HAL open science

Homogénéisation et correcteurs pour quelques problèmes hyperboliques

Florian Gaveau

▶ To cite this version:

Florian Gaveau. Homogénéisation et correcteurs pour quelques problèmes hyperboliques. Mathématiques [math]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2009. Français. NNT : . tel-00573938

HAL Id: tel-00573938
https://theses.hal.science/tel-00573938

Submitted on 7 Mar 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire HAL, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université Pierre et Marie Curie – Paris 6

Ecole Doctorale de Sciences Mathématiques de Paris Centre

Homogénéisation et correcteurs pour quelques problèmes hyperboliques

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 08 décembre 2009

pour l'obtention du grade du

Docteur de l'Université Pierre et Marie Curie - Paris 6
(Spécialité Mathématiques Appliquées)

par

Florian Gaveau

Composition du jury

Rapporteurs :	M. Marc Briane
	M. Grigori Panasenko
Examinateurs :	M. Alain Damlamian
	M. Georges Griso
	M. Hervé Le Dret
Directeur :	Mme. Doina Cioranescu
Co-directeur :	Mme. Patrizia Donato

Laboratoire Jacques Louis Lions – UMR 7598

Mis en page avec la classe thloria.

Remerciements

Dans ces quelques lignes j'aimerais tenter d'ébaucher des remerciements pour toutes les personnes qui ont compté et m'ont encouragé dans ce travail de thèse.

Je remercie tout d'abord ma directrice de thèse Madame Doina Cioranescu, pour son encouragement, son implication dans mon travail ainsi que pour m'avoir permis d'obtenir une allocation de recherche en acceptant de diriger ma thèse.
Je remercie pareillement Madame Patrizia Donato ma co-directrice de thèse, pour son implication dans mon travail, sa disponibilité malgré son emploi du temps chargé, sa rigueur scientifique et ses commentaires judicieux qui m'ont aidé à formuler ma pensée.

Je remercie Messieurs Marc Briane et Grigori Panasenko de m'avoir fait l'honneur de rapporter ma thèse ainsi que pour leur travail méticuleux de relecture de mon manuscrit.

Je remercie Messieurs Alain Damlamian, Georges Griso et Hervé Le Dret d'avoir accepté de faire partie de mon jury et témoigné de l'intérêt pour mes recherches.

Je tiens à exprimer toute ma gratitude à Monsieur Yvon Maday, directeur du Laboratoire Jacques-Louis Lions, qui a accepté de m'accueillir au sein de ses équipes et pour m'avoir fait confiance.

Je souhaiterais remercier le personnel du Laboratoire Jacques-Louis Lions, à savoir les secrétaires Mesdames Danièle Boulic, Liliane Ruprecht et Merbouha Lounici pour leur disponibilité, leur gentillesse et leur aide administrative ainsi que les responsables du réseau informatique Messieurs Khashayar Dadras et Antoine Lehyaric qui ont fait de leur mieux pour répondre aux besoins informatiques du laboratoire nécessaires à l'avancement de mon travail.

Je remercie également Monsieur Rabah Labbas Professeur à l'Université du Havre que j'ai eu durant mes années de DEUG, licence et maîtrise pour m'avoir recommandé au Laboratoire de Mathématiques Raphael Salem de l'Université de Rouen où j'ai eu la chance de rencontrer Madame Patrizia Donato grâce à qui j'ai pu faire cette thèse.

Je remercie aussi Monsieur Santiago Panos Maître de conférence à l'Université du Havre, pour m'avoir permis d'obtenir un poste d'ATER, ce qui m'a aidé à finir sereinement ma thèse.

Je souhaiterais remercier de tout mon coeur l'ensemble de ma famille pour son affection et son soutien, en particulier ma mère pour son soutien moral et financier ainsi que ma grand-mère qui a accepté très chaleureusement de m'héberger durant les années où je préparais mon doctorat.
Je tiens aussi bien sûr à remercier tous mes camarades et collègues doctorants du Laboratoire Jacques-Louis Lions des premier, second et troisième étage pour leur soutien et toutes nos discussions. En particulier Abbas, Benjamin A. et Sophie que j'ai rencontrés au cours de mon activité de monitorat ainsi que tous les doctorants de mon bureau 1D01, Sever, Sonia, Nicolas, Valérie, Imen, Benjamin B., Noura, Kirill-Pichon, Lamjed puis aussi ceux que j'aurais pu oublier de citer par mégarde

Je dédie cette thèse
à toute ma famille.

Table des matières

Introduction Générale

Les travaux présentés dans cette thèse concernent des résultats d'homogénéisation et de correcteur pour des problèmes hyperboliques.
Dans de nombreux problèmes de mécanique, physique ou ingénierie on est amené à étudier des problèmes aux limites dans des milieux ayant une structure périodique ou présentant des hétérogénéités de petite taille par rapport à la dimension du domaine. C'est le cas notamment des matériaux composites qui sont de plus en plus utilisés en industrie pour leur meilleures caractéristiques que leurs composantes.
La modélisation de phénomènes intervenant dans ces matériaux composites, tels que la propagation d'ondes ou de chaleur, peut aboutir à des équations aux dérivées partielles dont les coefficients sont fortements oscillants. Lorsqu'elles sont trop nombreuses, ces oscillations peuvent générer des problèmes dans la résolution numérique de ces équations. La théorie de l'homogénéisation permet justement d'y remédier en remplaçant les problèmes aux coefficients fortement oscillant par des problèmes approchés dont les coefficients sont constants, et donc beaucoup plus simples à traiter numériquement.
En général les coefficients oscillants du problème sont indexés par un paramètre ε. Homogénéiser ce problème consiste à étudier le comportement asymptotique de sa solution u_ε lorsque ε tend vers 0. Si u est une limite, on se pose la question de savoir si u peut être caractérisé comme solution d'un problème limite (qui naturellement ne contient plus d'oscillations). Si tel est le cas, on doit montrer que la fonction u_ε est suffisamment proche de la fonction limite u, pour que celle-ci puisse être considérée comme une bonne approximation de u_ε. Lorsqu'on dispose de bonnes estimations, on peut remplacer le problème de départ par le problème homogénéisé dont la solution est plus simple à calculer.
Lorsqu'on étudie la convergence de la solution u_ε du problème de départ, on ne dispose que d'une convergence faible de cette solution (c'est une conséquence du caractère oscillatoire du problème). Cependant, on a prouvé dans de multiples situations, qu'en multipliant la fonction u_ε par une fonction convenable χ_ε, ou bien le gradient ∇u_ε par une matrice C^ε convenable, on peut obtenir une convergence forte des produits $\chi_\varepsilon u_\varepsilon$ ou $C^\varepsilon \nabla u_\varepsilon$ vers la solution u du problème homogénéisé ou de son gradient ∇u, respectivement. On appelle les fonctions χ_ε ou bien les matrices C^ε des correcteurs car ils permettent d'améliorer la convergence de la solution du problème initiale. On doit noter que trouver des correcteurs ou des matrices correcteurs n'est pas un problème facile, de même que de montrer qu'en les utilisant on bénéficie d'une meilleure convergence.

Le domaine dans lequel le problème est étudié peut être un domaine fixe $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ou un domaine Ω_ε dépendant d'un paramètre ε. Dans ce cas, on a en général, $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus S_\varepsilon$, il s'agit d'un domaine Ω perforé par un ensemble de trou S_ε.
Si on suppose que l'on étudie un problème dans un matériau composite dont la distribution de matière est périodique, on peut décrire cette situation mathématiquement par le fait que le domaine Ω est recouvert par des cellules εY de taille $\varepsilon l_1 \times \varepsilon l_2 \times \ldots \varepsilon l_n$, où $l_1, \ldots, l_n$ représentent les dimensions de la cellule de référence Y, avec $Y =]0, l_1[\times \ldots \times]0, l_n[$.
Deux échelles caractérisent cette construction, l'échelle macroscopique qui donne la position d'un point x dans le domaine Ω et l'échelle microscopique $\frac{x}{\varepsilon}$ qui donne la position d'un point dans la cellule Y. Plus précisement, il s'agit de la position d'un point x appartenant au domaine Ω se trouvant dans une certaine translation de la cellule εY, en d'autres termes pour tout $x \in \Omega$, il

existe un unique entier $k \in \mathbb{Z}$ et un unique réel $y \in Y$ tels que :

$$\frac{x}{\varepsilon} = kl + y, \text{ où } kl = (k_1 l_1, \ldots, k_n l_n) \text{ et } y \in Y.$$

On peut dire que l'on est en présence de deux variables x et y et c'est cette observation qui a été la base des méthodes d'homogénéisation.
Cette thèse comprend 4 chapitres.

Le premier chapitre est consacré aux rappels des principales méthodes d'homogénéisation, à savoir les quatre méthodes d'homogénéisation périodique ainsi que de la définition de la H-convergence. Les quatre principales méthodes d'homogénéisation périodique sont la méthode des échelles multiples de A. Bensoussan, J.L. Lions et G. Papanicolaou ([7], [16], [32], [35]), la méthode des fonctions tests oscillantes de L. Tartar ([37], [38]), la méthode de la convergence à double échelle (G. Nguetseng [30], G. Allaire [1]) et la méthode de l'éclatement périodique de D. Cioranescu, A. Damlamian et G. Griso ([15]). Pour les décrire, on applique les quatre méthodes successivement au problème suivant :

$$\begin{cases} -\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j}\right) = f & \text{dans } \Omega, \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où $f \in L^2(\Omega)$ et A est une matrice carrée d'ordre n, coercive, définie par $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ où les coefficients a_{ij} sont des fonctions Y-pérodiques appartenant à $L^\infty(\Omega)$ pour tout $i, j = 1, \ldots, n$.

Dans la seconde partie du premier chapitre, on rappelle la défintion et quelques résultats portant sur la H-convergence.

Dans le chapitre 2, on s'intéresse à l'homogénéisation et à un résultat de correcteur concernant l'équation des ondes sous une hypothèse de H^0-convergence de la partie elliptique du problème. Cette notion a été introduite par M. Briane, A. Damlamian et P. Donato dans [10]. Elle généralise la notion de H-convergence aux domaines perforés.

Soit $T > 0$ un réel donné, et $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus S_\varepsilon$ un domaine perforé, obtenu en retirant un ensemble de trou S_ε à un ouvert borné Ω de $\mathbb{R}^n$. On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} \rho_\varepsilon u_\varepsilon'' - \operatorname{div}(A^\varepsilon \nabla u_\varepsilon) = f_\varepsilon & \text{dans } \Omega_\varepsilon \times (0,T), \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (0,T), \\ A^\varepsilon \nabla u_\varepsilon \,.\, \nu = 0 & \text{sur } \partial S_\varepsilon \times (0,T), \\ u_\varepsilon(x,0) = a_\varepsilon & \text{dans } \Omega_\varepsilon, \\ u_\varepsilon'(x,0) = b_\varepsilon & \text{dans } \Omega_\varepsilon, \end{cases} \tag{1}$$

où ν désigne la normale extérieure à Ω_ε, $\{\rho_\varepsilon\}$ est une suite de fonctions définies positives et uniformément bornées sur Ω_ε, $\{f_\varepsilon\}$ une suite de fonctions appartenant à $L^2(\Omega_\varepsilon \times (0,T))$ et $\{A^\varepsilon\}$ une suite de matrices symétriques et bornées dans $L^\infty(\Omega)$ telles que le couple $\{(A^\varepsilon, S_\varepsilon)\}$ H^0-converge vers une matrice A^0. Pour une définition détaillée de la H^0-convergence, voir le chapitre 2.

Nous prouvons deux résultats principaux. Le premier concerne la convergence de la solution u_ε du problème (1) vers celle du problème homogénéisé. Dans un premier temps, on suppose qu'il existe une matrice de fonction A^0 coercive et bornée et des fonctions $\rho \in L^\infty(\Omega)$, $f \in L^2((0,T) \times \Omega)$, $a_0 \in H_0^1(\Omega)$ et $b \in L^2(\Omega)$ telles que :

$$\begin{cases} i) & (A^\varepsilon, S_\varepsilon) \ \ H^0\text{-converge vers } \ A^0, \\ ii) & \widetilde{\rho_\varepsilon} \rightharpoonup \rho \quad \text{faible * dans } L^\infty(\Omega), \\ iii) & \widetilde{f_\varepsilon} \rightharpoonup f \quad \text{faiblement dans } L^2(\Omega \times (0,T)), \\ iv) & Q_\varepsilon a_\varepsilon \rightharpoonup a_0 \quad \text{faiblement dans } H_0^1(\Omega), \\ v) & \widetilde{\rho_\varepsilon b_\varepsilon} \rightharpoonup b \quad \text{faiblement dans } L^2(\Omega), \end{cases} \tag{2}$$

où $\{Q_\varepsilon\}$ est une suite d'opérateur de prolongement, linéaire et continu de $V_\varepsilon = \{v \in H^1(\Omega_\varepsilon), v_{|\partial\Omega} = 0\}$ dans $H_0^1(\Omega)$ uniformément bornée en ε et où $\tilde{\cdot}$ désigne le prolongement par 0 à Ω, de toute fonction définie sur Ω_ε.
On montre que la solution u_ε du problème (1) vérifie les convergences suivantes :

$$\begin{cases} P_\varepsilon u_\varepsilon \rightharpoonup u \quad \text{faible * dans } L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega)), \\ P_\varepsilon u'_\varepsilon \rightharpoonup u' \quad \text{faible * dans } L^\infty(0,T; L^2(\Omega)), \end{cases} \tag{3}$$

où $\{P_\varepsilon\}$ est une suite d'opérateur d'extension linéaire et continu de $L^\infty(0,T;V_\varepsilon)$ dans $L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$ uniformément bornée en ε et u la solution du problème homogénéisé

$$\begin{cases} \rho\, u'' - \text{div } (A^0 \nabla u) &= f \quad \text{dans } \Omega \times (0,T), \\ u &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times (0,T), \\ u(x,0) &= a_0 \quad \text{dans } \Omega, \\ u'(x,0) &= b_0 \quad \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{4}$$

avec $b_0 = \dfrac{b}{\rho}$.
Le deuxième résultat que nous montrons dans ce chapitre est un résultat de correcteur, s'avérant beaucoup plus technique à démontrer que le précédent. Nous devons faire des hypothèses plus restrictives sur les données, en effet on suppose que (2) est vérifié mais que de plus, il existe des fonctions $\chi_0 \in L^\infty(\Omega)$, $f \in L^2(\Omega \times (0,T))$ et $b_0 \in L^2(\Omega)$ telles que :

$$\begin{cases} i) & \chi_{\Omega_\varepsilon} \rightharpoonup \chi_0 \quad \text{faiblement * dans } L^\infty(\Omega), \\ ii) & f_\varepsilon \to \dfrac{f}{\chi_0} \quad \text{fortement dans } L^2(\Omega \times (0,T)), \\ iii) & b_\varepsilon \to b_0 \quad \text{fortement dans } L^2(\Omega), \end{cases} \tag{5}$$

où $\chi_{\Omega_\varepsilon}$ désigne la fonction caractéristique de Ω_ε dans Ω et que a_ε vérifie le problème suivant :

$$\begin{cases} -\text{div}(A^\varepsilon \nabla a_\varepsilon) &= Q_\varepsilon^*(-\text{div}(A^0 \nabla a_0)) \quad \text{dans } \Omega_\varepsilon, \\ A^\varepsilon \nabla a_\varepsilon \,.\, \nu &= 0 \quad \text{sur } \partial S_\varepsilon, \\ a_\varepsilon &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{6}$$

où $a_0 \in H_0^1(\Omega)$ et Q_ε^* est l'adjoint de l'opérateur Q_ε.
Sous ces hypothèses, on montre que

$$\begin{cases} i) & \lim_{\varepsilon \to 0} \|u'_\varepsilon - u'\|_{\mathcal{C}^0([0,T];L^2(\Omega_\varepsilon))} = 0, \\ ii) & \lim_{\varepsilon \to 0} \|\nabla u_\varepsilon - C^\varepsilon \nabla u\|_{\mathcal{C}^0([0,T];(L^1_{loc}(\Omega_\varepsilon))^n)} = 0, \end{cases} \tag{7}$$

où C^ε est un correcteur elliptique local introduit en [12].

Dans la dernière partie de ce chapitre, on montre que les hypothèses (2) ne suffisent pas pour avoir ce résultat de correcteur. Les hypothèses (5) et (6) permettent d'obtenir la convergence de l'énergie associée au problème (1) vers celle du problème homogénéisé, ce qui est nécessaire pour obtenir le résultat de correcteur. La nécessité d'introduire des hypothèses plus fortes avait déjà été observée dans [8] par S. Brahim-Ostmane, G.A. Francfort et F. Murat qui avaient étudié le même type de problème sous une hypothèse de H-convergence de la matrice A^ε.

Nous démontrons d'abord le résultat (7) pour la famille des correcteurs elliptiques locaux (C^ε) de [12]. Ces correcteurs peuvent être approchés sur des sous-ensembles convenables de Ω, par des matrices C_h^ε, de la forme

$$\text{pour tout } x \in \Omega, \quad C_h^\varepsilon(x) e_i = \nabla W_{h,i}^\varepsilon(x),$$

pour tout $i = 1, \dots, n$ et où $\{e_1, \dots, e_n\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Chaque fonction $W_{h,i}^\varepsilon$ est définie comme solution d'un certain problème elliptique sur Ω_ε. Cette propriété joue un rôle important dans la démonstration du résultat de correcteur.

Dans le chapitre 3, on étudie un problème hyperbolique non linéaire, il s'agit d'une équation des ondes où on a rajouté un terme non linéaire portant sur la dérivée en temps. On montre tout d'abord un résultat d'existence et d'unicité, puis un résultat d'homogénéisation.
On cherche donc u_ε solution de

$$\left\{\begin{array}{rcll} u_\varepsilon'' - \operatorname{div}\left(A\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right)\nabla u_\varepsilon\right) + g(u_\varepsilon') &=& f_\varepsilon & \text{dans } \ \Omega_\varepsilon \times (0,T), \\ u_\varepsilon &=& 0 & \text{sur } \ \partial\Omega \times (0,T), \\ A^\varepsilon \nabla u_\varepsilon \,.\, \nu &=& 0 & \text{sur } \ \partial S_\varepsilon \times (0,T), \\ u_\varepsilon(x,0) &=& u_\varepsilon^0 & \text{dans } \ \Omega_\varepsilon, \\ u_\varepsilon'(x,0) &=& u_\varepsilon^1 & \text{dans } \ \Omega_\varepsilon, \end{array}\right. \tag{8}$$

où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $T > 0$ est un réel strictement positif, Ω_ε est un ouvert perforé obtenu en enlevant un ensemble fermé S_ε de trous ε-périodique de taille ε à l'ouvert Ω, A est une matrice symétrique bornée définie positive, ν la normale extérieure par rapport à Ω_ε. La fonction g est une fonction scalaire à croissance sousquadratique c'est-à-dire g est majorée par une fonction polynomiale dont l'ordre ρ permet d'avoir l'injection compacte de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^\rho(\Omega)$. Les données initiales u_ε^0, u_ε^1 et f_ε appartiennent aux ensembles V_ε, V_ε et $H^1(0,T;L^2(\Omega))$, respectivement.
Nous montrons l'existence et l'unicité d'une solution u_ε de ce problème pour tout ε fixé, par une méthode de Galerkin et des arguments de monotonie. Cette solution est telle que

$$u_\varepsilon \in L^\infty(0,T;V_\varepsilon), \quad u_\varepsilon' \in L^\infty(0,T;V_\varepsilon) \quad \text{ et } \quad u_\varepsilon'' \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega_\varepsilon)).$$

La méthode de Galerkin nous fournit des estimations uniformes de u_ε et de ses dérivées en fonction des données initiales, nous permettant ainsi d'étudier leur comportement asymptotique lorsque ε tend vers 0.
Soit (P_ε) la famille d'opérateurs de prolongement introduite par D. Cioranescu et P. Donato dans [17]. On prouve dans la seconde partie de ce chapitre que nous avons les convergences

$$\left\{\begin{array}{lll} i) & P_\varepsilon u_\varepsilon \rightharpoonup u & \text{faiblement * dans } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)), \\ ii) & P_\varepsilon u_\varepsilon' \rightharpoonup u' & \text{faiblement * dans } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)), \\ iii) & P_\varepsilon u_\varepsilon'' \rightharpoonup u'' & \text{faiblement * dans } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)), \end{array}\right. \tag{9}$$

ainsi que

$$\left\{\begin{array}{lll} i) & \widetilde{g(u_\varepsilon')} \rightharpoonup \theta g(u') & \text{faiblement } {*}L^\infty(0,T;L^2(\Omega)), \\ ii) & \widetilde{A^\varepsilon \nabla u_\varepsilon} \rightharpoonup A^0 \nabla u & \text{faiblement * } L^\infty(0,T;(L^2(\Omega))^n), \end{array}\right. \tag{10}$$

où $\widetilde{\cdot}$ désigne le prolongement par zéro de toute fonction définie sur Ω_ε. La fonction u est la solution du problème homogénéisé

$$\left\{\begin{array}{rcll} \theta u'' - \text{div }(A^0\nabla u) + \theta g(u') &=& f & \text{in } \Omega\times(0,T), \\ u &=& 0 & \text{on } \partial\Omega\times(0,T), \\ u(x,0) &=& u^0 & \text{in } \Omega, \\ u'(x,0) &=& u^1 & \text{in } \Omega, \end{array}\right. \tag{11}$$

et A^0 est la matrice homogénéisée assossiée à A^ε tandis que θ est la proportion du matériau dans la cellule Y.

Lorsqu'on étudie l'homogénéisation du problème (8), les principales difficultés sont d'une part, l'obtention d'estimations uniformes en ε suffisamment fortes afin de pouvoir passer à la limite lorsque ε tend vers 0, et d'autre part, l'identification de la limite de la suite $\widetilde{g(u_\varepsilon)}$. Cela nécessite des hypothèses sur les données initiales plus fortes que dans le cas linéaire classique.

Un problème similaire a été étudié par M.M. Cavalcanti, V.N.D. Cavalcanti, D. Andrade et T.F. Ma (voir [13]) avec $A^\varepsilon = Id$, f indépendante du temps, $u^0_\varepsilon = 0$, des conditions de Dirichlet sur le bord des trous et où la taille des trous est plus petite que la période (c'est la taille qui correspond à l'apparition du terme étrange, voir [19]).

Dans le chapitre 4, on étudie le problème classique de l'équation des ondes linéaire. Dans un premier temps on retrouve le résultat d'homogénéisation en utilisant la méthode de l'éclatement périodique introduite par D. Cioranescu, A. Damlamian et G. Griso dans [14] et [15]. On montre ensuite un résultat de correcteur faisant intervenir l'opérateur de moyennisation qui est l'adjoint de l'opérateur d'éclatement.

Soit $T > 0$ un réel strictement positif et Ω un ouvert de borné de $\mathbb{R}^n$, on considère le problème suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcll} u''_\varepsilon - \text{div}(A^\varepsilon\nabla u_\varepsilon) &=& f_\varepsilon & \text{dans } \Omega\times(0,T), \\ u_\varepsilon &=& 0 & \text{sur } \partial\Omega\times(0,T), \\ u_\varepsilon(x,0) &=& u^0_\varepsilon & \text{dans } \Omega, \\ u'_\varepsilon(x,0) &=& u^1_\varepsilon & \text{dans } \Omega, \end{array}\right. \tag{12}$$

où $\{f_\varepsilon\}$ est une suite de fonctions appartenant à $L^2(\Omega\times(0,T))$ et $\{A^\varepsilon\}$ une suite de matrices symétriques, coercives et $\varepsilon Y-$ périodiques telles que

$$A^\varepsilon(x) = A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \quad \text{p.p. } x\in\mathbb{R}^n.$$

Tout d'abord, on montre que sous des bonnes hypothèses de convergence des données initiales u^0_ε, u^1_ε et f_ε, nous avons les convergences suivantes :

$$\left\{\begin{array}{ll} i) & u_\varepsilon \rightharpoonup u \quad \text{faiblement * dans } L^\infty(0,T;H^1_0(\Omega)), \\ ii) & u'_\varepsilon \rightharpoonup u' \quad \text{faiblement * dans } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)), \end{array}\right. \tag{13}$$

où u est la solution du problème homogénéisé associé à (12). On montre après qu'il existe une fonction $\widehat{u}\in C([0,T];L^2(\Omega,H^1_{per}(Y)))$ telle que

$$\left\{\begin{array}{ll} i) & \mathcal{T}_\varepsilon(u_\varepsilon) \rightharpoonup u \quad \text{faiblement * dans } L^\infty(0,T;L^2(\Omega,H^1(Y))), \\ ii) & \mathcal{T}_\varepsilon(\nabla u_\varepsilon) \rightharpoonup \nabla_x u + \nabla_y\widehat{u} \quad \text{faiblement * dans } L^\infty(0,T;(L^2(\Omega\times Y))^n), \end{array}\right. \tag{14}$$

où $\mathcal{T}_\varepsilon$ est l'opérateur d'éclatement périodique.

Ensuite, on montre que sous des hypothèses plus fortes sur les données initiales u_ε^0, u_ε^1 et f_ε, on a le résultat de correcteur suivant :

$$\begin{cases} i) \quad \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \|u'_\varepsilon - u'\|_{L^2(\Omega \times (0,T))} = 0, \\ ii) \quad \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \|\nabla u_\varepsilon - \nabla u - \mathcal{U}_\varepsilon(\nabla_y \widehat{u})\|_{L^p(0,T;(L^2(\Omega \times Y))^n)} = 0. \end{cases} \tag{15}$$

pour tout $p \in [1, +\infty[$ et où $\mathcal{U}_\varepsilon$ est l'opérateur de moyennisation.

Chapitre 1

Les méthodes classiques en homogénéisation

Dans ce premier chapitre, nous allons rappeler les principales méthodes en homogénéisation. Tout d'abord nous allons récapituler les méthodes les plus courantes utilisées en homogénisation périodique, c'est-à-dire lorsque les coefficients d'un problème sont périodiques, puis ensuite nous rappelerons la définition de la H-convergence en citant quelques exemples.

1.1 Méthodes classiques en homogénéisation périodique

1.1.1 Présentation d'un problème classique et principaux résultats

Dans ce paragraphe, on considère le problème classique en homogénéisation avec des coefficients périodiques. Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, ε le terme général d'une suite de réel décroissante convergeant vers 0 et $Y =]0, b_1[\times \ldots \times]0, b_n[$ où $(b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ une cellule de référence. Soit f une fonction de $L^2(\Omega)$ et $A(y) = (a_{i,j}(y))_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice carrée d'ordre n dont les coefficients sont Y-périodiques et définis sur $\mathbb{R}^n$, tels que

$$\begin{cases} \|A\|_{(L^\infty(\mathbb{R}^n))^{n^2}} \leq \beta, \\ A \ \text{ est symétrique,} \\ \exists\, \alpha > 0, \quad \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(y) \lambda_i \lambda_j \geq \alpha \, \|\lambda\|^2 \quad y \text{ p.p. dans } \mathbb{R}^n, \ \forall\, \lambda \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{1.1}$$

On considère dans Ω le problème de Dirichlet suivant :

$$\begin{cases} \displaystyle -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j} \right) &= f \quad \text{dans } \Omega, \\ u_\varepsilon &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.2}$$

qui peut s'écrire également sous forme matricielle de la façon suivante :

$$\begin{cases} -\text{div } (A^\varepsilon \nabla u_\varepsilon) &= f \quad \text{dans } \Omega, \\ u_\varepsilon &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où l'on note

$$A^\varepsilon(x) = A \left(\frac{x}{\varepsilon} \right).$$

Le système (1.2) peut décrire différents problèmes physiques comme par exemple le cas thermique où l'inconnue u_ε représente la conductivité de la chaleur du matériau. Dans ce système les coefficients a_{ij} sont des fonctions dépendants des composantes du matériau composite. Ces fonctions sont fortement oscillantes et oscillent de plus en plus lorsque ε tend vers 0. D'un point de vue mathématique, homogénéiser ce problème consiste à étudier le comportement de u_ε, lorsque u_ε tend vers 0 et trouver sa limite u_0, si elle existe, puis donner si c'est possible un problème limite satisfait par u_0 qu'on appelera le système homogénéisé.

D'après des résultats classiques (voir par exemple [16]), le théorème de Lax-Milgram nous assure l'existence et l'unicité d'une solution u_ε dans $H_0^1(\Omega)$ pour le problème 1.2 qui est telle que

$$\|u_\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{C_\Omega}{\alpha} \|f\|_{L^2} (\Omega), \tag{1.3}$$

où C_Ω est la constante de Poincaré qui dépend uniquement de l'ouvert Ω.

D'après des théorèmes de compacité classique, l'estimation (1.3) entraîne l'existence d'un élément u_0 dans $H_0^1(\Omega)$ tel qu'à une sous-suite près, on a

$$u_\varepsilon \rightharpoonup u_0 \quad \text{faiblement dans } H_0^1(\Omega) \quad \text{et} \quad u_\varepsilon \to u_0 \quad \text{fortement dans } L^2(\Omega). \tag{1.4}$$

Introduisons le vecteur de fonctions suivant :

$$\xi_\varepsilon = (\xi_\varepsilon^1, \ldots, \xi_\varepsilon^n) = \left(\sum_{j=1}^n a_{1j}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j}, \ldots, \sum_{j=1}^n a_{nj}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j} \right) = A^\varepsilon \nabla u_\varepsilon. \tag{1.5}$$

Il satisfait naturellement

$$-\text{div } \xi_\varepsilon = f \quad \text{dans } \Omega.$$

D'après les hypothèses sur la matrice A^ε et l'estimation (1.3), on en déduit qu'il existe une constante $c > 0$ indépendente de ε telle que

$$\|\xi_\varepsilon\|_{(L^2(\Omega))^n} \leq c \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Par conséquent, il existe un certain $\xi_0 \in (L^2(\Omega))^n$ tel qu'à une sous-suite près, on a

$$\xi_\varepsilon \rightharpoonup \xi_0 \quad \text{faiblement dans } (L^2(\Omega))^n, \tag{1.6}$$

où ξ_0 vérifie

$$-\text{div } (\xi_0) = f \quad \text{dans } \Omega. \tag{1.7}$$

Pour réaliser l'homogénéisation du problème (1.2), on cherche si la fonction u_0 vers laquelle converge u_ε satisfait une équation du même type que le problème (1.2). Pour cela, on souhaiterai avoir une relation explicite entre u_0 et ξ_0.
Une des principales difficultés rencontrées en homogénéisation est qu'on ne peut pas passer directement à la limite dans le problème (1.2). La formulation variationelle du problème (1.2) est la suivante :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que} \\ \displaystyle\sum_{i,j=1}^n \int_\Omega a_{ij}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx = \int_\Omega f v \, dx, \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \tag{1.8}$$

Les convergences (1.4) entraînent la convergence faible de

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i} \rightharpoonup \frac{\partial u_0}{\partial x_i} \quad \text{faiblement dans } L^2(\Omega), \quad \forall\, i \in \{1, \ldots, n\}. \tag{1.9}$$

D'autre part puisque les coefficients a_{ij} sont Y-périodiques pour tout $i, j = 1, \ldots, n$, on sait d'après des résultats classiques (voir par exemple [16]) que

$$a_{ij}\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right) \rightharpoonup \mathcal{M}_Y(a_{ij}) = \frac{1}{|Y|}\int_Y a_{ij}(y)\,dy, \quad \forall\,(i,j) \in \{1, \ldots, n\}^2. \tag{1.10}$$

Puisque les convergences (1.9) et (1.10) sont juste faibles, on ne peut pas passer directement à la limite dans le membre de gauche de (1.8), puisque la limite du produit de deux suites convergeant faiblement n'est pas égal au produit des limites. C'est-à-dire qu'on a, de façon général

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega a_{ij}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx \neq \sum_{i,j=1}^{n}\mathcal{M}_Y(a_{ij})\int_\Omega \frac{\partial u_0}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx.$$

On peut seulement dire que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega a_{ij}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx = \sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega \xi_0^j\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx.$$

On cherche à trouver une relation explicite entre u_0 et ξ_0 et à trouver si u_0 satisfait un problème du même type que u_ε, c'est une des principales questions de la théorie d'homogénéisation. Dans le théorème suivant on rappelle le résultat classique d'homogénéisation du problème (1.2), voir par exemple A. Bensoussan, J.L. Lions, G. Papanicolaou dans [7] ou D. Cioranescu et P. Donato dans [16].

Théorème 1.1 *Sous les hypothèses faites sur la matrice A en (1.1), la suite de solution $\{u_\varepsilon\}$ du problème (1.2) converge vers une fonction u_0 appartenant à $H_0^1(\Omega)$ qui est l'unique solution du problème elliptique suivant :*

$$\left\{\begin{array}{rcl} -div\left(A^0\nabla u_0\right) = \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^0\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_i\partial x_j} & = & f \quad dans\ \Omega, \\ u_0 & = & 0 \quad sur\ \partial\Omega. \end{array}\right. \tag{1.11}$$

La matrice homogénéisée $A^0 = (a_{ij}^0)_{1\le i,j\le n}$ est une matrice constante donnée par

$$A^0 = (a_{ij}^0)_{i,j=1,n}, \quad avec \quad a_{ij}^0 = \frac{1}{|Y|}\int_Y\left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\frac{\partial\widehat{\chi}^j}{\partial y_k}\right)dy. \tag{1.12}$$

Les fonctions $\widehat{\chi}^j$, pour $j = 1, \ldots, n$ sont définies comme étant les solutions du problème cellulaire

$$\left\{\begin{array}{l} -div\,(A\nabla(\widehat{\chi}^j - y_j)) = -\displaystyle\sum_{i,k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial y_i}\left(a_{ik}\frac{\partial\,(\widehat{\chi}^j - y_j)}{\partial y_k}\right) = 0 \quad dans\ Y, \\ \displaystyle\frac{1}{|Y|}\int_Y \widehat{\chi}^j = 0, \\ \widehat{\chi}^j \quad est\ Y - périodique. \end{array}\right. \tag{1.13}$$

Théorème 1.2 *(correcteurs) Si on suppose que A vérifie (1.1), et que de plus $\nabla\widehat{\chi}^i \in (L^r(Y))^n$, pour $i = 1, \ldots, n$, et que $\nabla u^0 \in (L^s(\Omega))^n$, avec $1 \le r, s < \infty$ et $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = \frac{1}{2}$, alors*

$$\nabla u_\varepsilon - \nabla u_0 + \sum_{j=1}^{n}\nabla\left(\widehat{\chi}^j\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right)\right)\frac{\partial u_0}{\partial x_j} \to 0 \quad fortement\ dans\ (L^2(\Omega))^n.$$

Notons que la matrice homogénéisée peut aussi s'écrire sous la forme

$$A^0 = (a^0_{ij})_{i,j=1,n}, \quad \text{avec} \quad a^0_{ij} = \frac{1}{|Y|}\int_Y \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{n} a_{kj}\frac{\partial \chi^i}{\partial y_k} \right) dy. \tag{1.14}$$

où χ^i, $i = 1, \dots, n$ est solution d'un système ajoint à (1.13)

$$\begin{cases} -\text{div}\ ({}^t A\nabla(\chi^i - y_i)) = -\displaystyle\sum_{k,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_j}\left(a_{kj}\frac{\partial\,(\chi^i - y_i)}{\partial y_k} \right) = 0 \quad \text{dans } Y, \\ \dfrac{1}{|Y|}\displaystyle\int_Y \chi^i = 0, \\ \chi^i \quad \text{est } Y - \text{périodique.} \end{cases} \tag{1.15}$$

Lorsque l'on suppose que la matrice A^ε est symétrique, ce qui est le cas dans les travaux effectués dans cette thèse, on peut montrer que la matrice A^0 est symétrique et que les fonctions $\widehat{\chi}^j$ et χ^j sont égales pour $j = 1, \dots, n$ (pour cela voir par exemple [16]).
La formule (1.12) (ou (1.14)) montre que les coefficients homogénéisés ne sont pas la simple moyenne des coefficients du composite. Ils contiennent les moyennes $\mathcal{M}_Y(a_{ij})$ auxquelles on a ajouté des termes de correction exprimés en fonction des correcteurs $\widehat{\chi}^j$.
La procédure d'homogénéisation du problème (1.2) consiste à remplacer l'équation aux dérivées partielles initiale avec les coefficients fortement oscillants caractérisant le matériau composite, par une équation aux dérivées partielles avec des coefficients constants. Pour calculer ces coefficients qui caractérisent le matériau homogène fictif, on est amené à résoudre des équations aux dérivées partielles qui ne comportent pas de coefficients oscillants sur la cellule de référence fixe Y. On voit ici l'intérêt de l'homogénéisation du point de vue numérique. Un calcul numérique direct de la solution du problème (1.2) nécessite un maillage de discrétisation très fin si on a un grand nombre d'hétérogénéités. Ceci veut dire un temps long de calcul et plusieurs sources d'erreurs dûes au caractère fortement oscillant des coefficients. Aucune de ces difficultés n'apparaît lorsqu'on calcule la solution homogénéisée car pour le faire, on résout des problèmes sans oscillations.
Dans les 4 paragraphes suivants on va montrer comment on peut retrouver le théorème 1.1 en utilisant diverses méthodes d'homogénéisation, tout d'abord celle des échelles mulitples, la méthode des fonctions tests oscillantes, celle de la double échelle puis la plus récente qui utilise un opérateur d'éclatement périodique.

1.1.2 Méthode des échelles multiples

Le principe de cette méthode applicable à l'homogénéisation de nombreux problèmes est de chercher une solution u_ε au problème (1.2) sous la forme d'un développement asymptotique de la forme :

$$u_\varepsilon(x) = u_0\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon u_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon^2 u_2\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \dots \tag{1.16}$$

où les fonctions u_j, pour $j = 1, 2, \dots$ sont telles que

$$\begin{cases} u_j(x, y) \text{ est définie pour } x \in \Omega \text{ et } y \in Y, \\ u_j(., y) \text{ est } Y\text{-périodique.} \end{cases} \tag{1.17}$$

Les premières études asymptotiques des problèmes aux limites non-stationnaires aux coefficients oscillants ont été développés par l'école russe, notamment par N. Bakhvalov en 1975 ([5], [6]), puis par G. Panasenko ([33]) en 1978, voir aussi [7] où un certain nombre de problème ont été étudié avec la méthode des échelles multiples.

Les premiers résultats de Bakhvalov ont été donné dans l'espace $\mathbb{R}^n$ tout entier. Il a montré en particulier que la solution u_ε de (1.2) en considérant le problème sur $\mathbb{R}^n$ admet le développement asymptotique suivant :

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(x) &= u_0(x) - \varepsilon \sum_{k=1}^{n} \widehat{\chi}^k\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial u^0}{\partial x_k} + \varepsilon^2 \sum_{k,l=1}^{n} \theta^{kl}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial^2 u^0}{\partial x_k \partial x_l} + \cdots \\ &= u_0(x) + \varepsilon u_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon^2 u_2\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \cdots \end{aligned} \tag{1.18}$$

où $\widehat{\chi}^k$ est défini en (1.13) et θ^{kl} par

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\left(A(y)\nabla\theta^{kl}\right) = -a^0_{kl} - \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} \delta_{ki}\frac{\partial\left(a_{ij}\widehat{\chi}^l\right)}{\partial y_i} - \sum_{j=1}^{n} a_{kj}\frac{\partial\left(\widehat{\chi}^l - y_l\right)}{\partial y_j} & \text{dans } Y, \\ \dfrac{1}{|Y|}\displaystyle\int_Y \theta^{kl}(y)\, dy = 0, \\ \theta^{kl} \quad \text{est } Y-\text{périodique}. \end{cases}$$

Ensuite, les résultats ont été étendus au cas d'un problème aux limites dans le cas d'ouvert borné par Panasenko dans [33]. Pour ce faire, il a introduit des correcteurs de couches limites, explicitement construits dans le cas particulier d'une seule couche.
Le théorème suivant montre que l'on peut approximer la solution u_ε du problème (1.2) par une somme finie de fonctions dépendant de x et de ε et que l'on retrouve le résultat d'homogénéisation du théorème 1.1 en utilisant la méthode des échelles multiples, si les données satisfont un certain nombre d'hypothèses.

Théorème 1.3 *Si la matrice A vérifie (1.1) et si on suppose que f appartient à $C^\infty(\overline{\Omega})$, que $\partial\Omega$ est de classe C^∞ et que $\widehat{\chi}^k$, θ^{kl} sont dans $W^{1,\infty}(Y)$ pour tout $k, l = 1, \ldots, N$, alors il existe une constante C indépendante de ε telle que*

$$\left\| u_\varepsilon - (u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2) \right\|_{H^1(\Omega)} \leq C\sqrt{\varepsilon}.$$

Une démonstration du théorème précédent est faite par exemple dans [16].

Dans ce paragraphe, on va rappeler brièvement le principe de la méthode des échelles multiples, l'idée de la preuve du développement formel (1.16) de u_ε et du théorème ci-dessus (pour des preuves plus détaillées voir [7] ou [16]).

Si on reprend le développement asymptotique de u_ε en (1.16) on remarque que plusieurs échelles interviennent, l'une macroscopique donnant la position du point x dans Ω et l'autre microscopique donnant la position de $\dfrac{x}{\varepsilon}$ dans la cellule Y ou plus précisemment dans une image de Y par une translation de type kY où $k \in \mathbb{Z}^n$.
Soit $\varphi(x, y)$ une fonction de deux variables définie sur $\mathbb{R}^n$, notons φ_ε la fonction définie de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ de la façon suivante

$$\varphi_\varepsilon(x) = \varphi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right).$$

On a

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x) = \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial\varphi}{\partial y_i}\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Par conséquent, $A^\varepsilon \varphi_\varepsilon$ peut être écrit de la façon suivante :

$$A_\varepsilon \varphi_\varepsilon = \left[\left(\varepsilon^{-2} A_0 + \varepsilon^{-1} A_1 + A_2 \right) \varphi \right] \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right), \tag{1.19}$$

où

$$\begin{cases} A_0 = -\dfrac{\partial}{\partial y_i} \left(a_{ij}(y) \dfrac{\partial}{\partial y_j} \right), \\ A_1 = -\dfrac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(y) \dfrac{\partial}{\partial y_j} \right) - \dfrac{\partial}{\partial y_i} \left(a_{ij}(y) \dfrac{\partial}{\partial x_j} \right), \\ A_2 = -\dfrac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(y) \dfrac{\partial}{\partial x_j} \right). \end{cases}$$

En remplaçant φ par u_ε dans (1.19), ainsi qu'en utilisant l'expression (1.16) de u_ε, on en déduit que $A^\varepsilon u_\varepsilon$ admet un développement asymptotique de la forme

$$\begin{aligned} A^\varepsilon u_\varepsilon &= \left(\varepsilon^{-2} A_0 + \varepsilon^{-1} A_1 + A_2 \right) \left(u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \ldots + \varepsilon^s u_s + \cdots \right) \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \\ &= \Big[\varepsilon^{-2} A_0 u_0 + \varepsilon^{-1} \left(A_1 u_0 + A_0 u_1 \right) + \left(A_2 u_0 + A_1 u_1 + A_0 u_0 \right) + \ldots + \\ &\quad + \varepsilon^s \left(A_2 u_s + A_1 u_{s+1} + A_0 u_{s+2} \right) + \ldots \Big] \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right). \end{aligned} \tag{1.20}$$

En reportant l'expression de $A^\varepsilon u_\varepsilon$ obtenu ci-dessus dans le système (1.2) puis en identifiant les puissances de ε, on obtient une chaine infinie de systèmes d'équation :

$$\begin{cases} A_0 u_0 = 0 \quad \text{dans } Y, \\ u_0 \quad Y - \text{périodique en } y, \end{cases} \tag{1.21}$$

$$\begin{cases} A_0 u_1 = -A_1 u_0 \quad \text{dans } Y, \\ u_1 \quad Y - \text{périodique en } y, \end{cases} \tag{1.22}$$

$$\begin{cases} A_0 u_2 = f - A_1 u_1 - A_2 u_0 \quad \text{dans } Y, \\ u_1 \quad Y - \text{périodique en in } y, \end{cases} \tag{1.23}$$

$$\begin{cases} A_0 u_{s+2} = -A_1 u_{s+1} - A_2 u_s \quad \text{dans } Y, \\ u_1 \quad Y - \text{périodique en } y, \\ \text{pour } s \geq 1. \end{cases} \tag{1.24}$$

Pour résoudre ces systèmes on utilise une variante du théorème de Lax-Milgram adapté au cas des espaces de Hilbert de fonctions périodiques. Pour cela on commence par introduire la forme bilinéaire

$$a_Y(\varphi, \psi) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_Y a_{ij}(y) \frac{\partial \varphi}{\partial y_j} \frac{\partial \psi}{\partial y_i}, \quad \forall \varphi, \psi \in H^1(Y),$$

et les espaces fonctionnels

$$\begin{cases} H^1_{per}(Y) = \{ \varphi \,|\, \varphi \in H^1(Y),\ \varphi \text{ est } Y - \text{périodique} \}, \\ \mathcal{V} = \{ \varphi \,|\, \varphi \in H^1_{per}(Y),\ \mathcal{M}_Y(\varphi) = 0 \}, \\ V = H^1_{per}(Y)/\mathbb{R}. \end{cases} \tag{1.25}$$

L'espace V est le quotient de $H^1_{per}(Y)$ par la relation d'équivalence

$$\psi_1 \simeq \psi_2 \Longleftrightarrow \psi_1 - \psi_2 = \text{constante en } y.$$

Le théorème de Lax-Milgram nous donne alors

Lemme 1.4 *(i). Soit L une forme linéaire continue sur V. Alors, le problème suivant admet une solution unique $u \in V$:*

$$a_Y(u, \psi) = L(\psi), \quad \forall\, \psi \in V.$$

(ii). Soit $\mathcal{L}$ une forme linéaire continue sur $\mathcal{V}$. Alors, le problème suivant admet une solution unique $U \in \mathcal{V}$:

$$a_Y(U, \psi) = \mathcal{L}(\psi), \quad \forall\, \psi \in \mathcal{V}. \tag{1.26}$$

En appliquant le lemme 1.4 au premier système de la chaine (1.21), on en déduit que u_0 est indépendante de y, c'est-à-dire

$$u_0(x, y) = u_0(x), \quad \text{p.p. tout } x \in \Omega \text{ et p.p. tout } y \in Y. \tag{1.27}$$

Par conséquent le deuxième système de la chaine (1.22) qui définit u_1, peut s'écrire sous la forme

$$\begin{cases} -\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_i}\left(a_{ij}(y)\frac{\partial u_1}{\partial y_j}\right) = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial a_{ij}}{\partial y_i}\frac{\partial u_0}{\partial x_j} & \text{dans } Y, \\ u_1 \quad Y-\text{périodique en } y. \end{cases}$$

Comme $\dfrac{\partial u_0}{\partial x_j}$ ne dépend pas de y, u_1 peut alors s'écrire sous la forme particulière

$$u_1(x, y) = -\sum_{j=1}^{n} \widehat{\chi}^j(y)\frac{\partial u_0}{\partial x_j}(x), \tag{1.28}$$

où $\widehat{\chi}^j$, $j = 1, \dots, n$ est donné en (1.13).

En se servant de (1.27) et de (1.28), on peut mettre le troisième système de la chaîne (1.23) sous la forme

$$\begin{cases} -\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_i}\left(a_{ij}(y)\frac{\partial u_2}{\partial y_j}\right) = F(f, u_0, u_1) & \text{dans } Y, \\ u_2 \quad Y-\text{périodique en } y, \end{cases}$$

où F est donnée par

$$F(f, u_0, u_1) = f + \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_i}\left(a_{ij}(y)\frac{\partial u_1}{\partial x_j}\right) + \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(y)\left(\frac{\partial u_1}{\partial y_j} + \frac{\partial u_0}{\partial x_j}\right)\right).$$

On remarque que u_2 est solution de (1.21) avec $\mathcal{L}(\psi) = \displaystyle\int_Y F(f, u_0, u_1)\psi\, dy$, qui est une forme linéaire et continue sur V. Pour pouvoir appliquer le lemme 1.4, cette forme doit avoir la même valeur pour deux éléments ψ_1 et ψ_2 de la même classe d'équivalence dans V, c'est-à-dire $\psi_1 - \psi_2$ vaut une constante en y. Pour avoir $\mathcal{L}(\psi_1) = \mathcal{L}(\psi_2)$, on a besoin de l'égalité

$$\int_Y f(\psi_1 - \psi_2)\, dy + \sum_{i,j=1}^{N} \int_Y \frac{\partial}{\partial x_i}\left[a_{ij}(y)\left(\frac{\partial u_1}{\partial y_j} + \frac{\partial u_0}{\partial x_j}\right)\right](\psi_1 - \psi_2)\, dy = 0,$$

ou d'une façon équivalente

$$-\sum_{i,j=1}^{N} \int_Y \frac{\partial}{\partial x_i}\left[a_{ij}(y)\left(\frac{\partial u_1}{\partial y_j} + \frac{\partial u_0}{\partial x_j}\right)\right] dy = \int_Y f\, dy.$$

Ceci est exactement le problème homogénéisé (1.11) en prenant en considération (1.27) et (1.28). En continuant d'une manière analogue, on obtient une expression de u_2 en fonction de u_0 et ainsi de suite dans le développement (1.16).

1.1.3 Méthode des fonctions tests oscillantes de Tartar

Cette méthode introduite par Tartar (voir par exemple [38]) est basée sur la construction explicite de fonction de fonctions tests oscillantes de la forme $\varphi(x)a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ permettant de passer à la limite dans le système (1.2). L'essence de cette méthode est d'utiliser le système adjoint au problème (1.2) dans le but d'éliminer les termes contenant des produits de suites convergeant faiblement et où le passage à la limite est impossible.
On commence par introduire la fonction w_ε^i définie par

$$w_\varepsilon^i = \varepsilon w^i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = -\varepsilon\chi^i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + e_i x, \quad i = 1, \dots, n, \tag{1.29}$$

où χ^i est définie en (1.15) et $(e_i)_{1\le i\le n}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
On constate qu'avec cette définition, on a

$$\begin{cases} w_\varepsilon^i \rightharpoonup e_i x & \text{faiblement dans } H^1(\Omega), \\ \nabla w_\varepsilon^i \rightharpoonup e_i & \text{faiblement dans } (L^2(\Omega))^n. \end{cases} \tag{1.30}$$

On peut montrer (voir par exemple [16] ou [38]) que w_ε^i, pour $i = 1, \dots, n$, satisfait un problème de la forme

$$\int_\Omega {}^tA^\varepsilon \nabla w_\varepsilon^i \nabla\varphi = 0, \quad \forall\,\varphi \in H_0^1(\Omega). \tag{1.31}$$

Posons

$$\eta_\varepsilon^i = {}^tA^\varepsilon \nabla w_\varepsilon^i.$$

On a

$$\begin{aligned} \eta_\varepsilon^i &= {}^tA\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\nabla w^i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \\ &= \left({}^tA\nabla w^i\right)\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \\ &= \left({}^tA\nabla\chi^i + {}^tAe_i\right)\left(\frac{x}{\varepsilon}\right). \end{aligned}$$

Or ${}^tA\nabla\chi^i$ et ${}^tA$ étant des fonctions périodiques on en déduit que

$$\eta_\varepsilon^i \rightharpoonup \frac{1}{|Y|}\int_Y {}^tA(y)\nabla w^i(y)dy = {}^tA^0 e_i \quad \text{faiblement dans } L^2(\Omega). \tag{1.32}$$

Rappelons que ξ_ε introduit en (1.5) satisfait le problème suivant

$$\int_\Omega \xi_\varepsilon \nabla\varphi = \langle f, \varphi\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}, \quad \forall\,\varphi \in H_0^1(\Omega). \tag{1.33}$$

L'idée de la méthode de Tartar est d'utiliser w_ε^i comme fonction test dans (1.33) puis u_ε la solution de (1.2) dans (1.31) puis de soustraire les deux équations. Cela va permettre de remplacer les produits de suite convergeant seulement faiblement, par des produits entre des suites convergeant faiblement et fortement, où l'on pourra passer à la limite. Comme w_ε^i n'est pas dans $H_0^1(\Omega)$ pour être utilisée comme fonction test on la multilplie par une fonction ψ appartenant à $D(\Omega)$ afin que ψw_ε^i soit dans $H_0^1(\Omega)$ et puisse être utilisée dans (1.33).
En choisissant ψw_ε^i puis ψu_ε comme fonctions tests dans (1.33) et (1.31) respectivement puis en soustrayant les deux équations on obtient :

$$\int_\Omega A^\varepsilon \nabla u_\varepsilon \nabla\psi w_\varepsilon^i\,dx - \int_\Omega {}^tA^\varepsilon \nabla w_\varepsilon^i \nabla\psi u_\varepsilon\,dx = \left\langle f, \psi w_\varepsilon^i\right\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}. \tag{1.34}$$

En utilisant les convergences (1.3), (1.6), (1.30) et (1.32), on peut passer à la limite dans (1.34) et on obtient

$$\int_\Omega \xi_0 \nabla\psi e_i x \, dx - \int_\Omega A^0 e_i \nabla\psi u_0 \, dx = \langle f, \psi e_i x\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} . \tag{1.35}$$

En choisissant $\psi e_i x$ comme test dans (1.7) qui est le problème homogénéisé associé à (1.33) on a

$$\int_\Omega \xi_0 \nabla\psi x_i dx + \int_\Omega \xi_0 \psi e_i \, dx = \langle f, \psi x_i\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} ,$$

où $x_i = e_i x$ est la i-ème composante de x. En remplaçant l'expression de $\langle f, \psi x_i\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}$ dans (1.35), il vient

$$\int_\Omega \xi_0 e_i \psi \, dx = \int_\Omega {}^t A^0 e_i \nabla\psi u_0 \, dx.$$

D'où

$$\xi_0^i = (A^0 \nabla u_0)_i, \qquad \text{pour } i = 1, \ldots, n,$$

ce qui avec (1.7) nous permet bien de retrouver le théorème 1.1.
Mentionnons qu'il est possible de prouver la convergence de l'énergie relative au problème (1.2) vers celle du problème du problème homogénéisé (1.11), c'est-à-dire

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega A^\varepsilon \nabla u_\varepsilon \nabla u_\varepsilon \, dx = \int_\Omega A^0 \nabla u_0 \nabla u_0 \, dx.$$

Cette propriété est essentielle pour prouver le résultat de correcteur du théorème 1.2. Pour cette preuve voir par exemple [16]. On peut signaler qu'elle repose sur l'introduction d'une matrice de correcteur $C^\varepsilon = (C^\varepsilon_{ij})_{1\le i,j\le n}$ définie par

$$\begin{cases} C^\varepsilon_{ij}(x) = C_{ij}\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right) & \text{p.p. sur } \Omega, \\ C_{ij}(y) = \delta_{ij} - \dfrac{\partial \widehat{\chi}^j}{\partial y_i}(y) & \text{p.p. sur } Y, \end{cases} \tag{1.36}$$

où $\widehat{\chi}^j$ est définie en (1.13) et δ_{ij} est le symbole de Kronecker, ainsi que sur l'utilisation de la proposition suivante.

Proposition 1.5 *Soit u_ε la solution du problème (1.2), u_0 la solution de (1.11), A^0 définie en (1.12) et C^ε la matrice introduite en (1.36). Alors, il existe une constante $c > 0$ indépendante de ε telle que pour tout $\phi \in (D(\Omega))^n$, on a*

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \|\nabla u_\varepsilon - C^\varepsilon \nabla\phi\|_{L^2(\Omega)} \le c \, \|\nabla u_0 - \phi\|_{L^2(\Omega)} .$$

1.1.4 Convergence à deux échelles

La notion de convergence à deux échelles a été introduite en 1989 par Nguetseng et ensuite développée par Allaire (voir [1] et [30]) avec pour application l'homogénéisation périodique. Elle a été généralisée au cas de quelques problèmes multi-échelles dans [4] et [24]. On présente ici la définition ainsi qu'un des principaux tthéorèmes reliés à cette méthode.

Définition 1.6 *Soit $\{v_\varepsilon\}$ une suite de fonctions dans $L^2(\Omega)$. On dit que la suite $\{v_\varepsilon\}$ converge à deux échelles vers $v_0 = v_0(x,y)$ avec $v_0 \in L^2(\Omega \times Y)$, si pour toute fonction suffisamment régulière $\psi = \psi(x,y)$, on a*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega v_\varepsilon(x) \psi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) dx = \frac{1}{|Y|} \int_\Omega \int_Y v_0(x,y) \psi(x,y) \, dx \, dy.$$

Le principal résultat concernant cette méthode est le suivant :

Théorème 1.7 *(i). Soit $\{v_\varepsilon\}$ une suite bornée dans $L^2(\Omega)$. Il existe une sous suite $\{v_{\varepsilon'}\}$ et une fonction v_0 dans $L^2(\Omega \times Y)$ tels que $\{v_{\varepsilon'}\}$ converge à deux échelles vers v_0.*
(ii). Si $\{v_\varepsilon\}$ est une suite bornée de $H^1(\Omega)$, telle que $v_\varepsilon \rightharpoonup v_0$ faiblement dans $H^1(\Omega)$, alors v^ε converge à deux échelles vers v_0, et il existe une sous suite ε' et $v_1 = v_1(x,y) \in L^2(\Omega; V)$, avec V défini par (1.25), tels que

$$\nabla v^{\varepsilon'} \textit{ converge à deux échelles vers } \nabla_x v_0 + \nabla_y v_1.$$

La preuve du théorème 1.1 en utilisant la convergence à deux échelles est basée essentiellement sur ce dernier résultat. L'estimation a priori (1.3) implique que le théorème 1.7 s'applique à la suite de fonctions $\{u_\varepsilon\}$, avec u_ε la solution du système (1.2). Ainsi, en utilisant dans (1.8) des fonctions tests de la forme $\varphi_0(\cdot) + \varepsilon\varphi_1\left(\cdot, \frac{\cdot}{\varepsilon}\right)$, avec $\varphi_0 \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $\varphi_1 \in \mathcal{D}(\Omega; C^\infty(Y))$ et $Y-$périodique, on peut passer à la limite et obtenir le problème homogénéisé.
On doit mentionner que la méthode de la convergence à deux échelles procure une preuve du théorème 1.1 plus facile que celle des échelles multiples et des fonctions tests de Tartar.

1.1.5 Méthode de l'éclatement périodique

La méthode de l'éclatement périodique consiste à utiliser un opérateur $\mathcal{T}_\varepsilon$ afin de passer à la limite dans le problème (1.2). Il permet d'associer à toute fonction v appartenant à $L^p(\Omega)$ une fonction à deux variables appartenant à $L^p(\Omega \times Y)$. Une des propriétés intéressantes de cet opérateur est qu'il permet de transformer l'intégrale d'une fonction v sur Ω en une intégrale de $\mathcal{T}_\varepsilon(v)$ sur $\Omega \times Y$. Son avantage dans l'étude de l'homogénéisation de certaines équations aux dérivées partielles ayant des coefficients périodiques est qu'il permet de transformer une suite de fonctions périodiques oscillant fortement en une suite constante. Cela simplifie fortement la démonstration du résultat d'homogénéisation puisqu'on peut directement passer à la limite dans (1.8) sans introduire de fonctions tests ou alors en utilisant des méthodes complexes pour contourner les produits de convergences faibles.
Cette opération de dilation effectué par l'opérateur d'éclatement a tout d'abord été utilisée dans différents papiers comme celui de T. Harbogast, J. Douglas et U. Hornung en 1990 ([4]) afin d'étudier l'homogénéisation d'un problème dans un domaine présentant une double porosité ou celui de G. Allaire, C. Conca et M. Vanninathan ([3]) en combinaison avec la méthode de convergence à double échelle. Ensuite en 2002, D. Cioranescu, A. Damlamian et G. Griso ont introduit l'opérateur d'éclatement périodique $\mathcal{T}_\varepsilon$ et ont étudié ses propriétés tout d'abord dans [14] puis dans [15] pour une étude plus détaillée.

Soit $x \in \mathbb{R}^n$, on note par $[x]_Y$ la partie entière de x par rapport à la cellule Y, il s'agit de l'unique combinaison d'entier $(k_1, \ldots, k_n)$ telle que $x - \sum_{j=1}^{n} k_j\, b_j$ appartienne à Y. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on définit $\{x\}_Y = x - [x]_Y \in Y$, c'est la partie fractionnaire de x par rapport à Y.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a donc

$$x = \varepsilon\left(\left[\frac{x}{\varepsilon}\right]_Y + \left\{\frac{x}{\varepsilon}\right\}_Y\right).$$

Dans la suite nous allons utiliser les notations suivantes :

$$\begin{cases} \widehat{\Omega_\varepsilon} = \operatorname{int}\left\{x \in \Omega, \left(\varepsilon\left[\frac{x}{\varepsilon}\right]_Y + \varepsilon\overline{Y}\right) \subset \Omega\right\}, \\ \Lambda_\varepsilon = \Omega \setminus \widehat{\Omega_\varepsilon}, \\ \Theta_\varepsilon = \{h \in \mathbb{Z}^n, \varepsilon(\xi_h + Y) \subset \widehat{\Omega_\varepsilon}\}, \\ \text{où } \xi_h = (h_1 b_1, \ldots, h_n b_n). \end{cases} \tag{1.37}$$

L'ensemble $\widehat{\Omega_\varepsilon}$ est le plus grand sous-ensemble de cellules εY contenues dans Ω, tandis que Λ_ε est le sous-ensemble de Ω contenant les cellules εY qui intersectent le bord de Ω.

Définition 1.8 *Pour toute fonction φ appartenant à $L^p(\Omega)$, $p \in [1, +\infty]$, l'opérateur d'éclatement périodique $\mathcal{T}_\varepsilon$ de $L^p(\Omega \times Y)$ est défini de la façon suivante :*

$$\mathcal{T}_\varepsilon(\varphi)(x,y) = \begin{cases} \varphi\left(\varepsilon\left[\frac{x}{\varepsilon}\right]_Y + \varepsilon y\right) & \text{p.p. pour } (x,y) \in \widehat{\Omega_\varepsilon} \times Y, \\ 0 & \text{p.p. pour } (x,y) \in \Lambda_\varepsilon \times Y. \end{cases} \tag{1.38}$$

D'après cette définition il est évident que $\mathcal{T}_\varepsilon$ est un opérateur linéaire, (voir [14]) de plus il vérifie un certain nombre de propriétés dont quelques unes sont rappelées dans la proposition suivante ainsi que dans le chapitre 4.

Proposition 1.9 *([14]) Soient $\varphi \in L^1(\Omega)$ et $v, w \in L^p(\Omega)$ où $p \in [1, +\infty[$, l'opérateur d'éclatement $\mathcal{T}_\varepsilon$ vérifie les propriétés suivantes :*

$$\begin{cases} i) & \mathcal{T}_\varepsilon \text{ est linéaire continu de } L^p(\Omega) \text{ dans } L^p(\Omega \times Y) \text{ pour tout } p \in [1, +\infty[, \\ ii) & \mathcal{T}_\varepsilon(vw) = \mathcal{T}_\varepsilon(v)\mathcal{T}_\varepsilon(w), \\ iii) & \mathcal{T}_\varepsilon(\varphi)\left(x, \left\{\dfrac{x}{\varepsilon}\right\}\right) = \varphi(x), \\ iv) & \mathcal{T}_\varepsilon(\varphi\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right))(x,y) = \varphi(y), \quad \text{pour tout } \varphi \in L^p(Y)\ Y\text{-périodique sur } \mathbb{R}^n, \\ v) & \dfrac{1}{|Y|}\displaystyle\int_{\Omega \times Y} \mathcal{T}_\varepsilon(\varphi)(x,y)\,dx\,dy = \int_\Omega \varphi(x)\,dx - \int_{\Lambda_\varepsilon} \varphi(x)\,dx = \int_{\widehat{\Omega_\varepsilon}} \varphi(x)\,dx, \\ vi) & \dfrac{1}{|Y|}\displaystyle\int_{\Omega \times Y} |\mathcal{T}_\varepsilon(\varphi)|\,dx\,dy \leq \int_\Omega |\varphi|\,dx, \\ vii) & \left|\displaystyle\int_\Omega \varphi\,dx - \dfrac{1}{|Y|}\int_{\Omega \times} \mathcal{T}_\varepsilon(\varphi)\,dx\,dy\right| \leq \displaystyle\int_{\Lambda_\varepsilon} |\varphi|\,dx, \\ viii) & \|\mathcal{T}_\varepsilon(w)\|_{L^p(\Omega \times Y)} \leq |Y|^{\frac{1}{p}}\|w\|_{L^p(\Omega)}, \\ ix) & \nabla_y(\mathcal{T}_\varepsilon(w)) = \varepsilon\mathcal{T}_\varepsilon(\nabla_x w), \quad \text{pour tout } w \in W^{1,p}(\Omega). \end{cases} \tag{1.39}$$

Rappelons une propriété utile concernant le comportement asymptotique de produit de fonctions avec cet opérateur.

Proposition 1.10 *([14])*
1) Soit $\{u_\varepsilon\}$ une suite bornée de $L^p(\Omega)$ où $p \in [1, +\infty]$ et $v \in L^{p'}(\Omega)$ où $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Alors

$$\lim_{\varepsilon \to 0}\left(\int_\Omega u_\varepsilon v\,dx - \frac{1}{|Y|}\int_{\Omega \times Y} \mathcal{T}_\varepsilon(u_\varepsilon)\mathcal{T}_\varepsilon(v)\,dx\,dy\right) = \lim_{\varepsilon \to 0}\int_{\Lambda_\varepsilon} u_\varepsilon v\,dx = 0.$$

Maintenant nous allons rappeler quelques propriétés de convergence de l'opérateur d'éclatement.

Proposition 1.11 *([14]) Soit $p \in [1, +\infty[$, $\varphi \in L^p(\Omega)$ et $\{\varphi_\varepsilon\}$ une suite de $L^p(\Omega)$. On a*

i) $\quad \mathcal{T}_\varepsilon(\varphi) \longrightarrow \varphi \quad$ *fortement dans $L^p(\Omega)$.*

ii) Si $\{\varphi_\varepsilon\}$ converge fortement vers φ dans $L^p(\Omega)$, alors

$$\mathcal{T}_\varepsilon(\varphi_\varepsilon) \to \varphi \quad \textit{fortement dans } L^p(\Omega \times Y).$$

iii) Si $\{\varphi_\varepsilon\}$ converge faiblement vers φ dans $L^p(\Omega)$, alors

$$\mathcal{T}_\varepsilon(\varphi_\varepsilon) \rightharpoonup \varphi \quad \textit{faiblement dans } L^p(\Omega \times Y).$$

iv) Si il existe une fonction $\widehat{\varphi} \in L^p(\Omega \times Y)$ telle que

$$\mathcal{T}_\varepsilon(\varphi_\varepsilon) \rightharpoonup \widehat{\varphi} \quad \textit{faiblement dans } L^p(\Omega \times Y),$$

alors

$$\varphi_\varepsilon \rightharpoonup \frac{1}{|Y|}\int_Y \widehat{\varphi}(.,y)\,dy \quad \textit{faiblement dans } L^p(\Omega).$$

v) Soit $\{\varphi_\varepsilon\}$ une suite convergeant faiblement vers φ dans $W^{1,p}(\Omega)$. Alors il existe une sous-suite (aussi notée ε) et une fonction $\widehat{\varphi} \in L^p(\Omega; W^{1,p}_{per}(Y))$ telles que

$$\mathcal{T}_\varepsilon(\nabla\varphi_\varepsilon) \rightharpoonup \nabla\varphi + \nabla_y\widehat{\varphi} \quad \textit{faiblement dans } L^p(\Omega \times Y).$$

Eclatement péridodique et homogénéisation

On va maintenant démontrer le théorème 1.1 en se servant des outils introduits ci-dessus faisant partie de la méthode de l'éclatement périodique. Pour commencer avec la convergence (1.4) et la proposition 1.11, on a

$$\begin{cases} i) \quad \mathcal{T}_\varepsilon(u_\varepsilon) \rightharpoonup u_0 \quad \text{faiblement dans } L^2(\Omega; H^1(Y)), \\ ii) \quad \mathcal{T}_\varepsilon(\nabla u_\varepsilon) \rightharpoonup \nabla_x u_0 + \nabla_y \widehat{u} \quad \text{faiblement dans } L^2(\Omega \times Y), \end{cases} \tag{1.40}$$

où $\widehat{u} \in L^2(\Omega; H^1_{per}(Y))$. La formule d'intégration (1.39)v utilisée dans (1.8) donne

$$\frac{1}{|Y|}\int_{\Omega\times Y} A\mathcal{T}_\varepsilon(\nabla u_\varepsilon)\mathcal{T}_\varepsilon(\nabla v)\,dx\,dy + \int_{\Lambda_\varepsilon} A^\varepsilon \nabla u_\varepsilon \nabla v\,dx = \int_\Omega f\,v\,dx, \quad \forall\, v \in H^1_0(\Omega). \tag{1.41}$$

Grâce aux propositions 1.10 et 1.12 et aux convergences (1.40)i et (1.40)ii, on peut passer à la limite dans (1.41) et on obtient

$$\frac{1}{|Y|}\int_{\Omega\times Y} A(\nabla u_0 + \nabla_y\widehat{u})\nabla v\,dx\,dy = \int_\Omega f\,v\,dx, \quad \forall\, v \in H^1_0(\Omega). \tag{1.42}$$

Ensuite on prend dans (1.8) la fonction test v_ε donnée par

$$v_\varepsilon(x) = \varepsilon\varphi(x)\psi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad \forall\, x \in \Omega, \quad \text{où } \phi \in D(\Omega) \text{ et } \psi \in H^1_{per}(Y).$$

On a succesivement

$$\begin{cases} v_\varepsilon \rightharpoonup 0 \quad \text{faiblement dans } H^1_0(\Omega), \\ \mathcal{T}_\varepsilon(\nabla_x v_\varepsilon) \to \varphi(x)\nabla\psi(y) \quad \text{uniformément sur } \Omega \times Y. \end{cases}$$

En prenant $v = v_\varepsilon$ puis en passant à la limite dans (1.41) lorsque ε tend vers 0, on obtient

$$\int_{\Omega\times Y} A(\nabla u_0 + \nabla_y\widehat{u})\varphi(x)\nabla_y\psi\,dx\,dy = 0,$$

et par densité

$$\int_{\Omega\times Y} A(\nabla u_0 + \nabla_y \widehat{u})\nabla_y \phi \, dx\, dy = 0, \quad \forall\, \phi \in L^2(\Omega; H^1_{per}(Y)) \tag{1.43}$$

En additionnant (1.42) et (1.43) on en déduit que le couple $(u_0, \widehat{u})$ est l'unique solution du problème

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_{\Omega\times Y} A(\nabla u_0 + \nabla_y \widehat{u})(\nabla v + \nabla_y \phi)\, dx\, dy = \int_\Omega f\, v\, dx, \\ \forall\, v \in H^1_0(\Omega),\ \forall\, \phi \in L^2(\Omega; H^1_{per}(Y)). \end{array} \right. \tag{1.44}$$

Ce problème est un problème variationnel classique sur l'espace $H^1_0(\Omega) \times L^2(\Omega; H^1_{per}(Y)/\mathbb{R})$. Remarquons qu'à partir de (1.43), on peut obtenir $\widehat{u}$ en fonction de ∇u_0 qui, injectée dans (1.44), donne la forme standard de l'équation homogénéisée (1.11). Par conséquent, $\widehat{u}(x, y) = u_1(x, y)$ où u_1 est définie par (1.28).

Eclatement périodique et correcteurs

On peut montrer des résultats de correcteurs améliorant la convergence de la solution u_ε du problème (1.2) similaires au théorème (1.2) en utilisant un oéprateur $\mathcal{U}_\varepsilon$ appelé opérateur de moyennisation.
Soit $p \in [1, +\infty[$ et $\phi \in L^p(\Omega \times Y)$, on définit l'opérateur de moyennisation $\mathcal{U}_\varepsilon : L^p(\Omega \times Y) \to L^p(\Omega)$ de la façon suivante :

$$\mathcal{U}_\varepsilon(\phi)(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \displaystyle\frac{1}{|Y|}\int_Y \phi\left(\varepsilon\left[\frac{x}{\varepsilon}\right] + \varepsilon z, \left\{\frac{x}{\varepsilon}\right\}\right) dz & \text{p.p. pour } x \in \widehat{\Omega_\varepsilon}, \\ 0 & \text{p.p. pour } x \in \Lambda_\varepsilon, \end{array} \right. \tag{1.45}$$

où $\widehat{\Omega_\varepsilon}$ et Λ_ε sont définis en (1.37).
Cet opérateur permet de remplacer la fonction $x \to \phi\left(x, \left\{\frac{x}{\varepsilon}\right\}\right)$ qui en général n'a pas toujours de sens par une fonction mesurable.
On remarque qu'avec cette définition, on a

$$\mathcal{U}_\varepsilon(\mathcal{T}_\varepsilon(\phi)) = \phi,$$

et que

$$\mathcal{T}_\varepsilon(\mathcal{U}_\varepsilon(\phi))(x, y) = \frac{1}{|Y|}\int_Y \phi\left(\varepsilon\left[\frac{x}{\varepsilon}\right] + \varepsilon z, y\right) dz.$$

Cet opérateur a été construit de façon à être l'adjoint formel de l'opérateur $\mathcal{T}_\varepsilon$ (voir [15]), c'est à dire que pour tout $\psi \in L^p(\Omega)$ et tout $\phi \in L^{p'}(\Omega \times Y)$ où $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, on a

$$\int_\Omega \mathcal{U}_\varepsilon(\phi)(x)\psi(x)\, dx = \frac{1}{|Y|}\int_{\Omega\times Y} \phi(x, y)\mathcal{T}_\varepsilon(\psi)(x, y)\, dx\, dy.$$

Rappelons quelques propriétés de convergence de cet opérateur.

Proposition 1.12 *([15]) Soit $p \in [1, +\infty[$ et $\phi \in L^2(\Omega \times Y)$, on a*

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{U}_\varepsilon(\phi) \rightharpoonup \displaystyle\frac{1}{|Y|}\int_Y \phi(x, y)\, dx\, dy \quad \textit{faiblement dans } L^p(\Omega), \\ \mathcal{T}_\varepsilon(\mathcal{U}_\varepsilon(\phi_\varepsilon)) \rightharpoonup \phi \quad \textit{faiblement dans } L^p(\Omega \times Y), \end{array} \right. \tag{1.46}$$

si $\phi \in L^p(\Omega)$ et ne dépend pas de y, alors

$$\mathcal{U}_\varepsilon(\phi) \to \phi \quad \textit{fortement dans } L^p(\Omega).$$

De plus, soit $\{\phi_\varepsilon\}$ une suite de $L^p(\Omega)$ et $\widehat{\phi} \in L^p(\Omega \times Y)$, on a l'équivalence

$$\mathcal{T}_\varepsilon(\phi_\varepsilon) \to \widehat{\phi} \quad \textit{fortement dans } L^p(\Omega \times Y) \Longleftrightarrow \phi_\varepsilon - \mathcal{U}_\varepsilon(\widehat{\phi}) \to 0 \quad \textit{fortement dans } L^p(\Omega).$$

La dernière propriété de cette proposition est utile pour démontrer le résultat de correcteur énoncé dans le théorème suivant. D'ailleurs sa démonstration est assez simple et beaucoup moins technique que celle du théorème 1.2 qui utilise la matrice C^ε donnée en (1.36).

Théorème 1.13 *[15] Soit u_ε la solution de (1.2), u_0 la solution de (1.11) et $\widehat{u}$ la fonction donnée en (1.40), on a la convergence forte suivante :*

$$\nabla_x u_\varepsilon - \nabla_x u_0 - \mathcal{U}_\varepsilon\left(\nabla_y \widehat{u}\right) \to 0 \quad \textit{fortement dans } L^2(\Omega).$$

1.2 Homogénéisation non péridoique et H-convergence

Dans ce paragraphe, on va rappeler quelques résultats concernant la convergence de solution d'équation aux dérivées partielles ayant des coefficients non périodiques. On rappelle les définitions de la G-convergence et de la H-convergence en vu d'introduire sur le chapitre suivant de cette thèse où l'on étudie l'homogénéisation de l'équation des ondes en faisant l'hypothèse que la partie elliptique de cette équation H^0-converge. La H^0-convergence étant une extension de la H-convergence aux domaines perforés. Elle a été introduite un peu plus tard par M. Briane, A. Damlamian and P. Donato dans [10].
Comme dans le chapitre précédent Ω désigne un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et ε le terme général d'une suite convergeant vers 0. Soit α et β des réels positifs donnés tels que $0 < \alpha < \beta$. On appelle $\mathcal{M}(\alpha, \beta, \Omega)$ l'ensemble des matrices carrées $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n} \in L^\infty(\Omega))^{n\times n}$ telles que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^n$ et p.p. tout x sur Ω

$$\begin{cases} i) & (A(x)\lambda, \lambda) \geq \alpha|\lambda|^2, \\ ii) & |A(x)\lambda| \leq \beta|\lambda|. \end{cases} \tag{1.47}$$

On considère le problème général elliptique suivant :

$$\begin{cases} -\text{div } (A^\varepsilon \nabla u_\varepsilon) &= f \quad \text{dans } \Omega, \\ u_\varepsilon &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.48}$$

où f est une fonction de $H^{-1}(\Omega)$ et $\{A^\varepsilon\}$ une suite de matrice de $\mathcal{M}(\alpha, \beta, \Omega)$.
Les notions de G-convergence et de H-convergence ont été introduites par S. Spagnolo dans [36] et L. Tartar dans [37] respectivement. Ces définitions concernent les convergences du problème (1.48). Ce qui change juste avec le problème (1.2) du chapitre précédent, c'est que la matrice A^ε n'est pas périodique et de la forme $A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$. Donc ici la question est de savoir sous quelles conditions sur la suite de matrice $\{A^\varepsilon\}$ on peut avoir l'homogénéisation du problème (1.48).
En considérant le problème (1.48), on peut montrer de la même façon que pour (1.3) qu'on a l'estimation

$$\|u_\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{C_\Omega}{\alpha} \|f\|_{L^2}(\Omega), \tag{1.49}$$

où C_Ω est indépendente de ε, de plus d'après l'hypothèse faite sur la matrice A^ε on a

$$\|A^\varepsilon u_\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \beta \frac{C_\Omega}{\alpha} \|f\|_{L^2}(\Omega).$$

Par conséquent, il existe une sous-suite de ε (aussi appelée ε) et une fonction ξ_0 dans $L^2(\Omega)$ telle que

$$\begin{cases} i) \quad u_\varepsilon \rightharpoonup u_0 \quad \text{faiblement dans } H_0^1(\Omega), \\ ii) \quad A^\varepsilon \nabla u_\varepsilon \rightharpoonup \xi_0 \quad \text{faiblement dans } (L^2(\Omega))^n, \end{cases} \tag{1.50}$$

où ξ_0 satisfait le problème

$$-\text{div } \xi_0 = f \quad \text{dans } \Omega.$$

La question est toujours de trouver une relation entre u_0 et ξ_0 et un problème limite satisfait par u_0. Les premières recherches sur ce sujet ont été effectuées par S. Spagnolo [36] qui s'est intéressé à des problèmes elliptiques, puis à l'équation de la chaleur mais en considérant que les matrices A^ε étaient symétriques.

Définition 1.14 *(G-convergence) Soit $\{A^\varepsilon\}$ une suite de matrice symétrique de $\mathcal{M}(\alpha, \beta, \Omega)$. On dit que la suite de matrices $\{A^\varepsilon\}$ G-converge vers une matrice A^0 de $\mathcal{M}(\alpha, \beta, \Omega)$, si pour toute fonction f dans $H^{-1}(\Omega)$, la solution u_ε de*

$$\begin{cases} -div\ (A^\varepsilon \nabla u_\varepsilon) = f \quad dans\ \Omega, \\ u_\varepsilon = 0 \quad sur\ \partial\Omega, \end{cases}$$

est telle que

$$u_\varepsilon \rightharpoonup u_0 \quad faiblement\ dans\ H_0^1(\Omega),$$

où u_0 est l'unique solution du problème

$$\begin{cases} -div\ (A^0 \nabla u_0) = f \quad dans\ \Omega, \\ u_0 = 0 \quad sur\ \partial\Omega, \end{cases}$$

Définition 1.15 *(G-convergence) Soit $\{A^\varepsilon\}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}(\alpha, \beta, \Omega)$. On dit que la suite de matrice $\{A^\varepsilon\}$ H-converge vers une matrice A^0 de $\mathcal{M}(\alpha, \beta, \Omega)$, si pour toute fonction f dans $H^{-1}(\Omega)$, la solution u_ε de*

$$\begin{cases} -div\ (A^\varepsilon \nabla u_\varepsilon) = f \quad dans\ \Omega, \\ u_\varepsilon = 0 \quad sur\ \partial\Omega, \end{cases}$$

est telle que

$$\begin{cases} u_\varepsilon \rightharpoonup u_0 \quad faiblement\ dans\ H_0^1(\Omega), \\ A^\varepsilon u_\varepsilon \rightharpoonup A^0 \nabla u_0 \quad faiblement\ dans\ (L^2(\Omega))^n, \end{cases}$$

où u_0 est l'unique solution du problème

$$\begin{cases} -div\ (A^0 \nabla u_0) = f \quad dans\ \Omega, \\ u_0 = 0 \quad sur\ \partial\Omega, \end{cases}$$

Les différences entre la G-convergence et la H-convergence sont que la H-convergence concerne les matrices qui ne sont pas nécessairement symétrique et suppose la convergence de $A^\varepsilon \nabla u_\varepsilon$ et non juste de la solution u_ε comme c'est le cas pour la G-convergence. On peut d'ailleurs montrer (voir [38]) que pour toute suite de matrices symétriques $\{A^\varepsilon\}$ de $\mathcal{M}(\alpha, \beta, \Omega)$, la condition de G-convergence est équivalente à la H-convergence.

Théorème 1.16 *(propriété et compacité)*
i) La H-limite A^0 de toute suite $\{A^\varepsilon\}$ qui H-converge est unique.
ii) Soit $\{A^\varepsilon\}$ une suite de $\mathcal{M}(\alpha, \beta, \Omega)$. Alors il existe une sous-suite $\{A^{\varepsilon'}\}$ de $\{A^\varepsilon\}$ et une matrice A^0 appartenant à $\mathcal{M}(\alpha, \frac{\beta^2}{\alpha}, \Omega)$ telles que $\{A^{\varepsilon'}\}$ H- converge vers A^0.

La H-convergence est utilisée principalement dans l'étude de l'homogénéisation de problèmes dont les coefficients ne sont pas périodiques. On notera par exemple les travaux de M. Briane et G. Allaire sur l'étude de conditions pour lesquelles une suite de matrice H-converge et de la nature de la matrice limite A^0 dans [2] et [9]. La H-convergence peut aussi être utilisée comme hypothèse sur la partie elliptique d'une équation lorsqu'on s'intéresse à l'homogénéisation de problèmes d'évolution avec des coefficients non périodiques, comme par exemple dans l'article de S. Brahim-Otsmane, G. A. Francfort et F. Murat dans [8].

Chapitre 2

Homogénéisation et correcteurs pour l'équation des ondes dans les domaines non périodiquement perforés

Ce chapitre reprend l'article [23].

We consider here the wave equation in a (not necessarily periodic) perforated domain, with a Neumann condition on the boundary of the holes. Assuming H^0-convergence ([10]) on the elliptic part of the operator, we prove two main theorems : a convergence result and a corrector one. To prove the corrector result, we make use of a suitable family of elliptic local correctors given in [12] whose columns are piecewise locally square integrable gradients. As in the case without holes ([8]), some additional assumptions on the data are needed.

2.1 Introduction

In this paper, we are concerned with some convergence and corrector results for the wave equation in perforated domains, when the elliptic part of the operator converges in the sense of the H^0-convergence. This notion, introduced by M. Briane, A. Damlamian and P. Donato in [10], generalizes the G and H-convergences to perforated domains. The G-convergence was introduced by S. Spagnolo ([36]) for symmetric matrices in order to study second order differential operators with oscillating coefficients. The H-convergence was introduced by F. Murat and L. Tartar ([28]) to treat the general nonsymmetric case.
To describe the problem, let $T > 0$ be given and let $\Omega_\varepsilon = \Omega \backslash S_\varepsilon$ be a perforated domain, obtained by removing from a given bounded domain Ω of $\mathbb{R}^n$ a compact set of holes S_ε.
Consider the following problem :

$$\begin{cases} \rho_\varepsilon u_\varepsilon'' - \operatorname{div}(A^\varepsilon \nabla u_\varepsilon) = f_\varepsilon & \text{on } \Omega_\varepsilon \times (0,T), \\ u_\varepsilon = 0 & \text{on } \partial\Omega \times (0,T), \\ A^\varepsilon \nabla u_\varepsilon \,.\, \nu = 0 & \text{on } \partial S_\varepsilon \times (0,T), \\ u_\varepsilon(x,0) = a_\varepsilon & \text{on } \Omega_\varepsilon, \\ u_\varepsilon'(x,0) = b_\varepsilon & \text{on } \Omega_\varepsilon, \end{cases} \tag{2.1}$$

where ν denotes the unitary outward normal to Ω_ε, $\{\rho_\varepsilon\}$ is a sequence of uniformly bounded and positive functions defined on Ω_ε, $\{f_\varepsilon\}$ is a sequence of functions belonging to $L^2(\Omega_\varepsilon \times (0,T))$

and $\{A^\varepsilon\}$ is a sequence of symmetric bounded matrix fields such that

$$\{(A^\varepsilon, S_\varepsilon)\} \quad H^0\text{-converges to } A^0, \tag{2.2}$$

for some matrix field A^0 (see Definitions 2.1 and 2.3 in Section 2).
We prove two main results. The first one (Theorem 2.17) concerns the convergence of the solution of problem (2.1) to that of the homogenized problem. The second one (Theorem 2.18), more technical, is a corrector result. Under some restrictive assumptions on the data, we prove that

$$\begin{cases} i) \quad \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \|u'_\varepsilon \;-\; u'\|_{\mathcal{C}^0([0,T];L^2(\Omega_\varepsilon))} = 0, \\ ii) \quad \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \|\nabla u_\varepsilon \;-\; C^\varepsilon \nabla u\|_{\mathcal{C}^0([0,T];(L^1_{loc}(\Omega_\varepsilon))^n)} = 0, \end{cases} \tag{2.3}$$

where u is the unique solution of the homogenized problem associated with (2.1) and C^ε is an elliptic local corrector (see Definition 2.7).
As shown in Section 7, the convergence of the energy associated with problem (2.1) (defined in Section 6) to that of the homogenized problem is necessary for proving convergence (2.3). As already observed by S. Brahim-Otsmane, G. A. Francfort and F. Murat in [8], where they have studied the homogenization and the correctors for the wave equation with H-convergent elliptic part, more restrictive assumptions on the data are needed for the convergence of the energy.
We first prove the corrector result for the particular family $(C^\varepsilon)_\varepsilon$ of elliptic local correctors given in [12], whose columns are piecewise locally square integrable gradients. It has the property that on suitable subsets of Ω, it can be approximated by a matrix field C^ε_h of the form

$$C^\varepsilon_h e_i = \nabla W^\varepsilon_{h,i}, \qquad \text{a.e. in } \Omega, \tag{2.4}$$

where for any $i \in \{1, \ldots, n\}$, the function $W^\varepsilon_{h,i}$ is defined through the solution of a suitable elliptic problem in Ω_ε. These properties play an essential role in the proof of the corrector result (2.3), since it allows us to use compensated compactness arguments (a div-curl type lemma for perforated domains, see Proposition 2.6). We recall in Section 3 its construction and give some related properties. In Corollary 2.19, we show that (2.3) holds true for a more general family of elliptic local corrector.
Let us mention that in the case of a fixed domain (H-convergence), one always has a global corrector in the whole domain Ω (Definition 2.7). In the presence of holes, this is still true for the global correctors constructed in [10], but some additional regularity assumptions on the geometry of Ω_ε have to be assumed (Theorem 2.9).

In the last section, we split the solution of (2.1) (denoted by v_ε) as a sum of two functions u_ε and z_ε, where u_ε satisfies a problem for which the corrector result applies and z_ε converges weakly to zero. We show that a strong convergence for z_ε is necessary in order to have the corrector result (2.3) for v_ε. This means (see Proposition 2.24 and Remark 2.8) that the assumptions of the homogenization result are not sufficient.

We refer to [7] for the homogenization and the correctors of the wave equation with periodically oscillating coefficients in a fixed domain (see also [16] chap. 12, for detailed proofs). The corresponding homogenization problem in periodically perforated domains has been studied in [17] by D. Cioranescu and P. Donato, and the corrector result has been proved by A. Nabil in [29].

Plan

2.2 Definitions and main properties of H^0-convergence

Let Ω be an open bounded subset of $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ and ε the general term of a sequence of positive number which tends to zero.
For any ε, let S_ε be a closed subset included in Ω, which is the set of holes. We denote by Ω_ε the perforated domain $\Omega \setminus S_\varepsilon$ and by V_ε the space

$$V_\varepsilon = \{v \in H^1(\Omega_\varepsilon) \mid v_{|\partial\Omega} = 0\},$$

equipped with the H^1-norm.
We will use the following notation :
– χ_E for the characteristic function of the set E of $\mathbb{R}^n$,
– $|E|$ for the Lebesgue measure of the subset E,
– $\widetilde{v_\varepsilon}$ for the zero extension on Ω of any function v_ε defined on Ω_ε,
– ν for the unitary outward normal vector with respect to Ω_ε,
– $\nabla u(x,t)$ for the gradient of a function u with respect to the space variables,
– For any function $f : \Omega \times (0,T) \longrightarrow \mathbb{R}$, f' denotes its time derivative,
– $\mathcal{M}(\alpha, \beta, \Omega)$ denotes for two positive reals $\alpha < \beta$, the set of the $n \times n$ matrix fields A defined on Ω and satisfying

$$\begin{cases} A \text{ measurable on } \Omega, \\ A(x)\lambda\lambda \geq \alpha|\lambda|^2, \ |A(x)\lambda| \leq \beta|\lambda|, \\ \forall \lambda \in \mathbb{R}^n, \ a.e. \ x \in \Omega. \end{cases}$$

Definition 2.1 *([10]) The sequence $\{S_\varepsilon\}_\varepsilon$ is said to be admissible in Ω if any L^∞-weak * limit of $\chi_{\Omega_\varepsilon}$ is positive almost everywhere on Ω and if there exist a positive real c_0 independent of ε and a sequence $\{Q_\varepsilon\}_\varepsilon$ of linear extension operators such that for each ε*

$$\begin{cases} i) & Q_\varepsilon \in \mathcal{L}(V_\varepsilon, H_0^1(\Omega)), \\ ii) & (Q_\varepsilon v)_{|\Omega_\varepsilon} = v\,, \quad \forall\, v \in V_\varepsilon, \\ iii) & \|\nabla(Q_\varepsilon v)\|_{(L^2(\Omega))^n} \leq c_0 \|\nabla v\|_{(L^2(\Omega_\varepsilon))^n}\,, \ \forall v \in V_\varepsilon. \end{cases} \tag{2.5}$$

The existence of such operators is proved in [20] for the case of periodic holes. In general, it depends on the geometry of the domain Ω_ε and a necessary and sufficient condition for their existence seems to be an open question. We refer to [10] and [21] for other examples and comments.

Remark 2.1 In the following, we use on V_ε the norm $\|v\|_{V_\varepsilon} = \|\nabla v\|_{(L^2(\Omega_\varepsilon))^n}$. Due to (2.5) this norm is equivalent to the H^1-norm and the Poincaré inequality on Ω. Indeed, one has

$$\|v\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq \|Q_\varepsilon v\|_{H^1(\Omega)} \leq c_\Omega \|\nabla(Q_\varepsilon v)\|_{(L^2(\Omega))^n} \leq c_\Omega c_0 \|\nabla v\|\|_{(L^2(\Omega))^n}\,,$$

where obviously $c_\Omega c_0$ does not depend on ε.

Lemma 2.2 *([10]) Let $\{S_\varepsilon\}$ be an admissible sequence in Ω and $\{Q_\varepsilon\}$ satisfying (2.5). Then*

$$\left(\varphi_\varepsilon \rightharpoonup \varphi \text{ in } H_0^1(\Omega)\right) \Rightarrow \left(Q_\varepsilon(\varphi_{\varepsilon|_{\Omega_\varepsilon}}) \rightharpoonup \varphi \text{ in } H_0^1(\Omega)\right).$$

In the following, Q_ε^* denotes the adjoint of Q_ε, i.e., the operator in $\mathcal{L}(H^{-1}(\Omega), V_\varepsilon')$ defined by

$$\forall\, g \in H^{-1}(\Omega),\ \forall\, v \in V_\varepsilon, \qquad Q_\varepsilon^* g(v) = \langle g, Q_\varepsilon v\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}\,.$$

Recall now the definition of the H^0-convergence introduced by M. Briane, A. Damlamian and P. Donato in [10]. It is an extension to perforated domains of the H-convergence.

Definition 2.3 *([10]) Let $\{S_\varepsilon\}$ be an admissible sequence in Ω and $\{A^\varepsilon\}$ a sequence in $\mathcal{M}(\alpha,\beta,\Omega)$. The sequence $\{(A^\varepsilon, S_\varepsilon)\}$ is said to H^0-converge to $A^0 \in \mathcal{M}(\alpha',\beta',\Omega)$ denoted by $(A^\varepsilon, S_\varepsilon) \overset{H^0}{\rightharpoonup} A^0$, if and only if for any function f in $H^{-1}(\Omega)$, the solution v_ε of*

$$\left\{\begin{array}{rcll} -div\,(A^\varepsilon \nabla v_\varepsilon) &=& Q_\varepsilon^* f & on\ \ \Omega_\varepsilon, \\ (A^\varepsilon \nabla v_\varepsilon).\,\nu &=& 0 & on\ \ \partial S_\varepsilon, \\ v_\varepsilon &=& 0 & on\ \ \partial\Omega, \end{array}\right. \tag{2.6}$$

satisfies the weak convergences

$$\left\{\begin{array}{rcll} Q_\varepsilon v_\varepsilon &\rightharpoonup& v & weakly\ in\ \ H_0^1(\Omega), \\ \widetilde{A^\varepsilon \nabla v_\varepsilon} &\rightharpoonup& A^0 \nabla v & weakly\ in\ \ (L^2(\Omega))^n, \end{array}\right. \tag{2.7}$$

where v is the unique solution in $H_0^1(\Omega)$ of the following problem :

$$\left\{\begin{array}{rcll} -div\,(A^0 \nabla v) &=& f & on\ \ \Omega, \\ v &=& 0 & on\ \ \partial\Omega. \end{array}\right. \tag{2.8}$$

As shown in Proposition 1.7 of [10], this definition does not depend on the sequence $\{Q_\varepsilon\}$. Let us recall the main properties of H^0-convergence which shall be used in the main result.

Theorem 2.4 ***Compactness ([10])***
If $\{S_\varepsilon\}$ is admissible in Ω and if $\{A^\varepsilon\}$ belongs to $\mathcal{M}(\alpha,\beta,\Omega)$, then there exists a subsequence ε' of ε such that $(A^{\varepsilon'}, S_{\varepsilon'}) \overset{H^0}{\rightharpoonup} A^0$, where $A^0 \in \mathcal{M}(\alpha/c_0^2, \beta, \Omega)$ and c_0 is the constant introduced in (2.5).

The next proposition gives an equivalent definition of H^0-convergence.

Proposition 2.5 *([10]) Let $\{A^\varepsilon\}$ a sequence of $\mathcal{M}(\alpha,\beta,\Omega)$ and $\{S_\varepsilon\}$ be admissible in Ω. The following propositions are equivalent :*

a) *The sequence $\{(A^\varepsilon, S_\varepsilon)\}$ H^0-converges to A^0.*

b) *For every sequence of functions $\{g_\varepsilon\}$ in $L^2(\Omega_\varepsilon)$, such that $\widetilde{g_\varepsilon} \rightharpoonup g$ weakly in $L^2(\Omega)$, the solution v_ε of the problem*

$$\left\{\begin{array}{rcll} -div\,(A^\varepsilon \nabla v_\varepsilon) &=& g_\varepsilon & on\ \ \Omega_\varepsilon, \\ (A^\varepsilon \nabla v_\varepsilon).\,\nu &=& 0 & on\ \ \partial S_\varepsilon, \\ v_\varepsilon &=& 0 & on\ \ \partial\Omega, \end{array}\right. \tag{2.9}$$

satisfies the weak convergences

$$\left\{\begin{array}{rcll} Q_\varepsilon v_\varepsilon &\rightharpoonup& v & weakly\ in\ \ H_0^1(\Omega), \\ \widetilde{A^\varepsilon \nabla v_\varepsilon} &\rightharpoonup& A^0 \nabla v & weakly\ in\ \ (L^2(\Omega))^n, \end{array}\right. \tag{2.10}$$

where v is the unique solution in $H_0^1(\Omega)$ of the following problem :

$$\begin{cases} -div\,(A^0\nabla v) &= g \quad on\ \Omega, \\ v &= 0 \quad on\ \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.11}$$

The following result gives a "div-curl" lemma for perforated domains.

Proposition 2.6 *([10]) Let $\{S_\varepsilon\}$ be admissible in Ω and $\{\xi_\varepsilon\} \subset (L^2(\Omega_\varepsilon))^n$ a vector field sequence. Suppose that $\{\widetilde{\xi_\varepsilon}\}$ is bounded in $(L^2(\Omega))^n$ and*

$$\begin{cases} -div\,\xi_\varepsilon = Q_\varepsilon^* f_\varepsilon & on\ \Omega_\varepsilon, \\ \xi_\varepsilon\,.\,\nu = 0 & on\ \partial S_\varepsilon, \end{cases} \tag{2.12}$$

where $\{f_\varepsilon\}$ is compact in $H^{-1}(\Omega)$.

Then

i) *$\{div\,\widetilde{\xi_\varepsilon}\}$ is compact in $H^{-1}(\Omega)$ and if $\widetilde{\xi_\varepsilon} \rightharpoonup \xi_0$ in $L^2(\Omega)$, then f_ε converges to $f = div\,\xi_0$ in $H^{-1}(\Omega)$.*

ii) *If $\{\eta_\varepsilon\} \in (L^2(\Omega))^n$ is a vector field sequence which converges weakly to some $\eta_0 \in (L^2(\Omega))^n$ and if $\{curl\,(\eta_\varepsilon)\}$ is compact in $H^{-1}(\Omega)$, then $\widetilde{\xi_\varepsilon}\,.\,\eta_\varepsilon$ converges to $\xi_0\,.\,\eta_0$ in $D'(\Omega)$.*

2.3 The elliptic corrector

In this section, we give the definition of an elliptic corrector. We also recall the construction of a particular local corrector done in [12] and we give some additional properties. This construction plays an essential role in the proof of the corrector result for the wave equation.

First, let us give the definition of an elliptic corrector.

Definition 2.7 *([10]) Let $\{S_\varepsilon\}$ be admissible in Ω and $\{A^\varepsilon\}$ be a sequence of $\mathcal{M}(\alpha,\beta,\Omega)$ such that $\{A^\varepsilon, S_\varepsilon\}$ H^0-converges to A^0. A sequence of matrix fields $\{C^\varepsilon\}$ in $(L^2(\Omega))^{n^2}$ is said to be a global corrector for $\{A^\varepsilon, S_\varepsilon\}$, if for every $f \in H^{-1}(\Omega)$ the following strong convergence holds :*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|\nabla v_\varepsilon - C^\varepsilon \nabla v\|_{(L^1(\Omega_\varepsilon))^n} = 0, \tag{2.13}$$

where v_ε is the solution of (2.6) associated with f and v the solution of (2.8).

A sequence of matrix fields $\{C^\varepsilon\}$ in $(L^2_{loc}(\Omega))^{n^2}$ is said to be a local corrector for $\{A^\varepsilon, S_\varepsilon\}$ if for every $f \in H^{-1}(\Omega)$ and for every open set $\omega \subset\subset \Omega$, the following strong convergence holds :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|\nabla v_\varepsilon - C^\varepsilon \nabla v\|_{(L^1(\Omega_\varepsilon\cap\omega))^n} = 0, \tag{2.14}$$

where v_ε is the solution of (2.6) associated with f and v the solution of (2.8).

Proposition 2.8 *([10]) Let $\{A^\varepsilon, S_\varepsilon\}$ be a sequence which H^0-converges to A^0.*
Let $\{C^\varepsilon\}$ in $(L^2_{loc}(\Omega))^{n^2}$ be a sequence of matrix fields satisfying for every λ in $\mathbb{R}^n$ and for every open subset $\omega \subset\subset \Omega$

$$\begin{cases} i) & C^\varepsilon\lambda \rightharpoonup \lambda \quad weakly\ in\ L^2(\omega), \\ ii) & curl\,(C^\varepsilon\lambda) \quad is\ compact\ in\ H^{-1}(\omega), \\ iii) & div\,(\chi_{\Omega_\varepsilon} A^\varepsilon C^\varepsilon \lambda) \quad is\ compact\ in\ H^{-1}(\omega). \end{cases} \tag{2.15}$$

Then

1. *The sequence* $\{C^\varepsilon\}$ *is a local corrector for* $\{A^\varepsilon, S_\varepsilon\}$ *and* $\chi_{\Omega_\varepsilon} A^\varepsilon C^\varepsilon \rightharpoonup A^0$ *weakly in* $(L^2_{loc}(\Omega))^{n^2}$.

2. *If* $\{C^\varepsilon\}$ *is bounded in* $(L^r(\omega))^{n^2}$ *for* $\omega \subset\subset \Omega$ *and some* $r \in [2, +\infty]$, *and if* $\nabla v \in (L^s(\Omega))^n$ *for some* $s \in [2, +\infty[$, *then*
$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|\nabla v_\varepsilon - C^\varepsilon \nabla v\|_{(L^q(\Omega_\varepsilon \cap \omega))^n} = 0, \tag{2.16}$$
for $q = \min\left\{2, \dfrac{rs}{r+s}\right\}$, *where* v_ε *is the solution of (2.6) associated with* $f = -div\ (A^0 \nabla v)$.

3. *If* $\{C^\varepsilon\} \subset L^2(\Omega)$ *and (2.15) holds for* $\omega = \Omega$, *then* $\{C^\varepsilon\}$ *is a global corrector and (2.16) holds for* $\omega = \Omega$.

Theorem 2.9 *([10]) For every* H^0*-converging sequence* $\{A^\varepsilon, S_\varepsilon\}$, *there exists a local corrector* $\{C^\varepsilon\}$.
Moreover, if there exists an open set Ω_1 *such that* $\overline{\Omega} \subset \Omega_1$ *and* $\{S_\varepsilon\}$ *is admissible in* Ω_1, *then there exists a global corrector for* $\{A^\varepsilon, S_\varepsilon\}$.

Remark 2.2 In [10], the existence of a global corrector is established by constructing a family (C^ε) satisfying (2.15) in Ω as follows :
Let
$$B^\varepsilon = \begin{cases} A^\varepsilon & \text{on } \Omega, \\ I & \text{on } \Omega_1 \setminus \Omega. \end{cases}$$
The sequence $\{B^\varepsilon\}$ is in $\mathcal{M}(\alpha, \beta, \Omega_1)$ and since $\{S_\varepsilon\}$ is admisssible in Ω_1, from Theorem 2.4 there exist a subsequence of ε (still denoted ε) and a matrix B^0 such that $\{B^\varepsilon, S_\varepsilon\}$ H^0-converges to B^0. Let Q_ε be an extension operator provided by the admissibility of S_ε in Ω_1 and let Q^*_ε be its adjoint. Let φ be a function of $D(\Omega_1)$ equal to 1 on Ω and for every $\lambda \in \mathbb{R}^n$, let w^ε_λ be the solution of the problem
$$\begin{cases} -\text{div }(B^\varepsilon \nabla w^\varepsilon_\lambda) &= Q^*_\varepsilon(-\text{div }(B^0 \nabla(\varphi\lambda \,.\, x))) & \text{on } \Omega_1 \setminus S_\varepsilon, \\ (B^\varepsilon \nabla w^\varepsilon_\lambda).\,\nu &= 0 & \text{on } \partial S_\varepsilon, \\ w^\varepsilon_\lambda &= 0 & \text{on } \partial\Omega_1. \end{cases} \tag{2.17}$$
Since $\{B^\varepsilon\}$ H^0-converges to B^0, we have the following convergences :
$$\begin{cases} Q_\varepsilon w^\varepsilon_\lambda \rightharpoonup \omega_\lambda & \text{weakly in } H^1_0(\Omega_1), \\ B^\varepsilon \widetilde{\nabla w^\varepsilon_\lambda} \rightharpoonup B^0 \nabla \omega_\lambda & \text{weakly in } (L^2(\Omega_1))^n, \end{cases} \tag{2.18}$$
where w_λ is the solution of the problem
$$\begin{cases} -\text{div }(B^0 \nabla w_\lambda) &= -\text{div }(B^0 \nabla(\varphi\lambda \,.\, x)) & \text{on } \Omega_1, \\ w_\lambda &= 0 & \text{on } \partial\Omega_1. \end{cases} \tag{2.19}$$
Because of the uniqueness of the solution of (2.19), we have $w_\lambda = \varphi\lambda \,.\, x$ on Ω_1.
Since φ is equal to 1 on Ω, one has
$$\begin{cases} Q_\varepsilon w^\varepsilon_\lambda \rightharpoonup \lambda \,.\, x & \text{weakly in } H^1(\Omega), \\ B^\varepsilon \widetilde{\nabla w^\varepsilon_\lambda} \rightharpoonup B^0 \lambda & \text{weakly in } (L^2(\Omega))^n. \end{cases} \tag{2.20}$$
Consider the matrix field C^ε defined by
$$C^\varepsilon \lambda = \nabla(Q_\varepsilon w^\varepsilon_\lambda), \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}^n. \tag{2.21}$$
As $B^\varepsilon = A^\varepsilon$ on Ω and from (2.17), (2.20), (2.21) and Proposition 2.6 i) applied to $B^\varepsilon w^\varepsilon_\lambda$, the family (C^ε) satisfies the three conditions of (2.15) in Ω.

□

Proposition 2.10 *If C_1^ε and C_2^ε are two local correctors, then*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|C_1^\varepsilon - C_2^\varepsilon\|_{(L^1(\Omega_\varepsilon\cap\omega))^{n^2}} = 0, \qquad \forall\, \omega \subset\subset \Omega. \tag{2.22}$$

Moreover, if C_1^ε and C_2^ε satisfy property (2.16) with $r = 2$, one has for any $q \in [1, 2[$,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|C_1^\varepsilon - C_2^\varepsilon\|_{(L^q(\Omega_\varepsilon\cap\omega))^{n^2}} = 0, \qquad \forall\, \omega \subset\subset \Omega. \tag{2.23}$$

Proof. Fix a compact subset ω contained in Ω and let $\varphi \in D(\Omega)$ such that $\varphi = 1$ on ω. Set $u_0(x) = (\lambda\,.\,x)\,\varphi$ where $x \in \Omega$, and λ is a fixed element in $\mathbb{R}^n$.
Let u_ε be the solution of the problem

$$\begin{cases} \operatorname{div}\,(A^\varepsilon \nabla u_\varepsilon) &=& \operatorname{div}\,(A^0\nabla u_0) & \text{on } \Omega_\varepsilon, \\ (A^\varepsilon \nabla u_\varepsilon).\,\nu &=& 0 & \text{on } \partial S_\varepsilon, \\ u_\varepsilon &=& 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.24}$$

If $\omega_1 = \operatorname{supp}\,\varphi$, we have for any $\lambda \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} \|C_1^\varepsilon\lambda - C_2^\varepsilon\lambda\|_{L^1(\Omega_\varepsilon\cap\omega)} &\le \|C_1^\varepsilon\nabla u_0 - C_2^\varepsilon\nabla u_0\|_{L^1(\Omega_\varepsilon\cap\omega_1)} \\ &\le \|C_1^\varepsilon\nabla u_0 - \nabla u_\varepsilon\|_{L^1(\Omega_\varepsilon\cap\omega_1)} + \|C_2^\varepsilon\nabla u_0 - \nabla u_\varepsilon\|_{L^1(\Omega_\varepsilon\cap\omega_1)}\,. \end{aligned}$$

From (2.14), the last term converges to 0 as ε tends to 0. Hence (2.22) holds.
Suppose that C_1^ε and C_2^ε satisfy (2.16) with $r = 2$ and let $q \in [1, 2[$ be fixed. Choosing s such that $q = \dfrac{2s}{s+2}$, i.e., $s = \dfrac{2q}{2-q} \in [2, +\infty[$, one has

$$\|C_1^\varepsilon\lambda - C_2^\varepsilon\lambda\|_{L^q(\Omega_\varepsilon\cap\omega)} \le \|C_1^\varepsilon\nabla u_0 - \nabla u_\varepsilon\|_{L^q(\Omega_\varepsilon\cap\omega_1)} + \|C_2^\varepsilon\nabla u_0 - \nabla u_\varepsilon\|_{L^q(\Omega_\varepsilon\cap\omega_1)}\,.$$

From (2.16), the right-hand side converges to 0, as ε tends to 0.

$\diamondsuit$

Let us now recall the construction of the local corrector done by G. Cardone, P. Donato and A. Gaudiello in [12].
Let $\{\omega_h\}_{h\in\mathbb{N}}$ be a sequence of increasing subsets of $\mathbb{R}^n$ with smooth boundary and let $\{\varphi_h\}_{h\in\mathbb{N}}$ be a sequence of functions defined on Ω such that

$$\begin{cases} \omega_0 = \emptyset \subset \omega_1 \subset\subset \ldots\, \omega_h \subset\subset \omega_{h+1} \subset\subset \ldots \subset\subset \Omega\,, \\ \bigcup\limits_{h\in\mathbb{N}} \omega_h = \Omega\,, \\ \varphi_h \in D(\Omega) \;\text{ and }\; \varphi_h = 1 \;\text{ on }\; \omega_h,\, \forall\, h \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{2.25}$$

For any $h \in \mathbb{N}$, introduce the family $(C_h^\varepsilon)_\varepsilon$ in $(L^2(\Omega))^{n^2}$ defined by

$$C_h^\varepsilon e_i = \nabla(Q_\varepsilon w_{h,i}^\varepsilon) \quad a.e. \text{ on } \Omega,\ \forall\, i \in \{1, \ldots, n\}, \tag{2.26}$$

where $\{e_1, \ldots, e_n\}$ denotes the canonical basis of $\mathbb{R}^n$ and for any $h \in \mathbb{N}$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, $w_{h,i}^\varepsilon$ is the unique solution of the following problem :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\,(A^\varepsilon\nabla w_{h,i}^\varepsilon) &=& Q_\varepsilon^*(-\operatorname{div}\,(A^0\nabla(\varphi_h x_i))) & \text{on } \Omega_\varepsilon, \\ (A^\varepsilon\nabla w_{h,i}^\varepsilon).\,\nu &=& 0 & \text{on } \partial S_\varepsilon, \\ w_{h,i}^\varepsilon &=& 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.27}$$

whose variational formulation is

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Find } w^\varepsilon_{h,i} \in V_\varepsilon \text{ such that} \\ \displaystyle\int_{\Omega_\varepsilon} A^\varepsilon \nabla w^\varepsilon_{h,i} \nabla v\, dx \;=\; \int_\Omega A^0 \nabla(\varphi_h x_i) \nabla(Q_\varepsilon v)\, dx, \quad \forall\, v \in V_\varepsilon. \end{array}\right. \tag{2.28}$$

Since $\{A^\varepsilon, S_\varepsilon\}$ H^0-converges to A^0 and φ_h is equal to 1 on ω_h, it follows that

$$\left\{\begin{array}{l} \|C^\varepsilon_h\|_{(L^2(\Omega))^{n^2}} \leq c_h, \\ \text{where } c_h \text{ is independent of } \varepsilon \text{ but dependent on } h, \end{array}\right. \tag{2.29}$$

and

$$\left\{\begin{array}{lll} i) & Q_\varepsilon w^\varepsilon_{h,i} \rightharpoonup \varphi_h x_i & \text{in } H^1_0(\Omega), \\ ii) & A^\varepsilon \widetilde{\nabla w^\varepsilon_{h,i}} \rightharpoonup A^0 \nabla(\varphi_h x_i) & \text{in } (L^2(\Omega))^n, \\ iii) & Q_\varepsilon w^\varepsilon_{h,i} \rightharpoonup x_i & \text{in } H^1(\omega_h), \\ iv) & \chi_{\Omega_\varepsilon} A^\varepsilon C^\varepsilon_h \rightharpoonup A^0 & \text{in } (L^2(\omega_h))^{n^2}, \end{array}\right. \tag{2.30}$$

Now, define C^ε in $(L^2_{loc}(\Omega))^{n^2}$ as follows :

$$C^\varepsilon = C^\varepsilon_h \quad \text{a.e. in } \; \omega_h - \overline{\omega_{h-1}}, \quad \forall\, h \in \mathbb{N}^*, \tag{2.31}$$

where $\{\omega_h\}$ satisfies (2.25) and C^ε_h is given by (2.26).
From (2.25) and (2.29), for any open set $\omega \subset\subset \Omega$, one has

$$\left\{\begin{array}{l} \|C^\varepsilon\|_{(L^2(\omega))^{n^2}} \leq c_\omega, \\ \text{where } c_\omega \text{ is independent of } \varepsilon, \text{ but dependent on } \omega. \end{array}\right. \tag{2.32}$$

The following result is proved in [12].

Theorem 2.11 *[12] Let $(A^\varepsilon, S_\varepsilon)_\varepsilon$ be a sequence which H^0-converges to A^0. Let f be in $H^{-1}(\Omega)$, v_ε and v be the solutions of (2.6) and (2.8) respectively, associated with f. Then, if C^ε is given by (2.31), one has for any $q \in [1, 2[$,*

$$\left\{\begin{array}{ll} i) & \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n, \forall \varphi \in D(\Omega), \varphi \geq 0 \text{ in } \Omega, \quad \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \displaystyle\int_{\Omega_\varepsilon} |C^\varepsilon \xi|^q \varphi\, dx \leq c|\xi|^q \int_\Omega \varphi\, dx, \\ ii) & \forall\, \phi \in (D(\Omega))^n, \quad \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \|\nabla v_\varepsilon - C^\varepsilon \phi\|_{(L^q(\Omega_\varepsilon))^n} \leq c\, \|\nabla v - \phi\|_{(L^2(\Omega))^n}. \end{array}\right. \tag{2.33}$$

This result allows us to prove the existence (not explicitly proved in [12]) of a local corrector result for a sequence $\{A^\varepsilon, S_\varepsilon\}$.

Theorem 2.12 *Under the hypotheses of Theorem 2.11, the sequence $\{C^\varepsilon\}$ given by (2.31) is a local corrector for $\{A^\varepsilon, S_\varepsilon\}$. Moreover, it satisfies property (2.16) with $r = 2$.*

Proof. Show that (2.14) holds for the sequence $\{C^\varepsilon\}$.
Let f be in $H^{-1}(\Omega)$, v_ε and v be the solutions of (2.6) and (2.8) respectively, ω be an open set with $\omega \subset\subset \Omega$, $\eta > 0$ and $\phi \in (D(\Omega))^n$ such that

$$\|\nabla v - \phi\|_{(L^2(\Omega))^n} \leq \eta.$$

From Theorem 2.11, it follows that

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \|\nabla v_\varepsilon - C^\varepsilon \nabla v\|_{(L^1(\Omega_\varepsilon \cap \omega))^n}$$

$$\leq \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \left(\|\nabla v_\varepsilon - C^\varepsilon \phi\|_{(L^1(\Omega_\varepsilon))^n} + \|C^\varepsilon \phi - C^\varepsilon \nabla v\|_{(L^1(\Omega_\varepsilon \cap \omega))^n} \right)$$

$$\leq \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \left(c\,\|\nabla v - \phi\|_{(L^2(\Omega))^n} + \|C^\varepsilon\|_{(L^2(\omega))^{n^2}} \|\phi - \nabla v\|_{(L^2(\Omega))^n} \right) \leq c\eta + c_\omega \eta,$$

where c_ω is the constant introduced in (2.32). This, gives the claimed result, since η is arbitrary.

Now, we prove that $\{C^\varepsilon\}$ satisfies property (2.16) with $r = 2$. To do so, let $\eta > 0$, $\omega \subset\subset \Omega$ and $\phi \in (D(\Omega))^n$ such that

$$\|\nabla v - \phi\|_{\left(L^{\frac{2q}{2-q}}(\Omega)\right)^n} \leq \eta,$$

where $q = \frac{2s}{2+s} \in [1, 2[$. From Theorem 2.11 and the Hölder inequality, we have

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \|\nabla v_\varepsilon - C^\varepsilon \nabla v\|_{(L^q(\Omega_\varepsilon\cap\omega))^n}$$

$$\leq \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \left(\|\nabla v_\varepsilon - C^\varepsilon \phi\|_{(L^q(\Omega_\varepsilon))^n} + \|C^\varepsilon \phi - C^\varepsilon \nabla v\|_{(L^q(\Omega_\varepsilon\cap\omega))^n} \right)$$

$$\leq \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \left(c' \|\nabla v - \phi\|_{(L^2(\omega))^n} + \|C^\varepsilon\|_{(L^2(\omega))^{n^2}} \|\phi - \nabla v\|_{\left(L^{\frac{2q}{2-q}}(\Omega)\right)^n} \right) \leq c'\eta + c_\omega \eta,$$

and this concludes the proof, since η is arbitrary.

$\diamondsuit$

In the following, we will use this result :

Proposition 2.13 *For any $\phi \in D(\Omega)$, there exists $l_\phi \in \mathbb{N}$ such that*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \left\|(C^\varepsilon - C^\varepsilon_{l_\phi})\nabla\phi\right\|_{(L^1(\Omega_\varepsilon))^n} = 0, \tag{2.34}$$

where $C^\varepsilon_{l_\phi}$ is given by (2.26).

The proof of this proposition is based on the following lemma proved in [12] :

Lemma 2.14 *[12] Under the hypotheses of Theorem 2.11, if $\{\omega_h\}$ is given by (2.25) and C^ε_h by (2.26), one has for any $h, k \in \mathbb{N}$ and for any $\Phi \in (D(\omega_h))^n$*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\Omega_\varepsilon} A^\varepsilon((C^\varepsilon_h - C^\varepsilon_{h+k})\Phi)((C^\varepsilon_h - C^\varepsilon_{h+k})\Phi)\, dx = 0. \tag{2.35}$$

Proof of Proposition 2.13. Since $\phi \in D(\Omega)$, there exist $\omega \subset\subset \Omega$ and an integer l_ϕ such that supp $\phi = \omega$ and $\omega \subset \omega_{l_\phi}$, where ω_{l_ϕ} is an element of the sequence $\{\omega_h\}$ introduced in (2.25). For $\eta > 0$ and for every $h \in \{1, \ldots, l_\phi\}$, let $\Phi^h_\eta \in D(\omega_h))^n$ be such that

$$\left\|\nabla\phi - \Phi^h_\eta\right\|_{(L^2(\omega_h))^n} \leq \eta.$$

From the Hölder inequality, the ellipticity of A^ε, (2.29) and definition (2.31) of C^ε, one has

$$\int_{\Omega_\varepsilon} |(C^\varepsilon - C^\varepsilon_{l_\phi})\nabla\phi|\, dx \leq \sum_{h=1}^{l_\phi} \int_{\Omega_\varepsilon\cap\omega_h} |(C^\varepsilon_h - C^\varepsilon_{l_\phi})\nabla\phi|\, dx$$

$$\leq \sum_{h=1}^{l_\phi} \int_{\Omega_\varepsilon\cap\omega_h} |(C^\varepsilon_h - C^\varepsilon_{l_\phi})(\nabla\phi - \Phi^h_\eta)|\, dx + \sum_{h=1}^{l_\phi} \int_{\Omega_\varepsilon\cap\omega_h} |(C^\varepsilon_h - C^\varepsilon_{l_\phi})\Phi^h_\eta|\, dx$$

$$\leq \sum_{h=1}^{l_\phi} \eta \left(\int_{\Omega_\varepsilon \cap \omega_h} |(C_h^\varepsilon - C_{l_\phi}^\varepsilon)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} + |\Omega|^{\frac{1}{2}} \sum_{h=1}^{l_\phi} \left(\int_{\Omega_\varepsilon \cap \omega_h} |(C_h^\varepsilon - C_{l_\phi}^\varepsilon)\Phi_\eta^h|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \eta \sum_{h=1}^{l_\phi} (c_h + c_{l_\phi}) + |\Omega|^{\frac{1}{2}} \sum_{h=1}^{l_\phi} \left(\frac{1}{\alpha} \int_{\Omega_\varepsilon} A^\varepsilon((C_h^\varepsilon - C_{l_\phi}^\varepsilon)\Phi_\eta^h)((C_h^\varepsilon - C_{l_\phi}^\varepsilon)\Phi_\eta^h) \, dx \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{2.36}$$

where c_h and c_{l_ϕ} are independent of ε.
Since supp $\phi_\eta^h \subset \omega_h$ and $l_\phi \geq h$ for every $h \in \{1, \ldots, l_\phi\}$, we can apply Lemma 2.14 to the right-hand side of (2.36) to obtain

$$0 \leq \overline{\lim_{\varepsilon \to 0}} \left\| (C^\varepsilon - C_{l_\phi}^\varepsilon) \nabla \phi \right\|_{(L^1(\Omega_\varepsilon))^n} \leq c\, \eta,$$

which implies (2.35), since η is arbitrary.

$\diamondsuit$

2.4 Statement of the main results

In this section we state the homogenization and the corrector results.

2.4.1 Homogenization of the wave equation

Consider the problem

$$\begin{cases} \rho_\varepsilon u_\varepsilon'' - \text{div } (A^\varepsilon \nabla u_\varepsilon) &= f_\varepsilon \quad \text{on } \Omega_\varepsilon \times (0,T), \\ u_\varepsilon &= 0 \quad \text{on } \partial\Omega \times (0,T), \\ A^\varepsilon \nabla u_\varepsilon \,.\, \nu &= 0 \quad \text{on } \partial S_\varepsilon \times (0,T), \\ u_\varepsilon(x,0) &= a_\varepsilon \quad \text{on } \Omega_\varepsilon, \\ u_\varepsilon'(x,0) &= b_\varepsilon \quad \text{on } \Omega_\varepsilon. \end{cases} \tag{2.37}$$

We make the following hypotheses on the data :

$$\begin{cases} \rho_\varepsilon \in L^\infty(\Omega_\varepsilon), \\ \exists\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \text{ such that } \quad 0 < \lambda_1 \leq \rho_\varepsilon \leq \lambda_2, \end{cases} \tag{2.38}$$

$$\begin{cases} A^\varepsilon \in \mathcal{M}\,(\alpha, \beta, \Omega)\,,\ {}^t A^\varepsilon = A^\varepsilon, \\ \{S_\varepsilon\}_\varepsilon \text{ is admissible on } \Omega, \end{cases} \tag{2.39}$$

and

$$f_\varepsilon \in L^2((0,T) \times \Omega_\varepsilon), \quad a_\varepsilon \in V_\varepsilon, \quad b_\varepsilon \in L^2(\Omega_\varepsilon). \tag{2.40}$$

Let us introduce the spaces

$$\begin{aligned} W_\varepsilon(0,T; V_\varepsilon, L^2(\Omega_\varepsilon)) &= \left\{ v \in L^2(0,T; V_\varepsilon) \ \mid \ v' \in L^2(0,T; L^2(\Omega_\varepsilon)) \right\}, \\ W(0,T; H_0^1(\Omega), L^2(\Omega)) &= \left\{ v \in L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega)) \ \mid \ v' \in L^2(0,T; L^2(\Omega)) \right\}, \end{aligned}$$

which are Banach spaces with respect to their graph norms, defined by

$$\begin{aligned} \|v\|_{W_\varepsilon(0,T;V_\varepsilon,L^2(\Omega_\varepsilon))} &= \|v\|_{L^2(0,T;V_\varepsilon)} + \|v'\|_{L^2(\Omega_\varepsilon \times (0,T))}\,, \\ \|v\|_{W(0,T;H_0^1(\Omega),L^2(\Omega))} &= \|v\|_{L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))} + \|v'\|_{L^2(\Omega \times (0,T))}\,. \end{aligned}$$

Recall that $W(0,T; H_0^1(\Omega), L^2(\Omega))$ is dense in $\mathcal{C}^0([0,T]; L^2(\Omega))$ and $W_\varepsilon(0,T; V_\varepsilon, L^2(\Omega_\varepsilon))$ is a Hilbert space.

The variational formulation of (2.37) is

$$\begin{cases} \text{Find } u_\varepsilon \in W_\varepsilon(0,T;V_\varepsilon,L^2(\Omega_\varepsilon)) \text{ such that} \\ \langle \rho_\varepsilon u''_\varepsilon, v\rangle_{V'_\varepsilon,V_\varepsilon} + \displaystyle\int_{\Omega_\varepsilon} A^\varepsilon \nabla u_\varepsilon \nabla v\, dx \;=\; \int_{\Omega_\varepsilon} f_\varepsilon v\, dx \quad \text{in } D'(0,T), \;\; \forall\, v \in V_\varepsilon, \\ \qquad\qquad\qquad u_\varepsilon(x,0) \;=\; a_\varepsilon \qquad\qquad \text{on } \Omega_\varepsilon, \\ \qquad\qquad\qquad u'_\varepsilon(x,0) \;=\; b_\varepsilon \qquad\qquad \text{on } \Omega_\varepsilon. \end{cases} \tag{2.41}$$

It is well known that under hypotheses (2.38)-(2.40), for every fixed ε there exists a unique solution u_ε of (2.37) in $W_\varepsilon(0,T;V_\varepsilon,L^2(\Omega_\varepsilon))$ such that

$$u_\varepsilon \in \mathcal{C}^0([0,T];V_\varepsilon), \quad u'_\varepsilon \in \mathcal{C}^0([0,T];L^2(\Omega_\varepsilon)) \;\text{ and }\; u''_\varepsilon \in L^2(0,T;V'_\varepsilon).$$

Therefore, the initial conditions $u_\varepsilon(0) = a_\varepsilon$ and $u'_\varepsilon(0) = b_\varepsilon$ make sense.
Suppose furthermore that

$$(A^\varepsilon, S_\varepsilon) \overset{H^0}{\rightharpoonup} A^0, \tag{2.42}$$

where $A^0 \in \mathcal{M}(\alpha/c_0^2, \beta, \Omega)$ and c_0 is given by (2.1). Observe that A^ε is symmetric for every ε, so its H^0-limit A^0 is also symmetric.
We make the following assumptions on the data :

$$\widetilde{\rho_\varepsilon} \overset{*}{\rightharpoonup} \rho \quad \text{weakly * in } L^\infty(\Omega), \tag{2.43}$$

and

$$\begin{cases} i) & \widetilde{f_\varepsilon} \rightharpoonup f \quad \text{weakly in } L^2(\Omega \times (0,T)), \\ ii) & Q_\varepsilon a_\varepsilon \rightharpoonup a_0 \quad \text{weakly in } H^1_0(\Omega), \\ iii) & \widetilde{\rho_\varepsilon b_\varepsilon} \rightharpoonup b \quad \text{weakly in } L^2(\Omega). \end{cases} \tag{2.44}$$

Remark 2.3 As we will see in Theorem 2.17 below, the limit of $\widetilde{\rho_\varepsilon b_\varepsilon}$ appears in the homogenized problem and not of b_ε. This explains why we make assumption (2.44)iii. This fact was already observed in [8] for a fixed domain.

Proposition 2.15 *Under hypotheses (2.38)-(2.40) and (2.42)-(2.44), there exists a constant c independent of ε such that*

$$\begin{cases} \|u'_\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega_\varepsilon))} & \leq & c, \\ \|u_\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega_\varepsilon))} & \leq & c. \end{cases} \tag{2.45}$$

The proof of Proposition 2.37 follows the same outline as in the periodic case (see for instance [17]). Indeed, it only makes use of the fact that $A^\varepsilon \in \mathcal{M}(\alpha,\beta,\Omega)$ and that the initial data are bounded.

To describe the asymptotic behavior of problem (2.37), we need to extend not only its solution u_ε on the whole domain Ω but also its time derivative u'_ε. To do that, we need to suppose that the extension operator Q_ε given in Definition 2.1 also acts on functions in $L^2(\Omega_\varepsilon)$.
In the following, we suppose that Q_ε satisfies (2.5) and also

$$\begin{cases} i) & Q_\varepsilon \in \mathcal{L}(L^2(\Omega_\varepsilon), L^2(\Omega)), \\ ii) & (Q_\varepsilon v)_{|\Omega_\varepsilon} = v, \quad \forall\, v \in L^2(\Omega_\varepsilon), \\ iii) & \|Q_\varepsilon v\|_{L^2(\Omega)} \leq c_0 \|v\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}, \; \forall\, v \in L^2(\Omega_\varepsilon), \end{cases} \tag{2.46}$$

where c_0 is the constant introduced in (2.5).
We can now construct a family (P_ε) of extension operators for time-dependent functions.

Theorem 2.16 *Let $\{S_\varepsilon\}$ be admissible in Ω and assume that (2.46) holds. Then, there exists an extension operator $P_\varepsilon \in \mathcal{L}\left(L^\infty(0,T;V_\varepsilon), L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))\right) \cap \mathcal{L}\left(L^\infty(0,T;L^2(\Omega_\varepsilon)), L^\infty(0,T;L^2(\Omega))\right)$ such that* $\forall\, \phi \in L^\infty(0,T;V_\varepsilon) \cap W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Omega_\varepsilon))$

$$\left\{\begin{array}{ll} i) & P_\varepsilon\phi = \phi \quad \text{on } \ \Omega_\varepsilon \times (0,T),\\ ii) & (P_\varepsilon\phi)' = P_\varepsilon\phi' \quad \text{on } \ \Omega \times (0,T),\\ iii) & \|P_\varepsilon\phi\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq \ c_0\, \|\phi\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega_\varepsilon))}\,,\\ iv) & \|P_\varepsilon\phi'\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq \ c_0\, \|\phi'\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega_\varepsilon))}\,,\\ v) & \|\nabla(P_\varepsilon\phi)\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))^n)} \leq c_0\, \|\nabla\phi\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega_\varepsilon))^n)}\,, \end{array}\right. \tag{2.47}$$

where c_0 is the constant introduced in (2.5).

Proof. As in the periodic case studied in [17], we construct the extension operator P_ε from Q_ε, treating the variable t as a parameter. Set

$$P_\varepsilon(\phi)(x,t) = (Q_\varepsilon\phi(\cdot,t))(x) \tag{2.48}$$

for ϕ in $L^\infty(0,T;V_\varepsilon)$ or in $L^\infty(0,T;L^2(\Omega_\varepsilon))$.
With this definition, P_ε belongs to $\mathcal{L}\left(L^\infty(0,T;V_\varepsilon), L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))\right)$ and also to $\mathcal{L}\left(L^\infty(0,T;L^2(\Omega_\varepsilon), L^\infty(0,T;L^2(\Omega))\right)$. It is clear that if $\phi \in L^\infty(0,T;V_\varepsilon) \cap W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Omega_\varepsilon))$, then one has ii) since Q_ε is independent of t.
To prove iii), let $\phi \in L^\infty((0,T)\times\Omega_\varepsilon))$. One has by (2.46)iii and (2.48)

$$\|(P_\varepsilon\phi)\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} = \sup_{t\in(0,T)} \|(Q_\varepsilon\phi(t))\|_{L^2(\Omega)} \leq \sup_{t\in(0,T)} c_0\, \|\phi(t)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} = \ c_0\, \|\phi\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega_\varepsilon))}\,.$$

Assertions iv) and v) are obtained by using (2.5), (2.46) and (2.48).

$\diamondsuit$

We can now state the convergence result.

Theorem 2.17 *Suppose that (2.38)-(2.40), (2.42)-(2.44) and (2.46) hold. Then, one has the following convergences :*

$$\left\{\begin{array}{llll} i) & P_\varepsilon u_\varepsilon \overset{*}{\rightharpoonup} u & \text{weakly * in } & L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)),\\ ii) & P_\varepsilon u_\varepsilon' \overset{*}{\rightharpoonup} u' & \text{weakly * in } & L^\infty(0,T;L^2(\Omega)),\\ iii) & A^\varepsilon\widetilde{\nabla u_\varepsilon} \overset{*}{\rightharpoonup} A^0\nabla u & \text{weakly * in } & L^\infty(0,T;(L^2(\Omega))^n), \end{array}\right. \tag{2.49}$$

where u is the solution of the homogenized problem

$$\left\{\begin{array}{rcll} \rho\, u'' - div\,(A^0\nabla u) & = & f & \text{on } \Omega\times(0,T),\\ u & = & 0 & \text{on } \partial\Omega\times(0,T),\\ u(x,0) & = & a_0 & \text{on } \Omega,\\ u'(x,0) & = & b_0 & \text{on } \Omega, \end{array}\right. \tag{2.50}$$

and $b_0 = \dfrac{b}{\rho}$.

The proof is given in Section 5.

2.4.2 Corrector result

In this section we state a corrector result for problem (2.37). Under suitable assumptions, we show that the convergence of u'_ε to u' is strong and the weak convergence of ∇u_ε to ∇u given by Theorem 2.17 can be improved by using the corrector matrix C^ε defined in (2.31). As in the case of a fixed domain (see [8]), we have to make additional hypotheses on the initial data $(a_\varepsilon, b_\varepsilon)$. Here, due to the presence of the holes, we have also to suppose (which is always true for a subsequence) that

$$\chi_{\Omega_\varepsilon} \overset{*}{\rightharpoonup} \chi_0 \quad \text{weakly * in } L^\infty(\Omega), \tag{2.51}$$

for some $\chi_0 \in L^\infty(\Omega)$ positive a.e. on Ω.
Concerning the data we suppose that $f_\varepsilon \in L^2(\Omega \times (0,T))$, $b_\varepsilon \in L^2(\Omega)$ for every ε and that

$$\begin{cases} i) \quad f_\varepsilon \to \dfrac{f}{\chi_0} \quad \text{strongly in } L^2(\Omega \times (0,T)), \\ ii) \quad b_\varepsilon \to b_0 \quad \text{strongly in } L^2(\Omega), \end{cases} \tag{2.52}$$

for some $f \in L^2(\Omega \times (0,T))$ such that $\frac{f}{\chi_0} \in L^2(\Omega \times (0,T))$ and with b_0 defined in (2.50).
We also assume that a_ε is solution of the following equation :

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(A^\varepsilon \nabla a_\varepsilon) &= Q^*_\varepsilon(-\mathrm{div}(A^0 \nabla a_0)) & \text{on } \Omega_\varepsilon, \\ A^\varepsilon \nabla a_\varepsilon \,.\, \nu &= 0 & \text{on } \partial S_\varepsilon, \\ a_\varepsilon &= 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.53}$$

for some $a_0 \in H^1_0(\Omega)$.

These assumptions are essential in order to prove the convergence of the energy associated with problem (2.37) to that of problem (2.50) (see Section 6). Indeed, we prove that

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega_\varepsilon} (\rho_\varepsilon (u'_\varepsilon)^2 + A^\varepsilon \nabla u_\varepsilon \nabla u_\varepsilon)\, dx \;\longrightarrow\; \frac{1}{2}\int_\Omega (\rho (u')^2 + A^0 \nabla u \nabla u)\, dx \quad \text{in } \mathcal{C}^0([0,T]).$$

Remark 2.4 Observe that assumptions (2.51)-(2.53) imply convergences (2.44). Indeed, (2.51) and (2.52)i give immediately (2.44)i. On the other hand, the H^0-convergence of A^ε to A^0 and (2.53) imply

$$Q^\varepsilon a_\varepsilon \rightharpoonup a \quad \text{weakly in } H^1_0(\Omega),$$

where a is the solution of

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\ (A^0 \nabla a) &= -\mathrm{div}\ (A^0 \nabla a_0) & \text{on } \Omega, \\ a &= 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

Since this problem has a unique solution, it follows that $a = a_0$.
Finally, from (2.43) and (2.52)ii, one has

$$\widetilde{\rho_\varepsilon} b_\varepsilon \rightharpoonup \rho\, b_0 \quad \text{weakly in } L^2(\Omega),$$

so that (2.44)iii holds for $b = \rho\, b_0$. Consequently, Theorem 2.17 applies and gives convergences (2.49) and the homogenized problem (2.50) with a_0, b_0 and f given by (2.52) and (2.53).

□

Now, we can state the corrector result.

Theorem 2.18 *Under hypotheses (2.38)-(2.40), (2.42)-(2.43), (2.46) and (2.51)-(2.53), we have the following corrector result :*

$$\begin{cases} i) \quad \lim_{\varepsilon \to 0} \|u'_\varepsilon \; - \; u'\|_{\mathcal{C}^0([0,T];L^2(\Omega_\varepsilon))} = 0, \\ ii) \quad \lim_{\varepsilon \to 0} \|\nabla u_\varepsilon \; - \; C^\varepsilon \nabla u\|_{\mathcal{C}^0([0,T];(L^1_{loc}(\Omega_\varepsilon))^n)} = 0, \end{cases} \tag{2.54}$$

where u is the solution of (2.50) and $\{C^\varepsilon\}$ is the corrector given by (2.31).

Corollary 2.19 *Under the assumptions of Theorem 2.18, if $\nabla u \in \mathcal{C}^0([0,T];(L^p(\Omega))^n)$ for some $p > 2$, then (2.54)ii holds for any local corrector satisfying (2.16) with $r = 2$.*

Theorem 2.18 and Corollary 2.19 will be proved in Section 7.

Remark 2.5 Observe that it is quite natural to suppose that (2.16) holds. Indeed, in practice to show that a sequence $\{C^\varepsilon\}$ is a local corrector, one makes use of (2.15), which implies (2.16). This condition also holds for the particular corrector constructed in [12] with $r = 2$, as shown in Theorem 2.12.

Remark 2.6 Suppose that the hypotheses of Theorem 2.9 are verified and let $\{C^\varepsilon\}$ be the global corrector constructed in [10] (see Remark 2.2). Then, following the same arguments as in the proof of Theorem 2.18, one can prove that the convergence (2.54)ii still holds for this corrector in Ω_ε. Namely, we have

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|\nabla u_\varepsilon - C^\varepsilon \nabla u\|_{\mathcal{C}^0([0,T];(L^1(\Omega_\varepsilon))^n)} = 0.$$

The proof of Theorem 2.18 is based on this following result, proved in Section 7 :

Proposition 2.20 *For all $h \in \mathbb{N}^*$, let $v_i \in D(\omega_h)$ and $\psi_i \in \mathcal{C}^\infty([0,T])$ for $i \in \{1,\dots,k\}$ where $k \in \mathbb{N}^*$. Set*

$$\phi(x,t) = \sum_{i=1}^k \psi_i(t) v_i(x), \qquad \textit{for a.e. } x \textit{ in } \Omega, \ \forall\, t \in [0,T],$$

and

$$X_{\varepsilon,h}(t) = \frac{1}{2}\int_{\Omega_\varepsilon}\Big(\rho_\varepsilon (u'_\varepsilon(t) - \phi'(t))^2 + A^\varepsilon(\, C^\varepsilon_h \nabla\phi(t) - \nabla u_\varepsilon(t))\,.\,(\, C^\varepsilon_h \nabla\phi(t) - \nabla u_\varepsilon(t))\Big)dx, \tag{2.55}$$

where ω_h is an element of the sequence $\{\omega_h\}$ introduced in (2.25) and C^ε_h is the matrix defined in (2.26).

Under the hypotheses of Theorem 2.18, one has

$$X_{\varepsilon,h} \longrightarrow X \quad \textit{in } \mathcal{C}^0([0,T]), \tag{2.56}$$

where for any t in $[0,T]$,

$$X(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega\Big(\rho\,(u'(t) - \phi'(t))^2 + A^0\,(\nabla\phi(t) - \nabla u(t))\,.\,(\nabla\phi(t) - \nabla u(t))\Big)dx. \tag{2.57}$$

2.5 Proof of Theorem 2.17 (homogenization result)

Let φ be in $D(]0,T[)$. Multiplying (2.37) by φ and integrating by parts the first term over $(0,T)$, we get

$$\int_0^T \rho_\varepsilon u_\varepsilon \varphi''\,dt \;-\; \int_0^T \text{div}\,(A^\varepsilon \nabla u_\varepsilon)\varphi\,dt \;=\; \int_0^T f_\varepsilon \varphi\,dt.$$

For any w_ε in $L^2(\Omega_\varepsilon \times (0,T))$ and for any w in $L^2(\Omega \times (0,T))$, set

$$\widehat{w}_\varepsilon = \int_0^T w_\varepsilon(x,t)\varphi(t)\,dt \quad \text{ and } \quad \widehat{w} = \int_0^T w(x,t)\varphi(t)\,dt,$$

respectively. Therefore, $\widehat{u}_\varepsilon$ satisfies

$$\begin{cases} -\text{div}\,(A^\varepsilon \nabla \widehat{u}_\varepsilon) &= \widehat{f}_\varepsilon - \rho_\varepsilon \displaystyle\int_0^T u_\varepsilon \varphi''\,dt \quad \text{on } \Omega_\varepsilon, \\ A^\varepsilon \nabla \widehat{u}_\varepsilon\,.\,\nu &= 0 \qquad\qquad\qquad\qquad \text{on } \partial S_\varepsilon, \\ \widehat{u}_\varepsilon &= 0 \qquad\qquad\qquad\qquad \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.58}$$

By virtue of estimates (2.45), there exist a function u and a subsequence of ε (still denoted ε) such that

$$\begin{cases} P_\varepsilon u_\varepsilon \overset{*}{\rightharpoonup} u & \text{weakly * in } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)), \\ P_\varepsilon (u_\varepsilon)' \overset{*}{\rightharpoonup} u' & \text{weakly * in } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)). \end{cases}$$

Then

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^T P_\varepsilon u_\varepsilon \varphi\,dt \rightharpoonup \int_0^T u\,\varphi\,dt & \text{weakly in } H_0^1(\Omega), \\ \displaystyle\int_0^T P_\varepsilon u_\varepsilon \varphi''\,dt \rightharpoonup \int_0^T u\,\varphi''\,dt & \text{weakly in } H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

Consequently,

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^T P_\varepsilon u_\varepsilon \varphi\,dt \to \int_0^T u\,\varphi\,dt & \text{strongly in } L^2(\Omega), \\ \displaystyle\int_0^T P_\varepsilon u_\varepsilon \varphi''\,dt \to \int_0^T u\,\varphi''\,dt & \text{strongly in } L^2(\Omega). \end{cases}$$

From (2.43) and (2.44)i, we have

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^T (\widetilde{f_\varepsilon})\,\varphi\,dt \;\rightharpoonup\; \int_0^T f\varphi\,dt & \text{weakly in } L^2(\Omega), \\ \widetilde{\rho_\varepsilon} \displaystyle\int_0^T (P_\varepsilon u_\varepsilon)\,\varphi''\,dt \rightharpoonup \rho \int_0^T u\,\varphi''\,dt & \text{weakly in } L^2(\Omega). \end{cases}$$

In view of (2.42) and Proposition 2.5, this implies that $Q_\varepsilon \widehat{u}_\varepsilon$ converges weakly in $H_0^1(\Omega)$ to the solution u^* of the following problem :

$$-\text{div}\,(A^0 \nabla u^*) = \widehat{f} - \rho \int_0^T u\varphi''\,dt \quad \text{in } \Omega, \tag{2.59}$$

and moreover,

$$A^\varepsilon \widetilde{\nabla \widehat{u}_\varepsilon} \rightharpoonup A^0 \nabla u^* \quad \text{weakly in } L^2(\Omega). \tag{2.60}$$

Let us show that

$$u^* = \widehat{u}. \tag{2.61}$$

Observe that there exists a subsequence (still denoted ε) such that

$$\chi_{\Omega_\varepsilon} \overset{*}{\rightharpoonup} \chi_0 \quad \text{weakly * in } L^\infty(\Omega).$$

Hence,

$$\begin{cases} \chi_{\Omega_\varepsilon} Q_\varepsilon \widehat{u}_\varepsilon \rightharpoonup \chi_0 u^* & \text{weakly in } L^2(\Omega), \\ \chi_{\Omega_\varepsilon} \displaystyle\int_0^T P_\varepsilon u_\varepsilon \varphi \, dt \rightharpoonup \chi_0 \widehat{u} & \text{weakly in } L^2(\Omega). \end{cases}$$

Since

$$\chi_{\Omega_\varepsilon} Q_\varepsilon \widehat{u}_\varepsilon = \int_0^T \widetilde{u_\varepsilon} \varphi \, dt = \chi_{\Omega_\varepsilon} \int_0^T P_\varepsilon u_\varepsilon \varphi \, dt,$$

then $\chi_0 u^* = \chi_0 \widehat{u}$, which in view of the positiveness of χ_0, gives (2.61).
From (2.60) one obtains (2.49)iii and from (2.59)

$$-\text{div } (A^0 \nabla \widehat{u}) = \int_0^T f \, \varphi \, dt - \rho \int_0^T u \, \varphi'' \, dt \quad \text{in } D'(\Omega),$$

which implies, since φ is arbitrary,

$$\int_\Omega \rho \, u'' v \, dx + \int_\Omega A^0 \nabla u \nabla v \, dx = \int_\Omega f v \, dx \quad \text{in } D'(0,T), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{2.62}$$

It remains to check the initial conditions.
Since $W(0,T; H_0^1(\Omega), L^2(\Omega))$ is compactly embedded in $\mathcal{C}^0([0,T]; L^2(\Omega))$ (see [34], Corollary 4, p. 85), we have

$$P_\varepsilon u_\varepsilon \longrightarrow u \quad \text{strongly in } C^0([0,T]; L^2(\Omega)), \tag{2.63}$$

which gives

$$P_\varepsilon u_\varepsilon(0) \longrightarrow u(0) \quad \text{strongly in } L^2(\Omega).$$

From (2.48) and (2.44)ii, we get

$$P_\varepsilon u_\varepsilon(0) = Q_\varepsilon a_\varepsilon \rightharpoonup a_0 \quad \text{weakly in } L^2(\Omega),$$

so that

$$u(0) = a_0 \text{ on } \Omega.$$

On the other hand, to identify $u'(0)$, choose $v \in H_0^1(\Omega)$ and $\varphi \in \mathcal{C}^\infty([0,T])$ such that $\varphi'(0) = \varphi(T) = \varphi'(T) = 0$ and $\varphi(0) = 1$.
An integration by parts over (0,T) in (2.41) gives

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_\Omega A^\varepsilon \widetilde{\nabla u_\varepsilon} \nabla v \varphi \, dx dt - \int_0^T \int_\Omega \widetilde{f}_\varepsilon v \, \varphi \, dx dt &= -\int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} \rho_\varepsilon u_\varepsilon'' v \varphi \, dx dt \\ &= \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} \rho_\varepsilon u_\varepsilon' v \varphi' \, dx dt + \int_{\Omega_\varepsilon} \rho_\varepsilon b_\varepsilon v \varphi(0) \, dx \\ &= -\int_0^T \int_\Omega \widetilde{\rho_\varepsilon} P_\varepsilon u_\varepsilon v \varphi'' \, dx dt + \int_\Omega \widetilde{\rho_\varepsilon b_\varepsilon} v \, dx. \end{aligned}$$

Passing to the limit as ε tends to 0 and using (2.43), (2.44) and (2.49), we obtain

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_\Omega A^0 \nabla u \nabla v \varphi \, dx dt - \int_0^T \int_\Omega f v \varphi \, dx dt &= -\int_0^T \int_\Omega \rho \, u \, v \, \varphi'' \, dx dt + \int_\Omega b \, v \, dx \\ &= -\int_0^T \int_\Omega \rho \, u'' \, v \, \varphi \, dx dt - \int_\Omega \rho \, u'(0) v \, dx + \int_\Omega b \, v \, dx. \end{aligned} \tag{2.64}$$

Observe now that in (2.62) one can choose $\varphi \in \mathcal{C}^\infty([0,T])$, which together with (2.64) and assumption (2.38) gives

$$u'(0) = \frac{b}{\rho}.$$

The uniqueness of the solution of the limit wave equation (2.50) implies that in (2.49) the whole sequence $P_\varepsilon u_\varepsilon$ converges to u and this concludes the proof.

$\diamondsuit$

2.6 Convergence of the energy

In this section, we study the asymptotic behavior of the energy associated with problem (2.37). Take u'_ε as test function in (2.41) (this is formal, but a standard density argument makes the computation rigorous, see [16] Chap. 12, Prop. 12.7). We have after an integration by parts in t over $(0,T)$,

$$\int_{\Omega_\varepsilon} (\frac{1}{2}\rho_\varepsilon\,|u'_\varepsilon|^2 + \frac{1}{2}A^\varepsilon\nabla u_\varepsilon\nabla u_\varepsilon)\;dx = \frac{1}{2}\int_{\Omega_\varepsilon}\rho_\varepsilon\,|b_\varepsilon|^2\;\;dx\;+\frac{1}{2}\int_{\Omega_\varepsilon}A^\varepsilon\nabla a_\varepsilon\nabla a_\varepsilon\;dx\;+\int_0^t\!\!\int_{\Omega_\varepsilon} f_\varepsilon u'_\varepsilon\;dxdt.$$

Set

$$e_\varepsilon(t) = \frac{1}{2}\int_{\Omega_\varepsilon}\Big[\rho_\varepsilon\,(u'_\varepsilon(t))^2 + A^\varepsilon\nabla u_\varepsilon(t)\nabla u_\varepsilon(t)\Big]\,dx, \quad \forall t\in[0,T], \tag{2.65}$$

and

$$E_\varepsilon = \frac{1}{2}\int_{\Omega_\varepsilon}\Big[\rho_\varepsilon(b_\varepsilon)^2 + A^\varepsilon\nabla a_\varepsilon\nabla a_\varepsilon\Big]\,dx. \tag{2.66}$$

The quantity e_ε is called the energy associated with problem (2.37).

Observe that

$$e_\varepsilon(t) - E_\varepsilon = \int_0^t\int_{\Omega_\varepsilon} f_\varepsilon u'_\varepsilon\,dxds, \quad \forall\, t\in[0,T]. \tag{2.67}$$

The corresponding e^0 and E^0, associated with the solution u of the homogenized wave equation (2.50), are defined by

$$e^0(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega\Big[\rho\,(u'(t))^2 + A^0\nabla u(t)\nabla u(t)\Big]\,dx, \quad \forall\, t\in[0,T] \tag{2.68}$$

$$E^0 = \frac{1}{2}\int_\Omega\Big[\rho(b_0)^2 + A^0\nabla a_0\nabla a_0\Big]\,dx, \tag{2.69}$$

and one has (using a density argument similar to that of e_ε)

$$e^0(t) = E^0 + \int_0^t\int_\Omega f u'\,dxds, \quad \forall\, t\in[0,T]. \tag{2.70}$$

Proposition 2.21 *Under the hypotheses of Theorem 2.17, there exists a continuous function $e(t)$ and a subsequence of e_ε (still defined ε) such that*

$$e_\varepsilon \longrightarrow e \quad \text{strongly in } \mathcal{C}^0([0,T]),$$

where e_ε is defined in (2.65).

The proof of this proposition can be done using the same arguments as that given in [29] for the periodic case. In general we do not have $e(t) = e^0(t)$. But under the additional hypotheses (2.51)-(2.53), this equality holds true, as shown in the next result.

Theorem 2.22 *Under the hypotheses of Theorem 2.18, we have the following strong convergence of the energy :*

$$e_\varepsilon \longrightarrow e^0 \qquad \textit{strongly in } \mathcal{C}^0([0,T]),$$

where e_ε and e^0 are defined by (2.65) and (2.68), respectively.

Proof. Let e be given by Proposition 2.21. We have to show that $e(t) = e^0(t), \quad \forall\, t \in [0,T]$. From (2.65), (2.66) and (2.67), it follows that

$$e_\varepsilon(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega \widetilde{\rho_\varepsilon}(b_\varepsilon)^2\,dx + \frac{1}{2}\int_{\Omega_\varepsilon} A^\varepsilon \nabla a_\varepsilon \nabla a_\varepsilon\,dx + \int_0^t\!\!\int_\Omega f_\varepsilon \chi_{\Omega_\varepsilon} P_\varepsilon u'_\varepsilon\,dxds. \tag{2.71}$$

Taking a_ε as test function in (2.53) and using Remark 2.4, we obtain

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Omega_\varepsilon} A^\varepsilon \nabla a_\varepsilon \nabla a_\varepsilon dx \;=\; \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega A^0 \nabla a_0 \nabla(Q_\varepsilon a_\varepsilon)\,dx \;=\; \int_\Omega A^0\nabla a_0 \nabla a_0 dx. \tag{2.72}$$

From (2.51) and using the strong convergence (2.63), one has

$$\chi_{\Omega_\varepsilon} P_\varepsilon u_\varepsilon \rightharpoonup \chi_0 u \qquad \text{weakly in } L^2(\Omega\times(0,T)). \tag{2.73}$$

On the other hand, for any $\psi \in D(\Omega)$ and $\zeta \in D(0,T)$

$$\int_0^T\int_\Omega \chi_{\Omega_\varepsilon}(P_\varepsilon u_\varepsilon)'\psi\,\zeta\,dxdt = -\int_0^T\int_\Omega \chi_{\Omega_\varepsilon} P_\varepsilon u_\varepsilon \psi\,\zeta'\,dxdt.$$

This, together with (2.73), gives

$$\lim_{\varepsilon\to 0} -\int_0^T\int_\Omega \chi_{\Omega_\varepsilon} P_\varepsilon u_\varepsilon \psi\,\zeta'\,dxdt = -\int_0^T\int_\Omega \chi_0 u\psi\,\zeta'\,dxdt = \int_0^T\int_\Omega \chi_0 u'\psi\,\zeta\,dxdt.$$

Hence, by density

$$\chi_{\Omega_\varepsilon} P_\varepsilon u'_\varepsilon \rightharpoonup \chi_0 u' \qquad \text{weakly in } L^2(\Omega\times(0,T)),$$

and from (2.52)i, it follows that

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^t\int_\Omega f_\varepsilon \chi_{\Omega_\varepsilon} P_\varepsilon u'_\varepsilon\,dxds = \int_0^t\int_\Omega f u'\,dxds. \tag{2.74}$$

From (2.43) and (2.52)ii, we have

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega \widetilde{\rho_\varepsilon}(b_\varepsilon)^2\,dx = \int_\Omega \rho(b_0)^2\,dx. \tag{2.75}$$

Combining (2.72), (2.74), (2.75) and passing to the limit in (2.71), we obtain

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0} e_\varepsilon(t) &= \frac{1}{2}\int_\Omega \rho(b_0)^2 dx + \int_\Omega A^0\nabla a_0\nabla a_0 dx + \int_0^t\int_\Omega f u'\,dxds \\ &= e^0(t),\end{aligned}$$

which is the claimed result.

$\diamondsuit$

Remark 2.7 Observe that once the corrector result of Theorem 2.18 is proved, we can show that each term which composes the expression (2.65) of $e_\varepsilon(t)$, converges to the corresponding one in (2.68).

2.7 Proof of Theorem 2.18 (corrector result)

Proof of Proposition 2.20. Let $k \in \mathbb{N}^*$, $v_i \in D(\Omega)$ such that supp $(v_i) = \omega_h$ and $\psi_i \in \mathcal{C}^\infty([0,T])$ for every $i \in \{1,\dots,k\}$. Set

$$\phi(x,t) = \sum_{i=1}^{k} v_i(x)\psi_i(t), \qquad \text{for a.e. } x \text{ in } \Omega,\ \forall\, t \in [0,T].$$

If $X_{\varepsilon,h}$ is given by (2.55), we can write

$$X_{\varepsilon,h} = X^1_{\varepsilon,h} + X^2_{\varepsilon,h} + X^3_{\varepsilon,h},$$

where $\forall\, t \in [0,T]$,

$$\begin{cases} X^1_{\varepsilon,h}(t) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\Omega_\varepsilon}\Big[\rho_\varepsilon\left(u'_\varepsilon(t)\right)^2 + A^\varepsilon \nabla u_\varepsilon(t)\nabla u_\varepsilon(t)\Big]\,dx = e_\varepsilon(t),\\ X^2_{\varepsilon,h}(t) = -\displaystyle\int_{\Omega_\varepsilon}\left[\rho_\varepsilon u'_\varepsilon(t)\,\phi'(t) + A^\varepsilon C^\varepsilon_h \nabla\phi(t)\nabla u_\varepsilon(t)\right]dx,\\ X^3_{\varepsilon,h}(t) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\Omega_\varepsilon}\Big[\rho_\varepsilon(\phi'(t))^2 + A^\varepsilon C^\varepsilon_h\nabla\phi(t)\,C^\varepsilon_h\nabla\phi(t)\Big]\,dx. \end{cases} \tag{2.76}$$

We study the limit of each term separately.

The limit of $X^1_{\varepsilon,h}$: In Theorem 2.22 this limit was computed in $\mathcal{C}^0([0,T])$, it is the energy of the problem limit given by (2.68).

The limit of $X^3_{\varepsilon,h}$: Let us prove the convergence

$$X^3_{\varepsilon,h} \longrightarrow \frac{1}{2}\int_\Omega \Big[\rho(\phi')^2 + A^0\nabla\phi\,\nabla\phi\Big]\,dx \quad \text{in } \mathcal{C}^0([0,T]). \tag{2.77}$$

From (2.29), (2.38) and (2.39), one has

$$\begin{aligned} &2\left\|X^3_{\varepsilon,h}\right\|_{L^\infty(0,T)}\\ &\le \sum_{i=1}^{k}\Big(\|\psi'_i\|^2_{L^\infty(0,T)}\,\|\widetilde{\rho_\varepsilon}\|_{L^\infty(\Omega)}\,\|v_i\|^2_{L^2(\Omega)} \;+\; \|\psi_i\|^2_{L^\infty(0,T)}\,\|A^\varepsilon\|_{(L^\infty(\Omega))^{n^2}}\,\|C^\varepsilon_h\nabla v_i\|^2_{L^2(\Omega)^n}\Big)\\ &\le\, c, \end{aligned}$$

where c is independent of ε. Similarly, by virtue of the regularity of ψ, one can prove that the time derivative of $X^3_{\varepsilon,h}$ is bounded. Thus, from the Ascoli-Arzela theorem, there exists a subsequence (still denoted ε) such that $X^3_{\varepsilon,h}$ converges strongly in $\mathcal{C}^0([0,T])$ to a function X^3_h. To identify this limit, it is sufficient to identify the pointwise limit of $X^3_{\varepsilon,h}$. Observe first that from (2.43), one has for every $t \in [0,T]$,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Omega_\varepsilon}\rho_\varepsilon\left(\phi'(t)\right)^2\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega\widetilde{\rho_\varepsilon}\left(\phi'(t)\right)^2\,dx \;=\; \int_\Omega\rho\left(\phi'(t)\right)^2\,dx. \tag{2.78}$$

From definition (2.26) of C^ε_h, we can write for any t fixed in $[0,T]$

$$C^\varepsilon_h\nabla\phi(t) = \sum_{i=1}^{n}\nabla(Q_\varepsilon w^\varepsilon_{h,i})\frac{\partial\phi}{\partial x_i}(t), \qquad \text{a.e. on } \Omega. \tag{2.79}$$

The use of (2.79) yields

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_\varepsilon} A^\varepsilon C_h^\varepsilon \nabla\phi(t)\, C_h^\varepsilon \nabla\phi(t)\, dx &= \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega_\varepsilon} A^\varepsilon \nabla w_{h,i}^\varepsilon \frac{\partial\phi}{\partial x_i}(t) \nabla w_{h,j}^\varepsilon \frac{\partial\phi}{\partial x_j}(t)\, dx \\ &= \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega \left(\frac{\partial\phi}{\partial x_i}(t) \frac{\partial\phi}{\partial x_j}(t) A^\varepsilon \widetilde{\nabla w_{h,i}^\varepsilon} \nabla(Q_\varepsilon w_{h,j}^\varepsilon) \right) dx. \end{aligned} \tag{2.80}$$

Now, we apply Proposition 2.6 to the last term.
Due to (2.27) and (2.30)ii, we can apply Proposition 2.6 i) to $A^\varepsilon \nabla w_{h,i}^\varepsilon$ to get

$$\text{div}\ (A^\varepsilon \widetilde{\nabla w_{h,i}^\varepsilon}) \longrightarrow \text{div}\ (A^0 \nabla(\varphi_h x_i)) \quad \text{strongly in } H^{-1}(\Omega), \quad \forall\, i \in \{1, \dots, n\}. \tag{2.81}$$

On the other hand, $\text{curl}\ (\nabla(Q_\varepsilon \omega_{h,j}^\varepsilon)) = 0$ for every $j \in \{1, \dots, n\}$.
Now, we can pass to the limit in (2.80) using Proposition 2.6 ii). Since $v_i \in D(\omega_h)$ for every $i \in \{1, \dots, k\}$, one has $\phi(x,t) = 0$ for any $x \in \Omega \setminus \omega_h$ and since $\varphi_h = 1$ on ω_h, we get

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\Omega_\varepsilon} A^\varepsilon C_h^\varepsilon \nabla\phi(t)\, C_h^\varepsilon \nabla\phi(t)\, dx &= \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega \left(\frac{\partial\phi}{\partial x_i}(t) \frac{\partial\phi}{\partial x_j}(t) A^0 \nabla(\varphi_h x_i) \nabla(\varphi_h x_j) \right) dx \\ &= \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega \frac{\partial\phi}{\partial x_i}(t) \frac{\partial\phi}{\partial x_j}(t)\, A^0 e_i e_j\, dx \\ &= \int_\Omega A^0 \nabla\phi(t) \nabla\phi(t)\, dx, \end{aligned}$$

for every $t \in [0,T]$. This, together with (2.78), gives (2.77).

The limit of $X_{\varepsilon,h}^2$: To show that the convergence of $X_{\varepsilon,h}^2$ takes place in $\mathcal{C}^0([0,T])$, we cannot use the same argument as for $X_{\varepsilon,h}^3$. Indeed, since we have no uniform estimate on u_ε'', we have no estimate on $(X_{\varepsilon,h}^2)'$. We study then separately the limit of the two terms which compose $X_{\varepsilon,h}^2$.
Let us prove first that

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \widetilde{\rho_\varepsilon} u_\varepsilon' \phi'\, dx \longrightarrow \int_\Omega \rho\, u' \phi'\, dx \quad \text{ in } \mathcal{C}^0([0,T]). \tag{2.82}$$

To do so, we first identify its limit in $L^\infty(0,T)$ and then we show that the convergence takes place in $C^0([0,T])$. Let ζ be in $D(0,T)$, one has

$$\begin{aligned}\left\langle \int_{\Omega_\varepsilon} \rho_\varepsilon u_\varepsilon' \phi'\, dx\,,\, \zeta \right\rangle_{L^\infty(0,T), L^1(0,T)} &= \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} \rho_\varepsilon u_\varepsilon' \phi'\, \zeta\, dx\, dt \\ &= -\int_0^T \int_\Omega \widetilde{\rho_\varepsilon} P_\varepsilon u_\varepsilon\, (\phi'\zeta' + \phi''\, \zeta)\, dx\, dt. \end{aligned}$$

Then, using (2.43) and (2.63), we can pass to the limit to get

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0} \left\langle \int_{\Omega_\varepsilon} \rho_\varepsilon u_\varepsilon' \phi'\, dx\,,\, \zeta \right\rangle_{L^\infty(0,T), L^1(0,T)} &= -\int_0^T \int_\Omega \rho\ u\, (\phi'\zeta' + \phi''\zeta)\, dx\, dt \\ &= \int_0^T \int_\Omega \rho u' \phi' \zeta\, dx\, dt \\ &= \left\langle \int_\Omega \rho\, u' \phi'\, dx\,,\, \zeta \right\rangle_{L^\infty(0,T), L^1(0,T)}, \end{aligned}$$

which, by density, gives

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \rho_\varepsilon u'_\varepsilon \phi' \, dx \overset{*}{\rightharpoonup} \int_\Omega \rho u' \phi' \, dx \quad \text{weakly * in } L^\infty(0,T). \tag{2.83}$$

On the other hand, to show that this convergence is strong in $\mathcal{C}^0([0,T])$, we use the compact embedding of $H^1(0,T)$ into $\mathcal{C}^0([0,T])$. From (2.41), we can write

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega_\varepsilon} \rho_\varepsilon u'_\varepsilon \phi' \, dx = \int_{\Omega_\varepsilon} \rho_\varepsilon u'_\varepsilon \phi'' \, dx + \int_{\Omega_\varepsilon} f_\varepsilon \phi' \, dx - \int_{\Omega_\varepsilon} A^\varepsilon \nabla u_\varepsilon \nabla \phi' \, dx.$$

From (2.38)-(2.40), (2.43), (2.49) and (2.52)i, one has

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega_\varepsilon} \rho_\varepsilon u'_\varepsilon(t) \phi'(t) \, dx\right| \leq \|\phi''\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \|\rho_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)} \|P_\varepsilon u'_\varepsilon(t)\|_{L^2(\Omega)}$$

$$+ \|\phi'\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \|f_\varepsilon(t)\|_{L^2(\Omega)} + \|A^\varepsilon\|_{(L^\infty(\Omega))^{n^2}} \|\nabla(P_\varepsilon u_\varepsilon(t))\|_{(L^2(\Omega))^n} \|\nabla\phi'\|_{(L^\infty(0,T;(L^2(\Omega))^n)}.$$

Thus,

$$\int_0^T \left|\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega_\varepsilon} \rho_\varepsilon u'_\varepsilon \phi' \, dx\right|^2 \leq c,$$

where c is independent of ε. Convergence (2.82) follows from this inequality and (2.83).

Let us now prove the convergence of the second term of $X^2_{\varepsilon,h}$, namely

$$\int_{\Omega_\varepsilon} A^\varepsilon C^\varepsilon_h \nabla\phi \nabla u_\varepsilon \, dx \longrightarrow \int_\Omega A^0 \nabla\phi\nabla u \, dx \quad \text{in } \mathcal{C}^0([0,T]). \tag{2.84}$$

To do so, we adapt to our case some arguments used in [8]. From (2.79), the variational formulation of (2.27), definition (2.48) of P_ε , we have

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_\varepsilon} A^\varepsilon\, C^\varepsilon_h \nabla\phi(t)\nabla u_\varepsilon(t)\, dx &= \sum_{i=1}^n \int_{\Omega_\varepsilon} A^\varepsilon\, \nabla w^\varepsilon_{h,i} \frac{\partial\phi}{\partial x_i}(t) \nabla u_\varepsilon(t)\, dx \\
= \sum_{i=1}^n \int_{\Omega_\varepsilon} \Big(A^\varepsilon\, \nabla w^\varepsilon_{h,i} \nabla\Big(\frac{\partial\phi}{\partial x_i}(t)\, u_\varepsilon(t)\Big) &- A^\varepsilon\, \nabla w^\varepsilon_{h,i} \nabla\Big(\frac{\partial\phi}{\partial x_i}(t)\Big)\, u_\varepsilon(t)\Big)\, dx \\
= \sum_{i=1}^n \Big\langle -\mathrm{div}\, (A^0\nabla(\varphi_h x_i))\,,\, Q_\varepsilon \Big(\frac{\partial\phi}{\partial x_i}(t)\Big|_{\Omega_\varepsilon} u_\varepsilon(t)\Big)\Big\rangle_{H^{-1}(\Omega),H^1_0(\Omega)} & \\
- \sum_{i=1}^n \int_\Omega A^\varepsilon\, \widetilde{\nabla w^\varepsilon_{h,i}} \nabla\Big(\frac{\partial\phi}{\partial x_i}(t)\Big) P_\varepsilon u_\varepsilon(t)\, dx & \\
= \sum_{i=1}^n \langle G_i\,, k^\varepsilon_i\rangle_{H^{-1}(\Omega),H^1_0(\Omega)}(t) - \langle H_\varepsilon,\, P_\varepsilon u_\varepsilon\rangle_{H^{-1}(\Omega),H^1_0(\Omega)}(t),&
\end{aligned} \tag{2.85}$$

where

$$\begin{cases} G_i = -\,\mathrm{div}\, (A^0\nabla(\varphi_h x_i))\,, \qquad k^\varepsilon_i = P_\varepsilon \left(\dfrac{\partial\phi}{\partial x_i}\Big|_{\Omega_\varepsilon} u_\varepsilon\right), \quad \forall\, i \in \{1,\dots,n\} \\ \qquad\qquad \text{and} \quad H_\varepsilon = \displaystyle\sum_{i=1}^n A^\varepsilon\, \widetilde{\nabla w^\varepsilon_{h,i}} \nabla\Big(\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\Big). \end{cases} \tag{2.86}$$

For simplicity, in the following the duality pairing $\langle\cdot,\cdot\rangle_{H^{-1}(\Omega),H^1_0(\Omega)}$ will be denoted $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

In view of (2.30)ii, $\{H_\varepsilon\}$ is a bounded sequence in $\mathcal{C}^\infty([0,T]);L^2(\Omega))$ and furthermore,

$$H_\varepsilon \overset{*}{\rightharpoonup} H_0 = \sum_{i=1}^n A^0\nabla(\varphi_h x_i)\ \nabla\Big(\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\Big) \qquad \text{weakly * in } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)). \tag{2.87}$$

Let us show that

$$\langle H_\varepsilon - H_0, P_\varepsilon u_\varepsilon\rangle \longrightarrow 0 \quad \text{ strongly in } C^0([0,T]). \tag{2.88}$$

First, notice that from (2.63) and (2.87), we have for any t fixed in $[0,T]$,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \langle H_\varepsilon - H_0, P_\varepsilon u_\varepsilon\rangle(t) = 0. \tag{2.89}$$

Moreover, due to (2.49) and (2.87), there exists a constant c independent of ε such that

$$\begin{cases} \|\langle H_\varepsilon - H_0, P_\varepsilon u_\varepsilon\rangle\|_{C^0([0,T])} \le c, \\ \|(\langle H_\varepsilon - H_0, P_\varepsilon u_\varepsilon\rangle)'\|_{C^0([0,T])} \le c. \end{cases} \tag{2.90}$$

Then, from (2.89), (2.90) and the Ascoli-Arzela theorem, we obtain (2.88).

Let us also prove that for any $i \in \{1,\dots,n\}$,

$$k_i^\varepsilon \longrightarrow k_i = \frac{\partial\phi}{\partial x_i}\, u \quad \text{ strongly in } \mathcal{C}^0([0,T];L^2(\Omega)). \tag{2.91}$$

Notice that this is not obvious because in general we do not have $P_\varepsilon\left(\dfrac{\partial\phi}{\partial x_i}\Big|_{\Omega_\varepsilon} u_\varepsilon\right) = \dfrac{\partial\phi}{\partial x_i}\, P_\varepsilon u_\varepsilon$.

In view of (2.45) and (2.47), we deduce that k_i^ε and $(k_i^\varepsilon)'$ are bounded in $L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$ and in $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$, respectively. This implies that there exist a subsequence of ε (still denoted ε) and a function k_i^0 such that

$$\begin{cases} k_i^\varepsilon \overset{*}{\rightharpoonup} k_i^0 & \text{weakly * in } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)), \\ (k_i^\varepsilon)' \overset{*}{\rightharpoonup} (k_i^0)' & \text{weakly * in } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)). \end{cases} \tag{2.92}$$

Using definition (2.48) of P_ε, we have for any t fixed in $[0,T]$,

$$P_\varepsilon\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\Big|_{\Omega_\varepsilon} u_\varepsilon\right)(t) = Q_\varepsilon\left(\Big(\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\, Q_\varepsilon u_\varepsilon(t)\Big)\Big|_{\Omega_\varepsilon}\right). \tag{2.93}$$

By convergences (2.49), we can apply Lemma 2.2 to (2.93) to get $k_i^0 = k_i$. This, together with estimates (2.92), gives (2.91).

Using (2.63), (2.85)-(2.88) and (2.91), for every t fixed in $[0,T]$, one has

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\sum_{i=1}^n \langle G_i, k_i^\varepsilon\rangle(t) - \langle H_\varepsilon, P_\varepsilon u_\varepsilon\rangle(t)\right) = \sum_{i=1}^n \langle G_i, k_i\rangle(t) - \langle H_0, u\rangle(t). \tag{2.94}$$

Since supp $\phi(t) \subset \omega_h$ and $\varphi_h = 1$ on ω_h,

$$\int_\Omega A^0\nabla(\varphi_h x_i)\nabla\Big(\frac{\partial\phi}{\partial x_i}(t)\, u(t)\Big)\, dx = \int_\Omega A^0 e_i \nabla\Big(\frac{\partial\phi}{\partial x_i}(t)\, u(t)\Big)\, dx, \tag{2.95}$$

and

$$\int_\Omega A^0\nabla(\varphi_h x_i)\nabla\Big(\frac{\partial\phi}{\partial x_i}(t)\Big)\, u(t)\, dx = \int_\Omega A^0 e_i \nabla\Big(\frac{\partial v}{\partial x_i}(t)\Big)\, u(t)\, dx. \tag{2.96}$$

This, in view of (2.85), (2.86) and (2.94), gives for every t fixed in $[0,T]$,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Omega_\varepsilon} A^\varepsilon C_h^\varepsilon \nabla\phi(t)\nabla u_\varepsilon(t)\,dx = \int_\Omega A^0\nabla\phi(t)\nabla u(t)\,dx. \tag{2.97}$$

Finally, let us check that this convergence takes place in $\mathcal{C}^0([0,T])$.
Let $\eta>0$, since $L^2(\Omega)$ is dense in $H^{-1}(\Omega)$ and $\mathcal{C}^0([0,T];L^2(\Omega))$ is dense in $\mathcal{C}^0([0,T],H^{-1}(\Omega))$, we can find H in $(\mathcal{C}^0([0,T];L^2(\Omega))$ and $(L_i)_{1\le i\le n}$ in $(H^{-1}(\Omega))^n$ such that

$$\left\{\begin{array}{l} \|H_0-H\|_{\mathcal{C}^0([0,T];H^{-1}(\Omega))} \le \eta,\\ \|G_i-L_i\|_{H^{-1}(\Omega)} \le \eta, \end{array}\right. \tag{2.98}$$

for every $i\in\{1,\dots,n\}$.
We can write

$$\left\{\begin{array}{rcl} \langle H_\varepsilon, P_\varepsilon u_\varepsilon\rangle - \langle H_0,u\rangle &=& \langle H_\varepsilon-H_0,P_\varepsilon u_\varepsilon\rangle + \langle H_0-H,P_\varepsilon u_\varepsilon\rangle + \langle H,P_\varepsilon u_\varepsilon - u\rangle + \langle H-H_0,u\rangle,\\ \langle G_i,k_i^\varepsilon\rangle - \langle G_i,k_i\rangle &=& \langle G_i-L_i,k_i^\varepsilon\rangle + \langle L_i,k_i^\varepsilon-k_i\rangle + \langle L_i-G_i,k_i\rangle\,. \end{array}\right. \tag{2.99}$$

Then, there exists a constant $C>0$ independent of η such that

$$\begin{aligned}
&\|\langle H_\varepsilon,P_\varepsilon u_\varepsilon\rangle - \langle H_0,u\rangle\|_{\mathcal{C}^0([0,T])} + \sum_{i=1}^n \|\langle G_i,k_i^\varepsilon\rangle - \langle G_i,k_i\rangle\|_{\mathcal{C}^0([0,T])} \le\\
&\|\langle H_\varepsilon-H_0,P_\varepsilon u_\varepsilon\rangle\|_{\mathcal{C}^0([0,T])} + \|H_0-H\|_{\mathcal{C}^0([0,T];H^{-1}(\Omega))}\,\|P_\varepsilon u_\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))}\\
&\quad + \|H\|_{\mathcal{C}^0([0,T];L^2(\Omega))}\,\|P_\varepsilon u_\varepsilon - u\|_{\mathcal{C}^0([0,T];L^2(\Omega))} + \|H-H_0\|_{\mathcal{C}^0([0,T];H^{-1}(\Omega))}\,\|u\|_{L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))}\\
&\ + \sum_{i=1}^n \Big(\|G_i-L_i\|_{H^{-1}(\Omega)}\,\|k_i^\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))} + \|L_i\|_{\mathcal{C}^0([0,T];L^2(\Omega))}\,\|k_i^\varepsilon-k_i\|_{\mathcal{C}^0([0,T];L^2(\Omega))}\\
&\qquad\qquad + \|L_i-G_i\|_{H^{-1}(\Omega)}\,\|k_i\|_{L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))}\Big)\\
&\le C\left(\|\langle H_\varepsilon-H_0,P_\varepsilon u_\varepsilon\rangle\|_{\mathcal{C}^0([0,T])} + \|P_\varepsilon u_\varepsilon - u\|_{\mathcal{C}^0([0,T];L^2(\Omega))} + \|k_i^\varepsilon - k_i\|_{\mathcal{C}^0([0,T];L^2(\Omega))} + \eta\right).
\end{aligned}$$

From (2.49), (2.88), (2.91) and since η is arbitrary, we deduce that the left-hand side tends to 0 as $\varepsilon\to 0$, so that

$$\sum_{i=1}^n\langle G_i,k_i^\varepsilon\rangle - \langle H_\varepsilon,P_\varepsilon u_\varepsilon\rangle \longrightarrow \sum_{i=1}^n\langle G_i,k_i\rangle - \langle H_0,u\rangle \quad \text{strongly in } \mathcal{C}^0([0,T]).$$

This, together with (2.97) gives (2.84).

By using Theorem 2.22, (2.77), (2.82) and (2.84), we conclude that X_h^ε converges strongly to X in $\mathcal{C}^0([0,T])$.

$\diamondsuit$

Proof of Theorem 2.18. Suppose that $\{C^\varepsilon\}$ is the sequence introduced in Section 3 by (2.31). The result comes from Proposition 2.13, Proposition 2.20 and the following classical density result :
$\forall\, u\in C([0,T];H_0^1(\Omega))\cap C^1([0,T];L^2(\Omega))$, $\forall\,\eta>0$, $\exists k\in\mathbb{N}$, $\exists\,(\psi_i,v_i)_{1\le i\le k}\in(\mathcal{C}^\infty([0,T])\times D(\Omega))^k$,

$$\left\{\begin{array}{ll} i) & \left\|u' - \displaystyle\sum_{i=1}^k \psi_i' v_i\right\|^2_{C^0([0,T];L^2(\Omega))} \le \eta,\\ ii) & \left\|\nabla u - \displaystyle\sum_{i=1}^k \psi_i\nabla v_i\right\|^2_{C^0([0,T];(L^2(\Omega))^n)} \le \eta. \end{array}\right. \tag{2.100}$$

Let $\eta > 0$ and set

$$\phi(x,t) = \sum_{i=1}^{k} \psi_i(t) v_i(x), \qquad \text{for a.e. } x \text{ in } \Omega,\ \forall t \in [0,T].$$

where $(\psi_i, v_i)_{1\leq i\leq k}$ be defined by (2.100). Take h in $\mathbb{N}$ such that supp $v_i \subset \omega_h$ for every $i \in \{1,\dots,k\}$. From (2.38), (2.39) and definition (2.55) of $X_{\varepsilon,h}$, we have for every $t \in [0,T]$,

$$\frac{\lambda_1}{2} \left\| u'_\varepsilon(t) - \phi'(t) \right\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \frac{\alpha}{2} \left\| C^\varepsilon_h \nabla\phi(t) - \nabla u_\varepsilon(t) \right\|^2_{(L^2(\Omega_\varepsilon))^n} \leq\ X_{\varepsilon,h}(t).$$

Then, due to Proposition 2.19, there exists a constant c such that

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \left\{ \|u'_\varepsilon - \phi'\|^2_{\mathcal{C}^0([0,T];L^2(\Omega_\varepsilon))} + \|\, C^\varepsilon_h \nabla\phi - \nabla u_\varepsilon \|^2_{\mathcal{C}^0([0,T];(L^2(\Omega_\varepsilon))^n)} \right\} \leq c \, \|X\|_{\mathcal{C}^0([0,T])} \,. \tag{2.101}$$

In view of (2.38), (2.39) and definition (2.57) of X, we have

$$\|X\|_{\mathcal{C}^0([0,T])} \leq \frac{\lambda_2}{2} \|u' - \phi'\|^2_{\mathcal{C}^0([0,T];L^2(\Omega))} + \frac{\beta}{2} \|\nabla\phi - \nabla u\|^2_{\mathcal{C}^0([0,T];(L^2(\Omega))^n)} \,. \tag{2.102}$$

Let ω be an open set with $\omega \subset\subset \Omega$. From (2.32), (2.100)-(2.102) and the Hölder inequality, there exist positive constants c_1, c_2 and c_3 such that

$$\begin{aligned}
&\frac{\lambda_1}{2} \|u'_\varepsilon - u'\|^2_{\mathcal{C}^0([0,T];L^2(\Omega_\varepsilon))} + \frac{\alpha}{2} \|C^\varepsilon \nabla u - \nabla u_\varepsilon\|^2_{\mathcal{C}^0([0,T];(L^1(\Omega_\varepsilon\cap\omega))^n)} \\
&\leq c_1 \Big(\|u'_\varepsilon - \phi'\|^2_{\mathcal{C}^0([0,T];L^2(\Omega_\varepsilon))} + \|u' - \phi'\|^2_{\mathcal{C}^0([0,T];L^2(\Omega_\varepsilon))} \\
&\qquad + \|C^\varepsilon \nabla u - \ C^\varepsilon \nabla\phi\|^2_{\mathcal{C}^0([0,T];(L^1(\Omega_\varepsilon\cap\omega))^n)} + \|\, C^\varepsilon\nabla\phi - C^\varepsilon_h \nabla\phi\|^2_{\mathcal{C}^0([0,T];L^1(\Omega_\varepsilon\cap\omega))^n)} \\
&\qquad\qquad + \|\, C^\varepsilon_h \nabla\phi - \nabla u_\varepsilon\|^2_{\mathcal{C}^0([0,T];L^1(\Omega_\varepsilon\cap\omega))^n)} \Big) \\
&\leq c_2 \Big(\|X\|^2_{C^0([0,T])} + \eta + \|C^\varepsilon\|^2_{(L^2(\omega))^{n^2}} \|\nabla u - \nabla\phi\|^2_{\mathcal{C}^0([0,T];(L^2(\Omega_\varepsilon))^n)} \\
&\qquad\qquad + \sum_{i=1}^{k} \|(C^\varepsilon_h - C^\varepsilon)\nabla v_i\|^2_{(L^1(\Omega_\varepsilon))^n)} \|\psi_i\|_{L^\infty(0,T)} \Big) \\
&\leq c_3 \left(\|u' - \phi'\|^2_{\mathcal{C}^0([0,T];L^2(\Omega))} + \|\nabla u - \nabla\phi\|^2_{\mathcal{C}^0([0,T];(L^2(\Omega))^n)} + \eta + \sum_{i=1}^{k} \|(C^\varepsilon_h - C^\varepsilon)\nabla v_i\|^2_{(L^1(\Omega_\varepsilon))^n} \right) \\
&\qquad\qquad \leq c_3 \left(3\eta + \sum_{i=1}^{k} \|(C^\varepsilon_h - C^\varepsilon)\nabla v_i\|^2_{(L^1(\Omega_\varepsilon))^n} \right).
\end{aligned}$$

By virtue of Proposition 2.13, there exists a positive constant c_4 such that

$$0 \leq \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \left(\|u'_\varepsilon - u'\|^2_{\mathcal{C}^0([0,T];L^2(\Omega_\varepsilon))} + \|C^\varepsilon\nabla u - \nabla u_\varepsilon\|^2_{\mathcal{C}^0([0,T];(L^1(\Omega_\varepsilon\cap\omega))^n)} \right) \leq c_4\eta.$$

Since η is arbitrary, this implies (2.54)i and (2.54)ii for the sequence $\{C^\varepsilon\}$ defined by (2.31).

$\diamondsuit$

Proof of Corollary 2.19. Suppose that $\nabla u \in \mathcal{C}^0([0,T];(L^p(\Omega))^n)$ where $p > 2$. Let $(D^\varepsilon)_\varepsilon$ be an elliptic local corrector satisfying (2.16) with $r = 2$. From the Hölder inequality, one has for any open set ω, where $\omega \subset\subset \Omega$

$$\|\nabla u_\varepsilon - D^\varepsilon \nabla u\|_{\mathcal{C}^0([0,T];(L^1(\Omega_\varepsilon\cap\omega))^n)}$$

$$\leq \|\nabla u_\varepsilon - C^\varepsilon \nabla u\|_{\mathcal{C}^0([0,T];(L^1(\Omega_\varepsilon\cap\omega))^n)} + \|(C^\varepsilon - D^\varepsilon)\nabla u\|_{\mathcal{C}^0([0,T];(L^1(\Omega_\varepsilon\cap\omega))^n)}$$
$$\leq \|\nabla u_\varepsilon - C^\varepsilon \nabla u\|_{\mathcal{C}^0([0,T];(L^1(\Omega_\varepsilon\cap\omega))^n)} + \|(C^\varepsilon - D^\varepsilon)\|_{\left(L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega_\varepsilon\cap\omega)\right)^{n^2}} \|\nabla u\|_{\mathcal{C}^0([0,T];(L^p(\Omega))^n)}.$$

Applying Proposition 2.10 for $q = \frac{p}{p-1} \in [1,2[$ and Theorem 2.12, yields

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|\nabla u_\varepsilon - D^\varepsilon \nabla u\|_{\mathcal{C}^0([0,T];(L^1(\Omega_\varepsilon\cap\omega))^n)} = 0,$$

which concludes the proof.

$\diamondsuit$

2.8 The general case

In this section, as in the case of a fixed domain studied by S. Brahim-Otsmane, G. A. Francfort and F. Murat in [8] and following the ideas they developed, we show that the hypotheses of Theorem 2.17 are not sufficient to have the corrector result stated in Theorem 2.18.
Consider the problem

$$\left\{\begin{array}{rcll} \rho_\varepsilon v_\varepsilon'' - \operatorname{div}(A^\varepsilon \nabla v_\varepsilon) & = & f_\varepsilon & \text{on } \Omega_\varepsilon \times (0,T), \\ v_\varepsilon & = & 0 & \text{on } \partial\Omega \times (0,T), \\ A^\varepsilon \nabla v_\varepsilon \,.\, \nu & = & 0 & \text{on } \partial S_\varepsilon \times (0,T), \\ v_\varepsilon(x,0) & = & a_\varepsilon & \text{on } \Omega_\varepsilon, \\ v_\varepsilon'(x,0) & = & b_\varepsilon & \text{on } \Omega_\varepsilon, \end{array}\right. \tag{2.103}$$

under the hypotheses of Theorem 2.17, namely (2.38)-(2.40), (2.42)-(2.44) and (2.46). We also assume that

$$\chi_{\Omega_\varepsilon} \overset{*}{\rightharpoonup} \chi_0 \quad \text{weakly * in } L^\infty(\Omega) \tag{2.104}$$

and

$$\frac{f}{\chi_0} \in L^2(\Omega). \tag{2.105}$$

Theorem 2.17 implies

$$\left\{\begin{array}{lll} i) & P_\varepsilon v_\varepsilon \overset{*}{\rightharpoonup} u & \text{weakly * in } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)), \\ ii) & P_\varepsilon v_\varepsilon' \overset{*}{\rightharpoonup} u' & \text{weakly * in } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)), \end{array}\right. \tag{2.106}$$

where u is the solution of the homogenized problem (2.50).
Let us show that in general, we do not have the convergences

$$\left\{\begin{array}{ll} i) & \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \|v_\varepsilon' - u'\|_{\mathcal{C}^0([0,T];L^2(\Omega_\varepsilon))} = 0, \\ ii) & \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \|\nabla v_\varepsilon - C^\varepsilon \nabla u\|_{\mathcal{C}^0([0,T];(L^1_{loc}(\Omega_\varepsilon))^n)} = 0. \end{array}\right. \tag{2.107}$$

To do so, decompose v_ε in the form

$$v_\varepsilon = u_\varepsilon + z_\varepsilon,$$

where u_ε solves a problem whose data satisfy the assumptions of the corrector result and $P_\varepsilon u_\varepsilon$ has the same weak * limit u than $P_\varepsilon v_\varepsilon$.
In this decomposition, u_ε is the solution of the problem

$$\left\{\begin{array}{rcll} \rho_\varepsilon u_\varepsilon'' - \operatorname{div}(A^\varepsilon \nabla u_\varepsilon) & = & \dfrac{f}{\chi_0} & \text{on } \Omega_\varepsilon \times (0,T), \\ u_\varepsilon & = & 0 & \text{on } \partial\Omega \times (0,T), \\ A^\varepsilon \nabla u_\varepsilon \,.\, \nu & = & 0 & \text{on } \partial S_\varepsilon \times (0,T), \\ u_\varepsilon(x,0) & = & d_\varepsilon & \text{on } \Omega_\varepsilon, \\ u_\varepsilon'(x,0) & = & b_0 & \text{on } \Omega_\varepsilon, \end{array}\right. \tag{2.108}$$

where b_0 is defined in (2.50) and d_ε satisfies

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(A^\varepsilon \nabla d_\varepsilon) &= Q^*_\varepsilon(-\mathrm{div}(A^0\nabla a_0)) & \text{on } \Omega_\varepsilon, \\ A^\varepsilon \nabla d_\varepsilon \,.\, \nu &= 0 & \text{on } \partial S_\varepsilon, \\ d_\varepsilon &= 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.109}$$

On the other hand, z_ε is the solution of

$$\begin{cases} \rho_\varepsilon z''_\varepsilon - \mathrm{div}(A^\varepsilon \nabla z_\varepsilon) &= f_\varepsilon - \dfrac{f}{\chi_0} & \text{on } \Omega_\varepsilon \times (0,T), \\ z_\varepsilon &= 0 & \text{on } \partial\Omega \times (0,T), \\ A^\varepsilon \nabla z_\varepsilon \,.\, \nu &= 0 & \text{on } \partial S_\varepsilon \times (0,T), \\ z_\varepsilon(x,0) &= a_\varepsilon - d_\varepsilon & \text{on } \Omega_\varepsilon, \\ z'_\varepsilon(x,0) &= b_\varepsilon - b_0 & \text{on } \Omega_\varepsilon. \end{cases} \tag{2.110}$$

Notice that because of the admissibility of S_ε, the term $\frac{f}{\chi_0}$ is well defined.
We have the following result :

Theorem 2.23 *Under the assumptions of Theorem 2.17 and (2.104), we have*

$$\begin{cases} i) & P_\varepsilon u_\varepsilon \overset{*}{\rightharpoonup} u & \text{weakly * in } L^\infty(0,T;H^1_0(\Omega)), \\ ii) & P_\varepsilon u'_\varepsilon \overset{*}{\rightharpoonup} u' & \text{weakly * in } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)), \end{cases} \tag{2.111}$$

$$\begin{cases} i) & \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \|u'_\varepsilon - u'\|_{\mathcal{C}^0([0,T];L^2(\Omega_\varepsilon))} = 0, \\ ii) & \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \|\nabla u_\varepsilon - C^\varepsilon \nabla u\|_{\mathcal{C}^0([0,T];(L^1_{loc}(\Omega_\varepsilon))^n)} = 0, \end{cases} \tag{2.112}$$

$$\begin{cases} i) & P_\varepsilon z_\varepsilon \overset{*}{\rightharpoonup} 0 & \text{weakly * in } L^\infty(0,T;H^1_0(\Omega)), \\ ii) & P_\varepsilon z'_\varepsilon \overset{*}{\rightharpoonup} 0 & \text{weakly * in } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)), \end{cases} \tag{2.113}$$

where u is the solution of the homogenized problem (2.50) associated with (2.103) and (2.108) and C^ε is the corrector matrix given by (2.31).

Proof. First, from definition (2.109) of d_ε and the H^0-convergence of A^ε to A^0, one has

$$Q_\varepsilon d_\varepsilon \rightharpoonup a_0 \quad \text{weakly in } H^1_0(\Omega). \tag{2.114}$$

On the other hand, from (2.104) and (2.105) one has

$$\chi_{\Omega_\varepsilon} \frac{f}{\chi_0} \rightharpoonup f \quad \text{weakly in } L^2(\Omega \times (0,T)).$$

This, together with (2.114), allows us to apply Theorem 2.17 to (2.108). Thus, $P_\varepsilon u_\varepsilon$ converges to the solution u^0 of the corresponding homogenized problem. Since the data are same as in (2.50), the uniqueness of the solution of problem (2.50) implies that $u^0 = u$, which gives (2.111). Moreover, since the data of problem (2.108) satisfy also the hypotheses of Theorem 2.18, we have (2.112). Finally, convergence (2.113) follows from (2.106) and (2.111).

$\diamondsuit$

Proposition 2.24 *Under the hypotheses of Theorem 2.23, the corrector result (2.107) holds if and only if*

$$\begin{cases} i) & \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \|z'_\varepsilon\|_{\mathcal{C}^0([0,T];L^2(\Omega_\varepsilon))} = 0, \\ ii) & \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \|\nabla z_\varepsilon\|_{\mathcal{C}^0([0,T];(L^1_{loc}(\Omega_\varepsilon))^n)} = 0. \end{cases} \tag{2.115}$$

Proof. Suppose that convergences (2.115) are satisfied. Then

$$\|v'_\varepsilon - u'\|_{\mathcal{C}^0([0,T];L^2(\Omega_\varepsilon))} + \|\nabla v_\varepsilon - C^\varepsilon \nabla u\|_{\mathcal{C}^0([0,T];(L^1_{loc}(\Omega_\varepsilon))^n)} \leq$$
$$\|u'_\varepsilon - u'\|_{\mathcal{C}^0([0,T];L^2(\Omega_\varepsilon))} + \|z'_\varepsilon\|_{\mathcal{C}^0([0,T];L^2(\Omega_\varepsilon))} + \|\nabla u_\varepsilon - C^\varepsilon \nabla u\|_{\mathcal{C}^0([0,T];(L^1_{loc}(\Omega_\varepsilon))^n)}$$
$$+ \|\nabla z_\varepsilon\|_{\mathcal{C}^0([0,T];(L^1_{loc}(\Omega_\varepsilon))^n)} .$$

In view of (2.112) and (2.115), we get (2.107).

Conversely, we have

$$\|z'_\varepsilon\|_{\mathcal{C}^0([0,T];L^2(\Omega_\varepsilon))} + \|\nabla z_\varepsilon\|_{\mathcal{C}^0([0,T];(L^1_{loc}(\Omega_\varepsilon))^n)} \leq$$
$$\|v'_\varepsilon - u'\|_{\mathcal{C}^0([0,T];L^2(\Omega_\varepsilon))} + \|u'_\varepsilon - u'\|_{\mathcal{C}^0([0,T];L^2(\Omega_\varepsilon))} + \|\nabla v_\varepsilon - C^\varepsilon u\|_{\mathcal{C}^0([0,T];(L^1_{loc}(\Omega_\varepsilon))^n)}$$
$$+ \|\nabla u_\varepsilon - C^\varepsilon \nabla u\|_{\mathcal{C}^0([0,T];(L^1_{loc}(\Omega_\varepsilon))^n)} ,$$

which tends to 0, by virtue of (2.107) and (2.112).

◇

Remark 2.8 We are now able to show that the assumptions of Theorem 2.23 do not necessarily provide the result (8.4). Indeed, if (2.107) holds, from Proposition 2.24 one deduces that

$$\begin{cases} \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \|z'_\varepsilon(0)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \|b_\varepsilon - b_0\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} = 0, \\ \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \|\nabla z_\varepsilon(0)\|_{L^1_{loc}(\Omega_\varepsilon)} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \|\nabla a_\varepsilon - \nabla d_\varepsilon\|_{L^1_{loc}(\Omega_\varepsilon)} = 0, \end{cases}$$

that is,

$$\begin{cases} i) \quad \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \|\rho\, b_\varepsilon - b\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} = 0, \\ ii) \quad \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \|\nabla(Q_\varepsilon a_\varepsilon) - \nabla(Q_\varepsilon d_\varepsilon)\|_{L^1_{loc}(\Omega)} = 0. \end{cases} \tag{2.116}$$

But from (2.44)iii, we only know that $\widetilde{\rho_\varepsilon b_\varepsilon} \rightharpoonup b$ weakly in $L^2(\Omega)$, which do not imply (2.116)i. Furthermore, $Q_\varepsilon a_\varepsilon - Q_\varepsilon d_\varepsilon$ converges weakly to 0 in $H^1_0(\Omega)$ from (2.114) and (2.44)ii, and in general, this convergence is not strong. Consequently, we cannot expect a corrector result for v_ε under the assumptions of Theorem 2.23.

Chapitre 3

Existence et homogénéisation pour une équation des ondes non linéaire dans des domaines perforés

Ce chapitre reprend l'article [25].

We study here, the homogenization of the nonlinear wave equation

$$u_\varepsilon'' - \text{div }(A^\varepsilon \nabla u_\varepsilon) + g(u_\varepsilon') = f_\varepsilon \quad \text{in } \Omega_\varepsilon \times (0,T),$$

where Ω_ε is a periodically perforated domain and g is a non-decreasing scalar function. We first prove the existence and the uniqueness of the solution of this problem, then the convergence of this solution to that of the homogenized problem.

3.1 Introduction

This paper is concerned with the study of the homogenization of the nonlinear wave equation

$$\begin{cases} u_\varepsilon'' - \text{div}\left(A\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right)\nabla u_\varepsilon\right) + g(u_\varepsilon') &= f_\varepsilon \quad \text{in } \Omega_\varepsilon \times (0,T), \\ u_\varepsilon &= 0 \quad \text{on } \partial\Omega \times (0,T), \\ A^\varepsilon \nabla u_\varepsilon \,.\, \nu &= 0 \quad \text{on } \partial S_\varepsilon \times (0,T), \\ u_\varepsilon(x,0) &= u_\varepsilon^0 \quad \text{in } \Omega_\varepsilon, \\ u_\varepsilon'(x,0) &= u_\varepsilon^1 \quad \text{in } \Omega_\varepsilon, \end{cases} \tag{3.1}$$

where Ω is a bounded open set of $\mathbb{R}^n$, $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus S_\varepsilon$ is a perforated domain obtained by removing from Ω a closed set S_ε of ε-periodic holes of size ε, $A(x)$ is a bounded periodic symmetric matrix which is defined positive, ν denotes the unit external normal vector with respect to Ω_ε. The function g is nonlinear and satisfies suitable growth assumptions. The data $\{u_\varepsilon^0,\, u_\varepsilon^1,\, f_\varepsilon\}$ is given in $V_\varepsilon \times V_\varepsilon \times H^1(0,T;L^2(\Omega_\varepsilon))$, where V_ε is the subspace of $H^1(\Omega_\varepsilon)$ of functions vanishing on the boundary of Ω.
First, for fixed ε, we prove the existence and uniqueness of a solution u_ε of problem (3.1), such that $u_\varepsilon \in L^\infty(0,T;V_\varepsilon)$, $u_\varepsilon' \in L^\infty(0,T;V_\varepsilon)$ and $u_\varepsilon'' \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega_\varepsilon))$ in Section 4 using a Galerkin method and some monotony arguments. We also prove some related a priori estimates which only depend on the data. This provides uniform a priori estimates for u_ε as well as for u_ε' and u_ε''. Then, we use these estimates to study the asymptotic behavior of problem (3.1) as ε tends to zero.

More precisely, let $(P_\varepsilon)_\varepsilon$ be the family of extension operators (see Lemma 3.13), introduced by D. Cioranescu and J.Saint Jean Paulin for the elliptic case ([20]) and by D.Cioranescu and P. Donato for time-dependent functions ([16]). In Theorem 3.5, we prove the following convergences :

$$\begin{cases} i) & P_\varepsilon u_\varepsilon \rightharpoonup u \quad \text{weakly * in } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)), \\ ii) & P_\varepsilon u'_\varepsilon \rightharpoonup u' \quad \text{weakly * in } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)), \\ iii) & P_\varepsilon u''_\varepsilon \rightharpoonup u'' \quad \text{weakly * in } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)), \end{cases} \tag{3.2}$$

and

$$\begin{cases} i) & \widetilde{g(u'_\varepsilon)} \rightharpoonup \theta g(u') \quad \text{weakly * in } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)), \\ ii) & \widetilde{A^\varepsilon \nabla u_\varepsilon} \rightharpoonup A^0 \nabla u \quad \text{weakly * in } L^\infty(0,T;(L^2(\Omega))^n), \end{cases} \tag{3.3}$$

where $\widetilde{\cdot}$ is the extension by zero of any function defined on Ω_ε. The function u is the solution of the homogenized problem

$$\begin{cases} \theta u'' - \text{div } (A^0 \nabla u) + \theta g(u') &= f \quad \text{in } \Omega \times (0,T), \\ u &= 0 \quad \text{on } \partial\Omega \times (0,T), \\ u(x,0) &= u^0 \quad \text{in } \Omega, \\ u'(x,0) &= u^1 \quad \text{in } \Omega, \end{cases} \tag{3.4}$$

and A^0 is the homogenized matrix associated to A^ε (see Section 3) while θ is the proportion of the material in the domain Ω.

When studying problem (3.1) two main difficulties arise. The first one is to have some uniform a priori estimates which allow to pass to the limit as ε tends to zero. It is due to the nonlinearity in time derivative of the solution. This requires some stronger assumptions on the data (see (3.13), (3.20) and (3.21)) than those needed only to prove existence and uniqueness (see Remark 3.2). A similar situation has been studied in [13] by M.M. Cavalcanti, V.N. Domingos Cavalcanti, D. Andrade and T.F. Ma, who consider a similar problem for $A^\varepsilon = Id$ with a Dirichlet condition on the boundary of the holes and where the size of the holes are smaller than the period (taille of the "strange term", see [13] and [19]). In their paper they suppose that f does not depend on time and $u_\varepsilon^0 = 0$.
Here, we take more general initial data, but we need to suppose (3.13), (3.14), (3.20) and (3.21) to get suitable a priori estimates. These estimates allow us to overcome the second difficulty due to the presence of the holes, which consist in identifying the limit of the zero extension of $g(u'_\varepsilon)$. This is done in Section 5 (Proposition 3.7). To identify the limit u as the solution of problem (3.4), we apply some homogenization results obtained for the corresponding linear case. Then, by uniqueness arguments we prove that the limit of the sequence (u_ε) is the unique solution of problem (3.4).

For the homogenization of parabolic semilinear problems, we refer to [40] for the case of a fixed domain and to [22] for the case of periodically perforated domain.

3.2 Preliminaries

In this section, we introduce the perforated domain Ω_ε and we recall some theorems needed in the following.
Let Ω be an open bounded subset of $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, with a smooth boundary $\partial\Omega$ and ε the general term of a sequence of positive number which tends to zero. Introduce the representative cell $Y = [0, l_1[\times \ldots \times [0, l_n[$, denote by S an open subset of Y with smooth boundary ∂S, such that

$\overline{S} \subset \overset{\circ}{Y}$. Denote by $\tau(\varepsilon\overline{S})$ the set of all translated images $\varepsilon(kl+\overline{S}),\ k \in \mathbb{Z}^n,\ kl = (k_1 l_1, \ldots, k_n l_n)$, by S_ε the subset of $\tau(\varepsilon\overline{S})$ contained in Ω, and by Ω_ε the perforated domain $\Omega \setminus S_\varepsilon$.
We suppose that the holes $\tau(\varepsilon\overline{S})$ do not intersect the boundary $\partial\Omega$, which implies that

$$\partial\Omega_\varepsilon = \partial\Omega \cup \partial S_\varepsilon.$$

Let us introduce the space

$$V_\varepsilon = \{v \in H^1(\Omega_\varepsilon) \mid v_{|\partial\Omega} = 0\}, \tag{3.5}$$

which is a Hilbert space equipped with the H^1-norm.
We will use the following notation :
– $|E|$ for the Lebesgue measure of the subset E,
– $Y^* = Y \setminus \overline{S}$,
– $\theta = |Y^*|/|Y|$,
– χ_ε for the characteristic function of the set Ω_ε,
– $\widetilde{v_\varepsilon}$ for the zero extension on Ω of any function v_ε defined on Ω_ε,
– ν for the unit outward normal vector with respect to Ω_ε.
Classically,

$$\chi_\varepsilon \rightharpoonup \theta \quad \text{weakly * in } L^\infty(\Omega). \tag{3.6}$$

Consider a $Y-$periodic, $n \times n$ matrix-valued function $A(y) = (a_{i,j}(y))_{1\le i,j\le n}$ defined on $\mathbb{R}^n$ such that

$$\begin{cases} \|A\|_{(L^\infty(\mathbb{R}^n))^{n^2}} \le \beta, \\ A \ \text{ is symmetric,} \\ \exists\, \alpha > 0, \quad \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(y)\lambda_i\lambda_j \ge \alpha \|\lambda\|^2 \quad y \text{ a.e. in } \mathbb{R}^n,\ \forall\, \lambda \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{3.7}$$

and for any ε, let

$$A^\varepsilon(x) = A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \quad x \text{ a.e. in } \mathbb{R}^n. \tag{3.8}$$

To describe the asymptotic behaviour of problem (1.1), we need to extend its solution u_ε to the whole domain Ω. To do so, we use the following lemmas :

Lemma 3.1 *([?]) There exists an extension operator Q_ε from V_ε to $H^1_0(\Omega)$ such that*

$$\begin{cases} i) & Q_\varepsilon \in \mathcal{L}(V_\varepsilon, H^1_0(\Omega)), \\ ii) & Q_\varepsilon v = v \quad a.e. \text{ on } \Omega_\varepsilon,\ \forall\, v \in V_\varepsilon, \\ iii) & \|\nabla(Q_\varepsilon v)\|_{(L^2(\Omega))^n} \le c_0 \|\nabla v\|_{(L^2(\Omega_\varepsilon))^n},\ \forall\, v \in V_\varepsilon, \end{cases} \tag{3.9}$$

where c_0 is a constant independent of ε.

Note that this lemma provides a Poincaré inequality on V_ε with a constant c independent of ε,

$$\|v\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \le c \|\nabla v\|_{(L^2(\Omega_\varepsilon))^n}, \quad \forall\, v \in V_\varepsilon. \tag{3.10}$$

This, allows to use the norm $\|v\|_{V_\varepsilon} = \|\nabla v\|_{(L^2(\Omega_\varepsilon))^n}$ on V_ε.

We now introduce a family $\{P_\varepsilon\}_\varepsilon$ of linear extension operator for time-dependent functions.

Lemma 3.2 *([11], [16]) There exists an extension operator*

$$P_\varepsilon \in \mathcal{L}(L^\infty(0,T; H^k(\Omega_\varepsilon)), L^\infty(0,T; H^k(\Omega))), \quad k = 0, 1,$$

such that for every $\phi \in L^\infty(0,T;H^k(\Omega_\varepsilon)) \cap W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Omega_\varepsilon)), \quad k=0,1,$

$$\begin{cases} i) & P_\varepsilon\phi = \phi \quad \text{in } \Omega_\varepsilon \times (0,T), \\ ii) & (P_\varepsilon\phi)' = P_\varepsilon\phi' \quad \text{in } \Omega_\varepsilon \times (0,T), \\ iii) & \|P_\varepsilon\phi\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq c_0 \|\phi\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega_\varepsilon))}, \\ iv) & \|P_\varepsilon\phi'\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq c_0 \|\phi'\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega_\varepsilon))}, \\ v) & \|\nabla(P_\varepsilon\phi)\|_{L^\infty(0,T;(L^2(\Omega))^n)} \leq c_0 \|\nabla\phi\|_{L^\infty(0,T;(L^2(\Omega_\varepsilon))^n)}, \end{cases} \tag{3.11}$$

where c_0 *is the constant introduced in (3.9)iii.*

Note that this family of extension operator is obtained from Lemma 3.1 setting the variable t as parameter.
Let us recall the known following compactness theorem :

Theorem 3.3 *([34]) Let* $T>0$ *and* X, B, Y *three Banach spaces with compact embedding of* X *into* B *and continuous embedding of* B *into* Y*, then*

i) If F *is a bounded subset of* $L^p(0,T;X)\cap W^{1,1}(0,T;Y)$*, where* $1\leq p<\infty$*, then* F *is relatively compact in* $L^p(0,T;B)$*.*

ii) If F *is a bounded subset of* $L^\infty(0,T;X)\cap W^{1,r}(0,T;Y)$*, where* $r>1$*, then* F *is relatively compact in* $C([0,T];B)$*.*

3.3 Statement of the main results

Let Ω_ε be the perforated domain defined in Section 2 and T a fixed positive real number. Consider the problem

$$\begin{cases} u_\varepsilon'' - \operatorname{div}(A^\varepsilon\nabla u_\varepsilon) + g(u_\varepsilon') &= f_\varepsilon \quad \text{in } \Omega_\varepsilon \times (0,T), \\ u_\varepsilon &= 0 \quad \text{on } \partial\Omega \times (0,T), \\ A^\varepsilon\nabla u_\varepsilon \,.\, \nu &= 0 \quad \text{on } \partial S_\varepsilon \times (0,T), \\ u_\varepsilon(x,0) &= u_\varepsilon^0 \quad \text{in } \Omega_\varepsilon, \\ u_\varepsilon'(x,0) &= u_\varepsilon^1 \quad \text{in } \Omega_\varepsilon, \end{cases} \tag{3.12}$$

under the hypotheses

$$\begin{cases} i) & u_\varepsilon^0 \in V_\varepsilon, \\ ii) & u_\varepsilon^1 \in V_\varepsilon, \\ iii) & f_\varepsilon \in H^1(0,T;L^2(\Omega_\varepsilon)), \end{cases} \tag{3.13}$$

where A^ε satisfies (3.7) and (3.8), V_ε is the space defined in (3.5) and
$H^1(0,T;L^2(\Omega_\varepsilon)) = \{v_\varepsilon \in L^2(\Omega_\varepsilon \times (0,T)),\ v_\varepsilon' \in L^2(\Omega_\varepsilon \times (0,T))\}$.

We also assume that u_ε^0 is solution of the problem

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\,(A^\varepsilon\nabla u_\varepsilon^0) &= h_\varepsilon^0 \quad \text{on } \Omega_\varepsilon, \\ u_\varepsilon^0 &= 0 \quad \text{in } \partial\Omega, \\ A^\varepsilon\nabla u_\varepsilon^0 \,.\, \nu &= 0 \quad \text{in } \partial S_\varepsilon, \end{cases} \tag{3.14}$$

for some $h_\varepsilon^0 \in L^2(\Omega_\varepsilon)$.

We assume that $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ is a non-decreasing C^1 function satisfying $g(0) = 0$ and

$$|g'(s)| \leq c_1(1 + |s|^{\rho-1}), \qquad \text{for all } s \in \mathbb{R}, \tag{3.15}$$

where c_1 and ρ are positive constants such that $\rho \geq 1$ for $n = 2$ and $1 \leq \rho < \dfrac{n}{n-2}$ for $n \geq 3$.
From (3.15), it follows that

$$|g(s)| \leq c_2(1 + |s|^{\rho}), \qquad \text{for all } s \in \mathbb{R}, \tag{3.16}$$

for some positive constant c_2.

Remark 3.1 In (3.15) and (3.16), we have supposed that $\rho \geq 1$, in order to have $\rho - 1 \geq 0$. Obviously, if a function g satisfies (3.15) with $0 \leq \rho < 1$, this implies that it satisfies (3.16) also for $\rho = 1$. □

Now, define the space

$$W_\varepsilon = \left\{ v_\varepsilon \in L^2(0,T;V_\varepsilon)\,,\ v_\varepsilon' \in L^2(0,T;L^2(\Omega_\varepsilon)) \right\}, \tag{3.17}$$

which is a Hilbert space with the norm

$$\|v_\varepsilon\|_{W_\varepsilon} = \|v_\varepsilon\|_{L^2(0,T;V_\varepsilon)} + \|v_\varepsilon'\|_{L^2(\Omega_\varepsilon\times(0,T))}\,.$$

The variational formulation of problem (3.12) is

$$\begin{cases} \text{Find } u_\varepsilon \in W_\varepsilon \text{ such that} \\ \langle u_\varepsilon'', v\rangle_{V_\varepsilon', V_\varepsilon} + \displaystyle\int_{\Omega_\varepsilon} A^\varepsilon \nabla u_\varepsilon \nabla v \, dx + \int_{\Omega_\varepsilon} g(u_\varepsilon')\, v \, dx \ = \ \int_{\Omega_\varepsilon} f_\varepsilon v \, dx \quad \text{in } D'(0,T), \\ \text{ for all } v \in V_\varepsilon, \\ \qquad\qquad u_\varepsilon(x,0) \ = \ u_\varepsilon^0 \ \text{ in } \Omega_\varepsilon, \\ \qquad\qquad u_\varepsilon'(x,0) \ = \ u_\varepsilon^1 \ \text{ in } \Omega_\varepsilon. \end{cases} \tag{3.18}$$

Theorem 3.4 *Under the assumptions (3.7), (3.13), (3.14) and (3.15) there exists a unique solution u_ε of problem (3.12) such that $u_\varepsilon \in L^\infty(0,T;V_\varepsilon)$, $u_\varepsilon' \in L^\infty(0,T;V_\varepsilon)$ and $u_\varepsilon'' \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega_\varepsilon))$. Moreover, there exists a constant $c > 0$ independent of ε and of the data u_0^ε, u_1^ε, h_ε^0 and f_ε such that*

$$\begin{cases} \|u_\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;V_\varepsilon)} + \|u_\varepsilon'\|_{L^\infty(0,T;V_\varepsilon)} + \|u_\varepsilon''\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega_\varepsilon))} \leq \\ \qquad c\Big(1 + \|u_\varepsilon^0\|_{V_\varepsilon} + \|u_\varepsilon^1\|_{V_\varepsilon}^{\rho} + \|h_\varepsilon^0\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \|f_\varepsilon(0)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \\ \qquad\qquad + \|f_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon\times(0,T))} + \|f_\varepsilon'\|_{L^2(\Omega_\varepsilon\times(0,T))}\Big)\,. \end{cases} \tag{3.19}$$

Note that the term $f_\varepsilon(0)$ is well defined because of the embedding
$H^1(0,T;L^2(\Omega_\varepsilon)) \subset C([0,T];L^2(\Omega_\varepsilon))$ (see [31], chap 1).

The proof of this theorem is given in Section 4.

To study the homogenization of problem (3.12), we suppose

$$\begin{cases} i) & \widetilde{h_\varepsilon^0} \rightharpoonup h^0 \quad \text{weakly in } L^2(\Omega), \\ ii) & Q_\varepsilon u_\varepsilon^0 \rightharpoonup u^0 \quad \text{weakly in } H_0^1(\Omega), \\ iii) & Q_\varepsilon u_\varepsilon^1 \rightharpoonup u^1 \quad \text{weakly in } H_0^1(\Omega), \end{cases} \tag{3.20}$$

and

$$\begin{cases} i) & \widetilde{f_\varepsilon} \rightharpoonup f \quad \text{weakly in } L^2(\Omega \times (0,T)), \\ ii) & \|f'_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon \times (0,T))} \leq c, \end{cases} \tag{3.21}$$

where c is a constant independent of ε.

We can now state the homogenization result.

Theorem 3.5 *Under the assumptions (3.6), (3.7), (3.13), (3.14), (3.15), (3.20) and (3.21) the solution u_ε of (3.12) satisfies*

$$\begin{cases} i) & P_\varepsilon u_\varepsilon \rightharpoonup u \quad \textit{weakly * in } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)), \\ ii) & P_\varepsilon u'_\varepsilon \rightharpoonup u' \quad \textit{weakly * in } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)), \\ iii) & P_\varepsilon u''_\varepsilon \rightharpoonup u'' \quad \textit{weakly * in } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)), \end{cases} \tag{3.22}$$

and

$$\begin{cases} i) & \widetilde{g(u'_\varepsilon)} \rightharpoonup \theta g(u') \quad \textit{weakly * in } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)), \\ ii) & \widetilde{A^\varepsilon \nabla u_\varepsilon} \rightharpoonup A^0 \nabla u \quad \textit{weakly * in } L^\infty(0,T;(L^2(\Omega))^n), \end{cases} \tag{3.23}$$

where u is the solution of the homogenized problem

$$\begin{cases} \theta u'' - \mathit{div}\,(A^0 \nabla u) + \theta g(u') &= f \quad \textit{in } \Omega \times (0,T), \\ u &= 0 \quad \textit{on } \partial\Omega \times (0,T), \\ u(x,0) &= u^0 \quad \textit{in } \Omega, \\ u'(x,0) &= u^1 \quad \textit{in } \Omega. \end{cases} \tag{3.24}$$

The matrix A^0 is the standard homogenized matrix associated to A, i.e.

$$A^0 = \{a^0_{ij}\}_{i,j=1,n}, \quad \textit{with} \quad a^0_{ij} = \frac{1}{|Y|} \int_{Y^*} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^n a_{ik} \frac{\partial \chi^j}{\partial x_k} \right) dy, \tag{3.25}$$

where the functions χ^j are solutions of

$$\begin{cases} -\mathit{div}\,(A\nabla(\chi^j - y_j)) = 0 \quad \textit{in } Y^*, \\ A\nabla(\chi^j - y_j)\,.\,\nu = 0 \quad \textit{on } \partial S, \\ \chi^j \quad \textit{is } Y-\textit{periodic}, \\ \int_{Y^*} \chi^j\,dx = 0. \end{cases} \tag{3.26}$$

The proof is given in Section 5.

3.4 Existence and Uniqueness of solutions of Theorem 3.4

In this section, we give a general existence and uniqueness result which implies Theorem 3.4 in particular. To do so, let Ω be an open subset of $\mathbb{R}^n$ and S an open subset such that $\overline{S} \subset \Omega$ with a Lipschitz boundary. We denote by Ω_S the set $\Omega_S = \Omega \setminus \overline{S}$ and by V_S the space $V_S = \{v \in H^1(\Omega_S), v_{|\partial\Omega} = 0\}$ endowed with the H^1-norm. Let B be a symmetric matrix verifying (3.7). We consider the problem

$$\begin{cases} u'' - \operatorname{div}(B\nabla u) + g(u') &= f \quad \text{in } \Omega_S \times (0,T), \\ u &= 0 \quad \text{on } \partial\Omega \times (0,T), \\ B\nabla u\,.\,\nu &= 0 \quad \text{on } \partial S \times (0,T), \\ u(x,0) &= u^0 \quad \text{in } \Omega_S, \\ u'(x,0) &= u^1 \quad \text{in } \Omega_S, \end{cases} \tag{3.27}$$

under the hypotheses

$$\begin{cases} i) & u^0 \in V_S, \\ ii) & u^1 \in V_S, \\ iii) & f \in H^1(0,T;L^2(\Omega_S)), \end{cases} \tag{3.28}$$

where the function g satisfy (3.15) and we suppose that the function u^0 satisfy the problem

$$\begin{cases} -\text{div }(B\nabla u^0) &=& h^0 & \text{on } \Omega_S, \\ u^0 &=& 0 & \text{in } \partial\Omega, \\ B\nabla u^0 \,.\, \nu &=& 0 & \text{in } \partial S, \end{cases} \tag{3.29}$$

for some $h^0 \in L^2(\Omega_\varepsilon)$.
Moreover, we suppose that there exist an extension operator Q from V_S to $H_0^1(\Omega)$ and a constant c_S such that

$$\begin{cases} i) & Q \in \mathcal{L}(V_S, H_0^1(\Omega)), \\ ii) & Qv = v \quad \text{a.e. on } \Omega_S,\ \forall\, v \in V_S, \\ iii) & \|\nabla(Qv)\|_{(L^2(\Omega))^n} \leq c_S \, \|\nabla v\|_{(L^2(\Omega_S))^n}\,,\ \forall\, v \in V_S. \end{cases} \tag{3.30}$$

Note that, as in (3.10), this extension operator provides a Poincaré inequality on V_S and allows to take $\|\nabla v\|_{(L^2(\Omega_S))^n}$ as an equivalent norm on V_S.

Theorem 3.6 *Under the hypotheses (3.15) and (3.28)-(3.30), problem (3.27) has a unique solution $u \in L^\infty(0,T;V_S)$ such that $u' \in L^\infty(0,T;V_S)$, $u'' \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega_S))$ and*

$$\begin{cases} \|u\|_{L^\infty(0,T;V_S)} + \|u'\|_{L^\infty(0,T;V_S)} + \|u''\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega_S))} \leq \\ \qquad c\Big(1 + \|u^0\|_{V_S} + \|u^1\|_{V_S}^{\rho} + \|h^0\|_{L^2(\Omega_S)} + \|f(0)\|_{L^2(\Omega_S)} \\ \qquad\qquad + \|f\|_{L^2(\Omega_S\times(0,T))} + \|f'\|_{L^2(\Omega_S\times(0,T))}\Big)\,, \end{cases} \tag{3.31}$$

where c is a constant depending only on c_S, c_2, n, ρ, T and Ω.

To prove Theorem 3.6, we proceed in several steps by using a Galerkin method and some monotony arguments.
In Subsection 4.1, we introduce the finite dimensional approximating problem. In Subsection 4.2, we prove a priori estimates. In Subsection 4.3, we pass to the limit and we prove the existence of a solution of (3.12). The uniqueness is proved in Subsection 4.4. Finally, in Subsection 4.5, we show that Theorem 3.4 can be obtained as a particular case of this theorem written for $S = S_\varepsilon$, $B = A^\varepsilon$, $V_S = V_\varepsilon$ and $Q = Q_\varepsilon$.
For simplicity, we denote

$$(u,v) = \int_{\Omega_S} u(x)v(x)\,dx, \qquad \|u\|_p^p = \int_{\Omega_S} |u(x)|^p\,dx, \qquad \mathcal{B}u = -\text{ div }(B\nabla u).$$

3.4.1 Statement of the finite dimensional approximate problem

It is known from the spectral theory on self-adjoint operator that there exists a complete orthonormal system $(\omega_j)_{j\in\mathbb{N}}$ of $L^2(\Omega_S)$ given by the eigenfunction of the operator $\mathcal{B}$ defined on $D(\mathcal{B}) = V_S$ (see [39]). The corresponding eigenvalues $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}$ verify $\lambda_j \to +\infty$ as $j \to +\infty$. Furthermore, (ω_j) is also a complete orthogonal system in V_S.
Let $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}$ be the eigenvalues of the operator $\mathcal{B}$, consider the functions ω_j be the solutions of the problems

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\text{div }(B\nabla\omega_j) & = & \lambda_j\,\omega_j & \text{in } \Omega_S, \\ \omega_j & = & 0 & \text{on } \partial\Omega, \\ B\nabla\omega_j\,.\,\nu & = & 0 & \text{on } \partial S, \end{array}\right. \tag{3.32}$$

such that

$$\int_{\Omega_S}\omega_j^2\,dx = 1.$$

The functions $(\omega_j)_{j\in\mathbb{N}}$ constitute a system of eigenvalues of the operators $\mathcal{B}$ and form a complete orthonormal system of $L^2(\Omega_S)$.
Let V_m be the space spanned by $\{\omega_1,\ldots,\omega_m\}$ and introduce the projection operator $\mathcal{P}_m$ from $L^2(\Omega_S)$ to V_m defined by

$$\mathcal{P}_m v = \sum_{i=1}^{m}(v,\omega_i)\,\omega_i, \quad \forall\, v\in L^2(\Omega_S). \tag{3.33}$$

From classical results on Hilbert spaces, one has

$$\left\{\begin{array}{ll} i) & \mathcal{P}_m v \longrightarrow v \quad \text{strongly in } L^2(\Omega_S), \quad \forall\, v\in L^2(\Omega_S), \\ ii) & (\mathcal{P}_m v)_{|V_S} \longrightarrow v \quad \text{strongly in } V_S, \quad \forall\, v\in V_S, \end{array}\right. \tag{3.34}$$

and

$$\left\{\begin{array}{ll} i) & \|\mathcal{P}_m\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega_S),L^2(\Omega_S))} \leq 1, \\ ii) & \left\|(\mathcal{P}_m)_{|V_S}\right\|_{\mathcal{L}(V_S,V_S)} \leq 1. \end{array}\right. \tag{3.35}$$

Now, for any $m\in\mathbb{N}$, consider the Cauchy problem

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Find } \ u_m(t) = \displaystyle\sum_{j=0}^{m} h_{jm}(t)\,\omega_j \in V_m \ \text{ such that} \\ \displaystyle\int_{\Omega_S} u_m''(t)\,w\,dx + \int_{\Omega_S} B\nabla u_m(t)\nabla w\,dx + \int_{\Omega_S} g(u_m'(t))w\,dx = \int_{\Omega_S} f(t)\,w\,dx, \quad \forall\, w\in V_m, \\ \qquad\qquad u_m(x,0) = u_m^0 = \mathcal{P}_m u^0, \\ \qquad\qquad u_m'(x,0) = u_m^1 = \mathcal{P}_m u^1. \end{array}\right. \tag{3.36}$$

By a standard method in differential equations, one can prove there exists $t_m > 0$ and a maximal solution (u_m, t_m) of (3.36) on the interval $[0,t_m[$. Due to estimate (3.38) given in the next subsection, one has $t_m = T$. Because g is C^1, u_m is therefore $C^3([0,T];V_m)$.
Note that a direct consequence of (3.34)-(3.35) is

$$\left\{\begin{array}{l} u_m^k \longrightarrow u^k \quad \text{strongly in } V_S, \quad \text{for } k=0,1 \quad \text{and} \\ \left\|u_m^k\right\|_{H^j(\Omega_S)} \leq \left\|u^k\right\|_{H^j(\Omega_S)}, \quad \text{for all } m\in\mathbb{N}, \ k=0,1 \text{ and } j=0,1. \end{array}\right. \tag{3.37}$$

3.4.2 A priori estimates

First estimate : For $t\in[0,t_m[$ and choosing $w = u_m'(t)$ in (3.36), from the Cauchy-Schwartz inequality and the fact that g is non-decreasing, we have

$$(u_m''(t), u_m'(t)) + (B\nabla u_m(t), \nabla u_m'(t)) \leq \|f(t)\|_2\,\|u_m'(t)\|_2$$

$$\frac{d}{dt}\Big(\|u_m'(t)\|_2^2 + (B\nabla u_m(t), \nabla u_m(t))\Big) \leq \ \|f(t)\|_2^2 + \|u_m'(t)\|_2^2\,.$$

Integrating over $(0,t)$ with $t \in [0,t_m[$ and using the ellipticity of B, it follows that

$$\|u'_m(t)\|_2^2 + \alpha \|\nabla u_m(t)\|_2^2 \leq$$

$$\int_0^t \left(\|f(s)\|_2^2 + \|u'_m(s)\|_2^2\right) ds + \left\|u_m^1\right\|_2^2 + \left\|\nabla u_m^0\right\|_2^2.$$

In view of (3.37) and using the Gronwall lemma, we obtain for any $t \in [0,t_m[$

$$\|u'_m(t)\|_2 + \|\nabla u_m(t)\|_2 \leq c\left(\|f\|_{L^2(\Omega_S\times(0,T))} + \left\|u^1\right\|_2 + \left\|\nabla u^0\right\|_2\right), \tag{3.38}$$

where c is a constant depending only on T and Ω.
From (3.38), using classical arguments one can extend the solution u_m of (3.36) to the whole $[0,T]$.
Second estimate : First, let us show that

$$-\text{div }\left(B\nabla\left(\mathcal{P}_m u^0\right)\right) = \mathcal{P}_m\left(-\text{ div }(B\nabla u^0)\right). \tag{3.39}$$

To do so, we use the fact that the family (ω_j) is the sequence of eigenvalues of $\mathcal{B}$ and satisfies (3.32) and the linearity and the symmetry of B. One has

$$\begin{aligned}\mathcal{B}\left(\mathcal{P}_m u^0\right) &= \sum_{j=0}^m (u^0,\, \omega_j)\mathcal{B}\omega_j = \sum_{j=0}^m (u^0,\, \lambda_j\,\omega_j)\omega_j = \sum_{j=0}^m \omega_j \int_{\Omega_S} B\,\nabla\omega_j\nabla u^0\,dx\\ &= \sum_{j=0}^m \omega_j \int_{\Omega_S} B\,\nabla u^0\nabla\omega_j\,dx = \sum_{j=0}^m (\mathcal{B}u^0,\, \omega_j)\omega_j = \mathcal{P}_m\left(\mathcal{B}u^0\right).\end{aligned}$$

From the properties of the projection operator (recall in (3.35)), we deduce that

$$\left\|\mathcal{B}u_m^0\right\|_2 \leq \left\|\mathcal{B}u^0\right\|_2 = \left\|h^0\right\|_2, \tag{3.40}$$

where h^0 is introduced in (3.29).
Observe that from (3.16), one has

$$\int_{\Omega_S} |g(u_m^1)|^2\,dx \leq \int_{\Omega_S}\left(c_2(1+|u_m^1|^\rho)\right)^2\,dx \leq 2{c_2}^2(|\Omega| + \left\|u_m^1\right\|_{2\rho}^{2\rho}), \tag{3.41}$$

where c_2 is the constant introduced in (3.16). From (3.30), (3.37) and since $\rho \leq \frac{n}{n-2}$ the embedding
$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2\rho}(\Omega)$ is continuous, so that there exists a constant c_Ω independent of $m \in \mathbb{N}$ such that

$$\left\|u_m^1\right\|_{L^{2\rho}(\Omega_S)} \leq \left\|Qu_m^1\right\|_{L^{2\rho}(\Omega)} \leq c_\Omega\left\|Qu_m^1\right\|_{H_0^1(\Omega)} \leq c_\Omega c_S\left\|u_m^1\right\|_{V_S} \leq c_\Omega c_S\left\|u^1\right\|_{V_S},$$

where c_S is introduced in (3.30).
Therefore, this together with (3.41) implies

$$\left\|g(u_m^1)\right\|_2 \leq c\left(1 + \left\|u^1\right\|_{V_S}^\rho\right), \tag{3.42}$$

where c is a constant which depends only on c_S, c_2, n, ρ and Ω.

For simplicity, until the end of the section, we will denote by c a constant independent of m and only depending on c_S, c_2, n, ρ, T and Ω.

Now, take $w = u_m''(0)$ and $t = 0$ in (3.36). Since (3.13)iii implies that $f \in C([0,T];L^2(\Omega_S))$ (see [31], chap 1), $f(0)$ make sense and belong to $L^2(\Omega_S)$. Using the Cauchy-Schwartz inequality, we get

$$\|u_m''(0)\|_2^2 + (\mathcal{B}u_m(0), u_m''(0)) + \Big(g(u_m^1), u_m''(0)\Big) = (f(0), u_m''(0))$$

$$\|u_m''(0)\|_2^2 \le \|u_m''(0)\|_2 \left(\left\|\mathcal{B}u_m^0\right\|_2 + \left\|g(u_m^1)\right\|_2 + \|f(0)\|_2\right).$$

In view of (3.13)iii, (3.40) and (3.42), we obtain

$$\|u_m''(0)\|_2 \le c\left(1 + \left\|u^1\right\|_{V_S}^\rho + \left\|h^0\right\|_{L^2(\Omega_S)} + \|f(0)\|_2\right). \tag{3.43}$$

Since $u_m \in C^3([0,T];V_m)$, one can take the derivative of (3.36) with respect to t, and use $w = u_m''(t)$. From (3.28) and considering that $g' \ge 0$, one has

$$(u_m'''(t), u_m''(t)) + ((B\nabla u_m'(t), \nabla u_m''(t)) + (g'(u_m'(t))u_m''(t), u_m''(t)) = (f'(t), u_m''(t))$$

$$\frac{d}{dt}\Big(\|u_m''(t)\|_2^2 + (B\nabla u_m'(t), \nabla u_m'(t))\Big) \le \|f'(t)\|_2^2 + \|u_m''(t)\|_2^2. \tag{3.44}$$

Integrating (3.44) over $(0,t)$ with $t \in [0,T]$ and using the ellipticity of B, it follows that

$$\|u_m''(t)\|_2^2 + \alpha\,\|\nabla u_m'(t)\|_2^2 \le \int_0^t \Big(\|f'(s)\|_2^2 + \|u_m''(s)\|_2^2\Big)ds + \|u_m''(0)\|_2^2 + \left\|\nabla u_m^1\right\|_2^2.$$

Using the Gronwall lemma and (3.43), we deduce that

$$\begin{aligned}\|u_m''\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega_S))} + \|\nabla u_m'\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega_S))} \le \\ c\Big(1 + \|u^1\|_{V_S}^\rho + \|h^0\|_{L^2(\Omega_S)} + \|f(0)\|_2 + \|f'\|_{L^2(\Omega_S\times(0,T))}\Big).\end{aligned} \tag{3.45}$$

Third estimate : Concerning the nonlinear term g, from (3.16), (3.30) and since $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2\rho}(\Omega)$ is continuous, one has

$$\int_{\Omega_S} |g(u_m'(t))|^2\,dx \le 2\,{c_2}^2\Big(|\Omega| + \|u_m'(t)\|_{L^{2\rho}(\Omega_S)}^{2\rho}\Big) \le c\Big(|\Omega| + \|u_m'(t)\|_{V_S}^{2\rho}\Big).$$

This, together with (3.45), implies that there exist two constants c and c' independent of m, such that

$$\begin{aligned}\|g(u_m')\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega_S))} &\le c\Big(1 + \|u_m'\|_{L^\infty(0,T;V_S)}^\rho\Big) \\ &\le c'\Big(1 + \|u^1\|_{V_S}^\rho + \|h^0\|_{L^2(\Omega_S)} + \|f(0)\|_2 + \|f'\|_{L^2(\Omega_S\times(0,T))}\Big)^\rho.\end{aligned} \tag{3.46}$$

3.4.3 Limit of the approximate problem

Combining (3.38) and (3.45), we have

$$\left\{\begin{aligned}&\|u_m\|_{L^\infty(0,T;V_S)} + \|u_m'\|_{L^\infty(0,T;V_S)} + \|u_m''\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega_S))} \le \\ &\qquad c\Big(1 + \|u^0\|_{V_S} + \|u^1\|_{V_S}^\rho + \|h^0\|_{L^2(\Omega_S)} + \|f(0)\|_{L^2(\Omega_S)} \\ &\qquad\qquad + \|f\|_{L^2(\Omega_S\times(0,T))} + \|f'\|_{L^2(\Omega_S\times(0,T))}\Big),\end{aligned}\right. \tag{3.47}$$

where c is a constant independent of $m \in \mathbb{N}$.
From (3.28), (3.46) and this inequality, we deduce that there exists functions u and g_1 and a subsequence of (u_m) (still denoted (u_m)) such that

$$\begin{cases} i) \quad u_m \rightharpoonup u \quad \text{weakly * in } L^\infty(0,T;V_S), \\ ii) \quad u'_m \rightharpoonup u' \quad \text{weakly * in } L^\infty(0,T;V_S), \\ iii) \quad u''_m \rightharpoonup u'' \quad \text{weakly * in } L^\infty(0,T;L^2(\Omega_S)), \\ iv) \quad g(u'_m) \rightharpoonup g_1 \quad \text{weakly * in } L^\infty(0,T;L^2(\Omega_S)). \end{cases} \tag{3.48}$$

This, together with the properties of lower semicontinuity of the weak convergence, gives (3.31). Moreover using Theorem 3.3, we have

$$u_m \to u \quad \text{strongly in } C^1([0,T];L^2(\Omega_S)). \tag{3.49}$$

To identify the term g_1, recall that by Lions Lemma ([31], p.12) if Ω is a bounded open set of $\mathbb{R}^n$, (h_ε) is a subsequence such that $\|h_\varepsilon\|_{L^p(\Omega)} \leq c$ for all ε and $1 \leq p < \infty$, if $h_\varepsilon(x) \to h(x)$ a.e. in Ω, then $h_\varepsilon \rightharpoonup h$ in $L^p(\Omega)$.

From (3.49) we can extract a subsequence of (u'_m) (still denoted (u'_m)) such that u'_m converges to u' a.e. in $\Omega_S \times (0,T)$ and in view of the regularity of g, it follows that $g(u'_m)$ converges to $g(u')$ a.e. in $\Omega_S \times (0,T)$. Therefore for t a.e. in $(0,T)$, we have

$$g_1 = g(u'). \tag{3.50}$$

Now, choose φ in $D(0,T)$ and v in V_S. Multiplying (3.36) by $(v,\omega_k)\varphi\omega_k$, summing over k from 1 to m and integrating over $(0,T)$, we get

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^T\int_{\Omega_S} u''_m \mathcal{P}_m v\,\varphi\,dxdt + \int_0^T\int_{\Omega_S} B\nabla u_m \nabla(\mathcal{P}_m v)\varphi\,dxdt + \int_0^T\int_{\Omega_S} g(u'_m)\mathcal{P}_m v\,\varphi\,dxdt \\ \displaystyle\qquad = \int_0^T\int_{\Omega_S} f\mathcal{P}_m v\,\varphi\,dxdt, \end{cases} \tag{3.51}$$

where $\mathcal{P}_m$ is defined in (3.33).
By convergences (3.34) and (3.48)-(3.50), we can pass to the limit in (3.51) as m tends to $+\infty$ to get

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^T\int_{\Omega_S} u'' v\,\varphi\,dxdt + \int_0^T\int_{\Omega_S} B\nabla u \nabla v\,\varphi\,dxdt + \int_0^T\int_{\Omega_S} g(u')\,v\,\varphi\,dxdt \\ \displaystyle\qquad = \int_0^T\int_{\Omega_S} fv\,\varphi\,dxdt, \qquad \forall\, v \in V_S, \ \ \forall\, \varphi \in D(0,T). \end{cases} \tag{3.52}$$

Convergences (3.34) and (3.49) imply that the solution u satisfies the initial conditions of (3.27), which concludes the proof of the existence of a solution u of problem (3.27).

3.4.4 Uniqueness

Let u and v two solutions of (3.27) and define $w = u - v$. This function satisfies

$$\left\{\begin{array}{rcll} w''-\operatorname{div}(B\nabla w)+g(u')-g(v') & = & 0 & \text{in } \Omega_S\times(0,T),\\ w & = & 0 & \text{on } \partial\Omega\times(0,T),\\ B\nabla w\,.\,\nu & = & 0 & \text{on } \partial S\times(0,T),\\ w(x,0) & = & 0 & \text{in } \Omega_S,\\ w'(x,0) & = & 0 & \text{in } \Omega_S. \end{array}\right. \tag{3.53}$$

Taking w' as test function in (3.53), we get

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|w'(t)\|_2^2+(B\nabla w(t),\nabla w(t))\right)+\int_{\Omega_S}(g(u')-g(v'))(u'-v')dx=0.$$

In view of the hypotheses of monotony on g anc the ellipticity of B, it follows that

$$\frac{d}{dt}\left(\|w'(t)\|_2^2+\alpha\|\nabla w(t)\|_2^2\right)\leq 0. \tag{3.54}$$

Integrating (3.54) over $(0,t)$, we have

$$\|w'(t)\|_2^2+\alpha\|\nabla w(t)\|_2^2\leq\|w'(0)\|_2^2+\alpha\|\nabla w(0)\|_2^2=0.$$

Therefore $\|w'(t)\|_2=\|\nabla w(t)\|_2=0$, which together with 3.54 implies $u=v$.

3.4.5 Proof of Theorem 3.4

We show here that Theorem 3.4 can be obtained as a particular case of Theorem 3.6. To do so, let us choose $S=S_\varepsilon$, $V_S=V_\varepsilon$, $B=A^\varepsilon$ and $Q=Q_\varepsilon$. Due to (3.9), we have $c_{S_\varepsilon}=c_0$, which is independent of ε. Then Theorem 3.6 provides the existence and uniqueness of a solution of problem (3.12) as well as the following a priori estimates :

$$\left\{\begin{array}{l} \|u_\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;V_\varepsilon)}+\|u'_\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;V_\varepsilon)}+\|u''_\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega_\varepsilon))}\leq\\ \qquad c\Big(1+\|u^0_\varepsilon\|_{V_\varepsilon}+\|u^1_\varepsilon\|^\rho_{V_\varepsilon}+\|h^0_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}+\|f_\varepsilon(0)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}\\ \qquad\qquad+\|f_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon\times(0,T))}+\|f'_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon\times(0,T))}\Big), \end{array}\right.$$

where the constant c depends only on c_0, c_2, n, ρ, T and Ω, and does not depends on ε.

Remark 3.2 The existence of a weaker solution of (3.12) can be proved either by the Galerkin method or the Hille-Yoshida theorem under the weaker assumption $(u^0_\varepsilon,u^1_\varepsilon)\in V_\varepsilon\times L^2(\Omega_\varepsilon)$. But this is not enough to study the asymptotic behaviour of problem (3.12). Indeed, due to the presence of the holes, this does not allow to identify the limit of $\widetilde{g(u'_\varepsilon)}=\chi_\varepsilon g(P_\varepsilon u'_\varepsilon)$, since χ_ε being the characteristic function of the set Ω_ε converges only weakly. Hence, we need the strong convergence of the term $g(P_\varepsilon u'_\varepsilon)$.

3.5 Homogenization result

In this section we prove Theorem 3.5. First, we identify the limit of the non-linear term $g(u'_\varepsilon)$, then we apply an homogenization result proved in [16] for the linear case together with uniqueness arguments.

Proposition 3.7 *Under the hypotheses of Theorem 3.5, there exist a subsequence of (u_ε) (still denoted (u_ε)) and a function u such that*

$$\begin{cases} i) & P_\varepsilon u_\varepsilon \rightharpoonup u \quad \textit{weakly * in } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)), \\ ii) & P_\varepsilon u'_\varepsilon \rightharpoonup u' \quad \textit{weakly * in } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)), \\ iii) & P_\varepsilon u''_\varepsilon \rightharpoonup u'' \quad \textit{weakly * in } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)). \end{cases} \tag{3.55}$$

and

$$\widetilde{g(u'_\varepsilon)} \rightharpoonup \theta g(u') \quad \textit{weakly * in } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)). \tag{3.56}$$

where P_ε is the extension operator introduced in Lemma 3.2.

Proof. In view of (3.11), estimate (3.19), (3.20) and (3.21), we have (3.55), moreover from Theorem 3.3

$$\begin{cases} i) & P_\varepsilon u_\varepsilon \to u \quad \text{strongly in } C([0,T];L^2(\Omega)), \\ ii) & P_\varepsilon u'_\varepsilon \to u' \quad \text{strongly in } C([0,T];L^2(\Omega)). \end{cases} \tag{3.57}$$

From estimate (3.46) and the weak lower semicontinuity property, we have

$$\|g(u'_\varepsilon)\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega_\varepsilon))} \leq c\left(1 + \left\|u^1_\varepsilon\right\|^\rho_{V_\varepsilon} + \left\|h^0_\varepsilon\right\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \|f_\varepsilon(0)\|_2 + \|f'_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon\times(0,T))}\right)^\rho, \tag{3.58}$$

where c is a constant independent of ε.
Therefore, in view of (3.6), (3.20), (3.21) and (3.58), there exists a function g_0 such that (up to a subsequence)

$$\widetilde{g(u'_\varepsilon)} \rightharpoonup g_0 \quad \text{weakly * in } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)). \tag{3.59}$$

Let us identify g_0. Observes first that from (3.57), (3.58), the regularity of g and making use of the Lions lemma as in (3.51), one has (up to a subsequence)

$$g(P_\varepsilon u'_\varepsilon) \rightharpoonup g(u') \quad \text{weakly * in } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)). \tag{3.60}$$

Let us prove that there exists a subsequence of (u_ε) (still denoted (u_ε)) such that

$$g(P_\varepsilon u'_\varepsilon) \longrightarrow g(u') \quad \text{strongly in } L^1(\Omega\times(0,T)). \tag{3.61}$$

To do so, let us check that

$$\begin{cases} i) & \dfrac{d}{dt}\left(g(P_\varepsilon u'_\varepsilon)\right) \quad \text{is bounded in } \; L^\infty(0,T;L^1(\Omega)), \\ ii) & g(P_\varepsilon u'_\varepsilon) \quad \text{is bounded in } \; L^\infty(0,T;W^{1,1}(\Omega)). \end{cases} \tag{3.62}$$

Using the Cauchy-Schwartz inequality and (3.15), we have for any $t \in (0,T)$

$$\begin{aligned} \left(\int_\Omega \frac{d}{dt}\left(g(P_\varepsilon u'_\varepsilon(t))\right)dx\right)^2 &= \left(\int_\Omega P_\varepsilon u''_\varepsilon(t) g'(P_\varepsilon u'_\varepsilon(t))dx\right)^2 \\ &\leq \int_\Omega (P_\varepsilon u''_\varepsilon(t))^2\,dx \int_\Omega \left(g'(P_\varepsilon u'_\varepsilon(t))\right)^2\,dx \\ &\leq \|P_\varepsilon u''_\varepsilon\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}\int_\Omega {c_1}^2\left(1+|P_\varepsilon u'_\varepsilon(t)|^{\rho-1}\right)^2 \\ &\leq \|P_\varepsilon u''_\varepsilon\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}\left(2{c_1}^2|\Omega| + 2{c_1}^2\int_\Omega |P_\varepsilon u'_\varepsilon(t)|^{2(\rho-1)}\,dx\right), \end{aligned} \tag{3.63}$$

where c_1 is the constant introduced in (3.15).
Observe that if $2(\rho-1)\leq 1$, then for any t fixed in $[0,T]$

$$\int_\Omega |P_\varepsilon u'_\varepsilon(x,t)|^{2(\rho-1)}\,dx$$

$$= \int_{\{x\in\Omega,|P_\varepsilon u'_\varepsilon(x,t)|\leq 1\}} |P_\varepsilon u'_\varepsilon(x,t)|^{2(\rho-1)}\,dx + \int_{\{x\in\Omega,|P_\varepsilon u'_\varepsilon(x,t)|>1\}} |P_\varepsilon u'_\varepsilon(x,t)|^{2(\rho-1)}\,dx$$

$$\leq |\Omega| + \int_\Omega |P_\varepsilon u'_\varepsilon(x,t)|\,dx.$$

Since the embedding $H^1_0(\Omega)\hookrightarrow L^1(\Omega)$ is continuous, one has

$$\int_\Omega |P_\varepsilon u'_\varepsilon(t)|\,dx \leq c\left(\int_\Omega \left|\nabla\left(P_\varepsilon u'_\varepsilon(t)\right)\right|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{3.64}$$

where c is a constant independent of ε.
On the other hand, if $1<2(\rho-1)\leq \frac{2n}{n-2}$, the embedding $H^1_0(\Omega)\hookrightarrow L^{2(\rho-1)}(\Omega)$ being continuous, it follows that

$$\int_\Omega |P_\varepsilon u'_\varepsilon(t)|^{2(\rho-1)}\,dx \leq c\left(\int_\Omega \left|\nabla\left(P_\varepsilon u'_\varepsilon(t)\right)\right|^2\,dx\right)^{\rho-1}, \tag{3.65}$$

where c is a constant independent of ε.
From (3.55)ii, (3.55)iii, (3.63), (3.64) and (3.65), we can deduce (3.62)i.
The proof of (3.62)ii follows exactly the same outline by replacing $\|P_\varepsilon u''_\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}$ by $\|\nabla(P_\varepsilon u'_\varepsilon)\|_{L^\infty(0,T;(L^2(\Omega))^n)}$ which is also bounded from (3.55)ii.
Finally, applying Theorem 3.3 to (3.62) and considering (3.60), we obtain (3.61). This, together with (3.56), implies

$$\chi_\varepsilon g(P_\varepsilon u'_\varepsilon) \rightharpoonup g_0 = \theta g(u') \quad \text{weakly * in } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)),$$

which is exactly (3.56).

$\square$

To identify u as the solution of (3.24), we make use of a theorem proved for the linear case by D. Cioranescu and P. Donato in [16], that we recall below for the reader's convenience.

Theorem 3.8 *([16]) Let Ω_ε be an open set periodically perforated defined as in Section 2, suppose that A^ε satisfy (3.7) and (3.8) and that u_ε satisfies the following equation :*

$$\begin{cases} u''_\varepsilon - div\,(A^\varepsilon\nabla u_\varepsilon) = F_\varepsilon & \text{in } \Omega_\varepsilon\times(0,T),\\ u_\varepsilon = 0 & \text{on } \partial\Omega\times(0,T),\\ A^\varepsilon\nabla u_\varepsilon\,.\,\nu = 0 & \text{on } \partial S_\varepsilon\times(0,T),\\ u_\varepsilon(x,0) = u^0_\varepsilon & \text{in } \Omega_\varepsilon,\\ u'_\varepsilon(x,0) = u^1_\varepsilon & \text{in } \Omega_\varepsilon, \end{cases} \tag{3.66}$$

under the hypotheses

$$\{u^0_\varepsilon, u^1_\varepsilon, F_\varepsilon\}\in V_\varepsilon\times L^2(\Omega_\varepsilon)\times L^2(\Omega_\varepsilon\times(0,T)). \tag{3.67}$$

If the data satisfy the convergence

$$\begin{cases} i) & Q_\varepsilon u^0_\varepsilon \rightharpoonup u^0 \quad \text{weakly in } H^1_0(\Omega),\\ ii) & \widetilde{u^1_\varepsilon} \rightharpoonup u^1 \quad \text{weakly in } L^2(\Omega),\\ iii) & \widetilde{F_\varepsilon} \rightharpoonup F \quad \text{weakly in } L^2(\Omega\times(0,T)), \end{cases} \tag{3.68}$$

where Q_ε is the extension operator defined in (3.9), then the solution u_ε of (3.66) satisfy the convergences

$$\begin{cases} P_\varepsilon u_\varepsilon \rightharpoonup u & \textit{weakly * in } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)), \\ P_\varepsilon u'_\varepsilon \rightharpoonup u' & \textit{weakly* in } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)), \\ \widetilde{A^\varepsilon \nabla u_\varepsilon} \rightharpoonup A^0 \nabla u & \textit{weakly * in } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)), \end{cases} \tag{3.69}$$

where P_ε is the operator introduced in Lemma 3.2 and u is the solution of the homogenized problem

$$\begin{cases} \theta u'' - div\,(A^0 \nabla u) &= F \quad in \;\; \Omega \times (0,T), \\ u &= 0 \quad on\; \partial\Omega \times (0,T), \\ u(x,0) &= u^0 \quad in\; \Omega, \\ u'(x,0) &= u^1 \quad in\; \Omega, \end{cases} \tag{3.70}$$

where the homogenized matrix A^0 is given by (3.25).

Proof of Theorem 3.5. Setting $F_\varepsilon = f_\varepsilon - g(u'_\varepsilon)$, where f_ε and g are given in (3.12) and (3.15) respectively, we obtain from (3.21) and (3.56),

$$\widetilde{F_\varepsilon} \rightharpoonup F = f - \theta g(u') \quad \text{weakly in } L^2(\Omega \times (0,T)) \tag{3.71}$$

Therefore, in view of (3.20) and (3.71), we can apply Theorem 3.8 to problem (3.12) with $F_\varepsilon = f_\varepsilon - g(u'_\varepsilon)$ which allows by uniqueness to identify u as the solution of (3.24) and give convergence (3.23)ii. Indeed, Theorem 3.6 written for $S = \emptyset$ gives the uniqueness of the solution of problem (3.24). This implies also that in (3.55) and (3.56), the convergences hold for the whole sequence (u_ε).

□

Chapitre 4

Homogénéisation de l'équation des ondes avec la méthode de l'éclatement périodique

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous nous proposons de retrouver le résultat d'homogénéisation de l'équation des ondes en utilisant la méthode de l'éclatement périodique. L'opérateur d'éclatement périodique $\mathcal{T}_\varepsilon$ dont la définition est rappelée en (4.7) pour les fonctions indépendantes du temps et en (4.18) pour celles qui en dépendent, permet d'associer à toute fonction v appartenant à $L^p(\Omega)$ une fonction à deux variables $\mathcal{T}_\varepsilon(v)$ appartenant à $L^p(\Omega \times Y)$ où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et Y est une cellule de périodicité. Une propriété intéressante de cet opérateur est qu'il permet de transformer l'intégrale d'une fonction sur Ω en une intégrale sur $\Omega \times Y$. Cela est rappelé dans la proposition 4.2, en effet

$$\int_\Omega v(x)\,dx \sim \frac{1}{|Y|}\int_{\Omega\times Y} \mathcal{T}_\varepsilon(v)(x,y)\,dx\,dy.$$

L'avantage d'utiliser cet opérateur dans l'homogénéisation de différentes équations aux dérivées partielles est qu'il permet de transformer toute suite de fonctions périodiques fortement oscillantes de la forme $\{f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\}$ en une suite constante $\{f(y)\}$. Cela simplifie la démonstration du résultat d'homogénéisation puisqu'on a pas besoin d'utiliser de techniques particulières pour contourner la difficulté due aux produits de convergences faibles.
Ensuite nous montrons un résultat de correcteur permettant d'améliorer la convergence du gradient de la solution u_ε de l'équation des ondes vers le gradient de la solution ∇u du problème homogénéisé. Tout d'abord, dans les deux premiers paragraphes nous rappelons les propriétés de l'opérateur d'éclatement périodique pour les fonctions de $L^p(\Omega)$ et ensuite pour celles de $L^q(0,T;L^p(\Omega))$.
Cette opération de dilation effectué par l'opérateur d'éclatement a tout d'abord été utilisée dans différents papiers comme celui de T. Harbogast, J. Douglas et U. Hornung en 1990 ([4]) afin d'étudier l'homogénéisation d'un problème dans un domaine présentant une double porosité ou celui de G. Allaire, C. Conca et M. Vanninathan ([3]) en combinaison avec la méthode de convergence à double échelle. Ensuite en 2002, D. Cioranescu, A. Damlamian et G. Griso ont introduit l'opérateur d'éclatement périodique $\mathcal{T}_\varepsilon$ et ont étudié ses propriétés tout d'abord dans [14] puis dans [15] pour une étude plus détaillée.

Pour décrire plus précisement le problème, soit $T > 0$ un réel strictement positif, Ω un ouvert de borné de $\mathbb{R}^n$ où $n \geq 2$ et ε le terme général d'une suite de réels positifs convergeant vers 0. On considère le problème suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcll} u_\varepsilon'' - \operatorname{div}(A^\varepsilon \nabla u_\varepsilon) &=& f_\varepsilon & \text{dans } \Omega \times (0,T), \\ u_\varepsilon &=& 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (0,T), \\ u_\varepsilon(x,0) &=& u_\varepsilon^0 & \text{dans } \Omega, \\ u_\varepsilon'(x,0) &=& u_\varepsilon^1 & \text{dans } \Omega, \end{array}\right. \tag{4.1}$$

où $\{f_\varepsilon\}$ est une suite de fonctions appartenant à $L^2(\Omega \times (0,T))$ et $\{A^\varepsilon\}$ une suite de matrices symétriques, coercives et Y-périodiques telles que

$$A^\varepsilon(x) = A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \quad \text{p.p. } x \in \mathbb{R}^n.$$

Dans un premier temps, on montre dans le théorème 4.21 que sous les bonnes hypothèses de convergence des données initiales u_ε^0, u_ε^1 et f_ε, nous avons les convergences suivantes :

$$\left\{\begin{array}{ll} i) & u_\varepsilon \rightharpoonup u \quad \text{faiblement * dans } L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega)), \\ ii) & u_\varepsilon' \rightharpoonup u' \quad \text{faiblement * dans } L^\infty(0,T; L^2(\Omega)), \end{array}\right. \tag{4.2}$$

et qu'il existe une fonction $\widehat{u} \in C([0,T]; L^2(\Omega, H^1_{per}(Y)))$ telle que

$$\left\{\begin{array}{ll} i) & \mathcal{T}_\varepsilon(u_\varepsilon) \rightharpoonup u \quad \text{faiblement * dans } L^\infty(0,T; L^2(\Omega, H^1(Y))), \\ ii) & \mathcal{T}_\varepsilon(\nabla u_\varepsilon) \rightharpoonup \nabla_x u + \nabla_y \widehat{u} \quad \text{faiblement * dans } L^\infty(0,T; (L^2(\Omega \times Y))^n), \end{array}\right. \tag{4.3}$$

où $\mathcal{T}_\varepsilon$ est l'opérateur d'éclatement périodique et u la solution du problème homogénéisé

$$\left\{\begin{array}{rcll} u'' - \operatorname{div}(A^0 \nabla u) &=& f & \text{dans } \Omega \times (0,T), \\ u &=& 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (0,T), \\ u(x,0) &=& u^0 & \text{dans } \Omega, \\ u'(x,0) &=& u^1 & \text{dans } \Omega. \end{array}\right. \tag{4.4}$$

La matrice A^0 est la matrice homogénéisée associée à A^ε, dont la définition est rappelée en (4.32).
On montre ensuite dans le théorème 4.26 que sous des hypothèses plus fortes sur les données initiales u_ε^0, u_ε^1 et f_ε, on a le résultat de correcteur suivant :

$$\left\{\begin{array}{ll} i) & \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \|u_\varepsilon' - u'\|_{L^2(\Omega \times (0,T))} = 0, \\ ii) & \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \|\nabla u_\varepsilon - \nabla u - \mathcal{U}_\varepsilon(\nabla_y \widehat{u})\|_{L^p(0,T;(L^2(\Omega \times Y))^n)} = 0. \end{array}\right. \tag{4.5}$$

pour tout $p \in [1, +\infty[$ et où $\mathcal{U}_\varepsilon$ est l'opérateur de moyennisation. On rappelle sa définition en (4.15) pour les fonctions de $L^p(\Omega \times Y)$ et en (4.21) pour celles de $L^q(0,T; L^p(\Omega \times Y))$. Il constitue l'adjoint de l'opérateur d'éclatement $\mathcal{T}_\varepsilon$ ainsi que son inverse à gauche.
L'introduction d'hypothèses plus fortes sur les données initiales est nécessaire pour montrer les convergences (4.5). En effet la démonstration repose sur la convergence de l'anergie E_ε associée au problème (4.1) vers l'énergie E_0 du problème homogénéisée. C'est-à-dire

$$\int_\Omega (u_\varepsilon')^2\,dx + \int_\Omega A^\varepsilon \nabla u_\varepsilon \nabla u_\varepsilon\,dx \to \int_\Omega (u')^2\,dx + \int_\Omega A^0 \nabla u \nabla u\,dx \qquad \text{fortement dans } L^p(0,T).$$

C'est cette dernière convergence donnée dans la proposition 4.24 qui nécessite les hypothèses supplémentaires.
Dans la proposition 4.24 on décompose l'énergie E_ε en deux parties

$$E_\varepsilon = E_{\mathcal{T}_\varepsilon} + E_{\Lambda_\varepsilon},$$

où $E_{\mathcal{T}_\varepsilon}$ correspond à la partie éclatée de l'énergie et E_{Λ_ε} correspond au reste. On montre que la partie éclatée $E_{\mathcal{T}_\varepsilon}$ converge vers la même limite E_0 que E_ε dans $L^p(0,T)$ et que le reste E_{Λ_ε} converge vers 0 dans $L^p(0,T)$, pour tout $p \in [1,+\infty[$.
On rappelle que la nécessité d'introduire des hypothèses plus fortes a été démontré dans le cadre plus général de la H-convergence dans le papier de S. Brahim-Otsmane, G.A. Francfort et F. Murat dans [8].

4.2 Définitions et propriétés de l'opérateur d'éclatement périodique

4.2.1 L'opérateur d'éclatement $\mathcal{T}_\varepsilon$

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ et soit $Y =]0,b_1[\times \ldots \times]0,b_n[$ où $(b_1,\ldots,b_n) \in \mathbb{R}^n$ une cellule de référence. Soit $x \in \mathbb{R}^n$, on note par $[x]_Y$ la partie entière de x par rapport à la cellule Y, il s'agit de l'unique combinaison d'entier $(k_1,\ldots,k_n)$ telle que $x-(k_1b_1,\ldots,k_nb_n)$ appartienne à Y. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on définit $\{x\}_Y = x - [x]_Y \in Y$, c'est la partie fractionnaire de x par rapport à Y.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a donc

$$x = \varepsilon\left(\left[\frac{x}{\varepsilon}\right]_Y + \left\{\frac{x}{\varepsilon}\right\}_Y\right).$$

Dans la suite nous allons utiliser les notations suivantes :

$$\begin{cases} \widehat{\Omega_\varepsilon} = \operatorname{int}\left\{x \in \Omega, \left(\varepsilon\left[\frac{x}{\varepsilon}\right]_Y + \varepsilon\overline{Y}\right) \subset \Omega\right\}, \\ \Lambda_\varepsilon = \Omega \setminus \widehat{\Omega_\varepsilon}, \\ \Theta_\varepsilon = \{h \in \mathbb{Z}^n, \varepsilon(\xi_h + Y) \subset \widehat{\Omega_\varepsilon}\}, \\ \text{où } \xi_h = (h_1b_1,\ldots,h_nb_n). \end{cases} \tag{4.6}$$

L'ensemble $\widehat{\Omega_\varepsilon}$ est le plus grand sous-ensemble de cellules εY contenues dans Ω, tandis que Λ_ε est le sous-ensemble de Ω contenant les cellules εY qui intersectent le bord de Ω.

Définition 4.1 *Pour toute fonction φ appartenant à $L^p(\Omega)$, $p \in [1,+\infty]$, l'opérateur d'éclatement périodique $\mathcal{T}_\varepsilon$ de $L^p(\Omega\times Y)$ est défini de la façon suivante :*

$$\mathcal{T}_\varepsilon(\varphi)(x,y) = \begin{cases} \varphi\left(\varepsilon\left[\frac{x}{\varepsilon}\right]_Y + \varepsilon y\right) & p.p.\ pour\ (x,y) \in \widehat{\Omega_\varepsilon}\times Y, \\ 0 & p.p.\ pour\ (x,y) \in \Lambda_\varepsilon \times Y. \end{cases} \tag{4.7}$$

D'après cette définition il est évident que $\mathcal{T}_\varepsilon$ est un opérateur linéaire, (voir [14]) de plus il vérifie les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} i) \quad \mathcal{T}_\varepsilon(vw) = \mathcal{T}_\varepsilon(v)\mathcal{T}_\varepsilon(w), \quad \text{pour tout } v,w \in L^p(\Omega), \\ ii) \quad \mathcal{T}_\varepsilon(\varphi)\left(x,\left\{\frac{x}{\varepsilon}\right\}_Y\right) = \varphi(x), \quad \text{pour tout } \varphi \in L^p(\Omega), \\ iii) \quad \mathcal{T}_\varepsilon(\varphi_\varepsilon)(x,y) = \varphi(y), \quad \text{pour tout } \varphi \in L^p(Y)\ Y\text{-périodique sur } \mathbb{R}^n \\ \quad \text{où } \varphi_\varepsilon(x) = \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \text{ pour tout } x \in \widehat{\Omega_\varepsilon}. \end{cases} \tag{4.8}$$

Proposition 4.2 *([14]) Soient $\varphi \in L^1(\Omega)$ et $w \in L^p(\Omega)$ où $p \in [1, +\infty[$, l'opérateur d'éclatement $\mathcal{T}_\varepsilon$ vérifie les propriétés suivantes :*

$$\begin{cases} i) & \mathcal{T}_\varepsilon \text{ est linéaire continu de } L^p(\Omega) \text{ dans } L^p(\Omega \times Y) \text{ pour tout } p \in [1, +\infty[, \\ ii) & \dfrac{1}{|Y|}\displaystyle\int_{\Omega \times Y} \mathcal{T}_\varepsilon(\varphi)(x, y)\, dx\, dy = \int_\Omega \varphi(x)\, dx - \int_{\Lambda_\varepsilon} \varphi(x)\, dx = \int_{\widehat{\Omega_\varepsilon}} \varphi(x)\, dx, \\ iii) & \dfrac{1}{|Y|}\displaystyle\int_{\Omega \times Y} |\mathcal{T}_\varepsilon(\varphi)|\, dx\, dy \leq \int_\Omega |\varphi|\, dx, \\ iv) & \left|\displaystyle\int_\Omega \varphi\, dx - \frac{1}{|Y|}\int_{\Omega \times Y} \mathcal{T}_\varepsilon(\varphi)\, dx\, dy\right| \leq \int_{\Lambda_\varepsilon} |\varphi|\, dx, \\ v) & \|\mathcal{T}_\varepsilon(w)\|_{L^p(\Omega \times Y)} \leq |Y|^{\frac{1}{p}} \|w\|_{L^p(\Omega)}, \\ vi) & \nabla_y(\mathcal{T}_\varepsilon(w)) = \varepsilon \mathcal{T}_\varepsilon(\nabla_x w), \quad \text{pour tout } w \in W^{1,p}(\Omega). \end{cases} \tag{4.9}$$

La propriété ii) de cette proposition est utile puisqu'elle permet d'exprimer la valeur de l'intégrale d'une fonction φ sur Ω par rapport à celle de son éclatée $\mathcal{T}_\varepsilon(\varphi)$ sur $\Omega \times Y$.

Définition 4.3 *Soit $\{\varphi_\varepsilon\}$ une suite de $L^1(\Omega)$. On dit que la suite $\{\varphi_\varepsilon\}$ satisfait le critère d'éclatement intégral (u.c.i. unfolding criterion for integrals) si*

$$\int_{\Lambda_\varepsilon} |\varphi_\varepsilon|\, dx \to 0.$$

Grâce à (4.9)ii, il est clair qu'une telle suite vérifie :

$$\int_\Omega \varphi_\varepsilon\, dx - \frac{1}{|Y|}\int_{\Omega \times Y} \mathcal{T}_\varepsilon(\varphi_\varepsilon)\, dx\, dy \to 0.$$

Si une suite $\{\varphi_\varepsilon\}$ vérifie le u.c.i., on note

$$\int_\Omega \varphi_\varepsilon\, dx \overset{\mathcal{T}_\varepsilon}{\simeq} \frac{1}{|Y|}\int_{\Omega \times Y} \mathcal{T}_\varepsilon(\varphi_\varepsilon)\, dx\, dy.$$

Rappelons une proposition utile sur le critère d'éclatement intégral démontrée dans [14].

Proposition 4.4 *([14])*
1) Soit $\{u_\varepsilon\}$ une suite bornée de $L^p(\Omega)$ où $p \in [1, +\infty]$ et $v \in L^{p'}(\Omega)$ où $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Alors

$$\int_\Omega u_\varepsilon v\, dx \overset{\mathcal{T}_\varepsilon}{\simeq} \frac{1}{|Y|}\int_{\Omega \times Y} \mathcal{T}_\varepsilon(u_\varepsilon)\mathcal{T}_\varepsilon(v)\, dx\, dy. \tag{4.10}$$

2) Supposons que $\partial\Omega$ soit borné. Si $\{u_\varepsilon\}$ est une suite bornée de $L^p(\Omega)$ et $\{v_\varepsilon\}$ une suite bornée de $L^q(\Omega)$ où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} < 1$, alors

$$\int_\Omega u_\varepsilon v_\varepsilon\, dx \overset{\mathcal{T}_\varepsilon}{\simeq} \frac{1}{|Y|}\int_{\Omega \times Y} \mathcal{T}_\varepsilon(u_\varepsilon)\mathcal{T}_\varepsilon(v_\varepsilon)\, dx\, dy. \tag{4.11}$$

Maintenant nous allons rappeler les propriétés de convergence de l'opérateur d'éclatement.

Proposition 4.5 *Soit $p \in [1, +\infty[$, $\varphi \in L^p(\Omega)$ et $\{\varphi_\varepsilon\}$ une suite de $L^p(\Omega)$. On a*

i) $\quad \mathcal{T}_\varepsilon(\varphi) \longrightarrow \varphi \quad$ *fortement dans $L^p(\Omega \times Y)$.*

ii) Si $\{\varphi_\varepsilon\}$ converge fortement vers φ dans $L^p(\Omega)$, alors

$$\mathcal{T}_\varepsilon(\varphi_\varepsilon) \to \varphi \quad \textit{fortement dans } L^p(\Omega \times Y).$$

iii) Si $\{\varphi_\varepsilon\}$ converge faiblement vers φ dans $L^p(\Omega)$, alors

$$\mathcal{T}_\varepsilon(\varphi_\varepsilon) \rightharpoonup \varphi \quad \textit{faiblement dans } L^p(\Omega \times Y).$$

iv) Si il existe une fonction $\widehat{\varphi} \in L^p(\Omega \times Y)$ telle que

$$\mathcal{T}_\varepsilon(\varphi_\varepsilon) \rightharpoonup \widehat{\varphi} \quad \textit{faiblement dans } L^p(\Omega \times Y),$$

alors

$$\varphi_\varepsilon \rightharpoonup \frac{1}{|Y|}\int_Y \widehat{\varphi}(.,y)\,dy \quad \textit{faiblement dans } L^p(\Omega).$$

De plus si on a

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} |Y|^{\frac{1}{p}} \|\varphi_\varepsilon\|_{L^p(\Omega)} \le \|\widehat{\varphi}\|_{L^p(\Omega\times Y)},$$

alors

$$\mathcal{T}_\varepsilon(\varphi_\varepsilon) \to \widehat{\varphi} \quad \textit{fortement dans } L^p(\Omega \times Y).$$

Remarquons que la réciproque de ii) n'est pas vérifiée. En effet, supposons que Ω est borné et prenons une fonction $\varphi \in L^p(Y)$ qui est Y-périodique. Si on considère la suite $\{\varphi_\varepsilon\}$ où φ_ε est définie par $\varphi_\varepsilon = \varphi\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right)$ alors d'après (4.8)iii la suite $\mathcal{T}_\varepsilon(\varphi_\varepsilon)(x,y) = \varphi(y)$ converge fortement vers φ, tandis que φ_ε converge seulement faiblement vers la moyenne sur Y de φ dans $L^p(\Omega)$ d'après des résultats classiques.

4.2.2 Décomposition Macro-micro

Supposons tout d'abord que la frontière $\partial\Omega$ de Ω est bornée et lipschitzienne. Dans ce cas il existe un opérateur de prolongement linéaire continu $\mathcal{P}$ de $W^{1,p}(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, avec $p \in [1,+\infty[$ tel que :

$$\|\mathcal{P}(\varphi)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|\nabla\mathcal{P}(\varphi)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le C\,\|\varphi\|_{W^{1,p}(\Omega)}, \quad \forall\,\varphi \in W^{1,p}(\Omega),$$

où C est une constante dépendante seulement de $\partial\Omega$.
La décomposition Macro-micro consiste à décomposer une fonction $\varphi \in W^{1,p}(\Omega)$ sous la forme suivante :

$$\varphi = \mathcal{Q}_\varepsilon(\varphi) + \mathcal{R}_\varepsilon(\varphi),$$

où $\mathcal{Q}_\varepsilon(\varphi)$ est une approximation de φ ayant le même comportement que cette fonction et $\mathcal{R}_\varepsilon(\varphi)$ un reste d'ordre ε servant à capturer les oscillations de φ.

Cette décomposition a été introduite dans [14], elle intervient dans l'étude de la convergence des suites $\{\varphi_\varepsilon\}$ et $\{\nabla\varphi_\varepsilon\}$ où $\{\varphi_\varepsilon\} \subset W^{1,p}(\Omega)$. En effet si une suite $\{\varphi_\varepsilon\}$ est bornée dans $W^{1,p}(\Omega)$ alors les suites $\{\varphi_\varepsilon\}$ et $\{\mathcal{T}_\varepsilon(\varphi_\varepsilon)\}$ ont la même limite φ dans $L^p(\Omega)$ et dans $L^p(\Omega \times Y)$ respectivement. Ce qui n'est généralement pas le cas des suites $\{\nabla\varphi_\varepsilon\}$ et $\{\mathcal{T}_\varepsilon(\nabla\varphi_\varepsilon)\}$, la première converge vers $\nabla\varphi$ tandis que la seconde converge vers une fonction s'écrivant sous la forme $\nabla\varphi + r$ où le terme r provient de $\mathcal{T}_\varepsilon(\nabla(\mathcal{R}_\varepsilon\varphi_\varepsilon))$.
Avant de définir $\mathcal{Q}_\varepsilon$ et $\mathcal{R}_\varepsilon$, nous allons définir le domaine $\widetilde{\Omega_\varepsilon}$ de la façon suivante : Pour tout $h = (h_1,\dots,h_n) \in \mathbb{Z}^n$, posons $\xi_h = (h_1 b_1,\dots,h_n b_n)$ où $Y =]0,b_1[\times\dots\times]0,b_n[$ et

$$\widetilde{\Omega_\varepsilon} = \bigcup_{(\varepsilon\xi_h + \varepsilon\overline{Y}) \cap \overline{\Omega} \neq \emptyset} \{\varepsilon\xi_h + \varepsilon\overline{Y}\}. \tag{4.12}$$

Notons que $\widetilde{\Omega}_\varepsilon$ est la plus petite réunion de cellules de εY contenant Ω, tandis que $\widehat{\Omega_\varepsilon}$ défini en (4.6) est la plus grande réunion de cellules de εY contenu dans Ω.

Définition 4.6 *Pour toute fonction $\varphi \in W^{1,p}(\Omega)$, on commence par définir $\mathcal{Q}_\varepsilon(\varphi)$ sur les noeuds $\varepsilon\xi_h$ inclus dans $\widetilde{\Omega_\varepsilon}$ en utilisant une méthode de moyennisation, c'est à dire*

$$\mathcal{Q}_\varepsilon(\varphi)(\varepsilon\xi_h) = \frac{1}{|Y|}\int_Y \mathcal{P}(\varphi)(\varepsilon\xi_h + z)\, dz. \tag{4.13}$$

Ensuite on définit $\mathcal{Q}_\varepsilon$ comme la restriction à Ω de la Q_1-interpolée de la fonction $\mathcal{Q}_\varepsilon(\varphi)(\varepsilon\xi_h)$ comme dans la méthode des éléments finis (voir [14]).

La Q_1-interpolée de $\mathcal{Q}_\varepsilon(\varphi)(\varepsilon\xi_h)$ est définie de la façon suivante pour $x \in \varepsilon(\xi_h + Y))$ et $x \notin \{\varepsilon\xi_h, h \in \mathbb{Z}^n\}$:
Posons pour tout $\kappa = (\kappa_1, \dots, \kappa_n) \in \{0,1\}^n$ et pour tout $l \in \{1, \dots, n\}$

$$\overline{x_l}^{(\kappa_l)} = \begin{cases} \dfrac{x_l - \varepsilon h_l b_l}{\varepsilon}, & \text{si } \kappa_l = 1, \\ 1 - \dfrac{x_l - \varepsilon h_l b_l}{\varepsilon}, & \text{si } \kappa_l = 0, \end{cases}$$

où $h_l b_l$ est la l-ième composante de ξ_h.

Alors

$$\mathcal{Q}_\varepsilon(\varphi)(x) = \sum_{\kappa \in \{0,1\}^n} \mathcal{Q}_\varepsilon(\varphi)(\varepsilon\xi_h + \varepsilon\kappa)\overline{x_1}^{(\kappa_1)} \dots \overline{x_n}^{(\kappa_n)}$$

L'idée d'utiliser ce type d'interpolation avait été tout d'abord employé par G. Griso dans [26] avant d'être reprise par D. Cioranescu, A. Damlamian et G. Griso pour étudier les propriétés de convergence de l'opérateur d'éclatement périodique de gradient de fonction.
Rappelons quelques propriétés des opérateurs $\mathcal{Q}_\varepsilon$ et $\mathcal{R}_\varepsilon$ démontrées dans [14].

Proposition 4.7 *([14]) Soit $\varphi \in W^{1,p}(\Omega)$, alors il existe une constante $c > 0$ indépendante de ε telle que*

$$\begin{cases} i) \ \|\mathcal{Q}_\varepsilon(\varphi)\|_{W^{1,p}(\Omega)} \le c\,\|\varphi\|_{W^{1,p}(\Omega)}, \\ ii) \ \|\mathcal{R}_\varepsilon(\varphi)\|_{L^2(\Omega)} \le \varepsilon\, c\,\|\varphi\|_{W^{1,p}(\Omega)}, \\ iii) \ \|\nabla\mathcal{R}_\varepsilon(\varphi)\|_{L^2(\Omega)} \le c\,\|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega)}. \end{cases}$$

Proposition 4.8 *([14]), ([15]) Soit $\{\varphi_\varepsilon\}$ une suite convergeant faiblement vers φ dans $W^{1,p}(\Omega)$. Alors il existe une sous-suite (aussi notée ε) et une fonction $\widehat{\varphi} \in L^p(\Omega; W^{1,p}_{per}(Y))$ telles que*

$$\begin{cases} i) \ \mathcal{Q}_\varepsilon(\varphi_\varepsilon) \rightharpoonup \varphi \quad \textit{faiblement dans } W^{1,p}(\Omega), \\ ii) \ \mathcal{T}_\varepsilon(\nabla\mathcal{Q}_\varepsilon(\varphi_\varepsilon)) \rightharpoonup \varphi \quad \textit{faiblement dans } L^p(\Omega), \\ iii) \ \mathcal{R}_\varepsilon(\varphi_\varepsilon) \to 0 \quad \textit{fortement dans } L^p(\Omega), \\ iv) \ \mathcal{T}_\varepsilon\left(\frac{1}{\varepsilon}\mathcal{R}_\varepsilon(\varphi_\varepsilon)\right) \rightharpoonup \widehat{\varphi} \quad \textit{faiblement dans } L^p(\Omega; W^{1,p}(Y)), \\ v) \ \mathcal{T}_\varepsilon(\nabla\varphi_\varepsilon) \rightharpoonup \nabla\varphi + \nabla_y\widehat{\varphi} \quad \textit{faiblement dans } L^p(\Omega \times Y). \end{cases} \tag{4.14}$$

4.2.3 Opérateur de moyennisation

Cet opérateur a été introduit dans [14], c'est l'adjoint formel de l'opérateur d'éclatement $\mathcal{T}_\varepsilon$. On le note $\mathcal{U}_\varepsilon$. Il permet notamment de montrer des résultats de correcteur dans l'homogénéisation de certaines équations aux dérivées partielles.

Définition 4.9 *([14]), ([15]) Soit $p \in [1, +\infty[$ et $\phi \in L^p(\Omega \times Y)$, l'opérateur de moyennisation $\mathcal{U}_\varepsilon : L^p(\Omega \times Y) \to L^p(\Omega)$ est défini de la façon suivante :*

$$\mathcal{U}_\varepsilon(\phi)(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{|Y|} \displaystyle\int_Y \phi\left(\varepsilon\left[\frac{x}{\varepsilon}\right] + \varepsilon z, \left\{\frac{x}{\varepsilon}\right\}\right) dz & \text{p.p. pour } x \in \widehat{\Omega}_\varepsilon, \\ 0 & \text{p.p. pour } x \in \Lambda_\varepsilon, \end{cases} \tag{4.15}$$

où $\widehat{\Omega}_\varepsilon$ et Λ_ε sont définis en (4.6).

L'opérateur $\mathcal{U}_\varepsilon$ est défini de façon à être l'adjoint de l'opérateur $\mathcal{T}_\varepsilon$ (voir [15]), c'est à dire que pour tout $\psi \in L^p(\Omega)$ et tout $\phi \in L^{p'}(\Omega \times Y)$ où $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, on a

$$\int_\Omega \mathcal{U}_\varepsilon(\phi)(x)\psi(x)\, dx = \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega \times Y} \phi(x, y)\mathcal{T}_\varepsilon(\psi)(x, y)\, dx\, dy. \tag{4.16}$$

Proposition 4.10 *([15]) Soit $p \in [1, +\infty[$ et $\phi \in L^p(\Omega \times Y)$. L'opérateur de moyennisation $\mathcal{U}_\varepsilon$ est linéaire continu de $L^p(\Omega \times Y)$ dans $L^p(\Omega)$ et vérifie les propriétés suivantes :*

$$\begin{cases} i)\ \ \|\mathcal{U}_\varepsilon(\phi)\|_{L^p(\Omega)} \le \dfrac{1}{|Y|^{\frac{1}{p}}} \|\phi\|_{L^p(\Omega \times Y)}, \\ ii)\ \mathcal{U}_\varepsilon(\mathcal{T}_\varepsilon(\phi))(x) = \begin{cases} \phi(x) & \text{p.p. pour } x \in \widehat{\Omega}_\varepsilon, \\ 0 & \text{p.p. pour } x \in \Lambda_\varepsilon, \end{cases} \\ iii)\ \mathcal{T}_\varepsilon(\mathcal{U}_\varepsilon(\phi))(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{|Y|} \displaystyle\int_Y \phi\left(\varepsilon\left[\frac{x}{\varepsilon}\right] + \varepsilon z, y\right) dz, & \text{p.p. pour } (x, y) \in \widehat{\Omega}_\varepsilon \times Y, \\ 0 & \text{p.p. pour } (x, y) \in \Lambda_\varepsilon \times Y, \end{cases} \end{cases} \tag{4.17}$$

où $\widehat{\Omega}_\varepsilon$ et Λ_ε sont définis en (4.6).

Remarquons que l'opérateur $\mathcal{U}_\varepsilon$ applique l'espace $L^p(\Omega \times Y)$ dans $L^p(\Omega)$, il permet de remplacer la fonction $x \mapsto \phi\left(x, \left\{\frac{x}{\varepsilon}\right\}\right)$ où $\phi \in L^p(\Omega \times Y)$ qui n'est en général pas mesurable.
Rappelons maintenant quelques propriétés de convergence de l'opérateur $\mathcal{U}_\varepsilon$.

Proposition 4.11 *([15]) Soit $p \in [1, +\infty[$.*

i) Si $\{\phi_\varepsilon\}$ est une suite bornée de $L^p(\Omega \times Y)$ convergeant faiblement vers ϕ dans $L^p(\Omega \times Y)$, alors

$$\mathcal{U}_\varepsilon(\phi_\varepsilon) \rightharpoonup \mathcal{M}_Y(\phi) = \frac{1}{|Y|} \int_Y \phi(., y)\, dy \quad \text{faiblement dans } L^p(\Omega).$$

ii) Si $\{\phi_\varepsilon\}$ est une suite de $L^p(\Omega \times Y)$ convergeant fortement vers ϕ dans $L^p(\Omega \times Y)$, alors

$$\mathcal{T}_\varepsilon(\mathcal{U}_\varepsilon(\phi_\varepsilon)) \to \phi \quad \text{fortement dans } L^p(\Omega \times Y).$$

iii) Soit $\{\varphi_\varepsilon\}$ une suite de $L^p(\Omega)$ et $\widehat{\varphi} \in L^p(\Omega \times Y)$. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

$$a)\ \mathcal{T}_\varepsilon(\varphi_\varepsilon) \to \widehat{\varphi} \quad \text{fortement dans } L^p(\Omega \times Y) \qquad \text{et} \qquad \int_{\Lambda_\varepsilon} |\varphi_\varepsilon|^p\, dx \to 0,$$

$$b)\ \varphi_\varepsilon - \mathcal{U}_\varepsilon(\widehat{\varphi}) \to 0 \quad \text{fortement dans } L^p(\Omega).$$

Remarque 4.12 *Notons que pour toute fonction φ appartenant à $L^p(\Omega \times Y)$, d'après le i) de la proposition précédente $\mathcal{U}_\varepsilon(\varphi)$ converge faiblement vers $\mathcal{M}_Y(\varphi)$ dans $L^p(\Omega)$. En revanche on a la convergence forte de $\mathcal{U}_\varepsilon(\varphi)$ vers φ si φ est indépendant de y.*

4.3 Eclatement périodique pour les fonctions dépendantes du temps

Dans ce paragraphe on s'intéresse à l'opérateur d'éclatement périodique pour les fonctions dépendantes d'une variable d'espace x et de temps t en considérant le temps comme un paramètre. On retrouve les mêmes résultats que ceux énoncés dans les paragraphes précédents pour les fonctions dépendant uniquement de variable spatiale.

Définition 4.13 *Soit $\varphi \in L^q(0,T;L^p(\Omega))$, $p \in [1,+\infty]$, $q \in [1,+\infty]$ et $T > 0$. En reprenant les notations de (4.6), on définit l'opérateur $\mathcal{T}_\varepsilon$ de $L^q(0,T;L^p(\Omega))$ dans $L^q(0,T;L^p(\Omega \times Y))$ en posant*

$$\mathcal{T}_\varepsilon(\varphi)(x,y,t) = \begin{cases} \varphi\left(\varepsilon\left[\frac{x}{\varepsilon}\right]_Y + \varepsilon y, t\right) & \text{p.p. pour } (x,y,t) \in \widehat{\Omega_\varepsilon} \times Y \times (0,T), \\ 0 & \text{p.p. pour } (x,y,t) \in \Lambda_\varepsilon \times Y \times (0,T). \end{cases} \tag{4.18}$$

Remarquons qu'avec cette définition, nous avons pour tout $\varphi \in L^q(0,T;L^p(\Omega))$ et pour presque tout $(x,y,t) \in \widehat{\Omega_\varepsilon} \times Y \times (0,T)$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathcal{T}_\varepsilon(\varphi)\right)(x,y,t) = \frac{\partial\varphi}{\partial t}\left(\varepsilon\left[\frac{x}{\varepsilon}\right]_Y + \varepsilon y, t\right) = \mathcal{T}_\varepsilon\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)(x,y,t).$$

On peut démontrer en reprenant les mêmes méthodes que dans [14] que l'on retrouve les résultats énoncés précédement pour des fonctions $\varphi \in L^p(\Omega)$, $p \in [1,+\infty[$.

Proposition 4.14 *Supposons que $\mathcal{T}_\varepsilon$ est défini suivant la défintion 4.9, soit $p \in [1,+\infty[$, $q \in [1,+\infty[$, $T > 0$, $\varphi \in L^q(0,T;L^p(\Omega))$, $\widehat{\varphi} \in L^q(0,T;L^p(\Omega \times Y))$ et $\{\varphi_\varepsilon\} \subset L^q(0,T;L^p(\Omega))$, on a*

$$\begin{cases} i) & \mathcal{T}_\varepsilon \text{ est linéaire continu de } L^q(0,T;L^p(\Omega)) \text{ dans } L^q(0,T;L^p(\Omega \times Y)), \\ ii) & \dfrac{1}{|Y|}\displaystyle\int_0^T\int_{\Omega\times Y} \mathcal{T}_\varepsilon(\varphi)(x,y,t)\,dx\,dy\,dt = \int_0^T\int_\Omega \varphi(x,t)\,dx\,dt - \int_0^T\int_{\Lambda_\varepsilon}\varphi(x,t)\,dx\,dt \\ & \qquad\qquad = \displaystyle\int_0^T\int_{\widehat{\Omega_\varepsilon}}\varphi(x,t)\,dx\,dt, \\ iii) & \varphi_\varepsilon \to \varphi \quad \text{fortement dans } L^q(0,T;L^p(\Omega)) \\ & \qquad \Rightarrow \quad \mathcal{T}_\varepsilon(\varphi_\varepsilon) \to \varphi \quad \text{fortement dans } L^q(0,T;L^p(\Omega \times Y)), \\ iv) & \varphi_\varepsilon \rightharpoonup \varphi \quad \text{faiblement dans } L^q(0,T;L^p(\Omega)) \\ & \qquad \Rightarrow \quad \mathcal{T}_\varepsilon(\varphi_\varepsilon) \rightharpoonup \varphi \quad \text{faiblement dans } L^q(0,T;L^p(\Omega \times Y)), \\ v) & \mathcal{T}_\varepsilon(\varphi_\varepsilon) \rightharpoonup \widehat{\varphi} \quad \text{faiblement dans } L^q(0,T;L^p(\Omega \times Y)) \\ & \qquad \Rightarrow \quad \varphi_\varepsilon \rightharpoonup \dfrac{1}{|Y|}\displaystyle\int_Y \widehat{\varphi}(.,y,.)\,dy \quad \text{faiblement dans } L^q(0,T;L^p(\Omega)), \end{cases} \tag{4.19}$$

où $\widehat{\Omega_\varepsilon}$ et Λ_ε sont définis en (4.6).

Notons que les résultats ci-dessus restent vrais pour $q = +\infty$, la différence étant juste que les convergences faibles sont remplacées par des convergences faibles *.

Les résultats obtenus avec la décomposition macro-micro et concernant l'opérateur de moyennisation sont conservés dans le cas des fonctions dépendant du temps.

Supposons maintenant que l'ouvert Ω est borné et possède une frontière lipschitzienne afin qu'il existe un opérateur de prolongement $\mathcal{P}$ linéaire continu de $L^q(0,T;W^{1,p}(\Omega))$ dans $L^q(0,T;W^{1,p}(\mathbb{R}^n))$.

Soit $\varphi \in L^q(0,T;W^{1,p}(\Omega))$, où $q \in [1,+\infty]$ et $p \in [1,+\infty[$, comme dans le cas des fonctions indépendantes du temps on peut décomposer φ de la façon suivante :

$$\varphi = \mathcal{Q}_\varepsilon(\varphi) + \mathcal{R}_\varepsilon(\varphi).$$

La partie macroscopique $\mathcal{Q}_\varepsilon(\varphi)$ est définie comme la Q_1-interpolée sur $\Omega \times (0,T)$ de la fonction qui à tout noeud $\varepsilon\xi_h$ inclu dans $\widetilde{\Omega_\varepsilon}$ et à tout $t \in (0,T)$ associe

$$\mathcal{Q}_\varepsilon(\varphi)(\varepsilon\xi_h, t) = \frac{1}{|Y|}\int_Y \mathcal{P}(\varphi)(\varepsilon\xi_h + z, t)\, dz.$$

Les noeuds $\varepsilon\xi_h$ et $\widetilde{\Omega_\varepsilon}$ sont définis en (4.12) et $\mathcal{P}$ est un opérateur linéaire continu de $L^q(0,T;W^{1,p}(\Omega))$ dans $L^q(0,T;W^{1,p}(\mathbb{R}^n))$.

Proposition 4.15 *Soit $\varphi \in L^q(0,T;W^{1,p}(\Omega))$, $q \in [1,+\infty]$ et $p \in [1,+\infty[$ alors il existe une constante $c > 0$ indépendante de ε telle que*

$$\begin{cases} i) \ \|\mathcal{Q}_\varepsilon(\varphi)\|_{L^q(0,T;W^{1,p}(\Omega))} \le c\,\|\varphi\|_{L^q(0,T;W^{1,p}(\Omega))}, \\ ii) \ \|\mathcal{R}_\varepsilon(\varphi)\|_{L^q(0,T;L^p(\Omega))} \le \varepsilon\, c\,\|\varphi\|_{L^q(0,T;W^{1,p}(\Omega))}, \\ iii) \ \|\nabla\mathcal{R}_\varepsilon(\varphi)\|_{L^q(0,T;L^p(\Omega))} \le c\,\|\nabla\varphi\|_{L^q(0,T;L^p(\Omega))}. \end{cases}$$

Proposition 4.16 *Soit $\{\varphi_\varepsilon\}$ une suite de $L^q(0,T;W^{1,p}(\Omega))$ convergeant faiblement vers φ dans $L^q(0,T;W^{1,p}(\Omega))$, où $p \in [1,+\infty[$, $q \in [1,+\infty[$ et $T > 0$. Alors il existe une sous-suite (aussi notée ε) et une fonction $\widehat{\varphi}$ appartenant à $L^q(0,T;L^p(\Omega, W^{1,p}_{per}(Y)))$ telles que*

$$\begin{cases} i)\mathcal{Q}_\varepsilon(\varphi_\varepsilon) \rightharpoonup \varphi \quad \textit{faiblement dans } L^q(0,T;L^p(\Omega)), \\ ii)\mathcal{T}_\varepsilon\left(\frac{1}{\varepsilon}\mathcal{R}_\varepsilon(\varphi_\varepsilon)\right) \rightharpoonup \widehat{\varphi} \quad \textit{faiblement dans } L^q(0,T;L^p(\Omega, W^{1,p}_{per}(Y))), \\ iii)\mathcal{T}_\varepsilon(\nabla\varphi_\varepsilon) \rightharpoonup \nabla_x\varphi + \nabla_y\widehat{\varphi} \quad \textit{faiblement dans } L^q(0,T;L^p(\Omega \times Y)). \end{cases} \tag{4.20}$$

Les démonstrations des deux propositions 4.15 et 4.16 se font exactement comme dans le cas des fonctions indépendantes du temps en posant le temps t comme paramètre puis ensuite en intégrant par rapport au temps. La proposition 4.16 reste valable pour $q = +\infty$ en remplaçant les convergences faibles par des convergences faibles *.

On peut également définir un opérateur de moyennisation $\mathcal{U}_\varepsilon$ pour les fonctions dépendant du temps.

Définition 4.17 *Soit $\varphi \in L^q(0,T;L^p(\Omega \times Y))$, $p \in [1,+\infty[$, $q \in [1,+\infty]$, on définit l'opérateur $\mathcal{U}_\varepsilon : L^q(0,T;L^p(\Omega \times Y)) \mapsto L^q(0,T;L^p(\Omega))$ de façon suivante :*

$$\mathcal{U}_\varepsilon(\phi)(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{|Y|}\displaystyle\int_Y \phi\left(\varepsilon\left[\frac{x}{\varepsilon}\right] + \varepsilon z, \left\{\frac{x}{\varepsilon}\right\}, t\right) dz & \textit{p.p. pour } (x,t) \in \widehat{\Omega_\varepsilon} \times (0,T), \\ 0 & \textit{p.p. pour } (x,t) \in \Lambda_\varepsilon \times (0,T), \end{cases} \tag{4.21}$$

où $\widehat{\Omega_\varepsilon}$ et Λ_ε sont définis en (4.6).

On montre de la même façon que dans le cas indépendant du temps que cet opérateur est l'adjoint de l'opérateur $\mathcal{T}_\varepsilon$ défini en (4.18) en raisonnant pour presque t fixé dans $(0,T)$. C'est à dire que pour tout $\phi \in L^q(0,T;L^p(\Omega\times Y))$ et pour tout $\psi \in L^{q'}(0,T;L^{p'}(\Omega))$ où $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$ et $\frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1$, on a

$$\int_0^T\int_\Omega \mathcal{U}_\varepsilon(\phi)(x,t)\psi(x,t)\,dx\,dt = \frac{1}{|Y|}\int_0^T\int_{\Omega\times Y}\phi(x,y,t)\mathcal{T}_\varepsilon(\psi)(x,y,t)\,dx\,dy\,dt. \tag{4.22}$$

Proposition 4.18 *Soit $p\in[1,+\infty[$, $q\in[1,+\infty]$ et $\phi\in L^q(0,T;L^p(\Omega\times Y))$, l'opérateur de moyennisation $\mathcal{U}_\varepsilon$ est linéaire continu de $L^q(0,T;L^p(\Omega\times Y))$ dans $L^q(0,T;L^p(\Omega))$ et vérifie les propriétés suivantes :*

$$\left\{\begin{array}{l}
i)\ \ \|\mathcal{U}_\varepsilon(\phi)\|_{L^q(0,T;L^p(\Omega))} \leq \dfrac{1}{|Y|^{\frac{1}{p}}}\|\phi\|_{L^q(0,T;L^p(\Omega\times Y))},\\[2ex]
ii)\ \mathcal{U}_\varepsilon(\mathcal{T}_\varepsilon(\phi))(x,y,t) = \left\{\begin{array}{ll}\phi(x,t) & p.p.\ pour\ (x,t)\in\widehat{\Omega_\varepsilon}\times(0,T),\\ 0 & p.p.\ pour\ (x,t)\in\Lambda_\varepsilon\times(0,T),\end{array}\right.\\[2ex]
iii)\ \mathcal{T}_\varepsilon(\mathcal{U}_\varepsilon(\phi))(x,y,t) =\\
\qquad\qquad\left\{\begin{array}{ll}\dfrac{1}{|Y|}\displaystyle\int_Y \phi\left(\varepsilon\left[\dfrac{x}{\varepsilon}\right]+\varepsilon z,y,t\right)dz, & p.p.\ pour\ (x,y,t)\in\widehat{\Omega_\varepsilon}\times Y\times(0,T),\\ 0 & p.p.\ pour\ (x,y,t)\in\Lambda_\varepsilon\times Y\times(0,T),\end{array}\right.
\end{array}\right. \tag{4.23}$$

où $\widehat{\Omega_\varepsilon}$ et Λ_ε sont définis en (4.6).

Proposition 4.19 *Soit $p\in[1,+\infty[$, $q\in[1,+\infty[$.*

i) Si $\{\phi_\varepsilon\}$ est une suite bornée de $L^q(0,T;L^p(\Omega\times Y))$ convergeant faiblement vers ϕ dans $L^q(0,T;L^p(\Omega\times Y))$, alors

$$\mathcal{U}_\varepsilon(\phi_\varepsilon) \rightharpoonup \mathcal{M}_Y(\phi) = \frac{1}{|Y|}\int_Y \phi(.,y)\,dy \quad \textit{faiblement dans } L^q(0,T;L^p(\Omega)).$$

ii) Si $\{\phi_\varepsilon\}$ est une suite de $L^q(0,T;L^p(\Omega\times Y))$ convergeant fortement vers ϕ dans $L^q(0,T;L^p(\Omega\times Y))$, alors

$$\mathcal{T}_\varepsilon(\mathcal{U}_\varepsilon(\phi_\varepsilon)) \to \phi \quad \textit{fortement dans } L^q(0,T;L^p(\Omega\times Y)).$$

iii) Soit $\{\varphi_\varepsilon\}$ une suite de $L^q(0,T;L^p(\Omega))$ et $\widehat{\varphi}\in L^q(0,T;L^p(\Omega\times Y))$. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

$$a)\ \mathcal{T}_\varepsilon(\varphi_\varepsilon)\to\widehat{\varphi} \quad \textit{fortement dans } L^q(0,T;L^p(\Omega\times Y)) \qquad \textit{et} \qquad \int_0^T\int_{\Lambda_\varepsilon}|\varphi_\varepsilon|^p\,dx\,dt \to 0,$$

$$b)\ \varphi_\varepsilon - \mathcal{U}_\varepsilon(\widehat{\varphi}) \to 0 \quad \textit{fortement dans } L^q(0,T;L^p(\Omega)).$$

Remarque 4.20 *Les trois résultats énoncés ci-dessus restent vrais pour $q=+\infty$ en remplaçant les convergences faibles par des convergences faibles *.*
Dans le i) de la proposition précédente, notons que pour toute fonction φ dans $L^q(0,T;L^p(\Omega\times Y))$, $\mathcal{U}_\varepsilon(\varphi)$ converge faiblement vers $\mathcal{M}_Y(\varphi)$. En revanche si φ est indépendante de y, on a la convergence forte de $\mathcal{U}_\varepsilon(\varphi)$ vers φ.

Les démonstrations des deux propositions ci-dessus se font de la même façon que pour les fonctions indépendantes du temps en raisonnant pour presque tout t fixé dans $(0,T)$.

4.4 Résultat d'homogénéisation de l'équation des ondes

Dans ce paragraphe, nous allons appliquer la méthode d'éclatement périodique pour retrouver le résultat d'homogénéisation de l'équation des ondes.
Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière lipschitzienne $\partial\Omega$, $n \geq 2$, $T > 0$ un réel fixé, ε le terme général d'une suite de réel positif qui tend vers 0 et $Y =]0, b_1[\times \ldots \times]0, b_n[$ où $(b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ la cellule de périodicité.

Soit $A(y) = (a_{ij}(y))_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice $n \times n$ de fonctions définies sur $\mathbb{R}^n$ telle que :

$$\begin{cases} A \in (L^\infty(\mathbb{R}^n))^{n^2} \\ \text{A est symétrique et Y-périodique} \\ \exists\,\alpha > 0 \quad \text{tel que} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^n \\ \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(y)\lambda_i\lambda_j \geq \alpha \left\|\lambda\right\|^2 \end{cases} \tag{4.24}$$

Posons pour tout ε, $\quad A^\varepsilon(x) = A\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right) \quad$ p.p. x dans $\mathbb{R}^n$.

On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} u''_\varepsilon - \operatorname{div}(A^\varepsilon \nabla u_\varepsilon) &= f_\varepsilon \quad \text{dans } \Omega \times (0,T), \\ u_\varepsilon &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times (0,T), \\ u_\varepsilon(x,0) &= u^0_\varepsilon \quad \text{dans } \Omega, \\ u'_\varepsilon(x,0) &= u^1_\varepsilon \quad \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{4.25}$$

sous les hypothèses

$$\begin{cases} i)\ u^0_\varepsilon \in H^1_0(\Omega), \\ ii)\ u^1_\varepsilon \in L^2(\Omega), \\ iii)\ f_\varepsilon \in L^2(\Omega \times (0,T)). \end{cases} \tag{4.26}$$

On note φ' la dérivée par rapport au temps $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ d'une fonction φ de plusieurs variables (x,t) où $x \in \mathbb{R}^n$ et $t \in (0,T)$ et $\nabla\varphi$ le gradient de cette fonction φ par rapport à x.

D'après des résultats classiques (cf [16]), sous les hypothèses (4.24) et (4.26) on sait qu'il existe pour tout ε une unique solution u_ε au problème 4.25 vérifiant

$$u_\varepsilon \in C([0,T]; H^1_0(\Omega)), \quad u'_\varepsilon \in C([0,T]; L^2(\Omega)), \quad et \quad u''_\varepsilon \in L^2(0,T; H^{-1}(\Omega)), \tag{4.27}$$

et une constante $c > 0$ telle que

$$\begin{aligned} &\|u_\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))} + \|u'_\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + \|u''_\varepsilon\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)} \leq \\ &\qquad\qquad c\left(\|u^0_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} + \|u^1_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} + \|f_\varepsilon\|_{L^2(\Omega\times(0,T))}\right). \end{aligned} \tag{4.28}$$

Afin d'étudier le comportement asymptotique de la solution u_ε on suppose que :

$$\begin{cases} i) \quad u^0_\varepsilon \rightharpoonup u^0 \quad \text{faiblement dans } H^1_0(\Omega), \\ ii) \quad u^1_\varepsilon \rightharpoonup u^1 \quad \text{faiblement dans } L^2(\Omega), \\ iii) \quad f_\varepsilon \rightharpoonup f \quad \text{faiblement dans } L^2(\Omega \times (0,T)). \end{cases} \tag{4.29}$$

Théorème 4.21 *Sous les hypothèses (4.24), (4.26) et (4.29), il existe une fonction* $u \in C([0,T]; H_0^1(\Omega))$ *ainsi qu'une sous-suite de* ε *(aussi notée* ε*) telles que la solution* u_ε *du problème (4.25) vérifie*

$$\begin{cases} i) \quad u_\varepsilon \rightharpoonup u \quad \textit{faiblement * dans } L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega)), \\ ii) \quad u'_\varepsilon \rightharpoonup u' \quad \textit{faiblement * dans } L^\infty(0,T; L^2(\Omega)), \end{cases} \tag{4.30}$$

où u *est la solution du problème homogénéisé*

$$\begin{cases} u'' - div(A^0 \nabla u) &= f \quad dans \;\; \Omega \times (0,T), \\ u &= 0 \quad sur \;\; \partial\Omega \times (0,T), \\ u(x,0) &= u^0 \qquad dans \;\; \Omega, \\ u'(x,0) &= u^1 \qquad dans \;\; \Omega, \end{cases} \tag{4.31}$$

et A^0 *est la matrice homogénéisée définie par*

$$A^0 = (a^0_{ij})_{i,j=1,n}, \quad avec \quad a^0_{ij} = \frac{1}{|Y|}\int_Y \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^n a_{ik}\frac{\partial \chi^j}{\partial x_k} \right) dy. \tag{4.32}$$

Les fonctions χ^j, $j = 1, ..., n$ *sont définies comme étant les solutions du problème cellulaire*

$$\begin{cases} \displaystyle\int_Y A(y)\nabla(\chi^j - y_j)\nabla\varphi \, dy = 0, \quad \forall \varphi \in H^1_{per}(Y), \\ \chi^j \;\; Y\textit{-périodique}, \\ \displaystyle\frac{1}{|Y|}\int_Y \chi^j \, dy = 0. \end{cases} \tag{4.33}$$

De plus il existe une fonction $\widehat{u} \in C([0,T]; L^2(\Omega; H^1_{per}(Y)))$ *et une sous-suite de* ε *(aussi notée* ε*) telles que*

$$\begin{cases} i) \quad \mathcal{T}_\varepsilon(u_\varepsilon) \rightharpoonup u \quad \textit{faiblement * dans } L^\infty(0,T; L^2(\Omega, H^1(Y))), \\ ii) \quad \mathcal{T}_\varepsilon(\nabla u_\varepsilon) \rightharpoonup \nabla_x u + \nabla_y \widehat{u} \quad \textit{faiblement * dans } L^\infty(0,T; (L^2(\Omega \times Y))^n), \end{cases} \tag{4.34}$$

où $\mathcal{T}_\varepsilon$ *est l'opérateur d'éclatement défini en (4.18) et où le couple* $(u, \widehat{u})$ *est l'unique solution du problème suivant :*

$$\begin{cases} \forall \varphi \in D(0,T), \; \forall v \in H_0^1(\Omega), \; \forall \phi \in L^2(\Omega, H^1_{per}(Y)), \\ \displaystyle\int_0^T \int_\Omega uv\,\varphi'' \, dx\, dt + \frac{1}{|Y|}\int_0^T \int_{\Omega\times Y} A(y)\,(\nabla_x u + \nabla_y \widehat{u})\,(\nabla_x v + \nabla_y \phi)\,\varphi \, dx\, dy\, dt \\ \qquad = \displaystyle\int_0^T \int_\Omega f v\,\varphi \, dx\, dt, \\ \qquad\qquad u(x,0) = u^0 \quad dans \; \Omega, \\ \qquad\qquad u'(x,0) = u^1 \quad dans \; \Omega. \end{cases} \tag{4.35}$$

Démonstration du théorème 4.21

Afin de démontrer le théorème 4.21, on rappelle tout d'abord la formulation variationnelle du problème (4.25), puis on passe à la limite en utilisant l'opérateur d'éclatement $\mathcal{T}_\varepsilon$ et on obtient le problème homogénéisé éclaté (4.35). Ensuite on montre que les conditions initiales sont satisfaites pour le problème (4.35). Et enfin on montre qu'en remplaçant $\widehat{u}$ par une expression faisant intervenir la fonction u et les correcteurs χ_j on retrouve le problème homogénéisé classique (4.31) avec la matrice A^0.

Tout d'abord, on introduit l'espace

$$W = \{v \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega)),\ v' \in L^2(0,T; L^2(\Omega))\},$$

qui est un espace de Hilbert pour la norme :

$$\|v\|_W = \|v\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} + \|v'\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}\,.$$

La formulation variationnelle de (4.25) est

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_\varepsilon \in W \text{ tel que} \\ \langle u''_\varepsilon, v\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} + \displaystyle\int_\Omega A^\varepsilon \nabla u_\varepsilon \nabla v\, dx = \int_\Omega f_\varepsilon v\, dx \quad \text{dans } D'(0,T),\ \forall\, v \in H_0^1(\Omega), \\ \qquad\qquad u_\varepsilon(x,0) \;=\; u^0_\varepsilon \;\text{ dans } \Omega, \\ \qquad\qquad u'_\varepsilon(x,0) \;=\; u^1_\varepsilon \;\text{ dans } \Omega. \end{cases} \tag{4.36}$$

D'après l'estimation (4.28) et l'hypothèse (4.29), on en déduit qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|u_\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))} + \|u'_\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + \|u''_\varepsilon\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} \leq C. \tag{4.37}$$

Donc il existe une sous-suite de $\{u_\varepsilon\}$ telle que

$$\begin{cases} i) \quad u_\varepsilon \rightharpoonup u \quad \text{faiblement * dans } L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega)), \\ ii) \quad u'_\varepsilon \rightharpoonup u' \quad \text{faiblement * dans } L^\infty(0,T; L^2(\Omega)). \end{cases} \tag{4.38}$$

On a également d'après un résultat de compacité classique (cf [31]) et (4.19)iii

$$\begin{cases} i) \quad u_\varepsilon \to u \quad \text{fortement dans } C([0,T]; L^2(\Omega)), \\ ii) \quad \mathcal{T}_\varepsilon(u_\varepsilon) \to u \quad \text{fortement dans } C([0,T]; L^2(\Omega \times Y)). \end{cases} \tag{4.39}$$

D'après la proposition 4.16 , il existe une fonction $\widehat{u} \in L^2(\Omega \times (0,T); H^1_{per}(Y))$ telle que

$$\mathcal{T}_\varepsilon(\nabla u_\varepsilon) \rightharpoonup \nabla_x u + \nabla_y \widehat{u} \quad \text{faiblement dans } L^2(0,T; (L^2(\Omega \times Y))^n). \tag{4.40}$$

Soit $\varphi \in D(0,T)$ et $v \in H_0^1(\Omega)$, en utilisant (4.25)ii et en intégrant par parties sur $(0,T)$ le premier membre de (4.36), on a

$$\begin{aligned} &\int_0^T \int_\Omega u''_\varepsilon \varphi v\, dx\, dt + \int_0^T \int_\Omega A^\varepsilon \nabla u_\varepsilon \nabla v \varphi\, dx\, dt \\ &= \frac{1}{|Y|} \int_0^T \int_{\Omega\times Y} \mathcal{T}_\varepsilon(u_\varepsilon)\mathcal{T}_\varepsilon(v)\varphi''\, dx\, dy\, dt + \int_0^T \int_{\Lambda_\varepsilon} u''_\varepsilon \varphi v\, dx\, dt \\ &+ \frac{1}{|Y|} \int_0^T \int_{\Omega\times Y} \mathcal{T}_\varepsilon(A^\varepsilon)\mathcal{T}_\varepsilon(\nabla u_\varepsilon)\mathcal{T}_\varepsilon(\nabla v)\varphi\, dx\, dy\, dt + \int_0^T \int_{\Lambda_\varepsilon} A^\varepsilon \nabla u_\varepsilon \nabla v\, \varphi\, dx\, dt, \end{aligned} \tag{4.41}$$

où le domaine Λ_ε est défini en (4.6).

D'après la proposition 4.4 1), l'hypothèse (4.24) sur la matrice A et puisque u_ε est borné dans $L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega))$, on a pour presque tout $t \in (0,T)$

$$\begin{cases} i) \quad \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \displaystyle\int_{\Lambda_\varepsilon} u_\varepsilon(t) v\, \varphi''(t)\, dx = 0, \\ ii) \quad \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \displaystyle\int_{\Lambda_\varepsilon} A^\varepsilon \nabla u_\varepsilon(t) \nabla v \varphi(t)\, dx = 0. \end{cases} \tag{4.42}$$

Remarquons d'après (4.38) que pour presque tout t fixé dans $(0,T)$ on a :

$$\begin{cases} \left| \displaystyle\int_{\Lambda_\varepsilon} u_\varepsilon(t) v\, \varphi''(t)\, dx \right| \leq \|u_\varepsilon(t)\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} |\varphi''(t)|, \\ \left| \displaystyle\int_{\Lambda_\varepsilon} A^\varepsilon \nabla u_\varepsilon(t) \nabla v \varphi(t)\, dx \right| \leq \|A^\varepsilon\|_{(L^\infty(\Omega))^{n^2}} \|\nabla u_\varepsilon(t)\|_{(L^2(\Omega))^n} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} |\varphi(t)|. \end{cases} \tag{4.43}$$

Or on sait que $\varphi \in D(0,T)$ et d'après (4.37) que $\|u_\varepsilon(t)\|_{L^2(\Omega)}$ et que $\|\nabla u_\varepsilon(t)\|_{(L^2(\Omega))^n}$ sont bornés dans $L^1(0,T)$, avec (4.42) et (4.43) on peut donc appliquer le théorème de la convergence dominée afin d'obtenir

$$\begin{cases} i) \quad \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \displaystyle\int_0^T \int_{\Lambda_\varepsilon} u_\varepsilon v\, \varphi''\, dx\, dt = 0, \\ ii) \quad \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \displaystyle\int_0^T \int_{\Lambda_\varepsilon} A^\varepsilon \nabla u_\varepsilon \nabla v \varphi\, dx\, dt = 0. \end{cases} \tag{4.44}$$

Maintenant grâce à (4.8)iii, (4.24) (4.20)iii, (4.29)iii, (4.38)-(4.40) et (4.44) on peut passer à la limite dans (4.41) et on obtient :

$$\int_0^T \int_\Omega u v \varphi''\, dx\, dt + \frac{1}{|Y|} \int_0^T \int_{\Omega\times Y} A(y)(\nabla_x u + \nabla_y \widehat{u}) \nabla v \varphi\, dx\, dy\, dt = \int_0^T \int_\Omega f v \varphi\, dx\, dt. \tag{4.45}$$

D'autre part posons $v_\varepsilon(x) = \varepsilon\phi(x)\psi(\frac{x}{\varepsilon})$, pour $x \in \Omega$ et où $\phi \in D(\Omega)$ et $\psi \in H^1_{per}(Y)$.
On a

$$\begin{cases} i) \quad v_\varepsilon \rightharpoonup 0 \quad \text{faiblement dans } H^1_0(\Omega), \\ ii) \quad \mathcal{T}_\varepsilon(v_\varepsilon) = \varepsilon \mathcal{T}_\varepsilon(\phi(x))\psi(y) \to 0 \quad \text{fortement dans } L^2(\Omega\times Y), \end{cases} \tag{4.46}$$

et

$$\mathcal{T}_\varepsilon(\nabla v_\varepsilon) = \mathcal{T}_\varepsilon\left(\varepsilon\nabla(\phi(x))\psi(\frac{x}{\varepsilon}) + \varepsilon\phi(x)\nabla\psi(\frac{x}{\varepsilon}) \right) = \varepsilon\mathcal{T}_\varepsilon(\nabla\phi(x))\psi(y) + \mathcal{T}_\varepsilon(\phi(x))\nabla_y\psi(y).$$

Puisque $\mathcal{T}_\varepsilon(\nabla(\phi(x))\psi(y)$ est borné dans $L^2(\Omega\times Y)$, en tenant compte du i) de la proposition 4.5, on obtient que

$$\mathcal{T}_\varepsilon(\nabla v_\varepsilon) \to \phi(x)\nabla_y\psi(y) \quad \text{fortement dans } L^2(\Omega\times Y). \tag{4.47}$$

En prenant $v = v_\varepsilon$ dans la formulation variationnelle (4.36) du problème (4.25) et en considérant (4.19)ii, il vient

$$\begin{aligned} &\frac{1}{|Y|} \int_0^T \int_{\Omega\times Y} \mathcal{T}_\varepsilon(u_\varepsilon)\mathcal{T}_\varepsilon(v_\varepsilon)\varphi''\, dx\, dy\, dt + \int_0^T \int_{\Lambda_\varepsilon} u_\varepsilon v_\varepsilon \varphi''\, dx\, dt \\ &+ \frac{1}{|Y|} \int_0^T \int_{\Omega\times Y} \mathcal{T}_\varepsilon(A^\varepsilon)\mathcal{T}_\varepsilon(\nabla u_\varepsilon)\mathcal{T}_\varepsilon(\nabla v_\varepsilon)\varphi\, dx\, dy\, dt + \int_0^T \int_{\Lambda_\varepsilon} A^\varepsilon \nabla u_\varepsilon \nabla v_\varepsilon \varphi\, dx\, dt = \int_0^T \int_\Omega f v_\varepsilon \varphi\, dx\, dt, \end{aligned} \tag{4.48}$$

où Λ_ε est défini en (4.6).

Grâce à (4.24), (4.39), (4.40), (4.46) et (4.47), on peut passer à la limite dans (4.48) afin d'obtenir

$$\frac{1}{|Y|}\int_0^T\int_{\Omega\times Y} A(y)(\nabla u + \nabla_y\widehat{u})\phi(x)\nabla_y\psi(y)\varphi(t)\,dx\,dt = 0. \tag{4.49}$$

En regroupant (4.45) et (4.49) ainsi que par densité du produit tensoriel $D(\Omega)\otimes H^1_{per}(Y)$ dans $L^2(\Omega, H^1_{per}(Y))$ on obtient (4.35).

Montrons maintenant que les conditions initiales sont bien vérifiées en (4.35). D'après (4.39) nous avons

$$u_\varepsilon \to u \quad \text{fortement dans } C([0,T];L^2(\Omega)),$$

ce qui donne

$$u_\varepsilon(0) \to u(0) \quad \text{fortement dans } L^2(\Omega).$$

D'autre part, d'après (4.29) et la compacité de $H^1_0(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ nous avons

$$u_\varepsilon(0) = u^0_\varepsilon \to u^0 \quad \text{fortement dans } L^2(\Omega),$$

d'où $u(0) = u^0$ sur Ω.
Afin d'identifier $u'(0)$, choisissons comme fonctions tests dans (4.36), $v \in H^1_0(\Omega)$ et $\varphi \in C^\infty([0,T])$ où $\varphi'(0) = \varphi'(T) = \varphi(T) = 0$ et $\varphi(0) = 1$. En utilisant (4.19) et en intégrant par parties successivement (4.36) sur $(0,T)$, nous avons

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|Y|}\int_0^T\int_{\Omega\times Y} \mathcal{T}_\varepsilon(A^\varepsilon)\mathcal{T}_\varepsilon(\nabla u_\varepsilon)\mathcal{T}_\varepsilon(v)\varphi\,dx\,dy\,dt + \int_0^T\int_{\Lambda_\varepsilon} A^\varepsilon\nabla u_\varepsilon\nabla v\varphi\,dx\,dt - \int_0^T\int_\Omega f_\varepsilon\varphi v\,dx\,dt \\
= -\int_0^T\int_\Omega u''_\varepsilon\varphi v\,dx\,dt \\
= \int_0^T\int_\Omega u'_\varepsilon v\varphi'\,dx\,dt + \int_\Omega u'_\varepsilon(0)v\varphi(0)\,dx \\
= -\int_0^T\int_\Omega u_\varepsilon v\varphi''\,dx\,dt + \int_\Omega u^1_\varepsilon v\,dx.
\end{aligned}$$

En faisant tendre ε vers 0 et en utilisant la proposition 4.5 i) ainsi que (4.8)iii, (4.29)ii, (4.38)i, (4.40) et (4.42)ii, on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|Y|}\int_0^T\int_{\Omega\times Y} A(y)(\nabla u + \nabla_y\widehat{u})\nabla v\,\varphi\,dx\,dy\,dt - \int_0^T\int_\Omega fv\,\varphi\,dx\,dt \\
= -\int_0^T\int_\Omega uv\,\varphi''\,dx\,dt + \int_\Omega u^1 v\,dx \\
= -\int_0^T\int_\Omega u''v\varphi - \int_\Omega u'(0)v\,dx + \int_\Omega u^1 v\,dx.
\end{aligned}$$

Notons que par densité de $D(0,T)$ dans $C^\infty([0,T])$ pour la norme de $C([0,T])$, on peut choisir $\varphi \in C^\infty([0,T])$ dans (4.45) , ce qui permet d'obtenir

$$u'(0) = u^1 \quad \text{p.p. sur } \Omega.$$

En raisonnant comme pour la méthode de la double échelle (voir [16], chap 9) ou des développements asymptotiques (voir [16], chap 7), l'égalité (4.49) permet d'exprimer $\widehat{u}$ en fonction de ∇u. C'est à dire

$$\widehat{u}(x,y) = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\chi_i(y) + \widetilde{u_1}(x), \tag{4.50}$$

où le correcteur χ_i est la solution de l'équation (4.33) et $\widetilde{u_1}$ est une fonction indépendante de y.

On remarque d'ailleurs que la fonction $\widehat{u}$ appartient à $C([0,T],L^2(\Omega;H^1_{per}(Y)))$ puisque c'est une somme de produit de fonction appartennant respectivement à $C([0,T];L^2(\Omega))$ et $H^1_{per}(Y)$. En remplaçant $\widehat{u}$ dans (4.35) par sa valeur trouvée en (4.50) on retrouve le résultat classique d'homogénéisation (4.31) où A^0 est la matrice homogénéisée définie en (4.32).
En effet, pour cela il sufit de constater que

$$\frac{1}{|Y|}\int_Y A(\nabla u+\nabla_y\widehat{u})\,dy = A^0\nabla u.$$

Soit $i\in\{1,\dots,n\}$, on a

$$\begin{aligned}(A(\nabla u+\nabla_y\widehat{u}))_i &= \sum_{j=1}^n a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}-\sum_{j=1}^n a_{ij}\sum_{k=1}^n\frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial \chi^k}{\partial y_j}\\ &= \sum_{j=1}^n a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}-\sum_{j,k=1}^n a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial \chi^k}{\partial y_j}\\ &= \sum_{j=1}^n a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}-\sum_{j,k=1}^n a_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial \chi^j}{\partial y_k}.\end{aligned}$$

Puis en intégrant cette dernière expression sur Y, on obtient

$$\frac{1}{|Y|}\int_Y A(\nabla u+\nabla_y\widehat{u}))_i\,dy = \sum_{j=1}^n\left(\frac{1}{|Y|}\int_Y\left(a_{ij}-\sum_{k=1}^n a_{ik}\frac{\partial\chi^j}{\partial y_k}\right)dy\right)\frac{\partial u}{\partial x_j} = (A^0\nabla u)_i.$$

□

4.5 Résultat de correcteur

Dans ce paragraphe nous allons démontrer un résultat de convergence de l'énergie éclatée associée au problème (4.25). Ensuite nous montrerons un résultat de correcteur pour ce problème. Sous des hypothèses satisfaisantes nous montrons que la convergence de u'_ε vers u' ainsi que celle de ∇u_ε vers ∇u peuvent être améliorées en utilisant l'opérateur de moyennisation introduit en (4.21) pour les fonctions dépendantes du temps.
De même que dans [16], nous devons faire les hypothèses supplémentaires suivantes sur les données initiales :

$$\left\{\begin{array}{lll} i) & u^1_\varepsilon\to u^1 & \text{fortement dans } L^2(\Omega),\\ ii) & f_\varepsilon\to f & \text{fortement dans } L^2(\Omega\times(0,T)),\end{array}\right. \tag{4.51}$$

avec u^0_ε la solution du problème

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\mathrm{div}(A^\varepsilon\nabla u^0_\varepsilon) &=& -\mathrm{div}(A^0\nabla u_0) & \text{dans } \Omega_\varepsilon,\\ u_\varepsilon &=& 0 & \text{sur } \partial\Omega,\end{array}\right. \tag{4.52}$$

pour des fonctions $u^1\in L^2(\Omega)$, $f\in L^2(\Omega\times(0,T))$ et $u^0\in H^1_0(\Omega)$.
Notons que les hypothèses (4.51) et (4.52) entraînent celles de (4.29) et par conséquent le théorème 4.13 reste satisfait.

Définition 4.22 *On appelle énergie associée au problème (4.25) la quantité suivante :*

$$E_\varepsilon(t) = \int_\Omega (u'_\varepsilon(t))^2\,dx + \int_\Omega A^\varepsilon \nabla u_\varepsilon(t) \nabla u_\varepsilon(t)\,dx, \quad \forall\, t \in [0,T]. \tag{4.53}$$

On pose pour tout $t \in [0,T]$,

$$\begin{cases} i) \quad E_{\mathcal{T}_\varepsilon}(t) = \dfrac{1}{|Y|}\displaystyle\int_{\Omega\times Y} (\mathcal{T}_\varepsilon(u'_\varepsilon)(t))^2\,dx\,dy + \dfrac{1}{|Y|}\displaystyle\int_{\Omega\times Y} A\mathcal{T}_\varepsilon(\nabla u_\varepsilon(t))\mathcal{T}_\varepsilon(\nabla u_\varepsilon(t))\,dx\,dy, \\ ii) \quad E_{\Lambda_\varepsilon}(t) = \displaystyle\int_{\Lambda_\varepsilon} (u'_\varepsilon(t))^2\,dx + \int_{\Lambda_\varepsilon} A^\varepsilon \nabla u_\varepsilon(t) \nabla u_\varepsilon(t)\,dx. \end{cases} \tag{4.54}$$

On appelle énergie éclatée associée au problème (4.25) la quantité $E_{\mathcal{T}_\varepsilon}$ et énergie du problème homogénéisé la quantité E_0 définie par

$$E_0(t) = \int_\Omega (u'(t))^2\,dx + \int_\Omega A^0 \nabla u(t) \nabla u(t)\,dx, \quad \forall\, t \in [0,T]. \tag{4.55}$$

Notons qu'en utilisant l'expression de $\widehat{u}$ donnée en (4.50), l'énergie E_0 peut aussi s'écrire sous la forme

$$E_0(t) = \int_\Omega (u'(t))^2\,dx + \frac{1}{|Y|}\int_{\Omega\times Y} A(\nabla u + \nabla_y \widehat{u})(\nabla u + \nabla_y \widehat{u})(t), \quad \forall\, t \in [0,T], \tag{4.56}$$

où A^0 est défini en (4.32) et $\widehat{u}$ en (4.50).

Remarque 4.23 *En multipliant l'équation (4.25) par u'_ε puis en intégrant par partie sur $(0,T)$ et en utilisant un argument de densité (cf [16]), on rappelle que l'on a*

$$E_\varepsilon(t) = \left\| u^1_\varepsilon \right\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega A^\varepsilon \nabla u^0_\varepsilon \nabla u^0_\varepsilon\,dx + \int_0^t \int_\Omega f_\varepsilon(x,\tau) u'_\varepsilon(x,\tau)\,dx\,d\tau. \tag{4.57}$$

D'après les propriétés de l'opérateur d'éclatement périodique, nous avons

$$E_\varepsilon = E_{\mathcal{T}_\varepsilon} + E_{\Lambda_\varepsilon}. \tag{4.58}$$

Proposition 4.24 *Sous les hypothèses (4.24), (4.26), (4.51) et (4.52), on a pour tout $p \in [1,+\infty[$*

$$\begin{cases} i) \quad E_\varepsilon \longrightarrow E_0 \quad \text{fortement dans } L^p(0,T), \\ ii) \quad E_{\mathcal{T}_\varepsilon} \longrightarrow E_0 \quad \text{fortement dans } L^p(0,T), \\ iii) \quad E_{\Lambda_\varepsilon} \longrightarrow 0 \quad \text{fortement dans } L^p(0,T), \end{cases} \tag{4.59}$$

où $E_{\mathcal{T}_\varepsilon}$ et E_{Λ_ε} sont définis en (4.54) et E_0 en (4.55).

Remarque 4.25 *Pour ce qui concerne l'énergie E_ε, avec les mêmes hypothèses (4.51) et (4.52) on a un meilleur résultat que (4.59)i (voir [16]) donné par la convergence suivante*

$$E_\varepsilon \longrightarrow E_0 \quad \text{fortement dans } C([0,T]).$$

Par contre la convergence de $E_{\mathcal{T}_\varepsilon}$ vers E_0 dans $C([0,T])$ ou alors de celle de E_{Λ_ε} vers 0 dans $C([0,T])$ reste une question ouverte. La difficulté est qu'on ne peut pas utiliser l'équation pour avoir d'estimation uniformément lipschitzienne en ε de ces fonctions. On souhaiterait avoir

$$|E_{\Lambda_\varepsilon}(t+h) - E_{\Lambda_\varepsilon}(h)| \le ch,$$

où c est indépendant de ε.
C'est une estimation de ce genre qui est utilisée dans [16] pour montrer que E_ε est compacte dans $C([0,T])$. En effet si on utilise la remarque 4.23, on a

$$|E_\varepsilon(t+h) - E_\varepsilon(h)| = E_{\mathcal{T}_\varepsilon}(t+h) - E_{\mathcal{T}_\varepsilon}(t) + E_{\Lambda_\varepsilon}(t+h) - E_{\Lambda_\varepsilon}(t) = \int_{t+h}^{t}\int_\Omega f_\varepsilon u'_\varepsilon\, dx\, dt.$$

D'autre part, en utilisant les estimations obtenues dans le théorème 4.21 pour u_ε en (4.28) on peut aisément montrer que le membre de droite de cette précédente égalité est uniformément borné en ε par une constante ne dépendant que de h. Donc, montrer que $E_{\mathcal{T}_\varepsilon}$ est compacte dans $C([0,T])$ revient à montrer que E_{Λ_ε} l'est aussi.
Si Ω est une réunion de cellules de la forme γY où $\gamma \in \mathbb{R}$, alors dans ce cas il existe une suite (ε) telle que $\Lambda_\varepsilon = \emptyset$ pour tout ε, dans ce cas il est clair $E_{\mathcal{T}_\varepsilon}$ est compacte dans $C([0,T])$, sinon dans le cas général on ne sait pas.

Théorème 4.26 *Sous les hypothèses (4.24), (4.26), (4.51) et (4.52) nous avons le résultat de correcteur suivant :*

$$\begin{cases} i) \quad \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \|u'_\varepsilon - u'\|_{L^p(\Omega\times(0,T))} = 0, \\ ii) \quad \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \|\nabla u_\varepsilon - \nabla u - \mathcal{U}_\varepsilon(\nabla_y \widehat{u})\|_{L^p(0,T;(L^2(\Omega\times Y))^n)} = 0, \end{cases} \tag{4.60}$$

pour tout $p \in [1,+\infty[$ et où $\mathcal{U}_\varepsilon$ est l'opérateur de moyennisation introduit en (4.21).

Remarque 4.27 *On rappelle (voir par exemple [16]) qu'en utilisant la matrice de correcteur usuelle $C^\varepsilon = (C^\varepsilon_{ij})_{1\le i,j\le n}$ définie par*

$$\begin{cases} C^\varepsilon_{ij}(x) = C_{ij}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) & p.p. \ sur\ \Omega, \\ C_{ij}(y) = \delta_{ij} - \frac{\partial \chi^j}{\partial y_i}(y) & p.p.\ sur\ Y, \end{cases}$$

où χ^j est définie en (4.33) et δ_{ij} est le symbole de Kronecker, la convergence de u'_ε vers u' est uniforme en temps et l'on a

$$u'_\varepsilon \to u' \quad \text{fortement dans } C([0,T];L^2(\Omega)).$$

Démonstration de la proposition 4.24
D'après les convergences (4.30) et (4.34) et par semi-continuité inférieure de la limite faible on a :

$$\int_0^T E_0\, dt = \int_0^T \int_\Omega (u')^2\, dx\, dt + \int_0^T\int_\Omega A^0 \nabla u \nabla u\, dx\, dt$$
$$= \frac{1}{|Y|}\int_0^T\int_{\Omega\times Y}(u')^2\, dx\, dy\, dt + \frac{1}{|Y|}\int_0^T\int_{\Omega\times Y} A(\nabla u + \nabla_y \widehat{u})(\nabla u + \nabla_y\widehat{u})\, dx\, dy\, dt$$
$$\le \liminf_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{|Y|}\int_0^T\int_{\Omega\times Y}(\mathcal{T}_\varepsilon(u'_\varepsilon))^2\, dx\, dy\, dt\right) + \liminf_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{|Y|}\int_0^T\int_{\Omega\times Y} A\mathcal{T}_\varepsilon(\nabla u_\varepsilon)\mathcal{T}_\varepsilon(\nabla u_\varepsilon)\, dx\, dy\, dt\right)$$
$$\le \liminf_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{|Y|}\int_0^T\int_{\Omega\times Y}(\mathcal{T}_\varepsilon(u'_\varepsilon))^2\, dx\, dy\, dt + \frac{1}{|Y|}\int_0^T\int_{\Omega\times Y} A\mathcal{T}_\varepsilon(\nabla u_\varepsilon)\mathcal{T}_\varepsilon(\nabla u_\varepsilon)\, dx\, dy\, dt\right)$$
$$\le \limsup_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{|Y|}\int_0^T\int_{\Omega\times Y}(\mathcal{T}_\varepsilon(u'_\varepsilon))^2\, dx\, dy\, dt + \frac{1}{|Y|}\int_0^T\int_{\Omega\times Y} A\mathcal{T}_\varepsilon(\nabla u_\varepsilon)\mathcal{T}_\varepsilon(\nabla u_\varepsilon)\, dx\, dy\, dt\right)$$

$$= \limsup_{\varepsilon\to 0} \int_0^T E_{\mathcal{T}_\varepsilon}.$$

D'après les propriétés de l'opérateur d'éclatement et suite à la remarque 4.23, il vient

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \int_0^T E_{\mathcal{T}_\varepsilon}\, dt \le \limsup_{\varepsilon\to 0} \left(\int_0^T \int_\Omega (u'_\varepsilon)^2\, dx\, dt + \int_0^T \int_\Omega A^\varepsilon \nabla u_\varepsilon \nabla u_\varepsilon\, dx\, dt \right)$$

$$\le \limsup_{\varepsilon\to 0} \left(T \int_\Omega (u^1_\varepsilon)^2\, dx + T \int_\Omega A^\varepsilon \nabla u^0_\varepsilon \nabla u^0_\varepsilon\, dx + \int_0^T \left(\int_0^t \int_\Omega f_\varepsilon(x,\tau) u'_\varepsilon(x,\tau)\, dx\, d\tau \right) dt \right)$$

$$= \limsup_{\varepsilon\to 0} \int_0^T E_\varepsilon(t)\, dt.$$

Maintenant montrons que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^T E_\varepsilon(t)\, dt = \int_0^T E_0(t)\, dt. \tag{4.61}$$

D'après (4.37), on en déduit qu'il existe une constante $C > 0$ indépendante de ε telle que

$$E_\varepsilon(t) \le C, \quad \forall\, t \in [0, T]. \tag{4.62}$$

Notons que (4.52) entraine que

$$u^0_\varepsilon \rightharpoonup u^0 \quad \text{faiblement dans } H^1_0(\Omega). \tag{4.63}$$

En effet, d'après des résultats classiques d'homogénéisation (cf [16]) la solution u_ε de (4.52) converge faiblement vers u dans $H^1_0(\Omega)$ qui est la solution du problème

$$\begin{cases} -\text{div}(A^0 \nabla u) &= -\text{div}(A^0 \nabla u_0) & \text{on } \Omega, \\ u_\varepsilon &= 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

et ensuite par unicité de la solution de ce problème on en déduit que $u = u^0$.
En prenant u^0_ε comme fonction test dans (4.52), en intégrant sur Ω, puis avec (4.63) on a

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega A^\varepsilon \nabla u^0_\varepsilon \nabla u^0_\varepsilon\, dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega A^0 \nabla u^0 \nabla u^0_\varepsilon\, dx = \int_\Omega A^0 \nabla u^0 \nabla u^0\, dx. \tag{4.64}$$

En utilisant (4.30)ii, (4.51)i, (4.51)ii, et (4.64), on a pour tout t fixé dans $[0, T]$

$$\begin{cases} \lim_{\varepsilon\to 0} E_\varepsilon(t) &= \displaystyle\int_\Omega (u_1)^2\, dx + \int_\Omega A^0 \nabla u^0 \nabla u^0\, dx + \int_0^t \int_\Omega f(x,\tau) u'(x,\tau)\, dx\, d\tau \\ &= E_0(t). \end{cases} \tag{4.65}$$

Grâce à (4.62) et (4.65), on peut appliquer le théorème de la convergence dominée à

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^T E_\varepsilon\, dt$$

afin d'obtenir (4.61).
On a donc prouvé que

$$\int_0^T E_0(t)\, dt \le \liminf_{\varepsilon\to 0} \int_0^T E_{\mathcal{T}_\varepsilon}(t)\, dt \le \limsup_{\varepsilon\to 0} \int_0^T E_{\mathcal{T}_\varepsilon}(t)\, dt \le \int_0^T E_0(t)\, dt,$$

d'où

$$E_{\mathcal{T}_\varepsilon} \to E_0 \quad \text{fortement dans } L^1(\Omega). \tag{4.66}$$

Soit $p \in]1, +\infty[$, on a

$$\int_0^T |E_\varepsilon(t) - E_0(t)|^p \, dt \leq \int_0^T |E_\varepsilon(t) - E_0(t)|^{p-1} |E_\varepsilon(t) - E_0(t)| \, dt. \tag{4.67}$$

Et d'après (4.66), le membre de droite de (4.67) converge vers 0 lorsque ε tend vers 0 donc on obtient (4.59)ii.
Ensuite en utilisant le même argument qu'en (4.67), on déduit (4.69)iii grâce à (4.58), (4.59)i et (4.62) puis (4.59)i à l'aide de (4.61) et de (4.62).

□

Démonstration du théorème 4.26
Grâce à l'ellipticité de la matrice A, on peut écrire

$$\|u'_\varepsilon - u'\|^2_{L^2(\Omega\times(0,T))} + \alpha \|\nabla u_\varepsilon - \mathcal{U}_\varepsilon(\nabla u + \nabla_y \widehat{u})\|^2_{L^2(\Omega\times(0,T))} \leq$$

$$\int_0^T \int_\Omega (u'_\varepsilon - u')^2 \, dx \, dt + \int_0^T \int_\Omega A^\varepsilon (\nabla u_\varepsilon - \mathcal{U}_\varepsilon(\nabla u + \nabla_y \widehat{u}))(\nabla u_\varepsilon - \mathcal{U}_\varepsilon(\nabla u + \nabla_y \widehat{u})) \, dx \, dt$$

$$= \int_0^T \int_\Omega (u'_\varepsilon)^2 \, dxdt - 2 \int_0^T \int_\Omega u'_\varepsilon u' \, dx \, dt + \int_0^T \int_\Omega (u')^2 \, dx \, dt + \int_0^T \int_\Omega A^\varepsilon \nabla u_\varepsilon \nabla u_\varepsilon \, dx \, dt$$

$$-2 \int_0^T \int_\Omega A^\varepsilon \nabla u_\varepsilon \mathcal{U}_\varepsilon(\nabla u + \nabla_y \widehat{u}) \, dx \, dt + \int_0^T \int_\Omega A^\varepsilon \mathcal{U}_\varepsilon(\nabla u + \nabla_y \widehat{u}) \mathcal{U}_\varepsilon(\nabla u + \nabla_y \widehat{u}) \, dx \, dt.$$

Posons

$$\left\{ \begin{array}{l} I^1_\varepsilon = \displaystyle\int_\Omega (u'_\varepsilon)^2 \, dx - 2 \int_\Omega u'_\varepsilon u' \, dx + \int_\Omega (u')^2 \, dx + \int_\Omega A^\varepsilon \nabla u_\varepsilon \nabla u_\varepsilon \, dx, \\ I^2_\varepsilon = \displaystyle\int_\Omega A^\varepsilon \nabla u_\varepsilon \mathcal{U}_\varepsilon(\nabla u + \nabla_y \widehat{u}) \, dx, \\ I^3_\varepsilon = \displaystyle\int_\Omega A^\varepsilon \mathcal{U}_\varepsilon(\nabla u + \nabla_y \widehat{u}) \mathcal{U}_\varepsilon(\nabla u + \nabla_y \widehat{u}) \, dx. \end{array} \right. \tag{4.68}$$

Montrons tout d'abord que :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^T (I^1_\varepsilon - 2I^2_\varepsilon + I^3_\varepsilon) \, dt = 0. \tag{4.69}$$

Ce qui entraînera

$$\left\{ \begin{array}{ll} i) & \displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0} \|u'_\varepsilon - u'\|_{L^2(\Omega\times(0,T))} = 0, \\ ii) & \displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0} \|\nabla u_\varepsilon - \mathcal{U}_\varepsilon(\nabla u + \nabla_y \widehat{u})\|_{L^2(0,T;(L^2(\Omega\times Y))^n)} = 0. \end{array} \right. \tag{4.70}$$

En ce qui concerne I^1_ε, d'après (4.38) on a

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \left\{ -2 \int_0^T \int_\Omega u'_\varepsilon u' \, dx \, dt + \int_0^T \int_\Omega (u')^2 \, dxdt \right\} = - \int_0^T \int_\Omega (u')^2 \, dx \, dt. \tag{4.71}$$

Ensuite en utilisant la proposition 4.24, on obtient

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^T I^1_\varepsilon \, dt = \int_0^T \int_\Omega A^0 \nabla u \nabla u \, dx \, dt. \tag{4.72}$$

Pour I^2_ε et I^3_ε on utilise le fait que l'opérateur de moyennisation U_ε est l'adjoint de l'opérateur T_ε, en effet d'après (4.8) et (4.22), on a

$$\int_0^T I_\varepsilon^2\,dt = \frac{1}{|Y|}\int_0^T\int_{\Omega\times Y} A\mathcal{T}_\varepsilon(\nabla u_\varepsilon)(\nabla u + \nabla_y \widehat{u})\,dx\,dy\,dt, \tag{4.73}$$

et

$$\int_0^T I_\varepsilon^3\,dt = \frac{1}{|Y|}\int_0^T\int_{\Omega\times Y} A\mathcal{T}_\varepsilon(\mathcal{U}_\varepsilon(\nabla u + \nabla_y \widehat{u}))(\nabla u + \nabla_y \widehat{u})\,dx\,dy\,dt. \tag{4.74}$$

Ensuite grâce à la proposition 4.19 ii) et à (4.40) on peut passer à la limite lorsque ε tend vers 0 dans (4.73) et (4.74), il vient

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^T I_\varepsilon^2\,dt = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^T I_\varepsilon^3\,dt = \frac{1}{|Y|}\int_0^T\int_{\Omega\times Y} A(\nabla u + \nabla_y \widehat{u})(\nabla u + \nabla_y \widehat{u})\,dx\,dy\,dt. \tag{4.75}$$

En utilisant l'expression (4.50) de $\widehat{u}$ en fonction de u et des fonctions χ_j solutions du problème (4.33), on remarque que

$$\int_0^T\int_\Omega A^0\nabla u\nabla u\,dx\,dt = \frac{1}{|Y|}\int_0^T\int_{\Omega\times Y} A(\nabla u + \nabla_y \widehat{u})(\nabla u + \nabla_y \widehat{u})\,dx\,dy\,dt. \tag{4.76}$$

En regroupant (4.72), (4.75) et (4.76), on obtient (4.69).
Par linéarité de l'opérateur $\mathcal{U}_\varepsilon$ on a

$$\nabla u_\varepsilon - \mathcal{U}_\varepsilon(\nabla u) - \mathcal{U}_\varepsilon(\nabla_y \widehat{u}) \to 0 \quad \text{fortement dans } L^2(\Omega\times Y\times(0,T)).$$

D'après la remarque 4.20, puisque u est indépendant de y on a

$$\mathcal{U}_\varepsilon(\nabla u) \to \nabla u \quad \text{fortement dans } L^2(\Omega\times(0,T)),$$

ce qui avec (4.69) entraîne

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|\nabla u_\varepsilon - \nabla u - \mathcal{U}_\varepsilon(\nabla_y \widehat{u})\|_{L^2(0,T;(L^2(\Omega\times Y))^n)} = 0. \tag{4.77}$$

Ensuite, d'après les convergences (4.30), (4.34) et la proposition 4.23 i), on en déduit qu'il existe une constante $c > 0$ telle que :

$$\begin{cases} \|u_\varepsilon'\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \le c, \\ \|\nabla u_\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;(L^2(\Omega))^n)} \le c, \\ \|\mathcal{U}_\varepsilon(\nabla u + \nabla_y \widehat{u})\|_{L^\infty(0,T;(L^2(\Omega\times Y))^n)} \le c. \end{cases}$$

Cela implique que les I_ε^1, I_ε^2 et I_ε^3 sont bornés dans $L^\infty(0,T)$, donc en utilisant (4.70), (4.77) et le même argument qu'en (4.67), on obtient (4.60).

$\square$

Résumé

Les travaux présentés dans cette thèse concernent des résultats d'homogénéisation et de correcteur pour des problèmes hyperboliques dans des milieux hétérogènes. Les problèmes de ce type modélisent la propagation des ondes dans des milieux hétérogènes.
Dans le premier chapitre on rappelle une partie de l'ensemble des outils permettant l'étude asymptotique de problèmes posés dans un milieu hétérogène.
Le second chapitre est consacré à l'étude de l'équation des ondes dans un domaine perforé de façon non périodique. Pour cela, on effectue une hypothèse de H^0-convergence sur la partie elliptique de l'opérateur. Cette notion introduite par M. Briane, A. Damlamian et P. Donato généralise la notion de H-convergence introduite quelques années auparavant par F. Murat et L. Tartar pour des domaines perforés. On démontre deux résultats principaux, un résultat d'homogénéisation et un second de correcteur qui permet d'améliorer la convergence de la solution du problème sous des hypothèses légèrement plus fortes. Pour cela on reprend le correcteur de G. Cardone, P. Donato et A. Gaudiello et on explicite quelques unes de ces propriétés. On montre que le résultat de correcteur est valable pour ce correcteur particulier puis ensuite pour une famille plus générale de correcteurs elliptiques locaux si la solution est un peu plus régulière.
Dans le troisième chapitre, on considère une équation des ondes non linéaire posée dans un domaine périodiquement perforé dont la non-linéarité porte sur la dérivée en temps de la solution. On suppose que la non-linéarité est majorée par une fonction polynomiale monotone dont l'exposant permet d'avoir une injection de Sobolev convenable. On étudie d'abord l'existence et l'unicité de la solution de ce problème à l'aide d'une méthode de Galerkin, puis on montre un résultat d'homogénéisation de ce problème.
Dans le quatrième chapitre, on étudie le problème de l'équation des ondes dans un domaine non perforé. Dans un premier temps, on retrouve le résultat classique d'homogénéisation en utilisant la méthode de l'éclatement périodique introduite par D. Cioranescu, A. Damlamian et G. Griso. Ensuite, sous des hypothèses un peu plus fortes des données initiales on montre un résultat de correcteur faisant intervenir l'opérateur de moyennisation qui est l'adjoint de l'opérateur d'éclatement.

Mots-clés: homogénéisation, correcteurs, H^0-convergence, domaines perforés, équation des ondes, problème non-linéaire, éclatement périodique

Abstract

In this thesis, we are concerned with some convergence and corrector results for hyperbolics problems in heterogeneous media. This kind of problems models waves spread in heterogeneous media.
In the first Chapter, we recall some results of the asymptotic study of problems posed in a heterogeneous media.
In the second Chapter, we consider the wave equation in a perforated domain not necessarily periodic. We suppose a hypothesis of H^0-convergence of the elliptic part of the operator. This notion has been introduced by M. Briane, A Damlamian et P. Donato and it generalizes the notion of H-convergence introduced some years before by F. Murat and L.Tartar to perforated

domains. We prove two main results, the first one is a homogenization result and the second one is a corrector result which improves the convergence of the solution of the problem under some more restrictive assumptions on the data. To do so, we use the corrector introduced by G. Cardone, P. Donato et A. Gaudiello and we show some of his properties. We show that the corrector result holds for this particuliar corrector, then for a more general family of elliptic local corrector.
In the third Chapter, we consider a nonlinear wave equation posed in a periodic perforated domain where the nonlinearity concerns the time derivative of the solution. We suppose that the nonlinearity is bounded above by a monotonous polynomial function which exponent permits to have a suitable Sobolev injection. We study first the existence and the uniqueness for the solution with a Galerkin method, then we check a homogenization result for this problem.
In the fourth Chapter, we study the problem of the linear wave equation in a non perforated domain. In a first time, we find again the classical result of homogenization using the method of periodical unfolding introduced by D. Cioranescu, A. Damlamian et G. Griso. Then, under more stronger assumptions on the data, we show a corrector result involving the averaging operator which is the adjoint of the unfolding operator.

Keywords: homogenization, correctors, H^0-convergence, perforated domains, wave equation, nonlinear problem, periodical unfolding

Bibliographie

[1] G. Allaire, *Homogenization and two-scale convergence*, SIAM J. Math. Analysis, Vol. 23, (1992), p. 1482-1518.

[2] G. Allaire et M. Briane, *Multiscale convergence and reiterated homogenisation*, Proc. Royal Soc. Edin., 126A (1996), p. 297-342.

[3] G. Allaire, C. Conca et M. Vanninathan, *Spectral asymptotics of the Helmoltz model in fluid-solid structures*, Internat. Jour. Numer. Methods Engrg. 46, Vol. 9, (1999), p. 1463-1504.

[4] T. Arbogast, J. Douglas et U. Hornung, *Derivation of the double porosity model of single phaze flow via homogenization theory*, SIAM Journal of Mathematical Analysis, Vol. 21, (1990), p. 823-836.

[5] N. S. Bakhvalov, *Averaging of partial differential equations with rapidly oscillating coefficients*, Dokl. Akad. Nauk SSSR 221, no. 3, (1975), p. 516-519.

[6] N. S. Bakhvalov, *Averaging of nonlinear partial differential equations with rapidly oscillating coefficients*, Dokl. Akad. Nauk SSSR 225, no. 2, (1975), p. 249-252.

[7] A. Bensoussan, J.L. Lions, G. Papanicolaou, *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*, Amsterdam, North Holland, 1978.

[8] S. Brahim-Otsmane, G.A. Francfort et F. Murat, *Correctors for the homogenization of the wave and heat equations*, J. Maths Pures et Appl., 71, 1992, p. 197-231.

[9] M. Briane, *Homogenization of a non-periodic material*, J. Math. Pures et Appl., 73, (1994), p. 47-66.

[10] M. Briane, A. Damlamian et P. Donato, *H-convergence for perforated domains*, Nonlinear partial differential equation, seminar, collège de France, tome XIII, 1996.

[11] C. Brizzi et J.P. Chalot, *Homogénéisation dans des ouverts à frontière fortement oscillante*, Thèse à l'université de nice, (1978).

[12] G. Cardone, P. Donato et A. Gaudiello, *A compactness result for elliptic equations with subquadratic growth in perforated domains*, Nonlinear analysis, Theory, Methods and Applications, Vol 32, n˚3, 1998, p. 335-361.

[13] M.M. Cavalcanti, V.N. Domingos Cavalcanti, D. Andrade et T.F. Ma, *Homogenization for a nonlinear wave equation in domains with holes of small capacity*, Discrete and Continous Dynamical Systems, **16-4** (2006), P. 721-743.

[14] D. Cioranescu, A. Damlamian et G. Griso, *Periodic unfolding method in homogenization*, C.R. Académie des Sciences de Paris, Série I335 (2002), p. 99-104.

[15] D. Cioranescu, A. Damlamian et G. Griso, *The periodic unfolding method in homogenization*, SIAM Journal of Mathematical Analysis, Vol. 40, n˚4, (2008), p. 1585-1620

[16] D. Cioranescu et P. Donato, *An Introduction to Homogenization*, Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, Vol. 17, Oxford University Press, (1999).

[17] D. Cioranescu et P. Donato, *Exact internal controllability in perforated domains*, J. Math. Pures et Appl., vol. 319, 1989, p. 185-213.

[18] D. Cioranescu, P. Donato et R. Zaki, *The periodic unfolding method in perforated domains*, Portugalae Mathematica, Vol. 63, n°4, (2006), p. 467-496

[19] D. Cioranescu et F. Murat, *Un terme étrange venu d'ailleurs*, Nonlinear partial Differential Equations and Their Applications (eds H. Brézis and J.L. Lions), Collège de France Seminar, Vol II & III, Research Notes in Mathematics, **60** and **70**, Pitman, Boston, (1982), 93-118 and 154-178.

[20] D. Cioranescu et J. Saint Jean Paulin, *Homogenization in open sets with holes*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 71, 1979, p. 590-607.

[21] A. Damlamian et P. Donato, *Which sequences of holes are admissible for periodic homogenization with Neumann boundary condition ?* Control, Optimization and Calculus of Variations (8), Special Volume : A Tribute to Jacques-Louis Lions, Tome 2, 2002, p. 555-585.

[22] P. Donato et A. Nabil, *Homogenization of semilinear parabolic equation in perforated domains*, Chin. Ann. Math., **25B :2** (2004), P. 143-156.

[23] P. Donato et F. Gaveau *Homogenization and corrector result for a wave equation in non periodic perforated domains*, Networks Heterogeneous Media, Vol. 3, Number 1, (2008), P. 97-124.

[24] A. Ene et J. Saint Jean Paulin, *On a model of fractured porous media*, Publication Dépa. Math. de l'Université de Metz, Vol. 2, (1996).

[25] F. Gaveau *Existence and homogenization of a nonlinear wave equation in perforated domains*, Chinese Journal of Engineering Mathematics, Vol. 25, Number 6, (2008), p. 951-966.

[26] G. Griso, *Thin reticulated structures*, Progress in Partial Differential Equations. The Metz surveys 3, ed. M. Chipot, J. Saint Jean Paulin and I. Shafir, Pitman, London, (1994), p. 161-182.

[27] F. Murat, *H-convergence*, Séminaire d'analyse fonctionnelle et numérique, Université d'Alger, 1978.

[28] F. Murat et L. Tartar, *H-Convergence*, Topics in the Mathematical Modelling of Composite Materials, ed. A. Cherkaev and R. Kohn, Birkhäuser, Boston, 1997, p. 21-43.

[29] A. Nabil, *A corrector result for the wave equations in perforated domains*, Homogenization and applications to material sciences, GAKUTO Internat. Ser. Math. Sci. Appl., 9, Gakkotosho, Tokyo, 1995, p. 309-321.

[30] G. Nguetseng, *A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization*, SIAM J. Math. Anal., Vol. 20, (1989), p. 608-629.

[31] J.L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod, Paris (1969).

[32] J.L. Lions, *Asymptotic expansions in perforated media with a periodic structure*, Rocky Moutain J. Math., Vol. 10, (1980), p. 125-140.

[33] G. Panasenko, *Higher order asymptotics of the solutions of equations with rapidly oscillating coefficients*, Dokl. Akad. Nauk SSSR 240, no. 6, (1978), p. 1293-1296.

[34] J. Simon, *Compact Sets in* $L^p(0,T,B)$, Ann. Mat. Pura Appl., 146, 1987, p. 65-96.

[35] E. Sanchez-Palencia, *Non homogeneous Media and Vibration Theory*, Lecture Notes in Physics, Vol 127, Springer-Verlag, (1980).

[36] S. Spagnolo, *Sul limite delle soluzioni di problemi di Cauchy relativi all'equazione del calore*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa 21, 1967, p. 657-699.

[37] L. Tartar, *Cours Peccot au Collège de France*, Unpublished, partially written in Meyers, (1977).

[38] L. Tartar, *Estimations of homogeneous coefficients*, Topics in the Mathematical Modelling of composite Materials, ed. A. Cherkaev and R. Kohn, Birkäuser, Boston, (1997), p. 9-20.

[39] F. Treves, *Basic linear partial differential equations*, Academic Press, (1975).

[40] Z. Yao, *Correctors for the Homogenization of some semilinear heat equations*, Applicable Analysis, **69** (1998), 105-124.