



**HAL**  
open science

# Modélisation des courants induits dans les machines électriques par des systèmes d'ordre un demi

Delphine Riu

► **To cite this version:**

Delphine Riu. Modélisation des courants induits dans les machines électriques par des systèmes d'ordre un demi. Sciences de l'ingénieur [physics]. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG, 2001. Français. NNT: . tel-00598516

**HAL Id: tel-00598516**

**<https://theses.hal.science/tel-00598516>**

Submitted on 6 Jun 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° attribué par la bibliothèque

□□□□□□□□□□□□□□□□

**THESE**

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE

*Spécialité : Génie Electrique*

préparée au Laboratoire d'Electrotechnique de Grenoble

dans le cadre de l'Ecole Doctorale

« Electronique, Electrotechnique, Automatique, Télécommunications, Signal »

présentée et soutenue publiquement

par

Delphine RIU  
Ingénieur ENSIEG

le 11 Décembre 2001

**Titre : Modélisation des courants induits dans les machines électriques  
par des systèmes d'ordre un demi**

\_\_\_\_\_  
**Directeur de thèse : Marcel IVANES**

\_\_\_\_\_  
**JURY**

M. Alain OUSTALOUP  
M. Innocent KAMWA  
M. Robert PERRET  
M. Marcel IVANES  
M. Nicolas RETIERE

, Président et rapporteur  
, Rapporteur  
, Examineur  
, Directeur de thèse  
, Co-encadrant



*Qui ne tente rien n'a rien*

[Adage maternel]

*Y'a pas de mal à se faire du bien*

[Spéciale dédicace]





---

## *Remerciements*

---



Cette thèse s'est déroulée au Laboratoire d'Electrotechnique de Grenoble, unité de recherche du CNRS rattachée à l'Ecole Nationale Supérieure d'Ingénieurs Electriciens de Grenoble, au sein de l'équipe « Machines Electriques ».

Je tiens ici à exprimer mes plus vifs remerciements aux membres du jury :

M. Alain Oustaloup, professeur de l'ENSEIR de Bordeaux, directeur du Laboratoire d'Automatique et de Productique de Bordeaux, rapporteur et président de cette thèse, pour ses questions pertinentes et sa jovialité communicative,

M. Innocent Kamwa, ingénieur-chercheur à l'Institut de Recherches d'Hydro-Québec (IREQ), pour être venu de si loin et avoir accepté d'être mon rapporteur. Merci pour l'intérêt qu'il a su manifester à mon travail,

M. Robert Perret, professeur de l'INPG, pour ses questions pertinentes et sa présence lors de ma soutenance,

M. Marcel Ivanès, professeur « palmé » de l'INPG et directeur de cette thèse, pour toute l'attention qu'il a su m'accorder malgré son emploi du temps de ministre (voir la Figure 2). Merci de m'avoir proposée un sujet de thèse aussi ouvert et intéressant !

M. Nicolas Retière, maître de conférences de l'IUFM de Grenoble, pour sa disponibilité, sa perspicacité et son aide constantes tout au long de cette thèse. Sans vouloir parodier un autre thésard, je voudrais aussi le remercier pour ses très, très nombreuses corrections (cf Figure 3).

Un grand merci aux demoiselles du LEG : Danielle, Elise, Jacqueline, Monique, Marie-Thé et Florence pour leur grande gentillesse et leur aide.

Un grand merci également à tous les permanents non reconnus comme tels et qui font pourtant beaucoup pour la bonne marche du laboratoire, en particulier Bruno (Sage pour beaucoup, « homo protectus » pour nombre de jeunes filles et autres âmes en détresse), François (pour sa bonne humeur, sa gentillesse, son humour et ses chemises légendaires), Thierry (mon beau brun <NDLR : qu'est-ce qu'il faut pas dire pour faire plaisir>), Djidji, Jacques (pour tous les emm ... que je lui ai apportés), Tom ... et tous les autres. Je n'oublie pas le boys-band du GIE : Sylvain (alias : bel étalon) et Christophe, pour son écoute et son enthousiasme (sans oublier sa recette de la mousse au chocolat).

Grâce soit rendue aux autres ingénieurs informaticiens qui m'ont dépannée à maintes reprises. Merci donc aux trois « Pat » : P. Guillot, P. Eustache et P. Labie.

Je remercie M. Jean-Pierre Rognon, professeur de l'INPG et directeur du LEG, de m'avoir acceptée au laboratoire. Je tiens également à remercier les Grandes Oreilles du laboratoire pour ses conseils avisés.

Cette thèse n'a pas seulement été riche au niveau scientifique. Elle m'a également permis de rencontrer de nombreuses personnes très intéressantes de par leur expérience, leur culture ou



leur ouverture d'esprit. Je tiens donc à remercier l'ensemble des thésards du LEG (si, si, même ceux avec qui j'ai fini fâchée ; au - moins, ils m'auront bien fait rire !) pour tout ce qu'ils m'ont apportée tout au long de ces trois années de thèse. Je voudrais adresser plus particulièrement mes remerciements à :

Christophe Cartier-Millon (alias CCM ou Josy), mon comparse, ami, suppléant, secrétaire, ... etc (pas de mentions à rayer), pour son humour et ses grandes qualités de cœur et d'écoute (une des rares personnes pour qui le mot « générosité » n'est pas qu'un vain mot).

Olivier Defour (non, je ne mentionnerai pas ton petit nom en public par respect pour nos amies les blondes), mon cher partenaire de rock'n roll et de sirop à la violette. Sois rassuré, je t'ai définitivement pardonné tes « claques », bouderies et autres spaghettis « à la bolognaise » (quoique !). Le PQ gang vaincra !! (voir Figure 1)

Mes autres copains des pauses-déjeuners, pauses-café, soirées, ...etc etc : Jean-Daniel Arnould (JD, sa gentillesse et son *Touch of Charm*), Aktham Asfour (pour son écoute et ses fameuses recettes à la menthe), Mickey Joan (et / sans sa 306 ?), Fleur Janet (grand rayon de soleil du labo), Fabien Faure (GP), Gérald Claeys (et ses râleries), Kérim, Sophie, Damien (Boulet), Magalie et M<sup>onsieur</sup> Frédéric Lepoitevin (Miss Violette pour les intimes). A tous et toutes, un grand merci pour toutes ces rigolades et autres discussions sérieuses (pouf, pouf) que nous avons eues ensemble.

Je remercie Nicolas Jérance, co-lofteur de bureau, pour son aide et ses courses à travers les couloirs pour mes appels téléphoniques.

Une tendre pensée (snif) également pour les thésards déjà partis (quoique certains s'accrochent) : mon cher Victor (petit suisse basané), Christophe, Bertrand (*DartyMatlab* sic), Enaut, Patrice et Jean-Christophe. Un remerciement également aux p'tits jeunes (je sais que ça les énerve) : Gilles Desbiens (Gillou), Alban Marino (The Manip Killer), David Frey, Damien Thirault, Bertrand Revol et S. Pluvich (amateur de PS systems).

Un grand remerciement à toute ma famille pour m'avoir toujours motivée quand il le fallait : papa, maman, Julie, Mathieu, Brigitte, mamie Laissaud, mes grand-parents de Perpinyà. Aux amis proches : Laetitia (titi) et Arnaud. Un grand bonjour ensoleillé pour ma chère belle-famille-bagnat : Aimé, Yvette et Didier. Et n'oublions pas mes fidèles compagnons à poils : Doudou et Minette.

A ma tendre « moitié », Patrick, un grand merci pour m'avoir supportée aux deux sens du terme dans la dernière ligne droite et pour tout ce que tu fais pour moi (y compris résister à mes techniques de premiers secours).

A notre petit bout à venir, qui a supporté (décidément ! On va finir par croire que je suis pénible), sans trop râler, les repas au RU, le dernier rush de la thèse et le stress (si, si) de la soutenance.

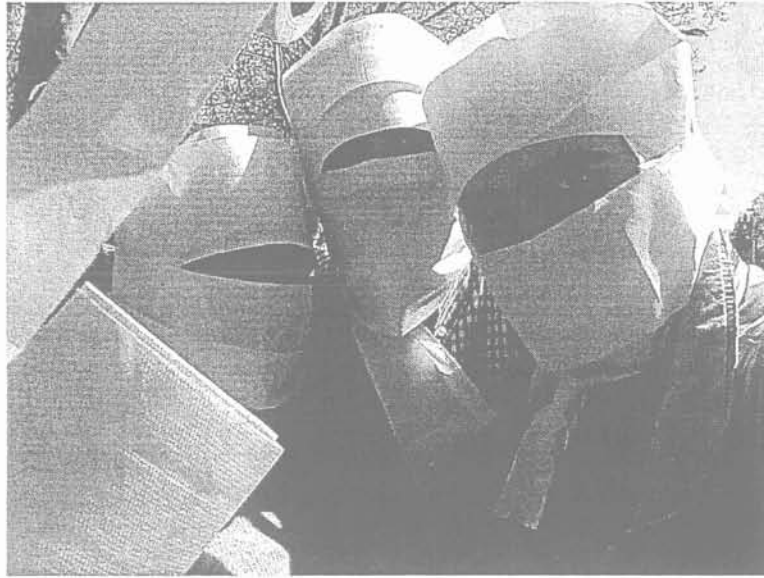


Figure 1. Le PQ gang en action



Figure 2. Marcel (©CCM)



Figure 3. Nicolas (©CCM)



---

## *Sommaire*

---



AVANT-PROPOS.....	1
INTRODUCTION GENERALE.....	2
<b>CHAPITRE I : CONTEXTE DE L'ETUDE.....</b>	<b>4</b>
I. INTRODUCTION.....	4
I.1 Préambule.....	4
I.2 Support de l'étude.....	4
II. LA MODELISATION FREQUENTIELLE DES MACHINES ELECTRIQUES.....	4
II.1 Prise en compte des phénomènes fréquentiels dans les schémas équivalents : pourquoi ?...	4
II.1.1 Stabilité des réseaux.....	5
II.1.2 Maintenance prédictive des systèmes électriques .....	5
II.1.3 Etude des performances d'un système.....	6
II.2 Prise en compte des phénomènes fréquentiels dans les schémas équivalents : comment ?...	7
II.2.1 Modèle de comportement.....	7
II.2.2 Modèle de connaissance .....	7
III. LA MODELISATION FRACTIONNAIRE.....	8
IV. CADRE APPLICATIF DE L'ETUDE.....	9
V. CONCLUSION.....	10
<b>CHAPITRE II : LA DERIVATION NON ENTIERE.....</b>	<b>12</b>
I. INTRODUCTION.....	12
II. DEFINITION.....	12
II.1 Opérateur « dérivation non entière ».....	12
II.1.1 Définition de Grunwald-Letnikov.....	12
a. Cas général.....	12
b. Cas d'une fonction causale.....	13
II.1.2 Définition de Riemann-Liouville.....	14
II.1.3 Synthèse.....	14
II.2 Dérivations non entières implicite et explicite.....	14
III. QUELQUES PROPRIETES DE LA DERIVATION NON ENTIERE.....	14
III.1 Linéarité.....	14
III.2 Transformée de Laplace.....	15
IV. EXEMPLES DE CALCUL DE DERIVEES NON ENTIERES.....	15
IV.1 Dérivation non entière d'une exponentielle.....	15
IV.2 Dérivation non entière d'un cosinus (ou d'un sinus).....	16
IV.3 Dérivation non entière d'un produit de fonctions exponentielle et sinusoïdale.....	16
V. METHODES DE RESOLUTION D'EQUATIONS DIFFERENTIELLES GENERALISEES (E.D.G.)...	17

V.1	Résolution par la transformée de Laplace.....	17
V.2	Résolution par évaluation numérique des dérivées non entières.....	18
V.3	Synthèse.....	19
VI.	EXEMPLES D'ANALYSE DE SYSTEMES FRACTIONNAIRES.....	20
VI.1	Analyse fréquentielle.....	20
VI.2	Analyse temporelle : étude d'un système d'ordre $\frac{1}{2}$ implicite.....	21
VII.	CONCLUSION.....	22
<b>CHAPITRE III : MODELISATION DE L'INDUCTION ELECTROMAGNETIQUE.....</b>		<b>23</b>
I.	INTRODUCTION.....	23
II.	CALCUL ANALYTIQUE DE L'IMPEDANCE D'UNE BARRE.....	23
III.	APPROCHE CLASSIQUE DE MODELISATION.....	25
III.1	Développement en série (série de Foster).....	26
III.2	Développement en fraction continue.....	27
III.3	Conclusion.....	27
IV.	DE L'EQUATION DE DIFFUSION A L'ORDRE $\frac{1}{2}$ .....	28
IV.1	Mise en évidence de l'ordre $\frac{1}{2}$ .....	28
IV.1.1	Cas d'une barre de hauteur finie (h).....	28
IV.1.2	Cas d'une barre de hauteur infinie.....	30
IV.2	Modélisation d'ordre $\frac{1}{2}$ d'une barre conductrice de hauteur finie.....	31
IV.3	Comparaison des différents modèles.....	33
IV.4	Conclusion.....	35
V.	AUTRES LIENS AVEC LA DERIVATION NON ENTIERE.....	36
V.1	Modèle récursif d'une barre rectangulaire de hauteur infinie.....	36
V.1.1	Découpage géométrique de la barre.....	36
V.1.2	Modèle récursif de la barre.....	38
V.2	De la récursivité à la dérivation non entière.....	39
VI.	CONCLUSION.....	40
<b>CHAPITRE IV : MODELISATION FRACTIONNAIRE DES MACHINES ELECTRIQUES.....</b>		<b>41</b>
I.	INTRODUCTION.....	41
II.	MODELISATION D'ORDRE $\frac{1}{2}$ DE PIECES CONDUCTRICES.....	41
II.1	Modélisation d'une barre - prise en compte de sa forme.....	41
II.1.1	Influence de la forme de la barre.....	41
II.1.2	Conclusion : modélisation d'une barre de cage d'écureuil ou d'amortisseur.....	45
II.2	Modélisation d'une pièce magnétique massive.....	47
II.2.1	Calcul analytique.....	47

II.2.2 Validation expérimentale de la modélisation .....	48
II.2.3 Conclusion : modélisation de pièces massives (circuit magnétique).....	52
III. RAPPELS : SCHEMAS EQUIVALENTS DE PARK DES MACHINES TOURNANTES.....	53
III.1 Modélisation de Park de la machine asynchrone.....	53
III.2 Modélisation de Park de la machine synchrone .....	54
IV. CONSTRUCTION DU SCHEMA EQUIVALENT D'ORDRE FRACTIONNAIRE DE LA MACHINE ASYNCHRONE.....	55
IV.1 Equations électriques de la machine.....	56
IV.1.1 Positionnement du problème.....	56
IV.1.2 Modélisation du stator.....	57
IV.1.3 Modélisation de la cage d'écurueil.....	57
IV.2 Vecteurs tournants statoriques et rotoriques.....	59
IV.2.1 Vecteur tournant lié aux grandeurs statoriques.....	59
IV.2.2 Vecteur tournant lié aux grandeurs rotoriques.....	60
IV.2.3 Expression des vecteurs tournants.....	61
IV.3 Etablissement du schéma équivalent.....	63
IV.3.1 Au stator ... ..	64
IV.3.2 Au rotor ... ..	64
IV.3.3 Schéma équivalent de la machine asynchrone en régime sinusoïdal .....	64
V. CONSTRUCTION DU SCHEMA EQUIVALENT D'ORDRE FRACTIONNAIRE DE LA MACHINE SYNCHRONE.....	66
VI. CONCLUSION.....	68
 <b>CHAPITRE V : IDENTIFICATION DES SCHEMAS EQUIVALENTS FRACTIONNAIRES DES MACHINES SYNCHRONES ET ASYNCHRONES.....</b>	 69
I. INTRODUCTION.....	69
II. TECHNIQUES DE MESURE SSFR ET D'IDENTIFICATION DES PARAMETRES .....	69
II.1 Mesures par SSFR (StandStill Frequency Response).....	69
II.1.1 Principe de mesure SSFR .....	69
II.1.2 Grandeurs opérationnelles associées à la machine asynchrone.....	71
II.1.3 Grandeurs opérationnelles associées à la machine synchrone.....	72
II.2 Identification des paramètres.....	73
II.2.1 Identification des schémas équivalents d'ordre entier.....	73
II.2.2 Identification des schémas équivalents d'ordre fractionnaire.....	74
III. IDENTIFICATION DES PARAMETRES DE LA MACHINE ASYNCHRONE.....	74
III.1 Description du banc de mesures SSFR.....	74
III.1.1 Ses fonctions .....	74
III.1.2 La machine asynchrone.....	75
III.1.3 Source de tension et amplificateur.....	76
III.1.4 Analyseur de puissance.....	76
III.2 Identification des paramètres .....	77



III.2.1 Protocole d'identification constructive.....	77
III.2.2 Résultats d'identification.....	78
III.3 Conclusion.....	80
IV. IDENTIFICATION DES PARAMETRES DE LA MACHINE SYNCHRONE.....	80
IV.1 Introduction.....	80
IV.1.1 Représentation unitaire.....	81
IV.1.2 Remarques sur les tests SSFR des machines synchrones.....	81
IV.2 Identification des paramètres.....	81
IV.2.1 Démarche constructive.....	81
IV.2.2 Résultats d'identification.....	82
IV.3 Cas de l'alternateur hydraulique.....	86
IV.3.1 Considérations technologiques.....	86
IV.3.2 Etablissement du schéma équivalent fractionnaire d'un alternateur hydraulique.....	87
IV.3.3 Identification des paramètres du schéma équivalent.....	88
a) Caractéristiques de l'alternateur hydraulique étudié.....	88
b) Identification des paramètres.....	88
IV.4 Conclusion.....	92
V. INFLUENCE DE LA TEMPERATURE SUR LES PARAMETRES DES SCHEMAS EQUIVALENTS....	92
V.1 Introduction.....	92
V.2 Influence théorique de la température.....	92
V.3 Description du banc expérimental.....	93
V.3.1 Ses fonctions.....	93
V.3.2 Protocole de mesures.....	94
V.3.3 Instrumentation en température.....	94
V.4 Essais réalisés.....	95
V.4.1 Procédure d'extraction de la température.....	95
V.4.2 Durée de l'essai.....	96
V.4.3 Essais réalisés.....	96
V.5 Identification des paramètres.....	96
V.6 Conclusion.....	97
VI. INFLUENCE DE LA SATURATION SUR LES PARAMETRES DES SCHEMAS EQUIVALENTS.....	98
VI.1 Position du problème.....	98
VI.2 Calcul de l'impédance d'une tôle ferromagnétique saturée.....	100
VI.2.1 Equation de la diffusion non linéaire.....	100
VI.2.2 Modèle de courbe de magnétisation.....	100
VI.2.3 Calcul de l'impédance de la tôle.....	102
VI.3 Discussion et perspectives.....	104
VII. CONCLUSION.....	105
<b>CHAPITRE VI : REPONSE TEMPORELLE D'UN SYSTEME</b>	
<b>FRACTIONNAIRE.....</b>	<b>106</b>
I. INTRODUCTION.....	106
II. DEFINITION D'UN SYSTEME D'ETAT GENERALISE.....	106

II.1 Quelques notations.....	106
II.2 Système d'état généralisé.....	107
III. ALGORITHME DE CALCUL DE LA REPONSE TEMPORELLE D'UN SYSTEME D'ORDRE FRACTIONNAIRE DE NATURE IMPLICITE.....	108
III.1 Définition de la fonction de transfert.....	109
III.2 Changement de variable de Laplace.....	110
III.3 Equation différentielle généralisée.....	110
III.4 Changement de variables : dérivées non entières de la sortie.....	111
III.5 Construction du système d'état généralisé.....	112
III.6 Discrétisation.....	113
III.7 Résolution du système.....	115
IV. AUTRES OUTILS DE CALCUL DES REPONSES TEMPORELLES DE SYSTEME GENERALISE IMPLICITE.....	116
IV.1 Présentation de la démarche.....	116
IV.2 Application à la machine asynchrone.....	117
IV.3 Synthèse.....	117
V. REPONSE TEMPORELLE DE LA MACHINE ASYNCHRONE - APPLICATION DE L'ALGORITHME IMPLICITE.....	117
VI. CONCLUSION.....	118
CONCLUSION GENERALE.....	120
ANNEXE 1 : EQUATIONS VECTORIELLES DANS LE REFERENTIEL STATORIQUE.....	123
ANNEXE 2 : CARACTERISTIQUES DE LA MACHINE ASYNCHRONE LS 200 L	124
ANNEXE 3 : GRANDEURS DE BASE D'UN ALTERNATEUR.....	125
ANNEXE 4 : GRANDEURS OPERATIONNELLES D'UN ALTERNATEUR.....	127
ANNEXE 5 : IDENTIFICATION DE L'ALTERNATEUR DE CANAY.....	128
ANNEXE 6 : APPROXIMATION DU PREMIER HARMONIQUE.....	129
ANNEXE 7 : REPONSE TEMPORELLE DE LA MACHINE ASYNCHRONE.....	132
ANNEXE 8 : MODELE APPROCHE EXPLICITE BORNE EN FREQUENCES....	136
BIBLIOGRAPHIE.....	138



---

*Avant-propos*

---



L'objectif de cette thèse est d'étudier la modélisation des courants induits susceptibles de se développer dans les dispositifs électriques par des systèmes d'ordre non entier, c'est-à-dire des systèmes faisant intervenir des dérivations non entières de grandeurs électriques. L'une des difficultés de cette étude est liée à l'application novatrice cet outil mathématique au domaine de l'électrotechnique.

Le chapitre II de ce rapport donne les principales définitions et propriétés de cet outil. Sa lecture est par conséquent vivement recommandée avant de se plonger dans l'étude à proprement dite des machines électriques.

Nous informons par ailleurs le lecteur que nous utiliserons indifféremment dans ce rapport le qualificatif de « **non-entier** » ou « **fractionnaire** » au sujet d'une dérivation d'ordre réel.

De plus, nous utiliserons abusivement le terme « **machine asynchrone** » pour désigner une machine à induction à cage d'écureuil.

Bonne lecture !!



---

*Introduction générale*

---





Nous constatons actuellement un accroissement considérable du nombre d'actionneurs et de sources d'énergie mis en réseau, ce qui participe activement au véritable engouement pour les études menées sur les réseaux électriques. Les projets d'avions ou de navires tout électrique illustrent concrètement cette tendance.

D'un point de vue général, l'accroissement de la taille et de la complexité des réseaux ne peut cependant se faire au détriment de la sécurité des personnes et de la fiabilité des installations concernées. Ceci amène à analyser précisément les interactions entre les différents dispositifs d'un même réseau (machines électriques, convertisseurs, FACTS, ...etc). Une telle analyse est souvent menée dans le domaine fréquentiel car elle permet de mieux distinguer les différentes dynamiques d'un système.

Il est alors nécessaire de disposer de modèles fréquentiels fins et valables sur une plus grande plage de fréquences.

En outre, l'étude de ces systèmes complexes sera facilitée si leur modèle comporte le plus petit nombre de paramètres possible.

Au cœur de tous ces dispositifs on trouve la machine électrique. C'est donc sur elle que portera principalement notre étude et tout particulièrement sur :

- le moteur asynchrone, puisqu'il est très couramment utilisé dans les applications industrielles,
- l'alternateur, puisqu'il est une source essentielle d'énergie électrique

En résumé, l'objectif premier de cette thèse est d'améliorer les modèles fréquentiels de machines électriques. Toutefois, cette étude ne se contente pas d'une simple amélioration des modélisations classiques mais propose leur dépassement. Elle est même en rupture totale avec les représentations habituelles puisqu'elle est basée sur l'utilisation de l'outil mathématique de dérivation fractionnaire dans la résolution des équations de Maxwell, équations à la base de tout dispositif électrique.

La première partie de ce travail reposera sur la recherche essentiellement analytique de nouveaux modèles de machines à l'aide cet outil mathématique. Une seconde partie plus expérimentale validera nos différents modèles sur des bancs d'essai fréquentiel réalisés en partie au LEG.

Notre démarche s'articule autour six chapitres.

Dans le premier chapitre, nous parlerons de la nécessité actuelle d'améliorer la représentation des phénomènes fréquentiels dans les dispositifs électriques, ceci à travers des schémas équivalents plus précis et plus compact et nous rappellerons les approches classiques utilisées pour mener ces études. Nous situerons également la modélisation fractionnaire des courants induits dans le cadre des travaux déjà existants.

Dans le deuxième chapitre, nous donnerons les principes mathématiques de la dérivation fractionnaire qui nous seront utiles tout au long de ce mémoire.

À la suite de ces chapitres d'introduction, le troisième chapitre présentera une nouvelle approche pour modéliser le phénomène de diffusion du champ magnétique dans un matériau conducteur. Pour bien poser le problème, nous établirons tous les résultats dans le cas simple mais représentatif d'une barre conductrice rectangulaire.

Le quatrième chapitre étendra les résultats du chapitre précédent à l'étude d'autres pièces rencontrées dans les machines électriques. Il permettra surtout d'établir de nouveaux schémas équivalents incluant des impédances variant avec la racine carrée de la fréquence.

L'identification des paramètres des schémas équivalents fractionnaires des machines étudiées sera ensuite présentée dans le cinquième chapitre. Nous étudierons également l'influence de l'échauffement et de la saturation du matériau sur les paramètres des modèles établis.

On terminera sur l'étude des machines dans le domaine temporel à partir des schémas équivalents fractionnaires établis précédemment. Celle-ci consistera principalement à la mise au point d'un algorithme de calcul de la réponse temporelle d'une machine asynchrone à rotor bloqué.

---

*Chapitre I*

*Contexte de l'étude*

---



## I. INTRODUCTION

### *I.1 Preamble*

La modélisation fractionnaire des dispositifs électriques doit répondre à un problème majeur : la représentation simple et précise des phénomènes fréquentiels liés à l'induction électromagnétique.

L'objet de ce chapitre est de situer les travaux présentés dans ce mémoire dans le cadre très général d'une part de l'étude des machines électriques, et d'autre part, de la représentation d'ordre fractionnaire de certaines classes de phénomènes physiques.

### *I.2 Support de l'étude*

L'étude des systèmes électriques (réseaux, associations convertisseurs - machines, ...) nécessite le recours à une représentation sous forme de circuits des différents dispositifs le constituant. C'est en particulier le cas pour les machines électriques.

Afin de faciliter l'étude de ces systèmes, leurs caractéristiques sont généralement représentées et exploitées dans le domaine fréquentiel en utilisant les diagrammes de Bode.

Dans de nombreux cas, les modèles retenus ne sont valables que sur une plage de fréquences restreinte. Et ceci devient rapidement problématique lorsqu'une analyse fréquentielle « fine » s'avère indispensable (le paragraphe II détaille quelques champs d'étude pour lesquels c'est le cas).

## II. LA MODELISATION FREQUENTIELLE DES MACHINES ELECTRIQUES

### *II.1 Prise en compte des phénomènes fréquentiels dans les schémas équivalents : pourquoi ?*

Avec la généralisation de l'alimentation des machines électriques par des convertisseurs statiques de type M.L.I., la modélisation classique par des schémas équivalents à paramètres constants devient inadaptée, puisqu'elle ne prend plus en compte les effets liés aux harmoniques générés par les convertisseurs [KAM-92] [ATA-92].

Il devient désormais essentiel de tenir compte des influences de ces harmoniques sur le comportement dynamique des machines, notamment sur le couple électromagnétique, pour

assurer la sécurité et la fiabilité de fonctionnement de ces machines [ALG-70] [GEM-92] [THO-94].

Ces problèmes ne concernent pas uniquement les associations convertisseurs - machines. On doit en tenir compte également dans l'étude de la stabilité des réseaux, de la maintenance et du diagnostic des dispositifs et des performances d'un système, où un modèle fréquentiel précis est requis.

### II.1.1 Stabilité des réseaux

Le problème de la stabilité des réseaux est apparu avec l'augmentation de leur taille. On entend par stabilité l'aptitude d'un système à être peu perturbé lors de l'apparition d'un défaut. Autrement dit, un réseau de distribution est stable si la production d'énergie reste globalement constante par rapport à la consommation même en cas d'accident (court-circuit sur une ligne, forte demande momentanée d'énergie,...) [KUN-94]. L'étude de la stabilité est effectuée pour trois régimes de fonctionnement distincts :

- le régime transitoire (temps de réponse inférieur à 10 ms)
- le régime dynamique (temps de réponse compris entre 10 et 500 ms)
- le régime permanent (temps de réponse supérieur à 500 ms)

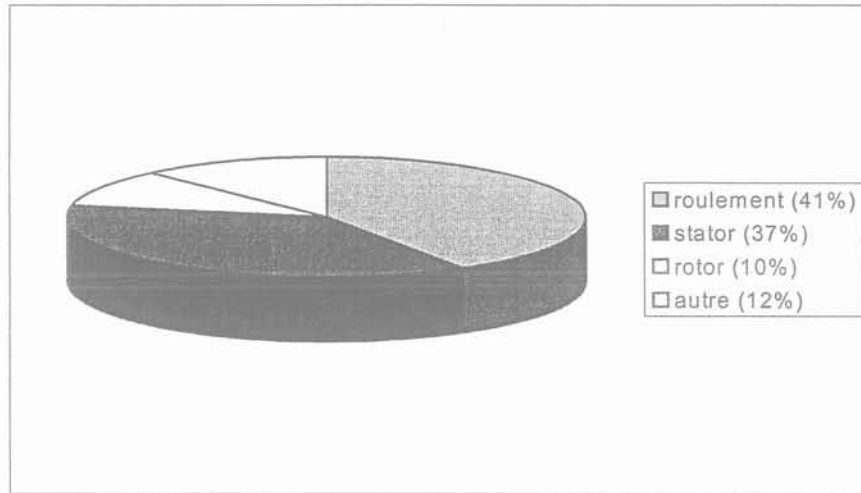
Pour l'étude de stabilité des régimes dynamiques et transitoires, il est important de disposer de modèles fréquentiels précis des différents éléments composant le système. Ainsi, le modèle de machines utilisé classiquement dans les logiciels de simulation de réseaux comme Eurostag<sup>®</sup>, développé par EDF, est un modèle de Park présentant plusieurs branches en parallèle au rotor afin d'être représentatif sur une certaine plage de fréquences.

### II.1.2 Maintenance prédictive des systèmes électriques

L'utilisation de l'électricité est devenue à ce point banale que l'on finit par ignorer ses dangers et considérer sa présence comme quelque chose de naturel. Cependant, toutes ces apparences sont trompeuses et le maintien de la continuité de service nécessite un effort de la part des exploitants des systèmes. Dans le cas des réseaux, cet effort se répartit entre l'entretien permanent des composants (pylônes, câbles électriques, transformateurs, ...etc) et des unités de production (centrales hydrauliques, thermiques et nucléaires).

Le maillon faible est la machine électrique, car sa panne paralyse immédiatement la production et entraîne une perte sèche très importante [JAR-96].

Une maintenance dite « prédictive » doit donc être assurée afin de prévenir à temps les défauts susceptibles de se produire dans les machines (phase statorique mise en court-circuit, rupture de barre ou d'anneau de court-circuit, excentricités, roulements, ...). Les études actuelles portent sur les « petits » défauts (par exemple, un court-circuit entre spires), ceci afin de prévenir les « grands » cités plus haut. Une étude conduite pour IEEE [IEE-85] a établi une statistique des différents défauts pouvant intervenir dans une machine électrique.



**Figure I-1.** Répartition des défauts dans une machine électrique suivant leur localisation

Bien évidemment, le meilleur moyen d'assurer un diagnostic correct de la machine ne consiste pas à « décortiquer » la machine à intervalles réguliers pour voir si la trente-cinquième barre de la cage d'amortisseurs ne s'est pas rompue. Il consiste à étudier certaines grandeurs électriques caractéristiques du type de défaut rencontré. Cependant, dans le cas de la machine synchrone, l'étude des courants statoriques ne permet pas toujours de diagnostiquer la machine : il est nécessaire d'observer d'autres grandeurs comme par exemple les tensions d'arbre [JER-01].

Généralement, le diagnostic des défauts est fait à partir du spectre des grandeurs électriques. Les fréquences de défaut dépendent non seulement du défaut, mais aussi du choix de l'alimentation et du glissement dans le cas d'une machine asynchrone. Ainsi, les fréquences correspondant à ces défauts peuvent couvrir un large spectre de fréquences [RAI-00].

Il est donc là aussi indispensable de disposer de modèles fréquentiels précis de la machine, afin de mettre au point des outils de diagnostic fiables sur une large plage de fréquences.

### II.1.3 Etude des performances d'un système

Il est difficile, suivant le public concerné, de donner une définition claire du terme « performances ». Pour certaines personnes, les critères portent essentiellement sur le comportement dynamique du système. Ainsi, le constructeur d'une machine asynchrone vérifiera par exemple que le couple au démarrage est suffisant pour un appel de courant faible. Pour d'autres, les performances d'un système seront essentiellement liées au rendement général, donc aux pertes. Dans ce cas, la détermination des pertes peut être faite directement à partir d'un schéma équivalent de la machine. Ce schéma équivalent devrait alors être suffisamment représentatif de la physique de la machine afin que l'estimation ne soit pas trop grossière. Pour cela, il faudrait notamment que les paramètres de ce schéma équivalent (résistances et inductances) soient variables avec la fréquence.



## II.2 Prise en compte des phénomènes fréquentiels dans les schémas équivalents : comment ?

Tous les phénomènes électromagnétiques sont régis par les équations de Maxwell. Afin d'obtenir un modèle de connaissance de la machine, il est donc impératif de partir de ces équations pour modéliser les courants induits se développant dans les pièces conductrices. Ces équations seront simplifiées puisque [VAS-90] :

- les fréquences ou les vitesses mises en jeu étant faibles, les courants de déplacement sont négligeables devant les courants de conduction,
- l'absence de diélectrique ou de charges nous permet d'écarter les phénomènes électrostatiques.

La relation (I-1) rappelle la nature de ces équations aux dérivées partielles.

$$\left. \begin{array}{l} \text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J} \\ \text{rot } \mathbf{E} = -\frac{d\mathbf{B}}{dt} \end{array} \right\} \text{équations de couplage électromagnétique} \tag{I-1}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{div } \mathbf{B} = 0 \\ \text{div } \mathbf{E} = 0 \end{array} \right\} \text{équations de conservation du flux}$$

La résolution de ces équations peut être menée de différentes manières. Suivant la méthode employée, le schéma équivalent prenant en compte les phénomènes fréquentiels peut constituer soit un modèle de comportement, soit un modèle de connaissance.

### II.2.1 Modèle de comportement

La manière la plus commode est de passer outre la résolution des équations de Maxwell et de rechercher plutôt un modèle de comportement. Ceci est réalisé par l'ajout au schéma équivalent classique de cellules (R-L), le nombre de cellules rajoutées dépendant de la précision désirée. Le nombre de paramètres peut donc augmenter considérablement, et ceci parfois au détriment de leur pertinence physique (inductances négatives,...) [ATA-92].

### II.2.2 Modèle de connaissance

Parfois, on cherchera à ce que le modèle établi tienne « parfaitement » compte de la physique et de la géométrie de la machine, ceci afin d'associer tel phénomène physique à tel paramètre du schéma équivalent. Le modèle obtenu est ainsi un modèle de connaissance de la machine.

Pour tenir compte de la géométrie de la machine et des phénomènes fréquentiels, la méthode couramment employée est de déduire d'une simulation par éléments finis le schéma

équivalent de la machine [SAH-94] [NAB-94] [DUC-96]. On dispose ainsi, pour chaque harmonique étudié du schéma équivalent correspondant. Il va sans dire que cette méthode est longue et coûteuse en calculs.

Il existe des méthodes alternatives, qui sont basées sur le fait que les paramètres physiques (résistances et inductances) des pièces où se manifeste l'effet de peau, varient avec la racine carrée de la fréquence [ALG-70]. Certains auteurs comme [CAN-69] ou [SLE-99] ont ainsi établi des schémas équivalents comportant des impédances variant avec la racine carrée de la fréquence, mais cette modélisation n'a pas réellement été utilisée à des fins pratiques.

### III. LA MODELISATION FRACTIONNAIRE

La modélisation des machines électriques par des systèmes d'ordre non entier s'inscrit dans un contexte beaucoup plus large de représentation précise et condensée de phénomènes physiques décrits par des équations aux dérivées partielles. Cette modélisation relève tout aussi bien des sciences pour l'ingénieur que des sciences biologiques ou physico-chimiques. Une action thématique du club EEA-SEE-MEN, avec le soutien de PSA et Alstom, a ainsi vu le jour en 1998 sur la théorie et les applications des systèmes à dérivées non entières [EEA-98].

Le concept et le formalisme mathématique de la dérivation non entière remontent au début du XIX<sup>ème</sup> siècle [POD-99]. C'est Alain Oustaloup du Laboratoire d'Automatique et de Productique (LAP) de Bordeaux, qui a été l'un des premiers en France à appliquer dans de nombreux domaines la théorie des systèmes d'ordre fractionnaire. Il s'est ainsi intéressé avec l'équipe CRONE (abréviation de Commande Robuste d'Ordre Non Entier) à l'application de la dérivation non entière dans les disciplines suivantes :

- en automatique à travers la commande CRONE (synthèse d'un régulateur réalisé à partir d'une dérivée non entière), mais aussi à l'identification par modèle non entier de dispositifs,
- en robotique, à travers la suspension active pour automobile CRONE et en modélisation d'environnement à travers la planification non entière de trajectoire.

Cette approche a conduit à des résultats très satisfaisants en termes de performances [OUS-95] [GDR]. De nombreux axes de recherche ont également été lancés dans d'autres domaines scientifiques, aussi divers et variés que [PRO-99] [OUS-95] :

- la rhéologie, où les relations contraintes - déformations font apparaître plusieurs ordres de dérivation non entière,
- la chimie, où dans le cas d'une interface fractale entre un métal et un milieu ionique le courant est proportionnel à la dérivée non entière de la tension,

- l'étude des signaux, où les bruits de composants électroniques et ceux des turbulences aérodynamiques peuvent présenter des spectres non-standards,
- la modélisation de la diffusion de fluides en milieux poreux micro-fissuré.

Il faut savoir que les dérivations non entières mises en jeu dans ces problèmes d'identification de systèmes sont de nature **explicite** <sup>(1)</sup>. Nous reviendrons sur ce point à de nombreuses reprises, mais il est important de le noter dès à présent.

En ce qui concerne l'application de la dérivation non entière au génie électrique, des travaux très différents sont menés à ce jour en parallèle dans trois laboratoires en France :

- à Poitiers, au LAII (Laboratoire Automatique et Informatique Industrielle), dans le cadre de l'identification des paramètres d'un schéma équivalent classique de machine asynchrone à partir d'algorithmes reposant sur des modèles d'ordre non entier explicites [LIN-01],
- à Toulouse, au LEEI (Laboratoire d'Electrotechnique et Electronique Industrielle), où l'effet de peau dans les barres du rotor d'une machine asynchrone est modélisé par un ensemble de cellules (R-L) en parallèle, le nombre de cellule et leurs paramètres étant identifiés par application des algorithmes d'identification développés à Poitiers [KAB-97] [FAU-01] [KHA-01],
- à Grenoble enfin, où les travaux de cette thèse ont été initiés par la modélisation non entière d'une machine asynchrone à partir de systèmes fractionnaires de nature **implicite** <sup>(2)</sup> [RET-98] [NOU-99].

#### IV. CADRE APPLICATIF DE L'ETUDE

Le terme « machine électrique » regroupe un nombre important de dispositifs aux multiples principes de fonctionnement et dimensions. Nous avons donc choisi de restreindre notre étude à un seul type de machine et à une gamme de puissance, tout en gardant à l'esprit d'autres technologies pour élargir à l'avenir notre domaine d'application.

D'une part, nous nous sommes intéressés aux machines électriques tournantes. D'autre part, en ce qui concerne ce type de machines, on peut distinguer quatre grandes familles : les machines à courant continu, les machines asynchrones, les machines synchrones et les machines à réluctance variable. Nous avons choisi d'étudier les deux principaux types de machines utilisées dans l'industrie, à savoir les machines synchrones et asynchrones. Ces machines sont étudiées dans leur application qualitative la plus courante, i.e. en moteur pour la machine asynchrone et en alternateur pour la machine synchrone.

Pour ce qui est de la gamme de puissance, nous souhaitons que notre modèle soit valable sans restriction de puissance. Pour des raisons pratiques, il s'avère qu'il est beaucoup plus facile de travailler avec des machines de faible ou moyenne puissance. Néanmoins, le terme « faible puissance » ne signifie pas la même chose dans le cas d'un moteur asynchrone à utilisation industrielle et dans celui d'un alternateur de centrale électrique. La gamme de puissance du moteur asynchrone sera donc de plusieurs dizaines, voire centaines de kilowatts, et celle d'un alternateur ira d'une dizaine à plusieurs centaines de mégawatts. Bien sûr les choix de construction technologique de la machine seront corrélés à la gamme de puissance considérée. Nous avons donc choisi d'étudier les machines suivantes (voir Tableau I-1) :

Type de machine	Moteur asynchrone	Machine synchrone	
		Alternateur hydraulique	Turboalternateur
Puissance considérée	30 kW	6 MVA	1101 MVA
Spécificités de construction	Rotor à double cage d'écureuil en aluminium	Rotor à pôles saillants	Rotor lisse

**Tableau I-1.** Description des machines étudiées

Les caractéristiques précises des machines utilisées seront données au chapitre V.

## V. CONCLUSION

Cette brève présentation du contexte de l'étude nous montre qu'il devient primordial de définir des schémas équivalents de machines électriques suffisamment fins et précis sur une large plage de fréquences (au moins du milliHertz jusqu'au kiloHertz pour les plus puissantes machines), afin de tenir compte à l'avance soit de l'influence des harmoniques sur le comportement dynamique d'une machine (notamment sur certaines grandeurs critiques comme le couple), soit de la variation des paramètres physiques.

Notre point de départ sera les équations de Maxwell. Le diagramme ci-dessous (voir Figure I-2) résume les modélisations possibles des machines électriques, en précisant leurs avantages et leurs inconvénients respectifs. La modélisation que nous proposerons dans cette étude repose sur la dérivation non-entière, le but étant de compenser les inconvénients de l'approche classique (trop de paramètres, peu de signification physique).

En résumé, notre cahier des charges est de définir un schéma équivalent qui soit :

- un modèle de connaissances des machines électriques,
- fiable sur une grande plage de fréquences,
- avec un nombre minimal de paramètres,

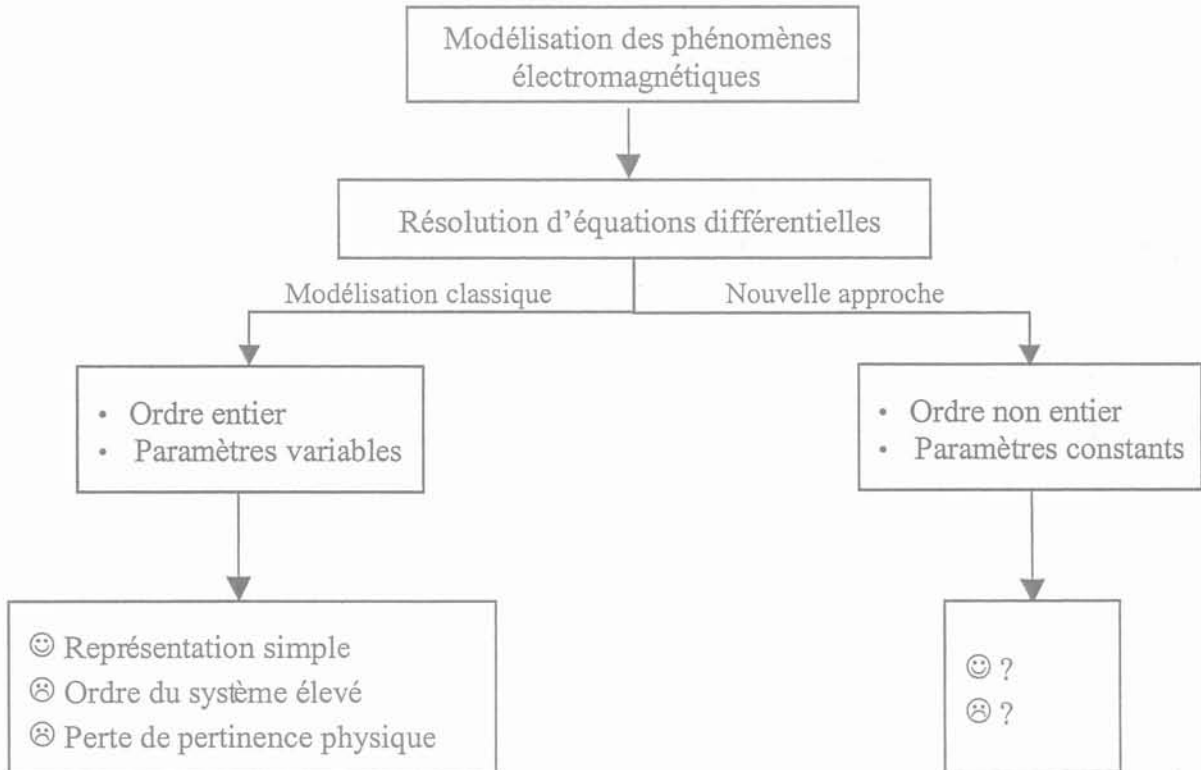


Figure I-2. Modélisation classique et fractionnaire de l'induction électromagnétique

(1) La dérivation non entière explicite porte directement sur la fonction

(2) La dérivation non entière implicite porte sur le produit de la fonction et d'une exponentielle

---

*Chapitre II*

*La dérivation non entière*

---



## I. INTRODUCTION

L'objectif de ce chapitre est de donner les principes mathématiques de la dérivation non entière qui nous seront utiles dans la suite de notre étude.

La (les) définition(s) de la dérivation non entière et ses principales propriétés sont tout d'abord données. Quelques méthodes de résolution d'équation différentielle mettant en œuvre des dérivées non entières sont ensuite présentées. Enfin, l'analyse fréquentielle et temporelle de systèmes d'ordre  $\frac{1}{2}$  est détaillée.

## II. DEFINITION

### II.1 Opérateur « dérivation non entière »

On considère les notations suivantes :

- $\alpha$  : ordre de la dérivation ( $\alpha \in \mathbb{R}$ ),
- $D^{(\alpha)}$  : opérateur dérivation non entière d'ordre  $\alpha$ .

Dans ce qui suit, seul le cas de la dérivation non entière c'est-à-dire le cas où  $\alpha$  est positif, est étudié. Les résultats restent cependant valables pour  $\alpha$  négatif (cas de l'intégration non entière, utilisée en automatique pour la synthèse de correcteurs associés à des systèmes d'ordre non entier comme, par exemple dans le cas des suspensions automobiles [OUS-95]).

Deux expressions équivalentes permettent de définir l'opérateur  $D^{(\alpha)}$  appliqué à une fonction  $f$  continue. La première définition, sous la forme d'une limite, met clairement en évidence les propriétés physiques de la dérivation non entière et nous permettra de la calculer numériquement. La seconde sous forme intégrale, nous permettra de déterminer à la fin de ce chapitre quelques expressions analytiques de dérivées non entières.

#### II.1.1. Définition de GRUNWALD-LETNIKOV

##### a) Cas général

La dérivée d'ordre un ( $D^{(1)}$ ) d'une fonction  $f$  peut être définie par :

$$D^{(1)}f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(t-h)}{h} \quad (\text{II-1})$$

Lorsque  $n$  est un entier quelconque, cette formule peut se généraliser et la dérivée d'ordre  $n$  ( $D^{(n)}$ ) de  $f$  est définie par :



$$D^{(n)}f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \cdot \sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot C_n^k \cdot f(t - k.h), \text{ où } C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \quad (\text{II-2})$$

Plus généralement, on définit la dérivée d'ordre  $\alpha$  de la fonction  $f$  par la relation [POD-99] :

$$D^{(\alpha)}f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} \cdot f(t - k.h) \quad (\text{II-3})$$

où  $\binom{\alpha}{k} = \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(k)\Gamma(\alpha - k)}$  et  $\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} \cdot t^{z-1} \cdot dt$  est la fonction Gamma (généralisation de la notion de factorielle).

On montre qu'une très bonne approximation de (II-3) est donnée par (II-4) pour un pas de discrétisation  $h$  « petit » :

$$D^{(\alpha)}f(t) \approx \frac{1}{h^\alpha} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} \cdot f(t - k.h) \quad (\text{II-4})$$

Un point important qui distingue l'expression (II-4) de (II-2) est la présence de la somme infinie. La propriété fondamentale de la dérivation non entière est donc la prise en compte du passé intégral de la fonction, par rapport au caractère local de la dérivation entière, qui s'interprète géométriquement, dans le cas d'une dérivation d'ordre un, comme le coefficient directeur de la tangente).

#### b) Cas d'une fonction causale

Si  $f$  est causale, on montre que la somme infinie de (II-4) se réduit à un nombre  $K$  de termes, c'est-à-dire que l'on peut écrire [POD-99] :

$$D^{(\alpha)}f(t) \approx \frac{1}{h^\alpha} \cdot \sum_{k=0}^K (-1)^k \binom{\alpha}{k} \cdot f(t - k.h) \quad (\text{II-5})$$

On montre plus précisément que dans le cas d'un échantillonnage la dérivation d'ordre  $\alpha$  à l'instant  $t_m = h.m$ , où  $h$  est le pas d'échantillonnage, est donnée par :

$$D^{(\alpha)}f(t_m) = \frac{1}{h^\alpha} \cdot \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{\alpha}{k} \cdot f_{m-k} \text{ où } f_m = f(t_m) \quad (\text{II-6})$$

Cette expression permet de déterminer numériquement par discrétisation la dérivation non entière d'une fonction  $f$  causale.

### II.1.2. Définition de RIEMANN-LIOUVILLE [POD-99]

La dérivée d'ordre  $\alpha$ , lorsque  $\alpha < 1$ , d'une fonction  $f$  continue s'écrit sous la forme intégrale suivante :

$$D^{(\alpha)}f(t) = f(0) \cdot \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \cdot u(t) + \int_0^t \frac{\theta^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \cdot D^{(1)}[f(t-\theta)] d\theta \quad (\text{II-7})$$

où  $u(t)$  est la fonction échelon unitaire.

### II.1.3. Synthèse

Les deux définitions d'une dérivation non entière coïncident parfaitement lorsque la fonction  $f$  est  $(n-1)$  fois continûment dérivable et  $D^{(n)}f$  est intégrable sur  $[0, t]$ .

## II.2 Dérivations non entières implicite et explicite

Il est possible de différencier deux classes particulières de systèmes d'ordre non entier : ceux à caractère explicite et ceux à caractère implicite. Dans le premier cas, l'opérateur  $D^{(\alpha)}$  porte directement sur la fonction  $f$ , alors que dans l'autre cas cet opérateur porte sur le produit de  $f$  par une exponentielle [OUS-95].

Ainsi, un système d'entrée  $e(t)$  et de sortie  $s(t)$ , à caractère explicite est décrit par une équation différentielle du type :

$$\tau^\alpha \cdot D^{(\alpha)}s(t) + s(t) = e(t) \quad (\text{II-8})$$

Un système à caractère implicite est lui décrit par une équation différentielle du type :

$$\tau^\alpha \cdot D^{(\alpha)}[s(t) \cdot \exp(t/\tau)] = e(t) \cdot \exp(t/\tau) \quad (\text{II-9})$$

## III. QUELQUES PROPRIETES DE LA DERIVATION NON ENTIERE

### III.1 Linéarité

La dérivation non entière est un opérateur linéaire [OLD-74]. Ainsi, si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions continues et  $(\lambda, \mu)$  des réels, on a :

$$D^{(\alpha)}(\lambda \cdot f + \mu \cdot g) = \lambda \cdot D^{(\alpha)}(f) + \mu \cdot D^{(\alpha)}(g) \quad (\text{II-10})$$

### III.2 Transformée de Laplace

La transformée de Laplace  $F$ , fonction de l'opérateur de Laplace  $s$ , d'une fonction  $f$ , dépendant du temps  $t$ , est définie par la relation :

$$F(s) = L\{f(t); s\} = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-s \cdot t} \cdot dt \quad (\text{II-11})$$

[POD-99] montre que la transformation de Laplace d'une dérivation d'ordre  $\alpha$  de la fonction  $f$  est égale au produit de la transformée de Laplace de  $f$  et de l'opérateur de Laplace ( $s$ ) à la puissance  $\alpha$ , de manière analogue au cas des dérivations entières, i.e. :

$$L\{D^{(\alpha)}[f(t)]; s\} = s^{\alpha} \cdot L\{f(t); s\} \quad (\text{II-12})$$

En appliquant l'opérateur de Laplace aux équations différentielles (II-8) et (II-9) définissant les systèmes à caractère implicite et explicite, il est possible de les caractériser sous la forme d'une fonction de transfert. Soit, pour les systèmes à caractère explicite :

$$F_{\text{exp}}(s) = \frac{1}{1 + (\tau \cdot s)^{\alpha}} \quad (\text{II-13})$$

Et pour les systèmes à caractère implicite :

$$F_{\text{imp}}(s) = \frac{1}{(1 + \tau \cdot s)^{\alpha}} \quad (\text{II-14})$$

Il est alors possible de caractériser fréquemment ces systèmes par leur tracé dans le plan de Bode.

## IV. EXEMPLES DE CALCUL DE DERIVEES NON ENTIERES

Nous voyons ici quelques calculs basiques de dérivées non entières que nous exploiterons dans la suite de notre étude.

### IV.1 Dérivation non entière d'une exponentielle

On retrouve un résultat similaire au cas de la dérivation entière d'une fonction exponentielle ; en effet, pour un complexe  $z$  quelconque, on a [OLD-74] :

$$D^{(\alpha)}[\exp(z \cdot t)] = z^{\alpha} \cdot \exp(z \cdot t) \quad (\text{II-15})$$

où  $D^{(\alpha)}$  est la dérivation d'ordre  $\alpha$  par rapport à la variable  $t$ .

### IV.2 Dérivation non entière d'un cosinus (ou d'un sinus)

En utilisant le fait qu'un cosinus (*resp. un sinus*) est égal à la partie réelle (*resp. imaginaire*) d'une exponentielle, et que l'opérateur dérivée non entière est linéaire, on peut déterminer facilement la dérivation non entière d'ordre  $\alpha$  d'un cosinus (*resp. un sinus*).

Ainsi :

$$\begin{aligned} D^{(\alpha)}[\cos(\omega_0.t - \varphi)] &= \omega_0^\alpha \cdot \cos\left(\omega_0.t - \varphi + \alpha \cdot \frac{\pi}{2}\right) \\ D^{(\alpha)}[\sin(\omega_0.t - \varphi)] &= \omega_0^\alpha \cdot \sin\left(\omega_0.t - \varphi + \alpha \cdot \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned} \quad (\text{II-16})$$

La Figure II-1 ci-dessous illustre cette notion de dérivation non entière pour une fonction sinusoïdale caractérisée par une pulsation de 1 rad/s et un déphasage nul.

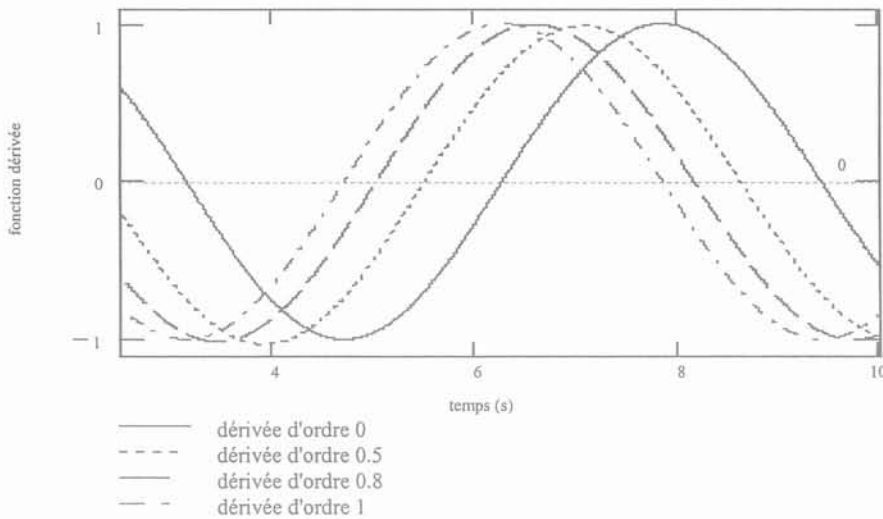


Figure II-1. Dérivation d'ordre  $\alpha$  d'une fonction sinusoïdale

### IV.3 Dérivation non entière d'un produit de fonctions exponentielle et sinusoïdale

Dans la suite du mémoire, il sera utile de calculer la dérivation non entière d'un produit de fonctions exponentielle et sinusoïdale, du type :  $\sin(\omega_0.t) \cdot \exp(t/\tau)$ . En utilisant le fait qu'un sinus est égal à la partie imaginaire d'une exponentielle et que l'opérateur dérivée non entière est linéaire, on trouve la relation suivante :

$$D^{(\alpha)}[\sin(\omega_0.t) \cdot \exp(t/\tau)] = R^\alpha \cdot \sin(\omega_0.t + \alpha.\theta) \cdot \exp(t/\tau) \quad (\text{II-17})$$

$$\text{avec : } R = \left| \frac{1}{\tau} + i.\omega_0 \right| \quad \text{et} \quad \theta = \text{Arg} \left( \frac{1}{\tau} + i.\omega_0 \right)$$

## V. METHODES DE RESOLUTION D'EQUATIONS DIFFERENTIELLES GENERALISEES (E.D.G.)

On considère un système continu et linéaire tel que son entrée  $e(t)$  et sa sortie  $s(t)$  soient reliées par l'équation :

$$a_{\alpha_n} .D^{(\alpha_n)}s(t) + a_{\alpha_{n-1}} .D^{(\alpha_{n-1})}s(t) + \dots + a_{\alpha_0} .D^{(\alpha_0)}s(t) = b_{\beta_p} .D^{(\beta_p)}e(t) + \dots + b_{\beta_0} .D^{(\beta_0)}e(t) \quad (\text{II-18})$$

où : –  $a_{\alpha_i}$  et  $b_{\beta_j}$  ( $i \in \{0, \dots, n\}$  et  $j \in \{0, \dots, p\}$ ) sont des coefficients constants,  
–  $\alpha_i, \beta_j$  sont les ordres de dérivation ( $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{R}$ )

Les méthodes les plus employées pour déterminer les solutions de cette E.D.G. sont étudiées ci-dessous : celle utilisant l'opérateur de Laplace et celle utilisant l'approximation donnée par l'équation (II-6).

### V.1 Résolution par la transformation de Laplace

La transformation de Laplace s'adapte à de nombreux problèmes relatifs aux E.D.G. linéaires à paramètres constants, comme la relation (II-18). La solution est déterminée en effectuant la démarche suivante :

- (i) détermination de la fonction de transfert du système (II-18) par application de la transformée de Laplace,
- (ii) utilisation des résultats concernant la transformation de Laplace de la fonction de Mittag-Leffler  $E_{\alpha, \beta}$  à deux paramètres ( $\alpha$  et  $\beta$ ) définie par [POD-99] :

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha.k + \beta)} \quad \text{avec } \alpha > 0, \beta > 0 \quad (\text{II-19})$$

En effet, il apparaît que :

$$\frac{1}{s^\alpha + K} = L \left\{ t^{\alpha-1} . E_{\alpha, \alpha} \left( -K.t^\alpha \right) ; s \right\} \quad (\text{II-20})$$

Afin d'illustrer cette démarche, prenons l'exemple ci-dessous de la résolution d'une E.D.G. définie par :

$$\begin{cases} D^{(1/2)}f(t) + f(t) = 0 & \text{pour } t > 0 \\ \left[ D^{(1/2)}f(t) \right]_{t=0} = C \end{cases} \quad (\text{II-21})$$

En appliquant classiquement la transformée de Laplace au système (II-21), on obtient la fonction de transfert  $F(s)$  :

$$F(s) = \frac{C}{s^{1/2} + 1} \quad (\text{II-22})$$

En appliquant la transformée de Laplace inverse, on obtient finalement :

$$f(t) = C.t^{-1/2}.E_{1/2,1/2}(-\sqrt{t}) \quad (\text{II-23})$$

En utilisant la définition de la fonction  $E_{1/2,1/2}(-\sqrt{t})$ , on peut également écrire :

$$f(t) = C.\left(\frac{1}{\sqrt{\pi t}} - e^t.\text{Erfc}(\sqrt{t})\right) \quad (\text{II-24})$$

où Erfc est la fonction complémentaire de la fonction erreur :

$$\text{Erfc}(z) = \int_z^\infty \frac{2}{\sqrt{\pi}}.e^{-t^2}.dt \quad (\text{II-25})$$

## V.2 Résolution par évaluation numérique des dérivées non entières

Les techniques de calcul numérique des solutions d'E.D.G. sont encore actuellement à l'étude. Il existe beaucoup moins de résultats et de méthodes que dans le cas des équations différentielles classiques. Néanmoins, la méthode exposée ci-dessous est à ce jour la plus simple et la plus rapide pour résoudre une E.D.G..

Le principe de base est celui de la « mémoire courte » conduisant à une réduction du nombre de termes pour le calcul des dérivées non entières (utilisation de la relation (II-6)). Le nombre minimal de termes à prendre en compte est choisi de telle sorte à ne pas dépasser l'erreur désirée sur la solution [POD-99].

La solution est déterminée, après discrétisation de l'E.D.G., en utilisant un algorithme de calcul de l'échantillon  $m$  à partir des échantillons  $k$  (avec  $k < m$ ) et de la condition initiale.

Afin d'illustrer cette démarche, prenons l'exemple ci-dessous de la résolution d'une E.D.G. définie par :

$$\begin{cases} D^{(\alpha)}y(t) + A.y(t) = f(t) & \text{pour } t > 0 \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad (\text{II-26})$$

La discrétisation du problème conduit à l'équation :

$$\begin{cases} h^{-\alpha} \cdot \sum_{k=0}^m \omega_k^{(\alpha)} \cdot y_{m-k} + A \cdot y_m = f_m \\ y_0 = 0 \end{cases} \quad (\text{II-27})$$

avec :  $t_m = m.h$       $y_m = y(t_m)$       $f_m = f(t_m)$  pour  $m = 1, 2, \dots$

$$\text{et } \omega_j^{(\alpha)} = (-1)^j \binom{\alpha}{j}$$

D'où « l'algorithme » de résolution de l'E.D.G. :

$$\begin{cases} y_0 = 0 \\ y_m = \frac{1}{A + h^{-\alpha} \cdot \omega_0^{(\alpha)}} \left[ f_m - \sum_{j=1}^m \omega_j^{(\alpha)} \cdot y_{m-j} \right] \text{ pour } m = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (\text{II-28})$$

Nous serons amenés à calculer les coefficients  $\omega_j^{(\alpha)}$ . Nous proposons donc un algorithme de calcul rapide de ces coefficients basé sur la relation de récurrence suivante [POD-99] :

$$\begin{cases} \omega_0^{(\alpha)} = 1 \\ \omega_k^{(\alpha)} = \left( 1 - \frac{\alpha + 1}{k} \right) \cdot \omega_{k-1}^{(\alpha)} \text{ pour } k = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (\text{II-29})$$

### V.3 Synthèse

Il est possible de déterminer analytiquement la solution d'une E.D.G. en utilisant la fonction de MITTAG-LEFFLER. Néanmoins le calcul devient rapidement inextricable si le dénominateur de la fonction de transfert comporte plus de trois dérivations non entières (ce qui est le cas pour les équations décrivant les machines électriques comme nous le verrons au chapitre V).

La méthode numérique sera donc la plus adéquate pour résoudre les E.D.G. caractéristiques des machines électriques.

## VI. EXEMPLES D'ANALYSE DE SYSTEMES FRACTIONNAIRES

Nous allons dans ce paragraphe décrire plus précisément deux systèmes fractionnaires que nous retrouverons tout au long de cette étude : ce sont les systèmes d'ordre  $\frac{1}{2}$  de nature implicite et explicite, caractérisés respectivement par les fonctions de transfert

$$T_{1/2}^{\text{impl}}(s) = \frac{1}{(1 + \tau.s)^{1/2}} \text{ et } T_{1/2}^{\text{expl}}(s) = \frac{1}{1 + (\tau.s)^{1/2}}.$$

### VI.1 Analyse fréquentielle

Dans le cas où l'entrée du système varie sinusoidalement à la pulsation  $\omega$ ,  $T_{1/2}^{\text{impl}}(s)$  peut se mettre sous la forme complexe :

$$\bar{T}_{1/2}^{\text{impl}}(\omega) = \frac{1}{\left(1 + j \frac{\omega}{\omega_0}\right)^{1/2}} \quad (\text{II-30})$$

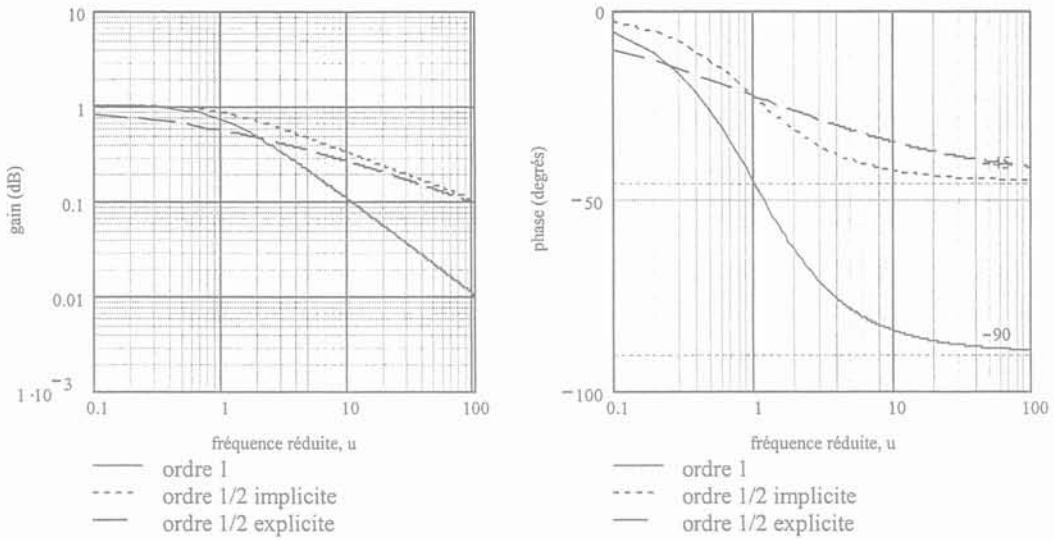
où  $\omega_0$  est la pulsation de coupure du système, avec  $\omega_0 = 1/\tau$ .

Considérons la pulsation angulaire réduite  $u \left(u = \frac{\omega}{\omega_0}\right)$  ; le gain  $G_{1/2}^{\text{impl}}$  et la phase  $\phi_{1/2}^{\text{impl}}$  de ce système sont alors définis par :  $G_{1/2}^{\text{impl}} = 20 \cdot \log \left| \frac{1}{(1 + j.u)^{1/2}} \right|$  et  $\phi_{1/2}^{\text{impl}} = -\text{Arctg}((1 + j.u)^{1/2})$ .

De la même manière, on peut définir le gain et la phase d'un système explicite. La Figure II-2 présente finalement le diagramme de Bode des deux types de système d'ordre  $\frac{1}{2}$ .

Le diagramme de Bode d'un système d'ordre entier égal à 1, défini par la fonction de transfert  $\bar{T}_1(u) = \frac{1}{1 + ju}$ , est également donné à titre comparatif.



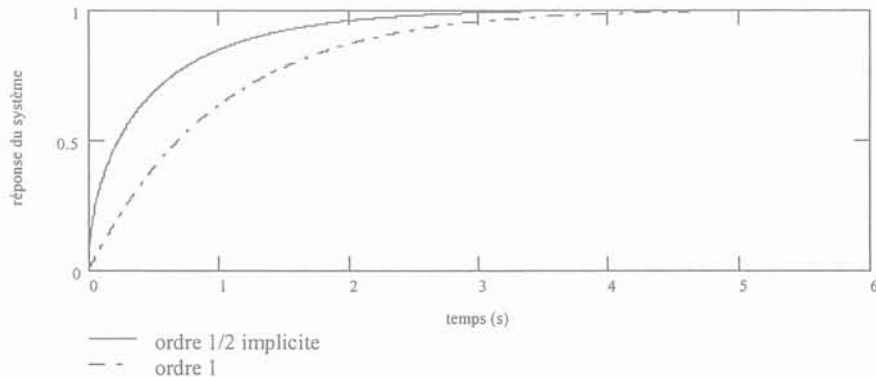


**Figure II-2.** Comparaison des réponses fréquentielles de systèmes d'ordre 1, d'ordre  $\frac{1}{2}$  implicite et d'ordre  $\frac{1}{2}$  explicite

On remarque que les tendances asymptotiques sont facilement identifiables : pour un système d'ordre  $\frac{1}{2}$ , le gain décroît de  $-10$  dB par décade et la phase tend vers  $-45^\circ$ . Il y a cependant des différences importantes entre les systèmes d'ordre  $\frac{1}{2}$  implicite et explicite, notamment au voisinage de la pulsation de coupure (c'est-à-dire pour  $u = 1$ ).

### VI.2 Analyse temporelle : étude d'un système d'ordre $\frac{1}{2}$ implicite

La réponse indicielle d'un système d'ordre  $\frac{1}{2}$  implicite caractérisé par l'équation (II-9), avec  $\tau = 1$  s, est représentée sur la Figure II-3. Elle est déterminée analytiquement en utilisant la relation (II-7) [OUS-95]. Nous avons également reporté à titre comparatif la réponse temporelle d'un système du premier ordre caractérisé par la transmittance  $T_1$  (voir paragraphe VI.1).



**Figure II-3.** Réponse temporelle d'un ordre  $\frac{1}{2}$  implicite. Comparaison avec un système d'ordre 1

Cette réponse peut se décomposer en deux phases : le système commence d'abord à répondre très rapidement au changement de consigne, puis met un temps très long pour atteindre la valeur finale. Ceci traduit la propriété remarquable des systèmes d'ordre fractionnaire d'inclure à la fois des dynamiques rapides et lentes [OUS-95]. Cette propriété se traduit dans le domaine fréquentiel par la couverture d'un très large spectre de fréquences.

## VII. CONCLUSION

Ce deuxième chapitre, de caractère très mathématique, nous a permis de mettre en valeur les intérêts de la dérivation non entière, comme :

- la prise en compte du passé global d'une fonction,
- la propriété d'inclure des dynamiques rapides et lentes.

L'intérêt scientifique suscité par la dérivation non entière s'explique mieux si l'on considère ces propriétés. Dans les chapitres suivants, nous évaluerons la portée de cet outil dans le cadre de notre étude.



---

*Chapitre III*

*Modélisation de l'induction électromagnétique*

---



## I. INTRODUCTION

Dans ce chapitre, une nouvelle approche est proposée pour modéliser le phénomène de diffusion d'un champ magnétique dans un matériau conducteur. Notre démarche est fondée sur la dérivation fractionnaire d'ordre  $\frac{1}{2}$ . Par souci de cohérence et de simplicité, tous les résultats seront établis dans le cas d'une barre rectangulaire conductrice. La modélisation d'autres pièces conductrices sera abordée dans le chapitre suivant.

Ce chapitre va permettre d'appréhender sous différents angles le lien entre diffusion et dérivation non entière. Dans un premier temps, le calcul analytique de l'impédance d'une barre sera présenté ; ce calcul sera la référence des différents modèles qui seront présentés et comparés dans la suite du chapitre.

Dans un deuxième temps, nous analyserons succinctement les différentes représentations classiques de l'induction électromagnétique.

Nous proposerons ensuite une nouvelle modélisation de l'effet de peau dans la barre reposant sur la dérivation fractionnaire.

D'autres approches, reposant sur la théorie des lignes de transmission faisant le lien entre diffusion et dérivation non entière seront enfin étudiées. Elles pourront sembler superflues pour justifier l'utilisation des systèmes d'ordre fractionnaire. Néanmoins, elles nous permettront dans des chapitres ultérieurs d'aborder d'autres problèmes.

## II. CALCUL ANALYTIQUE DE L'IMPEDANCE D'UNE BARRE

Pour faciliter notre démarche, nous allons étudier le cas simple mais représentatif de la barre placée dans une encoche rectangulaire de hauteur  $h$ , de largeur  $e$ , de longueur  $L_b$  très supérieure aux autres dimensions ; elle est logée dans une encoche de mêmes dimensions et entourée d'un matériau ferromagnétique de perméabilité infinie et non conducteur (voir Figure III-1). Les calculs ci-dessous seront sans doute du déjà-vu [ALG-70], mais ils nous permettront de mettre en valeur certaines étapes de calcul à partir desquelles nous introduirons notre nouveau modèle.

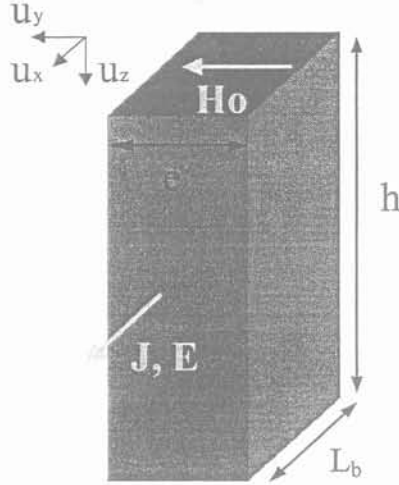


Figure III-1. Schéma d'une barre rectangulaire

Pour des raisons de symétries du problème, le champ et les courants induits se développant dans la barre ne dépendent que de la variable  $z$ .

Les équations régissant la répartition du champ magnétique  $H$  dans le temps et dans l'espace s'écrivent :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 H(z, t)}{\partial z^2} - \sigma\mu \frac{\partial H(z, t)}{\partial t} &= 0 && \text{équation de la diffusion} \\ H(z, 0) &= 0 && \text{condition initiale} \\ H(h, t) &= 0 && \text{condition aux limites} \end{aligned} \quad (\text{III-1})$$

La solution générale de l'équation (III-1) est obtenue en appliquant la transformée de Laplace  $L$  :

$$\bar{H}(z, s) = P(s) \cdot \exp(z\sqrt{\sigma\mu s}) + Q(s) \cdot \exp(-z\sqrt{\sigma\mu s}) \quad \text{avec : } \bar{H}(z, s) = L\{H(z, t); s\} \quad (\text{III-2})$$

Nous nous plaçons en régime sinusoïdal : toutes les grandeurs varient à la pulsation  $\omega$ . On peut alors effectuer un passage en grandeurs complexes, c'est-à-dire substituer le terme  $j\omega$  à l'opérateur de Laplace  $s$ . L'expression du champ devient alors :

$$H(z, \omega) = P_1(\omega) \cdot \exp(z\sqrt{j\sigma\mu\omega}) + Q_1(\omega) \cdot \exp(-z\sqrt{j\sigma\mu\omega}) \quad (\text{III-3})$$

Pour  $z = h$ , on suppose que le champ est nul à tout instant, donc :

$$H(h, \omega) = 0 \Rightarrow Q_1(\omega) = -P_1(\omega) \cdot \exp(2h\sqrt{j\sigma\mu\omega}) \quad (\text{III-4})$$

Pour  $z = 0$ , le champ est égal à  $H_0$  ; l'expression de  $H$  s'écrit alors :

$$H(h, \omega) = H_0 \cdot \frac{\text{sh} \left[ (1+j) \cdot \frac{h-z}{\delta} \right]}{\text{sh} \left[ (1+j) \cdot \frac{h}{\delta} \right]} \quad \text{où } \delta = \sqrt{\frac{2}{\sigma \mu \omega}} \text{ est l'épaisseur de peau} \quad (\text{III-5})$$

A partir de l'expression du champ, on calcule l'impédance  $\bar{Z}$  de la barre. Elle est donnée par le rapport entre l'intégrale du vecteur de Poynting ( $\bar{\pi}$ ) sur la surface  $e.L_b$  divisée par le courant efficace I au carré. Or :

$$\bar{\pi} = \frac{1}{2} \cdot \bar{E} \cdot \bar{H}^* \quad \text{et} \quad H_0^2 \cdot e^2 = 2 \cdot I^2 \quad (\text{III-6})$$

où  $\bar{X}^*$  désigne le conjugué de la grandeur complexe  $\bar{X}$ , et :

$$\bar{E}(z, s) = \frac{\bar{J}(z, s)}{\sigma} \quad \text{et} \quad \bar{J}(z, s) = \frac{\partial \bar{H}(z, s)}{\partial z} \quad (\text{III-7})$$

On obtient finalement l'impédance analytique de la barre rectangulaire [ALG-70] :

$$\bar{Z}_{th} = \frac{L_b}{\sigma \cdot e \cdot h} \cdot \frac{\bar{\alpha}}{\text{th}(\bar{\alpha})} = R_0 \cdot \frac{\bar{\alpha}}{\text{th}(\bar{\alpha})} \quad \text{où } \bar{\alpha}^2 = j\omega\sigma\mu h^2 \quad \text{et} \quad R_0 = \frac{L_b}{\sigma h e} \quad (\text{III-8})$$

$R_0$  représente la résistance en continu de la barre.

### III. APPROCHE CLASSIQUE DE MODELISATION

La présence de la tangente hyperbolique dans l'expression de l'impédance analytique ne nous permet pas d'établir un schéma électrique équivalent directement utilisable pour modéliser l'effet de peau dans cette barre.

Les approches classiques de modélisation reposent alors :

- soit sur une représentation distribuée : l'effet de peau est modélisé par une ligne de paramètres (R-L), identifiés globalement sur la plage de fréquence souhaitée [BAA-55.1] [CRE-85] [KLI-70],
- soit sur la décomposition en série de la fonction tangente hyperbolique et sur l'identification des termes sériels à des cellules (R-L).

Le principal problème de ces approches est l'ordre de troncature que l'on va choisir en fonction de l'erreur que l'on peut tolérer. C'est une problématique très actuelle de modélisation d'un système à paramètres distribués infini.



Nous comparons dans ce paragraphe différentes représentations classiques de l'induction électromagnétique. Elles diffèrent principalement par la signification physique des termes de la représentation vis-à-vis de la répartition du courant. Certains des résultats sont issus des travaux de [TAR-93] sur l'étude d'une représentation de l'effet de peau dans le cas d'une tôle ferromagnétique.

### III.1 Développement en série (série de Foster)

La décomposition de la fonction th en série est donnée par :

$$\text{th}(x) = 2x \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 + \left[ \frac{\pi \cdot (2k-1)}{2} \right]^2} \quad (\text{III-9})$$

L'impédance de la barre devient alors :

$$\bar{Z} = \frac{L_b}{2 \cdot \sigma \cdot e \cdot h} \cdot \frac{1}{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 + \left[ \frac{\pi \cdot (2k-1)}{2} \right]^2}} \quad (\text{III-10})$$

On modélise alors la barre par une infinité de cellules en série (R-L) connectées en parallèle :

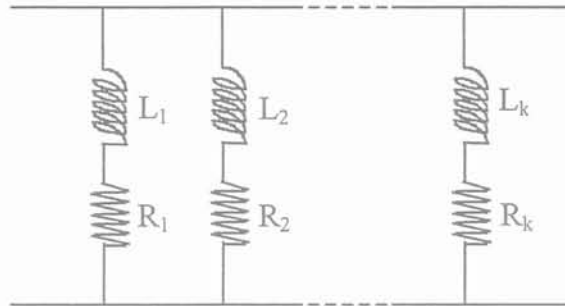


Figure III-2. Décomposition en série de Foster

Les expressions des résistance et inductance  $R_k$  et  $L_k$  de la cellule  $k$  sont :

$$R_k = R_F \cdot \left[ \frac{\pi}{8} \cdot (2k-1) \right]^2 \quad \text{et} \quad L_k = L_F \quad (\text{III-11})$$

avec :  $R_F = \frac{L_b}{\sigma e h}$  et  $L_F = \frac{1}{2} \cdot \frac{\mu \cdot h \cdot L_b}{e}$

### III.2 Développement en fraction continue

La fonction  $\text{th}$  peut également se décomposer sous la forme d'une fraction continue :

$$\text{th}(x) = \frac{x}{1 + \frac{x^2}{3 + \frac{x^2}{5 + \dots}}} \quad (\text{III-12})$$

En introduisant l'expression (III-12) dans celle de l'impédance (III-8), il est alors possible de représenter les courants induits se développant dans une barre par le schéma équivalent suivant :

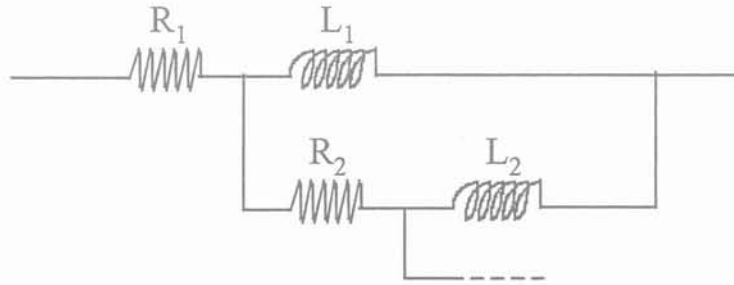


Figure III-3. Décomposition en fraction continue

avec :

$$R_k = R_{FC} \cdot (4k - 3) \quad \text{et} \quad L_k = \frac{L_{FC}}{4k - 1} \quad (\text{III-13})$$

$$\text{avec : } R_{FC} = \frac{L_b}{\sigma \cdot e \cdot h} \quad \text{et} \quad L_{FC} = \frac{\mu \cdot h \cdot L_b}{e}$$

Les paramètres  $R_{FC}$  et  $L_{FC}$  correspondent respectivement à la résistance et l'inductance en continu de la barre.

### III.3 Conclusion

Pour un nombre de termes sériels infini, les deux modèles présentés sont en théorie équivalents. Nous comparerons ces différents types « classiques » de représentation de l'effet de peau, entre eux et avec notre nouveau modèle d'ordre  $\frac{1}{2}$ . Cela fera l'objet du paragraphe IV.3.

Pratiquement, la démarche d'une telle décomposition est rarement adoptée. On préfère définir a priori une topologie du schéma équivalent constitué d'un nombre fini de cellules (R-L) en série ou en parallèle, et identifier globalement le schéma équivalent par des techniques de moindres carrés.

## IV. DE L'ÉQUATION DE DIFFUSION A L'ORDRE 1/2

### IV.1 Mise en évidence de l'ordre 1/2

Nous allons démontrer la légitimité du passage de l'équation de diffusion (équation aux dérivées partielles d'ordre 2 dans l'espace et d'ordre 1 dans le temps) à une relation mettant en œuvre une dérivation entière d'ordre 1 dans l'espace et non entière d'ordre 1/2 dans le temps.

Pour cela, nous reprenons l'étude de la barre rectangulaire des paragraphes précédents. Pour introduire la notion de dérivation non entière, nous allons repartir de l'équation (III-4), donnant la relation entre les termes  $P_1$  et  $Q_1$ , et différencier les cas où la barre est de hauteur finie ou non.

#### IV.1.1 Cas d'une barre de hauteur finie (h)

Reprenons l'équation (III-4) donnant la relation entre les termes P et Q :

$$\bar{H}(h, s) = 0 \Rightarrow Q(s) = -P(s) \cdot \exp(2h\sqrt{\sigma\mu s}) \quad (\text{III-14})$$

On obtient donc une expression de  $\bar{H}(z, s)$ , puis par différenciation, une expression de  $\frac{\partial}{\partial z} \bar{H}(z, s)$  :

$$\begin{aligned} \bar{H}(z, s) &= P(s) \cdot [\exp(z\sqrt{\sigma\mu s}) - \exp((2h - z)\sqrt{\sigma\mu s})] \\ \frac{\partial}{\partial z} \bar{H}(z, s) &= P(s) \cdot \sqrt{\sigma\mu s} [\exp(z\sqrt{\sigma\mu s}) + \exp((2h - z)\sqrt{\sigma\mu s})] \end{aligned} \quad (\text{III-15})$$

A partir des expressions de (III-15), on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial z} \bar{H}(z, s) = \sqrt{\sigma\mu s} \coth[(z - h) \cdot \sqrt{\sigma\mu s}] \bar{H}(z, s) \quad (\text{III-16})$$

Une telle équation ne peut être résolue analytiquement [OLD-74]. En utilisant un développement limité d'ordre 2 de la fonction cotangente hyperbolique, nous allons montrer que cette équation peut s'écrire autrement à l'aide de l'opérateur dérivation d'ordre 1/2.

Le développement limité à l'ordre 2 et au voisinage de 0 de la fonction cotangente hyperbolique est donné par :

$$\coth(x) = \frac{\text{ch}(x)}{\text{sh}(x)} \cong \frac{1+x^2/2}{x} \quad (\text{III-17})$$

Or  $1 + \frac{x^2}{2}$  est lui-même le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de  $\sqrt{1+x^2}$ .

Finalement :

$$\coth(x) \cong \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} \quad (\text{III-18})$$

L'équation (III-16) s'écrit alors :

$$\frac{\partial}{\partial z} \bar{H}(z, s) = \frac{1}{z-h} \sqrt{1+(z-h)^2 \cdot \sigma \mu s} \cdot \bar{H}(z, s) \quad (\text{III-19})$$

Pour revenir dans le domaine temporel, il ne reste plus qu'à obtenir l'antécédent de cette expression (III-19) par application de la transformée de Laplace inverse. Pour cela, on utilise le changement de variable suivant :

$$p = 1 + (z-h)^2 \cdot \sigma \mu s \quad \text{soit :} \quad s = \frac{p-1}{(z-h)^2 \cdot \sigma \mu} = \frac{p-1}{\tau} \quad (\text{III-20})$$

L'équation (III-19) devient ainsi :

$$\frac{\partial}{\partial z} \bar{H}\left(z, \frac{p-1}{\tau}\right) = \frac{1}{z-h} \sqrt{p} \cdot \bar{H}\left(z, \frac{p-1}{\tau}\right) \quad (\text{III-21})$$

Le paramètre  $\tau$  n'étant fonction que de  $z$ , il est considéré constant lors du passage du domaine de Laplace au domaine temporel. On a par ailleurs, d'après le chapitre II :

$$\begin{aligned} L^{-1}\left\{F\left(\frac{p-1}{\tau}\right)\right\} &= \tau \cdot e^t \cdot f(\tau \cdot t) \quad \text{avec : } F(p) = L\{f(t)\} \\ \text{et : } p^\alpha \cdot L\{f(t)\} &= L\left\{\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} f(t)\right\} \end{aligned} \quad (\text{III-22})$$

En prenant la transformée de Laplace inverse de (III-21) et en utilisant (III-22), on aboutit à la relation :

$$e^t \cdot \frac{\partial}{\partial z} H(z, \tau \cdot t) = \frac{1}{z-h} \cdot \frac{\partial^{1/2}}{\partial t^{1/2}} \left[ e^t \cdot H(z, \tau \cdot t) \right] \quad (\text{III-23})$$

soit, en utilisant la définition de  $\tau$  :

$$e^t \cdot \frac{\partial}{\partial z} H(z, \tau, t) = \sqrt{\sigma\mu} \cdot \tau^{-1/2} \cdot \frac{\partial^{1/2}}{\partial t^{1/2}} \left[ e^t \cdot H(z, \tau, t) \right] \quad (\text{III-24})$$

Cette équation correspond tout à fait à la définition temporelle d'un système d'ordre ½ **implicite** (voir chapitre II).

#### IV.1.2 Cas d'une barre de hauteur infinie

Pour traiter le cas où  $h \rightarrow \infty$ , on reprend l'équation (III-2). La condition  $H(\infty, t) = 0$  impose  $P(s) = 0$ , d'où :

$$\begin{aligned} \bar{H}(z, s) &= Q(s) \cdot \exp(-z\sqrt{\sigma\mu s}) \\ \frac{\partial}{\partial z} \bar{H}(z, s) &= -Q(s) \cdot \sqrt{\sigma\mu s} \cdot \exp(-z\sqrt{\sigma\mu s}) \end{aligned} \quad (\text{III-25})$$

A partir de (III-25), on obtient l'équation différentielle :

$$\frac{\partial}{\partial z} \bar{H}(z, s) = -\sqrt{\sigma\mu} \cdot s^{1/2} \cdot \bar{H}(z, s) \quad (\text{III-26})$$

En appliquant ensuite la transformée de Laplace inverse et en utilisant (III-22), on obtient finalement la relation :

$$\frac{\partial}{\partial z} H(z, t) = -\sqrt{\sigma\mu} \cdot \frac{\partial^{1/2}}{\partial t^{1/2}} [H(z, t)] \quad (\text{III-27})$$

Cette relation correspond cette fois-ci à la définition temporelle d'un système d'ordre ½ **explicite** (voir chapitre II).

Finalement, les phénomènes physiques liés aux systèmes d'ordre ½ implicite et explicite sont rigoureusement équivalents, le caractère implicite ou explicite étant uniquement lié à la dimension finie ou non de l'encoche.

Néanmoins, les deux caractères sont proches dans certaines conditions. En effet, seule la présence du terme  $-\coth[(z-h)\sqrt{\sigma\mu s}]$  différencie les expressions (III-16) et (III-25). Cherchons la condition sur  $x$  pour que  $\coth(x)$  soit égal à  $-1$  à 1% près. Elle s'exprime par [OLD-74] :

$$(h-z) \cdot \sqrt{\sigma\mu s} \geq 2.647 \text{ soit : } h \cdot \sqrt{\sigma\mu s} \geq 2.647 \text{ puisque } z > 0 \quad (\text{III-28})$$

L'inégalité (III-28) revient à écrire :

$$s \geq \frac{7.007}{h^2 \cdot \sigma \mu} = s_1 \quad (\text{III-29})$$

Ainsi, pour une fréquence supérieure à  $f_1 = \frac{s_1}{2 \cdot \pi}$ , l'encoche de longueur finie aura le même comportement que celui d'une encoche infinie. Ce résultat est bien en accord avec ce qui se passe physiquement : plus la fréquence est élevée, plus la densité de courant se répartit dans le haut de l'encoche (la condition aux limites  $H(h, t) = 0$  se « déplace » avec la fréquence).

La courbe ci-dessous (voir Figure III-4) représente l'évolution en fonction de la hauteur  $h$  de la barre de la fréquence  $f_1$ .

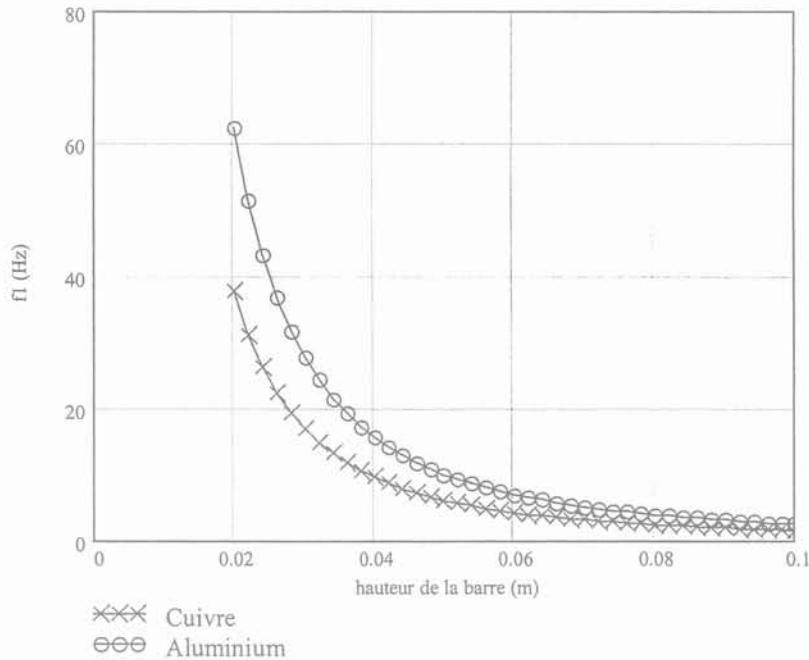


Figure III-4. Evolution de la fréquence  $f_1$  en fonction de la hauteur de la barre

#### IV.2 Modélisation d'ordre $\frac{1}{2}$ d'une barre conductrice de hauteur finie

A partir de la relation (III-19) du chapitre précédent, il est possible de trouver l'expression du vecteur de Poynting. L'impédance  $\bar{Z}$  de la barre est alors donnée par (avec les mêmes notations qu'au paragraphe II) :

$$\begin{aligned}\bar{Z} &= \frac{\bar{\pi}}{I^2} = \frac{1}{2\sigma h \cdot I^2} e \cdot L \cdot \sqrt{1 + j \cdot h^2 \sigma \mu \omega \cdot H_0^2} \\ &= R_0 \cdot \sqrt{1 + j \cdot \frac{\omega}{\omega_0}} \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sigma \mu h^2} \quad \text{et} \quad R_0 = \frac{L}{\sigma h e}\end{aligned}\tag{III-30}$$

Pour l'instant, ce modèle n'est valable qu'aux basses fréquences. On constate cependant qu'il l'est également pour les hautes fréquences. En effet, si on calcule développement limité de la fonction cotangente hyperbolique en l'infini, on montre que :

$$\coth(x) \underset{+\infty}{\cong} \frac{e^{x/2}}{e^{x/2} + \infty} \underset{+\infty}{\cong} 1\tag{III-31}$$

Si on applique ce développement limité à la relation (III-16), en constatant que la fonction coth est impaire et que le terme (z-h) est négatif, il vient :

$$\frac{\partial}{\partial z} \bar{H}(z, s) = -\sqrt{\sigma \mu \cdot s^{1/2}} \cdot \bar{H}(z, s)\tag{III-32}$$

On retrouve l'expression (III-26) ; en reprenant le calcul du vecteur de Poynting, on montre que l'impédance de la barre aux hautes fréquences est égale à :

$$\bar{Z}_\infty = R_0 \sqrt{j \cdot \frac{\omega}{\omega_0}}\tag{III-33}$$

Ce dont rend bien compte l'expression (III-30).

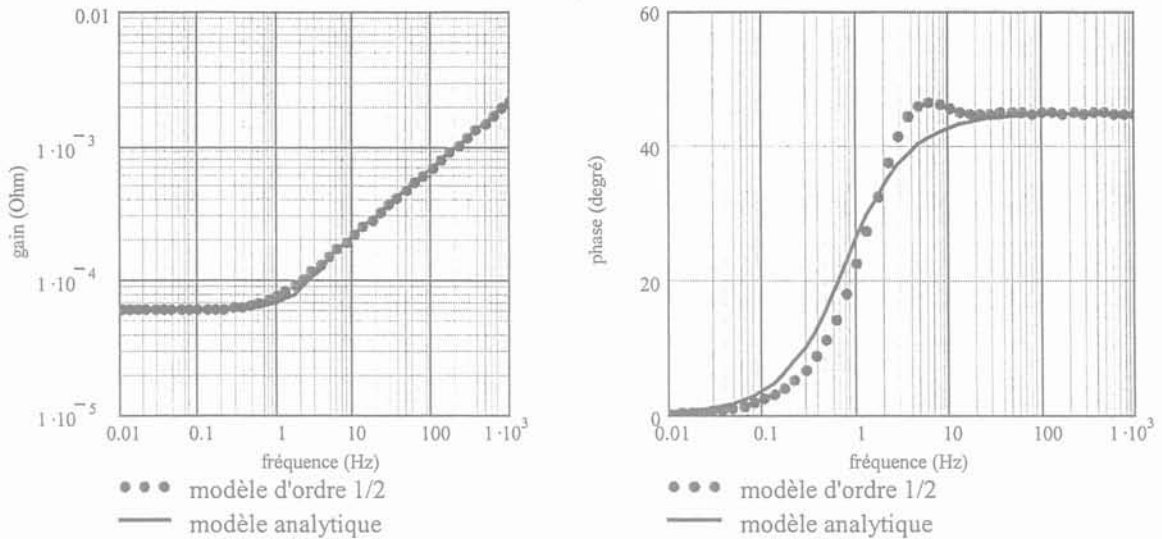
Nous avons comparé ci-dessous l'impédance d'ordre ½ donnée par la relation (III-30) avec l'impédance analytique donnée par (III-8) (voir Figure III-5).

La barre rectangulaire a les caractéristiques physiques et géométriques suivantes (cf Figure III-1) :

$L_b$	1 m
$e$	5.3 mm
$h$	53 mm
$\rho$ (à 20°C)	$1,7 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot m$

**Tableau III-1.** Caractéristiques de la barre étudiée

Ces données correspondent approximativement à une machine asynchrone de 1 MW.



**Figure III-5.** Comparaison entre le modèle d'ordre  $\frac{1}{2}$  et l'expression analytique de l'impédance d'une barre rectangulaire

Comme on peut le constater, l'écart entre l'impédance d'ordre  $\frac{1}{2}$  et l'impédance analytique est très faible sur une grande plage de fréquences. Ce modèle ne représente cependant pas le dépassement de phase d'environ 1 à 2 degrés par rapport à l'asymptote, observé au voisinage de la fréquence de coupure. Ce petit écart entre les deux modèles est lié à l'approximation d'ordre 2 du développement limité de la fonction cotangente hyperbolique.

REMARQUE – La barre modélisée est en cuivre. On peut remarquer que l'impédance se comporte globalement comme une intégration d'ordre  $\frac{1}{2}$  à partir de 10 Hz, ce qui correspond à peu près à la valeur de  $f_1$  pour cette encoche (on calcule  $f_1 \approx 5.4$  Hz).

### IV.3 Comparaison des différents modèles

Pour la barre considérée précédemment, nous avons comparé les différents modèles représentant le développement de courants induits :

- le modèle d'ordre  $\frac{1}{2}$  donné par l'équation (III-30),
- les différents modèles donnés au paragraphe III, en fonction du nombre de cellules (R-L) série ou parallèle.

Nous avons ainsi étudié :

- l'évolution en fréquence des différentes impédances,
- l'erreur relative moyenne des modèles par rapport au calcul analytique.



Nous avons également comparé les différents modèles suivant la fréquence et le nombre de cellules (R-L). Les Figure III-5 et Figure III-6 résument ces comparaisons. La plage de fréquences considérée s'étend de 10 mHz à 1 kHz.

En parallèle, la Figure III-7 représente l'évolution en fonction du nombre de termes sériels, de l'erreur relative moyenne (en échelle logarithmique) des différents modèles par rapport au calcul analytique. Cette erreur est calculée à partir du module de l'impédance.

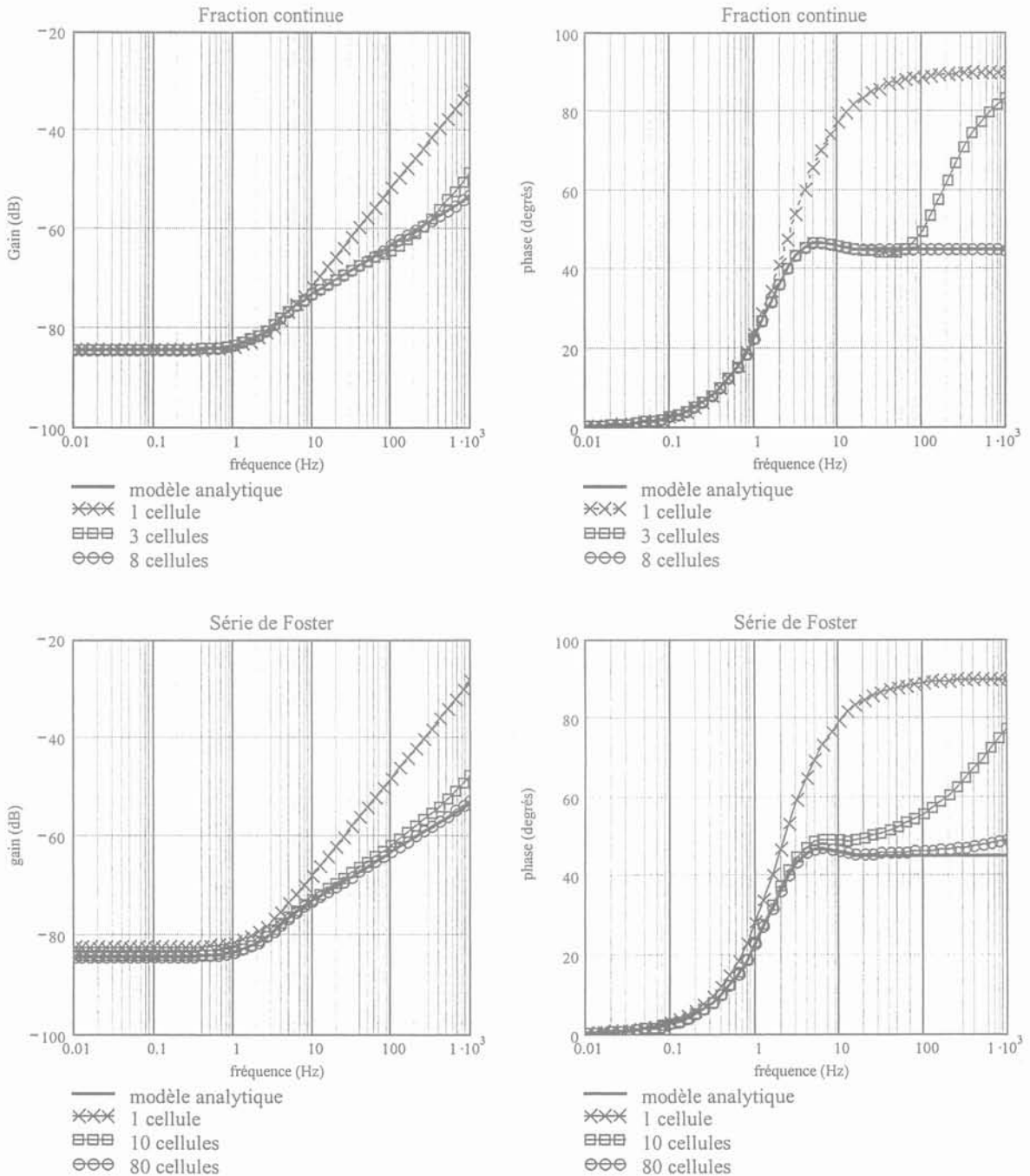
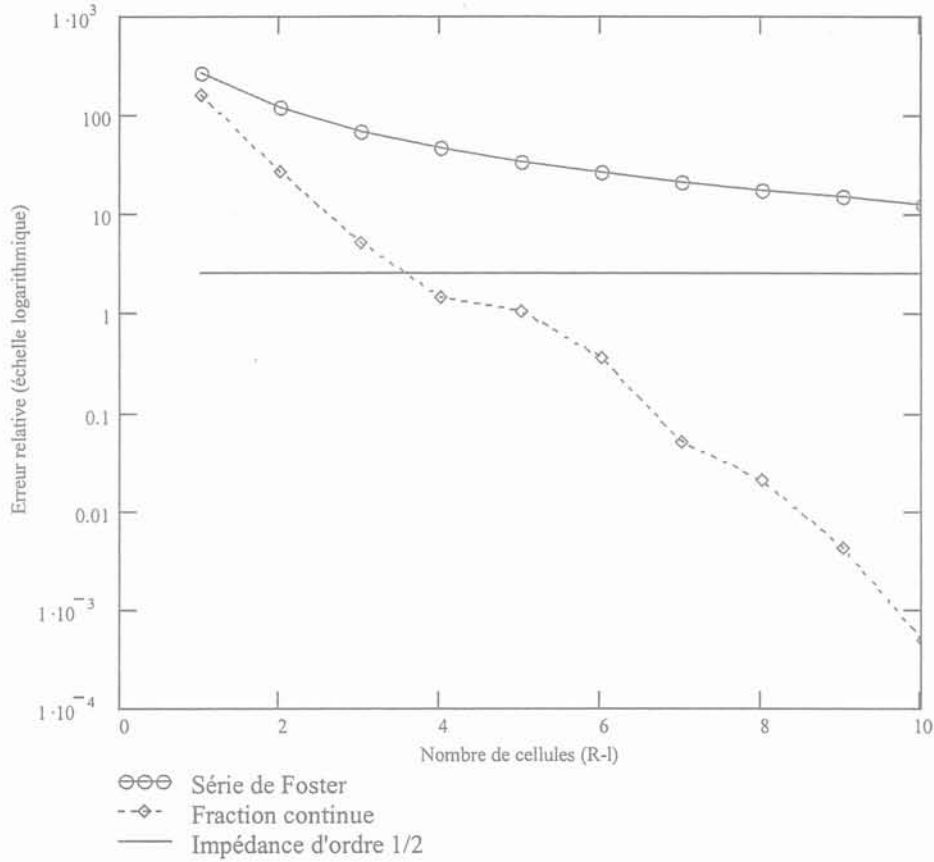


Figure III-6. Comparaison fréquentielle des différents modèles



**Figure III-7.** Comparaison des différents modèles de courants induits dans une barre

Il apparaît que le modèle d'ordre  $\frac{1}{2}$  est celui qui est le plus performant, c'est-à-dire celui qui induit la plus faible erreur par rapport au nombre de paramètres utilisés. La décomposition en fraction continue, et sa représentation sous forme de circuit (R-L), est également excellente, mais à partir de 3-4 cellules, i.e. 6-8 paramètres supplémentaires par rapport aux schémas équivalents classiques ne tenant pas compte de l'effet de peau, qui en comporte 2 [RET-97].

Dans notre objectif de réduire au maximum l'ordre des modèles tout en gardant une bonne signification physique des paramètres, l'impédance d'ordre  $\frac{1}{2}$  est manifestement la plus adéquate pour représenter les effets électromagnétiques dans le schéma équivalent d'un dispositif électrique.

#### IV.4 Conclusion

Il apparaît dans ce paragraphe que la diffusion peut être modélisée par un système d'ordre  $\frac{1}{2}$ . Un des points importants est que la géométrie finie des pièces conductrices considérées entraîne que ces systèmes non entiers sont de nature implicite. Ceci vient contredire les travaux de [CAN-69], [FEE-96] et [SLE-99] qui avaient également établi une dépendance fréquentielle d'ordre  $\frac{1}{2}$ , mais de nature explicite, comme c'est le cas pour une encoche de

hauteur infinie. Par ailleurs, ces travaux ne faisaient aucunement référence à la théorie générale des systèmes d'ordre non entier.

Plusieurs points importants sont donc à retenir :

1. Les hypothèses à la base de cette nouvelle modélisation sont peu nombreuses et connues. Elles entraînent une erreur relative faible dans le cas simple d'une barre droite.
2. Le nombre de paramètres du modèle est réduit. C'est une conséquence de la compacité intrinsèque des systèmes d'ordre fractionnaire.
3. La réduction de l'ordre est liée à l'introduction dans l'expression mathématique du système des conditions aux limites du problème. Ces conditions aux limites différencient également les cas de dérivation non entière implicite et explicite.

## V. AUTRES LIENS AVEC LA DERIVATION NON ENTIERE

Dans ce paragraphe, nous présentons d'autres approches mettant à nouveau en évidence le lien entre diffusion et dérivation non entière.

Pour cela, on se place toujours dans le cas de la barre étudiée précédemment. Toutefois, nous supposerons qu'elle est de hauteur infinie pour des raisons de simplification de calculs et de clarté du raisonnement. On ne traitera donc que le cas d'une dérivation d'ordre  $\frac{1}{2}$  explicite.

### *V.1 Modèle récursif d'une barre rectangulaire de hauteur infinie*

#### **V.1.1 Découpage géométrique de la barre**

Cette première approche repose sur une décomposition géométrique de la barre, de telle sorte que la densité de courant puisse être supposée uniforme dans chacune des subdivisions. Par choix, la barre a été découpée géométriquement en tranches d'épaisseur variable suivant une progression géométrique de raison  $K$  (voir Figure III-8).

A priori, on choisit le facteur  $K$  supérieur à 1, car on sait que le courant va se répartir dans le haut de l'encoche lorsque la fréquence va augmenter. Ce facteur est donc adapté au phénomène physique (la même décomposition est d'ailleurs choisie pour mailler une géométrie dans les logiciels d'éléments finis).

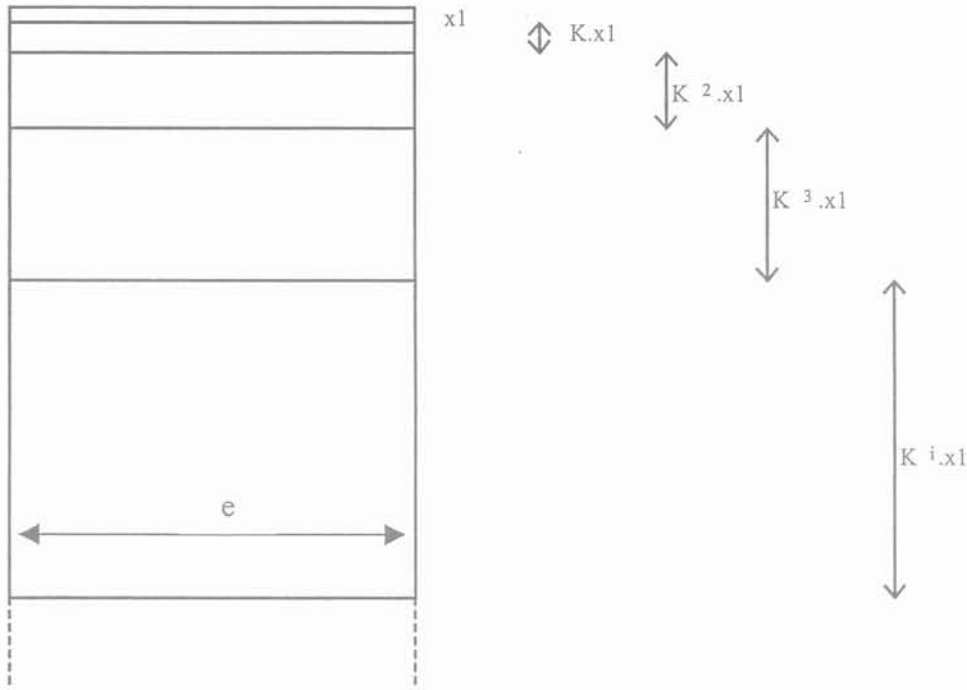


Figure III-8. Découpage « géométrique » de la barre

Chacune des sections peut être modélisée par une cellule (R-L) à paramètres constants.

Or, les paramètres  $R_x$  et  $L_x$  par unité de longueur d'une section de hauteur caractéristique  $dx$  et de largeur  $e$ , dépendent directement des caractéristiques physiques (conductivité et perméabilité) de la barre, avec :

$$\begin{cases} R_x = \frac{1}{\sigma \cdot e \cdot dx} \\ L_x = \frac{\mu \cdot dx}{e} \end{cases} \quad (\text{III-34})$$

Ainsi, les paramètres ( $R_i$ ,  $L_i$ ) de chaque cellule  $i$  s'expriment en fonction des paramètres physiques du matériau, de la largeur  $e$  et de la dimension caractéristique de la cellule (ici, la hauteur  $h_i = K^i \cdot x_1$ ) :

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{1}{\sigma \cdot e \cdot h_1} & L_1 &= \frac{\mu \cdot h_1}{e} \\ R_2 &= \frac{1}{\sigma \cdot e \cdot h_2} = \frac{R_1}{K} & L_2 &= \frac{\mu \cdot h_2}{e} = K \cdot L_1 \\ &\vdots & & \\ R_i &= \frac{1}{\sigma \cdot e \cdot h_i} = \frac{R_1}{K^i} & L_i &= \frac{\mu \cdot h_i}{e} = K^i \cdot L_1 \end{aligned} \quad (\text{III-35})$$

Chaque section peut ainsi être modélisée par la cellule  $i$  représentée sur la Figure III-9.

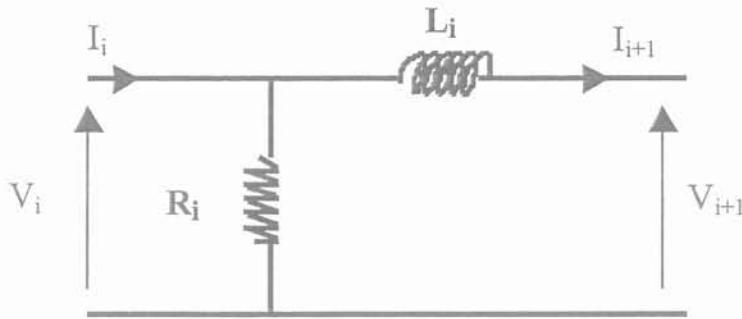


Figure III-9. Cellule élémentaire ( $R_i-L_i$ )

### V.1.2 Modèle récursif de la barre

La récursivité est la propriété qui caractérise une relation indépendante du rang considéré entre deux termes consécutifs d'une suite. C'est un cas particulier de la récurrence qui est elle une relation dépendant du rang entre deux termes.

En considérant les équations (III-35), on constate que les paramètres constants (résistances d'une part, et inductances d'autre part) suivent une progression géométrique similaire à celle correspondant au découpage de la barre. Cette dernière peut ainsi également se représenter sous la forme du schéma équivalent récursif présenté sur la Figure III-10.

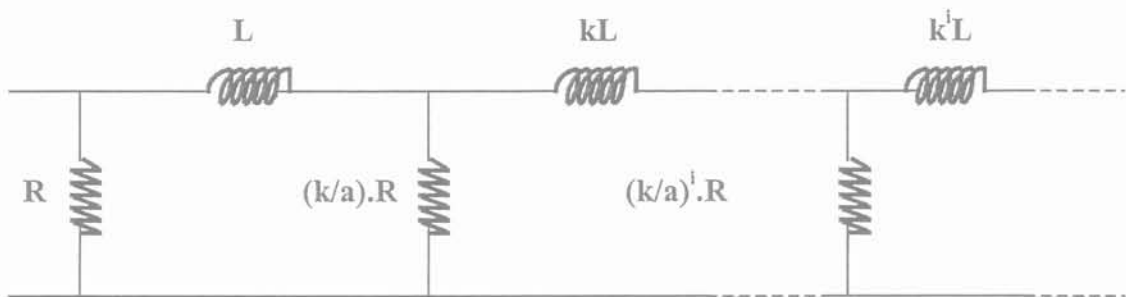


Figure III-10. Modèle récursif équivalent

On obtient ainsi une relation entre le paramètre « géométrique »  $K$  du modèle de l'encoche et les paramètres  $a$  et  $k$  du modèle récursif :

$$\frac{k}{a} = \frac{1}{K} \quad \text{et} \quad k = K \quad (\text{III-36})$$

Finalement, les paramètres de la ligne récursive sont liés par :

$$a = k^2 \quad (\text{III-37})$$

### V.2 De la récursivité à la dérivation non entière

Nous allons maintenant étudier les variations en fréquence de l'admittance du modèle récursif défini sur la Figure III-10. L'admittance s'écrit sous la forme de la fraction continue suivante :

$$Y(j\omega) = \frac{1}{R} + \frac{1}{jL\omega + \frac{1}{\frac{1}{R} \cdot \frac{a}{k} + \frac{1}{j\omega kL + \frac{1}{\frac{1}{R} \left(\frac{a}{k}\right)^2 + \dots}}}} \quad (\text{III-38})$$

Soit, en posant  $G = \frac{1}{R}$  :

$$Y(j\omega) = G + \frac{1}{jL\omega + \frac{k}{a} \left( G + \frac{1}{j\omega aL + \frac{k}{a} \left( G + \frac{1}{j a^2 \omega L + \dots} \right)} \right)} \quad (\text{III-39})$$

Ainsi, nous avons :

$$Y(j\omega) = G + \frac{1}{j\omega L + \frac{k}{a \cdot Y(j\omega a)}} = G + \frac{Y(j\omega a)}{j\omega L \cdot Y(j\omega a) + \frac{k}{a}} \quad (\text{III-40})$$

En faisant l'hypothèse, qui sera justifiée plus loin, que :  $\omega \cdot Y(j\omega) \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} 0$ , l'équation (III-40) se simplifie sous la forme suivante :

$$Y(j\omega) = G + \frac{a}{k} Y(j\omega a) \quad (\text{III-41})$$

A partir du schéma équivalent, on constate que  $Y(j\omega) \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} \infty$ . En effet, l'admittance pour les

basses fréquences est telle que :  $Y(j\omega) \underset{\omega \rightarrow 0}{\cong} \frac{1}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{k}\right)^n = \frac{1}{R} \sum_{n=0}^{\infty} (K)^n$  avec  $|K| > 1$ . On peut donc

négliger l'influence du facteur  $G$  pour les basses fréquences dans l'équation (III-41) La solution de cette équation dite fonctionnelle alors [CLE-84] [LIU-85] :

$$Y(j\omega) \propto (j\omega)^{-\eta f} \text{ avec } \eta f = \frac{\ln(a/k)}{\ln(a)} < 1 \quad (\text{III-42})$$

On vérifie a posteriori l'hypothèse posée ci-dessus  $\left( \omega.Y(j\omega) \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} 0 \right)$ .

Les paramètres  $a$  et  $k$ , vérifiant l'équation (III-37), la valeur de  $\eta_f$  devient :

$$\eta_f = \frac{\ln(k)}{\ln(k^2)} = \frac{1}{2} \quad (\text{III-43})$$

On a finalement démontré qu'un système diffusif peut se modéliser sous une forme récursive don le comportement fréquentiel est celui d'un système d'ordre  $\frac{1}{2}$ .

REMARQUE – Lorsque les paramètres varient avec la hauteur  $z$ , [OUS-95] a montré que  $\eta_f$  était différent de  $\frac{1}{2}$ . Nous reviendrons sur ce point au chapitre V.

## VI. CONCLUSION

Ce chapitre nous a permis de modéliser de plusieurs façons possibles le phénomène de diffusion d'un champ magnétique dans une barre rectangulaire conductrice. Nous avons également pu comparer ces différents modèles.

Il apparaît que le modèle d'ordre  $\frac{1}{2}$  est celui qui est le plus performant, c'est-à-dire celui qui induit la plus petite erreur par rapport au calcul analytique pour un nombre réduit de paramètres.

Bien sûr, le cas de la barre rectangulaire est un cas d'école encore trop trivial pour que nous puissions d'ores et déjà étendre le champ d'application de la dérivation non entière à la modélisation de toute machine électrique. Ce sera précisément l'objet du chapitre suivant.

---

*Chapitre IV*

*Modélisation fractionnaire des machines  
électriques*

---





## I. INTRODUCTION

Le phénomène d'induction électromagnétique est à la base même du fonctionnement des machines asynchrones. Une « particularité » qui lui est associée est l'effet de peau auquel sont soumis les courants induits. Cet effet se manifeste par une répartition non-uniforme de la densité de courant dans les conducteurs lorsque la fréquence augmente. L'effet de peau est utilisé dans les machines asynchrones pour élever le couple de démarrage tout en limitant le courant.

Le développement des courants induits n'est pas, bien entendu, propre à la machine asynchrone, mais survient dans toutes les machines électriques. C'est typiquement le cas dans les parties massives conductrices des alternateurs.

Comme nous l'avons au chapitre I, l'effet de peau, indissociable des phénomènes d'induction, se traduit par une modification des paramètres électriques de la machine qu'il est indispensable de prendre en compte dans son schéma équivalent.

Afin d'atteindre cet objectif, nous allons dans un premier temps revenir sur le calcul de l'impédance des conducteurs où des courants induits sont susceptibles de se développer. Plus précisément, nous nous attacherons à déterminer l'impédance d'une barre de cage d'écureuil et d'une partie ferromagnétique massive.

Dans un deuxième temps, nous utiliserons ces résultats pour construire de nouveaux schémas équivalents des machines synchrones et asynchrones. Ces schémas seront qualifiés d'ordre fractionnaire puisqu'ils posséderont un ou plusieurs éléments d'ordre non entier.

## II. MODELISATION D'ORDRE ½ DE PIÈCES CONDUCTRICES

### II.1 Modélisation d'une barre - prise en compte de sa forme

#### II.1.1 Influence de la forme de la barre

Nous avons montré dans le chapitre précédent, que l'impédance d'ordre ½ d'une barre rectangulaire de longueur  $L_b$ , de largeur  $e$  et de hauteur  $h$  est donnée par :

$$\bar{Z}_0 = R_0 \cdot \sqrt{1 + j \cdot \frac{\omega}{\omega_0}} \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \frac{\rho}{\mu h^2} \quad \text{et} \quad R_0 = \frac{L_b \cdot \rho}{he} \quad (\text{IV-1})$$

où  $\rho$  est la résistivité du matériau ( $\rho = \frac{1}{\sigma}$ ).

Mais la plupart des encoches dessinées dans les tôles des machines synchrones et asynchrones présente des formes particulières, qui sont loin d'être de simples rectangles : encoches rondes, doubles encoches, ... etc. Est-il possible de prendre en compte la forme de l'encoche dans notre impédance d'ordre  $\frac{1}{2}$  ?

Pour bien fixer les idées, nous allons traiter le cas simple d'une encoche en forme de té où la largeur  $b(z)$  de l'encoche n'est pas constante (Figure IV-1).

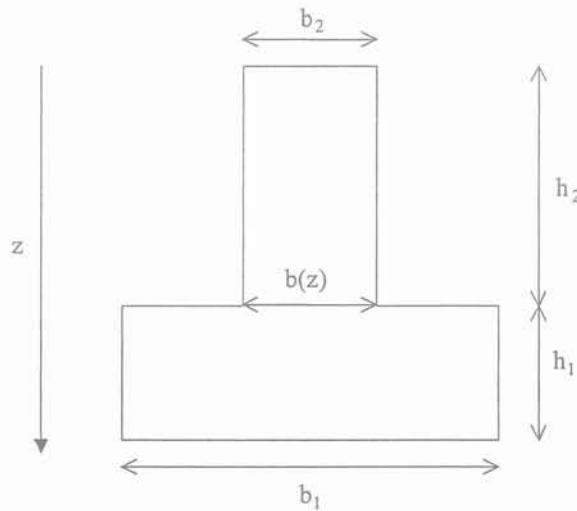


Figure IV-1. Encoche en forme de té

En faisant l'hypothèse que les lignes de champ restent horizontales par rapport à la aux parois de l'encoche, l'équation différentielle régissant la densité de courant complexe  $\bar{J}$  s'écrit [LIW-54] :

$$\frac{d^2\bar{J}}{dz^2} + \left( \frac{1}{b(z)} \cdot \frac{db(z)}{dz} \right) \cdot \frac{d\bar{J}}{dz} - j \cdot \frac{\omega\mu}{\rho} \cdot \bar{J} = 0 \quad (\text{IV-2})$$

On retrouve bien sûr l'équation de la diffusion obtenue dans le cas d'une encoche rectangulaire en prenant la fonction  $b$  constante.

Compte-tenu des conditions aux limites du problème :

- variation instantanée du champ dans le rapport  $b_2 / b_1$  au passage à la frontière,
- champ nul au fond de l'encoche,

l'expression analytique de l'impédance de la barre s'écrit :

$$Z(\omega) = \frac{\rho}{b_2} \cdot k(\omega) \cdot \frac{b_2 \cdot \text{ch}(k(\omega)h_1) \cdot \text{ch}(k(\omega)h_2) + b_1 \cdot \text{sh}(k(\omega)h_1) \cdot \text{sh}(k(\omega)h_2)}{b_2 \cdot \text{ch}(k(\omega)h_1) \cdot \text{sh}(k(\omega)h_2) + b_1 \cdot \text{sh}(k(\omega)h_1) \cdot \text{ch}(k(\omega)h_2)} \quad (IV-3)$$

avec :  $k(\omega) = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\rho}} = \frac{1+j}{\delta}$  où :  $\delta = \sqrt{\frac{2\rho}{\omega\mu}}$

On retrouve bien l'expression de l'impédance d'une encoche rectangulaire de largeur  $e$  et de hauteur  $h$  en prenant  $b_1 = b_2 = e$  et  $h_1 = h_2 = h/2$ .

L'impédance d'une encoche en té ne peut s'écrire sous la forme d'un système d'ordre  $\frac{1}{2}$  "simple" et "compact", c'est-à-dire d'un modèle tenant compte à la fois de l'effet de peau et de la forme de la barre. Par contre, il est possible de mettre en évidence un système d'ordre  $\frac{1}{2}$  pour les basses fréquences et un autre pour les hautes fréquences.

Ainsi, pour les basses fréquences, l'expression de  $Z$  devient, en appliquant un développement limité d'ordre 2 aux fonctions cosinus et sinus hyperboliques :

$$Z(\omega) \underset{\omega \rightarrow 0}{\cong} R_0^{(0)} \cdot \sqrt{1 + j \frac{\omega}{\omega_0^{(0)}}} \quad \text{avec :} \quad (IV-4)$$

$$R_0^{(0)} = \frac{\rho}{b_2 \cdot h_2 + b_1 \cdot h_1} \quad \text{et} \quad \omega_0^{(0)} = \frac{2 \cdot \rho}{\mu} \cdot \frac{1}{h_2^2 + h_1^2 + \frac{b_1}{b_2} h_1 \cdot h_2}$$

$R_0^{(0)}$  correspond à la résistance en continu de la barre entière et  $\omega_0^{(0)}$  fait apparaître le couplage entre les parties supérieures et inférieures de la barre. L'expression de ces paramètres ne peut malheureusement pas se mettre sous forme normalisée.

Pour les hautes fréquences,  $Z$  a pour expression :

$$Z(\omega) \underset{\omega \rightarrow \infty}{\cong} R_0^{(\infty)} \cdot \sqrt{j \frac{\omega}{\omega_0^{(\infty)}}} \quad \text{avec :} \quad (IV-5)$$

$$R_0^{(\infty)} = \frac{\rho}{b_2 \cdot h_2} \quad \text{et} \quad \omega_0^{(\infty)} = \frac{\rho}{\omega \cdot \mu h_2^2}$$

$R_0^{(\infty)}$  correspond à la résistance en continu de la partie haute de la barre et  $\omega_0^{(\infty)}$  à sa pulsation de coupure ; d'où le modèle d'ordre  $\frac{1}{2}$  correspondant aux hautes fréquences :

$$Z(\omega) = R_0^{(\infty)} \cdot \sqrt{1 + j \frac{\omega}{\omega_0^{(\infty)}}} \quad (IV-6)$$

Les tendances asymptotiques basses et hautes fréquences de l'impédance de la barre sont bien reproduites par les modèles (IV-4) et (IV-6).

Pour les basses fréquences, la densité de courant occupe toute la section droite de l'encoche, puis se concentre dans le haut de l'encoche au fur et à mesure que la fréquence augmente. On retrouve ainsi pour les hautes fréquences l'impédance d'ordre  $\frac{1}{2}$  d'une barre rectangulaire de hauteur  $h_2$  et de largeur  $b_2$ .

Pour mieux visualiser l'influence de la forme de l'encoche, nous avons tracé sur les figures IV-2 et IV-3 l'admittance analytique d'une barre en té en fonction de la fréquence et de la largeur  $b_2$ , pour une largeur  $b_1$  constante (égale à 10 mm). On constate que cette admittance présente des oscillations tant sur le module que sur la phase, cet effet étant d'autant plus marqué que le rapport entre  $h_2$  et  $h_1$  est faible.

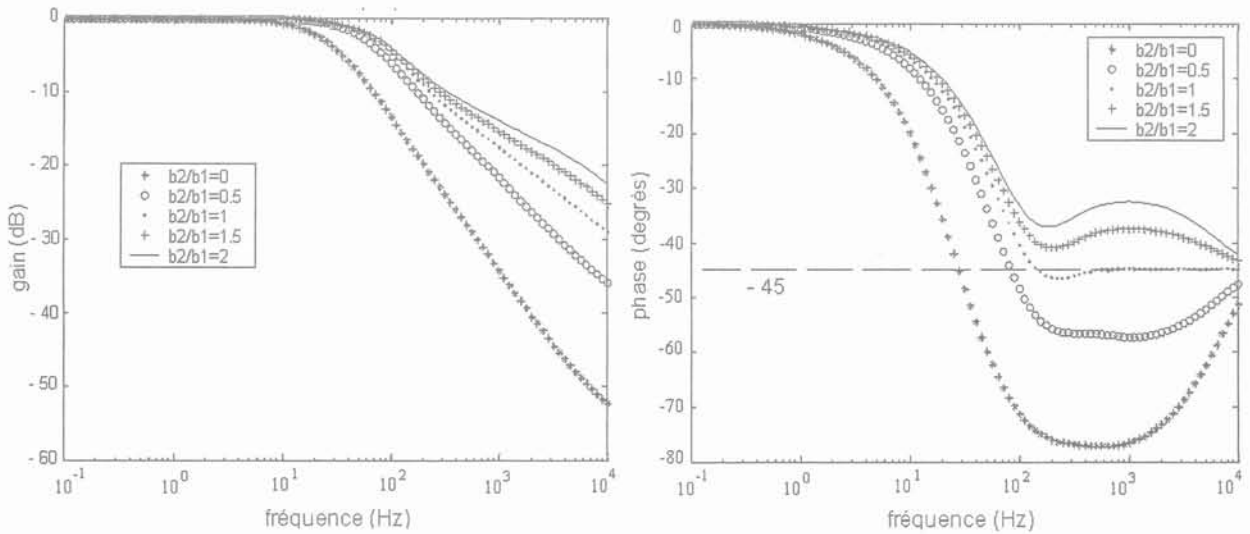


Figure IV-2. Admittance de l'encoche en té ( $h_2=0.1 \times h_1$ )

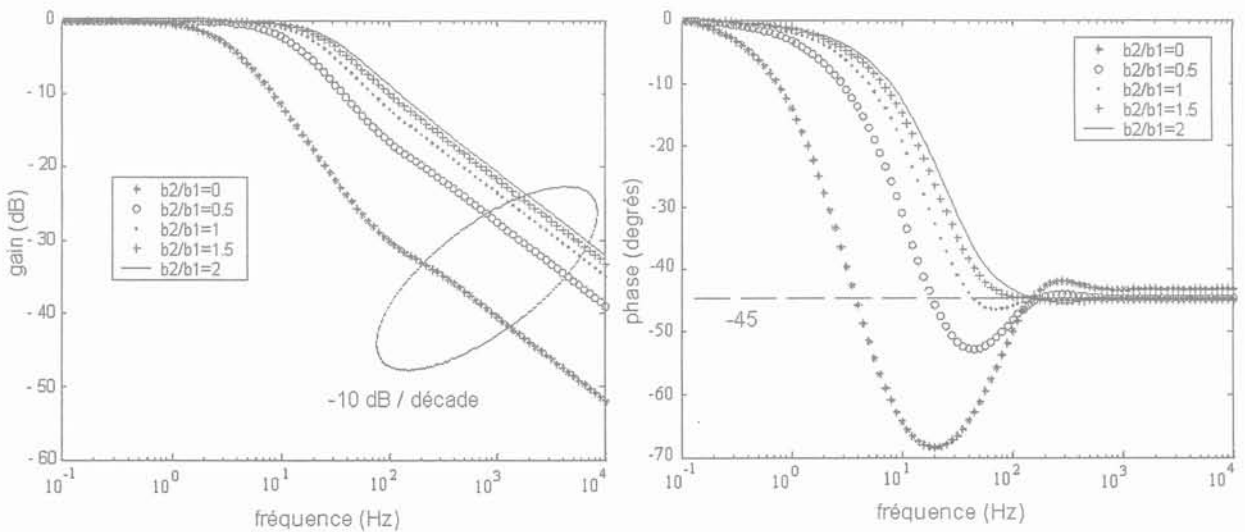


Figure IV-3. Admittance de l'encoche en té ( $h_2 = h_1$ )

On peut remarquer que, sur la plage de fréquences considérée, le gain de l'admittance de la barre lorsque  $h_2 = 0.1 h_1$  ne décroît pas en  $-10$  dB / décade, sauf dans le cas où  $b_1 = b_2$ . Dans

le cas où  $h_1 = h_2$ , le comportement lié à l'ordre  $\frac{1}{2}$  est plus manifeste dès la centaine de Hertz.

### II.1.2 Conclusion : modélisation d'une barre de cage d'écureuil ou d'amortisseur

L'étude de l'encoche en té est un moyen d'approcher analytiquement le calcul de la double encoche des machines asynchrones. La Figure IV-4 montre l'admittance d'une double encoche d'un moteur de 30 kW, modélisée sous Flux 2D [RET-98].

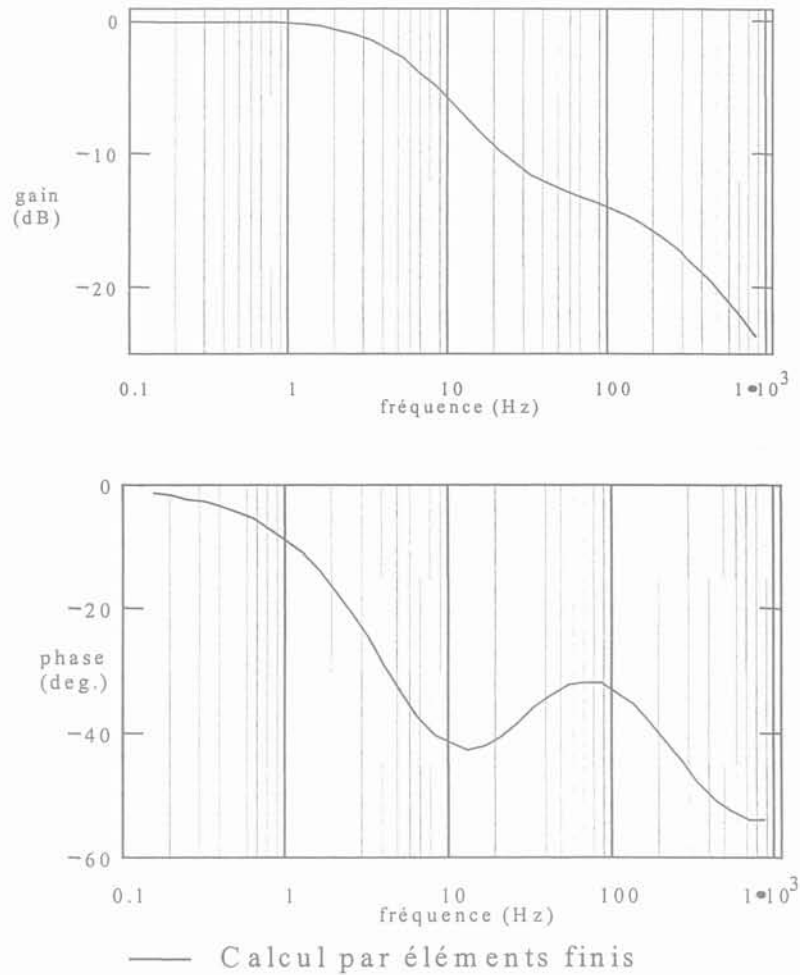


Figure IV-4. Diagrammes de Bode représentant l'admittance d'une double encoche

On constate que l'admittance de la double encoche présente des oscillations similaires à celles rencontrées pour la barre en forme de té. Elles se manifestent essentiellement entre 10 et 100 Hz.

De cette étude, il faut retenir deux points :

1. Le modèle d'ordre  $\frac{1}{2}$  résistif de la barre rectangulaire n'est plus satisfaisant dans le cas d'une encoche présentant une forme moins simple. Ainsi, dans le cas de l'encoche en té, deux systèmes d'ordre  $\frac{1}{2}$  sont nécessaires pour modéliser asymptotiquement l'impédance aux basses et aux hautes fréquences.
2. Il n'a pas été possible dans cette étude de mettre en évidence un « facteur de forme », coefficient intervenant dans l'expression de l'impédance d'ordre  $\frac{1}{2}$  résistive et faisant intervenir la forme de l'encoche. Néanmoins, pour les encoches habituelles, les ruptures géométriques entre les différentes parties de la barre ne sont pas aussi marquées que celles étudiées dans l'exemple : on a en général  $h_1 \gg h_2$  et  $b_1 \approx b_2$ . A titre d'exemple, la Figure IV-5 représente l'impédance analytique de la barre et les deux modèles d'ordre  $\frac{1}{2}$  basses fréquences (BF) et hautes fréquences (HF) dans le cas où  $b_1 = 10$  mm,  $b_2 = 12$  mm et  $h_1 = 10.h_2 = 30$  mm. Globalement, l'impédance d'ordre  $\frac{1}{2}$  résistive aux basses fréquences est satisfaisante.

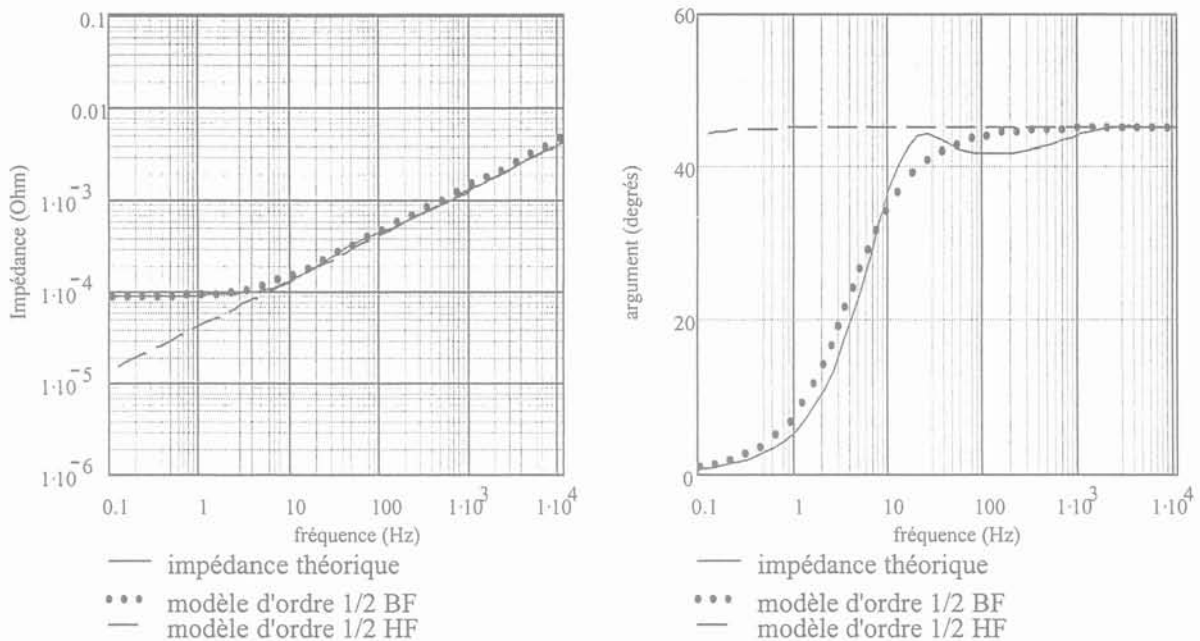


Figure IV-5. Impédance analytique de la barre et ses modèles d'ordre  $\frac{1}{2}$

Dans la suite de l'étude, une barre de cage d'écureuil ou de cage d'amortisseurs d'une machine tournante sera donc tout simplement modélisée par l'impédance d'ordre  $\frac{1}{2}$  résistive donnée par l'équation (IV-1).

## II.2 Modélisation d'une pièce magnétique massive

Aux basses fréquences, le rotor massif d'une machine est principalement inductif [ALG-70]. Le modèle d'ordre  $\frac{1}{2}$  de type résistif déterminé pour la barre ne convient donc plus.

L'objectif de ce paragraphe est de déterminer le comportement des courants induits dans une pièce massive. Le problème est grandement simplifié si l'on considère que le rayon de courbure du rotor est très grand par rapport à son rayon : on peut ainsi l'assimiler à une tôle ferromagnétique de largeur « infinie » par rapport à son épaisseur.

### II.2.1 Calcul analytique

On considère une tôle d'épaisseur  $2e$ , de largeur  $l$  et de longueur  $L$ , avec  $L \gg 2e$  et  $L \gg l$  (voir Figure IV-6). Elle est entourée d'un bobinage à  $n$  spires, parcouru par un courant sinusoïdal de pulsation  $\omega$ . Soient  $\mu$  et  $\sigma$  respectivement la perméabilité et la conductivité de la tôle. On rappelle que  $\mu = \mu_0 \mu_r$ , où  $\mu_0$  est la perméabilité du vide et  $\mu_r$  celle du matériau magnétique (généralement  $\mu_r \gg 1$ ).

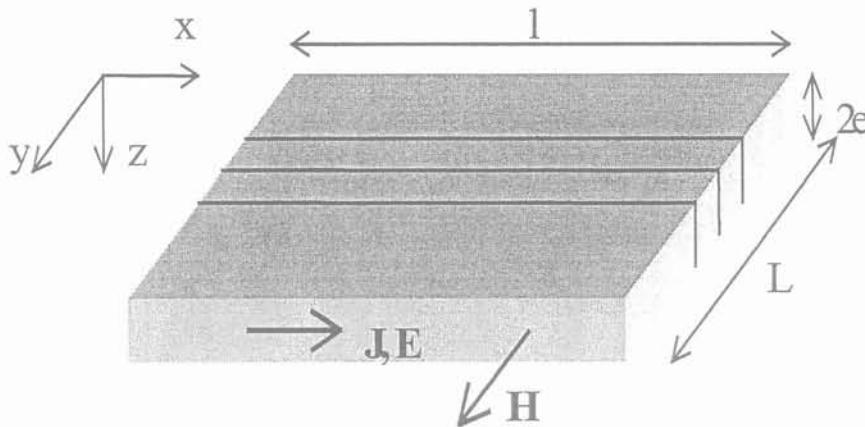


Figure IV-6. Schéma d'une tôle ferromagnétique

L'écriture des équations de Maxwell conduit à résoudre l'équation de diffusion suivante :

$$\frac{d^2 \bar{H}(z)}{dz^2} + j\omega\sigma\mu \cdot \bar{H}(z) = \bar{0} \quad (\text{IV-7})$$

On définit l'inductance complexe  $\bar{L}$  de la tôle comme le rapport du flux complexe  $\bar{\Phi}$  sur le courant dans le bobinage. On rappelle que le flux est calculé à partir de l'intégration de  $\bar{B} = \mu \cdot \bar{H}$  sur la surface  $2 \cdot e \cdot l$ .



On obtient le résultat classique [NOU-98] :

$$\bar{L} = \mu \cdot \frac{2 \cdot e \cdot l}{L} \cdot n^2 \cdot \frac{\text{th}(\bar{\alpha})}{\bar{\alpha}} \quad \text{où } \bar{\alpha}^2 = j\omega\sigma\mu \cdot e^2 \quad (\text{IV-8})$$

En substituant dans (IV-8) le développement limité à l'ordre 2 de la fonction tangente hyperbolique (voir équation (III-18)), on obtient :

$$\bar{L} \cong L_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \bar{\alpha}^2}} = L_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + j\omega\sigma\mu \cdot e^2}} = \frac{L_0}{\sqrt{1 + j \cdot \frac{\omega}{\omega_0}}} \quad (\text{IV-9})$$

avec  $L_0 = \mu \cdot \frac{2 \cdot e \cdot l}{L} \cdot n^2$  et  $\omega_0 = \frac{1}{\sigma\mu e^2}$ .

$L_0$  et  $\omega_0$  représentent respectivement l'inductance en courant continu et la pulsation de coupure de la tôle.

L'écart entre le modèle analytique et celui d'ordre 1/2 est le même que celui observé dans le cas d'une barre rectangulaire : quelques degrés d'écart sur la phase autour de la fréquence de coupure (voir Figure IV-7).

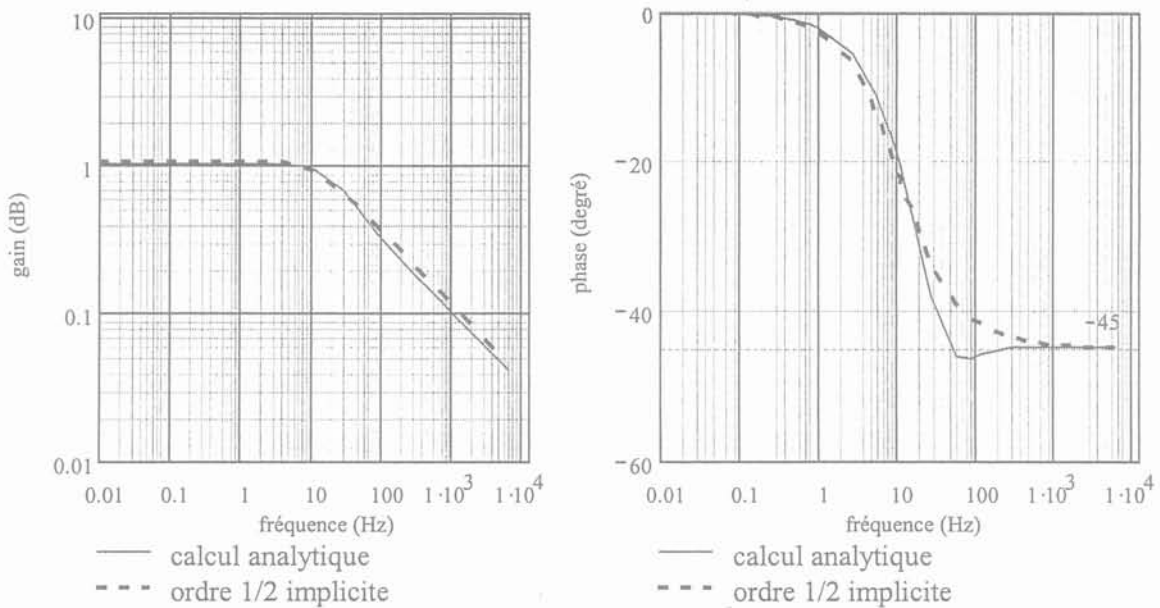


Figure IV-7. Comparaison entre les inductance théorique et d'ordre 1/2 d'une tôle

### II.2.2 Validation expérimentale de la modélisation

Nous avons montré que l'inductance complexe d'une tôle pouvait être modélisée par un système d'ordre 1/2 implicite. Disposant d'un dispositif de caractérisation en fréquence des

tôles ferromagnétiques au laboratoire du type cadre Epstein, nous avons décidé de valider expérimentalement ce modèle.

Le cadre Epstein est un transformateur qui permet :

- de mesurer le champ d'excitation  $H$  (par application du théorème d'Ampère),
- de mesurer l'induction magnétique correspondante (par intégration de la tension au secondaire),
- de déterminer les pertes magnétiques totales (par le calcul de l'aire du cycle d'Hystérésis).

Le synoptique de l'installation complète est donné sur la Figure IV-8. La cadre Epstein, ainsi que tout l'appareillage requis, sont largement décrits et commentés dans [PER-94] et [CES-96].

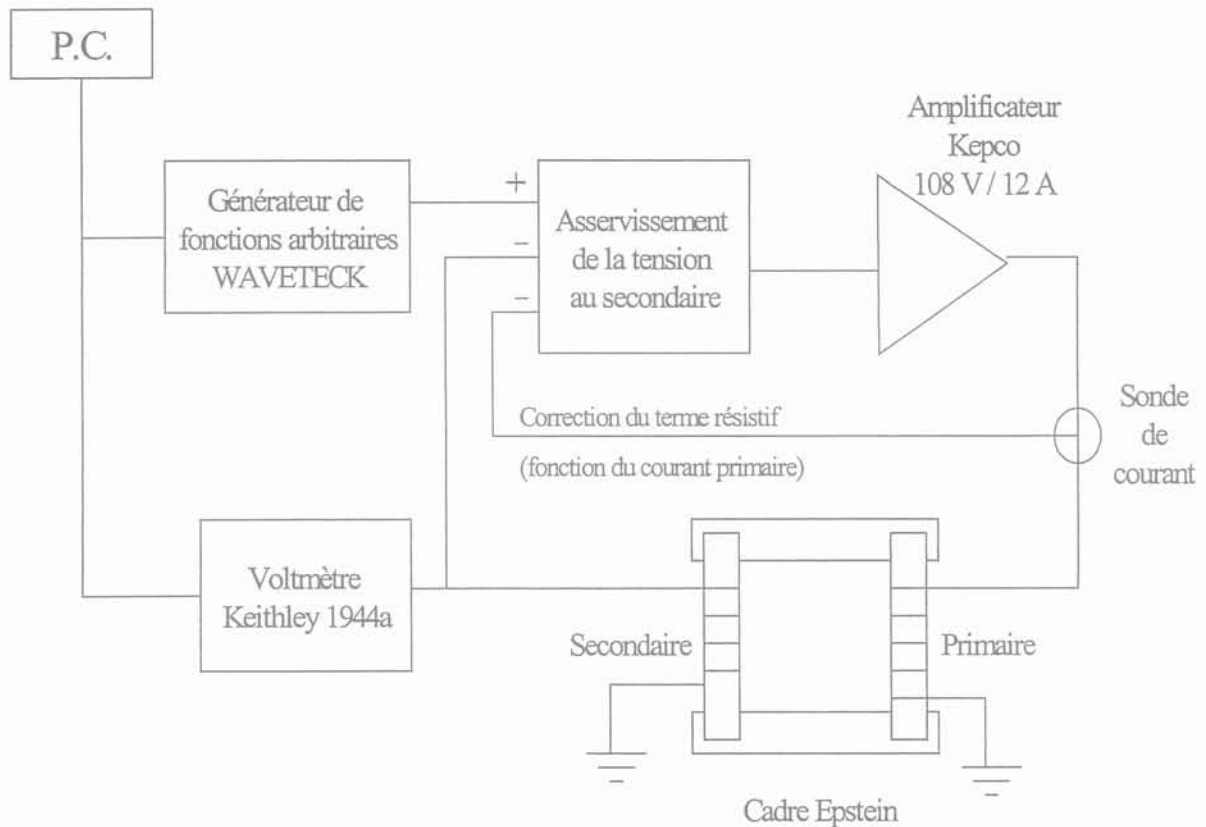


Figure IV-8. Synoptique du banc de mesures

La tôle étudiée est une tôle en fer à grains non orientés, dont les caractéristiques géométriques et physiques sont données dans le Tableau IV-1.

Caractéristiques	Valeur
Longueur (L)	30 cm
Largeur (l)	3 cm
Epaisseur (2.e)	2 mm
Conductivité ( $\sigma$ )	$1,2 \cdot 10^6$ S/cm
Perméabilité relative ( $\mu_r$ )	1200

**Tableau IV-1.** Caractéristiques de la tôle étudiée

L'inductance complexe  $\bar{L}$  de la tôle est définie comme le rapport du flux magnétique sur le courant d'excitation. Le champ magnétique est maintenu constant ( $H=100$  A/m) lors des mesures, ceci afin de respecter les conditions aux limites du problème analytique.

L'induction B et le champ H sont supposés varier sinusoïdalement dans le temps :

$$\begin{aligned} H &= H_c \cdot \sin(\omega t) \\ B &= B_c \cdot \sin(\omega t + \psi) \end{aligned} \quad (\text{IV-10})$$

où  $H_c$  et  $B_c$  sont respectivement les amplitudes du champ et de l'induction,  $\psi$  représentant le déphasage entre B et H.

Le module et la phase de l'inductance s'écrivent alors :

$$|\bar{L}| = \frac{B_c \cdot S}{I_c} \quad \text{et} \quad \arg(\bar{L}) = \psi \quad (\text{IV-11})$$

où  $I_c$  est l'amplitude constante du courant d'excitation ( $I_c$  et  $H_c$  sont liés directement par le théorème d'Ampère) et S la section moyenne de la tôle. La valeur de  $\psi$  est déduite directement des mesures des pertes magnétiques totales  $P_{\text{tot}}$ . En effet, on montre facilement que :

$$P_{\text{tot}} = \frac{1}{T} \int_0^T H \cdot dB = \frac{1}{T} \cdot H_c \cdot B_c \cdot \pi \cdot \sin \psi \quad \text{avec} \quad : \quad T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (\text{IV-12})$$

Les pertes magnétiques totales peuvent se différencier selon trois catégories [CES-96] :

- les pertes par Hystérésis ( $P_1$ ), proportionnelles à la fréquence f, qui sont significatives uniquement pour les basses fréquences,

- les pertes par courants de Foucault ( $P_2$ ), proportionnelles à  $f^2$ ,
- les pertes supplémentaires ou par excès ( $P_3$ ), proportionnelles à  $f^{3/2}$ .

La théorie de Bertotti [BER-88] nous donne l'expression de ces pertes en fonction de la fréquence et de l'induction crête  $\hat{B}$  :

$$P_{\text{tot}} = \underbrace{\frac{f}{f_0} \cdot P_h(\hat{B}, f_0)}_{P_1} + \underbrace{c_1 \cdot (\hat{B} \cdot f)^2}_{P_2} + \underbrace{c_2 \cdot (\hat{B} \cdot f)^{3/2}}_{P_3} \quad (\text{IV-13})$$

où  $f_0$  est une fréquence d'alimentation correspondant à un point de fonctionnement particulier. Les coefficients  $c_1$  et  $c_2$  sont déterminés expérimentalement. La séparation des deux derniers types de pertes est artificielle. Elles peuvent être regroupées en un seul terme et correspondent alors aux courants induits réels se développant dans la tôle.

En effet, à l'échelle microscopique, les courants induits supplémentaires sont créés par le mouvement des parois des domaines magnétiques [BER-85] [BER-88] [CES-96]. Ces courants se superposent alors aux courants de Foucault, que l'on détermine en résolvant les équations de Maxwell.

Pour visualiser uniquement l'effet des courants induits sur la variation de l'inductance, il est nécessaire de soustraire aux pertes totales les pertes par Hystérésis ( $P_1$ ) déterminées expérimentalement.

Pour calculer ces pertes, nous nous sommes donnés un point de fonctionnement où les pertes par courants induits sont négligeables (nous avons choisi une fréquence d'alimentation égale à  $f = f_0 = 1 \text{ Hz}$ ) ; dans un deuxième temps, nous avons établi, pour une induction donnée ( $\hat{B}$ ), la loi de comportement des pertes par Hystérésis donnée par (IV-13) en déterminant le coefficient  $P_h$ .

En soustrayant les pertes  $P_1$  aux pertes totales  $P_{\text{tot}}$ , on peut alors calculer l'inductance complexe de la tôle avec la formule (IV-11).

La Figure IV-9 montre les variations, en fonction de la fréquence, du gain et de la phase de l'inductance complexe de la tôle ferromagnétique.

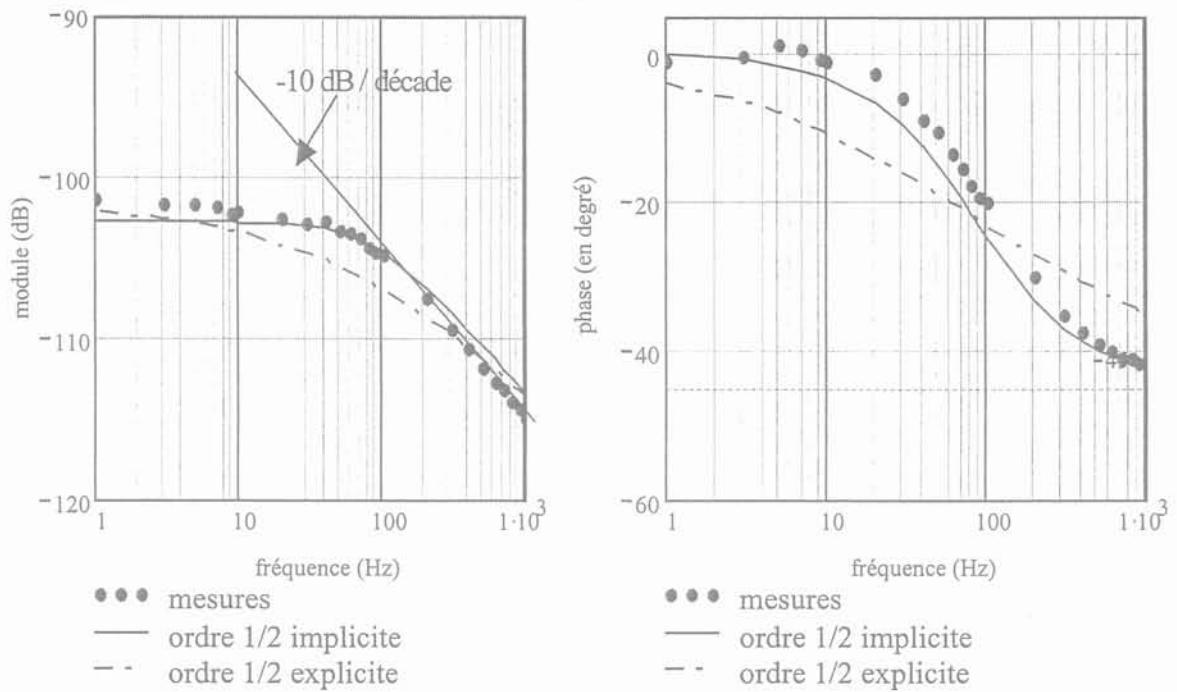


Figure IV-9. Evolution du gain et de la phase de l'inductance d'une tôle

Nous avons aussi représenté sur la Figure IV-9, l'impédance d'ordre  $\frac{1}{2}$  implicite décrite par la relation (IV-9). Ses paramètres ont été calculés à partir des données géométriques et physiques du Tableau IV-1. On les compare finalement à ceux déduits des mesures (voir Tableau IV-2).

	$L_0$	$f_0$ ( $f_0 = \omega_0 / 2\pi$ )
Modèle d'ordre $\frac{1}{2}$ implicite	7.9 $\mu\text{H}$	83.8 Hz
Mesures	7.2 $\mu\text{H}$	85 Hz

Tableau IV-2. Comparaison des paramètres  $L_0$  et  $f_0$  entre le modèle d'ordre  $\frac{1}{2}$  et les mesures

Le modèle d'ordre  $\frac{1}{2}$  implicite est donc bien validé expérimentalement. L'examen de ces courbes montre par contre que l'approximation par un système d'ordre  $\frac{1}{2}$  explicite est moins pertinente.

### II.2.3 Conclusion : modélisation de pièces massives (circuit magnétique)

Toutes les parties du circuit magnétique d'une machine électrique susceptibles d'être le lieu de développement de courants induits seront donc modélisées par une impédance d'ordre  $\frac{1}{2}$  du type :

$$\bar{Z}_{\text{inductive}}^{1/2} = \frac{j \cdot L_0 \cdot \omega}{\sqrt{1 + j \cdot \frac{\omega}{\omega_0}}} \quad (\text{IV-14})$$

$L_0$  désigne l'inductance en continu de la partie concernée et  $\omega_0$  sa pulsation de coupure, dépendant de ses caractéristiques géométriques et physiques.

On parlera d'impédance d'ordre  $\frac{1}{2}$  de type inductif.

### III. RAPPELS : SCHEMAS EQUIVALENTS DE PARK DES MACHINES TOURNANTES

#### III.1 Modélisation de Park de la machine asynchrone

Le principe de fonctionnement d'une machine asynchrone repose sur l'interaction de deux champs tournants, l'un créé au stator par application de tensions triphasées, l'autre induit dans la cage rotorique en court-circuit.

Le schéma équivalent classique d'une machine asynchrone est le suivant (voir Figure IV-10) :

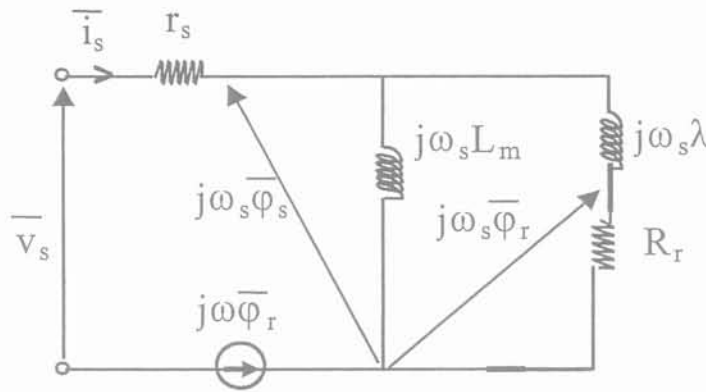


Figure IV-10. Schéma équivalent classique d'une machine asynchrone

$\bar{v}_s$ ,  $\bar{i}_s$ ,  $\bar{\phi}_s$ ,  $\omega_s$  et  $r_s$  désignent respectivement la tension, le courant de phase, le flux, la pulsation d'alimentation et la résistance statoriques. Côté rotor, le flux, la résistance et la pulsation mécanique sont représentés par les grandeurs  $\bar{\phi}_r$ ,  $R_r$  et  $\omega$ .  $L_m$  est l'inductance magnétisante,  $\lambda$  est l'inductance de fuite totale ramenée au rotor.

Toutes les fuites ont été ramenées au rotor par souci de simplification. Il est en effet bien connu, et ceci depuis longtemps, que la répartition des fuites entre rotor et stator est arbitraire et que moyennant un bon choix dans le paramétrage, tous ces schémas sont strictement équivalents [POL-67].

Pour les hypothèses permettant l'établissement des équations et du schéma équivalent, nous renvoyons le lecteur à la littérature classique [ALG-70].

### III.2 Modélisation de Park de la machine synchrone

On considère une machine synchrone triphasée à rotor bobiné (voir Figure IV-11), comportant des amortisseurs dans l'axe polaire. Les amortisseurs servent à rejeter les harmoniques et à amortir les oscillations des grandeurs électriques liées à des changements de régime (court-circuit, démarrage, etc ...).

En supposant que le champ dans l'entrefer est à répartition sinusoïdale et que le circuit magnétique est non saturé, on peut représenter les grandeurs électriques caractéristiques de la machine (tensions, courants, flux) dans un référentiel de PARK (d, q) tournant avec les champs.

On rappelle que (d) est l'axe polaire ou direct, et (q), l'axe en quadrature avec (d).

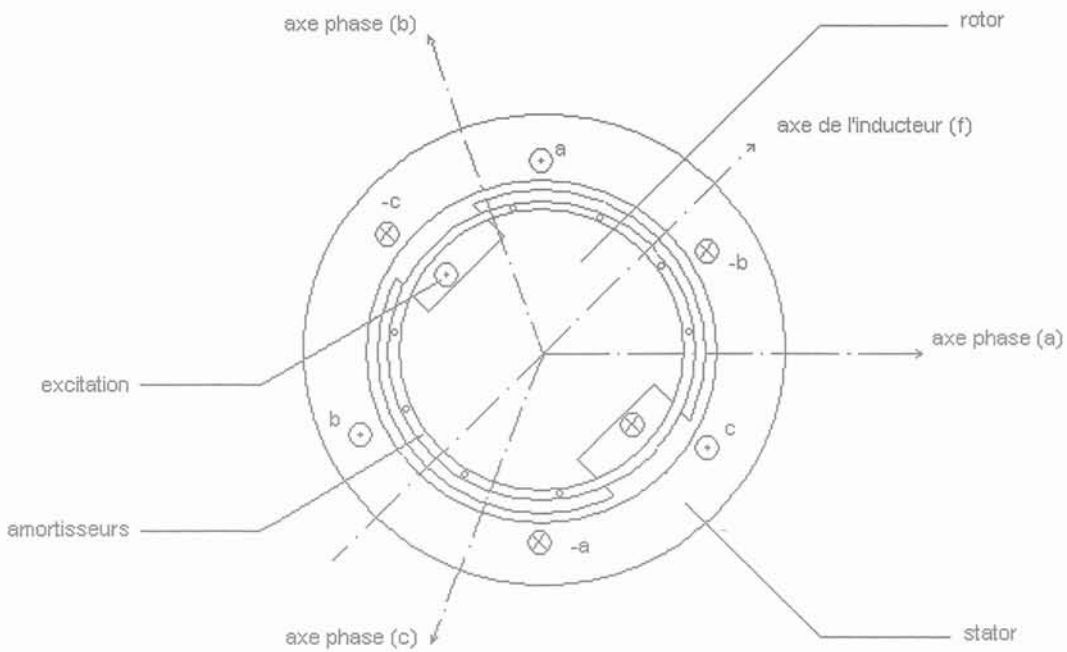


Figure IV-11. Schéma de principe d'une machine synchrone

En l'absence d'effet de peau, la machine peut être modélisée dans les axes (d) et (q) par les schémas équivalents de la Figure IV-12, déduits directement des équations électriques régissant la machine.

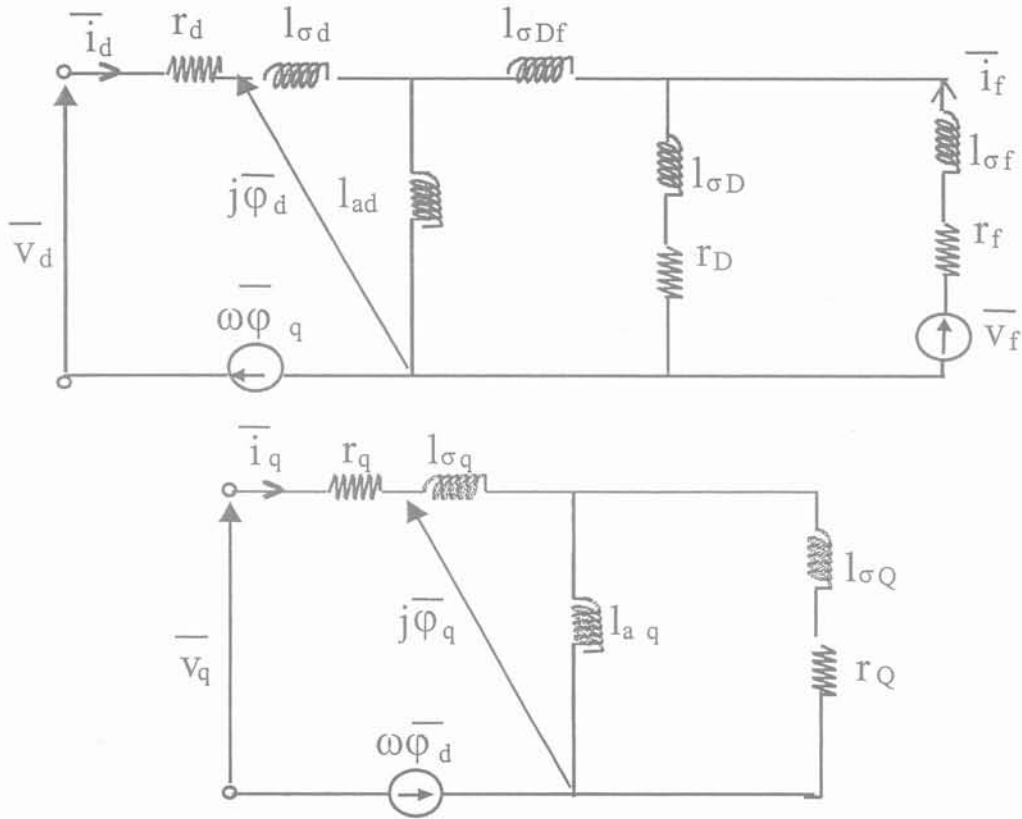


Figure IV-12. Schéma équivalent classique d'un alternateur (axes d et q)

Les indices D et f représentent respectivement l'amortisseur et le circuit d'excitation dans l'axe direct (ces indices viennent de l'anglais pour Damper et Field). L'indice Q désigne l'amortisseur dans l'axe en quadrature. Les termes  $l_{ak}$ ,  $l_{\sigma k}$  et  $r_k$  désignent respectivement l'inductance magnétisante, l'inductance de fuite et la résistance de l'axe k ; le terme  $l_{\sigma Df}$  représente l'inductance de fuite entre l'amortisseur et l'excitation dans l'axe direct.

La force électromotrice induite au stator par la rotation du rotor à la vitesse  $\omega$  s'écrit  $\omega \cdot \bar{\varphi}_k$  dans l'axe k.

#### IV. CONSTRUCTION DU SCHEMA EQUIVALENT D'ORDRE FRACTIONNAIRE DE LA MACHINE ASYNCHRONE

Il a été montré précédemment que le comportement fréquentiel d'une barre de cage d'écureuil ou d'une pièce massive pouvait être modélisé par une impédance d'ordre  $\frac{1}{2}$ , de type résistif ou inductif.

Nous allons maintenant établir le schéma équivalent d'ordre fractionnaire de la machine asynchrone en revenant aux équations de maille reliant les grandeurs statoriques et rotoriques de la machine. Ces travaux s'inspirent de l'établissement du schéma équivalent classique d'ordre entier valable en régime permanent d'une machine asynchrone [POL-60] [FOG-90].



## IV.1 Equations électriques de la machine

### IV.1.1 Positionnement du problème

Les paramètres connus au stator, ou calculables à partir des paramètres des enroulements, sont :

- la résistance des enroulements statoriques :  $R_s$
- l'inductance propre des enroulements statoriques :  $L_s$
- la mutuelle entre les enroulements statoriques :  $M_s$ .

Les paramètres au rotor sont les impédances d'ordre  $\frac{1}{2}$  des  $q$  barres constituant la cage d'écureuil, la résistance et l'inductance des anneaux de court-circuit. Nous négligeons ici l'effet de peau qui se produit dans l'épaisseur de ces anneaux. [VAS-90] a montré que si la résistance d'anneau variait beaucoup en fonction de la fréquence (+ 47% au démarrage), la réactance d'anneau restait quant à elle à peu près constante (+ 12% au démarrage). Toutefois, la résistance des anneaux est non seulement faible devant celle de la barre (de l'ordre de 15%), mais elle varie également beaucoup moins qu'elle. En fait, les anneaux, situés à l'extérieur de l'entrefer, sont dimensionnés thermiquement pour évacuer les pertes, et sont donc largement surdimensionnés sur le plan électrique.

Notre hypothèse a donc de minimes conséquences sur le calcul des paramètres rotoriques.

Dans toute la suite de l'étude, nous nous plaçons dans le cas parfait suivant : absence de saturation et distribution sinusoïdale des enroulements.

NOTATIONS – On choisit la convention suivante :

- les indices a, b et c désignent respectivement les enroulements a, b et c du stator.
- les indices S et R désignent respectivement les grandeurs liées au stator et au rotor.
- les tensions et courants sont notés :

$$v(t) = V\sqrt{2} \cdot \cos(\omega.t) \text{ et } i(t) = I\sqrt{2} \cdot \cos(\omega.t - \varphi).$$

### IV.1.2 Modélisation du stator

Pour chaque phase  $p$  du stator la loi d'Ohm s'écrit :

$$v_p(t) = R_s \cdot i_p(t) + \frac{d\phi_{Sp}(t)}{dt} + \frac{d\phi_{Rp}(t)}{dt} \quad \text{avec } p \in \{a, b, c\} \quad (\text{IV-15})$$

où  $v_p$ ,  $i_p$ ,  $\phi_{Sp}$  et  $\phi_{Rp}$  désignent respectivement la tension simple de la phase ( $p$ ) du stator, le courant dans cette phase, le flux mutuel entre la phase ( $p$ ) et les autres phases statoriques, et le flux mutuel entre la phase ( $p$ ) et le rotor.

L'équation (IV-15) peut également s'écrire :

$$v_p(t) = R_s \cdot i_p(t) + (L_s - M_s) \cdot \frac{di_p(t)}{dt} + \frac{d\phi_{Rp}(t)}{dt} \quad \text{avec } p \in \{a, b, c\} \quad (\text{IV-16})$$

### IV.1.3 Modélisation de la cage d'écurueil

Chaque barre  $k$  peut être modélisée par l'impédance d'ordre  $\frac{1}{2}$  résistive de paramètres  $R_k$  et  $\tau_k$  (avec  $\tau_k = \frac{1}{\omega_k}$ ). En supposant toutes les barres identiques, ces paramètres sont constants pour tout  $k$ . Chaque barre est ainsi modélisée par une impédance d'ordre  $\frac{1}{2}$  résistive de paramètres  $R$  et  $\tau$ .

D'après l'équation (II-9), on peut exprimer la relation temporelle entre la tension aux bornes de la barre  $k$ ,  $v_k$ , et le courant parcourant cette barre,  $i_k$ , soit :

$$v_k(t) = \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \cdot R \cdot \tau^{1/2} \cdot D^{1/2} \left\{ i_k(t) \cdot \exp\left(\frac{t}{\tau}\right) \right\} \quad (\text{IV-17})$$

où  $D^{1/2}$  désigne la dérivation d'ordre  $\frac{1}{2}$ .

Chaque anneau de court-circuit est modélisé par les paramètres supposés constants  $r_{\text{ann}}$  et  $l_{\text{ann}}$ .

Dans la suite, nous ferons intervenir les courants de maille  $j_k$ , c'est-à-dire les courants fictifs parcourant un cadre formé par deux barres voisines et les deux portions d'anneaux qui les joignent.

La Figure IV-13 représente la cage « déroulée » dans le plan horizontal et la circulation des courants de maille.

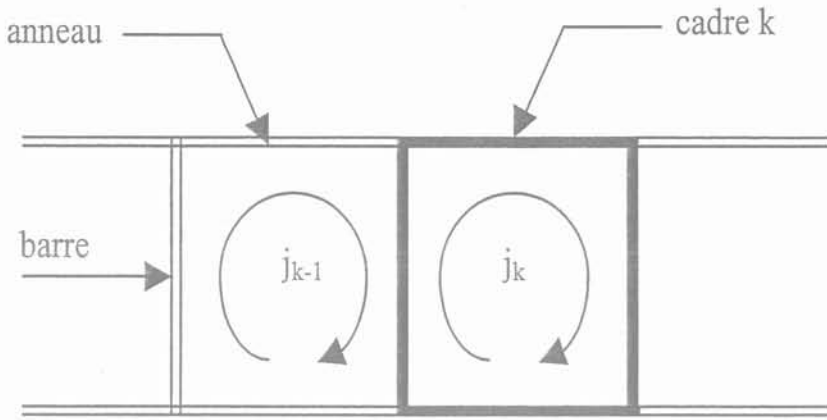


Figure IV-13. Représentation de la cage d'écureuil de la machine asynchrone

Les courants de maille  $j_k$  ont le même module et sont déphasés l'un par rapport à l'autre d'un angle égal à  $\frac{2\pi.p}{q}$ .

Ces courants ne forment un système  $q$ -phasé équilibré d'ordre  $p$  si et seulement si le rapport  $\frac{p}{q}$  est non entier ; en effet, dans le cas inverse, les courants  $j_k$  forment alors un système homopolaire [BOU-93]. Or dans une machine asynchrone,  $q$  est toujours très grand par rapport à  $p$ .

Considérons maintenant le schéma simplifié d'un cadre  $k$  :

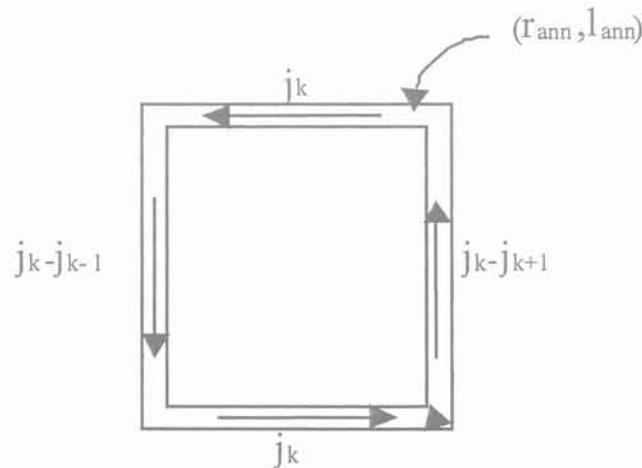


Figure IV-14. Représentation du cadre  $k$  de la cage d'écureuil

Le flux total qui traverse le cadre est égal à la somme du flux d'anneau, du flux d'entrefer et du flux de fuite d'encoche. Si on écrit la loi d'Ohm pour le cadre  $k$  on obtient:

$$0 = 2.r_{\text{ann}} \cdot j_k(t) + 2.l_{\text{ann}} \cdot \frac{d j_k(t)}{dt} + 2.v_k(t) - (v_{k-1}(t) + v_{k+1}(t)) + \frac{d\phi_{S_k}(t)}{dt} + \frac{d\phi_{R_k}(t)}{dt} \quad \text{pour } k = \{1, 2, \dots, q-1\} \quad (\text{IV-18})$$

où  $\phi_{S_k}$  et  $\phi_{R_k}$  sont respectivement le flux mutuel entre le stator et le cadre  $k$  et le flux mutuel entre les autres cadres et le cadre  $k$ .

L'équation (IV-18) peut s'écrire sous une forme plus compacte en utilisant la relation :

$$j_{k-1} + j_{k+1} = 2.j_k \cdot \cos\left(\frac{2\pi.p}{q}\right) \quad (\text{IV-19})$$

soit :

$$2.j_k - (j_{k-1} + j_{k+1}) = 2.j_k \cdot \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi.p}{q}\right)\right] = 4.\sin^2\left(\frac{2\pi.p}{q}\right).j_k \quad (\text{IV-20})$$

En utilisant la relation (IV-20), l'équation (IV-18) devient :

$$0 = 2.r_{\text{ann}} \cdot j_k(t) + 2.l_{\text{ann}} \cdot \frac{d j_k(t)}{dt} + \frac{d\phi_{S_k}(t)}{dt} + \frac{d\phi_{R_k}(t)}{dt} + 4.\sin^2\left(\frac{p\pi}{q}\right) \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \cdot R.\tau^{1/2} \cdot D^{1/2} \left\{ j_k(t) \cdot \exp\left(\frac{t}{\tau}\right) \right\} \quad \text{pour } k = \{1, 2, \dots, q-1\} \quad (\text{IV-21})$$

## IV.2 Vecteurs tournants statoriques et rotoriques

Pour établir un schéma équivalent à partir des relations de maille établies précédemment, il est nécessaire de tenir compte du référentiel où sont écrites ces relations. Ainsi chaque équation relative aux grandeurs statoriques est écrite dans le référentiel statorique, et réciproquement pour chaque équation rotorique. Il est aussi nécessaire de relier les grandeurs statoriques et rotoriques. Ne pouvant pas utiliser la notation complexe dans le cas d'un régime quelconque, nous avons travaillé avec la notion de vecteur tournant.

### IV.2.1 Vecteur tournant lié aux grandeurs statoriques

Les grandeurs statoriques (courants, tensions et flux) sont supposées triphasées. Le vecteur tournant  $\bar{X}$  associé aux variables triphasées  $x_a(t)$ ,  $x_b(t)$  et  $x_c(t)$  s'écrit [VAS-93] :

$$\bar{X} = x_a(t) + a_S \cdot x_b(t) + a_S^2 \cdot x_c(t) \quad \text{avec} \quad a_S = \exp\left(j \cdot \frac{2\pi}{3}\right) \quad (\text{IV-22})$$

Un vecteur tournant est ainsi associé à toutes les grandeurs statoriques :  $\bar{V}_S$  pour les tensions d'alimentation,  $\bar{I}_S$  pour les courants statoriques et  $\bar{\phi}_{RS}$  pour le flux mutuel rotor/stator.

En effectuant une combinaison linéaire appropriée entre les relations de (IV-16), il vient :

$$\bar{V}_S = R_s \cdot \bar{I}_S + (L_s - M_s) \cdot \frac{d\bar{I}_S}{dt} + \frac{d\bar{\phi}_{RS}}{dt} \quad (\text{IV-23})$$

Cette équation est valable dans le référentiel statorique.

### IV.2.2 Vecteur tournant lié aux grandeurs rotoriques

Les courants de maille  $j_k$  formant un système q-phasé équilibré, nous allons pouvoir leur associer un vecteur tournant, noté  $\bar{J}_R$  et défini par la relation dans le référentiel rotorique :

$$\begin{aligned} \bar{J}_R &= j_0(t) + a_R \cdot j_1(t) + a_R^2 \cdot j_2(t) + \dots + a_R^{q-1} \cdot j_{q-1}(t) \\ &= \sum_{k=0}^{q-1} a_R^k \cdot j_k(t) \quad \text{avec} \quad a_R = \exp\left(j \frac{2\pi \cdot p}{q}\right) \end{aligned} \quad (\text{IV-24})$$

On définit de même :

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_{SR} &= \sum_{k=0}^{q-1} a_R^k \cdot \phi_{Sk}(t) \\ \bar{\phi}_{RR} &= \sum_{k=0}^{q-1} a_R^k \cdot \phi_{Rk}(t) \end{aligned} \quad (\text{IV-25})$$

En effectuant une combinaison linéaire appropriée des équations de la relation (IV-21) et avec la propriété de linéarité de la dérivation non entière, il vient :

$$\begin{aligned} 0 &= 2 \cdot r_{\text{ann}} \cdot \bar{J}_R + 2 \cdot l_{\text{ann}} \cdot \frac{d\bar{J}_R}{dt} + 4 \cdot \sin^2\left(\frac{p\pi}{q}\right) \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \cdot R \cdot \tau^{1/2} \cdot D^{1/2} \left\{ \bar{J}_R \cdot \exp\left(\frac{t}{\tau}\right) \right\} \\ &\quad + \frac{d\bar{\phi}_{SR}}{dt} + \frac{d\bar{\phi}_{RR}}{dt} \end{aligned} \quad (\text{IV-26})$$

### IV.2.3 Expression des vecteurs tournants $\bar{\phi}_{SR}$ , $\bar{\phi}_{RR}$ et $\bar{\phi}_{RS}$

Dans la suite, nous désignerons par  $M_{ak}$  l'inductance mutuelle le cadre  $k$  et la phase  $a$  du stator. En négligeant les harmoniques d'espace, nous pouvons écrire pour une position  $\theta_k$  quelconque du cadre  $k$  par rapport au stator :

$$\begin{aligned} M_{ak} &= M \cdot \cos(p\theta_k) \\ M_{bk} &= M \cdot \cos\left(p\theta_k - \frac{2\pi}{3}\right) \\ M_{ck} &= M \cdot \cos\left(p\theta_k + \frac{2\pi}{3}\right) \end{aligned} \quad (IV-27)$$

#### ◆ Expression du vecteur tournant $\bar{\phi}_{SR}$

Chaque flux  $\phi_{Sk}$  de l'équation (IV-25) peut être défini à partir des courants statoriques, de  $M$  et de  $\theta_k$ . Ainsi :

$$\begin{aligned} \phi_{Sk}(t) &= M_{ak} \cdot i_a(t) + M_{bk} \cdot i_b(t) + M_{ck} \cdot i_c(t) \\ &= M \cdot \cos(p\theta_k) \cdot i_a(t) + M \cdot \cos\left(p\theta_k - \frac{2\pi}{3}\right) \cdot i_b(t) \\ &\quad + M \cdot \cos\left(p\theta_k + \frac{2\pi}{3}\right) \cdot i_c(t) \end{aligned} \quad (IV-28)$$

L'angle  $\theta_k$  peut également s'exprimer en fonction de la position angulaire du rotor  $\theta$  par rapport au stator :

$$p\theta_k = \frac{2\pi p}{q} \cdot k + \theta \quad (IV-29)$$

En utilisant le théorème d'Euler, l'expression du vecteur tournant  $\bar{\phi}_{SR}$  s'écrit :

$$\bar{\phi}_{SR} = \frac{M}{2} \sum_{k=0}^{q-1} \left\{ \begin{aligned} &\left( e^{-j\frac{4\pi p}{q}k+j\theta} + e^{-j\theta} \right) \cdot i_a(t) + \left( e^{-j\frac{4\pi p}{q}k-\frac{2\pi}{3}+j\theta} + e^{-j\theta-\frac{2\pi}{3}} \right) \cdot i_b(t) \\ &+ \left( e^{-j\frac{4\pi p}{q}k+\frac{2\pi}{3}+j\theta} + e^{-j\theta+\frac{2\pi}{3}} \right) \cdot i_c(t) \end{aligned} \right\} \quad (IV-30)$$

Or :

$$\sum_{k=0}^{q-1} e^{-j \frac{4\pi p}{q} \cdot k} = 0 \quad (\text{IV-31})$$

Finalement :

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_{SR} &= \frac{M}{2} q \cdot \left\{ i_a(t) + e^{-j \frac{2\pi}{3}} i_b(t) + e^{j \frac{2\pi}{3}} i_c(t) \right\} \cdot e^{-j\theta} \\ &= \frac{M}{2} q \cdot \bar{I}_S \cdot e^{-j\theta} \end{aligned} \quad (\text{IV-32})$$

L'équation (IV-32) est définie dans le référentiel rotorique.

♦ Expression du vecteur tournant  $\bar{\Phi}_{RR}$

Chaque terme  $\phi_{Rk}$  de l'équation (IV-25) peut être défini à partir de l'inductance de fuite  $l_c$  du cadre  $k$  ne dépendant pas de l'effet de peau, et des courants de maille  $j_k$ . Ainsi :

$$\phi_{Rk}(t) = l_c \cdot j_k(t) \quad (\text{IV-33})$$

D'où l'expression du vecteur champ tournant  $\bar{\Phi}_{RR}$  :

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_{RR} &= l_c \cdot \sum_{k=0}^{q-1} j_k(t) \cdot a_R^k \\ &= l_c \cdot \bar{J}_R \end{aligned} \quad (\text{IV-34})$$

L'équation (IV-34) est définie dans le référentiel rotorique.

♦ Expression du vecteur tournant  $\bar{\Phi}_{RS}$

Par définition :

$$\bar{\Phi}_{RS} = \phi_{Ra} + a_S \cdot \phi_{Rb} + a_S^2 \cdot \phi_{Rc} \quad (\text{IV-35})$$

Avec :

$$\begin{aligned}
 \phi_{Ra} &= \sum_{k=0}^{q-1} M_{ak} \cdot j_k = \sum_{k=0}^{q-1} M \cdot \cos(p\theta_k) \cdot j_k \\
 &= \frac{M}{2} \sum_{k=0}^{q-1} \left( e^{jp\theta_k} + e^{-jp\theta_k} \right) j_k \\
 \phi_{Rb} &= \sum_{k=0}^{q-1} M_{bk} \cdot j_k = \sum_{k=0}^{q-1} M \cdot \cos\left(p\theta_k - \frac{2\pi}{3}\right) \cdot j_k \\
 &= \frac{M}{2} \sum_{k=0}^{q-1} \left( e^{jp\theta_k - j \cdot \frac{2\pi}{3}} + e^{-jp\theta_k + j \cdot \frac{2\pi}{3}} \right) j_k \\
 \phi_{Rc} &= \sum_{k=0}^{q-1} M_{ck} \cdot j_k = \sum_{k=0}^{q-1} M \cdot \cos\left(p\theta_k + \frac{2\pi}{3}\right) \cdot j_k \\
 &= \frac{M}{2} \sum_{k=0}^{q-1} \left( e^{jp\theta_k + j \cdot \frac{2\pi}{3}} + e^{-jp\theta_k - j \cdot \frac{2\pi}{3}} \right) j_k
 \end{aligned} \tag{IV-36}$$

En utilisant (IV-36), la relation (IV-35) devient :

$$\begin{aligned}
 \bar{\phi}_{RS} &= \frac{3.M}{2} \sum_{k=0}^{q-1} e^{jp\theta_k} \cdot j_k + \frac{M}{2} \sum_{k=0}^{q-1} e^{-jp\theta_k} \cdot \underbrace{(1 + a_S + a_S^2)}_{=0} j_k \\
 &= \frac{3.M}{2} \cdot e^{jp\theta} \sum_{k=0}^{q-1} \left( e^{jp \frac{2\pi p}{q}} \right)^k \cdot j_k
 \end{aligned} \tag{IV-37}$$

D'où :

$$\bar{\phi}_{RS} = \frac{3.M}{2} \bar{J}_R \cdot e^{j\theta} \tag{IV-38}$$

L'équation (IV-38) est définie dans le référentiel statorique.

### IV.3 Etablissement du schéma équivalent

Pour établir le schéma équivalent de la machine asynchrone à cage, il faut relier dans un même référentiel les équations des vecteurs statoriques et rotoriques décrits dans le paragraphe précédent.

Nous allons nous placer dans le référentiel rotorique. La raison, prosaïque, est que nous sommes bloqués mathématiquement lorsque nous essayons d'exprimer toutes les grandeurs dans le référentiel statorique, du fait de la présence de la dérivation non entière implicite d'un



produit de fonctions que nous ne savons pas (encore) traiter mathématiquement (le début du calcul est présenté en Annexe 1).

### IV.3.1 Au stator ...

L'équation des grandeurs statoriques, dans le référentiel statorique, s'écrit :

$$\bar{V}_S = R_s \cdot \bar{I}_S + (L_s - M_s) \frac{d\bar{I}_S}{dt} + \frac{3M}{2} \cdot \frac{d}{dt} \left\{ \bar{J}_R \cdot e^{j\theta} \right\} \quad (\text{IV-39})$$

En posant  $L_m = \frac{M}{2} q$ , l'équation (IV-39) devient :

$$\bar{V}_S = R_s \cdot \bar{I}_S + (L_s - M_s) \frac{d\bar{I}_S}{dt} + \frac{3}{q} L_m \frac{d\bar{J}_R}{dt} \cdot e^{j\theta} + j \frac{3}{q} L_m \frac{d\theta}{dt} \cdot \bar{J}_R \cdot e^{j\theta} \quad (\text{IV-40})$$

Le changement du référentiel statorique au référentiel rotorique s'effectue en posant :

$$\begin{aligned} \bar{V}_1 &= \bar{V}_S \cdot e^{-j\theta} \\ \bar{I}_1 &= \bar{I}_S \cdot e^{-j\theta} \end{aligned} \quad (\text{IV-41})$$

Cela revient à effectuer une rotation d'angle  $\theta$ . On obtient alors la relation vectorielle suivante dans le référentiel tournant avec le rotor :

$$\bar{V}_1 = R_s \cdot \bar{I}_1 + (L_s - M_s) \frac{d\bar{I}_1}{dt} + j \cdot (L_s - M_s) \cdot \frac{d\theta}{dt} \cdot \bar{I}_1 + \frac{3}{q} L_m \frac{d\bar{J}_R}{dt} + j \frac{3}{q} L_m \cdot \bar{J}_R \frac{d\theta}{dt} \quad (\text{IV-42})$$

### IV.3.2 Au rotor ...

En adoptant les notations précédentes, l'équation rotorique (IV-26) s'écrit :

$$\begin{aligned} 0 &= 2 \cdot r_{\text{ann}} \cdot \bar{J}_R + (2 \cdot l_{\text{ann}} + l_c) \cdot \frac{d\bar{J}_R}{dt} \\ &+ 4 \cdot \sin^2 \left( \frac{p\pi}{q} \right) \cdot \exp \left( -\frac{t}{\tau} \right) \cdot R \cdot \tau^{1/2} \cdot D^{1/2} \left\{ \bar{J}_R \cdot \exp \left( \frac{t}{\tau} \right) \right\} + L_m \cdot \frac{d\bar{I}_S'}{dt} \end{aligned} \quad (\text{IV-43})$$

### IV.3.3 Schéma équivalent de la machine asynchrone en régime sinusoïdal

En régime sinusoïdal, l'équation (IV-43) peut s'écrire :

$$0 = 2.r_{\text{ann}}.\bar{J}_R + (2.l_{\text{ann}} + l_c) \cdot \frac{d\bar{J}_R}{dt} + Z_{1/2}.\bar{J}_R + L_m \cdot \frac{d\bar{I}'_S}{dt} \quad (\text{IV-44})$$

où :

$$Z_0^{1/2} = 4 \cdot \sin^2\left(\frac{p\pi}{q}\right) \cdot R \cdot \sqrt{1 + j \cdot \tau \cdot \omega} \quad (\text{IV-45})$$

Dans la suite, on supposera que l'équation (IV-44) reste valable pour tout type de fonctionnement. Ceci imposera que nous établirons **un** schéma équivalent pour **une** fréquence.

En prenant les notations suivantes :

$$\begin{aligned} \bar{V}'_S &= \bar{V}_1 \cdot \frac{q}{3} & \bar{I}'_S &= \bar{I}_1 & R'_S &= \frac{q}{3} \cdot R_S \\ L'_S &= \frac{q}{3} \cdot (L_S - M_S) & L'_R &= 2.l_{\text{ann}} + l_c & R_R &= 2.r_{\text{ann}} \end{aligned} \quad (\text{IV-46})$$

et en posant :

$$\begin{aligned} L'_S &= L_m + L_{\sigma S} \\ L'_R &= L_m + L_{\sigma R} \end{aligned} \quad (\text{IV-47})$$

les équations (IV-42) et (IV-44) s'écrivent :

$$\begin{aligned} \bar{V}'_S &= R'_S \cdot \bar{I}'_S + L_{\sigma S} \cdot \frac{d\bar{I}'_S}{dt} + j \left[ L_{\sigma S} \cdot \bar{I}'_S + L_m \cdot (\bar{I}'_S + \bar{J}_R) \right] \frac{d\theta}{dt} + L_m \cdot \frac{d(\bar{I}'_S + \bar{J}_R)}{dt} \\ 0 &= R_R \cdot \bar{J}_R + L_{\sigma R} \cdot \frac{d\bar{J}_R}{dt} + Z_{1/2} \cdot \bar{J}_R + L_m \cdot \frac{d(\bar{I}'_S + \bar{J}_R)}{dt} \end{aligned} \quad (\text{IV-48})$$

Le terme  $j \left[ L_{\sigma S} \cdot \bar{I}'_S + L_m \cdot (\bar{I}'_S + \bar{J}_R) \right] \frac{d\theta}{dt}$  correspond à la force électromotrice proportionnelle à  $\frac{d\theta}{dt}$ , donc à la vitesse de rotation du rotor. Elle traduit la rotation du rotor par rapport au stator. Le terme  $\bar{\varphi}'_S = L_{\sigma S} \cdot \bar{I}'_S + L_m \cdot (\bar{I}'_S + \bar{J}_R)$  correspond au flux statorique.

A partir des relations (IV-48), on déduit le schéma équivalent de la machine asynchrone en régime sinusoïdal (voir Figure IV-15).

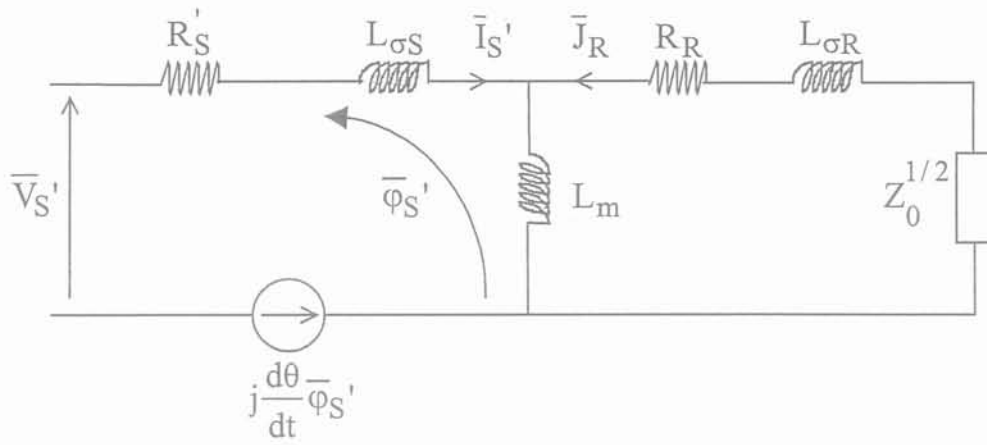


Figure IV-15. Schéma équivalent d'ordre  $\frac{1}{2}$  de la machine asynchrone

Une interprétation physique de ce schéma équivalent est la suivante [HAM-79] [ALG-70] :

- Le stator est modélisé par une résistance  $R'_S$  et une inductance de fuite en série  $L_{\sigma S}$  : les courants induits sont négligés,
- Le circuit magnétique étant feuilleté, l'inductance magnétisante  $L_m$  est supposée constante,
- La part de l'impédance rotor non influencée par l'effet de peau est modélisée par les paramètres  $R_R$  et  $L_{\sigma R}$ ,
- $Z_0^{1/2}$  est l'impédance d'ordre  $\frac{1}{2}$  de type « résistif » modélisant l'effet de peau dans les barres de la cage d'écureuil.

Rappelons que les inductances  $L_{\sigma S}$  et  $L_{\sigma R}$  peuvent être représentées par une seule inductance de fuite [POL-67].

## V. CONSTRUCTION DU SCHEMA EQUIVALENT D'ORDRE FRACTIONNAIRE DE LA MACHINE SYNCHRONE

Afin de tenir compte du développement des courants induits dans certaines parties de la machine synchrone, le schéma équivalent d'ordre fractionnaire a cette fois-ci été directement établi à partir des considérations physiques suivantes [CAN-93] [KAM-97] :

- Aucun courant induit ne se développe dans le bobinage du stator. Il est donc modélisé par une résistance  $r_{sd}$  (*respectivement*  $r_{sq}$ ) et une inductance  $l_{\sigma sd}$  (*respectivement*  $l_{\sigma sq}$ ) dans l'axe (d) (*respectivement* (q)) indépendantes de la fréquence,
- L'inductance représentant l'énergie magnétique stockée dans l'entrefer est supposée constante. Elle est notée  $L_{adu}$  (*respectivement*  $L_{aqu}$ ) dans l'axe (d) (*respectivement* (q)),
- Du fait du développement des courants induits dans les parties massives du rotor, on ajoute en parallèle de  $L_{adu}$  une inductance d'ordre  $\frac{1}{2}$  de type « inductif » :

$$\bar{Z}_{1d}^{1/2}(\omega) = \frac{jL_{1d} \cdot \omega}{\sqrt{1 + j \cdot \frac{\omega}{\omega_{1d}}}} \quad . \text{ Il en est de même dans l'axe (q),}$$

- Les courants induits sont négligés dans les enroulements d'excitation. Ils sont donc modélisés par une résistance  $r_f$  et une inductance  $l_{\sigma f}$ , indépendantes de la fréquence,
- Au champ mutuel de fuite qui lie les enroulements statoriques aux enroulements de l'amortisseur de l'axe (d) (*respectivement* (q)) est associée une inductance  $l_{\sigma 12d}$  (*respectivement*  $l_{\sigma 12q}$ ). On suppose que les courants induits n'influencent pas ce couplage,
- Enfin, les amortisseurs dans les axes (d) et (q) sont modélisés par des impédances d'ordre  $\frac{1}{2}$  de type « résistif » :

$$\bar{Z}_{2d}^{1/2}(\omega) = R_{2d} \cdot \sqrt{1 + j \cdot \frac{\omega}{\omega_{2d}}} \quad \text{et} \quad \bar{Z}_{2q}^{1/2}(\omega) = R_{2q} \cdot \sqrt{1 + j \cdot \frac{\omega}{\omega_{2q}}} \quad .$$

Ceci nous permet d'établir la configuration d'un nouveau schéma équivalent d'ordre fractionnaire de la machine synchrone, et ceci dans les axes d et q (voir Figure IV-16 et Figure IV-17).

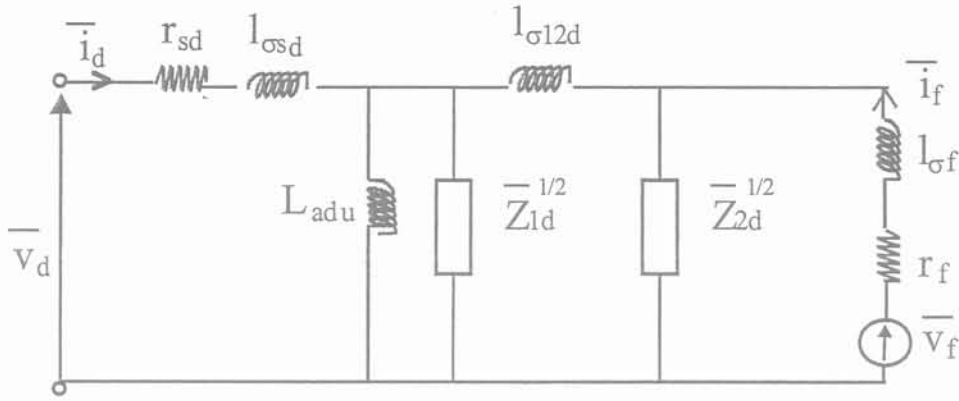


Figure IV-16. Schéma équivalent d'ordre fractionnaire d'un alternateur (axe (d))

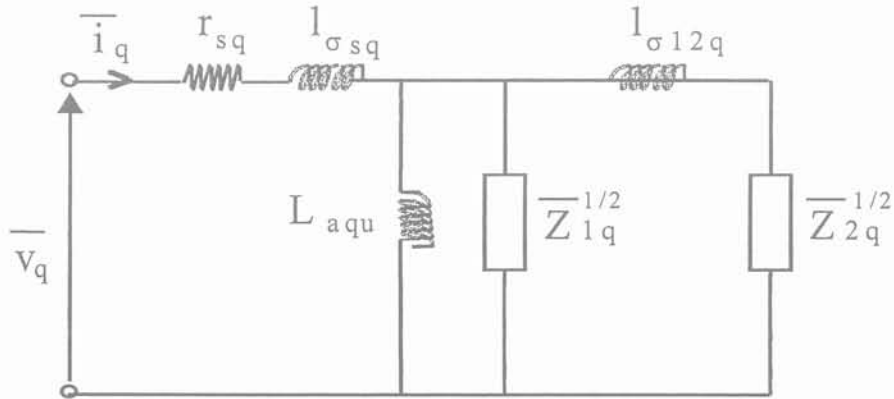


Figure IV-17. Schéma équivalent d'ordre fractionnaire d'un alternateur (axe(q))

## VI. CONCLUSION

Ce chapitre nous a permis d'élargir le champ d'applications des systèmes d'ordre  $\frac{1}{2}$ . Nous avons ainsi pu étudier l'influence de la forme de la barre sur l'expression de son impédance et déterminer l'impédance d'ordre  $\frac{1}{2}$  de pièces massives.

D'autre part, de nouveaux schémas équivalents des machines synchrones et asynchrones ont été établis à partir non seulement de considérations physiques, mais également des équations régissant les grandeurs électriques de la machine.

Il reste désormais à étudier ces schémas équivalents et à prouver que l'insertion d'impédances d'ordre  $\frac{1}{2}$  apporte un réel intérêt par rapport à la modélisation classique des courants induits. Ce sera l'objet du chapitre V.

---

*Chapitre V*

*Identification des schémas équivalents  
fractionnaires des machines synchrones et  
asynchrones*

---



## I. INTRODUCTION

L'objectif de ce chapitre est double ; il est en effet nécessaire à ce stade de l'étude :

- de proposer une méthode d'identification expérimentale des schéma équivalents fractionnaires des machines synchrones et asynchrones élaborés au chapitre IV,
- de valoriser ces schémas équivalents en analysant la pertinence physique des paramètres identifiés.

Ce chapitre décrit dans un premier temps les techniques de mesures de réponse fréquentielle à rotor bloqué sont dans un premier temps développées.

Dans un deuxième temps, une procédure d'identification des schémas équivalents fractionnaires des machines synchrones et asynchrones est présentée.

Enfin, l'influence de la température et de la saturation sur les valeurs des paramètres est abordée afin de mettre en évidence la pertinence physique de la modélisation fractionnaire.

## II. TECHNIQUES DE MESURE SSFR ET D'IDENTIFICATION DES PARAMETRES

### *II.1 Mesures par SSFR (StandStill Frequency Response)*

#### **II.1.1 Principe de mesure SSFR**

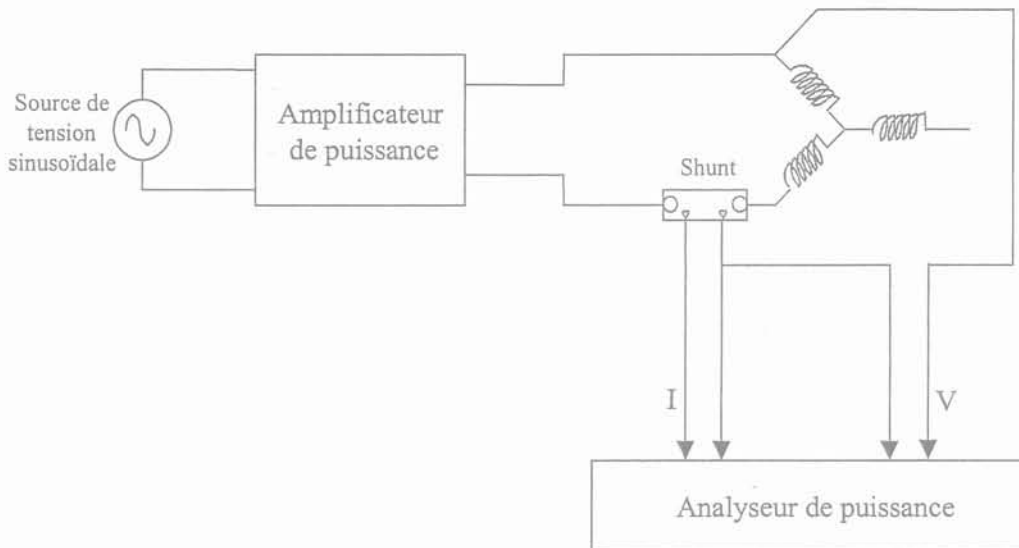
La méthode S.S.F.R. (de l'anglais StandStill Frequency Response, où réponse fréquentielle à l'arrêt) est utilisée pour déterminer les caractéristiques fréquentielles d'une machine tournante à l'arrêt. C'est une méthode normalisée pour l'identification des machines synchrones [KRA-86] [KEY-89] [IEE-95], qui a été étendue aux machines asynchrones [WIL-89] [MOO-93] [DUC-96] [RET-97].

La méthode SSFR consiste à relever le spectre des grandeurs dites opérationnelles, lorsque l'on alimente en monophasé l'une des phases de la machine par une source de tension sinusoïdale de fréquence variable et de faible amplitude, la machine étant à l'arrêt.

La plage de fréquences s'étend de quelques mHz à quelques centaines de Hz.



Quelle que soit la nature de la machine, la configuration des essais est la suivante [IEE-95] :



**Figure V-1.** Synoptique de l'essai fréquentiel à rotor bloqué (SSFR)

Le principal avantage de cette méthode est qu'elle est peu contraignante pour la machine puisque le rotor est bloqué et la tension d'alimentation faible.

Par rapport aux essais temporels, les essais fréquentiels permettent :

- d'identifier de manière satisfaisante les modèles d'ordre supérieur à deux, puisque le signal sinusoïdal permet d'exciter pratiquement toutes les fréquences avec la même amplitude,
- de ne pas être gêné par rapport aux bruits de mesure puisque les signaux sinusoïdaux sont faciles à décorrélérer du bruit.

Par contre, les inconvénients de la procédure SSFR sont liés à son propre mode opératoire puisque :

- la machine étant à l'arrêt, certains harmoniques d'espace apparaissant avec la rotation de la machine ne sont pas pris en compte dans le schéma équivalent,
- l'essai étant réalisé dans des conditions « petits signaux », la saturation n'est pas considérée. Certains auteurs ont cependant proposé des facteurs de correction pour en tenir compte [WIL-89] [IEE-95] [IDE-99].

D'un point de vue général, il est nécessaire d'effectuer ces essais avec une certaine rigueur afin d'éviter ultérieurement des erreurs dans l'estimation des paramètres de la machine. Plus

particulièrement, les contacts et connexions doivent être réalisés avec soin de façon à minimiser la résistance qu'ils peuvent introduire [KAM-97].

Il est aussi également indispensable de maintenir une température constante tout au long des essais de façon à ce que les valeurs des résistances restent constantes.

Enfin, la dernière précaution à prendre est d'acquérir un nombre suffisant de points de mesure pour permettre une bonne estimation des paramètres. [SAH-94] recommande une dizaine de points par décade. Parfois, il sera nécessaire d'effectuer un moyennage sur les mesures, ce qui augmente très significativement la durée de l'essai. Un test SSFR complet effectué sur un alternateur, avec 5 à 10 répétitions du même essai, peut ainsi durer jusqu'à 19 heures ininterrompues [KAM-96] !

### II.1.2 Grandeurs opérationnelles associées à la machine asynchrone

La machine asynchrone à double cage étant alimentée en sinusoïdal, à rotor bloqué, son schéma équivalent décrit sur la Figure IV-15 peut se simplifier sous la forme :

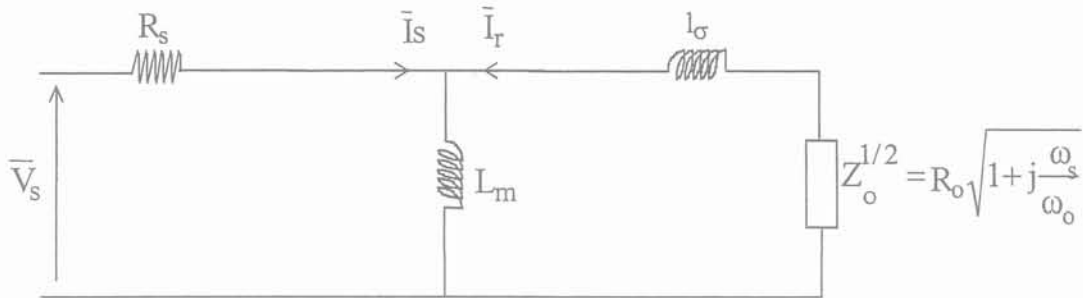


Figure V-2. Schéma équivalent d'ordre  $\frac{1}{2}$  de la machine asynchrone

Il faut noter que la résistance des anneaux de court-circuit  $R_R$  est négligée devant celle des barres de la cage rotorique. De plus, les inductances de fuite statorique et rotorique ont été regroupées en une seule inductance, notée  $l_\sigma$ .

La grandeur opérationnelle mesurée est l'impédance vue du stator :

$$\bar{Z}_s = \frac{\bar{V}_s}{\bar{I}_s} \quad (V-1)$$

Une inductance opérationnelle  $\bar{L}_s$  peut également être définie par :

$$\bar{L}_s = \frac{\bar{Z}_s - R_s}{j\omega_s} \quad (V-2)$$

où  $\omega_s$  est la pulsation de la tension d'alimentation.

### II.1.3 Grandeurs opérationnelles associées à la machine synchrone

On rappelle la topologie des schémas équivalents fractionnaires d'une machine synchrone (voir chapitre IV - paragraphe V) à rotor bloqué.

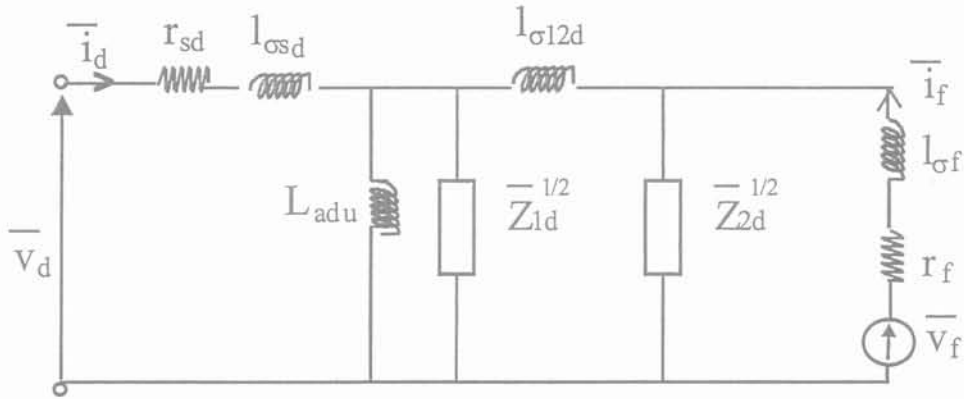


Figure V-3. Schéma équivalent d'ordre fractionnaire d'un alternateur (axe (d))

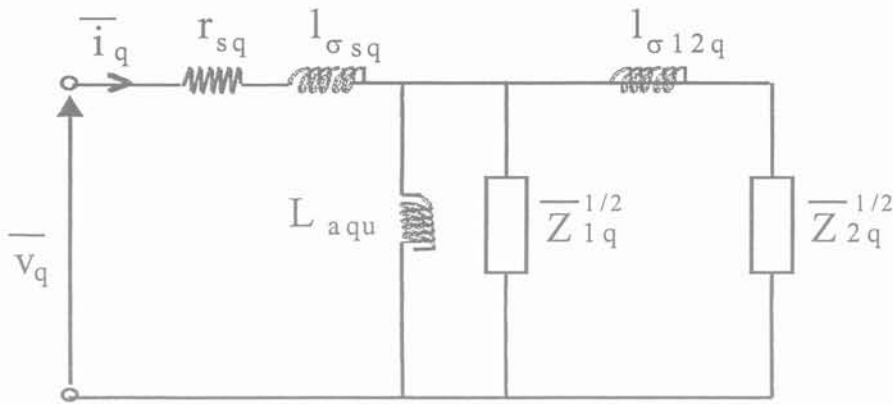


Figure V-4. Schéma équivalent d'ordre fractionnaire d'un alternateur (axe(q))

A partir des schémas équivalents représentés sur les figures V-3 et V-4, il est possible de définir et mesurer les grandeurs opérationnelles suivantes [IEE-95]:

- l'impédance opérationnelle d'axe (d) quand l'enroulement d'excitation est en court-circuit :

$$\bar{Z}_d(s) = \left. \frac{\bar{v}_d(s)}{\bar{i}_d(s)} \right|_{v_f=0} \quad (V-3)$$

- l'impédance opérationnelle d'axe (q) quand l'enroulement d'excitation est en court-circuit :

$$\bar{Z}_q(s) = \left. \frac{\bar{v}_q(s)}{\bar{i}_q(s)} \right|_{v_f=0} \quad (V-4)$$

- la fonction de transfert entre le stator et l'excitation :

$$s\bar{G}(s) = \left. \frac{\bar{v}_d(s)}{\bar{v}_f(s)} \right|_{i_d=0} = \left. \frac{\bar{i}_f(s)}{\bar{i}_d(s)} \right|_{v_f=0} \quad (V-5)$$

- l'impédance entre le stator et l'excitation :

$$\bar{Z}_{afo}(s) = \left. \frac{\bar{v}_f(s)}{\bar{i}_d(s)} \right|_{i_f=0} \quad (V-6)$$

## II.2 Identification des paramètres

### II.2.1 Identification des schémas équivalents d'ordre entier

La topologie du schéma équivalent est dans un premier temps choisie pour modéliser les phénomènes fréquentiels (i.e. le nombre et la structure des cellules à paramètres constants ajoutées à la branche rotorique).

Dans un deuxième temps, les grandeurs opérationnelles définies suivant le type de la machine (synchrone ou asynchrone) sont classiquement identifiées à des fonctions de transfert présentant un gain  $G_0$  et un ensemble de pôles et de zéros tels que :

$$G_0 \frac{(1 + s.T_D^1).(1 + s.T_D^2) \cdots (1 + s.T_D^{nd})}{(1 + s.T_{do}^1).(1 + s.T_{do}^2) \cdots (1 + s.T_{do}^{nd+1})} \quad (V-7)$$

Les constantes de temps  $T_i^j$  sont habituellement déterminées d'après les mesures par application d'une technique d'identification par moindres carrés [KAM-94.2] [KAM-97] [ARJ-99].

Enfin, les paramètres du schéma équivalent correspondant sont déterminés à partir de la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle (V-7).

## II.2.2 Identification des schémas équivalents d'ordre fractionnaire

Dans notre étude, nous avons pu déterminer la valeur des paramètres des schémas équivalents fractionnaires des machines synchrones et asynchrones à l'aide d'une autre méthode que nous avons qualifiée de « constructive », puisque le schéma équivalent est construit paramètre par paramètre à partir du comportement asymptotique fréquentiel d'une grandeur opérationnelle mesurée.

L'objectif est donc d'identifier l'un après l'autre chaque paramètre des schémas équivalents fractionnaires. L'intérêt d'une telle démarche est de conserver, à chaque étape de la procédure d'identification, le lien entre les paramètres du schéma équivalent et les variations fréquentielles des grandeurs opérationnelles.

Cette démarche est étudiée en détail dans la suite du chapitre.

## III. IDENTIFICATION DES PARAMETRES DE LA MACHINE ASYNCHRONE

### *III.1 Description du banc de mesures SSFR*

#### III.1.1 Ses fonctions

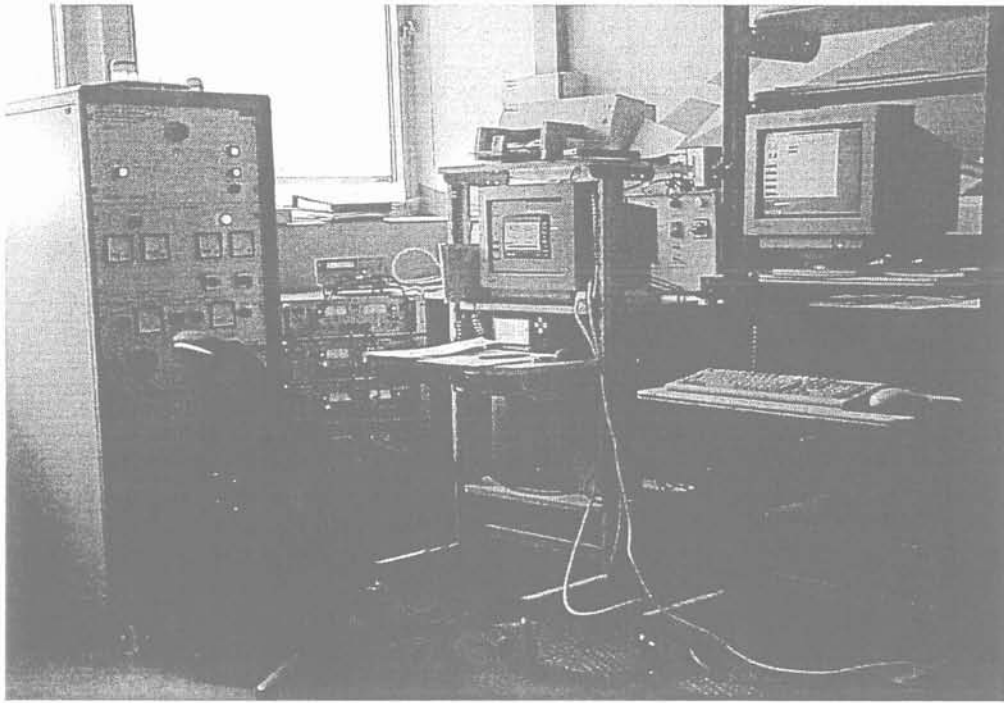
Les différents essais réalisés ont été effectués au Laboratoire d'Electrotechnique de Grenoble sur un banc destiné à la réalisation de tests fréquentiels à rotor bloqué.

Le banc permet :

- d'effectuer des tests répétitifs sur une gamme de fréquences allant du miliHertz à quelques centaines de Hertz,
- de conserver un même état magnétique de la machine au cours du test ; ceci suppose une alimentation avec un rapport tension sur fréquence constant [SEG-77],
- d'acquérir les grandeurs utiles à l'identification des paramètres.

Il est utilisable pour une machine de quelques dizaines de kW.

Une photo du banc d'essai est donnée ci-dessous (Figure V-5).



**Figure V-5.** Banc de mesures du test SSFR de la machine asynchrone  
De gauche à droite : la baie de puissance, les amplificateurs avec la source de tension sinusoïdale, l'analyseur de puissance et son PC, la machine asynchrone (cachée) et la centrale de mesures pour la mesure de température.

### III.1.2 La machine asynchrone

La machine étudiée pour l'identification est une machine asynchrone LS 200 L triphasée, 4 pôles, alimentée en étoile sous 380 V / 57 A à 50 Hz. Sa puissance nominale est égale à 30 kW pour 1475 tr/min.

C'est un moteur à double cage rotorique et à encoches statoriques droites. Sa géométrie est décrite sur la Figure V-6.

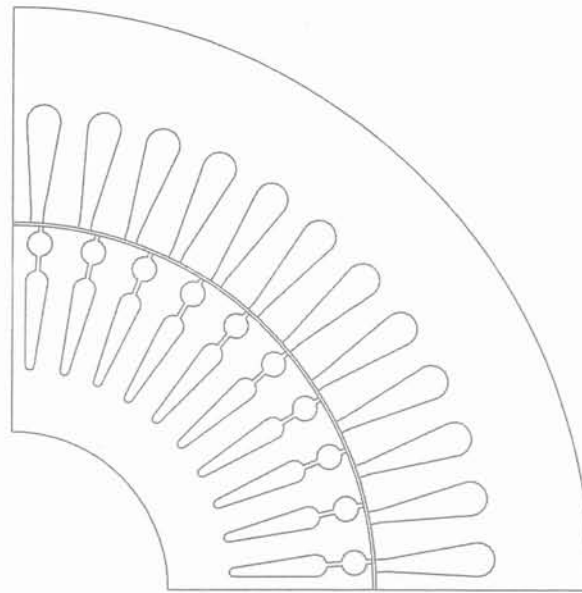


Figure V-6. Géométrie d'une coupe transversale de la machine asynchrone LS 200 L

L'annexe 2 détaille les caractéristiques de la machine et de ses encoches.

### III.1.3 Source de tension et amplificateur

La source de tension sinusoïdale est un générateur de fonctions Tektronix AFG320.

L'amplificateur est constitué de quatre amplificateurs bipolaires KEPCO mis en série afin de délivrer la tension nécessaire pour conserver le rapport tension d'alimentation sur fréquence constant tout au long de l'essai.

Le gain des amplificateurs est réglé de telle sorte qu'un signal d'entrée de 1 V crête à crête génère un signal de sortie de 40 V crête à crête.

Les essais pour obtenir la réponse fréquentielle de la machine ont été réalisés à faible tension de telle sorte que le courant ne dépasse pas un ampère.

### III.1.4 Analyseur de puissance

L'analyseur de puissance utilisé est un LEM Power VIEW 4000. Ses principales caractéristiques sont résumées dans le Tableau V-1.

Plage de fréquences	Plage de tension	Plage de courant (avec shunts disponibles)
0.2 Hz - 300 kHz	0.3 V - 1000 V	15 mA - 5 A 5 A - 30 A

Tableau V-1. Caractéristiques de l'analyseur de puissance

La carte IEEE-488 permet l'interfaçage entre l'analyseur et un PC ; il est ainsi possible de visualiser simultanément les variations des grandeurs électriques (courant, tension, puissances) et de faire l'analyse harmonique de ces caractéristiques.

Il existe un problème d'acquisition de l'analyseur perceptible pour les fréquences inférieures à 0.1 Hz. Ce phénomène est lié à l'analyseur utilisé. Ainsi, le bruit électronique est inversement proportionnel à la fréquence du signal. Pour les basses fréquences, le rapport signal / bruit est donc trop faible pour pouvoir effectuer des calculs corrects.

Pour limiter les erreurs lors de l'estimation des paramètres, nous avons donc effectué les mesures à partir de 0.1 Hz. Nous avons ensuite prolongé les caractéristiques des grandeurs opérationnelles en effectuant une interpolation linéaire pour les très basses fréquences.

Toutes les grandeurs sont acquises sur l'analyseur de puissance qui stocke en mémoire des fichiers de mesure directement utilisables sur des logiciels de simulation comme Matlab ou Mathcad.

### III.2 Identification des paramètres

#### III.2.1 Protocole d'identification constructive

La procédure d'identification des paramètres du schéma équivalent de la machine asynchrone est issue des considérations suivantes :

- quand la fréquence tend vers 0, la valeur de l'impédance opérationnelle tend vers la résistance des enroulements statoriques  $R_s$ ,
- quand la fréquence tend vers l'infini, le module de  $\bar{Z}_s$  tend asymptotiquement vers la valeur de la réactance obtenue si tous les termes résistifs sont négligés :

$$|\bar{Z}_s|_{\infty} \cong j \cdot \omega_s \cdot \frac{L_m \cdot \lambda}{L_m + \lambda}$$

- quand la fréquence tend vers 0, l'inductance opérationnelle  $\bar{L}_s$  se comporte comme l'inductance magnétisante  $L_m$ ,
- quand la fréquence tend vers l'infini, l'inductance opérationnelle se comporte comme l'inductance magnétisante  $L_m$  en parallèle avec l'inductance de fuite  $l_{\sigma}$ ,



- l'impédance d'ordre  $\frac{1}{2}$  résistive  $\bar{Z}_o^{1/2}$  se comporte comme la résistance  $R_o$  aux basses fréquences, et tend asymptotiquement vers le terme  $R_o \cdot \sqrt{j \cdot \frac{\omega_s}{\omega_o}}$  aux hautes fréquences.

A partir de ces considérations, nous donnons ci-dessous la procédure d'identification des paramètres de la machine asynchrone en précisant pour chaque paramètre la fonction de transfert et le comportement asymptotique associés.

Etape n°	Paramètre	Fonction de transfert associée	Comportement asymptotique
1	$R_s$	$\bar{Z}_s$	0
2	$L_m$	$\bar{L}_s$	0
3	$l_\sigma$	$\bar{L}_s$	$\infty$
4	$R_o$	$\bar{Z}_o^{1/2}$	0
5	$\omega_o$	$\bar{Z}_o^{1/2}$	$\infty$

**Tableau V-2.** Procédure d'identification des paramètres du schéma équivalent fractionnaire de la machine asynchrone

### III.2.2 Résultats d'identification

Le diagramme de Bode de l'impédance opérationnelle  $Z_s(\omega)$  est présenté sur la Figure V-7.

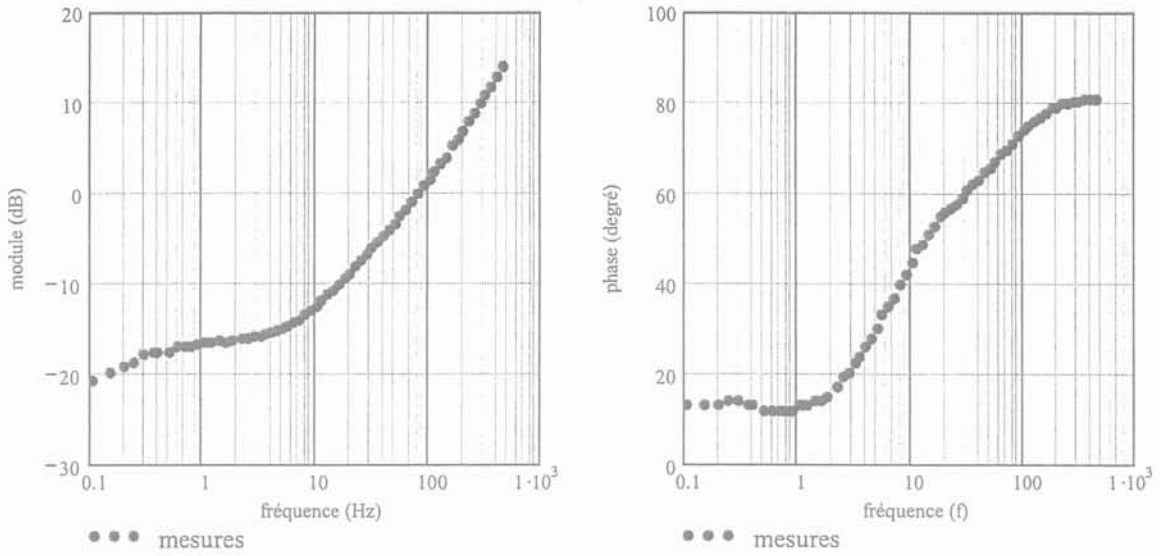


Figure V-7. Diagrammes de Bode de l'impédance opérationnelle mesurée

Les résultats de l'identification pour la machine LS 200 L sont les suivants :

Paramètre	Valeur
$R_s$	86,8 mΩ
$L_m$	37 mH
$l_\sigma$	1.64 mH
$R_o$	64 mΩ
$\omega_o$	26 rd/s

Tableau V-3. Identification de la machine asynchrone LS 200 L

On constate que la pulsation de coupure identifiée est en accord avec la dimension centimétrique des barres de la cage rotorique

La Figure V-8 représente la comparaison entre les mesures de l'inductance opérationnelle  $\bar{L}_s$  et son modèle d'ordre fractionnaire.

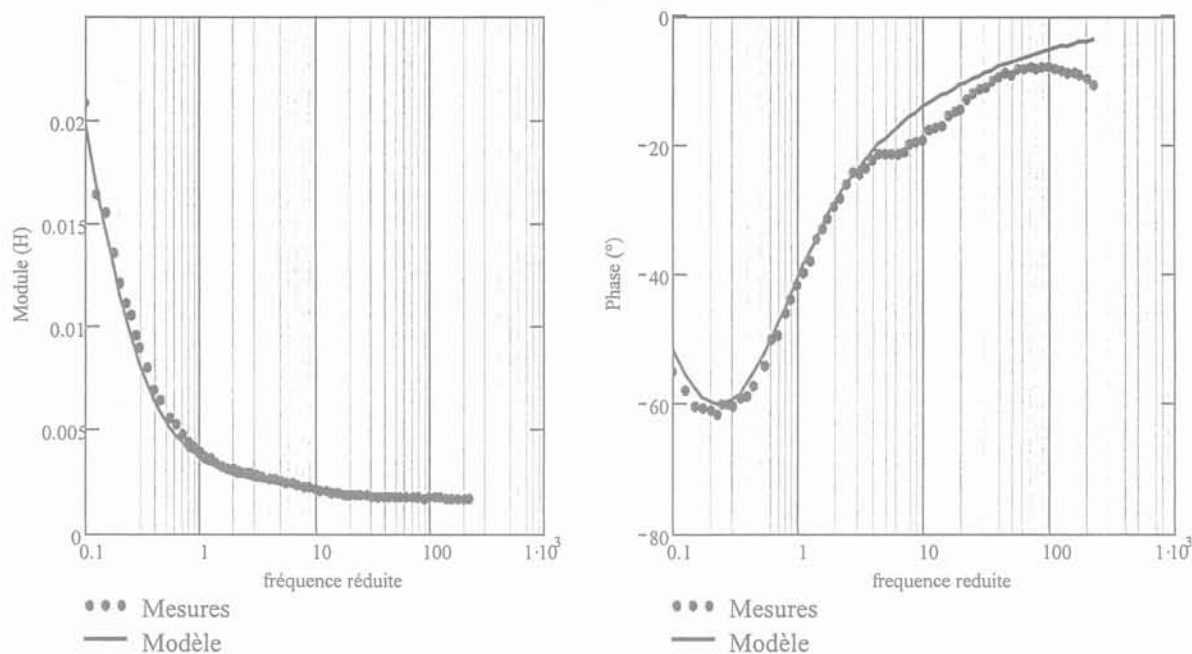


Figure V-8. Identification du schéma équivalent de la machine asynchrone LS 200 L

Nous constatons que l'ordre  $\frac{1}{2}$  « résistif » permet de modéliser correctement l'inductance opérationnelle, sauf aux alentours de 10 Hz (notamment sur la phase). Nous pensons que cette oscillation est liée à la présence de la double cage, dont la forme n'est pas prise en compte dans l'expression de  $Z_0^{1/2}$  (chapitre IV - paragraphe II.1).

### III.3 Conclusion

Le schéma équivalent fractionnaire donne une représentation fréquentielle de la machine asynchrone correcte sur quatre décades.

Toutefois, la pertinence physique des paramètres reste encore à confirmer.

## IV. IDENTIFICATION DES PARAMETRES DE LA MACHINE SYNCHRONE

### IV.1 Introduction

### IV.1.1 Représentation unitaire

Afin de comparer les différents alternateurs d'un réseau, de puissance et de tension nominales différentes, il est souvent utile d'utiliser un système unitaire pour normaliser toutes les grandeurs électriques du système [KUN-94]. On parle alors de grandeurs réduites. Cette normalisation permet généralement de simplifier les calculs et de faciliter l'interprétation des caractéristiques des systèmes.

Les grandeurs réduites sont définies comme suit :

$$\text{grandeur réduite (en p.u.)} = \frac{\text{grandeur réelle}}{\text{grandeur de base}} \quad (\text{V-8})$$

Les grandeurs de base sont choisies habituellement de sorte que les grandeurs principales du système (puissance, tension d'alimentation, etc ...) soient égales dans le système unitaire à 1 p.u. pour les conditions nominales.

L'annexe 3 présente les différentes grandeurs de base définies pour un alternateur.

### IV.1.2 Remarques sur les tests SSFR des machines synchrones

Pour des raisons évidentes, nous n'avons pas pu effectué des tests SSFR sur des turboalternateurs de plusieurs centaines de MVA au laboratoire.

Nous avons cependant pu dénicher dans la littérature des campagnes de mesures sur des alternateurs qui ont déjà fait l'objet de nombreuses études [EPR-84] [KAM-96].

## IV.2 Identification des paramètres

### IV.2.1 Démarche constructive

Nous avons également identifié les paramètres les après les autres à partir du comportement fréquentiel d'une grandeur opérationnelle mesurée.

L'ordre suivant lequel les paramètres ont été déterminés a été choisi suivant l'influence de chaque paramètre sur l'allure d'une fonction de transfert. L'annexe 4 présente les expressions des grandeurs opérationnelles en fonction des paramètres des schémas équivalents fractionnaires, ainsi que l'approximation que l'on peut faire lorsque la fréquence tend vers 0 ou l'infini.

Le Tableau V-4 résume les différentes étapes de l'identification pour l'axe (d), en donnant pour chaque paramètre la fonction de transfert et le comportement asymptotique associés.

La topologie du schéma équivalent de l'axe (q) étant beaucoup plus simple que celle de l'axe (d), son principe d'identification est facilité et découle directement de celui de l'axe (d).

Etape n°	Paramètre	Fonction de transfert associée	Comportement asymptotique
1	$L_{1d}$	$L_d$	0
2	$R_{2d}$	$Z_{afo}$	Fréquences intermédiaires
3	$r_f$	$Z_d$	0
4	$l_{\sigma 12d} + l_{\sigma f}$	$Z_d$	Fréquences intermédiaires
5	$\omega_{1d}$	$Z_{afo}$	0
6	$\omega_{2d}$	$Z_{afo}$	$\infty$
7	$l_{\sigma 12d}$ et $l_{\sigma f}$	sG	$\infty$

**Tableau V-4.** Procédure d'identification des paramètres du schéma équivalent d'ordre  $\frac{1}{2}$  de la machine synchrone

#### IV.2.2 Résultats d'identification

Nous avons appliqué cette méthode à deux turboalternateurs pour lesquels nous disposons des réponses fréquentielles : ce sont les alternateurs dits de « Darlington » et de « Canay », le premier par référence au nom de la ville où il est implanté, et l'autre, par référence à celui qui l'a étudié.

Leurs principales caractéristiques sont résumées dans le Tableau V-5 [CAN-93] [KAM-94.1].

Alternateur	« Darlington »	« Canay »
Puissance apparente	1101 MVA	722.2 MVA
Tension entre phases	22 kV	26 kV
Fréquence d'utilisation	60 Hz	60 Hz
Inductance synchrone d'axe direct ( $L_{adu}$ )	1.58 p.u.	1.89 p.u.
Inductance synchrone d'axe direct ( $L_{aqu}$ )	1.58 p.u.	1.89 p.u.
Inductance de fuite d'axe direct ( $l_{sd}$ )	0.19 p.u.	0.19 p.u.
Inductance de fuite d'axe en quadrature ( $l_{sq}$ )	0.22 p.u.	0.22 p.u.
Courant d'excitation $I_{exco}$	2494 A	1800 A

**Tableau V-5.** Caractéristiques des turboalternateurs de « Darlington » et « Canay »

Les paramètres des schémas équivalents fractionnaires des alternateurs de « Darlington » et « Canay » sont récapitulés dans le Tableau V-6.

	Alternateur	« Darlington »	« Canay »
Axe (d)	$L_{1d}$	6.008	7.51
	$\omega_{1d}$	$1,5 \cdot 10^{-3}$	$9,5 \cdot 10^{-4}$
	$R_{2d}$	$3,9 \cdot 10^{-3}$	$3,6 \cdot 10^{-3}$
	$\omega_{2d}$	0.12	0.1
	$l_{\sigma 12d}$	0.142	0.12
	$R_f$	$6 \cdot 10^{-4}$	$10^{-4}$
	$l_{\sigma f}$	$1,8 \cdot 10^{-2}$	$3 \cdot 10^{-2}$
Axe (q)	$L_{1q}$	4.661	7.34
	$\omega_{1q}$	$2,69 \cdot 10^{-4}$	$8 \cdot 10^{-5}$
	$l_{\sigma 12q}$	?	?
	$R_{2q}$	?	?
	$\omega_{2q}$	?	?

**Tableau V-6.** Identification des paramètres des schémas équivalents fractionnaires de machines synchrones

Il apparaît que les valeurs de  $l_{\sigma 12q}$ ,  $R_{2q}$  et  $\omega_{2q}$  restent indéterminées. En effet, la pulsation  $\omega_{2q}$  ne peut être déterminée puisque, l'effet de peau apparaissant à haute fréquence, la branche de l'amortisseur dans l'axe (q) est court-circuitée par  $\bar{Z}_{lq}^{1/2}$  (voir Figure V-9 à droite). Nous avons a posteriori modélisé l'amortisseur dans l'axe (q) par un simple circuit R-L ( $R_{2q}$  et  $l_{\sigma 2q}$ ).

Ce n'est pas le cas de l'axe (d), puisque  $\omega_{2d}$  est accessible « par l'inducteur » pour les hautes fréquences (voir Figure V-9 à gauche).

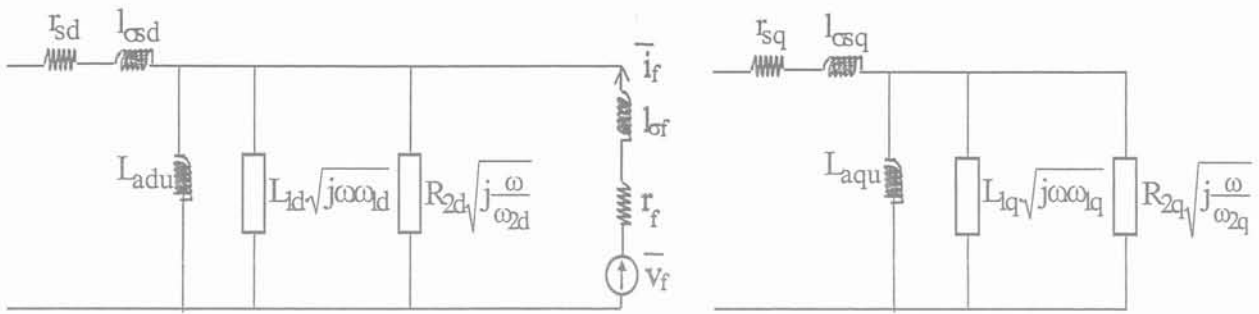


Figure V-9. Schémas équivalents fractionnaires d'une machine synchrone lorsque la fréquence tend vers l'infini (à gauche : axe direct -à droite : axe en quadrature)

On trouve alors par identification :

Alternateur	« Darlington »	« Canay »
$R_{2q}$	$1,5 \cdot 10^{-2}$	$5,2 \cdot 10^{-2}$
$l_{\sigma 2q}$	0.19	0.7

Tableau V-7. Identification des paramètres  $R_{2q}$  et  $l_{\sigma 2q}$  des schémas équivalents fractionnaires de machines synchrones

Pour ces deux alternateurs, les valeurs des paramètres correspondent bien à ce que l'on attendait pour de telles puissances. Les fréquences de coupures sont de l'ordre :

- d'une dizaine de Hertz pour les amortisseurs dont les dimensions sont centimétriques,
- du milliHertz pour le rotor massif de dimensions métriques.

Dans le cas d'un alternateur à pôles lisses, les valeurs des paramètres des axes (d) et (q) sont proches du fait des symétries de construction. Ce résultat s'avère bien exact dans notre cas.

Finalement, le schéma équivalent fractionnaire fournit des résultats précis et cohérents sur une large plage de fréquences, avec une diminution très significative du nombre de paramètres (sept seulement dans l'axe (q) alors que les modèles « entiers » comptent en moyenne de 2 à 6 branches d'amortisseurs, soit plus de treize paramètres pour une précision équivalente) [CAN-93] [KAM-94.2].

La comparaison des réponses fréquentielles identifiées et mesurées pour l'alternateur de Darlington est présentée ci-dessous (voir Figure V-10).

L'annexe 5 décrit ces résultats pour l'alternateur de Canay.

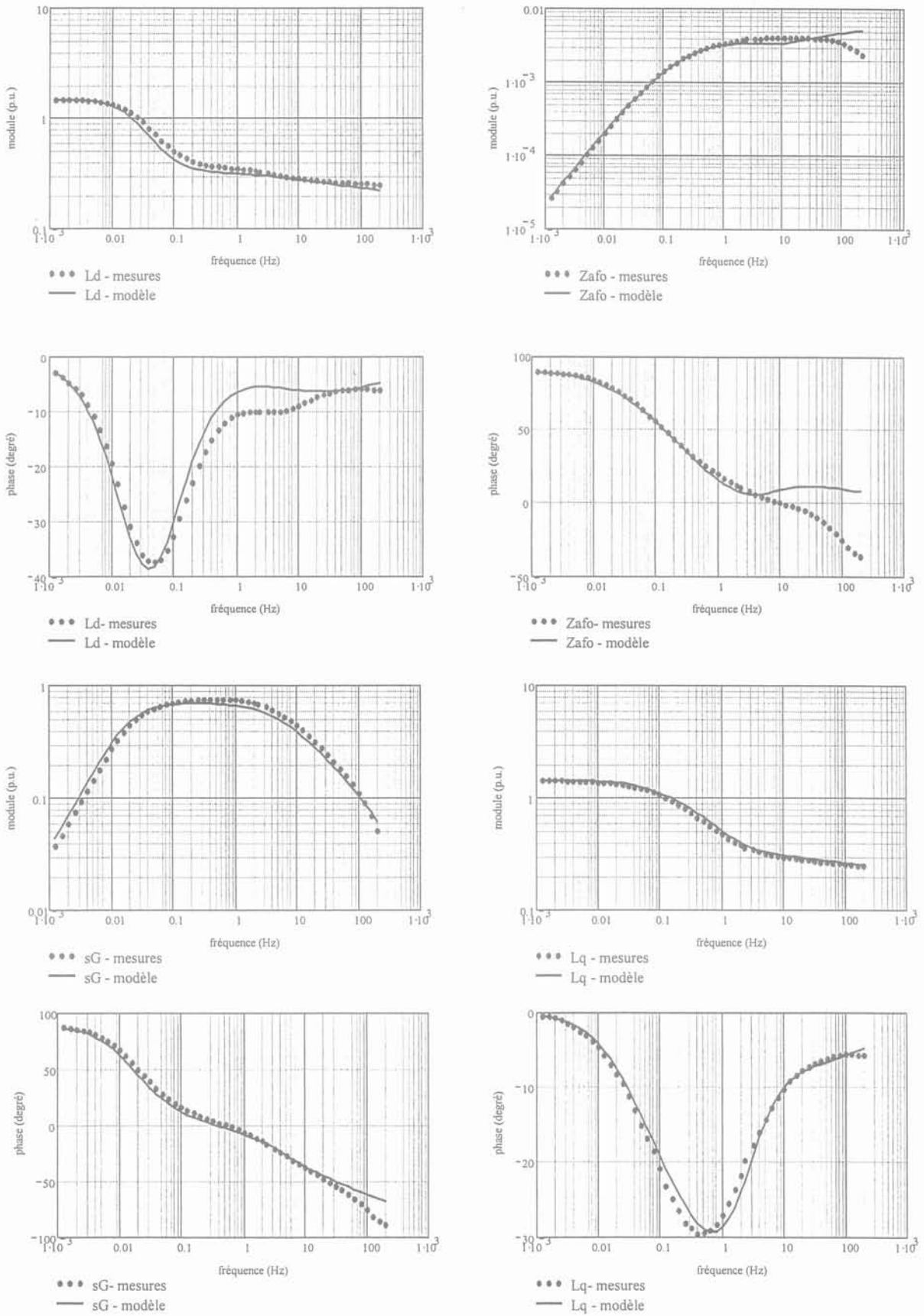


Figure V-10. Résultats de l'identification de l'alternateur de « Darlington »



Les écarts entre le modèle et les mesures observés pour les fréquences supérieures à 100 Hz sont vraisemblablement liés à des phénomènes capacitifs se manifestant à ces fréquences [EPR-84]. Ceci reste toutefois à confirmer.

### IV.3 Cas de l'alternateur hydraulique

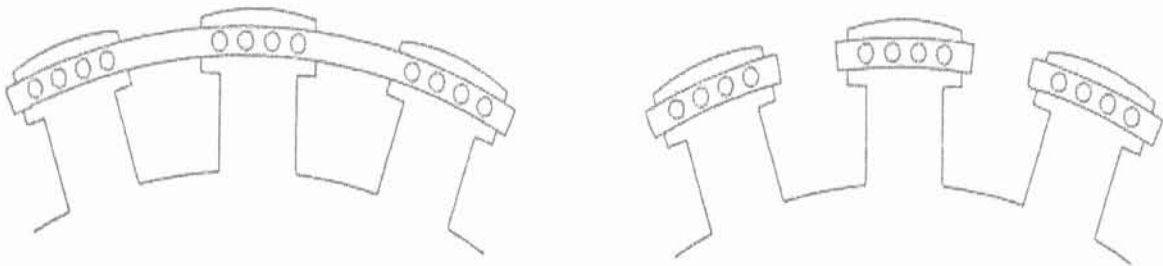
#### IV.3.1 Considérations technologiques

La procédure de test SSFR décrite dans [IEE-95] est destinée à l'identification des turboalternateurs qui sont à rotor lisse et massif. Ce n'est que depuis la fin des années 90 que cette procédure a été étendue aux alternateurs hydrauliques présentant des pôles saillants [PAR-98].

Dans le cas d'une machine à pôles saillants, l'entrefer n'est pas constant : il faut donc a priori tenir compte de la position du rotor dans le modèle. Le groupe [IEE-99] a cependant montré qu'une seule position pour chaque axe (d) et (q) suffisait pour obtenir les grandeurs opérationnelles à partir des tests SSFR.

Les pôles saillants des alternateurs hydrauliques sont en général laminés pour limiter le développement des courants induits en-dessous de 1 kHz. Les impédances d'ordre  $\frac{1}{2}$  inductives des figures V-3 et V-4 n'ont ainsi plus lieu d'être. Les ensembles ( $L_{adu} // Z_{1d}$ ) et ( $L_{adu} // Z_{1q}$ ) sont ainsi remplacés par des inductances  $L_{1d}$  et  $L_{1q}$ .

Le rotor d'un alternateur hydraulique possède souvent des barres d'amortisseur enchâssées dans chaque pôle. Il existe deux types de construction possibles pour la mise en court-circuit des amortisseurs [KUN-94] : elle est de type soit complet, autrement dit, l'anneau de court-circuit entoure entièrement le rotor, soit incomplet, et l'anneau est coupé entre chaque pôle (voir Figure V-11).



**Figure V-11.** Construction des amortisseurs d'une machine synchrone à pôles saillants (à gauche : amortisseurs complets - à droite : amortisseurs incomplets)

Suivant le type de construction, l'effet d'amortissement se fera sentir uniquement dans l'axe (d) (cas incomplet) ou dans les axes (d) et (q) (cas complet) [SAU-99].

REMARQUE – Il a été montré que l'effet d'amortissement se manifestait dans une décade de fréquences au-delà de celle utilisée dans la procédure SSFR, i.e. [0.01 – 200 Hz] [SAU-99]. Il est donc nécessaire d'étendre la plage de fréquences du test SSFR, dans le cas d'un alternateur hydraulique, pour tenir compte de cet effet.

#### IV.3.2 Etablissement du schéma équivalent fractionnaire d'un alternateur hydraulique

A partir des considérations physiques du paragraphe IV.3.1, les schémas équivalents dans les axes (d) et (q) d'un alternateur hydraulique ont été établis (voir Figure V-12 et Figure V-13).

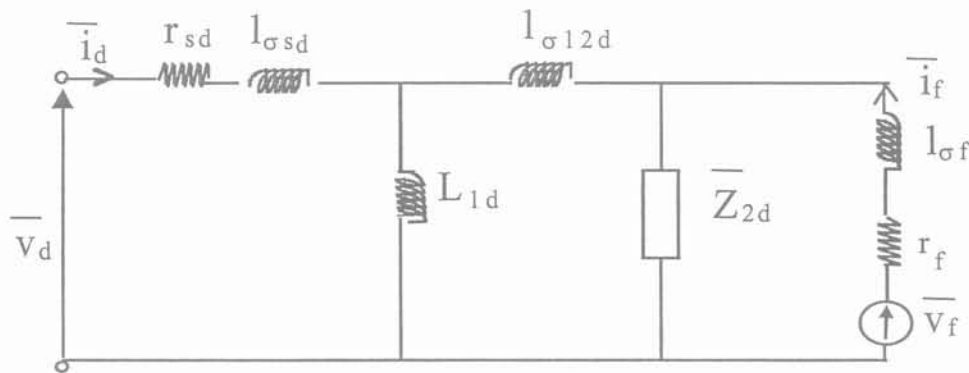


Figure V-12. Schéma équivalent de l'alternateur hydraulique (axe d)

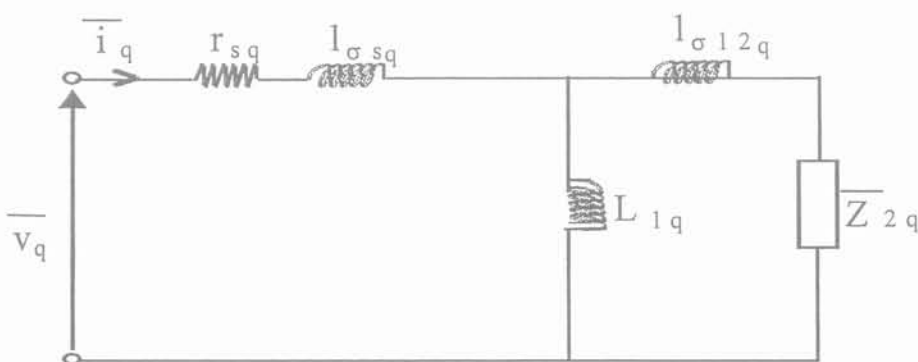


Figure V-13. Schéma équivalent de l'alternateur hydraulique (axe q)

Nous avons choisi de placer un enroulement d'amortissement dans l'axe q (modélisé par l'impédance d'ordre  $\frac{1}{2}$  résistive  $Z_{2q}$ ), puisque nous ne connaissons pas a priori la construction exacte du rotor.

### IV.3.3 Identification des paramètres du schéma équivalent

#### a) Caractéristiques de l'alternateur hydraulique étudié

Comme nous l'avons vu, les tests SSFR effectués sur des alternateurs hydrauliques sont rares voire rarissimes. Nous avons cependant pu disposer de tests SSFR effectués sur un alternateur de 6 MVA implanté dans le réseau de Drummondville au Québec.

Ses principales caractéristiques sont résumées dans le Tableau V-8 [KAM-96].

Caractéristique	Valeur
Puissance apparente	6 MVA
Tension entre phases	4.2 kV
Inductance dans l'axe d ( $L_{adu}$ )	0.85 p.u.
Inductance dans l'axe q ( $L_{aqu}$ )	0.58 p.u.
Inductance de fuite dans l'axe d ( $l_{\sigma sd}$ )	0.17 p.u.
Inductance de fuite dans l'axe q ( $l_{\sigma sq}$ )	0.34 p.u.
Excitation requise pour avoir 1 p.u. de tension à vide ( $I_{exco}$ )	373 A

**Tableau V-8.** *Caractéristiques de l'alternateur hydraulique de Drummondville*

Il faut noter que ses pôles sont feuilletés et ses amortisseurs de type « complet ».

#### b) Identification des paramètres

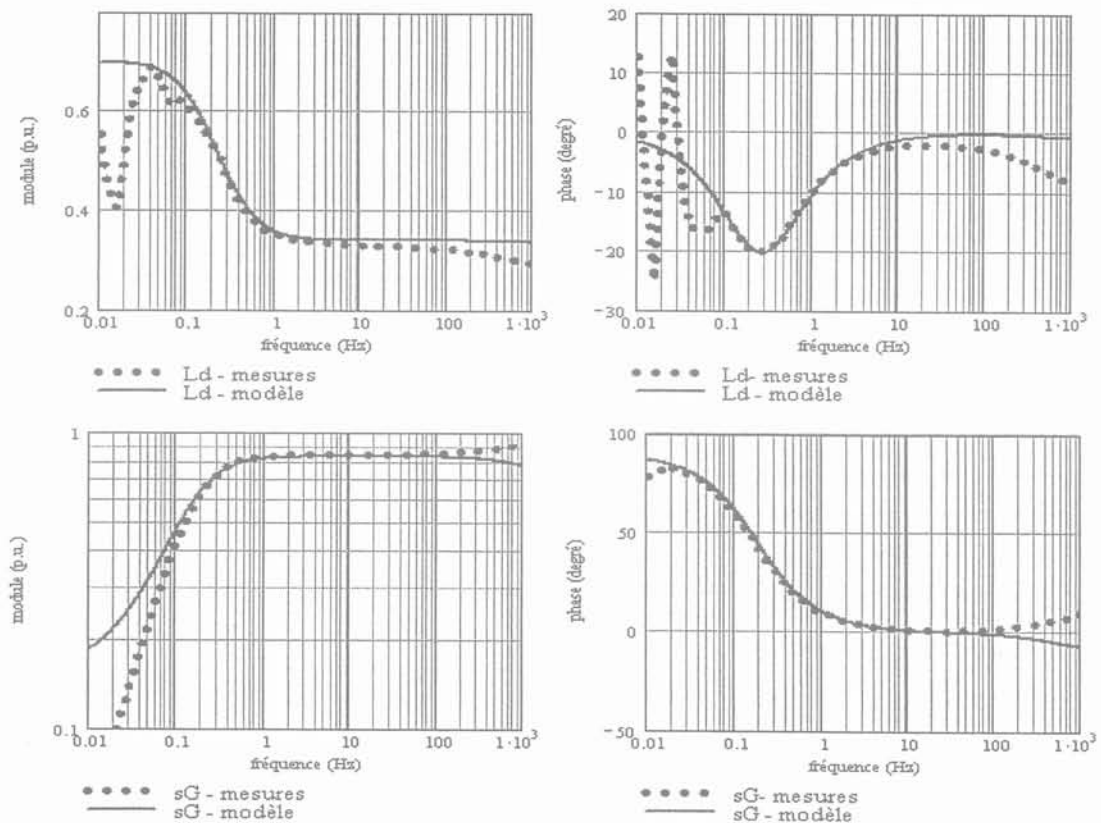
La procédure d'identification constructive est très similaire à celle d'un turboalternateur. Nous ne la détaillerons donc pas dans ce mémoire.

Les résultats de l'identification des paramètres sont résumés dans le Tableau V-9.

Les amortisseurs présentent une fréquence de coupure de 600 Hz. La Figure V-14 illustre les résultats de l'identification.

Paramètre	Valeur (en p.u.)
$L_{1d}$	0.53
$\sigma_d$	0.172
$R_{2d}$	5.5
$\omega_{2d}$	10
$\lambda$	0.08
$R_f$	$2.5 \cdot 10^{-3}$
$L_{1q}$	0.43
$R_{2q}$	5
$\omega_{2q}$	10

Tableau V-9. Identification des paramètres du schéma équivalent de l'alternateur hydraulique



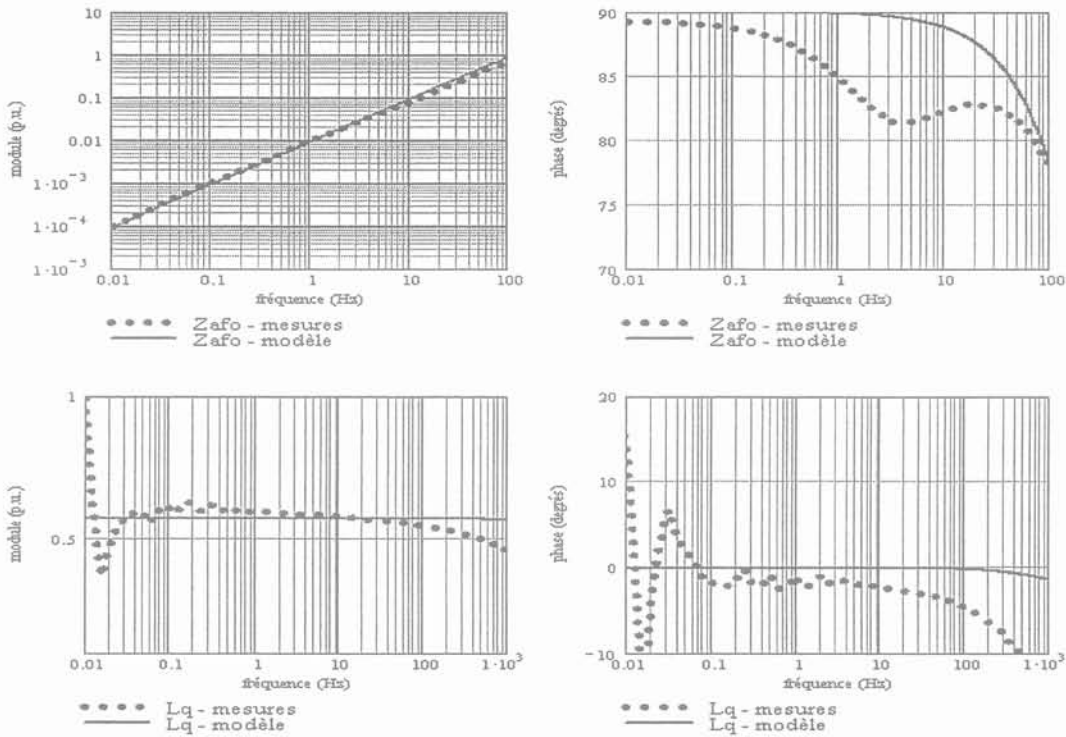
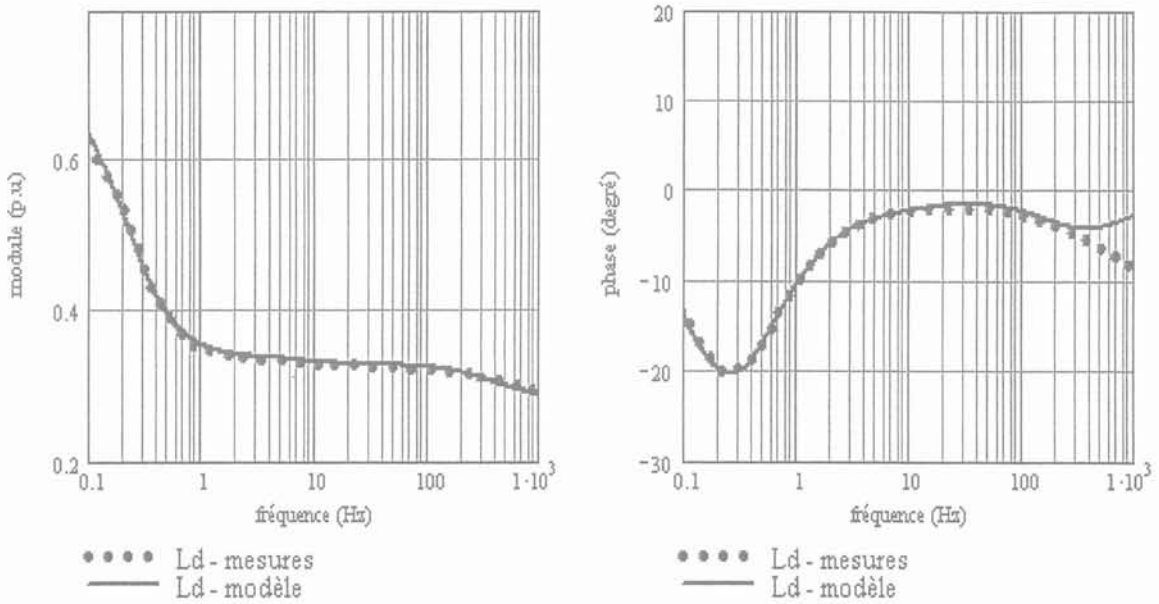


Figure V-14. Résultats d'identification de l'alternateur hydraulique de Drummondville

De nombreux commentaires peuvent être faits :

- Il y a de nombreux problèmes de mesures pour les fréquences inférieures à 0.1 Hz. Il est donc difficile de conclure quant à la validité de notre modèle pour les basses fréquences. Ce problème est sans doute à l'analyseur de puissance utilisé [KAM-96],
- Le modèle semble tout à fait correct pour les fréquences intermédiaires,
- De nouveau, on voit apparaître des problèmes pour les hautes fréquences, peut-être liés à des phénomènes capacitifs,
- Il semble y avoir une incohérence entre le gain et la phase de l'impédance de transfert du stator à l'excitation  $Z_{afa}$ . En réalité, si l'on regarde les échelles, l'erreur sur la phase est inférieure à 10%, ce qui peut être mis au crédit de problèmes de mesures,
- L'inductance opérationnelle  $L_q$  se comporte globalement comme une inductance car l'effet d'amortissement est faible et ne se manifeste que pour des fréquences supérieures à 50 Hz.

Le modèle est donc satisfaisant sur la gamme de fréquences [0.1–1000 Hz]. A titre comparatif, nous avons représenté sur la Figure V-15 le modèle d'ordre entier de l'inductance opérationnelle d'axe (d) déterminé par [KAM-96].



**Figure V-15.** Identification de l'inductance opérationnelle de l'axe (d) de l'alternateur de Drummondville par un modèle d'ordre entier

Le modèle d'ordre entier est donné par la relation

$$L_{d\text{entier}}(s) = L_{do} \cdot \frac{(1 + s.T_{1d})(1 + s.T_{2d})(1 + s.T_{3d})}{(1 + s.T_{1do})(1 + s.T_{2do})(1 + s.T_{3do})} \quad (V-9)$$

le gain et les constantes de temps étant égales à :

$L_{do}$	$T_{1d}$	$T_{2d}$	$T_{3d}$	$T_{1do}$	$T_{2do}$	$T_{3do}$
0.7	0.4343	0.01965	0.000397	0.8955	0.02027	0.000458

**Tableau 10.** Identification du modèle d'ordre entier de l'inductance opérationnelle d'axe (d)

On constate que le modèle d'ordre entier donne des résultats tout aussi satisfaisants que le notre, mais avec un nombre de paramètres supérieur.

#### ***IV.4 Conclusion***

Il apparaît au travers de cette étude sur les alternateurs, que l'insertion d'impédances fractionnaires dans le schéma équivalent permet :

- d'une part de modéliser correctement les effets fréquentiels se manifestant dans certaines pièces comme les barres d'amortisseurs avec une diminution significative du nombre de paramètres nécessaires pour une bonne caractérisation,
- d'autre part, de permettre aussi de s'adapter facilement à la construction spécifique de la machine (amortisseurs complets ou non, pôles saillants ou rotor lisse, etc ...).

### **V. INFLUENCE DE LA TEMPERATURE SUR LES PARAMETRES DES SCHEMAS EQUIVALENTS**

#### ***V.1 Introduction***

Les paramètres constants des systèmes d'ordre  $\frac{1}{2}$  résistif et inductif dépendant de la résistivité du matériau  $\rho$ , il apparaît intéressant d'étudier l'influence de la température sur ces paramètres. En effet, si on montre que ces paramètres sont représentatifs non seulement des phénomènes d'induction électromagnétique mais aussi d'autres phénomènes comme la température, la pertinence physique de nos modèles sera alors vérifiée.

Cette étude a été menée sur le schéma équivalent fractionnaire de la machine asynchrone LS 200 L, en raison de sa relative simplicité par rapport à celui d'un alternateur et des moyens de mesure disponibles au LEG.

Pour cela, nous présentons tout d'abord une étude théorique de l'influence de la température sur les paramètres d'une impédance d'ordre  $\frac{1}{2}$  résistive. Nous décrivons ensuite le dispositif expérimental qui nous permettra de vérifier les résultats théoriques. Les résultats sont finalement présentés et analysés pour la machine asynchrone LS 200 L.

#### ***V.2 Influence théorique de la température***

Les paramètres constants ( $R_0$  et  $\omega_0$ ) de l'impédance d'ordre  $\frac{1}{2}$  résistive :

$$Z_o^{1/2} = R_o \sqrt{1 + j \frac{\omega}{\omega_o}}$$

dépendent directement des caractéristiques physiques et géométriques des conducteurs, et en particulier de la résistivité qui varie linéairement avec la température suivant la loi [FAL-85] :

$$\rho(T) = \rho(T_o) \cdot (1 + \alpha \cdot T) \tag{V-10}$$

où  $T_o$  est une température de référence (en général,  $T_o = 20^\circ\text{C}$ ) et  $\alpha$  le coefficient de température.

On donne ci-dessous les valeurs des résistivités à  $20^\circ\text{C}$  et les coefficients  $\alpha$  pour le cuivre et l'aluminium, les deux matériaux les plus utilisés pour la construction de cages d'écureuil.

	Cuivre	Aluminium
$\rho(T_o = 20^\circ\text{C})$	$1,7 \cdot 10^{-8}$	$2,8 \cdot 10^{-8}$
$\alpha \text{ (K}^{-1}\text{)}$	$3,9 \cdot 10^{-3}$	$4 \cdot 10^{-3}$

**Tableau V-11.** *Quelques coefficients thermiques*

Dans le cas où la cage est constituée de barres droites de hauteur  $h$ , de largeur  $e$  et de longueur  $L_b$ , nous avons montré au chapitre III que :

$$R_o(T) = \frac{L_b \cdot \rho(T)}{h \cdot e} \text{ et } \omega_o(T) = \frac{\rho(T)}{\mu h^2} \tag{V-11}$$

Les paramètres  $R_o$  et  $\omega_o$  vont donc théoriquement augmenter linéairement avec la température.

### V.3 Description du banc expérimental

#### V.3.1 Ses fonctions

L'objectif du banc est de réaliser dans cet ordre :

- le chauffage des enroulements de la machine,
- le test SSFR,



Il sera alors possible :

- d'identifier les paramètres du schéma équivalent fractionnaire de la machine à température variable,
- de déterminer la température du stator et du rotor à partir de certains de ces paramètres.

### V.3.2 Protocole de mesures

Pour chauffer les enroulements de la machine, nous avons fait circuler dans une phase un courant alternatif à 50 Hz et 15A, et effectué le test SSFR entre les deux autres mis en série, une fois la circulation du courant de 15 A arrêtée pour éviter les problèmes de saturation.

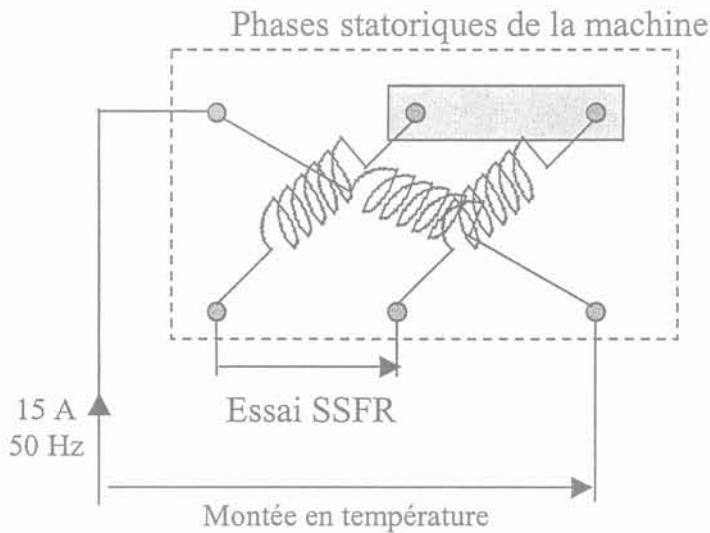


Figure V-16. Tests SSFR et en température d'une machine asynchrone

Cette configuration permet ainsi de découpler le contrôle de la température et l'alimentation à fréquence variable pour le test SSFR.

### V.3.3 Instrumentation en température

Le moteur est instrumenté en température avec deux sondes :

- l'une est placée directement sur l'anneau de court-circuit, glissée dans une rainure et maintenue par un isolant (silicone),
- l'autre est placée au stator, ceci afin de tenir compte également de la variation de la de la résistance statorique en fonction de la température. Ceci est indispensable pour l'estimation des autres paramètres du schéma équivalent fractionnaire.

Une dernière sonde mesure la température ambiante de la salle, qui peut varier significativement (d'une dizaine voire d'une quinzaine de degrés entre le matin et l'après-midi).

Les sondes de température sont reliées à un appareil d'acquisition, lui-même connecté à un PC. Un logiciel (Delphin<sup>®</sup>) permet alors la sauvegarde des points de mesure et la visualisation de l'évolution des températures au cours du temps.

## V.4 Essais réalisés

### V.4.1 Procédure d'extraction de la température

Nous avons vu au début de ce chapitre qu'il était nécessaire, lorsque l'on effectuait un essai SSFR, de disposer d'un nombre important de points de mesure (une dizaine de points par décade de fréquence).

Dans cet essai en température, ce nombre de points peut être considérablement réduit. En effet, l'influence de la température peut être étudiée simplement à partir des asymptotes de l'impédance d'ordre  $\frac{1}{2}$  résistive déduite des mesures. En effet, la résistance en continu  $R_0$  est déduite de la valeur du gain de  $Z_0^{1/2}$  pour les basses fréquences et la fréquence de coupure  $\omega_0$  peut être déduite de l'intersection de l'asymptote du gain de  $Z_0^{1/2}$  et la droite horizontale passant en ordonnée par la valeur du gain (voir Figure V-17).

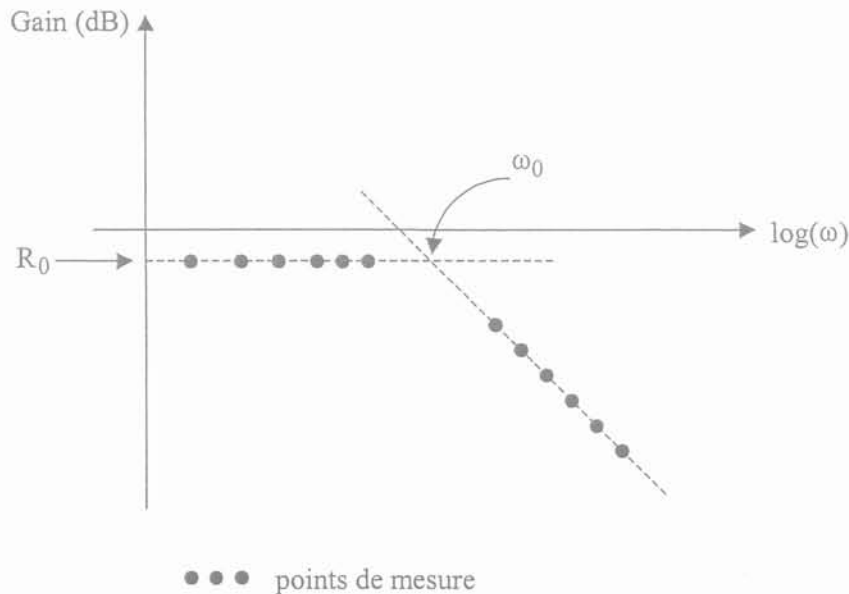


Figure V-17. Extraction des paramètres de l'impédance d'ordre  $\frac{1}{2}$  résistive

Le nombre de points de mesure a été réduit à environ quatre par décade.

#### V.4.2 Durée de l'essai

Comme le recommande la norme [IEE-95], il est important de bien stabiliser la température avant d'effectuer les tests SSFR. Nous avons donc commencé par étudier la diminution de la température rotorique, lorsque l'on coupait brusquement l'alimentation du stator.

Il est ainsi apparu que cette température diminuait seulement de deux degrés en une heure. L'essai SSFR, d'une durée d'environ 20 minutes, peut donc être effectué sans interruption et sans réchauffement sur toute la plage de fréquences nécessaire, après avoir stabilisé thermiquement la machine.

#### V.4.3 Essais réalisés

Nous avons réalisé des essais pour des températures rotoriques égales à 40°C et 80°C.

On peut se demander pourquoi nous ne sommes pas montés plus haut en température. La raison est liée au temps nécessaire pour chauffer la machine. En effet, si la diminution de la température rotorique est lente, son augmentation l'est également. Il a ainsi fallu attendre plusieurs heures pour que la température rotorique atteigne 80 °C.

### V.5 Identification des paramètres

Les paramètres du schéma équivalent de la machine asynchrone 30 kW ont été identifiés, pour les températures des essais, en supposant que seules les résistances (statoriques et rotoriques) et la pulsation de coupure du système d'ordre ½ sont modifiées sous l'influence de la température (les inductances sont donc supposées constantes au cours de l'essai).

Le Tableau V-12 récapitule les valeurs des paramètres identifiés, et la valeur de la température déduite de ces paramètres. Le Tableau V-13 donne les erreurs relatives entre la température de l'essai mesurée par la sonde et celle identifiée à partir des paramètres de l'impédance rotorique.

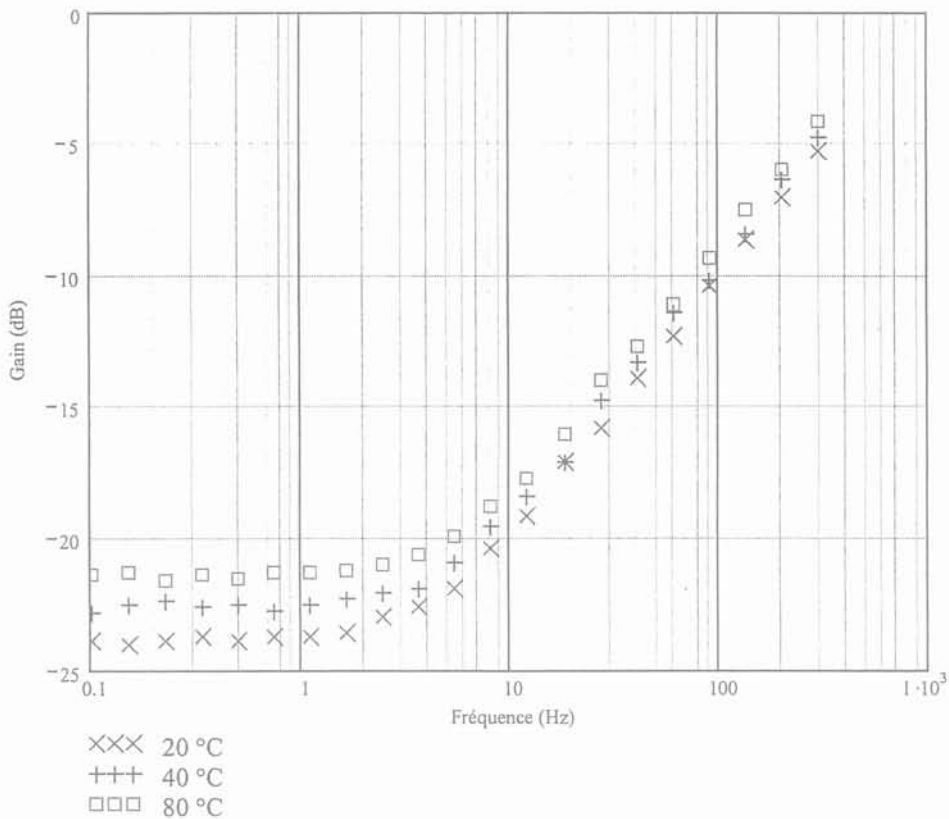
Température du rotor mesurée par la sonde (°C)	$R_0$ (mΩ)	$\omega_0$ (rad/s)	Température déduite à partir de $R_0$ (°C)	Température déduite à partir de $\omega_0$ (°C)
40	74.5	30.4	42	43.4
80	85.1	34.9	84.5	87.7

**Tableau V-12.** Identification des paramètres de l'impédance rotorique lors d'une montée en température

Température du rotor mesurée par la sonde (°C)	Erreur relative par rapport à la valeur de $R_0$ (%)	Erreur relative par rapport à la valeur de $\omega_0$ (%)
40	5	8.5
80	5.6	9.6

**Tableau V-13.** Erreurs relatives sur la détermination de la température rotorique à partir de l'identification des paramètres

La Figure V-18 représente l'évolution en fonction de la température de l'essai de l'impédance rotorique  $Z_0^{1/2}$ . On retrouve l'augmentation du gain statique et de la pulsation de coupure.



**Figure V-18.** Impédance rotorique de la machine asynchrone LS 200 L pour différentes températures

### V.6 Conclusion

Le schéma équivalent fractionnaire de la machine asynchrone est pertinent du point de la variation de ses paramètres avec la température de fonctionnement. Ceci ne serait pas le cas

pour les schémas équivalents identifiés habituellement dans le cadre de la procédure SSFR [RET-97].

Les résultats de cette étude ouvrent des perspectives intéressantes dans le domaine de la commande vectorielle à flux rotorique orienté des machines asynchrones. En effet, cette commande est très sensible à la variation des paramètres rotoriques avec la température [PEL-96] [ROY-98]. Le problème est généralement résolu par l'utilisation de techniques d'estimation, d'adaptation ou de correction des paramètres, déduites de la modélisation d'ordre entier de la machine.

La pertinence physique et la simplicité relative, par rapport à sa précision, du schéma équivalent fractionnaire font penser qu'il pourrait être particulièrement bien adapté à cette prise en compte des variations de paramètres. Pour cela, il faudrait toutefois disposer d'une méthode d'identification en ligne des paramètres.

## VI. INFLUENCE DE LA SATURATION SUR LES PARAMETRES DES SCHEMAS EQUIVALENTS

Dans cette étude, nous nous sommes intéressés à l'influence de la saturation du matériau sur l'expression de l'impédance d'une tôle ferromagnétique semi-infinie. Cela peut sembler réducteur, mais le traitement de ce cas particulier a trois avantages :

- (i) la forme du conducteur n'a pas d'influence sur le calcul,
- (ii) l'expression de l'impédance est assez facile à déterminer analytiquement,
- (iii) seule la dérivation explicite est mise en jeu, d'où une commodité de lecture et de calculs.

Les perspectives possibles de travail sur ce vaste sujet seront présentées à la fin de cette section.

### VI.1 Position du problème

Le phénomène de diffusion du champ électromagnétique dans un matériau conducteur non linéaire obéit aux équations de Maxwell suivantes :

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{H} &= \sigma \cdot \mathbf{E} \\ \text{rot } \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{H})}{\partial t} \end{aligned} \tag{V-12}$$

où  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  et  $\sigma$  désignent respectivement le champ électrique, le champ magnétique et la conductivité du matériau. La loi  $\mathbf{B}(\mathbf{H})$  exprime la relation non-linéaire entre le champ  $\mathbf{H}$  et l'induction  $\mathbf{B}$ .

En reliant les deux équations de (V-12), il vient :

$$-\nabla^2 \mathbf{H} + \mathbf{grad}(\text{div } \mathbf{H}) = -\sigma \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{H})}{\partial t} \quad (\text{V-13})$$

On suppose que la diffusion s'effectue unidirectionnellement suivant la direction (Oz) ; l'équation (V-13) s'écrit alors :

$$\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial z^2} = \sigma \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{H})}{\partial t} \quad (\text{V-14})$$

La relation (V-14) est l'équation de diffusion du champ magnétique en milieu non-linéaire.

Pour résoudre cette équation il est nécessaire de connaître la loi de comportement du matériau, autrement dit la loi  $\mathbf{B}(\mathbf{H})$ .

REMARQUE – Dans le cas d'un champ bidirectionnel, le champ magnétique peut s'écrire dans un repère cartésien sous la forme suivante :

$$\mathbf{H} = H_x(z, t) \cdot \mathbf{u}_x + H_y(z, t) \cdot \mathbf{u}_y \quad (\text{V-15})$$

où  $\mathbf{u}_x$  et  $\mathbf{u}_y$  sont les vecteurs unitaires caractérisant l'espace cartésien (Oxyz), En explicitant les vecteurs champ et induction suivant leurs composantes cartésiennes, l'équation (V-14) peut également s'écrire :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} = \sigma \frac{\partial B_x(H_x, H_y)}{\partial t} \\ \frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} = \sigma \frac{\partial B_y(H_x, H_y)}{\partial t} \end{cases} \quad (\text{V-16})$$

Dans le cas d'un milieu non-linéaire, les équations de (V-16) sont donc couplées par la présence des termes non-linéaires  $B_x(H_x, H_y)$  et  $B_y(H_x, H_y)$ . Elles ne peuvent donc plus être résolues séparément et il est alors nécessaire de tenir compte de la polarisation du matériau [MAY-99].

## VI.2 Calcul de l'impédance d'une tôle ferromagnétique saturée

### VI.2.1 Equation de diffusion non linéaire

Considérons la tôle étudiée au chapitre IV en supposant qu'elle soit semi-infinie. On considère que le champ magnétique n'a qu'une composante suivant (Oy) et ne dépend que de z. L'équation de diffusion (V-16) se réduit alors à :

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} = \sigma \cdot \frac{\partial B_y(H_y)}{\partial t} \quad (V-17)$$

Supposons que le matériau soit isotrope de perméabilité  $\mu(H)$  avec :

$$B_y(H_y) = \mu(H_y) \cdot H_y \quad (V-18)$$

Nous nous plaçons dans l'hypothèse du premier harmonique, autrement dit nous ne nous intéressons qu'au premier harmonique des solutions de (V-17) (voir l'annexe 6). Il est alors possible de représenter les grandeurs électromagnétiques sous leur forme complexe :

$$\hat{H}_y(z) = H(z) \cdot e^{j\theta(z)} \quad (V-19)$$

Le problème revient à résoudre le système suivant :

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \hat{H}_y(z)}{dz^2} &= j \cdot \omega \cdot \sigma \cdot \mu \left( \hat{H}_y(z) \right) \hat{H}_y(z) \\ \hat{H}_y(0) &= H_m \cdot e^{j\theta_m} \\ \hat{H}_y(\infty) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{conditions aux limites} \quad (V-20)$$

### VI.2.2 Modèle de courbe de magnétisation

On suppose que le milieu conducteur ne présente pas d'hystérésis et qu'on peut approcher la courbe de magnétisation par la loi en puissance suivante :

$$B = k \cdot H^{1/m} \quad (V-21)$$

où m est un entier strictement supérieur à 1. On en déduit la loi de la perméabilité en fonction du champ magnétique :

$$\mu(H) = k \cdot H^{\frac{1}{m}-1} \quad (V-22)$$

La Figure V-19 illustre cette dépendance de B et de  $\mu$  en fonction de H.

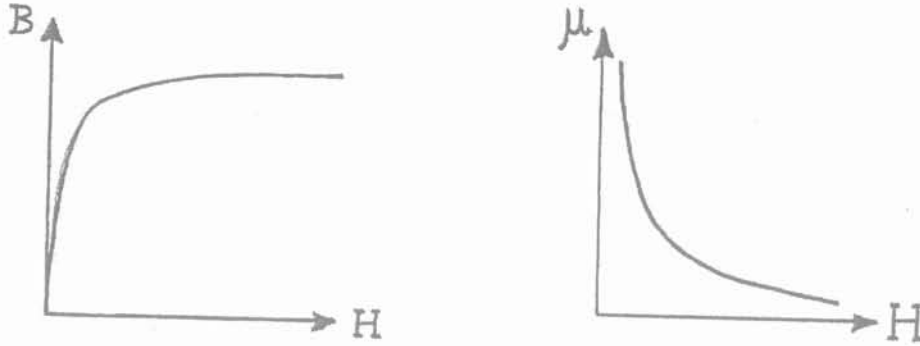


Figure V-19. Variation de l'induction et de la perméabilité en fonction du champ magnétique

La perméabilité à la surface de la tôle  $\mu_m$  est égale à :

$$\mu_m = k.H_m^{\frac{1}{m}-1} \quad (V-23)$$

La loi  $\mu(H)$  devient alors :

$$\mu(H) = \mu_m \cdot \left( \frac{H}{H_m} \right)^{\frac{1}{m}-1} \quad (V-24)$$

Le système décrivant l'évolution du champ magnétique s'exprime en définitive sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \hat{H}_y(z)}{dz^2} &= j.\omega.\sigma.\mu_m \cdot \left| \frac{\hat{H}_y(z)}{H_m} \right|^{\frac{1}{m}-1} \cdot \hat{H}_y(z) \\ \hat{H}_y(0) &= H_m \cdot e^{j.\theta_m} \\ \hat{H}_y(\infty) &= 0 \end{aligned} \quad (V-25)$$



### VI.2.3 Calcul de l'impédance de la tôle

On cherche une solution sous la forme [MAY-99] :

$$\hat{H}_y(z) = \begin{cases} \hat{H}_m \left(1 - \frac{z}{z_c}\right)^\alpha & \text{pour } 0 \leq z \leq z_c \\ 0 & \text{pour } z \geq z_c \end{cases} \quad (\text{V-26})$$

avec :

$$\begin{aligned} \hat{H}_m &= H_m \cdot e^{j\theta_m} \\ \alpha &= \alpha_1 + j\alpha_2 \end{aligned} \quad (\text{V-27})$$

Cette solution rend bien compte des conditions aux limites de l'équation (V-25).

Les paramètres  $z_c$ ,  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont déterminés à partir de la première relation de (V-25). En effet, en remplaçant l'expression du champ par la relation (V-26), il vient :

$$\alpha(\alpha - 1) \left(1 - \frac{z}{z_c}\right)^{\alpha-2} = j\omega\sigma\mu_m \left(1 - \frac{z}{z_c}\right)^{\alpha + \frac{\alpha_1}{m} - \alpha_1} \quad (\text{V-28})$$

soit en identifiant terme à terme :

$$\alpha_1 = \frac{2.m}{m-1} \quad \alpha_2 = \frac{\sqrt{2.m.(m+1)}}{m-1} \quad z_c = \frac{\left[2.m.(m+1).(3.m+1)^2\right]^{1/4}}{\sqrt{\omega\sigma\mu_m} \cdot (m-1)} \quad (\text{V-29})$$

On calcule ensuite le vecteur de Poynting on montre que l'impédance de la tôle est égale à :

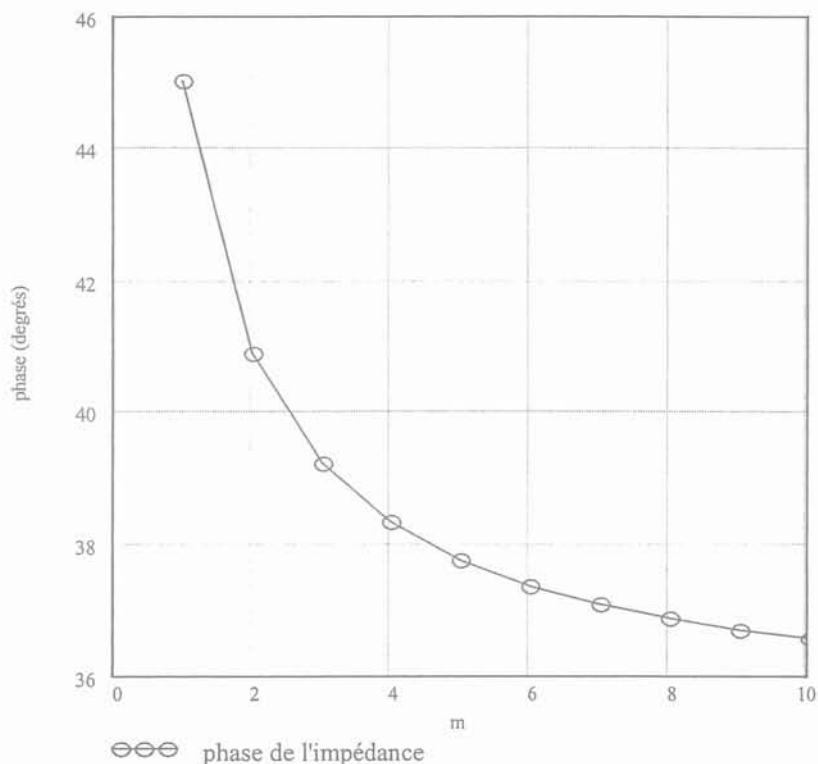
$$\begin{aligned} Z_{\text{tôle}} &= (a_m + j.b_m) \cdot \sqrt{\frac{\omega\mu_m}{\sigma}} \\ \text{avec : } a_m &= \frac{2m}{\left[2m(m+1)(3m+1)^2\right]^{1/4}} \quad \text{et} \quad b_m = \frac{\sqrt{2m(m+1)}}{\left[2m(m+1)(3m+1)^2\right]^{1/4}} \end{aligned} \quad (\text{V-30})$$

La tôle ne se comporte alors comme un système  $\frac{1}{2}$  explicite que lorsque  $a_m = b_m$ , i.e  $m = 1$ , ce qui correspond au cas où le matériau est linéaire. Sinon, ce n'est plus vrai.

Le module  $|Z_{\text{tôle}}|$  et la phase  $\phi_{\text{tôle}}$  de cette impédance s'écrivent :

$$|Z_{\text{tôle}}| = \left(\frac{2.m}{m+1}\right)^{1/4} \sqrt{\frac{\omega\mu_m}{\sigma}} \quad \text{et} \quad \phi_{\text{tôle}} = \text{Arc tan} \left( \sqrt{\frac{m+1}{2.m}} \right) \quad (\text{V-31})$$

La Figure V-20 montre l'influence du paramètre  $m$  sur la phase de l'impédance de la tôle.



**Figure V-20.** Variation de la phase de l'impédance d'une tôle semi-infinie en fonction du modèle de la courbe de magnétisation

Lorsque le matériau est saturé ( $m > 1$ ), la phase s'éloigne de  $45^\circ$  pour tendre asymptotiquement vers  $35.264^\circ$ , ce qui correspondrait à une dérivation d'« ordre » 0.392 !

On constate par ailleurs que le module de l'impédance dépend également du modèle de la courbe de magnétisation ( $m$ ) ... mais aussi de la perméabilité à la surface de la tôle  $\mu_m$ , donc du champ  $H_m$  d'après l'équation (V-23) ; par conséquent, seul ce module varie en fonction du courant d'excitation de la tôle.

Ceci est peut-être lié à notre modèle de la courbe de magnétisation utilisée qui ne différencie pas explicitement le cas linéaire et le cas saturé.

### VI.3 Discussion et perspectives

Nous venons donc de montrer que l'impédance d'ordre  $\frac{1}{2}$  inductive en milieu non-linéaire ... n'est plus une impédance d'ordre  $\frac{1}{2}$  mais d'ordre  $\alpha$ , où  $\alpha$  dépend directement des paramètres décrivant la courbe d'aimantation du matériau [GIE-77] [MAY-99].

Ce phénomène était déjà apparu au chapitre III, lorsque nous avons étudié la représentation sous forme récursive de la barre rectangulaire. En effet, nous avons vu que l'ordre de l'impédance de la barre dépendait directement du rapport entre les paramètres récursifs de sa représentation. Notamment, lorsque ces paramètres dépendaient de la profondeur  $z$ , l'ordre n'était plus égal à  $\frac{1}{2}$ . Or, nous sommes bien dans cette configuration lorsque le matériau est saturé.

Il serait intéressant d'approfondir l'étude des limites de nos modèles lorsque le matériau est saturé. On pourrait envisagé par exemple de choisir d'autres modèles de courbe de magnétisation et voir si la phase de l'impédance reste indépendante du courant d'excitation.

Suivant les matériaux utilisés et la loi de magnétisation adoptée, il serait ainsi intéressant de mettre en évidence un système d'ordre non entier implicite dont l'ordre et le gain en continu ( $L_o$  dans le cas d'une tôle ferromagnétique), varieraient avec le courant  $I$ . Ce système aurait alors la structure suivante :

$$Z_{\text{mod1}}(\omega) = L_o(I) [A + jB]^{n(I)} \quad (\text{V-32})$$

où  $A$  et  $B$  sont des termes ne dépendant que des caractéristiques physiques du matériau.

Il serait par ailleurs intéressant d'approcher un tel système par une impédance d'ordre  $\frac{1}{2}$  implicite dont les paramètres « constants » ( $L_o$  et  $\omega_o$ ) dépendraient du courant :

$$Z_{\text{mod2}}(\omega) = \frac{jL_o(I)\omega}{\sqrt{1 + j\frac{\omega}{\omega_o(I)}}} \quad (\text{V-33})$$

Bien sûr, la validation de ces différents modèles pourrait être faite à partir de tests SSFR, si on ajoutait sur une phase de la machine une composante continue de manière à saturer le circuit magnétique.

## VII. CONCLUSION

Ce chapitre nous a permis de valider notre modélisation des courants induits par des systèmes d'ordre  $\frac{1}{2}$  pour l'étude des machines synchrones et asynchrones. Nous avons ainsi pu vérifier que ces modèles permettaient de représenter correctement les phénomènes d'induction sur une large plage de fréquence avec un nombre significativement réduit de paramètres. Nous pouvons donc considérer que les trois objectifs de notre cahier des charges présenté au chapitre I, sont atteints.

Par ailleurs, nous avons montré que cette modélisation permettait d'accéder à d'autres paramètres physiques comme la température des pièces conductrices d'une machine, même si nous ne l'avons pas fait dans des conditions normales de fonctionnement (moteur en rotation). Cette étude nous a pourtant montré les limites de notre modèle, puisqu'il ne peut pas représenter correctement la saturation du matériau.



---

*Chapitre VI*

*Réponse temporelle d'un système fractionnaire*

---



## I. INTRODUCTION

Au cours des chapitres précédents, nous avons montré que l'insertion d'impédances d'ordre  $\frac{1}{2}$  dans les schémas équivalents des machines permettait de disposer de modèles fréquentiels fiables et compacts. L'approche fractionnaire est donc en premier lieu une approche fréquentielle.

Avant de clore ce mémoire, il nous a semblé cependant indispensable d'aborder l'approche temporelle, étape obligatoire pour l'étude en simulation du comportement des machines.

De nombreux travaux ont porté ces dernières années sur la réponse temporelle d'un système décrit par une équation différentielle généralisée (EDG) à dérivées non entières **explicites** [OUS-95]. Le calcul est basé sur la construction d'un système d'état, que l'on qualifiera de généralisé (SEG, en abrégé).

La modélisation des courants induits à partir de l'équation de la diffusion du champ magnétique nous a conduit à manipuler des systèmes décrits par des EDG à dérivées non-entières **implicites**. Nous avons donc été amenés dans cette étude à développer nos propres algorithmes de calcul pour déterminer la réponse temporelle d'une machine caractérisée par son schéma équivalent fractionnaire (chapitre III).

Après avoir présenté brièvement la définition d'un SEG, nous développerons l'algorithme de calcul de la réponse temporelle d'un système fractionnaire à dérivées non entières implicites.

Dans un deuxième temps, nous étudierons une autre approche permettant d'obtenir cette réponse beaucoup plus rapidement.

Enfin, nous appliquerons notre algorithme pour déterminer la réponse temporelle de la machine asynchrone 30 kW étudiée au chapitre V.

## II. DEFINITION D'UN SYSTEME D'ETAT GENERALISE

### II.1 Quelques notations

On définit un vecteur d'état  $\bar{x}(t)$  composé de  $N$  variables d'état  $x_i(t)$  avec  $i \in \{1, \dots, N\}$ . On peut écrire :

$$\bar{x}(t) = [x_1(t) \mid x_2(t) \mid \dots \mid x_N(t)]^T \quad (\text{VI-1})$$



On définit également un opérateur vectoriel de dérivation, noté  $(\bar{n})$  [OUS-95], qui est composé par N ordres de dérivation réels  $n_i$  :

$$(\bar{n}) = (n_1, n_2, \dots, n_N) \quad (\text{VI-2})$$

Le vecteur  $\bar{x}^{(\bar{n})}(t)$  est alors défini par :

$$\bar{x}^{(\bar{n})}(t) = [x_1^{(n_1)}(t) \mid x_2^{(n_2)}(t) \mid \dots \mid x_N^{(n_N)}(t)]^T \quad (\text{VI-3})$$

Autrement dit, chaque composante  $i$  du vecteur  $\bar{x}^{(\bar{n})}(t)$  est égale à la dérivée d'ordre  $n_i$  de la variable d'état  $x_i(t)$ .

## II.2 Système d'état généralisé (SEG)

La forme la plus générale d'un système d'état est la suivante [OUS-95] :

$$\begin{cases} \bar{x}^{(\bar{n})}(t) = A.\bar{x}(t) + B.\bar{e}^{(\bar{m})}(t) & \text{équation d'état généralisée} \\ \bar{s}(t) = C.\bar{x}(t) + D.\bar{e}^{(\bar{m})}(t) & \text{équation d'observation généralisée} \end{cases} \quad (\text{VI-4})$$

Les différents vecteurs intervenant dans l'équation (VI-4) sont :

- le vecteur d'état :  $\bar{x}(t) = [x_1(t) \mid x_2(t) \mid \dots \mid x_N(t)]^T$ ,
- le vecteur d'entrée (ou de commande) :  $\bar{e}(t) = [e_1(t) \mid e_2(t) \mid \dots \mid e_M(t)]^T$ ,
- le vecteur de sortie (ou d'observation) :  $\bar{s}(t) = [s_1(t) \mid s_2(t) \mid \dots \mid s_P(t)]^T$ .

On voit également apparaître deux opérateurs vectoriels de dérivation :

- l'opérateur vectoriel à N composantes :  $(\bar{n}) = (n_1, n_2, \dots, n_N)$  appliqué au vecteur d'état,
- l'opérateur vectoriel à M composantes :  $(\bar{m}) = (m_1, m_2, \dots, m_M)$  appliqué au vecteur d'entrée.

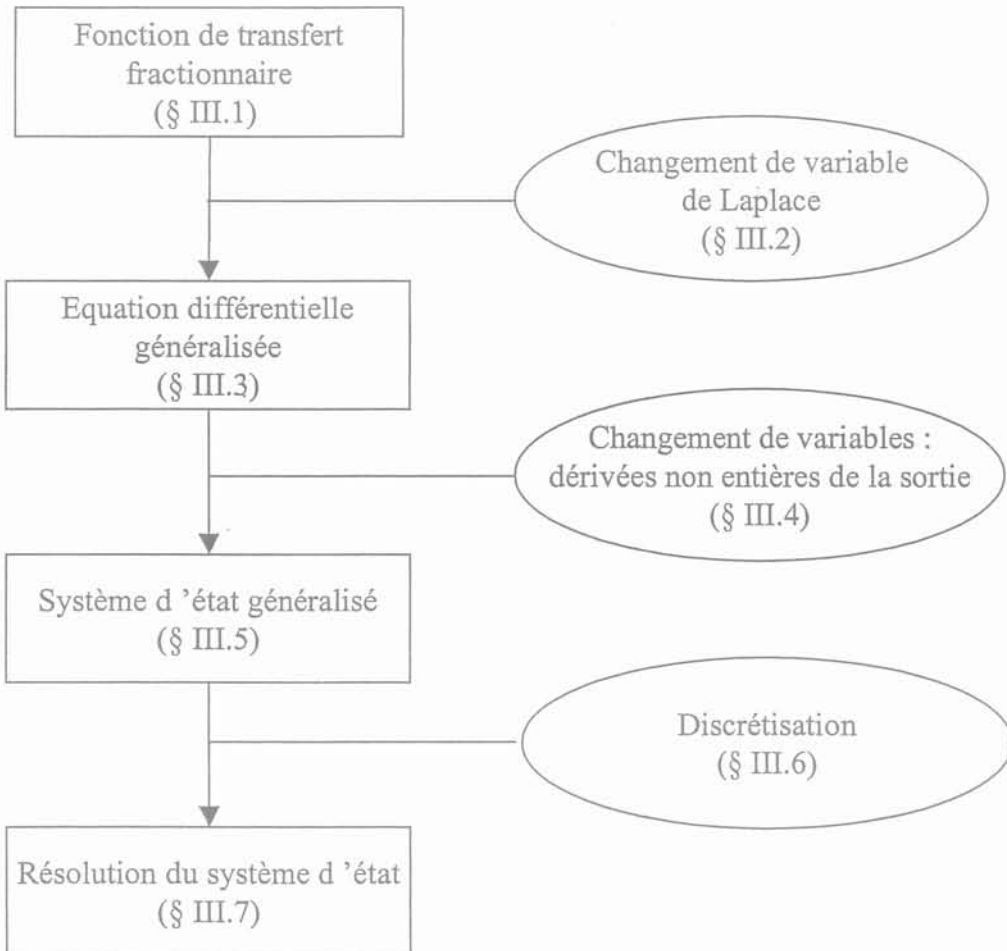
Les matrices A, B, C et D ont les dimensions suivantes :

$$A = A_{N,N} \quad B = B_{N,M} \quad C = C_{P,N} \quad D = D_{P,M} \quad (\text{VI-5})$$

### III. ALGORITHME DE CALCUL DE LA REPOSE TEMPORELLE D'UN SYSTEME FRACTIONNAIRE DE NATURE IMPLICITE

Nous présentons dans ce paragraphe l'algorithme général du calcul de la réponse temporelle d'un système décrit en partie à l'aide de dérivées non entières implicites.

Les principales étapes sont résumées dans le diagramme de la Figure VI-1. Chaque étape fait référence (entre parenthèses) au paragraphe qui lui est consacré.



**Figure VI-1.** *Etapes de calcul de la réponse temporelle d'un système comportant des dérivées non entières implicites*

Les étapes sont décrites ci-dessous.

### III.1 Définition de la fonction de transfert

On suppose à la base que la représentation du système étudié sous une forme opérationnelle (i.e. dans le domaine de Laplace) est connue. Autrement dit, on peut décrire ce système sous la forme d'une fonction de transfert entre une sortie  $o$  et une entrée  $i$ , avec :

$$F(s) = \frac{O(s)}{I(s)} \quad (\text{VI-6})$$

où  $O$  et  $I$  désignent les transformées de Laplace des fonctions  $o$  et  $i$ . L'objectif est naturellement de déterminer pour une entrée  $i(t)$  la sortie  $o(t)$ .

Généralement, la fonction  $F$  peut se mettre sous la forme d'un quotient de deux polynômes  $A$  et  $B$ , contenant chacun des dérivées entières de  $s$  et un ou plusieurs systèmes d'ordre fractionnaire implicites **de même pulsation de coupure**  $\omega_o$  (le gain peut être différent).

Pour illustrer ceci, prenons le cas de la machine asynchrone. Si on considère le schéma équivalent de la machine asynchrone (voir Figure V-2), on peut écrire une relation opérationnelle entre le courant  $i$  et la tension  $v$  statoriques :

$$\frac{v(s)}{i(s)} = R_s + \frac{L_m \cdot s \cdot (l_\sigma \cdot s + Z_o^{1/2}(s))}{(L_m + l_\sigma) \cdot s + Z_o^{1/2}(s)} \quad (\text{VI-7})$$

avec

$$Z_o^{1/2}(s) = R_o \cdot \sqrt{1 + \frac{s}{\omega_o}} = \frac{R_o}{\omega_o^{1/2}} \cdot (s + \omega_o)^{1/2} \quad (\text{VI-8})$$

Pour une tension statorique donnée, on cherche à déterminer le courant statorique, et donc le couple électromagnétique. L'entrée du système est alors la tension et sa sortie, le courant. Dans cet exemple,  $A$  et  $B$  sont définis pas :

$$\begin{aligned} B(s) &= L_m \cdot \lambda \cdot s^2 + R_s \cdot (L_m + \lambda) \cdot s + L_m \cdot s \cdot Z_o^{1/2}(s) + R_s \cdot Z_o^{1/2}(s) \\ A(s) &= (L_m + \lambda) \cdot s + Z_o^{1/2}(s) \end{aligned} \quad (\text{VI-9})$$

REMARQUE – Dans le cas où le système généralisé comporte des systèmes d'ordre  $\frac{1}{2}$  de pulsations de coupure différentes, comme dans le cas de la machine synchrone, cette méthode est inadéquate. Nous verrons au paragraphe IV une solution qui pallie à cet inconvénient.

### III.2 Changement de variable de Laplace

La deuxième étape consiste à effectuer le changement de variable de Laplace :

$$s_1 = s + \frac{1}{\tau_o} \quad \text{où} \quad \tau_o = \frac{1}{\omega_o} \quad (\text{VI-10})$$

En effet, la fonction de transfert (VI-6) devient alors une fraction rationnelle de polynômes ne faisant intervenir que des ordres entiers et non entiers de nature explicite en  $s_1$ . Cette fraction peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{O\left(s_1 - \frac{1}{\tau_o}\right)}{I\left(s_1 - \frac{1}{\tau_o}\right)} = \frac{A\left(s_1 - \frac{1}{\tau_o}\right)}{B\left(s_1 - \frac{1}{\tau_o}\right)} = \frac{A_0 \cdot s_1^{m_0} + A_1 \cdot s_1^{m_1} + A_2 \cdot s_1^{m_2} + \dots + A_p \cdot s_1^{m_p}}{B_0 \cdot s_1^{n_0} + B_1 \cdot s_1^{n_1} + B_2 \cdot s_1^{n_2} \dots + B_q \cdot s_1^{n_q}} \quad (\text{VI-11})$$

Les indices  $m_i$  et  $n_j$  avec  $i \in \{1, 2, \dots, p\}$  et  $j \in \{1, 2, \dots, q\}$  sont des réels. Ils sont supposés être rangés dans l'ordre croissant, autrement dit :

$$\begin{aligned} 0 < n_1 < n_2 < \dots < n_q & \quad \text{et} \quad m_0 = n_0 = 0 \\ 0 < m_1 < m_2 < \dots < m_p & \end{aligned} \quad (\text{VI-12})$$

Enfin,  $m_p < n_q$ .

### III.3 Equation différentielle généralisée

L'équation (VI-11) peut également s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} B_0 \cdot s_1^{n_0} \cdot O\left(s_1 - \frac{1}{\tau_o}\right) + \dots + B_q \cdot s_1^{n_q} \cdot O\left(s_1 - \frac{1}{\tau_o}\right) = \\ A_0 \cdot s_1^{m_0} \cdot I\left(s_1 - \frac{1}{\tau_o}\right) + \dots + A_p \cdot s_1^{m_p} \cdot I\left(s_1 - \frac{1}{\tau_o}\right) \end{aligned} \quad (\text{VI-13})$$

A partir des résultats du chapitre II (voir paragraphe III.2), on montre que :

$$s_1^\alpha .G\left(s_1 - \frac{1}{\tau}\right) = L\left\{D^{(\alpha)}\left[g(t). \exp\left(\frac{t}{\tau}\right)\right]; s_1\right\} \quad (\text{VI-14})$$

où G est la transformée de Laplace de la fonction g. Si on applique la transformée de Laplace inverse à l'équation (VI-13), on obtient l'équation différentielle généralisée suivante :

$$\begin{aligned} & B_0.D^{(n_0)}\left[o(t). \exp\left(\frac{t}{\tau_o}\right)\right] + \dots + B_q.D^{(n_q)}\left[o(t). \exp\left(\frac{t}{\tau_o}\right)\right] \\ & = A_0.D^{(m_0)}\left[i(t). \exp\left(\frac{t}{\tau_o}\right)\right] + \dots + A_p.D^{(m_p)}\left[i(t). \exp\left(\frac{t}{\tau_o}\right)\right] \end{aligned} \quad (\text{VI-15})$$

Afin de simplifier les notations, nous considérerons dans la suite les grandeurs s(t) et e(t) telles que :

$$\begin{aligned} s(t) &= o(t). \exp\left(\frac{t}{\tau_o}\right) \\ e(t) &= i(t). \exp\left(\frac{t}{\tau_o}\right) \end{aligned} \quad (\text{VI-16})$$

En divisant chaque membre de l'équation (VI-15) par le terme  $B_q$ , on peut alors écrire :

$$\frac{B_0}{B_q}.s^{(n_0)}(t) + \frac{B_1}{B_q}.s^{(n_1)}(t) + \dots + \frac{B_{q-1}}{B_q}.s^{(n_{q-1})}(t) + s^{(n_q)}(t) = E(t) \quad (\text{VI-17})$$

avec :

$$E(t) = \frac{1}{B_q} \left\{ A_0.e^{(m_0)}(t) + \dots + A_p.e^{(m_p)}(t) \right\} \quad (\text{VI-18})$$

### III.4 Changement de variables : dérivées non entières de la sortie

Le changement de variables effectué lors de cette étape est la clé de l'algorithme de calcul de la réponse temporelle. En effet, c'est cette opération qui va nous permettre de construire le système d'état généralisé, et donc de résoudre le problème.

Ce changement de variable est le suivant [OUS-95] :

- La première variable  $x_1$  est définie comme la dérivée d'ordre  $n_0$  de la fonction  $s$  (autrement dit,  $x_1$  est égale à la fonction  $s$ ).
- La deuxième variable  $x_2$  est égale à la dérivée d'ordre  $n_1$  de la fonction  $s$ .
- Et ainsi de suite, en prenant comme variable  $x_i$ , la dérivée d'ordre  $n_i$  de la fonction  $s$ .

Le système (VI-19) ci-dessous explicite un peu mieux ce changement de variable :

$$\left\{ \begin{array}{l} s^{(n_0)}(t) = x_1(t) \\ s^{(n_1)}(t) = D^{(n_1-0+0)}s(t) = x_1^{(n_1)}(t) = x_2(t) \\ s^{(n_2)}(t) = D^{(n_2-n_1+n_1)}s(t) = x_2^{(n_2-n_1)}(t) = x_3(t) \\ \vdots \\ s^{(n_{q-1})}(t) = D^{(n_{q-1}-n_{q-2}+n_{q-2})}s(t) = x_{q-1}^{(n_{q-1}-n_{q-2})}(t) = x_q(t) \\ s^{(n_q)}(t) = D^{(n_q-n_{q-1}+n_{q-1})}s(t) = x_q^{(n_q-n_{q-1})}(t) = x_{q+1}(t) \end{array} \right. \quad (\text{VI-19})$$

L'inconnue à déterminer en priorité est bien sûr  $x_1$ .

### III.5 Construction du système d'état généralisé

En utilisant le changement de variables défini par le système (VI-19), l'équation (VI-15) peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} x_{q+1}(t) &= -a_0 \cdot x_1(t) - a_1 \cdot x_2(t) - \dots - a_{q-1} \cdot x_q(t) + E(t) \\ \text{avec : } a_k &= \frac{B_k}{B_q} \text{ pour } k \in \{0, 2, \dots, q-1\} \end{aligned} \quad (\text{VI-20})$$

A partir des équations (VI-19) et (VI-20), on peut alors écrire le système d'état généralisé entre le vecteur d'état à  $q$  composantes  $\bar{x}(t) = [x_1(t) \mid x_2(t) \mid \dots \mid x_q(t)]^T$ , le vecteur d'entrée à  $(p+1)$  composantes identiques  $\bar{e}(t) = [e(t) \mid e(t) \mid \dots \mid e(t)]^T$  et le vecteur de sortie à une composante  $\bar{s}(t) = [s(t)]^T$  :

$$\begin{cases} \bar{x}^{(\bar{n})}(t) = A.\bar{x}(t) + B.\bar{e}^{(\bar{m})}(t) & \text{équation d'état généralisée} \\ \bar{s}(t) = C.\bar{x}(t) + D.\bar{e}^{(\bar{m})}(t) & \text{équation d'observation généralisée} \end{cases} \quad (\text{VI-21})$$

avec :

$$\begin{aligned} (\bar{n}) &= (n_1, n_2 - n_1, \dots, n_q - n_{q-1}) \\ (\bar{m}) &= (m_0, m_1, \dots, m_p) \end{aligned} \quad (\text{VI-22})$$

et :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & \dots & -a_{q-2} & -a_{q-1} \end{bmatrix}_{q,q} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ \frac{A_0}{B_q} & \frac{A_1}{B_q} & \dots & \frac{A_p}{B_q} \end{bmatrix}_{q,p+1} \quad (\text{VI-23})$$

$$C = [1 \ 0 \ \dots \ 0]_{1,q} \quad D = \mathbf{O}_{1,p+1}$$

### III.6 Discrétisation

Pour résoudre le problème, nous allons tout d'abord modifier la forme du système d'état ; à partir des relations (VI-20) et (VI-23) , on peut écrire :

$$\begin{cases} x_1^{(n_1)}(t) - x_2(t) = 0 \\ x_2^{(n_2 - n_1)}(t) - x_3(t) = 0 \\ \vdots \\ x_{q-1}^{(n_{q-1} - n_{q-2})}(t) - x_q(t) = 0 \\ x_q^{(n_q - n_{q-1})}(t) + a_0.x_1(t) + a_1.x_2(t) + \dots + a_{q-1}.x_q(t) = E(t) \end{cases} \quad (\text{VI-24})$$

Nous discrétisons alors chacune des variables avec le pas de temps  $h$ . En utilisant la relation (II-6) donnant une approximation de la dérivation non entière d'une fonction à un instant d'échantillonnage  $t_m = m.h$ , on obtient :

$$x_j^{(v_j)}(t_m) = \sum_{k=0}^m \left[ \lambda_{v_j}(k) \cdot x_j[(m-k)h] \right]$$

$$\text{avec : } \lambda_{v_j}(k) = \begin{cases} (-1)^k \cdot \frac{v_j \cdot (v_j - 1) \times \dots \times (v_j - k + 1)}{h^{v_j} \cdot k!} & \text{pour } k \geq 1 \\ \frac{1}{h^{v_j}} & \text{pour } k = 0 \end{cases} \quad (\text{VI-25})$$

où  $v_j$  désigne l'ordre de dérivation de la variable  $x_j$ .

Dans la suite on posera :  $\omega_{v_j}(k) = (-1)^k \cdot \frac{v_j \cdot (v_j - 1) \times \dots \times (v_j - k + 1)}{h^{v_j} \cdot k!}$  pour  $k \geq 1$ . L'équation (VI-25) peut alors s'écrire sous la forme :

$$x_j^{(v_j)}(t_m) = \frac{1}{h^{v_j}} \cdot x_j(t_m) + \frac{1}{h^{v_j}} \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^m \left[ \omega_{v_j}(k) \cdot x_j[(m-k)h] \right]}_{Q_j(m,h)} \quad (\text{VI-26})$$

Le premier terme du membre de droite correspond à ce que l'on cherche à calculer à l'instant  $t_m$ , la somme  $Q_j(m,h)$  correspondant aux échantillons calculés aux instants précédents.

En reportant, pour chaque variable d'état du système (VI-24), l'expression (VI-26), on obtient :



$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{h^{n_1}} & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{h^{n_2-n_1}} & -1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{h^{n_{q-1}-n_{q-2}}} & -1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_{q-2} & a_{q-1} + \frac{1}{h^{n_q-n_{q-1}}} \end{bmatrix}}_M \begin{bmatrix} x_1(mh) \\ x_2(mh) \\ \vdots \\ x_{q-1}(mh) \\ x_q(mh) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{h^{n_1}} \cdot Q_1(mh) \\ -\frac{1}{h^{n_2-n_1}} \cdot Q_2(mh) \\ \vdots \\ -\frac{1}{h^{n_{q-1}-n_{q-2}}} \cdot Q_{q-1}(mh) \\ E(mh) - \frac{1}{h^{n_q-n_{q-1}}} \cdot Q_q(mh) \end{bmatrix} \quad (VI-27)$$

### III.7 Résolution du système

En inversant la matrice M définie dans la relation (VI-27), il est alors possible de déterminer la valeur de chaque variable à tout instant et en particulier celle qui nous intéresse, à savoir  $x_1$ .

En multipliant cette variable par le terme  $\exp\left(-\frac{t}{\tau_0}\right)$  à tout instant t, on obtient finalement la variable  $o(t)$ .

REMARQUE – Lorsque l'entrée du système est sinusoïdale, le vecteur d'entrée  $E(mh)$  est déterminé à l'aide des résultats du chapitre II, qui expriment la dérivée non entière d'une fonction égale au produit d'un cosinus (ou d'un sinus) et d'une exponentielle.

## IV. AUTRES OUTILS DE CALCUL DES REPONSES TEMPORELLES DE SYSTEME GENERALISE IMPLICITE

Le calcul de la réponse temporelle d'un système décrit à partir de dérivées non-entières implicites en utilisant l'algorithme décrit au paragraphe III est relativement long à mettre en œuvre et à résoudre. De plus, cet algorithme n'est pas applicable lorsque le système comprend des termes non-entiers implicites de constantes de temps différentes.

Aussi avons-nous décidé de nous intéresser à d'autres méthodes de résolution.

Ces modèles approchés sont établis à partir d'un constat simple : il est impossible de vouloir reproduire le comportement d'un système d'ordre non entier sur une plage de fréquences infinie. Une troncature est donc nécessaire afin de réduire l'ordre des systèmes approchés.

Une première méthode est inspirée des travaux existants sur la réponse temporelle d'un système généralisé à dérivées non-entières explicites. Elle consiste à déterminer un modèle approché des impédances d'ordre  $\frac{1}{2}$  implicites par un système contenant des termes dérivés explicites. Cette méthode a été adoptée et largement développée à Poitiers [LIN-01] et Toulouse [KAO-01]. L'annexe 8 détaille un peu plus cette approche.

Une deuxième méthode consiste à approcher le système d'ordre fractionnaire par un système d'ordre entier, i.e. ne mettant en œuvre que des dérivées entières. Nous allons détailler brièvement cette approche et l'appliquer au cas de la machine asynchrone. Nous allons ainsi déterminer un modèle approché équivalent d'ordre entier de l'impédance d'ordre  $\frac{1}{2}$  résistive :

$$Z_o^{1/2}(s) = R_o \cdot \sqrt{1 + \frac{s}{\omega_o}}$$

### IV.1 Présentation de la démarche

Afin de pouvoir utiliser les algorithmes couramment employés dans la simulation des systèmes, nous avons décidé d'approcher l'impédance d'ordre  $\frac{1}{2}$  implicite par un modèle entier. Pour cela, nous utilisons une technique classique de détermination de pôles et de zéros d'une fonction de transfert. L'identification de ces pôles et zéros peut être faite directement à partir d'une représentation dans le diagramme de Bode [SCH-99] ou plus usuellement, à l'aide d'une technique par moindres carrés.

Autrement dit, l'objectif est de déterminer un réseau de cellules à paramètres constants qui modélise correctement sur une plage de fréquences donnée l'impédance  $Z_o^{1/2}$ .

La « tool-box » CRONE développée à Bordeaux utilise cette méthodologie [EEA-01].

### IV.2 Application à la machine asynchrone

Un schéma équivalent d'ordre 7 de la machine asynchrone LS 200 L a été déterminé suivant la procédure du paragraphe IV.1 par [RET-97]. Le schéma équivalent de ce modèle approché est représenté sur la Figure VI-2. Ses paramètres sont donnés dans le Tableau VI-1.

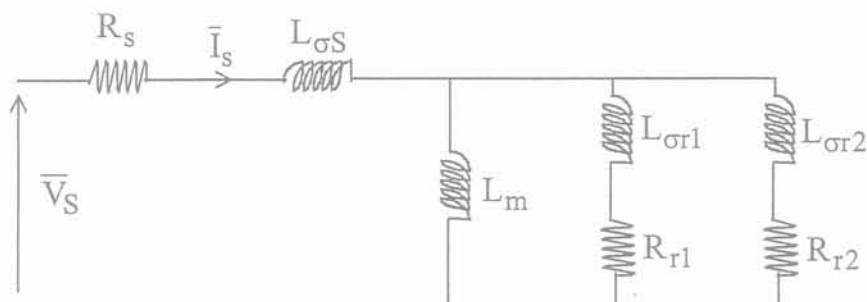


Figure VI-2. Schéma équivalent de type SSFR de la machine asynchrone LS 200 L

$R_s$ (m $\Omega$ )	$L_{\sigma S}$ (mH)	$L_m$ (mH)	$R_{r1}$ (m $\Omega$ )	$L_{\sigma r1}$ (mH)	$R_{r2}$ ( $\Omega$ )	$L_{\sigma r2}$ (mH)
86.8	1	32.46	64.48	2.274	0.577	1.198

Tableau VI-1. Paramètres du schéma équivalent de type SSF

### IV.3 Synthèse

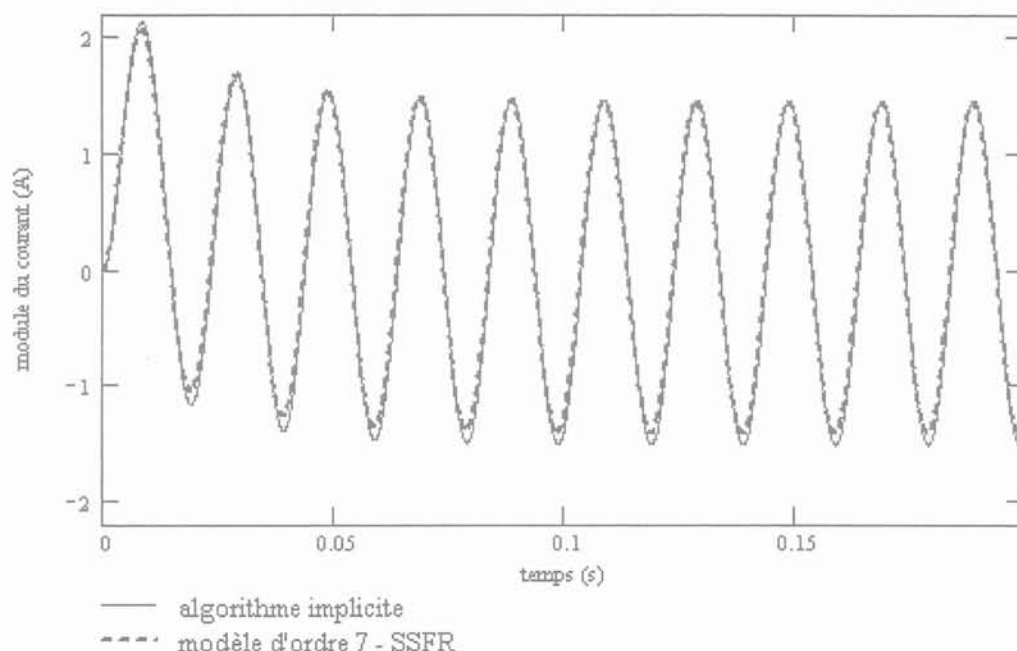
La méthode la plus rapide pour calculer la réponse temporelle de ces systèmes est basée sur l'identification d'un système approché d'ordre entier décrite au paragraphe précédent. Le calcul de la réponse temporelle est alors effectué à l'aide des algorithmes classiques de simulation par résolution d'équations différentielles. Bien sûr, toutes ces étapes d'identification et de résolution sont cachées pour l'utilisateur.

## V. REPONSE TEMPORELLE DE LA MACHINE ASYNCHRONE - APPLICATION DE L'ALGORITHME IMPLICITE

Nous avons appliqué l'algorithme que nous avons développé pour calculer la réponse temporelle de la machine asynchrone LS 200 L étudiée au chapitre IV, et l'avons comparé au calcul effectué à partir du modèle d'ordre sept développé au paragraphe IV.2.

Pour tester notre algorithme, nous nous sommes intéressés à l'étude simple d'un démarrage de cette machine lorsque le rotor est bloqué. Autrement dit, nous avons considéré la réponse temporelle correspondant au schéma équivalent de la Figure V.2.

L'annexe 7 décrit complètement les étapes de calcul de l'algorithme implicite appliqué à la machine. Nous avons retranscrit sur la Figure VI-3 les résultats.



**Figure VI-3.** Réponse temporelle de la machine asynchrone (étude d'un démarrage)

L'algorithme de résolution développé au paragraphe III donne donc des résultats corrects sur cet exemple simple. Le temps de simulation nécessaire est d'environ cinq minutes pour un pas de temps égal à  $10^{-4}$  secondes. Il est seulement de quelques secondes pour le modèle d'ordre sept.

## VI. CONCLUSION

Ce chapitre nous a permis de déterminer un algorithme de résolution fiable d'un système décrit à l'aide de systèmes d'ordre  $\frac{1}{2}$  implicite résistifs, comme ceux présents dans les schémas équivalents fractionnaires des machines synchrones et asynchrones.

Il est cependant, pour l'instant, beaucoup plus avantageux de choisir une démarche d'approximation des impédances d'ordre  $\frac{1}{2}$  par des systèmes d'ordre entier. Le calcul de la réponse temporelle repose alors sur des algorithmes très classiques de résolution d'équations différentielles d'ordre entier. De plus cette démarche est applicable lorsque le système comprend des termes dérivés fractionnaires implicites de constante de temps différentes, comme dans le cas d'une machine synchrone.

Néanmoins, il serait nécessaire de tester notre algorithme pour le cas d'un démarrage de machine asynchrone sur réseau à 50 Hz. Il faudrait alors bâtir l'algorithme à partir du schéma équivalent valable en régime transitoire et sinusoïdal de la figure IV.15. Le système d'état serait cependant plus complexe puisqu'il serait nécessaire de tenir compte :

- de la force électromotrice dans le schéma équivalent de la machine asynchrone, donc d'une représentation dans les axes (d) et (q) de la machine,
- de l'équation électromécanique, donnant la variation de la vitesse de rotation en fonction de couple électromagnétique et du couple de frottement.

Ce calcul pourrait nous montrer l'apport de la modélisation fractionnaire pour l'étude de régimes transitoires, puisque l'une des propriétés fondamentales de la dérivation non-entière est d'inclure à la fois des dynamiques rapides et lentes.

---

## *Conclusion générale*

---



Des modèles fréquentiels fins et compacts prenant en compte les phénomènes d'induction électromagnétique ont été présentés dans ce mémoire. L'accent a été particulièrement mis sur le moteur asynchrone et l'alternateur puisqu'ils sont au cœur des dispositifs électriques.

Dans une première partie, des modèles analytiques de l'impédance de pièces conductrices où des courants induits sont susceptibles de se développer ont été introduits. Cette nouvelle modélisation se distingue totalement des approches classiques puisqu'elle met en œuvre des dérivations fractionnaires. Elle permet notamment d'accéder à un modèle de connaissance des machines électriques, fiable sur une grande plage de fréquences avec un nombre minimal de paramètres.

Ainsi, une première étude portant sur une barre rectangulaire et une tôle ferromagnétique a été menée. Des impédances variant avec la racine carrée de la fréquence ont été introduites. Des résultats très satisfaisants ont été obtenus : une réduction notable du nombre de paramètres caractérisant ces pièces, une prise en compte de la forme de la barre et une validation expérimentale en accord avec les résultats analytiques.

Ces premiers résultats ont conduit, dans un deuxième temps, à l'établissement du schéma équivalent d'ordre fractionnaire de la machine asynchrone à partir des équations électriques au stator et au rotor. Dans le cas d'une machine synchrone, les impédances d'ordre  $\frac{1}{2}$  ont été simplement introduites dans les branches du schéma équivalent de Park, concernées par le développement de courants de Foucault. Les paramètres de ces schémas, d'une structure finalement assez simple, ont tous un sens physique.

La structure nouvelle de ces schémas équivalents a nécessité des outils d'identification des paramètres adaptés. Une nouvelle méthodologie basée sur des mesures de réponse fréquentielle de la machine à l'arrêt (StandStill Frequency Response ou SSFR) a ainsi été développée. Afin de valider cette méthode, un banc expérimental a été conçu pour effectuer les tests SSFR sur un moteur industriel à double cage d'une puissance de 30 kW. Pour la machine synchrone, des résultats de tests SSFR effectués sur des turboalternateurs et un alternateur hydraulique nord-américains ont été exploités identiquement. Cette méthode a conduit à des modèles fréquentiels coïncidant de façon très satisfaisante avec les mesures expérimentales. De plus, l'ordre de grandeur des paramètres correspond à celui des machines industrielles.

La représentativité physique des paramètres de ces nouveaux modèles a été améliorée par la prise en compte de la température de fonctionnement de la machine. Cette influence de l'échauffement sur la valeur des paramètres a été validée expérimentalement.

Enfin, dans une dernière partie, un algorithme de réponse fréquentielle de la machine asynchrone, basé sur son schéma équivalent fractionnaire, a été mis au point et appliqué dans le cas simple d'un démarrage à rotor bloqué sur le moteur de 30 kW.



Finalement, ce travail a permis d'aboutir à un véritable modèle de connaissance des machines. Cependant, le bilan ne peut être complet sans la mention des limites qui sont apparues :

1. non prise en compte des formes très particulières des encoches,
2. absence de méthodes systématiques d'identification des paramètres,
3. mauvaise prise en compte de la saturation dans les modèles d'ordre fractionnaire,
4. absence de validation de la réponse temporelle de la machine asynchrone lors des régimes transitoires,
5. absence de calculs de réponse temporelle de la machine synchrone.

Ces limites ne sont pas insurmontables, mais elles requièrent une poursuite d'étude dans les directions suivantes :

1. Une augmentation très limitée du nombre de paramètres pour caractériser plus précisément l'impédance d'une encoche lorsque celle-ci présente une forme particulière (double cage par exemple),
2. Une étude expérimentale sur le banc SSFR pour évaluer l'influence de la saturation sur les paramètres du schéma équivalent fractionnaire du moteur 30 kW,
3. Le développement d'un algorithme plus spécifique à la simulation des réponses temporelles en régime transitoire.

Le premier point ne pose a priori pas de problème fondamental. Par contre, la prise en compte de la saturation dans les modèles d'ordre  $\frac{1}{2}$  relève d'une problématique beaucoup plus délicate à traiter. Un axe de recherche serait de modifier la valeur des paramètres du schéma équivalent fractionnaire en fonction du courant traversant les éléments.

Pour la simulation des régimes transitoires, où il faut prendre en compte la force électromotrice de rotation et l'équation de la mécanique donnant la vitesse de la machine, l'utilisation de modèles approchés d'ordre entier est nettement plus économique en temps de calcul et plus facile à mettre en œuvre.

Malgré ces difficultés, la méthode développée dans ce mémoire pourrait aussi être étendue sans difficultés aux autres machines électriques :

- grands transformateurs pour lesquels l'effet de peau peut ne pas être négligeable (couplage des fuites avec la cuve massive, ondes de choc avec un spectre allant à plusieurs MHz, etc),
- transformateurs d'électronique de puissance, où les courants induits influencent grandement les valeurs des inductances de fuite et de la résistance série.

- machines à réluctance variable dont le rotor peut être massif,
- matériels électriques à commande électromagnétique (disjoncteurs, contacteurs, relais, etc) où des temps de réponse de plus en plus brefs sont demandés.

Enfin, les bases solides posées dans ce mémoire pourraient être aussi utiles à la modélisation des réseaux électriques. En effet, il a été montré que la dérivation non entière était étroitement liée à la notion de fractalité [LEM-90] [BIB-99]. La réponse fréquentielle d'un réseau de nature fractale correspond ainsi à celle d'un système d'ordre fractionnaire [CLE-84] [LIU-85]. La structure arborescente, "fractale", d'un réseau électrique (voir figure C-1) nous fait donc penser qu'il pourrait être modélisé très simplement et globalement par un système d'ordre fractionnaire.

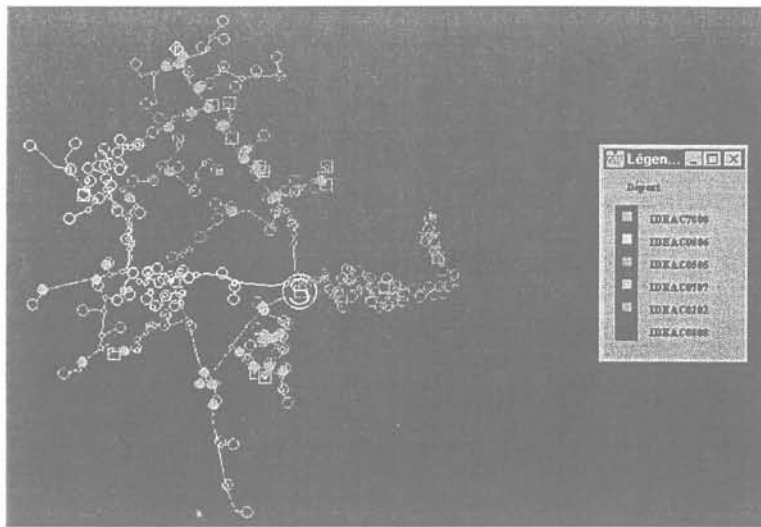


Figure C-1. Architecture de réseau modélisé par le logiciel PRAO (Planification de Réseaux Assistée par Ordinateur) développé par EDF



---

*Annexe 1*

*Equations vectorielles dans le référentiel  
statorique*

---



Nous montrons dans cette annexe qu'il est pour l'instant mathématiquement impossible d'exprimer toutes les grandeurs dans le référentiel statorique.

Reprenons l'équation (IV-26) décrivant la loi de Kirschoff au rotor :

$$0 = 2.r_{ann}.\bar{J}_R + (2.l_{ann} + l_c) \cdot \frac{d\bar{J}_R}{dt} + 4.\sin^2\left(\frac{p\pi}{q}\right) \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \cdot R.\tau^{1/2} \cdot D^{1/2} \left\{ \bar{J}_R \cdot \exp\left(\frac{t}{\tau}\right) \right\} + \frac{d}{dt} \left( \frac{M}{2} q \cdot \bar{I}_S \cdot e^{-j\theta} \right) \quad (A1-1)$$

Si on se place dans le référentiel statorique, on effectue une rotation d'angle  $e^{-j\theta}$  des grandeurs rotoriques. L'équation (A1-1) devient alors :

$$0 = 2.r_{ann}.\bar{J}_R \cdot e^{-j\theta} + (2.l_{ann} + l_c) \cdot \frac{d[\bar{J}_R \cdot e^{-j\theta}]}{dt} + 4.\sin^2\left(\frac{p\pi}{q}\right) \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \cdot R.\tau^{1/2} \cdot D^{1/2} \left\{ \bar{J}_R \cdot e^{-j\theta} \cdot \exp\left(\frac{t}{\tau}\right) \right\} + \frac{d}{dt} \left( \frac{M}{2} q \cdot \bar{I}_S \cdot e^{-j\theta} \right) \quad (A1-2)$$

La dérivation non-entière d'un produit de fonction n'étant pas une propriété remarquable comme la dérivation entière d'un produit de fonctions, nous ne pouvons pour l'instant pas continuer le calcul.



---

*Caractéristiques de la machine asynchrone LS 200 L*

*Annexe 2*

---





### Caractéristiques du moteur LS 200 L

Le diamètre externe du stator est de 300 mm. Le diamètre interne du stator est de 182 mm.

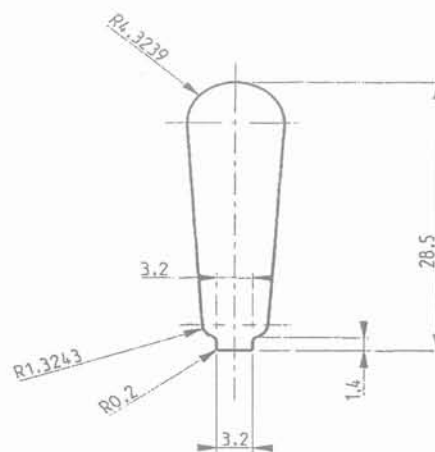
Le diamètre externe du rotor est de 181 mm. Le diamètre interne du rotor est de 80 mm.

La longueur totale de fer est de 260 mm.

Le nombre d'encoches est de 48 au stator et de 40 au rotor.

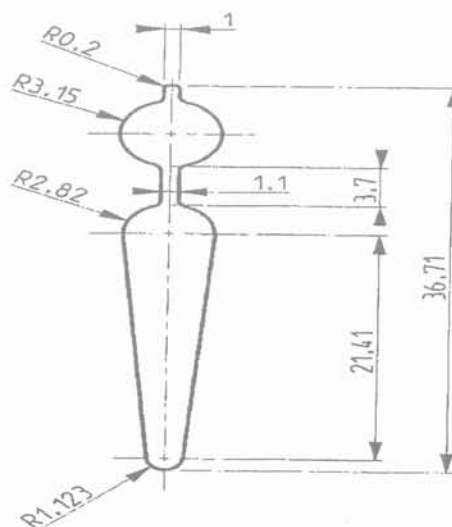
La forme des encoches rotoriques et statoriques ainsi que leurs dimensions sont représentées sur les figures ci-dessous.

#### Encoche statorique



ECHELLE 2.000

#### Encoche rotorique





---

*Annexe 3*

*Grandeurs de base d'un alternateur*

---



On rappelle que pour comparer les différents alternateurs d'un réseau, de puissance et de tension nominales différentes, il est souvent utile d'utiliser un système réduit pour normaliser toutes les grandeurs électriques du système [KUN-94]. Cette normalisation permet généralement de simplifier les calculs et de faciliter la compréhension des caractéristiques des systèmes.

Les grandeurs réduites sont définies comme :

$$\text{grandeur réduite (en p.u.)} = \frac{\text{grandeur réelle}}{\text{grandeur de base}}$$

Les grandeurs de base sont choisies habituellement de sorte que les grandeurs principales du système (puissance, tension d'alimentation, etc ...) soient égales dans le système réduit à 1 p.u. pour les conditions nominales.

Le Tableau A3-1 résume les caractéristiques nominales d'un alternateur telles qu'elles sont données par un constructeur :

Caractéristiques nominales	Notation
Puissance apparente	$S_n$
Tension entre phases	$U_n$
Fréquence d'utilisation	$f_n$
Inductance synchrone d'axe direct	$L_{adu}$
Inductance de fuite d'axe direct	$l_{sd}$
Excitation nécessaire pour disposer d'un p.u. de tension à vide	$I_{exco}$

**Tableau A3-1.** *Caractéristiques nominales des alternateurs*

Les Tableau A3-2 et Tableau A3-3 présentent les définitions des grandeurs de base.

## ■ Grandeurs de base côté stator [KUN-94] [KAM-97]:

Grandeurs de base	Notation	Définition
Tension phase / neutre	$V_b$	$\frac{U_n}{\sqrt{3}}$
Courant	$I_b$	$\frac{S_n}{\sqrt{3} \cdot U_n}$
Fréquence (pulsation)	$f_b (\omega_b)$	$f_n (\omega_n)$
Impédance	$Z_b$	$\frac{U_n^2}{S_n}$

Tableau A3-2. Grandeurs de base côté stator

## ■ Grandeurs de base côté excitation [COU-87] [DAN-87] :

Grandeurs de base	Notation	Définition
Courant	$I_{fb}$	$(L_{adu} - l_{sd}) \cdot I_{exco}$
Impédance	$Z_{fb}$	$\frac{S_n}{I_{fb}^2}$
Tension	$V_{fb}$	$Z_{fb} \cdot I_{fb}$

Tableau A3-3. Grandeurs de base côté excitation

---

*Annexe 4*

*Grandeurs opérationnelles d'un alternateur*

---





## 1. Expression analytique des grandeurs opérationnelles

Avec les notations finales pour modéliser un turboalternateur, on pose :

$$\begin{aligned} Z_{eq1} &= j.l_{\sigma 12d} \cdot \omega + \frac{Z_{2d}^{1/2} \cdot [r_f + j.l_{\sigma f} \cdot \omega]}{Z_{2d}^{1/2} + r_f + j.l_{\sigma f} \cdot \omega} \\ Z_{eq2} &= R_{2q} + j.\omega.l_{\sigma 2q} \end{aligned} \quad (A4-1)$$

Les grandeurs opérationnelles s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} Z_d(\omega) &= r_{sd} + j.l_{\sigma sd} \cdot \omega + \frac{1}{\frac{1}{Z_{1d}^{1/2}} + \frac{1}{j.L_{adu} \cdot \omega} + \frac{1}{Z_{eq1}}} \\ Z_{afo}(\omega) &= \frac{Z_{2d}^{1/2}}{Z_{2d}^{1/2} + j.l_{\sigma 12d} \cdot \omega} \cdot \frac{1}{\frac{1}{Z_{1d}^{1/2}} + \frac{1}{j.L_{adu} \cdot \omega} + \frac{1}{Z_{2d}^{1/2} + j.l_{\sigma 12d} \cdot \omega}} \\ sG(\omega) &= \frac{1}{\left[ 1 + j.l_{\sigma 12d} \cdot \omega \cdot \left( \frac{1}{Z_{1d}^{1/2}} + \frac{1}{j.L_{adu} \cdot \omega} \right) + \right.} \\ &\quad \left. (r_f + j.l_{\sigma f} \cdot \omega) \cdot \left( \frac{1}{Z_{2d}^{1/2}} + \frac{1}{j.L_{adu} \cdot \omega} + \frac{1}{Z_{1d}^{1/2}} \right) + \frac{j.l_{\sigma 12d} \cdot \omega}{Z_{2d}^{1/2}} \cdot \left( \frac{1}{Z_{2d}^{1/2}} + \frac{1}{j.L_{adu} \cdot \omega} \right) \right]} \\ Z_q(\omega) &= r_{sq} + j.l_{\sigma sq} \cdot \omega + \frac{1}{\frac{1}{Z_{1q}^{1/2}} + \frac{1}{j.L_{aqu} \cdot \omega} + \frac{1}{Z_{eq2}}} \end{aligned} \quad (A4-2)$$

## 2. Asymptotes des grandeurs opérationnelles

A partir du schéma équivalent du turboalternateur et de développements limités aux basses et hautes fréquences, on détermine le comportement asymptotique des grandeurs opérationnelles.

A partir des mesures SSFR, on déduit certains paramètres du comportement local de certaines grandeurs opérationnelles aux fréquences intermédiaires (points d'inflexion notamment)



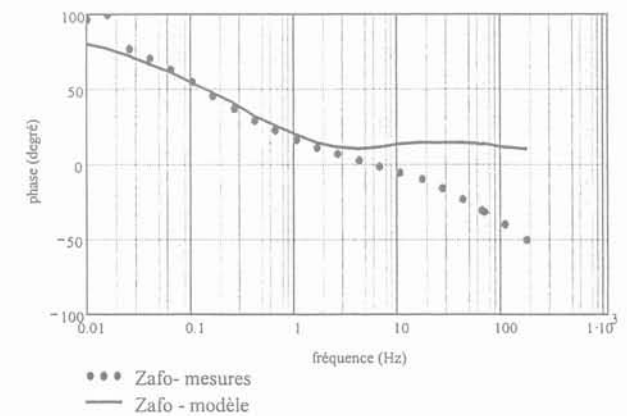
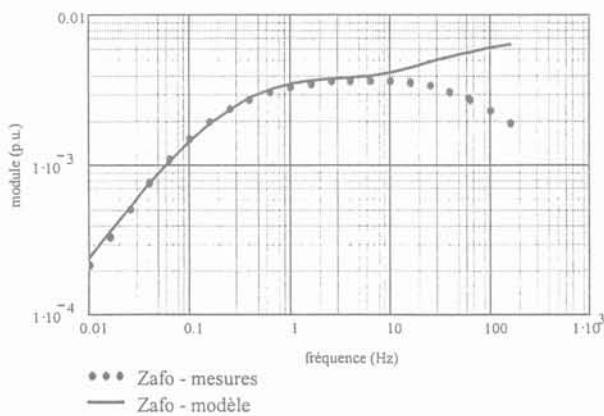
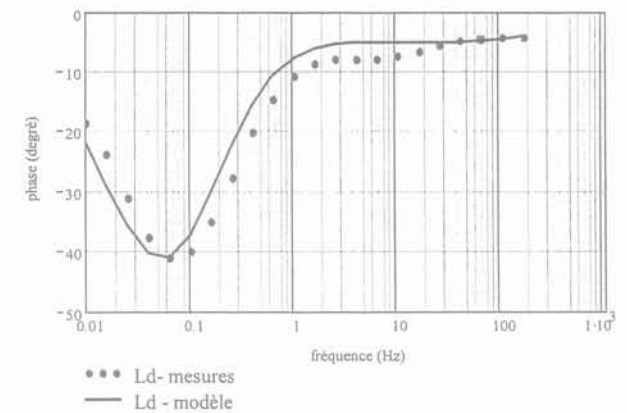
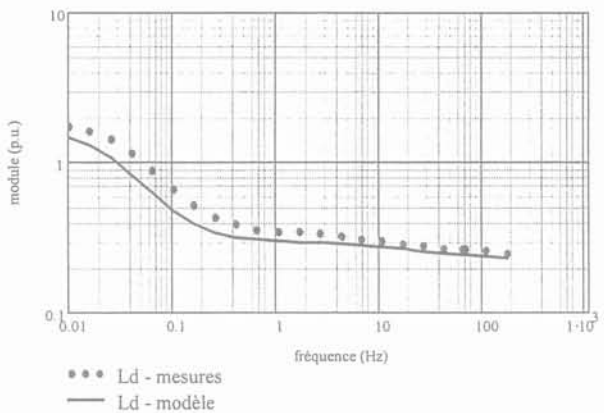
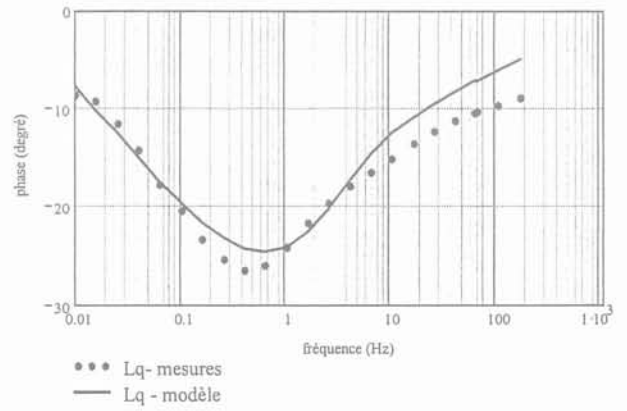
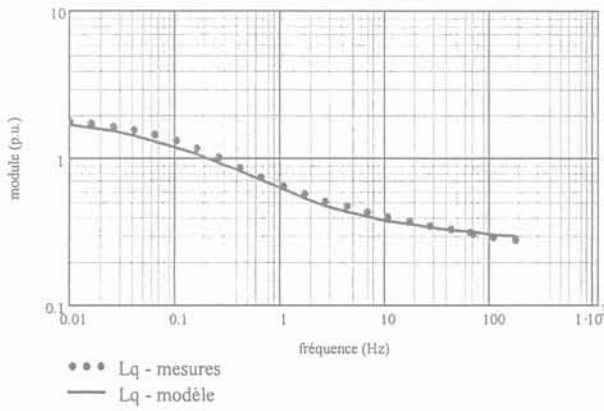
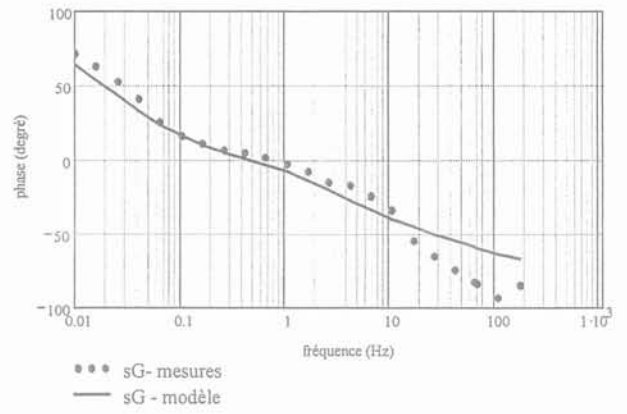
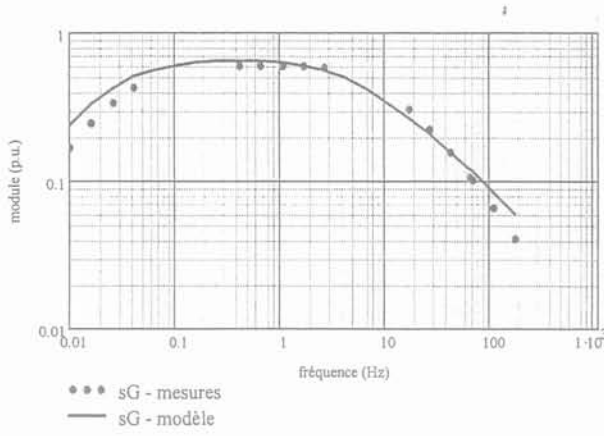
---

*Annexe 5*

*Identification de l'alternateur de Canay*

---







---

*Annexe 6*

*Approximation du premier harmonique*

---





## 1. Présentation

L'approximation du premier harmonique est principalement utilisée en automatique lorsque les dispositifs et phénomènes suivants sont présents dans un système réel :

- les relais,
  - les semi-conducteurs d'amplification,
  - les circuits magnétiques,
- les frottements, etc ....

Les méthodes d'étude des systèmes présentant une non-linéarité restent en général très complexes. Par ailleurs elles remettent en cause certains principes bien acquis comme le théorème de superposition, la transformée de Laplace et par conséquent la représentation des systèmes sous la forme de diagrammes fréquentiels.

La méthode du premier harmonique consiste moyennant quelques approximations à adapter les connaissances du linéaire à l'étude de certains systèmes comportant des non-linéarités.

Pour cela, la non-linéarité est considérée comme un gain variable. Cette méthode ne consiste pas à linéariser autour d'un point de fonctionnement, et donc ne repose pas sur l'hypothèse que les signaux sont de faible amplitude.

## 2. Description de la méthode

Un signal sinusoïdal est transformé au passage d'un organe non-linéaire en un signal non sinusoïdal, qui reste en général périodique de même période que l'entrée. On peut donc le décomposer en série de Fourier et faire apparaître le fondamental (i.e. le premier harmonique) et d'autres harmoniques d'ordres plus élevés.

Le principe de la méthode consiste à négliger les termes d'ordre supérieur à 1 et à considérer l'organe non-linéaire seulement comme un gain calculé comme suit : en réponse à l'entrée  $e(t) = A.\sin(\omega t)$ , l'organe non-linéaire fournit  $s(t) = \Psi[A.\sin(\omega t)]$  qu'on développe en série de Fourier à l'ordre un. Connaissant les coefficients de Fourier  $c_1$  et  $c_1'$ , dépendant de A avec :

$$\begin{cases} c_1 = \frac{2}{T} \int_0^T s(t).\sin(\omega t).dt \\ c_1' = \frac{2}{T} \int_0^T s(t).\cos(\omega t).dt \end{cases} \quad (A6-1)$$

on peut écrire le rapport sortie sur entrée dans le domaine fréquentiel :

$$\frac{S(j\omega)}{E(j\omega)} = \frac{c_1(A) + j.c_1'(A)}{A} \quad (\text{A6-2})$$

où S et E désignent les transformées de Laplace des fonctions s et e.

### 3. Application : calcul de l'inductance en fonction du courant

La non-linéarité d'un circuit magnétique est modélisée par le système d'équations entre le champ et l'induction magnétiques suivant :

$$\begin{cases} B(H) = k.H & \text{pour } |H| < H_c \\ B(H) = k.H_c & \text{pour } H > H_c \\ B(H) = -k.H_c & \text{pour } H < -H_c \end{cases} \quad (\text{A6-3})$$

avec  $k = \mu_0 \cdot \mu_r$ . La Figure A6-1 illustre cette loi de non-linéarité :

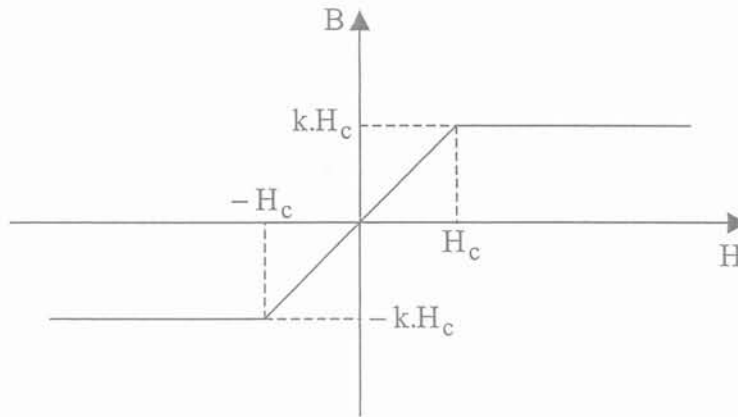


Figure A6-1. Non-linéarité d'un circuit magnétique

Ainsi, si on applique un champ sinusoïdal d'amplitude  $H_m$  à l'entrée d'un système caractérisé par la non-linéarité (A6-3), nous récupérons à la sortie, en appliquant l'approximation du premier harmonique, une induction sinusoïdale d'amplitude variable  $\eta(H_m)$ , avec [GIL-77] :

$$\begin{cases} \text{pour } H_m \leq H_c & \eta(H_m) = \mu_0 \cdot \mu_r \\ \text{pour } H_m \geq H_c & \eta(H_m) = \frac{2 \cdot \mu_0 \cdot \mu_r}{\pi} \cdot \left[ \text{Arcsin} \left( \frac{H_c}{H_m} \right) + \left( \frac{H_c}{H_m} \right) \cdot \sqrt{1 - \left( \frac{H_c}{H_m} \right)^2} \right] \end{cases} \quad (\text{A6-4})$$

En établissant le lien classique entre grandeurs magnétiques et électriques on trouve la relation entre le flux  $\phi$  et le courant d'excitation  $i$  :

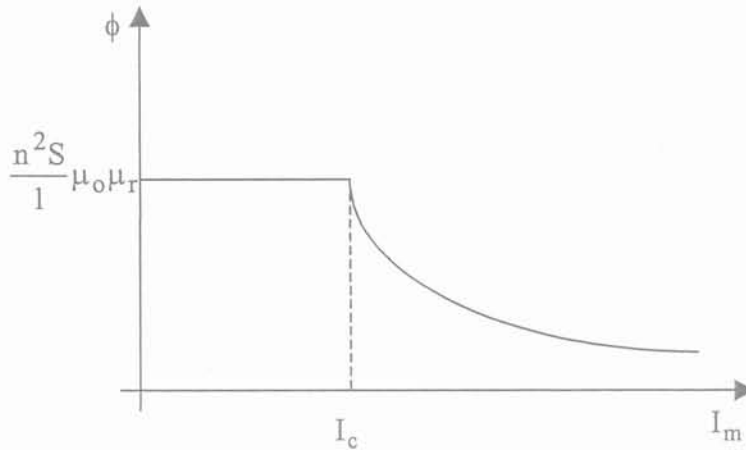
$$\phi(I_m) = \eta(I_m) \cdot i$$

$$\text{avec : } \begin{cases} \text{pour } I \leq I_c & \eta(I_m) = \frac{n^2 S}{l} \mu_o \cdot \mu_r \\ \text{pour } I \geq I_c & \eta(I_m) = \frac{2 \cdot n^2 \cdot S \mu_o \cdot \mu_r}{l \pi} \left[ \text{Arcsin} \left( \frac{I_c}{I_m} \right) + \left( \frac{I_c}{I_m} \right) \sqrt{1 - \left( \frac{I_c}{I_m} \right)^2} \right] \end{cases} \quad (\text{A6-5})$$

où :

- $I_m$  est l'amplitude du courant d'excitation,
- $I_c$  la valeur du courant d'excitation correspondant à un champ  $H_c$ ,
- $S$  et  $l$  respectivement la section et la longueur moyennes du circuit magnétique,
- $n$  le nombre de spires parcourues par le courant d'excitation.

La figure A6-2 représente la loi  $\eta(I_m)$ .



**Figure A6-2.** Allure du flux magnétique en fonction du courant d'excitation

On retrouve bien l'allure de l'inductance en fonction du courant d'excitation et en présence de saturation du circuit magnétique.



---

*Annexe 7*

*Réponse temporelle de la machine asynchrone*

---



L'algorithme de calcul complet de la machine asynchrone est donné ci-dessous.

D'après le schéma équivalent de la machine asynchrone, on peut calculer l'impédance d'entrée de la machine, qui s'écrit (en représentation opérationnelle) :

$$\begin{aligned} \frac{v_s(s)}{i_s(s)} &= R_s + \frac{L_m \cdot s \cdot [R_0 \cdot (1 + \tau_0 \cdot s)^n + \lambda \cdot s]}{L_m \cdot s + R_0 \cdot (1 + \tau_0 \cdot s)^n + \lambda \cdot s} \quad \text{avec } n = 0.5 \\ &= R_s + \frac{L_m \cdot s \cdot \left[ R_0 \cdot \tau_0^n \cdot \left( \frac{1}{\tau_0} + s \right)^n + \lambda \cdot s \right]}{L_m \cdot s + R_0 \cdot \tau_0^n \cdot \left( \frac{1}{\tau_0} + s \right)^n + \lambda \cdot s} \end{aligned} \quad (\text{A7-1})$$

En effectuant le changement de variable  $s_1 = s + \frac{1}{\tau_0}$ , on obtient :

$$\frac{v_s\left(s_1 - \frac{1}{\tau_0}\right)}{i_s\left(s_1 - \frac{1}{\tau_0}\right)} = R_s + \frac{L_m \cdot \left(s_1 - \frac{1}{\tau_0}\right) \cdot \left[ R_0 \cdot \tau_0^n \cdot s_1^n + \lambda \cdot \left(s_1 - \frac{1}{\tau_0}\right) \right]}{R_0 \cdot \tau_0^n \cdot s_1^n + (L_m + \lambda) \cdot \left(s_1 - \frac{1}{\tau_0}\right)} = \frac{B(s_1)}{A(s_1)} \quad (\text{A7-2})$$

avec :

$$\begin{aligned} A(s_1) &= \frac{L_m}{\tau_0^2} \cdot [L_m \cdot \lambda - R_s \cdot (\lambda + L_m) \cdot \tau_0] s_1^0 + R_0 \cdot \tau_0^{n-1} \cdot [R_s \cdot \tau_0 - L_m] s_1^n \\ &+ \frac{1}{\tau_0} \cdot [-2 \cdot L_m \cdot \lambda + R_s \cdot (L_m + \lambda) \cdot \tau_0] s_1^1 + R_0 \cdot \tau_0^n \cdot L_m \cdot s_1^{n+1} \\ &+ L_m \cdot \lambda \cdot s_1^2 \end{aligned} \quad (\text{A7-3})$$

et :

$$B(s_1) = \frac{-1}{\tau_0} \cdot [\lambda + L_m] s_1^0 + R_0 \cdot \tau_0^n \cdot s_1^n + [\lambda + L_m] s_1^1 \quad (\text{A7-4})$$



On obtient ainsi une relation en représentation fréquentielle entre la tension et le courant statorique :

$$\begin{aligned} & \left[ B_0.s_1^0 + B_n.s_1^n + B_1.s_1^1 + B_{n+1}.s_1^{n+1} + B_2.s_1^2 \right] i_s \left( s_1 - \frac{1}{\tau_0} \right) \\ & = \left[ A_0.s_1^0 + A_n.s_1^n + A_1.s_1^1 \right] v_s \left( s_1 - \frac{1}{\tau_0} \right) \end{aligned} \quad (A7-5)$$

en notant respectivement  $B_i$  et  $A_i$  les coefficients du terme de puissance réelle  $i$  du courant et de la tension statoriques.

En revenant dans le domaine temporel (par application de la transformée de Laplace inverse), on obtient L'EDG reliant la tension et le courant statoriques :

$$\begin{aligned} & \left[ B_0.D^{(0)} + B_n.D^{(n)} + B_1.D^{(1)} + B_{n+1}.D^{(n+1)} + B_2.D^{(2)} \right] i_s(t). \exp(t/\tau_0) \\ & = \left[ A_0.D^{(0)} + A_n.D^{(n)} + A_1.D^{(1)} \right] v_s(t). \exp(t/\tau_0) \end{aligned} \quad (A7-6)$$

Dans la suite, on travaillera directement sur les fonctions :

$$\begin{aligned} s(t) &= i_s(t). \exp(t/\tau_0) \\ e(t) &= v_s(t). \exp(t/\tau_0) \end{aligned} \quad (A7-7)$$

En divisant chaque membre de l'équation (A7-6) par le terme  $B_2$ , on peut alors écrire :

$$\frac{B_0}{B_2}.s^{(0)}(t) + \frac{B_n}{B_2}.s^{(n)}(t) + \frac{B_1}{B_2}.s^{(1)}(t) + \frac{B_{n+1}}{B_2}.s^{(n+1)}(t) + s^{(2)}(t) = E(t) \quad (A7-8)$$

avec :

$$E(t) = \frac{1}{B_2} \cdot \left( A_0.e^{(0)}(t) + A_n.e^{(n)}(t) + A_1.e^{(1)}(t) \right) \quad (A7-9)$$

Il est nécessaire pour obtenir la réponse temporelle  $s(t)$  de transformer la relation (A7-8) en un système d'état généralisé mettant en œuvre les dérivées non entières intervenant dans le terme de gauche de cette équation. Pour cela, on utilise le changement de variables suivant :

$$\begin{cases} s^{(0)}(t) = x_1(t) \\ s^{(n)}(t) = D^{(n-0+0)}s(t) = x_1^{(n)}(t) = x_2(t) \\ s^{(1)}(t) = x_2^{(1-n)}(t) = x_3(t) \\ s^{(1+n)}(t) = x_3^{(n)}(t) = x_4(t) \\ s^{(2)}(t) = x_4^{(1-n)}(t) = x_5(t) \end{cases} \quad (\text{A7-10})$$

L'inconnue à déterminer est bien sûr  $x_1(t) = s(t)$ .

A partir de la relation (A7-8), il est possible d'exprimer  $x_5(t)$  en fonction de toutes les autres variables et de la combinaison linéaire des dérivées de l'entrée du système (terme de droite) :

$$x_5(t) = -\frac{B_0}{B_2} \cdot x_1(t) - \frac{B_n}{B_2} \cdot x_2(t) - \frac{B_1}{B_2} \cdot x_3(t) - \frac{B_{n+1}}{B_2} \cdot x_4(t) + E(t) \quad (\text{A7-11})$$

On définit :

$$a_1 = \frac{B_0}{B_2} \quad a_2 = \frac{B_n}{B_2} \quad a_3 = \frac{B_1}{B_2} \quad a_4 = \frac{B_{n+1}}{B_2} \quad (\text{A7-12})$$

On obtient ainsi un système d'état dit « généralisé » [OUS] suivant :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} x_1^{(n)}(t) \\ x_2^{(1-n)}(t) \\ x_3^{(n)}(t) \\ x_4^{(1-n)}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{A_0}{B_2} & \frac{A_n}{B_2} & \frac{A_1}{B_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{(0)}(t) \\ e^{(n)}(t) \\ e^{(1)}(t) \end{bmatrix} \\ s(t) = x_1(t) \end{cases} \quad (\text{A7-13})$$

Le système précédent peut également s'écrire sous la forme :

$$\begin{cases} x_1^{(n)}(t) - x_2(t) = 0 \\ x_2^{(1-n)}(t) - x_3(t) = 0 \\ x_3^{(n)}(t) - x_4(t) = 0 \\ x_4^{(1-n)}(t) + a_1 \cdot x_1(t) + a_2 \cdot x_2(t) + a_3 \cdot x_3(t) + a_4 \cdot x_4(t) = E(t) \end{cases} \quad (\text{A7-14})$$

On discrétise ensuite chaque équation pour chaque échantillon  $m.h$  ( $h$  : période d'échantillonnage,  $m$  : numéro de l'échantillon) ; le système (A7-14) s'écrit alors :

$$\begin{cases}
 \frac{1}{h^n} x_1(m.h) + \sum_{k=1}^m \lambda_n(k).x_1[(m-k).h] - x_2(m.h) = 0 \\
 \frac{1}{h^{1-n}} x_2(m.h) + \sum_{k=1}^m \lambda_{1-n}(k).x_2[(m-k).h] - x_3(m.h) = 0 \\
 \frac{1}{h^n} x_3(m.h) + \sum_{k=1}^m \lambda_n(k).x_3[(m-k).h] - x_4(m.h) = 0 \\
 \frac{1}{h^{1-n}} x_4(m.h) + \sum_{k=1}^m \lambda_{1-n}(k).x_4[(m-k).h] + a_1.x_1(m.h) + \dots + a_4.x_4(m.h) = E(m.h)
 \end{cases} \tag{A7-15}$$

On note :  $Q_j(m.h) = \sum_{k=1}^m \lambda(k).x_j[(m-k).h]$  avec  $\lambda(k) = \lambda_n(k) = \lambda_{1-n}(k)$  et  $j \in \{1,2,3,4\}$ . Le

système (A7-15) se met alors sous la forme :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} h^{-n} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & h^{n-1} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & h^{-n} & -1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 + h^{n-1} \end{bmatrix}}_M \begin{bmatrix} x_1(mh) \\ x_2(mh) \\ x_3(mh) \\ x_4(mh) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Q_1(mh) \\ -Q_2(mh) \\ -Q_3(mh) \\ -Q_4(mh) + E(mh) \end{bmatrix} \tag{A7-16}$$

Il ne reste alors plus qu'à inverser la matrice  $M$  définie ci-dessus pour obtenir  $x_1(t)$ , et donc  $i_s(t)$ .

---

*Annexe 8*

*Modèle approché explicite borné en fréquence*

---



Cette méthode est celle adoptée à Poitiers pour modéliser sur une plage de fréquences réduite l'effet de peau dans les barres rotoriques d'une machine asynchrone [LIN-01].

Nous recherchons un modèle ne faisant intervenir que des termes dérivés explicites, qui coïncide avec les impédances d'ordre  $\frac{1}{2}$  résistives ou inductives sur une plage de fréquences correspondant aux essais SSFR.

Dans le cas de la machine asynchrone, on cherche donc un modèle approché de l'impédance d'ordre  $\frac{1}{2}$  résistive  $Z_o$ , où :

$$Z_o(s) = R_o \sqrt{1 + \frac{s}{\omega_o}} \quad (\text{A8-1})$$

Le modèle approché  $Z_{\text{exp}}(s)$  a la structure suivante :

$$Z_{\text{exp}}(s) = A_o \cdot \frac{1 + \left(\frac{s}{\omega_\alpha}\right)^\alpha}{1 + \left(\frac{s}{\omega_\beta}\right)^\beta} \quad (\text{A8-2})$$

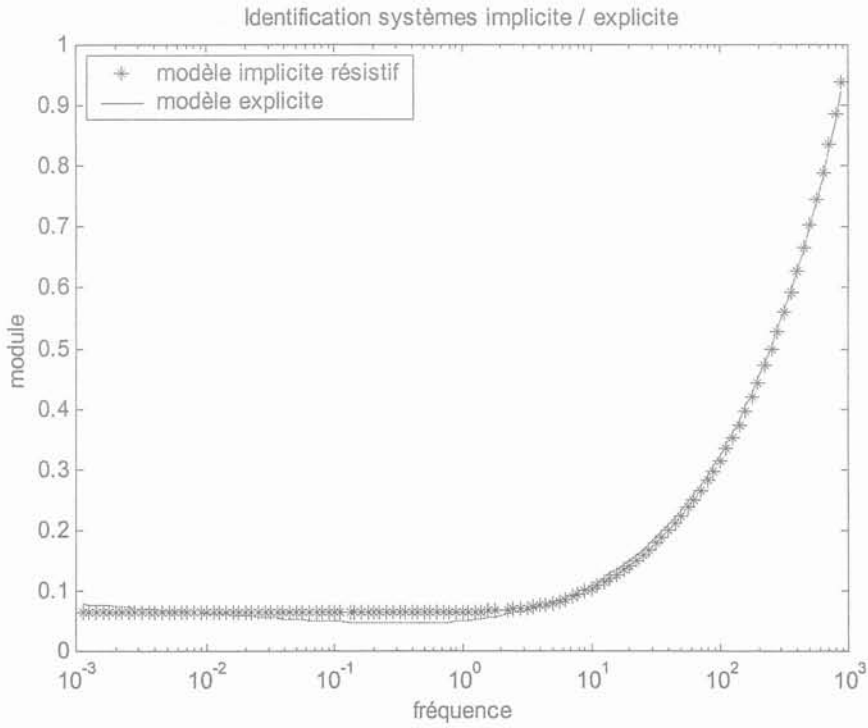
Après identification par une technique classique de moindres carrés, on détermine les paramètres du modèle explicite équivalent pour  $R_o = 64 \text{ m}\Omega$  et  $\omega_o = 26 \text{ rd/s}$  :

Paramètre du modèle explicite	Valeur identifiée
$A_o$	0.065
$\alpha$	0.78
$\beta$	0.36
$\omega_\alpha$	26.22
$\omega_\beta$	113.86

**Tableau A8-1.** Paramètres identifiés du modèle équivalent explicite

La Figure A8-1 représente la comparaison entre l'impédance d'ordre  $\frac{1}{2}$  et le modèle équivalent explicite.

La courbe en étoiles correspond à l'impédance  $Z_o$  servant de référence, la courbe en continu à l'identification du modèle par rapport au module.



**Figure A8-1.** Détermination d'un modèle équivalent explicite

On voit que le modèle donné par l'équation (A8-2) est relativement correct sur une large plage de fréquences (six décades), même si on note quelques écarts pour les basses et hautes fréquences.

Il est alors possible, en partant de l'étape numéro trois de notre algorithme, de construire un système d'état.

Cette méthode permet ainsi de déterminer la réponse temporelle d'un dispositif modélisé à l'aide de plusieurs systèmes d'ordre  $\frac{1}{2}$  implicites de constantes de temps différentes. Cependant, dans le cas d'une machine asynchrone, l'ordre du système d'état est plus élevé que celui construit à partir de notre algorithme, puisque le dénominateur du modèle (A8-2) introduit d'autres termes dérivés de nature explicite, et donc des variables d'état supplémentaires.

---

*Bibliographie*

---





[AGA-59] P.D. Agarwal

*Eddy-current losses in solid and laminated iron*, IEE Proceedings, May 1959, pp. 169-181.

[ALG-70] P.L. Alger

*Induction machines – Their behavior and uses*, Gordon and Breach, New York, 1970.

[ALS-97] Alsthom recherche

*Filtrage actif électromécanique*, Sauts technologiques, document interne Alsthom, 1997.

[AND-93] P.M. Anderson, A.A. Fouad

*Power system control and stability*, IEEE Press, New-York, 1993, ISBN 0 7803 1029 2.

[APP-96] C. Appino & al.

*Power losses in thick steel laminations with hysteresis*, J. Appl. Phys., Vol. 79, No. 8, April 1996, pp. 4575-4577.

[ARJ-99] M.A. Arjona, D.C. Macdonald

*Lumped modelling of open-circuit turbogenerator operational parameters*, IEEE Transactions on Energy Conversion, Vol. 14, No. 3, September 1999, pp. 347-353.

[ARN-81] P. Arnail

*Régimes transitoires et stabilité des machines à courants alternatifs*, Manuscrit de l'Ecole Nationale Supérieure d'Ingénieurs Electriciens de Grenoble, 1981.

[ARR-85] J. Arrillaga, D.A. Bradley, P.S. Bodger

*Power system harmonics*, John Wiley and sons, 1985, ISBN 0 471 90640 9.

[ARR-98] J. Arrillaga, B.C. Smith, N.R. Watson, A.R. Wood

*Power system harmonic analysis*, John Wiley, Chichester, 1998, ISBN 0 471 97548 6.

[ATA-92] V. Atarod, P.L. Dandeno, M.R. Iravani

*Impact of synchronous machine constants and models on the analysis of torsional dynamics*, IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 7, No. 4, November 1992, pp. 1456-1463.

[BAA-51.1] D.S. Baab, J.E. Williams

*Circuit analysis method for determination of ac impedances of machine conductors*, IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol. 70, 1951, pp. 661-666.

[BAA-51.2] D.S. Baab, J.E. Williams

*Network analysis of ac machine conductors*, IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol. 70, 1951, pp. 2001-2005.

**[BAK-99] B. Bak-Jensen, L. Østergaard**

*Estimation of the model parameters in equivalent circuit models of potential transformers*, PES'99 Winter Meeting, 31 January-4 February 1999, pp. 1053-1058.

**[BER-85.1] G. Bertotti**

*Physical interpretation of eddy current losses in ferromagnetic materials, I. Theoretical considerations*, J. Appl. Phys., Vol. 57, No. 6, March 1985, pp. 2110-2117.

**[BER-85.2] G. Bertotti**

*Physical interpretation of eddy current losses in ferromagnetic materials, II. Analysis of experimental results*, J. Appl. Phys., Vol. 57, No. 6, March 1985, pp. 2118-2126.

**[BER-88] G. Bertotti**

*General properties of power losses in soft ferromagnetic materials*, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 24, No. 1, January 1988, pp. 621-630.

**[BER-98] G. Bertotti**

*Hysteresis in magnetism*, Academic press (series in electromagnetism), 1998, ISBN 0-12-093270-9.

**[BES-96] Y. Besanger**

*Etude des FACTS (Flexible AC Transmission System) et de leur comportement dans les réseaux de transport et d'interconnexion*, Thèse de doctorat de l'Institut National Polytechnique de Grenoble, 1996.

**[BIB-99] Bibliothèque pour la Science**

*L'ordre du Chaos*, Belin, 1999.

**[BIS-93] H. Bissig, K. Reichert, T.S. Kulig**

*Modelling and identification of synchronous machines, a new approach with an extended frequency range*, IEEE Transactions on Energy Conversion, Vol. 8, No. 2, June 1993, pp. 263-271.

**[BLA-95] F. Blache**

*Modélisation électronique et électromagnétique d'un transformateur haute fréquence à circuit magnétique en fonte*, Thèse de doctorat de l'Institut National Polytechnique de Grenoble, 1995.

**[BOG-99] A. Boglietti**

*A first approach for the iron losses building factor determination*, IEEE Transactions on Energy Conversion, Vol. 14, No. 4, December 1999, pp. 489-493.

[BOL-87] M. Boldea, S.A. Nasar

*Unified treatment of core losses and saturation in the orthogonal-axis model of electric machines*, IEE Proceedings, Vol. 134, Pt. B, No. 6, November 1987, pp. 355-363.

[BOR-00] H. Bora Karayaka, A. Keyhani, B.L. Agrawal, D.A. Salin, G.T. Heydt

*Identification of armature, field, and saturated parameters of large steam turbine-generator from operating data*, IEEE Transactions on Energy Conversion, Vol. 15, No. 2, June 2000, pp. 181-187.

[BOS-76] A. Bossavit

*Définition et calcul d'une perméabilité équivalente pour l'acier saturé*, EDF Bulletin de la Direction des Etudes et Recherches – Série C (Mathématiques, informatique), No. 2, 1976, pp. 45-58.

[BOT] R. Botet

*Les fractales en physique*, Techniques de l'ingénieur, traité Sciences Fondamentales, AF 4 500, pp. 1-18.

[BOU-93] E. Bourgoïn

*Relations entre les composantes symétriques des courants induits d'une machine à induction et les harmoniques d'espace dans l'entrefer - études théorique et expérimentale*, Thèse de doctorat de l'Institut National Polytechnique de Grenoble, 1993.

[BOW-83] A.L. Bowden, E.J. Davies

*Analytic separation of the factors contributing to the eddy-current loss in magnetically nonlinear steel*, IEE Proceedings, Vol. 130, Pt. B, No. 5, 1983, pp. 364-372.

[CAN-69] I.M. Canay

*Causes of discrepancies on calculation of rotor quantities and exact equivalent diagrams of the synchronous machine*, IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-88, No. 7, July 1969, pp. 1114-1120.

[CAN-93] I.M. Canay

*Determination of the model parameters of machines from the reactance operators  $x_d(p)$  and  $x_q(p)$* , IEEE Transactions on Energy Conversion, Vol. 8, No. 2, June 1993, pp. 272-279.

[CAR-66] F. de Carfort, C. Foulard

*Asservissements linéaires continus*. Maîtrise E.E.A. C3-Automatique, Dunod Université, Paris, 1969.

**[CES-96] C. Cester**

*Etude des pertes magnétiques supplémentaires dans les machines asynchrones alimentées par onduleur à modulation de largeur d'impulsion*, Thèse de doctorat de l'Institut National Polytechnique de Grenoble, Juin 1996.

**[CHE-99] T. Chevalier**

*Modélisation et mesure des pertes de fer dans les machines électriques : application à la machine asynchrone*, Thèse de doctorat de l'Institut National Polytechnique de Grenoble, 1999.

**[CLE-84] J.P. Clerc, A.-M. S. Tremblay, G. Albinet, C.D. Mitescu**

*A.C. response of fractal networks*, J. Physique Letters, Vol. 45, No.19, 1984, pp. L.913 - L.924.

**[CON-87] Congrès de Cambridge**

*Brownian motion : a general discussion*, Royal society of chemistry, London, 1987.

**[COU-87] M.E. Coultres, P. Kundur, G.J. Rogers**

*On-line frequency response tests and identification of generators models*, IEEE Trans. on Energy Conversion, Vol. 2, September 1987, pp. 38-42.

**[CRE-85] W.H. Creer, D.W. Novotny, T.A. Lipo**

*Determination of equivalent circuits for induction machines with skin effect using terminal characteristics*, Electric Machines and Power Systems, Vol. 10, No. 5-6, 1985, pp. 379-394.

**[DAN-87] P.L. Dandeno, P. Kundur, A.T. Poray, H.M. Zein El-Din**

*Adaptation and validation of turbogenerator model parameters through on-line frequency response measurements*, IEEE Trans. on Energy Conversion, Vol. 2, September 1987, pp. 1656-1661.

**[DEE-96] E.M. Deeley, J. Xiang**

*Improved surface impedance methods for 2-D and 3-D problems*, IEEE Trans. on Magnetics, Vol. 24, No. 1, January 1988, pp. 209-211.

**[DEM-96] N.A. Demerdash, D.H. Gillott**

*A new approach for determination of eddy current and flux penetration in nonlinear ferromagnetic materials*, IEEE Trans. on Magnetics, Vol. 10, 1974, pp. 682-685.

**[DEW-13] L.V. Dewley**

*Two dimensionnal field in electrical engineering*, Dever Edition, 1913.

**[DOW-66] P.L. Dowell**

*Effects of eddy currents in transformer windings*, PROC. IEE, Vol. 113, No. 8, August 1966, pp. 1387-1394.

**[DUC-96] J.-P. Ducreux**

*Identification des paramètres des machines asynchrones par le calcul de champs électromagnétiques*, Note interne EDF, 1996.

**[EEA-98] Club EEA - SEE - MENRT**

*Les systèmes à dérivées non entières : théorie et applications*, Rapport de l'action thématique, 1998.

**[EEA-01] Club EEA - SEE - SDSE - MENRT**

*Les systèmes à dérivées non entières "CRONE Toll-box : une boîte à outils Matlab pour les systèmes fractionnaires"*, Rapport de l'action thématique, 2001.

**[ELS-88] A.M. El-Serafi, A.S. Abdallah, M.K. El-Sherbiny, E.H. Badawy**

*Experimental study of the saturation and the cross-magnetizing phenomenon in saturated synchronous machines*, IEEE Transactions on Energy Conversion, Vol. 3, No. 4, December 1988, pp. 815-823.

**[EPR-84] EPRI EL-3359**

*Improvement in accuracy of prediction of electrical machine constants and generator models for subsynchronous resonance conditions*, Final report, Vol.2, Electric Power Research Institute, April 1984.

**[FAL-85] M. Fallou**

*Conducteurs métalliques*, Techniques de l'ingénieur, Vol. D 2 II, D 092, 1985.

**[FAU-01] J. Faucher, T. Khaorapapong, H. Kabbaj**

*Parametric identification of fractional transfer function models of induction motor rotor bar*, Proc. of the IEEE SDEMPED Conference, International Symposium on Diagnostics for Electrical Machines, Power Electronics and Drives, Sept. 1-3, 2001, Grado (Italy), pp. 299-303.

**[FEE-96] J.J. Feeley**

*A simple dynamic model for eddy currents in a magnetic actuator*, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 32, No. 2, March 1996, pp. 453-458.

**[FOG-90] A. Foggia, R Perret**

*Formation électrotechnique sur machines synchrones et asynchrones*, Formation continue, Module: électrotechnique (3<sup>ème</sup> partie), Ecole Nationale Supérieure d'Ingénieurs Electriciens de Grenoble, Décembre 1990, pp. 120-135.

[FUC-88] E.F. Fuchs, M. Pouloujadoff, G.W. Neal

*Starting performance of saturable three-phase induction motors*, IEEE Transactions on Energy Conversion, Vol. 3, No. 3, September 1988, pp. 624-634.

[GAR-99] S.D. Garvey, W.T. Norris, S. Luft, R. Regan

*Prediction of high frequency characteristics of the windings of large electrical machines : a lumped-parameter reluctance-network analysis*, 9<sup>th</sup> International Conference on Electrical Machines and Drives, Conference Publication No. 468, IEE 1999, pp. 213-217.

[GDR] GDR Automatique

*La dérivation non entière en isolation vibratoire*, Rapport final du projet de recherche.

[GEN-92] G. Gentile, N. Rotondale, M. Torsini

*Investigations of inverter-fed induction motors under fault conditions*, PESC'92 Conference Proceedings, 1992, pp. 126-132.

[GER-99] H. Gerber

*Nonlinear transmission line analysis for determining harmonics*, IEEE Transactions on Energy Conversion, Vol. 14, No. 4, December 1999, pp. 1402-1405.

[GIE-99] J.F. Giéras

*Analytical method of calculating the electromagnetic field and power losses in ferromagnetic half-space, taking into account saturation and hysteresis*, Transactions of IEE, vol. 124, No. 77, November 1977, pp. 1098-1104.

[GIL-77] J.-C. Gille

*Introduction aux systèmes asservis non-linéaires*, Dunod, Paris, 1977.

[GRE-89] G. Grellet

*Pertes dans les machines tournantes*, Techniques de l'Ingénieur, Traité de génie électrique, Vol. D 3 II, D 3450, 1989

[GUE-98] C.-A. Guérin

*Diffusion sur les mesures fractales*, thèse de doctorat d'Aix-Marseille, 1998.

[HAB-98] T.C. Haba, M. Martos, G. Ablart, P. Bidan

*Composants électroniques à impédance fractionnaire*, ESAIM Proceedings, Fractional differential systems : Models, methods and applications, Vol. 5, 1998, pp.99-109, URL : <http://www.emath.fr/PROC/vol.5/>

[HAM-79] P. Hammond

*Applied Electromagnetism*, Pergamon Press, 1979.

[HAR-75] R.G. Harley, B. Adkins

*The general theory of alternating current machines*, Chapman & Hall, London, 1975.

[HEL-68] B. Heller, M.S.R. Sarma

*The electromagnetic field in solid iron*, Acta technica csav, english, No. 6, 1968, pp. 735-753.

[HEN-99] S. Henschel, H.W. Dommel

*Non iterative synchronous machine parameter identification from frequency response tests*, IEEE Trans. on Power Systems, Vol. 14, No. 2, May 1999, pp. 553-560.

[IDE-99] K. Ide, S. Wakui, K. Shima, K. Miyakawa, Y. Yagi

*Analysis of saturated synchronous reactances of large turbine generator by considering cross-magnetizing reactances using finite elements*, IEEE transactions on Energy Conversion, Vol. 14, No. 1, March 1999, pp. 66-71.

[IEE-85] IEEE Motor reliability working group

*Report on large motor reliability survey of industrial and commercial installations*, IEEE transactions on Industry Applications, Vol. IA-21, No. 4, July-August 1985, pp. 853-872.

[IEE-95] IEEE Std

*Standard Procedure for Obtaining Synchronous Machine Parameters by StandStill Frequency Response Testing*, IEEE Std 115 A, 1995.

[IEE-96] IEEE Std

*Standard Procedure for polyphase induction motors and generators*, IEEE Std 112, 1996.

[IEE-99] IEEE/PES working group #12 of the synchronous machinery subcommittee of the electric machinery committee

*Experience with standstill frequency response (SSFR) testing and analysis of salient pole synchronous machines*, IEEE transactions on Energy Conversion, Vol. 14, No. 4, December 1999, pp. 1209-1217.

[IVA-80] A. Ivanov-Smolenski

*Machines électriques*, Editions Mir, Moscou, 1980

[JAR-98] A. Jarosz

*Etude de la température et des vibrations des développantes d'alternateur hydraulique*, Thèse de doctorat de l'Institut National Polytechnique de Grenoble, 1998.

[JER-01] N. Jérance, G. Rostaing, J.-P. Rognon, A. Foggia

*Modeling of synchronous machines for diagnostic purposes using reluctance networks*, Proc. of the IEEE SDEMPED Conference, International Symposium on Diagnostics for



Electrical Machines, Power Electronics and Drives, Sept. 1-3, 2001, Grado (Italy), pp. 501-506.

**[KAB-97] H. Kabbaj**

*Identification d'un modèle type circuit prenant en compte les effets de fréquences dans une machine asynchrone à cage d'écureuil*, Thèse de doctorat de l'Institut National Polytechnique de Toulouse, 1997.

**[KAM-92] I. Kamwa, P. Viarouge, H. Le-Hui, J. Dickinson**

*A frequency-domain maximum likelihood of synchronous machine high order models using SSFR test data*, IEEE Transactions on Energy Conversion, Vol. 7, No. 3, September 1992, pp. 525-536.

**[KAM-94.1] I. Kamwa, P. Viarouge**

*On equivalent circuit structures for empirical modeling of turbine-generators*, IEEE Transactions on Energy Conversion, Vol. 9, No. 3, September 1994, pp. 579-592.

**[KAM-94.2] I. Kamwa, P. Viarouge, H. Le Huy**

*Direct and indirect approaches for deriving synchronous machine stability models from SSFR test data*, ICEM'94, International Conference on Electrical Machines, A.9, 1994, pp. 379-385.

**[KAM-96] I. Kamwa**

*Notes sur les tests SSFR de Drummondville*, Technical report in french of IREQ, Hydro-Québec, 1996.

**[KAM-97] I. Kamwa, M. Farzaneh**

*Data translation and order reduction for turbine-generator models used in network studies*, IEEE Transactions on Energy Conversion, Vol. 12, No. 2, June 1997, pp. 118-126.

**[KAW-00] B. Kawkabani, J.J Simond, R. Wetter**

*Investigation of transient overvoltages of low voltage induction motors due to IGBT – inverter supply*, ICEM'00, 28-30 August 2000, pp. 1197-1200.

**[KEY-89] A. Keyhani, S. Hao, G. Dayat**

*The effects of noise on frequency-domain parameters estimation of synchronous machine models*, IEEE Transactions on Energy Conversion, Vol. 4, No. 4, December 1989, pp. 600-607.

**[KHA-01] T. Khaorapapong**

*Modélisation d'ordre non entier des effets de fréquence dans les barres rotoriques d'une machine asynchrone*, Thèse de doctorat de l'Institut National Polytechnique de Toulouse, 2001.

[KLI-70] E.A. Klingshirn, H.E. Jordan

*Simulation of polyphase induction machines with deep rotor bars*, IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-89, No. 6, July/August 1970, pp. 1038-1043.

[KRA-86] P.C. Krause

*Analysis of electric machinery*, McGraw-Hill Book Compagny, New-York, 1986.

[KUN-94] P. Kundur

*Power system stability and control*, Electric Power Research Institute, McGraw-Hill, 1994.

[LAR-99] E. Laroche, E. Sedda, J.-P. Louis, H. Abou-Kandil, C. Durieu

*Uncertainties in the model of an induction machine fed by inverter*, Electrimacs'99, pp. I;65 - I;70.

[LEM-90] A. Le Méhauté

*Les géométries fractales*, Traité des nouvelles technologies, Hermès, 1990.

[LEV-65] P. Lévy

*Processus stochastiques et mouvement brownien*, Gauthier-Villars, Paris, 1965.

[LEV-90] W. Levy, C.F. Landy, M.D. McCulloch

*An accurate model for deep bar and saturation effects in induction motors*, ICEM 90, pp. 215-220.

[LIN-01] J. Lin

*Modélisation et identification des systèmes d'ordre non entier*, Thèse de doctorat de l'Université de Poitiers, 2001.

[LIP-84] T.A. Lipo, A. Consoli

*Modeling and simulation of induction motors with saturable leakage reactances*, IEEE Transactions on Industry Applications, Vol. IA-20, No. 1, January/February 1984, pp. 180-189.

[LIU-85] S.H. Liu

*Fractal model for the ac response of a rough interface*, Physical Review Letters, Vol. 55, No. 5, July 1985, pp. 529-532.

[LIW-54] M. Liwschitz-Garik

*Skin-effect bars of squirrel-cage rotors*, IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-73, part III.A, April 1954, pp. 255-258.

**[LIW-55] M. Liwschitz-Garik**

*Computation of skin-effect in bars of squirrel-cage rotors*, IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-74, part III, August 1955, pp. 768-771.

**[LOF-92] A.W. Lofti, F.C. Lee**

*Proximity losses in short coils of circular cylindrical windings*, IEEE/PESC'92 Conference Proc., New-York, 1992, pp. 1254-1260.

**[LOP-92] J.M. Lopera, M. Pernia, J. Diaz, J.M. Alonso, F. Nuno**

*A complete transformer electric model, including frequency and geometry effects*, IEEE/PESC'92 Conference Proc., New-York, 1992, pp. 1247-1252.

**[MAC-96] H.M. Mac Connell**

*Eddy-current phenomena in ferromagnetic materials*, AIEE transactions, Part. I (Communication Electronics), Vol. 73, July 1954, pp.226-235.

**[MAG-92] P.C. Magnusson, G.C. Alexander, V.K. Tripathi**

*Transmission lines and wave propagation*, 3<sup>ème</sup> édition, CRC Press, London, 1992, ISBN 0 8493 4279 1.

**[MAL-99] R. Mallough Saunders**

*Standstill frequency-response methods and salient-pole synchronous machines*, IEEE Transactions on Energy Conversion, Vol. 14, No. 4, December 1999, pp. 1033-1037.

**[MAY-98] I. Mayergoyz**

*Nonlinear diffusion of electromagnetic fields – with applications to eddy currents and superconductivity*, Academic Press, 1998, ISBN 0 12 480870 0.

**[MEE-96] D.C. Meeker, E.H. Maslen, M.D. Noh**

*An augmented circuit model for magnetic bearings including eddy currents, fringing and leakage*, IEEE Trans. on Magnetics, Vol. 32, No. 4, July 1996, pp. 3219-3227.

**[MOO-93] S.I. Moon, A. Keyhani**

*Estimation of induction machine parameters from standstill time domain data*, IEEE/IAS'93 Conference Proc., 1993, pp. 336-342.

**[OKU-00] Y. Okuyama, K. Hitosugi, S. Moriyasu**

*Surge propagation and overvoltages for PWM-inverter driven motors*, ICEM'00, 28-30 August 2000, pp. 1192-1196.

**[NAB-94] S.I. Nabeta**

*Etude des régimes transitoires des machines synchrones par la méthode des éléments finis*, Thèse de doctorat de l'INPG, 1994.

[NAN-99] **S. Nandi, H.A. Toliyat**

*Fault diagnosis of electrical machines - A review*, IEMDC'99 International Electric Machines and Drives Conference, June 1999, pp. 219-221.

[NIE-92] **V.A. Niemela, H.A. Owen, T.G. Wilson**

*Frequency independent element cross coupled secondaries model for multiwinding transformers*, IEEE/PESC'92 Conference Proc., New-York, 1992, pp. 1261-1268.

[NIV-96] **L. Nivanen**

*Etude de l'interaction entre une onde électromagnétique et un milieu fractal déterministe*, Thèse de doctorat de l'Université des Sciences et Technologies de Lille, 1996.

[NOU-98] **A. Nourdine**

*Schéma équivalent des machines à champ tournant et impédance d'ordre fractionnaire*, Rapport de D.E.A. Génie Electrique de l'I.N.P.G., Septembre 1998.

[NOU-99] **A. Nourdine, N. Retière, M. Ivanès**

*Modélisation d'ordre non entier des machines électriques*, EF'99 Electrotechnique du Futur, Lille, 30-31 Mars 1999.

[OJO-90] **J.O.Ojo, A. Consoli, T.A. Lipo**

*An improved model of saturated induction machines*, IEEE Transactions on Industry Applications, Vol. 26, No. 2, March/April 1990, pp. 212-221.

[O'KEL-72] **D. O'Kelly**

*Flux penetration in a ferromagnetic material including hysteresis and eddy-current effects*, J. Phys. D : Appl. Phys., Vol. 5, 1972, pp. 203-213.

[OLD-74] **K.B. Oldham, J. Spanier**

*The fractional calculus – Theory and applications and differentiation and integration to arbitrary order*, Academic Press, New York, 1974.

[OUS-95] **A. Oustaloup**

*La dérivation non entière*, Hermès, Paris, 1995.

[PAR-98] **D.Y. Park, H.C. Karmaker, G.E. Dawson, A.R. Eastham**

*Standstill frequency response testing and modeling of salient-pole synchronous machines*, IEEE Transactions on Energy Conversion, Vol. 13, No. 3, September 1998, pp. 230-236.

[PEL-96] **C. Pelissou**

*Contrôle du couple d'une machine asynchrone pour la traction ferroviaire à moyenne et grande vitesse - Transition des modes de commande et de MLI*, Thèse de doctorat de l'INPG, 1996.

**[PER-94] J.C. Perrier**

*Magnétisme et Electrotechnique - Détermination des propriétés en courant alternatif*, Formation continue INPG, 3<sup>ème</sup> édition, Avril 1994.

**[PIP-58] L.A. Pipes**

*Applied mathematics for engineers and physicists – 2<sup>nd</sup> edition*, Mac-Graw Hill, New York, 1958.

**[POD-99] I. Podlubny**

*Fractional Differential Equations*, Mathematics in Science and Engineering, Vol. 198, Academic Press, 1999.

**[POL-60] M. Poloujadoff**

*Contribution à l'étude des moteurs asynchrones monophasés*, Thèse de docteur ès sciences de l'INPG, 1960.

**[POL-67] M. Poloujadoff, M. Ivanès**

*Comparaison des schémas équivalents du moteur asynchrone monophasé*, Revue Générale de l'Electricité, Vol. 76, No. 1, Janvier 1967.

**[PRO-99] Projet d'animation scientifique**

*Opérateurs pseudo-différentiels et représentations diffusives en modélisation, contrôle et signal*, Rapport d'activité, 1999.

**[RAC-88] L.Z. Racz, B. Bokay**

*Power system stability*, Elsevier Science Publishers, Amsterdam, 1988, ISBN 0 444 41713 3.

**[RAI-00] B. Raison**

*Détection et localisation de défaillances sur un entraînement électrique*, Thèse de doctorat de l'INPG, 2000.

**[RET-97] N. Retière**

*Etude des défauts dans les associations onduleur - machine asynchrone. Exemple d'une chaîne de traction*, Thèse de doctorat de l'INPG, 1997.

**[RET-00] N. Retière, M. Ivanès**

*An introduction to electric machine modeling by systems of non-integer order. Application to double-cage induction machine*, IEEE Transactions on Energy Conversion, Vol. 14, No. 4, December 1999, pp.1026 - 1032.

[RIU-00.1] D. Riu, N. Retière, M. Ivanès

*Electric machine modelling by half-order systems*, ICEM'00 International Conference on Electrical Machines, Helsinki, August 2000, pp. 1646-1650.

[RIU-00.2] D. Riu, N. Retière

*Modélisation des machines par des systèmes d'ordre ½*, Revue Internationale de Génie Electrique, Vol. 4, No. 3, Décembre 2000, pp. 467-493.

[RIU-01.1] D. Riu, N. Retière, M. Ivanès

*Turbine generator modeling by non-integer order systems*, IEMDC'01 International Electric Machines and Drives Conference, Cambridge, June 2001, pp. 185-187.

[ROY-83] D. Roye

*Modélisation thermique des machines électriques tournantes. Application à la machine à induction*, Thèse de doctorat de l'Institut National Polytechnique de Grenoble, 1983.

[ROY-98] D. Roye, D. Diallo

*Contrôle vectoriel à flux rotorique orienté des machines asynchrones*, Formation continue, 1998.

[SAH-94] O. Sahraoui

*Calcul des schémas équivalents de la machine asynchrone par la méthode des éléments finis*, Thèse de doctorat de l'Institut National Polytechnique de Grenoble, 1994.

[SAP-88] B. Sapoval, J.-N. Chazalviel, J. Peyrière

*Electrical response of fractal and porous interfaces*, Physical review A, Vol. 38, No. 11, December 1988, pp. 5867-5887.

[SAU-99] R.M. Saunders

*Standstill frequency-response methods of salient-pole synchronous machines*, IEEE Transactions on Energy Conversion, Vol. 14, No. 4, December 1999, pp. 1033-1037.

[SCH-99] A. Schellmanns

*Circuits équivalents pour transformateurs multi-enroulements : Application à la CEM conduite d'un convertisseur*, Thèse de doctorat de l'INP de Grenoble, 1999.

[SEG-77] G. Séguier, F. Notelet

*Electrotechnique industrielle*, Technique et documentation, Paris, 1977.

[SHE-94] M.A. Shehata, F. Hentschel

*Effect of current displacement consideration on the behavior of inverter-fed squirrel-cage induction motors*, EMPS, Vol. 22, 1994, pp. 381-393.

**[SLE-90] G.R. Slemon**

*An equivalent circuit approach to analysis of synchronous machines with saliency and saturation*, IEEE Transactions on Energy Conversion, Vol. 5, No. 3, September 1990, pp. 538-544.

**[SLE-99] SLEMON G.R., AWAD M.L.**

*On equivalent circuit modeling for synchronous machines*, IEEE Transactions on Energy Conversion, December 1999, Vol. 14, No. 4, p. 982-988.

**[STO-74] R.L. Stoll**

*The analysis of eddy currents*, Oxford University Press, London, 1974.

**[TAI-95] J. Taine, J.P. Petit**

*Transferts thermiques, Mécanique des fluides anisothermes*, Dunod, Paris, 1995.

**[TAR-93] E.J. Tarasiewicz, A.S. Morched, A. Narang, E.P. Dick**

*Frequency dependent eddy current models for nonlinear iron cores*, IEEE Trans. on Power Systems, Vol. 8, No. 2, May 1993, pp. 588-597.

**[THO-94] O.V. Thorsen**

*Development and industrial application of a practical model for simulation of saturated deep bar induction machines*, IEEE IAS Annual Meeting, 1994, pp. 137-142.

**[THO-95] O.V. Thorsen, M. Dalva**

*A survey of the reliability with an analysis of faults on variable frequency drives in industry*, EPE'95 Conference proceedings, pp. 1033-1038.

**[THI-01] T. Thiringer**

*Comparison of reduced-order dynamic models of induction machines*, IEEE Trans. on Power Systems, Vol. 16, No. 1, February 2001, pp. 119-126.

**[TRI-36] P. Trickey**

*Induction motor resistance ring width*, Trans. Amer. Inst. Elec. Engrs., Vol. 55, pp. 144-150, 1936.

**[VAS-90] E. Vassent**

*Contribution à la modélisation des moteurs asynchrones par la méthode des éléments finis*, Thèse de doctorat de l'Institut National Polytechnique de Grenoble, 1990.

**[VAS-92] P. Vas**

*Electrical machines and drives - A space vector theory approach*, Clarendon Press, Oxford, 1992.

[VAS-93] **P. Vas**

*Parameter estimation, condition monitoring and diagnosis of electrical machines*, Clarendon Press, Oxford, 1993.

[VER-99] **J. Verbeeck, R. Pintelon, P. Lataire**

*Relationships between parameter sets of equivalent synchronous machine models*, IEEE Transactions on Energy Conversion, Vol. 14, No. 4, December 1999, pp. 1075-1080.

[WAL-96] **A. Walton**

*Characteristics of equivalent circuits of synchronous machines*, IEE Proc.-Electr. Power Appl., Vol. 143, No. 1, January 1996, pp. 31-40.

[WIL-89] **J.R. Willis, G.J. Brock, J.S. Edmonds**

*Derivation of induction motor models from standstill frequency response tests*, IEEE Transactions on Energy Conversion, Vol. 4, No. 4, December 1989, pp. 608-615.

[YAH-95] **A. Yahiaoui, F. Bouillault**

*Saturation effect on the electromagnetic behaviour of an induction machine*, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 31, No. 3, May 1995, pp. 2036-2039.

[ZHU-90] **D. Zhu**

*Modélisation des machines asynchrones alimentées par des convertisseurs statiques*, Thèse de doctorat de l'Institut National Polytechnique de Grenoble, 1990.



