



**HAL**  
open science

# Contrôle de systèmes mécaniques et quantiques par des méthodes géométriques

Mario Sigalotti

► **To cite this version:**

Mario Sigalotti. Contrôle de systèmes mécaniques et quantiques par des méthodes géométriques. Mathématiques [math]. Université Henri Poincaré - Nancy I, 2010. tel-00589709

**HAL Id: tel-00589709**

**<https://theses.hal.science/tel-00589709>**

Submitted on 30 Apr 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Mémoire présenté en vue d'obtenir le diplôme  
d'HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES

Spécialité : Mathématiques.

CONTRÔLE DE SYSTÈMES MÉCANIQUES ET QUANTIQUES  
PAR DES MÉTHODES GÉOMÉTRIQUES

Mario SIGALOTTI

Rapporteurs : Pierre ROUCHON  
Emmanuel TRÉLAT  
Enrique ZUAZUA

Soutenue le 5 février 2010 devant le Jury composé de

Jean-Michel CORON  
Frédéric JEAN  
Jean-Paul GAUTHIER  
Emmanuel TRÉLAT  
Marius TUCSNAK



Man sieht diese Hunde nicht, aber man hört sie.  
Mir machen diese Hunde Angst.  
Angst ist vielleicht nicht der richtige Ausdruck,  
sie bringen den Menschen um.  
Diese Hunde bringen alles um.

*Thomas Bernhard, Frost*



# Remerciements

Tirer un bilan des activités scientifiques qui m'ont occupé après ma thèse signifie en premier lieu remercier un certain nombre de personnes qui m'ont grandement aidé pendant ces dernières années.

D'abord, je tiens à remercier Marius Tucsnak pour m'avoir si chaleureusement accueilli au sein de son équipe, pour ses encouragements et son soutien dans la prise de responsabilités et pour avoir été une source continue de conseils et intuitions mathématiques. Je lui suis reconnaissant aussi pour avoir toujours su rendre paisibles ces années de travail à Nancy par son naturel contagieusement joyeux. C'est sans oublier la gratitude que je lui dois pour avoir accepté de faire partie de mon jury.

Un très grand merci va à mes amis-collaborateurs Ugo Boscain et Yacine Chitour, sans lesquels je n'aurais probablement pas su me résoudre à m'engager dans le parcours exigeant de la recherche : je voudrais toutefois les décharger formellement de toute responsabilité quant au résultat de leur soutien amical. . .

Je voudrais remercier Pierre Rouchon et Emmanuel Trélat pour m'avoir honoré d'être rapporteurs de cette thèse d'habilitation et pour avoir accepté de faire partie de ce jury. Enrique Zuazua a aussi accepté d'être rapporteur et je lui en suis vivement reconnaissant.

Je voudrais exprimer toute ma gratitude à Jean-Michel Coron, Frédéric Jean et Jean-Paul Gauthier pour avoir accepté de faire partie de ce jury. Leur présence m'honore et est un grand plaisir.

Je remercie chaleureusement Andrei Agrachev, à qui je dois scientifiquement tellement du peu que j'ai pu atteindre, pour avoir accepté de faire partie de ce jury, avant qu'un empêchement nous prive du plaisir de sa présence ici aujourd'hui.

Les résultats présentés dans les pages qui suivent, ainsi que ceux qui ont occupé les mois qui se sont écoulés depuis le commencement de la rédaction de cette thèse d'habilitation, sont le fruit de la collaboration avec des nombreux amis et collègues que je tiens à remercier vivement : merci à María Barbero-Liñán, Grégoire Charlot, Thomas Chambrion, Jamal Daafouz, Roberta Ghezzi, Paolo Mason, Yannick Privat, Ulysse Serres, François Alouges, Karine Beauchard, Alexandre Bombrun, Antoine Chaillet, Martin Gugat, Fouad El Hachemi, Falk Hante, Antonio Loría, Jean-Baptiste Pomet, Pierre Riedinger, Dominique Sugny et Jean-Claude Vivalda.

Je voudrais aussi exprimer ma gratitude aux coéquipiers de MIAOU, APICS et CORIDA et en particulier à Bilal Atfeh, Juliette Leblond, Karim Ramdani et Takéo Takahashi, pour leur écoute et soutien, avec une mention particulière pour Bilal et Takéo, qui m'ont eu comme copain de bureau et qui ont su stoïquement endurer mon désordre débordant.

Pour terminer, je ne peux pas manquer de remercier ceux qui, de manière directe ou indirecte, ont rendu possibles les travaux présentés ici : ma famille chérie, bien sûr, ainsi que les amis de Nancy, Nice, Udine ou ailleurs, et en particulier Natasha, Marco, Ilaria, Francesca, Laura, Maurizio, Assia, Marius, Guillaume, Camille et Justine. Merci.



# Table des matières

Travaux de recherche	8
Introduction	11
<b>1 Commandabilité et commande des systèmes non linéaires de dimension finie</b>	<b>15</b>
1.1 Problème de Dubins sur des surfaces à courbure négative [MS.10]	15
1.2 Suivi de trajectoire pour un sous-marin dont le mouvement est régi par les lois de Kirchhoff [MS.7]	17
1.3 Propriétés de commandabilité d'une classe de systèmes modélisant la nage de micro-organismes [MS.3]	19
<b>2 Contrôle quantique et propriétés génériques de l'équation de Schrödinger</b>	<b>23</b>
2.1 Commandabilité de l'équation de Schrödinger bilinéaire à spectre discret [MS.5]	23
2.2 Commandabilité de la rotation d'une molécule quantique [MS.20]	26
2.3 Généricité des propriétés des fonctions et valeurs propres de l'équation de Laplace–Dirichlet [MS.4]	27
2.4 Généricité par rapport aux potentiels de la commandabilité de l'équation de Schrödinger bilinéaire à spectre discret [MS.1]	29
<b>3 Stabilité et stabilisation des systèmes hybrides</b>	<b>33</b>
3.1 Stabilité des systèmes à commutations non linéaires sur le plan [MS.9]	33
3.2 Systèmes soumis à une condition d'excitation persistante [MS.6,23]	35
3.3 Analyse de stabilité des systèmes linéaires à commutations à temps discret par le biais de fonctions de Liapounov quadratiques [MS.27]	37
<b>4 Géométrie presque riemannienne [MS.2,8,15]</b>	<b>39</b>
Perspectives de recherche	47



## Travaux de recherche

### Résumé

Type de publication	#
Revue internationale	14
Revue nationale	4
Conférences internationales	16
Rapports de recherche soumis à publication	4

### Articles parus dans des revues internationales avec comité de lecture

- [MS.1] P. MASON ET M. S., *Generic controllability properties for the bilinear Schrödinger equation*, Communications in Partial Differential Equations, à paraître.
- [MS.2] A. A. AGRACHEV, U. BOSCAIN, G. CHARLOT, R. GHEZZI ET M. S., *Two-dimensional almost-Riemannian structures with tangency points*, Annales de l'Institut Henri Poincaré (C) Analyse Non Linéaire, à paraître.
- [MS.3] M. S. ET J.-C. VIVALDA, *Controllability properties of a class of systems modeling swimming microscopic organisms*, ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations, à paraître.
- [MS.4] Y. PRIVAT ET M. S., *The squares of the Laplacian-Dirichlet eigenfunctions are generically linearly independent*, ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations, à paraître.
- [MS.5] T. CHAMBRION, P. MASON, M. S. ET U. BOSCAIN, *Controllability of the discrete-spectrum Schrödinger equation driven by an external field*, Annales de l'Institut Henri Poincaré (C) Analyse Non Linéaire, 26 (2009), pages 329–349.
- [MS.6] A. CHAILLET, Y. CHITOUR, A. LORIA ET M. S., *Uniform stabilization for linear systems with persistency of excitation. The neutrally stable and the double integrator cases*, Mathematics of Control, Signals, and Systems, 20 (2008), pages 135–156.
- [MS.7] T. CHAMBRION ET M. S., *Tracking control for an ellipsoidal submarine driven by Kirchhoff's laws*, IEEE Transactions on Automatic Control, 53 (2008), pages 339–349.
- [MS.8] A. A. AGRACHEV, U. BOSCAIN ET M. S., *A Gauss-Bonnet-like formula on two-dimensional almost-Riemannian manifolds*, Discrete and Continuous Dynamical Systems Series A, 20 (2008), pages 801–822.
- [MS.9] U. BOSCAIN, G. CHARLOT ET M. S., *Stability of planar nonlinear switched systems*, Discrete and Continuous Dynamical Systems Series A, 15 (2006), pages 415–432.
- [MS.10] M. S. ET Y. CHITOUR, *Dubins' problem on surfaces II : Nonpositive curvature*, SIAM Journal on Control and Optimization, 45 (2006), pages 457–482.
- [MS.11] Y. CHITOUR ET M. S., *Dubins' problem on surfaces. I. Non-negative curvature*, Journal of Geometrical Analysis, 15 (2005), pages 565–587.

- [MS.12] M. S., *Local regularity of optimal trajectories for control problems with general boundary conditions*, Journal of Dynamical and Control Systems, 11 (2005), pages 91–123.
- [MS.13] A. A. AGRACHEV ET M. S., *On the local structure of control functions corresponding to time-optimal trajectories in  $\mathbf{R}^3$* , SIAM Journal on Control and Optimization, 42 (2003), pages 513–531.
- [MS.14] G. ALESSANDRINI ET M. S., *Geometric properties of solutions to the anisotropic  $p$ -Laplace equation in dimension two*, Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ. Mathematica, 21 (2001), pages 249–266.

#### Articles parus dans des revues nationales

- [MS.15] U. BOSCAIN ET M. S., *High-order angles in almost-Riemannian geometry*, Actes de Séminaire de Théorie Spectrale et Géométrie, 25 (2008), pages 41–54.
- [MS.16] A.A. AGRACHEV, U. BOSCAIN ET M. S., *Two-dimensional almost-Riemannian manifolds*, Lecture notes of Seminario Interdisciplinare di Matematica, 6 (2007), pages 17–31.
- [MS.17] M. S., *Regularity properties of optimal trajectories of single-input control systems in dimension three*, Journal of Mathematical Sciences, 126 (2005), pages 1561–1573.
- [MS.18] A. BRAIDES, M. S. GELLI ET M. S., *The passage from non-convex discrete systems to variational problems in Sobolev spaces : the one-dimensional case*, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, 236 (2002), pages 395–414.

#### Articles pour des conférences internationales avec comité de lecture

- [MS.19] F. ALOUGES, K. BEAUCHARD ET M. S., *Magnetization switching in small ferromagnetic ellipsoidal samples*, Proceedings of the 48th IEEE Conference on Decision and Control, Shanghai, Chine, 2009.
- [MS.20] U. V. BOSCAIN, T. CHAMBRION, P. MASON, M. S. ET D. SUGNY, *Controllability of the rotation of a quantum planar molecule*, Proceedings of the 48th IEEE Conference on Decision and Control, Shanghai, Chine, 2009.
- [MS.21] T. CHAMBRION ET M. S., *Simultaneous approximate tracking of density matrices for a system of Schrödinger equations*, Proceedings of the 48th IEEE Conference on Decision and Control, Shanghai, Chine, 2009.
- [MS.22] M. S., P. MASON, U. V. BOSCAIN ET T. CHAMBRION, *Generic controllability properties for the bilinear Schrödinger equation*, Proceedings of the 48th IEEE Conference on Decision and Control, Shanghai, Chine, 2009.
- [MS.23] Y. CHITOUR ET M. S., *On the stabilization of permanently excited linear systems*, Proceedings of the 48th IEEE Conference on Decision and Control, Shanghai, Chine, 2009.
- [MS.24] A. A. AGRACHEV, U. V. BOSCAIN, G. CHARLOT, R. GHEZZI ET M. S., *Two-dimensional almost-Riemannian structures with tangency points*, Proceedings of the 48th IEEE Conference on Decision and Control, Shanghai, Chine, 2009.
- [MS.25] P. RIEDINGER, M. S. ET J. DAAFOUZ, *On the observability of the flying capacitor converter*, Proceedings of the 10th European Control Conference, Budapest, Hongrie, 2009.
- [MS.26] T. CHAMBRION, P. MASON, M. S. ET U. V. BOSCAIN, *Controllability properties of discrete-spectrum Schrödinger equations*, Proceedings of the 47th IEEE Conference on Decision and Control, Cancun, Mexique, 2008.

- [MS.27] P. MASON, M. S. ET J. DAAFOUZ, *On stability analysis of linear discrete-time switched systems using quadratic Lyapunov functions*, Proceedings of the 46th IEEE Conference on Decision and Control, Nouvelle Orléans, USA, 2007, pages 5629–5633.
- [MS.28] A. CHAILLET, Y. CHITOUR, A. LORIA ET M. S., *Towards uniform linear time-invariant stabilization of systems with persistency of excitation*, Proceedings of the 46th IEEE Conference on Decision and Control, Nouvelle Orléans, USA, 2007, pages 6394–6399.
- [MS.29] M. GUGAT, M. S. ET M. TUCSNAK, *Robustness analysis for the boundary control of the string equation*, Proceedings of the 9th European Control Conference, Kos, Grèce, 2007.
- [MS.30] T. CHAMBRION ET M. S., *Controllability and output tracking for an ellipsoidal submarine driven by Kirchhoff's laws*, 32nd Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society (IECON-2006), pages 567–572.
- [MS.31] Y. CHITOUR ET M. S., *Controllability of the Dubins Problem on Surfaces*, Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control, Séville, Espagne, 2005, pages 1439–1444.
- [MS.32] U. V. BOSCAIN, G. CHARLOT ET M. S., *Stability of Nonlinear Switched Systems on the Plane*, Proceedings of the 44rd IEEE Conference on Decision and Control, Séville, Espagne, 2005, pages 3285–3290.
- [MS.33] A. BOMBRUN, J.-B. POMET ET M. S., *Mechanical Systems and Rendez-Vous Controllability*, Proceedings of the 44rd IEEE Conference on Decision and Control, Séville, Espagne, 2005, pages 8271–8275.
- [MS.34] Y. CHITOUR ET M. S., *On the controllability of the Dubins' problem for surfaces*, in Proceedings of SSSC04 – Second IFAC Symposium on System, Structure and Control, Oaxaca, Mexique, 2004, pages 614–616.

### **Rapports de recherche soumis à publication**

- [MS.35] Y. CHITOUR ET M. S., *On the stabilization of persistently excited linear systems*.
- [MS.36] P. RIEDINGER, M. S. ET J. DAAFOUZ, *On the characterization of invariant sets of switched linear systems*.
- [MS.37] M. GUGAT ET M. S., *Star-shaped string networks : Switching boundary feedback stabilization*.
- [MS.38] M. BARBERO-LIÑÁN ET M. S., *High order sufficient conditions for tracking*.

# Introduction

L'activité de recherche à laquelle je me suis dédié depuis mon doctorat peut être organisée autour de quatre axes principaux. Chaque chapitre de ce mémoire correspond à l'un de ces quatre axes.

Le premier est celui qui se rattache le plus directement à ma thèse de doctorat. Il s'agit de la commandabilité et de la planification de trajectoires des systèmes non linéaires de dimension finie. Des premiers résultats dans ce domaine ont en effet été présentés dans mon mémoire de thèse et portaient sur la commandabilité de systèmes de type Dubins sur les surfaces à courbure positive à l'extérieur d'un domaine borné. La suite logique de ce travail a été d'étudier les propriétés de commandabilité de ces mêmes systèmes de type Dubins dans le cas où la courbure est négative. Rappelons que le modèle de Dubins décrit le mouvement d'un véhicule dont la valeur absolue de la vitesse linéaire est constante et l'accélération angulaire est uniformément bornée. En collaboration avec Y. Chitour, sur impulsion d'une observation faite par P. Pansu, nous avons caractérisé les surfaces à courbure négative pour lesquelles ce système est commandable indépendamment de la borne sur l'accélération angulaire et nous avons étudié la structure des trajectoires minimisant le temps. Dans un deuxième travail, en collaboration avec T. Chambrion, nous avons étudié la commandabilité et la commande d'un autre type de véhicule, un sous-marin dont le mouvement en l'absence de contrôles est décrit par les lois de Kirchhoff. Sous des hypothèses de symétrie du véhicule et en l'absence d'obstacles, nous avons pu fournir un algorithme permettant de déterminer – pour des actionneurs très naturels dans ce contexte – des lois de commande permettant de suivre de façon approchée une trajectoire quelconque. Enfin, d'autres résultats concernant la locomotion dans un fluide ont été obtenus en collaboration avec J.-C. Vivalda. Il s'agissait dans ce cas d'étudier le mouvement d'un micro-organisme qui s'autopropulse grâce aux *cilia* présents sur sa surface, dont la modélisation a été proposée dans [101]. Si dans le cas du sous-marin c'est la possibilité de considérer la viscosité nulle qui permet de travailler avec un système réduit de dimension finie, pour les micro-organismes cela est au contraire la conséquence de la grande viscosité due à leur petite taille. Les deux systèmes de contrôle ainsi obtenus sont bien sûr très différents, mais tous les deux sont non linéaires, sous-actionnés et dotés d'une structure lagrangienne naturelle.

Le deuxième axe est fortement lié au premier, naissant comme prolongation aux systèmes de dimension infinie des mêmes problématiques de commandabilité et commande. En collaboration avec U. Boscin, T. Chambrion et P. Mason je me suis intéressé aux propriétés de contrôlabilité de l'équation de Schrödinger bilinéaire. L'approche choisie, inspirée par l'importante littérature sur la commande de systèmes invariants sur des groupes de Lie compacts et en particulier par le travail [3] d'Agrachev et Chambrion, a été d'étendre à l'équation de Schrödinger des propriétés de contrôlabilité de ses approximations de Galerkin. (Ce procédé avait été déjà appliqué aux équations de Navier–Stokes dans [7, 99].) La réussite de l'approche est basée sur un résultat de suivi de trajectoire pour des approximations de Galerkin. Des points forts du résultat obtenu sont qu'il s'applique aussi aux matrices de densité (commande simultanée de systèmes identiques avec différentes conditions initiales), aux domaines non bornés avec opérateurs non bornés (pourvu

que le spectre soit discret) et aux variétés différentielles. Ce dernier point est important pour les applications, permettant ainsi d'étudier des problèmes de commande de l'orientation d'une molécule (travail en collaboration avec U. Boscain, T. Chambrion, P. Mason et D. Sugny). Même si le résultat général que nous avons obtenu porte sur la commandabilité du système, vue comme propriété d'existence, il est basé sur une approche constructive et nous espérons pouvoir en tirer des algorithmes explicites de commande. Mis à part l'hypothèse que le spectre de l'opérateur non contrôlé soit discret, les conditions suffisantes que nous avons proposées et qui garantissent la commandabilité approchée de l'équation de Schrödinger sont données par une infinité dénombrable de conditions de non annulation. Cela nous a poussé à en étudier la généricité par rapport aux différents paramètres caractérisant l'équation de Schrödinger contrôlée : son domaine de définition, le potentiel non contrôlé et le potentiel de contrôle. La première de ces trois dépendances amène très naturellement à se poser les deux questions suivantes : les carrés des fonctions propres de l'opérateur de Laplace–Dirichlet sont-ils linéairement indépendants, génériquement par rapport au domaine ? Une combinaison linéaire finie à coefficients non nuls et fixés arbitrairement des valeurs propres de l'opérateur de Laplace–Dirichlet est-elle différente de zéro, génériquement par rapport au domaine ? Ces mêmes questions surgissent aussi dans d'autres domaines des mathématiques appliqués (cf. [64, 116]). En collaboration avec Y. Privat, nous avons développé un schéma général de preuve qui donne une réponse positive à ces deux questions. Ce schéma, inspiré par un travail de Hillairet et Judge ([66]), est basé sur des résultats de perturbation analytique ([69, 98, 113]) qui permettent de contourner les difficultés liées aux dérivées par rapport à des déformations locales du domaine (cf., par exemple, [45, 75, 89, 90]). J'ai utilisé ce même principe de déformations analytiques à longue distance, cette fois en collaboration avec P. Mason, pour démontrer la généricité de la commandabilité approchée de l'équation de Schrödinger séparément par rapport aux deux potentiels, celui de contrôle et celui non contrôlé.

Le troisième axe de recherche présenté dans ce document concerne la stabilité et la stabilisation des systèmes hybrides. Le premier problème auquel je me suis intéressé a été celui de la stabilité uniforme des systèmes à commutations. En collaboration avec U. Boscain et G. Charlot, nous avons étudié le cas des systèmes à commutations définis sur  $\mathbf{R}^2$  par deux champs de vecteurs non linéaires ayant chacun l'origine comme équilibre globalement asymptotiquement stable. Nous avons obtenu des conditions topologiques sur l'ensemble où les deux champs de vecteurs sont parallèles garantissant à la fois la stabilité asymptotique uniforme à l'origine, la stabilité, ou l'instabilité du système commuté. L'intérêt de ces conditions est de pouvoir être directement testées sur les champs de vecteurs, sans avoir besoin d'en calculer les flots, ni de chercher des fonctions de Liapounov communes. D'autres résultats, en collaboration avec J. Daafouz et P. Mason ont été obtenus sur les critères de stabilité des systèmes à commutations linéaires à temps discret. En particulier, nous avons pu démontrer l'équivalence de l'existence d'une fonction de Liapounov dans différentes classes de fonctions quadratiques. Ce résultat permet de ramener la recherche à une classe de fonctions pour laquelle des tests d'existence viables existent. En collaboration avec A. Chaillet, Y. Chitour et A. Loría, nous avons aussi étudié la stabilisation d'une classe de systèmes à commutations commandés. Nous avons considéré le cas d'un système de contrôle linéaire dont la partie commandée de la dynamique est activée seulement sur certains intervalles de temps par une loi de commutation qui satisfait une condition d'excitation persistante. Nous nous sommes intéressés à la question de l'existence d'un retour d'état linéaire qui stabilise le système à l'origine uniformément par rapport à la loi de commutation. Dans le cas où un tel retour d'état existe, nous avons étudié le taux maximal de convergence vers l'origine que l'on peut atteindre.

Enfin, le quatrième et dernier axe de recherche présenté dans ce mémoire concerne une catégorie particulière de structures sous-riemanniennes à rang non constant. En collaboration avec A. Agrachev, U. Boscain, G. Charlot et R. Ghezzi, nous avons introduit la notion de structure

presque riemannienne pour indiquer une structure sous-riemannienne à rang non constant engendrée localement par un nombre de champs de vecteurs égal à la dimension de la variété. Sous des conditions de genericité, cette structure définit, sur le complémentaire d'un ensemble de codimension un (dit ensemble singulier), une structure riemannienne. En particulier, dans le cas des variétés compactes sans bord de dimension deux, nous avons introduit une notion d'intégrale de la courbure gaussienne sur le complémentaire de l'ensemble singulier et nous avons ainsi démontré une version généralisée de la formule de Gauss–Bonnet. Cette même formule admet aussi une généralisation au cas des surfaces avec bord, sous des contraintes d'admissibilité des intersections avec le bord de l'ensemble singulier.



# Chapitre 1

## Commandabilité et commande des systèmes non linéaires de dimension finie

### 1.1 Problème de Dubins sur des surfaces à courbure négative [MS.10]

Soit  $(M, m)$  une variété riemannienne connexe, orientable et complète. Indiquons par  $N = UM$  son fibré tangent unitaire. Les points de  $N$  sont les couples  $(p, v)$ , où  $p \in M$ ,  $v \in T_p M$  et  $m(v, v) = 1$ . Pour tout  $\varepsilon > 0$  nous pouvons considérer le problème de Dubins qui consiste à trouver, pour tous  $(p_1, v_1), (p_2, v_2) \in N$ , une courbe  $\gamma : [0, T] \rightarrow M$  paramétrée par son abscisse curviligne dont la courbure géodésique est bornée par  $\varepsilon$ , telle que  $\gamma(0) = p_1$ ,  $\dot{\gamma}(0) = v_1$ ,  $\gamma(T) = p_2$ ,  $\dot{\gamma}(T) = v_2$  et minimisant  $T$ . Dans la suite nous nous restreignons au cas où  $M$  est de dimension deux. Le problème de Dubins s'écrit alors comme le problème de temps minimum :

$$(D_\varepsilon) : \quad \dot{q} = f(q) + ug(q), \quad q \in N, \quad u \in [-\varepsilon, \varepsilon],$$

où  $f$  est le générateur infinitésimal du flot géodésique sur  $N$  et  $g$  est le champ de vecteurs engendrant la rotation sur les fibres de  $N$  de vitesse angulaire constante égale à 1. Les contrôles admissibles sont toutes les fonctions mesurables  $u$  à valeurs dans l'intervalle  $[-\varepsilon, \varepsilon]$ .

En 1957 Dubins ([54]) détermina la structure globale des trajectoires optimales de  $(D_\varepsilon)$  sur  $\mathbf{R}^2$  muni de la structure euclidienne : ces trajectoires optimales sont la concaténation d'au plus trois arcs de cercle de rayon  $1/\varepsilon$  ou de segments. Des conditions nécessaires supplémentaires sur les longueurs des arcs d'une concaténation optimale ont été obtenues par Sussmann et Tang ([109]). Des problèmes de type Dubins ont été étudiés pour les surfaces simplement connexes à courbure constante ([44, 68, 84]), également en dimension supérieure à deux ([85, 86, 110]).

Une motivation du travail de recherche présenté ici (et de l'article précédent [MS.11]) vient de la remarque que, en généralisant le problème de Dubins du cas euclidien à une surface riemannienne quelconque, la commandabilité de  $(D_\varepsilon)$  devient une propriété difficile à établir.

Nous sommes poussés à considérer une propriété intrinsèque de  $M$  invariante par changement d'échelle : savoir si  $(D_\varepsilon)$  est commandable pour tout  $\varepsilon > 0$ . Cette propriété a une interprétation géométrique évidente si l'on remarque que la projection sur  $M$  des trajectoires de  $(D_\varepsilon)$  donne l'ensemble des courbes  $\mathcal{C}^1$  sur  $M$  dont la courbure géodésique est bornée par  $\varepsilon$ . Nous pouvons donc reformuler la propriété mentionnée ci-dessus en disant que  $(M, m)$  est *uniformément connectable par arcs* si, pour tous  $(q_1, v_1), (q_2, v_2) \in N$  et pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe une courbe



$\gamma : [0, T] \rightarrow M$  de courbure géodésique inférieure à  $\varepsilon$  joignant  $q_1$  à  $q_2$  et telle que  $\gamma'(0) = v_1$ ,  $\gamma'(T) = v_2$ .

Un premier résultat, que nous obtenons par des arguments de stabilité au sens de Poisson, est le suivant.

**Proposition 1.1** *Soit  $M$  une surface riemannienne complète et connexe. Alors  $M$  est uniformément connectable par arcs si au moins l'une des deux propriétés suivantes est vérifiée : (a) l'aire de  $M$  est finie, (b) le flot géodésique sur  $M$  est topologiquement transitif.*

Le rôle de la courbure gaussienne  $K : M \rightarrow \mathbf{R}$  de  $(M, m)$  dans l'étude de la connectabilité uniforme par arcs de  $M$  est suggéré par la structure de l'algèbre de Lie engendrée par  $f$  et  $g$ . En effet,

$$[f, [f, g]](q) = -K(\pi(q))g(q)$$

pour tout  $q \in N$ , où  $\pi : N \rightarrow M$  est la fibration canonique (cf., par exemple, [106]).

Dans [MS.11] nous avons étudié, en collaboration avec Y. Chitour, le cas où la courbure sur  $M$  est positive. Dans la suite nous considérons le cas où la courbure gaussienne de  $M$  est négative. On sait alors que  $M$  peut être identifiée avec un espace quotient  $X/\Gamma$ , où  $X$  est une surface d'Hadamard (c'est-à-dire, une variété de dimension deux simplement connexe à courbure négative) et  $\Gamma$  est un groupe d'isométries de  $M$  préservant l'orientation qui agit librement et de façon discontinue sur  $X$ .

Nous pouvons démontrer le résultat suivant.

**Théorème 1.2** *Soit  $M$  une surface riemannienne complète, connexe et dont la courbure gaussienne  $K$  est négative. Soit  $X$  le revêtement universel de  $M$ . Alors  $M$  est uniformément connectable par arcs si au moins l'une des deux propriétés suivantes est satisfaite : (i)  $M$  est du premier type ; (ii) pour tout  $r > 0$  et tout secteur  $S$  de  $X$ ,  $\sup_{p \in S} \int_{B_X(p,r)} K dA = 0$ .*

Rappelons que  $M$  est du premier type si l'ensemble limite de  $\Gamma$  est égal au bord idéal de  $X$  (cf. [16]). La notation  $B_X(p, r)$  indique l'ensemble des points de  $X$  qui ont distance riemannienne inférieure à  $r$  de  $p$ .

Nous pouvons transformer les conditions suffisantes pour que  $M$  soit uniformément connectable par arcs du théorème 1.2 en conditions nécessaires et suffisantes en introduisant des restrictions sur le comportement de  $K$ .

**Théorème 1.3** *Soit  $M$  une surface riemannienne complète, connexe dont la courbure gaussienne  $K$  est majorée par une constante strictement négative. Alors  $M$  est uniformément connectable par arcs si et seulement si  $M$  est du premier type.*

**Théorème 1.4** *Soit  $M$  une surface riemannienne complète, connexe dont la courbure gaussienne  $K$  est négative et minorée. Supposons que  $M$  est du deuxième type et notons  $X$  son revêtement universel. Alors  $M$  est uniformément connectable par arcs si et seulement si pour tout  $r > 0$  et tout secteur  $S$  de  $X$ ,  $\sup_{p \in S} \int_{B_X(p,r)} K dA = 0$ .*

Dans le cas où  $K$  change de signe nous pouvons démontrer le résultat suivant.

**Proposition 1.5** *Soit  $M$  une surface riemannienne dont le groupe fondamental est de type fini. Soit  $K$  bornée et négative à l'extérieur d'un sous-ensemble compact de  $M$ . Supposons que tout demi-cylindre riemannien de  $M$  est strict. Alors  $M$  est uniformément connectable par arcs si et seulement si, pour tout demi-plan  $H$  contenu dans  $M$  et pour tout  $r > 0$ ,  $\sup_{p \in H} \int_{B_M(p,r)} K dA = 0$ . En particulier, (i)  $M$  est uniformément connectable par arcs si  $\int_M K dA > -\infty$  ; (ii)  $M$  n'est pas uniformément connectable par arcs s'il existe  $r > 0$  et un demi-cylindre riemannien  $U \subset M$  tels que  $\sup_{p \in U} \int_{B_M(p,r)} K dA < 0$ .*

Rappelons qu'un sous-ensemble  $U$  de  $M$  est dit un *demi-cylindre riemannien* s'il est difféomorphe à  $\mathcal{S}^1 \times [0, \infty)$  et qu'il est dit *strict* si  $K_\infty(U) = -\int_U K dA - k(\partial U) \neq 0$ , où  $k(\partial U)$  est l'intégrale de la courbure gaussienne de  $\partial U$ . Le théorème de Cohn-Vossen garantit alors que  $K_\infty(U) > 0$  (cf. [104]).

Nous terminons cette section par un résultat sur la structure des trajectoires optimales du problème de Dubins. Ce résultat peut être obtenu comme une conséquence du Principe du Maximum de Pontriaguine (cf., par exemple, [6]).

**Proposition 1.6** *Tout arc singulier d'une trajectoire temps-optimale de  $(D_\varepsilon)$  est le relèvement d'un segment géodésique (indépendamment du signe de  $K$ ). Si  $K$  est majorée par une constante strictement négative et  $\varepsilon$  est suffisamment petit, alors toute trajectoire temps-optimale de  $(D_\varepsilon)$  est la concaténation d'un arc bang, un arc singulier et un arc bang (chaque arc ayant éventuellement longueur nulle).*

## 1.2 Suivi de trajectoire pour un sous-marin dont le mouvement est régi par les lois de Kirchhoff [MS.7]

Dans cette section nous étudions la commande d'un véhicule ellipsoïdal immergé dans un volume infini de fluide idéal. Le modèle choisi est adapté à la description du mouvement des véhicules sous-marins sans pilote.

Nous supposons dans la suite que le véhicule a la même densité moyenne que le fluide (de telle sorte que sa dynamique n'est pas affectée par la gravité) et que son centre de masse coïncide avec le centre de l'ellipsoïde. Nous supposons aussi que le fluide est non visqueux, incompressible, irrotationnel et qu'il remplit  $\mathbf{R}^3$ . Sous ces hypothèses, le mouvement du véhicule est décrit par les lois de Kirchhoff (cf. [70]). En raison de la nature potentielle du fluide l'état du système est déterminé par un nombre fini de paramètres.

Notons par  $r \in \mathbf{R}^3$  la position du centre de masse du véhicule et par  $A \in SO(3)$  son orientation, calculées par rapport à un système de coordonnées galiléen. Notons aussi par  $v$  et  $\omega$  ses vitesses linéaire et angulaire, calculées par rapport à un système de coordonnées attaché au véhicule. Nous avons

$$\dot{A} = AS(\omega), \quad \dot{r} = Av, \quad (1.1)$$

où  $S : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathfrak{so}(3)$  est la bijection linéaire qui associe à un vecteur  $x \in \mathbf{R}^3$  la matrice  $3 \times 3$  antisymétrique  $S(x)$  telle que  $x \wedge y = S(x)y$  pour tout  $y$  dans  $\mathbf{R}^3$ .

Associions à  $(\omega, v)$  les *impulsions* correspondants  $(\Pi, P)$  définis par

$$\begin{pmatrix} \Pi \\ P \end{pmatrix} = \mathcal{M} \begin{pmatrix} \omega \\ v \end{pmatrix}, \quad (1.2)$$

où la matrice

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} J_e + J_f & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & M_e + M_f \end{pmatrix}$$

est composée des blocs  $3 \times 3$  suivants :  $J_e$  est la matrice d'inertie de l'ellipsoïde ;  $M_e$  est la matrice identité  $3 \times 3$ , dénotée par  $\text{Id}_3$  dans la suite, multipliée par la masse du véhicule ;  $J_f$  et  $M_f$  prennent en compte l'action du fluide sur le solide. La forme ellipsoïdale du véhicule implique que  $J_f$  et  $M_f$  sont diagonales par rapport au repère donné par les axes de l'ellipsoïde. Les coefficients de  $J_f$  et  $M_f$  sont obtenus à partir des solutions de certains problèmes aux limites associés à l'équation de Laplace et ne dépendent pas de la distribution de masse à l'intérieur du solide.

La dynamique suivie par  $(\Pi, P)$  est donnée par les équations de Kirchhoff :

$$\begin{cases} \dot{\Pi} &= \Pi \wedge \omega + P \wedge v + \mathcal{T}, \\ \dot{P} &= P \wedge \omega + \mathcal{F}, \end{cases} \quad (1.3)$$

où  $\mathcal{T}$  et  $\mathcal{F}$  sont respectivement le couple et la force extérieurs appliqués au solide.

Une dernière hypothèse simplificatrice est que les axes d'inertie du véhicule coïncident avec les axes de l'ellipsoïde. Cela est vrai, par exemple, si la distribution de masse du sous-marin est symétrique par rapport à au moins deux des plans engendrés par les axes de l'ellipsoïde.

Sous les conditions présentées ci-dessus, la matrice  $\mathcal{M}$  peut être supposée diagonale. Notons par  $M_1, M_2, M_3$  et  $J_1, J_2, J_3$  les entrées diagonales de  $M_e + M_f$  et  $J_e + J_f$  respectivement.

Supposons que le sous-marin soit commandé par une accélération le long de l'un des axes de l'ellipsoïde et par deux accélérations angulaires autour des deux autres axes.  $\mathcal{T}$  et  $\mathcal{F}$  s'écrivent alors

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u_3 \end{pmatrix}, \quad u_1, u_2, u_3 \in \mathbf{R}.$$

Le système ainsi obtenu a déjà été considéré du point de vue du contrôle par nombreux auteurs : signalons [13, 30, 31, 72, 88] pour la commande des équations de Kirchhoff et [40, 47, 46] pour le modèle complet (états-impulsions).

Nous pouvons démontrer le résultat suivant.

**Théorème 1.7** *Soit  $J_1 \neq J_2$  ou  $M_1 \neq M_2$ . Alors, le système de contrôle (1.1)–(1.3) est complètement commandable en temps arbitrairement petit. De plus, pour toute trajectoire lisse  $(\bar{A}, \bar{r}) : [0, T] \rightarrow SO(3) \times \mathbf{R}^3$ , pour toutes conditions initiales  $\Pi_0, P_0 \in \mathbf{R}^3$  et pour toute tolérance  $\epsilon > 0$ , il existe une loi de commande mesurable et bornée  $u = (u_1, u_2, u_3) : [0, T] \rightarrow \mathbf{R}^3$  telle que la trajectoire  $t \mapsto (A(t), r(t), \Pi(t), P(t))$  de (1.1)–(1.3) correspondant à  $u$  et avec condition initiale  $(A(0), r(0), \Pi(0), P(0)) = (\bar{A}(0), \bar{r}(0), \Pi_0, P_0)$  vérifie  $\|\bar{A}(t) - A(t)\| + \|\bar{r}(t) - r(t)\| < \epsilon$  pour tout  $t \in [0, T]$ .*

La démonstration du théorème est basée sur une approche de type *backstepping* : on utilise les coordonnées  $\Pi_1, \Pi_2$  et  $P_3$ , qui sont contrôlées directement par  $u_1, u_2$  et  $u_3$ , comme nouvelles commandes dans les équations de  $\Pi_3, P_1$  et  $P_2$ . Nous commandons ces dernières suffisamment bien (c'est-à-dire au sens intégral, comme énoncé dans le lemme 1.8) pour pouvoir les utiliser à leur tour comme commandes dans les équations de  $r$  et  $A$ . Le point clé de la démonstration est donc le suivant.

**Lemme 1.8** *Soit  $J_1 \neq J_2$  ou  $M_1 \neq M_2$ . Fixons  $T > 0$  et une courbe lisse  $(\bar{\Pi}, \bar{P}) : [0, T] \rightarrow \mathbf{R}^6$ . Il existe alors une suite  $u^n$  dans  $L^\infty([0, T], \mathbf{R}^3)$  telle que la suite  $(\Pi^n, P^n)$  de solutions de (1.3) correspondant à  $u^n$  et ayant  $(\Pi^n(0), P^n(0)) = (\bar{\Pi}(0), \bar{P}(0))$  comme condition initiale satisfait*

$$\begin{aligned} (\Pi_1^n(T), \Pi_2^n(T), P_1^n(T), P_2^n(T), P_3^n(T)) &\rightarrow (\bar{\Pi}_1(T), \bar{\Pi}_2(T), \bar{P}_1(T), \bar{P}_2(T), \bar{P}_3(T)), \\ \Pi_3^n(t) &\rightarrow \bar{\Pi}_3(t), \\ \int_0^t (\Pi_1^n(\tau), \Pi_2^n(\tau), P_1^n(\tau), P_2^n(\tau), P_3^n(\tau)) d\tau &\rightarrow \int_0^t (\bar{\Pi}_1(\tau), \bar{\Pi}_2(\tau), \bar{P}_1(\tau), \bar{P}_2(\tau), \bar{P}_3(\tau)) d\tau \end{aligned}$$

pour  $n \rightarrow \infty$ , où les deux dernières convergences sont uniformes par rapport à  $t \in [0, T]$ .

La méthode de démonstration fournit un algorithme pour sélectionner une famille de lois de commande oscillantes qui donnent lieu au suivi de trajectoire souhaité pour une fréquence

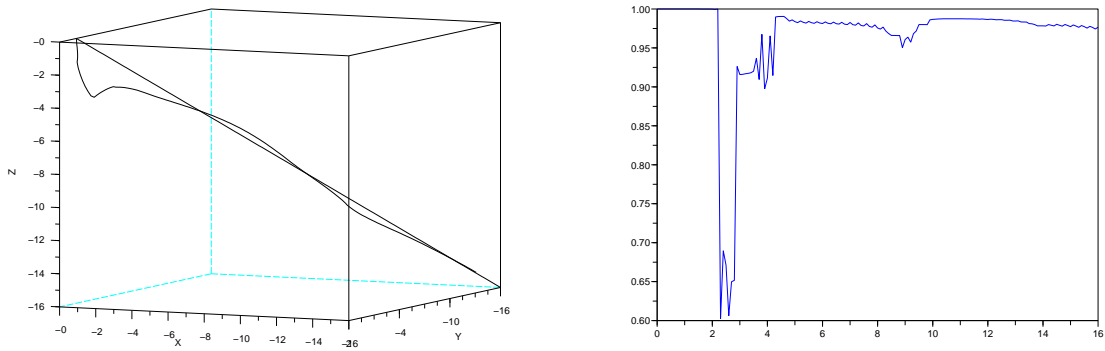


FIGURE 1.1 – Evolution de la position  $r$  du centre de masse du sous-marin et de l'entrée  $A_{3,3}$  de la matrice d'orientation. La cible est la courbe  $(\bar{A}(t), \bar{r}(t)) = (\text{Id}_3, -(t, t, t))$  et la condition initiale pour les impulsions est  $\Pi_0 = P_0 = 0$ .

suffisamment grande des oscillations. Si l'approche utilisée pour démontrer le théorème est essentiellement du type boucle ouverte, les simulations montrent bien comment le taux de convergence vers la trajectoire cible peut être amélioré grâce à l'utilisation de termes correctifs en boucle fermée.

Un exemple de suivi obtenu en appliquant cet algorithme (en langage Scilab) est présenté dans la figure 1.1.

### 1.3 Propriétés de commandabilité d'une classe de systèmes modélisant la nage de micro-organismes [MS.3]

Dans cette section nous considérons un modèle de dimension finie pour la nage d'un micro-organisme dont la propulsion exploite l'action d'un système de *cilia* couvrant sa surface. Les cilia sont des cils vibratoires dont la taille est très petite par rapport à celle du micro-organisme.

Un aspect fondamental des systèmes qui modélisent la nage des micro-organismes est la forte viscosité ([26, 94, 111]). Cela permet de remplacer dans le modèle les équations de Navier–Stokes qui décrivent l'évolution temporelle du champ des vitesses du fluide qui entoure le micro-organisme par des équations de Stokes.

Le modèle pour la nage des micro-organismes couple alors les lois de Newton régissant leur dynamique avec les équations de Stokes. La description mathématique des mécanismes de propulsion des micro-organismes (et donc du couplage entre les lois de Newton et les équations de Stokes) a été l'objet d'une riche littérature. Le mécanisme de propulsion dépend bien sûr de l'espèce étudiée et donne lieu à une grande variété de modèles (cf. par exemple [10, 43, 59, 74]).

Le cas où la propulsion est basée sur des cilia a été décrit dans [27, 39, 59] et formulé comme un système de contrôle de dimension finie par San Martín, Takahashi et Tucsnak dans [101] (où des premiers résultats de contrôlabilité sont proposés). Le micro-organisme est modélisé par un corps rigide et l'action des *cilia* par une famille finie de  $m$  champs de vitesses sur sa surface qui peuvent être directement contrôlés. Il est supposé que le micro-organisme est entouré par un volume infini de fluide.

Le système de contrôle résultant est non linéaire et défini dans un espace de dimension 12. Comme dans la section précédente, les variables d'état sont les coordonnées  $r \in \mathbf{R}^3$  du centre de masse de l'organisme, son orientation  $A \in SO(3)$ , et ses vitesses linéaire  $v \in \mathbf{R}^3$  et angulaire

$\omega \in \mathbf{R}^3$ . Le système a la structure suivante :

$$\dot{z} = Mz + E(z) + Bu, \quad (1.4)$$

$$\dot{r} = Av, \quad (1.5)$$

$$\dot{A} = AS(\omega), \quad (1.6)$$

où  $z = (v, \omega)$ ,

$$E(z) = \begin{pmatrix} v \wedge \omega \\ J^{-1}((J\omega) \wedge \omega) \end{pmatrix}$$

et  $J$  est la matrice d'inertie du micro-organisme. Les coefficients de la matrice  $6 \times 6$   $M$  et de la matrice  $6 \times m$   $B$  sont obtenus, en résolvant des problèmes aux limites, à partir de la forme du micro-organisme, de la distribution de sa masse et des champs de vitesses décrivant l'action des *cilia*. La loi de commande  $u$  est à valeurs dans  $\mathbf{R}^m$ .

Une propriété importante du système ci-dessus est que (1.4) est un système de contrôle bien défini dans  $\mathbf{R}^6$ , ne dépendant ni de  $r$  ni de  $A$ .

Rappelons qu'un système de contrôle  $\dot{q} = F(q, u)$ ,  $u \in U$ , est dit *Lie bracket generating* en un point  $q$  si l'algèbre de Lie engendrée par  $\{F(\cdot, u) \mid u \in U\}$ , évaluée en  $q$ , est de rang maximal. On dit aussi, de façon équivalente, que la famille de champs de vecteurs  $\{F(\cdot, u) \mid u \in U\}$  est *Lie bracket generating* en  $q$ .

Nous avons le résultat suivant.

**Proposition 1.9** *Le système de contrôle couplant (1.5),(1.6) et*

$$\dot{z} = f(z, u), \quad z \in \mathbf{R}^6, \quad u \in \mathbf{R}^m, \quad (1.7)$$

*est contrôlable si et seulement s'il est Lie bracket generating en  $(z, r, A) = (0, \text{Id}_3)$  et si le système (1.7) est contrôlable.*

Nous déduisons de la proposition 1.9 la généricité de la contrôlabilité de (1.4)–(1.6) dans le sens suivant.

**Théorème 1.10** *Soit  $m \geq 3$ . Il existe alors un sous-ensemble ouvert et dense  $O$  de*

$$\{(M, B, J) \mid J = J^T > 0, \text{ } M \text{ est symétrique et définie négative} \\ \text{par rapport au produit scalaire associé à } \text{diag}(\text{Id}_3, J)\},$$

*tel que (1.4)–(1.6) est commandable si  $(M, B, J) \in O$ .*

*En particulier, il existe un sous-ensemble ouvert et dense  $\mathcal{O}$  de*

$$\{(\Omega, \Psi) \mid \Omega \subset \mathbf{R}^3 \text{ ouvert connexe borné non vide et de classe } \mathcal{C}^2, \Psi \in (\mathcal{C}^2(\partial\Omega, \mathbf{R}^3))^m\}$$

*par rapport à la topologie  $\mathcal{C}^2$  tel que si  $(\Omega, \Psi) \in \mathcal{O}$  alors le micro-organisme de forme  $\Omega$  et distribution de masse uniforme dont les champs de vitesses contrôlés à la surface sont les composantes de  $\Psi$  est commandable.*

Dans le cas où le micro-organisme est sphérique et la distribution de masse uniforme, nous avons que

$$M = \begin{pmatrix} -\rho_1 \text{Id}_3 & 0 \\ 0 & -\rho_2 \text{Id}_3 \end{pmatrix},$$

avec

$$\rho_2 > \rho_1 > 0.$$

Nous avons aussi que  $J$  est proportionnelle à l'identité et donc

$$E(z) = \begin{pmatrix} \omega \wedge v \\ 0_3 \end{pmatrix}.$$

Notons par  $B_1$  et  $B_2$  les deux matrices  $3 \times m$  telles que

$$B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}.$$

Nous avons alors le résultat suivant.

**Théorème 1.11** *Supposons que le micro-organisme soit de forme sphérique et que sa distribution de masse soit uniforme. Alors (1.4)–(1.6) est commandable si et seulement si  $B_1$  est non nulle et le rang de  $B_2$  est égal à trois.*



## Chapitre 2

# Contrôle quantique et propriétés génériques de l'équation de Schrödinger

### 2.1 Commandabilité de l'équation de Schrödinger bilinéaire à spectre discret [MS.5]

Dans cette section, nous nous intéressons à la commandabilité approchée de l'équation de Schrödinger bilinéaire. Cette équation apparaît dans la modélisation de nombreuses applications, parmi lesquelles la résonance magnétique nucléaire, la spectroscopie laser et l'informatique quantique (cf. [67, 91, 95, 103]). La commande agit sur le système grâce à un champ extérieur ; il peut s'agir par exemple d'un champ magnétique ou d'un laser.

La question de la commande de la formulation fini dimensionnelle de cette équation (qui s'applique aux systèmes de spin ou quand une partie finie du spectre d'un système quantique est très éloignée de son complémentaire) a été l'objet d'une riche littérature (cf. par exemple [35, 36, 52] et les travaux qui y sont cités). Nous considérons ici une équation de Schrödinger du type suivant

$$i\frac{d\psi}{dt}(t) = (H_0 + u(t)H_1)\psi(t), \quad (2.1)$$

où la fonction d'onde  $\psi$  appartient à un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  de dimension infinie,  $H_0$  est un opérateur auto-adjoint que l'on dit *hamiltonien non contrôlé*,  $u(t)$  est à valeurs dans un sous-ensemble  $U$  de  $\mathbf{R}$  et  $H_1$  est un opérateur auto-adjoint responsable de l'interaction entre le système et le champ extérieur.

Le cas type est celui où  $\mathcal{H}$  est égal à  $L^2(\Omega, \mathbf{C})$  pour un certain domaine  $\Omega$  qui peut être égal soit à  $\mathbf{R}^d$  ou à un sous-domaine borné de  $\mathbf{R}^d$  et l'équation (2.1) est de la forme

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t}(t, x) = (-\Delta + V(x) + u(t)W(x))\psi(t, x). \quad (2.2)$$

Ici  $\Delta$  denote le laplacien et  $V, W : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$  sont des fonctions mesurables et localement bornées. Quand  $\Omega$  est borné,  $\psi(t, \cdot)$  satisfait des conditions de Dirichlet au bord de  $\Omega$ . Les résultats présentés ci-dessous s'appliquent aussi au cas où  $\Omega$  est une variété riemannienne et  $\Delta$  est l'opérateur de Laplace–Beltrami correspondant.

Il est important pour les applications de pouvoir inclure dans le modèle le cas où  $W$  est non borné : le potentiel  $W$  correspondant à une force extérieure constante est en effet linéaire. La norme de l'opérateur de multiplication par  $W$  sur  $\mathbf{R}^d$  est donc infinie.

Une propriété bien connue des équations de type (2.2) est qu'elles ne sont jamais exactement commandables dans la sphère unité de  $L^2(\Omega, \mathbf{C})$  (cf. [15, 114]). Des résultats de non commandabilité, même au sens approché, sont connus pour des situations particulières ([83, 100]).



D'importants résultats positifs de commandabilité ont été obtenus dans le cas où  $d = 1$ ,  $\Omega$  est un segment et  $V = 0$  ([22, 24]; cf. aussi [49]). Dans ces travaux, Beauchard et Coron ne démontrent pas seulement la commandabilité approchée de l'équation de Schrödinger, mais ils établissent aussi la commandabilité exacte entre fonctions d'onde suffisamment régulières. En particulier, ils obtiennent la commandabilité exacte entre les états propres du hamiltonien non contrôlé.

Des résultats de commandabilité approchée dans le cas où le hamiltonien non contrôlé a un spectre mixte ont été obtenus par Mirrahimi dans [81, 82] en utilisant une technique de type Liapounov. Une technique similaire a été appliquée par Nersesyan dans [87] dans le cas où le spectre est discret. Les résultats de Nersesyan se rapprochent de ceux présentés ci-dessous, même s'ils ne s'appliquent pas au cas  $\Omega = \mathbf{R}^d$  ni aux matrices de densité.

Signalons aussi que des résultats de commandabilité ont été obtenus dans le même cadre dans le cas de plusieurs contrôles (cf. [1, 29, 55]).

Nous supposons dans la suite que le spectre du hamiltonien non contrôlé  $H_0$  est discret et nous le notons par  $(\lambda_n)_{n \in \mathbf{N}}$  (en répétant chaque valeur propre en accord avec sa multiplicité). Notons par  $(\phi_n)_{n \in \mathbf{N}}$  une base orthonormée de  $\mathcal{H}$  telle que chaque  $\phi_n$  est une fonction propre de  $H_0$  correspondant à la valeur propre  $\lambda_n$ . Supposons aussi que  $\phi_n$  appartienne au domaine  $D(H_1)$  de  $H_1$  pour tout  $n \in \mathbf{N}$ . Il est alors possible de définir  $H_0 + uH_1$  sur  $V = \text{span}\{\phi_n \mid n \in \mathbf{N}\}$  et de l'étendre de façon unique à un opérateur auto-adjoint sur  $\mathcal{H}$ , noté par  $H_0 + uH_1$ . Nous pouvons alors associer à une commande constante  $u \in U$  l'évolution de (2.1) définie par le groupe de transformation unitaires  $e^{-it(H_0 + uH_1)} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ . Nous pouvons donc associer une solution  $\psi(\cdot; \psi_0, u)$  à tout  $u = u(\cdot)$  constant par morceaux et à toute condition initiale  $\psi_0 \in \mathcal{H}$ .

Rappelons la définition suivante :

**Définition 2.1** Une matrice  $C = (c_{jk})_{1 \leq j, k \leq n}$  est dite connexe si, pour tout paire d'indices  $j, k \in \{1, \dots, n\}$ , il existe une suite finie  $r_1, \dots, r_l \in \{1, \dots, n\}$  telle que  $c_{jr_1}c_{r_1r_2} \cdots c_{r_{l-1}r_l}c_{r_lk} \neq 0$ .

Rappelons aussi que les éléments de  $(\lambda_{n+1} - \lambda_n)_{n \in \mathbf{N}}$  sont linéairement indépendants sur  $\mathbf{Q}$  si, pour tous  $N \in \mathbf{N}$  et  $(q_1, \dots, q_N) \in \mathbf{Q}^N \setminus \{0\}$ , nous avons  $\sum_{n=1}^N q_n(\lambda_{n+1} - \lambda_n) \neq 0$ .

Nous pouvons démontrer le résultat suivant.

**Théorème 2.2** Soient  $H_0$  et  $H_1$  comme ci-dessus et  $U = (0, \delta)$  pour  $\delta > 0$ . Supposons que les éléments de  $(\lambda_{n+1} - \lambda_n)_{n \in \mathbf{N}}$  sont linéairement indépendants sur  $\mathbf{Q}$  et que, pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , la matrice

$$C_n = (\langle H_1 \phi_j, \phi_k \rangle_{\mathcal{H}})_{j, k=1}^n$$

est connexe. Alors (2.1) est commandable de façon approchée sur la sphère unité de  $\mathcal{H}$ .

Remarquons qu'à la différence de la condition sur l'indépendance linéaire sur  $\mathbf{Q}$  des éléments de  $(\lambda_{n+1} - \lambda_n)_{n \in \mathbf{N}}$ , la condition sur la connexité des matrices  $C_n$  peut dépendre de l'ordre choisi pour la suite  $(\lambda_n)_{n \in \mathbf{N}}$ . On peut montrer assez simplement que si l'ordre est tel que  $C_n$  est connexe pour une infinité de  $n \in \mathbf{N}$ , alors il existe une bijection  $h : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$  telle que pour tout  $n \in \mathbf{N}$  la matrice

$$C_n^h = (\langle H_1 \phi_{h(j)}, \phi_{h(k)} \rangle_{\mathcal{H}})_{j, k=1}^n$$

est connexe. La réciproque n'est pourtant pas vraie.

La preuve du théorème 2.2 repose sur des méthodes de dimension finie appliquées aux approximations de Galerkin du système, dans le même esprit que dans [7, 99].

Notons  $\Xi_d$  l'ensemble des ouverts connexes non vides et bornés de  $\mathbf{R}^d$  et définissons  $\Xi_d^\infty = \Xi_d \cup \{\mathbf{R}^d\}$ . Appliquons maintenant le théorème 2.2 à l'équation (2.2) avec  $\Omega \in \Xi_d^\infty$ . Sous les

hypothèses du théorème 2.3 ci-dessous, le spectre de  $-\Delta + V$  est discret (cf. [97]). Notons  $\sigma(\Omega, V) = (\lambda_j(\Omega, V))_{j \in \mathbf{N}}$  la suite faiblement croissante de valeurs propres de  $-\Delta + V$ , répétées en accord avec leur multiplicité, et  $(\phi_j(\Omega, V))_{j \in \mathbf{N}}$  une suite de fonctions propres correspondantes formant une base orthonormée de  $L^2(\Omega, \mathbf{C})$ . Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que  $\phi_j(\Omega, V)$  est à valeurs réelles pour tout  $j \in \mathbf{N}$ . Si  $j \in \mathbf{N}$  est tel que  $\lambda_j(\Omega, V)$  est simple, alors la fonction  $\phi_j(\Omega, V)$  est définie de façon unique quitte à la multiplier par  $-1$ .

**Théorème 2.3** *Soit (i)  $\Omega \in \Xi_d$ ,  $V, W \in L^\infty(\Omega)$  ou bien (ii)  $\Omega = \mathbf{R}^d$ ,  $V, W \in L^\infty_{\text{loc}}(\mathbf{R}^d, \mathbf{R})$ ,  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = +\infty$  et  $\limsup_{\|x\| \rightarrow \infty} \log(|W(x)| + 1)/\|x\| < \infty$ . Supposons que  $U$  contient l'intervalle  $(0, \delta)$  pour un certain  $\delta > 0$ , que les éléments de  $(\lambda_{k+1}(\Omega, V) - \lambda_k(\Omega, V))_{k \in \mathbf{N}}$  sont linéairement indépendants sur  $\mathbf{Q}$  et qu'il existe une bijection  $h : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$  telle que pour tout  $n \in \mathbf{N}$  la matrice*

$$C_n^h(\Omega, V, W) = \left( \int_{\Omega} W(x) \phi_{h(j)}(\Omega, V) \phi_{h(k)}(\Omega, V) dx \right)_{j,k=1}^n$$

*est connexe. Alors (2.2) est commandable de façon approchée sur la sphère unité de  $L^2(\Omega, \mathbf{C})$ .*

**Remarque 2.4** *Demander que  $\phi_n$  appartienne à  $D(H_1)$  équivaut, dans le contexte de l'équation (2.2), à ce que  $W\phi_n(\Omega, V)$  appartienne à  $L^2(\Omega)$ . Ceci est clairement vrai dans le cas  $\Omega \in \Xi_d$ . Pour  $\Omega = \mathbf{R}^d$ , la propriété découle de l'hypothèse de croissance au plus exponentielle de  $|W|$  à l'infini. Plus précisément,  $e^{a|x|}\phi_n(\mathbf{R}^d, V) \in L^2(\mathbf{R}^d)$  pour tous  $a > 0$  et  $n \in \mathbf{N}$  (cf. [2, 97]).*

Les méthodes développées pour démontrer le théorème 2.2 permettent en plus d'obtenir la contrôlabilité approchée des matrices de densité. Celles-ci décrivent l'état complet d'une famille dénombrable de systèmes identiques avec conditions initiales différentes, contrôlés simultanément par un seul contrôle (cf. [9, 41]). Plus précisément, une *matrice de densité* est un opérateur auto-adjoint, borné et positif de la forme

$$\rho = \sum_{j=1}^{\infty} P_j \varphi_j \varphi_j^*,$$

où  $(\varphi_j)_{j \in \mathbf{N}}$  est une base orthonormée de  $\mathcal{H}$ ,  $(P_j)_{j \in \mathbf{N}}$  une suite de scalaires positifs tels que  $\sum_{j=1}^{\infty} P_j = 1$  et  $\psi^*(\cdot) = \langle \psi, \cdot \rangle$  pour tout  $\psi \in \mathcal{H}$ . Chaque  $\varphi_j = \varphi_j(t)$  représente l'état d'une équation de Schrödinger de la forme (2.1) et toutes ces équations sont asservies par la même loi de commande constante par morceaux  $u = u(t)$ . L'évolution temporelle de la matrice de densité  $\rho = \rho(t)$  est donc décrite par

$$\rho(t) = \mathbf{U}(t; u) \rho(0) \mathbf{U}^*(t; u) = \sum_{j=1}^{\infty} P_j \mathbf{U}(t; u) \varphi_j(0) (\mathbf{U}(t; u) \varphi_j(0))^* \quad (2.3)$$

où l'opérateur d'évolution  $\mathbf{U}(t; u)$  est défini par

$$\mathbf{U}(t; u) \psi_0 = \psi(t; \psi_0, u)$$

et  $\mathbf{U}^*(t; u)$  dénote l'adjoint de  $\mathbf{U}(t; u)$ .

**Définition 2.5** *Deux matrices de densité  $\rho_0$  et  $\rho_1$  sont unitairement équivalentes s'il existe une transformation unitaire  $\mathbf{U}$  de  $\mathcal{H}$  telle que  $\rho_1 = \mathbf{U} \rho_0 \mathbf{U}^*$ .*

Pour des systèmes quantiques fermés, le problème de joindre deux matrices de densité par une trajectoire admissible a sens seulement si les deux matrices sont unitairement équivalentes. (La situation est différente pour des systèmes ouverts; voir par exemple [11].)

Le résultat suivant étend la commandabilité approchée d'une équation de Schrödinger aux matrices de densité correspondantes sous les mêmes hypothèses que celles du théorème 2.2.

**Théorème 2.6** Soient  $\rho_0$  et  $\rho_1$  deux matrices de densité unitairement équivalentes. Alors, sous les hypothèses du théorème 2.2, pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe une loi de commande  $u : [0, T] \rightarrow U$  constante par morceaux telle que  $\|\rho_1 - \mathbf{U}(T; u)\rho_0\mathbf{U}^*(T; u)\| < \varepsilon$ , où  $\|\cdot\|$  dénote la norme des opérateurs sur  $\mathcal{H}$ .

Si la thèse du théorème 2.6 est vérifiée on dit que (2.2) est *commandable de façon approchée au sens des matrices de densité*. Le théorème s'applique en particulier dans le cas  $\mathcal{H} = L^2(\Omega, \mathbf{C})$ ,  $H_0 = -\Delta + V$ ,  $H_1 = W$  sous les hypothèses du théorème 2.3.

## 2.2 Commandabilité de la rotation d'une molécule quantique [MS.20]

L'orientation et l'alignement des molécules sont d'importants domaines d'application du contrôle des dynamiques moléculaires quantiques. Ils ont été l'objet d'une intense activité de recherche à la fois du point de vue expérimental et du point de vue théorique (cf. [102, 107] et les références qui y sont citées).

Pour des molécules linéaires en phase gazeuse contrôlées par des champs laser polarisés linéairement, l'*alignement* correspond à maximiser la probabilité que l'axe moléculaire soit parallèle à l'axe de polarisation du laser. Pour les molécules hétéronucléaires, un sens pour l'axe moléculaire peut être défini. On dira que la molécule est *orientée* si ce sens correspond à celui du vecteur de polarisation. Alignement et orientation ont une variété d'applications allant des réactions chimiques au traitement des surfaces, des procédés de catalyse à la nano-ingénierie.

Remarquons que la dynamique rotationnelle d'une molécule est l'un des exemples les plus importants de système quantique défini sur un espace d'Hilbert de dimension infinie et pour lequel le spectre de l'opérateur de Schrödinger non contrôlé est discret. Il s'agit donc d'un modèle très naturel sur lequel appliquer les résultats présentés dans la section précédente.

Nous nous focalisons ici sur la commande par champs laser de la rotation d'une molécule rigide linéaire. Plus précisément, nous considérons une molécule linéaire polaire dans son état rovibronique fondamental sujette à un champ laser polarisé qui n'est pas en résonance avec ses fréquences vibroniques. Le but est de déterminer les obstructions à la commandabilité dues aux symétries du système et de démontrer la commandabilité approchée entre tous les états ayant les mêmes propriétés de symétrie. La commandabilité est obtenue pour des contrôles arbitrairement petits, ce qui est intéressant du point de vue des applications (cf. [108]).

La dynamique contrôlée est décrite par l'équation de Schrödinger suivante sur la sphère  $S^2$  (en choisissant des unités de mesure telles que  $\hbar = 1$ ) :

$$i\frac{\partial\psi(\theta, \phi, t)}{\partial t} = (-B\Delta - \mu_0 E(t) \cos \theta)\psi(\theta, \phi, t) \quad (2.4)$$

où  $B$  est la constante rotationnelle,  $\mu_0$  est le moment dipolaire permanent,  $\Delta$  est l'opérateur de Laplace–Beltrami sur la sphère,  $\theta$  est l'angle polaire entre la direction de polarisation et l'axe moléculaire et  $\phi$  est l'angle d'azimut. Le contrôle est donné par le champ électrique  $E$ . Nous négligeons dans ce modèle la contribution du tenseur de polarisabilité qui correspond au moment dipolaire induit par le champ électrique. L'approximation est correcte si l'intensité du laser est suffisamment faible. Le modèle ainsi obtenu est certes simplifié, mais il reproduit de façon très fidèle les données expérimentales dans le cas des molécules rigides (cf. [107]).

Nous allons simplifier ultérieurement le modèle que l'on vient d'introduire en supposant que la molécule linéaire reste sur un plan. L'équation de Schrödinger correspondante est donc définie sur un cercle et prend, dans un système normalisé de coordonnées, la forme suivante :

$$i\frac{\partial\psi(\theta, t)}{\partial t} = \left( -\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + u(t) \cos(\theta) \right) \psi(\theta, t). \quad (2.5)$$

(Voir, par exemple, [105].) La commande est indiquée ici par la lettre  $u$ .

Décomposons  $\mathcal{H} = L^2(S^1, \mathbf{C})$  dans la somme directe  $\mathcal{H}_p \oplus \mathcal{H}_i$ , où  $\mathcal{H}_p$  et  $\mathcal{H}_i$  sont, respectivement, les sous-espaces des fonctions paires et impaires de  $\mathcal{H}$  (la parité étant considérée par rapport à  $\theta = 0$ ). Remarquons que  $\mathcal{H}_p$  et  $\mathcal{H}_i$  sont deux espaces de Hilbert. Notons  $\psi = (\psi_p, \psi_i)$  la décomposition de  $\psi \in \mathcal{H}$  avec  $\psi_p \in \mathcal{H}_p$  et  $\psi_i \in \mathcal{H}_i$ .

Notre premier résultat sur la commandabilité de (2.5) est négatif, affirmant que les normes des parties paire et impaire sont conservées.

**Proposition 2.7** *Pour tout  $\psi^0$  appartenant à la sphère unité de  $L^2(S^1, \mathbf{C})$ , pour tout  $u$  dans  $L^\infty([0, T], \mathbf{R})$  et pour tout  $t \in [0, T]$ , nous avons  $\|\psi_p(t; \psi^0, u)\|_{\mathcal{H}} = \|\psi_p^0\|_{\mathcal{H}}$  et  $\|\psi_i(t; \psi^0, u)\|_{\mathcal{H}} = \|\psi_i^0\|_{\mathcal{H}}$ .*

Notre résultat principal est qu'il est possible de contrôler simultanément la partie paire et celle impaire (de façon approchée).

**Théorème 2.8** *Pour tous  $\psi^0 = (\psi_p^0, \psi_i^0)$ ,  $\psi^1 = (\psi_p^1, \psi_i^1)$  appartenant à la sphère unité de  $L^2(S^1, \mathbf{C})$  qui vérifient  $\|\psi_p^0\|_{\mathcal{H}} = \|\psi_p^1\|_{\mathcal{H}}$  et  $\|\psi_i^0\|_{\mathcal{H}} = \|\psi_i^1\|_{\mathcal{H}}$  et pour tous  $\varepsilon, \delta > 0$ , il existe  $T > 0$  et  $u \in L^\infty([0, T], (0, \delta])$  tels que  $\|\psi^1 - \psi(T; \psi^0, u)\| < \varepsilon$ .*

La démonstration est basée sur un argument de contrôle simultané des systèmes quantiques pour lesquels l'union des spectres des opérateurs de Schrödinger forme une famille non résonante. Cet argument est développé de façon plus générale par Chambrion dans [42].

La condition de non résonance du spectre de l'opérateur de Schrödinger est testée en remplaçant  $-\partial^2/\partial\theta^2$  par  $-\partial^2/\partial\theta^2 + u \cos(\theta)$  avec  $u$  constant et en exploitant la dépendance analytique du spectre par rapport à  $u$  et son expansion asymptotique établie dans [58]. Le théorème suivant, qui sera utilisé à plusieurs reprises dans la suite de ce chapitre, rappelle les propriétés d'analyticité de  $\lambda_n(\Omega, V)$  et  $\phi_n(\Omega, V)$  par rapport à  $V$  (cf. [69, 98]).

**Théorème 2.9** *Soient  $I \subset \mathbf{R}$  un intervalle ouvert et  $\Omega \in \Xi_d^\infty$ . Supposons que  $V$  appartient à  $\mathcal{V}(\Omega)$  et que  $\mu \mapsto W_\mu$  est une courbe analytique de  $I$  dans  $L^\infty(\Omega)$ . Il existe alors deux familles de fonctions analytiques  $(\Lambda_k : I \rightarrow \mathbf{R})_{k \in \mathbf{N}}$  et  $(\Phi_k : I \rightarrow L^2(\Omega))_{k \in \mathbf{N}}$  telles que pour tout  $\mu \in I$  la suite  $(\Lambda_k(\mu))_{k \in \mathbf{N}}$  donne le spectre (avec répétition des valeurs propres multiples) de  $-\Delta + V + W_\mu$  et  $(\Phi_k(\mu))_{k \in \mathbf{N}}$  est une base orthonormée de fonctions propres correspondantes.*

## 2.3 Généricité des propriétés des fonctions et valeurs propres de l'équation de Laplace–Dirichlet [MS.4]

Un espace topologique  $X$  est dit *espace de Baire* si toute intersection dénombrable de sous-ensembles ouverts et denses de  $X$  est dense dans  $X$ . Tout espace métrique complet est un espace de Baire. L'intersection dénombrable de sous-ensembles ouverts et denses d'un espace de Baire  $X$  est dite un *sous-ensemble résiduel* de  $X$ . Une fonction booléenne  $P : X \rightarrow \{0, 1\}$ , où  $X$  est un espace de Baire, est dite une *propriété générique* s'il existe un sous-ensemble résiduel  $Y$  de  $X$  tel que chaque  $y \in Y$  satisfait  $P$ , c'est-à-dire  $P(y) = 1$ . Dans cette section et dans la suivante, le rôle de  $X$  sera joué par différents espaces de paramètres de l'équation de Schrödinger (2.2).

Soit  $\Omega \in \Xi_d$ . Les résultats de la section 2.1 lient la commandabilité approchée de (2.2) aux propriétés de  $W$  et des valeurs et fonctions propres de l'opérateur  $-\Delta + V : H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ . Pour démontrer que (2.2) est génériquement contrôlable, nous sommes donc amenés à étudier, en particulier, les propriétés spectrales génériques de  $-\Delta + V$ .

Considérons d'abord l'indépendance linéaire sur  $\mathbf{Q}$  des différences des valeurs propres de  $-\Delta + V$ . Remarquons que, même si la propriété en question n'est pas vérifiée par les valeurs propres de  $-\Delta + V$ , elle peut l'être si l'on remplace  $V$  par  $V + uW$  pour un certain  $u$  tel

que  $(u, u + \delta) \subset U$ . La dépendance du spectre de  $V + uW$  par rapport à  $u$  étant analytique (théorème 2.9), il serait alors suffisant de montrer que les dérivées de  $\lambda_n(\Omega, V + uW)$  par rapport à  $u$  évaluées en  $u = 0$  sont linéairement indépendantes sur  $\mathbf{Q}$ . L'expression de ces dérivées est donnée par  $\int_{\Omega} W(x) \phi_n(\Omega, V)^2 dx$ , pourvu que la valeur propre  $\lambda_n(\Omega, V)$  soit simple. Dans le cas où  $\lambda_n(\Omega, V)$  n'est pas simple, la formule de la dérivée de  $\lambda_n(\Omega, V + uW)$  par rapport à  $u$  reste vraie, mais le choix de la base de fonctions propres  $(\phi_n(\Omega, V))_{n \in \mathbf{N}}$  dépend alors de  $W$  (cf. [8]).

Il est donc clair que si le spectre de  $-\Delta + V$  est simple et les carrés de ses fonctions propres forment une famille libre dans  $L^2(\Omega)$ , il existe alors  $W \in L^\infty(\Omega)$  pour lequel les éléments de  $(\int_{\Omega} W(x) \phi_n(\Omega, V)^2 dx)_{n \in \mathbf{N}}$  sont linéairement indépendants sur  $\mathbf{Q}$ . De plus, l'ensemble des  $W$  vérifiant cette propriété est résiduel dans  $L^\infty(\Omega)$ .

Remarquons que si le spectre de  $\Delta$  est simple et les carrés de ses fonctions propres forment une famille libre dans  $L^2(\Omega)$ , alors la même propriété est vraie pour  $-\Delta + V$  pour un ensemble résiduel de  $V$  dans  $L^\infty(\Omega)$ . Rappelons que l'ensemble des domaines bornés  $\Omega$  à bord  $\mathcal{C}^m$  pour lesquels le spectre de  $\Delta$  est simple sur  $\Omega$  est résiduel dans l'espace topologique  $\Sigma_m$  des domaines bornés  $\mathcal{C}^m$  doté de la topologie  $\mathcal{C}^m$ ,  $m \geq 1$ , (cf. [80, 115] et aussi [65]).

Nous nous intéressons donc à la question de la généricité par rapport à  $\Omega \in \Sigma_k$  de l'indépendance linéaire des carrés fonctions propres de  $\Delta$ . Notons  $\lambda_n^\Omega = \lambda_n(\Omega, 0)$  et  $\phi_n^\Omega = \phi_n(\Omega, 0)$  pour tout  $n \in \mathbf{N}$ . Nous indiquons par  $D_{0,1}$  l'ensemble des domaines de  $\mathbf{R}^d$  qui peuvent être transformés dans la boule unité de  $\mathbf{R}^d$  par un homéomorphisme bi-lipschitzien. En particulier, le bord d'un élément de  $D_{0,1}$  est lipschitzien.

Nous pouvons démontrer le résultat général suivant.

**Théorème 2.10** *Soit  $F_n : \mathbf{R}^{n(n+1)} \rightarrow \mathbf{R}$  une suite de fonctions analytiques. Pour tout  $n \in \mathbf{N}$  et pour tout domaine borné  $\Omega \subset \mathbf{R}^d$  à bord lipschitzien, nous dirons que  $\Omega$  satisfait la propriété  $\mathcal{P}_n$  si  $\lambda_1^\Omega, \dots, \lambda_n^\Omega$  sont simples et s'il existe  $n$  points  $x_1, \dots, x_n$  dans  $\Omega$  et un choix de  $\phi_1^\Omega, \dots, \phi_n^\Omega$  tels que*

$$F_n(\phi_1^\Omega(x_1), \dots, \phi_n^\Omega(x_1), \dots, \phi_1^\Omega(x_n), \dots, \phi_n^\Omega(x_n), \lambda_1^\Omega, \dots, \lambda_n^\Omega) \neq 0.$$

*Si, pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , il existe  $\mathcal{R}_n \in D_{0,1}$  qui satisfait la propriété  $\mathcal{P}_n$ , alors pour tout  $m \in \mathbf{N} \cup \{+\infty\}$  l'ensemble des  $\Omega \in \Sigma_m$  satisfaisant  $\mathcal{P}_n$  pour tout  $n \in \mathbf{N}$  est résiduel dans  $\Sigma_m$ .*

La démonstration est basée sur un résultat de dépendance analytique du spectre de l'opérateur de Laplace–Dirichlet par rapport au domaine, analogue au théorème 2.9. Un autre résultat crucial pour la preuve, du à Teytel, est la possibilité de déformer analytiquement deux domaines réguliers isotopes en imposant la simplicité du spectre le long de la déformation ([113]).

Nous déduisons du théorème 2.10 les conséquences suivantes.

**Corollaire 2.1** *Soit  $m \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$ . Alors, pour tout  $\Omega$  dans un ensemble résiduel de  $\Sigma_m$ , les carrés des fonctions propres de l'opérateur de Laplace–Dirichlet sur  $\Omega$  sont linéairement indépendants.*

**Corollaire 2.2** *Soient  $m \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$ ,  $k \in \mathbf{N}$  et  $q = (q_1, \dots, q_k) \in \mathbf{R}^k \setminus \{0\}$ . Alors, pour tout  $\Omega$  dans un ensemble résiduel de  $\Sigma_m$ ,*

$$\sum_{l=1}^k q_l \lambda_l^\Omega \neq 0.$$

*En particulier, les éléments du spectre de l'opérateur de Laplace–Dirichlet sur  $\Omega$  sont génériquement linéairement indépendants sur  $\mathbf{Q}$ .*

Concernant l'équation de Schrödinger bilinéaire, nous déduisons des arguments présentés au début de cette section les résultats suivants.

**Proposition 2.11** *Génériquement par rapport à  $(\Omega, W) \in \Sigma_m \times L^\infty(\mathbf{R}^d)$ , l'équation*

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t}(t, x) = (-\Delta + u(t)W(x)) \psi(t, x)$$

*est commandable de façon approchée sur la sphère unité de  $L^2(\Omega)$ .*

**Proposition 2.12** *Génériquement par rapport à  $(\Omega, V, W) \in \Sigma_m \times L^\infty(\mathbf{R}^d) \times L^\infty(\mathbf{R}^d)$ , l'équation (2.2) est commandable de façon approchée sur la sphère unité de  $L^2(\Omega)$ .*

## 2.4 Généricité par rapport aux potentiels de la commandabilité de l'équation de Schrödinger bilinéaire à spectre discret [MS.1]

Dans cette section, nous nous intéressons à la généricité de la commandabilité de l'équation de Schrödinger (2.2) par rapport au potentiel de contrôle  $W$  et à celui non contrôlé  $V$ , dans le but d'améliorer les résultats des propositions 2.11 et 2.12. Nous nous plaçons dans le cas d'une équation de Schrödinger à spectre discret définie sur un domaine  $\Omega \in \Xi_d^\infty$ .

Rappelons que la question de la généricité par rapport aux potentiels de la commandabilité de l'équation de Schrödinger bilinéaire a déjà été l'objet de certains résultats obtenus par Nerseyan : en particulier [87, lemme 3.12] démontre la généricité par rapport au couple  $(V, W)$  de la contrôlabilité approchée de (2.2) quand  $d = 1$  et  $\Omega$  est borné (sous des hypothèses de régularité sur  $V$  et  $W$ ). D'autres résultats intéressants de généricité pour la contrôlabilité d'une équation de Schrödinger linéarisée ont été obtenus par Beauchard, Chitour, Kateb et Long dans [21] et sont présentés plus en détail dans la discussion à la fin de cette section.

L'approche que nous proposons ici est de la même nature que celle exploitée dans la section précédente : nous appliquons des perturbations analytiques à longue distance des paramètres et nous exploitons la dépendance analytique par rapport à  $V$  et  $W$  des objets mathématiques qui apparaissent dans les hypothèses du théorème 2.3 (cf. théorème 2.9).

Pour tout  $\Omega \in \Xi_d^\infty$ , soit  $\mathcal{V}(\Omega)$  égal à  $L^\infty(\Omega)$  si  $\Omega \in \Xi_d$  et à  $\{V \in L_{\text{loc}}^\infty(\mathbf{R}^d) \mid \lim_{\|x\| \rightarrow \infty} V(x) = +\infty\}$  si  $\Omega = \mathbf{R}^d$ . Dans les deux cas, dotons  $\mathcal{V}(\Omega)$  de la topologie  $L^\infty$ . Introduisons aussi l'espace  $\mathcal{W}(\Omega)$ , donné par  $L^\infty(\Omega)$  si  $\Omega \in \Xi_d$  et par

$$\{W \in L_{\text{loc}}^\infty(\mathbf{R}^d) \mid \sup_{x \in \mathbf{R}^d} \frac{\log(|W(x)| + 1)}{\|x\| + 1} < \infty\}$$

si  $\Omega = \mathbf{R}^d$ . Dotons  $\mathcal{W}(\Omega)$  de la topologie  $L^\infty$ . Notons

$$\mathcal{Z}(\Omega, U) = \{(V, W) \mid V \in \mathcal{V}(\Omega), W \in \mathcal{W}(\Omega), V + uW \in \mathcal{V}(\Omega) \forall u \in U, \sup_{x \in \Omega} \frac{|W(x)|}{|V(x)| + 1} < \infty\}$$

et équipons  $\mathcal{Z}(\Omega, U)$  avec la topologie  $L^\infty$ . Introduisons aussi, pour tout  $V \in \mathcal{V}(\Omega)$  et tout  $W \in \mathcal{W}(\Omega)$ , les sous-espaces topologiques de  $\mathcal{V}(\Omega)$  et  $\mathcal{W}(\Omega)$  définis par

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(\Omega, W, U) &= \{\tilde{V} \in \mathcal{V}(\Omega) \mid (\tilde{V}, W) \in \mathcal{Z}(\Omega, U)\}, \\ \mathcal{W}(\Omega, V, U) &= \{\tilde{W} \in \mathcal{W}(\Omega) \mid (V, \tilde{W}) \in \mathcal{Z}(\Omega, U)\}. \end{aligned}$$

Remarquons que  $\mathcal{V}(\Omega, W, U)$  et  $\mathcal{W}(\Omega, V, U)$  sont tous les deux non vides et invariants par rapport à la somme avec  $L^\infty(\Omega)$ . En particulier, ils sont ouverts dans  $\mathcal{V}(\Omega)$  et  $\mathcal{W}(\Omega)$  respectivement et coïncident avec  $L^\infty(\Omega)$  quand  $\Omega$  est borné.



Nous dirons que le triplet  $(\Omega, V, W)$  est *apte à contrôler* si  $V \in \mathcal{V}(\Omega)$ ,  $W \in \mathcal{W}(\Omega)$ , les éléments de la suite  $(\lambda_{k+1}(\Omega, V) - \lambda_k(\Omega, V))_{k \in \mathbf{N}}$  sont linéairement indépendants sur  $\mathbf{Q}$  et s'il existe une bijection  $h$  pour laquelle  $C_n^h(\Omega, V, W)$  est connexe pour tout  $n \in \mathbf{N}$ .

Nous dirons aussi que le quadruplet  $(\Omega, V, W, U)$  est *efficace* si  $(V, W) \in \mathcal{Z}(\Omega, U)$  et s'il existe  $u$  et  $\delta > 0$  tels que  $(\Omega, V + uW, W)$  est apte à contrôler et  $(u, u + \delta) \subset U$ . Les théorèmes 2.3 et 2.6 peuvent alors être reformulés ainsi : l'efficacité du quadruplet  $(\Omega, V, W, U)$  est une condition suffisante pour la contrôlabilité approchée au sens des matrices de densité.

Nous pouvons démontrer le résultat de continuité suivant.

**Proposition 2.13** *Soit  $\Omega = \mathbf{R}^d$ . Supposons que  $\bar{V}$  appartient à  $\mathcal{V}(\mathbf{R}^d)$ , que  $\lambda_k(\mathbf{R}^d, \bar{V})$  est simple et que  $W \in L_{\text{loc}}^\infty(\mathbf{R}^d, \mathbf{R})$  est tel que la croissance de  $|W|$  est au plus exponentielle à l'infini. Il existe alors un voisinage  $\mathcal{N}$  de  $\bar{V}$  dans  $\mathcal{V}(\mathbf{R}^d)$  tel que  $\lambda_k(\mathbf{R}^d, V)$  est simple pour tout  $V \in \mathcal{N}$  et  $V \mapsto \sqrt{|W|} \phi_k(\mathbf{R}^d, V)$  (définie au signe près) est continue comme fonction de  $\mathcal{N}$  dans  $L^2(\mathbf{R}^d)$ .*

La preuve est basée sur l'uniformité des estimées obtenues par Agmon dans [2] (théorèmes 4.1, 4.3 et 4.4).

Un premier résultat de généricité par rapport à  $V$  est le suivant, qui généralise un résultat classique de Albert ([8]).

**Proposition 2.14** *Soit  $\Omega$  un élément de  $\Xi_d^\infty$  et notons, pour tout  $k \in \mathbf{N}$ ,*

$$\mathcal{R}_k(\Omega) = \{V \in \mathcal{V}(\Omega) \mid \lambda_1(\Omega, V), \dots, \lambda_k(\Omega, V) \text{ sont simples}\}.$$

*Pour tous  $K \in \mathbf{N}$  et  $q = (q_1, \dots, q_K) \in \mathbf{R}^K \setminus \{0\}$ , l'ensemble*

$$\mathcal{O}_q(\Omega) = \left\{ V \in \mathcal{R}_K(\Omega) \mid \sum_{j=1}^K q_j \lambda_j(\Omega, V) \neq 0 \right\}$$

*est ouvert et dense dans  $\mathcal{V}(\Omega)$ . Par conséquent, génériquement par rapport à  $V$  les éléments de  $(\lambda_n(\Omega, V))_{n \in \mathbf{N}}$  sont linéairement indépendants sur  $\mathbf{Q}$ .*

La preuve de la proposition 2.14 est basée sur le lemme suivant.

**Lemme 2.15** *Soient  $\Omega$  un élément de  $\Xi_d^\infty$  et  $\omega$  un ensemble non vide, ouvert, compactement contenu dans  $\Omega$  et dont le bord est lipschitzien. Soient  $v$  un élément de  $L^\infty(\omega)$  et  $(V_k)_{k \in \mathbf{N}}$  une suite dans  $\mathcal{V}(\Omega)$  telle que  $V_k|_\omega \rightarrow v$  dans  $L^\infty(\omega)$  quand  $k \rightarrow \infty$  et  $\lim_{k \rightarrow \infty} \inf_{\Omega \setminus \omega} V_k = +\infty$ . Alors, pour tout  $j \in \mathbf{N}$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_j(\Omega, V_k) = \lambda_j(\omega, v)$ . De plus, si  $\lambda_j(\omega, v)$  est simple alors  $\lim_{k \rightarrow \infty} \phi_j(\Omega, V_k) = \phi_j(\omega, v)$  (au signe près) dans  $L^2(\Omega)$ . Si  $\lambda_j(\omega, v)$  et  $\lambda_m(\omega, v)$  sont simples, alors (au signe près)*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} V_k \phi_j(\Omega, V_k) \phi_m(\Omega, V_k) = \int_{\omega} v \phi_j(\omega, v) \phi_m(\omega, v).$$

Nous déduisons de la proposition 2.14 le résultat suivant.

**Proposition 2.16** *Soit  $\Omega$  un élément de  $\Xi_d^\infty$ . Alors, génériquement par rapport à  $(V, W) \in \mathcal{Z}(\Omega, U)$ , le triplet  $(\Omega, V, W)$  est apte à contrôler.*

En étudiant la généricité par rapport à  $V$  ou  $W$  seulement, nous pouvons démontrer les deux propositions suivantes.

**Proposition 2.17** *Soient  $\Omega$  un élément de  $\Xi_d^\infty$  et  $W \in \mathcal{W}(\Omega)$  non constant et absolument continu sur  $\Omega$ . Alors, génériquement par rapport à  $V$  dans  $\mathcal{V}(\Omega, W, U)$ , le quadruplet  $(\Omega, V, W, U)$  est efficace.*

**Proposition 2.18** *Soient  $\Omega$  un élément de  $\Xi_d^\infty$  et  $V \in \mathcal{V}(\Omega)$  absolument continu sur  $\Omega$ . Supposons que l'intérieur de  $U$  est non vide. Alors, génériquement par rapport à  $W \in \mathcal{W}(\Omega, V, U)$ , le quadruplet  $(\Omega, V, W, U)$  est efficace.*

Il est naturel, au vu des résultats présentés dans cette section et dans la précédente, de se demander si l'équation (2.2) est commandable de façon approchée génériquement par rapport à  $\Omega \in \Xi_d$ , quand  $V$  et  $W$  sont fixés. Une conjecture dans ce sens est raisonnable (sous l'hypothèse que  $W$  soit non constant sur chaque ouvert non vide) mais les techniques employées ici paraissent difficiles à adapter dans ce cas. Une difficulté vient du fait que la dépendance de  $\lambda_k(\Omega, V)$  par rapport à  $\Omega$  n'est pas analytique si  $V$  ne l'est pas. De façon similaire, les quantités  $\int_\Omega W \phi_k(\Omega, V) \phi_j(\Omega, V)$  ne varient pas, en général, analytiquement par rapport à  $\Omega$ . Un résultat partiel dans le cas  $V = 0$  allant dans la bonne direction a été démontré dans [21], où les auteurs prouvent que pour  $W \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$  non constant sur chaque ouvert non vide, pour un domaine  $\mathcal{C}^3$  générique  $\Omega \subset \mathbf{R}^2$  nous avons  $\int_\Omega W \phi_1(\Omega, 0) \phi_j(\Omega, 0) \neq 0$  pour tout  $j \in \mathbf{N}$ . La preuve proposée dans [21] est très technique et délicate : son extension dans le cas où  $V$  est quelconque et  $d > 2$  paraît une tâche ardue.





## Chapitre 3

# Stabilité et stabilisation des systèmes hybrides

### 3.1 Stabilité des systèmes à commutations non linéaires sur le plan [MS.9]

Un *système à commutations* est une famille de systèmes dynamiques équipée d'une loi qui détermine à tout moment quelle dynamique est responsable de l'évolution temporelle.

Dans le cas des systèmes en temps continu, un système à commutations peut s'écrire sous la forme

$$\dot{q} = f_\alpha(q), \quad q \in M, \quad \alpha \in I, \quad (3.1)$$

où  $I$  est un sous-ensemble mesurable de  $\mathbf{R}$ ,  $M$  est une variété différentielle et  $\mathcal{F} = \{f_\alpha \mid \alpha \in I\}$  est une collection de champs de vecteurs sur  $M$ . Si la forme est la même que celle d'un système de contrôle, l'interprétation est différente : nous voulons déterminer des propriétés sur l'évolution du système qui ne dépendent pas de la *loi de commutation*, qui est une fonction  $\alpha : [0, \infty) \rightarrow I$  appartenant à un sous-ensemble  $\mathcal{G}$  de  $L^\infty([0, \infty), I)$  (cf. [73]).

Dans cette section, nous nous intéressons en particulier au problème suivant : si un point  $q_0$  de  $M$  est globalement asymptotiquement stable pour chaque  $f_\alpha$ , quelles autres conditions sur  $\mathcal{F}$  sont nécessaires pour garantir que  $q_0$  soit globalement asymptotiquement stable pour (3.1) indépendamment et uniformément par rapport au choix de la loi de commutation  $\alpha \in \mathcal{G}$  ?

Plus précisément, nous nous intéressons ici aux systèmes à commutations non linéaires du type

$$\dot{q} = \alpha X(q) + (1 - \alpha)Y(q), \quad q \in \mathbf{R}^2, \quad \alpha \in \{0, 1\}, \quad (3.2)$$

où les deux champs de vecteurs  $X$  et  $Y$  sont lisses et  $\mathcal{G} = L^\infty([0, \infty), \{0, 1\})$ . Nous supposons que  $X(0) = Y(0) = 0$  et que les deux systèmes dynamiques  $\dot{q} = X(q)$  et  $\dot{q} = Y(q)$  sont globalement asymptotiquement stables à l'origine. Nous cherchons des conditions sur  $X$  et  $Y$  (faciles à vérifier et invariantes par petites perturbations) telles que le système (3.2) soit globalement uniformément asymptotiquement stable à l'origine par rapport à  $\alpha \in L^\infty([0, \infty), \{0, 1\})$  (GUAS dans la suite), c'est-à-dire si, (i) pour tout  $\delta > 0$  il existe  $\varepsilon > 0$  tel que toute trajectoire de (3.2) démarrant d'un point de norme inférieure à  $\varepsilon$  reste dans la boule de centre l'origine et rayon  $\delta$  et (ii) pour tous  $\delta_1, \delta_2 > 0$ , il existe  $T > 0$  tel que l'évaluation au temps  $T$  d'une quelconque trajectoire de (3.2) démarrant d'un point de norme inférieure à  $\delta_1$  ait norme inférieure à  $\delta_2$ .

Notons

$$\mathcal{Z} = \{q \in \mathbf{R}^2 \mid \dim(\text{span}(X(q), Y(q))) < 2\}.$$

Un premier résultat que nous pouvons démontrer est le suivant.

**Théorème 3.1** *Si  $\mathcal{Z}$  est compact, alors (3.2) est uniformément stable par rapport à  $\alpha$ . Si, en plus,  $\mathcal{Z} = \{0\}$  alors (3.2) est GUAS.*

D'autres conditions peuvent être obtenues en tenant compte de la position relative de  $X$  et  $Y$  le long de  $\mathcal{Z}$ . En particulier, il est facile de voir que s'il existe une composante connexe de  $\mathcal{Z} \setminus \{0\}$  sur laquelle  $X$  et  $Y$  pointent de façon opposée, alors (3.2) n'est pas GUAS.

Introduisons l'hypothèse suivante, qui est générique dans la classe des couples de champs de vecteurs globalement asymptotiquement stables à l'origine (au sens de la topologie  $\mathcal{C}^2$ ) : nous disons que  $(X, Y)$  satisfait l'hypothèse  $(h_0)$  si (i)  $\mathcal{Z} \setminus \{0\}$  est une sous-variété immergée de  $\mathbf{R}^2$ , (ii)  $X$  et  $Y$  changent orientation en traversant  $\mathcal{Z}$  et (iii)  $X$  et  $[X, Y]$  ne sont pas colinéaires aux points de  $\mathcal{Z} \setminus \{0\}$  auxquels  $X$  est tangent à  $\mathcal{Z}$ .

**Théorème 3.2** *Soit  $(X, Y)$  un couple de champs de vecteurs globalement asymptotiquement stables à l'origine satisfaisant l'hypothèse  $(h_0)$ . Alors : (A) si l'origine est isolée dans  $\mathcal{Z}$  et  $X$  n'est nulle part tangent à  $\mathcal{Z} \setminus \{0\}$ , alors (3.2) est GUAS; (B) si  $\mathcal{Z} \setminus \{0\}$  contient une composante connexe non bornée sur laquelle  $X$  et  $Y$  pointent de façon opposée, alors (3.2) admet des trajectoires qui divergent.*

La figure 3.1 donne, graphiquement, la clé de la preuve de l'énoncé (A). Les courbes  $\Gamma_j$  indiquent les composantes connexes de  $\mathcal{Z} \setminus \{0\}$ . Nous considérons les deux trajectoires démarrant de  $q$  et qui commutent à chaque croisement de  $\mathcal{Z}$ . Nous montrons qu'elles convergent vers l'origine et que le champ de vecteurs  $X + Y$  pointe toujours à l'intérieur de la région bornée qu'elles délimitent (sauf, éventuellement, à l'origine). Nous pouvons ainsi exclure toute intersection des deux trajectoires en dehors de la composante connexe de  $\mathbf{R}^2 \setminus \cup_j \Gamma_j$  qui contient l'origine. Nous concluons en utilisant la structure ainsi caractérisée de l'ensemble des points atteignables à partir de  $q$  par des trajectoires admissibles de (3.2).

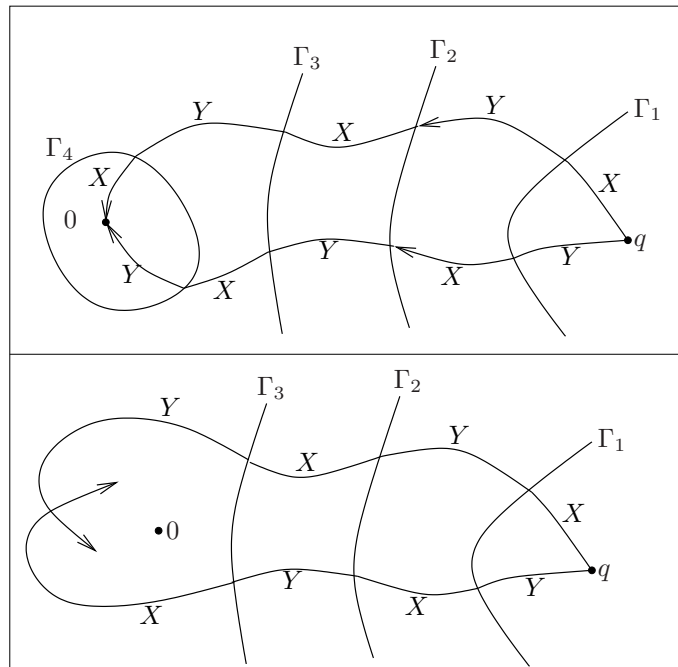


FIGURE 3.1 – Idée de la preuve du théorème 3.2, énoncé (A)

### 3.2 Systèmes soumis à une condition d'excitation persistante [MS.6,23]

Nous étudions dans cette section des systèmes de contrôle du type

$$\dot{x} = Ax + \alpha(t)bu, \quad x \in \mathbf{R}^d, \quad (3.3)$$

où  $A$  est une matrice  $n \times n$ ,  $b$  est un vecteur de  $\mathbf{R}^d$ ,  $(A, b)$  est un couple commandable, la commande  $u$  est scalaire et  $\alpha$  est une loi de commutation dépendant du temps à valeurs dans l'intervalle  $[0, 1]$  qui satisfait une condition d'excitation persistante du type

$$\int_t^{t+T} \alpha(s)ds \geq \mu, \quad \text{pour tout } t \geq 0, \quad (3.4)$$

où  $0 < \mu \leq T$  sont indépendants de  $t$ .

À  $\mu$  et  $T$  donnés, notons  $\mathcal{G}(T, \mu)$  l'ensemble des  $\alpha : [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$  mesurables qui satisfont (3.4). Un élément de  $\mathcal{G}(T, \mu)$  est dit un  $(T, \mu)$ -signal.

Nous disons qu'un vecteur  $K$  est un  $(T, \mu)$ -stabilisateur si le retour d'état  $u = -Kx$  stabilise (3.3) à l'origine, uniformément par rapport à tous les éléments de  $\mathcal{G}(T, \mu)$ . Plus précisément,  $K$  ne peut dépendre que de  $A, b, T, \mu$  et pas de  $\alpha$ . La question de l'existence d'un  $(T, \mu)$ -stabilisateur a son origine dans des problèmes d'identification et commande adaptative (cf. [12]). La condition d'excitation persistante peut aussi modéliser des contraintes sur l'action de stabilisation qui dépendent de phénomènes périodiques ou quasi-périodiques. Elle peut aussi être utilisée pour étudier des situations dans lesquelles le contrôleur n'a pas la possibilité, par moments, d'agir sur le système (par exemple, à cause d'interruptions de la transmission entre le contrôleur et l'actionneur) et il n'est pas possible de savoir *a priori* à quels instants cela arrivera, mais seulement de garantir que cela n'arrivera pas « trop souvent ».

Nous nous intéressons en particulier au cas où la matrice  $A$  n'est pas stable. Il paraît difficile dans cette situation d'utiliser des méthodes de type Liapounov. Nous avons donc développé une méthode démonstrative par contradiction qui permet d'associer, par une procédure asymptotique, un système à commutations au système excité. En démontrant que ce système limite est stabilisable, nous obtenons la  $(T, \mu)$ -stabilisabilité du système excité. La stabilisabilité du système à commutations est prouvée en généralisant un résultat d'observabilité uniforme obtenu par Gauthier et Kupka dans [60].

Nous obtenons ainsi le résultat suivant.

**Théorème 3.3** *Soit  $(A, b)$  commandable et supposons que toutes les valeurs propres de  $A$  sont à partie réelle inférieure ou égale à zéro. Alors, pour tout  $T, \mu$  avec  $T \geq \mu > 0$  il existe un  $(T, \mu)$ -stabilisateur de (3.3).*

Pour tout  $(A, b)$  commandable, pour tout  $K$  dans  $\mathbf{R}^d$ , pour tous  $T, \mu$  avec  $T \geq \mu > 0$ , et pour tout  $\alpha \in \mathcal{G}(T, \mu)$ , soit  $\lambda^+(\alpha, K)$  l'exposant maximal de Liapounov associé à  $\dot{x} = (A - \alpha bK^T)x$ , à savoir :

$$\lambda^+(\alpha, K) = \sup_{\|x_0\|=1} \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{\log(\|x(t; 0, x_0, K, \alpha)\|)}{t}.$$

Ici  $x(t; 0, x_0, K, \alpha)$  indique l'évaluation au temps  $t$  de la solution de  $\dot{x} = (A - \alpha bK^T)x$  avec condition initiale  $x_0$  au temps 0.

Le taux de convergence associé à  $(A, b, T, \mu, K)$  est défini par

$$\text{tc}(A, b, T, \mu, K) = - \sup_{\alpha \in \mathcal{G}(T, \mu)} \lambda^+(\alpha, K).$$

Les changements de variables linéaires n'affectent pas les exposants de Liapounov et donc

$$\text{tc}(A, b, T, \mu, K) = \text{tc}(PAP^{-1}, Pb, T, \mu, (P^{-1})^T K), \quad (3.5)$$

pour toute matrice inversible  $P$ .

Le *taux maximal de convergence* associé à  $\dot{x} = Ax + \alpha bu$ ,  $\alpha \in \mathcal{G}(T, \mu)$ , est défini par

$$\text{TC}(A, T, \mu) = \sup_{K \in \mathbf{R}^d} \text{tc}(A, b, T, \mu, K).$$

Il ne dépend pas de  $b$  à cause de (3.5) (on peut toujours transformer le système en forme compagnon par un changement linéaire des variables).

**Proposition 3.4** *Il existe  $\rho^* \in (0, 1)$  (ne dépendant que de  $d$ ) tel que pour tout  $(A, b)$  commandable, pour tout  $T > 0$  et tout  $\rho \in (\rho^*, 1]$  nous avons  $\text{TC}(A, T, \rho T) = +\infty$ .*

La proposition précédente peut être démontrée par un argument de type grand gain. Dans le cas  $d = 2$ , nous pouvons obtenir le résultat complémentaire suivant.

**Proposition 3.5** *Soit  $d = 2$ . Il existe  $\rho_* \in (0, 1)$  tel que pour tout  $(A, b)$  commandable, pour tous  $T > 0$  et  $\rho \in (0, \rho_*)$ , nous avons  $\text{TC}(A, T, \rho T) < +\infty$ .*

Nous ne sommes pas en mesure d'établir si la proposition 3.5 peut être généralisée au cas  $d > 2$ . La technique à la base de notre preuve n'est pas facilement généralisable, reliant sur la construction explicite de certaines courbes dans le plan. Nous croyons, néanmoins, qu'il soit raisonnable de conjecturer l'extensibilité du résultat au-delà de la dimension deux.

Une conséquence de la proposition 3.5 est l'existence d'une matrice  $A$  telle que, si  $\mu/T < \rho_*$ , le système (3.3) n'admet pas de  $(T, \mu)$ -stabilisateur. Nous pouvons prendre, par exemple,

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

avec  $\lambda$  suffisamment grand. L'intérêt de cette propriété vient de sa compatibilité avec les trois faits suivants : primo, toute limite faible- $\star$  dans  $L^\infty([0, +\infty), [0, 1])$  d'une suite  $(\alpha_n)_{n \in \mathbf{N}}$  avec  $\alpha_n \in \mathcal{G}(T_n, \rho T_n)$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = 0$  est à valeurs dans  $[\rho, 1]$ ; deuxio, la topologie faible- $\star$  rend l'application entrée-sortie  $\alpha \mapsto x(t; 0, x_0, K, \alpha)$  continue; tertio, le système à commutations

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x + \alpha_* bu$$

peut être stabilisé, uniformément par rapport à  $\alpha_* \in L^\infty([0, +\infty), [\rho, 1])$ , avec un taux de décroissance arbitrairement grand. Une conjecture a priori plus faible (mais probablement équivalente) de celle concernant l'extensibilité de la proposition 3.5 au cas  $d > 2$  est qu'il existe, en toute dimension supérieure à deux, un couple commandable  $(A, b)$  et des valeurs  $0 < \mu \leq T$  tels que (3.3) n'admet pas de  $(T, \mu)$ -stabilisateur.

La constante qui discrimine entre taux de convergence arbitrairement grand et taux de convergence borné peut être étudiée en fonction de  $A$  et  $T$ . Soit

$$\rho(A, T) = \inf\{\rho \in (0, 1] \mid \text{TC}(A, T, T\rho) = +\infty\}. \quad (3.6)$$

Remarquons que  $\rho(A, T)$  est égal à  $\rho(A/T, 1)$  et ne dépend pas de la trace de  $A$ . La définition de  $\rho$  et le résultat qui suit sont valables pour  $d \in \mathbf{N}$  quelconque.

**Lemme 3.6** *La fonction  $T \mapsto \rho(A, T)$  est localement Lipschitz sur  $(0, +\infty)$ . Les deux limites  $\lim_{T \rightarrow +\infty} \rho(A, T)$  et  $\lim_{T \rightarrow 0^+} \rho(A, T)$  existent et sont égales, respectivement, à  $\sup_{T > 0} \rho(A, T)$  et  $\inf_{T > 0} \rho(A, T)$ .*

Le comportement de la fonction  $\rho$  est loin d'être complètement compris et suscite des nombreux problèmes ouverts et conjectures. Par exemple : quelles sont les matrices  $A$  pour lesquelles  $T \mapsto \rho(A, T)$  est constante? Est-ce que la valeur constante de ces fonctions dépend de  $A$ ? Si oui, comment? La même question de l'éventuelle dépendance par rapport à  $A$  se pose pour les limites  $\lim_{T \rightarrow 0^+} \rho(A, T)$  et  $\lim_{T \rightarrow +\infty} \rho(A, T)$ .

### 3.3 Analyse de stabilité des systèmes linéaires à commutations à temps discret par le biais de fonctions de Liapounov quadratiques [MS.27]

Nous considérons dans cette section la stabilité uniforme de systèmes à commutation linéaires à temps discret du type

$$x(k+1) = \mathcal{A}_{\xi(k)}x(k), \quad k \in \mathbf{N}, \quad (3.7)$$

où la suite  $x$  est à valeurs dans  $\mathbf{R}^d$ . Les matrices  $\mathcal{A}_{\xi}$ , de taille  $d \times d$ , dépendent d'un paramètre  $\xi \in \Xi \subset \mathbf{R}^M$  qui varie en fonction du temps (discret).

L'intérêt principal de ce type de systèmes est son aptitude à modéliser des situation où la dynamique est sujette à perturbations dépendantes du temps trop difficiles à décrire précisément, mais que l'on peut borner (cf. [73, 96]).

La stabilité d'un système du type (3.7) peut être caractérisée grâce au rayon spectral conjoint ([32, 93]). Celui-ci n'étant pas calculable exactement en un nombre fini de pas, il en résulte que l'analyse de stabilité de (3.7) reste un problème ouvert, même dans le cas  $d = 2$ . (La situation est différente dans le cas des systèmes à temps continu : voir [34] et [14] pour une classification des systèmes globalement uniformément stables et aussi [5] pour la réduction au cas  $d = 2$  d'une classe de systèmes de dimension supérieure.)

La recherche de critères viables pour tester la stabilité de ces systèmes a donné lieu récemment à une intense activité scientifique (cf., par exemple, [28, 61] et les références qui y sont citées).

Un des critères les plus populaires est celui de la stabilité dite *quadratique*, qui correspond à l'existence d'une fonction de Liapounov quadratique  $V(x) = x^T P x$  commune à toutes les dynamiques  $\mathcal{A}_{\xi}$  (cf. [20]). Nous appellerons dans la suite cette stabilité quadratique *statique*. L'avantage pratique de ce type de critère est qu'il peut être reformulé de façon équivalente en termes d'inégalités matricielles linéaires (LMI dans l'acronyme anglais utilisé habituellement) qui peuvent être testées par des solveurs classiques ([38]).

Le critère de stabilité quadratique statique peut être étendu au cas où la fonction de Liapounov dépend du paramètre  $\xi$ , prenant la forme  $V(x, \xi) = x^T P(\xi)x$  (cf. [56]). On parle alors de *stabilité quadratique dépendant des paramètres*. Dans le cas où les matrices  $\mathcal{A}_{\xi}$  appartiennent à un polytope,  $\xi \mapsto \mathcal{A}_{\xi}$  est une paramétrisation affine et l'application  $\xi \mapsto P(\xi)$  est contrainte à être affine, l'existence d'une telle fonction de Liapounov peut à nouveau se tester grâce à des LMI ([50]).

La contribution présentée ici a pour but de garantir que la structure imposée à  $\xi \mapsto P(\xi)$  dans [50] n'est pas contraignante par rapport à celle plus général de la stabilité quadratique dépendant des paramètres, dans le sens que si  $\mathcal{A}(\Xi)$  est un polytope convexe et une fonction de Liapounov dépendante de  $\xi$  existe, alors il en existe une qui est affine (et sa recherche peut donc être effectuée par le biais d'une LMI). Nous montrons aussi que, même en rajoutant une dépendance explicite de  $P$  par rapport au temps  $k$ , la classe de systèmes dont la stabilité peut être testée grâce à  $P$  ne croît pas.

**Définition 3.7** *Nous disons que (3.7) est uniformément asymptotiquement stable si, pour tout  $x_0 \in \mathbf{R}^d$ , la solution de (3.7) avec condition initiale  $x(0) = x_0$  converge à zéro uniformément par rapport à  $\{\xi(k)\}_{k \in \mathbf{N}} \subset \Xi$  et si, pour tout  $R > 0$ , il existe  $r > 0$  tel que, pour tous  $\|x(0)\| < r$ ,  $\{\xi(k)\}_{k \in \mathbf{N}} \subset \Xi$  et  $k \in \mathbf{N}$ , nous avons  $\|x(k)\| < R$ .*

Une condition suffisante pour la stabilité uniforme asymptotique de (3.7) est la suivante.

**Définition 3.8** *Nous disons que (3.7) satisfait la propriété de stabilité quadratique dépendant des paramètres (SQDP) s'il existe  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 > 0$  et*

$$V(x, \xi) = x^T P(\xi)x \quad (3.8)$$

tels que

$$\alpha_1 \|x\|^2 \leq V(x, \xi) \leq \alpha_2 \|x\|^2$$

et, pour tous  $x(0) \in \mathbf{R}^d$ ,  $\{\xi(k)\}_{k \in \mathbf{N}} \subset \Xi$  et  $k \in \mathbf{N}$ , nous avons

$$V(x(k+1), \xi(k+1)) - V(x(k), \xi(k)) \leq -\alpha_0 \|x(k)\|^2.$$

La souplesse de la propriété SQDP est donnée par le fait qu'elle autorise  $P$  à dépendre du temps, par le biais du paramètre de commutation  $\xi$ . Nous pouvons obtenir une autre condition suffisante, a priori plus générale, pour la stabilité uniforme asymptotique de (3.7) en ajoutant dans  $P$  la dépendance explicite par rapport au temps.

**Définition 3.9** Nous disons que (3.7) satisfait la propriété de stabilité quadratique dépendant des paramètres et du temps (SQDPT) s'il existe  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 > 0$  et

$$V(k, x, \xi) = x^T P(k, \xi) x$$

tels que

$$\alpha_1 \|x\|^2 \leq V(k, x, \xi) \leq \alpha_2 \|x\|^2$$

et, pour tous  $x(0) \in \mathbf{R}^d$ ,  $\{\xi(k)\}_{k \in \mathbf{N}} \subset \Xi$  et  $k \in \mathbf{N}$ , nous avons

$$V(k+1, x(k+1), \xi(k+1)) - V(k, x(k), \xi(k)) \leq -\alpha_0 \|x(k)\|^2.$$

Soit  $\Xi$  le simplexe conv $\{e_1, \dots, e_M\}$  de  $\mathbf{R}^M$ , où  $\{e_1, \dots, e_M\}$  dénote la base canonique. Nous supposons dans la suite que  $\mathcal{A}$  est de la forme

$$\mathcal{A}(\xi) = \sum_{i=1}^M \xi_i A_i.$$

Nous disons que  $V$ , définie par (3.8), est *polyquadratique* si  $P(\xi)$  est linéaire par rapport à  $\xi$ .

**Remarque 3.10** Le système (3.7) est uniformément asymptotiquement stable si et seulement si cela est vrai pour le système où  $\Xi$  est remplacé par  $\{e_1, \dots, e_M\}$ . En effet, en utilisant la convexité de la norme des matrices, il est possible de vérifier que le rayon spectral conjoint des deux systèmes est le même.

L'équivalence entre les différentes notions de stabilité quadratique est énoncée dans le théorème suivant.

**Théorème 3.11** Soient  $\Xi = \text{conv}\{e_1, \dots, e_M\}$  et  $\mathcal{A}(\xi) = \sum_{i=1}^M \xi_i A_i$  pour  $\xi \in \Xi$ . Alors (3.7) satisfait la propriété de SQDPT si et seulement s'il satisfait la propriété de SQDP avec  $V$  polyquadratique.

Nous pouvons aussi montrer que la stabilité asymptotique uniforme n'est pas équivalente à la stabilité quadratique, dans le sens suivant.

**Proposition 3.12** Il existe des systèmes du type (3.7) qui sont uniformément asymptotiquement stables mais qui ne satisfont pas la propriété de SQDP.

L'équivalent de la proposition 3.12 dans le cas à temps continu avait déjà été remarqué (cf. [53, 78]). Le passage au cas du temps discret peut se faire en discretisant un système à commutations à temps continu vérifiant GUAS et n'admettant pas de fonction de Lyapounov quadratique commune et en faisant tendre le pas de discretisation temporelle vers zéro.

## Chapitre 4

# Géométrie presque riemannienne

[MS.2,8,15]

Soient  $M$  une variété lisse de dimension deux et  $X, Y$  deux champs de vecteurs lisses sur  $M$ . Si  $\{X, Y\}$  est Lie bracket generating, alors le système de contrôle

$$\dot{q} = uX(q) + vY(q), \quad u^2 + v^2 \leq 1, \quad q \in M, \quad (4.1)$$

est commandable et la fonction valeur pour le temps minimum définit une distance continue sur  $M$ . Dans le cas où  $X$  et  $Y$  sont partout linéairement indépendants (ce qui peut arriver seulement si  $M$  est parallélisable), la distance ainsi obtenue est riemannienne et correspond à la métrique pour laquelle  $(X, Y)$  est un repère mobile orthonormal.

Dans cette section, nous nous intéressons à la géométrie obtenue dans le cas où les deux champs de vecteurs peuvent être colinéaires à certains points.

Une structure métrique sur une surface  $M$  est dite *presque riemannienne* si elle peut être définie localement par un couple de champs de vecteurs  $(X, Y)$  grâce à (4.1). De façon plus intrinsèque, une structure presque riemannienne  $\mathcal{S}$  est un couple  $(E, f)$ , où  $E$  est un fibré euclidien de rang deux sur  $M$  et  $f : E \rightarrow TM$  est un morphisme de fibrés vectoriels tel que  $f(E_q) \subseteq T_qM$  et l'évaluation en  $q$  de l'algèbre de Lie engendrée par

$$\Delta = \{f \circ \sigma \mid \sigma \text{ section de } E\}$$

est égale à  $T_qM$  pour tout  $q \in M$ . (La notion de structure presque riemannienne s'étend naturellement au cas d'une variété différentielle de dimension supérieure à deux).

Si  $E$  est orientable, nous disons que  $\mathcal{S}$  est *orientable*. Si  $E$  est équivalent au fibré euclidien trivial  $M \times \mathbf{R}^2$ , nous disons que la structure presque riemannienne est *trivialisable*.

Notons par  $\mathcal{Z}$ , dit *ensemble singulier*, l'ensemble des points  $q$  de  $M$  tels que  $f(E_q)$  est de dimension un. Sous des hypothèses de généricité sur  $f$ , l'ensemble  $\mathcal{Z}$  est une sous-variété de dimension un de  $M$ . Une structure presque riemannienne est riemannienne si et seulement si  $\mathcal{Z} = \emptyset$ , c'est-à-dire,  $f$  est un isomorphisme de fibrés vectoriels. Un couple de champs de vecteurs  $(X, Y)$  de  $\Delta$  est dit une *base orthonormale de  $\mathcal{S}$*  sur un ouvert  $\Omega$  de  $M$  si  $X = f \circ \sigma$  et  $Y = f \circ \rho$  avec  $(\sigma, \rho)$  une base orthonormale pour  $E$  sur  $\Omega$ . Les bases orthonormales de  $\mathcal{S}$  forment un système de générateurs locaux de  $\Delta$ . Remarquons que  $\mathcal{S}$  est trivialisable si et seulement s'il existe une base orthonormale globale de  $\mathcal{S}$ .

Un exemple célèbre de structure presque riemannienne est le plan de Grushin, obtenu globalement sur  $M = \mathbf{R}^2$  avec  $X(x, y) = (1, 0)$  et  $Y(x, y) = (0, x)$ . (Cf. [25, 37, 57, 62].) D'autres structures presque riemanniennes ont été obtenues dans des problèmes de contrôle quantique avec  $M = S^2$  ([35, 36]) et pour d'autres surfaces de révolution ([33]).



Une structure presque riemannienne sur une surface s'écrit localement à l'aide d'une des formes normales suivantes.

**Théorème 4.1** *Génériquement par rapport à  $f$ , pour tout point  $q \in M$ , il existe une base orthonormale  $(X, Y)$  pour  $\mathcal{S}$  sur un voisinage de  $q$  et un système de coordonnées locales tels que  $(q, X, Y)$  admet l'une des représentations suivantes :*

$$\begin{aligned} \text{(F1)} \quad & q = (0, 0), \quad X(x, y) = (1, 0), \quad Y(x, y) = (0, e^{\phi(x, y)}), \\ \text{(F2)} \quad & q = (0, 0), \quad X(x, y) = (1, 0), \quad Y(x, y) = (0, xe^{\phi(x, y)}), \\ \text{(F3)} \quad & q = (0, 0), \quad X(x, y) = (1, 0), \quad Y(x, y) = (0, (y - x^2\psi(x))e^{\xi(x, y)}), \end{aligned}$$

avec  $\phi, \psi$  et  $\xi$  lisses et  $\phi(0, y) = 0, \psi(0) \neq 0$ .

Nous disons dans la suite qu'une structure presque riemannienne  $\mathcal{S}$  vérifie l'hypothèse  $(H_0)$  si elle peut se mettre localement en chaque point sous l'une des formes normales présentées dans le théorème 4.1. On dit que une structure presque riemannienne  $\mathcal{S}$  vérifiant l'hypothèse  $(H_0)$  n'a pas de points de tangence si elle peut s'écrire localement sous la forme (F1) ou (F2) seulement. Un *point de tangence* est, par définition, un point pour lequel  $\mathcal{S}$  est décrite localement par (F3).

Soit  $M$  compacte, orientée et munie d'une structure presque riemannienne orientable. Soit  $K : M \setminus \mathcal{Z} \rightarrow \mathbf{R}$  la courbure gaussienne définie par la structure presque riemannienne et  $dA_s$  le *pushforward* par  $f$  d'une forme de volume sur  $E$ .

Notons  $M^\varepsilon = \{q \in M \mid d(q, \mathcal{Z}) > \varepsilon\}$ . Soit  $M^+$  (respectivement,  $M^-$ ) le sous-ensemble de  $M \setminus \mathcal{Z}$  sur lequel l'orientation définie par  $dA_s$  coïncide avec (respectivement, est opposée à) celle de  $M$ .

Nous pouvons démontrer le résultat suivant, qui généralise la formule de Gauss–Bonnet. (D'autres généralisations dans des domaines proches ont été obtenues pour des structures sous-riemanniennes [4], finsleriennes [17] et pour des pseudo-métriques singulières [92].)

**Théorème 4.2** *Soit  $M$  compacte et orientée. Pour une structure presque riemannienne orientée, sans points de tangence et vérifiant l'hypothèse  $(H_0)$ , la limite  $\lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{M^\varepsilon} K(q) dA_s$  existe et est égale à  $2\pi(\chi(M^+) - \chi(M^-))$ , où  $\chi$  est la caractéristique d'Euler.*

Étant donné un fibré vectoriel orienté  $E$  de rang deux sur une variété différentielle compacte orientée  $M$  de dimension deux, le *numéro d'Euler de  $E$* , noté par  $e(E)$ , est défini par

$$e(E) = \sum_{p \mid \sigma(p)=0} i(p, \sigma),$$

où  $\sigma : M \rightarrow E$  est une section transverse à la section nulle et  $i(p, \sigma) = 1$  (respectivement,  $-1$ ) si  $d_p\sigma : T_pM \rightarrow T_{\sigma(p)}E$  préserve (respectivement, reverse) l'orientation.

Remarquons que, en changeant l'orientation sur  $M$  ou sur  $E$ , le signe de  $e(E)$  change. Par conséquent,  $e(E)$  est défini au signe près. Par contre, le numéro d'Euler de  $TM$  est défini sans ambiguïté et est égal à  $\chi(M)$ . Remarquons aussi que si  $(E, f)$  est *trivialisable*, alors  $e(E) = 0$ .

Nous avons la caractérisation topologique suivante.

**Théorème 4.3** *Soit  $M$  compacte et orientée dotée d'une structure presque riemannienne orientée et vérifiant l'hypothèse  $(H_0)$ . Alors  $\chi(M^+) - \chi(M^-) + \tau = e(E)$ , où  $\tau$  est le nombre de révolutions de  $\Delta$  sur  $\mathcal{Z}$  calculé par rapport à l'orientation induite par  $M^+$  sur  $\mathcal{Z}$ .*

Comme conséquence directe des théorèmes 4.2 et 4.3, nous avons que, pour une structure presque riemannienne trivialisable, sans points de tangence, et vérifiant l'hypothèse  $(H_0)$ , définie sur une surface  $M$  compacte et orientable, la limite  $\lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{M^\varepsilon} K(q) dA_s$  existe et est égale à zéro. Nous

pouvons donner l'interprétation suivante de cette propriété : pour une structure riemannienne, la topologie de la surface donne une contrainte sur la courbure totale (formule de Gauss–Bonnet) ; dans le cas d'une structure presque riemannienne trivialisable, par contre, la courbure totale est égale à zéro et la topologie de la surface force la métrique à devenir singulière sur un ensemble de topologie appropriée.

Il est intéressant de remarquer que toute surface orientable compacte peut être équipée d'une structure presque riemannienne trivialisable, sans points de tangence et vérifiant l'hypothèse  $(H_0)$  (voir figures 4.1 et 4.2).

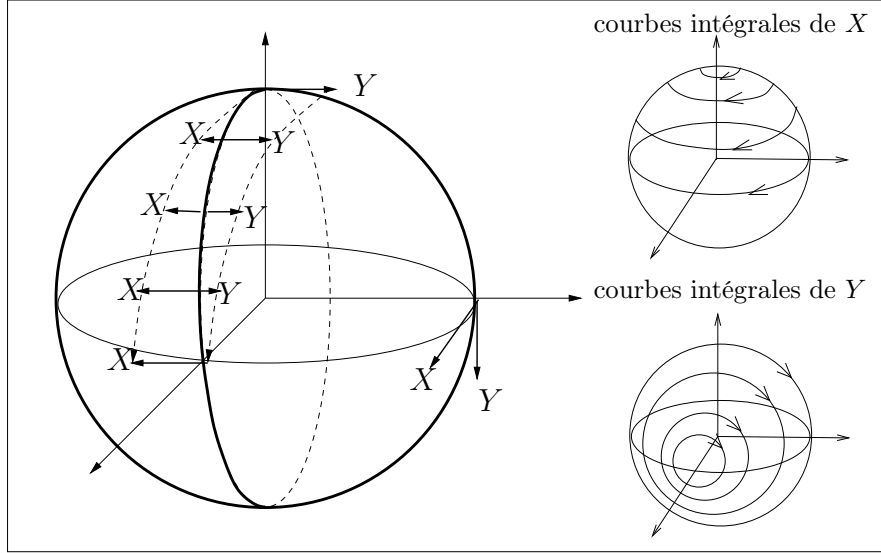


FIGURE 4.1 – Exemple de structure presque riemannienne trivialisable sans points de tangence sur une sphère.

Pour étendre le théorème 4.2 au cas des variétés à bord, nous introduisons une notion de domaine admissible de  $M$ .

**Définition 4.4** Soit  $U$  un domaine borné d'une surface  $M$  munie d'une structure presque riemannienne orientable et vérifiant l'hypothèse  $(H_0)$ . Nous disons que  $U$  est admissible si  $\bar{U}$  ne contient pas de points de tangence et si le bord  $\Gamma$  de  $U$  est l'union des supports d'un ensemble fini de courbes  $\gamma^1, \dots, \gamma^m$  telles que chaque  $\gamma^l : [0, T^l] \rightarrow M$  satisfait les conditions suivantes :  $\gamma^l$  est  $\mathcal{C}^2$  sur  $[0, T^l]$  ;  $\gamma^l$  est localement solution de (4.1) (en particulier  $\Gamma$  a longueur finie) ;  $\gamma^l$  a la même orientation que celle induite sur  $\Gamma$  par  $U$ .

**Théorème 4.5** Soit  $U$  un domaine admissible d'une surface  $M$  munie d'une structure presque riemannienne orientable et vérifiant l'hypothèse  $(H_0)$ . Soient  $\gamma^1, \dots, \gamma^m$  comme dans la définition 4.4. Pour tout  $\varepsilon > 0$ , soit  $M_\varepsilon^\pm = M^\pm \cap M^\varepsilon$  et  $U_\varepsilon^\pm = M_\varepsilon^\pm \cap U$ . Soient  $t_1^j, \dots, t_{i_j}^j$  les temps pour lesquels  $\gamma^j$  traverse  $\mathcal{Z}$ . Associons à chaque  $t_i^j$  la quantité  $\Sigma^+(t_i^j)$  de la façon suivante : si, pour  $\varepsilon > 0$  suffisamment petit, le support de  $\gamma^j|_{(t_i^j, t_i^j + \varepsilon)}$  est contenu dans  $M^+$ , alors  $\Sigma^+(t_i^j) = 1$ , sinon  $\Sigma^+(t_i^j) = -1$ . De façon similaire, si pour  $\varepsilon > 0$  suffisamment petit le support de  $\gamma^j|_{(t_i^j - \varepsilon, t_i^j)}$  est contenu dans  $M^+$  alors posons  $\Sigma^-(t_i^j) = 1$ , sinon  $\Sigma^-(t_i^j) = -1$ . Notons par  $k_g^j(t)$  la courbure géodésique de  $\gamma^j$  en  $\gamma^j(t)$ . Définissons

$$\Upsilon(\Xi) = \frac{\Xi}{2\sqrt{1 - \Xi^2}} + \arccos(\Xi)$$

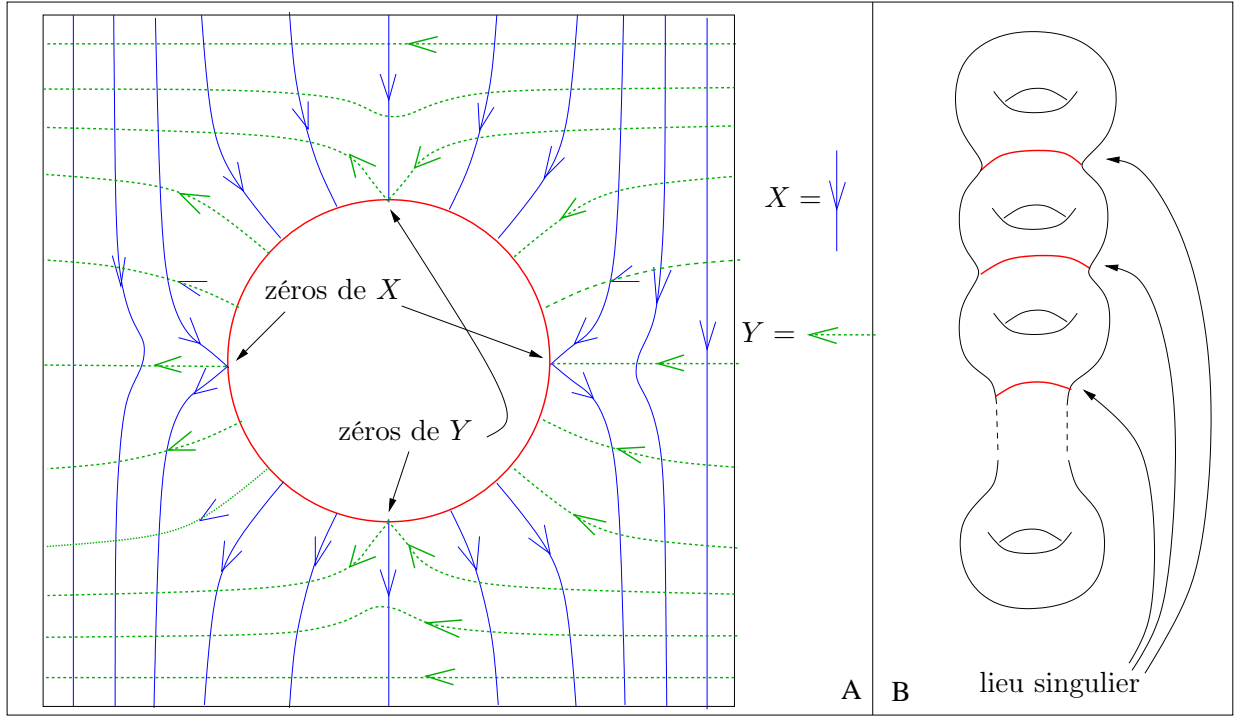


FIGURE 4.2 – Exemple de structure presque riemannienne trivialisable sans points de tangence sur la somme connexe de plusieurs tores.

et

$$\Xi^\pm(t_l^j) = \lim_{t \rightarrow t_l^j \pm} k_g^j(t) |t - t_l^j|, \quad \alpha(t_l^j) = \Sigma^-(t_l^j) \Upsilon(\Xi^-(t_l^j)) + \Sigma^+(t_l^j) \Upsilon(\Xi^+(t_l^j)).$$

Alors

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_{U_\varepsilon^+ \cup U_\varepsilon^-} K dA_s + \int_{\Gamma \cap \partial U_\varepsilon^+} k_g d\sigma - \int_{\Gamma \cap \partial U_\varepsilon^-} k_g d\sigma \right) = 2\pi(\chi(U^+) - \chi(U^-)) - \sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^{l_j} \alpha(t_l^j),$$

où nous interprétons chaque intégrale  $\int_{\Gamma \cap \partial U_\varepsilon^\pm} k_g d\sigma$  comme la somme des intégrales le long des portions lisses de  $\Gamma \cap \partial U_\varepsilon^\pm$  plus la somme des angles aux points où  $\Gamma$  n'est pas  $C^1$ .

Si, de plus,  $\Gamma$  est  $C^2$  dans un voisinage de  $\mathcal{Z}$ , alors

$$\int_U K dA_s + \int_{\partial U} k_g d\sigma_s = 2\pi(\chi(U^+) - \chi(U^-)),$$

où

$$\begin{aligned} \int_U K dA_s &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{U_\varepsilon^+ \cup U_\varepsilon^-} K dA_s, \\ \int_{\partial U} k_g d\sigma_s &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_{\Gamma \cap \partial U_\varepsilon^+} k_g d\sigma - \int_{\Gamma \cap \partial U_\varepsilon^-} k_g d\sigma \right). \end{aligned}$$

Le théorème 4.5 peut être utilisé pour démontrer une version du théorème 4.2 dans laquelle les points de tangence sont admis. L'idée est que, contrairement à ce qui arrive aux points de type (F2), près des points de tangence, le bord de  $M^\varepsilon$  converge vers  $\mathcal{Z}$ , pour  $\varepsilon \rightarrow 0$ , avec un taux de convergence différent de  $\varepsilon$  (par rapport à un système de coordonnées quelconque). Nous devons

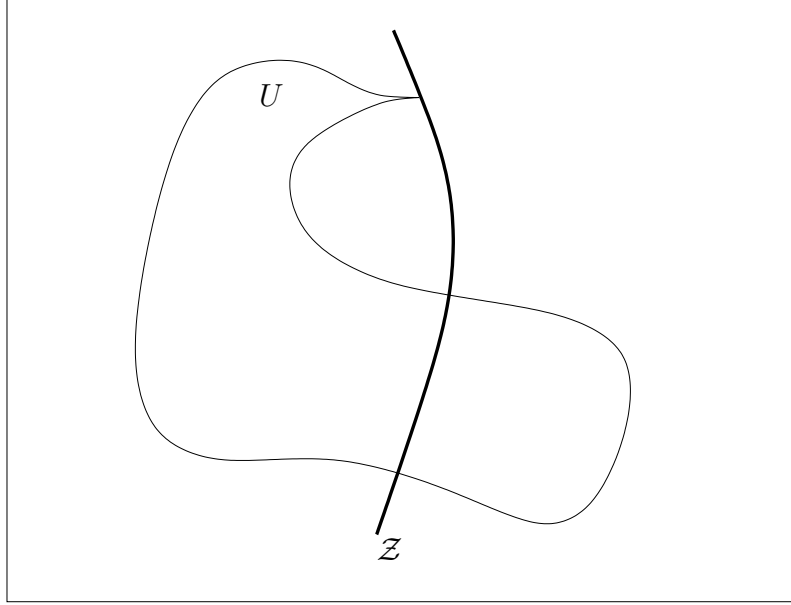


FIGURE 4.3 – Un domaine admissible  $U$ .

alors isoler les points de tangence grâce au calcul de l'intégrale de  $K$  sur une région qui dépend de plusieurs paramètres qui convergent vers zéro sur différentes échelles de temps. Plus précisément, soit  $\mathcal{T}$  l'ensemble des points de tangence de la structure presque riemannienne. Associons à tout  $q \in \mathcal{T}$  un voisinage « rectangulaire »  $B_{\delta_1, \delta_2}^q$  dépendant de deux paramètres  $\delta_1$  et  $\delta_2$ , qui jouent le rôle des longueurs des cotés du rectangle, avec la construction suivante : considérons une courbe lisse  $(-1, 1) \ni s \mapsto w(s)$  qui passe par le point de tangence  $w(0) = q$  et qui est transverse à  $\Delta$  en  $q$  ; pour tout  $s \in (-1, 1)$ , soit  $\gamma_s$  la géodésique paramétrée par son abscisse curviligne telle que  $\gamma_s(0) = w(s)$  et qui minimise localement la distance à  $\{w(s) \mid s \in (-1, 1)\}$  ( $\gamma_s$  est bien définie en raison de la transversalité de  $w$ ) ; pour  $\delta_1$  et  $\delta_2$  suffisamment petits, le rectangle  $B_{\delta_1, \delta_2}^q$  est le sous-ensemble de  $M$  qui contient le point  $q$  et dont le bord est

$$\gamma_{\delta_2}([- \delta_1, \delta_1]) \cup \gamma_{[- \delta_2, \delta_2]}(\delta_1) \cup \gamma_{-\delta_2}([- \delta_1, \delta_1]) \cup \gamma_{[- \delta_2, \delta_2]}(-\delta_1)$$

(voir figure 4.4).

Soit  $M_{\delta_1, \delta_2}^\varepsilon = M^\varepsilon \setminus \bigcup_{q \in \mathcal{T}} B_{\delta_1, \delta_2}^q$ . Nous pouvons démontrer le résultat suivant, qui généralise le théorème 4.2 et, par conséquent, la formule de Gauss–Bonnet.

**Théorème 4.6** *Soit  $M$  compacte et orientée. Pour une structure presque riemannienne orientée qui vérifie l'hypothèse  $(H_0)$ , la limite*

$$\lim_{\delta_1 \rightarrow 0} \lim_{\delta_2 \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{M_{\delta_1, \delta_2}^\varepsilon} K(q) dA_s \quad (4.2)$$

*existe et est égale à  $2\pi(\chi(M^+) - \chi(M^-) + \tau) = 2\pi e(E)$ . En particulier, la limite vaut zéro si et seulement si la structure est trivialisable.*

Remarquons que la construction de  $M_{\delta_1, \delta_2}^\varepsilon$  dépend du choix des courbes  $w$  transverses à  $\Delta$  aux points de  $\mathcal{T}$  et de leur paramétrage. Le théorème 4.6 affirme que la valeur de la limite (4.2) est, néanmoins, intrinsèque.

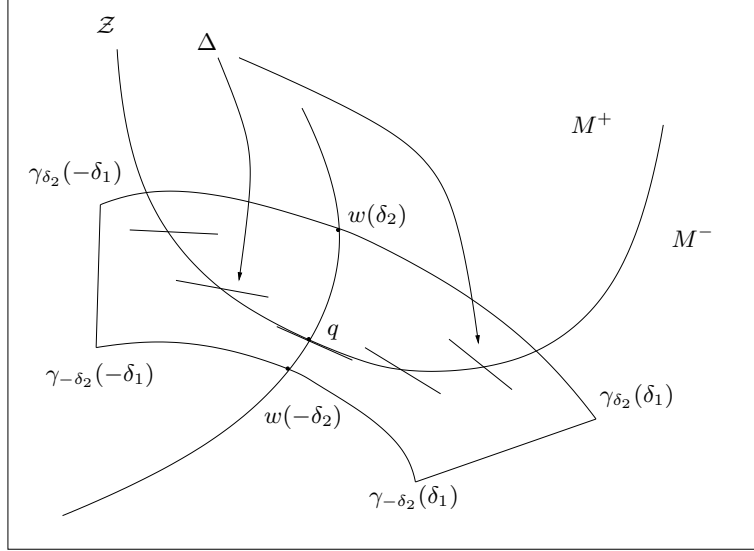


FIGURE 4.4 – La construction de  $B_{\delta_1, \delta_2}^q$ .

Nous terminons ce chapitre avec l'analyse de ce qui arrive si l'on essaye de calculer (4.2) en remplaçant  $M_{\delta_1, \delta_2}^\varepsilon$  par  $M^\varepsilon$ , en analogie avec l'énoncé du théorème 4.2.

D'abord, grâce à la formule de Gauss–Bonnet riemannienne et en supposant que  $\varepsilon$  est petit,

$$\begin{aligned} \int_{M^\varepsilon} K(q) dA_s &= 2\pi(\chi(M_\varepsilon^+) - \chi(M_\varepsilon^-)) - \int_{\partial M_\varepsilon^+} k_g ds + \int_{\partial M_\varepsilon^-} k_g ds \\ &= 2\pi(\chi(M^+) - \chi(M^-)) - \int_{\partial M_\varepsilon^+} k_g ds + \int_{\partial M_\varepsilon^-} k_g ds \end{aligned}$$

où nous avons utilisé la notation  $M_\varepsilon^\pm = M^\pm \cap M^\varepsilon$ . Il n'est pas difficile de vérifier, en utilisant la forme normale (F2), que les contributions des courbures géodésiques de  $\partial M_\varepsilon^+$  et  $\partial M_\varepsilon^-$  s'annulent réciproquement loin des points de tangence quand  $\varepsilon$  tend vers zéro. Nous allons donc argumenter que la présence de points de tangence peut conduire à la divergence de  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{M^\varepsilon} K(q) dA_s$ , en calculant numériquement la courbure géodésique de  $\partial M_\varepsilon^+$  et  $\partial M_\varepsilon^-$  dans un voisinage d'un tel point. Nous prenons donc la forme normale (F3) avec  $\psi \equiv 1$  et  $\xi \equiv 0$ , pour laquelle  $K$  est donné explicitement par la formule

$$K = \frac{-2(3x^2 + y)}{(x^2 - y)^2}.$$

Le graphe de  $K$  est représenté en figure 4.5. Remarquons que  $\limsup_{q \rightarrow (0,0)} K(q) = +\infty$  et  $\liminf_{q \rightarrow (0,0)} K(q) = -\infty$ . La situation est différente de celle que l'on retrouve autour des points ayant pour forme normale (F2), pour lesquels  $K(q)$  diverge à  $-\infty$  quand  $q$  approche  $\mathcal{Z}$ .

Le comportement de  $\partial M^\varepsilon$  est illustré en figure 4.6.

Fixons  $0 < a < 1$  et considérons la géodésique passant par  $(a, a^2)$  qui minimise (localement) la distance à  $\mathcal{Z}$ . Notons par  $P^+$  et  $P^-$  les deux points le long de cette géodésique à distance  $\varepsilon$  de  $\mathcal{Z}$  et par  $\gamma^+$  et  $\gamma^-$  les portions de  $\partial M_\varepsilon^+$  et  $\partial M_\varepsilon^-$  joignant l'axe vertical avec les deux points  $P^+$  et  $P^-$  (voir figure 4.7). La figure 4.8 montre la valeur de

$$\varepsilon \left( \int_{\gamma^+} K_g ds - \int_{\gamma^-} K_g ds \right)$$

pour  $a = 0.1$  et  $\varepsilon$  variant dans l'intervalle  $[0.01, 0.04]$  (calculé à l'aide du logiciel Mathematica).

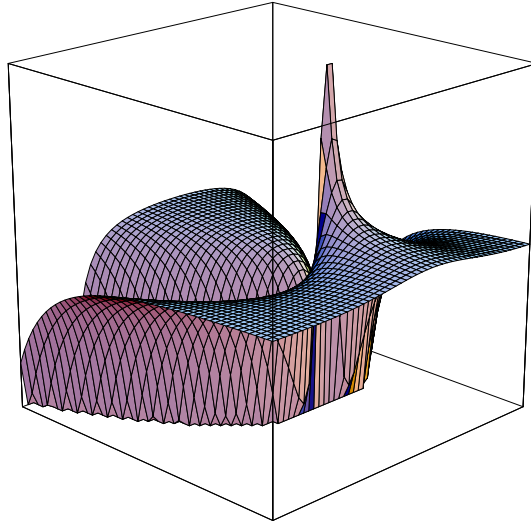


FIGURE 4.5 – Graphe de  $K$  pour  $\Delta = \text{span}((1, 0), (0, y - x^2))$

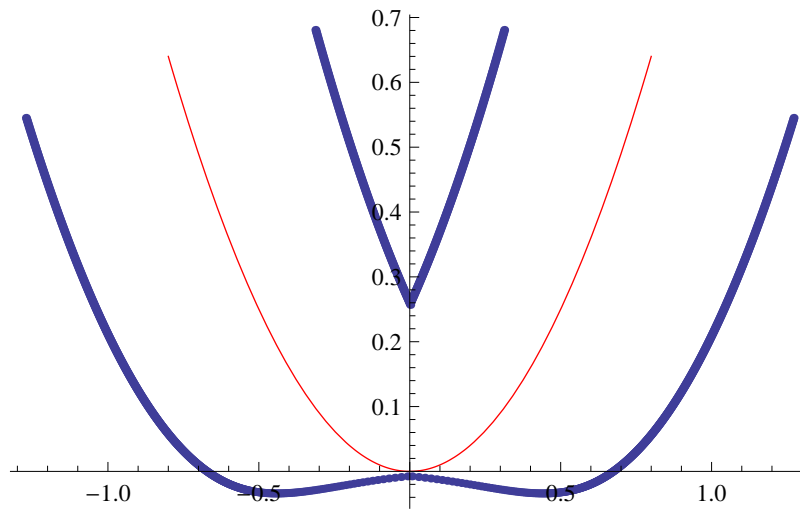


FIGURE 4.6 – Bord de  $M^\varepsilon$  avec  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ .

La fonction paraît converger vers une valeur finie non nulle quand  $\varepsilon$  tend à zéro, permettant ainsi de conjecturer que  $\int_{M^\varepsilon} K(q) dA_s$  diverge.

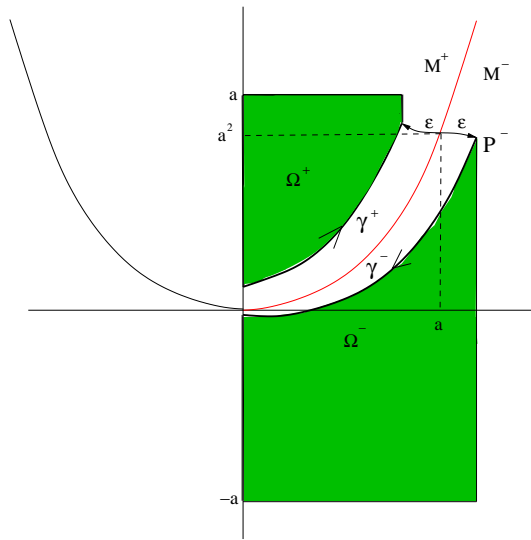


FIGURE 4.7 – Construction de  $\gamma^+$  et  $\gamma^-$

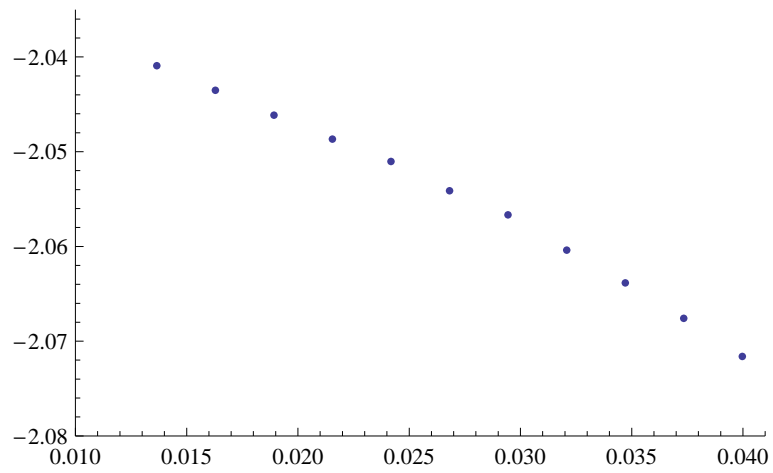


FIGURE 4.8 – Graphe de  $\varepsilon \left( \int_{\gamma^+} K_g ds - \int_{\gamma^-} K_g ds \right)$  pour  $a = 0.1$

# Perspectives de recherche

De nombreux sujets de recherche sont laissés ouverts par les activités présentées dans les quatre chapitres précédents. Certains de ces sujets sont déjà en cours avancé de développement, d'autres font l'objet d'activités de recherche programmées dans un futur proche, d'autres encore à plus long terme.

Concernant les activités présentées dans le premier chapitre, dédié à la commande des systèmes non linéaires de dimension finie, le développement du sujet de la section 1.2 (suivi de trajectoire pour un sous-marin) a donné lieu à l'encadrement du post-doc de María Barbero Liñán sur une généralisation de l'approche *backstepping* à une classe beaucoup plus vaste de systèmes mécaniques. Il s'agissait en particulier de faire le lien entre nos résultats de suivi de trajectoire et ceux présentés dans [40] dans le cadre abstrait des systèmes de contrôle dits à *connexion affine*. Dans un travail en cours de rédaction, nous avons pu étendre les résultats de [40] en généralisant au cadre de la connexion affine l'approche utilisée dans [MS.7] pour étudier le suivi de trajectoire d'un sous-marin. Nous avons aussi rendu la construction plus algorithmique, en étudiant comment les pas successifs de la procédure par *backstepping* doivent être hiérarchisés. Plus précisément, nous avons analysé les rapports quantitatifs entre les paramètres correspondant aux différents pas, aboutissant ainsi à des familles de lois de commande, dépendant d'un seul paramètre, qui réalisent le suivi de trajectoire désiré.

Des perspectives de développement de ce sujet qui m'intéressent beaucoup sont celles liées à l'analyse de complexité des commandes obtenues par les algorithmes de suivi de trajectoire. Il s'agit en général de lois de commande qui oscillent fortement. Pour pouvoir obtenir des bonnes performances sur des modèles réels, il faut minimiser la fréquence des oscillations des lois de commande en préservant la même tolérance par rapport à la trajectoire cible.

Dans la même thématique des systèmes non linéaires de dimension finie, je suis en train de collaborer avec François Alouges et Karine Beauchard sur un problème d'inversion de la magnétisation de micro-aimants ellipsoïdaux ayant des applications dans le développement de systèmes de stockage de type MRAM. La magnétisation  $m$  à l'intérieur du corps ferromagnétique  $\Omega \subset \mathbf{R}^3$  est un champ de vecteurs de norme constante, régi par l'équation de Landau–Lifschitz

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \alpha(H(m) - \langle H(m), m \rangle m) - m \wedge H(m), \quad x \in \Omega,$$

où  $H(m)$  indique le champ magnétique total. Nous nous intéressons à la planification des trajectoires pour des réductions de dimension finie de ce modèle.

Le thème qui sera probablement au centre de mes activités de recherche dans les prochaines années est celui issu des travaux sur le contrôle quantique présentés dans le chapitre 2. Il s'agit d'abord d'améliorer les résultats déjà obtenus en relaxant les hypothèses suffisantes de contrôlabilité approchée de l'équation de Schrödinger bilinéaire présentées en section 2.1. Si notre intuition concernant les hypothèses minimales qui garantissent la contrôlabilité approchée est correcte, il sera alors possible d'utiliser la construction à la base de notre preuve d'existence pour déterminer des algorithmes explicites de planification de trajectoires. En collaboration avec des physiciens expérimentaux de Dijon (en particulier Dominique Sugny) nous voulons alors tester



nos algorithmes sur des problèmes d'orientation et alignement de molécules. Ces problèmes méritent d'être aussi étudiés ultérieurement du point de vue théorique, en étendant les résultats que nous avons obtenus pour les rotations sur un cercle d'une molécule linéaire rigide. Dans ce contexte, le prochain cas à considérer est, sans doute, celui des rotations sur une sphère de  $\mathbf{R}^3$ .

En collaboration avec Ugo Boscain, Thomas Chambriion et Paolo Mason nous voudrions aussi transférer, si possible, les résultats que nous avons obtenu pour le contrôle des matrices de densité au cas où le spectre de l'opérateur n'est pas discret, en étudiant, en particulier, l'évolution dans l'espace engendré par les états propres qui correspondent à la partie discrète du spectre. Nous pourrions alors compléter les résultats de commandabilité approchée obtenus par Mirraihimi dans ce contexte dans (cf. [82]).

Nous voudrions aussi nous pencher sur les modèles quantiques non linéaires, en commençant par l'équation de Gross–Pitaevski. Il ne nous paraît pas impossible d'adapter un cas non linéaire la partie finie dimensionnelle des arguments à la base de nos résultats de commandabilité approchée. Une contrainte importante pour l'application complète de notre méthode nous semble plutôt physique, à savoir le domaine de validité de l'équation de Gross–Pitaevski, qu'il ne faut bien sûr pas forcer au delà de ses limites.

Un autre sujet très intéressant est celui de la commande adiabatique des systèmes quantiques (cf. [112]). L'objectif dans ce domaine est de développer dans un cadre mathématique général les techniques de commande proposées par les physiciens et étudiées du point de vue du contrôle, dans des situations spécifiques, par Adami et Boscain dans [1]. On vise ici des équations de Schrödinger avec au moins deux contrôles scalaires qui varient très lentement. Un des outils importants pour estimer l'évolution de ces systèmes est l'analyse de comment le spectre d'un opérateur de Schrödinger perd sa simplicité et de son développement paramétrique autour d'un point de non simplicité. On sait donner à l'ensemble des potentiels correspondants à des opérateurs de Schrödinger ayant spectre non simple une structure différentielle (cf. [48, 71, 76]). Il faudra alors utiliser des arguments de transversalité pour garantir, génériquement, l'applicabilité des méthodes adiabatiques. Pour cette raison, cette thématique de recherche rejoint celle des sections 2.3 et 2.4.

En restant dans le domaine du contrôle des systèmes quantiques, je voudrais aussi m'intéresser à la question de la description des obstructions à la commandabilité exacte de l'équation de Schrödinger. Les travaux de Beauchard [22] et Beauchard et Coron [24] ont donné une description assez précise de l'ensemble atteignable d'une équation de Schrödinger particulière. Il est remarquable que les états propres de l'opérateur non contrôlé sont exactement joignables par des trajectoires admissibles pour une large classe d'opérateurs de contrôle (cf. [23]). Cela donne l'espoir qu'il soit possible d'isoler des propriétés générales des ensembles atteignables des systèmes quantiques.

Concernant le chapitre 3, dédié à la stabilité des systèmes hybrides, je voudrais d'abord poursuivre les collaborations déjà entamées avec Pierre Riedinger, Jamal Daafouz, Ulysse Serres et Jean-Claude Vivalda sur la commande des convertisseurs de puissance multicellulaires. Ce sont des systèmes électriques qui peuvent atteindre des puissances de quelques mégawatts et emploient généralement des tensions de plusieurs kilovolts. Ces systèmes sont particulièrement intéressants pour des applications de forte puissance avec des hautes tensions (cf. [79]). L'objectif est de proposer des solutions originales et intrinsèquement hybrides dans le cadre de l'amélioration des performances dynamiques de cette classe de systèmes ainsi que la diminution du nombre de capteurs nécessaires.

J'envisage aussi de développer ma recherche sur les systèmes linéaires à commutations en temps discret, présentée en section 3.3. Dans ce contexte, en collaboration avec Jamal Daafouz, un premier objectif est de caractériser les lois de commutation ne permettant pas de converger vers l'origine et la structure des ensembles limites. Cette caractérisation pourrait ensuite être ex-

plôtée pour l'analyse d'observabilité et la synthèse d'observateurs des systèmes à commutations en temps discret. L'extension des résultats de stabilité au cas non linéaire planaire est également envisagée. D'autres extensions possibles des résultats de la section 3.3 concernent des contraintes de type lipschitz que l'on peut ajouter à la variation des paramètres de commutation, ou bien des dépendances plus élaborées de la fonction de Liapounov par rapport à l'évolution passée de ces mêmes paramètres.

Un autre thème de recherche que je souhaite développer en collaboration avec Yacine Chitour et Paolo Mason dans le cadre des systèmes dynamiques hybrides est celui de la caractérisation de l'instabilité maximale d'un système linéaire à commutations à temps continu. Cette caractérisation passe à la fois par la description des systèmes à commutations dont l'instabilité est polynomiale et par la recherche des trajectoires périodiques des systèmes marginalement stables (cf. [18, 19, 77]).

Une autre activité de recherche en cours de lancement, en collaboration avec Martin Gugat, concerne l'analyse de stabilité de systèmes de contrôle de dimension infinie modélisant des réseaux de cordes (cf. [51]). L'idée est de développer une approche similaire à celle présentée en section 3.2. Le passage à la dimension infinie donne naissance à des nouveaux phénomènes d'instabilité, comme il a été remarqué dans [63].

Relativement au quatrième axe, l'étude de la géométrie presque riemannienne présentée dans le chapitre 4, nous sommes en train d'établir, en collaboration avec Ugo Boscain, Grégoire Charlot et Roberta Ghezzi, une caractérisation complète des classes d'équivalence des structures presque riemanniennes en dimension deux, où l'équivalence est considérée par rapport à l'existence de transformations bi-lipschitiennes. Cette caractérisation se fait en associant à chaque structure presque riemannienne un graphe libellé qui contient tous ses invariants. Nous étudions aussi la construction d'une forme normale intrinsèque autour d'un point de tangence. En reprenant la démonstration du théorème 4.1, on s'aperçoit que cela revient à construire de façon intrinsèque une courbe paramétrée, transverse à l'ensemble singulier au point de tangence.



# Bibliographie

- [1] Riccardo ADAMI et Ugo BOSCAIN : Controllability of the Schrödinger equation via intersection of eigenvalues. *In Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 1080–1085, 2005.
- [2] Shmuel AGMON : Bounds on exponential decay of eigenfunctions of Schrödinger operators. *In Schrödinger operators (Como, 1984)*, volume 1159 de *Lecture Notes in Math.*, pages 1–38. Springer, Berlin, 1985.
- [3] Andrei AGRACHEV et Thomas CHAMBRION : An estimation of the controllability time for single-input systems on compact Lie groups. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 12(3):409–441, 2006.
- [4] Andrei A. AGRACHEV : A “Gauss-Bonnet formula” for contact sub-Riemannian manifolds. *Dokl. Akad. Nauk*, 381(5):583–585, 2001.
- [5] Andrei A. AGRACHEV et Daniel LIBERZON : Lie-algebraic stability criteria for switched systems. *SIAM J. Control Optim.*, 40(1):253–269, 2001.
- [6] Andrei A. AGRACHEV et Yuri L. SACHKOV : *Control theory from the geometric viewpoint*, volume 87 de *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, Berlin, 2004. Control Theory and Optimization, II.
- [7] Andrey A. AGRACHEV et Andrey V. SARYCHEV : Controllability of 2D Euler and Navier-Stokes equations by degenerate forcing. *Comm. Math. Phys.*, 265(3):673–697, 2006.
- [8] Jeffrey H. ALBERT : Genericity of simple eigenvalues for elliptic PDE’s. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 48:413–418, 1975.
- [9] Francesca ALBERTINI et Domenico D’ALESSANDRO : Notions of controllability for bilinear multilevel quantum systems. *IEEE Trans. Automat. Control*, 48(8):1399–1403, 2003.
- [10] François ALOUGES, Antonio DESIMONE et Aline LEFEBVRE : Optimal strokes for low Reynolds number swimmers : an example. *J. Nonlinear Sci.*, 18(3):277–302, 2008.
- [11] Claudio ALTAFINI : Controllability properties for finite dimensional quantum Markovian master equations. *J. Math. Phys.*, 44(6):2357–2372, 2003.
- [12] B. D. O. ANDERSON, R. R. BITMEAD, C. R. JOHNSON, P. V. KOKOTOVIC, R. L. KOSUT, I. M. Y. MAREELS, L. PRALY et B. D. RIEDLE : *Stability of adaptive systems : Passivity and averaging analysis*. MIT Press, 1986.
- [13] A. ASTOLFI, D. CHHABRA et R. ORTEGA : Asymptotic stabilization of some equilibria of an underactuated underwater vehicle. *Systems Control Lett.*, 45(3):193–206, 2002.
- [14] Moussa BALDE et Ugo BOSCAIN : Stability of planar switched systems : the nondiagonalizable case. *Commun. Pure Appl. Anal.*, 7(1):1–21, 2008.
- [15] John M. BALL, Jerrold E. MARSDEN et Marshall SLEMROD : Controllability for distributed bilinear systems. *SIAM J. Control Optim.*, 20(4):575–597, 1982.

- [16] Werner BALLMANN, Mikhael GROMOV et Viktor SCHROEDER : *Manifolds of nonpositive curvature*, volume 61 de *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1985.
- [17] David BAO, Shiing-Shen CHERN et Zhongmin SHEN : *An introduction to Riemann-Finsler geometry*, volume 200 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2000.
- [18] Nikita E. BARABANOV : An absolute characteristic exponent of a class of linear nonstationary systems of differential equations. *Sibirsk. Mat. Zh.*, 29(4):12–22, 222, 1988.
- [19] Nikita E. BARABANOV : Asymptotic behavior of extremal solutions and structure of extremal norms of linear differential inclusions of order three. *Linear Algebra Appl.*, 428(10):2357–2367, 2008.
- [20] B. Ross BARMISH : Stabilization of uncertain systems via linear control. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 28(8):848–850, 1983.
- [21] K. BEAUCHARD, Y. CHITOUR, D. KATEB et R. LONG : Spectral controllability for 2D and 3D linear Schrödinger equations. *J. Funct. Anal.*, 256(12):3916–3976, 2009.
- [22] Karine BEAUCHARD : Local controllability of a 1-D Schrödinger equation. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 84(7):851–956, 2005.
- [23] Karine BEAUCHARD : Control of Schrödinger equations. *Notes du Cours Peccot, Collège de France*, 2007.
- [24] Karine BEAUCHARD et Jean-Michel CORON : Controllability of a quantum particle in a moving potential well. *J. Funct. Anal.*, 232(2):328–389, 2006.
- [25] André BELLAÏCHE : The tangent space in sub-Riemannian geometry. *In Sub-Riemannian geometry*, volume 144 de *Progr. Math.*, pages 1–78. Birkhäuser, Basel, 1996.
- [26] H. C. BERG et R. ANDERSON : Bacteria swim by rotating their flagellar filaments. *Nature*, 245:380–382, 1973.
- [27] J. BLAKE : A finite model for ciliated micro-organisms. *J. Biomech.*, 6:133–140, 1973.
- [28] Franco BLANCHINI et Stefano MIANI : Stabilization of LPV systems : state feedback, state estimation, and duality. *SIAM J. Control Optim.*, 42(1):76–97, 2003.
- [29] Anthony M. BLOCH, Roger W. BROCKETT et Chitra RANGAN : The controllability of infinite quantum systems and closed subspace criteria. *Preprint*, 2006.
- [30] Anthony M. BLOCH, Perinkulam Sambamurthy KRISHNAPRASAD, Jerrold E. MARSDEN et Gloria Sánchez de ALVAREZ : Stabilization of rigid body dynamics by internal and external torques. *Automatica J. IFAC*, 28(4):745–756, 1992.
- [31] Anthony M. BLOCH, Naomi Ehrich LEONARD et Jerrold E. MARSDEN : Stabilization of mechanical systems using controlled Lagrangians. *In Proceedings of the 36th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 2356–2361, 1997.
- [32] Vincent D. BLONDEL et Yurii NESTEROV : Computationally efficient approximations of the joint spectral radius. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 27(1):256–272, 2005.
- [33] Bernard BONNARD, Jean-Baptiste CAILLAU, Robert SINCLAIR et Minoru TANAKA : Conjugate and cut loci of a two-sphere of revolution with application to optimal control. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 26(4):1081–1098, 2009.
- [34] Ugo BOSCAIN : Stability of planar switched systems : the linear single input case. *SIAM J. Control Optim.*, 41(1):89–112, 2002.
- [35] Ugo BOSCAIN, Thomas CHAMBRION et Grégoire CHARLOT : Nonisotropic 3-level quantum systems : complete solutions for minimum time and minimum energy. *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, 5(4):957–990, 2005.

- [36] Ugo BOSCAIN, Grégoire CHARLOT, Jean-Paul GAUTHIER, Stéphane GUÉRIN et Hans-Rudolf JAUSLIN : Optimal control in laser-induced population transfer for two- and three-level quantum systems. *J. Math. Phys.*, 43(5):2107–2132, 2002.
- [37] Ugo BOSCAIN et Benedetto PICCOLI : A short introduction to optimal control. In T. SARI, éditeur : *Contrôle Non Linéaire et Applications*, pages 19–66. Hermann, Paris, 2005.
- [38] Stephen BOYD, Laurent EL GHAOUI, Eric FERON et Venkataramanan BALAKRISHNAN : *Linear matrix inequalities in system and control theory*, volume 15 de *SIAM Studies in Applied Mathematics*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1994.
- [39] C. BRENNEN : An oscillating-boundary-layer theory for ciliary propulsion. *J. Fluid Mech.*, 65:799–824, 1974.
- [40] Francesco BULLO et Andrew D. LEWIS : *Geometric control of mechanical systems*, volume 49 de *Texts in Applied Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2005. Modeling, analysis, and design for simple mechanical control systems.
- [41] Mark S. BYRD et Navin KHANEJA : Characterization of the positivity of the density matrix in terms of the coherence vector representation. *Phys. Rev. A* (3), 68(6):062322, 13, 2003.
- [42] Thomas CHAMBRION : Approximate tracking for a system of Schrödinger equations. *Preprint*, 2009.
- [43] Stephen CHILDRESS : *Mechanics of swimming and flying*, volume 2 de *Cambridge Studies in Mathematical Biology*. Cambridge University Press, Cambridge, 1981.
- [44] Yacine CHITOUR : Applied and theoretical aspects of the controllability of nonholonomic control system. *PhD Thesis, Rutgers University*, 1996.
- [45] Yacine CHITOUR, Jean-Michel CORON et Mauro GARAVELLO : On conditions that prevent steady-state controllability of certain linear partial differential equations. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 14(4):643–672, 2006.
- [46] Monique CHYBA, Naomi Ehrich LEONARD et Eduardo D. SONTAG : Singular trajectories in multi-input time-optimal problems : application to controlled mechanical systems. *J. Dynam. Control Systems*, 9(1):103–129, 2003.
- [47] Monique CHYBA, Helmut MAURER, Héctor J. SUSSMANN et Vossen GOTTFRIED : Underwater vehicles : The minimum time problem. In *Proceedings of the 43th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 1370–1375, 2004.
- [48] Yves Colin de VERDIÈRE : Sur une hypothèse de transversalité d’Arnol’d. *Comment. Math. Helv.*, 63(2):184–193, 1988.
- [49] Jean-Michel CORON : *Control and nonlinearity*, volume 136 de *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2007.
- [50] Jamal DAAFOUZ et Jacques BERNUSSOU : Parameter dependent Lyapunov functions for discrete time systems with time varying parametric uncertainties. *Systems Control Lett.*, 43(5):355–359, 2001.
- [51] René DÁGER et Enrique ZUAZUA : *Wave propagation, observation and control in 1-d flexible multi-structures*, volume 50 de *Mathématiques & Applications (Berlin) [Mathematics & Applications]*. Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- [52] Domenico D’ALESSANDRO : *Introduction to quantum control and dynamics*. Applied Mathematics and Nonlinear Science Series. Boca Raton, FL : Chapman, Hall/CRC., 2008.



- [53] Wijesuriya P. DAYAWANSA et C. F. MARTIN : A converse Lyapunov theorem for a class of dynamical systems which undergo switching. *IEEE Trans. Automat. Control*, 44(4):751–760, 1999.
- [54] Lester E. DUBINS : On curves of minimal length with a constraint on average curvature, and with prescribed initial and terminal positions and tangents. *Amer. J. Math.*, 79:497–516, 1957.
- [55] Sylvain ERVEDOZA et Jean-Pierre PUEL : Approximate controllability for a system of Schrödinger equations modeling a single trapped ion. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 26:2111–2136, 2009.
- [56] Eric FERON, Pierre APKARIAN et Pascal GAHINET : Analysis and synthesis of robust control systems via parameter-dependent Lyapunov functions. *IEEE Trans. Automat. Control*, 41(7):1041–1046, 1996.
- [57] Bruno FRANCHI et Ermanno LANCONELLI : Une métrique associée à une classe d’opérateurs elliptiques dégénérés. *Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino*, (Special Issue):105–114 (1984), 1983. Conference on linear partial and pseudodifferential operators (Torino, 1982).
- [58] D. FRENKEL et R. PORTUGAL : Algebraic methods to compute Mathieu functions. *J. Phys. A*, 34(17):3541–3551, 2001.
- [59] Giovanni P. GALDI : *An introduction to the mathematical theory of the Navier-Stokes equations. Vol. I*, volume 38 de *Springer Tracts in Natural Philosophy*. Springer-Verlag, New York, 1994. Linearized steady problems.
- [60] Jean-Paul GAUTHIER et Ivan A. K. KUPKA : Observability and observers for nonlinear systems. *SIAM J. Control Optim.*, 32(4):975–994, 1994.
- [61] José C. GEROMEL et Patrizio COLANERI : Robust stability of time varying polytopic systems. *Systems Control Lett.*, 55(1):81–85, 2006.
- [62] V. V. GRUŠIN : A certain class of hypoelliptic operators. *Mat. Sb. (N.S.)*, 83 (125):456–473, 1970.
- [63] Alain HARAUX, Patrick MARTINEZ et Judith VANCOSTENOBLE : Asymptotic stability for intermittently controlled second-order evolution equations. *SIAM J. Control Optim.*, 43(6):2089–2108, 2005.
- [64] Pascal HÉBRARD et Antoine HENROT : Optimal shape and position of the actuators for the stabilization of a string. *Systems Control Lett.*, 48(3-4):199–209, 2003. Optimization and control of distributed systems.
- [65] Dan HENRY : *Perturbation of the boundary in boundary-value problems of partial differential equations*, volume 318 de *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 2005. With editorial assistance from Jack Hale and Antônio Luiz Pereira.
- [66] Luc HILLAIRET et Chris JUDGE : Generic spectral simplicity of polygons. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 137(6):2139–2145, 2009.
- [67] Patrick HÜBLER, Joachim BARGON et Steffen J GLASER : Nuclear magnetic resonance quantum computing exploiting the pure spin state of para hydrogen. *J. Chem. Phys.*, 113(6):2056–2059, 2000.
- [68] Velimir JURDJEVIC : *Geometric control theory*, volume 52 de *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [69] Tosio KATO : *Perturbation theory for linear operators*. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 132. Springer-Verlag New York, Inc., New York, 1966.

- [70] Horace LAMB : *Hydrodynamics*. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, Cambridge, sixth édition, 1993. With a foreword by R. A. Caflisch [Russel E. Caflisch].
- [71] Pier Domenico LAMBERTI et Massimo LANZA DE CRISTOFORIS : Persistence of eigenvalues and multiplicity in the Dirichlet problem for the Laplace operator on nonsmooth domains. *Math. Phys. Anal. Geom.*, 9(1):65–94, 2006.
- [72] Naomi Ehrlich LEONARD : Mechanics and nonlinear control : Making underwater vehicles ride and glide. *In Proc. 4th IFAC Nonlinear Control Design Symp.*, pages 1–6, 1998.
- [73] Daniel LIBERZON : *Switching in systems and control*. Systems & Control : Foundations & Applications. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2003.
- [74] James LIGHTHILL : *Mathematical biofluidynamics*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, Pa., 1975. Based on the lecture course delivered to the Mathematical Biofluidynamics Research Conference of the National Science Foundation held from July 16–20, 1973, at Rensselaer Polytechnic Institute, Troy, New York, Regional Conference Series in Applied Mathematics, No. 17.
- [75] Jacques-Louis LIONS et Enrique ZUAZUA : A generic uniqueness result for the Stokes system and its control theoretical consequences. *In Partial differential equations and applications*, volume 177 de *Lecture Notes in Pure and Appl. Math.*, pages 221–235. Dekker, New York, 1996.
- [76] Daniela LUPO et Anna Maria MICHELETTI : A remark on the structure of the set of perturbations which keep fixed the multiplicity of two eigenvalues. *Rev. Mat. Apl.*, 16(2): 47–56, 1995.
- [77] Michael MARGALIOT et Christos YFOULIS : Absolute stability of third-order systems : a numerical algorithm. *Automatica J. IFAC*, 42(10):1705–1711, 2006.
- [78] Paolo MASON, Ugo BOSCAIN et Yacine CHITOUR : Common polynomial Lyapunov functions for linear switched systems. *SIAM journal on control and optimization*, 45:226–245, 2006.
- [79] T.A. MEYNARD, H. FOCH, P. THOMAS, J. COURAULT, R. JAKOB et M. NAHRSTAEDT : Multicell converters : basic concepts and industry applications. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 49(5):955–964, 2002.
- [80] Anna Maria MICHELETTI : Perturbazione dello spettro dell’operatore di Laplace, in relazione ad una variazione del campo. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3)*, 26:151–169, 1972.
- [81] Mazyar MIRRAHIMI : Lyapunov control of a particle in a finite quantum potential well. *In Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control*, 2006.
- [82] Mazyar MIRRAHIMI : Lyapunov control of a quantum particle in a decaying potential. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 26(5):1743–1765, 2009.
- [83] Mazyar MIRRAHIMI et Pierre ROUCHON : Controllability of quantum harmonic oscillators. *IEEE Trans. Automat. Control*, 49(5):745–747, 2004.
- [84] Dirk MITTENHUBER : Dubins’ problem in the hyperbolic plane using the open disc model. *In Geometric control and non-holonomic mechanics (Mexico City, 1996)*, volume 25 de *CMS Conf. Proc.*, pages 115–152. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998.
- [85] Dirk MITTENHUBER : Dubins’ problem is intrinsically three-dimensional. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 3:1–22, 1998.
- [86] Felipe MONROY-PÉREZ : Three-dimensional non-Euclidean Dubins’ problem. *In Geometric control and non-holonomic mechanics (Mexico City, 1996)*, volume 25 de *CMS Conf. Proc.*, pages 153–181. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998.



- [87] Vahagn NERSESYAN : Growth of Sobolev norms and controllability of the Schrödinger equation. *Comm. Math. Phys.*, 290(1):371–387, 2009.
- [88] S. P. NOVIKOV et I. SHMEL'TSER : Periodic solutions of Kirchhoff equations for the free motion of a rigid body in a fluid and the extended Lyusternik-Shnirel'man-Morse theory. I. *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, 15(3):54–66, 1981.
- [89] Jaime H. ORTEGA et Enrique ZUAZUA : Generic simplicity of the spectrum and stabilization for a plate equation. *SIAM J. Control Optim.*, 39(5):1585–1614, 2000.
- [90] Jaime H. ORTEGA et Enrique ZUAZUA : Generic simplicity of the eigenvalues of the Stokes system in two space dimensions. *Adv. Differential Equations*, 6(8):987–1023, 2001.
- [91] A PEIRCE, M DAHLEH et H RABITZ : Optimal control of quantum mechanical systems : Existence, numerical approximations, and applications. *Phys. Rev. A*, 37:4950–4964, 1988.
- [92] Fernand PELLETIER : Sur le théorème de Gauss-Bonnet pour les pseudo-métriques singulières. In *Séminaire de Théorie Spectrale et Géométrie, No. 5, Année 1986–1987*, pages 99–105. Univ. Grenoble I, Saint, 1987.
- [93] V. Yu. PROTASOV : A generalized joint spectral radius. A geometric approach. *Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat.*, 61(5):99–136, 1997.
- [94] E. M. PURCELL : Life at low Raynolds numbers. *Am. J. Phys.*, 45:3–11, 1977.
- [95] H. RABITZ, H. de VIVIE-RIEDLE, R. MOTZKUS et K. KOMPA : Wither the future of controlling quantum phenomena? *SCIENCE*, 288:824–828, 2000.
- [96] Rajamani RAVI, Krishan M. NAGPAL et Pramod P. KHARGONEKAR :  $H^\infty$  control of linear time-varying systems : a state-space approach. *SIAM J. Control Optim.*, 29(6):1394–1413, 1991.
- [97] Michael REED et Barry SIMON : *Methods of modern mathematical physics. IV. Analysis of operators*. Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1978.
- [98] Franz RELICH : *Perturbation theory of eigenvalue problems*. Assisted by J. Berkowitz. With a preface by Jacob T. Schwartz. Gordon and Breach Science Publishers, New York, 1969.
- [99] Sérgio S. RODRIGUES : Navier-Stokes equation on the rectangle controllability by means of low mode forcing. *J. Dyn. Control Syst.*, 12(4):517–562, 2006.
- [100] Pierre ROUCHON : Control of a quantum particle in a moving potential well. In *Lagrangian and Hamiltonian methods for nonlinear control 2003*, pages 287–290. IFAC, Laxenburg, 2003.
- [101] Jorge SAN MARTÍN, Takéo TAKAHASHI et Marius TUCSNAK : A control theoretic approach to the swimming of microscopic organisms. *Quart. Appl. Math.*, 65:405–424, 2007.
- [102] T. SEIDEMAN et E. HAMILTON : Nonadiabatic alignment by intense pulses : concepts, theory and directions. *Adv. At. Mol. Opt. Phys.*, 52:289, 2006.
- [103] M. SHAPIRO et P. BRUMER : *Principles of the Quantum Control of Molecular Processes*. Principles of the Quantum Control of Molecular Processes, pp. 250. Wiley-VCH, février 2003.
- [104] Takashi SHIOYA : The limit spaces of two-dimensional manifolds with uniformly bounded integral curvature. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 351(5):1765–1801, 1999.
- [105] M. SPANNER, E. A. SHAPIRO et M. IVANOV : Coherent control of rotational wave-packet dynamics via fractional revivals. *Phys. Rev. Lett.*, 92:093001, 2004.
- [106] Michael SPIVAK : *A comprehensive introduction to differential geometry. Vol. II*. Publish or Perish Inc., Wilmington, Del., second édition, 1979.

- [107] H. STAPELFELDT et T. SEIDEMAN : Aligning molecules with strong laser pulses. *Rev. Mod. Phys.*, 75:543, 2003.
- [108] D. SUGNY, A. KELLER, O. ATABEK, D. DAEMS, C. DION, S. GUÉRIN et H. R. JAUSLIN : Reaching optimally oriented molecular states by laser kicks. *Phys. Rev. A*, 69:033402, 2004.
- [109] H. J. SUSSMANN et G. TANG : Shortest paths for the Reeds-Shepp car : a worked out example of the use of geometric techniques in nonlinear optimal control. *Rutgers Center for Systems and Control Technical Report 91-10*, 1991.
- [110] Héctor J. SUSSMANN : Shortest 3-dimensional paths with a prescribed curvature bound. *In Proceedings of the 34th IEEE Conference on Decision and Control*, 1995.
- [111] G. TAYLOR : Analysis of the swimming of microscopic organisms. *Proc. Roy. Soc. London. Ser. A.*, 209:447–461, 1951.
- [112] Stefan TEUFEL : *Adiabatic perturbation theory in quantum dynamics*, volume 1821 de *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2003.
- [113] Mikhail TEYTEL : How rare are multiple eigenvalues? *Comm. Pure Appl. Math.*, 52(8): 917–934, 1999.
- [114] Gabriel TURINICI : On the controllability of bilinear quantum systems. *In M. DEFRANCESCO et C. LE BRIS, éditeurs : Mathematical models and methods for ab initio Quantum Chemistry*, volume 74 de *Lecture Notes in Chemistry*. Springer, 2000.
- [115] Karen UHLENBECK : Eigenfunctions of Laplace operators. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 78: 1073–1076, 1972.
- [116] Enrique ZUAZUA : Switching controls. *Journal of the European Mathematical Society*, à paraître.