



HAL
open science

Etude de schemas numeriques pour des modeles de propagation d'ondes en milieux heterogenes

Alain Sei

► **To cite this version:**

Alain Sei. Etude de schemas numeriques pour des modeles de propagation d'ondes en milieux heterogenes. Modélisation et simulation. Université Paris Dauphine - Paris IX, 1991. Français. NNT : . tel-00584224

HAL Id: tel-00584224

<https://theses.hal.science/tel-00584224>

Submitted on 7 Apr 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITE PARIS IX-DAUPHINE
U.E.R Mathématiques de la décision

THÈSE

pour l'obtention du
TITRE DE DOCTEUR
Spécialité : Mathématiques - Automatique
présentée par

Alain SEI

Sujet de la thèse :

**ETUDE DE SCHEMAS NUMERIQUES POUR
DES MODELES DE PROPAGATION D'ONDES
EN MILIEUX HETEROGENES**

Soutenue le 2 octobre 1991 devant la Commission composée de :

MM. G. CHAVENT	Président Rapporteur
P. JOLY	Rapporteur
A. BAMBERGER	Examineur
P. LAILLY	Examineur
J.M. THOMAS	Examineur

THE UNIVERSITY OF CHICAGO

PHILOSOPHY

PHILOSOPHY

PHILOSOPHY

PHILOSOPHY

PHILOSOPHY

PHILOSOPHY

**L'université n'entend donner aucune approbation ni improbation
aux opinions émises dans les thèses: ces opinions doivent être con-
sidérées comme propres à leurs auteurs.**



**A mes Parents
pour leur dévouement
et leur affection ...**

**To Jamie for her love
and support**

A ma Famille, à mes Amis



REMERCIEMENTS

J'adresse tous mes remerciements à ALAIN BAMBERGER, sans qui ce travail n'aurait pas vu le jour, et qui m'a fait l'honneur d'être mon directeur de thèse. Tout au long de ce travail, il a toujours été de bon conseil et m'a fait bénéficier de ses idées et de sa rigueur scientifique. Qu'il trouve ici l'expression de ma profonde reconnaissance.

Je remercie GUY CHAVENT d'avoir accepté de s'intéresser à mes travaux. Je tiens à souligner les encouragements qu'il m'a prodigués en début de troisième année. Qu'une personnalité scientifique de son envergure fasse partie de mon jury me fait un vif honneur.

J'ai eu la chance de rencontrer PATRICK JOLY, et j'ai pu apprécier ses qualités scientifiques et humaines. Il a toujours été disponible pour répondre à mes questions, avec la gentillesse et la courtoisie qui lui sont, à juste titre, reconnues. Qu'il trouve ici l'expression de ma sincère sympathie.

C'est dans le projet de PATRICK LAILLY que j'ai commencé ce travail de recherche à l'Institut Français du Pétrole (IFP). Il m'a permis de travailler dans d'excellentes conditions; je l'en remercie vivement.

C'est à l'université de Pau et des Pays de l'Adour que j'ai rencontré JEAN-MARIE THOMAS. Tout au long de ma scolarité, j'ai pu apprécier sa rigueur scientifique ainsi que sa gentillesse et sa disponibilité. Qu'il ait accepté d'être membre du jury me fait un très grand honneur.

Dès mon arrivée à l'IFP, j'ai eu le privilège de collaborer avec FRANCIS COLLINO. J'ai pu apprécier ses qualités de chercheur, sa gentillesse et son humour. Il m'a constamment encouragé, jamais son aide ne m'a fait défaut. Sa collaboration à ce travail m'a été très précieuse. Je l'en remercie très vivement.

Je tiens à souligner ici la bonne ambiance dans laquelle s'est effectué ce travail à l'IFP. Mes remerciements vont tout particulièrement à FRANK ASSOUS, FLORENCE DELPRAT-JANNAUD, LIONEL JANNAUD, JÉRÔME DE PARSCAU, EMMANUEL PIAULT, JACQUES QUIBLIER et ROELOFF VERSTEEG. Pendant ces trois années de thèse, j'ai eu avec eux des échanges très positifs et très amicaux, tout à fait dans l'esprit de la "bonne ambiance du château".



Je ne voudrais pas oublier ici tous ceux, qui par un avis ou un conseil, ont contribué à ce travail. Je les en remercie vivement.

Enfin je voudrais, pour terminer, remercier la station de radio FIP, non pas parce que c'est une annagramme de l'IFP, mais pour la qualité du jazz qu'elle a "distillé" sur les ondes, pendant ces trois années de thèse. Le "Jazz à FIP" de 19h30 à 21h00, restera (avec le bruit de la Tektro ...) un son caractéristique de cette thèse.



RÉSUMÉ

Les méthodes d'inversion par moindres carrés nécessitent la simulation de propagation d'ondes modélisées par des équations linéaires. La généralisation de ces méthodes d'inversion à des milieux tridimensionnels, se heurte au coût informatique des simulations numériques. C'est donc dans cette partie simulation numérique que se situe la majeure partie de notre travail.

Nous commençons par l'étude de l'inversion d'un milieu localement perturbé, c'est à dire que nous recherchons une hétérogénéité de forme donnée dans une matrice homogène. Nous montrons dans ce cas simple, l'influence de la fréquence de la source sur la non-linéarité de la fonction coût.

Ensuite, nous introduisons et analysons une famille de schémas numériques pour l'équation des ondes acoustiques, en milieu homogène. Ces schémas sont d'ordre deux ou d'ordre quatre en temps et d'ordre quelconque en espace. Nous avons estimé le coût informatique des simulations, et préconisé un choix du nombre de points par longueur d'onde et du nombre de points par période. Ceci donne alors les pas d'espace et de temps.

Puis, nous étudions la stabilité et la précision de cette famille de schémas numériques en milieu hétérogène. Nous obtenons des résultats de stabilité quelque soit l'hétérogénéité du milieu, et donnons l'ordre d'approximation de ces schémas numériques en milieux hétérogènes. Nous étudions également les conditions absorbantes "éponge".

Enfin nous nous sommes intéressé à une estimation d'erreur a posteriori pour l'équation des ondes en milieu unidimensionnel. Ces estimations sont généralisables au cas bidimensionnel. Elles permettent de mesurer l'erreur commise sur la solution à l'aide de quantités calculables; donc on peut par une procédure adaptative régler les pas de temps et d'espace.

MOTS CLES

Equation des Ondes
Stabilité Numérique
Coût Informatique
Inversion

Schémas Numériques
Conditions Absorbantes
Estimation A posteriori
Sismique Réflexion



ABSTRACT

Least square inversion methods require wave propagation modelling by linear equations. In tridimensional media the computational cost of the modelling limits the range of application of those methods. Therefore it is in modelling that the main part of this work has been done.

We start with the inversion of locally disturbed medium, that is to say we look for an heterogeneity of given shape, in an homogeneous matrix. We show in this simple case, the influence of the frequency of the source on the non-linearity of the cost function.

Next we introduce and analyse a family of numerical schemes for the acoustic wave equation in homogeneous media. Those schemes are of order two or four in time and of any order in space. We estimate the computational cost of the modelling, and advice a choice for the number of points per wavelength and the number of points per period, which fix the space and time steps.

Then we study the stability and the accuracy of this family of numerical schemes in heterogeneous media. We obtain stability results for arbitrary heterogeneous media and give the order of approximation of those schemes in heterogeneous media. We also study the "sponge" absorbing boundary condition.

Finally we deal with a posteriori error estimates for the wave equation in unidimensional media. Those estimations are generalizable to bidimensional media. They permit a measure of the error on the solution, by computable quantities; therefore they allow to fix the space and time steps in an adaptative procedure.

KEY WORDS

Wave Equation
Numerical Stability
Computational Cost
Inversion

Numerical Schemes
Absorbing Conditions
A posteriori Estimate
Seismic Reflexion



PRESENTATION DES TRAVAUX

Cette thèse est composée de trois parties relatives à un même thème de recherche, la propagation des ondes modélisées par des équations linéaires en milieu hétérogène.

Nous allons décrire succinctement ci-dessous, le contexte dans lequel se sont déroulés les travaux, ainsi que les éléments qui ont motivé leur entreprise. Enfin, on énonce les principaux résultats.

Ce travail s'est entièrement déroulé à l'Institut Français du Pétrole (IFP) sous la direction d'Alain Bamberger. La première partie a été réalisée à la division Géophysique et Instrumentation en collaboration avec F. Collino. Le reste a été réalisé à la division Informatique et Mathématiques Appliquées. L'analyse de l'erreur de dispersion en milieu homogène a été faite en collaboration avec F. Collino.

<p>Partie I - Inversion Tridimensionnelle : Etude d'un Milieu Localement Perturbé</p>

Motivations

Les méthodes d'inversion par moindres carrés nécessitent la simulation de la propagation d'ondes dans des milieux complexes. Un vaste travail de recherche a été entrepris, aussi bien au niveau théorique que numérique, en milieux unidimensionnel et bidimensionnel. La poursuite de ces études en milieux tridimensionnels complexes, se heurte au coût informatique des simulations.

Cependant dans le cas d'un milieu localement perturbé, nous avons pu éviter la modélisation 3D complète. Nous avons cherché à retrouver une hétérogénéité de forme générique donnée, incluse dans un milieu homogène de référence.

L'objet de cette première approche de l'inversion tridimensionnelle est de recouvrer la forme de l'hétérogénéité.

Construction de l'exposé

Après une brève présentation de la physique du problème (section 1.1), nous étudions le problème direct, et notamment sa linéarisation par rapport aux

paramètres (section 1.2). Ensuite après une présentation du problème inverse (section 1.3), nous étudions le comportement de la fonction coût des moindres carrés (section 1.4) pour une perturbation sphérique. Enfin nous donnons des résultats pour des perturbations de forme générique ellipsoïdale (section 1.5) et nous concluons (section 1.6).

Résultats

Pour un milieu localement perturbé, la linéarisation du problème et une hypothèse de champ lointain permettent de relier la perturbation sur les sismogrammes à la transformée de Radon de la perturbation sur le milieu.

Nous avons montré, dans ce cas que le rayon de courbure de la fonction coût des moindres carrés au voisinage du minimum, dépendait linéairement de la fréquence de la source émettrice d'ondes. Ceci souligne l'intérêt des méthodes de continuation en fréquence, développées depuis les années 1985, pour surmonter la non-linéarité du problème.

Nous avons ensuite appliqué l'inversion au cas d'ellipsoïdes et montré la bonne convergence de la méthode pour des cas plus complexes que la sphère.

Partie II - Schémas Numériques pour l'Equation des Ondes en Milieu Hétérogène

Motivations

Lorsque l'on s'intéresse à des milieux tridimensionnels complexes, les méthodes d'inversion faisant appel au calcul optimal, nécessitent la modélisation tridimensionnelle de la propagation des ondes.

Le coût informatique pour de telles simulations est alors considérable. Les méthodes numériques pour les problèmes hyperboliques ont été et restent un actif sujet de recherche. Un très grand nombre de publications concernent notamment l'analyse du coût informatique de ces méthodes. Une référence classique est le fameux article de Alford, Kelly et Boore (cf [Alf]).

L'objet de ce travail est de présenter et d'analyser une famille de schémas numériques pour l'équation des ondes acoustiques.

Construction de l'exposé

Nous avons séparé cette étude en deux chapitres : l'un pour le milieu homogène (chapitre 2) et l'autre pour le milieu hétérogène (chapitre 3).

Après une brève introduction (section 2.1), nous analysons l'erreur de dispersion,

en étudiant l'erreur de phase et l'erreur de groupe des schémas d'ordre deux ou d'ordre quatre en temps. Afin de bien comprendre l'analyse du coût informatique (section 2.5), nous donnons les courbes d'erreur en milieux unidimensionnel (section 2.2), bidimensionnel (section 2.3) et tridimensionnel (section 2.4).

Ensuite nous procédons de la même manière pour l'opérateur défini par transformation de Fourier (section 2.6), puis nous concluons cette étude en milieu homogène (section 2.7).

Nous entamons avec le chapitre 3, l'étude de la stabilité et de la précision en milieu hétérogène. Tout d'abord en milieu unidimensionnel (section 3.1) puis en milieu bidimensionnel avec des généralisations en milieu tridimensionnel (section 3.2). Puis en vue d'une parallélisation de l'implémentation, nous étudions les conditions absorbantes éponge (section 3.3).

Résultats

L'étude en milieu homogène nous a permis, comme dans l'article d'Alford, Kelly et Boore, de déduire une règle pratique afin de contrôler la dispersion numérique. Nous préconisons pour des schémas d'ordre 2 ou d'ordre 4 en temps et d'ordre quelconque en espace, un choix du nombre de points par longueur d'onde et du nombre de points par période.

Par exemple, pour un schéma (2-4) nous préconisons 6 points par longueur d'onde minimale, et 20 points par période minimale. Nous avons également montré qu'il n'était pas nécessaire d'utiliser des opérateurs d'ordre très élevé en espace, leur coût calcul devenant prohibitif.

L'étude de la stabilité en milieu hétérogène nous a conduit à des critères de stabilité suffisants, quelque soit l'hétérogénéité du milieu. Les conditions de stabilité obtenues dépendent explicitement des contrastes des paramètres acoustiques (vitesse et densité).

L'étude des propriétés de réflexion et de transmission nous a montré la perte de l'ordre d'approximation du schéma, en présence d'une discontinuité dans le milieu. Les solutions numériques ne convergent plus qu'en $o(h)$.

L'analyse des conditions absorbantes "éponges" a montré la simplicité d'implémentation et l'efficacité de ce procédé. Cependant l'augmentation nécessaire du domaine de calcul, induit un surcoût informatique.

Autres Aspects du Travail

Ce travail a donné lieu à deux publications à la " Première Conférence Internationale sur les Aspects Mathématiques et Numériques des Phénomènes de Propagation d'Ondes" tenue à Strasbourg en avril 1991 (cf [Sei1],[Pia]) et à une présentation lors du congrès "SIAM Annual Meeting" tenu à Chicago en juillet 1990 (cf [Sei2]).

Partie III - Estimations d'Erreur A posteriori pour l'Equation des Ondes

Motivations

Les analyses précédentes en milieux homogène ou hétérogène, donnent des règles pratiques afin d'obtenir des résultats avec une précision acceptable. Cependant cette précision "acceptable" reste qualitative puisque aucune mesure de l'erreur n'est faite en pratique. L'objet de cette dernière partie est justement d'obtenir des estimations de l'erreur en fonction de quantités calculables.

Construction de l'exposé

Nous commençons par déduire une estimation d'erreur a posteriori pour le problème semi-discret en espace (section 4.1). Ensuite nous travaillons sur le problème semi-discrétisé en temps (section 4.2). Enfin, nous donnons l'estimation d'erreur a posteriori globale (section 4.3).

Résultats

Pour le problème semi-discrétisé, nous avons obtenu une majoration d'erreur a posteriori en norme L^2 en $o(h)$. Ensuite par une hypothèse de régularité sur la source nous avons obtenu une majoration a posteriori en norme H^1 également en $o(h)$, ce qui est le cas de la majoration a priori classique de la méthode des éléments finis. Pour le problème totalement discrétisé, nous avons montré que l'erreur se comportait en $o(\Delta t + h)$. Cette technique d'estimation d'erreur a posteriori est un moyen de contrôler la précision numérique, par un processus de réglage adaptatif des pas de temps et d'espace.

Autres Aspects du Travail

Ce travail a donné lieu à une présentation lors du congrès "SIAM Annual Meeting" tenu à Chicago en juillet 1990 (cf [Sei3]).

Table des matières

1	Inversion d'un Milieu Localement Perturbé	3
1.1	Introduction	4
1.2	Problème Direct	6
1.2.1	Linéarisation du problème	6
1.2.2	Hypothèse de champ lointain	8
1.2.3	Equivalence entre perturbations	15
1.3	Problème Inverse	18
1.3.1	Présentation du problème inverse	18
1.3.2	Les moindres carrés	18
1.4	Etude pour une Perturbation Sphérique	19
1.4.1	Expression de la fonction coût	19
1.4.2	Influence de la fréquence au minimum	20
1.5	Résultats Numériques	22
1.5.1	Fonctions coût pour différentes fréquences	22
1.5.2	Résultats d'inversion	27
1.6	Conclusion	31
2	Analyse de l'Erreur de Dispersion	33
2.1	Introduction	35
2.2	Etude en Milieu Unidimensionnel	37
2.2.1	Schémas d'ordre 2 en temps	37
2.2.2	Schémas d'ordre 4 en temps	53
2.3	Etude en Milieu Bidimensionnel	65
2.3.1	Schémas d'ordre 2 en temps	65
2.3.2	Schémas d'ordre 4 en temps	73
2.3.3	Etude de l'Anisotropie Numérique	79
2.4	Etude en Milieu Tridimensionnel	85
2.4.1	Schémas d'ordre 2 en temps	85
2.4.2	Schémas d'ordre 4 en temps	96
2.5	Coût Informatique	105
2.5.1	Coût calcul et place mémoire	105
2.5.2	Critère sur l'erreur de vitesse de phase	107
2.5.3	Critère sur l'erreur de vitesse de groupe	107

TABLE DES MATIÈRES

2.5.4	Méthode employée	108
2.6	Opérateur défini par transformation de Fourier	155
2.6.1	Définition de l'opérateur	155
2.6.2	Erreur sur la vitesse de phase	155
2.6.3	Erreur sur la vitesse de groupe	158
2.6.4	Coût informatique	160
2.7	Conclusion	166
3	Schémas Numériques en Milieu Hétérogène	167
3.1	Cas Unidimensionnel Hétérogène	169
3.1.1	Schémas d'ordre 2 en temps et 2L en espace	169
3.1.2	Schémas d'ordre 4 en temps et 2L en espace	179
3.1.3	Comparaisons avec les schémas de G.Cohen et P.Joly	187
3.1.4	Etude de l'erreur en milieux hétérogènes	194
3.2	Cas Bidimensionnel Hétérogène	215
3.2.1	Schémas d'ordre 2 en temps et 2L en espace	215
3.2.2	Schémas d'ordre 4 en temps et 2L en espace	225
3.2.3	Comparaison avec les schémas de G.Cohen et P.Joly	230
3.2.4	Implémentation du code à deux dimensions	238
3.2.5	Etude de l'erreur en milieu hétérogène	243
3.3	Conditions Absorbantes "Éponges"	246
3.3.1	Cas unidimensionnel homogène	246
3.3.2	Généralisation aux milieux hétérogènes	252
3.3.3	Exemple à deux dimensions	254
3.4	Annexes	258
3.4.1	Annexe 1 : Calcul du transposé	258
3.4.2	Annexe 2 : Démonstration du Lemme 1	260
3.4.3	Annexe 3 : Solution Exacte avec une source Ricker	262
3.4.4	Annexe 4 : Démonstration du Lemme 2	265
4	Estimation d'Erreur A Posteriori	267
4.1	Problème Semi-Discretisé	267
4.1.1	Problème continu	268
4.1.2	Problème semi-discret	269
4.1.3	Erreur a posteriori semi-discrete	270
4.2	Problème Totalement Discretisé	279
4.2.1	Cas d'une valeur propre	280
4.2.2	Estimation a posteriori de l'erreur en temps	283
4.3	Estimation A Posteriori Totale	287
4.3.1	Estimation en norme L^2	287
5	Bibliographie	289

PARTIE I

**INVERSION TRIDIMENSIONNELLE : ETUDE
D'UN MILIEU LOCALEMENT PERTURBE**

Chapitre 1

Inversion Tridimensionnelle : Etude d'un Milieu Localement Perturbé

Dans ce premier chapitre nous abordons l'inversion en milieu tridimensionnel avec un objectif triple.

Tout d'abord nous présentons des calculs analytiques dans le cas d'un milieu tridimensionnel localement perturbé. Ces calculs sont menés dans le cadre d'une linéarisation par rapport aux paramètres et ensuite grâce à une hypothèse de champ lointain.

On obtient ainsi une relation entre les sismogrammes et la transformée de Radon de la perturbation. On montre ensuite que les hypothèses précédentes conduisent à des classes d'équivalence de perturbations.

Ensuite nous étudions, dans le cas d'une perturbation sphérique, le comportement de la fonction coût des moindres carrés, suivant la fréquence de la source émettrice d'ondes. On établit une relation montrant le comportement du rayon de courbure au voisinage du minimum en fonction de la fréquence.

Enfin nous présentons des résultats d'inversion d'un ellipsoïde ayant trois axes différents, afin de montrer que la méthode s'applique à des cas plus compliqués que la sphère.

1.1 Introduction

Une expérience de sismique consiste à faire propager une onde dans le sous-sol, et à enregistrer les réponses de celui-ci en surface à l'aide de capteurs.

Les interfaces du milieu donnent naissance à des phénomènes de réflexion, diffraction et de transmission; ainsi les enregistrements sismiques, appelés sismogrammes, sont riches en information sur ces interfaces (cf fig 1.2).

Lorsque l'on dispose des sismogrammes il faut se livrer à un travail d'interprétation de ces données. Un des moyens d'interprétation est ce que l'on appelle l'inversion. Cette démarche consiste à faire une simulation numérique de la propagation des ondes dans un milieu de caractéristiques données, et de mesurer l'écart entre les sismogrammes générés et ceux enregistrés.

On cherche ensuite à faire décroître cet écart et le modèle géophysique retenu sera celui qui rendra l'écart (c'est à dire l'erreur) minimum.

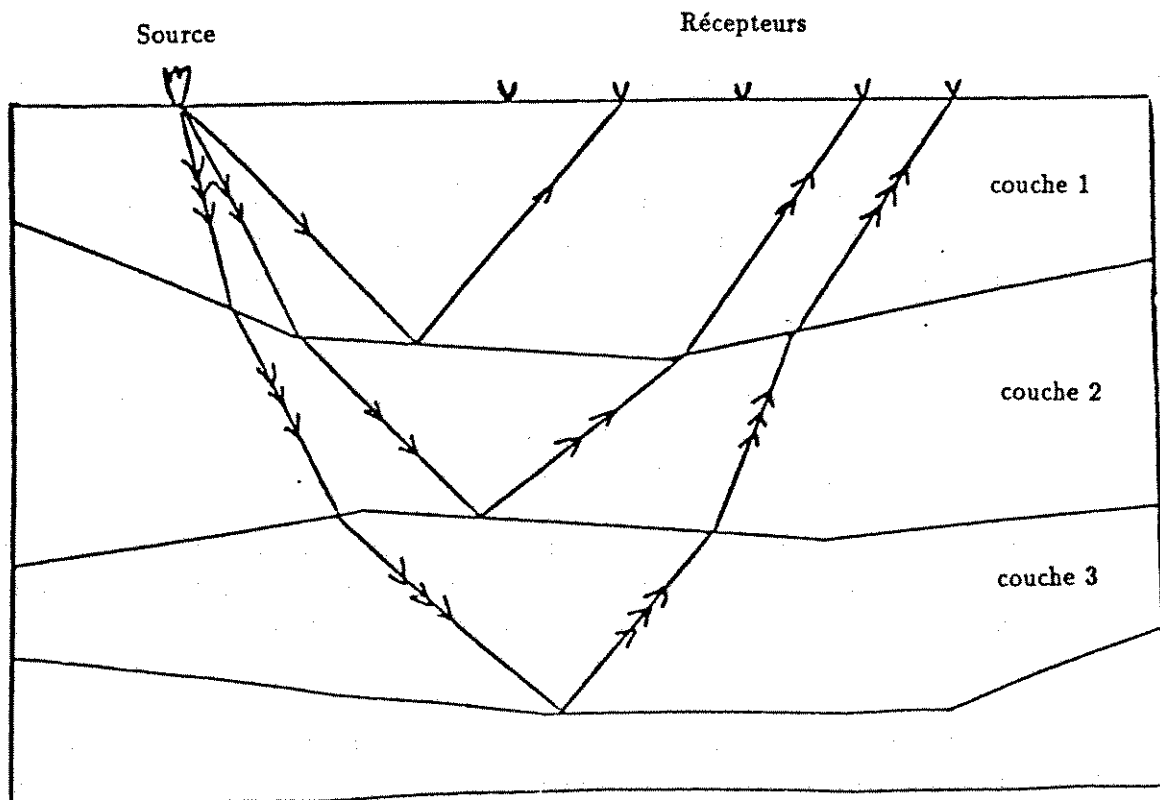


fig 1.1 : Illustration d'une expérience de sismique.

1.1. INTRODUCTION

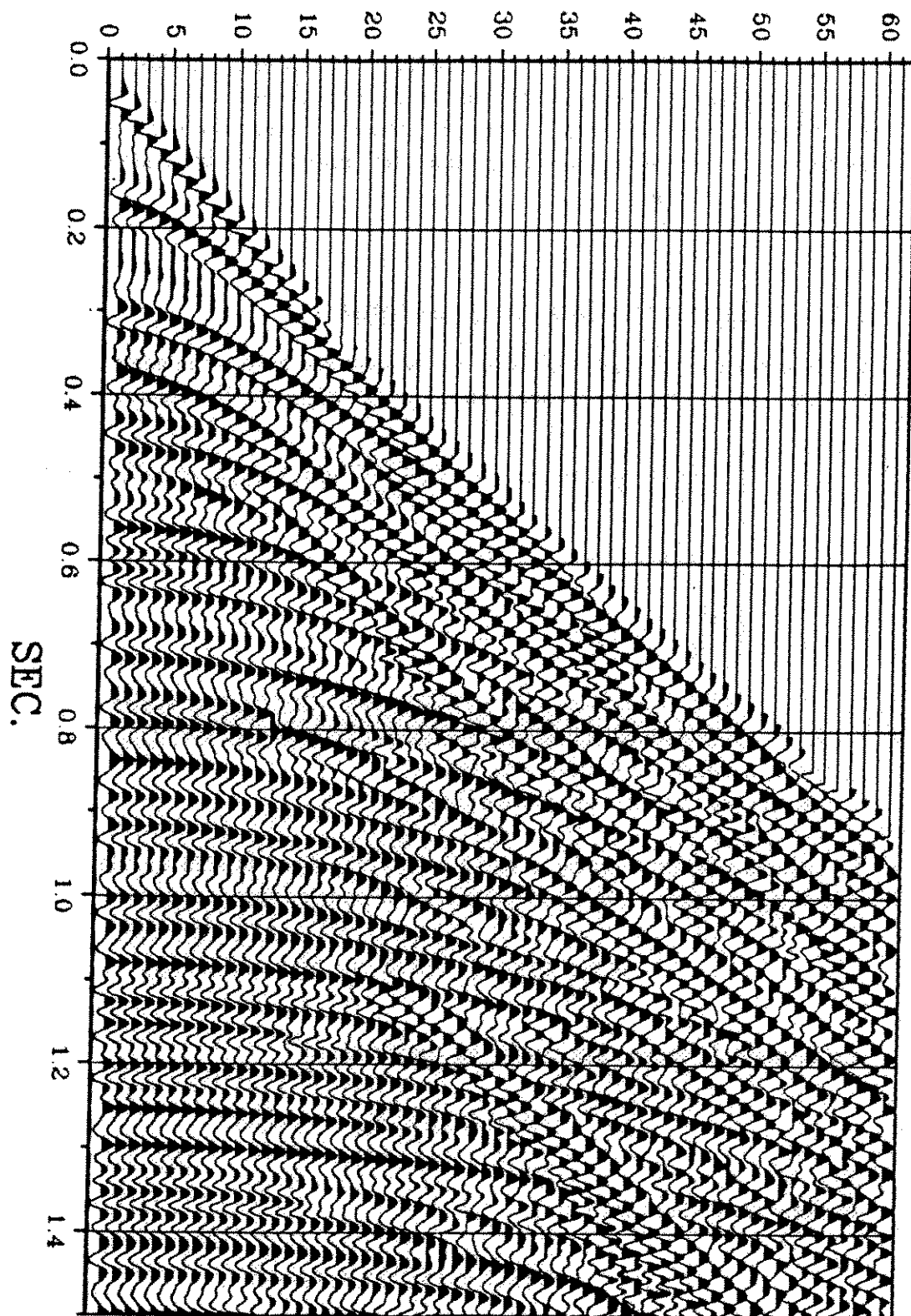


fig 1.2 : Exemple de sismogrammes.

1.2 Problème Direct

On présente tout d'abord la linéarisation de l'équation des ondes. Ensuite on utilise une hypothèse de champ lointain pour obtenir un développement de la variation de pression δu en fonction du rapport diamètre sur profondeur de la perturbation. Le premier terme de ce développement fait apparaître des classes d'équivalences entre perturbations.

1.2.1 Linéarisation du problème

On se place dans le cadre d'un milieu acoustique homogène sans surface libre. La variable mesurée est la pression u qui est régie par l'équation des ondes:

$$\begin{cases} \frac{1}{K(x)} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t, x_s) - \nabla \left(\frac{1}{\rho(x)} \nabla u(x, t, x_s) \right) = S(x, t, x_s) \\ u(x, 0, x_s) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0, x_s) = 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

où $K(x)$ est le module d'incompressibilité
 $\rho(x)$ est la densité volumique de masse
 $S(x, t, x_s)$ est la source émettrice d'ondes.

En utilisant la fonction de Green $\Gamma(x, t, x_s)$, qui est la solution de (1.1) avec $S(x, t, x_s) = \delta(x - x_s)\delta(t)$, la solution u a pour expression :

$$u(x, t, x_s) = \int_V \Gamma(x, t, y) * S(y, t, x_s) dV(y)$$

En prenant la source ponctuelle en espace on a:

$$S(y, t, x_s) = \delta(y - x_s)S(t)$$

et donc u est de la forme:

$$u(x, t, x_s) = \Gamma(x, t, x_s) * S(t)$$

On va maintenant s'intéresser à la solution $u + \delta u$ du problème (1.1) avec $K + \delta K$

1.2. PROBLÈME DIRECT

et $\rho + \delta\rho$. Afin de linéariser le problème on fait les hypothèses :

$$\frac{\delta K}{K} \ll 1 \quad \frac{\delta\rho}{\rho} \ll 1$$

δu est alors solution du problème linéarisé :

$$\begin{cases} \frac{1}{K(x)} \frac{\partial^2 \delta u}{\partial t^2}(x, t, x_s) - \nabla \left(\frac{1}{\rho(x)} \nabla \delta u(x, t, x_s) \right) = \frac{\delta K}{K^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t, x_s) - \nabla \left(\frac{\delta\rho}{\rho^2} \nabla u(x, t, x_s) \right) \\ \delta u(x, 0, x_s) = 0 \\ \frac{\partial \delta u}{\partial t}(x, 0, x_s) = 0 \end{cases} \quad (1.2)$$

soit encore en utilisant la fonction de Green :

$$\delta u(x_r, t, x_s) = \int_V \Gamma(x_r, t, y) * \left[\frac{\delta K}{K^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(y, t, x_s) - \nabla \left(\frac{\delta\rho}{\rho^2} \nabla u(y, t, x_s) \right) \right] dV(y)$$

En utilisant le fait que u est solution de (1.1) et que l'on se place en milieu homogène on trouve :

$$\delta u(x_r, t, x_s) = \int_V \Gamma(x_r, t, y) * \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(y, t, x_s) \left(\frac{\delta K}{K^2} - \frac{\delta\rho}{\rho K} \right) + \frac{\delta\rho}{\rho} S(y, t, x_s) \right] dV(y)$$

Lorsque l'on suppose que la perturbation n'introduit pas de variation en densité c'est à dire $\delta\rho = 0$ on trouve :

$$\delta u(x_r, t, x_s) = \int_V \Gamma(x_r, t, y) * \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(y, t, x_s) \left(\frac{\delta K}{K^2} \right) \right] dV(y)$$

Pour un milieu sans surface libre, on connaît l'expression de la fonction de Green qui est donnée par :

$$\Gamma(y, t, x_s) = \frac{\rho}{4\pi \|y - x_s\|} \delta \left(t - \frac{\|y - x_s\|}{c} \right)$$

Ainsi on a une expression reliant les sismogrammes δu et la perturbation δK

CHAPITRE 1. INVERSION D'UN MILIEU LOCALEMENT PERTURBÉ

$$\delta u(x_r, t, x_s) = \frac{1}{(4\pi c^2)^2} \int_V \frac{\ddot{S}(t - \frac{\|x - x_s\| + \|x - x_r\|}{c})}{\|x - x_s\| \|x - x_r\|} \delta K(x) dV(x) \quad (1.3)$$

On pose $C^{ste} = (4\pi c^2)^2$

Remarque :

On aurait formule analogue pour δP si on travaillait dans un milieu avec surface libre en supposant $\delta\rho = 0$. Le calcul fait alors intervenir une source virtuelle S' symétrique de S par rapport à la surface dans l'expression de Γ qui reste symétrique en S et S' .

On peut donc, sans restreindre la généralité, s'intéresser au cas sans surface libre avec $\delta\rho = 0$.

1.2.2 Hypothèse de champ lointain

On suppose maintenant que la perturbation est petite devant sa profondeur. Ainsi on supposera la perturbation à une profondeur égale à 1 et de diamètre ε .

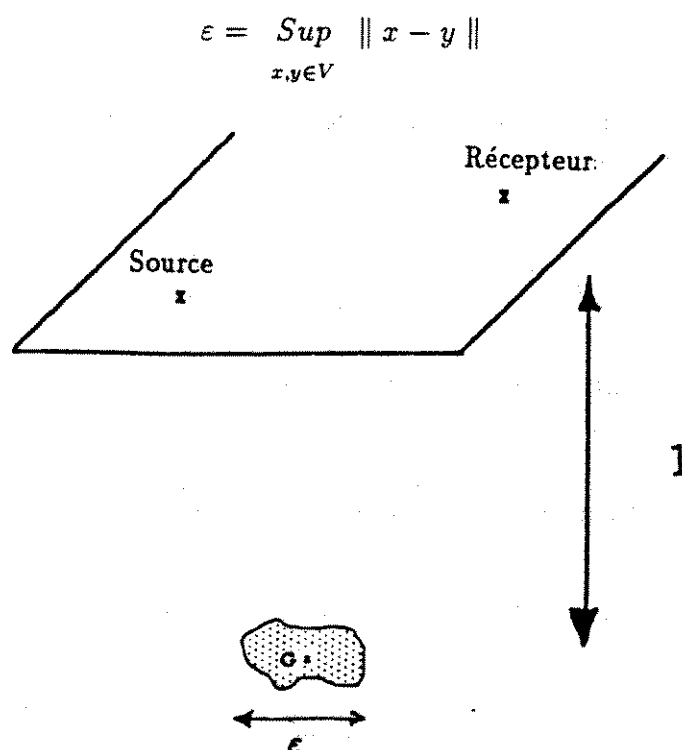


fig 1.3 : Exemple de perturbation localisée en espace.

1.2. PROBLÈME DIRECT

Pour tout point x de la perturbation et pour G quelconque, on a :

$$\|x - x_s\| = \|x_G - x_s\| \sqrt{1 + 2(x - x_G) \frac{(x_G - x_s)}{\|x_G - x_s\|} + \|x - x_G\|^2}$$

on a la

Proposition 1.1

Soit G un point tel que : $\forall x \in V \quad \|x - x_G\| \leq \varepsilon$ alors on a :

$$\delta u(x, t, x_s) = \delta u^0(x, t, x_s) - B \int_{\alpha}^{\beta} \ddot{S}(t - t_G - \frac{p}{c}) \cdot p \cdot \delta \tilde{K}(p) dp + O(\varepsilon^3)$$

avec

$$\delta u^0(x, t, x_s) = \frac{C^{ste}}{\|x_G - x_s\| \|x_G - x_r\|} \int_{\alpha}^{\beta} \ddot{S}(t - t_G - \frac{p}{c}) \delta \tilde{K}(p) dp$$

$$B = \frac{C^{ste}}{\|x_G - x_s\|^2} + \frac{C^{ste}}{\|x_G - x_r\|^2}$$

DÉMONSTRATION :

On part de la relation :

$$\delta u(x_r, t, x_s) = \frac{1}{(4\pi c^2)^2} \int_V \frac{\ddot{S}(t - \frac{\|x - x_s\| + \|x - x_r\|}{c})}{\|x - x_s\| \|x - x_r\|} \delta K(x) dV(x)$$

On a pour tout point G :

$$\|x - x_s\| = \|x_G - x_s\| \sqrt{1 + 2(x - x_G) \frac{(x_G - x_s)}{\|x_G - x_s\|} + \|x - x_G\|^2}$$

En faisant un développement en ε on a :

$$\|x - x_s\| = \|x_G - x_s\| + (x - x_G) \frac{(x_G - x_s)}{\|x_G - x_s\|} + O(\varepsilon^2)$$

de même :

$$\|x - x_r\| = \|x_G - x_r\| + (x - x_G) \frac{(x_G - x_r)}{\|x_G - x_r\|} + O(\varepsilon^2)$$

CHAPITRE 1. INVERSION D'UN MILIEU LOCALEMENT PERTURBÉ

d'où :

$$\begin{aligned} \|x - x_s\| + \|x - x_r\| &= \|x_G - x_s\| + \|x_G - x_r\| + (x - x_G) \cdot W_{SR} + O(\varepsilon^2) \\ \frac{1}{\|x - x_s\| \|x - x_r\|} &= \frac{1}{\|x_G - x_s\| \|x_G - x_r\|} - B \cdot (x - x_G) \cdot W_{SR} + O(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

avec

$$W_{SR} = \frac{x - x_s}{\|x - x_s\|} + \frac{x - x_r}{\|x - x_r\|}$$

d'où la relation :

$$\begin{aligned} \delta u(x, t, x_s) &= \frac{C^{ste}}{\|x_G - x_s\| \|x_G - x_r\|} \int_V \ddot{S}(t - t_G - \frac{(x - x_G)}{c} \cdot W_{SR}) \delta K(x) dx \\ &\quad - B \int_V \ddot{S}(t - t_G - \frac{(x - x_G)}{c} \cdot W_{SR}) (x - x_G) W_{SR} \delta K(x) dx + O(\varepsilon^3) \end{aligned}$$

En intégrant sur les plans d'équation $(x - x_G)W_{SR} = p$ pour $p \in [\alpha, \beta]$ on obtient:

$$\delta u(x, t, x_s) = \delta u^0(x, t, x_s) - B \int_{\alpha}^{\beta} \ddot{S}(t - t_G - \frac{p}{c}) p \delta \check{K}(p) dp + O(\varepsilon^3)$$

avec

$$\delta P^0(x, t, x_s) = \frac{C^{ste}}{\|x_G - x_s\| \|x_G - x_r\|} \int_{\alpha}^{\beta} \ddot{S}(t - t_G - \frac{p}{c}) \delta \check{K}(p) dp$$

et

$$\delta \check{K}(p) = \int_{(x - x_G) \cdot W_{SR} = p} \delta K(x) dx$$

$$t_G = \frac{\|x - x_s\|}{c} + \frac{\|x - x_r\|}{c} \quad \square$$

Remarques :

i) $\delta \check{K}(p)$ est la transformée de Radon de δK . Elle s'introduit naturellement car on a transformé l'intégration sur le domaine V , en une double intégration ; l'une sur les plans d'équation $(x - x_G)W_{SR} = p$, l'autre sur la cote du plan p qui varie

1.2. PROBLÈME DIRECT

entre α et β .

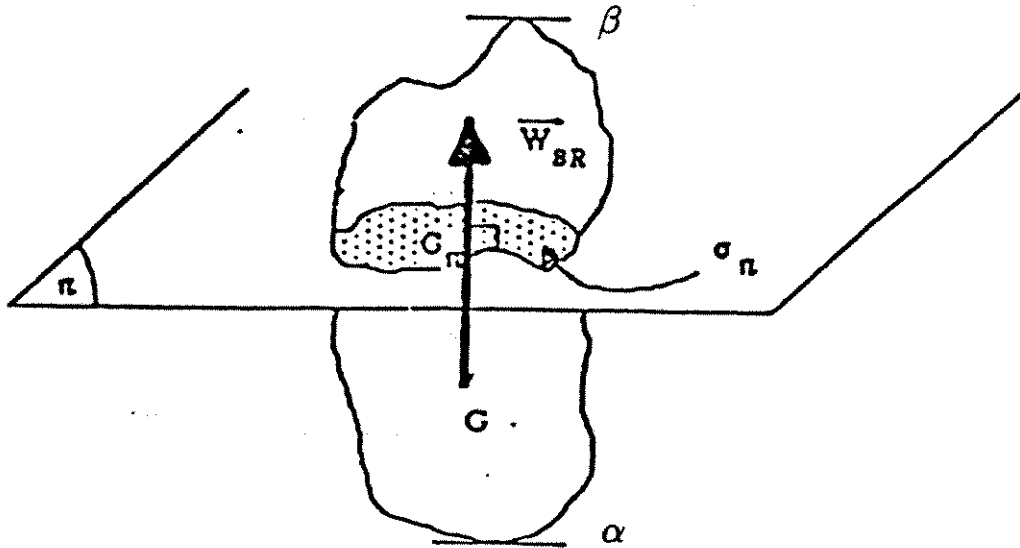


fig 1.4 : Illustration de la méthode de calcul de $\delta\check{K}(p)$.

ii) t_G est le temps de parcours Source, point G, Récepteur.

iii) W_{SR} est le vecteur normal au plan de coupe pour la transformée de Radon.

On rappelle la définition de la transformée de Radon d'une fonction f . Soit x un vecteur de R^n et p un réel. On définit la transformée de Radon de f au point (p, x) par :

$$\check{f}(p, x) = \int_{x \cdot y = p} f(y) dy$$

C'est l'intégrale de f dans l'hyperplan d'équation $x \cdot y = p$.

A deux dimensions, cela revient à intégrer f suivant des droites orthogonales au

CHAPITRE 1. INVERSION D'UN MILIEU LOCALEMENT PERTURBÉ

vecteur x situées à la distance p de l'origine. Ici $\delta\tilde{K}(p)$ correspond à $\delta\tilde{K}(p, W_{SR})$

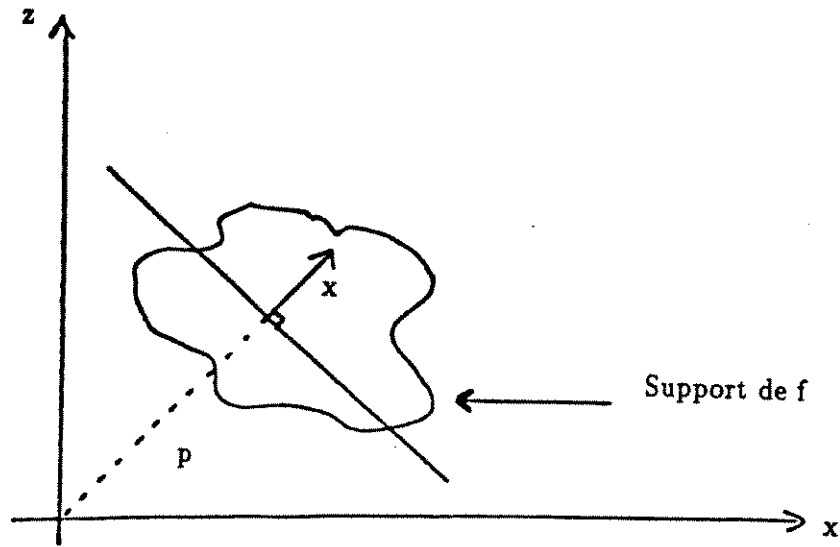


fig 1.5 : Illustration du procédé d'intégration de Radon.

Le résultat précédent montre que l'on peut choisir un point G quelconque pour le développement de $\delta P(x_r, t, x_s)$. Il serait intéressant de savoir s'il existe un point G qui améliorerait la validité du développement. Le résultat suivant répond en partie à la question.

Proposition 1.2

On suppose que la source est à spectre borné et que la perturbation est petite devant la longueur d'onde minimale de la source. Alors si le point G vérifie :

$$\int_V (x - x_G) \delta K(x) dx = 0$$

on a :

$$\delta P(x, t, x_s) = \frac{\ddot{S}(t - t_G)}{\|x_G - x_s\| \|x_G - x_r\|} \int_V \delta K(x) dx + O(\epsilon^3)$$

Remarque :

1.2. PROBLÈME DIRECT

Ce point G particulier fait gagner un ordre dans le développement en annulant l'ordre 2 en ε , c'est à dire augmente la validité du développement.

L'hypothèse de source à spectre borné n'est pas restrictive car, en pratique, on a pour source un Ricker qui vérifie cette propriété.

DÉMONSTRATION :

On part de l'expression suivante :

$$\delta u(x_r, t, x_s) = \frac{1}{(4\pi c^2)^2} \int_V \frac{\ddot{S}(t - \frac{\|x - x_s\| + \|x - x_r\|}{c})}{\|x - x_s\| \|x - x_r\|} \delta K(x) dV(x)$$

On passe dans le domaine de Fourier pour la source

$$\ddot{S}(t) = \frac{1}{\pi} \text{Re} \int_0^{\Omega_{\max}} \omega^2 \hat{S}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

On utilise alors les développements au premier ordre en ε suivants:

$$\|x - x_s\| = \|x_G - x_s\| + (x - x_G) \frac{(x_G - x_s)}{\|x_G - x_s\|} + O(\varepsilon^2)$$

$$\|x - x_r\| = \|x_G - x_r\| + (x - x_G) \frac{(x_G - x_r)}{\|x_G - x_r\|} + O(\varepsilon^2)$$

on peut alors écrire :

$$\|x - x_s\| + \|x - x_r\| = \|x_G - x_s\| + \|x_G - x_r\| + (x - x_G) \cdot W_{SR} + O(\varepsilon^2)$$

et

$$\frac{1}{\|x - x_s\| \|x - x_r\|} = \frac{1}{\|x_G - x_s\| \|x_G - x_r\|} [1 - (x - x_G) \cdot A + O(\varepsilon^2)]$$

avec

$$A = \frac{x - x_s}{\|x - x_s\|^2} + \frac{x - x_r}{\|x - x_r\|^2}$$

ce qui donne pour δu :

CHAPITRE 1. INVERSION D'UN MILIEU LOCALEMENT PERTURBÉ

$$\delta u(x_r, t, x_s) = \frac{C^{ste}}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^{\Omega_{max}} \frac{\omega^2 \hat{S}(\omega)}{\|x_G - x_s\| \|x_G - x_r\|} \left[\int_V [1 - (x - x_G) \cdot A] \delta K(x) e^{i\omega(t - \frac{\|x - x_s\| + \|x - x_r\|}{c})} dx \right] d\omega + O(\varepsilon^3)$$

Travaillons maintenant sur le terme de phase

$$e^{i\omega(t - \frac{\|x - x_s\| + \|x - x_r\|}{c})} = e^{i\omega(t - t_G)} \cdot e^{-i\frac{\omega}{c} [(x - x_G) \cdot W_{SR} + O(\varepsilon^2)]}$$

La longueur d'onde minimale de la source correspond à la pulsation Ω_{max} c'est à dire que : $\lambda_{min} = 2\pi c / \Omega_{max}$

On fait alors l'hypothèse : $\varepsilon / \lambda_{min} \ll 1$ ce qui permet de développer l'exponentielle

$$e^{-i\frac{\omega}{c} [(x - x_G) \cdot W_{SR} + O(\varepsilon^2)]} = 1 - i\frac{\omega}{c} [(x - x_G) \cdot W_{SR} + O(\varepsilon^2)] + O\left(\left(\frac{\varepsilon}{\lambda}\right)^2\right)$$

d'où

$$\begin{aligned} \delta u(x_r, t, x_s) &= \frac{C^{ste}}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^{\Omega_{max}} \frac{\omega^2 \hat{S}(\omega)}{\|x_G - x_s\| \|x_G - x_r\|} \left(\int_V \delta K(x) dx \right) d\omega \\ &- \frac{C^{ste}}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^{\Omega_{max}} \frac{\omega^3 \hat{S}(\omega) e^{i\omega(t - t_G)}}{c \|x_G - x_s\| \|x_G - x_r\|} \left(\int_V (x - x_G) \cdot W \delta K(x) dx \right) d\omega \\ &- \frac{C^{ste}}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^{\Omega_{max}} \frac{\omega^2 \hat{S}(\omega) e^{i\omega(t - t_G)}}{\|x_G - x_s\| \|x_G - x_r\|} \left(\int_V (x - x_G) \cdot A \delta K(x) dx \right) d\omega \\ &+ O(\varepsilon^3) \end{aligned}$$

Ainsi en choisissant G tel que :

$$\int_V (x - x_G) \delta K(x) dx = 0$$

on a :

$$\left(\int_V (x - x_G) \delta K(x) dx \right) \cdot W = \left(\int_V (x - x_G) \delta K(x) dx \right) \cdot A = 0$$

d'où le résultat. □

1.2. PROBLÈME DIRECT

1.2.3 Equivalence entre perturbations

Nous n'avons fait, jusqu'à présent aucune hypothèse sur la connexité de V . Si on suppose que V n'est pas connexe (c'est à dire pas en un seul morceau) alors en ne conservant que δu^0 dans le développement de δu , on montre que deux perturbations différentes donnent (au premier ordre) la même réponse.

En effet une perturbation est caractérisée par :

- un point arbitraire $G \in Co(V)$ (Co(V) enveloppe convexe de V)
- les intégrales de surfaces $\delta \check{K}(p)$ $p \in [\alpha, \beta]$.

Alors avec :

$$V = \bigcup_{i=1}^N V_i \quad \text{et} \quad \bigcap_{i=1}^N V_i = \emptyset$$

et toujours $\text{diam}(V) \ll 1$ la linéarité de l'intégrale donne :

$$\delta u(x, t, x_s) = \sum_{i=1}^N \frac{C^{ste}}{\|x_G - x_s\| \|x_G - x_r\|} \int_{\alpha_i}^{\beta_i} \ddot{S}(t - t_G - \frac{p}{c}) \delta \check{K}_i(p) dp$$

$\alpha_i = \alpha \quad \beta_i = \beta \quad \forall i = 1..N$ alors :

$$\delta u(x, t, x_s) = \frac{C^{ste}}{\|x_G - x_s\| \|x_G - x_r\|} \int_{\alpha}^{\beta} \ddot{S}(t - t_G - \frac{p}{c}) \left(\sum_{i=1}^N \delta \check{K}_i(p) \right) dp$$

En supposant que les perturbations V_i ont la même forme (par exemple que ce sont toutes des sphères de rayon fixe) et donc que $V_i = Z$ ou Z est une perturbation fixe on a

$$\delta \check{K}_i(p) = \delta \check{K}_Z(p)$$

et donc :

$$\delta u(x, t, x_s) = \frac{NC^{ste}}{\|x_G - x_s\| \|x_G - x_r\|} \int_{\alpha}^{\beta} \ddot{S}(t - t_G - \frac{p}{c}) \delta \check{K}_Z(p) dp$$

ainsi la perturbation $V = \bigcup_{i=1}^N V_i$ caractérisée par les δK_i est équivalente à la

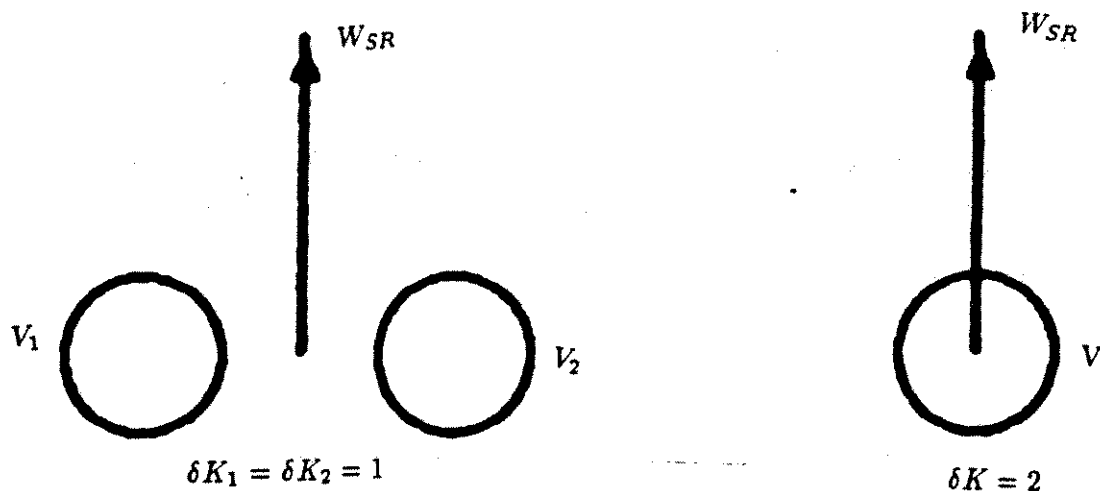
perturbation Z caractérisée par $N\delta K_Z$.

On définit ainsi une relation d'équivalence par la relation :

$$V \mathfrak{R} Z \quad \longleftrightarrow \quad \delta P \text{ associé à } V = \delta P \text{ associé à } Z$$

CHAPITRE 1. INVERSION D'UN MILIEU LOCALEMENT PERTURBÉ

Ainsi les deux configurations suivantes sont équivalentes :



Il est donc clair que l'hypothèse de connexité sur V détermine l'élément de la classe d'équivalence que l'on retrouve.

Remarque :

i) L'approximation utilisée ne distingue donc pas les deux objets ci-dessus; ceci peut s'interpréter en terme de pouvoir de résolution, c'est à dire montre ce que l'on peut espérer retrouver lors d'une inversion.

ii) Lorsque $V_i = Z$ un moyen d'avoir $\alpha_i = \alpha \quad \beta_i = \beta \quad \forall i = 1..N$ est d'imposer que:

$$W_{SR} \cdot C_i C_j = 0 \quad i < j \leq N$$

où C_i est le centre de V_i .

En posant :

$$u_{ij} = \frac{C_i C_j}{\|C_i C_j\|}$$

le point G vérifie :

$$GS \cdot u_{ij} = C^{te}_{ij} \quad i < j \leq N$$

c'est à dire qu'il se trouve à l'intersection de plusieurs plans.

1.2. PROBLÈME DIRECT

Pour l'exemple précédent des deux sphères on a simplement une direction u telle que $GS \cdot u = C^{te}$. Ceci définit le plan bissecteur de l'angle (SG,GR) .

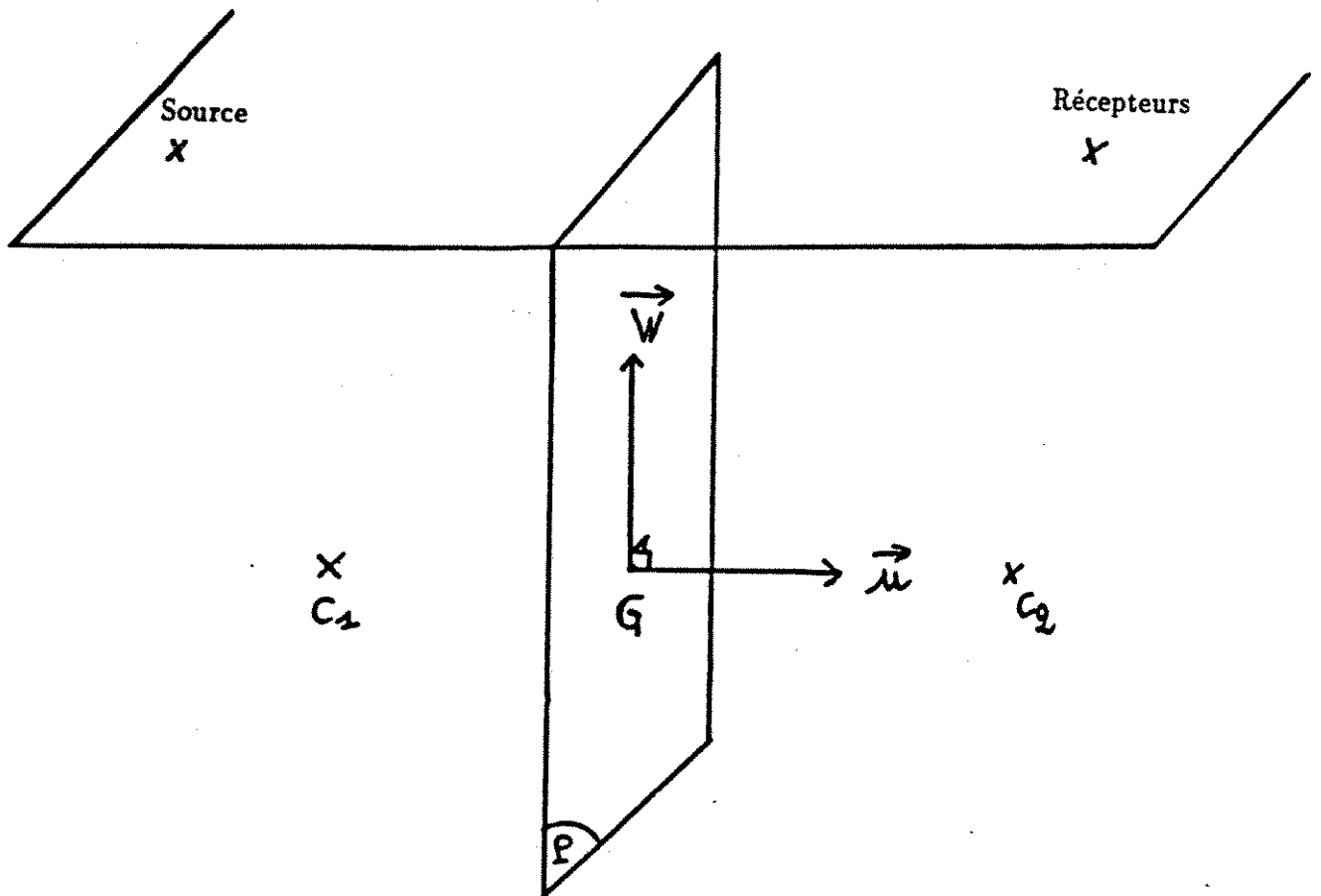


fig 1.6 : Le plan bissecteur.

1.3 Problème Inverse

1.3.1 Présentation du problème inverse

Le problème inverse associé à l'équation des ondes consiste à retrouver les paramètres d'une structure du sous-sol (vitesse, densité, géométrie) à partir des sismogrammes enregistrés en surface.

Soit Φ l'opérateur de modélisation, qui à un sous-sol donné (ρ, K) associe les sismogrammes correspondant.

Le problème inverse s'énonce alors comme suit :

" Etant donné une observation (ici un sismogramme) X existe-t-il des paramètres (ρ, K) tels que : $\Phi(\rho, K) = X$? "

Ce problème est difficile car l'opérateur Φ est non linéaire en (ρ, K) et donc en général n'admet pas d'inverse.

De plus les données ne sont pas en pratique dans l'espace image de l'opérateur Φ car elles sont bruitées.

1.3.2 Les moindres carrés

Puisqu'il n'est pas possible en général de résoudre le problème inverse on s'intéresse au problème suivant :

" Existe-t-il un jeu de paramètres (ρ, K) tel que l'écart $J(\rho, K) = \| \Phi(\rho, K) - X \|$ soit minimum ? "

On cherche de ce fait les paramètres qui expliquent "au mieux" (au sens de la norme ci-dessus) les données. Pour notre problème la norme choisie est la norme L^2 en temps.

La fonctionnelle J est donc définie par :

$$J(\rho, K) = \sum_{\text{sources}} \sum_{\text{récepteurs}} \left[\int_0^{+\infty} (\Phi(\rho, K)(t) - X(t))^2 dt \right]^{1/2} \quad (1.4)$$

Nous renvoyons le lecteur à [Cha] pour une étude plus complète du problème inverse.

1.4. ETUDE POUR UNE PERTURBATION SPHÉRIQUE

1.4 Etude pour une Perturbation Sphérique

Nous appliquons ici les résultats de la section (1.2.2) au cas d'une sphère. Nous donnons d'abord l'expression de la fonction coût. Ensuite nous étudions la dépendance du rayon courbure de la fonction coût par rapport à la fréquence de la source et nous obtenons des comportements asymptotiques.

1.4.1 Expression de la fonction coût

Dans le cas d'une perturbation sphérique de rayon r , la transformée de Radon de δK s'exprime facilement, si on suppose que δK est constant dans la sphère on a :

$$\delta \check{K}(p) = \delta K \cdot \pi \cdot (r^2 - p^2)$$

d'où

$$\delta u(x_r, t, x_s) = \frac{C^{ste} \delta K \pi}{\|x_G - x_s\| \|x_G - x_r\|} \int_{-r}^{+r} \ddot{S}(t - t_G - \frac{p}{c})(r^2 - p^2) dp$$

L'application de modélisation Φ est définie par :

$$\Phi : r \mapsto \Phi(r) = \delta P(t)$$

Lorsque les données sont synthétiques, alors l'observation X est donnée par :

$$X = \Phi(r_0).$$

Ainsi la fonction coût J s'exprime sous la forme :

$$J(r) = \sum_{sources} \sum_{récepteurs} \left[\int_0^{+\infty} (\Phi(r) - \Phi(r_0))^2(t) dt \right]^{1/2}$$

On suppose r proche de r_0 ; on peut alors linéariser Φ autour de r_0 , d'où :

$$J(r) = \sum_{sources} \sum_{récepteurs} \left(\frac{2\delta K \pi C^{ste} r_0 (r - r_0)}{\|x_G - x_s\| \|x_G - x_r\|} \right)^2 \int_0^{+\infty} \left[\int_{-r_0}^{+r_0} \ddot{S}(t - t_G - \frac{p}{c}) dp \right]^2 dt$$

La linéarisation de J autour de r_0 se justifie par le fait que l'on va s'intéresser au comportement local de la fonction coût en r_0 .

CHAPITRE 1. INVERSION D'UN MILIEU LOCALEMENT PERTURBÉ

1.4.2 Influence de la fréquence au minimum

On définit le rayon de courbure de J au voisinage de r_0 comme l'inverse de la dérivée seconde de J en r_0 .

Proposition 1.3

Si on suppose que : $\ddot{S}(t) = G(Ft)$ et $r_0/\lambda \ll 1$
où F est la fréquence, λ la longueur d'onde et $G \in C^\infty(\mathbb{R})$, alors le rayon de courbure $R(r_0, F)$ vérifie :

$$R(r_0, F) = \frac{1}{32\alpha r_0^2 \|G\|^2} \cdot F$$

où

$$\alpha = \frac{\delta K \pi}{\|x_G - x_s\| \|x_G - x_r\|}$$

Nous avons illustré ce résultat par la figure (1.7)

DÉMONSTRATION :

On a :

$$J''(r_0) = 8\alpha^2 r_0^2 \int_0^{+\infty} I^2(r_0, t) dt$$

où

$$I(r_0, t) = \int_{-r_0}^{r_0} G\left(F\left(t - t_G + \frac{p}{c}\right)\right) dp$$

d'où en supposant que $r_0/\lambda \ll 1$

$$I^2(r_0, t) = 2r_0 G(F(t - t_G))$$

Ainsi

$$J''(r_0) = 32\alpha r_0^2 \|G\|^2 \cdot \frac{1}{F} \quad \square$$

L'hypothèse sur la source suppose qu'elle est à amplitude constante. On peut considérer le cas où l'amplitude de la source dépend également de la fréquence. il est judicieux alors, de normaliser $J(r)$ par l'arrivée directe en G . Ainsi on définit

$$V(r) = \frac{J(r)}{\|P(r_G)\|^2}$$

1.4. ETUDE POUR UNE PERTURBATION SPHÉRIQUE

avec

$$P(r_G) = \frac{1}{r_G} S\left(t - \frac{t_G}{c}\right)$$

Proposition 1.4

On suppose que la source est de la forme : $S(t) = A(F)G(Ft)$
où F est la fréquence et $G \in C^\infty(\mathbb{R})$ alors on a :

$$V(r) \sim C^{te} \cdot F \quad \text{lorsque } F \rightarrow +\infty$$

$$V(r) \sim C^{te} \cdot F^3 \quad \text{lorsque } F \rightarrow 0$$

DÉMONSTRATION :

On a

$$V(r) = (2\alpha(r - r_0)r_0r_G)^2 \cdot F \cdot \frac{\int_0^{FT} \left(\dot{G}\left(u - Ft_G + \frac{ar_0}{\lambda}\right) - \dot{G}\left(u - Ft_G - \frac{ar_0}{\lambda}\right)\right)^2 du}{\int_0^{FT} G^2\left(u - \frac{r_0}{\lambda}\right) du}$$

La première intégrale vaut :

$$\int_0^{FT} \left(\dot{G}\left(u - Ft_G + \frac{ar_0}{\lambda}\right) - \dot{G}\left(u - Ft_G - \frac{ar_0}{\lambda}\right)\right)^2 du = 2(\|\dot{G}\|^2 - \dot{G} * \dot{G}\left(\frac{2ar_0}{\lambda}\right))$$

i) Lorsque $F \rightarrow +\infty$ alors $\frac{r_0}{\lambda} \rightarrow +\infty$

$$\dot{G} * \dot{G}\left(\frac{2ar_0}{\lambda}\right) = 0$$

et

$$\int_0^{FT} G^2\left(u - \frac{r_0}{\lambda}\right) du = \|G\|^2$$

Ainsi

$$V(r) = 2(2\alpha(r - r_0)r_0r_G)^2 \frac{\|\dot{G}\|^2}{\|G\|^2} \cdot F$$

CHAPITRE 1. INVERSION D'UN MILIEU LOCALEMENT PERTURBÉ

ii) Lorsque $F \rightarrow 0$ alors $\frac{r_0}{\lambda} \rightarrow 0$

$$\int_0^{FT} \left(\dot{G}\left(u - Ft_G + \frac{ar_0}{\lambda}\right) - \dot{G}\left(u - Ft_G - \frac{ar_0}{\lambda}\right) \right)^2 du = 4F^3 T \frac{ar_0^2}{c^2} \ddot{G}(0)$$

et

$$\int_0^{FT} G^2\left(u - \frac{r_0}{\lambda}\right) du = G(0)$$

d'où

$$V(r) = (2\alpha(r - r_0)r_0r_G \frac{r_0}{c})^2 \frac{\ddot{G}(0)}{G(0)} \cdot F^3 \quad \square$$

1.5 Résultats Numériques

Nous illustrons les résultats de la section (1.4) sur le rayon de courbure de la fonction coût. Ensuite nous montrons un exemple d'inversion d'un ellipsoïde.

1.5.1 Fonctions coût pour différentes fréquences

Nous illustront ici les résultats du paragraphe (1.4.2)

On remarque essentiellement deux aspects :

- i) Le puit de convergence diminue lorsque la fréquence augmente
- ii) La résolution est meilleure pour les hautes fréquences c'est à dire que la fonction coût est plus "pointue" au voisinage du minimum.

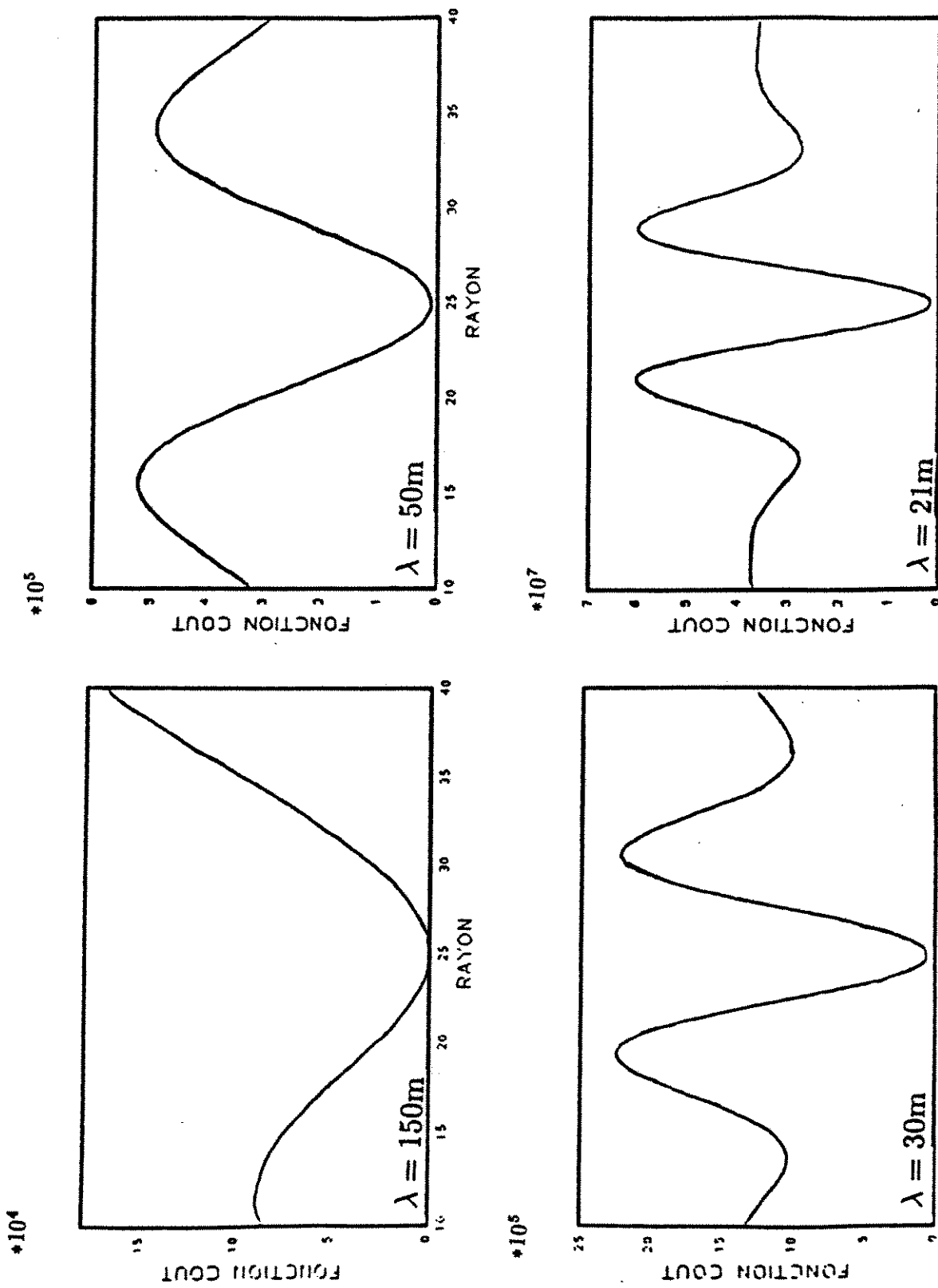


fig 1.7 : Exemples de fonctions coût.

CHAPITRE 1. INVERSION D'UN MILIEU LOCALEMENT PERTURBÉ

On remarque que les valeurs de la fonction coût augmente avec la fréquence (sauf au minimum !). Cela explique le fait que plus la fréquence est grande, et donc la longueur d'onde petite, plus l'onde "voit" de détails dans le milieu. Ceci est net sur les sismogrammes de $10Hz$ et $70Hz$.

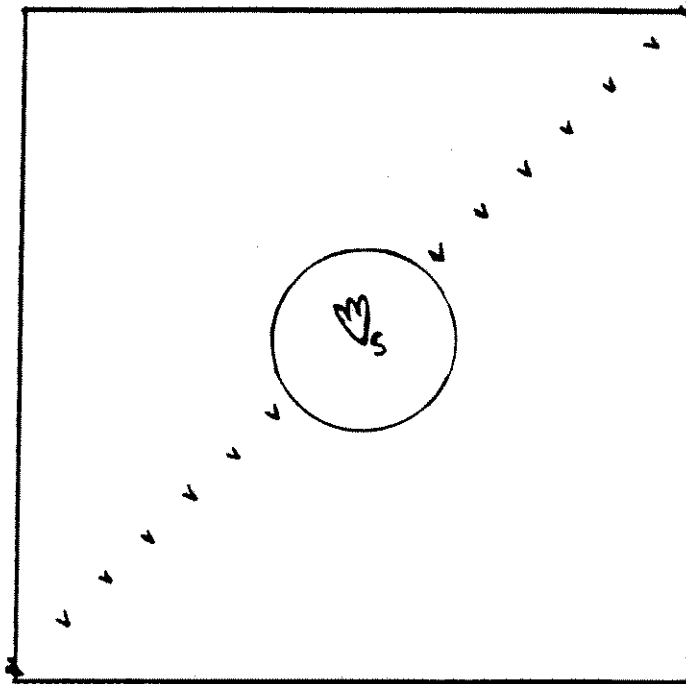


fig 1.8 : Vue de dessus du dispositif.

La figure (1.9) est le sismogramme enregistré pour une source de $10Hz$, c'est à dire une longueur d'onde de $150m$, et une perturbation sphérique de rayon de $25m$. L'onde ne voit qu'une réflexion de l'hétérogénéité.

1.5. RÉSULTATS NUMÉRIQUES

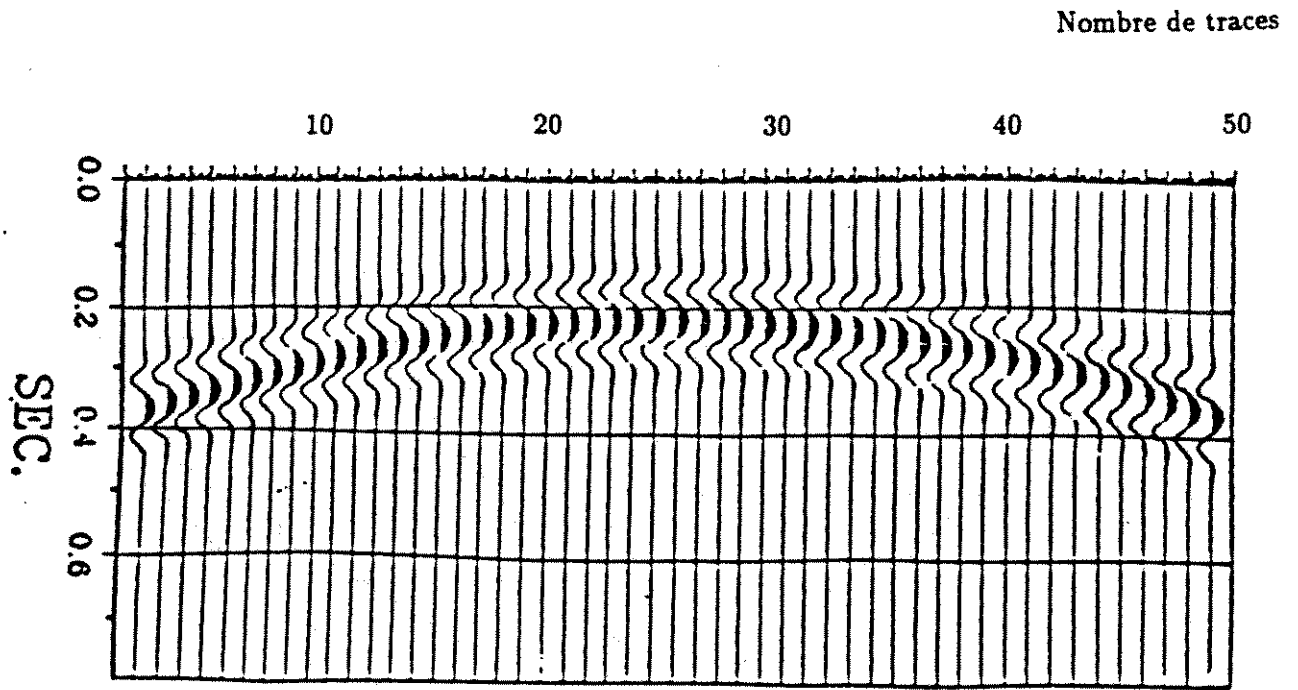


fig 1.9 : Sismogrammes synthétiques à 10 Hz.

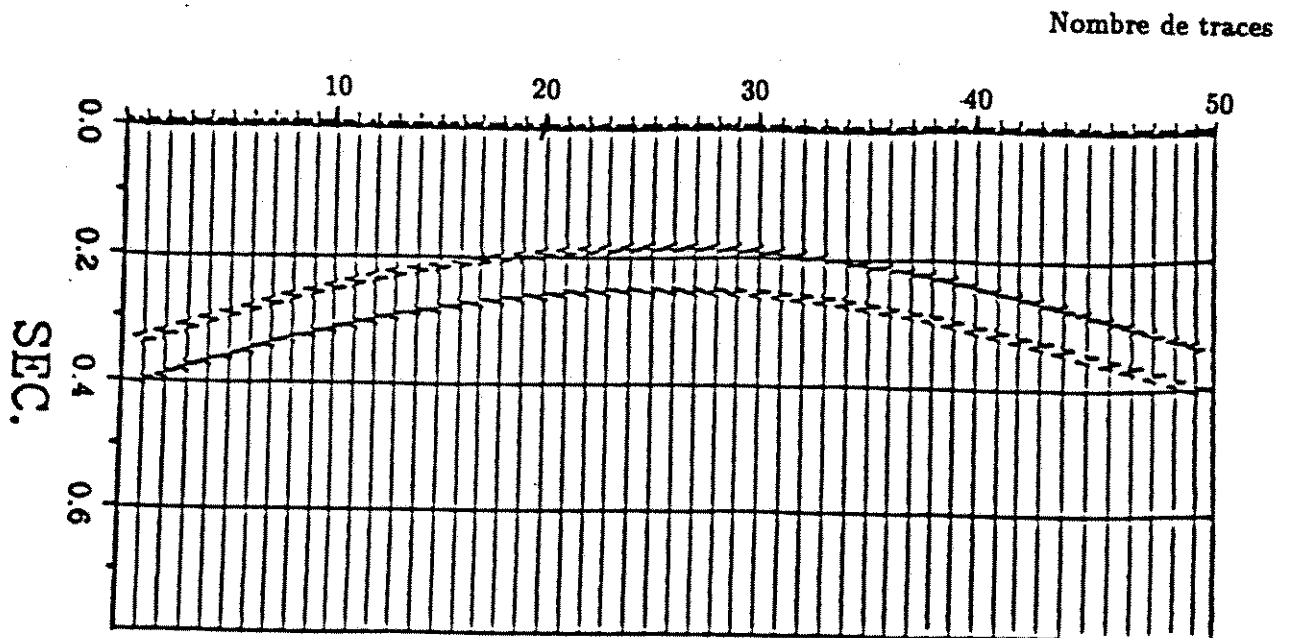


fig 1.10 : Sismogrammes synthétiques à 70 Hz.

CHAPITRE 1. INVERSION D'UN MILIEU LOCALEMENT PERTURBÉ

La figure (1.10) est le sismogramme enregistré pour une source de $70Hz$, c'est à dire une longueur d'onde de $21m$ et une perturbation sphérique de rayon de $25m$. On peut voir la réflexion sur le fond de la perturbation et donc au total deux réflexions (cf figure (1.11)).

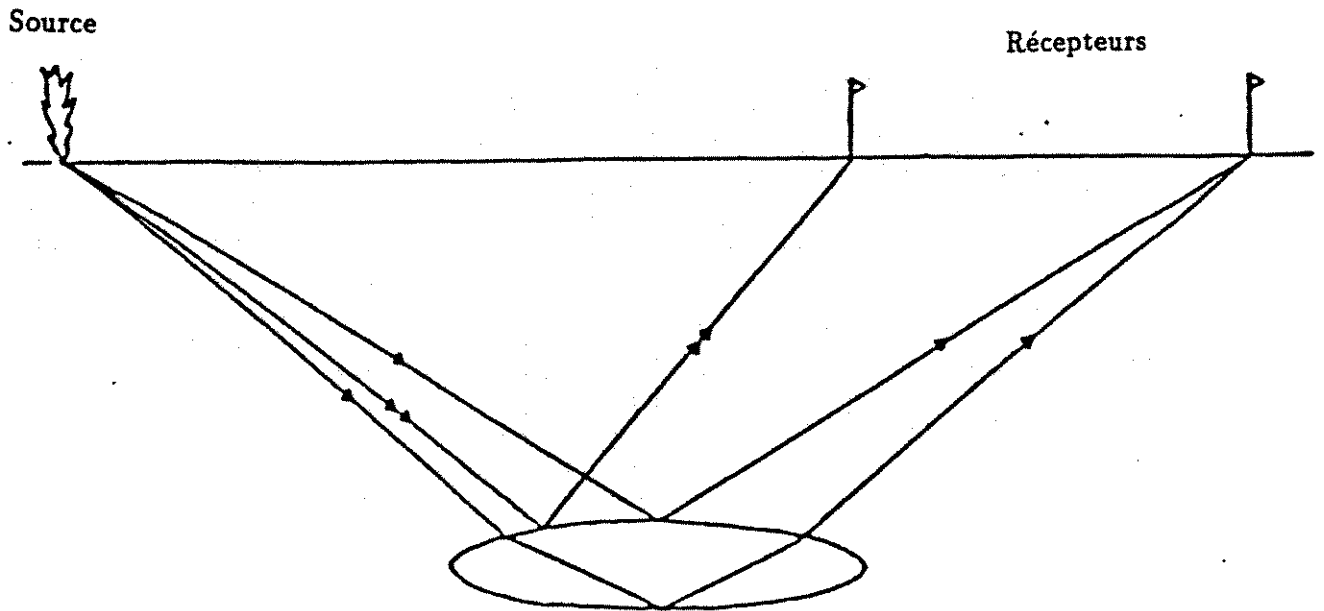


fig 1.11 : Illustration de la réflexion sur le fond.

1.5. RÉSULTATS NUMÉRIQUES

1.5.2 Résultats d'inversion

Pour l'inversion on a supposé δK constant dans la perturbation (ceci est justifié par l'hypothèse du 2.2 la perturbation est petite devant sa profondeur) et la forme générique de la perturbation connue. Pour les résultats numériques nous avons considéré une forme ellipsoïdale. L'inversion consiste donc à retrouver les caractéristiques de l'ellipsoïde, c'est à dire la taille de la perturbation.

Dans l'exemple qui suit on cherche à retrouver un ellipsoïde d'axes 30m, 15m, 20m. On a généré des sismogrammes (dits observés) grâce à ce modèle de sous-sol et un ricker de 30Hz.

Ensuite on a choisi un ellipsoïde d'axes 25m, 20m, 25m comme modèle initial pour l'optimisation. Tenant compte des résultats du paragraphe précédent on a "une idée" du modèle initial que l'on doit choisir afin de converger.

Le dispositif est le suivant :

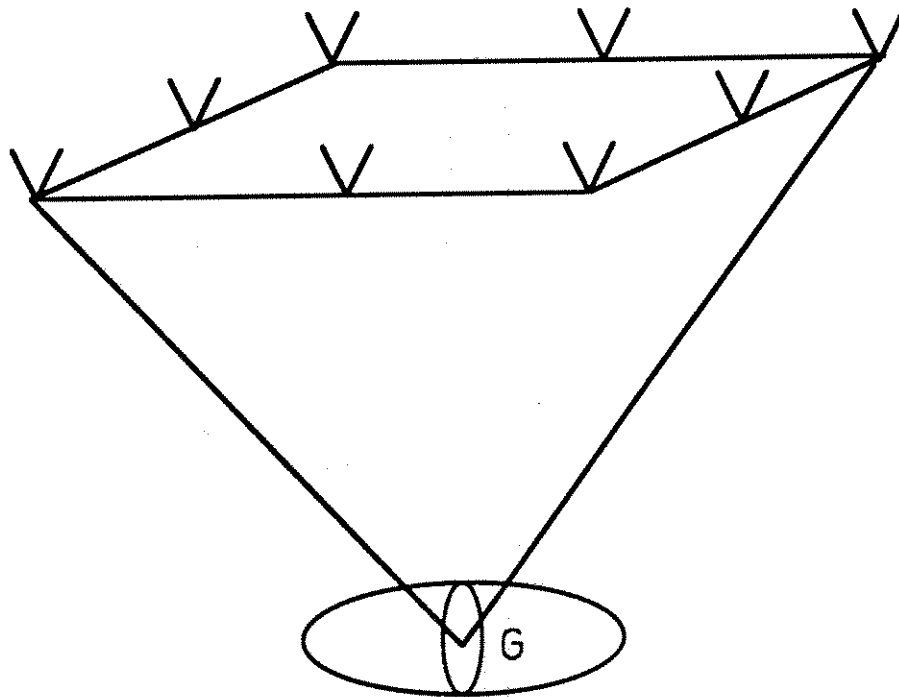


fig 1.12 : Le dispositif.

MODELE A RETROUVER : 30 15 20
MODELE INITIAL : 25 20 25

Les figures suivantes montrent la convergence des trois axes au cours des itérations.

CHAPITRE 1. INVERSION D'UN MILIEU LOCALEMENT PERTURBÉ

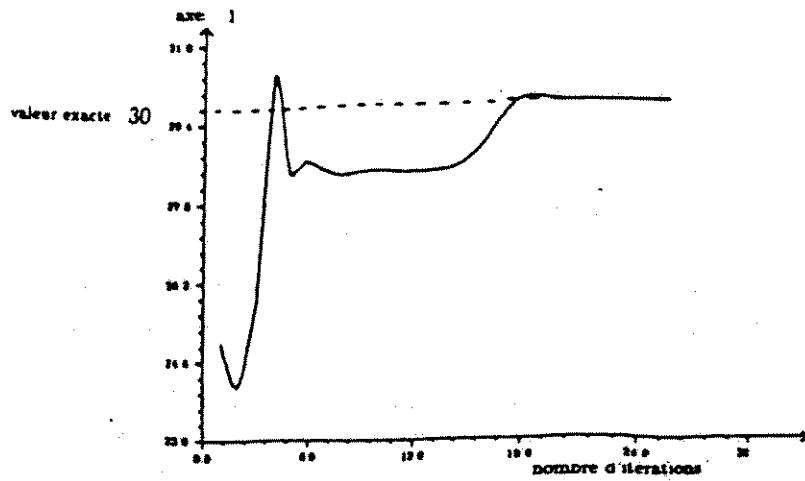


Illustration de la convergence de l'axe 1.

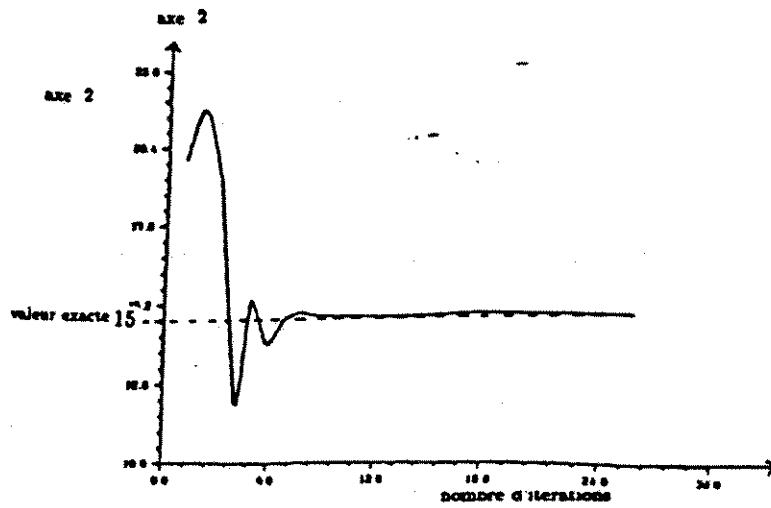


Illustration de la convergence de l'axe 2.

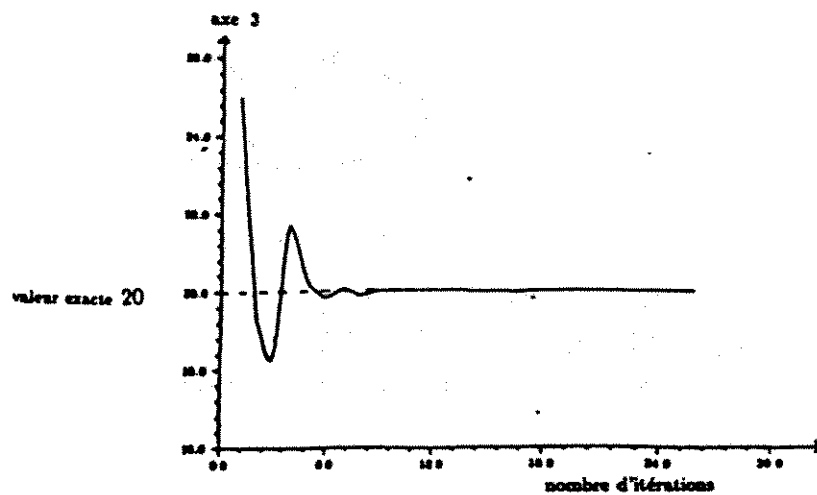
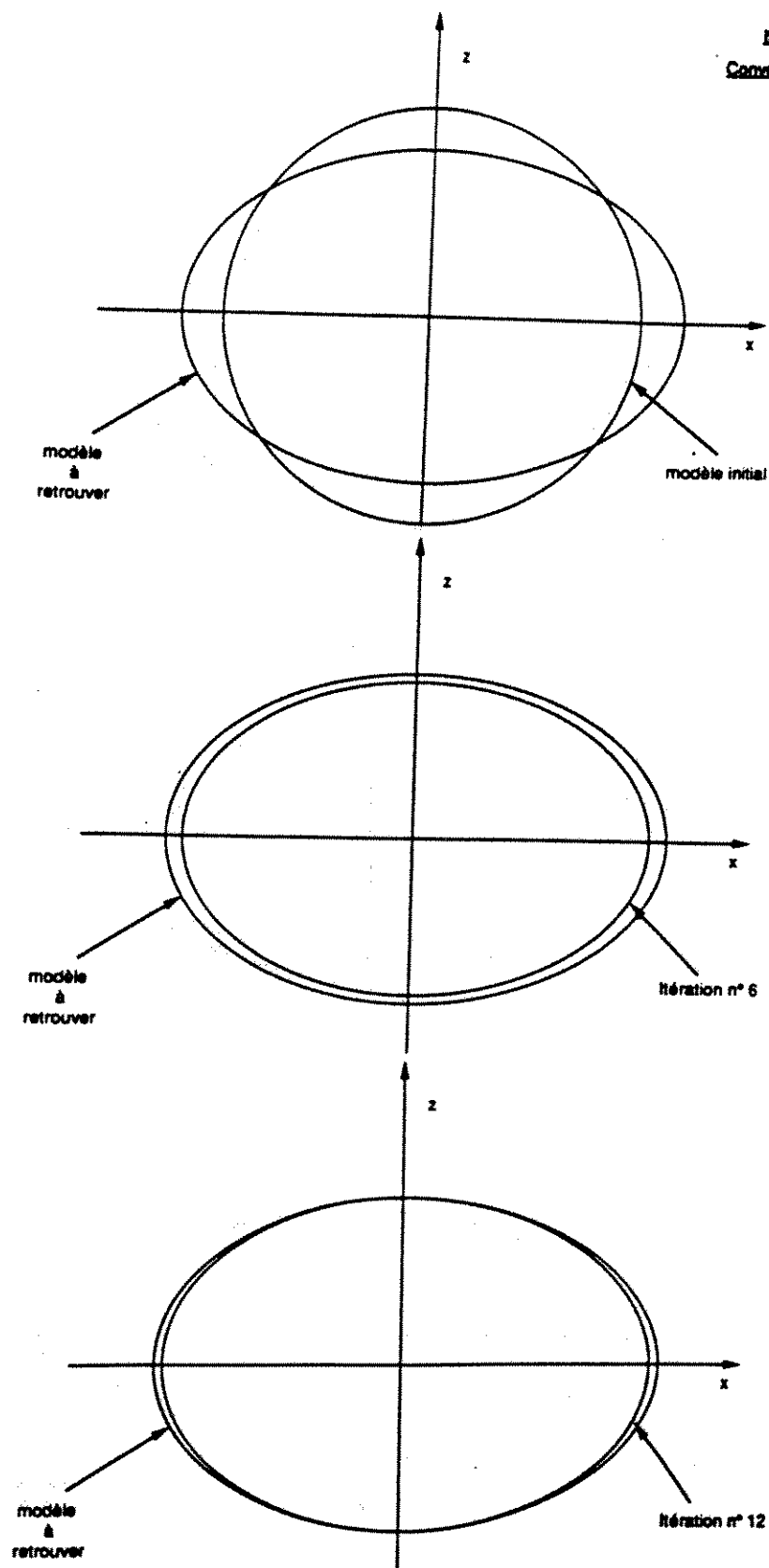


Illustration de la convergence de l'axe 3.

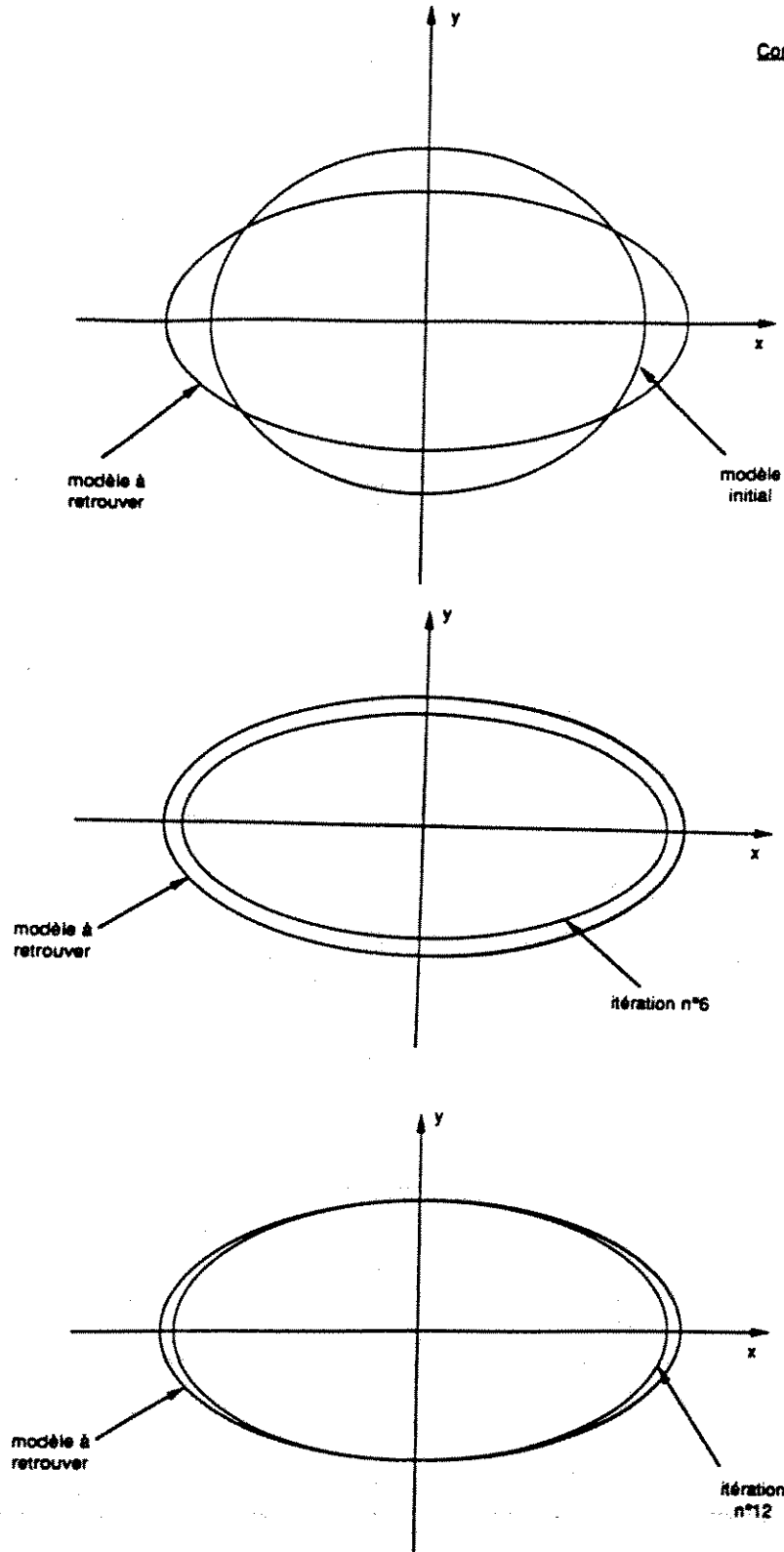
1.5. RÉSULTATS NUMÉRIQUES

Illustration de la
Convergence dans le plan xz



CHAPITRE 1. INVERSION D'UN MILIEU LOCALEMENT PERTURBÉ

Illustration de la
Convergence dans le plan xy



1.6. CONCLUSION

1.6 Conclusion

L'étude précédente nous a permis d'illustrer les points suivants :

i) nous avons obtenu, par un calcul analytique, une relation entre la variation de pression δu et la transformée de Radon de la variation d'impédance acoustique δK .

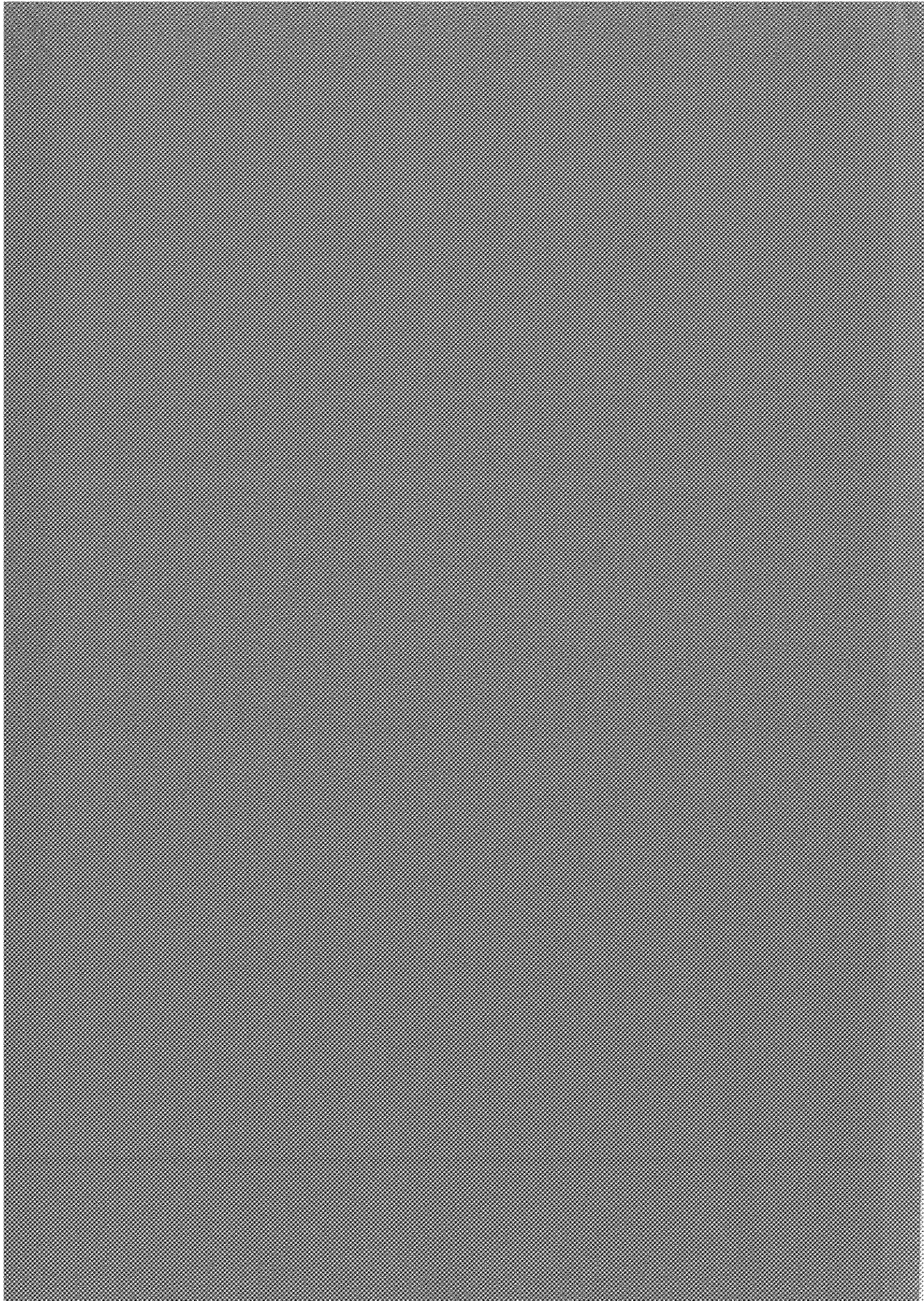
ii) ensuite nous avons illustré dans le cas d'une perturbation sphérique les non-linéarités de la fonction coût et montré l'influence de la fréquence de la source sur ces non-linéarités.

Nous avons notamment établi que le puit de convergence de la fonction coût est d'autant petit que la fréquence est élevée, mais qu'en revanche la résolution au minimum est meilleure avec les hautes fréquences.

iii) enfin nous avons montré que les approximations utilisées définissent des classes d'équivalence entre perturbations. Ainsi nous avons étudié le pouvoir de résolution de la méthode, c'est à dire ce que l'on pouvait espérer retrouver lors d'une inversion.

PARTIE II

**ANALYSE DE L'ERREUR DE DISPERSION
EN MILIEU HOMOGENE**



Chapitre 2

Analyse de l'Erreur de Dispersion en Milieu Homogène

Lorsque l'on considère des milieux tridimensionnels complexes, les méthodes classiques d'inversion faisant appel au contrôle optimal, nécessitent la modélisation de l'état vibratoire du milieu au cours du temps. Cette modélisation est très coûteuse et réduit donc le champ d'application de l'inversion. C'est pourquoi nous allons nous efforcer de trouver des schémas numériques "économiques".

Les différentes méthodes de discrétisation de l'équation des ondes acoustiques peuvent se mettre sous la forme :

$$A_{\Delta t}u_j^n - B_{\Delta x}u_j^n = 0$$

où $A_{\Delta t}$ est un opérateur de dérivation discrète en temps, et $B_{\Delta x}$ un opérateur de dérivation discrète en espace. $B_{\Delta x}$ est par exemple, un opérateur de différences finies ou opérateur de Fourier discret. Il y a, donc une discrétisation en temps et une discrétisation en espace.

Dans ce chapitre nous analysons l'erreur de dispersion **totale** en milieu homogène, provenant des erreurs de discrétisation en temps et en espace, sur la vitesse de phase et la vitesse de groupe.

Nous avons mené cette analyse en milieu unidimensionnel, bidimensionnel et tridimensionnel, de façon à bien montrer les différents problèmes inhérents à chaque dimension, pour des schémas d'ordre deux et d'ordre quatre en temps.

Nous avons utilisé pour la dérivation discrète les différences finies ainsi que la méthode spectrale basée sur la transformée de Fourier.

Ensuite, en imposant un critère sur l'erreur de phase et l'erreur de groupe, nous déduisons un coût informatique des simulations numériques en fonction du nombre de longueurs d'onde parcourues.

CHAPITRE 2. ANALYSE DE L'ERREUR DE DISPERSION

Ceci nous permet de choisir, pour une erreur fixée, en milieu homogène, les deux paramètres importants lors d'une simulation numérique à savoir :

- 1) le nombre de points par longueur d'onde minimale
- 2) le nombre de points par période minimale.

On arrive alors, comme dans l'article classique de Alford, Kelly et Boore (cf [Alf]), à préconiser en fonction de la taille du modèle considéré et de l'erreur fixée, les paramètres numériques ci-dessus, pour des schémas d'ordre deux ou quatre en temps et d'ordre quelconque en espace.

2.1. INTRODUCTION

2.1 Introduction

L'équation des ondes acoustiques en milieu homogène relie la pression acoustique u à la vitesse c du milieu et s'écrit :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0$$

Afin de discrétiser en espace, l'idée naturelle est de considérer une approximation Δ_h du Laplacien. Cette approche n'est pas facilement généralisable à des milieux hétérogènes. En effet en milieux hétérogènes, la pression acoustique u est reliée au module d'incompressibilité K et à la densité ρ par l'équation :

$$\frac{1}{K} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \nabla \left(\frac{1}{\rho} \nabla u \right) = 0$$

Il faut donc calculer des dérivées de la forme :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (*)$$

Pour cela nous allons construire une approximation A_h de la dérivée première $\frac{\partial}{\partial x}$, puis par composition obtenir une approximation B_h de (*).

Afin de définir les opérateurs de dérivation discrète A_h , nous allons considérer deux grilles de points, l'une de pas $h/2$ et l'autre de pas h . Nous définissons alors deux familles d'opérateurs de dérivation discrète A_h^1 et A_h^2 . Nous allons voir que l'une de ces deux familles est meilleure que l'autre au niveau de la précision et du coût calcul, pour un modèle donné.

Remarques :

i) L'étude qui suit en milieu homogène, est analogue pour ces deux familles d'opérateurs. Les résultats pour l'erreur de phase et l'erreur de groupe sont tout à fait comparables. Il est cependant important de bien voir les différences, notamment sur les courbes d'erreur sur les vitesses de phase et de groupe, afin de comprendre le gain engendré par une méthode par rapport à l'autre.

ii) Nous donnons ci-après une table des principales notations de ce chapitre.

Notations

A_h	: Opérateur de dérivation discrète en espace
a_l	: Coefficients intervenant dans l'opérateur A_h
α_l	: Coefficients intervenant dans l'opérateur A_h
β_l	: Coefficients intervenant dans l'opérateur A_h
c	: Vitesse du milieu ($m.s^{-1}$)
Δt	: Pas de temps (s)
E_φ	: Erreur relative sur la vitesse de phase
E_{gr}	: Erreur relative sur la vitesse de groupe
F_{max}	: Fréquence de coupure de la source (Hz)
G	: Inverse du nombre de points par période minimale
h	: Pas d'espace (m)
H	: Inverse du nombre de points par longueur d'onde minimale
K	: Module d'incompressibilité du milieu ($kg.m^{-1} . s^{-2}$)
L	: Longueur de l'opérateur
λ	: Longueur d'onde minimale (m)
n	: Dimension du domaine
N_λ	: Nombre de points par longueur d'onde
N_{op}	: Nombre d'opérations par noeud et par pas de temps
N_t	: Nombre de pas de temps
$N_{T_{min}}$: Nombre de points par période minimale
N_x	: Nombre de pas d'espace dans une direction
p	: Paramètre de Courant $p = c\Delta t/h$
ρ	: Densité ($kg.m^{-3}$)
T_{min}	: Période minimale de la source (s)
T_{max}	: Temps maximal de propagation (s)
u	: Champ de pression ($kg.m^{-1}.s^{-2}$)

2.2. ETUDE EN MILIEU UNIDIMENSIONNEL

2.2 Etude en Milieu Unidimensionnel

2.2.1 Schémas d'ordre 2 en temps

L'opérateur sur la grille complète

On introduit tout d'abord l'espace

$$L_{o,1/2}^2 = \left\{ \varphi \in L^2(\mathbb{R}) \mid \varphi = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \varphi_i 1_{[(i-1/2)h/2, (i+1/2)h/2]} \right\}$$

$L_{o,1/2}^2$ est l'espace des fonctions $L^2(\mathbb{R})$ en escalier, définies sur une grille de pas $h/2$. On définit l'opérateur A_h^1 au point $x_i = ih/2$ par la relation :

$$\begin{aligned} A_h^1 : L_{o,1/2}^2 &\longrightarrow L_{o,1/2}^2 \\ u &\longmapsto A_h^1 u(i) = \sum_{l=1}^L \frac{\alpha_l}{lh} [u(i+l) - u(i-l)] \end{aligned}$$

Si $u \in C^\infty(\mathbb{R})$ alors on a :

$$A_h^1 u(i) = \sum_{l=1}^L \alpha_l u'(x_i) + \sum_{l=1}^L \alpha_l \sum_{k=3,5,7}^{\infty} \frac{u^{(k)}(x_i)}{k!} \left(\frac{lh}{2}\right)^{k-1}$$

Pour que A_h^1 soit une approximation de $\frac{\partial u}{\partial x}(x_i)$, c'est à dire qu'il soit consistant, on impose :

$$\sum_{l=1}^L \alpha_l = 1$$

Ensuite, puisque l'on dispose de L coefficients, on peut imposer $(L-1)$ conditions pour que A_h^1 soit d'ordre $2L$.

En effet, puisque $\sum_{l=1}^L \alpha_l = 1$, on peut écrire :

$$\left(A_h^1 - \frac{\partial}{\partial x} \right) u(x_i) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{u^{(2p+1)}(x_i)}{(2p+1)!} \left(\sum_{l=1}^L l^{2p} \alpha_l \right) \left(\frac{h}{2}\right)^{2p}$$

En imposant :

$$\sum_{l=1}^L l^{2p} \alpha_l = 0 \quad p = 1, 2, \dots, L-1$$

on a

$$\left(A_h^1 - \frac{\partial}{\partial x} \right) u(x_i) = \frac{u^{(2L+1)}(x_i)}{(2L+1)!} \left(\sum_{l=1}^L l^{2L} \alpha_l \right) \left(\frac{h}{2}\right)^{2L} + o(h^{2L+2})$$

CHAPITRE 2. ANALYSE DE L'ERREUR DE DISPERSION

Donc les coefficients de l'opérateur A_h^1 sont solution du système linéaire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{l=1}^L \alpha_l = 1 \\ \sum_{l=1}^L l^{2p} \alpha_l = 0 \end{array} \right. \quad p = 1, 2, \dots, L-1$$

Un calcul simple montre que :

$$\alpha_l = (-1)^{l+1} \frac{\prod_{m \neq l} m^2}{\left| \prod_{m \neq l} (m^2 - l^2) \right|}$$

On construit une approximation de la dérivée seconde $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ en formant $B_h^1 = -{}^t A_h^1 \circ A_h^1$. En posant $\beta_l = \alpha_l/l$, B_h^1 s'écrit :

$$B_h^1 u(x_i) = \frac{1}{h^2} \sum_{l,m=1}^L \beta_l \beta_m \left[u(i+l+m) + u(i-(l+m)) \right] \\ - \left[u(i+(l-m)) + u(i-(l-m)) \right]$$

Afin de discrétiser complètement l'équation des ondes :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (2.1)$$

on fait une différence finie d'ordre 2 en temps, ce qui donne l'équation discrétisée suivante :

$$\frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{c^2 \Delta t^2} - B_h^1 u_j^n = 0 \quad (2.2)$$

On obtient la relation de dispersion du schéma numérique, en calculant les symboles $B_h^1(k)$ et $D_{\Delta t}(\omega)$ des opérateurs de discrétisation en espace et en temps. Pour cela on peut chercher des solutions ondes planes de l'équation discrétisée (2.2). On choisit donc u_j^n sous la forme :

$$u_j^n = \exp(i(kjh/2 - \omega n \Delta t))$$

2.2. ETUDE EN MILIEU UNIDIMENSIONNEL

d'où pour tout indice $l \in Z$ on a :

$$u_{j+l}^n = \exp(i(klh/2)) \cdot u_j^n$$

Le symbole de l'opérateur $B_h^1(k)$ est alors la fonction de k qui vérifie :

$$F(B_h^1 u_x^n) = B_h^1(k) F(u^n)(k)$$

où F est la transformation de Fourier, d'où

$$B_h^1(k) = \frac{-4}{h^2} \left(\sum_{l=1}^L \beta_l \sin\left(\frac{lkh}{2}\right) \right)^2$$

De même pour la discrétisation en temps on trouve :

$$D_{\Delta t}(\omega) = \frac{-4}{\Delta t^2} \sin^2\left(\frac{\omega \Delta t}{2}\right)$$

d'où l'on déduit la relation de dispersion :

$$\sin\left(\frac{\omega \Delta t}{2}\right) = \frac{c \Delta t}{h} \sum_{l=1}^L \beta_l \sin\left(l \frac{kh}{2}\right)$$

Remarque

Pour un schéma d'ordre 2 en temps et d'ordre 4 en espace correspondant à $L = 2$, on a

$$\omega \left(1 + o(\Delta t^2)\right) = kc \left((\beta_1 + 2\beta_2) + \frac{1}{6}(\beta_1 + 8\beta_2) \left(\frac{kh}{2}\right)^2 + o(h^4) \right)$$

Par définition des α_l on a

$$\beta_1 + 2\beta_2 = 1 \quad \beta_1 + 8\beta_2 = 0$$

On trouve donc :

$$\omega = kc \left(1 + o(\Delta t^2) + o(h^4)\right)$$

Ce qui montre que le schéma est bien d'ordre 2 en temps et 4 en espace.

L'erreur sur la vitesse de phase

On tire de la relation de dispersion :

$$\omega = \omega(k, \Delta t) = \frac{2}{\Delta t} \arcsin \left(\frac{c \Delta t}{h} \sum_{l=1}^L \beta_l \sin\left(l \frac{kh}{2}\right) \right)$$

CHAPITRE 2. ANALYSE DE L'ERREUR DE DISPERSION

On peut alors calculer la vitesse de phase $c_\varphi = \frac{\omega(k)}{k}$ ainsi que l'erreur relative de phase $E_\varphi = \frac{c_\varphi - c}{c}$. On a :

$$E_\varphi(k, \Delta t) = \frac{2}{kc\Delta t} \arcsin \left(\frac{c\Delta t}{h} \sum_{l=1}^L \beta_l \sin(l \frac{kh}{2}) \right) - 1$$

En faisant un développement de E_φ lorsque $kh \rightarrow 0$ et en tenant compte des hypothèses sur $(\beta_l)_{l=1..L}$ on obtient :

$$E_\varphi(k, \Delta t) = \frac{(kc\Delta t)^2}{24} + \frac{(-1)^L}{(2L+1)!} \left(\sum_{l=1}^L l^{2L+1} \beta_l \right) \left(\frac{kh}{2} \right)^{2L} + o((kh)^{2L+2})$$

Un calcul simple montre que :

$$\sum_{l=1}^L l^{2L+1} \beta_l = \sum_{l=1}^L l^{2L} \alpha_l = (-1)^{L-1} (L!)^2$$

d'où

$$E_\varphi(kh, \Delta t) = \frac{(\omega\Delta t)^2}{24} - \frac{(L!)^2}{(2L+1)!} \left(\frac{kh}{2} \right)^{2L} + o((kh)^{2L+2})$$

Remarques :

i) Le calcul de l'erreur relative sur la vitesse de phase au premier ordre, fait apparaître un terme dépendant de la discrétisation temporelle (c'est à dire de Δt) et un terme dépendant de la discrétisation spatiale (c'est à dire de h).

Le calcul l'erreur relative de discrétisation temporelle E_t donne :

$$\begin{aligned} E_t &= \frac{-\omega^2 - D_{\Delta t}(\omega)}{-\omega^2} \\ &= \frac{(\omega\Delta t)^2}{12} + o((\omega\Delta t)^4) \end{aligned}$$

De même, le calcul de l'erreur relative de discrétisation spatiale donne :

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{-k^2 - B_h^1(k)}{-k^2} \\ &= \frac{2(L!)^2}{(2L+1)!} \left(\frac{kh}{2} \right)^{2L} + o\left(\left(\frac{kh}{2} \right)^{2L+2} \right) \end{aligned}$$

2.2. ETUDE EN MILIEU UNIDIMENSIONNEL

On constate donc que lorsque $kh \rightarrow 0$, on a

$$E_\varphi(k, \Delta t) = \frac{1}{2}(E_t - E_x) + o((\omega\Delta t)^4) + \left(\frac{kh}{2}\right)^{2L+2}$$

c'est à dire que l'erreur relative sur la vitesse de phase, est proportionnelle à la différence des erreurs de discrétisation, ce qui montre que les erreurs se compensent (cf Dablain [Dab]). Ceci est net sur les courbes d'erreur de phase ci-dessous. La partie croissante de la courbe pour $H \rightarrow 0$ provient de l'erreur en temps, alors que la partie décroissante pour $H \rightarrow 1/2$ provient de l'erreur en espace.

ii) On a exprimé E_φ en fonction des quantités adimensionnelles suivantes :

- $H = (h/2)/\lambda$, inverse du nombre de points par longueur d'onde minimale ($\lambda = \lambda_{min} = c/F_{max}$)
 - $p = c\Delta t/h$, paramètre de Courant
- en utilisant les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \omega\Delta t &= 2\pi \frac{h c\Delta t}{\lambda h} = 4\pi Hp & p &= c\Delta t/h \\ kh &= 2\pi \frac{h}{\lambda} = 4\pi H & H &= \frac{h}{2\lambda} \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$E_\varphi(p, H) = \frac{4\pi^2 p^2}{6} H^2 - \frac{(L!)^2 2^{2L}}{(2L+1)!} \pi^{2L} H^{2L} + o(H^{2L+2}) \quad (2.3)$$

iii) Les courbes ci-dessous montrent que, pour un p donné, le maximum de la courbe d'erreur de phase croît avec la longueur de l'opérateur et est aussi décalé vers $H = 1/2$.

Ceci s'explique par le fait que plus l'ordre de l'opérateur est élevé en espace, plus l'erreur de discrétisation en espace est petite. C'est donc l'erreur de discrétisation en temps, devenant prépondérante sur une plus grande plage de H , qui augmente l'erreur.

iv) Le cas particulier de $L = 1$

Le développement ci-dessus donne dans le cas où $L = 1$

$$E_\varphi(p, H) = \frac{2\pi^2 H^2}{3}(p^2 - 1) + o(H^4)$$

or puisqu'en milieu unidimensionnel on a $p^2 \leq 1$, au voisinage de 0 $E_\varphi(p, H) \leq 0$.

CHAPITRE 2. ANALYSE DE L'ERREUR DE DISPERSION

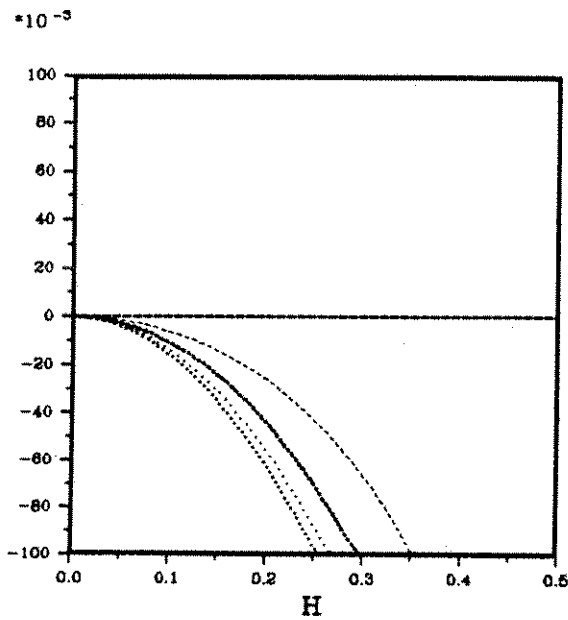
De plus pour $L > 1$ on a $E_\varphi(p, H) > 0$ pour H assez petit. Il y a donc une différence fondamentale entre $L = 1$ et $L > 1$ dans la positivité de l'erreur relative sur la vitesse de phase.

On retrouve avec $L = 1$ le schéma aux caractéristiques, à savoir que pour $p = c\Delta t/h = 1$ on a

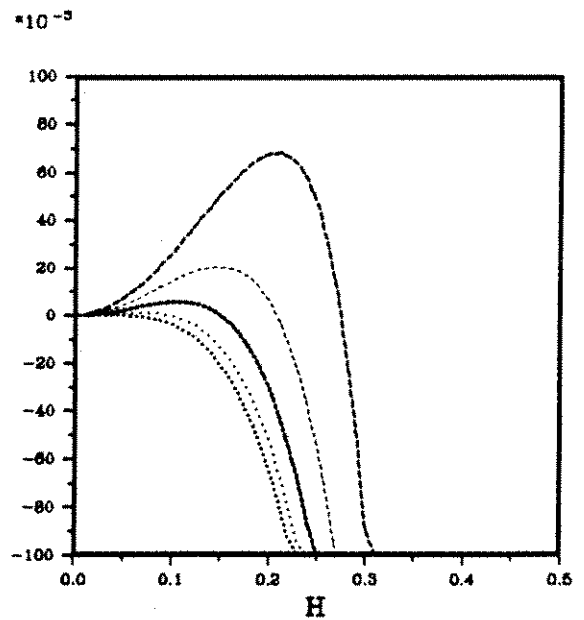
$$E_\varphi(p, H) = \frac{2}{kc\Delta t} \arcsin(\sin(\frac{kh}{2})) - 1 = \frac{h}{c\Delta t} - 1 = 0$$

2.2. ETUDE EN MILIEU UNIDIMENSIONNEL

Error on Phase Speed

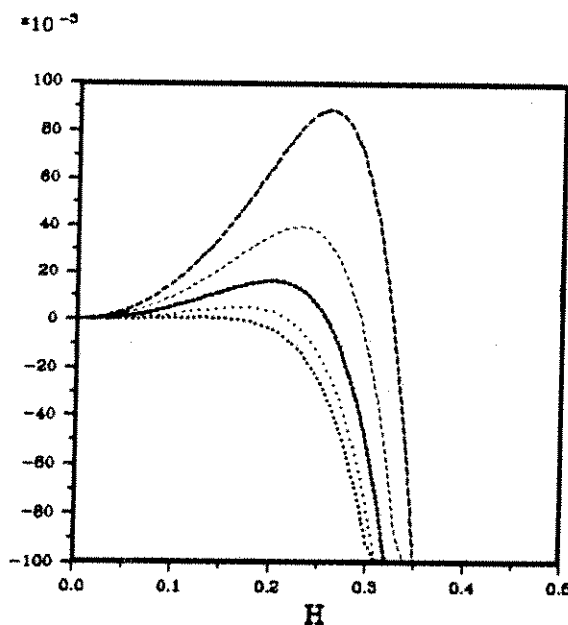


$L = 1$
 $P_{max} = 1.000$

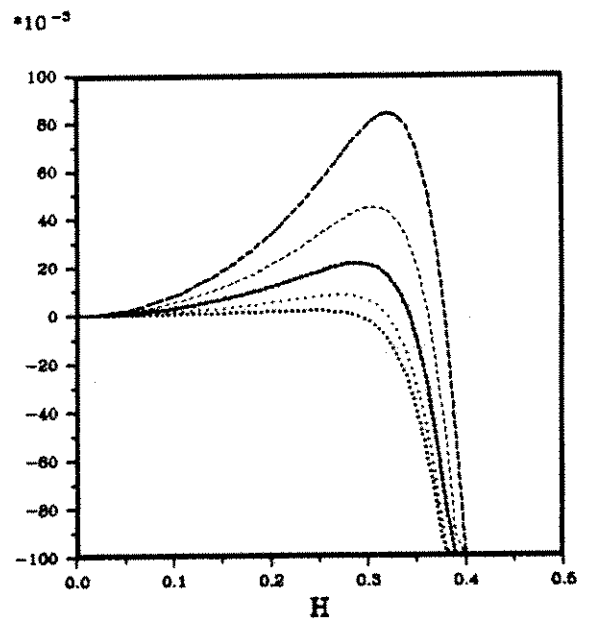


$L = 2$
 $P_{max} = 0.667$

$P = C \cdot \Delta T / h$
 $\dots P = 0.2 \cdot P_{MAX}$
 $\dots P = 0.4 \cdot P_{MAX}$
 $\dots P = 0.6 \cdot P_{MAX}$
 $\dots P = 0.8 \cdot P_{MAX}$
 $\dots P = 1.0 \cdot P_{MAX}$



$L = 4$
 $P_{max} = 0.480$



$L = 10$
 $P_{max} = 0.341$

CHAPITRE 2. ANALYSE DE L'ERREUR DE DISPERSION

L'erreur sur la vitesse de groupe

La relation de dispersion s'écrit :

$$\sin\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right) = \frac{c\Delta t}{h} \sum_{l=1}^L \beta_l \sin\left(l\frac{kh}{2}\right)$$

Pour trouver la vitesse de groupe définie par $c_{gr} = \frac{\partial\omega}{\partial k}$ on dérive formellement par rapport à k , ce qui donne :

$$\frac{\partial\omega}{\partial k} \cos\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right) = c \sum_{l=1}^L \beta_l l \cos\left(l\frac{kh}{2}\right)$$

On peut alors calculer l'erreur relative sur la vitesse de groupe $E_{gr} = \frac{c_{gr} - c}{c}$

$$E_{gr}(k, \Delta t) = \frac{\sum_{l=1}^L \beta_l l \cos\left(\frac{lkh}{2}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{c\Delta t}{h} \sum_{l=1}^L \beta_l \sin\left(\frac{lkh}{2}\right)\right)^2}} - 1$$

En utilisant les variables adimensionnelles

$$p = \frac{c\Delta t}{h} \qquad H = \frac{h}{2\lambda}$$

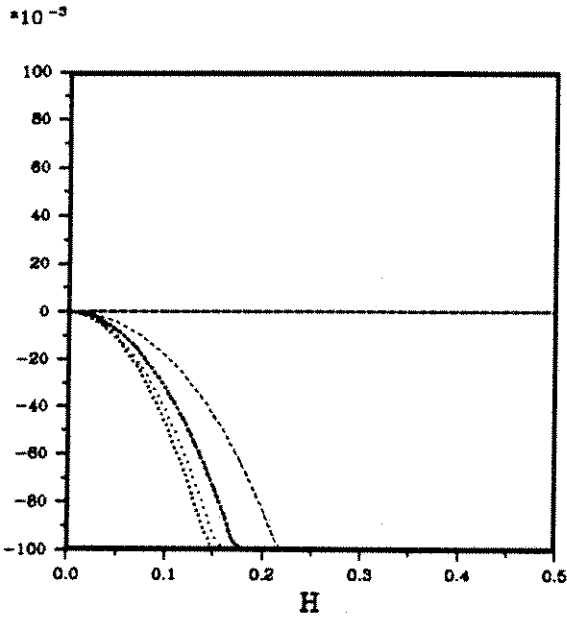
on a

$$E_{gr}(p, H) = \frac{\sum_{l=1}^L \beta_l l \cos(2l\pi H)}{\sqrt{1 - \left(p \sum_{l=1}^L \beta_l \sin(2l\pi H)\right)^2}} - 1$$

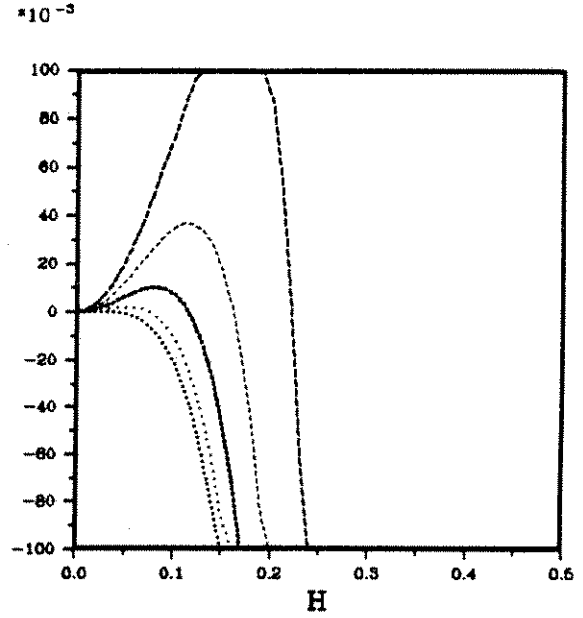
Nous donnons ci-dessous les courbes d'erreur sur la vitesse de groupe, qui ont la même forme que les courbes d'erreurs sur la vitesse de phase, et auxquelles on peut appliquer les mêmes remarques.

2.2. ETUDE EN MILIEU UNIDIMENSIONNEL

Error on Group Speed

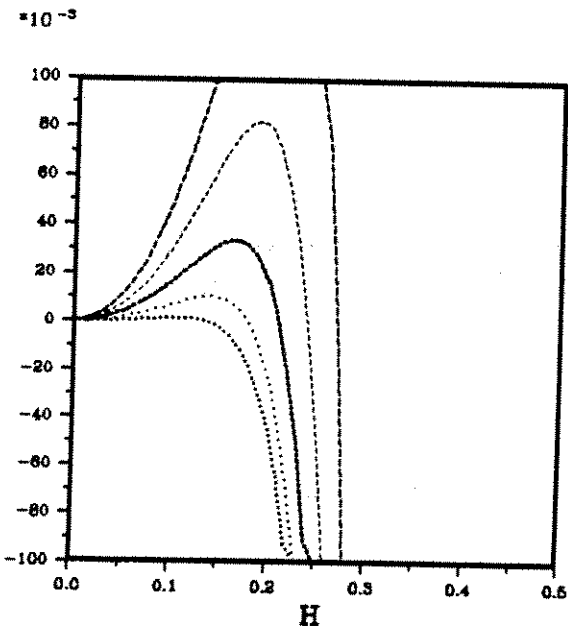


$L = 1$
 $P_{max} = 1.000$

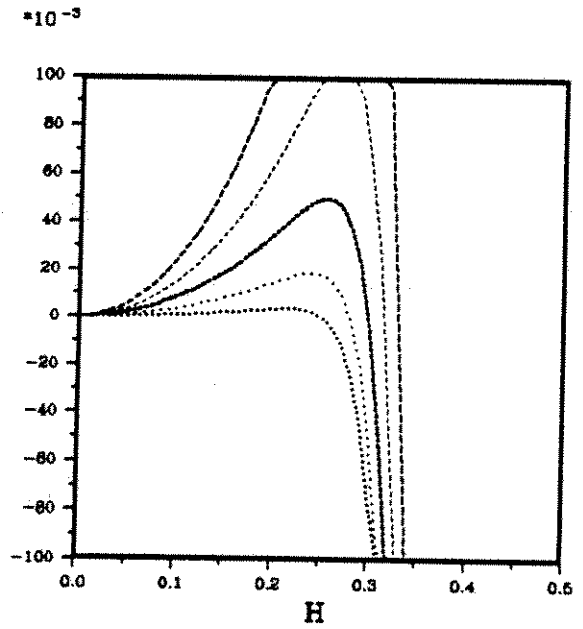


$L = 2$
 $P_{max} = 0.666$

$P = C \cdot DT / h$
 $\dots P = 0.2 \cdot P_{MAX}$
 $\dots P = 0.4 \cdot P_{MAX}$
 $\dots P = 0.6 \cdot P_{MAX}$
 $\dots P = 0.8 \cdot P_{MAX}$
 $\dots P = 1.0 \cdot P_{MAX}$



$L = 4$
 $P_{max} = 0.479$



$L = 10$
 $P_{max} = 0.340$

L'opérateur sur la grille incomplète

On introduit les espaces :

$$L_*^2 = \left\{ \varphi \in L^2(\mathbb{R}) / \varphi = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \varphi_{i+1/2} 1_{[ih, (i+1)h]} \right\}$$

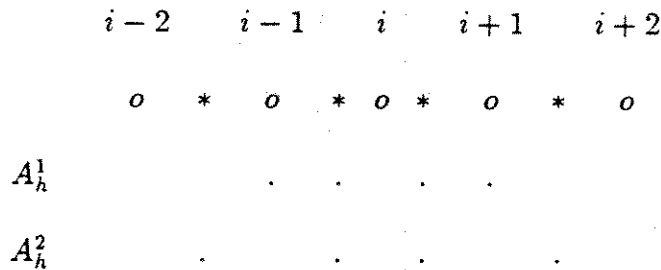
$$L_o^2 = \left\{ \varphi \in L^2(\mathbb{R}) / \varphi = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \varphi_i 1_{[(i-1/2)h, (i+1/2)h]} \right\}$$

et on définit l'opérateur A_h^2 :

$$A_h^2 : L_o^2 \longrightarrow L_*^2$$

$$u \longmapsto A_h^2 u \quad (i + 1/2) = \sum_{l=1}^L \frac{\alpha_l}{(2l-1)h} [u(i+l) - u(i-l+1)]$$

Afin d'illustrer la différence entre A_h^1 et A_h^2 , nous prenons l'exemple de $L = 2$. Nous représentons les points nécessaires au calcul de A_h^1 et de A_h^2



On remarque que le pas d'espace pour B_h^1 est deux fois plus petit que celui pour B_h^2 . Les mêmes considérations de consistance et d'ordre d'approximation qu'au paragraphe précédent imposent aux α_l de vérifier les relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{l=1}^L \alpha_l = 1 \\ \sum_{l=1}^L (2l-1)^{2p} \alpha_l = 0 \quad p = 1, 2, \dots, L-1 \end{array} \right.$$

d'où

$$\alpha_l = (-1)^{l+1} \frac{\prod_{m \neq l} (2m-1)^2}{\left| \prod_{m \neq l} (2m-1)^2 - (2l-1)^2 \right|}$$

2.2. ETUDE EN MILIEU UNIDIMENSIONNEL

Comme précédemment on construit l'opérateur $B_h^2 = -{}^t A_h^2 \circ A_h^2$.
En posant $\beta_l = \alpha_l / (2l - 1)$, B_h^2 s'écrit:

$$B_h^2 u(x_i) = \frac{1}{h^2} \sum_{l,m=1}^L \beta_l \beta_m [u(i + (l + m - 1)) + u(i - (l + m - 1))] \\ - [u(i + (l - m)) + u(i - (l - m))]$$

Par une différence finie d'ordre 2 en temps, on obtient l'équation discrétisée suivante :

$$\frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\Delta t^2} - B_h^2 u_j^n = 0 \quad (2.4)$$

On obtient la relation de dispersion du schéma numérique en calculant le symbole $B_h^2(k)$ de l'opérateur de discrétisation en espace, ou en cherchant des solutions ondes planes de l'équation (2.4).

$$B_h^2(k) = \frac{-4}{h^2} \left(\sum_{l=1}^L \beta_l \sin\left((2l - 1)\frac{kh}{2}\right) \right)^2$$

d'où la relation de dispersion :

$$\sin\left(\frac{\omega \Delta t}{2}\right) = \frac{c \Delta t}{h} \sum_{l=1}^L \beta_l \sin\left(\left(2l - 1\right)\frac{kh}{2}\right)$$

Remarque :

Pour $L = 1$ on peut noter que l'on a la même relation de dispersion que dans le cas de l'opérateur défini sur la grille complète. Les mêmes remarques s'appliquent donc dans ce cas.

L'erreur sur la vitesse de phase

On tire de la relation de dispersion :

$$\omega = \omega(k, \Delta t) = \frac{2}{\Delta t} \arcsin \left(\frac{c \Delta t}{h} \sum_{l=1}^L \beta_l \sin \left((2l - 1) \frac{kh}{2} \right) \right)$$

On calcule alors l'erreur relative de phase $E_\varphi = \frac{c_\varphi - c}{c}$. On a

CHAPITRE 2. ANALYSE DE L'ERREUR DE DISPERSION

$$E_\varphi(k, \Delta t) = \frac{2}{kc\Delta t} \arcsin \left(\frac{c\Delta t}{h} \sum_{l=1}^L \beta_l \sin \left((2l-1) \frac{kh}{2} \right) \right) - 1$$

En faisant un développement de E_φ lorsque $kh \rightarrow 0$ et en tenant compte des hypothèses sur $(a_l)_{l=1..L}$ on obtient :

$$E_\varphi(k, \Delta t) = \frac{(kc\Delta t)^2}{24} + \frac{(-1)^L}{(2L+1)!} \left(\sum_{l=1}^L (2l-1)^{2L+1} \beta_l \right) \left(\frac{kh}{2} \right)^{2L} + o(kh^{2L+2})$$

On montre aisément que :

$$\sum_{l=1}^L (2l-1)^{2L+1} \beta_l = (-1)^{L+1} \prod_{m=1}^L (2m-1)^2$$

d'où

$$E_\varphi(kh, \Delta t) = \frac{(\omega\Delta t)^2}{24} - \frac{\prod_{m=1}^L (2m-1)^2}{(2L+1)!} \left(\frac{kh}{2} \right)^{2L} + o((kh)^{2L+2})$$

Remarques :

i) Le calcul de l'erreur de discrétisation spatiale donne :

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{-k^2 - B_h^2(k)}{-k^2} \\ &= \frac{2 \prod_{m=1}^L (2m-1)^2}{(2L+1)!} \left(\frac{kh}{2} \right)^{2L} + o(kh^{2L+2}) \end{aligned}$$

On constate également ici que les erreurs de discrétisation se compensent, ce qui est clair sur les courbes d'erreur de phase ci-après (cf [Dab]).

ii) On a exprimé E_φ , en fonction des variables adimensionnelles

- $H = h/\lambda$ inverse du nombre de points par longueur d'onde minimale,
- $p = c\Delta t/h$ en utilisant les relations suivantes :

$$\omega\Delta t = 2\pi \frac{h}{\lambda} \frac{c\Delta t}{h} = 2\pi Hp$$

$$kh = 2\pi \frac{h}{\lambda} = 2\pi H$$

2.2. ETUDE EN MILIEU UNIDIMENSIONNEL

ce qui donne la relation suivante :

$$E_\varphi(p, H) = \frac{\pi^2 p^2}{6} H^2 - \frac{\prod_{m=1}^L (2m-1)^2}{(2L+1)!} \pi^{2L} H^{2L} + o((H)^{2L+2}) \quad (2.5)$$

Ici aussi on remarque que le maximum de chaque courbe pour un p donné est décalé et augmenté lorsque la longueur de l'opérateur croit.

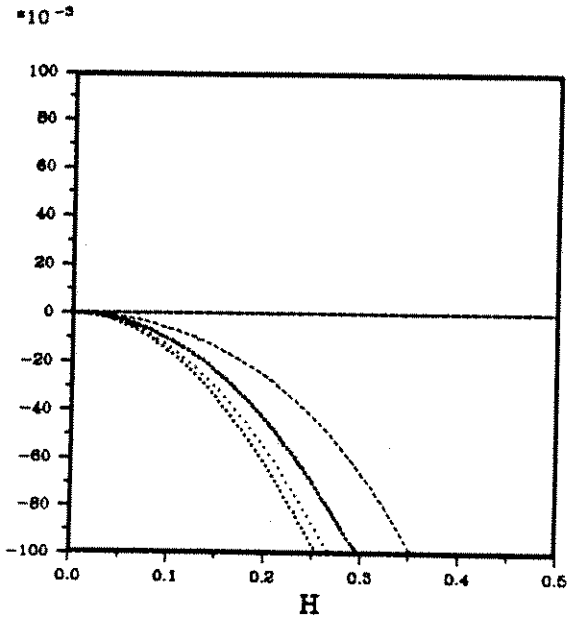
iii) Lorsque l'on compare les expressions du développement de E_φ , pour l'opérateur sur la grille complète (2.3) et incomplète (2.5) on remarque que la part de l'erreur temporelle de (2.3) (c'est à dire le coefficient de Δt^2) est 4 fois supérieur à celui de (2.5).

De même en calculant le rapport des parties spatiales (c'est à dire le coefficient de H^{2L}) de (2.3) et (2.5) on montre facilement que :

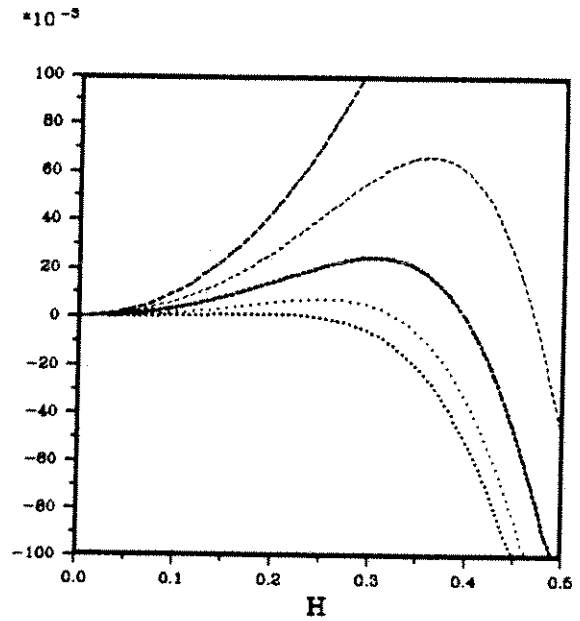
$$q = \frac{\prod_{m=1}^L (2m-1)^2}{2^{2L} (L!)^2} \leq 1$$

Ceci explique pourquoi l'opérateur construit sur la grille incomplète est meilleur que celui construit sur la grille complète. En effet les erreurs de phase et de groupe de A_h^2 auront un maximum inférieur à A_h^1 . Nous verrons que, pour une précision donnée cela implique que, le coût calcul ainsi que la place mémoire nécessaires pour A_h^2 sont également inférieurs à ceux de A_h^1 .

Error on Phase Speed

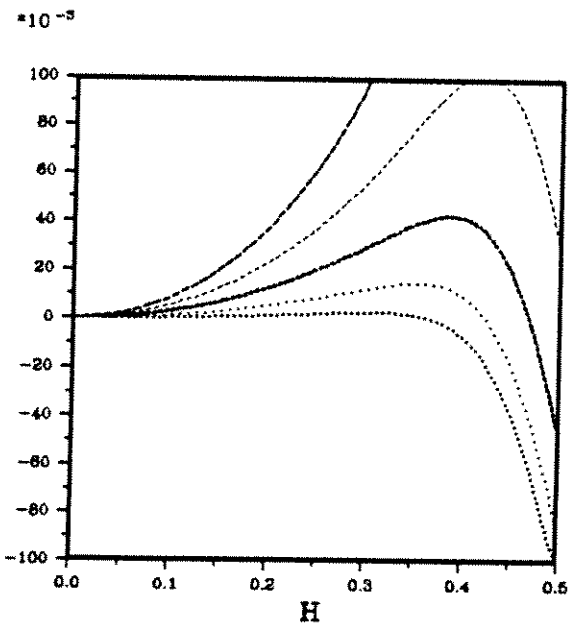


$L = 1$
 $P_{max} = 1.000$

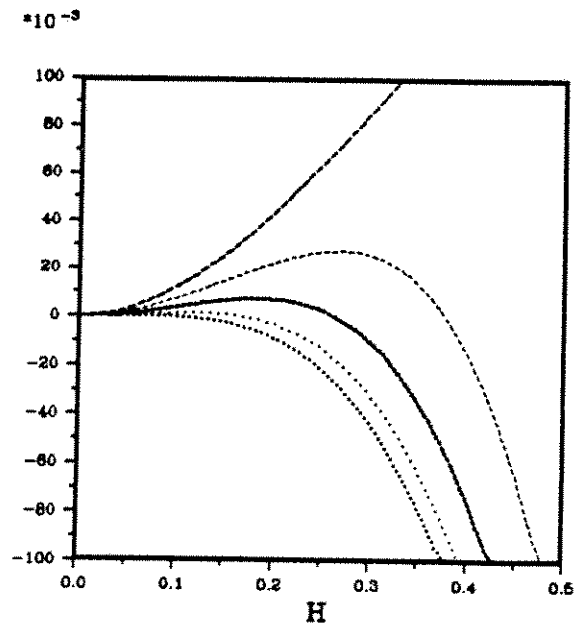


$L = 2$
 $P_{max} = 0.857$

$P = C \cdot \Delta T / h$
 $\dots P = 0.2 \cdot P_{MAX}$
 $\dots P = 0.4 \cdot P_{MAX}$
 $\dots P = 0.6 \cdot P_{MAX}$
 $\dots P = 0.8 \cdot P_{MAX}$
 $\dots P = 1.0 \cdot P_{MAX}$



$L = 4$
 $P_{max} = 0.777$



$L = 10$
 $P_{max} = 0.718$

2.2. ETUDE EN MILIEU UNIDIMENSIONNEL

L'erreur sur la vitesse de groupe

La relation de dispersion s'écrit :

$$\omega = \omega(k, \Delta t) = \frac{2}{\Delta t} \arcsin \left(\frac{c\Delta t}{h} \sum_{l=1}^L \beta_l \sin \left((2l-1) \frac{kh}{2} \right) \right)$$

Pour trouver la vitesse de groupe défini par $c_{gr} = \frac{\partial \omega}{\partial k}$ on dérive formellement par rapport à k , ce qui donne :

$$\frac{\partial \omega}{\partial k} \cos \left(\frac{\omega \Delta t}{2} \right) = c \sum_{l=1}^L \beta_l (2l-1) \cos \left((2l-1) \frac{kh}{2} \right)$$

On peut alors calculer l'erreur relative sur la vitesse de groupe $E_{gr} = \frac{c_{gr} - c}{c}$

$$E_{gr}(k, \Delta t) = \frac{\sum_{l=1}^L \beta_l (2l-1) \cos \left((2l-1) \frac{kh}{2} \right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{c\Delta t}{h} \sum_{l=1}^L \beta_l \sin \left((2l-1) \frac{kh}{2} \right) \right)^2}} - 1$$

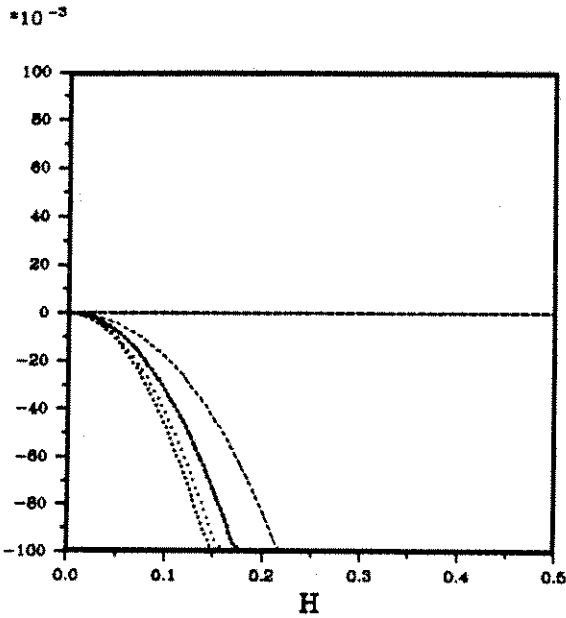
Ce que l'on peut encore écrire sous la forme :

$$E_{gr}(p, H) = \frac{\sum_{l=1}^L \beta_l (2l-1) \cos \left((2l-1) \pi H \right)}{\sqrt{1 - \left(p \sum_{l=1}^L \beta_l \sin \left((2l-1) \pi H \right) \right)^2}} - 1$$

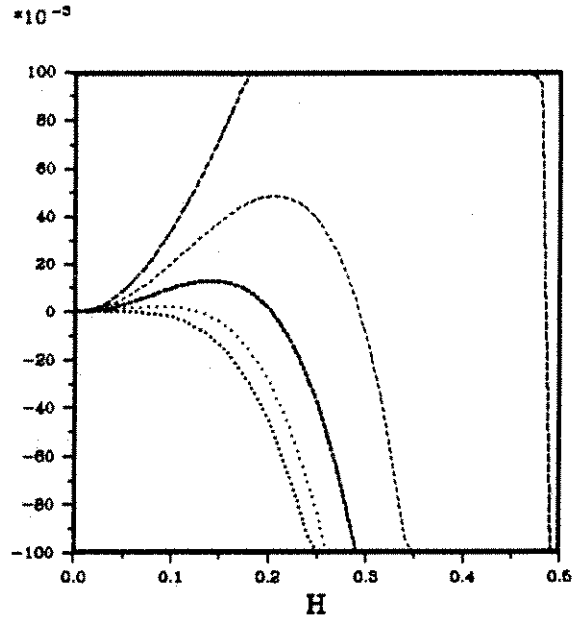
Nous donnons ci-dessous les courbes d'erreur sur la vitesse de groupe qui ont la même forme que les courbes d'erreurs sur la vitesse de phase.

CHAPITRE 2. ANALYSE DE L'ERREUR DE DISPERSION

Error on Group Speed

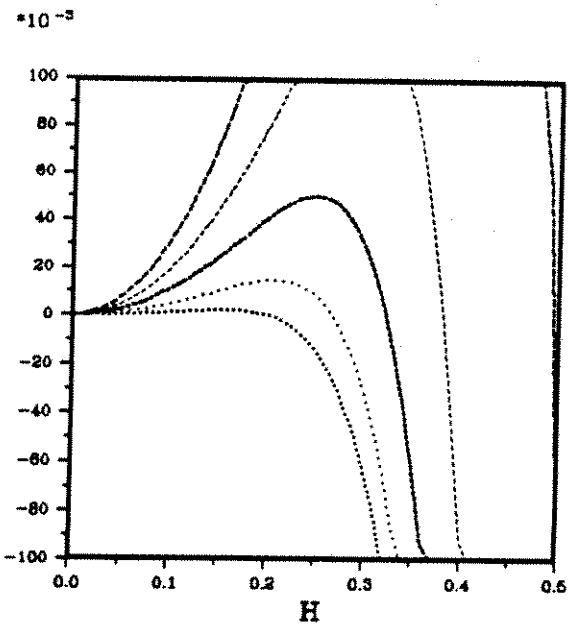


$L = 1$
 $P_{max} = 1.000$

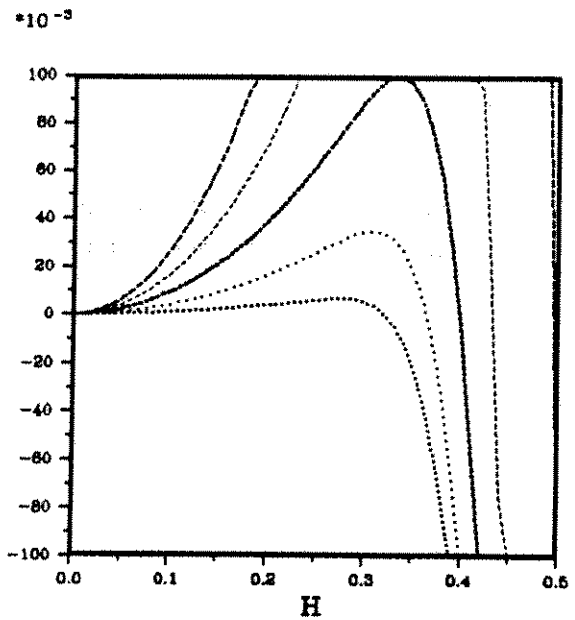


$L = 2$
 $P_{max} = 0.856$

$P = C \cdot DT / h$
 $\dots P = 0.2 \cdot P_{MAX}$
 $\dots P = 0.4 \cdot P_{MAX}$
 $\dots P = 0.6 \cdot P_{MAX}$
 $\dots P = 0.8 \cdot P_{MAX}$
 $\dots P = 1.0 \cdot P_{MAX}$



$L = 4$
 $P_{max} = 0.776$



$L = 10$
 $P_{max} = 0.718$

2.2. ETUDE EN MILIEU UNIDIMENSIONNEL

2.2.2 Schémas d'ordre 4 en temps

Déduction du schéma en milieu homogène

Suivant Dablain (cf [Dab]), il est possible de construire des schémas d'ordre quatre en temps en utilisant la technique de l'équation modifiée. Nous en exposons le principe en milieu homogène où l'équation des ondes s'écrit :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

En supposant la solution u régulière ($u \in C^4(R \times R)$) on peut écrire :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{u^{n+1} - 2u^n + u^{n-1}}{\Delta t^2} - \frac{\Delta t^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} + o(\Delta t^4)$$

En dérivant deux fois par rapport au temps l'équation des ondes on obtient:

$$\frac{\partial^4 u}{\partial t^4} = c^2 \frac{\partial^4 u}{\partial t^2 \partial x^2} = c^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} = c^4 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$$

donc

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{u^{n+1} - 2u^n + u^{n-1}}{\Delta t^2} - \frac{c^4 \Delta t^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + o(\Delta t^4)$$

Ainsi avec une approximation d'ordre 2 de $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$, notée ∂_h^4 , on peut écrire

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{u^{n+1} - 2u^n + u^{n-1}}{\Delta t^2} - \frac{c^4 \Delta t^2}{12} (\partial_h^4 + o(h^2)) + o(h^4 + \Delta t^4)$$

En remarquant que grâce à la condition de stabilité (que l'on verra plus tard) $\Delta t \propto h$, on a $\Delta t^2 o(h^2) = o(\Delta t^4 + h^4)$. Donc en utilisant l'approximation suivante

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \approx \frac{u^{n+1} - 2u^n + u^{n-1}}{\Delta t^2} - \frac{c^4 \Delta t^2}{12} \partial_h^4$$

on obtient un schéma d'ordre 4 en temps. En prenant une approximation d'ordre 4 en espace pour le terme $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ on obtient un schéma (4-4).

CHAPITRE 2. ANALYSE DE L'ERREUR DE DISPERSION

Remarques :

i) Tout se passe comme si on avait discrétisé, non pas l'équation des ondes, mais l'équation "modifiée" suivante :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{c^2 \Delta t^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0$$

Cette équation apparait comme une perturbation de l'équation des ondes puisque lorsque Δt tend vers 0 on retrouve l'équation des ondes.

ii) Cette équation est mal posée. En effet si l'on cherche des solutions ondes planes de l'équation ci-dessus de la forme :

$$u(x, t) = e^{i(\omega t - kx)} \quad k \in \mathbb{R} \quad \omega \in \mathbb{R}$$

on obtient la relation de dispersion suivante :

$$\omega = \pm kc \sqrt{1 - \frac{k^2 c^2 \Delta t^2}{12}}$$

Donc lorsque $k > \frac{\sqrt{12}}{c \Delta t}$ on a :

$$\omega = \pm ikc \sqrt{\left| 1 - \frac{k^2 c^2 \Delta t^2}{12} \right|}$$

Ainsi la solution $u(x, t)$ est non borné au cours du temps, puisque l'on a

$$|u(x, t)| \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty$$

L'opérateur sur la grille complète

On discrétise l'équation des ondes "modifiée", à l'aide des opérateurs introduits précédemment sous la forme :

$$\frac{1}{K_i} \frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{\Delta t^2} + \left\{ {}^t A_L^1 \circ A_L^1 - \frac{c^2 \Delta t^2}{12} {}^t A_L^1 \circ A_L^1 \circ {}^t A_L^1 \circ A_L^1 \right\} u_i^n = 0 \quad (2.6)$$

On pose $B^1 = {}^t A_L^1 \circ A_L^1$.

Il est facile de calculer le symbole $B^1(k)$ de B^1 à partir du symbole $A_L^1(k)$ de A_L^1 . En effet $B^1(k)$ est défini par :

$$F(B^1 u)(k) = B^1(k) = F({}^t A_L^1 \circ A_L^1 u)(k)$$

2.2. ETUDE EN MILIEU UNIDIMENSIONNEL

$$= {}^t A_L^1(k) \cdot F(A_L^1 u)(k) = {}^t A_L^1(k) \cdot A_L^1(k) \cdot F(u)(k)$$

Donc

$$B^1(k) = {}^t A_L^1(k) A_L^1(k)$$

De même le symbole $C^1(k)$ de ${}^t B^1 o B^1$, puisque B^1 est un opérateur symétrique, est donné par :

$$C^1(k) = (B^1(k))^2$$

On peut maintenant écrire la relation de dispersion du schéma (4-2L). En notant

$$A(k) = \sum_{l=1}^L \beta_l \sin\left(\frac{lkh}{2}\right)$$

la relation de dispersion s'écrit :

$$\frac{-4}{c^2 \Delta t^2} \sin^2\left(\frac{\omega \Delta t}{2}\right) = \frac{-4}{h^2} A^2(k) + \frac{c^2 \Delta t^2}{12} \frac{16}{h^4} A^4(k)$$

soit encore

$$\sin\left(\frac{\omega \Delta t}{2}\right) = \frac{c \Delta t}{h} A(k) \sqrt{1 - \frac{1}{3} \left(\frac{c \Delta t}{h}\right)^2 A^2(k)}$$

Remarque :

i) Tout comme l'équation modifiée, qui apparaît comme une perturbation de l'équation des ondes, la relation de dispersion ci-dessus apparaît comme une perturbation de la relation de dispersion du schéma (2-2L), qui s'écrirait avec les mêmes notations sous la forme :

$$\sin\left(\frac{\omega \Delta t}{2}\right) = \frac{c \Delta t}{h} A(k)$$

On tire de la relation de dispersion la pulsation ω :

$$\omega(k, \Delta t) = \frac{2}{\Delta t} \arcsin \left(\frac{c \Delta t}{h} A(k) \sqrt{1 - \frac{1}{3} \left(\frac{c \Delta t}{h}\right)^2 A^2(k)} \right)$$

CHAPITRE 2. ANALYSE DE L'ERREUR DE DISPERSION

L'erreur sur la vitesse de phase

L'erreur relative sur la vitesse de phase est alors donnée par :

$$E_{\varphi}(k, \Delta t) = \frac{2}{k c \Delta t} \arcsin \left(\frac{c \Delta t}{h} A(k) \sqrt{1 - \frac{1}{3} \left(\frac{c \Delta t}{h} \right)^2 A^2(k)} \right) - 1$$

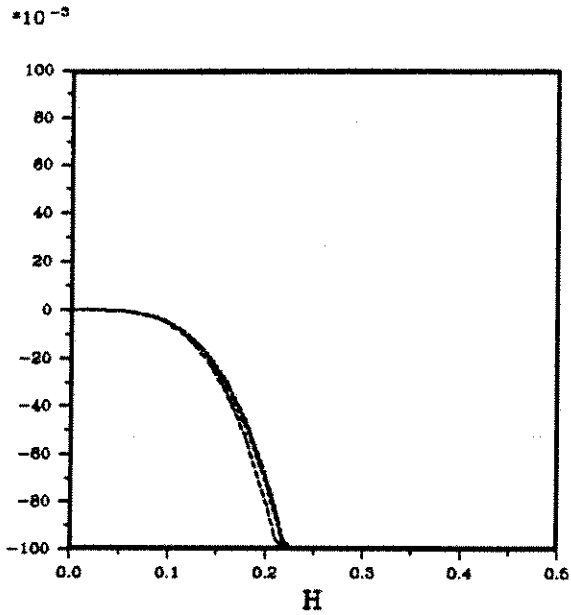
On peut réécrire l'erreur sur la vitesse de phase à l'aide des paramètres adimensionnels $p = c \Delta t / h$ et $H = h / (2 \lambda)$ sous la forme :

$$E_{\varphi}(k, \Delta t) = \frac{1}{2 \pi H p} \arcsin \left(p A(k) \sqrt{1 - \frac{p^2}{3} A^2(k)} \right) - 1$$

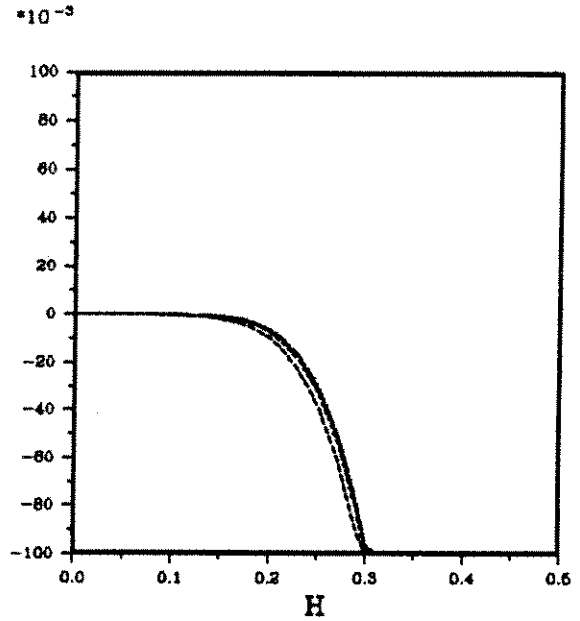
On obtient alors les courbes suivantes.

2.2. ETUDE EN MILIEU UNIDIMENSIONNEL

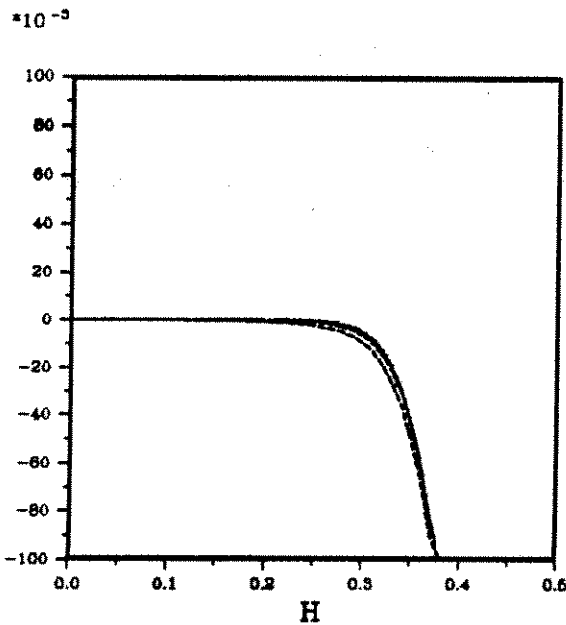
Error on Phase Speed



$L = 2$
 $P_{max} = 0.667$



$L = 4$
 $P_{max} = 0.480$



$L = 10$
 $P_{max} = 0.341$

$P = C \cdot DT / h$
..... $P = 0.2 \cdot P_{MAX}$
.... $P = 0.4 \cdot P_{MAX}$
..... $P = 0.6 \cdot P_{MAX}$
--- $P = 0.8 \cdot P_{MAX}$
--- $P = 1.0 \cdot P_{MAX}$

CHAPITRE 2. ANALYSE DE L'ERREUR DE DISPERSION

L'erreur sur la vitesse de groupe

La relation de dispersion s'écrit :

$$\sin\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right) = \frac{c\Delta t}{h} A(k) \sqrt{1 - \frac{1}{3}\left(\frac{c\Delta t}{h}\right)^2 A^2(k)}$$

Pour obtenir la vitesse de groupe on dérive la relation de dispersion par rapport à k ce qui donne :

$$\frac{\Delta t}{2} \frac{\partial \omega}{\partial k} \cos\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right) = \frac{c\Delta t}{h} A(k) \left\{ A'(k) \sqrt{1 - \frac{1}{3}\left(\frac{c\Delta t}{h}\right)^2 A^2(k)} + A(k) \frac{-\left(\frac{c\Delta t}{h}\right)^2 A'(k) A(k)}{\sqrt{1 - \frac{1}{3}\left(\frac{c\Delta t}{h}\right)^2 A^2(k)}} \right\}$$

Puisque

$$A(k) = \sum_{l=1}^L \beta_l \sin\left(\frac{lkh}{2}\right)$$

En posant

$$\tilde{A}(k) = \sum_{l=1}^L l\beta_l \cos\left(\frac{lkh}{2}\right)$$

on a

$$A'(k) = \frac{h}{2} \tilde{A}(k)$$

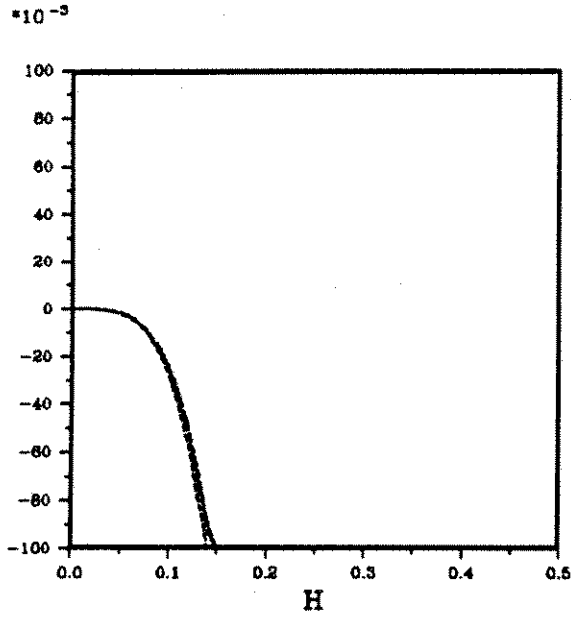
d'où l'erreur relative sur la vitesse de groupe est donnée par :

$$E_{gr}(k, \Delta t) = \frac{\tilde{A}(k) \left(1 - \frac{2}{3}\left(\frac{c\Delta t}{h}\right)^2 A^2(k)\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{c\Delta t}{h}\right)^2 A^2(k)} \left(1 - \frac{1}{3}\left(\frac{c\Delta t}{h}\right)^2 A^2(k)\right) \sqrt{\left(1 - \frac{1}{3}\left(\frac{c\Delta t}{h}\right)^2 A^2(k)\right)}}$$

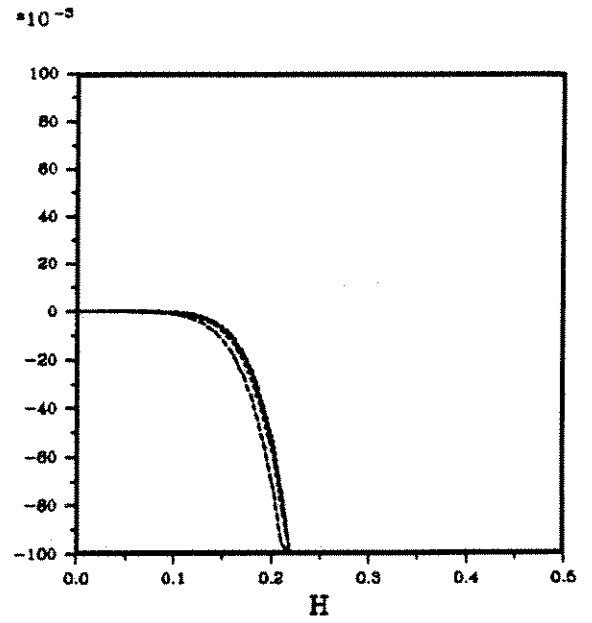
On obtient alors les courbes suivantes.

2.2. ETUDE EN MILIEU UNIDIMENSIONNEL

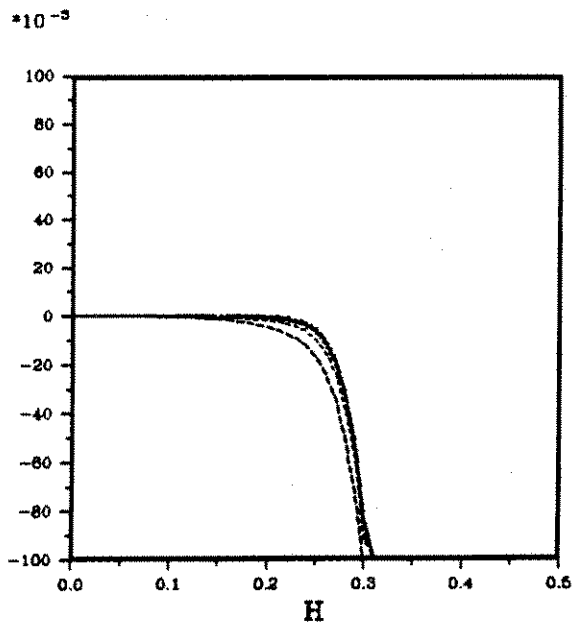
Error on Group Speed



$L = 2$
 $P_{max} = 0.667$



$L = 4$
 $P_{max} = 0.480$



$L = 10$
 $P_{max} = 0.341$

$P = C \cdot DT / h$
..... $P = 0.2 \cdot P_{MAX}$
.... $P = 0.4 \cdot P_{MAX}$
..... $P = 0.6 \cdot P_{MAX}$
----- $P = 0.8 \cdot P_{MAX}$
----- $P = 1.0 \cdot P_{MAX}$

CHAPITRE 2. ANALYSE DE L'ERREUR DE DISPERSION

Remarques :

i) Contrairement au schémas d'ordre 2 en temps, les schémas d'ordre 4 en temps ont des courbes d'erreur de phase et de groupe, toujours négatives. Ceci montre leur plus grande précision en temps, puisque la dispersion temporelle se manifeste par une "bosse" positive.

ii) Le choix de $c\Delta t/h$ est assez peu sensible. Ceci permettra lors des simulations numériques de choisir $c\Delta t/h = p_{max}$, puisque ce choix ne donne pas plus d'erreur. On peut rapprocher cette remarque du schéma (2-2) où là aussi, on pouvait (et on devait) prendre $c\Delta t/h = p_{max}$.

L'opérateur sur la grille incomplète

On discrétise l'équation des ondes "modifiée" à l'aide des opérateurs introduits précédemment sous la forme :

$$\frac{1}{K_i} \frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{\Delta t^2} + \left\{ {}^t A_L^2 \circ A_L^2 - \frac{c^2 \Delta t^2}{12} {}^t A_L^2 \circ A_L^2 \circ {}^t A_L^2 \circ A_L^2 \right\} u_i^n = 0 \quad (2.7)$$

On pose $B^2 = {}^t A_L^2 \circ A_L^2$. Le symbole $B^2(k)$ de B^2 est donné à partir du symbole $A_L^2(k)$ de A_L^2 par

$$B^2(k) = {}^t A_L^2(k) A_L^2(k)$$

De même le symbole $C^2(k)$ de ${}^t B^2 \circ B^2$, puisque B^2 est un opérateur symétrique, est donné par

$$C^2(k) = (B^2(k))^2$$

On peut maintenant écrire la relation de dispersion du schéma (4-2L). En notant

$$A(k) = \sum_{l=1}^L \beta_l \sin\left(\frac{(2l-1)kh}{2}\right)$$

la relation de dispersion s'écrit

$$\frac{-4}{c^2 \Delta t^2} \sin^2\left(\frac{\omega \Delta t}{2}\right) = \frac{-4}{h^2} A^2(k) + \frac{c^2 \Delta t^2}{12} \frac{16}{h^4} A^4(k)$$

soit encore

$$\sin\left(\frac{\omega \Delta t}{2}\right) = \frac{c \Delta t}{h} A(k) \sqrt{1 - \frac{1}{3} \left(\frac{c \Delta t}{h}\right)^2 A^2(k)}$$

2.2. ETUDE EN MILIEU UNIDIMENSIONNEL

On tire de la relation de dispersion la pulsation ω :

$$\omega(k, \Delta t) = \frac{2}{\Delta t} \arcsin \left(\frac{c\Delta t}{h} A(k) \sqrt{1 - \frac{1}{3} \left(\frac{c\Delta t}{h} \right)^2 A^2(k)} \right)$$

L'erreur sur la vitesse de phase

L'erreur relative sur la vitesse de phase est alors donnée par :

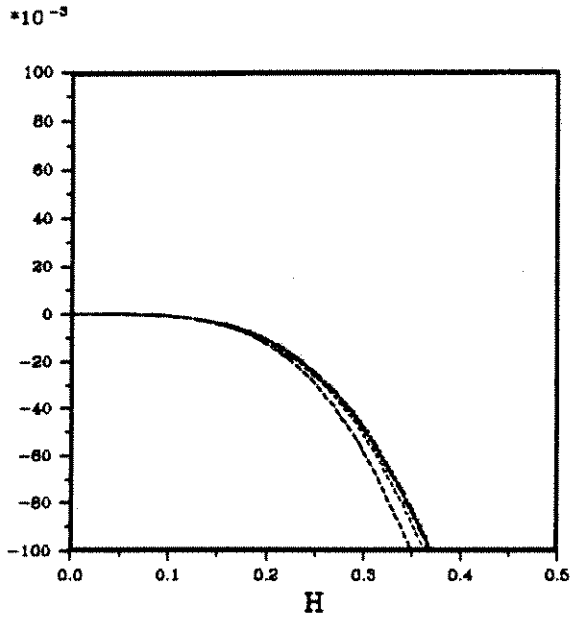
$$E_\varphi(k, \Delta t) = \frac{2}{k c \Delta t} \arcsin \left(\frac{c\Delta t}{h} A(k) \sqrt{1 - \frac{1}{3} \left(\frac{c\Delta t}{h} \right)^2 A^2(k)} \right) - 1$$

On peut réécrire l'erreur sur la vitesse de phase à l'aide des paramètres adimensionnels $p = c\Delta t/h$ et $H = h/(2\lambda)$ sous la forme :

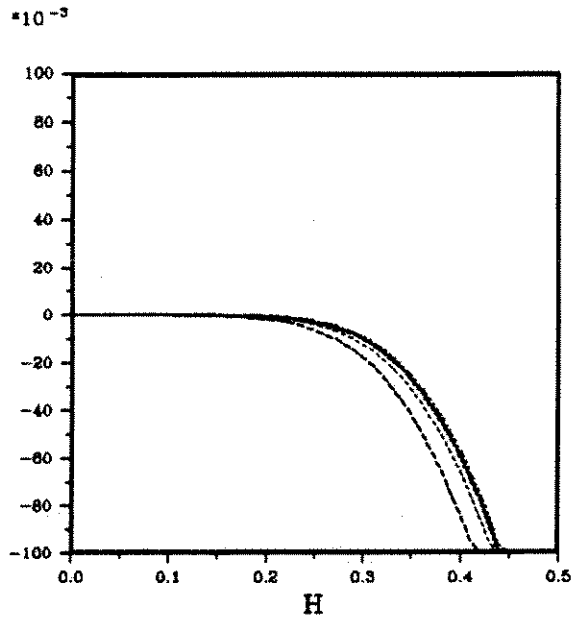
$$E_\varphi(k, \Delta t) = \frac{1}{2 \pi H p} \arcsin \left(p A(k) \sqrt{1 - \frac{p^2}{3} A^2(k)} \right) - 1$$

On obtient alors les courbes suivantes.

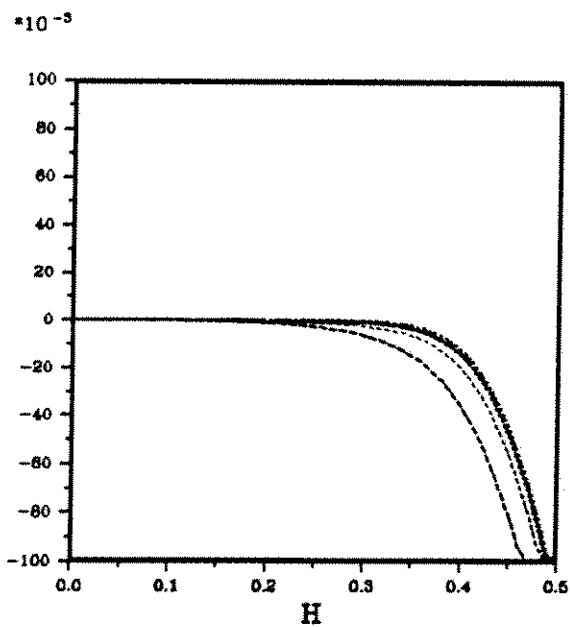
Error on Phase Speed



$L = 2$
 $P_{max} = 0.857$



$L = 4$
 $P_{max} = 0.777$



$L = 10$
 $P_{max} = 0.719$

$P = C \cdot DT / h$
$\dots P = 0.2 \cdot P_{MAX}$
$\dots P = 0.4 \cdot P_{MAX}$
$\dots P = 0.6 \cdot P_{MAX}$
$\dots P = 0.8 \cdot P_{MAX}$
$\dots P = 1.0 \cdot P_{MAX}$

2.2. ETUDE EN MILIEU UNIDIMENSIONNEL

L'erreur sur la vitesse de groupe

La relation de dispersion s'écrit :

$$\sin\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right) = \frac{c\Delta t}{h} A(k) \sqrt{1 - \frac{1}{3}\left(\frac{c\Delta t}{h}\right)^2 A^2(k)}$$

Pour obtenir la vitesse de groupe, on dérive la relation de dispersion par rapport à k ce qui donne :

$$\frac{\Delta t}{2} \frac{\partial \omega}{\partial k} \cos\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right) = \frac{c\Delta t}{h} A(k) \left\{ A'(k) \sqrt{1 - \frac{1}{3}\left(\frac{c\Delta t}{h}\right)^2 A^2(k)} + A(k) \frac{-\left(\frac{c\Delta t}{h}\right)^2 A'(k) A(k)}{\sqrt{1 - \frac{1}{3}\left(\frac{c\Delta t}{h}\right)^2 A^2(k)}} \right\}$$

Puisque

$$A(k) = \sum_{l=1}^L \beta_l \sin\left(\frac{(2l-1)kh}{2}\right)$$

En posant

$$\tilde{A}(k) = \sum_{l=1}^L l \beta_l \cos\left(\frac{(2l-1)kh}{2}\right)$$

on a

$$A'(k) = \frac{h}{2} \tilde{A}(k)$$

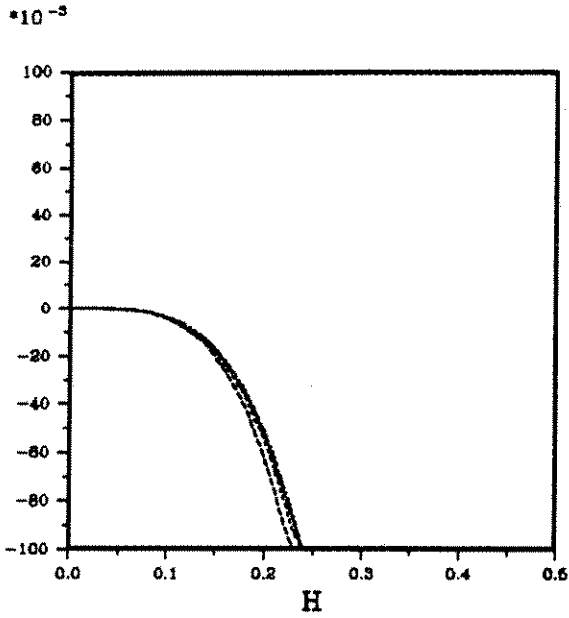
d'où l'erreur relative sur la vitesse de groupe est donnée par :

$$E_{gr}(k, \Delta t) = \frac{\tilde{A}(k) \left(1 - \frac{2}{3}\left(\frac{c\Delta t}{h}\right)^2 A^2(k)\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{c\Delta t}{h}\right)^2 A^2(k)} \left(1 - \frac{1}{3}\left(\frac{c\Delta t}{h}\right)^2 A^2(k)\right) \sqrt{\left(1 - \frac{1}{3}\left(\frac{c\Delta t}{h}\right)^2 A^2(k)\right)}}$$

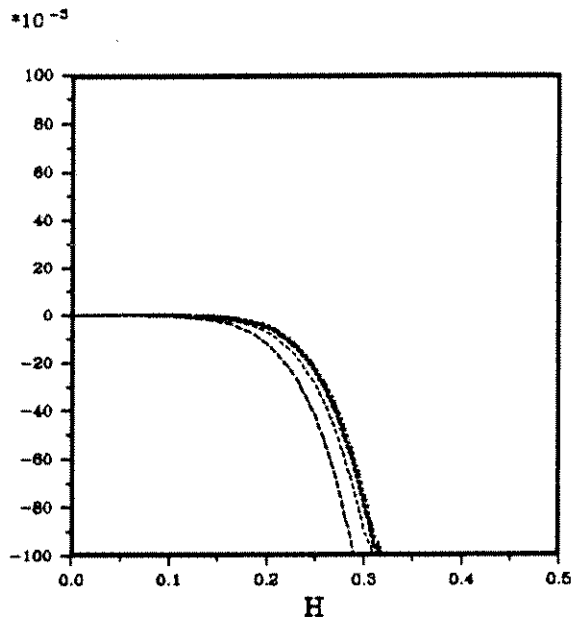
On obtient alors les courbes suivantes.

CHAPITRE 2. ANALYSE DE L'ERREUR DE DISPERSION

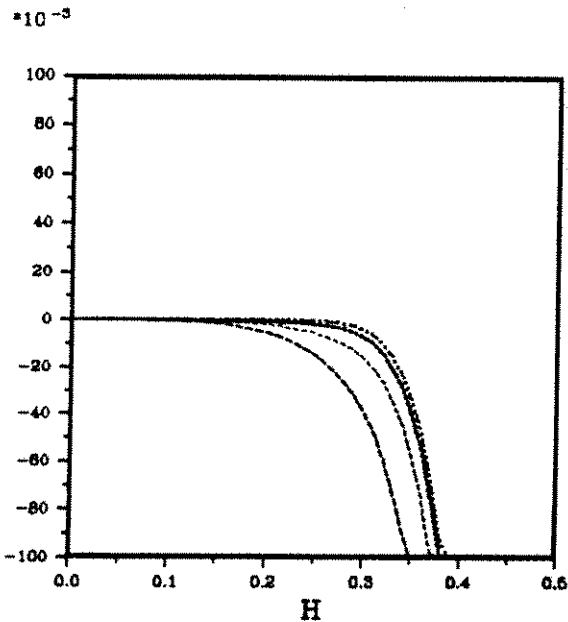
Error on Group Speed



$L = 2$
 $P_{max} = 0.857$



$L = 4$
 $P_{max} = 0.777$



$L = 10$
 $P_{max} = 0.719$

$P = C \cdot DT / h$
..... $P = 0.2 \cdot P_{MAX}$
..... $P = 0.4 \cdot P_{MAX}$
..... $P = 0.6 \cdot P_{MAX}$
..... $P = 0.8 \cdot P_{MAX}$
..... $P = 1.0 \cdot P_{MAX}$

2.3. ETUDE EN MILIEU BIDIMENSIONNEL

2.3 Etude en Milieu Bidimensionnel

2.3.1 Schémas d'ordre 2 en temps

L'opérateur sur la grille incomplète

Vu la supériorité de l'opérateur défini sur la grille incomplète, nous allons poursuivre l'étude avec cet opérateur seulement, afin de ne pas alourdir inutilement l'exposé. On se place en milieu homogène de vitesse c et afin de discrétiser l'équation :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0$$

nous allons utiliser, comme dans le cas unidimensionnel, les opérateurs suivants :

$$\begin{aligned} A_x^2 &: (L_o^2)^2 \longrightarrow L_*^2 \times L_o^2 \\ u &\longmapsto A_x^2 u(i + 1/2, j) = \sum_{l=1}^L \frac{\alpha_l}{(2l-1)h} [u_{i+l,j} - u_{i-l+1,j}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_y^2 &: (L_o^2)^2 \longrightarrow L_o^2 \times L_*^2 \\ u &\longmapsto A_y^2 u(i, j + 1/2) = \sum_{l=1}^L \frac{\alpha_l}{(2l-1)h} [u_{i,j+l} - u_{i,j-l+1}] \end{aligned}$$

On approche le Laplacien $\Delta = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ par l'opérateur $B_2 = -(A_x^2 \circ A_x^2 + A_y^2 \circ A_y^2)$. A l'aide d'une différence finie d'ordre 2 en temps, on obtient l'équation discrète suivante :

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^n + u_{i,j}^{n-1}}{c^2 \Delta t^2} - B_2 u_{i,j}^n = 0 \quad (2.8)$$

On tire de l'équation ci-dessus la relation de dispersion :

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\omega \Delta t}{2}\right) &= \frac{c \Delta t}{h} \sqrt{f^2(k \cos(\theta)) + f^2(k \sin(\theta))} \\ f(k) &= \sum_{l=1}^L \frac{\alpha_l}{(2l-1)} \sin\left(\frac{(2l-1)kh}{2}\right) \end{aligned}$$

d'où l'on tire la pulsation ω

$$\omega(k, \theta, \Delta t) = \frac{2}{\Delta t} \arcsin\left(\frac{c \Delta t}{h} \sqrt{f^2(k \cos(\theta)) + f^2(k \sin(\theta))}\right)$$

CHAPITRE 2. ANALYSE DE L'ERREUR DE DISPERSION

L'erreur sur la vitesse de phase

L'erreur relative sur la vitesse de phase est alors donnée par :

$$E_\varphi(k, \theta, \Delta t) = \frac{2}{kc\Delta t} \arcsin\left(\frac{c\Delta t}{h} \sqrt{f^2(k \cos(\theta)) + f^2(k \sin(\theta))}\right) - 1$$

La fonction $\theta \mapsto E_\varphi(k, \theta)$ est périodique de période $\pi/2$ et paire. Il suffit donc de l'étudier pour $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$. Lorsque $kh \rightarrow 0$ on a le développement suivant :

$$\begin{aligned} E_\varphi(k, \theta, \Delta t) &= \frac{1}{6} \left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right)^2 - \sum_{l=1}^L \alpha_l \frac{(-1)^L (2l-1)^{2L}}{(2L+1)!} (\cos^{2L+2}(\theta) + \sin^{2L+2}(\theta)) \left(\frac{kh}{2}\right)^{2L} \\ &\quad + o\left(\left(\frac{kh}{2}\right)^{2L+2}\right) \\ &= \frac{1}{6} \left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right)^2 - \frac{\prod_{m=1}^L (2m-1)^2}{(2L+1)!} (\cos^{2L+2}(\theta) + \sin^{2L+2}(\theta)) \left(\frac{kh}{2}\right)^{2L} \\ &\quad + o\left(\left(\frac{kh}{2}\right)^{2L+2}\right) \end{aligned}$$

Ce que l'on peut écrire encore avec $H = h/\lambda$ et $p = c\Delta t/h$ sous la forme :

$$\begin{aligned} E_\varphi(H, \theta, p) &= \frac{\pi^2 p^2 H^2}{6} - \frac{\prod_{m=1}^L (2m-1)^2}{(2L+1)!} (\cos^{2L+2}(\theta) + \sin^{2L+2}(\theta)) \pi^{2L} H^{2L} \\ &\quad + o\left(\left(\frac{kh}{2}\right)^{2L+2}\right) \end{aligned}$$

Remarques :

i) Dans le développement ci-dessus, on remarque encore le cas particulier joué par $L = 1$. En effet pour $L \geq 2$ l'ordre de h sera toujours supérieur à l'ordre de Δt , ce qui implique que l'erreur sur la vitesse de phase sera positive (au moins pour $kh \rightarrow 0$) alors que pour $L = 1$ on a :

$$E_\varphi(k, \theta, \Delta t) = \frac{1}{6} \left(\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right)^2 - (\cos^4(\theta) + \sin^4(\theta)) \left(\frac{kh}{2}\right)^2 \right) + o\left(\left(\frac{kh}{2}\right)^4\right)$$

ce que l'on peut encore écrire à l'aide des variables adimensionnelles :

$$p = \frac{c\Delta t}{h} \qquad H = \frac{h}{2\lambda}$$

2.3. ETUDE EN MILIEU BIDIMENSIONNEL

sous la forme :

$$E_{\varphi}(H, \theta, p) = \frac{2(\pi H)^2}{3} \left(p^2 - (\cos^4(\theta) + \sin^4(\theta)) \right) + o(H)^4$$

Ceci montre qu'au voisinage de 0 (en kh) l'erreur sur la vitesse de phase est négative. En effet en milieu bidimensionnel on a $p^2 \leq 1/2$ et

$$\cos^4(\theta) + \sin^4(\theta) = 1 - \frac{\sin^2(2\theta)}{2} \geq \frac{1}{2} \geq p^2$$

La différence fondamentale entre l'ordre 2 (correspondant à $L = 1$) et les ordres supérieurs s'explique ici. C'est la négativité des courbes d'erreur sur la vitesse de phase (et de groupe aussi) pour $L = 1$.

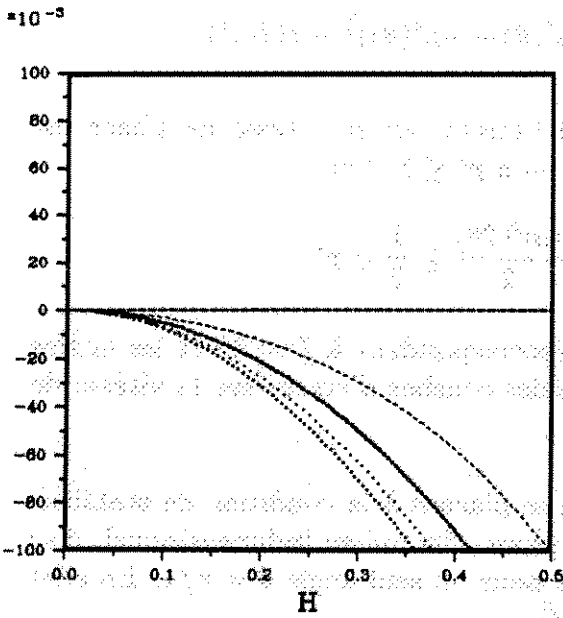
Dans le cas unidimensionnel, on a vu qu'en se plaçant à la condition de stabilité, on n'obtenait pas d'erreur sur la vitesse de phase. En milieu bidimensionnel, il se passe le même phénomène mais simplement pour un seul angle $\theta = \pi/4$. En effet pour $L = 1$ et $\theta = \pi/4$ on a avec $c\Delta t/h = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\begin{aligned} E_{\varphi}(k, \theta, \Delta t) &= \frac{2}{kc\Delta t} \arcsin\left(\frac{c\Delta t}{h} \sqrt{\sin^2\left(\frac{kh \cos(\theta)}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{kh \sin(\theta)}{2}\right)}\right) - 1 \\ &= \frac{2}{kc\Delta t} \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{2} \sin\left(\frac{kh \sqrt{2}}{2}\right)\right) - 1 \\ &= \frac{2}{kc\Delta t} \frac{kh \sqrt{2}}{2} - 1 = 0 \end{aligned}$$

On retrouve ici un résultat de Alford, Kelly et Boore (cf [Alf]) qui trouvaient que le minimum d'erreur se faisait selon $\theta = \frac{\pi}{4}$, et le maximum d'erreur se faisait selon les axes, c'est à dire à $\theta = 0$.

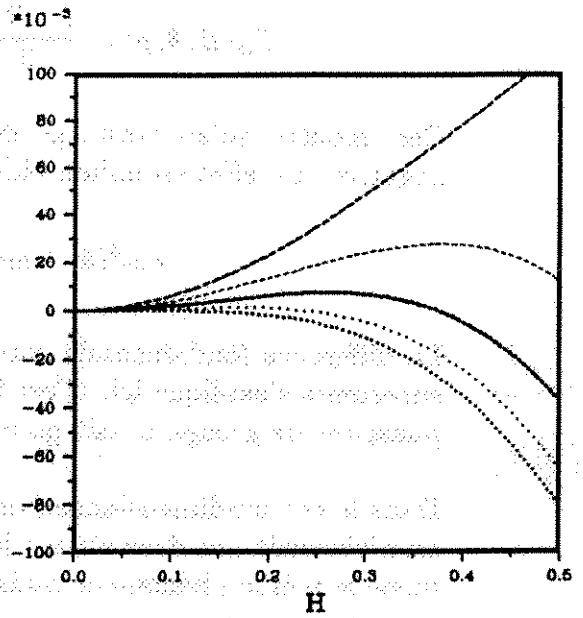
CHAPITRE 2. ANALYSE DE L'ERREUR DE DISPERSION

Error on Phase Speed



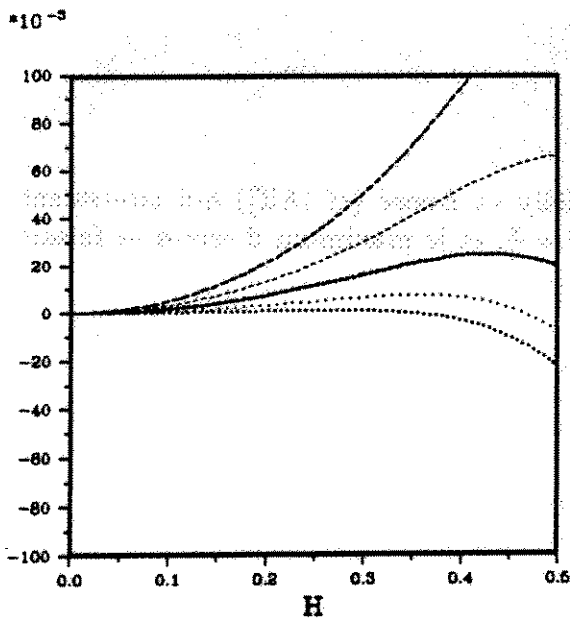
$L = 1$
 $P_{max} = 0.707$

$\theta = 45.00$

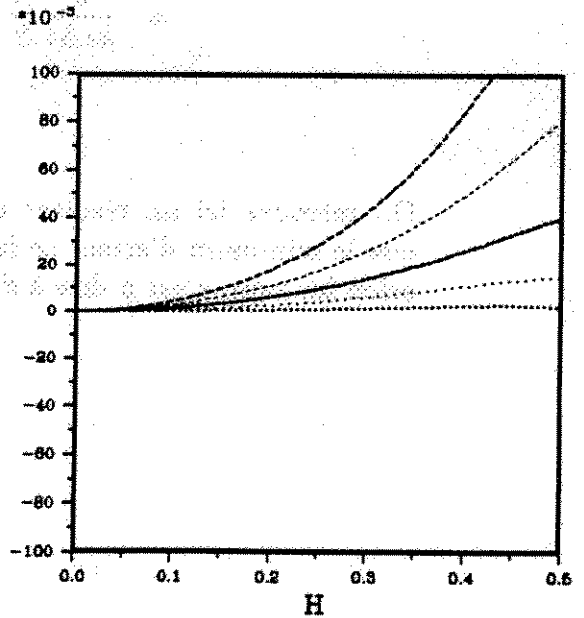


$L = 2$
 $P_{max} = 0.606$

$P = C \cdot \Delta T / h$
 $P = 0.2 \cdot P_{MAX}$
 $P = 0.4 \cdot P_{MAX}$
 $P = 0.6 \cdot P_{MAX}$
 $P = 0.8 \cdot P_{MAX}$
 $P = 1.0 \cdot P_{MAX}$



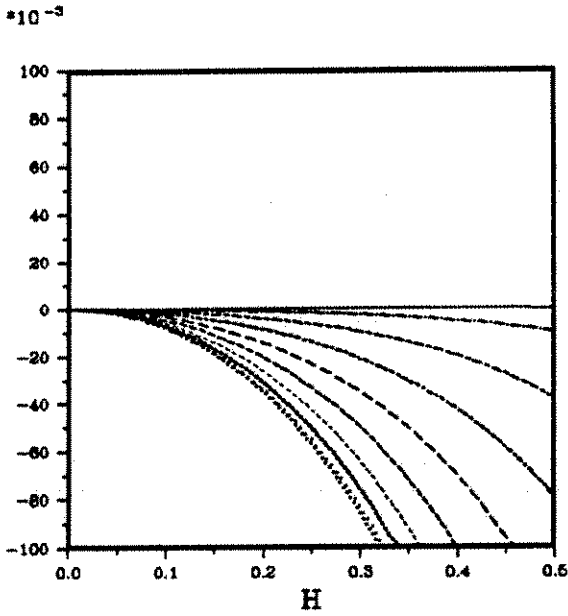
$L = 4$
 $P_{max} = 0.550$



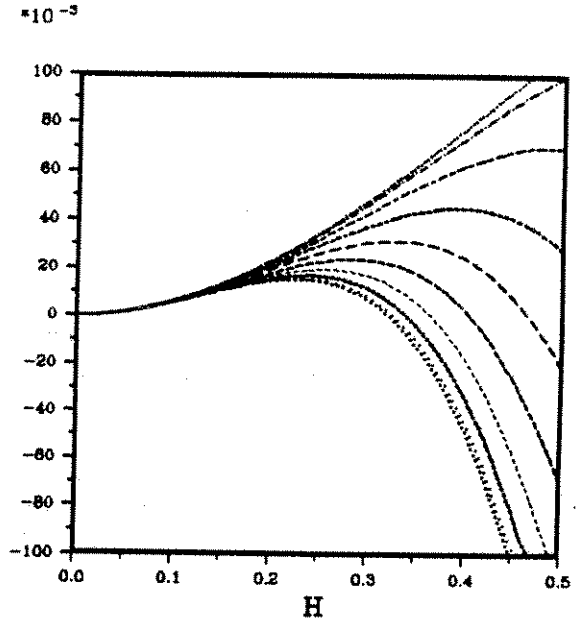
$L = 10$
 $P_{max} = 0.508$

2.3. ETUDE EN MILIEU BIDIMENSIONNEL

Error on Phase Speed

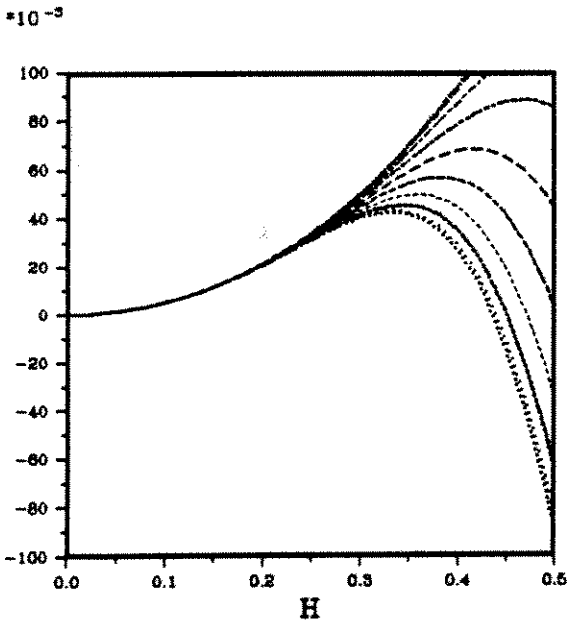


$L = 1$
 $P = 0.707$
 $P_{max} = 0.707$

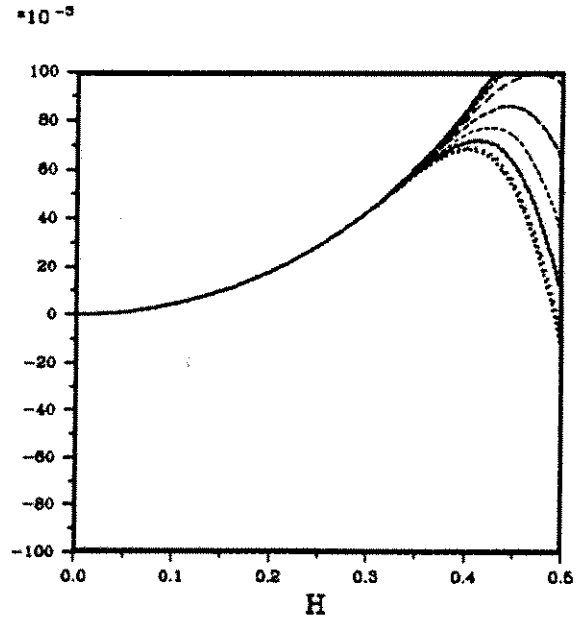


$L = 2$
 $P = 0.606$
 $P_{max} = 0.606$

ANGLE:	
.....	0
.....	5
.....	10
----	15
----	20
----	25
----	30
----	35
----	40
.....	45



$L = 4$
 $P = 0.550$
 $P_{max} = 0.550$



$L = 10$
 $P = 0.508$
 $P_{max} = 0.508$

CHAPITRE 2. ANALYSE DE L'ERREUR DE DISPERSION

L'erreur sur la vitesse de groupe

En dérivant la relation de dispersion par rapport à k on obtient :

$$\frac{\Delta t}{2} \frac{\partial \omega}{\partial k} \cos\left(\frac{\omega \Delta t}{2}\right) = \frac{\frac{c \Delta t}{h} \left(\cos(\theta) f'(k \cos(\theta)) f(k \cos(\theta)) + \sin(\theta) f'(k \sin(\theta)) f(k \sin(\theta)) \right)}{\sqrt{f^2(k \cos(\theta)) + f^2(k \sin(\theta))}}$$

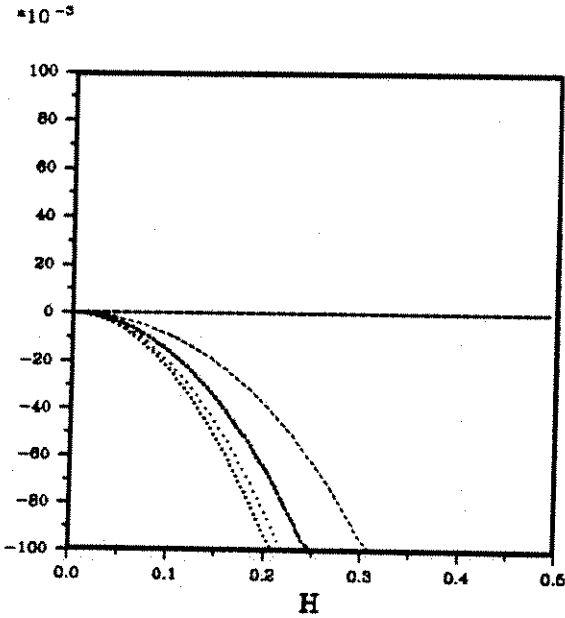
De la vitesse de groupe normalisée $\frac{1}{c} \frac{\partial \omega}{\partial k}$ on déduit facilement l'erreur relative sur la vitesse de groupe donnée par :

$$E_{gr}(k, \theta, \Delta t) = \frac{\frac{2}{h} \left(\cos(\theta) f'(k \cos(\theta)) f(k \cos(\theta)) + \sin(\theta) f'(k \sin(\theta)) f(k \sin(\theta)) \right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{c \Delta t}{h}\right)^2 f^2(k \cos(\theta)) + f^2(k \sin(\theta))} \cdot \sqrt{f^2(k \cos(\theta)) + f^2(k \sin(\theta))}} - 1$$

On obtient alors des courbes d'erreur analogues à celles obtenues pour l'erreur sur la vitesse de phase.

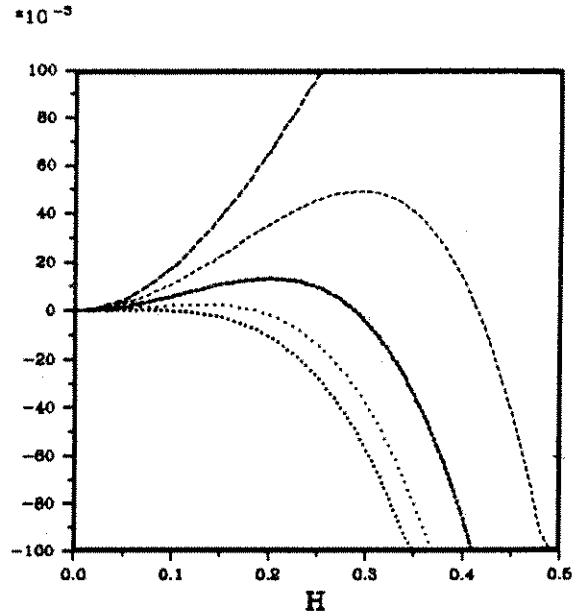
2.3. ETUDE EN MILIEU BIDIMENSIONNEL

Error on Group Speed



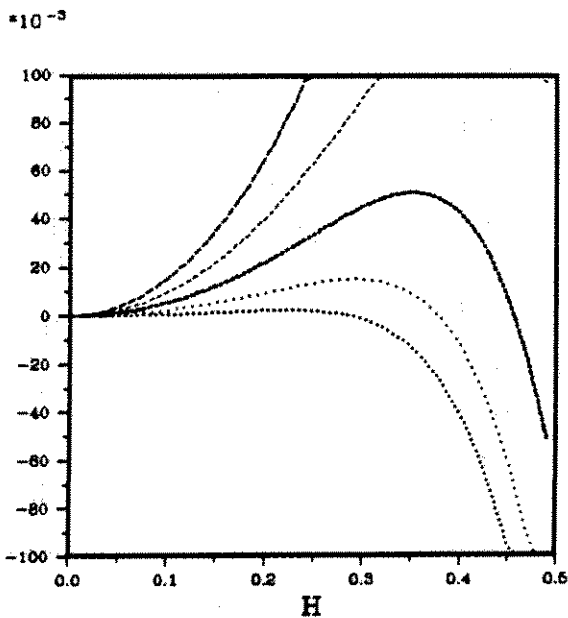
$L = 1$
 $P_{max} = 0.707$

$\Theta = 45.00$

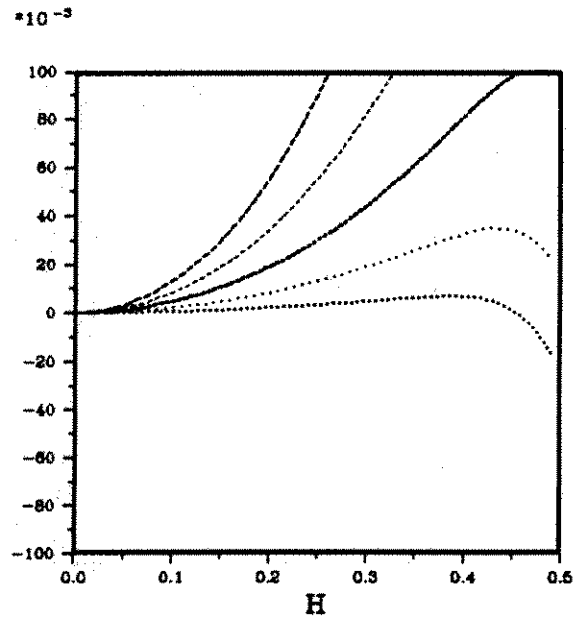


$L = 2$
 $P_{max} = 0.606$

$P = C \cdot DT / h$
 $P = 0.2 \cdot P_{MAX}$
 $P = 0.4 \cdot P_{MAX}$
 - - - $P = 0.6 \cdot P_{MAX}$
 - - - $P = 0.8 \cdot P_{MAX}$
 - - - $P = 1.0 \cdot P_{MAX}$

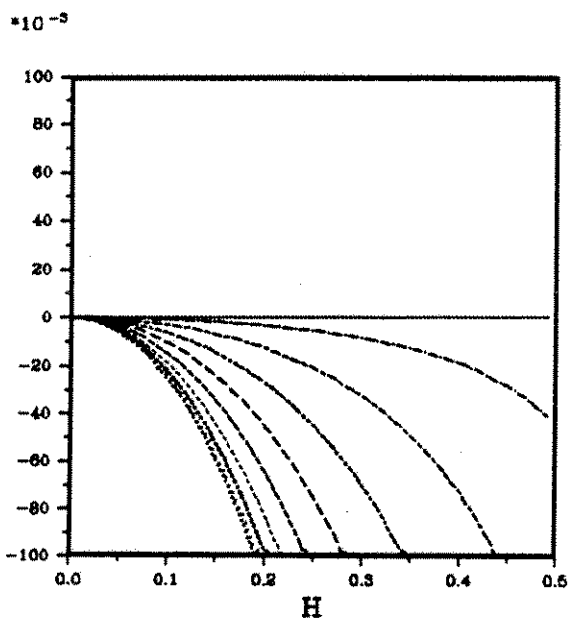


$L = 4$
 $P_{max} = 0.550$



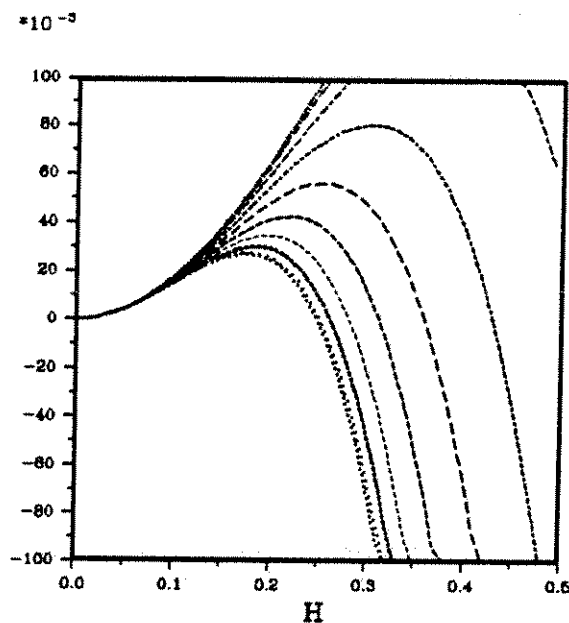
$L = 10$
 $P_{max} = 0.508$

CHAPITRE 2. ANALYSE DE L'ERREUR DE DISPERSION
Error on Group Speed

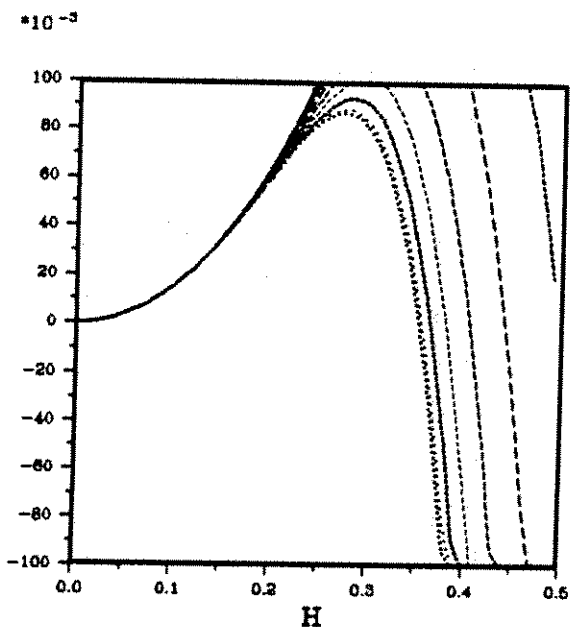


$L = 1$
 $P = 0.707$
 $P_{max} = 0.707$

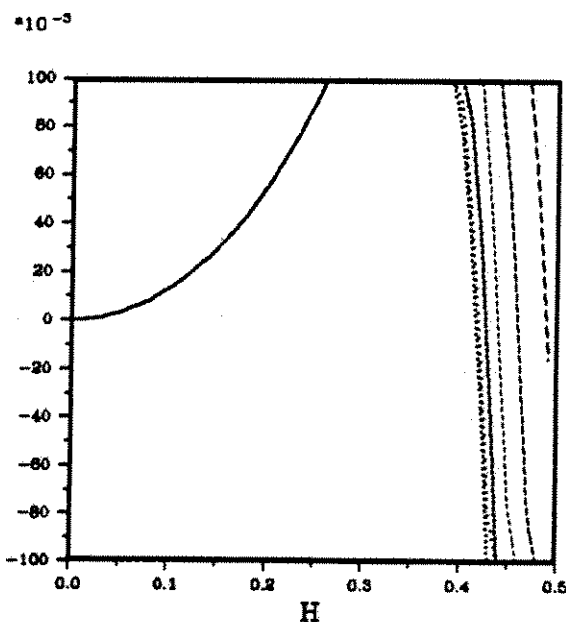
ANGLE:	
.....	0
....	5
.....	10
-----	15
-----	20
-----	25
-----	30
-----	35
-----	40
.....	45



$L = 2$
 $P = 0.606$
 $P_{max} = 0.606$



$L = 4$
 $P = 0.550$
 $P_{max} = 0.550$



$L = 10$
 $P = 0.508$
 $P_{max} = 0.508$

2.3. ETUDE EN MILIEU BIDIMENSIONNEL

2.3.2 Schémas d'ordre 4 en temps

L'opérateur sur la grille incomplète

En dimension 2, en appliquant le même principe qu'en dimension 1 il est facile d'obtenir un schéma (4-2L), l'équation "modifiée" correspondante est alors donnée par :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \frac{c^2 \Delta t^2}{12} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right) = 0$$

On pose $B_x = -{}^t A_x^2 o A_x^2$, $B_y = -{}^t A_y^2 o A_y^2$ et $\Delta_h = B_x + B_y$. On discrétise l'équation des ondes "modifiée" à l'aide des opérateurs introduits précédemment sous la forme

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^n + u_{i,j}^{n-1}}{c^2 \Delta t^2} - \left\{ \Delta_h + \left(\frac{c^2 \Delta t^2}{12} {}^t \Delta_h o \Delta_h \right) \right\} u_{i,j}^n = 0 \quad (2.9)$$

On peut maintenant écrire la relation de dispersion du schéma (4-2L). En notant

$$A(k) = \sum_{l=1}^L \beta_l \sin\left(\frac{(2l-1)kh}{2}\right) \quad A_x = A(k \cos(\theta)) \quad A_y = A(k \sin(\theta))$$

$$f(k) = A_x^2(k) + A_y^2(k) - \frac{1}{3} \left(\frac{c \Delta t}{h} \right)^2 \left(A_x^4(k) + A_y^4(k) + 2A_x^2(k)A_y^2(k) \right)$$

la relation de dispersion s'écrit :

$$\sin\left(\frac{\omega \Delta t}{2}\right) = \frac{c \Delta t}{h} \sqrt{f(k)}$$

On en tire la pulsation ω :

$$\omega(k, \theta, \Delta t) = \frac{2}{\Delta t} \arcsin\left(\frac{c \Delta t}{h} \sqrt{f(k)}\right)$$

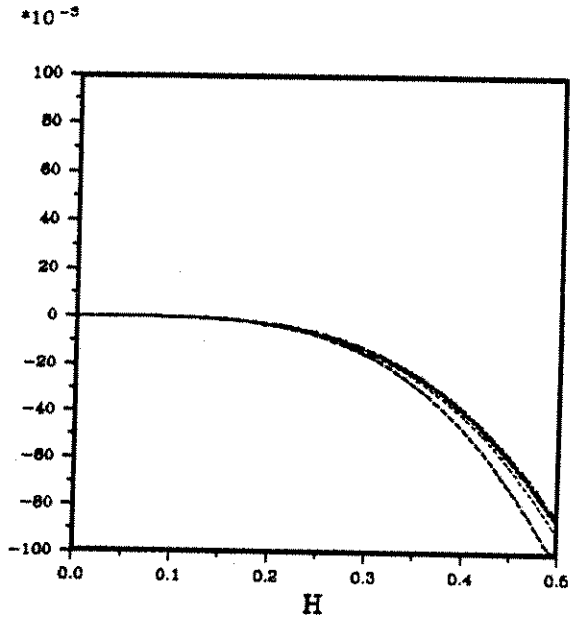
L'erreur sur la vitesse de phase

L'erreur relative sur la vitesse de phase est alors donnée par :

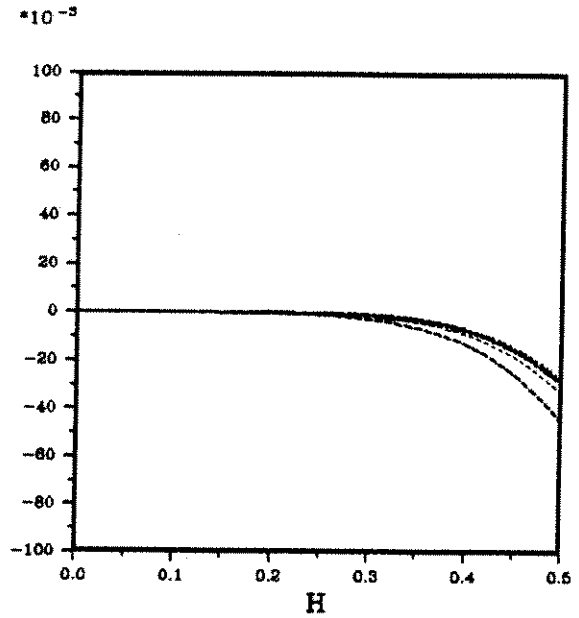
$$E_\varphi(k, \theta, \Delta t) = \frac{2}{kc \Delta t} \arcsin\left(\sqrt{f(k)}\right) - 1$$

La fonction $\theta \mapsto E_\varphi(k, \theta)$ est périodique de période $\pi/2$ et paire. Il suffit donc de l'étudier pour $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$. Nous avons alors les courbes suivantes.

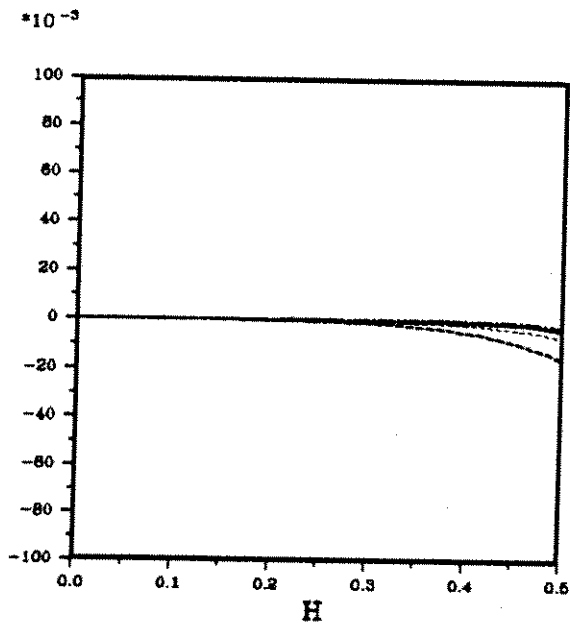
CHAPITRE 2. ANALYSE DE L'ERREUR DE DISPERSION
Error on Phase Speed



$L = 2$
 $P_{max} = 0.606$



$L = 4$
 $P_{max} = 0.550$



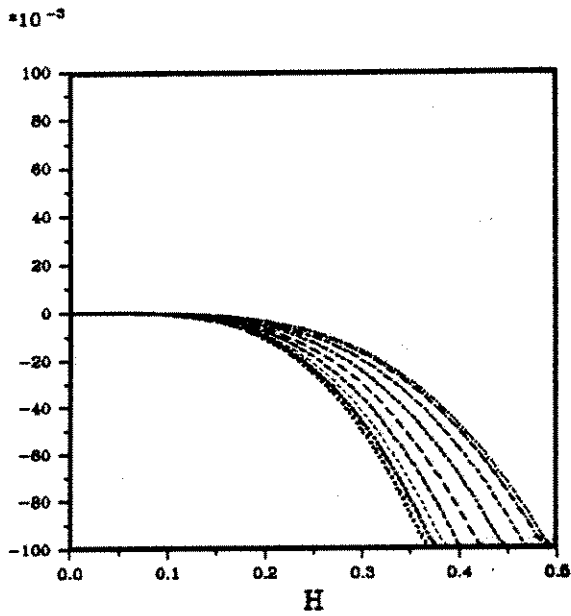
$L = 10$
 $P_{max} = 0.508$

$\theta = 45.00$

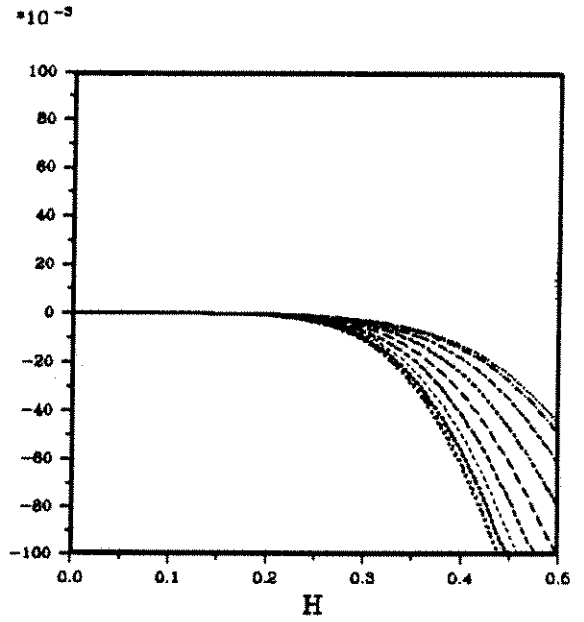
$P = C \cdot \Delta T / h$
$\cdots P = 0.2 \cdot P_{MAX}$
$\dots P = 0.4 \cdot P_{MAX}$
$\cdots P = 0.6 \cdot P_{MAX}$
$--- P = 0.8 \cdot P_{MAX}$
$--- P = 1.0 \cdot P_{MAX}$

2.3. ETUDE EN MILIEU BIDIMENSIONNEL

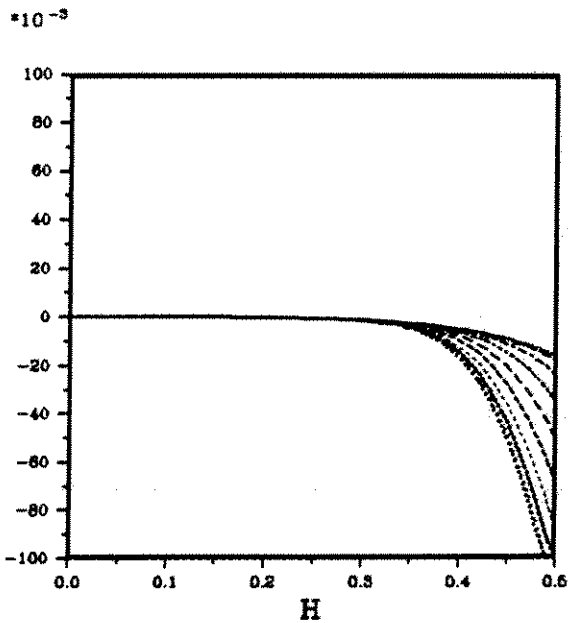
Error on Phase Speed



$L = 2$
 $P = 0.606$
 $P_{max} = 0.606$



$L = 4$
 $P = 0.550$
 $P_{max} = 0.550$



$L = 10$
 $P = 0.508$
 $P_{max} = 0.508$

ANGLE:	
.....	0
....	5
.....	10
-----	15
-----	20
-----	25
-----	30
-----	35
-----	40
.....	45

CHAPITRE 2. ANALYSE DE L'ERREUR DE DISPERSION

L'erreur sur la vitesse de groupe

La relation de dispersion s'écrit :

$$\sin\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right) = \frac{c\Delta t}{h}\sqrt{f(k)}$$

En dérivant la relation de dispersion par rapport à k on obtient

$$\frac{\Delta t}{2} \frac{\partial \omega}{\partial k} \cos\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right) = \frac{\frac{c\Delta t}{h} f'(k)}{2\sqrt{f(k)}}$$

De la vitesse de groupe normalisée $\frac{1}{c} \frac{\partial \omega}{\partial k}$ on déduit facilement l'erreur relative sur la vitesse de groupe donnée par :

$$E_{gr}(k, \theta, \Delta t, h) = \frac{N(k, \theta, \Delta t, h)}{D(k, \theta, \Delta t, h)} - 1$$

$$N = \left(\cos(\theta) A_x(k) A'_x(k) + \sin(\theta) A_y(k) A'_y(k) \right) \left(1 - \frac{2}{3} \left(\frac{c\Delta t}{h} \right)^2 (A_x^2(k) + A_y^2(k)) \right)$$

$$D = \left(\left(1 - \left(\frac{c\Delta t}{h} \right)^2 f(k) \right) f(k) \right)^{1/2}$$

avec

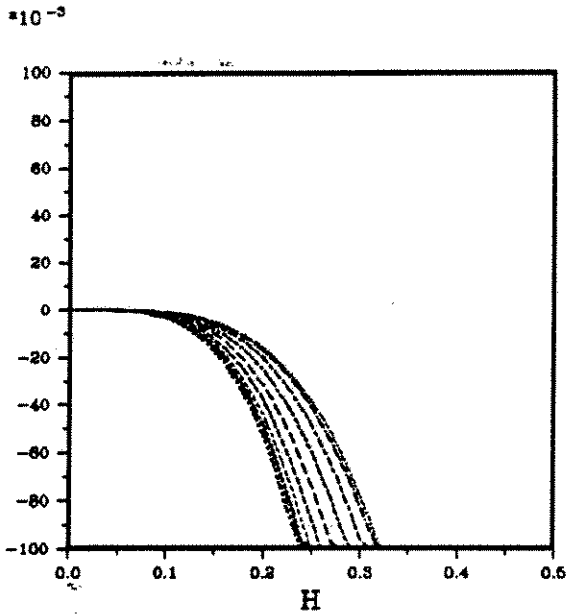
$$A'(k) = \sum_{l=1}^L l \beta_l \cos\left(\frac{lkh}{2}\right)$$

$$A'_x = A'(k \cos(\theta))$$

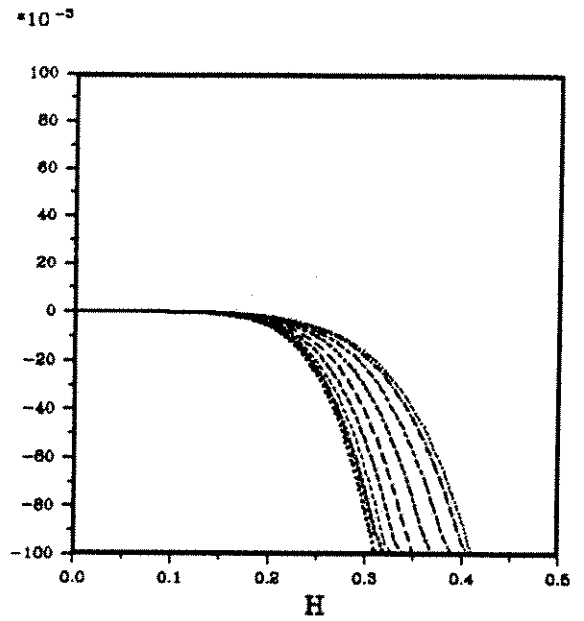
$$A'_y = A'(k \sin(\theta))$$

On obtient alors des courbes d'erreur analogues à celles obtenues pour l'erreur sur la vitesse de phase.

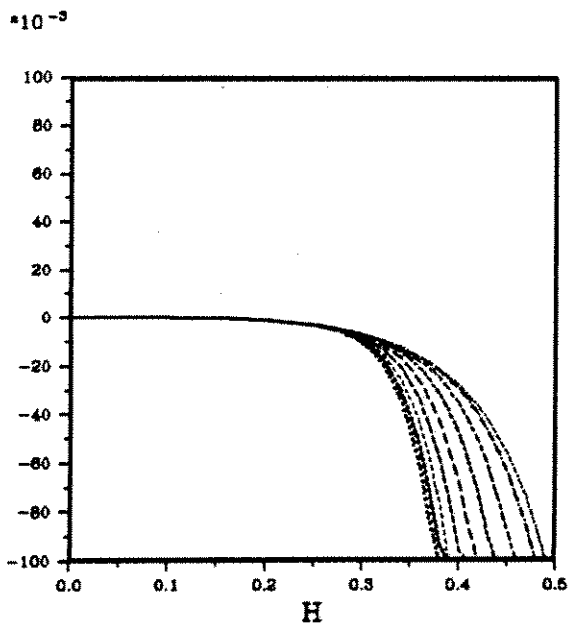
Error on Group Speed



$L = 2$
 $P = 0.606$
 $P_{max} = 0.606$



$L = 4$
 $P = 0.550$
 $P_{max} = 0.550$

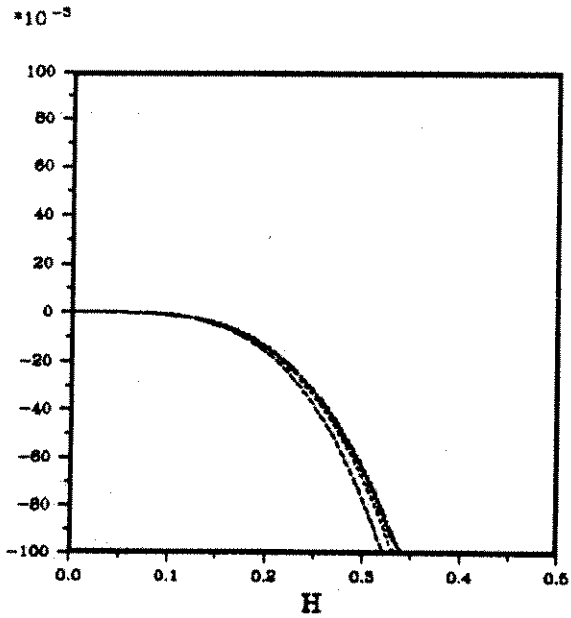


$L = 10$
 $P = 0.508$
 $P_{max} = 0.508$

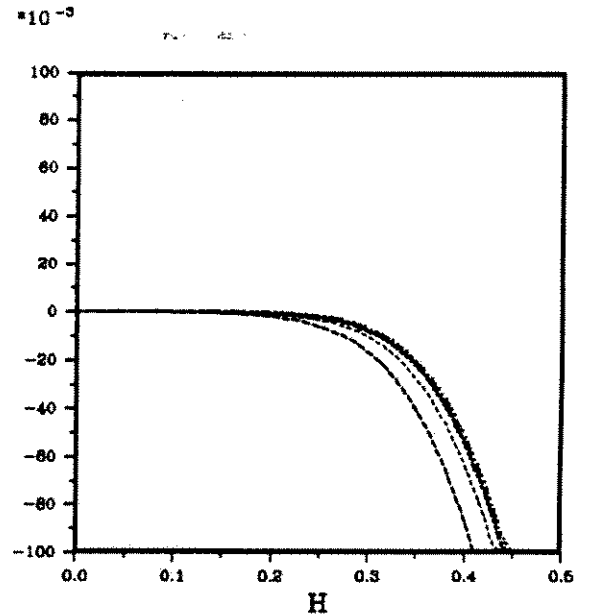
ANGLE:	
.....	0
....	5
.....	10
-----	15
-----	20
-----	25
-----	30
-----	35
-----	40
.....	45

2.3. ETUDE EN MILIEU BIDIMENSIONNEL

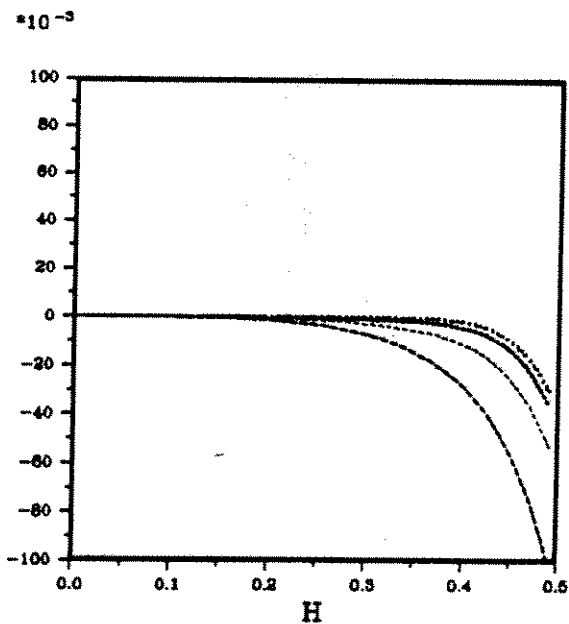
Error on Group Speed



$L = 2$
 $P_{max} = 0.606$



$L = 4$
 $P_{max} = 0.550$



$L = 10$
 $P_{max} = 0.508$

$\theta = 45.00$

$P = C \cdot DT / h$
..... $P = 0.2 \cdot P_{MAX}$
.... $P = 0.4 \cdot P_{MAX}$
--- $P = 0.6 \cdot P_{MAX}$
--- $P = 0.8 \cdot P_{MAX}$
--- $P = 1.0 \cdot P_{MAX}$

2.3. ETUDE EN MILIEU BIDIMENSIONNEL

2.3.3 Etude de l'Anisotropie Numérique

Introduction

On considère une onde plane harmonique, se déplaçant dans un milieu homogène, dans la direction d_θ faisant un angle θ avec l'horizontale. Nous allons voir que contrairement au cas continu, la vitesse de phase numérique dépend de la direction de propagation, c'est à dire de l'angle θ .

Soit donc u une onde plane harmonique se déplaçant dans la direction d_θ .

$$u(x, y, t) = e^{i(\omega t - |k| \cos \theta x - |k| \sin \theta y)}$$

u étant solution de l'équation des ondes on a la relation de dispersion classique

$$\begin{aligned} \omega &= c\sqrt{k_1^2 + k_2^2} \\ &= c\sqrt{|k|^2 \cos^2 \theta + |k|^2 \sin^2 \theta} \\ &= c|k| \end{aligned}$$

c'est à dire que la pulsation est indépendante ω de l'angle θ .

Dans le cas discret de l'équation (2.8) on a :

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{2}{\Delta t} \arcsin \left(\frac{c\Delta t}{h} \sqrt{A^2(k_1) + A^2(k_2)} \right) \\ &= \frac{2}{\Delta t} \arcsin \left(\frac{c\Delta t}{h} \sqrt{A^2(|k| \cos \theta) + A^2(|k| \sin \theta)} \right) \end{aligned}$$

donc ω dépend de l'angle de propagation θ .

L'Anisotropie de la vitesse de phase

Lorsque Δt tend vers 0, c'est à dire lorsqu'il n'y a que la discrétisation spatiale, la relation de dispersion devient :

$$\begin{aligned} \omega(k, \theta) &= \frac{c}{h} \left\{ \left(\sum_{l=1}^L \alpha_l \sin((2l-1) \frac{k_1 h}{2}) \right)^2 + \left(\sum_{l=1}^L \alpha_l \sin((2l-1) \frac{k_2 h}{2}) \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{c}{h} \left\{ \left(\sum_{l=1}^L \alpha_l \sin((2l-1) \frac{|k| h \cos \theta}{2}) \right)^2 + \left(\sum_{l=1}^L \alpha_l \sin((2l-1) \frac{|k| h \sin \theta}{2}) \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

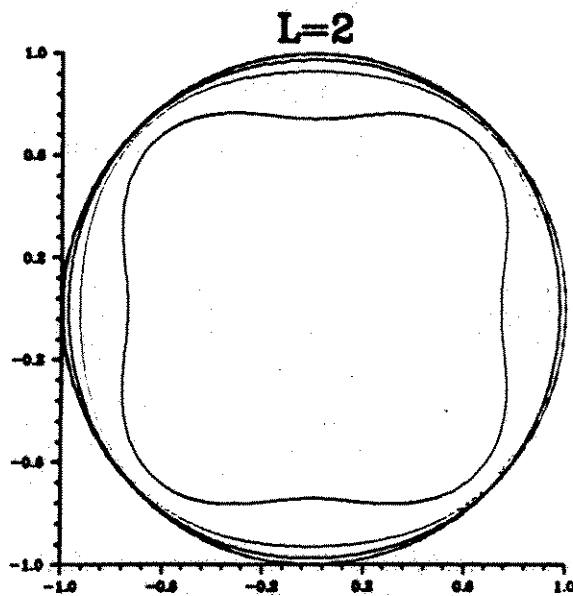
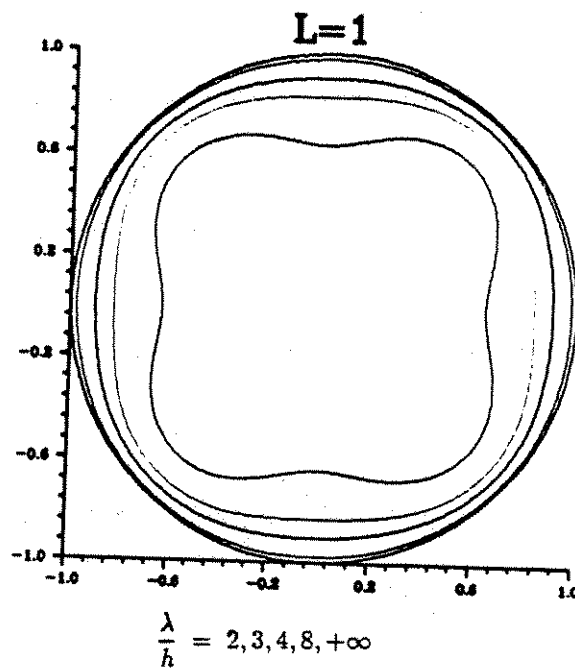
En introduisant $H = |k|h/2\pi$ inverse du nombre de points par longueur d'onde la vitesse de phase c_φ devient une fonction de H et θ et la quantité adimensionnelle

CHAPITRE 2. ANALYSE DE L'ERREUR DE DISPERSION

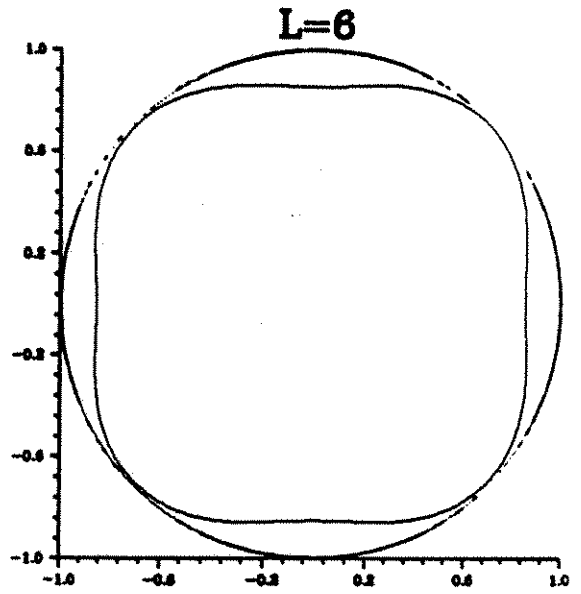
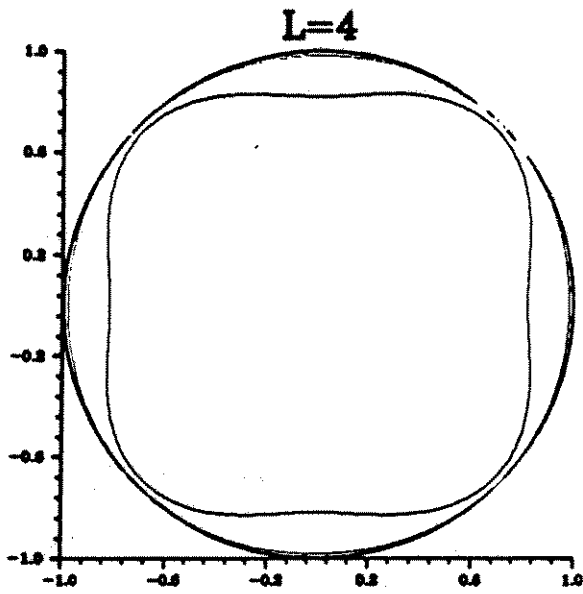
c_φ/c est donnée par :

$$\frac{c_\varphi}{c}(H, \theta) = \frac{1}{2\pi H} \left\{ \left(\sum_{l=1}^L \alpha_l \sin((2l-1)\pi H \cos \theta) \right)^2 + \left(\sum_{l=1}^L \alpha_l \sin((2l-1)\pi H \sin \theta) \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

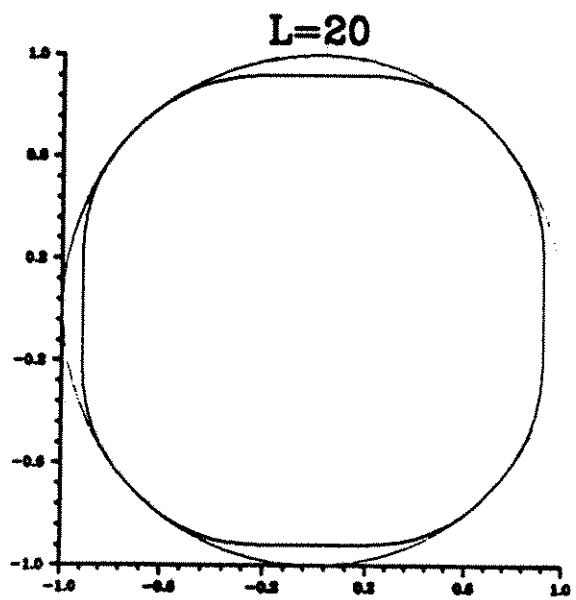
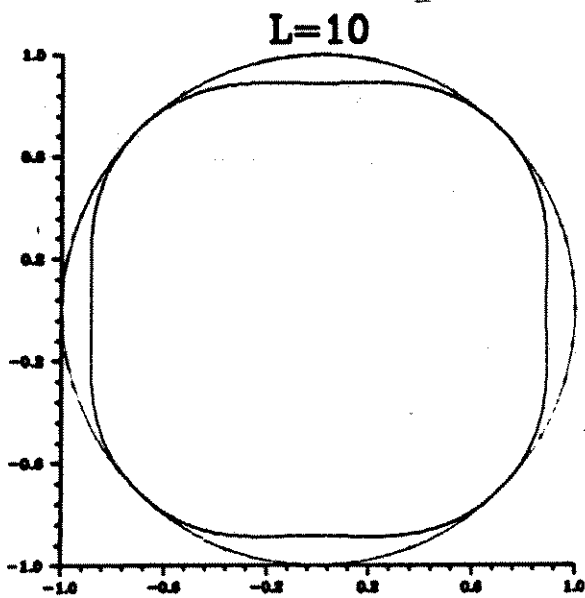
Nous présentons ci-dessous les courbes, en coordonnées polaires, de la vitesse de phase normalisée c_φ/c pour différents opérateurs.



2.3. ETUDE EN MILIEU BIDIMENSIONNEL



$$\frac{\lambda}{h} = 2, 3, 4, 8, +\infty$$

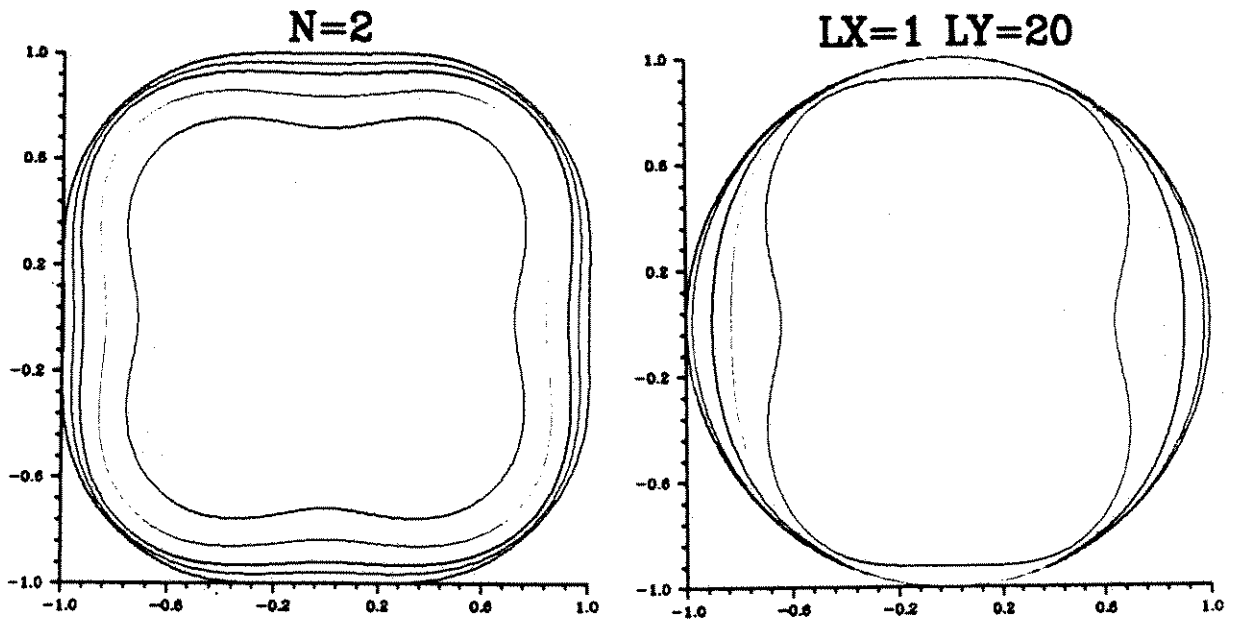


CHAPITRE 2. ANALYSE DE L'ERREUR DE DISPERSION

Remarque:

Le gain d'isotropie lorsque l'on augmente la longueur de l'opérateur est bien visible sur les courbes ci-dessus. Il s'explique par le fait que l'on approche de mieux en mieux l'opérateur de dérivation continue qui est isotrope. Nous illustrons ce phénomène de deux façons.

Tout d'abord, en fixant à deux le nombre de points par longueur d'onde et en augmentant la longueur de l'opérateur; puis changeant d'opérateur pour la dérivation en x et en y . Nous avons choisit $L = 1$ en x (opérateur peu isotrope) et $L = 20$ en y (opérateur très peu anisotrope).



$$\frac{\lambda}{h} = 2, 3, 4, 8, +\infty$$

2.3. ETUDE EN MILIEU BIDIMENSIONNEL

L'Anisotropie de la vitesse de groupe

Pour étudier l'anisotropie de la vitesse de groupe, nous allons considérer la quantité adimensionnelle suivante:

$$\frac{|\nabla\omega(k, \theta)|}{c} = \frac{|c_{gr}(k, \theta)|}{c}$$

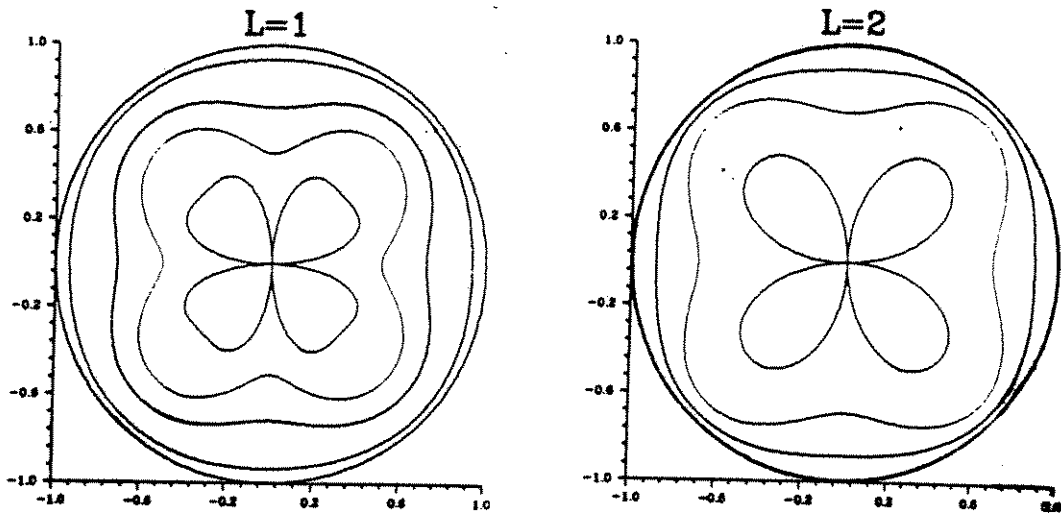
En repartant de la relation

$$\omega(k, \theta) = \frac{c}{h} \left\{ \left(\sum_{l=1}^L \alpha_l \sin\left((2l-1)\frac{k_1 h}{2}\right) \right)^2 + \left(\sum_{l=1}^L \alpha_l \sin\left((2l-1)\frac{k_2 h}{2}\right) \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

on déduit la vitesse de groupe en fonction de $H = |k|h/2\pi$ et θ

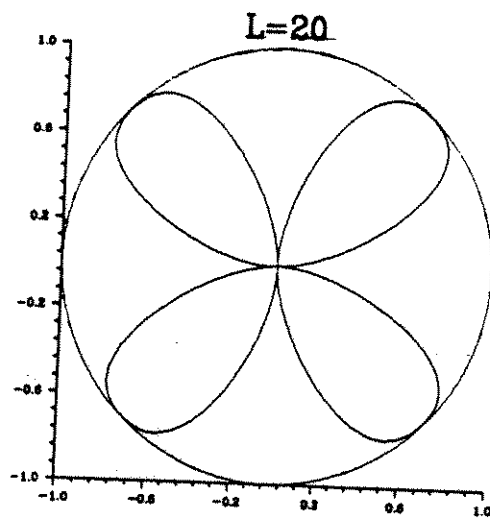
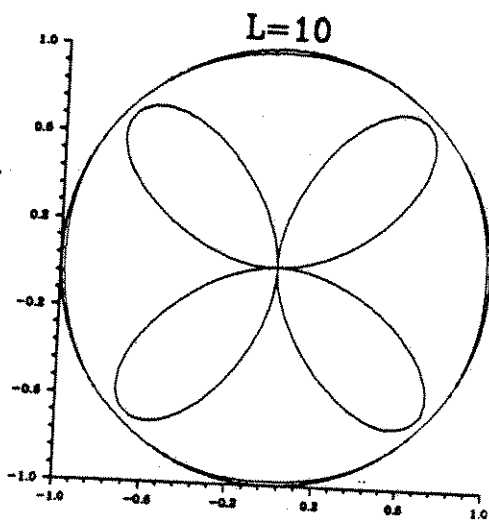
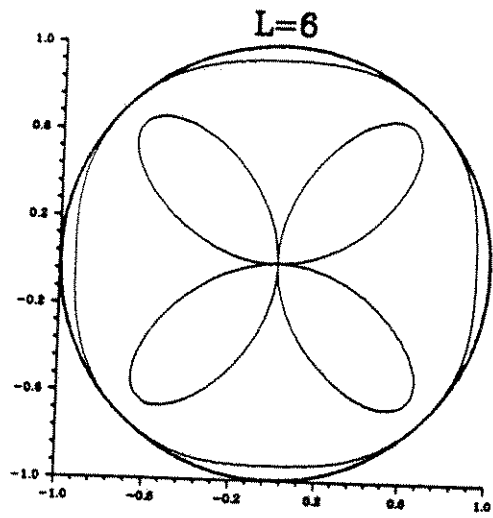
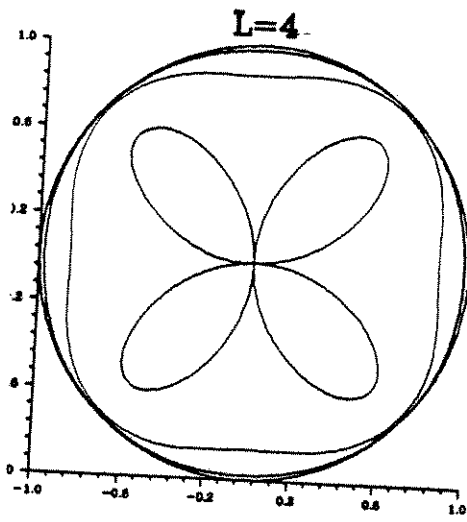
$$\begin{aligned} \frac{|\nabla\omega(k, \theta)|}{c} &= \frac{\left(\sum_{l=1}^L \alpha_l (2l-1) \cos((2l-1)\pi H \cos \theta) \right) \left(\sum_{l=1}^L \alpha_l \sin((2l-1)\pi H \cos \theta) \right)}{\left\{ \left(\sum_{l=1}^L \alpha_l \sin((2l-1)\pi H \cos \theta) \right)^2 + \left(\sum_{l=1}^L \alpha_l \sin((2l-1)\pi H \sin \theta) \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}} \\ &+ \frac{\left(\sum_{l=1}^L \alpha_l (2l-1) \cos((2l-1)\pi H \sin \theta) \right) \left(\sum_{l=1}^L \alpha_l \sin((2l-1)\pi H \sin \theta) \right)}{\left\{ \left(\sum_{l=1}^L \alpha_l \sin((2l-1)\pi H \cos \theta) \right)^2 + \left(\sum_{l=1}^L \alpha_l \sin((2l-1)\pi H \sin \theta) \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

Nous donnons ci-dessous les courbes en coordonnées polaires de la vitesse de groupe normalisée pour différents opérateurs.



$$\frac{\lambda}{h} = 2, 3, 4, 8, +\infty$$

CHAPITRE 2. ANALYSE DE L'ERREUR DE DISPERSION



$$\frac{\lambda}{h} = 2, 3, 4, 8, +\infty$$

2.4. ETUDE EN MILIEU TRIDIMENSIONNEL

2.4 Etude en Milieu Tridimensionnel

2.4.1 Schémas d'ordre 2 en temps

L'opérateur sur la grille incomplète

On se place en milieu homogène de vitesse c et afin de discrétiser l'équation

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = 0$$

On utilise les opérateurs suivants :

$$\begin{aligned} A_x^2 : (L_o^2)^3 &\longrightarrow L_*^2 \times L_o^2 \times L_o^2 \\ u &\longmapsto A_x^2 u(i + 1/2, j, k) = \sum_{l=1}^L \frac{\alpha_l}{(2l-1)h} [u_{i+l,j,k} - u_{i-l+1,j,k}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_y^2 : (L_o^2)^3 &\longrightarrow L_o^2 \times L_*^2 \times L_o^2 \\ u &\longmapsto A_y^2 u(i, j + 1/2, k) = \sum_{l=1}^L \frac{\alpha_l}{(2l-1)h} [u_{i,j+l,k} - u_{i,j-l+1,k}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_z^2 : (L_{o,1/2}^2)^3 &\longrightarrow L_o^2 \times L_o^2 \times L_*^2 \\ u &\longmapsto A_z^2 u(i, j, k + 1/2) = \sum_{l=1}^L \frac{\alpha_l}{(2l-1)h} [u_{i,j,k+l} - u_{i,j,k-l+1}] \end{aligned}$$

On approche le Laplacien par l'opérateur $B_2 = -({}^t A_x^2 o A_x^2 + {}^t A_y^2 o A_y^2 + {}^t A_z^2 o A_z^2)$. A l'aide d'une différence finie d'ordre 2 en temps, on obtient l'équation discrète suivante :

$$\frac{u_{i,j,k}^{n+1} - 2u_{i,j,k}^n + u_{i,j,k}^{n-1}}{c^2 \Delta t^2} - B_2 u_{i,j,k}^n = 0$$

On tire de l'équation ci-dessus la relation de dispersion :

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\omega \Delta t}{2}\right) &= \frac{c \Delta t}{h} \sqrt{f^2(k \cos(\theta) \sin(\phi)) + f^2(k \sin(\theta) \sin(\phi)) + f^2(k \cos(\phi))} \\ f(k) &= \sum_{l=1}^L \frac{\alpha_l}{(2l-1)} \sin\left(\frac{(2l-1)kh}{2}\right) \end{aligned}$$

d'où l'on tire la pulsation ω :

$$\omega(k, \theta, \phi, \Delta t) = \frac{2}{\Delta t} \arcsin\left(\frac{c \Delta t}{h} \sqrt{f^2(k \cos(\theta) \sin(\phi)) + f^2(k \sin(\theta) \sin(\phi)) + f^2(k \cos(\phi))}\right)$$

CHAPITRE 2. ANALYSE DE L'ERREUR DE DISPERSION

L'erreur sur la vitesse de phase

L'erreur relative sur la vitesse de phase est alors donnée par :

$$E_{\varphi}(k, \theta, \phi, \Delta t) = \frac{2}{kc\Delta t} \arcsin\left(\frac{c\Delta t}{h} F(k, \theta, \phi, \Delta t)\right) - 1$$

$$F(k, \theta, \phi, \Delta t) = \sqrt{f^2(k \cos(\theta) \sin(\phi)) + f^2(k \sin(\theta) \sin(\phi)) + f^2(k \cos(\phi))}$$

La fonction $\theta \mapsto E_{\varphi}(k, \theta, \phi, \Delta t)$ est périodique de période $\pi/2$ et paire en θ , et elle est périodique de période π et paire en ϕ . Il suffit donc de l'étudier pour $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$ et $\phi \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Lorsque $kh \rightarrow 0$ on a le développement suivant :

$$E_{\varphi}(k, \theta, \phi, \Delta t) = \frac{1}{3!} \left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right)^2 - \frac{\prod_{m=1}^L (2m-1)^2}{(2L+1)!} \left(\frac{kh}{2}\right)^{2L} \\ \left(\sin^{2L+2}(\phi)(\cos^{2L+2}(\theta) + \sin^{2L+2}(\theta)) + \cos^{2L+2}(\phi)\right) + o\left(\left(\frac{kh}{2}\right)^{2L+2}\right)$$

Ce que l'on peut écrire encore avec $H = h/\lambda$ et $p = c\Delta t/h$ sous la forme :

$$E_{\varphi}(H, \theta, \phi, p) = \frac{\pi^2 p^2 H^2}{3!} - \frac{\prod_{m=1}^L (2m-1)^2}{(2L+1)!} (\pi H)^{2L} \\ \left(\sin^{2L+2}(\phi)(\cos^{2L+2}(\theta) + \sin^{2L+2}(\theta)) + \cos^{2L+2}(\phi)\right) + o((H)^{2L+2})$$

Remarques :

i) Dans le développement ci-dessus, on remarque encore le cas particulier joué par $L = 1$. En effet pour $L \geq 2$ l'ordre de h sera toujours supérieur à l'ordre de Δt , ce qui implique que l'erreur sur la vitesse de phase sera positive (au moins pour $kh \rightarrow 0$) alors que pour $L = 1$ on a :

$$E_{\varphi}(k, \theta, \phi, \Delta t) = \frac{1}{3!} \left(\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right)^2 - \{\sin^4(\phi)(\cos^4(\theta) + \sin^4(\theta)) + \cos^4(\phi)\} \left(\frac{kh}{2}\right)^2 \right) + o\left(\left(\frac{kh}{2}\right)^4\right)$$

ce que l'on peut encore écrire à l'aide des variables :

$$p = \frac{c\Delta t}{h} \qquad H = \frac{h}{2\lambda}$$

2.4. ETUDE EN MILIEU TRIDIMENSIONNEL

sous la forme :

$$E_v(H, \theta, \phi, p) = \frac{2(\pi H)^2}{3} \left(p^2 - \{\sin^4(\phi)(\cos^4(\theta) + \sin^4(\theta)) \cos^4(\phi)\} + o(H)^4 \right)$$

Ceci montre qu'au voisinage de 0 (en kh) l'erreur sur la vitesse de phase est négative. En effet en 3D on a $p^2 \leq 1/3$ de plus :

$$\sin^4(\phi)(\cos^4(\theta) + \sin^4(\theta)) + \cos^4(\phi) = 1 - \frac{1}{2}(\sin^2(2\phi) + \sin^4(\phi) \sin^2(2\theta))$$

Le maximum de la fonction F :

$$F(\theta, \phi) = \sin^2(2\phi) + \sin^4(\phi) \sin^2(2\theta)$$

est atteint au point :

$$\theta_o = \frac{\pi}{4} \quad \phi_o = \arctan(\sqrt{2}) = \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \simeq 54.74^\circ$$

donc

$$\max_{\theta \in [0; \frac{\pi}{4}] \quad \phi \in [0; \frac{\pi}{2}]} F(\theta, \phi) = F(\theta_o, \phi_o) = \frac{4}{3}$$

finalemt on obtient bien

$$\sin^4(\phi)(\cos^4(\theta) + \sin^4(\theta)) + \cos^4(\phi) \geq \frac{1}{3} \geq p^2$$

ii) Pour (θ_o, ϕ_o) on a d'ailleurs

$$\begin{aligned} \cos(\theta_o) &= \sin(\theta_o) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos(\phi_o) &= \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(\phi_o) = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} F(H, \theta, \phi, p) &= \sqrt{f^2(k \cos(\theta_o) \sin(\phi_o)) + f^2(k \sin(\theta_o) \sin(\phi_o)) + f^2(k \cos(\phi_o))} \\ &= \sqrt{2f^2\left(k \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(\phi_o)\right) + f^2(k \cos(\phi_o))} \\ &= \sqrt{3f^2\left(k \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(\phi_o)\right)} \\ &= \sqrt{3} f\left(k \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(\phi_o)\right) \end{aligned}$$

CHAPITRE 2. ANALYSE DE L'ERREUR DE DISPERSION

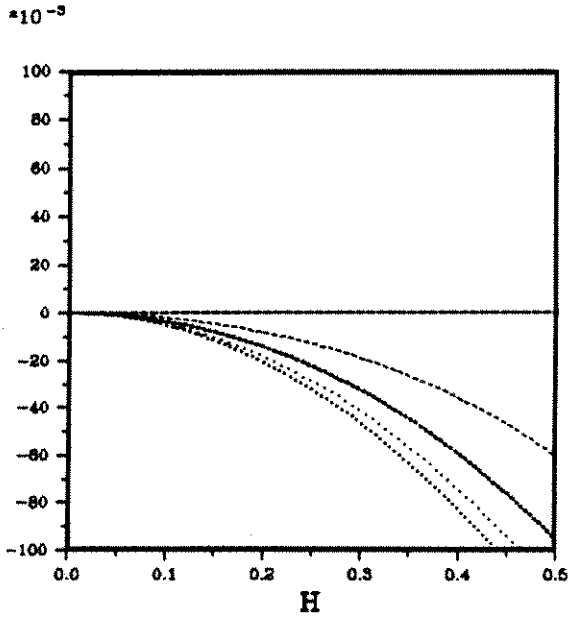
d'où en choisissant $p = \frac{c\Delta t}{h} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ on a

$$\begin{aligned} E_\varphi(k, \theta, \phi, \Delta t) &= \frac{2}{kc\Delta t} \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{3} \sqrt{3} \sin\left(\frac{kh}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(\phi_o)\right)\right) - 1 \\ &= \sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin(\phi_o)\right) - 1 = \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} - 1 = 0 \end{aligned}$$

On remarque encore une fois, que selon une direction particulière correspondant à (θ_o, ϕ_o) on a aucune erreur sur la vitesse de phase.

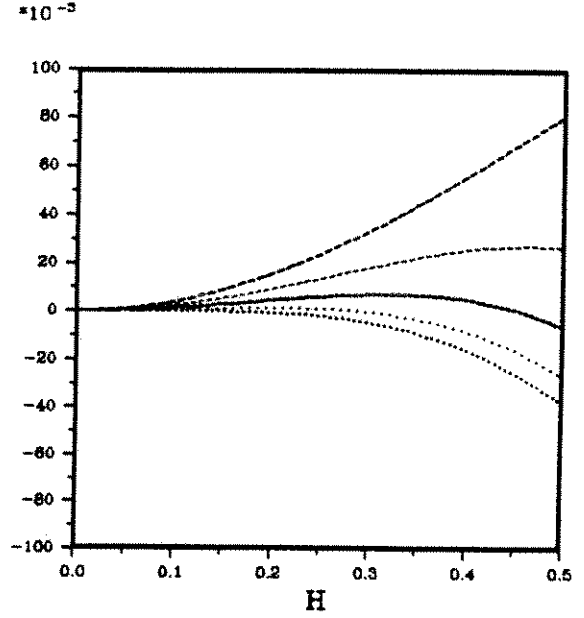
2.4. ETUDE EN MILIEU TRIDIMENSIONNEL

Error on Phase Speed



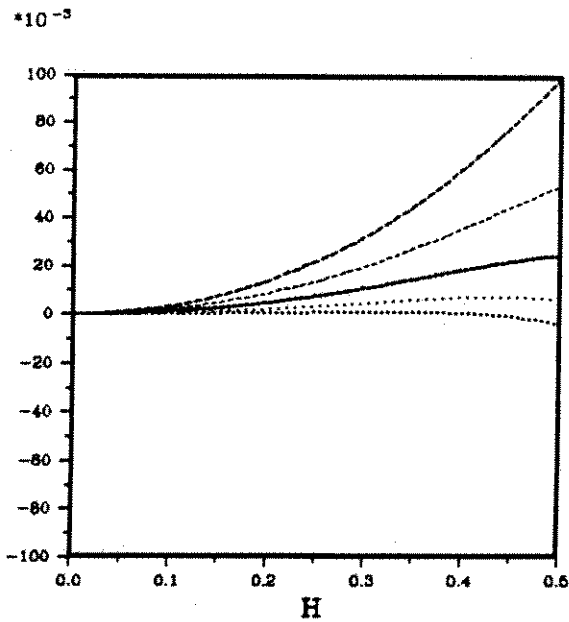
$L = 1$
 $P_{max} = 0.577$

$\theta = 45.00$
 $\phi = 54.74$

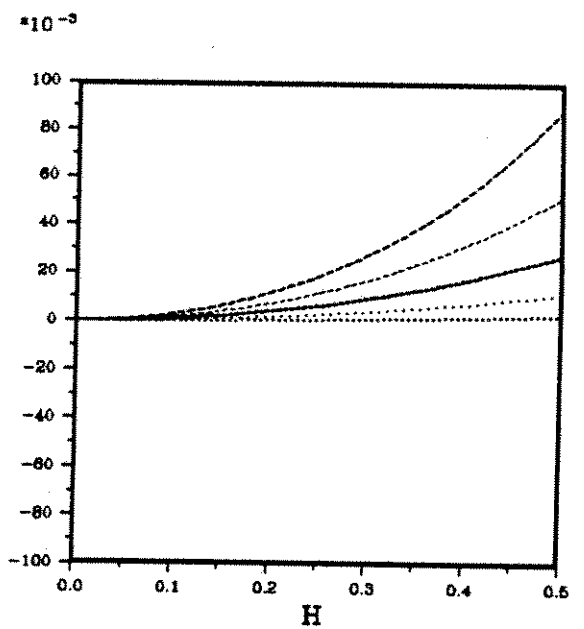


$L = 2$
 $P_{max} = 0.495$

$P = C \cdot DT / h$
..... $P = 0.2 \cdot P_{MAX}$
.... $P = 0.4 \cdot P_{MAX}$
--- $P = 0.6 \cdot P_{MAX}$
--- $P = 0.8 \cdot P_{MAX}$
--- $P = 1.0 \cdot P_{MAX}$

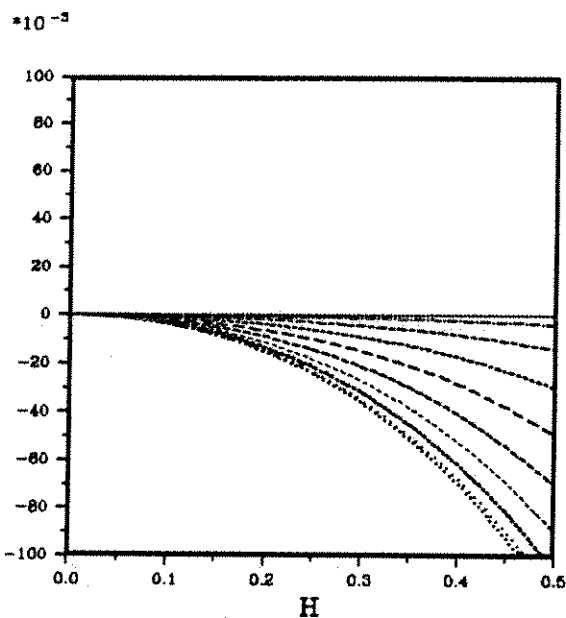


$L = 4$
 $P_{max} = 0.449$



$L = 10$
 $P_{max} = 0.415$

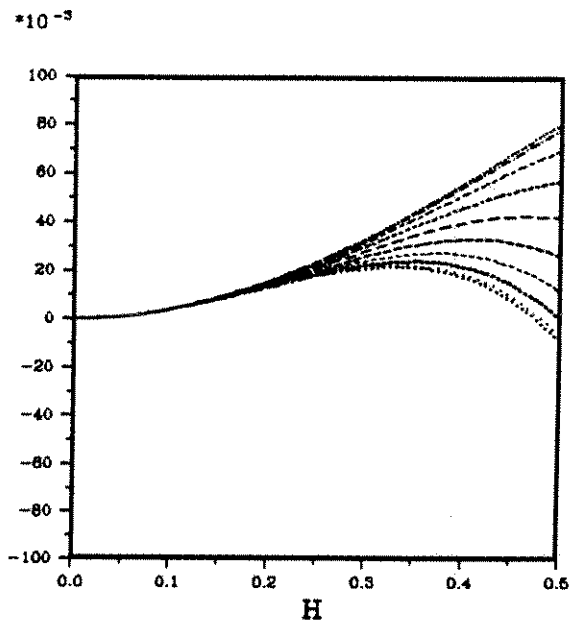
CHAPITRE 2. ANALYSE DE L'ERREUR DE DISPERSION
Error on Phase Speed



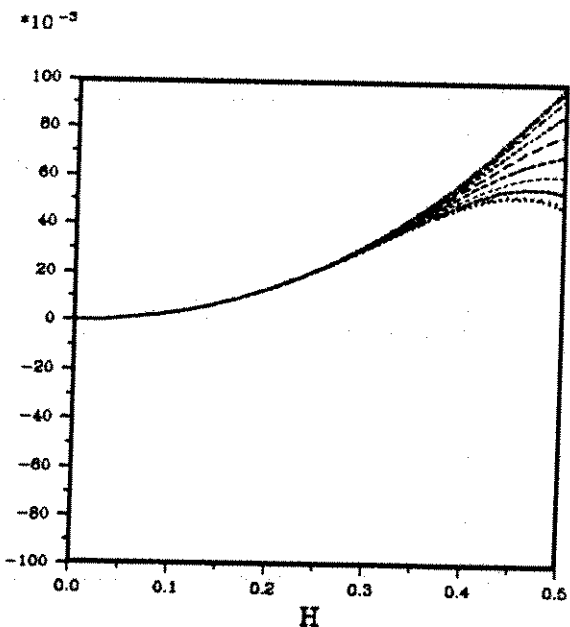
$L = 1$
 $P = 0.577$
 $P_{max} = 0.577$

$\Phi = 54.736$

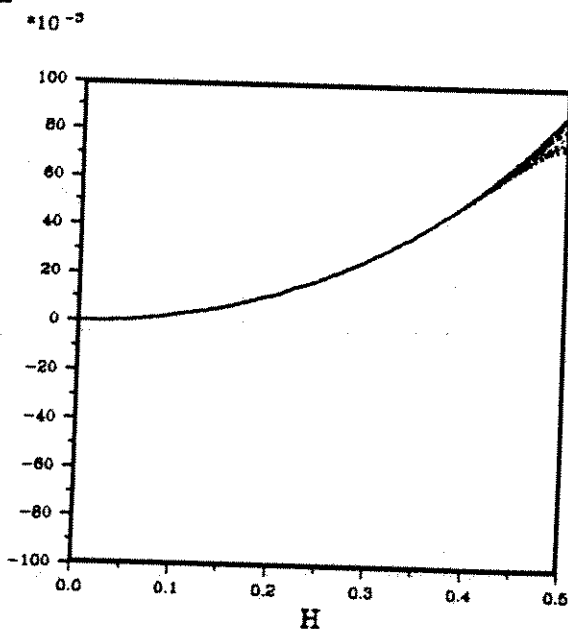
THETA:	
.....	0
....	5
.....	10
.....	15
.....	20
.....	25
.....	30
.....	36
.....	40
.....	45



$L = 2$
 $P = 0.495$
 $P_{max} = 0.495$



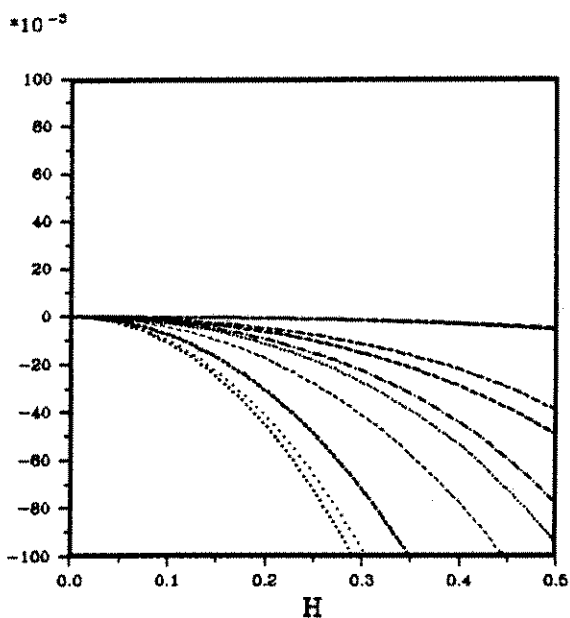
$L = 4$
 $P = 0.449$
 $P_{max} = 0.449$



$L = 10$
 $P = 0.415$
 $P_{max} = 0.415$

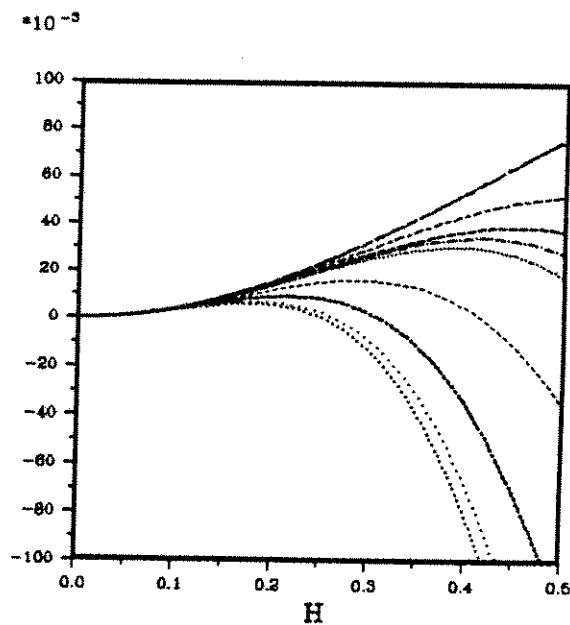
2.4. ETUDE EN MILIEU TRIDIMENSIONNEL

Error on Phase Speed



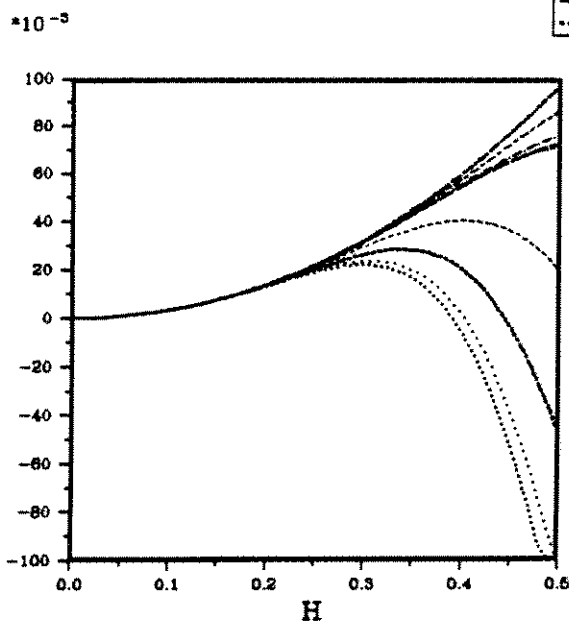
$L = 1$
 $P = 0.577$
 $P_{max} = 0.577$

$\theta = 45.000$

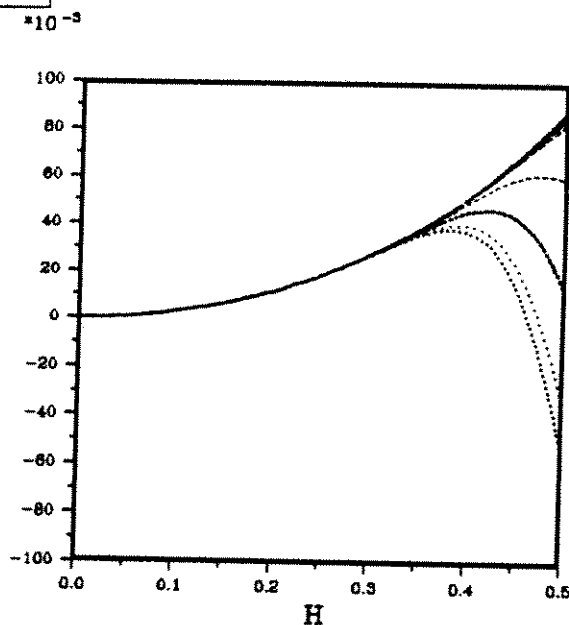


$L = 2$
 $P = 0.495$
 $P_{max} = 0.495$

ANGLE PHI :	
.....	0
....	10
.....	20
-----	30
-----	40
-----	50
-----	60
-----	70
-----	80
.....	90



$L = 4$
 $P = 0.449$
 $P_{max} = 0.449$



$L = 10$
 $P = 0.415$
 $P_{max} = 0.415$

CHAPITRE 2. ANALYSE DE L'ERREUR DE DISPERSION

L'erreur sur la vitesse de groupe

En dérivant la relation de dispersion par rapport à k on obtient :

$$\frac{\Delta t}{2} \frac{\partial \omega}{\partial k} \cos\left(\frac{\omega \Delta t}{2}\right) = \frac{c \Delta t / h N}{\sqrt{D}}$$

$$\begin{aligned} N = N(k, \theta, \phi, \Delta t) &= \cos(\theta) \sin(\phi) f'(k \cos(\theta) \sin(\phi)) f(k \cos(\theta) \sin(\phi)) \\ &+ \sin(\theta) \sin(\phi) f'(k \sin(\theta) \sin(\phi)) f(k \sin(\theta) \sin(\phi)) \\ &+ \cos(\phi) f'(k \cos(\phi)) f(k \cos(\phi)) \end{aligned}$$

$$D = D(k, \theta, \phi, \Delta t) = f^2(k \cos(\theta) \sin(\phi)) + f^2(k \sin(\theta) \sin(\phi)) + f^2(k \cos(\phi))$$

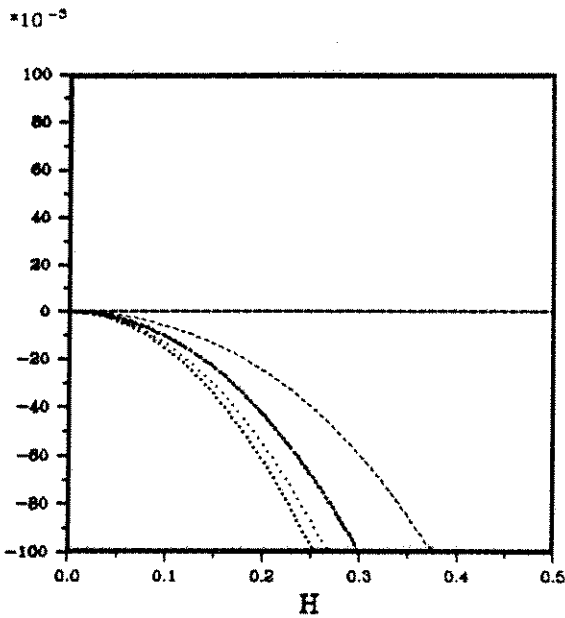
De la vitesse de groupe normalisée $\frac{1}{c} \frac{\partial \omega}{\partial k}$ on déduit facilement l'erreur relative sur la vitesse de groupe donnée par :

$$E_{gr}(k, \theta, \phi, \Delta t) = \frac{\frac{2}{h} N}{\sqrt{1 - \left(\frac{c \Delta t}{h}\right)^2 D} \cdot \sqrt{D}} - 1$$

On obtient alors des courbes d'erreur analogues à celles obtenues pour l'erreur sur la vitesse de phase.

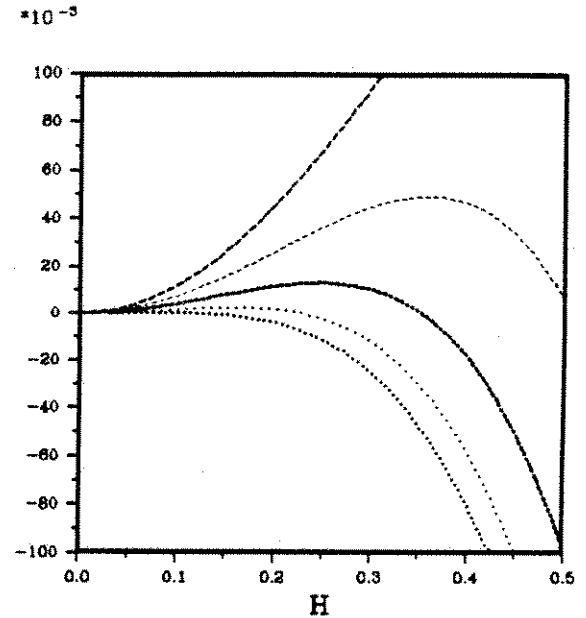
2.4. ETUDE EN MILIEU TRIDIMENSIONNEL

Error on Group Speed



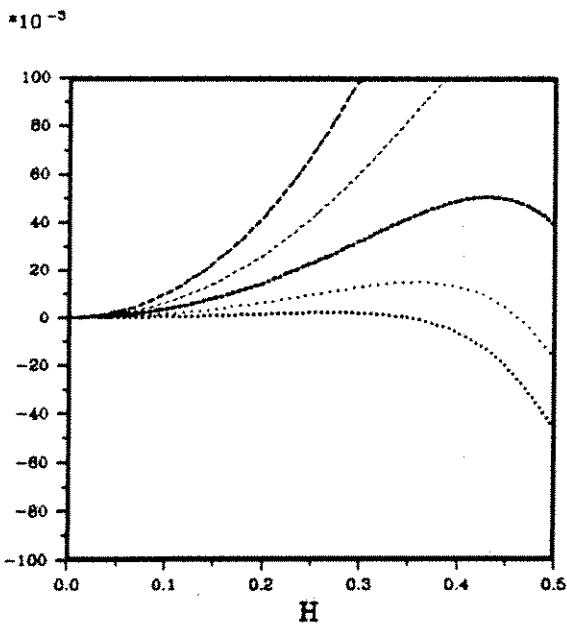
$L = 1$
 $P_{max} = 0.577$

$\Theta = 45.00$
 $\Phi = 54.74$

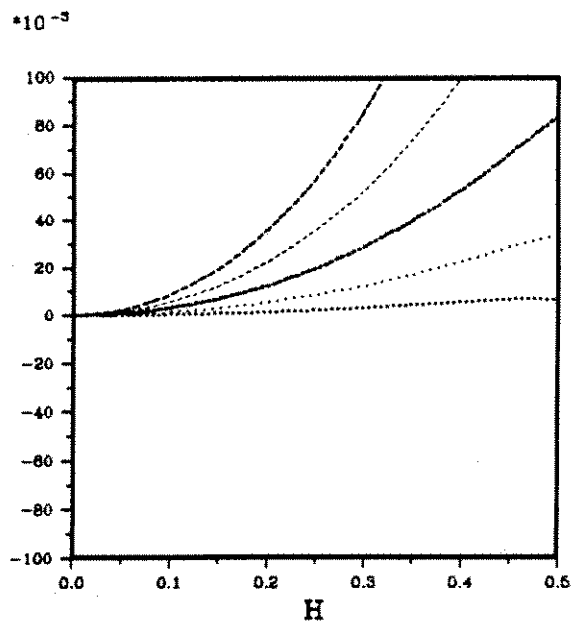


$L = 2$
 $P_{max} = 0.495$

$P = C \cdot DT / h$
 $P = 0.2 \cdot P_{MAX}$
 $P = 0.4 \cdot P_{MAX}$
 - - - $P = 0.6 \cdot P_{MAX}$
 - - - $P = 0.8 \cdot P_{MAX}$
 - - $P = 1.0 \cdot P_{MAX}$

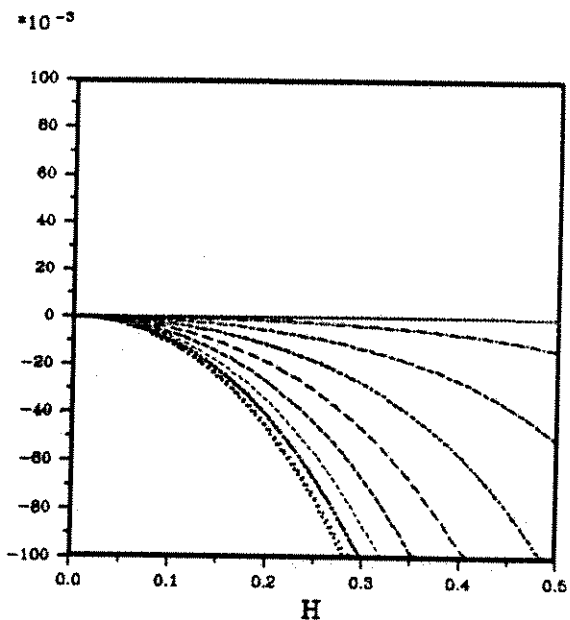


$L = 4$
 $P_{max} = 0.449$

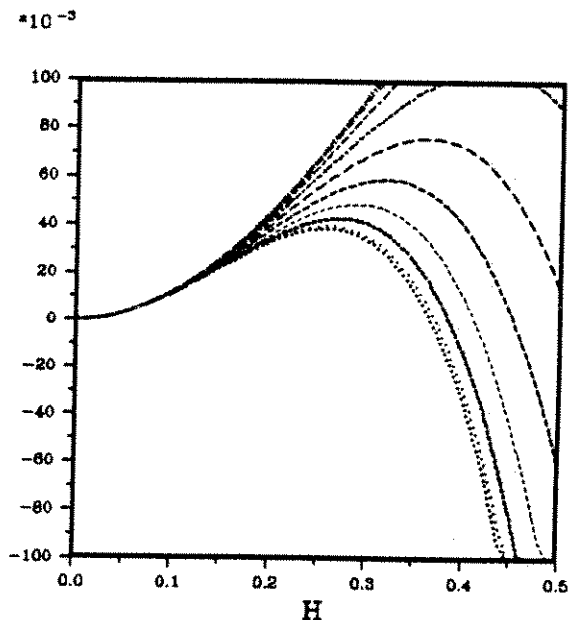


$L = 10$
 $P_{max} = 0.415$

CHAPITRE 2. ANALYSE DE L'ERREUR DE DISPERSION
Error on Group Speed

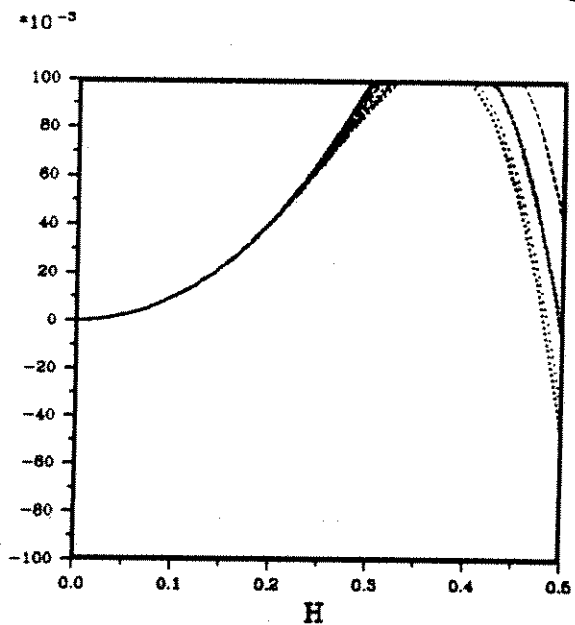


$L = 1$
 $P = 0.577$
 $P_{max} = 0.577$

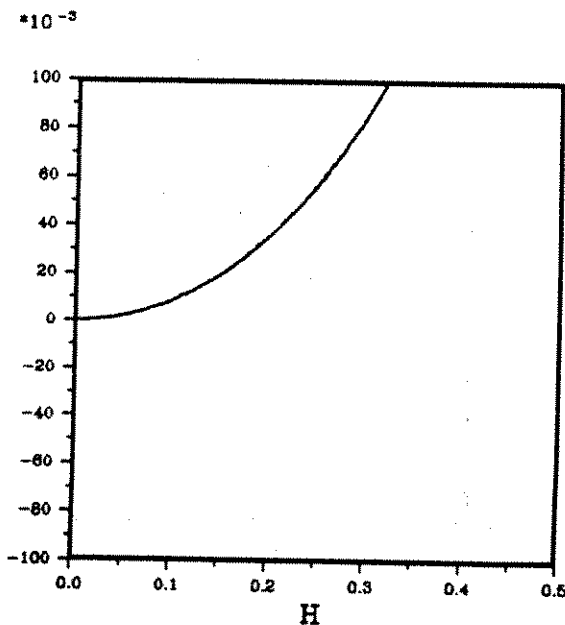


$L = 2$
 $P = 0.495$
 $P_{max} = 0.495$

THETA:	
.....	0
....	5
.....	10
-----	15
----	20
-----	25
-----	30
-----	35
-----	40
.....	45



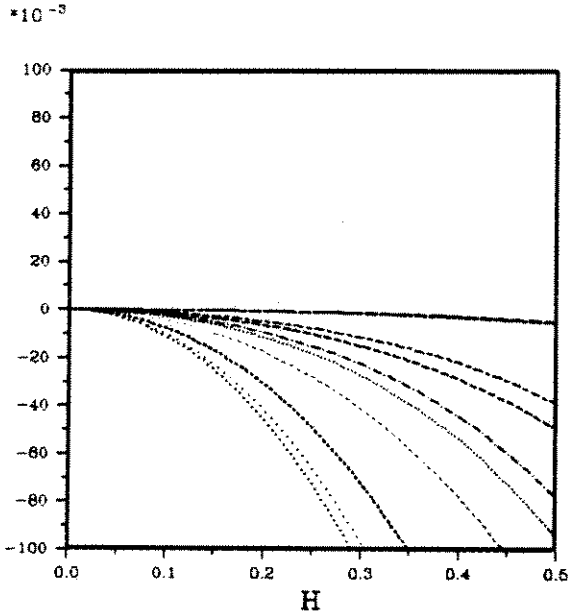
$L = 4$
 $P = 0.449$
 $P_{max} = 0.449$



$L = 10$
 $P = 0.415$
 $P_{max} = 0.415$

2.4. ETUDE EN MILIEU TRIDIMENSIONNEL

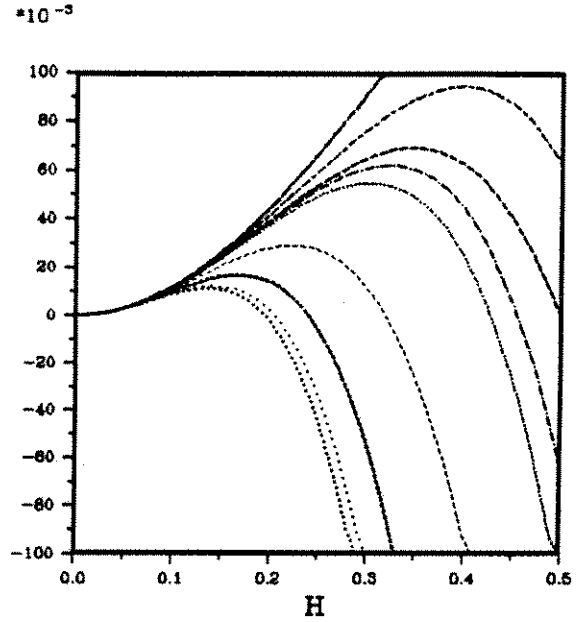
Error on Group Speed



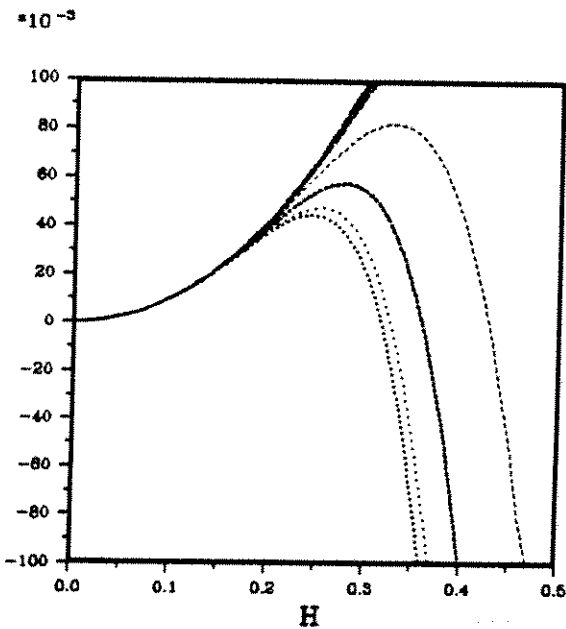
$L = 1$
 $P = 0.577$
 $P_{max} = 0.577$

$\Theta = 45.000$

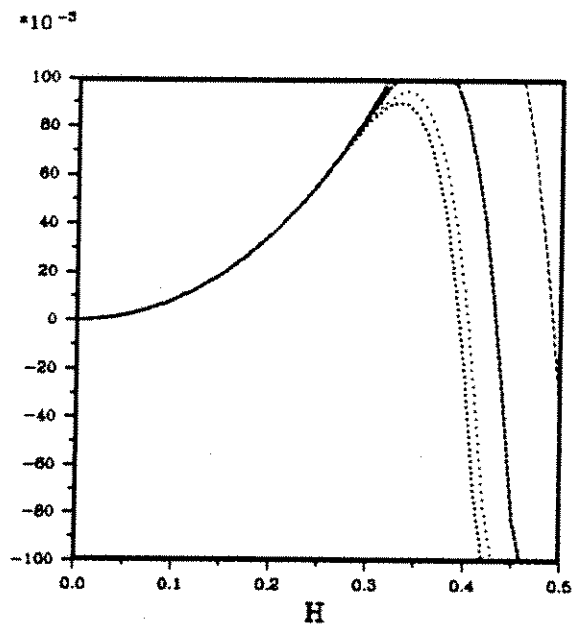
ANGLE PHI :	
.....	0
....	10
.....	20
-----	30
-----	40
-----	50
-----	60
-----	70
-----	80
.....	90



$L = 2$
 $P = 0.495$
 $P_{max} = 0.495$



$L = 4$
 $P = 0.449$
 $P_{max} = 0.449$



$L = 10$
 $P = 0.415$
 $P_{max} = 0.415$

2.4.2 Schémas d'ordre 4 en temps

L'opérateur sur la grille incomplète

En dimension 3, on obtient l'équation modifiée suivante :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) - \frac{c^2 \Delta t^2}{12} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} \right) - \frac{c^2 \Delta t^2}{6} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^2 \partial z^2} \right) = 0$$

On pose $B_x = -{}^t A_x^2 o A_x^2$, $B_y = -{}^t A_y^2 o A_y^2$ et $B_z = -{}^t A_z^2 o A_z^2$ et $\Delta_h = B_x + B_y + B_z$. On discrétise l'équation des ondes "modifiée" à l'aide des opérateurs introduits précédemment sous la forme :

$$\frac{u_{i,j,k}^{n+1} - 2u_{i,j,k}^n + u_{i,j,k}^{n-1}}{c^2 \Delta t^2} - \left\{ \Delta_h + \left(\frac{c^2 \Delta t^2}{12} {}^t \Delta_h o \Delta_h \right) \right\} u_{i,j,k}^n = 0 \quad (2.10)$$

On peut maintenant écrire la relation de dispersion du schéma (4-2L). En notant

$$A(k) = \sum_{l=1}^L \beta_l \sin\left(\frac{lkh}{2}\right) \quad A_x = A(k \cos(\theta) \sin(\phi))$$

$$A_y = A(k \sin(\theta) \sin(\phi)) \quad A_z = A(k \cos(\phi))$$

$$f(k) = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{c \Delta t}{h} \right)^2 \left(A_x^4 + A_y^4 + A_z^4 + 2A_x^2 A_y^2 + 2A_x^2 A_z^2 + 2A_y^2 A_z^2 \right)$$

la relation de dispersion s'écrit :

$$\sin\left(\frac{\omega \Delta t}{2}\right) = \frac{c \Delta t}{h} \sqrt{f(k)}$$

On en tire la pulsation ω :

$$\omega(k, \theta, \phi, \Delta t) = \frac{2}{\Delta t} \arcsin\left(\frac{c \Delta t}{h} \sqrt{f(k)}\right)$$

L'erreur sur la vitesse de phase

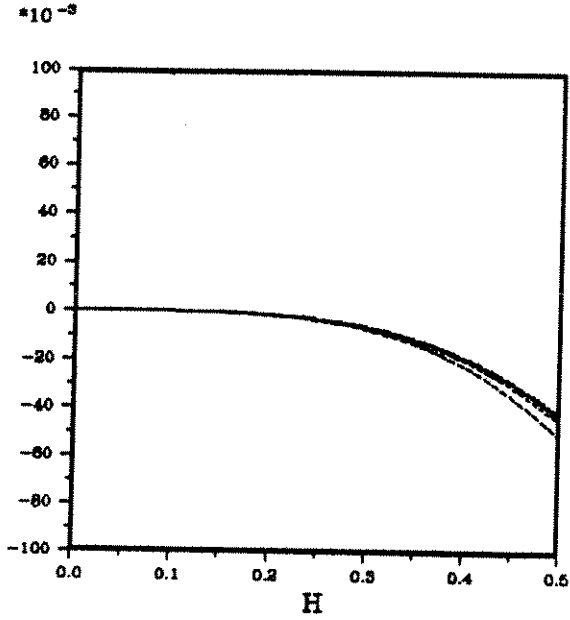
L'erreur relative sur la vitesse de phase est alors donnée par :

$$E_\varphi(k, \theta, \phi, \Delta t) = \frac{2}{kc \Delta t} \arcsin\left(\frac{c \Delta t}{h} \sqrt{f(k)}\right) - 1$$

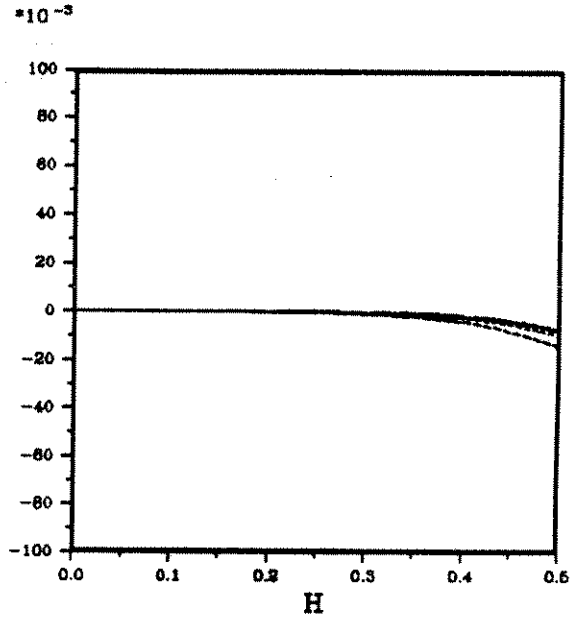
2.4. ETUDE EN MILIEU TRIDIMENSIONNEL

La fonction $\theta \mapsto E_\phi(k, \theta, \phi, \Delta t)$ est périodique de période $\pi/2$ et paire en θ , et elle est périodique de période π et paire en ϕ . Il suffit donc de l'étudier pour $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$ et $\phi \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Nous avons alors les courbes suivantes.

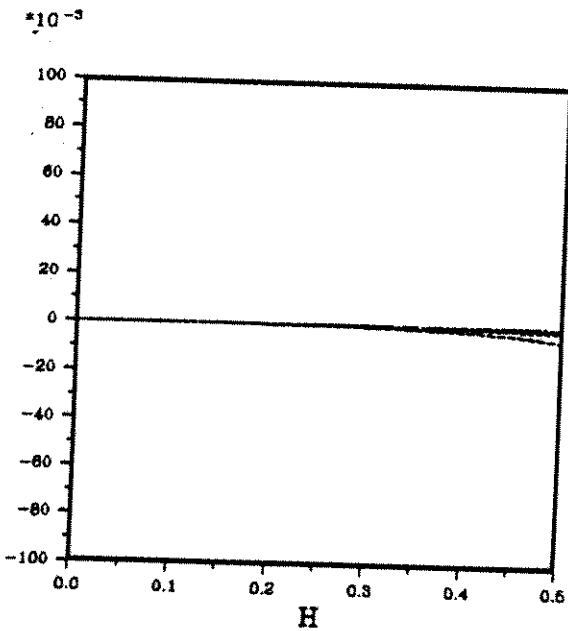
Error on Phase Speed



$L = 2$
 $P_{max} = 0.495$



$L = 4$
 $P_{max} = 0.449$



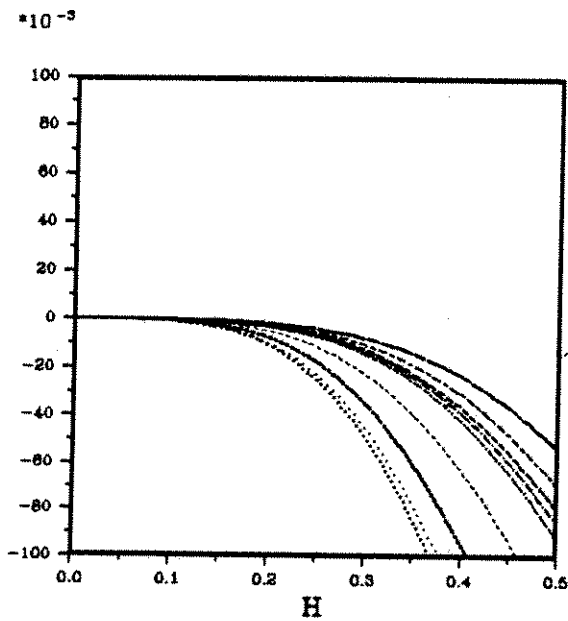
$L = 10$
 $P_{max} = 0.415$

$\theta = 45.00$
 $\phi = 54.74$

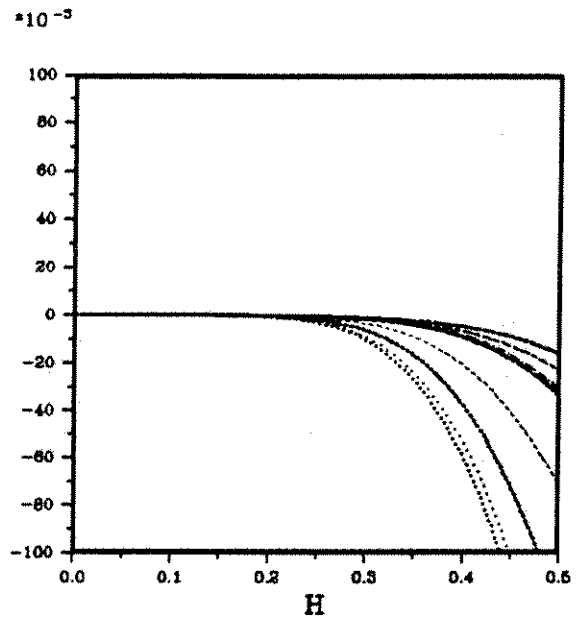
$P = C^*DT/\lambda$
..... $P = 0.2 \cdot P_{MAX}$
.... $P = 0.4 \cdot P_{MAX}$
..... $P = 0.6 \cdot P_{MAX}$
----- $P = 0.8 \cdot P_{MAX}$
----- $P = 1.0 \cdot P_{MAX}$

2.4. ETUDE EN MILIEU TRIDIMENSIONNEL

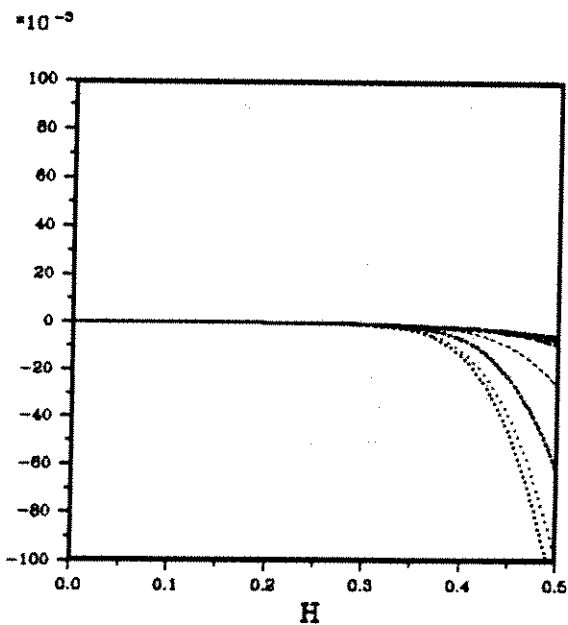
Error on Phase Speed



$L = 2$
 $P = 0.495$



$L = 4$
 $P = 0.449$



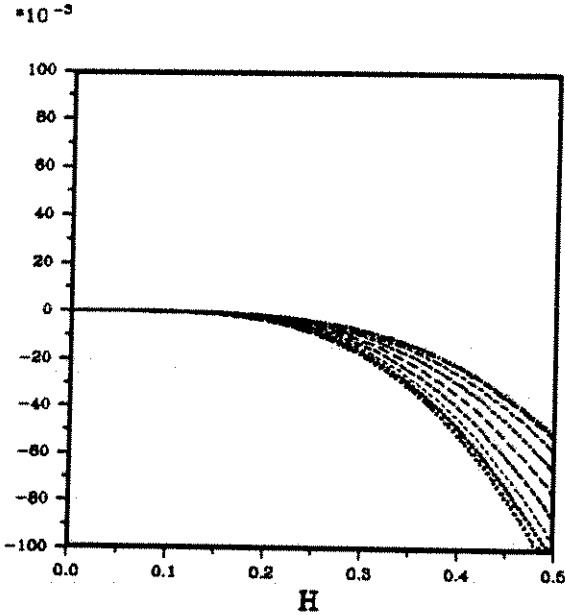
$L = 10$
 $P = 0.415$

$\theta = 45.000$

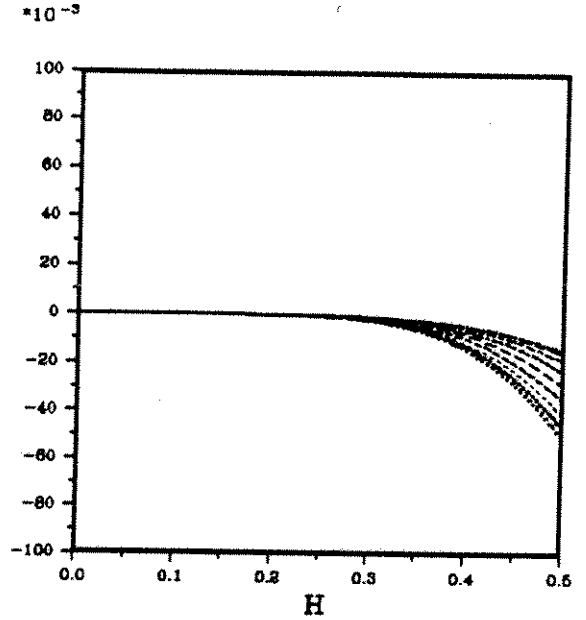
ANGLE PHI :	
.....	0
....	10
.....	20
-----	30
----	40
----	50
-----	60
-----	70
-----	80
.....	90

CHAPITRE 2. ANALYSE DE L'ERREUR DE DISPERSION

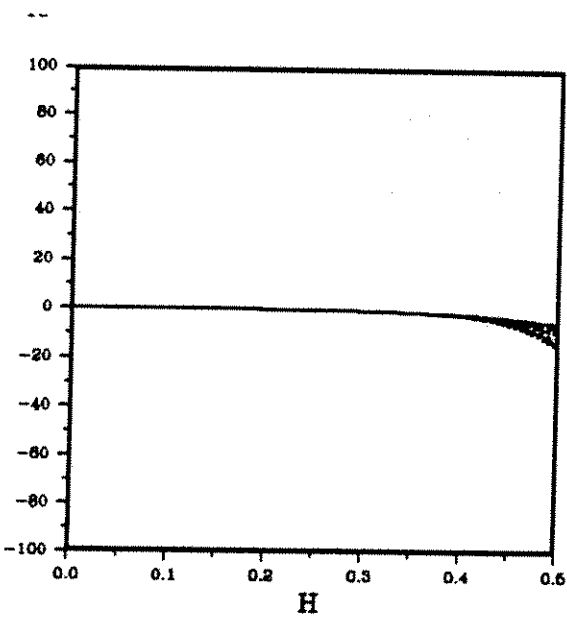
Error on Phase Speed



$L = 2$
 $P = 0.495$



$L = 4$
 $P = 0.449$



$L = 10$
 $P = 0.415$

$\Phi = 54.736$

THETA:	
.....	0
.....	5
.....	10
----	15
----	20
----	25
----	30
----	35
----	40
.....	45

2.4. ETUDE EN MILIEU TRIDIMENSIONNEL

L'erreur sur la vitesse de groupe

La relation de dispersion s'écrit

$$\sin\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right) = \frac{c\Delta t}{h}F(kh, \theta, \phi, \Delta t)$$

En dérivant la relation de dispersion par rapport à k on obtient :

$$\frac{\Delta t}{2} \frac{\partial \omega}{\partial k} \cos\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right) = G(kh, \theta, \phi, \Delta t) = G$$

$$G = \frac{(c\Delta t)N}{\sqrt{f(k \cos(\theta) \sin(\phi), \Delta t) + f(k \sin(\theta) \sin(\phi), \Delta t) + f(k \cos(\phi), \Delta t)}}$$

$$N = \cos(\theta) \sin(\phi) f'(k \cos(\theta) \sin(\phi)) + \sin(\theta) \sin(\phi) f'(k \sin(\theta) \sin(\phi)) + \cos(\phi) f'(k \cos(\phi))$$

De la vitesse de groupe normalisée $\frac{1}{c} \frac{\partial \omega}{\partial k}$, on déduit facilement l'erreur relative sur la vitesse de groupe donnée par

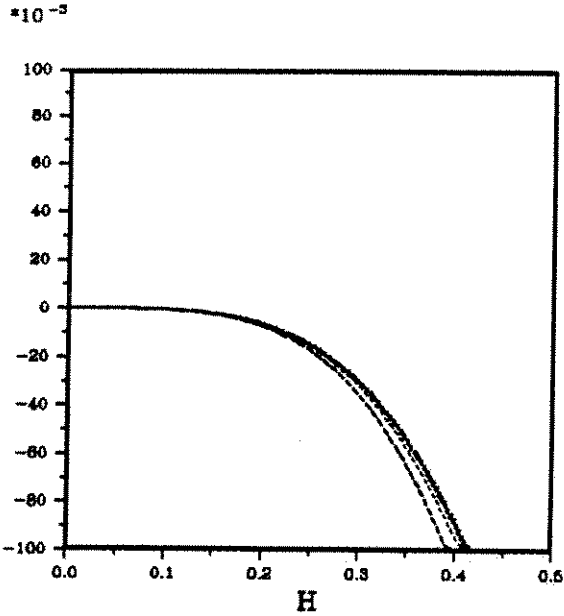
$$E_{gr}(k, \theta, \phi, \Delta t) = \frac{N(kh, \theta, \phi, \Delta t)}{D(kh, \theta, \phi, \Delta t)} - 1$$

$$D = \sqrt{F(kh, \theta, \phi, \Delta t)} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{c\Delta t}{h}\right)^2 F(kh, \theta, \phi, \Delta t)}$$

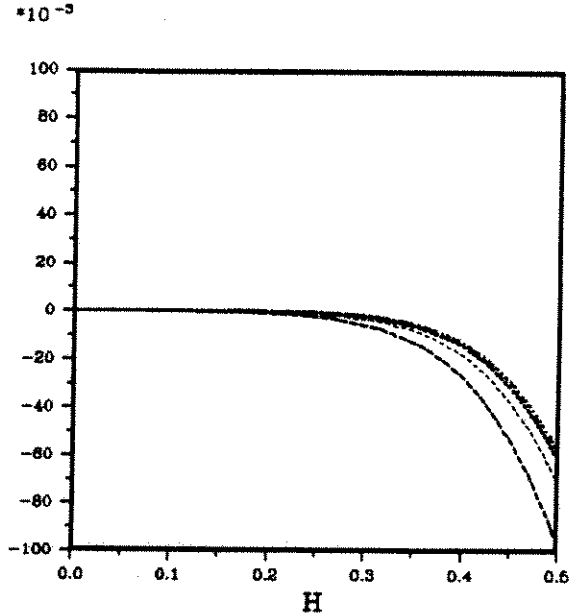
On obtient alors des courbes d'erreur analogues à celles obtenues pour l'erreur sur la vitesse de phase.

CHAPITRE 2. ANALYSE DE L'ERREUR DE DISPERSION

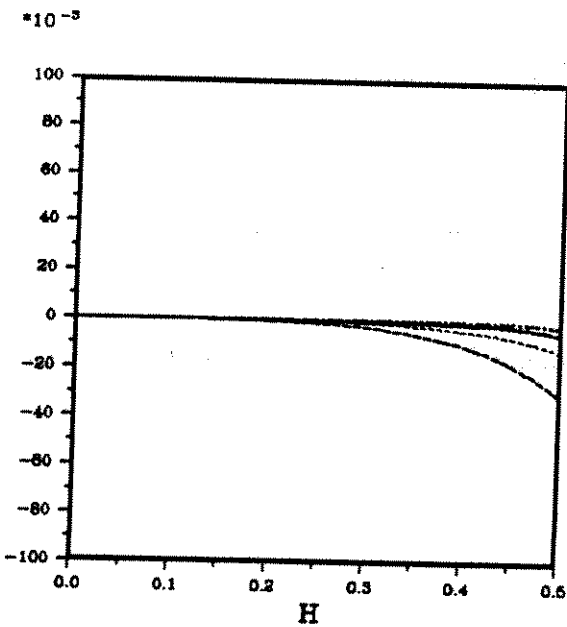
Error on Group Speed



$L = 2$
 $P_{max} = 0.495$



$L = 4$
 $P_{max} = 0.449$



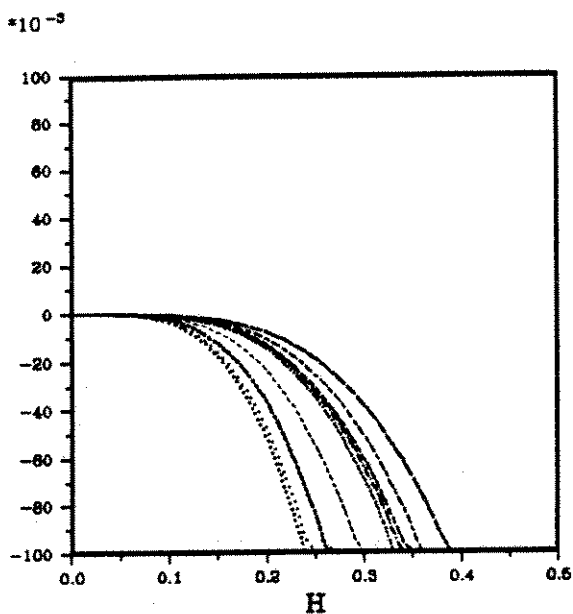
$L = 10$
 $P_{max} = 0.415$

$\theta = 45.00$
 $\phi = 54.74$

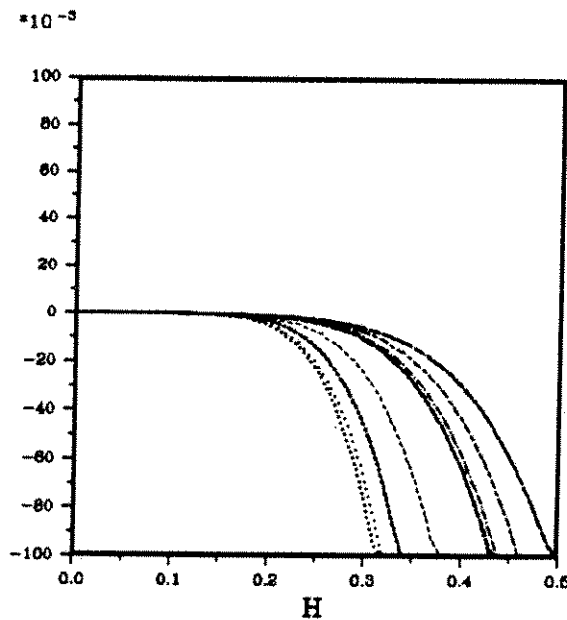
$P = C \cdot DT / h$
$\dots P = 0.2 \cdot P_{MAX}$
$\dots P = 0.4 \cdot P_{MAX}$
$\dots P = 0.6 \cdot P_{MAX}$
$\dots P = 0.8 \cdot P_{MAX}$
$\dots P = 1.0 \cdot P_{MAX}$

2.4. ETUDE EN MILIEU TRIDIMENSIONNEL

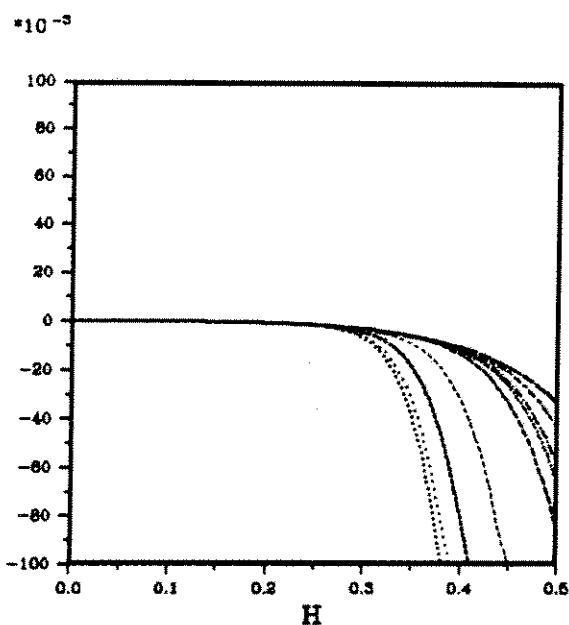
Error on Group Speed



$L = 2$
 $P = 0.495$
 $P_{max} = 0.495$



$L = 4$
 $P = 0.449$
 $P_{max} = 0.449$



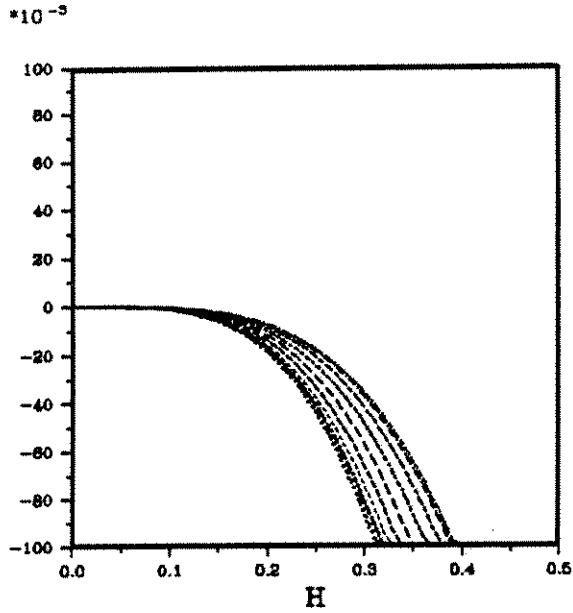
$L = 10$
 $P = 0.415$
 $P_{max} = 0.415$

$\theta = 45.000$

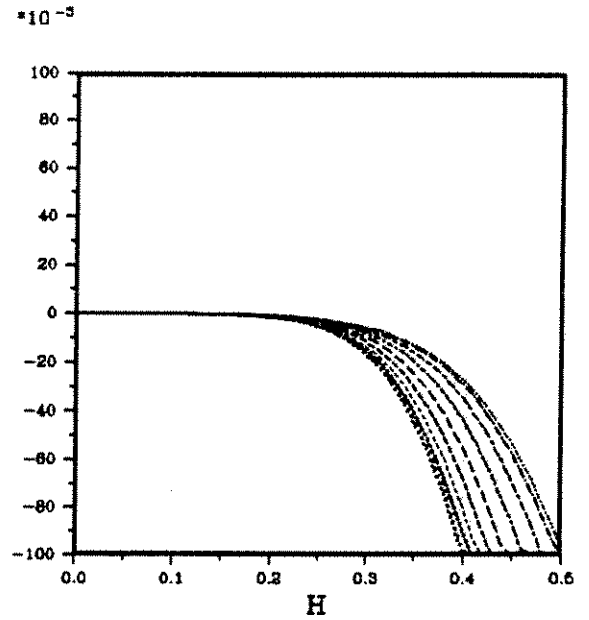
ANGLE PHI :	
.....	0
....	10
.....	20
-----	30
-----	40
-----	50
-----	60
-----	70
-----	80
.....	90

CHAPITRE 2. ANALYSE DE L'ERREUR DE DISPERSION

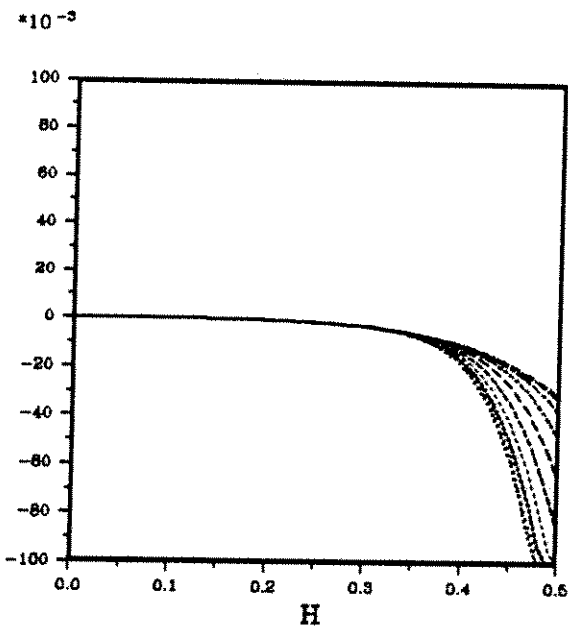
Error on Group Speed



$L = 2$
 $P = 0.495$
 $P_{max} = 0.495$



$L = 4$
 $P = 0.449$
 $P_{max} = 0.449$



$L = 10$
 $P = 0.415$
 $P_{max} = 0.415$

$\Phi = 54.736$

THETA:	
.....	0
....	5
.....	10
----	15
---	20
- - -	25
---	30
---	35
---	40
.....	45

2.5. COÛT INFORMATIQUE

2.5 Coût Informatique

2.5.1 Coût calcul et place mémoire

Le nombre d'opérations C d'une simulation numérique de l'équation des ondes, avec les opérateurs B_h définis ci-dessus, pour un domaine carré ou cubique est donné par :

$$C = N_{op} (N_x)^n N_t$$

- n : Dimension du domaine ($n = 2, 3$)
- N_{op} : Nombre d'opérations par noeud et par pas de temps
- N_x : Nombre de points de discrétisation dans une direction
- N_t : Nombre de pas de temps

Le nombre d'opérations N_{op} est donné pour le schéma (2-2L) par

$$N_{op}(2, 2L) = 2n(3L - 1) + n - 1 + 4 = 6Ln - n + 3$$

En effet, à chaque itération on fait $2n$ dérivations premières pour calculer les dérivées secondes. Chaque dérivation première coûte $3L - 1$ opérations. On fait ensuite $n - 1$ additions pour calculer la somme des dérivées secondes et obtenir une approximation du Laplacien. Enfin pour itérer le schéma en temps, on fait 4 opérations. Au total on fait $6Ln - n + 3$ opérations.

Pour le schéma (4-2L), il faut rajouter la discrétisation de la partie d'ordre 4 en espace. Pour chaque terme de la forme ${}^t B_x(B_x)$ ou ${}^t B_x(B_y)$, on fait $4n$ dérivations premières qui coûtent $3L - 1$ opérations. Puis on fait $n(n + 1)/2 - 1$ additions afin d'obtenir une approximation de Δ^2 . Enfin on multiplie par $c^2 \Delta t^2 / 12$ puis on ajoute ce terme, soit au total $(4n(3L - 1) + 1) n(n + 1)/2 - 1$ opérations.

Donc le nombre d'opérations pour le schéma (4-2L) est

$$\begin{aligned} N_{op}(4, 2L) &= 6Ln - n + 3 + (4n(3L - 1) + 1) n(n + 1)/2 - 1 \\ &= (3L - 1)(2n(1 + n(n + 1))) + n(n + 3)/2 + 2 \end{aligned}$$

On suppose que le domaine est de taille A^n et que l'on propage l'onde le temps T_{max} d'un aller-retour au fond du modèle (c'est à dire $T_{max} = 2A/c$) alors on peut écrire :

$$N_x = \frac{A}{h} \qquad N_t = \frac{T_{max}}{\Delta t} = \frac{2A}{c h \Delta t}$$

On note j le nombre de longueurs d'onde parcourues, $H = h/\lambda$, $p = c\Delta t/h$ et

CHAPITRE 2. ANALYSE DE L'ERREUR DE DISPERSION

F_{max} la fréquence de coupure de la source. Alors puisque

$$\begin{aligned} A &= \frac{j\lambda}{2} & T_{max} &= \frac{j\lambda}{c} = \frac{j}{F_{max}} \\ \Rightarrow N_x &= \frac{j}{2H} & N_t &= \frac{j}{pH} \end{aligned}$$

Le coût devient donc une fonction de j , H et p :

$$C = N_{op} \left(\frac{j}{2H}\right)^n \frac{j}{pH}$$

Exemple :

Propager un Ricker de fréquence centrale $F_o = 30Hz$ sur $j = 100$ longueurs d'onde dans un milieu homogène de vitesse $c = 1500ms^{-1}$ correspond donc à une propagation dans un domaine de $A = 1000m$ de côté, pendant $T = 1.33s$.

On peut remarquer que le produit pH s'interprète comme l'inverse du nombre de points par période. En effet

$$\begin{aligned} pH &= \frac{c\Delta t}{h} \cdot \frac{h}{\lambda} = \Delta t \cdot \frac{c}{\lambda} = \Delta t \cdot F_{max} \\ pH &= \frac{\Delta t}{T_{min}} = G \end{aligned}$$

Ainsi on peut encore écrire le coût calcul C sous la forme

$$\begin{aligned} C &= N_{op} \left(\frac{j}{2H}\right)^n \frac{j}{G} \\ H &= \frac{h}{\lambda} & G &= \frac{\Delta t}{T} \end{aligned}$$

La mémoire M nécessaire à une simulation est donnée par :

$$M = 2 * (N_x)^n$$

car on conserve en mémoire les tableaux u^n et u^{n+1} qui ont chacun $(N_x)^n$ éléments. On veut maintenant choisir L, H, p de manière à minimiser le coût calcul et la place mémoire sachant que l'on a les contraintes:

$$0 \leq H \leq 0.5 \quad (\text{dû au théorème de Nyquist})$$

$$0 \leq p \leq p_{max} \quad (\text{dû à la condition de stabilité})$$

2.5. COÛT INFORMATIQUE

2.5.2 Critère sur l'erreur de vitesse de phase

Nous allons relier l'erreur sur la vitesse de phase du schéma, au nombre j de longueurs d'onde parcourues, puis ensuite relier H et p à j . On obtiendra ainsi le coût calcul C en fonction du nombre de longueurs d'onde parcourues j .

Pour relier l'erreur sur la vitesse de phase E_φ , au nombre de longueurs d'onde parcourues, on impose qu'au temps T_{max} final d'observation le déphasage entre l'onde exact et l'onde numérique soit inférieure à π/n ($n = 1, 2, 3, \dots$), donc

$$|\omega(k) - \omega|_{T_{max}} \leq \frac{\pi}{n} \Leftrightarrow k|c_\varphi - c|_{T_{max}} \leq \frac{\pi}{n}$$

soit encore, puisque $T_{max} = j\lambda/c$

$$k \left| \frac{c_\varphi - c}{c} \right| j\lambda \leq \frac{\pi}{n}$$

d'où puisque $k\lambda = 2\pi$

$$|E_\varphi| \leq \frac{1}{2nj} \Leftrightarrow \frac{-1}{2nj} \leq E_\varphi \leq \frac{1}{2nj}$$

Il reste maintenant à choisir H et p , L étant fixé, de façon à ce qu'on ait, pour un modèle donné (c'est à dire un j_{max} donné), $|E_\varphi| \leq 1/2nj_{max}$.

2.5.3 Critère sur l'erreur de vitesse de groupe

La vitesse de groupe représente la vitesse de propagation de l'énergie. Nous imposons qu'après j longueurs d'onde parcourues, l'erreur sur la propagation de l'énergie soit inférieure à un certain pourcentage α . Nous mesurons l'erreur sur la vitesse de groupe par analogie avec l'erreur sur la vitesse de phase, comme suit:

$$k|c_{gr} - c|_{T_{max}} \leq \alpha$$

c'est à dire puisque $T_{max} = j\lambda/c$

$$k \left| \frac{c_{gr} - c}{c} \right| j\lambda \leq \alpha$$

d'où

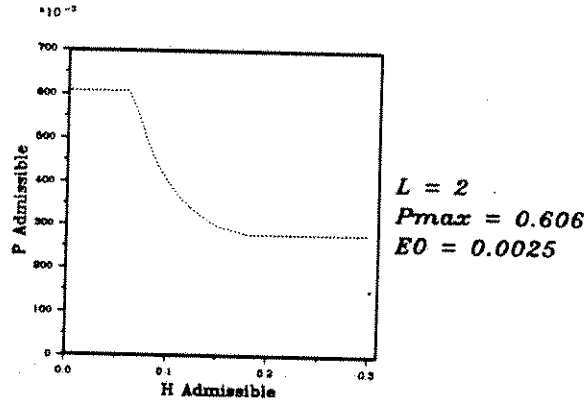
$$|E_{gr}| \leq \frac{\alpha}{2\pi j} \Leftrightarrow \frac{-\alpha}{2\pi j} \leq E_{gr} \leq \frac{\alpha}{2\pi j}$$

2.5.4 Méthode employée

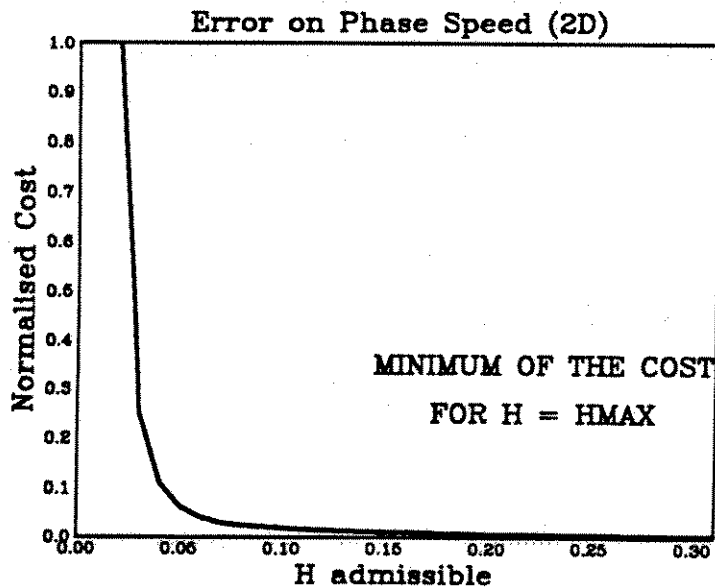
Le coût calcul sera d'autant plus réduit que le nombre de points par longueurs d'onde sera petit. En effet le coût s'exprime en fonction du nombre de points par longueur d'onde $N_\lambda = \lambda_{min}/h = 1/H$ et du nombre de points par période $N_{T_{min}} = T_{min}/\Delta t = 1/G$ de la façon suivante :

$$C \propto N_\lambda^n \cdot N_{T_{min}}$$

Pour une erreur arbitraire donnée, on peut tracer la courbe des p admissibles en fonction de H , et calculer le coût correspondant. L'exemple ci-dessous en dimension 2, correspond à une erreur sur la vitesse de phase de $E_o = 2.5 \cdot 10^{-3}$ pour un schéma d'ordre 2 en temps et 4 en espace.



Error on Phase Speed



2.5. COÛT INFORMATIQUE

L'ensemble des H admissibles est l'ensemble des H qui vérifie

$$E_{\varphi}(p(j), H) \geq -E_o$$

Il est clair sur la courbe de coût, que la stratégie la plus économique est la suivante.

Pour l'erreur sur la vitesse de phase, on choisit $p = p(j)$ de façon à ce que la courbe d'erreur sur la vitesse de phase soit tangente à la droite :

$$E_{\varphi}(p(j), H) = E_o = 1/2nj_{max}$$

c'est le plus grand p possible qui vérifie la contrainte sur l'erreur de phase, donc celui qui aura le Δt le plus grand.

On choisit ensuite $H = H(j)$ de telle manière que $E_{\varphi}(p, H) = -E_o$ (c'est le plus grand H possible).

De cette façon on maintient l'erreur de phase $E_{\varphi}(p, H)$ à l'intérieur des bornes $[-E_o, E_o]$ sur la plus longue plage de H possible. Ceci pour tous les angles θ en milieu bidimensionnel, et θ et φ en milieu tridimensionnel.

Pour l'erreur sur la vitesse de groupe nous procédons de la même manière, en choisissant $p = p(j)$ de façon à ce que $E_{gr}(p, H)$ soit tangente à la droite $E_{gr}(p, H) = E_1 = \alpha/(2\pi j_{max})$.

Puis nous choisissons $H = H(j)$ de façon à ce que $E_{gr}(p(j), H(j)) = -E_1$

Coût pour les schémas d'ordre 2 en temps

On se place en dimension 2 avec pour critère sur l'erreur sur la vitesse de phase

$$|\omega(k) - \omega| T_{max} \leq \frac{\pi}{2}$$

On propage ensuite sur $j = 100$ longueurs d'onde, ce qui donne

$$|E_{\varphi}| \leq 2.5 \cdot 10^{-3} = E_o$$

Nous donnons ci-dessous un exemple du choix de p et H pour $L = 1, 2, 4$ pour le schéma d'ordre 2 en temps.

CHAPITRE 2. ANALYSE DE L'ERREUR DE DISPERSION

Error on Phase Speed

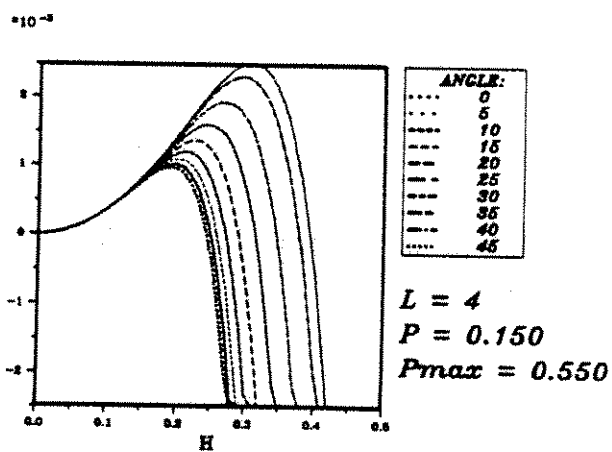
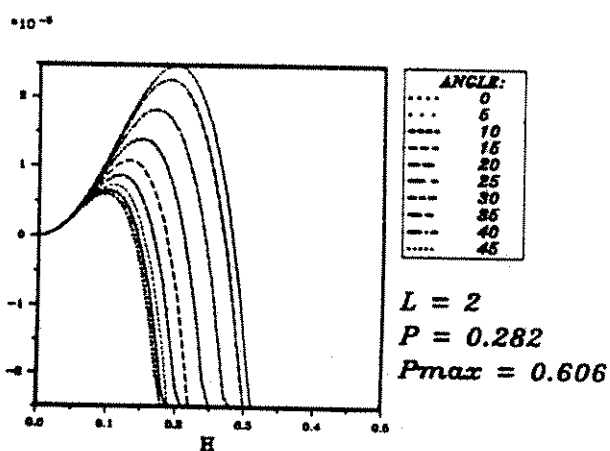
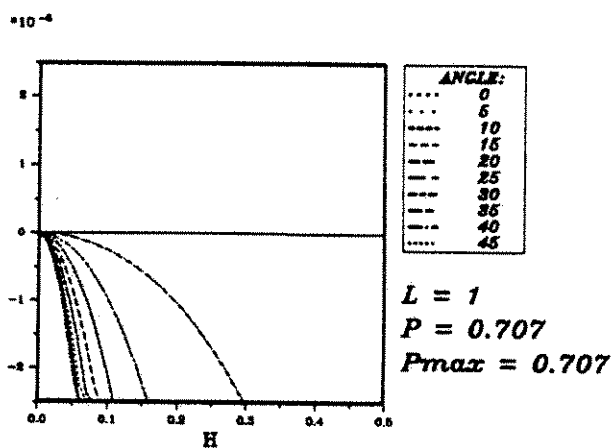


Schéma d'ordre 2 en temps (2D)

2.5. COÛT INFORMATIQUE

i) Pour $L = 1$, puisque l'erreur sur la vitesse de phase est toujours négative pour tout $p \leq p_{max}$ on choisit donc $p_o = p_{max}$. On cherche ensuite $H = H_o$ tel que

$$\inf_{\theta \in [0; \frac{\pi}{4}]} E_{\varphi}(p_o, H_o, \theta) = -E_o$$

d'où

$$H_o = 5.25 \cdot 10^{-2} \quad p_o = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

ii) Pour $L = 2$ on cherche tout d'abord p_o tel que

$$\sup_{H \in [0; \frac{1}{2}]} \sup_{\theta \in [0; \frac{\pi}{4}]} E_{\varphi}(p_o, H, \theta) = E_o$$

Puis ensuite H_o tel que

$$\inf_{\theta \in [0; \frac{\pi}{4}]} E_{\varphi}(p_o, H_o, \theta) = -E_o$$

Ce qui donne

$$H_o = 17.5 \cdot 10^{-2} \quad p_o = 0.282$$

iii) Pour $L = 4$ on trouve

$$H_o = 27.2 \cdot 10^{-2} \quad p_o = 0.148$$

Nous avons synthétisé les résultats ci-dessus dans le premier tableau suivant. Nous donnons également le même tableau correspondant au critère plus sévère suivant :

$$|\omega(k) - \omega|_{T_{max}} \leq \frac{\pi}{20}$$

On propage ensuite sur $j = 100$ longueurs d'onde, ce qui donne

$$|E_{\varphi}| \leq 2.5 \cdot 10^{-4}$$

CHAPITRE 2. ANALYSE DE L'ERREUR DE DISPERSION

L	1	2	4
$p = \frac{c\Delta t}{h}$	0.707	0.282	0.148
$H = \frac{h}{\lambda}$	$5.25 \cdot 10^{-2}$	$17.5 \cdot 10^{-2}$	$27.2 \cdot 10^{-2}$
$G = \frac{\Delta t}{T}$	$3.71 \cdot 10^{-2}$	$4.93 \cdot 10^{-2}$	$4.02 \cdot 10^{-2}$
N_x	953	286	178
N_t	2696	2029	2397
N_{op}	13	25	49
N_{op} Totales	$3.176 \cdot 10^{10}$	$0.413 \cdot 10^{10}$	$0.406 \cdot 10^{10}$
Temps CPU (s)	318	42	41
Mémoire (mots)	$1.81 \cdot 10^6$	$0.16 \cdot 10^6$	$0.06 \cdot 10^6$
Temps / Temps L=2	7.57	1	0.97
Mémoire / Mémoire L=2	11.31	1	0.37

Schéma d'ordre 2 en temps (2D)
Déphasage inférieur à $\pi/2$

2.5. COÛT INFORMATIQUE

L	1	2	4
$p = \frac{c\Delta t}{h}$	0.707	0.159	0.0634
$H = \frac{h}{\lambda}$	$1.5 \cdot 10^{-2}$	$9.75 \cdot 10^{-2}$	$19.75 \cdot 10^{-2}$
$G = \frac{\Delta t}{T}$	$1.06 \cdot 10^{-2}$	$1.55 \cdot 10^{-2}$	$1.25 \cdot 10^{-2}$
N_x	3334	513	254
N_t	9430	6451	7987
N_{op}	13	25	49
N_{op} Totales	$136.2 \cdot 10^{10}$	$4.22 \cdot 10^{10}$	$2.51 \cdot 10^{10}$
Temps CPU (s)	13625	422	251
Mémoire (mots)	$22.2 \cdot 10^6$	$0.53 \cdot 10^6$	$0.13 \cdot 10^6$
Temps / Temps L=2	32.3	1	0.6
Mémoire / Mémoire L=2	41.9	1	0.25

Schéma d'ordre 2 en temps (2D)
Déphasage inférieur à $\pi/20$

CHAPITRE 2. ANALYSE DE L'ERREUR DE DISPERSION

L	1	2	4
$p = \frac{c\Delta t}{h}$	0.577	0.230	0.122
$H = \frac{h}{\lambda}$	$4.75 \cdot 10^{-2}$	$16.12 \cdot 10^{-2}$	$26.5 \cdot 10^{-2}$
$G = \frac{\Delta t}{T}$	$2.74 \cdot 10^{-2}$	$3.71 \cdot 10^{-2}$	$3.23 \cdot 10^{-2}$
N_x	1052	310	188
N_t	3646	2693	3088
N_{op}	18	36	72
N_{op} Totales	$7.65 \cdot 10^{13}$	$2.89 \cdot 10^{12}$	$1.49 \cdot 10^{10}$
Temps CPU (s)	763200	28908	14940
Mémoire (mots)	$232 \cdot 10^7$	$5.96 \cdot 10^7$	$1.33 \cdot 10^7$
Temps / Temps L=2	26.4	1	0.52
Mémoire / Mémoire L=2	38.9	1	0.22

Schéma d'ordre 2 en temps (3D)
Déphasage inférieur à $\pi/2$

2.5. COÛT INFORMATIQUE

L	1	2	4
$p = \frac{c\Delta t}{h}$	0.577	0.130	0.052
$H = \frac{h}{\lambda}$	$1.5 \cdot 10^{-2}$	$9.0 \cdot 10^{-2}$	$19.25 \cdot 10^{-2}$
$G = \frac{\Delta t}{T}$	$8.66 \cdot 10^{-3}$	$11.75 \cdot 10^{-3}$	$10.0 \cdot 10^{-3}$
N_x	3333	555	259
N_t	11547	8510	9920
N_{op}	18	36	72
N_{op} Totales	$769 \cdot 10^{13}$	$5.25 \cdot 10^{13}$	$1.25 \cdot 10^{13}$
Temps CPU (s)	$769 \cdot 10^5$	$5.25 \cdot 10^5$	$1.25 \cdot 10^5$
Mémoire (mots)	$740 \cdot 10^8$	$3.42 \cdot 10^8$	$0.35 \cdot 10^8$
Temps / Temps L=2	146	1	0.24
Mémoire / Mémoire L=2	216	1	0.1

Schéma d'ordre 2 en temps (3D)
Déphasage inférieur à $\pi/20$

CHAPITRE 2. ANALYSE DE L'ERREUR DE DISPERSION

Nous donnons ci-dessous les tableaux correspondant à une erreur relative de la vitesse de groupe de 10% puis de 1%, c'est à dire que l'on a

$$k|c_{gr}(k) - c|_{T_{max}} \leq \alpha$$

On propage ensuite sur $j = 100$ longueurs d'onde, ce qui donne :

$$\text{pour } \alpha = 0.1 \quad |E_{gr}| \leq 1.6 \cdot 10^{-4}$$

$$\text{puis pour } \alpha = 0.01 \quad |E_{gr}| \leq 1.6 \cdot 10^{-5}$$

2.5. COÛT INFORMATIQUE

L	1	2	4
$p = \frac{c\Delta t}{h}$	0.707	0.126	0.042
$H = \frac{h}{\lambda}$	$0.89 \cdot 10^{-2}$	$5.77 \cdot 10^{-2}$	$14.2 \cdot 10^{-2}$
$G = \frac{\Delta t}{T}$	$6.3 \cdot 10^{-3}$	$7.2 \cdot 10^{-3}$	$5.9 \cdot 10^{-3}$
N_x	5618	878	353
N_t	15893	13936	16810
N_{op}	13	25	49
N_{op} Totales	$652 \cdot 10^{10}$	$26.8 \cdot 10^{10}$	$10.2 \cdot 10^{10}$
Temps CPU (s)	65200	2680	1026
Mémoire (mots)	$63.1 \cdot 10^6$	$1.54 \cdot 10^6$	$0.25 \cdot 10^6$
Temps / Temps L=2	24.3	1	0.38
Mémoire / Mémoire L=2	41	1	0.16

Schéma d'ordre 2 en temps (2D)
10 % d'erreur sur la vitesse de groupe

CHAPITRE 2. ANALYSE DE L'ERREUR DE DISPERSION

L	1	2	4
$p = \frac{c\Delta t}{h}$	0.707	0.072	0.018
$H = \frac{h}{\lambda}$	$0.60 \cdot 10^{-2}$	$3.77 \cdot 10^{-2}$	$10.67 \cdot 10^{-2}$
$G = \frac{\Delta t}{T}$	$4.73 \cdot 10^{-3}$	$2.71 \cdot 10^{-3}$	$1.92 \cdot 10^{-2}$
N_x	8334	1327	469
N_t	25574	36862	52112
N_{op}	13	25	49
N_{op} Totales	$23.091 \cdot 10^{12}$	$1.7108 \cdot 10^{12}$	$0.5616 \cdot 10^{12}$
Temps CPU (s)	230910	17108	5616
Mémoire (mots)	$139 \cdot 10^6$	$3.52 \cdot 10^6$	$0.44 \cdot 10^6$
Temps / Temps L=2	13.5	1	0.33
Mémoire / Mémoire L=2	39.5	1	0.125

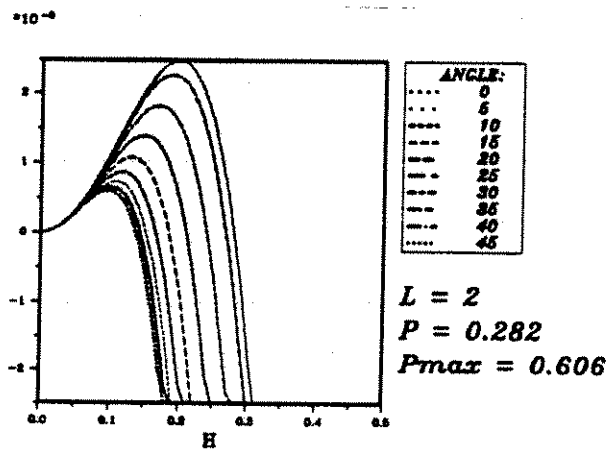
Schéma d'ordre 2 en temps (2D)
1 % d'erreur sur la vitesse de groupe

2.5. COÛT INFORMATIQUE

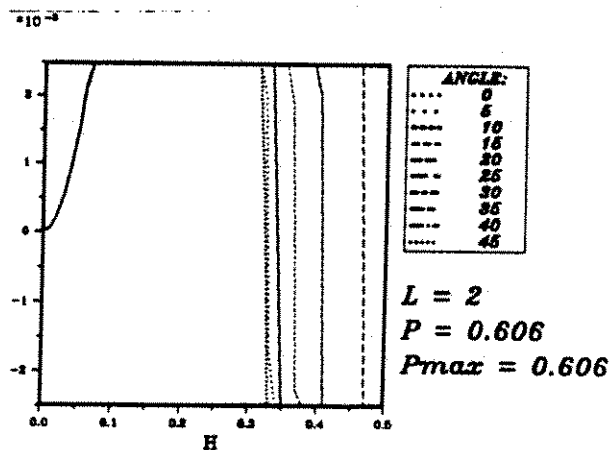
Remarque

Afin de se persuader que la meilleure stratégie pour diminuer le coût est de privilégier H au lieu de G , nous reprenons l'exemple précédent, où en 2D, on a pour critère sur l'erreur sur la vitesse de phase :

$$|E_\varphi| \leq 2.5 \cdot 10^{-3} = E_o$$



On privilégie H



On privilégie G

CHAPITRE 2. ANALYSE DE L'ERREUR DE DISPERSION

Des courbes ci-dessus on déduit les coûts informatiques synthétisés dans le tableau ci-dessous.

Cas	Préférence pour H	Préférence pour G
$p = \frac{c\Delta t}{h}$	0.282	0.606
$H = \frac{h}{\lambda}$	$17.5 \cdot 10^{-2}$	$7.0 \cdot 10^{-2}$
$G = \frac{\Delta t}{T}$	$4.93 \cdot 10^{-2}$	$4.24 \cdot 10^{-2}$
N_x	286	714
N_t	2029	2358
N_{op} Totales	$0.413 \cdot 10^{10}$	$3.0 \cdot 10^{10}$
Temps CPU (s)	42	300
Mémoire (mots)	$0.16 \cdot 10^6$	$1.02 \cdot 10^6$
Rapport des Temps	1	7.14
Rapport des Mémoires	1	6.37

2.5. COÛT INFORMATIQUE

Dans toute la suite nous avons choisi un critère d'erreur de phase correspondant à :

$$|\omega(k) - \omega|_{T_{max}} \leq \frac{\pi}{2}$$

et un critère de groupe correspondant à :

$$k|c_{gr} - c|_T \leq 0.1$$

Nous donnons les courbes du nombre de points par longueur d'onde (c'est à dire $N_\lambda = N_{\lambda_{min}} = \lambda_{min}/h = 1/H$) ainsi que les courbes du nombre de points par période (c'est à dire $N_T = N_{T_{min}} = T_{min}/\Delta t = 1/G$) en fonction de j pour différentes longueurs d'opérateurs.

Remarques :

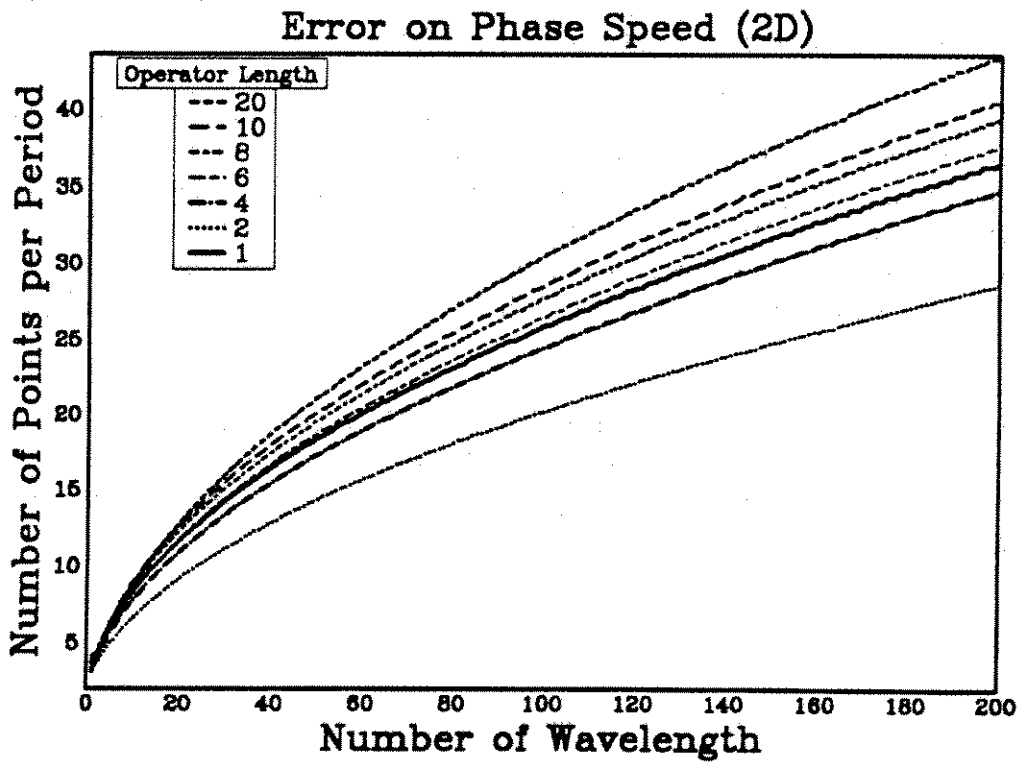
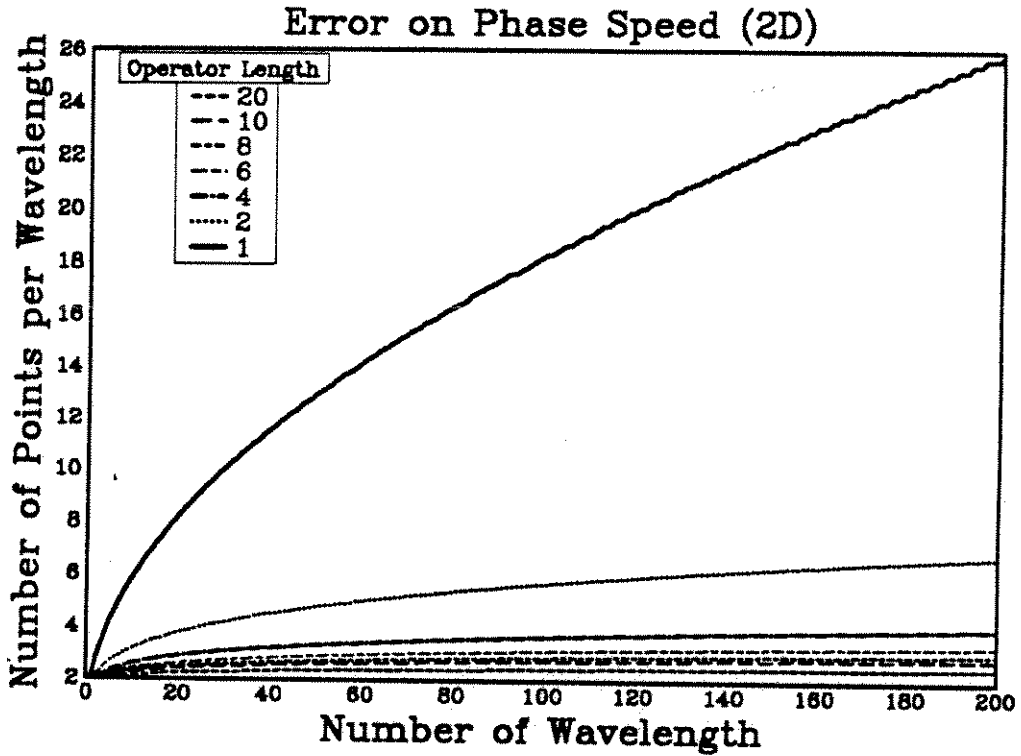
i) Le nombre de longueurs d'onde parcourues est ici le nombre de longueur d'onde minimale correspondant à la fréquence de coupure du signal. Pour un Ricker, la fréquence de coupure est à peu près 3 fois la fréquence centrale, donc le nombre de longueur d'onde minimale parcourue est 3 fois le nombre de longueur d'onde centrale parcourue.

Si l'on mesure le temps de propagation en nombre de longueur d'onde centrale parcourue, il convient donc de diviser j par 3 pour avoir la courbe correspondante.

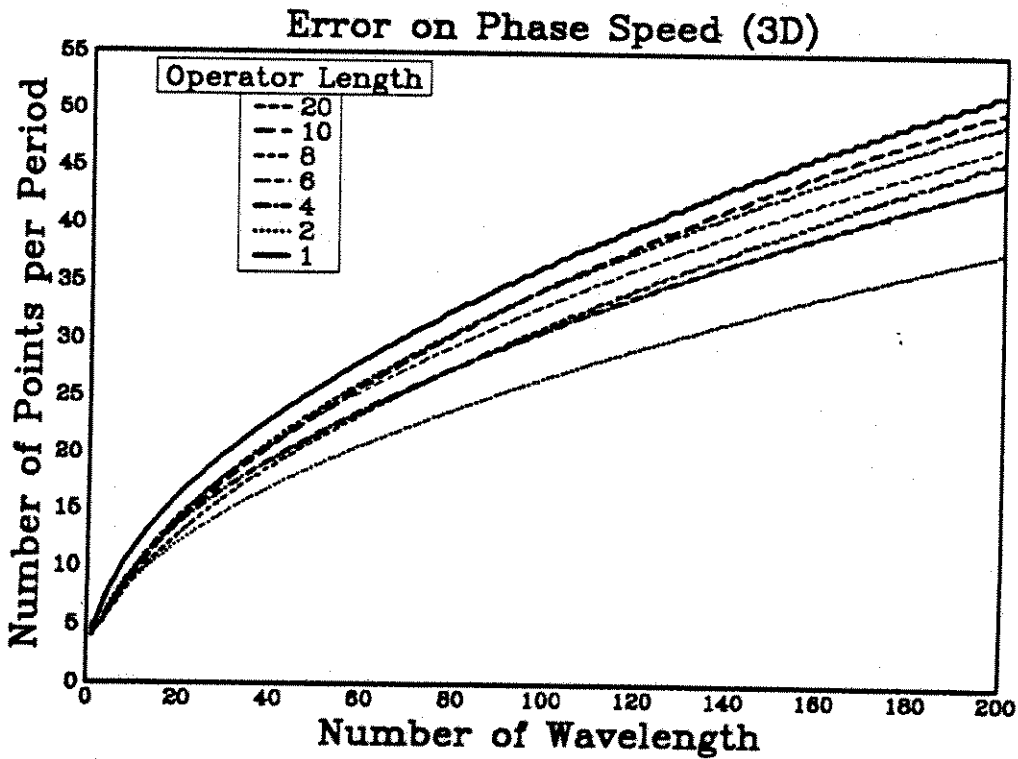
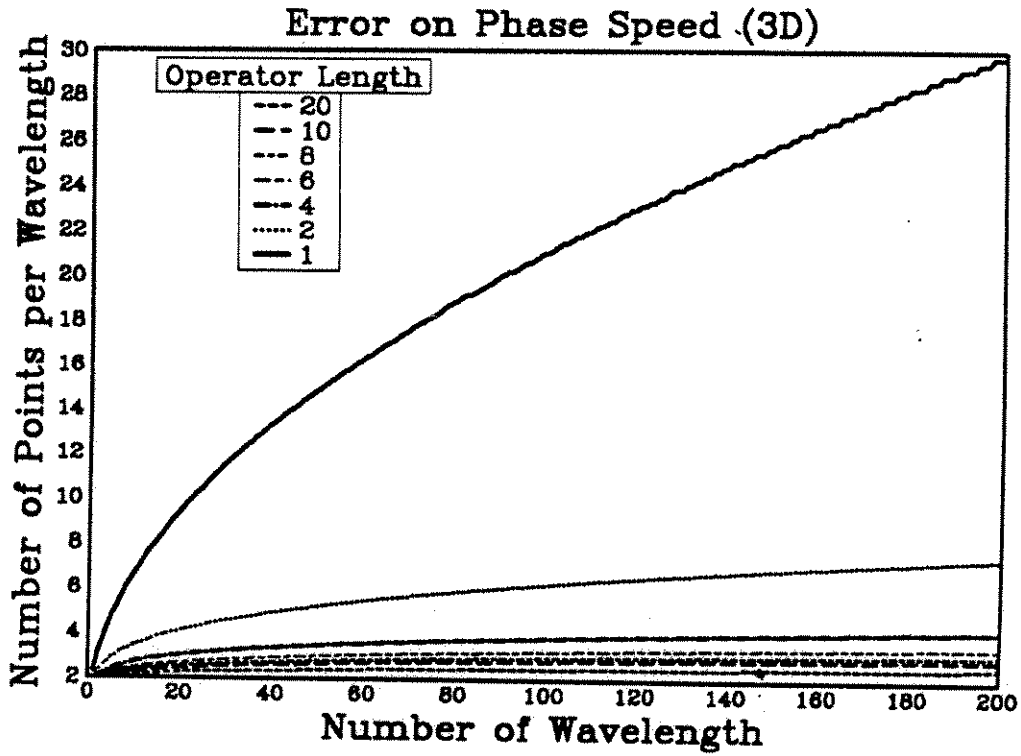
ii) Alford, Kelly et Boore (cf [Alf]) considèrent, non pas le nombre de points par longueur d'onde minimale correspondant à la fréquence de coupure, mais le nombre de point par longueur d'onde correspondant à la fréquence à mi-hauteur. Pour un Ricker cette fréquence à mi-hauteur est à peu près 1.5 fois la fréquence centrale. Donc le nombre de points par longueur d'onde minimale que nous utilisons est deux fois le nombre de points par longueur d'onde utilisé par Alford, Kelly et Boore.

iii) Par exemple pour un Ricker de fréquence $F_o = 30Hz$ dans un milieu de vitesse $c_o = 1500m \cdot s^{-1}$, $N_\lambda = 6$ points par longueur d'onde correspond à un pas en espace $h = 2.77m$, et $N_{T_{min}} = 20$ points par période correspond à un pas en temps $\Delta t = 5.5 \cdot 10^{-4}s$.

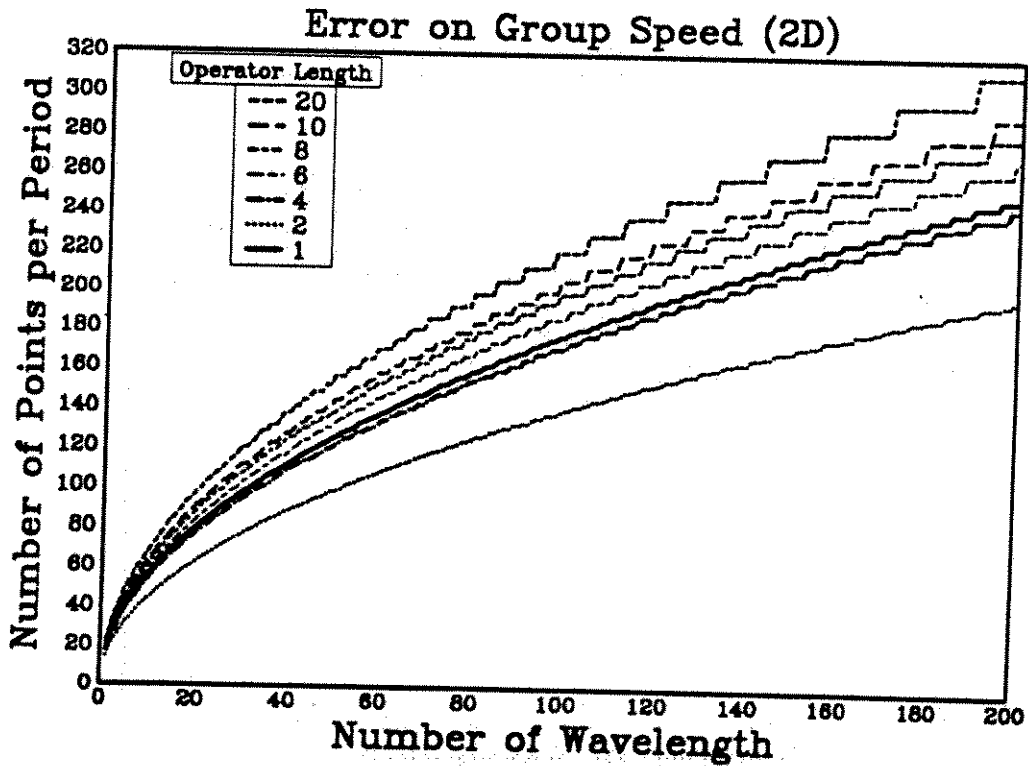
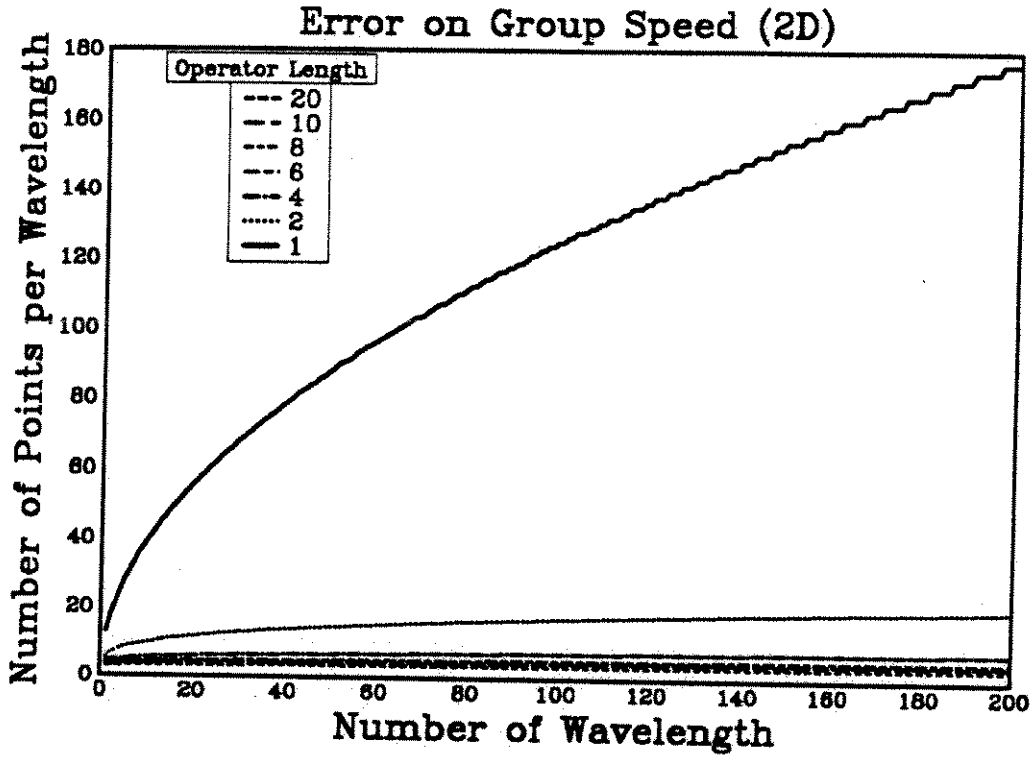
CHAPITRE 2. ANALYSE DE L'ERREUR DE DISPERSION



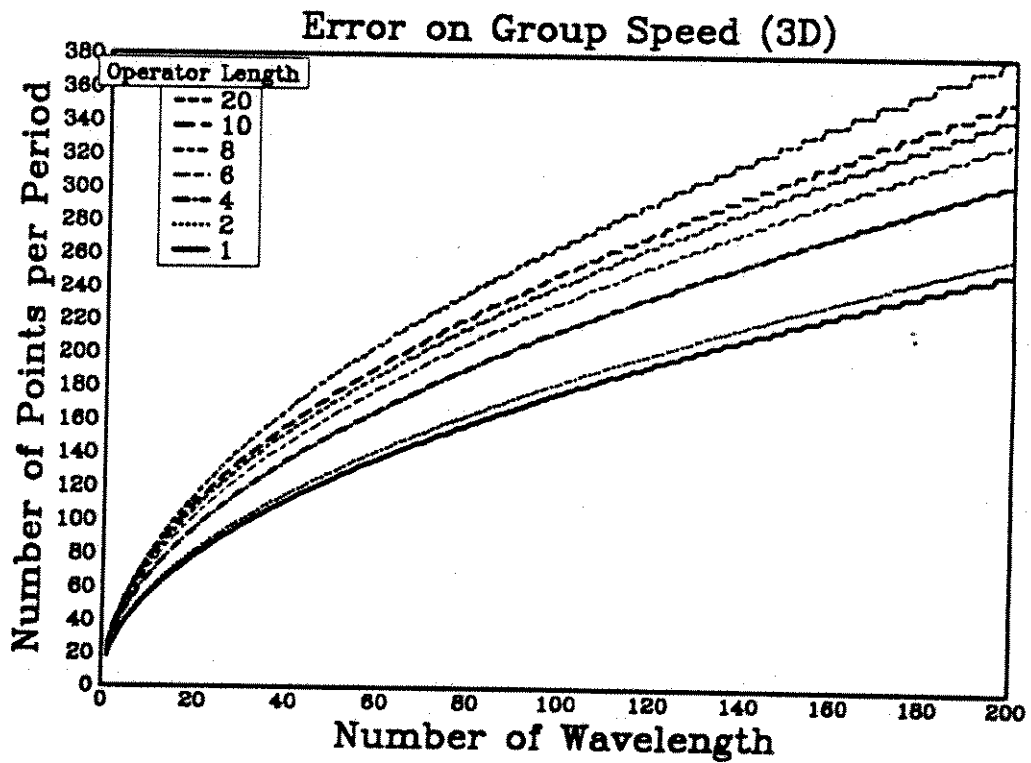
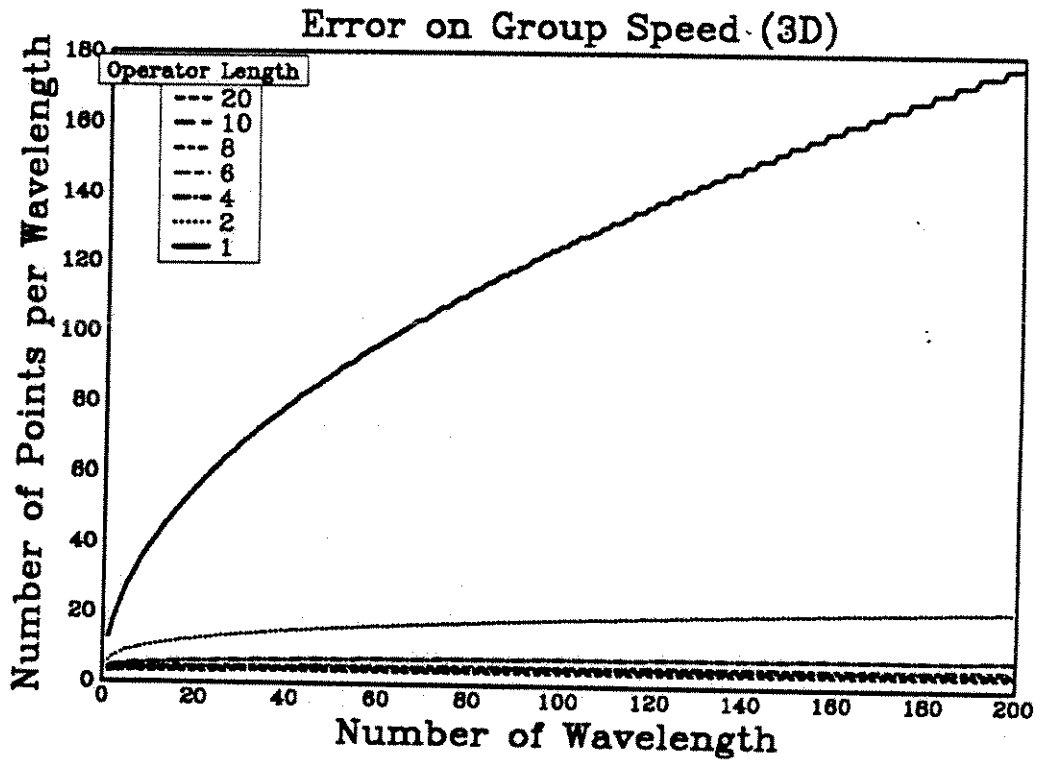
2.5. COÛT INFORMATIQUE



CHAPITRE 2. ANALYSE DE L'ERREUR DE DISPERSION



2.5. COÛT INFORMATIQUE



CHAPITRE 2. ANALYSE DE L'ERREUR DE DISPERSION

Remarques :

i) Pour le nombre de points par longueur d'onde, on remarque que la hiérarchie des opérateurs est respecté. Plus l'opérateur est précis et moins il requière de points par longueur d'onde, ce qui est naturel.

Il est remarquable cependant que le plus grand gain est obtenu entre l'ordre 2 (L=1) et l'ordre 4 (L=2), alors qu'ensuite le gain est nettement moins conséquent. Par exemple pour l'erreur de phase en 2D, le rapport du nombre de points par longueur d'onde pour l'ordre 2 (L=1) sur l'ordre 8 (L=4) vaut 6.5, alors le rapport de l'ordre 4 (L=2) sur l'ordre 8 (L=4) vaut 1.5.

ii) Pour le nombre de points par période, on constate que l'ordre 4 (L=2) et l'ordre 8 (L=4) sont les meilleurs opérateurs. Ceux sont les opérateurs pour lesquels, la compensation de l'erreur en temps et de l'erreur en espace se fait le mieux.

iii) Dans le fameux article de Alford, Kelly et Boore (cf [Alf]), une règle pratique (rule of thumb) préconisait pour un schéma (2-2), 10 points par longueur d'onde correspondant à la fréquence à mi-hauteur. Nous rappelons que cela correspond à 20 points par longueur d'onde minimale correspondant à la fréquence de coupure, que nous utilisons. Ainsi au vues des courbes précédentes cela correspond au critère suivant :

$$|\omega(k) - \omega|_{T_{max}} \leq \frac{\pi}{2}$$

iv) Pour le schéma (2-4) les courbes précédentes montrent qu'afin de contrôler la dispersion en espace il faut 6 points par longueur d'onde minimale et pour contrôler la dispersion en temps 20 points par période. Ces choix sont compatibles avec la condition de stabilité. En effet on peut écrire :

$$\frac{c\Delta t}{h} = \frac{cT_{min}}{h} \frac{\Delta t}{T_{min}} = \frac{\lambda_{min}}{h} \frac{\Delta t}{T_{min}} = \frac{N_\lambda}{N_{T_{min}}}$$

La condition de stabilité en 2D du schéma (2-4) s'écrit :

$$\frac{c\Delta t}{h} \leq 0.606 = p_{max}$$

Donc avec $N_\lambda = 6$ et $N_{T_{min}} = 20$ on a :

$$\frac{N_\lambda}{N_{T_{min}}} = \frac{c\Delta t}{h} = 0.3$$

Ainsi ce choix du nombre de points par longueur d'onde et du nombre de points par période conduit à choisir le paramètre $\frac{c\Delta t}{h}$ dans l'intervalle de stabilité $[0, p_{max}]$.

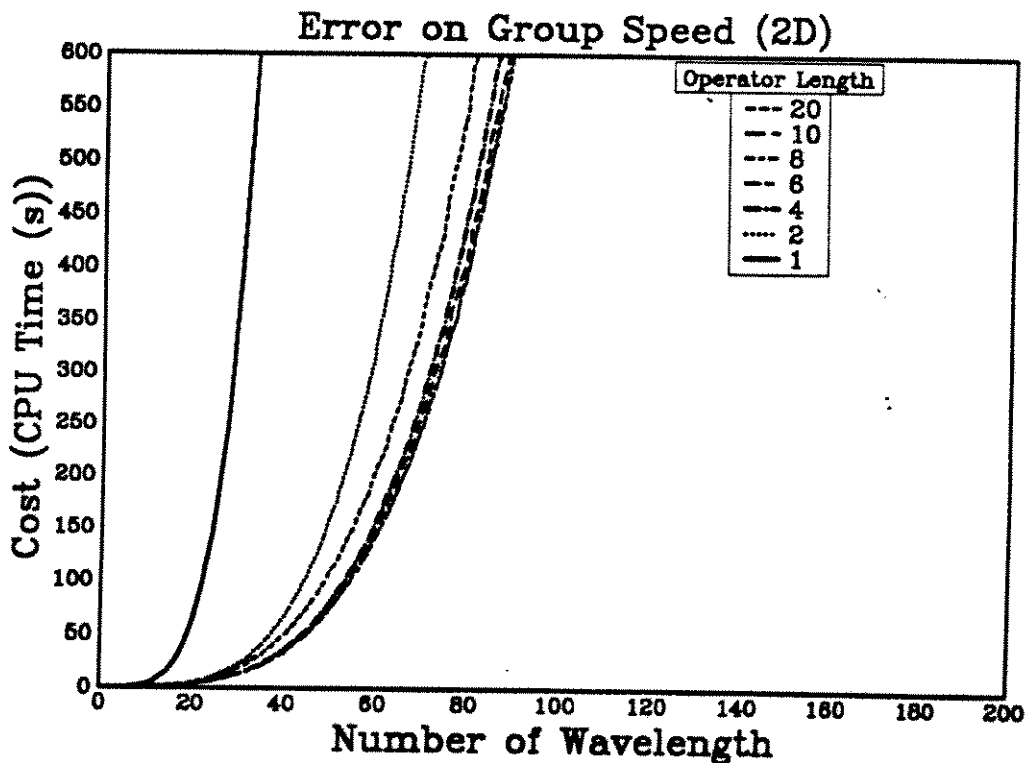
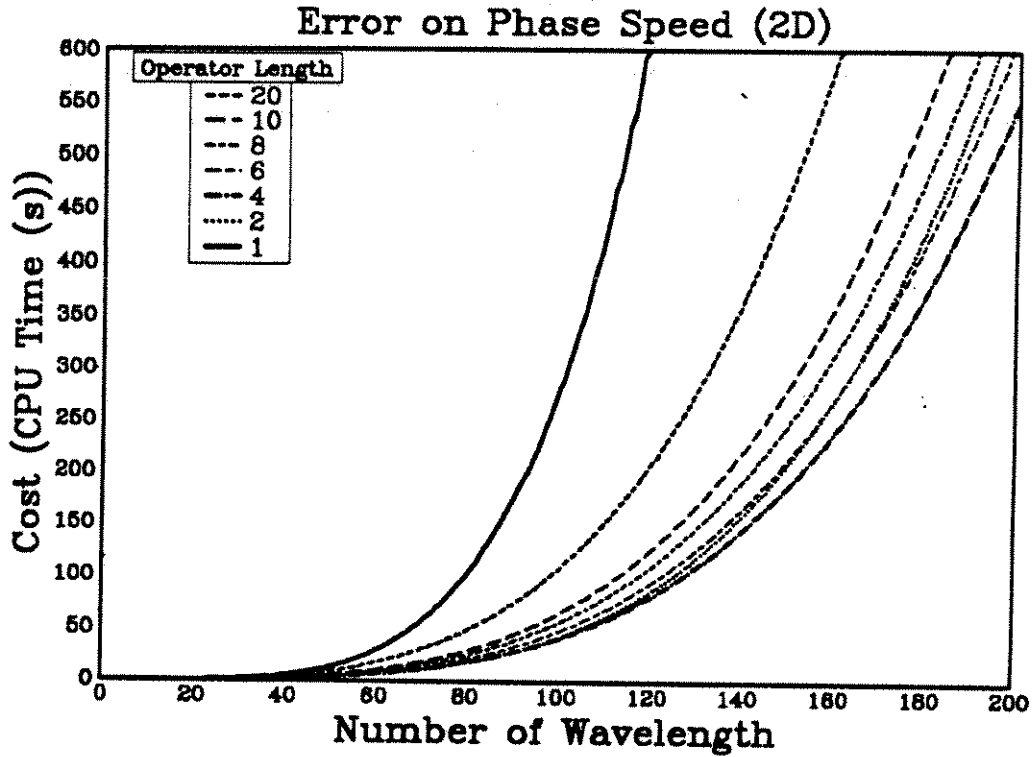
Nous synthétisons maintenant le choix de p et de H en présentant les courbes

2.5. COÛT INFORMATIQUE

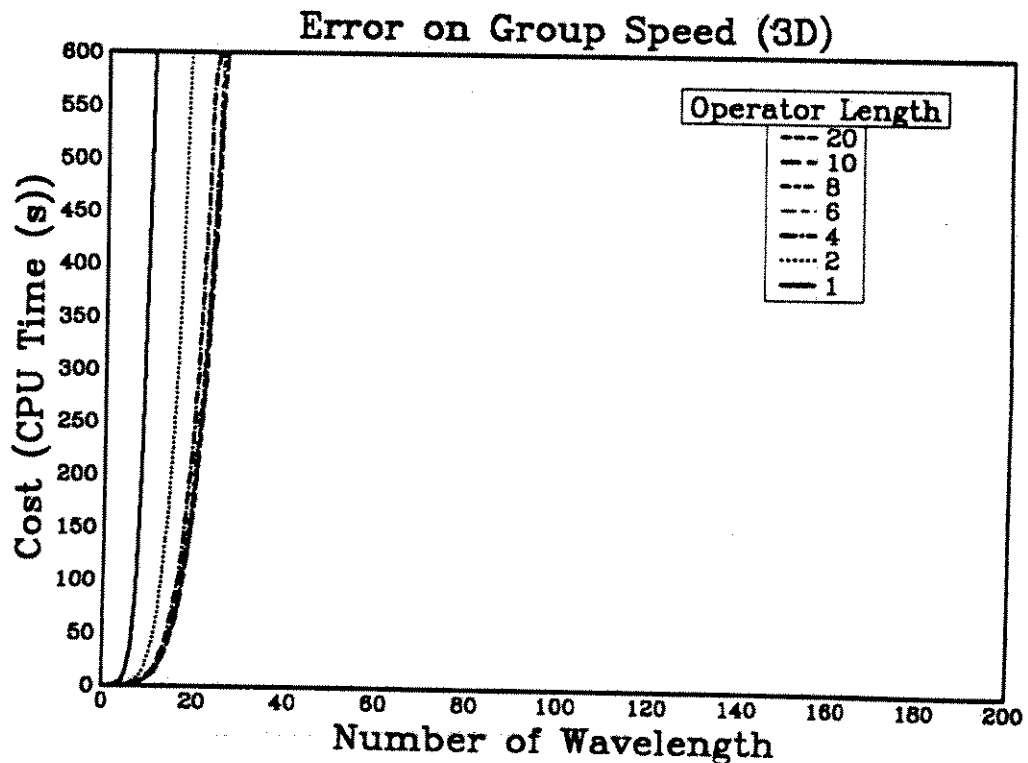
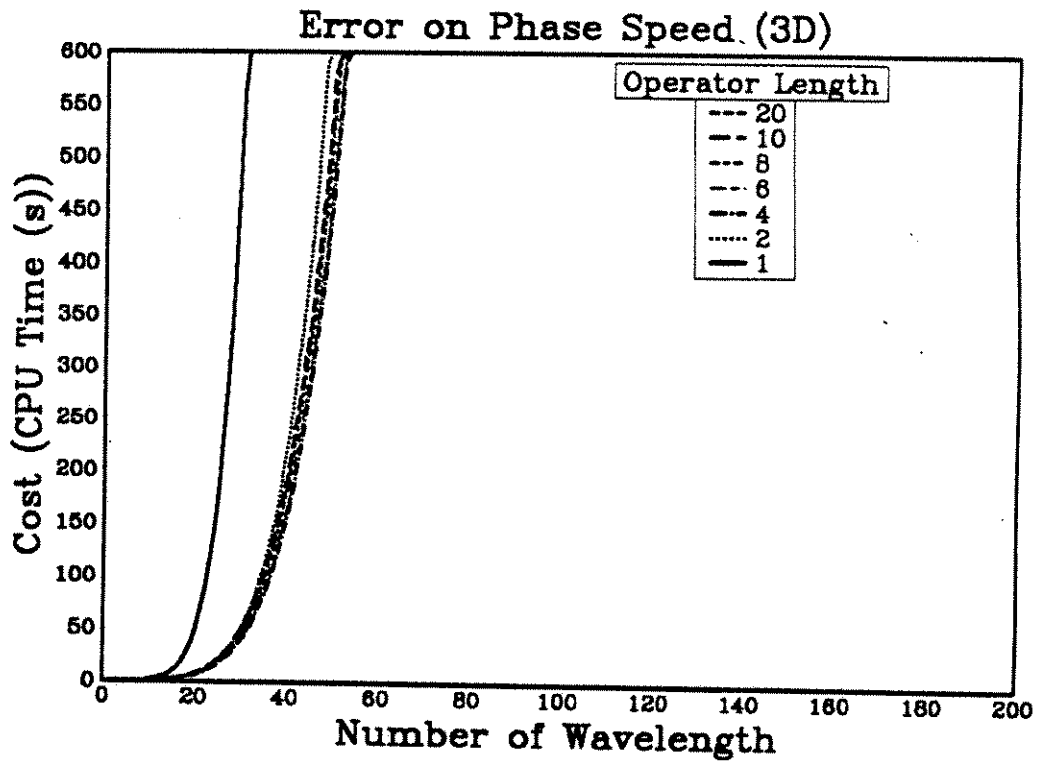
de temps calcul sur le CRAY-XMP 14 pour les différents opérateurs. Nous avons estimé les performances du CRAY à 100 Megaflops.

Ensuite afin de voir quels sont les meilleurs opérateurs, il est judicieux de tracer les courbes de cout calcul à j fixé en fonction de la longueur de l'opérateur. Nous nous sommes placé ici à $j = 200$. Pour un Ricker de fréquence centrale $F_o = 30Hz$, dans un milieu de vitesse $c_o = 1500m \cdot s^{-1}$, cela correspond à un domaine de $A = 2000m$ de côté, et à un temps de propagation de $T_{max} = 2.67s$.

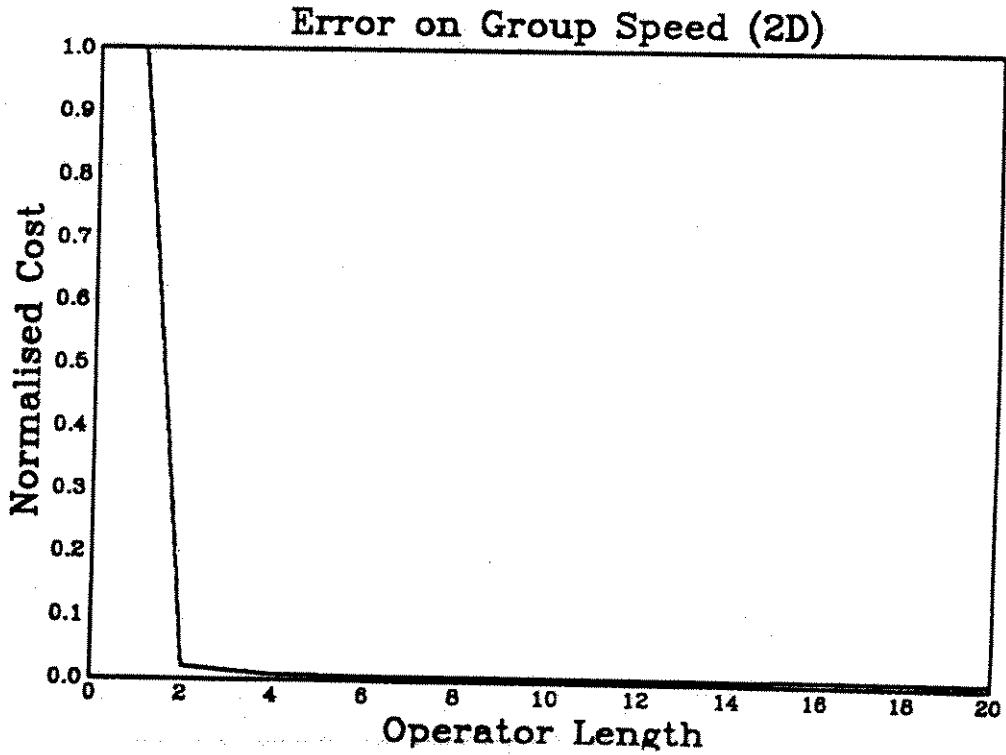
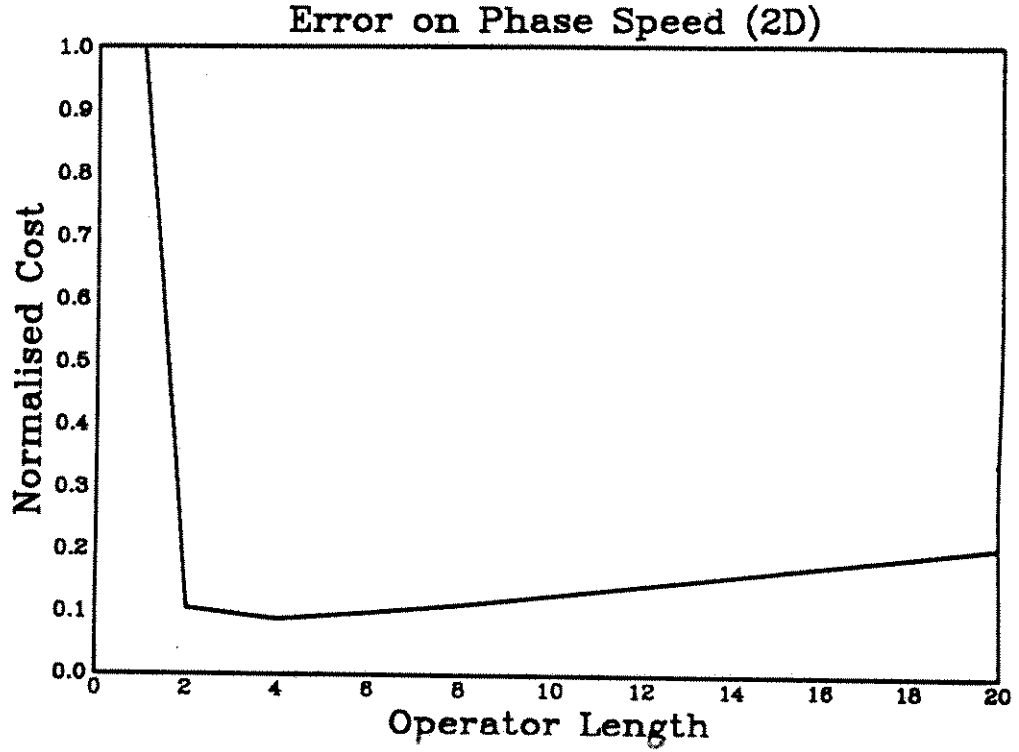
CHAPITRE 2. ANALYSE DE L'ERREUR DE DISPERSION



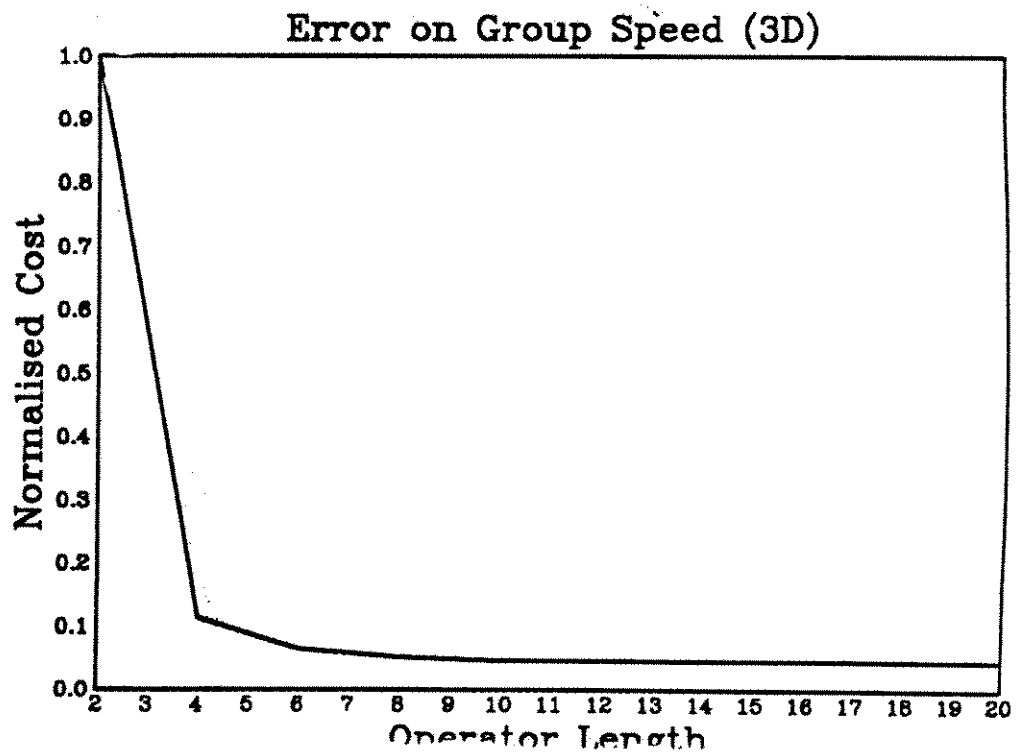
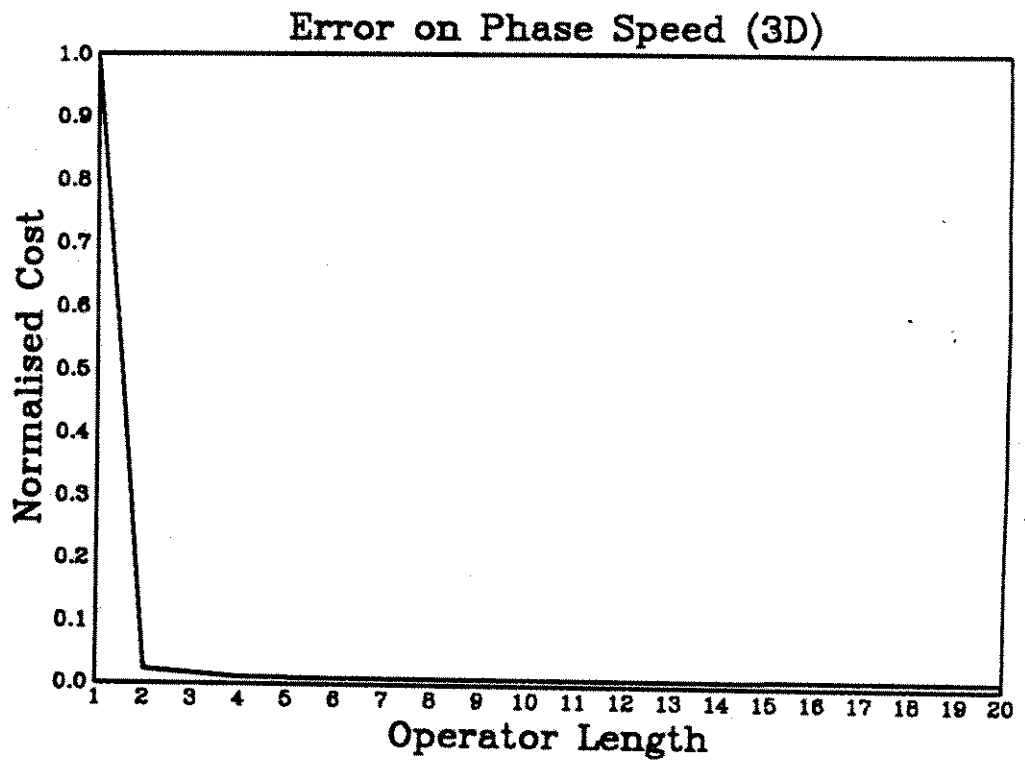
2.5. COÛT INFORMATIQUE



CHAPITRE 2. ANALYSE DE L'ERREUR DE DISPERSION



2.5. COÛT INFORMATIQUE



CHAPITRE 2. ANALYSE DE L'ERREUR DE DISPERSION

Nous avons limité à 10 minutes le temps calcul pour tous les cas de figure afin de pouvoir comparer les coûts informatiques en 2D et en 3D.

Les courbes de temps calcul intègrent outre le choix de H et p , le nombre d'opérations par noeud que chaque opérateur nécessite. C'est essentiellement ce terme qui classe les opérateurs.

En effet passé l'opérateur d'ordre 8 ($L=4$) le gain en nombre de points par longueur est assez faible et le nombre de points par période également. Par contre le nombre d'opérations par noeud est linéaire avec L .

Ceci donne finalement un opérateur optimal pour l'ordre 8 ($L=4$) en 2D, l'ordre 12 ($L=6$) en 3D. Ceci s'explique par le fait que le nombre de points par longueur d'onde intervient au carré en 2D et au cube en 3D.

Il faut aussi voir que si l'optimum se situe en $L = 4$ ou $L = 6$, le gain par rapport à l'ordre 4 ($L=2$) n'est pas aussi considérable que celui observé pour $L = 1$ par rapport à $L = 2$. De plus l'opérateur d'ordre 4 ($L=2$) sera plus facilement implémentable avec des conditions absorbantes pseudo-différentielles, que des opérateurs d'ordre plus élevé.

Enfin un opérateur ne peut être optimal pour le temps calcul et la place mémoire en même temps. Le meilleur opérateur pour la place mémoire est l'opérateur d'ordre le plus élevé ($L=10$, $L=20$), car il requière le moins de points par longueur d'onde. Cependant il nécessite beaucoup d'opérations par noeud (en 2D pour $L=10$ il faut 122 opérations, en 3D 180 opérations !) et est donc pénalisé au niveau du temps calcul.

2.5. COÛT INFORMATIQUE

Coût pour les schémas d'ordre 4 en temps

Comme précédemment on se place en dimension 2 avec pour critère sur l'erreur sur la vitesse de phase :

$$|\omega(k) - \omega|_{T_{max}} \leq \frac{\pi}{2}$$

On propage ensuite sur $j = 100$ longueurs d'onde, ce qui donne

$$|E_\varphi| \leq 2.5 \cdot 10^{-3} = E_o$$

Nous donnons ci-dessous un exemple du choix de p et H pour $L = 2, 4$ pour le schéma d'ordre 4 en temps.

Nous avons ensuite synthétisé les résultats dans le premier tableau suivant. Nous donnons également les mêmes résultats correspondant au critère plus sévère suivant :

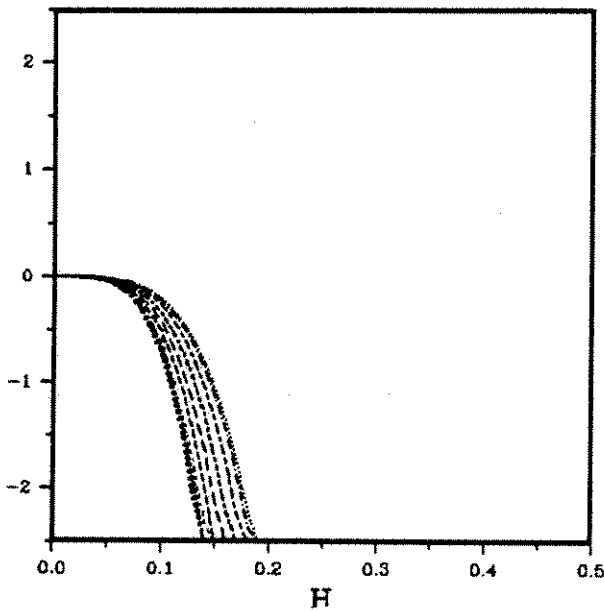
$$|\omega(k) - \omega|_{T_{max}} \leq \frac{\pi}{20}$$

On propage ensuite sur $j = 100$ longueurs d'onde, ce qui donne

$$|E_\varphi| \leq 2.5 \cdot 10^{-4}$$

Error on Phase Speed

*10⁻³



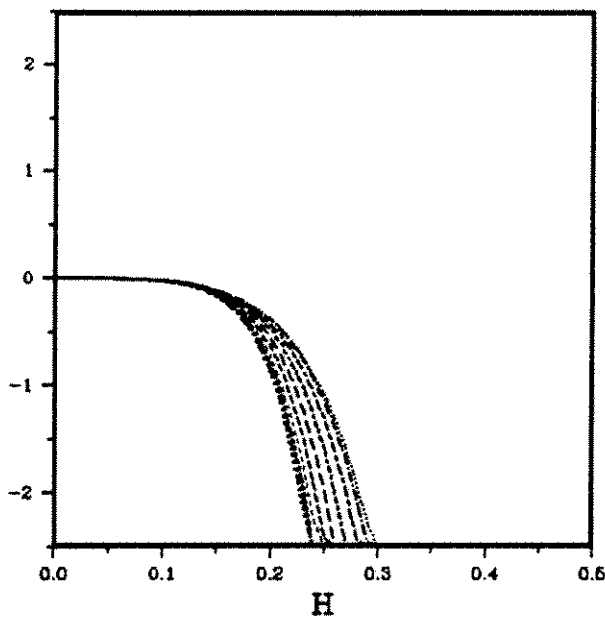
ANGLE:	
.....	0
....	5
.....	10
-----	15
----	20
---	25
----	30
---	35
-----	40
.....	45

$$L = 2$$

$$P = 0.606$$

$$P_{max} = 0.606$$

*10⁻³



ANGLE:	
.....	0
....	5
.....	10
-----	15
----	20
---	25
----	30
---	35
-----	40
.....	45

$$L = 4$$

$$P = 0.550$$

$$P_{max} = 0.550$$

Schéma d'ordre 4 en temps (2D)

2.5. COÛT INFORMATIQUE

L	2	4
$p = \frac{c\Delta t}{h}$	0.606	0.549
$H = \frac{h}{\lambda}$	0.135	0.235
$G = \frac{\Delta t}{T}$	$8.18 \cdot 10^{-2}$	$12.9 \cdot 10^{-2}$
N_x	370	212
N_t	1228	774
N_{op}	147	315
N_{op} Totales	$2.46 \cdot 10^{10}$	$1.10 \cdot 10^{10}$
Temps CPU (s)	247	111
Mémoire (mots)	$2.74 \cdot 10^5$	$0.90 \cdot 10^5$
Temps / Temps L=2	1	0.45
Mémoire / Mémoire L=2	1	0.33

Schéma d'ordre 4 en temps (2D)
Déphasage inférieur à $\pi/2$

CHAPITRE 2. ANALYSE DE L'ERREUR DE DISPERSION

L	2	4
$p = \frac{c\Delta t}{h}$	0.606	0.549
$H = \frac{h}{\lambda}$	0.075	0.16
$G = \frac{\Delta t}{T}$	$4.55 \cdot 10^{-2}$	$8.79 \cdot 10^{-2}$
N_x	666	312
N_t	2199	1136
N_{op}	147	315
N_{op} Totales	$1.44 \cdot 10^{11}$	$3.49 \cdot 10^{10}$
Temps CPU (s)	1438	350
Mémoire (mots)	$8.87 \cdot 10^7$	$1.94 \cdot 10^7$
Temps / Temps L=2	1	0.24
Mémoire / Mémoire L=2	1	0.22

Schéma d'ordre 4 en temps (2D)
Déphasage inférieur à $\pi/20$

2.5. COÛT INFORMATIQUE

L	2	4
$p = \frac{c\Delta t}{h}$	0.495	0.445
$H = \frac{h}{\lambda}$	0.136	0.241
$G = \frac{\Delta t}{T}$	$6.74 \cdot 10^{-2}$	$10.8 \cdot 10^{-2}$
N_x	366	207
N_t	1483	923
N_{op}	401	869
N_{op} Totales	$2.94 \cdot 10^{13}$	$0.71 \cdot 10^{13}$
Temps CPU (s)	$2.94 \cdot 10^5$	$7.14 \cdot 10^4$
Mémoire (mots)	$9.08 \cdot 10^7$	$1.77 \cdot 10^7$
Temps / Temps L=2	1	0.24
Mémoire / Mémoire L=2	1	0.19

Schéma d'ordre 4 en temps (3D)
Déphasage inférieur à $\pi/2$

CHAPITRE 2. ANALYSE DE L'ERREUR DE DISPERSION

L	2	4
$p = \frac{c\Delta t}{h}$	0.495	0.445
$H = \frac{h}{\lambda}$	0.076	0.17
$G = \frac{\Delta t}{T}$	$3.77 \cdot 10^{-2}$	$7.68 \cdot 10^{-2}$
N_x	655	291
N_t	2650	1300
N_{op}	401	869
N_{op} Totales	$3.0 \cdot 10^{14}$	$2.81 \cdot 10^{13}$
Temps CPU (s)	$3.0 \cdot 10^6$	$2.81 \cdot 10^5$
Mémoire (mots)	$5.62 \cdot 10^8$	$4.93 \cdot 10^7$
Temps / Temps L=2	1	0.094
Mémoire / Mémoire L=2	1	0.087

Schéma d'ordre 4 en temps (3D)
Déphasage inférieur à $\pi/20$

2.5. COÛT INFORMATIQUE

Nous donnons ci-dessous les tableaux correspondant à une erreur relative de la vitesse de groupe de 10% puis de 1%, c'est à dire que l'on a

$$k|c_{gr}(k) - c|T_{max} \leq \alpha$$

On propage ensuite sur $j = 100$ longueurs d'onde, ce qui donne

pour $\alpha = 0.1$

$$|E_{gr}| \leq 1.6 \cdot 10^{-4}$$

puis pour $\alpha = 0.01$

$$|E_{gr}| \leq 1.6 \cdot 10^{-5}$$

CHAPITRE 2. ANALYSE DE L'ERREUR DE DISPERSION

L	2	4
$p = \frac{c\Delta t}{h}$	0.606	0.549
$H = \frac{h}{\lambda}$	0.045	0.105
$G = \frac{\Delta t}{T}$	$2.72 \cdot 10^{-2}$	$5.77 \cdot 10^{-2}$
N_x	1112	476
N_t	3667	1732
N_{op}	147	315
N_{op} Totales	$6.65 \cdot 10^{11}$	$1.24 \cdot 10^{11}$
Temps CPU (s)	6654	1238
Mémoire (mots)	$2.47 \cdot 10^6$	$0.45 \cdot 10^6$
Temps / Temps L=2	1	0.19
Mémoire / Mémoire L=2	1	0.18

Schéma d'ordre 4 en temps (2D)
10 % d'erreur sur la vitesse de groupe

2.5. COÛT INFORMATIQUE

L	2	4
$p = \frac{c\Delta t}{h}$	0.606	0.549
$H = \frac{h}{\lambda}$	$2.5 \cdot 10^{-2}$	$6.25 \cdot 10^{-2}$
$G = \frac{\Delta t}{T}$	$1.52 \cdot 10^{-2}$	$3.45 \cdot 10^{-2}$
N_x	2000	800
N_t	6500	2911
N_{op}	147	315
N_{op} Totales	$3.88 \cdot 10^{12}$	$5.86 \cdot 10^{11}$
Temps CPU (s)	38807	5668
Mémoire (mots)	$8.0 \cdot 10^6$	$1.28 \cdot 10^6$
Temps / Temps L=2	1	0.15
Mémoire / Mémoire L=2	1	0.16

Schéma d'ordre 4 en temps (2D)
1 % d'erreur sur la vitesse de groupe

CHAPITRE 2. ANALYSE DE L'ERREUR DE DISPERSION

Dans toute la suite nous avons choisi un critère d'erreur de phase correspondant à

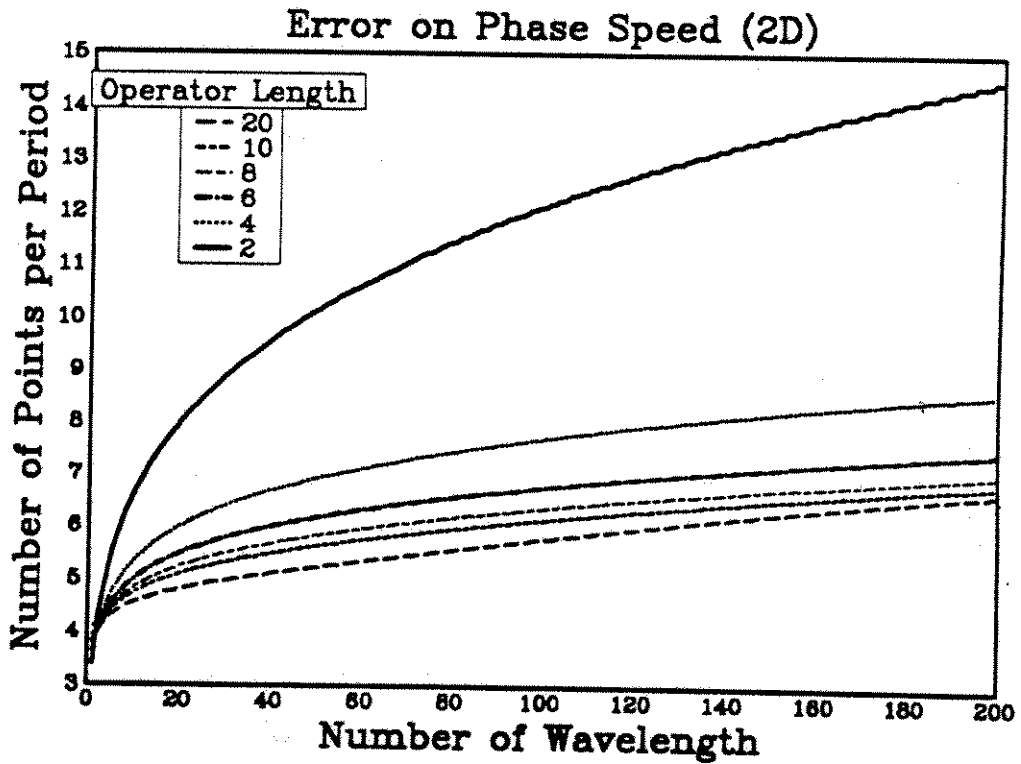
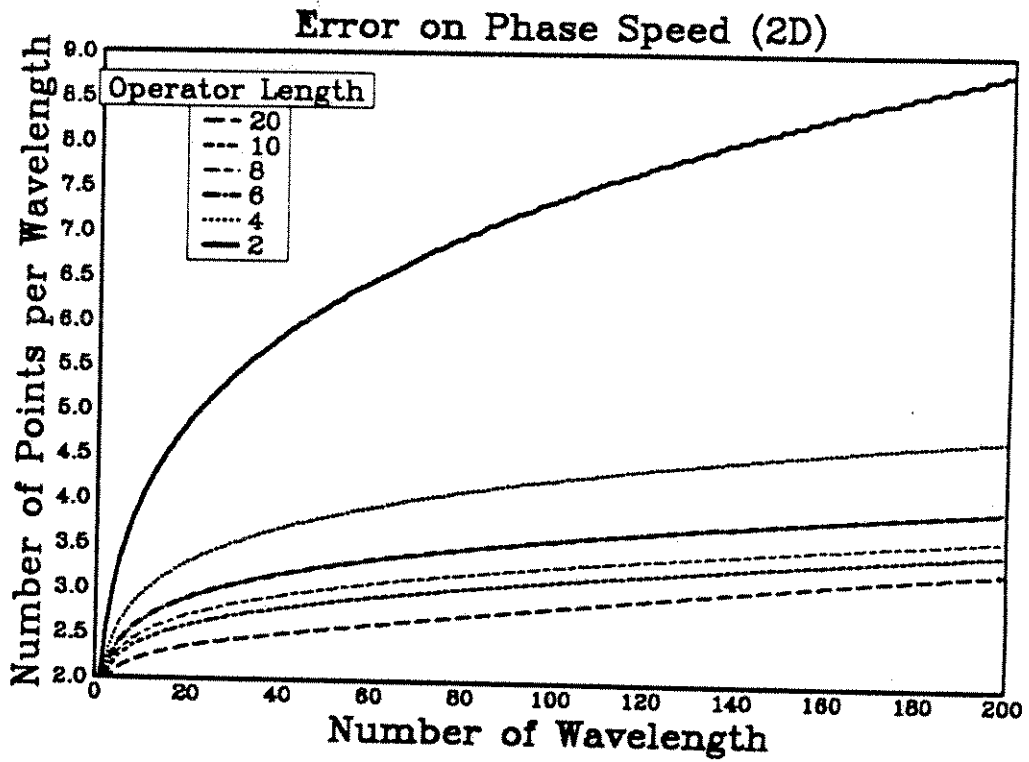
$$|\omega(k) - \omega|_{T_{max}} \leq \frac{\pi}{2}$$

et un critère de groupe correspondant à

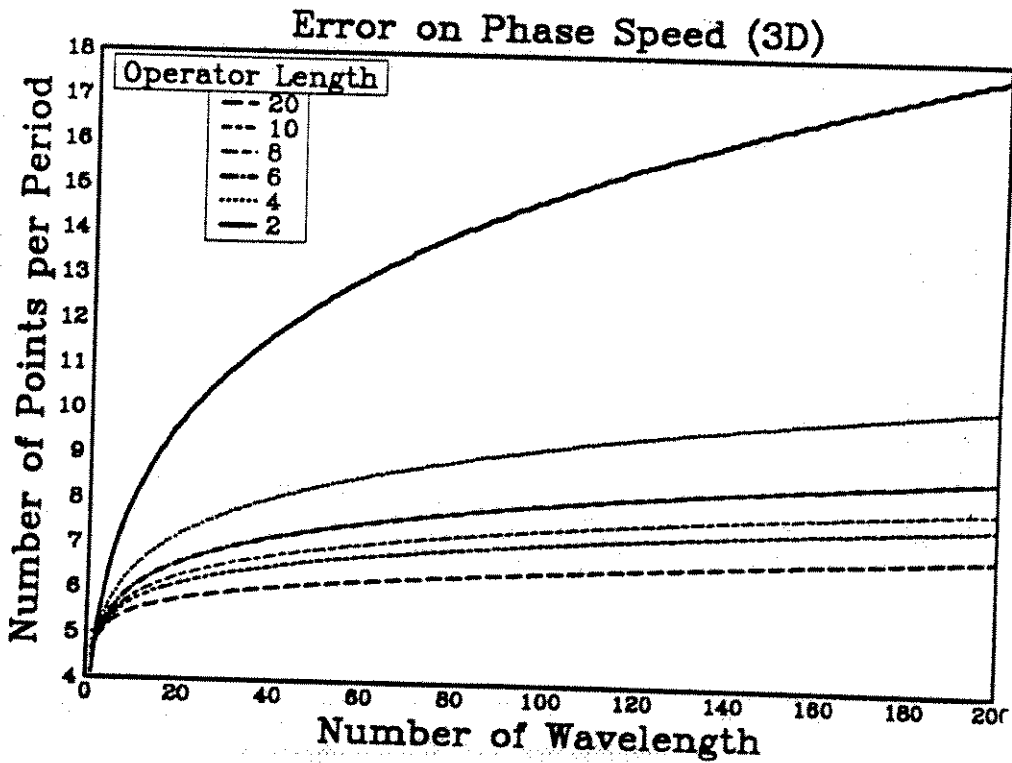
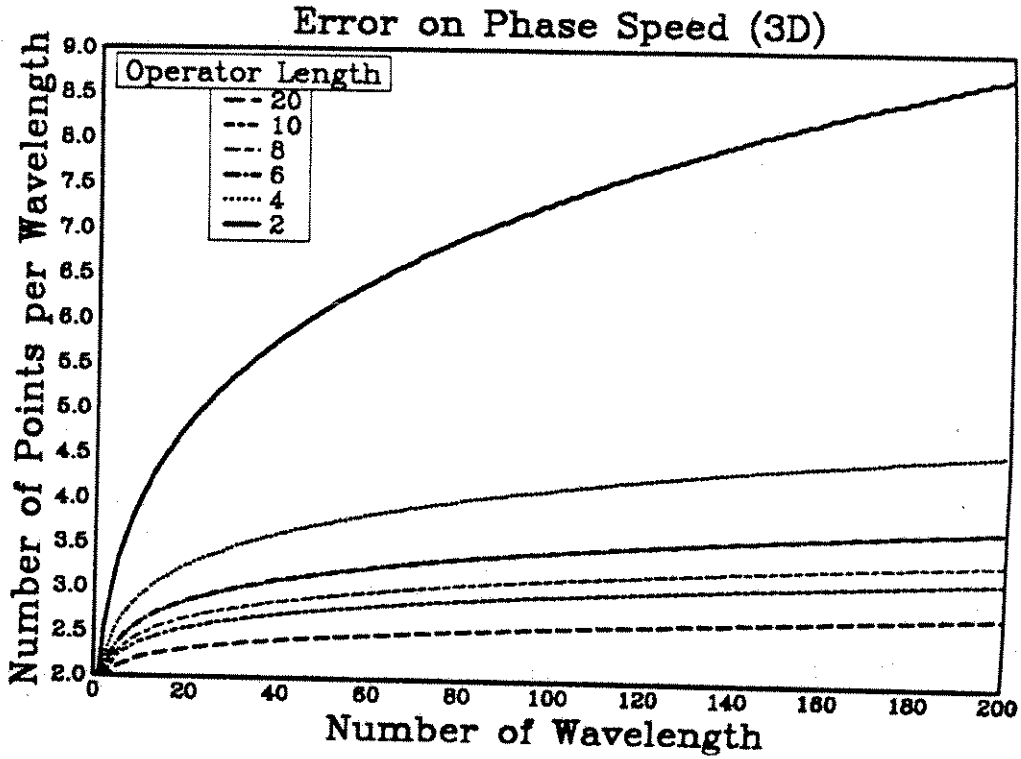
$$k|c_{gr} - c|_T \leq 0.1$$

Nous donnons les courbes du nombre de points par longueur d'onde (c'est à dire $N_\lambda = 1/H$) ainsi que les courbes du nombre de points par période (c'est à dire $N_{T_{min}} = 1/G$) en fonction de j pour différentes longueurs d'opérateurs.

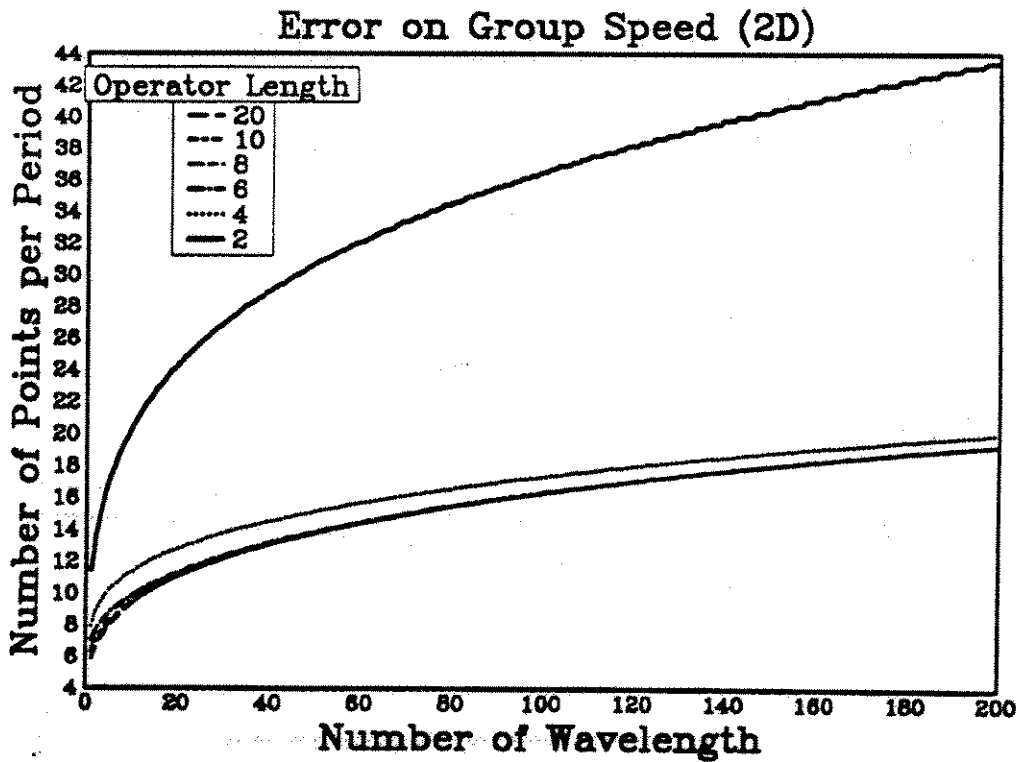
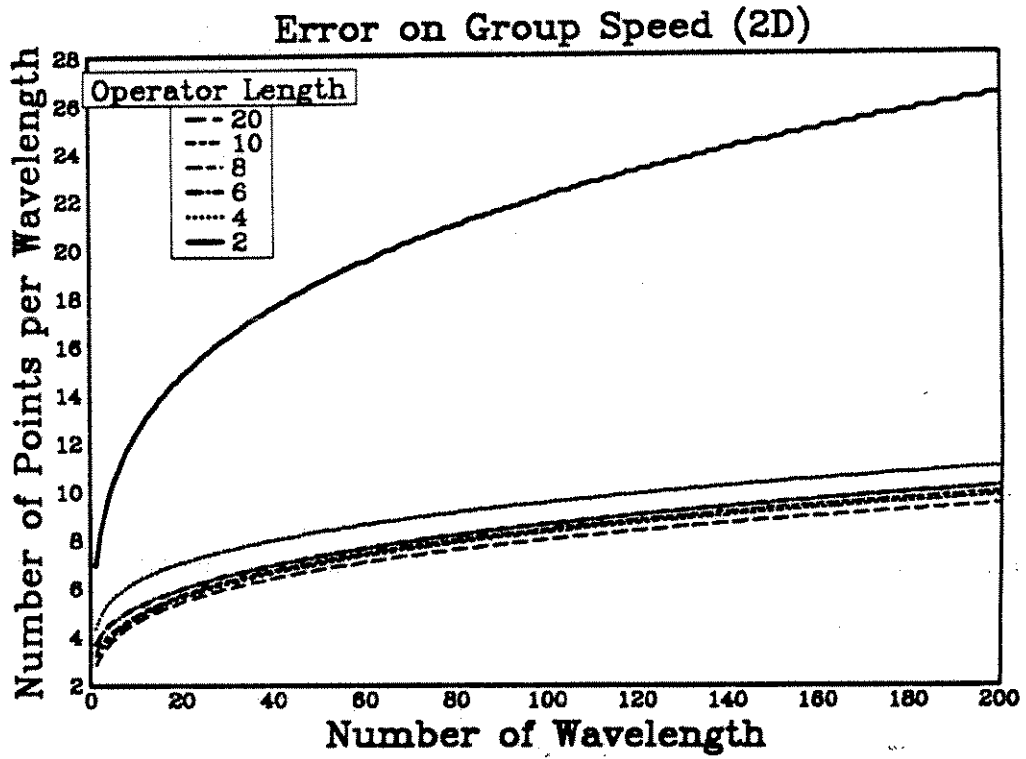
2.5. COÛT INFORMATIQUE



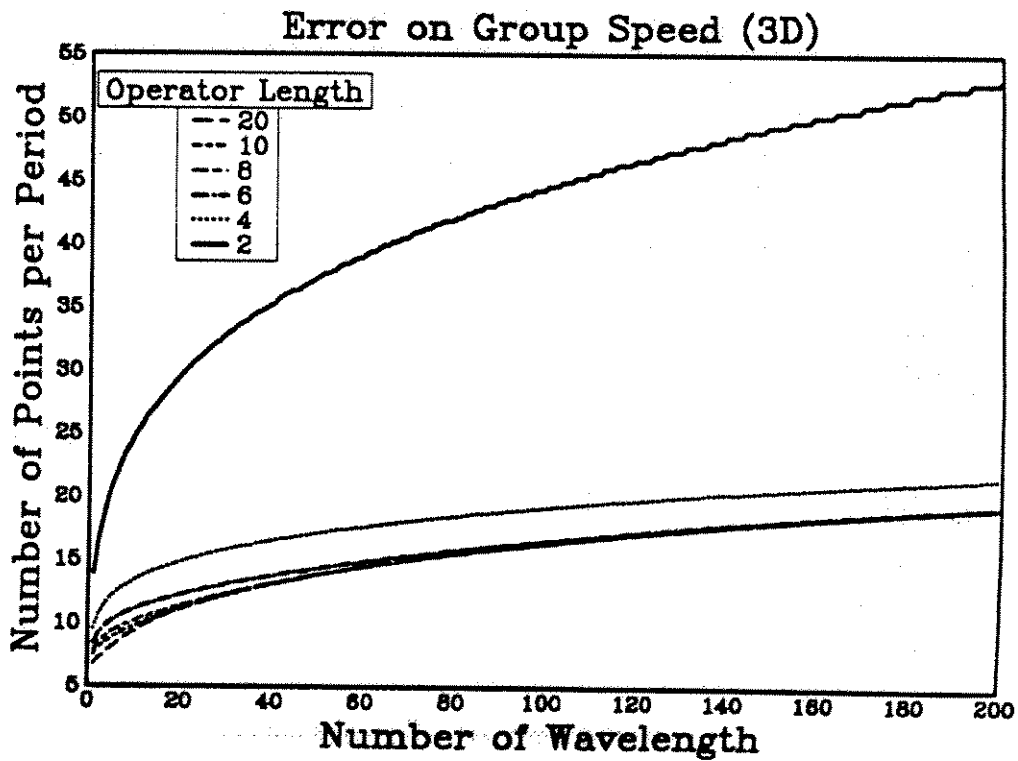
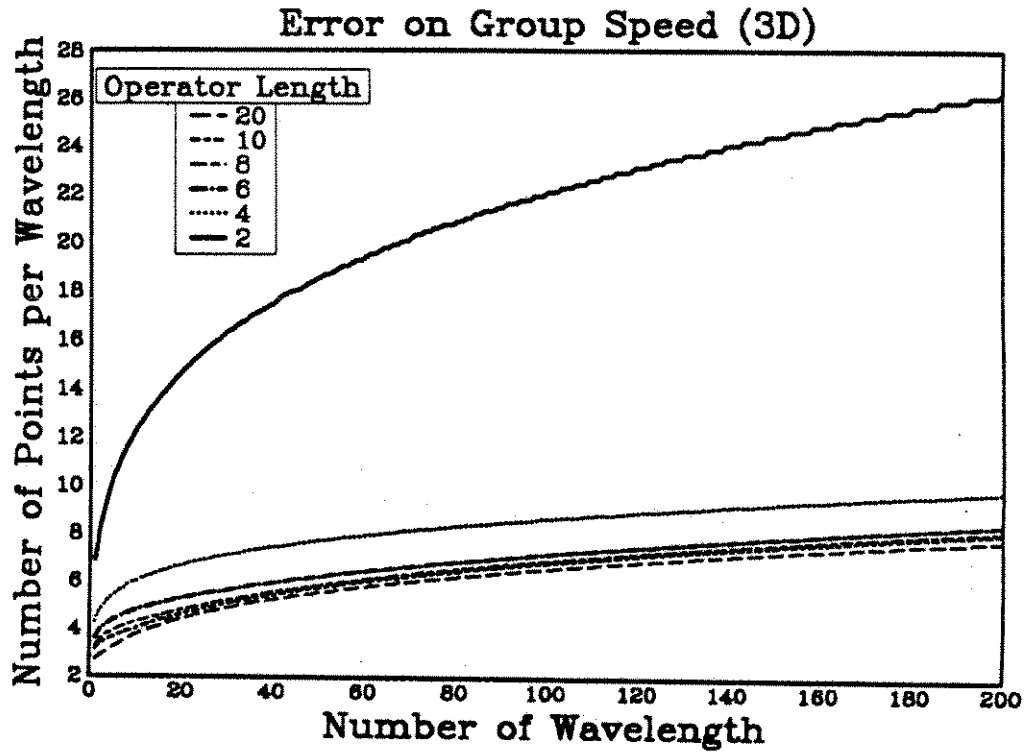
CHAPITRE 2. ANALYSE DE L'ERREUR DE DISPERSION



2.5. COÛT INFORMATIQUE



CHAPITRE 2. ANALYSE DE L'ERREUR DE DISPERSION



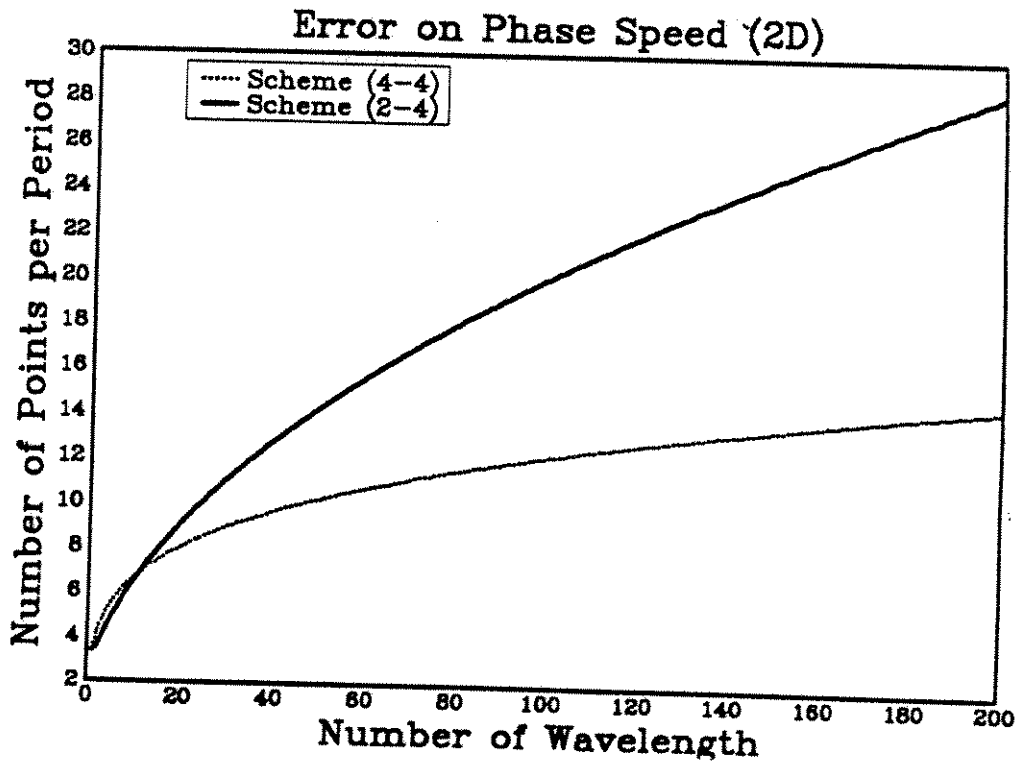
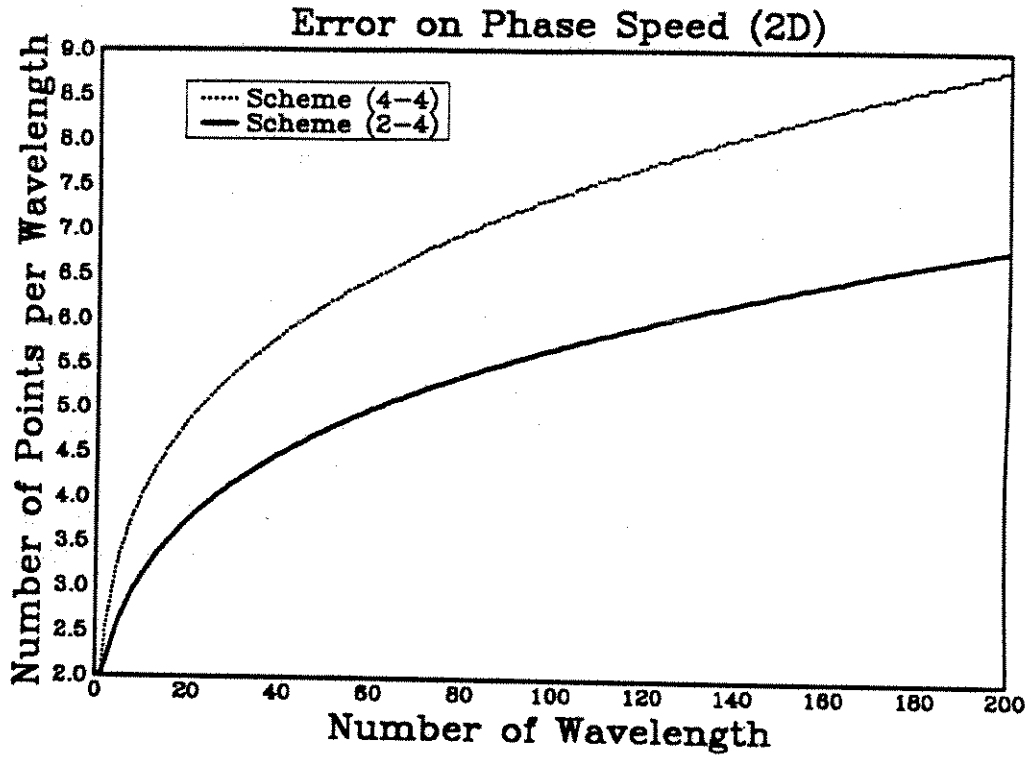
2.5. COÛT INFORMATIQUE

Tout comme pour les schémas d'ordre 2 en temps on remarque que pour le nombre de points par longueur d'onde, la hiérarchie des opérateurs est respectée.

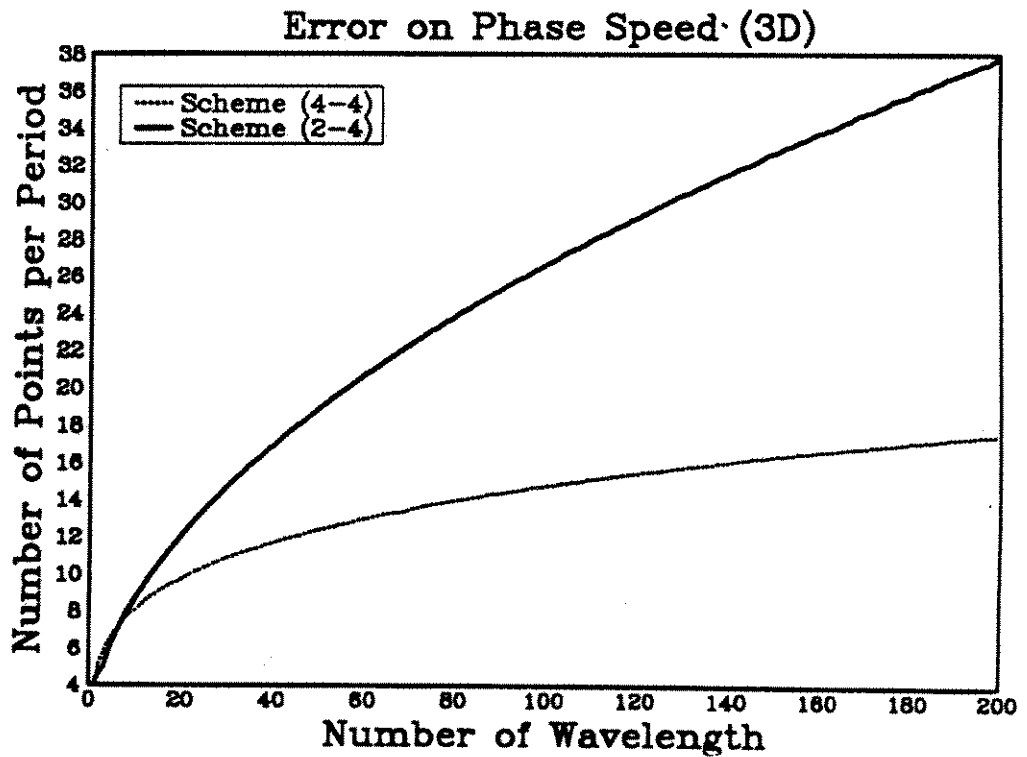
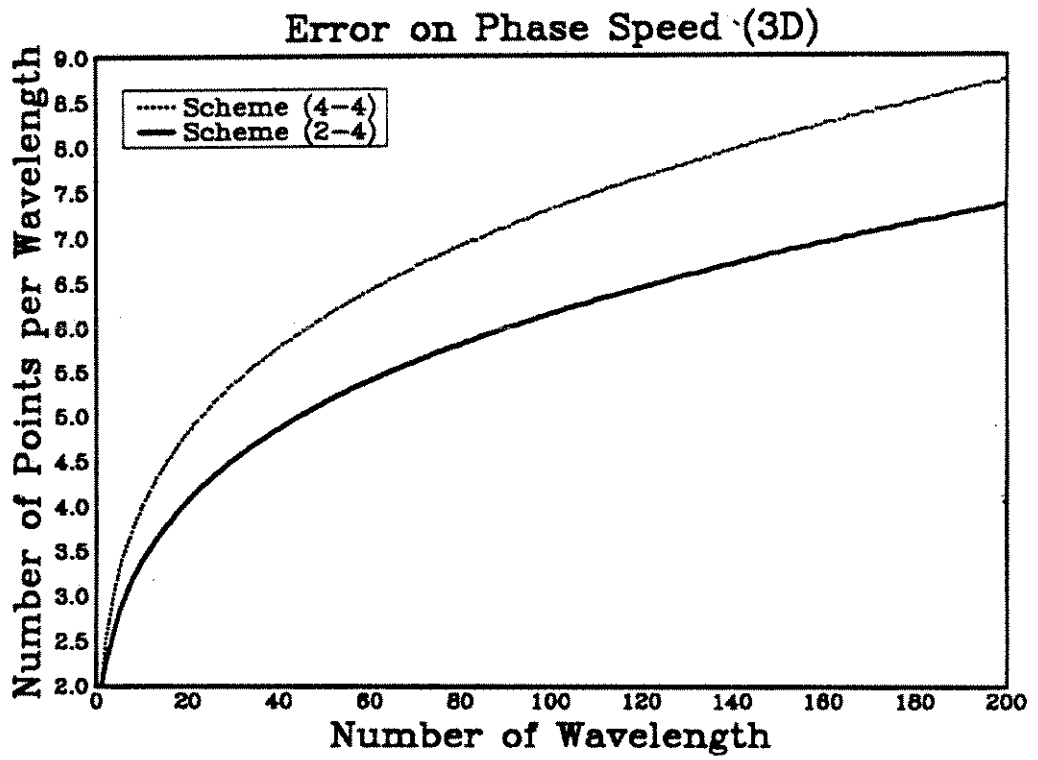
Lorsque l'on compare le nombre de points par longueur d'onde pour l'ordre 2 en temps et pour l'ordre 4 en temps, il est clair que l'ordre 4 en temps requière plus de points par longueur d'onde. Le fait d'ajouter la partie d'ordre 4 en espace à l'équation détériore donc la précision en espace.

Lorsque l'on compare le nombre de points par période on constate qu'asymptotiquement le schéma (4-4) est moins coûteux que le schéma (2-4), ce qui paraît naturel. Cependant le gain est assez faible et n'est pas comme on pourrait s'y attendre, quadratique. Ceci s'explique par le comportement assez différent des erreurs sur la vitesse de phase et de groupe, pour les deux schémas.

Nous illustrons ceci en donnant les courbes de nombre de points par longueur d'onde et du nombre de points par période pour ces deux schémas en 2D et 3D.



2.5. COÛT INFORMATIQUE



CHAPITRE 2. ANALYSE DE L'ERREUR DE DISPERSION

Schéma	(2-4)	(4-4)
$p = \frac{c\Delta t}{h}$	0.282	0.606
$H = \frac{h}{\lambda}$	0.175	0.135
$G = \frac{\Delta t}{T}$	$4.93 \cdot 10^{-2}$	$8.18 \cdot 10^{-2}$
N_x	286	370
N_t	2029	1222
N_{op}	25	147
N_{op} Totales	$0.413 \cdot 10^{10}$	$2.46 \cdot 10^{10}$
Temps CPU (s)	42	247
Mémoire (mots)	$0.16 \cdot 10^6$	$0.27 \cdot 10^6$
Temps / Temps ordre 2	1	5.88
Mémoire / Mémoire ordre 2	1	1.69

Comparaison des schémas (2-4) et (4-4) (2D)
Déphasage inférieur à $\pi/2$

2.5. COÛT INFORMATIQUE

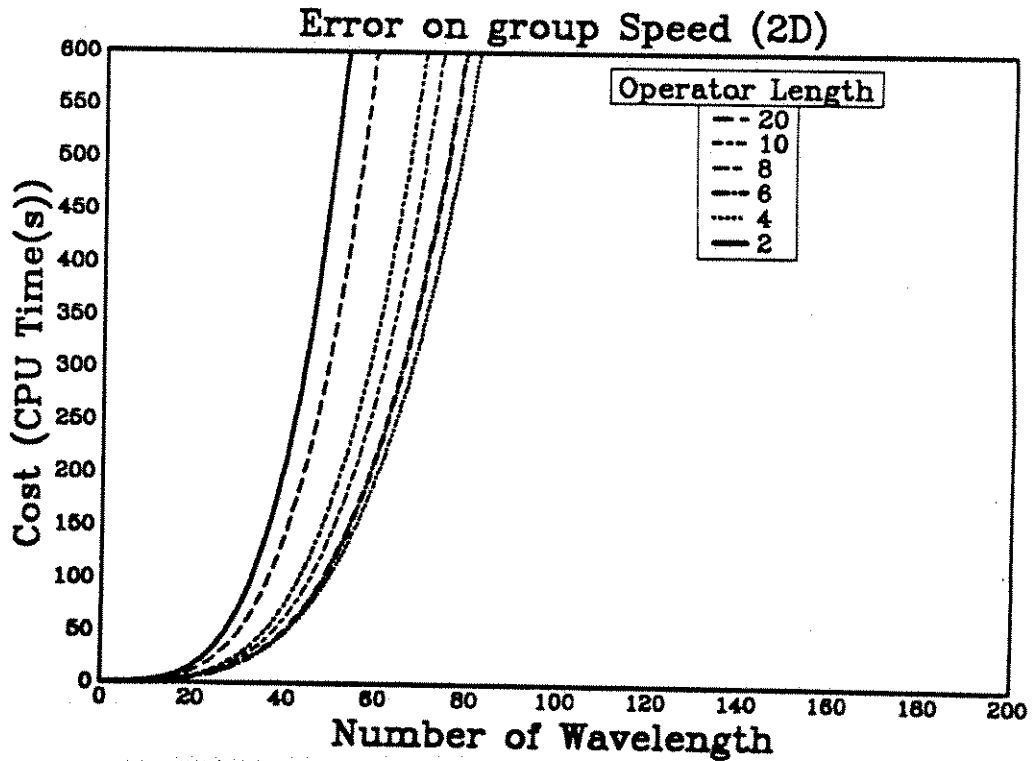
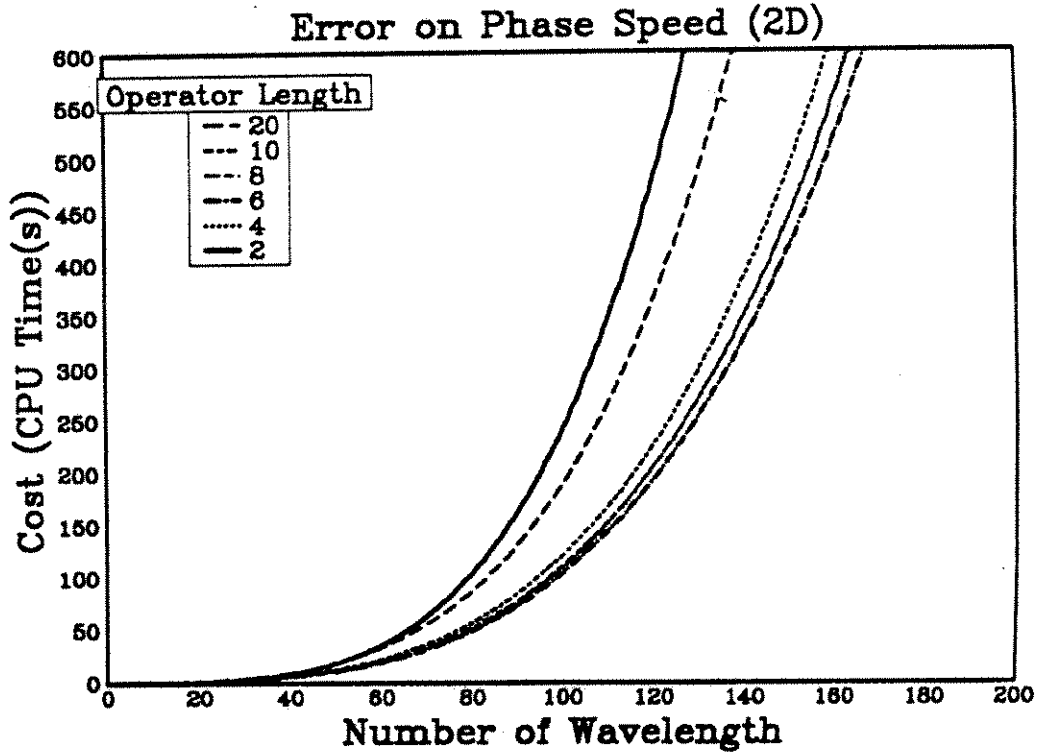
Schéma	(2-4)	(4-4)
$p = \frac{c\Delta t}{h}$	0.230	0.495
$H = \frac{h}{\lambda}$	0.161	0.136
$G = \frac{\Delta t}{T}$	$3.71 \cdot 10^{-2}$	$6.74 \cdot 10^{-2}$
N_x	310	366
N_t	2693	1483
N_{op}	25	401
N_{op} Totales	$2.89 \cdot 10^{12}$	$2.94 \cdot 10^{13}$
Temps CPU (s)	$2.89 \cdot 10^4$	$2.94 \cdot 10^5$
Mémoire (mots)	$5.96 \cdot 10^7$	$9.08 \cdot 10^7$
Temps / Temps ordre 2	1	10.17
Mémoire / Mémoire ordre 2	1	1.52

Comparaison des schémas (2-4) et 4-4) (3D)
Déphasage inférieur à $\pi/2$

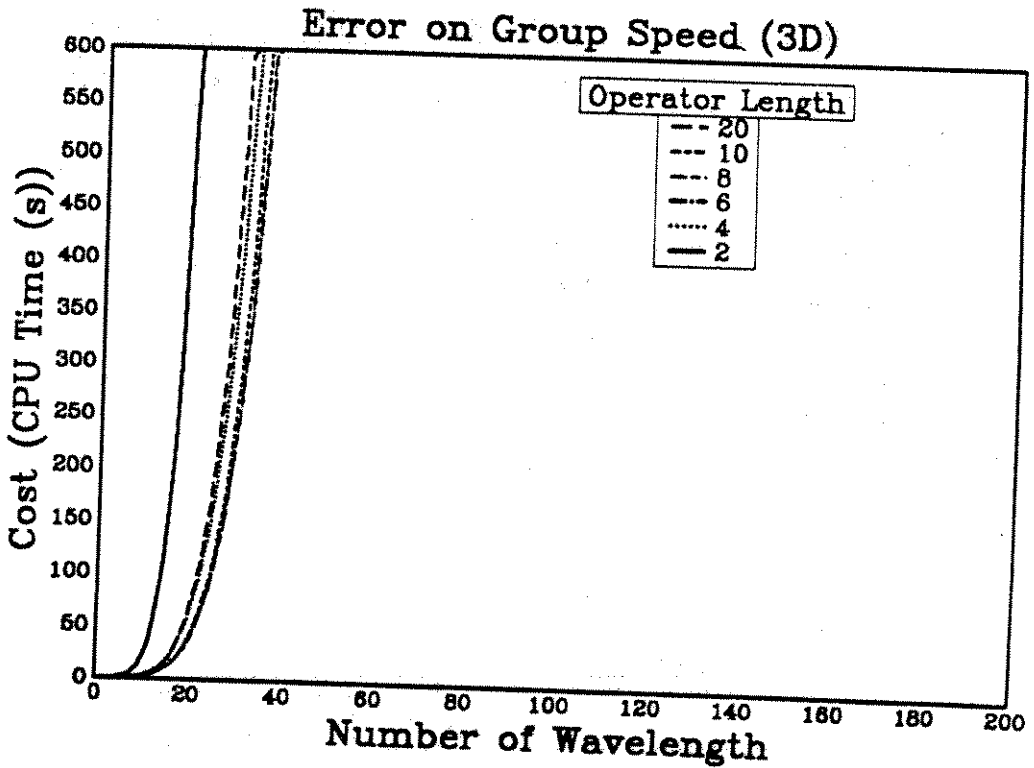
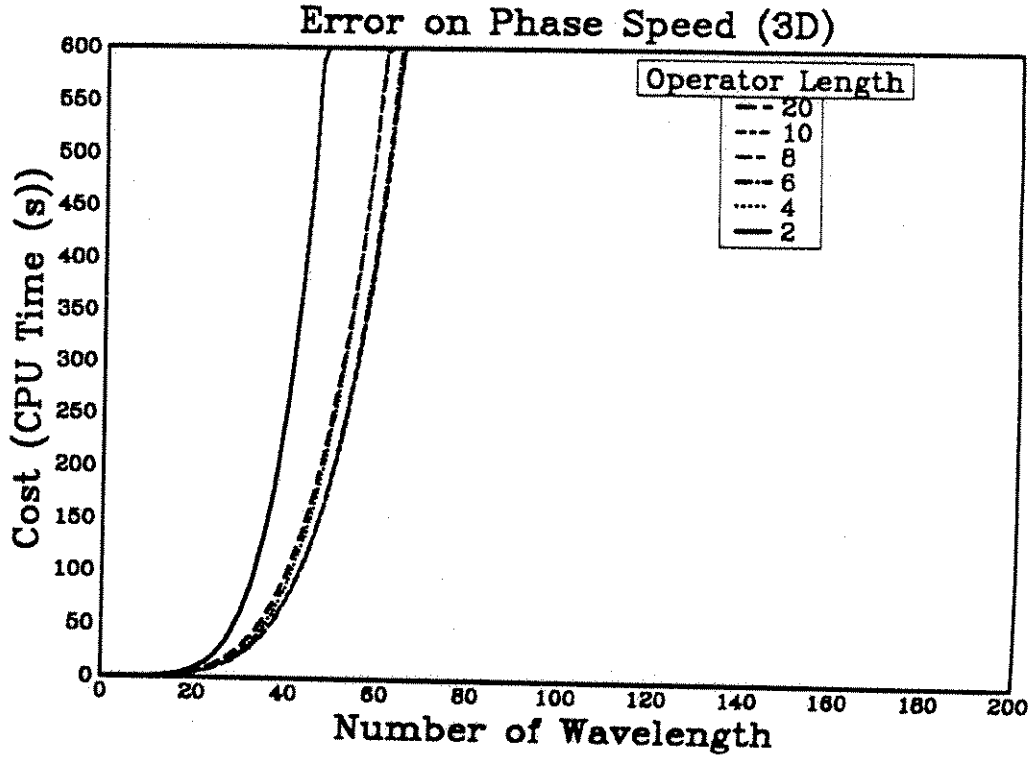
CHAPITRE 2. ANALYSE DE L'ERREUR DE DISPERSION

Nous synthétisons maintenant le choix de p et de H en présentant les courbes de temps calcul sur le CRAY-XMP 14 pour les différents opérateurs. Nous avons estimé les performances du CRAY à 100 Megaflops.

2.5. COÛT INFORMATIQUE

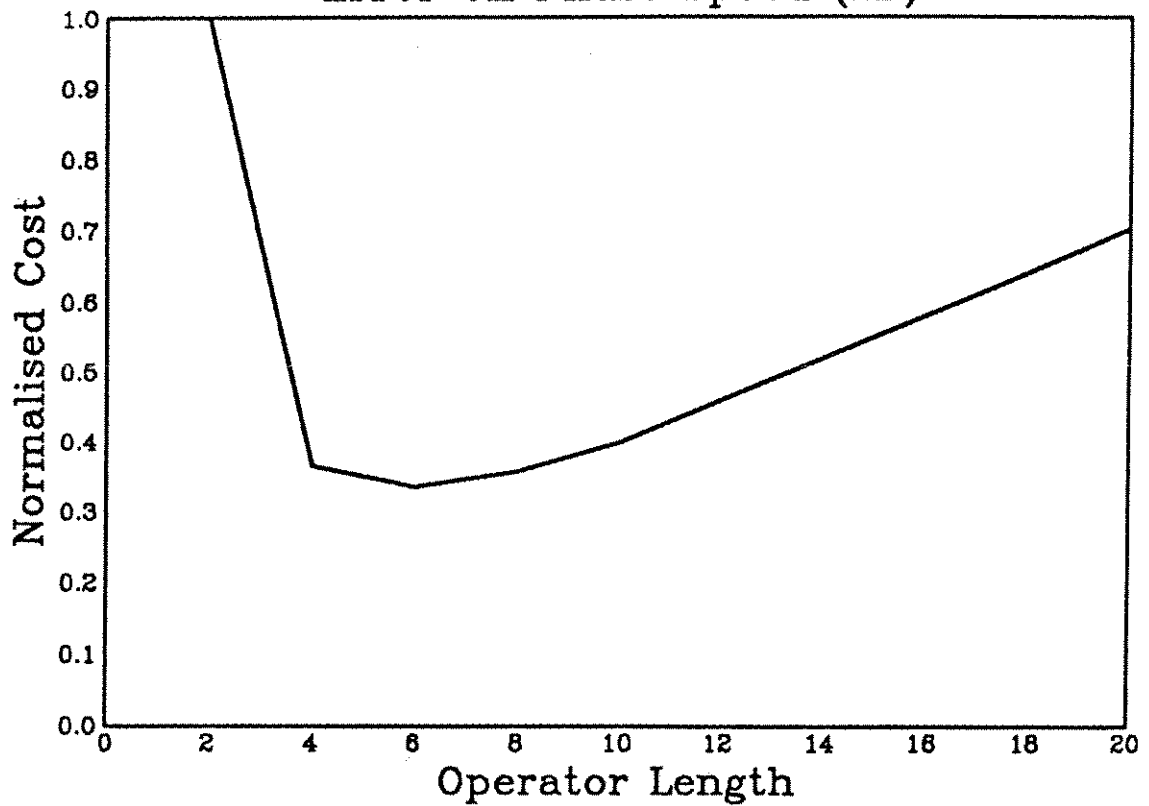


CHAPITRE 2. ANALYSE DE L'ERREUR DE DISPERSION

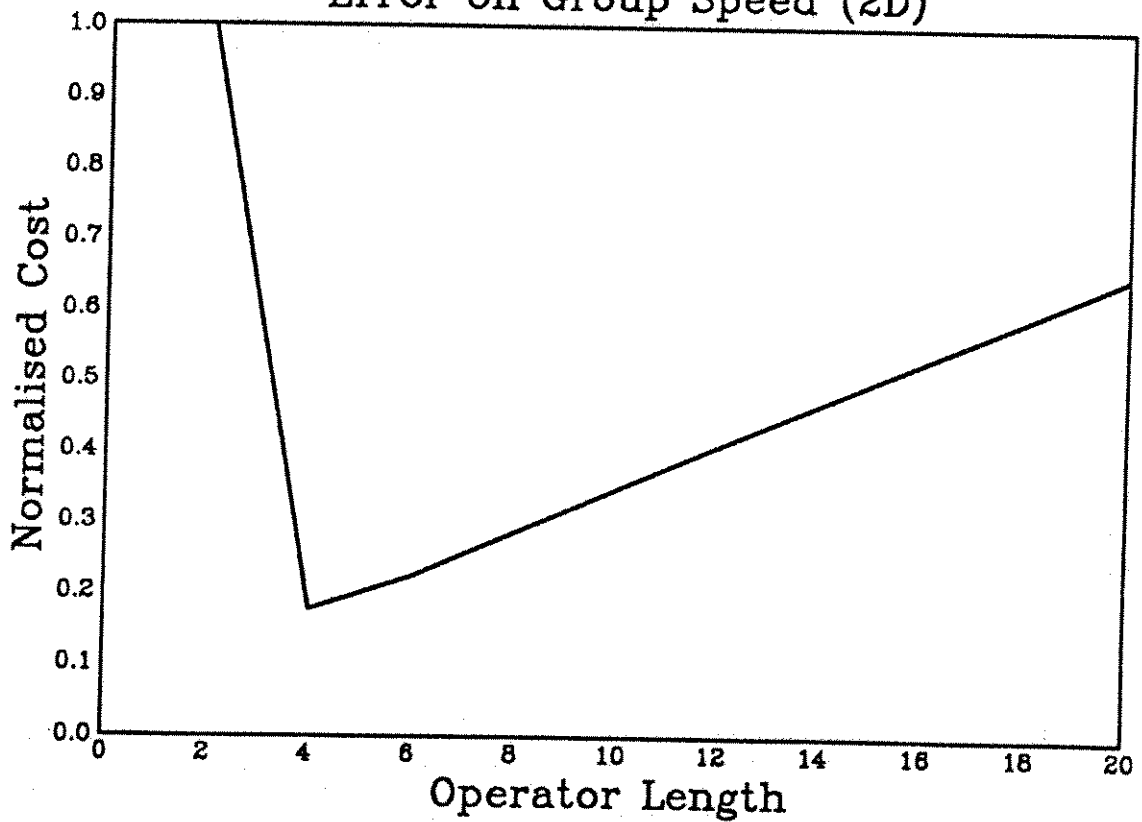


2.5. COÛT INFORMATIQUE

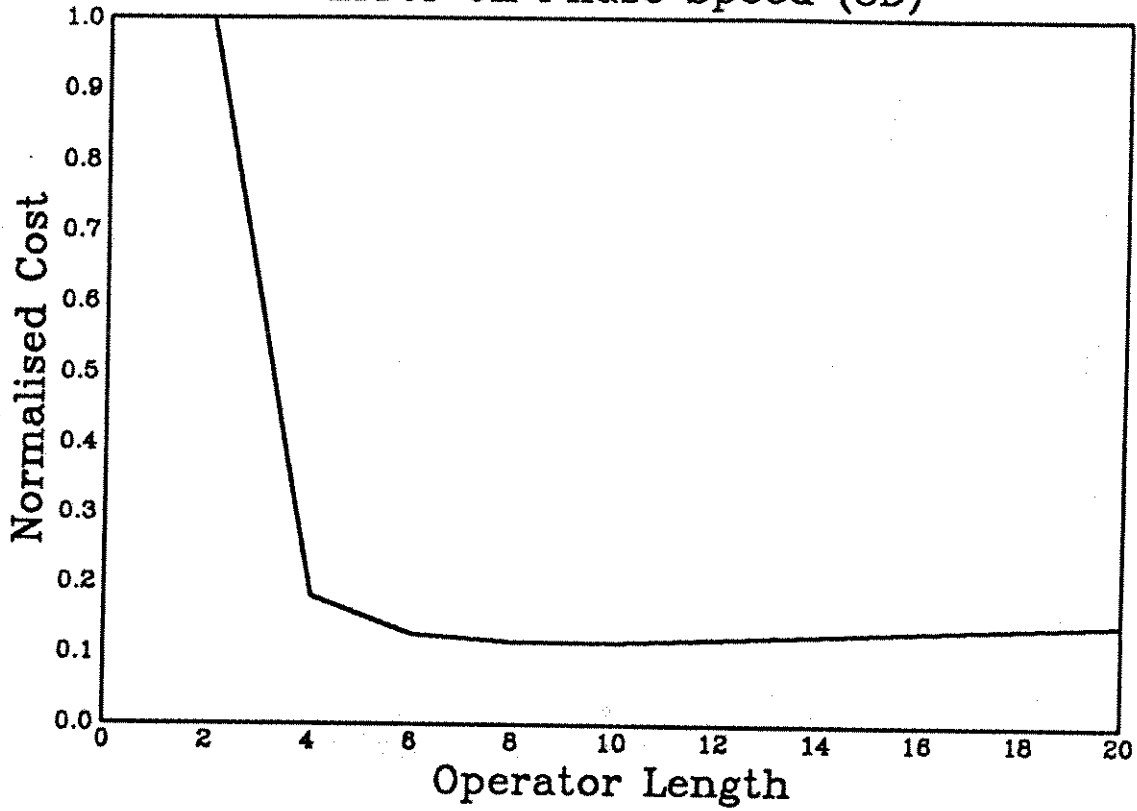
Error on Phase Speed (2D)



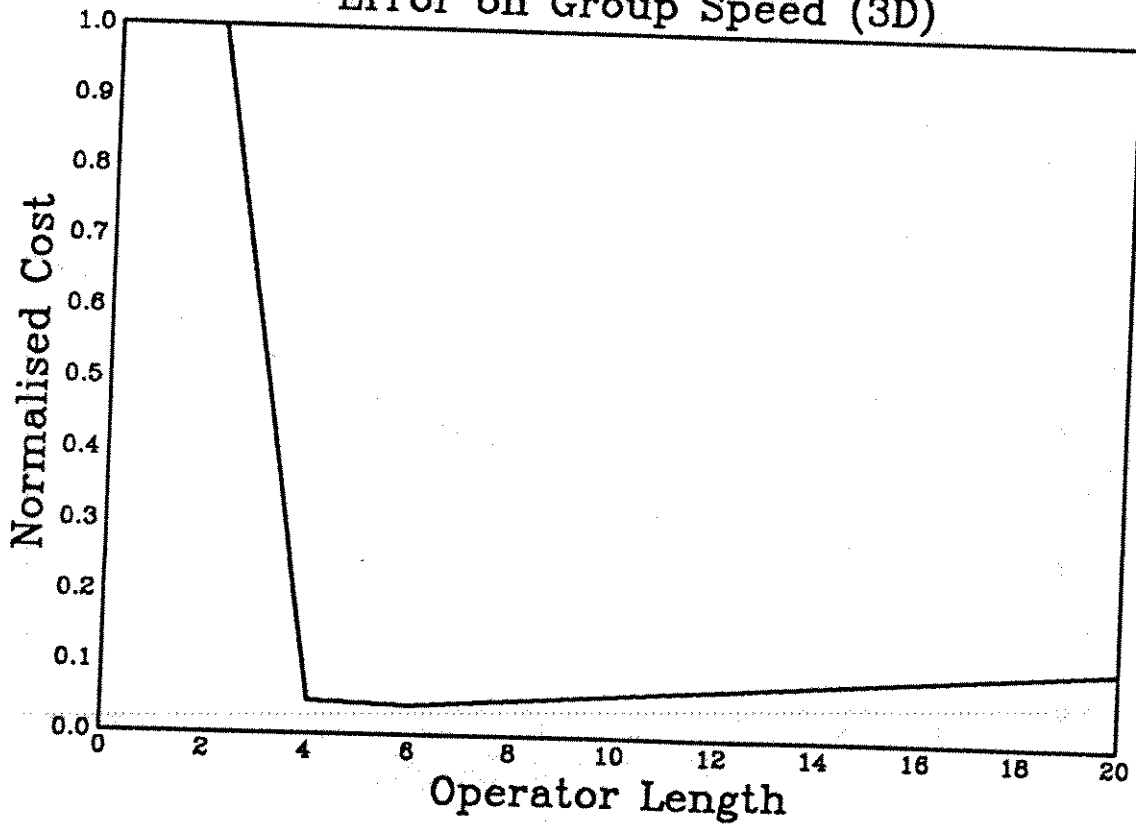
Error on Group Speed (2D)



Error on Phase Speed (3D)



Error on Group Speed (3D)



2.6. OPÉRATEUR DÉFINI PAR TRANSFORMATION DE FOURIER

2.6 Opérateur défini par transformation de Fourier

2.6.1 Définition de l'opérateur

On utilise la relation suivante :

$$F \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = ik_x F u$$

Ainsi l'opérateur de dérivation discrète A_h^3 est défini par :

$$A_h^3 u(x_j) = F^{-1} o M o F$$

où les transformations de Fourier sont discrètes (FFT), et M est la multiplication par ik_x . A_h^3 est d'ordre infini.

On définit l'opérateur B_h^3 , approximation de la dérivée seconde par $B_h^3 = {}^t A_h^3 o A_h^3$.
On a donc :

$$B_h^3 = F^{-1} o M o F o F^{-1} o M o F = F^{-1} o M^2 o F$$

où M^2 est la multiplication par $-k^2$.

En faisant une différence finie d'ordre 2 en temps, on obtient l'équation discrétisée suivante :

$$\frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{c^2 \Delta t^2} - B_h^3 u_j^n = 0 \quad (2.11)$$

2.6.2 Erreur sur la vitesse de phase

Le symbole de B_h^3 est simple à calculer. On a : $B_h^3(k) = -k^2$

On obtient alors facilement la relation de dispersion :

$$\sin\left(\frac{\omega \Delta t}{2}\right) = \frac{c \Delta t}{2} k$$

d'où

$$\omega = \omega(k, \Delta t) = \frac{2}{\Delta t} \arcsin\left(\frac{c \Delta t}{2} k\right)$$

On calcule alors l'erreur relative de phase $E_\varphi = \frac{c_\varphi - c}{c}$. On a

$$E_\varphi(k, \Delta t) = \frac{2}{kc \Delta t} \arcsin\left(\frac{c \Delta t}{2} k\right) - 1$$

CHAPITRE 2. ANALYSE DE L'ERREUR DE DISPERSION

En utilisant les variables adimensionnelles suivantes :

$$p = \frac{c\Delta t}{h} \quad H = \frac{h}{\lambda}$$

on peut encore écrire E_φ sous la forme :

$$E_\varphi(H, p) = \frac{1}{\pi H p} \arcsin(\pi H p) - 1$$

En faisant un développement de E_φ on obtient :

$$E_\varphi(k, \Delta t) = \frac{(kc\Delta t)^2}{24} + o((kc\Delta t)^4)$$

On remarque qu'il n'intervient que l'erreur de discrétisation en temps (on s'y attendait puisque la dérivation en espace est exacte). On obtient les courbes de dispersion ci-dessous.

Remarques :

i) En 2D la relation de dispersion devient :

$$\sin\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right) = \frac{c\Delta t}{2} \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$$
$$k_1 = k \cos(\theta) \quad k_2 = k \sin(\theta)$$

on obtient donc la même relation de dispersion

$$\sin\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right) = \frac{c\Delta t}{2} k$$

ii) On a le même résultat en 3D. Ainsi le calcul des coûts calculs en 2D et 3D sera simplifié par rapport au cas des différences finies, puisque les courbes de dispersion unidimensionnelles donne le paramètre p recherché.

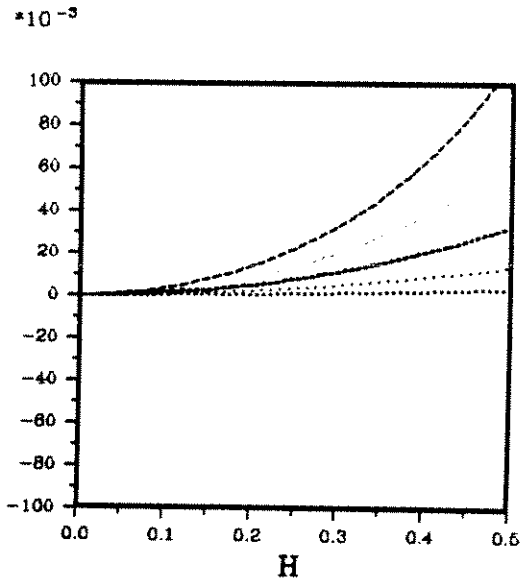
iii) La condition de stabilité du schéma en dimension n s'écrit :

$$\frac{c\Delta t}{h} \leq \frac{2}{\pi\sqrt{n}}$$

Ceci se déduit du théorème de Nyquist (cf [Kos])

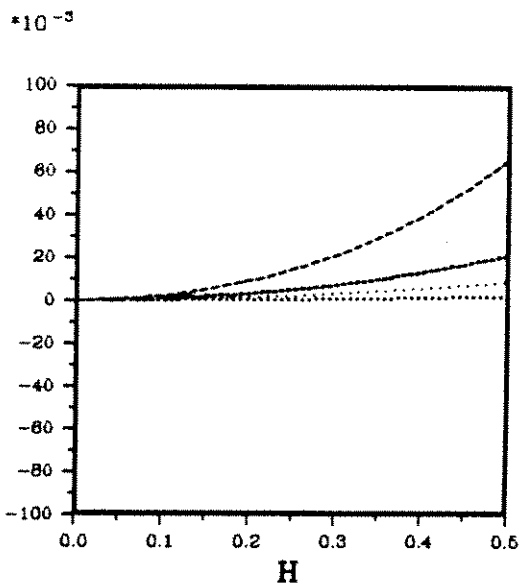
2.6. OPÉRATEUR DÉFINI PAR TRANSFORMATION DE FOURIER

Error on Phase Speed



$P_{max} = 0.450$
 Dimension = 2

$P = cdt/h$	
.....	$P = 0.20 \cdot P_{max}$
....	$P = 0.40 \cdot P_{max}$
- - - -	$P = 0.60 \cdot P_{max}$
- - - -	$P = 0.80 \cdot P_{max}$
- -	$P = 1.00 \cdot P_{max}$



$P_{max} = 0.368$
 Dimension = 3

2.6.3 Erreur sur la vitesse de groupe

La relation de dispersion s'écrit :

$$\sin\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right) = \frac{c\Delta t}{2}k$$

On calcule alors l'erreur relative de groupe en dérivant la relation de dispersion par rapport à k ce qui donne :

$$E_{gr}(k, \Delta t) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{c\Delta t}{2}k\right)^2}} - 1$$

En utilisant les variables :

$$p = \frac{c\Delta t}{h} \quad H = \frac{h}{\lambda}$$

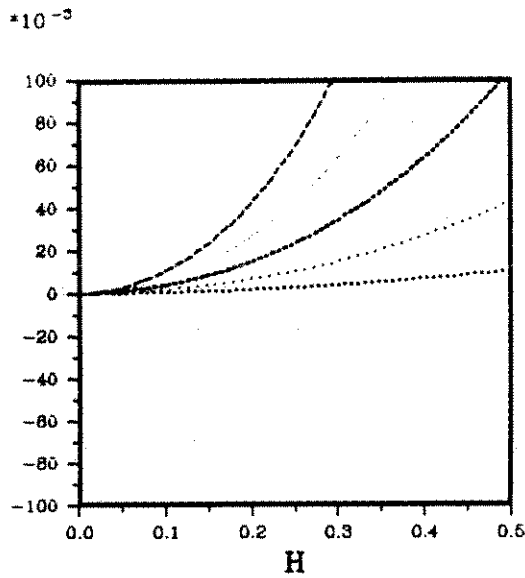
on peut encore écrire E_{gr} sous la forme :

$$E_{gr}(H, p) = \frac{1}{\sqrt{1 - (p\pi H)^2}} - 1$$

On obtient les courbes de ci-dessous.

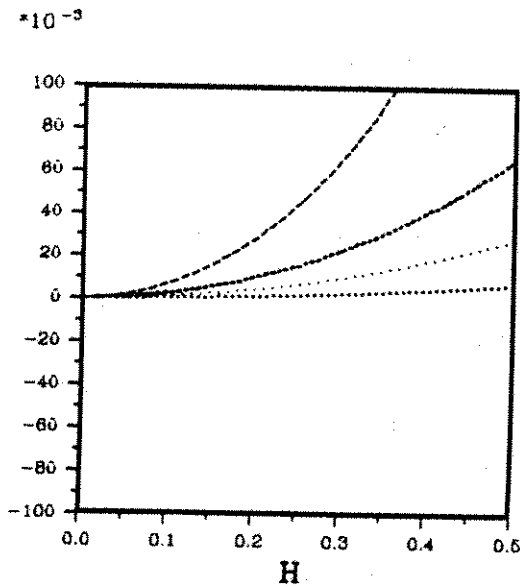
2.6. OPÉRATEUR DÉFINI PAR TRANSFORMATION DE FOURIER

Error on Group Speed



$P_{max} = 0.450$
 Dimension = 2

$P = cdt/h$	
.....	$P = 0.20 \cdot P_{max}$
....	$P = 0.40 \cdot P_{max}$
.....	$P = 0.60 \cdot P_{max}$
---	$P = 0.80 \cdot P_{max}$
--	$P = 1.00 \cdot P_{max}$



$P_{max} = 0.368$
 Dimension = 3

2.6.4 Coût informatique

Le nombre d'opérations C d'une simulation numérique de l'équation des ondes, avec l'opérateur B_h^3 défini ci-dessus, est donné par :

$$C = 2n (3 \log_2(N_x) + 2) N_x^n N_t$$

car on calcule N_t itérations; pour chaque itération on fait $2n$ dérivations premières pour calculer les dérivées secondes.

Pour chaque dérivation on fait N_x^{n-1} fois le nombre d'opérations pour calculer $F^{-1}oikoF$. Enfin le nombre d'opérations nécessaires au calcul de $F^{-1}oikoF$ est $3N_x \log_2 N_x + 2$.

Si l'on suppose que le domaine est de taille A^n et que l'on propage l'onde le temps T d'un aller-retour au fond du modèle (c'est à dire $T = 2A/c$) alors on peut écrire :

$$N_x = \frac{A}{h} \quad N_t = 2 \frac{A}{h} \frac{h}{c \Delta t}$$

On note j le nombre de longueurs d'onde parcourues et p le paramètre de Courant (c'est à dire $p = c \Delta t / h$). Alors puisque $A = j \lambda / 2$ et que $H = 1/2$, le coût devient une fonction de j et p :

$$C = 6n (j)^n (\log_2(j) + 2) \frac{2j}{p}$$

La mémoire M nécessaire à une simulation est donnée par :

$$M = (N_x)^n = 2 * j^n$$

On veut maintenant choisir p de manière à minimiser le coût calcul et la place mémoire.

Pour cela comme précédemment nous allons relier l'erreur de phase et l'erreur de groupe, au nombre j de longueurs d'onde parcourues. Puis ensuite, à l'aide de l'erreur de phase et de l'erreur de groupe, relier p à j . On obtiendra ainsi C en fonction de j , nombre de longueurs d'onde parcourues.

La même analyse que précédemment conduit aux critères :

$$|E_\varphi| \leq \frac{1}{2nj} \quad |E_{gr}| \leq \frac{\alpha}{2\pi j}$$

Il reste maintenant à choisir p , de façon à ce qu'on ait, pour un modèle donné

2.6. OPÉRATEUR DÉFINI PAR TRANSFORMATION DE FOURIER

(c'est à dire un j_{max} donné), $|E_{\varphi}| \leq 1/2nj_{max}$ et $|E_{gr}| \leq \alpha/(2\pi j_{max})$.

Pour cela nous choisissons le p le plus grand, c'est à dire celui qui vérifie

$$E_{\varphi}(p, 0.5) = E_0 = 1/2nj_{max}$$

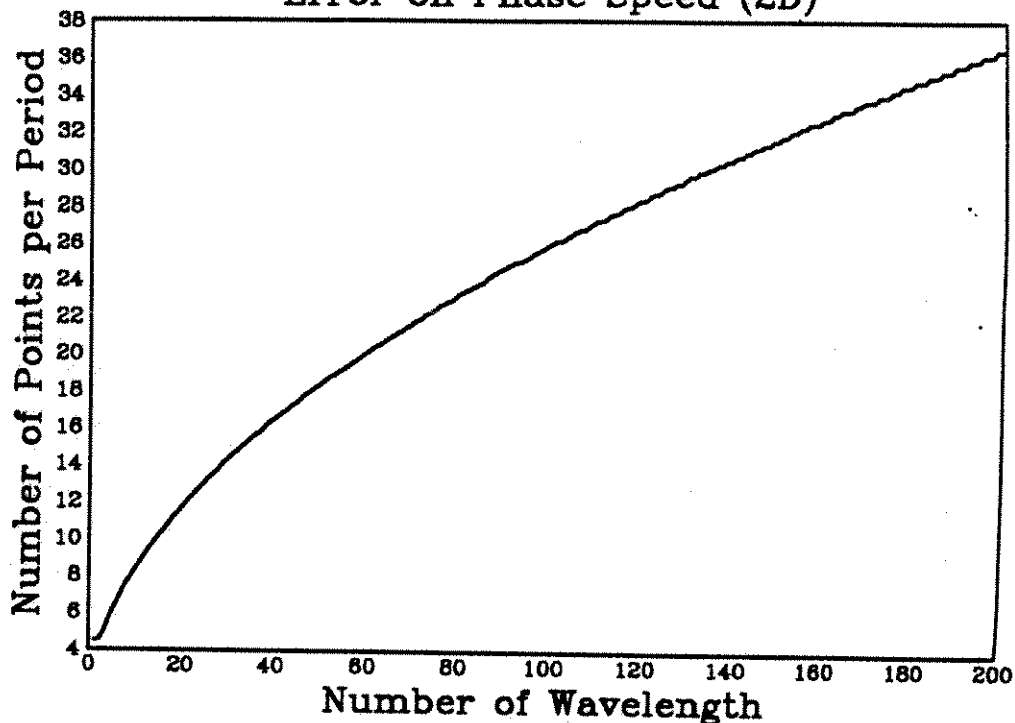
et

$$E_{gr}(p, 0.5) = E_1 = \alpha/(2\pi j_{max})$$

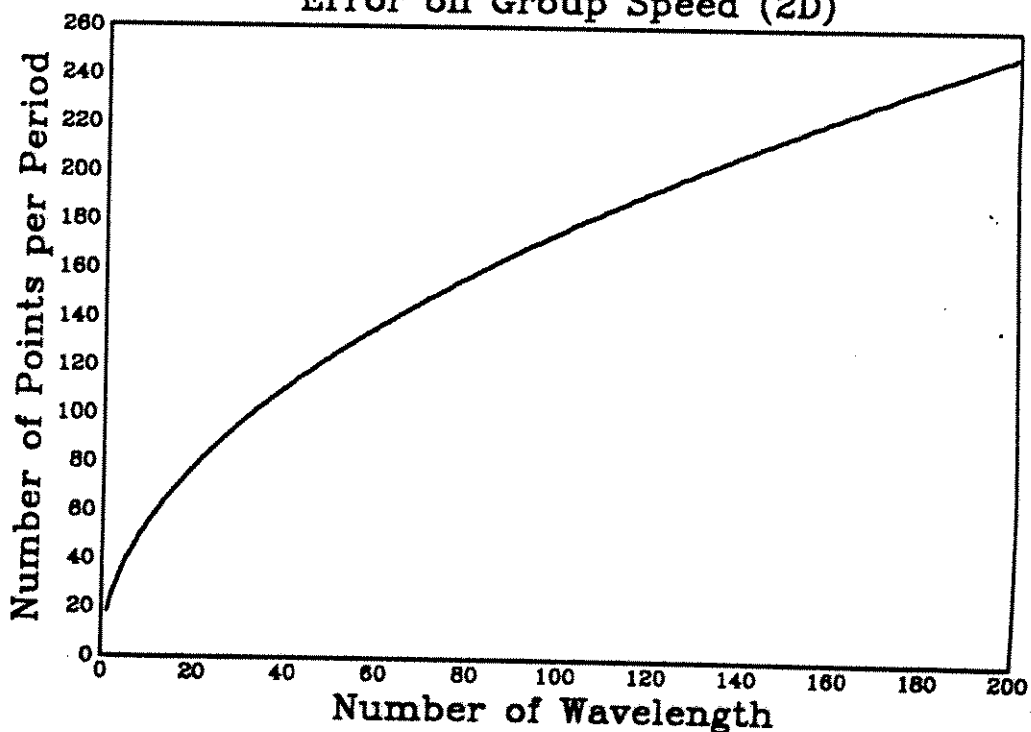
Nous donnons ci-dessous les courbes du nombre de points par longueur période pour les deux différents critères. Il est intéressant de noter que les courbes sont semblables pour un même critère en 2D et en 3D. Ceci s'explique par le fait que la relation de dispersion est la même en 2D et en 3D. La seule différence est que la condition de stabilité est plus sévère en 3D, et donc le p_{max} en 3D sera inférieur au p_{max} en 2D. C'est ce qui explique que l'on observe une partie constante au début de la courbe pour l'erreur sur la vitesse de phase, qui soit plus importante en 3D qu'en 2D. Cette partie constante signifie en effet que $p = p_{max}$ est acceptable; Il le sera d'autant plus longtemps qu'il sera petit.

Ensuite nous donnons les courbes de temps calcul sur le CRAY-XMP 14. Nous avons vérifié numériquement que pour les FFT le CRAY-XMP 14 avait un rendement d'à peu près 60 megaflops.

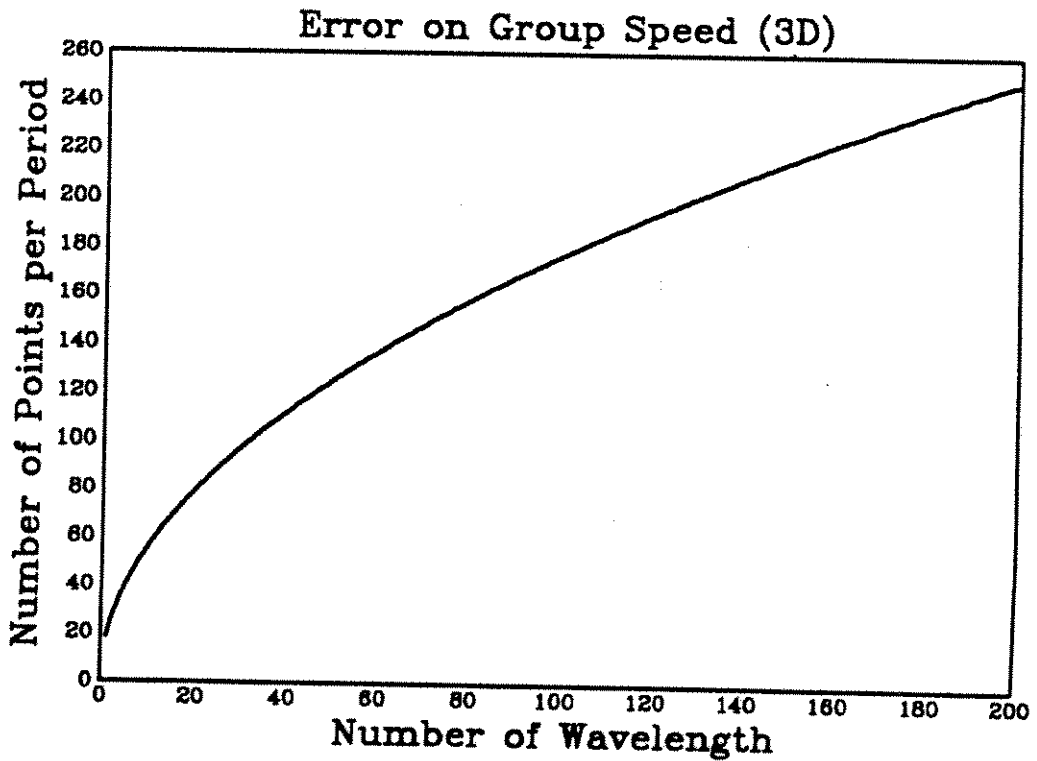
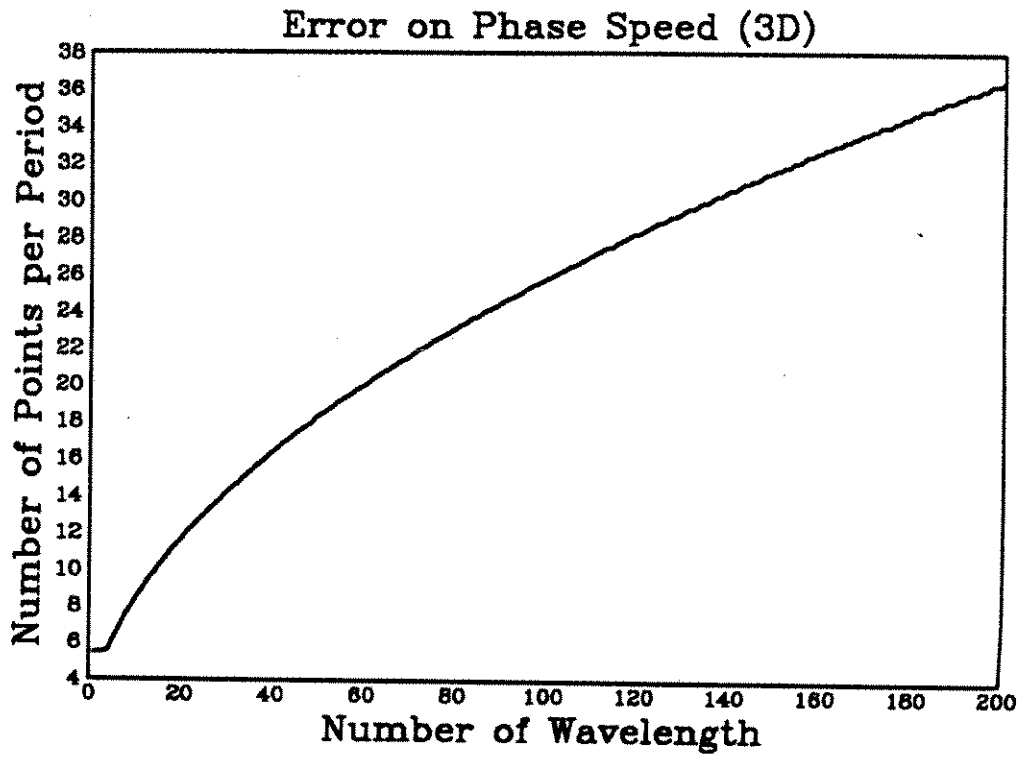
Error on Phase Speed (2D)



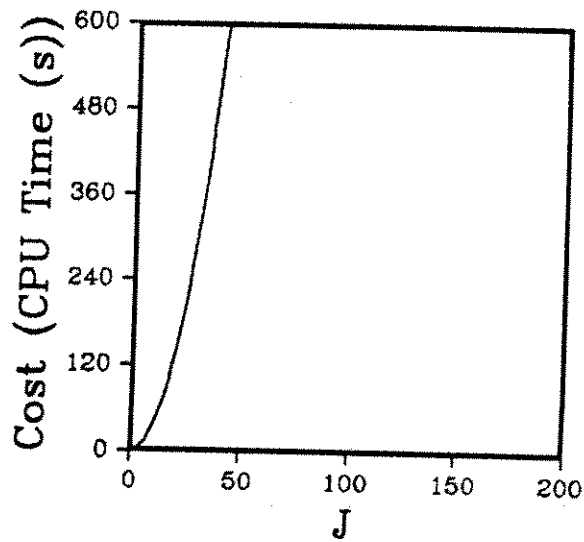
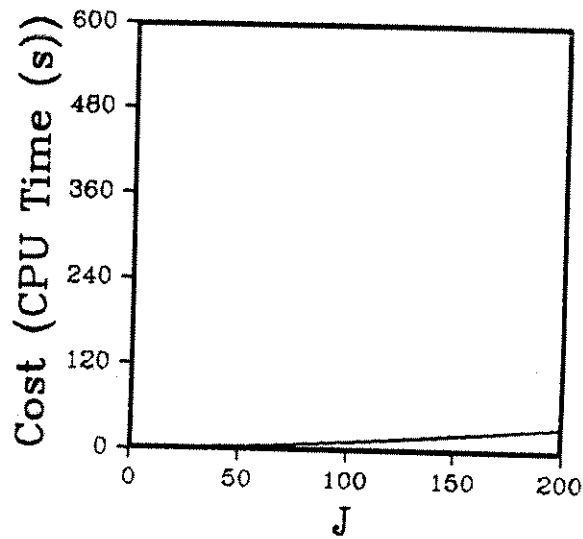
Error on Group Speed (2D)



2.6. OPÉRATEUR DÉFINI PAR TRANSFORMATION DE FOURIER

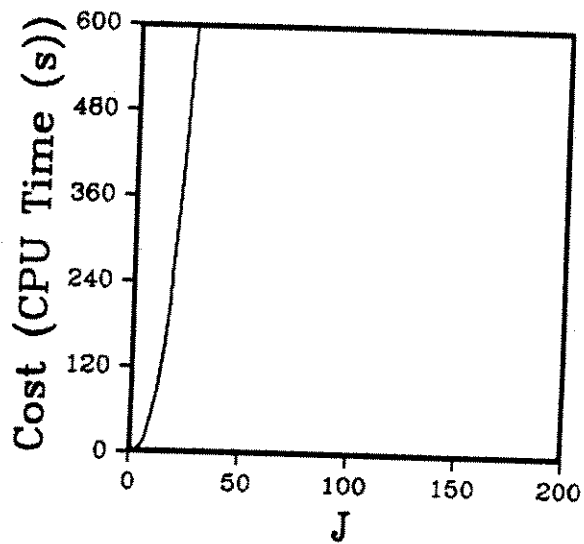
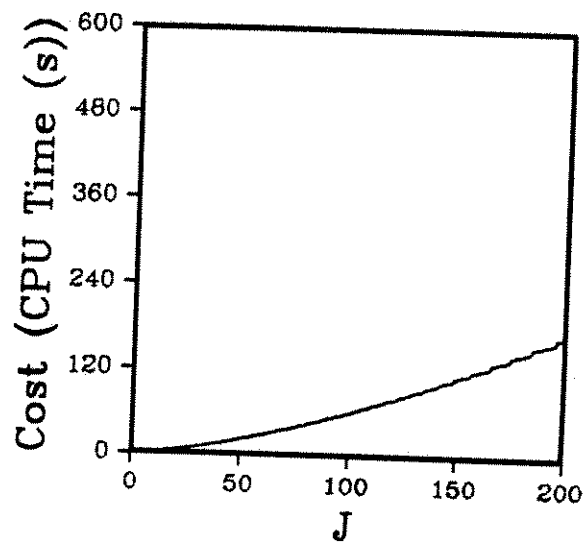


Error on Phase Speed



2.6. OPÉRATEUR DÉFINI PAR TRANSFORMATION DE FOURIER

Error on Group Speed



2.7 Conclusion

L'étude de l'erreur de dispersion totale en milieu homogène, nous a permis de mettre en évidence les points suivants :

i) Tout d'abord nous avons montré que les erreurs de discrétisation en espace et en temps sont de signes opposés, et tendent donc à se compenser. L'erreur se comporte totalement différemment pour les schémas d'ordre deux ou d'ordre quatre en temps, ainsi que pour le schéma (2-2) et les schémas d'ordre 2 en temps et d'ordre plus élevé en espace. Ceci explique le gain considérable de temps calcul et de place mémoire lorsque l'on passe d'un schéma (2-2) à un schéma (2-4).

ii) Ensuite nous avons étudié les deux paramètres importants à régler lors d'une simulation numérique, à savoir le nombre de points par longueur d'onde minimale (qui donne le pas d'espace h) et le nombre de points par période minimale (qui donne le pas de temps Δt).

En ce qui concerne le pas d'espace plus l'opérateur est d'ordre élevé en espace et plus le pas d'espace peut être choisi grand, pour une précision donnée.

En ce qui concerne le pas de temps la hiérarchie des opérateurs n'est plus respectée, et l'opérateur qui, pour une précision donnée, autorise le pas de temps le plus grand est l'opérateur d'ordre 4. C'est celui pour lequel l'erreur en temps et l'erreur en espace se compensent le mieux. A l'inverse des opérateurs très précis en espace (ordre 20 et plus ou opérateur de Fourier discret) imposent un pas de temps très petit, l'erreur provenant essentiellement de la dispersion en temps.

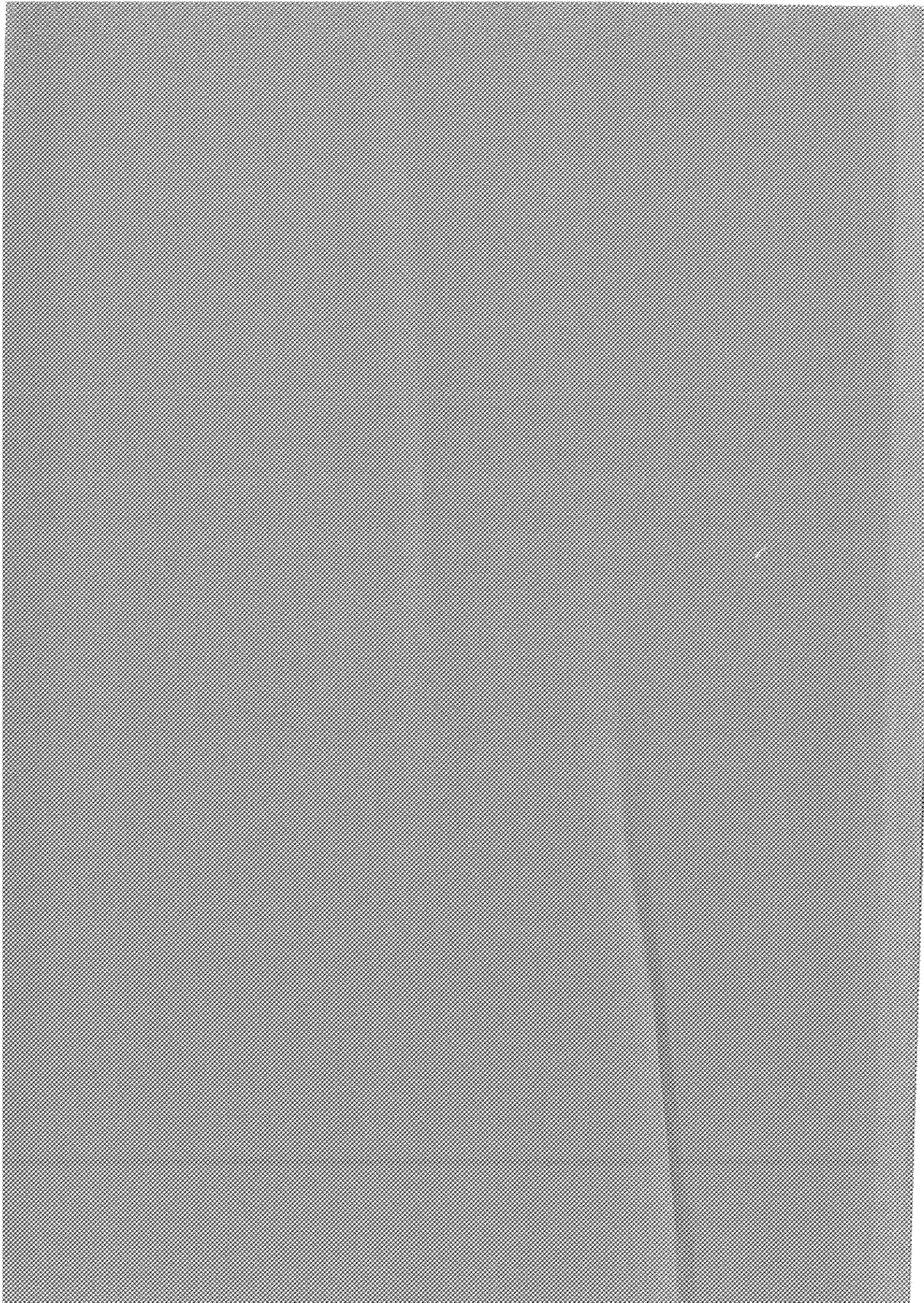
iii) Enfin pour des raisons de coût informatique et également de simplicité d'implémentation nous préconisons l'opérateur d'ordre 4 pour lequel nous pouvons donner la règle pratique suivante.

Afin de régler le pas d'espace et le pas de temps lors des simulations numériques, un ordre de grandeur pour le schéma (2-4) est 6 ou plus points par longueur d'onde minimale et 20 ou plus points par période minimale.

iv) Pour une même précision donnée, la comparaison entre schéma (2-4) et schéma (4-4) montre que le surcoût calcul engendré par le schéma (4-4) ne se trouve pas compensé par une diminution significative du pas de temps. Il en résulte que bien que plus précis le schéma (4-4) est nettement plus coûteux que le schéma (2-4).

PARTIE II

**SCHEMAS NUMERIQUES POUR L'EQUATION
DES ONDES EN MILIEUX HETEROGENES**



Chapitre 3

Schémas Numériques pour l'Equation des Ondes en Milieu Hétérogène

Nous allons présenter une famille de schémas numériques, pour l'équation des ondes acoustiques en milieu hétérogène, basés sur les opérateurs du chapitre précédent.

L'avantage de cette approche est qu'elle reprend l'idée variationnelle, dans le sens où elle ne fait intervenir que les dérivées premières, qui sont naturelles à l'équation continue. Ceci a pour conséquence de respecter implicitement l'hétérogénéité du milieu, et de fournir des schémas stables quelque soit le degré d'hétérogénéité du milieu.

L'obtention des schémas numériques que nous proposons, peut se voir comme une généralisation de la méthode de l'identité intégrale (cf [Mar1]). En effet, considérons deux maillages de pas h , décalés de $h/2$, le premier défini sur les points $x_j = j \cdot h$; l'autre défini sur les points $x_{j+1/2} = x_j + h/2$. En intégrant l'équation des ondes sur la maille $[x_{j-1/2}; x_{j+1/2}]$ on obtient :

$$\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \frac{1}{K} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx - \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx = 0$$

soit encore

$$\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \frac{1}{K} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx = \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial x} \right]_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} = \frac{1}{\rho_{i-1/2}} \frac{\partial u}{\partial x}(x_{j-1/2}) - \frac{1}{\rho_{i+1/2}} \frac{\partial u}{\partial x}(x_{j+1/2})$$

Il reste maintenant à choisir une formule d'intégration numérique, afin d'évaluer l'intégrale à gauche du signe égal. La seule formule d'intégration numérique qui donne un schéma explicite est la formule du point milieu, à savoir :

CHAPITRE 3. SCHÉMAS NUMÉRIQUES EN MILIEU HÉTÉROGÈNE

$$\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \frac{1}{K} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx = h \cdot \frac{1}{K} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \left(\frac{x_{j-1/2} + x_{j+1/2}}{2} \right) = h \cdot \frac{1}{K} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j)$$

Par une différence finie d'ordre 2 en temps, on obtient le schéma :

$$\frac{1}{K_j} \frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\Delta t^2} = \frac{1}{h} \left\{ \frac{1}{\rho_{i-1/2}} \frac{\partial u}{\partial x}(x_{j-1/2}) - \frac{1}{\rho_{i+1/2}} \frac{\partial u}{\partial x}(x_{j+1/2}) \right\}$$

Sous cette forme, on voit qu'en choisissant l'approximation A_h d'ordre 2 de la dérivée première, c'est à dire :

$$A_h u(x_{j+1/2}) = \frac{u_{j+1} - u_j}{h} = \frac{\partial u}{\partial x}(x_{j+1/2}) + o(h^2)$$

on obtient le schéma :

$$\frac{1}{K_j} \frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\Delta t^2} + {}^t A_h \left(\frac{1}{\rho} A_h \right) u_j^n = 0$$

On peut généraliser cette méthode à un ordre d'approximation quelconque en espace. En intégrant l'équation des ondes sur différentes mailles, il suffit de faire une combinaison linéaire des intégrales obtenues de façon à obtenir l'ordre d'approximation voulu.

Pour obtenir par exemple une approximation d'ordre 4 on cherche α_1 et α_2 tels que

$$\frac{1}{h} \left(\alpha_1 \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \frac{1}{K} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx + \alpha_2 \int_{x_{j-3/2}}^{x_{j+3/2}} \frac{1}{K} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx \right) = \frac{1}{K} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j) + o(h^4)$$

ce qui donne $\alpha = \frac{9}{8}$ et $\beta = -\frac{1}{8}$

3.1. CAS UNIDIMENSIONNEL HÉTÉROGÈNE

3.1 Cas Unidimensionnel Hétérogène

3.1.1 Schémas d'ordre 2 en temps et 2L en espace

Introduction et Notations

Nous cherchons à discrétiser l'équation :

$$\frac{1}{K(x)} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho(x)} \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0 \quad (3.1)$$

où les fonctions K et ρ vérifient :

$$\begin{aligned} K &\in L^2(R) & \rho &\in L^2(R) \\ 0 < K_m &\leq K(x) \leq K_M \\ 0 < \rho_m &\leq \rho(x) \leq \rho_M \end{aligned}$$

Pour cela on introduit les espaces fonctionnels suivants :

$$\begin{aligned} L_o^2 &= \left\{ \varphi \in L^2(R) / \varphi = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \varphi_i 1_{[(i-1/2)h, (i+1/2)h]} \right\} \\ L_*^2 &= \left\{ \varphi \in L^2(R) / \varphi = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \varphi_{i+1/2} 1_{[ih, (i+1)h]} \right\} \end{aligned}$$

où h le pas de discrétisation en espace, muni des produits scalaires suivants :

$$(f, g)_{L_o^2} = (f, g)_o = h \sum_{i=-\infty}^{+\infty} f_i g_i$$

$$(f, g)_{L_*^2} = (f, g)_* = h \sum_{i=-\infty}^{+\infty} f_{i+1/2} g_{i+1/2}$$

L_o^2 est l'ensemble des fonctions en escalier de $L^2(R)$ définies aux points o et L_*^2 est l'ensemble des fonctions en escalier de $L^2(R)$ définies aux points $*$.

$$\begin{array}{ccccccccc} o & \text{---} & * & \text{---} & o & \text{---} & * & \text{---} & o \\ i-1 & & i-1/2 & & i & & i+1/2 & & i+1 \end{array}$$

CHAPITRE 3. SCHÉMAS NUMÉRIQUES EN MILIEU HÉTÉROGÈNE

On introduit alors l'opérateur :

$$A_h : L_o^2 \longrightarrow L_*^2$$

$$u \longmapsto A_h u \quad (i + 1/2) = \sum_{l=1}^L a_l (u_{i+l} - u_{i-l+1})$$

qui est une approximation d'ordre $2L$ de $\frac{\partial u}{\partial x}$ au point $x_{i+1/2}$ où $a_l = \frac{\alpha_l}{2l-1}$.

Un calcul simple, donné en annexe 1, montre que le transposé de A_h est alors défini par :

$${}^t A_h : L_*^2 \longrightarrow L_o^2$$

$$v \longmapsto {}^t A_h v \quad (i) = - \sum_{l=1}^L a_l (v_{i+l-1/2} - v_{i-l+1/2})$$

${}^t A_h$ est une approximation d'ordre $2L$ de $-\frac{\partial v}{\partial x}$ au point x_i .

L'opérateur A_h calcule les dérivées premières sur la grille * (demi-entiers), alors que l'opérateur ${}^t A_h$ calcule les dérivées sur la grille o (entiers). Ainsi lorsque l'on forme ${}^t A_h (1/\rho A_h) u$ on obtient un élément de L_o^2 , c'est à dire une quantité évaluée aux points entiers. La grille * n'est donc qu'un intermédiaire de calcul, la discrétisation étant fixe de pas h sur la grille o .

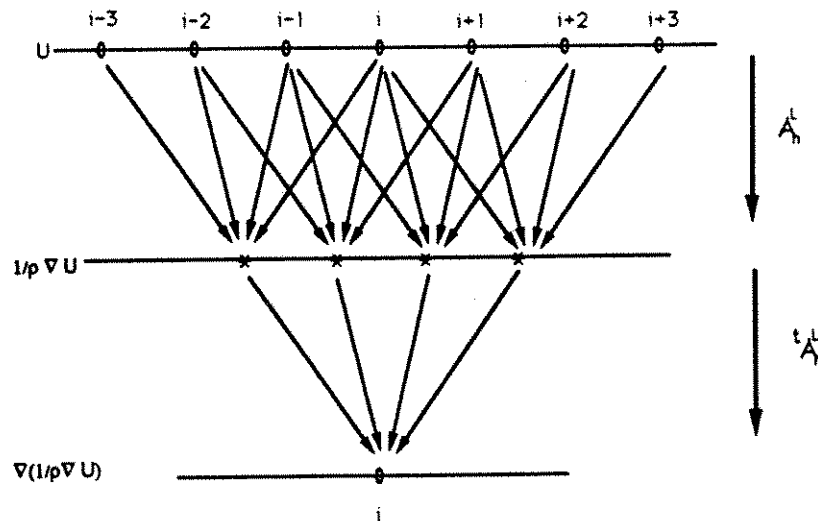


Illustration du procédé de calcul

3.1. CAS UNIDIMENSIONNEL HÉTÉROGÈNE

Etude de la Stabilité

On discrétise l'équation (3.1) sous la forme :

$$\frac{1}{K_i} \frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{\Delta t^2} + {}^t A_h \left(\frac{1}{\rho} A_h \right) u_i^n = 0 \quad (3.2)$$

Nous cherchons à établir la stabilité de l'équation discrétisée (3.2).

Pour cela on utilise la méthode énergétique. On fait l'analogie avec l'énergie continue donnée par :

$$E(t) = \int_R \frac{1}{K(x)} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx + \int_R \frac{1}{\rho(x)} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx$$

Pour exhiber l'énergie discrète, on fait une intégration par parties discrète, c'est à dire qu'on multiplie (3.2) par la quantité $(u_i^{n+1} - u_i^{n-1})/2\Delta t$ puis on intègre en sommant sur i ce qui donne :

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\frac{1}{K} \frac{u^{n+1} - 2u^n + u^{n-1}}{\Delta t^2} + {}^t A_h \left(\frac{1}{\rho} A_h u^n \right), \frac{u^{n+1} - u^{n-1}}{2\Delta t} \right)_o \\ &= \left(\frac{1}{K} \frac{u^{n+1} - 2u^n + u^{n-1}}{\Delta t^2}, \frac{u^{n+1} - u^{n-1}}{2\Delta t} \right)_o + \left(\frac{1}{\rho} A_h u^n, A_h \frac{u^{n+1} - u^{n-1}}{2\Delta t} \right)_* \end{aligned}$$

soit encore

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2\Delta t} \left(\frac{1}{K} \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t}, \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} \right)_o - \frac{1}{2\Delta t} \left(\frac{1}{K} \frac{u^n - u^{n-1}}{\Delta t}, \frac{u^n - u^{n-1}}{\Delta t} \right)_o \\ &+ \frac{1}{2\Delta t} \left(\frac{1}{\rho} A_h u^{n+1}, A_h u^n \right)_* - \frac{1}{2\Delta t} \left(\frac{1}{\rho} A_h u^n, A_h u^{n-1} \right)_* \end{aligned}$$

On utilise alors les identités suivantes :

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\rho} A_h u^{n+1}, A_h u^n \right)_* &= \left(\frac{1}{\rho} A_h \frac{u^{n+1} + u^n}{2}, A_h \frac{u^{n+1} + u^n}{2} \right)_* \\ &- \left(\frac{1}{\rho} A_h \frac{u^{n+1} - u^n}{2}, A_h \frac{u^{n+1} - u^n}{2} \right)_* \\ \left(\frac{1}{\rho} A_h u^n, A_h u^{n-1} \right)_* &= \left(\frac{1}{\rho} A_h \frac{u^n + u^{n-1}}{2}, A_h \frac{u^n + u^{n-1}}{2} \right)_* \\ &- \left(\frac{1}{\rho} A_h \frac{u^n - u^{n-1}}{2}, A_h \frac{u^n - u^{n-1}}{2} \right)_* \end{aligned}$$

CHAPITRE 3. SCHÉMAS NUMÉRIQUES EN MILIEU HÉTÉROGÈNE

d'où :

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{1}{2\Delta t} \left\{ \left(\frac{1}{K} \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t}, \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} \right)_o - \left(\frac{1}{K} \frac{u^n - u^{n-1}}{\Delta t}, \frac{u^n - u^{n-1}}{\Delta t} \right)_o \right. \\
 &+ \left(\frac{1}{\rho} A_h \frac{u^{n+1} + u^n}{2}, A_h \frac{u^{n+1} + u^n}{2} \right)_* - \frac{\Delta t^2}{4} \left(\frac{1}{\rho} A_h \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t}, A_h \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} \right)_* \\
 &\left. - \left(\frac{1}{\rho} A_h \frac{u^n + u^{n-1}}{2}, A_h \frac{u^n + u^{n-1}}{2} \right)_* + \frac{\Delta t^2}{4} \left(\frac{1}{\rho} A_h \frac{u^n - u^{n-1}}{\Delta t}, A_h \frac{u^n - u^{n-1}}{\Delta t} \right)_* \right\}
 \end{aligned}$$

En posant :

$$E_c^{n+1/2} = \left(\frac{1}{K} - \frac{\Delta t^2}{4} {}^t A_h \left(\frac{1}{\rho} A_h \right) \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t}, \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} \right)_o$$

$$E_p^{n+1/2} = \left({}^t A_h \left(\frac{1}{\rho} A_h \right) \frac{u^{n+1} + u^n}{2}, \frac{u^{n+1} + u^n}{2} \right)_*$$

$$E^{n+1/2} = E_c^{n+1/2} + E_p^{n+1/2}$$

où $E_c^{n+1/2}$ est l'énergie cinétique discrète, $E_p^{n+1/2}$ est l'énergie potentielle discrète et $E^{n+1/2}$ est l'énergie discrète totale, au temps $n + 1/2$, on trouve que :

$$\frac{E^{n+1/2} - E^{n+1/2}}{\Delta t} = 0$$

c'est à dire la conservation de l'énergie discrète. La stabilité du schéma numérique sera assurée dès que les deux quantités $E_c^{n+1/2}$ et $E_p^{n+1/2}$ seront positives.

Traisons tout d'abord l'énergie potentielle; elle est définie par :

$$\begin{aligned}
 E_p^{n+1/2} &= \left({}^t A_h \left(\frac{1}{\rho} A_h \right) \frac{u^{n+1} + u^n}{2}, \frac{u^{n+1} + u^n}{2} \right)_o \\
 &= \left(\frac{1}{\rho} A_h \frac{u^{n+1} + u^n}{2}, A_h \frac{u^{n+1} + u^n}{2} \right)_*
 \end{aligned}$$

Puisque $1/\rho$ est minoré par une constante positive on a :

$$E_p^{n+1/2} \geq \frac{1}{\rho_M} \left\| A_h \frac{u^{n+1} + u^n}{2} \right\|_*^2 \geq 0$$

Etudions maintenant sous quelle condition $E_c^{n+1/2}$ est également positive, c'est à

3.1. CAS UNIDIMENSIONNEL HÉTÉROGÈNE

dire que pour tout $u \in L^2_\circ$ on ait :

$$E_c^{n+1/2} = \left(\frac{1}{K} - \frac{\Delta t^2}{4} {}^t A_h \left(\frac{1}{\rho} A_h \right) u, u \right)_\circ \geq 0$$

soit encore :

$$I = \left(\frac{\Delta t^2}{4} {}^t A_h \left(\frac{1}{\rho} A_h \right) u, u \right)_\circ \leq \left(\frac{1}{K} u, u \right)_\circ \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} I &= \frac{\Delta t^2}{4} h \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\rho_{i+1/2}} \left(\sum_{l=1}^L a_l (u_{i+l} - u_{i-l+1}) \right)^2 \\ &\leq \frac{\Delta t^2}{4} h \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\rho_{i+1/2}} \left(\sum_{l=1}^L a_l^2 \right) \left(\sum_{l=1}^L (u_{i+l} - u_{i-l+1})^2 \right) \\ &\leq \frac{\Delta t^2}{2} h \left(\sum_{l=1}^L a_l^2 \right) \sum_{l=1}^L \left(\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \frac{u_{i+l}^2}{\rho_{i+1/2}} + \frac{u_{i-l+1}^2}{\rho_{i+1/2}} \right) \\ &\leq \frac{\Delta t^2}{2} h \left(\sum_{l=1}^L a_l^2 \right) \sum_{l=1}^L \left(\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \frac{u_i^2}{\rho_{i-l+1/2}} + \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \frac{u_i^2}{\rho_{i+l-1/2}} \right) \end{aligned}$$

Pour retrouver le second membre de l'inégalité (3.3), on introduit alors K_i dans la sommation, ce qui donne :

$$\begin{aligned} I &\leq \Delta t^2 \left(L \sum_{l=1}^L a_l^2 \right) h \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2L} \sum_{l=1}^L \frac{K_i}{\rho_{i-l+1/2}} + \frac{K_i}{\rho_{i+l-1/2}} \right) \frac{u_i^2}{K_i} \\ &\leq \Delta t^2 \left(L \sum_{l=1}^L a_l^2 \right) \sup_i \left\{ \frac{1}{2L} \sum_{l=1}^L \frac{K_i}{\rho_{i-l+1/2}} + \frac{K_i}{\rho_{i+l-1/2}} \right\} h \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \frac{u_i^2}{K_i} \\ &\leq \Delta t^2 \left(L \sum_{l=1}^L a_l^2 \right) \sup_i \left\{ \frac{1}{2L} \sum_{l=1}^L \frac{K_i}{\rho_{i-l+1/2}} + \frac{K_i}{\rho_{i+l-1/2}} \right\} \left(\frac{1}{K} u, u \right)_\circ \end{aligned}$$

On aura donc stabilité du schéma si :

$$\Delta t^2 \left(L \sum_{l=1}^L a_l^2 \right) \sup_i \left\{ \frac{1}{2L} \sum_{l=1}^L \frac{K_i}{\rho_{i-l+1/2}} + \frac{K_i}{\rho_{i+l-1/2}} \right\} \leq 1$$

Or on a vu précédemment que $a_l = \alpha_l / (2l - 1)h = \beta_l / h$, donc :

$$\sum_{l=1}^L a_l^2 = \frac{1}{h^2} \sum_{l=1}^L \beta_l^2$$

CHAPITRE 3. SCHÉMAS NUMÉRIQUES EN MILIEU HÉTÉROGÈNE

En posant

$$C_* = \left(\sup_i \left\{ \frac{1}{2L} \sum_{l=1}^L \frac{K_i}{\rho_{i-l+1/2}} + \frac{K_i}{\rho_{i+l-1/2}} \right\} \right)^{1/2}$$

on a la

Proposition 3.1

Une condition suffisante de stabilité du schéma (3.2), d'ordre 2 en temps et d'ordre $2L$ en espace s'écrit :

$$\frac{C_* \Delta t}{h} \leq \left(L \sum_{l=1}^L \beta_l^2 \right)^{-1/2}$$

La quantité C_* a la dimension d'une vitesse. En milieu homogène de vitesse C on a $C_* = C$. On peut obtenir une condition de stabilité plus simple, mais moins fine, en majorant C_* . On pose $K_i = \rho_{i+1/2} \cdot C_i^2$ alors :

$$\begin{aligned} (C_*)^2 &= \sup_i \left\{ \frac{1}{2L} \sum_{l=1}^L \frac{K_i}{\rho_{i-l+1/2}} + \frac{K_i}{\rho_{i+l-1/2}} \right\} \\ (C_*)^2 &\leq \sup_i \left\{ \frac{1}{2L} \sum_{l=1}^L \frac{\rho_{i+1/2}}{\rho_{i-l+1/2}} + \frac{\rho_{i+1/2}}{\rho_{i+l-1/2}} \right\} \sup_i C_i^2 \end{aligned}$$

En posant :

$$\delta_*^2 = \sup_i \left\{ \frac{1}{2L} \sum_{l=1}^L \frac{\rho_{i+1/2}}{\rho_{i-l+1/2}} + \frac{\rho_{i+1/2}}{\rho_{i+l-1/2}} \right\}$$

On peut alors énoncer le

Corollaire 3.1

Une condition suffisante de stabilité du schéma (3.2), d'ordre 2 en temps et d'ordre $2L$ en espace s'écrit :

$$\frac{C_{\max} \Delta t}{h} \leq \delta_*^{-1} \left(L \sum_{l=1}^L \beta_l^2 \right)^{-1/2}$$

δ_* est une mesure du degré d'hétérogénéité du milieu, puisque δ_* compare la valeur de ρ en $i + 1/2$ aux valeurs de ρ aux $(2L - 1)$ points voisins. En milieu homogène on a $\delta = 1$ et en milieu hétérogène on peut majorer δ_* comme suit :

3.1. CAS UNIDIMENSIONNEL HÉTÉROGÈNE

$$\frac{\rho_m}{\rho_M} \leq \delta_*^2 \leq \frac{\rho_M}{\rho_m}$$

on a alors le

Corollaire 3.2

Une condition suffisante de stabilité du schéma (3.2), d'ordre 2 en temps et d'ordre $2L$ en espace s'écrit :

$$\frac{C_{max}\Delta t}{h} \leq \sqrt{\frac{\rho_m}{\rho_M}} \left(L \sum_{i=1}^L \beta_i^2 \right)^{-1/2}$$

On peut noter que la condition de stabilité précédente tient compte explicitement du degré d'hétérogénéité du milieu.

Dans le cas $L = 1$, c'est à dire le cas du schéma (2-2), on a $\beta_1 = 1$ et pour un milieu homogène on a $\rho_m = \rho_M$, on retrouve donc la célèbre condition de stabilité de Courant, Friedrichs et Lewi (cf [Cou3]), à savoir :

$$\frac{C\Delta t}{h} \leq 1$$

En milieu homogène on peut trouver une condition nécessaire de stabilité. Il est intéressant de voir si la condition suffisante de stabilité précédente est également nécessaire. Après transformation de Fourier en espace, on écrit le schéma sous la forme :

$$V^{n+1} = A \cdot V^n$$

où on a posé :

$$A = \begin{pmatrix} 2 - 4\left(\frac{c\Delta t}{h}\right)^2 A^2(k) & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$V^{n+1} = \begin{pmatrix} u^{n+1} \\ u^n \end{pmatrix}$$

$$A(k) = \sum_{l=1}^L \beta_l \sin\left(\left(2l-1\right)\frac{kh}{2}\right)$$

Une condition nécessaire de stabilité est que toutes les valeurs propres de la matrice

CHAPITRE 3. SCHÉMAS NUMÉRIQUES EN MILIEU HÉTÉROGÈNE

A soient inférieures à 1 en module. Le polynôme caractéristique est donné par :

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda \left(2 - 4 \left(\frac{c\Delta t}{h} \right)^2 A^2(k) \right) + 1 = 0$$

Le produit des racines valant 1, il faut nécessairement que les valeurs propres soient imaginaires. Donc il faut que le discriminant de cette équation du second degré en λ , soit négatif ou nul. D'où

$$\Delta = \left(2 - 4 \left(\frac{c\Delta t}{h} \right)^2 A^2(k) \right)^2 - 4 \leq 0$$

ce qui implique :

$$\frac{c\Delta t}{h} \leq \left(\max_k A(k) \right)^{-1}$$

Un calcul rapide montre que le maximum est atteint pour $k = \pi/h$ et vaut :

$$\max_k A(k) = \sum_{l=1}^L |\beta_l|$$

Ainsi une condition *nécessaire* de stabilité en milieu homogène du schéma d'ordre 2 en temps et d'ordre $2L$ en espace s'écrit :

$$\frac{C\Delta t}{h} \leq \left(\sum_{l=1}^L |\beta_l| \right)^{-1}$$

Il est clair que notre condition de stabilité n'est pas optimale, puisque

$$\sum_{l=1}^L |\beta_l| \leq \left(L \sum_{l=1}^L \beta_l^2 \right)^{1/2}$$

Il est possible de l'améliorer en reprenant (3.3), on peut écrire :

3.1. CAS UNIDIMENSIONNEL HÉTÉROGÈNE

$$\begin{aligned}
I &= \frac{\Delta t^2}{4} h \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\rho_{i+1/2}} \left(\sum_{l=1}^L a_l (u_{i+l} - u_{i-l+1}) \right)^2 \\
&\leq \frac{\Delta t^2}{4} h \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\rho_{i+1/2}} \left(\sum_{l=1}^L |a_l| \right) \left(\sum_{l=1}^L |a_l| (u_{i+l} - u_{i-l+1})^2 \right) \\
&\leq \frac{\Delta t^2}{2} h \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\rho_{i+1/2}} \left(\sum_{l=1}^L |a_l| \right) \sum_{l=1}^L |a_l| (u_{i+l}^2 + u_{i-l+1}^2) \\
&\leq \frac{\Delta t^2}{2} \left(\sum_{l=1}^L |a_l| \right) \sum_{l=1}^L |a_l| h \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\rho_{i+1/2}} (u_{i+l}^2 + u_{i-l+1}^2) \\
&\leq \frac{\Delta t^2}{2} \left(\sum_{l=1}^L |a_l| \right) h \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=1}^L |a_l| \left(\frac{K_i}{\rho_{i+l-1/2}} + \frac{K_i}{\rho_{i-l+1/2}} \right) \frac{u_i^2}{K_i} \\
&\leq \frac{\Delta t^2}{2} \left(\sum_{l=1}^L |a_l| \right) \sup_i \left\{ \sum_{l=1}^L |a_l| \left(\frac{K_i}{\rho_{i+l-1/2}} + \frac{K_i}{\rho_{i-l+1/2}} \right) \right\} \left(\frac{u}{K}, u \right)
\end{aligned}$$

Puisque $a_l = \beta_l/h$, en posant

$$C_{\#}^2 = \left(\sum_{l=1}^L |\beta_l| \right)^{-1} \sup_i \left\{ \sum_{l=1}^L |\beta_l| \left(\frac{K_i}{2\rho_{i+l-1/2}} + \frac{K_i}{2\rho_{i-l+1/2}} \right) \right\}$$

on peut énoncer la

Proposition 3.2

Une condition suffisante de stabilité du schéma (3.2), d'ordre 2 en temps et d'ordre $2L$ en espace s'écrit :

$$\frac{C_{\#} \Delta t}{h} \leq \left(\sum_{l=1}^L |\beta_l| \right)^{-1}$$

En milieu homogène de vitesse C on a la condition de stabilité suivante :

$$\frac{C \Delta t}{h} \leq \left(\sum_{l=1}^L |\beta_l| \right)^{-1}$$

On a donc amélioré la condition de stabilité qui est ici nécessaire et suffisante.

CHAPITRE 3. SCHEMAS NUMERIQUES EN MILIEU HETEROGENE

On peut majorer $C_{\#}$ comme suit en posant $K_i = \rho_{i+1/2} C_i^2$

$$\begin{aligned} C_{\#}^2 &= \left(\sum_{l=1}^L |\beta_l| \right)^{-1} \sup_i \left\{ \sum_{l=1}^L |\beta_l| \left(\frac{K_i}{2\rho_{i+l-1/2}} + \frac{K_i}{2\rho_{i-l+1/2}} \right) \right\} \\ &\leq \left(\sum_{l=1}^L |\beta_l| \right)^{-1} \sup_i \left\{ \sum_{l=1}^L |\beta_l| \left(\frac{\rho_i}{2\rho_{i+l-1/2}} + \frac{\rho_i}{2\rho_{i-l+1/2}} \right) \right\} \sup_i C_i^2 \\ &\leq \delta_{\#}^2 C_{max}^2 \end{aligned}$$

En posant :

$$\delta_{\#}^2 = \left(\sum_{l=1}^L |\beta_l| \right)^{-1} \sup_i \left\{ \sum_{l=1}^L |\beta_l| \left(\frac{\rho_{i+1/2}}{2\rho_{i+l-1/2}} + \frac{\rho_{i+1/2}}{2\rho_{i-l+1/2}} \right) \right\}$$

on a le

Corollaire 3.3

Une condition suffisante de stabilité du schéma (3.2), d'ordre 2 en temps et d'ordre $2L$ en espace s'écrit :

$$\frac{C_{max} \Delta t}{h} \leq \left(\delta_{\#} \sum_{l=1}^L |\beta_l| \right)^{-1}$$

$\delta_{\#}$ est une mesure du degré d'hétérogénéité du milieu, tout comme δ_* . On peut majorer $\delta_{\#}$ par :

$$\frac{\rho_m}{\rho_M} \leq \delta_{\#}^2 \leq \frac{\rho_M}{\rho_m}$$

on a alors le

Corollaire 3.4

Une condition suffisante de stabilité du schéma (3.2), d'ordre 2 en temps et d'ordre $2L$ en espace s'écrit :

$$\frac{C_{max} \Delta t}{h} \leq \sqrt{\frac{\rho_m}{\rho_M}} \left(\sum_{l=1}^L |\beta_l| \right)^{-1}$$

S'il est clair qu'en milieu homogène la deuxième condition de stabilité est bien meilleure que la première, le cas hétérogène lui est plus délicat. En effet, les conditions de stabilité données par les propositions (3.1) et (3.2) intègrent l'hétérogénéité

3.1. CAS UNIDIMENSIONNEL HÉTÉROGÈNE

du milieu de façon assez fine. L'une et l'autre procèdent par pondération de rapport de la forme $K_i/\rho_{i+1-1/2}$, c'est à dire de termes de vitesses locales. On ne peut donc conclure pour un milieu quelconque.

3.1.2 Schémas d'ordre 4 en temps et 2L en espace

Introduction et Notations

Suivant Dablain (cf [Dab]) il est possible de construire des schémas d'ordre quatre en temps en utilisant la technique de l'équation modifiée. Nous en exposons le principe en milieu homogène où l'équation des ondes s'écrit :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

En supposant la solution u régulière ($u \in C^4(R \times R)$), on peut écrire :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{u^{n+1} - 2u^n + u^{n-1}}{\Delta t^2} - \frac{\Delta t^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} + o(\Delta t^4)$$

En dérivant deux fois par rapport au temps l'équation des ondes on obtient:

$$\frac{\partial^4 u}{\partial t^4} = c^2 \frac{\partial^4 u}{\partial t^2 \partial x^2} = c^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} = c^4 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$$

donc

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{u^{n+1} - 2u^n + u^{n-1}}{\Delta t^2} - \frac{c^4 \Delta t^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + o(\Delta t^4)$$

Ainsi avec une approximation d'ordre 2 de $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$, notée ∂_h^4 , on peut écrire

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{u^{n+1} - 2u^n + u^{n-1}}{\Delta t^2} - \frac{c^4 \Delta t^2}{12} (\partial_h^4 + o(h^2)) + o(h^4 + \Delta t^4)$$

En remarquant que grâce à la condition de stabilité (que l'on verra plus tard) $\Delta t \propto h$, on a $\Delta t^2 o(h^2) = o(\Delta t^4 + h^4)$. Donc en utilisant pour $\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ l'approximation suivante

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \approx \frac{u^{n+1} - 2u^n + u^{n-1}}{c^2 \Delta t^2} - \frac{c^2 \Delta t^2}{12} \partial_h^4$$

on obtient un schéma d'ordre 4 en temps. En prenant une approximation d'ordre 4 en espace pour le terme $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ on obtient un schéma (4-4).

Remarque :

CHAPITRE 3. SCHÉMAS NUMÉRIQUES EN MILIEU HÉTÉROGÈNE

i) Tout se passe comme si on avait discrétisé, non pas l'équation des ondes, mais l'équation "modifiée" suivante :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{c^2 \Delta t^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0$$

Cette équation apparait comme une perturbation de l'équation des ondes puisque lorsque Δt tend vers 0 on retrouve l'équation des ondes.

Le raisonnement précédent s'applique au cas de l'équation des ondes en milieux hétérogènes, qui s'écrit :

$$\frac{1}{K(x)} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho(x)} \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0$$

On trouve alors l'équation modifiée suivante :

$$\frac{1}{K(x)} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho(x)} \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\Delta t^2}{12} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho(x)} \left(\frac{\partial}{\partial x} K(x) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho(x)} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right) \right) = 0 \quad (3.4)$$

Nous cherchons maintenant à discrétiser cette équation à l'aide des opérateurs en espace vus précédemment. Afin d'avoir un schéma (4-4) il nous faut approcher le terme

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho(x)} \frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

à l'ordre 4. Ceci implique qu'il faille utiliser, pour ce terme, l'opérateur A_2 correspondant à $L = 2$. Ensuite il faut approcher la quantité

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho(x)} \left(\frac{\partial}{\partial x} K(x) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho(x)} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right) \right)$$

à l'ordre 2. Il faut donc utiliser pour ce terme l'opérateur A_1 correspondant à $L = 1$. Ainsi une écriture a-priori du schéma numérique est :

$$\frac{1}{K_i} \frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{\Delta t^2} + \left\{ {}^t A_2 \left(\frac{1}{\rho} A_2 \right) - \frac{\Delta t^2}{12} {}^t A_1 \left(\frac{1}{\rho} A_1 \left(K^t A_1 \left(\frac{1}{\rho} A_1 \right) \right) \right) \right\} u_i^n = 0 \quad (3.5)$$

Nous allons montrer que, bien que séduisante, cette approche conduit à un schéma instable. La difficulté est d'assurer la positivité de la forme bilinéaire associée à l'opérateur de discrétisation spatiale.

3.1. CAS UNIDIMENSIONNEL HÉTÉROGÈNE

Etude de la Stabilité

Nous cherchons à établir la stabilité par la méthode énergétique de l'équation (3.5) ce qui revient à montrer que le schéma est L^2 stable. Pour cela on procède à une intégration par parties discrète en multipliant l'équation par $(u^{n+1} - u^{n-1})/(2\Delta t)$, ce qui donne :

$$\begin{aligned}
 0 &= \left(\frac{1}{K} \frac{u^{n+1} - 2u^n + u^{n-1}}{\Delta t^2} + {}^t A_2 \left(\frac{1}{\rho} A_2 \right) u^n, \frac{u^{n+1} - u^{n-1}}{2\Delta t} \right)_o \\
 &- \frac{\Delta t^2}{12} \left({}^t A_1 \left(\frac{1}{\rho} A_1 \left(K {}^t A_1 \left(\frac{1}{\rho} A_1 \right) \right) \right) u^n, \frac{u^{n+1} - u^{n-1}}{2\Delta t} \right)_o \\
 &= \left(\frac{1}{K} \frac{u^{n+1} - 2u^n + u^{n-1}}{\Delta t^2}, \frac{u^{n+1} - u^{n-1}}{2\Delta t} \right)_o + \left(\frac{1}{\rho} A_2 u^n, A_2 \frac{u^{n+1} - u^{n-1}}{2\Delta t} \right)_* \\
 &- \frac{\Delta t^2}{12} \left(K {}^t A_1 \left(\frac{1}{\rho} A_1 \right) u^n, {}^t A_1 \left(\frac{1}{\rho} A_1 \right) \frac{u^{n+1} - u^{n-1}}{2\Delta t} \right)_o
 \end{aligned}$$

On pose $B_1 = {}^t A_1 \left(\frac{1}{\rho} A_1 \right)$. En utilisant les égalités suivantes

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{1}{\rho} A_2 u^{n+1}, A_2 u^n \right)_* &= \left(\frac{1}{\rho} A_2 \frac{u^{n+1} + u^n}{2}, A_2 \frac{u^{n+1} + u^n}{2} \right)_* \\
 &- \left(\frac{1}{\rho} A_2 \frac{u^{n+1} - u^n}{2}, A_2 \frac{u^{n+1} - u^n}{2} \right)_* \\
 \left(\frac{1}{\rho} A_2 u^n, A_2 u^{n-1} \right)_* &= \left(\frac{1}{\rho} A_2 \frac{u^n + u^{n-1}}{2}, A_2 \frac{u^n + u^{n-1}}{2} \right)_* \\
 &- \left(\frac{1}{\rho} A_2 \frac{u^n - u^{n-1}}{2}, A_2 \frac{u^n - u^{n-1}}{2} \right)_*
 \end{aligned}$$

Ainsi que

$$\begin{aligned}
 \left(K B_1 u^{n+1}, B_1 u^n \right)_o &= \left(K B_1 \frac{u^{n+1} + u^n}{2}, B_1 \frac{u^{n+1} + u^n}{2} \right)_o \\
 &- \left(K B_1 \frac{u^{n+1} - u^n}{2}, B_1 \frac{u^{n+1} - u^n}{2} \right)_o \\
 \left(K B_1 u^n, B_1 u^{n-1} \right)_o &= \left(K B_1 \frac{u^n + u^{n-1}}{2}, B_1 \frac{u^n + u^{n-1}}{2} \right)_o \\
 &- \left(K B_1 \frac{u^n - u^{n-1}}{2}, B_1 \frac{u^n - u^{n-1}}{2} \right)_o
 \end{aligned}$$

CHAPITRE 3. SCHÉMAS NUMÉRIQUES EN MILIEU HÉTÉROGÈNE

et en posant

$$\begin{aligned}
 T &= {}^t A_2 \left(\frac{1}{\rho} A_2 \right) - \frac{\Delta t^2}{12} {}^t B_1 (K B_1) \\
 E_p^{n+1/2} &= \left(T \frac{u^{n+1} + u^n}{2}, \frac{u^{n+1} + u^n}{2} \right)_o \\
 E_c^{n+1/2} &= \left(\left\{ \frac{1}{K} - \frac{\Delta t^2}{4} T \right\} \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t}, \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} \right)_o \\
 E^{n+1/2} &= E_p^{n+1/2} + E_c^{n+1/2}
 \end{aligned}$$

on a la conservation de l'énergie discrète c'est à dire :

$$\frac{E^{n+1/2} - E^{n-1/2}}{\Delta t} = 0$$

Comme d'habitude, la stabilité du schéma viendra de la positivité des énergies potentielle et cinétique.

Remarques :

i) Si l'on montre la positivité de l'énergie potentielle, c'est à dire que l'opérateur T est positif, alors la positivité de l'énergie cinétique découle de la positivité de l'opérateur :

$$\tilde{C} = \frac{1}{K} - \frac{\Delta t^2}{4} {}^t A_2 \left(\frac{1}{\rho} A_2 \right)$$

En effet l'énergie cinétique est positive si pour tout $u \in L_o^2$

$$(\tilde{A}u, u)_o = \left(\left(\frac{1}{K} - \frac{\Delta t^2}{4} T \right) u, u \right)_o \geq 0$$

Or

$$(Tu, u)_o \leq \left({}^t A_2 \left(\frac{1}{\rho} A_2 \right) u, u \right)_o$$

puisque

$$\frac{\Delta t^2}{12} ({}^t B(KB)u, u)_o \geq 0$$

donc on a l'inégalité attendue suivante :

$$\left((\tilde{A}u, u)_o \geq (\tilde{C}u, u)_o \right) \implies \left((\tilde{C}u, u)_o \geq 0 \implies (\tilde{A}u, u)_o \geq 0 \right)$$

3.1. CAS UNIDIMENSIONNEL HÉTÉROGÈNE

ii) \tilde{C} est l'opérateur d'énergie cinétique du schéma (2-4) pour l'équation des ondes en milieux hétérogènes. \tilde{C} sera positif si (cf Propositions (3.1) et (3.2))

$$\frac{C_* \Delta t}{h} \leq \left(L \sum_{l=1}^L \beta_l^2 \right)^{-1/2} \quad \frac{C_{\#} \Delta t}{h} \leq \left(\sum_{l=1}^L |\beta_l| \right)^{-1}$$

Il s'agit maintenant de montrer que l'opérateur T associé à l'énergie potentielle est positif. Pour tout $u \in L_o^2$

$$\begin{aligned} (Tu, u) &= \left(\left\{ {}^t A_2 \left(\frac{1}{\rho} A_2 \right) - \frac{\Delta t^2}{12} {}^t B_1 (K B_1) \right\} u, u \right)_o \\ &= \left(\frac{1}{\rho} A_2 u, A_2 u \right)_* - \frac{\Delta t^2}{12} (K B_1 u, B_1 u)_o \end{aligned}$$

T sera positif si et seulement si

$$\frac{\Delta t^2}{12} (K B_1 u, B_1 u)_o \leq \left(\frac{1}{\rho} A_2 u, A_2 u \right)_* \quad (*)$$

Or on a

$$(K B_1 u, B_1 u)_o = h \sum_{i=-\infty}^{+\infty} K_i \left(\frac{1}{h} \left[\frac{1}{\rho_{i+1/2}} \left(\frac{u_{i+1} - u_i}{h} \right) - \frac{1}{\rho_{i-1/2}} \left(\frac{u_i - u_{i-1}}{h} \right) \right] \right)^2$$

et

$$\left(\frac{1}{\rho} A_2 u, A_2 u \right)_* = h \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\rho_{i+1/2}} \left(\beta_1 \left[\frac{u_{i+1} - u_i}{h} \right] + \beta_2 \left(\frac{u_{i+2} - u_{i-1}}{3h} \right) \right)^2$$

Il est clair alors que, pour u quelconque on ne peut majorer le premier membre de l'inégalité (*) par le second, ni inversement d'ailleurs puisque ces deux quantités ne font pas intervenir les mêmes points. On ne peut donc pas assurer la positivité, d'où instabilité.

Afin d'obtenir un schéma stable, on va devoir utiliser pour la partie d'ordre 2 et d'ordre 4 en x , le même opérateur de dérivation discrète. Ainsi on introduit l'opérateur $B_L = {}^t A_L (1/\rho A_L)$ et on discrétise l'équation (3.4) comme suit :

$$\frac{1}{K_i} \frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{\Delta t^2} + \left\{ {}^t A_L \left(\frac{1}{\rho} A_L \right) - \frac{\Delta t^2}{12} {}^t A_L \left(\frac{1}{\rho} A_L \left(K {}^t A_L \left(\frac{1}{\rho} A_L \right) \right) \right) \right\} u_i^n = 0 \quad (3.6)$$

CHAPITRE 3. SCHEMAS NUMERIQUES EN MILIEU HETEROGENE

Par des calculs strictement analogues aux calculs précédents, on obtient les expressions suivantes pour l'énergie :

$$T = {}^t A_L \left(\frac{1}{\rho} A_L \right) - \frac{\Delta t^2}{12} {}^t B_L (K B_L)$$

$$E_p^{n+1/2} = \left(T \frac{u^{n+1} + u^n}{2}, \frac{u^{n+1} + u^n}{2} \right)_o$$

$$E_c^{n+1/2} = \left(\left\{ \frac{1}{K} - \frac{\Delta t^2}{4} T \right\} \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t}, \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} \right)_o$$

$$E^{n+1/2} = E_p^{n+1/2} + E_c^{n+1/2}$$

et on montre également que l'énergie totale se conserve. Voyons maintenant sous quelle condition l'énergie potentielle est positive. Le lemme suivant répond à la question.

Lemme 1

Soient des fonctions K et ρ telles que:

$$\begin{aligned} K &\in L^2(R) & \rho &\in L^2(R) \\ 0 < K_m &\leq K(x) \leq K_M \\ 0 < \rho_m &\leq \rho(x) \leq \rho_M \end{aligned}$$

On définit l'opérateur $B_L = {}^t A_L (1/\rho A_L)$. On a alors les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} ({}^t B_L (K B_L) u, u)_o &\leq 4C_*^2 \left(L \sum_{i=1}^L a_i^2 \right) ({}^t A_L (1/\rho A_L) u, u)_o \\ ({}^t B_L (K B_L) u, u)_o &\leq 4C_{\#}^2 \left(\sum_{i=1}^L |a_i| \right)^2 ({}^t A_L (1/\rho A_L) u, u)_o \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION : En annexe 2

Une condition suffisante pour que l'énergie potentielle soit positive est que :

$$\frac{4(C_* \Delta t)^2}{12} \left(L \sum_{i=1}^L a_i^2 \right) \leq 1 \qquad \frac{4(C_{\#} \Delta t)^2}{12} \left(\sum_{i=1}^L |a_i| \right)^2 \leq 1$$

Par définition de $(a_i)_{i=1..L}$, on a $a_i = \beta_i/h$. Ainsi il faut que :

$$\frac{C_* \Delta t}{h} \leq \sqrt{3} \left(L \sum_{i=1}^L \beta_i^2 \right)^{-1/2} \qquad \frac{C_{\#} \Delta t}{h} \leq \sqrt{3} \left(\sum_{i=1}^L |\beta_i| \right)^{-1}$$

3.1. CAS UNIDIMENSIONNEL HÉTÉROGÈNE

Pour assurer la stabilité du schéma, il faut maintenant montrer que l'énergie cinétique est positive. Grâce à la remarque précédente, ce sera vrai dès que l'on vérifiera la condition de stabilité du schéma (2-2L). Il faut donc également que (cf Propositions (3.1) et (3.2))

$$\frac{C_* \Delta t}{h} \leq \left(L \sum_{l=1}^L \beta_l^2 \right)^{-1/2} \quad \frac{C_{\#} \Delta t}{h} \leq \left(\sum_{l=1}^L |\beta_l| \right)^{-1}$$

On peut alors énoncer la

Proposition 3.3

Une condition suffisante de stabilité du schéma (3.6), d'ordre 4 en temps et d'ordre 2L en espace s'écrit :

$$\frac{C_* \Delta t}{h} \leq \left(L \sum_{l=1}^L \beta_l^2 \right)^{-1/2} \quad \frac{C_{\#} \Delta t}{h} \leq \left(\sum_{l=1}^L |\beta_l| \right)^{-1}$$

On peut obtenir une condition de stabilité plus simple en appliquant les corollaires précédents. En posant comme précédemment

$$\delta_*^2 = \sup_i \left\{ \frac{1}{2L} \sum_{l=1}^L \frac{\rho_{i+1/2}}{\rho_{i-l+1/2}} + \frac{\rho_{i+1/2}}{\rho_{i+l-1/2}} \right\}$$

$$\delta_{\#}^2 = \left(\sum_{l=1}^L |\beta_l| \right)^{-1} \sup_i \left\{ \frac{1}{2} \sum_{l=1}^L |\beta_l| \left(\frac{\rho_{i+1/2}}{\rho_{i+l-1/2}} + \frac{\rho_{i+1/2}}{\rho_{i-l+1/2}} \right) \right\}$$

on peut énoncer le

Corollaire 3.5

Une condition suffisante de stabilité du schéma (3.6) d'ordre 4 en temps et d'ordre 2L en espace s'écrit :

$$\frac{C_{max} \Delta t}{h} \leq \max \left(\delta_* \left(L \sum_{l=1}^L \beta_l^2 \right)^{-1/2}, \delta_{\#} \left(\sum_{l=1}^L |\beta_l| \right)^{-1} \right)$$

En majorant δ_* et $\delta_{\#}$ comme précédemment on a

CHAPITRE 3. SCHÉMAS NUMÉRIQUES EN MILIEU HÉTÉROGÈNE

Corollaire 3.6

Une condition suffisante de stabilité du schéma (3.6), d'ordre 4 en temps et d'ordre $2L$ en espace s'écrit :

$$\frac{C_{max}\Delta t}{h} \leq \sqrt{\frac{\rho_m}{\rho_M}} \left(\sum_{l=1}^L |\beta_l| \right)^{-1}$$

En milieu homogène unidimensionnel, la condition de stabilité pour le schéma (4-4), correspondant à $L = 2$ s'écrit :

$$\frac{C\Delta t}{h} \leq \frac{6}{7} \simeq 0.857$$

On retrouve ici la condition nécessaire et suffisante de stabilité du schéma (2-4).

3.1. CAS UNIDIMENSIONNEL HÉTÉROGÈNE

3.1.3 Comparaisons avec les schémas de G.Cohen et P.Joly

Schéma (2-4)

Lorsque $L = 2$, on a alors un schéma d'ordre 4 en espace et d'ordre 2 en temps. G.Cohen et P.Joly ont proposé, en milieux acoustiques hétérogènes, un schéma d'ordre 2 en temps et d'ordre 4 en espace basé sur l'idée suivante. En milieu homogène, on peut construire un schéma d'ordre 4 en espace, par une combinaison linéaire du schéma d'ordre 2 sur une grille de pas h D_h , et du schéma d'ordre 2 sur une grille de pas $2h$ D_{2h} . La même idée peut s'appliquer en milieu hétérogène. En milieu unidimensionnel, le schéma proposé par Cohen-Joly s'écrit :

$$\frac{1}{\tilde{K}_i} \frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{\Delta t^2} - \frac{4}{3h} \left\{ \frac{1}{\tilde{\rho}_{i+1/2}} \left(\frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{h} \right) - \frac{1}{\tilde{\rho}_{i-1/2}} \left(\frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{h} \right) \right\} + \frac{1}{6h} \left\{ \frac{1}{\tilde{\rho}_{i+1}} \left(\frac{u_{i+2}^n - u_i^n}{2h} \right) - \frac{1}{\tilde{\rho}_{i-1}} \left(\frac{u_i^n - u_{i-2}^n}{2h} \right) \right\} = 0$$

où on suppose connues les quantités :

$$\frac{1}{K_i} = \frac{1}{2h} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \frac{1}{K(x)} dx$$

$$\frac{1}{\rho_{i+1/2}} = \frac{1}{h} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{\rho(x)} dx$$

et où on a posé $\beta \geq 0$ $1/16 \leq \lambda \leq 7/16$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tilde{K}_i} &= (1 - 2\beta) \frac{1}{K_i} + \beta \left(\frac{1}{K_{i+1}} + \frac{1}{K_{i-1}} \right) \\ \frac{1}{\tilde{\rho}_{i+1/2}} &= (1 - 2\lambda) \frac{1}{\rho_{i+1/2}} + \lambda \left(\frac{1}{\rho_{i+3/2}} + \frac{1}{\rho_{i-1/2}} \right) \\ \frac{1}{\rho_i} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho_{i+1/2}} + \frac{1}{\rho_{i-1/2}} \right) \end{aligned}$$

Ainsi en ne stockant pas dans la mémoire, ces nouveaux coefficients (calculés à partir des données $1/K_i$ et $1/\rho_{i+1/2}$), il faut 4 opérations pour le calcul de $1/\tilde{K}_i$, 4 opérations pour le calcul de $1/\tilde{\rho}_{i+1/2}$, 4 opérations pour le calcul de $1/\rho_{i+1}$ et de $1/\rho_{i-1}$.

En réécrivant le schéma de Cohen-Joly sous la forme :

$$u_i^{n+1} = 2u_i^n - u_i^{n-1} + \frac{\tilde{K}_i \Delta t^2}{h^2} \left[\frac{4}{3} \left\{ \frac{1}{\tilde{\rho}_{i+1/2}} \left(\frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{h} \right) - \frac{1}{\tilde{\rho}_{i-1/2}} \left(\frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{h} \right) \right\} - \frac{1}{6} \left\{ \frac{1}{\tilde{\rho}_{i+1}} \left(\frac{u_{i+2}^n - u_i^n}{2h} \right) - \frac{1}{\tilde{\rho}_{i-1}} \left(\frac{u_i^n - u_{i-2}^n}{2h} \right) \right\} \right]$$

CHAPITRE 3. SCHEMAS NUMERIQUES EN MILIEU HETEROGENE

on voit qu'une fois les coefficients calculés (ce qui prend 16 opérations) il nécessite 18 opérations, soit au total 34 opérations par noeud et par pas de temps.

Schéma Proposé

Le schéma d'ordre (2-4) que nous proposons correspond à $L = 2$ et s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{1}{K_i} \frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{\Delta t^2} &= -\frac{9}{8h} \left\{ \frac{1}{\rho_{i+1/2}} \left(\frac{9}{8} \left(\frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{h} \right) - \frac{1}{8} \left(\frac{u_{i+2}^n - u_{i-1}^n}{3h} \right) \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\rho_{i-1/2}} \left(\frac{9}{8} \left(\frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{h} \right) - \frac{1}{8} \left(\frac{u_{i+1}^n - u_{i-2}^n}{3h} \right) \right) \right\} \\ &\quad + \frac{1}{24h} \left\{ \frac{1}{\rho_{i+3/2}} \left(\frac{9}{8} \left(\frac{u_{i+2}^n - u_{i+1}^n}{h} \right) - \frac{1}{8} \left(\frac{u_{i+3}^n - u_i^n}{3h} \right) \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\rho_{i-3/2}} \left(\frac{9}{8} \left(\frac{u_{i-1}^n - u_{i-2}^n}{h} \right) - \frac{1}{8} \left(\frac{u_i^n - u_{i-3}^n}{3h} \right) \right) \right\} \end{aligned}$$

où on suppose connues les quantités :

$$\begin{aligned} \frac{1}{K_i} &= \frac{1}{h} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{K(x)} dx \\ \frac{1}{\rho_{i+1/2}} &= \frac{1}{h} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{\rho(x)} dx \end{aligned}$$

En réécrivant le schéma ci-dessus sous la forme :

$$\begin{aligned} u_i^{n+1} &= 2u_i^n - u_i^{n-1} - \frac{K_i \Delta t^2}{h^2} \left[\frac{9}{8} \left\{ \frac{1}{\rho_{i+1/2}} \left(\frac{9}{8} (u_{i+1}^n - u_i^n) - \frac{1}{24} (u_{i+2}^n - u_{i-1}^n) \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{\rho_{i-1/2}} \left(\frac{9}{8} (u_i^n - u_{i-1}^n) - \frac{1}{24} (u_{i+1}^n - u_{i-2}^n) \right) \right\} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{24} \left\{ \frac{1}{\rho_{i+3/2}} \left(\frac{9}{8} (u_{i+2}^n - u_{i+1}^n) - \frac{1}{24} (u_{i+3}^n - u_i^n) \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{\rho_{i-3/2}} \left(\frac{9}{8} (u_{i-1}^n - u_{i-2}^n) - \frac{1}{24} (u_i^n - u_{i-3}^n) \right) \right\} \right] \end{aligned}$$

Ici il n'est pas nécessaire de précalculer les coefficients, et ce schéma ci-dessus nécessite 33 opérations par noeud et par pas de temps.

Bien que le schéma que nous proposons requière 7 points, alors que le schéma de Cohen-Joly 5, lorsque l'on ne stocke pas les coefficients précalculés, nous avons moins d'opérations par noeud. Cette tendance va se confirmer et même s'accroître

3.1. CAS UNIDIMENSIONNEL HÉTÉROGÈNE

en milieu bidimensionnel où il devient couteux de stocker des tableaux supplémentaires.

Bien sûr, le coût informatique est aussi lié au pas de temps, et donc au nombre de points par période et à la condition de stabilité. Pour le schéma proposé par Cohen et Joly en milieu homogène unidimensionnel de vitesse C on a :

$$\frac{C\Delta t}{h} \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \simeq 0.866$$

alors que nous avons

$$\frac{C\Delta t}{h} \leq \frac{6}{7} \simeq 0.857$$

En revenant aux définitions du nombre de points par longueur d'onde $N_\lambda = \lambda_{min}/h$ et du nombre de points par période $N_{\Delta t} = T_{min}/\Delta t$ où $T_{min} = 1/F_{max}$, F_{max} fréquence maximale, on peut écrire :

$$h = \frac{\lambda_{min}}{N_\lambda} \quad \Delta t = \frac{T_{min}}{N_{\Delta t}} \quad \lambda_{min} = CT_{min}$$

d'où

$$\frac{C\Delta t}{h} = \frac{CT_{min}}{N_{\Delta t}} \cdot \frac{N_\lambda}{\lambda_{min}} = \frac{N_\lambda}{N_{\Delta t}}$$

Afin de contrôler la dispersion en temps il faut imposer 20 points par période minimale; pour contrôler la dispersion en espace il faut imposer 6 points par longueur minimale. Ainsi on a

$$\frac{C\Delta t}{h} = \frac{N_\lambda}{N_{\Delta t}} = \frac{6}{20} = 0.3$$

La condition de stabilité est respectée, et n'influence donc pas le coût calcul; le gain en coût calcul viendra donc du nombre d'opérations par noeud.

En milieu unidimensionnel on peut stocker les tableaux de coefficients intermédiaires \tilde{K}_i , $\tilde{\rho}_i$, $\tilde{\rho}_{i+1/2}$. Ainsi le schéma proposé par Cohen et Joly requière 18 opérations par noeud et par pas de temps.

En ce qui concerne notre schéma, nous le mettons sous la forme :

$$u_i^{n+1} = 2u_i^n - u_i^{n-1} - \frac{K_i \Delta t^2}{h^2} \left({}^t A_2 \left(\frac{1}{\rho} A_2 \right) u_i^n \right)$$

où A_2 est l'opérateur correspondant à $L = 2$.

Le calcul s'organise alors comme suit. On commence par calculer la dérivée première au point $i + 1/2$. Puis on stocke le résultat intermédiaire de $A_2 u_{i+1/2}^n$

CHAPITRE 3. SCHEMAS NUMERIQUES EN MILIEU HETEROGENE

dans un tableau unidimensionnel de travail $v(i + 1/2)$. Ensuite on multiplie par $1/\rho_{i+1/2}$ et on applique A_2 . Appliquer A_2 ou son transposé coûte 5 opérations et la multiplication par $1/\rho_{i+1/2}$ 1 opération, soit au total 11 opérations. Itérer le schéma demande donc $5 + 11 = 16$ opérations par noeud et par pas de temps. Là encore, on remarque que bien que notre schéma soit défini sur 7 points il requière moins d'opérations par noeud.

Schéma (4-4)

Lorsque $L = 2$, on a un schéma d'ordre 4 en temps et d'ordre 4 en espace. G.Cohen et P.Joly ont proposé un schéma (4-4) basé sur le schéma (2-4) proposé précédemment. En milieu unidimensionnel ce schéma s'écrit :

$$\frac{1}{\tilde{K}_i} \frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{\Delta t^2} - \frac{4}{3h} \left\{ \frac{1}{\tilde{\rho}_{i+1/2}} \left(\frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{h} \right) - \frac{1}{\tilde{\rho}_{i-1/2}} \left(\frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{h} \right) \right\} + \frac{1}{6h} \left\{ \frac{1}{\tilde{\rho}_{i+1}} \left(\frac{u_{i+2}^n - u_i^n}{2h} \right) - \frac{1}{\tilde{\rho}_{i-1}} \left(\frac{u_i^n - u_{i-2}^n}{2h} \right) \right\} + Bu_i^n = 0$$

avec

$$Bu_i^n = -\frac{\Delta t^2}{12 h^2} \left[\frac{K_{i+1}}{\rho_{i+1/2}} \left(\frac{1}{h} \frac{1}{\rho_{i+3/2}} \left(\frac{u_{i+2}^n - u_{i+1}^n}{h} \right) - \frac{1}{h} \frac{1}{\rho_{i+1/2}} \left(\frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{h} \right) \right) + \frac{K_i \cdot (\rho_{i+1/2} - \rho_{i-1/2})}{\rho_{i+1/2} \rho_{i-1/2}} \left(\frac{1}{h} \frac{1}{\rho_{i+1/2}} \left(\frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{h} \right) - \frac{1}{h} \frac{1}{\rho_{i-1/2}} \left(\frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{h} \right) \right) - \frac{K_{i-1}}{\rho_{i-1/2}} \left(\frac{1}{h} \frac{1}{\rho_{i-1/2}} \left(\frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{h} \right) - \frac{1}{h} \frac{1}{\rho_{i-3/2}} \left(\frac{u_{i-1}^n - u_{i-2}^n}{h} \right) \right) \right]$$

où on suppose connues les quantités :

$$\frac{1}{\tilde{K}_i} = \frac{1}{2h} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \frac{1}{K(x)} dx$$

$$\frac{1}{\tilde{\rho}_{i+1/2}} = \frac{1}{h} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{\rho(x)} dx$$

et où on a posé

$$\frac{1}{\tilde{K}_i} = (1 - 2\beta) \frac{1}{K_i} + \beta \left(\frac{1}{K_{i+1}} + \frac{1}{K_{i-1}} \right)$$

$$\frac{1}{\tilde{\rho}_{i+1/2}} = (1 - 2\lambda) \frac{1}{\rho_{i+1/2}} + \lambda \left(\frac{1}{\rho_{i+3/2}} + \frac{1}{\rho_{i-1/2}} \right)$$

$$\frac{1}{\rho_i} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho_{i+1/2}} + \frac{1}{\rho_{i-1/2}} \right)$$

3.1. CAS UNIDIMENSIONNEL HÉTÉROGÈNE

Le schéma précédent est donc le schéma (2-4), auquel on a ajouté la discrétisation du terme d'ordre 4 en espace :

$$-\frac{\Delta t^2}{12} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho(x)} \left(K(x) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho(x)} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right) \right)$$

On peut réécrire B sous la forme :

$$\begin{aligned} Bu_i^n &= \frac{-\Delta t^2}{12 h^4} \cdot \left[\frac{K_{i+1}}{\rho_{i+1/2}} \left(\frac{1}{\rho_{i+3/2}} (u_{i+2}^n - u_{i+1}^n) - \frac{1}{\rho_{i+1/2}} (u_{i+1}^n - u_i^n) \right) \right. \\ &+ \frac{K_i \cdot (\rho_{i+1/2} - \rho_{i-1/2})}{\rho_{i+1/2} \rho_{i-1/2}} \left(\frac{1}{\rho_{i+1/2}} (u_{i+1}^n - u_i^n) - \frac{1}{\rho_{i-1/2}} (u_i^n - u_{i-1}^n) \right) \\ &\left. - \frac{K_{i-1}}{\rho_{i-1/2}} \left(\frac{1}{\rho_{i-1/2}} (u_i^n - u_{i-1}^n) - \frac{1}{\rho_{i-3/2}} (u_{i-1}^n - u_{i-2}^n) \right) \right] \end{aligned}$$

On effectue donc 27 opérations par noeuds et par pas de temps.

Ainsi itérer le schéma (4-4) proposé par G.Cohen et P.Joly nécessite 18 (schéma (2-4)) + 1 (on ajoute la partie d'ordre 4) + 27 (partie d'ordre 4) = 46 opérations par noeud et par pas de temps. On en reste là si l'on stocke les coefficients qui interviennent pour la "partie" (2-4) du schéma, sinon il faut ajouter 16 opérations pour le calcul des coefficients.

Schéma Proposé

Le schéma que nous proposons s'écrit sous la forme suivante :

$$\frac{1}{K_i} \frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{\Delta t^2} + \left\{ B - \frac{\Delta t^2}{12} {}^t B(KB)u_i^n = 0 \right\}$$

avec

$$B = {}^t A_2 \left(\frac{1}{\rho} A_2 \right)$$

Nous allons maintenant faire le compte des opérations nécessaires pour une itération en chaque noeud. Pour cela on s'autorise le droit d'utiliser deux tableaux unidimensionnel de travail.

Pour le calcul de B tout d'abord, on stocke les valeurs de $A_2 u_{j+1/2}^n$ dans un tableau V , c'est à dire que :

$$V(j) = A_2 u_{j+1/2}^n$$

CHAPITRE 3. SCHEMAS NUMERIQUES EN MILIEU HETEROGENE

Ceci requiert 5 opérations. Ensuite on multiplie le tableau V par $1/\rho$ puis on applique le transposé de A_2 . Au total le calcul de Bu_i^n coûte 11 opérations.

On stocke maintenant le résultat du calcul de Bu_i^n dans un deuxième tableau de travail W . On multiplie ensuite par K puis on applique le transposé de l'opérateur B . Au total on a 1 opération pour la multiplication par K puis 11 opérations pour le transposé de B . Donc le calcul de la partie d'ordre 4 en espace, après le calcul de la partie d'ordre 2 en espace coûte 12 opérations. On voit ici l'intérêt de choisir le même opérateur pour la partie d'ordre 2 en espace et la partie d'ordre 4 en espace.

En réécrivant le schéma sous la forme suivante :

$$u_i^{n+1} = 2u_i^n - u_i^{n-1} + K_i \cdot \Delta t^2 \left\{ B - \frac{\Delta t^2}{12} {}^t B(KB)u_i^n \right\}$$

Il est clair qu'une itération de notre schéma requiert 5 opérations pour itérer le schéma plus 11 (ordre 2 en espace) + 2 (terme $-\Delta t^2/12$) + 12 (ordre 4 en espace) opérations pour le calcul des dérivées en espace soit un total de 30 opérations.

Le coût calcul sera évidemment lié à la condition de stabilité et au nombre de points par période. En milieu homogène la condition de stabilité du schéma de G.Cohen et P.Joly est

$$\frac{C\Delta t}{h} \leq 1$$

alors que nous avons

$$\frac{C\Delta t}{h} \leq \frac{6}{7}$$

Le nombre de pas de temps pour notre schéma sera donc 7/6 fois plus grand que le nombre de pas de temps pour le schéma de Cohen-Joly. Cependant l'ordre en espace étant le même le pas d'espace sera le même, donc le nombre de points de discrétisation le même. Ainsi le rapport du coût informatique du schéma proposé, par le coût informatique du schéma de Cohen-Joly, sera égal au rapport des nombre de pas de temps (7/6), par le rapport du nombre d'opérations (30/46); c'est à dire 0.76. Notre schéma est donc 25 % moins coûteux.

Conclusion

Notre approche pour des schémas (2-4) et (4-4) en milieu unidimensionnel, est plus économique, que celle de G. Cohen et P. Joly, puisqu'elle requiert moins d'opérations par noeud.

Ensuite, elle fournit un schéma stable quelque soit l'hétérogénéité du milieu, ce qui n'est pas le cas du schéma de Cohen-Joly.

3.1. CAS UNIDIMENSIONNEL HÉTÉROGÈNE

Cependant pour des milieux hétérogènes où les schémas de Cohen-Joly sont stables, la condition de stabilité sera nettement plus grande pour le schéma qu'ils proposent, que pour le notre. Leur schéma sera alors plus économique.

Pour le schéma (2-4), il faut tempérer cette remarque par le fait qu'en choisissant un Δt trop grand (c'est à dire $\frac{c\Delta t}{h}$ proche de la condition de stabilité), on induit une erreur de dispersion en temps. En pratique donc, la condition de stabilité n'aura qu'un rôle indicatif.

En ce qui concerne le schéma (4-4) par contre, on a intérêt à prendre $\frac{c\Delta t}{h}$ proche de la condition de stabilité; dans ce cas le schéma proposé par Cohen-Joly est plus économique, puisque notre condition de stabilité sera d'autant plus petite que le milieu est hétérogène.

CHAPITRE 3. SCHEMAS NUMERIQUES EN MILIEU HETEROGENE

3.1.4 Etude de l'erreur en milieux hétérogènes

Nous allons étudier la précision des schémas numériques introduits précédemment dans des milieux hétérogènes. Nous allons notamment nous intéresser à l'influence du "degré" d'hétérogénéité du milieu sur la précision des résultats numériques.

Nous avons procédé de la façon suivante. Pour chaque milieu considéré nous calculons une solution de référence (analytiquement lorsque c'est possible, en faisant converger les méthodes numériques lorsque la solution analytique est hors d'atteinte). Ensuite nous comparons cette solution de référence aux résultats des simulations numériques.

Nous étudions trois types de milieux de plus en plus hétérogènes. Tout d'abord un milieu homogène afin de bien comprendre ce qui dans la suite proviendra du caractère hétérogène du milieu. Ensuite un milieu bicouche où l'on connaît la solution analytique, pour différents contraste d'impédance acoustique. Enfin un milieu aléatoire de fonction de corrélation gaussien où l'on fixe la variance et la portée à notre convenance de manière à obtenir un milieu arbitrairement hétérogène.

On considère l'équation des ondes acoustiques en milieux hétérogènes. La pression acoustique u est reliée au module d'incompressibilité K , à la densité ρ et à la source émettrice d'ondes f par le système d'équations suivantes :

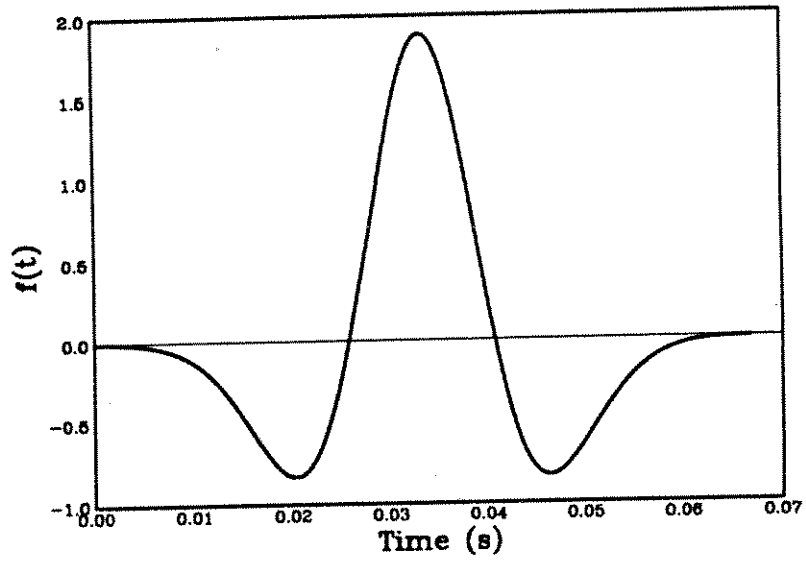
$$\frac{1}{K(x)} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho(x)} \nabla u \right) = f(t) \delta_x \quad x \in R$$
$$u(x, 0) = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0$$

Nous considérons ici une source "Ricker" c'est à dire que $f(t)$ est donnée par :

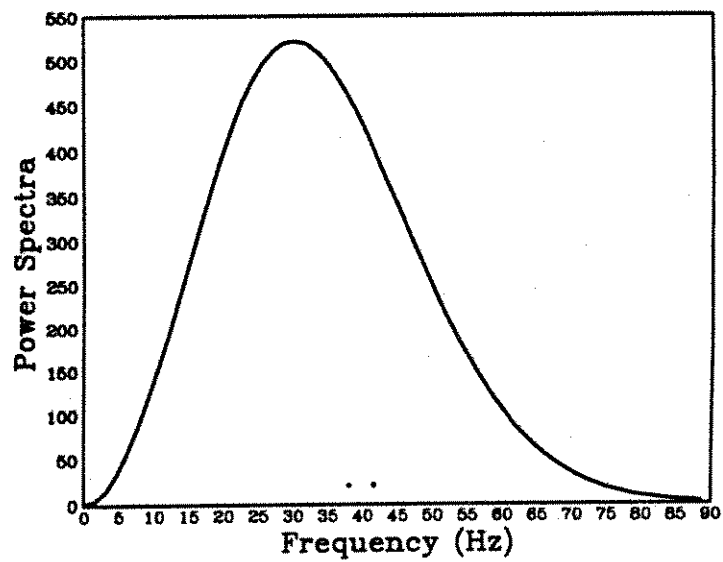
$$f(t) = \frac{1}{\pi F} \frac{d^2}{dt^2} e^{-(\pi F(t-1/F))^2}$$

où F est la fréquence centrale (ou dominante) du spectre de f .

3.1. CAS UNIDIMENSIONNEL HÉTÉROGÈNE



Ricker de fréquence centrale $F = 30Hz$



Le spectre du Ricker

CHAPITRE 3. SCHEMAS NUMERIQUES EN MILIEU HETEROGENE

Etude en Milieu Unidimensionnel

Le Milieu Homogene

La solution exacte avec source Ricker

Dans le cas d'un milieu homogene K et ρ sont des constantes et on peut alors reecrire l'equation sous la forme :

$$\begin{cases} \frac{1}{c^2(x)} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(t) \delta_x & x \in R \\ u(x, 0) = 0 & \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0 \end{cases} \quad (3.7)$$

ou $c = \sqrt{K/\rho}$. En utilisant la transformation de Fourier, on determine la solution exacte de ce probleme (cf Annexe 3). On peut ecrire la solution $u(x, t)$ sous la forme :

$$u(x, t) = \frac{c}{4} \left(\tilde{F}\left(t - \frac{|x|}{c}\right) - \tilde{F}\left(t + \frac{|x|}{c}\right) \right)$$

ou \tilde{F} est la primitive de f qui s'annule en $-\infty$.

Remarque

Ce resultat classique montre tout d'abord qu'il y a propagation de deux ondes dans des directions opposees (l'une vers $+\infty$ et l'autre vers $-\infty$); donc le probleme est symetrique par rapport a la source. Ensuite que le milieu 1D "integre" la source, puisque la solution a la forme de la primitive de la fonction source f .

Les solutions numeriques et leur precision

Nous allons illustrer sur des instantanes, les resultats sur l'erreur de phase et l'erreur de groupe du chapitre precedent. Le probleme etant symetrique on s'interesse uniquement a l'onde se propageant vers la droite.

Nous allons illustrer trois points. Tout d'abord le gain significatif lorsque l'on passe d'un operateur d'ordre 2 ($L = 1$) a un operateur d'ordre 4 ($L = 2$).

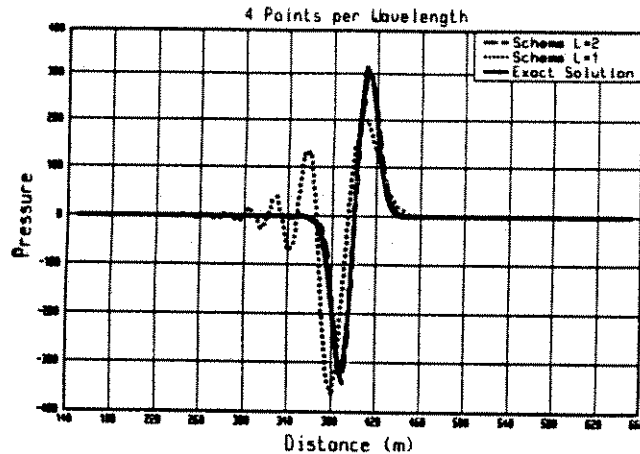
Ensuite nous allons montrer que cette tendance ne se generalise pas et que le gain de precision obtenu entre l'ordre 4 ($L = 2$) et l'ordre 20 par exemple ($L = 10$) est faible. Enfin nous montrerons l'influence de la discretisation en temps et les effets de dispersion qu'elle engendre.

L'interet de $L = 2$ par rapport a $L = 1$

Pour des operateurs d'ordre peu eleve en espace, le probleme principal va etre la dispersion en espace, comme le montre les courbes d'erreur de phase de la partie precedente. La superiorite de l'operateur correspondant a $L = 2$ par rapport a

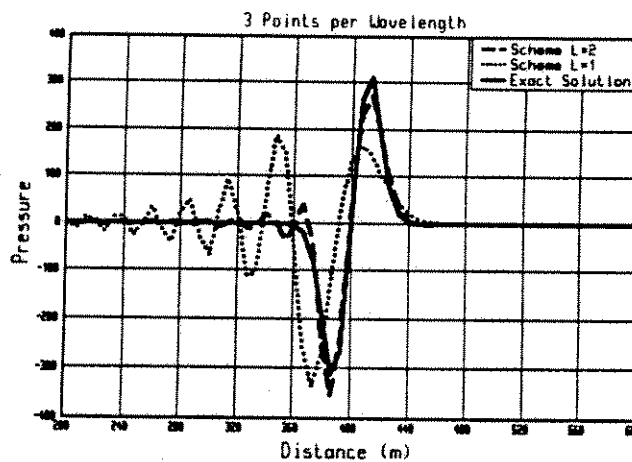
3.1. CAS UNIDIMENSIONNEL HÉTÉROGÈNE

$L = 1$ est net sur l'instantané ci-dessous, où avec seulement 4 points par longueur d'onde la solution calculée avec $L = 2$ est pratiquement la solution exacte, alors que celle calculée avec $L = 1$ disperse énormément.



Instantané à $t = 0.3$ s avec $\frac{c\Delta t}{h} = 0.2$

Le schéma avec $L = 2$, bien que très précis, a ses limitations et on peut noter ses effets dispersifs avec 3 points par longueur d'onde.



Instantané à $t = 0.3$ s avec $\frac{c\Delta t}{h} = 0.2$

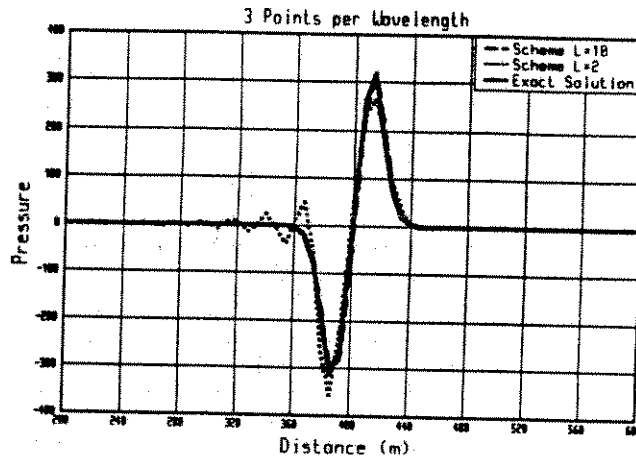
On est alors tenté de réitérer le raisonnement, et de prendre un opérateur plus long afin d'obtenir une meilleure précision.

L'intérêt de $L = 2$ par rapport à $L = 10$

L'analyse précédente ne se généralise pas notamment à cause de l'erreur en temps qui devient prépondérante avec des opérateurs très précis (donc très longs) en

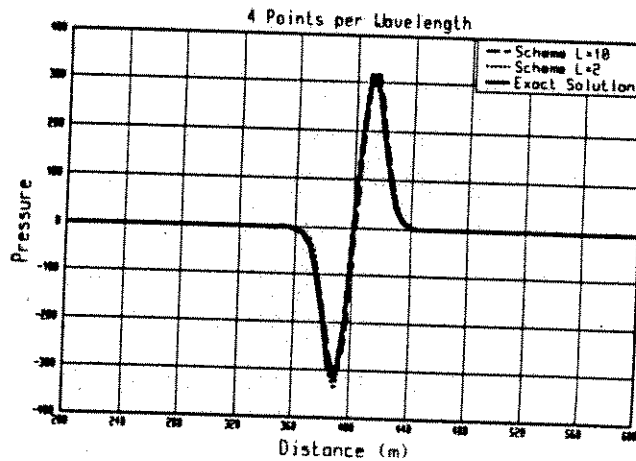
CHAPITRE 3. SCHEMAS NUMERIQUES EN MILIEU HÉTÉROGÈNE

espace. Cependant on observe un gain en précision spatiale lorsque l'ordre de l'opérateur augmente, comme le montre l'instantané ci-dessous.



Instantané à $t = 0.3$ s avec $\frac{c\Delta t}{h} = 0.2$

Ce gain est toutefois beaucoup moins important que dans le cas $L = 1$ par rapport à $L = 2$. On peut remarquer sur l'instantané ci-dessous qu'avec 4 points par longueur d'onde les deux opérateurs $L = 2$ et $L = 10$ sont très proches de la solution exacte.

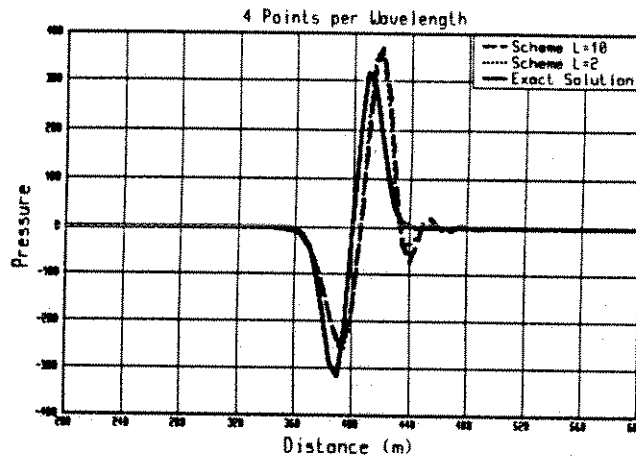


Instantané à $t = 0.3$ s avec $\frac{c\Delta t}{h} = 0.2$

Lorsque l'on n'impose plus un Δt petit en prenant $c\Delta t/h = 0.2$ mais que l'on choisit $c\Delta t/h = 0.7$ on constate les effets dispersifs de la discrétisation en temps. Or comme on l'a vu sur les courbes d'erreur de phase et d'erreur de groupe, plus l'opérateur est précis en espace et moins il y aura de compensation entre la dispersion en espace et la dispersion en temps. Ceci est visible sur l'instantané ci-dessous où l'opérateur correspondant à $L = 10$ subit plus la dispersion en temps

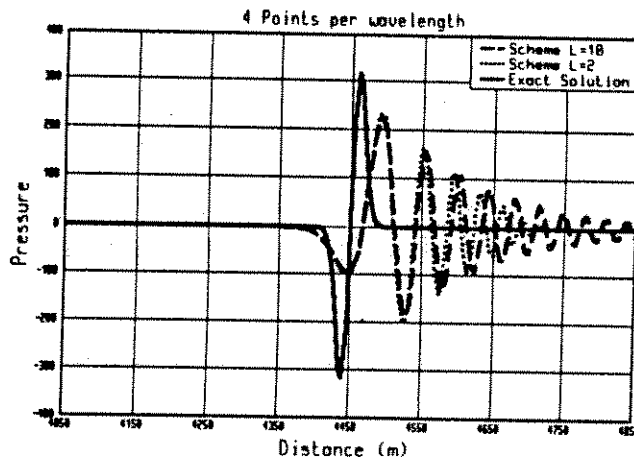
3.1. CAS UNIDIMENSIONNEL HÉTÉROGÈNE

que celui correspondant à $L = 2$.



Instantané à $t = 0.3 \text{ s}$ avec $\frac{c\Delta t}{h} = 0.7$

Ce phénomène s'accroît lorsque l'on laisse se propager l'onde. La dispersion pour $L = 10$ est nettement plus importante que celle pour $L = 2$.



Instantané à $t = 3.0 \text{ s}$ avec $\frac{c\Delta t}{h} = 0.7$

Conclusion

Nous avons illustré, en milieu homogène les différents effets dispersifs liés à la discrétisation en temps et en espace.

Nous pouvons en conclure que l'opérateur d'ordre 4 correspondant à $L = 2$ réalise un bon compromis en assurant une bonne approximation en espace et une bonne compensation de l'erreur en temps et de l'erreur en espace.

CHAPITRE 3. SCHÉMAS NUMÉRIQUES EN MILIEU HÉTÉROGÈNE

Le Milieu Bicouche

La solution exacte avec source Ricker

Après avoir vu les effets dispersifs en milieu homogène, nous allons passer aux milieux hétérogènes et tout d'abord aux milieux bicouches.

La dispersion numérique n'est plus alors le seul phénomène déterminant. En effet il intervient, dans un milieu bicouche, l'approximation des coefficients de réflexion et de transmission.

Il est possible de calculer analytiquement l'ordre d'approximation de ces coefficients. En résolvant la relation de dispersion semi-discrète en k , on trouve trois nombres d'ondes k_1, k_2, k_3 . Le premier correspond à l'onde exacte, et les deux autres à des ondes évanescentes. En écrivant alors les équations données par le schéma au noeud de l'interface, ainsi qu'aux quatre noeuds voisins, il est possible de trouver une expression de R_h et T_h . Ceci est long et fastidieux, et nous avons préféré procéder numériquement. Pour cela nous allons calculer la solution exacte. On se donne un milieu tel que

$$K(x) = \begin{cases} K_1 & x \leq x_I \\ K_2 & x \geq x_I \end{cases}$$
$$\rho(x) = \begin{cases} \rho_1 & x \leq x_I \\ \rho_2 & x \geq x_I \end{cases}$$

Puisque le problème est symétrique par rapport à la source on considère une incidente se propageant vers la droite. On décompose alors la solution u sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} x \leq x_I & \quad u(x, t) = u_I(x, t) + u_R(x, t) \\ x \geq x_I & \quad u(x, t) = u_T(x, t) \end{aligned}$$

On sait d'autre part que l'onde incidente se propage à la vitesse $c_1 = \sqrt{K_1/\rho_1}$ vers la droite, donc est de la forme:

$$u_I(x, t) = \tilde{F}\left(t - \frac{x}{c_1}\right)$$

Puisque l'onde réfléchie se propage à la vitesse c_1 en sens inverse de l'onde incidente, on choisit u_R de la forme :

$$u_R(x, t) = G\left(t + \frac{x - x_I}{c_1}\right)$$

3.1. CAS UNIDIMENSIONNEL HÉTÉROGÈNE

L'onde transmise se déplace à la vitesse $c_2 = \sqrt{K_2/\rho_2}$ dans le sens de l'onde incidente; on choisit donc u_T de la forme :

$$u_T(x, t) = H\left(t - \frac{x - x_I}{c_2}\right)$$

Il nous reste donc à identifier les deux fonctions inconnues G et H . Pour cela on écrit la continuité de la pression u ainsi que la continuité du flux $\frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial x}$ à l'interface, ce qui donne

$$\begin{cases} \tilde{F}\left(t - \frac{x_I}{c_1}\right) + G(t) = H(t) \\ \tilde{F}'\left(t - \frac{x_I}{c_1}\right) + G'(t) = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} H'(t) \\ \sigma_1 = \sqrt{K_1 \rho_1} \quad \sigma_2 = \sqrt{K_2 \rho_2} \end{cases}$$

Puisque pour $t < 0$ on a $F = G = H = 0$ on peut intégrer la deuxième relation et on est alors conduit au système suivant

$$\begin{cases} H(t) - G(t) = \tilde{F}\left(t - \frac{x_I}{c_1}\right) \\ \frac{\sigma_1}{\sigma_2} H(t) + G(t) = \tilde{F}'\left(t - \frac{x_I}{c_1}\right) \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} G(t) = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\sigma_2 + \sigma_1} \tilde{F}\left(t - \frac{x_I}{c_1}\right) \\ H(t) = \frac{2\sigma_2}{\sigma_2 + \sigma_1} \tilde{F}'\left(t - \frac{x_I}{c_1}\right) \end{cases}$$

On en déduit l'expression exacte de l'onde réfléchie et de l'onde transmise

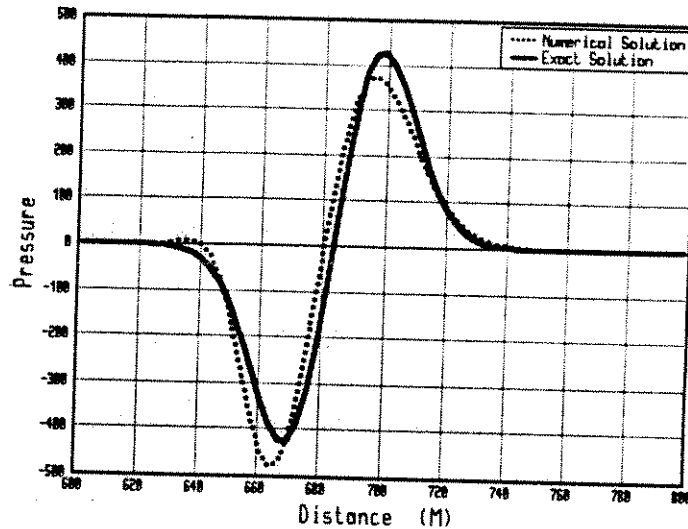
$$\begin{cases} u_R(x, t) = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\sigma_2 + \sigma_1} \tilde{F}\left(t - \frac{x_I}{c_1} + \frac{x - x_I}{c_1}\right) & x \leq x_I \\ u_T(x, t) = \frac{2\sigma_2}{\sigma_2 + \sigma_1} \tilde{F}'\left(t - \frac{x_I}{c_1} - \frac{x - x_I}{c_2}\right) & x \geq x_I \end{cases}$$

Les solutions numériques et leur précision

Le calcul de la solution exacte montre que l'onde transmise ainsi que l'onde réfléchie, ont la forme de la primitive du Ricker. Les solutions numériques auront également cette forme mais avec, le plus souvent une perte de la symétrie et un décalage, un retard par rapport à l'onde exacte. Ceci montre que le coefficient

CHAPITRE 3. SCHÉMAS NUMÉRIQUES EN MILIEU HÉTÉROGÈNE

de réflexion (resp transmission) est complexe.



Exemple de dispersion numérique

Nous allons voir alors quel est l'ordre d'approximation du coefficient de reflexion (resp de transmission) en calculant l'erreur L^2 normalisée, sur les instantanés. En effet par la relation de dispersion, il est clair que l'onde incidente numérique u_I^h vérifie :

$$u_I^h = u_I + o(h^4)$$

où u_I est l'onde incidente exacte. Alors on a

$$\begin{aligned} \|u_R\| &= |R| \|u_I\| \\ \Rightarrow \frac{\|u_R - u_R^h\|}{\|u_R\|} &= \frac{|R - R_h|}{|R|} (1 + o(h^4)) \end{aligned}$$

Ainsi on verra quel est l'ordre d'approximation en traçant simplement les courbes $h \mapsto \frac{\|u_R - u_R^h\|}{\|u_R\|}$ (resp $h \mapsto \frac{\|u_T - u_T^h\|}{\|u_T\|}$).

Cas d'un faible coefficient de réflexion

Nous considérons tout d'abord un milieu avec un coefficient de réflexion R de 0.1. On se place dans le milieu suivant:

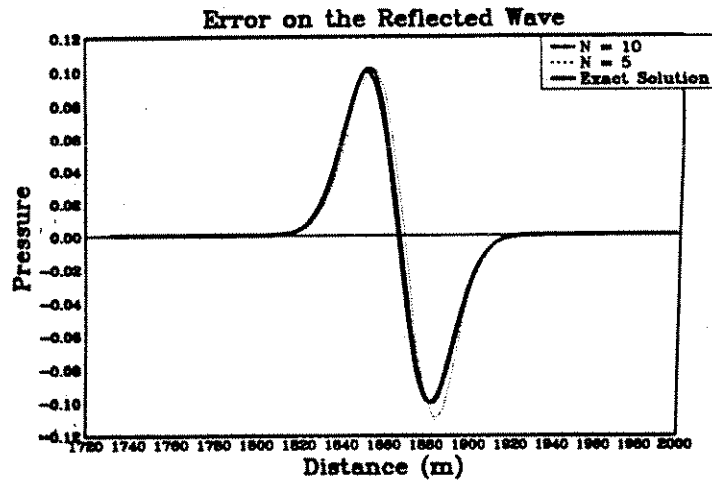
$$\begin{aligned} C_1 &= 2000m/s & C_2 &= 1500m/s \\ \rho_1 &= 1kg/m & \rho_2 &= 1.2kg/m \end{aligned}$$

ce qui donne les coefficients de réflexion et transmission suivants :

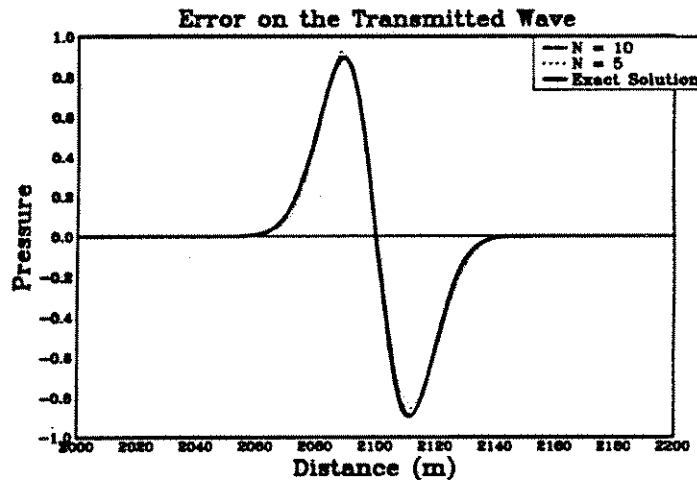
$$R = -0.1 \quad T = 0.9$$

3.1. CAS UNIDIMENSIONNEL HÉTÉROGÈNE

Nous donnons ci-dessous les instantanés pour différents pas d'espace (c'est à dire nombre de points par longueur d'onde).



Instantanés de l'onde réfléchi.



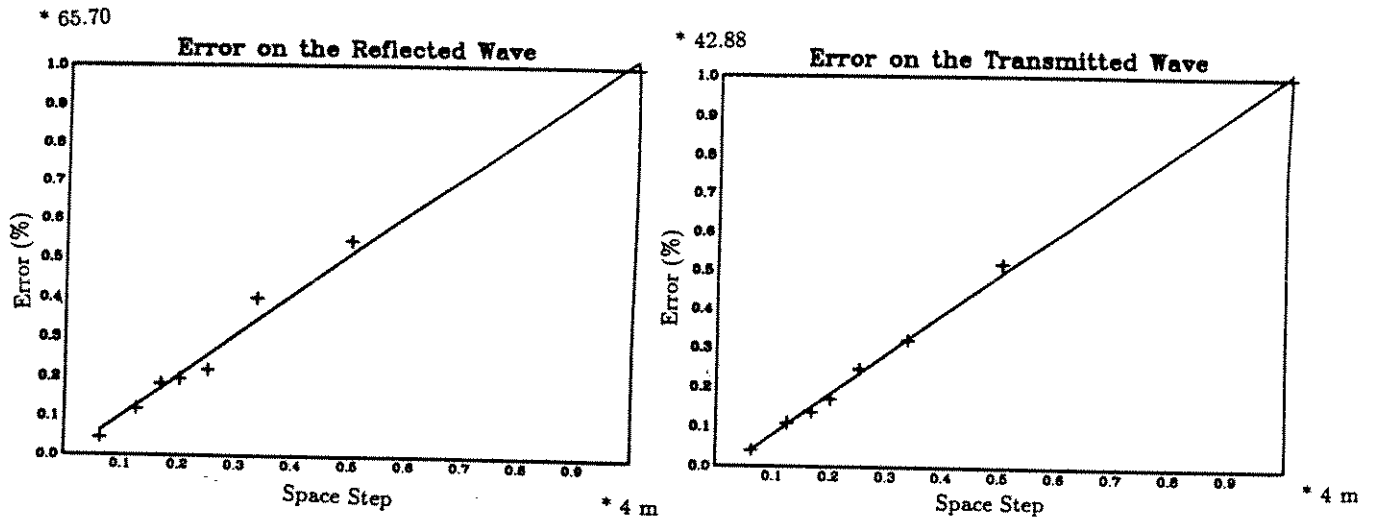
Instantanés de l'onde transmise.

Nous allons voir maintenant que l'approximation du coefficient de transmission et de réflexion est d'ordre 1. Nous donnons ci-dessous les courbes d'erreur L^2 normalisée, c'est à dire des quantités :

$$\left\{ \frac{\int_{\Omega} |S_{ex}(x, t_0) - S_{num}(x, t_0)|^2 dx}{\int_{\Omega} |S_{num}(x, t_0)|^2 dx} \right\}^{1/2}$$

CHAPITRE 3. SCHÉMAS NUMÉRIQUES EN MILIEU HÉTÉROGÈNE

où Ω est un ouvert arbitraire contenant le support de la solution exacte.



L'erreur Normalisée.

Cas d'un fort coefficient de reflexion

Nous allons maintenant chercher à savoir quel rôle peut jouer l'hétérogénéité du milieu sur les résultats précédents. Nous avons donc considéré un milieu avec un plus fort coefficient de réflexion, dont les vitesses et les densités sont données par

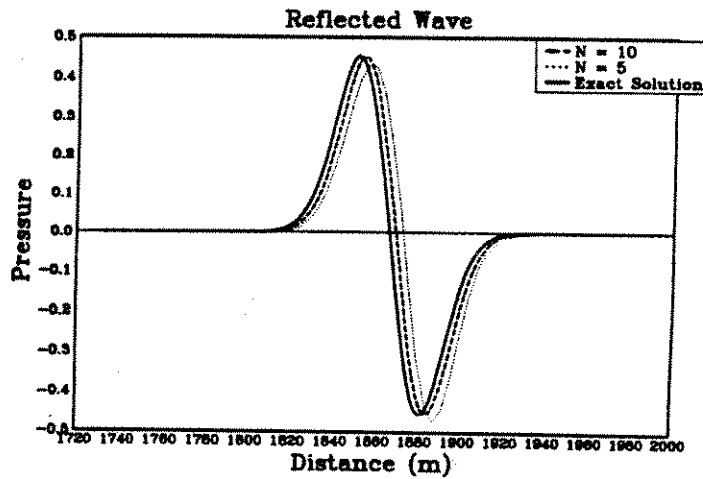
$$\begin{aligned} C_1 &= 2000m/s & C_2 &= 1500m/s \\ \rho_1 &= 1kg/m & \rho_2 &= 0.5kg/m \end{aligned}$$

d'où les coefficients de réflexion et transmission :

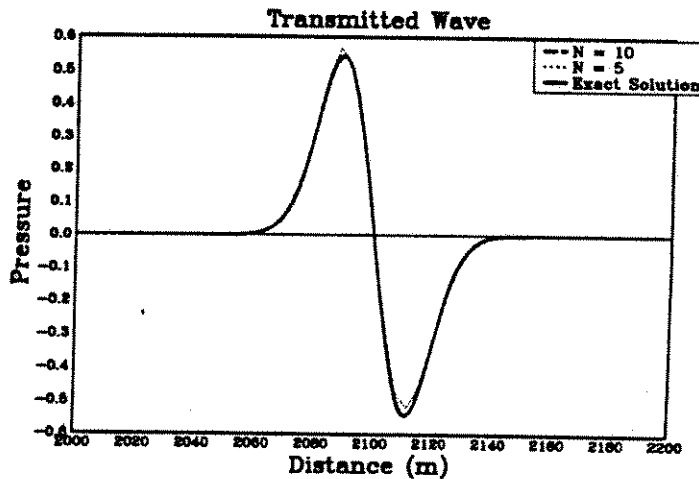
$$R = -5/11 \simeq -0.4545 \quad T = 6/11 \simeq 0.5454$$

Nous donnons ci-dessous les instantanés pour différents pas d'espace (c'est à dire nombre de points par longueur d'onde).

3.1. CAS UNIDIMENSIONNEL HÉTÉROGÈNE



Instantanés de l'onde réfléchi.

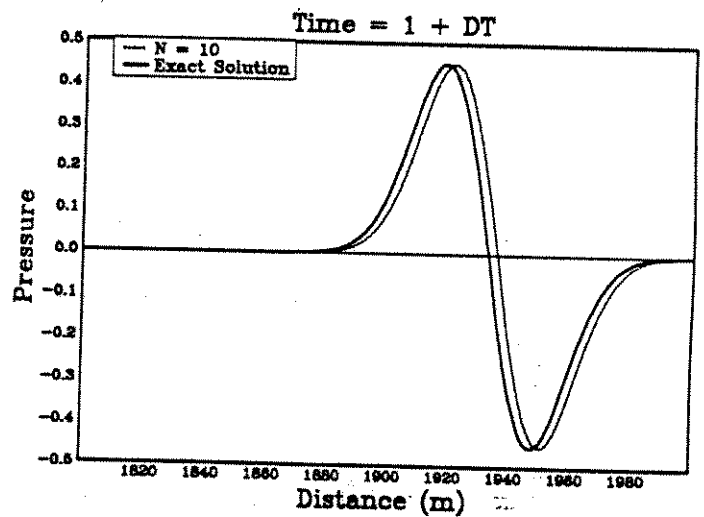
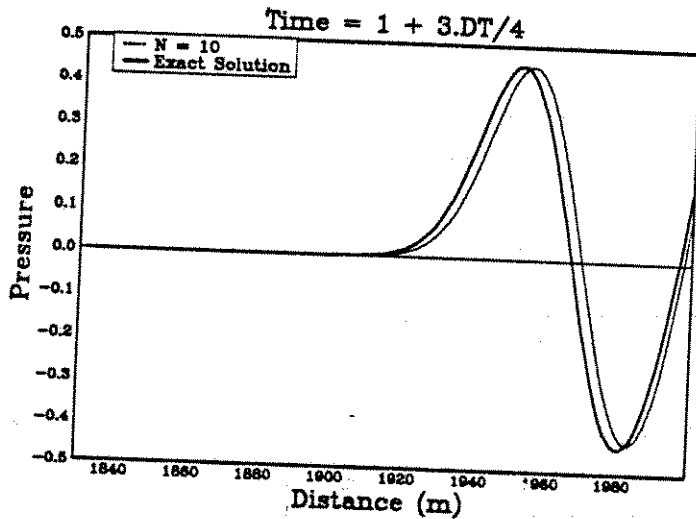
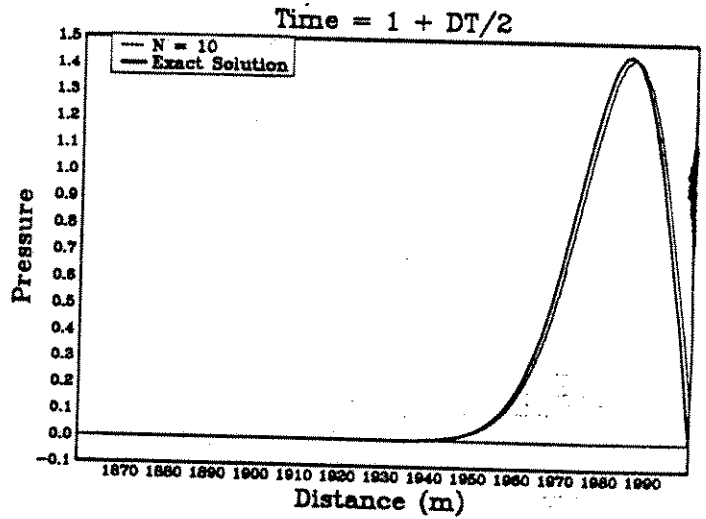
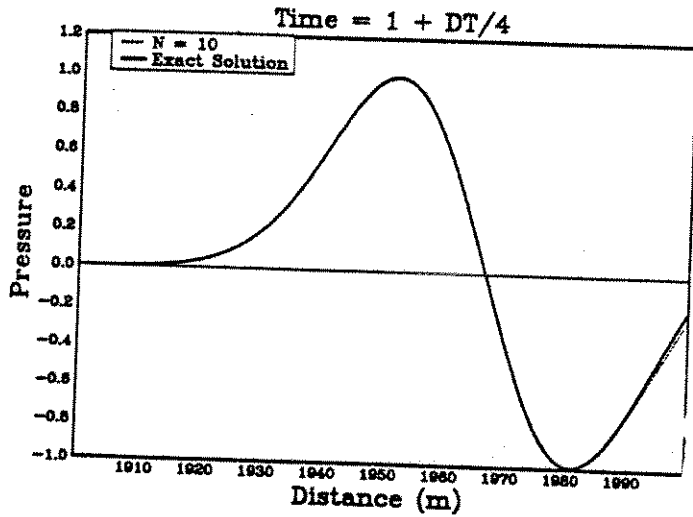


Instantanés de l'onde transmise.

Il est clair sur ces instantanés que l'amplitude de l'onde est bien approchée par les schémas numériques. Par contre le décalage entre l'onde exacte et l'onde numérique est lui plus difficile à maîtriser. Nous donnons ci-dessous une série de 4 instantanés qui illustrent cette propriété, et qui montre bien la formation du décalage entre les deux ondes. Dans l'exemple choisi, le temps 1 correspond au temps de trajet source-interface, et Δt correspond au temps de propagation d'une

CHAPITRE 3. SCHÉMAS NUMÉRIQUES EN MILIEU HÉTÉROGÈNE

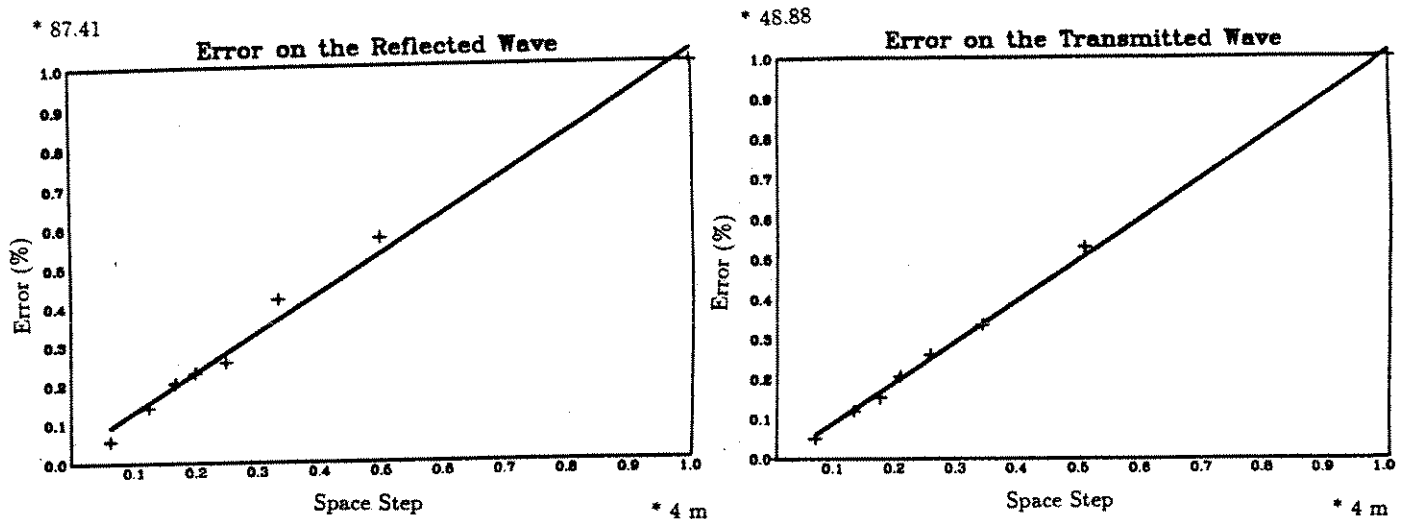
longueur de signal.



Le coefficient de réflexion est complexe.

Nous allons voir maintenant que l'approximation du coefficient de transmission et de réflexion est d'ordre 1. Nous donnons ci-dessous les courbes d'erreur L^2 normalisée :

3.1. CAS UNIDIMENSIONNEL HÉTÉROGÈNE



L'erreur Normalisée

Remarque

i) L'étude menée en milieu homogène pour le schéma (2-4), préconisait 6 points par longueur d'onde, pour que le déphasage entre l'onde exacte et l'onde numérique, au temps final T , soit inférieure à $\pi/2$, c'est à dire :

$$(\omega - \omega(k)) T \leq \frac{\pi}{2}$$

ce que l'on peut encore écrire sous la forme :

$$(c - c_\varphi) T \leq \frac{\lambda}{4}$$

où λ est la longueur d'onde. Ce critère correspond à l'erreur que se donnent les géophysiciens, en prenant comme longueur d'onde, la longueur centrale correspondant à la fréquence centrale. Nous remarquons que sur les instantanés ci-dessus le décalage en espace entre les deux ondes, pour 5 points par longueur d'onde est de l'ordre de $\lambda/10$.

On se trouve donc en dessous de l'erreur admise en géophysique. On respecte également la contrainte sur l'erreur de phase, fixée précédemment.

En milieu bicouche avec des contrastes d'impédance forts, nous pouvons donc conseiller de même qu'en milieu homogène, 6 points par longueur d'onde pour le schéma (2-4).

CHAPITRE 3. SCHÉMAS NUMÉRIQUES EN MILIEU HÉTÉROGÈNE

Conclusion

Nous avons montré numériquement que les coefficients de réflexion et de transmission en milieu bicouche, sont approchés à l'ordre 1 en h . Ce résultat est à rapprocher du résultat de G.Cohen et P.Joly (cf[Coh3]) qui ont calculé analytiquement l'ordre d'approximation du coefficient de réflexion et de transmission pour le schéma (2-4) qu'ils proposent.

Ils ont montré que l'approximation est :

- i) d'ordre 1, si on reste sous la condition suffisante de stabilité
- ii) d'ordre 2, si on la transgresse (ce qui ne veut pas dire qu'on ait un schéma instable).

Nous avons vu que la règle pratique déduite de l'étude en milieu homogène, s'appliquait. Nous préconisons donc 6 points par longueur d'onde, même en milieu bicouche avec fort contraste. Ce choix du pas d'espace donnera un décalage entre l'onde exacte et l'onde numérique inférieur à $\lambda/4$, qui est l'erreur généralement admise en géophysique.

Le Milieu Aléatoire

Le milieu à faible variation

En utilisant des milieux à fonction de corrélation gaussienne il est facile de se donner une distribution d'impédance acoustique, ainsi qu'une distribution de densité de variation arbitraire. On se donne donc tout d'abord une distribution d'impédance acoustique K ayant les caractéristiques suivantes:

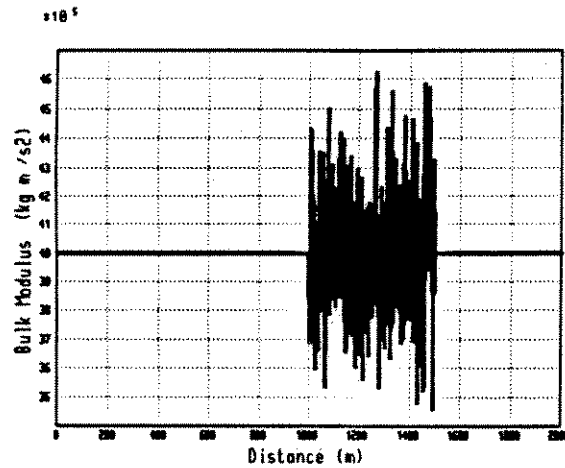
moyenne = $4 \cdot 10^6$ écart type = 5%
portée = 1.5 m longueur du milieu = 500 m

ainsi qu'une distribution de densité ρ telle que
moyenne = 1 écart type = 5%
portée = 1.5 m longueur du milieu = 500 m

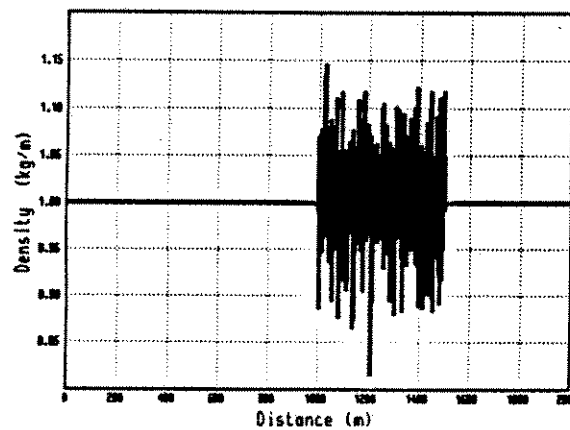
Nous considérons que le milieu est constitué de couches de 0.5 mètre où les paramètres K et ρ sont constants. Nous incluons ces deux milieux de 500m dans

3.1. CAS UNIDIMENSIONNEL HÉTÉROGÈNE

un milieu homogène de 2000m ce qui nous donne les distributions suivantes



L'impédance acoustique K



La densité ρ

Le calcul de la solution de référence

Dans de tels milieux la solution analytique est hors d'atteinte, il faut donc calculer une solution de référence numériquement. Afin d'être le plus impartial possible nous avons calculé cette solution de référence par deux simulations différentes avec deux schémas différents. Nous avons utilisé le schéma construit avec $L = 2$ et $L = 4$. Puisque nous avons échantillonné la perturbation en K et ρ avec un pas d'espace de 0.5 mètre, nous avons effectué les deux simulations avec ce même pas d'espace. Celui-ci correspond à 48.36 points par longueur d'onde. Pour le pas de temps nous avons choisi le paramètre $p = c\Delta t/h$ égal à 1/10, ce qui correspond à

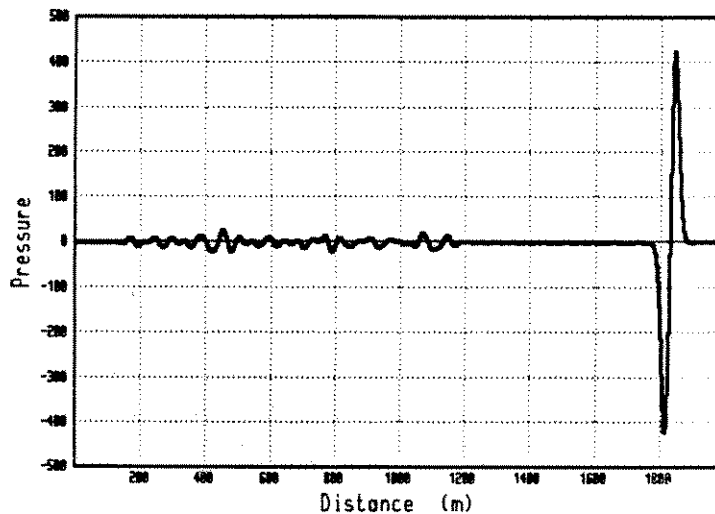
CHAPITRE 3. SCHEMAS NUMERIQUES EN MILIEU HETEROGENE

un pas de temps de $2.22 \cdot 10^{-5}$ seconde. Nous laissons l'onde se propager pendant 0.95 seconde de façon à voir les phénomènes de réflexion et de transmission sur la zone perturbée. Nous sommes alors sûr que le support de l'instantané se trouve dans $[0, 2000]$ et nous comparons les deux instantanés obtenus en calculant l'erreur relative c'est à dire la quantité

$$E = \left\{ \frac{\int_0^{2000} |S(x) - S'(x)|^2 dx}{\int_0^{2000} S^2(x) dx} \right\}^{1/2} = 1.64 \cdot 10^{-5}$$

où S (resp S') est la solution obtenue avec $L = 4$ (resp $L = 2$).

On décide alors de prendre comme solution de référence l'instantané généré avec $L = 4$.



La solution de référence

Les solutions numériques et leur précision

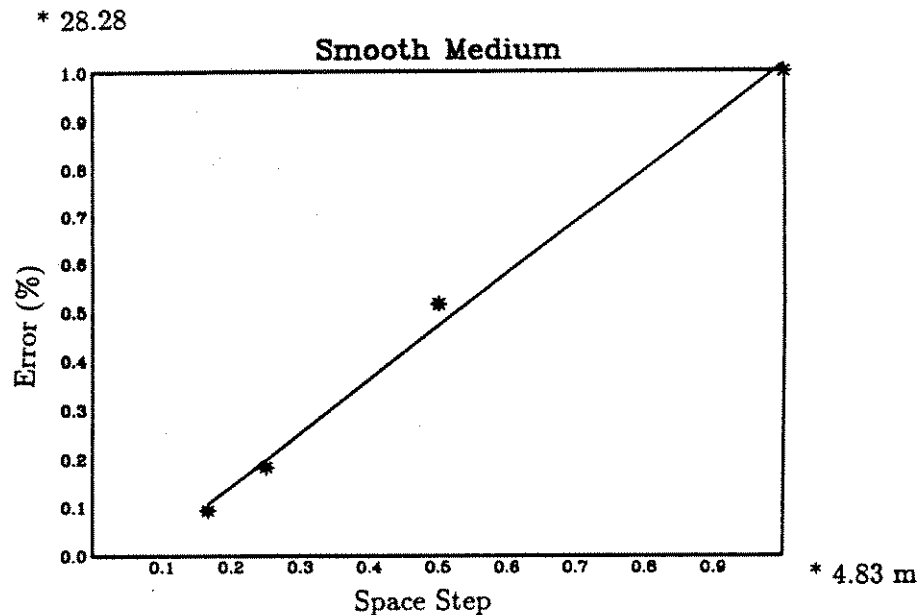
L'erreur numérique proviendra de deux sources. Tout d'abord la dispersion numérique lorsque le nombre de points par longueur d'onde est insuffisant. Ensuite lorsque l'on a un pas d'espace supérieur à 0.5 mètre une erreur d'interpolation sur le milieu. On ne tiendra alors pas compte de certains phénomènes.

Nous fixons le rapport $C \Delta t/h = 0.1$. Puis nous calculons l'erreur relative E qui devient une fonction du nombre de points par longueur d'onde N (c'est à dire du pas d'espace h). On a

$$E(N) = \left\{ \frac{\int_0^{2000} (S_{ex}(x, t_0) - S_{num}(x, t_0))^2 dx}{\int_0^{2000} S^2(x, t_0) dx} \right\}^{1/2}$$

3.1. CAS UNIDIMENSIONNEL HÉTÉROGÈNE

Nous donnons ci-dessous les courbes d'erreur.



L'erreur relative normalisée.

Le milieu à forte variation

On se donne donc tout d'abord une distribution d'impédance acoustique K ayant les caractéristiques suivantes :

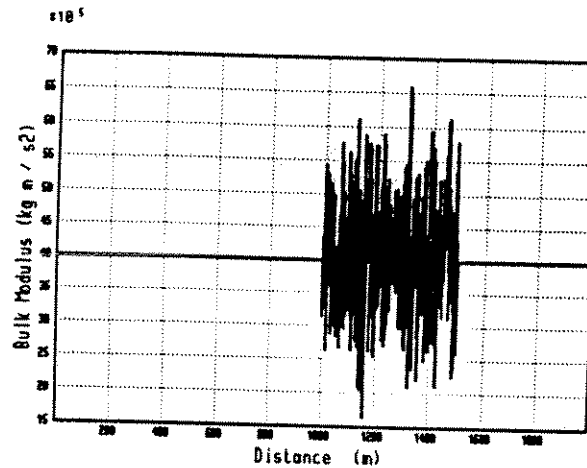
moyenne = $4 \cdot 10^6$ écart type = 20%
portée = 1.5 m longueur du milieu = 500 m

ainsi qu'une distribution de densité ρ telle que :

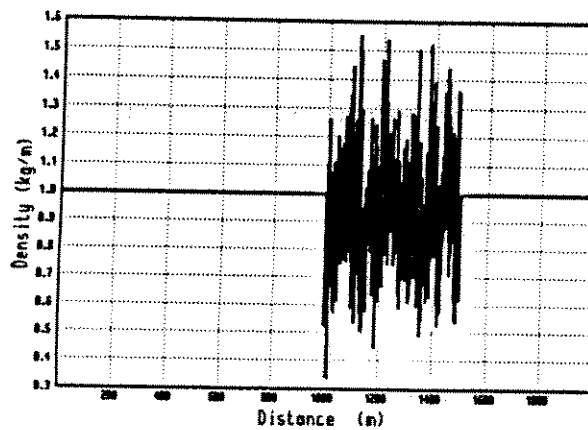
moyenne = 1 écart type = 20%
portée = 1.5 m longueur du milieu = 500 m

Comme précédemment nous considérons que le milieu est constitué de couches de 0.5 mètre où les paramètres K et ρ sont constants. Nous incluons ces deux milieux de 500m dans un milieu homogène de 2000m ce qui nous donne les distributions suivantes

CHAPITRE 3. SCHÉMAS NUMÉRIQUES EN MILIEU HÉTÉROGÈNE



L'impédance acoustique K



La densité ρ

Le calcul de la solution de référence

Comme précédemment nous calculons une solution de référence numériquement, avec deux simulations différentes et deux opérateurs correspondant à $L = 2$ et $L = 4$. Le pas d'espace est fixé à 0.5 mètre ce qui correspond à 34.6 points par longueur d'onde. Pour le pas de temps nous avons choisi $p = c\Delta t/h$ égal à $1/10$, ce qui correspond à un pas de temps de $1.417 \cdot 10^{-5}$ seconde. Nous laissons l'onde se propager pendant 0.95 seconde.

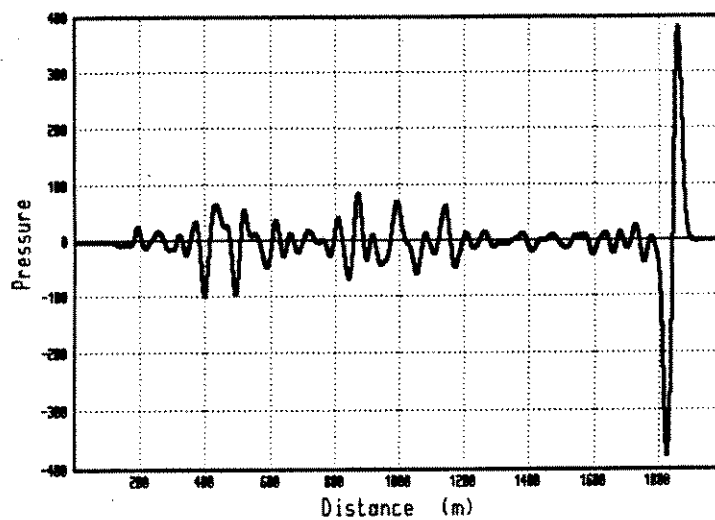
Nous comparons les deux instantanés obtenus en calculant l'erreur relative et nous

3.1. CAS UNIDIMENSIONNEL HÉTÉROGÈNE

obtenons

$$E = \left\{ \frac{\int_0^{2000} (S(x) - S'(x)dx)^2}{\int_0^{2000} S^2(x)dx} \right\}^{1/2} = 2.316 \cdot 10^{-5}$$

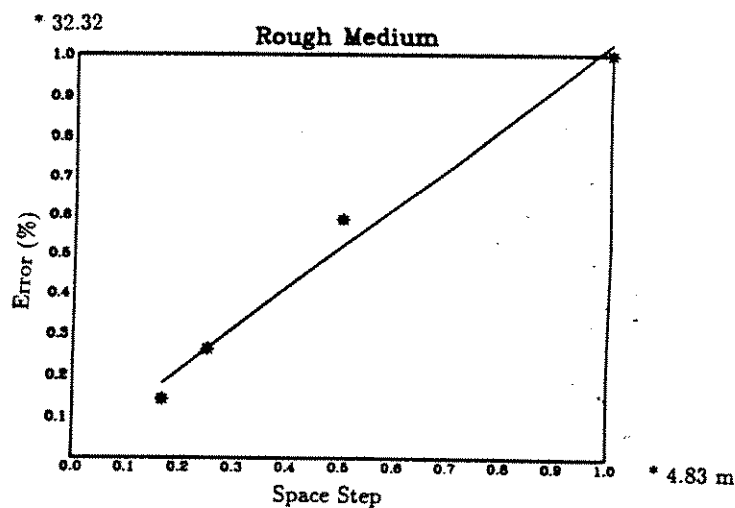
On décide alors de prendre comme solution de référence l'instantané généré avec $L = 4$.



La solution de référence

Les solutions numériques et leur précision

Comme précédemment nous comparons les différents opérateurs en fixant le rapport $C \Delta t/h = 0.1$. Nous donnons ci-dessous les courbes d'erreur relative E .



L'erreur relative sur les instantanés

CHAPITRE 3. SCHEMAS NUMERIQUES EN MILIEU HETEROGENE

Conclusion

En milieu aléatoire, c'est à dire en milieu extrêmement hétérogène, nous avons montré que l'approximation des réflexions et transmissions dans le milieu est d'ordre 1. Il faut noter le bon comportement du schéma par rapport à l'hétérogénéité du milieu lorsque l'on augmente les contrastes d'impédance.

Dans le cas de milieu extrêmement hétérogène, notre règle de 6 points par longueur d'onde n'a plus tellement de sens. En effet un tel pas d'espace revient à lisser le milieu, et à ne pas tenir compte de certaines réflexions et transmissions. On peut cependant dire qu'en appliquant cette règle, on contrôle le phénomène de dispersion.

3.2. CAS BIDIMENSIONNEL HÉTÉROGÈNE

3.2 Cas Bidimensionnel Hétérogène

Nous reprenons l'analyse en milieu bidimensionnel.

3.2.1 Schémas d'ordre 2 en temps et 2L en espace

Introduction et Notations

Nous cherchons à discrétiser l'équation :

$$\frac{1}{K(x,y)} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho(x,y)} \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\rho(x,y)} \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0 \quad (3.8)$$

où les fonctions K et ρ vérifient :

$$\begin{aligned} K &\in L^2(\mathbb{R}^2) & \rho &\in L^2(\mathbb{R}^2) \\ 0 < K_m &\leq K(x,y) \leq K_M \\ 0 < \rho_m &\leq \rho(x,y) \leq \rho_M \end{aligned}$$

Pour cela on introduit les espaces fonctionnels suivants :

$$L_{\infty}^2 = \left\{ \varphi \in L^2(\mathbb{R}^2) / \varphi = \sum_{i,j=-\infty}^{+\infty} \varphi_{i,j} \mathbf{1}_{[(i-1/2)h, (i+1/2)h]} \mathbf{1}_{[(j-1/2)h, (j+1/2)h]} \right\}$$

$$L_{**}^2 = \left\{ \varphi \in L^2(\mathbb{R}^2) / \varphi = \sum_{i,j=-\infty}^{+\infty} \varphi_{i+1/2, j+1/2} \mathbf{1}_{[ih, (i+1)h]} \mathbf{1}_{[jh, (j+1)h]} \right\}$$

$$L_{*o}^2 = \left\{ \varphi \in L^2(\mathbb{R}^2) / \varphi = \sum_{i,j=-\infty}^{+\infty} \varphi_{i+1/2, j} \mathbf{1}_{[ih, (i+1)h]} \mathbf{1}_{[(j-1/2)h, (j+1/2)h]} \right\}$$

$$L_{o*}^2 = \left\{ \varphi \in L^2(\mathbb{R}^2) / \varphi = \sum_{i,j=-\infty}^{+\infty} \varphi_{i, j+1/2} \mathbf{1}_{[(i-1/2)h, (i+1/2)h]} \mathbf{1}_{[(j, (j+1)h]} \right\}$$

h le pas de discrétisation en espace. On muni ces espaces des produits scalaires suivants :

$$(f, g)_{L_{\infty}^2} = (f, g)_{\infty} = h^2 \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} f_{i,j} g_{i,j}$$

$$(f, g)_{L_{**}^2} = (f, g)_{**} = h^2 \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} f_{i+1/2, j+1/2} g_{i+1/2, j+1/2}$$

CHAPITRE 3. SCHÉMAS NUMÉRIQUES EN MILIEU HÉTÉROGÈNE

$$(f, g)_{L^2_{*o}} = (f, g)_{*o} = h^2 \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} f_{i+1/2, j} g_{i+1/2, j}$$

$$(f, g)_{L^2_{o*}} = (f, g)_{o*} = h^2 \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} f_{i, j+1/2} g_{i, j+1/2}$$

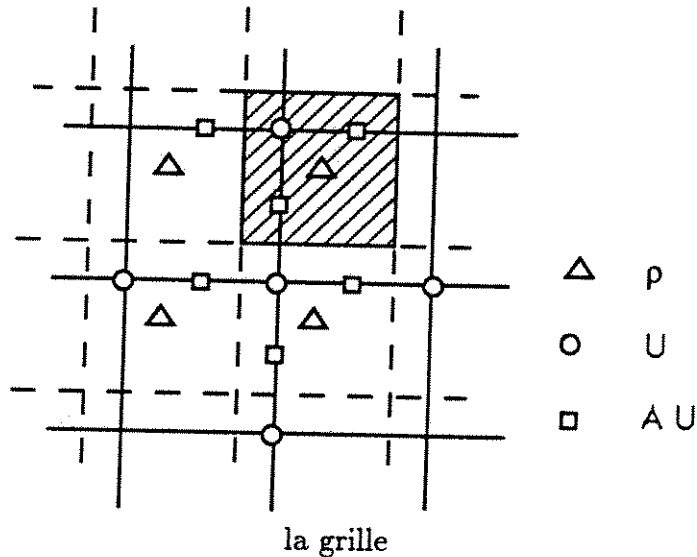
On introduit alors les opérateurs de dérivation discrète suivants:

$$A_x : L^2_{oo} \longrightarrow L^2_{*o}$$

$$u \longmapsto A_x u \quad (i + 1/2, j) = \sum_{l=1}^L a_l (u_{i+l, j} - u_{i-l+1, j})$$

$$A_y : L^2_{oo} \longrightarrow L^2_{o*}$$

$$u \longmapsto A_y u \quad (i, j + 1/2) = \sum_{l=1}^L a_l (u_{i, j+l} - u_{i, j-l+1})$$



Les transposés sont alors définis par :

$${}^t A_x : L^2_{*o} \longrightarrow L^2_{oo}$$

$$v \longmapsto {}^t A_x v \quad (i, j) = - \sum_{l=1}^L a_l (v_{i+l-1/2, j} - v_{i-l+1/2, j})$$

$${}^t A_y : L^2_{o*} \longrightarrow L^2_{oo}$$

$$v \longmapsto {}^t A_y v \quad (i, j) = - \sum_{l=1}^L a_l (v_{i, j+l-1/2} - v_{i, j-l+1/2})$$

3.2. CAS BIDIMENSIONNEL HÉTÉROGÈNE

Comme dans le cas unidimensionnel on remarque que lorsque l'on forme ${}^tA_h(1/\rho A_h)$ on calcule bien une quantité aux points entiers.

Etude de la Stabilité

On discrétise l'équation (3.8) sous la forme :

$$\frac{1}{K_{i,j}} \frac{u_{i,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^n + u_{i,j}^{n-1}}{\Delta t^2} + {}^tA_x \left(\frac{1}{\rho} A_x \right) u_{i,j}^n + {}^tA_y \left(\frac{1}{\rho} A_y \right) u_{i,j}^n = 0 \quad (3.9)$$

Nous cherchons à établir la stabilité par la méthode énergétique. Comme précédemment on fait une intégration par parties discrète en multipliant par la quantité $(u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n-1})/2\Delta t$ puis en sommant sur i et j :

$$0 = \left(\frac{1}{K} \frac{u^{n+1} - 2u^n + u^{n-1}}{\Delta t^2} + {}^tA_x \left(\frac{1}{\rho} A_x u^n \right) + {}^tA_y \left(\frac{1}{\rho} A_y u^n \right), \frac{u^{n+1} - u^{n-1}}{2\Delta t} \right)_{\infty}$$

soit encore

$$0 = \left(\frac{1}{K} \frac{u^{n+1} - 2u^n + u^{n-1}}{\Delta t^2}, \frac{u^{n+1} - u^{n-1}}{2\Delta t} \right)_{\infty} + \left({}^tA_x \left(\frac{1}{\rho} A_x u^n \right) + {}^tA_y \left(\frac{1}{\rho} A_y u^n \right), \frac{u^{n+1} - u^{n-1}}{2\Delta t} \right)_{\infty}$$

Le premier terme ne pose pas de problème et se transforme en :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{K} \frac{u^{n+1} - 2u^n + u^{n-1}}{\Delta t^2}, \frac{u^{n+1} - u^{n-1}}{2\Delta t} \right)_{\infty} = \\ & = \frac{1}{2\Delta t} \left(\frac{1}{K} \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t^2}, \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t^2} \right)_{\infty} - \frac{1}{2\Delta t} \left(\frac{1}{K} \frac{u^n - u^{n-1}}{\Delta t^2}, \frac{u^n - u^{n-1}}{\Delta t^2} \right)_{\infty} \end{aligned}$$

Traisons maintenant le second terme :

$$\begin{aligned} & \left({}^tA_x \left(\frac{1}{\rho} A_x u^n \right) + {}^tA_y \left(\frac{1}{\rho} A_y u^n \right), \frac{u^{n+1} - u^{n-1}}{2\Delta t} \right)_{\infty} = \\ & = \left({}^tA_x \left(\frac{1}{\rho} A_x u^n \right), \frac{u^{n+1} - u^{n-1}}{2\Delta t} \right)_{\infty} + \left({}^tA_y \left(\frac{1}{\rho} A_y u^n \right), \frac{u^{n+1} - u^{n-1}}{2\Delta t} \right)_{\infty} \\ & = \left(\frac{1}{\rho} A_x u^n, A_x \frac{u^{n+1} - u^{n-1}}{2\Delta t} \right)_{\infty} + \left(\frac{1}{\rho} A_y u^n, A_y \frac{u^{n+1} - u^{n-1}}{2\Delta t} \right)_{\infty} \end{aligned}$$

CHAPITRE 3. SCHEMAS NUMERIQUES EN MILIEU HETEROGENE

Ce que l'on peut encore écrire sous la forme

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{1}{\rho} A_x u^n, A_x \frac{u^{n+1} - u^{n-1}}{2\Delta t} \right)_{*o} + \left(\frac{1}{\rho} A_y u^n, A_y \frac{u^{n+1} - u^{n-1}}{2\Delta t} \right)_{o*} = \\
 & = \frac{1}{2\Delta t} \left\{ \left(\frac{1}{\rho} A_x \frac{u^{n+1} + u^n}{2}, A_x \frac{u^{n+1} + u^n}{2} \right)_{*o} - \left(\frac{1}{\rho} A_x \frac{u^{n+1} - u^n}{2}, A_x \frac{u^{n+1} - u^n}{2} \right)_{*o} \right. \\
 & - \left(\frac{1}{\rho} A_x \frac{u^n + u^{n-1}}{2}, A_x \frac{u^n + u^{n-1}}{2} \right)_{*o} + \left(\frac{1}{\rho} A_x \frac{u^n - u^{n-1}}{2}, A_x \frac{u^n - u^{n-1}}{2} \right)_{*o} \\
 & + \left(\frac{1}{\rho} A_y \frac{u^{n+1} + u^n}{2}, A_y \frac{u^{n+1} + u^n}{2} \right)_{o*} + \left(\frac{1}{\rho} A_y \frac{u^{n+1} - u^n}{2}, A_y \frac{u^{n+1} - u^n}{2} \right)_{o*} \\
 & \left. - \left(\frac{1}{\rho} A_y \frac{u^n + u^{n-1}}{2}, A_y \frac{u^n + u^{n-1}}{2} \right)_{o*} + \left(\frac{1}{\rho} A_y \frac{u^n - u^{n-1}}{2}, A_y \frac{u^n - u^{n-1}}{2} \right)_{o*} \right\}
 \end{aligned}$$

en regroupant les termes de même nature on a

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{1}{\rho} A_x u^n, A_x \frac{u^{n+1} - u^{n-1}}{2\Delta t} \right)_{*o} + \left(\frac{1}{\rho} A_y u^n, A_y \frac{u^{n+1} - u^{n-1}}{2\Delta t} \right)_{o*} = \\
 & = \frac{1}{2\Delta t} \left\{ \left(\frac{1}{\rho} A_x \frac{u^{n+1} + u^n}{2}, A_x \frac{u^{n+1} + u^n}{2} \right)_{*o} - \left(\frac{1}{\rho} A_y \frac{u^{n+1} - u^n}{2}, A_y \frac{u^{n+1} - u^n}{2} \right)_{*o} \right. \\
 & - \left(\frac{1}{\rho} A_x \frac{u^n + u^{n-1}}{2}, A_x \frac{u^n + u^{n-1}}{2} \right)_{*o} + \left(\frac{1}{\rho} A_x \frac{u^n - u^{n-1}}{2}, A_x \frac{u^n - u^{n-1}}{2} \right)_{*o} \\
 & + \left(\frac{1}{\rho} A_y \frac{u^{n+1} + u^n}{2}, A_y \frac{u^{n+1} + u^n}{2} \right)_{o*} + \left(\frac{1}{\rho} A_y \frac{u^{n+1} - u^n}{2}, A_y \frac{u^{n+1} - u^n}{2} \right)_{o*} \\
 & \left. - \left(\frac{1}{\rho} A_y \frac{u^n + u^{n-1}}{2}, A_y \frac{u^n + u^{n-1}}{2} \right)_{o*} + \left(\frac{1}{\rho} A_y \frac{u^n - u^{n-1}}{2}, A_y \frac{u^n - u^{n-1}}{2} \right)_{o*} \right\}
 \end{aligned}$$

En posant :

$$\begin{aligned}
 T & = {}^t A_x \left(\frac{1}{\rho} A_x \right) + {}^t A_y \left(\frac{1}{\rho} A_y \right) \\
 E_c^{n+1/2} & = \left(\left\{ \frac{1}{K} - \frac{\Delta t^2}{4} T \right\} \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t}, \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} \right)_{oo} \\
 E_p^{n+1/2} & = \left(T \frac{u^{n+1} + u^n}{2}, \frac{u^{n+1} + u^n}{2} \right)_{oo} \\
 E^{n+1/2} & = E_c^{n+1/2} + E_p^{n+1/2}
 \end{aligned}$$

3.2. CAS BIDIMENSIONNEL HÉTÉROGÈNE

on obtient :

$$\frac{E^{n+1/2} - E^{n-1/2}}{\Delta t} = 0$$

c'est à dire la conservation de l'énergie discrète. La stabilité du schéma numérique sera assurée dès que les deux quantités $E_c^{n+1/2}$ et $E_p^{n+1/2}$ seront positives.

Comme précédemment l'énergie potentielle est trivialement positive. Etudions sous quelle condition $E_c^{n+1/2}$ est également positive, c'est à dire que pour tout $u \in L_{\infty}^2$ on ait :

$$E_c^{n+1/2} = \left(\frac{1}{K} - \frac{\Delta t^2}{4} \left\{ {}^t A_x \left(\frac{1}{\rho} A_x \right) + {}^t A_y \left(\frac{1}{\rho} A_y \right) \right\} u, u \right)_{\infty} \geq 0$$

c'est à dire

$$I = \left(\frac{\Delta t^2}{4} \left\{ {}^t A_x \left(\frac{1}{\rho} A_x \right) + {}^t A_y \left(\frac{1}{\rho} A_y \right) \right\} u, u \right)_{\infty} \leq \left(\frac{1}{K} u, u \right)_{\infty}$$

Reprenons la première expression

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\Delta t^2}{4} \left\{ {}^t A_x \left(\frac{1}{\rho} A_x \right) + {}^t A_y \left(\frac{1}{\rho} A_y \right) \right\} u, u \right)_{\infty} \\ &= \frac{\Delta t^2}{4} \left(\frac{1}{\rho} A_x u, A_x u \right)_{\infty} + \frac{\Delta t^2}{4} \left(\frac{1}{\rho} A_y u, A_y u \right)_{\infty} \\ &= h^2 \frac{\Delta t^2}{4} \sum_{i,j=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\rho_{i+1/2,j}} \left(\sum_{l=1}^L a_l (u_{i+l,j} - u_{i-l+1,j}) \right)^2 + \frac{1}{\rho_{i,j+1/2}} \left(\sum_{l=1}^L a_l (u_{i,j+l} - u_{i,j-l+1}) \right)^2 \\ &\leq h^2 \frac{\Delta t^2}{2} \left(\sum_{l=1}^L a_l^2 \right) \sum_{l=1}^L \sum_{i,j=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\rho_{i+1/2,j}} (u_{i+l,j}^2 + u_{i-l+1,j}^2) + \frac{1}{\rho_{i,j+1/2}} (u_{i,j+l}^2 + u_{i,j-l+1}^2) \\ &\leq h^2 \frac{\Delta t^2}{2} \left(\sum_{l=1}^L a_l^2 \right) \sum_{i,j=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=1}^L K_{i,j} \left(\frac{1}{\rho_{i-l+1/2,j}} + \frac{1}{\rho_{i+l-1/2,j}} + \frac{1}{\rho_{i,j-l+1/2}} + \frac{1}{\rho_{i,j+l-1/2}} \right) \frac{u_{i,j}^2}{K_{i,j}} \\ &\leq \Delta t^2 \left(2L \sum_{l=1}^L a_l^2 \right) \sup_{i,j} \left\{ \frac{1}{4L} \sum_{l=1}^L K_{i,j} \left(\frac{1}{\rho_{i-l+1/2,j}} + \frac{1}{\rho_{i+l-1/2,j}} + \frac{1}{\rho_{i,j-l+1/2}} + \frac{1}{\rho_{i,j+l-1/2}} \right) \right\} \\ & \left(\frac{1}{K} u, u \right)_{\infty} \end{aligned}$$

On aura donc stabilité si :

$$\Delta t^2 \left(2L \sum_{l=1}^L a_l^2 \right) \sup_{i,j} \left\{ \frac{1}{4L} \sum_{l=1}^L \left(\frac{K_{i,j}}{\rho_{i-l+1/2,j}} + \frac{K_{i,j}}{\rho_{i+l-1/2,j}} + \frac{K_{i,j}}{\rho_{i,j-l+1/2}} + \frac{K_{i,j}}{\rho_{i,j+l-1/2}} \right) \right\} \leq 1$$

CHAPITRE 3. SCHEMAS NUMERIQUES EN MILIEU HETEROGENE

Or puisque $a_l = \beta_l/h$ avec $\beta_l = \alpha_l/(2l-1)$ en posant

$$C_* = \left(\frac{1}{4L} \sup_{i,j} \left\{ \sum_{l=1}^L \frac{K_{i,j}}{\rho_{i-l+1/2,j}} + \frac{K_{i,j}}{\rho_{i+l-1/2,j}} + \frac{K_{i,j}}{\rho_{i,j-l+1/2}} + \frac{K_{i,j}}{\rho_{i,j+l-1/2}} \right\} \right)^{1/2}$$

on peut énoncer la

Proposition 3.4

Une condition suffisante de stabilité du schéma (3.9), d'ordre 2 en temps et d'ordre $2L$ en espace s'écrit :

$$\frac{C_* \Delta t}{h} \leq \left(2L \sum_{l=1}^L \beta_l^2 \right)^{-1/2}$$

On peut obtenir une condition de stabilité plus simple mais moins fine en majorant C_* comme suit en posant $K_{i,j} = \rho_{i+1/2,j} \cdot C_{i,j}^2$:

$$\begin{aligned} (C_*)^2 &= \sup_{i,j} \frac{1}{4L} \left\{ \sum_{l=1}^L \frac{K_{i,j}}{\rho_{i-l+1/2,j}} + \frac{K_{i,j}}{\rho_{i+l-1/2,j}} + \frac{K_{i,j}}{\rho_{i,j-l+1/2}} + \frac{K_{i,j}}{\rho_{i,j+l-1/2}} \right\} \\ &\leq \sup_{i,j} \frac{1}{4L} \left\{ \sum_{l=1}^L \frac{\rho_{i+1/2,j}}{\rho_{i-l+1/2,j}} + \frac{\rho_{i+1/2,j}}{\rho_{i+l-1/2,j}} + \frac{\rho_{i+1/2,j}}{\rho_{i,j-l+1/2}} + \frac{\rho_{i+1/2,j}}{\rho_{i,j+l-1/2}} \right\} \cdot C_{\max}^2 \end{aligned}$$

En posant :

$$\delta_*^2 = \sup_{i,j} \left\{ \frac{1}{4L} \sum_{l=1}^L \frac{\rho_{i+1/2,j}}{\rho_{i-l+1/2,j}} + \frac{\rho_{i+1/2,j}}{\rho_{i+l-1/2,j}} + \frac{\rho_{i+1/2,j}}{\rho_{i,j-l+1/2}} + \frac{\rho_{i+1/2,j}}{\rho_{i,j+l-1/2}} \right\}$$

on peut énoncer le

Corollaire 3.7

Une condition suffisante de stabilité du schéma (3.9), d'ordre 2 en temps et d'ordre $2L$ en espace s'écrit :

$$\frac{C_{\max} \Delta t}{h} \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \delta_*^{-1} \left(L \sum_{l=1}^L \beta_l^2 \right)^{-1/2}$$

Comme précédemment on peut majorer δ afin d'obtenir une condition de stabilité simple. On a alors le

3.2. CAS BIDIMENSIONNEL HÉTÉROGÈNE

Corollaire 3.8

Une condition suffisante de stabilité du schéma (3.9), d'ordre 2 en temps et d'ordre $2L$ en espace s'écrit :

$$\frac{C_{max}\Delta t}{h} \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{\rho_m}{\rho_M}} \left(L \sum_{l=1}^L \beta_l^2 \right)^{-1/2}$$

Il est facile de généraliser les propositions précédentes au cas tridimensionnel. Nous donnons simplement le corollaire précédent pour le cas tridimensionnel.

Corollaire 3.9

Soit n la dimension de l'espace une condition suffisante de stabilité du schéma d'ordre 2 en temps et d'ordre $2L$ en espace s'écrit :

$$\frac{C_{max}\Delta t}{h} \leq \frac{\sqrt{n}}{n} \sqrt{\frac{\rho_m}{\rho_M}} \left(L \sum_{l=1}^L \beta_l^2 \right)^{-1/2}$$

Comme dans le cas unidimensionnel nous allons voir que pour un milieu homogène cette condition de stabilité n'est pas optimale. Après transformation de Fourier en espace, on écrit le schéma sous la forme :

$$V^{n+1} = A \cdot V^n$$

où on a posé :

$$A = \begin{pmatrix} 2 - 4\left(\frac{c\Delta t}{h}\right)^2(A_x^2(k) + A_y^2(k)) & -1 \\ & 1 & & 0 \end{pmatrix}$$

$$V^{n+1} = \begin{pmatrix} u^{n+1} \\ u^n \end{pmatrix}$$

$$A_x(k) = A(k \cos(\theta))$$

$$A_y(k) = A(k \sin(\theta))$$

Une condition nécessaire de stabilité est que toutes les valeurs propres de la matrice A soient inférieures à 1 en module, ce qui implique :

$$\frac{C\Delta t}{h} \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\sum_{l=1}^L |\beta_l| \right)^{-1}$$

CHAPITRE 3. SCHEMAS NUMERIQUES EN MILIEU HETEROGENE

Il est clair que notre condition de stabilité n'est pas optimale, puisqu' en milieu homogène elle s'écrit :

$$\frac{C\Delta t}{h} \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \left(L \sum_{l=1}^L \beta_l^2 \right)^{1/2}$$

Il est possible de l'améliorer en repartant de

$$I = \left(\frac{\Delta t^2}{4} \left\{ {}^t A_x \left(\frac{1}{\rho} A_x \right) + {}^t A_y \left(\frac{1}{\rho} A_y \right) \right\} u, u \right)_{\infty}$$

on peut écrire :

$$\begin{aligned} I &= \frac{\Delta t^2}{4} \left(\frac{1}{\rho} A_x u, A_x u \right)_{*o} + \frac{\Delta t^2}{4} \left(\frac{1}{\rho} A_y u, A_y u \right)_{o*} \\ &\leq \frac{\Delta t^2}{2} \left(\sum_{l=1}^L |a_l| \right) h^2 \sum_{i,j=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=1}^L |a_l| \left(\frac{u_{i+l,j}^2}{\rho_{i+1/2,j}} + \frac{u_{i-l+1,j}^2}{\rho_{i+1/2,j}} + \frac{u_{i,j+l}^2}{\rho_{i,j+1/2}} + \frac{u_{i,j-l+1}^2}{\rho_{i,j+1/2}} \right) \\ &\leq 2\Delta t^2 \left(\sum_{l=1}^L |a_l| \right) \sup_{i,j} \left\{ \frac{1}{4} \sum_{l=1}^L |a_l| \left(\frac{K_{i,j}}{\rho_{i+l-1/2,j}} + \frac{K_{i,j}}{\rho_{i-l+1/2,j}} + \frac{K_{i,j}}{\rho_{i,j+l-1/2}} + \frac{K_{i,j}}{\rho_{i,j-l+1/2}} \right) \right\} \\ &\quad \left(\frac{1}{K} u, u \right)_{\infty} \end{aligned}$$

En posant

$$C_{\#}^2 = \left(\sum_{l=1}^L |\beta_l| \right)^{-1} \sup_{i,j} \left\{ \frac{1}{4} \sum_{l=1}^L |\beta_l| \left(\frac{K_{i,j}}{\rho_{i+l-1/2,j}} + \frac{K_{i,j}}{\rho_{i-l+1/2,j}} + \frac{K_{i,j}}{\rho_{i,j+l-1/2}} + \frac{K_{i,j}}{\rho_{i,j-l+1/2}} \right) \right\}$$

on peut énoncer la

Proposition 3.5

Une condition suffisante de stabilité du schéma (3.9), d'ordre 2 en temps et d'ordre $2L$ en espace s'écrit :

$$\frac{C_{\#}\Delta t}{h} \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\sum_{l=1}^L |\beta_l| \right)^{-1}$$

On retrouve dans le cas du milieu homogène la condition nécessaire de stabilité. On obtient une condition de stabilité plus simple mais moins fine en majorant $C_{\#}$ comme suit en posant $K_{i,j} = \rho_{i+1/2,j} \cdot C_{i,j}^2$:

3.2. CAS BIDIMENSIONNEL HÉTÉROGÈNE

$$\begin{aligned}
 C_{\#}^2 &= \left(\sum_{l=1}^L |\beta_l| \right)^{-1} \sup_{i,j} \left\{ \frac{1}{4} \sum_{l=1}^L |\beta_l| \left(\frac{K_{i,j}}{\rho_{i+l-1/2,j}} + \frac{K_{i,j}}{\rho_{i-l+1/2,j}} + \frac{K_{i,j}}{\rho_{i,j+l-1/2}} + \frac{K_{i,j}}{\rho_{i,j-l+1/2}} \right) \right\} \\
 &\leq \left(\sum_{l=1}^L |\beta_l| \right)^{-1} \sup_{i,j} \left\{ \frac{1}{4} \sum_{l=1}^L |\beta_l| \left(\frac{\rho_{i+1/2,j}}{\rho_{i-l+1/2,j}} + \frac{\rho_{i+1/2,j}}{\rho_{i+l-1/2,j}} + \frac{\rho_{i+1/2,j}}{\rho_{i,j-l+1/2}} + \frac{\rho_{i+1/2,j}}{\rho_{i,j+l-1/2}} \right) \right\} \\
 &\quad \cdot C_{max}^2
 \end{aligned}$$

En posant :

$$\delta_{\#}^2 = \left(\sum_{l=1}^L |\beta_l| \right)^{-1} \sup_{i,j} \left\{ \frac{1}{4} \sum_{l=1}^L |\beta_l| \left(\frac{\rho_{i+1/2,j}}{\rho_{i-l+1/2,j}} + \frac{\rho_{i+1/2,j}}{\rho_{i+l-1/2,j}} + \frac{\rho_{i+1/2,j}}{\rho_{i,j-l+1/2}} + \frac{\rho_{i+1/2,j}}{\rho_{i,j+l-1/2}} \right) \right\}$$

on a le

Corollaire 3.10

Une condition suffisante de stabilité du schéma (3.9), d'ordre 2 en temps et d'ordre $2L$ en espace s'écrit :

$$\frac{C_{max} \Delta t}{h} \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\delta_{\#} \sum_{l=1}^L |\beta_l| \right)^{-1}$$

Comme précédemment on peut majorer $\delta_{\#}$ afin d'obtenir une condition de stabilité simple. On a alors le

Corollaire 3.11

Une condition suffisante de stabilité du schéma (3.9), d'ordre 2 en temps et d'ordre $2L$ en espace s'écrit :

$$\frac{C_{max} \Delta t}{h} \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{\rho_m}{\rho_M}} \left(\sum_{l=1}^L |\beta_l| \right)^{-1}$$

Il est facile de généraliser les propositions précédentes au cas tridimensionnel. Nous donnons simplement le corollaire précédent pour le cas tridimensionnel.

CHAPITRE 3. SCHEMAS NUMERIQUES EN MILIEU HETEROGENE

Corollaire 3.12

Soit n la dimension de l'espace une condition suffisante de stabilité du schéma (3.9), d'ordre 2 en temps et d'ordre $2L$ en espace s'écrit :

$$\frac{C_{max}\Delta t}{h} \leq \frac{\sqrt{n}}{n} \sqrt{\frac{\rho_m}{\rho_M}} \left(\sum_{i=1}^L |\beta_i| \right)^{-1}$$

En milieu homogène 3D nous obtenons pour le schéma d'ordre 4 :

$$\frac{C\Delta t}{h} \leq \frac{2\sqrt{3}}{7} \simeq 0.495$$

Cette dernière condition de stabilité est à rapprocher de la condition de stabilité en milieu 3D du schéma de Cohen-Joly donné par (cf [Muf])

$$\frac{C\Delta t}{h} \leq 0.5$$

3.2. CAS BIDIMENSIONNEL HÉTÉROGÈNE

3.2.2 Schémas d'ordre 4 en temps et 2L en espace

Introduction et Notations

En milieu bidimensionnel hétérogène, l'équation modifiée qui, discrétisée donne un schéma 4 en temps, est donnée par :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{K} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\Delta t^2}{12} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial x} K \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right) \right) \\ & - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{\Delta t^2}{12} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial y} K \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) \right) \\ & - \frac{\Delta t^2}{12} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial x} K \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) \right) - \frac{\Delta t^2}{12} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial y} K \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right) \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

Reprenant les conclusions de l'étude en milieu unidimensionnel, on discrétise l'équation ci-dessus à l'aide des opérateurs A_x et A_y , défini ci-dessus sous la forme :

$$\begin{aligned} & \frac{u_{i,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^n + u_{i,j}^{n-1}}{K_{i,j} \Delta t^2} + \left\{ {}^t A_x \left(\frac{1}{\rho} A_x \right) - \frac{\Delta t^2}{12} {}^t A_x \left(\frac{1}{\rho} A_x \left(K {}^t A_x \left(\frac{1}{\rho} A_x \right) \right) \right) \right\} u_{i,j}^n \\ & + \left\{ {}^t A_y \left(\frac{1}{\rho} A_y \right) - \frac{\Delta t^2}{12} {}^t A_y \left(\frac{1}{\rho} A_y \left(K {}^t A_y \left(\frac{1}{\rho} A_y \right) \right) \right) \right\} u_{i,j}^n \\ & - \frac{\Delta t^2}{12} {}^t A_x \left(\frac{1}{\rho} A_x \left(K {}^t A_y \left(\frac{1}{\rho} A_y \right) \right) \right) u_{i,j}^n - \frac{\Delta t^2}{12} {}^t A_y \left(\frac{1}{\rho} A_y \left(K {}^t A_x \left(\frac{1}{\rho} A_x \right) \right) \right) u_{i,j}^n = 0 \end{aligned} \quad (3.11)$$

En posant $B_x = {}^t A_x(1/\rho A_x)$ et $B_y = {}^t A_y(1/\rho A_y)$ on peut écrire (3.11) sous la forme :

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^n + u_{i,j}^{n-1}}{K_{i,j} \Delta t^2} + (B_x + B_y) u_{i,j}^n - \frac{\Delta t^2}{12} (B_x + B_y) (K(B_x + B_y)) u_{i,j}^n = 0 \quad (3.12)$$

Nous allons maintenant établir la stabilité de cette équation par la méthode énergétique.

Etude de la Stabilité

Afin de montrer la L^2 stabilité, on procède à une intégration par parties discrète de l'équation après avoir multiplié par $(u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n-1})/2\Delta t$.

CHAPITRE 3. SCHEMAS NUMERIQUES EN MILIEU HETEROGENE

$$0 = \left(\frac{1}{K} \frac{u^{n+1} - 2u^n + u^{n-1}}{\Delta t^2}, \frac{u^{n+1} - u^{n-1}}{2\Delta t} \right)_{\infty} + \left(B_x u^n, \frac{u^{n+1} - u^{n-1}}{2\Delta t} \right)_{\infty} \\ + \left(B_y u^n, \frac{u^{n+1} - u^{n-1}}{2\Delta t} \right)_{\infty} - \frac{\Delta t^2}{12} \left({}^t(B_x + B_y)(K(B_x + B_y))u^n, \frac{u^{n+1} - u^{n-1}}{2\Delta t} \right)_{\infty}$$

soit encore

$$0 = \frac{1}{2\Delta t} \left[\left(\frac{1}{K} \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t}, \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} \right)_{\infty} - \left(\frac{1}{K} \frac{u^n - u^{n-1}}{\Delta t}, \frac{u^n - u^{n-1}}{\Delta t} \right)_{\infty} \right. \\ \left. + (B_x u^n, u^{n+1})_{\infty} - (B_x u^n, u^{n-1})_{\infty} + (B_y u^n, u^{n+1})_{\infty} - (B_y u^n, u^{n-1})_{\infty} \right. \\ \left. - \frac{\Delta t^2}{12} \left(K(B_x + B_y)u^{n+1}, (B_x + B_y)u^n \right)_{\infty} + \frac{\Delta t^2}{12} \left(K(B_x + B_y)u^n, (B_x + B_y)u^{n-1} \right)_{\infty} \right]$$

On utilise alors l'identit e du parallélogramme, et on obtient en posant :

$$T = B_x + B_y - \frac{\Delta t^2}{12} {}^t(B_x + B_y)(K(B_x + B_y)) \\ E_p^{n+1/2} = \left(T \frac{u^{n+1} + u^n}{2}, \frac{u^{n+1} + u^n}{2} \right)_{\infty} \\ E_c^{n+1/2} = \left(\left\{ \frac{1}{K} - \frac{\Delta t^2}{4} T \right\} \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t}, \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} \right)_{\infty} \\ E^{n+1/2} = E_p^{n+1/2} + E_c^{n+1/2}$$

la conservation de l'énergie discrète, c'est à dire que :

$$\frac{E^{n+1/2} - E^{n-1/2}}{\Delta t} = 0$$

Montrons maintenant que les énergies potentielles et cinétiques sont positives. Pour l'énergie potentielle, voyons sous quelle condition l'opérateur T est positif sur L^2_{∞} , c'est à dire :

$$\forall u \in L^2_{\infty} \quad (Tu, u) \geq 0$$

soit encore

$$\left(\frac{\Delta t^2}{12} {}^t(B_x + B_y)(K(B_x + B_y))u, u \right)_{\infty} \leq \left((B_x + B_y)u, u \right)_{\infty}$$

3.2. CAS BIDIMENSIONNEL HÉTÉROGÈNE

Le lemme suivant répond à la question.

Lemme 2

On suppose que les fonctions K et ρ vérifient :

$$\begin{aligned} K &\in L^2(\mathbb{R}^2) & \rho &\in L^2(\mathbb{R}^2) \\ 0 < K_m &\leq K(x, y) \leq K_M \\ 0 < \rho_m &\leq \rho(x, y) \leq \rho_M \end{aligned}$$

on a alors les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} \left({}^t(B_x + B_y)(K(B_x + B_y))u, u \right)_{\infty} &\leq 16C_*^2 \left(L \sum_{l=1}^L a_l^2 \right) \left((B_x + B_y)u, u \right)_{\infty} \\ \left({}^t(B_x + B_y)(K(B_x + B_y))u, u \right)_{\infty} &\leq 16C_{\#}^2 \left(\sum_{l=1}^L |a_l| \right) \left((B_x + B_y)u, u \right)_{\infty} \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} C_*^2 &= \sup_{i,j} \left\{ \frac{1}{4L} \sum_{l=1}^L \left(\frac{K_{i,j}}{\rho_{i+l-1/2,j}} + \frac{K_{i,j}}{\rho_{i-l+1/2,j}} + \frac{K_{i,j}}{\rho_{i,j+l-1/2}} + \frac{K_{i,j}}{\rho_{i,j-l+1/2}} \right) \right\} \\ C_{\#}^2 &= \left(\sum_{l=1}^L |\beta_l| \right)^{-1} \sup_{i,j} \left\{ \frac{1}{4} \sum_{l=1}^L |\beta_l| \left(\frac{K_{i,j}}{\rho_{i+l-1/2,j}} + \frac{K_{i,j}}{\rho_{i-l+1/2,j}} + \frac{K_{i,j}}{\rho_{i,j+l-1/2}} + \frac{K_{i,j}}{\rho_{i,j-l+1/2}} \right) \right\} \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION : En annexe 4

Ainsi l'énergie potentielle sera positive dès que :

$$\frac{16}{12}(C_*\Delta t)^2 \left(L \sum_{l=1}^L a_l^2 \right) \leq 1 \quad \frac{16}{12}(C_{\#}\Delta t)^2 \left(\sum_{l=1}^L |a_l| \right)^2 \leq 1$$

c'est à dire en utilisant la définition des $\beta_l = a_l/h$:

$$\frac{C_*\Delta t}{h} \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \left(L \sum_{l=1}^L \beta_l^2 \right)^{-1/2} \quad \frac{C_{\#}\Delta t}{h} \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\sum_{l=1}^L |\beta_l| \right)^{-1}$$

Pour assurer la stabilité du schéma, il faut monter que l'énergie cinétique est positive. Comme précédemment, cela sera assuré dès que la condition de stabilité

CHAPITRE 3. SCHEMAS NUMERIQUES EN MILIEU HETEROGENE

du schéma (2-2L) sera vérifiée, c'est à dire dès que (cf Propositions (3.4) - (3.5)) :

$$\frac{C_* \Delta t}{h} \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \left(L \sum_{l=1}^L \beta_l^2 \right)^{-1/2} \quad \frac{C_{\#} \Delta t}{h} \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\sum_{l=1}^L |\beta_l| \right)^{-1}$$

On peut alors énoncer la

Proposition 3.6

Une condition suffisante de stabilité du schéma (3.11), d'ordre 4 en temps et d'ordre 2L en espace s'écrit :

$$\frac{C_* \Delta t}{h} \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \left(L \sum_{l=1}^L \beta_l^2 \right)^{-1/2} \quad \frac{C_{\#} \Delta t}{h} \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\sum_{l=1}^L |\beta_l| \right)^{-1}$$

On peut obtenir une condition de stabilité plus simple mais moins fine en majorant C_* et $C_{\#}$. On pose $K_{i,j} = \rho_{i+1/2,j} \cdot C_{i,j}^2$ alors en notant

$$\delta_*^2 = \sup_{i,j} \left\{ \frac{1}{4L} \sum_{l=1}^L \frac{\rho_{i+1/2,j}}{\rho_{i-l+1/2,j}} + \frac{\rho_{i+1/2,j}}{\rho_{i+1-1/2,j}} + \frac{\rho_{i+1/2,j}}{\rho_{i,j-l+1/2}} + \frac{\rho_{i+1/2,j}}{\rho_{i,j+l-1/2}} \right\}$$

$$\delta_{\#}^2 = \left(\sum_{l=1}^L |\beta_l| \right)^{-1} \sup_{i,j} \left\{ \frac{1}{4} \sum_{l=1}^L |\beta_l| \left(\frac{\rho_{i+1/2,j}}{\rho_{i-l+1/2,j}} + \frac{\rho_{i+1/2,j}}{\rho_{i+1-1/2,j}} + \frac{\rho_{i+1/2,j}}{\rho_{i,j-l+1/2}} + \frac{\rho_{i+1/2,j}}{\rho_{i,j+l-1/2}} \right) \right\}$$

on peut alors énoncer le

Corollaire 3.13

Une condition de stabilité du schéma (3.11), d'ordre 4 en temps et d'ordre 2L en espace s'écrit :

$$\frac{C_{max} \Delta t}{h} \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \delta_*^{-1} \left(L \sum_{l=1}^L \beta_l^2 \right)^{-1/2} \quad \frac{C_{max} \Delta t}{h} \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \delta_{\#}^{-1} \left(\sum_{l=1}^L |\beta_l| \right)^{-1}$$

Comme précédemment on peut majorer δ_* et $\delta_{\#}$ afin d'obtenir une condition de stabilité simple. On a alors le

3.2. CAS BIDIMENSIONNEL HÉTÉROGÈNE

Corollaire 3.14

Une condition suffisante de stabilité du schéma (3.11), d'ordre 4 en temps et d'ordre $2L$ en espace s'écrit :

$$\frac{C_{max}\Delta t}{h} \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{\rho_m}{\rho_M}} \left(\sum_{i=1}^L |\beta_i| \right)^{-1}$$

Il est facile de généraliser la proposition précédente au cas tridimensionnel.

Corollaire 3.15

Soit n la dimension de l'espace, une condition suffisante de stabilité du schéma (3.11), d'ordre 4 en temps et d'ordre $2L$ en espace s'écrit :

$$\frac{C_{max}\Delta t}{h} \leq \frac{\sqrt{n}}{n} \sqrt{\frac{\rho_m}{\rho_M}} \left(\sum_{i=1}^L |\beta_i| \right)^{-1}$$

Exemple

Pour le schéma (4-4) correspondant à $L = 2$, en milieu homogène on trouve la condition de stabilité suivante :

$$\frac{C\Delta t}{h} \leq \frac{\sqrt{n}}{n} \cdot \frac{6}{7}$$

CHAPITRE 3. SCHÉMAS NUMÉRIQUES EN MILIEU HÉTÉROGÈNE

3.2.3 Comparaison avec les schémas de G.Cohen et P.Joly

Schéma (2-4)

En milieu hétérogène bidimensionnel, le schéma de G.Cohen et P.Joly s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tilde{K}_{i,j}} \frac{u_{i,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^n + u_{i,j}^{n-1}}{\Delta t^2} - \frac{4}{3h} \left\{ \frac{1}{\tilde{\rho}_{i+1/2,j}} \left(\frac{u_{i+1,j}^n - u_{i,j}^n}{h} \right) - \frac{1}{\tilde{\rho}_{i-1/2,j}} \left(\frac{u_{i,j}^n - u_{i-1,j}^n}{h} \right) \right\} \\ - \frac{4}{3h} \left\{ \frac{1}{\tilde{\rho}_{i,j+1/2}} \left(\frac{u_{i,j+1}^n - u_{i,j}^n}{h} \right) - \frac{1}{\tilde{\rho}_{i,j-1/2}} \left(\frac{u_{i,j}^n - u_{i,j-1}^n}{h} \right) \right\} \\ + \frac{1}{3h} \left\{ \frac{1}{\rho_{i+1,j}} \left(\frac{u_{i+2,j}^n - u_{i,j}^n}{2h} \right) - \frac{1}{\rho_{i-1,j}} \left(\frac{u_{i,j}^n - u_{i-2,j}^n}{2h} \right) \right\} \\ + \frac{1}{3h} \left\{ \frac{1}{\rho_{j,j+1}} \left(\frac{u_{i,j+2}^n - u_{i,j}^n}{2h} \right) - \frac{1}{\rho_{i,j-1}} \left(\frac{u_{i,j}^n - u_{i,j-2}^n}{2h} \right) \right\} = 0 \end{aligned}$$

où on suppose connues les quantités :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tilde{K}_{i+1/2,j+1/2}} &= \frac{1}{h^2} \int_{x_{i,j}}^{x_{i+1,j}} \int_{x_{i,j}}^{x_{i,j+1}} \frac{1}{K(x)} dx dy \\ \frac{1}{\tilde{\rho}_{i+1/2,j+1/2}} &= \frac{1}{h^2} \int_{x_{i,j}}^{x_{i+1,j}} \int_{x_{i,j}}^{x_{i,j+1}} \frac{1}{\rho(x)} dx dy \end{aligned}$$

et où on a posé

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tilde{K}_{i,j}} &= \beta \left(\frac{1}{K_{i+1,j}} + \frac{1}{K_{i-1,j}} + \frac{1}{K_{i,j+1}} + \frac{1}{K_{i,j-1}} \right) + (1-4\beta) \frac{1}{K_{i,j}} \\ \frac{1}{\tilde{\rho}_{i+1/2,j}} &= (1-2\lambda) \frac{1}{\rho_{i+1/2,j}} + \lambda \left(\frac{1}{\rho_{i+3/2,j}} + \frac{1}{\rho_{i-1/2,j}} \right) \\ \frac{1}{\tilde{\rho}_{i,j+1/2}} &= (1-2\lambda) \frac{1}{\rho_{i,j+1/2}} + \lambda \left(\frac{1}{\rho_{i,j+3/2}} + \frac{1}{\rho_{i,j-1/2}} \right) \end{aligned}$$

avec

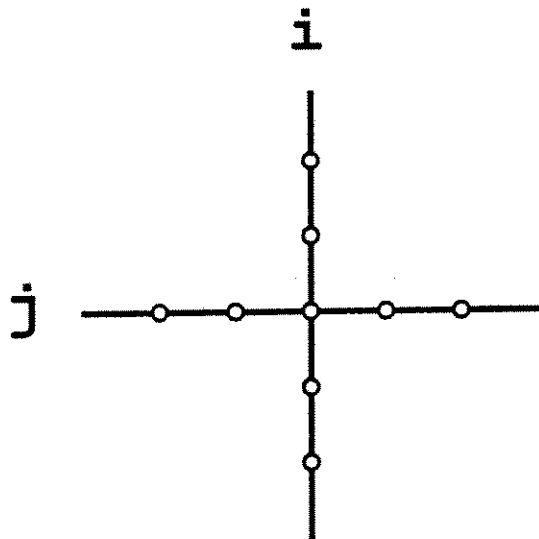
$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_{i+1/2,j}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho_{i+1/2,j+1/2}} + \frac{1}{\rho_{i+1/2,j-1/2}} \right) \\ \frac{1}{\rho_{i,j+1/2}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho_{i+1/2,j+1/2}} + \frac{1}{\rho_{i-1/2,j+1/2}} \right) \\ \frac{1}{\rho_{i,j}} &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\rho_{i+1/2,j+1/2}} + \frac{1}{\rho_{i+1/2,j-1/2}} + \frac{1}{\rho_{i-1/2,j+1/2}} + \frac{1}{\rho_{i-1/2,j-1/2}} \right) \\ \frac{1}{K_{i,j}} &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{K_{i+1/2,j+1/2}} + \frac{1}{K_{i+1/2,j-1/2}} + \frac{1}{K_{i-1/2,j+1/2}} + \frac{1}{K_{i-1/2,j-1/2}} \right) \end{aligned}$$

3.2. CAS BIDIMENSIONNEL HÉTÉROGÈNE

En réécrivant le schéma ci-dessus sous la forme :

$$\begin{aligned}
 u_{i,j}^{n+1} = & 2u_{i,j}^n + u_{i,j}^{n-1} + \frac{\tilde{K}_{i,j}\Delta t^2}{h^2} \left[\frac{4}{3} \left\{ \frac{1}{\tilde{\rho}_{i+1/2,j}} (u_{i+1,j}^n - u_{i,j}^n) - \frac{1}{\tilde{\rho}_{i-1/2,j}} (u_{i,j}^n - u_{i-1,j}^n) \right\} \right. \\
 & + \frac{4}{3} \left\{ \frac{1}{\tilde{\rho}_{i,j+1/2}} (u_{i,j+1}^n - u_{i,j}^n) - \frac{1}{\tilde{\rho}_{i,j-1/2}} (u_{i,j}^n - u_{i,j-1}^n) \right\} \\
 & - \frac{1}{6} \left\{ \frac{1}{\tilde{\rho}_{i+1,j}} (u_{i+2,j}^n - u_{i,j}^n) - \frac{1}{\tilde{\rho}_{i-1,j}} (u_{i,j}^n - u_{i-2,j}^n) \right\} \\
 & \left. - \frac{1}{6} \left\{ \frac{1}{\tilde{\rho}_{i,j+1}} (u_{i,j+2}^n - u_{i,j}^n) - \frac{1}{\tilde{\rho}_{i,j-1}} (u_{i,j}^n - u_{i,j-2}^n) \right\} \right]
 \end{aligned}$$

il est facile de voir qu'après avoir calculé les coefficients (ce qui prend 70 opérations) le schéma nécessite 32 opérations. Si on stocke les coefficients, il faut utiliser au moins 8 tableaux bidimensionnels, puisque l'on peut stocker deux des tableaux dans les tableaux K et ρ . Il reste donc 6 tableaux de coefficients auquel on ajoute les deux tableaux pour u^n et u^{n-1} .



Les Points utilisés dans le calcul
au pas de temps n .

CHAPITRE 3. SCHÉMAS NUMÉRIQUES EN MILIEU HÉTÉROGÈNE

Schéma Proposé

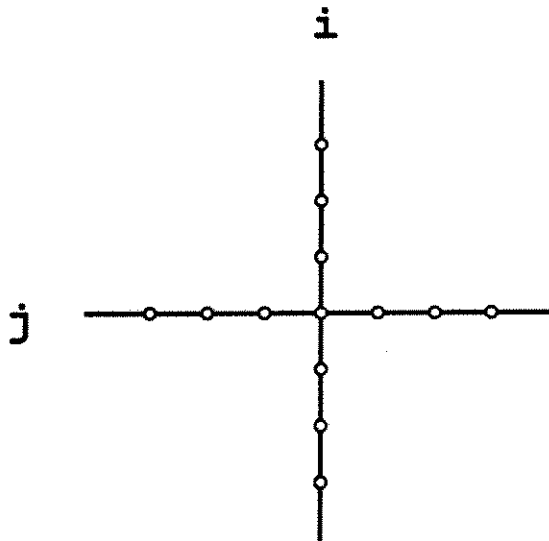
Nous réécrivons notre schéma sous la forme :

$$u_{i,j}^{n+1} = 2u_{i,j}^n - u_{i,j}^{n-1} - \frac{K_{i,j}\Delta t^2}{h^2} \left({}^tA_x\left(\frac{1}{\rho}A_x\right) + {}^tA_y\left(\frac{1}{\rho}A_y\right) \right) u_{i,j}^n$$

où A_x est l'opérateur correspondant à $L = 2$ opérant sur la grille unidimensionnelle horizontale, et A_y l'opérateur opérant sur la grille verticale.

Le calcul s'organise comme suit. On stocke le résultat intermédiaire $A_x u_{i+1/2}^n$ dans un tableau unidimensionnel $v(i+1/2)$. Puis on multiplie par $1/\rho_{i+1/2}$ et on applique tA_x . Appliquer A_x ou son transposé coûte 5 opérations et la multiplication par $1/\rho_{i+1/2}$ 1 opération, soit au total 11 opérations. Ensuite on itère le schéma, ce qui a pour effet de mettre la valeur de la dérivée en x dans $u_{i,j}^{n+1}$. Il reste alors à ajouter la valeur de la dérivée en y . Pour cela on utilise à nouveau le tableau v , en procédant comme pour la dérivée en x .

Itérer le schéma demande donc $5 + 11 + 1 + 11 = 28$ opérations. Bien que notre schéma soit défini sur 7 points il requière moins d'opérations par noeud. De plus il ne requière que 4 tableaux bidimensionnels.



Les Points utilisés dans le calcul
au pas de temps n.

3.2. CAS BIDIMENSIONNEL HÉTÉROGÈNE

Schéma (4-4)

En milieu bidimensionnel hétérogène, ce schéma s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\bar{K}_{i,j}} \frac{u_{i,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^n + u_{i,j}^{n-1}}{\Delta t^2} - \frac{4}{3h} \left\{ \frac{1}{\tilde{\rho}_{i+1/2,j}} \left(\frac{u_{i+1,j}^n - u_{i,j}^n}{h} \right) - \frac{1}{\tilde{\rho}_{i-1/2,j}} \left(\frac{u_{i,j}^n - u_{i-1,j}^n}{h} \right) \right\} \\ & - \frac{4}{3h} \left\{ \frac{1}{\tilde{\rho}_{i,j+1/2}} \left(\frac{u_{i,j+1}^n - u_{i,j}^n}{h} \right) - \frac{1}{\tilde{\rho}_{i,j-1/2}} \left(\frac{u_{i,j}^n - u_{i,j-1}^n}{h} \right) \right\} \\ & + \frac{1}{3h} \left\{ \frac{1}{\tilde{\rho}_{i+1,j}} \left(\frac{u_{i+2,j}^n - u_{i,j}^n}{2h} \right) - \frac{1}{\tilde{\rho}_{i-1,j}} \left(\frac{u_{i,j}^n - u_{i-2,j}^n}{2h} \right) \right\} \\ & + \frac{1}{3h} \left\{ \frac{1}{\tilde{\rho}_{j,j+1}} \left(\frac{u_{i,j+2}^n - u_{i,j}^n}{2h} \right) - \frac{1}{\tilde{\rho}_{j,j-1}} \left(\frac{u_{i,j}^n - u_{i,j-2}^n}{2h} \right) \right\} + Bu_{i,j}^n = 0 \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} Bu_{i,j}^n = & -\frac{\Delta t^2}{12h^4} \left\{ \frac{K_{i+1,j}}{\rho_{i+1/2,j}} \left(\frac{u_{i+2,j}^n}{\rho_{i+3/2,j}} + \frac{u_{i,j}^n}{\rho_{i+1/2,j}} + \frac{u_{i+1,j+1}^n}{\rho_{i+1,j+1/2}} + \frac{u_{i+1,j-1}^n}{\rho_{i+1,j-1/2}} - 4 \frac{u_{i+1,j}^n}{\rho_{i+1,j}} \right) \right. \\ & + \frac{K_{i+1/2,j}}{\rho_{i-1,j}} \left(\frac{u_{i,j}^n}{\rho_{i-1/2,j}} + \frac{u_{i-2,j}^n}{\rho_{i-3/2,j}} + \frac{u_{i-1,j+1}^n}{\rho_{i-1,j+1/2}} + \frac{u_{i+1,j-1}^n}{\rho_{i-1,j-1/2}} - 4 \frac{u_{i-1,j}^n}{\rho_{i-1,j}} \right) \\ & + \frac{K_{i,j+1/2}}{\rho_{i,j+1}} \left(\frac{u_{i+1,j+1}^n}{\rho_{i+1/2,j+1}} + \frac{u_{i-1,j+1}^n}{\rho_{i-1/2,j+1}} + \frac{u_{i,j}^n}{\rho_{i,j+1/2}} + \frac{u_{i,j+2}^n}{\rho_{i,j+3/2}} - 4 \frac{u_{i,j+1}^n}{\rho_{i,j+1}} \right) \\ & + \frac{K_{i,j-1/2}}{\rho_{i,j-1}} \left(\frac{u_{i+1,j-1}^n}{\rho_{i+1/2,j-1}} + \frac{u_{i-1,j-1}^n}{\rho_{i-1/2,j-1}} + \frac{u_{i,j}^n}{\rho_{i,j-1/2}} + \frac{u_{i,j-2}^n}{\rho_{i,j-3/2}} - 4 \frac{u_{i,j-1}^n}{\rho_{i,j-1}} \right) \\ & \left. - 4 \frac{K_{i,j}}{\rho_{i,j}} \left(\frac{u_{i+1,j}^n}{\rho_{i+1/2,j}} + \frac{u_{i-1,j}^n}{\rho_{i-1/2,j}} + \frac{u_{i,j+1}^n}{\rho_{i,j+1/2}} + \frac{u_{i,j-1}^n}{\rho_{i,j-1/2}} - 4 \frac{u_{i,j}^n}{\rho_{i,j}} \right) \right\} \end{aligned}$$

où on suppose connues les quantités :

$$\begin{aligned} \frac{1}{K_{i+1/2,j+1/2}} &= \frac{1}{h^2} \int_{x_{i,j}}^{x_{i+1,j}} \int_{x_{i,j}}^{x_{i,j+1}} \frac{1}{K(x)} dx dy \\ \frac{1}{\rho_{i+1/2,j+1/2}} &= \frac{1}{h^2} \int_{x_{i,j}}^{x_{i+1,j}} \int_{x_{i,j}}^{x_{i,j+1}} \frac{1}{\rho(x)} dx dy \end{aligned}$$

et où on a posé

$$\frac{1}{\bar{K}_{i,j}} = \beta \left(\frac{1}{K_{i+1,j}} + \frac{1}{K_{i-1,j}} + \frac{1}{K_{i,j+1}} + \frac{1}{K_{i,j-1}} \right) + (1 - 4\beta) \frac{1}{K_{i,j}}$$

CHAPITRE 3. SCHÉMAS NUMÉRIQUES EN MILIEU HÉTÉROGÈNE

$$\frac{1}{\tilde{\rho}_{i+1/2,j}} = (1-2\lambda)\frac{1}{\rho_{i+1/2,j}} + \lambda\left(\frac{1}{\rho_{i+3/2,j}} + \frac{1}{\rho_{i-1/2,j}}\right)$$

$$\frac{1}{\tilde{\rho}_{i,j+1/2}} = (1-2\lambda)\frac{1}{\rho_{i,j+1/2}} + \lambda\left(\frac{1}{\rho_{i,j+3/2}} + \frac{1}{\rho_{i,j-1/2}}\right)$$

avec

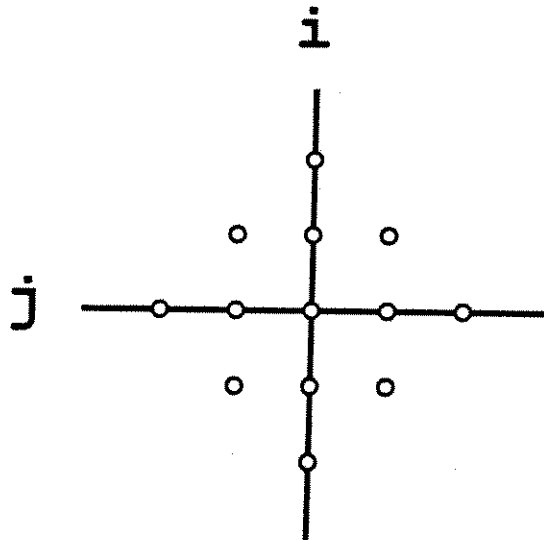
$$\frac{1}{\rho_{i+1/2,j}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho_{i+1/2,j+1/2}} + \frac{1}{\rho_{i+1/2,j-1/2}}\right)$$

$$\frac{1}{\rho_{i,j+1/2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho_{i+1/2,j+1/2}} + \frac{1}{\rho_{i-1/2,j+1/2}}\right)$$

$$\frac{1}{\rho_{i,j}} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\rho_{i+1/2,j+1/2}} + \frac{1}{\rho_{i+1/2,j-1/2}} + \frac{1}{\rho_{i-1/2,j+1/2}} + \frac{1}{\rho_{i-1/2,j-1/2}}\right)$$

$$\frac{1}{K_{i,j}} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{K_{i+1/2,j+1/2}} + \frac{1}{K_{i+1/2,j-1/2}} + \frac{1}{K_{i-1/2,j+1/2}} + \frac{1}{K_{i-1/2,j-1/2}}\right)$$

Le calcul de la partie B coûte 66 opérations par noeud et par pas de temps. Une itération de la partie "(2-4)" du schéma coûte 32 opérations (une fois les coefficients calculés). Donc une itération du schéma (4-4) ci-dessus coûte au total 98 opérations, si on stocke les coefficients; sinon il faut ajouter 70 opérations. Ici encore si on stocke les coefficients il faut 8 tableaux bidimensionnels supplémentaires.



Les Points utilisés dans le calcul
au pas de temps n .

3.2. CAS BIDIMENSIONNEL HÉTÉROGÈNE

Schéma Proposé

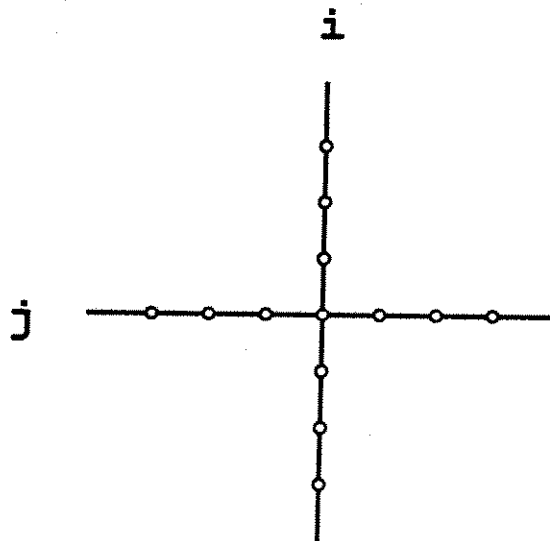
Le schéma (4-4) que nous proposons, s'écrit sous la forme :

$$u_{i,j}^{n+1} = 2u_{i,j}^n - u_{i,j}^{n-1} + K_{i,j} \cdot \Delta t^2 \left\{ B_x + B_y - \frac{\Delta t^2}{12} ({}^t(B_x + B_y)(K(B_x + B_y))) \right\} u_{i,j}^n$$

c'est à dire

$$u_{i,j}^{n+1} = 2u_{i,j}^n - u_{i,j}^{n-1} + K_{i,j} \cdot \Delta t^2 \left\{ B_x + B_y - \frac{\Delta t^2}{12} ({}^t B_x(K B_x) + {}^t B_x(K B_y) + {}^t B_y(K B_x) + {}^t B_y(K B_y)) \right\} u_{i,j}^n$$

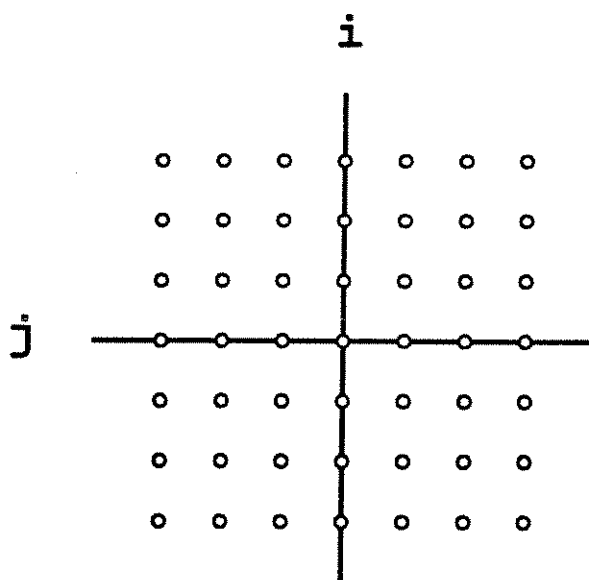
Les termes d'ordre 4 vont coûter chers à calculer. En effet nous avons dessiné ci-dessous les points où on doit évaluer les termes B_x et B_y .



Les points de calcul de B_x et B_y

Chaque terme coute 11 opérations. Il faut donc $2 \cdot 7 \cdot 11 = 154$ opérations pour disposer des termes B_x et B_y . Nous représentons ci-dessous les points nécessaires au calcul de B_x et B_y .

CHAPITRE 3. SCHÉMAS NUMÉRIQUES EN MILIEU HÉTÉROGÈNE



Les points nécessaires au calcul

En stockant dans deux tableaux unidimensionnels les résultats du calcul précédent, on peut ensuite multiplier par K (soit 13 opérations) puis ajouter $B_x u_{i,j}^n$ et $B_y u_{i,j}^n$ (soit 2 opérations). Ensuite itérer le schéma requière 5 opérations. Au total il faut 174 opérations pour itérer le schéma. Ceci est comparable au schéma proposé par G.Cohen et P.Joly dans le cas où on ne stocke pas les coefficients. En effet on a alors $98 + 70 = 168$ opérations par noeud et par pas de temps.

On peut remarquer enfin que cette formulation ne nécessite pas de tableaux bidimensionnels supplémentaires de travail, et que l'on utilise que 4 tableaux bidimensionnels.

On peut procéder différemment, et s'autoriser deux tableaux bidimensionnels de travail. On pourra alors calculer sur toute la grille les quantités $B_x u_{i,j}^n$ et $B_y u_{i,j}^n$ (ce qui fait $2 \cdot 11 = 22$ opérations). Alors le calcul du terme d'ordre 4 en espace ($(B_x + B_y)(K(B_x + B_y)) u_{i,j}^n$) nécessitera 4.12 (calcul des termes de la forme $B_x(K(B_x) + 3$ (additions de ces quantités) = 51 opérations. Au total itérer le schéma nécessitera $51 + 22 + 3$ (additions) + 5 (pour itération) = 81 opérations.

Conclusion

Pour le schéma (2-4) notre approche est plus économique que celle de Cohen-Joly. En effet elle nécessite moins d'opérations par noeud de l'ordre de 28 (surtout si on ne stocke pas les coefficients intermédiaires de calcul), et moins de place mémoire (si on les stocke).

Pour le schéma (4-4), le coût des deux schémas est extrêmement lourd, en nombre

3.2. CAS BIDIMENSIONNEL HÉTÉROGÈNE

d'opérations. Si on ne stocke pas les coefficients intermédiaires de calcul, alors le schéma de Cohen-Joly et le notre ont à peu près le même nombre d'opérations par noeud, de l'ordre de 170. Ceci rend ces schémas assez peu utilisable de façon réaliste.

Si on stocke les coefficients intermédiaires de calcul, alors nous avons moins d'opérations par noeud et pas de temps, de l'ordre de 80. Là encore ce nombre d'opérations rend le schéma extrêmement coûteux à mettre en oeuvre.

3.2.4 Implémentation du code à deux dimensions

Grilles Décalées

Afin d'implémenter un code de propagation d'ondes acoustiques en milieux bidimensionnels, nous allons définir les grilles du milieu, c'est à dire la grille en K et la grille en ρ . On fait l'hypothèse que K et ρ sont constants par maille. Lors du calcul des dérivées en espace en x et en y , on est amené à considérer les quantités suivantes :

$$\frac{1}{\rho_{i+1/2,j}} \quad \frac{1}{\rho_{i,j+1/2}}$$

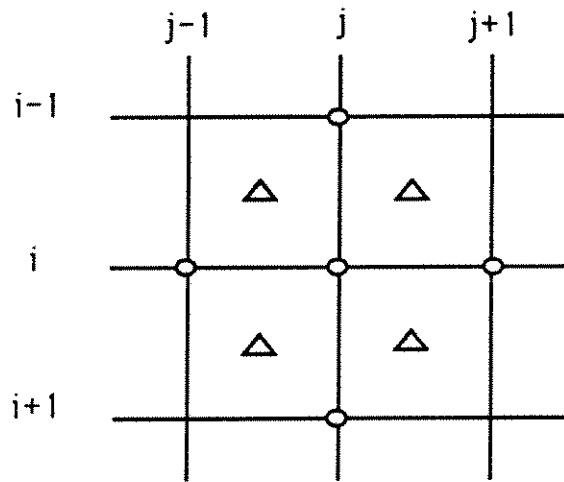
En effet on a :

$${}^t A_y \left(\frac{1}{\rho} A_y u \right) (i, j) = - \sum_{l=1}^L a_l \left[\frac{1}{\rho_{i,j+l-1/2}} A_y u(i, j+l-1/2) - \frac{1}{\rho_{i,j-l+1/2}} A_y u(i, j-l+1/2) \right]$$

De même

$${}^t A_x \left(\frac{1}{\rho} A_x u \right) (i, j) = - \sum_{l=1}^L a_l \left[\frac{1}{\rho_{i+l-1/2,j}} A_x u(i+l-1/2, j) - \frac{1}{\rho_{i-l+1/2,j}} A_x u(i-l+1/2, j) \right]$$

La première idée est de définir ρ au centre des mailles en u comme sur le dessin ci-dessous.



La première grille en u et ρ .

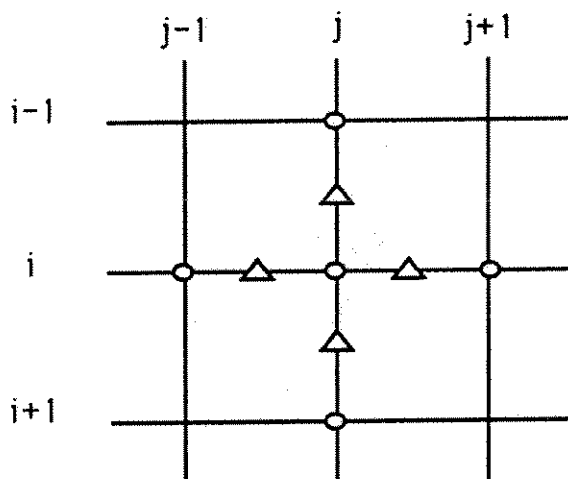
Alors il est facile d'obtenir les valeurs aux points milieu en $(i+1/2, j)$ et $(i, j+1/2)$ en posant:

$$\frac{1}{\rho_{i+1/2,j}} = 1/2 \left(\frac{1}{\rho_{i+1/2,j+1/2}} + \frac{1}{\rho_{i+1/2,j-1/2}} \right)$$

$$\frac{1}{\rho_{i,j+1/2}} = 1/2 \left(\frac{1}{\rho_{i+1/2,j+1/2}} + \frac{1}{\rho_{i-1/2,j+1/2}} \right)$$

3.2. CAS BIDIMENSIONNEL HÉTÉROGÈNE

Cette formulation conduit à des calculs supplémentaires indésirables. On peut éviter ces calculs supplémentaires en définissant ρ sur une grille décalée comme sur la figure ci-dessous.



La première grille en u et ρ .

On considère ρ constant sur la maille

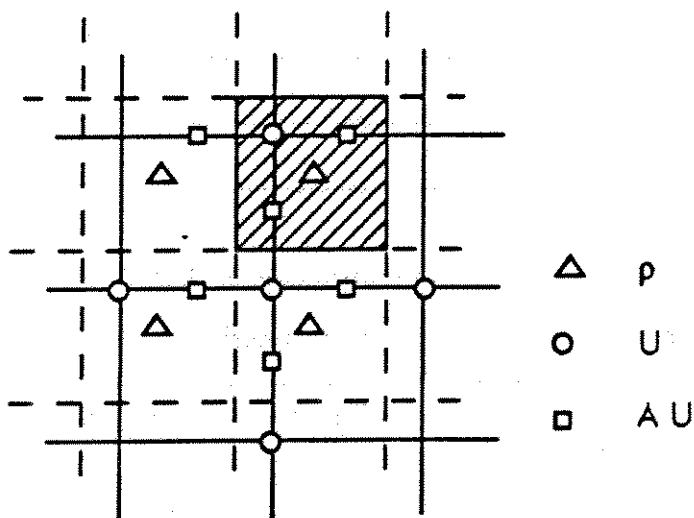
$$M(i, j) = [(i - \varepsilon)h, (j - \varepsilon)h] \times [(i + 1 - \varepsilon)h, (j + 1 - \varepsilon)h]$$

Alors les valeurs de

$$\frac{1}{\rho_{i+1/2, j}} \quad \frac{1}{\rho_{i, j+1/2}}$$

sont donnés explicitement par la valeur de ρ au centre de la maille $M(i, j)$. Ainsi il n'y a pas de calculs supplémentaires dans ce cas de figure.

On définit les valeurs $K_{i, j}^{-1}$ sur la même grille que ρ et on a donc la configuration suivante:



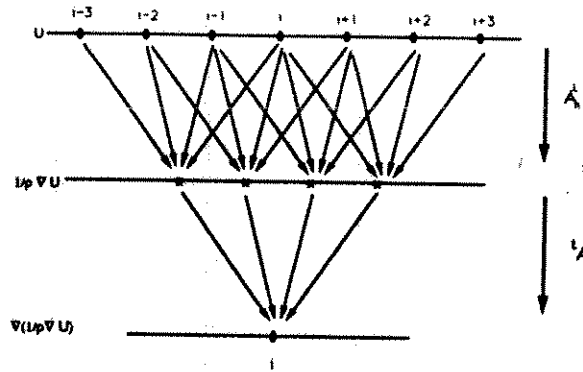
La grille en u et ρ .

CHAPITRE 3. SCHÉMAS NUMÉRIQUES EN MILIEU HÉTÉROGÈNE

Traitement des Bords

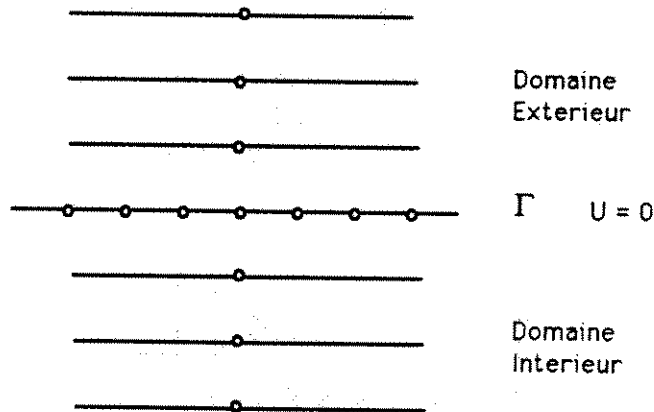
La surface libre

La méthode de dérivation discrète que nous avons choisie requière $4L - 1$ points pour un opérateur d'ordre $2L$.



Exemple avec $L = 2$

Lorsque l'on se trouve à la surface libre, il manque donc $2L - 1$ points afin de pouvoir calculer la dérivée.



Le problème au bord.

Supposons la surface libre en $z = 0$ et écrivons l'équation vérifiée par le schéma aux points de la surface. La condition de surface libre s'écrit

$$u(x, t) = 0 \text{ pour } x \in \Gamma_0 \quad \forall t \geq 0$$

On a donc pour $i = 0 \quad \forall j$

$$u_{i,j}^{n+1} = 2u_{i,j}^n - u_{i,j}^{n-1} + K_{i,j} \Delta t^2 \left\{ {}^t A_x \left(\frac{1}{\rho} A_x \right) + {}^t A_y \left(\frac{1}{\rho} A_y \right) \right\} u_{i,j}^n$$

3.2. CAS BIDIMENSIONNEL HÉTÉROGÈNE

Si la condition est vérifiée alors on a

$$\begin{aligned} u_{i,j}^n &= u_{i,j}^{n-1} = 0 \\ {}^t A_x \left(\frac{1}{\rho} A_x \right) u_{i,j}^n &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi la condition de surface libre sera vérifiée pour $u_{i,j}^{n+1}$ si

$${}^t A_y \left(\frac{1}{\rho} A_y \right) u_{i,j}^n = 0$$

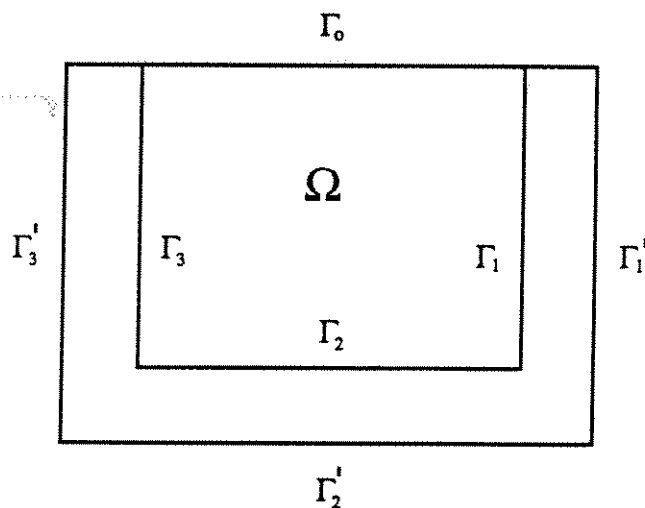
En développant les calculs on trouve que si u est antisymétrique par rapport à la surface alors la condition de surface libre est vérifiée. C'est à dire qu'il nous faut prolonger notre grille de $2L - 1$ lignes au-dessus de la surface $i = 0$ par la condition

$$u_{-i,j}^n = -u_{i,j}^n \quad i \geq 1 \quad \forall j$$

L'antisymétrie de u peut s'interpréter comme une conséquence du principe d'image-rie. En effet u peut être vu comme la restriction à R_+^2 de la solution du problème dans R^2 avec deux sources, symétriques par rapport à la surface et opposées. Le problème de "manque" de points pour la dérivation va également apparaître sur les trois autres bords du domaine.

Les bords absorbants

Il y a deux façons de traiter ce problème. Tout d'abord les conditions absorbantes "éponges" (cf paragraphe (3.3)). La configuration est alors la suivante :



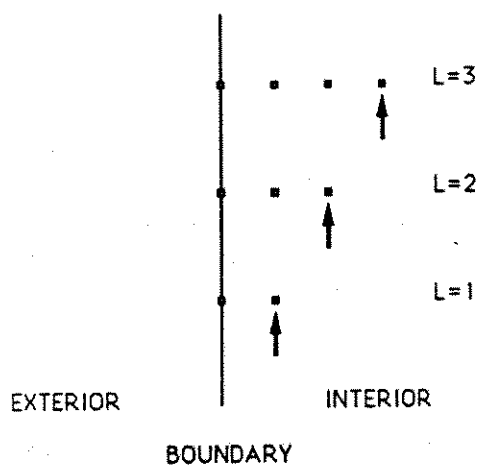
Le domaine et les éponges.

L'implémentation du schéma dans le domaine, se généralise alors facilement. Il suffit de prendre dans l'éponge les points manquants. Reste alors le cas du bord

CHAPITRE 3. SCHEMAS NUMERIQUES EN MILIEU HÉTÉROGÈNE

de l'éponge. Or il est essentiel de remarquer que plus l'onde passera de temps dans l'éponge plus elle s'amortit. On double donc la longueur de l'éponge en symétrisant le domaine en x et en y . On considère donc le domaine non pas plan mais sous la forme d'un tore. On résoud par la même occasion le problème du manque de points puisqu'on a simplement supprimé les bords.

Ceci a pour conséquence au niveau du phénomène de propagation de faire rentrer en Γ_3 l'onde sortant en Γ_1 , par exemple. Cependant l'onde aura traversé l'éponge $\Gamma_1\Gamma_1'$, puis $\Gamma_3\Gamma_3'$, et sera fortement amortie lorsque l'éponge sera suffisamment grande. La deuxième solution à ce manque de points est de décroître l'ordre du schéma lorsque l'on s'approche du bord et d'appliquer sur le bord des conditions absorbantes pseudo-différentielles (cf[Bam1] [Bam2]).



La décroissance de l'ordre du schéma près du bord.

Nous avons implémenté cette solution qui semble stable numériquement, sous la condition de stabilité du schéma le plus élevé (donc la plus contraignante). Nous n'avons cependant pas démontré la stabilité d'un tel schéma.

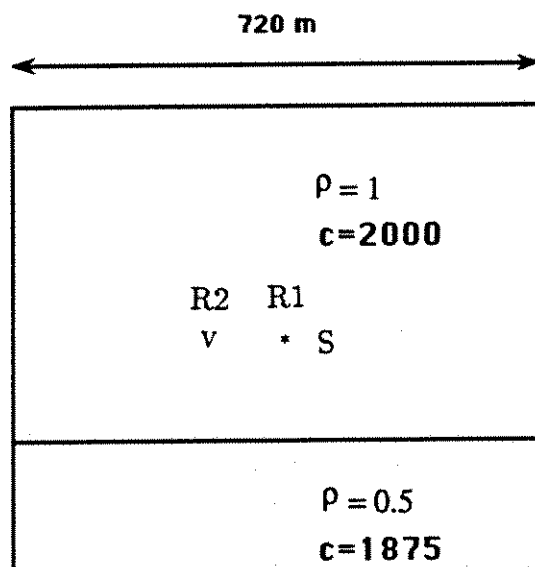
3.2. CAS BIDIMENSIONNEL HÉTÉROGÈNE

3.2.5 Etude de l'erreur en milieu hétérogène

Nous allons reprendre en milieu bidimensionnel l'étude de l'erreur, afin de montrer la validité de la démarche. Pour ne pas alourdir l'exposé, nous allons reprendre le cas du milieu bicouche, et analyser l'ordre d'approximation du coefficient de réflexion.

La solution de référence

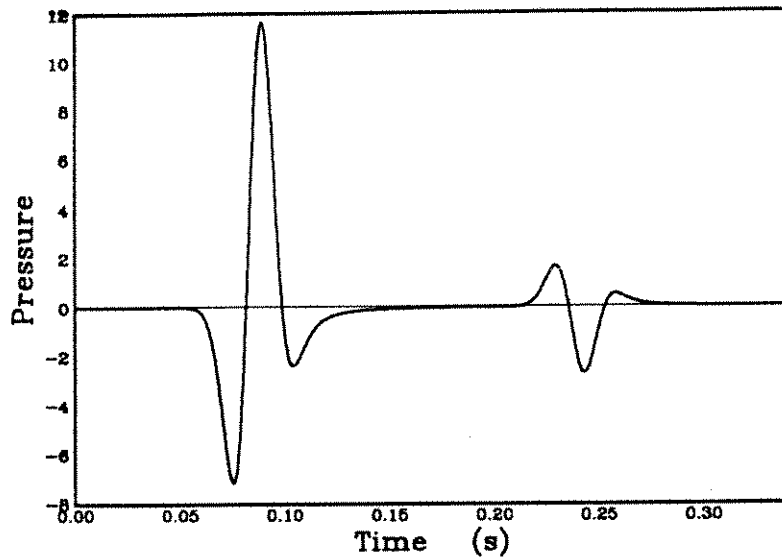
On considère le milieu suivant :



Le milieu et le dispositif

Pour obtenir une solution de référence, on procède comme précédemment en choisissant 27.5 points par longueur d'onde (ce qui donne un pas d'espace $h = 0.9\text{m}$), et $c\Delta t/h = 0.1$ (ce qui donne $\Delta t = 4.85 \cdot 10^{-5}\text{s}$). Nous avons fait une modélisation avec l'opérateur d'ordre 4 en espace ($L=2$) et d'ordre 2 en temps, et une modélisation avec l'opérateur d'ordre 8 en espace ($L=4$) et d'ordre 2 en temps. La différence relative en norme L^2 étant de l'ordre de 10^{-5} , nous choisissons la solution calculée avec $L=4$, comme solution de référence.

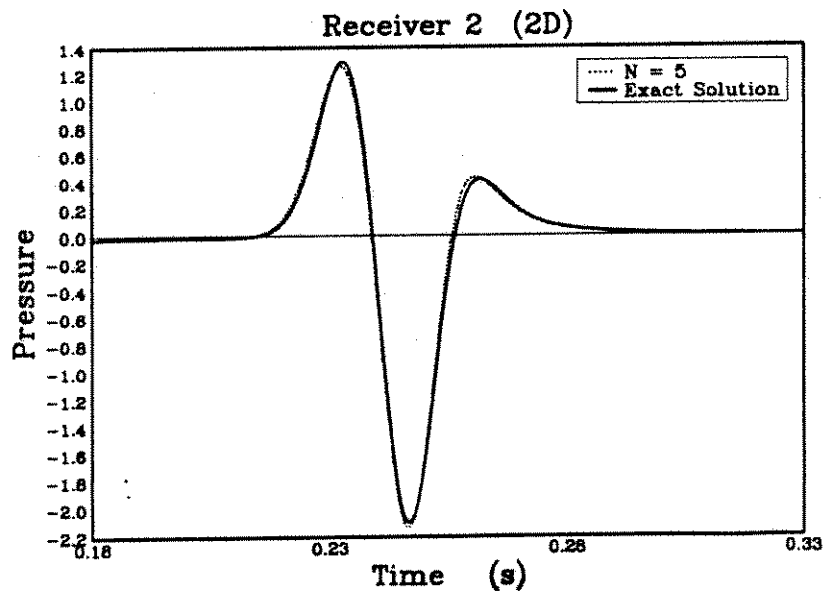
CHAPITRE 3. SCHÉMAS NUMÉRIQUES EN MILIEU HÉTÉROGÈNE



La solution de référence

Les solutions numériques

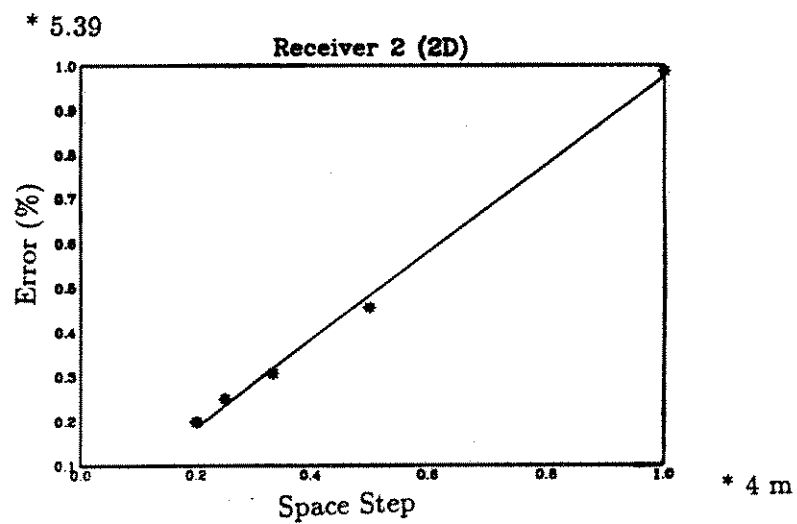
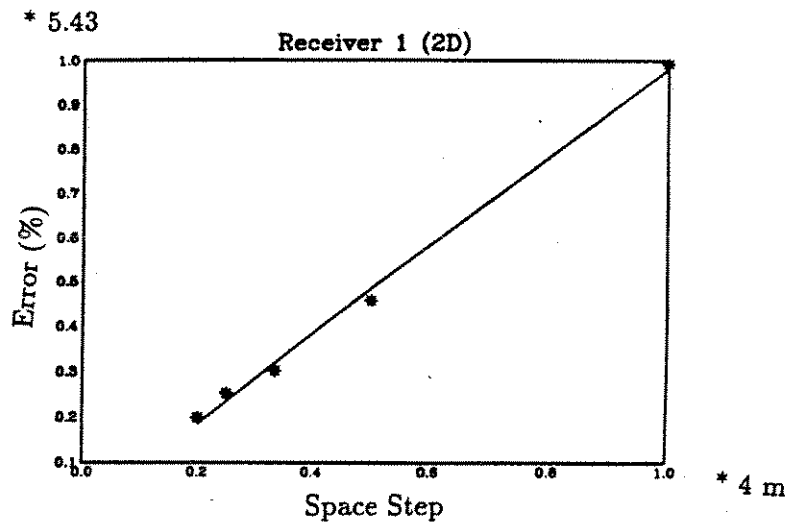
Nous avons calculé les solutions numériques avec différents choix du nombre de points par longueur d'onde, pour un schéma (2-4). Nous donnons ci-dessous un instantané, où on constate que le coefficient de réflexion est complexe (puisque'il y a un déphasage entre l'onde exacte et l'onde numérique).



Instantané de l'onde réfléchie

3.2. CAS BIDIMENSIONNEL HÉTÉROGÈNE

Les courbes d'erreur L^2 normalisée montrent, comme dans le cas unidimensionnel, que l'ordre d'approximation est encore 1.



L'erreur Normalisée

3.3 Conditions Absorbantes "Éponges"

3.3.1 Cas unidimensionnel homogène

Afin de pouvoir implémenter les schémas numériques précédents, il faut traiter le problème des conditions absorbantes. En effet, les limitations informatiques en place mémoire nous imposent un domaine de calcul fini. Donc pour simuler la propagation d'une onde dans un milieu non borné, il faut imposer aux bords du domaine des conditions dites "absorbantes" pour :

- i) assurer la décroissance de l'énergie à l'intérieur du domaine de calcul
- ii) éviter de perturber l'état vibratoire à l'intérieur du domaine par des réflexions sur les bords.

Bamberger et al (cf [Bam1], [Bam2]) ont proposé des conditions absorbantes du type pseudo-différentiel. Cette solution n'est pas facilement implémentable si le schéma à l'intérieur est d'ordre élevé. C'est pourquoi nous avons opté pour des conditions absorbantes du type "éponge". Elles consistent à rajouter au domaine de calcul une bande dans laquelle on amortira l'onde, en rajoutant à l'équation des ondes un terme de frottement (c'est à dire proportionnel à la vitesse de déplacement).

Plus précisément on se place dans un milieu unidimensionnel infini, le demi-espace des $x \leq 0$. Notre problème est d'absorber les ondes venant de $-\infty$ dans le demi-espace des $x \geq 0$.

On peut donc écrire que la solution u vérifie :

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u &= 0 & x \leq 0 \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\alpha}{c} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u &= 0 & x \geq 0 \end{aligned}$$

Montrons tout d'abord la décroissance de l'énergie.

Décroissance de l'Énergie

On peut réécrire l'équation sous la forme :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + H(x) \frac{\alpha}{c} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 \quad x \in R$$

où $H(x)$ est la fonction de Heaviside.

Pour exhiber l'énergie on multiplie l'équation par $\frac{\partial u}{\partial t}$ puis on intègre sur R . En posant

3.3. CONDITIONS ABSORBANTES "ÉPONGES"

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_R \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_R \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx$$

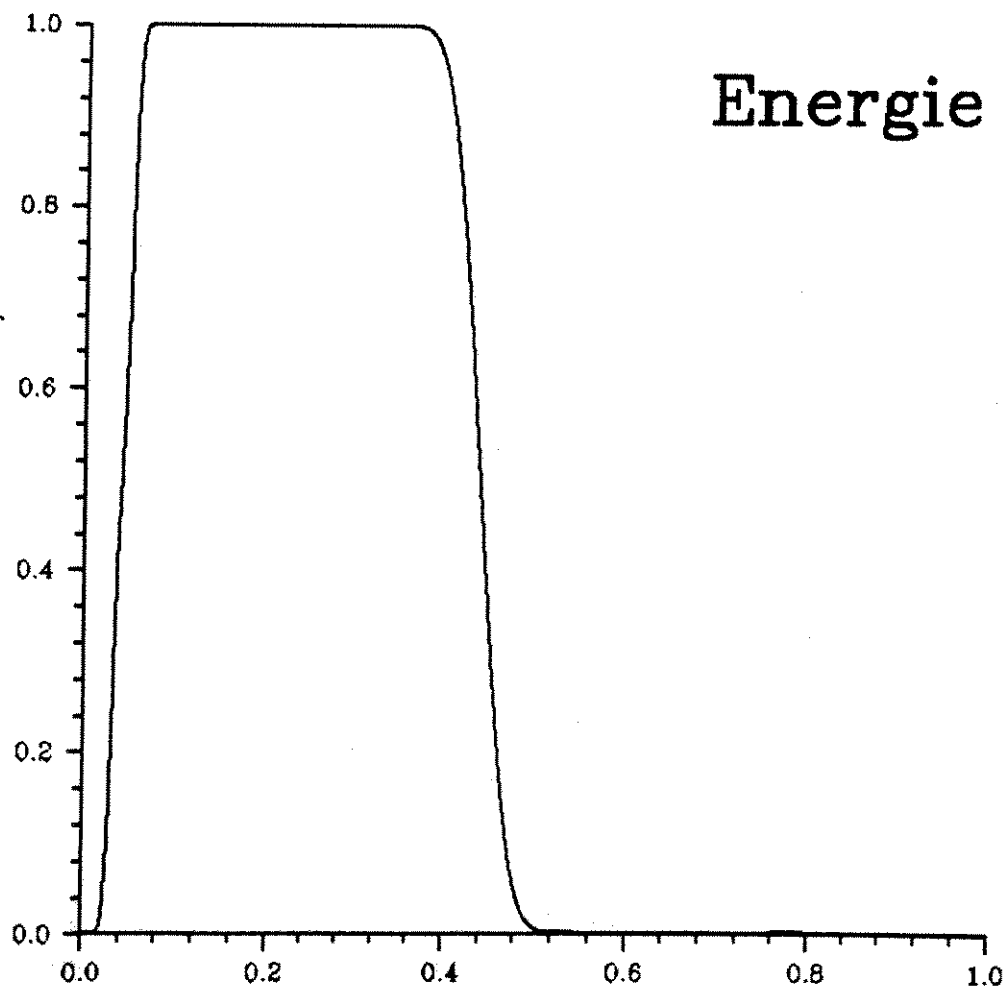
et

$$f(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\alpha}{c} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx$$

On obtient

$$\frac{d}{dt} E(t) = -f(t)$$

Ce qui montre la décroissance de l'énergie puisque α (donc f) est positif.



CHAPITRE 3. SCHÉMAS NUMÉRIQUES EN MILIEU HÉTÉROGÈNE

Analyse par Onde Plane

Afin d'étudier plus finement l'équation faisons une analyse par ondes planes. Pour cela on suppose que u est de la forme :

$$u(x, t) = e^{i(\omega t - kx)}$$

On obtient alors les relations de dispersion suivantes :

$$\begin{aligned} -\frac{\omega^2}{c^2} + k_1^2 &= 0 & x \in R^- \\ -\frac{\omega^2}{c^2} + \frac{i\alpha\omega}{c} + k_2^2 &= 0 & x \in R^+ \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} k_1^2 &= \frac{\omega^2}{c^2} \\ k_2^2 &= \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{i\alpha\omega}{c} \end{aligned}$$

Pour $x \in R^+$ il faut donc choisir le signe de k_2 . Pour cela on fait tendre α vers 0 et on peut écrire

$$k_2 \simeq \pm \frac{\omega}{c} \left(1 - \frac{i\alpha c}{2\omega}\right)$$

En choisissant

$$k_2 = -\frac{\omega}{c} + \frac{i\alpha}{2}$$

on a

$$|u(x, t)| = e^{-\frac{\alpha x}{2}}$$

L'énergie associée à cette solution est non bornée au cours du temps, ce qui contredit la décroissance de l'énergie. Lorsque $\alpha \rightarrow 0$ on a donc :

$$k_2 \simeq \frac{\omega}{c} \left(1 - \frac{i\alpha c}{2\omega}\right)$$

et on peut donc écrire u sous la forme :

$$u(x, t) = e^{-\frac{\alpha x}{2}} e^{i(\omega t - kx)} \quad x \in R^+$$

On voit bien sous cette forme l'effet du terme $\frac{\alpha}{c} \frac{\partial u}{\partial t}$, c'est un effet d'amortissement de l'amplitude de l'onde (donc de son énergie) avec la distance au bord $x = 0$.

3.3. CONDITIONS ABSORBANTES "ÉPONGES"

Calcul du Coefficient de Réflexion

Afin d'éviter des réflexions parasites ou de les minimiser calculons le coefficient de réflexion. Pour cela on suppose la solution u de la forme

$$\begin{aligned} u(x, t) &= e^{i(\omega t - k_1 x)} + R e^{i(\omega t + k_1 x)} & x \in R^- \\ u(x, t) &= T e^{i(\omega t - k_2 x)} & x \in R^+ \end{aligned}$$

où R est le coefficient de réflexion et T le coefficient de transmission.

Au passage de l'interface $x = 0$, il y a continuité de u et du flux $\frac{\partial u}{\partial x}$ d'où les relations

$$\begin{aligned} 1 + R &= T \\ k_1(1 - R) &= k_2 T \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{1 - R}{1 + R} = \sqrt{1 - \frac{i\alpha c}{\omega}}$$

Lorsque $\alpha \rightarrow 0$ on peut écrire que :

$$|R|^2 = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \left(\frac{4\omega}{c}\right)^2}$$

Il est facile de voir alors que :

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} |R| = 0 \qquad \lim_{\omega \rightarrow 0} |R| = 1$$

C'est à dire que les basses fréquences sont réfléchies, alors que les hautes fréquences passent. Afin d'éviter cet inconvénient, nous allons lisser le coefficient d'amortissement de façon à éviter un saut brusque à l'interface (qui crée les réflexions). On introduit donc une fonction $g(x)$ telle que :

$$g(0) = 0 \qquad g(N\lambda) = 1$$

où λ est la longueur d'onde et N le nombre de longueur d'onde sur lequel on amortit (c'est à dire la taille de l'éponge). On remplace donc le coefficient α par $\alpha \cdot g(x)$ d'où

$$|R|^2(x) = \frac{(\alpha g(x))^2}{(\alpha g(x))^2 + \left(\frac{4\omega}{c}\right)^2}$$

Lorsque $g(x) = 0$ alors $|R|(x) = 0$ il n'y a aucune aucune réflexion.

Pour les essais numériques nous avons choisi

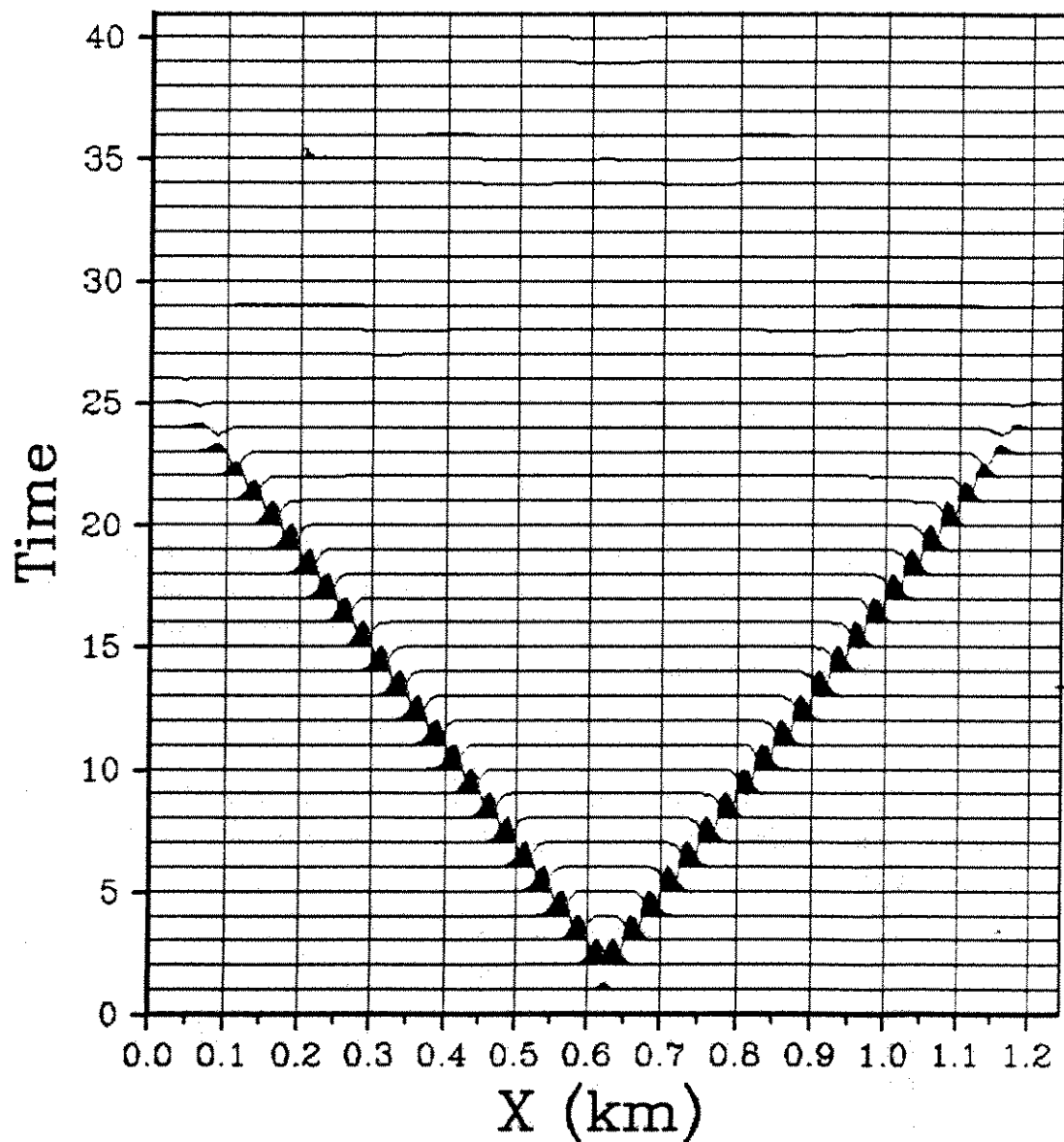
$$g(x) = \left(\frac{x}{N\lambda}\right)^2 \qquad x \leq N\lambda$$

CHAPITRE 3. SCHÉMAS NUMÉRIQUES EN MILIEU HÉTÉROGÈNE

où λ est la longueur d'onde et N le nombre de longueur d'onde sur lequel on amortit l'onde.

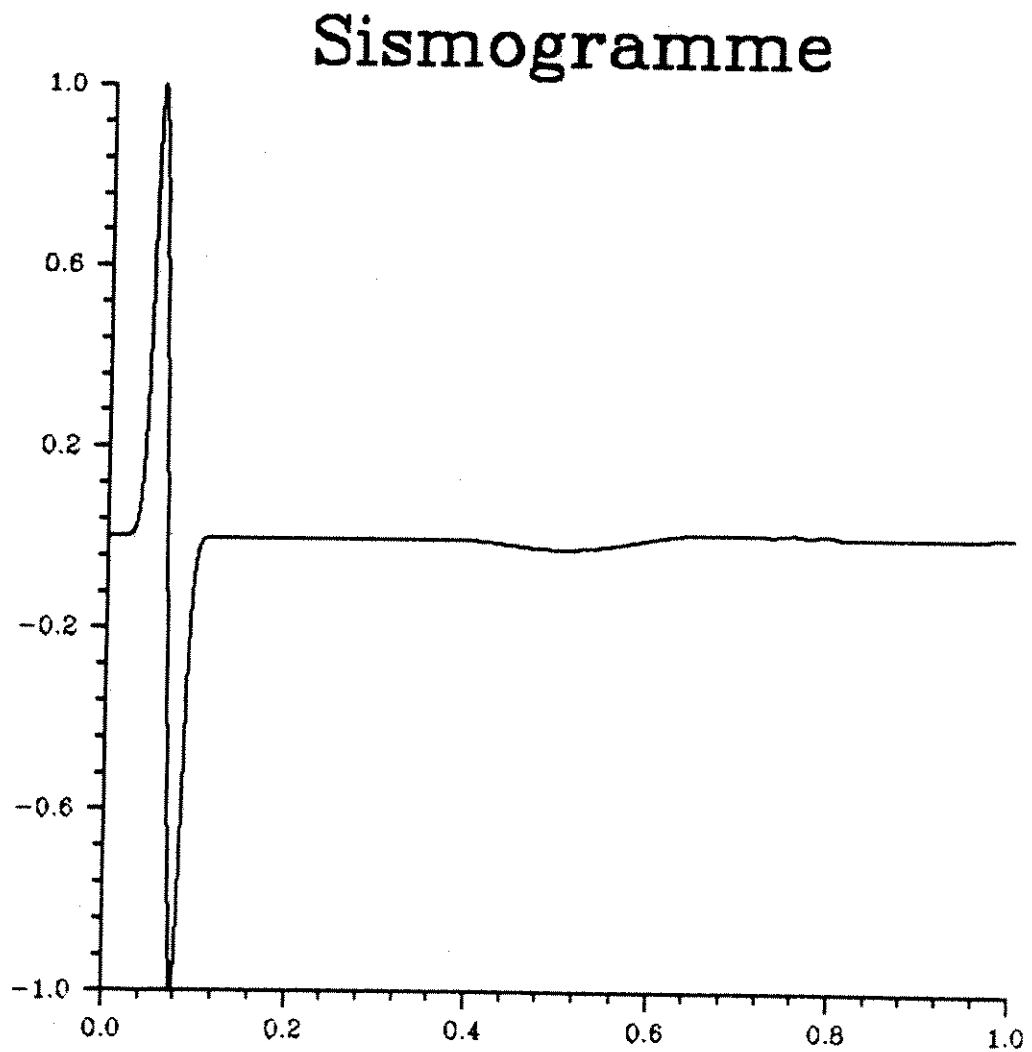
Nous présentons ci-dessous un exemple 1D de propagation d'un Ricker où on laisse s'amortir l'onde sur dix longueurs d'onde ($N=10$). La figure ci-dessous est une collection d'instantanés 1D du front d'onde.

On remarque que la condition absorbante n'est pas parfaite puisque comme le montre le calcul du coefficient de réflexion, les basses fréquences sont réfléchies.



3.3. CONDITIONS ABSORBANTES "ÉPONGES"

Nous donnons également un exemple de sismogramme dans le cas unidimensionnel où il n'y a pas d'atténuation afin de montrer l'amplitude des (inévitables) réflexions. Dans cet exemple nous avons $L = 2$ et $\alpha = 1/8$ et nous avons amorti sur dix longueurs d'onde.



CHAPITRE 3. SCHEMAS NUMERIQUES EN MILIEU HETEROGENE

3.3.2 Généralisation aux milieux hétérogènes

On généralise l'équation avec amortissement en milieux hétérogènes de la façon suivante :

$$\frac{1}{\rho c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\alpha}{\rho c} \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

Il reste maintenant à discrétiser cette équation, et plusieurs options se présentent pour la discrétisation du terme $\frac{\partial u}{\partial t}$. Nous allons voir qu'une seule mène à un schéma stable. Nous discrétisons l'équation ci-dessus comme suit

$$\frac{1}{\rho_i c_i^2} \frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{\Delta t^2} + {}^t A_h \left(\frac{1}{\rho} A_h \right) u_i^n + \frac{\alpha_i}{\rho_i c_i} \frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\Delta t} = 0$$

et nous allons montrer que cette formulation conduit à un schéma instable. Afin d'établir la stabilité, nous procédons par la méthode énergétique.

$$0 = \left(\frac{1}{\rho c^2} \frac{u^{n+1} - 2u^n + u^{n-1}}{\Delta t^2} + {}^t A_h \left(\frac{1}{\rho} A_h \right) u^n + \frac{\alpha}{\rho c} \frac{u^n - u^{n-1}}{\Delta t}, \frac{u^{n+1} - u^{n-1}}{2\Delta t} \right)_o$$

soit encore

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2\Delta t} \left(\frac{1}{\rho c^2} \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t}, \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} \right)_o - \frac{1}{2\Delta t} \left(\frac{1}{\rho c^2} \frac{u^n - u^{n-1}}{\Delta t}, \frac{u^n - u^{n-1}}{\Delta t} \right)_o \\ &+ \frac{1}{2\Delta t} \left(\frac{1}{\rho} A_h u^{n+1}, A_h u^n \right)_* - \frac{1}{2\Delta t} \left(\frac{1}{\rho} A_h u^n, A_h u^{n-1} \right)_* \\ &+ \left(\frac{\alpha}{\rho c} \frac{u^n - u^{n-1}}{\Delta t}, \frac{u^n - u^{n-1}}{2\Delta t} \right)_o + \left(\frac{\alpha}{\rho c} \frac{u^n - u^{n-1}}{\Delta t}, \frac{u^{n+1} - u^n}{2\Delta t} \right)_o \end{aligned}$$

En utilisant :

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\rho} A_h u^{n+1}, A_h u^n \right)_* &= \left(\frac{1}{\rho} A_h \frac{u^{n+1} + u^n}{2}, A_h \frac{u^{n+1} + u^n}{2} \right)_* \\ &- \left(\frac{1}{\rho} A_h \frac{u^{n+1} - u^n}{2}, A_h \frac{u^{n+1} - u^n}{2} \right)_* \\ \left(\frac{1}{\rho} A_h u^n, A_h u^{n-1} \right)_* &= \left(\frac{1}{\rho} A_h \frac{u^n + u^{n-1}}{2}, A_h \frac{u^n + u^{n-1}}{2} \right)_* \\ &- \left(\frac{1}{\rho} A_h \frac{u^n - u^{n-1}}{2}, A_h \frac{u^n - u^{n-1}}{2} \right)_* \end{aligned}$$

3.3. CONDITIONS ABSORBANTES "ÉPONGES"

on a :

$$\begin{aligned}
 0 = & \frac{1}{2\Delta t} \left\{ \left(\frac{1}{\rho c^2} \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t}, \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} \right)_o - \left(\frac{1}{\rho c^2} \frac{u^n - u^{n-1}}{\Delta t}, \frac{u^n - u^{n-1}}{\Delta t} \right)_o \right. \\
 & + \left(\frac{1}{\rho} A_h \frac{u^{n+1} + u^n}{2}, A_h \frac{u^{n+1} + u^n}{2} \right)_* - \frac{\Delta t^2}{4} \left(\frac{1}{\rho} A_h \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t}, A_h \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} \right)_* \\
 & - \left(\frac{1}{\rho} A_h \frac{u^n + u^{n-1}}{2}, A_h \frac{u^n + u^{n-1}}{2} \right)_* + \frac{\Delta t^2}{4} \left(\frac{1}{\rho} A_h \frac{u^n - u^{n-1}}{\Delta t}, A_h \frac{u^n - u^{n-1}}{\Delta t} \right)_* \left. \right\} \\
 & + \left(\frac{\alpha}{\rho c} \frac{u^n - u^{n-1}}{\Delta t}, \frac{u^n - u^{n-1}}{2\Delta t} \right)_o + \left(\frac{\alpha}{\rho c} \frac{u^n - u^{n-1}}{\Delta t}, \frac{u^{n+1} - u^n}{2\Delta t} \right)_o
 \end{aligned}$$

En posant :

$$v^{n+1} = \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t}$$

$$w^{n+1} = \frac{u^{n+1} + u^n}{2}$$

$$E_c^{n+1/2} = \left(\frac{1}{\rho c^2} - \frac{\Delta t^2}{4} {}^t A_h \left(\frac{1}{\rho} A_h \right) v^{n+1}, v^{n+1} \right)_o$$

$$E_p^{n+1/2} = \left({}^t A_h \left(\frac{1}{\rho} A_h \right) w^{n+1}, w^{n+1} \right)_*$$

$$E^{n+1/2} = E_c^{n+1/2} + E_p^{n+1/2}$$

$E_c^{n+1/2}$ est l'énergie cinétique discrète, $E_p^{n+1/2}$ est l'énergie potentielle discrète et $E^{n+1/2}$ est l'énergie discrète totale, au temps $n + 1/2$, on trouve que :

$$\frac{E^{n+1/2} - E^{n-1/2}}{2\Delta t} = - \left(\frac{\alpha}{2\rho c} v^n, v^n \right)_o - \left(\frac{\alpha}{2\rho c} v^n, v^{n+1} \right)_o$$

CHAPITRE 3. SCHEMAS NUMERIQUES EN MILIEU HETEROGENE

Pour assurer la décroissance de l'énergie il faut donc que

$$\forall v, w \in L^2_0$$

$$B = \left(\frac{\alpha}{2\rho c} v, v \right)_0 + \left(\frac{\alpha}{2\rho c} v, w \right)_0 \geq 0$$

Or avec $w = -2v$ on a $B \leq 0$ d'où instabilité.

Le même calcul en discrétisant le terme en temps par $(u^{n+1} - u^n)/\Delta t$ donne le même résultat d'instabilité.

Par contre en choisissant l'approximation centrée

$$\frac{\partial u}{\partial t} \simeq \frac{u^{n+1} - u^{n-1}}{2\Delta t}$$

on obtient :

$$\frac{E^{n+1/2} - E^{n-1/2}}{2\Delta t} = - \left(\frac{\alpha}{\rho c} \frac{u^{n+1} - u^{n-1}}{2\Delta t}, \frac{u^{n+1} - u^{n-1}}{2\Delta t} \right)_0 \leq 0$$

ce qui montre la décroissance de l'énergie. La positivité des énergies potentielle et cinétique est alors assurée par la condition de stabilité vue précédemment.

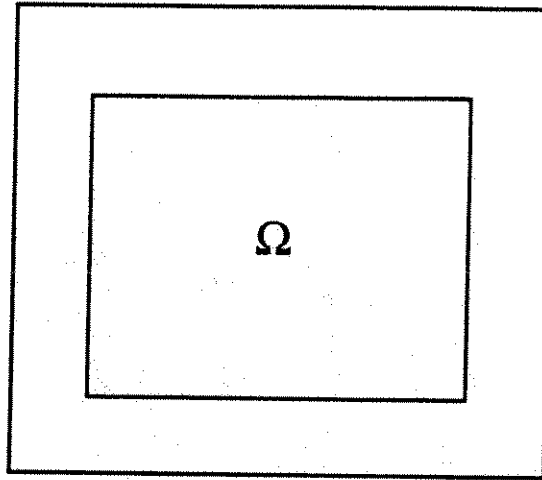
3.3.3 Exemple à deux dimensions

Après l'analyse en milieu unidimensionnel, des conditions absorbantes éponges, nous allons donner ici une illustration de son efficacité en milieu bidimensionnel. Nous considérons un milieu homogène entouré d'une couche "d'éponge".

Milieu homogène

On considère un milieu homogène de vitesse $C = 1500m/s$ et de densité $\rho = 1$. On lui ajoute une bande de 10 longueur d'onde de largeur (ici $\lambda = 20m$ donc la largeur de la bande est de 200 m). On règle le coefficient α (Coefficient d'amortissement maximum au bout de l'éponge) égal à $1/8 = 0.125$ comme dans le cas unidimensionnel.

3.3. CONDITIONS ABSORBANTES "ÉPONGES"



Le domaine et ses éponges.

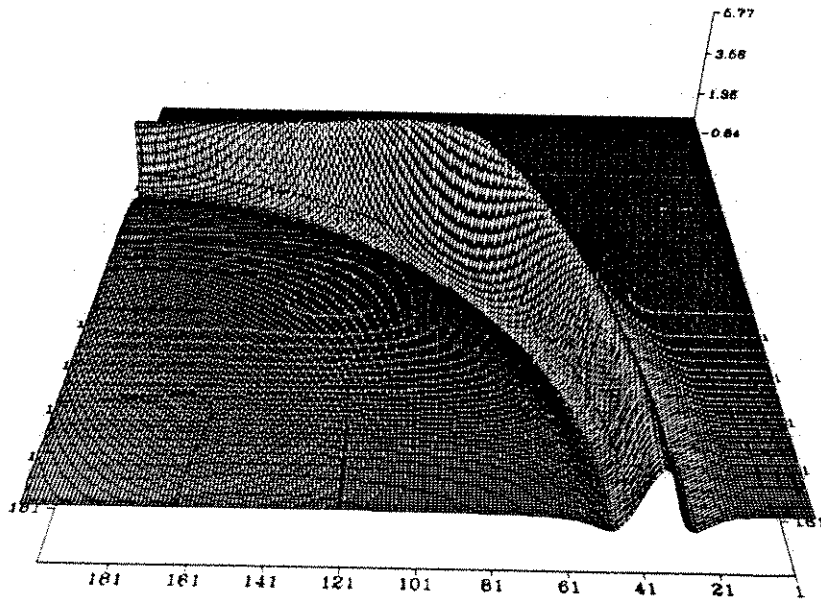
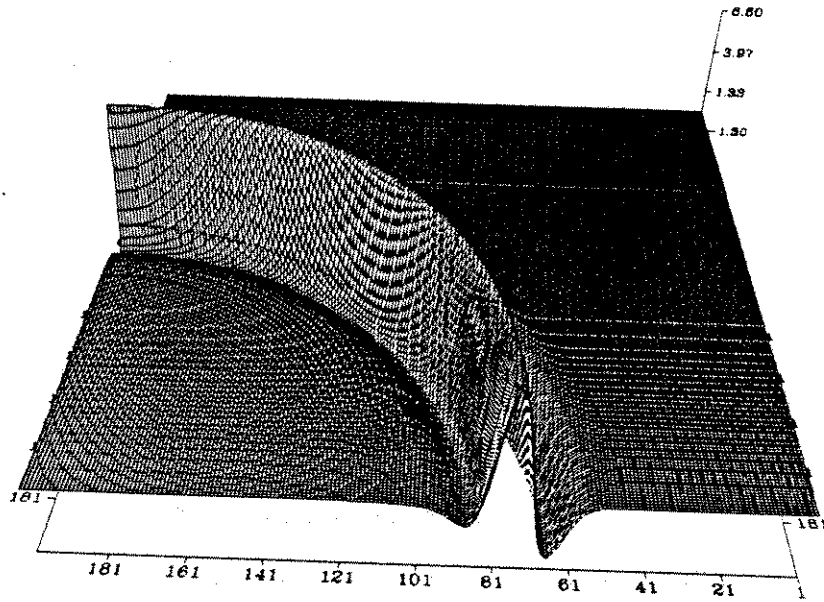
Nous allons observer les effets de ces conditions absorbantes sur les instantanés du front d'onde. Le milieu étant assez petit (400 m), la divergence géométrique a peu d'effet entre le moment où l'onde touche l'éponge, et le moment où touche le bord de celle-ci.

Les instantanés

De par les symétries du domaine, on a représenté sur les instantanés que le cadran supérieur droit.

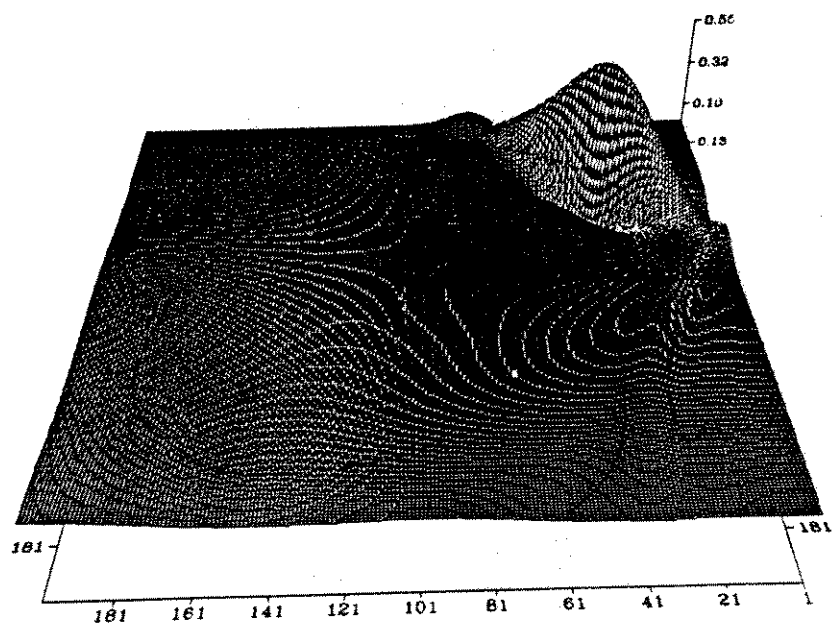
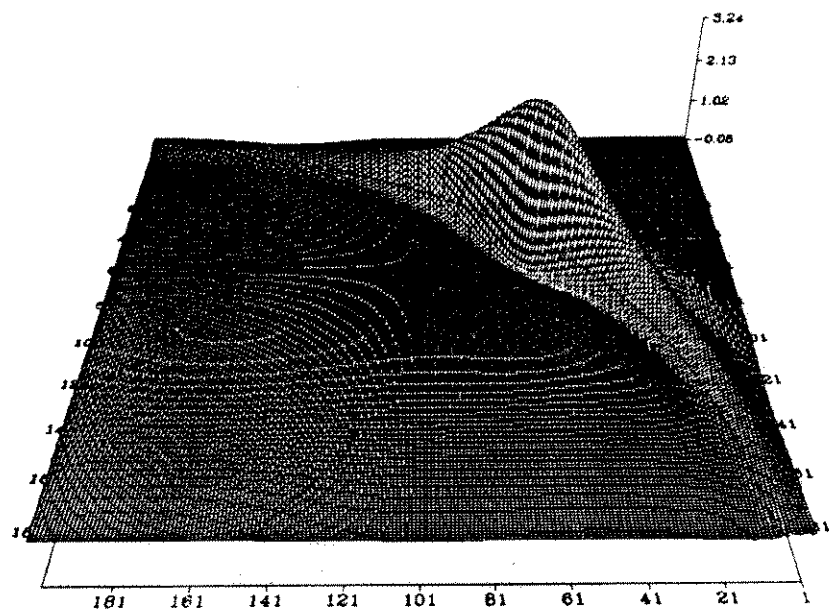
Le premier instantané correspond exactement au temps de propagation de la source à l'interface domaine-éponge. Il situe donc l'endroit exact de l'interface. Les instantanés suivants montrent l'absorption de l'onde dans l'éponge, ainsi que les réflexions indésirables à l'interface domaine-éponge. Sur le dernier instantané on peut remarquer la réflexion de l'onde sur le bord de l'éponge. Cette réflexion sera dissipée très fortement avant d'entrer à nouveau dans le domaine. Comme on l'a dit au paragraphe concernant l'implémentation du code, il est possible (et souhaitable) de périodiser le milieu de façon à éviter cette réflexion sur le bord de l'éponge. L'onde se dissipera alors pendant deux longueurs d'éponge.

CHAPITRE 3. SCHÉMAS NUMÉRIQUES EN MILIEU HÉTÉROGÈNE



Les instantanés N^{01} et N^{02}

3.3. CONDITIONS ABSORBANTES "ÉPONGES"



Les instantanés N⁰³ et N⁰⁴

3.4 Annexes

3.4.1 Annexe 1 : Calcul du transposé

Soit L_o^2 et L_*^2 les deux espaces suivants :

$$L_o^2 = \left\{ \varphi \in L^2(\mathbb{R}) / \varphi = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \varphi_i 1_{[(i-1/2)h, (i+1/2)h]} \right\}$$

$$L_*^2 = \left\{ \varphi \in L^2(\mathbb{R}) / \varphi = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \varphi_i 1_{[ih, (i+1)h]} \right\}$$

où h le pas de discrétisation en espace, muni des produits scalaires suivant :

$$(f, g)_{L_o^2} = (f, g)_o = h \sum_{i=-\infty}^{+\infty} f_i g_i$$

$$(f, g)_{L_*^2} = (f, g)_* = h \sum_{i=-\infty}^{+\infty} f_{i+1/2} g_{i+1/2}$$

On introduit l'opérateur

$$\begin{aligned} A_h : L_o^2 &\longrightarrow L_*^2 \\ u &\longmapsto A_h u \quad (i+1/2) = \sum_{l=1}^L a_l (u_{i+l} - u_{i-l+1}) \end{aligned}$$

Le transposé de A_h noté ${}^t A_h$ est défini par

$$\begin{aligned} {}^t A_h : L_*^2 &\longrightarrow L_o^2 \\ v &\longmapsto A_h v \quad / \quad ({}^t A_h v, u)_o = (v, A_h u)_* \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} ({}^t A_h v, u)_o &= h \sum_{i=-\infty}^{+\infty} v_{i+1/2} \sum_{l=1}^L a_l (u_{i+l} - u_{i-l+1}) \\ &= h \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=1}^L a_l v_{i+1/2} (u_{i+l} - u_{i-l+1}) \\ &= h \sum_{l=1}^L \sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_l v_{i+1/2} u_{i+l} - h \sum_{l=1}^L \sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_l v_{i+1/2} u_{i-l+1} \\ &= h \sum_{l=1}^L a_l \sum_{i=-\infty}^{+\infty} v_{i-l+1/2} u_i - h \sum_{l=1}^L a_l \sum_{i=-\infty}^{+\infty} v_{i+l-1/2} u_i \end{aligned}$$

3.4. ANNEXES

$$= h \sum_{i=-\infty}^{+\infty} u_i \sum_{l=1}^L a_l (v_{i-l+1/2} - v_{i+l-1/2})$$

Le transposé de A_h est donc défini par :

$$\begin{aligned} {}^t A_h &: L^2_{\ast} \longrightarrow L^2_{\circ} \\ v &\longmapsto A_h v \quad (i) = - \sum_{l=1}^L a_l (v_{i+l-1/2} - v_{i-l+1/2}) \end{aligned}$$

3.4.2 Annexe 2 : Démonstration du Lemme 1

Montrons les inégalités suivantes :

$$\left({}^t B_L(KB_L)u, u \right)_o \leq 4C_*^2 \left(L \sum_{l=1}^L a_l^2 \right) \left({}^t A_L(1/\rho A_L)u, u \right)_o$$

$$\left({}^t B_L(KB_L)u, u \right)_o \leq 4C_{\#}^2 \left(\sum_{l=1}^L |a_l| \right)^2 \left({}^t A_L(1/\rho A_L)u, u \right)_o$$

où

$$C_* = \sup_i \left\{ \frac{1}{2L} \left(\sum_{l=1}^L \frac{K_i}{\rho_{i+l-1/2}} + \frac{K_i}{\rho_{i-l+1/2}} \right) \right\}^{1/2}$$

$$C_{\#}^2 = \left(\sum_{l=1}^L |\beta_l| \right)^{-1} \sup_i \left\{ \sum_{l=1}^L |\beta_l| \left(\frac{K_i}{2\rho_{i+l-1/2}} + \frac{K_i}{2\rho_{i-l+1/2}} \right) \right\}$$

DÉMONSTRATION :

Soit $u \in L_o^2$ on a

$$\begin{aligned} \left({}^t B(KB)u, u \right)_o &= (KBu, Bu)_o \\ &= h \sum_{i=-\infty}^{+\infty} K_i B u_i^2 = h \sum_{i=-\infty}^{+\infty} K_i \left(\sum_{l=1}^L a_l \left(\frac{A u_{i+l-1/2}}{\rho_{i+l-1/2}} - \frac{A u_{i-l+1/2}}{\rho_{i-l+1/2}} \right) \right)^2 \\ &\leq h \sum_{i=-\infty}^{+\infty} K_i \left(\sum_{l=1}^L a_l^2 \right) \sum_{l=1}^L \left(\frac{A u_{i+l-1/2}}{\rho_{i+l-1/2}} - \frac{A u_{i-l+1/2}}{\rho_{i-l+1/2}} \right)^2 \\ &\leq 2 \left(\sum_{l=1}^L a_l^2 \right) h \sum_{i=-\infty}^{+\infty} K_i \sum_{l=1}^L \left(\frac{A u_{i+l-1/2}}{\rho_{i+l-1/2}} \right)^2 + \left(\frac{A u_{i-l+1/2}}{\rho_{i-l+1/2}} \right)^2 \\ &\leq 2 \left(\sum_{l=1}^L a_l^2 \right) \left\{ \sum_{l=1}^L h \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \frac{K_i}{\rho_{i+l-1/2}} \frac{A^2 u_{i+l-1/2}}{\rho_{i+l-1/2}} + \frac{K_i}{\rho_{i-l+1/2}} \frac{A^2 u_{i-l+1/2}}{\rho_{i-l+1/2}} \right\} \\ &\leq 4L \left(\sum_{l=1}^L a_l^2 \right) \sup_i \left(\frac{1}{2L} \left(\frac{K_i}{\rho_{i+l-1/2}} + \frac{K_i}{\rho_{i-l+1/2}} \right) \right) \left({}^t A_L(1/\rho A_L)u, u \right)_o \end{aligned}$$

d'où le résultat annoncé en posant

$$C_* = \sup_i \left\{ \frac{1}{2L} \left(\sum_{l=1}^L \frac{K_i}{\rho_{i+l-1/2}} + \frac{K_i}{\rho_{i-l+1/2}} \right) \right\}^{1/2}$$

3.4. ANNEXES

Nous allons démontrer maintenant la deuxième partie du lemme.
Soit $u \in L^2_0$ on a

$$\begin{aligned}
&= (KBu, Bu)_0 \\
&= h \sum_{i=-\infty}^{+\infty} K_i B u_i^2 = h \sum_{i=-\infty}^{+\infty} K_i \left(\sum_{l=1}^L a_l \left(\frac{A u_{i+l-1/2}}{\rho_{i+l-1/2}} - \frac{A u_{i-l+1/2}}{\rho_{i-l+1/2}} \right) \right)^2 \\
&\leq h \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{l=1}^L \sqrt{|a_l|} \sqrt{|a_l|} K_i \left(\frac{A u_{i+l-1/2}}{\rho_{i+l-1/2}} - \frac{A u_{i-l+1/2}}{\rho_{i-l+1/2}} \right) \right)^2 \\
&\leq \sum_{l=1}^L |a_l| h \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=1}^L |a_l| K_i \left(\frac{A u_{i+l-1/2}}{\rho_{i+l-1/2}} - \frac{A u_{i-l+1/2}}{\rho_{i-l+1/2}} \right)^2 \\
&\leq 2 \sum_{l=1}^L |a_l| h \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=1}^L |a_l| K_i \left(\frac{A^2 u_{i+l-1/2}}{\rho_{i+l-1/2}^2} + \frac{A^2 u_{i-l+1/2}}{\rho_{i-l+1/2}^2} \right) \\
&\leq 2 \sum_{l=1}^L |a_l| \sup_i \sum_{l=1}^L |a_l| \left(\frac{K_i}{\rho_{i+l-1/2}} + \frac{K_i}{\rho_{i-l+1/2}} \right) ({}^t A_L(1/\rho A_L)u, u)_0.
\end{aligned}$$

En posant :

$$\begin{aligned}
C_{\#}^2 &= \left(\sum_{l=1}^L |a_l| \right)^{-1} \sup_i \left\{ \sum_{l=1}^L |a_l| \left(\frac{K_i}{2\rho_{i+l-1/2}} + \frac{K_i}{2\rho_{i-l+1/2}} \right) \right\} \\
&= \left(\sum_{l=1}^L |\beta_l| \right)^{-1} \sup_i \left\{ \sum_{l=1}^L |\beta_l| \left(\frac{K_i}{2\rho_{i+l-1/2}} + \frac{K_i}{2\rho_{i-l+1/2}} \right) \right\}
\end{aligned}$$

on obtient

$$({}^t B_L(K B_L)u, u)_0 \leq 4C_{\#}^2 \left(\sum_{l=1}^L |a_l| \right)^2 ({}^t A_L(1/\rho A_L)u, u)_0.$$

CHAPITRE 3. SCHÉMAS NUMÉRIQUES EN MILIEU HÉTÉROGÈNE

3.4.3 Annexe 3 : Solution Exacte avec une source Ricker

Par Transformation de Fourier en (x, t) on obtient :

$$\hat{u}(k, \omega) = \frac{\hat{f}(\omega)}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}$$

d'où

$$\hat{u}(x, \omega) = \frac{\hat{f}(\omega)}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ikx}}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} dk$$

Il faut donc calculer

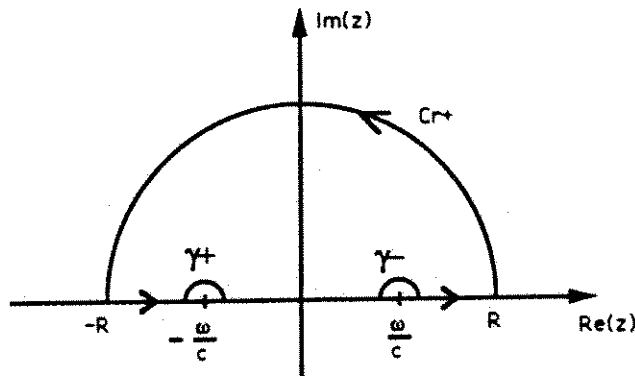
$$I(x, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ikx}}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} dk$$

Pour cela on utilise le théorème des résidus. On introduit la fonction

$$h : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$z \longmapsto h(z) = \frac{e^{ikx}}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}$$

Ainsi que le contour suivant



Le contour d'intégration $\Gamma_{R,\varepsilon}$

où

$$C_R^+(t) = R e^{it} \quad t \in [0, \pi]$$

$$\gamma_\varepsilon^-(t) = -\frac{\omega}{c} - \varepsilon e^{-it} \quad t \in [0, \pi]$$

$$\gamma_\varepsilon^+(t) = \frac{\omega}{c} - \varepsilon e^{-it} \quad t \in [0, \pi]$$

On suppose que $x > 0$ et on pose alors

$$A_{R,\varepsilon} = [-R, -\frac{\omega}{c} - \varepsilon] \cup \gamma_\varepsilon^- \cup [-\frac{\omega}{c} + \varepsilon, \frac{\omega}{c} - \varepsilon] \cup \gamma_\varepsilon^+ \cup [\frac{\omega}{c} + \varepsilon, R]$$

3.4. ANNEXES

et

$$\Gamma_{R,\varepsilon} = C_R^+ \cup A_{R,\varepsilon}$$

h étant holomorphe sur $\Gamma_{R,\varepsilon}$ on a

$$\int_{\Gamma_{R,\varepsilon}} h(z) dz = 0$$

de plus

$$\begin{aligned} \int_{C_R^+} h(z) dz &= \int_0^\pi \frac{iRe^{it} e^{i(xRe^{it})}}{(Re^{it} - \frac{\omega}{c})(Re^{it} + \frac{\omega}{c})} dt \\ &\leq \int_0^\pi \frac{Re^{-(Rx \sin t)}}{|Re^{it} - \frac{\omega}{c}| |Re^{it} + \frac{\omega}{c}|} dt \end{aligned}$$

Puisque $x > 0$ on a

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_R^+} h(z) dz = 0$$

Il reste maintenant à passer à la limite en ε .

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_\varepsilon^-} h(z) dz &= \int_0^\pi \frac{i\varepsilon e^{-it} e^{ix(-\frac{\omega}{c} - \varepsilon e^{-it})}}{(-\frac{\omega}{c} - \varepsilon e^{-it} - \frac{\omega}{c})(-\frac{\omega}{c} - \varepsilon e^{-it} + \frac{\omega}{c})} dt \\ &= i \int_0^\pi \frac{e^{ix(-\frac{\omega}{c} - \varepsilon e^{-it})}}{2\frac{\omega}{c} + \varepsilon e^{-it}} dt \end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned} \frac{e^{ix(-\frac{\omega}{c} - \varepsilon e^{-it})}}{2\frac{\omega}{c} + \varepsilon e^{-it}} &\leq \frac{1}{|2\frac{\omega}{c} + \varepsilon e^{-it}|} \\ &\leq \frac{1}{|2\frac{\omega}{c} + \varepsilon|} \\ &\leq \frac{c}{\omega} \end{aligned}$$

D'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_\varepsilon^-} h(z) dz = i\pi c \frac{e^{-i\omega \frac{x}{c}}}{2\omega}$$

CHAPITRE 3. SCHÉMAS NUMÉRIQUES EN MILIEU HÉTÉROGÈNE

De la même manière on montre que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_\varepsilon^+} h(z) dz = -i\pi c \frac{e^{i\omega \frac{x}{c}}}{2\omega}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} I(x, \omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(k) dk = -(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_\varepsilon^-} h(z) dz + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_\varepsilon^+} h(z) dz) \\ &= \frac{i\pi c}{2\omega} \left\{ e^{i\omega \frac{x}{c}} - e^{-i\omega \frac{x}{c}} \right\} \end{aligned}$$

Donc pour $x > 0$ on a

$$I(x, \omega) = \frac{\pi c}{2} \left\{ \frac{e^{-i\omega \frac{x}{c}}}{i\omega} - \frac{e^{i\omega \frac{x}{c}}}{i\omega} \right\}$$

En prenant comme contour d'intégration le symétrique par rapport à l'axe réel du contour $\Gamma_{R,\varepsilon}$, par le même raisonnement on obtient pour $x < 0$

$$I(x, \omega) = \frac{\pi c}{2} \left\{ \frac{e^{i\omega \frac{x}{c}}}{i\omega} - \frac{e^{-i\omega \frac{x}{c}}}{i\omega} \right\}$$

Ainsi on obtient

$$\hat{u}(x, \omega) = \frac{c \hat{f}(\omega)}{4 i\omega} \left(e^{-i\omega \frac{|x|}{c}} - e^{i\omega \frac{|x|}{c}} \right)$$

On introduit alors la primitive \tilde{F} de f

$$\begin{aligned} \tilde{F}(s) &= \int_{-\infty}^s f(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{\pi F} \frac{d}{dt} e^{(\pi F(t-1/F))^2} \end{aligned}$$

On peut écrire la solution $u(x, t)$ sous la forme :

$$u(x, t) = \frac{c}{4} \left(\tilde{F}\left(t - \frac{|x|}{c}\right) - \tilde{F}\left(t + \frac{|x|}{c}\right) \right)$$

3.4. ANNEXES

3.4.4 Annexe 4 : Démonstration du Lemme 2

Montrons les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} \left({}^t(B_x + B_y)(K(B_x + B_y))u, u \right)_{\infty} &\leq 16C_*^2 \left(L \sum_{l=1}^L a_l^2 \right) \left((B_x + B_y)u, u \right)_{\infty} \\ \left({}^t(B_x + B_y)(K(B_x + B_y))u, u \right)_{\infty} &\leq 16C_{\#}^2 \left(\sum_{l=1}^L |\beta_l| \right) \left((B_x + B_y)u, u \right)_{\infty} \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} C_*^2 &= \sup_{i,j} \left\{ \frac{1}{4L} \sum_{l=1}^L \left(\frac{K_{i,j}}{\rho_{i+l-1/2,j}} + \frac{K_{i,j}}{\rho_{i-l+1/2,j}} + \frac{K_{i,j}}{\rho_{i,j+l-1/2}} + \frac{K_{i,j}}{\rho_{i,j-l+1/2}} \right) \right\} \\ C_{\#}^2 &= \left(\sum_{l=1}^L |\beta_l| \right)^{-1} \sup_{i,j} \left\{ \frac{1}{4} \sum_{l=1}^L |\beta_l| \left(\frac{K_{i,j}}{\rho_{i+l-1/2,j}} + \frac{K_{i,j}}{\rho_{i-l+1/2,j}} + \frac{K_{i,j}}{\rho_{i,j+l-1/2}} + \frac{K_{i,j}}{\rho_{i,j-l+1/2}} \right) \right\} \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION :

On pose $S = B_x + B_y$ et soit $u \in L_{\infty}^2$

$$\begin{aligned} \left({}^tS(KS)u, u \right)_{\infty} &= \left({}^t(B_x + B_y)(K(B_x + B_y))u, u \right)_{\infty} \\ &= \left(K(B_x + B_y)u, (B_x + B_y)u \right)_{\infty} = h^2 \sum_{i,j} K_{i,j} [(B_x + B_y)u_{i,j}]^2 \\ &= h^2 \sum_{i,j} K_{i,j} \left(\sum_{l=1}^L a_l \frac{A_x u_{i+l-1/2,j}}{\rho_{i+l-1/2,j}} - \frac{A_x u_{i-l+1/2,j}}{\rho_{i-l+1/2,j}} + \frac{A_y u_{i,j+l-1/2}}{\rho_{i,j+l-1/2}} - \frac{A_y u_{i,j-l+1/2}}{\rho_{i,j-l+1/2}} \right)^2 \\ &\leq \left(\sum_{l=1}^L a_l^2 \right) h^2 \sum_{i,j} K_{i,j} \sum_{l=1}^L \left(\frac{A_x u_{i+l-1/2,j}}{\rho_{i+l-1/2,j}} - \frac{A_x u_{i-l+1/2,j}}{\rho_{i-l+1/2,j}} + \frac{A_y u_{i,j+l-1/2}}{\rho_{i,j+l-1/2}} - \frac{A_y u_{i,j-l+1/2}}{\rho_{i,j-l+1/2}} \right)^2 \\ &\leq 4 \left(\sum_{l=1}^L a_l^2 \right) h^2 \sum_{i,j} K_{i,j} \sum_{l=1}^L \left(\frac{A_x u_{i+l-1/2,j}}{\rho_{i+l-1/2,j}} \right)^2 + \left(\frac{A_x u_{i-l+1/2,j}}{\rho_{i-l+1/2,j}} \right)^2 + \\ &\quad + \left(\frac{A_y u_{i,j+l-1/2}}{\rho_{i,j+l-1/2}} \right)^2 + \left(\frac{A_y u_{i,j-l+1/2}}{\rho_{i,j-l+1/2}} \right)^2 \\ &\leq 4 \left(\sum_{l=1}^L a_l^2 \right) \sum_{l=1}^L h^2 \sum_{i,j} \frac{K_{i,j}}{\rho_{i+l-1/2,j}} \frac{A_x^2 u_{i+l-1/2,j}}{\rho_{i+l-1/2,j}} + \frac{K_{i,j}}{\rho_{i-l+1/2,j}} \frac{A_x^2 u_{i-l+1/2,j}}{\rho_{i-l+1/2,j}} \\ &\quad + \frac{K_{i,j}}{\rho_{i,j+l-1/2}} \frac{A_y^2 u_{i,j+l-1/2}}{\rho_{i,j+l-1/2}} + \frac{K_{i,j}}{\rho_{i,j-l+1/2}} \frac{A_y^2 u_{i,j-l+1/2}}{\rho_{i,j-l+1/2}} \end{aligned}$$

CHAPITRE 3. SCHÉMAS NUMÉRIQUES EN MILIEU HÉTÉROGÈNE

$$\begin{aligned} &\leq 4 \left(\sum_{l=1}^L a_l^2 \right) \sup_{i,j} \left(\frac{1}{4L} \left(\frac{K_{i,j}}{\rho_{i+l-1/2,j}} + \frac{K_{i,j}}{\rho_{i-l+1/2,j}} + \frac{K_{i,j}}{\rho_{i,j+l-1/2}} + \frac{K_{i,j}}{\rho_{i,j-l+1/2}} \right) \right) 4L ((B_x + B_y)u, u) \\ &\leq 16C_*^2 \left(L \sum_{l=1}^L a_l^2 \right) \left((B_x + B_y)u, u \right)_{\infty} \end{aligned}$$

Montrons maintenant la deuxième inégalité.

$$\begin{aligned} &\left(K(B_x + B_y)u, (B_x + B_y)u \right)_{\infty} = h^2 \sum_{i,j} K_{i,j} [(B_x + B_y)u_{i,j}]^2 \\ &= h^2 \sum_{i,j} K_{i,j} \left(\sum_{l=1}^L a_l \frac{A_x u_{i+l-1/2,j}}{\rho_{i+l-1/2,j}} - \frac{A_x u_{i-l+1/2,j}}{\rho_{i-l+1/2,j}} + \frac{A_y u_{i,j+l-1/2}}{\rho_{i,j+l-1/2}} - \frac{A_y u_{i,j-l+1/2}}{\rho_{i,j-l+1/2}} \right)^2 \\ &\leq 4 \left(\sum_{l=1}^L |a_l| \right) h^2 \sum_{i,j} K_{i,j} \sum_{l=1}^L \sum_{l=1}^L |a_l| \left(\frac{A_x u_{i+l-1/2,j}}{\rho_{i+l-1/2,j}} \right)^2 + \left(\frac{A_x u_{i-l+1/2,j}}{\rho_{i-l+1/2,j}} \right)^2 + \\ &\quad + \left(\frac{A_y u_{i,j+l-1/2}}{\rho_{i,j+l-1/2}} \right)^2 + \left(\frac{A_y u_{i,j-l+1/2}}{\rho_{i,j-l+1/2}} \right)^2 \\ &\leq 4 \left(\sum_{l=1}^L |a_l| \right) \sum_{l=1}^L h^2 \sum_{i,j} \frac{K_{i,j}}{\rho_{i+l-1/2,j}} \frac{A_x^2 u_{i+l-1/2,j}}{\rho_{i+l-1/2,j}} + \frac{K_{i,j}}{\rho_{i-l+1/2,j}} \frac{A_x^2 u_{i-l+1/2,j}}{\rho_{i-l+1/2,j}} \\ &\quad + \frac{K_{i,j}}{\rho_{i,j+l-1/2}} \frac{A_y u_{i,j+l-1/2}}{\rho_{i,j+l-1/2}} + \frac{K_{i,j}}{\rho_{i,j-l+1/2}} \frac{A_y u_{i,j-l+1/2}}{\rho_{i,j-l+1/2}} \\ &\leq 16 \left(\sum_{l=1}^L |a_l| \right) \sup_{i,j} \left(\sum_{l=1}^L \frac{|a_l|}{4} \left(\frac{K_{i,j}}{\rho_{i+l-1/2,j}} + \frac{K_{i,j}}{\rho_{i-l+1/2,j}} + \frac{K_{i,j}}{\rho_{i,j+l-1/2}} + \frac{K_{i,j}}{\rho_{i,j-l+1/2}} \right) \right) \\ &\quad \left((B_x + B_y)u, u \right) \\ &\leq 16C_{\#}^2 \left(\sum_{l=1}^L |a_l| \right)^2 \left((B_x + B_y)u, u \right)_{\infty} \end{aligned}$$

en posant

$$C_{\#}^2 = \left(\sum_{l=1}^L |\beta_l| \right)^{-1} \sup_{i,j} \left\{ \frac{1}{4} \sum_{l=1}^L |\beta_l| \left(\frac{K_{i,j}}{\rho_{i+l-1/2,j}} + \frac{K_{i,j}}{\rho_{i-l+1/2,j}} + \frac{K_{i,j}}{\rho_{i,j+l-1/2}} + \frac{K_{i,j}}{\rho_{i,j-l+1/2}} \right) \right\}$$

PARTIE III

**ESTIMATION D'ERREUR A POSTERIORI
POUR L'EQUATION DES ONDES**

Chapitre 4

Estimation d'Erreur A Posteriori pour l'Equation des Ondes Unidimensionnelle

L'étude du chapitre 2, ainsi que les règles déduites pour assurer une bonne précision du schéma numérique, sont basées sur une analyse a priori du comportement du schéma numérique. En particulier en milieu hétérogène, on ne garantit pas la précision des solutions numériques, et les choix de h et Δt ont une bonne part d'empirisme.

Afin de remédier à cet inconvénient, on déduit ici une borne de l'erreur entre la solution exacte u et la solution numérique u_h , en fonction de quantités calculables à partir de u_h . On peut alors véritablement quantifier la précision de la solution numérique.

L'étude qui suit est en milieu unidimensionnel. Le lemme fondamental de majoration d'erreur se généralise au cas bidimensionnel, par des techniques sophistiquées cf [Bab1], [Bab2], [Bab3].

4.1 Estimation pour le Problème Semi-discrétisé

Dans ce premier paragraphe nous allons obtenir une estimation d'erreur a posteriori entre la solution exacte et la solution semi-discrète. C'est à dire que nous allons obtenir une majoration de l'erreur en fonction de la solution semi-discrète. Pour cela on utilise un lemme fondamental de majoration sur l'espace d'approximation utilisé dû à Babuska et Rheinbolt (cf [Bab1], [Bab2]). Nous en déduisons une majoration a posteriori en norme L^2 .

Ensuite, par une hypothèse de régularité sur la source émettrice d'ondes, on déduit une estimation en norme H^1 .

4.1.1 Problème continu

Sur l'ouvert $\Omega =]0, L[$, on cherche la solution u du problème suivant:

$$\begin{cases} \frac{1}{K(x)} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \nabla \left(\frac{1}{\rho(x)} \nabla u \right) = f & x \in \Omega \\ u(x, 0) = 0 & \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0 \\ u(0, t) = 0 & u(L, t) = 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

On fait les hypothèses suivantes

$$\begin{aligned} K, \rho &\in L^2(\Omega) \\ 0 < K_m \leq K(x) \leq K_M < +\infty \\ 0 < \rho_m \leq \rho(x) \leq \rho_M < +\infty \end{aligned}$$

Nous allons donner une formulation variationnelle de ce problème. Pour cela on introduit les espaces suivants:

$$\begin{aligned} H &= L^2(\Omega) \\ V &= H_0^1(\Omega) \end{aligned}$$

On muni H du produit scalaire $(u, v) = \int 1/K u v dx$.
Soit alors la forme bilinéaire $a(.,.)$ sur $V \times V$ définie par :

$$\begin{aligned} a : V \times V &\longrightarrow R \\ (u, v) &\longmapsto a(u, v) = \int_{\Omega} \frac{1}{\rho} \nabla u \nabla v dx \end{aligned} \quad (4.2)$$

Il est clair, vu les hypothèses sur ρ , que $a(.,.)$ est bilinéaire, symétrique, continue et V-elliptique sur $V \times V$.

On suppose que $f \in C^2(0, T; H)$ et on est donc amené à chercher la solution du

4.1. PROBLÈME SEMI-DISCRÉTISÉ

problème variationnel suivant:

$$\begin{aligned}
 & f \in C^2(0, T; H) \quad u \in C^0(0, T; V) \cap C^2(0, T; H) \\
 & \begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial t^2}(u(t), \frac{v}{K}) + a(u(t), v) = (f(t), v) & \forall v \in V \\ u(x, 0) = 0 & \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0 \end{cases} \quad (4.3)
 \end{aligned}$$

$a(., .)$ étant bilinéaire symétrique et V -elliptique, il existe une base orthonormale de vecteurs propres (v_i) de H associée aux valeurs propres (μ_i) telle que $\forall v \in V \quad a(v, v_i) = \mu_i(v, v_i)$.

En décomposant $u(t)$ sur la base (v_i) on a que $u_j(t) = (u(t), v_j)$ vérifie

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2}(t) + \mu_j u_j(t) = f_j(t) \\ u_j(0) = 0 & \frac{\partial u_j}{\partial t}(0) = 0 \end{cases} \quad (4.4)$$

La solution de (4.4) est :

$$u_j(t) = \frac{1}{\sqrt{\mu_j}} \int_0^t \sin(\sqrt{\mu_j}(t - \tau)) f_j(\tau) d\tau \quad (4.5)$$

d'où $u(t)$ en sommant sur tous les u_j . Sous cette forme il est clair que

$$f \in C^2(0, T; H) \implies u \in C^2(0, T; H)$$

4.1.2 Problème semi-discret

On discrétise l'intervalle Ω à l'aide d'une subdivision régulière de pas h en $I + 2$ points

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_I < x_{I+1} = L$$

On définit alors les fonctions $(\varphi_i)_{i=0..I+1} \in P_1(\Omega)$ définie par:

$$\varphi_i(x_j) = \delta_{i,j}$$

On introduit alors le sous-espace V_h de V engendré par les $(\varphi_i)_{i=1..I}$ qui sont nulles en 0 et en L . Donc

$$V_h = [\varphi_i]_{i=1..I}$$

CHAPITRE 4. ESTIMATION D'ERREUR A POSTERIORI

On définit alors l'opérateur d'interpolation (cf [Rav]) par

$$\begin{aligned} \Pi_h : C^0(\Omega) &\longrightarrow V_h \\ v &\longmapsto \Pi_h v(x) = \sum_{i=1}^I v(x_i) \varphi_i(x) \end{aligned}$$

On cherche maintenant une solution du problème semi-discret suivant

$$\begin{aligned} f \in C^2(0, T; H) \quad u_h \in C^0(0, T; V_h) \cap C^2(0, T; H) \\ \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (u_h(t), \frac{v_h}{K}) + a(u_h(t), v_h) = (f(t), v_h) \quad \forall v_h \in V_h \\ u_h(x, 0) = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0 \end{array} \right. \end{aligned} \quad (4.6)$$

$a(., .)$ étant bilinéaire symétrique et V -elliptique, il existe une base orthonormale de vecteurs propres $(v_{i,h})$ de H associée aux valeurs propres $(\mu_{i,h})$ telle que $\forall v_h \in V_h \quad a(v_h, v_{i,h}) = \mu_{i,h}(v_h, v_{i,h})$.

En décomposant $u_h(t)$ sur la base $(v_{i,h})$ on a que $u_{j,h}(t) = (u(t), v_{j,h})$ vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u_{j,h}}{\partial t^2}(t) + \mu_{j,h} u_{j,h}(t) = f_{j,h}(t) \\ u_j(0) = 0 \quad \frac{\partial u_j}{\partial t}(0) = 0 \end{array} \right. \quad (4.7)$$

D'où

$$u_{j,h}(t) = \frac{1}{\sqrt{\mu_{j,h}}} \int_0^t \sin(\sqrt{\mu_{j,h}}(t - \tau)) f_{j,h}(\tau) d\tau \quad (4.8)$$

d'où $u_h(t)$ en sommant sur tous les $u_{j,h}$. Sous cette forme on voit également que

$$f \in C^2(0, T; H) \implies u_h \in C^2(0, T; H)$$

4.1.3 Erreur a posteriori semi-discrète

Estimation en norme L^2

On cherche une majoration de l'erreur $e(t) = u(t) - u_h(t)$. Pour cela on écrit l'équation vérifiée par $e(t)$. A t fixé, on introduit la forme linéaire $F(t)$ continue sur V définie par:

$$\begin{aligned} F(t) : V &\longrightarrow R \\ v &\longmapsto F(t)(v) = (f(t), v) - \left(\frac{\partial^2 u_h(t)}{\partial t^2}, \frac{v}{K} \right) - a(u_h(t), v) \end{aligned}$$

4.1. PROBLÈME SEMI-DISCRÉTISÉ

F est bien définie puisque $f \in C^2(0, T; H) \implies u_h \in C^2(0, T; H)$

D'après le lemme de Lax-Milgram on sait qu'il existe $z(t) \in V$ tel que

$$a(z(t), v) = F(t)(v) \quad (4.9)$$

c'est à dire en revenant à la définition de F

$$a(z(t), v) = \left(\frac{1}{K} \frac{\partial^2 e_h(t)}{\partial t^2}, v \right) - a(e(t), v) \quad \forall v \in V \quad (4.10)$$

$e(t)$ est donc solution du système suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial t^2}(e(t), \frac{v}{K}) + a(e(t), v) = a(z(t), v) & \forall v \in V \\ e(x, 0) = 0 & \frac{\partial e}{\partial t}(x, 0) = 0 \end{cases} \quad (4.11)$$

En utilisant la base orthonormale (v_i) on a que $e_j(t) = (e(t), v_j)$ est solution de

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 e_j}{\partial t^2}(t) + \mu_j e_j(t) = \mu_j z_j(t) \\ e_j(0) = 0 & \frac{\partial e_j}{\partial t}(0) = 0 \end{cases} \quad (4.12)$$

D'où

$$e_j(t) = \alpha_j \int_0^t \sin(\alpha_j(t - \tau)) z_j(\tau) d\tau \quad (4.13)$$

avec

$$\alpha_j = \sqrt{\mu_j}$$

Puisque

$$\|e(t)\|_{0,\Omega}^2 = \sum_{j=1}^{+\infty} |e_j(t)|^2$$

on a la majoration suivante

$$\|e(t)\|_{0,\Omega}^2 \leq t \int_0^t a(z(\tau), z(\tau)) d\tau \quad (4.14)$$

Par définition de z on a

$$\forall v \in V \quad a(z, v) = (f, v) - \frac{\partial^2}{\partial t^2}(u_h(t), \frac{v}{K}) - a(u_h(t), v) \quad (4.15)$$

CHAPITRE 4. ESTIMATION D'ERREUR A POSTERIORI

donc $\forall v_h \in V_h$ $a(z, v_h) = 0$ ainsi on peut écrire que

$$\begin{aligned} a(z, z) &= a(z, z - v_h) \\ &= a(Pz, z - v_h) \quad v_h / \Pi_h v_h = \Pi_h z \end{aligned}$$

où P est la projection orthogonal pour le produit scalaire induit par $a(.,.)$ sur le sous-espace

$$W = \{v \in V \cap C^0(\Omega) / \Pi_h v = 0\}$$

En effet

$$\begin{aligned} a(z, z) &= a(z, z - v_h) \\ &= a(Pz, z - v_h) + a(Pz^\perp, z - v_h) \end{aligned}$$

or $w = z - v_h \in W$ puisque $\Pi_h v_h = \Pi_h z$, donc $a(Pz^\perp, z - v_h) = 0$

Remarque

Afin de pouvoir définir $\Pi_h z$ il faut que $z \in C^0(\Omega)$ ceci est loisible puisque en 1D $H^1(\Omega) \subset C^0(\Omega)$ (cf [Lio-Mag]).

Ainsi en posant $\|z\|_E^2 = a(z, z)$ on a donc

$$\|z\|_E^2 \leq \|Pz\|_E \cdot \|z - v_h\|_E \quad (4.16)$$

Nous appliquons maintenant le lemme fondamental pour la majoration de l'erreur

Lemme 1

On suppose $1/\rho \in C^1(\Omega)$ alors il existe une constante $C = C(h)$ telle que

$$\inf_{\{v_h \in V_h / \Pi_h v_h = \Pi_h z\}} \|z - v_h\|_E \leq C(h) \|z\|_E \quad (4.17)$$

DÉMONSTRATION :

On définit l'espace

$$W = \{v \in V \cap C^0(\Omega) / \Pi_h v = 0\}$$

et on pose $w = z - v_h$. Puisque $\Pi_h v_h = \Pi_h z$ on a $w \in W$. Alors

$$\begin{aligned} a(z, z) &= a(w + v_h, w + v_h) \\ &= a(w, w) + a(v_h, v_h) + 2 a(w, v_h) \end{aligned}$$

4.1. PROBLÈME SEMI-DISCRÉTISÉ

Traitons le terme $a(w, v_h)$.

$$\begin{aligned} a(w, v_h) &= \int_{\Omega} \frac{1}{\rho} \nabla w \nabla v_h dx \\ &= \sum_{i=1}^{I-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{\rho} \nabla w \nabla v_h dx \\ &= \sum_{i=1}^{I-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{1}{\rho(x)} - \frac{1}{\rho_{i+1/2}} \right) \nabla w \nabla v_h dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{\rho_{i+1/2}} \nabla w \nabla v_h dx \end{aligned}$$

où

$$\rho_{i+1/2} = \rho((x_i + x_{i+1})/2)$$

On a supposé $1/\rho(x) \in C^1(\Omega)$ donc

$$\left| \frac{1}{\rho(x)} - \frac{1}{\rho_{i+1/2}} \right| \leq Ch$$

d'où

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{1}{\rho(x)} - \frac{1}{\rho_{i+1/2}} \right) \nabla w \nabla v_h dx \leq Ch \int_{x_i}^{x_{i+1}} \nabla w \nabla v_h dx$$

Traitons maintenant la deuxième intégrale on a

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{\rho_{i+1/2}} \nabla w \nabla v_h dx = - \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{\rho_{i+1/2}} w \Delta v_h dx + \left[\frac{1}{\rho_{i+1/2}} \frac{\partial v_h}{\partial x} w \right]_{x_i}^{x_{i+1}}$$

Puisque $v_h|_{x_i, x_{i+1}} \in P_1([x_i, x_{i+1}])$ on a $\Delta v_h = 0$. De plus on a $\Pi_h w = 0$ donc $\forall j = 1..I-1 \quad w(x_j) = 0$ ce qui entraîne

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{\rho_{i+1/2}} \nabla w \nabla v_h dx = 0$$

Finalement on a

$$\begin{aligned} a(w, v_h) &\leq Ch |w|_{1,\Omega} |v_h|_{1,\Omega} \\ &\leq Ch \|w\|_E \|v_h\|_E \\ &\leq Ch \{ \|w\|_E^2 + \|v_h\|_E^2 \} \end{aligned}$$

En revenant à $\|z\|_E^2$ on peut écrire

$$\|z\|_E^2 \leq (1 - Ch) \{ \|w\|_E^2 + \|v_h\|_E^2 \}$$

d'où la majoration annoncée

$$\|z - v_h\|_E^2 \leq (1 + O(h)) \|z\|_E^2 \quad \square$$

CHAPITRE 4. ESTIMATION D'ERREUR A POSTERIORI

En revenant à la majoration précédente et en appliquant le lemme, on obtient

$$\|Pz\|_E \leq \|z\|_E \leq C(h) \|Pz\|_E \quad (4.18)$$

ainsi en connaissant une estimation de $\|Pz\|_E$ on aura une estimation de $a(z, z)$ et donc de l'erreur. Par définition de Pz on peut écrire

$$a(Pz, w) = a(z, w) \quad \forall w \in W$$

Donc

$$a(Pz, w) = F(w) \quad \forall w \in W$$

En particulier pour tout $i = 1..I - 1 \forall \varphi \in D(]x_i, x_{i+1}[)$ on a au sens des distributions sur $]x_i, x_{i+1}[$

$$\begin{cases} -\nabla(\frac{1}{\rho}\nabla Pz) = f(t) + \nabla(\frac{1}{\rho}\nabla u_h) - \frac{1}{K} \frac{\partial^2 u_h}{\partial t^2} & x \in]x_i, x_{i+1}[\\ Pz(x_i) = 0 & Pz(x_{i+1}) = 0 \end{cases} \quad (4.19)$$

En supposant un peu de régularité sur les coefficients, on peut écrire l'équation ci-dessus comme une équation différentielle ordinaire. On suppose donc que

$$\begin{aligned} f(t) &\in C^0(]x_i, x_{i+1}[) \\ 1/K &\in C^0(]x_i, x_{i+1}[) \\ 1/\rho &\in C^1(]x_i, x_{i+1}[) \quad \forall i = 1..I - 1 \end{aligned} \quad (4.20)$$

et on écrit l'équation ci-dessus sous la forme

$$\begin{aligned} A(Pz) &= r_i & x \in]x_i, x_{i+1}[\\ Pz(x_i) &= 0 & Pz(x_{i+1}) = 0 \end{aligned} \quad (4.21)$$

avec

$$Av = -\nabla(\frac{1}{\rho}\nabla v)$$

$$r_i(x, t) = f(x, t) - Au_h(x, t) - \frac{1}{K} \frac{\partial^2 u_h}{\partial t^2}(x, t) \quad x \in]x_i, x_{i+1}[$$

On en déduit facilement que

$$\|Pz\|_{0,]x_i, x_{i+1}[} \leq \lambda_{i, \min}^{-1} \|r_i\|_{0,]x_i, x_{i+1}[} \quad (4.22)$$

où $\lambda_{i, \min}$ est la plus petite valeur propre de A sur $]x_i, x_{i+1}[$. Ainsi

$$\begin{aligned} a(Pz, Pz) &= \sum_{i=1}^{I-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} Pz r_i dx \\ &\leq \sum_{i=1}^{I-1} \lambda_{i, \min}^{-1} \|r_i\|_{0,]x_i, x_{i+1}[}^2 \end{aligned} \quad (4.23)$$

4.1. PROBLÈME SEMI-DISCRÉTISÉ

On obtient finalement la majoration d'erreur a posteriori donnée par la proposition suivante

Proposition 4.1

Soit $u(t)$ la solution du problème continu et $u_h(t)$ la solution du problème semi-discret au temps t . Alors on a la majoration d'erreur

$$\|u(t) - u_h(t)\|_{0,\Omega}^2 \leq C^2(h)t \sum_{i=1}^{I-1} \lambda_{i,\min}^{-1} \int_0^t \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} |r_i(x, \tau)|^2 dx \right) d\tau \quad (4.24)$$

avec

$$r_i(x, t) = f(x, t) - Au_h(x, t) - \frac{1}{K} \frac{\partial^2 u_h}{\partial t^2}(x, t) \quad x \in]x_i, x_{i+1}[$$

Remarque

On sait que la plus petite valeur propre de l'opérateur A avec conditions aux limites nulles sur l'intervalle $]x_i, x_{i+1}[$ est minorée par la plus petite valeur propre de l'opérateur $B = -1/\rho_M \Delta$ sur le même intervalle. Ainsi

$$\lambda_{i,\min}^{-1} \leq \frac{h^2}{\rho_M \pi^2}$$

Dans le cas d'un milieu homogène où on choisit $K(x) = C_0$ et $\rho = 1$ on a

$$A = -\Delta \quad C(h) = 1 \quad \lambda_{i,\min}^{-1} = \frac{h^2}{\pi^2}$$

On a de plus $r_i = o(1)$ d'où

$$\sum_{i=1}^{I-1} \lambda_{i,\min}^{-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |r_i(x, \tau)|^2 dx = o(h^2)$$

On a alors l'ordre de convergence suivant

$$\|u(t) - u_h(t)\|_{0,\Omega} = o(h) \quad (4.25)$$

Estimation en norme H^1

Il est possible d'améliorer ce résultat par une hypothèse de régularité sur la fonction source f . En effet

$$f \in C^3(0, T; H) \implies u_h \in C^3(0, T; H)$$

CHAPITRE 4. ESTIMATION D'ERREUR A POSTERIORI

donc on peut définir

$$\begin{aligned} F'(t) : V &\longrightarrow R \\ v &\longmapsto F'(t)(v) = \left(\frac{\partial f(t)}{\partial t}, v\right) - \left(\frac{1}{K} \frac{\partial^3 u_h(t)}{\partial t^3}, v\right) - a\left(\frac{\partial u_h(t)}{\partial t}, v\right) \end{aligned} \quad (4.26)$$

et puisque $z(t)$ est solution de

$$a(z(t), v) = F(t)(v) \quad (4.27)$$

$z'(t) = \frac{\partial z(t)}{\partial t}$ est solution de

$$a(z'(t), v) = F'(t)(v) \quad (4.28)$$

Revenons maintenant à l'expression de e_j

$$e_j(t) = \alpha_j \int_0^t \sin(\alpha_j(t - \tau)) z_j(\tau) d\tau$$

avec

$$\alpha_j = \sqrt{\mu_j}$$

En intégrant par parties on a

$$e_j(t) = [-z_j(\tau) \cos(\alpha_j(t - \tau))]_0^t + \int_0^t \cos(\alpha_j(t - \tau)) z_j'(\tau) d\tau \quad (4.29)$$

d'où

$$e_j^2(t) \leq 3 \left(z_j^2(0) + z_j^2(t) + t \int_0^t (z_j')^2(\tau) d\tau \right) \quad (4.30)$$

on en déduit après multiplication par la $j^{\text{ième}}$ valeur propre μ_j

$$a(e(t), e(t)) \leq 3 \left(a(z(0), z(0)) + a(z(t), z(t)) + t \int_0^t a(z_j'(\tau), z_j'(\tau)) d\tau \right) \quad (4.31)$$

Alors puisque

$$a(z'(t), v_h) = 0 \quad \forall v_h \in V_h$$

on peut appliquer le lemme 1 ce qui donne

$$a(e(t), e(t)) \leq 3 \left(a(Pz(0), Pz(0)) + a(Pz(t), Pz(t)) + t \int_0^t a(Pz_j'(\tau), Pz_j'(\tau)) d\tau \right) \quad (4.32)$$

Comme précédemment on déduit que

$$\begin{cases} a(Pz(t), Pz(t)) \leq \sum_{i=1}^{I-1} \lambda_{i,\min}^{-1} \|r_i(t)\|_{0,]x_i, x_{i+1}[}^2 \\ a(Pz'(t), Pz'(t)) \leq \sum_{i=1}^{I-1} \lambda_{i,\min}^{-1} \|r_i'(t)\|_{0,]x_i, x_{i+1}[}^2 \end{cases} \quad (4.33)$$

4.1. PROBLÈME SEMI-DISCRÉTISÉ

avec

$$\begin{cases} r_i(x, t) = f(x, t) - Au_h(x, t) - \frac{1}{K} \frac{\partial^2 u_h}{\partial t^2}(x, t) & x \in]x_i, x_{i+1}[\\ r'_i(x, t) = \frac{\partial r_j}{\partial t}(x, t) \end{cases} \quad (4.34)$$

On peut donc énoncer la proposition suivante

Proposition 4.2

Soit $u(t)$ la solution du problème continu et $u_h(t)$ la solution du problème semi-discret au temps t . Sous l'hypothèse $f \in C^3(0, T; H)$ on a la majoration d'erreur

$$\begin{aligned} \|u(t) - u_h(t)\|_{1, \Omega}^2 \leq & 3\rho_M C^2(h) \left\{ \sum_{i=1}^{I-1} \lambda_{i, \min}^{-1} \left(\|r_i(0)\|_{0,]x_i, x_{i+1}[}^2 + \|r_i(t)\|_{0,]x_i, x_{i+1}[}^2 \right) \right. \\ & \left. + \int_0^t \|r'_i(\tau)\|_{0,]x_i, x_{i+1}[}^2 d\tau \right\} \end{aligned} \quad (4.35)$$

avec

$$\begin{cases} r_i(x, t) = f(x, t) - Au_h(x, t) - \frac{1}{K} \frac{\partial^2 u_h}{\partial t^2}(x, t) & x \in]x_i, x_{i+1}[\\ r'_i(x, t) = \frac{\partial r_i}{\partial t}(x, t) \end{cases} \quad (4.36)$$

Remarque

Dans le cas d'un milieu homogène où on choisit $K(x) = K_0$ et $\rho = 1$ on a

$$A = -\Delta \quad C(h) = 1 \quad \lambda_{i, \min}^{-1} = \frac{h^2}{\pi^2}$$

On a de plus $r_i = o(1)$ d'où

$$\sum_{i=1}^{I-1} \lambda_{i, \min}^{-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |r_i(x, \tau)|^2 dx = o(h^2)$$

On a alors

$$\|u(t) - u_h(t)\|_{1, \Omega} = o(h) \quad (4.37)$$

CHAPITRE 4. ESTIMATION D'ERREUR A POSTERIORI

On peut comparer ce résultat à l'estimation d'erreur a-priori. On a (cf [Ra-Tho])

$$\|u(t) - u_h(t)\|_{1,\Omega} \leq C h \left\{ \|u(t)\|_{2,\Omega} + \left\| \frac{du(t)}{dt} \right\|_{2,\Omega} + \int_0^t \left\| \frac{d^2u(s)}{dt^2} \right\|_{2,\Omega} ds \right\} \quad (4.38)$$

4.2. PROBLÈME TOTALEMENT DISCRÉTISÉ

4.2 Problème Totalement Discrétisé

Lorsque le problème est totalement discrétisé, on cherche une estimation de l'erreur totale de discrétisation

$$\|u(t^n) - u_h^n\|$$

En décomposant cette erreur en la somme de l'erreur en espace plus l'erreur en temps il ne reste plus qu'à estimer l'erreur en temps

$$\|u_h(t^n) - u_h^n\|$$

On va alors définir un interpolé \tilde{u} de la suite $(u_h^n)_{n=1..N}$. On obtiendra alors une estimation a posteriori de

$$\|u_h(t^n) - \tilde{u}(t^n)\|$$

et ensuite une estimation de

$$\|u(t^n) - \tilde{u}(t^n)\|$$

4.2.1 Cas d'une valeur propre

Dans la suite nous nous ramènerons au cas du système suivant :

$$\begin{cases} \frac{d^2 u}{dt^2}(t) + \omega^2 u(t) = f(t) \\ u(0) = \frac{du}{dt}(0) = 0 \end{cases} \quad (4.39)$$

On intègre de façon discrète en utilisant le schéma de Newmark

$$\begin{cases} u^{n+1} = u^n + \Delta t \dot{u}^n + \Delta t^2 \left(\left(\frac{1}{2} - \theta \right) \ddot{u}^n + \theta \ddot{u}^{n+1} \right) \\ \dot{u}^{n+1} = \dot{u}^n + \Delta t^2 \left((1 - \delta) \ddot{u}^n + \delta \ddot{u}^{n+1} \right) \\ \ddot{u} + \omega^2 u^n = f^n = f(t^n) \end{cases} \quad (4.40)$$

Ceci correspond au schéma

$$\begin{cases} \frac{u^{n+1} - 2u^n + u^{n-1}}{\Delta t^2} + \omega^2 \left(\theta u^{n+1} + \left(\frac{1}{2} + \delta - 2\theta \right) u^n + \left(\frac{1}{2} - \delta + \theta \right) u^{n-1} \right) \\ = \theta f^{n+1} + \left(\frac{1}{2} + \delta - 2\theta \right) f^n + \left(\frac{1}{2} - \delta + \theta \right) f^{n-1} \end{cases} \quad (4.41)$$

Pour le schéma explicite on a $\delta = 1/2$ et $\theta = 0$, c'est à dire que l'on a

$$\frac{u^{n+1} - 2u^n + u^{n-1}}{\Delta t^2} + \omega^2 u^n = f^n \quad (4.42)$$

On définit alors l'interpolé \tilde{u} de la suite $(u^n)_{n=1..N}$ qui vérifie

$$\begin{cases} \tilde{u}(t^n) = u^n & \tilde{u}(t^{n+1}) = u^{n+1} \\ \frac{d\tilde{u}}{dt}(t^n) = \dot{u}^n & \frac{d\tilde{u}}{dt}(t^{n+1}) = \dot{u}^{n+1} \end{cases} \quad (4.43)$$

Un calcul simple montre que pour $t \in [t^n, t^{n+1}]$ on a

$$\begin{aligned} \tilde{u}(t) &= (1 - \alpha)u^n + \alpha u^{n+1} + \frac{\Delta t^2}{4}(\alpha - 3\alpha^2 + 2\alpha^3)(\ddot{u}^{n+1} - \ddot{u}^n) \\ &\quad - \frac{\Delta t^2}{4}(\alpha - \alpha^2)(\ddot{u}^{n+1} + \ddot{u}^n) \end{aligned} \quad (4.44)$$

$$\alpha = \alpha(t) = \frac{t - t^n}{\Delta t}$$

4.2. PROBLÈME TOTALEMENT DISCRÉTISÉ

d'où pour $t \in [t^n, t^{n+1}]$ on a

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \tilde{u}}{dt^2}(t) + \omega^2 \tilde{u}(t) &= 3(\alpha - 1/2)(\ddot{u}^{n+1} - \ddot{u}^n) + \frac{1}{2}(\ddot{u}^{n+1} + \ddot{u}^n) \\ &+ \omega^2 \left[(1 - \alpha)u^n + \alpha u^{n+1} + \frac{\Delta t^2}{4}(\alpha - 3\alpha^2 + 2\alpha^3)(\ddot{u}^{n+1} - \ddot{u}^n) \right. \\ &\left. - \frac{\Delta t^2}{4}(\alpha - \alpha^2)(\ddot{u}^{n+1} + \ddot{u}^n) \right] = \mu^n(t) \end{aligned} \quad (4.45)$$

On peut réécrire $\mu^n(t)$ sous la forme

$$\begin{aligned} \mu^n(t) &= 3(\alpha - 1/2)(\ddot{u}^{n+1} - \ddot{u}^n) + \frac{1}{2}(f^{n+1} + f^n) + \omega^2 [(\alpha - 1/2)(u^{n+1} - u^n)] \\ &+ \frac{\omega^2 \Delta t^2}{4} [(\alpha - 3\alpha^2 + 2\alpha^3)(\ddot{u}^{n+1} - \ddot{u}^n) + (\alpha - \alpha^2)(\ddot{u}^{n+1} + \ddot{u}^n)] \end{aligned} \quad (4.46)$$

On pose alors

$$\varepsilon^n(t) = \mu^n(t) - \frac{1}{2}(f^{n+1} + f^n) \quad (4.47)$$

Moyennant quelques notations, nous sommes maintenant en mesure d'écrire l'équation vérifiée par l'erreur entre u et \tilde{u} . On note donc

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) &= \sum_{n=1}^N \varepsilon^n(t) 1_{[t^{n-1}, t^n]} \\ \tilde{f}(t) &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N (f^{n+1} + f^n) 1_{[t^{n-1}, t^n]} \end{aligned} \quad (4.48)$$

On peut alors écrire que $e(t) = \tilde{u}(t) - u(t)$ vérifie

$$\begin{cases} \frac{d^2 e}{dt^2}(t) + \omega^2 e(t) = \varepsilon(t) + (\tilde{f} - f)(t) \\ e(0) = \frac{de}{dt}(0) = 0 \end{cases} \quad (4.49)$$

d'où

$$e(t) = \frac{1}{\omega} \int_0^t \sin(\omega(t - \tau)) \varepsilon(\tau) d\tau + \frac{1}{\omega} \int_0^t \sin(\omega(t - \tau)) (\tilde{f} - f)(\tau) d\tau \quad (4.50)$$

CHAPITRE 4. ESTIMATION D'ERREUR A POSTERIORI

C'est à partir de cette expression que l'on va obtenir des estimations a posteriori. Traitons tout d'abord la première intégrale. On pose

$$I_1(t) = \int_0^t \sin(\omega(t - \tau))\varepsilon(\tau)d\tau \quad (4.51)$$

$$|I_1(t)| \leq \int_0^t |\varepsilon(\tau)|d\tau \quad (4.52)$$

On décompose alors $\varepsilon^k(\tau)$ sous la forme

$$\begin{aligned} \varepsilon^k(\tau) &= m^k(\tau) + p^k(\tau) \\ m^k(\tau) &= 3(\alpha - 1/2)(\ddot{u}^{k+1} - \ddot{u}^k) + \omega^2 \left[(\alpha - 1/2)(u^{k+1} - u^k) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\omega^2 \Delta t^2}{4} (\alpha - 3\alpha^2 + 2\alpha^3)(\ddot{u}^{k+1} - \ddot{u}^k) \right] \\ p^k(\tau) &= \frac{\omega^2 \Delta t^2}{4} (\ddot{u}^{k+1} + \ddot{u}^k)(\alpha - \alpha^2) \end{aligned} \quad (4.53)$$

Alors

$$\begin{aligned} \int_0^t |\varepsilon(\tau)|d\tau &\leq \sum_{n=1}^N \int_{t^{n-1}}^{t^n} |\varepsilon^k(\tau)|d\tau \\ &\leq \sum_{n=1}^N \left(\int_{t^{n-1}}^{t^n} |m^{n-1}(\tau)|d\tau + \int_{t^{n-1}}^{t^n} |p^{n-1}(\tau)|d\tau \right) \end{aligned} \quad (4.54)$$

Il est facile de voir que

$$\int_{t^{n-1}}^{t^n} |m^{n-1}(\tau)|d\tau \leq \frac{\Delta t}{4} \left(3|\ddot{u}^n - \ddot{u}^{n-1}| + \omega^2 |u^n - u^{n-1}| + \frac{\omega^2 \Delta t^2}{16} |\ddot{u}^n - \ddot{u}^{n-1}| \right) \quad (4.55)$$

et

$$\int_{t^{n-1}}^{t^n} |p^{n-1}(\tau)|d\tau \leq \frac{\Delta t \omega^2 \Delta t^2}{4 \cdot 6} |\ddot{u}^n + \ddot{u}^{n-1}| \quad (4.56)$$

Ainsi

$$\begin{aligned} |I_1(t)| &\leq \frac{\Delta t}{4} \left[\sum_{n=1}^N 3|\ddot{u}^n - \ddot{u}^{n-1}| + \omega^2 |u^n - u^{n-1}| + \frac{\omega^2 \Delta t^2}{16} |\ddot{u}^n - \ddot{u}^{n-1}| \right. \\ &\quad \left. + \frac{\omega^2 \Delta t^2}{6} |\ddot{u}^n + \ddot{u}^{n-1}| \right] \end{aligned} \quad (4.57)$$

4.2. PROBLÈME TOTALEMENT DISCRÉTISÉ

Il reste maintenant à majorer la seconde intégrale

$$I_2(t) = \int_0^t \sin(\omega(t-\tau)) \tilde{f}(\tau) - f(\tau) d\tau \quad (4.58)$$

d'où

$$\begin{aligned} |I_2(t)| &= \int_0^t |\tilde{f} - f|(\tau) d\tau \\ \int_0^t |\tilde{f} - f|(s) ds &\leq \sum_{n=1}^N \int_{t^{n-1}}^{t^n} |\tilde{f} - f|(s) ds \\ &\leq T \frac{\Delta t}{2} (\|f'\|_\infty + \Delta t \|f''\|_\infty) \end{aligned} \quad (4.59)$$

d'où le résultat principal de cette partie

Proposition 4.3

Soit $u(t)$ la solution du problème (4.1) et $\tilde{u}(t)$ l'interpolé de la suite $(u^n)_{n=1..N}$ solution de (4.42). En supposant que $\forall k = 1..N \quad f^k = f(t^k)$, pour $t \in [t^{N-1}, t^N]$ on a la majoration d'erreur

$$\begin{aligned} |e(t)| &\leq T \frac{\Delta t}{2\omega} (\|f'\|_\infty + \Delta t \|f''\|_\infty) + \frac{3\Delta t}{4\omega} \sum_{n=1}^N \left| \frac{\ddot{u}^n - \ddot{u}^{n-1}}{\Delta t} \right| \Delta t \\ &\quad + \Delta t \omega \left(\sum_{n=1}^N \left| \frac{u^n - u^{n-1}}{\Delta t} \right| \Delta t + \frac{\Delta t^2}{16} \left| \frac{\ddot{u}^n - \ddot{u}^{n-1}}{\Delta t} \right| \Delta t + \frac{\Delta t^2}{6} |\ddot{u}^n + \ddot{u}^{n-1}| \right) \end{aligned} \quad (4.60)$$

4.2.2 Estimation a posteriori de l'erreur en temps

Estimation en norme L^2

Revenons maintenant au problème qui préoccupe. On sait que $u_h(t^n)$ est solution de (P_0)

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial t^2}(u_h(t^n), \frac{v_h}{K}) + a(u_h(t^n), v_h) = (f(t^n), v_h) & \forall v_h \in V_h \\ u_h(x, 0) = 0 & \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0 \end{cases} \quad (4.61)$$

CHAPITRE 4. ESTIMATION D'ERREUR A POSTERIORI

et que u_h^n est solution de (P_1)

$$\begin{cases} \left(\frac{u_h^{n+1} - 2u_h^n + u_h^{n-1}}{\Delta t^2}, \frac{v_h}{K} \right) + a(u_h^n, v_h) = (f^n, v_h) & \forall v_h \in V_h \\ u_h^0(x) = 0 & u_h^1(x) = 0 \end{cases} \quad (4.62)$$

Puisque $a(.,.)$ est une forme bilinéaire symétrique V-elliptique, il existe une base de V_h , $(w_i)_{i=1..I}$ orthonormale dans $L^2(\Omega)$ associée aux valeurs propres $(\lambda_i)_{i=1..I}$, telle que

$$\begin{aligned} \forall v_h \in V_h \quad a(v_h, w_i) &= \lambda_i (v_h, w_i)_{0,\Omega} & 1 \leq i \leq I \\ \|w_i\|_{0,\Omega} &= 1 & 1 \leq i \leq I \end{aligned} \quad (4.63)$$

En décomposant u_h et u_h^n sur cette base on a

$$\begin{aligned} u_h &= \sum_{i=1}^I u_i w_i & u_h &= (u_h, w_i)_{0,\Omega} & \|u_h\|_{0,\Omega}^2 &= \sum_{i=1}^I |u_i|^2 \\ u_h^n &= \sum_{i=1}^I u_i^n w_i & u_h^n &= (u_h^n, w_i)_{0,\Omega} & \|u_h^n\|_{0,\Omega}^2 &= \sum_{i=1}^I |u_i^n|^2 \end{aligned} \quad (4.64)$$

Alors en choisissant $v_h = w_j$ dans (P_0) on trouve que u_h est solution de $(P_{0,i})$

$$\begin{cases} \frac{d^2 u_i}{dt^2}(t) \|w_i\|_K^2 + \lambda_i u_i(t) = f_i(t) & i = 1..I \\ u_i(0) = 0 & \frac{du_i}{dt}(0) = 0 \end{cases} \quad (4.65)$$

et u_h^n est solution de $(P_{1,i})$

$$\begin{cases} \frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{\Delta t^2} \|w_i\|_K^2 + \lambda_i u_i^n = f_i^n & i = 1..I \\ u_i^0(0) = 0 & u_i^1(0) = 0 \end{cases} \quad (4.66)$$

On pose alors $\omega_i^2 = \lambda_i / \|w_i\|_K^2$ et à partir de la suite $(u_i^n)_{n=1..N}$ on construit l'interpolé $\tilde{u}_i(t)$ défini plus haut. Il est facile de voir alors que l'erreur $e_i(t) = \tilde{u}_i(t) - u_i(t)$ vérifie

$$\begin{cases} \frac{d^2 e_i}{dt^2}(t) + \omega_i^2 e_i(t) = \varepsilon_i(t) + \frac{1}{\|w_i\|_K^2} (\tilde{f}_i - f_i)(t) \\ e_i(0) = \frac{de_i}{dt}(0) = 0 \end{cases} \quad (4.67)$$

4.2. PROBLÈME TOTALEMENT DISCRÉTISÉ

En appliquant la proposition (4.3) on obtient

$$\begin{aligned}
 |e_i(t)| \leq & T \frac{\Delta t}{2\omega_i \|w_i\|_K^2} \left(\|f_i'\|_\infty + \Delta t \|f_i''\|_\infty \right) + \frac{3\Delta t}{4\omega_i} \sum_{n=1}^N \left| \frac{\ddot{u}_i^n - \ddot{u}_i^{n-1}}{\Delta t} \right| \Delta t \\
 & + \Delta t \omega_i \left(\sum_{n=1}^N \left| \frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\Delta t} \right| \Delta t + \frac{\Delta t^2}{16} \left| \frac{\ddot{u}_i^n - \ddot{u}_i^{n-1}}{\Delta t} \right| \Delta t + \frac{\Delta t^2}{6} |\ddot{u}_i^n + \ddot{u}_i^{n-1}| \right)
 \end{aligned} \tag{4.68}$$

A partir de cette estimation de $e_i(t)$ on peut déduire une estimation de $e(t) = \tilde{u}_h(t) - u_h(t)$ en norme $L^2(\Omega)$. En effet on a

$$\|e(t)\|_{0,\Omega}^2 = \sum_{i=1}^{+\infty} |e_i(t)|^2 \tag{4.69}$$

or on sait que

$$\omega_i^2 = \lambda_i / \|w_i\|_K^2 \tag{4.70}$$

donc puisque la suite des valeurs propres λ_i est croissante on la minoration suivante

$$\frac{1}{\omega_i} \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda_1 K_m}} \tag{4.71}$$

donc

$$\begin{aligned}
 |e_i(t)| \leq & \frac{T\Delta t}{2\sqrt{\lambda_1 K_m}} \left(\|f_i'\|_\infty + \Delta t \|f_i''\|_\infty \right) + \frac{3\Delta t \sqrt{K_M}}{4\sqrt{\lambda_1}} \sum_{n=1}^N \left| \frac{\ddot{u}_i^n - \ddot{u}_i^{n-1}}{\Delta t} \right| \Delta t \\
 & + \Delta t \omega_i \left(\sum_{n=1}^N \left| \frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\Delta t} \right| \Delta t + \frac{\Delta t^2}{16} \left| \frac{\ddot{u}_i^n - \ddot{u}_i^{n-1}}{\Delta t} \right| \Delta t + \frac{\Delta t^2}{6} |\ddot{u}_i^n + \ddot{u}_i^{n-1}| \right)
 \end{aligned} \tag{4.72}$$

d'où

$$\begin{aligned}
 |e_i(t)|^2 \leq & \Delta t^2 \left[\frac{3T^2}{2\lambda_1 K_m} \|f_i'\|_\infty^2 + \Delta t \|f_i''\|_\infty^2 + \frac{27K_M}{16\lambda_1} \left(\sum_{n=1}^N \left| \frac{\ddot{u}_i^n - \ddot{u}_i^{n-1}}{\Delta t} \right| \Delta t \right)^2 \right. \\
 & \left. + 3\omega_i^2 \left(\sum_{n=1}^N \left| \frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\Delta t} \right| \Delta t + \frac{\Delta t^2}{16} \left| \frac{\ddot{u}_i^n - \ddot{u}_i^{n-1}}{\Delta t} \right| \Delta t + \frac{\Delta t^2}{6} |\ddot{u}_i^n + \ddot{u}_i^{n-1}| \right)^2 \right]
 \end{aligned} \tag{4.73}$$

CHAPITRE 4. ESTIMATION D'ERREUR A POSTERIORI

Ainsi on peut énoncer le résultat principal de cette partie

Proposition 4.4

Soit $u_h(t)$ la solution du problème (4.61) et $\tilde{u}(t)$ l'interpolé de la suite $(u_h^n)_{n=1..N}$ solution de (4.62). En supposant que $\forall k = 1..N \quad f^k = f(t^k)$, pour $t \in [t^{N-1}, t^N]$ on a la majoration d'erreur

$$\begin{aligned}
 \|e(t)\|_{0,\Omega}^2 &\leq \Delta t^2 \left[\frac{3T^2}{2\lambda_1 K_m} (\|f'\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \Delta t \|f''\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2) \right. \\
 &+ \frac{27K_M}{16\lambda_1} \left\| \sum_{n=1}^N \frac{\ddot{u}^n - \ddot{u}^{n-1}}{\Delta t} \Delta t \right\|_{0,\Omega}^2 + 9K_M \left\| \sum_{n=1}^N \left(\frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\Delta t} \right) \Delta t \right\|_E^2 \\
 &+ \left. \frac{9K_M \Delta t^2}{16} \left\| \sum_{n=1}^N \left(\frac{\ddot{u}^n - \ddot{u}^{n-1}}{\Delta t} \right) \Delta t \right\|_E^2 + \frac{9K_M \Delta t^2}{6} \left\| \sum_{n=1}^N \ddot{u}^n + \ddot{u}^{n-1} \right\|_E^2 \right] \quad (4.74)
 \end{aligned}$$

Remarque

Dans le cas d'un milieu homogène où on choisit $K(x) = 1$ et $\rho = 1$ on a

$$A = -\Delta \quad \lambda_1 = \frac{\pi^2}{L^2}$$

ainsi que l'estimation d'erreur

$$\begin{aligned}
 \|e(t)\|_{0,\Omega}^2 &\leq \Delta t^2 \left[\frac{3T^2 L^2}{2\pi^2} (\|f'\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \Delta t \|f''\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2) \right. \\
 &+ \frac{27L^2}{16\pi^2} \left\| \sum_{n=1}^N \frac{\ddot{u}^n - \ddot{u}^{n-1}}{\Delta t} \Delta t \right\|_{0,\Omega}^2 + 9 \left\| \sum_{n=1}^N \left(\frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\Delta t} \right) \Delta t \right\|_E^2 \quad (4.75) \\
 &+ \left. \frac{9\Delta t^2}{16} \left\| \sum_{n=1}^N \left(\frac{\ddot{u}^n - \ddot{u}^{n-1}}{\Delta t} \right) \Delta t \right\|_E^2 + \frac{9\Delta t^2}{6} \left\| \sum_{n=1}^N \ddot{u}^n + \ddot{u}^{n-1} \right\|_E^2 \right]
 \end{aligned}$$

Ainsi on peut expliciter l'ordre de convergence de l'erreur a posteriori. En effet

$$\|u_h(t) - \tilde{u}(t)\|_{0,\Omega} = o(\Delta t) \quad (4.76)$$

4.3. ESTIMATION A POSTERIORI TOTALE

4.3 Estimation A Posteriori Totale

4.3.1 Estimation en norme L^2

En utilisant l'inégalité

$$\|u(t) - \tilde{u}(t)\|_{0,\Omega} \leq \|u(t) - u_h(t)\|_{0,\Omega} + \|u_h(t) - \tilde{u}(t)\|_{0,\Omega} \quad (4.77)$$

et en appliquant les propositions (4.1) et (4.4) on déduit une estimation a posteriori de l'erreur $L^2(\Omega)$ entre la solution exacte et la solution discrète interpolée en temps. Plus précisément on a la proposition suivante

Proposition 4.5

Soit $u(t)$ la solution du problème continu et $\tilde{u}(t)$ l'interpolé de la suite $(u_h^n)_{n=1..N}$ solution du problème totalement discrétisé. En supposant que $\forall k = 1..N \quad f^k = f(t^k)$, pour $t \in [t^{N-1}, t^N]$ on a la majoration d'erreur

$$\begin{aligned} \|u(t) - \tilde{u}(t)\|_{0,\Omega}^2 &\leq C^2(h)t \sum_{i=1}^{I-1} \lambda_{i,\min}^{-1} \int_0^t \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} |r_i(x, \tau)|^2 dx \right) d\tau \\ &\quad \Delta t^2 \left[\frac{3T^2}{2\lambda_1 K_m} (\|f'\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \Delta t \|f''\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2) \right. \\ &\quad + \frac{27K_M}{16\lambda_1} \left\| \sum_{n=1}^N \frac{\tilde{u}^n - \tilde{u}^{n-1}}{\Delta t} \Delta t \right\|_{0,\Omega}^2 + 9K_M \left\| \sum_{n=1}^N \left(\frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\Delta t} \right) \Delta t \right\|_E^2 \\ &\quad \left. + \frac{9K_M \Delta t^2}{16} \left\| \sum_{n=1}^N \left(\frac{\tilde{u}^n - \tilde{u}^{n-1}}{\Delta t} \right) \Delta t \right\|_E^2 + \frac{9K_M \Delta t^2}{6} \left\| \sum_{n=1}^N \tilde{u}^n + \tilde{u}^{n-1} \right\|_E^2 \right] \quad (4.78) \end{aligned}$$

avec

$$r_i(x, t) = f(x, t) - Au_h(x, t) - \frac{1}{K} \frac{\partial^2 u_h}{\partial t^2}(x, t) \quad x \in]x_i, x_{i+1}[\quad (4.79)$$

$$T = N \Delta t$$

Remarque

Dans le cas d'un milieu homogène où on choisit $K(x) = 1$ et $\rho = 1$ on a l'estimation d'erreur suivante

$$\|u(t) - \tilde{u}(t)\|_{0,\Omega} = o(h) + o(\Delta t) \quad (4.80)$$

Chapitre 5

Bibliographie

- [Ach] - J.D. ACHENBACH, *Wave propagation in elastic solids*.
North Holland, 1973
- [Alf] - R.M. ALFORD, K.R. KELLY, D.M. BOORE, *Accuracy of finite
difference modeling*.
Geophysics, 1974
- [Bab1] - I. BABUSKA, W.C. RHEINBOLT, *Error estimates for adaptative
finite element computations*.
SIAM Journal on Numerical Analysis, Vol 15, 1978
- [Bab2] - I. BABUSKA, W.C. RHEINBOLT, *A Posteriori error estimates
for the finite element method*.
Internatinal Journal of Numerical Methods in Engineering,
Vol 12, 1978
- [Bab3] - I. BABUSKA, W.C. RHEINBOLT, *A posteriori error analysis of the
finite element solutions for one-dimensional problems*.
SIAM Journal on Numerical Analysis, Vol 18, 1981
- [Bak] - G.A BAKER ,*Error estimates for finite element
for second order hyperbolic equations*.
SIAM Journal on Numerical Analysis, 1976
- [Bam1] - A. BAMBERGER, B. ENGQUIST, L. HALPERN, P. JOLY,
Parabolic wave equation approximations in heterogeneous media.
Siam Journal on Applied Mathematics, 1988

CHAPITRE 5. BIBLIOGRAPHIE

- [Bam2] - A. BAMBERGER, B. ENGQUIST, L. HALPERN, P. JOLY,
Higher order paraxial wave equation approximation in heterogeneous media.
Siam Journal on Applied Mathematics, 1988
- [Bam3] - A. BAMBERGER, G. CHAVENT, P. HEMON, P. LAILLY,
Inversion of normal incidence seismograms.
Geophysics, Vol.47, 1982
- [Bla] - D.R. BLAND, *Wave theory and applications.*
Clarendon Press Oxford, 1988
- [Bay] - A. BAYLISS, K.E. JORDAN, B.J. LEMESURIER, E. TURKEL,
A fourth-order finite-difference scheme for the computation of elastic waves.
Bulletin of the Seismological Society of America, Vol 76, 1986
- [Ber] - N. BERGERET, *Contribution à l'étude de schémas numériques d'ordre élevé pour des équations de propagation d'ondes.*
Thèse de 3^e cycle, Université de Pau et des Pays de l'Adour
- [Bou] - A. BOURGEOIS, B.F. JIANG, P. LAILLY, *Linearized inversion a significant step beyond prestack migration.*
To appear.
- [Bri] - P.W. BRIDGMAN, *Dimensional Analysis*
Yale University Press, 1931
- [Cer] - C. CERJAN, D. KOSLOFF, R. KOSLOFF, M. RESHEF,
A nonreflecting boundary condition for discrete acoustic and elastic wave equations.
Geophysics, 1985
- [Cha] - G. CHAVENT, P. LAILLY, A. BAMBERGER, *Une application de la théorie du contrôle à un problème inverse de sismique.*
Rapport de Recherche N°172, INRIA, Juin 1976
- [Coh1] - G. COHEN, *Fourth order schemes for the 2-D wave equation in homogeneous medium.*
Proceedings of the 56th SEG Annual International Meeting and Exposition, Houston, 1986

- [Coh2] - G. COHEN, P. JOLY, *Description and analysis of schemes, fourth order in time and space, for 1-D and 2-D acoustic equations.*
 Proceedings of the 57th SEG Annual International Meeting and Exposition, New Orleans, 1987
- [Coh3] - G. COHEN, P. JOLY, *Fourth order schemes for the heterogeneous acoustic equation.*
 Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1990
- [Col] - F. COLLINO, *Analyse numérique de modèle de propagation d'ondes.*
 Thèse de Docteur-Ingénieur, Université Paris IX-Dauphine, 1987
- [Cou1] - R. COURANT, D. HILBERT, *Methods of mathematical physics.*
 Vol 1, Interscience, 1953
- [Cou2] - R. COURANT, D. HILBERT, *Methods of mathematical physics.*
 Vol 2, Interscience, 1965
- [Cou3] - R. COURANT, K. FRIEDRICHS, H. LEWY, *On the partial difference equations of mathematical physics.*
 IBM Journal, March 1967
- [Dab] - M.A. DABLAIN, *The application of high-order differencing to the scalar wave equation.*
 Geophysics, 1986
- [Dau] - R. DAUTRAY, J.L. LIONS, *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques.*
 Tomes 1, 2, 3, Masson, 1987.
- [Dup] - T. DUPONT, *L^2 Estimates for Galerkin methods for second order hyperbolic equations*
 SIAM Journal on Numerical Analysis, 1973
- [Eng1] - B. ENGQUIST, A. MAJDA, *Absorbing condary conditions for the numerical simulation of waves.*
 Mathematics of computation, Vol 31, 1977
- [Eng2] - B. ENGQUIST, H.O. KREISS, *Difference and finite element methods for hyperbolic differential equations.*
 Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1979
- [Fla] - J.E. FLAHERTY, P.J. PASLOW, M.S. SHEPHARD, J.D. VASILAKIS, *Adaptative methods for differential equations.*
 SIAM, 1989

CHAPITRE 5. BIBLIOGRAPHIE

- [Fra] - A. FRANKEL, R.W. CLAYTON, *A finite-difference simulation of wave propagation in two-dimensional random media.*
Bulletin of the Seismological Society of America, Vol 74, 1984
- [For1] - B. FORNBERG, *On a Fourier method for integration of hyperbolic equations.*
Siam, 1975
- [For2] - B. FORNBERG, *The Pseudo-spectral method : Comparaisons with finite differences for the elastic wave equation.*
Geophysics, 1987
- [Gaz] - I. GAZDAG, *Modeling of the acoustic wave equation by transform method.*
Geophysics, 1981
- [God] - S. GODOUNOV, *Equations de la physique mathématique.*
Editions de Moscou, 1973
- [Hol] - H. HOLBERG, *Large-scale wave equation computations using high order difference operators.*
Ph.D Thesis Trondheim University, 1987
- [Isr-Ors] - M. ISRAELI, S.A. ORSZAG, *Approximation of radiation boundary conditions.*
Journal of Computational Physics 41, 1981
- [Jol] - P. JOLY, *Analyse numérique et mathématique de problèmes liés à la propagation d'ondes acoustiques, élastiques et électromagnétiques.*
Thèse de Docteur es-Sciences, Université de Paris IX-Dauphine, 1987
- [Kel1] - K.R. KELLY, *Numerical of love wave propagation.*
Geophysics, Vol 48, 1983
- [Kel2] - K.R. KELLY, R.W. WARD, S. TREITEL, R.M. ALFORD, *Synthetic seismograms : a finite-difference approach.*
Geophysics, 1976
- [Kol] - P. KOLB, F. COLLINO, P. LAILLY, *Pre-stack inversion of a 1-D medium.*
Proceedings of the I.E.E.E, Vol. 74, 1986

- [Kos1] - D. KOSLOFF, M. RESHEF, D. LOEWENTHAL, *Elastic wave calculations by the Fourier method.*
Bulletin of the Seismological Society of America, Vol 74, 1984
- [Kos2] - D. KOSLOFF, E. BAYSAL, *Forward modeling by a Fourier method.*
Geophysics, 1982
- [Kre] - H. KREISS, J. OLIGER, *Comparison of accurate methods for the integration of hyperbolic equations.*
Tellus, 1972
- [Lax] - P.D. LAX, B. WENDROFF, *Difference schemes for hyperbolic equations with high order of accuracy.*
Communications on Pure and Applied Mathematics,
Vol XVII, 1964
- [Lev] - A.R. LEVANDER, *Fourth-order finite-difference P-SV seismograms*
Geophysics, Vol 53, 1988
- [Lio1] - J.L. LIONS, E. MAGENES, *Problèmes aux limites non homogènes et applications.*
Vol 1, Dunod, 1968
- [Lio2] - J.L. LIONS, *Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles.*
Dunod, 1968
- [Mar1] - G. MARCHOUK, *Méthodes de calcul numérique*
Edition de Moscou, 1980
- [Mar2] - K.J. MARFURT, *Accuracy of finite-difference and finite-element modeling of the scalar wave and elastic wave equations.*
Geophysics, Vol 49, 1984
- [Muf] - I. R. MUFTI, *Large-scale three-dimensional seismic models and their interpretive significance.*
Geophysics, Vol 55, 1990
- [Mul] - R. MULLEN, T. BELYTSCHKO, *Dispersion analysis of finite element semidiscretizations of the two-dimensional wave equation.*
International Journal for Numerical Methods in Engineering,
Vol 18, 1982

CHAPITRE 5. BIBLIOGRAPHIE

- [Pia] - E. PIAULT, P. DUCLOS, A. SEI, *Gigaflops performance for 2D/3D heterogeneous acoustic modelling on a massively computer*
Siam, Mathematical and Numerical Aspect of Wave Propagation Phenomena, Strasbourg 1991
- [Rag] - G. RAGGIO, *A pseudo spectral Chebyshev scheme for forward acoustic modeling.*
Cornel University, 1985
- [Rav] - P.A. RAVIART, J.M. THOMAS, *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles.*
Masson, 1983
- [Rei] - H. J. REINHARDT, *A posteriori error estimates for the finite element solution of a singularly perturbed linear ordinary differential equation.*
SIAM Journal on Numerical Analysis, 1981
- [Res] - M. RESHEF, D. KOSLOFF, M. EDWARDS, C. HSIUNG,
Three dimensional acoustic modeling long Fourier method.
Geophysics, 1988
- [Ric] - R.D. RICHTMYER, K.W. MORTON, *Difference methods for initial-value problems.*
Interscience, New York, 1967
- [Sei1] - A. SEI, F. COLLINO , *Discretization of the wave equation in heterogeneous media.*
Siam, Mathematical and Numerical Aspect of Wave Propagation Phenomena, Strasbourg 1991
- [Sei2] - A. SEI, F. COLLINO , *Numerical Scheme for the acoustic wave equation in heterogeneous media.*
Siam, Annual Meeting Chicago, 1990
- [Sei3] - A. SEI, L. JANNAUD, A. BAMBERGER, *A posteriori error estimate for the acoustic wave equation in heterogeneous media.*
Siam, Annual Meeting Chicago, 1990
- [Tre] - L. TREFETHEN, *Group velocity in finite difference scheme.*
Siam Review, 1982
- [Vic1] - R. VICHNEVETSKY, J.B. BOWLES, *Fourier analysis of numerical approximations of hyperbolic equations.*
Siam Studies in Applied Mathematics, 1982

- [Vic2] - R. VICHNEVETSKY, *Wave propagation analysis of difference schemes for hyperbolic equations : a review.*
International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol 7, 1987
- [Vir1] - J VIRIEUX, *SH wave propagation in heterogeneous media: velocity-stress finite difference method.*
Geophysics, Vol 51, 1986
- [Vir2] - J VIRIEUX, *P-SV wave propagation in heterogeneous media: velocity-stress finite difference method.*
Geophysics, Vol 51, 1986

Vu : le président
M. G. CHAVENT

Vu : les suffrageants
M. A. BAMBERGER
M. P. JOLY
M. P. LAILLY
M. J.M THOMAS

Vu et permis d'imprimer
Le Président de Paris IX-Dauphine

