# Géométrie des nombres adélique et formes linéaires de logarithmes dans un groupe algébrique commutatif

Éric Gaudron

Université Grenoble I — Institut Fourier — Umr 5582 du Cnrs

# *Géométrie des nombres adélique et formes linéaires de logarithmes dans un groupe algébrique commutatif*

Habilitation à Diriger des Recherches
(spécialité Mathématiques)

*Mémoire présenté et soutenu publiquement le 1er décembre 2009*

*par*

*Eric Gaudron*

*devant le jury composé de*

- Yann Bugeaud (Professeur IRMA, Strasbourg)
- Sinnou David (Professeur IMJ, Paris 6)
- Emmanuel Peyre (Professeur IF, Grenoble 1)
- Patrice Philippon (Directeur de Recherches IMJ, Paris 7)
- Gaël Rémond (Maître de Conférences habilité IF, Grenoble 1)

*au vu des rapports de*

- Antoine Chambert-Loir (Professeur IRMAR, Rennes 1)
- Patrice Philippon
- Damien Roy (Professeur, Université d'Ottawa, Canada)

# Remerciements

Ce texte est une synthèse de mes travaux de recherche des sept dernières années à l'Institut Fourier.

Je suis très reconnaissant à ce laboratoire des excellentes conditions de travail qu'il m'offre et je remercie son directeur actuel, Michel Brion, qui a su patiemment et méthodiquement me convaincre d'écrire ce texte (aidé, il est vrai, par le cnrs qui m'a généreusement alloué une délégation d'un semestre à cette fin).

Si je peux défendre mon habilitation, je le dois aussi aux trois rapporteurs, Antoine Chambert-Loir, Patrice Philippon et Damien Roy, qui ont bien voulu prendre le temps d'étudier mes articles et d'en faire l'analyse. Je les remercie de s'être acquitté de cette tâche. Je remercie également les autres membres du jury, Yann Bugeaud, Sinnou David, Emmanuel Peyre et Gaël Rémond, de me faire l'honneur de leur présence le jour de la soutenance et de l'intérêt qu'ils portent à mes travaux.

Ces dernières années, j'ai bénéficié du soutien financier et scientifique du projet anr Diophante, piloté avec maestria par Lucia di Vizio. Elle, et Antoine Chambert-Loir qui était à l'origine du projet, ont indubitablement contribué à mon confort de recherche, tout en me préservant des excès de la machine administrative.

Eric

## Présentation de l'auteur

Commençons par une description extraite du film *Le cave se rebiffe* (1961), dite par le personnage qu'interprète Bernard Blier d'un tenancier d'une maison close qui s'adresse à son notaire véreux :

`Parce que j'aime autant vous dire que pour moi, Monsieur Éric, avec ses costards tissés en Écosse à Roubaix, ses boutons de manchette en simili et ses pompes à l'italienne fabriquées à Grenoble, eh ben, c'est rien qu'un demi-sel. Et là, je parle juste question présentation, parce que si je voulais me lancer dans la psychanalyse, j'ajouterais que c'est le roi des cons ... Et encore, les rois, ils arrivent à l'heure ... Parce que j'en ai connu, moi, mon cher Maître, des Rois ... Et pis pas des p'tits ... Des Hanovre ... Des Hohenzollern ... Rien qu'du micheton garanti croisade ... Mais vous m'voyez-là, maintenant, mais moi, j'ai pas toujours tenu un clandé ! ... Vous avez pas connu la rue du chalabais ... Soixante chambres ! ... Et y z'ont filé tout ça aux P'tites Soeurs des Pauvres ! ... Quand j'y pense, tiens ... Alors, c'est pour vous dire que votre ami Éric, ses grands airs, y peut s'les cloquer dans l'baba ! ...`

Il se peut qu'il y ait un lien avec ma formation universitaire :

- 1991 – 1994 Classes préparatoires au Lycée Descartes de Tours.
- 1994 – 1998 Élève à l'École Normale Supérieure. Études à Paris VI et à Orsay.
- 1999 – 2001 Thèse de doctorat à l'Université Jean Monnet de Saint-Étienne, sous la direction de Sinnou David, Guy Diaz et Michel Waldschmidt.
- 2002 – $* * *$ Maître de Conférences à l'Université Joseph Fourier de Grenoble.

**Textes issus de la thèse de doctorat (soutenue en décembre 2001).**

**[G1]** Mesures d'indépendance linéaire de logarithmes dans un groupe algébrique commutatif. *Invent. Math.*, 162(1) : 137–188, 2005. (Résultats annoncés dans *C. R. Acad. Sci*, I 333 : 1059–1064, 2001.)
**[G2]** Formes linéaires de logarithmes effectives sur les variétés abéliennes. *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, 39(5) : 699–773, 2006.

**Textes postérieurs à la thèse de doctorat.**

**[G3]** (avec M. Ably). Approximation diophantienne sur les courbes elliptiques à multiplication complexe. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 337 (Sér. I) : 629–634, 2003.
**[G4]** Étude du cas rationnel de la théorie des formes linéaires de logarithmes. *J. Number Theory*, 127(2) : 220–261, 2007.
**[G5]** Minorations simultanées de formes linéaires de logarithmes de nombres algébriques. Texte au repos avant corrections. 20 p., mai 2009.
**[G6]** Pentes des fibrés vectoriels adéliques sur un corps global. *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, 119 : 21-95, 2008.
**[G7]** Géométrie des nombres adélique et lemmes de Siegel généralisés. *Manuscripta Math.*, 130(2) :159-182, 2009.

Les textes **[G1]** à **[G5]** concernent la théorie des formes linéaires de logarithmes. Les textes **[G6]** et **[G7]** portent sur la théorie des fibrés vectoriels adéliques. Afin de rendre plus lisible les références à nos articles, nous les noterons **[G1]** ... comme ci-dessus, contrairement aux articles d'autres auteurs référencés par un nombre entre crochets, qui renvoie à l'une des deux bibliographies qui se trouvent à la fin de chaque partie de ce mémoire.

# Table des matières

# Théorie des fibrés vectoriels adéliques

## 1. Introduction

La géométrie des nombres est un outil incontournable de l'approximation diophantienne, comme nous le verrons dans la seconde partie avec les lemmes de Siegel par exemple. Une des facettes de cette théorie s'intéresse à la question de l'intersection d'un ensemble convexe* de $\mathbf{R}^n$ avec un réseau complet† de cet espace. Cependant ces objets de base s'avèrent être des carcans assez rigides à l'usage, par exemple lorsque l'on a un corps de nombres $k$ qu'il faut plonger dans $\mathbf{R}^{[k:\mathbf{Q}]}$ avant de pouvoir travailler. De plus l'analogie entre corps de nombres et corps de fonctions d'une variable (c.-à-d. une extension finie de $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})[X]$) ne peut pas se manifester dans ce contexte. C'est une des raisons pour lesquelles a été perçue au début du vingtième siècle la nécessité de considérer simultanément toutes les places de $k$, c.-à-d. à la fois les plongements de $k$ dans les corps archimédiens $\mathbf{R}$ et $\mathbf{C}$ (les « places à l'infini » de $k$) et les plongements dans les corps $p$-adiques liés aux idéaux premiers de l'anneau des entiers‡ $\mathcal{O}_k$ de $k$ (les « places ultramétriques » de $k$). L'essor de la notion d'*adèle* à travers les travaux de Hensel, Hasse, Chevalley, Artin et Weil (pour ne citer que quelques-uns des mathématiciens qui ont contribué à cette entreprise) a permis de concrétiser ce besoin. Pour se rafraîchir la mémoire, rappelons simplement qu'un élément $x$ de l'anneau des adèles $\mathbf{Q}_\mathbf{A}$ de $\mathbf{Q}$ est un multiplet $(x_\infty, (x_p)_p)$, où $p$ parcourt les nombres premiers de $\mathbf{Q}$, tel que $x_\infty \in \mathbf{R}$, $x_p \in \mathbf{Q}_p$ pour tout $p$ et tel que $x_p \in \mathbf{Z}_p$ pour tout nombre premier $p$ en dehors d'un ensemble fini (qui dépend de $x$). Cette définition se généralise à un corps global $k$ (corps de nombres ou corps de fonctions) et l'ensemble $k_\mathbf{A}$ des adèles de $k$ possède une structure d'anneau topologique, localement compact, pour l'addition et le produit composante par composante. À chaque place $v$ de $k$ correspond un morphisme injectif de corps $\iota_v : k \hookrightarrow k_v$ ($k_v$ est le complété de $k$ en la place $v$) qui permet de considérer le plongement diagonal $k \hookrightarrow k_\mathbf{A}$, $x \mapsto (\iota_v(x))_v$. *Via* ce plongement, l'on montre que $k$ est un sous-groupe discret de $(k_\mathbf{A}, +)$ tel que le quotient $k_\mathbf{A}/k$ est compact. Plus généralement, étant donné un $k$-espace vectoriel $E$ de dimension finie, l'espace $E$ se présente comme un réseau de $E_\mathbf{A} := E \otimes_k k_\mathbf{A}$, analogue aux réseaux de la géométrie des nombres classique. C'est pour fournir un équivalent des corps convexes qu'il est utile de considérer la notion de fibré vectoriel adélique sur $\operatorname{Spec} k$. Sans entrer dans les détails pour l'instant, disons qu'un *fibré vectoriel adélique* $\overline{E}$ est la donnée d'un $k$-espace vectoriel $E$ de dimension finie et de normes $\|.\|_{\overline{E},v}$ sur chaque espace $E \otimes_k \mathbf{C}_v$, soumises à quelques conditions techniques. Étant donné un adèle $r = (r_v)_v \in k_\mathbf{A}$, la boule adélique

$$\mathbf{B}_{\overline{E}}(0, r) := \Big\{ x = (x_v)_v \in E_\mathbf{A}\,; \quad \forall\, v,\ \|x_v\|_{\overline{E},v} \le |r_v|_v \Big\}$$

a les propriétés d'un corps convexe. L'on se trouve ainsi en présence de tous les ingrédients requis pour élaborer une *géométrie des nombres adélique*. L'article **[G7]** présente les théorèmes classiques de Blichfeldt, Minkowski et van der Corput, écrits dans ce cadre. Ce même article compare plusieurs notions de minima successifs, qui ne sont pas équivalentes entre elles. Ce point est nouveau par rapport à la théorie classique, dans laquelle, le $i^{ème}$ *minimum relatif au corps convexe* $C$ *et au réseau* $\Omega$ est la borne inférieure des nombres réels $r > 0$ tel que $rC \cap \Omega$ possède $i$ vecteurs libres. Toutefois, au commencement, ce n'est pas la souplesse du langage de la théorie des fibrés vectoriels adéliques sur $\operatorname{Spec} k$ qui nous a conduit à l'étudier. La terminologie « fibré vectoriel adélique (hermitien) » provient de la géométrie d'Arakelov et plus précisément des travaux de Bost des années quatre-vingt-dix qui mit en place le formalisme des pentes de fibrés vectoriels hermitiens sur le spectre de l'anneau des entiers d'un corps de nombres. Un tel objet est la donnée d'un $\mathcal{O}_k$-module projectif $\mathcal{E}$ de type fini et d'une collection de normes $\|.\|_{\mathcal{E},v}$ aux places archimédiennes $v$ de $k$, invariantes par conjugaison complexe. On peut l'interpréter comme un cas particulier de fibré vectoriel adélique. À de tels fibrés sont associés des nombres réels appelés *degrés d'Arakelov* qui, divisés par le rang de $\mathcal{E}$, deviennent des *pentes d'Arakelov*. À l'occasion de cours de troisième cycle donnés à l'Institut Henri Poincaré en 1997 et 1999, Bost a effectué une étude systématique de ces nombres, élaborant ainsi une véritable *théorie des pentes*. De ces cours et de l'article fondateur **[3]** est issue une méthode — dite *méthode des pentes* — destinée à prouver des énoncés de transcendance et d'approximation

*On demande souvent à cet ensemble de posséder l'origine comme point intérieur, d'être compact et symétrique par rapport à l'origine. C'est alors une boule unité fermée pour la norme jauge.

†C.-à-d. un $\mathbf{Z}$-module de rang $n$ de $\mathbf{R}^n$.

‡L'ensemble des éléments $x \in k$ pour lesquels il existe un polynôme unitaire $P \in \mathbf{Z}[X]$ tel que $P(x) = 0$ est un sous-anneau de $(k, +, \times)$, appelé *anneau des entiers* de $k$.

diophantienne. La grande force de la méthode des pentes est de s'adapter naturellement à un problème de nature arithmético-géométrique. Son utilisation renforce la clarté de l'argumentation en séparant distinctement les contributions, tout en faisant ressortir les invariants naturels et géométriques des objets qui sont en jeu. Par exemple, elle a permis de mettre en lumière et de démontrer un critère d'algébricité de feuilles formelles [**4**]. Nous l'avons également utilisée pour fournir des minorations de formes linéaires de logarithmes de variétés abéliennes principalement polarisées, minorations qui sont totalement explicites en la dimension et la hauteur de Faltings de la variété **[G2]**. À l'usage, il arrive parfois que le cadre des fibrés vectoriels hermitiens sur $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_k$ dans lequel s'applique la méthode des pentes s'avère lui aussi trop rigide. À la suite des travaux de Zhang [**26**], Maillot [**17**] ou bien encore de Rumely *et al.* [**21**], il est apparu que, si l'on souhaite construire une *hauteur canonique* sur les cycles d'une variété projective $X$ munie d'un fibré en droites ample $M$, les métriques que l'on doit mettre sur $M$ ne sont pas en général hermitiennes mais seulement continues. Cela empêche alors de mettre en œuvre la méthode des pentes telle quelle, comme on aimerait le faire par exemple avec l'espace vectoriel des sections globales $\mathrm{H}^0(X, M)$. Ces observations nous ont amené à examiner à nouveau le formalisme des pentes pour des fibrés vectoriels munis d'une structure plus souple que celle des fibrés vectoriels hermitiens sur $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_k$. La généralisation de la théorie des pentes de Bost au champ adélique est le sujet de l'article **[G6]**. La plupart des résultats de cet article sont obtenus au moyen d'une comparaison avec le cas des fibrés adéliques hermitiens, comparaisons qui induisent un terme d'erreur constitué de deux éléments : le *défaut de pureté* (relatif aux places ultramétriques de $k$) et le *défaut d'hermitianité* (qui ne concerne que les places archimédiennes). Cette démarche comparative est courante dans l'étude de la géométrie des espaces de Banach de dimension finie (dite *géométrie de Minkowski*), source d'inspiration pour notre travail. Un aspect intéressant de cette approche est que les termes d'erreurs induits sont très bien contrôlés. Ils sont bornés par une fonction explicite de la dimension du fibré vectoriel adélique et du degré de $k$. De plus, ils disparaissent dans le cas hermitien. Ceci assure que les énoncés établis dans l'article **[G6]** sont des généralisations du cas « classique », hermitien sur $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_k$.

Dans les pages qui suivent, nous donnons quelques éléments de la théorie des fibrés vectoriels adéliques sur $\operatorname{Spec} k$ ($k$ corps global), sans démonstration (pour lesquelles on peut se référer à **[G6]** et **[G7]**). Cette théorie revêt un aspect assez élémentaire et l'on ne supposera connu du lecteur aucune connaissance particulière relative à la théorie des pentes « classique ».

## 2. Fibrés vectoriels adéliques

Suivant en partie Rumely *et al.* [**21**], nous définissons ici une notion de fibré vectoriel adélique sur $\operatorname{Spec} k$, qui généralise celle de fibré vectoriel hermitien sur $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_k$, qui est à la base même de la géométrie d'Arakelov.

Soit $k$ un corps global et $v$ une place de $k$. On note $\mathbf{C}_v$ la complétion d'une clôture algébrique de $k_v$. Si $K$ est une extension finie de $k$ et $w$ une place de $K$ au-dessus de $v$, on a un isomorphisme topologique de corps valués $\mathbf{C}_w \simeq \mathbf{C}_v$. Soit $E$ un $k$-espace vectoriel. Une *norme* sur $E \otimes_k \mathbf{C}_v$ est une application $\|.\|_v : E \otimes \mathbf{C}_v \to \mathbf{R}^+$ qui satisfait aux trois conditions :

(i) $\forall x \in E \otimes \mathbf{C}_v$, $\|x\|_v = 0 \iff x = 0$.
(ii) $\forall x \in E \otimes \mathbf{C}_v$, $\forall \lambda \in \mathbf{C}_v$, $\|\lambda x\|_v = |\lambda|_v \cdot \|x\|_v$.
(iii) $\forall x, y \in E \otimes \mathbf{C}_v$, $\|x + y\|_v \leq \|x\|_v + \|y\|_v$.

Commençons par trois définitions qui plantent le décor de cette histoire.

Fibré vectoriel adélique . Soit $n$ un entier naturel. Un *fibré vectoriel adélique* $\overline{E} = (E, (\|.\|_v)_v)$ *de dimension* $n$ *sur* $\operatorname{Spec} k$ est la donnée d'un $k$-espace vectoriel $E$ de dimension finie $n$ et d'une famille de normes $\|.\|_v$ sur $E \otimes_k \mathbf{C}_v$, aux places $v$ de $k$, soumise aux contraintes suivantes :

1) Il existe une $k$-base $(e_1, \ldots, e_n)$ de $E$ telle que, pour toute place $v$ ultramétrique en dehors d'un nombre fini, la norme sur $E \otimes_k \mathbf{C}_v$ est donnée par

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \right\|_v = \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i|_v\} \cdot \tag{1}$$

2) Soit $\operatorname{Gal}(\mathbf{C}_v | k_v)$ l'ensemble des automorphismes continus qui laissent invariants les éléments de $k_v$. Alors $\|.\|_v$ est invariante sous l'action de $\operatorname{Gal}(\mathbf{C}_v | k_v)$ : étant donné une

$k_v$-base $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ de $E \otimes_k k_v$ et $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{C}_v^n$, $\sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbf{C}_v | k_v)$, on a

$$\|\sigma(x_1)\alpha_1 + \ldots + \sigma(x_n)\alpha_n\|_v = \|x_1\alpha_1 + \cdots + x_n\alpha_n\|_v \ .$$

3) Si $v$ est ultramétrique alors

$$\forall\, x, y \in E \otimes_k \mathbf{C}_v, \quad \|x + y\|_v \leq \max\{\|x\|_v, \|y\|_v\}$$

(ultra-norme selon la terminologie de Bourbaki).

Un *fibré en droites adélique* est un fibré vectoriel adélique de dimension 1.

Pour mesurer les défauts des normes aux places ultramétriques d'un tel objet, nous avons besoin de la notion suivante.

Pureté . Soit $\overline{E}$ un fibré vectoriel adélique sur $\mathrm{Spec}\, k$ et $v$ une place de $k$. Nous dirons que $\overline{E}$ *est $v$-pur* si, pour tout $x \in E$, la norme $\|x\|_{\overline{E},v}$ de $x$ appartient à l'image $|k_v|_v$ de $k_v$ par sa fonction valeur absolue. Lorsque cette propriété est satisfaite en toutes les places de $k$, nous dirons que $\overline{E}$ *est pur.*

Cette propriété est toujours vraie aux places archimédiennes de $k$ (lorsqu'il y en a).

Hermitianité . Un *fibré adélique hermitien* est un fibré vectoriel adélique *pur* dont toutes les normes aux places archimédiennes de $k$ sont hermitiennes.

*Exemples.* Pour tout $p \in [1, +\infty]$, on dispose du fibré vectoriel adélique pur $(k^n, |.|_p)$ (qui est hermitien lorsque $p = 2$) où, pour toute place $v$ de $k$ et tout vecteur $(x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathbf{C}_v^n$ on a

$$|(x_1, \ldots, x_n)|_{p,v} := \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^n |x_i|_v^p\right)^{1/p} & \text{si } v \text{ est archimédienne et } p < +\infty \\ \max\{|x_1|_v, \ldots, |x_n|_v\} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Au-delà de cette famille d'exemples, il y a aussi ceux qui établissent le lien avec la géométrie des nombres classique. Soit $n$ un entier $\geq 1$ et $C \subseteq \mathbf{R}^n$ une partie convexe ayant 0 comme point intérieur, compacte et symétrique par rapport à l'origine. Cet ensemble est la boule unité fermée de $\mathbf{R}^n$ muni de la *norme jauge* :

$$\forall\, x \in \mathbf{R}^n, \quad \|x\|_C := \inf\left\{\lambda > 0\, ;\ \frac{x}{\lambda} \in C\right\} .$$

Soit $\Omega$ un réseau complet de $\mathbf{R}^n$. Il existe une base $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ de $\mathbf{R}^n$ telle que $\Omega = \bigoplus_{j=1}^n \mathbf{Z}.\omega_j$. Le $\mathbf{Q}$-espace vectoriel $\Omega \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$ peut alors être muni d'une collection de normes $(\|.\|_v)_v$, indexée par les places $v$ de $\mathbf{Q}$, de la manière suivante :

- Si $v$ est la place archimédienne $\infty$ de $\mathbf{Q}$ alors, pour tout $x = a + ib \in \Omega \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{C}$ $(a, b \in \mathbf{R}^n)$, on a $\|x\|_\infty := (\|a\|_C^2 + \|b\|_C^2)^{1/2}$,
- si $v$ est ultramétrique alors, pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{C}_v^n$, on a

$$\left\|\sum_{j=1}^n x_j\omega_j\right\|_v := \max\{|x_1|_v, \ldots, |x_n|_v\} \ .$$

Les normes aux places ultramétriques ne dépendent pas du choix de la $\mathbf{Z}$-base $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ de $\Omega$ car une matrice de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{Z})$ est une isométrie pour la norme du maximum ultramétrique. Sa structure entière est donnée par $\Omega$, *i.e.*

$$\Omega = \{x \in \Omega \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}\, ; \quad \forall\, v \neq \infty, \quad \|x\|_v \leq 1\}.$$

Avec un léger abus d'écriture, on notera $(\Omega, \|.\|_C)$ le fibré vectoriel adélique pur ainsi construit.

**Défauts de pureté et d'hermitianité.** Soit $v$ une place de $k$ et $\overline{E}$ un fibré vectoriel adélique sur $\mathrm{Spec}\, k$, de dimension $n \geq 1$. Étant donné une $k_v$-base $(e_1, \ldots, e_n)$ de $E_v := E \otimes_k k_v$, considérons le nombre réel $\delta_0(e_1, \ldots, e_n)$ défini comme la borne inférieure des produits $ab$ où $a$ et $b$ appartiennent à $|k_v|_v$ et satisfont à la condition suivante : pour tout $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E \otimes_k k_v$, on a

$$a^{-1}|(x_1, \ldots, x_n)|_{2,v} \leq \|x\|_{\overline{E},v} \leq b|(x_1, \ldots, x_n)|_{2,v} \ . \tag{2}$$

De telles quantités $a, b$ existent toujours par équivalence des normes en dimension finie. Soit $k_0 := \mathbf{Q}$ si $k$ est un corps de nombres et $k_0 := \mathbf{F}_p[T]$ si $k$ est un corps de fonctions (de caractéristique $p$). On note $n_v := [k_v : (k_0)_v]$ le degré local* de $k$ en la place $v$.

DÉFINITIONS .

(i) Le *défaut de $\overline{E}$ en la place $v$* est la quantité $\delta(E_v, \|.\|_{\overline{E},v})$ définie comme la borne inférieure des $\delta_0(e_1, \ldots, e_n)$ lorsque $(e_1, \ldots, e_n)$ parcourt les $k_v$-bases de $E_v$.

(ii) Le *défaut de pureté (normalisé) de $\overline{E}$* est $\delta_{\mathrm{n}}(\overline{E}) := \prod_{v\nmid\infty} \delta(E_v, \|.\|_{\overline{E},v})^{n_v/[k:k_0]}$ (dans ce produit $v$ parcourt les places ultramétriques de $k$).

(iii) Le *défaut d'hermitianité (normalisé) de $\overline{E}$* est $\Delta_{\mathrm{n}}(\overline{E}) := \prod_{v|\infty} \delta(E_v, \|.\|_{\overline{E},v})^{n_v/[k:k_0]}$ (dans ce produit $v$ parcourt les places archimédiennes de $k$). Ce produit vaut 1 lorsque $k$ est un corps de fonctions.

Ces quantités mesurent la distance qui sépare $\overline{E}$ d'un fibré vectoriel adélique pur ou hermitien. L'on peut montrer que $\overline{E}$ est pur si et seulement si $\delta_{\mathrm{n}}(\overline{E}) = 1$. De même, le fibré adélique $\overline{E}$ est hermitien si et seulement si $\Delta_{\mathrm{n}}(\overline{E}) = \delta_{\mathrm{n}}(\overline{E}) = 1$. On a aussi un contrôle assez fin de ces défauts :

PROPOSITION .

(i) *Soit $v$ une place ultramétrique de $k$ et $\pi_v$ une uniformisante de l'anneau de valuation de $k_v$. Alors on a $\delta(E_v, \|.\|_{\overline{E},v}) \in \{1, |\pi_v|_v^{-1}\}$. De plus $\delta(E_v, \|.\|_{\overline{E},v}) = 1$ si et seulement si $\overline{E}$ est $v$-pur.*

(ii) *Soit $v$ une place archimédienne de $k$. Alors on a $\delta(E_v, \|.\|_{\overline{E},v}) \in [1, \sqrt{2n}]$. En particulier, on a l'encadrement $1 \le \Delta_{\mathrm{n}}(\overline{E}) \le \sqrt{2n}$.*

Si le point (i) résulte des définitions, le point (ii) repose sur le célèbre théorème de John **[15]** suivant. Rappelons qu'un *ellipsoïde* de $\mathbf{R}^n$ est la boule unité fermée d'une norme euclidienne sur $\mathbf{R}^n$.

THÉORÈME DE L'ELLIPSOÏDE DE JOHN . *Étant donné un corps convexe $C$ de $\mathbf{R}^n$, symétrique par rapport à l'origine, il existe un* unique *ellipsoïde $J(C)$ inclus dans $C$ et de volume maximal. De plus on a $C \subseteq \sqrt{n}J(C)$.*

Dans la pratique, si l'on dispose d'un fibré vectoriel adélique $\overline{E} = (E, (\|.\|_{\overline{E},v})_v)$ quelconque sur $\operatorname{Spec} k$, l'on peut l'approcher d'aussi près que l'on souhaite par un fibré adélique hermitien. Plus précisément, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une collection de normes $(\|.\|_{\overline{E},\varepsilon,v})_v$ telles que

1) $\overline{E}_\varepsilon := (E, (\|.\|_{\overline{E},\varepsilon,v})_v)$ est un fibré adélique *hermitien* sur $\operatorname{Spec} k$,
2) pour toute place $v$ de $k$, pour tout $x \in E \otimes_k k_v$, on a

$$\|x\|_{\overline{E},\varepsilon,v} \le \|x\|_{\overline{E},v} \le \delta(E_v, \|.\|_{\overline{E},v})(1+\varepsilon)^{\varsigma_v} \|x\|_{\overline{E},\varepsilon,v}$$

où $\varsigma_v \in \{0, 1\}$ est nul si et seulement si $v$ est ultramétrique.

Cette propriété permet d'utiliser ponctuellement des métriques hermitiennes pour des démonstrations de cas généraux. De plus, la petitesse des termes d'erreurs mentionnée dans la proposition ci-dessus est souvent suffisante pour les problèmes d'approximation diophantienne.

## 3. Degré d'Arakelov et Hauteur

Dans ce paragraphe, on introduit des quantités qui permettent de mesurer la taille globale d'un fibré vectoriel adélique et la taille des vecteurs de celui-ci. Rappelons auparavant la définition de boule adélique vue dans l'introduction : pour $r = (r_v)_v \in k_{\mathbf{A}}$, on pose

$$\mathbf{B}_{\overline{E}}(0, r) := \left\{ x = (x_v)_v \in E_{\mathbf{A}} \,;\quad \forall\, v,\ \|x_v\|_{\overline{E},v} \le |r_v|_v \right\}.$$

Si $r = (1, 1, \ldots)$, on note plus simplement $r = 1$.

*L'entier $n_v$ vaut 1 (*resp.* 2) si $v$ est une place archimédienne réelle (*resp.* complexe). Si $k$ est un corps de nombres et si $v$ est ultramétrique au-dessus du nombre premier $p$, on a $n_v = [k_v : \mathbf{Q}_p]$.

Définitions . Soit $\overline{E}$ un fibré vectoriel adélique sur $\operatorname{Spec} k$ de dimension $n \geq 1$. Soit vol une mesure de Haar sur le groupe localement compact $(k_{\mathbf{A}}^n, +)$ et $\phi : E \to k^n$ un isomorphisme de $k$-espaces vectoriels. La *hauteur normalisée* de $\overline{E}$ est le nombre réel

$$H_{\mathrm{n}}(\overline{E}) := \left( \frac{\operatorname{vol}(\mathbf{B}_{(k^n, |.|_2)}(0,1))}{\operatorname{vol}(\phi(\mathbf{B}_{\overline{E}}(0,1)))} \right)^{\frac{1}{[k:k_0]}}.$$

Le *degré d'Arakelov normalisé* (que l'on peut aussi appeler *degré adélique normalisé*) de $\overline{E}$ est $\widehat{\deg}_{\mathrm{n}} \overline{E} := -\log H_{\mathrm{n}}(\overline{E})$. La *pente d'Arakelov normalisée* (ou *pente adélique normalisée*) de $\overline{E}$ est $\widehat{\mu}_{\mathrm{n}}(\overline{E}) := (\widehat{\deg}_{\mathrm{n}} \overline{E})/n$.

Les définitions de ces quantités ne dépendent ni du choix de la mesure de Haar (proportionnelles entre elles) ni du choix de l'isomorphisme $\phi$ (formule du produit). Le terme au numérateur dans $H_{\mathrm{n}}(\overline{E})$ est un terme de normalisation qui assure que la hauteur du fibré adélique hermitien $(k^n, |.|_2)$ vaut 1 (héritage d'Arakelov !). Par exemple, la hauteur de $(\Omega, \|.\|_C)$ vaut

$$H(\Omega, \|.\|_C) = \frac{V_n \operatorname{covol}(\Omega)}{\operatorname{vol}(C)}$$

où

- $V_n$ désigne le volume de la boule euclidienne de $\mathbf{R}^n$ mesuré par rapport à la mesure de Lebesgue usuelle,
- vol est une mesure de Haar sur $\mathbf{R}^n$,
- $\operatorname{covol}(\Omega)$ est la mesure du quotient $\mathbf{R}^n/\Omega$ induite par vol (*).

De la même manière, on a une notion de hauteur pour les vecteurs de $E$ : si $x \in E$, la *hauteur (normalisée) de $x$ relative à $\overline{E}$* est

$$H_{\overline{E}}(x) := \left( \prod_v \|x\|_{\overline{E},v}^{n_v} \right)^{\frac{1}{[k:k_0]}}$$

(dans ce produit, $v$ parcourt toutes les places de $k$). Si $\overline{E} = (\mathbf{Q}, (|.|, (|.|_p)_p))$ (c.-à-d. $\mathbf{Q}$ muni des valeurs absolues usuelles sur chacun de ses complétés) alors la hauteur de $a/b \in \mathbf{Q} \setminus \{0\}$, pour des entiers $a$ et $b$ premiers entre eux, est simplement $\max\{|a|, |b|\}$.

**Propriétés.** L'article **[G6]** décrit de manière systématique les propriétés de la hauteur et du degré d'Arakelov relatives aux diverses opérations que l'on peut faire sur la catégorie des fibrés vectoriels adéliques : sous-fibré, quotient d'un fibré par un sous-fibré, somme directe, dualité, produit tensoriel, produit symétrique, produit extérieur, déterminant. Plutôt que de faire une longue liste de ces propriétés, mentionnons simplement quelques difficultés et la manière dont nous les avons résolues. Dans cette discussion, $\overline{E}$ désigne un fibré vectoriel adélique sur $\operatorname{Spec} k$.

➥ Tout d'abord, un sous-fibré adélique de $\overline{E}$ est la donnée d'un sous-espace vectoriel $F$ de $E$, que l'on munit des normes de $\overline{E}$ restreintes à $F$. Mais si $\overline{E}$ est l'exemple $(\Omega, \|.\|_C)$ de la géométrie des nombres classique, il faut prendre garde que si $\mho$ est un sous-groupe de $\Omega$, le fibré adélique $(\mho, \|.\|_C)$ *n'est pas a priori* un sous-fibré adélique de $(\Omega, \|.\|_C)$ car les structures entières ne coïncident pas en général. Pour que cela soit le cas, il faut et il suffit que $\mho$ soit égal à $(\mho \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}) \cap \Omega$ *i.e.* que le quotient $\Omega/\mho$ soit sans torsion, ou, ce qui revient au même, que $\mho$ soit facteur direct dans $\Omega$. C'est la raison pour laquelle apparaît parfois dans les calculs de hauteur l'indice $[(\mho \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}) \cap \Omega : \mho]$.

➥ Le dual $\overline{E}^{\vee}$ de $\overline{E}$ est l'espace vectoriel dual $E^{\vee} = \operatorname{Hom}_k(E, k)$ muni des normes duales de celles de $\overline{E}$. Si $\overline{E}$ est hermitien alors $H_{\mathrm{n}}(\overline{E}) H_{\mathrm{n}}(\overline{E}^{\vee}) = 1$. Mais, dans le cas général, cette égalité n'est plus vraie *a priori* et nous savons seulement montrer que $H_{\mathrm{n}}(\overline{E}) H_{\mathrm{n}}(\overline{E}^{\vee}) \in [1, c^n]$ pour une certaine constante absolue $c \geq 1$, qui n'est pas connue†. Si la minoration par 1 est la conséquence d'un théorème ancien de Blaschke-Santalò **[1, 23]**, la majoration résulte du théorème suivant de Bourgain & Milman **[5]** (1987). Si $C$ est un corps convexe de $\mathbf{R}^n$, le *polaire* de $C$ est l'ensemble $C^{\circ} := \{\varphi \in (\mathbf{R}^n)^{\vee} ; \ |\varphi(C)| \subseteq [0,1]\}$.

---

*Si vol est la mesure de Lebesgue usuelle sur $\mathbf{R}^n$ alors $\operatorname{covol}(\Omega) = |\det(\omega_1, \ldots, \omega_n)|$ pour toute $\mathbf{Z}$-base $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ de $\Omega$.

†Toutefois l'on peut montrer le résultat explicite $H_{\mathrm{n}}(\overline{E}) H_{\mathrm{n}}(\overline{E}^{\vee}) \leq (en)^n$ à l'aide d'un théorème de Mahler **[16]**.

THÉORÈME DE BOURGAIN & MILMAN . *Soit* vol *une mesure de Haar sur* $(\mathbf{R}^n,+)$ *et* $\mathrm{vol}^{\vee}$ *la mesure adjointe** *sur le dual* $(\mathbf{R}^n)^{\vee}$. *Alors il existe une constante absolue* $c \geq 1$ *telle que, pour tout corps convexe* $C$ *de* $\mathbf{R}^n$, *on a*

$$\frac{\mathrm{vol}(b_n^2)\,\mathrm{vol}^{\vee}((b_n^2)^{\vee})}{\mathrm{vol}(C)\,\mathrm{vol}^{\vee}(C^{\circ})} \leq c^n$$

*où* $b_n^2$ *est la boule unité fermée de l'espace euclidien* $(\mathbf{R}^n, |.|_2)$.

➥ Le produit tensoriel de fibrés vectoriels adéliques posent de sérieux problèmes. La raison est que l'on aimerait que le produit $\otimes$ soit « naturel » et défini de sorte que si $\overline{E}$ et $\overline{F}$ sont hermitiens alors il en est de même pour $\overline{E}\otimes\overline{F}$. Cela ne fonctionne pas si l'on choisit les normes d'opérateurs sur $E\otimes_k F \simeq \mathrm{Hom}_k(E, F^{\vee})$ (†). Cette problématique est en réalité du ressort de la géométrie des espaces de Banach (de dimensions finies pour nous). Comment faire « naturellement » le produit tensoriel de deux espaces de Banach ? La réponse est qu'il existe beaucoup de stratégies, toutes plus naturelles les unes que les autres, dont les descriptions, études, comparaisons requièrent de savants ouvrages‡ (par exemple [**9**, **22**]). Heureusement nous avions deux atouts pour résoudre cette difficulté. Les espaces que l'on considère sont de dimension finie, ce qui élimine d'emblée d'affreux ennuis et, d'autre part, les propriétés du produit tensoriel d'espaces normés que l'on demande pour pouvoir travailler sont très modestes. En réalité, si $\overline{\mathsf{E}} := (\mathsf{E}, \|.\|_{\mathsf{E}})$ et $\overline{\mathsf{F}} := (\mathsf{F}, \|.\|_{\mathsf{F}})$ sont deux $\mathbf{R}$-espaces vectoriels normés, il suffit que la norme $\alpha(.;\overline{\mathsf{E}},\overline{\mathsf{F}})$ sur $\mathsf{E}\otimes_{\mathbf{R}}\mathsf{F}$ vérifie deux conditions :

(i) Pour tous $\mathsf{e}\in\mathsf{E}$ et $\mathsf{f}\in\mathsf{F}$, on a $\alpha(\mathsf{e}\otimes\mathsf{f};\overline{\mathsf{E}},\overline{\mathsf{F}}) \leq \|\mathsf{e}\|_{\mathsf{E}}\|\mathsf{f}\|_{\mathsf{F}}$,
(ii) si $u:\mathsf{E}\to\mathsf{E}'$ et $v:\mathsf{F}\to\mathsf{F}'$ sont deux applications linéaires alors la norme d'opérateur de $u\otimes v$ est plus petite que le produit des normes d'opérateur de $u$ et $v$.

Ces conditions sont celles d'une *(finitely generated) uniform crossnorm*, selon la terminologie de Schatten (voir [**22**], chap. 6). On ajoute souvent une troisième condition, à savoir que si $\overline{\mathsf{E}}$ et $\overline{\mathsf{F}}$ sont euclidiens alors $\alpha(.;\overline{\mathsf{E}},\overline{\mathsf{F}})$ est la norme euclidienne usuelle sur le produit tensoriel $\mathsf{E}\otimes_{\mathbf{R}}\mathsf{F}$ (on dit alors que la norme $\alpha$ est *euclidienne*). Un point crucial est que l'on peut exhiber au moins une norme euclidienne $\alpha$ ; par exemple, les normes de Chevet-Saphar d'ordre 2 conviennent (voir [**22**] ou [**G6**, p. 34]). Tout ceci se transpose aux fibrés vectoriels adéliques, ce qui nous a conduit à introduire la notion de *norme tensorielle adélique d'ordre* $\ell$ (éventuellement hermitienne). Le $\ell$ qui apparaît est le nombre de fibrés dont on fait le produit tensoriel. La conclusion est que pour faire le produit tensoriel de $\ell$ fibrés vectoriels adéliques, il faut ces $\ell$ fibrés *et* le choix d'une norme tensorielle adélique d'ordre $\ell$. En particulier, les normes sur les produits symétrique et extérieur d'un fibré vectoriel adélique dépendent elles-aussi du choix d'une norme tensorielle adélique, car elles sont obtenues par quotient de normes sur des produits tensoriels. Une fois ces obstacles surmontés, il n'est pas difficile de voir que la pente d'Arakelov d'un produit tensoriel de fibrés adéliques $(\overline{E}_i)_i$, relatif à une norme tensorielle *hermitienne*, est la somme des pentes de chacun d'entre eux plus un terme d'erreur borné par $\sum_i \log\left(\Delta_{\mathrm{n}}(\overline{E}_i)\delta_{\mathrm{n}}(\overline{E}_i)\right)$.

## 4. Géométrie des nombres adélique

Une des questions les plus courantes en géométrie des nombres est l'estimation du nombre de points d'un réseau dans un corps convexe. Ici, selon la correspondance mentionnée dans l'introduction, cela revient à s'intéresser à l'intersection $E\cap\mathbf{B}_{\overline{E}}(0,r)$ pour un fibré vectoriel adélique $\overline{E}$ et un adèle $r\in k_{\mathbf{A}}$. Cet ensemble est un ensemble fini car $E$ est discret dans $E_{\mathbf{A}}$ et la boule est compacte. Dans [**G7**], nous avons établi une minoration du cardinal de cet ensemble, qui dans sa forme classique est attribuée à van der Corput [**8**].

*Soit $\mathsf{e}=(e_1,\dots,e_n)$ une base de $\mathbf{R}^n$. Soit $\mathscr{P}\subseteq\mathbf{R}^n$ l'ensemble $\{x_1e_1+\cdots+x_ne_n;\forall i,\ 0\leq x_i\leq 1\}$ et $\mathscr{P}^{\vee}\subseteq(\mathbf{R}^n)^{\vee}$ l'ensemble construit de la même manière avec la base duale de $\mathsf{e}$. Alors $\mathrm{vol}^{\vee}$ est l'unique mesure de Haar sur $(\mathbf{R}^n)^{\vee}$ telle que $\mathrm{vol}(\mathscr{P})\,\mathrm{vol}^{\vee}(\mathscr{P}^{\vee})=1$.

†Sauf si $k$ est un corps de fonctions ! En réalité la discussion qui suit n'est intéressante que si $k$ est un corps de nombres, c.-à-d. si $k$ possède au moins une place archimédienne.

‡Il semble même que ce soit Grothendieck qui ait véritablement lancé le sujet avec une série de résultats fondamentaux, dont certains sont issus de sa thèse ! (voir, par exemple, [**12**, **13**]).

Inégalité de van der Corput adélique . *Soit* $\overline{E}$ *un fibré vectoriel adélique sur* $\operatorname{Spec} k$, *de dimension* $n \geq 1$, *et* $r \in k_{\mathbf{A}}^{\times}$. *Alors on a*

$$\frac{\operatorname{vol}(\mathbf{B}_{\overline{E}}(0,r))}{2^{n[k:k_0]\delta} \operatorname{covol}(E)} \leq \operatorname{card}(E \cap \mathbf{B}_{\overline{E}}(0,r))$$

*où* $\delta$ *vaut* 1 *si* $k$ *est un corps de nombres et* 0 *si* $k$ *est un corps de fonctions.*

C'est une conséquence directe du

Théorème de Blichfeldt adélique . *Soit* $\ell, n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$ *et* $\overline{E}$ *un fibré vectoriel adélique sur* $\operatorname{Spec} k$, *de dimension* $n \geq 1$. *Soit* $e \in E \otimes k_{\mathbf{A}}$. *Soit* vol *une mesure de Haar sur* $(E_{\mathbf{A}}, +)$ *et* $\operatorname{covol}(E)$ *la mesure du quotient* $E_{\mathbf{A}}/E$ *induite par* vol. *Supposons que*

$$(\star) \qquad \ell \operatorname{covol}(E) < \operatorname{vol}(\mathbf{B}_{\overline{E}}(e,1)) \ .$$

*Alors il existe* $\ell + 1$ *points distincts* $e_0, \ldots, e_\ell$ *de* $\mathbf{B}_{\overline{E}}(e,1)$ *tels que, pour tous* $i, j \in \{0, \ldots, \ell\}$, *on a* $e_i - e_j \in E$. *Si* $k$ *est un corps de nombres, cet énoncé reste vrai lorsqu'il y a égalité dans* $(\star)$.

Les démonstrations de ces résultats suivent de près celles du cas classique. Si $r = (r_v)_v \in k_{\mathbf{A}}$, on note $|r|_{\mathbf{A}}$ le produit (parfois nul) $\prod_v |r_v|_v^{n_v/[k:k_0]}$, appelé *module (normalisé)* de $r$. L'inégalité de van der Corput montre que, pour tout $r = (r_v)_v \in k_{\mathbf{A}}^{\times}$ tel que

$$|r|_{\mathbf{A}} > 2^{\delta} \left( \frac{\operatorname{covol}(E)}{\operatorname{vol}(\mathbf{B}_{\overline{E}}(0,1))} \right)^{\frac{1}{n[k:k_0]}} ,$$

il existe $x \in E \setminus \{0\}$ tel que $\|x\|_{\overline{E},v} \leq |r_v|_v$ pour toute place $v$ (variante du *premier théorème de Minkowski*). Plutôt qu'un seul $x$ on aimerait une base de $E$ et cela conduit à la notion de *minima successifs de* $\overline{E}$. La première propriété de la définition d'un fibré vectoriel adélique légitime une partie des trois définitions suivantes de minima successifs que l'on rencontre dans la littérature.

Définitions des minima successifs . Soit $i \in \{1, \ldots, n\}$. Le $i^{\text{ème}}$ *minimum (normalisé) relatif à* $\overline{E}$ est :

1) Selon Thunder **[24]** : la borne inférieure $\lambda_i(\overline{E})$ de l'ensemble des nombres réels positifs de la forme $|r|_{\mathbf{A}}$ où $r \in k_{\mathbf{A}}$ est tel que $E \cap \mathbf{B}_{\overline{E}}(0,r)$ contienne $i$ vecteurs $k$-linéairement indépendants.
2) Selon Bombieri & Vaaler **[2]** : la borne inférieure $\lambda_i^{\mathrm{BV}}(\overline{E})$ de l'ensemble des nombres réels positifs $\lambda$ tel que $E \cap \mathbf{B}_{\overline{E}}(0,r)$ contienne $i$ vecteurs $k$-linéairement indépendants où $r$ désigne l'adèle valant 1 aux places ultramétriques et $\lambda$ aux places archimédiennes.
3) Selon Roy & Thunder **[20]** et Vaaler **[25]** : la borne inférieure $\Lambda_i(\overline{E})$ des nombres réels $\lambda$ pour lesquels il existe une famille libre de $E$ à $i$ éléments et dont chaque élément est de hauteur normalisée plus petite que $\lambda$.

La définition 2) de Bombieri & Vaaler n'est possible que si $k$ est un corps de nombres (puisqu'elle requiert l'existence d'au moins une place archimédienne). Avoir trois définitions possibles et relativement naturelles pour les minima successifs peut sembler déroutante au début. De ces définitions découlent immédiatement les inégalités

$$(3) \qquad \forall i \in \{1, \ldots, n\}, \quad \Lambda_i(\overline{E}) \leq \lambda_i(\overline{E}) \leq \lambda_i^{\mathrm{BV}}(\overline{E}) \ .$$

Si $\overline{E}$ est pur on peut montrer que $\lambda_1(\overline{E}) = \Lambda_1(\overline{E})$. De plus, si $k = k_0$ alors les trois inégalités de (3) sont des égalités. Cela explique pourquoi dans le cas classique ($k_0 = \mathbf{Q}$) l'on n'a dégagé qu'une seule définition de minima successifs $\lambda_i(C, \Omega)$ (rappelée dans l'introduction, p. 12) car dans ce cas tout coïncide :

$$\Lambda_i(\Omega, \|.\|_C) = \lambda_i(\Omega, \|.\|_C) = \lambda_i^{\mathrm{BV}}(\Omega, \|.\|_C) = \lambda_i(C, \Omega) \ .$$

Mais l'exemple suivant, que m'avait suggéré Gaël Rémond, montre que ce fait ne s'étend pas en général aux minima autre que le premier si $k$ n'est plus le corps de base.

Exemple . Soit $k = \mathbf{Q}(\sqrt{2})$ et $w, w'$ ses deux places archimédiennes : $|a + b\sqrt{2}|_w = |a + b\sqrt{2}|$ et $|a + b\sqrt{2}|_{w'} = |a - b\sqrt{2}|$. Posons $r_0 := (1 + \sqrt{2})/2$. Soit $\overline{E}$ le fibré vectoriel adélique sur $k$ d'espace vectoriel $k^2$ et de normes :

$$\forall\,(x,y)\in k_v^2,\quad \|(x,y)\|_{\overline{E},v}:=\begin{cases}\max\{|x|_v,|y|_v/2\} & \text{si } v=w,\\ \max\{|x|_v,2|y|_v\} & \text{si } v=w',\\ \max\{|x|_v,|y|_v\} & \text{si } v \text{ est ultramétrique.}\end{cases}$$

Alors on a $\Lambda_1(\overline{E})=\lambda_1(\overline{E})=\lambda_1^{\mathrm{BV}}(\overline{E})=1$ tandis que $\Lambda_2(\overline{E})=1$, $\lambda_2(\overline{E})=\sqrt{r_0}$ et $\lambda_2^{\mathrm{BV}}(\overline{E})=r_0$.

Mentionnons que ces différents minima, même s'ils sont distincts en général, restent toutefois comparables, comme l'avaient remarqué avant nous Christensen & Gubler (voir lemme 2.11 de **[7]**). La comparaison fait intervenir le discriminant ou le genre de $k$ selon la caractéristique de $k$.

Grâce à l'inégalité d'Hadamard*, on montre facilement que le produit $\Lambda_1(\overline{E})\cdots\Lambda_n(\overline{E})$ est plus grand que $H_{\mathrm{n}}(\overline{E})/(\Delta_{\mathrm{n}}(\overline{E})\delta_{\mathrm{n}}(\overline{E}))^n$. Une majoration de ce produit est plus difficile à obtenir. Il s'agit pour l'essentiel d'un résultat de Bombieri & Vaaler **[2]** si $k$ est un corps de nombres et de Thunder **[24]** sinon.

Second théorème de Minkowski adélique . *Soit $\kappa:=2^{[k:\mathbf{Q}]}$ si $k$ est un corps de nombres et $\kappa$ le cardinal du plus grand corps fini inclus dans $k$ si $k$ est un corps de fonctions. Le produit des minima successifs de $\overline{E}$ vérifie*

$$\lambda_1(\overline{E})\cdots\lambda_n(\overline{E})\le\left(\kappa^n\frac{\mathrm{covol}(E)}{\mathrm{vol}(\mathbb{B}(\overline{E}))}\right)^{\frac{1}{[k:k_0]}}\delta_{\mathrm{n}}(\overline{E})^n\ .$$

Les résultats que nous venons de présenter sont les bases modernisées de la géométrie des nombres classique. Voici une version adélique d'un théorème plus récent de Henk **[14]** (2002) qui est un des pivots de **[G7]**.

Théorème de Henk adélique . *Soit $k$ un* corps de nombres *et $\overline{E}$ un fibré vectoriel adélique sur* Spec $k$, *de dimension $n\ge 1$. Alors, pour tout $r\in k_{\mathbf{A}}$, on a*

$$\mathrm{card}(E\cap\mathbf{B}_{\overline{E}}(0,r))<2^{3n[k:\mathbf{Q}]-n-1}\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{|r|_{\mathbf{A}}}{\lambda_i(\overline{E})^{[k:\mathbf{Q}]}}\right)\ .$$

## 5. Pentes maximales et inégalités de pentes

Dans le paragraphe 3, nous avons introduit la notion de pente d'Arakelov d'un fibré vectoriel adélique sur Spec $k$. Ici nous approfondissons un peu cette notion, avec le regard porté vers les applications diophantiennes. Ceci implique que nous n'évoquerons pas la famille de $n$ pentes associées à un fibré vectoriel adélique de dimension $n$, à l'exception de la première (la pente maximale). Bien que cette famille et ses propriétés constituent la « véritable théorie des pentes » mentionnée dans l'introduction, seule la première est utilisée actuellement dans les applications et dans nos articles diophantiens.

Le célèbre *théorème de Northcott* affirme que l'ensemble des droites $\{k.x\,;\ x\in E \text{ et } H_{\overline{E}}(x)\le a\}$ est fini, pour tout nombre réel $a$. De cet énoncé l'on déduit qu'il n'existe qu'un nombre fini de sous-fibrés vectoriels adéliques $\overline{F}$ de $\overline{E}$ tels que $\widehat{\mu}_{\mathrm{n}}(\overline{F})\ge a$. Cela justifie la définition suivante.

Définition . La *pente maximale* d'un fibré vectoriel adélique $\overline{E}$, notée $\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E})$, est le nombre réel

$$\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}):=\max\left\{\widehat{\mu}_{\mathrm{n}}(\overline{F})\ ;\ \overline{F}\subseteq\overline{E}\right\}\cdot$$

La pente maximale possède un certain nombre de propriétés intéressantes. Par exemple, elle se comporte presque comme un maximum vis-à-vis de la somme directe hermitienne† de deux fibrés vectoriels adéliques :

$$0\le\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}\oplus_2\overline{F})-\max\left\{\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}),\widehat{\mu}_{\max}(\overline{F})\right\}\le\log\max\left\{\Delta_{\mathrm{n}}(\overline{E})\delta_{\mathrm{n}}(\overline{E}),\Delta_{\mathrm{n}}(\overline{F})\delta_{\mathrm{n}}(\overline{F})\right\}\cdot$$

*Le déterminant d'une famille de $n$ vecteurs de $\mathbf{R}^n$ est plus petit que le produit des normes euclidiennes de ces vecteurs.

†La *somme directe hermitienne* $\overline{E}\oplus_2\overline{F}$ de $\overline{E}$ et $\overline{F}$ est l'espace vectoriel $E\oplus F$ muni des normes : pour tous $x\in E\otimes\mathbf{C}_v$, $y\in F\otimes\mathbf{C}_v$,

$$\|(x,y)\|_{\overline{E}\oplus_2\overline{F},v}:=\begin{cases}\max\{\|x\|_{\overline{E},v},\|y\|_{\overline{F},v}\} & \text{si } v \text{ est ultramétrique,}\\ \left(\|x\|_{\overline{E},v}^2+\|y\|_{\overline{F},v}^2\right)^{1/2} & \text{si } v \text{ est archimédienne.}\end{cases}$$

Une autre caractéristique très utile de la pente maximale est son comportement par rapport aux produits tensoriel et symétrique. Soit $\ell \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$ et $\overline{E}_1, \ldots, \overline{E}_\ell$ des fibrés adéliques *hermitiens* sur $\operatorname{Spec} k$. La définition de la pente maximale et l'additivité de la pente d'Arakelov par rapport aux produits tensoriels hermitiens* permettent de montrer aisément que

$$\sum_{i=1}^{\ell} \widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}_i) \leq \widehat{\mu}_{\max}\left(\bigotimes_{i=1}^{\ell} \overline{E}_i\right) .$$

Il y a même égalité si $k$ est un corps de fonctions. Si $k$ est un corps de nombres, on conjecture qu'il y a encore égalité, ce qui démontrerait la conjecture de semi-stabilité de Bost†. Chen a démontré une inégalité inverse [**6**].

Théorème de Chen . *Soit* $\overline{E}_1, \ldots, \overline{E}_\ell$ *des fibrés adéliques* hermitiens *sur* $\operatorname{Spec} k$ *(*$k$ *corps de nombres). Alors on a*

$$\widehat{\mu}_{\max}\left(\bigotimes_{i=1}^{\ell} \overline{E}_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\ell} \left(\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}_i) + \log \dim E_i\right) .$$

La démonstration est difficile. L'on se ramène au cas *semi-stable* au moyen d'une version explicite d'un théorème de Ramanan & Ramanathan [**18**], cas que l'on traite ensuite au moyen de la théorie des invariants classique. Il est beaucoup plus élémentaire de démontrer une version plus faible de ce résultat où $\log \dim E_i$ est remplacé par $2(\dim E_i) \log \dim E_i$ (résultat de Bost dont une variante est démontrée dans **[G6]**). Décliné sous la forme d'un énoncé pour les puissance symétriques d'un fibré adélique hermitien $\overline{E}$ :

$$\widehat{\mu}_{\max}\left(S^\ell(\overline{E})\right) \leq \ell\left(\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}) + \log n\right) ,$$

ce type de résultat s'avère indispensable dans les applications en transcendance, car la puissance symétrique gouverne la partie « dérivation » des démonstrations (voir la seconde partie de ce mémoire).

Une des raisons d'être de la pente maximale est qu'elle apparaît dans plusieurs *inégalités de pentes*. Deux de ces inégalités sont particulièrement remarquables. La première affirme qu'étant donné un fibré vectoriel adélique $\overline{E}$ et un vecteur $x \in E \setminus \{0\}$, on a

$$H_{\overline{E}}(x) \geq e^{-\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E})} .$$

De démonstration immédiate à partir des définitions, cette inégalité est une reformulation savante du fait qu'un entier x non nul vérifie $|\mathsf{x}| \geq 1$. Ceci n'altère en rien sa profondeur, bien au contraire ! Pour énoncer l'autre inégalité, commençons par une définition. Soit $\overline{E}, \overline{F}$ des fibrés vectoriels adéliques sur $\operatorname{Spec} k$ et $\varphi : E \to F$ une application $k$-linéaire. La *hauteur de* $\varphi$ *relative à* $\overline{E}$ *et* $\overline{F}$, notée $h(\overline{E}, \overline{F}; \varphi)$ est la somme

$$h(\overline{E}, \overline{F}; \varphi) := \frac{1}{[k : k_0]} \sum_v n_v \log \|\varphi\|_v$$

($n_v = [k_v : (k_0)_v]$ est le degré local). La norme $\|\varphi\|_v$ est la norme d'opérateur de l'application induite $\varphi_v : E \otimes_k k_v \to F \otimes_k k_v$ et la somme ci-dessus ne comporte qu'un nombre fini de termes non nuls. Par la simple observation que l'inégalité $\|\varphi(x)\|_{\overline{F},v} \leq 1$ est satisfaite dès que $\|x\|_{\overline{E},v} \leq \|\varphi\|_v^{-1}$, on montre que si $\varphi$ est *injective* alors

$$\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}) \leq \widehat{\mu}_{\max}(\overline{F}) + h(\overline{E}, \overline{F}; \varphi) .$$

Il y a plusieurs façons d'étendre cette inégalité et l'une d'entre elles est au cœur de ce que l'on appelle *la méthode des pentes*. L'on considère une filtration

$$0 = F_N \subseteq F_{N-1} \subseteq \cdots \subseteq F_0 := F$$

d'un espace $F$ par des $k$-espaces vectoriels $F_i$. On ne suppose pas que $F$ est muni d'une structure de fibré vectoriel adélique. En revanche, chacun des espaces quotients $G_i := F_{i-1}/F_i$, $1 \leq i \leq N$, est

*Les difficultés pour définir un produit tensoriel de fibrés adéliques, évoquées au § 3, ne se rencontrent pas ici car les fibrés sont *hermitiens*.

†Un fibré vectoriel adélique $\overline{E}$ est dit *semi-stable* si la pente d'Arakelov normalisée de $\overline{E}$ est égal à sa pente maximale. La conjecture de Bost affirme que le produit tensoriel de deux fibrés adéliques hermitiens semi-stables est encore semi-stable.

muni de normes $\|.\|_{i,v}$ aux places de $k$ telles que $(G_i, (\|.\|_{i,v})_v)$ soit un fibré vectoriel adélique. Soit $\overline{E}$ un fibré vectoriel adélique sur $\operatorname{Spec} k$ de dimension $n$ et $\varphi : E \to F$ une application $k$-linéaire. On pose

$$\forall\, i \in \{1, \ldots, N+1\}, \quad E_i := \varphi^{-1}(F_{i-1}) \ .$$

Chacun des espaces $E_i$ est pourvu de la structure adélique $\overline{E_i}$ induite par $\overline{E}$. On pose $E_{N+1} := \{0\}$. Soit $\varphi_i : E_i \to G_i$ la composée de la restriction de $\varphi$ à $E_i$ et de la projection canonique $F_{i-1} \to F_{i-1}/F_i$.

Proposition . *Avec les notations ci-dessus, si $\varphi$ est injective alors*

$$\widehat{\mu}_{\mathrm{n}}(\overline{E}) \leq \sum_{i=1}^{N} \frac{\dim(E_i/E_{i+1})}{n} \left\{ \widehat{\mu}_{\max}(\overline{G_i}) + h(\overline{E_i}, \overline{G_i}; \varphi_i) \right\} + \log(\Delta_{\mathrm{n}}(\overline{E})\delta_{\mathrm{n}}(\overline{E})) \ \cdot$$

Pour être utilisée en approximation diophantienne, cette inégalité requiert un *mode d'emploi* (voir [**3**, **4**] ou [**G2**] par exemple).

## 6. Lemmes de Siegel avec contraintes

Le § 9 de la seconde partie rassemblera plusieurs lemmes de Siegel utilisés en transcendance. Dans ce paragraphe, nous présentons une généralisation du lemme de Bombieri & Vaaler, extraite de [**G7**], où l'on exige du petit vecteur que l'on produit de ne pas appartenir à un nombre fini de sous-espaces vectoriels. Plus précisément, soit $\overline{E}$ un fibré vectoriel adélique sur un *corps de nombres* $k$. Soit $M \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$ et $F, E_1, \ldots, E_M$ des sous-espaces vectoriels de $E$ de dimensions respectives $m, n_1, \ldots, n_M$. Par un argument élémentaire d'algèbre linéaire, la condition $\max\{n_1, \ldots, n_M\} < m$ entraîne $F \neq \bigcup_{i=1}^{M} E_i$. La question que l'on se pose alors est de trouver $x \in F \setminus \bigcup_{i=1}^{M} E_i$ de hauteur relative à $\overline{E}$ aussi petite que possible. Si $M = 1$ et $E_1 = \{0\}$ il s'agit du cas étudié par Bombieri & Vaaler [**2**] (voir p. 31). Toujours si $M = 1$ la réponse à la question est facile puisqu'il suffit de travailler avec le quotient $F/E_1 \cap F$ et d'appliquer le résultat précédent. Cet argument ne fonctionne plus avec plusieurs sous-espaces. Pour y remédier, nous nous sommes inspiré de la stratégie de Fukshansky, qui a déjà étudié ce problème dans un cadre plus restreint [**10**, **11**] (2006). Le principe est très simple. Étant donné un idèle $r = (r_v)_v \in k_{\mathbf{A}}^{\times}$, l'existence d'un vecteur $x \in F \setminus \{0\}$, de hauteur plus petite que le module normalisé $|r|_{\mathbf{A}}$, est garantie dès lors que l'on prend $x \neq 0$ dans l'intersection de $F$ et de la boule adélique $\mathbf{B}_{\overline{E}}(0, r) = \{x = (x_v)_v \in E \otimes_k k_{\mathbf{A}} \ ; \ \forall\, v, \ \|x_v\|_{\overline{E},v} \leq |r_v|_v\}$ de rayon $r$. Et si l'on veut que $x \notin \bigcup_{i=1}^{M} E_i$, il suffit de choisir $r$ de sorte que

$$\sum_{i=1}^{M} \operatorname{card}(E_i \cap \mathbf{B}_{\overline{E}}(0, r)) < \operatorname{card}(F \cap \mathbf{B}_{\overline{E}}(0, r)). \tag{4}$$

Ainsi tout le travail consiste à encadrer les cardinaux qui interviennent ici. Il s'agit de la variante adélique du problème classique de géométrie des nombres de l'évaluation du nombre de points d'un réseau ($F$) dans un corps convexe ($\mathbf{B}_{\overline{E}}(0, r)$), que nous avons abordé au § 4. La minoration de van der Corput du cardinal de $F \cap \mathbf{B}_{\overline{E}}(0, r)$ et la majoration de Henk* pour chacun des cardinaux des $E_i \cap \mathbf{B}_{\overline{E}}(0, r)$ apportent des réponses à ce problème. La condition (4) devient une contrainte polynomiale

$$\sum_{i=1}^{M} \left( a_i + b_i |r|_{\mathbf{A}}^{n_i - 1} + c_i |r|_{\mathbf{A}}^{n_i} \right) \leq |r|_{\mathbf{A}}^{m}$$

à laquelle doit satisfaire le module de $r$ (avec $a_i, b_i, c_i$ nombres réels positifs pour tout $i \in \{1, \ldots, M\}$). En observant que pour qu'une inégalité de la forme $\varkappa_1 + \ldots + \varkappa_{3M} \leq \varkappa$ soit satisfaite, il suffit que $\varkappa_i \leq \varkappa/(3M)$ pour tout $i \in \{1, \ldots, 3M\}$, l'on est parvenu à démontrer l'énoncé suivant.

Lemme de Siegel avec contraintes . *Soit $k$ un corps de nombres de degré $D$ et de discriminant absolu $D_k$. Soit $\overline{E}$ un fibré vectoriel adélique sur* $\operatorname{Spec} k$ *et $\overline{F} \subseteq \overline{E}$ un sous-fibré vectoriel adélique, de dimension $m$. Soit $M \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$ et $E_1, \ldots, E_M$ des sous-espaces vectoriels de $E$ de dimensions respectives $n_1, \ldots, n_M$. Posons*

$$H := \sqrt{41m} |D_k|^{1/2D} M^{1/mD} H_{\mathrm{n}}(\overline{F})^{1/m}$$

---

*Qu'il sied de retravailler pour remplacer les minima successifs des $E_i$ par leurs hauteurs et premiers minima seulement.

*et*

$$R := H \max_{1\leq i\leq M}\left\{1, \left(\frac{H^{n_i}(\Delta_{\mathrm{n}}(\overline{E_i})\delta_{\mathrm{n}}(\overline{E_i}))^{n_i}}{H_{\mathrm{n}}(\overline{E_i})}\right)^{\frac{1}{m-n_i}}, \left(\frac{H}{\lambda_1(\overline{E_i})}\right)^{\frac{n_i-1}{m-n_i+1}}\right\}$$

*(les trois termes entre accolades sont remplacés par 1 lorsque $n_i$ est nul). Supposons que $\max\{n_1,\dots,n_M\} < m$. Alors, pour tout $r = (r_v)_v \in k_{\mathbf{A}}^{\times}$ de module supérieur à $R$, il existe $x \in F \setminus \bigcup_{i=1}^{M} E_i$ tel que, pour toute place $v$ de $k$, on a $\|x\|_{\overline{E},v} \leq |r_v|_v$.*

En particulier, l'on peut trouver $x \in F \setminus \bigcup_{i=1}^{M} E_i$ tel que $H_{\overline{E}}(x) \leq R$. Si tous les $E_i$ sont nuls, cet énoncé redonne le théorème de Bombieri & Vaaler à la constante $\sqrt{41}$ près. On vérifie aisément qu'avec le fibré adélique hermitien standard $\overline{E} = (k^n, |.|_2)$ tous les termes $\Lambda_1(\overline{E_i}), H_{\mathrm{n}}(\overline{F}), H_{\mathrm{n}}(\overline{E_i})$ sont supérieurs à 1. De cette observation et du théorème, l'on déduit l'existence d'une fonction $c = c(n,m,M,D) > 0$ et d'un vecteur $x \in F \setminus \bigcup_{i=1}^{M} E_i$ tels que $H_{(k^n,|.|_2)}(x) \leq c\left(|D_k|^{m/2D}H_{\mathrm{n}}(\overline{F})\right)^{1/(m-s)}$ où $s := \max\{n_1,\dots,n_M\}$. À titre de comparaison, le théorème 3.1 de **[11]** donne la borne $H_{(k^n,|.|_2)}(x) \leq c|D_k|^{m/2D}H_{\mathrm{n}}(\overline{F})$. Le gain est particulièrement important lorsque tous les $E_i$ sont des droites. En effet, si $e_1,\dots,e_M \in E\setminus\{0\}$, le théorème ci-dessus assure l'existence de $x \in F \setminus \bigcup_{i=1}^{M} k.e_i$ tel que

$$H_{\overline{E}}(x) \leq H \max_{1\leq i\leq M}\left\{1, \frac{H}{H_{\overline{E}}(e_i)}\right\}^{\frac{1}{m-1}}.$$

Par une argumentation encore plus simple que celle qui a conduite au théorème ci-dessus, Rémond a montré un lemme de Siegel avec contraintes donnant un majorant uniforme en les $E_i$ (voir le § 3 de **[G7]** et les pages 115 à 117 de [**19**]) :

Lemme de Rémond . *Soit $\overline{E}, F, E_1,\dots,E_M$ comme ci-dessus. Supposons que $s = \max\{n_1,\dots,n_M\} < m$. Alors il existe $x \in F \setminus \bigcup_{i=1}^{M} E_i$ tel que $H_{\overline{E}}(x) \leq ((s+1)M)\lambda_{s+1}(\overline{F})$.*

De nature géométrique, cet énoncé a l'avantage de rester valide lorsque $k$ est un corps de fonctions (dans ce cas, on peut supprimer le terme $(s+1)M$). De plus, on pourrait obtenir un résultat plus général avec un ensemble algébrique de degré $M$ ne contenant pas $F$, à la place de $\bigcup_{i=1}^{M} E_i$.

# Bibliographie


[1] W. Blaschke. Über affine Geometrie VII : Neue Extremeigenschaften von Ellipse und Ellipsoid. *Ber. Vehr. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig Math.-Phys. Kl*, 69, 306–318, 1917.

[2] E. Bombieri et J. Vaaler. On Siegel's lemma. *Invent. math.*, 73(1) :11–32, 1983. Avec un addendum : *ibid.* 75(2) :377, 1984.

[3] J.-B. Bost. Périodes et isogénies des variétés abéliennes sur les corps de nombres (d'après D. Masser et G. Wüstholz). *Séminaire Bourbaki.* Volume 237 d'*Astérisque*, 115–161. Société Mathématique de France, 1996.

[4] J.-B. Bost. Algebraic leaves of algebraic foliations over number fields. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci*, 93 :161–221, 2001.

[5] J. Bourgain et V. Milman. New volume ratio properties for convex symmetric bodies in $\mathbf{R}^n$. *Invent. Math.*, 88(2) :319–340, 1987.

[6] H. Chen. Maximal slope of tensor product of Hermitian vector bundles. *J. Algebraic Geom.*, 18(3) :575–603, 2009.

[7] C. Christensen et W. Gubler. Der relative Satz von Schanuel. *Manuscripta Math.*, 126(4) :505–525, 2008.

[8] J.G. van der Corput. Verallgemeinerung einer Mordellsehen Beweismethode in der Geometrie der Zahlen. II. *Acta Arith.*, 2 :145-146, 1936.

[9] A. Defant et K. Floret. *Tensor norms and operator ideals*, volume 176 de *North-Holland Mathematics Studies.* North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1993.

[10] L. Fukshansky. Integral points of small height outside of a hypersurface. *Monatsh. Math.*, 147(1) :25–41, 2006.

[11] L. Fukshansky. Siegel's lemma with additional conditions. *J. Number Theory*, 120(1) :13–25, 2006.

[12] A. Grothendieck. Résumé des résultats essentiels dans la théorie des produits tensoriels topologiques et des espaces nucléaires. *Ann. Inst. Fourier Grenoble*, 4 :73–112, 1952.

[13] A. Grothendieck. Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires. Volume 16 de *Mem. Amer. Math. Soc.*, 1955. 140 p.

[14] M. Henk. Successive minima and lattice points. *Rend. Circ. Mat. Palermo (2) Suppl.*, 70(I) :377–384, 2002.

[15] F. John. Extremum problems with inequalities as subsidiary conditions. *Studies and Essays Presented to R. Courant on his 60th Birthday, January 8, 1948.* Interscience Publishers, Inc., New York, N. Y. p. 187–204, 1948.

[16] K. Mahler. Ein Übertragungsprinzip für konvexe Körper. *Casopis Pest. Mat. Fys.* 68, 93-102, 1939.

[17] V. Maillot. *Géométrie d'Arakelov des variétés toriques et fibrés en droites intégrables*, volume 80 de *Mémoire de la société mathématique de France.* S. M. F., 2000.

[18] S. Ramanan et A. Ramanathan. Some remarks on the instability flag. *Tohoku Math. J. (2)*, 36(2) :269–291, 1984.

[19] G. Rémond. Inégalité de Vojta en dimension supérieure. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)*, 29(1) :101–151, 2000.

[20] D. Roy et J.L. Thunder. An absolute Siegel's lemma. *J. Reine angew. Math.*, 476 :1–26, 1996. Addendum et erratum, *ibid.*, 508 :47–51, 1999.

[21] R. Rumely, C.F. Lau et R. Varley. *Existence of the sectional capacity*, volume 145, no 690, de *Memoirs of the American Mathematical Society.* A.M.S., 2000.

[22] R.A. Ryan. *Introduction to tensor products of Banach spaces.* Springer Monographs in Math. Springer-Verlag London Ltd., 2002.

[23] L.A. Santaló. Un invariante afin para los cuerpos convexos del espacio de $n$ dimensiones. *Portugal Math.* 8 (1949), 155–161.

[24] J.L. Thunder. An adelic Minkowski-Hlawka theorem and an application to Siegel's lemma. *J. reine angew Math.*, 475 :167–185, 1996.

[25] J.D. Vaaler. The best constant in Siegel's lemma. *Monatsh. Math.*, 140(1) :71–89, 2003.

[26] S. Zhang. Positive line bundles on arithmetic varieties. *J. Amer. Math. Soc.*, 8(1) :187–221, 1995.

# Théorie des formes linéaires de logarithmes

## 7. Introduction

Peu après qu'Hermite eut démontré en 1873 la transcendance de la constante de Néper $e = 2,71\dots$, les travaux de Lindemann (1882, [**38**]) et de Weierstraß (1885, [**61**]) aboutirent à l'énoncé suivant.

Théorème de Lindemann-Weierstrass . *Soit* $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ *des nombres algébriques* distincts *et* $\beta_1, \dots, \beta_n$ *des nombres algébriques non tous nuls. Alors on a* $\beta_1 e^{\alpha_1} + \cdots + \beta_n e^{\alpha_n} \neq 0$.

Par contraposée, ce résultat entraîne la transcendance de $\pi$ (car $e^{i\pi} + 1 = 0$) et plus généralement de toute détermination $\log\alpha$ du logarithme d'un nombre algébrique $\alpha$ non nul. Ces conséquences ont conduit Hilbert à proposer au congrès international des mathématiciens de Paris en 1900 le problème suivant, 7ème sur la fameuse liste des 23 :

Septième problème d'Hilbert . *Soit* $\alpha \in \overline{\mathbf{Q}} \setminus \{0\}$ *et* $u$ *un logarithme non nul de* $\alpha$. *Soit* $\beta \in \overline{\mathbf{Q}} \setminus \mathbf{Q}$. *Alors* $\alpha^\beta := e^{\beta u} \notin \overline{\mathbf{Q}}$.

On peut reformuler cette question en termes d'indépendance linéaire de logarithmes : *Soit* $u_1, u_2 \in \mathbf{C}$ *tels que* $e^{u_1}, e^{u_2} \in \overline{\mathbf{Q}}$. *Alors la famille* $\{u_1, u_2\}$ *est* $\mathbf{Q}$*-libre si et seulement si elle est* $\overline{\mathbf{Q}}$*-libre.* À l'époque, cet énoncé semblait inaccessible. Hilbert lui-même le présumait beaucoup plus difficile que le dernier théorème de Fermat ou l'hypothèse de Riemann ! Mais il se trompait et, en 1934, Gel'fond et Schneider résolurent indépendamment cette question*. L'année suivante, Gel'fond obtint même une minoration (qui n'est pas entièrement explicite) de $|\beta_1 u_1 + \beta_2 u_2|$ pour $\beta_1, \beta_2 \in \overline{\mathbf{Q}}$. Venait alors d'être déposée la première pierre de la *théorie des formes linéaires de logarithmes*, qui s'intéresse aux nombres de la forme $\beta_1 u_1 + \cdots + \beta_n u_n$ où $\beta_i \in \overline{\mathbf{Q}}$ et $(u_1, \dots, u_n)$ est le logarithme d'un point algébrique. Historiquement le point algébrique en question est un multiplet $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in (\overline{\mathbf{Q}} \setminus \{0\})^n$. Mais l'on peut regarder la question sous un angle beaucoup plus général.

Soit $G$ un groupe algébrique commutatif† défini sur $\overline{\mathbf{Q}}$, de dimension finie $g$, et $p \in G(\overline{\mathbf{Q}})$. Le groupe de Lie $G(\mathbf{C})$ possède un espace tangent à l'origine $t_G(\mathbf{C})$ (qui est un espace vectoriel de dimension $g$) et une application exponentielle $\exp_G : t_G(\mathbf{C}) \to G(\mathbf{C})$ surjective. Un logarithme $u$ du point $p$ est un vecteur $u \in t_G(\mathbf{C})$ tel que $p = \exp_G(u)$. Pour simplifier, nous avons convenu dès le départ que $G$ était défini sur $\overline{\mathbf{Q}}$ vu comme sous-corps de $\mathbf{C}$. En réalité nous pourrions plonger $\overline{\mathbf{Q}}$ dans $\mathbf{C}_\mathsf{p}$, le corps algébriquement clos qui joue le rôle de $\mathbf{C}$ dans la théorie des nombres $\mathsf{p}$-adiques (ici $\mathsf{p}$ est un nombre premier‡). Dans ce cas l'exponentielle $\exp_G : t_G(\mathbf{C}_\mathsf{p}) \to G(\mathbf{C}_\mathsf{p})$ n'est plus nécessairement surjective, ni même définie sur tout $t_G(\mathbf{C}_\mathsf{p})$. Mais l'on peut mimer la construction précédente en choisissant d'abord $u \in t_G(\mathbf{C}_\mathsf{p})$ de sorte que $\exp_G(u) = p$ existe et appartienne à $G(\overline{\mathbf{Q}})$. Il existe donc une théorie des formes linéaires de logarithmes $\mathsf{p}$-adiques, similaire à celle sur $\mathbf{C}$, à la fois pour les résultats et les techniques employées pour les obtenir. Une des différences, qui induit une difficulté supplémentaire, réside dans le rayon de convergence fini de l'exponentielle $\mathsf{p}$-adique. Dans la suite, nous n'évoquerons ce cas que par allusion, sans nous y attarder.

Revenons donc à notre point $p \in G(\overline{\mathbf{Q}})$ et à son logarithme $u \in t_G(\mathbf{C})$. La théorie des formes linéaires de logarithmes consiste à étudier la distance $\mathrm{d}(u, W_0)$ qui sépare $u$ d'un sous-espace vectoriel $W_0$ de $t_G(\mathbf{C})$, *défini sur* $\overline{\mathbf{Q}}$. Cette dernière hypothèse signifie qu'il existe une base $\mathsf{e} = (e_1, \dots, e_g)$ de $t_G(\overline{\mathbf{Q}})$ dans laquelle $W_0$ est le lieu d'annulation de formes linéaires de $\overline{\mathbf{Q}}^g$ : $z_1 e_1 + \cdots + z_g e_g \in W_0$ si et seulement si, pour tout $i \in \{1, \dots, t\}$, $\beta_{i,1} z_1 + \cdots + \beta_{i,g} z_g = 0$ ($\forall\, i, j$, $\beta_{i,j} \in \overline{\mathbf{Q}}$ et $t = g - \dim W_0$). Si l'on note $(u_1, \dots, u_g)$ les coordonnées de $u$ dans la base $\mathsf{e}$, il revient au même d'étudier $\mathrm{d}(u, W_0)$ ou $\max_{1 \le i \le t} \{|\beta_{i,1} u_1 + \cdots + \beta_{i,g} u_g|\}$. Le verbe *étudier* signifie expliquer quelles sont les raisons pour lesquelles l'on peut avoir $u \in W_0$ et, si ce n'est pas le cas, donner une minoration de $\mathrm{d}(u, W_0)$, en termes des invariants algébriques (hauteurs de $G, p, W_0$), analytique (norme de $u$) et des paramètres

*L'article de Gel'fond est paru le 1er avril 1934 et celui de Schneider le 28 mai. Bien que les deux méthodes soient différentes, elles sont *duales* l'une de l'autre *via* la transformée de Fourier-Borel, comme l'a expliqué Waldschmidt dans [**59**].

†Soit $k$ un corps commutatif. Un groupe algébrique sur $k$ est une variété algébrique sur $k$ munie de deux morphismes $\mu : G \times G \to G$ (addition) et $\iota : G \to G$ (inverse) de $k$-variétés et d'un élément neutre $0 \in G(k)$ tel que $(G, \mu, \iota, 0)$ vérifie formellement les axiomes d'un groupe. En termes plus concrets, si $k$ est algébriquement clos comme l'est $\overline{\mathbf{Q}}$ par exemple, et si $G$ est connexe, cela signifie que l'ensemble $G(k)$ est localement le lieu des zéros d'une famille d'équations polynomiales et qu'il est doté d'une structure de groupe.

‡Ne pas confondre le nombre $\mathsf{p}$ et le point $p = \exp_G(u)$.

secondaires comme les dimensions de $G$ et $W_0$ ou le degré absolu d'un corps de nombres dans lequel vivent tous les objets algébriques considérés. Pour qualifier une minoration de $\mathrm{d}(u, W_0)$, on parle aussi de *mesure d'indépendance linéaire de logarithmes*. Soit $\mathbf{G}_{\mathrm{a}}$ (*resp.* $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}$) le groupe algébrique additif (*resp.* multiplicatif). Les points $K$-rationnels de ces schémas en groupes sont $\mathbf{G}_{\mathrm{a}}(K) = (K, +)$ et $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}(K) = (K \setminus \{0\}, \times)$ respectivement (ici $K$ est un corps commutatif quelconque). Dans la problématique générale ainsi présentée, le cas étudié par Hermite et Lindemann est $G = \mathbf{G}_{\mathrm{a}} \times \mathbf{G}_{\mathrm{m}}$, $p = (\beta, e^u) \in G(\overline{\mathbf{Q}})$ et $W_0$ est l'hyperplan $z_1 = z_2$. De même, le cas étudié par Gel'fond est $G = \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^2$, $p = (e^{u_1}, e^{u_2}) \in G(\overline{\mathbf{Q}})$ et $W_0$ l'hyperplan $\beta_1 z_1 + \beta_2 z_2 = 0$. Ces deux cas concernent le cas dit *linéaire* où $G$ est un produit $\mathbf{G}_{\mathrm{a}}^{d_0} \times \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$ ($d_0, n \in \mathbf{N}$). Les logarithmes sont des nombres algébriques ou des logarithmes (au sens usuel) de nombres algébriques non nuls. À la suite des travaux de Gel'fond et Schneider, et pendant 30 ans, seuls quelques résultats fragmentaires concernant des groupes $G$ de petites dimensions ont été obtenus.

Et puis Alan Baker est arrivé ! En reprenant le travail de Gel'fond, il surmonta la principale difficulté située dans la partie analytique de la démonstration, difficulté semblable à celles qui apparaissent lors du passage d'une à plusieurs variables en analyse complexe. Par une méthode ingénieuse, conçue au milieu des années soixante et qu'il perfectionna ensuite, il obtint le fameux théorème :

THÉORÈME DE BAKER . *Soit $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$ et $u_1, \ldots, u_n$ des nombres complexes tels que $e^{u_1}, \ldots, e^{u_n} \in \overline{\mathbf{Q}}$. Alors la famille $\{u_1, \ldots, u_n\}$ est $\mathbf{Q}$-libre si et seulement si $\{1, u_1, \ldots, u_n\}$ est $\overline{\mathbf{Q}}$-libre.*

La méthode de Baker permet aussi d'obtenir des énoncés quantitatifs, c.-à-d. des minorations explicites de $\mathrm{d}(u, W_0)$ (le groupe algébrique sous-jacent est le groupe linéaire $\mathbf{G}_{\mathrm{a}} \times \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$). La théorie resta cantonnée pendant une quinzaine d'années au cas d'un groupe linéaire. Wüstholz* puis Philippon développèrent alors un outil fondamental, appelé *lemme de multiplicités*, obtenu par le biais de l'algèbre commutative, qui permit de généraliser en partie les théorèmes de Baker *et al.* à un groupe algébrique commutatif quelconque (cadre dans lequel nous avons posé la problématique, quelques lignes plus haut). L'énoncé de Baker ci-dessus est un cas particulier du résultat suivant [**62**, **64**].

THÉORÈME DE WÜSTHOLZ . *Soit $G$ un groupe algébrique commutatif défini sur $\overline{\mathbf{Q}}$ et $u \in t_G(\mathbf{C})$ tel que* $\exp_G(u) \in G(\overline{\mathbf{Q}})$. *Alors le plus petit sous-espace vectoriel de $t_G(\mathbf{C})$ défini sur $\overline{\mathbf{Q}}$ et qui contient $u$ est l'espace tangent à l'origine d'un sous-groupe algébrique (connexe) de $G$, défini sur $\overline{\mathbf{Q}}$.*

Le lien avec le théorème de Baker repose sur le fait qu'un sous-groupe algébrique (connexe) de $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$ est défini par des équations monomiales $x_1^{b_1} \cdots x_n^{b_n} = 1$ où $(b_1, \ldots, b_n)$ parcourt un sous-groupe (saturé) de $\mathbf{Z}^n$.

Par ailleurs, je disais « généraliser en partie » pour l'aspect quantitatif car si les articles fondateurs de la théorie générale de Philippon & Waldschmidt [**46**, **47**] fournissent des minorations de $\mathrm{d}(u, W_0)$, ces dernières étaient nettement moins bonnes que les mesures déjà connues pour un groupe linéaire. Ces petits défauts de jeunesse ont depuis été supprimés en deux temps. Tout d'abord une amélioration spectaculaire a été obtenue dans les années quatre-vingt-dix grâce à une idée *géniale*† d'Hirata-Kohno [**31**, **32**]. Puis, la combinaison de cette idée avec un argument plus ancien de Chudnovsky a permis à David & Hirata-Kohno, pour un produit de courbes elliptiques [**21**, **23**], et au doctorant que j'étais, pour un groupe algébrique quelconque **[G1]**, de mettre la théorie générale à un niveau comparable à celui du cas linéaire.

En brossant succinctement ce tableau de la théorie des formes linéaires de logarithmes, nous avons dû omettre beaucoup de détails et de noms de personnes qui ont contribué à cette épopée (comme Ably, Anderson, Bertrand, Bosser, Brumer, Bugeaud, Cijsouw, Coates, Denis, Diaz, Dong, Fel'dman, Lang, Laurent, Loxton, Masser, Matveev, Mignotte, Nesterenko, van der Poorten, Ramachandra, Rémond, Stark, Shorey, Urfels, Villani, Yu). Les lecteurs intéressés par cette histoire peuvent consulter les livres de Baker [**5**], Baker & Masser [**6**] pour la période d'avant 1976, de

*Dans son habilitation (Wuppertal, 1983) !

†Cet adjectif se justifie à la fois par la simplicité et le caractère mystérieux de l'argument (sur lequel nous reviendrons au § 12.2). La modestie de l'auteure l'a conduite à mentionner les travaux de Fel'dman [**25**], de Masser [**39**] et de Reyssat [**48**] comme source d'inspiration.

Waldschmidt [**60**] et de Baker & Wüstholz [**7**] pour la période contemporaine. Avant d'énoncer les résultats que nous avons obtenus et de donner un aperçu des techniques employées, il peut être utile à ce stade de mentionner quelques données chiffrées.

**Les formes linéaires de logarithmes, combien de divisions ?** Sur environ 90 articles de la théorie des formes linéaires de logarithmes qui contiennent un résultat original*, 90% traite uniquement le cas d'une seule forme linéaire ($W_0$ hyperplan), 10% concerne le cas d'un groupe algébrique commutatif quelconque, 13% le cas d'une variété abélienne, 12% le cas d'un produit de courbes elliptiques, 22% le cas d'un groupe linéaire quelconque (commutatif), 33% le cas rationnel linéaire et 10% le cas de deux logarithmes usuels (comme dans le théorème de Gel'fond-Schneider). Le cas rationnel linéaire est le cas d'une puissance du groupe multiplicatif $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}$ et où de plus les coefficients des formes linéaires sont des entiers relatifs. Plus généralement le *cas rationnel* est celui où le sous-espace $W_0$ de $t_G(\mathbf{C})$ que l'on considère est l'espace tangent d'un sous-groupe algébrique de $G$. À travers ces pourcentages, l'on perçoit que la théorie des formes linéaires de logarithmes a longtemps été développée dans les directions qui mènent directement aux applications†. À ce titre, la popularité du cas rationnel linéaire, qui permet de minorer les expressions de la forme $|a_1^{b_1}\cdots a_n^{b_n}-1|$, $a_i, b_i \in \mathbf{Z}$, est emblématique. Mes travaux se situent de l'autre côté de la rive, moins explorée.

Reprenons les données du contexte général dans lequel nous avons formulé les problèmes posés par la théorie des formes linéaires de logarithmes. L'on dispose d'un groupe algébrique commutatif $G$ sur $\overline{\mathbf{Q}}$, d'un élément $u \in t_G(\mathbf{C})$ d'exponentielle $p = \exp_G(u)$ algébrique et d'un sous-espace vectoriel $W_0$ de $t_G(\mathbf{C})$, défini sur $\overline{\mathbf{Q}}$. Soit $\log a$ (*resp.* $\log b$) un nombre réel qui mesure la « taille » du couple $(p, u)$ (*resp.* de $W_0$). Le mot *taille* comprend à la fois la hauteur (logarithmique) des données algébriques $p$ et $W_0$ et la norme de $u$. Le lecteur néophyte peut trouver étrange d'appeler $\log a, \log b$ ce que l'on pourrait appeler plus simplement $a$ et $b$. La principale raison à cela est historique. Elle permet aussi de se souvenir que ces quantités mesurent des hauteurs *logarithmiques*. Nous allons donner quelques mesures clefs en fonction de $\log a$ et $\log b$ qui serviront de points de repères à la discussion qui va suivre. Mais auparavant il peut être utile de rappeler qu'une minoration de $\mathrm{d}(u, W_0)$ n'est acceptable que si elle est petite à la fois pour $\log a$ et pour $\log b$. Et là est l'enclouure car il est assez facile de fournir — même dans le cas d'un groupe algébrique commutatif quelconque — la minoration

$$\log \mathrm{d}(u, W_0) \geq -cb^2 \log a$$

(ici et dans toute la suite, $c$ est une constante qui ne dépend pas des paramètres qui entrent en ligne de compte pour $a$ et $b$, mais qui peut dépendre de la dimension de $G$, du degré d'un corps de nombres de définition des objets algébriques etc.). Une telle mesure, qui découle de l'inégalité de Liouville, est optimale en $\log a$ mais sa dépendance en $\log b$ la rend quasi-inutile pour les applications (sauf lorsque $b$ est très petit). Toutefois l'un de ses mérites est de rendre en partie crédible (la version simplifiée de) la

Conjecture de Lang-Waldschmidt . *Si $u \notin W_0 \otimes \mathbf{C}$ alors on a* $\log \mathrm{d}(u, W_0) \geq -c \log(ab)$.

Graal de la théorie, cette conjecture semble inaccessible aujourd'hui (d'autant qu'elle est liée à la *conjecture ABC*). Lorsque $W_0$ est un hyperplan et $u \notin W_0$, les meilleurs résultats connus sont les suivants ($g = \dim G$) :

1) Cas général : $\log \mathrm{d}(u, W_0) \geq -c(\log b)(\log a)^g(\log\log a)^{g+2}$ ([**G1**], 2005).
2) Cas rationnel général : $\log \mathrm{d}(u, W_0) \geq -c(\log b)^{g+1}(\log a)^g$ ([**G4**], 2007).
3) Cas rationnel elliptique C.M. : $\log \mathrm{d}(u, W_0) \geq -c(\log b)(\log a)^g$ ([**G3**] (avec Ably), 2003)
4) Cas rationnel linéaire : $\log \mathrm{d}(u, W_0) \geq -c(\log b)(\log a)^g$ (Philippon & Waldschmidt [**45**], Wüstholz [**63**], 1986)

Remarques .

---

*Postérieur à 1966 et l'on ne tient pas compte des survols ou des articles qui utilisent seulement ces résultats.

†Et elles sont nombreuses ! Dans ce texte, nous avons pris le parti de n'aborder aucune de ces applications car, d'une part, nous n'avons nullement contribué à cette aventure jusqu'à maintenant, et, d'autre part, comme l'écrit Lenstra [**37**], *in his innermost self he [the mathematician] will know that in the end his own work will turn out to have the widest application range, exactly because it was not done with any specific application in mind.*

(i) Dans la littérature ces résultats ne sont pas tous écrits avec $W_0$ de dimension quelconque (raison pour laquelle nous avons supposé $W_0$ hyperplan). Il en est ainsi de 1) (sauf pour un groupe algébrique linéaire, voir **[G5]**) et de 4).
(ii) La référence **[G4]** contient une hypothèse supplémentaire sur $u$ (qui ne doit pas être une période en un sens fort), que je saurais supprimer aujourd'hui avec les techniques de **[G5]**.
(iii) Le cas *elliptique C.M.* signifie que $G$ est une puissance d'une courbe elliptique à multiplication complexe.
(iv) Le résultat de Philippon & Waldschmidt est encore plus précis car l'on pourrait remplacer par $\log b$ par $\log(b/\log a)$.

Les mesures que nous venons d'écrire sont des conséquences de théorèmes beaucoup plus précis qui sont dans les articles originaux. En effet, écrire un résultat complet devient très rapidement ésotérique, en raison du nombre élevé de paramètres. Toutefois, voici, à titre d'exemple, un énoncé raisonnable dans sa technicité et conforme dans sa présentation à ceux que l'on trouve dans la littérature. Étant donné un nombre algébrique $\alpha$, on désigne par $h(\alpha)$ la hauteur de Weil logarithmique absolue de $\alpha$. Si $x$ est un nombre réel alors $[x]$ est la partie entière de $x$.

THÉORÈME (**[G5]**). *Soit $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$. Il existe une constante $c > 0$, qui ne dépend que de $n$, ayant la propriété suivante. Soit $k$ un sous-corps de nombres de $\mathbf{C}$, de degré $D$ sur $\mathbf{Q}$. Soit $t \in \{1, \ldots, n\}$ et*

$$(\beta_{i,j})_{\substack{1\le i\le t\\ 1\le j\le n}} \in \mathrm{M}_{t,n}(k)$$

*une matrice de rang* maximal $t$. *Pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, soit $u_j \in \mathbf{C}$ tel que $\alpha_j := e^{u_j} \in k$. Soit $b, a_1, \ldots, a_n, \mathfrak{e}$ des nombres réels strictement positifs tels que $\mathfrak{e} \ge e$,*

$$\forall\, j \in \{1, \ldots, n\}, \quad \log a_j \ge \max\left\{h(\alpha_j), \frac{\mathfrak{e}|u_j|}{D}\right\}, \qquad \log b \ge D \max_{\substack{1\le i\le t\\ 1\le j\le n}} \{1, h(\beta_{i,j})\}.$$

*Soit $\mathfrak{a}$ l'entier défini par*

$$\mathfrak{a} := \left[\frac{D}{\log \mathfrak{e}} \log\left(e + \frac{D}{\log \mathfrak{e}} + \log(a_1 \cdots a_n)\right)\right] + 1\ .$$

*Si $\{u_1, \ldots, u_n\}$ est une famille libre sur $\mathbf{Q}$ alors les formes linéaires de logarithmes*

$$\Lambda_i := \beta_{i,1}u_1 + \cdots + \beta_{i,n}u_n \quad (1 \le i \le t)$$

*ne sont pas toutes nulles et elles vérifient la minoration*

$$\log \max_{1\le i\le t} \{|\Lambda_i|\} \ge -c\mathfrak{a}^{1/t}(\log b + \mathfrak{a}\log \mathfrak{e}) \prod_{j=1}^{n} \left(1 + \frac{D\log a_j}{\log \mathfrak{e}}\right)^{1/t}.$$

Toutes ces mesures s'obtiennent au moyen de la méthode de Gel'fond-Baker, méthode que nous allons présenter avec les ingrédients qui la composent dans les paragraphes qui vont suivre. Auparavant, nous rappelons au lecteur que les exigences d'intelligibilité d'une *habilitation à diriger des recherches* nous ont conduit à ne pas préciser certaines données (choix des métriques par exemple). Nos textes publiés regorgent de détails techniques qui devraient satisfaire les plus exigeants de nos lecteurs !

## 8. Description succincte de la méthode de Gel'fond-Baker

La démonstration d'une mesure d'indépendance linéaire de logarithmes comporte plusieurs étapes. Le prototype d'une telle démonstration s'est simplifié au cours du temps, en particulier grâce aux progrès accomplis dans les années 80 avec les nouveaux lemmes de multiplicités de Wüstholz et Philippon. L'esquisse que nous présentons ici est un point de vue moderne, qui tient compte de la disponibilité d'outils performants et qui omet certaines difficultés techniques (comme le cas dit *périodique*).

Soit $k \subseteq \mathbf{C}$ un corps de nombres sur lequel sont définies toutes les données algébriques du problème. La démonstration ne met en jeu qu'un nombre fini de quantités algébriques supplémentaires. Par conséquent l'on peut choisir au préalable une extension $K/k$ dans lequel vivent tous les nombres algébriques considérés. Les moyennes sur les différentes places de $K$ que l'on fait au cours de la démonstration permettent de faire disparaître le degré relatif $[K : k]$ que l'on ne contrôle pas. Ceci étant fait, on commence par compactifier $G$ et à le plonger dans un espace projectif $\mathbf{P}_K^N$

au moyen d'un diviseur adéquat (compactification de Serre). On peut alors voir l'exponentielle de $G(\mathbf{C})$ comme une application analytique $\exp_G : \mathbf{C}^g \to \mathbf{P}^N(\mathbf{C})$, $z \mapsto (\Theta_0(z) : \cdots : \Theta_N(z))$, dont on connaît l'ordre de croissance analytique, plus petit que 2. Pour $G = \mathbf{G}_\mathrm{m}$, cette application est simplement $z \mapsto (1 : e^z) \in \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$. On construit un polynôme $P \in K[X_0, \ldots, X_N]$, homogène et de petite hauteur, tel que l'application $F : z \mapsto P(\Theta_0(z), \ldots, \Theta_N(z))$ s'annule à l'ordre $T_0$ le long de $W_0$ aux multiples $mu$, $m \in \{0, \ldots, S_0\}$ ($T_0$ et $S_0$ sont des entiers strictements positifs). Cette condition signifie que, pour tout $m \in \{0, \ldots, S_0\}$, pour toute base $(w_1, \ldots, w_d)$ de $W_0$, l'application $F_m : (z_1, \ldots, z_d) \mapsto F(mu + z_1w_1 + \cdots + z_dw_d)$ s'annule à l'ordre $T_0$ en $(0, \ldots, 0)$. Le principe de la méthode de Baker consiste à observer par un argument du type principe du maximum (pour une variable complexe) que si la distance $\mathrm{d}(u, W_0)$ est trop petite alors la fonction $F$ ainsi bâtie s'annule à un ordre $T_1 < T_0$ en $S_1 > S_0$ multiples de $u$. Le point crucial qu'a réussi à obtenir Baker est que le produit $T_1S_1$ est plus grand que $T_0S_0$ ; en général on a $T_1S_1 = c_0T_0S_0$ avec $c_0 \gg 1$ une constante qui ne dépend que de la dimension du groupe algébrique. Pour montrer cette propriété d'annulation de $F$ en d'autres points épaissis que ceux initialement utilisés pour sa construction, on raisonne par l'absurde. On considère le plus petit entier $m$ pour lequel $F_m$ ne s'annule pas à l'ordre $T_1$ en 0 et on note $\xi$ un coefficient de Taylor du premier jet de $F_m$ non nul. Après renormalisation éventuelle, ce nombre $\xi$ s'identifie à un nombre algébrique non nul, auquel s'applique la formule du produit $\prod_v |\xi|_v^{n_v} = 1$ ($v$ parcourt les places de $K$ et $n_v = [K_v : \mathbf{Q}_v]$ est le degré local). Pour obtenir une contradiction on majore chacune des valeurs absolues $v$-adiques de $\xi$, de manière suffisamment fine pour que le produit $\prod_v |\xi|_v^{n_v}$ soit strictement inférieur à 1. En général l'on distingue trois sortes de places : celles ultramétriques, celles archimédiennes et, mises à part, les places $v_0$ qui correspondent aux plongements complexes de $K$ qui étendent l'inclusion $k \subseteq \mathbf{C}$. La distance $\mathrm{d}(u, W_0)$ n'intervient que pour l'estimation de $|\xi|_{v_0}$. Sa petitesse influe directement sur celle de $|\xi|_{v_0}$ et l'on aboutit alors à une contradiction avec la formule du produit. Le nombre $\xi$ n'existe donc pas. Par conséquent la fonction $F$, construite nulle sur $\{0, \ldots, S_0u\}$ à l'ordre $T_0$ le long de $W_0$, s'annule également sur $\{0, \ldots, S_1u\}$ à l'ordre $T_1$. C'est à ce stade qu'entre en action (théoriquement, dans la pratique c'est plus compliqué) le lemme de multiplicités qui, après plusieurs transformations assez techniques, permet d'aboutir à une contradiction. C'est donc que la petitesse supposée de $\mathrm{d}(u, W_0)$ qui débouche sur la non-existence de $\xi$ est fausse, ce qui donne une minoration de cette distance. Si au départ $u \in W_0$, la démonstration fonctionne quand même mais la dernière étape où intervient le lemme de multiplicités n'aboutit pas à une contradiction mais à l'existence d'un sous-groupe algébrique $\widetilde{G}$ de $G$, de degré contrôlé et tel que $u \in t_{\widetilde{G}}(\mathbf{C})$ (version faible mais quantitative du théorème de Wüstholz). Cette démonstration simplifiée souffre de quelques inexactitudes dont une — sérieuse — est relative à l'emplacement du lemme de multiplicités dans la preuve. Ce lemme fournit l'existence d'un sous-groupe $\widetilde{G}$ de $G$ dont on contrôle le polynôme de Hilbert-Samuel. Mais si on l'utilise à la fin comme je l'ai affirmé, il n'est pas possible de se débarrasser du groupe $\widetilde{G}$ qui apparaît pour pouvoir conclure. Aussi l'astuce, mise en place par Philippon & Waldschmidt en 1986, consiste à intégrer dès le départ ce $\widetilde{G}$ dans la construction des paramètres et de la fonction $F$, comme si l'on raisonnait avec un simili groupe quotient $G/\widetilde{G}$. Si cette manière de procéder permet de surmonter brillamment l'obstacle technique, sans coût significatif pour la qualité de la mesure, elle contribue malheureusement à rendre un peu plus difficile la lecture de la démonstration pour les non-initiés. La structure globale de la démonstration étant présentée, nous allons maintenant détailler les outils qui aident à réaliser chacune des étapes.

## 9. Lemmes de Siegel

La plupart des démonstrations de transcendance requiert l'utilisation d'une fonction auxiliaire qui doit satisfaire à un nombre fini de conditions linéaires. En général il s'agit de conditions d'annulations en des points particuliers avec des ordres de multiplicités dans certaines directions (on parle parfois de « points épaissis »). Aux prémices de la théorie (travaux d'Hermite et Lindemann par exemple), on exhibait hardiment une fonction auxiliaire *explicite*. Toutefois sont rapidement apparues les difficultés et les limitations inhérentes à cette approche presque impudique*. En filigrane dans les articles de Thue [**53**, **54**], l'on doit à Siegel d'avoir conceptualisé en 1929 l'idée qu'il suffisait de connaître une estimation de la « taille » de la fonction auxiliaire. Le mot générique *taille*

*Cependant, ce procédé reste encore très actuel au travers par exemple des approximants de Padé et des fonctions hypergéométriques car, comme l'avait noté Chudnovsky, elle conduit souvent à de meilleurs résultats.

peut signifier la hauteur d'un polynôme à coefficients algébriques utilisé pour la construction de ladite fonction. Dans le contexte des formes linéaires de logarithmes (avec $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^g$ p. ex.), l'exemple typique de fonction auxiliaire est

$$F(z_1, \ldots, z_g) = P(e^{z_1}, \ldots, e^{z_g})$$

où $P \in \overline{\mathbf{Q}}[X_1, \ldots, X_g]$. Demander l'annulation de $F$ en un nombre fini de points épaissis équivaut à réclamer que les coefficients de $P$ satisfassent à un système linéaire

$$\forall\, i \in \{1, \ldots, m\}, \quad \sum_{j=1}^{g} a_{i,j} x_j = 0 \tag{5}$$

d'inconnues $x_1, \ldots, x_g$. Lors de l'étude de la transcendance des valeurs des fonctions de Bessel [**52**], Siegel formula l'énoncé précis suivant.

Lemme de Siegel . *Supposons que $m < g$ et que, pour tous $i, j$, on a $a_{i,j} \in \mathbf{Z}$. Soit $A = \max_{i,j}\{|a_{i,j}|\}$. Alors il existe une solution $(x_1, \ldots, x_g) \in \mathbf{Z}^g \setminus \{0\}$ au système* (5) *telle que*

$$\max\{|x_1|, \ldots, |x_g|\} \leq 1 + (gA)^{\frac{m}{g-m}}.$$

Ce résultat découle simplement du *principe des tiroirs de Dirichlet*. Comme l'a remarqué Mignotte, il est possible de l'étendre à un système à coefficients algébriques (voir lemme 1.3.1 de [**57**]). Cependant l'on s'est aperçu qu'un tel lemme n'était rien d'autre qu'une variante du *premier théorème de Minkowski* sur les corps convexes (voir la première partie, p. 18). Ce point de vue s'est révélé fécond en débouchant sur une version adélique du lemme de Siegel, démontré par Bombieri & Vaaler [**8**].

Lemme de Bombieri & Vaaler . *Soit $k$ un corps de nombres de discriminant absolu $D_k$. Soit $\overline{E}$ un fibré adélique hermitien sur* Spec $k$ *(*), de dimension $n \geq 1$. Alors il existe $x \in E \setminus \{0\}$ tel que*

$$H_{\overline{E}}(x) \leq \sqrt{n}\left(|D_k|^{1/(2[k:\mathbf{Q}])}\right) H_{\mathrm{n}}(\overline{E})^{1/n}$$

*(les hauteurs sont normalisées).*

Le lemme de Siegel original se retrouve en prenant $k = \mathbf{Q}$, $D_k = 1$ et $\overline{E} \subseteq (\mathbf{Q}^g, |.|_\infty)$ d'espace vectoriel sous-jacent $E$ défini par le système (5). Dans ce cas, la hauteur $H_{\overline{E}}(x)$ est la norme infinie de $x$, une fois les coordonnées de $x$ choisies entières et premières entre elles. Le lemme de Bombieri & Vaaler a connu un grand succès, à la fois grâce à sa simplicité et à sa précision (supérieure à la version de Mignotte p. ex.). Plusieurs développements de ce lemme existent. On peut demander que l'élément $x \in E \setminus \{0\}$ évite un nombre fini de sous-espaces vectoriels de $E$. Ceci constitue le fil directeur de notre article [**G7**], évoqué dans la première partie, § 6. Mais la variante la plus importante est celle qui permet de s'affranchir de la dépendance en le discriminant du corps de nombres. On recherche une solution $x$ non nulle non pas dans $E$ mais dans $E \otimes \overline{\mathbf{Q}}$. Un tel lemme de Siegel est dit *absolu*. Si le premier énoncé de ce type est dû à Roy & Thunder [**51**], nous présentons ici un raffinement signalé par David & Philippon [**24**], à partir d'une inégalité de Zhang relative aux minima successifs d'une variété arithmétique [**66**].

Lemme de Siegel absolu . *Soit $\overline{E}$ un fibré adélique hermitien sur* Spec $k$*, de dimension $n \geq 1$. Alors il existe $x \in (E \otimes \overline{\mathbf{Q}}) \setminus \{0\}$ tel que*

$$H_{\overline{E}}(x) \leq \sqrt{n} H_{\mathrm{n}}(\overline{E})^{1/n} .$$

L'énoncé de Roy & Thunder fournit $e^n$ au lieu de $\sqrt{n}$. Il existe une généralisation qui donne une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de $E \otimes \overline{\mathbf{Q}}$ telle que

$$H_{\overline{E}}(e_1) \cdots H_{\overline{E}}(e_n) \leq n^{n/2} H_{\mathrm{n}}(\overline{E}).$$

Afin de combler une lacune de la littérature qui ne fournit aucune démonstration de cet énoncé, nous prouvons cette inégalité dans l'appendice. Si, autrefois, dans les démonstrations de mesures d'indépendance linéaire de logarithmes, le discriminant du corps de nombres était absorbé par

---

*La notion de *fibré adélique hermitien sur* Spec $k$ est définie dans la première partie de ce mémoire, p. 14. Ici l'on peut suivre la discussion en sachant seulement que $\overline{E}$ est la donnée d'un $k$-espace vectoriel $E$ et de normes $\|.\|_{\overline{E},v}$ sur $E \otimes_k \mathbf{C}_v$ en toutes les places $v$ de $k$, qui doivent satisfaire certaines conditions supplémentaires.

des termes plus gros, aujourd'hui les mesures sont devenues assez fines pour que ce discriminant devienne un facteur limitant. Je m'en suis aperçu à l'occasion de ma thèse de doctorat (2001), ce qui m'avait obligé à formuler l'énoncé principal de **[G1]** au moyen d'un maximum sur deux quantités, dont l'une est directement due au discriminant de $k$. Comme il supprime cette imperfection, le lemme de Siegel absolu a pris une grande importance ces dernières années, ainsi que le prouve son utilisation dans plusieurs articles récents de la théorie des formes linéaires logarithmes [**23**] et **[G3,G4,G5]**. Le fait que l'on ne maîtrise pas le (degré du) corps de nombres dans lequel vit la solution $x$ est sans conséquence car, en définitive, l'on est amené à effectuer un produit sur les différentes places de ce corps, produit duquel émerge directement $H_{\overline{E}}(x)$. Néanmoins quelques soucis techniques peuvent surgir.

Tout d'abord, la hauteur de $\overline{E}$ peut s'avérer difficile à évaluer avec précision. Si, comme dans le lemme de Siegel original, l'espace vectoriel $E$ est défini par le système linéaire (5), la hauteur de $\overline{E}$ se calcule au moyen des mineurs maximaux de la matrice $\mathsf{A} := (a_{i,j})_{i,j}$. En général, on estime la taille de ces mineurs avec l'inégalité d'Hadamard (le déterminant d'une famille de vecteurs est plus petit que le produit des normes hermitiennes de ces vecteurs), qui, *in fine*, fait ressortir la hauteur des $a_{i,j}$. Il arrive souvent que les $a_{i,j}$ soient petits aux places archimédiennes (ce qui est très bien) mais avec un dénominateur trop grand aux places ultramétriques. L'astuce consiste alors à trouver un système

$$(6) \qquad \forall\, i \in \{1,\dots,m\}, \quad \sum_{j=1}^{g} b_{i,j}x_j = 0\ ,$$

équivalent à (5) et définissant ainsi le même espace vectoriel $E$, mais, où, cette fois-ci, les nombres algébriques $b_{i,j}$ sont petits aux places ultramétriques et de tailles quelconques aux autres places. Dans ce cas, la partie archimédienne de la hauteur de $\overline{E}$ est évaluée avec (5) et la partie ultramétrique avec (6). Cette technique fonctionne assez bien avec le procédé de changement de variables de Chudnovsky qui fournit un système (6) adéquat (voir § 10.2), au moins dans le *cas non périodique* que nous avons présenté*. Dans le *cas périodique*, le changement de variables n'est pas licite et le système linéaire qui en résulte n'est plus équivalent au premier.

Une autre difficulté est que les coefficients $a_{i,j}$ qui se présentent naturellement ne sont pas algébriques, même après renormalisation. Le système (5) ne possède alors en général aucune solution algébrique hormis $(0,\dots,0)$. C'est pourquoi il est plus raisonnable de demander au lemme de fournir une solution algébrique $(x_1,\dots,x_g)$ non nulle au système d'*inéquations*

$$(7) \qquad \forall\, i \in \{1,\dots,m\}, \quad \left|\sum_{j=1}^{g} a_{i,j}x_j\right| \leq \varepsilon$$

(ici $\varepsilon$ est un nombre réel strictement positif). Un énoncé qui garantit l'existence d'une solution algébrique à ce système d'inéquations est appelé *lemme de petites valeurs*. En voici un exemple, extrait de l'article de Philippon & Waldschmidt [**46**], qui a servi à la construction de la fonction auxiliaire de plusieurs articles marquants de la théorie des formes linéaires de logarithmes [**31**, **32**, **46**, **47**] (aussi utilisé dans **[G1]**) :

Lemme de petites valeurs . *Soit* $\mathsf{A} = (a_{i,j})$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq g$, *une matrice de nombres complexes et* $A$ *un nombre réel tel que* $\max_{1\leq i\leq m}\sum_{j=1}^{g}|a_{i,j}| \leq A$. *Soit* $\rho$ *le rang de* $\mathsf{A}$. *Soit* $H \in \mathbf{N}\setminus\{0\}$ *et* $\varepsilon \in ]0,+\infty[$ *tels que*

$$\left(\frac{2mHA}{\varepsilon}+1\right)^{2\rho} < (H+1)^g\ .$$

*Alors il existe* $(x_1,\dots,x_g) \in \mathbf{Z}^g\setminus\{0\}$ *tel que*

$$\max_{1\leq j\leq g}\{|x_j|\} \leq H \quad \textit{et} \quad \max_{1\leq i\leq m}\left\{\left|\sum_{j=1}^{g} a_{i,j}x_j\right|\right\} \leq \varepsilon\ .$$

---

*C'est-à-dire lorsque $u$ n'est pas une période en un sens assez fort et que l'on peut extrapoler sur les multiples de $u$.

Tout comme pour le lemme de Siegel original, la démonstration repose sur le principe des tiroirs. S'il est facile de généraliser à un corps de nombres au moyen d'une $\mathbf{Q}$-base $(\xi_1,\dots,\xi_D)$ de ce corps, ceci fait intervenir la hauteur de cette base. Et souvent, dans la pratique, le corps considéré est le corps de nombres dans lequel vivent tous les nombres algébriques de la démonstration. En particulier, pour les formes linéaires de logarithmes, la hauteur de $(\xi_1,\dots,\xi_D)$ est liée aux paramètres $\log a$ et $\log b$. Pour faire disparaître la dépendance en le corps de nombres ambiant, l'on peut imaginer écrire un lemme de petites valeurs *absolu*. J'étais resté sur cette constatation au moment de ma thèse de doctorat avant de m'apercevoir quelques années plus tard qu'un lemme de Siegel (classique ou absolu) donnait automatiquement un lemme de petites valeurs par *déformation des normes*. On procède de la manière suivante. Soit $k$ un corps de nombres plongé dans $\mathbf{C}$ et $v_0$ la place de $k$ induite par ce plongement. Soit $\overline{E}=(E,(\|.\|_{\overline{E},v})_v)$ et $\overline{F}=(F,(\|.\|_{\overline{F},v})_v)$ des fibrés vectoriels adéliques sur $\operatorname{Spec} k$. Soit $\varepsilon>0$ et $\mathsf{a}: E\otimes_{v_0}\mathbf{C}\to F\otimes_{v_0}\mathbf{C}$ une application $\mathbf{C}$-linéaire. Sur $E\otimes_{v_0}\mathbf{C}$, on considère la norme tordue :

$$\forall\, x\in E\otimes_{v_0}\mathbf{C},\quad \|x\|_{\overline{E}_\varepsilon,v_0} := \left(\|x\|^2_{\overline{E},v_0}+\left(\varepsilon^{-1}\|\mathsf{a}(x)\|_{\overline{F},v_0}\right)^2\right)^{1/2}.$$

Si $v$ est une place de $k$, différente de $v_0$, on pose $\|.\|_{\overline{E}_\varepsilon,v}:=\|.\|_{\overline{E},v}$. Alors le couple $\overline{E}_\varepsilon=(E,(\|.\|_{\overline{E}_\varepsilon,v})_v)$ forme un fibré vectoriel adélique. De plus, si $x\in E$, on a $H_{\overline{E}}(x)\le H_{\overline{E}_\varepsilon}(x)$ et $\|\mathsf{a}(x)\|_{\overline{F},v_0}\le\varepsilon\|x\|_{\overline{E}_\varepsilon,v_0}$. Dès lors, savoir majorer finement $H_{\overline{E}_\varepsilon}(x)$, pour un vecteur $x$ particulier, revient à établir un lemme de petites valeurs. Celui que nous avons présenté ci-dessus correspond au cas $\overline{E}=(\mathbf{Q}^g,|.|_\infty)$, $\overline{F}=(\mathbf{Q}^m,|.|_\infty)$ et $\mathsf{a}(x)=(\sum_{j=1}^g a_{i,j}x_j)_{1\le i\le m}$. L'emploi du lemme de Bombieri & Vaaler ou du lemme de Siegel absolu pour évaluer $H_{\overline{E}_\varepsilon}(x)$ pose le problème de l'estimation de la hauteur de $\overline{E}_\varepsilon$ en fonction de celles de $\overline{E}$, $\overline{\operatorname{Im}(\mathsf{a})}$ et du rang de $\mathsf{a}$. Pour simplifier, supposons que les normes $\|.\|_{\overline{E},v_0}$ et $\|.\|_{\overline{F},v_0}$ sont hermitiennes (hypothèses bénignes). Le choix de bases orthonormées sur $E\otimes_{v_0}\mathbf{C}$ et $F\otimes_{v_0}\mathbf{C}$ respectivement permet d'identifier l'application linéaire $\mathsf{a}$ à une matrice $\mathsf{A}\in\mathrm{M}_{m,g}(\mathbf{C})$. Pour tout $x\in E\otimes_{v_0}\mathbf{C}$ de coordonnées $\mathsf{x}=(x_1,\dots,x_g)$, on a

$$\|x\|_{\overline{E}_\varepsilon,v_0}=\left({}^{\mathrm{t}}\overline{\mathsf{x}}\mathsf{A}_\varepsilon\mathsf{x}\right)^{1/2}\quad\text{avec}\quad \mathsf{A}_\varepsilon:=\mathrm{I}_g+(\varepsilon^{-2})\,{}^{\mathrm{t}}\overline{\mathsf{A}}\mathsf{A}\ .$$

Puisque $\overline{E}$ et $\overline{E}_\varepsilon$ ne diffèrent qu'en la place $v_0$, la définition de la hauteur d'un fibré vectoriel adélique donne la formule

$$\frac{H_{\mathrm{n}}(\overline{E}_\varepsilon)}{H_{\mathrm{n}}(\overline{E})}=\left(\frac{\operatorname{vol}\left(\{\mathsf{x}\in k_{v_0}^g\ ;\ {}^{\mathrm{t}}\overline{\mathsf{x}}\mathsf{x}\le 1\}\right)}{\operatorname{vol}\left(\{\mathsf{x}\in k_{v_0}^g\ ;\ {}^{\mathrm{t}}\overline{\mathsf{x}}\mathsf{A}_\varepsilon\mathsf{x}\le 1\}\right)}\right)^{\frac{[k_{v_0}:\mathbf{R}]}{[k:\mathbf{Q}]}}\tag{8}$$

(vol est une mesure de Haar quelconque sur $(k_{v_0}^g,+)$). En vertu de la décomposition en valeurs singulières de $\mathsf{A}$, il existe des éléments $\sigma_1(\mathsf{A}),\dots,\sigma_\rho(\mathsf{A})$ de $]0,+\infty[$ et deux matrices orthogonales $U\in\mathbf{U}(m,k_{v_0})$ et $V\in\mathbf{U}(g,k_{v_0})$ tels que $U\mathsf{A}V$ est la matrice diagonale (non carrée) dont le $i^{\text{ème}}$ élément sur la diagonale est $\sigma_i(\mathsf{A})$ si $i\in\{1,\dots,\rho\}$ et $0$ si $i\in\{\rho+1,\dots,\min\{m,g\}\}$. Le quotient (8) se calcule en fonction de ces valeurs singulières :

$$\frac{H_{\mathrm{n}}(\overline{E}_\varepsilon)}{H_{\mathrm{n}}(\overline{E})}=\prod_{i=1}^{\rho}\left(1+\left(\frac{\sigma_i(\mathsf{A})}{\varepsilon}\right)^2\right)^{\frac{[k_{v_0}:\mathbf{R}]}{2[k:\mathbf{Q}]}}.$$

En particulier, si $\varepsilon\le 1$, on a

$$\frac{H_{\mathrm{n}}(\overline{E}_\varepsilon)}{H_{\mathrm{n}}(\overline{E})}\le\varepsilon^{-\frac{\rho[k_{v_0}:\mathbf{R}]}{[k:\mathbf{Q}]}}\left(1+\rho^{-1}\operatorname{tr}\left({}^{\mathrm{t}}\overline{\mathsf{A}}\mathsf{A}\right)\right)^{\frac{\rho[k_{v_0}:\mathbf{R}]}{2[k:\mathbf{Q}]}}.$$

Ces calculs et le lemme de Siegel absolu appliqué à $\overline{E}_\varepsilon$ conduisent au résultat suivant.

Lemme de petites valeurs absolu . *Soit $k$ un corps de nombres et $v_0$ une place archimédienne de $k$. Soit $\overline{E}$ et $\overline{F}$ deux fibrés adéliques hermitiens sur* $\operatorname{Spec} k$. *Soit $\mathsf{a}: E\otimes_{v_0}\mathbf{C}\to F\otimes_{v_0}\mathbf{C}$ une application $\mathbf{C}$-linéaire, de rang $\rho$, et de norme de Hilbert-Schmidt $\|\mathsf{a}\|_{\mathsf{HS}}$. Pour tout nombre* *réel* $\varepsilon > 0$, *il existe* $x \in (E \otimes \overline{\mathbf{Q}}) \setminus \{0\}$ *tel que*

$$\left(\varepsilon^2 + \left(\frac{\|\mathsf{a}(x)\|_{\overline{F},v_0}}{\|x\|_{\overline{E},v_0}}\right)^2\right)^{\frac{[k_{v_0}:\mathbf{Q}]}{2[k:\mathbf{Q}]}} H_{\overline{E}}(x)$$
$$\leq \sqrt{n}\left(\left(1+\rho^{-1}\|\mathsf{a}\|_{\mathsf{HS}}^2\right)^{\frac{\rho}{2n}} \varepsilon^{\left(1-\frac{\rho}{n}\right)}\right)^{\frac{[k_{v_0}:\mathbf{R}]}{[k:\mathbf{Q}]}} H_{\mathrm{n}}(\overline{E})^{\frac{1}{n}}$$

*avec* $n := \dim E$.

Cet énoncé s'étend sans grande difficulté pour une place $v_0$ ultramétrique ou des fibrés adéliques qui ne sont pas nécessairement hermitiens. Bien qu'un peu âpre, il s'avère assez facile d'utilisation. Une caractéristique importante est que l'exposant de $\varepsilon$ dans le membre de droite est proche de 1 lorsque le quotient $\rho/n$ est petit, ce qui est le cas dans le contexte des formes linéaires de logarithmes. Ce lemme de petites valeurs absolu est la cheville ouvrière de notre texte **[G5]**. Il permet de surmonter toutes les difficultés techniques évoquées ci-dessus* et l'on bénéficie de la disparition du discriminant de $k$. L'usage d'un lemme de petites valeurs n'est pas confiné à la théorie des formes linéaires de logarithmes. Il peut participer à la construction d'une fonction auxiliaire, en une variable complexe, petite sur tout un disque centré en l'origine (sans condition d'annulation). Parfois, cette stratégie se montre efficace, comme l'atteste par exemple l'article [**58**] de Waldschmidt, qui a formalisé ce type de construction à cette occasion.

L'on ne peut pas conclure ce paragraphe sans mentionner qu'il est possible de se passer d'un lemme de Siegel dans la démonstration d'une mesure d'indépendance linéaire de logarithmes. En effet, il existe la *méthode des déterminants d'interpolation* de Laurent et la *méthode des pentes* de Bost, qui ne requièrent aucune construction de fonction auxiliaire. La première de ces méthodes s'est révélée extrêmement intéressante pour les formes linéaires en deux logarithmes (travaux de Laurent *et al.* [**34–36**]) grâce à la petitesse des constantes numériques qu'elle fournit (alliée à la *méthode de Schneider-Waldschmidt*). L'autre méthode a permis au doctorant que j'étais d'obtenir les premières mesures d'indépendance linéaire de logarithmes sur une variété abélienne quelconque entièrement explicites en tous les paramètres (dont la hauteur de Faltings de la variété) **[G2]**. Pour ces deux méthodes la question du discriminant ne se pose pas car il n'apparaît pas, de manière naturelle. Aux constantes numériques près, toutes ces approches donnent en définitive la même estimation, pour ce qui nous concerne.

## 10. Outils ultramétriques

Toutes les démonstrations de transcendance exigent l'estimation de nombres algébriques aux places $\mathfrak{p}$-adiques (formule du produit). Parfois cette partie des preuves se résume à sa plus simple expression : le nombre algébrique en question est un entier relatif (par construction) et donc ses valeurs absolues $\mathfrak{p}$-adiques sont plus petites que 1. Il en est ainsi des nombres

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^{\ell} P(e^z, e^{bz})_{|z=0} \quad \text{et} \quad \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^{\ell} P(bz, e^z)_{|z=0}$$

où $\ell \in \mathbf{N}$, $b \in \mathbf{Z}$ et $P \in \mathbf{Z}[X, Y]$. Sous certaines hypothèses, l'on peut dire beaucoup mieux et c'est ce que nous allons expliquer dans les deux sections qui vont suivre.

**10.1. Tailles de sous-schémas formels et lemme de Raynaud.** Dans l'introduction, nous avons mentionné le fait que les mesures d'indépendance linéaire de logarithmes étaient meilleures lorsque l'espace vectoriel $W_0$ est l'espace tangent d'un sous-groupe algébrique connexe de $G$ (cas rationnel). En effet, dans ce cas l'on peut supprimer le terme parasite $\log\log a$ (lié à la hauteur du point $p$), qui est dans les mesures d'indépendances linéaires de logarithmes. Lorsque $G = \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^g$, l'hypothèse de rationalité de $W_0$ signifie que $W_0$ est défini par l'annulation de formes linéaires en les coordonnées canoniques de $t_G$ dont les coefficients sont *entiers relatifs*. Le cas rationnel le plus simple (mises à part les puissances du groupe affine $\mathbf{G}_{\mathrm{a}}$) est $G = \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^2$ et $W_0$ l'hyperplan défini par $z_2 = bz_1$, $b \in \mathbf{Z}$. Sous sa forme la plus dépouillée, le résultat clef qui permet d'exploiter l'hypothèse $b \in \mathbf{Z}$ dans la démonstration de Gel'fond-Baker est le suivant.

*Et, en particulier, les problèmes du cas périodique sont dissous.

Théorème . *Soit $P \in \mathbf{Z}[X,Y]$ et $\ell$ un entier naturel. Supposons que l'application analytique $z \mapsto P(e^z, e^{bz})$ s'annule à l'ordre $\ell$ en $0$. Alors le nombre*

$$\frac{1}{\ell!}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^{\ell} P(e^z, e^{bz})_{|z=0}$$

*est un entier relatif.*

Il y a au moins deux preuves assez différentes de ce résultat. La première utilise les polynômes binomiaux

$$\Delta_0(X) := 1, \quad \Delta_n(X) := \frac{X(X+1)\cdots(X+n-1)}{n!} \quad (n \in \mathbf{N}\setminus\{0\}) \tag{9}$$

qui prennent des valeurs entières aux points entiers. En considérant un monôme $X^iY^j$ qui intervient dans $P$ (avec le coefficient $p_{i,j} \in \mathbf{Z}$), la dérivée divisée $\ell^{\text{ème}}$ de $z \mapsto e^{(i+jb)z}$ en $0$ vaut $(i+jb)^{\ell}/\ell!$. On observe alors que ce terme est la somme de $\Delta_\ell(i+jb)$ et d'une combinaison linéaire des $(i+jb)^h$ avec $h < \ell$ dont les coefficients ne dépendent que de $\ell$. L'hypothèse d'annulation de $P$ se traduit alors par l'égalité

$$\frac{1}{\ell!}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^{\ell} P(e^z, e^{bz})_{|z=0} = \sum_{i,j} p_{i,j}\Delta_\ell(i+jb). \tag{10}$$

Le membre de droite est manifestement un entier, ce qui conclut la preuve. Aussi astucieux soit-il, ce procédé comporte néanmoins une limitation consubstantielle puisque $b$ ne peut être qu'un entier (ou au pire un nombre rationnel), faute de quoi il est difficile d'envisager une généralisation*. La seconde preuve du théorème que nous connaissons est basée sur un changement de variables. On pose $t = e^z - 1$. Comme $b \in \mathbf{Z}$, chacune des fonctions $e^{(i+jb)z} = (1+t)^{i+jb}$ appartient à l'anneau de séries formelles $\mathbf{Z}[[t]]$. Il en est donc de même pour $P(e^z, e^{bz})$. L'hypothèse sur $P$ et l'égalité $t = z + \mathrm{o}(z)$ font que $\frac{1}{\ell!}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^{\ell} P(e^z, e^{bz})_{|z=0}$ est le coefficient de $t^\ell$ dans la série définie par $P(e^z, e^{bz})$. C'est donc un entier. Contrairement à la démonstration précédente, cette méthode peut être généralisée à un groupe algébrique quelconque. Pour expliquer comment, nous allons décrire un formalisme particulièrement adapté aux évaluations ultramétriques de tailles de jets, introduit par Bost au § 3.1 de **[12]**. Le langage géométrique de ce formalisme, qui s'exprime en termes de « tailles de schémas formels lisses », éclaire le rôle exact joué par l'hypothèse sur $W_0$. Cependant une difficulté technique échappe à l'analyse du cas d'un tore telle que nous venons de la faire. Dans le cas général, si $W_0$ est l'espace tangent à l'origine d'un sous-groupe algébrique connexe $H$ de $G$, nous avons besoin de modèles lisses des groupes $G$ et $H$ sur des spectres d'anneaux de la forme $\mathcal{O}_k[1/m]$ avec $\mathcal{O}_k$ l'anneau des entiers d'un corps de nombres $k$ et $m$ un entier $> 0$. Si pour le groupe $G$ cela ne pose aucun problème (l'entier $m$ dépend de $G$ et il finira dans la *constante effective*†, selon l'expression consacrée), le groupe $H$, quant à lui, admet un modèle lisse mais sur un anneau plus « gros » $\mathcal{O}_k[1/(mm')]$ où $m'$ est un entier qui dépend de $H$ (et qui exprime en partie l'information en les places de mauvaises réductions de $H$). Par conséquent, il est important de contrôler l'entier $m'$ en fonction du modèle de $H$. Si le formalisme de Bost clarifie le problème, l'on doit à un théorème de Raynaud de le résoudre. Ce théorème donne une condition pour que l'inclusion entre variétés abéliennes se prolonge en une *immersion fermée* pour les modèles de Néron correspondants, et il permet un contrôle très précis de l'entier $m'$.

10.1.1. Nous rappelons la notion de *taille d'un sous-schéma formel lisse* telle qu'elle a été définie par Bost au § 3.1 de **[12]**. Soit $k$ un corps de nombres de définition de $G$ et $\mathcal{G} \to \operatorname{Spec}\mathcal{O}_k[\frac{1}{m}]$ un schéma en groupes lisse de fibré générique $G$. Soit $v$ une place ultramétrique de $k$ et $\mathsf{p}$ la caractéristique résiduelle de $v$. Si $v$ ne divise pas $m$, nous pouvons considérer le complété formel $\widehat{\mathcal{G}}_v$ de $\mathcal{G} \times \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_v)$ à l'origine ($\mathcal{O}_v$ étant l'anneau de valuation du complété $k_v$). C'est un groupe formel lisse sur $\operatorname{Spec}(\mathcal{O}_v)$ et le choix de coordonnées locales étales au voisinage de l'origine fournit

*Ceci étant, l'égalité (10) peut aussi être utilisée aux places archimédiennes de $k$, en lesquelles les polynômes binomiaux croissent plus lentement (en un sens à préciser) que les monômes divisés $X^\ell/\ell!$. Cette observation intégrée à la démonstration d'une mesure d'indépendance linéaire de logarithmes permet d'améliorer la dépendance en $\log b$, remplacé par $\log(b/\log a)$, dans le cas rationnel (voir remarques (iv), p. 28).

†Constante que l'on dit effectivement calculable et qu'effectivement l'on ne calcule presque jamais !

un isomorphisme de schémas formels (sur $\mathcal{O}_v$)

$$\widehat{\mathcal{G}}_v \simeq \widehat{\mathbf{A}}^g_{\mathcal{O}_v} := \operatorname{Specf} \mathcal{O}_v[[X_1, \dots, X_g]] \ .$$

Si $\mathfrak{X}$ est un sous-schéma formel lisse de $\widehat{G}_{k_v} \simeq \widehat{\mathcal{G}}_v \widehat{\otimes} \operatorname{Spec} k_v$, on dispose d'un nombre réel $R_{\mathcal{G},v}(\mathfrak{X}) \in [0,1]$, appelé *taille de $\mathfrak{X}$ relativement au modèle $\widehat{\mathcal{G}}_v$ de $\widehat{G}_{k_v}$*, défini de la manière suivante. Considérons l'image de $\mathfrak{X}$ (notée encore $\mathfrak{X}$) dans $\widehat{\mathbf{A}}^g_{k_v}$ *via* le choix de coordonnées précédent. Le groupe $\operatorname{Aut}(\widehat{\mathbf{A}}^g_{k_v})$ des automorphismes de $\widehat{\mathbf{A}}^g_{k_v}$ s'identifie à l'ensemble des $g$-uplets de séries formelles $f = (f_1, \dots, f_g) \in k_v[[X_1, \dots, X_g]]^g$ tels que $f(0) = 0$ et la matrice jacobienne $\mathrm{D}_0 f = (\partial f_i / \partial x_j(0))_{i,j}$ soit inversible. Pour $\varphi = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbf{N}^g} a_{\mathbf{n}} \mathbf{X}^{\mathbf{n}} \in k_v[[\mathbf{X}]]$ et $r > 0$, on note

$$\|\varphi\|_r := \sup_{\mathbf{n} \in \mathbf{N}^g} |a_{\mathbf{n}}|_v r^{|\mathbf{n}|} \in [0, +\infty]$$

et

$$G_\omega(r) := \left\{ f \in \operatorname{Aut}(\widehat{\mathbf{A}}^g_{k_v}) \, ; \, \mathrm{D}_0 f \in \mathrm{GL}_g(\mathcal{O}_v) \text{ et } \|f\|_r := \max_{1 \le i \le g} \|f_i\|_r \le r \right\} \ .$$

Alors, par définition, la taille de $\mathfrak{X}$ est

$$R_{\mathcal{G},v}(\mathfrak{X}) := \sup \left\{ r \in ]0,1] \, ; \, \exists \, f \in G_\omega(r) \, ; \, f^*(\mathfrak{X}) = \widehat{\mathbf{A}}^d_{k_v} \times \{0\} \right\}$$

où $d := \dim \mathfrak{X}$. La borne supérieure est prise dans $[0,1]$, ainsi $R_{\mathcal{G},v}(\mathfrak{X}) = 0$ si l'ensemble précédent est vide. Dans cette écriture, $f^*(\mathfrak{X})$ désigne l'image inverse de $\mathfrak{X}$ par $f$. Le nombre $R_{\mathcal{G},v}(\mathfrak{X})$ est strictement positif lorsque $\mathfrak{X}$ est analytique. Observons également que si $\mathfrak{X}$ provient d'un sous-schéma de $\mathcal{G} \times \operatorname{Spec} \mathcal{O}_v$, lisse le long de l'origine, alors $R_{\mathcal{G},v}(\mathfrak{X}) = 1$. Lorsque cette dernière condition de lissité n'est pas remplie, nous disposons parfois d'une estimation un peu meilleure que seulement $R_{\mathcal{G},v}(\mathfrak{X}) \geq 0$. Supposons que $\mathfrak{X}$ est le complété formel le long de l'origine d'un sous-groupe algébrique de $G_{k_v}$. Rappelons que le groupe formel $\widehat{\mathcal{G}}_v$ possède une exponentielle formelle qui, en termes des coordonnées $X_i$, s'écrit comme un $g$-uplet $\mathbf{E} = (E_1(\mathbf{X}), \dots, E_g(\mathbf{X}))$ de séries formelles de $k_v[[\mathbf{X}]]$, telles que les coefficients de $\mathbf{X}^{\mathbf{n}}$ ($\mathbf{n} \in \mathbf{N}^g$) de $E_1, \dots, E_g$ sont de la forme $\alpha_{\mathbf{n}}/\mathbf{n}!$ avec $\alpha_{\mathbf{n}} \in \mathcal{O}_v$. On peut normaliser cette exponentielle de sorte que la différentielle à l'origine $\mathrm{D}_0\mathbf{E}$ soit l'identité. Soit $r_{\mathsf{p}} = \mathsf{p}^{-1/(\mathsf{p}-1)}$. Le $g$-uplet $\mathbf{E}$ est un élément de $G_\omega(r_{\mathsf{p}})$ puisque $|\mathbf{n}!|_v \geq r_{\mathsf{p}}^{|\mathbf{n}|-1}$. Au moyen de cette application exponentielle, il est alors aisé de construire un automorphisme $f \in G_\omega(r_{\mathsf{p}})$ tel que $f^*(\mathfrak{X}) = \widehat{\mathbf{A}}^d_{k_v} \times \{0\}$. Ceci entraîne la minoration $R_{\mathcal{G},v}(\mathfrak{X}) \geq r_{\mathsf{p}}$ (pour toute place $v \nmid m$). Toutefois cette estimation n'est vraiment utile qu'en un nombre fini de places $v$ puisque le produit infini $\prod_{\mathsf{p}} r_{\mathsf{p}}$ diverge.

Revenons au cas d'un sous-schéma formel lisse $\mathfrak{X}$ quelconque de $\widehat{G}_{k_v}$. L'espace tangent à l'origine $t_{\mathfrak{X}}$ de $\mathfrak{X}$ est muni d'une structure entière en considérant le module

$$t_{\mathfrak{X}} \cap t_{\mathcal{G}_v} = \{ z \in t_{\mathfrak{X}} \subseteq t_G(k_v) \, ; \, \|z\|_v \leq 1 \}$$

sur l'anneau $\mathcal{O}_v$, ce qui confère à l'espace dual $t_{\mathfrak{X}}^{\mathsf{v}}$ puis à l'espace symétrique $S^\ell(t_{\mathfrak{X}}^{\mathsf{v}})$ de degré $\ell \in \mathbf{N}$ une norme notée $\|.\|_{S^\ell(t_{\mathfrak{X}}^{\mathsf{v}})}$.

Ces définitions conduisent alors directement au résultat suivant (lemme 3.3 de [**12**]).

Lemme . *Soit $\ell \in \mathbf{N}$, $\Omega$ un sous-schéma ouvert de $\mathcal{G}_v$ contenant la section nulle et $s$ une fonction régulière sur $\Omega$ telle que $s_{k_v}$ s'annule ainsi que ses dérivées d'ordre $< \ell$ le long de $\mathfrak{X}$ en l'élément neutre de $G_{k_v}$. Alors le jet $\operatorname{jet}^\ell_{\mathfrak{X}} s$ d'ordre $\ell$ le long de $\mathfrak{X}$ en $0$ — vu comme élément de $S^\ell(t_{\mathfrak{X}})^{\mathsf{v}}$ (*) — vérifie*

$$\|\operatorname{jet}^\ell_{\mathfrak{X}} s\|_{S^\ell(t_{\mathfrak{X}})^{\mathsf{v}}} \leq R_{\mathcal{G},v}(\mathfrak{X})^{-\ell} \ . \tag{11}$$

Lorsque $R_{\mathcal{G},v}(\mathfrak{X})$ vaut 1, le jet $\operatorname{jet}^\ell_{\mathfrak{X}} s$ est entier sur $\mathcal{O}_v$, ce qui procure un analogue local du théorème qui ouvre le § 10.1.

---

*C'est-à-dire, si l'on écrit $s(x) = F(z).s_0(x)$ où $x = \exp_v(z)$ et $F$ analytique dans un voisinage de 0 de $t_G(\mathbf{C}_v)$, on a $\operatorname{jet}^\ell_{\mathfrak{X}} s = \operatorname{jet}^\ell_{t_{\mathfrak{X}}} F(0).s_0$.

10.1.2. Dans le cadre qui nous intéresse ici, l'espace $W_0$ est l'espace tangent à l'origine d'un sous-groupe algébrique connexe $H \subseteq G$. Nous allons prendre pour $\mathfrak{X}$ le complété formel à l'origine $\widehat{H}_v$ du schéma $H \times \operatorname{Spec} k_v$. C'est un sous-schéma formel lisse de $\widehat{G}_{k_v}$. Quant à la section $s$, elle provient de la composée d'un polynôme homogène et de l'exponentielle de $G_{k_v}$ (vue à valeurs dans un espace projectif). De la sorte, la démonstration de Gel'fond-Baker nous amène à faire un produit des normes $\| \operatorname{jet}^{\ell}_{\widehat{H}_v} s\|_{S^{\ell}(W_0^{\vee}),v}$ en les différentes places $v$ de $k$. En vertu du lemme de Bost ci-dessus, cela revient à majorer la quantité $\chi_H$ définie comme la somme (finie en réalité)

$$\chi_H := \frac{1}{[k:\mathbf{Q}]} \sum_{\substack{v \nmid m \\ v \text{ ultramétrique}}} [k_v : \mathbf{Q}_{\mathsf{p}}] \log R_{\mathcal{G},v}(\widehat{H}_v)^{-1} \in \mathbf{R}^+ \cdot \tag{12}$$

Dans **[G4]**, nous avons montré l'estimation *uniforme* suivante.

LEMME . *Il existe une constante $c \geq 1$, qui ne dépend que de $G$ (en particulier indépendante du corps $k$ et du groupe $H$) telle que $\chi_H \leq c$.*

Cet énoncé est trivial pour les groupes algébriques linéaires car l'on dispose de la

PROPOSITION . *Soit $H$ un sous-groupe algébrique connexe de $\mathbf{G}_{\mathrm{a}}^{d_0} \times \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^{d_1}$, défini sur un corps de nombres $k_0$. Il existe un sous-schéma en groupes $\mathcal{H} \hookrightarrow \mathbf{G}_{\mathrm{a},\mathcal{O}_{k_0}}^{d_0} \times \mathbf{G}_{\mathrm{m},\mathcal{O}_{k_0}}^{d_1}$, lisse sur* $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{k_0}$ *et de fibre générique $H$.*

DÉMONSTRATION. Il suffit de traiter les cas $H \subseteq \mathbf{G}_{\mathrm{a}}^{d_0}$ et $H \subseteq \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^{d_1}$. Dans le premier cas, on choisit le fibré vectoriel $\mathbf{V}\left((t_H(k_0) \cap \mathcal{O}_{k_0}^{d_0})^{\mathsf{v}}\right)$. Dans le second cas, il existe un sous-groupe facteur direct $\Phi$ de $\mathbf{Z}^{d_1}$ tel que, si $M := \mathbf{Z}^{d_1}/\Phi$ et si $\mathbf{Z}[M]$ est la $\mathbf{Z}$-algèbre engendrée par $M$, on a $H = \operatorname{Spec} \mathbf{Z}[M] \times_{\operatorname{Spec} \mathbf{Z}} \operatorname{Spec} k_0$. On choisit $\mathcal{H} := \operatorname{Spec} \mathbf{Z}[M] \times_{\operatorname{Spec} \mathbf{Z}} \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{k_0}$, qui est lisse sur $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{k_0}$ car $M$ est sans torsion. □

Le *théorème de décomposition de Chevalley** que l'on applique à la composante neutre de $G$ ramène alors la difficulté aux variétés abéliennes. Le lemme ci-dessus apparaît alors comme une conséquence du théorème suivant de Raynaud, que l'on trouve comme corollaire du théorème 4 de **[9]**, § 7.5, p. 187.

THÉORÈME DE RAYNAUD . *Soit $k_0$ un corps de nombres et $H \subseteq G$ deux variétés abéliennes sur $k_0$. Soit $\mathcal{H}, \mathcal{G}$ leurs modèles de Néron respectifs sur $\mathcal{O}_{k_0}$. Soit $v$ une place finie de $k_0$, de caractéristique résiduelle $\mathsf{p}$ et d'indice de ramification $e((k_0)_v \mid \mathbf{Q}_{\mathsf{p}})$ (†). Si $e((k_0)_v \mid \mathbf{Q}_{\mathsf{p}}) < \mathsf{p} - 1$ et si $\mathcal{G}$ a bonne réduction en $v$ alors $\mathcal{H}$ a bonne réduction en $v$ et l'unique morphisme $\mathcal{H} \to \mathcal{G}$ issu de la propriété de modèle de Néron de $\mathcal{G}$ est une immersion fermée.*

Ainsi, dans la somme qui définit $\chi_H$, les places qui posent problème sont celles pour lesquelles l'indice de ramification plus un est plus grand que la caractéristique résiduelle $\mathsf{p}$, car pour les autres on a $R_{\mathcal{G},v}(\widehat{H}_v) = 1$. Comme $e((k_0)_v \mid \mathbf{Q}_{\mathsf{p}}) \leq [k_0 : \mathbf{Q}]$, les « mauvaises » places ont toutes leurs caractéristiques $\leq [k_0 : \mathbf{Q}] + 1$. Il n'y en a donc qu'un nombre fini, et, en ces places, on utilise la minoration simple $R_{\mathcal{G},v}(\widehat{H_v}) \geq \mathsf{p}^{-1/(\mathsf{p}-1)}$ évoquée un peu plus haut pour conclure.

10.1.3. En réalité, pour démontrer les théorèmes de **[G4]**, il n'est pas nécessaire d'avoir une estimation aussi fine de $\chi_H$. Lorsque nous laissons $\chi_H$ « indéterminé » au cours de la démonstration, nous constatons qu'il apparaît dans le facteur $\max\{1, h(W_0)\}$ (intervenant dans le paramètre $\mathfrak{a}$), qui devient alors $\max\{1, h(W_0), \chi_H\}$. Autrement dit, il suffirait de montrer l'existence d'une constante $c$ telle que $\chi_H \leq c \max\{1, h(W_0)\}$ pour obtenir *exactement* les mêmes énoncés que les théorèmes de **[G4]**. Et cela est possible de manière élémentaire sans avoir recours au résultat de Raynaud. La démarche consiste à se ramener comme ci-dessus au cas abélien puis à comparer la structure entière sur $t_B$ donnée par le modèle de Néron $\mathcal{B}$ de $B$ et celle donnée par le module saturé $t_B \cap t_{\mathcal{A}}$, à partir duquel se calcule la norme des jets le long de $t_B$. Le calcul du quotient $(t_B \cap t_{\mathcal{A}})/t_{\mathcal{B}}$ (‡) fournit

*Ce théorème stipule qu'un groupe algébrique commutatif connexe est une extension d'une variété abélienne par un groupe linéaire $\mathbf{G}_{\mathrm{a},k_0}^{d_0} \times \mathbf{G}_{\mathrm{m},k_0}^{d_1}$, après une éventuelle extension finie du corps de nombres de définition $k_0$ de $G$.

†De la sorte, si $\varpi$ est une uniformisante de l'anneau de valuation $\mathcal{O}_v \subseteq (k_0)_v$, l'idéal engendré par $\mathsf{p}$ est $(\varpi)^{e((k_0)_v \mid \mathbf{Q}_{\mathsf{p}})}$.

‡Voir, par exemple, **[10]**, p. 33.

alors une constante $c'$ telle que $\chi_H \leq c' \max\{1, \log\deg B\}$ où le degré est relatif à un plongement (quelconque) de $A$ dans un espace projectif. Il ne reste plus qu'à observer que $\log\deg B$ est du même ordre de grandeur que la hauteur de $t_B$ (*), elle-même majorée par $c'' \max\{1, h(W_0)\}$ pour une certaine constante $c''$.

**10.2. Procédé de changement de variables de Chudnovsky.** Comme nous venons de le voir avec $\frac{1}{\ell!}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^{\ell} P(e^z, e^{bz})_{|z=0}$, certaines propriétés des coefficients de Taylor de fonctions analytiques se dévoilent à l'occasion d'un changement de variables. Au paramètre $z$ sur l'espace tangent du groupe algébrique $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}$ s'est substitué le paramètre $t = e^z - 1$ sur le groupe algébrique lui-même. En soi, cette idée, bien que révolutionnaire, n'est pas nouvelle puisqu'il s'agit d'une version élémentaire du théorème d'inversion locale. Seulement ici le changement de variables modifie complètement les propriétés arithmétiques des coefficients de Taylor : $\frac{1}{n!}$ pour $t = e^z - 1$ et $\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ pour $z = \log(t+1)$. Pour illustrer la puissance de cette technique, nous allons démontrer l'énoncé suivant qui, bien que privé de toute généralité ici, incarne la substantifique moelle de l'ingrédient arithmétique essentiel des démonstrations de **[23]** et de **[G1,G2,G5]**.

Théorème . *Soit $P \in \mathbf{Z}[X,Y]$ de degré partiel $D_0$ en la variable $X$. Soit $\ell, b \in \mathbf{N}$. Soit $\delta_\ell(D_0)$ le ppcm des produits $m_1\cdots m_i$ où $(m_1,\ldots,m_i) \in (\mathbf{N}\setminus\{0\})^i$ est de longueur $m_1+\cdots+m_i$ inférieure à $\ell$ et $i \leq D_0$. Supposons que $\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^h P(bz, e^z)_{|z=0} = 0$ pour $h \in \{0,\ldots,\ell-1\}$. Alors on a*

$$\delta_\ell(D_0) \times \frac{1}{\ell!}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^{\ell} P(bz, e^z)_{|z=0} \in \mathbf{Z}\ .$$

*A priori* cet énoncé n'a rien d'évident. En effet, si $p_{i,j}$ désigne le coefficient de $X^iY^j$ de $P$, la formule de Leibniz donne l'égalité

$$\frac{1}{\ell!}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^{\ell} P(bz, e^z)_{|z=0} = \sum_{\substack{i,j\\ i\leq \ell}} p_{i,j}\frac{b^i j^{\ell-i}}{(\ell-i)!},$$

dont seul le dénominateur naïf $\ell!$ semble convenir. Par ailleurs, le *théorème des nombres premiers* fournit l'existence d'une constante absolue $c > 0$ telle que $\delta_\ell(D_0) \leq (cD_0)^\ell$. Aussi, lorsque $D_0$ est beaucoup plus petit que $\ell$, le dénominateur $\delta_\ell(D_0)$ est meilleur que $\ell!$.

Démonstration. Soit $t = e^z - 1$. Développons en série la fonction $z \mapsto P(bz, e^z)$ en la variable $t$ :

$$P(bz, e^z) = \sum_{i,j} p_{i,j} b^i \left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}t^m}{m}\right)^i (t+1)^j\ .$$

L'hypothèse d'annulation sur $P$ et le fait que $t = z + \mathrm{o}(z)$ permettent d'affirmer que $\frac{1}{\ell!}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^{\ell} P(bz, e^z)_{|z=0}$ est le coefficient de $t^\ell$ dans cette série. Ce coefficient est une somme de termes de la forme $q_i(m)/(m_1\cdots m_i)$ où $m = (m_1,\ldots,m_i) \in (\mathbf{N}\setminus\{0\})^i$ est de longueur $\leq \ell$ et $q_i(m) \in \mathbf{Z}$. Le théorème découle de cette observation et de la définition de $\delta_\ell(D_0)$. $\square$

Le nombre $\frac{1}{\ell!}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^{\ell} P(bz, e^z)_{|z=0}$ apparaît dans l'estimation des formes linéaires en *un* logarithme usuel sur $\mathbf{G}_{\mathrm{a}} \times \mathbf{G}_{\mathrm{m}}$, lorsque l'on veut minorer $|1 - b\log a|$ avec $a \in \overline{\mathbf{Q}}\setminus\{0\}$. Contrairement au résultat du § précédent, l'hypothèse $b \in \mathbf{N}$ est totalement superflue et l'on pourrait prendre $b$ ainsi que les coefficients de $P$ dans le corps des nombres algébriques (en adaptant la conclusion).

Les généralisations adéquates de cette méthode de changement de variables ont profondément fait évoluer plusieurs domaines de l'approximation diophantienne cette dernière décennie, dont la théorie des formes linéaires de logarithmes. L'on doit probablement à la thèse de P. Graftieaux (1998, **[28]**) d'avoir déclenché la reviviscence de ces techniques pour des groupes algébriques plus complexes que $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}$, comme les variétés abéliennes, techniques que l'on retrouve formalisées pour les courbes elliptiques à plusieurs endroits de l'œuvre des frères Chudnovsky **[14–16]**. Afin de mieux comprendre les solutions apportées aux complications techniques rencontrées lors de la mise en œuvre du changement de variables dans le cadre d'une variété abélienne, regardons tout d'abord l'analogue de la série logarithme usuelle $\log(1+t)$ pour une courbe elliptique $E$ sur un corps de nombres $k \subseteq \mathbf{C}$. Soit $\Lambda$ le réseau des périodes de $E(\mathbf{C})$ et $y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3$ un modèle de

*Voir, par exemple, le lemme 4.8 de **[G2]**.

Weierstraß de $E$. L'application exponentielle $\exp_E : t_E(\mathbf{C}) \to E \hookrightarrow \mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ peut être décrite au moyen des coordonnées $x, y$ :

$$\forall\, z \in t_E(\mathbf{C}), \qquad \exp_E(z) = \begin{cases} (1 : x : y) & \text{si } z \notin \Lambda, \\ (0 : 0 : 1) & \text{si } z \in \Lambda, \end{cases}$$

où $x, y$ et $z$ sont reliés par la fonction elliptique $\wp$ de Weierstraß

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}} \left( \frac{1}{(z-\lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2} \right)$$

*via* les formules $x = \wp(z)$ et $y = \wp'(z)$. La connaissance de $\exp_E$ repose sur celle des paramètres $t := \frac{-2x}{y}$ et $s := \frac{-2}{y}$. L'équation de Weierstraß fournit la relation $s = t^3 - \frac{g_2}{4} t s^2 - \frac{g_3}{4} s^3$, à partir de laquelle il est facile de voir que $s = \sum_{n \geq 3} a_n t^n$ avec $a_n \in R_E := \mathbf{Z}[\frac{g_2}{4}, \frac{g_3}{4}]$ de degré $\leq n$. Le quotient $t/s$ s'écrit $(\sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{a}_n t^n)/t^2$ avec $\widetilde{a}_n \in R_E$ et la forme différentielle $2\mathrm{d}z = \frac{\mathrm{d}x}{y} = -s\mathrm{d}(\frac{t}{s})$ appartient à $R_E[[t]]\mathrm{d}t$. Par intégration, la coordonnée locale $z$ sur l'espace tangent à $E(\mathbf{C})$ s'exprime comme une série en $t$ :

$$z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{2n} t^n$$

avec $b_n \in R_E$ de degré $\leq n$. Cette série est l'analogue de $\log(1+t)$ pour les courbes elliptiques. Elle est appelée *logarithme formel* du groupe formel à l'origine construit à partir de $E$ et de son modèle de Weierstraß. Le point important est que l'arithmétique des coefficients de ce logarithme, qui se lit sur $b_n$, est connue avec précision. On ne peut pas se contenter de savoir qu'ils sont dans un corps de nombres de définition de la courbe elliptique, comme c'est souvent écrit dans la littérature. Pour une variété abélienne $A$, les choses deviennent nettement plus compliquées pour au moins trois raisons. Il n'y a pas une unique équation aussi simple et explicite que l'équation de Weierstraß ; il n'y a pas de choix particulièrement évident pour les $g := \dim A$ paramètres locaux $t_1, \ldots, t_g$ qui généralisent le paramètre $t$ ; s'il est facile de voir que les coefficients du logarithme formel* sont de la forme $b_n/n$ avec $b_n$ dans un anneau $R_A = \mathbf{Z}[g_1, \ldots, g_m]$, $g_i \in k$, il est difficile de relier ces éléments (inconnus) $g_i$, qui dépendent de la variété abélienne, à un invariant comme la *hauteur de Faltings* ou une *hauteur thêta*† de la variété. La résolution de cette dernière difficulté n'est utile que si l'on veut *in fine* avoir une dépendance explicite en tous les invariants de $A$. Les deux premiers problèmes peuvent se résoudre finalement de manière assez simple avec un argument de type fonctions implicites où l'on surveille attentivement l'anneau engendré par les coefficients des polynômes qui remplacent l'équation de Weierstraß (voir lemme 13 de **[G1]**). En revanche, la troisième difficulté est beaucoup plus sérieuse. Il revient à Éric Villani d'avoir écrit dans sa thèse (2005, [**55**]) tous les détails qui conduisent à résoudre ce problème (pour les variétés abéliennes principalement polarisées), en s'appuyant sur les techniques introduites par David (thèse 1989, voir aussi [**20**] et l'appendice A de [**28**]). Bien qu'intéressante en soi et aussi pour la théorie des groupes formels associés aux variétés abéliennes, il me semble que cette question a un peu perdu de son attrait depuis que Bost a introduit sa fameuse théorie des pentes arakeloviennes, qui devient surpuissante lorsqu'elle est alimentée par des résultats profonds de géométrie d'Arakelov. Grâce à ces pentes, l'on peut déplacer une grande partie du problème de l'arithmétique des coefficients $b_n$ dans le calcul de la pente d'Arakelov de l'espace des sections globales d'un fibré ample et symétrique $L$ sur la variété $A$. Sans entrer dans les détails, en voici la fragrance.

Théorème de Bost . *Soit* $\overline{\mathrm{H}^0(A, L)}$ *le fibré adélique hermitien, de dimension* $\mathrm{h}^0(A, L)$, *obtenu au moyen d'un modèle de Moret-Bailly du couple* $(A, L)$. *Alors la pente d'Arakelov normalisée de ce fibré vaut*

$$\widehat{\mu}_{\mathrm{n}}(\overline{\mathrm{H}^0(A, L)}) = -\frac{1}{2} h_F(A) + \frac{1}{4} \log \frac{\mathrm{h}^0(A, L)}{(2\pi)^g}$$

*(*$h_F(A)$ *est la hauteur de Faltings de* $A$*).*

---

*Le logarithme formel du groupe formel obtenu à partir d'un groupe algébrique de dimension $g$ par complétion le long de l'origine s'identifie à un $g$-uplet de séries formelles en les paramètres $t_1, \ldots, t_g$.

†C.-à-d. quelque chose que l'on peut théoriquement calculer si l'on dispose d'une description suffisante de la variété.

Ce calcul (difficile) a été effectué par Bost [**11**]. Il repose sur les travaux de Moret-Bailly [**43**,**44**] et sur le théorème de Riemann-Roch de Gillet & Soulé [**27**]. Dans cette approche arakelovienne, la seule information nécessaire pour $b_n$ est que cet élément peut être choisi *entier algébrique via* le choix d'un modèle de Néron de $A$. La perte de précision que l'on s'autorise pour $b_n$ (par rapport à l'approche de David) est rattrapée par ce calcul de Bost. Ce tour de magie fait partie des charmes de la méthode des pentes ! Dans le second article issu de ma thèse de doctorat, j'ai montré comment cette approche pouvait être mise en œuvre dans le contexte des formes linéaires de logarithmes sur $A$. Néanmoins cet article comportait une hypothèse technique sur le point $p = \exp(u)$ (voir l'introduction), qui stipule qu'aucun des multiples entiers non nuls de $p$ ne doit appartenir à une sous-variété abélienne stricte de $A(\overline{\mathbf{Q}})^*$. Grâce au lemme de petites valeurs absolu que nous avons présenté au § 9 et qui est au cœur de notre texte [**G5**], nous pouvons maintenant supprimer cette hypothèse.

À travers cette discussion, il est apparu que si l'idée originale du changement de variables s'avère très fructueuse, sa mise en œuvre pour des groupes algébriques quelconques peut se réveler délicate, surtout dans la perspective de prendre en compte tous les invariants liés au groupe. Les travaux de David & Hirata-Kohno [**21**–**23**] ont résolus toutes les difficultés techniques pour une courbe elliptique (et donc aussi pour les variétés abéliennes produits de courbes elliptiques). Mais, pour le passage à une variété abélienne quelconque, et plutôt que de persévérer dans une approche « constructiviste », nos articles [**G2,G5**] témoignent que la théorie des pentes de Bost, éventuellement accompagnée du théorème de Moret-Bailly & Bost évoqué plus haut, est d'une aide précieuse pour déplacer puis dissoudre le problème !$^\dagger$

## 11. Lemmes d'interpolation analytique

Ce paragraphe traite de l'étape d'évaluation fine de la norme archimédienne du nombre algébrique $\xi$, qui apparaît dans la démonstration de Gel'fond-Baker (voir § 8). La description de la démonstration d'une mesure d'indépendance linéaire de logarithmes selon cette méthode a mis en lumière la nécessité de pouvoir donner une information sur les valeurs aux entiers d'une fonction holomorphe qui satisfait à certaines propriétés d'annulations. Pour mieux comprendre l'intérêt des lemmes d'interpolation qui vont suivre, il nous faut entrer un peu plus dans les détails de la preuve (les notations sont celles du § 8).

Après usage d'un lemme de Siegel et *via* une représentation analytique adéquate de $\exp_G$, l'on dispose d'une fonction holomorphe $F : \mathbf{C}^g \to \mathbf{C}$ telle que les dérivées de $F$ le long de $W_0$ à l'ordre $T_0$ en les multiples $mu$, $m \in \{0, \ldots, S_0\}$, sont nulles :

$$(13)\qquad \forall\, m \in \{0, \ldots, S_0\}, \quad \forall\, \tau \in \mathbf{N}^{\dim W_0} \text{ de longueur } \leq T_0, \quad \mathrm{D}^{\tau}_{W_0} F(mu) = 0.$$

Et l'on souhaiterait que ces dérivées soient encore nulles (ou, dans un premier temps, très « petites ») pour $m \in \{0, \ldots, S_1\}$ avec $S_1 > S_0$, quitte à diminuer l'ordre de dérivation, disons nulles jusqu'à l'ordre $T_1 < T_0$. Le problème est que l'on ne sait pas travailler efficacement avec des fonctions de plusieurs variables. L'on devrait donc s'intéresser à $f_0 : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, $z \mapsto \mathrm{D}^{\tau}_{W_0} F(zu)$, où $\tau \in \mathbf{N}^{\dim W_0}$ est de longueur fixée $\leq T_1$. Mais la nouvelle difficulté qui surgit est que les dérivées de $f_0$ :

$$\forall\, \ell \in \mathbf{N}, \quad f_0^{(\ell)}(z) = \mathrm{D}^{\ell}_{u} \mathrm{D}^{\tau}_{W_0} F(zu)$$

ne sont pas des dérivées de $F$ le long de $W_0$ mais le long de $W_0 + \mathbf{C}.u$ (et, *a priori*, $u \notin W_0$ puisque l'on cherche précisément à évaluer la distance $\mathrm{d}(u, W_0)$). Par conséquent, si l'on essaye de travailler avec $f_0$, on ne sait pas utiliser les équations (13). La solution de Baker consiste à choisir $w \in W_0$ tel que $\mathrm{d}(u, W_0) = \|u - w\|$ et à poser $f(z) = \mathrm{D}^{\tau}_{W_0} F(zw)$. La difficulté évoquée juste avant disparaît car $w \in W_0$ cette fois-ci. En revanche, les dérivées de $f$ : $f^{(\ell)}(z) = \mathrm{D}^{\ell}_{w} \mathrm{D}^{\tau}_{W_0} F(zw)$, ne s'annulent pas (*a priori*) pour $z \in \{0, \ldots, S_0\}$ et $\ell \in \{0, \ldots, T_0 - T_1\}$. L'inégalité des accroissements finis appliquée à la fonction d'une variable réelle $h : [0, 1] \to \mathbf{C}$ définie par

$$h(x) := \mathrm{D}^{\ell}_{w} \mathrm{D}^{\tau}_{W_0} F(mu + xm(w - u))$$

---

$^*$L'hypothèse écrite dans [**G2**] est un peu plus faible en réalité.

$^\dagger$Ce que, du reste, Graftieaux avait déjà montré avant nous, dans un autre contexte. Il est tout de même assez impressionnant d'observer la différence de lisibilité entre l'approche « paramètres effectifs » de sa thèse [**28**] et celle des articles [**29**, **30**] rédigés ensuite avec la méthode des pentes.

et les équations (13) permettent toutefois d'obtenir une majoration de la forme

$$\left|f^{(\ell)}(m)\right| \leq \mathrm{d}(u, W_0) \times (\text{un autre terme, gros mais pas trop}).$$

Nous sommes donc en présence d'une fonction holomorphe $f$ d'une variable complexe telle que $f^{(\ell)}(m)$ est petit pour $m \in \{0, \ldots, S_0\}$ et $\ell \in \{0, \ldots, T_0 - T_1\}$. L'on veut montrer que $f(m)$ est aussi petit pour $m \in \{S_0+1, \ldots, S_1\}$. C'est pour cette phase d'extrapolation qu'intervient un lemme d'interpolation. De tels lemmes existent depuis les débuts de l'analyse complexe avec la formule des résidus de Cauchy, dont la formule d'interpolation d'Hermite* suivante est une conséquence : soit $Q(z) := \prod_{m=0}^{S-1}(z-m)^T$, $\mathcal{C} \subseteq \mathbf{C}$ le cercle de centre 0 et de rayon $R \geq |z|$, et $\mathcal{C}_m$ le cercle de centre $m$ et de rayon $1/2$. Alors on a

$$\frac{f(z)}{Q(z)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}} \frac{f(x)}{Q(x)}\frac{\mathrm{d}x}{x-z} - \frac{1}{2\pi i}\sum_{m=0}^{S-1}\sum_{\ell=0}^{T-1}\frac{f^{(\ell)}(m)}{\ell!}\int_{\mathcal{C}_m}\frac{(x-m)^\ell}{Q(x)}\frac{\mathrm{d}x}{x-z}\,. \tag{14}$$

De cette formule découle le lemme d'interpolation suivant, extrait de l'article **[17]** de Cijsouw & Waldschmidt (1977). Si $x$ est un nombre réel positif et si $D(0,x)$ désigne le disque fermé $\{z \in \mathbf{C};\ |z| \leq x\}$, on note $|f|_x$ la borne supérieure des $|f(z)|$, $z \in D(0,x)$.

Lemme d'interpolation . *Soit $S \geq 2$ et $T$ des entiers naturels strictement positifs et soit $R \geq r \geq 2S$ des nombres réels. Soit $f$ une fonction analytique dans le disque $D(0,R)$. Alors on a*

$$|f|_r \leq 2|f|_R\left(\frac{2r}{R}\right)^{TS} + 5\left(\frac{9r}{S}\right)^{TS}\max_{\substack{0\leq \ell<T\\ 0\leq m<S}}\left\{\left|\frac{f^{(\ell)}(m)}{\ell!}\right|\right\}\,.$$

Dans le contexte qui nous intéresse ici, ce lemme s'applique avec $S := S_0 + 1$, $T := T_0 - T_1$, $r := 2S_1$ et $R := \mathfrak{e}r$, où $\mathfrak{e}$ est un paramètre libre $\geq e$. L'on voit que cet énoncé résout le problème de l'évaluation de $|f(m)| \leq |f|_r$. La petitesse de ce terme est donc conditionnée par celle de $\mathfrak{e}^{-T_2S_2}$ et celle de $\mathrm{d}(u, W_0)$ (qui contrôle le maximum à droite). Dans la pratique, comme nous l'avons dit au § 8, on raisonne par l'absurde en supposant que

$$\mathrm{d}(u, W_0) \leq \mathfrak{e}^{-T_2S_2}. \tag{15}$$

Ainsi $|f(m)|$ et l'élément algébrique $\xi$, qui est proportionnel à $f(m)$, sont petits. La formule du produit (qui ne s'applique qu'avec un nombre algébrique, d'où le passage par $\xi$) entraîne la nullité de $\xi$ puis de $f(m)$. Le lemme de multiplicités interdit cette possibilité, ce qui contredit (15). Une minoration de $\mathrm{d}(u, W_0)$ en découle.

Le lemme d'interpolation présenté ici est devenu un classique de la théorie des formes linéaires de logarithmes. Il existe plusieurs variantes. Par exemple, pour la démonstration des résultats que nous avons obtenu dans **[G3]** (avec Ably), nous avons utilisé un lemme d'interpolation de Masser (1978, [**39**,**40**]), qui permet de prendre les éléments $m$ dans un réseau de $\mathbf{C}$ (et non sur une droite, comme ci-dessus). En voici une version, extraite de l'article d'Ably [**1**].

Lemme d'interpolation pour un réseau . *Soit $\mathcal{O}$ un réseau de $\mathbf{C}$. Soit $S, T$ des entiers strictement positifs et $R, r$ des nombres réels tels que $R \geq 3r > 0$ et $r \geq S$. Soit $f$ une fonction analytique dans le disque $D(0,R)$. Alors il existe une constante $c = c(\mathcal{O}) > 0$, qui ne dépend que de $\mathcal{O}$, telle que*

$$|f|_r \leq |f|_R\left(\frac{3r}{R}\right)^{TS^2/c} + \left(\frac{cR}{S}\right)^{cTS^2}\max_{\substack{0\leq \ell\leq T\\ m\in\mathcal{O},\ |m|\leq S}}\left\{\left|\frac{f^{(\ell)}(m)}{\ell!}\right|\right\}\,.$$

Ce lemme est intéressant car le premier terme du membre de droite fait apparaître une petitesse en $\mathfrak{e}^{-TS^2/c}$ (en posant $\mathfrak{e} = R/3r$) meilleure que celle du lemme précédent, qui donnait $\mathfrak{e}^{-TS}$. En contrepartie le maximum à droite porte sur plus de termes. Ce lemme s'avère utile par exemple lorsque le groupe $G$ est la puissance d'une courbe elliptique $E$ (définie sur $\overline{\mathbf{Q}}$) à multiplication complexe. Ceci signifie que l'anneau des endomorphismes de $E$ est l'anneau des entiers d'un corps quadratique imaginaire. Il s'identifie alors à un réseau $\mathcal{O}$ de $\mathbf{C}$, qui agit sur l'espace tangent à $E$ en préservant la structure algébrique de cet espace. De la sorte, l'on peut extrapoler sur les

*L'interpolation d'Hermite consiste à trouver un polynôme dont les développements de Taylor en certains points à des ordres fixés (qui dépendent de ces points) sont donnés à l'avance. L'interpolation lagrangienne est le cas particulier où l'ordre est toujours nul.

multiples $mu$ avec $m \in \mathcal{O}$ dans la preuve de Gel'fond-Baker. Utiliser la multiplication complexe pour augmenter le nombre de points à disposition et améliorer ainsi la phase d'extrapolation est une idée due à Coates*.

Pour conclure ce paragraphe, nous allons évoquer une troisième variante de lemme d'interpolation qui s'applique dans le cas ultramétrique. Dans l'introduction, nous avons fait allusion à l'existence d'une théorie des formes linéaires de logarithmes $\mathsf{p}$-adique, analogue à la théorie archimédienne. Soit $\mathsf{p}$ un nombre premier et $\mathbf{C}_{\mathsf{p}}$ le complété topologique du corps valué $(\overline{\mathbf{Q}_{\mathsf{p}}}, |.|_{\mathsf{p}})$. Dans cette expression, $\mathbf{Q}_{\mathsf{p}}$ est le corps des nombres $\mathsf{p}$-adiques, $\overline{\mathbf{Q}_{\mathsf{p}}}$ est une clôture algébrique de $\mathbf{Q}_{\mathsf{p}}$ et $|.|_{\mathsf{p}}$ est la valeur absolue $\mathsf{p}$-adique sur $\mathbf{C}_{\mathsf{p}}$ normalisée par $|\mathsf{p}|_{\mathsf{p}} = \mathsf{p}^{-1}$. Soit $G$ un groupe algébrique commutatif défini sur un corps de nombres inclus dans $\mathbf{C}_{\mathsf{p}}$. Comme $\exp_G$ est de rayon de convergence fini en général†, le logarithme $u$ doit être pris dans une boule ouverte de $t_G(\mathbf{C}_{\mathsf{p}})$ centrée en l'origine. Une fois cette précaution prise, tout se déroule de la même manière que dans le cas complexe et l'on a besoin d'un lemme d'interpolation $\mathsf{p}$-adique. Les fonctions analytiques sur le corps valué ultramétrique complet et algébriquement clos $(\mathbf{C}_{\mathsf{p}}, |.|_{\mathsf{p}})$ jouissent de bonnes propriétés (principe du maximum en particulier), analogues à celles des fonctions holomorphes sur un ouvert de $\mathbf{C}$ (‡). Les travaux du *groupe de travail d'analyse ultramétrique*§ ont permis à Robba (sous l'impulsion de Bertrand) de donner un lemme d'interpolation $\mathsf{p}$-adique [**49**], qui ressemble à celui présenté ci-dessus dans le cas complexe. La démonstration repose sur une formule d'interpolation comparable à celle d'Hermite, mais avec une teneur plus formelle, les intégrales étant remplacées par des fonctionnelles. Récemment, en 2002, Roy s'est intéressé à ces questions et il a résolu quelques problèmes qui restaient en suspens. L'énoncé suivant est un cas très particulier du corollaire 1.2 de [**50**]. Si $x$ est un entier naturel, on note $\sigma_{\mathsf{p}}(x)$ la somme des chiffres de $x$ écrit en base $\mathsf{p}$.

LEMME D'INTERPOLATION $\mathsf{p}$-ADIQUE . *Soit $S, T$ des entiers strictement positifs et $R \geq r \geq 1$ des nombres réels. Soit*

$$\kappa := \frac{S - \sigma_{\mathsf{p}}(S)}{\mathsf{p} - 1} + \left[\frac{\log S}{\log \mathsf{p}}\right] \ .$$

*Soit $f : D(0,R) = \{z \in \mathbf{C}_{\mathsf{p}};\ |z|_{\mathsf{p}} \leq R\} \to \mathbf{C}_{\mathsf{p}}$ une fonction analytique. Alors on a*

$$|f|_r \leq \mathsf{p}^{\kappa T} \max \left\{ \left(\frac{r}{R}\right)^{(S+1)T} |f|_R,\ r^{(S+1)T} \max_{\substack{0 \leq \ell < T \\ 0 \leq m < S}} \left| \frac{f^{(\ell)}(m)}{\ell!} \right|_{\mathsf{p}} \right\} .$$

Ce résultat est utilisé lors des phases d'extrapolation de nos article **[G4,G5]**.

## 12. Artifices supplémentaires

Nous venons de présenter quelques ingrédients que l'on trouve dans les démonstrations de mesures d'indépendance linéaire de logarithmes. La liste n'est pas exhaustive et plusieurs thèmes n'ont pas été abordés, comme la théorie de Kummer, abondamment utilisée par Baker et plus récemment par Matveev [**41**]. Mais si le lecteur arrivé jusqu'ici connaît la méthode générale et les outils principaux, nous ne lui avons pas encore dévoilé les secrets de fabrication qui permettent d'avoir une *bonne* mesure. Car maintenant nous devons sortir du domaine de la raison pour pénétrer l'antre de la sorcellerie !

D'une manière générale, un des faits les plus mystérieux de la théorie est que l'on ne doit pas toujours travailler avec le groupe algébrique $G$ que l'on se donne au départ (voir l'introduction) mais avec une déformation de celui-ci. Si l'on ne procède pas à un certain « conditionnement » des données originales $(G, p, u, W_0)$, les mesures d'indépendance linéaire de logarithmes que l'on obtient sont souvent moins bonnes. La plupart du temps, la déformation du groupe $G$ consiste à lui attacher un groupe algébrique affine $G_0$ pour former le groupe $G_0 \times G$. Cela conduit à adapter les autres données $p, u, W_0$. Par exemple, l'on peut choisir $p_0 \in G_0(\overline{\mathbf{Q}})$ (de logarithme $u_0$)

*Qui, rappelons-le, est un élève de Baker ! Pour les historiens, la trace de cette idée est un texte non publié [**18**] de Coates (pour les courbes elliptiques), évoqué dans l'introduction des articles de Lang [**33**] (1975) et de Coates & Lang [**19**] (1976), qui traitent le cas plus général des variétés abéliennes C.M.

†Une exception est par exemple le groupe affine $\mathbf{G}_{\mathrm{a}}$ pour lequel $\exp_{\mathbf{G}_{\mathrm{a}}}(z) = z$.

‡Le lecteur intéressé par ces questions peut consulter le livre classique d'Amice [**4**] qui est une très belle introduction au sujet.

§Ce groupe de travail, animé par Y. Amice, A. Escassut et P. Robba, a eu lieu à Paris de 1973 à 1988.

et composer $q := (p_0, p) \in (G_0 \times G)(\overline{\mathbf{Q}})$. Ensuite l'on modifie $W_0$ de manière à avoir un sous-espace $W$ de $t_{G_0\times G}(\overline{\mathbf{Q}})$ et tel que le problème de l'évaluation de $\mathrm{d}(u, W_0)$ soit le même que celui de $\mathrm{d}((u_0, u), W)$. Nous verrons sur deux exemples tirés de nos articles **[G3,G4,G5]** comment l'on peut préciser ce concept général de déformation. Si, *a posteriori*, il est relativement aisé de comprendre les avantages et les désavantages d'avoir modifié les données de départ, la véritable compréhension de ce phénomène n'est pas encore élucidée.

**12.1. Poids de la droite affine.** La déformation la plus simple et qui est aussi la première à avoir été mise en œuvre consiste à ajouter $\mathbf{G}_\mathrm{a}$ au groupe $G$ et à considérer $\mathbf{G}_\mathrm{a} \times G$. Le point $p$ devient $q = (1, p) \in (\mathbf{G}_\mathrm{a} \times G)(\overline{\mathbf{Q}})$ (*) et $W_0$ est remplacé par $W = t_{\mathbf{G}_\mathrm{a}} \oplus W_0$. Il est clair que $\mathrm{d}((1, u), W) = \mathrm{d}(u, W_0)$. *A priori* cela ne semble pas faire évoluer le problème de la minoration de $\mathrm{d}(u, W_0)$, à cela près que maintenant l'on dispose d'une variable supplémentaire pour construire la fonction auxiliaire. Cela va constituer un atout incroyable. Pour simplifier la présentation et aussi parce que c'est l'exemple historique de Baker, prenons $G = \mathbf{G}_\mathrm{m}^n$. Le polynôme auxiliaire $P$ de la méthode de Gel'fond-Baker (voir § 8 et 9) appartient à $k[X_0, X_1, \dots, X_n]$ ($k$ corps de nombres $\subseteq \mathbf{C}$). Il est bâti de sorte que la fonction

$$F : (z_0, \dots, z_n) \in \mathbf{C}^{n+1} \mapsto P(z_0, e^{z_1}, \dots, e^{z_n})$$

satisfasse à des conditions d'annulation aux points $(m, mu)$ pour les entiers naturels $m \le S_0$ (†). La ruse, notée par Fel'dman à la fin des années soixante, est que rien ne nous oblige à choisir la base canonique des monômes de $k[X_0]$ pour écrire $P$ et que l'on a même intérêt à choisir une autre base ! Soit $(P_{i_0})_{i_0\in I}$ une famille libre finie de $k[X_0]$. Lorsque l'on écrit *a priori*

$$P = \sum p_i P_{i_0}(X_0) X_1^{i_1} \cdots X_n^{i_n}$$

($i = (i_0, \dots, i_n) \in \mathbf{N}^{n+1}$ et $p_i \in k$), de la démonstration de Gel'fond-Baker dans son ensemble se dégage une quantité mi-arithmétique mi-analytique qui mesure l'influence du choix de la famille $(P_{i_0})_{i_0\in I}$ sur la minoration finale de $\mathrm{d}(u, W_0)$ que l'on obtient. C'est ce que nous voulons évoquer par la terminologie *poids de la droite affine* (ou plus simplement « poids de $\mathbf{G}_\mathrm{a}$ »), concept que nous avons introduit dans **[G4]** (et présenté ici sous une forme très légèrement différente de celle de l'article original). On désigne par la lettre $h$ la hauteur de Weil logarithmique absolue.

Définition du poids . Soit $T, S$ des entiers naturels et $R \ge 0$ un nombre réel. Le *poids* de $\mathbf{G}_\mathrm{a}$ relatif à la famille $(P_{i_0})_{i_0\in I}$, aux paramètres $(T, S, R)$, est le nombre réel $\aleph((P_{i_0})_{i_0\in I})$ égal à

$$h\left(\left\{\frac{1}{\tau!}P_{i_0}^{(\tau)}(m),\ \begin{smallmatrix} i_0\in I \\ |m|\le S \\ 0\le\tau\le T\end{smallmatrix}\right\}\right) + \frac{1}{[k:\mathbf{Q}]}\log\max\left\{\max_{\substack{z\in\mathbf{C}\\|z|\le R}}\left|\frac{1}{\tau!}P_{i_0}^{(\tau)}(z)\right|;\ \begin{matrix} i_0\in I \\ 0\le\tau\le T\end{matrix}\right\}.$$

Si le premier terme embrasse plusieurs étapes de la démonstration de Gel'fond-Baker, le deuxième terme, quant à lui, ne concerne que la majoration analytique fine du nombre $\xi$ que l'on établit lors de la phase d'extrapolation. Le poids de $\mathbf{G}_\mathrm{a}$ est la grandeur résiduelle qui provient de l'introduction même du groupe $\mathbf{G}_\mathrm{a}$ dans la preuve. Plus il est petit, plus la mesure de $\mathrm{d}(u, W_0)$ que l'on obtient à la fin sera meilleure. Le nombre $m$ qui est dans la définition est un entier relatif. Mais lorsque $G$ est une puissance d'une courbe elliptique l'on peut prendre $m$ dans un réseau $\mathcal{O}$ de $\mathbf{C}$, lié aux endormorphismes de la courbe. Il me semble que le poids de $\mathbf{G}_\mathrm{a}$ tel qu'il est défini est une grandeur sous-jacente à un grand nombre de résultats sur les aspects quantitatifs de la théorie des formes linéaires de logarithmes. À ma connaissance, actuellement il n'existe pas de procédé pour construire une base $(P_{i_0})_{i_0\in I}$ qui soit la mieux adaptée aux données en minimisant le poids de $\mathbf{G}_\mathrm{a}$. Toutefois, Fel'dman a remarqué qu'il existait au moins une famille de tels polynômes qui convenaient mieux que les polynômes de la base canonique **[26]**. Elle provient des polynômes binomiaux que nous avons déjà rencontrés au § 10.1 (voir (9), p. 35) et se trouve à mi-chemin entre ces polynômes et ceux de la base canonique‡. Dans l'article **[G4]**, nous avons utilisé une variante de ces

*Il est préférable de choisir $(1, p)$ plutôt que $(0, p)$ afin de rendre le point $q$ moins vulnérable aux phénomènes de torsion modulo des sous-groupes particuliers $G'$ de $\mathbf{G}_\mathrm{a} \times G$ (à commencer par le sous-groupe nul, $q$ n'étant alors jamais de torsion). Cela est particulièrement important pour le lemme de multiplicité qui fait intervenir le cardinal du quotient $(\Sigma_q(S) + G'(\mathbf{C}))/G'(\mathbf{C})$ où $\Sigma_q(S) := \{0, q, 2q, \dots, Sq\}$.

†Rappelons qu'ici $u = (\log\alpha_1, \dots, \log\alpha_n)$ est un logarithme d'un point $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in (k \setminus \{0\})^n$.

‡Étant donné deux entiers $\alpha$ et $\beta$, la famille des polynômes de Fel'dman en question est $1, \Delta_\alpha(X+x)^y$, $0 \le x < \alpha$, $1 \le y \le \beta$. On vérifie qu'elle forme une base de l'espace des polynômes de degré $\le \alpha\beta + 1$.

polynômes, imaginée par Matveev, qui s'avère plus maniable au moment du choix des paramètres, tout en conservant les avantages de la base de Fel'dman. Étant donné $i_0, D_0^\flat, D_0 \in \mathbf{N}$, le polynôme de Matveev $\delta_{D_0^\flat}(X; i_0)$ est $\Delta_{D_0^\flat}(X)^q \Delta_r(X)$ où les entiers $q$ et $r$ sont respectivement les quotient et reste de la division euclidienne de $i_0$ par $D_0^\flat$. Le degré de $\delta_{D_0^\flat}(X; i_0)$ est $i_0$. Par conséquent, lorsque $D_0^\flat$ est fixé, la famille $\delta_{D_0^\flat}(X; i_0)$, $i_0 \in I := \{0, \ldots, D_0\}$, forme une base de $k[X]_{\leq D_0}$. On retrouve la base canonique en choisissant $D_0^\flat = 1$. L'intérêt d'une telle base peut se comprendre à partir du

Lemme technique . *Avec les notations ci-dessus, il existe une constante absolue $c \geq 1$ telle que*

$$\begin{aligned} &\aleph\left(\left(\delta_{D_0^\flat}(X; i_0)\right)_{i_0 \in I}\right) \\ &\leq c\left(D_0 \log\left(e + \frac{S}{D_0^\flat}\right) + \min(D_0, T) D_0^\flat + \frac{D_0}{D} \log\left(1 + \frac{R}{D_0^\flat}\right)\right) . \end{aligned} \tag{16}$$

La démonstration de ce lemme n'est pas très difficile. Elle découle des estimations sur les polynômes de Matveev qui sont données dans le livre de Waldschmidt [**60**], p. 269 et suivantes. Lorsque l'on choisit $D_0^\flat = 1$, l'on trouve une estimation du poids de la famille $(X^{i_0})_{i_0 \in I}$ :

$$\aleph((X^{i_0})_{i_0 \in I}) \leq c_0 D_0 \left(\log S + \frac{\log R}{D}\right) .$$

En comparant cette majoration avec (16), l'on comprend que l'on peut ajuster $D_0^\flat$ de manière à minimiser le poids de $\mathbf{G}_{\mathrm{a}}$. C'est grâce à ce *coup de maître* que Fel'dman a pu obtenir pour la première fois une minoration de $\log \mathrm{d}(u, W_0)$ linéaire en la hauteur $\log b$ de $W_0$ (pour un groupe linéaire). Au-delà de l'aspect technique du lemme ci-dessus, les raisons qui expliquent un plus petit poids de $\mathbf{G}_{\mathrm{a}}$ pour les polynômes de Matveev sont qu'ils prennent des valeurs entières aux points entiers tout en ayant une croissance analytique moindre que les monômes standards. En suivant le même principe, l'on peut construire les polynômes de Lagrange

$$\forall\, R > 0, \qquad \Delta_{R,\mathrm{L}}(X) := \prod_{\substack{x \in \mathbf{Z}[i] \setminus \{0\} \\ |x| \leq R}} \frac{X + x}{x} \tag{17}$$

qui ont un bon comportement* aux entiers de Gauss $\mathbf{Z}[i]$. Plus généralement, Ably & M'Zari ont obtenus des lemmes techniques, comparables à celui que nous avons présenté, pour des polynômes associés à un ordre $\mathcal{O}$ d'un corps de nombres $k$ (†) [**2**,**3**]. Dans ce cas le nombre $m$ dans la définition du poids de $\mathbf{G}_{\mathrm{a}}$ n'est plus un entier mais un élément de l'ordre. Formellement ces polynômes sont définis comme ceux de Lagrange mais le produit porte sur les $x \in \mathcal{O} \setminus \{0\}$ tels que $|x|_2 \leq R$ (ici $|.|_2$ est la norme euclidienne sur $\mathbf{R}^D$, espace dans lequel se plonge $k$). C'est en partie grâce à ces polynômes qu'à l'instar de Fel'dman, Ably a obtenu une minoration de $\log \mathrm{d}(u, W_0)$ optimale‡ en $\log b$ pour une puissance d'une courbe elliptique à multiplication complexe [**1**], en travaillant avec l'ordre constitué des endomorphismes de la courbe. Dans notre article en commun **[G3]** avec Ably, qui se situe dans le même cadre que [**1**], nous avons repris cette idée pour conserver une mesure optimale en $\log b$.

**12.2. Réduction d'Hirata-Kohno.** Au milieu des années quatre-vingt, Philippon & Waldschmidt obtinrent pour la première fois une mesure d'indépendance linéaire de logarithmes vraie dans le cadre d'un groupe algébrique commutatif quelconque [**46**]. Ils montrèrent que si $W_0$ est un hyperplan et $u \notin W_0$ alors on a

$$\log \mathrm{d}(u, W_0) \geq -c(\log b)^{g+1}$$

($g$ est la dimension de $G$, $\log b$ un majorant de la hauteur de $W_0$ et $c$ une fonction qui dépend de tous les paramètres sauf $W_0$). Puis en 1991 [**31**], Hirata-Kohno améliora cette minoration en

---

*Si $x \in \mathbf{Z}[i]$ alors il existe $\delta \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$, plus petit que $\leq 10^3 R^2$, tel que $\delta \Delta_{R,\mathrm{L}}(x) \in \mathbf{Z}[i]$.

†Le sous-ensemble $\mathcal{O}$ de $k$ est un *ordre* de $k$ si $\mathcal{O}$ est à la fois un sous-anneau de $k$ et un $\mathbf{Z}$-module de rang $[k : \mathbf{Q}]$.

‡Et ceci pour la première fois dans le cadre d'un groupe qui n'est pas linéaire, avant les généralisations ultérieures [**21**, **23**] et **[G1]** obtenues différemment (voir § 10.2 en particulier).

montrant que

$$\log \mathrm{d}(u, W_0) \geq -c(\log b)(\log\log b)^{g+1} \ . \tag{18}$$

Ces deux mesures se généralisent à $W_0$ de codimension quelconque, modulo une hypothèse plus forte sur $u$ [**32**, **47**]. Dans ce paragraphe, nous expliquons l'idée originale d'Hirata-Kohno ainsi que l'interprétation géométrique que nous en avons faite dans **[G2]** (reprise en partie dans **[G5]**).

Soit $G$ un groupe algébrique commutatif, de dimension $g$, défini sur un corps de nombres $k$. Soit $(z_1, \ldots, z_g)$ des coordonnées sur $t_G$ en lesquelles l'équation de $W_0$ s'écrit $\beta_1 z_1 + \cdots + \beta_g z_g = 0$, avec $\beta_i \in k$. Ajoutons $\mathbf{G}_{\mathrm{a}}$ à $G$ pour former $\mathbf{G}_{\mathrm{a}} \times G$ et considérons l'hyperplan $W$ de $t_{\mathbf{G}_{\mathrm{a}}} \oplus t_G$ défini par $z_0 = \sum_{j=1}^{g} \beta_j z_j$ (ici $z_0$ est la coordonnée canonique sur $t_{\mathbf{G}_{\mathrm{a}}}$). En posant $u' := (0, u)$, l'on dispose du logarithme d'un point $k$-rationnel $p' := (0, p)$ de $\mathbf{G}_{\mathrm{a}} \times G$ tel que les trois quantités $\mathrm{d}(u', W)$, $\mathrm{d}(u, W_0)$ et $|\sum_{j=1}^{g} \beta_j u_j|$ sont égales, à peu de choses près. Ces transformations, que l'on place sous l'appellation générale de *réduction d'Hirata-Kohno* (il y a plusieurs variantes), vont jouer un rôle modérateur sur les dérivations. Pour simplifier, prenons maintenant $G = \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^{g}$ dont l'exponentielle est facile à décrire

$$(z_1, \ldots, z_g) \mapsto (e^{z_1}, \ldots, e^{z_g}) \ .$$

Dans la démonstration de Gel'fond-Baker apparaissent les dérivées le long de $W$ au point $(0, \ldots, 0)$ de la fonction

$$F : (z_0, \ldots, z_g) \in \mathbf{C}^{g+1} \mapsto P(z_0, e^{z_1}, \ldots, e^{z_g})$$

où $P \in k[X_0, \ldots, X_n]$. *Dériver le long de* $W$ signifie que l'on dérive l'application restreinte

$$F_{|W} : (z_1, \ldots, z_g) \mapsto P(\beta_1 z_1 + \cdots + \beta_g z_g, e^{z_1}, \ldots, e^{z_g})$$

dans toutes les directions restantes. En développant en série chacune des exponentielles qui est dans cette fonction et en développant ensuite tous les produits, on montre que le coefficient

$$\frac{1}{\tau_1! \cdots \tau_g!} \left(\frac{\partial}{\partial z_1}\right)^{\tau_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial z_g}\right)^{\tau_g} F_{|W}(0) \tag{19}$$

est un polynôme en $\beta_1, \ldots, \beta_g$, de degré $\leq D_0 := \deg_{X_0} P$, à coefficients dans le $\mathbf{Z}$-module engendré par les coefficients de $P$. Le point crucial est que le degré en les $\beta_j$ ne dépend plus de l'ordre de dérivation. Sans réduction d'Hirata-Kohno, on aurait été amené à considérer $P(e^{z_1}, \ldots, e^{z_g})$ le long de $W_0$ : $\beta_1 z_1 + \cdots \beta_g z_g = 0$, c.-à-d. que l'on aurait regardé

$$\frac{1}{\tau_1! \cdots \tau_{g-1}!} \left(\frac{\partial}{\partial z_1}\right)^{\tau_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial z_{g-1}}\right)^{\tau_{g-1}} P(e^{\beta_g z_1}, \ldots, e^{\beta_g z_{g-1}}, e^{-\sum_{j=1}^{g-1} \beta_j z_j})$$

au point $(z_1, \ldots, z_{g-1}) = (0, \ldots, 0)$. Et dans ce nombre la dépendance en les $\beta_i$ est nécessairement polynomiale de degré $T = |\tau|$ (la longueur de $\tau$). L'argument d'Hirata-Kohno se généralise à $W_0$ de codimension $t \geq 1$ en considérant cette fois-ci $\mathbf{G}_{\mathrm{a}}^{t} \times G$ et l'espace $W$ défini par

$$z_{i-t} = \beta_{i,1} z_1 + \cdots + \beta_{i,g} z_g, \quad i \in \{1, \ldots, t\}.$$

*In fine*, de cette réduction émerge la contribution $D_0 \log b$ au lieu de $T \log b$. Le choix des paramètres autorise $D_0 \ll T$ et ce gain se répercute sur la mesure finale, pour aboutir à (18). La présence du facteur $\mathbf{G}_{\mathrm{a}}$ a neutralisé la pression de l'ordre de dérivation sur le sous-espace $W_0$. Il y a eu un transfert de la hauteur de $W_0$ sur la partie affine du groupe nouvellement créé. Le regard que l'on porte sur cet artifice évolue considérablement lorsqu'on l'écrit sous une forme plus géométrique et intrinsèque, comme dans **[G2]** (avec la *méthode des pentes*) ou **[G5]** (avec une autre méthode, que l'on pourrait appeler *méthode de la section auxiliaire*). En effet, reprenons le sous-espace $W_0$ de $t_G$ et considérons le groupe affine $G_0$ défini comme le spectre de l'algèbre symétrique du $k$-espace vectoriel dual $(t_G/W_0)^{\vee}$ :

$$G_0 := \operatorname{Spec} \mathbf{S}\, (t_G/W_0)^{\vee} \ .$$

L'espace tangent à l'origine de $G_0$ s'identifie à $t_G/W_0$. Soit $\lambda : t_G \mapsto t_G/W_0$ la projection canonique et $W$ le sous-espace de $t_{G_0 \times G}$ défini par le graphe de $\lambda$ :

$$W := \{\lambda(y) \oplus y;\ y \in t_G\} \, .$$

Là encore on a $\mathrm{d}((0, u), W) = \mathrm{d}(u, W_0) = \|\lambda(u)\|$. La différence est qu'il n'y a eu aucun choix de base. Pour harmoniser la présentation intrinsèque, la dérivée (19) est remplacée par le jet de $F$ le long de $W$ à l'ordre $T$ en 0, que l'on notera $\mathrm{jet}_W^T F(0)$. Ce jet appartient naturellement au produit symétrique $S^T(W^{\vee})$, espace que l'on peut munir d'une structure de fibré adélique hermitien

$\overline{S^T(W^\vee)}$ en se donnant en amont une telle structure sur $t_G$ (ce qui, du reste, est nécessaire pour parler de distance et de norme de vecteur sur cet espace). Si la quantité $\mathrm{jet}_W^T F(0)$ n'est pas nulle (ce qu'il est naturel de supposer dans la suite pour que la discussion ait un intérêt), elle vérifie une variante de la formule du produit :

$$h(\mathrm{jet}_W^T F(0)) \geq -\widehat{\mu}_{\max}\left(\overline{S^T(W^\vee)}\right) \ . \tag{20}$$

Dans cette inégalité, $h$ est la hauteur logarithmique associée au fibré adélique hermitien $\overline{S^T(W^\vee)}$ et $\widehat{\mu}_{\max}\left(\overline{S^T(W^\vee)}\right)$ est la pente maximale de ce fibré (voir p. 20). Or l'on peut montrer qu'il existe une constante $c(g)$, qui ne dépend que de $g$, telle que

$$\widehat{\mu}_{\max}\left(\overline{S^T(W^\vee)}\right) \leq T\left(\widehat{\mu}_{\max}\left(\overline{W^\vee}\right) + c(g)\right) \ .$$

La pente maximale de $\overline{W^\vee}$ est directement reliée à la hauteur de $W$, ainsi qu'à d'autres quantités qui ne dépendent que du groupe algébrique $G$. Dans les temps anciens, avant qu'Hirata-Kohno ne propose sa réduction, apparaissait

$$T\widehat{\mu}_{\max}\left(\overline{W_0^\vee}\right) \leq c(G)T\log b \ .$$

Ici on a

$$T\widehat{\mu}_{\max}\left(\overline{W^\vee}\right) \leq c(G)T \ ,$$

c.-à-d. que la hauteur de $W$ est majorée par une constante qui ne dépend que de $G$. La raison est simple : la hauteur de $W$ est plus petite que la somme des hauteurs d'une $k$-base (quelconque) de $W$. Or si $(e_1, \ldots, e_g)$ est une base de $t_G$ alors $(\lambda(e_1) \oplus e_1, \ldots, \lambda(e_g) \oplus e_g)$ est une base de $W$. En toutes les places $v$ du corps de nombres $k$, la norme $v$-adique de $\lambda(e_j) \oplus e_j$ est plus petite que $2^{\epsilon_v/2}\|e_j\|_v$ ($\epsilon_v = 1$ si $v$ est archimédienne et 0 sinon) car $\|\lambda(e_j)\|_v \leq \|e_j\|_v$ (la norme à gauche étant la norme quotient). La hauteur de $\lambda(e_j) \oplus e_j$ est donc plus petite que celle de $e_j$ plus $\log\sqrt{2}$, somme que l'on peut mettre dans une constante qui ne dépend que de $G$ et de la distance choisie sur $t_G$. Comme dans la présentation classique de la réduction d'Hirata-Kohno , la quantité $T\log b$ a disparu. Toutefois, comme la mesure finale dépend nécessairement de la hauteur de $W_0$, cette hauteur s'est déplacée dans $h(\mathrm{jet}_W^T F(0))$. Plus précisément, elle est dissimulée dans la hauteur du polynôme $P$ qui sert à bâtir $F$, hauteur qui, en vertu du lemme de Siegel, dépend du degré d'Arakelov de l'espace (adélique) dans lequel vit $P$. Une partie de cet espace – qui donne naissance à la partie polynomiale de $F$ – est l'espace des sections globales $\mathrm{H}^0(X_0, \mathcal{O}_{X_0}(D_0))$ où $X_0 := \mathbf{P}(k \oplus (t_G/W_0)^\vee)$ est la compactification naturelle de $G_0$. Il est muni d'une structure adélique au moyen des métriques de Fubini-Study. Un calcul élémentaire* montre alors que le degré d'Arakelov du fibré adélique hermitien $\overline{\mathrm{H}^0(X_0, \mathcal{O}_{X_0}(D_0))}$ vaut $D_0\log b$ plus une constante qui ne dépend que $D_0$ et de $G$ (mais pas de $\log b$). On retrouve donc exactement le même transfert de $T\log b$ à $D_0\log b$ que dans la réduction d'Hirata-Kohno originale. Quel que soit la forme sous laquelle on la met en œuvre, cette réduction ne fait pas disparaître pour autant la quantité $T\log T$ qui vient du dénominateur $T!$ des dérivées considérées ici (estimations ultramétriques). Pour cela, il faut utiliser en plus le procédé de changement de variable de Chudnovsky qui transforme $T\log T$ en $T\log D_0$ (voir § 10.2).

*Voir proposition 4.2 de **[G2]**.

## 13. Appendice

Nous démontrons ici le

Lemme de Siegel absolu . *Soit $\overline{E}$ un fibré adélique hermitien, de dimension $n \geq 1$. Pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, il existe une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de $E \otimes \overline{\mathbf{Q}}$ telle que*

$$\prod_{i=1}^{n} H_{\overline{E}}(e_i) \leq e^{\sigma_{n-1}+\varepsilon} H_{\mathrm{n}}(\overline{E}) \tag{21}$$

*où $\sigma_{n-1} := \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{j} \frac{1}{2i}$.*

Une comparaison série-intégrale permet de montrer que $2\sigma_{n-1} < n \log n$ dès que $n \geq 2$ (l'inégalité est nécessairement stricte car $\sigma_{n-1} \in \mathbf{Q}$ contrairement à $\log n$). Dans ce cas le choix de $\varepsilon = \frac{n \log n}{2} - \sigma_{n-1}$ conduit au lemme de Siegel absolu que nous avons présenté p. 31.

Démonstration. On reprend l'argumentation donnée dans la preuve du lemme 4.7 de [**24**] et la remarque qui la suit. Soit $X := \mathbf{P}(E^{\vee})$ et $\overline{L}$ le fibré en droites hermitien sur $X$ constitué du faisceau canonique $\mathcal{O}_X(1)$ et des métriques de Fubini-Study induites par les normes de $\overline{E}$. La hauteur relative à $\overline{L}$ sur les points de $X(\overline{\mathbf{Q}})$ est la hauteur relative au fibré adélique hermitien $\overline{E}$. Pour tout entier $i \in \{1, \ldots, n\}$, considérons les nombres réels $\mathsf{e}_i$ définis par

$$\mathsf{e}_i := \sup_{\operatorname{codim} Y = i} \inf \{ H_{\overline{E}}(x) \, ; \; x \in X(\overline{\mathbf{Q}}) \setminus Y \}$$

où $Y$ parcourt les sous-variétés (fermées) de $X(\overline{\mathbf{Q}})$ de codimension $i$. Le couple $(X, \overline{L})$ satisfait aux hypothèses du théorème 5.2 de [**66**] (l'hypothèse de semi-amplitude arithmétique de $\overline{L}$ résulte par exemple du théorème 3.5, *ibid.*) qui, en termes des $\mathsf{e}_i$ ci-dessus, s'écrit alors*

$$\prod_{i=1}^{n} \mathsf{e}_i \leq \exp\{H_F(X)\} \quad \text{où} \quad H_F(X) := \widehat{\deg}_{\mathrm{n}} \left( \widehat{c}_1 \left( \overline{L} \right)^n | X \right) \tag{22}$$

est la hauteur de Faltings de la sous-variété $X$, au sens de [**13**], définition 3.1.1 et § 4.1.2 ($\widehat{\deg}_{\mathrm{n}}$ est le degré d'Arakelov normalisé). Cette quantité se compare à la hauteur de $\overline{E}$ *via* la première formule de la proposition 4.1.2 de [**13**] et la remarque qui lui succède : $\exp\{H_F(X)\} = H_{\mathrm{n}}(\overline{E}) e^{\sigma_{n-1}}$. En vertu de l'inégalité de Zhang (22), il ne reste donc plus qu'à prouver l'existence d'une base $e_1, \ldots, e_n$ de $E$ telle que

$$\prod_{i=1}^{n} H_{\overline{E}}(e_i) \leq e^{\varepsilon} \prod_{i=1}^{n} \mathsf{e}_i \; . \tag{23}$$

Cela résulte presque immédiatement de la définition même des $\mathsf{e}_i$. En effet, on a

$$\mathsf{e}_n = \inf\{H_{\overline{E}}(x) \, ; \, x \in X(\overline{\mathbf{Q}})\}$$

donc il existe $e_1 \in X(\overline{\mathbf{Q}}) = (E \otimes \overline{\mathbf{Q}}) \setminus \{0\}$ tel que $H_{\overline{E}}(e_1) \leq \mathsf{e}_n e^{\varepsilon/n}$. Soit $Y_1$ l'adhérence de Zariski de $\{e_1\}$ dans $X(\overline{\mathbf{Q}})$. On a

$$\mathsf{e}_{n-1} \geq \inf \{H_{\overline{E}}(x); x \in X(\overline{\mathbf{Q}}) \setminus Y_1\}$$

donc il existe $e_2 \in X(\overline{\mathbf{Q}}) \setminus Y_1$ (c'est-à-dire que $e_1$ et $e_2$ — vus comme vecteurs de $E$ — sont linéairement indépendants) tel que $H_{\overline{E}}(e_2) \leq \mathsf{e}_{n-1} e^{\varepsilon/n}$. De même, la minoration $\mathsf{e}_{n-2} \geq \inf \{H_{\overline{E}}(x); x \in X(\overline{\mathbf{Q}}) \setminus Y_2\}$ où $Y_2$ est le sous-espace linéaire de $X(\overline{\mathbf{Q}})$ provenant de $\overline{\mathbf{Q}}.e_1 \oplus \overline{\mathbf{Q}}.e_2$ entraîne l'existence de $e_3$ etc. Nous avons ainsi construit une base $e_1, \ldots, e_n$ de $E$ qui satisfait à l'inégalité (23) et donc à (21). □

*Il faut noter ici que le degré géométrique de $\mathbf{P}(E^{\vee})$ vaut 1.

# Bibliographie


[1] M. Ably. Formes linéaires de logarithmes de points algébriques sur une courbe elliptique de type CM. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* 50(1) :1-33, 2000.

[2] M. Ably et M. M'Zari. Polynômes de Lagrange sur les entiers d'un corps quadratique imaginaire. *J. Théor. Nombres de Bordeaux*, 10(1) :85-105, 1998.

[3] M. Ably et M. M'Zari. Interpolation polynomiale sur un ordre d'un corps de nombres. *Ramanujan J.*, 17(2) :281–304, 2008.

[4] Y. Amice. *Les nombres p-adiques.* Préface de Ch. Pisot, Collection SUP : Le Mathématicien, No. 14. Presses Universitaires de France, 1975.

[5] A. Baker. *Transcendental number theory.* Cambridge University Press, 1975.

[6] A. Baker et D. Masser, Éds. *Transcendence theory : advances and applications.* Articles issus de la conférence qui s'est tenue à l'université de Cambridge en janvier-février 1976. Academic Press, 1977.

[7] A. Baker et G. Wüstholz. *Logarithmic forms and Diophantine geometry.* New Mathematical Monographs, 9. Cambridge University Press, 2007.

[8] E. Bombieri et J. Vaaler. On Siegel's lemma. *Invent. math.*, 73(1) :11–32, 1983. Avec un addendum : *ibid.* 75(2) :377, 1984.

[9] S. Bosch, W. Lütkebohmert et M. Raynaud. *Néron Models*, volume 21 de *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete.* Springer-Verlag Berlin, 1990.

[10] J.-B. Bost. Périodes et isogénies des variétés abéliennes sur les corps de nombres (d'après D. Masser et G. Wüstholz). *Séminaire Bourbaki.* Volume 237 d'*Astérisque*, 115–161. Société Mathématique de France, 1996.

[11] J.-B. Bost. Intrinsic heights of stable varieties and abelian varieties. *Duke Math. J.*, 82(1) :21–70, 1996.

[12] J.-B. Bost. Algebraic leaves of algebraic foliations over number fields. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci*, 93 :161–221, 2001.

[13] J.-B. Bost, H. Gillet et C. Soulé. Heights of projective varieties and positive Green forms. *J. Amer. Math. Soc.*, 7(4) :903–1027, 1994.

[14] D.V. Chudnovsky et G.V. Chudnovsky. Padé approximations and diophantine geometry. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, volume 82, 2212–2216, 1985.

[15] G.V. Chudnovsky. Measures of irrationality, transcendence and algebraic independence. Dans *Recent progress in Number Theory*, pages 11–82. Cambridge Univ. Press., 1980.

[16] G.V. Chudnovsky. *Contributions to the theory of transcendental numbers*, volume XI. Providence, R.I. : American Math. Soc., 1984. Mathematical Surveys and Monographs.

[17] P.L. Cijsouw et M. Waldschmidt. Linear forms and simultaneous approximations. *Compos. Math.*, 34 :173–197, 1977.

[18] J. Coates. On the analogue of Baker's theorem for elliptic integrals. Texte non publié. 1972.

[19] J. Coates et S. Lang. Diophantine approximation on Abelian varieties with complex multiplication. *Invent. Math.*, 34(2) :129–133, 1976.

[20] S. David. Fonctions thêta et points de torsion des variétés abéliennes. *Compositio Math.*, 78(2) :121–160, 1991.

[21] S. David et N. Hirata-Kohno. Recent progress on linear forms in elliptic logarithms. Dans [**65**], pp. 26–37.

[22] S. David et N. Hirata-Kohno. Logarithmic functions and formal groups of elliptic curves. In *Diophantine equations*, pp. 243–255, édité par N. Saradha. Tata Institute of Fundamental Research, Narosa Publishing House. New Delhi, 2008.

[23] S. David et N. Hirata-Kohno. Linear forms in elliptic logarithms. *J. reine angew. Math.*, 628 :37–89, 2009.

[24] S. David et P. Philippon. Minorations des hauteurs normalisées des sous-variétés des tores. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.*, XXVIII(4) :489–543, 1999.

[25] N.I. Fel'dman. The approximation of certain transcendental numbers. II. The approximation of certain numbers connected with the Weierstraß function $\wp(z)$. *Izvestiya Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat.*, 15 :153–176, 1951. *Amer. Math. Trans. Ser.*, 59(2) :246–270, 1966.

[26] N.I. Fel'dman. An improvement of the estimate of a linear form in the logarithms of algebraic numbers. *Mat. Sb. (N.S.)*, 77(119) :423–436, 1968. Traduction anglaise : Math. USSR Sb., 6 (3), 393 – 406 (1968).

[27] H. Gillet et C. Soulé. An Arithmetic Riemann-Roch Theorem. *Invent. Math.*, 110 :473–543, 1992.

[28] P. Graftieaux. *Groupes formels et critère d'isogénie.* Thèse de doctorat de l'université Paris 6, sous la direction de D. Bertrand. Mars 1998.

[29] P. Graftieaux. Formal Groups and Isogeny Theorem. *Duke Math. J.*, 106 :81–121, 2001.

[30] P. Graftieaux. Formal subgroups of abelian varieties. *Invent. Math.*, 145 :1–17, 2001.

[31] N. Hirata-Kohno. Formes linéaires de logarithmes de points algébriques sur les groupes algébriques. *Invent. Math.*, 104 :401–433, 1991.

[32] N. Hirata-Kohno. Approximations simultanées sur les groupes algébriques commutatifs. *Compos. Math.*, 86 :69–96, 1993.

[33] S. Lang. Diophantine approximation on abelian varieties with complex multiplication. *Advances in Math.*, 17(3) :281–336, 1975.

[34] M. Laurent. Linear forms in two logarithms and interpolation determinants. *Acta Arith.*, 66(2) :181–199, 1994.

[35] M. Laurent. Linear forms in two logarithms and interpolation determinants II. *Acta Arith.*, 133(4) :325–348, 2008.

[36] M. Laurent, M. Mignotte et Y. Nesterenko. Formes linéaires en deux logarithmes et déterminants d'interpolation. *J. Number Theory*, 55(2) :285–321, 1995.

[37] H.W. Lenstra, Jr. Algorithms in algebraic number theory. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 26(2) :211-244, 1992.

[38] F. Lindemann. Über die Ludolph'sche Zahl. *Sitzungber. Königl. Preuss. Akad. Wissensch. zu Berlin* , 2 :679–682, 1882.

[39] D.W. Masser. *Elliptic functions and transcendence*, volume 437 de Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, 1975.

[40] D.W. Masser. Polynomial interpolation in several complex variables. *J. Approx. Theory*, 24(1) :18–34, 1978.

[41] E.M. Matveev. An explicit lower bound for a homogeneous rational linear form in logarithms of algebraic numbers. *Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Math*, 62(4) :81–136, 1998. *Izv. Math.* 62(4) : 723–772, 1998.

[42] M. Mignotte et M. Waldschmidt. Approximation des valeurs de fonctions transcendantes. *Indag. Math.*, 37 :213–223, 1975.

[43] L. Moret-Bailly. *Pinceaux de variétés abéliennes*, volume 129 de *Astérisque*. Société Mathématique de France, 1985.

[44] L. Moret-Bailly. Sur l'équation fonctionnelle de la fonction thêta de Riemann. *Compositio Math.*, 75(2) :203–217, 1990.

[45] P. Philippon et M. Waldschmidt. Lower bounds for linear forms in logarithms. *New advances in transcendence theory (Durham, 1986)*, pp. 280–312. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1988.

[46] P. Philippon et M. Waldschmidt. Formes linéaires de logarithmes sur les groupes algébriques commutatifs. *Illinois J. Math.*, 32(2) :281–314, 1988.

[47] P. Philippon et M. Waldschmidt. Formes linéaires de logarithmes simultanées sur les groupes algébriques commutatifs. *Séminaire de Théorie des Nombres Paris* $1986-87$, volume 75 de *Progress in Mathematics*, pp. 313–347. Birkhäuser Boston, Inc., 1989. Édité par Catherine Goldstein.

[48] É. Reyssat. Approximation algébrique de nombres liés aux fonctions elliptiques et exponentielle. *Bull. Soc. Math. France*, 108(1) : 47–79, 1980.

[49] P. Robba. Lemmes de Schwarz et lemmes d'approximations $p$-adiques en plusieurs variables. *Invent. Math.*, 48 :245–277, 1978.

[50] D. Roy. Interpolation sur des perturbations d'ensembles produits. *Bull. Soc. Math. France*, 130(2) :387–408, 2002.

[51] D. Roy et J.L. Thunder. An absolute Siegel's lemma. *J. Reine angew. Math.*, 476 :1–26, 1996.

[52] C.L. Siegel. Über einige Anwendungen diophantischer Approximationen. Abhandlungen der Preußischen Akad. der Wissenschaften, Nr. 1, 70 S, 1929.

[53] A. Thue. Om en generel i store hele tal uløsbar ligning. *Kra. Videnskabens Selskabs Skrifter, Mat. Nat. Kl*, 7 :1–15, 1908.

[54] A. Thue. Über Annäherungswerte algebraischer Zahlen. *J. Reine Angew. Math.*, 135 :284–305, 1909.

[55] É. Villani. *Mesures d'indépendance linéaire simultanées sur les périodes d'intégrales abéliennes.* Thèse de doctorat de l'université Paris 6, sous la direction de D. Bertrand. Décembre 2005.

[56] É. Villani. Mesures de transcendance pour les points algébriques de fonctions modulaires de Siegel. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 344(1) :1–4, 2007.

[57] M. Waldschmidt. *Nombres transcendants*, volume 402 de *Lecture Notes in Math.* Springer-Verlag, 1974.

[58] M. Waldschmidt. Transcendance et exponentielles en plusieurs variables. *Invent. Math.*, 63(1) :97–127, 1981.

[59] M. Waldschmidt. Fonctions auxiliaires et fonctionnelles analytiques. I, II. *J. Analyse Math.*, 56 :231–254, 255–279, 1991.

[60] M. Waldschmidt. *Diophantine Approximation On Linear Algebraic Groups*, volume 326 de *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften.* Springer-Verlag, 2000.

[61] K. Weierstrass. Zu Hrn. Lindemann's Abhandlung : « Über die Ludolph'sche Zahl ». *Sitzungber. Königl. Preuss. Akad. Wissensch. zu Berlin* 2 :1067–1086, 1885.

[62] G. Wüstholz. Some remarks on a conjecture of Waldschmidt. In *Approximations diophantiennes et nombres transcendants (Luminy 1982)*, volume 31 de *Prog. Math.*, 329–336, 1983.

[63] G. Wüstholz. A new approach to Baker's theorem on linear forms in logarithms. III. *New advances in transcendence theory (Durham, 1986)*, pp. 399–410. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1988.

[64] G. Wüstholz. Algebraische punkte auf analytischen untergruppen algebraischer gruppen. *Ann. of Math.*, 129(3) :501–517, 1989.

[65] G. Wüstholz, Éd. *A panorama of number theory or the view from Baker's garden.* Articles issus de la conférence « Number Theory and Diophantine Geometry at the Gateway to the Millennium », qui s'est tenue à Zürich, du 28 août au 3 septembre 1999. Cambridge University Press. 2002.

[66] S. Zhang. Positive line bundles on arithmetic varieties. *J. Amer. Math. Soc.*, 8(1) :187–221, 1995.

## Résumés des articles

**[G1] Mesures d'indépendance linéaire de logarithmes dans un groupe algébrique commutatif.** Soit $G$ un groupe algébrique commutatif, défini sur le corps $\mathbf{Q}$ des nombres algébriques. Soit $W$ un hyperplan de l'espace tangent à l'origine, défini sur $\overline{\mathbf{Q}}$, et $u$ un vecteur de $t_G(\mathbf{c})$ tel que l'image de $u$ par l'application exponentielle du groupe de Lie $G(\mathbf{C})$ est un point algébrique. Dans ce texte, nous obtenons une minoration de la distance de $u$ à $W$ qui est optimale en la hauteur de $W$. La démonstration repose sur la *méthode de Baker*, la *réduction d'Hirata-Kohno* ainsi que sur un nouvel argument arithmétique (le *procédé de changement de variables de Chudnovsky*).

**[G2] Formes linéaires de logarithmes effectives sur les variétés abéliennes.** Nous établissons de nouvelles mesures d'indépendance linéaire de logarithmes de points algébriques d'une variété abélienne définie sur $\overline{\mathbf{Q}}$, mesures qui sont *entièrement explicites* en les invariants liés à la variété en question (dimension, hauteur de Faltings, degré d'une polarisation). Moyennant une hypothèse supplémentaire sur les points algébriques considérés et une constante numérique moins bonne, ces résultats généralisent ceux — comparables — de David, avec, en particulier, la présence dans le théorème principal d'un groupe algébrique qui, en variant, induit de nombreuses mesures différentes. Une caractéristique importante de la preuve est la mise en œuvre, pour la première fois dans ce contexte, de la *méthode des pentes* de Bost et de certains résultats de géométrie d'Arakelov qui lui sont attachés.

**[G3] Approximation diophantienne sur les courbes elliptiques à multiplication complexe.** Soit $\mathcal{E}$ une courbe elliptique C. M., définie sur $\overline{\mathbf{Q}}$. Considérons une famille de formes linéaires sur l'algèbre de Lie de $\mathcal{E}^n$, à coefficients dans le corps de multiplication complexe de $\mathcal{E}$. Dans ce cadre, nous présentons une mesure d'indépendance linéaire de logarithmes, analogue aux estimations connues actuellement pour les tores (commutatifs) de type $(\log b)(\log a)^n$. Ainsi, à l'instar des récentes avancées dans ce domaine (travaux d'Ably, David, Hirata-Kohno), cette mesure est optimale en la hauteur des formes linéaires considérées ($\log b$) et, en outre, elle est plus précise en la hauteur des points de la courbe elliptique ($\log a$) avec la suppression d'un terme en $\log\log a$.

**[G4] Étude du cas rationnel de la théorie des formes linéaires de logarithmes.** Dans ce travail, nous établissons des mesures d'indépendance linéaire de logarithmes d'un groupe algébrique commutatif dans le cas rationnel. Plus précisément, soit $k$ un corps de nombres et $v_0$ une place quelconque de $k$. Soit $G$ un groupe algébrique commutatif défini sur $k$ et $H$ un sous-groupe algébrique connexe de $G$, d'algèbre de Lie $\mathrm{Lie}(H)$. Soit $u \in \mathrm{Lie}(G(\mathbf{C}_{v_0}))$ un logarithme d'un point $p$ de $G(k)$. Dans le *cas non périodique* (le point $p$ n'est pas de torsion modulo certains sous-groupes de $G$), nous obtenons des minorations de la distance de $u$ à $\mathrm{Lie}(H) \otimes_k \mathbf{C}_{v_0}$ qui généralisent en partie les mesures déjà connues dans le cas d'un groupe linéaire. Les principales caractérisques de ces résultats sont d'une part d'améliorer la dépendance en la hauteur $\log a$ du point $p$, en supprimant une puissance de $\log\log a$, et, d'autre part, d'être valides dans un contexte très général. La démonstration utilise le formalisme des tailles de sous-schémas formels au sens de Bost en association avec un lemme arithmétique de Raynaud. Nous avons également recours à un lemme de Siegel absolu et, lorsque $v_0$ est ultramétrique, à un lemme d'interpolation de Roy.

**[G5] Minorations simultanées de formes linéaires de logarithmes de nombres algébriques.** Soit $n \in \mathbf{N}\setminus\{0\}$, $k$ un corps de nombres et $v$ une place de $k$. Soit $u_1, \dots, u_n \in \mathbf{C}_v$ tels que $e^{u_j} \in k$ pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$. Soit $(\beta_{i,j})$, $1 \leq i \leq t$, $1 \leq j \leq n$, une matrice $t \times n$ à coefficients dans $k$ et de rang $t$. Soit $(\beta_{1,0}, \dots, \beta_{t,0}) \in k^t$. Posons $\Lambda_i := \beta_{i,0} + \sum_{j=1}^n \beta_{i,j} u_j \in \mathbf{C}_v$ pour tout $i \in \{1, \dots, t\}$. Le résultat principal que nous présentons ici est une minoration de $\max\{|\Lambda_i|_v\,;\ 1 \leq i \leq t\}$, explicite en tous les paramètres sauf $n$, lorsque, par exemple, $\{u_1, \dots, u_n\}$ est une famille libre sur $\mathbf{Q}$. La démonstration repose sur la méthode de Baker-Philippon-Waldschmidt, la réduction d'Hirata-Kohno, le procédé de changement de variable de Chudnovsky, repensés avec les outils modernes de la théorie des pentes adéliques.

**[G6] Pentes des fibrés vectoriels adéliques sur un corps global.** Dans les années 90, J.-B. Bost a développé tout un formalisme des pentes des fibrés vectoriels hermitiens sur l'anneau des entiers d'un corps de nombres. Au cours de ses recherches, une nouvelle méthode d'approximation diophantienne — dite *méthode des pentes* — a été élaborée. Cet article propose une généralisation de ces travaux à une classe plus large de fibrés vectoriels, dits adéliques, définis sur un corps global. Ces fibrés possèdent aux places archimédiennes des normes qui ne sont plus nécessairement hermitiennes. Nous examinons également le lien avec la théorie des minima successifs adéliques. Pour parvenir à ces résultats, nous avons recours à plusieurs concepts de géométrie des espaces de Banach de dimension finie.

**[G7] Géométrie des nombres adélique et lemmes de Siegel généralisés.** Ce texte présente plusieurs énoncés qui assurent l'existence d'un vecteur non nul de petite hauteur dans un espace vectoriel de dimension finie sur un corps de nombres et qui évite un nombre fini de sous-espaces donnés au préalable (*lemmes de Siegel avec contraintes*). Les démonstrations reposent sur des résultats de géométrie des nombres adélique, dont, en particulier, une variante adélique d'un théorème de Henk sur la fonction de dénombrement des points d'un réseau dans un corps convexe symétrique.

## Summaries of the articles

**[G1] Linear independence measures of logarithms in a commutative algebraic group.** This work falls within the *theory of linear forms in logarithms* over a connected and commutative algebraic group, defined over the field of algebraic numbers $\overline{\mathbf{Q}}$. Let $G$ be such a group. Let $W$ be a hyperplane of the tangent space at the origin of $G$, defined over $\overline{\mathbf{Q}}$, and $u$ be a complex point of this tangent space, such that the image of $u$ by the exponential map of the Lie group $G(\mathbf{C})$ is an algebraic point. Then we obtain a lower bound for the distance between $u$ and $W \otimes \mathbf{C}$, which improves the results known before and which is, in particular, the best possible for the height of the hyperplane $W$. The proof rests on *Baker's method* and *Hirata's reduction* as well as a new arithmetic argument (*Chudnovsky's process of variable change*) which enables us to give a precise estimate of the ultrametric norms of some algebraic numbers built during the proof.

**[G2] Effective linear forms of logarithms in abelian varieties.** We prove new measures of linear independence of logarithms on an abelian variety defined over $\overline{\mathbf{Q}}$, which are *totally explicit* in function of the invariants of the abelian variety (dimension, Faltings height, degree of a polarization). Besides, except an extra-hypothesis on the algebraic point considered and a weaker numerical constant, we improve on earlier results (in particular David's lower bound). We also introduce into the main theorem an algebraic subgroup that leads to a great variety of different lower bounds. An important feature of the proof is the implementation of the *slope method* of Bost and some results of Arakelov geometry naturally associated with it.

**[G3] Diophantine approximation on elliptic curves with complex multiplication.** Let $\mathcal{E}$ be an elliptic curve with complex multiplication, defined over $\overline{\mathbf{Q}}$. We consider linear forms on $\mathrm{Lie}(\mathcal{E}^n)$ with coefficients in the CM field of $\mathcal{E}$. Within this framework, we present a new measure of linear independence for elliptic logarithms in $(\log b)(\log a)^n$. Like recent advances in this domain (works by Ably, David, Hirata-Kohno), our result is best possible in terms of the height of the linear forms ($\log b$) while providing a better estimate in the height of algebraic points considered ($\log a$), removing a term in $\log\log a$.

**[G4] Study of the rational case of the theory of linear forms in logarithms.** We establish new measures of linear independence of logarithms on commutative algebraic groups in the so-called *rational case*. More precisely, let $k$ be a number field and $v_0$ be an arbitrary place of $k$. Let $G$ be a commutative algebraic group defined over $k$ and $H$ be a connected algebraic subgroup of $G$. Denote by $\mathrm{Lie}(H)$ its Lie algebra at the origin. Let $u \in \mathrm{Lie}(G(\mathbf{C}_{v_0}))$ a logarithm of a point $p \in G(k)$. Assuming (essentially) that $p$ is not a torsion point modulo proper connected algebraic subgroups of $G$, we obtain lower bounds for the distance from $u$ to $\mathrm{Lie}(H) \otimes_k \mathbf{C}_{v_0}$. For the most part, they generalize the measures already known when $G$ is a linear group. The main feature of these results is to provide a better dependence in the height $\log a$ of $p$, removing a polynomial term in $\log\log a$. The proof relies on sharp estimates of sizes of formal subschemes associated to $H$ (in the sense of Bost) obtained from a lemma by Raynaud as well as an absolute Siegel lemma and, in the ultrametric case, a recent interpolation lemma by Roy.

**[G5] Simultaneous lower bounds for linear forms in logarithms of algebraic numbers.** This work falls within the theory of linear forms in logarithms over a commutative *linear* group defined over a number field. We give a lower bound for simultaneous linear forms in logarithms of algebraic numbers, treating both the archimedean and $p$-adic cases. The proof includes Baker's method, Hirata's reduction, Chudnovsky's process of variable change. The novelty is that we integrated into the proof the modern tools of adelic slope theory, building an auxiliary section of a metrized line bundle over a projective space.

**[G6] Slopes of adelic vector bundles over global fields.** At the end of the twentieth century, J.-B. Bost developped a slope theory of hermitian vector bundles over number fields. A new method of diophantine approximation, the so-called *slope method*, has emerged from his research. Our article proposes a generalisation to adelic vector bundles over global fields. The norms at the archimedean places are no longer supposed to be hermitian. The link with adelic successive minima is also mentioned. To get these results, we use several concepts from the geometry of finite dimensional Banach spaces.

**[G7] Adelic geometry of numbers and generalized Siegel's lemma.** A Siegel's lemma provides an explicit upper bound for a non-zero vector of minimal height in a finite dimensional vector spaces over a number field. This article explains how to obtain Siegel's lemmas for which the minimal vectors do not belong to a finite union of vector subspaces (*Siegel's lemmas with conditions*). The proofs mix classical results of adelic geometry of numbers and an adelic variant of a theorem of Henk about the number of lattice points of a centrally symmetric convex body in terms of the successive minima of the body.

MSC 2000 : 11J86, 11J68, 11H06 (11G50, 11J13, 11J20, 11J61, 11R56, 14G40, 14L05).

Mots-clefs : Formes linéaires de logarithmes ; cas rationnel ; méthode de Baker ; groupe algébrique commutatif ; taille de sous-schéma formel ; lemme d'interpolation ; lemme de Siegel absolu ; approximation simultanée ; réduction d'Hirata-Kohno ; changement de variables de Chudnovsky ; théorie des pentes adéliques ; fibrés adéliques hermitiens ; distance de Banach-Mazur ; inégalités de pentes adéliques ; minima successifs adéliques.

**Coordonnées de l'auteur** :
Éric Gaudron
✉ Université Grenoble I, Institut Fourier.
UMR 5582, BP 74
38402 Saint-Martin-d'Hères Cedex, France.
Courriel : `Eric.Gaudron@ujf-grenoble.fr`
☎ (33) 04 76 51 45 72
Page internet : `http ://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~gaudron`