j} \wedge ... \wedge dF_k$$

où $F_0, ..., F_k \in \mathcal{R}$.
On montre par un calcul direct que $\partial_{k-1} \circ \partial_k = 0$. Nous avons donc bien un opérateur de bord. Son homologie est appelée l'homologie de Poisson associée au l'algèbre de Poisson $(\mathcal{R}, \{\cdot,\cdot\})$, et notée $PH_*(\mathcal{R}, \partial)$.
$PH_0(\mathcal{R}, \partial) = \mathcal{R}/\{\mathcal{R}, \mathcal{R}\}$ peut être interprêtée comme l'abélisation de l'algèbre de Poisson $\mathcal{R}$.

La cohomologie de Poisson

Soit $\mathcal{R}$ une K-algèbre associative commutative. Les multi-dérivations antisymétriques de $\mathcal{R}$ sont des applications antisymétriques $\mathcal{R} \times \cdots \times \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}$ qui satisfont la régle de Leibniz en chaque argument. On note par $\mathcal{X}^\bullet(\mathcal{R})$, l'ensemble de telles applications. Si $\mathcal{R}$ est munie d'un crochet de Poisson $\{\cdot,\cdot\}$, l'opérateur de cobord associé, dite de Poisson et noté $\delta^k : \mathcal{X}^k(\mathcal{R}) \longrightarrow \mathcal{X}^{k+1}(\mathcal{R})$, est donné par :

$$\delta^k(Q)(F_0, ..., F_k) = \sum_{1\leq i\leq k} (-1)^i \{F_i, Q(F_0, ..., \widehat{F_i}, ..., F_k)\}$$

$$+\sum_{1\leq i<j\leq k}(-1)^{i+j}Q(\{F_i,F_j\},F_0,...,\widehat{F_i},...,\widehat{F_j},...,F_k)$$

où $F_0,...,F_k\in\mathcal{R}$.
On montre par un calcul direct que $\delta_{k+1}\circ\delta_k=0$. Nous avons donc bien un opérateur de cobord. On obtient alors le complexe dont la cohomologie est appelée la cohomologie de Poisson associée à l'algèbre de Poisson $(\mathcal{R},\{\cdot,\cdot\})$, et est notée $PH^*(\mathcal{R},\delta)$.

Signalons que la détermination explicite aussi bien de l'homologie de Poisson que la cohomologie de Poisson est en général très difficile. Ceci pour la simple raison que ces groupes homologiques ne sont pas functorielles. Considérant la catégorie des algèbres de Poisson et leurs morphismes, ie., les applications de Lie $f:\mathcal{R}_1\longrightarrow\mathcal{R}_2$ et la catégorie des groupes, les correspondances $(\mathcal{R},\{\cdot,\cdot\})\longmapsto PH_*(\mathcal{R},\partial)$ et $(\mathcal{R},\{\cdot,\cdot\})\longmapsto PH^*(\mathcal{R},\delta)$ ne sont pas functorielles : à partir d'un morphisme de Poisson $f:\mathcal{R}_1\longrightarrow\mathcal{R}_2$ entre deux algèbres de Poisson, on ne peut pas toujours associer un morphisme entre leurs groupes homologiques ou cohomologiques de Poisson. Michel Van den Bergh dans ([33]) calcule l'homologie de Poisson de $q_{3,1}(\mathcal{E})$. La cohomologie de Poisson de cette algèbre se déduit dès lors par une dualité de type Poincaré dans la mesure où la structure de Poisson $q_{3,1}(\mathcal{E})$ est unimodulaire. Dans ce même article, il obtient également l'homologie de Hochschild de $Q_{3,1}(\mathcal{E},\eta)$.
Explicitement,

$$Q_{3,1}(\mathcal{E},\eta)=\mathbb{C}\langle x_0,x_1,x_2\rangle/(f_1,f_2,f_3),$$

où

$$\begin{array}{l} f_1=ax_0x_1+bx_1x_0+cx_2^2;\\ f_2=ax_1x_2+bx_2x_1+cx_0^2;\\ f_3=ax_2x_0+bx_0x_2+cx_1^2, \end{array}\tag{6}$$

où $a,b,c\in\mathbb{C}$.
Le centre de cette algèbre est l'algèbre des polynômes engendrée par l'élément cubique :

$$\widetilde{P_1}=c(c^3-b^3)x_1^3+b(c^3-a^3)x_1x_0x_2+a(b^3-c^3)x_0x_1x_2+c(a^3-c^3)x_0^3.\tag{7}$$

L'algèbre $Q_{3,1}(\mathcal{E},\eta)$ est la déformation de l'algèbre des polynômes

$$q_{3,1}(\mathcal{E})=(\mathbb{C}[x_0,x_1,x_2],\{\cdot,\cdot\}),$$

où le crochet $\{\cdot,\cdot\}$ est de la forme :

$$\begin{array}{l} \{x_0,x_1\}=x_2^2+kx_0x_1;\\ \{x_1,x_2\}=x_3^2+kx_1x_2;\\ \{x_2,x_0\}=x_1^2+kx_0x_2, \end{array}\tag{8}$$

où $k\in\mathbb{C}$.
Cette structure est une structure Jacobienne de Poisson donnée par le Casimir :

$$P_1=x_0^3+x_1^3+x_2^3+kx_0x_1x_2.\tag{9}$$

Van den Bergh obtient explicitement le résultat suivant :

Théorème 0.0.1. ([33]) *Les groupes homologiques de Poisson* $PH_i(q_{3,1}(\mathcal{E}), \partial)$, $i = 0, 1, 2, 3$, *sont des* $\mathbb{C}[P_1]$*-modules libres de rangs respectifs* $8, 8, 1, 1$.
$PH_2(q_{3,1}(\mathcal{E}), \partial)$ *est engendré par* $x_1 dx_2 \wedge dx_3 + x_2 dx_3 \wedge dx_1 + x_3 dx_1 \wedge dx_2$ *comme* $\mathbb{C}[P_1]$*-module alors que* $PH_3(q_{3,1}(\mathcal{E}), \partial)$ *est engendré par* $dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$.
$PH_0(q_{3,1}(\mathcal{E}), \partial)$ *et* $PH_1(q_{3,1}(\mathcal{E}), \partial)$ *ont les séries de Poincaré suivantes :*

$$P(PH_0(q_{3,1}(\mathcal{E}), \partial), t) = \frac{(1+t)^3}{1-t^3};$$

$$P(PH_1(q_{3,1}(\mathcal{E}), \partial), t) = \frac{(1+t)^3}{1-t^3} - 1,$$

comme $\mathbb{C}$*-espaces vectoriels.*

Ce résultat, grâce à la suite spectrale de Brylinski, permet à Van den Bergh de calculer l'homologie de Hochschild de $Q_{3,1}(\mathcal{E}, \eta)$:

Théorème 0.0.2. *Pour des données génériques de* η*, les groupes de l'homologie de Hochschild* $HH_i(Q_{3,1}(\mathcal{E}, \eta))$, $i = 0, 1, 2, 3$, *de l'algèbre elliptique* $Q_{3,1}(\mathcal{E}, \eta)$ *sont des* $\mathbb{C}[\widetilde{P}_1]$*-modules libres de rangs respectifs* $8, 8, 1, 1$. *Ici* $\widetilde{P}_1$ *est un élément du centre de* $Q_{3,1}(\mathcal{E}, \eta)$.
Comme $\mathbb{C}$*-espaces vectoriels, ils ont les séries de Poincaré suivantes :*

$$P(HH_0(Q_{3,1}(\mathcal{E}, \eta)), t) = \frac{(1+t)^3}{1-t^3};$$

$$P(HH_1(Q_{3,1}(\mathcal{E}, \eta)), t) = \frac{(1+t)^3}{1-t^3} - 1;$$

$$P(HH_2(Q_{3,1}(\mathcal{E}, \eta)), t) = \frac{1}{1-t^3};$$

$$P(HH_3(Q_{3,1}(\mathcal{E}, \eta)), t) = \frac{1}{1-t^3}.$$

Dans sa thèse Anne Pichereau a obtenu une généralisation de ce calcul d'homologies et de cohomologies de Poisson en faisant les même calculs pour les structures Jacobiennes de Poisson en dimension trois données par un Casimir quasi-homogène à singularité isolée.

Cette thèse contient 5 chapitres et deux Annexes. Dans les deux premiers chapitres, nous rappelons des généralités et donnons une description des objets principaux de cette thèse : les algèbres d'Odesskii-Feigin et leurs propriétés. Le Chapitre 3 est consacré au calcul d'homologie et de cohomologie de Poisson d'une algèbre jacobienne de Poisson donnée par deux Casimirs quasi-homogènes formant une intersection complète à singularité isolée. Le cas de Sklyanin en est un cas particulier. Nous montrons que les series d'Hilbert-Poincaré des K-espaces vectoriels graduées $PH_k(\mathcal{R},\partial)$ et $P(PH^k(\mathcal{R},\partial)$ ne dépendent pas des polynômes P_1 et P_2, mais tout simplement des poids ϖ_i et des degrés des polynômes P_1 et P_2. En particulier dans le cas quadratique, on obtient :

Théorème 0.0.3. ([31]) *Si $\varpi_1 = ... = \varpi_4 = 1$ et $\varpi(P_1) = \varpi(P_2) = 2$, alors comme K-espaces vectoriels, les groupes homologiques de Poisson $PH_i(\mathcal{R},\partial), i = 0,1,2,3,4$, ont les séries de Poincaré suivantes :*

$$\begin{aligned}
P(PH_0(\mathcal{R},\partial),t) &= \tfrac{2t^2+4t+1}{(1-t^2)^2};\\
P(PH_1(\mathcal{R},\partial),t) &= \tfrac{t^4+4t^3+4t^2+4t}{(1-t^2)^2};\\
P(PH_2(\mathcal{R},\partial),t) &= \tfrac{2t^4+4t^3}{(1-t^2)^2};\\
P(PH_3(\mathcal{R},\partial),t) &= \tfrac{t^4}{(1-t^2)^2};\\
P(PH_4(\mathcal{R},\partial),t) &= \tfrac{t^4}{(1-t^2)^2}.
\end{aligned}$$

Nous pouvons également remarquer que $P(PH_0(\mathcal{R},\partial),1) = 7$, nous donne le nombre Milnor d'une intersection complète homogène quadratique à singularité isolée. Mais de manière plus générale, on peut dire que l'homologie, comme la cohomologie d'une structure Jacobienne de Poisson sur $\mathcal{R}$ donnée par deux Casimirs, P_1 et P_2, quasi-homogènes formant une intersection complète à singularité isolée, ou mieux leurs séries de Poincaré, sont des invariants pour les intersections complètes quasi-homogènes à singularité isolée.
Pour ce qui est du cas de Sklyanin, nous obtenons explicitement, le résultat suivant :

Théorème 0.0.4. ([31]) *Nous supposons que notre structure Jacobienne de Poisson est donnée par le crochet de Sklyanin, ie., la structure Jacobienne de Poisson donnée par les Casimirs :*

$$P_1 = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \tag{10}$$

$$P_2 = \frac{1}{2}(x_4^2 + J_1x_1^2 + J_2x_2^2 + J_3x_3^2) \tag{11}$$

avec $J_i \neq J_j$ si $i \neq j$, et pour tout $i = 1,2,3,\ J_i \neq -1,0,1$. Alors :

1. *Le groupe homologique de Poisson $PH_0(q_{4,1}(\mathcal{E}),\partial)$ est le $K[P_1,P_2]$-module libre de rang 7 engendré par $(\mu_i)_{0\leq i\leq 6} = (1,x_1,x_2,x_3,x_4,x_1^2,x_3^2)$;*

2. *Le groupe homologique de Poisson* $PH_1(q_{4,1}(\mathcal{E}),\partial)$ *est le* $K[P_1,P_2]$*-module libre de rang* 13 *donné par :*

$$PH_1(q_{4,1}(\mathcal{E}),\partial)\cong(\bigoplus_{k=1}^{6}K[P_1,P_2]d\mu_k)\oplus(\bigoplus_{k=1}^{5}K[P_1,P_2]\mu_k dP_1)\oplus K[P_1,P_2]dP_1\oplus K[P_1,P_2]dP_2;$$

3. *Le groupe homologique de Poisson* $PH_2(q_{4,1}(\mathcal{E}),\partial)$ *est le* $K[P_1,P_2]$*-module libre de rang* 6 *donné par :*

$$PH_2(q_{4,1}(\mathcal{E}),\partial)\cong\left(\bigoplus_{k=1}^{5}K[P_1,P_2](d\mu_k\wedge dP_1)\right)\oplus K[P_1,P_2](dP_1\wedge dP_2);$$

4. *Le groupe homologique de Poisson* $PH_3(q_{4,1}(\mathcal{E}),\partial)$ *est le* $K[P_1,P_2]$*-module libre de rang* 1 *engendré par* ρ *;*
5. *Le groupe homologique de Poisson* $PH_4(q_{4,1}(\mathcal{E}),\partial)$ *est le* $K[P_1,P_2]$*-module libre de rang* 1 *engendré par* δ*,*

où $\delta=dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3\wedge dx_4$*, et* $\rho=x_1dx_2\wedge dx_3\wedge dx_4+x_2dx_3\wedge dx_1\wedge dx_4+x_3dx_1\wedge dx_2\wedge dx_4+x_4dx_2\wedge dx_1\wedge dx_3$.

Le calcul d'homologie de Hochschild est le but de la Chapitre 4 de cette thèse. L'idée de ce calcul est une adaptation de la suite spectrale de Brylinsky dont le terme E^2 est l'homologie de Poisson et utilisation d'une filtration h-adique (h étant le paramètre déformation). Grâce à la dégénérescence de la suite spectrale de Brylinski, nous obtenons l'homologie de Hochschild de l'algèbre de Sklyanin :

Théorème 0.0.5. ([32])

- $HH_4(Q_{4,1}(\mathcal{E},\eta))$ *est un* $K[\widetilde{P}_1,\widetilde{P}_2]$*-module libre de rang* 1 *engendré par un élément homogène* Δ *de degré* 4.
- $HH_3(Q_{4,1}(\mathcal{E},\eta))$ *est un* $K[\widetilde{P}_1,\widetilde{P}_2]$*-module libre de rang* 1 *engendré par un élément homogène* Π *de degré* 4.
- $HH_2(Q_{4,1}(\mathcal{E},\eta))$ *un* $K[\widetilde{P}_1,\widetilde{P}_2]$*-module libre de rang* 6 *engendré par des éléments homogènes de degrés respectifs* $3,3,3,3,4,4$.
- $HH_1(Q_{4,1}(\mathcal{E},\eta))$ *est un* $K[\widetilde{P}_1,\widetilde{P}_2]$*-module libre de rang* 13 *engendré par des éléments homogènes de degrés respectifs* $1,1,1,1,2,2,2,2,3,3,3,3,4$.
- $HH_0(Q_{4,1}(\mathcal{E},\eta))$ *un* $k_0((h))[\widetilde{P}_1,\widetilde{P}_2]$*-module libre de rang* 7 *engendré par des éléments homogènes de degrés respectifs* $0,1,1,1,1,2,2$.

Ici $\mathbb{C}[\widetilde{P}_1, \widetilde{P}_2]$ *est le centre de l'algèbre* $Q_{4,1}(\mathcal{E}, \eta)$.

Le Chapitre 5 revêt un caractère différent du terme général de la thèse. Parmis les algèbres de Poisson $q_{n,k}(\mathcal{E})$, seules les algèbres $q_{3,1}(\mathcal{E})$ et $q_{4,1}(\mathcal{E})$ sont des structures Jacobiennes, et de plus ces deux structures sont données par des intersections complètes à singularités isolées. Il convient également de souligner que parmis ces algèbres de Poisson, $q_{n,k}(\mathcal{E})$, nous avons en dimension 3 qu'un seul cas de figure $q_{3,1}(\mathcal{E})$, non trivial (ie., un crochet non nul) et en dimension 4, $q_{4,1}(\mathcal{E})$ est le seul cas non trivial. La dimension 5 est la première dimension où nous obtenons deux crochets de Poisson non triviaux : $q_{5,1}(\mathcal{E})$ et $q_{5,2}(\mathcal{E})$ (ils ne sont pas isomorphes). C'est aussi la première dimension pour laquelle nous n'avons plus des structures Jacobiennes de Poisson, ni des intersections complètes à singularités isolées. Ainsi les méthodes de calcul de l'homologie et la cohomologie des algèbres $q_{n,k}(\mathcal{E})$ en dimension 3 et 4 sont loin d'être applicables en dimension 5. On s'est donc proposé dans ce chapitre 5 d'étudier les propriétés géométriques des algèbres $q_{n,k}(\mathcal{E})$, et particulièrement en dimension 5. Le chapitre 5 contient des résultats de classification des tenseurs elliptiques de Poisson invariants par rapport à l'action naturelle du groupe de Heisenberg. Nous montrons en particulier que les algèbres $q_{3,1}(\mathcal{E})$ et $q_{4,1}(\mathcal{E})$ sont les seules structures de Poisson quadratiques H-invariantes en dimension 3 et 4 respectivement. Les structures de Poisson quadratiques H-invariantes en dimension 5 sont unimodulaires. Ceci permet ainsi de voir que l'unimodularité n'est pas attachée aux structures Jacobiennes de Poisson (qui constituées une classe importante de structures de Poisson unimodulaires), puisque les algèbres de Poisson quadratiques $q_{5,1}(\mathcal{E})$ et $q_{5,2}(\mathcal{E})$ sont H-invariantes, par conséquent unimodulaires, alors qu'elles ne sont pas Jacobiennes. Ces travaux font l'objet d'un article en préparation avec Vladimir Roubtsov et G.Ortenzi de Milan. Le but étant une description des transformations de Cremona quadro-cubiques dans $\mathbb{P}^4$ comme homomorphismes entre les algèbres elliptiques $q_{5,1}(\mathcal{E})$ et $q_{5,2}(\mathcal{E})$, pour la donnée d'une courbe elliptique $\mathcal{E}$.

Deux articles soumis aux journaux forment deux Annexes dans lesquels sont donnés les détails et démonstrations techniques.

Chapitre 1

Généralités

Dans tout ce qui suit, K désigne un corps commutatif de caractéristique nulle.

1.1 Homologie de Hochschild

Soit A une algèbre associative unitaire sur le corps K. Nous notons par A^{op} l'algèbre opposée de A. La multiplication sur A^{op} est donnée par $a^\circ b^\circ = (ba)^\circ$. Nous désignerons par A^e l'algèbre enveloppante $A \otimes_K A^{op}$ de A. Il faut noter qu'un A-A-bimodule M est équivalent un A^e-module à gauche ou à droite grâce aux formules :

$$(a \otimes b^\circ)m = a(mb) = m(b \otimes a^\circ)$$

où $\otimes$ désigne $\otimes_K$.
En particulier, A est naturellement un A^e-module et l'application $A^e \longrightarrow A, a \otimes b^\circ \mapsto ab$ est un A^e-épimorphisme.
Posons

$$C_n(A) = A^{\otimes(n+1)}$$

et

$$C_*(A) = \oplus_{n\in\mathbb{N}} C_n(A).$$

Considérons deux opérateurs $b, b' : C_*(A) \longrightarrow C_*(A)$ donnés par les formules :

$$b(a_0 \otimes \cdots \otimes a_n) = (-1)^n a_n a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n-1} + \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i a_0 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n;$$

$$b'(a_0 \otimes \cdots \otimes a_n) = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i a_0 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n.$$

Un calcul simple montre que $b^2 = b'^2 = 0$.
Le complexe de chaîne (C_*, b') est exacte. Pour le vérifier, il suffit de remarquer que

l'opérateur $s : C_{n-1}(A) \longrightarrow C_n(A)$ défini par : $s(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n-1}) = 1 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n-1}$ satisfait la condition $b' \circ s + s \circ b' = id$ et défini par conséquent une homotopie contractante.
Le complexe (C_*, b') est appelé la résolution de Hochschild standard de A ou simplement la bar résolution de A.
L'homologie de Hochschild de A à coefficients dans A est l'homologie du complexe de chaîne $(C_*(A), b)$, appelé complexe de Hochschild. Elle est notée $HH_*(A)$.
On peut remarquer que le complexe de Hochschild s'identifie au complexe $(A \otimes_{A^e} A^{*+2}, 1 \otimes b')$ de telle sorte que $HH_n(A) = Tor_n^{A^e}(A, A)$.
Nous noterons par B l'opérateur de cobord de Connes :

$$B : C(A) \longrightarrow C(A).$$

Il est défini comme suit :

$$B(a_0 \otimes \cdots \otimes a_n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{ni} 1 \otimes a_i \otimes \cdots \otimes a_n \otimes a_0 \otimes \cdots \otimes a_{i-1} + \\ + (-1)^n \sum_{i=0}^{n} (-1)^{ni} a_i \otimes \cdots \otimes a_n \otimes a_0 \otimes \cdots \otimes a_{i-1} \otimes 1.$$

On a $b \circ B + B \circ b = 0$.

1.2 Algèbres de Poisson

Définition 1.2.1. *Soit $\mathcal{R}$ une K-algèbre commutative. $\mathcal{R}$ est une algèbre de Poisson sur K si c'est une K-algèbre de Lie dont le crochet $\{\cdot, \cdot\}$ est une bidérivation.*

Autrement dit, une K-algèbre commutative $\mathcal{R}$ est dite de Poisson si on munit $\mathcal{R}$ d'une application K-bilinéaire $\{\cdot, \cdot\} : \mathcal{R} \times \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}$ telle que les propriétés suivantes soient vérifiées :

1. {a, bc}={a, b}c+b{a, c} (régle de Leibniz) ;

2. {a, b}= -{b, a} (antisymétrie) ;

3. {a, {b, c}}+{b, {c, a}}+{c, {a, b}}=0 (identité de Jacobi).

où $a, b, c \in \mathcal{R}$.
On dit aussi que $\mathcal{R}$ est munie d'une structure de Poisson. Le crochet $\{\cdot, \cdot\}$ est appelé crochet de Poisson sur $\mathcal{R}$.

Définition 1.2.2. *Un morphisme de Poisson d'une algèbre de Poisson* $(\mathcal{R}_1, \{\cdot,\cdot\}_1)$ *vers une algèbre de Poisson* $(\mathcal{R}_2, \{\cdot,\cdot\}_2)$ *est un morphisme d'algèbres de Lie* $f : \mathcal{R}_1 \longrightarrow \mathcal{R}_2$, *ie.,* $f(\{a_1, a_2\}_1) = \{f(a_1), f(a_2)\}_2$, *pour tout* $a_1, a_2 \in \mathcal{R}_1$*; autrement dit, tel que le diagramme suivant soit commutatif :*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_1 \arrow[r, "f\times f"] \arrow[d, "\{\cdot,\cdot\}_1"'] & \mathcal{R}_2 \times \mathcal{R}_2 \arrow[d, "\{\cdot,\cdot\}_2"] \\ \mathcal{R}_1 \arrow[r, "f"] & \mathcal{R}_2 \end{tikzcd}$$

Remarque 1.2.1. *La collection des algèbres de Poisson et des morphismes de Poisson forment une catégorie.*

Proposition 1.2.1. *Soit* $\{\cdot,\cdot\}$ *une structure de Poisson sur* $\mathcal{R} = K[x_1, \cdots, x_n]$. *Pour tout* f, g *appartenant à* $\mathcal{R}$, *le crochet* $\{f, g\}$ *est donné en fonction des* x_i *par la formule :*

$$\{f, g\} = \sum_{1\le i,j\le n} \{x_i, x_j\} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} \tag{1.1}$$

Définition 1.2.3. *Un élément* $a \in \mathcal{R}$ *appartenant au centre de l'algèbre Poisson* $(\mathcal{R}, \{\cdot,\cdot\})$, *i.e.,* $\{a, b\} = 0$ *pour tout* $b \in \mathcal{R}$, *est appelé un Casimir.*
On note par $\mathcal{C}as(\mathcal{R}, \{\cdot,\cdot\})$ *l'ensemble des Casimirs d'une algèbre de Poisson* $(\mathcal{R}, \{\cdot,\cdot\})$.
Une dérivation de $\mathcal{R}$ *de la forme* $\mathcal{X}_H := \{\cdot, H\}$, $H \in \mathcal{R}$, *est appelée une dérivation Hamiltoniènne et* H *est appelé l'Hamiltonien associé à* $\mathcal{X}_H$.
On note par $\mathrm{Ham}(\mathcal{R}, \{\cdot,\cdot\})$ *le* K*-espace vectoriel des dérivations Hamiltoniènnes.*

On a l'application K-linéaire

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{X} : & \mathcal{R} & \longrightarrow & \mathrm{Ham}(\mathcal{R}, \{\cdot,\cdot\}) \\ & H & \mapsto & \mathcal{X}_H := \{\cdot, H\} \end{array} \tag{1.2}$$

dont le noyau est l'algèbre des Casimirs.

Lorsqu'aucune confusion ne sera possible, on notera respectivement l'algèbre des Casimirs $\mathcal{C}as(\mathcal{R}, \{\cdot,\cdot\})$ et l'espace des dérivations Hamiltoniènnes $\mathrm{Ham}(\mathcal{R}, \{\cdot,\cdot\})$ respectivement $\mathcal{C}as(\mathcal{R})$ et $\mathrm{Ham}(\mathcal{R})$.

Exemple 1.2.1. ([15], [16], [14])
On considère l'algèbre des polynômes $\mathcal{R} = K[x_1, x_2, \cdots, x_n]$, $n \ge 3$ *et* $P_1, P_2, \cdots, P_{n-2}$, $n-2$ *éléments de* $\mathcal{R}$.
L'application $\{\cdot,\cdot\} : \mathcal{R} \times \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}$ *définie par :*

$$\{f, g\} = \frac{df \wedge dg \wedge dP_1 \wedge ... \wedge dP_{n-2}}{dx_1 \wedge dx_2 \wedge ... \wedge dx_n}, \quad f, g \in K[x_1, ..., x_n] \tag{1.3}$$

est une structure de Poisson sur $\mathcal{R}$, *appelée structure Jacobienne de Poisson (JPS). Pour cette structure, la sous-algèbre,* $\mathcal{C}as(\mathcal{R}, \{\cdot,\cdot\})$, *des Casimirs de* $\mathcal{R}$ *est la sous-algèbre des polynômes* $K[P_1, P_2, \cdots, P_{n-2}]$ *de* $\mathcal{R}$.

- *Pour* $n = 3$, *et* $P_1 = \frac{1}{3}(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 3\lambda x_1 x_2 x_3)$, *la structure Jacobienne de Poisson est donnée par le crochet :*

$$\{x_i, x_j\} = x_k^2 + 3\lambda x_i x_j \tag{1.4}$$

où (i, j, k) *forme une permutation cyclique de* $(1, 2, 3)$.
L'algèbre de Poisson obtenue est encore appelée l'algèbre de Poisson d'Artin-Tate.

- *Pour* $n = 4$, $\mathcal{R} = K[x_0, x_1, x_2, x_3]$, *nous avons l'algèbre de Poisson dite de Sklyanin qui est une structure Jacobienne de Poisson donnée par les Casimirs* P_1, P_2 :

$$P_1 = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \tag{1.5}$$

$$P_2 = \frac{1}{2}(x_0^2 + J_1 x_1^2 + J_2 x_2^2 + J_3 x_3^2) \tag{1.6}$$

Le crochet de Poisson correspondant est donné par les formules :

$$\{x_0, x_i\} = (-1)^i det(\frac{\partial P_k}{\partial x_l}),\ l \neq 0, i;\ k = 1, 2; \tag{1.7}$$

$$\{x_i, x_j\} = (-1)^{i+j} det(\frac{\partial P_k}{\partial x_l}),\ l \neq i, j;\ k = 1, 2. \tag{1.8}$$

1.3 Homologie de Poisson

1.3.1 Différentielles de Kähler

Définition 1.3.1. *Soit* $\mathcal{R}$ *un anneau unitaire et* M *un* $\mathcal{R}$*-module. Une application* $d : \mathcal{R} \longrightarrow M$ *est une dérivation si elle satisfait la régle de Leibniz*

$$d(fg) = fd(g) + gd(f),\ \textit{pour tout}\ f, g \in \mathcal{R}.$$

Si $\mathcal{R}$ *est une* K*-algèbre, alors on dit que* d *est* K*-linéaire si elle est un morphisme de* K*-module.*

On note par $Der_K(\mathcal{R}, M)$ l'ensemble des K-linéaires dérivations $d : \mathcal{R} \longrightarrow M$. Il est doté naturellement d'une structure de $\mathcal{R}$-module et la multiplication est donnée par :

$$bd : \mathcal{R} \longrightarrow M, f \mapsto b(d(f)).$$

On peut remarquer de manière triviale que pour toute dérivation d, $d(1) = 0$. Et à cause de la K-linéairité, si $d \in Der_K(\mathcal{R}, M)$, $d(k) = 0$ pour tout $k \in K$.

Définition 1.3.2. *Soit $\mathcal{R}$ une K-algèbre. Le module, noté $\Omega^1_{\mathcal{R}/K}$, des différentielles de Kähler est le $\mathcal{R}$-module engendré par l'ensemble $\{d(f), f \in \mathcal{R}\}$ et soumis aux relations*

$$\begin{array}{ll} d(aa') = ad(a') + a'd(a) & \textit{(Leibniz)}; \\ d(ka + k'a') = kd(a) + k'd(a') & \textit{(K-linéairité)}, \end{array}$$

pour tout $k, k' \in K$, $a, a' \in \mathcal{R}$.

Nous noterons toujours $d(f)$ par df. L'application $d : \mathcal{R} \longrightarrow \Omega^1_{\mathcal{R}/K}, f \mapsto df$ est une K-linéaire dérivation appelée la K-linéaire dérivation universelle. En effet elle possède la propriété universelle suivante : pour tout $\mathcal{R}$-module M et toute K-linéaire dérivation $e : \mathcal{R} \longrightarrow M$, il existe un unique morphisme de $\mathcal{R}$-modules $e' : \Omega^1_{\mathcal{R}/K} \longrightarrow M$ tel que $e = e' \circ d$, autrement dit, tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} & \Omega^1_{\mathcal{R}/K} \arrow[dd, "e'"] \\ \mathcal{R} \arrow[ur, "d"] \arrow[dr, "e"'] & \\ & M \end{tikzcd}$$

Lorsqu'aucune confusion ne sera possible, nous noterons tout simplement $\Omega^1_{\mathcal{R}/K}$ par $\Omega^1(\mathcal{R})$.

Proposition 1.3.1. *Si $\mathcal{R} = K[x_1, \cdots x_n]$ est l'anneau des polynômes à n variables, alors $\Omega^1(\mathcal{R})$ est un $\mathcal{R}$-module libre engendré par les dx_i.*

Le $\mathcal{R}$-module $\Omega^p(\mathcal{R}) := \bigwedge^p \Omega^1(\mathcal{R})$ est appelé le module des p-formes différentielles de Kähler.
Comme espace vectoriel, respectivement comme $\mathcal{R}$-module, $\Omega^p(\mathcal{R})$ est engendré par les éléments de la forme $FdF_1 \wedge ... \wedge dF_p$, respectivement de la forme, $dF_1 \wedge ... \wedge dF_p$, où $F, F_i \in \mathcal{R}$, $i = 1, ..., p$.
Nous noterons par $\Omega^\bullet(\mathcal{R}) = \oplus_{p \in \mathbb{N}} \Omega^p(\mathcal{R})$, avec la convention $\Omega^0(\mathcal{R}) = \mathcal{R}$, l'espace des différentielles de Kähler.
La différentielle $d : \mathcal{R} \longrightarrow \Omega^1(\mathcal{R})$ se prolonge en une application K-linéaire

$$d : \Omega^\bullet(\mathcal{R}) \longrightarrow \Omega^{\bullet+1}(\mathcal{R})$$

en posant :

$$d(GdF_1 \wedge ... \wedge dF_p) := dG \wedge dF_1 \wedge ... \wedge dF_p$$

pour $G, F_1, ..., F_p \in \mathcal{R}$, où $p \in \mathbb{N}$.
Il est clair que $d^2 = 0$ et par conséquent d est une différentielle de degré 1. Elle est appelée la différentielle de de Rham, le complexe associé le complexe de de Rham et sa cohomologie est appelée la cohomologie de de Rham de $\mathcal{R}$.

1.3.2 Homologie de Poisson

Soit $(\mathcal{R}, \{\cdot,\cdot\})$ une algèbre de Poisson.
L'opérateur de bord de Poisson associé à l'algèbre de Poisson $(\mathcal{R}, \{\cdot,\cdot\})$, encore appelé la différentielle de Brylinski ou de Koszul et noté $\partial_\bullet : \Omega^\bullet(\mathcal{R}) \longrightarrow \Omega^{\bullet-1}(\mathcal{R})$ est donné par :

$$\partial_k(F_0 dF_1 \wedge ... \wedge dF_k) = \sum_{1\leq i\leq k} (-1)^{i+1}\{F_0, F_i\} dF_1 \wedge ... \wedge \widehat{dF_i} \wedge ... \wedge dF_k$$

$$+ \sum_{1\leq i<j\leq k} (-1)^{i+j} F_0 d\{F_i, F_j\} \wedge dF_1 \wedge ... \wedge \widehat{dF_i} \wedge ...\widehat{dF_j} \wedge ... \wedge dF_k$$

où $F_0, ..., F_k \in \mathcal{R}$.
On montre par un calcul direct que $\partial_{k-1} \circ \partial_k = 0$. Nous avons donc bien un opérateur de bord. On obtient alors le complexe

$$\cdots \longrightarrow \Omega^{k+1}(\mathcal{R}) \xrightarrow{\partial_{k+1}} \Omega^k(\mathcal{R}) \xrightarrow{\partial_k} \Omega^{k-1}(\mathcal{R}) \xrightarrow{\partial_{k-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_3} \Omega^2(\mathcal{R}) \xrightarrow{\partial_2} \Omega^1(\mathcal{R}) \xrightarrow{\partial_1} \Omega^0(\mathcal{R}) \tag{1.9}$$

dont l'homologie est appelée l'homologie de Poisson associée à l'algèbre de Poisson $(\mathcal{R}, \{\cdot,\cdot\})$.
Les éléments de $Ker\partial_k$ sont appelés les k-cycles de Poisson alors que ceux de $Im\partial_{k+1}$ sont appelés les k-bords de Poisson. On a donc le $k^{\text{ème}}$ groupe de Poisson $PH_k(\mathcal{R}, \partial)$:

$$PH_k(\mathcal{R}, \partial) := Ker\partial_k / Im\partial_{k+1}.$$

L'homologie de Poisson est donc :

$$PH_*(\mathcal{R}, \partial) := \oplus_{k\in\mathbb{N}} PH_k(\mathcal{R}, \partial).$$

On peut évidement remarquer que l'opérateur de bord de Poisson est $\mathcal{C}as(\mathcal{R})$-linéaire, de sorte que l'homologie de Poisson est naturellement un module sur l'algèbre des Casimirs.
Il faut également souligner que $\mathcal{R}$ est l'ensemble des 0-cycles de Poisson et $\{\mathcal{R}, \mathcal{R}\}$ est l'ensemble des 0-bords de Poisson, de sorte que 0-espace homologique de Poisson est l'abélisation de l'algèbre de $\mathcal{R}$:

$$PH_0(\mathcal{R}, \partial) = \mathcal{R}/\{\mathcal{R}, \mathcal{R}\}.$$

Notons aussi que la correspondance $(\mathcal{R}, \{\cdot,\cdot\}) \mapsto PH_*(\mathcal{R}, \partial)$ n'est pas functorielle.

1.4 Cohomologie de Poisson

1.4.1 Multi-dérivations antisymétriques

Définition 1.4.1. *Soit $\mathcal{R}$ une K-algèbre associative commutative. Une k-dérivation antisymétrique de $\mathcal{R}$ est une application antisymétrique K-linéaire $P \in \mathrm{Hom}(\wedge^k\mathcal{R}, \mathcal{R})$*

qui est une dérivation en chacun de ses arguments, ie.,

$$P(fg, f_2, \cdots, f_k) = fP(g, f_2, \cdots, f_k) + gP(f, f_2, \cdots, f_k) \tag{1.10}$$

pour tout $f, g, f_2, \cdots, f_k \in \mathcal{R}$.

On note par $\mathcal{X}^k(\mathcal{R})$ le $\mathcal{R}$-module des k-dérivations antisymétriques. Nous avons donc le $\mathcal{R}$-module gradué des multi-dérivations antisymétriques

$$\mathcal{X}^\bullet(\mathcal{R}) := \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{X}^k(\mathcal{R}).$$

Proposition 1.4.1. *Soit P une k-dérivation antisymétrique sur l'algèbre des polynômes $\mathcal{R} = K[x_1, \cdots, x_n]$. Alors P est entièrement déterminée par ses valeurs en les générateurs $x_1, \cdots, x_n$. Plus explicitement, nous avons :*

$$P(f_1, f_2, \cdots, f_k) = \sum_{1\leq i_1,\cdots,\leq i_k\leq n} P(x_{i_1}, \cdots, x_{i_k}) \frac{\partial f_1}{\partial x_{i_1}} \cdots \frac{\partial f_k}{\partial x_{i_k}},$$

pour tout $f_1, f_2, \cdots, f_k \in \mathcal{R}$, *ie.,*

$$P = \sum_{1\leq i_1,\cdots,\leq i_k\leq n} P(x_{i_1}, \cdots, x_{i_k}) \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_{i_k}}.$$

1.4.2 Cohomologie de Poisson

Soit $(\mathcal{R}, \{\cdot, \cdot\})$ une algèbre de Poisson.
L'opérateur de cobord de Poisson associé à l'algèbre de Poisson $(\mathcal{R}, \{\cdot, \cdot\})$, noté $\delta^\bullet : \mathcal{X}^\bullet(\mathcal{R}) \longrightarrow \mathcal{X}^{\bullet+1}(\mathcal{R})$, est donné par :

$$\delta^k(Q)(F_0, F_1, ..., F_k) = \sum_{1\leq i\leq k} (-1)^i \{F_i, Q(F_0, ..., \widehat{F_i}, ..., F_k)\}$$

$$+ \sum_{1\leq i<j\leq k} (-1)^{i+j} Q(\{F_i, F_j\}, F_0, ..., \widehat{F_i}, ..., \widehat{F_j}, ..., F_k)$$

où $Q \in \mathcal{X}^\bullet(\mathcal{R})$ et $F_0, ..., F_k \in \mathcal{R}$.
On montre par un calcul direct que $\delta_{k+1} \circ \delta_k = 0$. Nous avons donc bien un opérateur de cobord. On obtient alors le complexe

$$\cdots \longrightarrow \mathcal{X}^{k-1}(\mathcal{R}) \xrightarrow{\delta^{k-1}} \mathcal{X}^k(\mathcal{R}) \xrightarrow{\delta^k} \mathcal{X}^{k+1}(\mathcal{R}) \xrightarrow{\delta^{k+1}} \cdots \tag{1.11}$$

dont la cohomologie est appelée la cohomologie de Poisson associée à l'algèbre de Poisson $(\mathcal{R}, \{\cdot, \cdot\})$.
Les éléments de $Ker\delta^k$ sont appelés les k-cocycles de Poisson alors que ceux de

$Im\delta^{k-1}$ sont appelés les k-cobords de Poisson. On a donc le $k^{\text{ème}}$ groupe de Poisson $PH^k(\mathcal{R}, \delta)$:

$$PH^k(\mathcal{R}, \delta) := Ker\delta^k / Im\delta^{k-1}.$$

La cohomologie de Poisson est donc :

$$PH^*(\mathcal{R}, \delta) := \oplus_{k\in\mathbb{N}} PH^k(\mathcal{R}, \delta).$$

Comme pour l'homologie de Poisson, on peut remarquer de manière similaire que l'opérateur cobord de Poisson est $\mathcal{C}as(\mathcal{R})$-linéaire, de sorte que la cohomologie de Poisson est naturellement un module sur l'algèbre des Casimirs. De même la correspondance $(\mathcal{R}, \{\cdot, \cdot\} \mapsto PH^*(\mathcal{R}, \delta)$ n'est pas functorielle.

1.5 Structure de Poisson unimodulaire

On suppose $\mathcal{R} = K[x_1, x_2, \cdots, x_n]$.
On note par $S_{p,q}$, l'ensemble des permutations σ de l'ensemble $\{1, 2, \cdots, p+q\}$ telles que $\sigma(1) < ... < \sigma(p)$ et $\sigma(p+1) < ... < \sigma(p+q)$, $p,\ q \in \mathbb{N}$.
La famille d'applications

$$\star : \mathcal{X}^k(\mathcal{R}) \longrightarrow \Omega^{n-k}(\mathcal{R}),$$

définies par :

$$\star Q = \sum_{\sigma\in S_{k,n-k}} \epsilon(\sigma) Q(x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(k)}) dx_{\sigma(k+1)} \wedge ... \wedge dx_{\sigma(n)}$$

définit un isomorphe de type Poincaré entre $\mathcal{X}^\bullet(\mathcal{R})$ et $\Omega^\bullet(\mathcal{R})$.
Notons par $d : \Omega^\bullet(\mathcal{R}) \longrightarrow \Omega^{\bullet+1}(\mathcal{R})$ la différentielle de de Rham.
On definit l'application composée $D_\bullet := \star^{-1} \circ d \circ \star : \mathcal{X}^\bullet(\mathcal{R}) \longrightarrow \mathcal{X}^{\bullet-1}(\mathcal{R})$.

Définition 1.5.1. *Un crochet de Poisson $\{\cdot, \cdot\}$ est dite unimodulaire si* $D_2(\{\cdot, \cdot\}) = 0$.

Proposition 1.5.1. *Si $\{\cdot, \cdot\}$ est un crochet de Poisson unimodulaire sur $\mathcal{R}$, nous avons une dualité de type Poincaré entre l'homologie et la cohomologie de Poisson, ie.,*

$$PH_k(\mathcal{R}, \pi) \cong PH^{n-k}(\mathcal{R}, \pi),$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Proposition 1.5.2. *Toute structure Jacobienne de Poisson est unimodulaire.*

1.6 Multi-dérivations antisymétriques quasi-homogènes

Considérons l'algèbre des polynômes $\mathcal{R} = K[x_1, \cdots, x_n]$.
Le crochet de Schouten est la famille d'applications

$$[\cdot, \cdot]_S : \mathcal{X}^p(\mathcal{R}) \times \mathcal{X}^q(\mathcal{R}) \longrightarrow \mathcal{X}^{p+q-1}(\mathcal{R}),$$

definies par

$$\begin{aligned}[P, Q]_S(F_1, ..., F_{p+q-1}) = & \sum_{\sigma \in S_{q,p-1}} \epsilon(\sigma) P(Q(F_{\sigma(1)}, ..., F_{\sigma(q)}), F_{\sigma(q+1)}, ..., F_{\sigma(q+p-1)}) \\ & -(-1)^{(p-1)(q-1)} \sum_{\sigma \in S_{p,q-1}} \epsilon(\sigma) Q(P(F_{\sigma(1)}, ..., F_{\sigma(p)}), F_{\sigma(p+1)}, ..., F_{\sigma(p+q-1)})\end{aligned}$$

pour $P \in \mathcal{X}^p(\mathcal{R})$, $Q \in \mathcal{X}^q(\mathcal{R})$, et pour $F_1, ..., F_{p+q-1} \in \mathcal{R}$, $p,\ q \in \mathbb{N}$.
Par convention, $S_{p,-1} := \emptyset$ et $S_{-1,q} := \emptyset$, pour $p,\ q \in \mathbb{N}$.

Définition 1.6.1. *Soit $\mathcal{V} \in \mathcal{X}^1(\mathcal{R})$ et $Q \in \mathcal{X}^q(\mathcal{R})$. La dérivation de Lie de Q par rapport à $\mathcal{V}$ est $\mathcal{L}_{\mathcal{V}} Q := [\mathcal{V}, Q]_S$.*

Définition 1.6.2. *Une multi-dérivation antisymétrique $P \in \mathcal{X}^{\bullet}(\mathcal{R})$ est dite quasi-homogène de degré $r \in \mathbb{Z}$, s'il existe des entiers positifs $\varpi_1, \cdots, \varpi_n \in \mathbb{N}^*$, premiers entre eux, poids des variables $x_1, \cdots, x_n$, tels que*

$$\mathcal{L}_{\vec{e}_\varpi}(P) = rP$$

où $\mathcal{L}_{\vec{e}_\varpi}$ est la dérivation de Lie par rapport à la dérivation d'Euler

$$\vec{e}_\varpi := \varpi_1 x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + ... + \varpi_n x_n \frac{\partial}{\partial x_n}.$$

Le degré d'une multi-dérivation antisymétrique quasi-homogène $P \in \mathcal{X}^{\bullet}(\mathcal{R})$ sera aussi noté $\varpi(P) \in \mathbb{Z}$.
Par convention, la k-dérivation nulle est de degré $-\infty$.
Nous noterons par $|\varpi|$ la somme des poids $\varpi_1 + \cdots + \varpi_n$.
Grâce à l'application $\star$, définie dans la section précédente, nous pouvons transporter la notion de quasi-homogeneité définie sur les multi-dérivations antisymétriques aux formes différentielles de Kähler.

1.7 Complexe de Koszul - intersection complète à singularité isolée

On considère des poids $\varpi_1, \cdots, \varpi_n$, fixés pour les variables $x_1, \cdots, x_n$.

Définition 1.7.1. *On dit qu'un polynôme quasi-homogène $P \in \mathcal{R} = K[x_1, \cdots, x_n]$ a une singularité isolée en zero si*

$$\mathcal{A}_{sing}(P) := K[x_1, \cdots, x_n]/\langle \frac{\partial P}{\partial x_1}, \frac{\partial P}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial P}{\partial x_n} \rangle \tag{1.12}$$

est de dimension finie comme K-espace vectoriel.
Cette dimension est appelée le nombre Milnor associé à P.

Nous allons maintenant donner la definition de la dimension d'un anneau. Pour cela, notons que la longueur d'une chaîne $P_r \supset P_{r-1} \supset \cdots \supset P_0$ d'inclusion de $r+1$ ideaux distincts d'un anneau donné est r.

Définition 1.7.2. *La dimension de Krull d'un anneau $\mathcal{R}$ est le supremum des longueurs des chaînes d'ideaux premiers distincts de cet anneau.*

Définition 1.7.3. *Soit $\mathcal{R}$ une K-algèbre associative, commutative graduée. Un système d'éléments homogènes $a_1, ..., a_d$ de $\mathcal{R}$, où d est la dimension de Krull de $\mathcal{R}$, est appelé un système homogène de paramètres de $\mathcal{R}$ (h.s.o.p.) si $\mathcal{R}/\langle a_1, ..., a_d \rangle$ est de dimension finie comme K-espace vectoriel.*

Par exemple, si nous considérons la K-algèbre $\mathcal{R} = K[x_1, ..., x_n]$, graduée par le degré, nous avons un h.s.o.p. naturel donné par le système $x_1, \cdots, x_n$.

Définition 1.7.4. *Une suite $a_1, ..., a_n$ dans une algèbre commutative associative $\mathcal{R}$ est dite $\mathcal{R}$-régulière ou simplement régulière si $\langle a_1, ..., a_n \rangle \neq \mathcal{R}$ et a_i n'est pas diviseur de zero de $\mathcal{R}/\langle a_1, ..., a_{i-1} \rangle$ pour $i = 1, 2, ..., n$.*

Pour toute suite $a_1, ..., a_n$, nous avons un complexe dit de Koszul associé :

$$0 \longrightarrow \bigwedge^0(\mathcal{R}^n) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \bigwedge^{n-2}(\mathcal{R}^n) \xrightarrow{\wedge\omega} \bigwedge^{n-1}(\mathcal{R}^n) \xrightarrow{\wedge\omega} \bigwedge^n(\mathcal{R}^n) \tag{1.13}$$

où $\omega = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$ et $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ est une base du $\mathcal{R}$-module libre $\mathcal{R}^n$.
Lorsque notre suite est régulière, le complexe de Koszul associé est exacte.
Grâce aux identifications $\bigwedge^p(\mathcal{R}^n) \cong \Omega^p(\mathcal{R})$, avec $\mathcal{R} = K[x_1, ..., x_n]$, le complexe de Koszul associé à la suite $\frac{\partial P}{\partial x_1}, \frac{\partial P}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial P}{\partial x_n}$ $(P \in \mathcal{R})$ prend la forme suivante :

$$0 \longrightarrow \mathcal{R} \xrightarrow{\wedge dP} \Omega^1(\mathcal{R}) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \Omega^{n-2}(\mathcal{R}) \xrightarrow{\wedge dP} \Omega^{n-1}(\mathcal{R}) \xrightarrow{\wedge dP} \Omega^n(\mathcal{R}) \tag{1.14}$$

Théorème 1.7.1. (Cohen-Macaulay). *Soit $\mathcal{R}$ une K-algèbre noetherienne graduée. Si $\mathcal{R}$ possède un h.s.o.p. qui est une suite régulière, alors tout h.s.o.p. de $\mathcal{R}$ est une suite régulière.*

Ainsi, pour tout polynôme quasi-homogène à singularité isolée $P \in \mathcal{R} = K[x_1, ..., x_n]$, la suite $\frac{\partial P}{\partial x_1}, \frac{\partial P}{\partial x_2}, \frac{\partial P}{\partial x_3}, \cdots, \frac{\partial P}{\partial x_n}$ est régulière, et par conséquent le complexe de Koszul associé est exacte.

Définition 1.7.5. *Soit $\mathcal{R}$ un anneau noetherien commutatif avec unité. La profondeur, $dpth(I)$, d'un ideal I de $\mathcal{R}$ est la longueur maximale q d'une suite $\mathcal{R}$-régulière $a_1, \cdots, a_q \in I$.*

Soit M un $\mathcal{R}$-module libre de rang fini n, où $\mathcal{R}$ est un anneau noetherien commutatif avec unité. Nous notons par $\bigwedge^p(M)$ le $p^{\text{ème}}$ produit exterieur de M. Par convention $\bigwedge^0(M) = \mathcal{R}$.
Soient $\eta_1, \cdots, \eta_k$ des éléments de M, et $(e_1, \cdots, e_n)$ une base de M.

$$\eta_1 \wedge \cdots \wedge \eta_k = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} a_{i_1, \cdots, i_k} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}.$$

Nous noterons $\mathfrak{A}$ l'ideal de $\mathcal{R}$ engendré par les $a_{i_1, \cdots, i_k}$, $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$.
On pose :

$$Z^p := \left\{ \eta \in \bigwedge^p(M) : \eta \wedge \eta_1 \wedge \cdots \wedge \eta_k = 0 \right\}, \quad p = 0, 1, 2, \cdots; \tag{1.15}$$

$$H^p := Z^p \Big/ \sum_{i=1}^{k} \eta_i \wedge \bigwedge^{p-1}(M), \quad p = 0, 1, 2, \cdots. \tag{1.16}$$

Nous avons le résultat suivant de Kyoji Saito :

Théorème 1.7.2. ([26]) *$H^p = 0$ for $0 \leq p < dpth(\mathfrak{A})$.*

Nous allons donner un exemple. Soit $\mathcal{R} = K[x_1, x_2, x_3, x_4]$. Considérons P_1, P_2, deux polynômes quasi-homogènes dans $\mathcal{R}$. Nous dirons que (P_1, P_2) définissent un intersection complète si la suite (P_1, P_2) est régulière dans $\mathcal{R}$.
On dira que (P_1, P_2) a une singularité isolée en zero si

$$\mathcal{R}/\langle P_1, P_2, \frac{\partial P_1}{\partial x_i}\frac{\partial P_2}{\partial x_j} - \frac{\partial P_1}{\partial x_j}\frac{\partial P_2}{\partial x_i}, i < j = 1, 2, 3, 4\rangle$$

est de dimension finie comme K-espace vectoriel.
Cette dimension est aussi appelée le nombre de Milnor de la singularité et est notée μ.
Soit (P_1, P_2) deux polynômes quasi-homogènes formant une intersection complète à singularité isolée.
On pose

$$\eta_j = \sum_{i=1}^{4} \frac{\partial P_j}{\partial x_i} e_i, \quad j = 1, 2,$$

où (e_1, e_2, e_3, e_4) est une base du $\mathcal{R}$-module libre $\mathcal{R}^4$.
Alors

$$\eta_1 \wedge \eta_2 = \sum_{i<j=1}^{4} a_{ij} e_i \wedge e_j,$$

où

$$a_{ij} = \frac{\partial P_1}{\partial x_i}\frac{\partial P_2}{\partial x_j} - \frac{\partial P_1}{\partial x_j}\frac{\partial P_2}{\partial x_i}.$$

Soit $\mathfrak{R} = (a_{ij}, i < j = 1, \cdots, 4)$. Grâce aux travaux de E.J.N. LOOIJENGA ([19], pages 25 and 49) sur les singularités, nous pouvons affirmer que $dpth(\mathfrak{R}) = 3$.
Par conséquent pour $\eta \in \bigwedge^p(\mathcal{R}^4)$, $p = 1, 2$:
si

$$\eta \wedge \eta_1 \wedge \eta_2 = 0,$$

alors

$$\eta = \alpha_1 \wedge \eta_1 + \alpha_2 \wedge \eta_2,$$

$\alpha_1, \alpha_2 \in \bigwedge^{p-1}(\mathcal{R}^4)$.

1.8 Déformations formelles

1.8.1 Déformations formelles de K-espaces vectoriels

Définition 1.8.1. *Nous dirons qu'un $K[[h]]$-module M est une déformation formelle s'il est de la forme $E[[h]]$, où E est un K-espace vectoriel. Pour cela, il est nécéssaire et suffisant que M soit séparé et complet pour la topologie h-adique et sans torsion, ie., pour tout $m \in M$, $hm = 0 \Longrightarrow m = 0$. Dans ce cas $E = M/hM$.*

On dit alors que M est une déformation formelle de $K[[h]]$-module E. Les éléments de $E[[h]]$ seront notés

$$\sum_{n\geq 0} u_n h^n$$

Définition 1.8.2. *Soient M_1, M_2 deux déformations formelles de $K[[h]]$-modules. Un morphisme $f : M_1 \longrightarrow M_2$ de $K[[h]]$-modules sera appelé une déformation formelle de l'application K-linéaire, déduite de f, $f' : M_1/hM_1 \longrightarrow M_2/hM_2$, si f peut se mettre sous la forme*

$$f(\sum_{n\geq 0} u_n h^n) = \sum_{n\geq 0}\sum_{m+p=n} f_m(u_p) h^n.$$

En d'autres termes $f' = f_0$.

1.8.2 Déformations formelles de K-algèbres

Définition 1.8.3. *On dit qu'une $K[[h]]$-algèbre A est une déformation formelle d'une K-algèbre R si A est une déformation formelle de R en tant que $K[[h]]$-module et si en outre A/hA est isomorphe à R en tant que K-algèbre.*
On peut alors écrire $A = R[[h]]$ avec une multiplication de la forme

$$(\sum_{n\geq 0} u_n h^n, \sum_{n\geq 0} v_n h^n) \longmapsto \sum_{n\geq 0} \sum_{l+m+p=n} b_l(u_m, v_p) h^n,$$

où les b_l sont des applications bilinéaires $R \times R \longrightarrow R$ et $b_0(u,v) = ab$.

Remarque 1.8.1. *Si R est commutative, l'application*

$$\begin{array}{ccc} R \times R & \longrightarrow & R \\ (u,v) & \mapsto & b_1(u,v) - b_1(v,u) \end{array}$$

est un crochet de Poisson indépendent de la réalisation choisie de $A = R[[h]]$.

1.9 Algèbre de Koszul

Soit V un K-espace vectoriel. On note par $T(V)$ l'algèbre tensorielle de V sur K.
Soit R un sous-espace vectoriel de $V^{\otimes 2}$; on note (R) l'idéale bilatère de l'algèbre $T(V)$ engendré par R. On considère l'algèbre quadratique $A = T(V)/(R)$.
Soit $R^{\perp}$ l'orthogonal de R dans $V^* \otimes V^*$, où V^* désigne l'espace dual de V. On définit l'algèbre duale de A comme l'algèbre quadratique $A^! := T(V^*)/(R^{\perp})$.
Soit $(x_i)_{i=0,\cdots,n-1}$ une base de V et $(\zeta_i)_{i=0,\cdots,n-1}$ sa base duale.
Considérons

$$e = \sum_{i=0}^{n-1} x_i \otimes \zeta_i \in A \otimes A^!.$$

On a $e^2 = 0$ ([33]).
Si $f \in (V^{*\otimes n})^*$ et $x \in V^*$, le produit intérieur de f par x, $f \cdot x \in (V^{*\otimes(n-1)})^*$, est défini par :

$$\begin{array}{cccc} f \cdot x : & (V^{*\otimes(n-1)}) & \longrightarrow & k \\ & v_1 \otimes \cdots \otimes v_{n-1} & \longmapsto & f(x \otimes v_1 \otimes \cdots \otimes v_{n-1}). \end{array}$$

Soit $K_m(A) = A \otimes (A^!_m)^*$ et $K_*(A) = \oplus_{m\geq 0} K_m(A)$.
La multiplication à droite (multiplication de algèbre sur A et du produit intérieur sur $(A^!)^*$) par e induit une application

$$d : K_m(A) \longrightarrow K_{m-1}(A).$$

On obtient par conséquent le complexe :

$$A = A \otimes k = A \otimes (A^!_0)^* \xleftarrow{\times e} \otimes (A^!_1)^* \xleftarrow{\times e} \otimes (A^!_2)^* \xleftarrow{\times e} \cdots \tag{1.17}$$

appelé complexe de Koszul de l'algèbre A.
Le complexe de Koszul augmenté de A est le complexe :

$$0 \longleftarrow k \xleftarrow{\varepsilon} A = A \otimes k = A \otimes (A^!_0)^* \xleftarrow{\times e} \otimes (A^!_1)^* \xleftarrow{\times e} \otimes (A^!_2)^* \xleftarrow{\times e} \cdots \tag{1.18}$$

où ε est la projection canonique.

Définition 1.9.1. *L'algèbre quadratique A est dite de Koszul si le complexe de Koszul augmenté de A (1.18) est exacte.*

Proposition 1.9.1. ([33]) *Supposons que A une algèbre de Koszul. Alors*

$$HH_\star(A) = H_\star(K(A), b).$$

Ainsi lorsque A est une algèbre de Koszul, Nous avons deux complexes qui calculent l'Homologie de Hochschild de A : $(K(A), b)$ et $(C(A), b)$.
En effet, puisque $(A^!_m)^* = \cap_{i+j+2=m} V^{\otimes i} \otimes R \otimes V^{\otimes j}$ ([33]), l'application

$$q : A \otimes (A^!_m)^* \longrightarrow A \otimes A^{\otimes m}$$

qui n'est rien d'autre que la restriction sur $A \otimes (A^!_m)^*$ de l'inclusion naturelle $A \otimes V^{\otimes m} \hookrightarrow A \otimes A^{\otimes m}$, est un quasi-isomorphisme de $(K(A), b)$ vers $(C(A), b)$ ([33]).

Chapitre 2

Les algèbres elliptiques

Nous parlerons dans ce chapitre des algèbres elliptiques $Q_{n,k}(\mathcal{E},\eta)$ et de leurs limites quasi-classiques $q_{n,k}(\mathcal{E})$ telles que définies par Odesskii et Feigin ([23]). Nous donnerons une description explicite de $Q_{3,1}(\mathcal{E},\eta)$, $Q_{4,1}(\mathcal{E},\eta)$ et des algèbres de Poisson associées $q_{3,1}(\mathcal{E})$ et $q_{4,1}(\mathcal{E})$.

2.1 Fonctions théta

Soit $\Gamma = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau \subset \mathbb{C}$, un réseau engendré par 1 et $\tau \in \mathbb{C}$, avec $\mathrm{Im}\tau > 0$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $c \in \mathbb{C}$. Nous notons par $\Theta_{n,c}(\Gamma)$ l'espace des fonctions entières à une variable satisfaisant les relations suivantes :

$$f(z+1) = f(z), \tag{2.1}$$

$$f(z+\tau) = (-1)^n e^{-2\pi i(nz-c)} f(z). \tag{2.2}$$

Il est bien connu ([22]) que :

1. $dim\Theta_{n,c}(\Gamma) = n$;
2. toute fonction $f \in \Theta_{n,c}(\Gamma)$ a exactement n zéros modulo Γ et la somme de ces zéros modulo Γ est égale à c.

Considérons la fonction entière θ, définie par :

$$\theta(z) = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}} (-1)^\alpha e^{2\pi i(\alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\tau)}. \tag{2.3}$$

Il est clair que θ appartient à $\Theta_{1,0}(\Gamma)$. Et d'après ce qui précède, 0 est l'unique zéro de θ modulo Γ.

On peut remarquer que $\theta(-z) = -e^{-2\pi i z}\theta(z)$. De plus, il est connu que θ peut s'écrire sous la forme d'un produit infini :

$$\theta(z) = \prod_{\alpha\geq 1}(1-e^{2\pi i\alpha\tau}) \cdot (1-e^{2\pi i z}) \cdot \prod_{\alpha\geq 1}(1-e^{2\pi i(z+\alpha\tau)}) \cdot (1-e^{2\pi i(\alpha\tau - z)}). \tag{2.4}$$

Considérons les opérateurs $T_{\frac{1}{n}}$ et $T_{\frac{1}{n}\tau}$, opérant sur les fonctions entières à une variable de la manière suivante :

$$T_{\frac{1}{n}}f(z) = f\left(z + \frac{1}{n}\right);$$

$$T_{\frac{1}{n}\tau}f(z) = e^{2\pi i(z+\frac{1}{2n}-\frac{n-1}{2n}\tau)}f\left(z + \frac{1}{n}\tau\right).$$

Il est clair que l'espace $\Theta_{n,\frac{n-1}{2}}(\Gamma)$ est stable par ces opérateurs. La restriction de ces opérateurs sur l'espace $\Theta_{n,\frac{n-1}{2}}(\Gamma)$ satisfait la propriété :

$$T^n_{\frac{1}{n}} = T^n_{\frac{1}{n}\tau} = id.$$

Pour tout $\alpha \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, posons :

$$\theta_\alpha = \theta\left(z + \frac{\alpha}{n}\tau\right)\theta\left(z + \frac{1}{n} + \frac{\alpha}{n}\tau\right)\cdots\theta\left(z + \frac{n-1}{n} + \frac{\alpha}{n}\tau\right)e^{2\pi i(\alpha z+\frac{\alpha(\alpha-n)}{2n}\tau+\frac{\alpha}{2n})}. \tag{2.5}$$

Les θ_α, $\alpha\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, forment une base de l'espace $\Theta_{n,\frac{n-1}{2}}(\Gamma)$ telle que $T_{\frac{1}{n}}\theta_\alpha = e^{2\pi i\frac{\alpha}{n}}\theta_\alpha$ et $T_{\frac{1}{n}\tau}\theta_\alpha = \theta_{\alpha+1}$, pour tout $\alpha \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Il est par conséquent évident que les fonctions $\{\theta(z - \frac{1}{n}c - \frac{n-1}{2n}),\ \alpha\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\}$ forment une base de l'espace $\Theta_{n,c}(\Gamma)$.

2.2 Les algèbres $Q_n(\mathcal{E},\eta)$ et $Q_{n,k}(\mathcal{E},\eta)$

Soit $\Gamma = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau \subset \mathbb{C}$, un réseau engendré par 1 et $\tau \in \mathbb{C}$, où $\mathrm{Im}\tau > 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $c \in \mathbb{C}$. Considérons la courbe elliptique $\mathcal{E} = \mathbb{C}/\Gamma$ et un point η sur cette courbe.

Dans leur article ([23]), Odesskii et Feigin construisent une algèbre associative graduée $Q_n(\mathcal{E},\eta)$ associée à la courbe elliptique $\mathcal{E}$ et $\eta \in \mathcal{E}$ en posant :

$$Q_n(\mathcal{E},\eta) = \mathbb{C} \oplus F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots, \tag{2.6}$$

où $F_1 = \Theta_{n,c}(\Gamma)$ et $F_\alpha = S^\alpha\Theta_{n,c+(\alpha-1)n}(\Gamma)$.

Par construction, $\dim F_\alpha = \frac{n(n+1)\cdots(n+\alpha-1)}{\alpha!}$.

L'espace F_α peut être considéré comme l'espace des fonctions holomorphes symétriques à α variables telles que :

$$f(z_1 + 1, z_2, \cdots, z_\alpha) = f(z_1, z_2, \cdots, z_\alpha); \tag{2.7}$$

$$f(z_1 + \tau, z_2, \cdots, z_\alpha) = (-1)^n e^{-2\pi i(nz_1-c-(\alpha-1)n)}f(z_1, z_2, \cdots, z_\alpha). \tag{2.8}$$

Pour $f \in F_\alpha$, $g \in F_\beta$, le produit $f * g \in F_{\alpha+\beta}$ est donné par la formule :

$$f*g(z_1, \cdots, z_{\alpha+\beta}) = \frac{1}{\alpha!\beta!} \sum_{\sigma \in S_{\alpha+\beta}} f(z_{\sigma(1)}, \cdots, \sigma_{(\alpha)}) g(z_{\sigma(\alpha+1)} - 2\alpha\eta, \cdots, \sigma_{(\alpha+\beta)} - 2\alpha\eta) \times$$

$$\times \prod_{\substack{1 \leq i \leq \alpha \\ \alpha+1 \leq j \leq \alpha+\beta}} \frac{\theta(z_{\sigma(i)} - z_{\sigma(j)} - n\eta)}{\theta(z_{\sigma(i)} - z_{\sigma(j)})}.$$

En particulier, pour $f, g \in F_1$, nous avons :

$$f * g(z_1, z_2) = f(z_1) g(z_2 - 2\eta) \frac{\theta(z_1 - z_2 - n\eta)}{\theta(z_1 - z_2)} + f(z_2) g(z_1 - 2\eta) \frac{\theta(z_2 - z_2 - n\eta)}{\theta(z_2 - z_1)}.$$

Par construction, on peut remarquer que les composantes homogénes de $Q_n(\mathcal{E}, \eta)$ coïncident avec ceux de l'algèbre des polynômes. Par ailleurs, pour $\eta = 0$, la formule $f * g$ devient :

$$f * g(z_1, \cdots, z_{\alpha+\beta}) = \frac{1}{\alpha!\beta!} \sum_{\sigma \in S_{\alpha+\beta}} f(z_{\sigma(1)}, \cdots, \sigma_{(\alpha)}) g(z_{\sigma(\alpha+1)}, \cdots, \sigma_{(\alpha+\beta)}).$$

Cette dernière n'étant rien d'autre que le produit ordinaire de l'algèbre $S^*\Theta_{n,c}$, qui est tout simplement l'algèbre des polynômes à n variables.
Par conséquent, $Q_n(\mathcal{E}, \eta)$ est une déformation de l'algèbre des polynômes à n variables. L'algèbre des polynômes munie du crochet de Poisson associé à cette déformation sera notée $q_n(\mathcal{E})$. On peut obtenir le crochet correspondant en faisant le développement limité en serie de Taylor de la différence $f * g - g * f$.
De manière plus explicite :

$$\{f, g\}(z_1, \cdots, z_{\alpha+\beta}) =$$

$$\frac{1}{\alpha!\beta!} \sum_{\sigma \in S_{\alpha+\beta}} \{-2nf(z_{\sigma(1)}, \cdots, z_{\sigma(\alpha)}) g(z_{\sigma(\alpha+1)}, \cdots, z_{\sigma(\alpha+\beta)}) \sum_{\substack{1 \leq i \leq \alpha \\ \alpha+1 \leq j \leq \alpha+\beta}} \frac{\theta'(z_{\sigma(i)} - z_{\sigma(j)})}{\theta(z_{\sigma(i)} - z_{\sigma(j)})} +$$

$$+2\beta g(z_{\sigma(\alpha+1)}, \cdots, z_{\sigma(\alpha+\beta)}) \sum_{1 \leq i \leq \alpha} f'_{z_{\sigma(i)}}(z_{\sigma(1)}, \cdots, z_{\sigma(\alpha)}) -$$

$$-2\alpha f(z_{\sigma(1)}, \cdots, z_{\sigma_{(\alpha)}}) \sum_{\alpha+1 \leq j \leq \alpha+\beta} g'_{z_{\sigma(j)}}(z_{\sigma(\alpha+1)}, \cdots, z_{\sigma_{(\alpha+\beta)}})\}.$$

Proposition 2.2.1. ([23]) *$Q_n(\mathcal{E}, \eta)$ est l'algèbre définie par n générateurs $\{x_i, i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\}$ et les relations*

$$\sum_{r \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \frac{1}{\theta_r(\eta)\theta_{j-i-r}(-\eta)} x_{j-r} x_{i+r} = 0, \quad i \neq j, i, j \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}. \tag{2.9}$$

De manière plus général, Odesskii et Feigin définissent pour une courbe elliptique $\mathcal{E}$ fixée et tout entier naturel non nul n, une famille d'algèbres dites elliptiques $Q_{n,k}(\mathcal{E},\eta)$, contenant les algèbres $Q_n(\mathcal{E},\eta)$ de la manière suivante :
pour $\eta \in \mathcal{E}$ et $k < n$ est un entier naturel tel que k et n soient premiers entre eux, $Q_{n,k}(\mathcal{E},\eta)$ est l'algèbre définie par n générateurs $\{x_i, i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\}$ et les relations

$$\sum_{r\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \frac{\theta_{j-i+r(k-1)}(0)}{\theta_{kr}(\eta)\theta_{j-i-r}(-\eta)} x_{j-r}x_{i+r} = 0, \quad i \neq j, i, j \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}. \tag{2.10}$$

Il est bien clair que $Q_n(\mathcal{E},\eta)$ correspond au cas $k = 1$: $Q_n(\mathcal{E},\eta) = Q_{n,1}(\mathcal{E},\eta)$.
Nous avons les propriétés suivantes :

1. Le centre de l'algèbre $Q_{n,k}(\mathcal{E},\eta)$, pour $\mathcal{E}$ et η génériques, est l'algèbre des polynômes à $m = pgcd(n, k+1)$ variables de dégré n/m;
2. $Q_{n,k}(\mathcal{E}, 0) = \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]$ est commutative ;
3. $Q_{n,n-1}(\mathcal{E},\eta) = \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]$ est commutative pour tout η ;
4. $Q_{n,k}(\mathcal{E},\eta) \cong Q_{n,k'}(\mathcal{E},\eta)$, si $kk' \equiv 1 \pmod{n}$;
5. les applications $x_i \mapsto x_{i+1}$ et $x_i \mapsto \varepsilon^i x_i$, où ε est une racine de l'unité ($\varepsilon^n = 1$), définissent des automorphismes de l'algèbre $Q_{n,k}(\mathcal{E},\eta)$;
6. l'algèbre $Q_{n,k}(\mathcal{E},\eta)$, pour $\mathcal{E}$ et η génériques, est une déformation de l'algèbre des polynômes à n variables. L'algèbre de Poisson obtenue est notée $q_{n,k}(\mathcal{E})$.

2.3 L'algèbre elliptique $Q_3(\mathcal{E},\eta)$ et sa limite quasi-classique $q_3(\mathcal{E})$

L'algèbre elliptique $Q_3(\mathcal{E},\eta)$, encore appelée l'algèbre d'Artin-Tate, est l'algèbre de la forme

$$Q_3(\mathcal{E},\eta) = \mathbb{C}\langle x_0, x_1, x_2\rangle/(f_1, f_2, f_3),$$

où

$$\begin{aligned} f_1 &= ax_0x_1 + bx_1x_0 + cx_2^2; \\ f_2 &= ax_1x_2 + bx_2x_1 + cx_0^2; \\ f_3 &= ax_2x_0 + bx_0x_2 + cx_1^2, \end{aligned} \tag{2.11}$$

où $a, b, c \in \mathbb{C}$.
Le centre de cette algèbre est l'algèbre des polynômes engendré par l'élément cubique :

$$\widetilde{P}_1 = c(c^3 - b^3)x_1^3 + b(c^3 - a^3)x_1x_0x_2 + a(b^3 - c^3)x_0x_1x_2 + c(a^3 - c^3)x_0^3. \tag{2.12}$$

L'algèbre $Q_3(\mathcal{E}, \eta)$ est la déformation de l'algèbre des polynômes

$$q_3(\mathcal{E}) = (\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2], \{\cdot, \cdot\}),$$

où le crochet $\{\cdot, \cdot\}$ est de la forme :

$$\begin{array}{l} \{x_0, x_1\} = x_2^2 + kx_0x_1; \\ \{x_1, x_2\} = x_3^2 + kx_1x_2; \\ \{x_2, x_0\} = x_1^2 + kx_0x_2, \end{array} \tag{2.13}$$

où $k \in \mathbb{C}$.
Cette structure est une structure Jacobienne de Poisson donnée par le Casimir :

$$P_1 = \frac{1}{3}(x_0^3 + x_1^3 + x_2^3) + kx_0x_1x_2. \tag{2.14}$$

L'algèbre elliptique $Q_3(\mathcal{E}, \eta)$ a été très étudiée ces dernières années. On peut entre autres citer les travaux des mathématiciens Artin, Schelter, Tate et Michel Van den Bergh. Ce dernier dans son article ([33]) calcule l'homologie de Poisson de l'algèbre $q_3(\mathcal{E})$ ainsi que l'homologie de Hochschild de l'algèbre $Q_3(\mathcal{E}, \eta)$. Il obtient notamment les résultats suivants :

Théorème 2.3.1. ([33]) *Les groupes homologiques de Poisson $PH_i(q_3(\mathcal{E}), \partial)$, $i = 0, 1, 2, 3$, sont des $\mathbb{C}[P_1]$-modules libres de rangs respectifs $8, 8, 1, 1$.*
$PH_2(q_3(\mathcal{E}), \partial)$ est engendré par $x_1dx_2 \wedge dx_3 + x_2dx_3 \wedge dx_1 + x_3dx_1 \wedge dx_2$ comme $\mathbb{C}[P_1]$-module libre alors que $PH_3(q_3(\mathcal{E}), \partial)$ est engendré par $dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$ comme $\mathbb{C}[P_1]$-module libre.
Les $PH_i(q_3(\mathcal{E}), \partial)$, $i = 0, 1, 2, 3$, ont les séries de Poincaré suivantes :

$$P(PH_0(q_3(\mathcal{E}), \partial), t) = \frac{(1+t)^3}{1-t^3};$$

$$P(PH_1(q_3(\mathcal{E}), \partial), t) = \frac{(1+t)^3}{1-t^3} - 1;$$

$$P(PH_2(q_3(\mathcal{E}), \partial), t) = \frac{t^3}{1-t^3};$$

$$P(PH_3(q_3(\mathcal{E}), \partial), t) = \frac{t^3}{1-t^3},$$

comme $\mathbb{C}$-espaces vectoriels.

Grâce à ce résultat et la suite spectrale de Brylinski, Van den Bergh calcule l'homologie de Hochschild de $Q_3(\mathcal{E},\eta)$. Il obtint le résultat suivant :

Théorème 2.3.2. *Pour des données génériques de $\mathcal{E}$ et η, les groupes homologiques de Hochschild $HH_i(Q_3(\mathcal{E},\eta))$, $i = 0,1,2,3$, de l'algèbre elliptique $Q_3(\mathcal{E},\eta)$ sont des $\mathbb{C}[\widetilde{P}_1]$-modules libres de rangs respectifs $8,8,1,1$.*
Comme $\mathbb{C}$-espaces vectoriels, ils ont les séries de Poincaré suivantes :

$$P(HH_0(Q_3(\mathcal{E},\eta)),t) = \frac{(1+t)^3}{1-t^3};$$

$$P(HH_1(Q_3(\mathcal{E},\eta)),t) = \frac{(1+t)^3}{1-t^3} - 1;$$

$$P(HH_2(Q_3(\mathcal{E},\eta)),t) = \frac{t^3}{1-t^3};$$

$$P(HH_3(Q_3(\mathcal{E},\eta)),t) = \frac{t^3}{1-t^3}.$$

2.4 L'algèbre elliptique $Q_4(\mathcal{E},\eta)$ et sa limite quasi-classique $q_4(\mathcal{E})$

L'algèbre elliptique $Q_4(\mathcal{E},\eta)$ est encore appelée l'algèbre de Sklyanin. Ici, nous suivrons la description initiale de cette algèbre telle que donnée par Sklyanin dans son article ([28]).
Soit $\tau \in \mathbb{C}$ tel que $Im(\tau) > 0$. Considérons le réseau $\Gamma = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\tau$.
Soient $\theta_{00},\ \theta_{01},\ \theta_{10},\ \theta_{11}$ les fonctions de théta-jacobi associées à Γ, telles que décritent dans ([29]).
Ces fonctions satisfont aux propriétés suivantes :

$$\theta_{ab}(z+1) = (-1)^a \theta_{ab}(z);$$
$$\theta_{ab}(z+\tau) = e^{(-\pi i\tau - 2\pi i z - \pi i b)}\theta_{ab}(z).$$

Les zéros de θ_{ab} sont les points : $\frac{1}{2}(1-b) + (1+a)\tau + \Gamma$.
Soit $\eta \in \mathbb{C}$ tel que τ ne soit pas un point d'ordre 4 dans $\mathcal{E} = \mathbb{C}/\Gamma$. Soit (ab, ij, kl) une permutation cyclique de $(00, 01, 10, 11)$.
On pose :

$$\alpha_{ab} = (-1)^{a+b}\left[\frac{\theta_{11}(\eta)\theta_{ab}(\eta)}{\theta_{ij}(\tau)\theta_{kl(\eta)}}\right]^2$$

Considérons V un espace vectoriel de dimension 4 avec S_0, S_1, S_2, S_3 comme base.
L'algèbre de Sklyanin est $Q_4(\mathcal{E},\eta) = T(V)/(I_2)$ où (I_2) est l'idéal bilatère engendré

par le sous-espace $I_2 \subseteq V \otimes V$ avec pour base :

$$\begin{array}{c} f_{0i} = [S_0, S_i] - \alpha_i(S_j S_k + S_k S_j); \\ f_{jk} = [S_j, S_k] - (S_0 S_i + S_i S_0), \end{array} \tag{2.15}$$

$\alpha_1 = \alpha_{00}$, $\alpha_2 = \alpha_{01}$, $\alpha_1 = \alpha_{10}$, et (i, j, k) formant une permutation cyclique de $(1, 2, 3)$.
Cette algèbre est une déformation de l'algèbre des polynômes $q_4(\mathcal{E}) = (\mathbb{C}[S_0, S_1, S_2, S_3], \{\cdot, \cdot\})$, où le crochet Poisson correspondant, dit de Sklyanin, est une structure Jacobienne de Poisson donnée par deux Casimirs P_1, P_2 :

$$P_1 = \frac{1}{2}(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2) \tag{2.16}$$

$$P_2 = \frac{1}{2}(S_0^2 + J_1 S_1^2 + J_2 S_2^2 + J_3 S_3^2) \tag{2.17}$$

Le crochet de l'algèbre $q_4(\mathcal{E})$ est donné par les formules suivantes :

$$\{S_0, S_i\} = (-1)^i det(\frac{\partial P_k}{\partial x_l}),\ l \neq 0, i;\ k = 1, 2; \tag{2.18}$$

$$\{S_i, S_j\} = (-1)^{i+j} det(\frac{\partial P_k}{\partial x_l}),\ l \neq i, j;\ k = 1, 2. \tag{2.19}$$

Le chapitre 3 de cette thèse est consacré aux calculs de l'homologie et la cohomologie de Poisson des structures Jacobiennes de Poisson donnée par deux Casimirs quasi-homogènes formant une intersection conplète à singularité isolé. L'algèbre de Poisson $q_4(\mathcal{E})$ en est un cas particulier.
Au chapitre 4, nous calculerons l'homologie de Hochschild de l'algèbre $Q_4(\mathcal{E}, \eta)$.

Chapitre 3

(Co)homologie de Poisson des structures Jacobiennes de Poisson en dimension quatre : cas de Sklyanin

Dans tout ce chapitre l'algèbre des polynômes à quatre variables $\mathcal{R} = K[x_1, \cdots x_4]$, où K est un corps de caractérisque nulle, est munie d'une structure Jacobienne de Poisson donnée par deux Casimirs P_1, P_2, quasi-homogènes définissant une intersection complète à singularité isolée.
Les structures Jacobiennes de Poisson étant unimodulaires, nous ne parlerons dans ce chapitre que de l'homologie de Poisson, la cohomologie de Poisson s'en déduisant par une dualité de type Poincaré.

3.1 Quelques notations vectorielles

Dans cette partie, nous définissons quelques morphismes de $\mathcal{R}$-modules et opérateurs différentiels :

$$\begin{array}{cccc}
\times : & \mathcal{R}^4 \times \mathcal{R}^4 & \longrightarrow & \mathcal{R}^6 \\
& \left(\overrightarrow{X} \begin{pmatrix} X_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ X_4 \end{pmatrix} \;,\; \overrightarrow{Y} \begin{pmatrix} Y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ Y_4 \end{pmatrix} \right) & \longmapsto & \overrightarrow{X} \times \overrightarrow{Y} = \begin{pmatrix} X_1Y_4 - X_4Y_1 \\ X_1Y_2 - X_2Y_1 \\ X_3Y_2 - X_2Y_3 \\ X_3Y_4 - X_4Y_3 \\ X_3Y_1 - X_1Y_3 \\ X_2Y_4 - X_4Y_2 \end{pmatrix}
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} \bar{\times}: & \mathcal{R}^4 \times \mathcal{R}^6 & \longrightarrow & \mathcal{R}^4 \\ & \left(\overrightarrow{X} \begin{pmatrix} X_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ X_4 \end{pmatrix} \ , \ \overrightarrow{Y} \begin{pmatrix} Y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ Y_6 \end{pmatrix} \right) & \longmapsto & \overrightarrow{X} \bar{\times} \overrightarrow{Y} = \begin{pmatrix} -X_4Y_3 + X_2Y_4 - X_3Y_6 \\ X_3Y_1 - X_1Y_4 + X_4Y_5 \\ -X_2Y_1 + X_4Y_2 + X_1Y_6 \\ -X_3Y_2 + X_1Y_3 - X_2Y_5 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} \cdot: & \mathcal{R}^4 \times \mathcal{R}^4 & \longrightarrow & \mathcal{R} \\ & \left(\overrightarrow{X} \begin{pmatrix} X_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ X_4 \end{pmatrix} \ , \ \overrightarrow{Y} \begin{pmatrix} Y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ Y_4 \end{pmatrix} \right) & \longmapsto & \overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{Y} = \sum_{i=1}^{4} X_i Y_i \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} \cdot: & \mathcal{R}^6 \times \mathcal{R}^6 & \longrightarrow & \mathcal{R} \\ & \left(\overrightarrow{X} \begin{pmatrix} X_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ X_6 \end{pmatrix} \ , \ \overrightarrow{Y} \begin{pmatrix} Y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ Y_6 \end{pmatrix} \right) & \longmapsto & \overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{Y} = \sum_{i=1}^{6} X_i Y_i. \end{array}$$

Soit $f : \mathcal{R}^6 \longrightarrow \mathcal{R}^6$ le morphisme de $\mathcal{R}$-modules donné par la matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Considérons les opérateurs différentiels suivants :

$$\begin{array}{cccc} \overrightarrow{\nabla}: & \mathcal{R} & \longrightarrow & \mathcal{R}^4 \\ & F & \longmapsto & \overrightarrow{\nabla} F = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{x_1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{\partial F}{x_4} \end{pmatrix} \end{array}$$

$$
\begin{array}{rcccl}
\vec{\nabla}\times : & \mathcal{R}^4 & \longrightarrow & & \mathcal{R}^6 \\
\overrightarrow{Y} & \begin{pmatrix} Y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ Y_4 \end{pmatrix} & \longmapsto & \vec{\nabla}\times\overrightarrow{X} = & \begin{pmatrix} \frac{\partial Y_4}{\partial x_1} - \frac{\partial Y_1}{\partial x_4} \\ \frac{\partial Y_2}{\partial x_1} - \frac{\partial Y_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial Y_2}{\partial x_3} - \frac{\partial Y_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial Y_4}{\partial x_3} - \frac{\partial Y_3}{\partial x_4} \\ \frac{\partial Y_1}{\partial x_3} - \frac{\partial Y_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial Y_4}{\partial x_2} - \frac{\partial Y_2}{\partial x_4} \end{pmatrix}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcccl}
\overrightarrow{\nabla}\bar{\times} : & \mathcal{R}^6 & \longrightarrow & & \mathcal{R}^4 \\
\overrightarrow{G} & \begin{pmatrix} G_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ G_6 \end{pmatrix} & \longmapsto & \overrightarrow{\nabla}\bar{\times}\overrightarrow{G} = & \begin{pmatrix} -\frac{\partial G_3}{\partial x_4} + \frac{\partial G_4}{\partial x_2} - \frac{\partial G_6}{\partial x_3} \\ \frac{\partial G_1}{\partial x_3} - \frac{\partial G_4}{\partial x_1} + \frac{\partial G_5}{\partial x_4} \\ -\frac{\partial G_1}{\partial x_2} + \frac{\partial G_2}{\partial x_4} + \frac{\partial G_6}{\partial x_1} \\ -\frac{\partial G_2}{\partial x_3} + \frac{\partial G_3}{\partial x_1} - \frac{\partial G_5}{\partial x_2} \end{pmatrix}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcccl}
\mathrm{Div}() : & \mathcal{A}^4 & \longrightarrow & & \mathcal{R} \\
\overrightarrow{K} & \begin{pmatrix} K_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ K_4 \end{pmatrix} & \longmapsto & \mathrm{Div}(\overrightarrow{K}) = & \displaystyle\sum_{i=1}^{4} \frac{\partial K_i}{\partial x_i}
\end{array}
$$

Proposition 3.1.1. *Les morphismes de $\mathcal{R}$-modules et les opérateurs différentiels ci-dessus vérifient les propriétés suivantes :*

1. $f^2 = Id_{\mathcal{R}^6}$;

2. $f(\vec{x}) \cdot \vec{y} = \vec{x} \cdot f(\vec{y}), \quad \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{R}^6$;

3. $f(\vec{x}) \cdot f(\vec{y}) = \vec{x} \cdot \vec{y}, \quad \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{R}^6$;

4. $\vec{x} \cdot (\vec{y} \times \vec{z}) = \vec{y} \cdot (\vec{z} \bar{\times} f(\vec{x})), \ \ \vec{x} \in \mathcal{R}^6, \ \vec{y}, \vec{z} \in \mathcal{R}^4$;

5. $\vec{x} \cdot (\vec{y} \bar{\times} \vec{z}) = -\vec{y} \cdot (\vec{x} \bar{\times} \vec{z}), \quad \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{R}^4, \ \vec{z} \in \mathcal{R}^6$;

6. $\vec{x} \cdot (\vec{x} \bar{\times} \vec{z}) = 0, \ \vec{x} \in \mathcal{R}^4, \quad \vec{z} \in \mathcal{R}^6$;

7. $\vec{x}\bar{\times}(\vec{x}\times\vec{y}) = 0, \quad \vec{x},\vec{y}\in\mathcal{R}^4;$

8. $(\vec{x}\times\vec{z})\cdot f(\vec{x}\times\vec{y}) = 0, \quad \vec{x},\vec{y},\vec{z}\in\mathcal{R}^4;$

9. $\vec{x}\bar{\times}(\vec{y}\times\vec{z}) = \vec{y}\bar{\times}(\vec{z}\times\vec{x}), \quad \vec{x},\vec{y},\vec{z}\in\mathcal{R}^4;$

10. $(\vec{x}\bar{\times}f(\vec{y}\times\vec{z}))\bar{\times}(\vec{y}\times\vec{z}) = 0, \ \ \vec{x},\vec{y},\vec{z}\in\mathcal{R}^4;$

11. $\vec{z}\bar{\times}f(\vec{x}\times\vec{y}) = -(\vec{z}\cdot\vec{x})\vec{y} + (\vec{z}\cdot\vec{y})\vec{x}, \quad \vec{x},\vec{y},\vec{z}\in\mathcal{R}^4$ *;*

12. $(\vec{z}\bar{\times}f(\vec{x}\times\vec{y}))\times\vec{t} = -(\vec{z}\cdot\vec{x})\vec{y}\times\vec{t} + (\vec{z}\cdot\vec{y})\vec{x}\times\vec{t}, \quad \vec{x},\vec{y},\vec{z},\vec{t}\in\mathcal{R}^4$ *;*

13. $(\vec{x}\bar{\times}f(\vec{y}\times\vec{z}))\times\vec{z} = (\vec{x}\cdot\vec{z})\vec{y}\times\vec{z}, \ \ \vec{x},\vec{y},\vec{z}\in\mathcal{R}^4;$

14. $(\vec{x}\bar{\times}\vec{z})\bar{\times}f(\vec{x}\times\vec{y}) = -(\vec{z}\cdot f(\vec{x}\times\vec{y}))\vec{x}, \ \ \vec{x},\vec{y},\vec{z}\in\mathcal{R}^4, \vec{z}\in\mathcal{R}^6;$

15. $\vec{\nabla}\bar{\times}(\vec{x}\times\vec{y}) = \vec{y}\bar{\times}(\vec{\nabla}\times\vec{x}) - \vec{x}\bar{\times}(\vec{\nabla}\times\vec{y}), \ \ \vec{x},\vec{y}\in\mathcal{R}^4;$

16. $\vec{\nabla}\times F\vec{x} = F\vec{\nabla}\times\vec{x} + \vec{\nabla}F\times\vec{x}, \ \ F\in\mathcal{R},\ \vec{x}\in\mathcal{R}^4;$

17. $\vec{\nabla}\bar{\times}F\vec{y} = F\vec{\nabla}\bar{\times}\vec{y} + \vec{\nabla}F\bar{\times}\vec{y}, \quad F\in\mathcal{R},\ \vec{y}\in\mathcal{R}^6;$

18. $Div(F\vec{x}) = \vec{\nabla}F\cdot\vec{x} + F Div(\vec{x}), \ \ F\in\mathcal{R},\ \vec{x}\in\mathcal{R}^4;$

19. $Div(\vec{x}\bar{\times}\vec{y}) = \vec{y}\cdot f(\vec{\nabla}\times\vec{x}) - \vec{x}\cdot(\vec{\nabla}\bar{\times}\vec{y}),\ \vec{x}\in\mathcal{R}^4, \ \ \vec{y}\in\mathcal{R}^6.$

Démonstration. Nous allons donner la preuve pour la propriété (19). Les autres se démontrent de manière similaire.
Considérons $\vec{x} = (X_1, X_2, X_3, X_4)^t \in \mathcal{R}^4$ et $\vec{y} = (Y_1, ..., Y_6)^t \in \mathcal{R}^6$.
Nous avons :

$$\begin{aligned}
Div(\vec{x}\bar{\times}\vec{y}) &= \tfrac{\partial}{\partial x_1}(-X_4Y_3 + X_2Y_4 - X_3Y_6) + \tfrac{\partial}{\partial x_2}(X_3Y_1 - X_1Y_4 + X_4Y_5)\\
&\quad + \tfrac{\partial}{\partial x_3}(-X_2Y_1 + X_4Y_2 + X_1Y_6) + \tfrac{\partial}{\partial x_4}(-X_3Y_2 + X_1Y_3 - X_2Y_5)\\
&= Y_1(\tfrac{\partial X_3}{\partial x_2} - \tfrac{\partial X_2}{\partial x_3}) + Y_2(\tfrac{\partial X_4}{\partial x_3} - \tfrac{\partial X_3}{\partial x_4}) + Y_3(\tfrac{\partial X_1}{\partial x_4} - \tfrac{\partial X_4}{\partial x_1})\\
&\quad + Y_4(\tfrac{\partial X_2}{\partial x_1} - \tfrac{\partial X_1}{\partial x_2}) + Y_5(\tfrac{\partial X_4}{\partial x_2} - \tfrac{\partial X_2}{\partial x_4}) + Y_6(\tfrac{\partial X_1}{\partial x_3} - \tfrac{\partial X_3}{\partial x_1})\\
&\quad - X_1(\tfrac{\partial Y_4}{\partial x_2} - \tfrac{\partial Y_6}{\partial x_3} - \tfrac{\partial Y_3}{\partial x_4}) - X_2(-\tfrac{\partial Y_4}{\partial x_1} + \tfrac{\partial Y_1}{\partial x_3} + \tfrac{\partial Y_5}{\partial x_4})\\
&\quad - X_3(\tfrac{\partial Y_6}{\partial x_1} - \tfrac{\partial Y_1}{\partial x_2} + \tfrac{\partial Y_2}{\partial x_4}) - X_4(\tfrac{\partial Y_3}{\partial x_1} - \tfrac{\partial Y_5}{\partial x_2} - \tfrac{\partial Y_2}{\partial x_3})\\
&= \vec{y}\cdot f(\vec{\nabla}\times\vec{x}) - \vec{x}\cdot(\vec{\nabla}\bar{\times}\vec{y}).
\end{aligned}$$

$\square$

3.2 Différentielles de Kähler en dimension quatre

Grâce à la définition des différentielles de Kähler, nous avons les isomorphismes de $\mathcal{R}$-modules suivants :

$$\begin{array}{ccc} \Omega^1(\mathcal{R}) & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{R}^4 \\ F_1dx_1 + F_2dx_2 + F_3dx_3 + F_4dx_4 & \longmapsto & (F_1, ..., F_4) \end{array} \tag{3.1}$$

$$\begin{array}{ccc} \Omega^2(\mathcal{R}) & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{R}^6 \\ F_1dx_1 \wedge dx_4 + F_2dx_1 \wedge dx_2 + F_3dx_3 \wedge dx_2 & \longmapsto & (F_1, F_2, ..., F_6) \\ +F_4dx_3 \wedge dx_4 + F_5dx_3 \wedge dx_1 + F_6dx_2 \wedge dx_4 & & \end{array} \tag{3.2}$$

$$\begin{array}{ccc} \Omega^3(\mathcal{R}) & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{R}^4 \\ K_1dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 + K_2dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_4 & \longmapsto & (K_1, ..., K_4) \\ +K_3dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_4 + K_4dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_3 & & \end{array} \tag{3.3}$$

$$\begin{array}{ccc} \Omega^4(\mathcal{R}) & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{R} \\ Udx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 & \longmapsto & U \end{array} \tag{3.4}$$

Par ces isomorphismes, le complexe de cohomologie de de Rham peut s'écrire en termes d'éléments de $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}^4$ et $\mathcal{R}^6$ de la manière suivante :

$$\begin{array}{ccccccccccccc} K & \xrightarrow{d} & \mathcal{R} & \xrightarrow{d} & \mathcal{R}^4 & \xrightarrow{d} & \mathcal{R}^6 & \xrightarrow{d} & \mathcal{R}^4 & \xrightarrow{d} & \mathcal{R} & \xrightarrow{d} & 0 \\ & & F & \longmapsto & \overrightarrow{\nabla} F & & & & & & & & \\ & & & & \overrightarrow{F} & \longmapsto & \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{F} & & & & & & \\ & & & & & & \overrightarrow{G} & \longmapsto & \overrightarrow{\nabla} \bar{\times} \overrightarrow{G} & & & & \\ & & & & & & & & \overrightarrow{K} & \longmapsto & \mathrm{Div}(\overrightarrow{K}) & & \end{array} \tag{3.5}$$

Proposition 3.2.1. (Lemme de Poincaré) *Le complexe de de Rham* (3.5) *de l'algèbre des polynômes* $\mathcal{R} = K[x_1, .., x_4]$ *est exacte.*

3.3 Complexe homologique de Poisson en dimension quatre

Utilisant les notations vectorielles, nous avons une nouvelle écriture du complexe homologique de Poisson.

Proposition 3.3.1. *Grâce aux isomorphismes ci-dessus, le complexe homologique de Poisson associé à une structure Jacobienne de Poisson sur l'algèbre $\mathcal{R}$ donnée par deux Casimirs P_1 et P_2, peut s'écrire sous la forme compacte suivante :*

$$0 \longrightarrow \mathcal{R} \xrightarrow{\partial_4} \mathcal{R}^4 \xrightarrow{\partial_3} \mathcal{R}^6 \xrightarrow{\partial_2} \mathcal{R}^4 \xrightarrow{\partial_1} \mathcal{R} \tag{3.6}$$

où :

$\partial_1(\overrightarrow{H}) = (\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{H}) \cdot f(\overrightarrow{\nabla} P_1 \times \overrightarrow{\nabla} P_2), \overrightarrow{H} \in \mathcal{R}^4$

$\partial_2(\overrightarrow{G}) = -(\overrightarrow{\nabla} \bar{\times} \overrightarrow{G}) \bar{\times} f(\overrightarrow{\nabla} P_1 \times \overrightarrow{\nabla} P_2) - \overrightarrow{\nabla}(\overrightarrow{G} \cdot f(\overrightarrow{\nabla} P_1 \times \overrightarrow{\nabla} P_2)), \overrightarrow{G} \in \mathcal{R}^6$

$\partial_3(\overrightarrow{K}) = Div(\overrightarrow{K}) \overrightarrow{\nabla} P_1 \times \overrightarrow{\nabla} P_2 + \overrightarrow{\nabla} \times (\overrightarrow{K} \bar{\times} f(\overrightarrow{\nabla} P_1 \times \overrightarrow{\nabla} P_2))$

$\partial_4(U) = -\overrightarrow{\nabla} U \bar{\times} (\overrightarrow{\nabla} P_1 \times \overrightarrow{\nabla} P_2)$

Démonstration. Nous allons donner le preuve pour la dernière formule, le reste se prouvant de manière similaire.
Soit $U dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4$ un élément de $\Omega^4(\mathcal{R})$.
Nous avons

$$\partial_4(U dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4) = \ (I) \ + \ (II),$$

où

$$(I) = \{U, x_1\} dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 + \{U, x_2\} dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_4 + \{U, x_3\} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_4 + \\ + \{U, x_4\} dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_3$$

et

$$(II) = -U d\{x_1, x_2\} \wedge dx_3 \wedge dx_4 + U d\{x_1, x_3\} \wedge dx_2 \wedge dx_4 6 - d\{x_1, x_4\} \wedge dx_2 \wedge dx_3 + \\ - U d\{x_2, x_3\} \wedge dx_1 \wedge dx_4 + U d\{x_2, x_4\} \wedge dx_1 \wedge dx_3 - U d\{x_3, x_4\} \wedge dx_1 \wedge dx_2.$$

Le second terme est exactement $(II) = -U d(dP_1 \wedge dP_2) = 0$. Par conséquent le bord de Poisson $\partial_4(U dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4)$ est égale au premier terme (I).
Mais en utilisant nos identifications, nous avons $\partial_4(U) = (K_1, K_2, K_3, K_4)^t$, où $K_i =$

$\{U, x_i\}$.
On peut voir par un calcul simple que :

$$K_1 = \{U, x_1\} := \frac{dU \wedge dx_1 \wedge dP_1 \wedge dP_2}{dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4}$$

est égale à

$$\frac{\partial U}{\partial x_4}(\frac{\partial P_1}{\partial x_3}\frac{\partial P_2}{\partial x_2} - \frac{\partial P_1}{\partial x_2}\frac{\partial P_2}{\partial x_3}) - \frac{\partial U}{\partial x_2}(\frac{\partial P_1}{\partial x_3}\frac{\partial P_2}{\partial x_4} - \frac{\partial P_1}{\partial x_4}\frac{\partial P_2}{\partial x_3}) + \frac{\partial U}{\partial x_3}(\frac{\partial P_1}{\partial x_2}\frac{\partial P_2}{\partial x_4} - \frac{\partial P_1}{\partial x_4}\frac{\partial P_2}{\partial x_2})$$

qui est exactement le premier terme de $-\overrightarrow{\nabla} U \bar{\times}(\overrightarrow{\nabla} P_1 \times \overrightarrow{\nabla} P_2)$. □

Les groupes homologiques de Poisson prennent les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}
PH_0(\mathcal{R}, \partial) &= \frac{\mathcal{R}}{\{(\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{H})\cdot f(\overrightarrow{\nabla} P_1 \times \overrightarrow{\nabla} P_2) | \overrightarrow{H} \in \mathcal{R}^4\}} \\
PH_1(\mathcal{R}, \partial) &= \frac{\{\overrightarrow{H} \in \mathcal{R}^4 | (\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{H})\cdot f(\overrightarrow{\nabla} P_1 \times \overrightarrow{\nabla} P_2) = 0\}}{\{-(\overrightarrow{\nabla} \bar{\times} \overrightarrow{G}) \bar{\times} f(\overrightarrow{\nabla} P_1 \times \overrightarrow{\nabla} P_2) - \overrightarrow{\nabla}(\overrightarrow{G}\cdot f(\overrightarrow{\nabla} P_1 \times \overrightarrow{\nabla} P_2)\}} \\
PH_2(\mathcal{R}, \partial) &= \frac{\{\overrightarrow{G} \in \mathcal{R}^6 | (\overrightarrow{\nabla} \bar{\times} \overrightarrow{G}) \bar{\times} f(\overrightarrow{\nabla} P_1 \times \overrightarrow{\nabla} P_2) + \overrightarrow{\nabla}(\overrightarrow{G}\cdot f(\overrightarrow{\nabla} P_1 \times \overrightarrow{\nabla} P_2)) = 0\}}{\{Div(\overrightarrow{K}) f(\overrightarrow{\nabla} P_1 \times \overrightarrow{\nabla} P_2) + \overrightarrow{\nabla} \times [\overrightarrow{K} \bar{\times} f(\overrightarrow{\nabla} P_1 \times \overrightarrow{\nabla} P_2)]\}} \\
PH_3(\mathcal{R}, \partial) &= \frac{\{\overrightarrow{K} \in \mathcal{R}^4 | Div(\overrightarrow{K}) f(\overrightarrow{\nabla} P_1 \times \overrightarrow{\nabla} P_2) + \overrightarrow{\nabla} \times [\overrightarrow{K} \bar{\times} (\overrightarrow{\nabla} P_1 \times \overrightarrow{\nabla} P_2)] = 0\}}{\{-\overrightarrow{\nabla} U \bar{\times} (\overrightarrow{\nabla} P_1 \times \overrightarrow{\nabla} P_2)\}} \\
PH_4(\mathcal{R}, \partial) &= \{U \in \mathcal{R} | \overrightarrow{\nabla} U \bar{\times} (\overrightarrow{\nabla} P_1 \times \overrightarrow{\nabla} P_2) = 0\}
\end{aligned} \tag{3.7}$$

3.4 Quasi-homogeneité en dimension quatre

Soit $\varpi_1, \cdots, \varpi_4 \in \mathbb{N}^*$, fixés, des poids respectifs des varialbles $x_1, \cdots, x_4$. Par nos isomorphismes, la dérivation d'Euler est identifiée au vecteur :

$$\vec{e}_\varpi = (\varpi_1 x_1, \cdots, \varpi_4 x_4)^t.$$

On a

$$Div(\vec{e}_\varpi) = |\varpi| \tag{3.8}$$

et pour tout polynôme $P \in \mathcal{R}$ est quasi-homogène de degré $\varpi(P)$ si et seulement si

$$\overrightarrow{\nabla} P \cdot \vec{e}_\varpi = \varpi(P) P. \tag{3.9}$$

On a également :

$$Div(P\vec{e}_\varpi) = (\varpi(P) + |\varpi|)P. \tag{3.10}$$

Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, nous notons par $\mathcal{R}_i$ le K-espace vectoriel engendré par les polynômes quasi-homogènes de degré i.
Il est alors clair que :

$$\mathcal{R} = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{R}_i$$

où $\mathcal{R}_0 = K$.
Pour tout $i \in \mathbb{N}$, nous notons $\Omega^k(\mathcal{R})_i$ le K-espace vectoriel :

$$\Omega^k(\mathcal{R})_i = \{P \in \Omega^k(\mathcal{R}) : \varpi(P) = i\} \cup \{0\}.$$

Nous avons les isomorphismes de K-espaces vectoriels suivants :

$$\Omega^4(\mathcal{R})_i \cong \mathcal{X}^0(\mathcal{R})_i \cong \mathcal{R}_i;$$

$$\Omega^3(\mathcal{R})_i \cong \mathcal{X}^1(\mathcal{R})_i \cong \mathcal{R}_{i+\varpi_1} \times \mathcal{R}_{i+\varpi_2} \times \mathcal{R}_{i+\varpi_3} \times \mathcal{R}_{i+\varpi_4};$$

$$\Omega^2(\mathcal{R})_i \cong \mathcal{X}^2(\mathcal{R})_i \cong \mathcal{R}_{i+\varpi_1+\varpi_4} \times \mathcal{R}_{i+\varpi_1+\varpi_2} \times \mathcal{R}_{i+\varpi_3+\varpi_2} \times \mathcal{R}_{i+\varpi_3+\varpi_4} \times \mathcal{R}_{i+\varpi_3+\varpi_1} \times \mathcal{R}_{i+\varpi_2+\varpi_4};$$

$$\Omega^1(\mathcal{R})_i \cong \mathcal{X}^3(\mathcal{R})_i \cong \mathcal{R}_{i+\varpi_2+\varpi_3+\varpi_4} \times \mathcal{R}_{i+\varpi_3+\varpi_2+\varpi_4} \times \mathcal{R}_{i+\varpi_1+\varpi_2+\varpi_4} \times \mathcal{R}_{i+\varpi_2+\varpi_1+\varpi_3};$$

$$\Omega^0(\mathcal{R})_i \cong \mathcal{X}^4(\mathcal{R})_i \cong \mathcal{R}_{i+\varpi_1+\varpi_2+\varpi_3+\varpi_4}.$$

Remarque 3.4.1. *Les morphimes du complexe de de Rham (3.5) sont de degré zero, alors que les flèches du complexe homologique de Poisson (3.6) sont des morphismes de degré $\varpi(P_1) + \varpi(P_2)$.*

3.5 Complexe de Koszul et intersection complète en dimension quatre

Soit $P \in \mathcal{R}$, un polynôme. Avec les notations vectorielles précédentes, le complexe de Koszul associé à la suite $\frac{\partial P}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial P}{\partial x_4}$ s'écrit de la manière suivante :

$$0 \longrightarrow \mathcal{R} \xrightarrow{\vec{\nabla} P} \mathcal{R}^4 \xrightarrow{\times \vec{\nabla} P} \mathcal{R}^6 \xrightarrow{\vec{\nabla} P \bar{\times}} \mathcal{R}^4 \xrightarrow{\cdot \vec{\nabla} P} \mathcal{R} \tag{3.11}$$

Ce complexe est bien sûr exacte lorsque P est quasi-homogène à singularité isolée. Considèrons maintenant deux polynômes P_1, P_2 quasi-homogènes. Nous avons deux complexes de Koszul associés repectivement à P_1 et P_2. Nous notons par d^1 et d^2 leur différentielle respective. On peut remarquer que $d^1 \circ d^2 + d^2 \circ d^1 = 0$. Ainsi, on peut construire le bicomplexe suivant dont les flèches verticales et horizontales sont les morphismes des complexes de Koszul associés respectivement à P_1 et P_2 :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & & & & & \\
\mathcal{R} \arrow[d, "d^1"] & 0 \arrow[l] \arrow[d] & & & & \\
\mathcal{R}^4 \arrow[d, "d^1"] & \mathcal{R} \arrow[l] \arrow[d] & 0 \arrow[l] \arrow[d] & & & \\
\mathcal{R}^6 \arrow[d, "d^1"] & \mathcal{R}^4 \arrow[l] \arrow[d] & \mathcal{R} \arrow[l] \arrow[d] & 0 \arrow[l] \arrow[d] & & \\
\mathcal{R}^4 \arrow[d, "d^1"] & \mathcal{R}^6 \arrow[l] \arrow[d] & \mathcal{R}^4 \arrow[l] \arrow[d] & \mathcal{R} \arrow[l] \arrow[d] & 0 \arrow[l] \arrow[d] & \\
\mathcal{R} & \mathcal{R}^4 \arrow[l, "d^2"'] & \mathcal{R}^6 \arrow[l, "d^2"'] & \mathcal{R}^4 \arrow[l, "d^2"'] & \mathcal{R} \arrow[l, "d^2"'] & 0 \arrow[l]
\end{tikzcd} \tag{3.12}$$

Du complexe total de ce bicomplexe, on peut extraire le complexe suivant :

$$0 \longrightarrow \mathcal{R}^3 \xrightarrow{d_2} (\mathcal{R}^4)^2 \xrightarrow{d_2} \mathcal{R}^6 \xrightarrow{d_1} \mathcal{R} \tag{3.13}$$

où

$$d_1(\overrightarrow{G}) = \overrightarrow{G} \cdot f(\overrightarrow{\nabla} P_1 \times \overrightarrow{\nabla} P_2);$$

$$d_2(\overrightarrow{F}_1, \overrightarrow{F}_2) = \overrightarrow{\nabla} F_1 \times \overrightarrow{P}_1 + \overrightarrow{\nabla} F_2 \times \overrightarrow{P}_2$$

$$d_3(U_1, U_2, U_3) = (U_1 \overrightarrow{\nabla} P_1 + U_2 \overrightarrow{\nabla} P_2,\ U_2 \overrightarrow{\nabla} P_1 + U_3 \overrightarrow{\nabla} P_2).$$

Grâce au résultat de la section 1.7, nous avons les deux lemmes suivants :

Lemme 3.5.1. ([31]) *Pour tout* $\overrightarrow{G} \in \mathcal{R}^6$, $\overrightarrow{G} \cdot f(\overrightarrow{\nabla} P_1 \times \overrightarrow{\nabla} P_2) = 0$ *si et seulement si* $\overrightarrow{G} = \overrightarrow{H}_1 \times \overrightarrow{\nabla} P_1 + \overrightarrow{H}_2 \times \overrightarrow{\nabla} P_2$, *où* $\overrightarrow{H}_1, \overrightarrow{H}_2 \in \mathcal{R}^4$.

Lemme 3.5.2. ([31]) *Pour tout* $\overrightarrow{H} \in \mathcal{R}^4$, $\overrightarrow{H}\,\bar{\times}(\overrightarrow{\nabla} P_1 \times \overrightarrow{\nabla} P_2) = 0$ *si et seulement si* $\overrightarrow{H} = U_1 \overrightarrow{\nabla} P_1 + U_2 \overrightarrow{\nabla} P_1$, *où* $U_1, U_2 \in \mathcal{R}$.

On en déduit le résultat suivant :

Proposition 3.5.1. *Le complexe (3.13) est exacte.*

Démonstration. C'est une conséquence directe des deux lemmes ci-dessus. $\square$

3.6 Homologie de Poisson d'une structure Jacobienne de Poisson

Nous supposons bien sûr que notre structure Jacobienne de Poisson est donnée par deux Casimirs P_1, P_2 quasi-homogènes définissant une intersection complète à singularité isolée.
Nous avons le résultat suivant :

Proposition 3.6.1. ([31]) *Les cycles de Poisson sont ainsi donnés :*

- $ker\partial_1 = \{\alpha_1 \overrightarrow{\nabla} P_1 + \alpha_2 \overrightarrow{\nabla} P_2 + \overrightarrow{\nabla} \alpha_3 | \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathcal{R}\}$;
- $ker\partial_2 = \{U \overrightarrow{\nabla} P_1 \times \overrightarrow{\nabla} P_2 + \overrightarrow{\nabla} \alpha_1 \times \overrightarrow{\nabla} P_1 + \overrightarrow{\nabla} \alpha_2 \times \overrightarrow{\nabla} P_2 | U, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{R}\}$;
- $\ker \partial_3 = \{\alpha \vec{e}_\varpi + \overrightarrow{\nabla} U \bar{\times} (\overrightarrow{\nabla} P_1 \times \overrightarrow{\nabla} P_2) | \alpha \in K[P_1, P_2], U \in \mathcal{R}\}$,
  si $|\varpi| = 2\varpi(P_1) = 2\varpi(P_2)$;
- $ker\partial_4 = K[P_1, P_2]$.

Démonstration. La preuve de cette proposition, donnée dans l'article ([31]) inséré en annexe A, utilise essentiellement la proposition (3.5.1) et un raisonnement basé sur le degré. □

Posons $\delta = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4$ and $\rho = \varpi_1 x_1 dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 + \varpi_2 x_2 dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_4 + \varpi_3 x_3 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_4 + \varpi_4 x_4 dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_3$.
On en déduit de façon le résultat suivant :

Théorème 3.6.1. ([31]) *$PH_4(\mathcal{R}, \partial)$ est le $K[P_1, P_2]$-module libre de rang 1 engendré par δ.*

Si $|\varpi| = 2\varpi(P_1) = 2\varpi(P_2)$, alors $PH_3(\mathcal{R}, \partial)$ le $K[P_1, P_2]$-module libre de rang 1 engendré par ρ.

Démonstration. La démonstration de ce théorème est donnée en annexe A. □

Proposition 3.6.2. ([31]) *Les complexes ci-dessous sont exactes et les morphismes sont des applications de degré zero :*

$$0 \longrightarrow K[P_1, P_2] \xrightarrow{\alpha} \mathcal{R}(-\varpi(P_1)) \oplus \mathcal{R}(-\varpi(P_2)) \oplus \mathcal{R} \xrightarrow{\beta} ker\partial_1 \longrightarrow 0 \qquad (3.14)$$

$\alpha(u(P_1, P_2)) = (-\frac{\partial u}{\partial P_1}, -\frac{\partial u}{\partial P_2}, u)$;

$\beta(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \alpha_1 \overrightarrow{\nabla} P_1 + \alpha_2 \overrightarrow{\nabla} P_2 + \overrightarrow{\nabla} \alpha_3.$

$$0 \longrightarrow K[P_1, P_2](-\varpi(P_1)) \oplus K[P_1, P_2](-\varpi(P_2)) \xrightarrow{\gamma} \tag{3.15}$$
$$\xrightarrow{\gamma} \mathcal{R}(-\varpi(P_1) - \varpi(P_2)) \oplus \mathcal{R}(-\varpi(P_1)) \oplus \mathcal{R}(-\varpi(P_2)) \xrightarrow{\epsilon} ker\partial_2 \longrightarrow 0$$

$\gamma(\alpha_1, \alpha_2) = (\frac{\partial \alpha_1}{\partial P_2} - \frac{\partial \alpha_2}{\partial P_1}, \alpha_1, \alpha_2)$;
$\epsilon(U, \alpha_1, \alpha_2) = U \nabla P_1 \times \overrightarrow{\nabla} P_2 + \nabla \alpha_1 \times \overrightarrow{\nabla} P_1 + \nabla \alpha_2 \times \overrightarrow{\nabla} P_2.$

$$0 \longrightarrow K[P_1, P_2](-\varpi(P_1) - \varpi(P_2)) \xrightarrow{\kappa} K[P_1, P_2](-|\varpi|) \oplus \mathcal{R}(-\varpi(P_1) - \varpi(P_2)) \xrightarrow{\sigma} ker\partial_3 \longrightarrow 0 \tag{3.16}$$

$\kappa(V(P_1, P_2) = (0, V)$;
$\sigma(U, V) = U\vec{e}_\varpi + \overrightarrow{\nabla} V \bar{\times} (\overrightarrow{\nabla} P_1 \times \overrightarrow{\nabla} P_2)$, *si* $|\varpi| = 2\varpi(P_1) = 2\varpi(P_2)$,

Démonstration. La preuve est donnée en annexe A. □

Nous avons également les complexes exactes triviaux suivants, où les morphismes sont de degré zero :

$$0 \longrightarrow ker\partial_{i+1} \longrightarrow \Omega^{i+1}(\mathcal{R}) \longrightarrow ker\partial_i \longrightarrow PH_i(\mathcal{R}, \partial) \longrightarrow 0 \tag{3.17}$$

$i = 0, 1, 2, 3.$

Remarque 3.6.1. *Utilisant l'exactitude des complexes (3.14), (3.15), (3.16), (3.17), on obtient les series de Poincaré des groupes homologiques de Poisson* $PH_i(\mathcal{R}, \partial)$, $i = 0, 1, 2, 3, 4$ *comme des* K*-espaces vectoriels. On peut immédiatement remarquer que ces séries ne dépendent pas des polynômes* P_1 *et* P_2*, mais seulement des poids* $\varpi_1, \cdots, \varpi_4$ *et des degrés de* P_1 *et* P_2*.*
On peut ainsi dire que les groupes homologiques de Poisson ou leurs séries de Poincaré sont des invariants pour des intersections complètes à singularités isolées en dimension quatre.

Pour le cas homgène et quadratique, nous avons le resultat suivant :

Théorème 3.6.2. ([31]) *Si* $\varpi_1 = ... = \varpi_4 = 1$ *et* $\varpi(P_1) = \varpi(P_2) = 2$*, alors comme* K*-espaces vectoriels, les groupes homologiques de Poisson* $PH_i(\mathcal{R}, \partial), i = 0, 1, 2, 3, 4,$ *ont les séries de Poincaré suivantes :*

$$\begin{array}{rcl} P(PH_0(\mathcal{R},\partial),t) & = & \frac{2t^2+4t+1}{(1-t^2)^2}; \\ P(PH_1(\mathcal{R},\partial),t) & = & \frac{t^4+4t^3+4t^2+4t}{(1-t^2)^2}; \\ P(PH_2(\mathcal{R},\partial),t) & = & \frac{2t^4+4t^3}{(1-t^2)^2}; \\ P(PH_3(\mathcal{R},\partial),t) & = & \frac{t^4}{(1-t^2)^2}; \\ P(PH_4(\mathcal{R},\partial),t) & = & \frac{t^4}{(1-t^2)^2}. \end{array}$$

Remarque 3.6.2. *On peut noter que dans le cas homogène quadratique, pour* $i = 0,1,2,3,4$, $P(PH_i(\mathcal{R},\partial),t) = P(K[P_1,P_2],t)P_i(t)$, *où les* $P_i(t) \in K[t]$ *sont polynômes à coefficients positifs.*
Nous pouvons également remarquer que $P_0(1) = 7$ *nous donne le nombre Milnor d'une intersection complète homogène quadratique à singularité isolée.*

Théorème 3.6.3. ([31]) *Considérons la structure Jacobienne de Poisson est donnée par le crochet de Sklyanin, ie., la structure Jacobienne de Poisson donnée par les Casimirs :*

$$P_1 = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \tag{3.18}$$

$$P_2 = \frac{1}{2}(x_0^2 + J_1x_1^2 + J_2x_2^2 + J_3x_3^2) \tag{3.19}$$

avec $J_i \neq J_j$ *si* $i \neq j$, *et pour* $i = 1,2,3$, $J_i \neq -1,0,1$. *Alors :*

1. *le groupe homologique de Poisson* $PH_0(\mathcal{R},\partial)$ *est le* $K[P_1,P_2]$*-module libre de rang 7 engendré par* $(\mu_i)_{0\leq i\leq 6} = (1, x_1, x_2, x_3, x_4, x_1^2, x_3^2)$;
2. *le groupe homologique de Poisson* $PH_1(\mathcal{R},\partial)$ *est le* $K[P_1,P_2]$*-module libre de rang 13 donné par :*

$$PH_1(\mathcal{R},\partial) \cong (\bigoplus_{k=1}^{6} K[P_1,P_2]d\mu_k) \oplus (\bigoplus_{k=1}^{5} K[P_1,P_2]\mu_k dP_1) \oplus K[P_1,P_2]dP_1 \oplus K[P_1,P_2]dP_2;$$

3. *le groupe homologique de Poisson* $PH_2(\mathcal{R},\partial)$ *est le* $K[P_1,P_2]$*-module libre de rang 6 donné par :*

$$PH_2(\mathcal{R},\partial) \cong \left(\bigoplus_{k=1}^{5} K[P_1,P_2](d\mu_k \wedge dP_1)\right) \oplus K[P_1,P_2](dP_1 \wedge dP_2);$$

4. *le groupe homologique de Poisson* $PH_3(\mathcal{R},\partial)$ *est le* $K[P_1,P_2]$*-module libre de rang 1 engendré par* ρ *;*

5. *le groupe homologique de Poisson* $PH_4(\mathcal{R}, \partial)$ *est le* $K[P_1, P_2]$*-module libre de rang* 1 *engendré par* δ,

où $\delta = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4$, *et* $\rho = x_1 dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 + x_2 dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_4 + x_3 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_4 + x_4 dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_3$.

Remarque 3.6.3. *Notons enfin que dans le cas de Sklyanin* $H_0(\mathcal{R}, \partial) \cong K[P_1, P_2] \otimes \mathcal{R}_{sing}(P_1, P_2)$.
Ici $\mathcal{R}_{sing}(P_1, P_2) = \frac{\mathcal{R}}{J}$, *où* J *est l'ideal engendré par* P_1, P_2 *les* 2×2 *mineurs de la matrice Jacobienne de* (P_1, P_2).

Chapitre 4

Homologie de Hochschild de $Q_{4,1}(\mathcal{E}, \eta)$

Dans ce chapitre, nous calculons l'homologie de Hochschild de l'algèbre $A = Q_{4,1}(\mathcal{E}, \eta)$.
Considérons V un espace vectoriel de dimension quatre et S_0, S_1, S_2, S_3, une base. Alors $A = T(V)/(I_2)$, où (I_2) est l'idéal bilatère engendré par le sous-espace $I_2 \subseteq V \otimes V$ ayant pour base :

$$f_{0i} = [S_0, S_i] - \alpha_i(S_j S_k + S_k S_j);$$
$$f_{jk} = [S_j, S_k] - (S_0 S_i + S_i S_0),$$

(i, j, k) étant une permutation cyclique de $(1, 2, 3)$.

4.1 Quelques propriétés homologiques de A.

Nous avons les résultats suivants obtenus par S.P. Smith et J.T. Stafford ([29]) :

Proposition 4.1.1. ([29]) *A est une algèbre de Koszul.*

Ainsi l'homologie de Hochschild de A peut se calculer à partir de complexe $(K(A), b)$, où b désigne l'opérateur de bord de Hochschild.

Proposition 4.1.2. ([29]) *Pour $m \geq 5$, $A^!_m = 0$ et si $m \leq 4$, $A^!_m$ est engendré par :*
$A^!_0 : 1$
$A^!_1 : \zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$
$A^!_2 : \zeta_0\zeta_1, \zeta_0\zeta_2, \zeta_0\zeta_3, \zeta_1\zeta_0, \zeta_2\zeta_0$
$A^!_3 : \zeta_0\zeta_1\zeta_0, \zeta_0\zeta_2\zeta_0, \zeta_0\zeta_3\zeta_0, \zeta_1\zeta_0\zeta_1$
$A^!_4 : \zeta_0\zeta_1\zeta_0\zeta_1$
où $\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ est la base duale de S_0, S_1, S_2, S_3.

Ces éléments forment une base pour $A^!$ et en particulier $dim A^!_m = \binom{4}{m}$. De plus nous une dualité de type Poincaré : $(A^!_m)^* \cong A^!_{4-m}$.

Les $K_m(A)$ étant des A-modules libres, le complexe de Koszul de l'algèbre A prend la forme suivante :

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\bullet \mathsf{t}} A^4 \xrightarrow{\bullet N} A^6 \xrightarrow{\bullet M} A^4 \xrightarrow{\bullet \mathsf{x}} A \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{C} \longrightarrow 0. \tag{4.1}$$

où :
$\bullet\mathsf{x}$ est la multiplication à droite par $\mathsf{x} = (S_0, S_1, S_2, S_3)^t$;
$\bullet M$ est la multiplication à droite par la matrice M obtenue des relations f_{0i}, f_{jk} de A :

$$M = \begin{pmatrix} -S_1 & S_0 & -\alpha_1 S_3 & -\alpha_1 S_2 \\ S_1 & S_0 & S_3 & -S_2 \\ -S_2 & -\alpha_2 S_3 & S_0 & -\alpha_2 S_1 \\ S_2 & -S_3 & S_0 & S_1 \\ -S_3 & -\alpha_3 S_2 & -\alpha_3 S_1 & S_0 \\ S_3 & S_2 & -S_1 & S_0 \end{pmatrix};$$

$\bullet N$ est la multiplication à droite par la matrice N donnée par :

$$N = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2S_1 & 2S_2 & 2S_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1-\alpha_2)S_3 & -(1+\alpha_3)S_2 & 2S_0 & (1+\alpha_2)S_3 & -(1-\alpha_3)S_2 \\ -(1+\alpha_1)S_3 & 0 & (1-\alpha_3)S_1 & -(1-\alpha_1)S_3 & 2S_0 & (1+\alpha_3)S_1 \\ (1-\alpha_1)S_2 & -(1+\alpha_2)S_1 & 0 & (1+\alpha_1)S_2 & -(1-\alpha_2)S_1 & 2S_0 \end{pmatrix};$$

et $\bullet\mathsf{t}$ est la multiplication à droite par $t = (S_0, S_1, S_2, S_3)$.
Nous noterons Δ, l'élément $1 \in K_4(A)$ et par Π l'élément $(S_0, S_1, S_2, S_3) \in K_3(A)$.
Nous avons $b(\Delta) = b(\Pi) = 0$ et :

$$q(\Pi) = 3(S_2 \otimes S_3 \otimes f_{01} + S_3 \otimes S_1 \otimes f_{02} + S_1 \otimes S_2 \otimes f_{03} + S_0 \otimes S_1 \otimes f_{23}) \in A^{\otimes 4};$$

$$q(\Delta) = 1 \otimes q(\Pi) \in A^{\otimes 5}.$$

Ainsi Π et Δ définissent respectivement des élémens de $HH_3(A)$ et $HH_4(A)$ que nous notons encore par des même lettres.

4.2 L'homologie de Hochschild de l'algèbre de Sklyanin A

Nous supposons que $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sont algébriquement $\mathbb{Q}$-indépendants.

Proposition 4.2.1.

$$A \cong \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Q}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)} (\mathbb{Q}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\langle S_0, S_1, S_2, S_3\rangle/(I_2))$$

comme $\mathbb{C}$*-algèbres,*
et

$$HH_\star(A) \cong \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Q}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)} HH_\star(\mathbb{Q}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\langle S_0, S_1, S_2, S_3\rangle/(I_2)),$$

comme $\mathbb{C}$*-espaces vectoriels gradués.*

Démonstration. La démonstration de ce théorème est donnée en annexe B. □

Proposition 4.2.2. *Il existe une extension* $k_0((h))$ *du corps* $\mathbb{Q}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ *telle que dans cette extension* $\alpha_i = \beta_i h^2$*, les coéfficients* $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ *appartiennent au corps* k_0 *et sont également algébriquement* $\mathbb{Q}$*-indépendants.*

Démonstration. La démonstration de ce théorème est donnée en annexe B. □

Proposition 4.2.3. *L'algèbre* $k_0((h))\langle S_0, S_1, S_2, S_3\rangle/(I)$ *est isomorphe à* $k_0((h)) \otimes_{\mathbb{Q}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)} (\mathbb{Q}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\langle S_0, S_1, S_2, S_3\rangle/(I_2))$ *comme* $k_0((h))$*-algèbres graduées, alors que l'espace vectoriel*

$$HH_\star(k_0((h))\langle S_0, S_1, S_2, S_3\rangle/(I))$$

est isomorphe à

$$k_0((h)) \otimes_{\mathbb{Q}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)} HH_\star(\mathbb{Q}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\langle S_0, S_1, S_2, S_3\rangle/(I_2))$$

comme $k_0((h))$*-espaces vectoriels.*
Ici (I) *désigne l'ideal bilatère engendré par le sous-espace* $I \subseteq V \otimes V$ *avec pour base :*

$$F_{0i} = [S_0, S_i] - \beta_i h^2 (S_j S_k + S_k S_j);$$

$$F_{jk} = [S_j, S_k] - (S_0 S_i + S_i S_0),$$

et (i, j, k) *étant une permutation cyclique de* $(1, 2, 3)$*.*

En particulier, nous avons
$HH_\star(\mathbb{Q}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\langle S_0, S_1, S_2, S_3\rangle/(I_2)) = \mathbb{Q}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) \otimes_{k_0((h))} HH_\star(k_0((h))\langle S_0, S_1, S_2, S_3\rangle/(I))$.
Par conséquent, le calcul de l'homologie de Hochschild de l'algèbre A est équivalent au calcul de celle de l'algèbre $k_0((h))\langle S_0, S_1, S_2, S_3\rangle/(I))$.
Nous introduisons de nouvelles variables en posant $x_0 = h^{-1} S_0$; et $x_i = S_i$ pour $i = 1, 2, 3$. Nous notons également par A_h la $k_0((h))$-algèbre engendrée par x_0, x_1, x_2, x_3 avec les relations

$$g_{0i} = [x_0, x_i] - \beta_i h (x_j x_k + x_k x_j);$$

$$g_{jk} = [x_j, x_k] - h(x_0 x_i + x_i x_0),$$

où (i, j, k) est une permutation cyclique de $(1, 2, 3)$. Nous noterons aussi par (I) l'ideal bilatère engendré par g_{0i}, g_{jk}.

4.2.1 Filtration sur A_h

Soit $\mathcal{P}$ le sous-espace vectoriel de $k_0\langle x_0, x_1, x_2, x_3\rangle$ engendré par les monômes ordonnés $x_0^{i_0} x_1^{i_1} x_2^{i_2} x_3^{i_3}$.
En utilisant une méthode semblable à celle Marconnet dans ([20]), nous obtenons les résultats suivants :
Considérons le diagramme commutatif suivant où les flèches sont des morphismes injectifs de $k_0[[h]]$-algèbres :

$$\begin{tikzcd}
k_0((h))\langle x_0, x_1, x_2, x_3\rangle \arrow[r, "j_2"] & k_0\langle x_0, x_1, x_2, x_3\rangle((h)) \\
k_0[[h]]\langle x_0, x_1, x_2, x_3\rangle \arrow[r, "j_3"] \arrow[u, "j_1"] & k_0\langle x_0, x_1, x_2, x_3\rangle[[h]] \arrow[u, "j_4"']
\end{tikzcd}$$

Nous notons par $k_0\langle x_0, x_1, x_2, x_3\rangle_i$ la composante homogène de degré i du k_0-algèbre graduée $k_0\langle x_0, x_1, x_2, x_3\rangle$.
On peut noter que $k_0[[h]]\langle x_0, x_1, x_2, x_3\rangle$ est la sous-algèbre de $k_0\langle x_0, x_1, x_2, x_3\rangle[[h]]$ dont les éléments sont des séries formelles $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} Q_n h^n$ pour lesquelles il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Q_n \in \oplus_{i=0}^N k_0\langle x_0, x_1, x_2, x_3\rangle_i$.
De manière similaire $k_0((h))\langle x_0, x_1, x_2, x_3\rangle$ est la sous-algèbre de $k_0\langle x_0, x_1, x_2, x_3\rangle((h))$ dont les éléments sont des séries de Laurent $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} Q_n h^n$ pour lesquelles il existe $N \in \mathbb{Z}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $Q_n \in \oplus_{i=0}^N k_0\langle x_0, x_1, x_2, x_3\rangle_i$.
D'un autre côté, nous avons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
A_h = k_0((h))\langle x_0, x_1, x_2, x_3\rangle/(I) \arrow[r, "i_2"] & k_0\langle x_0, x_1, x_2, x_3\rangle((h))/(I) = \widehat{A}_h \\
\mathcal{A}_h = k_0[[h]]\langle x_0, x_1, x_2, x_3\rangle/(I) \arrow[r, "i_3"] \arrow[u, "i_1"] & k_0\langle x_0, x_1, x_2, x_3\rangle[[h]]/(I) = \widehat{\mathcal{A}}_h \arrow[u, "i_4"']
\end{tikzcd}$$

Proposition 4.2.4. *Les morphismes i_1, i_2, i_3, i_4 sont injectifs.*

Proposition 4.2.5. *Pour tout $a \in \widehat{\mathcal{A}}_h$, il existe une unique famille $\{P_i \in \mathcal{P},\ i \in \mathbb{N}\}$ telle que $a = \sum\limits_{i\in\mathbb{N}} \overline{P}_i h^i$.*

Proposition 4.2.6. *Pour tout $a \in \widehat{A}_h$, il existe une unique famille $\{P_i \in \mathcal{P},\ i \in \mathbb{Z}\}$ bornée inférieurement telle que $a = \overline{\sum\limits_{i\in\mathbb{Z}} P_i h^i}$.*

Corollaire 4.2.1. *Pour tout $a \in A_h$, il existe une unique famille $\{P_i \in \mathcal{P},\ i \in \mathbb{Z}\}$ bornée inférieurement telle que $a = \overline{\sum\limits_{i\in\mathbb{Z}} P_i h^i}$.*

Pour tout $p \in \mathbb{Z}$, nous définissons un k_0-sous-espace $F_p(\widehat{A}_h)$ de $\widehat{A}_h$ en posant :

$$F_p(\widehat{A}_h) = \{a \in \widehat{A}_h : a = \overline{\sum_{i \geq -p} P_i h^i}, P_i \in \mathcal{P}\}.$$

Alors $F_p(\widehat{A}_h) \subset F_{p+1}(\widehat{A}_h)$; $1 \in F_0(\widehat{A}_h)$ et pour tout $p, q \in \mathbb{Z}$, il est facile de voir que le produit de A_h induit une application $F_p(\widehat{A}_h) \times F_q(\widehat{A}_h) \longrightarrow F_{p+q}(\widehat{A}_h)$. Ainsi F est une filtration sur $\widehat{A}_h$.
Puisque $\widehat{A}_h = \cup_{p\in\mathbb{Z}} F_p(\widehat{A}_h)$ et $\cap_{p\in\mathbb{Z}} F_p(\widehat{A}_h) = 0$ (proposition 4.2.6), la filtration F sur $\widehat{A}_h$ est exhaustive et séparée. De (4.2.4), on déduit que la restriction de F au sous-algèbre A_h est aussi une filtration exhaustive séparée de l'algèbre A_h. Cette filtration est compatible avec la graduation par le poids de A_h :

$$F_p(A_h) \cap (A_h)_n = \{a \in A_h : a = \overline{\sum_{i \geq -p} P_i h^i}, P_i \in \mathcal{P}_n\}.$$

Proposition 4.2.7. *L'algèbre $\widehat{\mathcal{A}}_h$ (respectivement $\widehat{A}_h$) est le complète de $\mathcal{A}_h$ (respectivement A_h) pour la topologie induite par la filtration F. L'algèbre filtrée A_h n'est pas complète. Toutefois chacune de ses composantes homogènes $(A_h)_n$, $n \in \mathbb{N}$, est complète.*

Le gradué $gr_F(A_h)$ associé à la filtration F est $gr_p(A_h) = F_p(A_h)/F_{p-1}(A_h) \cong h^{-p}\mathcal{P}$. Dans la base ordonnée de $gr_p(A_h)$, le produit $gr_p(A_h) \times gr_q(A_h) \longrightarrow gr_{p+q}(A_h)$ s'écrit comme suit :

$$(h^{-p} x_0^{i_0} x_1^{i_1} x_2^{i_2} x_3^{i_3}, h^{-q} x_0^{j_0} x_1^{j_1} x_2^{j_2} x_3^{j_3}) \mapsto h^{-p-q} x_0^{i_0+j_0} x_1^{i_1+j_1} x_2^{i_2+j_2} x_3^{i_3+j_3}.$$

Le gradué $gr_F(A_h)$ peut alors être identifié à $k_0[x_0, x_1, x_2, x_3][h, h^{-1}]$.

4.2.2 L'algèbre A_h vue comme une déformation

Soit p la projection $p : \widehat{\mathcal{R}}_h \longrightarrow \mathcal{R} = k_0 \otimes_{k_0[[h]]} \mathcal{A}_h, a \mapsto 1 \otimes a$. $Kerp = h\mathcal{A}_h = F_1\mathcal{A}_h$. Considérons le commutateur $[\cdot, \cdot] : \mathcal{A}_h \times \mathcal{A}_h \longrightarrow \mathcal{A}_h$. Les termes $[x_i, x_j]$ peuvent s'écrire comme des séries formelles en h sans coefficient constant dans $\mathcal{A}_h$.
Par conséquent l'application $h^{-1}[\cdot, \cdot] : \mathcal{A}_h \times \mathcal{A}_h \longrightarrow \mathcal{A}_h$ est une a bidérivation qui satisfait l'identité de Jacobi.
Soit le crochet de Sklyanin :

$$\{\cdot, \cdot\} : \mathcal{R} \times \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}$$

défini par

$$\begin{aligned} \{x_0, x_i\} &= 2\beta_{jk} x_j x_k \\ \{x_j, x_k\} &= 2x_0 x_i \end{aligned} \tag{4.2}$$

où (i, j, k) est une permutation cyclique de $(1, 2, 3)$.
Nous avons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}_h \times \mathcal{A}_h \arrow[r, "\frac{1}{h}[\cdot,\cdot]"] \arrow[d, "p\times p"] & \mathcal{A}_h \arrow[d, "p"] \\
\mathcal{R} \times \mathcal{R} \arrow[r, "\{\cdot,\cdot\}"] & \mathcal{R}
\end{tikzcd}$$

En utilisant la décomposition ordonnée de $\widehat{A}_h$, nous avons des isomorphismes de $k_0((h))$-espaces vectoriels gradués suivants :

$$\begin{array}{rccc}
\Theta : & \widehat{A}_h & \longrightarrow & \mathcal{R}((h)) \\
& \overline{\displaystyle\sum_{i\geq p} P_i h^i} & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i\geq p} P_i h^i
\end{array}$$

$\mathcal{R}((h))$ est munie de la filtration croissante naturelle et de sa topologie associée. On a $\Theta(F_p(\widehat{A}_h) = F_p(\mathcal{R}((h)))$. Ainsi Θ est un homéomorphisme pour les topologies associées. Le produit $\cdot$ sur $\widehat{A}_h$ se transporte un produit $\star$ sur $\mathcal{R}((h))$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
\widehat{A}_h \times \widehat{A}_h \arrow[r, "\cdot"] \arrow[d, "\Theta\times\Theta"] & \widehat{A}_h \arrow[d, "\Theta"] \\
\mathcal{R}((h)) \times \mathcal{R}((h)) \arrow[r, "\star"] & \mathcal{R}((h))
\end{tikzcd}$$

Par conséquent l'algèbre $\widehat{A}_h$ est isomophe à $\mathcal{R}((h))$ munie de produit $\star$.
Pour $a, b \in \mathcal{R}$, on peut écrire $a \star b = \displaystyle\sum_{i\geq 0} h^i \mu_i(a, b)$, où $\mu_i : \mathcal{R} \times \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}$ sont des applications k_0-bilinéaires.
D'un autre côté, des rélations de $\widehat{A}_h$, si $a, b \in \mathcal{P} \cong \mathcal{R}$ alors $\bar{a} \cdot \bar{b} = \overline{ab} + h(\cdots)$, où ab est le produit de $\mathcal{R}$.
Ainsi $\widehat{A}_h$ est une déformation de l'algèbre des polynômes $\mathcal{R}$.
Le crochet $\frac{1}{h}[\cdot, \cdot]$ de $\widehat{A}_h$ se transporte en un crochet $\frac{1}{h}[\cdot, \cdot]_\star$ sur $\mathcal{R}((h))$.
Le crochet associé à cette déformation, $\mathcal{R} \times \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}, (a, b) \mapsto \mu_1(a, b) - \mu_1(b, a)$, coïncide avec le crochet de Sklyanin $\{\cdot, \cdot\}$.
Notons que les sous-algèbres de $\widehat{A}_h$ apparaissant dans le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
A_h \arrow[r, "i_2"] & \widehat{A}_h \\
\mathcal{A}_h \arrow[u, "i_1"] \arrow[r, "i_3"] & \widehat{\mathcal{R}}_h \arrow[u, "i_4"']
\end{tikzcd}$$

peuvent être identifiées via l'isomorphisme Θ avec les sous-algèbres de $(\mathcal{R}((h)), \star)$ apparaissant dans le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} k_0((h))[x_0,x_1,x_2,x_3] & \longrightarrow & k_0[x_0,x_1,x_2,x_3]((h)) \\ \uparrow & & \uparrow \\ k_0[[h]][x_0,x_1,x_2,x_3] & \longrightarrow & k_0[x_0,x_1,x_2,x_3][[h]] \end{array}$$

Ainsi A_h est identifiée à l'algèbre $(k_0((h))[x_0, x_1, x_2, x_3], \star)$. En d'autres mots, A_h est une sous-algèbre d'une déformation de $\mathcal{R}$.

4.2.3 L'homologie de Hochschild de l'algèbre A_h

La filtration F sur A_h s'étant en une filtration sur $C(A_h)$, que nous notorons encore F, de la manière suivante : pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $p \in \mathbb{Z}$, on pose

$$F_p(A_h^{\otimes n}) = \oplus_{p_1+\cdots+p_n=np} F_{p_1}(A_h) \otimes \cdots \otimes F_{p_n}(A_h).$$

La filtration ainsi obtenue est exhaustive et séparée. L'opérateur de bord de Hochschild respecte cette filtration. Ainsi on peut définir le complexe gradué $(gr_F(C(A_h), b)$.
On a un isomorphisme naturel $gr_F(A_h^{\otimes n}) \cong gr_F(A_h)^{\otimes n}$ pour tout $n \geq 1$. Nous en déduisons alors un isomorphisme en homologie : $H_\star(C(A_h), b) \cong HH_\star(gr_F(A_h))$.
Rappelons briévement quelques notations sur suite spectrale.
Soit (C, d) un complexe de chaîne muni d'une filtration croissante F compatible avec d $(d(F_pC) \subset F_pC)$.
Soit $p, q \in \mathbb{Z}$. On pose $E^0_{p,q} = F_pC_{p+q}/F_{p-1}C_{p+q}$.
Considèrons le projection canonique :

$$\eta_{p,q} : F_pC_{p+q} \longrightarrow F_pC_{p+q}/F_{p-1}C_{p+q} = E^0_{p,q}.$$

Pour chaque $r \in \mathbb{N}$, on pose :

$$A^r_{p,q} = \{c \in F_pC_{p+q} : d(c) \in F_{p-r}C_{p+q-1}\},$$

$$Z^r_{p,q} = \eta_{p,q}(A^r_{p,q}),$$

$$B^r_{p,q} = \eta_{p,q}(dA^{r-1}_{p+r-1,q-r+2}).$$

et $E^r_{p,q} = Z^r_{p,q}/B^r_{p,q}$.
En particulier, $E^1_{p,q} = H_{p+q}(F_pC_{p+q}/F_{p-1}C_{p+q})$.
Soit $Z^\infty_{p,q} = \bigcap_{r=1}^{\infty} Z^r_{p,q}$, $B^\infty_{p,q} = \bigcup_{r=1}^{\infty} B^r_{p,q}$ et $E^\infty_{p,q} = Z^\infty_{p,q}/B^\infty_{p,q}$.
Nous avons les inclusions suivante :

$$0 = B^0_{p,q} \subset \cdots \subset B^r_{p,q} \subset \cdots \subset B^\infty_{p,q} \subset z^\infty_{p,q} \subset \cdots \subset Z^r_{p,q} \cdots \subset Z^0_{p,q} = E^0_{p,q}.$$

Pour tout $r \in \mathbb{N}$, l'application d induit un complexe différentiel $d^r : E^r_{p,q} \longrightarrow E^r_{p-r,q+r-1}$ tel que $E^{r+1}_{p,q} = Kerd^r_{p,q}/Imd^r_{p+r,q-r+1}$.
La suite spectrale E^r est dite régulière s'il existe $r_0 \in \mathbb{N}$ tel que $E^r = E^{r_0}$ pour $r \geq r_0$. Et nous dirons que la suite spectrale E^r converge faiblement vers $H_*(C)$ si $E^\infty_{p,q} \cong F_pH_{p+q}/F_{p-1}H_{p+q}$. Nous avons le résultat suivant sur la convergence faible des suites spectrales :

Proposition 4.2.8. ([35]) *Soit(C, d) un complexe de chaîne muni d'une $\mathbb{Z}$-filtration, croissante, complète, exhaustive et compatible avec la différentielle d. Si la suite spectrale associée est régulière, alors cette dernière converge faiblement vers $H_*(C, d)$.*

Soit $A^\infty_{p,q} = Ker\{d : F_pC_{p+q} \longrightarrow F_pC_{p+q-1}\}$. Considérons la composition

$$\Phi^r_{p,q} : A^\infty_{p,q} \longrightarrow A^r_{p,q} \longrightarrow Z^r_{p,q} \longrightarrow E^r_{p,q}.$$

Nous avons le critère de dégénèrescence suivant des suites spectrales :

Lemme 4.2.1. ([33]) *S'il existe r tel que $\Phi^r_{p,q}$ est surjective pour tout p, q, alors la suite spectrale dégénère en E^r.*

Considérons maintenant la suite spectrale E^r associée à notre filtration F.

Théorème 4.2.1. *La suite spectrale E^r associée à la filtration F converge faiblemennt l'homologie de Hochschild $HH_\star(A_h)$ de A_h.*

Démonstration. La preuve de ce théorème est donnée en annexe B. □

Puisque le gradué associé à la filtration F sur A_h est l'algèbre des polynômes à coefficients dans l'anneau $k_0[h, h^{-1}]$, par le théorème de Hochschild-Kostant-Rosenberg, nous avons pour tout $n \in \mathbb{N}$, un quasi-isomorphisme de $k_0[h, h^{-1}]$-modules :

$$\begin{array}{ccc} C_n(gr_F(A_h)) & \longrightarrow & \Omega^n_{gr_F(A_h)_{|k_0[h,h^{-1}]}} \\ r_0 \otimes r_1 \otimes \cdots \otimes r_n & \mapsto & \frac{1}{n!} r_0 dr_1 \wedge \cdots \wedge dr_n. \end{array}$$

Ici $\Omega^n_{gr_F(A_h)_{|k_0[h,h^{-1}]}}$ est le $k_0[h, h^{-1}]$-module des formes différentielles de degré n de $gr_F(A_h)$ sur $k_0[h, h^{-1}]$, munie de la différentielle nulle. Ainsi $HH_n(gr_F(A_h)) \cong \Omega^n_{gr_F(A_h)_{|k_0[h,h^{-1}]}}$. Par ce quasi-isomorphisme, l'opérateur de cobord de Connes correspond à la diférentielle de de Rham.
Par ailleurs, nous avons un isomorphisme de $k_0[h, h^{-1}]$-modules $\Omega^\bullet_{gr_F(A_h)_{|k_0[h,h^{-1}]}} \cong \Omega^\bullet_{\mathcal{R}_{|k_0}} \otimes_{k_0} k_0[h, h^{-1}]$. Nous noterons $\Omega^\bullet_{\mathcal{R}_{|k_0}}$ simplement par $\Omega^\bullet(\mathcal{R})$.
De l'article de Brylinski ([4]), nous avons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} E^1_{-n} = HH_n(gr_F(A_h)) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "d^1"] & \Omega^n(\mathcal{R}) \otimes_{k_0} k_0[h, h^{-1}] \arrow[d, "\partial\otimes\cdot h"] \\ E^1_{-n+1} = HH_{n-1}(gr_F(A_h)) \arrow[r, "\cong"] & \Omega^{n-1}(\mathcal{R}) \otimes_{k_0} k_0[h, h^{-1}] \end{tikzcd}$$

où d^1 est la différentielle qui calcule le second terme E^2 de la suite spectrale, $\cdot h$ est la multiplication par h et ∂ est l'opération de bord de Poisson associé au crochet de Sklyanin :

$$\partial_n(F_0 dF_1 \wedge ... \wedge dF_n) = \sum (-1)^{i+1} \{F_0, F_i\} dF_1 \wedge ... \wedge \widehat{dF_i} \wedge ... \wedge dF_n$$

$$+ \sum (-1)^{i+j} F_0 d\{F_i, F_j\} \wedge dF_1 \wedge ... \wedge \widehat{dF_i} \wedge ... \widehat{dF_j} \wedge ... \wedge dF_n$$

où $F_0, ..., F_n \in \mathcal{R}$.
Utilisant l'isomorphisme $E^1_{p,q} \cong \Omega^{p+q}(\mathcal{R}) \otimes_{k_0} h^{-p}$, le première terme de la suite spectrale peut s'écrire comme suit :

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\cdots & \Omega^1(\mathcal{R}) \otimes h^{-3} & & \longrightarrow \mathcal{R} \otimes h^{-2} & \longrightarrow & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & q=-2 \\
\cdots & \Omega^2(\mathcal{R}) \otimes h^{-3} & & \longrightarrow \Omega^1(\mathcal{R}) \otimes h^{-2} & \longrightarrow & \mathcal{R} \otimes h^{-1} & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & q=-1 \\
\cdots & \Omega^3(\mathcal{R}) \otimes h^{-3} & & \longrightarrow \Omega^2(\mathcal{R}) \otimes h^{-2} & \longrightarrow & \Omega^1(\mathcal{R}) \otimes h^{-1} & \cdots & \mathcal{R} \otimes 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & q=0 \\
\cdots & \Omega^4(\mathcal{R}) \otimes h^{-3} & & \longrightarrow \Omega^3(\mathcal{R}) \otimes h^{-2} & \longrightarrow & \Omega^2(\mathcal{R}) \otimes h^{-1} & \cdots & \Omega^1(\mathcal{R}) \otimes 1 & \cdots & \mathcal{R} \otimes h & \cdots & 0 & \cdots & q=1 \\
\cdots & 0 & & \longrightarrow \Omega^4(\mathcal{R}) \otimes h^{-2} & \longrightarrow & \Omega^3(\mathcal{R}) \otimes h^{-1} & \cdots & \Omega^2(\mathcal{R}) \otimes 1 & \cdots & \Omega^1(\mathcal{R}) \otimes h & \cdots & \mathcal{R} \otimes h^2 & \cdots & q=2 \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
 & p=3 & & p=2 & & p=1 & & p=0 & & p=-1 & & p=-2 & &
\end{array}$$

Le second terme E^2 de cette suite spectrale est donné par l'homologie des lignes par raport à la différentielle $\partial \otimes \cdot h$. Puisque la multiplication par h est un $k_0[h, h^{-1}]$-isomorphisme, pour avoir ce second terme, nous devons juste calculer l'homologie de Poisson :

$$0 \longrightarrow \Omega^4(\mathcal{R}) \xrightarrow{\partial_4} \Omega^3(\mathcal{R}) \xrightarrow{\partial_3} \Omega^2(\mathcal{R}) \xrightarrow{\partial_2} \Omega^1(\mathcal{R}) \xrightarrow{\partial_1} \mathcal{R} \qquad (4.3)$$

Le théorème (3.6.3) nous donne cette homologie de Poisson.

Proposition 4.2.9. ([32]) *La suite spectrale associée à la filtration F dégénère en E^2.*

Démonstration. La démonstration est donnée en annexe B. □

Puisque la suite spectrale E^r converge faiblement vers $HH_\star(A_h)$, en identifiant E^2 et $PH_\star(\mathcal{R}, \partial) \otimes_{k_0} k_0[h, h^{-1}]$, nous avons :

$$gr_F(HH_i(A_h)) \cong PH_i(\mathcal{R}, \partial) \otimes_{k_0} k_0[h, h^{-1}].$$

On a ce résultal classique :
Soit R une k-algèbre munie d'une $\mathbb{N}$-graduation et d'une $\mathbb{Z}$-filtration croissante F. En posant $F_p(R_n) = F_p(R) \cap R_n$, on obtient naturellement une filtration sur R_n. Nous supposons que cette filtration F et la graduation de R sont compatibles ie., $F_p(R) = \oplus_{n \in \mathbb{N}} F_p(R_n)$. Dans ce cas $F_p(R)/F_{p-1}(R) \cong (\oplus_{n \in \mathbb{N}} F_p(R_n)/F_{p-1}(R_n))$ et $gr_F(R) \cong \oplus_{n \in \mathbb{N}} gr_F(R_n)$.

Proposition 4.2.10. *Soit M un R-module muni d'une filtration F et d'une graduation compatibles et telle que F est exhaustive et séparée. Supposons que la filtration sur R_n est complète pour $N \in \mathbb{N}$.*
Si $gr_F(M)$ est un $gr_F(R)$-module libre gradué de rang m avec pour base $\{\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_m\}$, où pour tout i, $\bar{x}_i$ est la classe de l'élément homogène $x_i \in F_0(M)$ dans le gradué associé, alors M est un R-module libre de rang m avec $\{x_1, \cdots, x_m\}$ comme une base.

Dans notre cas, $R = k_0((h))[\widetilde{P}_1, \widetilde{P}_2]$ munie de la filtration de A_h et $M = HH_i(A_h)$ munie de la filtration de $C(A_h)$. Ici $\widetilde{P}_1$ et $\widetilde{P}_2$ sont les éléments du centre de l'algèbre A_h dont les images dans le gradué correspondent aux Casimirs P_1 et P_2 respectivement.
La filtration F sur $HH_i(A_h)$ (respectivement sur R) est exhaustible, séparée et compatible avec la graduation. De plus, la filtration F sur R_n est complète pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Théorème 4.2.2. ([32])

- *$HH_4(A_h)$ est un $k_0((h))[\widetilde{P}_1, \widetilde{P}_2]$-module libre de rang 1 engendré par l'élément homogène Δ de degré 4.*
- *$HH_3(A_h)$ est un $k_0((h))[\widetilde{P}_1, \widetilde{P}_2]$-module libre de rang 1 engendré par l'élément homogène Π de degré 4.*
- *$HH_2(A_h)$ un $k_0((h))[\widetilde{P}_1, \widetilde{P}_2]$-module libre de rang 6 engendré par des éléments homogènes de degrés respectifs $3, 3, 3, 3, 4, 4$.*
- *$HH_1(A_h)$ est un $k_0((h))[\widetilde{P}_1, \widetilde{P}_2]$-module libre de rang 13 engendré par des éléments homogènes de degrés respectifs $1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4$.*
- *$HH_0(A_h)$ un $k_0((h))[\widetilde{P}_1, \widetilde{P}_2]$-module libre de rang 7 engendré par des éléments homogènes de degrés respectifs $0, 1, 1, 1, 1, 2, 2$.*

Nous en déduisons le résultat suivant :

Corollaire 4.2.2. *Comme $k_0((h))$-espaces vectoriels, les groupes homologique $HH_i(A_h)$ ont les séries de Poincaré suivantes :*

$$\begin{array}{lcl} P(P(HH_0(A_h), t) & = & \frac{2t^2+4t+1}{(1-t^2)^2}; \\ P(HH_1(A_h), t) & = & \frac{t^4+4t^3+4t^2+4t}{(1-t^2)^2}; \\ P(HH_2(A_h), t) & = & \frac{2t^4+4t^3}{(1-t^2)^2}; \\ P(HH_3(A_h), t) & = & \frac{t^4}{(1-t^2)^2}; \\ P(HH_4(A_h), t) & = & \frac{t^4}{(1-t^2)^2}. \end{array}$$

Chapitre 5

La Heisenberg invariance et les structures de Poisson elliptiques

Au chapitre 2, nous avons parlé d'une classe d'algèbres associatives associées aux courbes elliptiques. Les groupes Heinsenberg opèrent par automorphismes sur ces algèbres ainsi que sur leurs limites quasi-classiques qui sont des algèbres de Poisson. Dans ce chapitre, nous parlerons des structures de Poisson quadratiques sur lesquelles les groupes d'Heinsenberg opèrent par automorphismes.

5.1 La H-invariance

Considérons un espace vectoriel V de dimension n et $e_1, \cdots, e_n$ une base. Soit $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{n}}$. Considèrons les éléments $\sigma, \rho \in GL(V)$ définis par :

$$\sigma(e_m) = e_{m+1};$$

$$\rho(e_m) = \varepsilon^m e_m.$$

Le sous-groupe $H_n \subset GL(V)$ engendré par σ et ρ est appelé le groupe d'Heisenberg de dimension n.

Nous supposons pour la suite $V = \mathbb{C}^n$, et soit $x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}$ une base de V. Considérons son algèbre des fonctions régulières $\mathbb{C}[x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}]$.

σ et ρ opère par automorphismes sur l'algèbre $\mathbb{C}[x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}]$ de la manière suivante :

$$\sigma \cdot (\alpha x_0^{\alpha_0} x_1^{\alpha_1} \cdots x_{n-1}^{\alpha_{n-1}}) = \alpha x_0^{\alpha_{n-1}} x_1^{\alpha_0} \cdots x_{n-1}^{\alpha_{n-2}};$$

$$\rho \cdot (\alpha x_0^{\alpha_0} x_1^{\alpha_1} \cdots x_{n-1}^{\alpha_{n-1}}) = \varepsilon^{\alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + (n-1)\alpha_{n-1}} \alpha x_0^{\alpha_0} x_1^{\alpha_1} \cdots x_{n-1}^{\alpha_{n-1}}.$$

Définition 5.1.1. *Un crochet de Poisson $\{\cdot, \cdot\}$ sur $\mathcal{R} = \mathbb{C}[x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}]$ est dit H-invariant pour les variables $x_0, \cdots, x_{n-1}$ si les automorphismes σ et ρ sont des*

morphismes de Poisson.
En d'autres termes, les diagrammes suivants sont exactes :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{R} \times \mathcal{R} \arrow[r, "\sigma\times\sigma"] \arrow[d, "\{\cdot,\cdot\}"'] & \mathcal{R} \times \mathcal{R} \arrow[d, "\{\cdot,\cdot\}"] \\ \mathcal{R} \arrow[r, "\sigma"] & \mathcal{R} \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{R} \times \mathcal{R} \arrow[r, "\rho\times\rho"] \arrow[d, "\{\cdot,\cdot\}"'] & \mathcal{R} \times \mathcal{R} \arrow[d, "\{\cdot,\cdot\}"] \\ \mathcal{R} \arrow[r, "\rho"] & \mathcal{R} \end{tikzcd} .$$

Autrement dit $\sigma \cdot \{x_i, x_j\} = \{\sigma \cdot x_i, \sigma \cdot x_j\}$ *et* $\rho \cdot \{x_i, x_j\} = \{\rho \cdot x_i, \rho \cdot x_j\}$.

Considèrons la matrice $(P_{ij}) = (\{x_i, x_j\})$, où $\{\cdot,\cdot\}$ est un crochet de Poisson H-invariant.

– σ-invariance
  La condition
$$\sigma \cdot \{x_i, x_j\} = \{\sigma \cdot x_i, \sigma \cdot x_j\}$$
  implique
$$P_{i+1\ j+1}(x_0, x_1 \cdots, x_{n-2}, x_{n-1}) = P_{ij}(x_1, x_2 \ldots, x_{n-1}, x_0).$$
– ρ-invariance
  La condition
$$\rho \cdot \{x_i, x_j\} = \{\rho \cdot x_i, \rho \cdot x_j\}$$
  implique
$$\epsilon^{i+j} P_{ij}(x_0, x_1 \ldots, x_{n-2}, x_{n-1}) = P_{ij}(x_0, \epsilon x_1 \cdots, \epsilon^{n-1} x_{n-1}).$$

Ainsi la condition d'anti-symétrique et la H-invariance imposent à la matrice

(P_{ij}) de prendre l'une des formes ci-dessous suivant que n est impair ou pair.

$$\begin{pmatrix}
0 & P_1^0 & \cdots & \cdots & P^0_{\frac{n-1}{2}} & -P^{\frac{n+1}{2}}_{\frac{n-1}{2}} & \cdots & \cdots & -P_1^{n-1} \\
-P_1^0 & 0 & P_1^1 & \cdots & \cdots & P^1_{\frac{n-1}{2}} & \ddots & & \vdots \\
\vdots & -P_1^1 & 0 & P_1^2 & & & \ddots & \ddots & \vdots \\
\vdots & & -P_1^2 & 0 & \ddots & & & \ddots & -P^{n-1}_{\frac{n-1}{2}} \\
-P^0_{\frac{n-1}{2}} & & & \ddots & \ddots & \ddots & & & P^{\frac{n-1}{2}}_{\frac{n-1}{2}} \\
P^{\frac{n+1}{2}}_{\frac{n-1}{2}} & -P^1_{\frac{n-1}{2}} & & & \ddots & 0 & \ddots & & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & & & \ddots & 0 & P_1^{n-3} & \vdots \\
\vdots & & \ddots & \ddots & & & -P_1^{n-3} & 0 & P_1^{n-2} \\
P_1^{n-1} & \cdots & \cdots & P^{n-1}_{\frac{n-1}{2}} & -P^{\frac{n-1}{2}}_{\frac{n-1}{2}} & \cdots & \cdots & -P_1^{n-2} & 0
\end{pmatrix} \qquad n \textit{ impair}$$

$$\begin{pmatrix}
0 & P_1^0 & \cdots & \cdots & P^0_{\frac{n-2}{2}} & P^0_{\frac{n}{2}} & \cdots & \cdots & -P_1^{n-1} \\
-P_1^0 & 0 & P_1^1 & \cdots & \cdots & P^1_{\frac{n-2}{2}} & \ddots & & \vdots \\
\vdots & -P_1^1 & 0 & P_1^2 & & & \ddots & \ddots & \vdots \\
\vdots & & -P_1^2 & 0 & \ddots & & & \ddots & P^{\frac{n-2}{2}}_{\frac{n}{2}} \\
-P^0_{\frac{n-2}{2}} & & & \ddots & \ddots & \ddots & & & P^{\frac{n}{2}}_{\frac{n-2}{2}} \\
-P^0_{\frac{n}{2}} & -P^1_{\frac{n-1}{2}} & & & \ddots & 0 & \ddots & & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & & & \ddots & 0 & P_1^{n-3} & \vdots \\
\vdots & & \ddots & \ddots & & & -P_1^{n-3} & 0 & P_1^{n-2} \\
P_1^{n-1} & \cdots & \cdots & -P^{\frac{n-2}{2}}_{\frac{n}{2}} & -P^{\frac{n}{2}}_{\frac{n-2}{2}} & \cdots & \cdots & -P_1^{n-2} & 0
\end{pmatrix} \qquad n \textit{ pair.}$$

où $P_i^0 = P_i(x_0, x_1, \cdots, x_{n-1})$, $P_i^k = P_i(x_k, x_{1+k}, \cdots, x_{n-1+k})$ et $P_i(x_k)$ sont des polynômes tels que $P_i(\epsilon^k x_k) = \epsilon^i P_i(x_k)$.

La condition de l'identité de Jacobi permettra alors de faire une classification complète des structures de Poisson H-invariantes. Dans la section suivante, nous nous concentrerons sur le cas des structures de Poisson quadratiques en petite dimension.

5.2 Classification des structures de Poisson H-invariantes quadratiques en dimension plus petit que 5

Soit $(P_{ij}) = (\{x_i, x_j\})$, la matrice associée à un crochet de Poisson quadratique H-invariant $\{\cdot, \cdot\}$.
Les P_{ij} sont de la forme

$$P_{ij} = \sum_{l=0}^{n-1} p_{ij}^l x_l x_{i+j-l}. \tag{5.1}$$

et soumis à la condition de l'identité de Jacobi.

En dimension 3

le premier cas non trivial est $n = 3$. La matrice (P_{ij}) prend la forme suivante

$$\begin{pmatrix} 0 & P_1^0 & -P_1^2 \\ -P_1^0 & 0 & P_1^1 \\ P_1^2 & -P_1^1 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.2}$$

où $P_1^0 = A_1 x_0 x_1 + A_2 x_2^2$. Ceci est une structure Jacobienne de Poisson. Elle correspond à l'algèbre de Poisson d'Artin-Tate.

En dimension 4

La matrice (P_{ij}) prend la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & P_1^0 & P_2^0 & -P_1^3 \\ -P_1^0 & 0 & P_1^1 & P_2^1 \\ P_2^2 & -P_1^1 & 0 & P_1^2 \\ P_1^3 & P_2^3 & -P_1^2 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.3}$$

où $P_1^0 = A_1 x_0 x_1 + A_2 x_2 x_3$ et $P_2^0 = B_1 x_0 x_2 + B_2 x_3^2 + B_3 x_1^2$. Dans le cas pair l'antisymétrie impose que $P_2^0 = -P_2^2$ et $P_2^1 = -P_2^3$.
Par conséquent

$$B_1 x_0 x_2 + B_2 x_3^2 + B_3 x_1^2 = -B_1 x_2 x_0 - B_2 x_1^2 - B_3 x_3^2;$$

et

$$B_1 x_1 x_3 + B_2 x_0^2 + B_3 x_2^2 = -B_1 x_3 x_1 - B_2 x_2^2 - B_3 x_0^2.$$

Ce qui implique que $B_1 = 0$, $B = -B_2 = B_3$. Ainsi $P_2^0 = B(-x_1^2 + x_3^2)$.
L'identité de Jacobi entraine que $A_1 A_2 = B^2$. On obtient alors un crochet de Poisson H-invariant qui n'est rien d'autre que le crochet de l'algèbre de Poisson de Sklyanin $q_{4,1}$ avec la normalisation $A_1 = 1, A_2 = k^2, B = k$.

En dimension 5

En dimension 5, la matrice (P_{ij}) prend la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & P_1^0 & P_2^0 & -P_2^3 & -P_1^4 \\ -P_1^0 & 0 & P_1^1 & P_2^1 & -P_2^4 \\ -P_2^0 & -P_1^1 & 0 & P_1^2 & P_2^2 \\ P_2^3 & -P_2^1 & -P_1^2 & 0 & P_1^3 \\ P_1^4 & P_2^4 & -P_2^2 & -P_1^3 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.4}$$

où

$$P_1^k = A_1 x_k x_{1+k} + A_2 x_{2+k} x_{4+k} + A_3 x_{3+k}^2$$

et

$$P_2^k = B_1 x_k x_{2+k} + B_2 x_{3+k} x_{4+k} + B_3 x_{1+k}^2.$$

Les coefficients A_i et B_i sont déterminés grâce à l'identité de Jacobi. Cette identité en dimension 5 est donnée par 10 equations indépendantes. Cependant, la H-invariance reduit ces equations en seulement deux indépendentes :

$$\sum_{l\in\mathbb{Z}_5} P_{0l}\partial_l P_{12} + cyc(i,j,k) = 0$$

et

$$\sum_{l\in\mathbb{Z}_5} P_{0l}\partial_l P_{13} + cyc(i,j,k) = 0.$$

Ces équations aux dérivées partielles donnent lieu au système ci-dessous

$$\begin{array}{rl} {B_2}^2 + 3\,A_1A_3 + B_1A_3 + A_2B_3 & = 0 \\ 2\,{A_3}^2 - 2\,A_2B_1 - A_1A_2 + B_2B_3 & = 0 \\ -{A_2}^2 - 3\,B_1B_3 + A_1B_3 + B_2A_3 & = 0 \\ -2\,{B_3}^2 - 2\,B_2A_1 + B_1B_2 - A_2A_3 & = 0 \end{array} \tag{5.5}$$

Par un calcul formel sur ordinateur, on montre que ce système admet 14 classes de solutions. Nous ne parlerons ici que pour ce sont pour nous plus intéressantes. Nous avons tout d'abord les algèbres de Poisson elliptiques $q_{5,1}$ et $q_{5,2}$ dont les coefficients sont données par

$$\begin{array}{c} A_1 = \frac{3}{5}\lambda^2 - \frac{1}{5\lambda^3} \quad A_2 = \frac{2}{\lambda} \quad A_3 = -\frac{1}{\lambda^2} \\ \\ B_1 = -\frac{1}{5}\lambda^2 - \frac{3}{5\lambda^3} \quad B_2 = 2 \quad B_3 = \lambda \end{array} \tag{5.6}$$

pour $q_{5,1}$ et

$$\begin{array}{c} A_1 = \frac{2}{5}\lambda^2 + \frac{1}{5\lambda^3} \quad A_2 = \frac{1}{q} \quad A_3 = -\frac{1}{q} \\ \\ B_1 = -\frac{1}{5}\lambda^2 + \frac{2}{5\lambda^3} \quad B_2 = -\frac{1}{q^2} \quad B_3 = 1 \end{array} \tag{5.7}$$

pour $q_{5,2}$, solutions du système (5.5).
Un autre cas intéressant est le cas des solutions linéaires :

$$\begin{aligned} &A_1 = -\tfrac{\lambda}{2} + 1 \quad A_2 = \lambda \quad A_3 = -\tfrac{\lambda}{2} - 1 \\ &B_1 = \tfrac{\lambda}{2} + 1 \quad B_2 = -2 \quad B_3 = -\tfrac{\lambda}{2} + 1 \end{aligned} \tag{5.8}$$

Par ailleurs, la H-invariance impose qu'un Casimir devrait s'écrire de la manière suivante :

$$\begin{aligned} C_5 = \;& c_5\left({x_0}^5 + {x_1}^5 + {x_2}^5 + {x_3}^5 + {x_4}^5\right) \\ &+c_4\left({x_0}^3x_1x_4 + {x_1}^3x_0x_2 + {x_2}^3x_1x_4 + {x_3}^3x_2x_4 + {x_4}^3x_0x_3\right) \\ &+c_3\left({x_0}^3x_2x_4 + {x_1}^3x_3x_4 + {x_2}^3x_0x_4 + {x_3}^3x_1x_0 + {x_4}^3x_2x_1\right) \\ &+c_2\left(x_0{x_1}^2{x_4}^2 + x_1{x_3}^2{x_0}^2 + x_2{x_3}^2{x_1}^2 + x_3{x_2}^2{x_4}^2 + x_4{x_0}^2{x_3}^2\right) \\ &+c_1\left(x_0{x_2}^2{x_4}^2 + x_1{x_3}^2{x_4}^2 + x_2{x_4}^2{x_0}^2 + x_3{x_1}^2{x_0}^2 + x_4{x_2}^2{x_1}^2\right) \\ &+c_0x_0x_1x_2x_3x_4 \end{aligned} \tag{5.9}$$

où

$$c_5 = -\tfrac{1}{5}A_3B_3 \quad c_4 = A_1A_3 \quad c_3 = -B_1B_3c_2 = \tfrac{1}{2}A_1A_2 - \tfrac{1}{2}B_2B_3$$

$$c_1 = \tfrac{1}{2}A_2A_3 - \tfrac{1}{2}B_1B_2 \quad c_0 = A_1^2 - B_1^2 - A_1B_1 - A_2B_2.$$

Les coefficients A_i et B_i sont bien sûr solutions du système (5.5).
Notons aussi que la H-invariance entraine que

$$\begin{aligned} &P_{0,1}P_{2,3} + P_{2,0}P_{1,3} + P_{1,2}P_{0,3} = -2\,\tfrac{B_2A_1 + {B_3}^2}{A_2A_3 - B_1B_2}\tfrac{\partial C_5}{\partial x_4} \\ &\textit{et cyclique } 0 \to 1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 0 \end{aligned} \tag{5.10}$$

Nous noterons dans la proposition qui suit $q_{5,1}$ par $q_{5,1}^q$ pour marquer explicitement sa dépendance du paramétre q.

Proposition 5.2.1. *$q_{5,1}^s + \lambda q_{5,1}^r$ est un structure de Poisson pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ si et seulement si*

$$r = \left(-3/2 + 1/2\sqrt{5}\right)s \qquad \textit{avec} \qquad s^5 = \frac{3-\sqrt{5}}{29-13\sqrt{5}}$$

ou

$$r = \left(-3/2 - 1/2\sqrt{5}\right)s \qquad \textit{avec} \qquad s^5 = \frac{3+\sqrt{5}}{29+13\sqrt{5}}.$$

On peut noter ici plusieurs choses. Toute d'abord, en dimension 5, les structures de Poisson quadratiques H-invariantes ne coïncident pas avec les algèbres elliptiques $q_{5,1}$ et $q_{5,2}$, comme en dimension 3 et 4. Aucune de ces strutures ne sont de Jacobiennes. Par ailleurs, les seules algèbres elliptiques $q_{n,k}$ qui sont des JPS sont les algèbres q_3 et q_4. Ces dernières sont bien sûr des structures unimodulaires.
Le résultat qui suit nous donne une classe inportante de structures de Poisson unimodulaires, qui ne sont pas des structures Jacobiennes de Poisson.

Proposition 5.2.2. *Les structures de Poisson quadratiques H-invariantes en dimension 5 sont unimodulaires.*

5.3 Les structures de Poisson $q_{5,1}$ et $q_{5,2}$ et la transformation de Cremona

Considérons $n+1$ polynômes homogènes φ_i dans $\mathbb{C}[x_0, \cdots, x_n]$ avec le même degré et non identiquement nuls. On peut alors définir l'application rationelle

$$\varphi : \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}^n, [x_0 : \cdots : x_n] \mapsto [\varphi_0([x_0, \cdots, x_n) : \cdots : \varphi_n([x_0, \cdots, x_n)].$$

La famille de polynômes φ_i ou l'application φ est appelée une transformation birationale de $\mathbb{P}^n$ s'il existe une application rationelle $\psi : \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}^n$ telle que $\psi \circ \varphi$ est l'application identité.
Une transfromation birationelle est encore appelée une trasformation de Cremona.

Dans cette section, nous montrerons que les deux algèbres elliptiques en dimension 5 sont relation par le biais d'une transformation de Cremona.

Considèrons la trasformation de Cremona donnée par les polynômes homogènes suivants :

$$\begin{array}{ll} y_0 & = {x_0}^2 + a x_2 x_3 - \frac{x_1 x_4}{a} \\ y_1 & = {x_1}^2 + a x_3 x_4 - \frac{x_2 x_0}{a} \\ y_2 & = {x_2}^2 + a x_4 x_0 - \frac{x_3 x_1}{a} \\ y_3 & = {x_3}^2 + a x_0 x_1 - \frac{x_4 x_2}{a} \\ y_4 & = {x_4}^2 + a x_1 x_2 - \frac{x_0 x_3}{a}. \end{array} \tag{5.11}$$

En général, cette transformation n'envoie pas le tenseur de Poisson $q_{5,1}$ en une structure de Poisson H-invariante quadratique. Cependant, si nous posons

$$a = -\frac{1}{q} \tag{5.12}$$

alors la structure de Poisson $q_{5,1}$ avec le paramètre q devient la structure $q_{5,2}$.
La contrainte de dualité (5.12) est calculée de la manière suivante : nous savons que la structure de Poisson résultante devrait prendre la même forme que la structure $q_{5,1}$ avec des coefficients différents. Nous imposons donc cette contrainte et calculons alors le crochet $\{y_i, y_j\}$ en fonction du paramètre q de l'algèbre de Poisson $q_{5,1}$ et le paramètre a du changement de variables. Cela n'est possible que si a est solution du système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} -a^3 q + 4\, q^4 a + 2\, q^5 a^2 + 2\, q^3 - 2\, a^2 + a^6 q^4 = 0 \\ -1 + 2\, a^2 q^2 - a^3 q^3 + 2\, aq = 0 \end{array} \right. \tag{5.13}$$

$a = -\frac{1}{q}$ est solution du sytème ci-dessous et on obtient une classe de structures de Poisson dépendant d'un paramètre non-linéaire : ceci correspond à la structure $q_{5,2}$. $a = \frac{3\pm\sqrt{5}}{2q}$ sont solutions de la seconde équation. La première équation impose à q de prendre 5 valeurs possibles et nous obtenons des structures de Poisson ne dépendant d'aucun paramètre et n'ayant à priori aucune relation avec $q_{5,2}$. Les valeurs explicites de ces paramètres sont :

$$a = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2q} \qquad \textit{avec} \qquad q^5 = -\frac{11 \pm 5\sqrt{5}}{2}. \tag{5.14}$$

Annexe A

Poisson (co)homology of polynomial Poisson algebras in dimension four : Sklyanin's case

Poisson (co)homology of polynomial Poisson algebras in dimension four : Sklyanin's case

Serge Roméo Tagne Pelap

mars 2008

Abstract

In this paper, we compute the Poisson (co)homology of a polynomial Poisson structure given by two Casimir polynomial functions which define a complete intersection with an isolated singularity.

Keywords : Poisson structures, Poisson (co)homology, unimodular Poisson structure, Casimir functions, complete intersection with an isolated singularity.

Introduction

The canonical or Poisson homology was introduced independently by Brylinski ([4]) (as an important tool in computations of Hochschild and cyclic homology), and by Koszul and Gelfand-Dorfman (inspired by their algebraic approach to the study of bi-hamiltonian structures).
This homology is defined as the homology of a differential complex degree -1 $\{\Omega^\bullet(M), \partial_\pi\}$ on a Poisson manifold (M, π), where π is a Poisson structure given either by a 2-tensor field $\pi \in H^0(M, \wedge^2 TM)$ or, by the corresponding Poisson bracket on algebra of functions (smooth, algebraic,...) of M : $\{f, g\} =< df \wedge dg, \pi >$. The $(-1)-$differential ∂_π is given on the decomposable differential forms as

$$\partial_k(f_0 df_1 \wedge ... \wedge df_k) = \sum_{1\le i\le k} (-1)^{i+1}\{f_0, f_i\} df_1 \wedge ... \wedge \widehat{df_i} \wedge ... \wedge df_k$$

$$+ \sum_{1\le i<j\le k} (-1)^{i+j} f_0 d\{f_i, f_j\} \wedge df_1 \wedge ... \wedge \widehat{df_i} \wedge ... \widehat{df_j} \wedge ... \wedge df_k$$

and acts from $\Omega^k(M)$ to $\Omega^{k-1}(M)$.
There is a dual notion of Poisson cohomology introduced by Lichnerowicz ([15]). But this duality is quite subtle : if the Poisson homology is non-degenerate (symplectic) then the Poisson homology and Poisson cohomology admit a Poincaré-duality ismorphism ([4]) which is extended to a class of so-called unimodular Poisson manifolds (those whose Weinstein modular cohomology class is trivial ([32])).
In general, the Poisson homology has very bad functorial properties (this was observed in

many papers ([11])) which make its computation a challenging and difficult problem. The Poisson (co)homology depends heavily on the properties of the initial Poisson structure and, basically, on the structure of its degeneration locus. "Simple" Poisson structures (like symplectic ones or the slightly more difficult case of regular structures which have a constant rank symplectic foliation) have well-studied Poisson (co)homology.
An interesting and difficult problem is to compute the corresponding (co)homology groups in the case of "quadratic" Poisson structures.
The interest in these structures is two-fold : they have naturally appeared in Drinfel's approach to a quasi-classical limit of "quantum groups" under the name of Hamilton-Lie groups ([5]), later renamed Poisson Lie groups. On the other hand, they appeared in the heart of the Integrable system theory under the name of Sklyanin algebras ([23], [24]). It should be noted that almost at the same time, a simpler case of a Sklyanin algebra structure was studied in a purely algebraic context by M. Artin and J. Tate. In our paper we will concentrate on the Poisson (co)homology of Sklyanin algebras with 4 generators (which is the original case introduced by Sklyanin [23]).
Generally speaking, Sklyanin algebras belong to a class of "Poisson Structures with regular symplectic leaves". This class was introduced and studied in [20] as the next interesting generalization of "regular" Poisson structures. We mean a class of algebras which are a quasi-classical limit of associative algebras with quadratic relations which are flat deformations of polynomial functions in $\mathbb{C}^n$. It was proven in [20] that these Poisson algebras have polynomial Casimirs (functions which commute with any function on the manifold) and the "dimension" of this algebra is equal to the sum of the degrees of the Casimir generators.
Let us describe our basic Poisson algebra in detail.
Let

$$q_1 = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_3^2) + kx_2x_4,$$

$$q_2 = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_4^2) + kx_1x_3,$$

where $k \in \mathbb{C}$.
We will introduce a Poisson structure π on $\mathbb{C}^4$ or, more generally, on $\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3, x_4]$ (in $\mathbb{C}P^3$, in the formal series ring $\mathbb{C}[[x_1, x_2, x_3, x_4]]$,...) by the formula :

$$\{f, g\}_\pi := \frac{df \wedge dg \wedge dq_1 \wedge dq_2}{dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4}.$$

Then the brackets between the coordinate functions are defined by (mod 4) :

$$\{x_i, x_{i+1}\} = k^2 x_i x_{i+1} - x_{i+2}x_{i+3};$$

$$\{x_i, x_{i+2}\} = k(x_{i+3}^2 - x_{i+1}^2),$$

$i = 1, 2, 3, 4$.
This algebra will be denoted by $q_4(\mathcal{E})$, where $\mathcal{E}$ represents an elliptic curve, which parameterizes the algebra (via k). We can also think of this curve $\mathcal{E}$ as a geometric interpretation of the couple $q_1 = 0$, $q_2 = 0$ embedded in $\mathcal{C}P^3$ (as was observed in Sklyanin's initial paper).

We will follow Sklyanin's version of this embedding, considering the quadrics Q_1, Q_2 in $\mathbb{C}^4$ and the complete intersection of these quadrics :

$$Q_1 = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \tag{1}$$

$$Q_2 = \frac{1}{2}(x_0^2 + J_1x_1^2 + J_2x_2^2 + J_3x_3^2) \tag{2}$$

The algebra $q_4(\mathcal{E})$ is given by the formulas :

$$\{x_1, x_i\} = (-1)^i det(\frac{\partial Q_k}{\partial x_l}),\ l \neq 1, i;\ k = 1, 2;$$

$$\{x_i, x_j\} = (-1)^{i+j} det(\frac{\partial Q_k}{\partial x_l}),\ l \neq i, j;\ k = 1, 2.$$

More generally, considering $n-2$ polynomials Q_i in K^n with coordinates x_i, $i = 1, ..., n$, where K is a field of characteristic zero, we can define, for any polynomial $\lambda \in K[x_1, ..., x_n]$, a bilinear differential operation :

$$\{\cdot, \cdot\} : K[x_1, ..., x_n] \otimes K[x_1, ..., x_n] \longrightarrow K[x_1, ..., x_n]$$

by the formula

$$\{f, g\} = \lambda \frac{df \wedge dg \wedge dQ_1 \wedge ... \wedge dQ_{n-2}}{dx_1 \wedge dx_2 \wedge ... \wedge dx_n}, \quad f, g \in K[x_1, ..., x_n] \tag{3}$$

This operation gives a Poisson algebra structure on $K[x_1, ..., x_n]$. The polynomials $Q_i, i = 1, ..., n-2$ are Casimir functions for the brackets (3) and any Poisson structure on K^n, with $n-2$ generic Casimirs Q_i, is written in this form. Every Poisson structure of this form is called a Jacobian Poisson structure (JPS) ([14], [12]).
The case $n = 4$ in (3) corresponds to the classical generalized Sklyanin quadratic Poisson algebra.
In [21], Anne Pichereau gives the Poisson (co)homology of a Poisson structure given on K^n by the formula (3) when $n = 3$ and where the Casimir Q_1 is a weight homogeneous polynomial with an isolated singularity in zero.
The goal of this paper is to find the (co)homology of a Poisson structure given on K^n by the formula (3) when $n = 4$ and where the Casimirs Q_1 and Q_2 are weight homogeneous with an isolated singularity in zero. We use a method similar to that of Pichereau in [21], Van den Bergh in [28], or Marconnet in [17].
The results of the paper will be used in our subsequent research of cohomological properties of "quantum" counterparts of the algebra $q_4(\mathcal{E})$ known also as Feigin-Odesskii-Sklyanin Elliptic algebras $Q_4(\mathcal{E})$. We will apply the Brylinski spectral sequence arguments to compute their Hochshild homology ([27]).
The paper is organized as follows. We start by introducing some basic notions of Poisson (co)homology, the De Rham complex and we introduce some applications and operators that we use to have a simple description of Kähler differentials and of Poisson homology complexes. The next part is devoted to homological tools we are going to use to compute the Poisson homology. The last part of the paper is devoted to the computation of the

Poisson (co)homology of polynomial Poisson structures when the space of Casimir functions is generated by two polynomials which form complete intersection with an isolated singularity. We apply our method to compute the Poisson (co)-homology of the Sklyanin algebra.
Acknowledgements. The author is grateful to Jean-Claude Thomas, Yves Felix and Michel Granger for useful comments and discussions. This work is a first part of my thesis prepared at the University of Angers. I would like to take this opportunity to thank my advisors, Vladimir Roubtsov and Bitjong Ndombol, for suggesting to me this interesting problem and for their availability during this projet. This work was partially supported by the Programme SARIMA.

1 Poisson (co)homology complex

Consider $(\mathcal{A}, \pi = \{\ \})$ a Poisson algebra. This means an antisymmetric biderivation $\{\cdot,\cdot\} : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ such that $(\mathcal{A}, \{\cdot,\cdot\})$ is a Lie algebra.

1.1 The de Rham complex and Poisson homology complex

We recall that the $\mathcal{A}$-module of Kähler differentials of $\mathcal{A}$ is denoted by $\Omega^1(\mathcal{A})$ and the graded $\mathcal{A}$-module $\Omega^p(\mathcal{A}) := \bigwedge^p \Omega^1(\mathcal{A})$ is the module of all Kähler p-differential. As a vector space, respectively, as an $\mathcal{A}$-module, $\Omega^p(\mathcal{A})$ is generated by elements of the form $FdF_1 \wedge ... \wedge dF_p$, respectively of the form, $dF_1 \wedge ... \wedge dF_p$, where $F, F_i \in \mathcal{A}$, $i = 1, ..., p$. We denote by $\Omega^\bullet(\mathcal{A}) = \oplus_{p\in\mathbb{N}}\Omega^p(\mathcal{A})$, with the convention that $\Omega^0(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$, the space of all Kähler differentials.
The differential $d : \mathcal{A} \longrightarrow \Omega^1(\mathcal{A})$ extends to a graded K-linear map

$$d : \Omega^\bullet(\mathcal{A}) \longrightarrow \Omega^{\bullet+1}(\mathcal{A})$$

by setting :

$$d(GdF_1 \wedge ... \wedge dF_p) := dG \wedge dF_1 \wedge ... \wedge dF_p$$

for $G, F_1, ..., F_p \in \mathcal{A}$, where $p \in \mathbb{N}$. It is called the de Rham differential. It is a graded derivation, of degree 1, of $(\Omega^\bullet(\mathcal{A}), \wedge)$, such that $d^2 = 0$. The resulting complex is called the de Rham complex and its cohomology is the de Rham cohomology of $\mathcal{A}$.
The Poisson boundary operator, also called the Brylinski or Koszul differential and denoted by $\partial : \Omega^\bullet(\mathcal{A}) \longrightarrow \Omega^{\bullet-1}(\mathcal{A})$, is given by :

$$\partial_k(F_0dF_1 \wedge ... \wedge dF_k) = \sum_{1\leq i\leq k} (-1)^{i+1}\{F_0, F_i\}dF_1 \wedge ... \wedge \widehat{dF_i} \wedge ... \wedge dF_k$$

$$+ \sum_{1\leq i<j\leq k} (-1)^{i+j} F_0 d\{F_i, F_j\} \wedge dF_1 \wedge ... \wedge \widehat{dF_i} \wedge ... \widehat{dF_j} \wedge ... \wedge dF_k$$

where $F_0, ..., F_k \in \mathcal{A}$.
One can check, by a direct computation, that ∂_k is well-defined and that it is a boundary operator, $\partial_k \circ \partial_{k+1} = 0$.
The homology of this complex is called the Poisson homology associated to $(\mathcal{A}, \pi)$ and is denoted by $H_\bullet(\mathcal{A}, \pi)$.

1.2 The Poisson cohomology complex

Definition 1.1. *A skew-symmetric k-linear map $P \in Hom_K(\wedge^k \mathcal{A}, \mathcal{A})$ is called a skew-symmetric k-derivation of $\mathcal{A}$ with values in $\mathcal{A}$ if it is a derivation in each of its arguments.*

The $\mathcal{A}$-module of skew-symmetric k-derivation is denoted by $\mathcal{X}^k(\mathcal{A})$. We define the graded $\mathcal{A}$-module

$$\mathcal{X}^\bullet(\mathcal{A}) := \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{X}^k(\mathcal{A})$$

whose elements are called skew-symmetric multi-derivations. By convention, the first term in this sum, $\mathcal{X}^0$, is $\mathcal{A}$, and $\mathcal{X}^k(\mathcal{A}) := \{0\}$ for $k < 0$.
The Poisson coboundary operator associated with $(\mathcal{A}, \pi)$ and denoted by $\delta : \mathcal{X}^\bullet(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{X}^{\bullet+1}(\mathcal{A})$, is given by :

$$\delta^k(Q)(F_0, F_1, ..., F_k) = \sum_{1\leq i\leq k} (-1)^i \{F_i, Q(F_0, F_1, ..., \widehat{F}_i, ..., F_k)\}$$

$$+ \sum_{1\leq i<j\leq k} (-1)^{i+j} Q(\{F_i, F_j\}, F_0, ..., \widehat{F}_i, ..., \widehat{F}_j, ..., F_k)$$

where $F_0, ..., F_k \in \mathcal{A}$, and $Q \in \mathcal{X}^k(\mathcal{A})$.
One can check, by a direct computation, that δ^k is well-defined and that it is a coboundary operator, $\delta^{k+1} \circ \delta^k = 0$.
The cohomology of this complex is called the Poisson cohomology associated with $(\mathcal{A}, \pi)$ and denoted by $H^\bullet(\mathcal{A}, \pi)$.

1.3 Unimodular Poisson structure

In this part, we consider the affine space of dimension n K^n and its algebra of regular functions $\mathcal{A} = K[x_1, ..., x_n]$.
We denote by $S_{p,q}$ the set of all $(p, q)-$shuffles, that is permutations σ of the set $\{1, ..., p+q\}$ such that $\sigma(1) < ... < \sigma(p)$ and $\sigma(p+1) < ... < \sigma(p+q), p, q \in \mathbb{N}$.
The family of maps $\star : \mathcal{X}^k(\mathcal{A}) \longrightarrow \Omega^{n-k}(\mathcal{A})$, defined by :

$$\star Q = \sum_{\sigma\in S_{k,n-k}} \epsilon(\sigma) Q(x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(k)}) dx_{\sigma(k+1)} \wedge ... \wedge dx_{\sigma(n)}$$

are isomorphisms.
Assume a Poisson structure on $\mathcal{A}$ is given. It is natural to ask wether we have the same duality between the Poisson cohomology and the Poisson homology. Generally, the answer to this question is negative. Besides, it is easy to see that the answer depends on the Poisson structure we have. For example such a duality does exist for the wide and important class of unimodular Poisson structure ([32]) which Jacobian Poisson structures belong ([12]).
If we denote by $D_\bullet$ the map : $D_\bullet := \star^{-1} \circ d \circ \star : \mathcal{X}^\bullet(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{X}^{\bullet-1}(\mathcal{A})$, where d is the de Rham differential, we say that a Poisson bracket π on $\mathcal{A}$ is unimodular if $D_2(\pi) = 0$.
Our purpose is to find the homology and the cohomology of the Jacobian structures on $K[x_1, x_2, x_3, x_4]$. These structures being unimodular, our objective in the sequel will be to determine the Poisson homology of such Poisson structures.

1.4 Vector notations

Now, we are going to present some vector notations which we shall use afterwards. Let us consider the following applications and differential operators :

$$
\begin{array}{cccc}
\times : & \mathcal{A}^4 \times \mathcal{A}^4 & \longrightarrow & \mathcal{A}^6 \\
& \left(\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ X_4 \end{pmatrix} , \overrightarrow{Y} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ Y_4 \end{pmatrix} \right) & \longmapsto & \overrightarrow{X} \times \overrightarrow{Y} = \begin{pmatrix} X_1Y_4 - X_4Y_1 \\ X_1Y_2 - X_2Y_1 \\ X_3Y_2 - X_2Y_3 \\ X_3Y_4 - X_4Y_3 \\ X_3Y_1 - X_1Y_3 \\ X_2Y_4 - X_4Y_2 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccc}
\bar{\times} : & \mathcal{A}^4 \times \mathcal{A}^6 & \longrightarrow & \mathcal{A}^4 \\
& \left(\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ X_4 \end{pmatrix} , \overrightarrow{Y} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ Y_6 \end{pmatrix} \right) & \longmapsto & \overrightarrow{X} \bar{\times} \overrightarrow{Y} = \begin{pmatrix} -X_4Y_3 + X_2Y_4 - X_3Y_6 \\ X_3Y_1 - X_1Y_4 + X_4Y_5 \\ -X_2Y_1 + X_4Y_2 + X_1Y_6 \\ -X_3Y_2 + X_1Y_3 - X_2Y_5 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

We denote by " $\cdot$ " the scalar product in $\mathcal{A}^4$ or in $\mathcal{A}^6$.

$f : \mathcal{A}^6 \longrightarrow \mathcal{A}^6$ is an $\mathcal{A}$-linear morphism given by the matrix :

$$
\begin{pmatrix}
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}
$$

$$
\begin{array}{cccc}
\overrightarrow{\nabla} : & \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{A}^4 \\
& F & \longmapsto & \overrightarrow{\nabla} F = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{x_1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{\partial F}{x_4} \end{pmatrix}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccc}
\overrightarrow{\nabla} \times : & \mathcal{A}^4 & \longrightarrow & \mathcal{A}^6 \\
& \overrightarrow{Y} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ Y_4 \end{pmatrix} & \longmapsto & \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{Y} = \begin{pmatrix} \frac{\partial Y_4}{\partial x_1} - \frac{\partial Y_1}{\partial x_4} \\ \frac{\partial Y_2}{\partial x_1} - \frac{\partial Y_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial Y_2}{\partial x_3} - \frac{\partial Y_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial Y_4}{\partial x_3} - \frac{\partial Y_3}{\partial x_4} \\ \frac{\partial Y_1}{\partial x_3} - \frac{\partial Y_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial Y_4}{\partial x_2} - \frac{\partial Y_2}{\partial x_4} \end{pmatrix}
\end{array}
$$

$$\begin{array}{lccc} \overrightarrow{\nabla}\bar{\times}: & \mathcal{A}^6 & \longrightarrow & \mathcal{A}^4 \\ & \overrightarrow{G} = \begin{pmatrix} G_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ G_6 \end{pmatrix} & \longmapsto & \overrightarrow{\nabla}\bar{\times}\overrightarrow{G} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial G_3}{\partial x_4} + \frac{\partial G_4}{\partial x_2} - \frac{\partial G_6}{\partial x_3} \\ \frac{\partial G_1}{\partial x_3} - \frac{\partial G_4}{\partial x_1} + \frac{\partial G_5}{\partial x_4} \\ -\frac{\partial G_1}{\partial x_2} + \frac{\partial G_2}{\partial x_4} + \frac{\partial G_6}{\partial x_1} \\ -\frac{\partial G_2}{\partial x_3} + \frac{\partial G_3}{\partial x_1} - \frac{\partial G_5}{\partial x_2} \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{lccc} \mathrm{Div}(\cdot): & \mathcal{A}^4 & \longrightarrow & \mathcal{A} \\ & \overrightarrow{K} = \begin{pmatrix} K_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ K_4 \end{pmatrix} & \longmapsto & \mathrm{Div}(\overrightarrow{K}) = \sum_{i=1}^{4} \frac{\partial K_i}{\partial x_i} \end{array}$$

By direct computation, we obtain the following properties :

Proposition 1.1. *The previous operators satisfy the following properties :*

1. $f^2 = Id_{\mathcal{A}^6}$;
2. $f(\vec{x}) \cdot \vec{y} = \vec{x} \cdot f(\vec{y}), \quad \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{A}^6$;
3. $f(\vec{x}) \cdot f(\vec{y}) = \vec{x} \cdot \vec{y}, \quad \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{A}^6$;
4. $\vec{x} \cdot (\vec{y} \times \vec{z}) = \vec{y} \cdot (\vec{z} \bar{\times} f(\vec{x})), \;\; \vec{x} \in \mathcal{A}^6, \; \vec{y}, \vec{z} \in \mathcal{A}^4$;
5. $\vec{x} \cdot (\vec{y} \bar{\times} \vec{z}) = -\vec{y} \cdot (\vec{x} \bar{\times} \vec{z}), \quad \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{A}^4, \; \vec{z} \in \mathcal{A}^6$;
6. $\vec{x} \cdot (\vec{x} \bar{\times} \vec{z}) = 0, \; \vec{x} \in \mathcal{A}^4, \quad \vec{z} \in \mathcal{A}^6$;
7. $\vec{x} \bar{\times} (\vec{x} \times \vec{y}) = 0, \quad \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{A}^4$
8. $(\vec{x} \times \vec{z}) \cdot f(\vec{x} \times \vec{y}) = 0, \quad \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathcal{A}^4$;
9. $\vec{x} \bar{\times} (\vec{y} \times \vec{z}) = \vec{y} \bar{\times} (\vec{z} \times \vec{x}), \quad \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathcal{A}^4$;
10. $(\vec{x} \bar{\times} f(\vec{y} \times \vec{z})) \bar{\times} (\vec{y} \times \vec{z}) = 0, \;\; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathcal{A}^4$;
11. $\vec{z} \bar{\times} f(\vec{x} \times \vec{y}) = -(\vec{z} \cdot \vec{x})\vec{y} + (\vec{z} \cdot \vec{y})\vec{x}, \quad \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathcal{A}^4$;
12. $(\vec{z} \bar{\times} f(\vec{x} \times \vec{y})) \times \vec{t} = -(\vec{z} \cdot \vec{x})\vec{y} \times \vec{t} + (\vec{z} \cdot \vec{y})\vec{x} \times \vec{t}, \quad \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \vec{t} \in \mathcal{A}^4$;
13. $(\vec{x} \bar{\times} f(\vec{y} \times \vec{z})) \times \vec{z} = (\vec{x} \cdot \vec{z})\vec{y} \times \vec{z}, \;\; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathcal{A}^4$;
14. $(\vec{x} \bar{\times} \vec{z}) \bar{\times} f(\vec{x} \times \vec{y}) = -(\vec{z} \cdot f(\vec{x} \times \vec{y}))\vec{x}, \;\; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathcal{A}^4, \vec{z} \in \mathcal{A}^6$;
15. $\overrightarrow{\nabla} \bar{\times} (\vec{x} \times \vec{y}) = \vec{y} \bar{\times} (\overrightarrow{\nabla} \times \vec{x}) - \vec{x} \bar{\times} (\overrightarrow{\nabla} \times \vec{y}), \;\; \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{A}^4$;
16. $\overrightarrow{\nabla} \times F\vec{x} = F\overrightarrow{\nabla} \times \vec{x} + \overrightarrow{\nabla} F \times \vec{x}, \;\; F \in \mathcal{A}, \; \vec{x} \in \mathcal{A}^4$;
17. $\overrightarrow{\nabla} \bar{\times} F\vec{y} = F\overrightarrow{\nabla} \bar{\times} \vec{y} + \overrightarrow{\nabla} F \bar{\times} \vec{y}, \quad F \in \mathcal{A}, \; \vec{y} \in \mathcal{A}^6$;

18. $Div(F\vec{x}) = \overrightarrow{\nabla} F \cdot \vec{x} + FDiv(\vec{x}), \quad F \in \mathcal{A}, \, \vec{x} \in \mathcal{A}^4;$

19. $Div(\vec{x}\bar{\times}\vec{y}) = \vec{y} \cdot f(\overrightarrow{\nabla} \times \vec{x}) - \vec{x} \cdot (\overrightarrow{\nabla}\bar{\times}\vec{y}), \, \vec{x} \in \mathcal{A}^4, \quad \vec{y} \in \mathcal{A}^6.$

Proof. Let us give a proof for formula (19) for example.
Consider $\vec{x} = (X_1, X_2, X_3, X_4)^t \in \mathcal{A}^4$ and $\vec{y} = (Y_1, ..., Y_6)^t \in \mathcal{A}^6$.
We have :

$$\begin{aligned}
Div(\vec{x}\bar{\times}\vec{y}) &= \frac{\partial}{\partial x_1}(-X_4Y_3 + X_2Y_4 - X_3Y_6) + \frac{\partial}{\partial x_2}(X_3Y_1 - X_1Y_4 + X_4Y_5) \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial x_3}(-X_2Y_1 + X_4Y_2 + X_1Y_6) + \frac{\partial}{\partial x_4}(-X_3Y_2 + X_1Y_3 - X_2Y_5) \\
&= Y_1(\frac{\partial X_3}{\partial x_2} - \frac{\partial X_2}{\partial x_3}) + Y_2(\frac{\partial X_4}{\partial x_3} - \frac{\partial X_3}{\partial x_4}) + Y_3(\frac{\partial X_1}{\partial x_4} - \frac{\partial X_4}{\partial x_1}) \\
&\quad + Y_4(\frac{\partial X_2}{\partial x_1} - \frac{\partial X_1}{\partial x_2}) + Y_5(\frac{\partial X_4}{\partial x_2} - \frac{\partial X_2}{\partial x_4}) + Y_6(\frac{\partial X_1}{\partial x_3} - \frac{\partial X_3}{\partial x_1}) \\
&\quad - X_1(\frac{\partial Y_4}{\partial x_2} - \frac{\partial Y_6}{\partial x_3} - \frac{\partial Y_3}{\partial x_4}) - X_2(-\frac{\partial Y_4}{\partial x_1} + \frac{\partial Y_1}{\partial x_3} + \frac{\partial Y_5}{\partial x_4}) \\
&\quad - X_3(\frac{\partial Y_6}{\partial x_1} - \frac{\partial Y_1}{\partial x_2} + \frac{\partial Y_2}{\partial x_4}) - X_4(\frac{\partial Y_3}{\partial x_1} - \frac{\partial Y_5}{\partial x_2} - \frac{\partial Y_2}{\partial x_3}) \\
&= \vec{y} \cdot f(\overrightarrow{\nabla} \times \vec{x}) - \vec{x} \cdot (\overrightarrow{\nabla}\bar{\times}\vec{y}).
\end{aligned}$$

□

□

According to the definition of Kähler differentials, we have the following isomorphisms of $\mathcal{A}$-modules

$$\begin{array}{ccc}
\Omega^1(\mathcal{A}) & \stackrel{\sim}{\longrightarrow} & \mathcal{A}^4 \\
F_1dx_1 + F_2dx_2 + F_3dx_3 + F_4dx_4 & \longmapsto & (F_1, ..., F_4)
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
\Omega^2(\mathcal{A}) & \stackrel{\sim}{\longrightarrow} & \mathcal{A}^6 \\
F_1dx_1 \wedge dx_4 + F_2dx_1 \wedge dx_2 + F_3dx_3 \wedge dx_2 & \longmapsto & (F_1, F_2, ..., F_6) \\
+F_4dx_3 \wedge dx_4 + F_5dx_3 \wedge dx_1 + F_6dx_2 \wedge dx_4 & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
\Omega^3(\mathcal{A}) & \stackrel{\sim}{\longrightarrow} & \mathcal{A}^4 \\
K_1dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 + K_2dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_4 & \longmapsto & (K_1, ..., K_4) \\
+K_3dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_4 + K_4dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_3 & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
\Omega^4(\mathcal{A}) & \stackrel{\sim}{\longrightarrow} & \mathcal{A} \\
Udx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 & \longmapsto & U
\end{array}$$

According to the previous isomorphisms, we can write the de Rham complex in terms of elements of $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}^4$ and $\mathcal{A}^6$:

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
K & \xrightarrow{d} & \mathcal{A} & \xrightarrow{d} & \mathcal{A}^4 & \xrightarrow{d} & \mathcal{A}^6 & \xrightarrow{d} & \mathcal{A}^4 & \xrightarrow{d} & \mathcal{A} & \xrightarrow{d} & 0 \\
 & & F & \longmapsto & \overrightarrow{\nabla} F & & & & & & & & \\
 & & & & \overrightarrow{F} & \longmapsto & \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{F} & & & & & & \\
 & & & & & & \overrightarrow{G} & \longmapsto & \overrightarrow{\nabla} \bar{\times} \overrightarrow{G} & & & & \\
 & & & & & & & & \overrightarrow{K} & \longmapsto & \mathrm{Div}(\overrightarrow{K}) & &
\end{array} \tag{4}
$$

Proposition 1.2. (Poincaré's lemma) *The de Rham complex* (4) *of the polynomial algebra* $\mathcal{A} = K[x_1, .., x_4]$ *is an exact one.*

Proposition 1.3. *According to the previous isomorphisms, Poisson boundary operators associated with the Poisson algebra* $(\mathcal{A}, \pi)$ *given by two generic Casimir functions* P_1 *and* P_2*, can be written in a compact form :*

$$0 \longrightarrow \mathcal{A} \xrightarrow{\partial_4} \mathcal{A}^4 \xrightarrow{\partial_3} \mathcal{A}^6 \xrightarrow{\partial_2} \mathcal{A}^4 \xrightarrow{\partial_1} \mathcal{A} \tag{5}$$

where :

$$\partial_1(\overrightarrow{H}) = (\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{H}) \cdot f(\overrightarrow{\nabla} P_1 \times \overrightarrow{\nabla} P_2), \overrightarrow{H} \in \mathcal{A}^4$$

$$\partial_2(\overrightarrow{G}) = -(\overrightarrow{\nabla} \bar{\times} \overrightarrow{G}) \bar{\times} f(\overrightarrow{\nabla} P_1 \times \overrightarrow{\nabla} P_2) - \overrightarrow{\nabla}(\overrightarrow{G} \cdot f(\overrightarrow{\nabla} P_1 \times \overrightarrow{\nabla} P_2)), \overrightarrow{G} \in \mathcal{A}^6$$

$$\partial_3(\overrightarrow{K}) = Div(\overrightarrow{K}) \overrightarrow{\nabla} P_1 \times \overrightarrow{\nabla} P_2 + \overrightarrow{\nabla} \times (\overrightarrow{K} \bar{\times} f(\overrightarrow{\nabla} P_1 \times \overrightarrow{\nabla} P_2))$$

$$\partial_4(U) = -\overrightarrow{\nabla} U \bar{\times} (\overrightarrow{\nabla} P_1 \times \overrightarrow{\nabla} P_2)$$

Proof. Let us give a proof of the last formula and let $U dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4$ be an element of $\Omega^4(\mathcal{A})$. We have $\partial_4(U dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4) = (I) + (II)$, where :

$$(I) = \{U, x_1\} dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 + \{U, x_2\} dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_4 + \{U, x_3\} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_4 + \{U, x_4\} dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_3$$

and

$$
\begin{aligned}
(II) = & -U d\{x_1, x_2\} \wedge dx_3 \wedge dx_4 + U d\{x_1, x_3\} \wedge dx_2 \wedge dx_4 6 - d\{x_1, x_4\} \wedge dx_2 \wedge dx_3 + \\
& - U d\{x_2, x_3\} \wedge dx_1 \wedge dx_4 + U d\{x_2, x_4\} \wedge dx_1 \wedge dx_3 - U d\{x_3, x_4\} \wedge dx_1 \wedge dx_2.
\end{aligned}
$$

This second term is exactly $(II) = -U d(dP_1 \wedge dP_2) = 0$. Then the boundary $\partial_4(U dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4)$ is equal to the first term (I).
But using our identification, we have $\partial_4(U) = (K_1, K_2, K_3, K_4)^t$, where $K_i = \{U, x_i\}$.
We can see, by a simply computation, that

$$K_1 = \{U, x_1\} := \frac{dU \wedge dx_1 \wedge dP_1 \wedge dP_2}{dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4}$$

is equal to

$$\frac{\partial U}{\partial x_4}\left(\frac{\partial P_1}{\partial x_3}\frac{\partial P_2}{\partial x_2} - \frac{\partial P_1}{\partial x_2}\frac{\partial P_2}{\partial x_3}\right) - \frac{\partial U}{\partial x_2}\left(\frac{\partial P_1}{\partial x_3}\frac{\partial P_2}{\partial x_4} - \frac{\partial P_1}{\partial x_4}\frac{\partial P_2}{\partial x_3}\right) + \frac{\partial U}{\partial x_3}\left(\frac{\partial P_1}{\partial x_2}\frac{\partial P_2}{\partial x_4} - \frac{\partial P_1}{\partial x_4}\frac{\partial P_2}{\partial x_2}\right)$$

which is exactly the first coordinate of $-\overrightarrow{\nabla} U \bar{\times} (\overrightarrow{\nabla} P_1 \times \overrightarrow{\nabla} P_2)$. $\square$

The Poisson homology takes the following form :

$$
\begin{aligned}
H_0(\mathcal{A},\pi) &= \frac{\mathcal{A}}{\{(\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{H})\cdot f(\overrightarrow{\nabla}P_1\times\overrightarrow{\nabla}P_2)|\overrightarrow{H}\in\mathcal{A}^4\}}\\
H_1(\mathcal{A},\pi) &= \frac{\{\overrightarrow{H}\in\mathcal{A}^4|(\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{H})\cdot f(\overrightarrow{\nabla}P_1\times\overrightarrow{\nabla}P_2)=0\}}{\{-(\overrightarrow{\nabla}\bar{\times}\overrightarrow{G})\bar{\times}f(\overrightarrow{\nabla}P_1\times\overrightarrow{\nabla}P_2)-\overrightarrow{\nabla}(\overrightarrow{G}\cdot f(\overrightarrow{\nabla}P_1\times\overrightarrow{\nabla}P_2)\}}\\
H_2(\mathcal{A},\pi) &= \frac{\{\overrightarrow{G}\in\mathcal{A}^6|(\overrightarrow{\nabla}\bar{\times}\overrightarrow{G})\bar{\times}f(\overrightarrow{\nabla}P_1\times\overrightarrow{\nabla}P_2)+\overrightarrow{\nabla}(\overrightarrow{G}\cdot f(\overrightarrow{\nabla}P_1\times\overrightarrow{\nabla}P_2))=0\}}{\{Div(\overrightarrow{K})f(\overrightarrow{\nabla}P_1\times\overrightarrow{\nabla}P_2)+\overrightarrow{\nabla}\times[\overrightarrow{K}\bar{\times}f(\overrightarrow{\nabla}P_1\times\overrightarrow{\nabla}P_2)]\}}\\
H_3(\mathcal{A},\pi) &= \frac{\{\overrightarrow{K}\in\mathcal{A}^4|Div(\overrightarrow{K})f(\overrightarrow{\nabla}P_1\times\overrightarrow{\nabla}P_2)+\overrightarrow{\nabla}\times[\overrightarrow{K}\bar{\times}(\overrightarrow{\nabla}P_1\times\overrightarrow{\nabla}P_2)]=0\}}{\{-\overrightarrow{\nabla}U\bar{\times}(\overrightarrow{\nabla}P_1\times\overrightarrow{\nabla}P_2)\}}\\
H_4(\mathcal{A},\pi) &= \{U\in\mathcal{A}|\overrightarrow{\nabla}U\bar{\times}(\overrightarrow{\nabla}P_1\times\overrightarrow{\nabla}P_2)=0\}
\end{aligned}
$$

2 Homological tools

In this part, we introduce the homological tools that we will need to find the Poisson homology of our Poisson structure. Here, $\mathcal{A}$ is the polynomial algebra $K[x_1, x_2, x_3, x_4]$.

2.1 Weight homogeneous skew-symmetric multi-derivations

The Schouten bracket is a family of maps

$$[\cdot,\cdot]_S : \mathcal{X}^p(\mathcal{A}) \times \mathcal{X}^q(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{X}^{p+q-1}(\mathcal{A}),$$

defined by

$$
\begin{aligned}
[P,Q]_S(F_1,...,F_{p+q-1}) = &\sum_{\sigma\in S_{q,p-1}} \epsilon(\sigma)P(Q(F_{\sigma(1)},...,F_{\sigma(q)}),F_{\sigma(q+1)},...,F_{\sigma(q+p-1)})\\
&-(-1)^{(p-1)(q-1)}\sum_{\sigma\in S_{p,q-1}} \epsilon(\sigma)Q(P(F_{\sigma(1)},...,F_{\sigma(p)}),F_{\sigma(p+1)},...,F_{\sigma(p+q-1)})
\end{aligned}
$$

for $P \in \mathcal{X}^p(\mathcal{A})$, $Q \in \mathcal{X}^q(\mathcal{A})$, and for $F_1, ..., F_{p+q-1} \in \mathcal{A}$ for $p, q \in \mathbb{N}$.
By convention, $S_{p,-1} := \emptyset$ and $S_{-1,q} := \emptyset$, for $p, q \in \mathbb{N}$.

Definition 2.1. *Let $\mathcal{V} \in \mathcal{X}^1(\mathcal{A})$ and $Q \in \mathcal{X}^q(\mathcal{A})$. Then the Lie derivative of Q with respect to $\mathcal{V}$ is $\mathcal{L}_{\mathcal{V}}Q := [\mathcal{V}, Q]_S$*

Definition 2.2. *A non-zero multi-derivation $P \in \mathcal{X}^\bullet(\mathcal{A})$ is said to be weight homogeneous of degree $r \in \mathbb{Z}$, if there exists positive integers $\varpi_1, \varpi_2, \varpi_3, \varpi_4 \in \mathbb{N}^\star$, the weights of the variables x_1, x_2, x_3, x_4, without a common divisor, such that*

$$\mathcal{L}_{\vec{e}_\varpi}(P) = rP$$

where $\mathcal{L}_{\vec{e}_\varpi}$ is a Lie derivative with respect to the Euler derivation

$$\vec{e}_\varpi := \varpi_1 x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + ... + \varpi_4 x_4 \frac{\partial}{\partial x_4}$$

The degree of a weight homogeneous multi-derivation $P \in \mathcal{X}^\bullet(\mathcal{A})$ is also denoted by $\varpi(P) \in \mathbb{Z}$ By convention, the zero k-derivation is weight homogeneous of degree $-\infty$.
The Euler derivation $\vec{e}_\varpi$ is identified (with the isomorphisms of the first section) to the element $\vec{e}_\varpi = (\varpi_1 x_1, ..., \varpi_4 x_4) \in \mathcal{A}^4$. We denote by $|\varpi|$ the sum of the weights $\varpi_1 + \varpi_2 + \varpi_3 + \varpi_4$, so that $|\varpi| = Div(\vec{e}_\varpi)$.
Euler's formula, for a weight homogeneous $F \in \mathcal{A}$, can be written as $\vec{\nabla} F \cdot \vec{e}_\varpi = \varpi(F)F$, and yields, using (15) of proposition 2.1 : $Div(F\vec{e}_\varpi) = (\varpi(F) + |\varpi|)F$.

The operator $\star$ allows us to transport the notion of weight homogeneity of skew-symmetric multi-derivations to Kähler p-differential forms.
Fixing weights $\varpi_1, \varpi_2, \varpi_3, \varpi_4 \in \mathbb{N}^\star$, it is clear that $\mathcal{A} = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_i$, where $\mathcal{A}_0 = K$ and for $i \in \mathbb{N}^\star$, $\mathcal{A}_i$ is the K-vector space generated by all weight homogeneous polynomials of degree i. Denoting by $\Omega^k(\mathcal{A})_i$ the K-vector space given by $\Omega^k(\mathcal{A})_i = \{P \in \Omega^k(\mathcal{A}) : \varpi(P) = i\} \cup \{0\}$,we have the following isomorphisms :

$$\Omega^4(\mathcal{A})_i \simeq \mathcal{X}^0(\mathcal{A})_i \simeq \mathcal{A}_i$$
$$\Omega^3(\mathcal{A})_i \simeq \mathcal{X}^1(\mathcal{A})_i \simeq \mathcal{A}_{i+\varpi_1} \times \mathcal{A}_{i+\varpi_2} \times \mathcal{A}_{i+\varpi_3} \times \mathcal{A}_{i+\varpi_4}$$
$$\Omega^2(\mathcal{A})_i \simeq \mathcal{X}^2(\mathcal{A})_i \simeq \mathcal{A}_{i+\varpi_1+\varpi_4} \times \mathcal{A}_{i+\varpi_1+\varpi_2} \times \mathcal{A}_{i+\varpi_3+\varpi_2} \times \mathcal{A}_{i+\varpi_3+\varpi_4} \times \mathcal{A}_{i+\varpi_3+\varpi_1} \times \mathcal{A}_{i+\varpi_2+\varpi_4}$$
$$\Omega^1(\mathcal{A})_i \simeq \mathcal{X}^3(\mathcal{A})_i \simeq \mathcal{A}_{i+\varpi_2+\varpi_3+\varpi_4} \times \mathcal{A}_{i+\varpi_3+\varpi_2+\varpi_4} \times \mathcal{A}_{i+\varpi_1+\varpi_2+\varpi_4} \times \mathcal{A}_{i+\varpi_2+\varpi_1+\varpi_3}$$
$$\Omega^0(\mathcal{A})_i \simeq \mathcal{X}^4 \mathcal{A})_i \simeq \mathcal{A}_{i+\varpi_1+\varpi_2+\varpi_3+\varpi_4}$$

Remark 2.1. *Each arrow of the complex given by (4) is a weight homogeneous map of degree zero, while each arrow of the complex given by (5) is a weight homogeneous map of degree $\varpi(P_1) + \varpi(P_2)$, if P_1 and P_2 are weight homogeneous elements of $\mathcal{A}$.*

2.2 The Koszul complex-complete intersection with an isolated singularity

Definition 2.3. *A weight homogeneous element $P \in \mathcal{A} = K[x_1, x_2, x_3, x_4]$ has an isolated singularity if*

$$\mathcal{A}_{sing}(P) := K[x_1, x_2, x_3, x_4]/ < \frac{\partial P}{\partial x_1}, \frac{\partial P}{\partial x_2}, \frac{\partial P}{\partial x_3}, \frac{\partial P}{\partial x_4} > \tag{6}$$

has a finite dimension as a K-vector space.

The dimension of $\mathcal{A}_{sing}(P)$ is called the Milnor number of the singular point.
We shall now give a definition of dimension for rings. For this purpose, note that the length of the chain $P_r \supset P_{r-1} \supset \cdots \supset P_0$ involving $r + 1$ distinct ideals of a given ring is taken to be r.

Definition 2.4. *The Krull dimension of a ring $\mathcal{R}$ is the supremum of the lengths of chains of distinct prime ideals in $\mathcal{R}$.*

Definition 2.5. *Let $\mathcal{R}$ be an associative and commutative graded K-algebra. A system of homogeneous elements $a_1, ..., a_d$ in $\mathcal{R}$, where d is the Krull dimension of $\mathcal{R}$, is called a homogeneous system of parameters of $\mathcal{R}$ (h.s.o.p.) if $\mathcal{R}/ < a_1, ..., a_d >$ is a finite dimensional K-vector space.*

For example, if we consider the K-algebra $\mathcal{A} = K[x_1, ..., x_4]$, graded by the weight degree, we have a natural h.s.o.p. given by the system x_1, x_2, x_3, x_4.

Definition 2.6. *A sequence $a_1, ..., a_n$ in a commutative associative algebra $\mathcal{R}$ is said to be an $\mathcal{R}$-regular sequence if $< a_1, ..., a_n > \neq \mathcal{R}$ and a_i is not a zero divisor of $\mathcal{R}/ < a_1, ..., a_{i-1} >$ for $i = 1, 2, ..., n$.*

For any regular sequence $a_1, ..., a_n$, we can define a Koszul complex which is exact (see Weibel [30]) :

$$0 \longrightarrow \bigwedge^0(\mathcal{R}^n) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \bigwedge^{n-2}(\mathcal{R}^n) \xrightarrow{\wedge\omega} \bigwedge^{n-1}(\mathcal{R}^n) \xrightarrow{\wedge\omega} \bigwedge^n(\mathcal{R}^n)$$

where $\omega = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$ and $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ is a basis of an $\mathcal{R}$-module free $\mathcal{R}^n$.
In our particular case, $\mathcal{R} = K[x_1, x_2, \cdots, x_n]$, using the identifications $\bigwedge^p(\mathcal{R}^n) \backsimeq \Omega^p(\mathcal{R})$, the Koszul complex associated to the sequence $\frac{\partial P}{\partial x_1}, \frac{\partial P}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial P}{\partial x_n}$ $(P \in \mathcal{R})$ have the following form :

$$0 \longrightarrow \mathcal{A} \xrightarrow{\wedge dP} \Omega^1(\mathcal{A}) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \Omega^{n-2}(\mathcal{A}) \xrightarrow{\wedge dP} \Omega^{n-1}(\mathcal{A}) \xrightarrow{\wedge dP} \Omega^n(\mathcal{A})$$

Using the vector notation for $n = 4$, we have the following complex :

$$0 \longrightarrow \mathcal{A} \xrightarrow{\vec{\nabla} P} \mathcal{A}^4 \xrightarrow{\times\vec{\nabla} P} \mathcal{A}^6 \xrightarrow{\vec{\nabla} P \bar{\times}} \mathcal{A}^4 \xrightarrow{\cdot\vec{\nabla} P} \mathcal{A}$$

Theorem 2.1. (Cohen-Macaulay). *Let $\mathcal{R}$ be a noetherian graded K-algebra. If $\mathcal{R}$ has a h.s.o.p. which is a regular sequence, then any h.s.o.p. in $\mathcal{R}$ is a regular sequence.*

Thus, for each $P \in \mathcal{A} = K[x_1, ..., x_4]$ which is a weight homogeneous polynomial with an isolated singularity, the sequence $\frac{\partial P}{\partial x_1}, \frac{\partial P}{\partial x_2}, \frac{\partial P}{\partial x_3}, \frac{\partial P}{\partial x_4}$ is regular, the associated Koszul complex is exact.

Definition 2.7. *Let $\mathcal{R}$ be a noetherian commutation ring with unit. The depth, $dpth(I)$, of an ideal I of $\mathcal{R}$ is the maximal length q of an $\mathcal{R}$-regular sequence $a_1, \cdots, a_q \in I$.*

Let M be a free $\mathcal{R}$-module of finite rank n, where $\mathcal{R}$ is a a noetherian commutative ring with unit. We denote by $\bigwedge^p(M)$ the *p-th* exterior product of M. By convention $\bigwedge^0(M) = \mathcal{R}$.
Let $\eta_1, \cdots, \eta_k$ be given elements of M, and $(e_1, \cdots, e_n)$ be a basis of M.

$$\eta_1 \wedge \cdots \wedge \eta_k = \sum_{1 \le i_1 < \cdots i_k \le n} a_{i_1, \cdots, i_k} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}.$$

We denote by $\mathfrak{A}$ the ideal of $\mathcal{R}$ generated by the coefficients $a_{i_1, \cdots, i_k}$, $1 \le i_1 < \cdots i_k \le n$.
Then we define : $Z^p := \{\eta \in \bigwedge^p(M) : \eta \wedge \eta_1 \wedge \cdots \wedge \eta_k = 0\}$, $p = 0, 1, 2, \cdots$
$H^p := Z^p \big/ \sum_{i=1}^{k} \eta_i \wedge \bigwedge^{p-1}(M)$, $p = 0, 1, 2, \cdots$
We have the following result from Kyoji Saito :

Theorem 2.2. ([22]) *$H^p = 0$ for $0 \le p < dpth(\mathfrak{A})$.*

Let us give an example. Suppose $\mathcal{A} = K[x_1, x_2, x_3, x_4]$ and consider P_1, P_2, two weight homogeneous polynomials in $\mathcal{A}$. We say that (P_1, P_2) defines a complete intersection if (P_1, P_2) is a regular sequence in $\mathcal{A}$. And (P_1, P_2) has an isolated singularity if $\mathcal{A}/\langle P_1, P_2, \frac{\partial P_1}{\partial x_i}\frac{\partial P_2}{\partial x_j} - \frac{\partial P_1}{\partial x_j}\frac{\partial P_2}{\partial x_i}, i < j = 1,2,3,4\rangle$ is a finite dimensional K-vector space. This dimension is also called the Milnor number of singularity and denoted μ.
Let (P_1, P_2) be a complete intersection with an isolated singularity.
We denote by $\eta_j = \displaystyle\sum_{i=1}^{4} \frac{\partial P_j}{\partial x_i} e_i$, $j = 1, 2$, where (e_1, e_2, e_3, e_4) is a basis of a free $\mathcal{A}$-module $\mathcal{A}^4$.
Then $\eta_1 \wedge \eta_2 = \displaystyle\sum_{i<j=1}^{4} a_{ij} e_i \wedge e_j$, where $a_{ij} = \frac{\partial P_1}{\partial x_i}\frac{\partial P_2}{\partial x_j} - \frac{\partial P_1}{\partial x_j}\frac{\partial P_2}{\partial x_i}$.
Let $\mathfrak{A} = (a_{ij}, i < j = 1, \cdots, 4)$. From the book of E.J.N. LOOIJENGA ([16], pages 25 and 49), we have $dpth(\mathfrak{A}) = 3$.
Then for $\eta \in \bigwedge^p(\mathcal{A}^4)$, $p = 1, 2$, if $\eta \wedge \eta_1 \wedge \eta_2 = 0$, we have $\eta = \alpha_1 \wedge \eta_1 + \alpha_2 \wedge \eta_2$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \bigwedge^{p-1}(\mathcal{A}^4)$. Using the vector notation, we get the following results :

Lemma 2.1. *For $\overrightarrow{G} \in \mathcal{A}^6$, $(\overrightarrow{\nabla} P_1 \times \overrightarrow{\nabla} P_2) \cdot f(\overrightarrow{G}) = 0$ if and only if $\overrightarrow{G} = \overrightarrow{H}_1 \times \overrightarrow{\nabla} P_1 + \overrightarrow{H}_2 \times \overrightarrow{\nabla} P_2$, where $\overrightarrow{H}_1, \overrightarrow{H}_2 \in \mathcal{A}^4$.*

Lemma 2.2. *For $\overrightarrow{H} \in \mathcal{A}^4$, $\overrightarrow{H} \bar{\times} (\overrightarrow{\nabla} P_1 \times \overrightarrow{\nabla} P_2) = 0$ if and only if $\overrightarrow{H} = U_1 \overrightarrow{\nabla} P_1 + U_2 \overrightarrow{\nabla} P_1$, where $U_1, U_2 \in \mathcal{A}$.*

3 Poisson homology and complete intersection with an isolated singularity

Let us consider the polynomial algebra $\mathcal{A} = K[x_1, ..., x_4]$ where K is a field of characteristic 0 equipped with the Jacobian Poisson structure π given by two weight homogeneous polynomials P_1, P_2 which define a complete intersection with an isolated singularity.
First we compute the kernels $(ker\partial_i)_{i=1,2,3,4}$.

Proposition 3.1. *$ker\partial_4 \simeq K[P_1, P_2]$*

Proof. Let U be a weight homogeneous element of $\Omega^4(\mathcal{A}) \simeq \mathcal{A}$ such that $\partial_4(U) = 0$. Then $\overrightarrow{\nabla} U \bar{\times} \left(\overrightarrow{\nabla} P_1 \times \overrightarrow{\nabla} P_2\right) = 0$. Using lemma 2.2, $\overrightarrow{\nabla} U = \alpha_1 \overrightarrow{\nabla} P_1 + \alpha_2 \overrightarrow{\nabla} P_2$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{A}$. $\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{\nabla} U = \overrightarrow{\nabla} \alpha_1 \times \overrightarrow{\nabla} P_1 + \overrightarrow{\nabla} \alpha_2 \times \overrightarrow{\nabla} P_2$. Since $\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{\nabla} U = 0$, we obtain $\overrightarrow{\nabla} \alpha_1 \bar{\times} (\overrightarrow{\nabla} P_1 \times \overrightarrow{\nabla} P_2) = 0$ and $\overrightarrow{\nabla} \alpha_2 \bar{\times} (\overrightarrow{\nabla} P_1 \times \overrightarrow{\nabla} P_2) = 0$. Thus α_1, α_2 are elements of $\ker \partial_4$.
We can continue this procedure by defining elements $(U_i^{(n)})$ of $\ker \partial_4$ in such a way that $\overrightarrow{\nabla} U_i^{(n)} = U_{2i-1}^{(n+1)} \overrightarrow{\nabla} P_1 + U_{2i}^{(n+1)} \overrightarrow{\nabla} P_2$. It is clear that $max(degU_{2i-1}^{(n+1)}, degU_{2i}^{(n+1)}) < degU_i^{(n)}$. Therefore there exists $m \in \mathbb{N}$ such that $\overrightarrow{\nabla} U_i^{(m)} = 0$, $\forall i = 1, ..., 2^m$. Hence $U_i^{(m)} = C_i^{(m)} \in K$. Since $\overrightarrow{\nabla} U_i^{(m-1)} = U_{2i-1}^{(m)} \overrightarrow{\nabla} P_1 + U_{2i}^{(m)} \overrightarrow{\nabla} P_2 = C_{2i-1}^{(m)} \overrightarrow{\nabla} P_1 + C_{2i}^{(m)} \overrightarrow{\nabla} P_2$, by the Poincaré lemma there exists $C_i^{(m-1)} \in K$ such that $U_i^{(m-1)} = C_{2i-1}^{(m)} P_1 + C_{2i}^{(m)} P_2 + C_i^{(m-1)}$.
We have $U_{2i+1}^{(m-1)} = C_{4i+1}^{(m)} P_1 + C_{4i+2}^{(m)} P_2 + C_{2i+1}^{(m-1)}$; $U_{2i+2}^{(m-1)} = C_{4i+3}^{(m)} P_1 + C_{4i+4}^{(m)} P_2 + C_{2i+2}^{(m-1)}$

and $\overrightarrow{\nabla}U_{i+1}^{(m-2)} = U_{2i+1}^{(m-1)}\overrightarrow{\nabla}P_1 + U_{2i+2}^{(m-1)}\overrightarrow{\nabla}P_2$. By an easy computation $C_{4i+3}^{(m)}P_1\overrightarrow{\nabla}P_2 + C_{4i+2}^{(m)}P_2\overrightarrow{\nabla}P_2 = \overrightarrow{\nabla}V$, $V \in \mathcal{A}$. Because $\overrightarrow{\nabla} \times [C_{4i+3}^{(m)}P_1\overrightarrow{\nabla}P_2 + C_{4i+2}^{(m)}P_2\overrightarrow{\nabla}P_1] = \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{\nabla}V = 0$, we have $C_{4i+3}^{(m)} = C_{4i+2}^{(m)}$, and $U_{i+1}^{(m-2)} = \frac{1}{2}C_{4i+1}^{(m)}P_1^2 + \frac{1}{2}C_{4i+4}^{(m)}P_2^2 + C_{2i+1}^{(m-1)}P_1 + C_{2i+2}^{(m-1)}P_2 + C_{4i+2}^{(m)}P_1P_2 + C_{i+1}^{(m-2)}$. At the end of this procedure, we obtain the existence of a $g \in K[P_1, P_2]$ such that $U = g(P_1, P_2)$. $\square$

Proposition 3.2. $ker\partial_1 = \{\alpha_1\overrightarrow{\nabla}P_1 + \alpha_2\overrightarrow{\nabla}P_2 + \overrightarrow{\nabla}\alpha_3 | \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathcal{A}\}$

Proof. Let $\overrightarrow{H}(H_1, H_2, H_3, H_4)$ be a weight homogeneous element of $\Omega^1(\mathcal{A}) \simeq \mathcal{A}^4$ such that $\partial_1(\overrightarrow{H}) = (\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{H}) \cdot f(\overrightarrow{\nabla}P_1 \times \overrightarrow{\nabla}P_2) = 0$. According to lemma 2.1, there exists $\overrightarrow{H}', \overrightarrow{H}'' \in \mathcal{A}^4$ such that $\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{H} = \overrightarrow{H}' \times \overrightarrow{\nabla}P_1 + \overrightarrow{H}'' \times \overrightarrow{\nabla}P_2$.
We have $0 = \overrightarrow{\nabla}\bar{\times}\left(\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{H}\right) = \overrightarrow{\nabla}\bar{\times}\left(\overrightarrow{H}' \times \overrightarrow{\nabla}P_1\right) + \overrightarrow{\nabla}\bar{\times}\left(\overrightarrow{H}'' \times \overrightarrow{\nabla}P_2\right)$
But using property (15) of proposition 1.1, we obtain $\overrightarrow{\nabla}P_1\bar{\times}(\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{H}') + \overrightarrow{\nabla}P_2\bar{\times}(\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{H}'') = 0$.
As a direct consequence, $\overrightarrow{\nabla}P_2 \cdot \left(\overrightarrow{\nabla}P_1\bar{\times}(\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{H}')\right) = 0 = \overrightarrow{\nabla}P_1 \cdot \left(\overrightarrow{\nabla}P_2\bar{\times}(\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{H}'')\right)$. Therefore $\overrightarrow{H}'$ and $\overrightarrow{H}''$ are other elements of $ker\partial_1$.
When we apply this procedure to $\overrightarrow{H}'$ and $\overrightarrow{H}''$, we get four other of elements of $ker\partial_1$.
Continuing in this way yields the existence of elements $\left(\overrightarrow{H}_r^{(l)}\right)$ of $ker\partial_1$ such that $\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{H}_i^{(n)} = \overrightarrow{H}_{2i-1}^{(n+1)} \times \overrightarrow{\nabla}P_1 + \overrightarrow{H}_{2i}^{(n+1)} \times \overrightarrow{\nabla}P_2$. We can notice that $max\left(deg\overrightarrow{H}_{2i-1}^{(n+1)}, deg\overrightarrow{H}_{2i}^{(n+1)}\right) < deg\overrightarrow{H}_i^{(n)}$. Then there exists $m \in \mathbb{N}$ such that $\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{H}_i^{(m)} = 0$, $\forall i = 1, ..., 2^m$. So there exists $\varphi_i^{(m)} \in \mathcal{A}$ such that $\overrightarrow{H}_i^{(m)} = \overrightarrow{\nabla}\varphi_i^{(m)}$.
Since $\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{H}_i^{(m-1)} = \overrightarrow{\nabla} \times \left[\varphi_{2i-1}^{(m)}\overrightarrow{\nabla}P_1 + \varphi_{2i}^{(m)}\overrightarrow{\nabla}P_2\right]$, by the Poincaré lemma $\overrightarrow{H}_i^{(m-1)} = \varphi_{2i-1}^{(m)}\overrightarrow{\nabla}P_1 + \varphi_{2i}^{(m)}\overrightarrow{\nabla}P_2 + \overrightarrow{\nabla}\varphi_i^{(m-1)}$, $\varphi_i^{(m-1)} \in \mathcal{A}$.
We have : $\overrightarrow{H}_{2i+1}^{(m-1)} = \varphi_{4i+1}^{(m)}\overrightarrow{\nabla}P_1 + \varphi_{4i+2}^{(m)}\overrightarrow{\nabla}P_2 + \overrightarrow{\nabla}\varphi_{2i+1}^{(m-1)}$; $\overrightarrow{H}_{2i+2}^{(m-1)} = \varphi_{4i+3}^{(m)}\overrightarrow{\nabla}P_1 + \varphi_{4i+4}^{(m)}\overrightarrow{\nabla}P_2 + \overrightarrow{\nabla}\varphi_{2i+2}^{(m-1)}$; and $\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{H}_{i+1}^{(m-2)} = \left(\varphi_{4i+3}^{(m)} - \varphi_{4i+2}^{(m)}\right)\overrightarrow{\nabla}P_2 \times \overrightarrow{\nabla}P_1 + \overrightarrow{\nabla} \times \left[\varphi_{2i+1}^{(m-1)}\overrightarrow{\nabla}P_1 + \varphi_{2i+2}^{(m-1)}\overrightarrow{\nabla}P_2\right]$.
It is easy to see that $\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{G} = \alpha\overrightarrow{\nabla}P_1 \times \overrightarrow{\nabla}P_2$, where $\overrightarrow{G} = \overrightarrow{H}_{i+1}^{(m-2)} - \varphi_{2i+1}^{(m-1)}\overrightarrow{\nabla}P_1 - \varphi_{2i+2}^{(m-1)}\overrightarrow{\nabla}P_2$ and $\alpha = \varphi_{4i+3}^{(m)} - \varphi_{4i+2}^{(m)}$.
Since $0 = \overrightarrow{\nabla}\bar{\times}(\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{G}) = \overrightarrow{\nabla}\alpha\bar{\times}(\overrightarrow{\nabla}P_1 \times \overrightarrow{\nabla}P_2)$, α is an element of $ker\partial_4$. Therefore $\overrightarrow{H}_{i+1}^{(m-2)} = (\varphi_{2i+1}^{(m-1)} + \varphi)\overrightarrow{\nabla}P_1 + \varphi_{2i+2}^{(m-1)}\overrightarrow{\nabla}P_2 + \overrightarrow{\nabla}\psi$.
At the end, we have : $\overrightarrow{H} = \alpha_1\overrightarrow{\nabla}P_1 + \alpha_2\overrightarrow{\nabla}P_2 + \overrightarrow{\nabla}\alpha_3$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathcal{A}$. $\square$

Proposition 3.3. $\ker\partial_3 = \{\alpha\vec{e}_\varpi + \overrightarrow{\nabla}U\bar{\times}(\overrightarrow{\nabla}P_1 \times \overrightarrow{\nabla}P_2) | \alpha \in K[P_1, P_2], U \in \mathcal{A}\}$, *if* $|\varpi| = 2\varpi(P_1) = 2\varpi(P_2)$.

Proof. Let $\overrightarrow{K} \in ker\partial_3$, be a weight homogeneous element of $\Omega^3(\mathcal{A}) \simeq \mathcal{A}^4$.
Then $div(\overrightarrow{K})\overrightarrow{\nabla}P_1 \times \overrightarrow{\nabla}P_2 + \overrightarrow{\nabla} \times \left(\overrightarrow{K}\bar{\times}f(\overrightarrow{\nabla}P_1 \times \overrightarrow{\nabla}P_2)\right) = 0$. But using property (8) of proposition 1.1, we see that $\left(\overrightarrow{\nabla} \times (\overrightarrow{K}\bar{\times}f(\overrightarrow{\nabla}P_1 \times \overrightarrow{\nabla}P_2))\right) \cdot f(\overrightarrow{\nabla}P_1 \times \overrightarrow{\nabla}P_2) = 0$, In other words $\overrightarrow{K}\bar{\times}f(\overrightarrow{\nabla}P_1 \times \overrightarrow{\nabla}P_2)$ is an element of $ker\partial_1$. Therefore,

$$\overrightarrow{K}\bar{\times}f(\overrightarrow{\nabla}P_1 \times \overrightarrow{\nabla}P_2) = \alpha_1\overrightarrow{\nabla}P_1 + \alpha_2\overrightarrow{\nabla}P_2 + \overrightarrow{\nabla}\alpha_3,$$

where $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ are elements of $\mathcal{A}$. Thus $Div(\overrightarrow{K})\overrightarrow{\nabla}P_1\times\overrightarrow{\nabla}P_2+\overrightarrow{\nabla}\alpha_1\times\overrightarrow{\nabla}P_1+\overrightarrow{\nabla}\alpha_2\times\overrightarrow{\nabla}P_2 = 0$. So $\overrightarrow{\nabla}P_i\bar{\times}\left[Div(\overrightarrow{K})\overrightarrow{\nabla}P_1 \times \overrightarrow{\nabla}P_2 + \overrightarrow{\nabla}\alpha_1 \times \overrightarrow{\nabla}P_1 + \overrightarrow{\nabla}\alpha_2 \times \overrightarrow{\nabla}P_2\right] = 0$, $i = 1, 2$.

According to properties (9) and (7) of proposition 1.1, we obtain $\overrightarrow{\nabla}\alpha_i\bar{\times}(\overrightarrow{\nabla}P_1 \times \overrightarrow{\nabla}P_2) = 0$, $i = 1, 2$. i.e., $\alpha_1, \alpha_2 \in K[P_1, P_2]$.

Thus $Div(\overrightarrow{K})\overrightarrow{\nabla}P_1 \times \overrightarrow{\nabla}P_2 + \overrightarrow{\nabla}\alpha_1 \times \overrightarrow{\nabla}P_1 + \overrightarrow{\nabla}\alpha_2 \times \overrightarrow{\nabla}P_2 = 0$, and we obtain $Div(\overrightarrow{K}) = \frac{\partial\alpha_1}{\partial P_2} - \frac{\partial\alpha_2}{\partial P_1}$. On the other hand, using property (10) of proposition 1.1, we observe that α_3 is an element of $K[P_1, P_2]$.

We obtain

$$\begin{cases} \overrightarrow{K}\bar{\times}f(\overrightarrow{\nabla}P_1 \times \overrightarrow{\nabla}P_2) = \beta_1\overrightarrow{\nabla}P_1 + \beta_2\overrightarrow{\nabla}P_2 & (a) \\ Div(\overrightarrow{K}) = \frac{\partial\beta_1}{\partial P_2} - \frac{\partial\beta_2}{\partial P_1} & (b) \end{cases}$$

Here $\beta_1 = \alpha_1 + \frac{\partial\alpha_3}{\partial P_1}$, and $\beta_2 = \alpha_2 + \frac{\partial\alpha_3}{\partial P_2}$.

$(a) \Rightarrow \left(\overrightarrow{K}\bar{\times}f(\overrightarrow{\nabla}P_1 \times \overrightarrow{\nabla}P_2)\right) \times \overrightarrow{\nabla}P_i = \left(\beta_1\overrightarrow{\nabla}P_1 + \beta_2\overrightarrow{\nabla}P_2\right) \times \overrightarrow{\nabla}P_i$, $i = 1, 2$.

By property (12) of proposition 1.1, we have $\beta_j = (-1)^i\overrightarrow{K} \cdot \overrightarrow{\nabla}P_i$, $i \neq j = 1, 2$.

According to the degree equation $\beta_1 \in P_2K[P_1, P_2]$, and $\beta_2 \in P_1K[P_1, P_2]$.

Let us suppose that $\beta_1 = cP_1^{r_1}P_2^{r_2+1}$.

Then $\vec{e}_\varpi \cdot \overrightarrow{\nabla}P_2 = \varpi(P_2)P_2 \Rightarrow \overrightarrow{K} = \frac{c}{\varpi(P_2)}P_1^{r_1}P_2^{r_2}\vec{e}_\varpi + \overrightarrow{G}$, where $\overrightarrow{G} = \overrightarrow{\nabla}P_2\bar{\times}\overrightarrow{X}$, $\overrightarrow{X} \in \mathcal{A}^6$.

$\overrightarrow{K} \cdot \overrightarrow{\nabla}P_1 = -\beta_2 \Rightarrow \beta_2 + cP_1^{r_1+1}P_2^{r_2} = -(\overrightarrow{\nabla}P_2\bar{\times}\overrightarrow{X}) \cdot \overrightarrow{\nabla}P_1$, $\forall r_1, r_2 \in \mathbb{N}$.

According to the degree equation, $\beta_2 = -cP_1^{r_1+1}P_2^{r_2}$.

Then

$$\begin{cases} \overrightarrow{K} \cdot \overrightarrow{\nabla}P_2 = cP_1^{r_1}P_2^{r_2+1} \\ \overrightarrow{K} \cdot \overrightarrow{\nabla}P_1 = cP_1^{r_1+1}P_2^{r_2} \\ Div(\overrightarrow{K}) = c(2 + r_1 + r_2)P_1^{r_1}P_2^{r_2} \end{cases}$$

$$\overrightarrow{K} = \frac{c}{\varpi(P_2)}P_1^{r_1}P_2^{r_2}\vec{e}_\varpi + \overrightarrow{G} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{G} \cdot \overrightarrow{\nabla}P_2 = 0 \\ \overrightarrow{G} \cdot \overrightarrow{\nabla}P_1 = 0 \\ Div(\overrightarrow{G}) = c\left(2 - \frac{|\varpi|}{\varpi(P_1)}\right)P_1^{r_1}P_2^{r_2} = 0 \end{cases}$$

Then $\overrightarrow{G} \cdot \overrightarrow{\nabla}P_1 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{G} = \overrightarrow{\nabla}P_1\bar{\times}\overrightarrow{X}_1$, $\overrightarrow{X}_1 \in \mathcal{A}^6$.

Using lemma 2.1, $\overrightarrow{X}_1 = \overrightarrow{F}_1 \times \overrightarrow{\nabla}P_1 + \overrightarrow{F}_2 \times \overrightarrow{\nabla}P_2$, $\overrightarrow{F}_1, \overrightarrow{F}_2 \in \mathcal{A}^4$.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{G} &= \overrightarrow{\nabla}P_1\bar{\times}\left(\overrightarrow{F}_1 \times \overrightarrow{\nabla}P_1 + \overrightarrow{F}_2 \times \overrightarrow{\nabla}P_2\right) \\ &= \overrightarrow{\nabla}P_1\bar{\times}\left(\overrightarrow{F}_2 \times \overrightarrow{\nabla}P_2\right) \\ &= \overrightarrow{F}\bar{\times}\left(\overrightarrow{\nabla}P_1 \times \overrightarrow{\nabla}P_2\right), \text{where} \overrightarrow{F} = -\overrightarrow{F}_2 \end{aligned}$$

Since $Div(\overrightarrow{G}) = 0$, we have $\left(\overrightarrow{\nabla}P_1 \times \overrightarrow{\nabla}P_2\right) \cdot f(\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{F}) = 0$. Therefore $\overrightarrow{F} = \alpha_1\overrightarrow{\nabla}P_1 + \alpha_2\overrightarrow{\nabla}P_2 + \overrightarrow{\nabla}\alpha_3$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathcal{A}$, and $\overrightarrow{G} = \overrightarrow{\nabla}\alpha_3\bar{\times}\left(\overrightarrow{\nabla}P_1 \times \overrightarrow{\nabla}P_2\right)$. □

Proposition 3.4. $ker\partial_2 = \{U\overrightarrow{\nabla}P_1 \times \overrightarrow{\nabla}P_2 + \overrightarrow{\nabla}\alpha_1 \times \overrightarrow{\nabla}P_1 + \overrightarrow{\nabla}\alpha_2 \times \overrightarrow{\nabla}P_2 | U, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{A}\}$

Proof. Let $\overrightarrow{G} \in ker\partial_2$, be a weight homogeneous element of $\Omega^2(\mathcal{A}) \simeq \mathcal{A}^6$.
We have $\left(\overrightarrow{\nabla} \bar{\times} \overrightarrow{G}\right) \bar{\times} f(\overrightarrow{\nabla} P_1 \times \overrightarrow{\nabla} P_2) + \overrightarrow{\nabla}\left(\overrightarrow{G} \cdot f(\overrightarrow{\nabla} P_1 \times \overrightarrow{\nabla} P_2)\right) = 0$.
Then $\overrightarrow{\nabla} \times \left[\left(\overrightarrow{\nabla} \bar{\times} \overrightarrow{G}\right) \bar{\times} f(\overrightarrow{\nabla} P_1 \times \overrightarrow{\nabla} P_2)\right] + Div(\overrightarrow{\nabla} \bar{\times} \overrightarrow{G}) \overrightarrow{\nabla} P_1 \times \overrightarrow{\nabla} P_2 = 0$.
Therefore, $\overrightarrow{\nabla} \bar{\times} \overrightarrow{G} = \alpha \vec{e}_{\varpi} + \overrightarrow{\nabla} U \bar{\times} (\overrightarrow{\nabla} P_1 \times \overrightarrow{\nabla} P_2)$, $\alpha \in K[P_1, P_2]$, $U \in \mathcal{A}$.
$0 = Div(\overrightarrow{\nabla} \bar{\times} \overrightarrow{G}) = (\varpi(\alpha) + |\varpi|)\alpha \Rightarrow \alpha = 0$.
Thus $\overrightarrow{\nabla} \bar{\times} \overrightarrow{G} = \overrightarrow{\nabla} U \bar{\times} (\overrightarrow{\nabla} P_1 \times \overrightarrow{\nabla} P_2)$, i.e., $\overrightarrow{G} = U \overrightarrow{\nabla} P_1 \times \overrightarrow{\nabla} P_2 + \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{X}$, $\overrightarrow{X} \in \mathcal{A}^4$.
But using properties (10) and (8) of proposition 1.1, we obtain

$$\overrightarrow{\nabla}\left((\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{X}) \cdot f(\overrightarrow{\nabla} P_1 \times \overrightarrow{\nabla} P_2)\right) = 0,$$

and

$$(\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{X}) \cdot f(\overrightarrow{\nabla} P_1 \times \overrightarrow{\nabla} P_2) \in K.$$

For degree reasons, $(\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{X}) \cdot f(\overrightarrow{\nabla} P_1 \times \overrightarrow{\nabla} P_2) = 0$.
Then from proposition 4.1, $\overrightarrow{X} = \alpha_1 \overrightarrow{\nabla} P_1 + \alpha_2 \overrightarrow{\nabla} P_2 + \overrightarrow{\nabla} \alpha_3$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathcal{A}$. □

Proposition 3.5. *The following complexes are exact and the arrows are maps of degree zero :*

$$0 \longrightarrow K[P_1, P_2] \xrightarrow{\alpha} \mathcal{A}(-\varpi(P_1)) \oplus \mathcal{A}(-\varpi(P_2)) \oplus \mathcal{A} \xrightarrow{\beta} ker\partial_1 \longrightarrow 0 \qquad (7)$$

$\alpha(u(P_1, P_2)) = (-\frac{\partial u}{\partial P_1}, -\frac{\partial u}{\partial P_2}, u)$;
$\beta(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \alpha_1 \overrightarrow{\nabla} P_1 + \alpha_2 \overrightarrow{\nabla} P_2 + \overrightarrow{\nabla} \alpha_3$.

$$0 \longrightarrow K[P_1, P_2](-\varpi(P_1)) \oplus K[P_1, P_2](-\varpi(P_2)) \xrightarrow{\gamma} \qquad (8)$$
$$\xrightarrow{\gamma} \mathcal{A}(-\varpi(P_1) - \varpi(P_2)) \oplus \mathcal{A}(-\varpi(P_1)) \oplus \mathcal{A}(-\varpi(P_2)) \xrightarrow{\epsilon} ker\partial_2 \longrightarrow 0$$

$\gamma(\alpha_1, \alpha_2) = (\frac{\partial \alpha_1}{\partial P_2} - \frac{\partial \alpha_2}{\partial P_1}, \alpha_1, \alpha_2)$;
$\epsilon(U, \alpha_1, \alpha_2) = U \nabla P_1 \times \overrightarrow{\nabla} P_2 + \nabla \alpha_1 \times \overrightarrow{\nabla} P_1 + \nabla \alpha_2 \times \overrightarrow{\nabla} P_2$.

$$0 \longrightarrow K[P_1, P_2](-\varpi(P_1) - \varpi(P_2)) \xrightarrow{\theta} K[P_1, P_2](-|\varpi|) \oplus \mathcal{A}(-\varpi(P_1) - \varpi(P_2)) \xrightarrow{\sigma} ker\partial_3 \longrightarrow 0 \qquad (9)$$

$\theta(V(P_1, P_2) = (0, V)$;
$\sigma(U, V) = U \vec{e}_{\varpi} + \overrightarrow{\nabla} V \bar{\times} (\overrightarrow{\nabla} P_1 \times \overrightarrow{\nabla} P_2)$, *if* $|\varpi| = 2\varpi(P_1) = 2\varpi(P_2)$,

Proof. Let us give the proof for the first sequence :
If $\alpha_1 \overrightarrow{\nabla} P_1 + \alpha_2 \overrightarrow{\nabla} P_2 + \overrightarrow{\nabla} \alpha_3 = 0$, then $(\alpha_1 \overrightarrow{\nabla} P_1 + \alpha_2 \overrightarrow{\nabla} P_2 + \overrightarrow{\nabla} \alpha_3) \bar{\times} (\overrightarrow{\nabla} P_1 \times \overrightarrow{\nabla} P_2) = 0$.
Therefore, $\overrightarrow{\nabla} \alpha_3 \bar{\times} (\overrightarrow{\nabla} P_1 \times \overrightarrow{\nabla} P_2) = 0$ and $\alpha_3 \in K[P_1, P_2]$.
Because $0 = (\alpha_1 \overrightarrow{\nabla} P_1 + \alpha_2 \overrightarrow{\nabla} P_2 + \overrightarrow{\nabla} \alpha_3) \times \overrightarrow{\nabla} P_i$, for $i = 1, 2$, we have $\alpha_i = -\frac{\partial \alpha_3}{\partial P_i}$, for $i = 1, 2$.
We can conclude that the first complex is exact. The proof of the $2nd$ and $3rd$ complexes is similar. □

We also have the following trivial exact sequence of complexes :

$$0 \longrightarrow ker\partial_{i+1} \longrightarrow \Omega^{i+1}(\mathcal{A}) \longrightarrow ker\partial_i \longrightarrow H_i(\mathcal{A},\pi) \longrightarrow 0 \tag{10}$$

where $i = 0,1,2,3$, and the arrows are maps of degree zero.

Remark 3.1. *By using the exactness of the complexes (7), (8), (9), (10), we obtain the Poincaré's series of the Poisson homology groups. We can obviously notice that these series do not depend on the polynomials P_1 and P_2, but on the weights and degrees of P_1 and P_2.*

We are explicitly going to calculate these Poincaré's series in the quadratic and homogeneous case.

Theorem 3.1. *If $\varpi_1 = ... = \varpi_4 = 1$ and $\varpi(P_1) = \varpi(P_2) = 2$, then as K-vector spaces, $H_i(\Omega^\bullet(\mathcal{A}),\pi), i = 0,1,2,3,4$, have the following Poincaré series :*

$$\begin{aligned}
P(H_0(\mathcal{A},\pi),t) &= \tfrac{2t^2+4t+1}{(1-t^2)^2};\\
P(H_1(\mathcal{A},\pi),t) &= \tfrac{t^4+4t^3+4t^2+4t}{(1-t^2)^2};\\
P(H_2(\mathcal{A},\pi),t) &= \tfrac{2t^4+4t^3}{(1-t^2)^2};\\
P(H_3(\mathcal{A},\pi),t) &= \tfrac{t^4}{(1-t^2)^2};\\
P(H_4(\mathcal{A},\pi),t) &= \tfrac{t^4}{(1-t^2)^2}.
\end{aligned}$$

Let $\delta = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4$, and $\rho = \varpi_1 x_1 dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 + \varpi_2 x_2 dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_4 + \varpi_3 x_3 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_4 + \varpi_4 x_4 dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_3$.

Theorem 3.2. *$H_4(\mathcal{A},\pi)$ is a rank 1 free $K[P_1,P_2]$-module generated by δ.*

Theorem 3.3. *If $|\varpi| = 2\varpi(P_1)$, then*
$H_3(\mathcal{A},\pi)$ is a rank 1 free $K[P_1,P_2]$-module generated by ρ.

Proof. We have proved that, if $|\varpi| = 2\varpi(P_1)$, then $ker\partial_3 = Im\partial_4 + K[P_1,P_2]\vec{e}_\varpi$.
Now, let $\alpha \in K[P_1,P_2]$ and $U \in \mathcal{A}$ such that $\alpha\vec{e}_\varpi = \vec{\nabla}U \bar{\times}(\vec{\nabla}P_1 \times \vec{\nabla}P_2)$. We can suppose that α is a weight homogeneous polynomial.
We have $0 = Div(\vec{\nabla}U \bar{\times}(\vec{\nabla}P_1 \times \vec{\nabla}P_2)) = Div(\alpha\vec{e}_\varpi) = (\varpi(\alpha) + |\varpi|)\alpha$.
Therefore $\alpha = 0$. □

Now we suppose that $P_1 = Q_1 + Q_2$, $P_2 = Q_2$ where : Q_1 and Q_2 are given by :

$$Q_1 = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \tag{11}$$

$$Q_2 = \frac{1}{2}(x_4^2 + J_1x_1^2 + J_2x_2^2 + J_3x_3^2). \tag{12}$$

$\varpi_1 = ... = \varpi_4 = 1$; $J_i \neq J_j$ if $i \neq j$; for all $i = 1,2,3,\ J_i \neq -1,0,1$.

Theorem 3.4. *[2] The homological group $H_0(\mathcal{A},\pi)$ is a rank 7 free $K[P_1,P_2]$-module generated by $(\mu_i)_{0\leq i\leq 6}=(1,x_1,x_2,x_3,x_4,x_1^2,x_3^2)$.*

Remark 3.2. *We can remark that $H_0(\mathcal{A},\pi)\simeq K[P_1,P_2]\otimes\mathcal{A}_{sing}(P_1,P_2)$. Here $\mathcal{A}_{sing}(P_1,P_2)=\frac{\mathcal{A}}{J}$, where J is the ideal generated by P_1,P_2 and the 2×2 minors of the Jacobian matrix of (P_1,P_2).*

Theorem 3.5. *The homological group $H_1(\mathcal{A},\pi)$ is a free $K[P_1,P_2]$ module given by :*

$$H_1(\mathcal{A},\pi)\simeq(\bigoplus_{k=1}^{6}K[P_1,P_2]\overrightarrow{\nabla}\mu_k)\oplus(\bigoplus_{k=1}^{5}K[P_1,P_2]\mu_k\overrightarrow{\nabla}P_1)\oplus K[P_1,P_2]\overrightarrow{\nabla}P_1\oplus K[P_1,P_2]\overrightarrow{\nabla}P_2$$

where, $(\mu_i)_{0\leq i\leq 6}=(1,x_1,x_2,x_3,x_4,x_1^2,x_3^2)$.

Proof. Let $\overrightarrow{H}\in ker\partial_1$.
Then $\overrightarrow{H}=\alpha_1\overrightarrow{\nabla}P_1+\alpha_2\overrightarrow{\nabla}P_2+\overrightarrow{\nabla}\alpha_3$, $\alpha_i\mathcal{A}$.
Using the previous result :

$$\alpha_l=f(\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{H}_l)\cdot(\overrightarrow{\nabla}P_1\times\overrightarrow{\nabla}P_2)+\sum_{i=0}^{N_l}\sum_{j=0}^{M_l}\sum_{k=0}^{6}\lambda^l_{i,j,k}P_1^iP_2^j\mu_k$$

For $l=1,2$, we have :

$$\begin{aligned}
\alpha_l\overrightarrow{\nabla}P_l &= f(\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{H}_l)\cdot(\overrightarrow{\nabla}P_1\times\overrightarrow{\nabla}P_2)\overrightarrow{\nabla}P_l+\sum_{i=0}^{N_l}\sum_{j=0}^{M_l}\sum_{k=0}^{6}\lambda^l_{i,j,k}P_1^iP_2^j\mu_k\overrightarrow{\nabla}P_l\\
&=\partial_2\left((-1)^{l+1}\overrightarrow{H}_l\times\overrightarrow{\nabla}P_l\right)+\sum_{i=0}^{N_l}\sum_{j=0}^{M_l}\sum_{k=0}^{6}\lambda^l_{i,j,k}P_1^iP_2^j\mu_k\overrightarrow{\nabla}P_l\\
\overrightarrow{\nabla}\alpha_3 &= \overrightarrow{\nabla}\left(f(\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{H}_l)\cdot(\overrightarrow{\nabla}P_1\times\overrightarrow{\nabla}P_2)\right)+\sum_{k=1}^{6}\left(\sum_{i=0}^{N_3}\sum_{j=0}^{M_3}\lambda^l_{i,j,k}P_1^iP_2^j\mu_k\right)\overrightarrow{\nabla}\mu_k\\
&\quad+\sum_{i=0}^{N_3}\sum_{j=1}^{M_3}\sum_{k=0}^{6}j\lambda^3_{i,j,k}P_1^iP_2^{j-1}\mu_k\overrightarrow{\nabla}P_2\\
&\quad+\sum_{i=1}^{N_3}\sum_{j=0}^{M_3}\sum_{k=0}^{6}i\lambda^3_{i,j,k}P_1^{i-1}P_2^j\mu_k\overrightarrow{\nabla}P_1\\
&=\partial_2(-\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{H}_3)+\sum_{k=1}^{6}\left(\sum_{i=0}^{N_3}\sum_{j=0}^{M_3}\lambda^l_{i,j,k}P_1^iP_2^j\mu_k\right)\overrightarrow{\nabla}\mu_k\\
&\quad+\sum_{k=0}^{6}\left(\sum_{i=1}^{N_3}\sum_{j=0}^{M_3}i\lambda^3_{i,j,k}P_1^{i-1}P_2^j\mu_k\overrightarrow{\nabla}P_1+\sum_{i=0}^{N_3}\sum_{j=1}^{M_3}j\lambda^3_{i,j,k}P_1^iP_2^{j-1}\mu_k\overrightarrow{\nabla}P_2\right)
\end{aligned}$$

Therefore : $ker\partial_1=Im\partial_2+I_1$, where :

$$I_1=\left[(\bigoplus_{k=1}^{6}K[P_1,P_2]\overrightarrow{\nabla}\mu_k)+(\bigoplus_{k=0}^{6}K[P_1,P_2]\mu_k\overrightarrow{\nabla}P_1)+(\bigoplus_{k=0}^{6}K[P_1,P_2]\mu_k\overrightarrow{\nabla}P_2)\right]$$

Then $H_1(\mathcal{A},\pi) = \frac{I_1}{I_1 \cap Im\partial_2}$.
Let $\overrightarrow{G}_i = f(\overrightarrow{\nabla} x_i \times \vec{e}_\varpi)$, $\overrightarrow{G}'_i = f(\overrightarrow{\nabla} x_i^2 \times \vec{e}_\varpi)$, for $i = 1,2,3,4$.
We have $\partial_2(\overrightarrow{G}_i) = -J_i x_i \overrightarrow{\nabla} P_1 + (J_i+1) x_i \overrightarrow{\nabla} P_2 + 2\left(J_i P_1 - (J_i+1)P_2\right)\overrightarrow{\nabla} x_i$, for $i = 1,2,3$ and $\partial_2(\overrightarrow{G}_4) = -x_4 \overrightarrow{\nabla} P_1 + x_4 \overrightarrow{\nabla} P_2 + 2\left(P_1 - P_2\right)\overrightarrow{\nabla} x_4$.
Therefore $x_i \overrightarrow{\nabla} P_2$ can be written as a $K[P_1,P_2]$-linear sum of $x_i \overrightarrow{\nabla} P_1$ and $\overrightarrow{\nabla} x_i$.
On the other hand,
$\partial_2(\overrightarrow{G}'_i) = 3J_i x_i^2 \overrightarrow{\nabla} P_1 - (J_i+1)x_i^2 \overrightarrow{\nabla} P_2 + 4(P_2 \overrightarrow{\nabla} P_1 - P_1 \overrightarrow{\nabla} P_2) + 4\left(J_i P_1 - (J_i+1)P_2\right)\overrightarrow{\nabla} x_i^2$, for $i = 1,2,3$ and $\partial_2(\overrightarrow{G}'_4) = 3x_4^2 \overrightarrow{\nabla} P_1 - x_4^2 \overrightarrow{\nabla} P_2 + 4(P_2 \overrightarrow{\nabla} P_1 - P_1 \overrightarrow{\nabla} P_2) + 4\left(P_1 - P_2\right)\overrightarrow{\nabla} x_4^2$.
But using the Casimir relations, $x_4^2 = -2J_2 P_1 + (J_2+1)P_2 + J_{21} x_1^2 + J_{23} x_4^2$, where $Jij = J_i - J_j$, we obtain :

$$\begin{aligned}\partial_2(\overrightarrow{G}'_4) - \partial_2\left(\frac{J_{21}}{J_1+1}\overrightarrow{G}'_1\right) - \partial_2\left(\frac{J_{23}}{J_3+1}\overrightarrow{G}'_3\right) = \frac{3J_{21}}{J_1+1} x_1^2 \overrightarrow{\nabla} P_1 + \frac{3J_{23}}{J_3+1} x_3^2 \overrightarrow{\nabla} P_1 - 6J_2 P_1 \overrightarrow{\nabla} P_1 + \\ + 6(J_2+1)P_2 \overrightarrow{\nabla} P_1 + 6J_2 P_1 \overrightarrow{\nabla} P_2 - 6(J_2+1)P_2 \overrightarrow{\nabla} P_2 - \frac{4J_{21}}{J_1+1}(P_2 \overrightarrow{\nabla} P_1 - P_1 \overrightarrow{\nabla} P_2) + \\ - \frac{4J_{21}}{J_1+1}(J_1 - (J_1+1)P_2)\overrightarrow{\nabla} x_3^2 - \frac{4J_{23}}{J_3+1}(P_2 \overrightarrow{\nabla} P_1 - P_1 \overrightarrow{\nabla} P_2) - \frac{4J_{23}}{J_3+1}(J_3 - (J_3+1)P_2)\overrightarrow{\nabla} x_3^2 + \\ + 4(P_2 \overrightarrow{\nabla} P_1 - P_1 \overrightarrow{\nabla} P_2) - 8J_2\left(P_1 - P_2\right)\overrightarrow{\nabla} P_1 + 8(J_2+1)\left(P_1 - P_2\right)\overrightarrow{\nabla} P_2 + \\ + 4J_{21}\left(P_1 - P_2\right)\overrightarrow{\nabla} x_1^2 + 4J_{23}\left(P_1 - P_2\right)\overrightarrow{\nabla} x_3^2.\end{aligned}$$

Therefore $ker\partial_1 = Im\partial_2 + I'_1$, where

$$I'_1 = \left(\sum_{k=1}^{6} K[P_1,P_2]\overrightarrow{\nabla}\mu_k\right) + \left(\sum_{k=1}^{5} K[P_1,P_2]\mu_k \overrightarrow{\nabla} P_1\right) + K[P_1,P_2]\overrightarrow{\nabla} P_1 + K[P_1,P_2]\overrightarrow{\nabla} P_2.$$

Then $H_1(\mathcal{A},\pi) = \frac{I'_1}{I'_1 \cap Im\partial_2}$.
But $H_1(\mathcal{A},\pi)$ and I'_1 have the same Poincaré series. Thus $P(I'_1 \cap Im\partial_2, t) = 0$ and $I'_2 \cap Im\partial_2 = 0$. $\square$

Theorem 3.6. *The homological group $H_2(\mathcal{A},\pi)$ is a free $K[P_1,P_2]$ module given by :*

$$H_2(\mathcal{A},\pi) \simeq \left(\bigoplus_{k=1}^{5} K[P_1,P_2](\overrightarrow{\nabla}\mu_k \times \overrightarrow{\nabla} P_1)\right) \oplus K[P_1,P_2](\overrightarrow{\nabla} P_1 \times \overrightarrow{\nabla} P_1).$$

where, $(\mu_i)_{1 \le i \le 6} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_1^2, x_3^2)$.

Proof. Let $\overrightarrow{G} \in ker\partial_2$.
$\overrightarrow{G} = \alpha_0 \overrightarrow{\nabla} P_1 \times \overrightarrow{\nabla} P_2 + \overrightarrow{\nabla}\alpha_1 \times \overrightarrow{\nabla} P_1 + \overrightarrow{\nabla}\alpha_1 \times \overrightarrow{\nabla} P_2$, $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{A}$.
We have

$$\alpha_l = f(\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{H}_l)\cdot(\overrightarrow{\nabla} P_1 \times \overrightarrow{\nabla} P_2) + \sum_{i=0}^{N_l}\sum_{j=0}^{M_l}\sum_{k=0}^{6}\lambda^l_{i,j,k} P_1^i P_2^j \mu_k$$

But :
$\left(f(\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{H}_0)\cdot(\overrightarrow{\nabla} P_1 \times \overrightarrow{\nabla} P_2)\right)\overrightarrow{\nabla} P_1 \times \overrightarrow{\nabla} P_2 = \partial_3(\overrightarrow{H}_0 \bar{\times}(\overrightarrow{\nabla} P_1 \times \overrightarrow{\nabla} P_2))$;

$\partial_3(\overrightarrow{\nabla}P_1\bar{\times}(\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{H}_l)) = -\overrightarrow{\nabla}\left(f(\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{H}_l)\cdot(\overrightarrow{\nabla}P_1\times\overrightarrow{\nabla}P_2)\right)\times\overrightarrow{\nabla}P_l$, for $l=1,2$.
On the other hand

$$\partial_3(\lambda^l_{i,j,k}P_1^iP_2^j\mu_k\vec{e}_\varpi) = \varpi(\mu_k)\lambda^l_{i,j,k}P_1^iP_2^j\mu_k\overrightarrow{\nabla}P_1\times\overrightarrow{\nabla}P_2+\varpi(P_2)\lambda^l_{i,j,k}P_1^iP_2^{j+1}\mu_k\overrightarrow{\nabla}\mu_k\times\overrightarrow{\nabla}P_2+ \\ -\varpi(P_1)\lambda^l_{i,j,k}P_1^{i+1}P_2^j\mu_k\overrightarrow{\nabla}\mu_k\times\overrightarrow{\nabla}P_2.$$

Therefore $ker\partial_2 = Im\partial_3 + I_2$, where

$$I_2 = \sum_{k=1}^{6}K[P_1,P_2]\overrightarrow{\nabla}\mu_k\times\overrightarrow{\nabla}P_1 + \sum_{k=1}^{6}K[P_1,P_2]\overrightarrow{\nabla}\mu_k\times\overrightarrow{\nabla}P_2 + K[P_1,P_2]\overrightarrow{\nabla}P_1\times\overrightarrow{\nabla}P_2.$$

Then $H_2(\mathcal{A},\pi) = \frac{I_2}{I_2\cap Im\partial_3}$.
Let $\overrightarrow{K}_i = (K_{i1},K_{i2},K_{i3},K_{i4})^t$, where $K_{ij}=\delta_{ij}x_i$, and $\overrightarrow{K}'_i = (K'_{i1},K'_{i2},K'_{i3},K'_{i4})^t$, where $K'_{ij}=\delta_{ij}$.
We have $\partial_3(\overrightarrow{K}'_i) = J_i\overrightarrow{\nabla}x_i\times\overrightarrow{\nabla}P_1 - (J_i+1)\overrightarrow{\nabla}x_i\times\overrightarrow{\nabla}P_2$.
Then for $i=1,2,3$, $\overrightarrow{\nabla}x_i\times\overrightarrow{\nabla}P_2$ is equal to $\frac{J_i}{J_i+1}\overrightarrow{\nabla}x_i\times\overrightarrow{\nabla}P_1$ modulo $Im\partial_3$.
We also have $\overrightarrow{\nabla}x_4\times\overrightarrow{\nabla}P_2 = \partial(-\overrightarrow{K}'_4)+\overrightarrow{\nabla}x_4\times\overrightarrow{\nabla}P_1$.
On the other hand, $\partial_3(\overrightarrow{K}_i) = \overrightarrow{\nabla}P_1\times\overrightarrow{\nabla}P_2 + J_i\overrightarrow{\nabla}x_i^2\times\overrightarrow{\nabla}P_1 - (J_i+1)\overrightarrow{\nabla}x_i^2\times\overrightarrow{\nabla}P_2$, for $i=1,2,3$, and $\partial_3(\overrightarrow{K}_4) = \overrightarrow{\nabla}P_1\times\overrightarrow{\nabla}P_2 + \overrightarrow{\nabla}x_4^2\times\overrightarrow{\nabla}P_1 - \overrightarrow{\nabla}x_4^2\times\overrightarrow{\nabla}P_2$.
But using the Casimir relations, $x_4^2 = -2J_2P_1+(J_2+1)P_2+J_{21}x_1^2+J_{23}x_4^2$, where $Jij = J_i-J_j$, we obtain :

$$\partial_3(\overrightarrow{K}_4) = \partial_3(\frac{J_{21}}{J_1+1}\overrightarrow{K}_1+\frac{J_{23}}{J_3+1}\overrightarrow{K}_3) - (1+\frac{J_{21}}{J_1+1}+\frac{J_{23}}{J_3+1})\overrightarrow{\nabla}P_1\times\overrightarrow{\nabla}P_2+ \\ +\frac{J_{21}}{J_1+1}\overrightarrow{\nabla}x_1^2\times\overrightarrow{\nabla}P_1+\frac{J_{23}}{J_3+1}\overrightarrow{\nabla}x_3^2\times\overrightarrow{\nabla}P_1.$$

Then we can explain $\overrightarrow{\nabla}x_3^2\times\overrightarrow{\nabla}P_1$ as a K-linear sum of $\overrightarrow{\nabla}x_1^2\times\overrightarrow{\nabla}P_1$ and $\overrightarrow{\nabla}P_1\times\overrightarrow{\nabla}P_2$ modulo $Im\partial_3$.
Therefore $ker\partial_2 = Im\partial_3 + I'_2$, where

$$I'_2 = \sum_{k=1}^{6}K[P_1,P_2]\overrightarrow{\nabla}\mu_k\times\overrightarrow{\nabla}P_1.$$

Then $H_2(\mathcal{A},\pi) = \frac{I'_2}{I'_2\cap Im\partial_3}$.
But $H_2(\mathcal{A},\pi)$ and I'_2 have the same Poincaré series. Thus $P(I'_2\cap Im\partial_3,t)=0$ and $I'_2\cap Im\partial_3 = 0$. □

References

[1] Michael Artin and William F. Schelter, *Graded algebras of global dimension* 3, Adv. in Math. **66** (1987), no. 2, 171–216.

[2] H. Boos, M. Jimbo, T. Miwa, F. Smirnov, and Y. Takeyama, *Traces on the Sklyanin algebra and correlation functions of the eight-vertex model*, J. Phys. A **38** (2005), no. 35, 7629–7659.

[3] Joël Briançon and Hélène Maynadier-Gervais, *Sur le nombre de Milnor d'une singularité semi-quasi-homogène*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **334** (2002), no. 4, 317–320.

[4] Jean-Luc Brylinski, *A differential complex for Poisson manifolds*, J. Differential Geom. **28** (1988), no. 1, 93–114.

[5] V. G. Drinfel′d, *Hamiltonian structures on Lie groups, Lie bialgebras and the geometric meaning of classical Yang-Baxter equations*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **268** (1983), no. 2, 285–287.

[6] Jean-Paul Dufour and Nguyen Tien Zung, *Poisson structures and their normal forms*, Progress in Mathematics, vol. 242, Birkhäuser Verlag, Basel, 2005.

[7] David Eisenbud, *Commutative algebra*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 150, Springer-Verlag, New York, 1995, With a view toward algebraic geometry.

[8] Benoit Fresse, *Théorie des opérades de Koszul et homologie des algèbres de Poisson*, Ann. Math. Blaise Pascal **13** (2006), no. 2, 237–312.

[9] Viktor L. Ginzburg, *Grothendieck groups of Poisson vector bundles*, J. Symplectic Geom. **1** (2001), no. 1, 121–169.

[10] Viktor L. Ginzburg and Jiang-Hua Lu, *Poisson cohomology of Morita-equivalent Poisson manifolds*, Internat. Math. Res. Notices (1992), no. 10, 199–205.

[11] Viktor L. Ginzburg and Alan Weinstein, *Lie-Poisson structure on some Poisson Lie groups*, J. Amer. Math. Soc. **5** (1992), no. 2, 445–453.

[12] G. Khimshiashvili, *On one class of exact Poisson structures*, Proc. A. Razmadze Math. Inst. **119** (1999), 111–120.

[13] ———, *On one class of affine Poisson structures*, Bull. Georgian Acad. Sci. **161** (2000), no. 3, 395–397.

[14] G. Khimshiashvili and R. Przybysz, *On generalized Sklyanin algebras*, Georgian Math. J. **7** (2000), no. 4, 689–700.

[15] André Lichnerowicz, *Les variétés de Poisson et leurs algèbres de Lie associées*, J. Differential Geometry **12** (1977), no. 2, 253–300.

[16] E. J. N. Looijenga, *Isolated singular points on complete intersections*, London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 77, Cambridge University Press, Cambridge, 1984.

[17] Nicolas Marconnet, *Homologies of cubic Artin-Schelter regular algebras*, J. Algebra **278** (2004), no. 2, 638–665.

[18] Philippe Monnier, *Poisson cohomology in dimension two*, Israel J. Math. **129** (2002), 189–207.

[19] A. V. Odesskiĭ and B. L. Feĭgin, *Sklyanin's elliptic algebras*, Funktsional. Anal. i Prilozhen. **23** (1989), no. 3, 45–54, 96.

[20] A. V. Odesskiĭ and V. N. Rubtsov, *Polynomial Poisson algebras with a regular structure of symplectic leaves*, Teoret. Mat. Fiz. **133** (2002), no. 1, 3–23.

[21] Anne Pichereau, *Poisson (co)homology and isolated singularities*, J. Algebra **299** (2006), no. 2, 747–777.

[22] Kyoji Saito, *On a generalization of de-Rham lemma*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **26** (1976), no. 2, vii, 165–170.

[23] E. K. Sklyanin, *Some algebraic structures connected with the Yang-Baxter equation*, Funktsional. Anal. i Prilozhen. **16** (1982), no. 4, 27–34, 96.

[24] ______, *Some algebraic structures connected with the Yang-Baxter equation. Representations of a quantum algebra*, Funktsional. Anal. i Prilozhen. **17** (1983), no. 4, 34–48.

[25] S. P. Smith and J. T. Stafford, *Regularity of the four-dimensional Sklyanin algebra*, Compositio Math. **83** (1992), no. 3, 259–289.

[26] Joanna M. Staniszkis, *The 4-dimensional Sklyanin algebra*, J. Algebra **167** (1994), no. 1, 104–115.

[27] Serge Roméo Tagne Pelap, *On the Hochshild homology of elliptic Sklyanin algebra*, Preprint LAREMA, in progress (2008).

[28] Michel Van den Bergh, *Noncommutative homology of some three-dimensional quantum spaces*, Proceedings of Conference on Algebraic Geometry and Ring Theory in honor of Michael Artin, Part III (Antwerp, 1992), vol. 8, 1994, pp. 213–230.

[29] Pol Vanhaecke, *Integrable systems in the realm of algebraic geometry*, second ed., Lecture Notes in Mathematics, vol. 1638, Springer-Verlag, Berlin, 2001.

[30] Charles A. Weibel, *An introduction to homological algebra*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 38, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

[31] Ping Xu, *Poisson cohomology of regular Poisson manifolds*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **42** (1992), no. 4, 967–988.

[32] ———, *Gerstenhaber algebras and BV-algebras in Poisson geometry*, Comm. Math. Phys. **200** (1999), no. 3, 545–560.

Laboratoire Angevin de Recherche en Mathématiques Université D'Angers Département de Mathématiques
E-mail address : `pelap@math.univ-angers.fr`

Annexe B

On the Hochschild homology of elliptic Sklyanin algebras

On the Hochschild homology of elliptic Sklyanin algebras

Serge Roméo Tagne Pelap

mai 2008

Abstract

In this paper, we compute the Hochschild homology of elliptic Sklyanin algebras. These algebras are deformations of polynomial algebra with a Poisson bracket called the Sklyanin Poisson bracket.

Keywords : Hochschild homology, quantum space, Poisson structures, Poisson homology.

Introduction

The family of algebras defined by Sklyanin in ([20]), which today carries his name, is naturally associated with two parameters : an elliptic curve and a point on this curve. It is a family of associative algebras with 4 generators and six quadratic relations. These algebras are flat deformations of polynomial algebras with four variables.

The paper ([17]) of Odesskii and Feigin gives a generalization of these algebras. Considering an elliptic curve $\mathcal{E}$ and a point η of this curve, the elliptic algebras or algebras of Feigin-Odesskii are the family of associative algebras $Q_{n,k}(\mathcal{E},\eta)$, $k<n$ (which are mutually prime), with n generators and the relations :

$$\sum_{r\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \frac{\theta_{j-i+r(k-1)}(0)}{\theta_{kr}(\eta)\theta_{j-i-r}(-\eta)} x_{j-r}x_{i+r} = 0 \tag{1}$$

where θ_α, $\alpha\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, are theta functions ([17]).

These algebras have the following properties ([17]) :

$Q_{n,k}(\mathcal{E},0)=\mathbb{C}[x_1,\cdots,x_n]$

$Q_{n,n-1}(\mathcal{E},\eta)=\mathbb{C}[x_1,\cdots,x_n]$

$Q_{n,k}(\mathcal{E},\eta)\simeq Q_{n,k'}(\mathcal{E},\eta)\ if\ kk'\equiv 1(mod\ n)$.

The algebras $Q_{n,k}(\mathcal{E},\eta)$ can be considered as a graded deformation of polynomial ring. The corresponding Poisson algebra is denoted by $q_{n,k}(\mathcal{E})$. Among these Poisson structures $q_{n,k}(\mathcal{E})$, there are only two ($q_{3,1}(\mathcal{E})$ and $q_{4,1}(\mathcal{E})$) which are Jacobian Poisson structures. Considering $n-2$ polynomials P_i in K^n with coordinates x_i, $i=1,...,n$, where K is a field of characteristic zero, for any polynomial $\lambda\in K[x_1,...,x_n]$, the associated Jacobian Poisson is given by the bracket :

$$\{\cdot,\cdot\}: K[x_1,...,x_n]\otimes K[x_1,...,x_n]\longrightarrow K[x_1,...,x_n]$$

$$\{f,g\} = \lambda \frac{df \wedge dg \wedge dP_1 \wedge ... \wedge dP_{n-2}}{dx_1 \wedge dx_2 \wedge ... \wedge dx_n}, \quad f,g \in K[x_1,...,x_n]. \tag{2}$$

Let us describe our basic Poisson algebra $q_{4,1}(\mathcal{E})$ in detail.
Let

$$P_1 = \frac{1}{2}(x_0^2 + x_2^2) + kx_1x_3,$$

$$P_2 = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_3^2) + kx_0x_2,$$

where $k \in \mathbb{C}$.
The Poisson Sklyanin bracket is given on $\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3]$ by the formula :

$$\{f,g\} := \frac{df \wedge dg \wedge dP_1 \wedge dP_2}{dx_0 \wedge dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3}.$$

Then the brackets between the coordinate functions are defined by (mod 4) :

$$\{x_i, x_{i+1}\} = k^2 x_i x_{i+1} - x_{i+2}x_{i+3};$$

$$\{x_i, x_{i+2}\} = k(x_{i+3}^2 - x_{i+1}^2),$$

$i = 0, 1, 2, 3$.
We will follow Sklyanin's version of this structure, considering the quadrics P_1, P_2 in $\mathbb{C}^4$ and the complete intersection of these quadrics :

$$P_1 = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \tag{3}$$

$$P_2 = \frac{1}{2}(x_0^2 + J_1x_1^2 + J_2x_2^2 + J_3x_3^2) \tag{4}$$

The bracket of this algebra $q_{4,1}(\mathcal{E})$ is given by the following formulas :

$$\{x_0, x_i\} = (-1)^i det(\frac{\partial P_k}{\partial x_l}), \ l \neq 0, i; \ k = 1, 2;$$

$$\{x_i, x_j\} = (-1)^{i+j} det(\frac{\partial P_k}{\partial x_l}), \ l \neq i, j; \ k = 1, 2.$$

In ([26]), Michel Van den Bergh computes the Hochschild homology of $Q_{3,1}(\mathcal{E}, \eta)$. The goal of this paper is to compute the Hochschild homology of $Q_{4,1}(\mathcal{E}, \eta)$ using a method similar to that of Van den Bergh and Nicolas Marconnet ([16]).
The paper is organized as follows. We start by reviewing some general facts on the Hochschild homology, Poisson homology and, Koszul algebras :
If A is an associative algebra over K, where K is a field. One can define the complex $(C_\star(A), b)$, where $C_n(A) = A^{\otimes(n+1)}$, and the differential is given by :

$$b(a_0 \otimes \cdots \otimes a_n) = (-1)^n a_n a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n-1} + \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i a_0 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n.$$

The homology of this complex is denoted by $HH_\star(A)$, and is called the Hochschild homology of A with coefficients in A.
On the other hand, considering a commutative k-algebra $\mathcal{R}$, we say that $\mathcal{R}$ is a Poisson algebra if $\mathcal{R}$ is endowed with an antisymmetric biderivation $\{\cdot,\cdot\} : \mathcal{R}\times\mathcal{R} \to \mathcal{R}$ such that $(\mathcal{R}, \{\cdot,\cdot\})$ is a Lie algebra.
In other words, $\mathcal{R}$ is endowed with a K-bilinear map $\{\cdot,\cdot\} : \mathcal{R}\times\mathcal{R} \to \mathcal{R}$ such that :

$$\{a, bc\} = \{a, b\}c + b\{a, c\} \qquad \text{(Leibniz's rule);}$$

$$\{a, b\} = -\{b, a\} \qquad \text{(antisymetry);}$$

$$\{a, \{b, c\}\} + \{b, \{c, a\}\} + \{c, \{a, b\}\} = 0 \quad \text{(Jacobi's identity).}$$

where $a, b, c \in \mathcal{R}$.

The canonical or Poisson homology was introduced independently by Brylinski ([3]) (as an important tool in computations of Hochschild and cyclic homology), and by Koszul and Gelfand-Dorfman (inspired by their algebraic approach to the study of bi-hamiltonian structures).
Given a Poisson algebra $(\mathcal{R}, \{\cdot,\cdot\})$. This homology is defined as the homology of a differential complex degree -1 $\{\Omega^\bullet(\mathcal{R}), \partial\}$, where the $(-1)-$differential ∂ is given on the decomposable differential forms as

$$\partial_k(f_0 df_1 \wedge ... \wedge df_k) = \sum_{1\le i\le k} (-1)^{i+1}\{f_0, f_i\} df_1 \wedge ... \wedge \widehat{df_i} \wedge ... \wedge df_k$$

$$+ \sum_{1\le i<j\le k} (-1)^{i+j} f_0 d\{f_i, f_j\} \wedge df_1 \wedge ... \wedge \widehat{df_i} \wedge ...\widehat{df_j} \wedge ... \wedge df_k$$

and acts from $\Omega^k(\mathcal{R})$ to $\Omega^{k-1}(\mathcal{R})$.
In this first section, we also introduce some generality about Koszul algebras.
The next part is devoted to generalities on associative elliptic algebra $Q_{4,1}(\mathcal{E}, \eta)$, also called the Sklyanin algebra. More explicitly, considering V a four dimensional $\mathbb{C}$-vector space with S_0, S_1, S_2, S_3 as a basis.
The Sklyanin algebra algebra $Q_{4,1}(\mathcal{E}, \eta) = T(V)/(I_2)$ where (I_2) is a bilateral ideal generated by the subspace $I_2 \subseteq V \otimes V$ with basis :

$$f_{0i} = [S_0, S_i] - \alpha_i(S_j S_k + S_k S_j);$$
$$f_{jk} = [S_j, S_k] - (S_0 S_i + S_i S_0),$$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 \in \mathbb{C}$, and (i, j, k) is a cyclic permutation of $(1, 2, 3)$.
Smith and Stanford proved in ([22]), this algebra is a Koszul algebra. We use that to compute two of Hochschild :

$$q(\Pi) = 3(S_2 \otimes S_3 \otimes f_{01} + S_3 \otimes S_1 \otimes f_{02} + S_1 \otimes S_2 \otimes f_{03} + S_0 \otimes S_1 \otimes f_{23}) \in Q_{4,1}(\mathcal{E}, \eta)^{\otimes 4};$$

$$q(\Delta) = 1 \otimes q(\Pi) \in Q_{4,1}(\mathcal{E}, \eta)^{\otimes 5}.$$

The last and the main part of this paper is devoted to the computation of the Hochschild homology. We obtain the following result :

Theorem 0.1.

- $HH_4(Q_{4,1}(\mathcal{E},\eta))$ *is a free* $\mathbb{C}[\widetilde{P}_1,\widetilde{P}_2]$*-module of rank* 1 *generated by the homogeneous element* Δ *of degree* 4.
- $HH_3(Q_{4,1}(\mathcal{E},\eta))$ *is a free* $\mathbb{C}[\widetilde{P}_1,\widetilde{P}_2]$*-module of rank* 1 *generated by the homogeneous element* Π *of degree* 4.
- $HH_2(Q_{4,1}(\mathcal{E},\eta))$ *is a free* $\mathbb{C}[\widetilde{P}_1,\widetilde{P}_2]$*-module of rank* 6 *generated by homogeneous elements of respective degrees* $3,3,3,3,4,4$.
- $HH_1(Q_{4,1}(\mathcal{E},\eta))$ *is a free* $\mathbb{C}[\widetilde{P}_1,\widetilde{P}_2]$*-module of rank* 13 *generated by homogeneous elements of respective degrees* $1,1,1,1,2,2,2,2,3,3,3,3,4$.
- $HH_0(Q_{4,1}(\mathcal{E},\eta))$ *is a free* $\mathbb{C}[\widetilde{P}_1,\widetilde{P}_2]$*-module of rank* 7 *generated by homogeneous elements of respective degrees* $0,1,1,1,1,2,2$.

Here $\mathbb{C}[\widetilde{P}_1,\widetilde{P}_2]$ *is the center of algebra* $Q_{4,1}(\mathcal{E},\eta)$.

Corollary 0.1. *As* $\mathbb{C}$*-vector spaces, the homological groups* $HH_i(Q_{4,1}(\mathcal{E},\eta))$ *have the following Poincaré series :*

$$\begin{array}{lcl}
P(P(HH_0(Q_{4,1}(\mathcal{E},\eta)),t) & = & \frac{2t^2+4t+1}{(1-t^2)^2};\\
P(HH_1(Q_{4,1}(\mathcal{E},\eta)),t) & = & \frac{t^4+4t^3+4t^2+4t}{(1-t^2)^2};\\
P(HH_2(Q_{4,1}(\mathcal{E},\eta)),t) & = & \frac{2t^4+4t^3}{(1-t^2)^2};\\
P(HH_3(A_h),t) & = & \frac{t^4}{(1-t^2)^2};\\
P(HH_4(Q_{4,1}(\mathcal{E},\eta)),t) & = & \frac{t^4}{(1-t^2)^2}.
\end{array}$$

Acknowledgements. The author is grateful to Jean-Claude Thomas for useful comments and discussions. This work is a part of my thesis prepared at the University of Angers. I would like to take this opportunity to thank my advisors, Vladimir Roubtsov and Bitjong Ndombol, for suggesting that I tackle this interesting problem and I also thank them for being available during this projet. This work was partially supported by the Programme SARIMA.

1 Preliminary facts

1.1 Hochschild homology

Let A be an associative algebra over K, where K is a field.
One can define the complex $(C_\star(A), b)$ by :

$$C_n(A) = A^{\otimes(n+1)};$$

$$b(a_0 \otimes \cdots \otimes a_n) = (-1)^n a_n a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n-1} + \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i a_0 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n$$

The Hochschild homology of A with coefficients in A is the homology of the complex $(C_\star(A), b)$. This homology is denoted by $HH_\star(A)$.
We denote by B Connes's coboundary $C(A) \longrightarrow C(A)$ defined as follows :

$$B(a_0 \otimes \cdots \otimes a_n) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^{ni} 1 \otimes a_i \otimes \cdots \otimes a_n \otimes a_0 \otimes \cdots \otimes a_{i-1} + (-1)^n \sum_{i=0}^{n}(-1)^{ni} a_i \otimes \cdots \otimes a_n \otimes a_0 \otimes \cdots \otimes a_{i-1} \otimes 1.$$

We have $b \circ B + B \circ b = 0$.

1.2 Poisson homology

A Poisson bracket on a commutative algebra $\mathcal{R}$ is an antisymmetric biderivation $\{\cdot,\cdot\} : \mathcal{R} \times \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ such that $(\mathcal{R}, \{\cdot,\cdot\})$ is a Lie algebra.
Then $(\mathcal{R}, \{\cdot,\cdot\})$ is called a Poisson algebra.
Let us consider $n-2$ polynomials Q_i in $K[x_1, \cdots, x_n]$, where K is a field of characteristic zero. For any polynomial $\lambda \in K[x_1, ..., x_n]$, we can define a bilinear differential operation :

$$\{\cdot,\cdot\} : K[x_1, ..., x_n] \otimes K[x_1, ..., x_n] \longrightarrow K[x_1, ..., x_n]$$

by the formula

$$\{f, g\} = \lambda \frac{df \wedge dg \wedge dQ_1 \wedge ... \wedge dQ_{n-2}}{dx_1 \wedge dx_2 \wedge ... \wedge dx_n}, f, g \in K[x_1, ..., x_n] \tag{5}$$

This operation gives a Poisson algebra structure on $K[x_1, ..., x_n]$. The polynomials $Q_i, i = 1, ..., n-2$ are Casimir functions for the brackets (5) and any Poisson structure in K^n with $n-2$ generic Casimirs Q_i is written in this form. Every Poisson structure of this form is called a Jacobian Poisson structure (JPS).
The case $n = 4$ in (5) corresponds to the classical (generalized) Sklyanin quadratic Poisson algebra. The real Sklyanin algebra is associated with the following two quadrics in K^4 :

$$Q_1 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \tag{6}$$

$$Q_2 = x_4^2 + J_1 x_1^2 + J_2 x_2^2 + J_3 x_3^2 \tag{7}$$

Let $\{\cdot,\cdot\} : \mathcal{R} \times \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ be a Poisson bracket on an algebra $\mathcal{R}$.
The Poisson boundary operator, also called the Brylinski or Koszul differential and denoted by

$$\partial : \Omega^\bullet(\mathcal{R}) \longrightarrow \Omega^{\bullet-1}(\mathcal{R})$$

is given by :

$$\partial_k(F_0 dF_1 \wedge ... \wedge dF_k) = \sum_{1\leq i\leq k} (-1)^{i+1}\{F_0, F_i\} dF_1 \wedge ... \wedge \widehat{dF_i} \wedge ... \wedge dF_k$$

$$+ \sum_{1\leq i<j\leq k} (-1)^{i+j} F_0 d\{F_i, F_j\} \wedge dF_1 \wedge ... \wedge \widehat{dF_i} \wedge ... \widehat{dF_j} \wedge ... \wedge dF_k$$

where $F_0, ..., F_k \in \mathcal{R}$.
One can check, by a direct computation, that ∂_k is well-defined and that it is a boundary operator, $\partial_k \circ \partial_{k+1} = 0$.
The homology of the complex $(\Omega^\bullet(\mathcal{R}), \partial)$, denoted by $PH_\star(\mathcal{R}, \partial)$, is called the Poisson homology associated with the Poisson bracket $\{\cdot, \cdot\}$.
In ([26]) Michel Van den Bergh computes the Poisson homology of $q_{3,1}(\mathcal{E})$ which is the jacobian Poisson structure given by the polynomial $Q = \frac{1}{3}(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) + kx_1x_2x_3$. He obtains the following result :

Theorem 1.1. *The homological groups $PH_i(\mathcal{R}, \partial)$, $i = 0, 1, 2, 3$, are free $K[Q]$-modules of ranks $8, 8, 1, 1$. $PH_2(\mathcal{R}, \partial)$ is generated by $x_1dx_2 \wedge dx_3 + x_2dx_3 \wedge dx_1 + x_3dx_1 \wedge dx_2$ and $PH_3(\mathcal{R}, \partial)$ is generated by $dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$. $PH_0(\mathcal{R}, \partial)$ and $PH_1(\mathcal{R}, \partial)$ have the following Poincaré series :*

$$P(PH_0(\mathcal{R}, \partial), t) = \frac{(1+t)^3}{1-t^3}$$

$$P(PH_1(\mathcal{R}, \partial), t) = \frac{(1+t)^3}{1-t^3} - 1$$

Using the similar method as Van den Bergh, Nicolas Marconnet computes the Poisson homology of a cubic Jacobian Poisson structure on the polynomial algebra $K[x_1, x_2, x_3]$ given by a polynomial $\phi = \frac{1}{2}x_3^2 + \frac{q_1}{4}x_1^4 + \frac{q_1}{4}x_2^4 + \frac{3q_1}{2}x_1^2x_2^2$. He obtains the following result :

Theorem 1.2. ([16]) *The homological groups $PH_i(\mathcal{R}, \partial)$, $i = 0, 1, 2, 3$, are free $K[\phi]$-modules of ranks $9, 9, 1, 1$. $PH_i(\mathcal{R}, \partial)$ have the following Poincaré series :*

$$\begin{aligned}
P(PH_0(\mathcal{R}, \partial), t) &= \tfrac{t^4+2t^3+3t^2+2t+1}{1-t^4};\\
P(PH_1(\mathcal{R}, \partial), t) &= \tfrac{2t^4+2t^3+3t^2+2t}{1-t^4}\\
P(PH_2(\mathcal{R}, \partial), t) &= \tfrac{t^4}{1-t^4};\\
P(PH_3(\mathcal{R}, \partial), t) &= \tfrac{t^4}{1-t^4}.
\end{aligned}$$

The two previous cases have some common properties : they are Jacobian Poisson structures in dimension three given by a weight homogeneous polynomial with an isolated singularity. In ([19]), Anne Pichereau computes the Poisson homology of Jacobian Poisson structures in dimension three given by a weight homogeneous polynomial with an isolated singularity. In our article ([25]), we did the same work as her but in dimension four : we computed the Poisson homology of a Jacobian Poisson structure in dimension four given by weight homogeneous polynomials Q_1 and Q_2 which form a complete intersection. We proved that the Poincaré series of these homological groups depend only on the weights and the degrees of Q_1 and Q_2. In the quadratic homogeneous case, we obtained the following result :

Theorem 1.3. *The Poincaré series of the Poisson homological groups of Jacobian Poisson structures in dimension four given by quadratic homogeneous polynomials Q_1 and Q_2 which form a complete intersection, $PH_i(\mathcal{R}),\partial), i = 0,1,2,3,4$ have :*

$$\begin{aligned}
P(PH_0(\mathcal{R},\partial),t) &= \tfrac{2t^2+4t+1}{(1-t^2)^2};\\
P(PH_1(\mathcal{R},\partial),t) &= \tfrac{t^4+4t^3+4t^2+4t}{(1-t^2)^2};\\
P(PH_2(\mathcal{R},\partial),t) &= \tfrac{2t^4+4t^3}{(1-t^2)^2};\\
P(PH_3(\mathcal{R},\partial),t) &= \tfrac{t^4}{(1-t^2)^2};\\
P(PH_4(\mathcal{R},\partial),t) &= \tfrac{t^4}{(1-t^2)^2}.
\end{aligned}$$

In Sklyanin's case, we obtained the following explicit result :

Theorem 1.4. ([25])

1. *The homological group $PH_0(\mathcal{R},\partial)$ is a rank 7 free $K[Q_1,Q_2]$-module generated by $(\mu_i)_{0\leq i\leq 6} = (1,x_1,x_2,x_3,x_4,x_1^2,x_3^2)$;*
2. *$PH_1(\mathcal{R},\partial)$ is a free $K[Q_1,Q_2]$ module given by :*
$$PH_1(\mathcal{R},\partial) \simeq (\bigoplus_{k=1}^{6} K[Q_1,Q_2]d\mu_k)\oplus(\bigoplus_{k=1}^{5} K[Q_1,Q_2]\mu_k dQ_1)\oplus K[Q_1,Q_2]dQ_1\oplus K[Q_1,Q_2]dQ_2;$$
3. *$PH_2(\mathcal{R},\partial)$ is a free $K[Q_1,Q_2]$ module given by :*
$$PH_2(\mathcal{R},\partial) \simeq \left(\bigoplus_{k=1}^{5} K[Q_1,Q_2](d\mu_k\wedge dQ_1)\right) \oplus K[Q_1,Q_2](dQ_1\wedge dQ_2);$$
4. *$PH_3(\mathcal{R},\partial)$ is a rank 1 free $K[Q_1,Q_2]$-module generated by π;*
5. *$PH_4(\mathcal{R},\partial)$ is a rank 1 free $K[Q_1,Q_2]$-module generated by δ,*

where $\delta = dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3\wedge dx_4$, and $\pi = x_1dx_2\wedge dx_3\wedge dx_4 + x_2dx_3\wedge dx_1\wedge dx_4 + x_3dx_1\wedge dx_2\wedge dx_4 + x_4dx_2\wedge dx_1\wedge dx_3$.

1.3 Generalities on Koszul algebras

Let V be a finite -dimensional K-vector space ant let $T(V)$ be the tensor algebra of V over k. Consider a quadratic K-algebra $A = T(V)/(W)$, where $W \subset W \otimes W$. Let W^* be the dual space of W and $W^\perp \subset W^* \otimes W^*$ be the orthogonal of W. The dual algebra of A is defined as $A^! := T(V^*)/(W^\perp)$.

Let $(x_i)_{i=0,\cdots x_{n-1}}$ be a basis of V and $(\zeta_i)_{i=0,\cdots x_{n-1}}$ its dual basis. Consider $e = \sum_{i=0}^{n-1} x_i \otimes \zeta_i$.
We have $e^2 = 0$ ([15]). Let $K_m(A) = A \otimes (A^!_m)^*$ and $K_\star(A) = \oplus_{m \geq 0} K_m(A)$. Then the right multiplication by e induces a map $d : K_m(A) \longrightarrow K_{m-1}(A)$ and thus a differential $d : K_\star A \longrightarrow K_\star A$.
The complex

$$A = A \otimes k = A \otimes (A^!_0)^* \xleftarrow{\times e} \otimes (A^!_1)^* \xleftarrow{\times e} \otimes (A^!_2)^* \xleftarrow{\times e} \cdots \tag{8}$$

is called the Koszul complex of A.
The augmented Koszul complex of A is the complex :

$$0 \longleftarrow k \xleftarrow{\varepsilon} A = A \otimes k = A \otimes (A^!_0)^* \xleftarrow{\times e} \otimes (A^!_1)^* \xleftarrow{\times e} \otimes (A^!_2)^* \xleftarrow{\times e} \cdots \tag{9}$$

where ε is the canonical projection.

Definition 1.1. *A quadratic algebra A is said to be a Koszul algebra if the augmented Koszul complex (9) is exact.*

Proposition 1.1. ([26]) *Suppose that A is a Koszul algebra. Then $HH_\star(A) = H_\star(K(A), b)$.*

Hence when A is a Koszul algebra, we have two complexes which enable us to compute the Hochschild homology of A : $(K(A), b)$ and $(C(A), b)$. Let us give an explicit quasi-isomorphism between them.
Since $(A^!_m)^* = \cap_{i+j+2=m} V^{\otimes i} \otimes W \otimes V^{\otimes j}$ ([26]), we define the map $q : A \otimes (A^!_m)^* \longrightarrow A \otimes A^{\otimes m}$ as being the restriction of the natural inclusion $A \otimes V^{\otimes m} \hookrightarrow A \otimes A^{\otimes m}$.

Proposition 1.2. ([26]) *$q : K(A) \longrightarrow C(A)$ is a quasi-isomorphism.*

2 Generalities on non commutative Sklyanin algebras

Here, we follow the initial description of Sklyanin algebras by Sklyanin in ([21]). Let $\tau \in \mathbb{C}$ so that $Im(\tau) > 0$.
Consider $\Gamma = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\tau$.
Let θ_{00}, θ_{01}, θ_{10}, θ_{11} be Jacobi's theta functions associated with Γ, as described in ([22]). These functions satisfy the following properties :

$$\theta_{ab}(z+1) = (-1)^a \theta_{ab}(z);$$
$$\theta_{ab}(z+\tau) = e^{(-\pi i\tau - 2\pi iz - \pi ib)} \theta_{ab}(z);$$

and the zeros of θ_{ab} are the points : $\frac{1}{2}(1-b)+(1+a)\tau+\Gamma$.
Fix $\eta \in \mathbb{C}$ such that η is not of order 4 in $\mathbb{C}/\Gamma$. Let (ab, ij, kl) be a cyclic permutation of $(00, 01, 10, 11)$.
Suppose :

$$\alpha_{ab} = (-1)^{a+b}\left[\frac{\theta_{11}(\eta)\theta_{ab}(\eta)}{\theta_{ij}(\eta)\theta_{kl(\eta)}}\right]^2.$$

Consider V a four dimensional vector space with S_0, S_1, S_2, S_3 as a basis.
We define $A = T(V)/(I_2)$ where (I_2) is the two-sided ideal generated by the subspace $I_2 \subseteq V \otimes V$ with basis :

$$f_{0i} = [S_0, S_i] - \alpha_i(S_jS_k + S_kS_j);$$
$$f_{jk} = [S_j, S_k] - (S_0S_i + S_iS_0),$$

$\alpha_1 = \alpha_{00}$, $\alpha_2 = \alpha_{01}$, $\alpha_1 = \alpha_{10}$, and (i, j, k) is a cyclic permutation of $(1, 2, 3)$.
A is called the Sklyanin algebra.
We have the following results from the paper of S.P. Smith and J.T. Stafford ([22]) :

Proposition 2.1. ([22]) *A is a Koszul algebra.*

Therefore the Hochschild homology of A is given by the complex $(K(A), b)$, where b is the Hochschid boundary.

Proposition 2.2. ([22]) *For $m \geq 5$, $A^!_m = 0$ and if $m \leq 4$, $A^!_m$ is spanned by the following elements : $A^!_0 : 1$*
$A^!_1 : \zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$
$A^!_2 : \zeta_0\zeta_1, \zeta_0\zeta_2, \zeta_0\zeta_3, \zeta_1\zeta_0, \zeta_2\zeta_0$
$A^!_3 : \zeta_0\zeta_1\zeta_0, \zeta_0\zeta_2\zeta_0, \zeta_0\zeta_3\zeta_0, \zeta_1\zeta_0\zeta_1$
$A^!_4 : \zeta_0\zeta_1\zeta_0\zeta_1$
where $\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ is the dual basis of S_0, S_1, S_2, S_3.
These elements form a basis for $A^!$ and in particular $dim A^!_m = \binom{4}{m}$. We also have the following Poincaré duality : $(A^!_m)^* \cong A^!_{4-m}$.

If we consider $K_m(A)$ as free A-module, the Koszul complex of the algebra A has the following form :

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\bullet \mathsf{t}} A^4 \xrightarrow{\bullet N} A^6 \xrightarrow{\bullet M} A^4 \xrightarrow{\bullet \mathsf{x}} A \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{C} \longrightarrow 0. \tag{10}$$

where :
$\bullet\mathsf{x}$ is a right multiplication by $\mathsf{x} = (S_0, S_1, S_2, S_3)^T$;
$\bullet M$ is the right multiplication by a matrix M obtained from the relations f_{0i}, f_{jk} of A :

$$M = \begin{pmatrix} -S_1 & S_0 & -\alpha_1 S_3 & -\alpha_1 S_2 \\ S_1 & S_0 & S_3 & -S_2 \\ -S_2 & -\alpha_2 S_3 & S_0 & -\alpha_2 S_1 \\ S_2 & -S_3 & S_0 & S_1 \\ -S_3 & -\alpha_3 S_2 & -\alpha_3 S_1 & S_0 \\ S_3 & S_2 & -S_1 & S_0 \end{pmatrix};$$

$\bullet N$ is the right multiplication by the matrix N given by :

$$N = \frac{1}{2}\left(\begin{array}{cccccc} 2S_1 & 2S_2 & 2S_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1-\alpha_2)S_3 & -(1+\alpha_3)S_2 & 2S_0 & (1+\alpha_2)S_3 & -(1-\alpha_3)S_2 \\ -(1+\alpha_1)S_3 & 0 & (1-\alpha_3)S_1 & -(1-\alpha_1)S_3 & 2S_0 & (1+\alpha_3)S_1 \\ (1-\alpha_1)S_2 & -(1+\alpha_2)S_1 & 0 & (1+\alpha_1)S_2 & -(1-\alpha_2)S_1 & 2S_0 \end{array}\right);$$

and $\bullet \mathtt{t}$ is the right multiplication by $t = (S_0, S_1, S_2, S_3)$. We denote by Δ the element $1 \in K_4(A)$ and by Π the element $(S_0, S_1, S_2, S_3) \in K_3(A)$. We have $b(\Delta) = b(\Pi) = 0$ and :

$$q(\Pi) = 3(S_2 \otimes S_3 \otimes f_{01} + S_3 \otimes S_1 \otimes f_{02} + S_1 \otimes S_2 \otimes f_{03} + S_0 \otimes S_1 \otimes f_{23}) \in A^{\otimes 4};$$

$$q(\Delta) = 1 \otimes q(\Pi) \in A^{\otimes 5}.$$

Hence Π and Δ define respectively elements of $HH_3(A)$ and $HH_4(A)$ which we will also denote using the same letters.

3 Hochschild homology of the Sklyanin algebra A

We suppose that $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ are independent over $\mathbb{Q}$.

Proposition 3.1.

$$A \cong \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Q}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)} (\mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\langle S_0, S_1, S_2, S_3\rangle/(I_2))$$

as graded $\mathbb{C}$-algebras,
and

$$HH_\star(A) \cong \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Q}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)} HH_\star(\mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\langle S_0, S_1, S_2, S_3\rangle/(I_2)),$$

as graded $\mathbb{C}$-vector spaces.

Proof. The first isomorphism is a direct consequence of the fact that the relations $f_{0i} = 0, f_{jk} = 0$ of the algebra A have their coefficients in the field $\mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Then we can easily construct a $\mathbb{C}$-algebras isomorphism :

$$\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Q}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)} (\mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\langle S_0, S_1, S_2, S_3\rangle/I_2) \longrightarrow A, \alpha \otimes a \longmapsto \alpha a$$

with

$$A \longrightarrow \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Q}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)} (\mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\langle S_0, S_1, S_2, S_3\rangle/I_2)\,, S_i \longmapsto 1 \otimes S_i$$

as the inverse.
The second isomorphism is a consequence of the following commutative diagram :

$$\begin{tikzcd} A^{\otimes n} \arrow[r] \arrow[d, "b"] & \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Q}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)} (\mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\langle S_0, S_1, S_2, S_3\rangle/I_2)^{\otimes n} \arrow[d, "1_{\mathbb{C}} \otimes_{\mathbb{Q}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)} b"] \\ A^{\otimes (n-1)} \arrow[r] & \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Q}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)} (\mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\langle S_0, S_1, S_2, S_3\rangle/I_2)^{\otimes (n-1)} \end{tikzcd}$$

where b is the Hochschild boundary. $\square$

Proposition 3.2. *There exists an extension $k_0((h))$ of the field $\mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ such that in this extension $\alpha_i = \beta_i h^2$, where coefficients $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ belong to the field k_0 and are also independent over $\mathbb{Q}$.*

Proof. Let us set $k_0 = \mathbb{Q}(X, Y, Z)$ where X, Y, Z are variables.
The morphism $\mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \longrightarrow k_0((h))$, $\alpha_1 \mapsto X$, $\alpha_2 \mapsto Y$, $\alpha_3 \mapsto Z$ define an injection.
Then we conclude by setting $\beta_1 = X, \beta_2 = Y, \beta_3 = Z$. $\square$

Proposition 3.3. *The algebra $k_0((h))\langle S_0, S_1, S_2, S_3\rangle/(I)$ is isomorphic to $k_0((h))\otimes_{\mathbb{Q}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}$ $(\mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\langle S_0, S_1, S_2, S_3\rangle/(I_2))$ as graded $k_0((h))$-algebras, while the vector space*

$$HH_\star(k_0((h))\langle S_0, S_1, S_2, S_3\rangle/(I))$$

is isomorphic to

$$k_0((h)) \otimes_{\mathbb{Q}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)} HH_\star(\mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\langle S_0, S_1, S_2, S_3\rangle/(I_2))$$

as graded $k_0((h))$-vector spaces.
Here (I) is the two-sided ideal generated by the subspace $I \subseteq V \otimes V$ with basis :

$$F_{0i} = [S_0, S_i] - \beta_i h^2(S_j S_k + S_k S_j);$$

$$F_{jk} = [S_j, S_k] - (S_0 S_i + S_i S_0),$$

and (i, j, k) is a cyclic permutation of $(1, 2, 3)$.

In particular we have
$HH_\star(\mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\langle S_0, S_1, S_2, S_3\rangle/(I_2)) = \mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \otimes_{k_0((h))} HH_\star(k_0((h))\langle S_0, S_1, S_2, S_3\rangle/(I))$.
Therefore the computation of Hochschild's homology of algebra A is equivalent to finding the homology of algebra $k_0((h))\langle S_0, S_1, S_2, S_3\rangle/(I))$.
Let us introduce new variables by setting $x_0 = h^{-1}S_0$; and $x_i = S_i$ for $i = 1, 2, 3$. We denote by A_h the $k_0((h))$-algebra generated by x_0, x_1, x_2, x_3 with the relations

$$g_{0i} = [x_0, x_i] - \beta_i h(x_j x_k + x_k x_j);$$

$$g_{jk} = [x_j, x_k] - h(x_0 x_i + x_i x_0),$$

where (i, j, k) is a cyclic permutation of $(1, 2, 3)$. We also denote by (I) the two-sided ideal generated by g_{0i}, g_{jk}.

3.1 Filtration on A_h

Let us denote by $\mathcal{P}$ the vector-subspace of $k_0\langle x_0, x_1, x_2, x_3\rangle$ generated by the ordered monomials $x_0^{i_0} x_1^{i_1} x_2^{i_2} x_3^{i_3}$.
Using the same method as Marconnet in ([16]), we obtain the following results :

Consider the following commutative diagram where arrows are injective morphisms of $k_0[[h]]$-algebras :

$$\begin{tikzcd} k_0((h))\langle x_0,x_1,x_2,x_3\rangle \arrow[r, "j_2"] & k_0\langle x_0,x_1,x_2,x_3\rangle((h)) \\ k_0[[h]]\langle x_0,x_1,x_2,x_3\rangle \arrow[u, "j_1"] \arrow[r, "j_3"] & k_0\langle x_0,x_1,x_2,x_3\rangle[[h]] \arrow[u, "j_4"'] \end{tikzcd}$$

We denote by $k_0\langle x_0,x_1,x_2,x_3\rangle_i$ the homogeneous component of degree i of the graded k_0-algebra $k_0\langle x_0,x_1,x_2,x_3\rangle$. We can observe that $k_0[[h]]\langle x_0,x_1,x_2,x_3\rangle$ is a subalgebra of $k_0\langle x_0,x_1,x_2,x_3\rangle[[h]]$ whose elements are all formal series $\sum_{n\in\mathbb{N}} Q_n h^n$ which satisfy : there exists $N\in\mathbb{N}$ such that for all $n\in\mathbb{N}$, $Q_n\in\oplus_{i=0}^N k_0\langle x_0,x_1,x_2,x_3\rangle_i$.
In the same way $k_0((h))\langle x_0,x_1,x_2,x_3\rangle$ is a subalgebra of $k_0\langle x_0,x_1,x_2,x_3\rangle((h))$ whose elements are all Laurent series $\sum_{n\in\mathbb{Z}} Q_n h^n$ which satisfy : there exists $N\in\mathbb{Z}$ such that for all $n\in\mathbb{Z}$, $Q_n\in\oplus_{i=0}^N k_0\langle x_0,x_1,x_2,x_3\rangle_i$.
On the other hand, we have the following commutative diagram :

$$\begin{tikzcd} A_h = k_0((h))\langle x_0,x_1,x_2,x_3\rangle/(I) \arrow[r, "i_2"] & k_0\langle x_0,x_1,x_2,x_3\rangle((h))/(I) = \widehat{A}_h \\ \mathcal{A}_h = k_0[[h]]\langle x_0,x_1,x_2,x_3\rangle/(I) \arrow[u, "i_1"] \arrow[r, "i_3"] & k_0\langle x_0,x_1,x_2,x_3\rangle[[h]]/(I) = \widehat{\mathcal{A}}_h \arrow[u, "i_4"'] \end{tikzcd}$$

Proposition 3.4. *The morphisms i_1, i_2, i_3, i_4 are injective.*

Proposition 3.5. *For all $a\in\widehat{\mathcal{A}}_h$, there exists a unique family $\{P_i\in\mathcal{P},\ i\in\mathbb{N}\}$ such that $a=\sum_{i\in\mathbb{N}}\overline{P}_i h^i$.*

Proposition 3.6. *For all $a\in\widehat{A}_h$, there exists a unique family $\{P_i\in\mathcal{P},\ i\in\mathbb{Z}\}$ bounded from below such that $a=\overline{\sum_{i\in\mathbb{Z}}P_i h^i}$.*

Corollary 3.1. *For all $a\in A_h$, there exists a unique family $\{P_i\in\mathcal{P},\ i\in\mathbb{Z}\}$ bounded from below such that $a=\overline{\sum_{i\in\mathbb{Z}}P_i h^i}$.*

For all $p\in\mathbb{Z}$, we define a k_0-subspace $F_p(\widehat{A}_h)$ of $\widehat{A}_h$ by

$$F_p(\widehat{A}_h)=\{a\in\widehat{A}_h : a=\overline{\sum_{i\geq -p}P_i h^i}, P_i\in\mathcal{P}\}$$

Then $F_p(\widehat{A}_h)\subset F_{p+1}(\widehat{A}_h)$; $1\in F_0(\widehat{A}_h)$ and for all $p,q\in\mathbb{Z}$, it is easy to see that the product of A_h induces an application $F_p(\widehat{A}_h)\times F_q(\widehat{A}_h)\longrightarrow F_{p+q}(\widehat{A}_h)$. Thus F is a filtration on $\widehat{A}_h$. Since $\widehat{A}_h=\cup_{p\in\mathbb{Z}}F_p(\widehat{A}_h)$ and $\cap_{p\in\mathbb{Z}}F_p(\widehat{A}_h)=0$ (Proposition 3.6) the filtration F on

$\widehat{A}_h$ is exhaustive and separated. By (3.4) the restriction of F to the subalgebra A_h is still an exhaustive separated filtration of the algebra A_h. This filtration is compatible with the weight graduation of A_h :

$$F_p(A_h) \cap (A_h)_n = \{a \in A_h : a = \overline{\sum_{i \geq -p} P_i h^i}, P_i \in \mathcal{P}_n\}.$$

Proposition 3.7. *The algebra $\widehat{\mathcal{A}}_h$ (respectively $\widehat{A}_h$) is a completion of $\mathcal{A}_h$ (respectively A_h) for the topology induced by the filtration F. The filtred algebra A_h is not complete. However each homogeneous component $(A_h)_n$, $n \in \mathbb{N}$, is complete.*

Therefore the graded ring $gr_F(A_h)$ associated with the filtration F is $gr_p(A_h) = F_p(A_h)/F_{p-1}(A_h) \cong h^{-p}\mathcal{P}$. On the ordered basis of $gr_p(A_h)$ the product $gr_p(A_h) \times gr_q(A_h) \longrightarrow gr_{p+q}(A_h)$ can be written as follows :

$$(h^{-p} x_0^{i_0} x_1^{i_1} x_2^{i_2} x_3^{i_3}, h^{-q} x_0^{j_0} x_1^{j_1} x_2^{j_2} x_3^{j_3}) \mapsto h^{-p-q} x_0^{i_0+j_0} x_1^{i_1+j_1} x_2^{i_2+j_2} x_3^{i_3+j_3}.$$

The graded ring $gr_F(A_h)$ can be identified with $k_0[x_0, x_1, x_2, x_3][h, h^{-1}]$.

3.2 The algebra A_h seen as a deformation

Let p be the projection $p : \widehat{\mathcal{A}}_h \longrightarrow \mathcal{R} = k_0 \otimes_{k_0[[h]]} \mathcal{A}_h, a \mapsto 1 \otimes a$. $Kerp = h\mathcal{A}_h = F_1\mathcal{A}_h$.
Consider the commutator bracket $[\cdot,\cdot] : \mathcal{A}_h \times \mathcal{A}_h \longrightarrow \mathcal{A}_h$. The terms $[x_i, x_j]$ can be written as formal series in h with no constant coefficients in $\mathcal{A}_h$.
Therefore the map $h^{-1}[\cdot,\cdot] : \mathcal{A}_h \times \mathcal{A}_h \longrightarrow \mathcal{A}_h$ is a biderivation which satisfies the Jacobian identity.
Let us consider the Sklyanin Poisson bracket :

$$\{\cdot,\cdot\} : \mathcal{R} \times \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}$$

defined by

$$\begin{aligned} \{x_0, x_i\} &= 2\beta_{jk} x_j x_k \\ \{x_j, x_k\} &= 2x_0 x_i \end{aligned} \tag{11}$$

where (i, j, k) is a cyclic permutation of $(1, 2, 3)$.
We have the following commutative diagram :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}_h \times \mathcal{A}_h \arrow[r, "\frac{1}{h}[\cdot,\cdot]"] \arrow[d, "p \times p"] & \mathcal{A}_h \arrow[d, "p"] \\ \mathcal{R} \times \mathcal{R} \arrow[r, "\{\cdot,\cdot\}"] & \mathcal{R} \end{tikzcd}$$

Using the ordering decomposition of elements of $\widehat{A}_h$, we define the following isomorphism of $k_0((h))$ graded vector spaces :

$$\begin{array}{cccc} \Theta : & \widehat{A}_h & \longrightarrow & \mathcal{R}((h)) \\ & \overline{\sum_{i \geq p} P_i h^i} & \mapsto & \sum_{i \geq p} P_i h^i \end{array}$$

$\mathcal{R}((h))$ is endowed with the natural increased filtration and the associated topology. We have $\Theta(F_p(\widehat{A}_h) = F_p(\mathcal{R}((h)))$. Thus Θ is a homeomorphism with respect to the associated topologies. The product $\cdot$ on $\widehat{A}_h$ is carried to a product $\star$ on $\mathcal{R}((h))$ such that the following diagram commutes :

$$\begin{tikzcd} \widehat{A}_h \times \widehat{A}_h \arrow[r, "\cdot"] \arrow[d, "\Theta\times\Theta"] & \widehat{A}_h \arrow[d, "\Theta"] \\ \mathcal{R}((h)) \times \mathcal{R}((h)) \arrow[r, "\star"] & \mathcal{R}((h)) \end{tikzcd}$$

Therefore the algebra $\widehat{A}_h$ is isomorphic to $\mathcal{R}((h))$ endowed with the product $\star$.
For $a, b \in \mathcal{R}$, we can write $a \star b = \sum_{i\geq 0} h^i \mu_i(a,b)$, where $\mu_i : \mathcal{R} \times \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}$ are k_0-bilinear maps. On the other hand, from the relations of $\widehat{A}_h$, if $a, b \in \mathcal{P} \cong \mathcal{R}$ then $\bar{a}\cdot\bar{b} = \overline{ab} + h(\cdots)$, where ab is the product of $\mathcal{R}$. Thus $\widehat{A}_h$ is a deformation of the polynomial algebra $\mathcal{R}$.
The bracket $\frac{1}{h}[\cdot,\cdot]$ of $\widehat{A}_h$ is transported to a bracket $\frac{1}{h}[\cdot,\cdot]_\star$ on $\mathcal{R}((h))$. The bracket associated with the deformation $\star$, $\mathcal{R} \times \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}$, $(a,b) \mapsto \mu_1(a,b) - \mu_1(b,a)$ coincides with the Sklyanin Poisson bracket $\{\cdot,\cdot\}$.
Notice that the subalgebras of $\widehat{A}_h$ which appear in the following commutative diagram

$$\begin{tikzcd} A_h \arrow[r, "i_2"] & \widehat{A}_h \\ \mathcal{A}_h \arrow[u, "i_1"] \arrow[r, "i_3"] & \widehat{\mathcal{A}}_h \arrow[u, "i_4"] \end{tikzcd}$$

are identified via the isomorphism Θ with the subalgebras of $(\mathcal{R}((h)), \star)$ which appear in the following commutative diagram :

$$\begin{tikzcd} k_0((h))[x_0,x_1,x_2,x_3] \arrow[r] & k_0[x_0,x_1,x_2,x_3]((h)) \\ k_0[[h]][x_0,x_1,x_2,x_3] \arrow[u] \arrow[r] & k_0[x_0,x_1,x_2,x_3][[h]] \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Thus the algebra A_h is identified with the algebra $(k_0((h))[x_0,x_1,x_2,x_3], \star)$. In other words, A_h is a subalgebra of a deformation of $\mathcal{R}$.

3.3 Hochschild homology of algebra A_h

The filtration F on A_h can be extended to a filtration on $C(A_h)$, also denote by F in the following way : for all $n \in \mathbb{N}$ and for all $p \in \mathbb{Z}$, we set

$$F_p(A_h^{\otimes n}) = \oplus_{p_1+\cdots+p_n=p} F_{p_1}(A_h) \otimes \cdots \otimes F_{p_n}(A_h).$$

The filtration thus obtained is exhaustive and separated. The Hochschild boundary respects this filtration. Thus we can define the graded complex $(gr_F(C(A_h), b)$. One has the natural isomorphism $gr_F(A_h^{\otimes n}) \cong gr_F(A_h)^{\otimes n}$ for all $n \geq 1$. Then we deduce an isomorphism in homology : $H_\star(C(A_h), b) \cong HH_\star(gr_F(A_h))$.

Let us just recall general notation on spectral sequence.
Let (C, d) be a chain complex and F be an increased filtration on C, compatible with d $(d(F_pC) \subset F_pC)$.
Let $p, q \in \mathbb{Z}$. We set $E^0_{p,q} = F_pC_{p+q}/F_{p-1}C_{p+q}$.
Consider the canonical projection :

$$\eta_{p,q} : F_pC_{p+q} \longrightarrow F_pC_{p+q}/F_{p-1}C_{p+q} = E^0_{p,q}.$$

We define for each $r \in \mathbb{N}$:

$$A^r_{p,q} = \{c \in F_pC_{p+q} : d(c) \in F_{p-r}C_{p+q-1}\},$$

$$Z^r_{p,q} = \eta_{p,q}(A^r_{p,q}),$$

$$B^r_{p,q} = \eta_{p,q}(dA^{r-1}_{p+r-1,q-r+2}).$$

We set $E^r_{p,q} = Z^r_{p,q}/B^r_{p,q}$, in particular $E^r_{p,q} = H_{p+q}F_pC_{p+q}/F_{p-1}C_{p+q}$.
Let $Z^\infty_{p,q} = \bigcap_{r=1}^{\infty} Z^r_{p,q}$, $B^\infty_{p,q} = \bigcup_{r=1}^{\infty} B^r_{p,q}$ and $E^\infty_{p,q} = Z^\infty_{p,q}/B^\infty_{p,q}$.
We have the following increasing inclusions :

$$0 = B^0_{p,q} \subset \cdots \subset B^r_{p,q} \subset \cdots \subset B^\infty_{p,q} \subset z^\infty_{p,q} \subset \cdots \subset Z^r_{p,q} \cdots \subset Z^0_{p,q} = E^0_{p,q}$$

For all $r \in \mathbb{N}$ the map d induces the differential complex $d^r : E^r_{p,q} \longrightarrow E^r_{p-r,q+r-1}$ such that $E^{r+1}_{p,q} = Kerd^r_{p,q}/Imd^r_{p+r,q-r+1}$.
The spectral sequence E^r is said to be regular if there exists $r_0 \in \mathbb{N}$ such that $E^r = E^{r_0}$ for $r \geq r_0$. And we say that the spectral sequence E^r converges weakly to $H_*(C)$ if $E^\infty_{p,q} \cong F_pH_{p+q}/F_{p-1}H_{p+q}$. We have the following result on weak convergence :

Proposition 3.8. ([28]) *Let (C, d) be a chain complex endowed with an increasing complete and exhaustive $\mathbb{Z}$-filtration, compatible with the differential d. If the associated spectral sequence is regular, then this spectral sequence converges weakly to $H_\star(C, d)$.*

Let $A^\infty_{p,q} = Ker\{d : F_pC_{p+q} \longrightarrow F_pC_{p+q-1}\}$ and consider the composite

$$\Phi^r_{p,q} : A^\infty_{p,q} \longrightarrow A^r_{p,q} \longrightarrow Z^r_{p,q} \longrightarrow E^r_{p,q}.$$

We are using the following standard criterion for degeneration of spectral sequence :

Lemma 3.1. ([26]) *If there exists r such that $\Phi^r_{p,q}$ is surjective for all p, q, then the spectral sequence degenerates at E^r.*

Let us now apply these results to our situation. Consider the spectral sequence E^r associated with the filtration on $C(A_h)$.

Theorem 3.1. *The spectral sequence E^r associated with the filtration F weakly converges to the Hochschild homology $HH_\star(A_h)$ of A_h.*

Proof. For all $n \in \mathbb{N}$, we denote by $C(A_h)_n$ the sub-complex of $C(A_h)$ which is formed by the homogeneous components of degree n for the initial graduation (weight graduation) A_h. Since the differential b preserves the graduation of $C(A_h)$, we have $C(A_h) = \oplus_{n \in \mathbb{N}} C(A_h)_n$. The complex $(C(A_h)_n, b)$ is a complex of finite dimensional vector spaces on which the filtration F is complete and exhaustive.
Let $p \in \mathbb{Z}$ and $q \in \mathbb{N}$. $gr_p(C_q(A_h)_n) \cong (k_0[x_0, x_1, x_2, x_3]^{\otimes(q+1)})_n h^{-p}$. Hence we have an isomorphism of $k_0[h, h^{-1}]$-modules : $gr(C(A_h)_n) \cong C(k_0[x_0, x_1, x_2, x_3])_n[h, h^{-1}]$.
We now consider the spectral sequence associated with the filtration F on $C(A_h)_n$.

$$E^0_{p,q} = F_p(C_{p+q}(A_h)_n / F_{p-1}(C_{p+q}(A_h)_n \cong h^{-p} C_{p+q}(k_0[x_0, x_1, x_2, x_3])_n.$$

Therefore $E^0_{p,q} = Z^0_{p,q}$ is a k_0-vector space of finite dimension. Since we have an infinite sequence of inclusions $\cdots Z^r_{p,q} \subset \cdots Z^1_{p,q} \subset Z^0_{p,q}$, the k_0-vector subspaces $Z^r_{p,q}$ of $Z^0_{p,q}$ are finite dimensional. Thus there exists $r_0 \in \mathbb{N}$ such that $Z^r_{p,q} = Z^{r_0}_{p,q}$ for all $r \geq r_0$.
Using the Proposition (3.8), we conclude that the spectral sequence associated with the filtration F on the complex $C(A_h)_n$ converges weakly to $H_\star(C(A_h)_n)$:

$$E^\infty_{p,q}(C(A_h)_n) = F_p(C_{p+q}(A_h)_n) / F_{p-1}(C_{p+q}(A_h)_n, b).$$

Since $C(A_h) = \oplus_{n \in \mathbb{N}} C(A_h)_n$,

$$\begin{aligned} E^\infty_{p,q}(C(A_h)) &\cong \oplus_{n_i n \mathbb{N}} F_p(C_{p+q}(A_h)_n) / F_{p-1}(C_{p+q}(A_h)_n) \\ &\cong F_p(C_{p+q}(A_h)) / F_{p-1}(C_{p+q}(A_h)) \\ &\cong F_p HH_{p+q}(A_h) / F_{p-1} HH_{p+q}(A_h). \end{aligned}$$

As a consequence, the spectral sequence associated with the filtration F on $C(A_h)$ converges weakly to $HH_\star(A_h)$. $\square$

Since the graded ring $gr_F(A_h)$ associated with the filtration F on A_h is a polynomial algebra with coefficients in the ring $k_0[h, h^{-1}]$, by the Hochschild-Kostant-Rosenberg theorem, we have for all $n \in \mathbb{N}$, a quasi-isomorphism of $k_0[h, h^{-1}]$-modules :

$$\begin{array}{ccc} C_n(gr_F(A_h)) & \longrightarrow & \Omega^n_{gr_F(A_h)_{|k_0[h,h^{-1}]}} \\ r_0 \otimes r_1 \otimes \cdots \otimes r_n & \mapsto & \frac{1}{n!} r_0 dr_1 \wedge \cdots \wedge dr_n. \end{array}$$

Here $\Omega^n_{gr_F(A_h)_{|k_0[h,h^{-1}]}}$ is the $k_0[h, h^{-1}]$-module of differential forms of degree n of $gr_F(A_h)$ on $k_0[h, h^{-1}]$, with zero differential. Hence $HH_n gr_F(A_h)) \Omega^n_{gr_F(A_h)_{|k_0[h,h^{-1}]}}$. Under this quasi-isomorphism, the Connes's coboundary corresponds to the de Rham differential. On the other hand, we have a canonical isomorphism of $k_0[h, h^{-1}]$-modules $\Omega^\bullet_{gr_F(A_h)_{|k_0[h,h^{-1}]}} \cong \Omega^\bullet_{\mathcal{R}_{|k_0}} \otimes_{k_0} k_0[h, h^{-1}]$. We will denote $\Omega^\bullet_{\mathcal{R}_{|k_0}}$ by $\Omega^\bullet(\mathcal{R})$.
We borrow the following commutative diagram from brylinski's paper ([3]) :

$$\begin{array}{ccc} E^1_{-n} = HH_n(gr_F(A_h)) & \xrightarrow{\cong} & \Omega^n(\mathcal{R}) \otimes_{k_0} k_0[h, h^{-1}] \\ \downarrow{\scriptstyle d^1} & & \downarrow{\scriptstyle \partial \otimes \cdot h} \\ E^1_{-n+1} = HH_{n-1}(gr_F(A_h)) & \xrightarrow{\cong} & \Omega^{n-1}(\mathcal{R}) \otimes_{k_0} k_0[h, h^{-1}] \end{array}$$

where d^1 is the differential which computes the second term E^2 of the spectral sequence, $\cdot h$ is the multiplication by h and ∂ is the boundary Poisson operator associated with the Sklyanin Poisson bracket :

$$\partial_n(F_0 dF_1 \wedge ... \wedge dF_n) = \sum (-1)^{i+1}\{F_0, F_i\} dF_1 \wedge ... \wedge \widehat{dF_i} \wedge ... \wedge dF_n$$

$$+ \sum (-1)^{i+j} F_0 d\{F_i, F_j\} \wedge dF_1 \wedge ... \wedge \widehat{dF_i} \wedge ... \widehat{dF_j} \wedge ... \wedge dF_n$$

where $F_0, ..., F_n \in \mathcal{R}$.
Using the isomorphism $E^1_{p,q} \cong \Omega^{p+q}(\mathcal{R}) \otimes_{k_0} h^{-p}$, the first term of this spectral sequence can be explained as follow :

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\cdots & \Omega^1(\mathcal{R}) \otimes h^{-3} & \longrightarrow & \mathcal{R} \otimes h^{-2} & \longrightarrow & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & q=-2 \\
\cdots & \Omega^2(\mathcal{R}) \otimes h^{-3} & \longrightarrow & \Omega^1(\mathcal{R}) \otimes h^{-2} & \longrightarrow & \mathcal{R} \otimes h^{-1} & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & q=-1 \\
\cdots & \Omega^3(\mathcal{R}) \otimes h^{-3} & \longrightarrow & \Omega^2(\mathcal{R}) \otimes h^{-2} & \longrightarrow & \Omega^1(\mathcal{R}) \otimes h^{-1} & \cdots & \mathcal{R} \otimes 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & q=0 \\
\cdots & \Omega^4(\mathcal{R}) \otimes h^{-3} & \longrightarrow & \Omega^3(\mathcal{R}) \otimes h^{-2} & \longrightarrow & \Omega^2(\mathcal{R}) \otimes h^{-1} & \cdots & \Omega^1(\mathcal{R}) \otimes 1 & \cdots & \mathcal{R} \otimes h & \cdots & 0 & \cdots & q=1 \\
\cdots & 0 & \longrightarrow & \Omega^4(\mathcal{R}) \otimes h^{-2} & \longrightarrow & \Omega^3(\mathcal{R}) \otimes h^{-1} & \cdots & \Omega^2(\mathcal{R}) \otimes 1 & \cdots & \Omega^1(\mathcal{R}) \otimes h & \cdots & \mathcal{R} \otimes h^2 & \cdots & q=2 \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
 & p=3 & & p=2 & & p=1 & & p=0 & & p=-1 & & p=-2 & &
\end{array}$$

The second term E^2 of the spectral sequence is given by the homology of the lines with respect to the differential $\partial \otimes \cdot h$. Since the multiplication by h is a $k_0[h, h^{-1}]$-isomorphism, to have this second term, we only have to find the Poisson homology :

$$0 \longrightarrow \Omega^4(\mathcal{R}) \xrightarrow{\partial_4} \Omega^3(\mathcal{R}) \xrightarrow{\partial_3} \Omega^2(\mathcal{R}) \xrightarrow{\partial_2} \Omega^1(\mathcal{R}) \xrightarrow{\partial_1} \mathcal{R} \tag{12}$$

Theorem 1.4 gives this Poisson homology.

Proposition 3.9. *The spectral sequence associated with the filtration F degenerates at E^2.*

Proof. This spectral sequence degenerates at E^2 if the map $\Phi^2_{p,q}$ is surjective for all $p, q \in \mathbb{Z}$. But the columns of E^2 are the same up to a multiplication by h. Thus we only have to give a proof for $\Phi^2_{0,q}$, $q \in \mathbb{Z}$.

- $E^2_{0,0} \cong PH_0(\mathcal{R}, \partial)$ is the quotient of $\mathcal{R}$. Let $v \in E^2_{0,0}$. Then v can be lifted to an element u of $\mathcal{R} \cong F_0 A_h / F_{-1} A_h$. On other hand, u can be lifted to an element U of $F_0 A_h$ and $\Phi^2_{0,0}(U) = v$.
  Then let $\widetilde{P_i} \in F_0(A_h), i = 1, 2$ be an element which lifts P_i, where P_1, P_2 are Casimirs which give the Sklyanin Poisson bracket. Since $k_0[P_1, P_2]$ is the center of the Sklyanin Poisson algebra $(\mathcal{R}, \{\cdot, \cdot\})$, $k_0[\widetilde{P_1}, \widetilde{P_2}]$ is the center of algebra A_h. We endow A_h with a natural structure of $k_0[\widetilde{P_1}, \widetilde{P_2}]$-module.

- Then using the result (1.4), as a $k_0[P_1, P_2]$-module, $E^2_{0,1} \cong PH_1(\mathcal{R}, \partial)$ is generated by the class an element $f(P_1, P_2) d\psi \in \Omega^1(\mathcal{R})$, where d is the de Rham differential, $\psi \in \mathcal{R}$. Let $\Psi \in F_0(A_h)$ be an element which lifts ψ. $B(\Psi) \in F_0(A_h^{\otimes 2})$ and $b(B(\Psi)) = -B(b(\Psi)) = 0$. We have $\Phi^2_{0,1}(B(\Psi)) = \overline{d\psi}$.

- Let $v \in E^2_{0,2} \cong PH_2(\mathcal{R}, \partial)$. From (1.4), v is the class of an element $f(P_1, P_2)dP_1 \wedge d\psi$, $f(P_1, P_2) \in k_0[P_1, P_2]$. Since $\overline{P_1 d\psi} \in PH_1(\mathcal{R}, \partial)$, there exists $\Psi \in A^{\infty}_{0,1}$ such that $\Phi^2_{0,1}(\Psi) = \overline{P_1 d\psi}$. We have $b(\Psi) = 0$ and therefore $b(B(\Psi)) = 0$. $\Phi^2_{0,2}(B(\Psi)) = \overline{dP_1 \wedge d\psi}$.
  Then $f(\widetilde{P}_1, \widetilde{P}_2)B(\Psi)$ lifts v.

- Since the image of the Hochschild's cycle $\Pi \in A_h^{\otimes 4}$ in $gr_F(A_h^{\otimes 4})$ is the generator π of $PH_3(\mathcal{R}, \partial) = E^2_{0,3}$, as a free $k_0[P_1, P_2]$-module, $f(\widetilde{P}_1, \widetilde{P}_2)\Pi$ lifts the element $f(P_1, P_2)\pi \in E^2_{0,3}$.

- Similarly, since the image of the Hochschild's cycle $\Delta \in A_h^{\otimes 5}$ in $gr_F(A_h^{\otimes 5})$ is the generator δ of $PH_4(\mathcal{R}, \partial) = E^2_{0,4}$, as a free $k_0[P_1, P_2]$-module, $f(\widetilde{P}_1, \widetilde{P}_2)\Pi$ lifts the element $f(P_1, P_2)\delta \in E^2_{0,4}$.

$\square$

Since the spectral sequence E^r weakly converges to $HH_\star(A_h)$, and identifying E^2 and $PH_\star(\mathcal{R}, \partial) \otimes_{k_0} k_0[h, h^{-1}]$, we have :

$$gr_F(HH_i(A_h)) \cong PH_i(\mathcal{R}, \partial) \otimes_{k_0} k_0[h, h^{-1}].$$

We have the following classical result :
Let R be an k-algebra endowed with a $\mathbb{N}$-graduation and a $\mathbb{Z}$-increasing filtration F. By setting $F_p(R_n) = F_p(R) \cap R_n$, we naturally have a filtration on R_n. We assume that the filtration F and the graduation of R are compatible ie., $F_p(R) = \oplus_{n\in\mathbb{N}} F_p(R_n)$. In this case $F_p(R)/F_{p-1}(R) \cong (\oplus_{n\in\mathbb{N}} F_p(R_n)/F_{p-1}(R_n))$ and $gr_F(R) \cong \oplus_{n\in\mathbb{N}} gr_F(R_n)$.

Proposition 3.10. [16] *Let M be an R-module endowed with a filtration F and a graduation which are compatible and such that F is exhaustive and separated. Assume that the filtration on R_n is complete for $N \in \mathbb{N}$.*
If $gr_F(M)$ is a free graded $gr_F(R)$-module of rank m with a basis $\{\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_m\}$, where for all i, $\bar{x}_i$ is the class of a homogeneous element $x_i \in F_0(M)$ in the graded associated, then M is a free graded R-module with $\{x_1, \cdots, x_m\}$ as a basis.

In our case $R = k_0((h))[\widetilde{P}_1, \widetilde{P}_2]$ endowed with the filtration of A_h and $M = HH_i(A_h)$ endowed with the filtration of $C(A_h)$.
The filtration F on $HH_i(A_h)$ (respectively on R) is exhaustible, separated and compatible with the graduation. On the other hand the filtration F on R_n is complete for all $n \in \mathbb{N}$.

Theorem 3.2.

- *$HH_4(A_h)$ is a free $k_0((h))[\widetilde{P}_1, \widetilde{P}_2]$-module of rank 1 generated by the homogeneous element Δ of degree 4.*

- *$HH_3(A_h)$ is a free $k_0((h))[\widetilde{P}_1, \widetilde{P}_2]$-module of rank 1 generated by the homogeneous element Π of degree 4.*

- $HH_2(A_h)$ *is a free* $k_0((h))[\widetilde{P}_1, \widetilde{P}_2]$*-module of rank* 6 *generated by homogeneous elements of respective degrees* $3, 3, 3, 3, 4, 4$.
- $HH_1(A_h)$ *is a free* $k_0((h))[\widetilde{P}_1, \widetilde{P}_2]$*-module of rank* 13 *generated by homogeneous elements of respective degrees* $1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4$.
- $HH_0(A_h)$ *is a free* $k_0((h))[\widetilde{P}_1, \widetilde{P}_2]$*-module of rank* 7 *generated by homogeneous elements of respective degrees* $0, 1, 1, 1, 1, 2, 2$.

We can also deduce the following result :

Corollary 3.2. *As* $k_0((h))$*-vector spaces, the homological groups* $HH_i(A_h)$ *have the following Poincaré series :*

$$\begin{aligned}
P(P(HH_0(A_h), t) &= \tfrac{2t^2+4t+1}{(1-t^2)^2};\\
P(HH_1(A_h), t) &= \tfrac{t^4+4t^3+4t^2+4t}{(1-t^2)^2};\\
P(HH_2(A_h), t) &= \tfrac{2t^4+4t^3}{(1-t^2)^2};\\
P(HH_3(A_h), t) &= \tfrac{t^4}{(1-t^2)^2};\\
P(HH_4(A_h), t) &= \tfrac{t^4}{(1-t^2)^2}.
\end{aligned}$$

References

[1] Michael Artin and William F. Schelter, *Graded algebras of global dimension* 3, Adv. in Math. **66** (1987), no. 2, 171–216.

[2] H. Boos, M. Jimbo, T. Miwa, F. Smirnov, and Y. Takeyama, *Traces on the Sklyanin algebra and correlation functions of the eight-vertex model*, J. Phys. A **38** (2005), no. 35, 7629–7659.

[3] Jean-Luc Brylinski, *A differential complex for Poisson manifolds*, J. Differential Geom. **28** (1988), no. 1, 93–114.

[4] V. G. Drinfel′d, *Hamiltonian structures on Lie groups, Lie bialgebras and the geometric meaning of classical Yang-Baxter equations*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **268** (1983), no. 2, 285–287.

[5] David Eisenbud, *Commutative algebra*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 150, Springer-Verlag, New York, 1995, With a view toward algebraic geometry.

[6] Benoit Fresse, *Théorie des opérades de Koszul et homologie des algèbres de Poisson*, Ann. Math. Blaise Pascal **13** (2006), no. 2, 237–312.

[7] Viktor L. Ginzburg, *Grothendieck groups of Poisson vector bundles*, J. Symplectic Geom. **1** (2001), no. 1, 121–169.

[8] Viktor L. Ginzburg and Jiang-Hua Lu, *Poisson cohomology of Morita-equivalent Poisson manifolds*, Internat. Math. Res. Notices (1992), no. 10, 199–205.

[9] Viktor L. Ginzburg and Alan Weinstein, *Lie-Poisson structure on some Poisson Lie groups*, J. Amer. Math. Soc. **5** (1992), no. 2, 445–453.

[10] G. Khimshiashvili, *On one class of exact Poisson structures*, Proc. A. Razmadze Math. Inst. **119** (1999), 111–120.

[11] ———, *On one class of affine Poisson structures*, Bull. Georgian Acad. Sci. **161** (2000), no. 3, 395–397.

[12] G. Khimshiashvili and R. Przybysz, *On generalized Sklyanin algebras*, Georgian Math. J. **7** (2000), no. 4, 689–700.

[13] André Lichnerowicz, *Les variétés de Poisson et leurs algèbres de Lie associées*, J. Differential Geometry **12** (1977), no. 2, 253–300.

[14] Yu. I. Manin, *Some remarks on Koszul algebras and quantum groups*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **37** (1987), no. 4, 191–205.

[15] ———, *Quantum groups and noncommutative geometry*, Université de Montréal Centre de Recherches Mathématiques, Montreal, QC, 1988.

[16] Nicolas Marconnet, *Homologies of cubic Artin-Schelter regular algebras*, J. Algebra **278** (2004), no. 2, 638–665.

[17] A. V. Odesskiĭ and B. L. Feĭgin, *Sklyanin's elliptic algebras*, Funktsional. Anal. i Prilozhen. **23** (1989), no. 3, 45–54, 96.

[18] A. V. Odesskiĭ and V. N. Rubtsov, *Polynomial Poisson algebras with a regular structure of symplectic leaves*, Teoret. Mat. Fiz. **133** (2002), no. 1, 3–23.

[19] Anne Pichereau, *Poisson (co)homology and isolated singularities*, J. Algebra **299** (2006), no. 2, 747–777.

[20] E. K. Sklyanin, *Some algebraic structures connected with the Yang-Baxter equation*, Funktsional. Anal. i Prilozhen. **16** (1982), no. 4, 27–34, 96.

[21] ———, *Some algebraic structures connected with the Yang-Baxter equation. Representations of a quantum algebra*, Funktsional. Anal. i Prilozhen. **17** (1983), no. 4, 34–48.

[22] S. P. Smith and J. T. Stafford, *Regularity of the four-dimensional Sklyanin algebra*, Compositio Math. **83** (1992), no. 3, 259–289.

[23] ———, *Regularity of the four-dimensional Sklyanin algebra*, Compositio Math. **83** (1992), no. 3, 259–289.

[24] Joanna M. Staniszkis, *The 4-dimensional Sklyanin algebra*, J. Algebra **167** (1994), no. 1, 104–115.

[25] Serge Roméo Tagne Pelap, *Poisson (co)homology of polynomial poisson algebras in dimension four : Sklyanin's case*, Preprint LAREMA (2008).

[26] Michel Van den Bergh, *Noncommutative homology of some three-dimensional quantum spaces*, Proceedings of Conference on Algebraic Geometry and Ring Theory in honor of Michael Artin, Part III (Antwerp, 1992), vol. 8, 1994, pp. 213–230.

[27] Pol Vanhaecke, *Integrable systems in the realm of algebraic geometry*, second ed., Lecture Notes in Mathematics, vol. 1638, Springer-Verlag, Berlin, 2001.

[28] Charles A. Weibel, *An introduction to homological algebra*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 38, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

[29] Ping Xu, *Poisson cohomology of regular Poisson manifolds*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **42** (1992), no. 4, 967–988.

[30] ———, *Gerstenhaber algebras and BV-algebras in Poisson geometry*, Comm. Math. Phys. **200** (1999), no. 3, 545–560.

Laboratoire Angevin de Recherche en Mathématiques Université D'Angers Département de Mathématiques
E-mail address : pelap@math.univ-angers.fr

Bibliographie

[1] Artin, Michael ; Schelter, William F. Graded algebras of global dimension 3. Adv. in Math. 66 (1987), no. 2, 171–216.

[2] Boos, H. ; Jimbo, M. ; Miwa, T. ; Smirnov, F. ; Takeyama, Y. Traces on the Sklyanin algebra and correlation functions of the eight-vertex model. J. Phys. A 38 (2005), no. 35, 7629–7659.

[3] Briançon, Joël ; Maynadier-Gervais, Hélène Sur le nombre de Milnor d'une singularité semi-quasi-homogène. C. R. Math. Acad. Sci. Paris 334 (2002), no. 4, 317–320.

[4] Brylinski, Jean-Luc A differential complex for Poisson manifolds. J. Differential Geom. 28 (1988), no. 1, 93–114.

[5] Drinfel'd, V. G. Hamiltonian structures on Lie groups, Lie bialgebras and the geometric meaning of classical Yang-Baxter equations. Dokl. Akad. Nauk SSSR 268 (1983), no. 2, 285–287.

[6] Dufour, Jean-Paul ; Zung, Nguyen Tien Poisson structures and their normal forms. Progress in Mathematics, 242. Birkhäuser Verlag, Basel, 2005.

[7] Eisenbud, David Commutative algebra. With a view toward algebraic geometry. Graduate Texts in Mathematics, 150. Springer-Verlag, New York, 1995.

[8] Feĭgin, B. L. and Odesskiĭ, A. V. Vector bundles on an elliptic curve and Sklyanin algebras. Topics in quantum groups and finite-type invariants. Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 185, 65–84 Amer. Math. Soc.Providence, RI (1998).

[9] Fresse, Benoit Théorie des opérades de Koszul et homologie des algèbres de Poisson. Ann. Math. Blaise Pascal 13 (2006), no. 2, 237–312.

[10] Ginzburg, Viktor L. Grothendieck groups of Poisson vector bundles. J. Symplectic Geom. 1 (2001), no. 1, 121–169.

[11] Ginzburg, Viktor L. ; Lu, Jiang-Hua Poisson cohomology of Morita-equivalent Poisson manifolds. Internat. Math. Res. Notices 1992, no. 10, 199–205.

[12] Ginzburg, Viktor L. ; Weinstein, Alan Lie-Poisson structure on some Poisson Lie groups. J. Amer. Math. Soc. 5 (1992), no. 2, 445–453.

[13] Guichardet, A. Homologie de Hochschild des déformations quadratiques d'algèbres de polynômes. Comm. Algebra. Communications in Algebra. 26, (1998) 12, 4309–4330.

[14] Khimshiashvili, G. On one class of exact Poisson structures. Proc. A. Razmadze Math. Inst. 119 (1999), 111–120.

[15] Khimshiashvili, G. On one class of affine Poisson structures. Bull. Georgian Acad. Sci. 161 (2000), no. 3, 395–397.

[16] Khimshiashvili, G. ; Przybysz, R. On generalized Sklyanin algebras. Georgian Math. J. 7 (2000), no. 4, 689–700.

[17] Levasseur, Thierry and Smith, S. Paul. Modules over the 4-dimensional Sklyanin algebra. Bull. Soc. Math. France. Bulletin de la Société Mathématique de France 121 (1993), 35–90.

[18] Lichnerowicz, André Les variétés de Poisson et leurs algèbres de Lie associées. (French) J. Differential Geometry 12 (1977), no. 2, 253–300.

[19] Looijenga, E. J. N. Isolated singular points on complete intersections. London Mathematical Society Lecture Note Series, 77. Cambridge University Press, Cambridge, 1984.

[20] Marconnet, Nicolas. Homologies of cubic Artin-Schelter regular algebras. J. Algebra 278 (2004), no. 2, 638–665.

[21] Monnier, Philippe. Poisson cohomology in dimension two. Israel J. Math. 129 (2002), 189–207.

[22] Mumford, David,Tata lectures on theta I, Modern Birkhäuser Classics, Reprint of the 1983 edition,Birkhäuser Boston Inc, Boston, MA, 2007

[23] Odesskiĭ, A. V. ; Feĭgin, B. L. Sklyanin's elliptic algebras. (Russian) Funktsional. Anal. i Prilozhen. 23 (1989), no. 3, 45–54, 96 ; translation in Funct. Anal. Appl. 23 (1989), no. 3, 207–214.

[24] Odesskiĭ, A. V. ; Rubtsov, V. N. Polynomial Poisson algebras with a regular structure of symplectic leaves. (Russian) Teoret. Mat. Fiz. 133 (2002), no. 1, 3–23.

[25] Pichereau, Anne. Poisson (co)homology and isolated singularities. J. Algebra 299 (2006), no. 2, 747–777.

[26] Saito, Kyoji. On a generalization of de-Rham lemma. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 26 (1976), no. 2, vii, 165–170.

[27] Sklyanin, E. K. Some algebraic structures connected with the Yang-Baxter equation. (Russian) Funktsional. Anal. i Prilozhen. 16 (1982), no. 4, 27–34, 96.

[28] Sklyanin, E. K. Some algebraic structures connected with the Yang-Baxter equation. Representations of a quantum algebra. (Russian) Funktsional. Anal. i Prilozhen. 17 (1983), no. 4, 34–48.

[29] Smith, S. P. ; Stafford, J. T. Regularity of the four-dimensional Sklyanin algebra. Compositio Math. 83 (1992), no. 3, 259–289.

[30] Staniszkis, Joanna M. The 4-dimensional Sklyanin algebra. J. Algebra 167 (1994), no. 1, 104–115.

[31] Tagne Pelap, Serge Roméo. Poisson (co)homology of polynomial Poisson algebras in dimension four : Sklyanin's case. Preprint LAREMA, (2008).

[32] Tagne Pelap, Serge Roméo. On the Hochshild homology of elliptic Sklyanin algebra. Preprint LAREMA, (2008).

[33] Van den Bergh, Michel Noncommutative homology of some three-dimensional quantum spaces. Proceedings of Conference on Algebraic Geometry and Ring Theory in honor of Michael Artin, Part III (Antwerp, 1992). K-Theory 8 (1994), no. 3, 213–230.

[34] Vanhaecke, Pol Integrable systems in the realm of algebraic geometry. Second edition. Lecture Notes in Mathematics, 1638. Springer-Verlag, Berlin, 2001.

[35] Weibel, Charles A. An introduction to homological algebra. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 38.

[36] Xu, Ping Poisson cohomology of regular Poisson manifolds. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 42 (1992), no. 4, 967–988.

[37] Xu, Ping Gerstenhaber algebras and BV-algebras in Poisson geometry. Comm. Math. Phys. 200 (1999), no. 3, 545–560.