



**HAL**  
open science

**Analyse théorique, analyse numérique et contrôle de  
systèmes d'interaction fluide-structure et de systèmes de  
type ondes**

Takéo Takahashi

► **To cite this version:**

Takéo Takahashi. Analyse théorique, analyse numérique et contrôle de systèmes d'interaction fluide-structure et de systèmes de type ondes. Mathématiques [math]. Université Henri Poincaré - Nancy I, 2008. tel-00590675

**HAL Id: tel-00590675**

**<https://theses.hal.science/tel-00590675>**

Submitted on 4 May 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



UFR S.T.M.I.A.  
École Doctorale IAE + M  
Université Henri Poincaré - Nancy 1  
D.F.D. Mathématiques

---

Mémoire présenté par

Takéo TAKAHASHI

en vue d'obtenir le diplôme

**d'HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES**

spécialité : mathématiques appliquées

**Analyse théorique, analyse numérique et contrôle de systèmes  
d'interaction fluide-structure et de systèmes de type ondes**

soutenu publiquement le 23 Juin 2008

devant le jury composé de MM.

GEORGES-HENRI COTTET	Rapporteur	Professeur de l'Université Joseph Fourier (Grenoble)
EDUARD FEIREISL	Examinateur	Directeur de recherches au Mathematical Institute (Prague)
ANTOINE HENROT	Examinateur	Professeur à l'École des Mines de Nancy
PIERRE-LOUIS LIONS	Rapporteur	Professeur au Collège de France
JEAN-PIERRE PUEL	Examinateur	Professeur de l'Université de Versailles St Quentin
MARIUS TUCSNAK	Examinateur	Professeur de l'Université Henri Poincaré (Nancy 1)
ENRIQUE ZUAZUA	Rapporteur	Professeur de l'Universidad Autónoma de Madrid

---

Institut Élie Cartan Nancy CNRS UMR 7502 - INRIA Lorraine projet CORIDA  
B.P. 239 - 54506 Vandœuvre-lès-Nancy Cedex





An expert is a person who has made all the mistakes that can be made in a very narrow field.

Niels Bohr

# Remerciements

C'est avec beaucoup de plaisir que je profite de ces quelques lignes pour remercier les nombreuses personnes qui ont contribué, de différentes manières, à ce travail.

En tout premier lieu, je voudrais remercier Marius Tucsnak pour m'avoir, non seulement initié à la recherche en tant que directeur de thèse, mais aussi pour m'avoir donné par la suite l'opportunité de continuer à travailler dans son équipe-projet CORIDA à l'INRIA. J'ai bénéficié dans ce cadre d'excellentes conditions de travail qui m'ont permis d'avancer plus facilement.

Je voudrais aussi exprimer toute ma gratitude à Georges-Henri Cottet, Pierre-Louis Lions, et Enrique Zuazua d'avoir accepté de rapporter cette thèse d'habilitation. Je suis également très reconnaissant à Eduard Feireisl, Antoine Henrot et Jean-Pierre Puel de m'avoir fait l'honneur de participer à ce jury.

Mes remerciements s'adressent aussi à tous mes collaborateurs avec lesquels j'ai pu partager des idées et des connaissances ainsi que de longues séances de travail et de calculs : Samuel Amstutz, Séverine Baillet, Patricio Cumsille, Matthieu Hillairet, Oleg Imanuvilov, Frédéric Lagoutière, Guillaume Legendre, Jaime Ortega, Karim Ramdani, Lionel Rosier, Jorge San Martín, Jean-François Scheid, Nicolas Seguin, Loredana Smaranda, Jean-Baptiste Tavernier, Gérald Tenenbaum, Boris Vexler, etc.

Merci à Colette Erzen de m'avoir aidé à organiser cette soutenance. Merci aussi à Raymond Michel et à Nathalie Piérache pour leur aide permanente et efficace à la bibliothèque. Merci à l'assistante du projet, Laurence Quirot, dont le travail remarquable m'a fait gagner un temps précieux et permis d'organiser plusieurs conférences cette année. Enfin merci à Mario, Pauline, Bertrand, Yannick, Nicolae, Émile et Leïla pour leur aide dans l'organisation du pot de thèse.



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Analyse théorique de problèmes d'interaction fluide-structure</b>	<b>6</b>
1.1	Introduction . . . . .	6
1.2	Solutions fortes pour un système solide rigide-fluide visqueux incompressible ([T3], [T15], [T16]) . . . . .	8
1.3	Solutions classiques pour un système solide rigide-fluide parfait ([T8], [T7]) . . . . .	13
1.4	Un modèle simplifié 1D fluide non visqueux-particule ([T5]) . . . . .	16
1.5	Solutions fortes pour un système poisson-fluide visqueux incompressible ([T14]) . . . . .	18
<b>2</b>	<b>Analyse numérique</b>	<b>23</b>
2.1	Introduction . . . . .	23
2.2	Méthode globale pour la discrétisation fluide-solide rigide ([T13]) . . . . .	24
2.3	Résultats de convergence pour la méthode A.L.E. ([T6], [T21]) . . . . .	27
2.4	Quelques tests numériques ([T13], [T14]) . . . . .	29
<b>3</b>	<b>Contrôle de systèmes d'interaction fluide-structure</b>	<b>36</b>
3.1	Introduction . . . . .	36
3.2	Contrôlabilité d'un système solide rigide-fluide visqueux incompressible ([T4]) . . . . .	36
3.3	Nage d'un micro-organisme ([T12]) . . . . .	39
<b>4</b>	<b>Méthodes fréquentielles appliquées à la contrôlabilité et à la stabilisation</b>	<b>43</b>
4.1	Introduction . . . . .	43
4.2	Stabilisation dans le cas $B$ borné ([T11], [T10]) . . . . .	46
4.3	Stabilisation numérique ([T11], [T10]) . . . . .	48
4.4	Observabilité/Contrôlabilité dans le cas $B$ non borné ([T9]) . . . . .	52
<b>5</b>	<b>Dépendance par rapport au domaine de quelques systèmes d'EDP</b>	<b>56</b>
5.1	Dérivée topologique pour des problèmes d'évolution ([T1]) . . . . .	56
5.2	Le système de Stokes dans un domaine périodique ([T2]) . . . . .	61





# Liste de Publications

## Publications dans des revues internationales

- [T1] AMSTUTZ, S., TAKAHASHI, T., VEXLER, B. Topological sensitivity analysis for time-dependent problems. À paraître dans *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*.
- [T2] BAILLET, S., HENROT, A., AND TAKAHASHI, T. Convergence results for a semilinear problem and for a Stokes problem in a periodic geometry. *Asymptot. Anal.* 50, 3-4 (2006), 325–337.
- [T3] CUMSILLE, P., AND TAKAHASHI, T. Wellposedness for the system modelling the motion of a rigid body of arbitrary form in an incompressible viscous fluid. À paraître dans *Czechoslovak Math. J.*.
- [T4] IMANUVILOV, O., AND TAKAHASHI, T. Exact controllability of a fluid-rigid body system. À paraître dans *J. Math. Pures Appl.*
- [T5] LAGOUTIÈRE, F., SEGUIN, N., AND, TAKAHASHI, T. A simplified 1D model of inviscid fluid-solid interaction. À paraître dans *J. Diff. Equ.*
- [T6] LEGENDRE, G., AND TAKAHASHI, T. Convergence of a finite element discretization for an Arbitrary Lagrangian Eulerian formulation of a fluid-structure interaction problem. À paraître dans *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*
- [T7] ORTEGA, J., ROSIER, L., AND TAKAHASHI, T. On the motion of a rigid body immersed in a bidimensional incompressible perfect fluid. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* 24, 1 (2007), 139–165.
- [T8] ORTEGA, J., ROSIER, L., AND TAKAHASHI, T. Classical solutions for the equations modelling the motion of a ball in a bidimensional incompressible perfect fluid. *M2AN Math. Model. Numer. Anal.* 39, 1 (2005), 79–108.
- [T9] RAMDANI, K., TAKAHASHI, T., TENENBAUM, G., AND TUCSNAK, M. A spectral approach for the exact observability of infinite-dimensional systems with skew-adjoint generator. *J. Funct. Anal.* 226, 1 (2005), 193–229.
- [T10] RAMDANI, K., TAKAHASHI, T., AND TUCSNAK, M. Internal stabilization of the plate equation in a square : the continuous and the semi-discretized problems. *J. Math. Pures Appl. (9)* 85, 1 (2006), 17–37.
- [T11] RAMDANI, K., TAKAHASHI, T., AND TUCSNAK, M. Uniformly exponentially stable approximations for a class of second order evolution equations. Application to the optimal control of flexible structures. À paraître dans *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*.
- [T12] SAN MARTÍN, J., TAKAHASHI, T., AND TUCSNAK, M. A Control Theoretic Approach to the Swimming of Microscopic Organisms. À paraître dans *Quart. Appl. Math.*.

- [T13] SAN MARTÍN, J., SCHEID, J.-F., TAKAHASHI, T., AND TUCSNAK, M. Convergence of the Lagrange-Galerkin method for the equations modelling the motion of a fluid-rigid system. *SIAM J. Numer. Anal.* 43, 4 (2005), 1536–1571.
- [T14] SAN MARTÍN, J., SCHEID, J.-F., TAKAHASHI, T., AND TUCSNAK, M. An Initial and Boundary Value Problem Modeling Fish-like Swimming. À paraître dans *Arch. Ration. Mech. Anal.*.
- [T15] TAKAHASHI, T. Analysis of strong solutions for the equations modeling the motion of a rigid-fluid system in a bounded domain. *Adv. Differential Equations* 8, 12 (2003), 1499–1532.
- [T16] TAKAHASHI, T., AND TUCSNAK, M. Global strong solutions for the two-dimensional motion of an infinite cylinder in a viscous fluid. *J. Math. Fluid Mech.* 6, 1 (2004), 53–77.

## Publications dans des revues nationales

- [T17] TAKAHASHI, T. Existence of strong solutions for the problem of a rigid-fluid system. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* 336, 5 (2003), 453–458.
- [T18] SAN MARTÍN, J., SCHEID, J.-F., TAKAHASHI, T., AND TUCSNAK, M. Convergence of the Lagrange-Galerkin method for a fluid-rigid system. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* 339, 1 (2004), 59–64.

## Chapitres de livres

- [T19] BARANGER, C., BAUDIN, G., BOUDIN, L., DESPRÉS, B., LAGOUTIÈRE, F., LAPÉBIE, E., AND TAKAHASHI, T. Liquid jet generation and break-up. In *Numerical methods for hyperbolic and kinetic problems*, vol. 7 of *IRMA Lect. Math. Theor. Phys.* Eur. Math. Soc., Zürich, 2005, pp. 149–176.
- [T20] DESPRÉS, B., JAOUEN, S., MAZERAN, C., AND TAKAHASHI, T. Numerical study of a conservative bifluid model with interpenetration. In *Numerical methods for hyperbolic and kinetic problems*, vol. 7 of *IRMA Lect. Math. Theor. Phys.* Eur. Math. Soc., Zürich, 2005, pp. 177–207.

## Articles soumis

- [T21] SAN MARTÍN, J., SMARANDA, L., AND TAKAHASHI, T. Convergence of a finite element /ALE method for the Stokes equations in a domain depending on time.

# Introduction

Dans ce mémoire, je présente mes travaux de recherche en les regroupant en trois parties :

1. Interaction fluide-structure
2. Méthode fréquentielle pour la contrôlabilité et la stabilisation
3. Dépendance par rapport au domaine de quelques EDP

La première partie, la plus importante des trois, a été découpée en trois sous-parties : l'analyse théorique, l'analyse numérique et les problèmes de contrôle. Le système étudié dans chacune des sous-parties modélise le mouvement d'une structure à l'intérieur d'un fluide. Il couple des équations aux dérivées partielles non linéaires (pour le mouvement du fluide) avec des équations différentielles ordinaires (pour le mouvement de la structure). Une des difficultés importantes vient du fait que ces problèmes sont des problèmes à frontière libre.

Dans la première sous-partie, on considère plusieurs systèmes fluide-structure donc on étudie le caractère bien posé. Je commence par le système composé d'un ou de plusieurs solides rigides se déplaçant à l'intérieur d'un fluide visqueux incompressible. Dans ce cas les équations aux dérivées partielles correspondant au mouvement du fluide sont les équations classiques de Navier-Stokes. Le résultat obtenu dans ce cas est l'existence et l'unicité de solutions fortes. Une première étape dans la démonstration est un changement de variables pour se ramener à un domaine cylindrique. Dans le cas d'un solide entouré d'un fluide remplissant l'extérieur du domaine du solide, le changement de variables "naturel" est simple à trouver mais introduit un terme difficile à traiter. Dans le cas d'un domaine borné, le changement de variables est moins évident à obtenir car il faut garder le domaine fluide-structure fixe. Par la suite je présente deux résultats d'existence et d'unicité pour le système d'un solide rigide dans un fluide non visqueux incompressible. Dans ce cas, les équations du mouvement pour le fluide sont les équations classiques d'Euler. L'étude de ce système se fait dans le cas bidimensionnel et dans le cas où le fluide remplit l'extérieur du domaine du solide rigide. Dans le cas unidimensionnel on peut aussi considérer l'interaction d'un fluide non visqueux avec une particule. Dans ce cas, l'équation modélisant le mouvement du fluide est l'équation de Burgers. L'interaction entre la particule et le fluide est de nature différente de l'interaction considérée dans les cas précédents. Une des difficultés propre à l'étude de ce système vient du fait que les solutions de l'équation de Burgers ne sont pas nécessairement régulières même avec une condition initiale régulière. Ainsi, il faut pouvoir décrire l'interaction entre les solutions discontinues du fluide (chocs) et la particule : c'est pourquoi nous considérons ici le problème de Riemann du système associé. Un autre système fluide-structure dont on étudie le caractère bien posé est le système composé d'un corps déformable se déplaçant à l'intérieur d'un fluide visqueux incompressible. La déformation du solide est donnée mais sa position est inconnue, de sorte que l'on travaille avec un problème à frontière libre. C'est une manière simple de modéliser par exemple la nage d'un poisson.

La seconde sous-partie est consacrée à l'analyse numérique sur des problèmes fluide-structure. Il existe au moins deux grandes familles de schémas numériques permettant d'approcher les solutions de ce type de problèmes. On peut soit travailler avec un maillage du domaine du fluide uniquement soit travailler avec un maillage du domaine total fluide-structure. Dans le premier cas, le désavantage est que le maillage n'est plus valable dès que la structure bouge. On doit donc trouver un moyen de ne pas remailler à chaque itération en temps. Dans le second cas, il faut trouver une manière de prendre en compte que le maillage contient les deux domaines, fluide et structure, et non pas seulement celui du fluide. Je commence par présenter une méthode numérique utilisant une formulation globale pour simuler l'interaction de solides rigides dans un fluide visqueux incompressible. L'avantage de cette méthode est d'utiliser un maillage global sur tout le domaine du système fluide-solide. Sous certaines hypothèses, il est possible de démontrer la convergence de cette méthode. Une autre méthode classique pour simuler l'interaction d'une structure et d'un fluide est la méthode A.L.E. (Arbitrary Lagrangian Eulerian) qui consiste à déplacer le maillage afin de suivre le déplacement de la structure. Dans un premier temps, nous étudions la convergence du schéma de cette méthode pour approcher les solutions d'un système de Stokes écrit sur un domaine non cylindrique mais connu a priori. Puis, nous étudions la convergence du schéma dans le cas d'un problème fluide visqueux incompressible-solide rigide.

Dans la dernière sous-partie, nous nous intéressons à deux problèmes de contrôle pour des systèmes fluide-structure. Dans le premier problème, on considère, dans une cavité bornée, un solide rigide dans un fluide visqueux incompressible et l'on contrôle sur une partie non vide arbitrairement petite du domaine du fluide. On cherche à contrôler les vitesses du fluide et du solide rigide mais aussi la position du solide rigide. Nous avons considéré le cas particulier où le solide rigide est une boule et où le mouvement est bidimensionnel. Notre résultat est la contrôlabilité locale à zéro pour les vitesses et la contrôlabilité locale exacte pour la position de la boule. Un des intérêts de considérer des problèmes de contrôle sur des systèmes fluide-structure est de pouvoir aborder la question de la nage d'organismes aquatiques. En effet, la nage peut être vu comme un problème de contrôle où l'on cherche à contrôler à la position via une déformation adéquate. Cette approche pourrait donner des indications pour comprendre les mécanismes complexes de la nage et permettrait de proposer des réponses aux nombreuses questions que se posent biologistes et mécaniciens sur les déplacements d'organismes aquatiques. C'est l'objet du second problème où nous considérons le cas d'un micro-organisme se déplaçant via des cils agissant sur son bord. En utilisant le fait que l'on travaille avec une structure petite, on peut simplifier le modèle et se ramener à l'étude d'un système de dimension finie sur lequel on montre des résultats de contrôlabilité exacte pour plusieurs type de contrôles.

La seconde partie de ce mémoire est consacrée à la méthode fréquentielle pour la contrôlabilité ou la stabilisation. Cette approche est à comparer avec d'autres méthodes - dites méthodes temporelles - où l'on travaille directement sur le système ou sur son adjoint. L'avantage d'une approche fréquentielle et de pouvoir travailler sans la variable temporelle et cela peut dans de nombreux cas simplifier l'utilisation des méthodes usuelles comme la méthode des multiplicateurs, la méthode des séries non harmoniques, etc. Nous travaillons toujours dans le cas où l'opérateur  $A$  du système non contrôlé est un opérateur anti-adjoint et selon les cas avec un opérateur de contrôle  $B$  borné ou non borné. Dans le cas borné, nous obtenons un critère de stabilisation portant uniquement sur les paquets de vecteurs propres de l'opérateur  $A$ . Grâce à ce critère, nous pouvons redémontrer un résultat de Jaffard sur la stabilisation de plaques carrées. De plus, ce critère est bien adapté pour pouvoir attaquer le problème de la stabilisation uniforme des systèmes discrétisés par des schémas numériques. Plus précisément, dans ce

problème, on considère une équation aux dérivées partielles comme par exemple l'équation des ondes, que l'on stabilise de manière à ce que son énergie décroisse exponentiellement. Lorsque l'on discrétise l'équation par rapport à la variable spatiale, on peut se demander si l'énergie des solutions du problème approché décroît exponentiellement uniformément par rapport au paramètre de discrétisation. La même question peut se poser pour un problème de contrôlabilité ou d'observabilité. En général, cette décroissance exponentielle uniforme de l'énergie n'est pas vérifiée, les hautes fréquences n'étant que faiblement stabilisées. Pour remédier à ce problème nous ajoutons une viscosité artificielle au schéma classique et nous montrons que de manière générale cette ajout permet d'obtenir la décroissance exponentielle uniforme de l'énergie. De manière plus précise nous développons un cadre abstrait dans lequel les valeurs propres de  $A$  admettent un gap, ce qui est assez réducteur, mais nous utilisons la même méthode pour traiter le cas des plaques en dimension 2 pour montrer qu'il s'agit d'une restriction technique. Finalement, dans le cas d'un opérateur  $B$  non borné, nous développons un critère de contrôlabilité portant toujours sur une relation entre  $B$  et les paquets de vecteurs propres de  $A$ . Ce critère nous permet d'obtenir un résultat de contrôlabilité original : l'équation des plaques dans un carré est contrôlable via un contrôle sur sa frontière, le contrôle pouvant être à support aussi petit que l'on veut. C'est un résultat à comparer à la condition d'optique géométrique nécessaire et suffisante dans le cas de l'équation des ondes.

Dans la dernière partie de ce mémoire, je considère deux problèmes dans lesquels intervient la dépendance d'une solution d'une EDP par rapport à son domaine. Dans l'un d'entre eux, il s'agit d'optimiser la forme d'un domaine pour minimiser un critère. Contrairement à l'optimisation "classique", on change ici la topologie du domaine en insérant des petites inclusions. Pour savoir si cette inclusion est intéressante pour la minimisation, on regarde le signe d'une dérivée dite dérivée topologique. La théorie dans le cas d'équations elliptiques est bien développée même s'il reste de nombreux problèmes ouverts. Nous étendons des résultats connus dans le cas elliptique à des équations d'évolution comme l'équation de la chaleur ou l'équation des ondes. Le second problème est très simple à décrire : on considère un domaine composé de  $N$  domaines identiques mais translaté dans une direction. On considère dans ce domaine un fluide en régime stationnaire sur lequel on applique une force périodique de période  $L$  dans la direction du domaine. Est-ce que la solution du système de Stokes correspondant converge vers la solution de Stokes périodique de période  $L$ ? Nous obtenons des résultats partiels i.e. avec certaines conditions aux bords.

# Chapitre 1

## Analyse théorique de problèmes d'interaction fluide-structure

### 1.1 Introduction

Comprendre comment les oiseaux ou les libellules volent, comment les poissons et les dauphins nagent ou comment lymphocytes et ciliés se déplacent sont des problèmes fascinants et nombreux sont les scientifiques qui s'y sont intéressés. Mais les mécanismes mis en jeu peuvent être très différents (les mouvements de globules rouges dans un écoulement sanguin et le déplacement d'un avion ont peu de points communs) et sont de plus souvent complexes. En effet, les déplacements des organismes précédents se font en interagissant avec le milieu fluide dans lequel ils sont plongés. Il s'agit d'un intérêt de l'étude de l'interaction entre une structure et un fluide. Cette étude commence par une partie de modélisation dans laquelle on doit faire attention

1. à ne pas trop simplifier pour ne pas perdre des propriétés qualitatives importantes du problème que l'on cherche à modéliser ;
2. à ne pas garder un système trop compliqué sur lequel toute étude théorique serait hors de portée.

Par la suite, on peut étudier d'un point de vue théorique et d'un point de vue numérique le système obtenu et - si possible - retrouver le phénomène que l'on cherchait à modéliser, comme la nage ou le vol d'animaux.

Ce plan se heurte à de nombreux obstacles à chacune des étapes de l'étude. Dans ce chapitre, nous présentons des résultats concernant l'analyse théorique de problèmes fluide-structure. Les principales difficultés de cette analyse sont des difficultés que l'on rencontre dans les autres parties de l'étude de tels problèmes :

1. Les équations modélisant le mouvement du fluide demandent à elles seules un travail important. Il s'agit souvent d'équations non linéaires (équations de Navier-Stokes, équations d'Euler), et, même sans structure, leur étude est loin d'être complète malgré le nombre impressionnant de publications portant sur leur analyse.
2. Les équations du fluide et les équations de la structure sont couplées et généralement ce couplage est assez "fort". Cela peut se voir par exemple dans la résolution théorique ou numérique des systèmes fluide-structure : on ne peut souvent pas résoudre séparément les équations du fluide et les équations de la structure.

3. Enfin, la dernière difficulté provient du fait que les équations de fluide sont écrites en coordonnées Eulériennes : le domaine du fluide n'est donc pas fixe car la structure se déforme ou se déplace. De plus comme cette déformation ou ce déplacement sont inconnues, on doit travailler avec un problème à frontière libre.

Parmi les travaux plus anciens, on peut citer ceux de Thomson, Tait et Kirchhoff au 19<sup>e</sup> siècle et de Lamb au 20<sup>e</sup>. Leurs études portent sur le cas d'un fluide potentiel ce qui simplifie beaucoup l'étude. Dans le cas où le fluide est visqueux et incompressible et la structure un solide rigide, les premiers travaux ont été obtenus par Serre [121], Weinberger [133] et Judakov [92], la plupart des autres publications mathématiques sur ce sujet datant des dix dernières années. Une grande partie d'entre elles correspondent toujours au système composé d'un ou de plusieurs solides rigides et d'un fluide visqueux incompressible. Plusieurs auteurs ont travaillé sur le caractère bien posé des équations associées à ce système : Galdi [58], [57], [59], Galdi et Silvestre [60], [62], [61] dans le cas où le système remplit tout l'espace et Desjardins et Esteban [44]; Hoffmann et Starovoitov [83, 84]; Conca, San Martín et Tucsnak [38]; Gunzburger, Lee and Seregin [77]; Grandmont et Maday [73]; San Martín, Starovoitov et Tucsnak [119]; E. Feireisl [52] dans le cas où le système fluide-solide est confiné dans un domaine borné. Dans ce dernier cas, les résultats obtenus correspondent à l'existence de solutions (faibles ou fortes) tant que le solide ne touche pas la frontière extérieure. Dans ma thèse, j'ai démontré l'existence de solutions fortes dans les deux cadres : le cas où le système le fluide-structure remplit tout l'espace (dans ce cas, nous supposons que le solide est une boule) et dans le cas où le système fluide-structure est confiné dans un domaine borné. À chaque fois on démontre l'existence globale tant qu'il n'y a pas contacts entre solides (et avec données petites lorsque l'on travaille en dimension 3 en espace).

Une question naturelle est de savoir ce qui arrive au moment du contact. Un premier pas dans cette direction a été fait par San Martín, Starovoitov, Tucsnak [119]. Dans ce papier, ils démontrent qu'en dimension 2, s'il y a contact entre deux solides, ce contact a lieu à vitesse et accélération relatives nulles. En d'autres termes, il n'y a pas de chocs, ce qui semble contraire à l'intuition correspondant au phénomène physique. Plus tard, Feireisl [52] a généralisé ce résultat en dimension 3. Vázquez et Zuazua montrent dans [132] que dans le modèle réduit à une dimension d'espace, les solides ne se touchent jamais. Finalement, très récemment, et de manière indépendante, Hesla [80] et Hillairet [81] ont démontré qu'il ne peut y avoir contact entre solides rigides lorsque l'on considère le mouvement de boules dans un fluide visqueux incompressible en dimension 2. Dans le cas d'un fluide parfait, un résultat de Houot et Munnier [85] démontre que les chocs entre solides rigides sont possibles. Ils se placent dans une géométrie simple (un disque au-dessus d'un plan) et obtiennent une solution explicite du problème et vérifie qu'il y a contact en temps fini.

D'autres études ont été faites, toujours dans le cadre de l'interaction de solides rigides avec un fluide visqueux incompressible : certains auteurs ont travaillé sur le comportement en temps long (Vázquez et Zuazua [131], Munnier et Zuazua [109]). Plusieurs études ont été faites sur l'analyse numérique de schéma numérique utilisé pour discrétiser les équations du mouvement de ce système : Maury [106, 107]; Glowinski, Pan, Hesla, Joseph et Périaux [69]; Nobile [111]; Bertulozza, Ismail et Maury [16], etc. Enfin, quelques travaux concernent des problèmes de contrôle associé à ce système : Doubova et Fernandez-Cara [48] (en dimension 1), Boulakia et Osses [24].

Finalement, quelques analyses portent sur des systèmes fluide-structure autres que celui de solides rigides dans un fluide visqueux incompressible, comme par exemple le cas d'un fluide



visqueux compressible (Desjardins, Esteban [45]; Feireisl [53]; Boulakia [22]) ou le cas d'un solide élastique (Desjardins, Esteban, Grandmont, Le Tallec [46]; Boulakia [23]; Coutand, Shkoller [40]). Cependant dans ces derniers cas, ils restent de nombreuses questions ouvertes et peu a été fait en dehors de l'analyse du caractère bien posé.

## 1.2 Solutions fortes pour un système solide rigide-fluide visqueux incompressible ([T3], [T15], [T16])

Le problème d'interaction entre un ou plusieurs solides rigides et un fluide visqueux incompressible a donné lieu à de nombreux travaux. Notre contribution consiste surtout en l'obtention de résultats d'existence et d'unicité de solution fortes. Nous avons travaillé dans le cas où le domaine du système fluide-solides rigides remplit tout l'espace et dans le cas où ce système est confiné dans une cavité bornée. Remarquons qu'il s'agit pour l'instant de la seule manière d'obtenir l'unicité pour ce problème fluide-structure. En particulier, l'unicité de solutions faibles en dimension 2 qui se démontre sans problème sans solide, reste dans ce cas un problème ouvert. Nos résultats portent sur les cas bidimensionnel et tridimensionnel.

Dans le cas borné, le résultat obtenu est publié dans [T15] et généralise le résultat de Grandmont et Maday [73]. Ces auteurs se basent sur un résultat de Beale [15] portant sur l'existence de solutions fortes des équations de Navier-Stokes dans un domaine variable mais connu. Leur méthode consiste à utiliser ce résultat pour résoudre les équations du fluide lorsque l'on impose le mouvement du solide rigide, puis à résoudre les équations du solide rigide lorsque l'on impose le mouvement du fluide. Finalement ils utilisent un point fixe de Banach pour obtenir l'existence de solutions fortes. Il s'agit là d'une méthode très naturelle pour résoudre ce type de système et la plupart des ingénieurs ou mécaniciens utilisent la même méthode pour simuler numériquement un système fluide-structure. Malheureusement, un des problèmes de cette méthode provient du fait que le couplage entre le fluide et la structure est fort et par conséquent cette séparation entre la résolution de chaque élément conduit à une perte de précision : dans le résultat de [73], les auteurs sont obligés de supposer que la densité de la structure est très grande devant celle du fluide pour avoir une application contractante (et obtenir leur résultat). Dans [T15], une idée importante est de résoudre en même temps les équations du fluide et les équations de la structure.

Pour présenter la méthode que l'on a employée, on commence par écrire les équations du système. Ces équations diffèrent légèrement lorsqu'on les écrit en dimension 2 ou en dimension 3. Commençons par le mouvement d'un solide rigide à l'intérieur d'un fluide visqueux incompressible en dimension 3 :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = f \quad \text{dans } \mathcal{F}(\xi, Q), t \in (0, T), \quad (1.1)$$

$$\operatorname{div} u = 0 \quad \text{dans } \mathcal{F}(\xi, Q), t \in (0, T), \quad (1.2)$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, t \in (0, T), \quad (1.3)$$

$$u = \xi' + \omega \wedge (x - \xi) \quad \text{sur } \partial\mathcal{S}(\xi, Q), t \in (0, T), \quad (1.4)$$

$$m\xi'' = - \int_{\partial\mathcal{S}(\xi, Q)} \sigma(u, p)n \, d\Gamma + \int_{\mathcal{S}(\xi, Q)} \rho_S f \, dx \quad \text{dans } (0, T), \quad (1.5)$$

$$(I\omega)' = - \int_{\partial\mathcal{S}(\xi, Q)} (x - \xi) \wedge \sigma(u, p)n \, d\Gamma + \int_{\mathcal{S}(\xi, Q)} \rho_S (x - \xi) \wedge f \, dx \quad \text{dans } (0, T). \quad (1.6)$$

Dans le système ci-dessus, les inconnues sont  $u = (u_1, u_2, u_3)$  la vitesse du fluide en coordonnées Eulériennes,  $p$  la pression du fluide,  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  le centre de masse du solide et  $Q \in S0(3)$  l'orientation du solide. Plus précisément, le domaine occupé par le solide rigide est donné par la formule suivante :

$$\mathcal{S}(\xi, \theta) = Q\mathcal{S}^0 + \xi, \quad (1.7)$$

où  $\mathcal{S}_0$  est un domaine de référence. Le domaine du fluide est le complémentaire du domaine du solide dans  $\Omega$  i.e.

$$\mathcal{F}(\xi, Q) = \Omega \setminus \overline{\mathcal{S}(\xi, Q)}. \quad (1.8)$$

La vitesse angulaire  $\omega$  est relié à  $Q$  par la formule suivante :

$$\frac{d}{dt}Qx = \omega \wedge (Qx) \quad \forall x \in \mathbb{R}^3. \quad (1.9)$$

La constante  $\nu$  est la viscosité du fluide, et  $\rho_S$  la densité du solide rigide. Elle dépend de  $\xi$  et de  $\theta$  par la formule

$$\rho_S(t, x) = \rho_S^0(Q^*(x - \xi(t))), \quad (1.10)$$

où  $Q^*$  est la matrice adjointe de  $Q$ . En particulier, la masse  $m$  et le moment d'inertie  $I$  sont donnés par

$$m = \int_{\mathcal{S}(\xi, Q)} \rho_S(t, x) dx = \int_{\mathcal{S}^0} \rho_S^0(y) dy \quad (1.11)$$

et

$$\begin{aligned} I(t)_{i,j} &= \int_{\mathcal{S}(\xi, Q)} \rho_S(t, x) (e_i \wedge (x - \xi(t))) \cdot (e_j \wedge (x - \xi(t))) dx \\ &= \int_{\mathcal{S}^0} \rho_S^0(y) (Q^* e_i \wedge y) \cdot (Q^* e_j \wedge y) dy. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Remarquons que  $m$  est une constante tandis que  $I$  dépend du temps. Le tenseur de Cauchy du fluide  $\sigma(u, p)$  est donné par

$$\sigma(u, p) = 2\nu D(u) - p \text{Id}, \quad (1.13)$$

où

$$D(u)_{i,j} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.14)$$

est le gradient symétrique de  $u$ .

En dimension 2, ce système est très similaire :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = f \quad \text{dans } \mathcal{F}(\xi, \theta), \quad t \in (0, T), \quad (1.15)$$

$$\text{div } u = 0 \quad \text{dans } \mathcal{F}(\xi, \theta), \quad t \in (0, T), \quad (1.16)$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \quad t \in (0, T), \quad (1.17)$$

$$u = \xi' + \theta' (x - \xi)^\perp \quad \text{sur } \partial\mathcal{S}(\xi, \theta), \quad t \in (0, T), \quad (1.18)$$

$$m\xi'' = - \int_{\partial\mathcal{S}(\xi, \theta)} \sigma(u, p)n d\Gamma + \int_{\mathcal{S}(\xi, \theta)} \rho_S f dx \quad \text{dans } (0, T), \quad (1.19)$$

$$I\theta'' = - \int_{\partial\mathcal{S}(\xi, \theta)} (x - \xi)^\perp \cdot \sigma(u, p)n d\Gamma + \int_{\mathcal{S}(\xi, \theta)} \rho_S (x - \xi)^\perp \cdot f dx \quad \text{dans } (0, T). \quad (1.20)$$

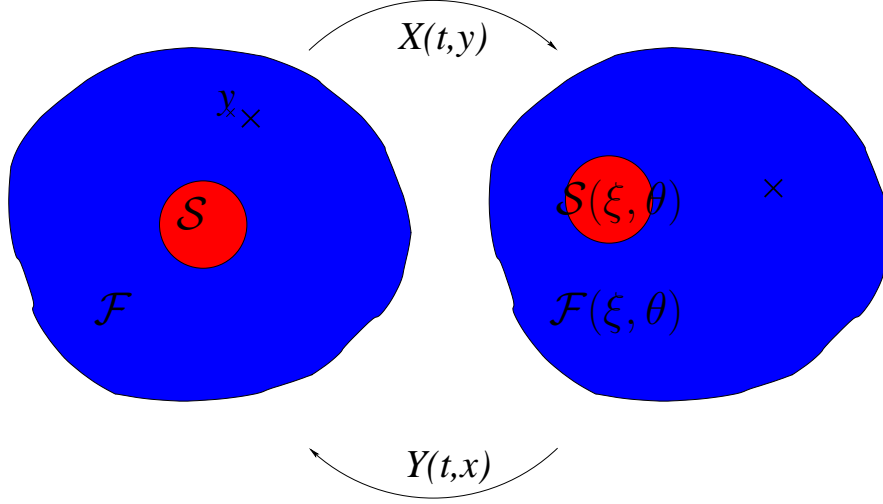


FIG. 1.1 – Changement de variables

Dans ce cas, on écrit simplement que  $Q$  est la matrice rotation d'angle  $\theta$  i.e.  $Q = R_\theta$ . Enfin, pour tout vecteur  $x \in \mathbb{R}^2$ , le vecteur  $x^\perp$  est défini par

$$x^\perp = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}. \quad (1.21)$$

En dimension 2 d'espace,  $I$  devient un réel strictement positif et indépendant du temps donné par

$$I = \int_{S(\xi, Q)} \rho_S(t, x) \|x - \xi(t)\|^2 dx = \int_{S^0} \rho_S^0(y) \|y\|^2 dy.$$

Pour résoudre ces systèmes, on procède en trois étapes :

- Changement de variables pour se ramener à un système écrit sur un domaine cylindrique.
- Résolution locale en temps.
- Estimation a priori pour étendre la solution.

Pour la première étape, l'idée est de construire un changement de variables qui permette de fixer les solides rigides, sans modifier le domaine total  $\Omega$  (c.f. figure 1.1).

Dans le cas où l'on considère un seul solide rigide entouré par un fluide remplissant tout l'espace, ce changement de variable est très simple à construire : il suffit d'inverser le mouvement rigide. On pose donc

$$y = Q^*(t)(x - \xi(t)) \quad (1.22)$$

et les nouvelles inconnues sont

$$U(t, y) = Q^*u(t, Q(t)y + \xi(t)), \quad P(t, y) = p(t, Q(t)y + \xi(t)). \quad (1.23)$$

C'est le changement de variables utilisés par Serre [121], Galdi [59], Galdi et Silvestre [60] et Silvestre [122]. Dans un contexte légèrement différent c'est aussi le changement de variable utilisé par Hishida [82]. En domaine borné, le problème de ce changement de variable est bien sûr que le domaine  $\Omega$  contenant le système fluide-solide est transformé en un domaine variable  $\Omega(t)$ . Même avec ce désavantage, il s'agit du changement de variables utilisé par Conca, San

Martín et Tucsnak dans [38] pour démontrer l'existence de solution faible en dimension 3 et dans un domaine borné. Leur méthode consiste à mettre un terme de pénalisation sur la partie de  $\Omega(t)$  qui n'est pas dans  $\Omega$ .

Une autre manière de procéder consiste à "tronquer" ce changement de variables rigide. Pour cela on considère un voisinage du solide rigide et une fonction de troncature sur ce voisinage et on l'utilise pour tronquer la fonction courant associée à la vitesse rigide. Cela permet d'obtenir un nouveau champs de vitesse  $\Lambda$  tel que

$$\Lambda(t, x) = \xi'(t) + \omega \times (x - \xi(t)) \quad \text{dans un voisinage de } \mathcal{S}(t), \quad (1.24)$$

$$\Lambda(t, x) = 0 \quad \text{dans un voisinage de } \partial\Omega, \quad (1.25)$$

$$\operatorname{div} \Lambda = 0 \quad \text{dans } \Omega. \quad (1.26)$$

La dernière condition est intéressante pour conserver la divergence du champ de vitesse par ce changement de variables et n'est pas difficile à obtenir ici. Le changement de variables est alors obtenu comme solution d'un problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} X(t, y) = \Lambda(t, X(t, y)), \\ X(0, y) = y. \end{cases} \quad (1.27)$$

On vérifie sans difficulté que  $X(t)$  transforme bien le solide  $\mathcal{S}_0$  en  $\mathcal{S}(t)$  tout en laissant  $\Omega$  invariant. Il est inversible et on note  $Y(t)$  l'inverse de  $X(t)$ . Le désavantage de ce changement de variables est que le système transformé n'est pas aussi simple que celui que l'on obtiendrait avec le changement de variables (1.22)-(1.23). Plus précisément, si l'on pose

$$U(t, y) = J_Y(t, X(t))u(t, X(t, y)), \quad P(t, y) = p(t, Q(t)y + \xi(t)) \quad (1.28)$$

et

$$\ell(t) = Q^*(t)\xi'(t), \quad \alpha(t) = Q^*(t)\theta'(t) \quad (1.29)$$

on obtient un système de la forme

$$\frac{\partial U}{\partial t} + [\mathcal{M}U] + [\mathcal{N}U] - \nu[\mathcal{L}U] + [\mathcal{G}P] = F, \quad t \in (0, T), \quad y \in \mathcal{F}_0, \quad (1.30)$$

$$\operatorname{div} U = 0, \quad t \in (0, T), \quad y \in \mathcal{F}_0, \quad (1.31)$$

$$U(t, y) = 0, \quad y \in \partial\Omega, \quad t \in [0, T], \quad (1.32)$$

$$U(t, y) = \ell(t) + \alpha(t) \times y, \quad y \in \partial\mathcal{S}_0, \quad t \in [0, T], \quad (1.33)$$

$$m\ell'(t) = - \int_{\partial\mathcal{S}_0} \sigma(U, P)n \, d\Gamma - M\alpha(t) \wedge \ell(t) + F_M, \quad t \in (0, T), \quad (1.34)$$

$$I_0\alpha'(t) = - \int_{\partial\mathcal{S}_0} y \times \sigma(U, P)n \, d\Gamma + I_0\alpha(t) \wedge \alpha(t) + F_I, \quad t \in (0, T), \quad (1.35)$$

$$U(0, y) = U^0(y), \quad y \in \mathcal{F}_0, \quad (1.36)$$

$$\xi(0) = \xi^0, \quad \xi'(0) = \xi^1, \quad \omega(0) = \omega^0. \quad (1.37)$$

L'idée pour résoudre ce système en temps petit est d'utiliser le fait que le changement de variables est égal à l'identité à l'instant initial et que ce changement de variables est régulier en temps. Par conséquent on a des estimations du type

$$\|X - \text{Id}_\Omega\|_{L^\infty(0,T)} \leq CT, \quad \|Y - \text{Id}_\Omega\|_{L^\infty(0,T)} \leq CT. \quad (1.38)$$

ainsi que des estimations des coefficients des opérateurs  $\mathcal{M}$ ,  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{G}$ . Le terme  $\mathcal{N}$  est un terme non linéaire en le champs de vitesses  $U$  (c'est la transformation du terme  $(u \cdot \nabla)u$ ). Il s'estime en utilisant le lemme suivant.

**Lemme 1.2.1.** *Pour toutes fonctions*

$$u, v \in L^2(0, T; H^2(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; H^1(\Omega)),$$

on a  $(u \cdot \nabla)v \in L^{5/2}(0, T; L^2(\Omega))$ .

En utilisant ces estimations et en considérant le problème linéaire fluide-structure

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \nu \Delta U + \nabla P = \tilde{F}, \quad t \in (0, T), \quad y \in \mathcal{F}_0, \quad (1.39)$$

$$\text{div } U = 0, \quad t \in (0, T), \quad y \in \mathcal{F}_0, \quad (1.40)$$

$$U(t, y) = 0, \quad y \in \partial\Omega, \quad t \in [0, T], \quad (1.41)$$

$$U(t, y) = \ell(t) + \alpha(t) \times y, \quad y \in \partial\mathcal{S}_0, \quad t \in [0, T], \quad (1.42)$$

$$M\ell'(t) = - \int_{\partial\mathcal{S}_0} \sigma(U, P)n \, d\Gamma + \tilde{F}_M, \quad t \in (0, T), \quad (1.43)$$

$$I_0\alpha'(t) = - \int_{\partial\mathcal{S}_0} y \times \sigma(U, P)n \, d\Gamma + \tilde{F}_I, \quad t \in (0, T), \quad (1.44)$$

on peut résoudre le système (1.30)-(1.37) pour des temps  $T$  petit. Pour obtenir l'existence globale, on doit obtenir des estimations a priori : en multipliant le système par  $u$  on obtient une estimation de l'énergie i.e. de

$$\|u(t)\|_{L^2(\mathcal{F}(t))}^2 + m|\xi'(t)|^2 + |\omega|^2 + \int_0^t \|D(u(s))\|_{L^2(\mathcal{F}(s))}^2 \, ds.$$

En multipliant ensuite par  $\frac{\partial u}{\partial t}$  nous obtenons une estimation de la norme  $H^1$  de  $u$ , ce qui nous donne l'existence globale tant qu'il n'y a pas de contacts entre solides.

Il est important de remarquer que lors de la résolution locale en temps nous ne découplons pas les équations du fluide et les équations du solide rigide, mais nous les résolvons en même temps via le système (1.39)-(1.44).

Lorsque l'on considère le problème dans tout l'espace, i.e.  $\Omega = \mathbb{R}^2$  ou  $\Omega = \mathbb{R}^3$ , on est tenté d'utiliser un changement de variables plus simple du type (1.22)-(1.23). Par exemple lorsque  $\mathcal{S}_0$  est une boule, on peut prendre

$$y = x - \xi(t) \quad (1.45)$$

ce qui donne le système suivant

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} - \nu \Delta \bar{u} + [(\bar{u} - \bar{\ell}) \cdot \nabla] \bar{u} + \nabla \bar{p} = \bar{f}, \quad (t, y) \in (0, T) \times \mathcal{F}(0), \quad (1.46)$$

$$\operatorname{div} \bar{u} = 0, \quad (t, y) \in (0, T) \times \mathcal{F}(0), \quad (1.47)$$

$$\bar{u}(y, t) = \bar{\ell}(t) + \bar{\omega}(t) \wedge y, \quad (t, y) \in (0, T) \times \partial\mathcal{S}(0), \quad (1.48)$$

$$m\bar{\ell}'(t) = - \int_{\partial\mathcal{S}(0)} \sigma(\bar{u}, \bar{p})n \, d\Gamma + \int_{\mathcal{S}(0)} \rho\bar{f}(y, t) \, dy, \quad t \in (0, T), \quad (1.49)$$

$$\bar{I}\bar{\omega}'(t) = - \int_{\partial\mathcal{S}(0)} y \wedge (\sigma(\bar{u}, \bar{p})n) \, d\Gamma + \int_{\mathcal{S}(0)} y \wedge \rho\bar{f}(y, t) \, dy, \quad t \in (0, T). \quad (1.50)$$

Ce système s'étudie de la même manière que le système précédent sauf que le passage par l'estimation des coefficients de  $\mathcal{L}$ ,  $\mathcal{M}$ , etc. n'est plus nécessaire. On obtient encore dans ce cas l'existence et l'unicité globale de solutions fortes [T3].

Par contre lorsque le solide  $\mathcal{S}_0$  n'est plus une boule, le changement de variables ne peut plus être seulement une translation. Il faut prendre en compte la rotation du solide, i.e. utiliser un changement de variables du type (1.22). Dans ce cas, on obtient

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} - \nu \Delta \bar{u} + [(\bar{u} - \bar{\ell} - \bar{\omega} \wedge y) \cdot \nabla] \bar{u} + \nabla \bar{p} + \bar{\omega} \wedge \bar{u} = \bar{f}, \quad (t, y) \in (0, T) \times \mathcal{F}(0), \quad (1.51)$$

$$\operatorname{div} \bar{u} = 0, \quad (t, y) \in (0, T) \times \mathcal{F}(0), \quad (1.52)$$

$$\bar{u}(y, t) = \bar{\ell}(t) + \bar{\omega}(t) \wedge y, \quad (t, y) \in (0, T) \times \partial\mathcal{S}(0), \quad (1.53)$$

$$m\bar{\ell}'(t) = - \int_{\partial\mathcal{S}(0)} \sigma(\bar{u}, \bar{p})n \, d\Gamma + \int_{\mathcal{S}(0)} \rho\bar{f}(y, t) \, dy + \bar{f}_M(t), \quad t \in (0, T), \quad (1.54)$$

$$\bar{I}\bar{\omega}'(t) = - \int_{\partial\mathcal{S}(0)} y \wedge (\sigma(\bar{u}, \bar{p})n) \, d\Gamma + \int_{\mathcal{S}(0)} y \wedge \rho\bar{f}(y, t) \, dy + \bar{f}_I(t), \quad t \in (0, T), \quad (1.55)$$

avec

$$\bar{f}_m(t) = -m\bar{\omega}(t) \times \bar{\ell}(t); \quad \bar{f}_I(t) = (\bar{I}\bar{\omega}(t)) \times \bar{\omega}(t). \quad (1.56)$$

Le problème pour étudier un tel système vient du terme  $[(\bar{\omega} \wedge y) \cdot \nabla] \bar{u}$ . Il est possible d'attaquer directement ce problème : c'est ce qui est fait dans [82] et dans [60]. Même dans le cas d'une vitesse angulaire constante ([82]), l'étude est complexe. On peut signaler par exemple que l'opérateur associé n'est plus analytique. Nous avons choisi une autre approche dans [T3] : nous reprenons le changement de variables introduit dans le cas d'un domaine borné. Plus précisément, au lieu de translater et de tourner tout l'espace pour garder le solide fixe, nous ne faisons cela que localement autour du solide. Il y a deux avantages à utiliser ce changement de variables. Le premier est que l'on peut obtenir de meilleurs résultats, comme par exemple l'unicité des solutions. L'autre avantage est que nous pouvons avec cette méthode traiter le cas de plusieurs solides rigides dans tout l'espace. Par contre, nous perdons la simplicité des équations (1.51)-(1.56). Si l'on veut étudier le comportement en temps long comme dans [131] ou dans [109], les équations obtenues avec notre changement de variables ne semblent pas très bien adaptées.

### 1.3 Solutions classiques pour un système solide rigide-fluide parfait ([T8], [T7])

Dans cette section, on considère le cas d'un solide rigide se déplaçant à l'intérieur d'un fluide parfait en dimension 2. Le système fluide-solide rigide remplit tout l'espace. Les équations du

fluide sont les équations d'Euler, et le système complet du mouvement s'écrit :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = 0 \quad \text{dans } \mathcal{F}(\xi, \theta), \quad t \in (0, T), \quad (1.57)$$

$$\operatorname{div} u = 0 \quad \text{dans } \mathcal{F}(\xi, \theta), \quad t \in (0, T), \quad (1.58)$$

$$u \cdot n = (\xi' + \theta' (x - \xi)^\perp) \cdot n \quad \text{sur } \partial\mathcal{S}(\xi, \theta), \quad t \in (0, T), \quad (1.59)$$

$$m\xi'' = - \int_{\partial\mathcal{S}(\xi, \theta)} pn \, d\Gamma \quad \text{dans } (0, T), \quad (1.60)$$

$$I\theta'' = - \int_{\partial\mathcal{S}(\xi, \theta)} (x - \xi)^\perp \cdot pn \, d\Gamma \quad \text{dans } (0, T). \quad (1.61)$$

Nous avons démontré l'existence et l'unicité de solutions classiques au système précédent dans deux cas : le cas où le solide rigide est une boule, ce qui permet de faire un changement de variables du type (1.45) et le cas où le solide a une forme arbitraire, ce qui oblige à utiliser soit un changement de variables du type (1.22), soit un changement de variables similaires à celui utilisé dans le cas d'un domaine borné. Dans ce cas, nous avons préféré utiliser le changement de variables (1.22) et traiter le problème du terme  $[(\theta' y^\perp) \cdot \nabla] \bar{u}$  en utilisant des espaces à poids.

Les équations après changement de variables s'écrivent

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \left[ (\bar{u} - \bar{\ell} - r y^\perp) \cdot \nabla \right] \bar{u} + \nabla \bar{p} + r \bar{u}^\perp = 0 \quad \text{dans } \mathcal{F}, \quad t \in (0, T), \quad (1.62)$$

$$\operatorname{div} \bar{u} = 0 \quad \text{dans } \mathcal{F}, \quad t \in (0, T), \quad (1.63)$$

$$\bar{u} \cdot n = (\ell + r y^\perp) \cdot n \quad \text{sur } \partial\mathcal{S}, \quad t \in (0, T), \quad (1.64)$$

$$m\ell' = - \int_{\partial\mathcal{S}} \bar{p}n \, d\Gamma - mr\ell^\perp \quad \text{dans } (0, T), \quad (1.65)$$

$$Ir' = - \int_{\partial\mathcal{S}} y^\perp \cdot \bar{p}n \, d\Gamma \quad \text{dans } (0, T). \quad (1.66)$$

Nous avons noté  $r = \theta'$  et non  $\omega$  comme dans ce qui précède car dans l'étude des équations d'Euler, la vorticité, généralement noté  $\omega$  et définie par  $\omega = \operatorname{rot} \bar{u}$ , joue un rôle essentiel. Soit  $T > 0$  et soit  $Q_T = (0, T) \times \mathcal{F}$ . Nous notons par  $\mathcal{B}(\bar{\Omega})$  l'espace des fonctions continues bornées sur  $\bar{\Omega}$ . Pour tout  $\eta > 0$  nous notons par  $L_\eta^1(\Omega)$  l'ensemble des (classes de) fonctions mesurables  $\omega$  sur  $\Omega$  telles que

$$\|\omega\|_{L_\eta^1(\Omega)} := \int_\Omega |\omega(y)| |y|^\eta \, dy < \infty.$$

Nous notons aussi

$$\widehat{H}^1(\Omega) = \{q \in L_{loc}^2(\bar{\Omega}) ; \nabla q \in L^2(\Omega)\}.$$

Finalement pour tout  $\lambda \in (0, 1)$ ,  $C^\lambda(\bar{\Omega})$  est l'espace des fonctions de  $\mathcal{B}(\bar{\Omega})$  höldériennes d'exposant  $\lambda$  sur  $\bar{\Omega}$ .

Notre résultat principal est le suivant :

**Théorème 1.3.1.** *Soit  $\eta > 2$ ,  $\lambda \in (0, 1)$ ,  $\bar{u}_0 \in \mathcal{B}(\bar{\mathcal{F}}) \cap H^1(\mathcal{F})$  tels que*

$$\operatorname{div}(\bar{u}_0) = 0, \quad (\bar{u}_0 - \ell_0 - r_0 y^\perp) \cdot n|_{\partial\mathcal{S}} = 0, \quad \lim_{|y| \rightarrow \infty} \bar{u}_0 = 0$$

et

$$\operatorname{rot} \bar{u}_0 \in L^1_\eta(\mathcal{F}) \cap C^\lambda(\bar{\mathcal{F}}).$$

Alors il existe une unique solution  $(\bar{u}, \bar{p}, \ell, r)$  de (1.62)-(1.66) avec les conditions initiales  $(\bar{u}_0, \ell_0, r_0)$ , telle que

$$\bar{u}, \frac{\partial \bar{u}}{\partial t}, \nabla \bar{u} \in \mathcal{B}(Q_T), \quad \bar{u} \in C^1([0, T]; L^2(\mathcal{F})) \cap C([0, T]; H^1(\mathcal{F})),$$

$$y^\perp \cdot \nabla \bar{u} \in C([0, T]; L^2(\mathcal{F})), \quad \bar{p} \in C([0, T]; \hat{H}^1(\mathcal{F})), \quad \ell \in C^1([0, T]), \quad r \in C^1([0, T]).$$

Une telle solution est unique à une constante additive près pour la pression.

Pour démontrer notre résultat, nous approchons le système (1.62)-(1.66) en lui ajoutant un terme de viscosité. Cela nous ramène à l'étude d'un problème similaire à celui d'un solide rigide dans un fluide visqueux incompressible. La différence vient des conditions aux bords : au lieu des conditions de Dirichlet, nous considérons la condition (1.64) et la condition  $\omega = 0$ . Ce choix de conditions aux bords a déjà été utilisé pour les équations d'Euler dans le livre de Lions [101] pour démontrer l'existence de solutions. En démontrant des estimations uniformes sur  $u$  et sur  $\omega$  nous pouvons passer à la limite lorsque la viscosité tend vers 0. L'autre approximation que nous faisons est de remplacer le  $y^\perp$  dans  $[(ry^\perp) \cdot \nabla] \bar{u}$  par un terme tronqué  $y^\perp_R$ . Une autre manière de procéder aurait été d'utiliser la théorie des intégrales singulières pour avoir des estimations à poids (voir par exemple [125]) mais il semble que cette théorie ne nous permette pas d'estimer la norme  $L^2$  de  $|y| \nabla \bar{u}$  à partir de  $\omega$ .

Une grande partie de la démonstration provient de la méthode développée dans [98] (qui est une extension de la méthode de Kato [95]). Une des différences vient du fait que nous ne pouvons utiliser le même point fixe à cause d'un manque de connaissance sur la pression sur le bord du solide (c'est pour cela que nous passons par le système de Navier-Stokes avec conditions de Navier). Une autre différence qui découle de l'argument précédent est que nous travaillons dans un cadre  $L^2$  en plus du cadre  $L^\infty$ .

Ce travail permet d'aborder d'autres problèmes, même si l'analyse du caractère bien posé n'est pas terminée. Dans le cas visqueux, il n'y a pas de chocs entre solides rigides (et probablement pas de contacts) : que peut-on dire dans le cas non visqueux ? En fait, dans [85], les auteurs ont déjà obtenu l'existence de chocs dans ce cas, en considérant un fluide potentiel et sans circulation. C'est d'ailleurs dans ce cadre que beaucoup de problèmes peuvent être réduits plus facilement (les équations du système se réduisent à des équations différentielles). Par exemple, on peut essayer de résoudre des problèmes de contrôle ou des problèmes inverses qui seraient peut être trop difficile à résoudre avec le système fluide visqueux - solide rigide.

En ce qui concerne l'existence et l'unicité, on peut travailler sur le même problème mais dans un domaine borné. Dans ce cas, il faudra utiliser un changement de variables comme celui introduit dans le cas visqueux. Il n'est pas entièrement clair que l'on peut appliquer la même méthode que celle que l'on a développée dans le cas de tout l'espace. La résolution du problème en dimension 3 peut aussi être intéressant car il n'est plus possible de passer par les équations de Navier-Stokes et il faut donc trouver une méthode différente. De plus, pour les équations d'Euler en dimension 3, on ne sait pas si les solutions régulières sont globales en temps (et certains tests numériques semblent indiquer le contraire) ce qui peut compliquer le travail dans notre cas.



## 1.4 Un modèle simplifié 1D fluide non visqueux-particule ([T5])

Étant donné l'étude de la section précédente, on peut naturellement se demander ce qui se passerait si l'on "simplifiait" le modèle précédent au cas 1D. Dans le cas visqueux, plusieurs résultats ont été d'abord obtenu dans le cas 1D : comportement asymptotique [131], contrôle [48], absence de contact entre les solides [132], convergence de schéma numérique [72]. Malheureusement dans le cas non visqueux, cette "simplification" n'en est pas une. Premièrement, il faut noter que l'interaction entre le fluide et la particule n'est pas simple dans le cas 1D où l'on remplace les équations d'Euler par l'équation de Burgers (non visqueuse) : il n'y a plus de pression  $p$  et par conséquent les équations (1.60) et (1.61) sont difficiles à translater au cas 1D. Deuxièmement, l'équation de Burgers ne sont pas aussi simple à traiter que les équations d'Euler en dimension 2 : en effet, les solutions de Burgers peuvent exploser en temps fini même avec des données initiales régulières. On doit donc considérer des solutions pouvant admettre des discontinuités et par conséquent comprendre l'interaction entre ces discontinuités et la particule. C'est pourquoi dans cette section, nous ne considérons que la résolution du problème de Riemann (donnée initiale constante par morceaux avec une seule discontinuité au niveau de la particule) pour notre problème.

Commençons par décrire notre modèle. Comme dans ce qui précède,  $u$  est la vitesse du fluide et  $\xi$  la position de la particule. Les équations du mouvement sont

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) + \partial_x (u^2/2)(t, x) = \lambda (\xi'(t) - u(t, \xi(t))) \delta_{\xi(t)}(x), & (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \\ m \xi''(t) = -\lambda (\xi'(t) - u(t, \xi(t))), & t \in \mathbb{R}^+, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \\ (\xi(0), \xi'(0)) = (0, v_0). \end{cases} \quad (1.67)$$

Dans ce modèle, nous n'avons pas comme dans les modèles précédents  $\xi'(t) = u(t, \xi(t))$ , mais cette condition est relaxée à travers le terme de friction  $\lambda (\xi'(t) - u(t, \xi(t)))$ . D'un point de vue formel, lorsque  $\lambda \rightarrow \infty$ , on retrouve la condition d'égalité des vitesses. D'autre part, on remarque que la force appliquée à la particule ne vient pas du tenseur de Cauchy ou de la pression mais du terme de friction.

Une des principales difficultés vient de la présence d'un singularité dans le terme source de l'équation de Burgers. En effet,  $u$  pouvant être discontinue en  $\xi(t)$ , le sens du terme  $\lambda (h'(t) - u(t, h(t))) \delta_{h(t)}(x)$  n'est pas complètement clair. Pour le définir, nous utilisons une "régularisation" de la particule, remplaçant la mesure de Dirac par une fonction positive à support compact et de mesure 1. Une autre difficulté importante est liée à la particule. En effet, son mouvement est gouverné par une équation différentielle avec un champ de vitesse discontinue. En fait en utilisant des inégalités d'entropie, nous sommes en mesure de sélectionner la "bonne" solution.

La première contribution de notre travail est de donner une définition au solution du problème (1.67). Cette définition est obtenue à partir d'approximations du système : on peut régulariser la particule comme décrit ci-dessus et on peut ajouter de la viscosité comme pour les équations d'Euler (c.f. section précédente). Nous obtenons la définition suivante :

**Définition 1.4.1.** Soit  $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$  et  $v_0 \in \mathbb{R}$ . Un couple  $(u, \xi) \in L^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}) \times C^1(\mathbb{R})$  est solution de (1.67) si les deux conditions suivantes sont vérifiées.

**D1** Pour tout  $\kappa \in \mathbb{R}$  et pour toute fonction positive  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ ,

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}} |u - \kappa| \partial_t \varphi \, dx \, ds + \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}} \left( \operatorname{sgn}(u - \kappa) \frac{u^2 - \kappa^2}{2} \right) \partial_x \varphi \, dy \, ds \\ & + m \int_{\mathbb{R}_+} |\xi' - \kappa| \partial_t (\varphi(\xi)) \, ds + \int_{\mathbb{R}} |u_0(x) - \kappa| \varphi(0, x) \, dx + m |\xi'(0) - \kappa| \varphi(0, \xi(0)) \geq 0. \end{aligned} \quad (1.68)$$

**D2** Les traces à droites et à gauches  $u(t, \xi(t)^\pm)$  de  $u$  vérifient

$$u(t, \xi(t)^+) \in \mathcal{U}_0(u(t, \xi(t)^-), \lambda, \xi'(t)). \quad (1.69)$$

Dans la définition précédente, l'ensemble  $\mathcal{U}_0(\bar{U}, \lambda, v) \subset \mathbb{R}$  est défini par

$$\mathcal{U}_0(\bar{U}, \lambda, v) = \begin{cases} \{\bar{U} - \lambda\} & \text{si } \bar{U} < v, \\ [2v - \bar{U} - \lambda, v] & \text{si } v \leq \bar{U} \leq v + \lambda, \\ \{\bar{U} - \lambda\} \cup [2v - \bar{U} - \lambda, 2v - \bar{U} + \lambda] & \text{si } \bar{U} > v + \lambda. \end{cases} \quad (1.70)$$

La seconde contribution est de considérer le cas d'une discontinuité initiale superposée à la particule et d'obtenir dans ce cas l'existence globale de solution. Plus précisément, nous démontrons le résultat suivant.

**Théorème 1.4.2.** *Pour tout  $\lambda > 0$  et pour tout  $(u_L, u_R, v_0) \in \mathbb{R}^3$ , si*

$$u_0(x) = \begin{cases} u_L & \text{si } x < 0, \\ u_R & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

*alors il existe une solution de (1.67).*

De plus, il est possible de décrire entièrement les solutions dans ce cas là.

Comme nous l'avons mentionné ci-dessus, une des difficultés vient de la mesure de Dirac dans le terme source (produit non conservatif). Ici cela correspond à champ linéairement dégénéré et peut conduire à un phénomène de résonance (superposition d'ondes non linéaires avec la particule). Isaacson et Temple ont étudié de tels problèmes dans [89]. Plus tard, Goatin et LeFloch ont étendu leur analyse des systèmes dans [71]. Ils considèrent des systèmes non conservatifs avec une résonance dégénérée c'est-à-dire que la matrice Jacobienne n'est plus diagonalisable lorsque les valeurs propres coïncident. Dans notre cas, la structure de la matrice Jacobienne est différente : lorsque les valeurs propres sont égales, les vecteurs propres sont aussi égaux. Ce fait nous permet d'obtenir un résultat d'existence et d'unicité globale dans le cas où le mouvement de la particule est donné et constant.

La manière de définir le produit non conservatif est similaire à celle qui est utilisée dans [33]. Cette approche est basée sur la régularisation de la mesure de Dirac et nous permet de définir le produit non conservatifs indépendamment du choix de la régularisation. Il est important de remarquer que le modèle complet n'admet pas de solutions auto-similaires. Par conséquent le problème de Riemann devient beaucoup plus difficile à résoudre et en particulier, les arguments classiques pour l'unicité ne peuvent pas être utilisés. En fait, nous n'obtenons pas dans ce premier travail l'unicité, car démontrer l'unicité dans ce cas revient d'une certaine manière à résoudre l'unicité dans le problème de Cauchy.

L'existence pour le problème de Cauchy pourrait être obtenu à partir de ce travail en considérant par exemple un schéma de Glimm. Cette direction de recherche permet aussi d'attaquer le problème intéressant de la discrétisation du système (1.67). Bien d'autres questions peuvent être abordées sur ce système : comportement asymptotique lorsque  $t \rightarrow \infty$  ou lorsque  $\lambda \rightarrow \infty$  (nous obtenons quelques résultats dans le cas du problème de Riemann), cas de plusieurs particules, autres modèles de fluide comme celui des équations d'Euler compressibles, etc.

## 1.5 Solutions fortes pour un système poisson-fluide visqueux incompressible ([T14])

Dans l'étude de l'interaction fluide-structure, sortir du cadre où la structure est un solide rigide n'est pas évident. Les équations du mouvement dans le cas d'une structure déformable ne sont plus des équations différentielles mais des équations aux dérivées partielles. De plus, les équations d'une structure élastique sont écrites en coordonnées Lagrangiennes alors que les équations du fluide sont écrites en coordonnées Eulériennes, ce qui complique encore le problème : par exemple, la continuité des champs de vitesses s'écrit en utilisant un changement de variables. Quelques auteurs abordent ce problème : [46], [22], [23], [41], [40], etc. mais soit le modèle est simplifié (réduction du système d'EDP à un système de dimension finie, ajout d'un terme de viscosité) soit les solutions sont très régulières (avec des conditions assez fortes sur les conditions initiales). Dans chaque cas l'idée est de pouvoir avoir assez de régularité sur le déplacement élastique sans quoi le domaine du fluide n'est même pas clairement défini.

En même temps, les structures déformables peuvent conduire à des applications très intéressantes en fluide-structure : nage de poisson, vol d'insecte, etc. Dans cette section, nous nous intéressons à la nage du poisson. Nous sommes conduits en vue des difficultés à étudier un système fluide-solide élastique à considérer un modèle simplifié dans lequel la déformation du poisson est donnée tandis que sa position reste inconnue. Nous faisons ensuite l'étude théorique de ce modèle. Dans la section 2.4, nous donnons quelques résultats de simulations numériques obtenues avec ce modèle.

L'étude de la nage des poissons a un long passé scientifique, avec des travaux datant même de l'Antiquité (d'Aristote), mais reste d'actualité comme le montrent la construction de poissons robotiques un peu partout dans le monde. Entre 1932 et 1936, une étude détaillée [74] du zoologiste James Gray a été réalisée sur ce problème. On retiendra en particulier le paradoxe qui porte son nom et qui montre par des estimations que l'efficacité d'un dauphin est plusieurs fois plus grande que celle d'un véhicule propulsé mécaniquement. Ce fait serait dû à la déformation ondulatoire du mammifère marin. Cette étude reste controversée mais laisse penser que les poissons et autres animaux aquatiques ont une manière de se déplacer très efficace et que comprendre ce phénomène permettrait d'améliorer nos véhicules sous-marins.

D'autres études plus mathématiques ont été effectuées depuis 1950 : [127], [100], [32], [134], [124], etc. De plus certains de ces travaux sont en relation avec la construction de véhicules sous-marins se déplaçant par changement de forme et non plus par une propulsion directe. Cette direction de recherche a été initiée par [130] et développée dans plusieurs papiers théoriques, numériques ou en relation avec des expériences : [97], [93], etc.

Notons par  $\mathcal{S}_0$  le domaine occupé par le poisson dans une configuration de référence. Ce domaine est supposé ouvert, connexe et régulier. Le domaine du poisson change avec le temps

et nous notons par  $X$  une application régulière

$$X : [0, \infty) \times \mathcal{S}_0 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

telle que le domaine du poisson à l'instant  $t$  s'écrive

$$\mathcal{S}(t) = X(t, \mathcal{S}_0).$$

Nous supposons que le mouvement du poisson se décompose en une partie rigide et une partie de déformation, c'est-à-dire que

$$X(t, y) = X^R(t, X^*(t, y)) \quad \forall y \in \mathcal{S}_0, \quad \forall t \geq 0,$$

où  $X^R$  correspond au déplacement rigide et  $X^*$  représente la déformation ondulatoire du poisson. Dans notre modèle nous supposons que  $X^*$  est donné. Cette déformation doit vérifier plusieurs hypothèses :

- (H1) Pour tout  $t$ , l'application  $y \mapsto X^*(t, y)$  est un  $C^\infty$  difféomorphisme de  $\overline{\mathcal{S}_0}$  sur  $\overline{\mathcal{S}^*(t)}$ , où  $\mathcal{S}^*(t) = X^*(t, \mathcal{S}_0)$ . De plus,  $X^*$  est de classe  $C^\infty$ .
- (H2) Le volume du poisson reste constant, i.e.

$$\int_{\mathcal{S}^*(t)} dx^* = \int_{\mathcal{S}_0} dy \quad (t \geq 0).$$

Pour tout  $t \geq 0$ , on note par  $Y^*$  l'inverse de  $X^*$  i.e. le difféomorphisme vérifiant

$$X^*(t, Y^*(t, x^*)) = x^*, \quad Y^*(t, X^*(t, y)) = y \quad (t \geq 0, x^* \in \mathcal{S}^*(t), y \in \mathcal{S}_0).$$

On définit aussi la vitesse ondulatoire  $w^*$  du poisson

$$w^*(t, x^*) = \frac{\partial X^*}{\partial t}(t, Y^*(t, x^*)) \quad t \geq 0, x^* \in \mathcal{S}^*(t).$$

On note  $\rho_0$  la densité du poisson dans la configuration de référence  $\mathcal{S}_0$  et  $\rho^*$  la densité du poisson dans  $\mathcal{S}^*(t)$ . Pour vérifier la conservation de la masse, cette densité  $\rho^*$  est donnée par

$$\rho^*(t, x^*) = \frac{\rho_0(Y^*(t, x^*))}{\det[(\nabla X^*)(Y^*(t, x^*))]} \quad (t \geq 0, x^* \in \mathcal{S}^*(t)).$$

Comme notre but est d'étudier des mouvements auto-propulsés, il est naturel de supposer que le mouvement ondulatoire que nous imposons ne modifie pas la quantité de mouvement ou le moment cinétique du poisson. En supposant que l'origine du système de coordonnées coïncide avec le centre de masse de  $\mathcal{S}_0$ , ces hypothèses s'écrivent sous la forme suivante :

- (H3)  $\int_{\mathcal{S}^*(t)} \rho^*(t, x^*) w^*(t, x^*) dx^* = 0$  pour tout  $t \geq 0$ ,
- (H4)  $\int_{\mathcal{S}^*(t)} \rho^*(t, x^*) (x^*)^\perp \cdot w^*(t, x^*) dx^* = 0$  pour tout  $t \geq 0$ .

En ce qui concerne le mouvement rigide, nous gardons les notations que nous avons prises dans les sections précédentes :

$$X^R(t, x^*) = R_{\theta(t)} x^* + \xi(t).$$

Nous notons désormais  $\mathcal{S}(t)$  par  $\mathcal{S}(\xi(t), \theta(t), t)$ . La vitesse de déformation du poisson en coordonnées Eulériennes est donnée par

$$w(t, x) = R_{\theta(t)} w^*(t, R_{-\theta(t)}(x - \xi(t))) \quad t \geq 0, \quad (x \in \mathcal{S}(\xi(t), \theta(t), t)).$$

De même, la densité du poisson en coordonnées Eulériennes est défini par

$$\rho(t, x) = \rho^*(t, R_{-\theta(t)}(x - \xi(t))), \quad (x \in \mathcal{S}(\xi(t), \theta(t), t)).$$

La masse et le moment d'inertie du poisson sont donnés par

$$m = \int_{\mathcal{S}(\xi(t), \theta(t), t)} \rho(t, x) \, dx$$

et

$$I(t) = \int_{\mathcal{S}(\xi(t), \theta(t), t)} \rho(t, x) |x - \xi(t)| \, dx.$$

Il n'est pas difficile de voir la masse  $m$  est constante. Le système complet décrivant le mouvement du poisson et du fluide s'écrit sous la forme suivant :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u + (u \cdot \nabla) u + \nabla p = f \quad \text{dans } \mathcal{F}(\xi, \theta), \quad t \in (0, T), \quad (1.71)$$

$$\operatorname{div} u = 0 \quad \text{dans } \mathcal{F}(\xi, \theta), \quad t \in (0, T), \quad (1.72)$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \quad t \in (0, T), \quad (1.73)$$

$$u = \xi' + \theta' (x - \xi)^\perp + w \quad \text{sur } \partial\mathcal{S}(\xi, \theta), \quad t \in (0, T), \quad (1.74)$$

$$m \xi'' = - \int_{\partial\mathcal{S}(\xi, \theta)} \sigma(u, p) n \, d\Gamma + \int_{\mathcal{S}(\xi, \theta)} \rho_S f \, dx \quad \text{dans } (0, T), \quad (1.75)$$

$$(I\theta')' = - \int_{\partial\mathcal{S}(\xi, \theta)} (x - \xi)^\perp \cdot \sigma(u, p) n \, d\Gamma + \int_{\mathcal{S}(\xi, \theta)} \rho_S (x - \xi)^\perp \cdot f \, dx \quad \text{dans } (0, T). \quad (1.76)$$

En utilisant une méthode similaire à celle utilisée pour le cas d'un solide rigide dans un fluide visqueux incompressible, on obtient l'existence et l'unicité de solution forte globale :

**Théorème 1.5.1.** *Soit  $u_0 \in H^1(\mathcal{F})$  tel que*

$$\begin{cases} \operatorname{div} u_0 = 0 & \text{dans } \mathcal{F}, \\ u_0 = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ u_0 = \xi^1 + \omega^0 x^\perp + w^*(0, x) & \text{sur } \partial\mathcal{S}, \\ \operatorname{dist}(\mathcal{S}, \partial\Omega) > 0. \end{cases}$$

*Alors il existe  $T > 0$  tel que le système (1.71)-(1.76) admette une unique solution forte sur  $[0, T]$  :*

$$u \in L^2(0, T; H^2(\mathcal{F}(t))) \cap H^1(0, T; L^2(\mathcal{F}(t))) \cap C([0, T]; H^1(\mathcal{F}(t))),$$

$$p \in L^2(0, T; H^1(\mathcal{F}(t))),$$

$$\xi \in H^2(0, T), \quad \theta \in H^2(0, T).$$

*Cette solution peut être prolongée tant que la distance entre  $\mathcal{S}(t)$  et  $\partial\Omega$  reste strictement positive.*

On donne maintenant un exemple de déformation vérifiant les hypothèses **(H1)**-**(H4)**. Nous prenons un domaine de référence  $\mathcal{S}_0$  symétrique par rapport à l'axe des abscisses

$$\mathcal{S}_0 = \{(y_1, y_2) \in (0, l) \times \mathbb{R}, y_2 \in (-\gamma(y_1), \gamma(y_1))\}$$

avec  $\gamma \in C^\infty(0, l) \cap C([0, l])$  une fonction strictement positive sur  $(0, l)$  et telle que

$$\gamma(0) = \gamma(l) = 0, \quad \gamma'(0) = -\infty, \quad \gamma'(l) = +\infty.$$

La déformation que l'on impose pour modéliser le mouvement du poisson dépend bien sûr du poisson que l'on cherche à imiter ([30], [102]). Dans l'exemple que nous décrivons, nous prenons une déformation inspirée de Leroyer et Visonneau [99] qui modélise le mouvement d'une anguille. Dans cette déformation, les sections transverses à l'axe principal restent orthogonales (voir la figure 1.2). Afin de définir  $X^*$ , on considère, pour tout  $t \geq 0$ , une application

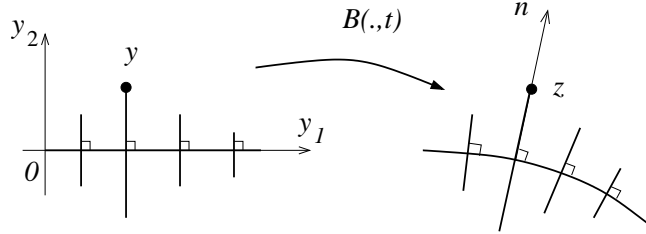


FIG. 1.2 – Le modèle de poutre pour la déformation

$$B(t, \cdot) : \quad \mathcal{S}_0 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ y = (y_1, y_2) \mapsto B(t, y) = f(t, y_1) + y_2 n(t, y_1).$$

Dans la définition ci-dessus,  $f(t, \cdot) = \begin{pmatrix} f_1(t, \cdot) \\ f_2(t, \cdot) \end{pmatrix} \in C^\infty([0, l], \mathbb{R}^2)$  est une paramétrisation de l'axe principal par sa coordonnée curviligne  $y_1$  (i.e. avec  $|\partial f / \partial y_1| \equiv 1$ ) à chaque instant  $t$  et  $n$  est un vecteur normal unitaire. Il n'est pas difficile de voir que  $B$  vérifie les hypothèses **(H1)**-**(H2)**. Pour les deux dernières hypothèses, il suffit de tourner et de translater  $B$  pour obtenir une application  $X^*$  vérifiant les quatre hypothèses **(H1)**-**(H4)**. Un exemple d'application  $f$  que l'on peut utiliser est donnée via la variation de la courbure de l'axe principal :

$$\kappa(t, y_1) = (a_2 y_1^2 + a_1 y_1 + a_0) \sin \left( 2\pi \left( \frac{y_1}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) \right) \quad (y_1 \in (0, l)).$$

où  $a_1, a_2, a_3, \lambda$  et  $T$  sont des paramètres à préciser. Dans la section 2.4, nous modifions ces paramètres pour obtenir différents mouvements du poisson.

Dans cette section, nous avons obtenu un premier modèle de la nage du poisson. Il reste beaucoup à faire dans cette direction : on peut soit chercher à affiner le modèle pour le rendre plus physique, soit au contraire le simplifier pour espérer obtenir des résultats plus intéressants sur la nage du poisson. Pour enrichir le modèle, on peut chercher à revenir au modèle fluide-élastique et chercher les forces que l'on doit appliquer pour que la structure se déforme comme le poisson. On peut aussi tenir compte des nageoires et essayer de comprendre leur participation au mécanisme de nage. Finalement, il faudrait reprendre le modèle en dimension 3 en espace qui est le bon cadre pour étudier la nage de poissons. Les problèmes intéressants à étudier

sont par exemple le problème de contrôle : comment déformer le poisson pour aller d'un point à un autre de  $\Omega$  (en d'autre terme peut-on contrôler  $\xi$  et  $\omega$  en utilisant  $X^*$ ?)? On peut aussi regarder ce que donne le paradoxe de Gray avec notre modèle, ou étudier certains phénomènes comme la création et l'utilisation des tourbillons pour la nage.

## Chapitre 2

# Analyse numérique de système d'EDP dans des domaines non cylindriques

### 2.1 Introduction

Lorsque l'on cherche à simuler le mouvement d'un système fluide-structure, on tombe tout de suite sur le problème suivant : comment discrétiser un système d'EDP écrit sur un domaine variable en temps ? Il existe au moins deux grandes familles de solutions à ce problème. Une première manière de traiter de le problème est de mailler uniquement le domaine du fluide à l'instant initial puis de déformer le maillage pour pouvoir suivre, lors des pas de temps suivants, la déformation de la structure. Parmi ce type de méthodes, la méthode A.L.E. (Arbitrary Lagrangian Eulerian) est relativement classique et consiste à étendre la vitesse de déformation de la structure dans le fluide de manière à déplacer chaque point du maillage. Ces méthodes sont très naturelles et peuvent être précises près de l'interface fluide-structure. Leur inconvénient vient du fait que l'on ne peut pas suivre de grandes déformations ce qui oblige à remailler assez souvent. Cette étape de remaillage est chère en temps de calcul et peut faire perdre de la précision lors de l'interpolation sur le nouveau maillage. L'autre grande famille de méthodes consiste au contraire à se ramener à un maillage global sur tout le domaine fluide-structure. Il existe plusieurs méthodes importantes dans cette direction : "Immersed boundary method" de Peskin [112], méthode de domaine fictif utilisé dans [69, 70, 68], "Fat Boundary Method" de Maury et Ismail [107, 90, 16]. Les avantages de ces méthodes globales sont d'utiliser un maillage fixe et que l'on peut parfois prendre plus simple puisque le domaine global est souvent plus simple. Les désavantages de ces méthodes sont que la résolution de problème global impose un artifice supplémentaire qui fait perdre en précision : multiplicateur de Lagrange pour la méthode du domaine fictif, point fixe pour la "Fat Boundary Method". De plus, ces méthodes sont souvent moins précises près des structures.

Dans le cas où la structure est composée de solides rigides, nous parvenons à introduire un schéma numérique dans lequel, la résolution du problème global est la résolution du problème fluide-solides rigides complet (sans besoin de résoudre un autre système ou de faire un point fixe). La condition de rigidité est prise en compte exactement dans le schéma numérique. Nous analysons le schéma obtenu. Dans une seconde partie, nous nous intéressons à l'autre type de méthode et nous analysons la méthode A.L.E.



## 2.2 Méthode globale pour la discrétisation fluide-solide rigide ([T13])

Dans le cas du mouvement de solides rigides dans un fluide visqueux incompressible, nous introduisons un schéma numérique simple permettant de discrétiser les équations. Ce schéma numérique est basé sur une formulation variationnelle globale. Pour simplifier considérons simplement le cas d'un seul solide rigide. Nous nous plaçons dans le cas bidimensionnel en espace. Les espaces dans lesquels nous travaillons sont

$$\mathcal{K}(\xi, \theta) = \{u \in H_0^1(\Omega) ; D(u) = 0 \text{ dans } \mathcal{S}(\xi, \theta)\} \quad (2.1)$$

et

$$\mathcal{K}_\sigma(\xi, \theta) = \{u \in \mathcal{K}(\xi, \theta) ; \operatorname{div}(u) = 0 \text{ dans } \Omega\} \quad (2.2)$$

Ce sont les espaces naturels pour le champ de vitesses globales (vitesse du fluide dans le domaine du fluide, vitesse du solide dans le domaine du solide). Une des difficultés dans l'approximation des équations de Navier-Stokes est que nous ne pouvons pas travailler facilement dans le second espace : dans le schéma numérique, les fonctions ne vérifient plus la condition  $\operatorname{div} u = 0$  exactement mais seulement dans un sens approché (formulation mixte). On pourrait penser qu'il en est de même pour la contrainte de rigidité  $D(u) = 0$ . En fait, il est possible de combiner les éléments finis pour garder cette condition vérifiée de manière exacte par la solution approchée.

Pour la pression, nous l'étendons, de manière arbitraire par 0 dans le solide rigide. En d'autres termes, nous considérons l'espace

$$M(\xi, \theta) = \{p \in L_0^2(\Omega) ; p = 0 \text{ dans } \mathcal{S}(\xi, \theta)\} \quad (2.3)$$

On introduit aussi la caractéristique associée à  $u$  :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \psi(t; s, x) = u(t, \psi(t; s, x)), \\ \psi(s; s, x) = x. \end{cases} \quad (2.4)$$

On montre alors que si  $(u, p, \xi, \theta)$  a la régularité d'une solution forte, ce quadruplet vérifie (1.15)-(1.20) si et seulement si pour tout  $t$ ,  $u(t) \in \mathcal{K}(\xi(t), \theta(t))$  et

$$\begin{aligned} \left( \frac{d}{dt} [u \circ \psi](t), \varphi \right)_{\xi(t), \theta(t)} + 2\nu (D(u(t)), D(\varphi))_{\xi(t), \theta(t)} - (\operatorname{div} \varphi, p)_{\xi(t), \theta(t)} \\ = (f, \varphi)_{\xi(t), \theta(t)} \quad \forall \varphi \in \mathcal{K}(\xi(t), \theta(t)), \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$(\operatorname{div} u, q)_{\xi(t), \theta(t)} = 0 \quad \forall q \in M(\xi(t), \theta(t)), \quad (2.6)$$

où

$$(f, g)_{\xi, \theta} = \int_{\mathcal{F}(\xi, \theta)} fg \, dx + \rho_S \int_{\mathcal{S}(\xi, \theta)} fg \, dx. \quad (2.7)$$

Pour simplifier, et comme notre résultat théorique ne porte que sur ce cas, nous pouvons considérer que

$$\rho_S = 1$$

et que

$$\mathcal{S}(\xi, \theta) = \{x \in \mathbb{R}^2 ; |x - \xi| \leq 1\}.$$

Comme la densité du fluide est choisie égale à 1, la première condition s'écrit en fait

$$\rho_S = \rho_F.$$

Par abus de notation, nous noterons par  $\mathcal{S}(\xi)$  le domaine  $\mathcal{S}(\xi, \theta)$  qui ne dépend pas de  $\theta$ . D'autre part dans (2.7), nous pouvons abandonner les indices et considérer le produit scalaire usuel de  $L^2(\Omega)$ .

En se basant sur la formulation variationnelle (2.5)-(2.6), nous pouvons construire notre schéma. Prenons deux espaces d'éléments finis classiques pour approcher les solutions des équations de Navier-Stokes :  $\mathcal{W}_h$  l'espace des fonctions P1-bulles et  $E_h$  l'espace des fonctions P1. Alors les espaces dans lesquels nous allons chercher les vitesses et pressions approchées sont

$$\mathcal{K}_h(\xi) = \mathcal{W}_h \cap \mathcal{K}(\xi), \quad M_h(\xi) = E_h \cap M(\xi).$$

En d'autres termes, les fonctions de  $\mathcal{K}_h(\xi)$  sont rigides dans  $\mathcal{S}(\xi)$ . L'espace  $\mathcal{K}_h(\xi)$  n'est pas trivial car les fonctions rigides sont des fonctions P1. En fait avec ce choix, les éléments de  $\mathcal{K}_h(\xi)$  sont rigides sur un domaine plus grand que  $\mathcal{S}(\xi)$  (c.f. figure 2.1).

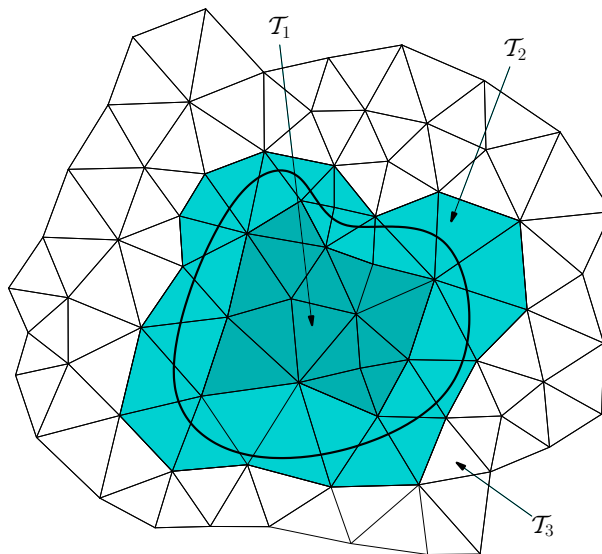


FIG. 2.1 – Maillage et solide rigide

Nous avons aussi besoin de l'espace d'éléments finis (voir [113])

$$\mathcal{R}_h = \{\text{rot } \varphi_h ; \varphi_h \in E_h, \varphi_h = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}.$$

Nous notons par  $P_h$  la projection orthogonale de  $L^2(\Omega)$  sur  $\mathcal{R}_h$ . Nous prenons ensuite une subdivision régulière  $(t^k)$  de  $[0, T]$  de pas  $\delta t$ , avec  $N\delta t = T$ . Le passage des solutions approchées à l'étape  $k$  aux solutions approchées à l'étape  $k + 1$  se fait via l'algorithme suivant :

$$\xi_h^{k+1} = \xi_h^k + u_h^k(\xi_h^k)\delta t,$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \psi_h^k(t; t^{k+1}, x) = P_h u_h^k(t, \psi_h^k(t; t^{k+1}, x)), \\ \psi_h^k(t^{k+1}; t^{k+1}, x) = x. \end{cases}$$

On pose

$$X_h^k(x) = \psi_h^k(t^k; t^{k+1}, x) \quad \forall x \in \Omega.$$

On calcule les vitesses via la formulation mixte suivante

$$\begin{aligned} \left( \frac{u_h^{k+1} - u_h^k \circ X_h^k}{\delta t}, \varphi_h^{k+1} \right) + 2\nu \left( D(u_h^{k+1}), D(\varphi_h^{k+1}) \right) - \left( \operatorname{div} \varphi_h^{k+1}, p_h^{k+1} \right) \\ = \left( f_h^{k+1}, \varphi_h^{k+1} \right) \quad \forall \varphi_h^{k+1} \in \mathcal{K}_h(\xi_h^{k+1}), \\ \left( \operatorname{div} u_h^{k+1}, q_h^{k+1} \right) = 0 \quad \forall q_h^{k+1} \in M_h(\xi_h^{k+1}), \end{aligned}$$

où  $f_h^{k+1}$  est la projection de  $f$  sur l'espace des éléments finis  $(E_h)^2$ .

Supposons la solution  $(u, p, \xi, \theta)$  du problème continu très régulière, et que le solide rigide ne touche pas le bord de  $\partial\Omega$ . Supposons aussi que  $\Omega$  est un polygone convexe. Alors nous obtenons le résultat suivant

**Théorème 2.2.1.** *Il existe des constantes  $C_0, C$  et  $\tau^*$  ne dépendant pas de  $h$  et  $\delta t$  telle que si  $0 < \delta t \leq \tau^*$  et si  $h \leq C_0(\delta t)^2$  on a*

$$\sup_{1 \leq k \leq N} \left( |\xi_h^k - \xi(t^k)| + \|u_h^k - u(t^k)\|_{L^2(\Omega)} \right) \leq C\delta t.$$

Ce résultat est intéressant car il donne une estimation d'erreur a priori pour un problème fluide-structure. Cependant de nombreuses restrictions sont imposées pour obtenir le résultat et certaines d'entre elles semblent difficiles à supprimer. La restriction la plus facile à supprimer est la condition sur la forme du solide rigide. Prendre un solide de forme quelconque au lieu d'une boule implique que l'on doit considérer l'approximation de l'angle (du même type que pour la position du centre de masse). De plus le changement de variables utilisé dans la démonstration de la convergence est différent, mais l'analyse finale de cette généralisation est très proche de l'analyse faite dans le cas de la boule. Une extension moins évidente mais qui semble possible consiste à ne plus projeter la vitesse approchée sur un espace à divergence nulle. On peut procéder comme dans [126] ou comme dans [1] afin d'analyser l'erreur supplémentaire faite dans ce cas là. Finalement la condition la plus restrictive vient de la condition sur les densités. Cette condition provient du fait que nous ne savons pas comment est transformé le solide rigide par la caractéristique approchée. La caractéristique exacte transforme le solide rigide en un solide rigide de même forme mais il semble que ce ne soit pas le cas de la caractéristique approchée et nous devons donc estimer l'erreur qui en découle.

Nous avons utilisé le même schéma pour simuler des mouvements de poissons (voir le chapitre 1), mais nous n'avons pas analysé la convergence du schéma numérique dans ce cas-là; nous devrions obtenir un résultat similaire avec une démonstration du même type. On remarque cependant que dans le cas de la simulation d'un poisson, la discrétisation de ce qui se passe près de l'interface fluide-structure devient primordial : peut-on améliorer notre schéma pour être plus précis au niveau de l'interface ?

## 2.3 Résultats de convergence pour la méthode A.L.E. ([T6], [T21])

Bien que les méthodes basées sur des formulations de type A.L.E. soient assez classiques et soient utilisées par des mathématiciens mais aussi des ingénieurs, des mécaniciens, etc., ces méthodes ne sont que peu analysées ([47], [75], [51]) et les premières estimations d'erreurs ont été obtenues ces dix dernières années ([55], [111], [64]). Cependant ces estimations d'erreurs ne sont faites que dans le cas de l'équation d'advection-diffusion sur un domaine non cylindrique mais connu a priori. Nous généralisons ces résultats tout d'abord en considérant le système de Stokes sur un domaine non cylindrique, connu a priori, puis en considérant le problème fluide-solide rigide (1.15)-(1.20).

Dans le premier problème on considère donc le système

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u + \nabla p = f \quad \text{dans } Q_T, \\ \operatorname{div} u = 0 \quad \text{dans } Q_T, \\ u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_t, t \in I, \\ u(0) = u_0 \quad \text{dans } \Omega_0, \end{array} \right. \quad (2.8)$$

où  $I = (0, T)$  et où

$$Q_T = \{(t, x) \in \mathbb{R}^3 ; t \in I, x \in \Omega_t\}$$

est le domaine non cylindrique sur lequel on travaille. Nous supposons que pour tout  $t$ ,  $\Omega_t$  est domaine polygonal. Il s'agit d'une hypothèse importante qui n'est pas faite dans [64]. Cependant dans ce papier, il semble que certains arguments ne soient pas corrects et en particulier l'erreur de convergence obtenu semble meilleur que celui que l'on aurait avec un problème écrit en domaine cylindrique mais où le domaine de l'EDP n'est pas polygonal convexe.

Soit  $\mathcal{T}_{h,0}$  une triangulation quasi-uniforme de  $\Omega_0$  ([27, p.106]). Nous supposons aussi qu'il n'y a pas de triangles avec deux côtés sur  $\partial\Omega_0$ . L'outil important dans la méthode A.L.E. est la transformation A.L.E. : dans le cas continu, nous supposons l'existence d'une application  $X \in H^1(0, T; W^{2,\infty}(\Omega_0))$  telle que

$$X_t = X(t, \cdot) : \Omega_0 \rightarrow \Omega_t$$

est inversible et  $X_t^{-1} \in W^{1,\infty}(\Omega_t)$ . La vitesse de déformation du domaine définie par

$$w : Q_T \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad w(t, x) = \frac{\partial X}{\partial t}(t, X_t^{-1}(x)).$$

joue aussi un rôle important. Il existe alors plusieurs manières d'obtenir une transformation A.L.E. discrète  $X_h$  et sa vitesse associée  $w_h$  ([64]), par exemple en résolvant un problème d'élasticité linéaire sur  $\Omega_0$ . Lorsque l'on discrétise en temps, on obtient une vitesse de déformation du domaine constante par morceaux donnée par

$$w_{h,n,n+1}^* = \frac{x - X_{h,t^n} \left( X_{h,t^{n+1}}^{-1}(x) \right)}{\delta t} \quad \forall x \in \Omega_{t^{n+1}}.$$

Nous considérons des espaces classiques d'éléments finis  $W_{h,0}$  et  $M_{h,0}$  pour approcher les solutions des équations de Stokes (par exemple des espaces "P2-P1"). Les espaces  $W_{h,t}$  et

$M_{h,t}$  sont obtenus à partir des espaces initiaux  $W_{h,0}$  et  $M_{h,0}$  en utilisant l'application A.L.E. discrète :

$$W_{h,t} = \left\{ v_h \circ X_{h,t}^{-1} ; v_h \in W_{h,0} \right\}, \quad M_{h,t} = \left\{ q_h \circ X_{h,t}^{-1} ; q_h \in M_{h,0} \right\},$$

et on considère de plus l'espace  $M_{h,t}^0 = M_{h,t} \cap L_0^2(\Omega_t)$ . Le schéma considéré pour résoudre le système (2.8) est donné par la résolution du problème suivant : trouver  $(u_h^n)$  et  $(p_h^n)$  tels que pour tout  $n$ ,  $u_h^{n+1} \in W_{h,t^{n+1}}$  et  $p_h^{n+1} \in M_{h,t^{n+1}}^0$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_{t^{n+1}}} u_h^{n+1} \cdot (v_h \circ X_{h,t^{n+1}}^{-1}) \, dx - \int_{\Omega_{t^n}} u_h^n \cdot (v_h \circ X_{h,t^n}^{-1}) \, dx \\ & + \nu(\delta t) \int_{\Omega_{t^{n+1}}} \nabla u_h^{n+1} : \nabla (v_h \circ X_{h,t^{n+1}}^{-1}) \, dx - \delta t \int_{\Omega_{t^{n+1}}} p_h^{n+1} \operatorname{div} (v_h \circ X_{h,t^{n+1}}^{-1}) \, dx \\ & \quad - \delta t \int_{\Omega_{t^{n+1}}} \operatorname{div}(w_{h,n,n+1}^* \otimes u_h^{n+1}) \cdot (v_h \circ X_{h,t^{n+1}}^{-1}) \, dx \\ & \quad = \delta t \tilde{I}_{h,t^{n+1}} \left( f(t^{n+1}) \cdot (v_h \circ X_{h,t^{n+1}}^{-1}) \right) \quad \forall v_h \in W_{h,0}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\int_{\Omega_{t^{n+1}}} \operatorname{div}(u_h^{n+1}) \left( q_h \circ X_{h,t^{n+1}}^{-1} \right) \, dx = 0 \quad \forall q_h \in M_{h,0}. \quad (2.10)$$

Dans le système ci-dessus,  $\tilde{I}_{h,t}(F)$  est une formule de quadrature pour l'intégrale  $\int_{\Omega_t} F(x) \, dx$ . Notre résultat dans ce cas est le théorème suivant.

**Théorème 2.3.1.** *Il existe une constante  $C > 0$  indépendante de  $h$  et  $\delta t$  telle que pour tout  $h$  et  $\delta t$  assez petits,*

$$\begin{aligned} \|u(t^n) - u_h^n\|_{L^2(\Omega_{h,t^n})}^2 + \nu(\delta t) \sum_{i=1}^n \|\nabla (u(t^i) - u_h^i)\|_{L^2(\Omega_{h,t^i})}^2 \\ \leq \|u_0 - u_h^0\|_{L^2(\Omega_{h,0})}^2 + C \left( \frac{h^4}{(\delta t)^2} + (\delta t)^2 \right). \end{aligned}$$

En particulier si  $h \leq C_0 \delta t$  et si l'erreur sur la vitesse initiale est en  $h^2$ , nous obtenons une erreur en  $(\delta t)^2$ . Avec ce premier résultat, il est naturel de chercher à obtenir des résultats du même type pour d'autres problèmes, comme par exemple les problèmes d'interaction fluide-structure. Dans un premier temps, nous considérons le cas d'un système fluide visqueux incompressible-solide rigide. Le déplacement du solide rigide n'est pas une déformation très facile à simuler via la méthode A.L.E. mais il s'agit là d'un premier pas vers d'autres déformations comme une déformation élastique.

Nous utilisons en combinaison avec la méthode A.L.E. la méthode des caractéristiques pour traiter le terme non linéaires ; il est donc important de préciser dès maintenant les notations pour les trois applications importantes dans ce cadre. Premièrement, nous notons à partir de maintenant par  $\mathcal{A}$  l'application A.L.E. : elle est construite à partir de la déformation associée au déplacement rigide. On note toujours par  $w$  la vitesse de déformation du domaine. Nous noterons aussi par  $\mathcal{C}$  la caractéristique associée au champs de vitesse du fluide  $u$ . Enfin, nous noterons par  $\mathcal{B}$  la caractéristique écrite sur un domaine fixe vérifiant

$$\mathcal{C}(t; s, x) = \mathcal{A}(t; s, \mathcal{B}(t; s, x)), \quad \forall x \in \mathcal{F}(\xi(s), \theta(s)).$$

La caractéristique  $\mathcal{B}$  vérifie une équation similaire à  $\mathcal{C}$  mais avec un champ de vitesse  $\bar{u} - \bar{w}$  (transformée de  $u - w$  par  $\mathcal{A}$ ). Les espaces fonctionnels utilisés sont

$$\mathcal{V}(\xi, \theta) = \left\{ (v, \ell_v, \omega_v) \in H^1(\mathcal{F}(\xi, \theta)) \times \mathbb{R}^3 ; v = 0 \text{ sur } \partial\Omega \text{ et } v = \ell_v + \omega_v(x - \xi)^\perp \text{ sur } \partial\mathcal{S}(\xi, \theta) \right\}$$

$$\mathcal{Q}(\xi, \theta) = L_0^2(\mathcal{F}(\xi, \theta)).$$

On discrétise ces espaces en utilisant les espaces éléments finis P1 bulles-P1, comme dans la méthode globale. D'autre part, pour éviter de nombreux problèmes techniques, nous supposons que le domaine du fluide approché à l'instant initial est inclus dans le domaine du fluide exact à l'instant initial :  $\mathcal{F}_h^0 \subset \mathcal{F}_0$ . Cette hypothèse n'est pas naturel dans les applications car elle signifie que pour discrétiser notre solide rigide, nous ne prenons pas un polygone dont les sommets sont des points du solide. Néanmoins cette hypothèse nous permet de garder une approximation conforme vis-à-vis de la condition de rigidité.

Dans ce cas, nous obtenons le résultat suivant :

**Théorème 2.3.2.** *Supposons que la solution de (1.15)-(1.20) est régulière. Supposons de plus que*

$$c_s h \leq \delta t \leq C_s h^{1/2}.$$

*Supposons que  $|\xi(t) - \xi(0)|$  et  $|\theta(t) - \theta(0)|$  restent assez petits. Alors pour  $h$  et  $\delta t$  assez petits,*

$$|\xi(t^k) - \xi_h^k| + |\theta(t^k) - \theta_h^k| \leq C(\delta t + h^{1/2}),$$

$$\|u(t^k, \mathcal{A}(t^k; 0, \cdot)) - u_h^k \circ \mathcal{A}_h^k\|_{L^2(\mathcal{F})} + |\ell(t^k) - \ell_h^k| + |\omega(t^k) - \omega_h^k| \leq C(\delta t + h^{1/2}).$$

Dans le théorème ci-dessus, remarquons que par rapport à la méthode globale nous ne faisons plus de conditions sur la forme du solide ou sur la densité du solide. Par contre, le désavantage de la méthode A.L.E. apparaît via la condition de petitesse du déplacement rigide. Enfin, il faut aussi noter que nous perdons de la précision en espace ( $h^{1/2}$ ) probablement à cause de notre choix de discrétisation des domaines solide et fluide. Une discrétisation plus naturel nous permettrait certainement de retrouver une erreur en  $h$ . Cependant l'étude serait beaucoup plus technique car nous ne serions plus dans le cadre d'une approximation conforme. Même dans le cas où l'on travaille avec un domaine fixe, le fait d'avoir un domaine approché et un domaine exact différent sans inclusion du domaine approché dans le domaine exacte rend le problème très difficile à traiter comme le montre le peu de références à ce sujet. Une autre direction de recherche tout à fait naturelle consiste en l'étude de la méthode A.L.E. sur un problème fluide-élastique. Cependant comme nous l'avons expliqué dans la partie sur l'analyse des interactions fluide-structure, ce problème n'est toujours pas bien compris dans le cas continu et ne facilite donc pas l'étude dans le cas discret. On peut cependant citer le papier [72] faisant cette étude dans le cas 1D avec succès.

## 2.4 Quelques tests numériques ([T13], [T14])

En utilisant le schéma numérique décrit dans la section 2.2, nous pouvons simuler le mouvement de solides rigides dans un fluide visqueux. Dans ce qui suit nous donnons deux tests dans lesquels des boules sont immergées dans un fluide visqueux incompressible. Tout le système est soumis à un champ de gravité. La densité du fluide est égale à 1 et les solides ont une densité plus élevée. Dans le premier test, trois boules sont incluses dans un carré de côté

2. L'une des boules a un rayon  $R = 0,25$  et une densité  $\rho = 1,2$ . Au dessus d'elle, on place deux boules plus petites de rayons  $R = 0,125$  et de densité  $\rho = 1,5$ . On laisse le tout évoluer et on remarque que les deux petites boules ne tombent sur la grande mais s'écartent de la trajectoire verticale. Pour la simulation nous avons utilisé des éléments finis P2-P1 (environ 30000 triangles P2) et un pas de temps de l'ordre de 0,1. Le test est décrit dans la figure 2.2.

Dans le second test, on tente de simuler un phénomène de "Kiss and tumbling" que l'on peut observer dans des expériences physiques. Les deux boules sont identiques et plongées dans un fluide visqueux incompressible, l'une au-dessus de l'autre. Leur rayon est égal à 0,1, leur densité est égale à 1,5, le domaine total est un rectangle de longueur 4 et de largeur 1,5. On observe que la boule du dessus rejoint la première boule et la dépasse avant de se refaire dépasser. On utilise toujours les éléments finis P2-P1 (avec environ 26000 triangles P2) et un pas de temps de l'ordre de 0,1. Le test est décrit dans la figure 2.3.

Le schéma numérique que nous utilisons pour simuler le mouvement de corps rigides dans un fluide visqueux peut être adapté au cas de mouvement de poissons dans un fluide visqueux (c.f. section 1.5). Nous présentons ici trois simulations. À chaque fois, nous utilisons une déformation du poisson du même type que celle que l'on décrit dans la section 1.5. Plus précisément, la courbure de l'axe principal est donnée par une formule type

$$\kappa(t, y_1) = (a_3 y_1^3 + a_2 y_1^2 + a_1 y_1 + a_0) \sin \left( 2\pi \left( \frac{y_1}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) \right) + a_4 \quad (y_1 \in (0, l)).$$

Dans le premier test, on met un seul poisson et on prend dans ce cas  $a_4 = a_3 = 0$ ,  $a_2 = 2$ ,  $a_1 = 0,5$  et  $a_0 = 1$  : le poisson avance en ligne droite. On utilise toujours les éléments finis P2-P1 avec environ 18000 triangles P2. Le pas de temps est de l'ordre de 0,0125. Le nombre de Reynolds dans ce cas est de l'ordre de 3900. Le test est décrit dans la figure 2.4.

Dans le second test, on met un seul poisson mais on prend  $a_4 = -3$ ,  $a_3 = 0,1$ ,  $a_2 = 3$ ,  $a_1 = 0,5$  et  $a_0 = 0$ . On utilise toujours les éléments finis P2-P1 avec environ 4400 triangles P2. Le pas de temps est de l'ordre de 0,0125. Le nombre de Reynolds dans ce cas est de l'ordre de 2342. Le test est décrit dans la figure 2.5.

Dans le dernier test, on fait avancer deux poissons dans le sens opposé afin qu'ils se "rencontrent". On prend  $a_4 = a_3 = 0$ ,  $a_2 = 2$ ,  $a_1 = 0,5$  et  $a_0 = 1$ . On utilise toujours les éléments finis P2-P1 avec environ 31000 triangles P2. Le pas de temps est de l'ordre de 0,0125. Le nombre de Reynolds est, dans ce cas, de l'ordre de 2100. Le test est décrit dans la figure 2.6.

Un problème très intéressant dans la simulation de structures se déplaçant dans un fluide est la gestion des contacts entre les structures. Une conjecture, en vue des travaux [80, 81] est que les solides rigides ne se touchent jamais dans un fluide visqueux incompressibles. Cela provient de la force de lubrification qui joue un rôle important lorsque les solides sont proches. La plupart des schémas numériques ne parvient pas à reproduire correctement cette force (et du coup les solides se touchent dans les simulations numériques). Plusieurs "trucs" sont utilisés : on peut, par exemple, ajouter une force électrostatique pour repousser les solides rigides. Une autre solution récemment utilisée par Maury consiste à calculer et à rajouter la force de lubrification. Dans ce cas le schéma numérique ne doit pas être très précis vis-à-vis de cette force sans quoi on la prend deux fois en compte dans le calcul.

Tout ceci montre que, malgré le grand nombre de schémas numériques existant pour simuler des interactions fluide-structure, il reste encore des progrès à accomplir dans ce domaine.

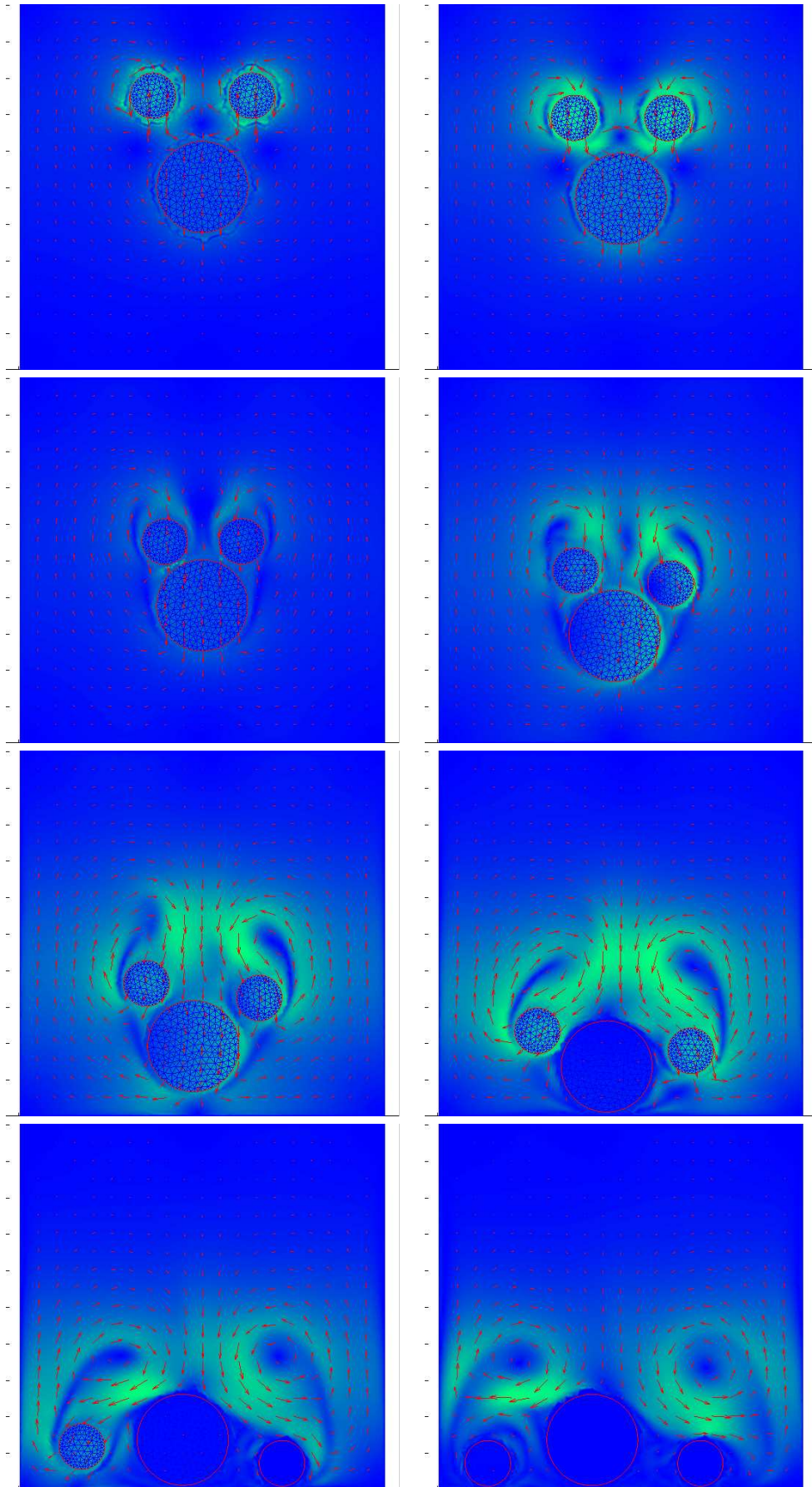


FIG. 2.2 – Test 1



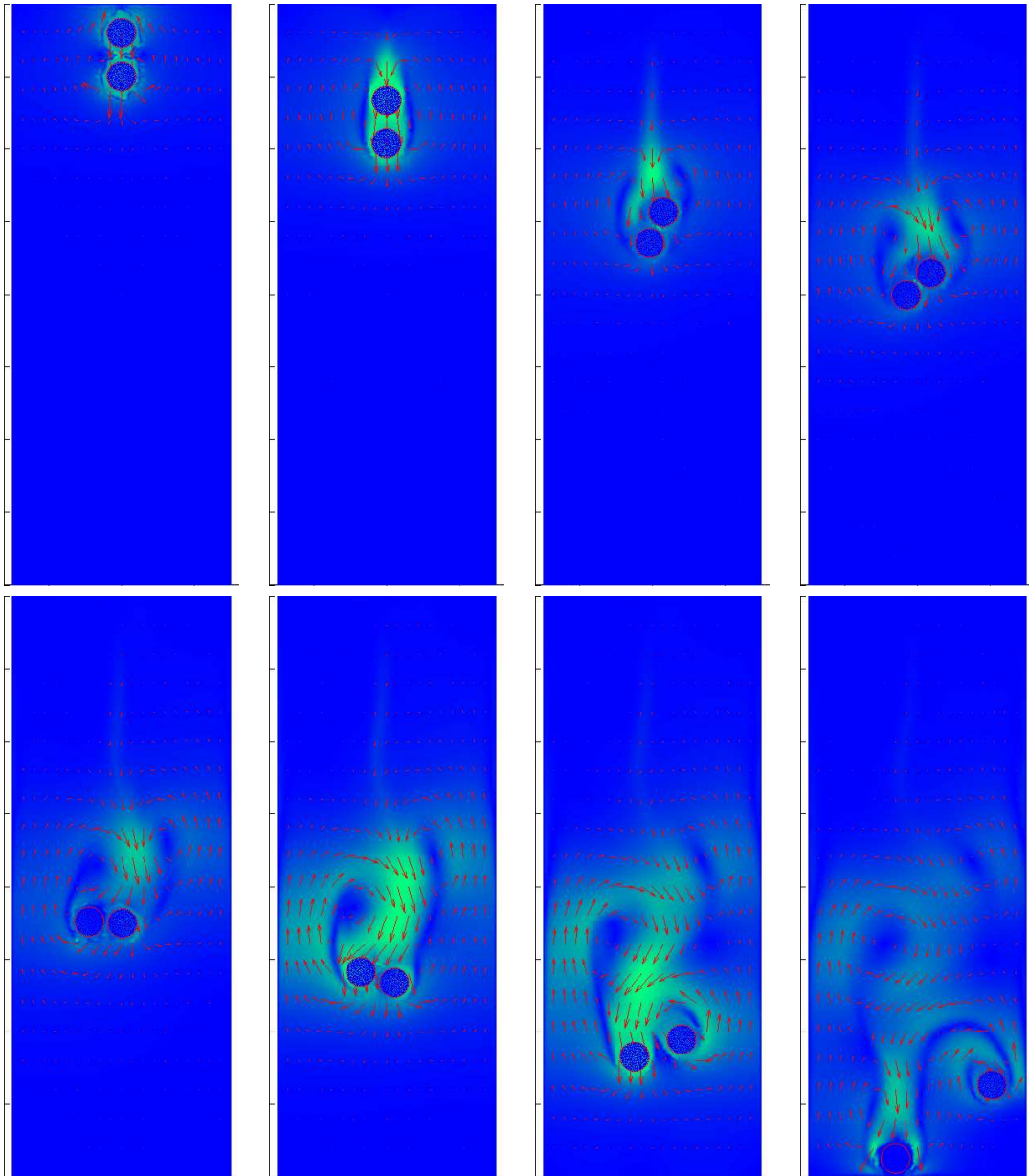


FIG. 2.3 – Test 2

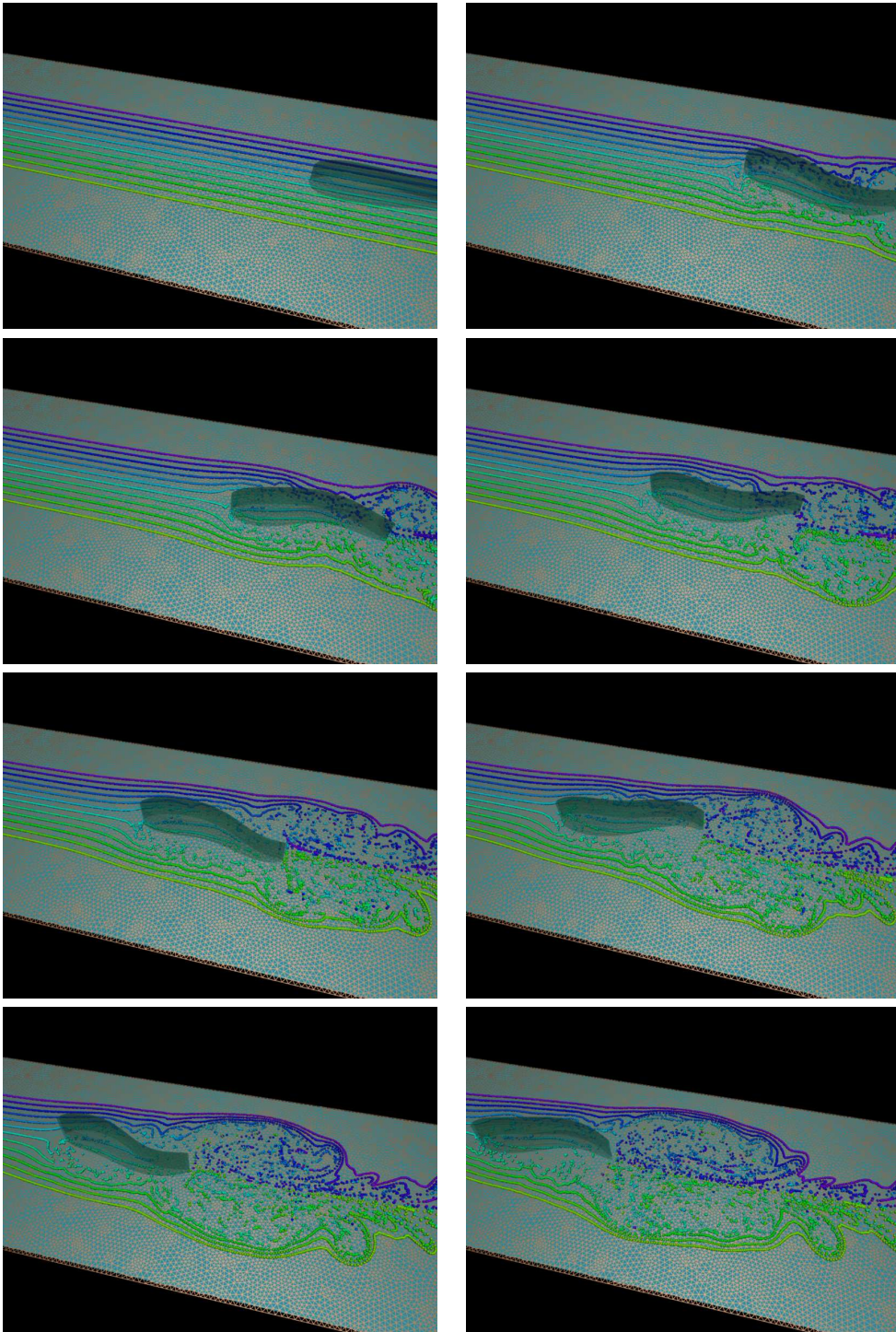


FIG. 2.4 – Un seul poisson, ligne droite

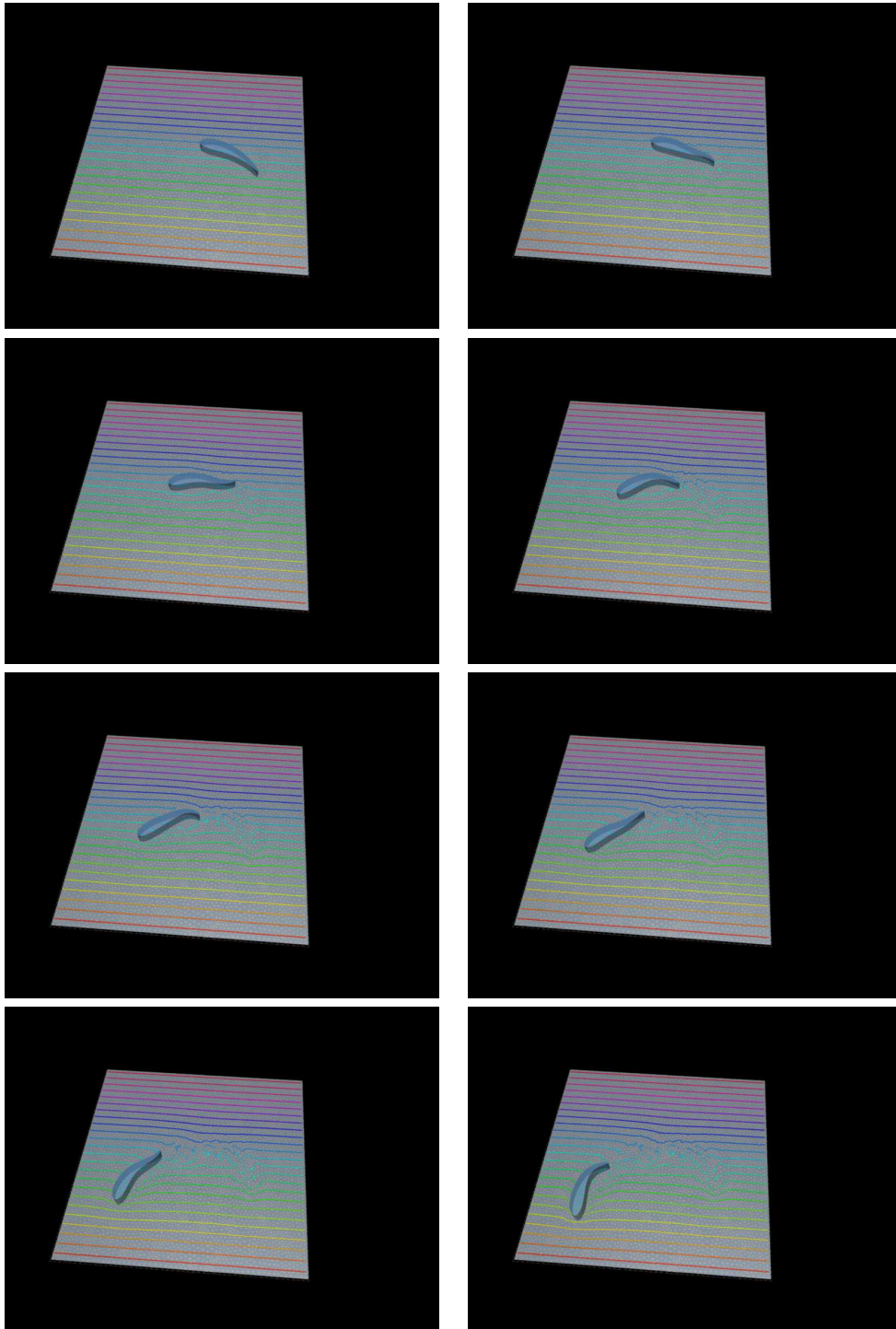


FIG. 2.5 – Un seul poisson, virage à gauche

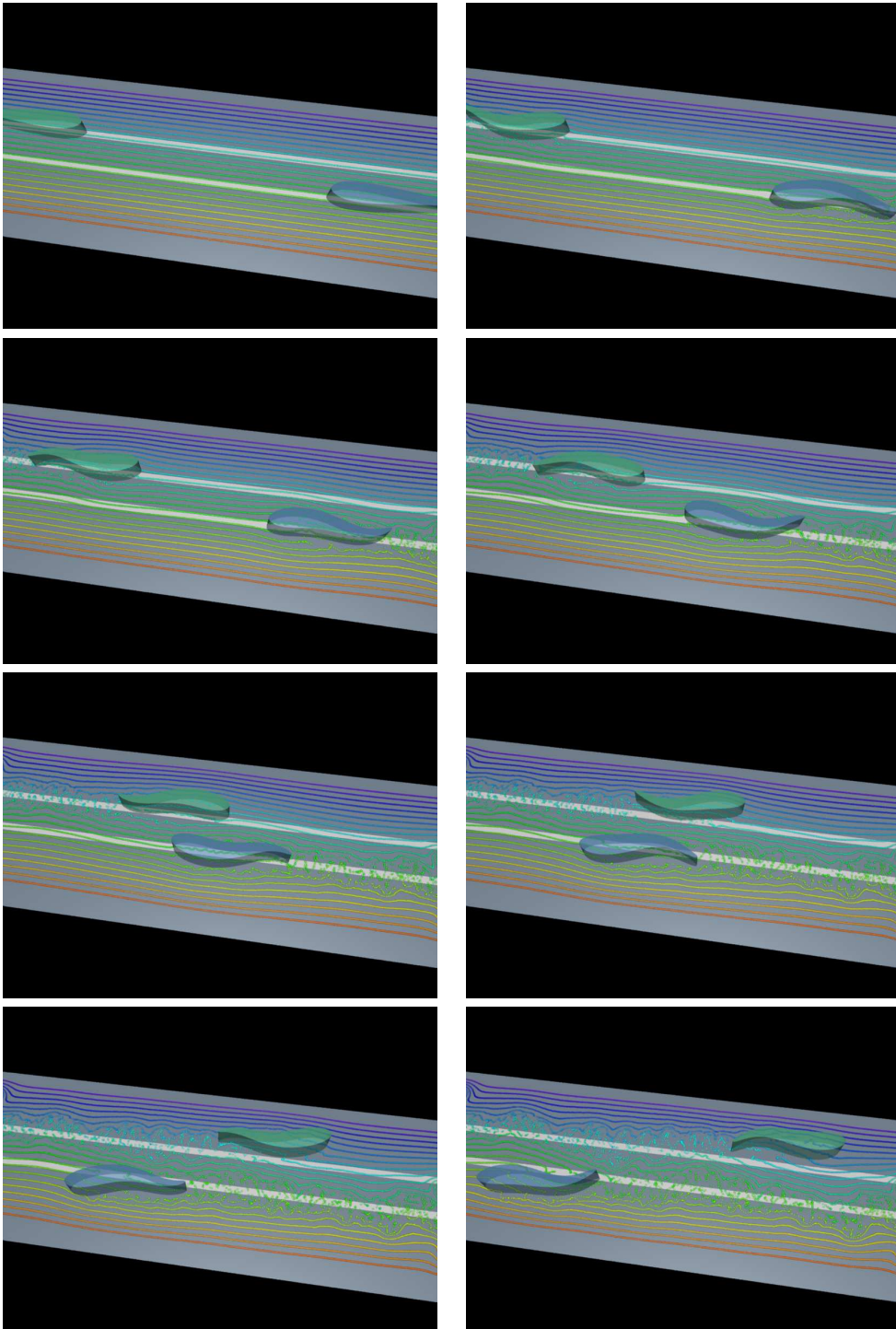


FIG. 2.6 – Deux poissons avec rencontre

## Chapitre 3

# Contrôle de systèmes d'interaction fluide-structure

### 3.1 Introduction

Dans cette section, nous considérons deux problèmes de contrôle sur un système fluide-structure. Dans le premier problème, nous contrôlons sur une partie du domaine du fluide et nous cherchons à contrôler la vitesse du fluide, la vitesse du solide rigide et la position du solide rigide. Pour le second problème, on voit la nage d'organisme aquatique comme un problème de contrôle. Ici le contrôle correspond au déplacement de cils vibratoires à la frontière du micro-organisme. Dans le second problème, le système étudié est un modèle simplifié obtenu en utilisant les échelles mises en jeu.

### 3.2 Contrôlabilité d'un système solide rigide-fluide visqueux incompressible ([T4])

Le premier problème de contrôle considéré est la contrôlabilité du système composé par un solide rigide à l'intérieur d'un fluide visqueux. Les équations du mouvement s'écrivent sous la forme suivante.

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \nu \Delta v + (v \cdot \nabla)v + \nabla p + 1_{\mathcal{O}}u = 0 \quad \text{dans } \mathcal{F}(\xi, \theta), \quad t \in (0, T), \quad (3.1)$$

$$\operatorname{div} v = 0 \quad \text{dans } \mathcal{F}(\xi, \theta), \quad t \in (0, T), \quad (3.2)$$

$$v = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \quad t \in (0, T), \quad (3.3)$$

$$v = \xi' + \theta' (x - \xi)^\perp \quad \text{sur } \partial\mathcal{S}(\xi, \theta), \quad t \in (0, T), \quad (3.4)$$

$$m\xi'' = - \int_{\partial\mathcal{S}(\xi, \theta)} \sigma(v, p)n \, d\Gamma, \quad \text{dans } (0, T), \quad (3.5)$$

$$I\theta'' = - \int_{\partial\mathcal{S}(\xi, \theta)} (x - \xi)^\perp \cdot \sigma(v, p)n \, d\Gamma. \quad \text{dans } (0, T). \quad (3.6)$$

On utilise un contrôle interne  $u \in L^2(0, T; L^2(\mathcal{O}))$  à support dans un domaine non vide  $\mathcal{O} \subset \Omega$ . L'étude est faite dans le cas bidimensionnel et dans le cas où le solide rigide est une boule de rayon 1. Dans ce cas le résultat obtenu est la contrôlabilité locale à zéro pour la vitesse et la contrôlabilité locale pour la position. Plus précisément, on a le résultat suivant :

**Théorème 3.2.1.** Soit  $T > 0$  et supposons que  $\overline{\mathcal{S}(0)} \subset \Omega \setminus \mathcal{O}$ . Soit  $v^0 \in H_0^1(\Omega)$  et soit

$$(\xi^0, \xi^1, \theta^0, \theta_T, \theta^1) \in \mathbb{R}^9$$

tels que

$$\begin{cases} \operatorname{div} v^0 = 0 & \text{dans } \Omega, \\ v^0 = \xi^1 + \theta^1(x - \xi^0)^\perp & \text{sur } \partial\mathcal{S}(0), \\ v^0 = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Il existe  $\varepsilon > 0$  tel que si  $(\xi_T, \theta_T) \in \mathbb{R}^3$  satisfait

$$\|v^0\|_{H^1(\mathcal{F}(\xi^0, \theta^0))} + |\xi^1| + |\theta^1| + |\xi^0 - \xi_T| + |\theta^0 - \theta_T| < \varepsilon,$$

alors il existe  $u \in L^2(0, T; L^2(\mathcal{O}))$  tel que la solution de (3.1)-(3.6) vérifie

$$v(T) = 0, \quad \xi'(T) = 0, \quad \theta'(T) = 0,$$

et

$$\xi(T) = \xi_T, \quad \theta(T) = \theta_T.$$

Dans [24], ce résultat est démontré dans le cas d'un solide de forme plus générale mais avec la contrainte

$$\int_{\partial\mathcal{S}(0)} (y - \xi(0)) \, d\Gamma = 0.$$

Le théorème 3.2.1 est un résultat local en vitesse et en position. Néanmoins, par un argument de compacité, on peut montrer que toute position admissible de la boule est atteignable en temps fini. La démonstration du théorème 3.2.1 repose principalement sur une inégalité de Carleman sur le problème linéaire associé déjà considéré dans le chapitre 1. Plus précisément, on commence par utiliser un changement de variables pour se ramener sur un domaine fixe comme dans le chapitre 1. On obtient alors un système écrit en domaine fixe (le domaine final et non le domaine initial comme pour l'existence de solutions fortes). L'idée est d'utiliser un point fixe comme pour démontrer l'existence de solutions fortes. On doit étudier la contrôlabilité à zéro du système linéaire suivant :

$$\frac{\partial V}{\partial t} - \nu \Delta V + \nabla P + 1_{\mathcal{O}} u = F \quad \text{dans } \mathcal{F}, \, t \in (0, T), \quad (3.7)$$

$$\operatorname{div} V = 0 \quad \text{dans } \mathcal{F}, \, t \in (0, T), \quad (3.8)$$

$$v = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \, t \in (0, T), \quad (3.9)$$

$$V = \xi' + \theta' y^\perp \quad \text{sur } \partial\mathcal{S}, \, t \in (0, T), \quad (3.10)$$

$$m\ell' = - \int_{\partial\mathcal{S}} \sigma(V, P)n \, d\Gamma, \quad \text{dans } (0, T), \quad (3.11)$$

$$I\omega' = - \int_{\partial\mathcal{S}} y^\perp \cdot \sigma(V, P)n \, d\Gamma. \quad \text{dans } (0, T). \quad (3.12)$$

$$\xi' = \ell, \quad \theta' = \omega. \quad (3.13)$$

Ce système peut s'écrire d'une manière abstraite sous la forme

$$\begin{cases} \dot{z} &= Az(t) + Bu(t) + f(t), \\ \dot{a}(t) &= Cz(t), \\ z(0) &= z^0 \in H, \\ a(0) &= a^0 \in X, \end{cases}$$

où  $H$  est un espace de Hilbert et  $X$  un espace de dimension finie. Pour obtenir un résultat de contrôlabilité pour ce système, on doit démontrer un résultat d'observabilité sur le système adjoint

$$\frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} - \nu \Delta \tilde{w} + \nabla \tilde{q} = \tilde{f} \quad \text{dans } (0, T) \times \mathcal{F}, \quad (3.14)$$

$$\operatorname{div} \tilde{w} = 0 \quad \text{dans } (0, T) \times \mathcal{F}, \quad (3.15)$$

$$\tilde{w} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \quad t \in (0, T), \quad (3.16)$$

$$\tilde{w} = \tilde{g} + \tilde{w}y^\perp \quad \text{sur } (0, T) \times \partial\mathcal{S}, \quad (3.17)$$

$$m\tilde{g}'(t) = - \int_{\partial\mathcal{S}} \sigma(\tilde{w}, \tilde{q})n \, d\Gamma + \tilde{l}, \quad \text{dans } (0, T), \quad (3.18)$$

$$I\tilde{w}'(t) = - \int_{\partial\mathcal{S}} y^\perp \cdot \sigma(\tilde{w}, \tilde{q})n \, d\Gamma + \tilde{k}. \quad \text{dans } (0, T). \quad (3.19)$$

Pour le système ci-dessus, nous avons obtenu l'inégalité de Carleman suivante :

$$\begin{aligned} & \int_{(0,T) \times \mathcal{F}} \lambda^4 s^3 \varphi^3 |\tilde{w}|^2 e^{2s\alpha} \, dt \, dy + \int_0^T \lambda^4 s^3 \tilde{\varphi}^3 (|\tilde{g}|^2 + |\tilde{w}|^2) e^{2s\tilde{\alpha}} \, dt \\ & \leq C \left( \int_{(0,T) \times \mathcal{O}} \lambda^5 s^{15/2} \tilde{\varphi}^{15/2} |\tilde{w}|^2 e^{4s\tilde{\alpha} - 2s\tilde{\alpha}} \, dt \, dy \right. \\ & \quad \left. + \int_{(0,T) \times \mathcal{F}} \lambda^5 s^{15/2} \tilde{\varphi}^{15/2} |\tilde{f}|^2 e^{4s\tilde{\alpha} - 2s\tilde{\alpha}} \, dt \, dy + \int_0^T \lambda^5 s^{15/2} \tilde{\varphi}^{15/2} (|\tilde{l}|^2 + |\tilde{k}|^2) e^{4s\tilde{\alpha} - 2s\tilde{\alpha}} \, dt \right). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Les définitions des fonctions poids dans l'inégalité ci-dessus sont données comme suit : on commence par considérer un ouvert non vide  $\mathcal{O}_0 \subset\subset \mathcal{O}$  et  $\{\partial\mathcal{S}\}_\varepsilon$  un voisinage de  $\partial\mathcal{S}$  dans  $\mathcal{F}$ . Alors il existe une fonction  $\psi \in C^2(\overline{\mathcal{F}})$  telle que

$$\psi(y) > 0 \quad \forall y \in \mathcal{F}, \quad \psi|_{\partial\mathcal{F}} = 0, \quad |\nabla\psi(y)| > 0 \quad \forall y \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{O}_0,$$

$$\psi(y) = |y|^2 - 1 \quad \forall y \in \{\partial\mathcal{S}\}_\varepsilon.$$

On étend naturellement  $\psi$  à  $\mathcal{S}$  par 0. Soit  $m > 4$ . Alors pour tout  $\lambda > 0$  et pour tout  $s > 0$ , on définit les fonctions suivantes dans  $(0, T) \times \mathcal{F}$

$$\varphi(t, y) = \frac{e^{\lambda(\psi(y) + m\|\psi\|_\infty)}}{(t(T-t))^4},$$

$$\tilde{\varphi}(t) = \min_{y \in \overline{\mathcal{F}}} \varphi(y, t) = \frac{e^{\lambda m\|\psi\|_\infty}}{(t(T-t))^4},$$

$$\hat{\varphi}(t) = \max_{y \in \overline{\mathcal{F}}} \varphi(y, t) = \frac{e^{\lambda(m+1)\|\psi\|_\infty}}{(t(T-t))^4},$$

$$\alpha(t, y) = \frac{e^{\lambda(\psi(y) + m\|\psi\|_\infty)} - e^{\frac{5}{4}\lambda m\|\psi\|_\infty}}{(t(T-t))^4},$$

$$\tilde{\alpha}(t) = \min_{y \in \overline{\mathcal{F}}} \alpha(y, t) = \frac{e^{\lambda m \|\psi\|_\infty} - e^{\frac{5}{4} m \lambda \|\psi\|_\infty}}{(t(T-t))^4},$$

$$\hat{\alpha}(t) = \max_{y \in \overline{\mathcal{F}}} \alpha(y, t) = \frac{e^{\lambda(m+1)\|\psi\|_\infty} - e^{\frac{5}{4} m \lambda \|\psi\|_\infty}}{(t(T-t))^4},$$

À partir de l'inégalité (3.20) et en utilisant un point fixe de Banach, nous obtenons le théorème 3.2.1. La démarche utilisée ici est assez classique pour démontrer des résultats de contrôle sur des problèmes paraboliques : on peut se référer aux résultats de [87],[56] [54], etc... Une autre manière de contrôler les équations de Navier-Stokes est de les considérer non comme une perturbation des équations de Stokes mais comme une perturbation des équations d'Euler : c'est la méthode utilisée par Coron [39]. Le désavantage est que l'on doit prendre comme conditions aux bords des conditions de Navier. De plus, cette méthode fonctionne en dimension 2, mais n'admet pour l'instant pas d'extension en dimension 3.

Dans le problème traité ici, on pourrait essayer de reprendre la méthode de Coron et commencer par essayer de traiter le même problème mais avec les équations d'Euler puis de reprendre le travail de Coron pour passer au système que l'on traite ici mais avec conditions de Navier. Finalement le problème en dimension 3 demande un peu de réflexion car la partie solide devient moins facile à traiter. En effet la position du solide est décrite par un élément de  $\mathbb{R}^3 \times SO(3)$  et on ne peut plus travailler dans un espace vectoriel de dimension finie comme dans le cas bidimensionnel (voir par exemple [19], [42]). Dans ce qui suit, nous nous plaçons dans le cas de la dimension 3, mais nous simplifions le modèle précédent avant de le contrôler.

### 3.3 Nage d'un micro-organisme ([T12])

Dans cette section, nous proposons un modèle de nage de quelques micro-organismes aquatiques. La nage est vu comme un problème de contrôle, le contrôle étant la vitesse relative entre le fluide et le micro-organisme sur le bord du micro-organisme. Les équations du mouvement sont simplifiées par rapport aux équations précédentes, car dans le cas d'un micro-organisme, le nombre de Reynolds est petit et cela nous permet de négliger certains termes. Un exemple important de micro-organisme dont le mouvement pourrait être modélisé par notre approche est donné par les ciliés (c.f. [17, 25]). Ces micro-organismes unicellulaires possèdent des cils vibratoires à leur surface pour se déplacer et peuvent être modélisés, dans une première approche (c.f. [58, 59]), comme des solides rigides couverts d'un grand nombre de cils se déplaçant de manière complexe (c.f. [18, 26]). Dans un modèle communément accepté, ce mouvement complexe des cils est remplacé par un champ de vitesses sur la surface du cilié (voir par exemple [96]).

Pour écrire les équations du mouvement, nous reprenons le système (1.1)-(1.9) avec la différence que la vitesse relative entre le fluide et le solide n'est plus nulle :

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \nu \Delta v + (v \cdot \nabla)v + \nabla p = 0 \quad \text{dans } \mathcal{F}(\xi, Q), \quad t \in (0, T), \quad (3.21)$$

$$\operatorname{div} v = 0 \quad \text{dans } \mathcal{F}(\xi, Q), \quad t \in (0, T), \quad (3.22)$$

$$v = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \quad t \in (0, T), \quad (3.23)$$

$$v = \xi' + \omega \wedge (x - \xi) + U(t, x) \quad \text{sur } \partial\mathcal{S}(\xi, Q), \quad t \in (0, T), \quad (3.24)$$

$$m\xi'' = - \int_{\partial\mathcal{S}(\xi, Q)} \sigma(v, p)n \, d\Gamma \quad \text{dans } (0, T), \quad (3.25)$$



$$(I\omega)' = - \int_{\partial\mathcal{S}(\xi, Q)} (x - \xi) \wedge \sigma(v, p)n \, d\Gamma \quad \text{dans } (0, T). \quad (3.26)$$

Rappelons que

$$\mathcal{S}(\xi, \theta) = Q\mathcal{S}^0 + \xi, \quad (3.27)$$

où  $\mathcal{S}_0$  est un domaine de référence. Le domaine du fluide est l'extérieur du domaine du solide i.e.

$$\mathcal{F}(\xi, Q) = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\mathcal{S}(\xi, Q)}. \quad (3.28)$$

La vitesse angulaire  $\omega$  est relié à  $Q$  par la formule suivante :

$$\frac{d}{dt}Qx = \omega \wedge (Qx) \quad \forall x \in \mathbb{R}^3. \quad (3.29)$$

Nous notons aussi par  $\ell$  la vitesse linéaire

$$\frac{d}{dt}\xi = \ell. \quad (3.30)$$

Comme dans le chapitre 1, nous pouvons considérer le changement de variables

$$y = Q^*(t) (x - \xi(t))$$

pour se ramener à des équations écrites sur un domaine fixe. On pose donc

$$\begin{aligned} \bar{v}(t, y) &= Q^*(t)v(t, \xi(t) + Q(t)y), & \bar{p}(t, y) &= p(t, \xi(t) + Q(t)y), \\ \bar{\ell}(t) &= Q^*(t)\ell(t), & \bar{\omega}(t) &= Q^*(t)\omega(t). \end{aligned}$$

On obtient alors des équations similaires à (1.51)-(1.56), auxquelles il faut ajouter les équations de  $\xi$  et de  $Q$  :

$$\dot{\xi}(t) = Q(t)\bar{\ell}(t), \quad \dot{Q}(t) = Q(t)\mathbb{S}(\bar{\omega}(t)) \quad t \in (0, T),$$

avec

$$\mathbb{S}(\omega) = \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\omega \in \mathbb{R}^3).$$

Le système obtenu peut être ré-écrit en adimensionnant les variables : on considère une longueur caractéristique  $L$ , un temps caractéristique  $\tau$  et une vitesse caractéristique  $V$ . On définit les variables adimensionnées :

$$\begin{aligned} t^* &= \tau^{-1}t, & y^* &= L^{-1}y, & v^* &= V^{-1}\bar{v}, & p^* &= L(V\nu)^{-1}\bar{p}, \\ \ell^* &= V^{-1}\bar{\ell}, & \omega^* &= LV^{-1}\bar{\omega}, & \xi^* &= L^{-1}\xi, \\ m^* &= L^{-3}m, & I^* &= L^{-5}\bar{I}, & T^* &= \tau^{-1}T, & U^* &= V^{-1}\bar{U}. \end{aligned}$$

Dans ce cas, le système adimensionné s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \Sigma \frac{\partial v^*}{\partial t^*} - \Delta^* v^* + \operatorname{Re} [(v^* - \ell^* - \omega^* \wedge y^*) \cdot \nabla^*] v^* + \nabla^* p^* + \omega^* \wedge v^* \\ = 0, \quad (t^*, y^*) \in (0, T^*) \times \mathcal{F}^*(0), \end{aligned} \quad (3.31)$$

$$\operatorname{div}^* v^* = 0, \quad (t^*, y^*) \in (0, T^*) \times \mathcal{F}^*(0), \quad (3.32)$$

$$v^*(t^*, y^*) = \ell^*(t^*) + \omega^*(t^*) \wedge y^* + U^*(t^*, y^*), \quad (t^*, y^*) \in (0, T^*) \times \partial\mathcal{S}^*(0), \quad (3.33)$$

$$\operatorname{Re} \Sigma \frac{m^*}{\rho_F} (\ell^*)'(t) = - \int_{\partial\mathcal{S}^*(0)} \sigma^*(u^*, p^*) n^* d\Gamma^* - \operatorname{Re} \Sigma \frac{m^*}{\rho_F} \omega^* \wedge \ell^*, \quad t \in (0, T), \quad (3.34)$$

$$\operatorname{Re} \Sigma \frac{I^*}{\rho_F} (\omega^*)'(t) = - \int_{\partial\mathcal{S}^*(0)} y^* \wedge (\sigma^*(v^*, p^*) n^*) d\Gamma^* + \operatorname{Re} \Sigma \frac{I^* \omega^*}{\rho_F} \wedge \omega^*, \quad t^* \in (0, T^*), \quad (3.35)$$

et

$$\Sigma(\xi^*)'(t^*) = Q(t^*) \ell^*(t^*) \quad t^* \in (0, T^*), \quad (3.36)$$

$$(Q)'(t^*) = Q(t^*) \mathbb{S}(\omega^*(t^*)) \quad t^* \in (0, T^*). \quad (3.37)$$

Dans les équations précédentes, nous avons utilisé les notations suivantes :

$$\Sigma = \frac{L}{\tau V} \quad \text{paramètre de fréquence,}$$

$$\operatorname{Re} = \frac{\rho_F V L}{\nu} \quad \text{nombre de Reynolds.}$$

Pour des micro-organismes, le nombre de Reynolds est de l'ordre de  $10^{-1}$  tandis que le paramètre de fréquence est de l'ordre de 1 (voir par exemple [32]). Ainsi, nous pouvons supposer que le mouvement du fluide est modélisé par le système de Stokes stationnaire. Cela signifie que bien que le flot du fluide dépend du temps, son mouvement est lent par rapport au cilié. Concernant la partie solide, selon l'ordre de densité de l'organisme microscopique (par rapport à celle du fluide), on peut négliger ou non les termes non linéaires et les termes de dérivées en temps. Nous avons choisi ici de garder ces termes, l'analyse étant plus simple avec l'autre choix. Dans ce cas, nous obtenons le système suivant qui est le système sur lequel nous avons travaillé :

$$-\Delta v + \nabla p = 0, \quad (t, y) \in (0, T) \times \mathcal{F}(0), \quad (3.38)$$

$$\operatorname{div} v = 0, \quad (t, y) \in (0, T) \times \mathcal{F}(0), \quad (3.39)$$

$$v(t, y) = \ell(t) + \omega(t) \wedge y + \sum_{i=1}^k u_i(t) \psi_i(y), \quad (t, y) \in (0, T) \times \partial\mathcal{S}(0), \quad (3.40)$$

$$\lim_{|y| \rightarrow \infty} v(y) = 0, \quad t \in (0, T), \quad (3.41)$$

$$m \ell'(t) = - \int_{\partial\mathcal{S}(0)} \sigma(u, p) n d\Gamma - m \omega \wedge \ell, \quad t \in (0, T), \quad (3.42)$$

$$I \omega'(t) = - \int_{\partial\mathcal{S}(0)} y \wedge (\sigma(v, p) n) d\Gamma + I \omega \wedge \omega, \quad t \in (0, T), \quad (3.43)$$

$$\xi'(t) = Q(t) \ell(t) \quad t \in (0, T), \quad (3.44)$$

$$Q'(t) = Q(t) \mathbb{S}(\omega(t)) \quad t \in (0, T). \quad (3.45)$$

Nous avons retiré toutes les étoiles pour simplifier les notations et nous avons noté  $m$  et  $I$  les quantités

$$m = \operatorname{Re} \Sigma \frac{m^*}{\rho_F}, \quad I = \operatorname{Re} \Sigma \frac{I^*}{\rho_F}.$$

La fonction  $u = (u_1, \dots, u_k) \in L^2(0, T; \mathbb{R}^k)$  est le contrôle du système et  $\Psi = \{\psi_1, \dots, \psi_k\}$  est un ensemble fixe de  $C^2(\partial\mathcal{S}(0); \mathbb{R}^3)$ . On peut écrire le système ci-dessus sous la forme

$$\begin{pmatrix} \ell'(t) \\ \omega'(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \ell(t) \\ \omega(t) \end{pmatrix} + E \left( \begin{pmatrix} \ell(t) \\ \omega(t) \end{pmatrix} \right) + Bu(t), \quad (3.46)$$

$$\xi'(t) = Q(t)\ell(t), \quad Q'(t) = Q(t)\mathbb{S}(\omega(t)). \quad (3.47)$$

où  $A$  est une matrice symétrique définie négative pour un produit scalaire de  $\mathbb{R}^6$ ,  $B$  la matrice de contrôle, et  $E$  un opérateur bilinéaire. Nous prenons la famille  $\Psi$  dans un des espaces suivants :

$$\mathcal{U} = \{ \varphi \in C^2(\partial\mathcal{S}; \mathbb{R}^3) ; \varphi = 0 \text{ hors de } \Gamma \},$$

$$\mathcal{V} = \{ \varphi \in C^2(\partial\mathcal{S}; \mathbb{R}^3) ; \varphi \cdot n = 0 \text{ sur } \partial\mathcal{S} \},$$

$$\mathcal{W} = \mathcal{U} \cap \mathcal{V},$$

où  $\Gamma$  est un ouvert de  $\partial\mathcal{S}$ . Les résultats que nous obtenons implique qu'il existe un large choix de  $\Psi$  pour lesquels le système peut être contrôlable. De plus le fait de choisir ces  $\Psi$  dans une des familles précédentes signifie que le mécanisme de contrôle peut agir uniquement sur  $\Gamma$  ou être tangentiel (ou les deux à la fois).

**Théorème 3.3.1.** *Supposons que la frontière de  $\mathcal{S}$  est de classe  $C^2$  et que  $k = 6$ . Soit  $\mathcal{Y}_1$  (resp.  $\mathcal{Y}_2$ ) l'ensemble des  $\Psi = (\psi_1, \dots, \psi_6) \in \mathcal{U}^6$  (resp.  $\Psi = (\psi_1, \dots, \psi_6) \in \mathcal{V}^6$ ) tel que le système (3.46)-(3.47) soit contrôlable en tout temps  $T > 0$ . Alors  $\mathcal{Y}_1$  (respectivement  $\mathcal{Y}_2$ ) contient un ouvert dense de  $\mathcal{U}^6$  (respectivement  $\mathcal{V}^6$ ).*

Pour avoir les deux conditions nous devons imposer davantage de régularité sur  $\mathcal{S}$ .

**Théorème 3.3.2.** *Supposons que la frontière de  $\mathcal{S}$  est analytique et que  $k = 6$ . Soit  $\mathcal{Y}_3$  l'ensemble des  $\Psi = (\psi_1, \dots, \psi_6) \in \mathcal{W}^6$  tel que le système (3.46)-(3.47) soit contrôlable en tout temps  $T > 0$ . Alors  $\mathcal{Y}_3$  contient un ouvert dense de  $\mathcal{W}^6$ .*

On peut donner des exemples explicites de famille  $\Psi$  tel que le système (3.46)-(3.47) soit contrôlable en tout temps  $T > 0$ . Il existe plusieurs questions liées à ce résultat. Dans ces deux résultats, nous prenons 6 contrôles pour contrôler 6 degrés de liberté pour la vitesse et la position. Peut-on utiliser moins de contrôles? Il est possible que diminuer le nombre de contrôle soit lié à la géométrie du solide : plus le solide a de symétries et moins il est facile de diminuer le nombre de contrôle. On peut aussi se demander ce qui se passe si l'on néglige moins de termes dans le système originel. Si le système était resté un système dynamique de dimension infinie l'étude aurait été bien plus difficile. Il serait aussi intéressant de chercher la famille  $\Psi$  qui optimise le mouvement du cilié et éventuellement de comparer cette famille avec le mécanisme réel du déplacement des ciliés.

# Chapitre 4

## Méthodes fréquentielles appliquées à la contrôlabilité et à la stabilisation

### 4.1 Introduction

Ce chapitre a pour objet d'introduire des méthodes fréquentielles pour résoudre des problèmes de contrôlabilité et de stabilisation. Ces outils sont introduits dans un cadre abstrait mais nous permettent d'obtenir des résultats intéressants sur des exemples concrets. Plus précisément, notre cadre de travail nous permet d'obtenir des résultats sur des systèmes de structures flexibles (équation de la corde, équation des plaques), sur des systèmes d'ondes (équation des ondes, équations de Maxwell) ou sur l'équation de Schrödinger. Les points communs sur ces systèmes sont qu'ils sont réversibles en temps et que sans contrôle ni stabilisation l'énergie reste constante.

Soit  $X$  un espace de Hilbert et  $A : D(A) \rightarrow X$  le générateur d'un  $C^0$  semi-groupe. Soit  $U$  un espace de Hilbert et  $B : U \rightarrow D(A^*)^*$  un opérateur de contrôle linéaire. Le problème de contrôle consiste à travailler sur le problème suivant :

$$\dot{z} = Az + Bu, \quad z(0) = z_0. \quad (4.1)$$

Dans le système ci-dessus, on cherche à contrôler l'état  $z \in X$  en utilisant le contrôle  $u$ . Dans notre cadre, nous prendrons  $u \in L^2(0, T; U)$  et nous nous intéresserons au problème de contrôlabilité exacte i.e. peut-on, pour tout  $z_0 \in X$  et pour tout  $z_1 \in X$ , trouver un contrôle tel que la solution  $z$  de (4.1) vérifie  $z(T) = z_1$ ? Si oui, nous dirons que le système (4.1) est exactement contrôlable ou que le couple  $(A, B)$  est exactement contrôlable. Remarquons que l'on travaille ici avec un opérateur de contrôle  $B$  qui n'est pas nécessairement à valeurs dans  $X$  et donc nous n'avons pas en général  $z(T) \in X$ . Nous allons donc restreindre la classe de couple  $(A, B)$  afin que le problème de contrôle soit pertinent.

**Définition 4.1.1.** On dira que  $B$  un opérateur de contrôle admissible pour l'opérateur  $A$  si pour tout  $T > 0$  il existe une constante  $K_T > 0$  telle que

$$\int_0^T \|B^* e^{tA^*} z_0\|_U^2 \leq K_T^2 \|z_0\|_X^2 \quad \forall z_0 \in D(A^*).$$

Dans ce cas, on peut démontrer que pour tout  $z_0 \in X$  et pour tout  $u \in L^2(0, T; U)$ , il existe une unique solution  $z$  au système (4.1) avec

$$z \in C([0, T]; X).$$

En fait, pour que l'opérateur  $B$  soit admissible il suffit que la propriété de la définition 4.1.1 soit vraie pour un  $T > 0$ . On peut aussi remarquer que si l'opérateur  $B^*$  est borné, i.e.  $B^* \in \mathcal{L}(X, U)$ , alors  $B$  est toujours admissible. Dans le cas où  $B$  un opérateur de contrôle admissible pour  $A$ , nous pouvons donc nous intéresser au problème de contrôle et nous pouvons montrer que le système (4.1) est exactement contrôlable en temps  $T > 0$  si et seulement si il existe une constante  $k_T > 0$  telle que

$$\int_0^T \|B^* e^{tA^*} z_0\|_U^2 \geq k_T^2 \|z_0\|_X^2 \quad \forall z_0 \in D(A^*).$$

On remarque que les propriétés intéressantes ci-dessus passent par un problème faisant intervenir les adjoints des opérateurs  $A$  et  $B$ . En fait, tout ceci montre l'équivalence, dans le cas linéaire, entre contrôlabilité et observabilité. Plus précisément, on peut s'intéresser directement au problème d'observation

$$\dot{z} = Az, \quad z(0) = z_0, \quad y = Cz. \quad (4.2)$$

Dans le système ci-dessus,  $Y$  est un espace de Hilbert et  $C : D(A) \rightarrow Y$  un opérateur non borné d'observation. La quantité  $y$  représente l'observation de l'état  $z$ . Si la condition initiale  $z_0$  appartient à  $D(A)$  alors  $z \in C([0, T]; D(A))$  et l'équation  $y = Cz$  ne pose pas de problème. Comme on veut travailler avec  $z_0 \in X$ , il faut pouvoir prolonger l'application  $z_0 \mapsto Ce^{tA} z_0$  de  $D(A)$  à  $X$ . Pour cela, il faut que l'inégalité suivante soit vérifiée

$$\int_0^T \|Ce^{tA} z_0\|_Y^2 \leq K_T^2 \|z_0\|_X^2 \quad \forall z_0 \in D(A). \quad (4.3)$$

On remarque tout de suite la relation entre cette inégalité et celle de la définition 4.1.1. Lorsque (4.3) est vraie, on dit que  $C$  est un opérateur d'observation admissible pour  $A$ . Finalement, nous dirons que le couple  $(A, C)$  est exactement observable en temps  $T$  s'il existe  $k_T > 0$  tel que

$$\int_0^T \|Ce^{tA} z_0\|_Y^2 \geq k_T^2 \|z_0\|_X^2 \quad \forall z_0 \in D(A). \quad (4.4)$$

Ainsi, la contrôlabilité exacte et l'observabilité exacte sont des propriétés équivalentes (à condition de prendre des opérateurs adjoints) et dans la suite nous nous intéresserons indifféremment à l'une ou l'autre des deux propriétés.

Pour la dernière propriété qui nous intéresse, nous nous plaçons dans le cas où  $A$  est anti-adjoint. Cela correspond en particulier au cas de système d'ordre 2 (de type onde) de la forme

$$\begin{aligned} \ddot{w} + A_0 w &= 0, \quad t \geq 0, \\ w(0) = w_0 &\in D(A_0^{1/2}), \quad \dot{w}(0) = w_1 \in H, \end{aligned}$$

avec  $H$  un espace de Hilbert et  $A_0$  un opérateur auto-adjoint strictement positif et inversible. Cela permet aussi de traiter le cas de l'équation de Schrödinger. De manière générale, on s'intéresse au système

$$\dot{z} = Az, \quad z(0) = z_0. \quad (4.5)$$

Comme  $A$  est anti-adjoint, on remarque que les solutions de (4.5) vérifient

$$\|z(t)\|_X = \|z_0\|_X \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

On veut donc agir sur ce système pour faire décroître cette norme qui dans de nombreux cas représente l'énergie du système. Cependant on ne veut pas agir via un contrôle comme dans (4.1) mais via un "feedback" qui n'utilise que l'état  $z$  pour stabiliser le système. En d'autres termes, on regarde on cherche dans (4.1) un  $u$  de la forme  $F(z)$ . Si l'on dérive formellement l'énergie du système, on obtient

$$\frac{d}{dt} \|z(t)\|_X^2 = 2 \operatorname{Re} \langle B^* z, u \rangle_X.$$

Cela suggère de prendre  $u = -B^* z$  et donc d'étudier le système en boucle fermée suivant

$$\dot{z} = Az + BB^* z, \quad z(0) = z_0. \quad (4.6)$$

On cherche dans ce cas comment décroît  $\|z(t)\|_X$ ; une décroissance intéressante dans les applications est la décroissance exponentielle. Des résultats généraux [117, 79, 5] montrent que si  $z$  décroît exponentiellement alors le problème  $(A, B)$  est exactement contrôlable. Dans le cas où  $B^*$  est borné, la réciproque est vraie et dans [5] les auteurs démontrent cette implication pour des opérateurs  $B^*$  non bornés mais satisfaisant certaines conditions. L'autre lien entre contrôle et stabilisation s'écrit en considérant le problème de contrôle optimal associé à (4.1). Supposons que  $B^*$  est borné et soit la fonction coût

$$J(z_0; u) = \int_0^\infty (\|u(t)\|^2 + \|z(t)\|^2) dt.$$

S'il existe  $u \in L^2(0, \infty; U)$  tel que  $J(z_0; u) < \infty$  alors (voir par exemple [43, p.294]) il existe un opérateur  $P \in \mathcal{L}(X)$  auto-adjoint et positif tel que

$$\min_{u \in L^2(0, \infty; U)} J(u; z_0) = \langle z_0, Pz_0 \rangle_X.$$

De plus, le contrôle optimal  $u_{\text{opt}}$  est donné par la loi de feedback

$$u_{\text{opt}} = -B^* P e^{t\tilde{A}},$$

avec  $\tilde{A} = A - BB^* P$ . L'opérateur  $P$  vérifie l'équation de Riccati algébrique

$$\langle Az_1, Pz_2 \rangle_X + \langle Az_2, Pz_1 \rangle_X - \langle B^* Pz_2, B^* Pz_1 \rangle_X + \langle z_2, z_1 \rangle_X = 0 \quad (z_1, z_2 \in D(A)). \quad (4.7)$$

Si de plus le système (4.6) est exponentiellement stable (i.e. si  $\|z(t)\|$  décroît exponentiellement vers 0) alors  $P$  est l'unique solution positive de (4.7).

Dans la suite, nous utilisons des méthodes fréquentielles pour obtenir des résultats d'observabilité, de contrôlabilité et de stabilisation. Dans le cas où l'opérateur  $B^*$  est borné, ces méthodes nous permettent de démontrer des résultats de stabilisation (et donc de contrôlabilité et de stabilisation). Nous pouvons même considérer le problème discrétisé par les éléments finis ou les différences finies et regarder comment assurer que les solutions approchées restent uniformément exponentiellement stable. Par contre, lorsque l'opérateur  $B^*$  est non borné (contrôle ou observation frontière), nous ne pouvons aller jusqu'à la stabilisation mais nous obtenons néanmoins des critères intéressants pour la contrôlabilité exacte et l'observabilité exacte.

## 4.2 Stabilisation dans le cas $B$ borné ([T11], [T10])

Dans cette partie, nous nous intéressons au problème de stabilisation et nous supposons que  $B \in \mathcal{L}(U, X)$ . De plus, nous travaillons uniquement avec un système du second ordre. Soit  $H$  un espace de Hilbert et  $A_0 : D(A_0) \rightarrow H$  un opérateur auto-adjoint, défini positif et à résolvante compacte. Nous considérons le système suivant

$$\ddot{w} + A_0 w + B_0 B_0^* \dot{w} = 0, \quad t \geq 0, \quad (4.8)$$

$$w(0) = w_0 \in D(A_0^{1/2}), \quad \dot{w}(0) = w_1 \in H. \quad (4.9)$$

On dit que le système (4.8)-(4.9) est exponentiellement stable si il existe  $M > 0$  et  $\alpha > 0$  tels que pour tout  $(w_0, w_1) \in D(A_0^{1/2}) \times H$ , on a

$$\|\dot{w}(t)\|_X^2 + \|w(t)\|_{D(A_0^{1/2})}^2 \leq M e^{-\alpha t} \left( \|w_1\|_X^2 + \|w_0\|_{D(A_0^{1/2})}^2 \right) \quad (t \geq 0). \quad (4.10)$$

Pour démontrer la stabilité exponentielle d'un système d'EDP, il existe de nombreuses méthodes, mais comme nous l'avons déjà précisé, la plupart du temps il s'agit de méthodes "temporelles" dans le sens où l'on attaque directement le problème. Nous proposons ici une méthode différente donnée par le théorème suivant. Nous notons  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$  les valeurs propres de  $A_0$  et  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de vecteurs propres associés aux valeurs propres.

**Théorème 4.2.1.** *Définissons pour tout  $\omega > 0$  et pour tout  $\varepsilon > 0$*

$$I_\varepsilon(\omega) = \{m \in \mathbb{N} ; |\lambda_m - \omega| \leq \varepsilon\}.$$

*Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *le système (4.8)-(4.9) est exponentiellement stable ;*

(ii) *il existe  $\varepsilon > 0$  et  $\delta > 0$  tels que pour tout  $\omega > 0$  et pour tout  $\varphi = \sum_{m \in I_\varepsilon(\omega)} c_m \varphi_m$*

$$\|B^* \varphi\|_U \geq \delta \|\varphi\|_X. \quad (4.11)$$

(iii) *il existe  $\varepsilon > 0$  et  $\delta > 0$  tels que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et pour tout  $\varphi = \sum_{m \in I_\varepsilon(\lambda_n)} c_m \varphi_m$*

$$\|B^* \varphi\|_U \geq \delta \|\varphi\|_X. \quad (4.12)$$

Par ce théorème, on est ramené d'un problème d'évolution à un problème de paquets de vecteurs propres de  $A_0$ . Selon la répartition des valeurs propres, ces paquets peuvent être plus ou moins difficiles à étudier. Lorsque les valeurs propres sont séparées ces paquets sont réduits à un seul élément :

**Corollaire 4.2.2.** *Avec les hypothèses du théorème 4.2.1, supposons de plus qu'il existe  $\gamma > 0$  tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,*

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n \geq \gamma.$$

*Alors le système (4.8)-(4.9) est exponentiellement stable si et seulement si il existe  $\delta > 0$  tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}$*

$$\|B^* \varphi_n\|_U \geq \delta \|\varphi_n\|_X. \quad (4.13)$$

Ce corollaire permet surtout de traiter des systèmes d'EDP qui sont 1D en espace. Dès la dimension 2, on doit généralement travailler avec le théorème 4.2.1. On peut, par exemple traiter avec ce résultat, la stabilisation d'une plaque carrée en dimension 2 : soit  $\Omega = (0, \pi) \times (0, \pi)$  et soit  $\mathcal{O} \subset \Omega$  un domaine non vide arbitrairement petit. On note par  $\chi_{\mathcal{O}}$  la fonction caractéristique de  $\mathcal{O}$ . On considère le problème de stabilisation suivant :

$$\ddot{w} + \Delta^2 w + \chi_{\mathcal{O}} \dot{w} = 0, \quad t > 0, \quad x \in \Omega, \quad (4.14)$$

$$w = \Delta w = 0, \quad t > 0 \quad x \in \partial\Omega, \quad (4.15)$$

$$w(0, x) = w_0(x), \quad \dot{w}(0, x) = w_1(x), \quad x \in \Omega. \quad (4.16)$$

Ce système est exponentiellement stable :

**Théorème 4.2.3.** *Il existe  $M > 0$  et  $\alpha > 0$  tels que pour tout  $w_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$  et pour tout  $w_1 \in L^2(\Omega)$ , la solution  $w$  de (4.14)-(4.16) vérifie*

$$\|w(t)\|_{H^2(\Omega)} + \|\dot{w}(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq M e^{-\alpha t} (\|w_0\|_{H^2(\Omega)} + \|w_1\|_{L^2(\Omega)}) \quad (t \geq 0).$$

Ce résultat n'est pas complètement nouveau et a découlé d'un résultat de contrôlabilité démontré par Jaffard [91] en utilisant un résultat de Kahane. Notre démonstration a l'avantage d'être plus simple et de plus permet de se tourner vers le problème de la discrétisation de (4.14)-(4.16) en gardant la propriété de stabilisation exponentielle uniforme (c.f. section suivante). Néanmoins notre résultat est plus faible car nous ne traitons pas une plaque rectangulaire générale. En utilisant le résultat de [129], nous pouvons certainement en déduire à nouveau le résultat de [91] dans le cas d'une plaque rectangulaire, mais dans ce cas nous devrions utiliser des résultats plus fins de la théorie des nombres.

L'autre remarque, qui sera répétée dans la section concernant la contrôlabilité, provient du fait que le domaine de stabilisation  $\mathcal{O}$  peut être arbitrairement petit. Ce résultat diffère du cas des ondes où l'on doit stabiliser sur une partie du domaine vérifiant des conditions d'optique géométrique ([14]). Ce résultat peut s'expliquer en partie par le fait que la vitesse des ondes dans une plaque est infinie ce qui n'est pas le cas des ondes. Cependant, cela ne signifie pas que pour n'importe quelle plaque le résultat du théorème 4.2.3 reste vrai. En particulier, Chen, Fulling, Narcowich et Sun montre dans [31] que pour une plaque circulaire, on peut prendre un domaine de stabilisation aussi grand que l'on veut, s'il ne touche pas le bord alors le système n'est pas exponentiellement stable. Il serait intéressant de comprendre pourquoi cette différence de géométrie implique une telle différence de comportement. De plus, on ne sait pas si l'on doit stabiliser sur une grande partie du bord (pour vérifier l'optique géométrique) ou si une partie arbitrairement petite est suffisante. L'étude d'autres domaines serait aussi à faire mais le théorème 4.2.1 est plus difficile à utiliser dans des géométries quelconques. L'étude des paquets de vecteurs propres de  $A_0$  est facilitée dans le cas d'une plaque rectangulaire ou d'une plaque circulaire par la connaissance explicite des éléments propres de  $A_0$ . Un autre problème intéressant serait de généraliser le théorème 4.2.3 au cas d'un opérateur  $B_0$  tel que  $B_0^*$  n'est pas nécessairement borné. Cela permettrait de traiter le cas de la stabilisation frontière ou ponctuelle. Actuellement un ingrédient clé dans la démonstration est un résultat de [103] qui n'est valable que pour des opérateurs bornés. Étendre ce résultat au cas non borné est un problème difficile mais qui permettrait de relier les problèmes de contrôlabilité et les problèmes de stabilisation.



### 4.3 Stabilisation numérique ([T11], [T10])

Lorsque l'on discrétise un problème de contrôlabilité, d'observabilité ou de stabilisation d'une EDP, on n'est pas sûr de garder les propriétés que l'on a au niveau continu. En fait, dans le cas simple de l'équation d'une corde avec semi-discrétisation en espace et stabilisation à l'une des extrémités, Infante et Zuazua ont montré dans [88] que le schéma classique de différence finie ne donnait pas une discrétisation exponentiellement uniforme. De manière générale, de nombreux schémas classiques ne permettent pas d'obtenir une discrétisation exponentiellement uniforme de problèmes continus qui sont exponentiellement stables. Cela provient de certaines fréquences (souvent les hautes fréquences) qui ne sont que faiblement stabilisées par le terme d'amortissement ("feedback"). Pour résoudre ce problème un certain nombre de solutions ont été envisagées : régularisation de Tychonov ([67]), éléments finis mixtes [12], filtrage des hautes fréquences [88], etc. Ici nous considérons une méthode consistant à ajouter une viscosité artificielle qui tend vers 0 lorsque le pas d'espace  $h$  tend vers 0. Cette méthode a déjà été utilisée par [128]. Notre approche consiste à nous servir d'une méthode fréquentielle pour obtenir un critère assez général permettant de traiter un classe de systèmes différents sans avoir à tout refaire à chaque fois. Malheureusement notre critère général ne s'applique quasiment qu'au système d'EDP unidimensionnel en espace. Cependant notre méthode nous permet de traiter des exemples en dimension supérieure, notamment celui de la plaque carrée.

Commençons par un cadre abstrait. On considère le système en boucle fermé (4.8)-(4.9) avec les hypothèses de la section précédente. On suppose de plus que ce système est exponentiellement stable i.e. qu'il existe  $M$  et  $\alpha > 0$  tels que pour tout  $(w_0, w_1) \in D(A_0^{1/2}) \times H$ , la propriété (4.10) soit vérifiée. On note par  $D(A_0^{1/2})$  le complété de  $D(A_0)$  pour la norme

$$\|\varphi\|_{1/2} = \sqrt{\langle A_0 \varphi, \varphi \rangle_H} \quad \forall \varphi \in D(A_0)$$

et l'on considère une suite  $(V_h)_{h>0}$  de sous-espaces linéaires de dimension finie de  $D(A_0^{1/2})$ . Pour tout  $h$ , on note par  $N(h)$  la dimension de  $V_h$ . Le produit scalaire de  $V_h$  est la restriction du produit scalaire dans  $H$  qui, pour simplifier, sera noté dans la suite par  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Nous définissons l'opérateur linéaire  $A_{0h} \in \mathcal{L}(V_h)$  par

$$\langle A_{0h} \varphi_h, \psi_h \rangle = \langle A_0^{1/2} \varphi_h, A_0^{1/2} \psi_h \rangle \quad \forall \varphi_h, \psi_h \in V_h.$$

L'opérateur  $A_{0h}$  est clairement symétrique et défini positif. Nous considérons aussi une suite de sous-espaces  $(U_h)$  de  $U$  et nous définissons les opérateurs  $B_{0h} \in \mathcal{L}(U_h, V_h)$  par

$$B_{0h} u_h = \tilde{\pi}_h B_0 u_h \quad \forall u_h \in U_h, \quad (4.17)$$

où  $\tilde{\pi}_h$  est la projection orthogonale de  $H$  sur  $V_h$ . L'adjoint de  $B_{0h}^*$  de  $B_{0h}$  est alors donné par la relation

$$B_{0h}^* \varphi_h = \rho_h B_0^* \varphi_h, \quad \forall \varphi_h \in V_h,$$

où  $\rho_h$  est la projection orthogonale de  $U$  sur  $U_h$ . Ce choix de  $B_{0h}$  implique que les familles  $(\|B_{0h}\|_{\mathcal{L}(U_h, V_h)})_{h \in (0, h^*)}$  et  $(\|B_{0h}^*\|_{\mathcal{L}(V_h, U_h)})_{h \in (0, h^*)}$  sont bornées.

Nous supposons de plus que la famille d'espaces  $(V_h)$  (respectivement  $(U_h)$ ) approche l'espace  $D(A_0^{1/2})$  (respectivement  $U$ ). Plus précisément, si l'on note  $\pi_h$  la projection orthogonale de  $D(A_0^{1/2})$  sur  $V_h$ , nous faisons l'hypothèse qu'il existe  $\theta > 0$ ,  $h^* > 0$  et  $C_0 > 0$  tels que

$$\|\pi_h \varphi - \varphi\| + h^\theta \|\pi_h \varphi - \varphi\|_{1/2} \leq C_0 h^{2\theta} \|A_0 \varphi\| \quad \forall \varphi \in D(A_0),$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \rho_h u = u \quad \text{dans } U \quad \forall u \in U,$$

et

$$\|B_0^* \varphi - B_{0h}^* \varphi\|_U \leq C_0 h^{2\theta} \|A_0 \varphi\| \quad \forall \varphi \in D(A_0).$$

Les hypothèses ci-dessus sont vérifiées en particulier lorsque l'on utilise une méthode d'éléments finis pour approcher des espaces de Sobolev. Le résultat que nous avons démontré dans ce cadre général est le suivant :

**Théorème 4.3.1.** *Avec les hypothèses ci-dessus, supposons qu'il existe  $\gamma_0 > 0$  tel que les valeurs propres  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $A_0^{1/2}$  vérifient*

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n \geq \gamma_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (4.18)$$

*Supposons de plus qu'il existe  $\beta_0 > 0$  tel que pour tout vecteur propre  $\varphi$  de  $A_0^{1/2}$*

$$\|B_0^* \varphi\|_U \geq \beta_0 \|\varphi\|. \quad (4.19)$$

*Alors la famille de systèmes*

$$\ddot{w}_h + A_{0h} w_h + B_{0h} B_{0h}^* \dot{w}_h + h^\theta A_{0h} \dot{w}_h = 0, \quad t \geq 0, \quad (4.20)$$

$$w_h(0) = w_{0h} \in V_h, \quad \dot{w}_h(0) = w_{1h} \in V_h, \quad (4.21)$$

*est uniformément exponentiellement stable dans le sens qu'il existe des constantes  $M, \alpha, h^* > 0$  indépendantes de  $h$ ,  $w_{0h}$  et  $w_{1h}$  telles que pour tout  $h \in (0, h^*)$ , on a*

$$\|\dot{w}_h(t)\|^2 + \left\| A_{0h}^{1/2} w_h(t) \right\|^2 \leq M e^{-\alpha t} \left( \|w_{1h}\|^2 + \left\| A_{0h}^{1/2} w_{0h} \right\|^2 \right) \quad \forall t \geq 0. \quad (4.22)$$

Une conséquence de ce résultat est la convergence des opérateurs de Riccati associés aux problèmes approchés vers l'opérateur de Riccati associé au problème continu. Plus précisément notons

$$X = D(A_0^{1/2}) \times H, \quad D(A) = D(A_0) \times D(A_0^{1/2}),$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -A_0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ B_0 \end{pmatrix},$$

$$X_h = V_h \times V_h, \quad \langle (\varphi_h, \psi_h), (\tilde{\varphi}_h, \tilde{\psi}_h) \rangle_{X_h} = \langle A_{0h}^{1/2} \varphi_h, A_{0h}^{1/2} \tilde{\varphi}_h \rangle + \langle \psi_h, \tilde{\psi}_h \rangle,$$

$$A_h = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -A_{0h} & -h^\theta A_{0h} \end{pmatrix}, \quad B_h = \begin{pmatrix} 0 \\ B_{0h} \end{pmatrix},$$

et  $\sigma_h$  la projection orthogonale de  $X$  sur  $X_h$ .

En utilisant un résultat abstrait (voir [13, 65, 66, 94]), on démontre le résultat suivant

**Théorème 4.3.2.** *Avec les hypothèses du théorème 4.3.1, les équations de Riccati*

$$A_h^* P_h + P_h A_h - P_h B_h B_h^* P_h + I = 0$$

*(resp l'équation de Riccati (4.7)) admettent une unique solution positive  $P_h$  (resp.  $P$ ). De plus,  $P_h$  converge fortement vers  $P$  dans le sens suivant*

$$\lim_{h \rightarrow 0} P_h \sigma_h = Pz \quad (z \in X).$$

Pour démontrer le théorème 4.3.1 l'idée est de regarder séparément ce qui se passe pour les basses fréquences et pour les hautes fréquences : les basses fréquences se comportent de la même manière que le problème continu et les hautes fréquences sont amorties par le terme de viscosité  $h^\theta A_{0h} \dot{w}_h$  que l'on a ajouté dans le schéma numérique (par rapport à un schéma classique). Plus précisément, la proposition suivante montre que les propriétés (4.18) et (4.19) restent vraies pour les basses fréquences.

**Proposition 4.3.3.** *Notons par  $(\lambda_{n,h})$  la suite croissante des valeurs propres de  $A_{0h}^{1/2}$  et par  $(\varphi_{n,h})$  une suite de vecteurs propres normalisés associés. Alors il existe  $\epsilon > 0$ ,  $h^* > 0$ ,  $\gamma > 0$  et  $\beta > 0$  tels que pour tout  $h \in (0, h^*)$  et pour tout  $n \in \{1, 2, \dots, N(h)\}$  vérifiant*

$$h^\theta \lambda_n^2 \leq \epsilon, \quad (4.23)$$

on a

$$\lambda_{n+1,h} - \lambda_{n,h} \geq \gamma, \quad (4.24)$$

et

$$\|B_{0h}^* \varphi_{n,h}\|_U \geq \beta. \quad (4.25)$$

C'est à cause de cette propriété que nous avons besoin de la condition de gap (4.18) dans le problème continu. En effet nous utilisons un résultat classique d'approximation des vecteurs propres pour une méthode de Galerkin ([116]) :

$$\|\varphi_n - \varphi_{n,h}\| \leq 2(1 + \rho_{n,h}) \|\varphi_n - \pi_h \varphi_n\|,$$

où

$$\rho_{n,h} = \max_{\substack{1 \leq m \leq N(h) \\ m \neq n}} \frac{\lambda_n}{|\lambda_{m,h} - \lambda_n|}.$$

Lorsque nous n'avons plus la propriété de gap, nous ne parvenons plus à utiliser ce résultat pour démontrer (4.25). Par contre comme nous le verrons plus loin lorsque l'on connaît explicitement les éléments propres de  $A_{0,h}$ , nous n'avons plus besoin de ce résultat général et nous pouvons montrer directement la décroissance exponentielle uniforme.

La démonstration du théorème 4.3.1 est basée sur une caractérisation fréquentielle de la stabilité exponentielle du même type que celles du théorème 4.2.1 ou du corollaire 4.2.2. La différence est que l'on doit traiter ici une famille de systèmes. On est donc conduit à utiliser un autre résultat, qui généralise celui de Prüss [115] et Huang [86] au cas d'une famille de systèmes. Commençons par rappeler une définition :

**Définition 4.3.4.** Soit  $(X_h)$  une famille d'espace d Hilbert et soit  $(A_h)$  une famille d'opérateurs engendrant des semi-groupes  $(e^{tA_h})$  continus dans  $X_h$ . La famille de semi-groupes  $(e^{tA_h})$  est dite uniformément exponentiellement stable s'il existe des constantes  $M, \alpha > 0$  telles que

$$\|e^{tA_h}\|_{\mathcal{L}(X_h)} \leq M e^{-\alpha t} \quad \forall t \geq 0.$$

Le résultat dont nous nous servons est dû à Liu et Zheng [105, p. 162] :

**Théorème 4.3.5.** *Soit  $(A_h)$  une suite de générateurs de semi-groupes dans  $X_h$ . Alors la famille de semi-groupes  $(e^{tA_h})$  est uniformément exponentiellement stable si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

- (i) pour tout  $h$ ,  $i\mathbb{R}$  est inclus dans l'ensemble résolvant  $\rho(A_h)$  de  $A_h$  ;  
(ii)  $\sup_{h,\omega \in \mathbb{R}} \|(i\omega - A_h)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X_h)} < \infty$ .

En utilisant ce théorème et en découpant le spectre en basse fréquence et haute fréquence (via le critère (4.23)), on peut démontrer le théorème 4.3.1. La propriété de décroissance exponentielle uniforme permet de plus d'obtenir des résultats sur l'approximation des opérateurs de Riccati.

En utilisant une approche similaire, on peut traiter le cas particulier de l'équation des plaques dans carré, c'est-à-dire la discrétisation du système (4.14)-(4.16). On note  $\tilde{N} \in \mathbb{N}$  et on définit

$$h = \frac{1}{\tilde{N} + 1}.$$

On stabilise la plaque sur un domaine non vide  $\mathcal{O}$  arbitrairement petit de  $\Omega = (0, \pi) \times (0, \pi)$ . On peut supposer que  $\mathcal{O} = (a, b) \times (c, d)$  avec  $0 < a < b < \pi$  et  $0 < c < d < \pi$ . On peut aussi supposer qu'il existe des entiers

$$a(h), b(h), c(h), d(h) \in \{1, \dots, \tilde{N}\}$$

tels que

$$a = a(h)h, \quad b = b(h)h, \quad c = c(h)h, \quad d = d(h)h.$$

On note  $w_{j,k}$  ( $j, k \in \{0, \dots, \tilde{N} + 1\}$ ) l'approximation de la solution  $w$  du système (4.14)-(4.16) au point  $x_{j,k} = (jh, kh)$ . Nous utilisons la méthode des différences finies (contrairement au cadre précédent). En fait nous aurions pu écrire le cadre général dans un cadre différence finie car il existe des résultats généraux pour approcher les valeurs propres et les vecteurs propres dans ce cadre et le théorème 4.3.5 ne demande pas que  $V_h \subset V$ .

Ici, dans le cas d'une plaque carrée, nous avons

$$V_h = \mathbb{R}^{(\tilde{N}^2)}.$$

Nous notons  $w_h \in V_h$  le vecteur de coordonnées  $w_{j,k}$  avec  $1 \leq j, k \leq \tilde{N}$ . Nous définissons la matrice  $A_{0h}$  représentant la discrétisation du bilaplacien avec les conditions  $w = \Delta w = 0$  sur le bord via sa racine carrée :

$$\left( A_{0h}^{1/2} w_h \right)_{j,k} = -\frac{1}{h^2} (w_{j+1,k} + w_{j-1,k} + w_{j,k-1} - 4w_{j,k}),$$

pour tout  $1 \leq j, k \leq \tilde{N}$ , avec comme conditions aux bords

$$w_{0,k} = w_{k,0} = w_{\tilde{N}+1,k} = w_{k,\tilde{N}+1} = 0 \quad \forall k \in \{0, \dots, \tilde{N} + 1\},$$

$$w_{-1,k} = -w_{1,k}, \quad w_{\tilde{N}+2,k} = -w_{\tilde{N},k} \quad \forall k \in \{0, \dots, \tilde{N} + 1\},$$

$$w_{k,-1} = -w_{k,1}, \quad w_{k,\tilde{N}+2} = -w_{k,\tilde{N}} \quad \forall k \in \{0, \dots, \tilde{N} + 1\}.$$

Le schéma aux différences finies pour le système (4.14)-(4.16) s'écrit

$$\ddot{w}_{j,k} + (A_{0h} w_h)_{j,k} + (\chi_{\mathcal{O}} \dot{w}_h)_{j,k} + h^2 (A_{0h} \dot{w}_h)_{j,k} = 0 \quad t > 0, \quad 1 \leq j, k \leq \tilde{N}, \quad (4.26)$$

$$w_h(0) = w_{0h}, \quad \dot{w}_h(0) = w_{1h}. \quad (4.27)$$

Dans l'équation (4.26),  $(\chi_{\mathcal{O}}\dot{w}_h)$  représente le vecteur de coordonnées

$$(\chi_{\mathcal{O}}\dot{w}_h)_{j,k} = \begin{cases} \dot{w}_{j,k} & \text{si } a(h) \leq j \leq b(h) \text{ et } c(h) \leq k \leq d(h), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le terme de viscosité numérique que l'on a ajouté au schéma classique de différences finies est  $h^2(A_{0h}\dot{w}_h)$ . En utilisant le résultat du théorème 4.2.3 et la méthode que l'on a décrite dans le cas général, nous en déduisons que le schéma précédent est uniformément exponentiellement stable.

Il subsiste de nombreuses questions ouvertes sur ces problèmes. De nombreuses méthodes existent, comme expliqué au début de la section, mais il y a peu de comparaison entre ces méthodes. Il n'existe aucune étude sur des problèmes non linéaires : à savoir contrôler/stabiliser un problème non linéaire ou utiliser une stabilisation non linéaire sur un problème linéaire. Les méthodes utilisées dans cette section ne seront pas simples à utiliser dans ces cadres. Une autre question est de savoir quelle viscosité numérique nous devons mettre dans le schéma pour avoir une convergence suffisamment rapide tout en gardant la décroissance exponentielle uniforme de l'énergie. Pour le cas de la corde, dans [128], les auteurs utilisent une viscosité du type  $h^2A_{0h}$  alors que nous avons besoin dans notre cadre général d'une viscosité artificielle du type  $hA_{0h}$ . Cela provient du fait que dans notre cas, nous n'utilisons pas les formules explicites des éléments propres de  $A_{0h}$  et par conséquent nous perdons un ordre en  $h$ . Pour l'exemple de la poutre ou des plaques, nous utilisons une viscosité du type  $h^2A_{0h}$ . Hors, un calcul très simple (et notre méthode) montre que pour la poutre, il n'est pas nécessaire d'ajouter de la viscosité numérique pour obtenir un schéma exponentiellement stable. Malheureusement dans le cas de la dimension 2, le même procédé est difficile à répéter et l'on ne sait pas si le même résultat est vrai et si oui, comment le démontrer. Enfin, il serait intéressant de généraliser ce qui a été fait ici dans un cadre abstrait au cas où l'opérateur  $B_0$  n'est plus borné (stabilisation frontière). Mais cette généralisation n'est pas triviale dans le cas de la stabilisation : même dans le cas continu (Théorème 4.2.1 nous avons besoin de supposer  $B_0^*$  borné). Dans le cas de l'observabilité/contrôlabilité, nous parvenons à obtenir un résultat dans cette direction dans la cas continu.

#### 4.4 Observabilité/Contrôlabilité dans le cas $B$ non borné ([T9])

Dans la dernière section de cette partie, nous travaillons avec des opérateurs  $B$  et  $C$  admissibles mais non nécessairement bornés. Nous caractérisons l'observabilité exacte (et donc la contrôlabilité exacte) via un critère spectral. Plus précisément, on reprend les notations de l'introduction de ce chapitre, i.e., on considère le système (4.2). Nous nous intéressons à l'observabilité exacte du système :

**Définition 4.4.1.** Le système (4.2) est dit exactement observable en temps  $T$  s'il existe une constante  $k_T > 0$  telle que

$$\int_0^T \|y(t)\|_Y^2 dt \geq k_T^2 \|z_0\|_X^2 \quad \forall z_0 \in D(A).$$

On suppose que  $A$  est anti-adjoint et que  $C \in \mathcal{L}(D(A), Y)$  est admissible. On fait de plus l'hypothèse que  $A$  a une résolvante compacte, de sorte que son spectre est formé de valeurs propres. Plus précisément, comme  $A$  est anti-adjoint, le spectre de  $A$  est donné par

$$\sigma(A) = \{i\mu_n ; n \in \mathbb{N}\},$$

avec  $\mu_n \in \mathbb{R}$  (on peut remplacer  $\mathbb{N}$  par un autre ensemble dénombrable). Notons  $(\Phi_n)$  une base orthonormale de  $X$  formée de vecteurs propres de  $A$  associé aux valeurs propres  $(i\mu_n)$ . Pour tout  $\varepsilon > 0$  et pour tout  $\omega$  nous notons comme dans la première section

$$J_\varepsilon(\omega) = \{m \in \mathbb{N} ; |\mu_m - \omega| \leq \varepsilon\}$$

(la notation est différente car il s'agit ici d'un système d'ordre 1 et dans la première section, on considèrerait les paquets associés à  $A_0$ ). Notre résultat concernant la caractérisation de l'observabilité par un critère spectral est le théorème suivant.

**Théorème 4.4.2.** *Avec les hypothèses et notations ci-dessus, le système (4.2) est exactement observable si et seulement si l'une des assertions suivantes est vérifiée :*

– Il existe  $\varepsilon > 0$  et  $\delta > 0$  tels que pour tout  $\omega \in \mathbb{R}$  et pour tout  $z = \sum_{m \in J_\varepsilon(\omega)} c_m \Phi_m$ ,

$$\|Cz\|_Y \geq \delta \|z\|_X.$$

– Il existe  $\varepsilon > 0$  et  $\delta > 0$  tels que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et pour tout  $z = \sum_{m \in J_\varepsilon(\mu_n)} c_m \Phi_m$ ,

$$\|Cz\|_Y \geq \delta \|z\|_X.$$

Le résultat ci-dessus peut être vu comme une généralisation de plusieurs résultats existants. Plus précisément dans le cas d'un opérateur  $C$  borné, un résultat similaire est démontré dans [104]. Dans la cas d'un opérateur d'observation non borné, lorsque le spectre de  $A$  admet un gap, Russell et Weiss [118] montrent que le critère spectral implique l'observabilité exacte.

L'avantage du théorème 4.4.2 est qu'il permet d'obtenir des résultats de contrôlabilité et d'observabilité en travaillant simplement sur les éléments propres de  $A$ . Lorsque ces éléments propres sont connus explicitement, l'étude peut être très simplifiée par rapport à une méthode consistant à attaquer le problème directement. Dans l'étude ci-dessous, nous obtenons avec ce théorème des résultats nouveaux d'observabilité frontière de l'équation des plaques, mais dans ce cas, l'étude n'est pas triviale et nécessite des résultats nouveaux de la théorie des nombres sur la somme de deux carrés. Le désavantage de cette méthode est de perdre le temps optimal de contrôle. Dans les résultats ci-dessous, nous n'obtenons pas l'observabilité des plaques pour un temps  $T$  arbitrairement petit. Ce résultat a été montré dans un papier de [129] mais en utilisant une méthode temporelle et en utilisant davantage de techniques de la théorie des nombres. Dans ce papier les auteurs étudient aussi le cas du rectangle ce qui n'est pas une extension triviale de notre cas. Dans notre cas, nous utilisons que les valeurs propres du Laplacien avec condition de Dirichlet dans un carré sont des sommes de carrés d'entiers. En particulier les paquets  $J_\varepsilon(\omega)$  avec  $\varepsilon < 1$  sont réduits aux points  $(m, n)$  sur un même cercle de centre 0. Dans le cas du rectangle, le changement ne vient pas seulement du fait que l'on passe d'un cercle à une ellipse, mais que les points peuvent être dans un voisinage de cette ellipse et plus nécessairement sur l'ellipse.

L'outil principal pour démontrer le théorème 4.4.2 est une extension récente du test de Hautus. Ce résultat démontré dans [29] concerne l'observabilité de systèmes ayant un générateur anti-adjoint et un opérateur d'observation non borné :

**Théorème 4.4.3.** *Supposons que  $A$  est un opérateur anti-adjoint d'un espace de Hilbert  $X$  et que  $C : D(A) \rightarrow Y$  est un opérateur d'observation admissible. Alors le système*

$$\dot{z} = Az, \quad z(0) = z_0, \quad y = Cz$$

est exactement observable si et seulement si il existe une constante  $\delta > 0$  telle que

$$\|(A - i\omega \text{Id})z\|_X^2 + \|Cz\|_Y^2 \geq \delta \|z\|_X^2 \quad \forall \omega \in \mathbb{R} \quad \forall z \in D(A).$$

En partant de ce théorème et en utilisant l'admissibilité de l'opérateur de  $C$  (c.f. [118]), on peut démontrer le théorème 4.4.2.

Comme dit ci-dessus, le théorème 4.4.2 a plusieurs applications. Il permet en particulier de démontrer un résultat d'observabilité frontière de l'équation des plaques et de l'équation de Schrödinger dans un carré. On peut aussi retrouver un résultat d'observabilité exacte pour l'observation frontière des ondes dans un carré. On précise dans la suite les résultats nouveaux sur l'équation des plaques et sur l'équation de Schrödinger.

**Théorème 4.4.4.** *Soit  $\Omega = (0, \pi) \times (0, \pi)$  et soit  $\Gamma$  un ouvert de  $\partial\Omega$ . Considérons le problème de contrôle suivant*

$$\ddot{w} + \Delta^2 w = 0 \quad t > 0, \quad x \in \Omega, \quad (4.28)$$

$$w(t, x) = 0 \quad t > 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad (4.29)$$

$$\Delta w(t, x) = 0 \quad t > 0, \quad x \in \partial\Omega \setminus \Gamma, \quad (4.30)$$

$$\Delta w(t, x) = u(t, x) \quad t > 0, \quad x \in \Gamma, \quad (4.31)$$

$$w(0, x) = w_0(x), \quad \dot{w}(0, x) = w_1(x) \quad x \in \Omega, \quad (4.32)$$

avec  $u \in L_{loc}^2(0, \infty; L^2(\Gamma))$ . Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

- Il existe  $T > 0$  tel que le système ci-dessus soit exactement contrôlable dans  $H_0^1(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$  en temps  $T$ .
- La région de contrôle  $\Gamma$  contient un segment horizontal et un segment vertical, chacun étant de longueur non nulle.

Nous obtiendrions un résultat similaire en contrôlant l'équation de Schrödinger dans un carré avec un contrôle de type Dirichlet sur  $\Gamma$ . Ces résultats sont équivalents à des résultats d'observabilité sur l'équation des plaques avec une observation de type Neumann et sur l'équation de Schrödinger avec une observation de type Neumann. Nous pouvons aussi obtenir l'observabilité de l'équation de Schrödinger avec une observation de type Dirichlet (et qui donnerait donc un résultat de contrôle en contrôlant via une condition de Neumann) : soit encore  $\Omega = (0, \pi) \times (0, \pi)$  et soit  $\Gamma$  un ouvert de  $\partial\Omega$ . On considère l'équation de Schrödinger écrite dans  $\Omega$  :

$$\dot{z} + i\Delta z = 0 \quad t > 0, \quad x \in \Omega, \quad (4.33)$$

$$\frac{\partial z}{\partial \nu} = 0 \quad t > 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad (4.34)$$

$$z(0, x) = z_0(x) \quad x \in \Omega, \quad (4.35)$$

avec la sortie

$$y = z|_{\Gamma}. \quad (4.36)$$

Dans ce cas on obtient le résultat suivant :

**Théorème 4.4.5.** *Pour tout ouvert non vide  $\Gamma$  de  $\partial\Omega$ , le système décrit par (4.33)-(4.36) est exactement observable. En d'autres termes, il existe  $T > 0$  et une constante  $k_T > 0$  tels que si  $z$  et  $y$  vérifient (4.33)-(4.36) alors*

$$\int_0^T \int_{\Gamma} |y|^2 \, d\Gamma \, dt \geq k_T^2 \|z_0\|_{L^2(\Omega)}^2$$

pour tout  $z_0 \in H^2(\Omega)$  tel que  $\frac{\partial z_0}{\partial \nu} = 0$  sur  $\partial\Omega$ .

Pour ces deux théorèmes, l'étude se ramène à l'étude des valeurs et des vecteurs propres. Comme nous travaillons dans un carré avec de "bonnes" conditions aux bords, les valeurs propres sont des sommes de carrés d'entiers et les fonctions propres des produits de fonctions trigonométriques. Dans chaque cas, l'étude revient à la démonstration d'une inégalité du type

$$\int_{\alpha}^{\beta} \left| \sum_{m \in \Lambda_{qr}} c_{m,f(m)} \cos(mx_1) \right|^2 \geq \delta \sum_{m^2+n^2=q^2+r^2} |c_{m,n}|^2, \quad (4.37)$$

avec  $0 < \alpha < \beta < \pi$  et  $\delta > 0$  ne dépendant que de  $\alpha$  et de  $\beta$ . Les entiers  $q$  et  $r$  sont non nuls et on a posé

$$\Lambda_{qr} = \{m \in \mathbb{N}^* ; q^2 + r^2 - m^2 \text{ est le carré d'un entier non nul}\},$$

et pour  $m \in \Lambda_{qr}$ ,

$$f(m) = \sqrt{q^2 + r^2 - m^2}.$$

L'inégalité (4.37) est démontrée en utilisant une version du théorème de Beurling (c.f. [11]) et surtout un résultat sur la répartition des valeurs propres. Ce dernier résultat est démontré avec des outils classiques mais puissants de théorie des nombres (théorème de crible) :

**Théorème 4.4.6.** *Soit  $M \in \mathbb{N}^*$  et  $\lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_M$   $M + 1$  éléments consécutifs de  $\Lambda_{qr}$ . Alors il existe une constante  $C > 0$  telle que*

$$\lambda_M - \lambda_0 \geq \frac{M^2}{2C^2 \log(2M)}.$$

Ainsi si l'on peut avoir des éléments consécutifs de  $\Lambda_{qr}$  assez proche (ce qui impliquerait avec le théorème classique de Ingham une zone d'observation  $\Gamma$  assez grande), leur densité tend vers 0 ce qui permet de prendre dans (4.37) un intervalle  $(\alpha, \beta)$  aussi petit que l'on veut. Comme dit précédemment, l'extension au cas du rectangle demande des résultats encore plus fins de théorie des nombres, mais a déjà été faite (c.f. [129]). D'autres extensions peuvent être intéressantes et possibles par cette méthode. On peut par exemple regarder d'autres conditions aux bords dans la cas d'une plaque rectangulaire. Cela modifie les valeurs propres et surtout les vecteurs propres. Il est aussi possible de regarder ce qui se passe avec le disque. Peut-on prendre une partie du bord arbitrairement petite ou doit prendre une partie assez grande pour vérifier les conditions d'optique géométrique? Dans ce cas, il faut travailler avec les zéros des fonctions de Bessel au lieu des sommes de carrés et l'étude est très différente. On peut aussi se demander si ce qui se passe lorsque l'on considère des équations à coefficients variables. Peut-on utiliser des résultats asymptotiques sur le spectre pour retrouver des résultats similaires? Enfin, il reste ce problème du temps de contrôle. Même en dimension 1 et en reprenant avec attention la démonstration de [108], il est difficile de retrouver le temps optimal de contrôle de la corde. Il serait intéressant de retrouver l'étape qui fait perdre le temps optimal et de voir si l'on peut la modifier.



## Chapitre 5

# Dépendance par rapport au domaine de quelques systèmes d'EDP

Comme nous l'avons vu dans les chapitres précédents, le domaine sur lequel est écrit l'équation aux dérivées partielles que l'on étudie joue un rôle essentiel. Dans le cas d'un problème fluide-structure, le fait que ce domaine est variable complique sensiblement l'analyse du problème et dans le cas des méthodes fréquentielles appliquées aux problèmes de contrôle, nous nous servons plus d'une fois que nous sommes dans un carré ou dans une géométrie particulière sans savoir si nous pourrions généraliser ces résultats à d'autres domaines.

Dans ce dernier chapitre, on présente deux travaux concernant la dépendance de solutions d'EDP par rapport au domaine. Dans la première section, il s'agit de minimiser un critère en créant un petit trou et dans la seconde section on regarde comment évolue la solution d'une EDP écrite sur domaine tendant vers un domaine périodique.

### 5.1 Dérivée topologique pour des problèmes d'évolution ([T1])

Considérons un domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ,  $d = 2$  or  $3$  et notons par  $u_\Omega$  la solution d'un système d'équations aux dérivées partielles définies dans  $\Omega$ . Le but de l'analyse de sensibilité topologique est d'étudier le comportement asymptotique d'une certaine fonction coût de forme  $j(\Omega) = J_\Omega(u_\Omega)$  par rapport à une perturbation topologique infinitésimale de la topologie de  $\Omega$ . On peut ainsi sortir de l'optimisation de forme "classique" dans laquelle la topologie reste identique. Pour plus de détails sur cette approche on peut se référer aux papiers suivants : [120, 49, 50, 123, 63]. Dans ces papiers, la création de trous à l'intérieur du domaine est considérée. Étant donné un point  $x_0 \in \Omega$ , un domaine  $\omega \subset \mathbb{R}^d$  contenant l'origine et une petite inclusion  $\omega_\varepsilon = x_0 + \varepsilon\omega$ , on obtient un développement asymptotique pour  $\varepsilon \rightarrow 0$  :

$$j(\Omega \setminus \overline{\omega_\varepsilon}) - j(\Omega) = f(\varepsilon)g(x_0) + o(f(\varepsilon)). \quad (5.1)$$

Dans l'expression ci-dessus, la fonction  $\varepsilon \in \mathbb{R}^+ \mapsto f(\varepsilon) \in \mathbb{R}^+$  est régulière et tend vers 0 lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0. Le nombre  $g(x_0)$  est appelé dérivée topologique au point  $x_0$ . Il donne une indication de la sensibilité de la fonction coût par rapport à la création d'un petit trou en  $x_0$ . Cette application  $x \mapsto g(x)$  est l'outil de base dans les différents algorithmes d'optimisation de forme topologique : [9, 21, 78, 20, 63, 76, 114, 28, 2, 8].

D'un point de vue théorique, la plupart des travaux concernant des développements du type (5.1) porte sur des problèmes associés à des équations elliptiques, pour lesquelles plu-

sieurs généralisations ont été faites : création de fissure [10], dérivée extérieure topologique [110], etc. Un des rares papiers portant sur un problème dépendant du temps est [20] mais les démonstrations sont formelles. Notre objectif ici est de considérer l'analyse de sensibilité topologique pour des problèmes paraboliques ou hyperboliques. Pour simplifier nous considérons deux équations modèles : l'équation de la chaleur et l'équation des ondes, i.e.

$$\rho_\varepsilon \frac{\partial^p u_\varepsilon}{\partial t^p} - \operatorname{div}(\alpha_\varepsilon A \nabla u_\varepsilon) = F_\varepsilon, \quad p = 1, 2.$$

Les coefficients  $\rho_\varepsilon$  et  $\alpha_\varepsilon$  sont strictement positifs et constants par morceaux, avec une valeur différente dans l'inclusion  $\omega_\varepsilon$  et dans le reste du domaine. Le second membre  $F_\varepsilon$  est régulier dans  $\omega_\varepsilon$  et dans son complémentaire,  $A$  est une matrice symétrique définie positive. Finalement on impose des conditions de Dirichlet sur le bord extérieur de  $\Omega$  et on prend des conditions initiales nulles. Pour ces problèmes, on considère une large classe de fonction coût. Le calcul de leur sensibilité est fait via une méthode de dualité qui en plus d'être d'un intérêt pratique nous permet d'écrire le développement (5.1) d'une manière unifiée. Ce cadre permet de nombreuses généralisations relativement simples. Tout d'abord, les mêmes résultats restent vrais avec d'autres conditions aux bords (linéaires) sur  $\partial\Omega$  (par exemple des conditions de type Neumann ou Robin). Ensuite, les formules correspondantes pour des états vectoriels et non plus scalaires peuvent être aisément déduites à condition de connaître l'expression du tenseur de polarisation du premier ordre (que l'on appelle aussi tenseur de polarisation de Pólya-Szegö ou masse virtuelle). On peut se référer aux travaux [3, 4] dans lesquels des expressions de ce tenseur sont obtenus. Finalement, dans le cas où  $\omega_\varepsilon$  est un trou avec condition au bords de Neumann on peut retrouver les formules correspondantes en prenant formellement  $\rho_\varepsilon$  et  $\alpha_\varepsilon$  égaux à zéro dans  $\omega_\varepsilon$  et dans le tenseur de polarisation associé. Cette assertion est démontrée dans [7] pour les problèmes elliptiques et peut être facilement adaptée au cadre présent. Il est important de noter que l'intérêt de ce travail est illustré dans des expériences numériques [20, 9].

Soit  $\alpha_0, \alpha_1, \rho_0, \rho_1$  des nombres réels strictement positifs. Pour tout  $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ ,  $\varepsilon_0$ , nous définissons

$$\alpha_\varepsilon = \begin{cases} \alpha_1 & \text{dans } \omega_\varepsilon \\ \alpha_0 & \text{dans } \Omega \setminus \overline{\omega_\varepsilon} \end{cases}, \quad \rho_\varepsilon = \begin{cases} \rho_1 & \text{dans } \omega_\varepsilon \\ \rho_0 & \text{dans } \Omega \setminus \overline{\omega_\varepsilon} \end{cases}.$$

Soit aussi  $F_0, F_1 \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$  et définissons

$$F_\varepsilon = \begin{cases} F_1 & \text{dans } \omega_\varepsilon \times (0, T), \\ F_0 & \text{dans } (\Omega \setminus \overline{\omega_\varepsilon}) \times (0, T). \end{cases}$$

Nous considérons l'équation de la chaleur :

$$\begin{cases} \rho_\varepsilon \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} - \operatorname{div}(\alpha_\varepsilon A \nabla u_\varepsilon) = F_\varepsilon & \text{dans } \Omega \times (0, T), \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (0, T), \\ u_\varepsilon(0, \cdot) = 0 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (5.2)$$

Posons

$$X = L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap H^1(0, T; H^{-1}(\Omega)),$$

et supposons que

$$u_\varepsilon \in X_0 = \{u \in X, u(0, \cdot) = 0\}$$

La formulation variationnelle correspondante à (5.2) peut s'écrire

$$\int_0^T \left\langle \rho_\varepsilon \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}, v \right\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} dt + \int_0^T a_\varepsilon(u_\varepsilon, v) dt = \int_0^T \ell_\varepsilon(v) dt \quad \forall v \in X. \quad (5.3)$$

La forme bilinéaire  $a_\varepsilon$  et la forme linéaire  $\ell_\varepsilon$  sont définies par :

$$a_\varepsilon(u, v) = \int_\Omega \alpha_\varepsilon A \nabla u \cdot \nabla v dx, \quad (5.4)$$

$$\ell_\varepsilon(v) = \int_\Omega F_\varepsilon v dx. \quad (5.5)$$

Nous considérons des fonctions coûts de la forme

$$j(\varepsilon) = \mathcal{J}_\varepsilon(u_\varepsilon) = \int_0^T J_\varepsilon(u_\varepsilon) dt \quad (5.6)$$

où  $J_\varepsilon : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  vérifie les hypothèses suivantes :

$$J_\varepsilon(u) \in L^1(0, T) \quad \forall u \in X, \quad \forall \varepsilon \in [0, \varepsilon_0), \quad (5.7)$$

$$\mathcal{J}_\varepsilon(u_\varepsilon) = \mathcal{J}_\varepsilon(u_0) + \int_0^T \langle DJ_\varepsilon(u_0), u_\varepsilon - u_0 \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} dt + \varepsilon^d \delta \mathcal{J}_1 + o(\varepsilon^d), \quad (5.8)$$

$$\mathcal{J}_\varepsilon(u_0) = \mathcal{J}_0(u_0) + \varepsilon^d \delta \mathcal{J}_2 + o(\varepsilon^d), \quad (5.9)$$

$$\|DJ_\varepsilon(u_0) - DJ_0(u_0)\|_{L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))} = o(\varepsilon^{d/2}), \quad (5.10)$$

où  $DJ_\varepsilon(u_0(t)) \in H^{-1}(\Omega)$  pour presque tout  $t \in (0, T)$ .

**Remarque 5.1.1.** 1. Nous avons utilisé la notation  $DJ_\varepsilon(u_0(t, \cdot))$  car dans la plupart des applications, cela coïncide avec la dérivée au sens de Fréchet de  $J_\varepsilon$  évalué en  $u_0(t, \cdot)$ .

2. Pour simplifier, nous ne considérons pas de fonction coût  $J_\varepsilon$  dépendant explicitement du temps, mais l'analyse développée ici peut être adaptée à ce cas-là.

Nous introduisons l'état adjoint  $v_\varepsilon \in X$  défini par

$$\int_0^T \left\langle \rho_\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t}, v_\varepsilon \right\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} dt + \int_0^T a_\varepsilon(\varphi, v_\varepsilon) dt = - \int_0^T DJ_\varepsilon(u_0) \varphi dt \quad \forall \varphi \in X_0. \quad (5.11)$$

La formulation forte correspondante s'écrit

$$\begin{cases} -\rho_\varepsilon \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial t} - \operatorname{div}(\alpha_\varepsilon A \nabla v_\varepsilon) = -DJ_\varepsilon(u_0) & \text{dans } \Omega \times (0, T), \\ v_\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (0, T), \\ v_\varepsilon(T, \cdot) = 0 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (5.12)$$

Pour notre analyse, nous avons besoin de quelques hypothèses de régularité : nous supposons qu'il existe deux voisinages  $\Omega_F$  et  $\Omega_J$  de  $x_0$  telle que

$$F_0 \in L^2(0, T; H^4(\Omega_F)) \cap H^2(0, T; L^2(\Omega_F)), \quad (5.13)$$

$$F_1 \in L^2(0, T; W^{1, \infty}(\Omega_F)), \quad (5.14)$$

$$DJ_0(u_0) \in L^2(0, T; H^4(\Omega_J)) \cap H^2(0, T; L^2(\Omega_J)). \quad (5.15)$$

Finalement, nous introduisons la matrice de polarisation  $\mathcal{P}_{\omega, r} \in \mathbb{R}^{d \times d}$ ,  $r \in \mathbb{R}^+$  définie comme suit :

1. si  $r = 1$ , alors  $\mathcal{P}_{\omega,1} = 0$ ,
2. sinon,

$$(\mathcal{P}_{\omega,r})_{ij} = \int_{\partial\omega} p_j x_i ds \quad (5.16)$$

où la densité  $p_i$  est l'unique solution de l'équation intégrale

$$\frac{r+1}{r-1} \frac{p_i(x)}{2} + \int_{\partial\omega} p_i(y) A \nabla E(x-y) \cdot n(x) ds(y) = A e_i \cdot n(x) \quad \forall x \in \partial\omega. \quad (5.17)$$

Dans l'équation ci-dessus, nous avons noté  $E$  la solution fondamentale de l'opérateur  $u \mapsto -\operatorname{div}(A \nabla u)$ . Le résultat que nous avons obtenu dans ce cadre est le théorème suivant.

**Théorème 5.1.2.** *Supposons que la fonction coût  $\mathcal{J}$  vérifie (5.6)-(5.10). Supposons de plus que  $u_0$  et  $v_0$  sont solutions de, respectivement, (5.2) et (5.12) pour  $\varepsilon = 0$  et que les hypothèses de régularité (5.13)-(5.15) sont vérifiées. Alors, nous avons le développement asymptotique suivant :*

$$j(\varepsilon) - j(0) = \varepsilon^d \left[ (\rho_1 - \rho_0) |\omega| \int_0^T \frac{\partial u_0}{\partial t}(t, x_0) v_0(t, x_0) dt + \alpha_0 \int_0^T \nabla u_0(t, x_0) \cdot \mathcal{P}_{\omega, \frac{\alpha_1}{\alpha_0}} \nabla v_0(t, x_0) dt - |\omega| \int_0^T (F_1(t, x_0) - F_0(t, x_0)) v_0(t, x_0) dt + \delta \mathcal{J}_1 + \delta \mathcal{J}_2 \right] + o(\varepsilon^d). \quad (5.18)$$

Il existe de nombreuses fonctions coût permettant d'appliquer le résultat ci-dessus. Par exemple, nous avons

**Proposition 5.1.3.** *Le développement asymptotique (5.18) est vérifié pour les fonctions de coût suivantes.*

1. Pour la fonction coût

$$J_\varepsilon(u) = \int_{\Omega} \eta(x) A \nabla(u - u_d) \cdot \nabla(u - u_d) dx \quad (5.19)$$

où  $u_d \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$  et  $\eta$  est régulière ( $C^\infty$ ) à support ne contenant pas  $x_0$ . Dans ce cas  $\delta \mathcal{J}_1 = 0$  et  $\delta \mathcal{J}_2 = 0$ .

2. Si l'on remplace dans (5.2) la condition au bord de Dirichlet sur  $\partial\Omega$  par une condition de Neumann, alors on peut considérer la fonction de coût

$$\mathcal{J}_\varepsilon(u) = \int_0^T \int_{\partial\Omega} |u - u_d|^2 ds dt \quad (5.20)$$

où  $u_d \in L^2(0, T; L^2(\partial\Omega))$ . Dans ce cas,  $\delta \mathcal{J}_1 = 0$  et  $\delta \mathcal{J}_2 = 0$ .

Nous obtenons un résultat similaire pour l'équation des ondes

$$\begin{cases} \rho_\varepsilon \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial t^2} - \operatorname{div}(\alpha_\varepsilon A \nabla u_\varepsilon) = F_\varepsilon & \text{dans } \Omega \times (0, T), \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (0, T), \\ u_\varepsilon(0, \cdot) = \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}(0, \cdot) = 0 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (5.21)$$

Nous notons

$$\Lambda : u \mapsto \operatorname{div}(\alpha_0 A \nabla u).$$

Nous supposons que les hypothèses de régularité suivantes sont vérifiées

$$F_0 \in \mathcal{C}^6([0, T]; L^2(\Omega)) \cap \bigcap_{j=0}^4 \mathcal{C}^j([0, T]; H^{5-j}(\Omega)), \quad (5.22)$$

$$F_0, \Lambda F_0 \text{ et } \Lambda^2 F_0 \text{ s'annulent sur } \partial\Omega, \quad (5.23)$$

$$F_1 \in L^2(0, T; W^{1,\infty}(B(x_0, R))), \quad R > 0, \quad (5.24)$$

$$DJ_0(u_0) \in \mathcal{C}^6([0, T]; L^2(\Omega)) \cap \bigcap_{j=0}^4 \mathcal{C}^j([0, T]; H^{5-j}(\Omega)), \quad (5.25)$$

$$DJ_0(u_0), \Lambda DJ_0(u_0) \text{ et } \Lambda^2 DJ_0(u_0) \text{ s'annulent sur } \partial\Omega. \quad (5.26)$$

$$\|DJ_0(u_0) - DJ_\varepsilon(u_0)\|_{W^{1,1}(0,T;H^{-1}(\Omega))} = o(\varepsilon^{d/2}). \quad (5.27)$$

Nous posons

$$X = \mathcal{C}([0, T]; H_0^1(\Omega)) \cap \mathcal{C}^1([0, T]; L^2(\Omega)) \cap \mathcal{C}^2([0, T]; H^{-1}(\Omega)), \quad (5.28)$$

L'état adjoint  $v_\varepsilon \in X$  est solution de

$$\int_0^T \left\langle \rho_\varepsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, v_\varepsilon \right\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} dt + \int_0^T a_\varepsilon(\varphi, v_\varepsilon) dt = - \int_0^T DJ_\varepsilon(u_0) \varphi dt \quad \forall \varphi \in X_0. \quad (5.29)$$

La forme forte correspondante est

$$\begin{cases} \rho_\varepsilon \frac{\partial^2 v_\varepsilon}{\partial t^2} - \operatorname{div}(\alpha_\varepsilon A \nabla v_\varepsilon) = -DJ_\varepsilon(u_0) & \text{dans } \Omega \times (0, T), \\ v_\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (0, T), \\ v_\varepsilon(T, \cdot) = \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial t}(T, \cdot) = 0 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (5.30)$$

**Théorème 5.1.4.** *Supposons que la fonction coût  $\mathcal{J}_\varepsilon$  vérifie (5.6)-(5.9) et (5.27). Supposons de plus que  $u_0$  et  $v_0$  sont les solutions de, respectivement, (5.21) et (5.30) pour  $\varepsilon = 0$ , et que les hypothèses de régularité (5.22)-(5.26) sont vérifiées. Alors nous avons le développement asymptotique suivant :*

$$\begin{aligned} j(\varepsilon) - j(0) = \varepsilon^d \left[ -(\rho_1 - \rho_0)|\omega| \int_0^T \frac{\partial u_0}{\partial t}(t, x_0) \frac{\partial v_0}{\partial t}(t, x_0) dt \right. \\ \left. + \alpha_0 \int_0^T \nabla u_0(t, x_0) \cdot \mathcal{P}_{\omega, \frac{\alpha_1}{\alpha_0}} \nabla v_0(t, x_0) dt \right. \\ \left. - |\omega| \int_0^T (F_1(t, x_0) - F_0(t, x_0)) v_0(t, x_0) dt + \delta \mathcal{J}_1 + \delta \mathcal{J}_2 \right] + o(\varepsilon^d). \quad (5.31) \end{aligned}$$

Les deux théorèmes admettent de nombreuses généralisations simples, mais certaines extensions sont plus difficiles à obtenir. Par exemple, est-il possible de considérer d'autres équations comme les équations de Navier-Stokes (c.f. [6]) ou les équations de Maxwell ? Peut-on adapter la théorie correspondante sur les fissures ? D'un point de vue mathématique, il est aussi intéressant de se demander ce qui se passe si le trou est aussi un trou en temps, ou en d'autres termes est-ce l'on peut créer un trou à un certain temps ? Ce problème est certainement beaucoup plus difficile à traiter.

## 5.2 Le système de Stokes dans un domaine périodique ([T2])

Dans les puits de pétrole, en fin d'exploitation, on utilise des pompes enfoncées profondément dans le sol afin de maintenir la production. De telles pompes sont composées de plusieurs étages identiques (jusqu'à une centaine). Les simulations numériques en 3D de flots dans ces pompes et l'utilisation des résultats obtenus (pour optimiser la forme de certains éléments de cette pompe) ne peuvent se faire qu'en simplifiant au maximum le modèle. Une simplification naturelle et considérée par les ingénieurs et de supposer que l'on peut remplacer tous les étages par un seul étage avec condition périodique. D'un point de vue mathématique, le problème correspondant est simple à poser : soit  $\Omega_k \subset \mathbb{R}^N$  un domaine composé de  $2k$  copies d'un domaine borné  $\Omega$  translaté dans la  $N$ -ième direction en espace (c.f. Figure 5.1).

Pour simplifier, on peut supposer que  $\Omega \subset \mathbb{R}^{N-1} \times (0, L)$  où  $L > 0$  et que

$$\Omega_k = \bigcup_{i=-k}^{k-1} (iLe_N + \Omega).$$

Dans la suite, on suppose aussi que  $\Omega_k$  est un domaine de classe  $C^{1,1}$  pour tout  $k$ . Soit  $f \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$  une fonction  $L$ -périodique dans la direction  $N$ . Considérons le système suivant sur  $\Omega_k$  en dimension 2 ( $N = 2$ ) :

$$\begin{aligned} -\Delta u_k + \nabla p_k &= f && \text{dans } \Omega_k, \\ \nabla \cdot u_k &= 0 && \text{dans } \Omega_k, \\ \text{rot } u_k &= 0 && \text{sur } \partial\Omega_k, \\ u_k \cdot n &= 0 && \text{sur } \partial\Omega_k. \end{aligned} \tag{5.32}$$

Nous cherchons à savoir si la solution du problème ci-dessus converge vers la solution du problème périodique sur un seul étage :

$$\begin{aligned} -\Delta u_\infty + \nabla p_\infty &= f && \text{dans } \Omega, \\ \nabla \cdot u_\infty &= 0 && \text{dans } \Omega, \\ \text{rot } u_\infty &= 0 && \text{sur } \Gamma, \\ u_\infty \cdot n &= 0 && \text{sur } \Gamma, \\ u_\infty &&& Le_2\text{-périodique,} \end{aligned} \tag{5.33}$$

où  $\Gamma$  est la frontière latérale de  $\Omega$ . Nous démontrons le résultat suivant :

**Théorème 5.2.1.** *Soit  $k_0 \in \mathbb{N}^*$ . Il existe des constantes  $K > 0$ ,  $K' > 0$ ,  $\alpha > 0$  telles que pour tout  $k \geq k_0$ , on a*

$$\begin{aligned} \|u_k - u_\infty\|_{L^\infty(\Omega_{k_0})^2} &\leq Ke^{-\alpha k}, \\ \|p_k - p_\infty\|_{L^2(\Omega_{k_0})} &\leq K'e^{-\alpha k}. \end{aligned}$$

La question que nous nous posons ici peut se poser naturellement pour bien d'autres EDP. En particulier nous pouvons aussi considérer le problème semi-linéaire suivant

$$\begin{aligned} -\Delta u_k + g(x, u_k) &= f && \text{dans } \Omega_k, \\ u_k &= 0 && \text{sur } \partial\Omega_k, \end{aligned} \tag{5.34}$$

où  $g$  vérifie des conditions usuelles. On note par  $u_\infty$  la solution du problème périodique posé dans  $\Omega$  :

$$\begin{aligned} -\Delta u_\infty + g(x, u_\infty) &= f && \text{dans } \Omega, \\ u_\infty &= 0 && \text{sur } \Gamma, \\ u_\infty &&& Le_N\text{-périodique.} \end{aligned} \tag{5.35}$$

Dans ce cas, nous démontrons le résultat suivant :

**Théorème 5.2.2.** *Soit  $k_0 \in \mathbb{N}^*$ . Il existe deux constantes  $K > 0$  et  $\alpha > 0$ , dépendant seulement de  $\Omega_{k_0}$ , telles que pour tout  $k \geq k_0$ ,*

$$\|u_k - u_\infty\|_{L^\infty(\Omega_{k_0})} \leq K e^{-\alpha k}.$$

Ce type de résultats ont déjà été démontrés dans des papiers de M. Chipot et Y. Xie : [35], [37], [36]. Leurs techniques reposent sur une méthode variationnelle pour obtenir la convergence. On peut aussi se référer au livre [34] de M. Chipot pour des problèmes similaires. Notre approche a de nombreux points communs avec ces travaux mais avec les différences suivantes :

- nous travaillons avec la norme uniforme ( $L^\infty$ ) qui semble plus naturelle pour les ingénieurs ;
- nous utilisons une méthode un peu plus simple, uniquement basé sur le principe du maximum, ce qui nous permet d'obtenir une convergence plus forte (convergence exponentielle au lieu de polynomiale) ;
- dans le cas elliptique, nous considérons le problème semi-linéaire au lieu du cas linéaire. Par contre nous sommes restreints au cas du Laplacien et à une géométrie plus simple (périodique dans une seule direction) ce qui n'est pas le cas des travaux de Chipot et Xie ;
- nous considérons le problème de Stokes en dimension 2 avec des conditions aux bords particulières (conditions de Navier).

En fait, la condition de Navier vient du fait que nous utilisons le résultat du théorème 5.2.2 pour démontrer le théorème 5.2.1. En prenant le rotationnel de la première équation de (5.32) et de (5.33), on se ramène aux équations (5.34) et (5.35). Si notre méthode a l'avantage de donner un bon résultat (convergence exponentielle), elle semble difficile à généraliser pour traiter des extensions pertinentes :

- Comment obtenir le même résultat dans le cas de la dimension 3 ?
- Comment traiter le cas des équations de Navier-Stokes ?
- Comment traiter le cas d'autres conditions aux bords comme par exemple les conditions de Dirichlet ?

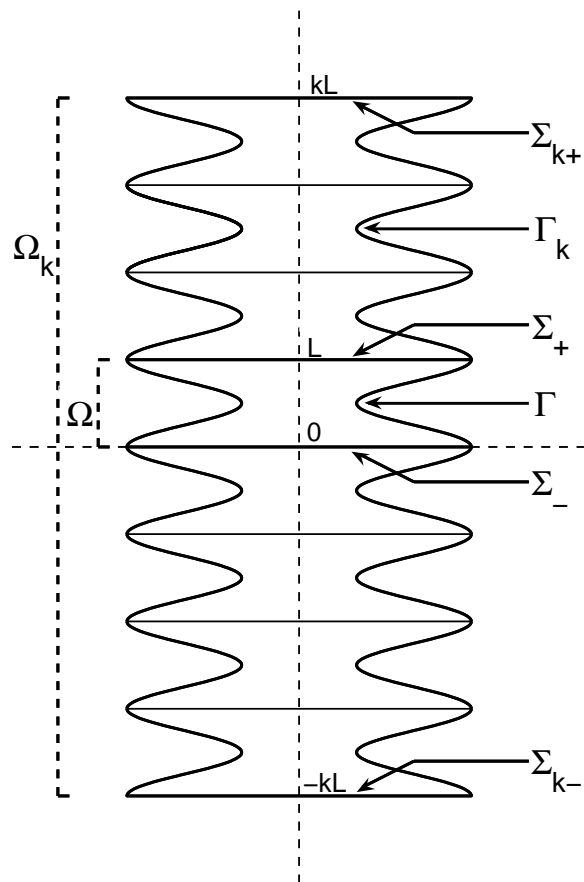


FIG. 5.1 – Periodic geometry.



# Bibliographie

- [1] ACHDOU, Y., AND GUERMOND, J.-L. Convergence analysis of a finite element projection/Lagrange-Galerkin method for the incompressible Navier-Stokes equations. *SIAM J. Numer. Anal.* *37*, 3 (2000), 799–826.
- [2] ALLAIRE, G., DE GOURNAY, F., JOUVE, F., AND TOADER, A.-M. Structural optimization using topological and shape sensitivity via a level set method. *Control Cybern.* *34* (2005), 59–80.
- [3] AMMARI, H., AND KANG, H. *Reconstruction of small inhomogeneities from boundary measurements*, vol. 1846 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- [4] AMMARI, H., AND KANG, H. Generalized polarization tensors, inverse conductivity problems, and dilute composite materials : a review. *Contemporary Mathematics* (to appear).
- [5] AMMARI, K., AND TUCSNAK, M. Stabilization of second order evolution equations by a class of unbounded feedbacks. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.* *6* (2001), 361–386 (electronic).
- [6] AMSTUTZ, S. The topological asymptotic for the Navier-Stokes equations. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.* *11*, 3 (2005), 401–425 (electronic).
- [7] AMSTUTZ, S. Sensitivity analysis with respect to a local perturbation of the material property. *Asymptotic Analysis* *49*, 1,2 (2006), 87–108.
- [8] AMSTUTZ, S., AND ANDRÄ, H. A new algorithm for topology optimization using a level-set method. *J. Comput. Phys.* *216*, 2 (2006), 573–588.
- [9] AMSTUTZ, S., AND DOMINGUEZ, N. Topological sensitivity analysis in the context of ultrasonic nondestructive testing. *RICAM report 2005-21* (2005).
- [10] AMSTUTZ, S., HORCHANI, I., AND MASMOUDI, M. Crack detection by the topological gradient method. *Control Cybern.* *34* (2005), 81–101.
- [11] BAIOCCHI, C., KOMORNIK, V., AND LORETI, P. Ingham-Beurling type theorems with weakened gap conditions. *Acta Math. Hungar.* *97*, 1-2 (2002), 55–95.
- [12] BANKS, H. T., ITO, K., AND WANG, C. Exponentially stable approximations of weakly damped wave equations. In *Estimation and control of distributed parameter systems (Vorau, 1990)*, vol. 100 of *Internat. Ser. Numer. Math.* Birkhäuser, Basel, 1991, pp. 1–33.
- [13] BANKS, H. T., AND KUNISCH, K. The linear regulator problem for parabolic systems. *SIAM J. Control Optim.* *22*, 5 (1984), 684–698.
- [14] BARDOS, C., LEBEAU, G., AND RAUCH, J. Sharp sufficient conditions for the observation, control, and stabilization of waves from the boundary. *SIAM J. Control Optim.* *30*, 5 (1992), 1024–1065.

- [15] BEALE, J. T. The initial value problem for the Navier-Stokes equations with a free surface. *Comm. Pure Appl. Math.* 34, 3 (1981), 359–392.
- [16] BERTOLUZZA, S., ISMAIL, M., AND MAURY, B. The fat boundary method : semi-discrete scheme and some numerical experiments. In *Domain decomposition methods in science and engineering*, vol. 40 of *Lect. Notes Comput. Sci. Eng.* Springer, Berlin, 2005, pp. 513–520.
- [17] BLAKE, J. A finite model for ciliated micro-organisms. *J. Biomech.* 6 (1973), 133–140.
- [18] BLAKE, J. R., AND OTTO, S. R. Ciliary propulsion, chaotic filtration and a “blinking” Stokeslet. *J. Engrg. Math.* 30, 1-2 (1996), 151–168. The centenary of a paper on slow viscous flow by the physicist H. A. Lorentz.
- [19] BONNARD, B. Contrôllabilité de systemes mécaniques sur les groupes de Lie. *SIAM J. Control Optim.* 22, 5 (1984), 711–722.
- [20] BONNET, M. Topological sensitivity for 3d elastodynamic and acoustic inverse scattering in the time domain. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.* 195, 37-40 (2006), 5239–5254.
- [21] BONNET, M., AND GUZINA, B. B. Sounding of finite solid bodies by way of topological derivative. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.* 61, 13 (2004), 2344–2373.
- [22] BOULAKIA, M. Existence of weak solutions for an interaction problem between an elastic structure and a compressible viscous fluid. *J. Math. Pures Appl. (9)* 84, 11 (2005), 1515–1554.
- [23] BOULAKIA, M. Existence of weak solutions for the three-dimensional motion of an elastic structure in an incompressible fluid. *J. Math. Fluid Mech.* 9, 2 (2007), 262–294.
- [24] BOULAKIA, M., AND OSSES, A. Local null controllability of a two-dimensional fluid-structure interaction problem. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.* (to appear).
- [25] BRENNEN, C. An oscillating-boundary-layer theory for ciliary propulsion. *J. Fluid Mech.* 65 (1974), 799–824.
- [26] BRENNEN, C., AND WINET, H. Fluid mechanics of propulsion by cilia and flagella. *Ann. Rev. Fluid Mech.* 9 (1977), 339–398.
- [27] BRENNER, S. C., AND SCOTT, L. R. *The mathematical theory of finite element methods*, second ed., vol. 15 of *Texts in Applied Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2002.
- [28] BURGER, M., HACKL, B., AND RING, W. Incorporating topological derivatives into level set methods. *J. Comput. Phys.* 194, 1 (2004), 344–362.
- [29] BURQ, N., AND ZWORSKI, M. Geometric control in the presence of a black box. *J. Amer. Math. Soc.* 17, 2 (2004), 443–471 (electronic).
- [30] CARLING, J., WILLIAMS, T., AND BOWTELL, G. Self-propelled anguilliform swimming : simultaneous solution of the two-dimensional Navier-Stokes equations and Newton’s laws of motion. *J. of Experimental Biology* 201 (1998), 3143–3166.
- [31] CHEN, G., FULLING, S. A., NARCOWICH, F. J., AND SUN, S. Exponential decay of energy of evolution equations with locally distributed damping. *SIAM J. Appl. Math.* 51, 1 (1991), 266–301.
- [32] CHILDRESS, S. *Mechanics of swimming and flying*, vol. 2 of *Cambridge Studies in Mathematical Biology*. Cambridge University Press, Cambridge, 1981.

- [33] CHINNAYYA, A., LEROUX, A.-Y., AND SEGUIN, N. A well-balanced numerical scheme for the approximation of the shallow-water equations with topography : the resonance phenomenon. *Int. J. Finite Volumes* (2004), 1–33.
- [34] CHIPOT, M.  *$\ell$  goes to plus infinity*. Birkhäuser Advanced Texts : Basler Lehrbücher. [Birkhäuser Advanced Texts : Basel Textbooks]. Birkhäuser Verlag, Basel, 2002.
- [35] CHIPOT, M., AND XIE, Y. On the asymptotic behaviour of elliptic problems with periodic data. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* 339, 7 (2004), 477–482.
- [36] CHIPOT, M., AND XIE, Y. Asymptotic behavior of nonlinear parabolic problems with periodic data. In *Elliptic and parabolic problems*, vol. 63 of *Progr. Nonlinear Differential Equations Appl.* Birkhäuser, Basel, 2005, pp. 147–156.
- [37] CHIPOT, M., AND XIE, Y. Elliptic problems with periodic data : an asymptotic analysis. *J. Math. Pures Appl. (9)* 85, 3 (2006), 345–370.
- [38] CONCA, C., SAN MARTÍN, J., AND TUCSNAK, M. Existence of solutions for the equations modelling the motion of a rigid body in a viscous fluid. *Comm. Partial Differential Equations* 25, 5-6 (2000), 1019–1042.
- [39] CORON, J.-M. On the controllability of the 2-D incompressible Navier-Stokes equations with the Navier slip boundary conditions. *ESAIM Contrôle Optim. Calc. Var.* 1 (1995/96), 35–75 (electronic).
- [40] COUTAND, D., AND SHKOLLER, S. Motion of an elastic solid inside an incompressible viscous fluid. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 176, 1 (2005), 25–102.
- [41] COUTAND, D., AND SHKOLLER, S. The interaction between quasilinear elastodynamics and the Navier-Stokes equations. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 179, 3 (2006), 303–352.
- [42] CROUCH, P. Spacecraft attitude control and stabilization : Applications of geometric control theory to rigid body models. *IEEE Trans. Automat. Control* 29 (1984), 321–331.
- [43] CURTAIN, R. F., AND ZWART, H. *An introduction to infinite-dimensional linear systems theory*, vol. 21 of *Texts in Applied Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1995.
- [44] DESJARDINS, B., AND ESTEBAN, M. On weak solutions for fluid-rigid structure interaction : compressible and incompressible models. *Comm. Partial Differential Equations* 25, 7-8 (2000), 1399–1413.
- [45] DESJARDINS, B., AND ESTEBAN, M. J. Existence of weak solutions for the motion of rigid bodies in a viscous fluid. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 146, 1 (1999), 59–71.
- [46] DESJARDINS, B., ESTEBAN, M. J., GRANDMONT, C., AND LE TALLEC, P. Weak solutions for a fluid-elastic structure interaction model. *Rev. Mat. Complut.* 14, 2 (2001), 523–538.
- [47] DONEA, J. *Arbitrary Lagrangian Eulerian Methods. Computational Methods for Transient Analysis*, vol. 1 of *Computational Methods in Mechanics*. North-Holland, Elsevier, 1983.
- [48] DOUBOVA, A., AND FERNÁNDEZ-CARA, E. Some control results for simplified one-dimensional models of fluid-solid interaction. *Math. Models Methods Appl. Sci.* 15, 5 (2005), 783–824.
- [49] ESCHENAUER, H. A., KOBOLEV, V. V., AND SCHUMACHER, A. Bubble method for topology and shape optimization of structures. *Structural optimization* 8 (1994), 42–51.

- [50] ESCHENAUER, H. A., AND SCHUMACHER, A. Topology and shape optimization procedures using hole positioning criteria—theory and applications. In *Topology optimization in structural mechanics*, vol. 374 of *CISM Courses and Lectures*. Springer, Vienna, 1997, pp. 135–196.
- [51] FARHAT, C., LESOINNE, M., AND MAMAN, N. Mixed explicit/implicit time integration of coupled aeroelastic problems : three-field formulation, geometric conservation and distributed solution. *Internat. J. Numer. Methods Fluids* 21, 10 (1995), 807–835. Finite element methods in large-scale computational fluid dynamics (Tokyo, 1994).
- [52] FEIREISL, E. On the motion of rigid bodies in a viscous fluid. *Appl. Math.* 47, 6 (2002), 463–484. *Mathematical theory in fluid mechanics* (Paseky, 2001).
- [53] FEIREISL, E. On the motion of rigid bodies in a viscous compressible fluid. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 167, 4 (2003), 281–308.
- [54] FERNÁNDEZ-CARA, E., GUERRERO, S., IMANUVILOV, O. Y., AND PUEL, J.-P. Local exact controllability of the Navier-Stokes system. *J. Math. Pures Appl. (9)* 83, 12 (2004), 1501–1542.
- [55] FORMAGGIA, L., AND NOBILE, F. A stability analysis for the arbitrary Lagrangian Eulerian formulation with finite elements. *East-West J. Numer. Math.* 7, 2 (1999), 105–131.
- [56] FURSIKOV, A. V., AND IMANUVILOV, O. Y. *Controllability of evolution equations*, vol. 34 of *Lecture Notes Series*. Seoul National University Research Institute of Mathematics Global Analysis Research Center, Seoul, 1996.
- [57] GALDI, G. Slow motion of a body in a viscous incompressible fluid with application to particle sedimentation. In *Recent developments in partial differential equations*. Aracne, Rome, 1998, pp. 1–35.
- [58] GALDI, G. On the steady self-propelled motion of a body in a viscous incompressible fluid. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 148, 1 (1999), 53–88.
- [59] GALDI, G. P. On the motion of a rigid body in a viscous liquid : a mathematical analysis with applications. In *Handbook of mathematical fluid dynamics, Vol. I*. North-Holland, Amsterdam, 2002, pp. 653–791.
- [60] GALDI, G. P., AND SILVESTRE, A. L. Strong solutions to the problem of motion of a rigid body in a Navier-Stokes liquid under the action of prescribed forces and torques. In *Nonlinear problems in mathematical physics and related topics, I*, vol. 1 of *Int. Math. Ser. (N. Y.)*. Kluwer/Plenum, New York, 2002, pp. 121–144.
- [61] GALDI, G. P., AND SILVESTRE, A. L. Strong solutions to the Navier-Stokes equations around a rotating obstacle. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 176, 3 (2005), 331–350.
- [62] GALDI, G. P., AND SILVESTRE, A. L. Existence of time-periodic solutions to the Navier-Stokes equations around a moving body. *Pacific J. Math.* 223, 2 (2006), 251–267.
- [63] GARREAU, S., GUILLAUME, P., AND MASMOUDI, M. The topological asymptotic for PDE systems : the elasticity case. *SIAM J. Control Optim.* 39, 6 (2001), 1756–1778 (electronic).
- [64] GASTALDI, L. A priori error estimates for the arbitrary Lagrangian Eulerian formulation with finite elements. *East-West J. Numer. Math.* 9, 2 (2001), 123–156.

- [65] GIBSON, J. S. An analysis of optimal modal regulation : convergence and stability. *SIAM J. Control Optim.* 19, 5 (1981), 686–707.
- [66] GIBSON, J. S., AND ADAMIAN, A. Approximation theory for linear-quadratic-Gaussian optimal control of flexible structures. *SIAM J. Control Optim.* 29, 1 (1991), 1–37.
- [67] GLOWINSKI, R., LI, C. H., AND LIONS, J.-L. A numerical approach to the exact boundary controllability of the wave equation. I. Dirichlet controls : description of the numerical methods. *Japan J. Appl. Math.* 7, 1 (1990), 1–76.
- [68] GLOWINSKI, R., PAN, T.-W., HESLA, T. I., JOSEPH, D. D., AND PERIAUX, J. A distributed Lagrange multiplier/fictitious domain method for the simulation of flow around moving rigid bodies : application to particulate flow. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 184, 2-4 (2000), 241–267. Vistas in domain decomposition and parallel processing in computational mechanics.
- [69] GLOWINSKI, R., PAN, T. W., HESLA, T. I., JOSEPH, D. D., AND PÉRIAUX, J. A fictitious domain approach to the direct numerical simulation of incompressible viscous flow past moving rigid bodies : application to particulate flow. *J. Comput. Phys.* 169, 2 (2001), 363–426.
- [70] GLOWINSKI, R., PAN, T.-W., AND JOSEPH, D. D. Fictitious domain methods for particulate flow in two and three dimensions. In *The mathematics of finite elements and applications, X, MAFELAP 1999 (Uxbridge)*. Elsevier, Oxford, 2000, pp. 1–28.
- [71] GOATIN, P., AND LEFLOCH, P. G. The Riemann problem for a class of resonant hyperbolic systems of balance laws. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* 21, 6 (2004), 881–902.
- [72] GRANDMONT, C., GUIMET, V., AND MADAY, Y. Numerical analysis of some decoupling techniques for the approximation of the unsteady fluid structure interaction. *Math. Models Methods Appl. Sci.* 11, 8 (2001), 1349–1377.
- [73] GRANDMONT, C., AND MADAY, Y. Existence for an unsteady fluid-structure interaction problem. *M2AN Math. Model. Numer. Anal.* 34, 3 (2000), 609–636.
- [74] GRAY, J. Study in animal locomotion IV-the propulsive powers of the dolphin. *Journal of experimental biology* 10 (1932), 192–199.
- [75] GUILLARD, H., AND FARHAT, C. On the significance of the geometric conservation law for flow computations on moving meshes. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 190, 11-12 (2000), 1467–1482.
- [76] GUILLAUME, P., AND SID IDRIS, K. The topological asymptotic expansion for the Dirichlet problem. *SIAM J. Control Optim.* 41, 4 (2002), 1042–1072 (electronic).
- [77] GUNZBURGER, M., LEE, H.-C., AND SEREGIN, G. Global existence of weak solutions for viscous incompressible flows around a moving rigid body in three dimensions. *J. Math. Fluid Mech.* 2, 3 (2000), 219–266.
- [78] GUZINA, B. B., AND BONNET, M. Topological derivative for the inverse scattering of elastic waves. *Quart. J. Mech. Appl. Math.* 57, 2 (2004), 161–179.
- [79] HARAUX, A. Une remarque sur la stabilisation de certains systèmes du deuxième ordre en temps. *Portugal. Math.* 46, 3 (1989), 245–258.
- [80] HESLA, T. *Collision of smooth bodies in a viscous fluid : A mathematical investigation*. PhD thesis, University of Minnesota, 2005.

- [81] HILLAIRET, M. Lack of collision between solid bodies in a 2d incompressible viscous flow. Preprint.
- [82] HISHIDA, T. An existence theorem for the Navier-Stokes flow in the exterior of a rotating obstacle. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 150, 4 (1999), 307–348.
- [83] HOFFMANN, K.-H., AND STAROVOITOV, V. On a motion of a solid body in a viscous fluid. Two-dimensional case. *Adv. Math. Sci. Appl.* 9, 2 (1999), 633–648.
- [84] HOFFMANN, K.-H., AND STAROVOITOV, V. Zur Bewegung einer Kugel in einer zähen Flüssigkeit. *Doc. Math.* 5 (2000), 15–21 (electronic).
- [85] HOUDOT, J.-G., AND MUNNIER, A. On the motion and collisions of rigid bodies in an ideal fluid. Preprint.
- [86] HUANG, F. L. Characteristic conditions for exponential stability of linear dynamical systems in Hilbert spaces. *Ann. Differential Equations* 1, 1 (1985), 43–56.
- [87] IMANUILOV, O. Y. Controllability of parabolic equations. *Mat. Sb.* 186, 6 (1995), 109–132.
- [88] INFANTE, J. A., AND ZUAZUA, E. Boundary observability for the space semi-discretizations of the 1-D wave equation. *Math. Model. Numer. Anal.* 33, 2 (1999), 407–438.
- [89] ISAACSON, E., AND TEMPLE, B. Convergence of the  $2 \times 2$  Godunov method for a general resonant nonlinear balance law. *SIAM J. Appl. Math.* 55, 3 (1995), 625–640.
- [90] ISMAIL, M. *Méthode de la frontière élargie pour la résolution de problèmes elliptiques dans des domaines perforés. Application aux écoulements fluides tridimensionnels.* PhD thesis, Laboratoire Jacques-Louis Lions, Université Pierre et Marie Curie, Paris, 2004.
- [91] JAFFARD, S. Contrôle interne exact des vibrations d’une plaque rectangulaire. *Portugal. Math.* 47, 4 (1990), 423–429.
- [92] JUDAKOV, N. The solvability of the problem of the motion of a rigid body in a viscous incompressible fluid. *Dinamika Splosn. Sredy, Vyp.* 18 Dinamika Zidkost. so Svobod. Granicami (1974), 249–253, 255.
- [93] KANSO, E., MARSDEN, J. E., ROWLEY, C. W., AND MELLI-HUBER, J. B. Locomotion of articulated bodies in a perfect fluid. *J. Nonlinear Sci.* 15, 4 (2005), 255–289.
- [94] KAPPEL, F., AND SALAMON, D. An approximation theorem for the algebraic Riccati equation. *SIAM J. Control Optim.* 28, 5 (1990), 1136–1147.
- [95] KATO, T. On classical solutions of the two-dimensional nonstationary Euler equation. *Arch. Rational Mech. Anal.* 25 (1967), 188–200.
- [96] KELLER, S., AND WU, T. A porous prolate-spheroidal model for ciliated micro-organisms. *J. Fluid Mech.* 80 (1977), 259–278.
- [97] KELLY, S. D., AND MURRAY, R. M. Modelling efficient pisciform swimming for control. *Internat. J. Robust Nonlinear Control* 201 (1998), 3143–3166.
- [98] KIKUCHI, K. Exterior problem for the two-dimensional Euler equation. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.* 30, 1 (1983), 63–92.
- [99] LEROYER, A., AND M. VISONNEAU. Numerical methods for ranse simulations of a self-propelled fish-like body. *Journal of Fluids and Structures* 20 (2005), 975–991.

- [100] LIGHTHILL, J. *Mathematical biofluidynamics*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, Pa., 1975.
- [101] LIONS, P.-L. *Mathematical topics in fluid mechanics. Vol. 1*, vol. 3 of *Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications*. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1996. Incompressible models, Oxford Science Publications.
- [102] LIU, H., AND KAWACHI, K. A numerical study of undulatory swimming. *J. of Computational physics* 155 (1999), 223–247.
- [103] LIU, K. Locally distributed control and damping for the conservative systems. *SIAM J. Control Optim.* 35, 5 (1997), 1574–1590.
- [104] LIU, K., LIU, Z., AND RAO, B. Exponential stability of an abstract nondissipative linear system. *SIAM J. Control Optim.* 40, 1 (2001), 149–165 (electronic).
- [105] LIU, Z., AND ZHENG, S. *Semigroups associated with dissipative systems*, vol. 398 of *Chapman & Hall/CRC Research Notes in Mathematics*. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 1999.
- [106] MAURY, B. Direct simulations of 2D fluid-particle flows in biperiodic domains. *J. Comput. Phys.* 156, 2 (1999), 325–351.
- [107] MAURY, B. A fat boundary method for the Poisson problem in a domain with holes. *J. Sci. Comput.* 16, 3 (2001), 319–339.
- [108] MILLER, L. Controllability cost of conservative systems : resolvent condition and transmutation. *J. Funct. Anal.* 218, 2 (2005), 425–444.
- [109] MUNNIER, A., AND ZUAZUA, E. Large time behavior for a simplified  $N$ -dimensional model of fluid-solid interaction. *Comm. Partial Differential Equations* 30, 1-3 (2005), 377–417.
- [110] NAZAROV, S. A., AND SOKOLOWSKI, J. The topological derivative of the Dirichlet integral under the formation of a thin bridge. *Siberian Math. J.* 45, 2 (2004), 341–355.
- [111] NOBILE, F. *Numerical Approximation of fluid-structure interaction problems with application to haemodynamics*. PhD thesis, 2001.
- [112] PESKIN, C. S. The immersed boundary method. *Acta Numer.* 11 (2002), 479–517.
- [113] PIRONNEAU, O. On the transport-diffusion algorithm and its applications to the Navier-Stokes equations. *Numer. Math.* 38, 3 (1982), 309–332.
- [114] POMMIER, J., AND SAMET, B. The topological asymptotic for the Helmholtz equation with Dirichlet condition on the boundary of an arbitrarily shaped hole. *SIAM J. Control Optim.* 43, 3 (2004), 899–921 (electronic).
- [115] PRÜSS, J. On the spectrum of  $C_0$ -semigroups. *Trans. Amer. Math. Soc.* 284, 2 (1984), 847–857.
- [116] RAVIART, P.-A., AND THOMAS, J.-M. *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*. Dunod, Paris, 1998.
- [117] RUSSELL, D. L. Controllability and stabilizability theory for linear partial differential equations : recent progress and open questions. *SIAM Rev.* 20, 4 (1978), 639–739.
- [118] RUSSELL, D. L., AND WEISS, G. A general necessary condition for exact observability. *SIAM J. Control Optim.* 32, 1 (1994), 1–23.

- [119] SAN MARTÍN, J., STAROVOITOV, V., AND TUCSNAK, M. Global weak solutions for the two-dimensional motion of several rigid bodies in an incompressible viscous fluid. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 161, 2 (2002), 113–147.
- [120] SCHUMACHER, A. Topologieoptimierung von bauteilstrukturen unter verwendung von lopschpositionierungskriterien. *Ph.D. thesis, Univ. of Siegen* (1995).
- [121] SERRE, D. Chute libre d'un solide dans un fluide visqueux incompressible. Existence. *Japan J. Appl. Math.* 4, 1 (1987), 99–110.
- [122] SILVESTRE, A. L. On the slow motion of a self-propelled rigid body in a viscous incompressible fluid. *J. Math. Anal. Appl.* 274, 1 (2002), 203–227.
- [123] SOKOŁOWSKI, J., AND ŻOCHOWSKI, A. On the topological derivative in shape optimization. *SIAM J. Control Optim.* 37, 4 (1999), 1251–1272 (electronic).
- [124] SPARENBERG, J. A. Survey of the mathematical theory of fish locomotion. *J. Engrg. Math.* 44, 4 (2002), 395–448.
- [125] STEIN, E. M. *Harmonic analysis : real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals*, vol. 43 of *Princeton Mathematical Series*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993. With the assistance of Timothy S. Murphy, Monographs in Harmonic Analysis, III.
- [126] SÜLI, E. Convergence and nonlinear stability of the Lagrange-Galerkin method for the Navier-Stokes equations. *Numer. Math.* 53, 4 (1988), 459–483.
- [127] TAYLOR, G. Analysis of the swimming of long and narrow animals. *Proc. R. Soc. London A* 214 (1952).
- [128] TCHEUGOUÉ TÉBOU, L. R., AND ZUAZUA, E. Uniform exponential long time decay for the space semi-discretization of a locally damped wave equation via an artificial numerical viscosity. *Numer. Math.* 95, 3 (2003), 563–598.
- [129] TENENBAUM, G., AND TUCSNAK, M. Fast and strongly localized observation for the Schrödinger equation. *Transactions of the American Mathematical Society* (à paraître).
- [130] TRYANTAFYLLOU, M., AND TRYANTAFYLLOU, G. An efficient swimming machine. *Scientific american* 272, 3 (1995), 64–70.
- [131] VÁZQUEZ, J. L., AND ZUAZUA, E. Large time behavior for a simplified 1D model of fluid-solid interaction. *Comm. Partial Differential Equations* 28, 9-10 (2003), 1705–1738.
- [132] VÁZQUEZ, J. L., AND ZUAZUA, E. Lack of collision in a simplified 1D model for fluid-solid interaction. *Math. Models Methods Appl. Sci.* 16, 5 (2006), 637–678.
- [133] WEINBERGER, H. F. On the steady fall of a body in a Navier-Stokes fluid. In *Partial differential equations (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XXIII, Univ. California, Berkeley, Calif., 1971)*. Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1973, pp. 421–439.
- [134] WU, T. Y. Mathematical biofluidynamics and mechanophysiology of fish locomotion. *Math. Methods Appl. Sci.* 24, 17-18 (2001), 1541–1564. Biofluidynamics.