Étude numérique de l'instabilité de Vishniac dans les restes de supernovae

Cécile Cavet

▶ **To cite this version:**

Cécile Cavet. Étude numérique de l'instabilité de Vishniac dans les restes de supernovae. Astrophysique [astro-ph]. Université Paris-Diderot - Paris VII, 2010. Français. NNT : . tel-00582830

HAL Id: tel-00582830

https://theses.hal.science/tel-00582830

Submitted on 4 Apr 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ÉCOLE DOCTORALE D'ASTRONOMIE ET D'ASTROPHYSIQUE
D'ÎLE-DE-FRANCE

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ PARIS. DIDEROT (Paris 7)
EN ASTRONOMIE ET ASTROPHYSIQUE

CÉCILE CAVET

Étude numérique de l'instabilité de Vishniac dans les restes de supernovae

Numerical study of the Vishniac instability in supernova remnants

---

Thèse dirigée par Claire MICHAUT

Soutenue le 19 Novembre 2010 à l'Observatoire de Paris
devant le jury composé de :

M. Javier **Sanz**	Rapporteur
M. Edo **Trussoni**	Rapporteur
M. Serge **Bouquet**	Examinateur
M. Andrea **Ciardi**	Examinateur
M. Stéphane **Corbel**	Président du jury
M^{me} Claire **Michaut**	Directrice de thèse

à João

Remerciements

Je voudrais remercier Claire pour cette thèse très passionnante qui m’a enrichie grandement sur tous les points. Elle m’a appris à être la plus intelligible possible afin de mieux appréhender et de pouvoir transmettre ma compréhension de ce sujet complexe. Je voudrais remercier Emeric avec lequel j’ai beaucoup aimé travailler. Il m’a communiqué sa passion pour les modèles théoriques et il a souvent été pour moi une source bibliographique dans laquelle je pouvais puiser abondamment. J’aimerais beaucoup remercier Fabrice pour toute l’aide qu’il m’a prodiguée. Sans son appui technique, les simulations sur Titane et le rapatriement des nombreuses données produites n’auraient été possible. Il m’a aussi été de bon conseil lorsque des difficultés de tous genres me sont apparues. Je voudrais remercier Chinh qui a écrit un code performant grâce auquel j’ai pu réaliser ce travail de thèse et avec qui j’ai partagé des moments plaisants dans notre bureau commun. J’aimerais remercier Serge et Christophe, mes collaborateurs, qui m’ont aidée à décortiquer ce sujet de thèse et à mettre en lumière les zones d’ombre qu’il portait.

Je voudrais remercier mes parents et mon frangin qui m’ont aidée à persévérer dans ce travail et qui m’ont encouragée lorsque la vallée des difficultés devenait trop profonde. À travers mes proches, j’ai pu me voir mûrir pendant ces trois ans et j’ai pu comprendre qu’accomplir une thèse est aussi formateur que la finalité auquel nous parvenons. Je voudrais encore remercier la "team informatique" du LUTH, Jean-Yves et Stéphane, avec lesquels la bonne humeur était toujours de mise. J’aimerais aussi remercier des chercheurs aux grandes qualités scientifiques et humaines que j’ai rencontrés pendant mes études universitaires et qui m’ont encouragée à poursuivre dans la branche de l’astrophysique. Je pense à Manuel de Grenoble que nous regrettons, et encore Bertrand et Eric de Montpellier. Et finalement, j’aimerais remercier mes amis du M2 d’Astro, mes amis du LUTH et de l’Observatoire et ceux qui m’accompagnent depuis longtemps, particulièrement, Lucie & Romain, Lionel & Christine, Loic & Irène, Eve & Nicolas, Massimo, Anand, qui ont toujours été là pour moi...

Table des matières

Résumé **13**

Liste des variables et des paramètres **15**

Introduction **17**

1 Le modèle hydrodynamique **21**

1.1 La physique des chocs 21

1.2 Les équations d'Euler 22

1.2.1 L'équation d'état 23

1.2.2 L'indice adiabatique du gaz 24

1.2.3 Les relations de Rankine-Hugoniot 26

1.2.4 La condition de choc fort 27

1.3 La fonction de refroidissement 28

1.4 Le redimensionnement 29

2 Le code HYDRO-MUSCL **35**

2.1 La description du code HYDRO-MUSCL 36

2.1.1 La grille 38

2.1.2 Les équations d'Euler . . . 38
2.1.3 Le découplage de Strang . . . 39
2.1.4 La résolution de l'équation différentielle ordinaire . . . 40
2.1.5 La résolution de l'équation d'Euler homogène . . . 41
2.1.6 Le pas temporel . . . 47
2.1.7 Les conditions aux bords . . . 48
2.1.8 La géométrie . . . 49
2.1.9 La parallélisation . . . 51
2.1.10 Les logiciels Matlab et Mathematica . . . 51
2.2 Un outil d'analyse : le supercalculateur Titane . . . 52
2.2.1 Le projet d'étude paramétrique . . . 52
2.2.2 La version HYDRO-MUSCL pour Titane . . . 53

3 La validation des codes HYDRO-MUSCL et HYDRO-COOL 55

3.1 Les tests classiques du code HYDRO-MUSCL . . . 55
3.1.1 Le tube à choc . . . 55
3.1.2 L'explosion forte en un point . . . 56
3.2 Les variables cataclysmiques fortement magnétiques . . . 66
3.2.1 Les polaires . . . 68
3.2.2 Les simulations numériques . . . 74
3.3 Les jets d'étoile jeune . . . 77
3.3.1 L'objet astrophysique et la problématique . . . 78
3.3.2 Les simulations numériques . . . 79

4 L'instabilité de Vishniac **87**

4.1 Le processus physique 88

4.1.1 Le déclenchement de l'instabilité 88

4.1.2 La surstabilité ("overstability") 89

4.2 L'historique de l'instabilité 91

4.3 L'analyse de perturbation 93

4.3.1 L'analyse de perturbation locale 93

4.3.2 L'analyse de perturbation globale 100

4.3.3 Quelques commentaires sur le modèle théorique 112

4.3.4 Les autres effets dynamiques pouvant déclencher, améliorer ou atténuer l'instabilité . . 112

4.4 Le contexte astrophysique : les restes de supernova 114

4.4.1 Les supernovæ de type gravitationnel 114

4.4.2 Les phases d'expansion d'un reste de supernova 118

4.4.3 La généralisation de la solution auto-semblable 127

4.4.4 La récapitulation des solutions auto-semblables 129

4.5 Les simulations numériques des restes de supernova 131

4.5.1 La fonction γ 132

4.5.2 Les conditions initiales des simulations 132

4.5.3 Les résultats de simulations 134

5 L'étude numérique de l'instabilité de Vishniac **147**

5.1 L'étude numérique de Mac Low & Norman [1993] 148

5.2 Le modèle numérique 149

5.2.1 La méthode des pics perturbatifs . . . 149
5.2.2 La perturbation sinusoïdale . . . 154
5.3 L'étude paramétrique . . . 156
5.4 Les conditions initiales des simulations . . . 159
5.5 Les variables caractérisant l'instabilité . . . 160
5.5.1 L'écart spatial et en densité . . . 160
5.5.2 La masse par région et la variation de masse . . . 160
5.6 L'étude de la résolution numérique . . . 163
5.7 L'instabilité numérique de grosseur ("carbuncle instability") . . . 167
5.8 L'étude des résultats numériques . . . 170
5.8.1 La géométrie plan-parallèle . . . 170
5.8.2 La géométrie sphérique . . . 196
5.8.3 La conclusion générale des simulations numériques . . . 211

Conclusion **213**

Bibliographie **219**

A L'analyse de perturbation globale **225**

A.1 Les équations d'Euler non perturbées en géométrie plan-parallèle . . . 225

B Les autres instabilités : quelques aspects théoriques et numériques **227**

B.1 L'instabilité de Rayleigh-Taylor . . . 227
B.2 L'instabilité de Kelvin-Helmholtz . . . 229

C La perturbation d'une onde de souffle quasi-isotherme **231**

C.1 L'étude en géométrie plan-parallèle 231

C.2 L'étude en géométrie sphérique 234

C.3 La conclusion des études 234

Résumé

L'instabilité de Vishniac est invoquée pour expliquer la fragmentation et la filamentation de la coquille fine de matière choquée présente dans les restes de supernova radiatifs. Toutefois l'implication et les conséquences de ce processus spécifique sur la morphologie complexe des restes de supernova ne sont pas entièrement démontrées. Nous avons réalisé des simulations numériques 2D d'une onde de souffle perturbée qui se propage dans un milieu ambiant homogène afin de mieux comprendre le mécanisme de l'instabilité de Vishniac. Le code hydrodynamique HYDRO-MUSCL 2D a été utilisé afin de déclencher la perturbation de la coquille fine dans les géométries plan-parallèle et sphérique. Dans ce travail, je montrerai que nous avons obtenu la surstabilité de Vishniac (« Vishniac overstability ») comme prédit par l'analyse théorique. Ce processus repose sur une oscillation d'amplitude et de période temporelle croissante des grandeurs fluides et spatiales. Nous avons testé l'effet de paramètres spécifiques sur la variation de masse d'une région donnée dans le cadre d'une étude paramétrique que nous avons réalisée sur le supercalculateur Titane. Nous avons trouvé que la perturbation est atténuée après quelques oscillations de la variation de masse pour tous les jeux de paramètres. Ainsi nous concluons que dans notre modèle, l'instabilité de Vishniac ne permet pas la fragmentation de la coquille fine à cause d'effets qui ne sont pas pris en compte par l'analyse théorique.

The Vishniac instability is supposed to explain the fragmentation and the filamentation of the thin shell of shocked matter in radiative supernova remnants. However the implication and the consequence of this specific process on the complex morphological evolution of supernova remnants is not fully demonstrated. We have realized 2D numerical simulations of perturbed blast waves propagating into a homogeneous ambient medium to better understand the mechanism of the Vishniac instability. The HYDRO-MUSCL 2D hydrodynamics code has been used to trigger the thin shell perturbation in plane-parallel geometry and spherical geometry. In this work I will show that we have obtained the Vishniac overstability as predicted by the theoretical analysis. This process consists of an oscillation with an amplitude and period growing in time. We have tested the effect of specific parameters on the mass variation of a given region with a parametric study performed on the Titane supercomputer. We found that the perturbation is damped after a few oscillations for all sets of parameters. Thus we conclude that in our model the Vishniac instability does not allow the fragmentation of the thin shell due to effects not taken into account by the theoretical analysis.

Liste des variables et des paramètres

ρ la densité
$\vec{u}$ la vitesse
u_x et u_y respectivement la composante selon la direction O_x et O_y de la vitesse
u_r et $\vec{u}_T$ respectivement la composante radiale et tangentielle de la vitesse
p la pression
G, U, P, Z les fonctions radiales sans dimensions
γ l'indice adiabatique
γ_{eff} l'indice adiabatique effectif
S l'entropie spécifique
E la densité d'énergie totale
$\mathcal{E}$ l'énergie totale
e l'énergie interne spécifique
M la masse
T la température
r, x respectivement les grandeurs spatiales en géométrie sphérique et plan-parallèle
R_s et R_i respectivement la position du front de choc et du bord interne de la coquille en géométrie sphérique et cylindrique
x_s et x_i respectivement la position du front de choc et du bord interne de la coquille en géométrie plan-parallèle
ξ la variable auto-semblable
h l'épaisseur de la coquille de gaz choqué
V_s la vitesse du front de choc
c_s et $c_{s,i}$ respectivement la vitesse du son du milieu ambiant et de la coquille
p_{ram} la pression bélier ou dynamique
p_{th} ou p_3 la pression thermique
t le temps hydrodynamique
t_{ref} le temps de refroidissement
α l'exposant auto-semblable ou taux d'expansion
β, β_i, β_{ii} les constantes d'évolution auto-semblable du rayon
w l'exposant radial de la densité du milieu ambiant
a l'exposant radial des fonctions sans dimension

a_{geo} la constante d'évolution auto-semblable du rayon

κ le rapport des pressions au centre et sur le front de choc

k_B la constante de Boltzmann

Eu le nombre d'Euler

St le nombre de Strouhal

Re le nombre de Reynolds

χ le paramètre de refroidissement

Bo le nombre de Boltzmann

R le nombre de Mihalas

$\mathcal{C}$ le taux de compression sur le front de choc

$\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}_i$ respectivement le nombre de Mach du milieu ambiant et de la coquille

Λ la fonction de refroidissement

ϵ et ζ les exposants caractérisant le processus de refroidissement

Λ_0 la constante caractérisant le processus de refroidissement

l le mode propre de la perturbation

k le nombre d'onde de la perturbation

λ la longueur d'onde de la perturbation

A l'amplitude de la perturbation

s le taux de croissance complexe de la perturbation

s_m le taux de croissance complexe de la perturbation mesuré sur la variation de masse

dx ou Δx le pas spatial dans la direction O_x

dy ou Δy le pas spatial dans la direction O_y

dt ou Δt le pas temporel

m_x et m_y respectivement le nombre de cellules sur les direction O_x et O_y

M_{reg} la masse d'une région spécifique

δM_{reg} la variation de la masse d'une région spécifique

Introduction

L'astrophysique est un domaine de recherche qui recouvre un large champ de la physique. Dans cette science une multitude d'objets est étudiée et les processus physiques impliqués y sont très variés. Seule une approche à multi-facettes peut nous permettre d'arriver à comprendre la formation et l'évolution des objets que nous observons. Les différents angles d'études que nous avons, à présent, à notre disposition pour caractériser et modéliser ces systèmes, sont au nombre de quatre. En effet, l'observation, la théorie analytique, la simulation numérique et l'astrophysique de laboratoire sont à notre disposition pour étudier les objets astrophysique et chacune des branches scientifiques nous apportent des informations différentes. Nous détaillons les bénéfices spécifiques à chacune de ces disciplines. Les observations de systèmes astrophysiques vont nous procurer les observables de cet ensemble cohérent (luminosité, température,...), mais aussi la morphologie de l'objet et parfois l'évolution de celui-ci. La théorie analytique permet, pour sa part, d'obtenir les lois fondamentales sous des approximations plus ou moins fortes et de faire des prédictions sur le comportement future de l'objet. La modélisation numérique qui sera l'angle d'étude de cette thèse, permet de visualiser le processus étudié et de suivre sa dynamique mais surtout, d'explorer un grand nombre de conditions et de processus physiques. Finalement, une branche encore peu connue mais prometteuse, l'astrophysique de laboratoire qui permet de reproduire en miniature les processus observés aux échelles astrophysiques.

Le développement récent des installations de puissance (lasers, z-pinch,...) délivrant des grandes quantités d'énergie, ont donné naissance à un nouveau domaine de la physique : la Physique des Hautes Densité d'Energie (PHDE ou "HEDP" en anglais). Les gammes de densité et de température atteintes permettent d'obtenir des systèmes dans lesquels le couplage de la matière et du rayonnement s'effectue. L'étude de l'hydrodynamique radiative est le champ d'investigation privilégié de l'équipe dans laquelle j'ai effectué ma thèse. La longue expérience acquise par ce groupe réunissant théoriciens, numériciens et expérimentateurs sur les chocs radiatifs en laboratoire a amené à une meilleure compréhension de ce processus complexe où la rétroaction du rayonnement agit sur la dynamique du choc. À ce jour, de nombreux résultats expérimentaux ont été obtenus sur les chocs radiatifs optiquement épais mais aussi sur les jets de plasma similaires par loi d'échelle aux jets d'étoile jeune. Une nouvelle étude explore la stabilité du choc radiatif optiquement mince dans la colonne d'accrétion des variables cataclysmiques fortement magnétiques. Les phénomènes physiques que sont les chocs radiatifs et les jets de plasma représentent les sujets d'étude de notre équipe. Et parmi eux, les chocs radiatifs optiquement minces, observés dans de nombreux systèmes astrophysiques et traités dans le cadre hydrodynamique, vont être le fil conducteur de ma thèse.

À l'aide de simulations numériques, j'ai étudié l'instabilité de Vishniac qui peut apparaître sur le front de choc

des restes de supernova (RSN) en phase radiative. L'objectif majeur de cette thèse est de mieux comprendre le processus de l'instabilité de Vishniac qui est une instabilité souvent invoquée pour expliquer la morphologie complexe des RSN en phase avancée mais qui, finalement, n'a été que peu étudiée. La structure fragmentée et filamentée des RSN en phase tardive est expliquée par l'action, sur le front de choc, d'une ou plusieurs instabilités à différents instants de l'évolution du RSN. C'est l'interaction entre l'onde de choc et le milieu ambiant qui conduit à l'apparition de ces instabilités hydrodynamiques qui génèrent les structures locales du RSN. Lorsque le RSN atteint un âge avancé, le choc présent dans cet objet devient un choc qui rayonne intensément. Cependant, ce type de choc peut-être décrit par un formalisme hydrodynamique moyennant une équation d'état adaptée. Ainsi, nous traitons ce problème, de manière théorique et numérique, en utilisant seulement les équations d'Euler.

L'étude que j'ai réalisé sur l'instabilité de Vishniac a pour but de clarifier les modèles théoriques, d'en faire ressortir les critères physiques donnant naissance à l'instabilité, et de valider son existence par la simulation. Un aspect important de ce travail est de replacer le sujet dans le contexte astrophysique des RSN engendrés par des supernovæ gravitationnelles. La simulation numérique de l'instabilité de Vishniac est réalisée à l'aide du code hydrodynamique HYDRO-MUSCL. À partir d'une méthode perturbative que nous avons choisit spécifiquement, il nous a été possible de d'obtenir l'instabilité de Vishniac et de suivre son évolution. Une partie importante de mon travail de thèse, l'étude paramétrique de l'instabilité, a été facilitée par l'utilisation d'un supercalculateur. Ce manuscrit de thèse présente la méthode appliquée et les résultats obtenus.

Il me semble important de préciser que l'instabilité de Vishniac suscite un intérêt au sein de la communauté scientifique. Récemment encore, à la conférence bi-annuelle HEDLA ("High Energy Density Laboratory Astrophysics"), des études théoriques ont été présentées sur cette instabilité et elle a été invoquée pour expliquer des résultats expérimentaux. Dans le cadre de l'astrophysique de laboratoire, l'instabilité de Vishniac a été étudiée expérimentalement plusieurs fois mais aucun groupe de recherche n'a encore pu prouver son existence. Les simulations numériques que je présente amènent donc un éclairage nouveau sur ses mécanismes fondamentaux. Dans la continuité de cette étude, un nouveau projet expérimental en commun entre le CEA (Commissariat à l'Énergie Atomique) et le NNSA ("National Nuclear Safety Administration") permettra d'aborder la problématique de l'instabilité sous un angle neuf.

Le déroulement de mon manuscrit est le suivant. Dans le premier chapitre, je décrirai le modèle hydrodynamique en présentant le système d'équations sur lequel repose toute cette étude : les équations d'Euler. Ensuite, dans le chapitre II, je présenterai les différents codes développés par notre équipe et leurs architectures. Les codes HYDRO-MUSCL et HYDRO-COOL me serviront, respectivement, à réaliser les simulations purement hydrodynamiques et les simulations hydrodynamiques avec des pertes radiatives présentées dans cette thèse. Dans le chapitre III, je présenterai les tests numériques validant ces nouveaux codes. Je montrerai d'abord les résultats du code HYDRO-MUSCL, avec les tests classiques de tube à choc et d'explosion forte en un point. Ensuite, j'aborderai les variables cataclysmiques fortement magnétiques de type polaire. J'ai réalisé, pour ces objets, un travail préliminaire de simulations numériques avec le code HYDRO-COOL visant à obtenir la stationnarité du front de choc de l'onde retour qui se propage dans la colonne d'accrétion. Finalement, je consacrerai la dernière partie de ce chapitre aux simulations de jets de matière de type jets d'étoile jeune. J'ai obtenu dans le cadre des jets sous dense, des structures semblables à celles formées par l'instabilité de Kelvin-Helmholtz qui est un processus affectant la dynamique du jet. Je n'ai pas poursuivi plus en profondeur cet

aspect car ce n'était pas l'objectif principal de ma thèse. J'ai aussi contribué à l'étude du refroidissement dans le jet, *via* le code HYDRO-COOL, car l'hypothèse récente du rôle du refroidissement dans les changements morphologiques du jet sur des temps d'évolution longs semble intéressante à explorer. Dans le chapitre IV, j'aborderai le coeur de l'étude en présentant la théorie de l'instabilité de Vishniac et j'entrerai en détail dans les deux modèles qui définissent les critères de l'instabilité. Je présenterai ensuite le contexte astrophysique dans lequel l'instabilité peut se développer, c'est-à-dire les restes de supernova. Je profiterai de cette partie pour introduire les différentes solutions auto-semblables présentes dans chacune des phases d'évolution du RSN. La dernière partie de ce chapitre présentera des simulations d'ondes de souffle de RSN sans perturbations. Puis, dans le chapitre V, je présenterai l'aboutissement de ce travail : les simulations de l'instabilité de Vishniac. Les ondes de souffle du chapitre précédent seront perturbées selon des critères issus de la théorie. J'étudierai, dans une première partie, les différents stades d'évolution de l'instabilité. Je testerai ensuite la réponse de l'instabilité à un grand nombre de jeux de paramètres. Je conclurai finalement sur l'existence de l'instabilité dans le modèle théorique présenté.

Avant d'ouvrir le premier chapitre, j'aimerais préciser au lecteur que le système d'unité utilisé dans cette thèse est le système international MKS et non le système CGS. Notre équipe, au sens large de sa collaboration, étant composée de physiciens, de mathématiciens et d'astrophysiciens, adopte la norme internationale.

Chapitre 1

Le modèle hydrodynamique

Lors de l'étude d'un problème physique particulier, il est important de se demander, au début de la réflexion, avec quel modèle et quelles équations nous allons aborder la problématique qui se présente à nous et si les approximations que nous faisons dans ce cadre sont bien justifiées. L'étude des écoulements fluides est réalisée de manière naturelle *via* la branche de l'hydrodynamique. Le modèle basé sur les équations d'Euler permet d'étudier de nombreux objets astrophysiques car l'approche fluide est une description relativement simple et qui décrit bien les processus se déroulant dans beaucoup de ces systèmes. Je présenterai dans cette thèse des analyses théoriques réalisées dans ce cadre et les simulations numériques que j'ai mises en oeuvre sont une modélisation faite avec la description fluide. Ainsi le modèle hydrodynamique est le modèle dans lequel nous nous plaçons au long de ce travail. L'étude de la dynamique des fluides amène naturellement à la définition des chocs et d'autres notions permettant d'analyser le fluide que je vais introduire dans ce chapitre.

1.1 La physique des chocs

Les ondes de choc sont des processus qui peuvent apparaître au niveau céleste et au niveau terrestre et lorsque nous les observons dans l'univers, elles peuvent être présentes dans une pléthore d'objets. En astrophysique, ces ondes jouent un rôle dans la dynamique de nombreux systèmes où elles vont transformer les grandeurs caractéristiques de la matière du milieu dans lequel elles se propagent. Quelques uns de ces objets dans lesquels nous pouvons les observer sont les restes de supernova (RSN), les colonnes d'accrétion des variables cataclysmiques fortement magnétisées, et encore les têtes et les noeuds des jets d'étoile jeune. Pendant ma thèse je me suis intéressée à ces trois types de système. Mais c'est les ondes de choc des RSN soumises à une instabilité hydrodynamique d'un type particulier pour lesquelles mon étude a été la plus poussée. Les chocs vont donc être présents à de nombreuses échelles des objets astrophysiques, d'où l'importance de leur étude et l'intérêt de définir la notion même d'onde de choc.
L'onde de choc est une discontinuité qui engendre un saut des grandeurs physiques. Ces grandeurs sont, en

hydrodynamique, la densité et la vitesse. Dans certains cas, comme dans les RSN, le saut peut-être aussi sur la température (ou la pression). Un choc apparaît quand une onde de compression (par exemple, une onde de souffle résultant d'une explosion) est supersonique. Cela signifie que l'onde se propage à une vitesse V_s, qui est la vitesse d'ensemble des particules constituant le front de l'onde, plus rapide que la vitesse du son c_s du milieu ambiant (vitesse de l'agitation des particules qui est reliée à la température) dans lequel elle se déplace. Nous avons donc $V_s > c_s$ voir $V_s \gg c_s$. En effet, si une onde de compression se propage à une vitesse subsonique, les particules du milieu perturbé ont le temps d'informer leurs voisines par collisions (transfert énergétique) de l'arrivée imminente d'une perturbation. Les particules du milieux non perturbé ont le temps de se déplacer pour laisser passer la perturbation. Quand les particules ne reçoivent pas cette information, elles n'ont pas le temps de s'écarter et elles s'accrètent sur le front de l'onde de perturbation ce qui forme un choc hydrodynamique. Nous quantifierons par la suite leurs propriétés physiques mais pour le moment nous présentons les équations d'Euler.

1.2 Les équations d'Euler

Les équations décrivant le mouvement d'un fluide parfait hydrodynamique c'est-à-dire non visqueux, non soumis à une force de gravité et à un champ magnétique ambiant, sont les équations d'Euler. L'approche fluide, dans laquelle sont déterminées ces équations, est une approche macroscopique qui suppose que les particules contenues dans un élément de volume élémentaire ont un comportement suffisamment collectif pour que leur propriété puissent être résumé par des grandeurs statistiques moyennes. Ces grandeurs statistiques moyennes, que nous nommons les grandeurs fluides, sont la densité ρ, la vitesse $\vec{u}$ et la température T (la pression p apparaît *via* le travail des forces de pression). Les équations d'Euler, que nous écrivons ci-dessous et qui rendent compte de la compressibilité d'un fluide, sont écrites de manière générale afin de décrire toutes les géométries. Nous pouvons aussi les trouver sous leur forme tensorielle, la forme la plus générale, dans Landau & Lifshitz [1959]. Dans ce fluide sans viscosité, il est sous-entendu que nous négligeons la diffusion de masse et la conductivité thermique. Les équations d'Euler, qui transcrivent la conservation de la masse, du mouvement et de l'énergie dans le repère eulérien[1], s'écrivent :

Conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \ . \tag{1.1}$$

Conservation du mouvement :

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} + \vec{\nabla}\, p = 0 \ . \tag{1.2}$$

Conservation de l'énergie :

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{u}(E + p)) = 0 \ , \tag{1.3}$$

où E est la densité d'énergie totale du fluide étudié. Le terme $(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})$ apparaissant dans l' équation de conservation du mouvement est un terme d'advection de la matière et il quantifie donc le transport de celle-ci dans le

[1]Le passage avec le repère lagrangien se fait par la relation $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{\nabla}$ où les dérivées partielles ne sont plus considérées mais seulement la dérivée totale.

système. Nous faisons à présent une remarque sur les variables $\partial/\partial t$ et $\vec{\nabla}$ avec lesquelles varient les grandeurs fluides. Dans le système d'équations de conservation que nous venons d'introduire, les variables indépendantes du problème sont l'espace et le temps. Selon l'approche auto-semblable que nous utiliserons de nombreuses fois dans cette thèse, nous pouvons déterminer les solutions des équations d'Euler en utilisant une variable ξ compactant l'espace et le temps, ce qui simplifie grandement le problème. Ainsi, pour résoudre le système d'équations, il restera à déterminer, en fonction de ξ, un changement de variable approprié pour les grandeurs fluides.
Le système d'équations que nous venons de définir fait appel à trois équations et à quatre variables. Il est donc nécessaire de déterminer une quatrième équation afin de clore le système et cela est en partie rendu possible par l'équation d'état.

1.2.1 L'équation d'état

Afin de clore le système formé par les équations d'Euler, nous définissons l'équation d'état. Comme son nom l'indique, cette relation rend compte de l'état du gaz au niveau microscopique et elle apporte donc une information supplémentaire sur le système. L'équation d'état que nous utilisons dans cette modélisation est l'équation d'état des gaz parfaits. L'hypothèse de gaz parfait suppose que les propriétés thermodynamiques du système sont bien connues et qu'il est ainsi possible de définir une relation entre la pression, la température et la densité. L'équation d'état des gaz parfaits s'écrit :

$$p = \frac{\rho\, k_B\, T}{\mu\, m_H}\,, \tag{1.4}$$

où T est la température, k_B est la constante de Boltzmann, μ est le poids moléculaire moyen et m_H la masse de l'atome d'hydrogène. Cette relation suppose donc que nous connaissons la composition du fluide. En astrophysique, les observations ont montré que l'hydrogène est présent en grande quantité et, en général, nous pouvons supposer que le milieu étudié en est composé majoritairement. De plus, dans les équations d'Euler, ce sont la densité et la pression qui apparaissent *via* les grandeurs conservées (la densité, l'impulsion et la densité d'énergie). Ainsi, lorsque nous voudrons déterminer la température du fluide, nous devrons faire une hypothèse sur la composition du milieu en présence.
L'équation d'état est utile pour déterminer la relation de fermeture des équations d'Euler car elle entre en jeu dans le bilan d'énergie du système. Nous supposons d'abord que l'énergie interne spécifique e (énergie interne de l'unité de masse) du gaz est purement thermique. Dans ce cas, l'équation d'état est plus générale que les gaz parfaits car c'est une équation d'état polytropique [Ryutov et al., 2001] et elle s'écrit :

$$p = (\gamma - 1)\rho e\,, \tag{1.5}$$

où γ est l'indice adiabatique du gaz. Il est important de préciser que l'équation d'état polytropique n'est valable que dans des régimes de température et de densité spécifiques mais comme elle décrit bien les milieux totalement ionisés qui sont souvent présents en astrophysique, nous l'utiliserons dans notre étude.
Afin de clore le système d'équations d'Euler, nous déterminons la densité d'énergie totale E qui est le bilan

d'énergie du système :

$$E = \rho e + \frac{1}{2}\rho u^2 = \frac{p}{(\gamma - 1)} + \frac{1}{2}\rho u^2 \,. \tag{1.6}$$

La densité d'énergie totale est donc la somme de la densité d'énergie interne ρe et de la densité d'énergie cinétique $(1/2)\rho u^2$. Avec cette relation de fermeture, nous pouvons réécrire l'équation de conservation de l'énergie. Si nous remplaçons l'Eq. (1.6) dans l'Eq. (1.3), nous obtenons :

$$\frac{\partial p}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})p + \gamma\, p \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \,. \tag{1.7}$$

La conservation de l'énergie peut aussi se traduire par la conservation de l'entropie spécifique :

$$(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla}) ln(\frac{p}{\rho^\gamma}) = 0 \,, \tag{1.8}$$

où $S = ln(p/\rho^\gamma)$ est l'entropie spécifique[2]. Lors du passage d'une onde de choc dans un fluide, les grandeurs fluides, qui sont impliquées dans les relations précédentes, subissent une variation plus ou moins brutale de leurs valeurs et le gaz est ainsi changé derrière le front de choc, c'est-à-dire dans la zone choquée. La variation d'entropie est une transformation irréversible qui, par conséquent, implique aussi un saut de cette grandeur lors du passage de l'onde de choc. Nous verrons ces différentes variations lors de la partie sur les tests du code que nous avons utilisé pour les simulations (voir Sec. 3.1.1 et Sec. 3.1.2). Nous définissons à présent l'indice adiabatique que nous avons vu intervenir dans l'équation d'état du gaz.

1.2.2 L'indice adiabatique du gaz

Nous nous intéressons plus en détail à l'indice adiabatique γ car ce paramètre a un rôle important dans l'étude de l'instabilité de Vishniac. L'indice adiabatique rend compte de l'état du gaz. Il est définit comme le rapport des chaleurs spécifiques à pression constante C_p et à volume constant C_v et il dépend de f, le nombre de degrés de liberté du gaz, par la relation suivante :

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{f+2}{f} \,. \tag{1.9}$$

Quand le gaz parfait est monoatomique ou totalement ionisé (voir Ryutov et al. [2001] pour le second cas), les particules ont trois degrés de liberté ($f = 3$) correspondant aux trois dimensions de l'espace et nous retrouvons la valeur classique de l'indice adiabatique $\gamma = 5/3$. Dans le cas d'un gaz soumis à un champ de rayonnement et dans lequel la pression de radiation est dominante, les particules peuvent se déplacer dans les trois dimensions de l'espace et elles ont chacune deux degrés de polarisation ($f = 6$). Pour ce gaz de photon, l'indice adiabatique est donc $\gamma = 4/3$. Nous voyons que si d'autres effets permettent au gaz de posséder un grand nombre de degrés de liberté ($f > 40$) qui sont induits, par exemple, par le rayonnement du gaz choqué alors l'indice adiabatique tend vers la limite isotherme et $\gamma \to 1$. Ainsi, pour un gaz parfait, le domaine de variation de ce paramètre est :

$$1 < \gamma \leqslant 5/3 \,. \tag{1.10}$$

[2] L'entropie spécifique $S = ln(p/\rho^\gamma)$ est déterminée à partir de la relation thermodynamique de la variation de chaleur $TdS = de + pd(1/\rho)$ valable pour les gaz parfaits. Lors d'une évolution adiabatique, $TdS = 0$ et il y a conservation de l'entropie spécifique.

Nous allons voir, dans le paragraphe suivant (voir les relations de Rankine-Hugoniot), que la compression du gaz au niveau du front de choc dépend de l'indice adiabatique et lorsque γ diminue, la compression du gaz augmente. Ainsi lorsque l'indice adiabatique tend vers la limite isotherme, cela permet de prendre en compte l'augmentation de la compressibilité du gaz qui est observée dans de nombreux systèmes. Dans le modèle théorique de l'instabilité de Vishniac, qui fait appel à un gaz possédant des degrés de liberté supplémentaires pour expliquer la variation de γ, c'est cette propriété de compressibilité de gaz qui va avoir une importance sur le développement du processus.

Pour traiter les gaz parfaits sous une approximation moins forte que l'adiabaticité, il est aussi possible d'utiliser l'approximation d'un changement d'état polytropique qui est plus général qu'un changement d'état sans échange de chaleur avec l'extérieur (voir Chandrasekhar [1957]). Dans ce but, nous faisons appel à un nouveau paramètre qui est l'indice adiabatique effectif γ_{eff}. Ce paramètre est aussi parfois appelé indice adiabatique, sans autre précision, ou encore exposant polytropique [Chandrasekhar, 1957], coefficient polytropique [Falize, 2008] ou indice polytropique [Meliani, 2004] selon les utilisateurs et les domaines de la physique dans lesquels il est impliqué. Il est définit comme étant une modification de la chaleur spécifique du système et cette modification se traduit par une nouvelle formulation de l'Eq. 1.9. L'indice adiabatique effectif s'écrit [Chandrasekhar, 1957] :

$$\gamma_{eff} = \frac{C_p - C}{C_v - C} \, , \tag{1.11}$$

où C_p et C_v sont toujours les chaleurs spécifiques à pression constante et à volume constant qui ne sont pas changées par rapport à leur définition précédente et C représente la chaleur spécifique qui prend en compte la déviation par rapport l'adiabaticité. Lorsque $C = 0$ dans la précédente relation, nous retrouvons l'indice adiabatique classique $\gamma = C_p/C_v = 5/3$ car cette définition n'inclue pas les degrés de liberté supplémentaires de l'Eq. 1.9. Et lorsque $C \to \infty$, nous retrouvons la valeur isotherme $\gamma = 1$. Ainsi, lorsque l'indice adiabatique effectif diminue, le chauffage du fluide augmente jusqu'à ce que le système atteigne un comportement isotherme. Nous obtenons donc, pour l'indice adiabatique effectif, le même domaine de valeur que dans le cas de l'indice adiabatique classique mais cette deuxième définition fait appel à un processus de chauffage alors que dans la première définition, c'est le rayonnement qui est impliqué dans les variations de γ.

Nous faisons remarquer que les définitions de γ que nous venons de présenter suppose un gaz parfait. Mais pour les gaz réels, subissant des processus particuliers comme les ondes de choc, l'hypothèse de chaleur spécifique constante du système permettant de donner son sens à γ, n'est pas valable longtemps. Souvent des phénomènes de dissociation, de recombinaison ou encore d'ionisation des particules du gaz sont présents dans la zone choquée où la matière est comprimée et chauffée. La composition du gaz étant changée dans cette région, des processus radiatifs y apparaissent, générés par les collisions libre-libre, le rayonnement cyclotron, le rayonnement synchrotron, etc. Le rayonnement issu de la zone choquée peut s'échapper sans interaction avec le milieu ambiant (approximation optiquement mince) ou il peut au contraire interagir avec ce milieu (transfert radiatif nécessaire). Le long de notre étude, nous nous placerons toujours dans l'approximation optiquement mince lorsque des processus radiatifs spécifiques interviendrons. Cette approximation est appropriée car il est possible dans ce cas de décrire simplement le rayonnement comme une perte d'énergie (voir la fonction de refroidissement de la Sec. 1.3). En effet, la perte énergétique considérée permet de prendre en compte la diminution de la température de la zone de laquelle s'échappe le rayonnement ce qui a pour conséquence d'augmenter la densité de la même région.

Nous reviendrons sur le rôle de l'indice adiabatique par la suite afin d'expliquer plus précisément, dans le cadre des RSN, l'évolution d'une couche de gaz passant d'un état adiabatique à un état isotherme. Nous nous intéressons maintenant aux relations de Rankine-Hugoniot qui vont nous permettre de déterminer les conditions aux bords des équations d'Euler.

1.2.3 Les relations de Rankine-Hugoniot

Les fronts de choc sont, comme nous l'avons vu, des discontinuités où la densité et la vitesse de propagation du fluide subissent un saut. Ainsi, pour inclure cette discontinuité lors de la résolution des trois équations d'Euler, la seule possibilité est de résoudre les équations d'un côté de l'interface (dans le gaz choqué) et de prendre en compte le saut *via* des conditions aux bords. Ces conditions sont données par les relations de Rankine-Hugoniot (RH). Les relations de RH permettent de déterminer les valeurs des grandeurs fluides de part et d'autre du front de choc et de les connecter. Pour déterminer les relations de RH, nous supposons la stationnarité ($\partial/\partial t = 0$) dans les équations d'Euler Eq. 1.1, 1.2, et 1.3. Cette hypothèse implique que nous nous plaçons dans le repère du choc. Dans ce repère mobile, les fluides en mouvement sont les deux fluides que le front de choc sépare (notés milieux (1) et (2), voir la définition de la notation dans la sous-section 4.4.1). Nous pouvons alors écrire les équations d'Euler stationnaires en introduisant des crochets de Poisson qui représentent les conditions présentes à gauche juste derrière le front de choc (noté (s)) et à droite de cette discontinuité (milieu (1)). Ces relations prennent la forme [Landau & Lifshitz, 1959] :

$$\begin{aligned}
\left[\rho v\right]_1^s &= 0\,, && (1.12)\\
\left[\rho v^2 + p\right]_1^s &= 0\,, && (1.13)\\
\left[v\Big\{\frac{1}{2}\rho v^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1}p\Big\}\right]_1^s &= 0\,, && (1.14)
\end{aligned}$$

où v est la vitesse du fluide dans le repère du choc. Dans le référentiel du laboratoire (repère fixe), dans lequel nous nous placerons par la suite, la vitesse du fluide au niveau du front de choc est $u_s = v_1 - v_s$ où $v_1 = V_s$ est la vitesse de propagation du front de choc (vitesse par rapport au gaz non perturbé). Lorsque nous développons les trois relations précédentes, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\frac{\rho_s}{\rho_1} &= \frac{V_s}{V_s - u_s}\,, && (1.15)\\
p_s - p_1 &= \rho_1 V_s u_s\,, && (1.16)\\
\frac{p_s}{p_1} &= \frac{\rho_s(\gamma+1) - \rho_1(\gamma-1)}{\rho_1(\gamma+1) - \rho_s(\gamma-1)}\,. && (1.17)
\end{aligned}$$

Nous voulons exprimer ces relations en fonction du nombre de Mach $\mathcal{M} = V_s/c_s$ qui est un nombre sans dimension comparant la vitesse de propagation V_s d'une onde de souffle à la vitesse du son c_s d'un milieu ambiant. La vitesse du son s'écrit pour le milieu ambiant (1) :

$$c_s^2 = \gamma\frac{p_1}{\rho_1} \propto T_1\,. \qquad (1.18)$$

Ainsi la vitesse du son dépend de la température du gaz et par conséquence, de l'agitation des particules du milieu. Le nombre de Mach sera dans cette étude toujours considéré comme un nombre de Mach externe étant

donné que nous comparerons la vitesse de propagation d'une onde à la vitesse du son du milieu local $c_{s,local}$. Mais comme nous serons en présence de différents types de gaz, nous pouvons définir des vitesses du son dans chacun de ces gaz. En conséquence, nous utiliserons différents nombres de Mach.
Après manipulation des équations Eq. 1.15, 1.16 et 1.17, nous obtenons les relations de Rankine-Hugoniot en fonction de l'indice adiabatique γ et du nombre de Mach $\mathcal{M}$:

$$\frac{\rho_s}{\rho_1} = \frac{V_s}{v_s} = \frac{(\gamma+1)}{(\gamma-1)+\frac{2}{\mathcal{M}^2}} = \mathcal{C}(\gamma,\mathcal{M}) \ , \tag{1.19}$$

$$\frac{u_s}{V_s} = \frac{2(\mathcal{M}^2-1)}{(\gamma+1)\mathcal{M}^2} \ , \tag{1.20}$$

$$\frac{p_s}{p_1} = \frac{2\gamma\mathcal{M}^2}{(\gamma+1)} - \frac{(\gamma-1)}{(\gamma+1)} \ , \tag{1.21}$$

où $\mathcal{C}(\gamma,\mathcal{M})$ est le taux de compression du gaz. Les relations de RH permettent donc de connecter les grandeurs fluides de part et d'autre du front choc. Dans le problème que nous voulons modéliser, il est possible de faire un certains nombres d'hypothèses. Dans la limite de choc fort, nous allons pouvoir réécrire ces relations de manière plus simple.

1.2.4 La condition de choc fort

Nous allons considérer dans cette étude une onde de choc qui se propage dans un milieu ambiant. Dans ce contexte, il nous est possible de faire un certain nombre d'hypothèses simplificatrices si certains critères sont remplis. Lorsque la vitesse du son du milieu ambiant est négligeable par rapport à la vitesse du front de choc (la température de ce milieu est faible), le choc est considéré comme fort. Cela équivaut à avoir une pression au niveau du front de choc très importante par rapport à celle du milieu ambiant ($p_s \gg p_1$) ou encore un nombre de Mach élevé ($\mathcal{M} \gg 1$). Pour un gaz adiabatique, la limite de choc fort est atteinte à partir de $\mathcal{M} \gtrsim 10$. Ainsi, les relations de RH, déterminées par les Eq. 1.19 à Eq. 1.21, s'écrivent dans la limite de choc fort :

$$\frac{\rho_s}{\rho_1} = \frac{V_s}{v_s} = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \ , \tag{1.22}$$

$$\frac{p_s}{\rho_1 V_s^2} = \frac{u_s}{V_s} = \frac{2}{(\gamma+1)} \ , \tag{1.23}$$

où $\rho_1 V_s^2$, qui intervient dans la relation sur la pression, est la pression bélier. Le taux de compression de la matière au niveau du front de choc s'écrit dans ce cas limite $\mathcal{C}(\gamma) = (\gamma+1)/(\gamma-1)$. Nous calculons le taux de compression pour des gaz qui nous intéressent particulièrement : pour un gaz adiabatique $\gamma = 5/3$, nous obtenons le résultat bien connu $\mathcal{C} = 4$; pour un gaz de photons $\gamma = 4/3$ et $\mathcal{C} = 7$; pour un gaz quasi-isotherme, $\gamma = 1,1$ et $\mathcal{C} = 21$. Les quatre relations que nous avons obtenues sont les conditions au bord que nous allons utiliser par la suite pour intégrer les équations d'Euler non perturbées et perturbées. Nous rappelons que comme ces relations sont déterminées en considérant un choc fort stationnaire, il sera nécessaire de voir ce que cela implique dans les simulations numériques d'onde de choc dynamique.

1.3 La fonction de refroidissement

Dans certains objets astrophysiques, comme ceux que nous étudions, des phénomènes radiatifs apparaissent car il règne dans ces systèmes une forte température ce qui permet au milieu d'être ionisé. Si le gaz se refroidit uniquement en rayonnant et que ces pertes radiatives s'échappent de la zone d'émission instantanément, alors le milieu est considéré comme optiquement mince (d'épaisseur optique $\tau \ll 1$). Sous cette approximation, la perte d'énergie peut être décrite par une fonction de refroidissement $\Lambda(\rho, T)$ qui ne dépend que de la densité et de la température. Mais nous écrivons plutôt Λ en fonction de la densité et de la pression $\Lambda(\rho, p)$ car ce sont, comme nous le verrons dans le chapitre suivant, les variables traitées par le code. Dans l'approximation optiquement mince, le modèle hydrodynamique est peu modifié car la perte d'énergie est introduite en terme source de l'équation de conservation de l'énergie. Le bilan d'énergie défini par l'équation 1.3 devient :

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u(E+p)) = -\Lambda(\rho, p) \,, \tag{1.24}$$

avec

$$\Lambda(\rho, p) = \Lambda_0 \rho^{\epsilon} p^{\zeta} \,, \tag{1.25}$$

où la fonction de refroidissement Λ s'exprime en J.m^{-3}.s^{-1}. Dans la relation 1.25, Λ_0, ϵ et ζ sont respectivement une constante et les exposants caractérisant le processus de refroidissement.
Dans certains objets, comme dans les colonnes d'accrétion des variables cataclysmiques fortement magnétiques que nous présenterons dans le chapitre III, nous considérerons les pertes d'énergies pouvant être liées à deux types de processus. Le premier type de pertes radiatives est due à l'émission bremsstrahlung (libre-libre) apparaissant quand la température est élevée ($T > 10^7$ K). Les constantes de ce processus, décrites par Saxton & Wu [1999], Wu et al. [1994], sont :

$$\Lambda_{0,brem} = 3,9 \times 10^{11} \text{ et } \epsilon = 1,5;\ \zeta = 0,5 \,; \tag{1.26}$$

où $\Lambda_{0,brem}$ est exprimé dans le système MKS.
Le second processus radiatif que nous considérons est un rayonnement cyclotron pouvant aussi être traité dans l'approximation optiquement mince. Les constantes de ce processus, décrites par Saxton & Wu [1999], Wada et al. [1980], Wu et al. [1994], sont :

$$\epsilon = -2,35;\ \zeta = 2,5 \,. \tag{1.27}$$

Pour le refroidissement par rayonnement cyclotron, $\Lambda_{0,cyc}$ n'est pas explicité ce qui rend l'utilisation de ce processus difficile. Dans les simulations d'hydrodynamique avec refroidissement que nous avons réalisées afin d'étudier les colonnes d'accrétion des polaires et les jets d'étoile jeune, nous avons concentré notre étude sur le processus de refroidissement par rayonnement bremsstrahlung.
Les deux types de refroidissement que nous venons de présenter sont valables dans des domaines bornés de température et de pression et leur utilisation doit donc être maîtrisée. De plus, dans le modèle numérique, il est important de bien contrôler le refroidissement car sinon trop d'énergie est retirée. Cette perte excessive d'énergie du système peut conduire à des densités d'énergie très faibles et entraîner aussi, dans certaines zones, des densités négatives, donc amener à des valeurs non physiques. Il est nécessaire de déterminer des critères afin de limiter le refroidissement. Un paramètre nous permettant de vérifier dans quel régime se trouve le système est

le temps de refroidissement t_{ref}. Comme le refroidissement de la zone émettrice ne commence à être effectif qu'à partir d'un instant particulier, il est utile d'estimer le temps de refroidissement afin de vérifier que les pertes radiatives sont bien en train d'agir sur la dynamique du système. Nous comparons pour cela le temps de refroidissement au temps hydrodynamique. Par une analyse aux dimensions de l'équation de conservation de l'énergie (Eq. 1.24), nous obtenons le temps de refroidissement :

$$t_{ref} = \frac{p_s}{(\gamma-1)\Lambda(\rho_s, p_s)} = \frac{p_s^{(1-\zeta)}}{(\gamma-1)\Lambda_0 \rho_s^{\epsilon}}\,, \tag{1.28}$$

où ρ_s et p_s sont respectivement la densité et la pression mesurées au niveau du front de choc. Le temps de refroidissement est déterminé au niveau du front choc car les grandeurs fluides prennent souvent leurs valeurs caractéristiques en ce lieu. Nous allons maintenant discuter du redimensionnement des équations d'Euler afin de pouvoir introduire les valeurs astrophysiques comme conditions initiales des simulations numériques.

1.4 Le redimensionnement

Les valeurs des grandeurs fluides aux échelles astrophysiques sont extrêmes. Par exemple pour les RSN, la densité du milieu ambiant est de l'ordre de 10^{-21} kg. m^{-3} et l'énergie de la supernova atteint 10^{44} J. Si nous introduisons directement ces valeurs en conditions initiales dans un code de calcul numérique, nous arrivons à la limite machine ce qui produit des erreurs numériques. Le problème étant lié à l'électronique du calculateur, il est nécessaire de redimensionner les valeurs astrophysiques pour qu'elles puissent avoir une valeur absolue de l'exposant suffisamment petite pour que les calculs restent faisables. Le procédé nous permettant de réaliser cette opération est le redimensionnement. Il est important de discerner la notion de redimensionnement de celle d'adimensionnement. En effet, par la méthode de redimensionnement, nous sous-entendons la conservation du système d'unité. Cette propriété est très importante car dans le code HADES, que nous décrirons dans le chapitre suivant, nous devons toujours garder les grandeurs physiques afin de pouvoir utiliser des tables d'opacité et des équations d'état.

Pour le réaliser le redimensionnement manière consistante, nous utilisons l'analyse dimensionnelle. Nous devons, dans ce cadre, déterminer les facteurs d'échelle qui permettent de passer des échelles astrophysiques aux échelles numériques. Pour cela, nous devons respecter la stricte conservation des équations d'Euler dans les deux systèmes. Cette conservation permet de faire apparaître les invariants du problème qui lient les grandeurs caractéristiques sans dimension du système astrophysique (notées X_0). Pour les équations de l'hydrodynamique, ces invariants sont le nombre d'Euler $Eu = p_0/(\rho_0 V_0^2)$ et le nombre de Strouhal $St = L_0/(V_0\, t_0)$. Dans ces relations, ρ_0 est la densité caractéristique, p_0 la pression caractéristique, V_0 la vitesse caractéristique, L_0 la distance caractéristique, et t_0 le temps caractéristique du système. Nous démontrons que ces nombres sans

dimension apparaissent dans les équations d'Euler lorsque nous procédons au changement de variable suivant :

$$t = t_0\, t^\star\,, \tag{1.29}$$
$$x = L_0\, x^\star\,, \tag{1.30}$$
$$y = L_0\, y^\star\,, \tag{1.31}$$
$$\rho = \rho_0\, \rho^\star\,, \tag{1.32}$$
$$u_x = V_0\, u_x^\star\,, \tag{1.33}$$
$$u_y = V_0\, u_y^\star\,, \tag{1.34}$$
$$p = p_0\, p^\star\,, \tag{1.35}$$

où les grandeurs astrophysiques sont notées X et les grandeurs redimensionnées sont notées $X^\star$. Nous introduisons ce changement de variable dans les équations d'Euler Eq. (1.1), Eq. (1.2) et Eq. (1.7) et nous obtenons :

$$\left(\frac{L_0}{t_0 V_0}\right)\frac{\partial \rho^\star}{\partial t^\star} + \vec{\nabla}^\star\cdot(\rho^\star \vec{u}^\star) = 0\,, \tag{1.36}$$
$$\left(\frac{L_0}{t_0 V_0}\right)\rho^\star\frac{\partial \vec{u}^\star}{\partial t^\star} + \rho^\star(\vec{u}^\star\cdot\vec{\nabla}^\star)\vec{u}^\star + \left(\frac{p_0}{\rho_0 V_0^2}\right)\vec{\nabla}^\star\, p^\star = 0\,, \tag{1.37}$$
$$\left(\frac{L_0}{t_0 V_0}\right)\frac{\partial p^\star}{\partial t^\star} + (\vec{u}^\star\cdot\vec{\nabla}^\star)p^\star + \gamma\, p^\star\vec{\nabla}^\star\cdot\vec{u}^\star = 0\,. \tag{1.38}$$

Dans ce nouveau système d'équations, les nombres sans dimensions Eu et St apparaissent clairement. Nous indiquons que nous n'avons pas fait de changement de variable sur l'indice adiabatique car γ est aussi un invariant de ce système d'équation.

Nous voulons à présent déterminer le redimensionnement lorsque le processus de refroidissement que nous avons décrit dans le paragraphe précédent intervient. Nous introduisons pour cela la fonction de refroidissement Λ dans l'équation de conservation de l'énergie ($DE/Dt = -\Lambda$). Dans la fonction de refroidissement qui s'exprime comme $\Lambda(\rho, p) = \Lambda_0\rho^\epsilon p^\zeta$, nous devons redimensionner ρ et p, mais aussi la constante physique Λ_0. Ainsi, nous faisons le changement de variable suivant :

$$\Lambda_0 = k_0\Lambda_0^* \text{ et } \Lambda = k_0\rho_0^\epsilon p_0^\zeta\Lambda^*\,. \tag{1.39}$$

Lorsque nous effectuons le changement de variable établit dans le cas purement hydrodynamique et que nous remplaçons Λ par la relation 1.39, nous obtenons une nouvelle relation pour l'équation de conservation de l'énergie (Eq. 1.38) :

$$\left(\frac{L_0}{t_0 V_0}\right)\frac{\partial p^\star}{\partial t^\star} + (\vec{u}^\star\cdot\vec{\nabla}^\star)p^\star + \gamma\, p^\star\vec{\nabla}^\star\cdot\vec{u}^\star = -\left(\frac{L_0}{t_0 V_0}\right)\left(\frac{k_0\rho_0^\epsilon p_0^\zeta\, t_0}{p_0}\right)\Lambda^*\,. \tag{1.40}$$

Nous retrouvons dans cette équation le nombre de Strouhal $St = L_0/(V_0\, t_0)$. Nous avons fait apparaître, dans le membre de droite, un nouveau nombre sans dimension que nous nommons le coefficient de refroidissement χ. Cet invariant, lié au processus de refroidissement, s'exprime :

$$\chi = \frac{p_0}{k_0\rho_0^\epsilon p_0^\zeta\, t_0}\,. \tag{1.41}$$

Nous exprimons le coefficient de refroidissement en fonction du temps de refroidissement t_{ref} définit précédemment. Ce temps mesure l'instant à partir duquel le refroidissement va jouer un rôle dans la dynamique du système. L'invariant χ s'écrit aussi en fonction de cette variable :

$$\chi = \frac{t_{ref}}{t_0} \,. \tag{1.42}$$

Ainsi le coefficient de refroidissement mesure le rapport du temps hydrodynamique sur le temps de refroidissement. Ce rapport nous permet de déterminer deux régimes dans lesquels le système peut se trouver. Si $\chi \gg 1$, le refroidissement est négligeable et le système est purement hydrodynamique ; et si $\chi \ll 1$, alors le refroidissement doit être pris en compte et la dynamique du système est contrôlée par ce processus.
Nous voudrions élargir rapidement la notion d'invariant des équations. Lors du premier redimensionnement des équations d'Euler, nous avons fait apparaître deux invariants. Ces nombres sans dimension caractérisent un fluide purement hydrodynamique. Mais lorsqu'un simple processus radiatif intervient comme des pertes d'énergie par refroidissement, un autre nombre sans dimension est déterminé dans les équations. Ainsi nous voyons que plus le nombre de processus physiques intervenant dans le système augmente, plus le système est contraint car il fait intervenir plus de nombres sans dimension à conserver. De plus, nous avons supposé pour obtenir le coefficient de refroidissement que le régime radiatif est optiquement mince. Lorsque d'autres types de rayonnement doivent être pris en compte (approximation optiquement épaisse ou régime intermédiaire), des nombres sans dimension supplémentaires vont apparaître. Ces invariants permettent de quantifier l'influence qu'à l'émission et/ou l'absorption du rayonnement sur la dynamique du fluide [Bouquet et al., 2010, Falize, 2008]. Ces nombres sont le nombre de Boltzmann $Bo = p_{th,0} L_0 / t_0 F_{rad}$ où F_{rad} est le flux radiatif intervenant dans certains systèmes (particulièrement en laboratoire), et le nombre de Mihalas $R \propto p_{th,0}/E_{rad}$ où E_{rad} est l'énergie radiative [Drake et al., 2006, Michaut et al., 2009] (voir aussi Mihalas & Weibel Mihalas [1984], Zel'Dovich & Raizer [1967]).
Nous présentons à présent les trois types de redimensionnement que nous avons effectués afin de réaliser des simulations numériques des trois objets correspondants.

Le redimensionnement pour les RSN

Dans le cas particulier de l'évolution des ondes de souffle des RSN, certaines grandeurs caractéristiques sont dépendantes des autres et cela a des conséquences sur la détermination du redimensionnement dans ces objets. En effet à cause de la forme de la pression caractéristique, qui est la pression bélier ($p_{ram} = \rho_1 V_s^2$ car $v_1 = V_s$), les équations dimensionnées et redimensionnées sont strictement invariantes. Ainsi les nombres d'Euler et de Strouhal doivent être égaux à 1. Cette égalité nous permet d'obtenir que $L_0 = V_0\, t_0$ et $p_0 = \rho_0\, V_0^2$. Grâce à ces relations et en choisissant comme grandeurs caractéristiques les grandeurs à la fin de la phase de Sedov, nous déterminons le redimensionnement pour les RSN. Cette détermination n'était pas triviale car les valeurs caractéristiques n'émergent pas toujours facilement d'un système donné. Après réflexion et en utilisant les lois analytiques que nous verrons dans la Sec. 4.4.3 et les observables de ce type d'objet , nous avons choisit l'âge du RSN à la fin de la phase de Sedov comme temps caractéristique, la taille du RSN à cette même époque calculée avec une solution auto-semblable comme distance caractéristique, la densité du milieu ambiant

comme densité caractéristique, la vitesse de la même solution auto-semblable comme vitesse caractéristique, et la pression correspondante à l'énergie de l'explosion comme énergie caractéristique. Nous obtenons donc le redimensionnement :

$$t_0 = 10^{10},\, L_0 = 10^{15},\, \rho_0 = 10^{-19},\, V_0 = 10^5,\, p_0 = 10^{-9}\,. \tag{1.43}$$

Pour déterminer les valeurs caractéristiques d'autres quantités macroscopiques comme la température, la masse et l'énergie, nous utilisons de manière proportionnelle la relation sur la température *via* l'équation d'état des gaz parfaits $p = \rho\, k_B\, T/(\mu\, m_H)$, la relation sur la masse $M = \sigma_N\, R_s^{N+1}\rho_1/(N+1)$ et la relation sur l'énergie $\mathcal{E} = p\,\mathcal{D}/(\gamma - 1)$ (voir la définition des relations sur la masse et l'énergie dans la Sec. 4.4.3). Nous trouvons la température caractéristique $T_0 = 10^6$, la masse caractéristique $M_0 = 10^{11}$, et l'énergie caractéristique $\mathcal{E}_0 = 10^{36}$ et ces grandeurs sont reliées comme précédemment au grandeurs dimensionnées et redimensionnées par :

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0\,\mathcal{E}^\star\,, \tag{1.44}$$

$$M = M_0\, M^\star\,, \tag{1.45}$$

$$T = T_0\, T^\star\,. \tag{1.46}$$

Avec ce redimensionnement, il nous est dorénavant possible de réaliser des simulations numériques de l'évolution d'un RSN.

Le redimensionnement pour les variables cataclysmiques fortement magnétiques

Nous déterminons aussi le redimensionnement dans le cas des variables cataclysmiques fortement magnétiques (polaires). Dans ces objets, comme des pertes radiatives interviennent, nous devons donc aussi redimensionner la constante Λ_0 de la perte d'énergie selon la méthode que nous venons de présenter. Ainsi comme pour les RSN, nous choisissons de redimensionner en prenant $Eu = St = \chi = 1$. Nous obtenons la relation $k_0 = V_0/(\rho_0 t_0)$ dans le cas du refroidissement par émission bremsstrahlung ($\epsilon = 1,5\,;\, \zeta = 0,5$) et $k_0 = \rho_0^{0,85}/(t_0 V_0^3)$ pour le refroidissement par émission cyclotron ($\epsilon = -2,35\,;\, \zeta = 2,5$). Comme dans le cas des RSN, les lois du modèle analytique et les observations vont nous fournir les grandeurs caractéristiques. Ces grandeurs permettant d'effectuer le redimensionnement sont donc pour les deux types de refroidissement :

$$t_0 = 1,\, L_0 = 10^5,\, \rho_0 = 10^{-5},\, V_0 = 10^5,\, p_0 = 10^5,\, k_0 = 10^{10}\,. \tag{1.47}$$

C'est le redimensionnement que nous utilisons dans la Sec. 3.2.2 du chapitre III pour réaliser les simulations du choc retour dans la colonne d'accrétion des polaires.

Le redimensionnement pour les jets d'étoile jeune

Comme le refroidissement radiatif intervient aussi dans les jets d'étoile jeune, nous devons prendre en considération ce processus. De la même manière que pour les polaires, nous posons $Eu = St = \chi = 1$. En

utilisant les grandeurs caractéristiques issues de l'observation du jet *HH30* [Hartigan & Morse, 2007], nous obtenons le redimensionnement suivant :

$$t_0 = 10^{10},\ L_0 = 10^{14},\ \rho_0 = 10^{-18},\ V_0 = 10^{4},\ p_0 = 10^{-10}\,, \tag{1.48}$$

et $k_0 = 10^{12}$ pour le refroidissement par émission bremsstrahlung et $k_0 = 10^{6}$ pour le refroidissement par émission cyclotron. C'est le redimensionnement que nous utilisons dans la Sec. 3.3 du chapitre III pour réaliser les simulations de jets d'étoile jeune.
Nous avons ainsi déterminer tous les redimensionnements dont nous aurons besoin pour réaliser les différentes études numériques.

Chapitre 2

Le code HYDRO-MUSCL

Le code HYDRO-MUSCL que j'ai utilisé pendant ma thèse, pour réaliser les simulations numériques de processus astrophysiques, est un code développé par notre équipe. La philosophie d'avoir un code "maison" est de pouvoir connaître les différentes méthodes numériques implémentées dans celui-ci et de pouvoir facilement modifier des parties de ce code afin de modéliser un système particulier ou de résoudre un problème numérique apparent. Afin d'étudier les jets de matière et les chocs radiatifs présents dans divers systèmes, notre équipe a commencé par utiliser le code public CLAW [Leveque, 2002a] qu'il est possible de trouver sur Internet[1]. Mais l'architecture de ce code et le solveur de Riemann implémenté ne permettent pas de simuler des phénomènes à grand nombre de Mach. En effet, nous avons montré que $\mathcal{M} \approx 4$ était la limite de convergence de ce code. C'est la raison pour laquelle nous avons développé un tout nouveau code avec un schéma numérique plus correct et un solveur de Riemann plus robuste. L'exactitude est une propriété qui suppose que le schéma ne produit pas une trop grande quantité de diffusion numérique lors de la discrétisation des termes d'advection (voir Sec. 2.1.5). La robustesse est une autre propriété qui suppose que le schéma produit tout de même une faible quantité de diffusion numérique pour compenser la dispersion numérique qui résulte de la propagation d'erreurs numériques. Un schéma robuste implique aussi que la solution approchée obtenue reste stable. Afin d'acquérir ces propriétés, nous avons introduit un schéma qui s'appuie sur la méthode MUSCL-Hancock (MUSCL signifiant "Monotonic Upstream-Centered Scheme for Conservation Laws") et qui est une amélioration de la méthode de Godunov. Quant à l'algorithme qui résout le problème de Riemann, il est de la même famille que le solveur HLL déterminé par Harten, Lax, et van Leer. Le code HYDRO-MUSCL permet à présent de traiter les problèmes d'hydrodynamique qui nous intéressent, à savoir à grand nombre de Mach. Nous avons aussi implémenté une extension de ce code afin de pouvoir étudier des systèmes hydrodynamiques où les pertes radiatives par refroidissement sont modélisées simplement (code HYDRO-COOL). Nous développons un autre code où le couplage de l'hydrodynamique (HYDRO-MUSCL) et du transfert radiatif est pris en compte (code HADES).
Le code HYDRO-MUSCL est donc le premier aboutissement de cette démarche et sa conception date de 2007.

[1] http ://www.amath.washington.edu/∼claw/clawpack.org/

Les développements réalisés par H. C. Nguyen[2] portent essentiellement sur le schéma et le solveur. Cette version a été parallélisée avec MPI ("Message Passing Interface") par F. Roy en 2008 afin de gagner du temps de calcul et elle fonctionne de manière efficace pour 4 coeurs de calcul (4 coeurs de calcul formant souvent un processeur), c'est-à-dire pour son utilisation sur le cluster de calcul de l'Observatoire de Paris (Siolino). Le code HYDRO-COOL est la première extension du code et elle a été terminée en 2009. Dans cette version, nous avons introduit, en terme source, une fonction de refroidissement afin de traiter les pertes radiatives dans l'approximation d'un milieu optiquement mince (approximation forte et restrictive du couplage hydrodynamique et rayonnement). De plus H. C. Nguyen a rendu cette version plus accessible à l'utilisateur et l'a parallélisée afin de pouvoir utiliser un grand nombre de coeurs de calcul. Le troisième code, HADES, est la version la plus importante car elle représente le travail de thèse de H. C. Nguyen. Il a réalisé pour cette version un couplage de l'hydrodynamique et du rayonnement selon une méthode basée sur la résolution des équations de transfert radiatif par la méthode des moments (méthode M1) et par groupe de fréquence (méthode multigroupe). Ce qui permet d'avoir une description correcte de l'action de l'hydrodynamique sur le rayonnement et de la rétroaction du rayonnement sur l'hydrodynamique.

Etant donnée la chronologie de l'élaboration des différents codes, j'ai utilisé pendant ma thèse le code purement hydrodynamique HYDRO-MUSCL et le code incluant les pertes radiatives HYDRO-COOL. Mais c'est avec le premier code que j'ai obtenu le plus grand nombre de résultats que je présente dans les chapitres suivants.

Avant de réaliser les simulations de systèmes particuliers, mon travail a consisté à tester ce nouveau code, afin de vérifier qu'il convergeait et qu'il présentait les différentes caractéristiques nécessaires à l'obtention de résultats physiques (robustesse, exactitude,...). C'est ce travail de test est présenté dans le chapitre suivant. Au cours de l'utilisation d'HYDRO-MUSCL, j'ai aussi pu évaluer les différents problèmes numériques qu'il pouvait engendrer et remonter à la source de ces erreurs. Toujours à l'aide de ce code, j'ai modélisé les coquilles de gaz choqué des RSN (Sec. 4.5), puis les mêmes coquilles perturbées par des hétérogénéités de densité comme celles présentes dans le MIS (Sec. 5.2.1). J'ai finalement étudié les coquilles perturbées par une fonction sinusoïdale (Sec. 5.2.2). C'est dans cette dernière modélisation que j'ai rencontré un important problème numérique, l'instabilité de grosseur ("carbuncle instability"), et c'est dans la partie correspondant à cette étude que je présenterai cet obstacle à l'étude de l'instabilité de Vishniac. En ce qui concerne les résultats obtenus avec le code HYDRO-COOL, j'ai réalisé des simulations du choc retour dans les colonnes d'accrétion des variables cataclysmiques magnétiques (dites polaires, chapitre III) et de propagation de jets d'étoile jeune (chapitre III) , afin d'étudier l'effet du refroidissement sur la dynamique de ces systèmes. Mais pour l'instant, nous allons voir une description plus détaillée du code HYDRO-MUSCL.

2.1 La description du code HYDRO-MUSCL

La modélisation numérique d'un phénomène physique donne accés à des informations parfois inaccessibles à des modèles théoriques[3]. Le code HYDRO-MUSCL, qui résout le système d'équations décrivant la

[2] H. C. Nguyen est un doctorant de l'équipe, spécialisé en mathématiques appliquées.

[3] Si nous nous plaçons dans le cas de l'hydrodynamique, le code numérique résout les mêmes équations que celles à la base d'un modèle analytique décrivant le problème. Mais à la différence de ce modèle théorique où une (ou plusieurs) solutions analytiques

dynamique des écoulements fluides, permet la réalisation de simulations de divers processus hydrodynamiques comme ceux apparaissant dans les RSN, les jets d'étoile jeune ou encore les polaires. Nous synthétisons dans cette introduction l'architecture du code HYDRO-MUSCL afin de bien comprendre le rôle des différentes méthodes numériques qui le constituent. Nous présentons ces méthodes plus en détails dans les sous-sections suivantes. Les équations qui sont résolues dans le code sont les équations d'Euler écrites sous forme conservative (forme explicite de la conservation de la densité, de l'impulsion et de la densité d'énergie totale). Un terme source géométrique est aussi introduit de manière optionnelle afin de pouvoir résoudre les équations d'Euler axisymétriques car, dans ce cadre particulier, des termes supplémentaires apparaissent. Ces termes sources permettent ainsi de modéliser une symétrie cylindrique bien utile dans le cas des jets d'étoile jeune et des RSN.
Pour pouvoir prendre en compte d'autres processus physiques spécifiques, nous les plaçons aussi en terme source si leur nature le permet. La grille, sur laquelle sont discrétisées les équations de l'hydrodynamique par la méthode des volumes finis, est une grille cartésienne à deux dimensions. Pour pouvoir résoudre le système d'équations différentielles partielles (EDP) avec d'éventuels termes sources, nous devons étudier le problème par morceaux. La scission est faite selon le découplage de Strang ("Strang splitting") en espace, en temps et en type d'équations. En effet, nous discernons la résolution des équations d'Euler dans les deux directions de la grille et nous différencions la résolution du système homogène (EDP où le terme source est annulé) et la résolution des équations différentielles ordinaires (EDO, seule la différentielle totale par rapport au temps est considérée). Ainsi la solution globale du système est la réunion des solutions particulières dans chacune des parties qui s'effectue selon une opération particulière (le calcul de la nouvelle valeur des grandeurs conservées est effectué sur un demi pas de temps). Pour déterminer la solution de l'EDO, nous utilisons un schéma de Runge-Kutta explicite du second ordre qui préserve la stabilité du système sur un nombre important de pas de temps. En ce qui concerne la détermination de la solution des équations d'Euler homogène, nous utilisons le schéma de MUSCL-Hancock qui est une amélioration du schéma de Godunov car il permet d'obtenir une solution approchée au second ordre en espace et en temps de la solution exacte. Dans cette partie, le flux présent sur les interfaces des cellules est déterminé. Afin de permettre ce calcul, le schéma est construit en trois temps : d'abord la solution approchée aux bords est déterminée *via* la reconstruction des données faisant appel à un limiteur de pente afin de minimiser l'erreur, ensuite les solutions approchées aux bords évoluent temporellement, et finalement le solveur résout le problème de Riemann ce qui permet de déterminer la vitesse des ondes du système. Les solveurs que nous avons implémentés dans le code sont les solveurs HLLC et HLLE et ils sont adaptés pour les cas physiques que nous voulons étudier. Le modèle de parallélisme utilisé dans cette version est MPI et cette méthode permet de découper le domaine de simulation en sous-domaines traités chacun par un coeur de calcul différent. Nous allons maintenant détailler le rôle des différents modules implémentés dans le code.

peuvent être déterminées, dans les simulations numériques, une multitude de solutions peut être obtenue. Il reste toutefois au numéricien d'être critique sur ce panel de solutions obtenues afin de discerner les solutions non physiques.

2.1.1 La grille

La grille cartésienne à deux dimensions permet aux différentes grandeurs d'évoluer sur le plan (x,y). En effet, chacune de ces grandeurs caractéristiques correspond à une onde qui se propage d'une maille (i, j) à la maille suivante $(i \pm 1, j)$ (ou encore $(i, j \pm 1)$) et qui résulte de la différence des solutions présentes dans chaque maille. Ainsi la vitesse est divisée en deux composantes que nous noterons dans ce chapitre u sur l'axe O_x et v sur l'axe O_y. Si nous considérons l'axe O_x, les noeuds de maille $(\dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots)$ sont positionnés au centre des cellules comme nous le voyons sur la figure 2.1. Le pas spatial Δx est donné, pour la cellule x_i,

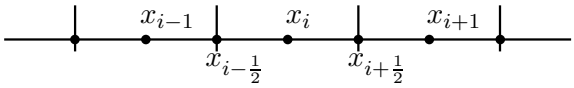


FIG. 2.1 – Discrétisation de l'espace : les noeuds de maille sont positionnés au centre des cellules et le pas spatial est $\Delta x = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$. Issu de Nguyen [2007].

par l'écart présent entre deux bords de cette même cellule $\Delta x = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$. Nous précisons que la grille à deux dimensions est constituée de mailles carrées ou rectangulaires et que les pas spatiaux Δx et Δy y sont réguliers. Cette grille nous permet de discrétiser les équations d'Euler que nous présentons maintenant.

2.1.2 Les équations d'Euler

Les équations d'Euler dépendantes du temps forment un système de lois de conservation hyperboliques et non-linéaires. Le code que nous avons implémenté permet la résolution de ces équations sous forme conservative. Le système impliqué s'écrit de manière générale sous cette forme particulière :

$$\frac{\delta \vec{U}}{\delta t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{H} = \vec{S}, \tag{2.1}$$

où les quantités qui interviennent dans cette équation sont le vecteur des grandeurs conservées $\vec{U}$, le vecteur des flux $\vec{H}$ de ces mêmes grandeurs et le terme source $\vec{S}$. Le terme $\vec{\nabla} \cdot \vec{H}$ est, comme nous l'avons déjà vu, un terme d'advection. Les lois de conservation énoncent que, quand nous intégrons ce système d'équations, nous obtenons naturellement la conservation de la densité, de la quantité de mouvement selon les deux directions et de la densité d'énergie. Il reste donc à calculer les flux de ces quantités et le traitement de ce calcul est un point important dans le code.
La grille étant bi-dimensionnelle, les équations traitées dans le code décrivent aussi un système à deux dimensions. Ainsi le vecteur de flux se divise en deux composantes F et G et l'Eq. 2.1 s'écrit [Toro, 1999] :

$$U_t + F(U)_x + G(U)_y = S(U) \ , \tag{2.2}$$

où les indices notent la dérivée partielle par rapport au temps t et à l'espace selon O_x et O_y. Les fonctions s'expriment :

$$U = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ u(E+p) \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ v(E+p) \end{bmatrix}, \tag{2.3}$$

où $E = p/(\gamma - 1) + (1/2)\rho\sqrt{u^2 + v^2}$ est toujours la densité d'énergie totale prenant en compte les deux composantes de la vitesse, et F et G sont les deux fonctions de flux dans chacune des directions. Dans ce système, les fonctions décrivant les grandeurs physiques sont $\rho = \rho(x, y, t)$, $u = u(x, y, t)$, $v = v(x, y, t)$, et $p = p(x, y, t)$. Quant au vecteur des grandeurs conservées, sa fonction est notée $U(x, y, t)$. Nous précisons que dans ce système, comme nous traitons encore un cas général où nous n'avons pas spécifié de propriétés géométriques, le terme source S est inexistant ou seulement un terme source physique. Par contre si le système est axisymétrique, c'est-à-dire s'il existe dans un système à trois dimensions une symétrie par rapport à un des axes ce qui permet de ramener le système à deux dimensions, alors un terme source géométrique apparaît en supplément d'un terme source physique le cas échéant.

Dans la configuration d'une symétrie cylindrique, nous déterminons les propriétés géométriques qu'il faut inclure à ce système. L'axe le long duquel s'effectue la symétrie est l'axe O_z qui se nomme maintenant la direction axiale. Nous introduisons aussi la coordonnée r qui mesure la distance à l'axe de symétrie O_z et l'axe qui résulte de cette variable est l'axe radial O_r. Ainsi les équations d'Euler décrivant un espace à trois dimensions font normalement appel à trois coordonnées mais dans le cas axisymétrique, le système se réduit à deux dimensions. Ce système axisymétrique s'écrit [Toro, 1999] :

$$U_t + F(U)_r + G(U)_z = S(U) \ , \tag{2.4}$$

où U, F et G sont les mêmes vecteurs que précédemment et $S = S_{phys} + S_{geo}$ est le terme source global qui peut contenir une partie physique S_{phys} à laquelle vient s'ajouter la partie géométrique S_{geo} qui s'écrit :

$$S_{geo} = -\frac{1}{r} \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 \\ \rho uv \\ u(E+p) \end{bmatrix}. \tag{2.5}$$

Si le terme source est non nul, la résolution du système d'équation n'est pas directe. En effet il faut diviser le problème en deux parties et résoudre chacune des parties séparément. De la même manière, le système d'équations doit être résolu sur chacune des directions de l'espace. Ces opérations sont rendues possibles par le découplage de Strang que nous présentons maintenant.

2.1.3 Le découplage de Strang

Pour résoudre les équations d'Euler sous forme conservative et avoir un schéma du second ordre en espace et en temps, nous utilisons le découplage de Strang du même ordre [Strang, 1968]. Mais avant de

présenter cette méthode, nous discrétisons le vecteur des grandeurs conservées selon l'espace et le temps : $U(x,y,t)$ devient $U^n_{i,j}$ que nous notons U^n lorsque seule une évolution temporelle du vecteur est effectuée. La nouvelle fonction $U^n_{i,j}$ est une solution approchée du vecteur de solutions physiques. Dans cette formulation, le temps est discrétisé par les éléments t^n où l'entier n varie de 0 à N. Quant à l'espace, il est discrétisé par les points de maille $x_{i,j}$ où les entiers (i,j) varient respectivement de $1-n_f$ à m_x+n_f et de $1-n_f$ à m_y+n_f où n_f est le nombre de cellules fantômes et m_x, m_y sont les maximums du nombre de cellules présentes dans la boîte de simulation pour les deux directions. Nous précisons que la valeur $n=0$ détermine les conditions initiales et que les valeurs $i = 1-n_f, 1-n_f+1, \ldots, 0$ et $i = m_x+1, \ldots, m_x+n_f-1, m_x+n_f$ déterminent les conditions aux bords (même chose pour l'entier j). Nous formulerons dans ce qui suit les conditions aux bords qu'il est nécessaire de déterminer afin de pouvoir résoudre le système d'équations.
Le découplage de Strang s'effectue sur le temps, sur l'espace et sur le type d'équations d'Euler, comme ces différents aspects sont difficiles à traiter simultanément (mais ce n'est pas impossible). Cette méthode permet donc de simplifier grandement la résolution des équations. Pour le découplage spatial, le vecteur de solutions U^n prend la valeur suivante au temps t^{n+1} :

$$U^{n+1} = \mathcal{Y}^{(\frac{1}{2}\Delta t)}\mathcal{X}^{(\Delta t)}\mathcal{Y}^{(\frac{1}{2}\Delta t)}(U^n)\ , \tag{2.6}$$

où Δt est le pas de temps, et $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ sont respectivement les opérateurs de solution de l'axe O_x et de l'axe O_y. Pour le découplage du type d'équation, le vecteur de solutions U^n prend la valeur suivante au temps t^{n+1} :

$$U^{n+1} = \mathcal{S}^{(\frac{1}{2}\Delta t)}\mathcal{Z}^{(\Delta t)}\mathcal{S}^{(\frac{1}{2}\Delta t)}(U^n)\ , \tag{2.7}$$

où $\mathcal{S}$ et $\mathcal{Z}$ sont respectivement les opérateurs de solution de l'EDO et de l'équation d'Euler homogène (EDP). Ainsi, pour chacun des découplages, la méthode de Strang permet de découper la résolution du système global en la résolution de deux systèmes séparément. Cette méthode facilite donc la résolution du système d'équations. Nous détaillons la résolution des deux types d'équations dans le paragraphe suivant.

2.1.4 La résolution de l'équation différentielle ordinaire

L'équation différentielle ordinaire s'écrit :

$$\frac{d}{dt}U(\cdot,t) = S\left(U(\cdot,t)\right)\ , \tag{2.8}$$

où le point $(\cdot)$ désigne n'importe quelle position de l'espace. Cette équation est résolue par un Runge-Kutta d'ordre 2 à condition que le terme source soit non raide (présence de gradients pas trop forts). Pour déterminer la méthode optimale, nous avons testé aussi la méthode de Heun, la méthode du point milieu, et des Runge-Kutta d'ordre 3 et 4 dans le cadre de simulations de jets d'étoile jeune (voir Nguyen et al. [2010]). Les résultats montrent que ces différentes méthodes ne changent pas la valeur des grandeurs caractéristiques (la variation est négligeable) étant donné le second ordre présent dans tous les schémas énoncés. Techniquement, nous calculons ce terme dans un module différent en faisant appel aux valeurs des grandeurs fluides calculées lors de la résolution des équations d'Euler homogènes présentées ci-après. Mais d'abord, nous rappelons les deux types de termes sources qui vont nous être utiles.

Le terme source géométrique

Nous avons vu que la symétrie pouvant être introduite dans la boîte de calcul est une symétrie cylindrique et qu'elle est permise par le terme source géométrique S_{geo}. En effet ce terme permet d'introduire un axe de révolution sur un des bords de la boîte de simulation et donc d'être dans un système axisymétrique.

Le terme source physique : la fonction de refroidissement

Pour les différentes études effectuées dans cette thèse, nous n'avons utilisé qu'un seul type de terme source physique qui est lié à l'émission de rayonnement. Mais il existe d'autres termes sources de cette nature qui permettent d'étudier un système où un effet physique supplémentaire est pris en compte (par exemple, les équations d'Euler avec de la gravité). Le terme source physique S_{phys} que nous avons introduit est un vecteur contenant la fonction de refroidissement Λ présentée dans la Sec. 1.3. En effet, nous avons vu qu'une manière de traiter, dans un milieu optiquement mince, les processus radiatifs qui ont une rétroaction sur la dynamique du système est d'introduire une perte ou un gain d'énergie dans l'équation de conservation de l'énergie. Dans le cas du processus de refroidissement, la perte d'énergie se modélise par une fonction de refroidissement. Le terme source physique s'écrit dans ce cas :

$$S_{phys} = - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \Lambda(\rho, p) \end{bmatrix} . \tag{2.9}$$

Nous avons implémenté ce terme source dans le code HYDRO-COOL. Nous utiliserons cette extension pour réaliser des simulations de jets d'étoile jeune et de variables cataclysmiques fortement magnétiques que nous verrons dans les prochains chapitres.

2.1.5 La résolution de l'équation d'Euler homogène

Comme nous avons découplé les deux directions spatiales, l'équation d'Euler homogène est déterminée sur O_x par :

$$U_t + F(U)_x = 0 \, . \tag{2.10}$$

Cette équation est obtenue en annulant le terme source dans la relation Eq. 2.2 ($S\left(U\right) = 0$). La résolution de ce système est une partie très importante qui doit être implémentée avec attention dans le code. Nous détaillons par étapes la détermination de la solution de ce problème et les différentes méthodes qu'elle nécessite.

La méthode des volumes finis

Le système d'équations est discrétisé par la méthode des volumes finis (voir Leveque [2002b], Toro [1999]). Cette méthode approchée est conservative et cette propriété est très importante pour résoudre des équations de conservation. Dans ce cadre, il ne nous reste donc qu'à déterminer le flux dans les équations d'Euler homogènes.
La méthode des volumes finis consiste à obtenir l'évolution des grandeurs exactes $\widetilde{U}(x,t^n)$ en les moyennant sur des volumes grâce à l'utilisation d'une forme intégrale des équations de conservation. Sur l'intervalle $I_i = [x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$, les grandeurs moyennées U_i^n sont définies par :

$$U_i^n = \frac{1}{\Delta x}\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \widetilde{U}(x,t^n)\,dx\ , \tag{2.11}$$

où nous rappelons que $\Delta x = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$. Ainsi, lorsque nous intégrons le système 2.10 sur le temps et sur l'espace, nous obtenons l'évolution de la solution approchée. Au temps t^{n+1}, cette fonction s'écrit :

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{1}{\Delta x}\Big[\int_{t^n}^{t^{n+1}} F(\widetilde{U}(x_{i+\frac{1}{2}},t))\,dt - \int_{t^n}^{t^{n+1}} F(\widetilde{U}(x_{i-\frac{1}{2}},t))\,dt\Big]\ . \tag{2.12}$$

La difficulté qui se pose à présent est d'arriver à évaluer les deux intégrales du flux F. Nous remarquons que cette fonction doit être calculée sur les interfaces entre les cellules. Ce problème de détermination du flux est surmonté grâce au schéma de Godunov du premier ordre et à l'amélioration au second ordre de celui-ci que nous présentons dans les deux paragraphes suivant.

Le schéma de Godunov

Les méthodes de Godunov [Godunov, 1959], qui permettent la capture des ondes de choc par le code numérique, ont été appliquées avec succès au calcul des flots compressibles non visqueux et non-linéaires. En effet, ce sont des méthodes robustes et particulièrement adaptées aux chocs possédant une structure complexe. Dans cette approche, l'interaction des états constants est déterminée de manière exacte *via* les fonctions de flux et le résultat obtenu est moyenné de manière conservative. La solution numérique obtenue avec ces méthodes permet de simuler correctement la discontinuité car le front de choc généré est presque parfaitement fin. En effet, le profil monotone obtenu s'étale sur quelques cellules et il n'y a pas d'oscillations non physiques dans cette zone. Ainsi c'est une méthode en générale stable mais diffusive car il y a un problème d'erreur sur la discrétisation des termes d'advection. Mais ce schéma décentré en amont ("upwind") est du premier ordre ce qui ne permet pas toujours la convergence du code vers la solution physique.
Cette méthode repose sur l'approximation du flot hydrodynamique par un grand nombre d'états constants comme représenté sur la figure 2.2. Avec ce schéma, la solution approchée U_i^n est égale à la solution exacte $\widetilde{U}(x,t^n)$ au noeud x_i de la grille et les états gauche $U_i^{n,L}$ et droit $U_i^{n,R}$ sont égaux à cet état constant. À l'interface $x_{i+\frac{1}{2}}$ séparant deux cellules, $U_i^{n,R}$ et $U_{i+1}^{n,L}$ sont très différents s'il y a dans le flot un fort gradient des grandeurs conservées.

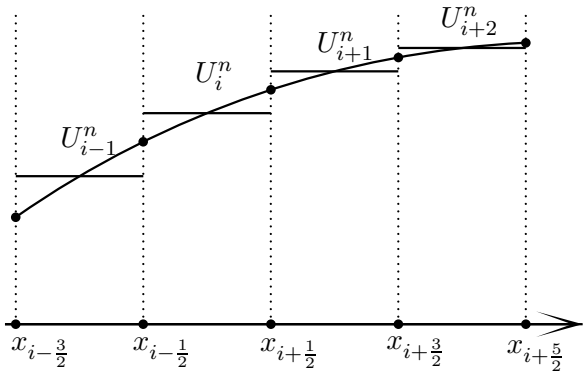


FIG. 2.2 – Schéma de Godunov : approximation du flot hydrodynamique par un grand nombre d'états constants. La solution approchée U_i^n est constante sur la maille et est égale à la solution exacte $\widetilde{U}(x, t^n)$. Issu de Nguyen [2007].

Le point important de la méthode de Godunov est qu'elle permet le calcul de l'intégrale de la fonction de flux de l'Eq. 2.12. Ainsi la solution approchée U_i^n prend la valeur suivante au temps t^{n+1} :

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}[F_{i+\frac{1}{2}} - F_{i-\frac{1}{2}}] \ , \tag{2.13}$$

où $F_{i+\frac{1}{2}}$ est le flux approché et qui est donc une moyenne temporelle de la fonction de flux. Ce flux intercellulaire s'exprime au bord droit par $F_{i+\frac{1}{2}} = F(U_{i+\frac{1}{2}}(x/t))$ et il dépend donc de la solution auto-semblable $U_{i+\frac{1}{2}}(x/t)$. Le vecteur de solutions $U_{i+\frac{1}{2}}(x/t)$ est la solution du problème de Riemann que nous allons voir ci-dessous. Comme nous l'avons précisé, le schéma de Godunov est du premier ordre et la solution déterminée par la relation que nous venons de formuler ne converge pas toujours vers la solution physique. Ainsi nous présentons le schéma MUSCL-Hancock qui est une amélioration du schéma de Godunov.

Le schéma MUSCL-Hancock

Afin d'améliorer la convergence du code, le passage aux ordres élevés de la méthode précédente est obligatoire. van Leer [1979] a écrit l'extension au second ordre des méthodes de Godunov et c'est celle que nous avons introduite dans le code. Mais il existe d'autres méthodes d'ordre élevé (voir par exemple la "Piecewise Parabolic Method" (PPM) de Colella & Woodward [1984]). L'amélioration de van Leer, nommée MUSCL, est un schéma de Godunov au second ordre en espace qui fait appel à la technique de prédicteur-correcteur. En passant par un état intermédiaire, cette méthode permet de reconstruire les données de manière linéaire et plus correcte. Ainsi les états constants de la méthode de Godunov sont modifiés. La partie Hancock du schéma MUSCL-Hancock est une amélioration permettant d'avoir un second ordre en temps [Berthon, 2006].
Nous décrivons le schéma MUSCL-Hancock qui repose sur trois étapes de calcul : d'abord la reconstruction des données est effectuée, ensuite nous procédons à l'évolution de la solution sur le bord des cellules et finalement le problème de Riemann est résolu.

1. *La reconstruction des données*

   La reconstruction des données permet la détermination des conditions aux bords de chacune des cellules. La méthode utilisée dans le schéma MUSCL-Hancock améliore ces valeurs aux bords et elle est contrôlée par un limiteur de pente afin de minimiser l'erreur sur cette détermination. Nous avons vu dans la méthode de Godunov que si nous prenons pour chacune des cellules une solution approchée avec une valeur constante, alors les états gauches et droits de deux cellules voisines peuvent être très différents et ce saut de grandeurs peut créer des problèmes numériques. Afin d'améliorer ce point, la solution approchée est maintenant traitée comme une fonction linéaire $U_i(x)$ passant par le centre de la maille, comme illustré sur la figure 2.3. Cette description permet de diminuer l'écart présent entre les solutions $U_i^{n,R}$ et $U_{i+1}^{n,L}$.

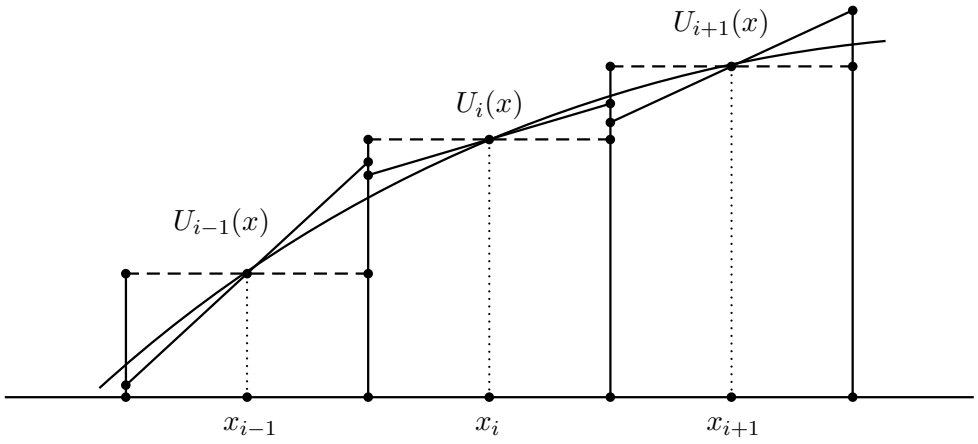


FIG. 2.3 – Reconstruction des données : la solution approchée n'est plus une succession d'états constants mais une fonction linéaire par morceaux. L'état constant est modifié à gauche et à droite de la cellule et l'écart entre deux solutions au bord est diminué. Issu de Nguyen [2007].

La solution approchée s'exprime maintenant par :

$$U_i(x) = U_i^n + \frac{(x - x_i)}{\Delta x}\Delta_i \ , \quad x \in I_i = [x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}] \ , \tag{2.14}$$

où Δ_i est un vecteur qui représente la pente dans l'intervalle I_i. Les états gauche et droit de ce même intervalle sont déterminés par :

$$U_i^{n,L} = U_i(x_{i-\frac{1}{2}}) = U_i^n - \frac{1}{2}\Delta_i \ , \tag{2.15}$$

$$U_i^{n,R} = U_i(x_{i+\frac{1}{2}}) = U_i^n + \frac{1}{2}\Delta_i \ . \tag{2.16}$$

Cette nouvelle formulation permet donc d'améliorer les valeurs extrapolées aux bords mais elle peut aussi être problématique. En effet, la droite peut avoir une pente importante et si elle dépasse une certaine limite, le schéma peut devenir instable et produire des oscillations numériques. Pour éviter ce problème, nous utilisons un limiteur de pente. Cette technique permet d'assurer une reconstruction des données

monotone et sans oscillation. La pente est choisie telle que :

$$\Delta_i = \frac{1}{2}(1+\omega)(U_i^n - U_{i-1}^n) + \frac{1}{2}(1-\omega)(U_{i+1}^n - U_i^n) \ , \tag{2.17}$$

où ω est un paramètre arbitraire, $\omega \in [-1, 1]$. La valeur de ω est choisie selon le critère de stabilité du schéma. Dans les simulations que nous avons réalisées, ce paramètre a été choisi de manière adaptée pour limiter la pente lorsqu'il y a de forts gradients dans le système (il est particulièrement adapté aux ondes de choc). Ainsi, le limiteur de pente utilisé dans le code limite le flux en fonction du problème traité. Les autres limiteurs existant, donnés pour autre formulation de Δ_i, sont le limiteur VanLeer, MinMod, Falle, Upwind, et Lax-Wendroff (voir Leveque [2002b], Toro [1999]).

2. *L'évolution*

   L'évolution est l'étape de calcul spécifique à l'amélioration Hancock. Elle permet d'obtenir le second ordre en temps dans le schéma. L'évolution consiste à calculer la nouvelle valeur des états gauche et droit après un demi pas de temps d'incrémentation. Les solutions approchées prennent la forme sur les bords des cellules :

$$U_i^{n+\frac{1}{2},L} = U_i^{n,L} - \frac{\Delta t}{2\Delta x}[F(U_i^R) - F(U_i^L)] \ , \tag{2.18}$$

$$U_i^{n+\frac{1}{2},R} = U_i^{n,R} - \frac{\Delta t}{2\Delta x}[F(U_i^R) - F(U_i^L)] \ . \tag{2.19}$$

3. *La résolution du problème Riemann*

   La résolution du problème de Riemann présent sur l'interface séparant chaque cellule se fait grâce à un solveur de Riemann. Cet outil permet, en déterminant la solution de ce problème, de calculer la vitesse de propagation des ondes qui contiennent l'information de l'évolution du système et qui sont générées par les conditions initiales. En comparaison d'autres approches comme les codes particulaires ("Smoothed Particle Hydrodynamics", SPH), les solveurs de Riemann ont la propriété de produire de la dissipation visqueuse (le front de choc est lissé sur plusieurs cellules), ce qui ne nécessite pas une addition de viscosité artificielle.

   Le problème de Riemann repose sur la présence d'une discontinuité entre des états voisins. Comme nous l'avons déjà montré, le flot discrétisé est constitué initialement des deux états constants U_i^n et U_{i+1}^n séparés par une discontinuité, comme visible sur la figure 2.4. Ainsi nous devons résoudre l'équation d'Euler homogène sur chaque cellule en prenant en compte des conditions aux bords spécifiques. Le problème de Riemann est résumé par le système :

$$\begin{cases} U_t + F(U)_x = 0 \ , \\ U(x, t^n) = \begin{cases} U_i^{n,R} & \text{, si } x < x_{i+\frac{1}{2}} \ . \\ U_{i+1}^{n,L} & \text{, si } x > x_{i+\frac{1}{2}} \ . \end{cases} \end{cases} \tag{2.20}$$

   La discontinuité présente entre deux cellules voisines permet la génération de trois ondes comme illustrée sur le diagramme d'espace-temps de la figure 2.5 Ces trois ondes sont l'onde de choc de vitesse $u + c_s$, l'onde d'entropie (aussi nommée onde de contact car elle engendre la discontinuité de contact) de vitesse

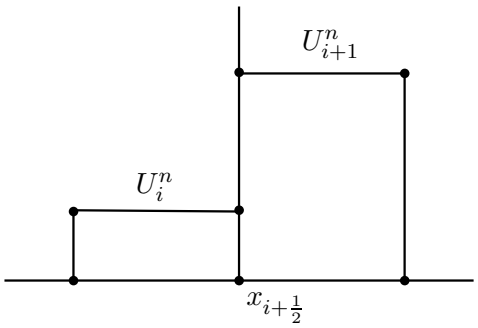


FIG. 2.4 – Problème de Riemann présent sur les interfaces séparant les cellules. Les deux états constants U^n_i et U^n_{i+1} sont séparés par une discontinuité que le solveur doit résoudre. Issu de Nguyen [2007].

u, et l'onde de raréfaction de vitesse $u - c_s$. L'onde de choc et l'onde de raréfaction dépendent de la vitesse du son c_s. Les trois ondes sont auto-semblables car elles suivent les caractéristiques linéaires en (x/t) et la solution approchée de ce problème est $U_{i+\frac{1}{2}}(x/t)$.

En fonction du type de solveur utilisé, la vitesse des ondes est déterminée de manière plus ou moins

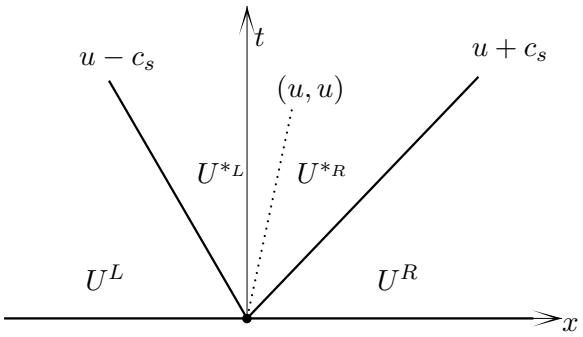


FIG. 2.5 – Diagramme d'espace-temps des trois ondes capturées par le solveur HLLC : l'onde de choc ($u + c_s$), l'onde d'entropie (u), et l'onde de raréfaction ($u - c_s$). Des états intermédiaires U^{*R} et U^{*L} sont introduits. Issu de Nguyen [2007].

exacte. C'est sur ce calcul que réside la différence entre les solveurs de la famille des HLL [Harten et al., 1983], comme ceux implémentés dans le code. Nous utilisons les solveurs de cette famille car ils sont connus pour leur efficacité (meilleur compromis entre exactitude et vitesse de calcul), leur robustesse (peu d'oscillations numériques) et de conserver la positivité (pas de densité et de température négative). Nous avons introduit dans le code deux solveurs de Riemann interchangeables de type HLL afin de pouvoir simuler plusieurs types d'objets astrophysiques. Ce sont les solveurs HLLC [Toro et al., 1994] et HLLE [Einfeldt, 1988]. Ces deux solveurs approchés sont presque aussi corrects que le solveur exacte (voir le test du tube à choc de la Sec. 3.1.1) car ils capturent correctement l'onde de choc, l'onde retour et l'onde de contact générées par le problème de Riemann. La résolution de la discontinuité de contact par ces solveurs est une propriété importante car sans la prise en compte de cette onde, le système n'est pas complet. Dans la première formulation de ce type de solveur, le solveur HLL de Harten et al. [1983],

seules l'onde la plus rapide et la plus lente étaient capturées. Ainsi, les solveurs HLLC et HLLE sont une amélioration notable du solveur HLL. Mais la contrepartie de la résolution de cette discontinuité est que l'algorithme résultant est plus diffusif que dans les autres algorithmes. Nous montrerons cet effet dans le test du tube à choc de la Sec. 3.1.1 et dans le test de la résolution de la Sec.3.1.2.
La raison pour laquelle nous avons implémenté deux solveurs est que, bien entendue, il existe une différence entre ceux-ci. En effet, le solveur HLLE calcule la vitesse des ondes en faisant une approximation de la vitesse du signal le plus rapide et le moins rapide. De plus, l'approche intégrale qui est utilisée dans ce solveur ne permet pas de résoudre exactement la discontinuité de contact. Cette méthode produit donc une dissipation numérique importante pouvant être problématique dans certaines simulations. Quand au solveur HLLC, il calcule les nombreuses valeurs propres de la matrice Jacobienne des équations d'Euler et les ondes de vitesse correspondent à ces valeurs propres. Cette méthode permet au solveur de mieux gérer les fronts raides et ainsi de permettre les simulations de chocs avec des nombres de Mach élevés ($\mathcal{M} \gg 100$) ce qui n'est pas réalisable avec le solveur HLLE. De plus, ce solveur résout exactement la discontinuité de contact et sa dissipation numérique est faible. Ainsi une différence importante entre ces deux solveurs est leur dissipation numérique et nous verrons ce que cela implique lors de l'étude de l'instabilité de Vishniac et particulièrement au moment où nous résoudrons le problème lié à l'instabilité de grosseur. De ce fait, le solveur HLLC est plus adapté aux simulations de jets et celui HLLE pour les RSN.
Les autres solveurs de Riemann connus sont le solveur exacte, de Roe, de van Leer, et les autres solveurs de la famille des HLL (HLLD,...).

2.1.6 Le pas temporel

Le pas de temps Δt calculé dans le code est adaptatif et contrôlé par la condition de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) [Courant et al., 1928]. Cette condition impose que le domaine de dépendance numérique doit contenir le domaine de dépendance physique, c'est-à-dire que la solution numérique vers laquelle le code converge doit être aussi une solution physique. Techniquement, le nombre de Courant C_{cfl} est un compromis entre la diffusivité et la stabilité du code et ce compromis a un impact sur le temps de calcul. Sa valeur doit être choisie dans l'intervalle $0 < C_{cfl} < 1$ où les deux bornes correspondent respectivement à la limite diffuse et à la limite instable. Comme la grille est à deux dimensions, nous devons définir deux nombres de Courant $C_{cfl,x}$ et $C_{cfl,y}$ pour chacune des directions. Ils sont déterminés par :

$$C_{cfl,x} = (|u^n_{i,j}| + c^n_{s,i,j})\frac{\Delta t}{\Delta x},\ C_{cfl,y} = (|v^n_{i,j}| + c^n_{s,i,j})\frac{\Delta t}{\Delta y}\,, \tag{2.21}$$

où u est la vitesse sur O_x, v sur O_y, c_s est la vitesse du son, et Δx et Δy les pas spatiaux. Ces nombres caractérisent donc la propagation des ondes présentes dans la grille et il faut que la vitesse de propagation soit en bon accord avec les pas spatiaux et temporel sinon on perd la cohérence du système. Cette condition s'exprime :

$$0 < C_{cfl} = \max\left(C_{cfl,x}, C_{cfl,y}\right) < 1\ , \tag{2.22}$$

et c'est cette inégalité qui permet de calculer Δt dans le code. Pour déterminer une valeur optimale du nombre de Courant dans le cas particulier des RSN, nous avons effectué un test dans lequel nous avons contraint fortement la condition CFL. Le code est écrit de telle manière qu'il calcule le pas de temps Δt de façon à tendre vers un nombre de Courant donné C_1 et n'accepte l'intégration d'un pas de temps que si le nombre de Courant calculé après cette intégration est inférieur à un nombre de Courant maximum C_2. Habituellement, nous utilisons pour étudier les RSN, $C_1 = 0,8$ et $C_2 = 1,0$ où C_2 est fixé à la valeur maximale correspondant à la limite de stabilité. En effet, au delà de cette limite, le code peut engendrer des instabilités numériques très importantes. Nous testons $C_1 = 0,5$ et $C_2 = 0,6$ qui sont des valeurs plus contraignantes pour l'itération. Nous n'observons pas de différences par rapport à la simulation classique en introduisant ces valeurs de nombre de Courant. Donc dans les simulations que nous avons réalisées, nous avons choisi le nombre de Courant usuel $C_1 = 0,8$ afin d'avoir un pas de temps plus grand que pour $C_1 = 0,5$ et ainsi de limiter la consommation de temps de calcul.

2.1.7 Les conditions aux bords

Les conditions aux bords permettent tout d'abord de contraindre le domaine où sont réalisées les simulations (bord ouvert, sans limite physique, paroi,...). De plus, elles permettent de prendre en compte un processus physique qui n'est pas modélisé dans la boîte de simulation (par exemple le vent d'un pulsar qui ajoute une pression supplémentaire à la pression contrôlant la dynamique d'un reste de supernova) ou encore elles modélisent un effet géométrique particulier comme un axe de symétrie. Techniquement, le choix des conditions aux bords revient à initialiser à une valeur spécifique les cellules fantômes qui sont des cellules hors du domaine numérique. L'ordre du schéma donne le nombre de cellules fantômes n_f à introduire sur les bords (pour le second ordre, $n_f = 2$). Nous donnons le nom des quatre bords sur la figure 2.6. Dans le code HYDRO-MUSCL,

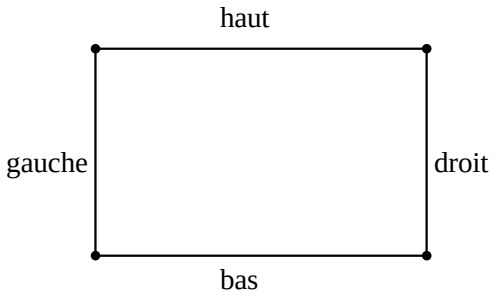


FIG. 2.6 – Nomination des bords de la boîte de simulation.

nous avons introduit quatre types de conditions aux bords : l'interpolation linéaire, la réflexion, le mur solide, et la périodicité. Nous détaillons les propriétés de chacune. L'interpolation linéaire permet au fluide de s'écouler sans contrainte hors de la boîte de simulation. La condition réflective permet de modéliser la géométrie cylindrique du jet et la géométrie sphérique avec une grille cartésienne à deux dimensions. La condition de mur solide est utile pour les simulations de variables cataclysmiques fortement magnétiques où la matière en accré-

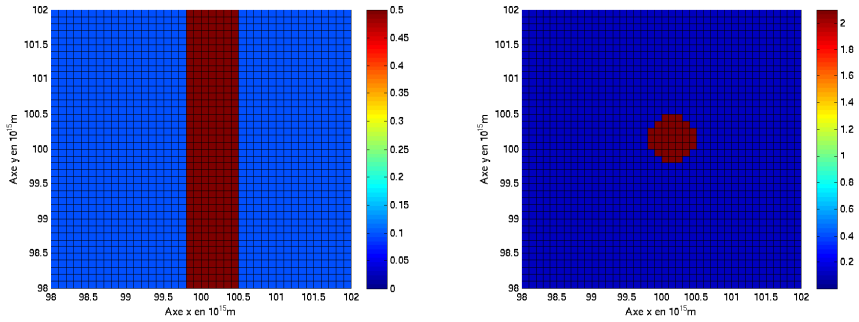
tion rebondit sur la surface de la naine blanche. La condition périodique, permettant comme son nom l'indique une périodicité, est très utile pour les simulations de l'instabilité de Vishniac en géométrie plan-parallèle. Nous détaillerons l'utilisation de ces conditions aux bords dans les parties relatives aux processus physiques étudiés.

2.1.8 La géométrie

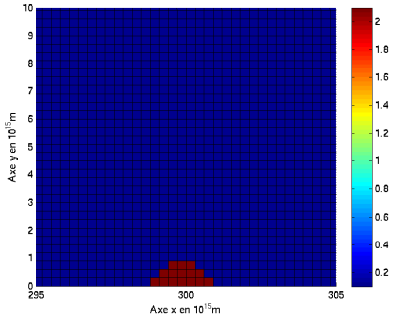
La géométrie est un aspect important de la modélisation d'un problème physique car elle doit permettre de décrire la morphologie d'un objet à 3D dans le plan 2D de la grille cartésienne. Un moyen d'y parvenir et d'utiliser la symétrie cylindrique introduite dans le code et qui est gérée, comme nous l'avons vu, par les termes sources géométriques que nous pouvons activer ou désactiver à notre gré. Cette symétrie cylindrique nous permet d'initialiser la géométrie sphérique dans le cas des RSN et la géométrie cylindrique dans le cas des jets d'étoiles jeunes. Pour les géométries cylindriques et plan-parallèles du RSN et dans le cas des polaires où une modélisation 1D est suffisante en première approximation, nous désactiverons cette symétrie cylindrique. Pour initialiser ces différentes géométries, il faut donc : spécifier les conditions aux bords, indiquer l'utilisation ou non du terme source géométrique et déterminer en conséquence les zones de cellules déterminant les différents fluides étudiés.
Nous présentons un exemple de cette méthodologie *via* l'initialisation des RSN car dans ces systèmes la géométrie change l'évolution du processus dominant et il est donc intéressant de les étudier dans différentes géométries. Dans le tableau 2.1, nous récapitulons les conditions aux bords et l'état d'activation du terme source géométrique. Et sur la figure 2.7, nous représentons les conditions initiales présentent dans la boîte de simulation pour chacune des géométries. Nous détaillons ces cartes de densité à l'instant initial. Dans les trois initialisations, la surpression (aussi une surdensité dans ce cas) permettant de déclencher une onde de souffle (en rouge, voir le test de l'explosion en un point de la Sec. 3.1.2) est placée à un endroit stratégique de la boîte de simulation. Pour la géométrie plan-parallèle, nous plaçons la surpression au milieu de la grille, comme visible sur la figure 2.7(a), sans spécifier de contrainte particulière. Pour la géométrie cylindrique, illustrée sur la figure 2.7(b), nous plaçons cette même marche de pression dans le plan perpendiculaire à l'axe de révolution du cylindre donc il n'y a pas de termes sources géométriques activés. Pour la géométrie sphérique visible sur la figure 2.7(c), nous activons ce terme source car l'axe de révolution du cylindre nous permet de décrire une sphère en introduisant le long de cet axe un demi-cercle de cellule représentant la marche de pression.

Géométries	Sphérique	Cylindrique	Plan-parallèle
Conditions aux bords	B = réflexion G = D = H = interpolation linéaire	H= B = interpolation linéaire G = D = interpolation linéaire	H = B = périodicité G = D = interpolation linéaire
Termes sources géométriques	oui	non	non

TAB. 2.1 – Conditions aux bords et état d'activation du terme source géométrique des simulations de RSN en fonction des différentes géométries (H correspond à haut, B à bas, G à gauche et D à droite).



(a) plan-parallèle (b) cylindrique



(c) sphérique

FIG. 2.7 – Conditions initiales du test d'explosion en un point pour les géométries plan-parallèle (a), cylindrique (b) et sphérique (c) visualisées *via* la carte de la densité en 10^{-19} kg.m^{-3}. La grille de calcul est représentée. Le domaine en rouge correspond à la surpression qui a aussi une densité différente et il est initialisé dans chacun des cas sur quelques cellules. Le domaine en bleu correspond au milieu ambiant.

2.1.9 La parallélisation

La parallélisation d'un code numérique est un procédé qui se développe depuis une vingtaine d'années et il utilisé dans les codes de calcul numérique pour, entre autres, gagner du temps de calcul. Ce procédé consiste traditionnellement à diviser le travail fourni pour traiter un domaine spatial ou une boucle (itération sur l'espace ou le temps) sur plusieurs coeurs de calcul. Une parallélisation parfaite permet de diviser le temps de calcul par le nombre de coeurs de calcul utilisés mais en général, on n'atteint pas cette efficacité. En effet, il n'est pas toujours possible de diviser la tâche (le domaine ou la boucle) correctement car cela dépend de la manière dont le code est écrit. En général, chaque coeur de calcul doit attendre le résultat des autres pour progresser dans le calcul total. Si la tâche de travail est mal divisée, un des coeurs de calcul peut ralentir les autres. Et finalement, la communication entre les processeurs, entités regroupant les coeurs de calcul, passe par le réseau reliant ces exécutants ou bien par les serveurs de calcul et si le réseau est peu performant (débit faible, latence élevée), cela ralentit le calcul. Dans le cas du code HYDRO-MUSCL, la parallélisation a été faite afin de gagner du temps de calcul mais elle n'est pas optimale. C'est pour cette raison que nous utilisons un processeur quadri-coeur où la communication est très rapide et où nous avons observé de bonnes performances. La méthode de parallélisation du code n'est pas très efficace mais elle atteint l'objectif de réduction du temps de calcul. La parallélisation peut aussi permettre d'effectuer ce même travail sur un seul coeur de calcul mais, dans ce cas, elle consiste à lancer de nombreuses fois ce travail en changeant les conditions initiales. J'ai utilisé pendant ma thèse ces deux types de parallélisation basées sur la bibliothèque de fonctions "Message Passing Interface" (MPI) qui sont implémentées dans la code *via* deux versions différentes et nous nous y intéresserons plus en détail. Dans le premier cas, la parallélisation introduite consiste à un découpage régulier de la boîte de simulation et qui est optimal sur 4 coeurs de calcul pour la raison énoncée ci-dessus qui est valable pour Siolino, le serveur de calcul de l'Observatoire de Paris que j'utilise.
Le deuxième cas est une parallélisation à l'ordre 0 utile pour réaliser l'étude paramétrique de l'instabilité de Vishniac sur le supercalculateur Titane (voir Sec. 2.2). Dans cette version, nous n'utilisons pas simultanément plusieurs coeurs de calcul pour réaliser plus rapidement une simulation mais nous lançons simultanément plusieurs simulations chacune fonctionnant sur un coeur de calcul. Nous donnons plus d'information sur ce procédé dans la sous-section 2.2.2.

2.1.10 Les logiciels Matlab et Mathematica

Pour visualiser les fichiers de résultats, nous utilisons des scripts en language Matlab qui nous permettent de travailler directement sur les données. Nous avons en effet en sortie à différents instants et pour chaque points de grille, la masse, la quantité de mouvement selon les axes O_x et O_y et la densité d'énergie pour toute la boîte de simulation. Nous pouvons visualiser et calculer l'évolution de ces quantités au cours du temps. Quant au logiciel Mathematica, il nous servira à déterminer numériquement la solution d'équations de différents modèles analytiques, comme celle de l'évolution auto-semblables des RSN.

2.2 Un outil d'analyse : le supercalculateur Titane

Le supercalculateur Titane, en photographie sur la figure 2.8, est un calculateur récent qui a été construit par BULL et financé par GENCI (Grand Equipement National de Calcul Intensif)[4]. Il a été installé au CCRT (Centre de Calcul Recherche et Technologie)[5] et a été mis en service au printemps 2009. Il est ouvert aux utilisateurs pour la phase de test depuis le mois de mai 2009 et aux projets GENCI depuis la mi-juillet 2009. C'est un cluster de calcul composé de 1068 serveurs BULL, chaque serveur possédant 2 processeurs Intel et

FIG. 2.8 – Le supercalculateur Titane. Crédit : CCRT-CEA.

chaque processeur est formé de quatre cœurs. Au total il y a donc 8544 cœurs de calcul.
Nous présentons maintenant notre projet d'étude paramétrique et les modifications du code que nous avons effectuées pour cette étude.

2.2.1 Le projet d'étude paramétrique

Pour mener à bien notre projet d'étude paramétrique, nous avons obtenu 150 000 h de calcul, ce qui nous a permis de tester environ 2350 jeux de paramètres que nous présenterons après. L'outil puissant qu'est la machine Titane nous a permis de réaliser une étude difficilement réalisable ailleurs que sur un supercalculateur, bien que la grappe de calcul de l'Observatoire de Paris ait déjà une grande capacité et un dynamisme important. Pour fixer les idées, nous avons réalisé une rapide étude de performance du calculateur avec comme conditions initiales celles avec lesquelles nous voulions réaliser des simulations sur Titane. Nous comparons le temps mis par le supercalculateur et celui mis par Siolino :

- 23 h sur Siolino en utilisant 4 cœurs de calcul et la version parallélisée MPI du code.
- 11 h sur Titane en utilisant 1 cœur de calcul et la version non parallélisée.

[4]GENCI est une société civile composée de cinq partenaires qui sont le Ministère de l'Enseignement supérieur et de la Recherche, le CEA, le CNRS, les Universités et l'INRIA.

[5]Le CCRT est une des composantes du complexe de calcul scientifique du CEA, localisé sur son site de Bruyères-le-Châtel (Centre DAM -Île de France).

Donc la réalisation d'un calcul sur Titane est environ 2 fois plus rapide que la même opération sur Siolino (8 fois plus rapide en considérant l'utilisation de 4 cœurs de calcul sur Siolino). Mais cette comparaison donne juste un ordre de grandeur car de nombreux facteurs sont à prendre en compte. En effet, il y a plusieurs incertitudes dans cette comparaison car les machines sont différentes. De plus, le choix des coeurs de calcul sur Siolino n'est pas possible et tous les coeurs de calcul n'ont pas le même âge et peuvent être plus ou moins performants pour les résultats présentés. Finalement, la version du code parallélisée avec MPI n'est pas efficace mais elle n'a pas été construite pour avoir un rendement maximal. Pour pouvoir effectuer une véritable comparaison, il faudrait prendre tous ces facteurs en compte.
Nous avons réalisé l'étude paramétrique sur Titane de septembre à décembre 2009 en utilisant parfois jusqu'à 720 coeurs de calcul simultanément. Comme nous le verrons par la suite, nous avons déterminé une variable (la masse d'une région spécifique, voir la Sec. 5.5.2) qui est calculée et écrite dans un fichier à chaque pas de temps. Cette variable nous a permis de vérifier pratiquement en temps réel le bon déroulement des simulations et de pouvoir les interrompre s'il y avait un problème (sortie du front de choc de la boîte de simulation par exemple). Nous avons obtenu au final 13 To de données que nous avons rapatriées sur des bandes de stockage de données du SIO. Ainsi ce grand challenge de calcul numérique m'a permis de voir les différents aspects du travail de numéricien. De la préparation du dossier de demande de temps de calcul, jusqu'à l'analyse des résultats en passant par le rapatriement des données. La connaissance de ces différentes étapes d'un projet d'étude numérique est une riche expérience. Il est intéressant de constater que chacune des branches de l'astrophysique requiert une action similaire. En effet, répondre à l'appel d'offre d'une demande de temps d'observation afin d'observer un objet céleste ou de temps laser pour réaliser une expérience de laboratoire sont des démarches semblables à celle d'un projet numérique.
Nous présentons les modifications du code que nous avons effectué pour réaliser ce projet.

2.2.2 La version HYDRO-MUSCL pour Titane

Nous nous servons, pour l'étude paramétrique de l'instabilité de Vishniac, de la version HYDRO-MUSCL parallélisée à l'ordre 0 car elle permet de balayer rapidement l'espace des paramètres intéressants. La seule limitation est le nombre de simulations que peut lancer un utilisateur. Nous utilisons le compilateur intel (ifort) sur ce calculateur car il semble plus performant en terme de temps de calcul. Les fichiers de sortie sont écrits en format fits[6] car leur taille mémoire est beaucoup moins importante qu'un fichier texte classique. Nous introduisons aussi un module permettant le redémarrage d'une simulation. Les raisons techniques sont que la file de soumission de calculs est seulement de 24 h réelles et que le supercalculateur peut subir des pannes techniques. Mais la raison essentielle est relative aux simulations que nous effectuons. En effet, il faut toujours avoir un module de redémarrage, et cela sur n'importe quel système utilisé. Mais une autre raison est que la boîte de simulation que nous utilisons est trop petite pour le temps final désiré (l'évolution totale du système). Nous restreignons ce domaine car nous voulons avoir une bonne résolution et un temps de calcul limité.

[6] C'est un format utilisé principalement en astrophysique qui est portable et lisible par de nombreuses applications comme Matlab ou ImageJ.

Chapitre 3

La validation des codes HYDRO-MUSCL et HYDRO-COOL

Lorsqu'un nouveau code est finalisé, il est important de le tester avant de vérifier qu'il remplisse bien les critères de robustesse, d'efficacité et d'exactitude nécessaires à la validité des résultats numériques obtenus. Certains problèmes d'hydrodynamique possèdent des solutions analytiques bien connues et permettent, en introduisant les conditions initiales correspondantes, de tester si le code converge efficacement vers ces solutions. Nous présentons dans ce chapitre les résultats obtenus avec le code HYDRO-MUSCL pour deux tests classiques. Cette première partie permettra la validation numérique du code. Pour réaliser la validation astrophysique des codes HYDRO-MUSCL et HYDRO-COOL, nous avons réalisé des simulations de variables cataclysmiques magnétiques et de jets d'étoile jeune. Ces travaux préliminaires permettent de rendre compte du large champ d'application des codes que nous avons à notre disposition.

3.1 Les tests classiques du code HYDRO-MUSCL

Afin de valider numériquement le code HYDRO-MUSCL, nous avons effectué le test de tube à choc et de l'explosion forte en un point. Nous effectuons ces tests en géométrie plan-parallèle car dans cette géométrie nous pouvons avoir une bonne résolution dans les deux directions de la grille (le pas spatial est $dx = dy = 0,001$) mais peu de cellules sur l'axe O_y ce qui nous fait gagner du temps de calcul.

3.1.1 Le tube à choc

Nous avons réalisé le test du tube à choc unidimensionnel [Sod, 1978] pour vérifier que la capture des ondes s'effectue bien par le code. Ce test se base sur l'introduction dans la boîte de simulation d'une marche de

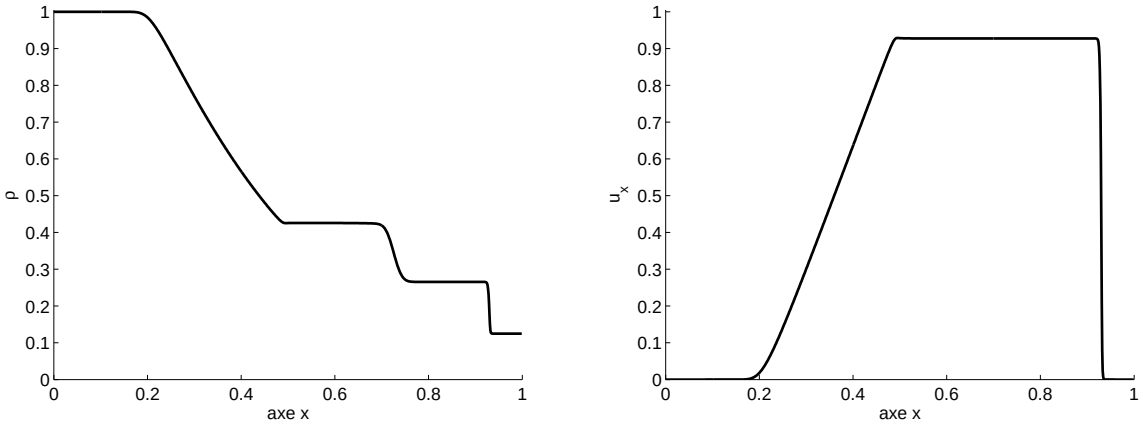
Paramètres	ρ	u_x	p	γ
Milieux				
(g)	1,000	0	1,0	1,4
(d)	0,125	—	0,1	1,4

TAB. 3.1 – Conditions initiales pour le test de tube à choc : densité, vitesse (selon O_x), pression, et indice adiabatique pour les milieux (g) et (d) en unité arbitraire.

densité et de pression qui fait intervenir deux milieux. L'interface séparant le milieu à gauche (g) et le milieu à droite (d) est placée initialement au centre. La solution dépendante du temps de ce problème est connue de manière exacte ce qui permet de valider la solution obtenue numériquement. Les conditions initiales permettant de réaliser ce test sont présentées dans le tableau 3.1. L'indice adiabatique est fixé dans toute la boîte à 1,4 afin que le milieu soit bien compressible comme dans le test originel de Sod. Sur la figure 3.1, nous présentons les trois profils des grandeurs fluides et celui de l'entropie spécifique obtenus avec le solveur HLLC. La coupe de densité présente trois marches qui correspondent aux trois ondes engendrées par la discontinuité initiale. En effet, les conditions initiales correspondent dans ce test au problème de Riemann séparant deux états ou milieux. La première marche à droite ($x \simeq 0,93$) correspond à l'onde de choc, au milieu ($x \simeq 0,70$) se trouve l'onde de contact et la marche graduelle à gauche ($x \simeq 0,20$) correspond à l'onde de raréfaction. Nous remarquons sur les profils que l'onde de contact ne provoque un saut que sur la densité, alors que p et u_x restent constants à la même position. Le saut visible sur l'entropie spécifique à $x \simeq 0,70$ est de même nature que celui sur la densité et il permet de bien identifier cette onde de contact. Le comportement des trois grandeurs fluides est semblable à la loi analytique connue pour ce cas test, sauf pour l'onde de contact qui a un saut moins raide que celui prédit par la théorie (voir les profils de Sod [1978]). Cet effet est dû aux solveurs HLLC et HLLE qui résolvent l'onde de contact (de manière exacte pour le premier et approchée pour le second) mais qui ont en contrepartie une diffusion excessive pour cette onde. Nous comparons d'ailleurs les résultats produits par les deux solveurs HLLE et HLLC pour ce test de tube à choc. Nous voyons sur la figure 3.2 qui représente la différence en densité (la grandeur qui subit l'influences des trois ondes) présente entre ces deux solveurs, que c'est au niveau de l'onde retour ($x \simeq 0,50$) qu'il y a le plus d'écart mais la différence reste faible pour ce type de simulation.
Ce premier test nous permet donc de conclure que le code capture correctement l'onde de choc, l'onde retour et l'onde de contact. Nous avons vu que malgré la diffusivité des solveurs, la solution numérique converge bien vers la solution analytique.

3.1.2 L'explosion forte en un point

Le test d'explosion forte et ponctuelle, que nous utiliserons par la suite comme modèle pour réaliser les simulations d'ondes de souffle, permet de vérifier si la solution générée par le code converge correctement vers la solution analytique. Dans ce cas, la solution analytique est bien connue : c'est la solution de Sedov-Taylor-von Neumann [Sedov, 1977, Taylor, 1950, von Neumann, 1947] qui détermine l'évolution auto-semblable



(a) ρ (b) u_x

(c) p (d) S

FIG. 3.1 – Test du tube à choc réalisé avec le solveur HLLC : coupe sur l'axe O_x des grandeurs fluides en unité arbitraire à $t_f = 0,245$. L'onde de choc ($x \simeq 0,93$), l'onde de contact ($x \simeq 0,70$) et l'onde de raréfaction ($x \simeq 0,20$) sont visibles sur le profil de la densité. Sur le profil de la vitesse et de la pression, seules les ondes de choc et retour agissent sur ces grandeurs. Sur le profil de l'entropie spécifique, seules les ondes de choc et de contact provoquent un saut de cette grandeur.

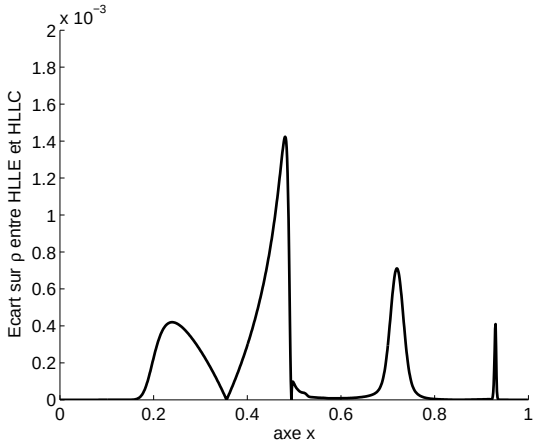


FIG. 3.2 – Test du tube à choc : valeur absolue de l'écart de densité $|\rho_{HLLC} - \rho_{HLLE}|$ entre les solveurs HLLC et HLLE en unité arbitraire à $t_f = 0,245$. La différence maximale entre les deux solveurs est de l'ordre de $1,5 \times 10^{-3}$, elle reste donc faible pour ce test.

de la position du front de choc $x_s \propto t^\alpha$ et par la même occasion l'évolution de la vitesse du front de choc $V_s = \dot{x}_s = \alpha\, x_s/t$. Nous allons donc vérifier que nous obtenons bien ces lois analytiques. De plus, nous vérifions avec ce test que le code permet de générer correctement une onde de choc. Nous avons vu en effet que la valeur des grandeurs fluides sur le front de choc est prédite par les relations de Rankine-Hugoniot (RH) (voir Sec. 1.2.3). Nous devons donc vérifier si l'onde de choc comprime le milieu ambiant jusqu'à cette limite théorique et si le nombre de Mach est suffisant, jusqu'à la limite de choc fort.
L'explosion forte en un point consiste à déposer une grande quantité d'énergie thermique que nous introduisons dans le code sous forme de pression p_3. Le domaine de dépôt doit être ponctuel, c'est-à-dire dans un volume infiniment petit, et cette déposition se fait de manière instantanée. Numériquement cela revient à définir à

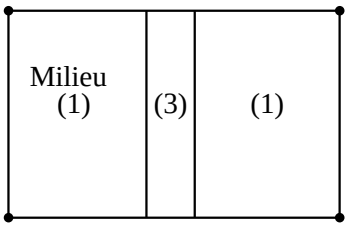


FIG. 3.3 – Test de l'explosion forte en un point : milieux présents à l'instant initial. Une bande de cellules initialisées avec une pression importante est déposée au centre de la boîte de simulation.

l'instant initial (à $t = 0$), un domaine symétrique de cellules placé au centre de la grille et initialisé avec les conditions du milieu (3) (voir la figure 3.3). Plus précisément, nous introduisons la surpression sur 7 cellules de la direction O_x et sur m_y cellules de la direction O_y. Lorsque nous changerons la résolution dans d'autres

études, le nombre de cellules sur O_x variera mais pas la taille réelle de cette zone. Dans la présentation du test, le terme "grande quantité d'énergie" reste à définir car la pression $p_3 = 10$ n'est pas suffisante. En effet, nous avons observé que, dans ces conditions initiales, les profils des grandeurs fluides ne demeurent pas auto-semblables au cours du temps. Nous déterminerons donc la pression à initialiser dans la seconde partie de ce test afin de pouvoir introduire l'énergie de 10^{44} J délivrée de manière sphérique lors de la formation d'une supernova. Le reste de la boîte de simulation est initialisé avec les conditions du milieu (1). Nous notons les deux domaines initiaux par milieu (1) et (3) pour des raisons que nous précisons dans la Sec. 4.4.1. Nous récapitulons les conditions initiales introduites dans ce test dans le tableau 3.2. Les conditions du milieu ambiant sont choisies telles que la vitesse du son est égale à 1, ce qui nous permet d'évaluer rapidement le nombre de Mach.

La pression au centre de la boîte est élevée (dans ce cas 100 fois plus élevée que celle du milieu ambiant) et

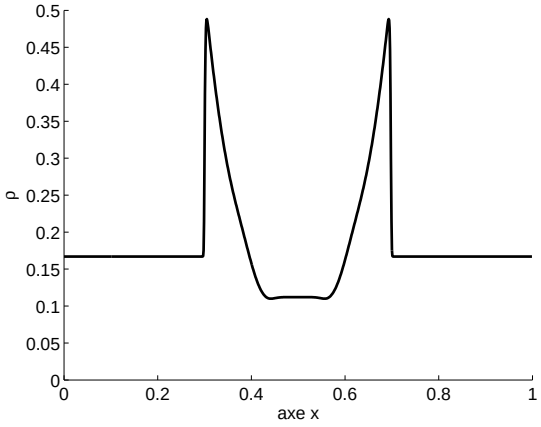
Paramètres	ρ	u_x	u_y	p	γ
Milieux					
(3)	1	0	0	10	5/3
(1)	0,167	—	—	0,1	5/3

TAB. 3.2 – Conditions initiales en valeurs arbitraires pour le test d'explosion forte en un point : densité, vitesses (selon O_x et O_y), pression, et indice adiabatique pour les milieux (3) et (1) en unité arbitraire.

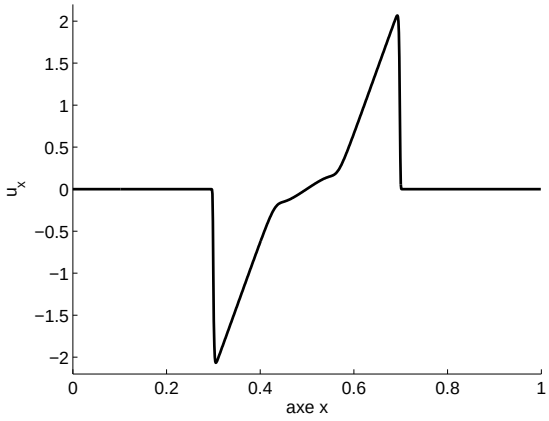
elle agit comme un piston pour créer une onde de souffle. Comme précédemment dans le test du tube à choc, la génération d'une onde de choc s'accompagne de la création d'une onde de raréfaction et d'une onde de contact toutes identifiables sur la coupe 1D de la figure 3.4. Dans cette modélisation, comme la surpression est placée au centre de la boîte ($x = 0,5$), il y a génération de deux ondes de choc symétriques ($x \simeq 0,30$ et 0,70) qui se déplacent à la vitesse V_s (la vitesse du gaz choqué au niveau du front de choc est $u_s(x \simeq 0,70) \approx 2$) vers les bords gauches et droits et qui compriment la matière du milieu ambiant. Quant aux ondes de raréfaction ($x \simeq 0,40$ à 0,60, zone centrale où l'entropie est constante), elles se déplacent aussi de manière symétrique vers le centre de la boîte de simulation, c'est-à-dire en sens inverse et à la même vitesse que les ondes de choc ($-V_s$) et elles vident l'intérieur du RSN comme nous pouvons le voir sur la coupe de densité où la densité au centre est faible. À l'instant que nous étudions, nous vérifions que la vitesse est bien nulle au centre de la boîte à l'endroit où les deux ondes de raréfaction se sont rencontrées. La pression du centre du RSN reste constante et continue à pousser le front de choc dans le milieu ambiant. La discontinuité de contact, matérialisée sur l'entropie spécifique par le gradient présent entre le front de choc et le centre de l'onde, subsiste dans le système car la pression externe introduite p_1 n'est pas nulle et cette interface se déplace au cours du temps.

La dynamique de l'onde de souffle

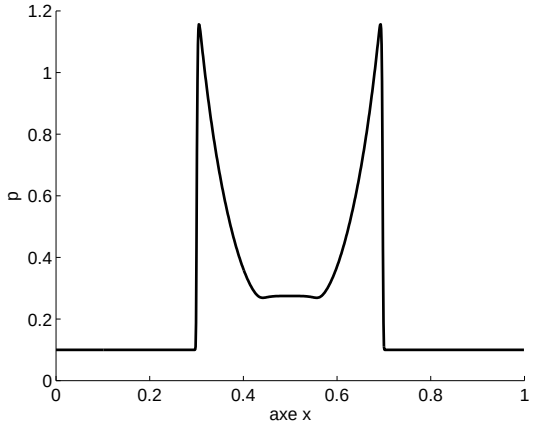
Nous étudions maintenant la dynamique de l'onde de souffle dans le modèle d'explosion en un point. Pour cela nous réalisons un autre test avec une surpression initiale plus élevée : $p_3 = 10^3$ (toujours en valeurs arbitraires). Ensuite nous laissons évoluer le système jusqu'à $t_f = 2,45 \times 10^{-1}$. Nous représentons sur la



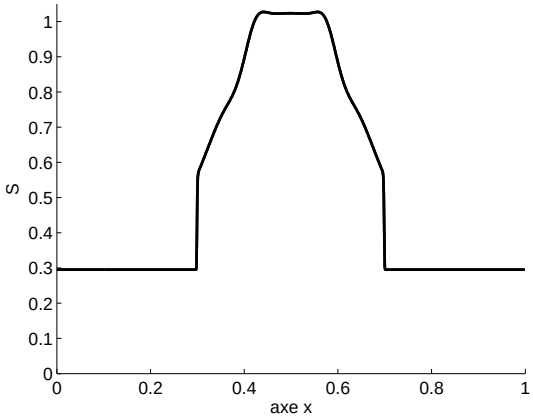
(a) ρ



(b) u_x

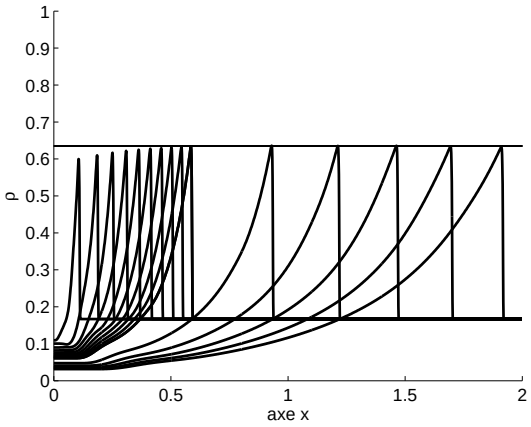


(c) p

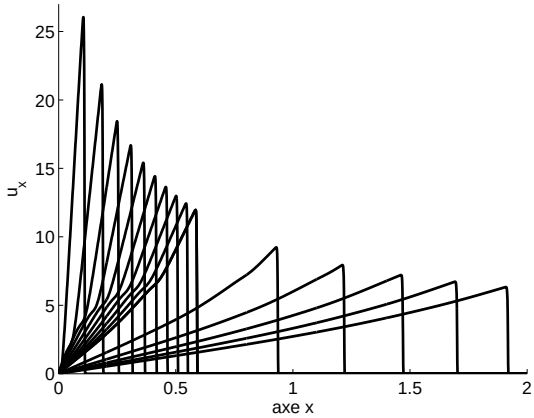


(d) S

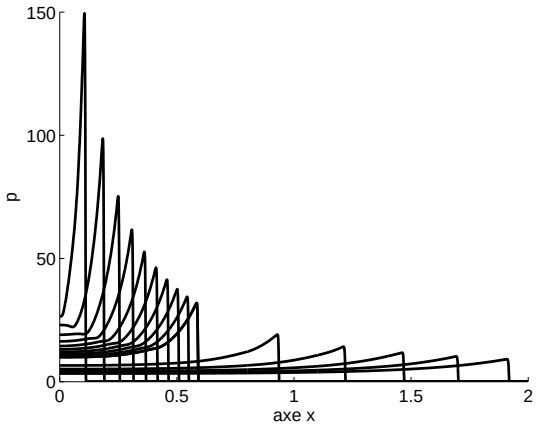
FIG. 3.4 – Test de l'explosion forte en un point : coupe sur l'axe O_x des grandeurs fluides en valeurs arbitraires à $t = 0,049$. Les trois ondes caractéristiques sont formées doublement dans cette modélisation. L'onde de choc ($x \simeq 0,30$ et 0,70), la discontinuité la plus éloignée de l'origine de la surpression ($x \simeq 0,50$), se propage vers la gauche et la droite de la boîte de simulation.



(a) ρ



(b) u_x



(c) p

FIG. 3.5 – Test de l'explosion forte en un point : superposition des coupes sur l'axe O_x des grandeurs fluides en valeurs arbitraires jusqu'à $t = 1,47 \times 10^{-1}$. Le modèle numérique passe par une phase transitoire où la densité sur le front de choc augmente encore. Puis le système atteint la limite de choc fort à environ 90% de la valeur théorique pour les trois grandeurs fluides. La limite de choc fort est représentée sur le profil de densité par la droite $\rho_s = 0,64$. La vitesse décroît de la même manière que prévue analytiquement et la pression suit aussi cette évolution conformément à un ralentissement du front de choc.

figure 3.5, une coupe sur O_x des grandeurs fluides où nous superposons différents instants de cette simulation. Nous présentons cette coupe sur seulement la moitié de la boîte de simulation car nous avons vu, sur la figure précédente, que les deux ondes de souffle sont symétriques. Nous représentons seulement 16 instants de la simulation (jusqu'à $t = 1,47 \times 10^{-1}$) car à l'instant suivant, le front de choc sort de la boîte de simulation.
La densité au niveau du front de choc augmente progressivement jusqu'à atteindre $\rho_s = 0,64$ ce qui correspond à un taux de compression de $\mathcal{C} = 3,8$. Les relations de RH donnent la valeur théorique de ce paramètre et $\mathcal{C}_{theo}(\gamma) = (\gamma+1)/(\gamma-1) = 4$ pour $\gamma = 5/3$. Le front de choc a donc atteint la limite de choc fort à 95% de sa valeur ce qui est un résultat très correct avec une résolution spatiale très bonne dans ce cas ($dx = dy = 0,001$). Nous vérifions ce résultat portant sur l'exactitude du code sur les autres grandeurs fluides à $t = 1,47 \times 10^{-1}$. La valeur de la vitesse juste derrière le front de choc est, à cet instant, $u_s = 6,34$. L'évolution auto-semblable de la position du choc nous donne la valeur théorique de la vitesse du choc ($V_{s,theo} = \alpha\, x_s/t$). Comme nous le verrons dans la Sec. 4.4.4, pour la géométrie plan-parallèle et pour $\gamma = 5/3$, le taux d'expansion de l'onde de souffle est $\alpha = 2/3$. En supposant que le front de choc mesuré sur le profil de la vitesse (ou des autres grandeurs caractéristiques) suit bien une évolution auto-semblable (voir ci-dessous), nous déterminons par cette relation $V_{s,theo} = 8,89$ ce qui correspond à un nombre de Mach $\mathcal{M} = V_s/c_s \approx 9$. Nous pouvons en déduire la vitesse du fluide juste derrière le front de choc par les relations de RH. Nous avons en effet $u_{s,theo} = 2V_{s,theo}/(\gamma+1) = 6,67$. Ainsi le front de choc a atteint la limite de choc fort pour la vitesse à 95%, comme pour la densité. Nous remarquons que malgré la faible valeur du nombre de Mach à cet instant, le choc est toujours fort. Ainsi nous concluons qu'à partir du moment où le l'onde de choc a passé le régime transitoire et qu'il a atteint le régime de choc fort, même si son nombre de Mach diminue et que la condition théorique $\mathcal{M} \gg 1$ ne soit plus valable, il reste dans ce régime pour ces conditions initiales favorables.
Toujours sur le front de choc, nous mesurons la valeur de la pression $p_s = 9,13$ et théoriquement nous avons $p_{s,theo} = 2\rho_1 V_{s,theo}^2/(\gamma+1) = 9,90$ en utilisant la relation théorique de la vitesse. Cela nous permet de déterminer que la pression sur le front de choc a donc atteint sa valeur limite à 93%. Ainsi nous avons vérifié que, pour ces conditions initiales, le code génère une onde de choc qui atteint pratiquement la limite de choc fort. Mais nous verrons que lorsque nous changeons certains paramètres, comme la résolution numérique, ce n'est plus le cas.
Avant de passer à un autre aspect de ce test, nous commentons l'évolution du profil des grandeurs fluides. Nous voyons qu'une fois le régime transitoire terminé, le profil de la densité de l'onde de souffle reste toujours le même au cours du temps sauf pour l'épaisseur de la coquille $h(t)$ qui augmente. Nous définissons l'épaisseur dans l'étude présente et lors des études des chapitres suivants par la condition sur la densité où h existe pour tous $\rho(x) > \rho_1$. Nous voyons que selon cette définition que $h(t = 0,0245) \approx 0,4$ ce qui est inférieur à $h(t = 0,147) \approx 0,7$. En effet la matière qui s'accrète sur le front de choc vient se stocker dans cette zone. Cet effet physique est important et nous verrons de quelle manière il intervient dans le fonctionnement de l'instabilité de Vishniac. De plus, nous remarquons que comme la densité est constante au niveau du front de choc et que la pression diminue au même niveau, alors la température du front de choc diminue aussi.

L'évolution auto-semblable de la position du front de choc

Nous vérifions maintenant l'aspect le plus important du test de l'explosion forte en un point : l'évolution auto-semblable de x_s. Nous mesurons la position du front de choc au cours du temps et nous représentons cette évolution sur la figure 3.6. Nous superposons à cette courbe la loi analytique $x_s = \beta t^\alpha$ où $\alpha = 2/3$ car c'est le taux d'expansion de la phase de Sedov ($\gamma = 5/3$) pour la géométrie plan-parallèle et $\beta(\mathcal{E}_3, \rho_1, \gamma)$ est une constante qui dépend de l'énergie $\mathcal{E}_3$ déposée initialement (reliée à p_3), qui dépend de la densité du milieu ambiant ρ_1 et de l'indice adiabatique (voir Sec. 4.4.3). Nous voyons qu'il y a un très bon accord entre la solution théorique et numérique, particulièrement à la fin de l'évolution de l'onde de souffle car celle-ci passe d'abord par un régime transitoire. Comme la solution auto-semblable dépend directement de ρ_1 et p_3, nous avons donc une contrainte sur ces deux paramètres.

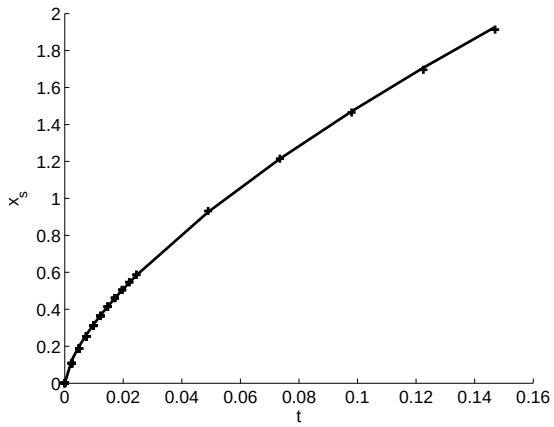


FIG. 3.6 – Test de l'explosion forte en un point : évolution de la position du front de choc au cours du temps. Les solutions numériques (croix) et théoriques (trait continu) de la loi de Sedov se superposent bien. La position du front de choc suit l'expansion de Sedov $\alpha = 2/3$.

Quelques autres aspects

Nous vérifions d'autres aspects de ce test pour lesquels nous donnons seulement les conclusions. Nous avons réalisé d'autres simulations afin de déterminer la dépendance du modèle avec les conditions initiales restantes ρ_3 et p_1 et ainsi de bien comprendre le rôle de chacun des paramètres introduits initialement. Nous avons observé que le temps nécessaire à la formation d'une onde de choc dépend de la densité ρ_3 de la surpression. Plus ρ_3 est élevée, plus la matière reste longtemps concentrée en une zone compacte avant de finalement se propager en formant l'onde de souffle. En ce qui concerne p_1, nous n'avons pas vu d'influence majeure sur l'évolution du système pour les gammes de valeurs testées. Mais nous avons respecté, pour ces différents cas simulés, la condition $p_3 \ll p_1$ ce qui contraint le domaine de valeurs étudiées.
En plus des tests précédents, nous avons réalisé dans les trois géométries des simulations pour déterminer la

taille du milieu (3). Nous avons observé des effets liés à la forme de ce milieu pour les géométries sphériques et cylindriques. Lorsque nous utilisons une grille cartésienne pour décrire un système physique évoluant sphériquement et pour réaliser une simulation optimale, il faut respecter les conditions suivantes :

1. le domaine représentant le milieu (3) doit être suffisamment petit par rapport à la boîte de simulation car sinon l'explosion n'est pas ponctuelle. En terme de cellules, leur nombre ne doit pas excéder 1% du nombre total de cellules de la grille. Il est donc nécessaire d'utiliser une résolution pas trop faible ;
2. à l'inverse, le domaine (3) ne doit pas être composé d'une seule cellule car, pour les géométries sphériques et cylindriques, il est nécessaire de minimiser les effets numériques engendrés par la grille cartésienne. En effet, nous constatons que le domaine initial dans ce type de simulations engendre des fronts de choc très déformés sur les axes.

L'étude de la résolution numérique

Dans les codes hydrodynamiques basés sur des grilles de calcul, la résolution numérique joue un rôle important lors de la détermination de la solution numérique. En effet, une valeur trop faible du pas spatial peut lisser avec excès les quantités fluides. Et nous verrons par la suite que la résolution numérique intervient dans la modélisation des instabilités. Nous avons testé trois valeurs de résolution numérique dans le cadre du test de l'explosion forte en un point : $dx = 0,001$, $dx = 0,01$ et $dx = 0,1$. Sur la figure 3.7, les résultats des simulations sont visibles. Il n'est pas aisé de comparer les profils de la densité car la région de grande pression

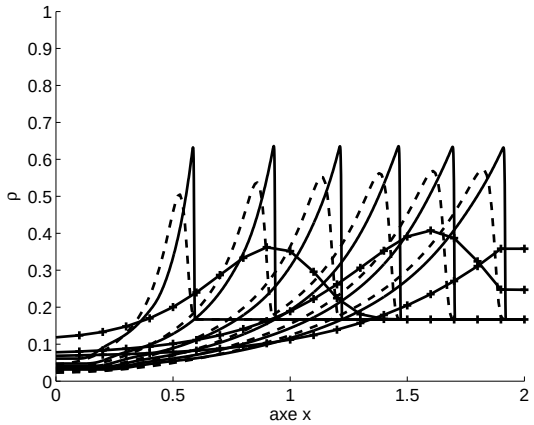


FIG. 3.7 – Test de l'explosion forte en un point : superposition des coupes sur l'axe O_x des grandeurs fluides en valeurs arbitraires jusqu'à $t = 1,47 \times 10^{-1}$ pour les résolutions $dx = 0,001$ (trait continu), $dx = 0,01$ (trait pointillé) et $dx = 0,1$ (trait continu et croix). Le front de choc est lissé sur plusieurs cellules et la densité du front de choc n'atteint pas la limite de choc fort lorsque la résolution augmente.

qui sert à déclencher l'onde de souffle varie en fonction de la résolution. Mais le résultat probant est que le front de choc est lissé sur plusieurs cellules et que la densité du front de choc n'atteint pas la limite de choc fort lorsque la résolution augmente. Ainsi il est nécessaire de choisir une résolution adaptée à l'étude que nous

voulons mener.

Afin de conclure sur le test d'explosion forte en un point, nous pouvons dire que nous avons vérifié que le code converge bien vers la solution analytique et qu'il génère des ondes de souffle en adéquation avec la prédiction théorique. Cependant certains autres aspects doivent encore être testés. Nous notons que les rapports entre les conditions initiales des différents tests discutés ici vont nous aider à réaliser les simulations de coquille de gaz choqué comme celles présentes dans les RSN.

En conclusion générale des tests, il est important de souligner que le code HYDRO-MUSCL remplit les contraintes que nous nous étions fixées : robustesse, efficacité et exactitude. Pour l'étude des RSN, ce code semble tout a fait approprié. Toutefois nous verrons par la suite que ces tests ne permettent pas de vérifier tous les problèmes numériques qui peuvent apparaître. En effet, l'instabilité numérique de grosseur que nous avons rencontrée et qui est très problématique dans l'étude de l'instabilité de Vishniac n'est présente ni dans le test de tube à choc ni dans le test d'explosion forte en point. Ainsi seule une simulation initialisée avec les conditions physiques qui nous intéressent rend compte de toutes les difficultés qu'il est nécessaire de surmonter.

3.2 Les variables cataclysmiques fortement magnétiques

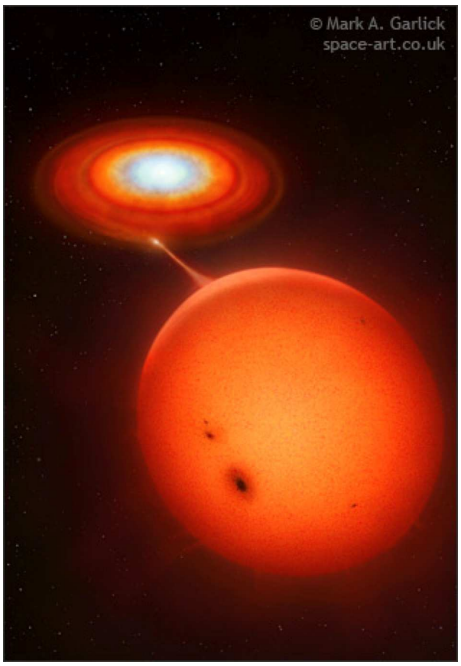
Les variables cataclysmiques (VC) sont des systèmes binaires en interaction gravitationnelle qui regroupent différentes sous-catégories d'objets. Ces systèmes mettent en jeu deux étoiles plus ou moins évoluées et assez proches pour qu'elles puissent échanger de la matière. Cette interaction caractérisant les binaires serrées produit un flot de matière d'un objet vers l'autre. L'étoile sur laquelle s'effectue l'accrétion (étoile primaire) est une naine blanche (NB) . Grâce aux satellites spatiaux comme *XMM Newton*, *CHANDRA*, *ROSAT*, et *EXOSAT* (observant dans les longueurs d'onde X), et *INTEGRAL* (rayonnement gamma), il est possible à l'heure actuelle de détecter et de distinguer les différentes catégories de variables cataclysmiques en mesurant leur rayonnement X de faible luminosité $\mathcal{L}_X = [10^{21} - 10^{25}]$ W émis au moment de l'accrétion. En effet dans ces systèmes, l'étoile secondaire est de type M (étoile âgée de la séquence principale avec une température de surface $T_{surf} = 2000$ K) ou de type géante rouge et comme elle remplit son lobe de Roche[1], cela permet à la matière de l'enveloppe de cette étoile diffuse de s'échapper *via* un courant d'accrétion qui va être récupéré par la naine blanche plus ou moins magnétisée.

Il existe trois types de variables cataclysmiques : les systèmes non magnétiques ($B < 10^2$ T, voir figure 3.8(a)), les systèmes faiblement magnétiques appelés aussi *DQ Her* ou polaire intermédiaire ($10^2 < B < 10^3$ T, voir figure 3.8(b)), et les systèmes fortement magnétiques appelés aussi *AM Her* ou encore polaires ($B > 10^3$ T, avec un champ magnétique maximal $B_{max} \approx 2 \times 10^4$ T, voir figure 3.8(c)). Le champ magnétique est donc le paramètre déterminant pour pouvoir classer ces objets, car il permet la formation ou non d'un disque d'accrétion autour de la naine blanche comme nous pouvons le voir sur la figure 3.9 issue de Cropper et al. [2002]. Dans le cas des polaires que nous allons modéliser de manière analytique et numérique, il n'y a pas de formation de disque d'accrétion mais une colonne d'accrétion permet au flot de matière de venir augmenter celle de la naine blanche. Du côté observationnel, pour discerner les différentes variables cataclysmiques, il faut déterminer le rapport $r_{\mathcal{L}} = r_{\mathcal{L}_X}/r_{\mathcal{L}_{UV}}$ du rayonnement X "mou" sur le rayonnement UV car l'émission extrême de rayonnement UV provient du disque d'accrétion et l'émission X provient du choc d'accrétion et/ou de la couche limite du disque, c'est-à-dire du rayon interne du disque, comme nous le verrons ci-dessous. Ce rapport prend les valeurs suivantes [Servillat et al., 2008] : pour les variables cataclysmiques non magnétiques $r_{\mathcal{L}} \approx 500$, pour les polaires intermédiaires $r_{\mathcal{L}} \approx 2000$ et pour les polaires $r_{\mathcal{L}} > 4000$. Ainsi ces derniers objets émettent essentiellement du rayonnement X.

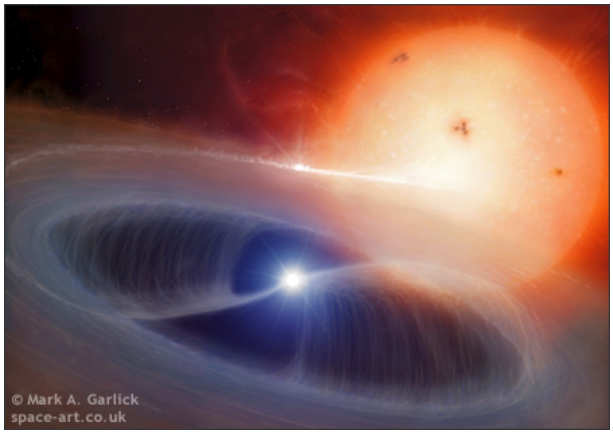
Dans les binaires serrées, il est possible de rencontrer d'autres processus comme les "Quasi Periodic Oscillation" (QPO) qui sont des oscillations dans le spectre de puissance de la luminosité X de l'objet et qui résultent des instabilités présentes dans les régions internes du disque d'accrétion (instabilité magnéto-rotational) et au niveau du front de choc d'accrétion (instabilité thermique). On observe aussi des phénomènes explosif de novæ et supernovæ de type Ia, le premier étant un phénomène périodique ne détruisant pas la naine blanche et le second permettant la formation d'un reste de supernova. Pour ces deux types d'explosion, l'objet progéniteur n'est pas clairement identifié et il se peut que les trois variables cataclysmiques décrites ici soient des candidats potentiels.

Nous nous intéressons maintenant à l'objet que nous allons étudier à l'aide de simulations numériques : les

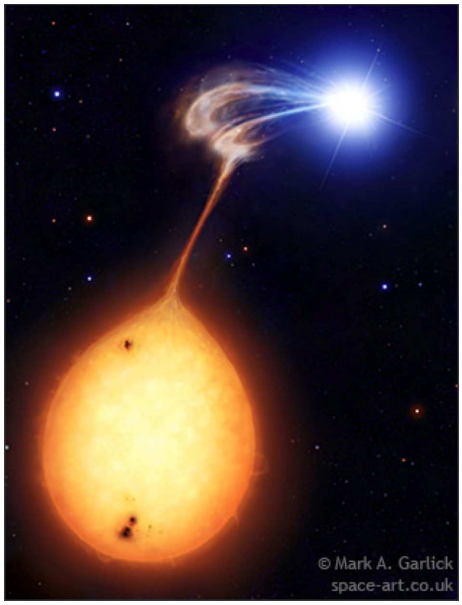
[1] Le lobe de Roche est une isopotentielle sur laquelle l'attraction gravitationnelle des deux étoiles se compense.



(a) Variable cataclysmique non magnétique



(b) Polaire intermédiaire



(c) Polaire

FIG. 3.8 – Différents types de variables cataclysmiques : schémas des deux étoiles composant le système. La naine blanche est symbolisée par l'objet bleu-blanc et l'étoile de type M, par l'objet rouge-orangé plus massif. Le champ magnétique de la naine blanche détermine le type d'accrétion sur cet objet compact : par un disque d'accrétion (a), par une disque d'accrétion tronqué près de l'étoile (b), par une colonne d'accrétion (c). Crédit : M. A. Garlick.

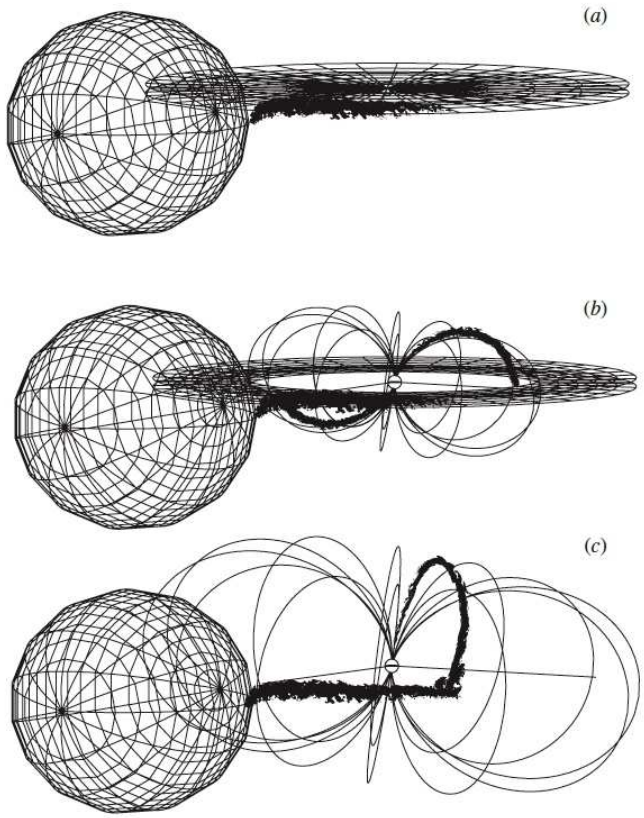


FIG. 3.9 – Différents types de variables cataclysmiques : schéma de la topologie du champ magnétique pour les variables cataclysmiques non magnétiques (a), les polaires intermédiaires (b), et les polaires (c). Issu de Cropper et al. [2002].

polaires et la colonne d'accrétion présente dans ce type de système.

3.2.1 Les polaires

Comme nous venons de le voir dans le paragraphe précédent, les polaires ou *AM Her* sont des variables cataclysmiques accrétant la matière de l'étoile compagnon par une colonne d'accrétion. En effet, dans ces objets, un disque d'accrétion ne peut pas se former car la présence du fort champ magnétique de la naine blanche le disloque instantanément. Les étoiles primaire et secondaire, présentes dans le système, orbitent de manière synchrone toujours en raison du fort champ magnétique. Ainsi la matière perdue par l'étoile secondaire forme un flot balistique attiré par la gravité de l'étoile primaire. Ensuite, ce sont les lignes de champ magnétique émergeant des pôles nord et sud de la naine blanche qui vont contrôler la dynamique du flot de matière, comme schématisé sur la figure 3.8(c). Mais d'abord, le courant d'accrétion tombe violemment sur la surface de la naine blanche (ou sa photosphère si la naine blanche en possède une). Cette interaction brutale créée une onde de choc retour qui remonte le long de la colonne d'accrétion, comme schématisé sur la figure 3.10. Dans la zone choquée, qui est la zone comprise entre le front de choc situé à la position x_s et la surface de la naine blanche,

le gaz est comprimé et chauffé. L'émission de rayonnement devient importante dans cette région ce qui modifie la dynamique du courant d'accrétion. En effet, le flot de matière, composé en grande partie d'hydrogène car issu de l'enveloppe externe de l'étoile compagnon, est fortement ionisé par les processus rayonnants émis par la zone choquée. Le courant d'accrétion chargé va ainsi spiraler le long des lignes de champ avant de rencontrer le choc retour. La dynamique de cette onde retour est aussi modifiée par l'émission de rayonnement de la matière choquée. En effet, l'onde retour ralentit et ce ralentissement peut perdurer jusqu'à ce que l'onde retour se stoppe à une hauteur fixe h si un équilibre est présent de part et d'autre du choc [Beuermann, 2004].
Nous avons schématisé sur la figure 3.10 la colonne d'accrétion à la surface de la naine blanche et nous avons indiqué les conditions qui règnent dans ce système. Plusieurs milieux sont présents dans la colonne de matière et nous les détaillons ci-après. La colonne d'accrétion est localisée sur la surface de la naine blanche par une

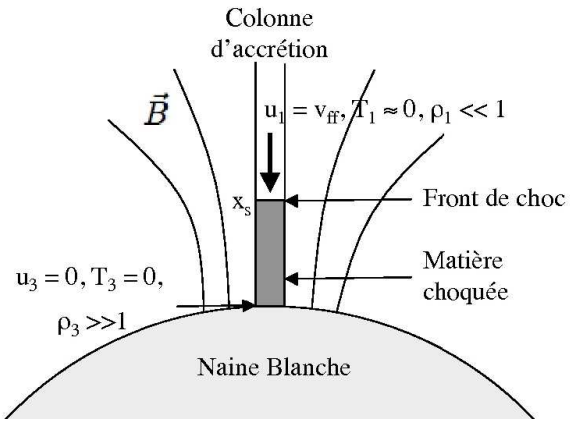


FIG. 3.10 – Schéma de la colonne d'accrétion présente à la surface de la naine blanche formant la polaire. Un choc d'accrétion se crée quand la matière de la colonne impacte la surface de la naine blanche. Ensuite, le choc retour se propage dans la colonne d'accrétion jusqu'à atteindre une position statique si l'émission de rayonnement de la matière choquée est importante. D'après Beuermann [2004].

aire A et la taille de cette surface est déterminée par les processus de couplage au point L1 (point de Lagrange du lobe de Roche de l'étoile secondaire). Quant à la hauteur stationnaire h de gaz choqué qui peut être une distance fixe, elle est atteinte au bout du temps nécessaire à l'établissement d'un équilibre entre la matière tombant continuellement sur la naine blanche avec le taux d'accrétion spécifique $\dot{m}$ et l'onde de choc qui remonte la colonne d'accrétion.
Dans les polaires, nous distinguons trois milieux dans lesquels la densité, la vitesse, la pression et la température prennent des valeurs différentes. Ces trois régions sont : le milieu ambiant dans lequel se propage l'onde retour qui est aussi la matière accrétante (milieu (1)), le gaz choqué au niveau du front de choc (noté avec l'indice (s)), et la surface de la naine blanche (milieu (3)). Nous présentons les relations existantes entre les variables de ces trois milieux et nous calculons des ordres de grandeur pour une polaire typique décrite par Saxton [1999] que nous appellerons par la suite (PS99). Nous utiliserons les données obtenues comme conditions initiales des simulations afin de vérifier que le système modélisé numériquement évolue de manière similaire à une polaire.

– *La matière accrétante*

La matière accrétante tombe en chute libre à la vitesse u_1 car seule la gravité contrôle la dynamique de la matière en accrétion[2]. Cette vitesse s'exprime :

$$u_1 = |-V_s| = (\frac{2GM_{NB}}{R_{NB}})^{1/2} \ , \tag{3.1}$$

où V_s est la vitesse du front de choc, G est la constante de la gravitation[3], et M_{NB} et R_{NB} sont respectivement la masse et le rayon de la naine blanche. Dans ce type d'objet compact, le rayon est relié à la masse (voir la relation de Suleimanov et al. [2005] et celle de Nauenberg [1972] pour les naines blanches de carbone). Dans le cas de la polaire typique (PS99)[4], $M_{NB} = 0,5\,M_\odot$, $R_{NB} = 1,5\,R_\oplus$ et ainsi $u_1 = 3700$ km.s^{-1}.

La densité ρ_1 de la matière accrétante est déterminée *via* le taux d'accrétion :

$$\dot{M} = \frac{d\,M}{dt} = A\rho_1 V_s = A\,\dot{m} \ , \tag{3.2}$$

où A est l'aire du point d'accrétion à la surface de la naine blanche (qui représente une fraction de l'ordre de $10^{-5} - 10^{-4}$ de la surface totale de la naine blanche) et $\dot{m}$ le taux d'accrétion spécifique. Nous faisons l'application numérique pour (PS99) : $\dot{M} \approx 10^{13}$ kg.s^{-1}, $A \approx 10^{11}$ m^2, et donc $\dot{m} \approx 100$ kg.s^{-1}.m^{-2} ce qui correspond à une polaire avec un fort taux d'accrétion spécifique. La densité du milieu (1) correspondante prend dans ces conditions la valeur $\rho_1 \approx 2,7 \times 10^{-5}$ kg.m^{-3}.

La pression qui agit sur le front de choc est la pression bélier que nous avons déjà vue lors de l'introduction des relations de Rankine-Hugoniot (voir Sec. 1.2.3) :

$$p_{ram} = \rho_1 V_s^2 \ . \tag{3.3}$$

Et pour (PS99), $p_{ram} = 3,7 \times 10^8$ Pa. Comme nous considérons que le choc formé par l'onde retour est un choc fort, la pression bélier domine la pression thermique du gaz accrétant, $p_{ram} \gg p_1$. Nous n'avons pas de contrainte directe sur la pression du milieu (1) mais nous devrons choisir p_1 faible.

La température cinétique T_{cin} du gaz au niveau du choc retour, qui est reliée à la pression bélier, dépend aussi de la vitesse de chute libre. Cette température s'exprime :

$$k_B T_{cin} = \frac{1}{2}(\mu m_H) V_s^2 \ , \tag{3.4}$$

où m_H est la masse du proton et μ est le poids moléculaire moyen du gaz accrétant. Par la suite, nous supposerons que la composition du flot ionisé est un mélange d'hydrogène et d'hélium [Kylafis & Lamb, 1982] d'indice adiabatique $\gamma = 5/3$ et avec comme abondance $X = 0,7$ et $Y = 0,3$ et donc $\mu = 0,5$. La relation sur la température s'exprime aussi en fonction de la masse et du rayon de la naine blanche [Kylafis & Lamb, 1982] :

$$k_B T_{cin} \simeq 86\,(\frac{M_{NB}}{M_\odot})(\frac{5 \times 10^8\ m}{R_{NB}})\,. \tag{3.5}$$

[2]Comme le volume de gaz choqué reste faible, nous pouvons remarquer que la gravité agissant sur la masse de gaz en accrétion ou accrété, n'influence pas la structure du choc. Nous pouvons donc estimer simplement la vitesse du gaz au niveau du front de choc.

[3]$G = 6,7 \times 10^{-11}$ m^3.kg^{-1}.s^{-2}

[4]La masse solaire est donnée par $M_\odot \approx 2,0 \times 10^{30}$ kg et le rayon terrestre est donné par $R_\oplus \approx 6400$ km.

Pour (PS99), $k_B T_{cin} = 23$ keV et donc $T_{cin} = 2,7 \times 10^8$ K. Avec le même raisonnement que pour la pression bélier, le choc étant considéré comme fort, la température T_1 du flot en accrétion est faible en comparaison à la température cinétique, $T_{cin} \gg T_1$.

La luminosité d'accrétion permet de vérifier que la gaz accrétant est totalement ionisé par le rayonnement produit par le choc. Cette luminosité s'écrit :

$$\mathcal{L}_{acc} = \frac{1}{2}\dot{M} V_s^2 \ . \tag{3.6}$$

Toujours pour (PS99), $\mathcal{L}_{acc} = 6,8 \times 10^{25}$ W donc la luminosité au niveau du front de choc est émise dans les longueurs d'onde X. Ainsi la matière non encore choquée qui tombe sur la discontinuité du choc va être irradiée avant de l'atteindre. Du point de vue observationnel, c'est en mesurant cette luminosité qu'il est possible de remonter au taux d'accrétion.

– *Au niveau du front de choc*

Les relations de Rankine-Hugoniot permettent d'accéder aux valeurs des grandeurs fluides du gaz choqué juste derrière le front de choc en fonction des grandeurs fluides du gaz accrétant. Dans le cadre d'un choc fort (nombre de Mach $\mathcal{M} \gg 1$) et d'un gaz adiabatique ($\gamma = 5/3$), les grandeurs fluides s'écrivent : $u_s = V_s/4$, $\rho_s = 4\,\rho_1$, $T_s = 3\,T_{cin}/8$, $p_s = 3\,p_{ram}/4$. Pour l'exemple de (PS99), les grandeurs fluides au niveau du front de choc prennent les valeurs $u_s = 1000$ km.s^{-1}, $\rho_s = 1,1 \times 10^{-4}$ kg.m^{-3}, $T_s = 1,4 \times 10^8$ K, et $p_s = 2,7 \times 10^8$ Pa. La valeur élevée de la température confirme que le choc est hautement radiatif.

– *Dans la zone choquée*

Dans la colonne d'accrétion, il est nécessaire de prendre en compte le rayonnement émis par la zone choquée. Nous allons donc supposer que le gaz au niveau du front de choc et le long de la colonne d'accrétion se refroidit uniquement en rayonnant et ces pertes radiatives s'échappent de la zone émettrice instantanément. Ainsi nous nous plaçons dans l'approximation optiquement mince. Sous cette approximation, la perte d'énergie est décrite par la fonction de refroidissement $\Lambda(\rho, p) = \Lambda_0 \rho^\epsilon p^\zeta$ que nous avons présentée dans la Sec. 1.3. Dans le modèle de polaire que nous considérons, les pertes d'énergies peuvent être liées aux deux processus que nous avons introduits précédemment : le rayonnement par émission bremsstrahlung et par émission cyclotron. En faisant l'application numérique avec les valeurs de densité et de pression que nous venons de calculer avec (PS99), la valeur de la fonction de refroidissement d'émission bremsstrahlung[5] calculée au niveau du front de choc est $\Lambda_{brem}(\rho_s, p_s) = 7,4 \times 10^9$ J.m^{-3}.s^{-1}. Ainsi l'émission bremsstrahlung est observable dans les polaires dans les longueurs d'onde X dures (en général, on mesure $k_B T_{X,dur} \approx 40$ keV ou $\mathcal{L}_{brem} \approx 10^{29}$ W).

Toutefois, d'autres rayonnements peuvent être aussi présents dans ce système, comme du rayonnement issu de l'émission synchrotron, de l'effet Compton (pour des naines blanches de masse importante), de la conduction thermique (pour des naines blanches de masse $M_{NB} > 1,2\,M_\odot$) et la pression de radiation de la naine blanche. Mais nous négligerons ces processus plus atypiques en première ap-

[5]Nous rappelons que pour ce processus $\Lambda_{0,brem} = 3,9 \times 10^{11}$ en MKS, $\epsilon = 1,5$, et $\zeta = 0,5$.

proximation.

Les pertes radiatives du gaz choqué ne se produisent qu'à partir d'un certain moment de la propagation du choc dans le milieu ambiant. Nous avons vu d'abord que le front de choc se forme à la surface de la naine blanche. Ensuite l'onde de choc se propage de manière adiabatique jusqu'au moment où l'émission optiquement mince du gaz choqué se produit. À partir de cet instant, le gaz choqué qui perd du rayonnement est comprimé au delà de la valeur seuil du taux de compression adiabatique et est refroidit. Les pertes radiatives deviennent le processus dominant, le choc devient stationnaire et finalement il ralentit jusqu'à devenir statique. Pour ces raisons, nous estimons le temps de refroidissement au niveau du front choc. Nous rappelons que $t_{ref} = p_s/((\gamma-1)\Lambda_{brem}(\rho_s, p_s))$. Pour le refroidissement par émission de rayonnement bremsstrahlung et dans les conditions de (PS99), nous déterminons qu'à partir de $t_{ref} = 0,055$ s les pertes radiatives auront un effet sur la dynamique du système. Le choc devient donc radiatif, dans l'approximation optiquement mince, presque instantanément après sa formation.

Nous nous intéressons aussi à l'effet théorique des pertes radiatives sur les grandeurs fluides (ρ, T, et u). Les pertes radiatives diminuent la température puisque le système se refroidit, et si la pression reste constante ou varie de la même manière que la densité alors, comme $p \propto \rho T$, la densité va croître. Cette densification du milieu choqué a été observée dans les chocs [Draine & McKee, 1993] et nous la vérifions grâce aux simulations numériques.

La solution analytique, permettant de déterminer la hauteur statique x_s de gaz choqué lors de la présence de pertes radiatives dans le système a été déterminée de manière générale par E. Falize [Falize, 2008, Falize et al., 2009]. À partir des équations hydrodynamique stationnaires, sous les hypothèses et avec les conditions aux bords énoncées précédemment, il a déterminé une solution analytique à ce problème. La nouveauté de son approche réside dans le choix des profils des grandeurs fluides qui décrivent le plus possible la physique du gaz choqué de la colonne d'accrétion. Dans ce modèle, bien que le gaz accrétant soit totalement ionisé, le problème est traité avec une seule température $T \approx T_e \approx T_i$ car le temps nécessaire aux échanges d'énergie entre les électrons et les ions t_{ei} est bien inférieur au temps de refroidissement ($t_{ei} \ll t_{ref}$). Ainsi, la hauteur de gaz choqué s'exprime de manière générale pour toutes sortes de refroidissement :

$$x_s = K_1 \frac{\rho_1 V_s^3}{\Lambda_0(\gamma-1)\rho_1^{\epsilon} p_{ram}^{\zeta}}\,, \tag{3.7}$$

où le coefficient $K_1(\gamma, \mathcal{M}, \epsilon, \zeta, \Gamma, F_{21})$ dépend respectivement de l'indice adiabatique, du nombre de Mach, et des exposants caractérisant le refroidissement, de la fonction d'Euler Γ et des fonctions hypergéométriques F_{21}. Ce coefficient s'exprime :

$$K_1 = \gamma\Big(\frac{2+(\gamma-1)\mathcal{M}^2}{(\gamma+1)\mathcal{M}^2})\Big)^{\epsilon+1} \times\Big[1+\tfrac{1}{\gamma\mathcal{M}^2}\Big]^{1-\zeta} \times\frac{\Gamma(\epsilon+1)}{\Gamma(\epsilon+2)}\times F_{21}\Big(\zeta,\epsilon+1;\epsilon+2;\frac{\eta}{(1+\frac{1}{\gamma\mathcal{M}^2})}\Big)$$
$$-(\gamma+1)\Big(\frac{2+(\gamma-1)\mathcal{M}^2}{(\gamma+1)\mathcal{M}^2})\Big)^{\epsilon+2} \times\Big[1+\tfrac{1}{\gamma\mathcal{M}^2}\Big]^{-\zeta} \times\frac{\Gamma(\epsilon+2)}{\Gamma(\epsilon+3)}\times F_{21}\Big(\zeta,\epsilon+2;\epsilon+3;\frac{\eta}{(1+\frac{1}{\gamma\mathcal{M}^2})}\Big)\ .$$

En étudiant la variation du coefficient K_1 en fonction du nombre de Mach pour le refroidissement par émission bremsstrahlung ($\gamma = 5/3$, $\epsilon = 3/2$, $\zeta = 1/2$), nous avons remarqué que pour $\mathcal{M} > 10$,

$K_1 = cte = 1,64 \times 10^{-2}$. Nous utilisons cette valeur limite dans la relation et la hauteur de gaz choqué s'écrit maintenant :

$$x_s = \frac{K_1}{(\gamma - 1)} \frac{V_s^2}{\Lambda_0 \rho_1} = K_2 \, V_s \, t_{ref} \, , \tag{3.8}$$

avec $K_2 = 16K_1/\sqrt{3} \approx 0,16$.

Cette relation est exactement équivalente à la forme plus astrophysique de Wu [2000] :

$$x_s = 7,6 \times 10^4 \, \mathrm{m} \, (\frac{\dot{m}}{40 \, \mathrm{kg.m^{-2}.s^{-1}}})^{-1} (\frac{M_{NB}}{0,5 \, M_\odot})^{3/2} (\frac{R_{NB}}{10^7 \, \mathrm{m}})^{-3/2} \, . \tag{3.9}$$

Donc pour (PS99), $x_s = 32,4$ km ce qui représente 0,4% du rayon de la naine blanche. Cette valeur est faible car en général la hauteur de la colonne de gaz choqué est plutôt d'une centaine de kilomètre. Par ce calcul, nous pouvons vérifier que le système peut bien être traité en géométrie plan-parallèle. En effet la hauteur de la colonne d'accrétion x_s est faible par rapport au rayon de la naine blanche ($x_s \ll R_{NB}$). Donc la zone nous intéressant ne ressent pas la courbure de la surface de la naine blanche.

– *Sur la surface de la naine blanche*

Le gaz choqué ralentit le long de la colonne d'accrétion et quand il arrive près de la surface de la naine blanche, sa vitesse est négligeable par rapport à la vitesse de chute libre. Ainsi la vitesse est supposée nulle à la base de la colonne : $u_3 = 0$.

Quand la variable d'espace se rapproche de la surface de l'objet compact, la densité tend vers l'infini car les pertes radiatives engendrent un refroidissement et les particules se rapprochent de plus en plus. La densité est donc à ce bord : $\rho_3 >> \rho_1$.

La température de surface de la naine blanche est négligeable par rapport à la température du choc et de plus, l'approximation de température nulle est valable dans les objets composés de matière dégénérée comme les naines blanches. La température est donc à ce bord : $T_3 \approx 0$.

Nous récapitulons les valeurs des observables ou déduites des observables qui caractérisent les polaires standards [Campbell et al., 2008, Fischer & Beuermann, 2001, Schmidt, 2004]. Les quantités caractéristiques des polaires sont :

– le champ magnétique dipolaire : $B \approx [2 - 7] \times 10^3$ T ;
– le taux d'accrétion spécifique : il peut être très faible et dans ce cas $\dot{m} \approx 10^{-2}$ kg.s^{-1}.m^{-2}. Cela revient à un taux d'accrétion $\dot{M} \approx 10^9$ kg.s^{-1} si l'on considère une aire d'accrétion $A = 10^{11}$ m^2. Mais le taux d'accrétion spécifique peut être aussi fort $\dot{m} \approx [1 - 100]$ kg.s^{-1}.m^{-2} ;
– la masse et le rayon de la naine blanche : $M_{NB} \approx 1 \, M_\odot$ et $R_{NB} \approx R_\oplus$;
– la température au niveau du front de choc : $k_B T_s \approx [10 - 20]$ keV ou $T_s \approx [10^8 - 10^9]$ K ;
– la hauteur de la colonne de gaz choqué : quelque pour-cent du rayon de la naine blanche, $x_s \approx 100$ km ;
– la luminosité d'accrétion : $L_{acc} \approx 10^{26}$ W ;
– la période orbitale : $P_{orb} \approx [1,5 - 5]$ h.

Nous allons maintenant présenter les simulations numériques de la colonne d'accrétion des polaires réalisées avec le code HYDRO-COOL. Les résultats obtenus peuvent être validés par la mesure de la position statique x_s du front de choc que nous comparons pour cela à la valeur donnée par le modèle analytique. Comme le choc retour se propage dans une seule dimension et qu'il n'y a pas de processus transverse, la colonne d'accrétion peut être simulée à une dimension. À l'instant initial, nous placerons un seul fluide en mouvement et qui rencontre un mur. Les conditions initiales que nous allons utiliser sont issues des calculs que nous venons de faire. En effet, la vitesse du fluide en accrétion conditionne la dynamique de l'onde de choc et nous allons donc utiliser $u_1 = 3700$ km.s^{-1}. Nous allons aussi utilisé la densité du milieu ambiant. Quant à la pression p_1, seuls des tests pourront contraindre ce paramètre. La naine blanche sera modélisée par la condition au bord par une condition réflective.

3.2.2 Les simulations numériques

Nous présentons dans cette partie les résultats des simulations numériques permettant l'étude de l'évolution du front de choc de la colonne d'accrétion. Cette approche est nouvelle car seules des simulations stationnaires ou des simulations injectant directement la solution stationnaire ont été réalisées jusqu'à présent (pour le deuxième type de simulation, voir Mignone [2005]).
Nous avons vu lors de la description des polaires et, particulièrement, dans le modèle analytique que la formation et la propagation de l'onde de choc dans le milieu en accrétion s'effectue en deux temps. Nous représentons les conditions présentes dans le flot à ces deux instants sur la figure 3.11 et cette schématisation illustre le procédé que nous allons suivre pour réaliser les simulations. La surface d'une naine blanche peut être considérée comme un mur solide sur lequel tombe la matière en accrétion (à $t = 0$ sur la figure 3.11). La matière en chute libre crée une onde de choc qui remonte la colonne d'accrétion et lors de sa propagation, comprime et chauffe la matière de cette même colonne (à $t > 0$). Ainsi dans les simulations, l'onde de choc est créée en mettant un obstacle sur le trajet d'un fluide en mouvement possédant une vitesse élevée. Nous introduisons le mur solide en fixant une des conditions aux bords du domaine spatial. Initialement, nous avons donc un seul fluide dans la boîte de simulation. De plus, nous introduisons en terme source la fonction de refroidissement qui permet de reproduire les pertes radiatives de la colonne d'accrétion émettant un rayonnement bremsstrahlung.
Nous prenons comme conditions initiales les valeurs des grandeurs fluides déterminées avec la polaire typique (PS99). Nous voulons en effet comparer la valeur théorique de la hauteur de gaz choqué x_s à celle obtenue numériquement. Comme précédemment, nous redimensionnons les données astrophysiques avec les valeurs caractéristiques déterminées dans la Sec. 1.4. Nous résumons les conditions initiales dans le tableau 3.3. Nous

Paramètres	ρ	u_x	p	γ
Milieu (1)	$2,7 \times 10^{-5}$ kg.m^{-3}	3700 km.s^{-1}	$8,6 \times 10^{6}$ Pa	5/3

TAB. 3.3 – Conditions initiales des simulations de la colonne d'accrétion de la polaire : densité, vitesse (selon O_x), pression, et indice adiabatique pour le milieu (1).

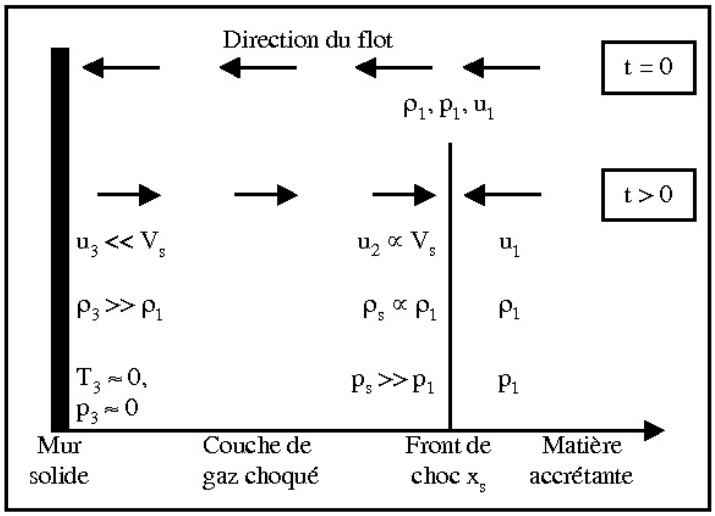
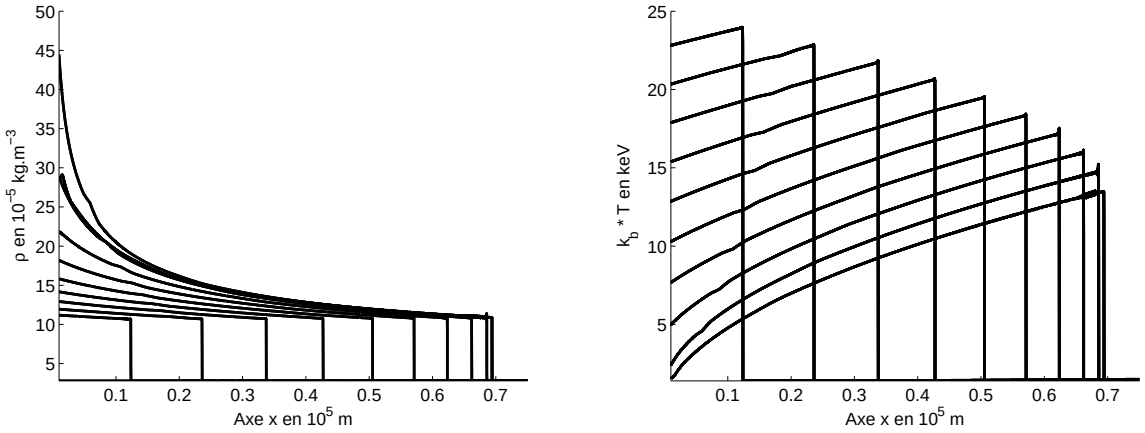


FIG. 3.11 – Schéma récapitulatif des conditions présentes dans le flot à l'instant initiale ($t = 0$) et lors de l'évolution du système ($t > 0$) dans les simulations de la colonne d'accrétion de la polaire. À l'instant initial, il n'y a qu'un seul fluide dans la boîte de simulation. Ensuite, la formation de l'onde de choc permet de distinguer deux fluides.

laissons évoluer la simulation jusqu'à l'instant $t_f = 0,1$ s $\approx 2\,t_{ref}$ qui est le double du temps de refroidissement que nous avons calculé précédemment pour les conditions initiales de la colonne d'accrétion similaire à (PS99). Ainsi l'effet des pertes radiatives a la possibilité de modifier la dynamique du système sur au moins la moitié de l'évolution de l'onde de choc. Nous choisissons une grande résolution afin de pouvoir bien résoudre la discontinuité du choc : $dx = 0,00013 \times 10^5$ m. Le nombre de Mach de l'onde de choc, qui se propage dans le milieu (1), est initialement $\mathcal{M} \approx 5$ car la vitesse du son du gaz non choqué de la colonne d'accrétion est $c_s = 740$ km.s^{-1}. En ce qui concerne le choix de la valeur de la pression p_1, nous avons vu que ce paramètre doit normalement être très faible dans le milieu ambiant. Du point de vue numérique, la valeur nulle de pression n'est pas acceptable. Nous avons donc choisi p_1 en faisant des tests qui avaient pour contrainte l'obtention de la staticité avant la divergence du système car une valeur de la pression du milieu (1) choisit astucieusement va permettre aussi le ralentissement de l'onde de choc.

Comme nous venons de l'aborder brièvement, l'obtention de la staticité du choc n'est pas quelque chose de trivial. L'introduction d'une fonction de refroidissement est une méthode valable dans un domaine de température particulier et si nous le contraignons mal, le système est vidé de son énergie. Et cet effet induit des erreurs numériques voire une divergence des résultats. De plus, nous allons voir sur les coupes des grandeurs fluides que la densité tend vers l'infini au niveau du mur solide. Cette divergence numérique engendrée par le processus physique de refroidissement est possible dans le modèle analytique. Mais elle n'est acceptable dans le code que jusqu'à la limite machine. Ensuite la divergence entraîne des erreurs numériques sur le front de choc car il n'est plus résolu (il y a un trop grand écart de densité). Nous voyons donc que ce problème est complexe à simuler.

Nous étudions les résultats des simulations représentés sur la figure 3.12 où nous superposons des profils de la densité et de la température à différents instants. Sur ces coupes réalisées sur l'axe O_x, le mur solide est situé



(a) ρ (b) $k_b\,T$

FIG. 3.12 – Evolution de la colonne d'accrétion de la polaire : superposition des coupes sur l'axe O_x de la densité (a) et de la température (b) jusqu'à $t_f = 0,1$ s $\approx 2\,t_{ref}$. Le front de choc, qui se propage vers la droite de la boîte de simulation, ralentit et finalement se stoppe. Les profils des grandeurs fluides dans la zone choquée sont changés par l'effet des pertes radiatives. Ce processus provoque la croissance de la densité près du mur solide (bord gauche de la boîte) et il engendre une diminution de la température dans la même zone jusqu'à atteindre la température nulle.

à gauche et le choc se propage vers la droite de la boîte de simulation jusqu'à une certaine position. Sur la figure 3.12(a) représentant l'évolution du profil de la densité, nous voyons que le milieu choqué près du mur ($x \to 0$) devient de plus en plus dense et cet effet est la conséquence directe du refroidissement. Nous voyons aussi que le front de choc ralentit de plus en plus jusqu'à atteindre une position statique à $x_s \simeq 69$ km. En ce qui concerne l'évolution du profil de température représenté sur la figure 3.12(b), nous voyons que la température près du mur atteint la valeur nulle quand le front de choc s'arrête. Nous remarquons donc qu'à l'instant que les profils de densité et de température tendent vers les profils décrits par le modèle analytique ce qui est très favorable à la validation des simulations numériques. Dans ce système $t_{ref} = 0,055$ s prouvant que le processus radiatif entre en jeu très rapidement après le début de la simulation.

Nous étudions la hauteur statique de gaz choqué. Nous voyons sur la figure 3.13 où l'évolution de la position du choc est représentée, que le front de choc se stoppe à $x_s \simeq 69$ km alors que nous avions déterminé avec ces conditions que la hauteur statique de gaz choqué est $x_s = 32,4$ km. Nous concluons donc que l'accord n'est pas bon. Cela s'explique par le fait que comme le modèle analytique utilise des profils divergent, ce qui n'est pas permis pour les simulations numériques comme nous l'avons vu dans les tests avec fonction de refroidissement, la valeur numérique du x_s devrait être plus petite que celle analytique. Mais c'est le contraire que nous observons. Les raisons pouvant expliquer ce non accord sont les suivantes : la polaire étudiée est un polaire caractéristique qui ne remplit peut-être pas toutes les hypothèses du modèle analytique et donc nous ne pourrions pas reproduire numériquement la solution analytique car il serait nécessaire de prendre en compte d'autres processus physiques.

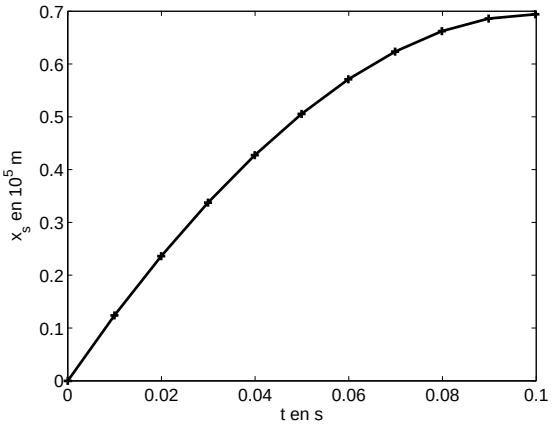


FIG. 3.13 – Evolution de la position du front de choc de la colonne d'accrétion de la polaire. Le front de choc suit d'abord une évolution linéaire. Puis il ralentit à partir de $t = 0,05$ s, quand les pertes radiatives entrent en jeu, et se stoppe à la position $x_s \simeq 69$ km. La valeur de la position du front de choc est environ le double de la valeur prédit analytiquement car la modélisation ne peut pas être strictement la même.

3.3 Les jets d'étoile jeune

Les jets d'étoile jeune sont des objets dont l'étude et la compréhension apparaissent comme étant des démarches importantes en astrophysique. Les jets de matière entrent en jeu dans la formation stellaire qui est une étape clé de la vie des étoiles. Ils ont une nature complexe qui fait intervenir de nombreux aspects de la physique et leur modélisation s'effectue à plusieurs échelles. En effet, en fonction de la région du jet étudiée, nous devons faire appel à l'hydrodynamique, la magnétohydrodynamique, ou encore coupler un de ces deux domaines avec le transfert radiatif. Nous avons réalisé des simulations numériques de ce type d'objet afin de tester les codes HYDRO-MUSCL et HYDRO-COOL. Particulièrement, nous voulions vérifier que le solveur HLLC, qui est un solveur de Riemann normalement adapté à l'étude des processus apparaissant dans les jets [Toro, 1999], donne bien les résultats attendus. En effet dans les jets d'étoile jeune, des nombres de Mach élevés sont mesurés et il est important que le solveur de Riemann gère bien cette propriété afin de pouvoir réaliser des simulations de ces objets. En plus de cette première étude, nous avons testé l'effet de pertes radiatives sur la dynamique du jet grâce au code HYDRO-COOL. En utilisant toujours la fonction de refroidissement afin de modéliser les pertes radiatives, nous avons pu voir que la morphologie du jet est changée. Ce résultat préliminaire est important car les interrogations sur la formation du jet, la présence de noeuds et de chocs au sein de celui-ci, la stabilité du choc en arc à la tête du jet, ou encore sur la propagation du jet dans le milieu ambiant de manière très collimatée sur de longues distances, ne sont pas encore élucidées. La vérification de la dernière propriété est celle qui nous motive à simuler un jet de matière avec des pertes radiatives. Afin de commencer cette vaste étude de l'effet du rayonnement sur la dynamique du jet, pour lequel un couplage entre l'hydrodynamique et le rayonnement est nécessaire, nous avons réalisé des simulations hydrodynamiques de jet de matière et dans l'approximation optiquement mince du rayonnement et nous présentons les résultats obtenus dans cette partie.

3.3.1 L'objet astrophysique et la problématique

Les jets d'étoile jeune représentent une thématique récente mais en plein développement. Les diverses branches de la physique sont mises à contribution afin de comprendre les mécanismes complexes qui s'y déroulent. En effet, de l'astrophysique de laboratoire [Gregory et al., 2010, Lebedev et al., 2002, Loupias et al., 2007] en passant par les simulations numériques [Ciardi et al., 2008, Micono et al., 2000, Mignone et al., 2010], la communauté scientifique aborde le problème par différents modèles, voir par une approche multi-modèles [Hartigan et al., 2009], afin de mieux comprendre ces objets.
Les jets d'étoile jeune, présents dans de multiples systèmes, se nomment les objets de Herbig-Haro (HH) du nom de leurs découvreurs [Haro, 1952, Herbig, 1951]. Ils sont la résultante du mécanisme d'accrétion de la matière *via* un disque de même nature sur la jeune étoile de type T-Tauri. Par conservation du moment cinétique, l'accrétion de la matière du disque sur l'étoile produit deux jets dont les bases sont situées aux pôles de l'étoile. C'est le champ magnétique fort de la jeune étoile qui permet la collimation du jet dès sa région d'émission et donne la direction de propagation du faisceau de matière. Ainsi les objets de Herbig-Haro présentent une structure caractéristique, comme illustrée par l'image de *HH111* de la figure 3.14 où un seul des deux jets est visible. Nous voyons, en effet, sur cette image la matière éjectée par l'étoile (la source est hors du champ à

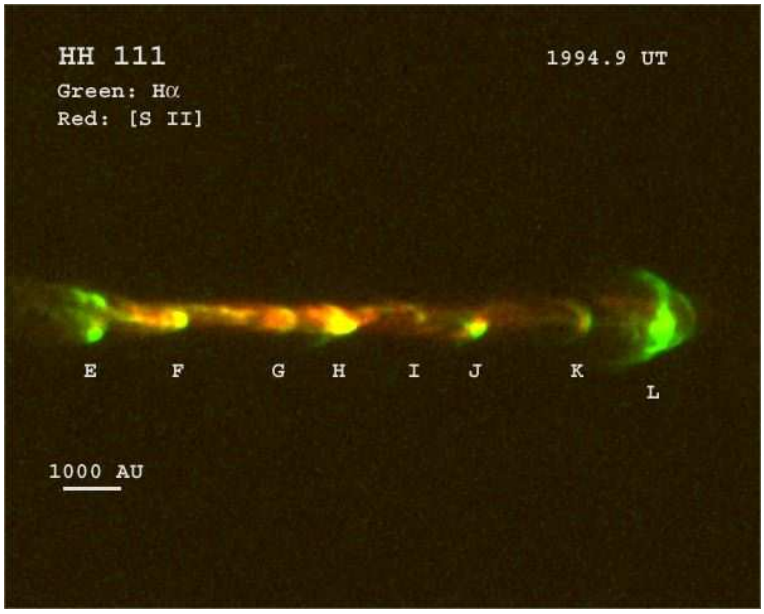


FIG. 3.14 – Image du jet d'étoile jeune *HH111* sur lequel le choc en arc et les noeuds sont visibles. Le jet se déplace vers la droite de l'image. Crédit : HST/Reipurth, B. (ESO), Hartigan, P. (Rice), Heathcote, S. (CTIO), Morse, J., & Bally, J. (CASA)

gauche) et formant à l'autre extrémité du jet un choc en arc (indiqué par la lettre L). Entre les deux extrémités du jet et indiqués par les autres lettres, les noeuds sont visibles. Ce sont des paquets de matière sur lesquels apparaissent aussi des fronts de choc. L'évolution de ce jet au cours du temps est visible sur des films réalisés par P. Hartigan[6]. Cette évolution permet d'observer le mouvement de la matière ou bien l'émission de certaines

[6]http ://sparky.rice.edu/movies/hh111jetc.gif

régions qui s'activent et commencent à produire du rayonnement à différents instants. Particulièrement, les instantanés de l'objet *HH111* permettent de se rendre compte que les noeuds se déplacent rapidement au sein de la structure cylindrique. À la tête du jet, le lobe d'émission, qui signale le choc en arc, change aussi à cause de l'interaction de cette région avec le milieu ambiant. Une propriété du jet, clairement visible sur cette image, est la collimation de la matière sur de grandes distances. Cette caractéristique intrinsèque au jet n'est pas encore bien comprise. À l'heure actuelle, le processus de collimation sur de grandes distances est expliqué par deux mécanismes : l'effet du champ magnétique et l'effet du rayonnement. La première hypothèse intervient lors de la formation du jet dans l'environnement proche de la jeune étoile. Mais l'action du champ magnétique semble être réfutée pour la collimation du jet par la mesure du champ magnétique, qui est toutefois l'observable la plus difficile à obtenir dans ce type d'objet. En effet, près de l'étoile, le champ magnétique de la source étant important ($\beta = p/p_{mag} \approx 1$ et $B \approx 10^{-4}$ T), son rôle dans le mécanisme d'éjection et la collimation du jet à la base de celui-ci est certain. Mais loin de la source, le champ magnétique ambiant est faible ($\beta \gg 1$ et $B \approx 10^{-10}$ T) [Hartigan et al., 2007, Ray, 2009] et celui transporté par le jet lors de sa propagation est aussi négligeable. Ainsi le jet peut être traité dans le domaine hydrodynamique et sa forme cylindrique, même loin de sa source, permet de surcroît une modélisation numérique simple. De plus, comme les jets ont une température relativement importante ($T \approx [1-2] \times 10^4$ K) et un nombre de Mach élevé ($\mathcal{M} = 20-40$, avec une vitesse du son $c_s \sim 10$ km.s^{-1}), les conditions sont requises pour que le jet soit dans un régime radiatif et l'hypothèse de la rétroaction du rayonnement sur le jet permettant la collimation semble une voie intéressante à explorer. La présence de sous-structures au sein du jet et la formation de ces noeuds est aussi une question d'actualité. En effet, ces surdensités présentes dans le jet peuvent être due à la nature de la source qui pourrait pulser la matière dans le jet, ou bien c'est l'action de l'instabilité de Kelvin-Helmholtz qui est responsable de ce phénomène [Micono et al., 2000, Trussoni, 2008, 2009], ou encore les deux causes simultanément. Ainsi, afin d'avoir une meilleure compréhension des jets de matière et particulièrement du processus de collimation qui est présent dans ces objets, nous avons réalisé des simulations numériques que nous présentons maintenant.

3.3.2 Les simulations numériques

Dans cette partie nous présentons deux types de simulations qui nous ont permis d'étudier certains processus apparaissant dans les jets. Dans un premier temps, avec le code HYDRO-MUSCL, nous avons pu tester le solveur de Riemann de type HLLC. Nous nous sommes aussi intéressé aux différentes structures formées dans la simulation, comme le choc d'étrave, le cocon qui enveloppe le jet, ou encore les vortex de matière, qui sont observés dans les jets d'étoile jeune. Dans un second temps, nous avons étudié des jets soumis à des pertes radiatives à l'aide du code HYDRO-COOL. Cette étude reste préliminaire car nous n'avons pas introduit une perte radiative qui correspond à celle présente dans les jets d'étoile jeune. Mais les simulation réalisées dans l'approche suivante nous ont permis d'observer, dans l'approximation optiquement mince, l'effet de l'émission de rayonnement sur la dynamique du jet. Nous avons ainsi pu conclure que la collimation augmente quand des pertes radiatives sont présentes. Nous précisons que les simulations sont réalisées en symétrie cylindrique (termes sources géométriques activés) et le redimensionnement utilisé pour effectuer les simulations suivantes est celui présenté à la Sec. 1.4.

Le jet purement hydrodynamique

Nous réalisons la simulation d'un jet purement hydrodynamique afin de comparer les résultats obtenus avec le solveur HLLC implementé dans le code HYDRO-MUSCL avec ceux obtenus par Mignone et al. [2004] avec le solveur de Roe. Les conditions initiales sont les mêmes que celles utilisées dans cet article et elles sont données dans le tableau 3.4. Nous notons que la densité ρ_{MIS} du milieu ambiant est plus dense que la densité

Paramètres		ρ	u_z	u_r	p	γ
Milieux	jet	10^{-18} kg.m^{-3}	100 km.s^{-1}	0 km.s^{-1}	6×10^{-11} Pa	5/3
	ambiant	3×10^{-18} kg.m^{-3}	0 km.s^{-1}	—	—	5/3

TAB. 3.4 – Conditions initiales pour le jet sous-dense : densité, vitesses (selon O_z et O_r), pression et indice adiabatique pour le milieu ambiant et le milieu correspondant au jet.

ρ_{jet} du jet et le rapport de densité que nous avons introduit pour initialiser la simulation est $\eta = \rho_{jet}/\rho_{MIS} \approx 0,4$. Ainsi le système est un jet sous-dense, comme ceux présents dans les noyaux actifs de galaxies (NAG) pour lesquels $\eta \approx 10^{-5}$. Mais le rapport de densité est aussi proche de celui présent dans les jets d'étoile jeune pour lesquels $\eta \approx 1 - 20$ (pour les rapports de densité, voir de Gouveia dal Pino [2005]). La vitesse du son du milieu ambiant est $c_s = 6$ km.s^{-1} et celle interne au jet, $c_{s,jet} = 10$ km.s^{-1}. Ainsi la vitesse initiale du jet est

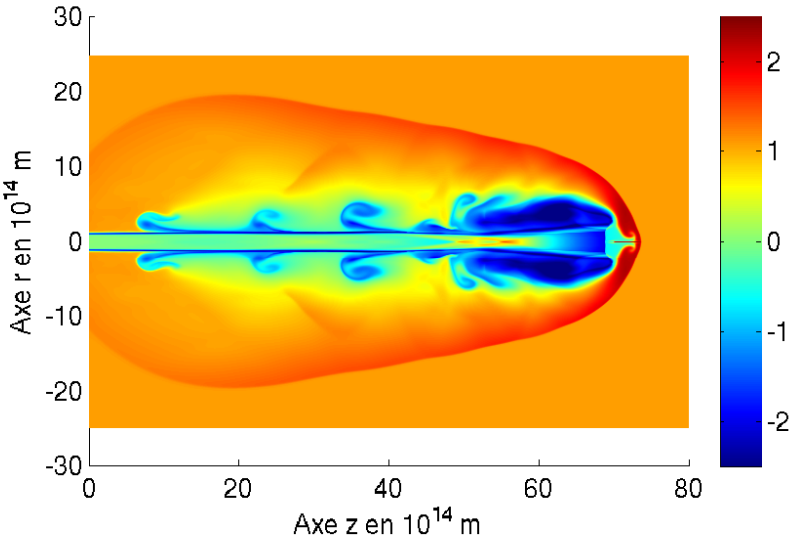


FIG. 3.15 – Jet sous-dense : carte du logarithme népérien de la densité en 10^{-18} kg.m^{-3} d'un jet purement hydrodynamique à $t = 630$ ans. La propagation du jet dans le milieu ambiant permet la formation d'un choc à la tête de celui-ci, d'un cocon de large rayon, d'une région de très faible densité derrière le front de choc et de vortex de matière à l'interface entre le jet et le cocon.

bien plus grande que la vitesse du son du milieu dans lequel il se propage. La simulation évolue jusqu'à $t = 630$ ans afin d'étudier la propagation du jet sur une longue période. La résolution que nous avons utilisée n'est pas la même sur les deux axes mais elle reste une résolution correcte dans les deux directions : $dz = 0,040 \times 10^{14}$ m et $dr = 0,032 \times 10^{14}$ m.

Nous représentons respectivement sur la figure 3.15 et sur la figure 3.16 la carte de la densité et celle de la vitesse selon O_x au temps final (à $t = 630$ ans). Nous voyons sur cette simulation que le jet se propage vers la droite de la boîte de simulation à sa vitesse initiale de 100 km.s^{-1}. Et il a aussi conservé son rayon initial $r_{jet} \approx 2 \times 10^{14}$ m sauf à sa tête où il présente un faible angle d'ouverture. À la tête du jet, nous remarquons aussi qu'un choc d'étrave est formé. Ce processus comprime la matière du milieu ambiant et c'est donc la région où la densité est maximale. Le choc d'étrave a une vitesse dix fois moins importante que le jet et le choc est donc faiblement supersonique. Le front de choc est prolongé dans la direction radiale par le cocon, plus dense que le milieu ambiant, jusqu'à une distance $r_{cocon} \approx 20 \times 10^{14}$ m. L'extrémité du jet se scinde en deux parties à la position $z \approx 73 \times 10^{14}$ m à cause de la matière du choc d'étrave qui vient bloquer le jet dans sa progression. Dans le cocon et derrière le choc, nous observons une zone sous-dense qui est la conséquence du choc d'étrave. Nous observons aussi des vortex sous-denses de matière, à l'interface entre le jet en mouvement et le milieu délimité par le cocon, qui sont créés par le choc d'étrave et qui sont semblables à ceux engendrés par l'instabilité de Kelvin-Helmholtz. Nous précisons que pour vérifier que c'est bien l'action de l'instabilité de Kelvin-Helmholtz qui créée ces structures, nous devons réaliser une autre simulation. En effet,

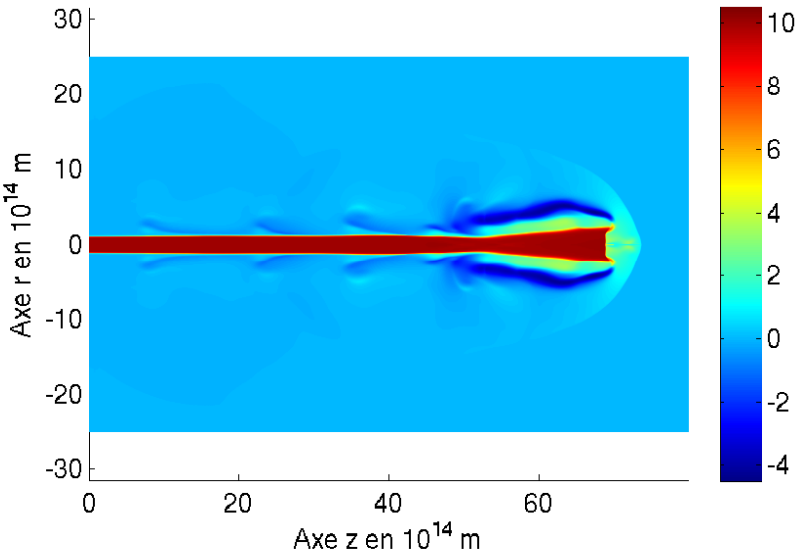


FIG. 3.16 – Jet sous-dense : carte de la vitesse selon O_x en 10 km.s^{-1} d'un jet purement hydrodynamique à $t = 630$ ans. La région sous-dense, visible sur la carte de densité, présente une vitesse négative due à la propagation de la matière vers l'arrière du jet.

pour étudier cette instabilité hydrodynamique, il est nécessaire de simuler deux fluides infinis en mouvement,

de regarder l'évolution d'une perturbation introduite sur l'interface séparant les deux fluides et de comparer les résultats obtenus avec la simulation que nous présentons [Downes & Ray, 1998]. Nous remarquons aussi que, vers $z \sim 50 \times 10^{14}$ m, les vortex sous-denses pénètrent dans le jet et permettent la formation en son sein d'une structure plus dense que le milieu présent dans le jet (une onde de surpression pouvant même former un choc). Sur un temps d'évolution plus long, ces structures pourraient s'apparenter à des noeuds comme ceux observés dans les systèmes astrophysiques. Nous mesurons sur différents instantanés que les vortex sous-denses apparaissent environ tous les 120 ans. Mais les noeuds plus denses du jet apparaissent moins fréquemment que les structures sous-denses se formant à l'interface. Cette première étude, avec laquelle nous avons montré que nous pouvons obtenir numériquement les structures observées dans les jets, nous permet donc de valider le solveur HLLC pour les simulations de jet d'étoile jeune. Nous allons à présent passer à l'étude des simulations de jets avec fonction de refroidissement que nous avons réalisées à l'aide du code HYDRO-COOL.

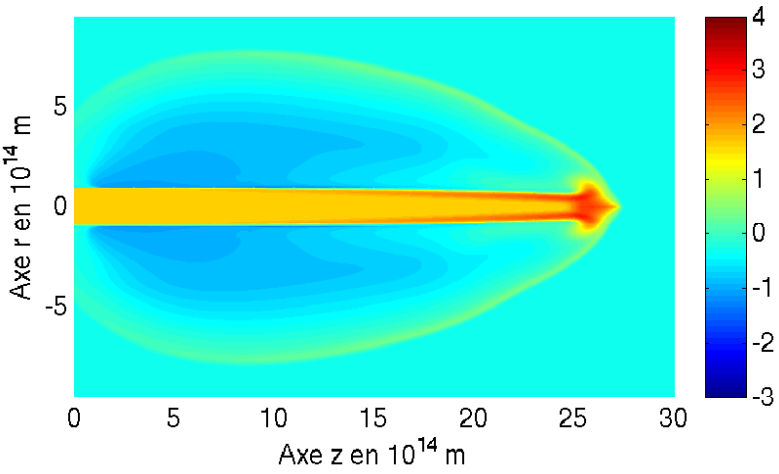
Le jet hydrodynamique avec fonction de refroidissement

Nous introduisons maintenant une fonction de refroidissement dans la région délimitée par le jet afin de prendre en compte l'émission de rayonnement de cet objet dans l'approximation optiquement mince. L'étude présentée dans cette partie est issue de Nguyen et al. [2010]. Le système modélisé est à présent comparable à un jet d'étoile jeune car la densité que nous utilisons pour initialiser le jet est plus importante que celle du milieu ambiant. Pour déterminer les conditions initiales de cette simulation, nous utilisons la valeur moyenne des observables correspondant aux jets d'étoile jeune qui sont résumées dans de Gouveia dal Pino [2005]. Les conditions initiales de la simulation sont données dans le tableau 3.5. Nous notons qu'avec ces valeurs de mi-

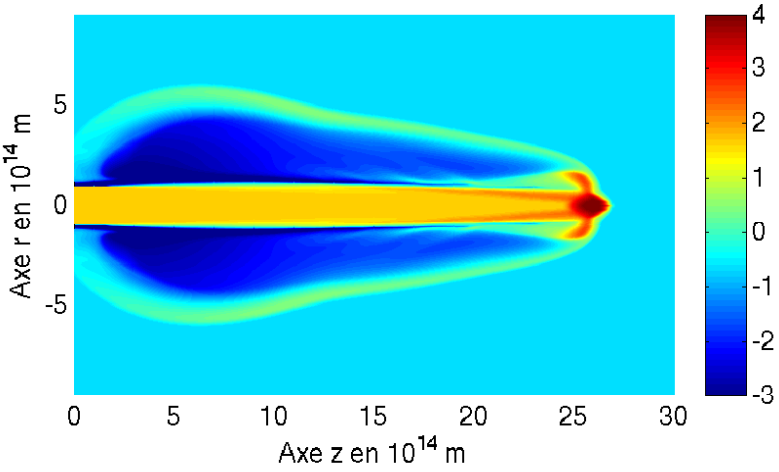
Paramètres		ρ	u_z	u_r	p	γ
Milieux	jet	5×10^{-22} kg.m^{-3}	200 km.s^{-1}	0 km.s^{-1}	$4,2 \times 10^{-15}$ Pa	5/3
	ambiant	5×10^{-23} kg.m^{-3}	0 km.s^{-1}	—	—	5/3

TAB. 3.5 – Conditions initiales pour les jets d'étoile jeune avec et sans fonction de refroidissement : densité, vitesses (selon O_z et O_r), pression et indice adiabatique pour le milieu ambiant et le milieu correspondant au jet.

lieux ambiant et de jet, le rapport de densité est $\eta = 10$, la vitesse du son du milieu ambiant est $c_s = 12$ km.s^{-1} et celle interne au jet est $c_{s,jet} = 4$ km.s^{-1}. Ainsi le nombre de Mach externe du jet est $\mathcal{M} = 17$. Nous rappelons que les pertes radiatives sont prises en compte dans le code *via* la fonction de refroidissement $\Lambda(\rho, p) = \Lambda_0 \rho^{\epsilon} p^{\zeta}$. Nous utilisons pour la simulation incluant ces pertes radiatives les caractéristiques du refroidissement par émission de rayonnement bremsstrahlung : $\epsilon = 1,5$ et $\zeta = 0,5$. Nous précisons que ce type de pertes radiatives n'est pas toujours présent dans les jets d'étoile jeune car la température atteinte dans ces systèmes n'est pas trop élevée (en général, $T_{jet} = 10^4$ K et $T_s = 10^5$ K $< 10^7$ K). Ainsi une fonction de refroidissement de type milieu interstellaire, comme celle déterminée dans Dalgarno & McCray [1972], est plus appropriée dans ces objets et elle représente une amélioration possible de la description. Mais nous nous intéressons pour le moment à une fonction de refroidissement décrivant une processus physique particulier



(a) cas purement hydrodynamique

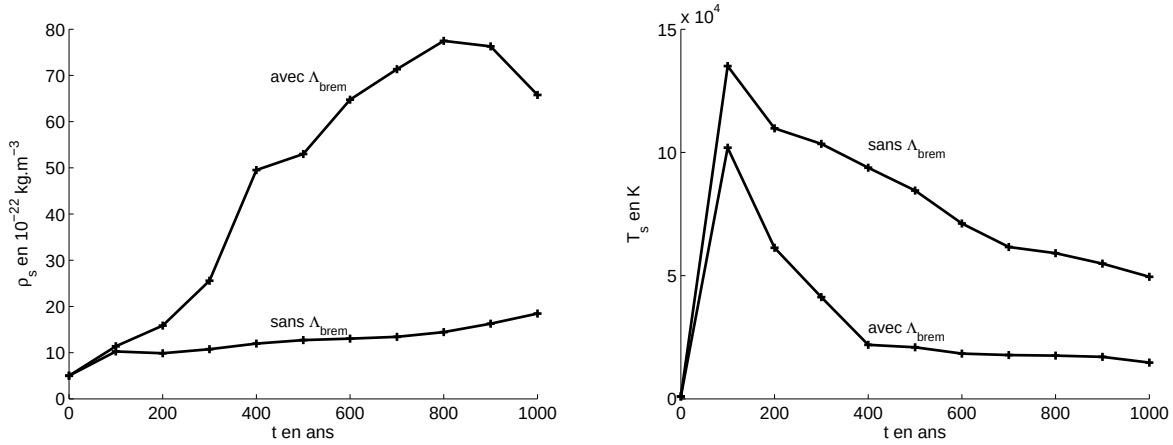


(b) cas avec Λ_{brem}

FIG. 3.17 – Effet des pertes radiatives sur le jet d'étoile jeune : carte du logarithme népérien de la densité en 10^{-22} kg.m^{-3} d'un jet purement hydrodynamique (a) et d'un jet avec une fonction de refroidissement de type bremsstrahlung (b) à $t = 1000$ ans. La densité au niveau du choc augmente fortement lorsque la fonction de refroidissement est présente dans le système. Dans le cas du jet avec des pertes radiatives, le cocon est plus allongé et le milieu présent entre l'enveloppe que forme le cocon et le bord du jet se raréfie. Issu de Nguyen et al. [2010].

dans l'unique but de tester l'effet des pertes radiatives sur la dynamique du jet. La simulation évolue jusqu'à $t = t_0 = 1000$ ans qui est l'âge caractéristique de ce type d'objet déterminé *via* les autres observables connues. De plus, le coefficient de refroidissement $\chi = t_{ref}/t_0$ qui mesure le rapport entre le temps de refroidissement t_{ref} et le temps hydrodynamique caractéristique t_0 est fixé à $\chi = 0,1$ afin de pouvoir étudier le jet sur une durée suffisamment importante pour que les pertes radiatives aient pu jouer un rôle. Cette faible valeur du coefficient de refroidissement implique que nous avons forcé la constante de refroidissement a une plus grande valeur que $\Lambda_{0,brem} = 3,9 \times 10^{11}$ afin d'avoir des effets plus probants. En effet, nous avons introduit une constante de refroidissement $\Lambda_0 = 3,2 \times 10^{16}$ dans les simulations que nous présentons. La résolution élevée choisit pour cette simulation est $dz = dr = 0,1 \times 10^{14}$ m.

Nous représentons sur la figure 3.17 la carte de la densité au temps final (à $t_f = 1000$ ans) pour les deux types de simulation : pour le cas purement hydrodynamique (voir Fig. 3.17(a)) et pour le cas hydrodynamique avec fonction de refroidissement de type bremsstrahlung (voir Fig. 3.17(b)). Nous faisons l'analyse des simulations en comparant nos résultats avec ceux obtenus par Blondin et al. [1990] et Micono et al. [1998] qui ont réalisés des simulations de jet utilisant une fonction de refroidissement plus physique. Nous voyons sur les instantanés de la carte de densité que les deux simulations présentent plusieurs différences car les pertes radiatives agissent à plusieurs niveaux sur le jet. Mais d'abord, la caractéristique qui ne change pas entre les deux simulations est la position du front de choc qui se trouve à $z \approx 26 \times 10^{14}$ m. Ainsi la dynamique globale du jet n'est pas changée par la présence d'une perte radiative, comme déterminé par Micono et al. [1998]. Par contre, nous remarquons que la densité au niveau du front de choc est bien plus importante dans le cas du jet avec des pertes radiatives. Cet effet est visible d'autant mieux sur la figure 3.18 sur laquelle nous avons représenté l'évolution temporelle de la densité et de la température du front de choc et que nous interprétons ci-après. La différence de densité



(a) ρ_s (b) T_s

FIG. 3.18 – Effet des pertes radiatives sur le jet d'étoile jeune : évolution de la densité (a) et de la température (b) au niveau du front de choc. À partir de $t = t_{ref} = 100$ ans, l'évolution des quantités, subissant ou non la fonction de refroidissement, diverge. Les pertes radiatives que nous avons introduites dans le système, sont traduites par une forte augmentation de la densité et une forte diminution de la température en accord avec un refroidissement du front de choc.

à cet endroit est la conséquence d'une forte diminution de la température dans la région du choc. La matière

étant vidée de son énergie, les pertes radiatives amplifient la croissance de la densité derrière le choc. Ainsi nous obtenons une densification du milieu choqué comme dans Blondin et al. [1990]. Ensuite, nous voyons que la région du cocon est aussi affectée par les pertes radiatives. Dans cette zone, la densité est raréfiée et les contrastes de densité sont donc plus importants dans la simulation avec fonction de refroidissement. De plus, la forme du choc et, la propriété qui nous concerne particulièrement, la forme du cocon sont changées. En effet, le rayon maximal du cocon est $r_{cocon} \approx 8 \times 10^{14}$ m dans le cas purement hydrodynamique et $r_{cocon} \approx 6 \times 10^{14}$ m dans le cas hydrodynamique avec fonction de refroidissement. Toujours dans le cas avec fonction de refroidissement, nous remarquons que le cocon est plus fin derrière le choc comme marquant l'effet d'un changement de régime. Ainsi, la température plus élevée, présente dans le cocon purement hydrodynamique, permet à celui ci d'avoir une grande expansion loin de la partie centrale collimatée. Et dans le cas du jet hydrodynamique avec fonction de refroidissement, la température reste faible dans la zone du cocon. L'enveloppe qui délimite la région du jet n'entre donc pas dans une expansion globale comme dans le cas précédent et ce résultat est en accord avec ceux de Micono et al. [1998]. Ainsi les pertes radiatives ont un impact sur la morphologie du jet et pourrait jouer un rôle dans la collimation de celui-ci si l'émission traitée dans l'approximation optiquement mince du jet est bien modélisée.

Nous étudions plus précisément l'effet des pertes radiatives sur la densité et la pression au niveau du front de choc. Nous représentons l'évolution du maximum de ces deux variables au cours du temps sur la figure 3.18. Nous voyons qu'à partir de $t = t_{ref} = 100$ ans, l'évolution diffère due à l'entrée du processus de refroidissement en action. Ainsi nous voyons que ce sont les pertes radiatives qui provoquent la divergence de comportement entre les deux simulations et elles engendrent une augmentation de la densité et une diminution de la température en accord avec un refroidissement du front de choc. Nous avons donc montré que le code HYDRO-COOL est adapté pour réaliser des simulation de jet avec des pertes radiatives et qu'il permet d'obtenir les effets liés à ce processus.

Chapitre 4

L’instabilité de Vishniac

L’instabilité de Vishniac découverte analytiquement dans le domaine des chocs radiatifs reste une instabilité hydrodynamique peu connue. En astrophysique, cette instabilité est invoquée pour expliquer la fragmentation et la filamentation de la coquille fine de gaz choqué des restes de supernova évoluant dans leur phase radiative et particulièrement dans leur phase dominée par la pression nommée "Pressure Driven Thin Shell" (PDTS). Nous reviendrons dans ce chapitre sur ce contexte spécifique mais nous pouvons déjà énoncer que lors de l’explosion d’une étoile massive, la supernova permet la création d’une onde de souffle qui se propage d’abord dans l’enveloppe de l’étoile et ensuite dans le milieu environnant où elle forme un système nommé reste de supernova (RSN). L’onde de choc de ce système comprime la matière du milieu ambiant et stocke le gaz choqué dans une coquille située juste derrière le front de choc. L’expansion de l’onde de souffle dans son environnement immédiat suit une évolution auto-semblable (pas de distance et de temps caractéristiques) déterminée par l’âge du RSN. En effet la position du front de choc évolue selon une loi de puissance temporelle et cette solution auto-semblable dépend de l’énergie de l’explosion initiale, de la densité du milieu ambiant et aussi de l’indice adiabatique de la coquille. Le milieu dans lequel se propage le RSN est souvent hétérogène (éjections antérieures de l’étoile progénitrice, nuages moléculaires, autres RSN,…) et ces gradients de densité perturbent le front de choc lors de son expansion. Selon la théorie de Vishniac, la déformation de la coquille permet aux forces de pression s’appliquant sur chacun des bords de celle-ci de ne plus se contrebalancer et un flot transverse de matière va pouvoir apparaître au sein de la couche de gaz choqué. Il s’ensuit que cette perturbation peut être instable si un certain nombre de critères établis théoriquement sont validés. Nous allons nous intéresser en détail à l’étude de ces critères qui dépendent du modèle analytique de Ryu & Vishniac [1987]. Ainsi la perturbation de la coquille du RSN qui croît au cours du temps forme l’instabilité de Vishniac.
Cette instabilité porte parfois le nom de PDTSO où le O signifie "overstability" que nous traduisons par surstabilité. Le terme de surstabilité fait référence à la forme de la perturbation qui est dans ce cas, une oscillation d’amplitude croissante des grandeurs fluides et spatiales au cours du temps. En effet, une fois que la coquille est perturbée, la densité, la vitesse, la pression et la position du front de choc se mettent à osciller selon une loi prédite par la théorie. L’amplitude de l’oscillation augmentant avec le temps, l’instabilité permet la formation de zones de plus en plus denses qui continuent à croître pendant le régime linéaire de l’instabilité. Théoriquement,

les surdensités pourraient augmenter à un point tel et que, dans le même temps, des zones vides de matière se créent de tailles tellement importantes, que la coquille se retrouverait fractionnée et ce processus permettrait de former les structures filamentateuses et fragmentées que nous observons dans les vieux RSN. Ainsi l'instabilité de Vishniac aurait un rôle important dans l'évolution des RSN. Dans les simulations numériques que nous avons réalisées, nous verrons apparaître ces divers processus mais nous constaterons que l'évolution sur le long terme de l'instabilité ne suit pas la prédiction théorique.
Nous allons aborder dans ce chapitre, les différents modèles théoriques de l'instabilité de Vishniac car il est nécessaire de voir que l'on peut comprendre ce processus par différentes approches. Nous insisterons aussi sur les différentes hypothèses de ces modèles afin d'en faire ressortir les limites. Nous faisons aussi une revue des différentes études théoriques, numériques et en laboratoire qui ont été réalisées sur l'instabilité de Vishniac afin de voir que ce sujet complexe demande d'être étudié par plusieurs branches scientifiques. Nous nous intéresserons ensuite au contexte astrophysique *via* l'étude des supernovæ de type gravitationnel et du RSN qu'elles engendrent. Et finalement nous présenterons la première partie des simulations sur ces objets où nous ne perturberons pas encore le système. L'étude numérique et paramétrique des RSN soumis à une perturbation sera donnée dans le chapitre suivant.

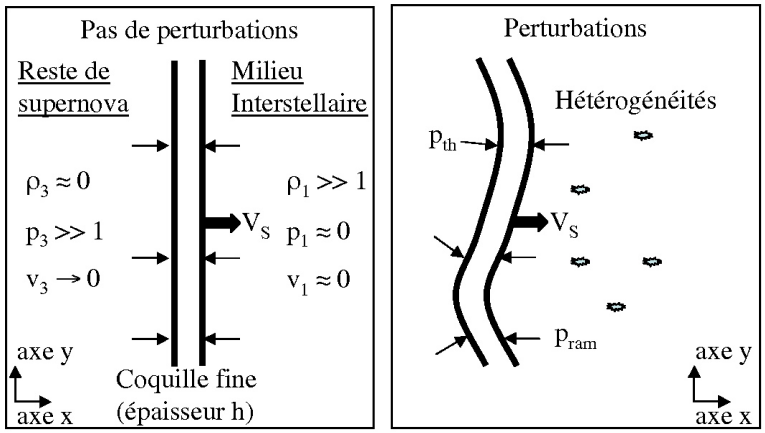
4.1 Le processus physique

Dans les RSN sur lesquels nous reviendrons en détail dans ce chapitre, l'onde de souffle qui se propage dans le milieu ambiant est composée d'un front de choc qui est lui même suivi par une coquille de gaz choqué. L'onde de raréfaction qui a été générée au même instant que l'onde de choc, se propage vers le site de l'explosion de l'étoile progénitrice, et ainsi vide le milieu situé entre l'origine et le front de choc du RSN. Ce gaz, situé à l'intérieur de la sphère délimitée par le front de choc, est chaud et il possède donc une pression thermique importante qui permet l'expansion du RSN. Mais l'onde de choc comprime la matière ambiante et la stocke dans la coquille ce qui engendre une pression bélier qui freine son mouvement. Ainsi la dynamique de la coquille est contrôlée par deux pressions. Le processus physique de l'instabilité de Vishniac auquel nous nous intéressons est lié à l'équilibre de ces pressions. Dans cette partie nous présentons ce processus en le décomposant en deux parties : le déclenchement de l'instabilité et la surstabilité.

4.1.1 Le déclenchement de l'instabilité

Le processus physique de déclenchement de l'instabilité repose sur une différence de direction des forces résultantes de gradients de pression s'appliquant de part et d'autre de la coquille fine de gaz choqué. En effet la dynamique de cette couche de gaz comprimé dépend de deux forces de sens opposé. La première force est la force de pression thermique p_3 qui résulte de la température élevée du gaz du RSN (pression isotrope). Au niveau de la paroi interne de la coquille fine et dense, cette force s'applique normalement sur l'interface délimitée par la coquille pour la pousser vers l'extérieur. La seconde force de sens opposé est la force de

pression bélier ("ram pressure") $p_{ram} = \rho_1 V_s^2$ qui résulte de la propagation du front de choc dans le milieu ambiant car la matière de ce milieu n'a d'autre choix que de s'accumuler sur le front de choc. Cette force s'applique normalement au mouvement global de la coquille (force dirigée selon la direction V_s) et tend à freiner la progression de l'onde de souffle dans le milieu environnant. Les deux pressions dont sont issues les forces sont proportionnelles et elles sont reliées par le rapport $\kappa = p_3/p_{ram}$. Ce rapport de pression, toujours inférieur à 1 et déterminé de manière générale (voir Sec. 4.4.3) prend en compte le ralentissement de la coquille. La figure 4.1 illustre, en géométrie plan-parallèle ou en géométrie sphérique pour un rayon de front de choc R_s grand (rayon de courbure négligeable), le fait que si le choc ne subit aucune déformation (le milieu ambiant est uniforme), les deux forces de pression gardent la même direction et le front de choc reste stable [Erpenbeck, 1962] (voir Fig. 4.1(a)). Mais dans le cas d'un milieu ambiant possédant des hétérogénéités, le front de choc est



(a) cas stable (b) cas instable

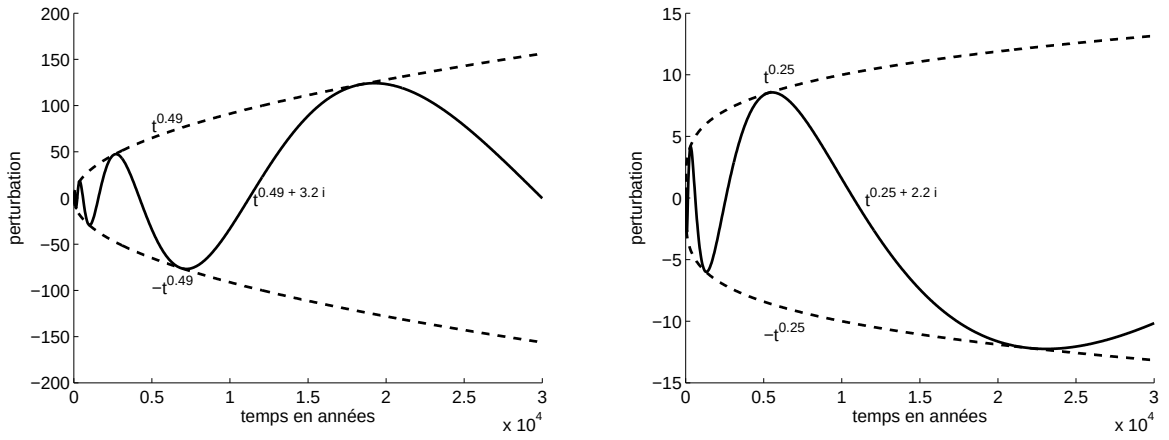
FIG. 4.1 – Processus physique de déclenchement de l'instabilité de Vishniac : cas stable (a) et instable (b). Les hétérogénéités du milieu ambiant déforment la coquille fine qui se propage selon la direction O_x. La résultante des forces n'étant plus nulle localement, un flot transverse de matière est créé dans la direction O_y.

déformé lorsqu'il rencontre sur sa trajectoire ces surdensités et les deux forces ne se contrebalancent plus. La résultante des forces qui s'appliquent sur la coquille n'étant plus nulle tangentiellement, un flot transverse de matière est créé dans la couche de gaz choqué. En effet, quand le front de choc est déformé, la force issue de la pression interne isotrope pousse la matière perpendiculairement à la déformation (voir Fig. 4.1(b)) et comme la pression bélier n'a pas de composante dans cette direction, elle ne compense donc pas cette pression. Ainsi un mouvement de matière transverse à la propagation du choc se crée et il permet l'écoulement de la matière de la zone convexe de la coquille, que nous nommons la bosse de la déformation, vers la zone concave de celle-ci, que nous nommons la vallée de la déformation. Ce processus est le déclenchement de l'instabilité de Vishniac.

4.1.2 La surstabilité ("overstability")

Après que l'instabilité ait été déclenchée par une déformation de la coquille et que, en conséquence, la matière se déplace dans celle-ci de manière transverse, la matière de la bosse va venir s'accumuler dans celle

de la vallée pour former une région surdense (aussi de vitesse et de pression plus élevée que la moyenne de ces grandeurs dans la coquille). Ce processus va se dérouler jusqu'à ce que la masse de la vallée soit suffisante pour promulguer, à cette région, une impulsion importante. Le centre de la vallée qui était en retard jusqu'à présent, va rattraper la position du centre de la bosse et la dépasser. Ainsi les deux régions voisines vont échanger leur état de bosse et de vallée et cela va permettre un changement de sens de l'écoulement transverse. La matière qui avait été accumulé dans l'ancienne vallée va venir accroître celle de la nouvelle vallée. C'est ce processus de va et vient de la matière dans la coquille qui est la conséquence directe de l'action de l'instabilité de Vishniac.
La théorie de l'instabilité prédit la manière avec laquelle évolue la surdensité. En effet, la perturbation engendrée dans la couche de gaz choqué se met à croître selon un processus bien particulier : la surstabilité. De manière générale, une surstabilité est une forme d'instabilité qui se traduit par une oscillation d'amplitude croissante des grandeurs caractéristiques du système. La particularité de l'instabilité de Vishniac est qu'elle fait appel à ce processus de surstabilité pour caractériser les mouvements de va et vient. La forme de la perturbation qui est introduite pour perturber les grandeurs caractéristiques qui sont, dans le cas des RSN, les grandeurs fluides (ρ, $\vec{u}$, et p) et la grandeur spatiale (R_s ou x_s) décrivant conjointement la zone instable. En effet, la perturbation d'une grandeur caractéristique δX varie au cours du temps selon la loi de puissance $\delta X \propto t^s$ (voir Sec. 4.3). Dans cette formulation, s est le taux de croissance complexe de l'instabilité qui s'exprime $s = s_r + is_i$ avec s_r la partie réelle et s_i la partie imaginaire du taux de croissance. Les analyses théoriques originelles de l'instabilité [Ryu & Vishniac, 1987, Vishniac, 1983] déterminent, en intégrant les équations d'Euler perturbées, le taux de croissance complexe de ces perturbations. Dans ces approches, il n'existe pas de relation de dispersion analytique mais la résolution numérique des équations permet de déterminer une loi entre le taux de croissance de l'instabilité s et le mode propre de la perturbation l. Le mode propre de la perturbation est relié à la longueur d'onde de la perturbation par $l = 2\pi R_s/\lambda$. Il représente donc le nombre de longueurs d'onde de perturbations introduites sur la circonférence délimitée par le rayon du choc du RSN.
Nous avons préféré baser notre travail numérique sur l'étude de Ryu & Vishniac [1987] car l'approximation faite pour résoudre les équations est moins forte que dans Vishniac [1983]. De plus, ils déterminent des solutions pour les géométries sphériques et plan-parallèles. La loi trouvée dans leur deuxième étude permet d'extraire un taux de croissance maximal qui est, en géométrie sphérique, $s_{sphe} = 0,49 + 3,2i$, et en géométrie plan-parallèle, $s_{plan} = 0,25 + 2,2i$. Nous avons représenté, sur la figure 4.2, l'évolution temporelle des perturbations pour les taux de croissance optimaux dans les deux géométries. La partie réelle de s décrit l'enveloppe de la perturbation et la partie imaginaire contraint la période des oscillations. L'amplitude de ces oscillations, comme énoncée, augmente avec le temps. Nous avons choisi de représenter l'évolution de ces perturbations sur une durée non anodine puisque ce sera aussi la durée des simulations présentées dans le chapitre suivant. Nous remarquons que dans le même laps de temps, étant donnée la valeur plus importante de la partie complexe du taux de croissance en géométrie sphérique, il y a plus d'oscillations dans le cas sphérique que dans le cas plan-parallèle. Ainsi l'étude numérique semble favoriser cette première géométrie permettant une évolution plus rapide de l'instabilité et ce sera aussi un gain de temps pour les simulations. Mais d'autres aspects de la modélisation sont aussi à prendre en compte et rendent la géométrie plan-parallèle plus accessible pour des raisons que nous évoquerons plus tard.
Nous nous intéressons à l'évolution de l'instabilité et à sa forme ultime. Ryu & Vishniac [1987] ont fait l'hypothèse que si la perturbation continue à croître sans être freinée par un ou plusieurs processus extérieurs, alors



(a) cas sphérique (b) cas plan-parallèle

FIG. 4.2 – Croissance de la perturbation pour les taux de croissance optimaux dans les géométries sphérique et plan-parallèle. La partie réelle du taux de croissance décrit l'enveloppe des oscillations et la partie imaginaire, la fréquence avec laquelle elles changent de signe.

l'augmentation locale de la densité et sa résultante, le dépeuplement de la zone voisine, permettent la fragmentation du front de choc. Cette évolution non-linéaire de l'instabilité n'est bien entendu pas décrite par l'analyse linéaire de perturbation et ainsi seul un autre type d'approche, comme la simulation numérique, peut déterminer la forme finale de l'instabilité.
Nous présentons maintenant les différentes études qui ont été faites sur l'instabilité de Vishniac et cela dans les branches aussi variées que la théorie, la simulation numérique ou encore l'astrophysique de laboratoire.

4.2 L'historique de l'instabilité

Avant d'entrer plus en détail dans la théorie de l'instabilité, nous aimerions évoquer les différents modèles avec lesquels l'instabilité a été étudiée. Nous nous intéressons dans cette section à l'historique de l'instabilité ce qui va nous permettre de remarquer l'engouement des différentes branches de la communauté scientifique pour ce processus complexe.

L'observation des RSN

Dans les RSN, l'action des instabilités hydrodynamiques sur la morphologie résultante de l'objet a été confirmée par des observations [Mac Low, 1999, Raymond, 2003] mais le rôle exact de l'instabilité de Vishniac dans l'évolution vers une structure complexe de la coquille des RSN n'a pas été encore démontré.

L'étude théorique

Le régime linéaire de l'instabilité a été étudié théoriquement par Vishniac [1983] en géométrie sphérique et dans l'approximation d'une coquille de gaz choqué infiniment fine (analyse de perturbation locale, voir la sous-section 4.3.1) où il nous a été possible de déterminer une solution analytique aux équations

de perturbation [Cavet et al., 2007]. La "relation de dispersion" obtenue a permis de déterminer que les coquilles isothermes sont instables.

Puis cette étude a été généralisée par Ryu & Vishniac [1987]. Ils ont alors déterminé les équations de perturbation dans l'approximation d'une coquille de gaz choqué de taille finie et non plus infiniment fine (analyse de perturbation globale, voir la sous-section 4.3.2) pour les géométries plan-parallèle et sphérique. Dans cette deuxième approche, la coquille est supposée être en train d'évoluer dans la phase de Sedov (l'expansion du RSN est déterminée par les solutions auto-semblables de la position du front de choc qui s'expriment en sphérique, $R_s \propto t^{2/5}$ et en plan-parallèle, $x_s \propto t^{2/3}$ et que nous expliciterons dans la Sec. 4.4).

Ensuite, Vishniac & Ryu [1989] ont étudié l'instabilité pour une coquille qui est initialement dans la phase PDTS. L'expansion du RSN dans cette phase qui suit la phase de Sedov, évolue selon une autre solution auto-semblable (en sphérique $R_s \propto t^{2/7}$ et en plan-parallèle $x_s \propto t^{6/11}$). En considérant le régime non-linéaire de cette troisième étude, ils se sont aperçus que la croissance de la perturbation saturait et que la fragmentation n'était pas atteinte dans cette approximation.

Par la suite, d'autres travaux analytiques ont été réalisés par Ryu & Vishniac [1991] et Kushnir et al. [2005] dans la géométrie sphérique afin de généraliser l'instabilité pour un milieu ambiant de densité non uniforme de type $\rho_1 = Kr^{-w}$. Cette étude a permis de confirmer le domaine de modes propres instables pour cette géométrie et pour un indice adiabatique quasi-isotherme ($\gamma = 1,1$).

Dans notre étude numérique de l'instabilité, nous nous baserons sur l'analyse théorique de Ryu & Vishniac [1987], mais nous inclurons à cette approche de nouveaux ingrédients explicités ci-après.

L'étude expérimentale

Dans le contexte de l'astrophysique de laboratoire, plusieurs expériences utilisant des lasers de puissance ont été réalisées sur ce sujet. La première expérience effectuée par Grun et al. [1991] est bien connue car elle a permis de produire une instabilité hydrodynamique sur le front de choc de l'onde de souffle radiatif. Mais le dispositif expérimental était tel que le laser qui permettait la création de l'onde de souffle perturbait celle-ci et c'est cette perturbation qui se développait avec le temps et non l'instabilité de Vishniac. L'expérience plus récente de Edens et al. [2007] a aussi permis d'obtenir une perturbation qui croît avec le temps mais l'écart présent entre le taux de croissance analytique et expérimentale de l'instabilité ne permet de déterminer que c'est bien l'instabilité de Vishniac qui est apparue dans le système. Dans le cas de l'expérience de Doss et al. [2010] et de Symes et al. [2010], les expérimentateurs obtiennent des systèmes perturbés mais il n'est pas encore possible de voir une oscillation du front de choc et encore moins le flot transverse de matière apparaissant dans la coquille. Il est donc clair que ces expériences n'ont pas encore rendu possible l'observation de l'instabilité de Vishniac et elles n'ont donc pas permis de valider l'existence de l'instabilité en laboratoire.

L'étude numérique

Du point de vue numérique, une seule simulation a été réalisée sur ce sujet par Mac Low & Norman [1993]. Ils ont modélisé avec le code Zeus2D [Stone & Norman, 1992] l'instabilité de Vishniac en géométrie sphérique. Leur étude du régime linéaire a permis de retrouver numériquement un taux de croissance semblable à celui déterminé analytiquement pour le mode propre optimal. Leur étude a aussi permis de déduire que l'instabilité est sensible au taux de compression $\mathcal{C}$ sur le choc et à la vitesse du

choc V_s. Ils ont, de plus, étudié le régime non linéaire de l'instabilité pour lequel aucun travail théorique n'existe. Nous reviendrons sur leur étude dans la Sec. 5.1.

Nous nous intéressons maintenant à l'étude théorique des perturbations qui va nous permettre de mettre en évidence les critères de l'instabilité de Vishniac.

4.3 L'analyse de perturbation

Nous présentons dans cette partie une synthèse des deux études théoriques que nous avons évoquées [Ryu & Vishniac, 1987, Vishniac, 1983] et qui ont été réalisées sur l'instabilité de Vishniac. Nous redémontrons certains de leurs calculs afin de faire ressortir les hypothèses et les conclusions du modèle théorique qui sont les critères nécessaires au développement et à la croissance de l'instabilité. Cette étape de compréhension poussée de la théorie est d'une grande nécessité étant donné la complexité de cette instabilité. Afin de pouvoir suivre le déroulement des calculs, nous donnons dès à présent les notations qui seront explicitées dans la Sec. 4.4.1. Le milieu ambiant est noté (1), le front de choc est indiqué par (s) et la coquille fine de gaz choqué par (2). Le gaz chaud résultant de la supernova est noté (3). Finalement nous comparons le modèle théorique au modèle numérique afin de faire ressortir l'utilité de notre démarche.

4.3.1 L'analyse de perturbation locale

Dans l'étude originelle de l'instabilité, Vishniac [1983] a déterminé de manière théorique le régime linéaire de celle-ci en géométrie sphérique et dans l'approximation d'une coquille de gaz choqué infiniment fine. Dans ce cadre, nous avons déterminé une solution analytique aux équations de perturbation [Cavet et al., 2007], ce que Vishniac avait fait de manière numérique, et nous présentons ce résultat dans cette section. Toutefois, le modèle employé dans cette étude ne décrit pas un système physique car la coquille est considérée sous une approximation forte et cette approche ne suffit donc pas pour déterminer les critères de l'instabilité. Mais elle permet quand même de comprendre la problématique de l'instabilité et d'arriver à des résultats qualitatifs. Ainsi c'est pour cela que nous nous y intéressons.

Les hypothèses du modèle

Nous présentons d'abord les hypothèses les plus importantes du modèle de Vishniac [1983]. La coquille est étudiée en géométrie sphérique (de coordonnées r, θ, ϕ) et les cas non perturbé et perturbé sont traités simultanément dans cette approche. La coquille est soumise à des perturbations de type harmonique sphérique de grande longueur d'onde λ en comparaison de l'épaisseur de la couche de gaz choqué ($\lambda \gg h$). Comme le nombre d'onde de la perturbation est relié à la longueur d'onde par $k = 2\pi/\lambda$, cela revient à avoir $k \ll 1/h$ ou encore $kR_s > 1$. Ces deux inégalités vont nous permettre de simplifier les équations de ce modèle en éliminant

les termes de cet ordre. Nous précisons que par la suite nous n'utiliserons plus le nombre d'onde k mais le mode propre $l = kR_s$ car cette variable est plus facilement quantifiable.
L'hypothèse la plus forte de cette étude est que Vishniac [1983] considère une coquille de gaz choqué infiniment fine ($h \ll R_s$) et que les grandeurs fluides sont, grâce à cette approximation, moyennées sur cette coquille. Cette hypothèse est forte car comme nous pouvons le voir sur la figure 4.11 où le profil de la densité d'une onde de souffle est représenté, dans la coquille d'épaisseur finie les grandeurs varient fortement et une valeur moyenne n'est pas représentative du système. Mais nous reviendrons sur ce point et pour le moment nous considérons ce modèle. Sous cette approximation de coquille infiniment fine, les équations de l'hydrodynamique qu'il est nécessaire d'intégrer ne sont valables que dans la zone délimitée par la coquille de gaz choqué. Des conditions aux bords sont ajoutées au système afin de prendre en compte les caractéristiques des milieux présents de part et d'autre de la coquille. Les grandeurs décrivant l'écoulement du fluide sont dans ce modèle la densité de surface $\overline{\rho}(\theta, \phi, t)$, la vitesse radiale d'ensemble $\overline{u_r}(\theta, \phi, t)$, et la vitesse tangentielle moyenne $\overline{\vec{u}_T}(\theta, \phi, t)$ où θ et ϕ sont des directions angulaires. La pression p dans la coquille est supposée constante quelle que soit la direction. Ces grandeurs s'écrivent :

$$\overline{\rho} = \frac{1}{\overline{R_s}^2} \int_{\overline{R_i}}^{\overline{R_s}} \rho r^2 dr \ , \tag{4.1}$$

$$\overline{u_r} = \frac{1}{\overline{\rho}\overline{R_s}^2} \int_{\overline{R_i}}^{\overline{R_s}} \rho r^2 u_r dr \ , \tag{4.2}$$

$$\overline{\vec{u}_T} = \frac{1}{\overline{\rho}\overline{R_s}^2} \int_{\overline{R_i}}^{\overline{R_s}} \rho r^2 \vec{u}_T dr \ , \tag{4.3}$$

où r est la coordonnée radiale, $\overline{R_s}(\theta, \phi, t)$ est le bord externe de la coquille, c'est-à-dire la position moyenne du front de choc et $\overline{R_i}(\theta, \phi, t)$ est le bord interne délimitant la coquille dense du gaz chaud résiduel du RSN. Les relations Eq. 4.1 - 4.3 sont donc des intégrations des grandeurs fluides sur l'épaisseur de la coquille $h = \overline{R_s} - \overline{R_i}$ où $h \to 0$. À cet instant du raisonnement, la nature des grandeurs n'est pas précisée et ces variables décrivent une coquille stable ou instable (d'où la spécification de la dépendance angulaire (θ, ϕ) des grandeurs). Dans le cas non perturbé, nous précisons que le mouvement d'ensemble est radial et donc $\overline{\vec{u}_T}$ est nul. Mais comme cette composante de la vitesse intervient dans le cas perturbé, nous l'introduisons dès cette étape du raisonnement.
Une approximation est aussi faite sur la structure interne de la coquille. Le modèle considère qu'elle a une réaction quasi-statique à l'évolution des perturbations ce qui se traduit par $h/\Delta t \ll \overline{c_{s,i}}$ où $\overline{c_{s,i}}$ est la vitesse du son moyenne de la coquille et $\overline{c_{s,i}}^2 = \gamma p/\overline{\rho}$. L'indice adiabatique γ considéré dans toute cette étude est donc celui de la coquille. Nous verrons que la solution obtenue est consistante avec cette hypothèse.
Nous déterminons les équations des grandeurs moyennées $\overline{\rho}$, $\overline{u_r}$ et $\overline{\vec{u}_T}$ intégrées sur l'épaisseur de la coquille et nous donnons les autres hypothèses du modèle dans la partie suivante.

Les équations des grandeurs moyennées

Pour obtenir les équations des grandeurs moyennées, nous intégrons les deux premières équations d'Euler sur l'épaisseur de la coquille et nous introduisons dans ces relations les conditions aux bords. Pour $r = \overline{R_s}$,

ce sont les relations de RH qui déterminent les conditions aux bords et pour $r = \overline{R_i}$, la pression p_3 du gaz de la supernova et le fait qu'il n'y a pas de flux de masse vers la coquille conditionnent ce bord. De plus, nous négligeons dans ce système les termes non-linéaires, les termes d'ordres élevés en $h/\overline{R_s}$ et kh, l'énergie thermique de la coquille (l'équation de conservation de l'énergie n'est pas utilisée dans cette approche), et le terme $\vec{\nabla}_T(\overline{c_{s,i}})$, car nous ne tenons pas compte du mouvement détaillé du gaz dans la coquille. Ces différentes approximations nous permettent d'obtenir les équations de la conservation de la masse, de l'impulsion radiale, et de l'impulsion tangentielle réécrites sous une notation différente de celle de Vishniac [1983][1] :

$$\partial_t \overline{\rho} = -2\frac{\overline{u_r}}{\overline{R_s}}\overline{\rho} + \rho_1 \overline{u_r} - \overline{\rho}(\vec{\nabla}_T \cdot \overline{\vec{u}_T}) \ , \tag{4.4}$$

$$\partial_t \overline{u_r} = -\frac{1}{\overline{\rho}}(\rho_1 \overline{u_r}^2 - p_3) \ , \tag{4.5}$$

$$\partial_t \overline{\vec{u}_T} = -\frac{\rho_1 \overline{u_r}}{\overline{\rho}}\overline{\vec{u}_T} - \frac{\overline{u_r}}{\overline{R_s}}\overline{\vec{u}_T} - \frac{\overline{c_{s,i}}^2}{\overline{\rho}}(\vec{\nabla}_T \overline{\rho}) - \frac{p_3}{\overline{\rho}}(\vec{\nabla}_T \overline{R_s}) \ , \tag{4.6}$$

où nous rappelons que ρ_1 est la densité du milieu ambiant et p_3 la pression du milieu situé entre l'origine et le bord interne du RSN. Pour l'étude du cas général, nous avons séparé la vitesse en ses composantes radiale et tangentielle. Nous remarquons dans ces équations que $\overline{R_i}$ a disparu car il a été remplacé par $\overline{R_s}$. Cette simplification suppose que la variation de l'épaisseur de la coquille est considérée comme négligeable en comparaison du déplacement d'ensemble de la coquille. Cette approximation est forte car comme nous le verrons dans la partie sur les simulations, cet effet ne semble pas négligeable. Afin de simplifier encore ce système, nous continuons à faire des approximations valables dans ce cadre spécifique. La vitesse radiale est $\overline{u}_r = V_s$ car les seuls mouvements de matière dans la coquille sont dus à des mouvements d'ensemble de cette structure. Par la suite, nous allons négliger le terme $\vec{\nabla}_T(\overline{\rho})$ (et même le terme $\vec{\nabla}(\overline{\rho})$) par rapport à $\vec{\nabla}_T R_s$ dans l'équation 4.6 car les coefficients présents devant ces termes sont comparables ($p_3 \sim p_s$ et $p_s \sim \rho_1 V_s^2 \sim \rho_1 \overline{c_{s,i}}^2$) et la courbure du front de choc est plus importante que les fluctuations de densité sur celui-ci.
Nous avons donc obtenu les équations des grandeurs moyennées $\overline{\rho}$, $\overline{u_r}$ et $\overline{\vec{u}_T}$ qui décrivent l'évolution des grandeurs caractéristiques de la coquille. Mais ce qui nous intéresse est d'étudier la stabilité du système, nous présentons la méthode utilisée dans la partie suivante.

La méthode de perturbation

La méthode de perturbation des équations d'Euler, intégrées sur la coquille, utilisée dans cette étude est la technique usuelle qui permet d'introduire de faibles perturbations sur les grandeurs caractéristiques et ainsi cela permet de tester la stabilité du système hydrodynamique en étudiant sa réponse à des perturbations infinitésimales. Les variables sur lesquelles nous procédons à cette perturbation sont les trois quantités présentées

[1]Nous avons changé la notation par rapport à celle de l'article pour plus de clarté. Nous faisons remarquer qu'il y a une erreur dans l'article dans le membre de droite de l'équation (2.15a). En effet, dans le troisième terme ce n'est pas R_o^{-1} qui doit être écrit mais σ_o^{-1}.

précédemment et la position du front de choc :

$$\overline{\rho} = \overline{\rho_0} + \delta\overline{\rho}\,, \tag{4.7}$$

$$\overline{u_r} = V_s + \delta\overline{u_r}\,, \tag{4.8}$$

$$\overline{\vec{u}_T} = (\overline{\vec{u}_{T,0}} = 0) + \delta\overline{\vec{u}_T}\ , \tag{4.9}$$

$$\overline{R_s} = R_s + \delta\overline{R_s}\,, \tag{4.10}$$

où, si X est une variable fluide, $\overline{X}(\theta,\phi,t)$ représente n'importe quelle grandeur perturbée, $X_0(t)$ et $X_s(t)$ correspondent aux grandeurs non perturbées (à l'ordre 0), et $\delta\overline{X}(\theta,\phi,t)$ correspond à une petite perturbation des grandeurs (à l'ordre 1). Comme dans le cas non perturbé, il n'y a pas de mouvement transverse de matière dans la coquille, la vitesse totale moyenne $\overline{\vec{u}} = \overline{u_r}\cdot\vec{e_r} + \overline{\vec{u}_T}$ s'écrit :

$$\overline{\vec{u}} = V_s + \delta\overline{\vec{u}}\ . \tag{4.11}$$

Ainsi la composante transverse de la vitesse donne une information directe sur la surstabilité. Les équations qui relient les grandeurs non perturbées $X_0(r,t)$ sont les équations 4.4 - 4.6 que nous venons de déterminer mais sans le mouvement tangentiel. Ainsi nous avons :

$$\partial_t\overline{\rho_0} = -2\frac{V_s}{R_s}\overline{\rho_0} + \rho_1 V_s\ , \tag{4.12}$$

$$\partial_t V_s = -\frac{1}{\overline{\rho_0}}(\rho_1 V_s^2 - p_3)\ . \tag{4.13}$$

Ces deux équations vont nous permettre d'éliminer des termes dans les équations de perturbation que nous présentons ci-dessous. Nous précisons que dans ces relations, $R_s \propto t^\alpha$ car l'évolution de la position du front de choc est auto-semblable et la vitesse qui en découle est la vitesse du choc $V_s = d\,R_s/d\,t = \alpha R_s/t$. Nous appelons α le taux d'expansion (aussi nommé exposant auto-semblable). Dans cette étude, comme la géométrie est sphérique et la phase du RSN non perturbé est supposée être à la transition entre la phase de Sedov et la phase PDTS, alors le taux d'expansion doit prendre deux valeurs : $\alpha = 2/5$ dans la phase de Sedov et $\alpha = 2/7$ dans la phase PDTS. Nous donnerons plus de détails sur la signification de la valeur du taux d'expansion dans la Sec. 4.4.2 portant sur l'étude des RSN. De plus, nous rappelons la forme du rapport de pression $\kappa = p_3/\rho_1 V_s^2$ qui représente le rapport entre la pression thermique p_3 interne du RSN et la pression bélier $p_{ram} = \rho_1 V_s^2$ due au mouvement de l'onde de souffle dans le milieu environnant, ce qui a pour conséquence l'accrétion de la matière sur le front de choc. Ces deux pressions engendrent des forces appliquées de part et d'autre de la coquille et qui sont moteurs de la dynamique de celle-ci.

De plus, nous voulons évaluer $\overline{\rho_0}$. Pour cela nous faisons l'hypothèse que toute la masse de l'onde de souffle M_{os} est contenue dans la coquille fine qui accrète la matière du milieu ambiant lors de la propagation du choc et qui a une masse M_{coq}. Ces deux masses s'expriment (voir Sec. 4.4.3) :

$$M_{os} = \frac{4\pi}{3}\rho_1 R_s^3 \text{ et } M_{coq} = 4\pi h\rho_s R_s^2\ , \tag{4.14}$$

où ρ_s est la densité au niveau du front de choc. Si la densité de colonne est donnée par $\overline{\rho_0} \simeq \rho_s h$, alors $\overline{\rho_0} \simeq \frac{1}{3}\rho_1 R_s$. Ainsi nous avons déterminé toutes les variables impliquées dans ces relations.

Il nous reste à déterminer la forme des perturbations de la densité de surface, de la vitesse radiale d'ensemble, de

la vitesse tangentielle moyenne et du rayon moyen du choc. Comme nous ne considérons que les perturbations à l'ordre 1, celles-ci peuvent s'écrire sous la forme de variables séparées :

$$\delta X \propto X_0\, Y_{lm}(\theta,\phi)\, t^s, \tag{4.15}$$

où X_0 donne le profil non perturbé des grandeurs, $Y_{lm}(\theta,\phi)$ est la fonction harmonique sphérique qui donne la modulation spatiale de la perturbation et l et m sont les modes propres de celle-ci. Nous notons que dans le cas de l'instabilité de Vishniac, seule la valeur de l va être contrainte par la théorie. La partie temporelle de la perturbation δX est donnée par la loi de puissance t^s. Nous avons vu que cette forme particulière de l'évolution temporelle détermine la croissance de l'instabilité en une oscillation d'amplitude croissante.

Les équations perturbées

Nous introduisons les perturbations du type Eq.4.15 dans les relations Eq. 4.7 - 4.10 afin de déterminer les grandeurs perturbées. Ensuite nous remplaçons ces grandeurs moyennées dans les équations du même nom Eq. 4.4 - 4.6 et nous simplifions certains termes grâce aux équations 4.12 et Eq. 4.13. Le système résultant est :

$$\frac{1}{\overline{\rho_0}}\left[\partial_t(\delta\overline{\rho}) + \frac{\delta R}{R_s}\partial_t(\overline{\rho_0})\right] = -\frac{2}{R_s}\left[\partial_t(\delta R) + \frac{V_s}{\overline{\rho_0}}\delta\overline{\rho}\right] + \frac{\rho_1}{\overline{\rho_0}}\left[\partial_t(\delta R) + V_s\frac{\delta R}{R_s}\right] - \vec{\nabla}_T\cdot(\delta\overline{\vec{u}_T})\,, \tag{4.16}$$

$$\partial_t(\delta\overline{u_r}) = -\frac{1}{\overline{\rho_0}}\left[\delta\overline{\rho}\;\partial_t V_s + 2\rho_1 V_s\;\delta\overline{u_r}\right]\,, \tag{4.17}$$

$$\partial_t(\delta\overline{\vec{u}_T}) = -\frac{1}{R_s\overline{\rho_0}}\left[\rho_1 R_s + \overline{\rho_0}\right] V_s\delta\overline{\vec{u}_T} - \frac{p_3}{\overline{\rho_0}}\vec{\nabla}_T\delta R\,. \tag{4.18}$$

Lors de la résolution de ce système, nous obtenons une relation polynomiale entre le taux de croissance s, le nombre d'onde sphérique l, le taux d'expansion α, et le rapport de pression κ :

$$(s+3\alpha)(s+5\alpha-1)\left[(s+\alpha)(s+7\alpha-1)-\alpha(1-\alpha)\right] = -3\kappa\alpha^3(1-\alpha)l(l+1)\,. \tag{4.19}$$

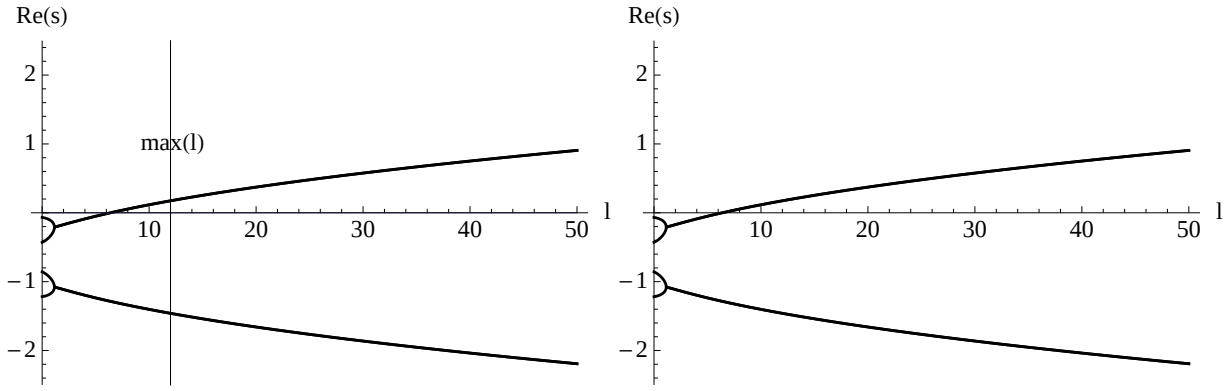
Pour aller encore plus loin dans la résolution de ce problème, Vishniac a déterminé numériquement une solution. Nous avons résolu analytiquement ce polynôme de degré 4 par la méthode de Ferrari et nous avons obtenu, après calcul, quatre solutions originales du taux de croissance $s(l)$ pour tout couple (α, κ) donné :

$$s = \frac{1}{2}\left[1-8\alpha \pm \sqrt{18\alpha^2+1-6\alpha \pm 2\alpha\sqrt{1+49\alpha^2-14\alpha-12\kappa l(l+1)\alpha(1-\alpha)}}\right]\,. \tag{4.20}$$

Afin de déterminer les couples (α, κ) pour lesquels nous voulons obtenir les variations du taux de croissance en fonction du mode propre, nous revenons sur la notion d'indice adiabatique. Nous avons vu que la valeur maximale de l'indice adiabatique est donnée par sa valeur adiabatique $\gamma = 5/3$ (gaz complètement ionisé) alors que sa valeur minimale est donnée par la limite isotherme où $\gamma \to 1$ (gaz complètement ionisé et plus compressible). Dans la coquille de matière choquée que nous étudions, ces deux types de gaz peuvent être présents à différentes époques de l'évolution du RSN. Nous allons donc étudier le comportement des solutions en fonction de ces deux valeurs limites de l'indice adiabatique en faisant varier le taux d'expansion qui lui est relié.

Nous représentons la partie réelle $\mathcal{R}e(s)$ des solutions données par Eq. 4.20 sur la figure 4.3 pour les couples de

paramètres caractérisant une coquille sphérique composée de gaz adiabatique ($\gamma = 5/3$, $\alpha = 2/5$, $\kappa = 1/2$) ou de gaz isotherme ($\gamma \to 1$, $\alpha = 2/7$, $\kappa = 1/6$). En effet le taux d'expansion α dépend de la phase d'évolution du RSN et par conséquent de l'indice adiabatique du gaz. Le rapport de pression est relié à α par la relation $\kappa = (1/3)(4 - 1/\alpha)$ (voir Eq. 4.73). De cette façon, nous pouvons déterminer sur la figure 4.3 une partie du domaine de modes propres pour lesquels la perturbation est instable. En effet, les quatre solutions bicarrées



(a) cas adiabatique : $\gamma = 5/3$, $\alpha = 2/5$, $\kappa = 1/2$ et $l_{max} \simeq 12$ (b) cas isotherme : $\gamma \approx 1$, $\alpha = 2/7$, $\kappa = 1/6$ et $l_{max} \to \infty$

FIG. 4.3 – Partie réelle du taux de croissance s en fonction du nombre d'onde l pour une coquille adiabatique et une coquille isotherme. Le mode propre instable minimale l_{min} varie en fonction du type de coquille : pour le cas adiabatique $l_{min} = 8,1$ et pour le cas isotherme $l_{min} = 6,4$.

du polynôme de l'équation 4.20 se regroupent en deux branches. La branche supérieure, qui devient positive à partir du mode propre l_{min}, donne les solutions instables pour $l > l_{min}$ et la branche inférieure donne les solutions stables. De plus, il existe aussi une borne maximale l_{max} à ce domaine de modes propres instables qui n'est pas déterminée *via* la figure 4.3 mais que nous avons ajoutée sur la figure 4.3(a) (notée $max(l)$) et nous verrons sa détermination ci-dessous. Ainsi la condition suivante permet la détermination du domaine de modes propres instables :

$$\mathcal{R}e(s) > 0 \Leftrightarrow l_{min} < l < l_{max} \ . \tag{4.21}$$

Nous relevons sur le graphe la valeur minimale l_{min} du mode propre qui peut donner lieu à l'instabilité et qui est obtenue pour $s = 0$ pour les deux types de coquille. Nous trouvons, pour la coquille adiabatique $l_{min} = 8,1$ et celle isotherme $l_{min} = 6,4$. Ces valeurs correspondent, respectivement, à des longueurs d'onde maximales $\lambda_{max} = 2\pi R_s/l_{min}$ de l'ordre de 0,12 et 0,15 fois le rayon du choc R_s. Nous avons donc déterminé la borne inférieure du domaine de mode propre instable pour les deux cas extrêmes et nous ne trouvons pas de grandes différences entre les cas adiabatique et isotherme. Mais en comparant ce mode propre avec celui de la borne supérieure, nous allons pouvoir conclure sur les deux cas étudiés. De plus, nous expliquons l'existence d'une longueur d'onde de coupure λ_{max} par le fait que les longueurs d'onde plus grandes $\lambda > \lambda_{max}$ sont des longueurs d'onde de la taille du rayon du choc ($\lambda \approx R_s$) et elles vont donc être stabilisées lors de l'expansion de l'onde de souffle .

La borne supérieure est donnée par la levée d'autres hypothèses. Nous avons déterminé les solutions analytiques dans l'approximation de coquille infiniment fine qui suppose que $h \ll \lambda$ et $h \ll R_s$. Mais si ces hypothèses ne sont plus respectées, alors les longueurs d'onde déterminées n'appartiennent plus au modèle. Il existe donc une

longueur d'onde minimale ou encore un mode propre maximal, l_{max}. Ce mode propre est déterminé quand $\lambda \approx h$. Si nous utilisons la relation $\overline{\rho_0} \simeq \rho_s h \simeq \frac{1}{3}\rho_1 R_s$ et la relation de RH sur la densité $\rho_s/\rho_1 = (\gamma+1)/(\gamma-1)$, nous trouvons une relation approximative pour la borne maximale :

$$l_{max} \approx \frac{R_s}{h} \approx 3\frac{(\gamma+1)}{(\gamma-1)} \, . \tag{4.22}$$

Nous notons que si $l_{min} = l_{max}$, il n'y a pas de domaine de modes propres instables. Nous calculons l_{max} pour les deux cas présentés ci-dessus. Dans le cas adiabatique, nous avons $l_{max}(\gamma = 5/3) \simeq 12$ et dans le cas isotherme, $l_{max}(\gamma \approx 1) \to \infty$ (en vu de l'étude suivante, nous déterminons aussi le cas quasi-isotherme $l_{max}(\gamma = 1,1) \simeq 63$). Si nous comparons l_{min} et l_{max}, dans le cas d'une coquille adiabatique, ces paramètres sont très proches. Alors que dans le cas isotherme, leur écart est très important. Ainsi cette étude permet de déterminer que dans le cas adiabatique où $\gamma = 5/3$ la perturbation est stabilisée car le domaine de modes propres instables est très réduit ($l_{min} \approx l_{max}$). Alors que dans le cas isotherme où $\gamma \approx 1$, la perturbation est instable sur un large domaine car la valeur maximale du mode propre n'est pas bornée ($l_{min} \ll l_{max}$) et la perturbation a un taux de croissance $s(l)$ qui augmente quand le mode propre augmente selon la loi donnée par la branche positive de la figure 4.3(b).
En conclusion de cette première étude en géométrie sphérique, nous pouvons dire que le choc adiabatique est stable alors que le choc isotherme est instable à des perturbations dont le mode propre appartient à un domaine de valeur bien spécifique. Les perturbations de petite longueur d'onde, donc de grand mode propre, sont les plus instables et elles ont un taux de croissance maximum proportionnel à l'inverse du temps nécessaire aux ondes sonores pour se propager dans l'épaisseur de la coquille. Ce modèle a imposé deux hypothèses qu'il est important de relever pour la suite de l'étude : l'épaisseur de la coquille dense doit être fine $h \ll R_s$ et les perturbations doivent être grandes par rapport à cette épaisseur $h \ll \lambda$ mais elles ne doivent pas être de l'ordre de grandeur du rayon du choc $\lambda < R_s$. Dans ce contexte, nous résumons les critères qui sont nécessaires au développement de l'instabilité de Vishniac en géométrie sphérique :

– l'épaisseur de la coquille infiniment fine $h \ll R_s$;
– la perturbation de longueur d'onde grande $h \ll \lambda$;
– le choc fort : $\mathcal{M} \gg 1$;
– la phase isotherme du RSN : $\gamma \approx 1$, $\alpha = 2/7$ et $\kappa = 1/6$;
– le mode propre de la perturbation : $l = [7 - \infty]$.

Cette étude a donc permis de comprendre de manière qualitative la dépendance de l'instabilité à certains paramètres. Mais l'analyse de perturbation locale ne donne finalement que peu de contraintes sur ces paramètres. Or, l'analyse de perturbation globale que nous présentons juste après, où la coquille considérée a une épaisseur finie, permet d'obtenir des critères forts sur le mécanisme de l'instabilité.

Nous trouvons aussi dans l'étude de Vishniac [1983] une discussion sur l'évolution plausible de l'instabilité sur le long terme, c'est-à-dire quand elle entre dans son régime non-linéaire, que nous résumons afin de comparer les résultats numériques avec les hypothèses. Il se peut que la croissance des perturbations soit stoppée à une amplitude finie par des effets non linéaires qui vont stabiliser le système. Mais il se peut aussi que les perturbations croissent sans limite jusqu'à fragmenter le front de choc. Le modèle analytique permet

de déterminer la taille des fragments résultants et leurs vitesses de dispersion. En effet cette vitesse est comparable à la vitesse du son présente dans la coquille en fragmentation. Mais pour estimer la taille des probables fragments, il est nécessaire de connaître l'évolution de l'instabilité en régime non linéaire. En effet, les échelles de fragmentation peuvent être différentes dans les deux régimes. La vitesse de propagation des fragments peut aussi être déterminée car ces morceaux de l'ancien front de choc se déplacent avec le moment acquis par la coquille pendant son évolution. Il est aussi intéressant d'imaginer la morphologie de la coquille dans le régime non-linéaire. En effet, la couche qui contenait le gaz choqué est maintenant trouée comme une passoire. Le gaz chaud du RSN qui était derrière la coquille, est poussé par les fragments et peut entrer en contact avec le gaz ambiant non perturbé. L'interface entre les deux gaz est instable au sens de Rayleigh-Taylor tant que le gaz chaud a une pression nette en excès par rapport à celle du gaz non perturbé. De plus, à moins qu'ils ne rencontrent un obstacle, les fragments de la coquille ne devront pas décélérer. Le choc va ensuite évoluer en une région turbulente composée de blocs denses entourés du gaz chaud et diffus, lesquels seront compressés de manière irrégulière par le milieu ambiant

4.3.2 L'analyse de perturbation globale

Dans la seconde analyse de perturbation, Ryu & Vishniac [1987] ont étudié le régime linéaire de l'instabilité pour les géométries sphérique et plan-parallèle et dans l'approximation d'une coquille d'épaisseur finie. Afin de comprendre en détail cette analyse sur laquelle nous nous baserons pour effectuer l'étude numérique, nous revenons sur les différentes étapes de calcul de cet article en utilisant le formalisme auto-semblable employé par de nombreux auteurs comme Landau & Lifshitz [1959] (voir la Sec. 106). L'utilité d'utiliser ce formalisme est qu'il rend possible l'identification des variables adimensionnées avec celles ayant une dimension. Quant à la notation de Ryu & Vishniac [1987], elle est compliquée et cela rend ardue la compréhension de leur analyse même si la finalité reste la même. Afin de pouvoir quand même suivre leur travail, nous ferons le lien entre les notations du formalisme auto-semblable et les notations de cet article de référence. De plus, il existe une autre étude plus récente de l'instabilité de Vishniac qui traite une coquille d'épaisseur finie dans le formalisme auto-semblable. Nous allons donc nous intéresser en parallèle à ce travail de Kushnir et al. [2005], car ils ont généralisé les équations de perturbation de l'instabilité de Vishniac. En effet, leur étude permet de prendre en compte un milieu ambiant non uniforme où la densité a un profil qui décroît selon la loi de puissance $\rho_1 = Kr^{-w}$. Nous imposerons donc dans leurs équations $\omega = 0$ afin de se replacer dans le contexte originel de l'instabilité. Nous présentons dans cette partie l'étude théorique de Ryu & Vishniac [1987] en géométrie sphérique et les résultats de cette analyse car c'est dans ce cadre que l'instabilité a été le plus étudiée. Mais nous présentons aussi les solutions obtenues en géométrie plan-parallèle afin de souligner les similitudes et les différences des deux approches. Nous notons que l'étude des ondes de souffle est permise en géométrie plan-parallèle car le rayon du choc est important dans la phase d'évolution du RSN dans laquelle est effectuée l'analyse et ainsi la courbure du choc peut-être négligée en première approximation.

Les équations non perturbées

Différemment de l'étude de la sous-section précédente, nous cherchons d'abord la solution des équations d'Euler non perturbées en considérant plus en détail le problème d'explosion forte en un point. Ce problème, que nous avons introduit lors du test du code (Sec. 3.1.2), revient à étudier une onde de choc sphérique créée par la libération instantanée d'une grande quantité d'énergie dans un petit volume. Suivant la méthode de Landau & Lifshitz [1959] et de Kushnir et al. [2005], nous introduisons trois fonctions sans dimension $G(\xi)$, $U(\xi)$, $P(\xi)$ qui sont respectivement reliées à la densité $\rho(r,t)$, à la vitesse du fluide $u(r,t)$ et à la pression $p(r,t)$ par :

$$\rho(r,t) = \rho_1\, G(\xi)\,, \tag{4.23}$$

$$u(r,t) = \dot{R}_s \xi\, U(\xi)\,, \tag{4.24}$$

$$p(r,t) = \rho_1 \dot{R}_s^2\, P(\xi)\,, \tag{4.25}$$

où r est la variable d'espace en géométrie sphérique, ρ_1 est toujours la densité du milieu ambiant et R_s est toujours la position du front de choc. Dans l'étude de Ryu & Vishniac [1987], la position du front de choc est la solution analytique de Sedov-Taylor-von Neumann au problème d'explosion forte en un point [Sedov, 1977, Taylor, 1950, von Neumann, 1947]. Cette solution bien connue suppose une coquille adiabatique et dans ce cadre $R_s \propto t^{2/5}$. Mais nous gardons pour le moment la formulation générale de cette solution $R_s \propto t^{\alpha}$. Comme précédemment, $\dot{R}_s$ qui est la dérivée totale par rapport au temps de R_s, est égale à la vitesse du front de choc $\dot{R}_s = V_s$.

Nous remarquons que les grandeurs fluides dépendent de la coordonnée radiale r et du temps t alors que les fonctions sans dimension dépendent seulement de $\xi = r/R_s(t)$, la coordonnée radiale sans dimension dite aussi variable auto-semblable qui compacte ainsi l'espace *via* r et le temps *via* $R_s(t)$. Cette variable décrit le domaine en expansion qui représente l'onde de souffle. Son origine se trouve au centre de celle-ci ($\xi = 0$) et elle décrit radialement le gaz choqué jusqu'au niveau du front de choc ($\xi = 1$). Les relations Eq. A.1 - A.3 sont donc un changement de variable qui, comme nous allons le voir, permet de simplifier les équations de ce modèle et qu'il est possible d'effectuer car le système est auto-semblable (il n'y a pas d'échelle caractéristique d'espace et de temps, la seule échelle significative est R_s).

Nous faisons aussi un changement de variable sur la vitesse du son c_s et par la suite, nous utiliserons plutôt cette variable au lieu de la pression pour des raisons de commodité lors de la manipulation des équations. Cette variable s'écrit dans le formalisme auto-semblable :

$$c_s^2(r,t) = \dot{R}_s^2 \xi^2\, Z(\xi)\,, \tag{4.26}$$

où $Z(\xi)$ est une nouvelle fonction radiale sans dimension. Elle est reliée aux fonctions radiales de pression et de densité par :

$$Z(\xi) = \frac{1}{\xi^2}\frac{\gamma P(\xi)}{G(\xi)}\,. \tag{4.27}$$

L'indice adiabatique γ est considéré comme constant dans cette étude mais nous verrons plus loin que la coquille peut avoir un indice adiabatique spécifique γ_2 différent de celui du gaz interne γ_3 étant donné que dans cette description ξ recouvre ces deux milieux.

Les conditions aux bords de ce système sont déterminées en partie par les relations de Rankine-Hugoniot (voir Sec.). Nous rappelons ces relations qui connectent les deux milieux présents de part et d'autre de la discontinuité que représente le front de choc (si X est une variable fluide, le milieu ambiant est noté sous la forme X_1 et le milieu choqué au niveau du front de choc X_s). Dans la limite de choc fort ($\mathcal{M} \gg 1$), ces relations s'expriment :

$$\rho_s = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}\rho_1, \;\; u_s = \frac{2}{\gamma+1}V_s, \;\; p_s = \frac{2}{\gamma+1}\rho_1 V_s^2 \; , \tag{4.28}$$

où $p_{ram} = \rho_1 V_s^2$ est la pression bélier due à l'accrétion de la matière du milieu ambiant. Ainsi au niveau du front de choc, nous pouvons déterminer une partie des conditions aux bords. En effet à $\xi = 1$, les fonctions radiales prennent les valeurs :

$$G(1) = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}, \quad U(1) = P(1) = \frac{2}{\gamma+1}, \quad Z(1) = \frac{2\gamma(\gamma-1)}{(\gamma+1)^2} \; . \tag{4.29}$$

Nous pouvons à présent connecter les fonctions radiales sans dimension $\widetilde{\rho}$, $\widetilde{u}$, $\widetilde{p}$ de Ryu & Vishniac [1987] avec celles du formalisme auto-semblable. En géométrie sphérique, ces relations sont données par :

$$\widetilde{\rho}(\xi) = \frac{\rho(\xi)}{\rho_2} = \frac{G(\xi)}{G(1)} \; , \widetilde{u}(\xi) = \frac{u(\xi)}{u_2} = \xi\frac{U(\xi)}{U(1)} \; , \widetilde{p}(\xi) = \frac{p(\xi)}{p_2} = \frac{P(\xi)}{P(1)} \; , \tag{4.30}$$

avec $\xi = r/r_2(t) = \widetilde{x}$ dans leur notation et l'indice (2) désigne chez Ryu & Vishniac les valeurs des grandeurs caractéristiques au niveau du front de choc.

Nous allons maintenant faire le changement de variable dans les équations d'Euler. Nous rappelons la forme de ces équations dans la géométrie sphérique où les variations spatiales sont seulement dans la direction radiale (dans les Eq. 1.1 - 1.3 de la Sec. 1.2 du chapitre I, $\vec{\nabla} = \nabla_r$) :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial r} + \frac{2\rho u}{r} = 0 \; , \tag{4.31}$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial r}\right] u + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} = 0 \; , \tag{4.32}$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial r}\right] ln\frac{p}{\rho^\gamma} = 0 \; , \tag{4.33}$$

Nous éliminons la pression p en la remplaçant par la vitesse du son et nous remplaçons ρ, u et c_s par les relations A.1, A.2 et 4.26. Nous redémontrons que le nouveau système d'équations obtenu s'écrit sous la forme suivante :

$$\frac{dU}{d\,ln(\xi)} - (1-U)\frac{d\,ln(G)}{d\,ln(\xi)} = -3U \; , \tag{4.34}$$

$$\frac{Z}{\gamma}\Big(\frac{d\,ln(G)}{d\,ln(\xi)} + \frac{d\,ln(Z)}{d\,ln(\xi)} + 2\Big) = (1-U)\frac{dU}{d\,ln(\xi)} + U\Big(\frac{1}{\alpha} - U\Big) \; , \tag{4.35}$$

$$\frac{d\,ln(Z)}{d\,ln(\xi)} - (\gamma-1)\frac{d\,ln(G)}{d\,ln(\xi)} = \frac{2(1-\alpha U)}{\alpha(U-1)} \; . \tag{4.36}$$

Le système d'équations ne dépend plus que la dérivée totale $d\,/d\,ln(\xi)$. Ainsi les relations Eq. A.1 - A.3 sont un changement de variable intéressant car il permet de passer d'un système d'équations aux dérivées partielles (EDP) à un système d'équations différentielles ordinaires (EDO). Nous notons que nous n'avons pas remplacé

la valeur de α dans ce système pour pouvoir décrire les différentes expansions du RSN en géométrie sphérique même s'il semble qu'il n'y a pas de solution pour $\alpha < 2/5$ comme nous le verrons juste après (voir aussi Sanz et al. [2010]). Nous donnons le système d'EDO non perturbées correspondant à la géométrie plan-parallèle et obtenu avec le même type de changement de variable dans l'annexe A.

Nous intégrons, pour les deux géométries, le systèmes d'EDO composé de 3 équations à 3 inconnues avec Mathematica afin de déterminer le profil des grandeurs fluides pour le domaine $\xi = [0 - 1]$. L'intégration commence à la condition au bord $\xi = 1$ bien déterminée dans ce problème par les relations de RH. À l'origine, la résolution des équations demande une précision numérique importante afin de permettre la convergence du calcul vers le bon profil quand $\xi \to 0$.

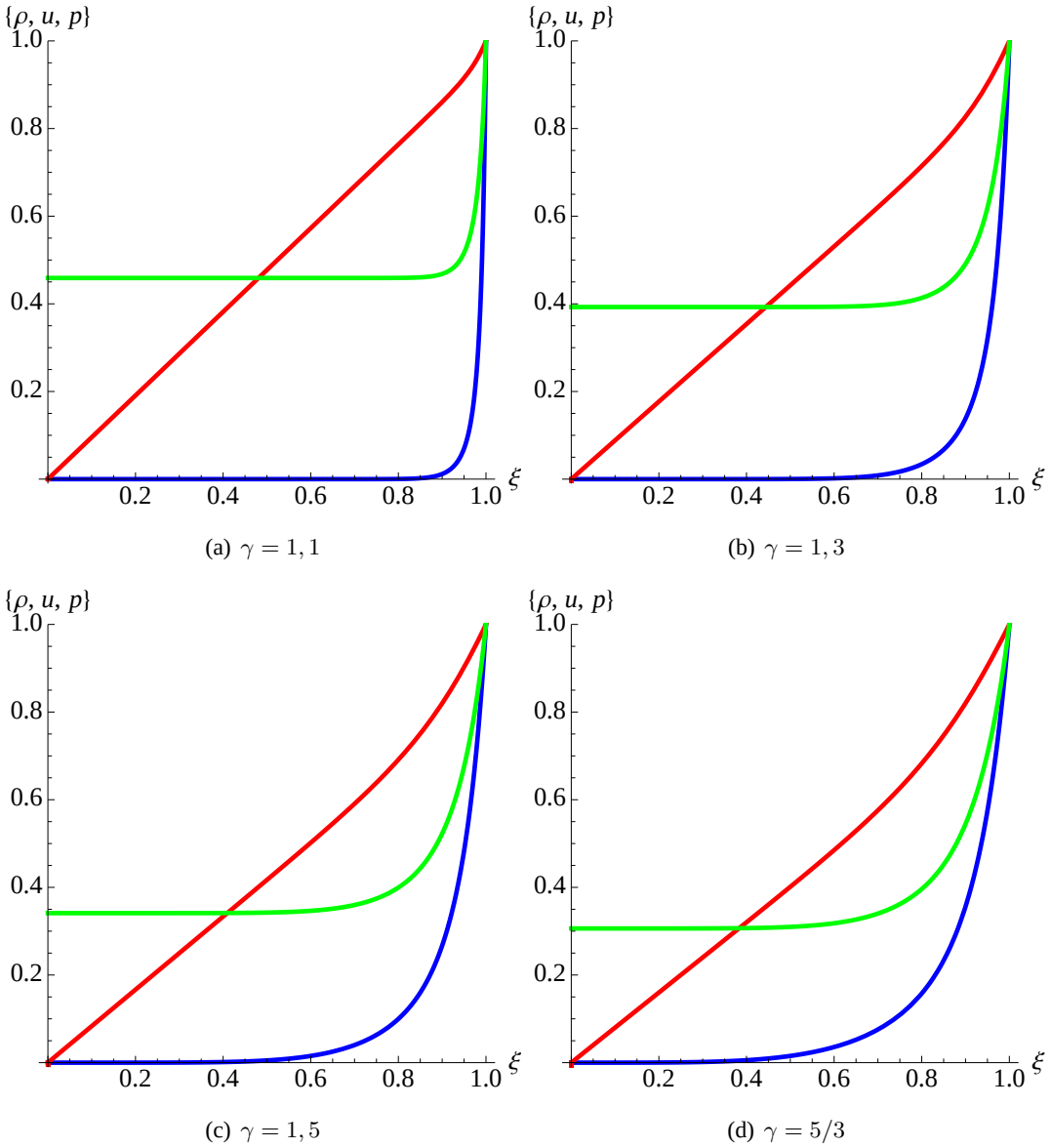
Nous représentons la solution obtenue numériquement pour différentes valeurs de l'indice adiabatique sur la figure 4.4 pour la géométrie sphérique et sur la figure 4.5 pour la géométrie plan-parallèle. Les profils de la densité, de la vitesse et de la pression sont normalisés par la valeur des quantités au niveau du front de choc (ρ_s, u_s et p_s). Ces profils auront un grand intérêt lors de l'étude des simulations numériques des RSN car nous pourrons comparer le modèle théorique et le modèle numérique et ainsi valider les simulations. Mais dès à présent, nous pouvons faire quelques commentaires sur ces profils normalisés de la densité, de la pression et de la vitesse. L'intégration des équations nous permet de déterminer la valeur des fonctions sans dimension en $\xi = 0$:

$$G(0) = 0,\ U(0) = 1/\gamma\,. \tag{4.37}$$

Quant à $P(0)$, il devrait tendre vers le rapport de pression $\kappa(\gamma)$ car la pression au centre de l'onde de souffle est la pression thermique ($p(0,t) = p_3$) mais ce n'est pas ce que nous relevons. Par contre, nous remarquons que $P(0)$ ne varie pas avec la géométrie comme le rapport de pression.

Un point important de cette étude est que contrairement à l'analyse de perturbation locale, où l'indice adiabatique était implicitement lié à l'exposant auto-similaire, ici ces deux paramètres sont décorrélés. Nous rappelons que dans cette analyse, pour l'indice adiabatique $\gamma = 5/3$, le taux d'expansion est $\alpha = 2/5$ et pour $\gamma \to 1$, $\alpha = 2/7$. Mais nous insistons sur le fait que, dans l'étude précédente, γ n'intervenait pas directement dans la "relation de dispersion" $s(l)$ mais il intervenait de manière implicite dans la valeur de α. Dans l'analyse globale de perturbation, lors de la résolution des équations, le taux de croissance prend la valeur correspondante à l'expansion de Sedov ($\alpha = 2/5$ en géométrie sphérique et $\alpha = 2/3$ en géométrie plan-parallèle) et nous faisons varier l'indice adiabatique dans le domaine $1 < \gamma \leqslant 5/3$ pour obtenir le profil des grandeurs fluides dans la région du gaz choqué. Comme l'indice adiabatique peut prendre différentes valeurs dans cette étude, l'onde de souffle n'évolue en phase de Sedov que pour $\gamma = 5/3$ et nous désignons par expansion de Sedov les autres cas analysés. Cette décorrélation des paramètres α et γ est une approximation forte du modèle analytique car elle ne correspond pas pour $\gamma < 5/3$ au modèle physique utilisé pour décrire l'évolution des RSN. Dans les simulations numériques, où nous voulons modéliser une coquille physique, nous n'aurons pas les mêmes profils de grandeurs fluides. Mais pour le moment, la résolution numérique des équations non perturbées permet d'obtenir les mêmes résultats que Ryu & Vishniac [1987] (cf. figures 1. et 2. de leur étude).

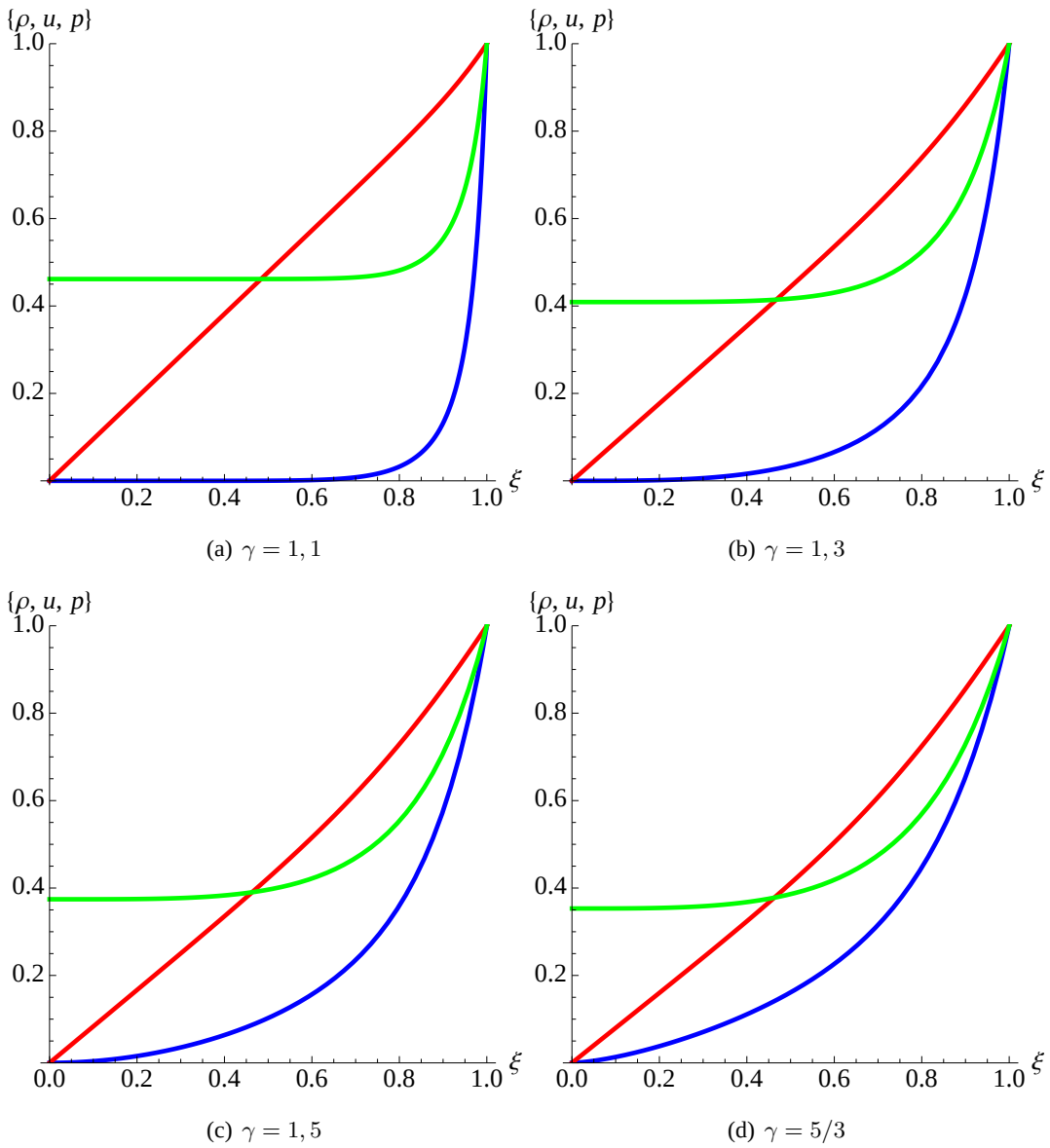
Nous représentons sur la figure 4.6 la solution obtenue dans les deux géométries pour des conditions initiales physiques d'une coquille quasi-isotherme, c'est-à-dire pour $\gamma = 1,1$; $\alpha = 0,32$ en géométrie sphérique et $\alpha = 0,58$ en géométrie plan-parallèle (voir Sec. 4.4.3 pour la détermination des taux d'expansion). Nous voyons que pour les deux cas étudiés, les solutions obtenues numériquement prennent rapidement des valeurs



(a) $\gamma = 1,1$ (b) $\gamma = 1,3$

(c) $\gamma = 1,5$ (d) $\gamma = 5/3$

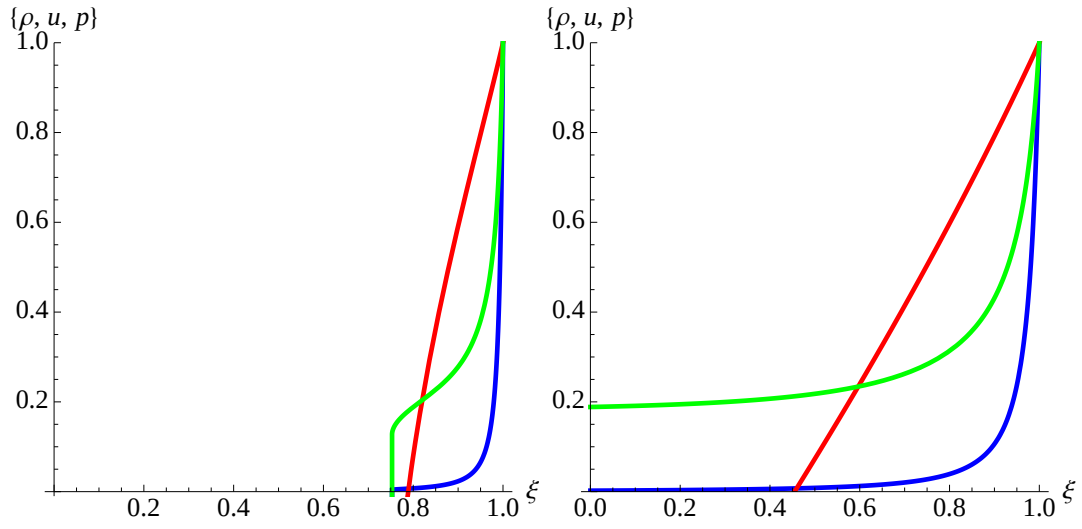
FIG. 4.4 – Profils normalisés en géométrie sphérique de la densité (bleu), de la pression (vert) et de la vitesse (rouge) en fonction de la variable auto-semblable ξ pour $\alpha = 2/5$ et pour quatre valeurs de l'indice adiabatique. La pression au centre augmente et la densité devient plus piquée quand l'indice adiabatique diminue.



(a) $\gamma = 1,1$ (b) $\gamma = 1,3$

(c) $\gamma = 1,5$ (d) $\gamma = 5/3$

FIG. 4.5 – Profils normalisés en géométrie plan-parallèle de la densité (bleu), de la pression (vert) et de la vitesse (rouge) en fonction de la variable auto-semblable ξ pour $\alpha = 2/3$ et pour quatre valeurs de l'indice adiabatique. L'interprétation des résultats est la même que dans le cas sphérique.



(a) cas sphérique : $\alpha = 0,32$ (b) cas plan-parallèle : $\alpha = 0,58$

FIG. 4.6 – Profils normalisés pour les deux géométries de la densité (bleu), de la pression (vert) et de la vitesse (rouge) en fonction de la variable auto-semblable ξ pour $\gamma = 1,1$. La solution diverge vers des valeurs négatives non physiques pour une valeur spécifique de la variable auto-semblable : près de $\xi \simeq 0,8$ pour le cas sphérique, et $\xi \simeq 0,5$ pour le cas plan-parallèle.

négatives non physiques et donc les solutions divergent. Ainsi dans l'analyse globale de perturbation, l'intégration des équations d'Euler, pour lesquelles γ et α sont corrélés dans un cas physique comme les RSN, ne permet pas de déterminer de solution pour le cas isotherme. Pour ce couple spécifique d'indice adiabatique et de taux d'expansion, il faudrait prendre en compte cette corrélation en introduisant un ingrédient physique supplémentaire comme l'émission de rayonnement.
Nous passons à présent à l'étude des équations d'Euler perturbées. Comme nous allons le décrire dans la section suivante, les solutions des équations perturbées sont reliées avec celles des équations non perturbées d'où l'intérêt d'avoir fait d'abord l'étude des profils des grandeurs fluides sans perturbation.

Les équations perturbées

Nous décrivons ici l'analyse classique de stabilité. Les variations des quantités perturbées (δX) sont la différence entre les quantités perturbées (X) et les quantités non perturbées (X_0) dont nous venons d'obtenir les profils. Dans les coordonnées sphériques, ces variations prennent la forme suivante :

$$\delta\rho(r,\theta,\phi,t) = \rho(r,\theta,\phi,t) - \rho_0(r,t) \ , \tag{4.38}$$

$$\delta\vec{u}(r,\theta,\phi,t) = \vec{u}(r,\theta,\phi,t) - u_0(r,t)\vec{e}_r \ , \tag{4.39}$$

$$\delta p(r,\theta,\phi,t) = p(r,\theta,\phi,t) - p_0(r,t) \ , \tag{4.40}$$

$$\delta R(\theta,\phi,t) = R(\theta,\phi,t) - R_s(t) \ , \tag{4.41}$$

où $\vec{e}_r$ est le vecteur radial[2]. Nous notons que la grandeur spatiale R est aussi perturbée, comme cela sera le cas dans les simulations numériques de l'instabilité.

Si nous considérons seulement des perturbations globales, les variations des quantités perturbées peuvent être écrites sous une forme de variables séparées. Nous définissons la composante tangentielle du gradient $\overrightarrow{\nabla}_T = \left[\frac{\partial}{\partial\theta}\overrightarrow{e_\theta} + \frac{1}{sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\overrightarrow{e_\phi}\right]$. Les quantités perturbées s'écrivent selon Ryu & Vishniac [1987] :

$$\delta\rho(r,\theta,\phi,t) = \rho_1\,\delta G(\xi)\,Y_{lm}(\theta,\Phi)\,t^s\,, \tag{4.42}$$

$$\overrightarrow{\delta u}(r,\theta,\phi,t) = \dot{R}_s\xi\left[\delta U_r(\xi)\overrightarrow{e_r} - \delta U_T(\xi)\overrightarrow{\nabla}_T\right]Y_{lm}(\theta,\Phi)\,t^s\,, \tag{4.43}$$

$$\delta p(r,\theta,\phi,t) = \rho_1\dot{R}_s^2\,\delta P(\xi)\,Y_{lm}(\theta,\Phi)\,t^s\,, \tag{4.44}$$

$$\delta R(\theta,\phi,t) = R_s(t)\,Y_{lm}(\theta,\Phi)\,t^s\,, \tag{4.45}$$

où la variable auto-semblable est maintenant $\xi = r/(R(t) + \delta R(\theta,\phi,t))$. Dans cette notation nous avons introduit les fonctions radiales sans dimension perturbées $\delta G(\xi)$, $\delta U(\xi)$, $\delta P(\xi)$ qui décrivent une variation sur une coupe de la coquille, c'est-à-dire la structure radiale de la perturbation. L'harmonique sphérique $Y_{lm}(\theta,\Phi)$ représente comme précédemment la partie angulaire de la perturbation, c'est-à-dire l'oscillation initiale du front de choc[3]. L'amplitude de la perturbation, qui évolue selon une loi de puissance temporelle, est donnée par t^s où s est le taux de croissance complexe de la perturbation.

Nous déterminons comme précédemment les conditions aux bords du problème. Au niveau du front de choc ($\xi = 1$), les équations linéarisées de RH donnent la variation des fonctions sans dimension [Ryu & Vishniac, 1987] :

$$\delta G(1) = -\frac{d}{d\xi}G(1)\,, \tag{4.46}$$

$$\delta U_r(1) = -\frac{d}{d\xi}U(1) + \frac{2}{(\gamma+1)}\frac{s}{\alpha}\,, \tag{4.47}$$

$$\delta U_T(1) = \frac{2}{(\gamma+1)}\,, \tag{4.48}$$

$$\delta P(1) = -\frac{d}{d\xi}P(1) + \frac{2}{(\gamma+1)}(2(\frac{s}{\alpha}+1))\,, \tag{4.49}$$

qui dépendent des variables non perturbées G, U et P, du taux d'expansion du rayon α et du taux de croissance de la perturbation s. Un point intéressant est le non couplage au niveau du front de choc de la fonction radiale sans dimension perturbée de la densité avec le taux de croissance de la perturbation. Nous utiliserons cette propriété dans la section sur les simulations de l'instabilité où nous avons introduit des perturbations en densité. Comme dans l'étude de Vishniac [1983], Ryu & Vishniac [1987] ont aussi introduit une condition à l'autre bord, c'est-à-dire au centre de l'onde de souffle ($\xi = 0$). Cette condition permet de préserver la convergence de la solution fluide (pas de flux de masse, la pression est continue au bord interne de la coquille). Cette condition importante sert à trouver le jeu de paramètres $(\gamma,\alpha,\kappa,l,s)$ permettant d'obtenir une solution convergente au

[2]Nous avons étudié seulement le régime linéaire de l'instabilité où il n'y a pas de perturbation sur la vitesse transverse, mais Vishniac [1994] a aussi étudié le régime non linéaire d'un type semblable d'instabilité où la coquille est bornée par deux fronts de choc, c'est la "Non-linear Thin Shell Instability" (NTSI).

[3]L'analyse de perturbation dans la géométrie plan-parallèle suppose une forme de perturbation $\delta X \propto e^{iky}t^s$ où y est la coordonnée de la direction transverse à la direction de propagation du choc O_x.

système d'équations, comme nous allons le voir après. Cette contrainte sur la pression s'exprime par :

$$\delta P(0) = 0\,. \tag{4.50}$$

Ainsi la pression qui pousse la coquille et qui est donc impliquée dans sa dynamique et une pression constante sans perturbation.
De la même manière que dans le cas non perturbé, nous faisons le lien entre les fonctions radiales sans dimension perturbées et celles de la notation de Ryu & Vishniac [1987] :

$$\delta\widetilde{\rho}(\xi) = \frac{\delta G(\xi)}{G(1)}, \delta\widetilde{u}_r(\xi) = \xi\frac{\delta U_r(\xi)}{U(1)}, \delta\widetilde{u}_T(\xi) = -\xi\frac{\delta U_T(\xi)}{U(1)}, \delta\widetilde{p}(\xi) = \frac{\delta P(\xi)}{P(1)}. \tag{4.51}$$

Nous allons maintenant remplacer les grandeurs fluides par les fonctions sans dimension mais d'abord nous donnons les équations d'Euler perturbées en conservant encore les variables dimensionnées. Pour les obtenir, nous remplaçons les grandeurs fluides par les relations 4.38 - 4.41. Ensuite nous négligeons les termes d'ordre 2 et nous éliminons les termes à l'ordre 0 liés entre eux par les relations 4.31 - A.6. Nous obtenons les relations suivantes :

$$\frac{\partial(\delta\rho)}{\partial t} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2\delta\rho\, u_0)}{\partial r} + \vec{\nabla}\cdot(\rho_0\,\delta\vec{u}) = 0\,, \tag{4.52}$$

$$\frac{\partial(\delta\vec{u})}{\partial t} + u_0\frac{\partial(\delta\vec{u})}{\partial r} + \frac{\partial u_0}{\partial r}\delta u_r\vec{e_r} + \frac{u_0}{r}\delta\vec{u_T} = -\frac{1}{\rho_0}\vec{\nabla}\delta p + \frac{\delta\rho}{\rho_0^2}\frac{\partial p_0}{\partial r}\vec{e_r}\,, \tag{4.53}$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + u_0\frac{\partial}{\partial r}\right](\frac{\delta p}{p_0} - \frac{\gamma\delta\rho}{\rho_0}) + \delta u_r\frac{\partial}{\partial r}ln(\frac{p_0}{\rho_0^\gamma}) = 0\,, \tag{4.54}$$

où $\vec{\nabla} = \nabla_r\vec{e_r} + \vec{\nabla}_T$. Nous remarquons que nous travaillons maintenant avec la pression et non plus avec la vitesse du son. Nous dissocions l'équation 4.53 pour les différentes composantes de la vitesse :

$$\frac{\partial(\delta u_r)}{\partial t} + u_0\frac{\partial(\delta u_r)}{\partial r} + \frac{\partial u_0}{\partial r}\delta u_r = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial(\delta p)}{\partial r} + \frac{\delta\rho}{\rho_0^2}\frac{\partial p_0}{\partial r}\,, \tag{4.55}$$

$$\frac{\partial(\delta u_\theta)}{\partial t} + u_0\frac{\partial(\delta u_\theta)}{\partial r} + \frac{u_0}{r}\delta u_\theta = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial(\delta p)}{\partial\theta}\,, \tag{4.56}$$

$$\frac{\partial(\delta u_\phi)}{\partial t} + u_0\frac{\partial(\delta u_\phi)}{\partial r} + \frac{u_0}{r}\delta u_\phi = -\frac{1}{\rho_0\, r\, sin\theta}\frac{\partial(\delta p)}{\partial\phi}\,. \tag{4.57}$$

Nous changeons à présent les grandeurs fluides non perturbées et les perturbations de ces grandeurs respectivement par les relations A.1, A.2 et 4.26 et 4.42-4.45. Nous obtenons[4] cette fois un système de quatre équations à quatre inconnues comme la perturbation de la vitesse est décomposée en deux vecteurs ($\overrightarrow{\delta U} \simeq \delta U_r\overrightarrow{e_r} + \delta U_T\overrightarrow{e_T}$) :

$$\delta G(q + 3U + \xi U') + \xi\delta G'(U-1) + \delta U_r(\xi G' + 3G) + G\xi\delta U_r' - l(l+1)\xi G\delta U_T = 0, \tag{4.58}$$

$$(\kappa + q + 2U - 1 + \xi U')G\xi\delta U_r + (U-1)G\xi^2\delta U_r' + \delta P' - P'\frac{\delta G}{G} = 0, \tag{4.59}$$

$$(\kappa + q + 2U - 1)G\xi\delta U_T + (U-1)G\xi^2\delta U_T' + \frac{\delta P}{\xi} = 0, \tag{4.60}$$

$$q\frac{\delta P}{P} - \gamma q\frac{\delta G}{G} + (U-1)\xi[\frac{\delta P'}{P} - \gamma\frac{\delta G'}{G} - \frac{P'\delta P}{P^2} + \gamma\frac{G'\delta G}{G^2}] + (\frac{P'}{P} - \gamma\frac{G'}{G})\xi\delta U_r = 0, \tag{4.61}$$

[4]La dernière équation que nous avons obtenue diffère de Kushnir et al. [2005] à une dérivée près sur la pression, ce qui est probablement dû à une erreur de typographie de leur part.

où $q = s/\alpha$ est un paramètre rapportant le taux de croissance s au taux d'expansion α, et κ est toujours le rapport de pression. Avec ces relations et les conditions aux bords exprimées précédemment nous intégrons numériquement les équations d'Euler perturbées. Cette résolution numérique doit nous permettre de trouver la relation entre le taux de croissance de l'instabilité et le mode propre de la perturbation pour un indice adiabatique, un taux d'expansion et un rapport de pressions fixés.

Nous réalisons, comme précédemment, l'intégration des équations avec Mathematica en débutant l'intégration à $\xi = 1$ et en diminuant pas à pas la variable auto-semblable jusqu'à atteindre $\xi = 0$, c'est-à-dire des conditions aux bords bien contrôlées vers la zone problématique. En effet, à l'origine, la solution non perturbée diverge vers des valeurs non physiques et cela se répercute sur le calcul de la solution perturbée [Kushnir et al., 2005]. Lors de la détermination des profils non perturbés, la divergence à l'origine ne posait pas de problèmes, car la méthode numérique convergeait jusqu'à $\xi \simeq 10^{-7}$. Mais comme nous utilisons ces profils pour calculer la solution perturbée, la solution diverge dans ce cas dès $\xi \simeq 0,4$. Même en utilisant la meilleure méthode numérique qui est à notre disposition dans Mathematica pour résoudre les EDO, cela ne nous permet pas de converger vers la condition au bord $\delta P(0) = 0$. En effet, nous avons testé les différentes méthodes numériques disponibles dans Mathematica comme le Runge-Kutta, le "Stifness Switching",... mais à chaque fois le calcul diverge assez loin de $\xi = 0$. Lorsque nous laissons à Mathematica la possibilité de choisir la technique numérique la plus adaptée à chaque pas d'intégration (méthode automatique), le calcul diverge moins rapidement. Nous avons

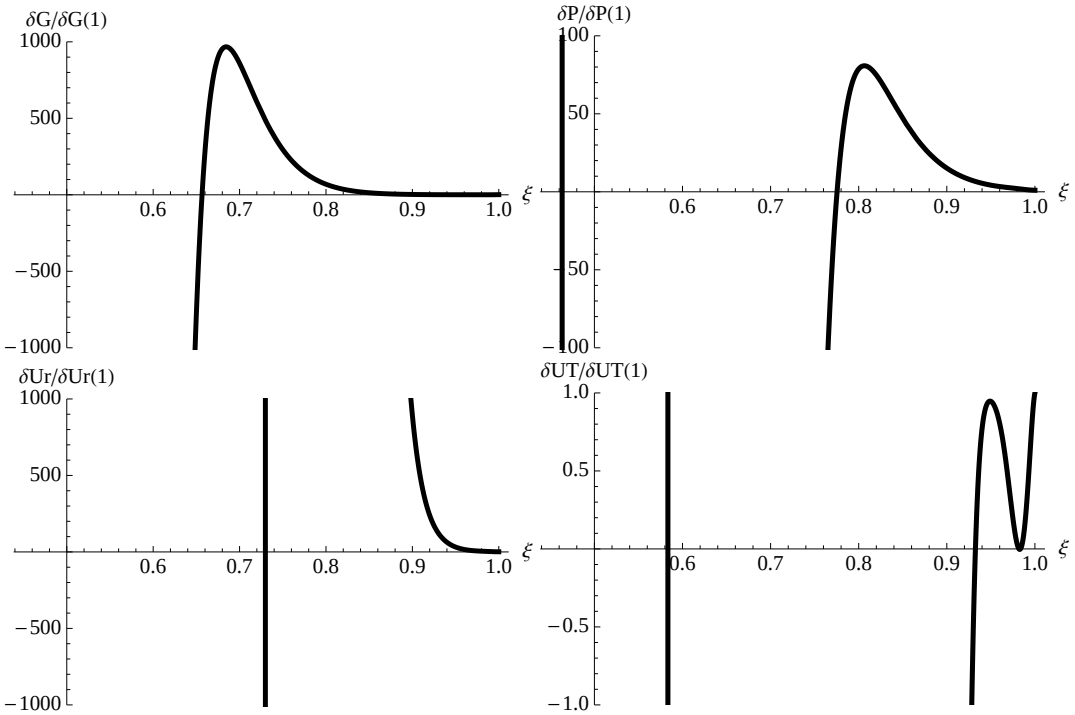
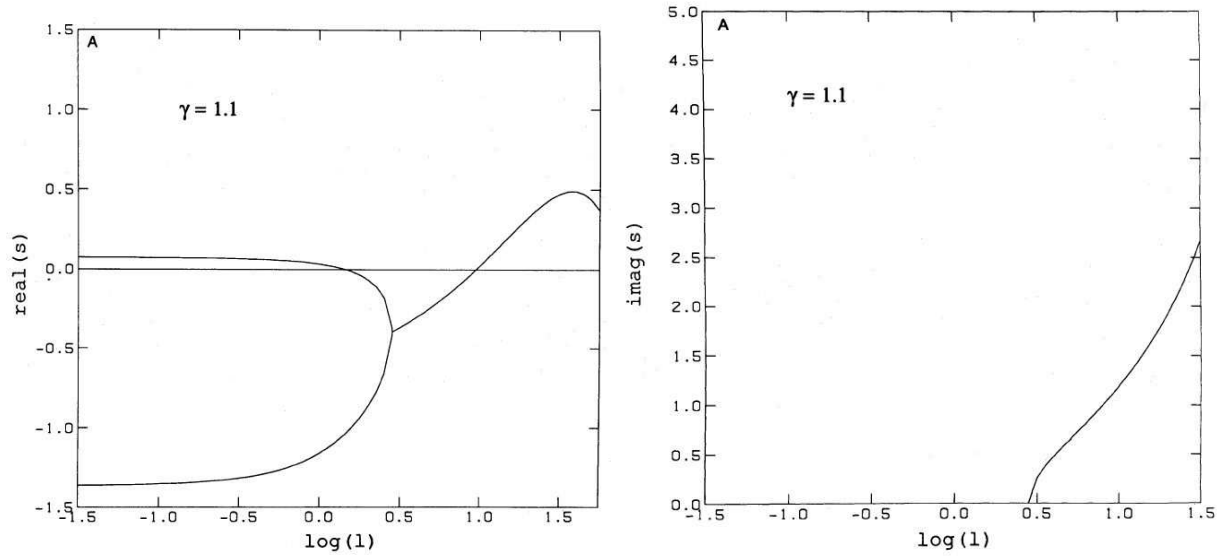


FIG. 4.7 – Profils normalisés des fonctions sans dimension perturbées en géométrie sphérique en fonction de la variable auto-semblable ξ pour $\gamma = 1,1$, $\alpha = 2/5$, $\kappa = 1/2$, $l = 40$, $s = 0,49 + 3,2i$. Nous avons sélectionné l'intervalle $\xi = [0,45 - 1]$ car sur le domaine décrivant l'onde de souffle les profils divergent rapidement vers des valeurs très extrêmes ($\sim 10^{50}$).

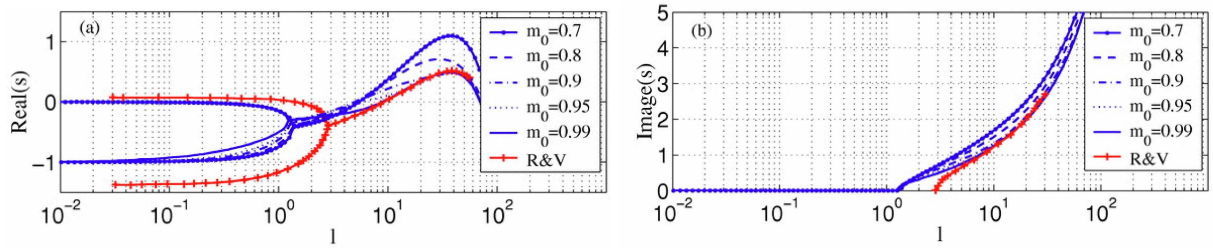
remarqué que la solution change de signe pour le quintuplet $(\gamma, \alpha, \kappa, l, s)$ recherché ce qui nous a permis de

vérifier à nouveau les valeurs obtenues par les précédentes études.
Nous représentons sur la figure 4.7 les profils normalisées des fonctions sans dimension perturbées en géométrie sphérique obtenus avec Mathematica pour les conditions suivantes : $\gamma = 1,1$, $\alpha = 2/5$, $\kappa = 1/2$, $l = 40$, $s = 0,49 + 3,2i$. Les profils divergent rapidement vers des valeurs très extrêmes sur l'intervalle $\xi = [0 - 1]$.
Le taux de croissance complexe déterminé pour l'indice adiabatique $\gamma = 1,1$ par Ryu & Vishniac [1987] et corrigé par Kushnir et al. [2005] est représenté en fonction du mode propre sur la figure 4.8 pour la géométrie sphérique et la figure 4.9 pour la géométrie plan-parallèle. La partie réelle positive de $s(l)$ nous permet de déter-



(a) $\mathcal{R}e(s)$ de Ryu & Vishniac [1987]

(b) $Im(s)$ de Ryu & Vishniac [1987]



(c) $\mathcal{R}e(s)$ de Kushnir et al. [2005]

(d) $Im(s)$ de Kushnir et al. [2005]

FIG. 4.8 – Parties réelle et imaginaire du taux de croissance de l'instabilité de Vishniac en géométrie sphérique pour $\gamma = 1,1$ issu de Ryu & Vishniac [1987] ((a) et (b)) et issu de Kushnir et al. [2005] ((c) et (d)). Dans la seconde étude, le modèle analytique a été corrigé près de l'origine et généralisé pour un milieu ambiant non uniforme. Le domaine de modes propres instables, donné par la condition $\mathcal{R}e(s) > 0$, est $l = [8 - 80]$ et le taux de croissance théoriquement optimal est $s(l = 40) = 0,49 + 3,2i$. Comme dans l'analyse de perturbation locale, la solution possède deux branches pour les faibles valeurs du mode propre. La branche de solution pour laquelle $\mathcal{R}e(s) > 0$ et $l < 1$ ne concerne pas notre étude car elle n'est pas physique.

miner le domaine de modes propres instables. En géométrie sphérique, nous obtenons le domaine $l = [8-80]$ et en géométrie plan-parallèle, le domaine $l = kx = [4 - 30]$ (où k est le nombre d'onde et x est la variable d'espace en géométrie plan-parallèle). Contrairement à l'analyse de perturbation locale, la "relation de dispersion"

$\mathcal{R}e(s(l))$ possède un maximum ce qui nous permet de définir le mode propre optimal de la perturbation qui doit engendrer théoriquement la plus grande croissance de l'instabilité. Ce mode propre spécifique est $l = 40$ et permet un taux de croissance $s = 0,49 + 3,2i$ en géométrie sphérique, et c'est $l = 14$ qui permet $s = 0,25 + 2,2i$ en géométrie plan-parallèle.

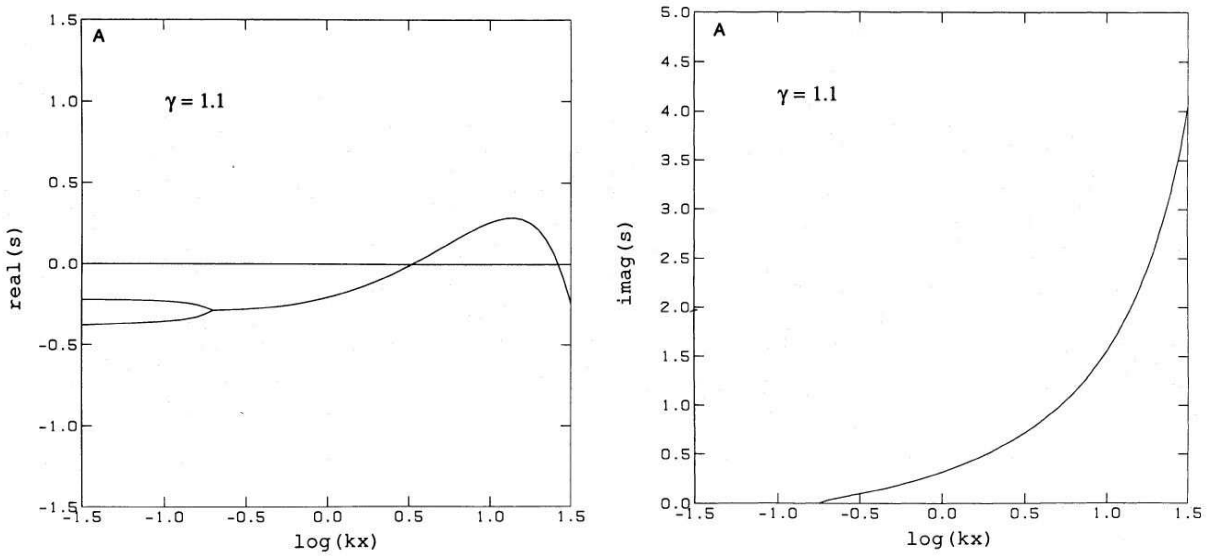


FIG. 4.9 – Parties réelle et imaginaire du taux de croissance de l'instabilité de Vishniac en géométrie plan-parallèle pour $\gamma = 1,1$ issu de Ryu & Vishniac [1987]. Le mode propre est relié au nombre d'onde k par la relation $l = kx$, x étant la variable d'espace en géométrie plan-parallèle. Le domaine de modes propres instables, donné par la condition $\mathcal{R}e(s) > 0$, est $l = [4 - 30]$ et le taux de croissance théoriquement optimal est $s(l = 14) = 0,25 + 2,2i$.

En conclusion de cette étude théorique, sur laquelle nous allons nous baser pour effectuer l'étude numérique, nous faisons ressortir les critères qui selon ce modèle sont nécessaires au développement de l'instabilité dynamique engendrée par une différence de pression. Ces critères sont :

- le choc fort : $\mathcal{M} \gg 1$;
- l'expansion de Sedov du RSN : $\alpha = 2/5$ et $\kappa = 1/2$;
- un indice adiabatique faible de l'onde de souffle : $\gamma < 1,2$;
- le domaine de mode propre de la perturbation : $l = [8 - 80]$ en géométrie sphérique, et $l = [4 - 30]$ en géométrie plan-parallèle ;
- le mode propre optimal et le taux de croissance complexe correspondant : $l = 40$ et $s = 0,49 + 3,2i$ en géométrie sphérique, et $l = 14$ et $s = 0,25 + 2,2i$ en géométrie plan-parallèle.

4.3.3 Quelques commentaires sur le modèle théorique

Nous passons en revue dans cette partie les hypothèses du modèle théorique de Ryu & Vishniac [1987] qui peuvent être discutables. Nous voulons en effet avoir un modèle numérique assez proche de la réalité. Nous présentons, dans le chapitre suivant, les simulations de l'instabilité de Vishniac. Il est donc important de lister dès à présent les points théoriques présentant des approximations pas toujours valables.

Premièrement, il y a un problème sur la corrélation de la valeur de l'indice adiabatique avec celle du taux d'expansion de la position du front de choc. Nous avons vu que la coquille de gaz choqué considérée initialement par Ryu & Vishniac [1987] évolue selon la loi de Sedov. La position du front de choc a pour taux d'expansion $\alpha = 2/5$ dans la géométrie sphérique ($\alpha = 2/3$ en plan-parallèle). Cette valeur implique que la gaz de la coquille est adiabatique et son indice adiabatique est $\gamma_2 = 5/3$ (l'indice (2) désigne la coquille). Or lorsqu'ils résolvent les équations perturbées pour obtenir un taux de croissance de la perturbation en fonction du mode propre, Ryu & Vishniac font varier ce γ_2 alors que leur solution d'évolution auto-semblable correspond toujours à celle d'un gaz adiabatique. Mais nous allons voir, juste après, que la position du front de choc dépend aussi de ce paramètre ($x_s = f(t, \gamma_2)$), comme montré par Keilty et al. [2000] et Liang & Keilty [2000] pour les géométries cylindrique et sphérique respectivement. Le taux d'expansion et l'indice adiabatique sont donc fortement corrélées et nous contestons donc cette approximation. Nous verrons, que dans notre modèle numérique, nous divisons le système en trois milieux caractérisés chacun par un indice adiabatique et nous avons donc pour $\gamma_2 = 1,1$ un exposant d'évolution du rayon $\alpha = 0,58$.

Deuxièmement, Ryu & Vishniac font l'hypothèse de choc fort pour déterminer les conditions aux bords à $\xi = 1$. La limite de choc fort suppose que le nombre de Mach est grand ($\mathcal{M} \gg 1$) ce qui s'exprime aussi par une pression au niveau du choc très grande par rapport à celle du milieu ambiant ($p_s \gg p_1$). Or nous verrons dans les simulations que le choc que nous avons modélisé n'évolue pas à des nombres de Mach très élevés et la résolution numérique joue un rôle important pour atteindre la limite de choc fort. Par conséquent le taux de compression au niveau du choc ne converge pas toujours vers la limite théorique $\mathcal{C}(\gamma_2) = (\gamma_2 + 1)/(\gamma_2 - 1)$.

Troisièmement, pour résoudre les équations de perturbations, Ryu & Vishniac font l'hypothèse de l'approximation de coquille fine ($R_s \gg h$) et des petites perturbations ($\lambda \gg h$). Or nous verrons que numériquement l'épaisseur de la coquille est de l'ordre de quelques pour cents du rayon et proportionnelle à la longueur d'onde et n'est donc pas complètement négligeable devant ces deux grandeurs.

Mais le point le plus important est que l'épaisseur de la coquille n'est pas constante au cours de l'évolution de l'onde de souffle. Cet effet physique, qui n'est pas pris en compte dans la théorie, est dû à l'accrétion de la matière du milieu ambiant sur le front de choc. Comme la densité ρ_s a atteint une valeur maximale, le seul moyen qu'a la coquille pour stocker cet afflux de masse est d'augmenter son épaisseur. Nous verrons que cet effet atténue les perturbations dans les simulations numériques. Il est donc absolument non négligeable.

4.3.4 Les autres effets dynamiques pouvant déclencher, améliorer ou atténuer l'instabilité

Nous déterminons dans cette partie les autres effets dynamiques qui peuvent avoir un rôle dans le développement, l'atténuation, ou la saturation de l'instabilité de Vishniac et qui ont été déterminés ou supposés par

Vishniac [1983] et Ryu & Vishniac [1987].

– *Le champ magnétique dans la coquille*
  Dans le milieu interstellaire (MIS), la pression magnétique peut être de l'ordre de grandeur de la pression thermique du milieu non choqué ($p_{\vec{B}} \sim p_1$). Or la pression thermique du MIS est négligeable par rapport à celle qui tend à freiner la propagation du RSN ($p_1 \ll p_{ram}$) ce qui implique que la pression magnétique est aussi négligeable par rapport à cette même pression ($p_{\vec{B}} \ll p_{ram}$). Mais comme le gaz de la coquille est fortement comprimé par le passage du choc, il est dans un état totalement ionisé. Ainsi le champ magnétique ambiant est plus ressenti par le gaz de la coquille et cette grandeur peut jouer un rôle de stabilisateur des perturbations apparaissant dans la couche de gaz choqué. Vishniac [1983] a envisagé cet effet et il en a conclu que le champ magnétique peut atténuer la discontinuité des paramètres, ce qui a pour conséquence d'élargir l'épaisseur de la coquille. Le domaine de longueurs d'onde instables va donc diminuer et l'instabilité aura donc beaucoup moins de possibilité de se développer dans le système.

– *La non-linéarité*
  Les mouvements transverses de matière dans la coquille peuvent devenir supersoniques et former des ondes de choc transverses. Ce processus non-linéaire va atténuer la croissance des perturbations et va permettre ainsi une stabilisation du système. Il restera faible sauf si l'amplitude des oscillations est importante.

– *Le refroidissement de la coquille*
  Le refroidissement de la coquille peut induire un changement radical dans le fonctionnement de l'instabilité. Pour prendre en compte la perte radiative que nous avons déjà évoquée dans le premier chapitre, nous pourrions introduire la fonction de refroidissement. Cela permettrait de modéliser plus correctement la perte d'énergie que la diminution de l'indice adiabatique effectif. Contrairement aux autres phénomènes, ce processus va permettre une meilleur croissance de l'instabilité. En effet la densité va augmenter dans la coquille car la température de cette zone va diminuer et cet effet aura pour conséquence de maintenir une épaisseur de coquille constante.

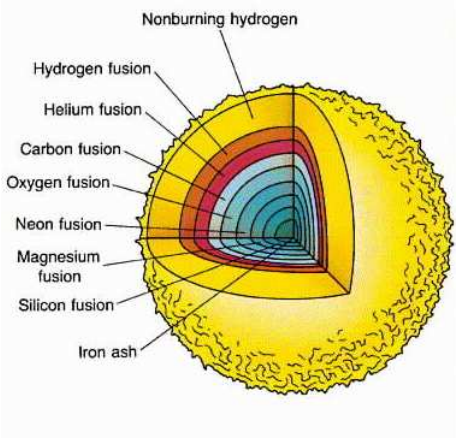
Lors de l'étude des nombreuses observations de RSN, il faut avoir à l'idée que tous ces effets peuvent avoir une influence sur la structure finale du reste. C'est pour cela qu'il est difficile d'établir le rôle de l'instabilité de Vishniac dans la structure fragmentée et filamentée des fronts de choc de la phase radiative. Il est quand même intéressant d'étudier chacun des effets indépendamment afin de comprendre comment et à quels niveaux ils agissent.

4.4 Le contexte astrophysique : les restes de supernova

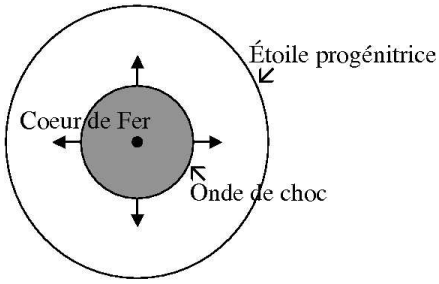
Initialement, l'instabilité de Vishniac a été étudiée analytiquement à la transition entre la phase de Sedov et la phase radiative des RSN, deux des quatre stades qui décrivent l'évolution des ondes de souffle présentes dans les RSN. Dans cette partie, nous allons présenter le modèle théorique qui permet de décrire l'expansion de l'ondes de souffle dans le milieu interstellaire. Nous nous intéressons en premier lieu au processus permettant la génération d'un certain type de RSN, c'est-à-dire les supernovæ de type gravitationnel engendrées par un effondrement du coeur des étoiles massives. Nous ne considérons pas les RSN engendrés par l'explosion nucléaire d'une naine blanche (SN Ia) car dans certains de ces objets, l'onde de détonation présente peut re-accélérer le front de choc . Dans ce cas, le système n'est plus en décélération et il ne peut plus être décrit par les lois auto-semblables qui nous intéressent. Nous précisons que pour les RSN en phase avancée, il est difficile de déterminer le type de supernova qui a engendré le reste et ainsi la distinction des lois d'évolution n'est plus avérée. Nous décrivons aussi, dans un second temps, les différentes phases d'évolution des ondes de souffle en décélération. Dans ce modèle théorique, le front de choc suit des lois auto-semblables qui dépendent de l'âge du RSN. Mais d'abord nous présentons le processus qui permet la formation des supernovæ gravitationnelles.

4.4.1 Les supernovæ de type gravitationnel

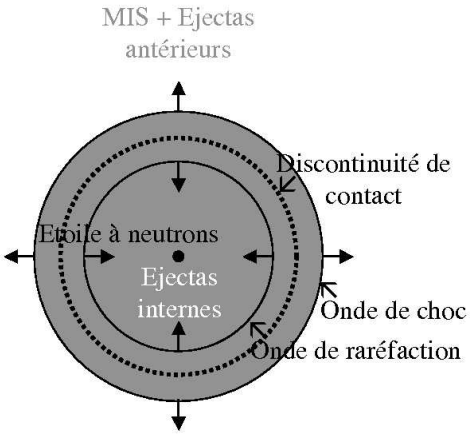
Les supernovæ de type gravitationnel sont déclenchées selon un processus que nous décrivons dans cette partie. Les étoiles massives (de masse $M > 10\ M_{\odot}$) ont, à la fin de leur vie, une structure en pelures d'oignon comme représentée sur la figure 4.10(a). Dans chaque couche de l'étoile, un élément différent est brûlé. La combustion des atomes les plus lourds s'effectue au centre, dans la région où la température est la plus importante car cette combustion nécessite des conditions spécifiques. La structure en couches des étoiles de plusieurs dizaines de masses solaires est stable pendant un certain temps car le progéniteur compense sa chaleur interne extrême par une augmentation de son rayon. Cette phase de dilatation de l'étoile perdure jusqu'au moment où du fer est produit en son coeur. Comme aucun élément plus lourd ne peut être formé naturellement par fusion thermonucléaire, l'étoile n'a plus de source d'énergie centrale. Sa pression de rayonnement devient insuffisante et elle ne peut plus supporter sa propre gravité. Les couches externes constituées des éléments les plus légers tombent sur le coeur de fer à différentes vitesses et rebondissent sur l'objet central en formant une onde de choc, c'est la supernova. Seul le noyau de fer peut subsister à cette explosion et former plus tard une étoile à neutrons composée de matière dégénérée ou un trou noir si l'étoile progénitrice était très massive. Les couches d'éléments plus légers sont comprimées par l'onde de choc engendrée lors de l'explosion, comme représentée sur la figure 4.10(b). Cette onde se propage dans l'étoile stratifiée à une vitesse très supersonique. Elle rencontre des milieux de densité et de composition différente à chaque interface (Fe-Si, ..., He-H, H-MIS) et son passage va transformer ces diverses couches, permettre leur mélange et aussi former des surdensités qui vont se mettre en mouvement, entraînées par l'onde de choc. L'onde sort de l'enveloppe d'hydrogène de l'étoile progénitrice, qui est la dernière couche de celle-ci, au bout de quelque seconde et commence sa propagation dans le milieu ambiant. À ce stade, l'environnement proche de l'étoile est composé de MIS et de



(a) structure en pelures d'oignon



(b) rebond sur le coeur



(c) onde de souffle

FIG. 4.10 – Explosion d'une étoile massive et génération d'un RSN. (a) À la fin de sa vie, l'étoile a une structure en pelures d'oignon et en son centre, un coeur de fer s'est formé. Comme la source d'énergie centrale ne produit plus suffisamment de rayonnement pour que la pression radiative de l'étoile compense sa gravité propre, l'étoile s'effondre sur elle même. (b) Lors du collapse gravitationnel des différentes couches sur le noyau métallique, une onde de choc est créée. (c) Elle se propage dans les différentes enveloppes de l'étoile jusqu'à entrer dans le milieu ambiant. L'onde de choc devient une onde de souffle et le système forme un RSN.

matière éjectées par l'étoile pendant son évolution vers le stade de supernova, que nous nommons les éjectas antérieurs. Lorsqu'elle entre dans ce milieu ambiant, l'onde de choc devient une onde de souffle et elle forme trois discontinuités visualisées sur la figure 4.10(c) : l'onde de choc, l'onde retour se propageant vers des éjectas contemporains de la supernova (nommés éjectas internes) et la discontinuité de contact (DC). Ces trois discontinuités forment le RSN.

Le premier milieu que rencontre l'onde de souffle est, comme nous venons de brièvement de l'énoncer, un environnement enrichi en éléments légers. En effet, durant sa vie d'étoile massive, cet objet a éjecté *via* un vent stellaire, de la matière provenant de son enveloppe d'hydrogène. Ces éjectas antérieurs vont donc venir enrichir le MIS déjà présent. Mais lors de la propagation de l'onde de souffle sur un temps plus long, le milieu ambiant sera supposé être essentiellement le MIS. Nous précisons toutefois que le milieu ambiant peut être aussi un milieu intergalactique ou un nuage interstellaire d'hydrogène moléculaire H_2 qui peut former un ensemble plus chaud mais nous ne considérerons pas ces cas dans notre étude. Dans la partie interne de l'onde de souffle, il y a aussi des éjectas qui sont formés par l'onde de choc lors du passage de celle-ci au sein de l'étoile progénitrice. Ces éjectas contemporains, engendrés par des surdensités initiales vont subir le passage de l'onde de raréfaction comme nous le verrons lors de la présentation des phases d'évolution.

Nous précisons que dans notre modélisation numérique des ondes de souffle du RSN, nous ne tenons compte ni de l'objet central formé au moment de la supernova, ni de l'effet des neutrinos qui emportent une grande partie de l'énergie de l'explosion. Et comme nous nous intéressons, dans la suite, seulement aux phases de Sedov et radiative où seul le champ magnétique ambiant peut être amplifié sur le front de choc et permettre une émission X de cette zone (due à l'effet synchrotron), nous considérerons le champ magnétique comme négligeable.

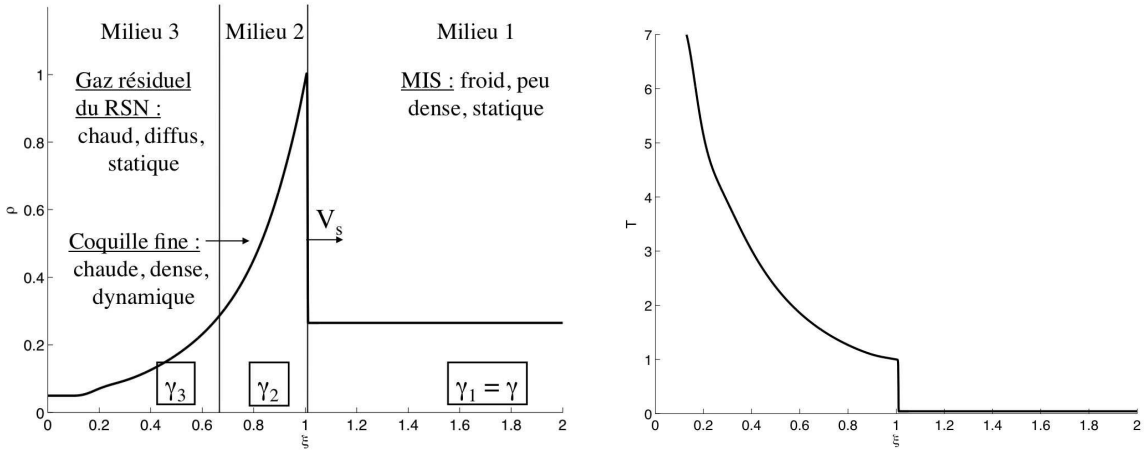
Nous avons schématisé sur la figure 4.11 le profil de la densité et de la température d'une onde de souffle se propageant dans un milieu ambiant uniforme. Nous rappelons que la température s'exprime comme $T \propto p/\rho$ ce qui donne dans cette situation une fonction divergente à l'origine. Le profil de la densité (voir Fig. 4.11(a)), qui va garder relativement la même forme auto-semblable pendant les phases nous intéressant, nous permet de définir les trois milieux présents dans ces objets.

- *Le milieu ambiant*

  Sur la partie droite du schéma, le milieu ambiant est facilement identifiable, car c'est la région de densité constante notée avec l'indice (1). Nous supposons ce milieu être le milieu interstellaire et il est donc considéré, de manière synthétique, comme étant uniforme, froid, peu dense et statique. Ainsi, ce milieu est caractérisé par une température presque nulle ($T_1 \sim 0$), une densité uniforme ($\rho_1 = cte$) et être au repos ($u_1 \sim 0$). Sa pression est négligeable par rapport à la pression bélier et donc par rapport à celle du gaz interne du RSN ($p_3 = \kappa\, p_{ram}$ et $p_1 \ll p_3$) et le gaz le composant est supposé adiabatique ($\gamma_1 = 5/3$). L'approximation de densité constante et uniforme de ce milieu est peu réelle car souvent des gradients de densité ont été considérés du point de vue analytique [Kushnir et al., 2005] et numérique [Chevalier et al., 1992]. Des paquets de matière sont supposés perturber le front de choc et engendrer les structures complexes observées.

- *La coquille de gaz choqué*

  Au milieu du schéma, le front de choc est identifiable par la discontinuité de la densité (noté (s)) et derrière ce front, la coquille de gaz choqué est visible (noté (2)). Cette région est considérée comme



(a) ρ (b) T

FIG. 4.11 – Profil de la densité (a) et de la température (b) dans les RSN. Les coupes sont normalisées par les valeurs au front de choc (ρ_s et T_s) et sont représentées en fonction de la variable auto-semblable ξ. Il est possible de discerner trois milieux différents illustrés sur le profil de la densité : le milieu ambiant (1) pour $\xi > 1$, le front de choc à $\xi = 1$ et la coquille de gaz choqué (2) pour $x_i/x_s < \xi < 1$, et le gaz du RSN (3) pour $0 < \xi < x_i/x_s$.

chaude, dense et dynamique. En effet, la coquille de densité et de température élevées ($\rho_s > \rho_1$ et $T_s > T_1$) avance dans le milieu ambiant à une vitesse supersonique ($u_s \propto V_s$). Nous considérons qu'elle est délimitée par son épaisseur $h = x_s - x_i$ qui est elle même supposée fine ($h \ll R_s$). À partir de la phase radiative comme le gaz chaud y est très comprimé et que la coquille s'amincit, elle peut rayonner et se refroidir. Le choc précédant la couche de gaz choqué est donc un choc radiatif. Avant qu'il y ait une vraie diminution de la température dans cette zone, provoquée par des pertes radiatives, nous supposerons que les processus de chauffage-refroidissement sont instantanés et que nous pouvons garder l'hypothèse isotherme. Ainsi l'indice adiabatique de la coquille γ_2 va être variable et tendra vers la valeur isotherme au plus fort de la modification de l'état du gaz vers un état plus compressible, comme nous l'avons déjà énoncé. Au bord externe de la coquille, la matière du milieu ambiant s'accrète sur le choc ce qui crée un flux de matière venant augmenter celle déjà présente dans la coquille. Au bord interne, il n'y a pas de flux équivalent donc la seule force s'appliquant sur cette zone est bien la force de pression thermique du milieu (3). C'est dans cette coquille que l'instabilité de Vishniac va pouvoir se développer et engendrer l'évolution que nous allons simuler.

– *Le gaz interne*

Sur la partie gauche du schéma, le milieu choqué du RSN (noté (3)) est identifiable par sa décroissance tendant vers 0. C'est un milieu que nous considérons chaud, diffus, et statique près du centre de l'onde de souffle. Ce gaz résiduel d'une étoile massive est riche des nombreux éléments éjectés lors de l'explosion qui sont les produits de la fusion. Il est supposé très chaud ($T_3 \gg 1$) même loin de sa source ponctuelle car, pendant les différentes phases d'évolution, la coquille est optiquement épaisse et il y a

très peu de pertes d'énergie. Mais nous verrons que dans certaines conditions, son indice adiabatique peut différer de $\gamma_3 = 5/3$. Le gaz qui compose cette région a une vitesse du son élevée étant donnée la température élevée. Les déplacements hydrodynamiques dans ce milieu sont subsoniques. Le milieu (3) est diffus ($\rho_3 \rightarrow 0$) car l'onde de raréfaction l'a vidé de sa matière. Ce gaz possède une pression thermique élevée ($p_3 \gg 1$) qui pousse la coquille et permet l'expansion du RSN.

Nous verrons par la suite que les milieux (1) et (3) donnent des contraintes sur les conditions initiales introduites dans le code. Afin de déterminer les ordres de grandeur des grandeurs fluides de chacun des milieux, nous nous intéressons plus en détail à ces objets.

Certaines supernovæ sont célèbres car leur luminosité était telle qu'elles étaient visibles à l'oeil nu et elles ont donc laissé une trace dans l'histoire des hommes (par exemple, la supernova *1054* qui a donné naissance à la nébuleuse du *Crabe*). Depuis l'avènement des télescopes terrestres et spatiaux, l'observations de ces RSN en multi-longueur d'onde à un instant donné a permis de révéler *via* des magnifiques images leur structure complexe composée d'éjectas, de filaments, de grumeaux, de doigts de fluides, etc,... De nombreux processus entrent en jeu dans la formation de ces structures mais les instabilités hydrodynamiques ont un rôle prépondérant dans la diversité des objets observés.
Pour certains RSN et pour leurs milieux environnants, nous avons suffisamment de données observationelles pour déterminer les conditions initiales qui nous permettent de modéliser ces systèmes. Pour la fameuse supernova *1987 A*, nous savons que l'étoile progénitrice avait une masse $M > 15\ M_\odot$ et que l'explosion a libérée dans le milieu ambiant une énergie cinétique de $\mathcal{E}_{c,SN} = 10^{44}$ J et une énergie neutronique de $\mathcal{E}_{\nu,SN} = 2,7 \times 10^{46}$ J. La luminosité résultante de cette prodigieuse quantité d'énergie délivrée instantanément est de l'ordre de $\mathcal{L} = 10^{10}\mathcal{L}_\odot \simeq 10^{36}$ W.
En ce qui concerne le milieu ambiant dans lequel se propage le choc, nous avons vu que c'est le MIS que nous considérons et particulièrement le MIS froid et dense[5]. Il est caractérisé par une densité $\rho_1 \approx 10^{-20}$ kg.m^{-3}, une température $T \approx [10^3 - 10^5]$ K et une vitesse du son $c_s \approx [1-10]$ km.s^{-1} [Reynolds, 2008]. Nous utilisons par la suite ces valeurs pour faire les applications numériques et pour initialiser les simulations de l'évolution des RSN. Nous présentons à présent les différentes phases d'évolution des RSN et leurs caractéristiques morphologiques.

4.4.2 Les phases d'expansion d'un reste de supernova

Malgré la physique complexe impliquée dans l'explosion d'une étoile massive (physique nucléaire, effet des neutrinos, présence d'instabilités à différents âges,...) et les effets de la propagation de l'onde de choc résultante de cette explosion dans les couches du progéniteur (phase de supernova), lorsque cette onde sort de la couche d'hydrogène et entre dans le MIS enrichi (phase de reste de supernova), son évolution spatiale

[5]Il existe différents types de MIS caractérisés par leurs états (neutre ou ionisé) qui résultent de leurs températures ambiantes (froide, tiède ou chaude). Les MIS tiède et chaud que nous ne considérons pas ici peuvent être aussi traversé par une onde de choc. Le MIS chaud et diffus a les propriétés suivantes : $T_1 = 8000$ K, $\rho_1 \simeq 2,4 \times 10^{-21}$ kg.m^{-3}, $c_s = 9,8$ km.s^{-1} et donc $p_1 = 1,4 \times 10^{-13}$ Pa.

suit globalement des lois analytiques simples que nous allons décrire. Le RSN évolue selon quatre phases pour lesquelles les propriétés de la coquille de gaz choqué et de la région interne de l'onde de souffle vont changer. Le modèle simple que nous présentons dans cette partie découle d'une statistique effectuée sur les objets connus. Son but avoué est de nous permettre de comprendre comment évolue les RSN mais ce modèle atteint rapidement ses limites. En effet, la durée passée par ces objets dans les différentes phases va dépendre de la nature propre de chacun des RSN et nous verrons pour des objets particuliers que bien souvent les RSN ne sont pas dans la phase d'expansion indiquée par leur âge. Ainsi, les valeurs obtenues avec ce modèle sont des ordres de grandeur approximatifs mais ce sont déjà de bons indicateurs pour contraindre notre modèle numérique. Nous détaillons dans cette partie les quatre phases d'expansion auxquelles nous ajoutons une phase transitoire.

La phase pré-balistique

La phase pré-balistique est une phase transitoire qui n'est pas inclue dans le modèle permettant de déterminer l'évolution du front de choc des RSN. Mais l'onde de souffle passe initialement par ce stade qui débute au moment de l'entrée du front de choc dans le milieu environnant l'étoile progénitrice et qui se termine lorsque l'onde de souffle sort de la bulle de MIS enrichi formée par le vent de l'étoile massive et lorsqu'elle entre dans le MIS uniforme ($t = \left[0 - 10^2\right]$ ans).
La supernova *1987 A* qui est âgée de $t = 23$ ans et que nous avons déjà évoquée se trouve dans cette phase très précoce et nous visualisons cet objet sur la figure 4.12. Les points brillants, formant un cercle et visibles sur cette image du RSN, indiquent le passage de l'onde de souffle dans des hétérogénéités présentes dans le milieu ambiant. Cet anneau d'éjectas antérieurs est choqué et se met à rayonner violemment à la suite de ce processus. Ensuite l'onde de souffle va sortir de cette région hétérogène et se sont d'autres parties du RSN qui vont émettre du rayonnement, comme dans la phase balistique que nous allons voir à présent.

La phase balistique

La phase balistique commence au bout de 100 ans d'évolution du RSN c'est-à-dire au moment où l'onde de souffle se propage dans un milieu ambiant seulement constitué de MIS. L'onde de souffle est elle même composée, à ce stade, de matière provenant des couches plus denses de l'étoile et qui sont éjectées lors de l'explosion (éjectas contemporains). Mais plus l'onde de souffle se propage dans le milieu environnant, plus la matière de l'ancienne étoile se mélange avec celle du milieu ambiant choqué. Dès cette phase, le front de choc du RSN émet du rayonnement X et radio dus à des processus synchrotron présents dans cette zone. En effet, le champ magnétique n'est pas négligeable dans l'environnement proche de l'étoile progénitrice et il permet l'accélération des électrons au niveau du front de choc. Nous avons vu que l'onde de souffle est composée d'une onde de choc qui se propage en s'éloignant de l'origine et d'une onde retour qui se dirige vers l'origine et qui choque sur son passage les éjectas contemporains. Ceux-ci atteignent des températures de l'ordre de 10^6 K ce qui leur permet de rayonner dans le domaine X thermique. L'onde de choc est, pendant cette première phase, une conversion directe de l'énergie de l'explosion $\mathcal{E}_{c,SN} = 10^{44}$ J en énergie cinétique. Sa propagation

FIG. 4.12 – Image de la supernova *1987 A*, âgée de 23 ans et observée dans le domaine visible avec le télescope *Hubble*. Les points brillants sont la signature du passage de l'onde de souffle dans un anneau d'éjectas antérieurs. Crédit : P. Challis, R. Kirshner (CfA), and B. Sugerman (STScI), NASA.

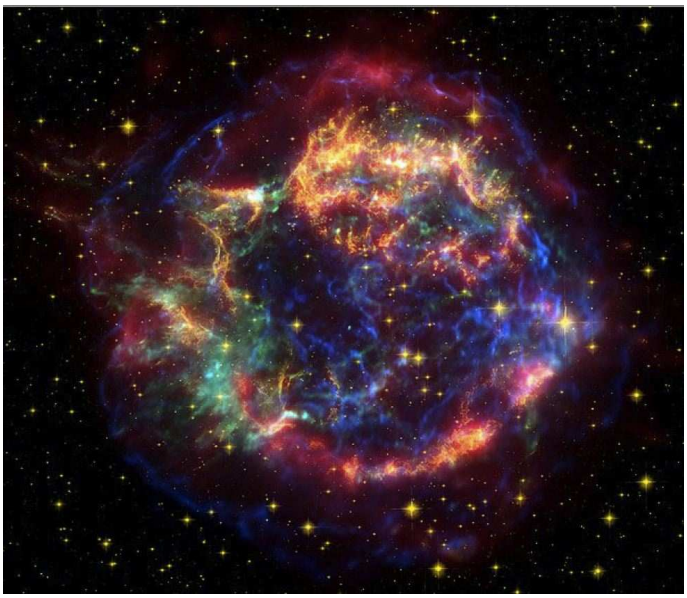


FIG. 4.13 – Image composite de la supernova *Cassiopeia A*, âgée de 320 ans et observée avec les télescopes *Spitzer* (IR, en rose), *Hubble* (visible, en jaune) et *Chandra* (X, en bleu et vert). La structure du front de choc (en bleu, à l'extérieur) est encore symétrique dans cette phase. Les éjectas internes, contemporains de la supernova, forment les structures grumeleuses très hétérogènes (en bleu, au centre). Crédit : NASA/JPL-Caltech/O. Krause (Steward Observatory).

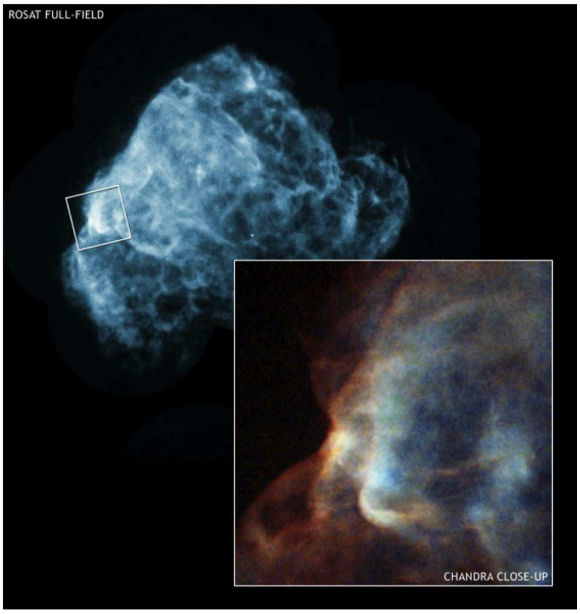


FIG. 4.14 – Image de la supernova *Puppis A*, âgée de $t \simeq 3,7 \times 10^3$ ans et observée en rayonnement X avec les télescopes *Chandra* et *ROSAT*. Le zoom présent sur cette image montre la rencontre de l'onde de choc avec un nuage moléculaire ce qui provoque localement une émission plus forte de rayonnement. Dans cet objet évoluant dans la phase de Sedov, la structure globale du RSN n'est déjà plus symétrique. Crédit : Chandra : NASA/CXC/GSFC/U. Hwang et al. ; ROSAT : NASA/GSFC/S. Snowden et al.

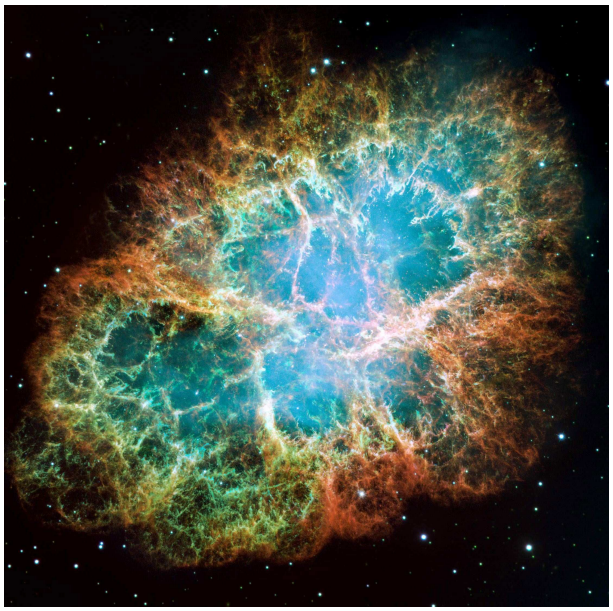


FIG. 4.15 – Image de la nébuleuse du *Crabe*, âgée de $t \simeq 960$ ans et observée dans le domaine visible avec le télescope *Hubble* et en émission X pour la zone centrale. Malgré un âge correspondant à la phase de Sedov, ce RSN rayonne suffisamment pour être déjà entré dans la phase radiative. Le front de choc, non visible dans ce domaine d'émission, borde les filaments de couleur orange. L'instabilité de Rayleigh-Taylor permet d'expliquer les filaments observés au centre de l'objet. Crédit : NASA/ESA/J. Hester, A. Loll.

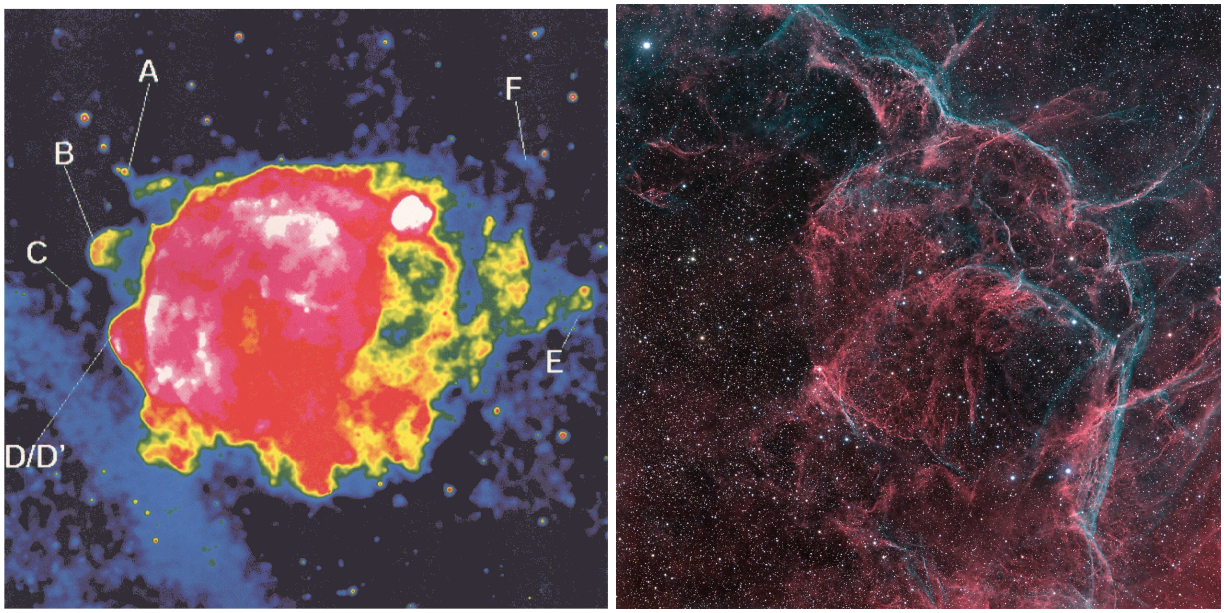


FIG. 4.16 – Carte énergétique du RSN *Vela* à 0.1-2.3 keV mesurée par *Rosat* à gauche. Ce reste âgé de $t = 1,1 \times 10^4$ ans présente une morphologie asymétrique probablement due à des éjectas contemporains de masse importante indiqués par des lettres [Miceli et al., 2008]. Sur l'image de droite nous voyons le même objet où l'action d'instabilité pourrait avoir permise cette morphologie complexe. Crédit image de gauche : Rosat All Sky Survey, et image de droite : Anglo-Australian Observatory/Royal Obs. Edinburgh.

FIG. 4.17 – Image de la nébuleuse de *Gum* âgée de $t \simeq 10^6$ ans. Sur cette image la plus vieille partie du RSN est dans le fond et elle présente une structure complètement irrégulière. D'autres objets sont aussi visible comme le RSN *Vela* et *Puppis A*. Crédit : Axel Mellinger.

est donc de type balistique et la position du front de choc suit une loi linéaire pendant une durée d'environ mille ans ($t = \left[10^2 - 10^3\right]$ ans). La solution auto-semblable de cette phase d'expansion libre, où la vitesse est proportionnelle à l'espace sur le temps, prend la forme suivante pour les différentes géométries :

$$R_s = x_s \propto t \; . \tag{4.62}$$

Dans la phase balistique, la vitesse du front de choc est de l'ordre de grandeur de la vitesse des éjectas contemporains $V_s = v_{ejecta} \simeq [10^3 - 10^4]$ km.s^{-1}. Ces éjectas lourds, formés au même instant que l'onde de choc, suivent la coquille qui ne rencontre aucune résistance de la part du milieu ambiant.
Pour illustrer la morphologie de l'onde de souffle dans la phase balistique, nous pouvons donner comme exemple la supernova *Cassiopeia A* (âgée de $t \simeq 320$ ans) sur la figure 4.13. Sur l'image de ce RSN, nous voyons clairement les différentes zones qui émettent du rayonnement et qui traduisent les différents processus que nous avons décrits. Le front de choc (la partie la plus extérieure de l'objet) et les éjectas internes choqués par l'onde retour (les structures grumeleuses à l'intérieur) y sont représentés par la couleur bleue traduisant l'émission de rayonnement X. De plus, nous remarquons que le RSN présente un front de choc assez symétrique qui est en faite la propriété de tous les RSN jusqu'à un âge de mille ans.
La fin de cette phase arrive lorsque de la masse provenant de ce milieu commence à s'accumuler sur le front de choc et à se stocker dans la coquille. À partir de ce moment, l'onde perd du moment cinétique et elle ralentit. Lorsque l'onde de choc a balayé une quantité de gaz ambiant égal en masse aux éjectas de l'explosion initiale, l'onde de souffle entre alors dans la phase de Sedov.

La phase de Sedov

Dans la phase de Sedov, la température de la coquille devient tellement élevée ($T_s \simeq 10^6$ K) que les pertes d'énergie par rayonnement peuvent être négligées en première approximation (système adiabatique). Ainsi l'énergie totale de cette zone choquée est conservée et le gaz totalement ionisé de la coquille est adiabatique ($\gamma_2 = 5/3$). Le gaz de la région interne (zone comprise entre le bord interne de la couche choquée et l'origine de l'explosion) est lui aussi adiabatique car la coquille ferme cette enceinte ($\gamma_3 = 5/3$). Dans cette phase, l'onde retour s'est propagée jusqu'à une distance suffisamment proche de l'origine pour que les profils de la densité et de la température de la figure 4.11 décrivent l'onde de souffle. La solution auto-semblable de Sedov-Taylor-von Neuman, valable pour un RSN âgé de mille ans à dix mille ans ($t = \left[10^3 - 10^4\right]$ ans), a été déterminée originellement par une analyse aux dimensions. En effet, nous savons que l'énergie totale de l'onde de souffle est, dans cette phase, l'énergie de l'explosion convertie en énergie cinétique. L'énergie totale s'exprime donc :

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} M V_s^2 \, , \tag{4.63}$$

avec la vitesse du front de choc V_s qui est le rapport de l'espace sur le temps ($V_s = \mathcal{K}_2 R_s / t$ où $\mathcal{K}_2$ est une constante explicitée ci-dessous) et la masse M de l'onde de souffle qui s'écrit en géométrie sphérique :

$$M = \frac{4}{3} \pi \mathcal{K}_0 R_s^3 \rho_s = \mathcal{K}_1(\gamma) R_s^3 \rho_1 \, , \tag{4.64}$$

où $\mathcal{K}_0$ est une constante d'intégration et $\mathcal{K}_1(\gamma)$ englobe les termes constants pour un indice adiabatique donné de l'onde de souffle. Dans les RSN en phase de Sedov, l'énergie totale est donnée par l'énergie de l'explosion $\mathcal{E}_3$. Ainsi nous réécrivons l'expression Eq. 4.68 :

$$\mathcal{E}_3 = \mathcal{K}(\gamma)\,\rho_1 R_s^5 t^{-2}\,, \tag{4.65}$$

$$\Leftrightarrow R_s = \beta_i(\gamma)\left(\frac{\mathcal{E}_3}{\rho_1}\right)^{1/5} t^{2/5}\,, \tag{4.66}$$

où $\mathcal{K}(\gamma) = (\mathcal{K}_1(\gamma)\mathcal{K}_2^2)/2$ et la constante $\beta_i(\gamma) = 1/\mathcal{K}(\gamma)^{1/5}$ est déterminée par l'intégration de l'énergie sur toute l'onde de souffle. Nous présentons sa formulation exacte dans le paragraphe suivant. Ainsi, si nous généralisons cette solution aux différentes géométries, nous obtenons pour les géométries sphérique, cylindrique et plan-parallèle respectivement (la formulation complète de ces solutions est donnée dans le tableau 4.1 de la Sec. 4.4.4) :

$$R_{s,sphe} \propto t^{2/5}\,, R_{s,cyl} \propto t^{1/2}\,, x_s \propto t^{2/3}\,. \tag{4.67}$$

Comme nous l'avons présenté dans la sous-section 4.3.2, Ryu & Vishniac [1987] utilisent ces solutions autosemblables pour décrire l'expansion de la coquille fine. Dans les simulations numériques, nous vérifierons le rôle du taux d'expansion dans l'évolution du front de choc.
La morphologie du RSN dans la phase de Sedov est illustrée par la supernova *Puppis A* (âgé de $t \simeq 3,7 \times 10^3$ ans) de la figure 4.14. Le front de choc, observé comme dans le cas de *Cassiopeia A* en émission X, présente déjà des asymétries qui laissent prévoir une évolution de la position de cette discontinuité différente de la loi autosemblable. La région interne présente, quand à elle, une structure très filamenteuse. Nous passons maintenant à la phase suivante pour laquelle les pertes d'énergie par rayonnement ne sont plus négligeables.

La phase radiative

À la fin de la phase de Sedov, le front de choc ralentit suffisamment pour que l'émission de rayonnement deviennent un processus non négligeable dans la dynamique du système. En effet à ce stade d'évolution, l'énergie initiale de la supernova n'est plus convertie efficacement en énergie cinétique mais en énergie thermique. Ainsi le refroidissement par pertes radiatives de la coquille devient un processus important ce qui provoque une diminution rapide de la température dans celle-ci. Quand la température passe en dessous de $T_2 = 2 \times 10^4$ K, les électrons qui étaient jusqu'à présent libres dans un gaz fortement ionisé, commencent à se recombiner et à former des particules neutres. Ce processus irradie de l'énergie de manière plus efficace que le rayonnement X thermique et l'émission synchrotron, qui sont les processus dominant dans les RSN jeunes et d'âge moyen. Ainsi cette phase porte à juste titre le nom de phase radiative et permet ainsi le refroidissement de la coquille. Comme nous l'avons vu précédemment, cette perte radiative doit être prise en compte par l'intermédiaire d'une fonction de refroidissement. Mais juste avant qu'il y ait une réelle diminution de la température dans la coquille, nous pouvons intégrer le changement de compressibilité du gaz par un indice adiabatique effectif. Ce paramètre va tendre vers sa limite de variation minimum ($\gamma_2 \to 1$) et le gaz adiabatique composant la zone choqué devient un gaz isotherme. L'augmentation de compressibilité de la zone choquée va avoir pour conséquence d'affiner

l'épaisseur de la coquille et celle-ci va être d'autant plus réceptive aux perturbations naissantes ou déjà existantes.

Quand il entre dans sa phase radiative, le RSN a deux possibilités d'évolution qui dépendent des caractéristiques du gaz interne : si la pression du gaz chaud résiduel reste importante car ce milieu ne perd pas d'énergie par rayonnement ($\gamma_3 = 5/3$), la force résultante va continuer à pousser la coquille, et le RSN évolue selon la phase PDTS dont nous donnons la loi analytique juste après ; si par contre il y a une diminution de la source de pression car le gaz résiduel se refroidit ($\gamma_3 \neq 5/3$), le RSN évolue selon la phase dite de conservation de l'impulsion de la coquille ("Momentum Conservating Shell" (MCS)) et le taux d'expansion prend une valeur plus faible que dans la phase PDTS. Le cas MCS arrive quand la densité du milieu ambiant est importante et lorsque cette matière est comprimée et chauffée par le choc et qu'elle atteint des conditions lui permettant de rayonner et de se refroidir. Parmi ces deux évolutions possibles, c'est la phase PDTS qui nous intéresse particulièrement car c'est lors de l'entrée du RSN dans ce stade d'évolution que l'instabilité de Vishniac peut se développer. Mais nous précisons que la phase MCS peut aussi être la suite de la phase PDTS.

La solution auto-semblable de cette phase, valable pour un RSN âgé de dix mille ans à cent mille ans ($t = \left[10^4 - 10^5\right]$ ans), prend en compte la conversion d'une partie de l'énergie de l'explosion en énergie thermique qui est due à l'émission de rayonnement du gaz choqué. L'énergie totale s'exprime maintenant [Zel'Dovich & Raizer, 1967] :

$$\mathcal{E} = \frac{4}{3}\pi R_s^3 \frac{p_3}{(\gamma - 1)} + \frac{1}{2} M V_s^2 \,. \tag{4.68}$$

Comme le système perd de l'énergie, le front de choc ralentit et la valeur de l'exposant auto-semblable diminue donc dans cette phase. La solution auto-semblable est, dans la phase PDTS, pour les géométries sphérique, cylindrique et plan-parallèle respectivement (la formulation complète de ces solutions est donnée dans le tableau 4.1 de la Sec. 4.4.4) :

$$R_{s,sphe} \propto t^{2/7} \,, R_{s,cyl} \propto t^{3/8} \,, x_s \propto t^{6/11} \,. \tag{4.69}$$

Nous remarquons qu'il existe une autre forme de solution auto-semblable pour la géométrie sphérique qui a été déterminée par Cioffi et al. [1988] et où ils trouvent $R_{s,sphe} \propto (t - t_{offset})^{3/10}$. Pour déterminer cette relation, ils corrigent la valeur de la pression qui pousse la coquille dans cette phase et cette pression supplémentaire va permettre une évolution plus rapide du front de choc où le taux d'expansion est maintenant $\alpha = 3/10$.

Nous illustrons la morphologie du RSN dans cette phase radiative par deux objets dont le premier permet de voir les limitations du modèle que nous présentons. En effet, la nébuleuse du *Crabe*, illustrée par la figure 4.15, évolue normalement dans la phase de Sedov car elle est âgée de $t \simeq 960$ ans. Mais ce RSN rayonne suffisamment pour être entré précocement dans la phase radiative. En effet, la vitesse du front de choc déterminée par Sankrit & Hester [1997] atteint la faible valeur de $V_s \approx 150$ km s^{-1} en accord avec un fort ralentissement dû à des pertes radiatives importantes provenant de la coquille. Ainsi l'âge des RSN n'est pas un critère suffisant pour pouvoir déterminer dans quelle phase sont ces objets. L'histoire du RSN et son interaction avec son environnement proche entre aussi en compte dans la modélisation de ces systèmes. Dans un autre cadre, ce RSN est connu pour ses filaments caractéristiques, situés entre l'étoile à neutrons de type pulsar et le front de choc, et qui sont supposés résultés de l'instabilité de Rayleigh-Taylor [Hester et al., 1996]. En effet, cette instabilité, dont nous préciserons le processus dans l'annexe B.1, peut apparaître au niveau de la discontinuité de contact et générer la formation de "doigts" de fluide lourd se propageant dans un fluide plus léger. Ces déformations vont

ensuite évoluer en structures de type champignons par l'action d'une autre instabilité, l'instabilité de Kelvin-Helmholtz (voir aussi l'annexe B.2 pour la description de cette instabilité). Nous notons que l'instabilité de Rayleigh-Taylor apparaît dès le début de la phase de Sedov, c'est-à-dire une fois que la masse accrétée dans la coquille approche celle des éjectas. L'instabilité résultante d'une perturbation apparaissant sur l'interface entre les éjectas et le gaz choqué du milieu ambiant, permet le mélange entre ces deux milieux. Ainsi l'observation des filaments de la nébuleuse du *Crabe* nous convaint que les instabilités ont un rôle non négligeable sur la dynamique des RSN et particulièrement sur la transformation de leur morphologie. L'étude de l'instabilité de Vishniac prend tout son sens dans ce contexte.
Le deuxième objet qui illustre la morphologie du RSN dans la phase radiative est le RSN *Vela* ($t = 1,1 \times 10^4$ ans) visible sur la figure 4.16. Sur cette image, nous pouvons remarquer la structure très fragmentée et filamenteuse des vieux RSN. Nous faisons remarquer que, dans ces systèmes, la perte de symétrie sphérique est quasi-totale et ainsi une modélisation en géométrie plan-parallèle est pertinente. Comme nous l'avons déjà évoqué et c'est aussi la raison de notre étude numérique, ce sont les instabilités hydrodynamiques qui peuvent permettre la formation de ce type de structure. Dans le cas de l'instabilité de Vishniac, les hétérogénéités du milieu ambiant sont invoquées pour déclencher ce processus instable dans la coquille fine. Cela suppose donc que le milieu ambiant ne soit pas uniforme et c'est généralement le cas dans le MIS. En effet, des surdensités apportées par les nuages interstellaires, les autres RSN, ou encore les bulles de plasma créées par des vents stellaires…, peuvent probablement déformer le front de choc en ralentissant sa progression sur des zones localisées. La turbulence, qui engendre des fluctuations de densité sur des échelles plus petites, peut aussi jouer un rôle dans cette hétérogénéité. C'est d'ailleurs ce phénomène qui est responsable de la fin du RSN comme nous le voyons dans la phase suivante.

La phase finale

La phase finale de l'évolution du RSN arrive au bout de cent mille ans ($t = 10^5$ ans), une fois que le front de choc ne forme plus de discontinuité séparant le milieu ambiant du gaz de la coquille. Dans cette phase, ces deux milieux peuvent se mélanger et s'enrichir mutuellement. À ce stade, la discontinuité voit sa vitesse diminuer jusqu'à devenir subsonique par rapport au milieu environnant et il n'y a plus de solution auto-semblable étant donné la nature différente du processus. En effet, pendant les trois précédentes phases d'évolution, la matière constituant la coquille dense a subi divers mouvements (radiaux et transverses) par l'action d'instabilité sur le long trajet parcouru depuis l'explosion initiale (plusieurs parsecs) et le gaz est donc devenu turbulent au sein de la couche. La vitesse du front de choc est maintenant de $V_s \simeq 150$ km.s^{-1} et le nombre de Reynolds qui détermine le régime d'écoulement dans lequel se trouve le gaz est, $Re = V_s R_s/\nu \gg 1$ où ν est la viscosité. Ainsi le régime du gaz de la coquille est bien turbulent car la viscosité de la matière contenue dans celle-ci est négligeable.
Nous illustrons cette phase finale avec la nébuleuse de *Gum* âgée de $t \simeq 10^6$ ans et qui comprend aussi géographiquement les RSN *Vela* et *Puppis A* comme visible sur la figure 4.17. Nous voyons que dans cette phase, le gaz de la coquille de l'ancien RSN se mélange non uniformément avec le milieu ambiant et permet d'enrichir le MIS en élément lourd et en surdensités qui peuvent à leur tour perturber le front de choc d'un autre RSN.

Cette étude des quatre phases d'évolution d'un RSN, nous a permis d'entrevoir le cadre nécessaire au développement de l'instabilité de Vishniac (phase tardive) et dans quels types de RSN, nous pourrions l'observer (restes radiatifs). Nous allons maintenant nous intéresser à présenter d'autres points théoriques.

4.4.3 La généralisation de la solution auto-semblable

Dans les RSN, nous avons vu que l'expansion du front de choc est homomorphique c'est-à-dire qu'au cours du temps, la forme de l'objet est conservée. La position du front de choc R_s suit donc une évolution auto-semblable qui dépend du temps en loi de puissance et il en est de même pour la vitesse du front de choc V_s. Nous avons en effet de manière générale en géométrie sphérique (mais c'est aussi valable en géométrie plan-parallèle) :

$$R_s = \beta t^{\alpha} \; et \; V_s = \frac{d\,R_s}{d\,t} = \dot{R_s} = \frac{\alpha R_s}{t}, \tag{4.70}$$

où β est une constante dépendante entre autre de l'énergie de la source et de la densité du milieu ambiant, α est le taux d'expansion et t l'âge du RSN. Dans le but d'étudier expérimentalement les ondes de souffle adiabatiques qui deviennent progressivement radiatives, Keilty et al. [2000] et Liang & Keilty [2000] ont déterminé une solution générale de la position du front de choc dans les géométries cylindrique et sphérique respectivement. Ces solutions ont la bonne propriété de généraliser les solutions connues des deux phases de RSN qui nous intéressent, c'est-à-dire la phase de Sedov et la phase PDTS. Leur description suppose que la perte d'énergie de la coquille mince (approximation optiquement mince) est une fraction constante du flux d'énergie qui s'échappe par le front de choc. Pour obtenir les solutions auto-semblables, ils ont introduit dans le bilan d'énergie de l'onde de souffle, un indice adiabatique effectif comme celui que nous avons décrit dans la Sec 1.2. La variation de la valeur de γ va permettre de décrire le passage d'un gaz adiabatique ($\gamma_2 = \gamma = 5/3$ où γ_2 est, nous rappelons, l'indice adiabatique de la coquille) à un gaz isotherme ($\gamma_2 \approx 1$). Sur la coupe de densité de la figure 4.11, les zones pouvant se refroidir sont les milieux (2) et (3) qui correspondent à l'onde de souffle, le milieux (1) étant toujours adiabatique[6]. La valeur de γ va donc déterminer dans quelle phase le RSN évolue. De manière générale, les solutions donnant l'évolution du rayon du choc, en géométries sphérique et cylindrique, s'écrivent [Keilty et al., 2000, Liang & Keilty, 2000] :

$$R_{s,sphe} = ((4 - 3\kappa_{sphe})a_{sphe}t)^{1/(4-3\kappa_{sphe})}, \; R_{s,cyl} = ((3 - 2\kappa_{cyl})a_{cyl}t)^{1/(3-2\kappa_{cyl})}, \tag{4.71}$$

où a_{geo} est une constante d'intégration et κ_{geo} est le rapport de pression que nous avons définit dans le modèle analytique et donc $\kappa_{geo} = p_3/p_{ram}$. En fait, ce paramètre ne varie pas avec la géométrie, $\kappa_{geo} = \kappa$ et il est relié au taux d'expansion α en identifiant Eq. 4.70 et Eq. 4.71. Nous obtenons pour les deux géométries :

$$\alpha_{sphe} = \frac{1}{(4 - 3\,\kappa)}, \alpha_{cyl} = \frac{1}{(3 - 2\,\kappa)}\,. \tag{4.72}$$

La relation du cas sphérique se réécrit $\kappa = (1/3)(4 - 1/\alpha_{sphe})$ qui est la formulation que nous avons utilisée dans la Sec. 4.3.1. De manière générale, le rapport de pression est déterminé par :

$$\kappa = \frac{1}{4}(2 - \gamma + \left[(2-\gamma)^2 + 4(\gamma_2 - 1)\right]^{1/2}) \;, \tag{4.73}$$

[6]Dans leur notation γ_3 est noté γ_c, γ_2 est noté γ_1, et γ_1 ne peut pas varier et est donc fixé à $\gamma = 5/3$.

où $\gamma = 5/3$. Pour le cas adiabatique où $\gamma_2 = \gamma = 5/3$, nous trouvons $\kappa = 1/2$ et pour le cas isotherme où $\gamma_2 \approx 1$; $\kappa = 1/6$. Ainsi nous retrouvons bien les valeurs que nous avons déjà utilisées. Pour le cas quasi-isotherme qui nous intéresse aussi où $\gamma_2 = 1,1$; $\kappa = 0,27$.
La constante d'intégration a_{geo} dépend aussi de manière explicite des indices adiabatiques des différents milieux. Nous avons en effet :

$$a_{sphe} = \left(\frac{3\,\mathcal{E}_3}{8\pi\rho_1}\right)^{1/2} R_{s,sphe,sed}^{(3-6\kappa)/2}(t = 10^4\,ans)\left[\frac{(\gamma_2+1)^2(\gamma-1)}{(2\kappa+\gamma-1)}\right]^{1/2}, \tag{4.74}$$

et

$$a_{cyl} = \left(\frac{\mathcal{E}_3}{2\pi\rho_1}\right)^{1/2} R_{s,cyl,sed}^{(1-2\kappa)}(t = 10^4\,ans)\left[\frac{(\gamma_2+1)^2(\gamma-1)}{(2\kappa+\gamma-1)}\right]^{1/2}, \tag{4.75}$$

où ρ_1 est la densité du milieu ambiant, $\mathcal{E}_3$ est l'énergie produite pendant l'explosion de l'étoile progénitrice, et $R_{s,geo,sed,fin}$ est le rayon du front de choc à la fin de la phase de Sedov pour chacune des géométries (à $t \simeq 10^4$ ans). Nous précisons que la constante β_i que nous avons utilisée dans l'Eq. 4.66 correspond, dans la formulation présente, à :

$$\beta_{i,sphe} = \left(\left(\frac{1}{\alpha_{sphe}}\right)\left(\frac{3}{8\pi}\right)^{1/2}\left[\frac{(\gamma_2+1)^2(\gamma-1)}{(2\kappa+\gamma-1)}\right]^{1/2}\right)^{\alpha_{sphe}}, \tag{4.76}$$

et

$$\beta_{i,cyl} = \left(\left(\frac{1}{\alpha_{cyl}}\right)\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2}\left[\frac{(\gamma_2+1)^2(\gamma-1)}{(2\kappa+\gamma-1)}\right]^{1/2}\right)^{\alpha_{cyl}}. \tag{4.77}$$

Nous faisons remarquer que les formules précédentes s'extrapolent facilement à la géométrie plan-parallèle où nous supposons que :

$$x_{s,plan} = ((2-\kappa)a_{plan}t)^{1/(2-\kappa)},\ \alpha_{plan} = \frac{1}{(2-\kappa)}, \tag{4.78}$$

$$a_{plan} = \left(\frac{\mathcal{E}_3}{2\rho_1}\right)^{1/2} x_{s,plan,sed}^{(1-2\kappa)/2}(t = 10^4\,ans)\left[\frac{(\gamma_2+1)^2(\gamma-1)}{(2\kappa+\gamma-1)}\right]^{1/2}. \tag{4.79}$$

Ainsi le coefficient auto-semblable et la constante d'intégration dépendent de l'état du gaz de la coquille et par conséquence, la position du front de choc en dépend aussi. Ces relations nous donnent l'évolution de la position du front de choc $R_s(t, \gamma_2, \mathcal{E}_3, \rho_1)$ pour n'importe quel indice adiabatique et en fonction de l'énergie de l'explosion initiale et de la densité du milieu ambiant. Cela nous permet de déterminer le taux d'expansion pour la valeur particulière de $\gamma_2 = 1,1$ correspondant à un gaz quasi-isotherme. Dans ce cadre, le rapport de pression est $\kappa = 0,27$ et la propagation du choc a pour solution auto-semblable en géométrie sphérique et cylindrique :

$$R_{s,sphe} \propto t^{0,32}\,, R_{s,cyl} \propto t^{0,41}\,. \tag{4.80}$$

Et nous extrapolons cette solution a la géométrie plan-parallèle :

$$x_s \propto t^{0,58}\,. \tag{4.81}$$

Nous avons donc obtenus toutes les relations utiles à l'étude des RSN. Nous déterminons deux autres variables qui vont nous aider à caractériser le fluide.

La masse

Nous introduisons la masse car cette variable nous est utile dans l'analyse théorique et la modélisation numérique. Dans le cas particulier des ondes de souffle présentes dans les RSN, la masse totale de celles-ci nous apporte une information sur le phénomène d'accrétion qui se passe au niveau du front de choc. Sous l'approximation de coquille fine, il est possible de déterminer une relation dépendante de la géométrie. Nous supposons pour cela que toute la masse de l'onde de souffle est concentrée dans la coquille de gaz choqué. Nous précisons que cette hypothèse est valable à partir de la phase de Sedov. Nous obtenons la masse de la coquille M_{os} qui s'exprime de manière générale :

$$M_{os} = \sigma_N \frac{R_s^{N+1}}{(N+1)} \rho_1, \tag{4.82}$$

où N et σ_N sont des constantes déterminées par la géométrie et nous avons les couples ($N = 0$, $\sigma_0 = \pi$) pour la géométrie plan-parallèle, ($N = 1$, $\sigma_1 = 2\pi$) en cylindrique, et ($N = 2$, $\sigma_3 = 4\pi$) en sphérique.

L'énergie thermique

Nous introduisons aussi l'énergie thermique $\mathcal{E}_{th}$. Cette variable est déterminée par l'équation d'état du gaz et elle s'exprime simplement en fonction la pression du gaz et de l'indice adiabatique. Pour toutes les géométries, l"énergie thermique prend la forme :

$$\mathcal{E} = \frac{p}{(\gamma - 1)} \mathcal{D}_{geo}\,, \tag{4.83}$$

où $\mathcal{D}_{geo}$ correspond à une surface ou un volume selon la géométrie.

Ainsi nous avons déterminé les différentes solutions auto-semblables décrivant un RSN et les autres quantités qui nous sont utiles pour cette étude. Nous allons pouvoir maintenant calculer les ordres de grandeur de ces quantités dans les différentes phases d'évolution afin de contraindre les simulations numériques.

4.4.4 La récapitulation des solutions auto-semblables

Dans le tableau 4.1 nous avons récapitulé les formules d'évolution du rayon pour les phases de Sedov et PDTS dans les géométries sphérique, cylindrique et plan-parallèle. Les formules indiquées sont celles présentées ci-dessus et issues de Liang & Keilty [2000] (en géométrie sphérique) et Keilty et al. [2000] (en géométrie cylindrique) et elles sont extrapolées au cas plan-parallèle. Toutes les applications numériques utilisent les données d'une supernova typique comme la supernova *1987 A* décrite précédemment où $\mathcal{E}_3 = 10^{44}$ J et $\rho_1 = 10^{-20}$ kg.m^{-3}. Les phases de Sedov et PDTS se recouvre plus ou moins étant donné que les valeurs calculées sont des ordres de grandeur. Ce qu'il est important de retenir est que l'onde de souffle se propage sur des distances de l'ordre du parsec à la dizaine de parsec et qu'entre le début de la phase de Sedov et la fin de la phase PDTS, elle

Géométries	Sphérique	Cylindrique
Phases d'expansion Phase de Sedov $t = [10^3 - 10^4]$ ans $\gamma_3 = \gamma_2 = \gamma_1 = 5/3$ (coquille adiabatique) $\kappa = 0,50$	$R_s = \beta_i \left(\frac{\mathcal{E}_3}{\rho_1}\right)^{1/5} t^{2/5}$ $\alpha = 0,40$ $\beta_i = 1,17$ $R_s = [1,2 - 3,0] \times 10^{17}$ m $V_s = [14,8 - 3,7] \times 10^2$ km.s^{-1}	$R_s = \beta_i \left(\frac{\mathcal{E}_3}{\rho_1}\right)^{1/4} t^{1/2}$ $\alpha = 0,50$ $\beta_i = 1,16$ $R_s = [2,1 - 6,6] \times 10^{21}$ m $V_s = [3,3 - 1,1] \times 10^7$ km.s^{-1}
Phase PDTS $t = [10^4 - 10^5]$ ans $\gamma_3 = \gamma_1 = 5/3$ et $\gamma_2 = 1,1$ (coquille quasi-isotherme) $\kappa = 0,27$	$R_s = \beta_i \left(\frac{\mathcal{E}_3}{\rho_1} R_{s,sed}^{1,38}(t = 10^4\, ans)\right)^{0,32/2} t^{0,32}$ $\alpha = 0,32$ $\beta_i = 1,19$ $R_s = [7,2 - 15,1] \times 10^{17}$ m $V_s = [720 - 150]$ km.s^{-1}	$R_s = \beta_i \left(\frac{\mathcal{E}_3}{\rho_1} R_{s,sed}^{0,92}(t = 10^4\, ans)\right)^{0,41/2} t^{0,41}$ $\alpha = 0,41$ $\beta_i = 1,20$ $R_s = [1,1 - 2,8] \times 10^{22}$ m $V_s = [13,9 - 3,6] \times 10^6$ km.s^{-1}

Géométries	Plan-parallèle	
Phases d'expansion Phase de Sedov $t = [10^3 - 10^4]$ ans $\gamma_3 = \gamma_2 = \gamma_1 = 5/3$ (coquille adiabatique) $\kappa = 0,50$	$x_s = \beta_i \left(\frac{\mathcal{E}_3}{\rho_1}\right)^{1/3} t^{2/3}$ $\alpha = 0,67$ $\beta_i \simeq 1,16$ $x_s = [2,6 - 11,7] \times 10^{28}$ m $V_s = [5,25 - 2,5] \times 10^{14}$ km.s^{-1}	
Phase PDTS $t = [10^4 - 10^5]$ ans $\gamma_3 = \gamma_1 = 5/3$ et $\gamma_2 = 1,1$ (coquille quasi-isotherme) $\kappa = 0,27$	$x_s = \beta_i \left(\frac{\mathcal{E}_3}{\rho_1} x_{s,sed}^{0,46}(t = 10^4\, ans)\right)^{0,58/2} t^{0,58}$ $\alpha = 0,58$ $\beta_i \simeq 1,20$ $x_s = [1,6 - 5,9] \times 10^{29}$ m $V_s = [2,9 - 1,1] \times 10^{14}$ km.s^{-1}	

TAB. 4.1 – Solutions auto-semblables et paramètres du RSN à différentes époques et pour différentes géométries. Nous calculons la position du front de choc et la vitesse de celui-ci au début et à la fin de la phase de Sedov et de la phase radiative PDTS afin de déterminer les valeurs caractéristiques de ce système à différents âges.

a ralentit d'un facteur 10 (de $V_s \simeq 1500$ km.s^{-1} à $\simeq 150$ km.s^{-1}). Nous remarquons que la valeur de la position du front de choc et de la vitesse obtenues dans les géométries cylindrique et plan-parallèle sont beaucoup plus grandes que en géométrie sphérique alors que c'est cette géométrie qui décrit le système physique. Cet effet est bien entendue dû à la valeur du taux d'expansion qui, pour une énergie d'explosion fixée, permet une plus grande propagation pour un α plus grand. Nous tiendrons compte de cet effet dans les simulations présentées ci-dessous afin de calculer l'énergie à introduire dans la boîte de simulation.

En conclusion de cette partie, nous pouvons dire que nous avons bien cerné le contexte astrophysique dans lequel l'instabilité peut apparaître. Nous avons pu mettre en évidence les propriété et les caractéristiques des RSN. Mais l'instabilité peut aussi apparaître dans la coquille de gaz choqué des vents d'étoile de type Wolf-Rayet et dans d'autres types d'objets présentant des chocs radiatifs et dans ces cas, les solutions du modèle analytique vont changer. Avant de passer à l'étude numérique de l'évolution des RSN, nous résumons les différentes contraintes que les paramètres théoriques vont nous apporter pour réaliser les simulations. Avec la formulation de R_s, nous avons des contraintes sur les conditions initiales à introduire dans le code (c'est-à-dire $\mathcal{E}_3$ et ρ_1) pour obtenir un rayon donné. Comme nous allons le voir par la suite, il est difficile de déteminer p_3 de manière exacte et donc d'utiliser κ comme un paramètre contraignant les simulations. En utilisant la relation sur la masse M_{os} pour le domaine initiale numérique, nous allons pouvoir contraindre ρ_3 et la taille du domaine permettant de simuler un RSN. Nous passons maintenant aux simulations numériques des restes de supernova afin de vérifier certaines des propriétés théoriques que nous avons relevées.

4.5 Les simulations numériques des restes de supernova

Nous commençons dans cette partie l'étude numérique des RSN avec le code HYDRO-MUSCL. Nous avons vu dans le test d'explosion forte en un point que le dépôt ponctuel d'une grande quantité d'énergie sous forme de pression permet de générer une onde de souffle. Nous allons donc utiliser cette technique pour initialiser la simulation des RSN. La grande source d'énergie qui est délivrée par l'explosion de l'étoile progénitrice est introduite au centre de la boîte et l'onde de choc engendrée va se propager dans un environnement ayant les caractéristiques du MIS. Nous présentons dans cette section les modifications que nous avons effectuées sur le code afin de modéliser ces objets et les conditions spécifiques que nous utilisons dans ce but. Nous insistons sur la manière dont l'indice adiabatique est introduit dans le code et les conséquences de cette définition car c'est la spécificité de notre modèle numérique. Nous présentons aussi plusieurs résultats permettant de mieux comprendre les RSN. Ces simulations de l'onde de souffle sans perturbation vont nous servir dans un deuxième temps de conditions initiales pour les simulations de RSN perturbés de manière ad-hoc afin de suivre le développement de l'instabilité de Vishniac.

4.5.1 La fonction γ

Comme nous l'avons vu dans la partie sur la théorie de l'instabilité de Vishniac et dans la partie sur les phases d'évolution des RSN, il est important de pouvoir contraindre la valeur de l'indice adiabatique γ dans une région donnée. Nous savons que trois milieux sont présents dans un RSN et chacun de ces milieux possède des propriétés déterminées par les profils des grandeurs fluides (ρ, u, p) et par l'indice adiabatique. La fonction γ introduite dans le code va donc dépendre de la position des différents milieux et suivre leur évolution dans la boîte de simulation. Pour déterminer la valeur de γ, le paramètre le plus simple à utiliser et qui rend bien compte de la position des trois milieux est la densité. Ainsi nous définissons $\gamma(\rho)$ par une fonction de type marche[7] :

$$\begin{cases} \gamma = \gamma_2 & \text{, si } \rho > \rho_1 \\ \gamma = \gamma_1 = \gamma_3 = 5/3 & \text{, si } \rho \leqslant \rho_1 \end{cases} \tag{4.84}$$

La condition $\rho > \rho_1$ détermine donc la zone de la coquille. Nous testons cette modification du code après avoir défini les conditions initiales des simulations.

4.5.2 Les conditions initiales des simulations

Nous présentons dans cette partie les conditions initiales des simulations qui vont nous servir à réaliser la modélisation des RSN et suivre leur évolution. Comme nous l'avons vu, l'instabilité de Vishniac a été étudiée théoriquement dans seulement deux géométries et nous l'avons simulé en testant de nombreux paramètres dans ces deux cas. Mais dans la première étude que nous avons réalisée sur ce sujet où nous avons perturbé le système avec des pics perturbatifs, c'est la géométrie cylindrique que nous avons utilisée. Ainsi nous présentons les diverses conditions présentes dans ces trois géométries. Pour le projet d'étude paramétrique sur Titane, nous avons eu besoin d'estimer précisément les conditions initiales et aux bords des géométries sphérique et plan-parallèle. Cela nous a permis de déterminer le nombre d'heures de calcul dont nous avions besoin pour réaliser l'étude. Nous verrons dans le paragraphe suivant (voir l'effet de la résolution) qu'il est important de ne pas perdre d'espace dans la boîte de simulation car cela permet de ne pas utiliser inutilement du temps de calcul, le paramètre limitant d'un projet sur un supercalculateur. Nous déterminons donc ces paramètres conditionnant les simulations.

Nous avons choisi les conditions initiales des simulations en prenant les valeurs caractéristiques astrophysiques de ces objets que nous avons présentés dans la Sec. 4.4.1 et nous les résumons dans le tableau 4.2 pour les deux milieux présents initialement. Les valeurs sont ensuite redimensionnées avec les valeurs caractéristiques déterminées dans le paragraphe 1.4. Nous ne donnons pas la valeur de l'indice adiabatique, car c'est un paramètre que nous allons faire varier mais nous rappelons que pour le milieu (1), il sera toujours fixé à 5/3. Nous calculons la vitesse du son du milieu ambiant avec les valeurs du milieu (1) : $c_s = 130$ km.s^{-1}. En comparaison du MIS froid que nous utilisons comme milieu ambiant dans les simulations, cette vitesse des ondes sonores

[7] Nous avons testé d'autre types de fonction comme des fonctions où la marche est lissée. Mais nous utilisons finalement une fonction de type marche ne pouvant prendre que deux valeurs car les autres modifications n'améliorent pas cette approche.

Paramètres	ρ	u_x	u_y	p
Milieux				
(3)	$2,1 \times 10^{-19}$ kg.m^{-3}	0 km.s^{-1}	0 km.s^{-1}	dépend de la géométrie
(1)	10^{-20} kg.m^{-3}	—	—	10^{-10} Pa

TAB. 4.2 – Conditions initiales pour les simulations de RSN : densité, vitesses (selon O_x et O_y), et pression pour les milieux (3) et (1). Les conditions qui sont présentes dans la boîte de simulation permettent l'explosion forte en un point.

paraît un peu élevée et nous travaillerons donc avec des nombres de Mach faibles. Mais comme nous le verrons, ce régime n'affecte pas la croissance de l'instabilité.

La pression du milieu (3) qui dépend de la géométrie est donnée dans le tableau 4.3. Cette pression correspond à l'énergie d'explosion $\mathcal{E}_3 = 10^{44}$ J observée dans les supernovæ et elle diminue quand le nombre de dimensions diminue. En effet en géométrie sphérique, lors du redimensionnement nous avons déterminé l'énergie caractéristique $\mathcal{E}_0 = 10^{36}$ qui, nous rappelons, permet de passer de la valeur astrophysique à la valeur numérique. Ce coefficient permet d'obtenir l'énergie en valeur numérique $\mathcal{E}^* = 10^8$. Grâce à l'équation 4.83 reliant la pression à l'énergie, nous pouvons déterminer la pression à introduire initialement. En valeurs physiques nous avons un domaine $\mathcal{D}_{sphe} = [1 - 10] \times 10^{45}$ m^3 et $\gamma = 1,1$ donc la pression à introduire est $p_3 = [10^{-3} - 10^{-2}]$ Pa. Par contre en géométrie plan-parallèle, l'énergie caractéristique est $\mathcal{E}_0 = 10^6$ ce qui donne comme énergie en valeur numérique $\mathcal{E}^* = 10^{38}$ et cette valeur n'est pas techniquement acceptable. Mais nous avons remarqué que la position du front de choc et la vitesse obtenues dans cette géométrie, à la fin de la phase de Sedov, ne correspondent pas aux valeurs astrophysiques calculées avec la formule de la géométrie sphérique. Nous avons vu que le taux d'expansion est plus grand en géométrie plan-parallèle ($\alpha = 2/3$) qu'en géométrie sphérique ($\alpha = 2/5$). Ainsi pour atteindre la même position de front de choc au même temps nous devons diminuer l'énergie $\mathcal{E}_3$ en géométrie plan-parallèle. Nous déterminons de cette manière que $p_3 = [10^{-6} - 10^{-5}]$ Pa et c'est cette valeur que nous avons introduite dans le code pour cette géométrie. Nous faisons la même opération

Géométries	Sphérique	Cylindrique	Plan-parallèle
Taille de la boîte sur O_x	900×10^{15} m	4000×10^{15} m	200×10^{15} m
sur O_y	450×10^{15} m	4000×10^{15} m	200×10^{15} m
Résolution spatiale	$0,3 \times 10^{15}$ m	10×10^{15} m	$0,1 \times 10^{15}$ m
Pression du milieu (3)	$10^{-3} - 10^{-2}$ Pa	10^{-4} Pa	$10^{-6} - 10^{-5}$ Pa

TAB. 4.3 – Conditions initiales des simulations de RSN pour les trois géométries.

pour la géométrie cylindrique.

Nous initialisons ensuite temporellement et spatialement la simulation. Pour déterminer la durée de la simulation, nous choisissons de laisser évoluer l'onde de souffle jusqu'à un temps final compris dans un intervalle temporel assez large afin d'avoir plusieurs simulations avec des vitesses différentes. Nous avons fixé ce temps final dans un domaine allant de $t_f = 0,4 \times 10^3$ ans à $t_f = 1,6 \times 10^4$ ans et recouvrant donc la phase balistique, la phase de Sedov et le début de la phase PDTS. Ainsi pour certaines vitesses, la solution auto-semblable que nous allons obtenir sera celle supposée par Ryu & Vishniac [1987]. Comme nous avons fixé le temps, nous

pouvons fixer maintenant l'espace. Pour cela, nous devons déterminer la taille de la boîte de simulation et la résolution spatiale pour les trois géométries. La taille du domaine dans lequel peut évoluer le système est évaluée en calculant la position auto-semblable au temps final le plus long. Quant à la résolution, c'est un paramètre important car comme nous allons le voir dans le paragraphe suivant, la convergence du code dépend de ce paramètre. En effet les grandeurs fluides derrière le front de choc tendent correctement vers leurs valeurs limites pour des bonnes résolutions. En plus nous avons vu dans le test d'explosion forte en un point que les grandeurs caractéristiques passent par une phase transitoire pour ensuite donner l'évolution théorique des RSN. Il est donc nécessaire de pouvoir permettre la propagation du système dans un grand domaine. De plus, la résolution va différer pour chaque géométrie étant données les conditions aux bords spécifiques à ces cas et elle est plus faible pour le cas sphérique que pour le cas plan-parallèle pour lequel nous réalisons donc une étude plus poussée. Nous récapitulons ces paramètres dans le tableau 4.3 et nous justifierons le choix de la valeur de la résolution dans le paragraphe suivant. Afin de vérifier si ces conditions sont cohérentes, nous réalisons des simulations de l'évolution des RSN et elles vont nous permettre d'améliorer notre compréhension de ces systèmes.

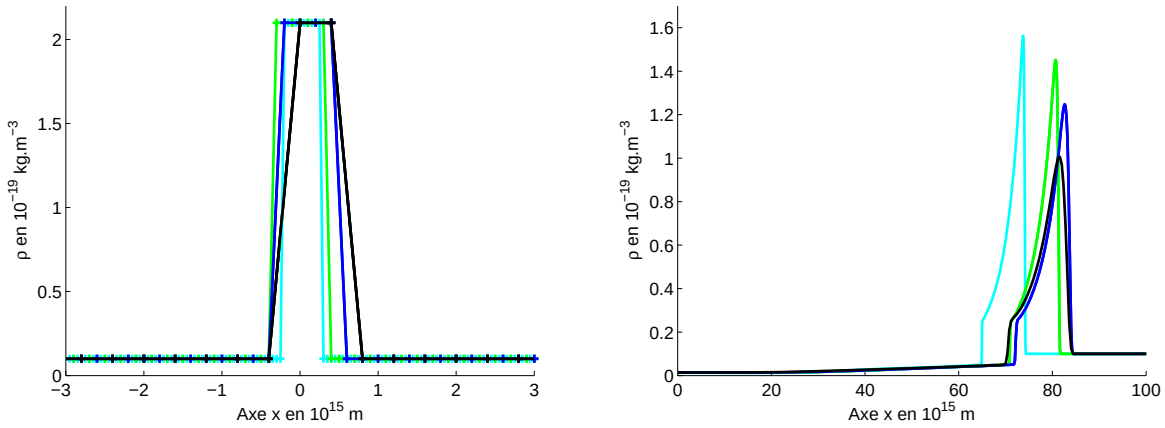
4.5.3 Les résultats de simulations

Avec les conditions initiales et aux bords données précédemment, nous simulons l'évolution des RSN. Ces simulations nous permettent de vérifier l'effet de certains paramètres numériques comme la résolution spatiale et surtout, elles nous donnent l'opportunité de valider que le code HYDRO-MUSCL tend correctement vers les lois analytiques que nous avons énoncées dans la partie théorique consacrée aux RSN. Nous réalisons cette étude la plupart du temps en géométrie plan-parallèle car la modélisation est plus simple dans cette géométrie. La coquille considérée est une couche de gaz quasi-isotherme ($\gamma_2 = 1,1$) sauf dans l'étude de l'effet de l'indice adiabatique où nous faisons varier ce paramètre. Nous avons vérifié que, pour l'onde de souffle ne subissant aucune perturbation, les résultats obtenus en géométrie sphérique sont similaires à ceux présentés dans cette partie.

L'effet de la résolution numérique

Afin d'étudier la convergence du code d'une autre manière que par celle du test de l'explosion forte en un point, nous regardons l'effet de la résolution sur les grandeurs fluides. Nous faisons varier ce paramètre en prenant quatre valeurs de pas spatiaux $dx = dy = 0,4 \times 10^{15}$ m ; $0,2 \times 10^{15}$ m ; $0,1 \times 10^{15}$ m et $0,05 \times 10^{15}$ m. La résolution est la même sur l'axe O_x que sur l'axe O_y pour des raisons que nous verrons lors de l'étude de l'instabilité de Vishniac (périodicité de la boîte sur l'axe O_y). La seule condition initiale qui change par rapport à celles que nous avons définies précédemment est la valeur de la surpression que nous avons fixée à une valeur plus faible, $p_3 = 10^{-7}$ Pa.
Nous représentons sur la figure 4.18 une coupe de la densité sur l'axe O_x pour les différentes résolutions à l'instant initial et à un instant plus tardif. Nous nous intéressons sur la figure 4.18(a) à l'initialisation du domaine (3), c'est-à-dire à la surpression qui fait office de piston dans le modèle d'explosion forte en un point.

Nous remarquons que la taille de cette surpression est la même pour les quatre simulations à l'exception de la simulation qui a la meilleure résolution ($dx = dy = 0,05 \times 10^{15}$ m) et pour laquelle nous observons un profil plus étroit. Par contre à $t = 3 \times 10^3$ ans (voir Fig. 4.18(b)), nous voyons que le profil de la densité



(a) $t = 0$ (b) $t = 3 \times 10^3$ ans

FIG. 4.18 – Effet de la résolution : coupe de la densité sur l'axe O_x en géométrie plan-parallèle à $t = 0$ (a) et $t = 3 \times 10^3$ ans (b) pour les pas spatiaux $dx = dy = 0,4 \times 10^{15}$ m (noir) ; $dx = dy = 0,2 \times 10^{15}$ m (bleu) ; $dx = dy = 0,1 \times 10^{15}$ m (vert) et $dx = dy = 0,05 \times 10^{15}$ m (bleu clair). La compression sur le front de choc dans la limite de choc fort doit tendre vers $\mathcal{C}(\gamma = 1,1) = 21$. Nous voyons que plus la résolution augmente (les pas spatiaux diminuent), plus le taux de compression converge vers cette valeur.

n'est pas le même. En effet, plus la résolution est grande plus la densité maximale tend vers la limite théorique $\mathcal{C}(\gamma = 1,1) = 21$ sans toutefois l'atteindre. En comparaison du test de l'explosion forte en un point où la résolution était très bonne et l'indice adiabatique non contraint par la fonction $\gamma(\rho)$, la meilleur résolution de ce test est une résolution moyenne et ne permet pas d'atteindre de la même manière la limite théorique même si nous laissons évoluer la simulation pendant une longue durée. Cette remarque est expliquée par Fryxell et al. [1991] qui démontrent que certains schémas sont plus dissipatifs à faible résolution. Cette affirmation se comprend bien car lorsque nous introduisons un pas spatial grand, les grandeurs conservées sont moyennées sur des cellules numériques plus grandes que dans le cas d'une résolution élevée. Ainsi les valeurs extrêmes du système convergent correctement vers leur limite physique à partir seulement d'une certaine résolution et la discontinuité du front de choc est mieux résolue dans cette même situation. Nous remarquons de plus, que la position du front de choc varie aussi mais seulement fortement pour $dx = dy = 0,05 \times 10^{15}$ m. Cet effet est dû à la faible différence de la taille de la surpression et de l'énergie qu'elle contient (si la surpression initiale est plus grande, le front de choc avance plus loin). Ainsi nous pouvons conclure que le taux de compression dépend de la résolution et qu'une valeur moyenne de ce paramètre ne permet pas d'atteindre la prédiction théorique. Malgré ce fait, nous ne pouvons pas choisir une meilleur résolution car un autre facteur limitant intervient dans cette étude. En effet nous savons que plus la résolution est grande, plus le temps de calcul est long et nous devons donc faire un compromis sur la valeur de ces paramètres. Afin d'illustrer ce compromis, nous donnons les valeurs du temps de calcul en fonction du pas spatial dans le tableau 4.4 pour cette étude de l'effet de la

résolution effectuée sur Siolino. Nous voyons que lorsque nous sommes limité par le temps de calcul comme

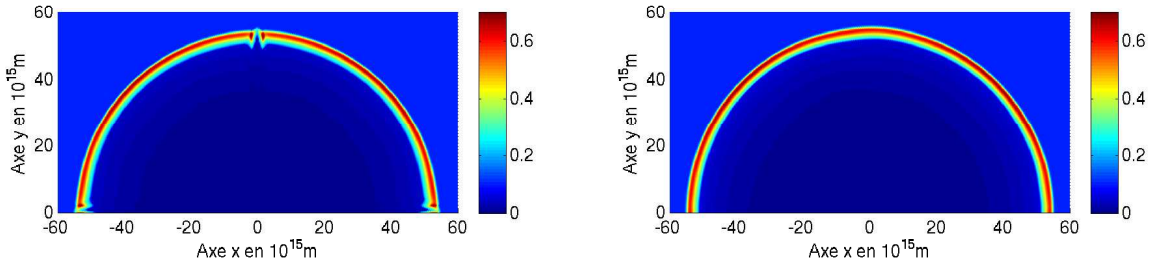
Pas spatial en 10^{15} m	$0,4$	$0,2$	0,1	$0,05$
Temps de calcul	20 min	2h30	56h	200h

TAB. 4.4 – Temps de calcul en fonction du pas spatial $dx = dy$ des simulations pour un temps final $t_f \simeq 11 \times 10^3$ ans.

se sera le cas dans l'étude paramétrique, il est nécessaire de faire ce compromis afin de pouvoir tester un grand nombre de paramètres. Mais nous verrons aussi dans le chapitre V, lors de l'étude numérique de l'instabilité de Vishniac, que pour les pas spatiaux $dx = dy = 0,1 \times 10^{15}$ m l'effet de la résolution semble se stabiliser. Ainsi nous choisissons cette valeur pour la suite de l'étude en géométrie plan-parallèle. Nous passons maintenant à un autre aspect numérique, la comparaison des solveurs de Riemann de type HLL.

L'effet du solveur de Riemann et l'instabilité numérique

Nous avons présenté dans le chapitre consacré au code HYDRO-MUSCL les deux types de solveur de Riemann qu'il nous est possible d'utiliser. Au début de cette étude des RSN, seul le solveur HLLC était implémenté dans le code. Par la suite nous avons aussi introduit le solveur HLLE car le premier solveur engendre un problème numérique auquel nous nous intéressons dans cette partie. Afin de se rendre compte de cet effet, nous représentons sur la figure 4.19 la carte de la densité de la moitié d'une onde de souffle en géométrie sphérique pour les deux cas en question. Les simulations sont réalisées avec les conditions initiales énoncées précédem-

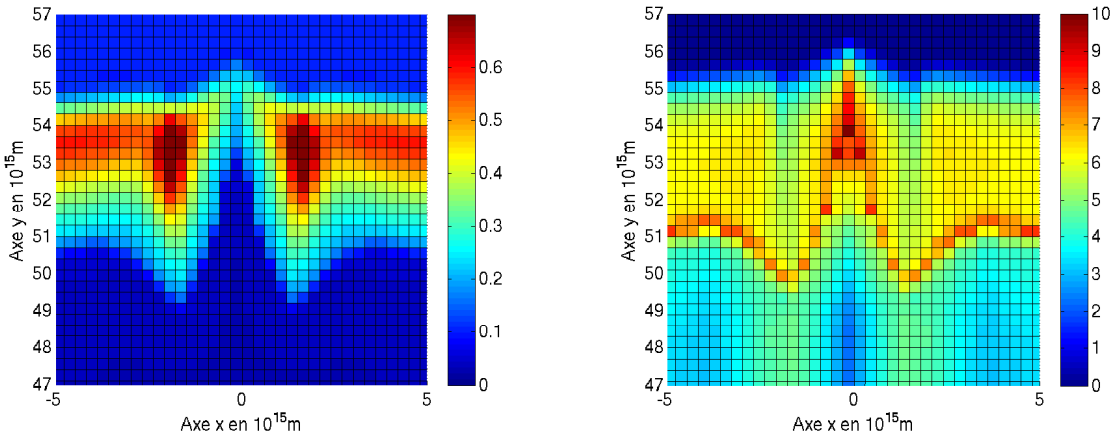


(a) solveur HLLC (b) solveur HLLE

FIG. 4.19 – Effet du solveur de Riemann : carte de la densité en 10^{-19} kg.m^{-3} pour la géométrie sphérique. La simulation est réalisée avec les solveurs HLLC (a) et HLLE (b). L'aberration numérique due à une instabilité numérique est visible sur les axes O_x et O_y du cas réalisé avec le solveur HLLC mais elle disparaît dans le cas réalisé avec le solveur HLLE.

ment. Nous pourrions présenter les mêmes cartes de densité pour la géométrie cylindrique car le problème

numérique apparaît aussi dans cette situation. Mais par contre, en géométrie plan-parallèle, ce n'est pas le cas pour ce type de simulations. Nous voyons sur la figure 4.19(a), que le solveur HLLC engendre sur les axes une erreur numérique qui est due à une instabilité du même type. Cette instabilité numérique produit une zone de cellules prenant des valeurs aberrantes par rapport à leurs voisines. Lorsque nous grossissons cette zone comme sur la figure 4.20, nous voyons des pics de densité de part et d'autre d'une structure triangulaire où la vitesse est maximale. Il semblerait donc que les aberrations numériques proviennent de la propagation d'un système sphérique sur une grille cartésienne. En effet comme il y a une séparation de la vitesse en deux composantes



(a) densité (b) vitesse selon O_y

FIG. 4.20 – Effet du solveur HLLC : zoom de la zone problématique sur la carte de la densité (a) en 10^{-19} kg.m^{-3} et de la vitesse selon O_y (b) en 10^2 km.s^{-1}. La grille est apparente afin de mieux rendre compte que l'instabilité numérique n'agit dans ce système que sur quelques cellules situées au niveau des axes.

sur O_x et O_y et que, exactement sur l'axe, une des composantes est nulle, cela peut engendrer un problème numérique. En réalité, comme nous le verrons dans le chapitre suivant, l'instabilité numérique est liée au flux qui passe d'une cellule à sa voisine. Lorsque nous utilisons le solveur HLLE qui gère correctement ce flux pour ce système, nous observons sur la figure 4.19(b) que l'instabilité numérique a disparu.

Dans le cas de l'étude présente de la coquille des RSN pour laquelle aucune perturbation n'a été introduite, cette instabilité ne pose pas de problèmes réels dans aucune des géométries. En effet, pour le moment, la géométrie plan-parallèle est épargnée par cette instabilité et pour les deux autres géométries, seules les valeurs sur les axes sont aberrantes. Nous avons donc la possibilité de mesurer la variation des grandeurs fluides dans une autre zone que celles touchées par l'instabilité (la diagonale par exemple). Mais comme nous le verrons après, l'instabilité numérique devient très gênante dans les simulations de RSN perturbés en géométrie plan-parallèle. Nous déterminerons précisément sa cause et la manière de l'éliminer dans cette partie.

Nous allons maintenant nous consacrer aux résultats physiques que nous avons obtenus avec les simulations de RSN.

L'effet de l'indice adiabatique

Nous étudions l'effet de l'indice adiabatique sur la coquille de gaz choqué grâce à l'introduction de la fonction $\gamma(\rho)$ dans HYDRO-MUSCL. Pour cela nous comparons trois types d'onde de souffle :

1. une onde de souffle avec une coquille quasi-isotherme : $\gamma_1 = \gamma_3 = 5/3$ et $\gamma_2 = 1,1$;
2. une onde de souffle avec une coquille de gaz intermédiaire que nous nommons la coquille photon : $\gamma_1 = \gamma_3 = 5/3$ et $\gamma_2 = 1,4$;
3. une onde de souffle adiabatique : $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 5/3$.

Nous précisons que ces conditions initiales sont utilisées ensuite dans l'étude paramétrique. Nous étudions en deux étapes les résultats obtenus. D'abord nous analysons le profil de densité des trois simulations à un instant donné. Ensuite nous étudions les profils normalisés des grandeurs fluides de ces mêmes simulations afin de les comparer avec les profils théoriques obtenus précédemment. Cette analyse va nous permettre de caractériser l'écoulement de base des simulations. Pour la première étape de l'analyse, nous représentons sur la figure 4.21 le profil de la densité de ces différentes ondes de souffle à $t = 4 \times 10^3$ ans quand elles ont atteint un nombre de Mach $\mathcal{M} \approx 4$. Nous voyons que les trois coquilles présentent des différences quand nous les comparons au même instant. En effet, comme le prédit la théorie, l'indice adiabatique va avoir des conséquences à trois niveaux.

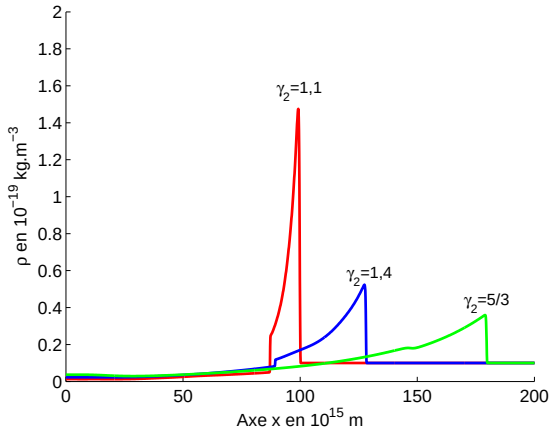


FIG. 4.21 – Effet de l'indice adiabatique : coupe sur l'axe O_x de la densité en géométrie plan-parallèle à $t = 4 \times 10^3$ ans pour trois valeurs de l'indice adiabatique de la coquille $\gamma_2 = 1,1$; $\gamma_2 = 1,4$; $\gamma_2 = 5/3$ et pour un nombre de Mach $\mathcal{M} \approx 4$. Quand l'indice adiabatique de la coquille diminue, le taux de compression $\mathcal{C}$ augmente, l'épaisseur de la coquille h diminue et la position du front de choc x_s (ou encore β_i) diminue.

– *Le taux de compression*

Nous observons que, plus l'indice adiabatique de la coquille tend vers la limite isotherme ($\gamma_2 \to 1$), plus la compression du gaz est importante. Nous rappelons la valeur théorique du taux de compression dans la limite de choc fort pour chacun des indices adiabatiques : $\mathcal{C}(\gamma_2 = 5/3) = 4$, $\mathcal{C}(\gamma_2 = 1,4) = 6$ et $\mathcal{C}(\gamma_2 = 1,1) = 21$. Les valeurs que nous mesurons sur le front de choc sont donc différentes des valeurs théoriques. Afin d'expliquer cette constatation, nous rappelons le résultat que nous avons obtenu

dans le test d'explosion forte en un point : si la surpression introduite initialement est suffisante, l'onde de souffle atteint la limite de choc fort et reste dans cet état même si le nombre de Mach diminue. Ainsi, si le taux de compression n'atteint pas la valeur théorique pour chacun des cas, cela s'explique par la résolution moyenne que nous avons choisi. Mais la compression reste forte pour le cas quasi-isotherme en comparaison du cas adiabatique. En effet le gaz est presque 4 fois plus comprimé pour $\gamma_2 = 1,1$ que $\gamma_2 = 5/3$ (le rapport théorique de compression entre ces deux cas est d'environ 6). Cette forte compression implique que la densité au niveau du front de choc est plus importante et l'épaisseur de la coquille plus fine pour $\gamma = 1,1$.

– *L'épaisseur de la coquille*

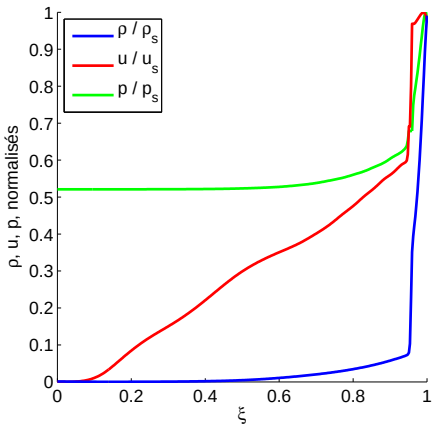
La variation de l'épaisseur h de la coquille est le deuxième point sur lequel diffèrent les profils. Nous rappelons que nous définissons h avec la condition pour tous $\rho > \rho_1$. Ainsi l'épaisseur du profil de densité de la coquille quasi-isotherme est environ 6 fois plus faible que celle du profil de la coquille adiabatique. La comparaison de l'épaisseur nous fait remarquer qu'il y a un saut de densité au bord interne x_i de la coquille, particulièrement visible pour $\gamma_2 = 1,1$. Cette discontinuité est due à la fonction $\gamma(\rho)$ que nous avons introduite dans le code et qui force la valeur de l'indice adiabatique dans la coquille. Avec un modèle ne faisant pas intervenir la fonction $\gamma(\rho)$, nous avons testé dans le chapitre suivant que cette modification n'avait pas de conséquence sur le mécanisme de l'instabilité de Vishniac.

– *La position du front de choc*

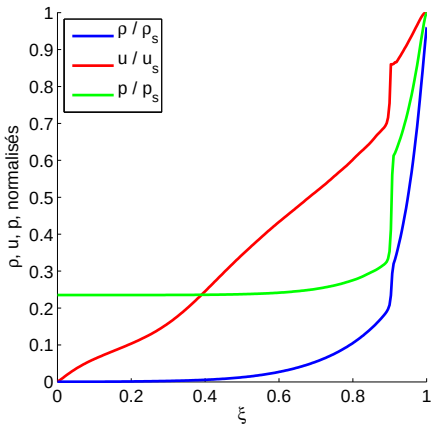
Le troisième et dernier point que nous avons étudié porte sur la position du front de choc. Nous voyons que la position de la discontinuité est plus proche de l'origine pour le cas quasi-isotherme que pour le cas adiabatique ($x_s(\gamma_2 = 5/3) > x_s(\gamma_2 = 1,1)$). En effet, dans l'étude théorique des RSN, nous avons vu que l'évolution temporelle du front de choc dépend du taux d'expansion α, de la constante $\beta_i(\gamma)$; et aussi de l'énergie de la supernova et de la densité du milieu ambiant qui sont des constantes dans cette étude. Comme aucun processus radiatif n'est introduit dans le système, l'évolution de l'onde de souffle ne peut pas être freinée par une perte d'énergie par rayonnement et elle doit suivre l'expansion de Sedov, ce que nous vérifierons dans le paragraphe suivant. Ainsi $\alpha = 2/3$ et c'est donc la dépendance de $\beta_i(\gamma_2)$ à l'indice adiabatique de la coquille qui permet au front de choc de l'onde de souffle adiabatique d'avancer plus rapidement. Nous obtenons donc que $\beta_i(\gamma = 1,1) < \beta_i(\gamma = 5/3)$ et ainsi β_i diminue quand l'indice adiabatique diminue.

Nous étudions maintenant, à l'aide des simulations que nous venons de présenter et d'autres réalisées en géométrie sphérique avec le même type de conditions initiales, les profils normalisés de la densité, de la vitesse et de la pression de l'onde de souffle. Cette étude a pour but de comparer les profils obtenus numériquement avec ceux que nous avons déterminés lors de l'analyse théorique (voir Fig. 4.4 et Fig. 4.5 pour les géométries sphérique et plan-parallèle respectivement). Dans le modèle théorique, nous rappelons que pour obtenir la solution des équations non perturbées, Ryu & Vishniac [1987] ont fixé le taux d'expansion en accord avec l'expansion de Sedov ($\alpha_{sphe} = 2/5$ et $\alpha_{plan} = 2/3$). Quant à l'indice adiabatique de leur modèle, il est

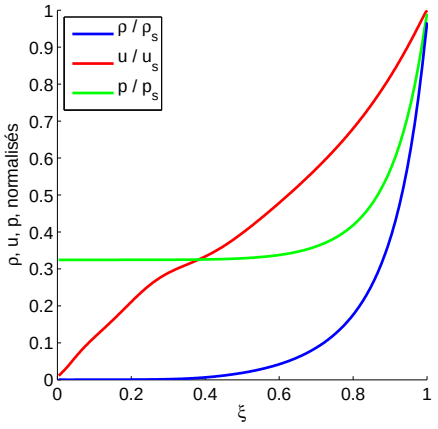
variable et il prend la même valeur sur toute l'onde de souffle ($\gamma_3 = \gamma_2$). Alors que dans les simulations que nous avons réalisées, nous avons fixé $\gamma_3 = 5/3$ et γ_2 est variable. Ainsi lorsque $\gamma_2 = 1,1$, le modèle numérique que nous utilisons permet de générer des ondes de souffle dont les caractéristiques sont plus proches de la phase PDTS d'un RSN dans laquelle le gaz de la coquille tend à être isotherme et le gaz situé entre le bord interne de la coquille et l'origine de la supernova est toujours adiabatique. Mais comme aucune perte radiative n'est introduite dans nos simulations, l'onde de souffle modélisée ne peut pas être considérée comme radiative. C'est pour préciser cette distinction que nous appelons par la suite l'onde de souffle induite comme onde de souffle de type PDTS. Nous reviendrons sur ce point important dans le chapitre suivant.
Nous représentons sur les figures 4.22 et 4.23 les profils des grandeurs fluides normalisées par leurs valeurs au niveau du front de choc (ρ_s, u_s et p_s) pour la zone de l'onde de souffle ($\xi = [0-1]$) et pour les géométries sphérique et plan-parallèle respectivement. Pour les figures 4.22(a) - 4.22(c) et 4.23(a) - 4.23(c), nous avons



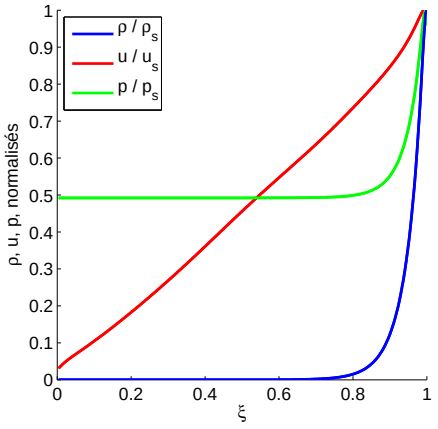
(a) coquille quasi-isotherme : $\gamma_3 = 5/3$ et $\gamma_2 = 1,1$



(b) coquille photon : $\gamma_3 = 5/3$ et $\gamma_2 = 1,4$



(c) onde de souffle adiabatique : $\gamma_3 = \gamma_2 = 5/3$

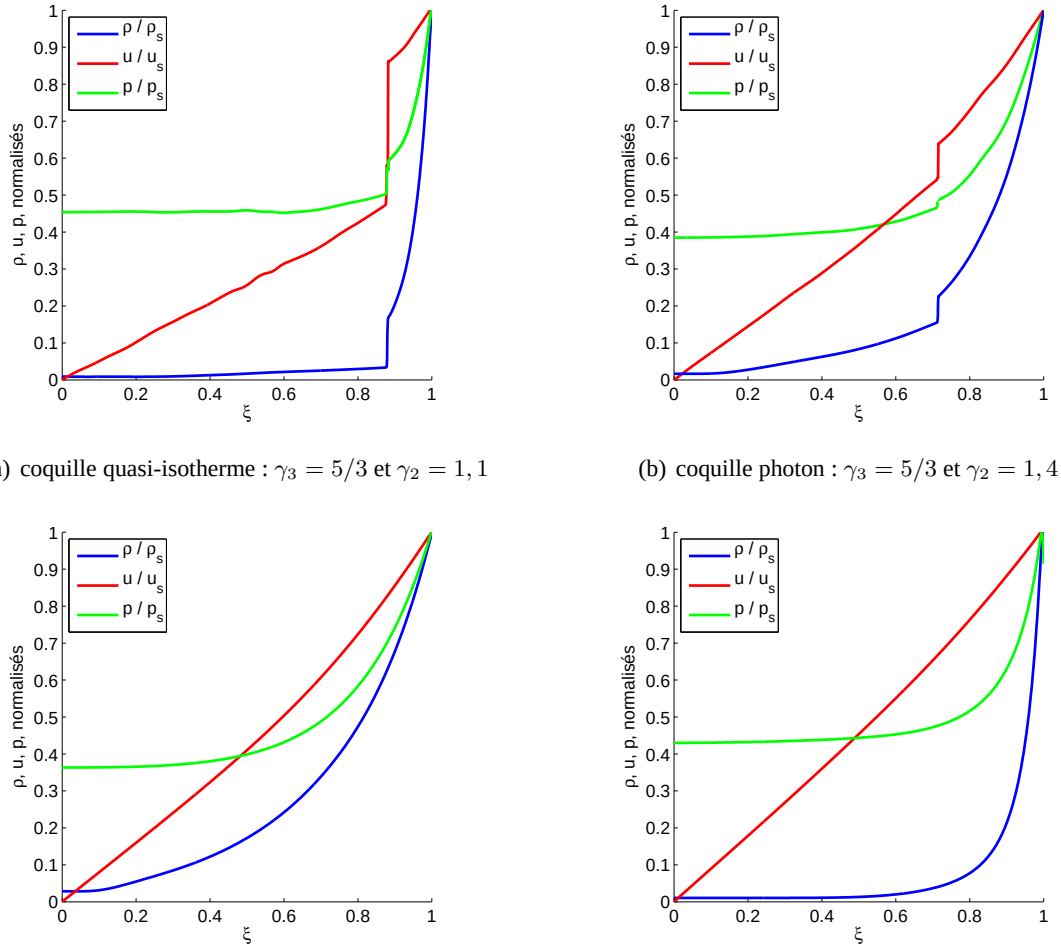


(d) onde de souffle quasi-isotherme : $\gamma_3 = \gamma_2 = 1,1$

FIG. 4.22 – Effet de l'indice adiabatique en géométrie sphérique : profils des grandeurs fluides normalisées pour différents types d'onde de souffle en fonction de la variable auto-semblable ξ. Les profils obtenus par les simulations numériques sont semblables à ceux issus de l'analyse théorique représentés sur la figure 4.4. Les cas (c) et (d) permettent de valider les simulations numériques.

représenté les grandeurs fluides normalisées des ondes de souffle de type PDTS où nous avons testé l'effet de l'indice adiabatique de la coquille. Et nous avons aussi produit des simulations exactement similaires au modèle théorique en prenant $\gamma_3 = \gamma_2 = 1,1$ et $\gamma_1 = 5/3$, c'est-à-dire avec un indice adiabatique constant sur toute l'onde de souffle. Ces simulations, où nous avons modifié la fonction $\gamma(\rho)$ afin de pouvoir fixer l'indice adiabatique sur cette région, sont représentées sur les figures 4.22(d) et 4.23(d). Cette initialisation, conforme à la théorie non perturbée, nous servira dans le chapitre suivant à valider les résultats obtenus avec les ondes de souffle de type PDTS.

Lorsque nous comparons les profils théoriques à ceux numériques, nous voyons que les profils issus de la théorie sont très semblables à ceux numériques pour l'onde de souffle adiabatique (voir Fig. 4.22(c) et Fig. 4.23(c), $\gamma_3 = \gamma_2 = 5/3$) et pour le cas particulier de l'onde de souffle quasi-isotherme (voir Fig. 4.22(d) et Fig. 4.23(d), $\gamma_3 = \gamma_2 = 1,1$). Ainsi nous avons la preuve que les simulations reproduisent bien des profils auto-semblables



(a) coquille quasi-isotherme : $\gamma_3 = 5/3$ et $\gamma_2 = 1,1$

(b) coquille photon : $\gamma_3 = 5/3$ et $\gamma_2 = 1,4$

(c) onde de souffle adiabatique : $\gamma_3 = \gamma_2 = 5/3$

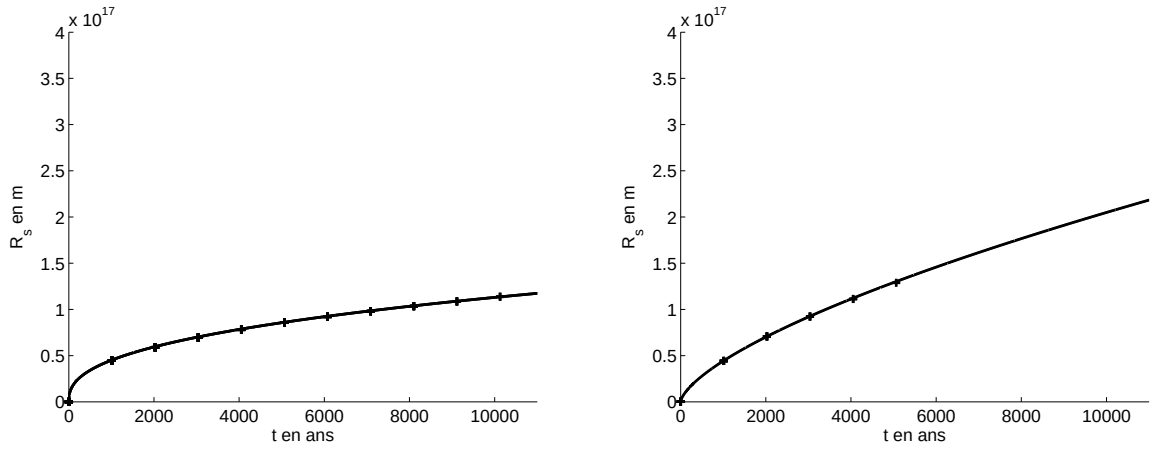
(d) onde de souffle quasi-isotherme : $\gamma_3 = \gamma_2 = 1,1$

FIG. 4.23 – Effet de l'indice adiabatique en géométrie plan-parallèle : profils des grandeurs fluides normalisées pour différents types d'onde de souffle en fonction de la variable auto-semblable ξ. Les profils obtenus par les simulations numériques sont semblables à ceux issus de l'analyse théorique représentés sur la figure 4.5. Les cas (c) et (d) permettent de valider les simulations numériques.

dans le cas d'une onde de souffle uniforme. Par contre, les profils diffèrent pour les deux autres cas testés ($\gamma_2 = 1,1$ et $1,4$ avec $\gamma_3 = 5/3$) pour lesquels l'indice adiabatique de la coquille est plus faible que celui présent dans le reste de l'onde de souffle. Mais même sur ces deux simulations, plusieurs tendances sont similaires. En ce qui concerne les similitudes, nous remarquons que le rapport de pression p_3/p_s au centre de l'onde de souffle est presque constant jusqu'au bord interne de la coquille. Et le rapport de pression est le même à l'origine ($\xi = 0$) qu'il soit mesuré sur les profils théoriques ou numériques. En effet, en géométrie plan-parallèle, nous mesurons sur les deux modèles $p_3/p_s = 0,46$ pour $\gamma_2 = 1,1$ et $p_3/p_s = 0,36$ pour $\gamma_2 = 5/3$. La différence importante, qui est présente entre les deux modèles et que nous avons déjà remarquée, est le saut au bord interne $\xi_i = x_i/x_s$ de la coquille provoqué par le forçage de l'indice adiabatique dans cette région. Ainsi pour les deux simulations où l'indice adiabatique de la coquille est spécifique ($\gamma_2 < 5/3$ et $\gamma_3 = 5/3$), le profil auto-semblable est modifié car l'épaisseur de la coquille est délimitée. Pour ces deux simulations, nous remarquons aussi que le profil de vitesse dans le milieu (3) (gaz interne) montre une spécificité. En effet, c'est la grandeur qui présente la plus grande différence quand nous comparons les deux types de profil et cet effet est particulièrement visible pour $\gamma_2 = 1,1$. Le profil de u/u_s obtenu avec le modèle numérique est plus plat que celui du modèle théorique ce qui a pour conséquence que la partie interne de l'onde de souffle a une énergie cinétique moins importante, comme dans la phase PDTS des RSN.
Nous venons d'étudier différents modèles d'onde de souffle afin de mieux comprendre l'effet de l'indice adiabatique sur le profil des quantités fluides. Afin de vérifier un autre aspect important de l'évolution des ondes de souffle qui va nous permettre de clore l'étude de l'écoulement de base, nous passons à l'analyse de l'effet de la géométrie.

L'effet de la géométrie

Nous étudions maintenant l'effet de la géométrie sur la propagation de l'onde de souffle. Nous comparons pour cela l'évolution temporelle de la position du front de choc pour les géométries sphérique et plan-parallèle jusqu'à la fin de la phase de Sedov ($t_f \approx 10^4$ ans). L'étude de la géométrie va ainsi nous permettre de déterminer les lois d'expansion de l'onde de souffle et de confirmer l'auto-similarité de ce système.
Comme nous avons déjà vérifié l'évolution auto-semblable d'une onde de souffle adiabatique en géométrie plan-parallèle (voir le test d'explosion forte en un point du chapitre III), nous passons directement à l'étude de l'évolution du front de choc d'une onde de souffle uniforme quasi-isotherme pour laquelle $\gamma_3 = \gamma_2 = 1,1$, $\gamma_1 = 5/3$. Nous représentons l'expansion temporelle de la position du choc sur la figure 4.24. Les résultats numériques sont en très bon accord avec la solution analytique. Le front de choc suit une évolution auto-semblable presque instantanément après le début de la simulation et continue selon cette loi pendant toute la phase de Sedov et cela pour les deux géométries. Avec ces simulations, nous retrouvons bien les lois analytiques de Sedov pour lesquelles $R_s = \beta_i(\gamma)\left(\mathcal{E}_3/\rho_1\right)^{1/5} t^{2/5}$ en géométrie sphérique et $x_s = \beta_i(\gamma)\left(\mathcal{E}_3/\rho_1\right)^{1/3} t^{2/3}$ en géométrie plan-parallèle. Nous faisons remarquer que le rayon du choc en géométrie sphérique à la fin de la simulation est $R_s(\gamma = 1,1, t = 10^4\text{ans}) \approx 1,2 \times 10^{17}$ m ce qui est plus faible comparé à l'application numérique de la partie précédente où nous avions estimé $R_s(\gamma = 5/3, t = 10^4\text{ans}) \approx 3 \times 10^{17}$ m. Ainsi l'introduction d'une valeur plus faible de l'indice adiabatique sur toute l'onde de souffle va changer la constante



(a) cas sphérique : $R_s \propto t^{2/5}$

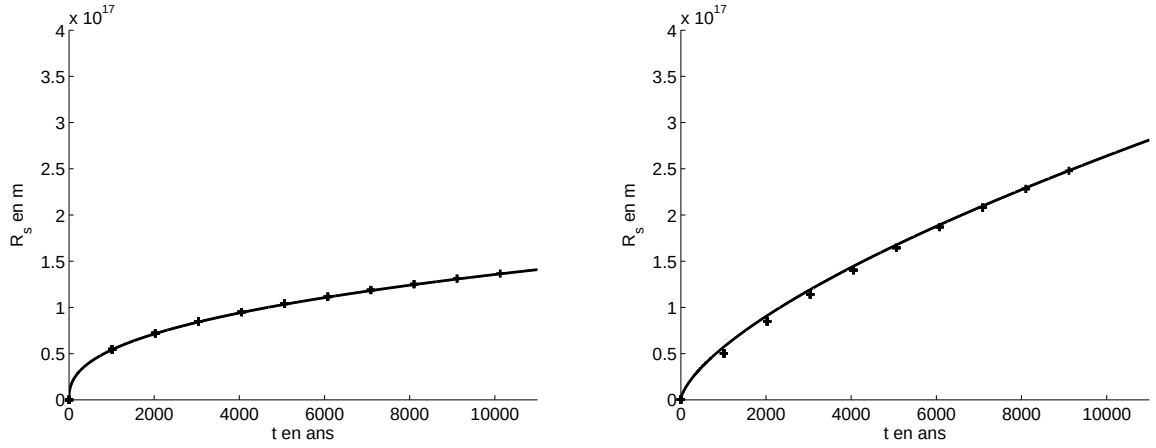
(b) cas plan-parallèle : $x_s \propto t^{2/3}$

FIG. 4.24 – Effet de la géométrie pour une onde de souffle quasi-isotherme : évolution de la position du front de choc pour les géométries sphérique (a) et plan-parallèle (b) jusqu'à la fin de la phase de Sedov ($t_f \approx 10^4$ ans). Le résultat numérique (croix) et la prédiction théorique (trait plein) sont en bon accord et permettent de retrouver les taux d'expansion $\alpha_{sphe} = 2/5$ et $\alpha_{plan} = 2/3$. Le taux d'expansion étant plus important en géométrie plan-parallèle, l'évolution est plus rapide dans ce cas d'étude.

d'évolution $\beta_i(\gamma)$, comme nous l'avons vérifié dans le paragraphe précédent pour le modèle de type PDTS ($\beta_i(\gamma = 1,1) < \beta_i(\gamma = 5/3)$). Cette première partie de l'étude nous apporte donc un résultat important. En effet, nous avons obtenu que l'évolution du front de choc va au finale toujours suivre l'expansion de Sedov pour les ondes de souffle uniformes. Ainsi nous pouvons conclure que les simulations numériques donnent bien un écoulement de base qui suit la loi auto-semblable et nous confirmons une fois de plus la validité des simulations.

Nous nous intéressons maintenant à l'onde de souffle avec une coquille quasi-isotherme qui dénomme, nous le rappelons, l'onde de souffle avec une structure interne que nous utilisons ensuite dans l'étude de l'instabilité de Vishniac. Nous représentons sur la figure 4.25 l'évolution de R_s et x_s pour cette onde de souffle spécifique pour laquelle $\gamma_3 = \gamma_1 = 5/3$ et $\gamma_2 = 1,1$. Comme pour les simulations précédentes, nous retrouvons les taux d'expansion correspondant à l'expansion de Sedov. En géométrie plan-parallèle nous remarquons un régime transitoire plus important qui est dû à la fonction $\gamma(\rho)$ présente dans la simulation. Ainsi même pour cette modélisation qui fait intervenir deux indices adiabatiques dans la description de l'onde de souffle, l'écoulement de base suit la loi auto-semblable de l'expansion de Sedov.

En conclusion de l'étude de l'effet de l'indice adiabatique et de l'effet de la géométrie, nous pouvons affirmer que nous avons déterminé et comparé avec le modèle théorique, les coquilles non perturbées de différents types d'onde de souffle. L'écoulement de base, que nous avons caractérisé et qui suit l'expansion de Sedov dans tous les cas, va nous servir dans le chapitre suivant afin d'introduire une petite perturbation sur la coquille de gaz choqué et de pouvoir étudier l'instabilité de Vishniac. Nous avons fait le choix de ne pas être exactement dans les conditions théoriques de Ryu & Vishniac [1987] en utilisant notre modèle de type PDTS car nous voulons être dans un cas plus physique, plus proche de la phase PDTS du RSN. Mais avant de passer à l'étude numérique



(a) cas sphérique : $R_s \propto t^{2/5}$

(b) cas plan-parallèle : $x_s \propto t^{2/3}$

FIG. 4.25 – Effet de la géométrie pour une onde de souffle de type PDTS : évolution de la position du front de choc pour les géométries sphérique (a) et plan-parallèle (b) jusqu'à la fin de la phase de Sedov ($t_f \approx 10^4$ ans). Le résultat numérique (croix) et la prédiction théorique (trait plein) sont en bon accord, particulièrement en géométrie sphérique.

de l'instabilité, nous procédons à une dernière vérification qui consiste à étudier la propriété conservative du code *via* la masse d'une région donnée.

L'étude de la masse

Nous vérifions dans cette partie que le code HYDRO-MUSCL est conservatif et particulièrement qu'il permet la conservation de la masse au cours du temps. Nous étudions aussi l'évolution de la masse de la coquille afin de caractériser l'accrétion de la matière sur le front de choc. Dans le code, les équations d'Euler sous forme conservative sont résolues. Ainsi, nous devons vérifier que la masse M, la quantité de mouvement Mu_{tot} et l'énergie $\mathcal{E}$ sont bien conservées au cours de l'évolution d'un système donné. Nous réalisons une simulation pour une coquille de gaz ayant les conditions initiales présentées précédemment. En ce qui concerne la détermination de la masse M, nous devons intégrer la densité sur la boîte de simulation. Dans l'étude du RSN en géométrie plan-parallèle, il est parfois nécessaire de calculer le flux de masse F qui arrive au bord gauche de la boîte de simulation. Ces deux intégrales prennent la forme suivante :

$$M(t) = \int \rho(x,y,t)\, dV\,, \tag{4.85}$$

$$F(t) = \oint \rho(0,y,t)\, u_{tot}(0,y,t)\, df\,. \tag{4.86}$$

Comme la grille est à deux dimensions, $dV = dx\, dy$ et $df = dy$ car la propagation du choc s'effectue dans la direction O_x. Or c'est le flux entrant par le bord gauche de la boîte de simulation qui nous intéresse en géométrie plan-parallèle.
Nous discrétisons ces intégrales comme étant la somme des variables de la cellule 1 à la cellule maximale du

domaine m_x ou m_y, nous obtenons :

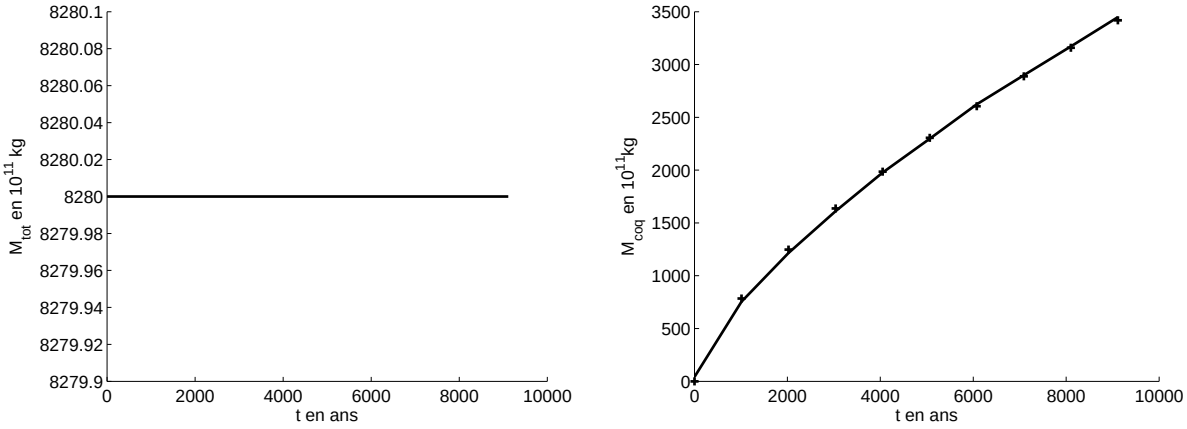
$$M = \sum_{i,j=1}^{m_x,m_y} \rho_{i,j} \triangle x \triangle y \,, \tag{4.87}$$

$$F = \sum_{j=1}^{m_y} \rho_{1,j} (u_{tot})_{1,j} \triangle x \,. \tag{4.88}$$

Nous relions le flux de masse F et la masse supplémentaire $\triangle M$ accrétée au bord gauche par la relation :

$$\triangle M = F \triangle t \,. \tag{4.89}$$

Il est nécessaire de calculer ce terme source de masse à chaque pas de temps $\triangle t$ et donc de le calculer directement dans le code pour ensuite le soustraire à la masse calculée sur toute la boîte ou sur une région particulière.
Nous nous intéressons maintenant aux résultats de cette étude dans le cas des RSN. Sur la figure 4.26(a), nous



(a) M_{tot} (b) M_{coq}

FIG. 4.26 – Etude de la masse : évolution de la masse intégrée sur toute la boîte de simulation (a) et de la masse intégrée sur la région délimitée par la coquille (b) (masse sélectionnée pour $\rho(x, y) > \rho_1$). La masse de la coquille obtenue numériquement est représentée en trait plein et la loi théorique $M_{coq} \approx R_s \propto t^{2/3}$, par des croix. L'évolution de la masse de la coquille suit une évolution auto-semblable.

représentons la masse totale M_{tot} qui est calculée en intégrant la densité sur toute la boîte de simulation. Nous voyons que la masse totale est constante au cours du temps et cette grandeur est donc bien conservée. Nous avons donc vérifié que le code est bien conservatif.
Nous étudions ensuite M_{coq} qui est la masse contenue dans la zone délimitée par la coquille (déterminée pour $\rho(x, y) > \rho_1$). Nous vérifions que cette grandeur caractérise bien l'accrétion auto-semblable de la matière du milieu ambiant sur le front de choc qui est ensuite stockée dans la coquille. Dans le cas de la géométrie plan-parallèle et pour un gaz adiabatique, la masse de la coquille doit suivre la loi théorique $M_{coq} \approx R_s \propto t^{2/3}$ (voir la Sec. 4.4.3). Sur la figure 4.26(b), nous avons représenté l'évolution de M_{coq} obtenue numériquement et nous avons superposé (croix) l'évolution théorique de cette variable. L'ajustement entre les deux courbes nous permet de dire que la masse de la coquille suit bien la loi théorique. Ainsi la simulation permet bien de décrire une onde de souffle qui, en balayant le milieu ambiant, accrète en permanence de la matière.

Chapitre 5

L’étude numérique de l’instabilité de Vishniac

Nous abordons dans ce chapitre l’étude numérique de l’instabilité de Vishniac réalisée à l’aide du code HYDRO-MUSCL et, particulièrement, nous présentons l’étude paramétrique de cette instabilité que nous avons menée *via* le supercalculateur Titane afin de mieux comprendre le mécanisme de l’instabilité. Nous avons vu dans la section 4.3 du chapitre précédent consacrée à la théorie de l’instabilité que, pour certains paramètres, comme l’indice adiabatique, le mode propre de la perturbation, etc., le modèle analytique de Ryu & Vishniac [1987] nous a donné des contraintes fortes qu’un système doit remplir pour qu’il soit instable au sens de Vishniac. Alors que pour d’autres paramètres, comme la vitesse du front de choc, il n’y a finalement que peu d’information sur le rôle qu’ils peuvent jouer dans le mécanisme fondamental de l’instabilité. Nous avons testé l’effet de ces paramètres qui sont peu impliqués dans le modèle théorique et ceux qui, au contraire, sont fortement contraints par la théorie afin de mieux comprendre la dépendance de l’instabilité à ces quantités. Pour un jeu de paramètres fixés, nous avons étudié l’évolution de la morphologie de la coquille dans laquelle la perturbation est déclenchée et dans laquelle le processus de surstabilité s’installe en provoquant l’oscillation des quantités fluides et spatiales. Nous avons suivi l’oscillation d’amplitude et de période croissante de la densité, de la vitesse, de la pression et de la position du front de choc et nous avons observé que ce processus permet la formation de paquets de matière de plus en plus denses. Mais nous avons obtenu qu’au final l’instabilité sature et parfois s’atténue en opposition avec la prédiction théorique. Nous avons quantifié, *via* l’évolution de la variation de masse, l’effet de l’instabilité sur la coquille fine. Pour chacun des paramètres introduits, nous avons pu déterminer son action sur le déclenchement, la croissance de l’instabilité et son évolution finale. Avant de présenter les résultats de nos simulations, nous nous intéressons à ceux obtenus par Mac Low & Norman [1993] dont le travail représente la seule étude numérique réalisée sur l’instabilité de Vishniac portée à notre connaissance. Cette étude nous a aidé dans notre choix de la détermination d’une méthode perturbative et nous présentons maintenant les résultats auxquels ils sont parvenus.

5.1 L'étude numérique de Mac Low & Norman [1993]

Mac Low & Norman [1993] ont étudié numériquement l'instabilité de Vishniac. Le but de leur étude était d'obtenir le régime linéaire de l'instabilité mais surtout le régime non-linéaire forcé[1] de celle-ci, car le développement non-linéaire de l'instabilité n'était pas connu. Mac Low & Norman [1993] ont confirmé, avec leur étude numérique, l'analyse linéaire de Ryu & Vishniac [1987] en perturbant une onde de souffle par les fonctions propres de l'instabilité ($\delta\rho$, $\delta\vec{u}$ et δp présentées dans le chapitre précédent), qu'ils ont calculées de manière exacte et pour lesquelles ils ont choisi une faible amplitude. L'écoulement de base qu'ils ont utilisé reproduisait bien l'expansion de Sedov avec $\alpha = 2/5$ et pour un indice adiabatique de l'onde de souffle quasi-isotherme $\gamma = 1,1$. Un des problèmes qu'ils ont rencontré et, comme nous le verrons dans ce chapitre, qui sera aussi le notre, porte sur le taux de compression $\mathcal{C}(\gamma, \mathcal{M})$ au niveau du front de choc qui diminue au cours du temps car le nombre de Mach du système est fini et la limite de choc fort n'est donc plus atteinte lors du ralentissement de l'onde de souffle. L'analyse du régime linéaire de l'instabilité leur a permis d'obtenir, avec leur meilleur modèle numérique, un taux de croissance $s(l = 40) = 0,52 + 3,1i$ en accord avec le résultat théorique $s(l = 40) = 0,49 + 3,2i$. Le résultat important auquel ils sont parvenus est qu'ils ont montré que l'instabilité est clairement sensible au taux de compression $\mathcal{C}$ de l'onde de choc et à la vitesse V_s du front de choc. Mais ils n'ont pas vérifié le rôle effectif de l'indice adiabatique ou encore du mode propre et ils n'ont pas effectué d'autres quantifications dans le régime linéaire de l'instabilité ce qui va nous intéresser dans l'étude présente.

Pour analyser le régime non linéaire forcé, Mac Low & Norman [1993] ont augmenté l'amplitude des perturbations. Dans ce régime, ils ont observé que l'instabilité sature à cause de chocs transverses faibles apparaissant dans la coquille et qu'elle ne permet donc pas la fragmentation de la coquille. En effet, ils ont mesuré que la vitesse des perturbations dans le régime non-linéaire atteint la vitesse du son du gaz choqué. Après la saturation de l'instabilité, les oscillations transverses continuent et des régions de grande densité et de la taille de l'épaisseur de la coquille se forment. Ils ont associé ces structures non-linéaires, que nous avons aussi obtenues dans nos simulations, aux filaments présents dans les RSN en phase radiative. Cette interprétation semble prématurée étant donné qu'un seul mode propre de la perturbation a été testé dans leur étude et que dans un système physique, un nombre important de modes propres peut être présent. De plus, nous avons vu que le modèle théorique de l'instabilité de Vishniac n'est pas conforme à celui utilisé pour décrire les RSN en phase radiative et, plus particulièrement, en phase PDTS. Ainsi, seul une étude incluant plus d'ingrédients physiques est capable de décrire ce type de système.

Nous passons maintenant à l'étude numérique de l'instabilité de Vishniac que nous avons réalisée. Avant de d'aborder les résultats des simulations, nous présentons le modèle numérique que nous avons utilisé et pour lequel nous avons testé deux types de méthode perturbative.

[1] Contrairement à Mac Low & Norman [1993], nous différencions le régime non-linéaire du régime non-linéaire forcé car le premier régime est l'évolution naturelle du régime linéaire alors que le régime non-linéaire forcé est, comme son nom l'indique, un forçage où le système ne passe pas par le régime linéaire.

5.2 Le modèle numérique

Nous présentons dans cette section le modèle numérique que nous avons utilisé pour étudier l'instabilité de Vishniac. Ce modèle diffère sur certains points du modèle analytique afin de tendre vers une modélisation d'un système plus réaliste. Nous verrons que contrairement à Mac Low & Norman [1993], nous ne retrouvons pas le même taux de croissance de l'instabilité pour un mode propre donné. Mais l'approche que nous avons choisi permet d'aller plus profondément dans la compréhension du fonctionnement de l'instabilité. Le modèle numérique a été élaboré en plusieurs étapes, car nous sommes d'abord partis d'un modèle général que nous avons ensuite raffiné. Le point crucial des simulations numériques de l'instabilité de Vishniac est la manière d'introduire les perturbations permettant de déclencher l'instabilité dans la coquille fine. Dans les deux approches que nous présentons ci-dessous, la technique perturbative suit le même schéma en trois étapes :

1. simulation d'une coquille non perturbée ;
2. introduction de la perturbation sur la simulation précédente à un temps donné (à t_0) ;
3. simulation d'une coquille perturbée.

Les deux méthodes que nous avons utilisé afin de perturber le système sont la méthode des pics perturbatifs et la perturbation sinusoïdale que nous détaillons maintenant.

5.2.1 La méthode des pics perturbatifs

Dans une première approche ayant pour but d'initialiser l'instabilité de Vishniac, nous avons introduit dans une simulation d'une coquille non perturbée, modélisée en géométrie cylindrique, des pics perturbatifs en densité représentant les hétérogénéités possibles du milieu ambiant. En effet, dans la théorie de l'instabilité, le milieu ambiant est supposé non uniforme et c'est ces hétérogénéités qui sont susceptibles de déformer la coquille et ainsi de déclencher l'instabilité. L'approche que nous présentons dans cette partie est vraisemblable du point de vue physique mais nous verrons qu'elle pose toutefois des problèmes pour l'interprétation des résultats. Cette étude peut être trouvée dans Cavet et al. [2009]. Nous détaillons les différentes étapes amenant à la perturbation du système.

La simulation non perturbée

L'initialisation de la simulation non perturbée n'est pas semblable à celle que nous avons présentée dans la section 4.5, car au moment où j'ai réalisé ce travail, je n'avais pas encore introduit dans le code la fonction $\gamma(\rho)$. De plus, je n'avais pas encore écrit le redimensionnement des équations d'Euler pour les RSN et les valeurs des grandeurs caractéristiques sont donc données en valeurs arbitraires.
L'initialisation de la simulation non perturbée se fait par l'introduction d'une surpression au centre de la boîte de simulation comme nous l'avons déjà présenté. Les conditions initiales de cette simulation sont données dans le tableau 5.1. L'onde de souffle engendrée va pouvoir se propager dans un domaine de taille $x_{max} = y_{max} =$

2000 avec un pas spatial $dx = dy = 5$. La résolution est faible, car nous voulons laisser évoluer le système sur des grandes distances. L'indice adiabatique est fixé à $\gamma = 1,1$ dans toute la boîte de simulation. Ainsi, la coquille modélisée est d'un type particulier, car ce faible indice adiabatique introduit dans tout le domaine ne permet pas d'obtenir une coquille du même type que celles des RSN en phase PDTS (coquille isotherme se déplaçant dans un milieu adiabatique). Cette première simulation est stoppée à $t_0 = 10$ quand le front de

Paramètres	ρ	u_x	u_y	p
Milieux				
(3)	1	0	0	10^5
(1)	1	–	–	$0,1$

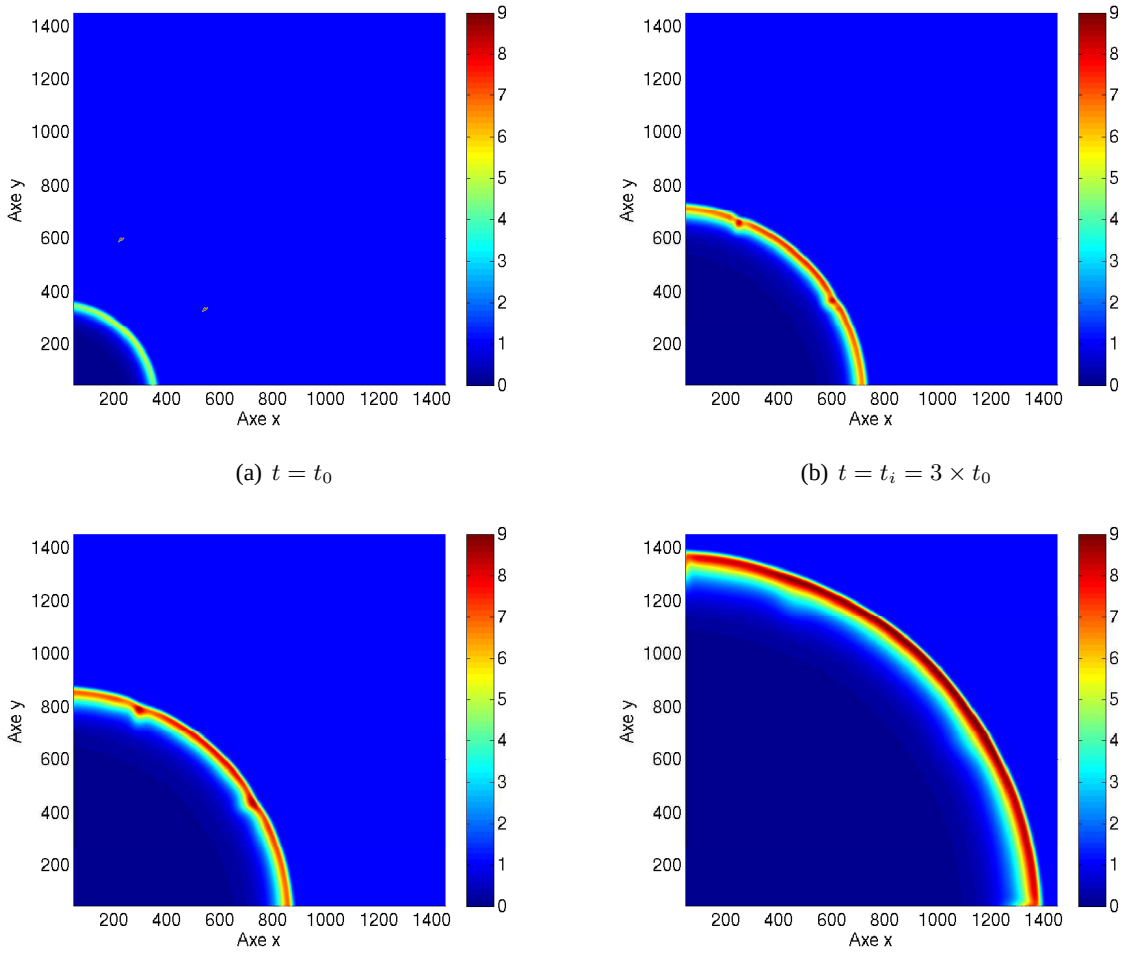
TAB. 5.1 – Conditions initiales de la simulation non perturbée en valeurs arbitraires pour la méthode des pics perturbatifs : densité, vitesses (selon O_x et O_y) et pression pour les milieux (3) et (1).

choc a atteint une structure sphérique. Nous introduisons maintenant les pics perturbatifs sur cette coquille non perturbée.

La simulation perturbée

La technique perturbative est semblable à ce qui se passe lors de la rencontre de l'onde de choc du RSN avec les hétérogénéités du milieu ambiant. En effet, pour pouvoir générer des oscillations dans la coquille de gaz choqué, nous avons introduit dans la boîte de simulation des pics perturbatifs en densité en avant de la propagation de l'onde de souffle. L'amplitude et la forme de ces pics ont été choisies de manière à bien déformer le front de choc. En effet, les pics ont une amplitude de l'ordre de celle du front de choc $\rho_{pic} \propto \rho_s$ car la hauteur des pics doit être plus importante que la densité au niveau du front de choc. Mais l'amplitude ne doit pas non plus être trop élevée pour ne pas créer dans la coquille de fortes ondes acoustiques voire même des ondes de choc transverses qui sont des processus tendant à décroître les perturbations. Les pics perturbatifs ont une forme de bâtonnet allongé dans la direction radiale afin de bien perturber la coquille sur toute son épaisseur. De plus, le nombre de pics introduits dans la boîte de simulation pour perturber le système est choisi de manière précise pour transcrire une perturbation de longueur d'onde fixe. Nous rappelons que le mode propre l est relié à la longueur d'onde par $l = 2\pi R_s/\lambda$. Le mode propre mesure donc le nombre de fois qu'une perturbation de longueur d'onde λ est introduite sur la circonférence $2\pi R_s$ délimitée par le front de choc. Ainsi le nombre de pics perturbatifs ramené à un cercle nous donne le mode propre introduit dans la simulation qui est comparable à celui de la théorie.
Dans la simulation que nous présentons, nous avons introduit deux pics perturbatifs à $t = t_0$ qui sont visibles sur la carte de densité de la figure 5.1(a) et le mode propre est donc $l \approx 8$. La simulation est ensuite poursuivie jusqu'à $t_f = 11 \times t_0$. Lors de l'évolution de l'onde de souffle, le front de choc rencontre les pics statiques présents sur sa trajectoire au temps $t = t_i = 3 \times t_0$, comme visible sur la figure 5.1(b) de la carte de densité et sur la figure 5.2 de la carte de pression. Ces pics déforment la coquille de gaz choqué et créent des surdensités et des déséquilibres de pression dans les zones de déformation, selon le processus prédit par la théorie. La

perturbation provoquée par les pics perturbatifs engendre à $t = 4 \times t_0$ une forte croissance des grandeurs fluides localisées près du front de choc, comme nous pouvons le voir sur la figure 5.1(c). Mais, lors de l'évolution plus



(a) $t = t_0$ (b) $t = t_i = 3 \times t_0$

(c) $t = 4 \times t_0$ (d) $t = 9 \times t_0$

FIG. 5.1 – Méthode des pics perturbatifs : carte de la densité en valeurs arbitraires pour la géométrie cylindrique à quatre instants de l'évolution de l'onde de souffle. La coquille fine est perturbée par la rencontre du front de choc avec les deux pics perturbatifs situés en avant de sa propagation ((a) et (b)). Mais la perturbation engendrée, qui provoque des oscillations transverses, est atténuée lors de l'expansion du système ((c) et (d)).

tardive de l'onde de souffle, l'amplitude de ces perturbations diminue au cours du temps jusqu'à ce que le système redevienne stable (voir Fig. 5.1(d)).

Durant la phase d'atténuation des perturbations, il y a une génération d'oscillations qui se propagent le long de la coquille et dans les deux directions à partir de leur point d'émission. Cet effet est visible sur la figure 5.3 où nous avons représenté la densité maximale normalisée $\tilde{\rho}$ qui est déterminée le long du rayon du choc et que nous définissons comme :

$$\tilde{\rho}(t) = \frac{\rho_s(t)}{< \rho_s(t) >}, \tag{5.1}$$

où ρ_s est la densité locale du front de choc et $< \rho_s >$ est la densité moyenne à la même position qui dépend du temps car la densité globale du front de choc augmente aussi (la densité limite $\rho_s \approx \mathcal{C}\rho_1$ au niveau du choc

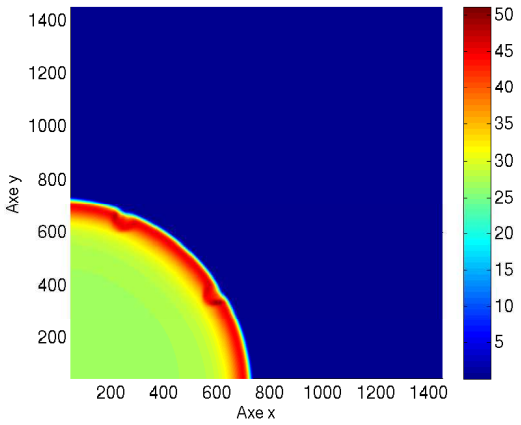


FIG. 5.2 – Méthode des pics perturbatifs : carte de la pression en valeurs arbitraires pour la géométrie cylindrique au temps $t = t_i = 3 \times t_0$. Les pics en densité déforment le front de choc en créant des zones où les pressions présentes de part et d'autre de la coquille ne se compensent plus.

n'était pas atteinte à t_0). Sur la figure 5.3, où dix instants de l'évolution de $\tilde{\rho}$ sont superposés, les deux pics initiaux diminuent en créant un mouvement transverse de matière dans la coquille, comme dans le déclenchement théorique de l'instabilité de Vishniac. Mais nous voyons que l'amplitude des oscillations à t_f est faible ce qui traduit une atténuation de la perturbation. Nous avons observés pour d'autres modes propres que les oscillations

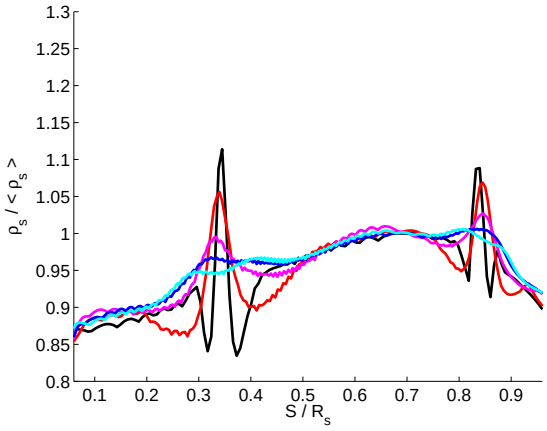


FIG. 5.3 – Méthode des pics perturbatifs : profil de la densité maximale normalisée $\tilde{\rho}$ en fonction de l'abscisse curviligne normalisée $\mathcal{S}/R_s$ pour cinq instants successifs : à $t = t_i = 3 \times t_0$ (noir), à $t = 5 \times t_0$ (rouge), à $t = 7 \times t_0$ (magenta), à $t = 9 \times t_0$ (bleu) et à $t = t_f = 11 \times t_0$ (bleu clair). Les pics perturbatifs engendrent des oscillations dans la coquille qui se propagent dans cette région en s'atténuant.

formées se rencontrent si deux pics générant des surdensités sont suffisamment proches et, dans ce cas, cette rencontre permet la formation d'une nouvelle oscillation. Mais même avec ces conditions nous n'obtenons pas au final une amplification de la perturbation.
Nous étudions les caractéristiques des oscillations, c'est-à-dire leur longueur d'onde, leur amplitude et leur taux

de croissance. Nous définissons pour cela l'amplitude des perturbations $\delta\rho_s$:

$$\delta\rho_s(t) = \frac{\rho_s(t) - < \rho_s(t) >}{< \rho_s(t) >} . \tag{5.2}$$

Lorsque nous regardons de plus près l'évolution de la longueur d'onde λ et de l'amplitude de la perturbation $\delta\rho_s$ au cours du temps, nous ne voyons pas de stabilisation à une valeur constante pour la longueur d'onde et nous ne remarquons pas une amplitude croissante pour la variation de densité. En effet, nous voyons une augmentation de la longueur d'onde et une diminution de l'amplitude jusqu'à la disparition des oscillations, c'est-à-dire l'uniformisation du front de choc.
Nous estimons le taux de croissance s de la perturbation en inversant la relation théorique Eq. 4.42 du chapitre IV :

$$s \propto \frac{\ln(\delta\rho_s)}{\ln(t)} . \tag{5.3}$$

La figure 5.4 montre l'évolution du taux de croissance du pic perturbatif gauche (à $\mathcal{S}/R_s \approx 0,35$) en fonction du temps. Nous voyons que le taux de croissance diminue jusqu'à la stabilisation de sa valeur à $s = 3,7 \times 10^{-2}$. Le système tend donc vers une stabilisation de la perturbation engendrée par les pics perturbatifs. L'effet

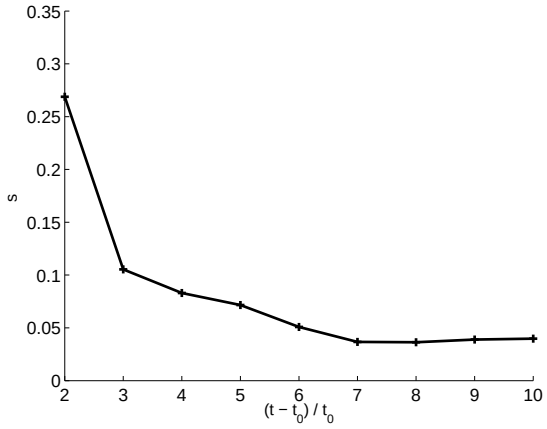


FIG. 5.4 – Méthode des pics perturbatifs : évolution du taux de croissance du pic gauche (situé à $\mathcal{S}/R_s \approx 0,35$) en fonction du temps. Le taux de croissance diminue jusqu'à se stabiliser à la valeur faible $s = 3,7 \times 10^{-2}$ démontrant l'atténuation de la perturbation.

d'atténuation de la perturbation s'explique par la méthode pertubative que nous avons utilisée. La méthode des pics perturbatifs ne nous a pas permis d'obtenir la croissance de la perturbation car il est difficile avec cette technique de perturber la coquille avec un mode propre précis. En effet, les pics perturbatifs ne génèrent probablement pas une perturbation contenant un seul mode propre, et il se peut que des modes propres stables et instables soient présents dans le système. De plus, la méthode des pics perturbatifs ne permet pas d'introduire beaucoup de pics perturbatifs dans la boîte de simulation car sinon le système devient extrêmement complexe à étudier. Ainsi cette contrainte nous a obligé à introduire dans la simulation de faibles modes propres $l \lesssim 12$ qui sont éloignés du mode propre théoriquement instable de cette géométrie que nous estimons être $l \approx 30$ et les modes propres instables ne sont donc probablement pas générés à cause de cette raison.
Cette première étude de l'instabilité de Vishniac nous a ainsi permis de mieux comprendre la difficulté d'obtenir

ce processus dans la coquille de l'onde de souffle. Ce qui ressort particulièrement des simulations est que l'introduction d'une perturbation contenant un mode propre particulier semble nécessaire au développement de l'instabilité. Mais la méthode des pics perturbatifs ne nous permet pas facilement de réaliser cette contrainte et d'obtenir les processus décrit par Vishniac [1983]. Ainsi nous devons poursuivre notre étude et dans ce but nous passons à la deuxième méthode perturbative que nous avons utilisée.

5.2.2 La perturbation sinusoïdale

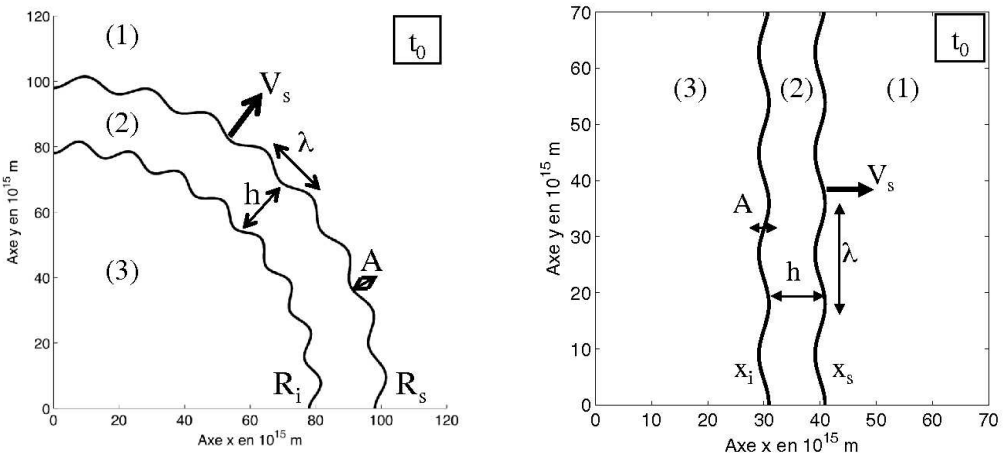
Dans un deuxième temps, nous avons introduit sur les coquilles plane et sphérique, une perturbation spatiale de forme sinusoïdale définie par un mode et une amplitude. Nous pouvons, *via* cette perturbation, contrôler théoriquement à l'état initial le régime stable / instable (par le mode) et le régime linéaire / non linéaire (par l'amplitude) de l'instabilité. C'est cette technique perturbative que nous avons utilisé dans l'étude paramétrique de l'instabilité. La perturbation spatiale que nous définissons dans cette partie est établie pour les géométries sphérique et plan-parallèle. Nous avons aussi réalisé des simulations en géométrie cylindrique mais elles n'entrent pas dans le cadre de l'étude paramétrique. La perturbation spatiale que nous introduisons à l'instant initial $t = t_0$ prend la forme suivante pour les géométries sphérique et plan-parallèle respectivement :

$$R_{pert}(t_0) = A\cos(\frac{l_{sphe}\,\mathcal{S}}{R_s(t_0)}),\; x_{pert}(t_0) = A\cos(\frac{l_{plan}\,y}{x_s(t_0)})\,, \tag{5.4}$$

où $\mathcal{S}$ est l'abscisse curviligne qui suit le rayon du front de choc, y est la coordonnée spatiale selon la direction O_y, A est l'amplitude de la perturbation et l est le mode propre de la perturbation qui représente le nombre de fois où la perturbation est introduite sur un domaine fermé. En géométrie sphérique, le domaine fermé en question est bien entendu une sphère mais en géométrie plan-parallèle le plan est supposé infini et le problème n'est donc pas borné. Comme nous devons quand même pouvoir contraindre ce paramètre, nous avons trouvé une technique que nous présentons juste après. Nous représentons sur la figure 5.5 la forme de la perturbation sinusoïdale appliquée sur la coquille de gaz choqué pour les deux géométries. Nous donnons les domaines de valeur que peuvent prendre les différents paramètres caractérisant la perturbation dans le paragraphe suivant. Nous avons vu que la perturbation spatiale théorique donnée par Ryu & Vishniac [1987] est, dans les géométries sphérique et plan-parallèle respectivement (voir Sec. 4.3.2) :

$$R_{pert}(\theta,\phi,t) = R_s(t)(1 + Y_{lm}(\theta,\Phi)\;t^s)\;, x_{pert}(y,t) = x_s(1 + e^{i(k\,y)}t^s)\,. \tag{5.5}$$

Si nous comparons les deux formes de perturbation pour les deux géométries, un certain nombre de différences apparaissent et dans le cadre du modèle numérique, nous justifions les choix que nous avons fait. Dans la relation portant sur x_{pert}, nous avons remplacé le nombre d'onde k de la formule analytique par le rapport l_{plan}/x_s afin d'éliminer le problème lié à la définition du mode propre dans la géométrie plan-parallèle où le système n'est pas fermé. Dans leur étude, Ryu & Vishniac [1987] mentionnent déjà cette difficulté de raisonnement qui implique de choisir x dans la relation $l = kx$ de manière cohérente et nous l'avons résolu en utilisant la distance caractéristique du système x_s qui est la position du front de choc. Mais le fait d'imposer $x = x_s$ dans la perturbation du modèle numérique engendre une contrainte supplémentaire en géométrie plan-parallèle car la distance du front de choc à l'origine doit être connue.



(a) cas sphérique (b) cas plan-parallèle

FIG. 5.5 – Perturbation sinusoïdale : contour de la coquille de gaz choqué perturbée par une déformation spatiale d'amplitude A et de longueur d'onde λ (de mode propre l) à l'instant t_0. Lorsque le front de choc se propage dans le milieu ambiant, la longueur d'onde de la perturbation va augmenter au cours du temps en géométrie sphérique alors qu'elle va rester constante en géométrie plan-parallèle.

Par la technique de la distance caractéristique, nous pouvons déterminer une autre relation en géométrie plan-parallèle qui est bien déterminée dans la géométrie sphérique. Le mode propre est relié à la longueur d'onde λ par $l_{sphe} = 2\pi R_s(t)/\lambda$ et $l_{plan} = 2\pi x_s(t_0)/\lambda$ pour les deux cas étudiés. Nous voyons qu'il y a une différence entre ces relations, l_{sphe} étant définit pour tout instant et l_{plan} seulement à t_0. Dans les deux géométries, le mode propre de la perturbation est un paramètre constant et la position du front suit une loi auto-semblable au cours du temps. La différence provient ainsi de la longueur d'onde de la perturbation qui ne varie pas au cours du temps en géométrie plan-parallèle, alors que en géométrie sphérique, c'est le cas. Nous avons en effet fixé l et comme la surface de la sphère augmente lors de l'évolution de l'onde de souffle, R_s augmente et λ aussi.
De plus, nous faisons remarquer que la perturbation que nous avons introduite dans le code permet une étude plus générale que celle de Mac Low & Norman [1993]. En effet, nous avons introduit en géométrie sphérique une perturbation sinusoïdale sur la grandeur spatiale et non une harmonique sphérique[2]. De plus, nous n'avons pas introduit de perturbation sur les grandeurs fluides (les fonctions propres de l'instabilité). Et pour finir, nous n'avons pas forcé l'évolution de la perturbation à suivre au cours du temps la loi de puissance imposée par la théorie t^s. Cette technique, comme nous le verrons sur les résultats de simulation, nous a permis de déclencher l'oscillation de toutes les grandeurs caractéristiques (ρ, u_x, u_y et p) et ainsi d'initialiser l'instabilité.

[2]En trois dimensions, la surface perturbée ne sera pas une sphère bosselée mais une sphère rainurée.

5.3 L'étude paramétrique

L'étude paramétrique consiste a tester un certain nombre de paramètres dont le rôle dans le déclenchement et la croissance de l'instabilité a été démontré par la théorie de perturbation ou qui pourraient jouer un rôle étant donné leur importance dans la dynamique des RSN. Ces paramètres sont la géométrie, l'indice adiabatique γ, l'amplitude de la perturbation A, le mode propre de la perturbation l, et la vitesse du front de choc V_s (ramenée au nombre de Mach étant donné que les conditions du milieu ambiant ne changent pas dans cette étude). Nous détaillons les domaines de valeur que peuvent prendre ces paramètres en s'appuyant sur des considérations physiques.

La géométrie

Nous avons modélisé des coquilles perturbées dans les géométries plan-parallèles et sphériques afin de pouvoir comparer les résultats numériques avec les prédictions de la théorie. Nous avons aussi fait des tests en géométrie cylindrique mais il n'entrent pas dans le cadre de l'étude paramétrique. La géométrie n'est pas un paramètre physique à proprement dit mais elle est reliée à un autre paramètre influant sur l'instabilité car la forme de la coquille (et les équations la décrivant) permet de déterminer le domaine de modes propres de la perturbation permettant une croissance de l'instabilité. Nous avons d'abord réalisé les simulations dans la géométrie plan-parallèle car ce système est plus facile à modéliser et permet d'utiliser une résolution plus élevée étant donné le coût en temps de calcul plus faible. Une autre propriété intéressante de cette géométrie est la possibilité d'isoler le rôle de chaque paramètre de manière aisée car la dynamique de la coquille est plus simple dans ce cas. Mais nous verrons que dans cette géométrie, la longueur d'onde de la perturbation étant fixe, nous ne pouvons pas directement comparer, *via* la variable nous servant à quantifier l'effet de l'instabilité, les résultats du modèle analytique et ceux du modèle numérique. Nous avons aussi étudié le problème dans la géométrie sphérique car c'est la géométrie qui décrit naturellement un RSN et il est donc important de faire cette modélisation. Nous rappelons que la modélisation de la géométrie sphérique est permise dans le code 2D grâce aux termes sources géométriques. De plus, nous avons vu que l'évolution des longueurs d'onde de la perturbation est différente dans les deux géométries car en sphérique la longueur d'onde augmente au cours du temps. Il est donc nécessaire de vérifier ce qu'implique cette différence. Mais nous verrons au final que l'instabilité suit le même type d'évolution dans les deux cas.

L'indice adiabatique

Selon la théorie, l'indice adiabatique est le paramètre qu'il est absolument nécessaire de contraindre à une valeur faible si nous voulons voir l'apparition de l'instabilité de Vishniac dans une onde de souffle perturbée. En effet si $\gamma > 1,2$ alors l'onde de souffle, et particulièrement la coquille fine, reste stable à tous types de perturbations et cela dans les deux géométries étudiées par Ryu & Vishniac [1987]. Ainsi ce paramètre

semble avoir une grande importance dans le mécanisme de l'instabilité de Vishniac qui a pour but d'expliquer la structure complexe des RSN en phase évoluée. Mais l'impact d'une valeur précise de l'indice adiabatique n'a pas encore été démontré par d'autres études et il est donc nécessaire d'évaluer son effet réel. De plus, nous avons vu dans le chapitre précédent qu'un indice adiabatique quasi-isotherme correspond à la valeur présente dans la coquille des RSN quand ils sont dans leur phase PDTS, c'est-à-dire au stade dans lequel la morphologie du RSN n'est plus symétrique à cause de la rétroaction du milieu ambiant sur le front de choc. Il est donc important de pouvoir contraindre la valeur de l'indice adiabatique dans la coquille si nous voulons étudier les RSN en phase PDTS pour lesquels la pression thermique qui pousse la coquille est générée par la gaz résiduel, chaud et considéré comme adiabatique. Nous utilisons pour cela notre modèle de type PDTS qui fait appel à la fonction $\gamma(\rho)$ et pour lequel nous avons caractérisé l'écoulement de base dans le chapitre précédent. Et nous testons l'effet de l'indice adiabatique de la coquille pour les trois valeurs que nous avons déjà utilisées dans le chapitre IV : $\gamma_2 = 1,1$ pour le gaz quasi-isotherme, $\gamma_2 = 1,4$ pour le gaz intermédiaire assimilable à un gaz de photons et $\gamma_2 = 5/3$ pour le gaz adiabatique. Nous verrons que le comportement de l'instabilité dans ces trois cas est différent quand $\gamma_2 < 1,2$ et quand $\gamma_2 > 1,2$ ce qui confirme la prédiction théorique pour ce paramètre.

L'amplitude de la perturbation

L'amplitude de la perturbation conditionne le type de régime dans lequel l'instabilité va se déclencher (régime linéaire / non-linéaire). Pour des valeurs restreintes de ce paramètre qui garantissent le déclenchement du régime linéaire, nous pourrons comparer nos résultats avec ceux de Ryu & Vishniac [1987]. L'amplitude de la perturbation est contrainte par la théorie de perturbation et est fixée à $A \leqslant 0,10\,\lambda$ pour initialiser le régime linéaire et $A > 0,10\,\lambda$ pour le régime non-linéaire. Comme seul le régime linéaire de l'instabilité a été étudié analytiquement, nous avons concentré notre étude sur l'intervalle de valeur $A = [0,03 - 0,10]\,\lambda$. Mais nous verrons dans les simulations que, dès $A > 0,05\,\lambda$ en géométrie plan-parallèle et $A > 0,08\,\lambda$ en géométrie sphérique, de faibles effets non-linéaires apparaissent sur la variable qui nous sert à quantifier l'effet de l'instabilité (la masse d'une région spécifique) ce qui montre que l'instabilité est très dépendante de ce paramètre et qu'elle évolue facilement vers le régime non-linéaire.

Le mode propre de la perturbation

Le mode propre de la perturbation est, comme l'indice adiabatique, un paramètre fortement contraint par la théorie. Comme nous l'avons vu dans la partie sur le modèle analytique, le domaine de modes propres instables est déterminé par les valeurs positives de la partie réelle du taux de croissance, $\mathcal{R}e(s) > 0$. Nous rappelons que cette condition implique un domaine de mode propre $l = [4 - 30]$ en géométrie plan-parallèle et $l = [8 - 80]$ en géométrie sphérique. Le mode propre théoriquement optimal, c'est-à-dire celui qui permet théoriquement à l'instabilité de croître avec un taux maximal, est $l = 14$ et $l = 40$ dans les géométries plan-parallèle et sphérique respectivement. Pour l'étude paramétrique, nous testons un domaine de modes propres équivalent au domaine instable prédit par la théorie : $l = [2 - 30]$ en géométrie plan-parallèle (8 modes

propres testés) et $l = [8 - 80]$ en géométrie sphérique (10 modes propres testés) afin de vérifier l'effet de ce paramètre sur l'instabilité. Nous verrons dans les simulations que, contrairement aux prédictions de la théorie, nous n'obtenons pas la relation de dispersion $s(l)$ et il n'y a pas de mode qui favorise particulièrement la croissance de l'instabilité.

Le nombre de Mach

Pour le nombre de Mach, nous n'avons pas de contrainte théorique aussi forte que pour les autres paramètres si ce n'est que le choc est considéré comme fort ($\mathcal{M} \gg 1$ ou encore $\mathcal{C}(\gamma_2) \rightarrow (\gamma_2 + 1)/(\gamma_2 - 1)$). Mais cette hypothèse conditionne faiblement ce paramètre car nous avons vu dans les résultats de simulations du chapitre précédent que la limite de choc fort est quasiment toujours atteinte si nous introduisons une surpression p_3 suffisante et si nous utilisons une résolution numérique suffisante. Cependant, comme il est sûr que la vitesse du choc a aussi un rôle dans le fonctionnement de l'instabilité car la pression bélier impliquée dans la dynamique de l'instabilité en dépend ($p_{ram} = \rho_1 V_s^2$), nous devons définir une domaine de variation de ce paramètre. Nous avons vu que la phase PDTS du RSN, dans laquelle l'instabilité peut croître (pour γ_2 faible), est un stade d'évolution dans lequel il existe une solution auto-semblable particulière de la position du front de choc et donc de la vitesse. Pour la durée de cette phase PDTS ($t = 10^4 - 10^5$ ans), nous avons déterminé avec les conditions caractéristiques des RSN un domaine de vitesse $V_s \approx 200 - 800$ km s^{-1} (voir l'application numérique de la Sec. 4.4.4). En plus de ces raisons physiques, nous devons prendre en compte d'autres raisons numériques. Pour avoir une vitesse de front de choc pas trop faible à la fin de l'évolution de la coquille perturbée (à t_f de la simulation), nous devons utiliser une onde de souffle avec une vitesse initiale relativement élevée (à t_0). Ainsi, en considérant ces différents facteurs, nous choisissons un domaine large de vitesse : $V_s = 300 - 1300$ km.s^{-1} ce qui correspond à un domaine de nombre de Mach assez proche des conditions présentes dans les RSN âgés : $\mathcal{M} = 3 - 10$.

Nous précisons la méthode nous permettant de perturber les coquilles possédant des vitesses initiales différentes. Nous avons vu que les perturbations spatiales sinusoïdales R_{pert} et x_{pert} dépendent de la position du front de choc. Pour la géométrie sphérique, l'introduction de différentes vitesses ne pose pas de problèmes car le domaine est fermé et le nombre de perturbation sur la circonférence délimitée par le front de choc reste constant quelque soit R_s. Quant à la géométrie plan-parallèle, nous devons conserver la valeur de la position du front de choc x_s d'une simulation de référence et nous l'introduisons dans les autres simulations. Cette opération nous permet d'avoir le même nombre de longueur d'onde dans la boîte de simulation et de pouvoir ainsi comparer des simulations avec des vitesses différentes.

Nous verrons avec les résultats des simulations suivantes qu'il est difficile de conclure sur l'effet du nombre de Mach sur l'instabilité car quand nous changeons la vitesse, nous faisons aussi varier l'épaisseur h de la coquille. Comme la variation de l'épaisseur de la coquille est de surcroît responsable de l'atténuation des oscillations, il faut s'affranchir de cet effet pour pouvoir conclure. Toutefois, nous avons pu observer que les faibles nombres de Mach permettent une atténuation plus régulière de la perturbation en géométrie plan-parallèle alors qu'en géométrie sphérique, ce sont les nombres de Mach les plus élevés de notre domaine de variation qui permettent un développement linéaire de l'instabilité.

Nous récapitulons ci-dessous les domaines de variation que prennent les paramètres dans nos simulations. L'étude paramétrique porte sur :

- la géométrie : plan-parallèle ou sphérique ;
- l'indice adiabatique : $\gamma_2 = 1,1$; $1,4$; $5/3$;
- l'amplitude de la perturbation : $A = [0,03 - 0,10]\,\lambda$;
- le mode propre de la perturbation : $l = [2 - 30]$ en géométrie plan-parallèle et $l = [8 - 80]$ en géométrie sphérique ;
- le nombre de Mach : $\mathcal{M} = 3 - 10$.

5.4 Les conditions initiales des simulations

Nous définissons ici les conditions initiales des simulations de coquilles perturbées. Nous rappelons que la technique perturbative dans ces simulations consiste à introduire une perturbation spatiale sur une zone recouvrant la coquille située derrière le front de choc. Dans les simulations plan-parallèle et sphérique, la perturbation revient à déplacer des cellules du domaine spécifique selon la direction O_x pour la première géométrie et selon O_r pour la seconde. L'amplitude de la perturbation contrôle la hauteur du déplacement et le mode propre de la perturbation, la période.

Les boîtes de simulation ont la même taille et la même résolution que dans le cas non perturbé du chapitre précédent ($dx = 0,1 \times 10^{15}$ m en géométrie plan parallèle et $dx = 0,3 \times 10^{15}$ m en géométrie sphérique). En géométrie plan-parallèle, nous précisons que le pas spatial dy que nous avons choisi est le même que sur O_x pour les RSN non soumis à une perturbation. Mais dans le cas des RSN perturbés, $dy \approx dx$ car dy est modifié afin de pouvoir introduire des conditions aux bords périodiques dans la direction O_y. Pour réaliser cette opération, nous devons fixer le nombre de longueurs d'onde dans la boîte de simulation à une valeur entière et nous ajustons dy pour valider cette contrainte.

Les simulations perturbées, pour lesquelles la coquille est déformée spatialement, sont des redémarrages à l'instant t_0 des simulations non perturbées et nous laissons ensuite évoluer le système jusqu'à l'instant t_f. Le temps final t_f jusqu'auquel évolue la simulation dépend du développement de l'instabilité. Nous avons remarqué en géométrie plan-parallèle que la perturbation n'est plus présente dans la coquille pour des temps plus courts pour les grandes valeurs de l'indice adiabatique et nous stoppons donc les simulations en fonction de cette constatation. Nous avons choisi comme temps finaux $t_f = t_0 + 3 \times 10^4$ ans pour $\gamma_2 = 1,1$ et $1,4$ et $t_f = t_0 + 1,5 \times 10^4$ ans pour $\gamma_2 = 5/3$. Nous réalisons les simulations perturbées en plusieurs fois pour des raisons techniques[3] et cette manipulation change les coordonnées de la coquille sur l'axe O_x en géométrie plan-parallèle.

[3] Sur Titane, les calculs ne peuvent pas fonctionner plus de 24h.

5.5 Les variables caractérisant l'instabilité

Pour étudier l'instabilité de Vishniac nous ne pouvons pas seulement nous contenter d'analyser les cartes de densité de vitesse et de pression que nous obtenons avec les simulations. La représentation à deux dimensions de ces grandeurs nous donne une information morphologique et qualitative de l'effet de l'instabilité. Ainsi, nous devons aussi déterminer d'autres variables afin de quantifier l'effet de l'instabilité et de pouvoir déterminer le taux de croissance de la perturbation. Dans ce but, nous introduisons la notion d'écart spatial et en densité calculés sur les différents résultats en sortie et nous définissons la masse et la variation de masse calculées à chaque pas de temps.

5.5.1 L'écart spatial et en densité

Nous déterminons deux variables qui vont nous permettre de quantifier l'effet de l'instabilité dans une première approche. Nous définissons ces quantités en géométrie plan-parallèle mais leur définition est semblable dans le cas sphérique. L'écart spatial δx_s et l'écart en densité $\delta\rho_s$ sont calculés sur le front de choc à chaque sorties de résultats et sont définis par :

$$\delta x_s(t) = \frac{x_{s,max} - x_{s,min}}{A(t_0)}\,, \delta\rho_s(t) = \frac{\rho_{s,max} - \rho_{s,min}}{\rho_s(t_0)}\,. \tag{5.6}$$

Ces variables sont donc la différence entre les valeurs extrêmes de la position et de la densité mesurées au niveau du front de choc et elles sont normalisées pour l'écart spatial, par l'amplitude de la perturbation à l'instant initial t_0 et pour l'écart en densité par la densité du front de choc à t_0. Ainsi, initialement, l'écart spatial est égal à l'unité et l'écart en densité est nul. En géométrie plan-parallèle, pour déterminer ρ_s, nous prenons la valeur maximale de chacune des lignes de cellules de la boîte de simulation. Pour déterminer x_s, nous balayons les lignes de cellules numériques à partir du milieu ambiant uniforme (pour j décroissant, $j = m_y$ à $j = 1$) et nous cherchons une variation de densité $\Delta\rho > 0,2$. Cette technique permet de détecter le vrai front de choc et non les structures formées par l'instabilité dans la coquille. L'écart spatial et l'écart en densité permettent donc de suivre les oscillations de x_s et de ρ_s. Pour l'écart en densité, $\delta\rho_s$ positif correspond à un maximum de la densité dans la région $\mathcal{A}$, c'est-à-dire la zone qui correspond à t_0 à la vallée de la perturbation sinusoïdale (voir Fig. 5.6), et $\delta\rho_s$ négatif, à un maximum dans la région $\mathcal{B}$ correspondant à la zone de la bosse. Nous définissons plus précisément ces deux régions dans le paragraphe suivant. Nous nommons ces deux régions ainsi, car au cours de l'évolution de la coquille, la morphologie de la coquille change et les appellations vallée et bosse n'ont plus de sens. Nous introduisons maintenant la masse et la variation de masse qui nous permettent de quantifier précisément l'effet de l'instabilité.

5.5.2 La masse par région et la variation de masse

Lors de nos premières simulations visant à comprendre le fonctionnement de l'instabilité de Vishniac, nous avons cherché une variable pouvant être déterminée à chaque instant d'évolution et dont la variation pour-

rait caractériser correctement l'effet de ce processus instable. Comme nous avons réalisé un grand nombre de simulations de coquilles perturbées aux caractéristiques différentes (environ 2500 simulations), il était important de pouvoir visualiser rapidement l'action de l'instabilité sur le système et de vérifier pratiquement instantanément s'il n'y avait pas d'aberration dans la simulation. Ce que nous considérons par aberration numérique est, par exemple, lorsque le front de choc sort de la boîte de simulation et cela implique un arrêt du calcul afin d'économiser le temps de calcul. La variable que nous avons utilisé pour quantifier l'instabilité et contrôler la simulation est la masse d'une région spécifique. Nous venons de définir les écarts spatiaux et en densité qui permettent aussi de caractériser l'effet de l'instabilité. Mais ces variables donnent une information sur le comportement des extrema. Nous avons cherché avec la variable présentée dans cette partie à caractériser ce même effet mais d'une manière plus globale et à la fois localisée dans une région précise. De plus, cette masse calculée sur une demi-longueur d'onde de perturbation va nous permettre d'évaluer le taux de croissance de l'instabilité pour tous les jeux de paramètres étudiés. Nous présentons la masse par région et la variation de masse associée.

La masse par région

Nous avons introduit dans le code HYDRO-MUSCL une fonction qui nous permet de calculer la masse par région $M_{région}$ à chaque pas de temps d'intégration dt. Pour réaliser cette opération, la fonction intègre la densité sur deux régions $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ qui représentent approximativement une demie longueur d'onde de la coquille. Ainsi les régions impliquées dans le calcul recouvrent l'une, une vallée, et l'autre, une bosse de la perturbation spatiale initiale. Nous expliquons comment est déterminée la masse par région en géométrie plan-parallèle mais le raisonnement est le même dans la géométrie sphérique même si dans ce cas, comme le front de choc est courbe, le calcul est plus difficile à mettre en place car l'intégration se fait le long de l'abscisse curviligne. La masse par région $M_{région}$ est intégrée sur une demie longueur d'onde de la perturbation (selon l'axe O_y) et sur une zone $\Delta x = x_s - x_b$ où x_b est la position minimum de ce domaine et $x_b < x_i$. Nous choisissons cette zone un peu plus large que l'épaisseur initiale de la coquille $h(t_0) = x_s(t_0) - x_i(t_0)$ afin de prendre en compte l'épaississement de la couche de gaz choqué durant son évolution dans le milieu ambiant. Ainsi nous avons toujours une zone d'intégration suffisante dans la direction O_x pour englober la coquille en entier. La masse par région est définit par :

$$M_{région}(t) = \int_{x_b}^{x_s} \int_{0}^{\lambda/2} \rho(x, y, t)\, dx\, dy\,. \tag{5.7}$$

La carte de densité du domaine englobant les deux régions spécifiques dans lesquelles la masse est calculée est représentée sur la figure 5.6. Nous avons choisi d'appeler la région $\mathcal{A}$, la vallée de la perturbation spatiale initiale et la région $\mathcal{B}$, la bosse, car nous verrons que ces régions changent d'état lors de l'action de l'instabilité. Nous définissons à présent la masse moyenne $< M >$ des deux régions :

$$< M(t) >= \frac{M_{\mathcal{A}} + M_{\mathcal{B}}}{2}\,. \tag{5.8}$$

Cette masse va nous servir par la suite de masse de référence. En effet l'instabilité de Vishniac est une instabilité globale mais qui agit sur une distance $\Delta y \leqslant \lambda$. Ainsi si nous intégrons les grandeurs fluides sur une longueur

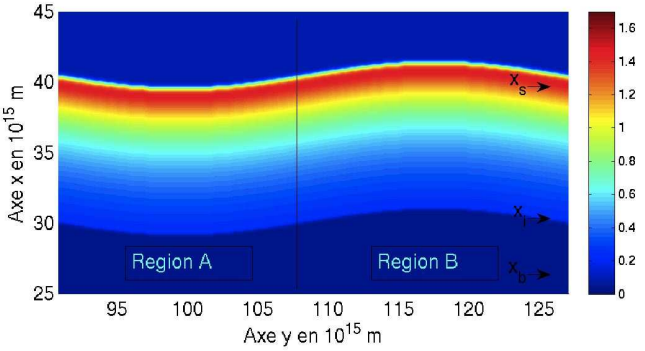


FIG. 5.6 – Masse par région : carte de la densité en 10^{-19} kg.m^{-3} pour la géométrie plan-parallèle du domaine englobant les deux régions spécifiques dans lesquelles la masse est calculée. Les axes O_x et O_y sont inversés sur ce schéma. La région $\mathcal{A}$ représente la vallée de la perturbation spatiale initiale et la région $\mathcal{B}$, la bosse. La densité est intégrée à chaque pas de temps dans une région allant de la position x_b à la position du front de choc x_s.

d'onde entière, nous retrouvons la valeur des grandeurs intégrales non perturbées. En ce qui concerne la masse, $< M >$ représente la masse globale non perturbée qui est due à l'accrétion de la matière sur la coquille et qui croît selon la loi auto-semblable d'évolution du RSN. La masse par région et la masse de référence vont nous permettre de calculer la variation de masse que nous introduisons maintenant.

La variation de masse

Nous nous intéressons à présent à la variation de masse $\delta M_{région}$ qui reflète directement l'effet de l'instabilité de Vishniac. Cette variable va effectivement nous permettre d'étudier plus précisément les oscillations de densité dans la coquille et d'accéder au taux de croissance de l'instabilité. La variation de masse est déterminée par la relation :

$$\delta M_{région}(t) = \frac{M_{région}(t) - < M(t) >}{< M(t) >} , \tag{5.9}$$

où, cette fois la normalisation est faite par la variable de référence $< M(t) >$ ce qui nous permettra de déterminer le taux de croissance ou d'atténuation de la perturbation. Le modèle analytique de l'instabilité de Vishniac donne l'évolution des perturbations des grandeurs fluides, comme nous l'avons vu dans le chapitre IV. Cette évolution pour la variation de masse est donnée par :

$$\delta M(t) \propto K t^{s_m} , \tag{5.10}$$

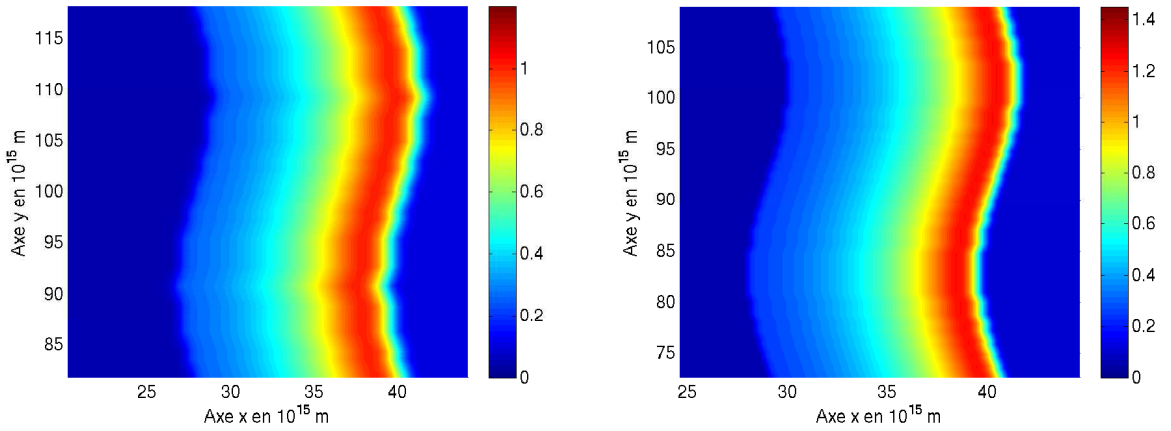
où $s_m = s_{m,r} + i\, s_{m,i}$ est le taux de croissance complexe mesuré sur δM et K est une constante incluant le profil auto-semblable de la masse non perturbée. Théoriquement, la forme complexe de la loi de puissance doit faire osciller la variation de masse avec une amplitude et une période qui croissent sans limitation. Nous avons donc déterminé une variable qui va nous fournir une quantification de l'instabilité de Vishniac et nous

allons pouvoir calculer à partir de la variation de masse le taux d'évolution de la perturbation présente dans le système.

Nous passons à présent à l'étude des simulations numériques d'une coquille perturbée en géométrie plan-parallèle et particulièrement à l'étude des effets numériques que nous avons déjà rencontrés dans l'étude des RSN du chapitre précédent. Jusqu'à présent, l'effet de la résolution numérique ou du solveur de type HLL n'avait pas de grave conséquence sur l'évolution de l'onde de souffle. Lors de l'apparition de l'instabilité de Vishniac dans la coquille, nous allons voir qu'il en est autrement. Nous commençons à analyser ces effets avec l'étude de la résolution numérique.

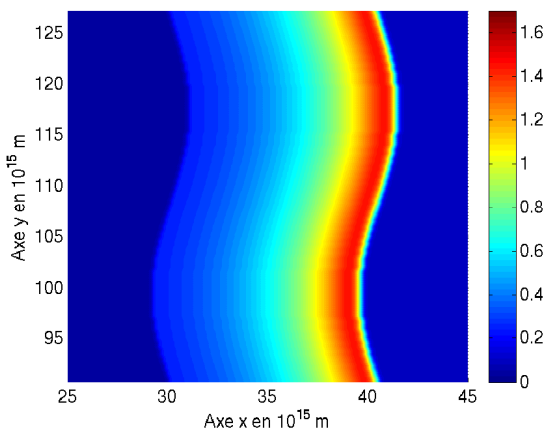
5.6 L'étude de la résolution numérique

Nous avons vu lors de l'étude des ondes de souffle du chapitre IV que la résolution numérique a un impact sur les profils des grandeurs caractéristiques. En effet, pour une faible résolution, nous avons observé que les grandeurs fluides convergent moins bien vers la limite théorique que dans une simulation où la résolution est élevée. Dans le cas des instabilités, lorsque celles-ci sont étudiées principalement de manière visuelle, c'est-à-dire que l'analyse se porte sur les structures qu'elles forment et que la taille de ces structures permet de déterminer le taux de croissance de l'instabilité, l'étude peut-être biaisée par une résolution non adaptée. Un moyen de vérifier ce fait est de comparer des instantanés d'une grandeur caractéristique sur une zone précise où l'instabilité est en action et cela pour différentes résolutions. Si des différences notables apparaissent entre les simulations, il faut arriver à déterminer quel sont les effets physiques et ceux numériques afin de décider de la résolution appropriée pour le problème donné.
De manière plus pragmatique, déterminer la plus petite résolution à partir de laquelle le système converge vers une solution physique a aussi une importance au niveau du temps de calcul, le facteur limitant du projet d'étude paramétrique. Une résolution pas trop grande nous permet de limiter la consommation de temps de calcul. Nous précisons, pour finir, que des résolutions très élevées peuvent aussi faire apparaître des effets non physiques. Il est donc important de déterminer la résolution optimale afin de travailler par la suite avec ce paramètre fixé.
Ainsi nous effectuons, comme dans le cas où nous n'avons pas introduit de perturbation (chapitre IV), plusieurs simulations avec des résolutions différentes. Cette étude a pour but, dans le cas d'une coquille perturbée, de vérifier l'effet du pas spatial sur les variations physiques de densité engendrées par l'instabilité de Vishniac que nous décrirons en détail dans la Sec. 5.8. Nous introduisons les pas spatiaux $dx = 0,4 \times 10^{15}$ m ; $dx = 0,2 \times 10^{15}$ m ; $dx = 0,1 \times 10^{15}$ m (résolution utilisée dans l'étude paramétrique) ; et $dx = 0,05 \times 10^{15}$ m. Nous ne précisons pas la résolution sur l'axe O_y car elle est approximativement égale à celle sur l'axe O_x ($dy \approx dx$) même si la résolution dans la direction transverse au choc peut fluctuer autour de cette valeur à cause de la périodicité de la boîte de simulation sur l'axe O_y et du fait que nous voulons un nombre de longueur d'onde entier dans ce même domaine (voir Sec. 5.4).
Nous remarquons sur la carte de la densité de la figure 5.7 présentant un zoom d'une longueur d'onde de la coquille à $t = t_0$ que les couches de gaz choqué ont un aspect différent. En effet, l'épaisseur des coquilles varie d'une simulation à l'autre et de petits décalages de cellules dans la direction O_x se produisent pour les

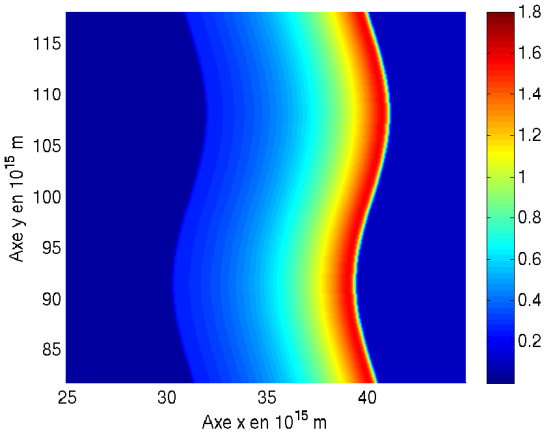


(a) $dx = 0,4 \times 10^{15}$ m

(b) $dx = 0,2 \times 10^{15}$ m

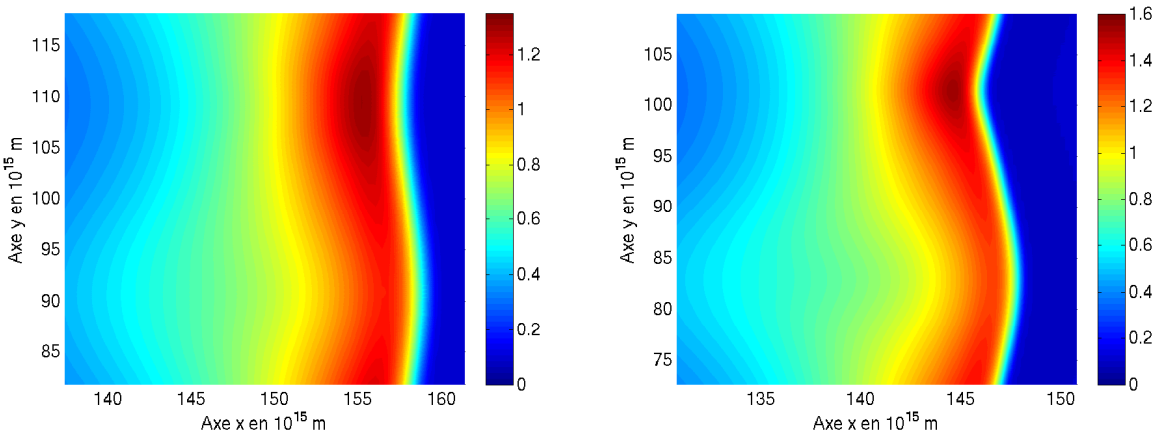


(c) $dx = 0,1 \times 10^{15}$ m



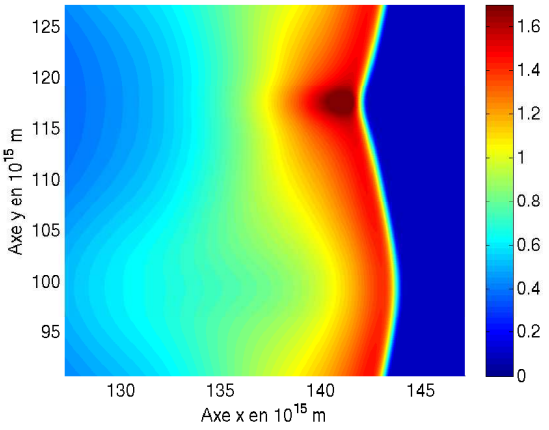
(d) $dx = 0,05 \times 10^{15}$ m

FIG. 5.7 – Effet de la résolution numérique : carte de la densité en 10^{-19} kg.m^{-3} pour la géométrie plan-parallèle et pour différentes résolutions à $t = t_0$. Nous précisons que l'échelle de couleur de la densité n'est pas la même pour les différents pas spatiaux $dy \approx dx$ afin d'avoir un gradient de couleur similaire sur la coquille des quatre simulations. Quand la résolution augmente, la coquille s'affine et la densité du front de choc tend vers la limite de choc fort.

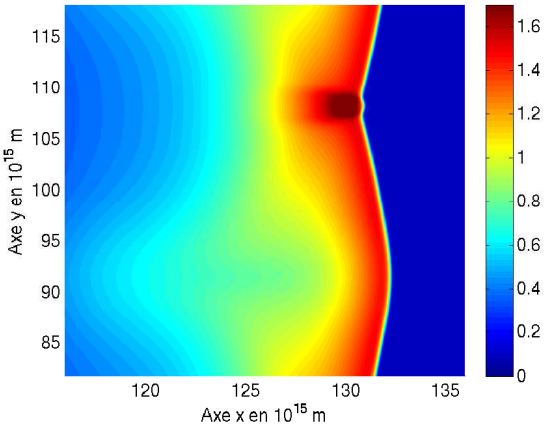


(a) $dx = 0,4 \times 10^{15}$ m

(b) $dx = 0,2 \times 10^{15}$ m



(c) $dx = 0,1 \times 10^{15}$ m



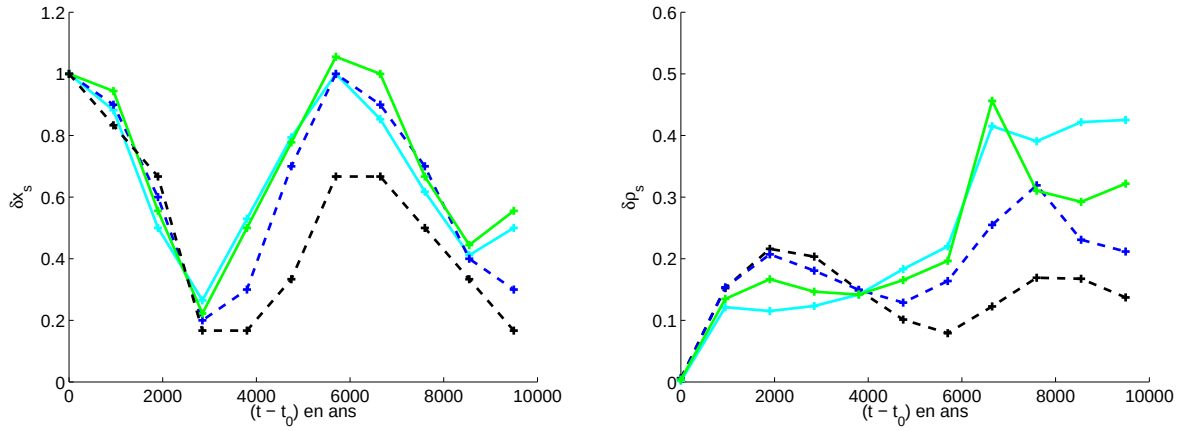
(d) $dx = 0,05 \times 10^{15}$ m

FIG. 5.8 – Effet de la résolution numérique : carte de la densité en 10^{-19} kg.m^{-3} pour la géométrie plan-parallèle et pour différentes résolutions à $t = t_0 + 7 \times 10^3$ ans. Même remarque sur l'échelle de couleur. Quand la résolution augmente, la coquille s'affine et la densité du paquet de matière atteint des valeurs plus élevées. Mais à partir de $dx = 0,1 \times 10^{15}$ m et pour une meilleure résolution, le système semble converger vers une valeur constante de cette structure.

plus faibles résolution (voir Fig. 5.7(a) et Fig. 5.7(b)). De plus, mais nous avons déjà remarqué cet effet dans le cas sans perturbation, nous voyons que la densité maximale située au niveau du front de choc tend vers une valeur plus grande pour les grandes résolutions (elle tend vers la limite de choc fort). Ainsi, à cet instant initial, les effets numériques sont déjà perceptibles. Les différences observées sont la conséquence de la méthode des volumes finis qui est implémentée dans le code et qui engendre de la diffusion numérique de manière excessive ce qui provoque, pour les faibles résolutions particulièrement, un lissage des valeurs sur un nombre de cellules plus grand.

À un instant plus tardif de l'évolution de l'instabilité ($t = t_0 + 7 \times 10^3$ ans), d'autres différences importantes apparaissent en fonction du nombre de cellules contenues dans la boîte de simulation, comme visible sur la figure 5.8. Particulièrement, nous remarquons de grands écarts entre les simulations dans les régions de la bosse et de la vallée, c'est-à-dire les zones importantes de l'instabilité de Vishniac où s'effectue la formation des paquets denses de matière. Nous voyons que pour des grandes résolutions, la surdensité formée au centre de la vallée (de densité maximale) est très localisée alors que pour les plus faibles résolutions, cette même structure est étendue.

Afin de mieux comprendre l'effet de la résolution et de pouvoir quantifier ce paramètre, nous comparons sur la figure 5.9 l'écart spatial δx_s et l'écart en densité $\delta \rho_s$ sans distinction de régions (toujours positif, voir la définition de ces variables dans la Sec. 5.5.1). Nous avons mesuré, pour les quatre résolutions étudiées, ces variables sur une longueur d'onde afin de recouvrir une vallée et une bosse. Ainsi, l'évolution de ces quantités donne des informations sur le processus de l'instabilité. Particulièrement, nous pouvons déterminer à l'aide de ces écarts l'évolution sur le long terme de l'instabilité. Nous voyons que la résolution que nous avons choisie



(a) δx_s (b) $\delta \rho_s$

FIG. 5.9 – Effet de la résolution numérique : évolution de l'écart spatial δx_s et de l'écart en densité $\delta \rho_s$ en fonction de $(t - t_0)$ pour la géométrie plan-parallèle et pour les pas spatiaux $dx = dy = 0,4 \times 10^{15}$ m (noir, trait pointillé) ; $0,2 \times 10^{15}$ m (bleu, trait pointillé) ; $0,1 \times 10^{15}$ m (vert, trait plein) et $0,05 \times 10^{15}$ m (bleu clair, trait plein). Les meilleurs résolutions $dx = 0,1 \times 10^{15}$ m et $dx = 0,05 \times 10^{15}$ m suivent la même tendance pour ces deux variables.

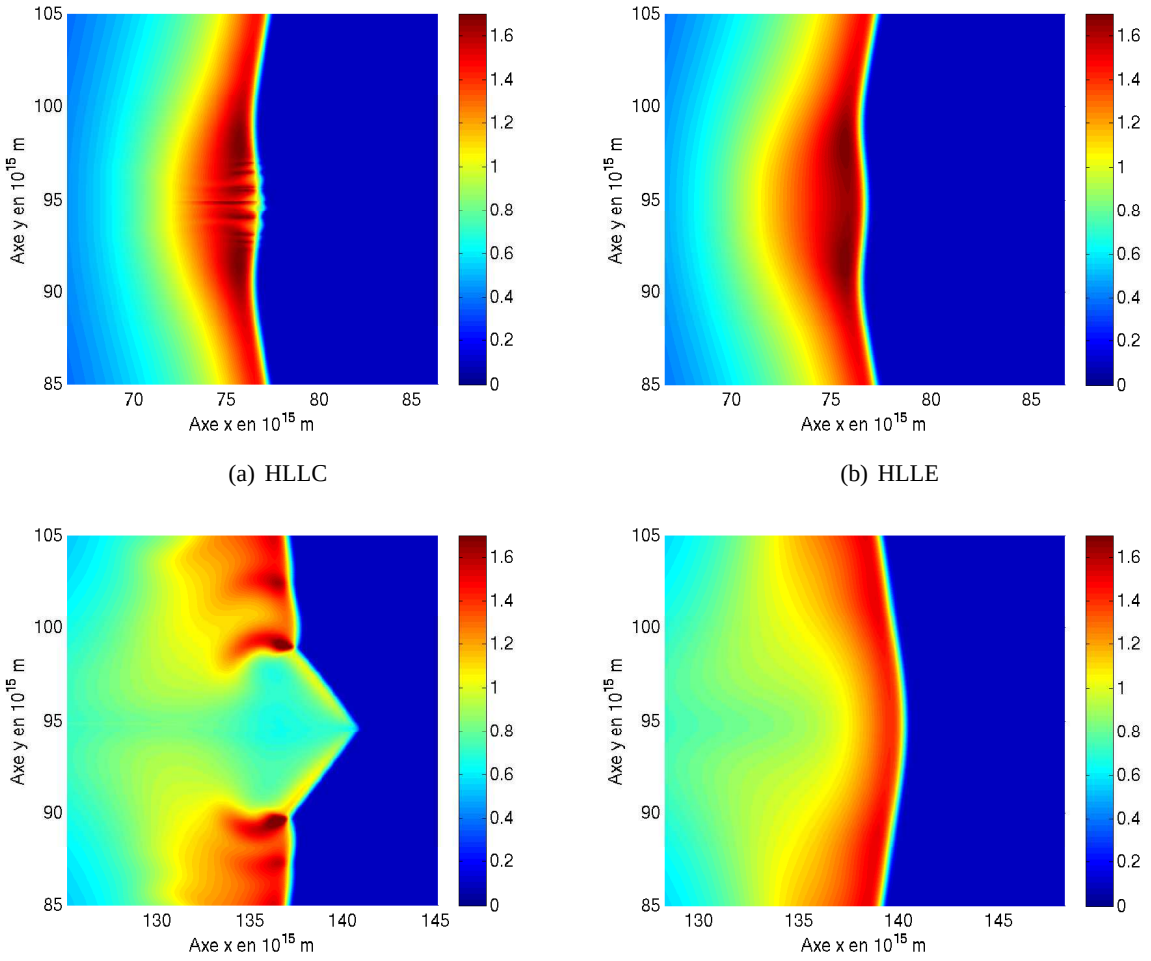
pour l'étude paramétrique ($dx = 0,1 \times 10^{15}$ m) tend vers la même tendance croissante que la meilleure

résolution ($dx = 0,05 \times 10^{15}$ m) ce qui confirme notre choix de ce pas spatial pour l'étude de l'instabilité. De plus, ce pas spatial est un compromis raisonnable entre le temps de calcul consommé et une visualisation correcte des structures qui sont des contraintes pour mener à bien notre étude. Nous passons maintenant à un autre effet numérique important qui est l'instabilité de grosseur.

5.7 L'instabilité numérique de grosseur ("carbuncle instability")

Au début de notre étude numérique de l'instabilité de Vishniac en géométrie plan-parallèle, nous avions seulement implémenté dans le code le solveur HLLC. Lorsque nous avons réalisé des simulations d'une coquille déformée par la perturbation sinusoïdale avec ce solveur, nous avons observé la formation rapide (dès $t = t_0 + 2 \times 10^3$ ans), dans les vallées de la perturbation initiale, de fluctuations numériques, comme visible sur la figure 5.10(a). En effet lors de l'accumulation de la matière dans ces régions, le flux des grandeurs fluides est important car la déformation initiale de la coquille provoque un fort écoulement transverse. Or comme le solveur HLLC n'est pas assez diffusif, c'est-à-dire qu'il ne gère pas bien les flux rapides, il se forme des fluctuations numériques aux interfaces des cellules. Ces fluctuations font varier la densité sur des échelles de la taille de la grille dans la zone problématique. Nous voyons sur la figure 5.10(c) qu'à un instant plus tardif ($t = t_0 + 6 \times 10^3$ ans), ces fluctuations se transforment en une goutte sous-dense (une sorte de grosseur). La forme triangulaire de l'aberration numérique, qui se développe le long de l'axe O_x, est caractéristique de l'instabilité de grosseur ("carbuncle instability") qui est une instabilité numérique bien connue des numériciens. Ainsi à ce stade de notre étude, l'instabilité numérique nous empêchait d'étudier l'instabilité physique de Vishniac et il nous fallait trouver un moyen pour l'éliminer. Afin de bien vérifier la nature de l'instabilité obtenue dans nos simulations, nous avons réalisé un simple test consistant à modéliser un choc oblique, c'est-à-dire ne se propageant sur aucun axe de la grille numérique mais à 45° de ceux-ci. En effet, nous avions vu qu'une propagation longitudinale de l'onde de choc soumis à une perturbation permet la formation de l'instabilité numérique. Les résultats du test de choc oblique ne présentant pas l'instabilité présumée de grosseur, nous avons pu identifier la nature du problème qui est bien liée à une propagation de l'onde de choc perturbée parallèlement aux axes.

Il existe dans la littérature de nombreuses informations sur l'instabilité numérique de grosseur. En effet, les chocs plans et forts, qui évoluent dans plusieurs dimensions, qui se propagent selon une direction de grille et qui sont traités par des méthodes de Godunov d'ordres élevés, peuvent être sujet à une instabilité numérique nommée instabilité de grosseur. Cette instabilité est déclenchée par une perturbation du front de choc à l'échelle de la grille et elle engendre une croissance de grande amplitude des grandeurs fluides [Quirk, 1994]. Nous remarquons que cette description est aussi celle du fonctionnement de l'instabilité de Vishniac que nous cherchons à étudier. Ainsi la présence simultanée des deux instabilités est particulièrement nuisible à notre étude car l'instabilité de grosseur va dominer l'instabilité de Vishniac sur le long terme. Un test simple permet de déterminer si le code employé pour les simulations va générer l'instabilité de grosseur (test de Quirk, voir Robinet et al. [2000]). Ce test est représenté sur la figure 5.11 où nous voyons une grande similarité entre les structures triangulaires de la carte des contours de densité obtenues avec le test de Quirk et celles que nous

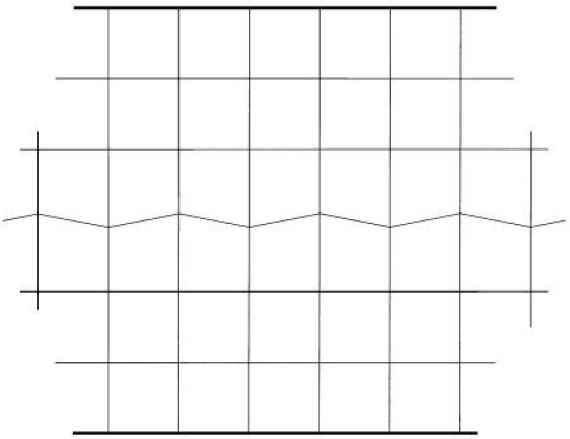


(a) HLLC (b) HLLE

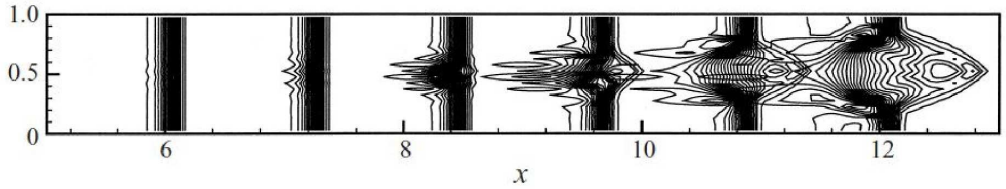
(c) HLLC (d) HLLE

FIG. 5.10 – Effet du solveur de Riemann : carte de la densité en 10^{-19} kg.m^{-3} pour la géométrie plan-parallèle. Les instantanés des simulations réalisées avec le solveur HLLC et avec HLLE sont donnés au temps $t = t_0 + 2 \times 10^3$ ans pour les figures (a) et (b), et à $t = t_0 + 6 \times 10^3$ ans pour les figures (c) et (d). L'instabilité de grosseur engendrée par le solveur HLLC permet la formation de fluctuations numériques dans la vallée de la perturbation. Lorsque la vallée devient une bosse, ces fluctuations numériques dégénèrent en une goutte sous-dense dont la forme triangulaire est caractéristique de cette instabilité numérique. Aux mêmes instants, le solveur HLLE permet à l'instabilité de Vishniac de se dérouler correctement.

voyons sur la figure 5.10(c). D'après Robinet et al. [2000], la source de cette instabilité de grosseur est l'utilisation d'un solveur de Riemann à une dimension alors que les flux calculés sont ceux d'un flot qui possède plusieurs dimensions. Quand un choc plan est aligné avec la grille, dans la direction transverse au front de choc, la dissipation emportée par le flux est trop faible. Cela implique que dans cette direction il y a une croissance



(a) Schéma de la grille perturbée



(b) ρ

FIG. 5.11 – Test de Quirk et instabilité de grosseur : schéma de la grille perturbée (a) et évolution des contours de densité de l'onde de choc instable (b). Une perturbation à l'échelle de la grille permet la croissance de l'instabilité numérique. L'instabilité de grosseur se reconnaît par sa forme caractéristique triangulaire. Issue de Robinet et al. [2000].

rapide des perturbations de petites amplitudes et qu'elles ne peuvent en aucun cas être atténuées. Une solution pour empêcher la croissance de ces perturbations est d'ajouter de la dissipation numérique à celle déjà présente dans la direction transverse [Sutherland et al., 2003]. Dans le code Athena3D, Stone et al. [2008] utilisent une version particulière de la *correction H* décrite dans Sanders et al. [1998] qui permet d'identifier les chocs et d'ajouter la dissipation appropriée. Une autre solution, et c'est celle qui nous intéresse particulièrement, consiste à utiliser un solveur HLLE (avec un schéma en-avant) à la place du solveur HLLC car sa dissipation numérique est plus importante et il est réputé pour ne pas développer cette instabilité numérique [Robinet et al., 2000].

Pour résoudre le problème de l'instabilité de grosseur, nous avons donc choisi d'utiliser le solveur de Riemann de type HLLE. Nous voudrions insister sur le fait que ce solveur n'est pas l'unique solution de ce problème mais il est juste adapté dans cette situation. En effet le choix d'un solveur dépend fortement du problème physique étudié. Le solveur HLLE peut aussi engendrer des problèmes numériques dans d'autre cas physiques (par exemple, il vaut mieux utiliser le solveur HLLC pour les simulations de jets de matière [Mignone et al., 2004]).

Il est donc plus approprié pour l'étude que nous voulons réaliser mais ce n'est pas toujours le cas. Pour la suite de notre étude de l'instabilité de Vishniac, nous avons utilisé le solveur HLLE et nous voyons l'effet de ce changement sur la partie droite de la figure 5.10 représentant les instants $t = t_0 + 2 \times 10^3$ ans (Fig. 5.10(b)) et $t = t_0 + 6 \times 10^3$ ans (Fig. 5.10(d)) de l'évolution de la coquille perturbée. Les fluctuations et autres effets numériques disparaissent effectivement avec ce nouveau solveur et nous laisse le champ libre pour étudier l'instabilité de Vishniac.

5.8 L'étude des résultats numériques

Nous allons à présent étudier l'effet de l'instabilité de Vishniac déclenchée par la perturbation sinusoïdale. Nous allons regarder son action sur la densité, la vitesse, la pression, la position du front de choc, l'écart spatial et en densité, et finalement sur la variation de masse d'une région donnée et cela pour les deux géométries dans lesquelles nous avons modélisé une coquille perturbée. Nous commençons par étudier la géométrie plan-parallèle car c'est le cas pour lequel nous avons testé le plus grand nombre de jeux de paramètres et pour lequel nous avons pu suivre l'évolution des différentes variables de la manière la plus aisée. Et nous étudierons ensuite la géométrie sphérique afin de comparer les résultats obtenus dans ces deux géométries.

5.8.1 La géométrie plan-parallèle

L'analyse des résultats en géométrie plan-parallèle représente la modélisation la plus facile à mettre en place pour l'étude de l'instabilité. Nous rappelons que la perturbation spatiale que nous avons introduite ne porte que sur la variable y. Ainsi dans cette géométrie, il est plus aisé de suivre le déclenchement de l'instabilité et l'évolution des oscillations engendrées par la déformation initiale. C'est pour ces raisons que parmi les 2500 simulations effectuées sur le supercalculateur Titane, environ 1500 correspondent à l'étude de l'instabilité dans la géométrie plan-parallèle. Nous présentons maintenant l'étude morphologique de la coquille fine dans cette géométrie.

L'étude morphologique de la coquille fine

Nous étudions d'abord l'effet de l'instabilité *via* les changements morphologiques apparaissant sur la coquille fine et cette démarche va nous permettre de bien comprendre le fonctionnement de ce processus. Pour la simulation que nous présentons dans cette partie, nous avons introduit la perturbation sinusoïdale sur la coquille non perturbée au temps $t_0 = 3 \times 10^3$ ans et nous laissons évoluer l'instabilité jusqu'à $t = t_0 + 3 \times 10^4$ ans. Dans ce modèle numérique, les paramètres sont fixés en accord avec la théorie. En effet, l'amplitude A vaut 5% de la longueur d'onde afin d'initialiser le régime linéaire de l'instabilité, le mode propre l est pris à 14 pour se situer sur le mode propre optimal de la théorie, la vitesse du front de choc est $V_s = 530$ km.s^{-1} ce qui

correspond au nombre de Mach $\mathcal{M} \approx 5$ (la vitesse du son du milieu ambiant étant $c_s = 130$ km.s^{-1}) et l'indice adiabatique de la coquille est choisi à sa valeur quasi-isotherme $\gamma_2 = 1,1$. Ainsi nous nous sommes placés dans les conditions permettant théoriquement la croissance maximale de l'instabilité car le mode propre et l'indice adiabatique sont initialisés à leur valeur optimale. Nous donnons les résultats de simulation sur la densité et la vitesse transverse car ce sont deux grandeurs fluides qui nous apportent des informations différentes et complémentaires. Les instantanés de la carte de la densité sont illustrés par les figures 5.12, 5.13 et 5.14 et ceux de la carte de vitesse transverse par les figures 5.15, 5.16 et 5.17. Pour des raisons pratiques d'agencement des instantanés, j'ai choisi de présenter les différentes cartes avec les axes inversés (axe O_x en ordonné et O_y en abscisse) et la propagation du choc se fait selon l'axe O_x. Nous pouvons voir sur cette simulation l'effet de l'instabilité *via* le zoom d'une longueur d'onde sur l'axe O_y et d'une zone correspondante approximativement à l'épaisseur de la coquille. Ce zoom permet de voir les mouvements transverses de la matière s'effectuant dans la coquille et qui caractérisent l'instabilité. De plus, comme les conditions aux bords de la boîte sont périodiques sur l'axe O_y, l'étude d'une seule longueur d'onde apporte toute l'information nécessaire à la compréhension du fonctionnement de l'instabilité.

Nous complétons l'information donnée par les changements morphologiques de la coquille et qui sont visibles sur la carte de la densité, par l'étude des deux variables que nous avons introduites précédemment. L'écart spatial δx_s et en densité $\delta \rho_s$ nous apporte des informations sur la variation des extrema comme nous pouvons le voir sur la figure 5.18.

Nous détaillons plusieurs instants de la simulation afin de comprendre les différents processus apparaissant dans la coquille. À t_0, seul la perturbation spatiale est visible sur la carte de densité (voir Fig. 5.12), δx_s correspond à l'amplitude de la perturbation introduite initialement (voir Fig. 5.28(a)), et il n'y a pas de variation de densité ($\delta \rho_s = 0$, voir Fig. 5.28(b)) ni de vitesse transverse u_y (voir Fig. 5.15).

Au premier pas de temps d'évolution, c'est-à-dire mille ans après l'introduction de la perturbation ($t = t_0 + 10^3$ ans, voir Fig. 5.12), le processus prédit par la théorie agit sur la coquille fine : il y a une diminution de la matière sur la bosse (région $\mathcal{B}$) et une croissance de la densité dans la vallée (région $\mathcal{A}$). En effet, la perturbation spatiale que nous avons introduite permet à la région $\mathcal{B}$ d'être en avance par rapport au mouvement global du front de choc et à la région $\mathcal{A}$ d'être en retard. Cette différence de position engendre un écoulement transverse qui transporte la matière de la bosse vers la vallée. La conséquence de ce flot apparaissant dans la coquille est une diminution/accroissement de la densité dans les deux régions impliquées dans ce processus. Ce flux de gaz choqué est le plus fort au point maximal d'inflexion situé à mi-chemin entre la bosse et la vallée, comme nous pouvons le voir sur la carte de la vitesse transverse de la figure 5.15. Nous remarquons aussi sur u_y que les zones centrales de la vallée et de la bosse sont des points de vitesse transverse nulle et la vitesse des surdensités est donnée par la vitesse de propagation du choc u_x. À cet instant de déclenchement de l'écoulement transverse, l'écart en densité atteint la valeur $\delta \rho_s \approx 0,10$ ce qui correspond à une variation locale de la densité dans la coquille de l'ordre de 5%. Ainsi la perturbation spatiale conduit bien le système à une perturbation de la densité et des autres grandeurs fluides comme nous pouvons aussi le voir sur la figure 5.19. Cette première phase est le déclenchement de l'instabilité.

À $t = t_0 + 2 \times 10^3$ ans (voir Fig. 5.12), nous observons dans la région $\mathcal{A}$, la déformation de la structure dense centrale dans la direction de propagation de la coquille. Cet effet indique un changement dans le mouvement transverse de la matière dans la coquille fine. À ce temps nous remarquons un second effet qui est lié à cette

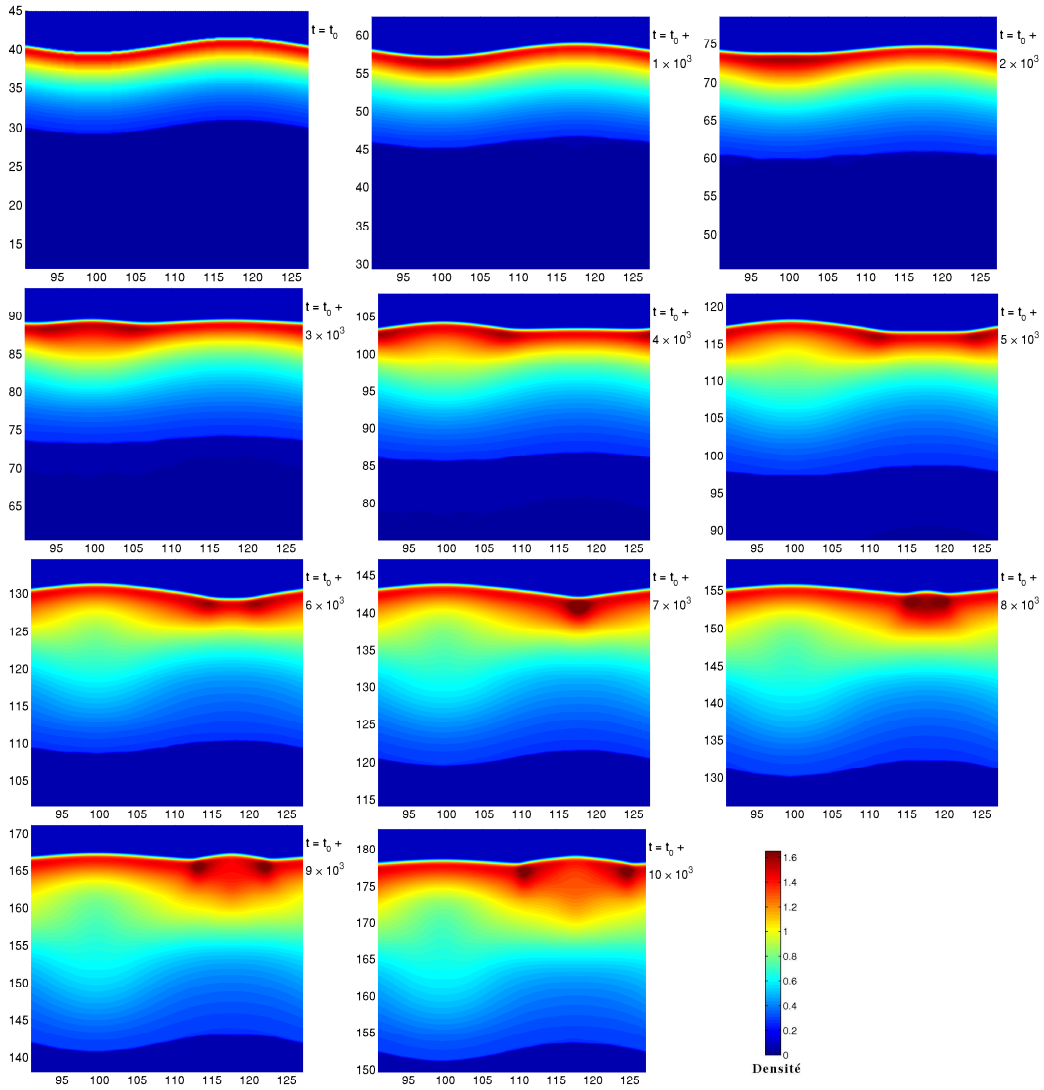


FIG. 5.12 – Effet de l'instabilité de Vishniac : instantanés de la carte de densité en 10^{-19} kg.m^{-3} de la coquille évoluant de $t = t_0$ à $t = t_0 + 10^4$ ans dans la géométrie plan-parallèle pour $A = 0,05\,\lambda$, $l = 14$, $\mathcal{M} \approx 5$ et $\gamma_2 = 1,1$. Les axes sont en 10^{15} m. Les instantanés sont ordonnés dans le temps et se déroulent de la figure en bas à gauche vers celle en haut à droite. La déformation spatiale de la coquille déclenche l'instabilité de Vishniac. La surstabilité, prédit par la théorie, prend ensuite le relais et permet la croissance de paquets de matière au cours du temps.

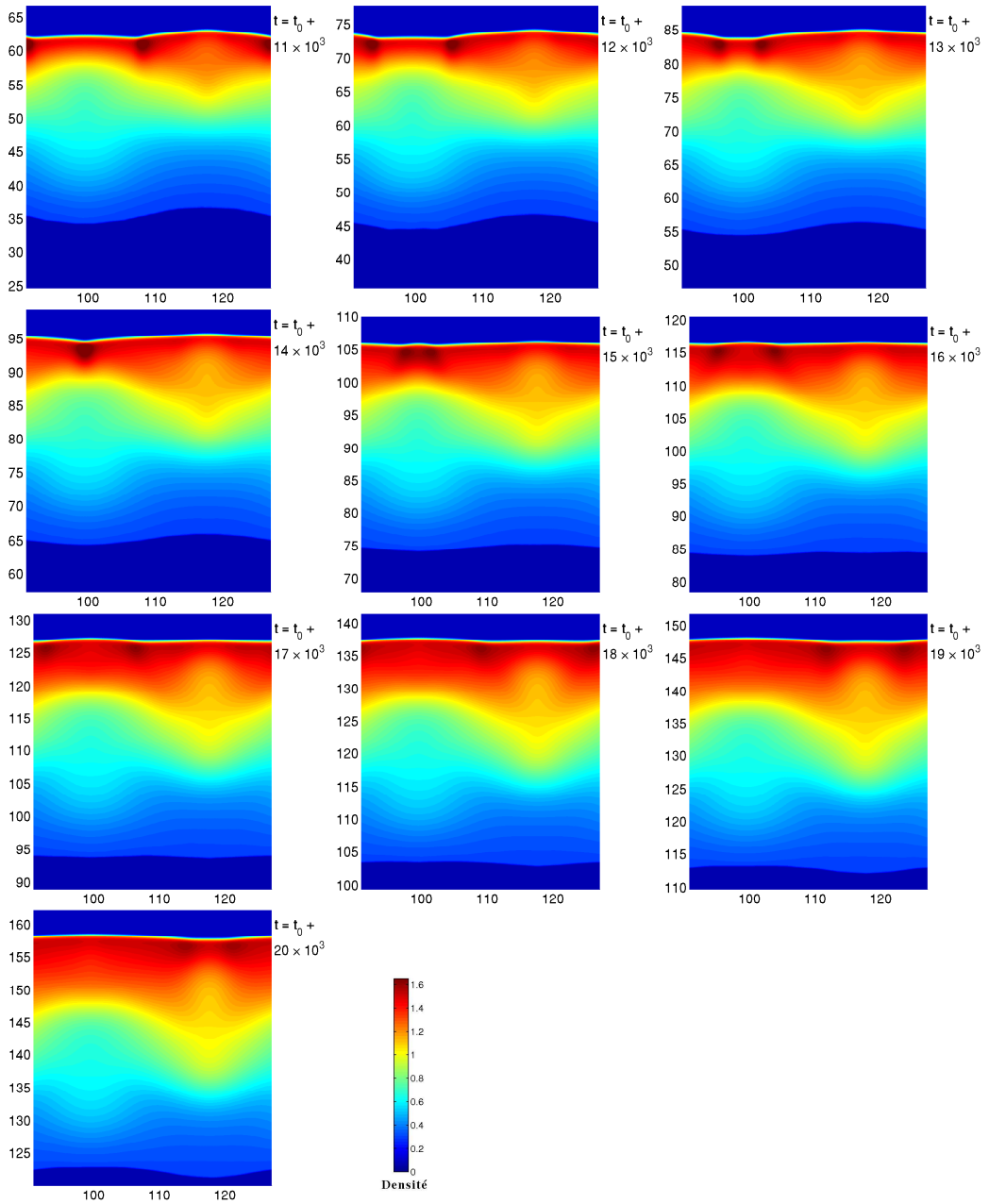


FIG. 5.13 – Effet de l'instabilité de Vishniac : instantanés de la carte de densité en 10^{-19} kg.m^{-3} de la coquille évoluant de $t = t_0 + 1,1 \times 10^4$ ans à $t = t_0 + 2 \times 10^4$ ans dans la géométrie plan-parallèle. Les axes sont en 10^{15} m. Le régime linéaire de l'instabilité permet la croissance de la perturbation sur quelques échanges d'état entre les deux régions. Mais il est suivi d'une saturation de l'instabilité rapidement traduite en atténuation de la perturbation. Suite de la figure 5.12.

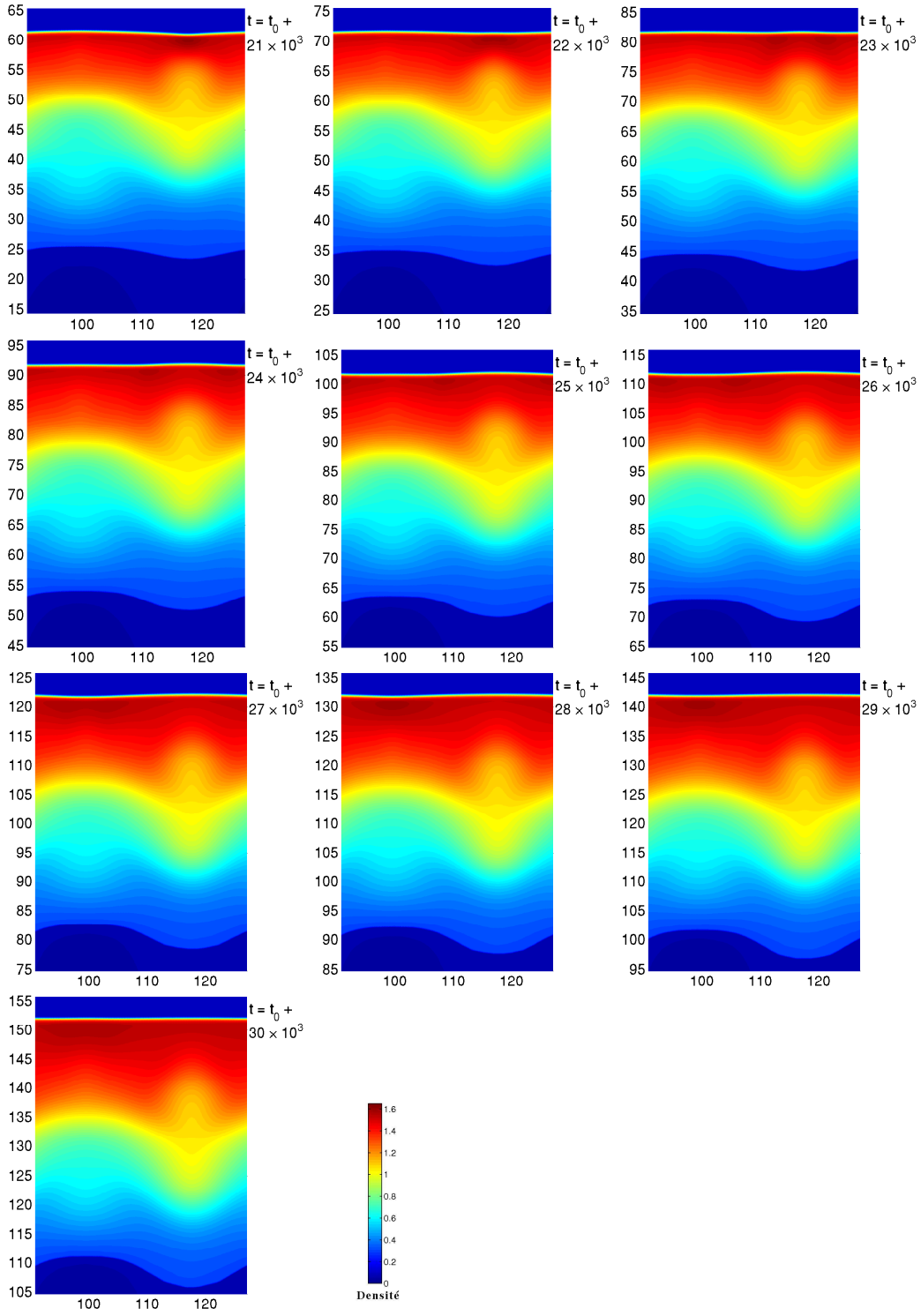


FIG. 5.14 – Effet de l'instabilité de Vishniac : instantanés de la carte de densité en 10^{-19} kg.m^{-3} de la coquille évoluant de $t = t_0 + 2,1 \times 10^4$ ans à $t = t_0 + 3 \times 10^4$ ans dans la géométrie plan-parallèle. Les axes sont en 10^{15} m. Finalement le front de choc redevient plan et la densité redevient uniforme à cette position (système stable). Mais la coquille garde une trace de l'action de l'instabilité. Suite de la figure 5.13.

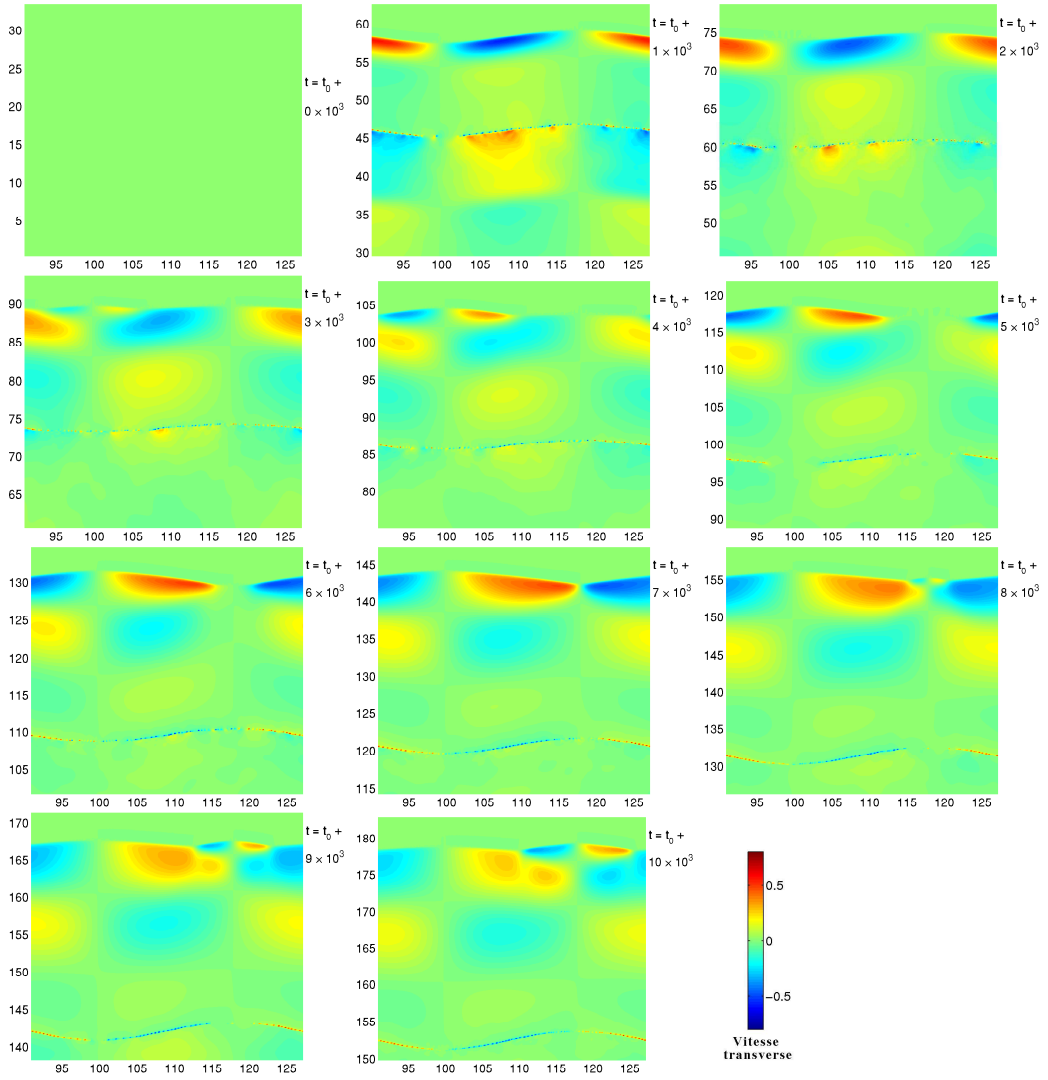


FIG. 5.15 – Effet de l'instabilité de Vishniac : instantanés de la carte de la vitesse transverse en 10^2 km.s^{-1} de la coquille évoluant de $t = t_0$ à $t = t_0 + 10^4$ ans dans la géométrie plan-parallèle. Les axes sont en 10^{15} m. Initialement, il n'y a pas de vitesse transverse. Lors du déclenchement de l'instabilité, le flot transverse devient fort au point maximal d'inflexion mais il est nul au niveau des surdensités/sous-densités.

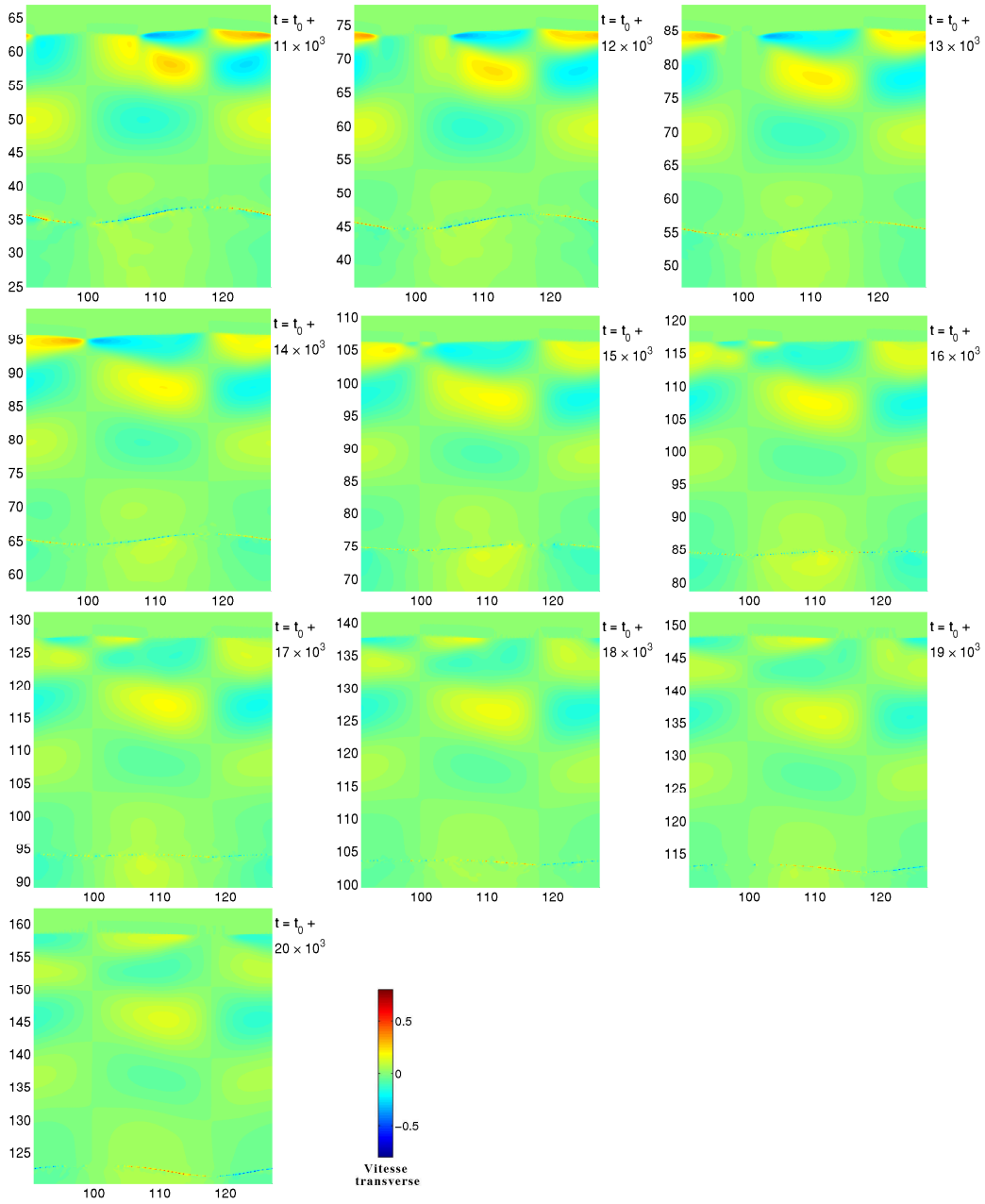


FIG. 5.16 – Effet de l'instabilité de Vishniac : instantanés de la carte de la vitesse transverse en 10^2 km.s^{-1} de la coquille évoluant de $t = t_0 + 1,1 \times 10^4$ ans à $t = t_0 + 2 \times 10^4$ ans dans la géométrie plan-parallèle. Les axes sont en 10^{15} m. Les extrema de la vitesse transverse diminuent au cours du temps, traduisant aussi une atténuation de l'instabilité. Suite de la figure 5.15.

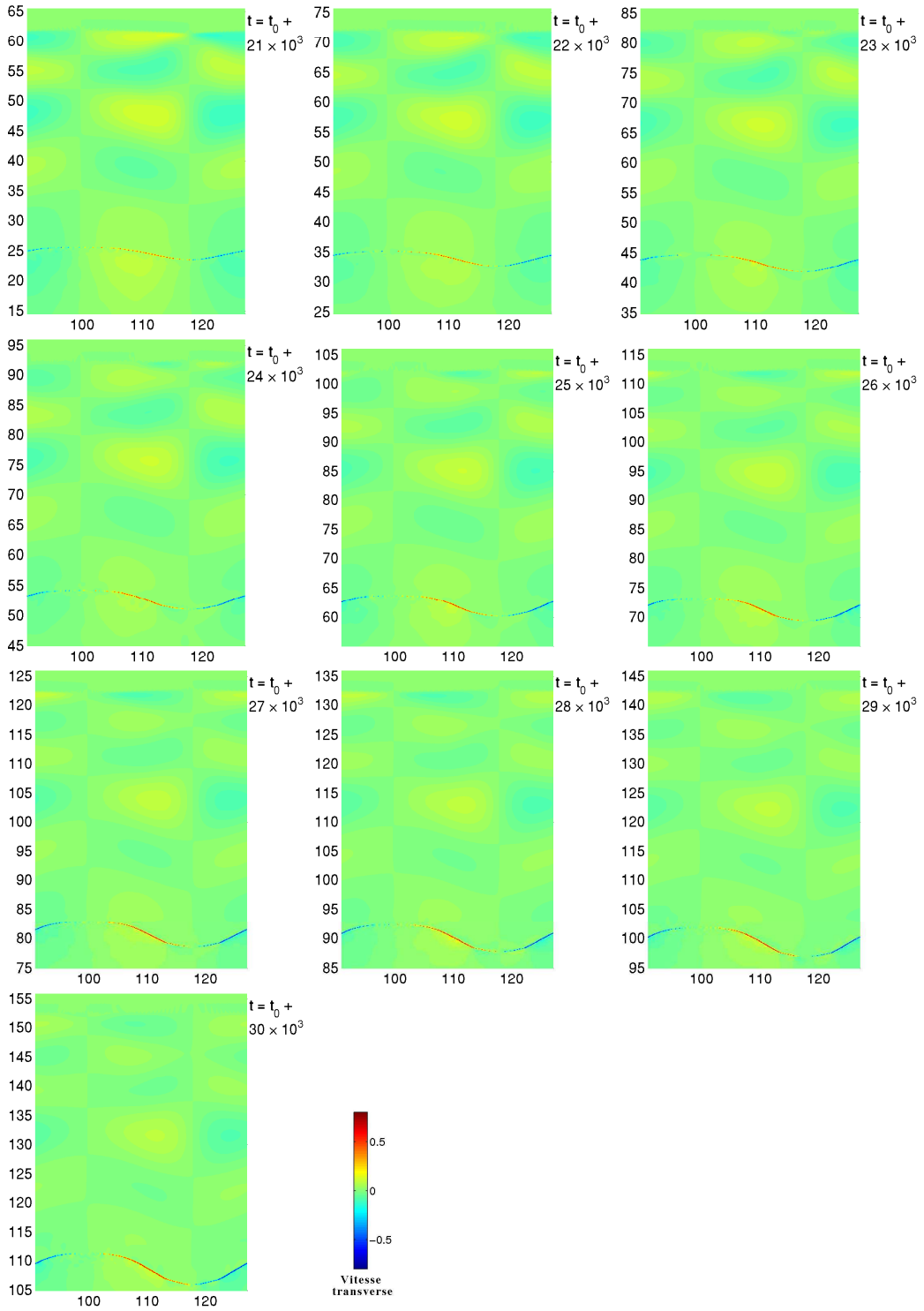
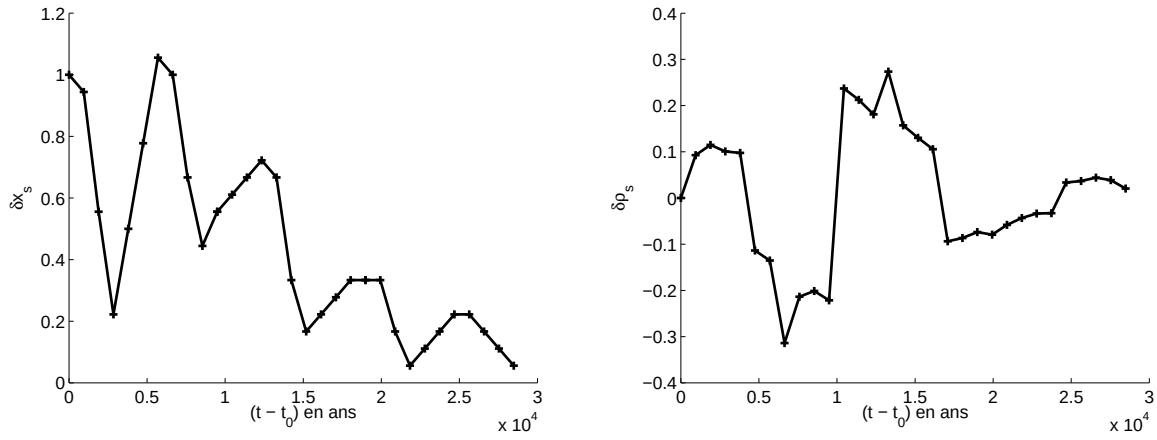


FIG. 5.17 – Effet de l'instabilité de Vishniac : instantanés de la carte de la vitesse transverse en 10^2 km.s^{-1} de la coquille évoluant de $t = t_0 + 2,1 \times 10^4$ ans à $t = t_0 + 3 \times 10^4$ ans dans la géométrie plan-parallèle. Les axes sont en 10^{15} m. Les fluctuations de la vitesse transverse sont très faibles lorsque le système est redevenu stable. Suite de la figure 5.16.



(a) δx_s (b) $\delta \rho_s$

FIG. 5.18 – Effet de l'instabilité de Vishniac : évolution de l'écart spatial δx_s et de l'écart en densité $\delta \rho_s$ en fonction de $(t - t_0)$ en géométrie plan-parallèle pour $A = 0,05\,\lambda$, $l = 14$, $\mathcal{M} \approx 5$ et $\gamma_2 = 1,1$. Initialement, l'écart spatial est égal à l'amplitude de la perturbation et l'écart en densité est nul. Ensuite les deux variables se mettent à osciller jusqu'à ce que la saturation et l'atténuation du processus de surstabilité apparaisse.

première constatation. Nous voyons sur la carte de densité qu'au niveau du front de choc, le centre de la région $\mathcal{A}$ rattrape son retard par rapport au centre de la région $\mathcal{B}$. En effet la région en retard est plus dense et un peu plus rapide (voir u_{tot} et u_y sur la figure 5.19) que la région en avance donc l'impulsion du paquet de matière central est plus grande. Cela a pour conséquence que la région $\mathcal{A}$ est moins ralentie que sa voisine par l'accrétion de la matière sur le front de choc et elle peut donc rattraper son retard. Cet instant est aussi celui de la première accumulation de matière maximale dans la région $\mathcal{A}$ comme indiqué par $\delta \rho_s$.

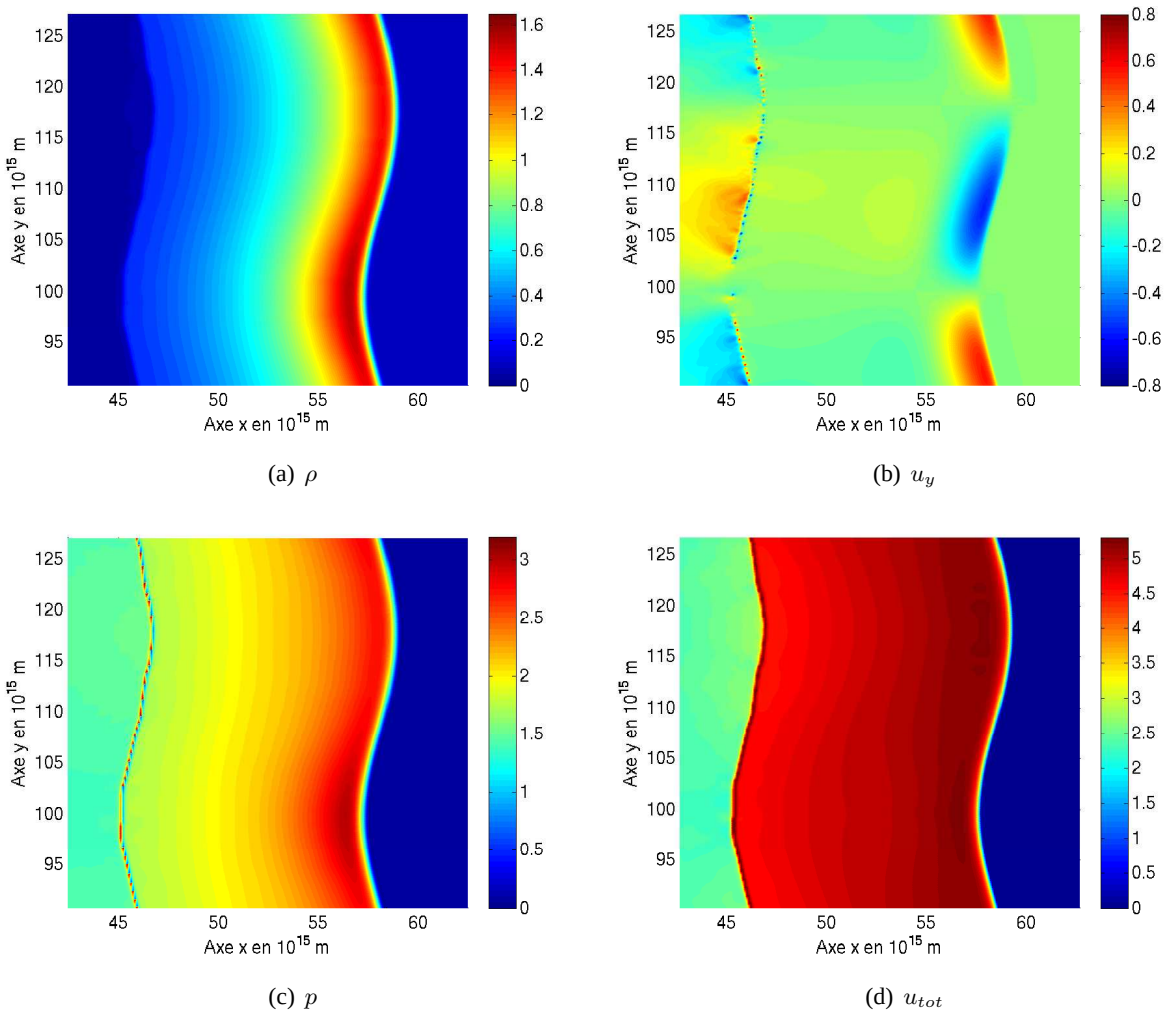
Nous comprenons mieux le changement d'état des régions à $t = t_0 + 3 \times 10^3$ ans (voir Fig. 5.12) quand le flot transverse change de direction. En effet la surdensité de matière de la région $\mathcal{A}$ se divise en deux paquets de matière et chacun de ces paquets se propage vers la région $\mathcal{B}$ la plus proche. Ainsi la région $\mathcal{A}$ perd sa matière et échange son état avec la région $\mathcal{B}$, la vallée devient une bosse et *vice-versa*. Ce processus oscillant qui porte à la fois sur la position du front de choc et sur les grandeurs fluides est le processus de surstabilité prédit par Vishniac [1983] que nous avons décrit dans le chapitre IV. L'échange d'état des deux régions est aussi caractérisé par l'écart spatial qui tend vers une faible valeur à cet instant. En effet, lorsqu'une région rattrape la position de l'autre, cette variable doit s'annuler. Mais comme dans le système, l'accumulation initiale de matière se divise en deux paquets qui présentent une surface circulaire, notre formulation de δx_s ne permet pas d'avoir une valeur nulle de l'écart spatial à cet instant (voir aussi l'instant suivant où se produit cet échange d'état à $t = t_0 + 9 \times 10^3$ ans).

Nous remarquons à $t = t_0 + 7 \times 10^3$ ans sur la carte de densité (voir Fig. 5.12) et sur l'écart en densité (voir Fig. 5.28(b)) que l'accumulation de matière dans la région $\mathcal{B}$ produit un paquet unique, plus dense, et plus petit en comparaison de la première accumulation de matière dans la région $\mathcal{A}$. Ainsi la densité maximale derrière le front de choc oscille avec une amplitude croissante comme prédit par la théorie. De plus, nous remarquons sur la carte de densité que l'épaisseur de la coquille croît aussi avec le temps. Cet épaississement est dû, comme

précédemment, à l'accrétion globale de la matière du milieu ambiant sur le front de choc.
À $t = t_0 + 14 \times 10^3$ ans, pour la seconde accumulation de matière dans la région $\mathcal{A}$, nous voyons que les maximums de l'écart spatial et de l'écart en densité sont plus petits qu'aux temps précédents, toutes régions confondues. L'instabilité est donc en train d'entrer dans un autre régime où les oscillations sont atténuées. De plus, nous remarquons sur la carte de densité (voir Fig. 5.13) que derrière le front de choc et dans la région $\mathcal{B}$, il apparaît une structure jaune qui n'existait pas dans les précédentes accumulations de matière. En effet la structure de la coquille garde à partir de cet instant une trace du flot transverse de matière. Ainsi après une phase linéaire de surstabilité, l'augmentation de l'épaisseur de la coquille et l'apparition de structures non-linéaires atténuent l'instabilité.
Plus tardivement dans l'évolution (voir Fig. 5.13) et jusqu'à la fin de la simulation (voir Fig. 5.14), nous observons une pleine atténuation de l'instabilité. Durant cette évolution finale, l'épaisseur de la coquille augmente de manière conséquente, le front de choc redevient plan et la densité des paquets de matière diminue traduisant une homogénéisation de la matière près du front de choc. Mais la morphologie de la coquille reste différente de la coquille initiale sans perturbation qu'on aurait laissé évoluer jusqu'au même temps final. Nous voyons donc que l'atténuation de l'instabilité par des effets physiques ne permet pas dans ce modèle à la coquille de se fragmenter. Afin de confirmer ou d'infirmer cette conclusion, nous devons tester d'autres jeux de paramètres afin de voir la dépendance de l'instabilité à ceux-ci.
Nous allons maintenant nous intéresser aux grandeurs fluides que nous n'avons pas étudié comme la pression et la vitesse totale de la coquille afin de voir l'impact de l'instabilité sur celles-ci.

Les autres grandeurs fluides

Nous vérifions l'effet de l'instabilité sur les autres grandeurs fluides au moment de la première accumulation de matière dans la région $\mathcal{A}$ (à $t = t_0 + 10^3$ ans). Nous représentons sur la figure 5.19 un zoom de la carte de densité, de vitesse de propagation, de vitesse transverse et de pression sur une longueur d'onde de la coquille. L'action de l'instabilité est visible sur chacun de ces instantanés, comme prédit par la théorie. Nous remarquons que la vitesse transverse u_y est une variable intéressante car elle nous donne des informations supplémentaires sur l'instabilité. Son comportement est inverse à celui des autres variables et elle nous donne une quantification directe des écoulements transverses. En effet, cette grandeur est nulle quand l'instabilité n'agit pas sur la coquille et elle est aussi nulle au centre de la vallée et de la bosse, là où se forme le paquet de matière et se vide la matière. Au point d'inflexion maximal (point milieu entre le centre de la région $\mathcal{A}$ et de la région $\mathcal{B}$), nous mesurons $u_{tot} \approx u_x = 520$ km.s^{-1} et $u_y \approx 60$ km.s^{-1} alors que dans la coquille, la vitesse du son moyenne est $< c_{s,i} > \approx 140$ km.s^{-1}. Ainsi dans la coquille, la matière se propage de la bosse vers la vallée de manière subsonique. Pendant le reste de la simulation, nous avons vérifié que la vitesse transverse n'est jamais plus grande que la vitesse locale du son. Ainsi l'atténuation de l'instabilité n'est pas due à un flot transverse supersonique, comme décrit par Mac Low & Norman [1993] qui avaient observé dans leurs simulations du régime non-linéaire forcé la propagation de chocs transverses dans la coquille fine.



(a) ρ (b) u_y

(c) p (d) u_{tot}

FIG. 5.19 – Effet de l'instabilité de Vishniac : zoom d'une longueur d'onde de la coquille de la carte de densité (a) (en 10^{-19} kg.m^{-3}), de la vitesse transverse (b) u_y (en 10^2 km.s^{-1}), de la pression (c) (en 10^{-9} Pa) et de la vitesse de propagation u_{tot} (d) (en 10^2 km.s^{-1}) à $t = t_0 + 10^3$ ans dans la géométrie plan-parallèle. L'instabilité de Vishniac agit sur les grandeurs fluides en augmentant/diminuant localement la valeur de ces quantités au niveau du front de choc.

Les conclusions de l'étude morphologique

Afin de conclure l'étude morphologique de l'action de l'instabilité de Vishniac sur une coquille de gaz choqué, nous récapitulons les quatre étapes de ce processus que nous avons observées sur les instantanés des simulations. En effet, nous avons vu dans l'ordre que le mécanisme de l'instabilité s'effectue par :

1. le déclenchement de l'instabilité par une déformation spatiale de la coquille ;
2. l'évolution en surstabilité qui provoque une oscillation d'amplitude croissante et de période croissante des grandeurs fluides et des grandeurs spatiales ;
3. la saturation de l'instabilité traduite par une amplitude constante des oscillations ;
4. l'atténuation de l'instabilité qui conduit au retour du front de choc à une morphologie plane et à des oscillations des grandeurs fluides d'amplitude très faible dans la coquille.

Après cette étude morphologique de la coquille fine en géométrie plan-parallèle, nous nous intéressons maintenant à l'évolution de la masse dans une région donnée et à la variation de masse qu'y en résulte. Ces variables vont nous permettre de quantifier précisément l'effet de l'instabilité, pour tous les jeux de paramètres que nous avons testé, afin de pouvoir comparer nos résultats avec les prédictions de l'étude théorique.

L'étude de la variation de masse

Les changements morphologiques de la coquille perturbée, qui subit une déformation spatiale, nous ont permis de comprendre le mécanisme de l'instabilité de Vishniac et nous ont donné la possibilité de valider notre modèle numérique. Notre modélisation, qui fait uniquement appel à une perturbation spatiale, permet bien de déclencher l'instabilité et le processus surstable, prenant le relais, nous permet d'obtenir plusieurs oscillations des grandeurs caractéristiques. Mais l'atténuation finale des oscillations pour le cas particulier que nous avons étudié nous a laissé dans le questionnement : l'instabilité de Vishniac est-elle toujours atténuée dans le système que nous avons choisi de modéliser, c'est-à-dire dans les ondes de souffle de type PDTS ? L'étude paramétrique que nous avons réalisée avec le supercalculateur Titane nous a permis de répondre à cette interrogation. Nous présentons dans cette partie les résultats des simulations pour lesquels nous avons fait varier l'amplitude de la perturbation, le mode propre de la perturbation, le nombre de Mach et l'indice adiabatique de la coquille. Nous réalisons la comparaison de l'effet des différents paramètres testés *via* la variation de masse d'une région spécifique. Mais nous nous attachons à d'abord étudier la masse par région.

1. *La masse par région*

   Nous étudions dans cette partie la masse par région définit dans la Sec. 5.5.2. Nous avons vu que cette quantité est l'intégrale de la densité à chaque pas de temps et elle est calculée sur un domaine correspondant à environ une demie longueur d'onde de la coquille. Nous étudions l'évolution des masses par région et celle de référence pour les conditions initiales de la simulation précédente réalisée en géométrie plan-parallèle : $A = 0,05\,\lambda$, $l = 14$, et $\mathcal{M} \approx 5$ et $\gamma_2 = 1,1$. Sur la figure 5.20, nous représentons l'évo-

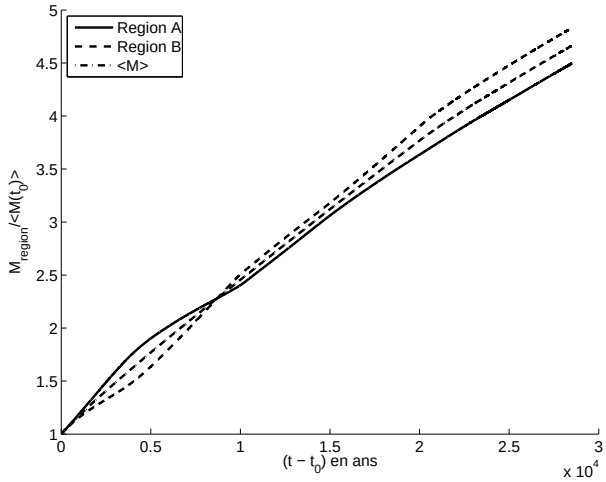


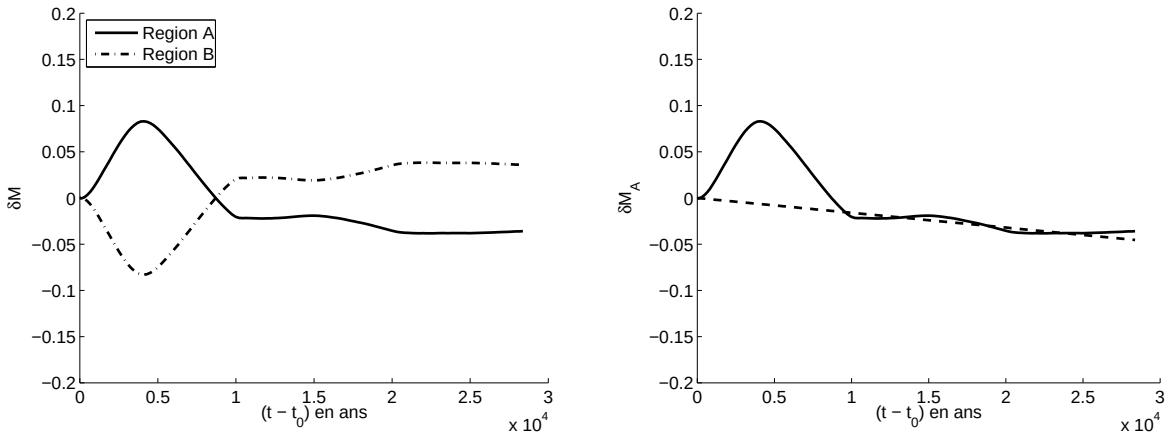
FIG. 5.20 – Evolution de la masse par région normalisée $M_{région} / < M(t_0) >$ et de la masse de référence normalisée $< M > / < M(t_0) >$ en géométrie plan-parallèle pour une amplitude $A = 0,05\,\lambda$, un mode propre $l = 14$, un nombre de Mach $\mathcal{M} \approx 5$ et un indice adiabatique $\gamma_2 = 1,1$. La masse par région fluctue autour de la masse de référence. L'évolution de la masse de référence est en générale celle d'une coquille non perturbée mais une faible déviation apparaît vers la fin de la simulation.

lution des masses $M_{\mathcal{A}}$ et $M_{\mathcal{B}}$ des deux régions et de la masse de référence $< M >$ que nous normalisons par la masse de référence à l'instant initial t_0.

Nous voyons que les trois variables ne suivent pas la même évolution. En effet, la masse de la région $\mathcal{A}$ est d'abord au dessus de la courbe de la masse de référence alors que la masse de la région $\mathcal{B}$ est en dessous. Puis cette tendance s'inverse et les masses des régions restent finalement dans cet état jusqu'à la fin de la simulation. Ainsi, par la mesure de la masse par région, nous avons déjà accès à une quantification de l'effet de l'instabilité qui modifie l'évolution des grandeurs caractéristiques. Nous avons vérifié que l'évolution de la masse de référence $< M >$ est la même que celle de la masse M_{coq} d'une coquille qui n'a pas été perturbée et qui s'est propagée jusqu'à $t_f = t_0 + 3 \times 10^4$ ans. Toutefois, vers la fin de la simulation, nous avons mesuré qu'une déviation s'amorce et nous verrons juste après la raison de cet écart entre les masses $< M >$ et M_{coq}. Malgré ce point, la masse de référence est une quantité bien appropriée pour étudier l'instabilité et nous allons l'utiliser pour calculer la variation de masse afin d'obtenir les fluctuations fines causées par l'action de l'instabilité.

2. *La variation de masse*

Nous représentons sur la figure 5.21, l'évolution de la variation de masse δM définit dans la Sec. 5.5.2 pour les deux régions précédentes. Nous expliquons la correspondance qui existe entre la variation de masse et la visualisation directe de l'instabilité *via* les changements morphologiques mesurés sur les cartes de densité et de vitesse transverse. Nous remarquons d'abord, sur la figure 5.21(a), que l'évolution de la variation de masse des deux régions est symétrique : $\delta M_{\mathcal{A}} = -\delta M_{\mathcal{B}}$. Cela s'explique par la nature même du processus de surstabilité qui induit un échange d'état des régions voisines. Nous voyons ensuite qu'à $t = t_0$, comme la perturbation initiale de la coquille est seulement une déformation spatiale,



(a) $\delta M_{région}$ (b) $\delta M_{\mathcal{A}}$

FIG. 5.21 – Variation de masse des deux régions (a) et seulement de la région $\mathcal{A}$ (b) en géométrie plan-parallèle pour une amplitude $A = 0,05\,\lambda$, un mode propre $l = 14$, un nombre de Mach $\mathcal{M} \approx 5$ et un indice adiabatique $\gamma_2 = 1,1$. L'évolution de la masse des deux régions est symétrique par rapport à l'axe des abscisses. Une oscillation de la variation de masse d'une région correspond à une période temporelle de la surstabilité. Mais elle ne correspond pas aux variations locales des grandeurs fluides qui sont caractérisées par les paquets de matière. À partir de $t \approx t_0 + 10^4$ ans, les oscillations de la variation de masse de la région $\mathcal{A}$ décroissent en suivant une pente négative à cause de l'effet déviant.

les masses des deux régions sont nulles. La variation de masse atteint un extremum à $t = t_0 + 4,2 \times 10^3$ ans, ce qui correspond, sur les autres grandeurs que nous avons étudiées (carte de densité, carte de vitesse transverse, écarts spatial et en densité), à la sortie des paquets de matière de la région $\mathcal{A}$. Ainsi nous comprenons que la croissance de $\delta M_{\mathcal{A}}$ (décroissance de $\delta M_{\mathcal{B}}$) durant cette période est due à l'accumulation de la matière dans la vallée (dépeuplement sur la bosse). Mais la croissance de $\delta M_{\mathcal{A}}$ est aussi due à l'accumulation de la matière sur les deux paquets (les sous-produits de la division de l'accumulation unique dans la vallée) alors qu'ils se déplacent de manière transverse dans la coquille en direction de la région voisine tandis que la région $\mathcal{B}$ se vide toujours (voir les vitesses transverses en opposition à $t = t_0 + 4 \times 10^3$ ans de la figure 5.15). À $t = t_0 + 8,9 \times 10^3$ ans, nous mesurons que $\delta M_{\mathcal{A}} = \delta M_{\mathcal{B}} = 0$ ce qui indique que la matière s'est accumulée dans la région $\mathcal{B}$ (dans l'ancienne bosse) et que l'accumulation unique s'est divisée en deux paquets qui sont repartis vers la région $\mathcal{A}$. Le système retourne donc au remplissage de la région $\mathcal{A}$ comme au début de la simulation. Ainsi une oscillation de la variation de masse correspond à une période temporelle de la surstabilité. Sur cette période d'évolution linéaire de la perturbation, nous quantifions l'effet de l'instabilité. Avec les conditions que nous avons introduites, la première oscillation engendrée par le processus de surstabilité fait varier localement la masse de l'ordre de $8,5\%$ au maximum par rapport à la masse de référence. Nous remarquons aussi que jusqu'à $t = t_0 + 8,9 \times 10^3$ ans, c'est la masse de la région $\mathcal{A}$ qui est plus importante. Mais après cette tendance s'inverse d'où l'égalité entre la masse des régions $\delta M_{\mathcal{A}} = \delta M_{\mathcal{B}} = 0$ que nous observons. Il y a donc un décalage entre les variations locales de la densité (les paquets de matière) et la variation de masse d'une région qui prend aussi en compte la masse de l'onde de souffle à l'arrière de la coquille. Nous

remarquons ensuite, pour les deux régions, qu'à partir de $t \approx t_0 + 10^4$ ans, la deuxième oscillation de δM n'est plus symétrique par rapport à l'axe des abscisses et elle suit une pente croissante/décroissante en fonction de la région considérée. Relativement à cette droite, la deuxième oscillation est plus petite que la première (voir $\delta M_{\mathcal{A}}$ sur la figure 5.21(b)), ce qui traduit une atténuation de la perturbation, comme nous l'avons déjà observé sur l'écart spatial et sur l'écart en densité. Ce résultat est en accord avec la conclusion que nous avons faite sur l'atténuation de l'instabilité qui est due à l'épaississement de la coquille. Le régime linéaire de l'instabilité de Vishniac est donc actif sur une oscillation de variation de masse (de $t = t_0$ à $t \approx t_0 + 10^4$ ans), c'est-à-dire pendant une courte période de l'évolution du RSN dans la phase radiative. Pour la suite de l'évolution, les variations de δM suivent un autre régime qui est contrôlé par l'effet déviant. Nous l'avons nommé ainsi car cet effet est dû à une déviation de la masse de référence qui doit normalement évoluer selon la loi auto-semblable. Cette déviation semble être induite par la formation des structures non linéaires que nous avons vu sur la carte de densité. Cela a pour conséquence que $\delta M_{\mathcal{A}}$ et $\delta M_{\mathcal{B}}$ oscillent en suivant une pente décroissante/croissante. Nous verrons que cet effet déviant n'apparaît pas pour tous les jeux de paramètres (pour les faibles nombres de Mach et les faibles modes propres) et il donc quand même possible d'étudier l'effet de l'instabilité en géométrie plan-parallèle.

Ainsi, pour extraire des informations sur le mécanisme de l'instabilité, c'est-à-dire sur sur son déclenchement et sur le processus de surstabilité, nous devons relever sur les courbes de la variation de masse différents types d'informations. Dans ce but, nous procédons à l'analyse des résultats de l'étude paramétrique selon les étapes suivantes :

1. nous regardons la pente de la première oscillation s_l qui quantifie le déclenchement de l'instabilité ;
2. nous nous intéressons à l'extremum de la première oscillation $|\delta M_{ext}|$ et au temps auquel arrive cet extremum $t(\delta M_{ext})$ car ces quantités nous donne des informations sur le processus de surstabilité ;
3. nous étudions la présence ou non d'une deuxième oscillation (voire d'une suite d'oscillations), et l'extremum de cette deuxième oscillation ce qui nous informe sur l'évolution de la perturbation (croissance, saturation ou atténuation) ;
4. nous regardons s'il y a apparition de l'effet déviant.

Nous réalisons cette étude des nombreuses simulations de manière générale c'est-à-dire en regardant l'effet des différents paramètres sur la variation de masse afin de conclure s'il existe des jeux de paramètres pour lesquels la perturbation a un comportement particulier et si elle peut croître jusqu'à permettre la fragmentation de la coquille. Comme nous avons pu constater sur la simulation précédente que les variations de masse pour les deux régions sont symétriques, nous concentrons notre analyse dans la partie suivante sur les oscillations de $\delta M_{\mathcal{A}}$ que nous appelons δM. Mais nous représentons aussi $\delta M_{\mathcal{B}}$ afin d'avoir une vue globale du système.

L'effet de l'amplitude

L'amplitude de la perturbation nous renseigne sur le type de régime dans lequel évolue l'instabilité. Nous voyons sur la figure 5.22 où nous avons fait varier ce paramètre que pour la première oscillation, plus l'amplitude initiale est grande, plus le maximum de δM est important et plus la pente de la courbe s_l est importante. Le

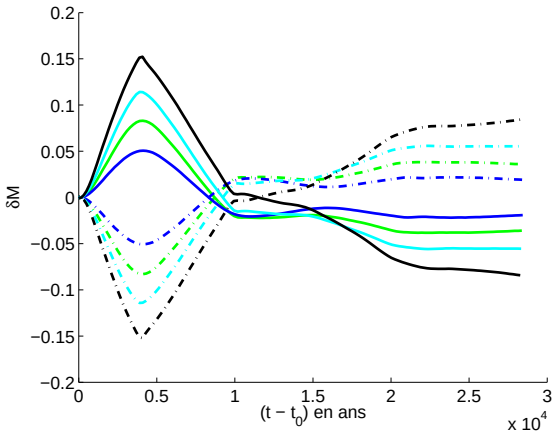


FIG. 5.22 – Effet de l'amplitude : variation de masse de la région $\mathcal{A}$ (trait plein) et de la région $\mathcal{B}$ (trait pointillé) en géométrie plan-parallèle pour une amplitude variable $A = 0,03\,\lambda$ (bleu) ; $A = 0,05\,\lambda$ (vert) ; $A = 0,07\,\lambda$ (bleu clair) ; $A = 0,10\,\lambda$ (noir), un mode propre $l = 14$, un nombre de Mach $\mathcal{M} \approx 5$ et un indice adiabatique $\gamma_2 = 1,1$. Quand l'amplitude augmente, les oscillations deviennent asymétriques près du maximum ce qui traduit l'entrée du système dans le régime non-linéaire de la perturbation.

déclenchement de l'instabilité étant traduit par la pente de la première oscillation, l'instabilité entre en jeu dans la dynamique du système de plus en plus fort quand l'amplitude de la perturbation croît. De plus, nous faisons remarquer que quand $A = 0,10\,\lambda$, la perturbation va théoriquement évoluer plus rapidement vers le régime non-linéaire. Et nous voyons que plus l'amplitude est grande, plus la courbe est piquée avec une asymétrie près du maximum (à $t \approx t_0 + 5 \times 10^3$ ans). Cela signifie que pour ces amplitudes nous initialisons bien le régime non-linéaire car, selon la théorie de l'instabilité, l'évolution d'une perturbation en régime linéaire décrit une oscillation bien régulière (voir Sec. 4.1.2). Nous remarquons aussi que le temps auquel la variation de masse s'annule $t(\delta M = 0)$ se produit de plus en plus tardivement quand A augmente. Cet effet est normal étant donné que plus l'amplitude est grande, plus le flux de masse est important et plus les paquets de matière mettent du temps à arriver dans la région voisine. Pour la deuxième oscillation, nous constatons qu'elle est très atténuée et qu'elle est du même type pour toutes les amplitudes si l'on prend en compte l'effet déviant qui fait suivre une pente décroissante à la variation de δM. Cet effet, que nous avons expliqué être induit par un écart de la masse de référence à la masse accrétée qui suit une loi auto-semblable, est plus fort pour les plus grandes amplitudes. Ce résultat confirme que la non-linéarité agit dès le début de la simulation pour $A \geqslant 0,07\,\lambda$ alors que pour $A = 0,03\,\lambda$, les oscillations sont faiblement déviées. Ces nombreuses remarques nous permettent de conclure sur la valeur de l'amplitude que nous allons utiliser comme référence pour la suite de l'analyse des résultats de l'étude paramétrique. Nous choisissons pour les comparaisons des simulations suivantes de fixer l'amplitude à

5 % de la longueur d'onde de la perturbation car cette valeur est correcte pour que la perturbation développe le régime linéaire de l'instabilité et à la fois elle permet un mécanisme plus effectif d'évolution de la perturbation. Mais nous utiliserons aussi pour certaines comparaisons la valeur plus faible $A = 0,03\,\lambda$ afin d'éliminer en grande partie l'effet déviant.
En résumé, nous avons :

$\Rightarrow$ Quand A augmente, δM_{max} augmente, s_l augmente, la courbe devient asymétrique près du maximum et l'effet déviant devient plus fort.
$\Rightarrow$ Pour tout A, $t(\delta M_{max})$ est le même, la seconde oscillation est plus petite que la première et la perturbation est atténuée.
$\Rightarrow$ La dernière amplitude permettant d'initialiser le régime linéaire est $A = 0,07\,\lambda$.

L'effet du mode propre

Nous faisons varier maintenant le mode propre de la perturbation pour essayer de déterminer si, comme le prédit la théorie, il y a un mode propre optimal qui permet une croissance maximale de l'instabilité. L'étude de ce paramètre est donc importante car, comme nous l'avons vu, le mode propre est fortement contraint par la théorie. Nous normalisons la masse de la région par ce paramètre afin de ne pas prendre en compte le domaine sur lequel l'intégration est effectuée. Nous voyons sur la figure 5.23 que la pente s_l de la première

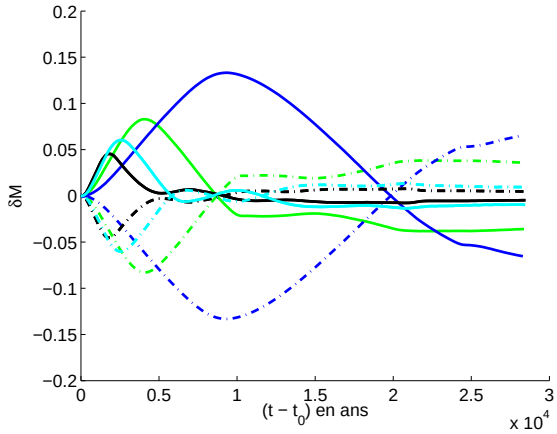


FIG. 5.23 – Effet du mode propre : variation de masse de la région $\mathcal{A}$ (trait plein) et de la région $\mathcal{B}$ (trait pointillé) en géométrie plan-parallèle pour une amplitude $A = 0,05\,\lambda$, un mode propre variable $l = 6$ (bleu) ; $l = 14$ (vert) ; $l = 22$ (bleu clair) ; $l = 30$ (noir), un nombre de Mach $\mathcal{M} \approx 5$ et un indice adiabatique $\gamma_2 = 1,1$. Quand le mode propre augmente, les oscillations sont plus rapidement atténuées car le mode propre théorique l_{theo} ressentit par le système va rapidement balayer le domaine des modes propres instables avant d'entrer dans le domaine des modes propres stables. Il n'y a donc pas de mode propre optimal.

oscillation dépend du mode propre. En effet, quand le mode propre augmente, la pente augmente aussi. Ainsi le déclenchement de l'instabilité est relié à la longueur d'onde de la perturbation car l'inflexion maximale, et donc

le flux transverse, est plus forte pour les grands modes propres. De plus, nous remarquons que plus le mode propre est grand (plus la longueur d'onde est petite) plus le maximum de δM est petit. Ainsi, malgré que la masse de la région soit normalisée par ce paramètre, la dépendance de l'instabilité au mode propre est explicite. Nous interprétons cet effet juste après. Nous voyons ensuite que la seconde oscillation débute à des temps de plus en plus tôt quand le mode propre diminue. Pour les modes propres les plus élevés, nous voyons aussi une troisième oscillation presque complètement atténuée. Ainsi, comme dans l'étude des différentes amplitudes, l'oscillation est toujours atténuée. Finalement, nous remarquons que l'effet déviant disparaît pour les grands modes propres car nous observons des oscillations décroissantes qui sont régulières et symétriques pour $l \geqslant 22$. Nous expliquons maintenant les différents effets que nous avons observés.

L'interprétation de l'effet du mode propre n'est pas évidente dans la géométrie plan-parallèle car le mode propre est relié au nombre d'onde k que nous avons introduit dans le paragraphe 5.2.2. Nous avons vu que, dans cette géométrie, la coquille est déformée par une perturbation qui garde ensuite une longueur d'onde fixe. Or, le front de choc avance au cours du temps et la relation $l = kx = kx_s$, qui relie le mode propre avec le nombre d'onde et la variable spatiale que nous avons supposée être la position du front de choc, reste constante car $l = 2\pi x_s(t_0)/\lambda$ dans nos simulations. Ainsi notre modélisation ne permet pas de conserver un nombre d'onde fixe au cours du temps et celui-ci va varier comme $k \propto 1/x_s(t)$. Or dans le modèle analytique de Ryu & Vishniac [1987], en géométrie plan-parallèle, le nombre d'onde est supposé constant et c'est la longueur d'onde (et donc le mode propre) qui doit aussi augmenter avec l'expansion du front de choc. Pour relier les deux modèles et donc pour pouvoir interpréter nos résultats, nous avons déterminé que, seulement à l'instant t_0, le nombre d'onde théorique k_{theo} est égal au nombre d'onde numérique k_{num}. Ainsi nous avons la relation :

$$k_{theo} = k_{num} \Leftrightarrow \frac{l_{theo}}{x_s(t)} = \frac{l_{num}}{x_s(t_0)} \Leftrightarrow l_{theo} = l_{num}\left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/3}, \tag{5.11}$$

où nous avons supposé que $x_s(t) = \beta_i(\gamma_2)(\mathcal{E}_3/\rho_1)^{1/3}t^{2/3}$ ce que nous avons vérifié, dans le chapitre IV, en étudiant l'écoulement de base du modèle de type PDTS qui suit une expansion de Sedov. Cette relation entre les modes propres théoriques et numériques a pour conséquence que, lorsque nous initialisons la perturbation avec le mode propre $l_{num} = 6$, le mode propre théorique ressentit par le système va balayer le domaine des modes propres instables dans le sens croissant puis il va entrer dans le domaine des modes propres stables d'où l'atténuation de l'instabilité pour tous les modes propres l_{num} testés. Ainsi, le maximum pris par la variation de masse pour $l_{num} = 6$ correspond au taux de croissance maximal, chaque mode propre instable théorique générant un taux de croissance plus ou moins important. En effet, nous mesurons $t(\delta M_{max}) = t_0 + 9,7 \times 10^3$ ans avec $t_0 = 3 \times 10^3$ ans et donc, d'après la relation 5.11, $l_{theo} \approx 16$ ce qui est très proche du mode propre théoriquement optimal $l = 14$ de cette géométrie. Ainsi nous pouvons interpréter les oscillations décroissantes observées sur la variation de masse par le déplacement de la valeur du mode propre ressentit par le système vers le domaine stable. Ce résultat permet d'interpréter le fait que nous n'observons pas de mode propre l_{num} optimal. Nous voyons donc que, pour cette étude numérique de l'instabilité de Vishniac, la modélisation en géométrie sphérique est plus pertinente pour comparer avec les résultats théoriques. Mais la modélisation en géométrie plan-parallèle nous apporte aussi des informations intéressantes sur le mécanisme de l'instabilité. Pour la suite de l'analyse de l'effet des différents paramètres, où nous devons fixer le mode propre, nous choisissons $l = 14$ afin d'être contraint par un temps de calcul raisonnable même si cette valeur n'a pas un intérêt spécifique dans les simulations numériques, comme nous venons de le démontrer.

En résumé, nous avons :

$\Rightarrow$ Quand l augmente, δM_{max} diminue, $t(\delta M_{max})$ diminue, s_l augmente et l'effet déviant devient moins fort.
$\Rightarrow$ Pour tout l, le mode propre théorique qui est relié au mode propre numérique augmente au cours du temps, la seconde oscillation est plus petite que la première et la perturbation est atténuée.
$\Rightarrow$ Il n'y a pas de mode propre optimal.

L'effet du nombre de Mach

Pour le troisième cas que nous avons testé, nous avons fait varier la vitesse du front de choc V_s qui est reliée au nombre de Mach $\mathcal{M}$. L'effet de ce paramètre sur le déclenchement de l'instabilité est plus difficile à déterminer. Lorsque nous changeons la vitesse du front de choc nous changeons aussi le profil de la densité (et des autres grandeurs fluides). En effet, la densité ρ_s présente au niveau du front de choc a une valeur, au cours du temps, plus ou moins proche de la limite théorique donnée par les relations de RH et l'épaisseur de la coquille change en fonction de l'instant auquel nous récupérons la coquille non perturbée. Pour éviter que ces processus interviennent dans l'analyse, nous normalisons la variation de masse par la valeur maximale de δM. Nous voyons sur la figure 5.24 que la pente de la première oscillation augmente quand le nombre de Mach augmente. Cet effet est normal car une vitesse élevée va accélérer le processus de déclenchement de l'instabi-

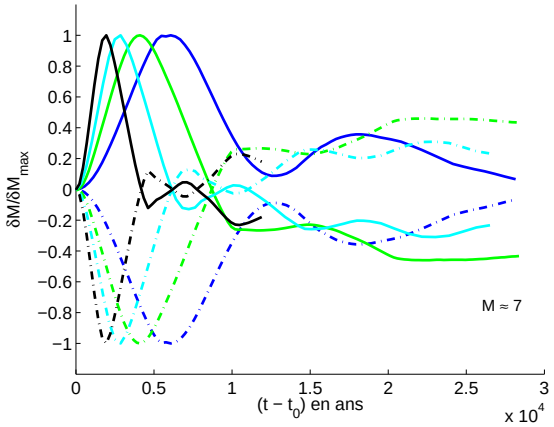


FIG. 5.24 – Effet du nombre de Mach : variation de masse normalisée de la région $\mathcal{A}$ (trait plein) et de la région $\mathcal{B}$ (trait pointillé) en géométrie plan-parallèle pour une amplitude $A = 0,05\,\lambda$, un mode propre $l = 14$, un nombre de Mach variable $\mathcal{M} \approx 3$ (bleu) ; $\mathcal{M} \approx 5$ (vert) ; $\mathcal{M} \approx 7$ (bleu clair) ; $\mathcal{M} \approx 10$ (noir) et un indice adiabatique $\gamma_2 = 1,1$. Quand le nombre de Mach augmente, l'effet déviant s'accentue. Il n'y a pas de nombre de Mach optimal.

lité. De plus et conformément à la remarque précédente, nous voyons que le système évolue plus rapidement quand le nombre de Mach est elevé. Nous observons que l'effet déviant apparaît peu pour les faibles nombre de Mach. Cette constatation ne va pas dans le sens des résultats de Mac Low & Norman [1993]. En effet, ils ont déterminé dans leurs simulations que le comportement le plus en accord avec la théorie est pour les nombres de

Mach élevés. Mais les deux valeurs du nombre de Mach qu'ils ont testé sont $\mathcal{M} = 108$ et $\mathcal{M} = 1420$ et elles sont donc très loin du maximum de la gamme de valeurs que nous avons étudiée. Pour la suite de l'analyse, nous fixons le nombre de Mach à $\mathcal{M} \approx 3$ pour que l'effet déviant n'intervienne pas trop fortement dans le système.
En résumé, nous avons :

$\Rightarrow$ Quand $\mathcal{M}$ augmente, $t(\delta M_{max})$ diminue, s_l augmente et l'effet déviant devient plus fort.
$\Rightarrow$ Pour tout $\mathcal{M}$, la seconde oscillation est plus petite que la première et la perturbation est atténuée.
$\Rightarrow$ Il n'y a pas de nombre de Mach optimal.

L'effet de l'indice adiabatique

Le dernier paramètre que nous avons testé pour la géométrie plan-parallèle est l'indice adiabatique de la coquille de gaz choqué, c'est-à-dire le paramètre le plus important du point de vue de la théorie. Et nous montrons dans cette dernière analyse de l'effet d'un paramètre sur la perturbation que cette quantité a aussi un rôle effectif sur le développement et l'évolution de l'instabilité dans les simulations numériques. Cette étude peut aussi être trouvée dans Cavet et al. [2010]. Afin de ne pas être perturbé dans l'analyse par l'effet déviant, nous étudions les oscillations de la variation de masse δM pour un grand mode propre ($l = 30$) et pour un faible nombre de Mach ($\mathcal{M} \approx 3$) d'après les résultats que nous avons obtenus précédemment. Nous voyons

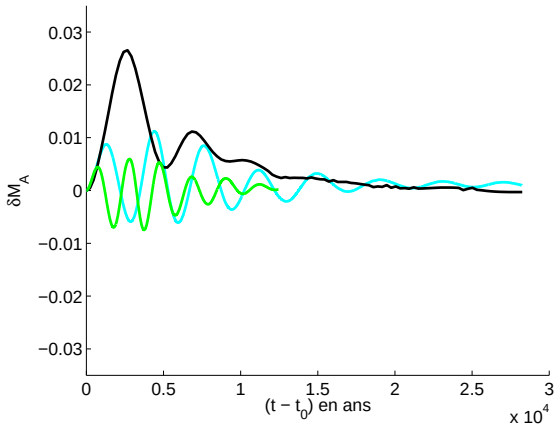


FIG. 5.25 – Effet de l'indice adiabatique : variation de masse de la région $\mathcal{A}$ en géométrie plan-parallèle pour une amplitude $A = 0,05\,\lambda$, un mode propre $l = 30$, un nombre de Mach $\mathcal{M} \approx 3$ et un indice adiabatique variable $\gamma_2 = 1,1$ (noir) ; $\gamma_2 = 1,4$ (bleu clair) ; $\gamma_2 = 5/3$ (vert). Quand l'indice adiabatique augmente, le déclenchement de l'instabilité devient moins efficace et les oscillations s'atténuent plus rapidement.

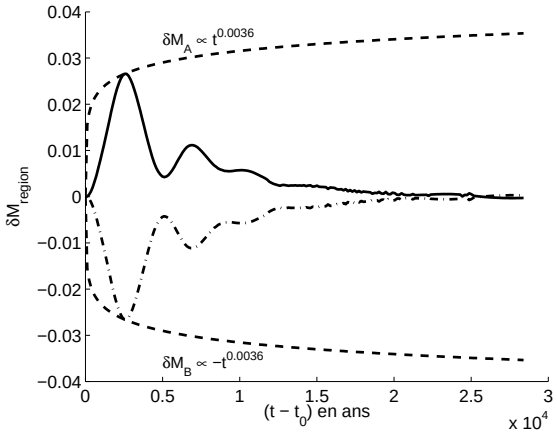
sur la figure 5.25, représentant seulement la variation de masse de la région $\mathcal{A}$ pour une raison de visibilité, que δM suit deux types de comportement en fonction de la valeur de l'indice adiabatique de la coquille : pour $\gamma_2 \geqslant 1,2$ et pour $\gamma_2 < 1,2$ nous observons deux types d'évolution. En effet, en fonction de ces domaines de valeur, l'évolution de la perturbation ne s'effectue pas de la même façon. Avant d'énumérer les différences

de comportement, nous remarquons que la pente de la première oscillation est la même pour les trois indices adiabatiques. En effet, le déclenchement de l'instabilité ne dépend pas de ce paramètre car il n'y a pas de changement morphologique de la coquille quand nous modifions la valeur de γ_2. Par contre, le maximum δM_{max} dépend de l'indice adiabatique car nous observons que la première oscillation correspondante à $\gamma_2 = 1,1$ prend une valeur maximale bien supérieure à celle des deux autres. Dans le cas où $\gamma_2 \geqslant 1,2$ et pour cette même oscillation, nous remarquons aussi, de manière logique, que $\delta M_{max}(\gamma_2 = 1,4) > \delta M_{max}(\gamma_2 = 5/3)$. Ainsi il existe un indice adiabatique plus efficace, comme prédit par la théorie. De plus, nous remarquons que, pour les indices adiabatiques les plus élevés, les oscillations sont centrées sur $\delta M = 0$ (alternance de valeurs positives et négatives) et la seconde oscillation est plus grande que la première, comme si une amorce de croissance de l'instabilité apparaissait. Alors que pour $\gamma_2 = 1,1$, les oscillations sont centrées sur $\delta M \approx 0,01$ (il n'y a pas de valeurs négatives sauf vers la fin de l'évolution) et la seconde oscillation est plus petite que la première traduisant une atténuation rapide de l'instabilité. Ces observations de la forme des oscillations nous permettent de dire que dans les cas des indices adiabatiques élevés, il y a un échange normal de masse entre les régions $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$. Mais dans le cas de l'indice adiabatique quasi-isotherme, l'asymétrie par rapport à l'origine que nous observons traduit le fait que la région $\mathcal{A}$ a toujours plus de masse par rapport à la région $\mathcal{B}$. Ce résultat s'explique par un changement de régime de l'instabilité dès la fin de la première oscillation ($t \simeq t_0 + 5 \times 10^3$ ans). Ainsi, l'instabilité n'évoluant plus selon le régime linéaire, celle-ci est fortement atténuée par un autre processus.
En résumé, nous avons :

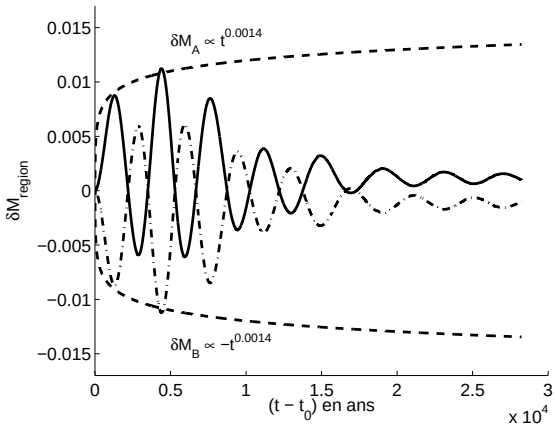
$\Rightarrow$ Quand γ_2 augmente, δM_{max} diminue et $t(\delta M_{max})$ diminue.
$\Rightarrow$ Pour tout γ_2, s_l est la même, l'effet déviant est le même, la seconde ou la troisième oscillation est plus petite que la première et la perturbation est atténuée.
$\Rightarrow$ Il y a un indice adiabatique plus efficace.

La fonction d'ajustement de la variation de masse

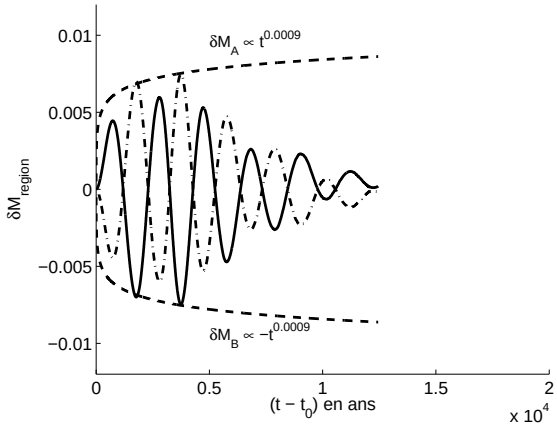
Dans le but de déterminer le taux de croissance de la perturbation, nous faisons un ajustement des extremums locaux de la variation de masse par une loi de puissance. Cette méthode nous permet d'estimer la partie réelle du taux de croissance $s_{m,r}$ de la perturbation. En effet, nous avons vu que les extremums de la variation de masse suivent la loi $\delta M_{max} \propto \pm t^{s_{m,r}}$ où la quantité $s_{m,r}$ est positive quand la perturbation croît et que le système est instable. Mais, comme dans toutes les simulations, nous avons observé l'atténuation de l'instabilité au bout de quelques oscillations, la partie réelle du taux de croissance va ensuite rapidement prendre une valeur négative et ainsi la mesure de cette quantité est imprécise sur la période croissante de la perturbation. Il est aussi parfois possible de déterminer la partie imaginaire $s_{m,i}$ du taux de croissance en ajustant la période des oscillations mais cette mesure est encore plus incertaine étant donnée l'évolution rapide du système vers le régime d'atténuation.
Nous faisons l'ajustement manuel des extremums locaux de δM en utilisant le graphe de la variation de masse qui présente le plus d'oscillations, c'est-à-dire pour un grand mode propre ($l = 30$) et pour un faible nombre de Mach ($\mathcal{M} \approx 3$). Nous réalisons cette détermination de $s_{m,r}$ pour les trois indices adiabatiques que nous



(a) $\gamma_2 = 1,1$

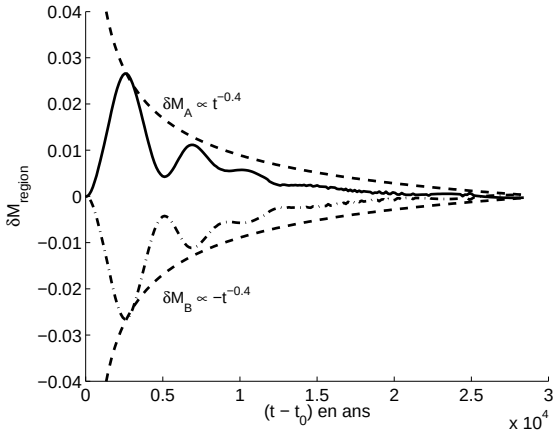


(b) $\gamma_2 = 1,4$

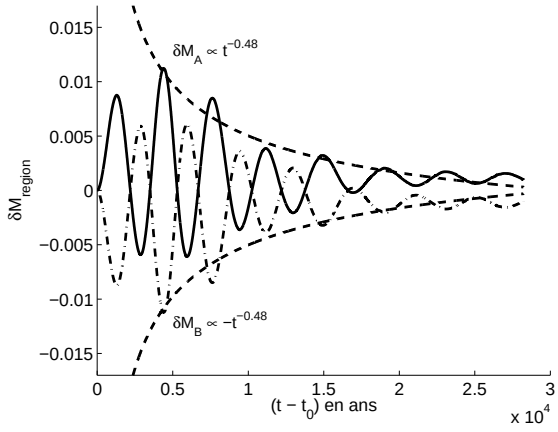


(c) $\gamma_2 = 5/3$

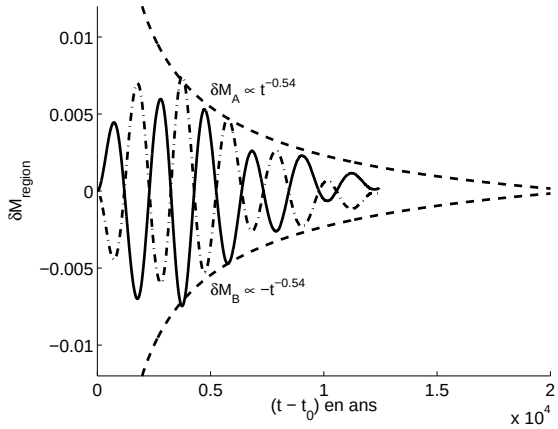
FIG. 5.26 – Détermination du taux de croissance de la perturbation : variation de masse de la région $\mathcal{A}$ (trait plein) et de la région $\mathcal{B}$ (trait pointillé) en géométrie plan-parallèle pour une amplitude $A = 0,05\,\lambda$, un mode propre $l = 30$, un nombre de Mach $\mathcal{M} \approx 3$ et pour les trois indices adiabatiques $\gamma_2 = 1,1$ (a) ; $\gamma_2 = 1,4$ (b) et $\gamma_2 = 5/3$ (c). Les extremums de la variation de masse, mesurés sur les deux premières oscillations, croient selon les lois $\delta M_{max}(\gamma_2 = 1,1) \propto t^{0,0036}$, $\delta M_{max}(\gamma_2 = 1,4) \propto t^{0,0014}$ et $\delta M_{max}(\gamma_2 = 5/3) \propto t^{0,0009}$. L'indice adiabatique quasi-isotherme engendre la plus grande croissance sur cette période. Ensuite l'atténuation de la perturbation entre en jeu et les extremums suivent une loi décroissante.



(a) $\gamma_2 = 1,1$



(b) $\gamma_2 = 1,4$



(c) $\gamma_2 = 5/3$

FIG. 5.27 – Détermination du taux d'atténuation de la perturbation : variation de masse de la région $\mathcal{A}$ (trait plein) et de la région $\mathcal{B}$ (trait pointillé) en géométrie plan-parallèle pour une amplitude $A = 0,05\,\lambda$, un mode propre $l = 30$, un nombre de Mach $\mathcal{M} \approx 3$ et pour les trois indices adiabatiques $\gamma_2 = 1,1$ (a) ; $\gamma_2 = 1,4$ (b) et $\gamma_2 = 5/3$ (c). Les extremums de la variation de masse, mesurés pendant la période d'atténuation, diminuent selon les lois $\delta M_{max}(\gamma_2 = 1,1) \propto t^{-0,40}$, $\delta M_{max}(\gamma_2 = 1,4) \propto t^{-0,48}$ et $\delta M_{max}(\gamma_2 = 5/3) \propto t^{-0,54}$. Pour les cas où $\gamma_2 \geqslant 1,2$, l'atténuation est plus forte que dans le cas quasi-isotherme.

avons utilisés dans l'étude précédente. Ainsi, l'ajustement passant par les extremums locaux nous permet de déterminer deux types de taux d'évolution : le taux de croissance et le taux d'atténuation de la perturbation. Nous avons représenté ces deux types de mesure sur les figures 5.26 et 5.27. Les axes de ces figures ne sont pas tous à la même échelle afin de pouvoir bien distinguer les oscillations de la variation de masse dans les deux régions.

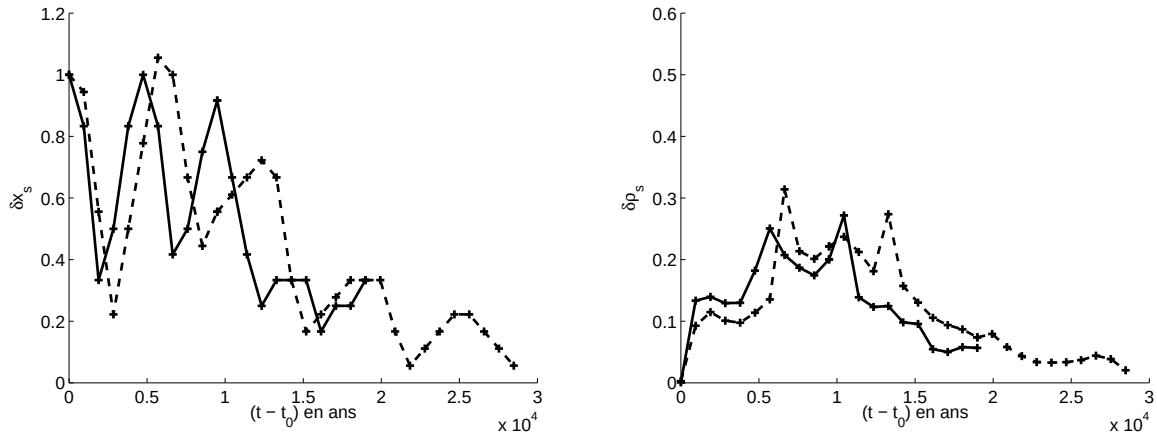
En ce qui concerne la période sur laquelle la perturbation est croissante (voir Fig. 5.26), les maximums de la variation de masse, mesurés sur les deux premières oscillations, permettent de déterminer la partie réelle du taux de croissance : $s_{m,r}(\gamma_2 = 1,1) \approx 3,6\times10^{-3}$, $s_{m,r}(\gamma_2 = 1,4) \approx 1,4\times10^{-3}$ et $s_{m,r}(\gamma_2 = 5/3) \approx 0,9\times10^{-3}$. Pour l'indice adiabatique $\gamma_2 = 1,4$ pour lequel la variation de masse est assez régulière, nous avons aussi estimé la partie imaginaire de la perturbation avec les deux premières oscillations et $s_{m,i} \approx 5,25$. Nous précisons que pour l'indice adiabatique quasi-isotherme, la partie réelle du taux de croissance est très difficile à mesurer étant donné que nous ne pouvons utiliser qu'une seule oscillation de δM. Ainsi ces valeurs sont des estimations fortes mais qui nous permettent de vérifier que l'indice adiabatique le plus faible engendre une perturbation dont la croissance est la plus élevée. Le déclenchement de l'instabilité est donc en accord avec la prédiction théorique portant sur ce processus même si la valeur de la partie réelle du taux de croissance reste bien en deçà de la valeur théorique.

Pour la période sur laquelle la perturbation décroît (voir Fig. 5.27), les extremums de la variation de masse permettent de déterminer que l'atténuation se fait avec un taux beaucoup plus grand que celui mesuré sur la croissance de la perturbation. En effet, nous avons évalué $s_{m,r}(\gamma_2 = 1,1) \approx -0,40$, $s_{m,r}(\gamma_2 = 1,4) \approx -0,48$ et $s_{m,r}(\gamma_2 = 5/3) \approx -0,54$. Ainsi la perturbation s'atténue encore plus rapidement vers la fin de son évolution pour les indices adiabatiques différents de la valeur quasi-isotherme.

La perturbation d'une onde de souffle quasi-isotherme

Afin de confirmer les résultats que nous venons d'obtenir dans l'étude paramétrique, nous réalisons une simulation de l'instabilité de Vishniac en utilisant comme écoulement de base une onde de souffle quasi-isotherme qui se rapproche plus du cadre théorique utilisé par Ryu & Vishniac [1987] (voir la figure 4.23(d) du chapitre IV). En analysant la simulation de cette onde de souffle uniforme, pour laquelle les indices adiabatiques sont fixés à $\gamma_3 = \gamma_2 = 1,1$ et dont les instantanés de la carte de densité sont visibles dans l'annexe C, nous voyons que l'instabilité est aussi atténuée dans ce cas. Ainsi la configuration que nous avons choisie pour réaliser l'étude paramétrique et qui différencie deux indices adiabatiques dans la coquille, n'est pas responsable de l'atténuation de l'instabilité.

Afin de mieux quantifier ce résultat, nous présentons sur la figure 5.28 la variation de l'écart spatial et en densité pour cette même simulation. Nous y superposons les résultats du modèle utilisé jusqu'à présent comme référence dans l'étude paramétrique ($A = 0,05\,\lambda$, $l = 14$, $\mathcal{M} \approx 5$ et $\gamma_3 = 5/3$ et $\gamma_2 = 1,1$, voir Fig. 5.18). Comme le front de choc n'est pas exactement à la même position dans les deux simulations où nous avons introduit la perturbation, le nombre de perturbations dans la boîte de simulation n'est pas exactement le même. Cela a pour conséquence que les simulations présentent quelques différences dans leur variations. Mais nous voyons que l'écart spatial et en densité de l'onde de souffle quasi-isotherme tendent aussi vers zéro et ainsi le



(a) δx_s (b) $\delta \rho_s$

FIG. 5.28 – Effet de l'instabilité de Vishniac : évolution de l'écart spatial δx_s (a) et de l'écart en densité $\delta \rho_s$ (b) en fonction de $(t - t_0)$ en géométrie plan-parallèle pour $A = 0,05\,\lambda$, $l = 14$, $\mathcal{M} \approx 5$ et $\gamma_3 = \gamma_2 = 1,1$. Les grandeurs caractéristiques d'une onde de souffle quasi-isotherme (trait plein) et d'une onde de souffle de type PDTS (trait pointillé) ont la même tendance. De la même manière que pour les simulations de l'étude paramétrique, la perturbation de l'onde de souffle uniforme est atténuée au cours du temps.

système rend compte d'une stabilisation de la perturbation.
Ce test nous a donc permis de confirmer, une fois de plus, que la perturbation ne croît pas indéfiniment et que le processus de surstabilité ne peut donc pas mener à la fragmentation de la coquille dans cette géométrie.

Les conclusions de l'étude de l'instabilité de Vishniac en géométrie plan-parallèle

En conclusion de l'étude paramétrique de l'instabilité de Vishniac en géométrie plan-parallèle, nous résumons les résultats que nous avons obtenus sur la variation de masse des régions $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$. Nous avons observé que :

$\Rightarrow$ le déclenchement de l'instabilité, quantifié par s_l, dépend de l'amplitude de la perturbation, du mode propre de la perturbation et du nombre de Mach. Ce résultat est logique étant donné que le déclenchement de la perturbation est lié à un effet dynamique ;
$\Rightarrow$ le comportement de la première oscillation, quantifié par δM_{max}, dépend de l'amplitude de la perturbation, du mode propre de la perturbation et de l'indice adiabatique. Il dépend aussi probablement du nombre de Mach mai nous n'avons pas pu vérifier cet effet. Le taux de croissance de la perturbation est donc sensible à de nombreux paramètres ;
$\Rightarrow$ la dernière amplitude permettant d'initialiser le régime linéaire est $A = 0,07\,\lambda$;
$\Rightarrow$ le mode propre théorique qui est relié au mode propre numérique augmente au cours du temps et ne permet pas d'obtenir un taux de croissance spécifique pour un mode propre donné.
$\Rightarrow$ il n'y a pas de mode propre et de nombre de Mach préférentiel mais il y a un indice adiabatique plus efficace.
$\Rightarrow$ l'effet déviant apparaît, dans les domaines de valeurs de paramètres que nous avons fixés, pour les grandes amplitudes, les petits modes propres, et les grandes vitesses ;
$\Rightarrow$ pour tous les jeux de paramètres que nous avons testés, la perturbation est atténuée.

Afin de vérifier les résultats que nous venons de présenter dans le cadre de la géométrie plan-parallèle, nous effectuons maintenant l'étude morphologique de l'onde de souffle de type PDTS perturbée en géométrie sphérique. Nous étudions aussi la variation de masse afin de voir comment oscillent les perturbations dans cette modélisation.

5.8.2 La géométrie sphérique

Nous avons vu dans la partie précédente, traitant les résultats obtenus en géométrie plan-parallèle, que l'instabilité de Vishniac est bien déclenchée par la déformation sinusoïdale que nous avons introduite à cet effet. Nous avons vu que la perturbation engendrée se développe dans la coquille de gaz choqué, croît, et s'atténue et ces différentes phases arrivent pendant l'évolution de l'onde de souffle de type PDTS dans un milieu ambiant uniforme. Nous avons aussi déterminé que la géométrie plan-parallèle présente des limites à la compréhension de l'instabilité de Vishniac qui sont dues aux hypothèses du modèle théorique auquel nous nous référons. Ainsi, afin de confirmer ou d'infirmer les résultats obtenus en géométrie plan-parallèle et de contourner les problèmes posés par cette géométrie, nous avons réalisé le même type de simulation que précédemment en géométrie sphérique. Nous présentons maintenant l'étude de l'évolution de la morphologie de la coquille fine dans ce contexte.

L'étude morphologique de la coquille fine

Comme précédemment, nous étudions d'abord l'effet de l'instabilité *via* les changements morphologiques apparaissant sur la coquille de gaz choqué. Pour la simulation que nous présentons, nous avons introduit la déformation sinusoïdale sur la coquille non perturbée au temps $t_0 = 7 \times 10^3$ ans et nous laissons évoluer l'instabilité jusqu'à $t = t_0 + 3 \times 10^4$ ans. Nous avons choisi des conditions initiales similaires à celles utilisées pour la simulation en géométrie plan-parallèle afin de pouvoir comparer ces deux modélisations. Dans ce modèle numérique, l'amplitude A est fixée à 5% de la longueur d'onde afin d'initialiser le régime linéaire de l'instabilité, le mode propre l est pris à 32 pour se situer près du mode propre optimal de la théorie, la vitesse du front de choc est $V_s = 570$ km.s^{-1} ce qui correspond au nombre de Mach $\mathcal{M} \approx 5$ et l'indice adiabatique de la coquille est choisi à sa valeur quasi-isotherme $\gamma_2 = 1,1$. Les instantanés de la carte de la densité sont visibles sur les figures 5.29, 5.30 et 5.31 et ceux de la carte de la différence de vitesse, sur les figures 5.32 et 5.33. Contrairement à la géométrie plan-parallèle, nous n'avons pas directement accès à la vitesse transverse u_T en géométrie sphérique. Ainsi nous étudions la différence de vitesse $(u_x^2 - u_y^2)$ afin d'avoir une information similaire. Nous avons représenté sur les instantanés le zoom de plusieurs longueurs d'onde de la perturbation initiale de la coquille afin de prendre en compte l'augmentation de λ au cours du temps et de bien voir les processus d'échange de matière entre les régions.

Nous voyons sur les figures 5.29 et 5.32 que, dès les premiers instants (à $t \approx t_0 + 10^3$ ans) et comme précédemment, la région de la vallée est le réceptacle du flux de matière transverse provenant de la région de la bosse. Ensuite, les paquets de matière formés dans la région $\mathcal{A}$ vont rattraper leur retard par rapport à la zone sous-dense de la région $\mathcal{B}$ (à $t \approx t_0 + 3 \times 10^3$ ans). À $t \approx t_0 + 4 \times 10^3$ ans, le processus de surstabilité est au même stade que dans le cas de la géométrie plan-parallèle : les régions $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ ont échangé leur état de vallée et de bosse et la matière de la région $\mathcal{A}$ se déplace vers la région $\mathcal{B}$. En accord avec ce que nous avons déjà observé, nous voyons qu'à $t \approx t_0 + 7 \times 10^3$ ans, la région $\mathcal{B}$ a commencé à se remplir. Par contre, à $t \approx t_0 + 10^4$ ans (voir Fig. 5.29), la matière de la région $\mathcal{B}$ semble rattraper son retard avec difficultés alors qu'à cet instant, en géométrie plan-parallèle, les paquets de matière se déplacent déjà vers la région $\mathcal{A}$. Ainsi, nous voyons que

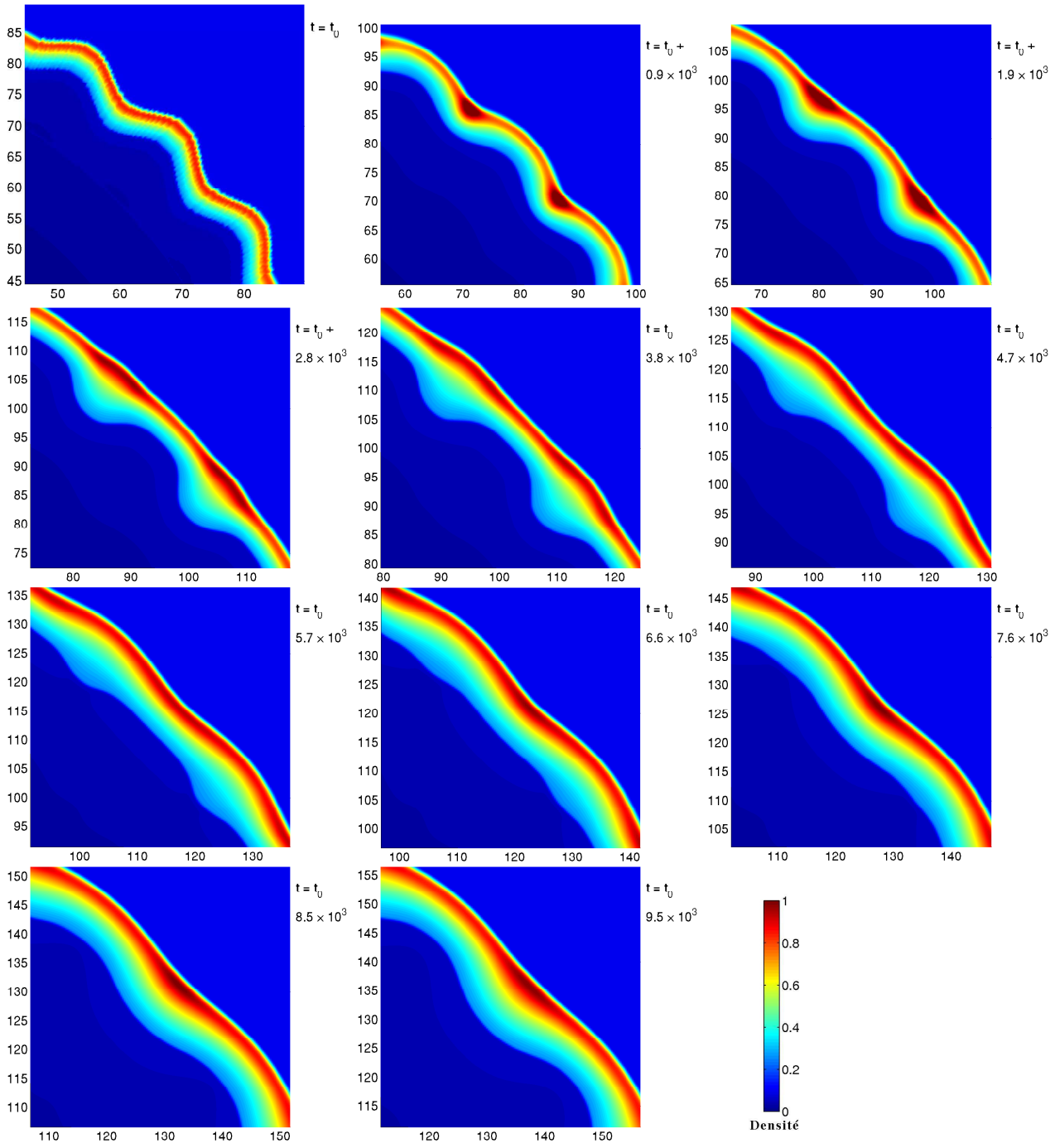


FIG. 5.29 – Effet de l'instabilité de Vishniac : instantanés de la carte de densité en 10^{-19} kg.m^{-3} de la coquille évoluant de $t = t_0$ à $t \approx t_0 + 10^4$ ans dans la géométrie sphérique pour $A = 0,05\,\lambda$, $l = 32$, $\mathcal{M} \approx 5$ et $\gamma_2 = 1,1$. Les axes sont en 10^{15} m. Les instantanés sont ordonnés de gauche à droite et de haut en bas. La région de la coquille perturbée qui est analysée contient plusieurs longueurs d'onde de la perturbation afin de prendre en compte l'augmentation de λ au cours du temps. La perturbation initiale évolue selon le régime linéaire de l'instabilité en permettant l'apparition du phénomène de surstabilité, comme en géométrie plan-parallèle. Le remplissage des régions $\mathcal{A}$ (les vallées initiales) s'effectue pendant la même durée qu'en géométrie plan-parallèle. Par contre, le remplissage des régions $\mathcal{B}$ (les bosses initiales) met plus de temps à se réaliser car l'expansion de l'onde de souffle augmente la longueur d'onde et donc le trajet que parcourent les paquets de matière.

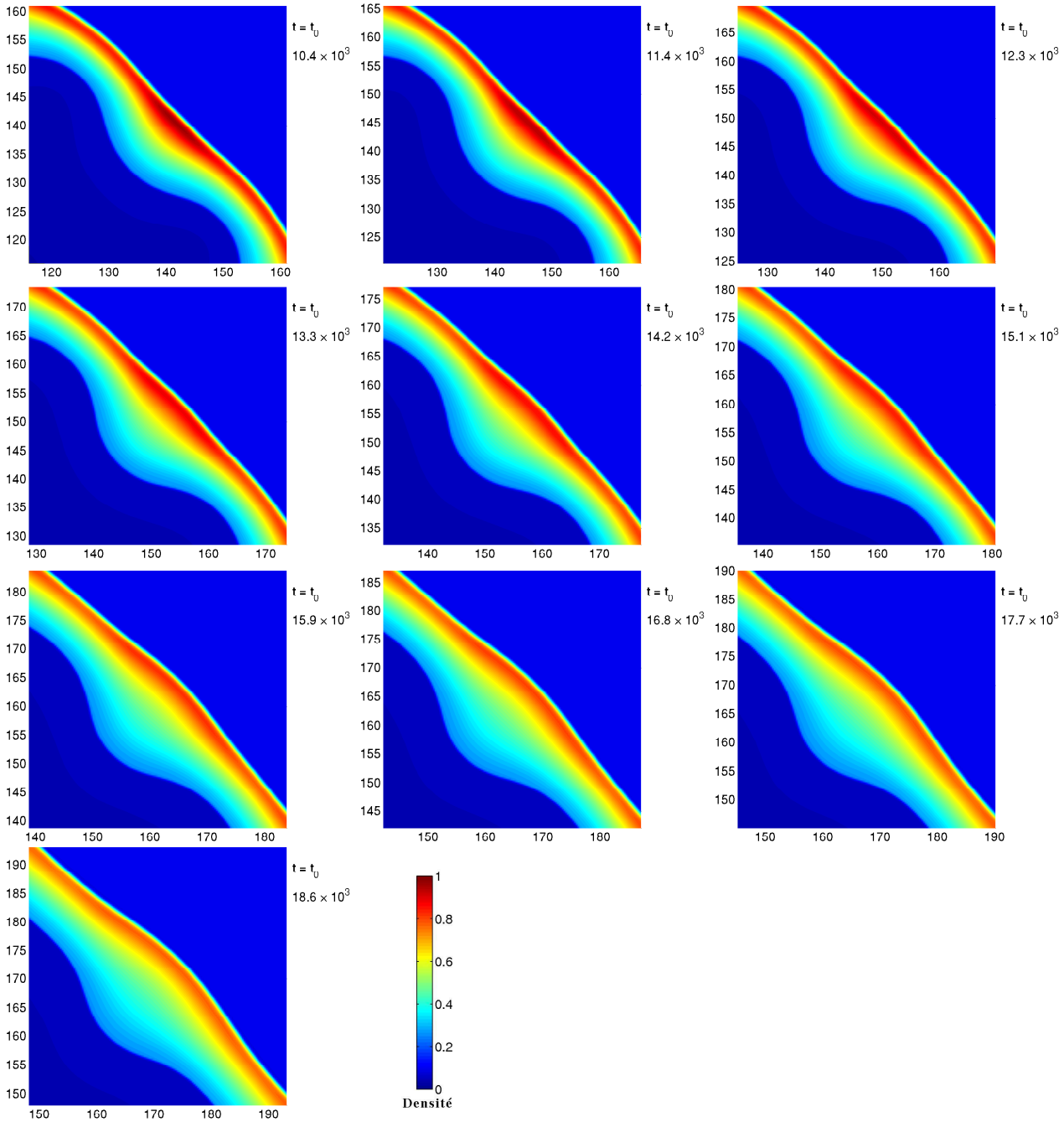


FIG. 5.30 – Effet de l'instabilité de Vishniac : instantanés de la carte de densité en 10^{-19} kg.m^{-3} de la coquille évoluant de $t \approx t_0 + 1,1 \times 10^4$ ans à $t \approx t_0 + 2 \times 10^4$ ans dans la géométrie sphérique. Les axes sont en 10^{15} m. La région $\mathcal{B}$ rattrape finalement son retard par rapport à la région $\mathcal{A}$. La longueur d'onde de la perturbation initiale augmente avec la propagation de l'onde de souffle ce qui rend le temps nécessaire à l'échange d'état entre les régions de plus en plus long. La densité globale diminue sur le front de choc en ralentissement. Suite de la figure 5.29.

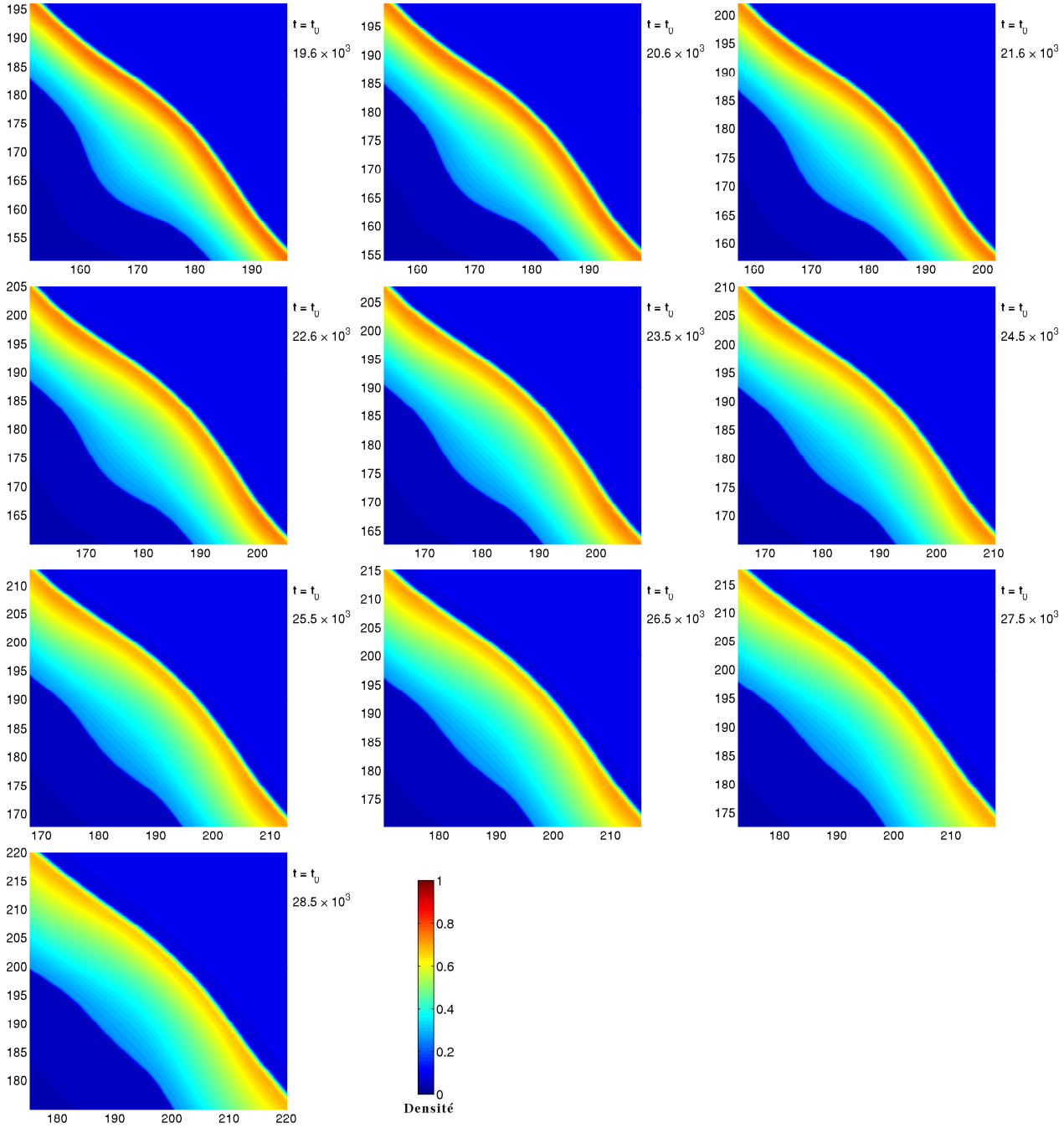


FIG. 5.31 – Effet de l'instabilité de Vishniac : instantanés de la carte de densité en 10^{-19} kg.m^{-3} de la coquille évoluant de $t \approx t_0 + 2 \times 10^4$ ans à $t \approx t_0 + 3 \times 10^4$ ans dans la géométrie sphérique. Les axes sont en 10^{15} m. La formation des structures denses n'est plus visible étant donné la forte diminution de la densité moyenne du front de choc. Mais la forme du front de choc indique encore une oscillation de cette dicontinuité. Suite de la figure 5.30.

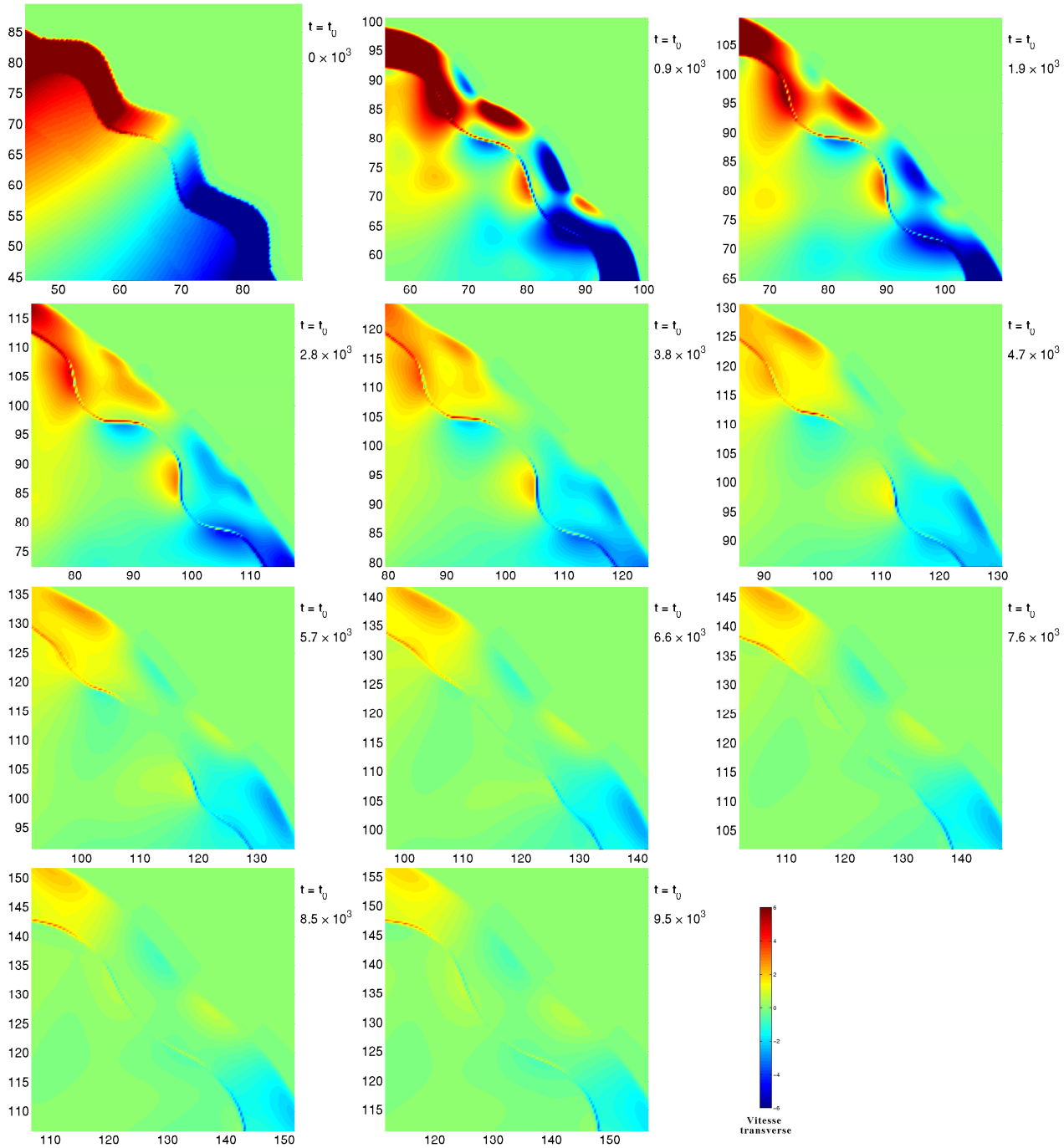


FIG. 5.32 – Effet de l'instabilité de Vishniac : instantanés de la carte de la différence de vitesse $(u_x^2 - u_y^2)$ en 10^4 km^2.s^{-2} de la coquille évoluant de $t = t_0$ à $t \approx t_0 + 10^4$ ans dans la géométrie sphérique pour $A = 0,05\,\lambda$, $l = 32$, $\mathcal{M} \approx 5$ et $\gamma_2 = 1,1$. Les axes sont en 10^{15} m. Seules les variations au centre de la boîte de simulation doivent être prises en compte. Le flot transverse, important au début, diminue rapidement ce qui traduit un freinage du processus de surstabilité.

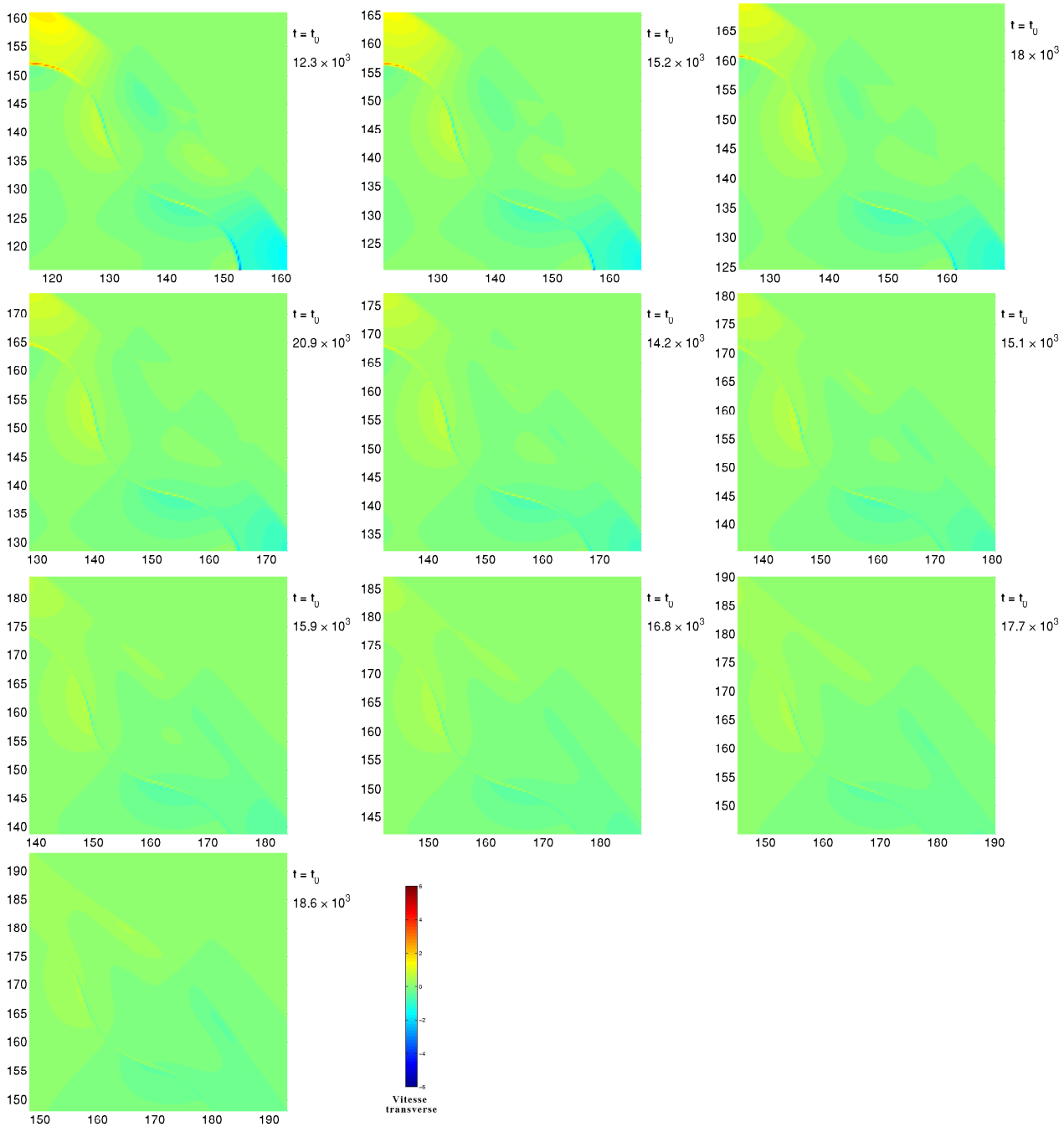


FIG. 5.33 – Effet de l'instabilité de Vishniac : instantanés de la carte de la différence de vitesse $(u_x^2 - u_y^2)$ en 10^4 km^2.s^{-2} de la coquille évoluant de $t \approx t_0 + 1,1 \times 10^4$ ans à $t \approx t_0 + 2 \times 10^4$ ans dans la géométrie sphérique pour $A = 0,05\,\lambda$, $l = 32$, $\mathcal{M} \approx 5$ et $\gamma_2 = 1,1$. Les axes sont en 10^{15} m. Le flot transverse a pratiquement disparu sur ces instantanés. Suite de la figure 5.32.

le déclenchement de l'instabilité s'effectue de la même manière dans les deux géométries mais le processus de surstabilité met plus de temps à s'implanter en géométrie sphérique car l'expansion de l'onde de souffle augmente la longueur d'onde et donc le trajet que parcourent les paquets de matière. À $t \approx t_0 + 13 \times 10^3$ ans (voir Fig. 5.30), la région $\mathcal{B}$ a finalement rattraper son retard et à partir de cet instant, les régions peuvent de nouveau échanger leur état. Il est important de remarquer que comme la longueur d'onde de la perturbation initiale augmente avec la propagation de l'onde de souffle, le temps nécessaire à l'échange d'état entre les régions est donc de plus en plus long et représente donc une contrainte forte sur les simulations. De plus, comme la densité globale du front de choc diminue, processus qui est due au ralentissement du front de choc, la formation de paquet de matière dans la région $\mathcal{A}$ n'est pas visible même jusqu'à la fin de la simulation ($t \approx t_0 + 30 \times 10^3$ ans, voir Fig. 5.31). Mais la forme du front de choc nous indique que le processus de surstabilité est toujours bien en action. Les instantanés de la différence de vitesse de cette deuxième période de formation de paquets de matière dans la région $\mathcal{A}$ ne donnent que peu d'information étant donné que cette quantité fluctue très faiblement en comparaison avec le début de la simulation. Ainsi, pour cette raison, nous ne donnons pas les instantanés correspondant à la période $t \approx [t_0 + 2,1 \times 10^4 - t_0 + 3 \times 10^4]$ ans. Nous remarquons aussi, à $t \approx t_0 + 30 \times 10^4$ ans (voir Fig. 5.31), que la longueur d'onde de la perturbation initiale a triplé de taille au cours de l'évolution de la coquille perturbée. Il en est de même pour l'épaisseur de la coquille qui augmente avec le même ordre de grandeur. Ainsi nous avons la confirmation que nous ne sommes pas dans la même configuration qu'en géométrie plan-parallèle en ce qui concerne la longueur d'onde. Mais l'évolution de l'épaisseur semble similaire dans les deux géométries.

Nous venons de voir que la densité globale fluctue de manière importante au niveau du front de choc. Ainsi, en géométrie sphérique, c'est une quantité moins pertinente que le rayon du choc pour compléter l'information donnée par les changements morphologiques de la coquille. Dans ce contexte, nous étudions sur la simulation précédente l'évolution du rayon du choc perturbé $R_s(t)$ afin de déterminer l'évolution de l'amplitude de la perturbation $\delta R_s(t)$ qui est définit par :

$$\delta R_s(t) = \frac{R_{s,max}(t) - R_{s,min}(t)}{A(t_0)}\,, \tag{5.12}$$

où $A(t_0)$ est, comme précédemment, l'amplitude de la perturbation à l'instant initial. Nous normalisons ensuite cette variable par le rayon du choc $R_{s,npert}(t)$ de l'écoulement de base afin d'obtenir les oscillations de la perturbation et de pouvoir remonter à son taux de croissance si la perturbation suit le régime linéaire de l'instabilité. Nous représentons $\delta R_s(t)/R_{s,npert}(t)$ sur la figure 5.34 et nous voyons que cette quantité oscille comme prévu mais ses oscillations ont une amplitude constante qui varie entre $1/R_{s,npert}(t)$ (amplitude initiale) et $1/4R_{s,npert}(t)$ (minimum donné par la sphéricité des paquets de matière). Ainsi les perturbations du rayon du choc n'ont pas une amplitude croissante comme prédit par la théorie ce qui confirme ce que nous avons observé sur les cartes des quantités fluides présentées juste avant. Nous pouvons donc conclure qu'avec les conditions initiales présentent dans cette simulation, l'instabilité est bien saturée au cours du temps et il se peut qu'elle soit ensuite atténuée comme en géométrie plan-parallèle.

Afin de continuer notre comparaison des résultats obtenus dans les différentes géométries, nous refaisons la même étude sur la variation de masse qu'en géométrie plan-parallèle. Nous présentons les résultats auxquels nous sommes parvenus dans le cadre de l'étude paramétrique.

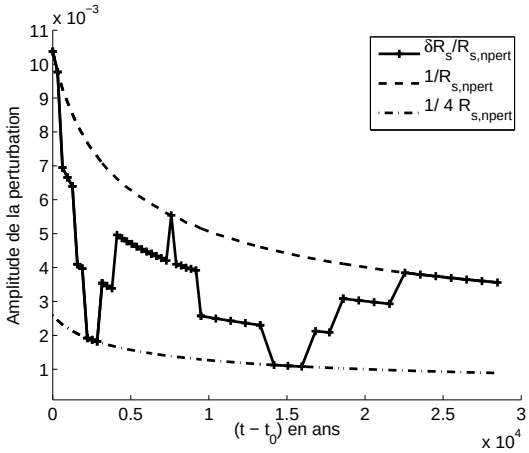


FIG. 5.34 – Effet de l'instabilité de Vishniac : évolution de l'amplitude de la perturbation normalisée $\delta R_s/R_{s,npert}$ en fonction de $(t - t_0)$ en géométrie sphérique pour $A = 0,05\,\lambda$, $l = 32$, $\mathcal{M} \approx 5$ et $\gamma_2 = 1,1$. L'écart spatial mesuré sur le rayon du choc perturbé oscille avec une amplitude constante ce qui traduit une saturation de la perturbation sur cette période.

La variation de masse

Comme précédemment, nous étudions la variation de masse d'une région donnée ce qui nous renseigne sur l'action de l'instabilité de Vishniac dans la coquille de gaz choqué. En géométrie sphérique, la fonction, qui nous sert à calculer la masse par région et ainsi qui nous sert à quantifier l'effet de l'instabilité sur le système, est plus difficile à déterminer. En effet, nous devons contraindre la taille des régions, qui comprennent initialement un creux et une bosse de la perturbation, par deux angles dont la précision dépend de la résolution numérique. Nous représentons sur la figure 5.35, l'évolution de la variation de masse δM en géométrie sphérique pour les régions $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ et pour les conditions initiales de la simulation précédente réalisée en géométrie sphérique : $A = 0,05\,\lambda$, $l = 32$, et $\mathcal{M} \approx 5$ et $\gamma_2 = 1,1$. La première constatation que nous pouvons faire, et qui est valable pour les deux géométries, porte sur l'évolution symétrique de la variation de masse des deux régions par rapport à l'axe des abscisses. De plus, nous voyons que $\delta M_{région}$ passe avec une période croissante par la valeur nulle ce qui traduit le fait que les régions échangent bien leur état de creux et de bosse. La deuxième constatation porte sur la différence majeure qui apparaît entre les deux géométries. En effet, nous rappelons que, d'après la théorie de l'instabilité, toutes les quantités caractéristiques doivent suivre une oscillation d'amplitude et de période croissante. En géométrie sphérique, nous observons ce phénomène sur les deux premières oscillations alors que ce n'était pas le cas en géométrie plan-parallèle (voir Fig. 5.21(a)). En comparant les deux modélisations, nous constatons aussi que l'évolution de la perturbation est plus rapide et plus forte en sphérique, comme cela est prédit par la théorie (voir le processus de surstabilité sur la figure 4.2). Ensuite, nous remarquons que la perturbation suit une évolution linéaire sur la quasi totalité de la simulation car la variation de masse ne présente que peu d'irrégularités. Seulement à partir de $t \approx t_0 + 1,4 \times 10^4$ ans, $\delta M_{région}$ devient un peu moins régulière et cela correspond à la saturation des oscillations que nous avons observée sur les autres grandeurs caractéristiques.

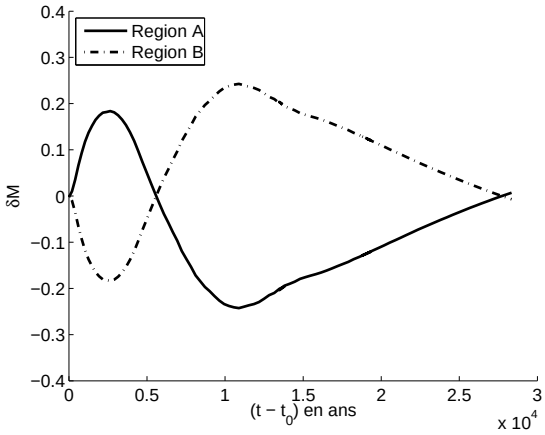


FIG. 5.35 – Variation de masse des deux régions en géométrie sphérique pour une amplitude $A = 0,05\,\lambda$, un mode propre $l = 32$, un nombre de Mach $\mathcal{M} \approx 5$ et un indice adiabatique $\gamma_2 = 1,1$. La variation de masse des deux régions est symétrique par rapport à l'axe des abscisses. Les oscillations de δM suivent une évolution linéaire sur la quasi totalité de la simulation et elles augmentent au cours du temps. La perturbation semble changer de régime pour $t \approx t_0 + 1,4 \times 10^4$ ans ce qui correspond à une saturation des oscillations sur les autres grandeurs caractéristiques.

Ainsi en géométrie sphérique et avec les conditions initiales introduites dans la simulation précédente, nous n'avons pas pu voir la croissance sans limite des quantités fluides, spatiales et de la masse d'une région donnée. Nous continuons donc cette étude en nous intéressant maintenant au rôle effectif des différents paramètres qui peuvent agir sur le mécanisme de l'instabilité. Nous allons pouvoir *via* l'étude paramétrique confirmer le comportement spécifique de la perturbation en géométrie sphérique. Nous précisons que, par la suite, les temps de calcul étant parfois trop importants pour mener les simulations jusqu'à leur terme, nous avons concentré notre analyse sur la première oscillation et la tendance de la seconde oscillation.

L'effet de l'amplitude

L'effet de l'amplitude nous informe, comme précédemment, sur le régime d'évolution de la perturbation. Nous remarquons sur la figure 5.36 représentant la variation de masse pour différentes amplitudes pour lesquelles $A \leqslant 0,10\,\lambda$ que la première oscillation de $\delta M_{région}$ suit le même comportement qu'en géométrie plan-parallèle. En effet, plus l'amplitude est importante, plus la pente de la première oscillation est importante, plus la valeur absolue de l'extremum $|\delta M_{ext}|$ atteint une valeur élevée et plus l'instabilité est déclenchée fortement. De même, lorsque l'amplitude atteint 10% de la longueur d'onde, la première oscillation présente une légère asymétrie près de son extremum. Par contre, dans cette géométrie, les oscillations ont une tendance croissante pour toutes les valeurs de l'amplitude testées et ainsi la perturbation est amplifiée sur cette période.
En résumé, nous avons :

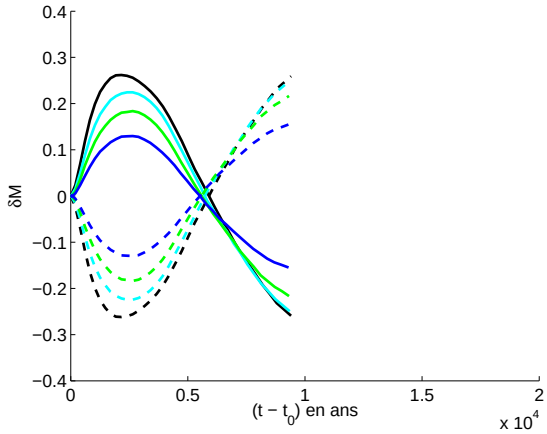


FIG. 5.36 – Effet de l'amplitude : variation de masse de la région $\mathcal{A}$ (trait plein) et de la région $\mathcal{B}$ (trait pointillé) en géométrie sphérique pour une amplitude variable $A = 0,03\,\lambda$ (bleu) ; $A = 0,05\,\lambda$ (vert) ; $A = 0,07\,\lambda$ (bleu clair) ; $A = 0,10\,\lambda$ (noir), un mode propre $l = 32$, un nombre de Mach $\mathcal{M} \approx 5$ et un indice adiabatique $\gamma_2 = 1,1$. Quand l'amplitude augmente, la valeur absolue de l'extremum des oscillations augmente aussi et ainsi plus l'instabilité est déclenchée fortement. Pour toutes les amplitudes, la deuxième oscillation a une tendance croissante.

$\Rightarrow$ Quand A augmente, $\lvert\delta M_{ext}\rvert$ augmente, s_l augmente.
$\Rightarrow$ Pour tout A, $t(\delta M_{ext})$ est le même, la seconde oscillation est plus grande que la première et la perturbation est amplifiée sur cette période.
$\Rightarrow$ La dernière amplitude permettant d'initialiser le régime linéaire est $A = 0,08\,\lambda$.

L'effet du mode propre

L'effet du mode propre sur la variation de masse en géométrie sphérique, que nous avons représenté sur la figure 5.37 pour les modes propres $l = [24 - 48]$, nous amène à la même conclusion qu'en géométrie plan-parallèle : il n'y a pas de mode propre préférentiel, c'est-à-dire qui permet au système d'avoir un comportement particulièrement instable. De plus, nous observons la même loi qu'en géométrie plan-parallèle. En effet, quand le mode propre augmente, $\lvert\delta M_{ext}\rvert$ diminue. Mais cette diminution reste faible par rapport à la géométrie précédente et il semble que la valeur absolue de l'extremum de la variation de masse atteint une valeur limite $\lvert\delta M_{ext}\rvert \approx 0,19$ pour les plus faibles modes propres de cette étude. En opposition à la géométrie plan-parallèle, l'effet du mode propre sur $\delta M_{région}$ en géométrie sphérique présente une propriété différente qui est visible sur la deuxième oscillation. En effet, quand le mode propre augmente, nous observons deux types de comportement : pour $l \leqslant 32$, la deuxième oscillation a une tendance croissante alors que pour $l > 32$, elle a une tendance décroissante. Ainsi, les grands modes propres (les petites longueurs d'ondes) semblent ne pas permettre une croissance sur plusieurs oscillations de la perturbation initiale. Ce résultat s'explique par le fait que lorsque les régions $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont trop proches initialement, la matière n'a pas la possibilité de s'accumuler en grande quantité rapidement et la faible perturbation engendrée va ensuite être atténuée lors de l'évolution de

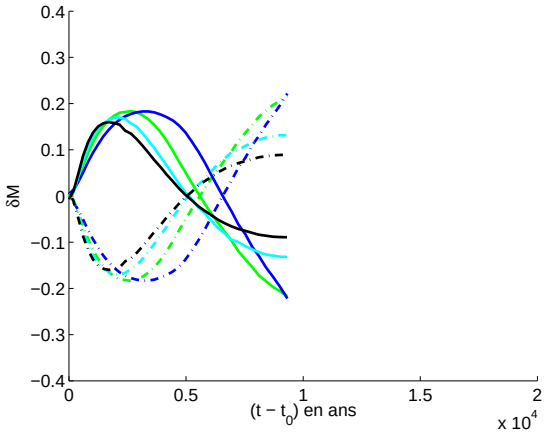


FIG. 5.37 – Effet du mode propre : variation de masse de la région $\mathcal{A}$ (trait plein) et de la région $\mathcal{B}$ (trait pointillé) en géométrie sphérique pour une amplitude $A = 0,05\,\lambda$, un mode propre variable $l = 24$ (bleu) ; $l = 32$ (vert) ; $l = 40$ (bleu clair) ; $l = 48$ (noir), un nombre de Mach $\mathcal{M} \approx 5$ et un indice adiabatique $\gamma_2 = 1,1$. Quand le mode propre augmente, nous observons deux types de comportement. Pour $l \leqslant 32$, $|\delta M_{ext}|$ de la première oscillation atteint une valeur limite $\sim 0,19$ et la deuxième oscillation a une tendance croissante. Il n'y a pas de mode propre préférentiel.

l'onde de souffle.
En résumé, nous avons :

⇒ Quand l augmente, $|\delta M_{ext}|$ diminue, $t(\delta M_{ext})$ diminue et s_l augmente.
⇒ Pour $l \leqslant 32$, la seconde oscillation est plus grande que la première et pour $l > 32$, la seconde oscillation est plus faible.
⇒ Il n'y a pas de mode propre préférentiel.

L'effet du nombre de Mach

Pour l'étude de l'effet du nombre de Mach, de la même manière qu'en géométrie plan-parallèle, comme les profils des quantités fluides changent au cours du temps et que chaque nombre de Mach correspond à un instant différent de la simulation sans perturbation, nous normalisons la variation de masse par sa valeur extrémale sur la première oscillation. Nous représentons sur la figure 5.38 la variable normalisée pour différentes valeurs du nombre de Mach $\mathcal{M} \approx [3-7]$. Nous remarquons que, comme en géométrie plan-parallèle, il n'y a pas de nombre de Mach préférentiel. Par contre dans cette géométrie, pour $\mathcal{M} \geqslant 5$, nous observons des oscillations croissantes alors que ce n'est pas le cas pour un nombre de Mach plus faible. Dans cette modélisation, il y a donc des vitesses du front de choc qui favorisent la croissance de la perturbation. Mais nous voyons qu'après l'extremum de la seconde oscillation, dont la valeur semble constante pour les deux nombres de Mach testés, l'évolution de la variation de masse change pour un autre régime qui est probablement la saturation des oscillations, comme déterminé dans l'étude de la morphologique de la coquille fine.

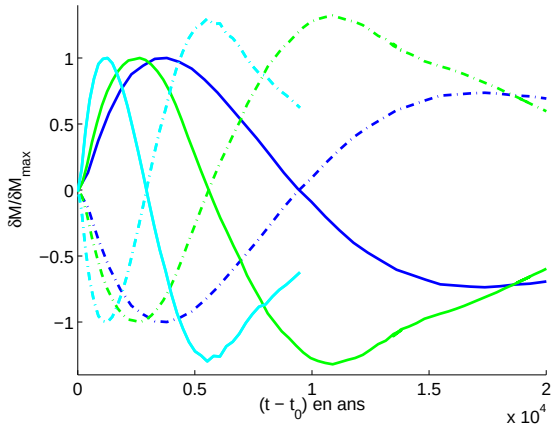


FIG. 5.38 – Effet du nombre de Mach : variation de masse normalisée de la région $\mathcal{A}$ (trait plein) et de la région $\mathcal{B}$ (trait pointillé) pour une amplitude $A = 0,05\,\lambda$, un mode propre $l = 32$, un nombre de Mach variable $\mathcal{M} \approx 3$ (bleu) ; $\mathcal{M} \approx 5$ (vert) ; $\mathcal{M} \approx 7$ (bleu clair) et un indice adiabatique $\gamma_2 = 1,1$. Quand le nombre de Mach augmente, nous observons deux types de comportement. Pour $\mathcal{M} \geqslant 5$, la deuxième oscillation est croissante et $|\delta M_{ext}|$ normalisé semble constant. Il n'y a pas de nombre de Mach préférentiel.

En résumé, nous avons :

$\Rightarrow$ Quand $\mathcal{M}$ augmente, $t(\delta M_{ext})$ augmente et s_l augmente.
$\Rightarrow$ Pour $\mathcal{M} \geqslant 5$, la seconde oscillation est plus grande que la première et pour $\mathcal{M} < 5$, la seconde oscillation est plus faible.
$\Rightarrow$ Il n'y a pas de nombre de Mach préférentiel.

L'effet de l'indice adiabatique

Le rôle de l'indice adiabatique sur la variation de masse en géométrie sphérique présente aussi des propriétés intéressantes. Nous représentons sur la figure 5.39 les variations de masse pour deux valeurs d'indice adiabatiques testés que sont le cas quasi-isotherme ($\gamma_2 = 1,1$) et le cas adiabatique ($\gamma_2 = 5/3$). Nous obtenons le même type de résultat qu'en géométrie plan-parallèle : quand l'indice adiabatique augmente, le déclenchement de l'instabilité devient moins efficace et les oscillations s'atténuent très rapidement. Nous remarquons particulièrement que pour le cas adiabatique, les oscillations ne sont pas régulières et l'échange d'état entre les régions ne se fait plus car les oscillations ne passent pas par la valeur nulle. Ainsi dans la géométrie sphérique aussi, nous montrons que l'indice adiabatique joue un rôle important dans la croissance de la perturbation initiale.

En résumé, nous avons :

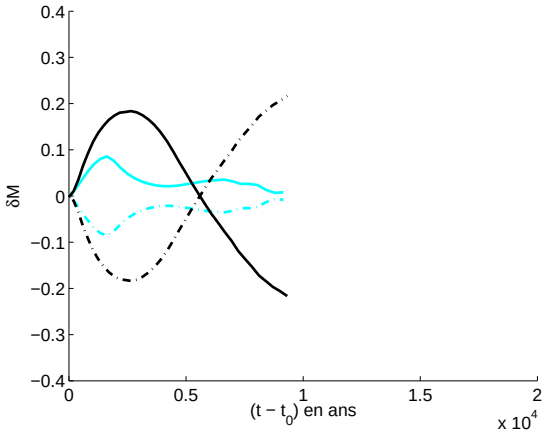
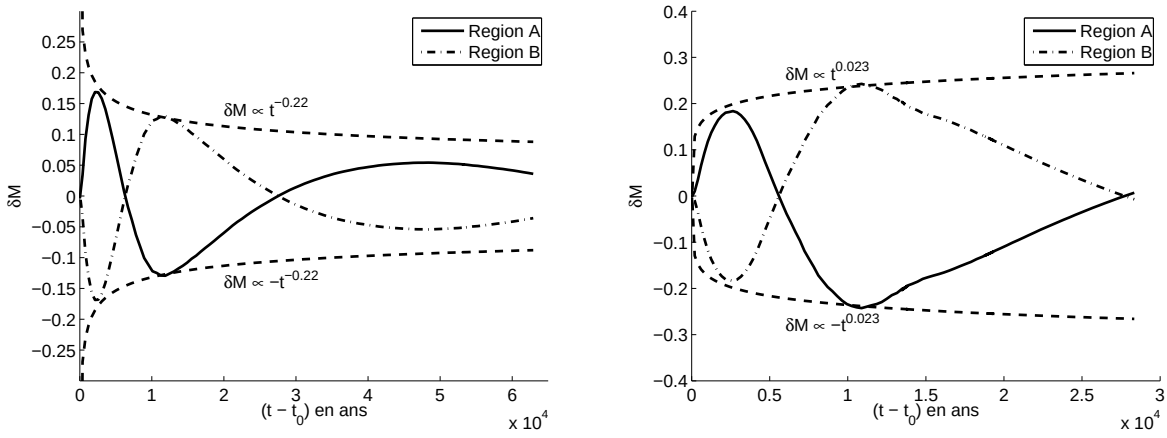


FIG. 5.39 – Effet de l'indice adiabatique : variation de masse de la région $\mathcal{A}$ (trait plein) et de la région $\mathcal{B}$ (trait pointillé) en géométrie sphérique pour une amplitude $A = 0,05\,\lambda$, un mode propre $l = 32$, un nombre de Mach $\mathcal{M} \approx 5$ et un indice adiabatique variable $\gamma_2 = 1,1$ (noir) et $\gamma_2 = 5/3$ (bleu clair). Quand l'indice adiabatique augmente, le déclenchement de l'instabilité devient moins efficace et les oscillations irrégulières s'atténuent très rapidement.

$\Rightarrow$ Quand γ augmente, $\lvert\delta M_{ext}\rvert$ diminue et $t(\delta M_{ext})$ diminue.
$\Rightarrow$ Pour $\gamma \leqslant 1,1$, la seconde oscillation est plus grande que la première et pour $\gamma > 1,1$, la seconde oscillation est plus faible.
$\Rightarrow$ Il y a un indice adiabatique plus efficace.

La fonction d'ajustement des courbes

Afin de pouvoir quantifier l'effet de l'instabilité de Vishniac en étudiant plusieurs oscillations de δM, nous nous sommes intéressé à deux cas réalisés avec les conditions initiales usuelles et pour différents nombres de Mach : $\mathcal{M} \approx 4$ et $\mathcal{M} \approx 5$. La variation de masse des simulations correspondantes est représentée sur la figure 5.40. Comme nous avons remarqué que l'instabilité met plus de temps à se développer dans la géométrie sphérique, nous avons laissé évoluer la coquille perturbée jusqu'à $t = t_0 + 6,5 \times 10^4$ ans pour $\mathcal{M} \approx 4$ et jusqu'à $t = t_0 + 3 \times 10^4$ ans pour $\mathcal{M} \approx 5$. Nous faisons un ajustement des extremums locaux de la variation de masse par une loi de puissance. Nous remarquons que nous pouvons utiliser indistinctement les oscillations des régions $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ pour déterminer le taux de croissance étant donné la symétrie exacte qui est présente entre les deux variations. Pour $\mathcal{M} \approx 4$, nous observons que les oscillations sont décroissantes et nous obtenons la partie réelle du taux d'atténuation de la perturbation en utilisant les deux premières oscillations de la variation de masse : $s_{m,r} = -0,22$. Nous déterminons aussi de manière approximative la partie imaginaire du taux d'atténuation : $s_{m,i} \approx 1,7$. Ainsi, pour ce nombre de Mach, nous avons une forte atténuation de la perturbation qui s'amplifie vers la fin de la simulation. Nous étudions les oscillations de la variation de masse pour $\mathcal{M} \approx 5$. Avec la même technique, nous déterminons la partie réelle du taux de croissance $s_{m,r} = 0,023$ et la partie



(a) $\mathcal{M} \approx 4$ (b) $\mathcal{M} \approx 5$

FIG. 5.40 – Variation de masse des deux régions en géométrie sphérique pour une amplitude $A = 0,05\,\lambda$, un mode propre $l = 32$, un nombre de Mach variable et un indice adiabatique $\gamma_2 = 1,1$. Pour $\mathcal{M} \approx 4$ (a), les oscillations de la variation de masse des deux régions décroissent rapidement avec le taux d'atténuation $s_{m,r} = -0,22$. La perturbation est fortement atténuée dans ce cas. Pour $\mathcal{M} \approx 5$ (b), les oscillations de la variation de masse des deux régions sont dans une phase de croissance sur cette période et leur taux de croissance est $s_{m,r} = 0,023$ ce qui reste assez faible en comparaison avec la prédiction théorique.

imaginaire $s_{m,i} \approx 2$. Nous remarquons que, malgré que la variation de masse des deux régions suit le régime linéaire de l'instabilité dans lequel l'oscillation de δM a une amplitude et une période croissante, les valeurs du taux de croissance obtenues numériquement sont bien plus faibles que celles issues de l'étude analytique de Ryu & Vishniac [1987] pour laquelle, nous rappelons, les auteurs ont déterminé un taux de croissance complexe $s(l = 40) = 0,49 + 3,2i$. Ainsi, dans les simulations en géométrie sphérique de l'instabilité de Vishniac que nous avons réalisées sur une période suffisante pour permettre au régime linéaire de l'instabilité de s'installer, nous obtenons une faible croissance de la perturbation. Les conditions du système, que sont la densité, la pression ou encore la vitesse du fluide qui évoluent avec le temps et la période d'oscillation de la perturbation qui augmente elle aussi, ne permettent pas d'arriver à la fragmentation de la coquille de gaz choqué comme prédit par la théorie. Comme en géométrie plan-parallèle, nous avons donc obtenu le processus de surstabilité qui permet l'échange de matière entre deux régions. Mais ce processus oscillant ne permet pas l'apparition d'une morphologie complexe de la zone choquée comme observé dans les RSN.

La perturbation d'une onde de souffle quasi-isotherme

Afin de confirmer les résultats que nous venons d'obtenir dans l'étude paramétrique et comme en géométrie plan-parallèle, nous réalisons une simulation de l'instabilité de Vishniac dans le contexte d'une onde de souffle quasi-isotherme (voir la figure 4.22(d) du chapitre IV). En analysant la simulation de cette onde de souffle uniforme ($\gamma_3 = \gamma_2 = 1,1$) et dont les instantanés de la carte de densité sont visibles dans l'annexe C,

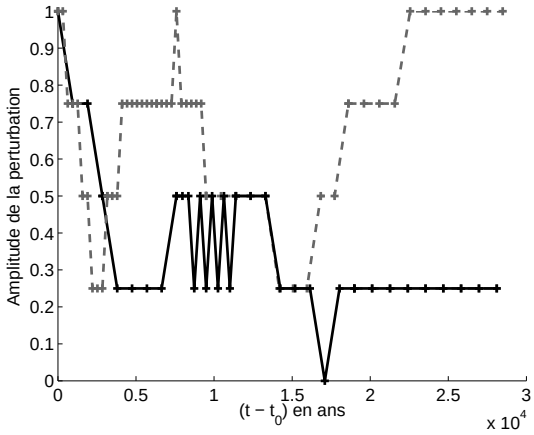


FIG. 5.41 – Effet de l'instabilité de Vishniac : évolution de l'amplitude de la perturbation δR_s en fonction de $(t - t_0)$ en géométrie sphérique pour $A = 0,05\,\lambda$, $l = 32$, $\mathcal{M} \approx 5$ et $\gamma_2 = 1,1$. Les amplitudes de la perturbation d'une onde de souffle quasi-isotherme (noir, trait plein) et d'une onde de souffle de type PDTS (gris, trait pointillé) n'ont la même tendance. La perturbation de l'onde de souffle uniforme est atténuée au cours du temps alors que celle utilisée dans l'étude paramétrique oscille de manière constante sur cette période.

nous voyons que l'instabilité est carrément atténuée dans ce cas. Ainsi nous confirmons dans cette géométrie et pour cette onde de souffle uniforme que le modèle de type PDTS n'empêche pas l'apparition de l'instabilité de Vishniac dans la coquille et dans la géométrie sphérique, il semble même l'entretenir sur une plus longue période.

Afin de mieux quantifier ce résultat, nous présentons sur la figure 5.41 la variation de l'amplitude de la perturbation pour cette même simulation. Nous n'avons pas normalisé cette fois par le rayon du choc non perturbé afin de mieux voir les oscillations présentes sur la discontinuité. Nous superposons à cette figure les résultats du modèle utilisé jusqu'à présent dans l'étude paramétrique ($A = 0,05\,\lambda$, $l = 32$, $\mathcal{M} \approx 5$ et $\gamma_3 = 5/3$ et $\gamma_2 = 1,1$, voir Fig. 5.34). Nous voyons que les amplitudes de la perturbation d'une onde de souffle quasi-isotherme et d'une onde de souffle de type PDTS n'ont pas la même tendance. En effet, la perturbation de l'onde de souffle uniforme est atténuée au cours du temps alors que celle utilisée dans l'étude paramétrique oscille de manière constante sur cette période ce qui confirme les informations données par les cartes de densité.

Ce test nous a donc permis de montrer, une fois de plus, qu'une perturbation évoluant selon le régime linéaire de l'instabilité de Vishniac ne croît pas indéfiniment et qu'elle ne peut donc pas mener à la fragmentation de la coquille dans cette géométrie.

Les conclusions de l'étude de l'instabilité de Vishniac en géométrie sphérique

En conclusion de l'étude paramétrique de l'instabilité de Vishniac en géométrie sphérique, nous résumons les résultats que nous avons obtenus sur la variation de masse des régions $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$. Nous avons observé que :

$\Rightarrow$ le déclenchement de l'instabilité, quantifié par s_l, dépend de tous les paramètres testés ;
$\Rightarrow$ le comportement de la première oscillation, quantifié par $|\delta M_{ext}|$, dépend de l'amplitude de la perturbation et de l'indice adiabatique mais dépend faiblement du mode propre de la perturbation ;
$\Rightarrow$ la dernière amplitude permettant d'initialiser le régime linéaire est $A = 0,08\,\lambda$;
$\Rightarrow$ pour $l \leqslant 32$, $\mathcal{M} \geqslant 5$ et $\gamma \leqslant 1,1$, les oscillations sont croissantes ;
$\Rightarrow$ il n'y a pas de mode propre et de nombre de Mach préférentiel mais il y a un indice adiabatique plus efficace.

5.8.3 La conclusion générale des simulations numériques

Afin de conclure ce chapitre consacré aux simulations numériques que nous avons réalisées sur l'instabilité de Vishniac, nous résumons les différents résultats auxquels nous sommes parvenus. En étudiant les changements morphologiques de la coquille de gaz choqué subissant une perturbation sinusoïdale, nous avons observé que :

1. le déclenchement de l'instabilité s'effectue par une perturbation de la coquille ;
2. la surstabilité provoque une oscillation d'amplitude et de période croissante des grandeurs fluides et des grandeurs spatiales ;
3. la saturation de l'instabilité se traduit par une amplitude constante des oscillations ;
4. l'atténuation de l'instabilité, particulièrement visible en géométrie plan-parallèle, conduit au retour du front de choc à une discontinuité plane et à des oscillations d'amplitude très faible dans la coquille.

Et par la réalisation de l'étude paramétrique, nous avons obtenu que :

$\Rightarrow$ le déclenchement de l'instabilité, dépend de l'amplitude et du mode propre de la perturbation en géométrie plan-parallèle et de tous les paramètres testés en géométrie sphérique ;
$\Rightarrow$ l'effet déviant apparaît en géométrie plan-parallèle et dans les domaines de valeurs de paramètres que nous avons fixés, pour les grandes amplitudes, les petits modes propres, et les grandes vitesses.

Ainsi le résultat fort auquel nous sommes parvenus est :

$\Rightarrow$ pour tous les jeux de paramètres que nous avons testés, l'évolution de la perturbation ne permet pas la fragmentation de la coquille de gaz choqué.

Conclusion

Avec ce travail de thèse, l'instabilité de Vishniac dévoile un pan de sa complexité. Cette instabilité, qui a été peu étudiée et dont la théorie et les mécanismes fondamentaux restent méconnus, est paradoxalement souvent invoquée. Le paradoxe provient du fait que l'action de l'instabilité n'est pas facilement identifiable de prime abord. Ce processus a pourtant un rôle précis car, théoriquement, il permet d'expliquer la morphologie non uniforme des restes de supernova (RSN) entrant dans leur phase radiative. La prédiction théorique porte, plus précisément, sur la structure fragmentée et filamentée des RSN qui résulte de l'interaction du front de choc avec le milieu ambiant hétérogène. Mais les résultats que nous avons obtenus réfutent cette hypothèse. L'instabilité se révèle être un processus plus subtil dans son action sur la coquille du RSN. Dans l'étude que nous avons décrite au cours des différents chapitres de ce manuscrit, nous avons présenté la technique qui nous a permis d'aboutir à l'obtention de l'instabilité de Vishniac dans les simulations numériques que nous avons réalisées et nous avons fait apparaître les différents aspects du fonctionnement de ce processus complexe. Nous synthétisons les résultats obtenus à chacune des étapes menant à une meilleure compréhension de l'instabilité de Vishniac.

Dans le chapitre I, nous avons présenté le modèle hydrodynamique basé sur le système d'équations d'Euler. Nous avons introduit les équations de conservation issues de ce modèle et les conditions aux bords spécifiques aux ondes de choc. Les conditions aux bords, qui sont valables au niveau du front de choc, sont déterminées par les relations de Rankine-Hugoniot que nous avons redémontrées et obtenues dans la limite de choc fort. Nous avons aussi introduit la fonction de refroidissement qui permet de prendre en compte les pertes radiatives par refroidissement lorsque le rayonnement émis par le système est considéré dans le régime optiquement mince. Nous avons finalement présenté le redimensionnement qui nous sert à déterminer les grandeurs caractéristiques permettant de ramener les valeurs astrophysiques à des valeurs proches de l'unité qui sont gérables numériquement.

Dans le chapitre II, nous avons détaillé l'architecture des codes HYDRO-MUSCL et HYDRO-COOL que nous utilisons pour effectuer les simulations. Nous avons présenté le découplage de Strang et le schéma MUSCL-Hancock qui nous permettent d'obtenir numériquement une solution approchée des grandeurs fluides à l'ordre 2. Nous avons aussi introduit les solveurs de Riemann de type HLLC et HLLE qui représentent un module important du code car ils conditionnent fortement les résultats de calcul suivant la physique de l'objet étudié. Nous avons aussi abordé un aspect plus technique avec la présentation du supercalculateur Titane à

l'aide duquel nous avons étudié l'instabilité de Vishniac.

Dans le chapitre III, nous avons réalisé la validation des codes HYDRO-MUSCL et HYDRO-COOL. Les tests de tube à choc et d'explosion forte en un point nous ont permis de vérifier que les solutions numériques obtenues avec le code HYDRO-MUSCL convergent bien vers les solutions analytiques. Ainsi le code HYDRO-MUSCL vérifie bien les critères de robustesse, d'efficacité et d'exactitude nécessaires pour obtenir des résultats fiables. En plus de ces tests classiques, nous avons réalisé des simulations de la colonne d'accrétion des polaires et des simulations de jets d'étoile jeune qui représentent aussi des sujets d'étude de notre équipe. Grâce à ces simulations, nous avons pu valider le code HYDRO-COOL dans lequel les équations d'hydrodynamique résolues incluent la fonction de refroidissement. Pour les polaires, nous avons obtenu un arrêt du front de choc à une position proche de celle prédite par la théorie. Dans ce système, même si l'accord entre les solutions analytique et numérique n'est pas atteint, ces simulations permettent de démontrer l'effet du refroidissement sur la propagation de l'onde de choc. En ce qui concerne les simulations de jets d'étoile jeune, nous avons montré que, dans ce cas aussi, le refroidissement joue un rôle dans la dynamique de l'objet.

Dans le chapitre IV, nous avons présenté, dans une première partie, la théorie de l'instabilité et, particulièrement, nous avons détaillé les deux modèles qui nous ont aidés à identifier ce processus complexe. Dans l'approximation d'une coquille infiniment fine [Vishniac, 1983], nous avons obtenu une solution analytique au système d'équations intégrées sur l'épaisseur de la coquille. Mais le modèle analytique traité dans cette approximation n'apporte que peu de critères sur l'instabilité de Vishniac. Dans l'approximation d'une coquille d'épaisseur finie [Ryu & Vishniac, 1987], nous avons obtenu les profils auto-semblables, bien connus, de la densité, de la pression, et de la vitesse par intégration des équations de l'hydrodynamique sur l'onde de souffle. Afin de simplifier le système d'équations, nous avons fait le changement de variable auto-semblable permettant de réduire les équations aux dérivées partielles en équations différentielles ordinaires. Cette même méthode nous a servi à résoudre numériquement les équations d'Euler perturbées où une perturbation à l'ordre 1 de toutes les grandeurs fluides et spatiales a été réalisée. Par ce biais, nous avons pu ré-obtenir le taux de croissance de l'instabilité en fonction du mode propre de la perturbation. Cette étude poussée des modèles analytiques nous a permis de mettre en lumière certains points incohérents ou manquants de l'analyse théorique que nous avons pris en compte dans les simulations numériques.
Dans la deuxième partie de ce chapitre, nous avons introduit le contexte astrophysique de l'instabilité de Vishniac : les restes de supernova issus de l'explosion gravitationnelle d'une étoile massive. Nous avons présenté, étape par étape, l'évolution d'un RSN lors de sa propagation dans le milieu interstellaire et les solutions auto-semblables de la position du front de choc qui sont associées à chacune de ces phases. Pour les phases de Sedov et "Pressure Driven Thin Shell" (PDTS), nous avons présenté une solution générale décrivant, selon l'indice adiabatique du gaz choqué, l'évolution d'une coquille adiabatique ou d'une coquille isotherme.
La dernière partie de ce quatrième chapitre est consacrée aux simulations de l'onde de souffle présente dans les RSN. Dans ces simulations, nous nous sommes seulement consacrés à l'étude de la propagation de l'onde de choc et de l'onde de raréfaction séparées par la discontinuité de contact, qui sont engendrées par la technique d'explosion forte en un point. Dans ce cadre, nous avons pu comprendre et vérifier des effets apparaissant sur l'onde de souffle, comme les effets numériques de la résolution et du solveur de Riemann ; et les effets

physiques de l'indice adiabatique, de la géométrie et de l'évolution de la masse. Un point particulièrement important de cette partie est l'étude de l'indice adiabatique à l'aide de la fonction $\gamma(\rho)$ que nous avons introduite dans le code. Nous avons pu comparer les profils non perturbés issus de l'analyse théorique et ceux obtenus par les simulations afin de mettre en évidence les différences et les similitudes existantes entre ces deux approches.

Dans le chapitre V, nous avons abordé l'étude numérique de l'instabilité de Vishniac. Dans un premier temps, nous avons introduit des pics perturbatifs afin de perturber l'onde de souffle. Ces pics en densité représentent dans notre modélisation les hétérogénéités du milieu ambiant, comme supposés par le modèle théorique. Cette technique perturbative ne nous a pas donné la possibilité d'observer l'instabilité de Vishniac car elle ne permet pas de contrôler le mode propre de la perturbation. Dans un second temps, nous avons introduit une perturbation spatiale sinusoïdale qui nous a cette fois donnée accès au mécanisme fondamental de l'instabilité. Dans les simulations numériques que nous avons réalisées, la déformation spatiale permet effectivement, comme le prédit la théorie, la naissance d'un flux transverse dans la coquille de gaz choqué du RSN. Ainsi, la déformation spatiale de la coquille déclenche bien l'instabilité. La perturbation de densité, de vitesse, de pression et de position, qui est générée dans la couche choquée par la perturbation sinusoïdale, se met ensuite à croître au cours du temps selon le processus de surstabilité décrit par l'étude théorique. En effet, nous avons observé, dans les simulations, des allers et retours de matière s'effectuant entre des régions ayant pour taille une demie longueur d'onde de la perturbation initiale et la dimension des paquets de matière formés par ce mouvement oscillant et évoluant dans la direction transverse à la propagation du choc, augmente au cours du temps. Ainsi, le déclenchement de l'instabilité et son évolution vers le processus de surstabilité, pendant quelque temps, sont des effets physiques reproductibles numériquement.
Il est donc plausible que cette instabilité naisse dans les coquilles de gaz des RSN que nous observons. Nous avons donc constaté à ce stade de l'interprétation des résultats que, quelle que soit l'évolution finale de l'instabilité, le mouvement transverse de la matière dans la zone de gaz choqué a des répercutions sur le RSN car il permet le mélange de la matière de la coquille. Nous avons ensuite vu dans les simulations que l'instabilité est atténuée et ce phénomène se produit avant que l'onde de souffle atteigne un âge $t \approx 3,5 \times 10^4$ ans, c'est-à-dire avant le milieu de la phase PDTS d'un RSN dont l'évolution serait conforme à la théorie.
Afin de déterminer la source de l'atténuation, nous avons étudié la variation d'épaisseur de la coquille de gaz choqué. Nous avons remarqué que l'épaisseur de la coquille augmente au cours du temps selon le processus naturel engendré par l'évolution de l'onde de souffle dans le milieu ambiant. La matière en accrétion sur le front de choc, en limite de choc fort, n'a d'autre solution que d'être stockée dans la coquille. La couche de gaz choqué doit donc s'élargir pour accueillir le flux de matière. Or ce processus n'est pas pris en compte par le modèle théorique qui considère seulement des profils auto-semblables de la densité, de la vitesse et de la pression. L'épaississement de la coquille est donc responsable de l'atténuation de l'instabilité. Les résultats obtenus pointent l'importance de décrire au plus près la physique de l'objet même si le modèle numérique reste aussi une approximation du système.
L'atténuation des oscillations que nous avons constatée a été confirmée par l'étude paramétrique de l'instabilité de Vishniac réalisée sur le supercalculateur Titane. Nous avons pu déterminer *via* cette analyse que le déclenchement de l'instabilité dépend de l'amplitude et du mode propre de la perturbation. Contrairement à la théorie, nous n'avons pas obtenu de mode propre optimal. Mais, en accord avec celle-ci, nous avons obtenu

qu'une faible valeur de l'indice adiabatique est plus efficace en terme de croissance de l'instabilité. L'étude du nombre de Mach nous a permis de conclure que les faibles valeurs de ce paramètre favorise la croissance linéaire de l'instabilité. Et il en est de même pour les faibles valeurs de l'amplitude de la perturbation. L'étude de la coquille perturbée en géométrie sphérique n'a pas montré de résultats significativement différents de ceux en géométrie plan-parallèle. Et d'autres tests sont venus confirmer la stabilisation du système.

En perspective, il serait intéressant d'étudier numériquement l'effet du refroidissement de la coquille car cela pourrait améliorer le processus d'instabilité de Vishniac. En effet, dans l'étude que nous avons réalisée, nous n'avons considéré que la phase PDTS d'un RSN où seule la valeur de l'indice adiabatique est diminuée car le gaz de la coquille est plus compressible dans cette phase. Mais dans le cas de la phase pleinement radiative des RSN, les pertes radiatives de la coquille deviennent un processus non négligeable. Ainsi, la température de la zone choquée va diminuer et la coquille a la possibilité de devenir encore plus dense dans cette phase. La description que nous avons utilisée jusqu'à présent qui suppose un indice adiabatique tendant vers la limite isotherme, rend compte d'un gaz plus compressible mais ne décrit pas l'effet engendré par une vraie perte radiative. L'utilisation d'un faible indice adiabatique a donc une limite dans la modélisation de la phase radiative du RSN. Avec l'introduction d'une fonction de refroidissement de type milieu interstellaire [Dalgarno & McCray 1972] dans la coquille qui est la zone émettant du rayonnement, nous pourrions maintenir des conditions favorables à la croissance de l'instabilité. Comme la densité de la coquille ne serait plus limitée, l'épaisseur de la coquille resterait constante et la condition d'atténuation de l'instabilité serait levée lors de l'évolution de l'onde de souffle. De plus, lorsqu'on introduit une fonction de refroidissement dans un système, l'instabilité de refroidissement ("cooling instability") [Fall & Rees, 1985] va pouvoir apparaître dans la zone où la perte radiative se produit. Cette instabilité qui est un emballement du processus de refroidissement, permet l'apparition d'oscillations dans la zone refroidie et pourrait être déclenchée par la surstabilité de Vishniac. Ce couplage entre les deux instabilités amènerait une croissance des grandeurs fluides telle que le front de choc pourrait se fragmenter [Bertschinger, 1986] comme observé dans les vieux RSN.

Dans un autre contexte, la vérification de l'existence de l'instabilité de Vishniac en laboratoire est une étape importante dans la compréhension de ce processus. Et l'enjeu est aussi, comme dans les simulations numériques, de pouvoir valider son implication dans les objets astrophysiques. L'instabilité de Vishniac, qui est étudiée de manière expérimentale depuis une vingtaine d'années [Grun et al., 1991], n'a pas encore été observée en laboratoire. Dans ce contexte, nous voulons réaliser, à l'aide du laser Z-Beamlet de Sandia National Laboratories, la perturbation d'une onde de souffle radiative. Ce projet NNSA-CEA[4] regroupe des théoriciens (S. Bouquet), des numériciens (C. Michaut) et des expérimentateurs (M. Koenig, A. Edens, T. Ditmire) ayant une expertise dans les ondes de souffle radiatives. Le dispositif de puissance qu'est le laser Z-Beamlet permet de générer des ondes de souffle de vitesse élevée et permet d'atteindre une température suffisante dans la coquille formée derrière le front de choc pour que celle-ci puisse rayonner. Si nous introduisons ensuite une perturbation (une grille à mailles espacées en fonction du mode propre étudié) sur cette onde de souffle radiative, il nous sera possible de déclencher l'instabilité de Vishniac. Dans cette configuration, la coquille n'accumule pas la matière sur les temps très courts que nous étudions et ainsi l'épaississement de la couche de gaz choqué, qui provoque l'atténuation de l'instabilité, ne se produit pas. L'instabilité de Vishniac pourrait donc se développer

[4]CEA pour Commissariat à l'Énergie Atomique et NNSA pour "National Nuclear Safety Administration".

en laboratoire.

Bibliographie

Berthon, C. 2006, *Numerische Mathematik* **104**, 27

Bertschinger, E. 1986, *Astrophys. J.* **304**, 154

Beuermann, K. 2004, in S. Vrielmann & M. Cropper (ed.), *IAU Colloq. 190 : Magnetic Cataclysmic Variables*, Vol. 315 of *Astronomical Society of the Pacific Conference Series*, p. 187

Blondin, J. M., Fryxell, B. A. & Konigl, A. 1990, *Astrophys. J.* **360**, 370

Bouquet, S., Falize, E., Michaut, C., Gregory, C. D., Loupias, B. et al. 2010, *High Energy Density Physics* **6**, 368

Campbell, R. K., Harrison, T. E., Mason, E., Howell, S. & Schwope, A. D. 2008, *Astrophys. J.* **678**, 1304

Cavet, C., Michaut, C. & Falize, E. 2007, in J. Bouvier, A. Chalabaev, & C. Charbonnel (ed.), *SF2A-2007 : Proceedings of the Annual meeting of the French Society of Astronomy and Astrophysics held in Grenoble, France, July 2-6, 2007, Eds. : J. Bouvier, A. Chalabaev, and C. Charbonnel, p.443*, p. 443

Cavet, C., Nguyen, H. C., Michaut, C. & Bouquet, S. 2010, *Numerical studies of the Vishniac instability in supernova remnants*, Accepted in *Astrophys. Space Sci.*

Cavet, C., Nguyen, H. C., Michaut, C., Falize, E., Bouquet, S. et al. 2009, *Astrophys. Space Sci.* **322**, 91

Chandrasekhar, S. 1957, *An introduction to the study of stellar structure*, Dover Publications (New York)

Chevalier, R. A., Blondin, J. M. & Emmering, R. T. 1992, *Astrophys. J.* **392**, 118

Ciardi, A., Ampleford, D. J., Lebedev, S. V. & Stehle, C. 2008, *Astrophys. J.* **678**, 968

Cioffi, D. F., McKee, C. F. & Bertschinger, E. 1988, *Astrophys. J.* **334**, 252

Colella, P. & Woodward, P. R. 1984, *Journal of Computational Physics* **54**, 174

Courant, K., Friedrichs, K. & Lewy, H. 1928, *Mathematische Annalen* **100**, 32–74

Cropper, M., Ramsay, G., Hellier, C., Mukai, K., Mauche, C. et al. 2002, *Royal Society of London Philosophical Transactions Series A* **360**, 1951

Dalgarno, A. & McCray, R. A. 1972, *Annual review of astronomy and astrophysics* **10**, 375

de Gouveia dal Pino, E. M. 2005, *Advances in Space Research* **35**, 908

Doss, F. W., Drake, R. P. & Kuranz, C. C. 2010, *High Energy Density Physics* **6**, 157

Downes, T. P. & Ray, T. P. 1998, *Astronomy and Astrophysics* **331**, 1130

Draine, B. T. & McKee, C. F. 1993, *Annual review of astronomy and astrophysics* **31**, 373

Drake, R. P., Davison, L. & Horie, Y. 2006, *High-Energy-Density Physics : Fundamentals, Inertial Fusion, and Experimental Astrophysics*, Springer

Edens, A. D., Adams, R. G., Rambo, P. K., Smith, I. C., Porter, J. L. et al. 2007, *Astrophys. Space Sci.* **307**, 127

Einfeldt, B. 1988, *SIAM Journal on Numerical Analysis* **25**, 294

Erpenbeck, J. J. 1962, *Physics of Fluids* **5**, 1181

Falize, E. 2008, *Ph.D. thesis*, Similitudes et autosimilarité en physique des hautes densités d'énergie : Application à l'astrophysique de laboratoire, Observatoire de Paris

Falize, E., Michaut, C., Cavet, C., Bouquet, S., Koenig, M. et al. 2009, *Astrophys. Space Sci.* **322**, 71

Fall, S. M. & Rees, M. J. 1985, *Astrophys. J.* **298**, 18

Fischer, A. & Beuermann, K. 2001, *Astronomy and Astrophysics* **373**, 211

Fryxell, B., Arnett, D. & Mueller, E. 1991, *Astrophys. J.* **367**, 619

Godunov, S. K. 1959, *Mat. Sb.* **47**, 357

Gregory, C. D., Loupias, B., Waugh, J., Dono, S., Bouquet, S. et al. 2010, *Physics of Plasmas* **17**, 052708

Grun, J., Stamper, J., Manka, C., Resnick, J. & Burris, R. 1991, *Physical Review Letters* **66**, 2738

Haro, G. 1952, *Astrophys. J.* **115**, 572

Harten, A., Lax, P. D. & Van Leer, V. 1983, *SIAM Review* **25**, 35

Hartigan, P., Foster, J. M., Wilde, B. H., Coker, R. F., Rosen, P. A. et al. 2009, *Astrophys. J.* **705**, 1073

Hartigan, P., Frank, A., Varniére, P. & Blackman, E. G. 2007, *Astrophys. J.* **661**, 910

Hartigan, P. & Morse, J. 2007, *Astrophys. J.* **660**, 426

Herbig, G. H. 1951, *Astrophys. J.* **113**, 697

Hester, J. J., Stone, J. M., Scowen, P. A., Jun, B., Gallagher, III, J. S. et al. 1996, *Astrophys. J.* **456**, 225

Keilty, K. A., Liang, E. P., Ditmire, T., Remington, B. A., Shigemori, K. et al. 2000, *Astrophys. J.* **538**, 645

Kushnir, D., Waxman, E. & Shvarts, D. 2005, *Astrophys. J.* **634**, 407

Kylafis, N. D. & Lamb, D. Q. 1982, *Astrophys. J. Suppl. Ser.* **48**, 239

Landau, L. D. & Lifshitz, E. M. 1959, *Fluid mechanics*, Oxford : Pergamon Press

Lebedev, S. V., Chittenden, J. P., Beg, F. N., Bland, S. N., Ciardi, A. et al. 2002, *Astrophys. J.* **564**, 113

Leveque, R. J. 2002a, *http ://www.amath.washington.edu/∼rjl/clawpack/*

Leveque, R. J. 2002b, *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*, Cambridge University Press

Li, S. & Li, H. 2006, *Parallel AMR Code for Compressible MHD or HD Equations*, Technical Report LA-UR-03-8926, Los Alamos National Laboratory

Liang, E. & Keilty, K. 2000, *Astrophys. J.* **533**, 890

Loupias, B., Koenig, M., Falize, E., Bouquet, S., Ozaki, N. et al. 2007, *Physical Review Letters* **99**, 265001

Mac Low, M. 1999, in B. Wolf, O. Stahl, & A. W. Fullerton (ed.), *IAU Colloq. 169 : Variable and Non-spherical Stellar Winds in Luminous Hot Stars*, Vol. 523 of *Lecture Notes in Physics, Berlin Springer Verlag*, p. 391

Mac Low, M. & Norman, M. L. 1993, *Astrophys. J.* **407**, 207

Matsumoto, Y. & Hoshino, M. 2004, *Geophysical Research Letters* **31**, 2807

Meliani, Z. 2004, *Ph.D. thesis*, Université de Paris 7-Denis Diderot

Miceli, M., Bocchino, F. & Reale, F. 2008, *Astrophys. J.* **676**, 1064

Michaut, C., Falize, E., Cavet, C., Bouquet, S., Koenig, M. et al. 2009, *Astrophys. Space Sci.* **322**, 77

Micono, M., Bodo, G., Massaglia, S., Rossi, P., Ferrari, A. et al. 2000, *Astronomy and Astrophysics* **360**, 795

Micono, M., Massaglia, S., Bodo, G., Rossi, P. & Ferrari, A. 1998, *Astronomy and Astrophysics* **333**, 989

Mignone, A. 2005, *Astrophys. J.* **626**, 373

Mignone, A., Massaglia, S. & Bodo, G. 2004, *Astrophys. Space Sci.* **293**, 199

Mignone, A., Rossi, P., Bodo, G., Ferrari, A. & Massaglia, S. 2010, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **402**, 7

Mihalas, D. & Weibel Mihalas, B. 1984, *Foundations of radiation hydrodynamics*, New York : Oxford University Press

Nauenberg, M. 1972, *Astrophys. J.* **175**, 417

Nguyen, H. 2007, *Implémentation d'un schéma du type MUSCL et d'un solveur HLLC pour le code CLAW*, Technical report

Nguyen, H., Michaut, C. & Di Menza, L. 2010, *Cooling function effects on astrophysical jet morphology*, Submitted to *Journal of Computational Physics*

Quirk, J. J. 1994, *International Journal for Numerical Methods in Fluids* **18**, 555

Ray, T. P. 2009, in *Revista Mexicana de Astronomia y Astrofisica Conference Series*, Vol. 36 of *Revista Mexicana de Astronomia y Astrofisica, vol. 27*, pp 179–185

Raymond, J. C. 2003, in J. Arthur & W. J. Henney (ed.), *Revista Mexicana de Astronomia y Astrofisica Conference Series*, Vol. 15 of *Revista Mexicana de Astronomia y Astrofisica Conference Series*, pp 258–262

Reynolds, S. P. 2008, *Annual review of astronomy and astrophysics* **46**, 89

Ribeyre, X., Hallo, L., Tikhonchuk, V. T., Bouquet, S. & Sanz, J. 2007a, *Astrophys. Space Sci.* **307**, 169

Ribeyre, X., Hallo, L., Tikhonchuk, V. T., Bouquet, S. & Sanz, J. 2007b, *Physics of Plasmas* **14**, 112902

Robinet, J., Gressier, J., Casalis, G. & Moschetta, J. 2000, *Journal of Fluid Mechanics* **417**, 237

Ryu, D. & Vishniac, E. T. 1987, *Astrophys. J.* **313**, 820

Ryu, D. & Vishniac, E. T. 1991, *Astrophys. J.* **368**, 411

Ryutov, D. D., Remington, B. A., Robey, H. F. & Drake, R. P. 2001, *Physics of Plasmas* **8**, 1804

Sanders, R., Morano, E. & Druguet, M.-C. 1998, *Journal of Computational Physics* **145**, 511

Sankrit, R. & Hester, J. J. 1997, *Astrophys. J.* **491**, 796

Sanz, J., Bouquet, S. & Murakami, M. 2010, *Astrophys. Space Sci.* pp 377–+

Saxton, C. J. 1999, *Ph.D. thesis*, Stability properties of radiative accretion shocks with multiple cooling processes, Univ. Sydney, Australia

Saxton, C. J. & Wu, K. 1999, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **310**, 677

Schmidt, G. D. 2004, in S. Vrielmann & M. Cropper (ed.), *IAU Colloq. 190 : Magnetic Cataclysmic Variables*, Vol. 315 of *Astronomical Society of the Pacific Conference Series*, p. 22

Sedov, L. 1977, *Similitude et dimensions en mécanique*, Moscou : Edition Mir

Servillat, M., Dieball, A., Webb, N. A., Knigge, C., Maccarone, C. et al. 2008, in C. Charbonnel, F. Combes, & R. Samadi (ed.), *SF2A-2008*, p. 283

Sod, G. A. 1978, *Journal of Computational Physics* **27**, 1

Stone, J. M., Gardiner, T. A., Teuben, P., Hawley, J. F. & Simon, J. B. 2008, *Astrophys. J. Suppl. Ser.* **178**, 137

Stone, J. M. & Norman, M. L. 1992, *Astrophys. J. Suppl. Ser.* **80**, 753

Strang, G. 1968, *SIAM Journal on Numerical Analysis* **5**, 506

Suleimanov, V., Revnivtsev, M. & Ritter, H. 2005, *Astronomy and Astrophysics* **435**, 191

Sutherland, R. S., Bisset, D. K. & Bicknell, G. V. 2003, *Astrophys. J. Suppl. Ser.* **147**, 187

Symes, D. R., Hohenberger, M., Lazarus, J., Osterhoff, J., Moore, A. S. et al. 2010, *High Energy Density Physics* **6**, 274

Taylor, G. 1950, *Royal Society of London Proceedings Series A* **201**, 159

Toro, E. F. 1999, *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics*, Springer, Berlin

Toro, E. F., Spruce, M. & Speares, W. 1994, *Shock Waves* **4**, 25

Trussoni, E. 2008, in S. Massaglia, G. Bodo, A. Mignone, & P. Rossi (ed.), *Jets From Young Stars III*, Vol. 754 of *Lecture Notes in Physics, Berlin Springer Verlag*, pp 105–130

Trussoni, E. 2009, *The Kelvin-Helmholtz Instability in Stellar Jets*, pp 285–294, Tsinganos, K., Ray, T., & Stute, M.

van Leer, B. 1979, *Journal of Computational Physics* **32**, 101

Velazquez, P. F., Gomez, D. O., Dubner, G. M., de Castro, G. G. & Costa, A. 1998, *Astronomy and Astrophysics* **334**, 1060

Vishniac, E. T. 1983, *Astrophys. J.* **274**, 152

Vishniac, E. T. 1994, *Astrophys. J.* **428**, 186

Vishniac, E. T. & Ryu, D. 1989, *Astrophys. J.* **337**, 917

von Neumann, J. 1947, *The Point Source Solution. Blast Wave, ch. 2*, Los Alamos Sci. Lab. Tech Series, VII Pt. II

Wada, T., Shimizu, A., Suzuki, M., Kato, M. & Hoshi, R. 1980, *Progress of Theoretical Physics* **64**, 1986

Wu, K. 2000, *Space Science Reviews* **93**, 611

Wu, K., Chanmugam, G. & Shaviv, G. 1994, *Astrophys. J.* **426**, 664

Zel'Dovich, Y. B. & Raizer, Y. P. 1967, *Physics of shock waves and high-temperature hydrodynamic phenomena*, New York : Academic Press, 1966/1967, edited by Hayes, W.D. ; Probstein, Ronald F.

Zingale, M., Woosley, S. E., Rendleman, C. A., Day, M. S. & Bell, J. B. 2005, *Astrophys. J.* **632**, 1021

Annexe A

L'analyse de perturbation globale

A.1 Les équations d'Euler non perturbées en géométrie plan-parallèle

Dans cette partie, nous voulons transformer, comme en géométrie sphérique dans la Sec. 4.3.2, les équations d'Euler non perturbées qui forment un système d'équations aux dérivées partielles (EDP) en un système d'équations différentielles ordinaires (EDO). Pour cela, nous faisons le même changement de variable que précédemment qui s'écrit dans le formalisme auto-semblable :

$$\rho(x,t) = \rho_1\, G(\xi)\,, \tag{A.1}$$

$$u(x,t) = \dot{x}_s \xi\, U(\xi)\,, \tag{A.2}$$

$$p(x,t) = \rho_1 \dot{x}_s^2\, P(\xi)\,, \tag{A.3}$$

où $G(\xi)$, $U(\xi)$, $P(\xi)$ sont trois fonctions sans dimension et $\xi = x/x_s(t)$ est la variable auto-semblable dans la géométrie plan-parallèle qui dépend de la coordonnée longitudinale x et de la position du front de choc $x_s(t)$. Avant d'effectuer le changement de variable, nous rappelons la forme des équations d'Euler non perturbées en géométrie plan-parallèle. Dans cette géométrie, les variations spatiales sont seulement selon la direction O_x (dans les Eq. 1.1 - 1.3 de la Sec. 1.2 du chapitre I, $\vec{\nabla} = \nabla_x$) et nous avons ainsi :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0\,, \tag{A.4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = 0\,, \tag{A.5}$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x}\right] ln\frac{p}{\rho^\gamma} = 0\,. \tag{A.6}$$

Nous conservons cette fois la grandeur de pression p et nous remplaçons ρ, u et p par les relations A.1, A.2 et A.3. Nous redémontrons que les nouvelles équations obtenues s'écrivent sous le système d'EDO suivant :

$$(U-1)\frac{d\,ln(G)}{d\,ln(\xi)} + \frac{d\,U}{d\,ln(\xi)} = -U\,, \tag{A.7}$$

$$G(U-1)\frac{d\,U}{d\,ln(\xi)} + \frac{1}{\xi}\frac{d\,P}{d\,\xi} = -GU(U-\frac{1}{\alpha})\,, \tag{A.8}$$

$$\frac{(U-1)}{U}\frac{d\,ln(P)}{d\,ln(\xi)} + \gamma\frac{d\,ln(U)}{d\,ln(\xi)} = -\gamma - \frac{2(\alpha-1)}{\alpha U}\,. \tag{A.9}$$

Ces équations sont intégrées avec Mathematica, comme pour le système d'équations déterminé en géométrie sphérique et nous obtenons les profils de la figure 4.5 du chapitre IV.

Annexe B

Les autres instabilités : quelques aspects théoriques et numériques

Nous nous intéressons aux instabilités hydrodynamiques et aux instabilités hydrodynamiques avec des pertes radiatives qui peuvent apparaître dans les restes de supernova (RSN). Cette élargissement du champ d'étude à d'autres instabilités a pour but de bien différencier l'effet de chacun de ces processus afin de bien se rendre compte des spécificités de l'instabilité de Vishniac.

B.1 L'instabilité de Rayleigh-Taylor

L'instabilité de Rayleigh-Taylor (IRT) (Ribeyre et al. 2007a,b ; Velazquez et al. 1998 ; Zingale et al. 2005) est une instabilité hydrodynamique (mais qui peut être aussi magnétohydrodynamique) qui peut apparaître dans les RSN, comme l'instabilité de Vishniac, ce qui nous amène à faire un point sur ce processus caractéristique. Nous voulons particulièrement insister dans cette partie sur le fonctionnement de l'IRT afin de montrer que cette instabilité et celle de Vishniac ne peuvent pas se développer dans la même zone du RSN et ainsi ne peuvent pas être confondues.

Le processus physique de l'IRT repose sur le principe suivant : lorsque deux fluides de densité différente, séparés par une interface faiblement perturbée, sont soumis à une accélération (ou à un freinage) alors la perturbation peut croître. En effet, cette configuration permet au fluide le plus dense de se propager dans le fluide le plus léger. Ce système peut aussi être considérer autrement, c'est-à-dire sans faire intervenir la force de gravité. Si un fluide lourd est décéléré par un fluide léger, alors l'instabilité est aussi déclenchée et cet agencement est présent dans les RSN.

Le critère d'instabilité de ce processus, qui dépend du signe des gradients de densité et de pression et qui détermine quand un système est instable, s'écrit :

$$\overrightarrow{\nabla} p \cdot \overrightarrow{\nabla} \rho < 0 \,. \tag{B.1}$$

Ainsi, lorsque la variation de densité est inverse à celle de pression, le système est instable au sens de Rayleigh-Taylor. Sur le front de choc des RSN, ce critère n'est jamais validé et l'IRT ne peux pas se développer sur cette discontinuité. Par contre, la discontinuité de contact, qui sépare les ondes de choc et retour, est souvent instable car le gradient de pression est nul sur cette interface et celui de densité est négatif.
Nous regardons à présent l'évolution de l'IRT avec une simulation de Li & Li (2006) représentée sur la figure B.1. Sur le premier instantané, une perturbation de forte amplitude est visible (l'amplitude de la perturbation est de l'ordre de 40% de la longueur d'onde de la perturbation, c'est le régime non-linéaire de l'IRT qui est déclenché). Ensuite, la gravité locale que ressente les fluides, engendre une pénétration du fluide le plus lourd (en bleu) dans celui plus léger (en jaune). Le doigt de matière formé croît ensuite jusqu'à engendrer une

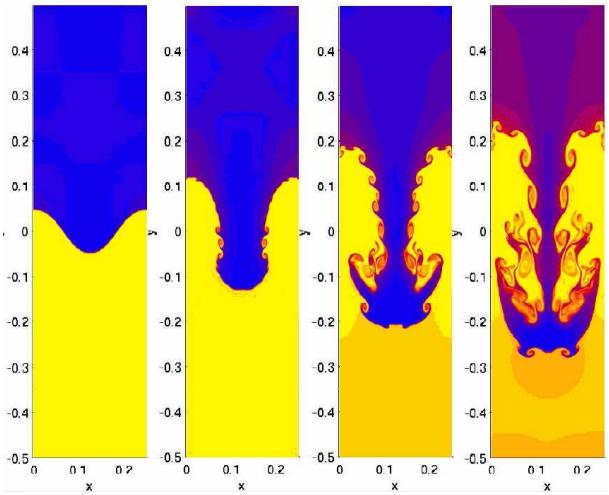


FIG. B.1 – Croissance de l'instabilité de Rayleigh-Taylor : instantanés de la carte de la densité. L'initialisation de la perturbation qui permet le déclenchement de l'instabilité est faite *via* une déformation spatiale de l'interface séparant un fluide lourd (en bleu) d'un fluide plus léger (en jaune) (à t_0). Le fluide le plus lourd pénètre dans celui le plus léger en créant une structure en forme de champignon (à t_1 et t_2). L'instabilité entre ensuite dans son régime non linéaire et à partir de cette phase, l'instabilité de Kelvin-Helmholtz apparaît sur la "tige" du champignon. Issu de Li & Li (2006).

structure en forme de champignon. Ainsi pour que l'IRT puisse se développer dans une régime particulier il est nécessaire que la densité du milieu le plus léger soit au moins uniforme sur une distance de la taille des champignons. Nous voyons ensuite apparaître l'instabilité de Kelvin-Helmholtz sur la "tige" du champignon. Nous présentons cette instabilité, qui permet la formation de rouleaux de fluide lourd, dans la partie suivante. Ainsi l'IRT, couplée avec d'autres instabilités, permet la formation de structures complexes et elle est probablement responsable de la morphologie de certains RSN comme sur la discontinuité de contact de la nébuleuse du *Crabe*.

B.2 L'instabilité de Kelvin-Helmholtz

L'instabilité de Kelvin-Helmholtz (IKH) est aussi une instabilité hydrodynamique (magnétohydrodynamique) bien connue et dont la présence dans les jets d'étoile jeune est avérée (Trussoni 2009). L'IKH n'est pas directement présente dans les RSN mais elle peut apparaître lors de la croissance des champignons de Rayleigh-Taylor, comme nous venons de le voir, car ils présentent la configuration prédisposant au déclenchement d'une deuxième instabilité.

Le processus physique de l'IKH repose sur le principe suivant : lorsque deux fluides en mouvement sont séparés par une interface faiblement perturbée et que ces fluides se propagent dans la même direction mais leurs vitesses n'ont pas la même norme ou n'ont pas le même sens, alors la perturbation peut croître. En effet une force de friction, qui découle de la différence de vitesse, apparaît sur l'interface et elle crée une couche de pénétration entre les deux fluides. La perturbation va donc croître en formant des vortex de matière, comme illustré sur la

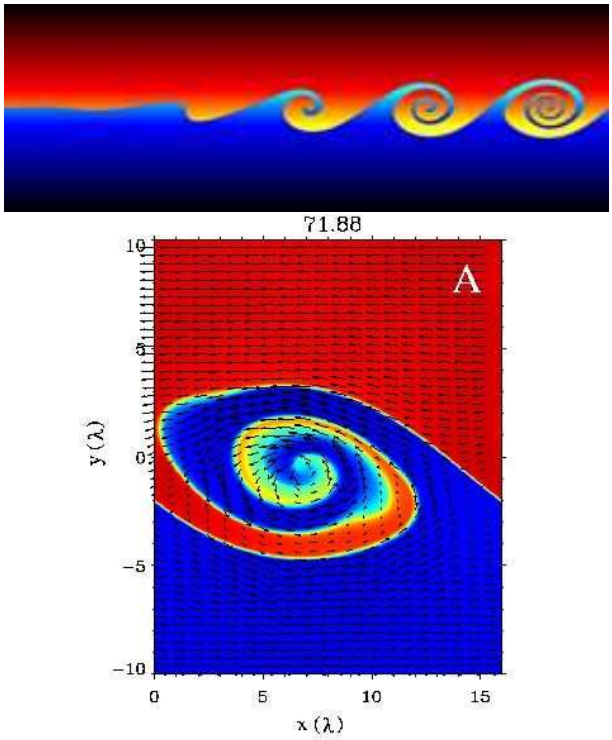


FIG. B.2 – Croissance de l'instabilité de Kelvin-Helmholtz : carte de la densité montrant la formation des vortex de matière permettant le mélange des deux fluides. Issu de P. Nylander (http ://bugman123.com/FluidMotion/) (image du haut) et Matsumoto & Hoshino (2004) (image du bas).

figure B.2.

Ainsi nous voyons que, comme pour l'instabilité de Rayleigh-Taylor, l'instabilité de Kelvin-Helmholtz permet le transport et le mélange de la matière. Mais chacune de ces instabilités agit à sa manière sur les fluides en présence. Nous constatons donc que leur action est bien différente de celle de l'instabilité de Vishniac et cela est d'autant plus visible lorsque nous comparons les structures qu'elles forment et le lieu de cette formation.

Ainsi l’instabilité de Vishniac est la seule instabilité, parmi les instabilités que nous avons présenté, qui peut agir sur le front de choc des RSN.

Annexe C

La perturbation d'une onde de souffle quasi-isotherme

Nous étudions l'instabilité de Vishniac dans le contexte d'une onde de souffle quasi-isotherme et cela dans les deux géométries que nous avons modélisées jusqu'à présent. Pour cette étude, nous utilisons comme écoulement de base une onde de souffle ayant une structure interne uniforme. Nous avons déjà déterminé ce système dans le chapitre IV et les profils des grandeurs caractéristiques de cette onde de souffle quasi-isotherme sont représentés sur la figure 4.22(d) en géométrie sphérique et sur la figure 4.23(d) en géométrie plan-parallèle. La spécificité de cette modélisation repose sur le fait que dans les simulations non perturbées et perturbées, les indices adiabatiques sont fixés à une seule valeur et cela du front de choc à l'origine de l'onde de souffle : $\gamma_3 = \gamma_2 = 1,1$. Ainsi l'onde de souffle est décrite par un unique indice adiabatique comme dans le modèle analytique. Dans le milieu ambiant, nous rappelons que le gaz est toujours supposé adiabatique ($\gamma_1 = 5/3$). Nous présentons les résultats obtenus dans les deux géométries.

C.1 L'étude en géométrie plan-parallèle

Nous avons représenté les instantanés de la simulation en géométrie plan-parallèle, qui montrent la carte de densité d'une onde de souffle perturbée évoluant jusqu'à $t = t_0 + 2 \times 10^4$ ans, sur les figures C.1 et C.2. Nous voyons, comme dans la simulation d'une onde de souffle de type PDTS que nous avons utilisée dans l'étude paramétrique, que le déclenchement de l'instabilité se fait par la déformation spatiale de la coquille qui génère ensuite un flux transverse dans cette même région. Les paquets de matière formés par le flux transverse vont ensuite croître en masse jusqu'à $t = t_0 + 1,1 \times 10^4$ ans. Puis, la coquille s'élargit d'une manière importante comme précédemment et nous observons aussi des structures non linéaires qui changent la morphologie de la zone derrière le front de choc. À partir de $t = t_0 + 1,1 \times 10^4$ ans et jusqu'à la fin de la simulation, les oscillations s'atténuent, la densité redevient homogène juste derrière le front de choc et le front redevient plan.

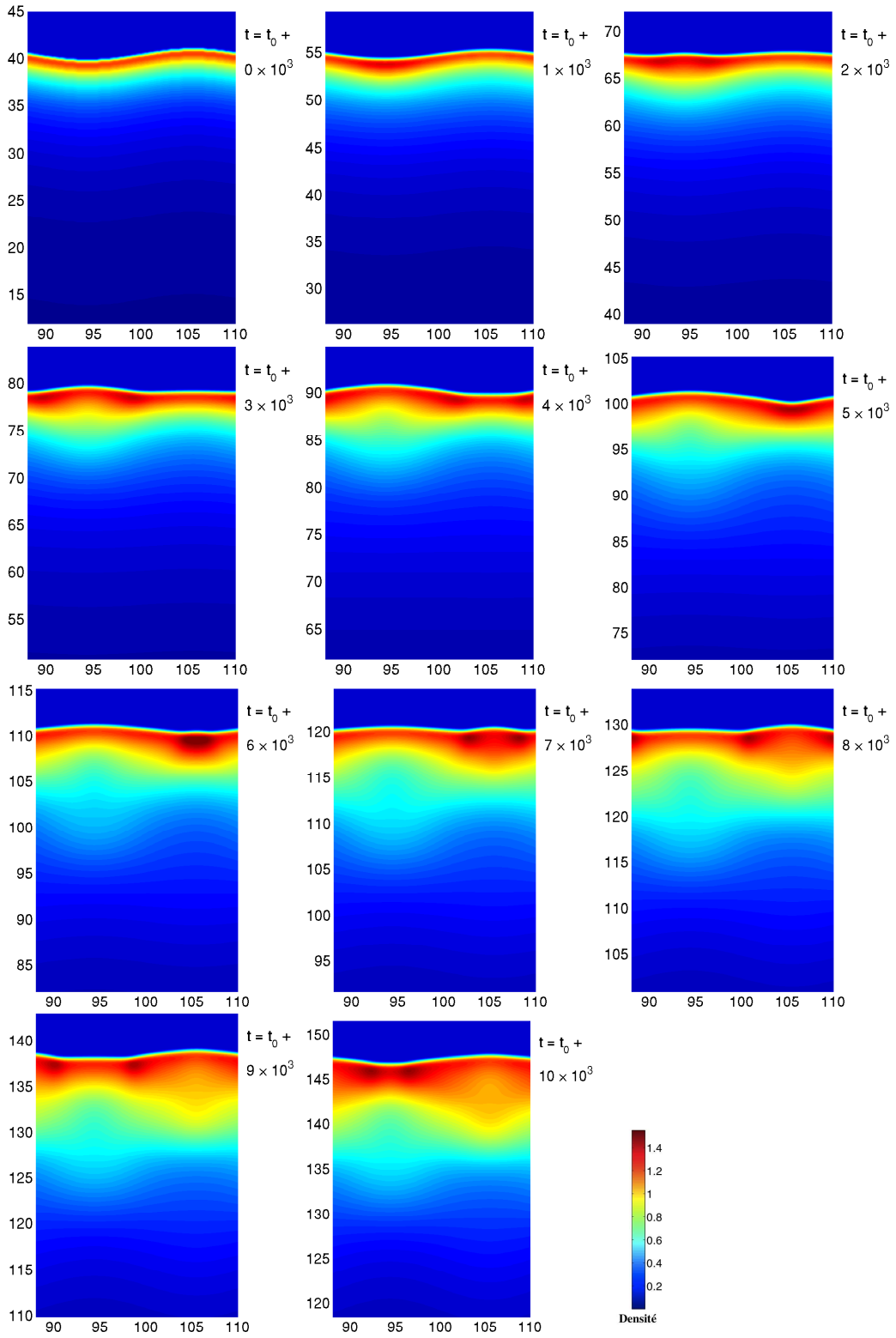


FIG. C.1 – Effet de l'instabilité de Vishniac : instantanés de la carte de densité en 10^{-19} kg.m^{-3} de la coquille évoluant de $t = t_0$ à $t = t_0 + 10^4$ ans dans la géométrie plan-paralèlle pour $A = 0,05\,\lambda$, $l = 14$, et $\mathcal{M} \approx 5$ et $\gamma_3 = \gamma_2 = 1,1$. Les axes sont en 10^{15} m. Les instantanés sont rangés dans le temps avec le même pas de temps que précédemment et s'ordonnent de gauche à droite et de haut en bas. Le régime linéaire incluant la surstabilité apparaît être le même que dans le modèle d'une onde de souffle de type PDTS.

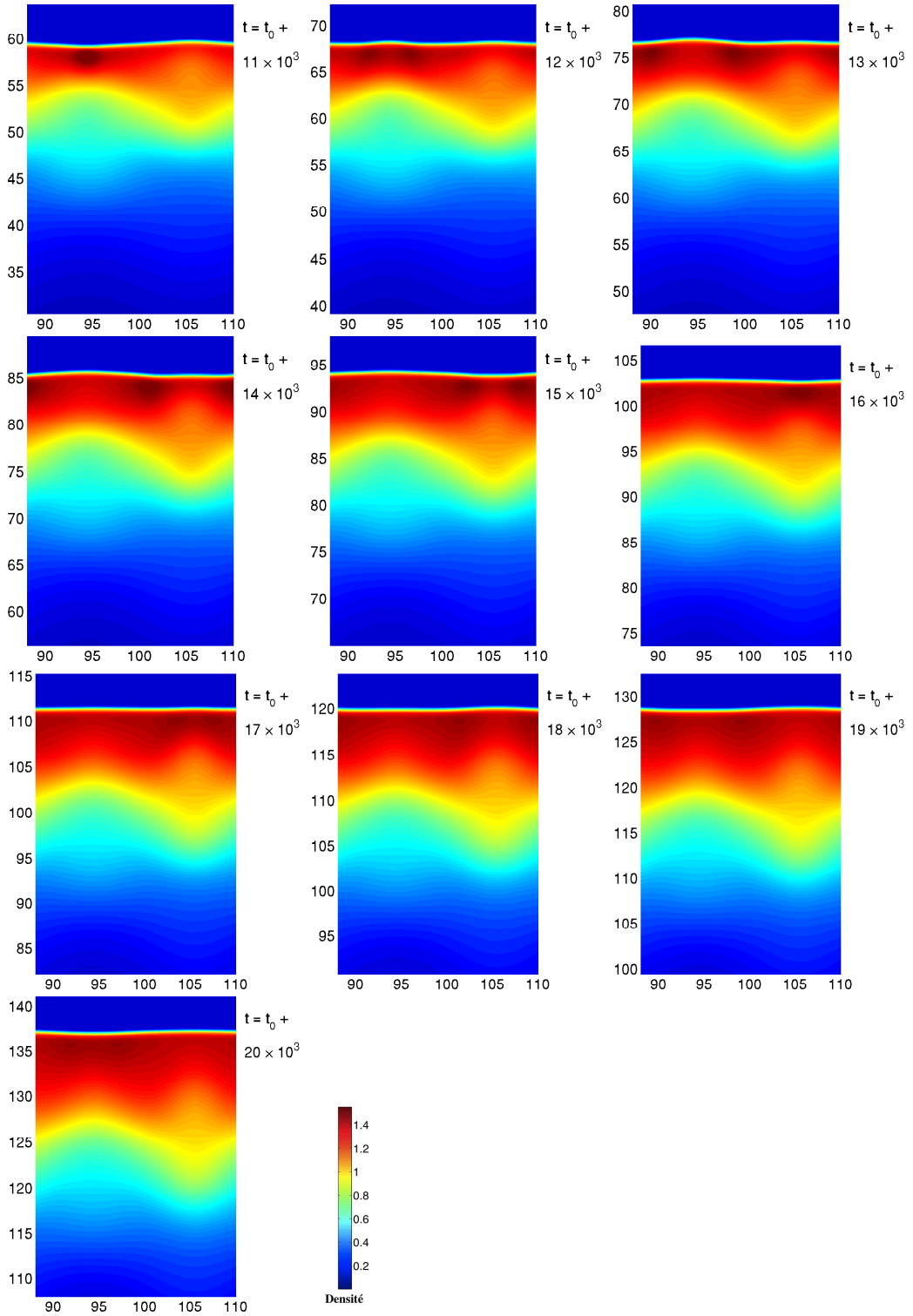


FIG. C.2 – Effet de l'instabilité de Vishniac : instantanés de la carte de densité en 10^{-19} kg.m^{-3} de la coquille évoluant de $t = t_0 + 1,1 \times 10^4$ ans à $t = t_0 + 2 \times 10^4$ ans dans la géométrie plan-paralèlle. Les axes sont en 10^{15} m. Le régime linéaire d'évolution de la perturbation est suivit d'une saturation de la croissance des paquets de matière. Et finalement, le système redevient stable mais il ne revient pas à l'état initiale. Suite de la figure C.1.

Ainsi nous observons le même type d'évolution qu'avec le modèle que nous avons utilisé jusqu'à présent.

C.2 L'étude en géométrie sphérique

Nous faisons la même étude en géométrie sphérique car nous avons vu que les deux géométries présentent des évolutions différentes de la perturbation initiale. Nous avons représenté les instantanés de la simulation en géométrie sphérique, qui montrent la carte de densité d'une onde de souffle perturbée évoluant jusqu'à $t = t_0 + 2 \times 10^4$ ans, sur les figures C.3 et C.4. Comme dans l'étude paramétrique, la formation des paquets de matière est un processus rapide. Mais la deuxième accumulation de matière dans une région donnée met plus de temps à se réaliser à cause de l'augmentation de la longueur d'onde de la perturbation due à l'expansion de l'onde de souffle. Ainsi au final, les surdensités formées dans la coquille tendent à diminuer et le front de choc retourne vers un état non perturbé. De même qu'en géométrie plan-parallèle, nous observons une évolution similaire au modèle utilisé dans l'étude paramétrique.

C.3 La conclusion des études

Les résultats que nous avons obtenu sur l'évolution d'une déformation spatiale appliquée sur la coquille d'une onde de souffle quasi-isotherme modélisée dans les géométries sphérique et plan-parallèle confirment les résultats auxquels nous étions parvenus avec l'onde de souffle de type PDTS de l'étude paramétrique. Le processus de surstabilité apparaît bien dans les différents cas mais il est toujours atténué après un ou plusieurs échanges de matière entre les régions voisines. Ainsi nous avons confirmé avec cette modélisation plus proche du modèle analytique que l'instabilité de Vishniac ne permet pas la fragmentation du front de choc.

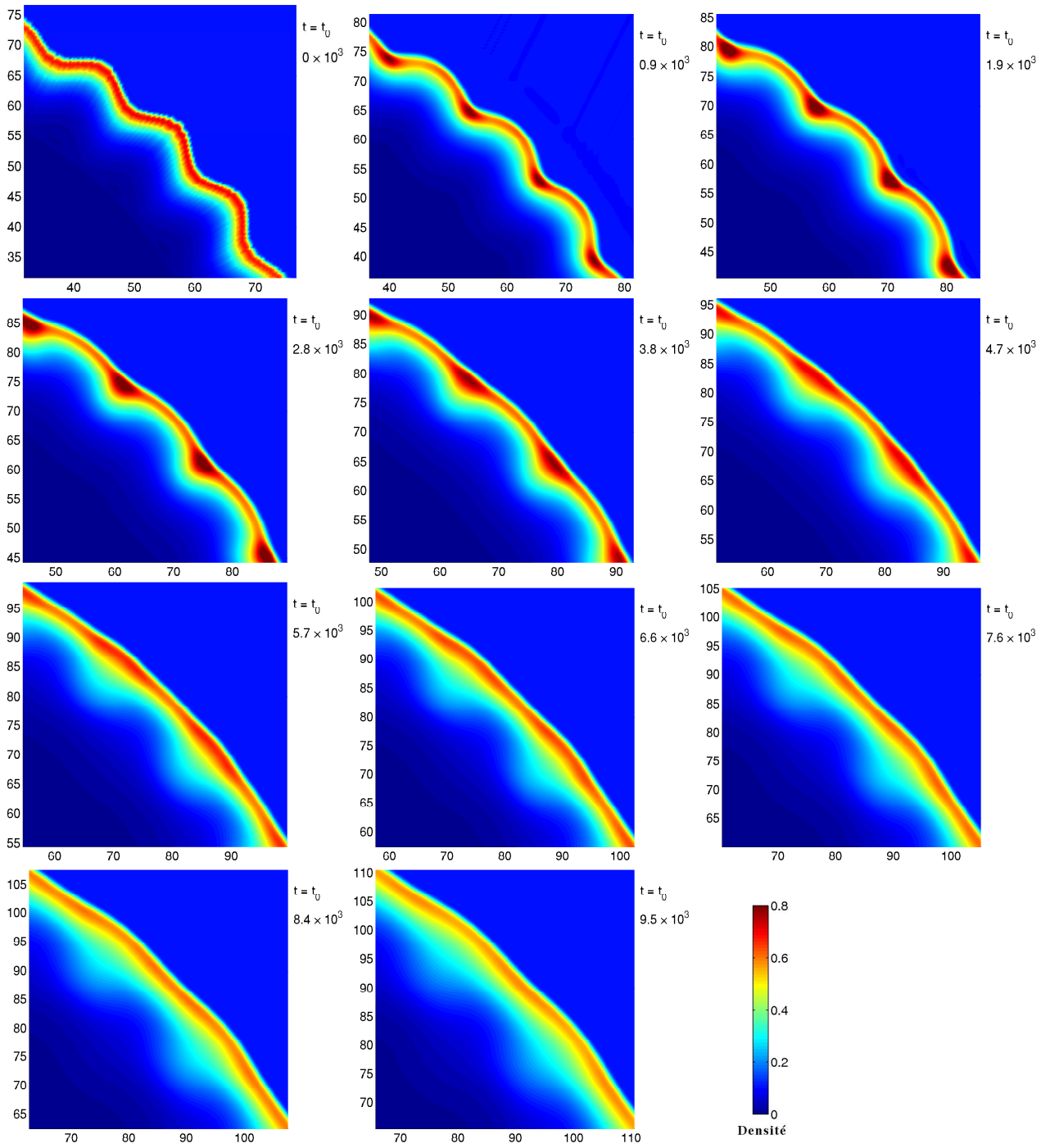


FIG. C.3 – Effet de l'instabilité de Vishniac : instantanés de la carte de densité en 10^{-19} kg.m^{-3} de la coquille évoluant de $t = t_0$ à $t \approx t_0 + 10^4$ ans dans la géométrie sphérique pour $A = 0,05\,\lambda$, $l = 32$, et $\mathcal{M} \approx 5$ et $\gamma_3 = \gamma_2 = 1,1$. Les axes sont en 10^{15} m. Le régime linéaire permet comme précédemment la formation rapide de paquets de matière dans la région $\mathcal{A}$ (creux initial) qui vont ensuite mettre plus de temps à venir s'accumuler dans la région $\mathcal{B}$ (vallée initiale) à cause de l'augmentation de la longueur d'onde de la perturbation.

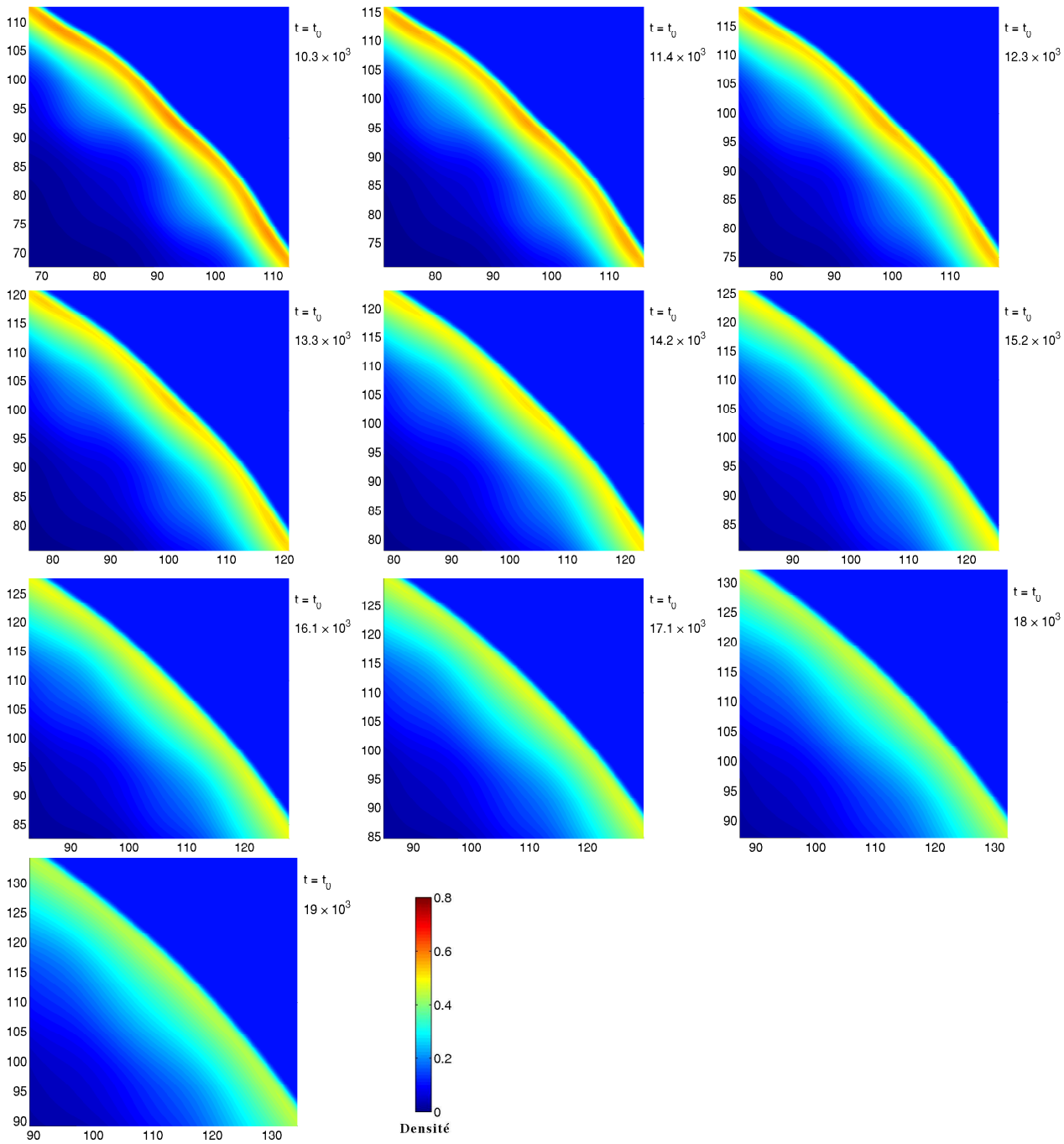


FIG. C.4 – Effet de l'instabilité de Vishniac : instantanés de la carte de densité en 10^{-19} kg.m^{-3} de la coquille évoluant de $t \approx t_0 + 10^4$ ans à $t \approx t_0 + 10^4$ ans dans la géométrie sphérique pour $A = 0,05\,\lambda$, $l = 32$, et $\mathcal{M} \approx 5$ et $\gamma_3 = \gamma_2 = 1,1$. Les axes sont en 10^{15} m. La densité globale de la coquille diminue fortement pendant cette période, les surdensités tendent à diminuer et le front de choc retourne vers un état non perturbé.