



**HAL**  
open science

# Sur la théorie des méconnaissances en conception robuste

Paul Enjalbert

► **To cite this version:**

Paul Enjalbert. Sur la théorie des méconnaissances en conception robuste. Mécanique [physics.med-ph]. École normale supérieure de Cachan - ENS Cachan, 2009. Français. NNT: . tel-00572820

**HAL Id: tel-00572820**

**<https://theses.hal.science/tel-00572820>**

Submitted on 2 Mar 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**THÈSE DE DOCTORAT  
DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE CACHAN**

Présentée par

**Paul Enjalbert**

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE CACHAN**

Domaine :

**MÉCANIQUE**

Sujet de la thèse :

**Sur la théorie des méconnaissances en conception robuste**

Thèse soutenue au LMT-Cachan le 17 Mars 2009 devant le jury composé de :

<b>Louis Jézéquel</b>	LTDS, École Centrale Lyon	Rapporteur
<b>Nicolas Carrère</b>	ONERA Chatillon - DMSE	Rapporteur
<b>Denis Aubry</b>	MSSMAT, École Centrale Paris	Examineur
<b>Thierry Romeuf</b>	ASTRIUM Space Transportation	Examineur
<b>Laurent Chambon</b>	EADS CCR	Examineur
<b>Pierre Ladevèze</b>	LMT, ENS de Cachan	Directeur de thèse
<b>François Louf</b>	LMT, ENS de Cachan	Encadrant de thèse

---

**LMT-Cachan**

ENS Cachan/CNRS/UPMC/PRES UniverSud Paris

61, avenue du Président Wilson

94235 CACHAN CEDEX



Merci Pierre,  
pour la confiance et la liberté,  
pour ses idées géniales.

Merci François,  
pour l'encadrement plein de conseils avisés et pertinents, et de bonne humeur,  
plus généralement pour ses réflexions de génie en tous genres.  
et aussi pour m'avoir gardé dans sa roue lors de mes premières sorties vélo...

Merci Guillaume,  
pour m'avoir aidé à endosser les habits de "Monsieur Méconnaissances", comme se plaît  
à le dire Boubou... Florent, j'essaie de te livrer un costard à ta hauteur !

Merci Mathilde, première co-bureau et entremetteuse bien inspirée à ses heures perdues... Merci aussi à la clique des anciens, pour l'accueil chaleureux au labo. Que chacun continue à le perpétuer ! En vrac, merci à Ben, Étienne, Jc, Julien, Pierre, irréductibles TACS restés à Cachan, pour les divertissements divers et variés... Aux plus jeunes, Camille, Florent, Loulou, Martin, Pierre-Etienne, qui innoveront aussi beaucoup ! Plus généralement, à chaque membre actif au labo ; citer chacun ici émietterait l'importance de l'ambiance. Merci aussi à Panpan, Karine et Florent pour l'aide apportée dans la construction de ma présentation.

À ceux qui ont saisi la pertinence du vélo pour les déplacements urbains...

Merci aux acteurs du DGM, qui assurent un enseignement passionné et vivant, de qualité, sans pour autant négliger l'encadrement humain et attentif à chacun.

Merci aux secrétaires, en particulier Danielle et les Christine au DGM, Françoise et Lydia au LMT, pour toute l'aide qu'elles apportent !

Merci à ma Chérie, et pardon pour les heures passées à peaufiner la thèse, au détriment d'autres tâches...

À Luc, qui n'en manquait pas, de connaissances !



”Tous les calculs et toutes les prévisions sur les coefficients de sécurité devraient en définitive être remplacés par des estimations raisonnables des probabilités de ruine.”  
Professeur Paul GERMAIN

*In : les sciences mécaniques et l'avenir industriel de la France, la documentation française, septembre 1980, p. 198 (rapport de l'académie des Sciences au Président de la République)*



# Table des matières

<b>Table des matières</b>	<b>i</b>
<b>Table des figures</b>	<b>v</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>ix</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Éléments de calcul de structures non déterministe</b>	<b>9</b>
1 Présentation . . . . .	11
2 Méthodes stochastiques en calcul de structures . . . . .	11
2.1 Introduction . . . . .	11
2.2 Rappels de probabilités . . . . .	12
2.3 Présentation de l'exemple . . . . .	18
2.4 Calcul analytique de la densité de probabilité, cas uniforme . . . . .	18
2.5 Calcul analytique de la densité de probabilité, cas gaussien . . . . .	20
2.6 Méthode de Monte Carlo . . . . .	22
2.7 Méthode de perturbation . . . . .	22
2.8 Méthode spectrale : décomposition sur le Chaos . . . . .	26
2.9 Méthode de décomposition spectrale généralisée . . . . .	31
2.10 Méthodes de surfaces de réponse . . . . .	31
2.11 Méthodes non paramétriques . . . . .	33
2.12 Méthodes de fiabilité . . . . .	34
3 Méthodes non stochastiques en calcul de structures . . . . .	36
3.1 Méthodes par intervalles . . . . .	36
3.2 Théorie des ensembles flous ( <i>Fuzzy Set Theory</i> ) . . . . .	38
3.3 Modèles convexes d'incertitude . . . . .	41
3.4 Autres . . . . .	41
4 La théorie des méconnaissances en dynamique des structures . . . . .	42
5 Bilan . . . . .	43
<b>2 La théorie des méconnaissances dans la validation des modèles</b>	<b>45</b>
1 Le problème de validation de modèles avec la théorie des méconnaissances	46
1.1 Concept général . . . . .	46



1.2	Situation dans une stratégie globale de validation . . . . .	48
2	La théorie des méconnaissances : état de l'art . . . . .	49
2.1	La réalité considérée . . . . .	49
2.2	Le concept de méconnaissances de base sur la rigidité . . . . .	49
2.3	Propagation des méconnaissances de base . . . . .	54
2.4	Recalage des méconnaissances de base . . . . .	58
3	Une représentation pertinente de la réalité . . . . .	61
3.1	Comparaison à une simulation de Monte Carlo . . . . .	62
3.2	Calcul analytique d'une méconnaissance . . . . .	63
<b>3</b>	<b>Apports pour traiter des problèmes quasi-statiques</b>	<b>73</b>
1	Modélisation des incertitudes portant sur les efforts . . . . .	75
1.1	Problématique . . . . .	75
1.2	Modélisation adoptée . . . . .	76
2	Méconnaissance effective sur une quantité d'intérêt . . . . .	78
2.1	Principe de la propagation des méconnaissances . . . . .	78
2.2	Exemples . . . . .	82
2.3	Discussion sur l'échelle de description des méconnaissances de base sur la rigidité . . . . .	88
2.4	Exemple industriel de propagation de méconnaissances effectives	89
2.5	Bilan . . . . .	93
3	Modélisation d'incertitudes anisotropes . . . . .	94
3.1	Contexte . . . . .	94
3.2	Modélisation des méconnaissances anisotropes . . . . .	94
3.3	Cas d'une sous-structure orthotrope bi-dimensionnelle . . . . .	95
3.4	Exemple : structure rectangulaire orthotrope bi-dimensionnelle . . . . .	96
3.5	Bilan . . . . .	98
4	Conclusion . . . . .	99
<b>4</b>	<b>Prédiction d'une défaillance par la théorie des méconnaissances</b>	<b>101</b>
1	Évaluation d'une probabilité de défaillance . . . . .	102
1.1	La théorie des méconnaissances pour la conception robuste . . . . .	102
1.2	Expression de la probabilité de défaillance du modèle . . . . .	103
1.3	Quantification de la surestimation : exemple 1D . . . . .	104
1.4	Définition d'un indicateur de marge sur la probabilité de défaillance	108
2	Application 1D . . . . .	109
2.1	Cas d'une limite déterministe $\alpha_c$ . . . . .	109
2.2	Cas d'une limite stochastique $\alpha_c(\theta)$ . . . . .	110
3	Application 3D : accouplement élastique . . . . .	114
3.1	Problématique et paramétrage . . . . .	114
3.2	Résultats de la propagation des méconnaissances . . . . .	115
3.3	Résultats en terme de prévision de défaillance . . . . .	115
4	Bilan . . . . .	116

<b>5</b>	<b>Conception robuste grâce aux méconnaissances : exemple</b>	<b>119</b>
1	Objectif de l'étude . . . . .	120
2	Présentation de la structure étudiée . . . . .	120
2.1	Géométrie et conditions aux limites . . . . .	120
2.2	Modélisation des incertitudes . . . . .	121
2.3	Échelle de description des méconnaissances . . . . .	121
3	Propagation du modèle avec méconnaissances . . . . .	122
4	Résultats pour la défaillance du modèle avec méconnaissances . . . . .	123
4.1	Limite de défaillance déterministe . . . . .	123
4.2	Limite de défaillance incertaine . . . . .	124
4.3	Bilan . . . . .	125
5	Conclusion . . . . .	126
	<b>Conclusion</b>	<b>127</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>131</b>



# Table des figures

1	La maîtrise des modèles. . . . .	3
2	Situation de la théorie des méconnaissances dans la maîtrise des modèles.	4
1.1	Densités de probabilité pour des lois normale et lognormale, de même moyenne ( $\mu = 1$ ), et même écart type ( $\sigma = 0,2$ ).	15
1.2	Poutre à rigidité uniforme en traction.	18
1.3	Fonction densité de probabilité de $\alpha(\theta)$ pour une loi uniforme.	19
1.4	Fonction densité de probabilité de $U(\theta)$ pour une loi uniforme ( $\bar{K} = 1N.m^{-1}$ et $\delta = 0.1$ ).	20
1.5	Fonction densité de probabilité de $\alpha(\theta)$ pour une loi gaussienne.	21
1.6	Fonction densité de probabilité de $U(\theta)$ pour une loi gaussienne.	21
1.7	Fonctions densité de probabilité de $U(\theta)$ pour une loi uniforme (100 tirages).	23
1.8	Fonctions densité de probabilité de $U(\theta)$ pour une loi uniforme (10000 tirages).	23
1.9	Fonctions densité de probabilité de $U(\theta)$ pour une loi gaussienne (100 tirages).	24
1.10	Fonctions densité de probabilité de $U(\theta)$ pour une loi gaussienne (5000 tirages).	24
1.11	Comparaison de la méthode de perturbation avec la solution théorique sur la moyenne de $U(\theta)$ .	27
1.12	Comparaison de la méthode de perturbation avec la solution théorique sur la variance de $U(\theta)$ (cas de loi uniforme).	27
1.13	Comparaison du Chaos Polynômial avec la méthode de perturbation sur la moyenne de $U(\theta)$ .	30
1.14	Comparaison du Chaos Polynômial avec la méthode de perturbation sur la variance de $U(\theta)$ .	31
1.15	Tirages de Monte Carlo sur la décomposition de $U(\theta)$ à l'ordre 1 et comparaison à la densité de probabilité analytique (100000 tirages).	32
1.16	Tirages de Monte Carlo sur la décomposition de $U(\theta)$ à l'ordre 2 et comparaison à la densité de probabilité analytique (100000 tirages).	32
1.17	Tirages de Monte Carlo sur la décomposition de $U(\theta)$ à l'ordre 3 et comparaison à la densité de probabilité analytique (100000 tirages).	33
1.18	Principe des méthodes fiabilistes . . . . .	35
1.19	Poutre à rigidité uniforme par élément.	38
1.20	Fonction d'appartenance des ensembles flous {froid}, {tiède} et {chaud} selon la température.	40

2.1	Schématisation de la théorie des méconnaissances dans la validation des modèles. . . . .	46
2.2	Schématisation de la théorie des méconnaissances . . . . .	47
2.3	Méconnaissances de base associées à une loi normale centrée. . . . .	52
2.4	Propagation des méconnaissances sur la quantité d'intérêt $\Delta\alpha_{mod}$ . . . . .	55
2.5	Schématisation du principe de réduction des méconnaissances de base à l'aide d'informations expérimentales pertinentes. . . . .	59
2.6	Valeurs expérimentales à $P\%$ de la quantité d'intérêt $\Delta\alpha_{exp}$ utilisées pour la réduction des méconnaissances de base. . . . .	60
2.7	Comparaison entre les méconnaissances effectives et les valeurs expérimentales à $P\%$ . . . . .	60
2.8	Le support de satellites Sylda 5. . . . .	62
2.9	Fonction densité de probabilité cumulée de la borne supérieure du déplacement en bout de barre, modèle avec une méconnaissance sur la rigidité de la barre ( $[-\bar{m}_E^-, \bar{m}_E^+] = \pm 6\%$ ). . . . .	64
2.10	Densités de probabilité pour un module d'Young lognormal ( $\delta = 0.02$ , moyenne $\bar{E} = 70000\text{MPa}$ ) -trait continu-, et pour un module d'Young suivant une loi à support borné ( $\delta = 0.02$ , moyenne $\bar{E} = 70000\text{MPa}$ ) -100000 tirages de Monte Carlo-. . . . .	66
2.11	10 réalisations de $K(x, \theta)$ le long de la barre pour $Lc = \frac{L}{100}$ . . . . .	69
2.12	10 réalisations de $K(x, \theta)$ le long de la barre pour $Lc = \frac{L}{10}$ . . . . .	69
2.13	10 réalisations de $K(x, \theta)$ le long de la barre pour $Lc = L$ . . . . .	69
2.14	10 réalisations de $K(x, \theta)$ le long de la barre pour $Lc = 10L$ . . . . .	69
3.1	Modèle discrétisé de la structure étudiée. . . . .	84
3.2	Conditions d'étude de l'accouplement. . . . .	86
3.3	Photo du support Sylda5. . . . .	90
3.4	Le modèle associé. . . . .	90
3.5	Sylda5 : modèle EF et excitation. . . . .	91
3.6	La plaque étudiée. . . . .	96
4.1	Fonctions densité de probabilité des bornes du modèle avec méconnaissances. . . . .	102
4.2	Probabilité de défaillance du modèle avec méconnaissances pour une limite déterministe $\alpha_c$ . . . . .	103
4.3	Fonctions densité de probabilité de la borne supérieure du modèle avec méconnaissances et de la limite stochastique considérée. . . . .	104
4.4	Barre en traction. . . . .	105
4.5	Fonction densité de probabilité cumulée de la borne supérieure du modèle avec méconnaissances et probabilité de défaillance du modèle associée à $\alpha_c$ donné ( $[-\bar{m}_E^-, \bar{m}_E^+] = \pm 0, 1$ ). . . . .	105
4.6	Probabilité de défaillance fonction de la méconnaissance sur la rigidité de la barre, pour différents déplacements critiques déterministes ( $U_c$ ) et bornes de méconnaissances symétriques ( $\bar{m}_E^+ = \bar{m}_E^-$ ). . . . .	109

4.7	Fonction densité de probabilité du déplacement critique suivant une loi de Weibull pour ( $k = 100 ; \lambda = 0,0147$ ). . . . .	110
4.8	Fonction densité de probabilité du déplacement critique suivant une loi de Weibull pour ( $k = 200 ; \lambda = 0,0147$ ). . . . .	112
4.9	Probabilité de défaillance fonction de la méconnaissance sur la rigidité de la barre, pour des bornes de méconnaissances symétriques ( $\overline{m}_E^+ = \overline{m}_E^-$ ) et pour différents déplacements critiques suivant une loi de Weibull. . . . .	113
4.10	Indicateur de la marge sur la probabilité de défaillance fonction de la méconnaissance sur la rigidité de la barre, pour des bornes de méconnaissances symétriques ( $\overline{m}_E^+ = \overline{m}_E^-$ ) et pour différents déplacements critiques suivant une loi de Weibull. . . . .	113
4.11	Conditions d'étude de l'accouplement. . . . .	114
5.1	Conditions aux limites et efforts imposés au manchon. . . . .	121
5.2	La zone d'intérêt du manchon. . . . .	123



# Liste des tableaux

1.1	Comparaison de différentes méthodes pour deux cas de rigidités. . . . .	39
2.1	Comparaison entre dispersion de module d'Young et modèle avec méconnaissances sur la rigidité des éléments du support de satellites Sylda 5 (bornes à 99% de probabilité). . . . .	63
2.2	Comparaison entre module d'Young aléatoire et modèle avec méconnaissance sur la rigidité de la barre (bornes à 99% de probabilité). . . . .	65
2.3	Comparaison des lois lognormale et à support borné pour la rigidité de la barre en traction (bornes à 99% de probabilité). . . . .	66
2.4	Dispersion d'énergie de déformation pour différentes longueurs de corrélation et $A = \frac{2}{100}$ (bornes à 99% de probabilité) . . . . .	70
2.5	Dispersion d'énergie de déformation pour différentes longueurs de corrélation et $A = \frac{3}{100}$ (bornes à 99% de probabilité) . . . . .	70
2.6	Modèle avec une méconnaissance sur la rigidité de la barre (bornes à 99% de probabilité). . . . .	71
2.7	Modèle avec une méconnaissance $m_E$ sur la rigidité de la barre et longueur de corrélation associée énergétiquement pour $A = \frac{2}{100}$ (bornes à 99% de probabilité) . . . . .	71
2.8	Modèle avec une méconnaissance $m_E$ sur la rigidité de la barre et longueur de corrélation associée énergétiquement pour $A = \frac{3}{100}$ (bornes à 99% de probabilité) . . . . .	72
2.9	Modèle avec méconnaissances sur la rigidité de la barre décomposée en 2 éléments (bornes à 99% de probabilité).. . . . .	72
3.1	Résultats du modèle avec méconnaissances sur l'amplitude des efforts (loi uniforme, bornes à 99% de probabilité). . . . .	84
3.2	Résultats du modèle avec méconnaissances sur la direction des efforts (loi gaussienne, bornes à 99% de probabilité). . . . .	84
3.3	Résultats du modèle avec méconnaissances sur la rigidité, pour deux niveaux de sous-structuration (loi gaussienne, bornes à 99% de probabilité). . . . .	84
3.4	Modèle avec méconnaissances sur l'amplitude de l'effort (loi uniforme, bornes à 99% de probabilité). . . . .	86



3.5	Résultats du modèle avec méconnaissances sur la direction des efforts (loi gaussienne, bornes à 99% de probabilité). . . . .	86
3.6	Résultats du modèle avec méconnaissances sur la rigidité, pour deux niveaux de sous-structuration (loi gaussienne, bornes à 99% de probabilité). . . . .	86
3.7	Modèle avec méconnaissances sur l'amplitude de l'effort (loi uniforme, bornes à 99% de probabilité). . . . .	92
3.8	Modèle avec méconnaissance sur la direction de l'effort (loi gaussienne, bornes à 99% de probabilité). . . . .	92
3.9	Modèle avec méconnaissances sur la rigidité (loi gaussienne, bornes à 99% de probabilité). . . . .	92
3.10	Composition de la plaque. . . . .	97
3.11	Modèle avec opérateur des méconnaissances élastiques ; quantité d'intérêt $\bar{\sigma}_{xx}^{55}$ (bornes à 99% de probabilité). . . . .	97
3.12	Modèle avec opérateur des méconnaissances élastiques ; quantité d'intérêt $\bar{\sigma}_{yy}^{55}$ (bornes à 99% de probabilité). . . . .	97
4.1	Résultats, en terme de probabilité de défaillance, de différentes modélisations avec méconnaissances sur la rigidité de la barre (bornes à 99% de probabilité). . . . .	106
4.2	Probabilité de défaillance du réel simulé pour une barre de rigidité lognormale (bornes à 99% de probabilité). . . . .	107
4.3	Comparaison modèle/réel des probabilités de défaillance de la barre (bornes à 99% de probabilité). . . . .	107
4.4	Modèle pour la défaillance de la barre, cas d'une limite déterministe (bornes à 99% de probabilité, et $\beta = 10\%$ ). . . . .	110
4.5	Modèle pour la défaillance de la barre, cas d'une limite stochastique (bornes à 99% de probabilité). . . . .	111
4.6	Comparaison des probabilités de défaillance de la barre, selon les cas stochastique et déterministe, pour une même moyenne de déplacement critique (bornes à 99% de probabilité). . . . .	111
4.7	Données du modèle avec méconnaissances. . . . .	115
4.8	Résultats de la propagation du modèle avec méconnaissances (bornes à 99% de probabilité). . . . .	116
4.9	Modèle pour la défaillance de l'accouplement élastique, cas d'une limite déterministe et quantité d'intérêt $\sigma_{zz}^{2285}$ ( $\bar{\sigma}_{zz}^{2285} = 81MPa$ , $\sigma_c = 90MPa$ ). Les bornes données sont les bornes à 99% de probabilité. . . . .	116
5.1	Données du modèle avec méconnaissances. . . . .	122
5.2	Résultats de la propagation du modèle avec méconnaissances (bornes à 99% de probabilité). . . . .	123
5.3	Modèle pour la défaillance de la tête de rotor, cas d'une limite déterministe et quantité d'intérêt $\sigma_{zz}^{5876}$ ( $\bar{\sigma}_{zz}^{5876} = 2,03.10^2MPa$ , $\sigma_c = 270MPa$ ). . . . .	124

5.4 Modèle pour la défaillance de la tête de rotor, cas d'une limite incertaine et quantité d'intérêt  $\sigma_{zz}^{5876}$  ( $\bar{\sigma}_{zz}^{5876} = 2,03.10^2 MPa$ ,  $(k;\lambda) = (10; 2,7.10^2 MPa)$ ). . . . . 125



# Introduction

*Sur la théorie des méconnaissances en conception robuste*

Dans les industries de pointe, comme l'aéronautique, il est devenu nécessaire de dimensionner les structures avec toujours plus de précision, et dans des délais de plus en plus courts. La généralisation de l'utilisation des simulations numériques répond à ces besoins à priori contradictoires, en permettant de diminuer le nombre d'essais réalisés. Or, la modélisation des systèmes complexes, comme les avions ou les lanceurs, aboutit souvent à la résolution d'équations non triviales, dont la solution mathématique exacte est inaccessible. On utilise donc des solveurs numériques, comme les codes éléments finis (EF), pour calculer une solution approchée.

Comme les performances des machines de calcul augmentent considérablement, des phénomènes complexes, auparavant parfois simplifiés à l'extrême, peuvent dorénavant être modélisés plus finement. Il en est de même pour les dispersions de certains paramètres, qui peuvent être prises en compte dans les modèles, ce qui aboutit à rendre ceux-ci de plus en plus réalistes.

L'art du modélisateur consiste donc à modéliser au plus juste les phénomènes physiques et leurs dispersions, tout en effectuant des hypothèses simplificatrices afin d'obtenir un modèle discrétisé qui ne soit pas trop lourd en terme de temps de calcul lors de la simulation numérique. Il est cependant nécessaire d'avoir une entière confiance dans les calculs effectués. Tout l'enjeu est alors de maîtriser l'écart entre la solution approchée et la réponse de la structure réelle, et donc de s'interroger sur la validité des résultats obtenus en tenant compte des différentes sources d'erreurs et d'incertitudes rencontrées :

- d'une part, dans la phase de modélisation :
  - lors de la modélisation des caractéristiques ou du comportement du matériau,
  - lors de la modélisation de la géométrie,
  - lors de la modélisation des charges extérieures,
  - lors de la modélisation des conditions aux limites,
- d'autre part, dans l'utilisation d'un modèle éléments finis :
  - provenant de la discrétisation du problème.

L'objectif de tout modélisateur est de quantifier et contrôler ces erreurs. Les méthodes développées dans ce cadre de maîtrise des modèles se rangent en deux domaines : Validation et Vérification (voir la Figure 1).

Le domaine de la vérification des modèles s'attache à quantifier l'erreur commise entre le modèle conceptuel (de mécanique des milieux continus) et le modèle discrétisé (informatisé). De nombreux travaux ont été menés avec succès ou sont en cours dans ce domaine. Trois types de méthodes existent, utilisant chacune un estimateur d'erreur différent :

- un estimateur basé sur le concept d'erreur en relation de comportement et sur des techniques de construction de champs admissibles [1] ;
- un estimateur associé à la vérification des conditions d'équilibre [2] ;

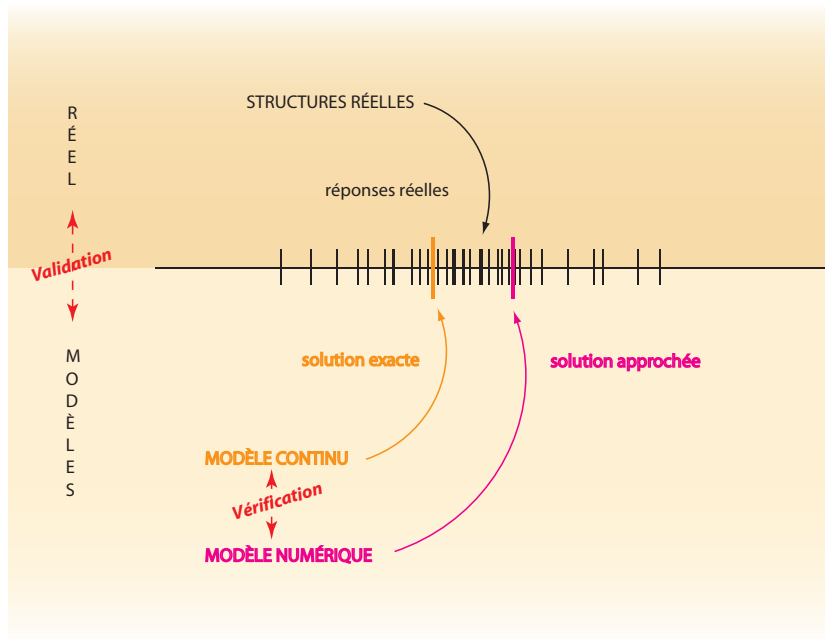


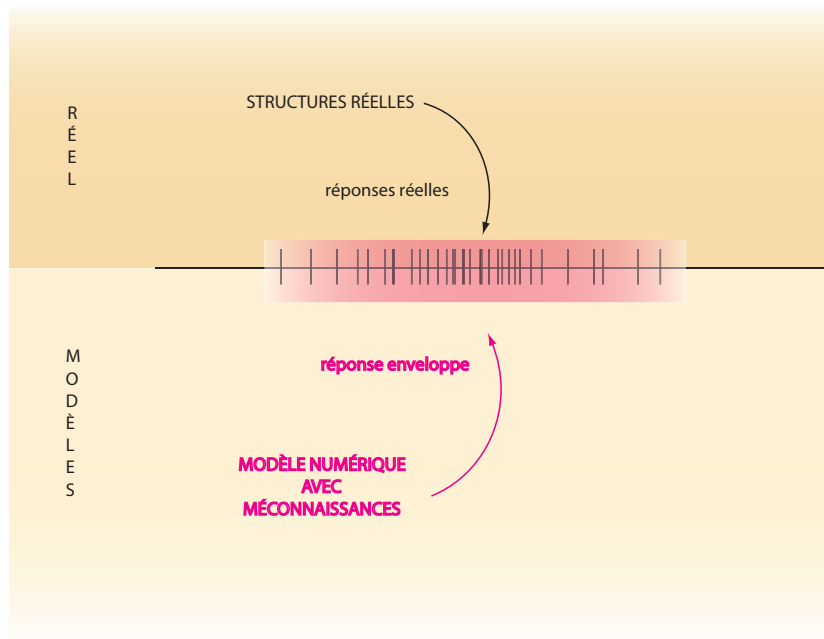
FIG. 1: La maîtrise des modèles.

- un estimateur fondé sur le défaut de régularité de la solution éléments finis, et utilisant le lissage des contraintes [3].

Pour plus de renseignements concernant ces méthodes, on se référera à [4] et [5].

L'autre part du contrôle des modèles, celle sur laquelle nous allons porter notre intérêt, concerne la validation des modèles. Initialement vue comme la validation par un ensemble d'essais définis du modèle numérique employé, cette thématique est aujourd'hui définie plus globalement comme la validation du modèle utilisé pour prévoir le comportement de la structure réelle étudiée. Le modèle choisi doit ainsi représenter "suffisamment bien" la réalité considérée, le niveau de qualité attendu étant défini préalablement par l'ingénieur. Cette question est controversée (voir [6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13]), car certaines personnes pensent qu'un modèle ne peut pas être validé, mais seulement invalidé. Cependant, de nombreux ingénieurs utilisent le mot "validation" pour désigner une procédure issue de règles pratiques et expérimentales assurant qu'une structure réelle doit se comporter comme souhaité. Des coefficients de sécurité sont alors introduits pour assurer des prédictions conservatives. Ils permettent de prendre en compte les incertitudes et dispersions présentes en phase de modélisation, mais aboutissent souvent à des surdimensionnements conséquents.

De plus, un modèle déterministe, même bien discrétisé et recalé, peut ne pas rendre compte efficacement des incertitudes sur les chargements, des dispersions structurales



**FIG. 2:** Situation de la théorie des méconnaissances dans la maîtrise des modèles.

dans les caractéristiques des matériaux, ou d’erreurs liées aux hypothèses associées à la modélisation de certaines parties, comme les liaisons. Grâce aux développements des moyens de calcul, il est aujourd’hui possible de modéliser le caractère stochastique de certaines variables en faisant, par exemple, des hypothèses sur leurs lois de probabilité. La prise en compte de ces variabilités dans les modèles est devenue une problématique majeure des industriels, afin de pouvoir prédire, en phase de conception, le comportement de toute structure réelle produite, autrement dit de faire de la conception robuste. Au final, l’objectif, présent derrière les démarches de validation de modèles dans le cadre stochastique, est de connaître et maîtriser les marges, afin, d’une part, de s’assurer de la robustesse des structures produites et, d’autre part, de maîtriser les coûts.

C’est dans ce contexte de validation et de calcul robuste pour la prise en compte des incertitudes que s’insère la théorie des méconnaissances (*Lack-Of-Knowledge (LOK) theory* en anglais), initiée dans [14], détaillée dans [15] et [16], et prolongée par les travaux présentés ici. L’objectif, schématisé sur la Figure 2, est d’obtenir une enveloppe des réponses réelles d’une famille de structures semblables.

L’idée à la base de la théorie des méconnaissances est de modéliser les incertitudes à l’échelle de sous-structures. La force de cette méthode est de se baser sur un seul calcul de structure pour prévoir le comportement de toute structure particulière produite. Ainsi, avec cette modélisation, les dispersions sur une quantité d’intérêt sont obtenues

par post-traitement. Cela est possible car la valeur de la quantité d'intérêt d'une structure particulière de la famille produite n'a que peu d'importance aux yeux de l'ingénieur dimensionnant une structure, ce qui importe est d'en avoir un intervalle de confiance pour la famille de structures considérée. Le gain en terme de rapport précision sur temps de calcul, par rapport à une méthode probabiliste paramétrique ou une méthode basée sur les intervalles, est alors conséquent.

Jusqu'à présent, seules des incertitudes portant sur des rigidités structurales ont été prises en compte, et ceci dans le cadre de la dynamique des structures (c.f. [16, 17]). Ces incertitudes sont modélisées par l'introduction de variables internes, nommées méconnaissances de bases, définies énergétiquement à l'échelle de sous-structures, ce qui permet de globaliser diverses sources d'erreur. Une étape de propagation permet ensuite d'obtenir les méconnaissances effectives, autrement dit les bornes de l'intervalle qui a une certaine probabilité de contenir la quantité d'intérêt recherchée. Les quantités d'intérêt peuvent être de type pulsations propres, ou projections de modes propres. Afin de pouvoir connaître les valeurs de méconnaissances de base représentatives d'une structure, une étape clé, dite de réduction, est développée dans [16, 18, 19], qui permet de les identifier à partir d'essais réalisés sur quelques structures. Cette démarche de réduction des méconnaissances a été illustrée avec succès sur le support de satellites Sylda5 présent dans le lanceur Ariane 5 (voir [20, 21, 22]).

Pour compléter cette théorie, il était cependant nécessaire d'élargir les incertitudes susceptibles d'être modélisées à celles portant sur l'environnement des structures étudiées, ainsi que de fournir un cadre pour évaluer la probabilité de défaillance d'une structure. Certaines extensions ont déjà été partiellement présentées (voir [23, 24, 25]). Ce sont ces extensions, inscrivant la méthode dans une perspective de conception robuste, qui font l'objet de ce manuscrit.

Dans l'optique d'évaluer la capacité de la théorie des méconnaissances à représenter des dispersions réelles, une partie des travaux présentés montre qu'il est possible de calculer la méconnaissance, portant sur une rigidité, qui correspond à une certaine dispersion réelle. Ce calcul de méconnaissance est effectué sur un exemple simple de barre en traction, par comparaison à une dispersion réelle modélisée par une rigidité stochastique. Pour différents types de description du caractère stochastique de cette rigidité, on calcule, de manière analytique, la dispersion résultante en terme de déplacement solution. Parallèlement à cela, un modèle avec méconnaissance sur la rigidité de la barre permet, par propagation, d'encadrer cette dispersion. Pour une probabilité de  $P$  donnée, il est alors possible d'identifier la valeur de méconnaissance aboutissant aux mêmes bornes de dispersion.

Afin de pouvoir traiter une gamme de problèmes plus larges, une extension proposée porte sur la définition de méconnaissances sur l'environnement des structures. En effet, les incertitudes présentes de manière générale sur les distributions d'efforts appliqués à une



structure, ainsi que celles effectuées sous forme d'hypothèses lors de leur modélisation sont souvent très importantes. Le manque de connaissance ou les approximations effectuées lors de la modélisation sont, en effet, souvent de plus grande ampleur que dans le cas de la modélisation des rigidités structurales. De manière analogue à ce qui a été effectué pour les rigidités, la description adoptée ici consiste à raisonner de manière énergétique. La modélisation de ces incertitudes permet d'en découpler les sources :

- d'une part, en les modélisant à l'échelle de sous-structures, choisies de façon pertinente en tenant compte de la géométrie et de la répartition de chaque distribution d'efforts ;
- d'autre part, en modélisant de manière séparée les incertitudes présentes sur l'amplitude et celles sur la direction des efforts en définissant deux types de méconnaissances de base pour chaque distribution.

La description adoptée n'est donc pas paramétrique, dans le sens où l'on modéliserait chaque composante des efforts, mais plus globale et plus pratique pour l'ingénieur. En effet, le fait de modéliser séparément les méconnaissances sur l'amplitude et celles sur la direction des efforts est bien adapté pour traiter les informations obtenues à l'aide de capteurs : l'erreur effectuée sur la direction de positionnement du capteur peut être évaluée indépendamment de celle sur l'amplitude mesurée.

Dans la même optique d'extension des types de problèmes susceptibles d'être traités à l'aide des méconnaissances, nous proposons une modélisation des méconnaissances plus adaptée aux paramètres anisotropes. On introduit ainsi un opérateur des méconnaissances, qui permet de représenter des niveaux de méconnaissance variables selon la direction d'étude du paramètre considéré. Cette description est particulièrement bien adaptée aux cas de matériaux orthotropes, ou aux cas où les données comportent des incertitudes variables selon la direction d'étude.

Comme précisé précédemment, la théorie des méconnaissances a été initialement définie en dynamique des structures. Un des aspects du travail présenté ici a donc été de définir un cadre pour pouvoir l'utiliser sur des problèmes de statique, en définissant une propagation des méconnaissances à des quantités d'intérêt utiles en statique. Ces quantités peuvent être des déplacements locaux, des contraintes locales, ou, plus généralement, toute quantité pouvant être obtenue par une technique d'extraction à partir du déplacement solution du problème de statique. La propagation des méconnaissances définie ici se base sur une linéarisation de la quantité d'intérêt permettant de l'exprimer en fonction des énergies intervenant dans les différentes définitions de méconnaissances de base.

Enfin, le dernier aspect des travaux présentés ici concerne l'utilisation de la théorie des méconnaissances dans un cadre de conception robuste. L'objectif est de pouvoir prédire la ruine d'une structure. Nous détaillons ainsi le calcul d'une probabilité de défaillance d'une structure basée sur sa modélisation avec des méconnaissances, et sur la donnée d'un critère de défaillance, pour le moment défini comme la comparaison d'une quantité d'intérêt à une valeur limite. Cette probabilité est évaluée de façon conservative à

partir de la borne supérieure de la quantité d'intérêt correspondante obtenue par propagation du modèle avec méconnaissances. On ajoute à cette évaluation de la probabilité de défaillance de la structure la donnée d'un indicateur de la marge disponible par diminution des méconnaissances. Cet indicateur est très utile car il permet de savoir quelles sont les méconnaissances de base les plus influentes, et permet ainsi à l'ingénieur de savoir où faire un effort de connaissance pour améliorer la fiabilité.

La rédaction de ce document, reprenant les points détaillés précédemment, s'articule de la manière suivante :

- Le premier chapitre présente une étude bibliographique, non exhaustive, des travaux concernant le calcul de structures non-déterministes, que ces méthodes soient probabilistes ou non ; nous nous attacherons également à appliquer les principales méthodes sur un exemple simple.
- Dans un second temps, nous détaillons plus particulièrement les bases de la modélisation des incertitudes par la théorie des méconnaissances, en la situant dans le cadre de la validation des modèles ; nous tenterons de montrer l'intérêt et la pertinence d'une telle modélisation par le calcul de méconnaissances correspondant à des dispersions réelles.
- Le troisième chapitre expose des apports permettant de modéliser des incertitudes portant sur l'environnement de la structure étudiée, ainsi qu'une extension de la définition des méconnaissances sur les rigidités pour des problèmes anisotropes. Pour traiter des problèmes quasi-statiques, nous y proposons aussi une méthode permettant de propager toutes sortes de méconnaissances de base sur des quantités d'intérêt de type contrainte ou déplacement local. Tout ceci est illustré par quelques exemples.
- Nous proposons ensuite une approche permettant d'estimer la défaillance d'une structure à partir d'un modèle avec méconnaissances. Cette approche, appliquée à la rupture d'une structure 3D, permet d'inscrire la théorie dans l'optique de conception robuste.
- La mise en oeuvre de la méthode sur une structure industrielle fait l'objet du cinquième et dernier chapitre.



# Chapitre 1

## Éléments de calcul de structures non déterministe

*Dans ce premier chapitre, nous présentons succinctement les principales méthodes non déterministes en calcul de structures. On s'attachera à les mettre en application sur un exemple, en l'occurrence une barre en traction simple.*

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Présentation</b>	<b>11</b>
<b>2</b>	<b>Méthodes stochastiques en calcul de structures</b>	<b>11</b>
2.1	Introduction	11
2.2	Rappels de probabilités	12
2.3	Présentation de l'exemple	18
2.4	Calcul analytique de la densité de probabilité, cas uniforme	18
2.5	Calcul analytique de la densité de probabilité, cas gaussien	20
2.6	Méthode de Monte Carlo	22
2.7	Méthode de perturbation	22
2.8	Méthode spectrale : décomposition sur le Chaos	26
2.9	Méthode de décomposition spectrale généralisée	31
2.10	Méthodes de surfaces de réponse	31
2.11	Méthodes non paramétriques	33

2.12	Méthodes de fiabilité . . . . .	34
<b>3</b>	<b>Méthodes non stochastiques en calcul de structures . . . . .</b>	<b>36</b>
3.1	Méthodes par intervalles . . . . .	36
3.2	Théorie des ensembles flous ( <i>Fuzzy Set Theory</i> ) . . . . .	38
3.3	Modèles convexes d'incertitude . . . . .	41
3.4	Autres . . . . .	41
<b>4</b>	<b>La théorie des méconnaissances en dynamique des structures . . . . .</b>	<b>42</b>
<b>5</b>	<b>Bilan . . . . .</b>	<b>43</b>

---

# 1 Présentation

Nous nous situons dans ce chapitre dans le cadre général des problèmes de mécanique des structures comportant des incertitudes. Ces incertitudes rencontrées peuvent être liées à des dispersions des valeurs de certains paramètres, ou bien aux hypothèses effectuées lors de la modélisation, ou encore à une mauvaise connaissance des paramètres du modèle ou, plus généralement, des phénomènes physiques en présence. Selon la connaissance dont on dispose, les incertitudes rencontrées peuvent alors être de différentes natures, plus particulièrement :

- des incertitudes statistiques, dont on connaît la loi de probabilité ;
- des incertitudes non probabilistes, dont on connaît parfois des bornes de dispersion.

Nous rappelons donc ici, sans être évidemment exhaustifs, tout d'abord les bases des méthodes utilisant les probabilités pour modéliser les paramètres incertains d'un problème, puis celles des méthodes non stochastiques.

On s'attachera ici à mettre en évidence les idées de base des principales méthodes permettant de décrire des incertitudes. Ce sont souvent des couplages de ces différentes méthodes qui sont efficaces pour traiter des problèmes de mécanique des structures.

## 2 Méthodes stochastiques en calcul de structures

### 2.1 Introduction

Les méthodes stochastiques sont, comme leur nom l'indique, basées sur l'usage des probabilités pour modéliser les incertitudes. Elles consistent à étudier les effets sur la sortie des incertitudes portant sur les paramètres d'entrée, considérés donnés, des modèles mécaniques. Les connaissances portant sur les incertitudes de ces données d'entrée peuvent permettre de les modéliser en tant que :

- variables aléatoires, c'est-à-dire des fonctions ne dépendant que de l'aléa, donc uniformes en espace et en temps ;
- champs stochastiques, c'est-à-dire des fonctions dépendant à la fois de l'aléa et de l'espace ;
- processus stochastiques, c'est-à-dire des fonctions dépendant de l'aléa et du temps.

Une fois choisi le type de modélisation, différentes méthodes existent pour calculer la réponse aléatoire d'une structure comportant des paramètres stochastiques. On trouve

principalement dans la littérature, les trois méthodes suivantes :

- La méthode de Monte Carlo, détaillée dans le paragraphe 2.6, est la plus simple et intuitive : on génère numériquement des réalisations des variables aléatoires caractéristiques des paramètres structuraux incertains. L'ensemble des réponses correspondantes est ensuite calculé. Enfin, un traitement statistique, par des méthodes appropriées, permet de qualifier l'incertitude, qui peut faire l'objet d'une étude ultérieure de fiabilité.
- Par une méthode de perturbation (voir le paragraphe 2.7), utilisant des décompositions en série de Taylor des paramètres d'entrée et de sortie, on peut exprimer des relations linéaires entre des caractéristiques de la réponse aléatoire et les paramètres structuraux incertains.
- Par les méthodes intitulées de projection sur le chaos (détaillées dans le paragraphe 2.8), on décompose partie aléatoire et partie spatiale des champs stochastiques en présence en effectuant leur décomposition spectrale de Karkunen-Loeve (présentée dans le paragraphe 2.2). Il est ensuite possible de décomposer la partie aléatoire de la réponse cherchée en utilisant, soit une décomposition en série de Neumann, soit une projection sur le Chaos Homogène. La partie spatiale est, elle, représentée par éléments finis. En discrétisant ainsi partie aléatoire et partie spatiale, on obtient une approximation sous forme de surface de réponse de la solution. Pour effectuer une analyse statistique de cette réponse, on a souvent recours à des tirages de Monte Carlo sur cette surface de réponse.

## 2.2 Rappels de probabilités

Tout d'abord, rappelons brièvement quelques notions de probabilité qui seront utiles plus loin. Ces notions concernent les types de description possibles des incertitudes. Pour plus de précisions, on consultera par exemple [26].

### Variables aléatoires.

Une variable aléatoire, fonction à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , est entièrement définie par la donnée de :

- soit sa fonction de répartition (notée CDF pour *cumulative density function*). Cette fonction prend des valeurs entre 0 et 1 ;
- soit sa fonction densité de probabilité (notée PDF pour *probability density function*), dont l'intégrale est la fonction de répartition. Cette fonction est celle que l'on approxime en effectuant des tirages de Monte Carlo et en les représentant sous forme d'histogrammes ;

– soit la donnée de tous ses moments.

Souvent, on se contente de donner ses deux premiers moments, celui d'ordre 0, appelé moyenne ou espérance, et celui d'ordre 1, la variance.

### Loi uniforme.

La densité de probabilité pour une variable aléatoire  $\alpha(\theta)$  centrée réduite suivant une loi uniforme est la fonction :

$$f_{\alpha}(x) = \frac{1}{2\sqrt{3}} \quad \forall x \in [-\sqrt{3}; \sqrt{3}]. \quad (1.1)$$

En effet, de manière générale, la variable aléatoire  $\alpha(\theta)$  suivant une loi uniforme ne prend des valeurs que dans un certain intervalle, noté  $I$ , donc sa fonction densité de probabilité  $f_{\alpha}$  est nulle en dehors de cet intervalle et est constante sur  $I$ . Comme la probabilité cumulée sur l'intervalle est unitaire :

$$\int_I f_{\alpha}(x) dx = 1 \quad (1.2)$$

alors

$$f_{\alpha}(x) = \frac{1}{l} \quad \text{sur } I \quad (1.3)$$

où  $l$  est la largeur de l'intervalle. Or, pour une variable aléatoire  $\alpha(\theta)$  centrée réduite, la densité de probabilité doit satisfaire aux conditions de moyenne nulle (la variable est dite centrée) et de variance unitaire (la variable est dite réduite) :

$$\begin{cases} \langle \alpha(\theta) \rangle = 0 \\ \langle \alpha^2(\theta) \rangle = 1 \end{cases} \quad (1.4)$$

La première équation implique la symétrie de l'intervalle  $I$  de définition de la fonction densité de probabilité, soit  $I = [-a; a]$ ; la seconde impose  $a = \sqrt{3}$ .

### Loi normale (ou gaussienne).

La densité de probabilité pour une variable aléatoire de moyenne  $\mu$  et d'écart type  $\sigma$  suivant une loi gaussienne est la fonction :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad \forall x \in [-\infty; +\infty]. \quad (1.5)$$

Cette loi présente des propriétés importantes : d'une part, toute l'information est donnée directement par les paramètres  $\mu$  et  $\sigma$ . D'autre part, c'est la loi que l'on obtient naturellement en additionnant un grand nombre de variables aléatoires indépendantes, d'après le théorème central limite, dont l'énoncé est le suivant :



Si l'on considère  $n$  variables aléatoires indépendantes  $Y_1(\theta), \dots, Y_n(\theta)$  d'espérances respectives  $\mu_k$  et d'écart types respectifs  $\sigma_k$ , alors la loi de répartition de :

$$S_n(\theta) = \sum_{k=1}^n Y_k(\theta)$$

tend lorsque  $n \rightarrow \infty$  vers une loi normale d'espérance  $\mu$  et d'écart type  $\sigma$  qui s'expriment :

$$\mu = \sum_{k=1}^n \mu_k \quad \text{et} \quad \sigma = \sqrt{\sum_{k=1}^n \sigma_k^2} \quad (1.6)$$

Cela explique pourquoi les paramètres structuraux sont généralement modélisés par des variables aléatoires de loi normale.

En pratique, afin d'éviter la possibilité de valeurs négatives et donc sans signification physique pour bon nombre de paramètres mécaniques comme les rigidités, on peut :

- soit considérer une loi gaussienne bornée, quitte à la renormaliser ensuite. À titre d'information, en bornant une loi normale centrée réduite à l'intervalle  $[-3\sigma; 3\sigma]$ , on conserve 99,74% des réalisations ; en la bornant à  $[-2.6\sigma; 2.6\sigma]$ , on en conserve plus de 99%.
- soit considérer une loi lognormale (présentée ci-après), dont la distribution est très proche de la loi normale sur son domaine de définition  $[0; +\infty[$ ,

### Loi lognormale.

L'utilisation de la loi lognormale (plutôt que normale) permet d'éviter les occurrences négatives de la variable aléatoire, sans sens physique dans le cas de la modélisation de rigidités, que permettrait une loi gaussienne. Son domaine de définition est en effet réduit à  $[0; +\infty[$ . La densité de probabilité pour une variable aléatoire de moyenne  $\mu$  et d'écart type  $\sigma$  suivant une loi lognormale est la fonction :

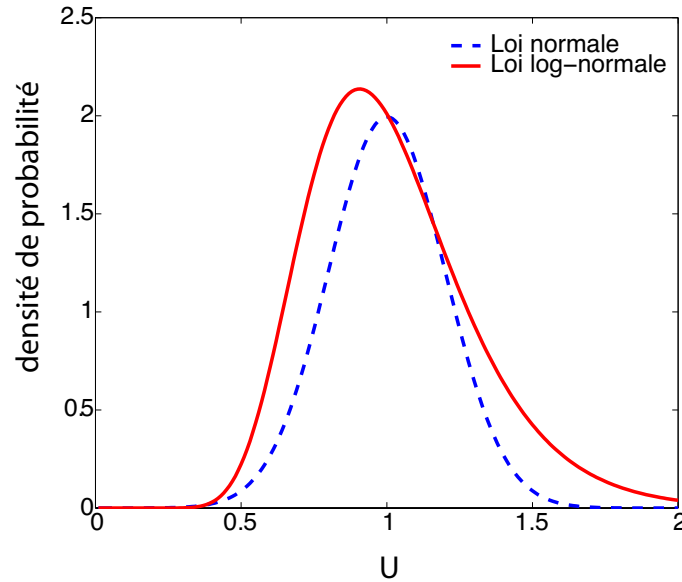
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}d} \exp\left(\frac{-(\log(x) - \bar{M})^2}{2d^2}\right) \quad \forall x \in [0; +\infty]. \quad (1.7)$$

Dans cette expression, le paramètre  $\bar{M}$  permet de centrer la loi autour de la valeur moyenne de la distribution, notée  $\mu$ , qui vérifie :

$$\mu = \exp\left(\bar{M} + \frac{d^2}{2}\right) \quad (1.8)$$

La variance de cette loi, notée  $\sigma^2$ , vaut :

$$\sigma^2 = \mu^2 (\exp(d^2) - 1) \quad (1.9)$$



**FIG. 1.1:** Densités de probabilité pour des lois normale et lognormale, de même moyenne ( $\mu = 1$ ), et même écart type ( $\sigma = 0,2$ ).

Comme on peut le voir sur la Figure 1.1, où sont représentées les fonctions densités de probabilité d'une loi normale et d'une loi lognormale, de mêmes espérance ( $\mu = 1$ ) et écart type ( $\sigma = 0,2$ ), ces deux lois sont relativement proches sur  $[0; +\infty[$ . On peut cependant reprocher à la loi lognormale la non-symétrie de sa densité de probabilité par rapport à la valeur moyenne.

### Principe du maximum d'entropie.

Afin de déterminer la "meilleure" loi de probabilité d'une variable aléatoire vérifiant un certain nombre de contraintes, on peut utiliser le principe du maximum d'entropie, défini dans [27, 28]. Ceci est particulièrement intéressant dans le cas où le choix de la loi de probabilité d'un paramètre aléatoire à modéliser n'est pas évident.

Des applications récentes de construction de loi de probabilité de paramètres aléatoires par le principe du maximum d'entropie sont présentées dans [29, 30, 31].

La notion d'entropie d'une variable aléatoire  $\alpha(\theta)$ , de fonction densité de probabilité  $p$  sur un domaine  $D$ , qui fut introduite dans [32] et qui caractérise la quantité d'information manquante, est définie par :

$$S(\alpha(\theta)) = - \int_D p(y) \ln(p(y)) dy \quad (1.10)$$

En choisissant la loi respectant les contraintes données et maximisant l'entropie, on choisit la loi pour laquelle une incertitude maximale est supposée concernant ce que l'on ne connaît pas, et pour laquelle toute l'information est utilisée.

Ainsi, si l'on cherche, par exemple, à déterminer une loi de probabilité sur l'intervalle  $[a; b]$  (avec  $a \neq b$ ), la maximisation de l'entropie  $S(\alpha(\theta))$  sous la contrainte de normalisation

$$\int_a^b p(y) dy = 1 \quad (1.11)$$

implique nécessairement :

$$p(y) = \frac{1}{b-a} \quad (1.12)$$

Cela correspond à la loi uniforme. Il semble en effet logique que cette loi permette de maximiser l'incertitude sur un intervalle  $[a; b]$ , car aucun point de cet intervalle n'a de raison d'être plus probable qu'un autre.

### Fonction d'une variable aléatoire : méthode pratique dite du changement de variable.

Trouver la loi  $f_Y(y)$  de la variable aléatoire  $Y(\theta)$ , fonction d'une autre variable aléatoire  $X(\theta)$  par l'expression :

$$Y(\theta) = g(X(\theta)) \quad (1.13)$$

en connaissant la fonction densité de probabilité  $f_X$  de la variable  $X(\theta)$ , c'est trouver  $f_Y$  vérifiant pour toute fonction continue bornée  $h$  la définition de l'espérance de  $Y(\theta)$  :

$$E[h(y)] = \int_{-\infty}^{\infty} h(y) f_Y(y) dy \quad (1.14)$$

Or, par un changement de variables, cette espérance peut s'exprimer comme suit :

$$E[h(y)] = E[h(g(x))] = \int_{-\infty}^{\infty} h(g(x)) f_X(x) dx \quad (1.15)$$

De manière générale, on effectue une partition de  $\mathbb{R}$  en intervalles  $I_1, \dots, I_n$  tels que pour chaque  $I_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , la fonction  $g$  soit strictement monotone et continuellement différentiable. Puis, par le changement de variables  $y = g(x)$ , on obtient l'expression de la fonction densité de probabilité de  $Y(\theta)$  :

$$f_Y(y) = \sum_i \frac{f_X(x_i)}{\left| \frac{dg(x_i)}{dx} \right|} \quad (1.16)$$

avec la convention que le  $i^{\text{ème}}$  terme est nul si la fonction  $g^{-1}$  n'est pas définie sur  $I_i$ .

Cette méthode est utilisée pour calculer analytiquement la densité de probabilité d'une variable aléatoire de sortie, lorsque l'on connaît son expression en fonction des variables aléatoires d'entrée, ainsi que leurs fonctions densité de probabilité. Cependant, ce calcul est rapidement très difficile sur le plan théorique lorsque la fonction, notée  $g$  ici, est non linéaire, ou bien lorsque la variable aléatoire de sortie dépend de plusieurs variables aléatoires d'entrée.

### Champs stochastiques et décomposition de Karhunen-Loève.

Si l'on choisit de modéliser un paramètre mécanique incertain par une variable aléatoire, comme précisé dans le paragraphe précédent, on fait l'hypothèse d'homogénéité en espace du paramètre. Si cela s'avère trop restrictif, on préférera le modéliser par un champ stochastique et ainsi tenir compte de sa variabilité spatiale. Mais les champs stochastiques sont plus complexes à manipuler que les variables aléatoires. En effet, le calcul d'une fonction d'un ou plusieurs champs stochastiques est rendu d'autant plus difficile que à chaque point de l'espace est associée une densité de probabilité.

Pour simplifier l'analyse, on utilise généralement des approximations des champs étudiés en séparant variation spatiale et variation aléatoire. Il est ainsi possible de décomposer un champ stochastique donné  $E(\underline{x}, \theta)$  sur une base d'espace déterministe, par la décomposition de Karhunen-Loève (voir [33]), qui revient à l'exprimer sous la forme suivante :

$$E(\underline{x}, \theta) = \bar{E}(\underline{x}) + \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i(\theta) \sqrt{\lambda_i} \varphi_i(\underline{x}) \quad (1.17)$$

où  $\lambda_i$  et  $\varphi_i(\underline{x})$  sont respectivement les valeurs propres et les vecteurs propres du noyau de l'opérateur de covariance défini comme :

$$C_E(\underline{x}_1, \underline{x}_2) = \overline{(E(\underline{x}_1, \theta) - \bar{E}(\underline{x}_1))(E(\underline{x}_2, \theta) - \bar{E}(\underline{x}_2))} \quad (1.18)$$

avec  $\bar{Y}(\underline{x})$  l'espérance de  $Y(\underline{x}, \theta)$ ; les  $\lambda_i$  et  $\varphi_i(\underline{x})$  sont en fait solutions de l'équation intégrale, souvent résolue numériquement :

$$\int_D C_E(\underline{x}_1, \underline{x}_2) \varphi_i(\underline{x}_1) d\underline{x}_1 = \lambda_i \varphi_i(\underline{x}_2) \quad (1.19)$$

où  $D$  désigne le domaine spatial sur lequel le champ stochastique  $E(\underline{x}, \theta)$  est défini.

Les variables aléatoires  $\xi_i(\theta)$  sont quant à elles non corrélées, d'espérances nulles et d'écart types unitaires :

$$\overline{\xi_i(\theta)} = 0 \quad \text{et} \quad \overline{\xi_i(\theta) \xi_j(\theta)} = \delta_{ij} \quad (1.20)$$

Ces variables aléatoires sont en fait les moyennes du champ  $E(\underline{x}, \theta)$  pondérées par les fonctions de l'espace  $\varphi_i(\underline{x})$  :

$$\xi_i(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \int_D E(\underline{x}, \theta) \varphi_i(\underline{x}) d\underline{x} \quad (1.21)$$

L'analyse du champ stochastique se résume ainsi à l'étude, plus simple, d'un nombre fini de variables aléatoires indépendantes.

On utilise souvent une troncature de la décomposition, afin de se ramener à un nombre fini de variables aléatoires. On peut montrer que les valeurs propres  $\lambda_i$  sont des quantités

décroissantes quand  $i$  augmente, et que, plus le champ à décomposer est proche du bruit blanc, plus on a besoin de termes dans la décomposition, ce qui explique qu'en pratique, comme les champs stochastiques utilisés sont assez "lisses", peu de termes sont gardés dans la décomposition de Karhunen-Loève.

### 2.3 Présentation de l'exemple

Dans la suite, nous appliquerons les différentes méthodes à l'exemple suivant. On considère une barre en traction en imposant un effort  $F$  déterministe (voir la Figure 1.2). Sa rigidité  $K(\theta)$  est incertaine (incertitude ayant pour origine, par exemple, une section  $S(\theta)$  ou un module d'Young  $E(\theta)$  incertain), modélisée par une variable aléatoire, et l'on recherche le déplacement  $U(\theta)$  en son extrémité.



FIG. 1.2: Poutre à rigidité uniforme en traction.

Le système à résoudre est donc le suivant :

$$K(\theta)U(\theta) = F \quad (1.22)$$

On peut exprimer la rigidité sous la forme :

$$K(\theta) = \bar{K}(1 + \delta\alpha(\theta)). \quad (1.23)$$

où l'on fait apparaître  $\alpha(\theta)$  la variable aléatoire centrée (i.e. de moyenne nulle) réduite (i.e. de variance unitaire) qui porte l'aléa.  $\bar{K}$  est l'espérance de la rigidité  $K(\theta)$ , et  $\delta$  son coefficient de variation (l'écart type vaut alors  $\bar{K}\delta$ ).

On étudiera la réponse en déplacement pour les cas de lois de probabilité de rigidité uniforme et gaussienne. Dans un souci de simplicité, on prendra  $F = 1N$  et  $\bar{K} = 1N.m^{-1}$ .

### 2.4 Calcul analytique de la densité de probabilité, cas uniforme

Pour le cas simple de la barre en traction, il est possible de calculer analytiquement la densité de probabilité de  $U(\theta)$  par la méthode de changement de variable rappelée dans le paragraphe 2.2. Dans un premier temps, nous détaillons ici ce calcul en considérant que la rigidité suit une loi uniforme.

### Expression de la densité de probabilité de la rigidité

On rappelle l'expression de la rigidité en fonction de sa moyenne  $\bar{K}$ , son coefficient de variation  $\delta$ , et faisant intervenir une variable aléatoire normale centrée  $\alpha(\theta)$  :

$$K(\theta) = \bar{K}(1 + \delta\alpha(\theta)) \quad (1.24)$$

Pour une loi de rigidité uniforme, la fonction densité de probabilité de  $\alpha(\theta)$ , représentée sur la figure 1.3 vaut (voir le détail du calcul dans le paragraphe 2.2) :

$$f_{\alpha}(x) = \frac{1}{2\sqrt{3}} \quad \forall x \in [-\sqrt{3}; \sqrt{3}]. \quad (1.25)$$

D'après l'équation 1.24, la fonction  $K(\alpha(\theta)) = g(\alpha(\theta))$  est monotone, donc la fonction densité de probabilité  $f_K$  de  $K(\theta)$  se calcule aisément par la méthode de changement de variable :

$$f_K(y) = \frac{f_{\alpha}(x)}{\left| \frac{dg}{dx} \right|}. \quad (1.26)$$

Ainsi, la densité de probabilité de la rigidité  $K(\theta)$  vaut :

$$f_K(y) = \frac{1}{2\sqrt{3}\delta\bar{K}} \quad \forall y \in [\bar{K}(1 - \sqrt{3}\delta); \bar{K}(1 + \sqrt{3}\delta)]. \quad (1.27)$$

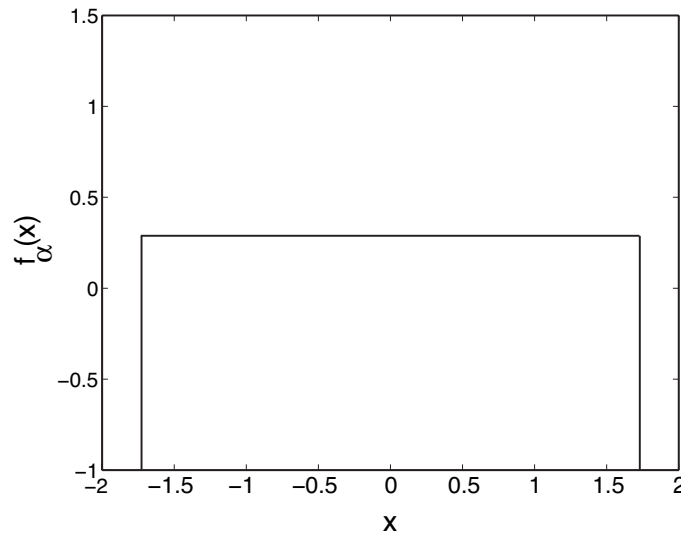
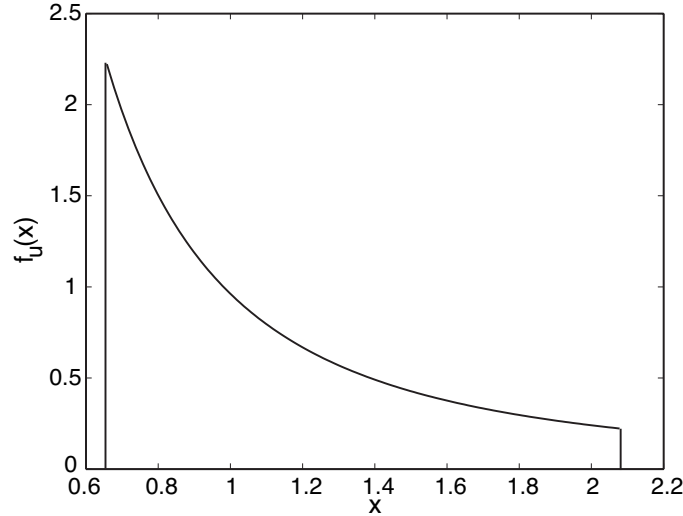


FIG. 1.3: Fonction densité de probabilité de  $\alpha(\theta)$  pour une loi uniforme.

### Expression de la densité de probabilité du déplacement

De la même manière, la densité de probabilité de  $U(\theta)$ , représentée sur la figure 1.4, s'obtient en considérant la fonction  $h(K)$  définie par :

$$U(K(\theta)) = \frac{f}{K(\theta)} = h(K) \quad (1.28)$$



**FIG. 1.4:** Fonction densité de probabilité de  $U(\theta)$  pour une loi uniforme ( $\bar{K} = 1N.m^{-1}$  et  $\delta = 0.1$ ).

Cette densité de probabilité s'exprime alors :

$$f_U(y) = \frac{F}{2\sqrt{3}\delta\bar{K}y^2} \quad \forall y \in \left[ \frac{F}{\bar{K}(1+\sqrt{3}\delta)}; \frac{F}{\bar{K}(1-\sqrt{3}\delta)} \right]. \quad (1.29)$$

On remarque que, en partant d'une loi de rigidité uniforme, on obtient une loi de probabilité du déplacement en  $y \mapsto \frac{1}{y^2}$ , ce qui concentre les réalisations de déplacements possibles près de la borne inférieure (voir figure 1.4).

## 2.5 Calcul analytique de la densité de probabilité, cas gaussien

Nous détaillons dans ce paragraphe le calcul analytique de la densité de probabilité de  $U(\theta)$  dans le cas où la rigidité suit une loi gaussienne.

Pour obtenir une loi de rigidité normale à partir de l'équation 1.24, il faut que la variable aléatoire normale centrée réduite  $\alpha(\theta)$  (représentée en figure 1.5) ait pour densité de probabilité :

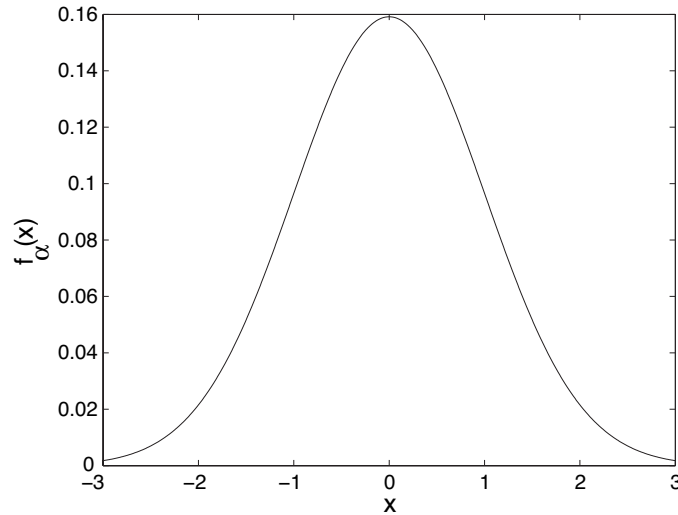
$$f_\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \quad \forall a \in ]-\infty; +\infty[ \quad (1.30)$$

On préfère borner cette loi sur  $x \in [-a; a]$ , avec  $a$  choisi de façon à supprimer les occurrences de rigidité négative (en assurant  $y > 0$  dans l'équation suivante 1.31). Alors, après application de la méthode décrite précédemment, la fonction densité de probabilité de

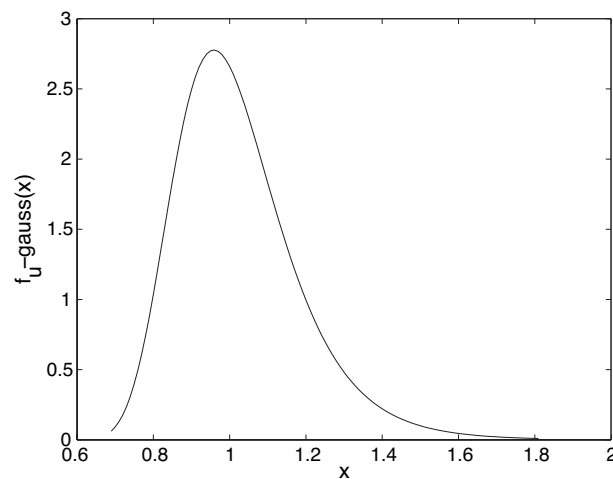
$U(\theta)$  vaut :

$$f_U(y) = \frac{F \exp\left(-\frac{\left(\frac{F}{y} - \bar{K}\right)^2}{2\delta^2 \bar{K}^2}\right)}{\bar{K}\delta\sqrt{2\pi}y^2} \quad \text{pour } y \in \left[\frac{F}{\bar{K}(1+a\delta)}; \frac{F}{\bar{K}(1-a\delta)}\right] \quad (1.31)$$

On remarque que, du fait de l'inversion de  $K(\theta)$ ,  $u(\theta)$  ne suit pas une loi gaussienne, comme on peut le voir en figure 1.6.



**FIG. 1.5:** Fonction densité de probabilité de  $\alpha(\theta)$  pour une loi gaussienne.



**FIG. 1.6:** Fonction densité de probabilité de  $U(\theta)$  pour une loi gaussienne.

Ces calculs analytiques serviront par la suite à comparer sur l'exemple simple les



méthodes stochastiques décrites, en gardant en mémoire que, pour des exemples plus compliqués, la solution analytique n'est pas aussi facile à calculer.

## 2.6 Méthode de Monte Carlo

### Principe.

La méthode stochastique la plus simple et la plus répandue est la méthode de Monte Carlo, car elle consiste à effectuer un grand nombre de calculs déterministes. Les étapes de cette méthode sont les suivantes :

- on génère des réalisations (autrement appelées tirages) des paramètres aléatoires, selon leur loi de probabilité ;
- puis on effectue un calcul déterministe pour chacun des tirages (qui correspondent dans notre cas chacun à une structure) ;
- enfin on procède à l'étude statistique que l'on souhaite : détermination des moments, ou de la probabilité d'occurrence d'un certain évènement.

Le fait que l'on ait uniquement des calculs déterministes à effectuer montre la grande simplicité de mise en oeuvre de cette méthode. Cependant, comme la vitesse de convergence de la méthode de Monte Carlo est de  $\frac{1}{\sqrt{n}}$ , un nombre suffisant de tirages doit être effectué afin de faire converger l'étude statistique de la réponse.

### Application à l'exemple.

Sur les figures 1.7, 1.8, 1.9 et 1.10, on compare, selon le nombre de tirages, la densité de probabilité obtenue par tirages de Monte Carlo (représentée sous forme d'histogrammes) à celle issue du calcul analytique (représentée en trait continu) mené précédemment, ceci pour chacun des cas de loi uniforme (figures 1.7 et 1.8) et gaussienne (figures 1.9 et 1.10).

On vérifie ainsi qualitativement la nécessité d'avoir un nombre suffisant de tirages pour avoir des résultats proches de la solution analytique. C'est le principal frein à l'utilisation de tirages de la méthode de Monte Carlo, car cela coûte cher en temps de calcul.

## 2.7 Méthode de perturbation

### Principe.

La méthode de perturbation est l'une des façons de traiter l'aléa utilisées dans les méthodes des Éléments Finis Stochastiques (nommées *SFEM* pour *Stochastic Finite Elements Method* en anglais), lorsque la description des incertitudes est effectuée à l'aide de variables aléatoires. On utilise ici une décomposition en séries de Taylor : la réponse

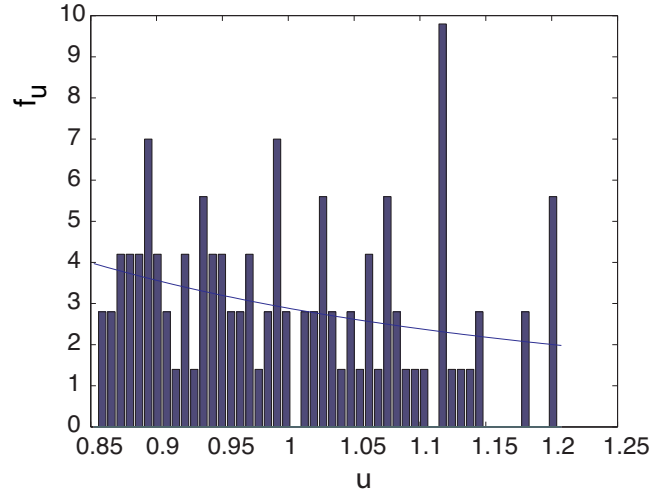


FIG. 1.7: Fonctions densité de probabilité de  $U(\theta)$  pour une loi uniforme (100 tirages).

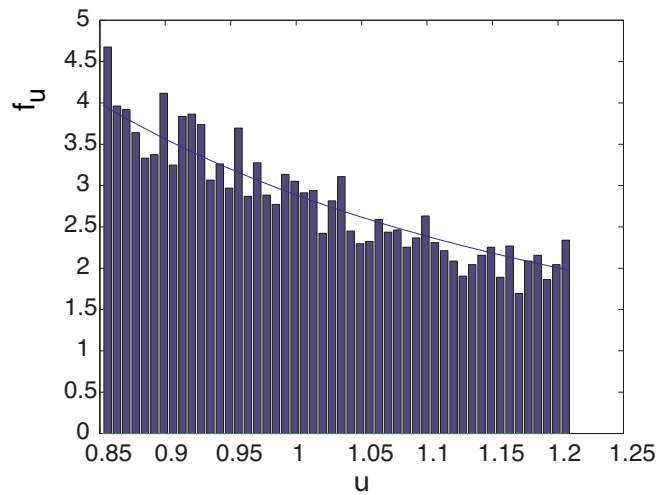
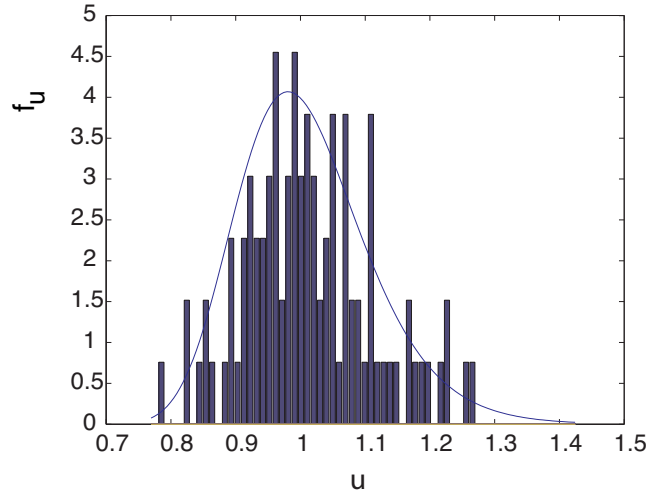


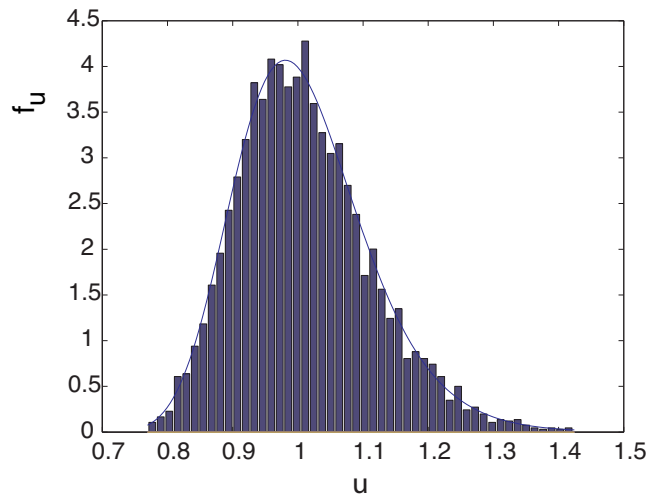
FIG. 1.8: Fonctions densité de probabilité de  $U(\theta)$  pour une loi uniforme (10000 tirages).

aléatoire est ainsi une fonction linéarisée des paramètres incertains du modèle.

De manière générale, l'équation du problème discrétisé est  $\mathbf{K}(\theta)U(\theta) = F(\theta)$ . Si les variables aléatoires varient peu autour de leur valeur moyenne, on peut effectuer leur développement en série de Taylor autour de cette valeur moyenne. Ce développement à l'ordre deux par rapport aux  $n$  variables aléatoires, notées  $\varepsilon_k$ , s'écrit, pour la rigidité



**FIG. 1.9:** Fonctions densité de probabilité de  $U(\theta)$  pour une loi gaussienne (100 tirages).



**FIG. 1.10:** Fonctions densité de probabilité de  $U(\theta)$  pour une loi gaussienne (5000 tirages).

(supposée connue) et le déplacement (recherché) :

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}^0 + \sum_{i=1}^n \mathbf{K}_i^I \varepsilon_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbf{K}_{ij}^{II} \varepsilon_i \varepsilon_j \quad (1.32a)$$

$$U = U^0 + \sum_{i=1}^n U_i^I \varepsilon_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n U_{ij}^{II} \varepsilon_i \varepsilon_j \quad (1.32b)$$

où  $\mathbf{K}^0$ ,  $\mathbf{K}_i^I$  et  $\mathbf{K}_{ij}^{II}$  désignent respectivement la moyenne, et les dérivées premières et se-

condes de la matrice de rigidité par rapport aux variables aléatoires ;  $U^0$ ,  $U_i^I$  et  $U_{ij}^{II}$  sont les quantités analogues définies pour le champ de déplacement solution.

On effectue alors la résolution du système ordre par ordre. Dans le cas du développement à l'ordre deux, on obtient,  $\forall (i, j) \in [1..n]^2$  :

$$\mathbf{K}^0 U^0 = F \quad (1.33a)$$

$$\mathbf{K}^0 U_i^I = -\mathbf{K}_i^I U^0 \quad (1.33b)$$

$$\mathbf{K}^0 U_{ij}^{II} = -\mathbf{K}_i^I U_j^I - \mathbf{K}_j^I U_i^I - \mathbf{K}_{ij}^{II} U^0 \quad (1.33c)$$

Lors de l'utilisation d'une méthode utilisant cette décomposition, il faut garder en mémoire qu'elle utilise une linéarisation, et donc que son domaine de validité est réduit à de petites variations.

### Application à l'exemple.

On montre ici la mise en oeuvre de cette méthode sur l'exemple détaillé en 2.3. Le système à résoudre est  $K(\theta)U(\theta) = F$  (correspondant à l'équation (1.22)), avec  $K(\theta) = \bar{K}(1 + \delta\alpha(\theta))$  (correspondant à l'équation 1.23).

On effectue le développement de Taylor, avec ici  $n = 1$  car il y a une seule variable aléatoire,  $\alpha(\theta)$ , comme paramètre incertain. Les équations (1.32) s'écrivent donc :

$$\mathbf{K} = K^0 + K_{,\alpha}\Delta\alpha + \frac{1}{2}K_{,\alpha\alpha}\Delta\alpha^2 \quad (1.34)$$

$$U = U^0 + U_{,\alpha}\Delta\alpha + \frac{1}{2}U_{,\alpha\alpha}\Delta\alpha^2 \quad (1.35)$$

La résolution du système ordre par ordre donne :

$$\text{ordre 0} \quad K^0 U^0 = F \quad (1.36a)$$

$$\text{ordre 1} \quad K^0 U_{,\alpha} = -K_{,\alpha} U^0 \quad (1.36b)$$

$$\text{ordre 2} \quad \frac{1}{2}K^0 U_{,\alpha\alpha} = -K_{,\alpha} U_{,\alpha} - \frac{1}{2}K_{,\alpha\alpha} U^0 \quad (1.36c)$$

Or, d'après l'expression (1.23), les dérivées successives de  $K(\alpha)$  sont :

$$K^0 = \bar{K} \quad (1.37a)$$

$$K_{,\alpha} = \frac{\partial K}{\partial \alpha} = \bar{K}\delta \quad (1.37b)$$

$$K_{,\alpha\alpha} = \frac{\partial^2 K}{\partial \alpha^2} = 0 \quad (1.37c)$$

Les équations (1.36) permettent donc de déduire les dérivées successives du déplacement  $U(\theta)$  :

$$U^0 = \frac{F}{\bar{K}} \quad (1.38a)$$

$$U_{,\alpha} = -\delta U^0 = -\frac{F\delta}{\bar{K}} \quad (1.38b)$$

$$U_{,\alpha\alpha} = -2\delta U_{,\alpha} = \frac{2F\delta^2}{\bar{K}} \quad (1.38c)$$

Enfin on peut reconstituer le déplacement par l'expression de son développement de Taylor (1.35), sous réserve de petites variations autour de sa valeur moyenne, et l'on obtient :

$$U(\theta) = \frac{F}{\bar{K}} [1 - \delta\alpha(\theta) + (\delta\alpha(\theta))^2]. \quad (1.39)$$

On remarque que le résultat (1.39) n'est autre que le développement limité à l'ordre 2 en  $\alpha(\theta)$  du déplacement à partir de son expression sous la forme :

$$U = \frac{F}{\bar{K}(1 + \delta\alpha(\theta))} \quad (1.40)$$

qui est la solution du problème déterministe avec la rigidité définie par l'équation (1.23). Le principal avantage de cette méthode est que l'on n'a pas à inverser  $K(\theta)$ .

Une façon de caractériser cette approximation du déplacement est la donnée de sa moyenne, notée  $\langle U \rangle$ , et de sa variance, notée  $\sigma^2$  (on rappelle sa définition :  $\sigma^2 = \langle U^2 \rangle - \langle U \rangle^2$ ). Après calcul, il s'avère que l'espérance de  $U$ , quelle que soit la variable aléatoire centrée réduite  $\alpha(\theta)$  (en particulier si elle suit les lois décrites au paragraphe 2.2), vaut :

$$\langle U(\theta) \rangle = \frac{F}{\bar{K}} (1 + \delta^2). \quad (1.41)$$

Sa variance vaut, selon les cas :

$$\text{loi uniforme} \quad \sigma^2 = \left(\frac{F\delta}{\bar{K}}\right)^2 \left(1 + \left(\frac{18\sqrt{3}}{5} - 1\right)\delta^2\right) \quad (1.42a)$$

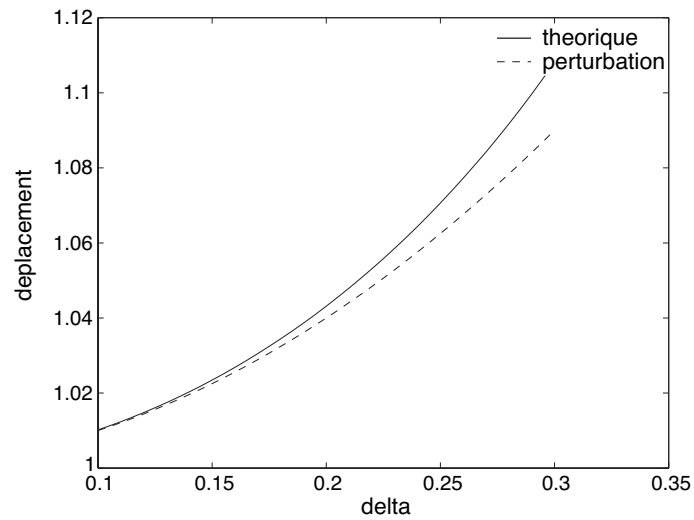
$$\text{loi normale} \quad \sigma^2 = \left(\frac{F\delta}{\bar{K}}\right)^2 (1 + 2\delta^2) \quad (1.42b)$$

Les variations en fonction de  $\delta$  de ces deux moments approchés sont comparées à la solution théorique sur la figure 1.12. Pour utiliser cette méthode, il est donc préférable d'avoir un coefficient de variation  $\delta$  petit (soit  $\delta < 0.15$  environ). On retrouve là l'hypothèse de petites variations (en général 10 à 15%) de la rigidité autour de sa valeur moyenne permettant d'effectuer un développement de Taylor. En pratique, on utilise une décomposition tronquée à l'ordre 1 ou 2, rarement plus loin car les équations deviennent plus difficiles à résoudre.

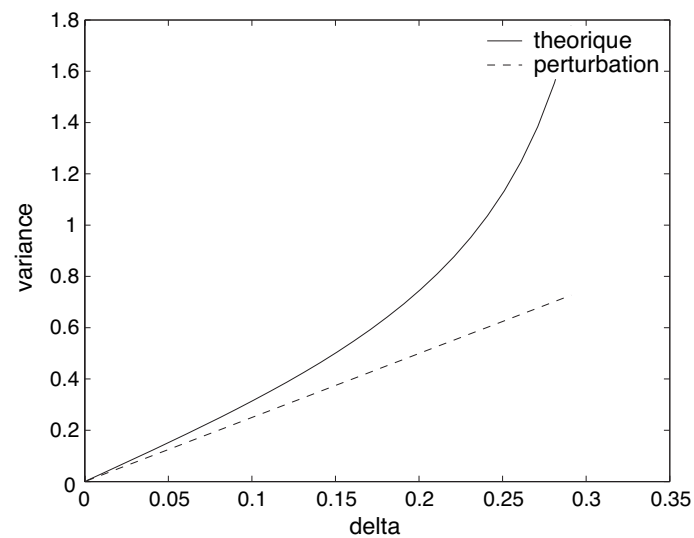
## 2.8 Méthode spectrale : décomposition sur le Chaos

### Principe.

Une autre méthode utilisée en Élément Finis Stochastiques est la projection sur le Chaos Polynomial de la partie aléatoire du déplacement. Elle intervient après avoir effectué une décomposition de Karhunen-Loève des paramètres incertains du modèle s'ils dépendent de l'espace (et qu'ils sont alors modélisés par des champs stochastiques). C'est la méthode Spectrale Stochastique des Éléments Finis (*spectral SFEM* en anglais),



**FIG. 1.11:** Comparaison de la méthode de perturbation avec la solution théorique sur la moyenne de  $U(\theta)$ .



**FIG. 1.12:** Comparaison de la méthode de perturbation avec la solution théorique sur la variance de  $U(\theta)$  (cas de loi uniforme).

qui a été initiée par Ghanem et Spanos (voir [34]). La projection sur le chaos polynomial est basée sur la théorie du Chaos Homogène de Wiener (voir [35]) et consiste en une décomposition spectrale des variables aléatoires. Couplée à une décomposition de Karhunen-Loève et à une projection de type Galerkin, comme détaillé dans [36], elle aboutit à des algorithmes efficaces pour traiter des problèmes mécaniques. Afin de permettre un traitement statistique, on effectue souvent des tirages de Monte Carlo sur la surface de réponse ainsi créée.

On trouvera dans [37] une application de cette méthode à un panneau en composite T800/924 en fibres de carbone unidirectionnelles sous un chargement de traction uniaxiale. Les résultats obtenus par la méthode Spectrale Stochastique des Éléments Finitis sont comparés à la méthode de Monte Carlo et à une méthode de perturbation. Ces résultats montrent que la méthode de perturbation est très efficace pour de faibles dispersions (écart type de l'ordre de 10%), la méthode spectrale étant valable jusqu'à des dispersions d'écart type de l'ordre de 25%, tout en estimant les densités de probabilité de façon plus efficace que la méthode de Monte Carlo.

Dans [38] est proposée une technique récente de réduction de modèles basée sur des décompositions sur le chaos à deux échelles distinctes. Cette stratégie permet de réduire le coût de calcul de la méthode de décomposition sur le chaos, tout en gardant la précision qu'elle procure. Dans le même objectif de diminuer le temps de calcul, dans [39], les auteurs proposent un algorithme permettant de construire une représentation par chaos polynomial creux de la réponse.

Cette méthode du Chaos Polynomial (PCE pour *Polynomial Chaos Expansion*, en anglais) utilise les propriétés des polynômes orthogonaux : dans un espace de Hilbert, les polynômes orthogonaux forment une base orthogonale, au sens du produit scalaire  $\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega(x) f(x) g(x) dx$  pondéré par la fonction poids  $\omega(x)$ . Chaque sous-ensemble de polynômes orthogonaux est ainsi associé à une fonction poids dans sa relation d'orthogonalité. Par exemple,

- les polynômes de Hermite sont associés à la distribution gaussienne,
- les polynômes de Legendre à la distribution uniforme,

On se place ici dans  $\Theta$ , l'ensemble des variables aléatoires de carré intégrable. On peut définir un produit scalaire sur  $\Theta$  similaire à celui défini sur  $L^2(\mathbb{R})$  :

$$\langle X(\theta), Y(\theta) \rangle = \int_{\Theta} X(\theta) Y(\theta) dP \quad (1.43)$$

avec  $dP$  une mesure de probabilité.

Soit  $\{\xi_i(\theta)\}_{i=1}^{\infty}$  un ensemble de variables aléatoires orthonormales suivant une loi donnée. Appelons  $\Gamma_p$  l'ensemble des polynômes orthogonaux associés à la loi des variables aléatoires. Le sous-ensemble  $\bar{\Gamma}_p$  de  $\Theta$ , engendré par  $\Gamma_p$ , est alors appelé le Chaos

(Homogène pour une loi gaussienne et les polynômes de Hermite, Généralisé dans les autres cas) d'ordre  $p$ . On nomme  $\Gamma_p$  le Chaos Polynomial de degré  $p$  lorsqu'il s'agit des polynômes de Hermite.

Toute variable aléatoire  $\mu(\theta) \in \Theta$  s'écrit alors :

$$\mu(\theta) = a_0\Gamma_0 + \sum_{i_1=1}^{\infty} a_{i_1}\Gamma_1(\xi_{i_1}(\theta)) + \sum_{i_1=1}^{\infty} \sum_{i_2=1}^{i_1} a_{i_1 i_2}\Gamma_2(\xi_{i_1}(\theta), \xi_{i_2}(\theta)) + \dots \quad (1.44)$$

ou sous la forme

$$\mu(\theta) = \sum_{j=0}^{\infty} \hat{a}_j \Psi_j(\xi(\theta)) \quad (1.45)$$

qui montre que l'on construit une surface de réponse de la variable aléatoire  $\mu(\theta)$ .

En pratique, on utilise toujours des développements tronqués : on définit le Chaos de dimension  $N$  lorsque seules les  $N$  premières variables aléatoires  $\xi_i(\theta)$  sont conservées, et d'ordre  $P$  en référence à l'ordre des polynômes.

#### Détail du Chaos Polynomial sur l'exemple.

Dans ce paragraphe, on applique la méthode de décomposition sur le chaos polynomial sur la barre en traction présentée précédemment. On rappelle l'expression des polynômes de Hermite :

$$H_n(x) = (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} \left( \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \right) \exp\left(\frac{x^2}{2}\right) \quad (1.46)$$

ce qui donne, pour les premiers polynômes :

$$H_0(x) = 1 \quad (1.47a)$$

$$H_1(x) = x \quad (1.47b)$$

$$H_2(x) = x^2 - 1 \quad (1.47c)$$

$$H_3(x) = x^3 - 3x \quad (1.47d)$$

Le système à résoudre est  $K(\theta)U(\theta) = F$  (équation (1.22)), avec  $K(\theta) = \bar{K}(1 + \delta\alpha(\theta))$  (équation (1.23)). Lors d'une décomposition sur le chaos, on définit autant de  $\xi_i(\theta)$  que de variables aléatoires. Dans ce cas, on a une variable aléatoire en entrée, donc la dimension du Chaos Polynomial est  $N = 1$ . Ici,  $\xi(\theta)$  est une variable aléatoire normale centrée réduite. On construit la surface de réponse en décomposant le déplacement cherché sur cette base tronquée de polynômes :

$$U(\theta) = \sum_{j=0}^p x_j H_j(\xi(\theta)). \quad (1.48)$$



On introduit ce déplacement dans l'équation (1.22), ce qui donne :

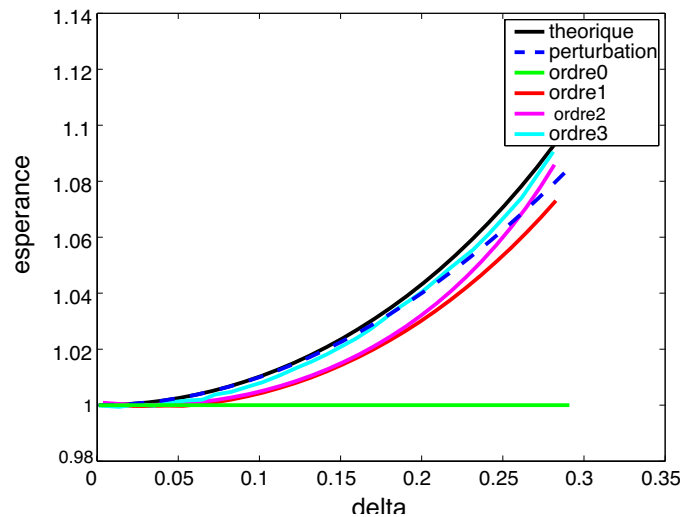
$$\bar{K} \sum_{j=0}^p x_j H_j(\xi(\theta)) + \bar{K}\delta \sum_{j=0}^p x_j \alpha(\theta) H_j(\xi(\theta)) = F. \quad (1.49)$$

En effectuant ensuite le produit scalaire de cette expression avec chacun des  $p + 1$  polynômes, on obtient, grâce à l'orthogonalité,  $p + 1$  équations :

$$\forall j = 0..p, \quad \bar{K}x_j \langle H_j^2 \rangle + \bar{K}\delta \sum_{i=0}^p x_i \langle \alpha H_i H_j \rangle = F \langle H_j \rangle \quad (1.50)$$

qui permettent d'obtenir facilement les composantes  $x_i$ .

Sur les figures 1.13 et 1.14, on compare, selon l'ordre du Chaos, l'évolution de l'espérance et de la variance du déplacement solution  $U(\theta)$  en fonction de  $\delta$  pour des valeurs allant de 0 à 0,3. Pour de grandes dispersion (pour  $\delta > 15 - 20\%$ ), on remarque qu'il est préférable d'utiliser un ordre le plus élevé possible : ainsi, l'espace d'approximation est plus riche, et on a plus de chance d'approximer de façon plus précise la solution. En revanche, pour de faibles dispersions (de l'ordre de  $\delta < 10\%$ ), l'ordre 1 mène à des erreurs inférieures à 2%. Pour des dispersions très faibles (de l'ordre de  $\delta < 5\%$ ), l'ordre 0 donne de très bons résultats. On remarque aussi que la convergence vers la solution théorique lorsque l'ordre de la décomposition augmente est plus lente pour la variance (le moment d'ordre 1) du déplacement que pour sa moyenne (le moment d'ordre 0).



**FIG. 1.13:** Comparaison du Chaos Polynôme avec la méthode de perturbation sur la moyenne de  $U(\theta)$ .

La surface de réponse ainsi construite se révèle peu facile à exploiter, surtout pour des géométries bi- ou tri-dimensionnelle. On a généralement recours à une simulation

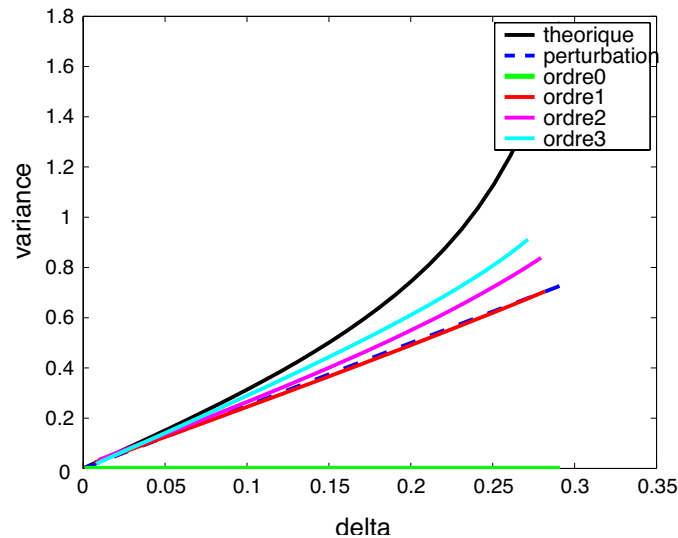


FIG. 1.14: Comparaison du Chaos Polynomial avec la méthode de perturbation sur la variance de  $U(\theta)$ .

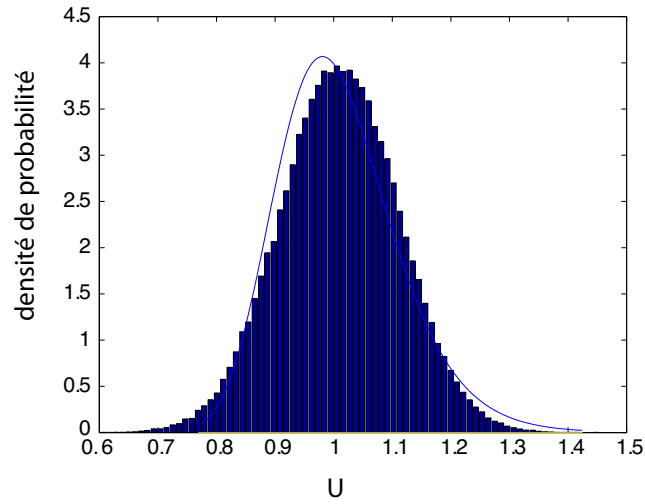
stochastique de Monte Carlo pour effectuer des traitements statistiques. Sur les figures 1.15, 1.16 et 1.16 sont représentés, sous forme d'histogramme, les résultats en terme de densité de probabilité des tirages effectués sur la décomposition de  $U(\theta)$  pour les trois premiers ordres, dans le cas d'une variable aléatoire d'entrée gaussienne. Ces résultats sont comparés à la densité de probabilité (représentée en trait continu) calculée analytiquement. On observe bien la convergence vers la solution analytique lorsque l'ordre de la décomposition augmente.

## 2.9 Méthode de décomposition spectrale généralisée

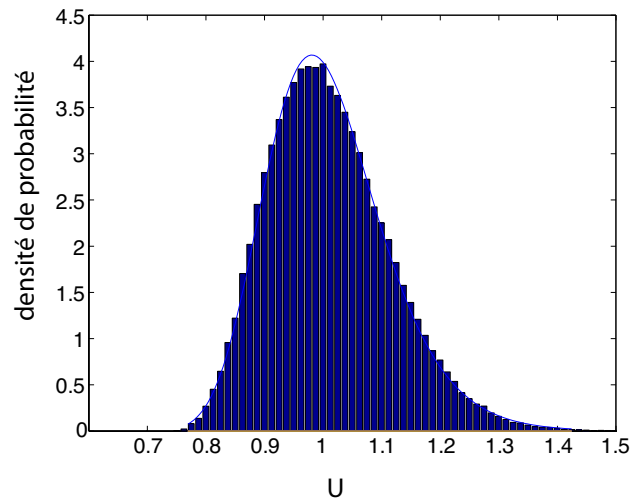
La résolution de systèmes d'équations stochastiques de grande taille peut être facilitée par une décomposition spectrale généralisée. Une méthode, proposée dans [40], conduit à des gains considérables en temps de calcul et stockage mémoire, en décomposant la partie aléatoire de la solution sur une base "optimale".

## 2.10 Méthodes de surfaces de réponse

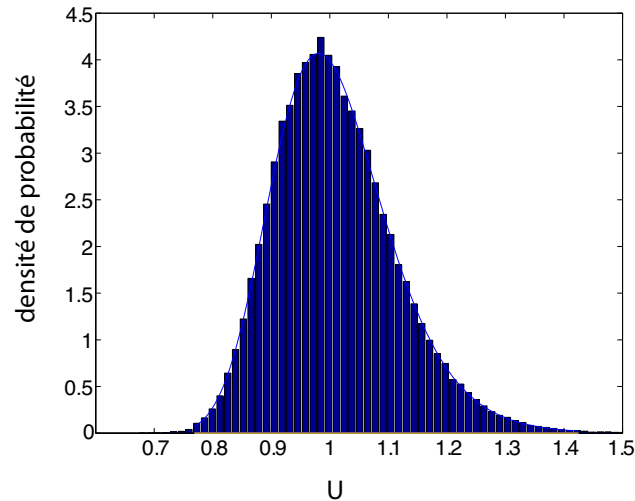
L'idée à la base des méthodes d'analyse de surface de réponse est d'obtenir une description correcte des variables de sortie en utilisant un modèle avec un nombre de paramètres stochastiques minimal. La précision, en terme de moyenne et écart-type de la sortie, de l'approximation ainsi effectuée est alors évaluée par une méthode de validation. Très fréquemment, l'approximation de la sortie est obtenue par une surface de réponse po-



**FIG. 1.15:** Tirages de Monte Carlo sur la décomposition de  $U(\theta)$  à l'ordre 1 et comparaison à la densité de probabilité analytique (100000 tirages).



**FIG. 1.16:** Tirages de Monte Carlo sur la décomposition de  $U(\theta)$  à l'ordre 2 et comparaison à la densité de probabilité analytique (100000 tirages).



**FIG. 1.17:** Tirages de Monte Carlo sur la décomposition de  $U(\theta)$  à l'ordre 3 et comparaison à la densité de probabilité analytique (100000 tirages).

lynominale (parfois issue du chaos polynomial). Ces méthodes ont l'avantage d'être non-intrusives vis à vis du code de calcul déterministe employé : une estimation de la quantité d'intérêt est obtenue directement par tirages de Monte Carlo sur la surface de réponse. Tout le challenge dans le développement de ces méthodes est d'obtenir de manière efficace et rapide une bonne surface de réponse.

Des méthodes performantes particulièrement dédiées aux structures en composite sont présentées dans [41, 42]. Pour une étude approfondie de ces méthodes, on consultera [43, 44].

## 2.11 Méthodes non paramétriques

Les méthodes probabilistes détaillées auparavant dans ce paragraphe sont basées sur des approches paramétriques (que l'on modélise les paramètres par des variables aléatoires ou des champs stochastiques, ou que l'on se base sur des développements limités des paramètres) et permettent donc de représenter correctement des incertitudes de données portant sur les efforts, sur la géométrie, ou sur les caractéristiques matériau, mais ne sont pas adaptées à la représentation des incertitudes dues aux hypothèses effectuées lors de la modélisation. En effet, certaines zones, comme les liaisons, mettent en jeu des phénomènes qui souvent ne sont pas pris en compte dans leur détail, et sont donc représentées par des modèles simplifiés, pour lequel le choix des paramètres incertains se révèle un peu artificiel. Or, avec l'accroissement de la complexité des systèmes mécaniques, les incertitudes portant sur les modèles employés sont de plus en plus grandes. Les approches non paramétriques, initiées dans [45] et [29], permettent de prendre en compte à la fois les incertitudes portant sur les données et les caractéristiques matériau, et les incertitudes de modèle. Elles sont aussi utiles lorsque les données sont insuffisantes pour

connaître les lois de probabilité suivies par les paramètres.

Dans cette approche, les matrices généralisées d'un modèle classique sont remplacées par des matrices aléatoires, dont les lois de probabilité sont construites à partir du principe du maximum d'entropie. On trouvera dans [46] une application, sur un modèle élément finis de satellite, d'une stratégie consistant à coupler étude paramétrique et approche non paramétrique. L'emploi d'une telle stratégie permet de donner une estimation de la robustesse vis à vis des incertitudes de modèle : en particulier, pour des hautes fréquences, la structure étudiée est plus sensible aux incertitudes de modélisation qu'à celles portant sur les données.

## 2.12 Méthodes de fiabilité

Le principe général des méthodes de fiabilité, parmi lesquelles les méthodes FORM et SORM sont les plus connues, est une approximation du domaine de défaillance. Par un changement de domaine adapté, le calcul de la probabilité de défaillance d'une structure est simplifié. Ces méthodes d'approximation de la probabilité de défaillance permettent de diminuer les coûts de calculs, mais engendrent une perte de précision dans certains cas en comparaison de la méthode de Monte Carlo.

Pour un problème de départ composé de  $n$  paramètres incertains modélisés par des variables aléatoires notées  $X_i$ , de densité de probabilité conjointe  $p(x_1, \dots, x_n)$ , et d'une fonction de performance  $G(x_1, \dots, x_n)$ , la probabilité de défaillance s'écrit :

$$P_f = \int_{G(x_1, \dots, x_n) \leq 0} p(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \quad (1.51)$$

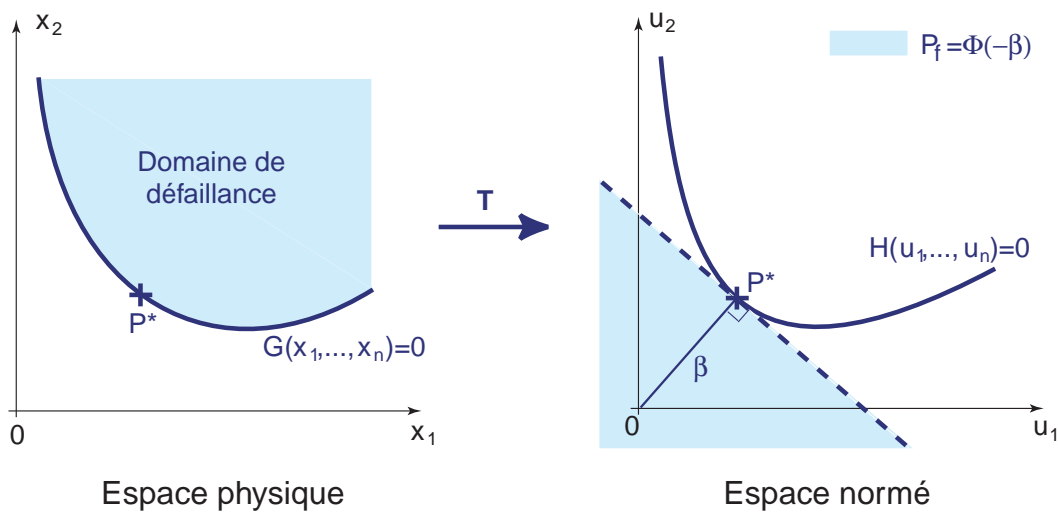
L'objet des méthodes de fiabilité est d'évaluer cette probabilité. L'évaluation par une méthode de Monte Carlo est en effet quasiment impossible, car pour estimer correctement des probabilités de défaillance  $P_f$  de l'ordre de  $10^{-m}$ , il faudrait effectuer de l'ordre de  $10^{m+3}$  tirages, or on s'intéresse à des événements de très faible occurrence, pour lesquels on a généralement  $m \geq 4$ . De plus, cette technique nécessite également la connaissance de la densité conjointe de probabilité  $p(x_1, \dots, x_n)$ , qui n'est pas toujours simple à établir.

Les méthodes classiques pour déterminer l'état-limite, correspondant à la surface  $G(x_1, \dots, x_n) = 0$ , se basent sur le calcul de l'indice de fiabilité, qui a pour différentes étapes (voir [47]) :

- Transformer les variables initiales en variables aléatoires normales centrée par une transformation de Rosenball (voir [48]).
- Chercher le point de défaillance le plus probable, solution de la minimisation de l'indice de fiabilité, correspondant à la distance à l'origine de la fonction d'état-

limite dans l'espace des variables normées.

- Calculer la probabilité de défaillance, par approximation autour du point de défaillance le plus probable. Les approximations les plus courantes sont :
  - une approximation au premier ordre de la fonction d'état-limite (méthodes intitulées FORM pour *First Order Reliability Method*, voir Figure 1.18) ;
  - une approximation plus riche faisant intervenir les courbures principales de l'état-limite autour du point de défaillance le plus probable (méthodes intitulées SORM pour *Second Order Reliability Method*) ;
  - une approximation à l'aide des surfaces de réponse couplée à un plan d'expérience (voir [49]).



**FIG. 1.18:** Principe des méthodes fiabilistes : exemple de l'approximation FORM

D'autres méthodes existent pour calculer une approximation de la fonction de défaillance. Citons ici en particulier les méthodes utilisant une approximation en séries de Taylor de la fonction de défaillance elle-même pour ensuite évaluer son écart type (que l'on retrouve sous l'appellation MVFOSM : *Mean-value First Order Second Moment method*) ; et les méthodes utilisant le maximum de vraisemblance pour trouver le point de défaillance le plus probable directement dans l'espace aléatoire d'origine avant linéarisation de la fonction de défaillance (méthodes appelées FOSA : *First order Saddlepoint Approximation method*, voir [50]). Dans [51] est développée une méthode baptisée MV-FOSA (Mean-value First Order Saddlepoint Approximation method) couplant ces deux approches, ce qui rend le calcul de la fonction de défaillance plus efficace, plus précis, et plus robuste que les méthodes SORM ou MVFOSM.

Pour plus de précisions et des comparaisons de ces méthodes sur différents exemples, on consultera [51].

### 3 Méthodes non stochastiques en calcul de structures

Dans certains cas, il peut être difficile d'associer une vision probabiliste à un problème. En effet, le manque d'informations peut être tel que modéliser le problème de façon probabiliste ne se justifie pas. On a alors recours à d'autres types de modélisation, citons plus particulièrement celles qui sont brièvement présentées ici, à savoir les méthodes basées sur la théorie des intervalles, ou sur les ensembles flous, ou celles utilisant des modèles convexes d'incertitudes.

#### 3.1 Méthodes par intervalles

Une description des plus intuitives pour décrire des incertitudes présentes sur un paramètre dont on ne connaît pas les variations sous forme de loi de probabilité consiste en leur description par la donnée de leur intervalle de variation. Cela se rapproche d'une description par une variable aléatoire suivant une loi uniforme, à la différence près que, ici, n'est pas précisée la manière dont le paramètre se répartit entre les deux bornes de l'intervalle. Cette description est donc moins riche que celle par variable aléatoire, mais suffit dans de nombreux cas où l'essentiel pour le concepteur est de connaître entre quelles bornes extrêmes trouver les variations d'un paramètre de sortie.

##### La théorie des intervalles.

On définit un intervalle d'incertitude  $[I]$  par sa fonction caractéristique  $\chi_I$  telle que :

$$\begin{aligned} \chi_I : \mathbb{R} &\rightarrow \{0, 1\} \\ x &\mapsto \chi_I(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } I^- \leq x \leq I^+ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned} \quad (1.52)$$

La quantité  $x \in \mathbb{R}$  associée est ainsi bornée par deux valeurs,  $I^+$  et  $I^-$ . Afin de propager à travers un modèle un intervalle d'incertitude, une arithmétique a été définie dans [52] et [53]. On définit les opérations courantes,  $*$   $\in \{+, -, \times, \div, \min, \max\}$ , entre deux intervalles  $[I]$  et  $[J]$  :

$$[I] * [J] = \{x * y \mid x \in [I], y \in [J]\}. \quad (1.53)$$

Par exemple, pour la somme de deux intervalles :

$$[I] + [J] = [I^-; I^+] + [J^-; J^+] = \{x + y \mid x \in I, y \in J\} = [I^- + J^-; I^+ + J^+] \quad (1.54)$$

La multiplication est définie de la façon suivante :

$$\begin{aligned} [I] \times [J] &= [I^-; I^+] \times [J^-; J^+] = \{xy \mid x \in [I], y \in [J]\} \\ &= [\min(I^-J^-, I^-J^+, I^+J^-, I^+J^+); \max(I^-J^-, I^-J^+, I^+J^-, I^+J^+)] \end{aligned} \quad (1.55)$$

On n'a pas  $[I] * [J] = [I^- * J^-; I^+ * J^+]$ , car on est obligé d'imaginer le cas le pire pouvant survenir, d'où la recherche d'un minimum pour la borne inférieure, et d'un maximum pour la borne supérieure.

On peut aussi étendre la notion d'intervalle aux dimensions supérieures, en particulier aux matrices intervalles, comme il est rappelé dans [54].

La propagation d'intervalles est très pessimiste, c'est là son inconvénient : par exemple, si l'on applique la fonction

$$f(x) = 2x - x = x \quad (1.56)$$

à un intervalle  $[I] = [I^-; I^+]$ , on s'attend à retrouver  $[I]$  comme image puisque  $f$  est l'identité. Toutefois, l'application de la règle de sommation des intervalles conduit à

$$f([I]) = [2I^- - I^+; 2I^+ - I^-] \supset [I] \quad (1.57)$$

car on a calculé  $2x - x$ , qui correspond à l'ensemble  $\{2x - y \mid x \in x, y \in x\}$ . L'intervalle obtenu par propagation est plus large que celui,  $[I]$ , dans lequel se trouve effectivement le résultat.

Cet exemple simple met en évidence de façon flagrante la surestimation de la méthode, qui apparaît lorsque la même variable apparaît plusieurs fois dans la même expression : la théorie des intervalles ne prend pas en compte la dépendance des occurrences de chaque variable en jeu.

On trouvera dans [55] et [56] le détail des principales techniques permettant de résoudre des systèmes d'équations par la méthode des intervalles.

### Application à l'exemple.

Diverses utilisations des intervalles pour résoudre le système  $K(\theta)U(\theta) = F$  (équation (1.22)) sont possibles. Les trois principales sont :

- soit d'introduire les intervalles après l'inversion de  $\mathbf{K}$  déterministe. Cela mène à une surestimation du résultat, comme il a été présenté précédemment ;
- soit de faire un calcul direct de l'intervalle solution  $[u]$  par le lemme d'Oetli et Prager, rappelé dans [54], ou un calcul approché à l'aide de l'algorithme de Rump modifié par Dessombz (voir [54]). Cette méthode est utilisée lorsque l'on a affaire à des problèmes à grand nombre de degrés de liberté ;
- soit d'effectuer un balayage des intervalles de départ afin de décrire l'intervalle solution  $[u]$ . Cette approche, qui revient à discrétiser l'intervalle et à effectuer des tirages de Monte Carlo pour chaque valeur, est la plus représentative de la dispersion réelle, mais est très coûteuse. Elle donne un intervalle de  $u$  minimal et donc de référence.

Afin de pouvoir observer la surestimation lors de la propagation d'intervalles, on discrétise la poutre en deux éléments (voir figure 1.19), sur chacun desquels on considère



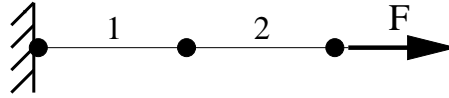


FIG. 1.19: Poutre à rigidité uniforme par élément.

la rigidité uniforme. Ainsi, en notant  $K_1$  la rigidité du premier élément et  $K_2$  celle du second, et étant donné que le noeud 1 a son déplacement imposé à 0, le problème s'écrit :

$$\mathbf{K}U = \mathbf{F} \quad (1.58)$$

avec

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} K_1 + K_2 & -K_2 \\ -K_2 & K_2 \end{pmatrix} \quad (1.59)$$

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ F \end{pmatrix}. \quad (1.60)$$

La solution déterministe associée est donc :

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{F}{2K_1} \\ \frac{F(K_1 + K_2)}{2K_1 K_2} \end{pmatrix}. \quad (1.61)$$

Le système intervalle associé à l'équation (1.58) est :

$$\begin{pmatrix} [K_1^- + K_2^-; K_1^+ + K_2^+] & [-K_2^+; -K_2^-] \\ [-K_2^+; -K_2^-] & [K_2^-; K_2^+] \end{pmatrix} U = \begin{pmatrix} 0 \\ [F^-; F^+] \end{pmatrix} \quad (1.62)$$

La solution obtenue par introduction des intervalles après l'inversion de la rigidité déterministe est alors :

$$U = \begin{pmatrix} [u_1^-; u_1^+] \\ [u_2^-; u_2^+] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [\frac{F}{2K_1^+}; \frac{F}{2K_1^-}] \\ [\frac{F(K_1^- + K_2^-)}{2K_1^+ K_2^+}; \frac{F(K_1^+ + K_2^+)}{2K_1^- K_2^-}] \end{pmatrix}. \quad (1.63)$$

On a retranscrit dans le tableau 1.1 les résultats issus de différentes méthodes (l'intervalle de l'effort est ici le singleton  $\{1\}$ ). On observe bien la surestimation de la composante  $u_2$  du déplacement par la méthode d'introduction des intervalles après inversion de la matrice de rigidités ; en revanche, comme  $u_1$  n'est fonction que de  $K_1$  d'après l'équation 1.63, la méthode par intervalles n'apporte aucune surestimation.

### 3.2 Théorie des ensembles flous (*Fuzzy Set Theory*)

Les bases théoriques de la logique floue (*fuzzy logic*) ont été établies au début des années 1965 par Zadeh (voir [57]). Cette approche associe les notions de sous-ensemble

Rigidités initiales	Intervalles après inversion déterministe	Balayages des rigidités
$K_1 \in [0, 99; 1, 01]$	$u_1 \in [0, 495; 0, 505]$	$u_1 \in [0, 495; 0, 505]$
$K_2 \in [1, 00; 1, 02]$	$u_2 \in [0, 9658; 1, 025]$	$u_2 \in [0, 9852; 1, 005]$
$K_1 \in [0, 9; 1, 1]$	$u_1 \in [0, 455; 0, 555]$	$u_1 \in [0, 455; 0, 555]$
$K_2 \in [0, 95; 1, 15]$	$u_2 \in [0, 731; 1, 316]$	$u_2 \in [0, 889; 1, 082]$

**TAB. 1.1:** Comparaison de différentes méthodes pour deux cas de rigidités.

flou et de théorie des possibilités. Il s'agit d'une approche calquée sur le raisonnement humain plutôt que sur des calculs rigides, car, pour des problèmes mal définis, l'être humain est irremplaçable. En effet, la description d'une certaine situation, d'un phénomène ou d'un procédé contient en général des qualificatifs tels que "peu, beaucoup, énormément", ou bien "rarement, fréquemment, souvent", ou encore "petit, moyen, grand"; ces qualificatifs ne peuvent pas être traduits en terme de probabilité ou de logique classique, mais gardent tout leur sens en logique floue. Par exemple, la variable linguistique "température" peut appartenir aux ensembles flous {froid}, {tiède} ou {chaud}. Le mode de raisonnement en logique floue est ainsi plus intuitif que la logique classique. Il permet aux concepteurs de mieux appréhender les phénomènes naturels, imprécis et difficilement modélisables en s'appuyant sur la définition de règles et de fonctions d'appartenance à des ensembles dits ensembles flous.

Le fondement de la logique floue consiste en la définition d'un sous-ensemble flou : le sous-ensemble flou  $F$  d'un ensemble  $\Omega$  est caractérisé par sa fonction d'appartenance, prenant des valeurs entre 0 et 1 :

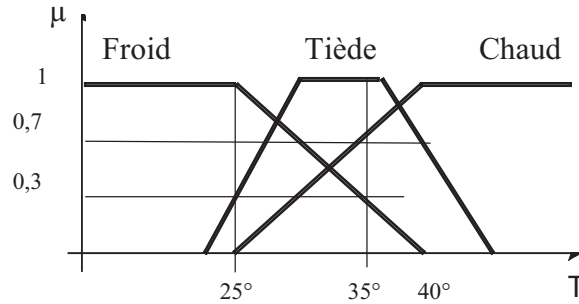
$$\mu_F : \Omega \rightarrow [0; 1] \quad (1.64)$$

Cette fonction quantifie le degré d'appartenance de chaque élément de  $\Omega$  à  $F$ . Le seul lien avec la théorie des ensembles est le suivant :

$$\mu_F(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in F \\ 0 & \text{si } x \notin F \end{cases} \quad (1.65)$$

Ainsi, si  $\mu_F(x) \neq 0$ , la quantité  $\mu_F(x)$  quantifie le degré d'appartenance de l'élément  $x$  à l'ensemble  $F$ . Par exemple, concernant une régulation de température, un utilisateur définit trois ensembles flous {froid}, {tiède} et {chaud} en donnant leur fonction d'appartenance représentée sur la Figure 1.20. Dans ce cas, pour une valeur  $T = 35^\circ$ , le facteur d'appartenance à l'ensemble {froid} vaut  $\mu = 0,3$ , celui d'appartenance à l'ensemble {tiède} vaut 1 et le facteur d'appartenance à l'ensemble {chaud} vaut 0,7.

Concernant les opérations classiquement rencontrées dans la théorie des ensembles,



**FIG. 1.20:** Fonction d'appartenance des ensembles flous {froid}, {tiède} et {chaud} selon la température.

Zadeh a proposé leur extension aux ensembles flous de la manière suivante :

$$\text{intersection : } \mu_{F \cap G}(x) = \min(\mu_F(x), \mu_G(x)) \quad (1.66a)$$

$$\text{union : } \mu_{F \cup G}(x) = \max(\mu_F(x), \mu_G(x)) \quad (1.66b)$$

$$\text{complément : } \mu_{F^c}(x) = 1 - \mu_F(x) \quad (1.66c)$$

D'autres choix sont possibles. Pour cela, il faut se donner des lois régissant les évolutions souhaitées.

Afin de faciliter la propagation d'ensembles flous à travers des modèles, et faciliter la présentation et la compréhension de leur résultat, on utilise les  $\alpha$ -coupures, qui sont des ensembles classiques qui, pour des valeurs de  $\alpha$  comprises dans  $[0; 1]$ , sont définis comme suit :

$${}^{\alpha}F = \{x \mid \mu_F(x) > \alpha\} \quad (1.67)$$

Une  $\alpha$ -coupure contient donc l'ensemble des éléments ayant une fonction d'appartenance valant au minimum  $\mu$ . C'est l'analogie en terme de logique floue de ce que l'on obtient, dans la description probabiliste, avec un intervalle à  $\alpha\%$  de probabilité. Cependant, comme ces deux descriptions sont radicalement différentes, ces deux notions ne sont pas équivalentes.

Diverses méthodes ont été développées afin d'utiliser la logique floue en calcul de structures : citons en particulier la méthode des éléments finis flous (*Fuzzy FEM*) définie dans [58] et pour laquelle on trouve des pistes de techniques de résolution efficaces dans [59] dont une application avec l'analyse de sensibilité sur une structure avec un nombre important de paramètres flous est présentée. Citons aussi la méthode de transformation, décrite dans [60], et une méthode basée sur la définition de vecteurs et valeurs propres flous [61].

La logique floue est, par ailleurs, très appliquée dans les systèmes de régulation et la commande d'automatismes ([62]), et connaît un grand succès dans l'électroménager

japonais.

### 3.3 Modèles convexes d'incertitude

Le concept de modèles convexes d'incertitude (c.f. [63] [64] [65]), appliqué à la validation des modèles dans [66], permet de prendre en compte, par l'introduction des notions de fidélité vis-à-vis des données (à savoir la robustesse et la dispersion de prédiction) le fait que, lors de la calibration d'un modèle par des mesures expérimentales, il n'est pas sain de viser à tout prix la fidélité par rapport aux données ; en effet, des modèles optimaux, au sens qu'ils minimisent les écarts avec les données expérimentales, n'ont aucune robustesse vis-à-vis des incertitudes, c'est-à-dire que de légères variations dans les paramètres ou la forme mathématique du modèle, peuvent conduire à des prédictions très peu fidèles.

Le cadre des modèles convexes d'incertitude permet de préciser la capacité d'intégrer de l'information nouvelle dans le cas où elle n'est pas déterministe, d'une façon différente de ce que peuvent décrire les ensembles flous ou aléatoires : l'incertitude présente dans l'information est ici vue comme la lacune d'information entre ce qui est connu et ce qui devrait l'être pour rendre possible une prise de décision fiable, d'où l'autre dénomination des modèles convexes d'incertitude : les modèles de lacune d'information (*info-gap models* en anglais).

Cela permet de modéliser à la fois les incertitudes de données et celles de modèle, et peuvent être employés dans une optique de conception robuste, comme précisé dans [67] dans le cadre de la dynamique des structures.

Dans la même optique, il est possible d'obtenir par analyse convexe une enveloppe des solutions d'un modèle comportant des incertitudes. Citons en particulier [68], où les auteurs présentent une approche robuste basée sur une analyse convexe pour traiter un problème d'endommagement de structures lors d'un tremblement de terre, en tenant compte de rigidités et d'efforts incertains. La méthode proposée permet d'obtenir une enveloppe assez conservatrice de l'endommagement maximum possible.

### 3.4 Autres

D'autres outils existent, qui n'ont pas été détaillés ici car moins développés dans le calcul de structures, permettent de traiter des incertitudes : la théorie généralisée de l'information (c.f. [69]) et la théorie des ensembles aléatoires, définie par Dempster et Shafer (c.f. [70] et [71]), basée sur la théorie des preuves.

## 4 La théorie des méconnaissances en dynamique des structures

La théorie des méconnaissances (*Lack-Of-Knowledge (LOK) theory* en anglais) est une approche originale du calcul de structures dans le cadre non déterministe. Introduite dans [14], elle a été développée au LMT-Cachan, et ses premières applications, présentées dans [15] et [16], ont portées sur la modélisation d'incertitudes portant sur des rigidités structurales en dynamique des structures.

L'idée à la base de cette approche est d'introduire des variables internes, nommées méconnaissances de base, au modèle discrétisé éléments finis utilisé classiquement. Ces variables internes globalisent les incertitudes à une échelle de sous-structure. Un tel modèle permet alors d'obtenir un encadrement d'une quantité d'intérêt réelle avec une probabilité souhaitée. Dans les travaux [15] et [16] précédant les extensions présentées ici, sont présentées les différentes étapes de la mise en oeuvre de cette méthode :

- la définition des méconnaissances de base, permettant d'encadrer les rigidités structurales par un intervalle fonction de ces méconnaissances ;
- la propagation de ces méconnaissances de base, qui ne conduit pas à une surestimation exagérée de la dispersion du paramètre recherché, du fait que les bornes de l'intervalle sont des variables aléatoires ;
- la réduction des méconnaissances de base, par l'apport d'informations expérimentales, permettant d'accéder aux valeurs des méconnaissances de base correspondant à un ensemble de structures réelles ;

Ainsi, cette méthode permet d'obtenir des bornes entre lesquelles le concepteur est sûr de trouver une quantité d'intérêt de la structure réelle en cours de dimensionnement.

S'il fallait la classer, on la rangerait du côté des méthodes non-paramétriques, car les incertitudes, bien que portant sur un paramètre (à savoir, jusqu'à présent, la rigidité), sont modélisées à l'échelle de sous-structures, et permettent aussi plus globalement de prendre en compte des erreurs de modèle. Cependant, comme du côté technique cette théorie emprunte des notions de théorie des intervalles, mais aussi de probabilités, on ne peut considérer qu'elle soit entièrement stochastique, ni entièrement non stochastique.

Dans le chapitre suivant, nous détaillerons les bases de cette théorie, telle qu'elles sont définies dans [15] et [16], tout en l'inscrivant dans le cadre plus général de la validation des modèles, ce qui nous permettra d'introduire ensuite les extensions proposées.

Initialement définies uniquement sur des rigidités structurales, les méconnaissances

peuvent dorénavant porter sur l'amplitude ou la direction des efforts, grâce aux extensions présentées dans le Chapitre 3. On peut aussi imaginer introduire des méconnaissances sur l'amortissement de certaines parties de la structure étudiée.

Enfin, initialement développée pour traiter des problèmes de dynamique des structures (comme nous l'exposerons dans le chapitre suivant), la théorie s'inscrit plus globalement dans le cadre de l'élasticité grâce aux travaux présentés dans le chapitre 3. On y développe ainsi la propagation des méconnaissances de base sur des quantités d'intérêt comme des déplacements ou contraintes locaux.

## 5 Bilan

Cet aperçu de différents traitements des incertitudes a permis de mettre en évidence que ce sont la méthode de perturbation, et plus encore la méthode de décomposition sur le chaos qui sont les plus adaptées au calcul de structures. L'essentiel des efforts s'est concentré sur ces méthodes stochastiques et leur application en mécanique. Ici, nous n'avons appliqué les différentes méthodes citées que sur l'exemple basique d'une barre en traction, afin de mener des résolutions *à la main*. Pour traiter des problèmes plus importants, des techniques numériques, non détaillées ici, sont nécessaires pour rendre les temps de calcul réalistes.

Cependant, la validation de ces modèles n'est pas encore très développée, ce qui fait que l'on ne dispose presque d'aucun moyen pour juger de la précision de ces modèles. Citons tout de même les travaux de vérification [72] menés au LMT-Cachan ayant pour but de définir un estimateur d'erreur global dans le cadre stochastique. La théorie des méconnaissances, sur laquelle nous allons porter notre intérêt à présent, correspond au développement d'un modèle enveloppe d'une réalité expérimentale, et a pour but de chiffrer l'écart entre le modèle et le réel. Elle permet de n'effectuer que un seul calcul déterministe et, par un post-traitement des résultats de ce calcul, aboutit à l'encadrement d'une quantité d'intérêt.



## Chapitre 2

# La théorie des méconnaissances dans la validation des modèles

*Dans ce deuxième chapitre, nous situons la théorie des méconnaissances dans la validation des modèles, en détaillant succinctement les grandes idées présentées dans [16], et en montrant qu'il est possible de calculer une méconnaissance correspondant à une dispersion réelle de rigidités.*

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Le problème de validation de modèles avec la théorie des méconnaissances</b>	<b>46</b>
1.1	Concept général . . . . .	46
1.2	Situation dans une stratégie globale de validation . . . . .	48
<b>2</b>	<b>La théorie des méconnaissances : état de l'art</b> . . . . .	<b>49</b>
2.1	La réalité considérée . . . . .	49
2.2	Le concept de méconnaissances de base sur la rigidité . . . . .	49
2.3	Propagation des méconnaissances de base . . . . .	54
2.4	Recalage des méconnaissances de base . . . . .	58
<b>3</b>	<b>Une représentation pertinente de la réalité</b> . . . . .	<b>61</b>
3.1	Comparaison à une simulation de Monte Carlo . . . . .	62
3.2	Calcul analytique d'une méconnaissance . . . . .	63

---



# 1 Le problème de validation de modèles avec la théorie des méconnaissances

## 1.1 Concept général

Nous entrons ici dans les détails de la théorie des méconnaissances (*Lack-Of-Knowledge (LOK) theory* en anglais), introduite dans [14], et dont les premières applications furent présentées dans [16] et [15]. Pour tenter de répondre de façon pragmatique au problème de validation dans le cadre de la réalité ingénieur, cette approche propose une extension du concept de coefficients de sécurité, l'objectif étant d'obtenir une enveloppe des réponses réelles (voir la figure 2.2). Elle permet de prendre en compte toutes les sources d'incertitudes, même les erreurs de modèle, à travers le concept de méconnaissances de base.

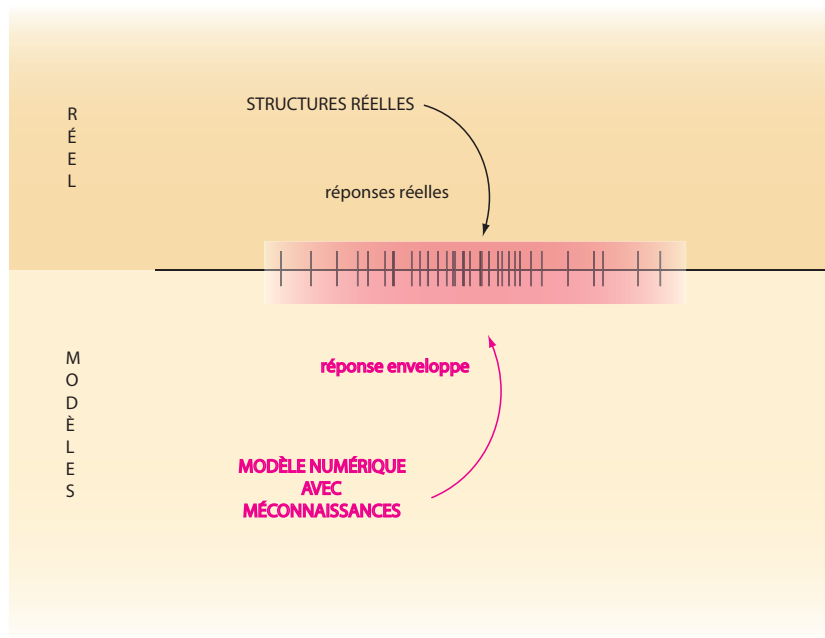


FIG. 2.1: Schématisation de la théorie des méconnaissances dans la validation des modèles.

On considère que le problème à résoudre revient à s'intéresser aux valeurs prises par une certaine quantité d'intérêt notée  $\alpha$ . Cette quantité peut être une contrainte, un déplacement, une pulsation propre, ou un déplacement de mode propre en un certain noeud. Un modèle utilisé classiquement donne une solution approchée, notée  $\bar{\alpha}$ . Le problème de validation de modèles consiste à qualifier et quantifier l'écart

$$\Delta\alpha = \alpha - \bar{\alpha} \quad (2.1)$$

entre cette solution approchée et la quantité  $\alpha$  que l'on peut attendre d'une structure réelle.

De manière générale, la quantité  $\bar{\alpha}$  est une fonction des matrices éléments finis (EF) de rigidité  $\bar{\mathbb{K}}$ , d'amortissement  $\bar{\mathbb{B}}$  de la structure considérée, et du vecteur EF des efforts  $\bar{\mathbf{F}}$  appliqués :

$$\bar{\alpha} = \mathbb{L}_{EF}(\bar{\mathbb{K}}, \bar{\mathbb{B}}, \bar{\mathbf{F}}) \quad (2.2)$$

où  $\mathbb{L}_{EF}$  est un opérateur donné, lié au modèle utilisé.

La quantité  $\alpha$  est, elle, associée à la rigidité, à l'amortissement et aux efforts réels.

Pour une structure réelle donnée, la quantité  $\alpha$  est une réalisation de celles possibles  $\alpha(\theta)$ . On ne peut cependant pas se contenter d'une description par intervalles des paramètres en jeu, car, comme on l'a vu dans le Chapitre 1, cette méthode conduit à une sur-estimation exagérée de la dispersion résultante. L'idée, détaillée dans le paragraphe suivant 2.2 et schématisée sur la Figure 2.2, est d'introduire des variables internes, nommées méconnaissances de base, au modèle discrétisé par éléments finis afin d'encadrer une quantité d'intérêt réelle avec une certaine probabilité de  $P\%$  souhaitée. Un point clé de cette modélisation est que ces variables internes sont définies à une échelle de sous-structures, afin de modéliser globalement les incertitudes à cette échelle. Idéalement, leurs valeurs sont identifiées à partir de données statistiques expérimentales.

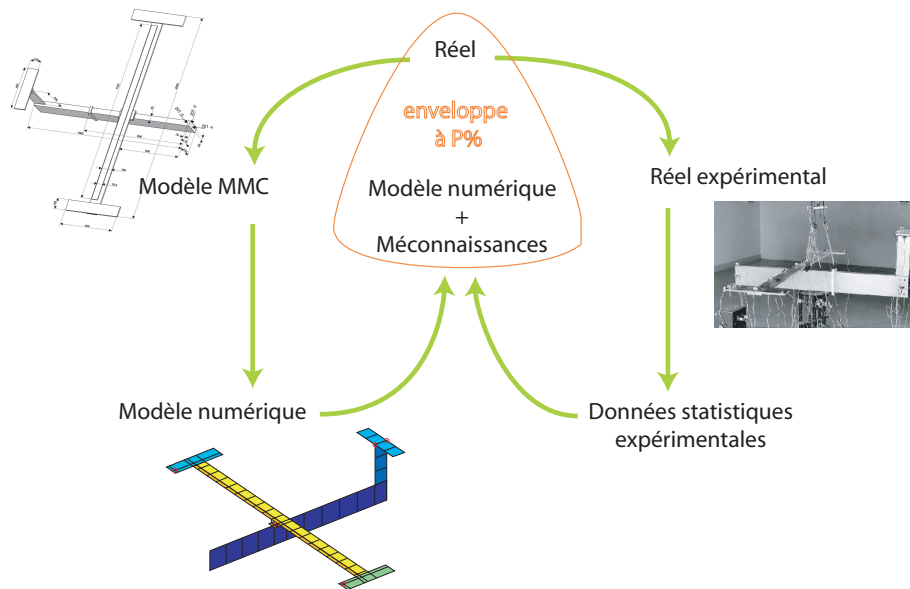


FIG. 2.2: Schématisation de la théorie des méconnaissances

Cette modélisation avec méconnaissances permet de définir une enveloppe de la réponse de la structure étudiée. Le résultat est souvent donné sous la forme de l'écart  $\Delta\alpha(\theta)$  de la

réponse réelle  $\alpha(\theta)$  à celle du modèle EF  $\bar{\alpha}$  :

$$-\Delta\alpha^-(\theta) \leq \alpha(\theta) - \bar{\alpha} \leq \Delta\alpha^+(\theta) \quad (2.3)$$

La valeur réelle de la quantité d'intérêt,  $\alpha(\theta)$ , se trouve dans l'image par  $\mathbb{L}_{EF}$  des espaces de variation des opérateurs réels  $\mathbb{K}(\theta)$ ,  $\mathbb{B}(\theta)$  et  $\underline{F}(\theta)$ . L'enveloppe définie à l'équation 2.3 est associée à la définition des méconnaissances, qui permet de définir des ensembles de définition pour la rigidité  $\mathbb{K}(\theta) \in \mathcal{X}_{m(\theta)}$ , l'amortissement de la structure  $\mathbb{B}(\theta) \in \mathcal{B}_{m(\theta)}$ , et les efforts appliqués  $\underline{F}(\theta) \in \mathcal{F}_{m(\theta)}$ . On peut ainsi exprimer formellement les bornes de la quantité d'intérêt, choisies de manière conservative :

$$\Delta\alpha^+(\theta) = \sup_{\substack{\mathbb{K}(\theta) \in \mathcal{X}_{m(\theta)} \\ \mathbb{B}(\theta) \in \mathcal{B}_{m(\theta)} \\ \underline{F}(\theta) \in \mathcal{F}_{m(\theta)}}} [\mathbb{L}_{EF}(\mathbb{K}(\theta), \mathbb{B}(\theta), \underline{F}(\theta)) - \mathbb{L}_{EF}(\bar{\mathbb{K}}, \bar{\mathbb{B}}, \bar{F})] \quad (2.4a)$$

$$\Delta\alpha^-(\theta) = - \inf_{\substack{\mathbb{K}(\theta) \in \mathcal{X}_{m(\theta)} \\ \mathbb{B}(\theta) \in \mathcal{B}_{m(\theta)} \\ \underline{F}(\theta) \in \mathcal{F}_{m(\theta)}}} [\mathbb{L}_{EF}(\mathbb{K}(\theta), \mathbb{B}(\theta), \underline{F}(\theta)) - \mathbb{L}_{EF}(\bar{\mathbb{K}}, \bar{\mathbb{B}}, \bar{F})] \quad (2.4b)$$

On détaillera dans le paragraphe 2.4 l'expression de ces bornes en fonction des méconnaissances. En pratique, le calcul analytique de la fonction densité de probabilité de chacune de ces bornes en fonction des méconnaissances introduites dans le modèle est possible dans des cas très simples comme présenté dans le paragraphe 3.2, mais impossible dès que plusieurs méconnaissances sont en jeu et que la géométrie est multi-directionnelle.

De plus, comme la donnée des densités de probabilité des bornes encadrant la quantité d'intérêt n'est pas d'une utilisation directe pour l'ingénieur, le résultat du modèle se fera par la données des bornes à un certain pourcentage (très fréquemment celles à 99% de probabilité).

Cette approche conservative répond à l'objectif de conception robuste dans le sens où le comportement de toute structure produite aura été prédit.

## 1.2 Situation dans une stratégie globale de validation

La manière dont la théorie des méconnaissances se situe dans le cadre général de la validation des modèles est la suivante : on applique à la structure modélisée une technique de recalage de ses paramètres à l'aide de données expérimentales, puis, s'il subsiste des zones où l'erreur reste forte, signe de l'insuffisance du modèle employé, on introduit des méconnaissances.

Une application de cette stratégie sur le système de lancement double d'Ariane 5 est présentée dans [21]. La technique de recalage employée, basée sur l'erreur en relation de comportement modifiée, peut porter sur des paramètres qui peuvent être déterministes ou

stochastiques. L'emploi de la théorie des méconnaissances sur un modèle recalé permet de manipuler un modèle imparfait par rapport à la réalité, et d'obtenir ainsi des valeurs prédictives de quantités d'intérêt données.

D'autres travaux développés récemment ont permis de définir un indicateur d'erreur global dans le cadre stochastique (voir [72] pour des problèmes de contact), afin d'estimer la qualité d'une solution issue d'une interpolation (comme une décomposition sur le chaos, par exemple). Cet indicateur est basé sur l'erreur en relation de comportement et ouvre la porte à des calculs de structure performants, basés sur des techniques adaptatives utilisant les résultats du calcul d'erreur dans le cadre stochastique.

## 2 La théorie des méconnaissances : état de l'art

Nous détaillons succinctement dans ce paragraphe les bases de la théorie des méconnaissances telles qu'elle ont été définies dans les travaux [16, 20, 18, 19, 21, 22, 17].

### 2.1 La réalité considérée

La réalité que s'attache à décrire la théorie des méconnaissances est celle de toutes les structures réelles, dans l'environnement que chacune rencontre. La réalité considérée est donc celle d'une famille de structures réelles. On parle de "famille" : les structures sont semblables car a priori les mêmes. Cependant, de nombreuses sources d'incertitudes les rendent différentes : de part l'élaboration et les spécifications géométriques employées, des dispersions de caractéristiques matériaux, ou de géométrie, subsistent. De même, l'environnement réel que connaît chacune d'elles dans une même phase de vie peut ne pas être rigoureusement identique.

On ne peut bien évidemment pas avoir accès directement aux incertitudes présentes dans une famille de structures données, situées dans leur environnement réel ; c'est par l'intermédiaire de mesures expérimentales qu'elles transparaissent. L'ensemble des valeurs expérimentales issues des différentes structures testées sera noté  $\{\alpha_{exp}\}$  pour la quantité d'intérêt correspondante  $\alpha$ . Ces valeurs expérimentales étant des données dispersées, on associe les quantités  $\alpha_{exp}^-(P)$  et  $\alpha_{exp}^+(P)$  qui encadrent une proportion  $P$  souhaitée des quantités mesurées. On utilise souvent les valeurs à 70, 90 ou 99% de probabilité.

### 2.2 Le concept de méconnaissances de base sur la rigidité

Dans le cadre des travaux précédents [16, 20, 18, 19, 21, 22, 17], seules les dispersions de rigidités structurales ont été prises en compte, et c'est ceci que nous détaillons dans ce chapitre. De manière générale, le développement de la théorie des méconnaissances

s'effectue en trois principales étapes :

- la définition des méconnaissances de base ;
- leur propagation à travers le modèle mécanique aboutissant aux méconnaissances effectives sur une quantité d'intérêt ;
- la réduction des méconnaissances de base par l'apport de données expérimentales.

### Définition

Originellement, les méconnaissances de base sur la rigidité ont été définie dans le cas d'un matériau élastique isotrope. C'est cette définition que nous détaillons ici. La structure est modélisée comme l'assemblage de sous-structures  $E$  ( $E \in \mathbb{E}$ ), les liaisons pouvant être vues comme des sous-structures particulières. L'échelle de sous-structuration est supposée être en accord avec les quantités d'intérêt étudiées. On suppose de plus qu'un modèle éléments finis (EF) élastique déterministe est suffisant pour prédire la réponse de la structure.

On choisit de quantifier les incertitudes à l'échelle des sous-structures, de façon à globaliser les défauts apparaissant à des échelles méso ou microscopiques, comme des inclusions plastiques, des hétérogénéités, des microfissures... On évite ainsi une description paramétrique, qui nécessite une connaissance précise des incertitudes et phénomènes locaux en jeu.

Le point de départ de la théorie des méconnaissances est l'association à chaque sous-structure d'une paire de variables internes scalaires  $(m_E^-, m_E^+)$  nommées "méconnaissances de base", telles que :

$$-m_E^-(\theta)\bar{\mathbb{K}}_E \leq \mathbb{K}_E(\theta) - \bar{\mathbb{K}}_E \leq m_E^+(\theta)\bar{\mathbb{K}}_E \quad (2.5)$$

où  $\bar{\mathbb{K}}_E$  est la matrice de rigidité calculée par le modèle EF et  $\mathbb{K}_E(\theta)$  la matrice de rigidité pour une structure de la famille étudiée. Dans cette expression formelle, les inégalités doivent être considérées pour les valeurs propres. Par leur définition, les méconnaissances de base  $(m_E^+$  et  $m_E^-)$  sont positives. Elles peuvent prendre des valeurs fixes, mais elles suivent souvent des lois probabilistes.

L'inégalité 2.5 peut être déclinée en une inégalité sur les énergies de déformation, bien plus utilisée :

$$(1 - m_E^-(\theta))\bar{e}_E(\underline{U}) \leq e_E(\underline{U}, \theta) \leq (1 + m_E^+(\theta))\bar{e}_E(\underline{U}) \quad (2.6)$$

qui doit être vérifiée pour tout champ de déplacement  $\underline{U}$ . Dans cette expression,  $\bar{e}_E(\underline{U})$  désigne l'énergie de déformation dans le champ de déplacement  $\underline{U}$  sur la sous-structure  $E$  pour modèle EF employé, et  $e_E(\underline{U}, \theta)$  celle pour une structure réelle. Elles s'expriment

formellement en fonction de la rigidité EF  $\overline{\mathbb{K}}_E$  et de la rigidité d'une structure de la famille considérée  $\mathbb{K}_E(\theta)$  :

$$\bar{e}_E(\underline{U}) = \frac{1}{2} \underline{U}^T \overline{\mathbb{K}}_E \underline{U} \quad (2.7a)$$

$$e_E(\underline{U}, \theta) = \frac{1}{2} \underline{U}^T \mathbb{K}_E(\theta) \underline{U} \quad (2.7b)$$

On pourrait associer une quantité méconnaissance  $m_E$  à chaque sous-structure, de telle sorte que l'énergie d'une sous-structure réelle s'exprime :  $e_E = m_E \bar{e}_E$ . Mais donner une loi à cette quantité reviendrait à adopter une description paramétrique à l'échelle de la sous-structure. Ici on se contente de donner la description des méconnaissances de base en précisant les bornes  $[-\bar{m}_E^-(\theta); \bar{m}_E^+(\theta)]$  correspondant aux valeurs extrêmes possibles de  $m_E^-(\theta)$  et  $m_E^+(\theta)$ , ainsi que la loi de probabilité dont elles sont issues. La quantité  $m_E$  correspondant à une structure serait située dans cet intervalle, sans que l'on puisse être plus précis, ce qui ici importe peu car l'on cherche une enveloppe des réponses réelles, sans se soucier de leur répartition. Une autre description peut être de remplacer l'intervalle  $[-\bar{m}_E^-(\theta); \bar{m}_E^+(\theta)]$  par un intervalle flou dépendant d'une seule variable stochastique.

Afin d'éviter la surestimation lors de la propagation des intervalles, les bornes ne sont pas des quantités déterministes. Le choix des lois de probabilité que suivent les méconnaissances de base se fait en fonction d'hypothèses sur les sources de dispersion au niveau de la sous-structure considérée. On se reportera à [73, 15, 16] pour la technicité de tirage des méconnaissances de base.

### Loi de probabilité

La nature de la loi de probabilité que suivent les bornes  $m_E^-(\theta)$  et  $m_E^+(\theta)$  est choisie a priori :

- La plupart du temps, les méconnaissances de base sur les rigidités sont issues de lois normales : on associe à la méconnaissance  $m(\theta) = [-\bar{m}_E^-(\theta); \bar{m}_E^+(\theta)]$  une densité de probabilité suivant la loi :

$$p(m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(m - \bar{M})^2}{2\sigma^2}\right) \quad (2.8)$$

telle que son écart type  $\sigma$  est paramétré par deux valeurs  $\bar{m}_E^+$  et  $\bar{m}_E^-$  de façon à avoir

$$\int_{-\bar{m}_E^-}^{\bar{m}_E^+} p(m) dm = 0,99 \quad (2.9)$$

et où la valeur de  $\bar{M}$  assure que la méconnaissance  $m(\theta)$  soit centrée entre ces bornes  $\bar{m}_E^+$  et  $\bar{m}_E^-$  :

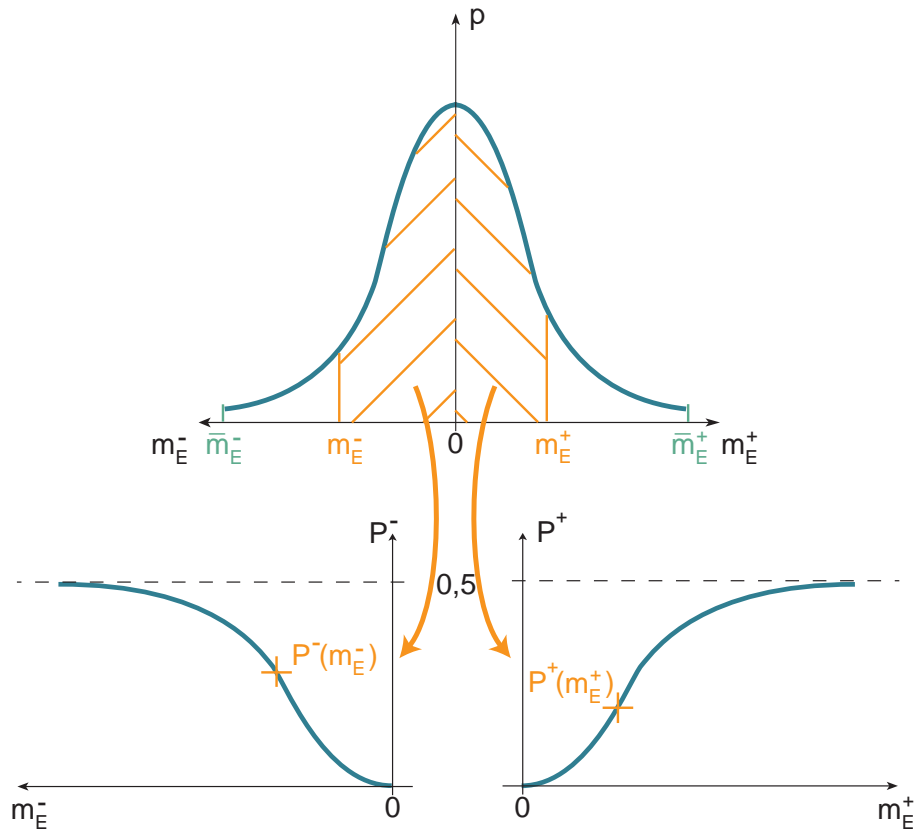


FIG. 2.3: Méconnaissances de base associées à une loi normale centrée.

$$\langle m(\theta) \rangle = \frac{\bar{m}_E^+ - \bar{m}_E^-}{2} \quad (2.10)$$

soit :

$$\bar{M} = \frac{\bar{m}_E^+ - \bar{m}_E^-}{2} \quad (2.11)$$

De plus, pour éviter les réalisations non physiques, on impose que la densité de probabilité soit nulle en dehors de l'intervalle  $[-\bar{m}_E^-; \bar{m}_E^+]$ . Cela revient à ne pas considérer dans la modélisation les 1% de cas extrêmes, qui sont écartés par les contrôles effectués tout au long de la production ;

- Cependant, lorsque les sources de dispersion sont particulièrement méconnues, on peut adopter une description plus floue, en définissant les méconnaissances de base à partir d'une loi uniforme.
- Lorsque la modélisation est très imparfaite, le manque d'informations peut être tel que l'on n'associe pas de loi de probabilité aux méconnaissances de base : dans ce

cas, on garde une description par intervalles déterministes.

Ainsi la probabilité d'observer  $m_E$  dans un intervalle  $[-m_E^-; m_E^+]$  issu d'un tirage donné est :

$$P(-m_E^- \leq m_E \leq m_E^+) = \int_{-m_E^-}^{m_E^+} p(m) dm \quad (2.12)$$

Comme les méconnaissances de base  $m_E^-(\theta)$  et  $m_E^+(\theta)$  sont définies par l'équation (2.5) de part et d'autre du modèle théorique, on peut dissocier les deux événements indépendants suivants :

- soit  $m_E \in [0; m_E^+]$ , ce qui signifie que l'on observe l'événement ( $m_E^- = 0, m_E^+ \geq 0$ ) avec une probabilité  $P^+(m_E^+)$  :

$$P^+(m_E^+) = \int_0^{m_E^+} p(m) dm \quad (2.13)$$

- soit  $m_E \in [-m_E^-; 0]$ , c'est-à-dire que l'on observe l'événement ( $m_E^- \geq 0, m_E^+ = 0$ ) avec une probabilité  $P^-(m_E^-)$  :

$$P^-(m_E^-) = \int_{-m_E^-}^0 p(m) dm \quad (2.14)$$

Selon la valeur du tirage, on obtient alors deux types d'intervalles distincts :  $[0; m_E^+]$  et  $[-m_E^-; 0]$ . C'est de cette manière que sont définis les méconnaissances de base à partir d'une certaine loi de probabilité  $p(m)$ .

En pratique, lorsque l'on définit des méconnaissances de base ( $-m_E^-(\theta); m_E^+(\theta)$ ) sur une sous-structure  $E$ , on donne la loi qu'elles suivent, et les bornes  $\bar{m}_E^-$  de la méconnaissance  $m_E^-(\theta)$  et  $\bar{m}_E^+$  de la méconnaissance  $m_E^+(\theta)$ . Ces quantités sont représentées sur la figure 2.3, qui schématise la définition des méconnaissances de base associées à une loi normale centrée.

### Le modèle

Le modèle avec méconnaissances est ainsi constitué d'un modèle EF élastique et des méconnaissances de base sur chaque sous-structures. On peut imaginer que le modèle EF sur lequel on se base soit un modèle stochastique ; l'emploi de méconnaissances de base sur une sous-structure précise restant assez méconnue peut alors permettre un dimensionnement plus juste.



## 2.3 Propagation des méconnaissances de base

### Principe

Comme présenté dans le paragraphe 1.1, l'objectif de la théorie des méconnaissances est de qualifier et quantifier l'écart  $\Delta\alpha$  entre la solution approchée  $\bar{\alpha}$  et la quantité  $\alpha$  que l'on peut attendre d'une structure réelle :

$$\Delta\alpha = \alpha - \bar{\alpha} \quad (2.15)$$

L'objet de l'étape de propagation des méconnaissances est de calculer les bornes de l'enveloppe  $\Delta\alpha_{mod}^-(\theta)$  et  $\Delta\alpha_{mod}^+(\theta)$  de cette quantité :

$$-\Delta\alpha_{mod}^-(\theta) \leq \alpha(\theta) - \bar{\alpha} \leq \Delta\alpha_{mod}^+(\theta) \quad (2.16)$$

Ce calcul s'effectue à partir du modèle avec méconnaissances donné, et donc en particulier à partir de l'inégalité (2.6) de définition des méconnaissances de base.

Comme les lois de probabilité des méconnaissances de base  $(m_E^-(\theta); m_E^+(\theta))$  sont connues, il est possible de déterminer les lois que vérifient les bornes  $\Delta\alpha_{mod}^-(\theta)$  et  $\Delta\alpha_{mod}^+(\theta)$  : moyennant l'expression de la quantité d'intérêt en fonction des rigidités ou énergies de déformation structurales, on propage les intervalles de méconnaissances de base  $([m_E^-(\theta); m_E^+(\theta)])_E$ . Cette propagation s'effectue soit analytiquement (pour des géométries très simple comme on le verra dans le paragraphe 3.2), soit numériquement, soit à l'aide d'une technique de Monte Carlo.

Cependant, la donnée des densités de probabilité des bornes  $\Delta\alpha_{mod}^-(\theta)$  et  $\Delta\alpha_{mod}^+(\theta)$  n'est en soi pas très commode d'emploi pour connaître la dispersion de  $\alpha$ . C'est pourquoi les concepts de probabilité d'intervalle et d'intervalle standard sont définis dans [16]. Le résultats est classiquement donné sous la forme des bornes  $\Delta\alpha_{mod}^-(P)$  et  $\Delta\alpha_{mod}^+(P)$  de l'intervalle standard correspondant à une probabilité  $P$  donnée. Par définition, cet intervalle  $[-\Delta\alpha_{mod}^-(P); \Delta\alpha_{mod}^+(P)]$  est le plus petit intervalle tel que

$$\int_0^{\Delta\alpha_{mod}^+(P)} p^+(\theta) d\theta + \int_{-\Delta\alpha_{mod}^-(P)}^0 p^-(\theta) d\theta = P \quad (2.17)$$

où  $p^+$  (respectivement  $p^-$ ) est la fonction densité de probabilité de la borne supérieure  $\Delta\alpha_{mod}^+(\theta)$  (respectivement de la borne inférieure  $\Delta\alpha_{mod}^-(\theta)$ ). On appelle méconnaissances effectives les bornes  $\Delta\alpha_{mod}^-(P)$  et  $\Delta\alpha_{mod}^+(P)$  issues de la propagation du modèle avec méconnaissances. La figure 2.4 résume l'ensemble du principe de la propagation des méconnaissances de base.

### Calcul théorique des méconnaissances effectives

Initialement, la théorie des méconnaissances a été appliquée à l'étude des vibrations libres d'un système mécanique ; les quantités d'intérêt initialement considérées dans [15, 16]

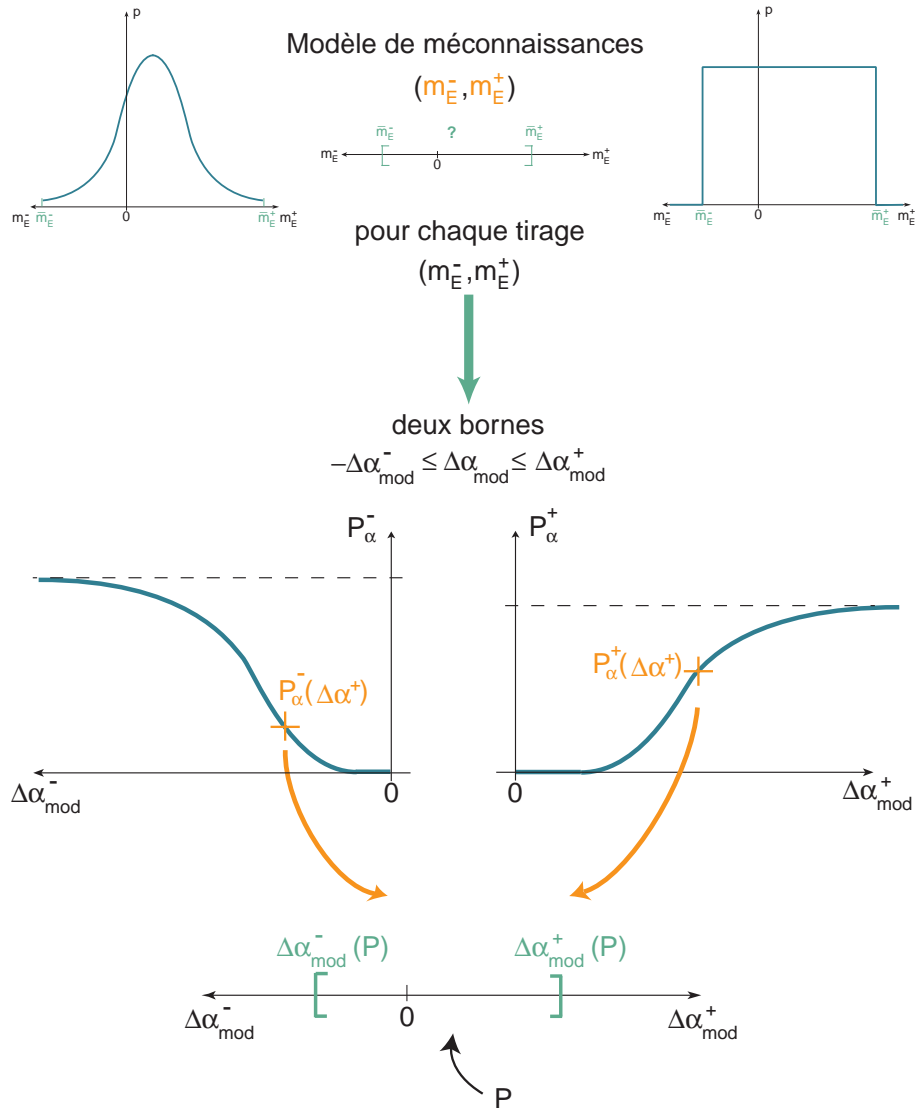


FIG. 2.4: Propagation des méconnaissances sur la quantité d'intérêt  $\Delta\alpha_{mod}$ .

sont donc des pulsations propres  $\omega_i$  et des formes propres de vibration  $\underline{\phi}_i$  d'une structure, qui sont respectivement les valeurs propres et les vecteurs propres du problème aux valeurs propres :

$$(\mathbb{K} - \omega_i^2 \mathbb{M}) \underline{\phi}_i = \underline{0} \quad (2.18)$$

Pour le calcul des méconnaissances effectives sur une pulsation propre  $\omega_i$ , on exprime la différence  $\Delta\omega_{imod}^2$  entre le carré d'une pulsation propre du modèle avec méconnaissances  $\omega_{imod}^2$  et celui de celle du modèle EF  $\bar{\omega}_i^2$  :

$$\Delta\omega_{imod}^2 = \omega_{imod}^2 - \bar{\omega}_i^2 \quad (2.19)$$

En effet, par une approximation au premier ordre, on obtient son expression en fonction des énergies de déformation par sous-structures par le calcul suivant :

$$\begin{aligned}\Delta\omega_{imod}^2 &= \underline{\phi}_i^T \mathbb{K} \underline{\phi}_i - \overline{\phi}_i^T \overline{\mathbb{K}} \overline{\phi}_i \\ &\simeq \overline{\phi}_i^T (\mathbb{K} - \overline{\mathbb{K}}) \underline{\phi}_i = 2 \sum_E \left( e_E(\overline{\phi}_i) - \overline{e}_E(\overline{\phi}_i) \right)\end{aligned}\quad (2.20)$$

Cette approximation est valable si les modes  $\overline{\phi}_i$  du modèle théorique EF (associés aux pulsations propres  $\overline{\omega}_i$ ) sont normalisés par rapport à la matrice de masse.

Il est alors possible de propager les intervalles de méconnaissances de base ( $[m_E^-(\theta); m_E^+(\theta)]_E$ ) définis sur chaque sous-structure  $E$  par l'une des relations (2.5) et (2.6). Cette propagation aboutit à l'encadrement de la quantité  $\Delta\omega_{imod}^2$  correspondant à une structure quelconque de la famille étudiée :

$$-\Delta\omega_{imod}^{2-}(\theta) \leq \Delta\omega_{imod}^2 \leq \Delta\omega_{imod}^{2+}(\theta) \quad (2.21)$$

où l'expression des bornes  $\Delta\omega_{imod}^{2-}(\theta)$  et  $\Delta\omega_{imod}^{2+}(\theta)$  découlent de l'approximation (2.20) :

$$\Delta\omega_{imod}^{2-}(\theta) = 2 \sum_E m_E^-(\theta) \overline{e}_E(\overline{\phi}_i) \quad (2.22a)$$

$$\Delta\omega_{imod}^{2+}(\theta) = 2 \sum_E m_E^+(\theta) \overline{e}_E(\overline{\phi}_i) \quad (2.22b)$$

Le résultat de propagation est donné sous la forme des méconnaissances effectives sur le carré de la fréquence propre  $\omega_i^2$ , qui sont les bornes,  $\Delta\omega_{imod}^{2-}(P)$  et  $\Delta\omega_{imod}^{2+}(P)$ , de l'intervalle standard pour une probabilité  $P$  donnée. Elles se calculent facilement en connaissant les lois de probabilité des méconnaissances de base.

Concernant les modes propres  $\underline{\phi}_i$ , comme les méconnaissances de base sont des quantités scalaires, il n'est possible d'obtenir des méconnaissances effectives que sur des projections. Ainsi, le calcul des méconnaissances effectives sur la valeur d'un mode propre en un degré de liberté donné est détaillé dans [15, 16], ainsi que celui des méconnaissances effectives sur la projection d'un mode propre dans une direction donnée. On ne détaille ici que les résultats sur les bornes encadrant ces quantités d'intérêt ; pour plus de renseignements, on consultera [15, 16].

Pour le calcul des méconnaissances effectives sur l'écart suivant :

$$\Delta\underline{\phi}_{kimod} = \underline{\phi}_{kimod} - \overline{\phi}_{ki} \quad (2.23)$$

qui est l'écart  $\Delta\underline{\phi}_{kimod}$  de la valeur en un degré de liberté (DDL) donné entre un mode propre du modèle avec méconnaissances,  $\underline{\phi}_{ki}$ , et le mode propre correspondant du modèle

EF,  $\underline{\phi}_{k\text{imod}}$ , avec  $k$  l'indice de la  $k$ -ième ligne du  $i$ -ème mode propre, on obtient l'encadrement suivant, après une linéarisation, détaillée dans [15, 16] :

$$-\Delta\phi_{k\text{imod}}^{2-}(\theta) \leq \Delta\phi_{k\text{imod}}^2 \leq \Delta\phi_{k\text{imod}}^{2+}(\theta) \quad (2.24)$$

Les bornes de cet encadrement s'expriment comme sommes de produits des méconnaissances de base par des énergies de déformations :

$$\Delta\phi_{k\text{imod}}^{2-}(\theta) = \frac{1}{2} \sum_E \left\{ m_E^-(\theta) \bar{e}_E(\underline{U} + \underline{\bar{\phi}}_i) + m_E^+(\theta) \bar{e}_E(\underline{U} - \underline{\bar{\phi}}_i) \right\} \quad (2.25a)$$

$$\Delta\phi_{k\text{imod}}^{2+}(\theta) = \frac{1}{2} \sum_E \left\{ m_E^+(\theta) \bar{e}_E(\underline{U} + \underline{\bar{\phi}}_i) + m_E^-(\theta) \bar{e}_E(\underline{U} - \underline{\bar{\phi}}_i) \right\} \quad (2.25b)$$

Le vecteur  $\underline{U}$  est fonction des modes propres  $\underline{\phi}_i$  et de la matrice de masse. Pour une valeur de probabilité  $P$  donnée, on peut alors déterminer la méconnaissance effective ( $\Delta\phi_{k\text{imod}}^{2-}(P); \Delta\phi_{k\text{imod}}^{2+}(P)$ ).

De la même manière, l'encadrement de la variation de la projection dans une direction  $N$  donnée  $\Delta\phi_{i\text{mod}}^N = (\underline{\phi}_{i\text{mod}} - \underline{\bar{\phi}}_i) \cdot \underline{N}$  obtenu par propagation des méconnaissances de base sur les rigidités structurales est le suivant :

$$-\Delta\phi_{i\text{mod}}^{N-}(\theta) \leq \Delta\phi_{i\text{mod}}^N \leq \Delta\phi_{i\text{mod}}^{N+}(\theta) \quad (2.26)$$

où, moyennant une hypothèse de petites valeurs de méconnaissances afin d'utiliser une approximation au premier ordre, les bornes sont des fonctions des pulsations propres, des méconnaissances de base, des énergies de déformation et des modes propres :

$$\Delta\phi_{i\text{mod}}^{N-}(\theta) = \sum_E \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}} \frac{1}{2(\bar{\omega}_k^2 - \bar{\omega}_i^2)} \left\{ m_E^-(\theta) \bar{e}_E(\underline{\bar{\phi}}_i + \underline{\bar{\phi}}_k) + m_E^+(\theta) \bar{e}_E(\underline{\bar{\phi}}_i - \underline{\bar{\phi}}_k) \right\} \underline{\bar{\phi}}_k \cdot \underline{N} \quad (2.27a)$$

$$\Delta\phi_{i\text{mod}}^{N+}(\theta) = \sum_E \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}} \frac{1}{2(\bar{\omega}_k^2 - \bar{\omega}_i^2)} \left\{ m_E^+(\theta) \bar{e}_E(\underline{\bar{\phi}}_i + \underline{\bar{\phi}}_k) + m_E^-(\theta) \bar{e}_E(\underline{\bar{\phi}}_i - \underline{\bar{\phi}}_k) \right\} \underline{\bar{\phi}}_k \cdot \underline{N} \quad (2.27b)$$

### Cas d'une forte méconnaissance

Les calculs de méconnaissances effectives détaillés ci-dessus sont basés sur des linéarisations au premier ordre des modes et pulsations propres. Ils ne sont pas valables dans le cas de "fortes" méconnaissances, c'est-à-dire de fortes incertitudes. Bien que la notion de trop "forte" valeur de méconnaissance ne soit pas quantifiable, et dépende de la structure étudiée, on peut néanmoins admettre que pour des méconnaissances (donc des incertitudes) de l'ordre de 20 à 30% voire plus, il est nécessaire d'être prudent quant à la validité de l'approximation utilisée.

Une méthode de calcul de méconnaissances effectives dans le cas de fortes méconnaissances est proposée dans [16]. En résumé, elle repose sur une technique de réduction de base modale, puis sur une interpolation quadratique des pulsations et des modes propres, et d'ordre 5 pour les énergies de déformation en fonction des méconnaissances de base sur la sous-structure avec forte méconnaissance. Le calcul des méconnaissances effectives s'effectue alors comme détaillé ci-dessus pour les sous-structures à faibles méconnaissance, à ce détail près que l'on prend en compte les modes propres perturbés par la ou les fortes méconnaissances pour calculer les énergies de déformation intervenant dans le calcul de propagation.

## 2.4 Recalage des méconnaissances de base

La question clé de la modélisation avec méconnaissances réside dans la détermination des méconnaissances de base à partir de données expérimentales. Il s'agit de résoudre le problème inverse d'identification des méconnaissances de base à partir des données expérimentales retenues. L'idée est que, pour toute réalité industrielle, l'enveloppe obtenue par expérience doit être incluse dans l'enveloppe donnée par le modèle avec les méconnaissances déterminées.

La stratégie retenue dans [15, 16], schématisée en figure 2.5, et rappelée ici, procède par réductions successives de chacune des méconnaissances de base. Le point de départ est un modèle initial avec des méconnaissances de base surestimées à priori ou par expérience.

Pour la quantité d'intérêt  $\alpha$ , on obtient par propagation du modèle initial les bornes  $\Delta\alpha_{mod}^+(\theta)$  et  $\Delta\alpha_{mod}^-(\theta)$ , et par les expériences les bornes  $\Delta\alpha_{exp}^+(\theta)$  et  $\Delta\alpha_{exp}^-(\theta)$ , avec :

$$\Delta\alpha_{exp}^+(\theta) \leq \Delta\alpha_{mod}^+(\theta) \quad (2.28a)$$

$$\Delta\alpha_{exp}^-(\theta) \leq \Delta\alpha_{mod}^-(\theta) \quad (2.28b)$$

En supposant que, pour l'expérience considérée,  $\alpha$  dépend essentiellement de la sous-structure  $E^*$ , le processus de réduction est alors limité à la réduction de la méconnaissance de base sur  $E^*$ . On définit

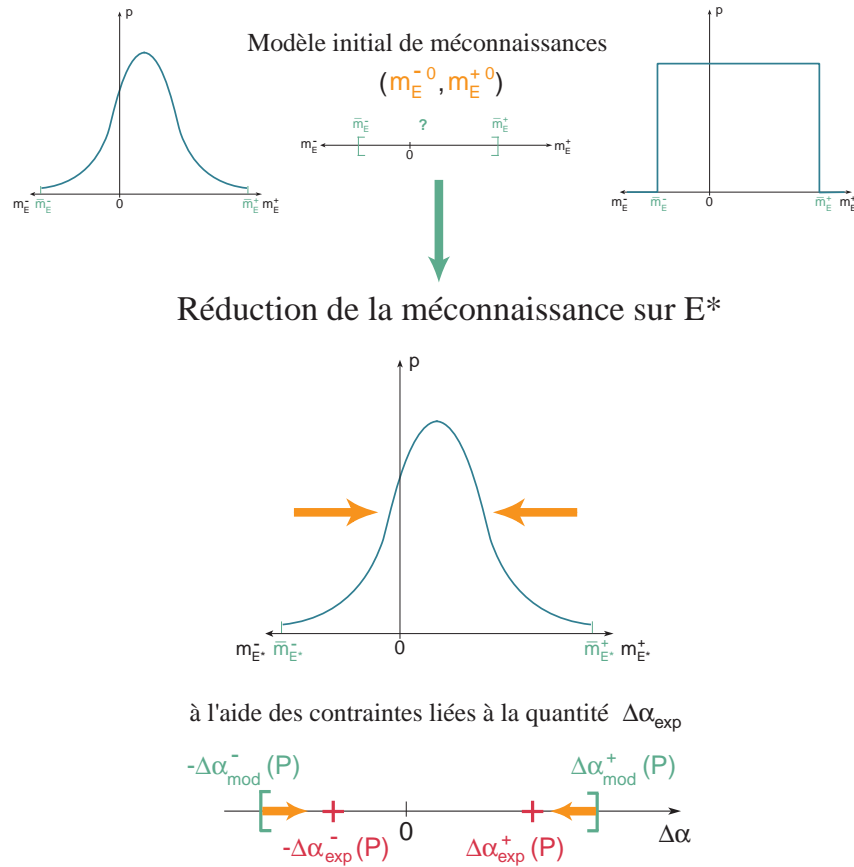
$$\Delta\alpha_{mod} = \mathbb{L}_\alpha(\mathbb{K}, \underline{F}) - \bar{\alpha} = \Delta\alpha_{E^*} + \sum_{E \in \mathbb{C}_{E^*}} \Delta\alpha_E \quad (2.29)$$

Soit  $m^*$  la méconnaissance de base réduite ; l'enveloppe mesurée doit être incluse dans l'enveloppe du modèle avec la méconnaissance sur  $E^*$  réduite :

$$\Delta\alpha_{exp}^+(\theta) \leq \Delta\alpha_{mod}^{+*}(\theta) \quad (2.30a)$$

$$\Delta\alpha_{exp}^-(\theta) \leq \Delta\alpha_{mod}^{-*}(\theta) \quad (2.30b)$$

La question essentielle est de définir la proximité de ces deux enveloppes et cela dépend de la visibilité de la méconnaissance sur  $E^*$  à travers l'expérience considérée pour



**FIG. 2.5:** Schématisation du principe de réduction des méconnaissances de base à l'aide d'informations expérimentales pertinentes.

le processus de réduction. Pour cela, une idée est d'associer à cette méconnaissance un coefficient de représentativité, noté  $\rho_{E^*}$ , et défini sur l'intervalle  $[0; 1]$ , pouvant être évalué par expérience. Lors de la réduction de la méconnaissance sur  $E^*$ , l'idéal est alors d'avoir, pour chaque sous-structure méconnue, des essais très représentatifs de la sous-structure en question dans son environnement réel, ce qui se traduit par une valeur de  $\rho_{E^*}$  proche de 1. Dans cette étape de réduction de la méconnaissance sur  $E^*$ , on fait alors intervenir les cas les pires sur les autres sous-structures, afin de rester conservatifs :

$$\Delta\alpha_{\text{mod}}^{+* \text{pire}}(\theta) = \rho_{E^*} \Delta\alpha_{E^*}^+(\theta) + \min_{\substack{\mathbb{K}(\theta) \in \mathcal{K}_m(\theta) \\ \underline{F}(\theta) \in \mathcal{F}_m(\theta)}} \sum_{E \in \mathcal{U}_{E^*}} [\Delta\alpha_E(\theta)] \quad (2.31a)$$

$$\Delta\alpha_{\text{mod}}^{-* \text{pire}}(\theta) = \rho_{E^*} \Delta\alpha_{E^*}^-(\theta) - \max_{\substack{\mathbb{K}(\theta) \in \mathcal{K}_m(\theta) \\ \underline{F}(\theta) \in \mathcal{F}_m(\theta)}} \sum_{E \in \mathcal{U}_{E^*}} [\Delta\alpha_E(\theta)] \quad (2.31b)$$

Les inégalités (2.30) deviennent alors :

$$\Delta\alpha_{exp}^+(\theta) \geq \Delta\alpha_{mod}^{+*pire}(\theta) \quad (2.32a)$$

$$\Delta\alpha_{exp}^-(\theta) \geq \Delta\alpha_{mod}^{-*pire}(\theta) \quad (2.32b)$$

En pratique, les données expérimentales dont on dispose sont exploitées sous la forme des deux bornes  $\Delta\alpha_{exp}^-(P)$  et  $\Delta\alpha_{exp}^+(P)$  encadrant une certaine proportion  $P$  de valeurs expérimentales de la quantité  $\Delta\alpha_{exp}$  (voir la figure 2.6) sur la famille de structures réelles testées. Sous cette forme, les valeurs expérimentales sont alors confrontées aux méconnaissances effectives  $\Delta\alpha_{mod}^{-*pire}(P)$  et  $\Delta\alpha_{mod}^{+*pire}(P)$ , de telle sorte à être encadrées au plus près par elles, comme présenté en Figure 2.7.

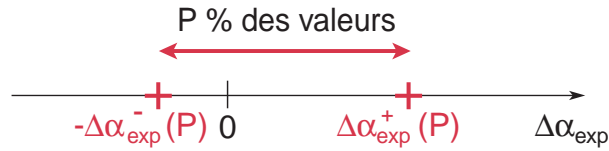


FIG. 2.6: Valeurs expérimentales à  $P\%$  de la quantité d'intérêt  $\Delta\alpha_{exp}$  utilisées pour la réduction des méconnaissances de base.

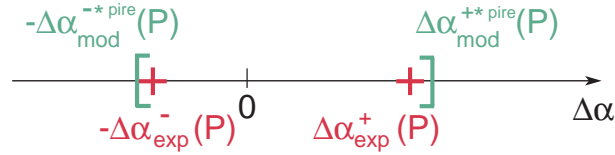


FIG. 2.7: Comparaison entre les méconnaissances effectives et les valeurs expérimentales à  $P\%$

Plus généralement, le problème de réduction des méconnaissances de base peut alors s'écrire comme un problème de minimisation :

$$\text{Min} \int_0^{\Delta\alpha_{mod}^{+*pire}(P)} p_{\Delta\alpha_{mod}^+}(\theta) \left[ \Delta\alpha_{mod}^{+*pire}(\theta) - \Delta\alpha_{exp}^+(P) \right] d\theta \quad (2.33)$$

avec la définition des bornes à  $P\%$ , notées  $\Delta\alpha_{mod}^{-*pire}(P)$  et  $\Delta\alpha_{mod}^{+*pire}(P)$  :

$$\int_0^{\Delta\alpha_{mod}^{+*pire}(P)} p_{\Delta\alpha_{mod}^+}(\theta) d\theta = P\% \quad (2.34a)$$

$$\int_0^{\Delta\alpha_{exp}^{+*pire}(P)} p_{\Delta\alpha_{exp}^+}(\theta) d\theta = P\% \quad (2.34b)$$

Cette minimisation s'effectue en diminuant les méconnaissances de base considérées  $m^*$ , et doit s'effectuer en assurant la positivité de l'intégrale de l'Equation 2.33.

Un point important dans ce processus réside dans le choix des mesures retenues, et celui de l'ordre dans lequel seront menées les réductions. La stratégie mise en pratique dans [16] consiste à sélectionner les mesures les plus pertinentes avec un critère basé sur les contributions des sous-structures aux énergies de déformation modales. On considère qu'un mode est une information pertinente pour la réduction de la méconnaissance sur une sous-structure donnée si la part de cette dernière dans l'énergie de déformation totale associée à la propagation des méconnaissances sur ce mode est supérieure à une certaine proportion de l'énergie totale. Autrement dit, pour une sous-structure  $E$  donnée, cela revient à considérer les modes  $\bar{\Phi}_i$  tels que :

$$\bar{e}_E(\bar{\Phi}_i) \geq k\bar{e}_{tot}(\bar{\Phi}_i) \quad (2.35)$$

où  $\bar{e}_{tot}$  est l'énergie de déformation totale pour ce mode  $\bar{\Phi}_i$ .  $k$  vaut généralement au minimum  $\frac{100}{N}\%$ , où  $N$  est le nombre de sous-structures. La démarche est alors la suivante :

- on classe, pour chaque sous-structure, les modes pertinents par ordre décroissant de leurs contributions relatives ;
- on commence par réduire la méconnaissance sur la sous-structure qui présente la plus forte contribution relative, en utilisant les valeurs expérimentales associées ; on considère alors que ce mode ne servira pas pour la réduction de la méconnaissance sur une autre sous-structure ;
- la réduction suivante concerne la sous-structure présentant la deuxième valeur la plus forte de contribution relative ; ceci permet de limiter au maximum lors de chaque réduction le poids de la prise en compte des cas défavorables sur les autres sous-structures ;
- on continue de la même façon avec les autres sous-structures ; on peut réaliser plusieurs fois ces réductions, car, par rapport à la première réduction sur la première sous-structure, le niveau des méconnaissances de base sur les autres aura diminué.

A la fin de cette étape de détermination des méconnaissances à partir de données expérimentales, le modèle permet de réaliser des prédictions sur des quantités d'intérêt différentes de celles utilisées dans le processus de réduction. De plus, les niveaux des méconnaissances de base déterminées sont des indicateurs de la qualité des modèles employés au niveau des sous-structures correspondantes.

### 3 Une représentation pertinente de la réalité

L'objectif de cette partie est de montrer que la théorie des méconnaissances est une représentation pertinente de la réalité. Pour cela, on comparera les résultats obtenus par



la formulation d'une dispersion de rigidité par la théorie des méconnaissances à celle obtenue par une description stochastique. On tentera alors d'établir une équivalence entre ces deux représentations.

### 3.1 Comparaison à une simulation de Monte Carlo

On cherche ici, sur l'exemple du support de satellites Sylda 5 (voir Figure 2.8), à encadrer la dispersion d'une certaine contrainte locale obtenue par simulation de Monte Carlo de structures aux rigidités aléatoires d'un modèle avec des méconnaissances sur la rigidité des éléments du Sylda. Le contexte industriel ainsi que le détail de sa composition seront détaillés dans le Chapitre 3, car nous nous y intéressons ici uniquement pour une comparaison rapide entre théorie des méconnaissances et simulation de Monte Carlo appliquées à une famille de structures. La structure est chargée en flexion, et l'on étudie la dispersion de contrainte maximale en statique.

Pour chaque structure simulée, on tire les rigidités de chacun des éléments dans un certain intervalle ( $\pm 6\%$  ici). Les résultats, en terme de bornes à 99% de probabilité de la contrainte locale  $\sigma_{zz,mod}$  du modèle avec méconnaissances, moyennée sur un élément où elle est maximale (en l'occurrence l'élément numéroté 1653, situé sur le haut de la partie cylindrique du Sylda), sont reportés dans le Tableau 2.1. On remarque que le modèle avec des méconnaissances de  $\pm 7\%$  sur la rigidité des éléments du Sylda5 enveloppe juste la dispersion de la contrainte  $\bar{\sigma}_{zz}^{1653}$  obtenue par simulation de Monte Carlo. C'est un moyen plus rapide d'accéder à cette dispersion.

Ainsi, la modélisation avec méconnaissances sur une rigidité représente ici une dispersion réelle du même ordre de grandeur que la valeur de méconnaissance utilisée.



FIG. 2.8: Le support de satellites Sylda 5.

**TAB. 2.1:** Comparaison entre dispersion de module d'Young et modèle avec méconnaissances sur la rigidité des éléments du support de satellites Sylda 5 (bornes à 99% de probabilité).

dispersion de module d'Young	bornes $[-\Delta\sigma_{zz\text{mod}}^-, \Delta\sigma_{zz\text{mod}}^+]$
$\pm 6\%$ sur chaque élément	$[-5, 4; 6, 1]\%$ de $\bar{\sigma}_{zz}^{1653}$
bornes $[-\bar{m}_E^-, \bar{m}_E^+]$	bornes $[-\Delta\sigma_{zz\text{mod}}^-, \Delta\sigma_{zz\text{mod}}^+]$
$\pm 7\%$ sur les éléments du Sylda5	$\pm 6, 1\%$ de $\bar{\sigma}_{zz}^{1653}$

## 3.2 Calcul analytique d'une méconnaissance

Afin d'établir une équivalence plus rigoureuse entre un modèle avec méconnaissances sur la rigidité et une dispersion de rigidités réelles, nous procédons ici à un calcul analytique de la méconnaissance correspondant à une rigidité stochastique. Nous étudions le cas d'une barre en traction, car ce calcul n'est possible à la main que sur une structure très simple.

### 3.2.1 Rigidité décrite par une variable aléatoire

#### Loi lognormale

Dans un premier temps, nous considérons que la rigidité de la barre est décrite par une variable aléatoire  $K(\theta)$ , c'est à dire que la rigidité est supposée constante spatialement le long de la barre. On fait l'hypothèse d'une loi de probabilité lognormale, car l'utilisation d'une telle loi permet d'éviter les occurrences négatives, sans sens physique dans notre cas, que permettraient une loi gaussienne. La fonction densité de probabilité d'une loi lognormale s'écrit :

$$f_K(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(\frac{-(\log(x) - \bar{M})^2}{2\sigma^2}\right) \quad \forall x \in [0; +\infty] \quad (2.36)$$

Dans cette expression, le paramètre  $\bar{M}$  permet de centrer la loi autour de la valeur moyenne  $\bar{K}$  de la distribution de rigidité, qui vérifie :

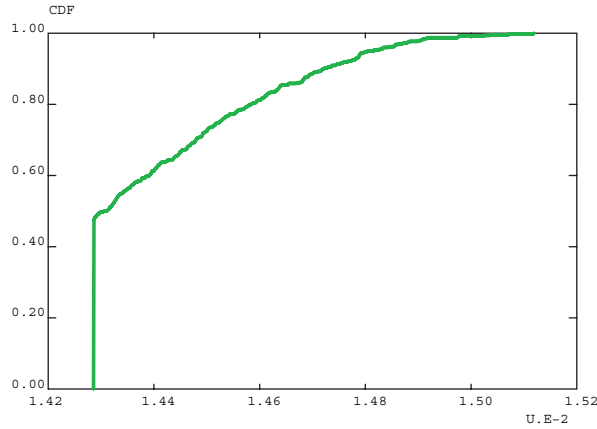
$$\bar{K} = \langle K(\theta) \rangle = \exp\left(\bar{M} + \frac{\sigma^2}{2}\right) \quad (2.37)$$

La variance vaut alors  $\bar{K}^2 (\exp(\sigma^2) - 1)$ .

Dans un problème uni-dimensionnel comme c'est le cas ici, la fonction densité de probabilité  $f_u(x)$  du déplacement  $U$  solution du problème  $KU = F$  se calcule analytiquement à l'aide d'un changement de variables (voir Chapitre 1) et vaut :

$$f_u(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \exp\left(\frac{-(\log(F/x) - \bar{M})^2}{2\sigma^2}\right) \quad \forall x \in [0; +\infty] \quad (2.38)$$

Parallèlement à cela, on a représenté sur la Figure 2.9 la fonction densité de probabilité cumulée (CDF) de la borne supérieure du déplacement issue de la propagation d'un modèle avec une méconnaissance de  $[-\bar{m}_E^-, \bar{m}_E^+] = \pm 6\%$ . De par la technicité des tirages de méconnaissances, la CDF vaut 0,5 pour une valeur de déplacement égale au déplacement  $\bar{U}$  solution du modèle déterministe, car la moitié des réalisations des tirages correspondent à des méconnaissances du type  $[-m_E^-; 0]$ .



**FIG. 2.9:** Fonction densité de probabilité cumulée de la borne supérieure du déplacement en bout de barre, modèle avec une méconnaissance sur la rigidité de la barre ( $[-\bar{m}_E^-, \bar{m}_E^+] = \pm 6\%$ ).

Le Tableau 2.2 permet de comparer les résultats de la description analytique du réel à la théorie des méconnaissances. La comparaison s'effectue pour des valeurs de dispersion équivalente. En effet, une modélisation de la dispersion réelle de rigidité pour  $\delta = 0.02$ , où le coefficient de variation  $\delta$  est tel que  $\sigma = \delta \bar{K}$  correspond à ce que 99% des valeurs de rigidité se situent dans un intervalle de  $\pm 6\% \bar{K}$  autour de la valeur moyenne  $\bar{K}$ ; on compare alors ceci à la propagation du modèle avec une méconnaissance de  $[-\bar{m}_E^-, \bar{m}_E^+] = \pm 6\%$  sur la rigidité de la barre. On s'aperçoit que la dispersion résultante sur les bornes à 99% du déplacement est quasiment identique ( $\pm 5.1\%$ ): l'emploi de méconnaissances permet donc de bien représenter une dispersion matérielle aléatoire de même valeur.

### Loi à support borné

Une autre représentation aléatoire que l'on peut employer pour modéliser une dispersion de rigidité consiste à considérer la loi suivante :

$$K(\theta) = \bar{K} (1 + \delta g(\xi(\theta))) \quad (2.39)$$

**TAB. 2.2:** Comparaison entre module d'Young aléatoire et modèle avec méconnaissance sur la rigidité de la barre (bornes à 99% de probabilité).

Dispersion lognormale de rigidité	bornes $[-\Delta U^-, \Delta U^+]$
$\delta = 0.02$	$\pm 5.1\%$ de $\bar{U}$
bornes $[-\bar{m}_E^-, \bar{m}_E^+]$	bornes $[-\Delta U^-, \Delta U^+]$
$\pm 6\%$	$\pm 5.0\%$ de $\bar{U}$

avec

$$g(x) = \frac{2 \arcsin(\operatorname{Erf}(\frac{x}{\sqrt{2}}))}{\sqrt{-8 + \pi^2}} \quad (2.40)$$

où  $\bar{K}$  est la moyenne de la rigidité  $K(\theta)$ ,  $\delta$  le coefficient de variation (autrement dit, l'écart-type divisé par la moyenne),  $\xi(\theta)$  une variable normale centrée réduite. La fonction  $g$  est une fonction non-linéaire telle que la densité de probabilité de  $K(\theta)$  soit à support borné ; Erf est la fonction d'erreur, définie par :

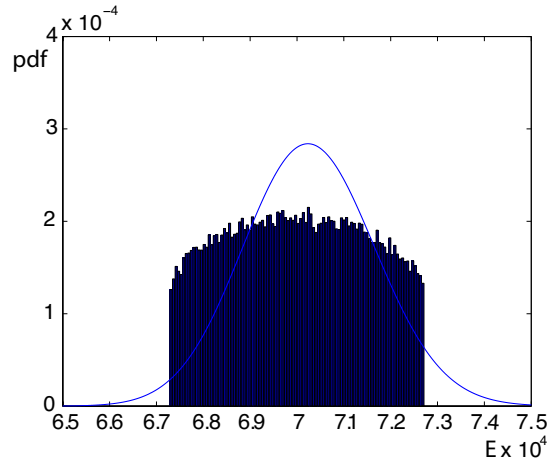
$$\operatorname{Erf}(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^x e^{-\xi^2} d\xi \quad \forall x \in [0; +\infty] \quad (2.41)$$

On notera que la distribution normale vaut  $\operatorname{Erf}(\frac{x}{\sqrt{2}})$ .

On peut avoir accès à une approximation de la densité de probabilité d'une telle loi de rigidité par la méthode de Monte Carlo. On peut ainsi comparer la densité de probabilité obtenue par tirage de Monte Carlo sur une telle loi à support borné à celle obtenue à partir d'une loi lognormale. Sur la Figure 2.10 sont représentées les densités de probabilité de module d'Young décrites par ces deux types de loi, pour une même valeur moyenne et un même paramètre  $\delta$ .

L'allure de la densité de probabilité de la loi à support borné est en forme de cloche, d'amplitude moins prononcée que sur une gaussienne, entre deux bornes connues, de valeurs  $\bar{K} \left(1 - \frac{2}{\sqrt{-8+\pi^2}}\delta\right)$  et  $\bar{K} \left(1 + \frac{2}{\sqrt{-8+\pi^2}}\delta\right)$ . L'avantage de l'emploi d'une loi à support borné plutôt que d'une loi lognormale pour décrire une dispersion de module d'Young tient dans son nom : grâce à l'emploi de la fonction arcsin, la dispersion est bornée par deux valeurs qui se calculent trivialement. De plus, par rapport à la loi uniforme, dont la densité de probabilité est constante entre deux bornes, cette loi a l'avantage de favoriser les occurrences proches de la valeur moyenne, à l'image de la loi normale.

Dans le Tableau 2.3, on compare les résultats obtenus en terme de dispersion du déplacement  $U$  selon que l'on choisit, pour la rigidité de la barre, cette loi à support borné ou une loi lognormale. On remarque que, pour un même coefficient de variation  $\delta$ , le choix de la loi à support borné aboutit à une plus faible dispersion de déplacement. La plus grande étendue dans le cas de la loi lognormale provient des queues de distribution. Enfin, de même que l'on a défini un modèle équivalent à un réel avec rigidité



**FIG. 2.10:** Densités de probabilité pour un module d'Young lognormal ( $\delta = 0.02$ , moyenne  $\bar{E} = 70000\text{MPa}$ ) -trait continu-, et pour un module d'Young suivant une loi à support borné ( $\delta = 0.02$ , moyenne  $\bar{E} = 70000\text{MPa}$ ) -100000 tirages de Monte Carlo-.

lognormale, il est possible de trouver un modèle avec méconnaissance sur la rigidité qui soit équivalent à une modélisation de dispersion de rigidité par la loi à support borné définie précédemment. Ainsi, une modélisation avec rigidité suivant une loi à support borné et une valeur de coefficient de variation de  $\delta = 0.025$  aboutit à la même dispersion du déplacement au bout de la barre qu'un modèle avec une méconnaissance de  $\pm 6\%$  sur la rigidité de la barre (voir Tableau 2.2).

**TAB. 2.3:** Comparaison des lois lognormale et à support borné pour la rigidité de la barre en traction (bornes à 99% de probabilité).

$K(\theta)$ à support borné	bornes $[-\Delta U^-, \Delta U^+]$
$\delta = 0.025$	$\pm 5.2\%$ de $\bar{U}$
$\delta = 0.02$	$\pm 4.2\%$ de $\bar{U}$
$K(\theta)$ lognormale	bornes $[-\Delta U^-, \Delta U^+]$
$\delta = 0.02$	$\pm 5.1\%$ de $\bar{U}$

### 3.2.2 Rigidité décrite par un champ stochastique

Une représentation plus réaliste d'une incertitude portant sur la rigidité peut être de la modéliser par un champ stochastique  $K(x, \theta)$  : elle varie alors aussi spatialement, plus ou moins selon la longueur de corrélation. Afin d'avoir une bonne approximation analytique du déplacement, on effectue un développement de Karhunen-Loeve de la rigidité, comme il est présenté dans l'ouvrage de référence [34]. Ce développement, rappelé dans

le chapitre 1, consiste en une décomposition en série de Fourier :

$$K(x, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} \xi_n(\theta) f_n(x) \quad (2.42)$$

Cette expression est basée sur une décomposition spectrale de la fonction de covariance  $C(x_1, x_2)$ , qui quantifie l'influence de la valeur de rigidité en un point d'abscisse  $x_1$  à celle en un point d'abscisse  $x_2$ . Cette décomposition, possible car la fonction est symétrique, positive, et bornée, s'écrit :

$$C(x_1, x_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n f_n(x_1) f_n(x_2) \quad (2.43)$$

où  $\lambda_n$  et  $f_n(x)$  sont respectivement les valeurs propres et fonctions propres de l'opérateur de covariance. Les  $\xi_i(\theta)$  sont quant à elles des variables aléatoires non corrélées, d'espérances nulles et d'écart types unitaires.

Dans notre cas, on suppose une fonction de covariance exponentielle, d'amplitude  $A$  :

$$C(x_1, x_2) = A^2 \exp\left(\frac{-|x_1 - x_2|}{L_c}\right) \quad (2.44)$$

La longueur de corrélation  $L_c$  contrôle l'importance de la corrélation entre deux points  $x_1$  et  $x_2$ . Pour une barre définie sur  $[-a; a]$ , les fonctions propres pour ce type de covariance sont (voir les calculs dans [36]), pour les  $n$  pairs :

$$f_n(x) = \frac{\cos(\omega_n x)}{\sqrt{a + \frac{\sin(2\omega_n a)}{2\omega_n}}} \quad \forall n \text{ pair} \quad (2.45)$$

où les pulsations  $\omega_n$  sont définies par l'équation :

$$\frac{1}{L_c} - \omega_n \tan(\omega_n a) = 0 \quad \forall n \text{ pair} \quad (2.46)$$

Pour les valeurs de  $n$  impaires, les fonctions  $f_n$  valent :

$$f_n(x) = \frac{\sin(\omega_n x)}{\sqrt{a - \frac{\sin(2\omega_n a)}{2\omega_n}}} \quad \forall n \text{ impair} \quad (2.47)$$

et les pulsations  $\omega_n$  vérifient :

$$\omega_n + \frac{1}{L_c} \tan(\omega_n a) = 0 \quad \forall n \text{ impair} \quad (2.48)$$

Les valeurs propres correspondantes sont (pour  $n$  pair ou impair) :

$$\lambda_n = \frac{\frac{2A^2}{L_c}}{(\omega_n)^2 + \left(\frac{1}{L_c}\right)^2} \quad \forall n \quad (2.49)$$

En pratique, la décomposition de Karhunen-Loeve est tronquée à l'ordre  $M$ , de telle sorte que l'expression approchée du champ stochastique de rigidité est :

$$K(x, \theta) = \bar{K}(x) + \sum_{n=1}^M \sqrt{\lambda_n} \xi_n(\theta) f_n(x) \quad (2.50)$$

En terme d'éléments finis, on associe à chaque champ de rigidité tronqué à l'ordre  $M$  une matrice de rigidité  $\mathbb{K}^{(M)}$ . L'équation d'équilibre s'écrit alors :

$$\sum_{n=0}^M \xi_n(\theta) \mathbb{K}^{(n)} \underline{U} = \underline{F} \quad (2.51)$$

Les matrices de rigidités  $\mathbb{K}^{(n)}$  dépendent des valeurs propres  $\lambda_n$  et fonctions propres  $f_n(x)$ , et de la discrétisation adoptée. L'équilibre peut alors s'écrire :

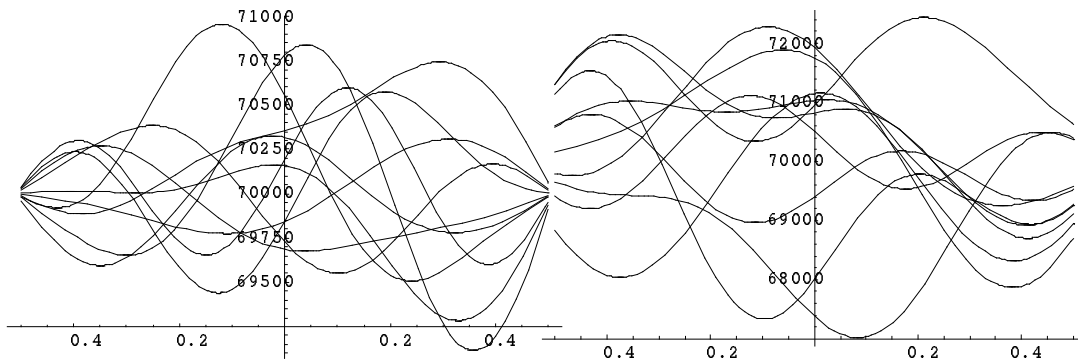
$$[\mathbb{I} + \sum_{n=1}^M \xi_n(\theta) \mathbb{Q}^{(n)}] \underline{U} = \underline{G} \quad (2.52)$$

avec  $\mathbb{Q}^{(n)} = (\mathbb{K}^{(0)})^{-1} \mathbb{K}^{(n)}$  et  $\underline{G} = (\mathbb{K}^{(0)})^{-1} \underline{F}$ . Après un développement de Neumann tronqué à l'ordre  $P$ , le déplacement solution s'écrit :

$$\underline{U} = \sum_{n=0}^P (-1)^n \left[ \sum_{k=1}^M \xi_k(\theta) \mathbb{Q}^{(k)} \right]^n \underline{G} \quad (2.53)$$

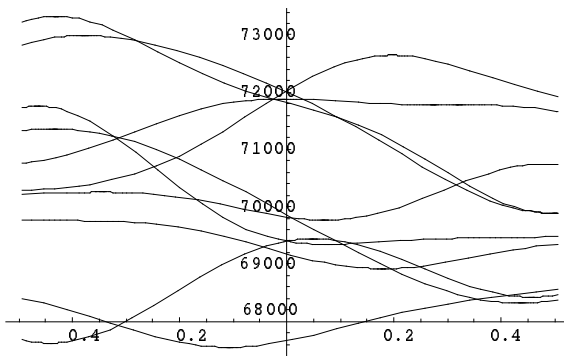
Ce sont les bornes à 99% de probabilité de cette expression que l'on va chercher à comparer à celles obtenues par propagation d'un modèle avec méconnaissances.

On a représenté sur chacune des Figures 2.11, 2.12, 2.13 et 2.14, 10 réalisations de champ de rigidité le long de la barre, pour différentes longueurs de corrélation  $L_c$ , pour une valeur moyenne  $\bar{K} = 70000$  MPa et pour un coefficient d'amplitude  $A = \frac{2\bar{K}}{100}$ . Avec cette amplitude, les valeurs prises par le champ de rigidité le long de la barre restent dans un intervalle de  $\pm 6\%$  autour de la valeur moyenne. Cependant, les valeurs extrêmes ne sont atteintes que ponctuellement sur certains échantillons, du fait de la description par champ stochastique. Aucune structure n'est ainsi, avec une telle description, aussi rigide (respectivement souple) qu'avec une rigidité constante de  $+6\% \bar{K}$  (respectivement  $-6\% \bar{K}$ ) comme cela est possible avec une description par variable aléatoire  $K(\theta)$ . Par ailleurs, il apparaît clairement sur ces figures que, plus la longueur de corrélation est petite, plus le champ est perturbé.

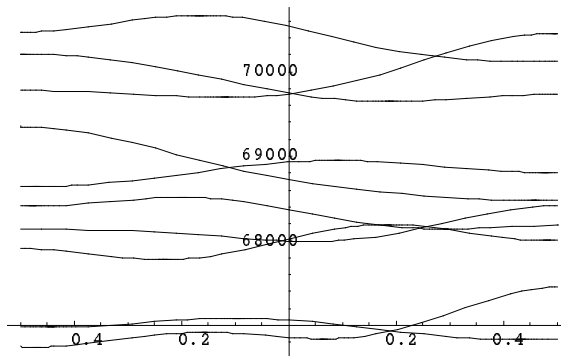


**FIG. 2.11:** 10 réalisations de  $K(x, \theta)$  le long de la barre pour  $Lc = \frac{L}{100}$

**FIG. 2.12:** 10 réalisations de  $K(x, \theta)$  le long de la barre pour  $Lc = \frac{L}{10}$



**FIG. 2.13:** 10 réalisations de  $K(x, \theta)$  le long de la barre pour  $Lc = L$



**FIG. 2.14:** 10 réalisations de  $K(x, \theta)$  le long de la barre pour  $Lc = 10L$



Dans les Tableaux 2.4 et 2.5, on donne les dispersions d'énergie de déformation de la barre pour différentes longueurs de corrélation (entre 0.01L et 10L), et pour des valeurs d'amplitude  $A$  différentes ( $\frac{2}{100}$  pour le Tableau 2.4 et  $\frac{3}{100}$  pour le Tableau 2.5). Les résultats sont donnés en pourcentage de l'énergie de déformation  $\bar{e}_D$  du modèle moyen. Comme on pouvait s'y attendre après la remarque effectuée précédemment, plus la longueur de corrélation  $L_c$  augmente, plus la dispersion d'énergie de déformation augmente.

**TAB. 2.4:** Dispersion d'énergie de déformation pour différentes longueurs de corrélation et  $A = \frac{2}{100}$  (bornes à 99% de probabilité)

Longueur de corrélation $L_c$	bornes $[-\Delta e_D^-, \Delta e_D^+]$
0.01 L	$\pm 0.028\%$ de $\bar{e}_D$
0.1 L	$\pm 0.7\%$ de $\bar{e}_D$
0.2 L	$\pm 1.5\%$ de $\bar{e}_D$
0.5 L	$\pm 2.9\%$ de $\bar{e}_D$
L	$\pm 3.9\%$ de $\bar{e}_D$
2 L	$\pm 4.6\%$ de $\bar{e}_D$
5 L	$\pm 5.0\%$ de $\bar{e}_D$
10 L	$\pm 5.2\%$ de $\bar{e}_D$

**TAB. 2.5:** Dispersion d'énergie de déformation pour différentes longueurs de corrélation et  $A = \frac{3}{100}$  (bornes à 99% de probabilité)

Longueur de corrélation $L_c$	bornes $[-\Delta e_D^-, \Delta e_D^+]$
0,01 L	$\pm 0,043\%$ de $\bar{e}_D$
0,1 L	$\pm 1,0\%$ de $\bar{e}_D$
0,2 L	$\pm 2,0\%$ de $\bar{e}_D$
0,5 L	$\pm 4,2\%$ de $\bar{e}_D$
L	$\pm 5,8\%$ de $\bar{e}_D$
2 L	$\pm 6,3\%$ de $\bar{e}_D$
5 L	$\pm 7,7\%$ de $\bar{e}_D$
10 L	$\pm 8,1\%$ de $\bar{e}_D$

Dans le Tableau 2.6, on présente les résultats de propagation d'un modèle avec une méconnaissance sur la rigidité de la barre en terme de dispersion d'énergie de déformation, pour des valeurs de méconnaissance entre 1 et 10%. Il est alors possible d'associer à chaque valeur de longueur de corrélation  $L_c$  la valeur de méconnaissance  $m_E$  sur la rigidité de la barre aboutissant à une même dispersion d'énergie de déformation : par exemple, un modèle avec une méconnaissance de  $\pm 6\%$  enveloppe la dispersion obtenue par un modèle comportant une rigidité décrite par un champ stochastique avec un rapport  $\frac{L_c}{L} = 5$  (dans le cas où  $A = \frac{2}{100}$ ). Le Tableau 2.7 rassemble ces associations. Pour des rapports

de longueur compris entre  $0.01L$  et  $10L$  (qui correspondent à deux types de distributions extrêmes, l'une très perturbée, l'autre très peu), la méconnaissance correspondante est comprise entre  $\pm 0.03\%$  et  $\pm 7\%$ . Ces valeurs sont d'un ordre de grandeur tout à fait raisonnable, ce qui permet d'affirmer que la modélisation avec des méconnaissances sur la rigidité est une bonne représentation de dispersions réelles.

**TAB. 2.6:** Modèle avec une méconnaissance sur la rigidité de la barre (bornes à 99% de probabilité).

bornes $[-\bar{m}_E^-, \bar{m}_E^+]$	bornes $[-\Delta e_D^-, \Delta e_D^+]$
$\pm 1\%$	$\pm 0,83\%$ de $\bar{e}_D$
$\pm 2\%$	$\pm 1,7\%$ de $\bar{e}_D$
$\pm 3\%$	$\pm 2,5\%$ de $\bar{e}_D$
$\pm 4\%$	$\pm 3,3\%$ de $\bar{e}_D$
$\pm 5\%$	$\pm 4,1\%$ de $\bar{e}_D$
$\pm 6\%$	$\pm 5,0\%$ de $\bar{e}_D$
$\pm 8\%$	$\pm 6,6\%$ de $\bar{e}_D$
$\pm 10\%$	$\pm 8,2\%$ de $\bar{e}_D$

**TAB. 2.7:** Modèle avec une méconnaissance  $m_E$  sur la rigidité de la barre et longueur de corrélation associée énergétiquement pour  $A = \frac{2}{100}$  (bornes à 99% de probabilité)

Longueur de corrélation $L_c$	Méconnaissance $m_E$ correspondante
0.01 L	$\pm 0.034\%$
0.1 L	$\pm 0,85\%$
0.2 L	$\pm 1,8\%$
0.5 L	$\pm 3,5\%$
L	$\pm 4,7\%$
2 L	$\pm 5,6\%$
5 L	$\pm 6,0\%$
10 L	$\pm 6,3\%$

Le Tableau 2.9 permet de vérifier que le résultat du modèle avec méconnaissances ne change pas en introduisant les méconnaissances à une échelle plus fine : le modèle avec deux méconnaissances de même amplitude (une sur chacune des rigidités de la barre décomposée en deux) aboutit à la même dispersion d'énergie de déformation.

### 3.2.3 Bilan

En comparaison par rapport aux méthodes décrites dans le chapitre précédent, la théorie des méconnaissances présente différents avantages :

**TAB. 2.8:** Modèle avec une méconnaissance  $m_E$  sur la rigidité de la barre et longueur de corrélation associée énergétiquement pour  $A = \frac{3}{100}$  (bornes à 99% de probabilité)

Longueur de corrélation $L_c$	Méconnaissance $m_E$ correspondante
0.01 L	$\pm 0,05\%$
0.1 L	$\pm 1,2\%$
0.2 L	$\pm 2,4\%$
0.5 L	$\pm 5,1\%$
L	$\pm 7,0\%$
2 L	$\pm 7,6\%$
5 L	$\pm 9,3\%$
10 L	$\pm 9,7\%$

**TAB. 2.9:** Modèle avec méconnaissances sur la rigidité de la barre décomposée en 2 éléments (bornes à 99% de probabilité)..

bornes $[-\bar{m}_{E_1}^-, \bar{m}_{E_1}^+]$	bornes $[-\bar{m}_{E_2}^-, \bar{m}_{E_2}^+]$	bornes $[-\Delta e_D^-, \Delta e_D^+]$
$\pm 10\%$	$\pm 10\%$	$\pm 8.2\%$ de $\bar{e}_D$

- elle s’applique aux systèmes complexes, car elle peut s’appliquer sur les modèles numériques ;
- elle ne surestime pas les valeurs de dispersion de quantité d’intérêt, contrairement à la méthode de propagation des intervalles déterministes ;
- elle ne nécessite pas la résolution d’un grand nombre de problèmes, comme pour la méthode de Monte Carlo, mais juste celle d’un seul calcul déterministe, dont la solution est post-traitée ;
- elle peut être définie pour de grandes variations de méconnaissances, contrairement à la méthode des petites perturbations ;
- son coût de calcul est particulièrement réduit, de par le fait que les incertitudes sont modélisées à l’échelle de sous-structure ; ainsi, comparée à une méthode basée sur la décomposition sur le chaos polynomial, elle nécessite l’emploi de moins de paramètres stochastiques.

# Chapitre 3

## Apports pour traiter des problèmes quasi-statiques

*Dans ce troisième chapitre, nous détaillons comment représenter les incertitudes portant sur les efforts à l'aide de la théorie des méconnaissances. Nous présentons ainsi comment définir et propager les méconnaissances de base, qu'elles portent sur les rigidités structurales ou sur les efforts appliqués, à des quantités d'intérêt (comme des contraintes ou déplacements locaux) extraites du déplacement solution pour des problèmes quasi-statiques.*

*Dans une deuxième partie, nous présentons une extension de la définition des méconnaissances à des paramètres anisotrope, en traitant en particulier le cas de l'élasticité anisotrope.*

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Modélisation des incertitudes portant sur les efforts</b> . . . . .	<b>75</b>
1.1	Problématique . . . . .	75
1.2	Modélisation adoptée . . . . .	76
<b>2</b>	<b>Méconnaissance effective sur une quantité d'intérêt</b> . . . . .	<b>78</b>
2.1	Principe de la propagation des méconnaissances . . . . .	78
2.2	Exemples . . . . .	82

2.3	Discussion sur l'échelle de description des méconnaissances de base sur la rigidité . . . . .	88
2.4	Exemple industriel de propagation de méconnaissances effectives .	89
2.5	Bilan . . . . .	93
<b>3</b>	<b>Modélisation d'incertitudes anisotropes . . . . .</b>	<b>94</b>
3.1	Contexte . . . . .	94
3.2	Modélisation des méconnaissances anisotropes . . . . .	94
3.3	Cas d'une sous-structure orthotrope bi-dimensionnelle . . . . .	95
3.4	Exemple : structure rectangulaire orthotrope bi-dimensionnelle . . .	96
3.5	Bilan . . . . .	98
<b>4</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>99</b>

---

# 1 Modélisation des incertitudes portant sur les efforts

## 1.1 Problématique

Nous nous intéressons ici à la modélisation des méconnaissances portant sur les efforts appliqués à une structure étudiée. Comparées aux dispersions portant sur les rigidités, celles concernant les distributions d'efforts sur une structure sont moins bien cernées, et seront a priori plus importantes, car de nombreux contrôles et essais portant sur la rigidité sont possibles en phases de fabrication et d'industrialisation des pièces structurales. De manière générale, les distributions d'efforts sont très mal connues, car l'on possède souvent peu d'informations les concernant.

Prenons l'exemple des efforts aérodynamiques appliqués à un avion ou une navette spatiale : les recherches portant sur la compréhension et le traitement mécanique des mesures effectuées en vol ont débutées il y a peu d'années (voir [74]). Les données issues d'essais en vol constituent une source d'informations extrêmement riches dont il doit être possible de tirer des enseignements majeurs. En plus de la difficulté de cerner leurs valeurs, on imagine aisément que les efforts aérodynamiques varient considérablement, que ce soit lors d'un même vol ou entre deux vols d'une même structure ou d'un même type de structure, mais varient aussi par leur temps d'apparition. Ces variations d'efforts, qu'elles portent sur les amplitudes ou les directions, sont pourtant prépondérantes dans le dimensionnement des structures aéronautiques.

Concernant les types de modélisations possibles de ces incertitudes, différentes perspectives s'ouvrent à nous. La première qui peut venir à l'esprit serait d'adopter une modélisation paramétrique, en introduisant dans le modèle autant de variables aléatoires que l'on introduirait d'efforts dans une modélisation déterministe de la structure étudiée. On pourrait aussi plutôt employer des champs stochastiques pour modéliser plus finement des incertitudes portant sur des distributions d'efforts appliqués sur une zone de grande taille. Se posent alors les questions de savoir quelle loi de probabilité introduire sur les variables aléatoires utilisées, et comment paramétrer les champs stochastiques employés. À la vue des informations généralement disponibles, il paraît difficile de faire des hypothèses les concernant. En outre, si l'on souhaite introduire dans la modélisation le fait que la direction de chaque distribution d'efforts revêt elle aussi un caractère aléatoire, il faudrait paramétrer ces directions avec des paramètres stochastiques, ce qui en multiplierait d'autant le nombre, et conduirait à des problèmes à très grands nombres de degrés de liberté stochastiques. Et, de la même manière, étant donné le peu d'informations disponibles généralement, il paraît compliqué de stipuler a priori une certaine distribution de ces directions.

Étant données les limites d'une approche purement paramétrique, notre choix s'est donc porté vers une modélisation à une échelle plus globale des incertitudes portant sur les efforts, ce qui, de plus, est en accord avec les travaux effectués sur la définition

des méconnaissances de base sur les rigidités structurales (c.f. [16]). Cette approche globale est aussi bien valable pour modéliser les incertitudes portant sur l'amplitude des distributions d'efforts que sur leur direction, et nous amène à définir un couple de méconnaissances de base sur l'amplitude d'une distribution d'efforts, et une méconnaissance de base sur sa direction. Pour le moment, la propagation de ces méconnaissances de base définies au paragraphe 1.2 n'a été effectuée qu'en quasi-statique.

## 1.2 Modélisation adoptée

### Définition des méconnaissances de base sur les forces appliquées

La définition des méconnaissances de base sur les efforts appliqués (plus généralement sur la description de l'environnement) s'inspire de celle des méconnaissances de base sur les rigidités structurales. Soit une distribution globale d'efforts  $\underline{F}$  décrite par :

$$\underline{F} = \sum_{E \in \mathbb{E}} \underline{F}_E \quad (3.1)$$

où  $\underline{F}_E$  est la restriction de  $\underline{F}$  sur la sous-structure  $E$ , ou sur la frontière  $E$ . On note  $\mathbb{E}$  l'ensemble de ces sous-structures. De plus, on décompose les distributions d'efforts  $\underline{F}_E$  comme suit :

$$\underline{F}_E = \lambda_E \underline{Z}_E \quad \forall E \in \mathbb{E} \quad (3.2)$$

en faisant apparaître  $\lambda_E$ , l'amplitude, et  $\underline{Z}_E$ , la direction de la distribution  $\underline{F}_E$ , normalisée comme suit :

$$\underline{Z}_E^T \underline{Z}_E = 1 \quad (3.3)$$

On introduit alors deux méconnaissances scalaires pour l'amplitude ( $m_{\lambda_E}^- (\theta)$  et  $m_{\lambda_E}^+ (\theta)$ ), et une pour la direction ( $m_{Z_E} (\theta)$ ) de l'effort  $\underline{F}_E$ . La méconnaissance de base associée à la modélisation des efforts est alors un triplet (généralement stochastique, mais qui peut prendre des valeurs fixes, comme dans le cas des rigidités) pour chaque sous-structure  $E \in \mathbb{E}$ . Cet opérateur de méconnaissances  $\underline{m}_{F_E} (\theta) = (m_{\lambda_E}^- (\theta), m_{\lambda_E}^+ (\theta), m_{Z_E} (\theta))$  est défini par les inégalités suivantes :

$$-m_{\lambda_E}^- (\theta) \bar{\lambda}_E \leq \lambda_E (\theta) - \bar{\lambda}_E \leq m_{\lambda_E}^+ (\theta) \bar{\lambda}_E \quad \forall E \in \mathbb{E} \quad (3.4)$$

$$[\bar{e}_E (\underline{Z}_E (\theta) - \bar{\underline{Z}}_E)]^{\frac{1}{2}} \leq m_{Z_E} (\theta)^2 [\bar{e}_E (\bar{\underline{Z}}_E)]^{\frac{1}{2}} \quad \forall E \in \mathbb{E} \quad (3.5)$$

La distribution d'efforts sur la structure considérée  $\underline{F} (\theta)$ , inconnue et que l'on cherche à envelopper, est décrite par  $(\lambda_E (\theta), \underline{Z}_E (\theta))_{E \in \mathbb{E}}$ , et  $\bar{\underline{F}} = \sum (\bar{\lambda}_E \bar{\underline{Z}}_E)$  est la distribution d'efforts du modèle EF de l'environnement, ici considéré déterministe.

On ajoute à ce modèle déterministe la description par l'opérateur des méconnaissances  $\underline{m}_F(\theta) = (m_{\lambda_E}^-(\theta), m_{\lambda_E}^+(\theta), m_{Z_E}(\theta))_E$  : comme pour la définition des méconnaissances sur les rigidités, les incertitudes sont quantifiées à l'échelle de sous-structures. De même, la méconnaissance en elle-même, pour une sous-structure réelle donnée, est une quantité évoluant quelque part à l'intérieur d'un intervalle :  $[-m_{\lambda_E}^-(\theta); m_{\lambda_E}^+(\theta)]$  pour la méconnaissance sur l'amplitude des efforts sur cette sous-structure,  $[0; m_{Z_E}(\theta)]$  pour celle sur la direction de cette distribution d'efforts.

Le choix de ce type de description tient compte du fait que, généralement, une bonne part de la connaissance de la structure étudiée provient d'expériences : par la modélisation de manière séparée des méconnaissances sur l'amplitude et de celles sur la direction des efforts appliqués, il est possible de modéliser séparément les incertitudes présentes sur le positionnement du capteur et celles provenant de la marge d'erreur des mesures en elle-même.

L'emploi de telles méconnaissances permet de globaliser les incertitudes à l'échelle de sous-structures, qui, pour une même distribution globale d'efforts, peuvent être définies de façons différentes selon le type de méconnaissance. Le choix de globaliser les incertitudes provient du fait que l'on ne dispose pratiquement jamais de toute l'information nécessaire à une modélisation microscopique des incertitudes. Dans notre cas, l'information stochastique utilisée est certes moindre, mais bien souvent suffisante dans les problèmes industriels.

On définit ainsi l'ensemble des sous-structures sur lesquelles portent des méconnaissances sur l'amplitude des efforts, noté  $\mathbb{E}_\lambda$ , et  $\mathbb{E}_Z$  l'ensemble des sous-structures sur lesquelles portent des méconnaissances sur la direction des efforts.

### **Loi de probabilité pour les méconnaissances de base sur les forces appliquées**

La nature des lois de probabilité des méconnaissances doit faire l'objet d'un choix de la part du modélisateur. Cependant, le manque d'informations présent en général sur les efforts conduit très fréquemment à choisir une description floue des méconnaissances de base sur les distributions d'efforts en utilisant une loi de probabilité uniforme pour définir les bornes,  $[-m_{\lambda_E}^-(\theta); m_{\lambda_E}^+(\theta)]$  pour la description de l'incertitude portant sur l'amplitude, ou  $m_{Z_E}(\theta)$  pour celle portant sur la direction.

Ce sont alors les bornes des lois de probabilité uniformes utilisées qui définissent l'opérateur de la méconnaissance de base sur les efforts appliqués à la sous-structure  $E$  :  $\underline{\bar{m}}_{F_E} = (\bar{m}_{\lambda_E}^-, \bar{m}_{\lambda_E}^+, \bar{m}_{Z_E})$ .



## 2 Méconnaissance effective sur une quantité d'intérêt

### 2.1 Principe de la propagation des méconnaissances

Comme on a pu le voir dans le Chapitre 2, les travaux [15, 16] ont permis d'évaluer les dispersions de certaines quantités d'intérêt en dynamique des structures par le calcul des méconnaissances effectives sur ces quantités, qui peuvent être des pulsations propres, la valeur en un degré de liberté d'un mode propre, ou la projection d'un mode propre selon une direction donnée.

Afin d'étendre la portée des résultats de propagation de la théorie des méconnaissances, on s'attache, dans ce paragraphe, à définir un cadre permettant de propager des méconnaissances sur des quantités d'intérêt comme des contraintes ou des déplacements locaux, pour des études en statique.

Soit  $\underline{x}$  la solution de l'équation d'équilibre statique :

$$\mathbb{K}\underline{x} = \underline{F} \quad (3.6)$$

où  $\mathbb{K}$  est la matrice de rigidité et  $\underline{F}$  la matrice des efforts généralisés. Soit  $\underline{m}$  l'ensemble de toutes les méconnaissances de base, associées à la rigidité et aux efforts appliqués. À chaque valeur de  $\underline{m}$  on peut associer des rigidités et efforts vérifiant les équations (2.5), (3.4) et (3.5). Les ensembles correspondants  $\mathcal{X}_m$  et  $\mathcal{F}_m$  sont paramétrés par  $\underline{m}$ .

Chaque type de méconnaissance possède sa propre sous-structuration : l'ensemble des sous-structures sur lesquelles portent des méconnaissances sur l'amplitude des efforts est noté  $\mathbb{E}_\lambda$ . L'ensemble des sous-structures sur lesquelles portent des méconnaissances sur la direction des efforts est noté  $\mathbb{E}_Z$ . L'ensemble des sous-structures sur lesquelles portent des méconnaissances sur la rigidité est noté  $\mathbb{E}_E$ . Les sous-structures associées peuvent en effet être définies de façons différentes selon le type de méconnaissance.

Comme présenté de manière générale dans le Chapitre 2, dans cette nouvelle approche de modélisation de familles de structures, on cherche une enveloppe de la réponse de la structure étudiée. Cette enveloppe est associée à l'équation (3.6), où  $\mathbb{K}(\theta) \in \mathcal{X}_{m(\theta)}$  et  $\underline{F}(\theta) \in \mathcal{F}_{m(\theta)}$ . Pour une quantité d'intérêt  $\alpha(\theta)$  (de valeur EF  $\bar{\alpha}$ ), par exemple une contrainte locale, on cherche à calculer la méconnaissance effective par l'encadrement suivant :

$$-\Delta\alpha^-(\theta) \leq \alpha(\theta) - \bar{\alpha} \leq \Delta\alpha^+(\theta) \quad (3.7)$$

De façon générale, la valeur EF de la quantité d'intérêt est une fonction de la rigidité EF  $\bar{\mathbb{K}}$  et des efforts EF  $\bar{\underline{F}}$  :  $\bar{\alpha} = \mathbb{L}_{EF}(\bar{\mathbb{K}}, \bar{\underline{F}})$ . La valeur réelle se trouve dans l'image par l'opérateur  $\mathbb{L}_{EF}$  de la rigidité  $\mathbb{K}(\theta)$  et des efforts  $\underline{F}(\theta)$  aléatoires. Les bornes de

méconnaissances effective peuvent donc s'exprimer comme suit :

$$\Delta\alpha^+(\theta) = \sup_{\substack{\mathbb{K}(\theta) \in \mathcal{X}_m(\theta) \\ \underline{F}(\theta) \in \mathcal{F}_m(\theta)}} [\mathbb{L}_{EF}(\mathbb{K}, \underline{F}) - \bar{\alpha}] \quad (3.8a)$$

$$\Delta\alpha^-(\theta) = - \inf_{\substack{\mathbb{K}(\theta) \in \mathcal{X}_m(\theta) \\ \underline{F}(\theta) \in \mathcal{F}_m(\theta)}} [\mathbb{L}_{EF}(\mathbb{K}, \underline{F}) - \bar{\alpha}] \quad (3.8b)$$

Plus particulièrement, dans le cas de l'élasticité linéaire, et si les méconnaissances de base sont suffisamment petites, en utilisant une technique d'extraction, la quantité  $\alpha$  s'exprime facilement :

$$\alpha = \underline{b}^T \underline{x} = (\mathbb{K}^{-1} \underline{b})^T \underline{F} \quad (3.9)$$

où  $\underline{b}$  est l'opérateur d'extraction. L'écart à la quantité EF  $\bar{\alpha}$  vaut alors :

$$\Delta\alpha = (\mathbb{K}^{-1} \underline{b})^T \Delta \underline{F} - \underline{F}^T \mathbb{K}^{-1} (\Delta \mathbb{K}) \mathbb{K}^{-1} \underline{b} \quad (3.10)$$

et, après propagation des méconnaissances de base en appliquant les inégalités de définition des différentes méconnaissances de base, ses bornes supérieure et inférieure s'expriment par :

$$\begin{aligned} \Delta\alpha^+(\theta) = & \sum_{\substack{E \in \mathbb{E}_\lambda \\ E \in \mathbb{E}_Z \\ E \in \mathbb{E}_E}} \left[ \frac{1}{2} (m_E^+(\theta) + m_E^-(\theta)) (\langle \langle \bar{\underline{x}}, \bar{\underline{x}} \rangle \rangle_E)^{\frac{1}{2}} (\langle \langle \underline{x}_b, \underline{x}_b \rangle \rangle_E)^{\frac{1}{2}} \right. \\ & + \frac{1}{2} (m_E^+(\theta) - m_E^-(\theta)) \langle \langle \bar{\underline{x}}, -\underline{x}_b \rangle \rangle_E \\ & \left. + m_{\lambda_E}^+(\theta) \underline{x}_{bE}^T \underline{F}_E + m_{Z_E}(\theta)^2 [\bar{e}_E(\underline{x}_{bE})]^{\frac{1}{2}} \bar{\lambda}_E \right] \quad (3.11a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\Delta\alpha^-(\theta) = & \sum_{\substack{E \in \mathbb{E}_\lambda \\ E \in \mathbb{E}_Z \\ E \in \mathbb{E}_E}} \left[ -\frac{1}{2} (m_E^+(\theta) + m_E^-(\theta)) (\langle \langle \bar{\underline{x}}, \bar{\underline{x}} \rangle \rangle_E)^{\frac{1}{2}} (\langle \langle \underline{x}_b, \underline{x}_b \rangle \rangle_E)^{\frac{1}{2}} \right. \\ & + \frac{1}{2} (m_E^+(\theta) - m_E^-(\theta)) \langle \langle \bar{\underline{x}}, -\underline{x}_b \rangle \rangle_E \\ & \left. - m_{\lambda_E}^-(\theta) \underline{x}_{bE}^T \underline{F}_E - m_{Z_E}(\theta)^2 [\bar{e}_E(\underline{x}_{bE})]^{\frac{1}{2}} \bar{\lambda}_E \right] \quad (3.11b) \end{aligned}$$

avec

$$\underline{x}_b = \mathbb{K}^{-1} \underline{b} \quad (3.12)$$

Dans ces expressions,  $\bar{\underline{x}}$  est la solution du problème EF avec  $(\bar{\mathbb{K}}, \bar{\underline{F}})$ . Le produit scalaire noté  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  tient compte de la rigidité de la structure réelle étudiée et vaut :

$$\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = \underline{x}^T \mathbb{K} \underline{y} \quad (3.13a)$$

$$\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle_E = \underline{x}^T \mathbb{K}_E \underline{y} \quad (3.13b)$$

Le second produit scalaire, noté  $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ , tient compte de la rigidité EF déterministe :

$$\langle\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle\rangle = \underline{x}^T \overline{\mathbb{K}} \underline{y} \quad (3.14a)$$

$$\langle\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle\rangle_E = \underline{x}^T \overline{\mathbb{K}}_E \underline{y} \quad (3.14b)$$

Les équations (3.11) donnent le résultat de propagation du modèle complet avec méconnaissances sur la rigidités des sous-structures  $E$  ( $m_E^-(\theta); m_E^+(\theta)$ ), sur l'amplitude des distributions d'effort sur les sous-structures ( $m_{\lambda_E}^-(\theta); m_{\lambda_E}^+(\theta)$ ), et sur la direction de ces efforts  $m_{Z_E}(\theta)$ . Les méconnaissances effectives  $\Delta\alpha^-(P)$  et  $\Delta\alpha^+(P)$ , issues de la propagation de ce modèle, sont alors les bornes à  $P\%$  de probabilité des lois  $\Delta\alpha^-(\theta)$  et  $\Delta\alpha^+(\theta)$ .

Nous allons maintenant détailler le calcul de propagation des méconnaissances. Comme on considère des valeurs de méconnaissances petites, les équations (3.11) sont obtenues par linéarisation, et il est donc possible d'étudier la propagation de chaque type de méconnaissances de façon séparée.

#### Détail de la propagation des méconnaissances sur les rigidités

Nous considérons ici uniquement des méconnaissances sur les rigidités structurales. L'équation (3.10) se simplifie donc :

$$\Delta\alpha_{\text{mod}} = -\overline{\underline{F}}^T \mathbb{K}^{-1} (\Delta\mathbb{K}) \mathbb{K}^{-1} \underline{b} \quad (3.15a)$$

$$= -\overline{\underline{x}}^T (\Delta\mathbb{K}) \underline{x}_b \quad (3.15b)$$

Cette expression peut être vue comme la différence entre les deux produits scalaires suivants :

$$\Delta\alpha_{\text{mod}} = \langle \overline{\underline{x}}, -\underline{x}_b \rangle - \langle\langle \overline{\underline{x}}, -\underline{x}_b \rangle\rangle \quad (3.16a)$$

$$= \sum_{E \in \mathbb{E}_E} \langle \overline{\underline{x}}, -\underline{x}_b \rangle_E - \langle\langle \overline{\underline{x}}, -\underline{x}_b \rangle\rangle_E \quad (3.16b)$$

où les produits scalaires  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  et  $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$  sont ceux définis à l'équation (3.14).

Afin d'obtenir la meilleure majoration possible, on introduit un scalaire  $l$  tel que :

$$\langle \overline{\underline{x}}, -\underline{x}_b \rangle_E = \frac{1}{4} (\langle \overline{\underline{x}} - l\underline{x}_b, \overline{\underline{x}} - l\underline{x}_b \rangle_E - \langle \overline{\underline{x}} + l\underline{x}_b, \overline{\underline{x}} + l\underline{x}_b \rangle_E) \quad (3.17)$$

En utilisant alors la définition des méconnaissances de base sur les rigidité structurales (Equation (2.5)), on obtient, pour la majoration de ce produit scalaire :

$$\begin{aligned} \langle \overline{\underline{x}}, -\underline{x}_b \rangle_E &\leq \frac{1}{4} [(1 + m_E^+(\theta)) \langle\langle \overline{\underline{x}} - l\underline{x}_b, \overline{\underline{x}} - l\underline{x}_b \rangle\rangle_E \\ &\quad - (1 - m_E^-(\theta)) \langle\langle \overline{\underline{x}} + l\underline{x}_b, \overline{\underline{x}} + l\underline{x}_b \rangle\rangle_E] \end{aligned} \quad (3.18a)$$

En se référant à l'équation (3.16), on obtient la majoration suivante de la quantité d'intérêt  $\Delta\alpha$  :

$$\begin{aligned} \Delta\alpha_{\text{mod}} = \sum_{E \in \mathbb{E}_E} (m_E^+(\theta) + m_E^-(\theta)) \frac{\langle\langle \bar{\underline{x}}, \bar{\underline{x}} \rangle\rangle_E + l^2 \langle\langle \underline{x}_b, \underline{x}_b \rangle\rangle_E}{4l} \\ + \frac{1}{2}(m_E^+(\theta) - m_E^-(\theta)) \langle\langle \bar{\underline{x}}, -\underline{x}_b \rangle\rangle_E \end{aligned} \quad (3.19a)$$

Les bornes optimales sont alors choisies de telle sorte à minimiser cette majoration par rapport au paramètre  $l$ , minimum qui est obtenu pour la valeur suivante :

$$l^2 = \frac{\langle\langle \bar{\underline{x}}, \bar{\underline{x}} \rangle\rangle_E}{\langle\langle \underline{x}_b, \underline{x}_b \rangle\rangle_E} \quad (3.20)$$

De même, pour obtenir la borne inférieure de la quantité de l'équation (3.17), il s'agit de maximiser par rapport à  $l$  la minoration effectuée, de façon à obtenir l'encadrement le plus étroit possible. Tout cela permet d'aboutir à l'encadrement de la quantité d'intérêt par les bornes  $\Delta\alpha_{\text{mod}}^+$  et  $\Delta\alpha_{\text{mod}}^-$  du modèle avec méconnaissances :

$$\begin{aligned} \Delta\alpha_{\text{mod}}^+(\theta) = \sum_{E \in \mathbb{E}_E} \left[ \frac{1}{2}(m_E^+(\theta) + m_E^-(\theta)) (\langle\langle \bar{\underline{x}}, \bar{\underline{x}} \rangle\rangle_E)^{\frac{1}{2}} (\langle\langle \underline{x}_b, \underline{x}_b \rangle\rangle_E)^{\frac{1}{2}} \right. \\ \left. + \frac{1}{2}(m_E^+(\theta) - m_E^-(\theta)) \langle\langle \bar{\underline{x}}, -\underline{x}_b \rangle\rangle_E \right] \end{aligned} \quad (3.21a)$$

$$\begin{aligned} -\Delta\alpha_{\text{mod}}^-(\theta) = \sum_{E \in \mathbb{E}_E} \left[ -\frac{1}{2}(m_E^+(\theta) + m_E^-(\theta)) (\langle\langle \bar{\underline{x}}, \bar{\underline{x}} \rangle\rangle_E)^{\frac{1}{2}} (\langle\langle \underline{x}_b, \underline{x}_b \rangle\rangle_E)^{\frac{1}{2}} \right. \\ \left. + \frac{1}{2}(m_E^+(\theta) - m_E^-(\theta)) \langle\langle \bar{\underline{x}}, -\underline{x}_b \rangle\rangle_E \right] \end{aligned} \quad (3.21b)$$

### Détail de la propagation des méconnaissances sur les efforts appliqués

Considérons maintenant les méconnaissances sur les amplitudes et directions des efforts appliqués à la structure étudiée. L'équation (3.10) s'exprime alors, au premier ordre :

$$\Delta\alpha_{\text{mod}} = (\mathbb{K}^{-1}\underline{b})^T \Delta F \quad (3.22a)$$

$$= \underline{x}_b^T \left( \bar{\underline{Z}}\Delta\lambda + \bar{\lambda}\Delta\underline{Z} \right) \quad (3.22b)$$

On obtient facilement un encadrement de la quantité  $\underline{x}_b^T \bar{\underline{Z}}\Delta\lambda$  intervenant dans l'équation (2.1) en appliquant la définition des méconnaissances sur l'amplitude des efforts (équation (3.4)) : pour toute sous-structure  $E \in \mathbb{E}_\lambda$ ,

$$-m_{\lambda_E}^-(\theta) \bar{\lambda}_E \underline{x}_{b_E}^T \bar{\underline{Z}}_E \leq \underline{x}_{b_E}^T \bar{\underline{Z}}_E \Delta\lambda \leq m_{\lambda_E}^+(\theta) \bar{\lambda}_E \underline{x}_{b_E}^T \bar{\underline{Z}}_E \quad (3.23)$$

Pour l'encadrement de la quantité  $\underline{x}_b^T \bar{\lambda}\Delta\underline{Z}$  intervenant dans l'équation (2.1), on utilise la majoration suivante, faisant intervenir, pour toute sous-structure  $E \in \mathbb{E}_Z$ , les énergies

de déformations  $e_E(x_{b_E})$  et  $e_E(\underline{Z})$  (on rappelle que la direction  $\underline{Z}_E$  est normalisée par  $\bar{e}_E(\underline{Z}_E) = 1$ ) :

$$|x_{b_E}^T \bar{\lambda}_E \Delta \underline{Z}_E| \leq \bar{\lambda}_E [e_E(x_{b_E})]^{\frac{1}{2}} [e_E(\underline{Z})]^{\frac{1}{2}} \quad (3.24)$$

On peut alors, en utilisant la définition des méconnaissances de base sur la direction des efforts (équation (3.5)), exprimer la majoration issue du modèle avec méconnaissances pour ce terme :

$$|x_{b_E}^T \bar{\lambda}_E \Delta \underline{Z}_E| \leq m_{Z_E}(\theta) \bar{\lambda}_E [e_E(x_{b_E})]^{\frac{1}{2}} [\bar{e}_E(\underline{Z}_E)]^{\frac{1}{2}} \quad (3.25)$$

En regroupant les deux encadrements effectués ici, on obtient les bornes  $\Delta\alpha_{\text{mod}}^+$  et  $\Delta\alpha_{\text{mod}}^-$  du modèle avec méconnaissances sur les efforts appliqués :

$$\begin{aligned} \Delta\alpha_{\text{mod}}^+(\theta) = & \sum_{\substack{E \in \mathbb{E}_\lambda \\ E \in \mathbb{E}_Z}} [m_{\lambda_E}^+(\theta) \bar{\lambda}_E x_{b_E}^T \underline{Z}_E \\ & + m_{Z_E}(\theta) \bar{\lambda}_E [e_E(x_{b_E})]^{\frac{1}{2}} [\bar{e}_E(\underline{Z}_E)]^{\frac{1}{2}}] \end{aligned} \quad (3.26a)$$

$$\begin{aligned} -\Delta\alpha_{\text{mod}}^-(\theta) = & \sum_{\substack{E \in \mathbb{E}_\lambda \\ E \in \mathbb{E}_Z}} [-m_{\lambda_E}^-(\theta) \bar{\lambda}_E x_{b_E}^T \underline{Z}_E \\ & - m_{Z_E}(\theta) \bar{\lambda}_E [e_E(x_{b_E})]^{\frac{1}{2}} [\bar{e}_E(\underline{Z}_E)]^{\frac{1}{2}}] \end{aligned} \quad (3.26b)$$

De manière générale, les méconnaissances portant sur les efforts sont définies à l'échelle de la surface d'application ou de sous surfaces d'application si les efforts sont appliqués sur des parties de taille conséquente par rapport à la structure. Ainsi, la modélisation choisie permet de globaliser les dispersions d'efforts locaux.

## 2.2 Exemples

Nous allons détailler dans ce paragraphe une première application des notions introduites dans ce chapitre par deux exemples académiques. Le traitement numérique de ces exemples est effectué avec le logiciel CAST3M, avec lequel des procédures ont été développées pour permettre l'application des différents développements de la théorie des méconnaissances.

### 2.2.1 Structure bi-dimensionnelle trouée

On considère ici une structure bi-dimensionnelle trouée en son centre et encastrée sur un bord. Comme on peut le voir en Figure 3.1, du côté opposé à l'encastrement, on applique à cette structure une distribution d'efforts notée  $\underline{F} = \lambda \underline{Z}$  avec ici  $\underline{Z} = \underline{y}$ . Dans la modélisation, on souhaite prendre en compte des incertitudes de faible valeur présentes d'une part sur la rigidité de la structure et, d'autre part, sur la distribution d'efforts.

Dans le modèle déterministe auquel sera associée une description des méconnaissances, le matériau considéré pour la plaque est un aluminium, d'un module d'Young de valeur de  $70\,000\text{MPa}$ , l'effort global appliqué est pris égal à  $1\text{kN}$ . La structure est discrétisée en 28 éléments finis.

On introduit, lors la modélisation, les méconnaissances suivantes :

- une méconnaissances  $(m_Z^-, m_Z^+)$  sur la direction de cette distribution d'efforts - (comme la discrétisation est assez grossière, on ne définit qu'une seule sous-structure d'application des efforts) ;
- un couple de méconnaissances  $(m_\lambda^-, m_\lambda^+)$  sur l'amplitude de cette distribution d'efforts (on ne définit qu'une seule sous-structure d'application des efforts) ;
- d'autres méconnaissances, notées  $(m_{E_i}^-, m_{E_i}^+)$ , portent sur la rigidité des sous-structures  $E_i$ . On étudiera ici deux échelles de sous-structuration associée : soit en considérant une seule sous-structure pour la structure entière, soit en définissant une sous-structure par élément fini.

Les méconnaissances sur la rigidité de la structure et celle sur la direction des efforts sont définies à partir de lois gaussiennes. Celles portant sur l'amplitude des efforts sont définies à partir d'une loi uniforme, compte tenu de la moins bonne connaissance que l'on en a généralement.

Nous portons notre intérêt sur la contrainte suivant l'axe  $y$  d'application des efforts, moyennée sur l'élément où elle est maximale, c'est-à-dire l'élément numéroté 20 (voir Figure 3.1). Ainsi, la quantité d'intérêt est  $\alpha = \sigma_{yy}^{20}$ . Sa valeur déterministe est de  $\bar{\sigma}_{yy}^{20} = 73\text{MPa}$ .

Comme les valeurs de méconnaissances sont supposées petites (soit moins de 15%), on utilise la propagation linéarisée des méconnaissances comme présenté dans les équations (3.11). On peut alors étudier l'influence de chacun des types de méconnaissances séparément. Les résultats de propagation des méconnaissances sont présentés dans les Tableaux 3.1, 3.2, et 3.3, sous la forme des bornes à 99% de probabilité. Le Tableau 3.1 montre les résultats de propagation du modèle avec le couple de méconnaissances sur l'amplitude des efforts, le Tableau 3.2 ceux de la propagation du modèle avec la méconnaissance sur la direction des efforts. Dans le Tableau 3.3, on a reporté les résultats de propagation des méconnaissances sur la rigidité de la structure, en y comparant les deux niveaux de sous-structuration étudiés.

### **Influence des méconnaissances sur l'amplitude des efforts**

On remarque que la propagation du modèle avec des méconnaissances de  $\pm 10\%$  sur l'amplitude des efforts entraîne une dispersion de même niveau ( $\pm 8,2\%$ ) de la contrainte  $\sigma_{yy}^{20}$

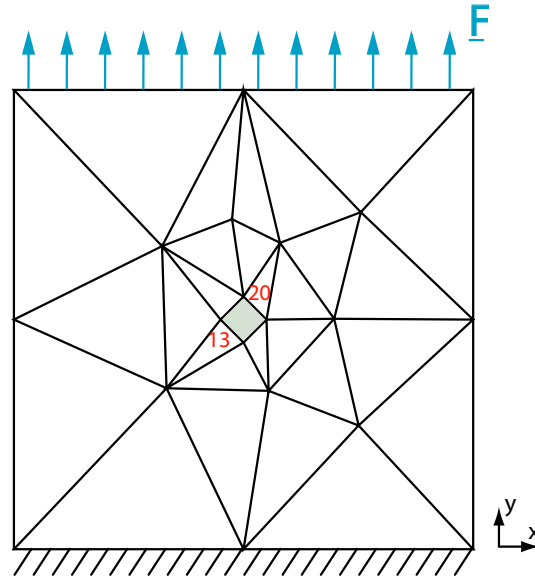


FIG. 3.1: Modèle discrétisé de la structure étudiée.

TAB. 3.1: Résultats du modèle avec méconnaissances sur l'amplitude des efforts (loi uniforme, bornes à 99% de probabilité).

Bornes $[-\bar{m}_\lambda^-, \bar{m}_\lambda^+]$	Bornes $[-\Delta\sigma_{yy\text{mod}}^{20-}, \Delta\sigma_{yy\text{mod}}^{20+}]$
$[-0,10 ; 0,10]$	$\pm 8, 2\%$ de $\bar{\sigma}_{yy}^{20}$

TAB. 3.2: Résultats du modèle avec méconnaissances sur la direction des efforts (loi gaussienne, bornes à 99% de probabilité).

Bornes $[-\bar{m}_Z^-, \bar{m}_Z^+]$	Bornes $[-\Delta\sigma_{yy\text{mod}}^{20-}, \Delta\sigma_{yy\text{mod}}^{20+}]$
$[-0,10 ; 0,10]$	$\pm 2, 2\%$ de $\bar{\sigma}_{yy}^{20}$

TAB. 3.3: Résultats du modèle avec méconnaissances sur la rigidité, pour deux niveaux de sous-structuration (loi gaussienne, bornes à 99% de probabilité).

Sous-structuration	Bornes $[-\bar{m}_{E_i}^-, \bar{m}_{E_i}^+]$	Bornes $[-\Delta\sigma_{yy\text{mod}}^{20-}, \Delta\sigma_{yy\text{mod}}^{20+}]$
par éléments	$[-0,06 ; 0,06]$	$\pm 6, 1\%$ de $\bar{\sigma}_{yy}^{20}$
structure entière	$[-0,06 ; 0,06]$	$\pm 24\%$ de $\bar{\sigma}_{yy}^{20}$
structure entière	$[-0,013 ; 0,013]$	$\pm 6, 2\%$ de $\bar{\sigma}_{yy}^{20}$

sur l'élément numéroté 20. Cela est simplement dû à la linéarité entre contrainte et effort appliqué. Le fait que l'on n'obtienne pas exactement le même niveau de dispersion provient de la technicité des tirages de méconnaissances, qui définit la moitié de la distribution de chaque méconnaissance à 0, ce qui concentre, après propagation, les réalisations

de quantité d'intérêt autour de la valeur moyenne.

### **Influence des méconnaissances sur la direction des efforts**

Le modèle avec une méconnaissance de 10% sur la direction des efforts mène à une dispersion assez faible, de l'ordre de 2,2%, sur la quantité d'intérêt. La contrainte d'intérêt est donc peu sensible vis à vis d'une méconnaissance sur la direction des efforts. En effet, l'incertitude ainsi modélisée est une incertitude sur la nature du chargement ; cela revient à dire qu'il y a une petite composante d'efforts suivant l'axe  $x$ , qui induit chargement de flexion de la structure. Comme, de part les conditions aux limites et pour la quantité d'intérêt considérée, la structure est plus rigide pour une sollicitation suivant l'axe  $x$  que suivant l'axe  $y$ , une méconnaissance sur la direction de l'effort de traction (suivant  $y$ ) est peu influente.

### **Influence des méconnaissances sur la rigidité**

Le niveau de dispersion de la contrainte d'intérêt obtenu par propagation du modèle avec méconnaissances sur la rigidité dépend du niveau de sous-structuration choisi (voir le Tableau 3.3). Si l'on choisi de modéliser les incertitudes à l'échelle de la structure entière par un couple de méconnaissances  $[-\bar{m}_E^- ; \bar{m}_E^+] = \pm 6\%$ , on obtient une dispersion de quantité d'intérêt élevée ( $\pm 24\%$ ). En revanche, si l'on choisi de modéliser les incertitudes à l'échelle des éléments, en définissant un couple de méconnaissances  $[-\bar{m}_{E_i}^- ; \bar{m}_{E_i}^+] = \pm 6\%$  pour chaque élément fini  $i$ , la dispersion de contrainte d'intérêt résultante est bien plus faible ( $\pm 6,1\%$ ). La forte sensibilité à des méconnaissances sur la rigidité de la structure entière provient du fait que le niveau de sous-structuration employé pour modéliser l'incertitude sur la rigidité est alors la structure entière, et, ainsi, cette méconnaissance rigidifie ou assouplie la structure entière, ce qui est très pénalisant. Au contraire, plus les sous-structures de définition des méconnaissances seront petites, plus le poids énergétique de chacune sera faible, et les différents termes de la somme présente à l'équation (3.21) se compenseront à un niveau global lors de la propagation sur la quantité d'intérêt.

## **2.2.2 Accouplement élastique**

### **Modélisation**

On applique ici la théorie détaillée ci-dessus à un accouplement flexible entre deux arbres (voir Figure 3.2). L'accouplement est réalisé par l'ensemble d'une pièce centrale en acier et de deux plaques en élastomère, le tout assemblé par des vis. On étudie cette structure en quasi-statique, un arbre étant considéré encastré en son extrémité, l'autre soumis à une répartition d'efforts orthoradiaux créant un couple  $C$  de torsion (voir Figure 3.2). On n'introduit pas de contact ni de frottement dans les assemblages boulonnés, qui sont simplement considérés comme des liaisons parfaites entre des parties élastiques.

On se limite à la propagation du modèle avec méconnaissances sur les rigidités et sur l'effort appliqué, dans le cas de faibles méconnaissances. La quantité d'intérêt est ici la



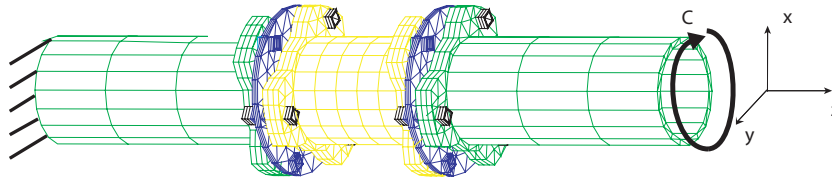


FIG. 3.2: Conditions d'étude de l'accouplement.

contrainte maximale, à savoir  $\sigma_{zz}$  et sa moyenne  $\bar{\sigma}_{zz}$  sur l'élément numéroté 2285 qui est situé sur une plaque en élastomère. Les méconnaissances sur les rigidités suivent une loi gaussienne, et l'on adopte une description floue pour les méconnaissances sur l'amplitude des efforts appliqués en les définissant à partir d'une loi uniforme.

### Résultats

TAB. 3.4: Modèle avec méconnaissances sur l'amplitude de l'effort (loi uniforme, bornes à 99% de probabilité).

Bornes $[-\bar{m}_\lambda^-, \bar{m}_\lambda^+]$	Bornes $[-\Delta\sigma_{zz\text{mod}}^{2285-}, \Delta\sigma_{zz\text{mod}}^{2285+}]$
$[-0,10; 0,10]$	$\pm 9,0\%$ de $\bar{\sigma}_{zz}^{2285}$

TAB. 3.5: Résultats du modèle avec méconnaissances sur la direction des efforts (loi gaussienne, bornes à 99% de probabilité).

Borne $\bar{m}_Z$	Bornes $[-\Delta\sigma_{zz\text{mod}}^{2285-}, \Delta\sigma_{zz\text{mod}}^{2285+}]$
0,06	$\pm 54\%$ de $\bar{\sigma}_{zz}^{2285}$

TAB. 3.6: Résultats du modèle avec méconnaissances sur la rigidité, pour deux niveaux de sous-structuration (loi gaussienne, bornes à 99% de probabilité).

Sous-structuration	Bornes $[-\bar{m}_{E_i}^-, \bar{m}_{E_i}^+]$	Bornes $[-\Delta\sigma_{zz\text{mod}}^{2285-}, \Delta\sigma_{zz\text{mod}}^{2285+}]$
par éléments	$[-0,05; 0,05]$	$\pm 8,6\%$ de $\bar{\sigma}_{zz}^{2285}$
par pièces	$[-0,05; 0,05]$	$\pm 89\%$ de $\bar{\sigma}_{zz}^{2285}$
structure entière	$[-0,05; 0,05]$	$\pm 230\%$ de $\bar{\sigma}_{zz}^{2285}$
structure entière	$[-0,002; 0,002]$	$\pm 8,9\%$ de $\bar{\sigma}_{zz}^{2285}$

Dans le Tableau 3.4 (respectivement 3.5) sont reportés les résultats de propagation du modèle avec méconnaissances ( $m_\lambda^-, m_\lambda^+$ ) sur l'amplitude (respectivement ( $m_Z^-, m_Z^+$ ) sur la direction) de la distribution d'efforts appliquée. Les résultats de la propagation du modèle avec méconnaissances sur la rigidité sont, eux, reportés dans le Tableau 3.6.

Comme dans l'exemple précédent, différents cas sont étudiés : la sous-structuration associée est soit à l'échelle de la structure complète, soit à l'échelle des différents composants de l'accouplement, soit à l'échelle des éléments, afin de rapprocher la modélisation avec méconnaissances de dispersions matériau locales. Ce sont les valeurs des bornes des intervalles à 99% de probabilité qui sont données.

Comme dans l'exemple précédent de la structure bidimensionnelle, de par la linéarité entre amplitude de l'effort et contrainte résultante, la propagation du modèle avec des méconnaissances sur l'amplitude de l'effort (voir Tableau 3.4) aboutit à une dispersion du même ordre de grandeur que la valeur des méconnaissances employées. En revanche, sur cet exemple, la contrainte d'intérêt est bien plus sensible à une méconnaissance sur la direction des efforts (voir Tableau 3.5). En effet, une telle méconnaissance revient à introduire de petits efforts parasites, engendrant une sollicitation supplémentaire de flexion de l'accouplement. Et comme la quantité d'intérêt considérée est plus sensible à la flexion qu'à la torsion, de telles incertitudes sur la direction des efforts orthoradiaux créant le couple  $C$  peuvent donc changer de façon non négligeable les contraintes dans la structure. Il est donc primordial, ici, de limiter au maximum les incertitudes sur les directions des efforts engendrant le couple de torsion.

Concernant la propagation de méconnaissances sur les rigidités, l'étendue de la dispersion de la contrainte d'intérêt dépend du niveau de sous-structuration associé à la définition des méconnaissances de base. Ainsi, si l'on ne définit qu'une sous-structure correspondant à la structure entière, la dispersion résultante est largement surévaluée ( $\pm 230\%$  pour des méconnaissances de base de  $\pm 5\%$ ), tandis que si l'on définit une méconnaissance pour chacun des 4092 éléments finis, la dispersion est plus réaliste - ( $\pm 8,6\%$  pour des méconnaissances de base de  $\pm 5\%$  chacune). Entre les deux, en adaptant la taille des sous-structures à celle des pièces, on obtient une dispersion surévaluée, mais dont l'étendue est limitée ( $\pm 89\%$  pour des méconnaissances de base de  $\pm 5\%$  sur chacune des 7 pièces). Les pièces sont alors regroupées en 7 ensembles, suivant la répartition suivante :

- l'arbre d'entrée, sur lequel est appliqué le couple  $C$  ;
- la première plaque intermédiaire ;
- le premier jeu de vis ;
- l'arbre intermédiaire ;
- la deuxième plaque intermédiaire ;
- le deuxième jeu de vis ;
- l'arbre de sortie, ici encastré dans un bâti.

### 2.3 Discussion sur l'échelle de description des méconnaissances de base sur la rigidité

La description des méconnaissances de base sur la rigidité d'une structure entière a montré dans les exemples précédents son caractère surdimensionnant. Caractériser la dispersion de rigidité à l'échelle globale de la structure, avec la même valeur de méconnaissance que celle qui décrirait la dispersion localement, est en effet très pénalisant car cela suppose que la structure entière ait une même rigidité. Il faut alors tenir compte des cas les pires, qui sont ceux où toute la structure possède la rigidité la plus faible (ou la plus élevée) autorisée par les valeurs de méconnaissances employées. Or, à une échelle globale, la dispersion entre ces cas extrêmes est bien plus faible que celle observée à une échelle plus fine.

C'est ce que l'on observe dans les exemples précédents : en introduisant des méconnaissances de  $\pm 5\%$  sur la rigidité des éléments de l'accouplement élastique, on obtient une dispersion de la quantité d'intérêt qui serait celle obtenue en introduisant un couple de méconnaissances de  $\pm 0,2\%$  environ à l'échelle de la structure entière. De même, avec des méconnaissances de  $\pm 6\%$  sur la rigidité des éléments de la plaque, ou bien de  $\pm 1,3\%$  à l'échelle de la structure entière, on obtient la même dispersion.

Le choix de l'échelle de description des méconnaissances est ainsi primordial. Tout l'art du modélisateur est de bien choisir l'échelle à laquelle globaliser les incertitudes en modélisant les méconnaissances.

Dans le cas où les dispersions de rigidité ont pour origine des phénomènes matériau, il est préférable de définir les méconnaissances sur la rigidité à une échelle assez fine de sous-structures. Ainsi, à l'échelle d'une structure complète, ces phénomènes matériau (inclusions plastiques, défauts, ...) se compensent, de par leur répartition spatiale, et influent relativement peu sur la rigidité globale de la structure. Lors de la modélisation de telles incertitudes, il est important de définir la sous-structuration à une échelle pertinente. La taille des sous-structures doit être en accord avec la longueur caractéristique des phénomènes en présence, comme illustré dans le paragraphe 3 où nous avons montré l'équivalence, en terme de dispersion de quantité d'intérêt, entre une dispersion de module d'Young modélisée par un champ stochastique et une description par méconnaissances de ce module d'Young. Lors de l'étude d'une structure complète, comme c'est le cas ici, l'échelle des éléments finis est tout à fait appropriée à la modélisation avec méconnaissances sur la rigidité. Dans ce qui suit, c'est à l'échelle des éléments que seront modélisées les méconnaissances portant sur les rigidités structurales.

Il est aussi possible de définir ces méconnaissances à une échelle plus globale, comme celle de la structure, mais il est souhaitable, dans ce cas, d'effectuer préalablement des simulations pour évaluer le niveau de méconnaissances qui correspond à cette échelle aux dispersions locales connues.

En revanche, lorsque l'on s'intéresse à la modélisation de rigidité de liaisons, les in-

certitudes pourront être modélisées par un unique couple de méconnaissances à l'échelle de la liaison elle-même. En effet, les liaisons sont souvent complexes à plus d'un titre : de part leur géométrie, les lois de comportements des matériaux employés (avec bien souvent présence de contact, frottement, ou jeux), et leur connaissance en tant que telle. Même dans des industries de pointe, il n'est pas rare en effet que les liaisons soient réalisées (ou finies) à la main, l'opérateur disposant colle et plis de matériaux composites selon son savoir-faire. Il en résulte une forte méconnaissance évidente de leurs propriétés. Ceci justifie que la modélisation des méconnaissances sur la rigidité d'une telle liaison se fasse à l'échelle globale de la liaison. Une telle méconnaissance est alors globale au niveau de cette liaison, mais locale vis à vis de la structure entière car les liaisons sont généralement de petite étendue par rapport à la structure complète).

## 2.4 Exemple industriel de propagation de méconnaissances effectives

Nous détaillons ici la propagation d'un modèle complet avec des méconnaissances sur le support de satellites Sylda5 (voir Figure 3.3), système de lancement double du lanceur Ariane 5, développé par EADS. Ce support de satellites a fait l'objet d'une application de la théorie des méconnaissances en dynamique dans [20, 21, 22]. Il y est en particulier effectué la réduction des méconnaissances portant sur les rigidités structurales.

### Le modèle EF associé

Le modèle proposé par EADS représente à la fois le support proprement dit et un cylindre de chargement simulant la présence d'un satellite posé sur le support ; il est constitué de 38 sous-structures comprenant divers matériaux, dont des matériaux sandwichs orthotropes, de l'aluminium et de l'acier. Les premières mesures ayant montré qu'il fallait tenir compte de la déformation du sol sous le support, le sol a été très simplement modélisé par 3 ressorts de torsion, un ressort de translation et une contrainte de mouvement de corps rigide pour tous les nœuds de l'interface entre le support et le sol. Au final, le modèle comprend 27 648 degrés de liberté et 9 728 éléments ; il a été recalé à partir des 12 premiers modes expérimentaux par la méthode décrite dans [75].

La structure est décomposée en 4 principaux groupes de sous-structures, présentés en figure 3.4 :

- Une sous-structure associée à la structure représentant la charge utile haute, composée d'un cylindre nervuré en acier de 3,3 tonnes, surmonté d'une poutre en acier de 1,35 tonne ;
- Une sous-structure pour l'adaptateur de charge utile, un anneau en aluminium réalisant la liaison entre le Sylda5 et la charge utile haute ;
- Une sous-structure correspond au Sylda5 lui-même, réalisé par un assemblage de cônes et de cylindres en composite sandwich, dont la peau est en stratifié carbone/époxy, et l'âme est en "nid d'abeille" (NIDA) d'aluminium ;
- Une sous-structure pour la liaison en aluminium entre le Sylda5 et le sol.



FIG. 3.3: Photo du support Syllda5.

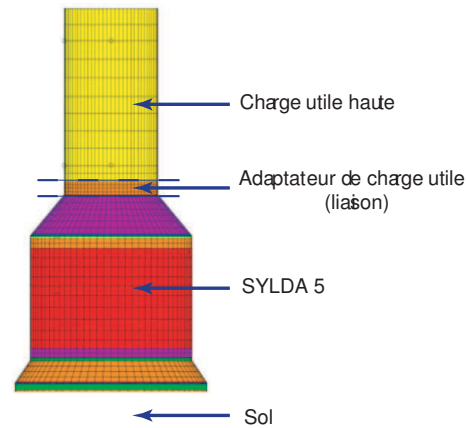


FIG. 3.4: Le modèle associé.

Après recalage du modèle éléments finis déterministe choisi vis à vis de la donnée d'une structure expérimentale, les méconnaissances introduites sur la rigidité des différentes sous-structures sont réduites grâce à la donnée expérimentale.

#### Le modèle expérimental : cas particulier d'une unique expérience

Des mesures en 260 capteurs ont été réalisées par IABG pour DASA/DORNIER sous contrat avec le CNES. Du fait de la complexité de la structure et de son instrumentation expérimentale (voir [20, 22]), on ne dispose que d'une série de données expérimentales, effectuée sur une seule structure de Syllda5.

Théoriquement, comme nous l'avons présenté dans le paragraphe 2.4, l'étape de réduction, qui consiste à déterminer les méconnaissances de base à partir des données expérimentales, se base sur des données statistiques expérimentales. On en rappelle l'idée directrice, qui est que, pour toute réalité industrielle, l'enveloppe obtenue par expériences doit être incluse dans l'enveloppe donnée par le modèle avec les méconnaissances déterminées, les enveloppes étant prises pour une certaine proportion  $P$  donnée.

Or, dans le cas de la structure du Syllda5, un seul essai a été effectué. Dans ce cas, il a été choisi de considérer que l'expérience réalisée est considérée comme l'extrémum des données expérimentales possibles (voir [20, 22]). Ainsi, l'unique information expérimentale dont on dispose constitue, en association avec les valeurs du modèle EF, l'encadrement dans lequel se trouverait l'ensemble à  $P\%$  (ici  $P = 99\%$ ) des données expérimentales si l'on en avait d'autres. Autrement dit, pour chaque quantité d'intérêt, l'une des bornes à  $P\%$  est le modèle théorique, l'autre est l'information expérimentale. Entre ces deux bornes, on peut faire une hypothèse de répartition uniforme, ou gaussienne.

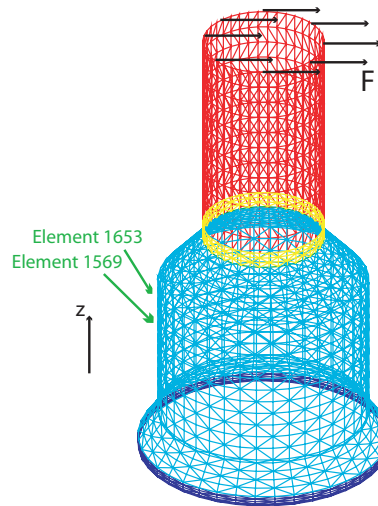


FIG. 3.5: Sylda5 : modèle EF et excitation.

Dans [20, 22], la réduction des méconnaissances portant sur la rigidité a été effectuée sur la quantité d'intérêt pulsation propre. Il n'y est fait aucune hypothèse sur la loi de distribution de la répartition de la quantité d'intérêt entre le modèle théorique et l'information, expérimentale.

Ici, nous présentons les résultats de propagation, sur des quantités d'intérêt de type contrainte, du modèle avec méconnaissances sur les rigidités et sur les efforts appliqués pour un cas de chargement statique de flexion. L'objectif est d'identifier quel type de méconnaissances prend le plus d'importance dans ce cas de sollicitation. Il est à noter que les valeurs de méconnaissances sur les efforts appliqués utilisées ici sont des valeurs postulées a priori et ne proviennent pas de valeurs identifiées sur un essai réel.

### Résultats de propagation des méconnaissances en statique

La propagation du modèle avec méconnaissances est effectuée pour une sollicitation de flexion du Sylda5 (voir Figure 3.5) et programmée avec le logiciel CAST3M. La quantité d'intérêt est une valeur maximale de la contrainte EF locale  $\bar{\sigma}_{zz}$  moyennée sur un élément du Sylda5. Les méconnaissances sur les rigidités et celle sur la direction de l'effort suivent des lois gaussiennes, tandis que celles sur l'amplitude de l'effort sont plus floues et suivent une loi uniforme.

Les Tableaux 3.7 et 3.8 présentent les résultats de la propagation du modèle avec les méconnaissances  $(m_{\lambda}^{-}(\theta), m_{\lambda}^{+}(\theta))$  sur l'amplitude,  $(m_z^{-}(\theta), m_z^{+}(\theta))$  sur la direction de la distribution d'efforts. On définit une seule méconnaissance  $(m_{\lambda}^{-}(\theta), m_{\lambda}^{+}(\theta))$  ou  $(m_z^{-}(\theta), m_z^{+}(\theta))$  pour toute la sous-structure d'application de l'effort : le niveau de la sous-structuration associée à la définition de ces méconnaissances est la structure elle-même. On donne les résultats de propagation à deux contraintes d'intérêt sur des éléments différents (numérotés



1653 et 1569), tous deux situés dans la zone la plus sollicitée (voir la Figure 3.5). Les bornes données correspondent à des probabilités de 99%.

**TAB. 3.7:** Modèle avec méconnaissances sur l'amplitude de l'effort (loi uniforme, bornes à 99% de probabilité).

Bornes $[-\bar{m}_\lambda^-, \bar{m}_\lambda^+]$	Bornes $[-\Delta\sigma_{zz\text{mod}}^-, \Delta\sigma_{zz\text{mod}}^+]$
$\pm 10\%$	$\pm 8,0\% \bar{\sigma}_{zz}^{1653}$ $\pm 7,0\% \bar{\sigma}_{zz}^{1569}$

**TAB. 3.8:** Modèle avec méconnaissance sur la direction de l'effort (loi gaussienne, bornes à 99% de probabilité).

Borne $\bar{m}_z$	Bornes $[-\Delta\sigma_{zz\text{mod}}^-, \Delta\sigma_{zz\text{mod}}^+]$
6%	$\pm 22\% \bar{\sigma}_{zz}^{1653}$ $\pm 20\% \bar{\sigma}_{zz}^{1569}$

La propagation du modèle avec méconnaissances sur les rigidités est présentée dans le Tableau 3.9. Dans ce cas, on définit une méconnaissance  $(m_E^-(\theta), m_E^+(\theta))$  pour chacun des éléments de la sous-structure étudiée. C'est cette échelle des éléments finis qui est privilégiée pour décrire les méconnaissances présentes sur les rigidités.

**TAB. 3.9:** Modèle avec méconnaissances sur la rigidité (loi gaussienne, bornes à 99% de probabilité).

bornes $[-\bar{m}_{E_i}^-, \bar{m}_{E_i}^+]$	bornes $[-\Delta\sigma_{zz\text{mod}}^-, \Delta\sigma_{zz\text{mod}}^+]$
$\pm 7\%$ sur les éléments de la charge utile	$\pm 1,1\% \bar{\sigma}_{zz}^{1653}$ $\pm 0,6\% \bar{\sigma}_{zz}^{1569}$
$\pm 5\%$ sur les éléments du SYLDA5	$\pm 4,4\% \bar{\sigma}_{zz}^{1653}$ $\pm 3,9\% \bar{\sigma}_{zz}^{1569}$
$\pm 5\%$ sur les éléments de la liaison SSS	$\pm 0,5\% \bar{\sigma}_{zz}^{1653}$ $\pm 0,3\% \bar{\sigma}_{zz}^{1569}$

### Influence des méconnaissances sur les efforts

Les bornes de dispersion obtenues avec des méconnaissances sur l'amplitude de l'effort (voir le Tableau 3.7) sont de l'ordre de grandeur de la valeur de méconnaissance de base. Comme mentionné dans les exemples précédents, cela est dû à la linéarité entre la réponse en déplacement et l'amplitude de l'effort. La dispersion obtenue est toutefois légèrement inférieure à celle des méconnaissances de base propagées, de par la technique employée pour tirer les réalisations de méconnaissances. En effet, le fait de définir des intervalles du type  $[-m_E^-; 0]$  ou  $[0; m_E^+]$  plutôt que du type  $[-m_E^-; m_E^+]$  réduit quelque peu l'étendue

de dispersion de quantité d'intérêt.

Dans ce cas de chargement, une méconnaissance sur la direction des efforts ne change pas fondamentalement le type de chargement appliqué à la structure, mais revient à changer la direction de sollicitation de flexion, et tolérer une légère traction/compression. Les bornes obtenues avec une méconnaissance sur la direction de l'effort (voir le Tableau 3.8) sont légèrement plus larges que la valeur de méconnaissance. Cependant, l'ordre de grandeur de la dispersion obtenue est raisonnable, et témoigne du fait que l'incertitude ainsi modélisée induit une variation du type de chargement ni insignifiante, ni intolérable.

### **Influence des méconnaissances sur la rigidité**

Concernant l'influence des incertitudes présentes sur les rigidités, on étudie les dispersions résultant de la présence de méconnaissances sur la rigidité des trois sous-structures suivante, considérées séparément : la charge utile, le Sylda5 en lui-même, et la liaison SSS (voir le Tableau 3.9).

La présence de méconnaissances relativement importantes ( $\pm 7\%$ ) sur la rigidité de la charge n'a qu'une influence faible sur les contraintes étudiées ici. Comme le Sylda5 est un support de satellites, ce résultat est intéressant dans le sens où les sollicitations sur le Sylda5 en lui-même ne sont pas trop influencées par des incertitudes sur la charge, incertitudes a priori fréquentes puisque les satellites et le Sylda5 ne sont ni conçus ni fabriqués par la même entreprise. De même, les méconnaissances présentes sur la liaison SSS ne modifient que peu les contraintes d'intérêt. L'incertitude présente sur cette liaison ne joue donc pas dans le dimensionnement de la structure.

En revanche, la dispersion obtenue par propagation des méconnaissances présentes sur la rigidité du Sylda5 est plus large et est significative ( $\pm 4,4\%$  sur  $\bar{\sigma}_{zz}^{1653}$ ). Il est donc important de bien maîtriser la valeur de ces méconnaissances.

## **2.5 Bilan**

À travers différentes applications, nous avons pu voir l'intérêt de l'approche de la théorie des méconnaissances pour évaluer la dispersion d'une contrainte d'intérêt correspondant à un problème complet de statique comportant des incertitudes faibles tant au niveau des efforts appliqués que des rigidités structurelles.

Pour de faibles incertitudes et dispersions, la théorie des méconnaissances a pour avantage de propager par linéarisation les incertitudes modélisées de façon plus globales que dans une approche paramétrique. Le résultat de propagation s'appuie alors simplement sur des calculs d'énergies se basant sur les résultats d'une seule résolution globale du problème.

On remarque que, dans le cas des exemples étudiés, les méconnaissances les plus in-



fluentes pour les contraintes d'intérêt en question sont celles portant sur la direction des efforts (mises à part celles portant sur les rigidités modélisées à l'échelle de la structure entière, ce qui n'a pas de sens vu le caractère local de l'origine des dispersions). Les incertitudes sur l'amplitude des efforts appliqués ne sont que peu influentes dans ces modélisations.

### 3 Modélisation d'incertitudes anisotropes

Dans les cas où les incertitudes portant sur la rigidité sont connues de façon anisotrope, il peut être pénalisant d'utiliser une définition isotrope des méconnaissances. Nous présentons donc une extension de la théorie des méconnaissances pour modéliser des incertitudes portant sur des paramètres anisotropes. Nous présentons ensuite un exemple de propagation de telles méconnaissances sur un problème élastique orthotrope.

#### 3.1 Contexte

Jusqu'à présent, le cadre de la théorie des méconnaissances permet, entre autres, de modéliser les incertitudes présentes sur la rigidité d'une structure à une échelle fine de sous-structures, souvent de la taille des éléments. Cependant, cette modélisation est valable en élasticité isotrope, et ne peut représenter de manière efficace des incertitudes concernant le comportement des matériaux orthotropes, comme nombre de matériaux composites, dont l'utilisation ne cesse de croître.

#### 3.2 Modélisation des méconnaissances anisotropes

La description adoptée pour la définition des méconnaissances portant sur des problèmes anisotropes s'inspire de la théorie de l'endommagement anisotrope proposée dans [76]. On définit pour chaque structure étudiée le tenseur de Hooke, noté  $\mathcal{K}$ . Le module d'Young et le module de déformation volumique, exprimés dans la direction  $n$ , et notés respectivement  $Y(n)$  et  $\gamma(n)$ , s'expriment à partir du tenseur de Hooke de la manière suivante :

$$\frac{1}{Y(n)} = n^T \mathcal{K} (nn^T) n \quad (3.27a)$$

$$\frac{1}{\gamma(n)} = \text{Tr}[\mathcal{K} (nn^T)] \quad (3.27b)$$

Réciproquement, il a été montré dans [76] que ces fonctions définissent complètement  $\mathcal{K}$ . Soient  $\bar{Y}(n)$  le module d'Young et  $\bar{\gamma}(n)$  la déformation volumique du modèle EF, nous introduisons deux méconnaissances  $m_Y$  et  $m_\gamma$  représentant l'état de méconnaissance de

la structure dans la direction  $n$ . Ce sont des fonctions de  $n$ , et elles sont définies par les relations suivantes, valables pour chaque sous-structure  $E$  :

$$m_Y(n) = \frac{\bar{Y}(n) - Y(n)}{\bar{Y}(n)} \quad \text{sur } E \quad (3.28a)$$

$$m_\gamma(n) = \frac{\bar{\gamma}(n) - \gamma(n)}{\bar{\gamma}(n)} \quad \text{sur } E \quad (3.28b)$$

où  $Y$  et  $\gamma$  sont les valeurs de la structure réelle étudiée.

La description avec des méconnaissances isotropes, détaillée dans le Chapitre 2, revient à prendre  $m_Y(n) = m_\gamma(n) = m_E$  sur chaque sous-structure  $E$ .

Nous proposons ici une approximation au premier ordre pour la fonction de méconnaissance  $m_Y(n)$  :

$$\frac{1}{1 - m_Y(n)} = n^T [\mathbb{I} - \mathbb{M}_E]^{-1} n \quad \text{sur } E \quad (3.29)$$

ainsi qu'une approximation d'ordre zéro pour la fonction  $m_\gamma(n)$  :

$$\frac{1}{1 - m_\gamma(n)} = \frac{1}{1 - m_Y} \quad \text{sur } E \quad (3.30)$$

On a introduit ici  $\mathbb{M}_E$ , qui est un opérateur linéaire symétrique défini par sous-structure  $E$ , qui contient l'information complète sur la méconnaissance sur la rigidité, et est nommé opérateur des méconnaissances élastiques.

La loi de comportement, reliant le tenseur des déformations  $\varepsilon$  au tenseur des contraintes  $\sigma$ , s'exprime alors, pour la sous-structure  $E$  :

$$\varepsilon = \frac{1}{\bar{Y}} [M_E \sigma_D]_D + \frac{1 - 2\bar{\nu}}{\bar{Y}} \cdot \frac{1}{1 - m_Y} \left( Tr[\sigma] Id - \sigma \right) \quad \text{sur } E \quad (3.31)$$

où la notation  $[\cdot]_D$  correspond au déviateur du tenseur considéré, et où

$$M_E = 3[\mathbb{I} - \mathbb{M}_E]^{-1} - \frac{1}{2} Tr([\mathbb{I} - \mathbb{M}_E]^{-1}) \mathbb{I} \quad (3.32)$$

On a ainsi, par la relation de comportement (3.31), un lien direct entre contrainte, déformation, et opérateur des méconnaissances, et ceci au niveau mécanique des milieux continus. Les méconnaissances peuvent alors être vues comme des données intrinsèques au problème (mais dont les valeurs peuvent changer).

### 3.3 Cas d'une sous-structure orthotrope bi-dimensionnelle

Pour une sous-structure  $E$  2D orthotrope, dans la base d'orthotropie, l'opérateur des méconnaissances élastiques  $\mathbb{M}_E$  se simplifie et est diagonal :

$$\mathbb{M}_E = \begin{pmatrix} m_{Y_1} & 0 \\ 0 & m_{Y_2} \end{pmatrix}$$

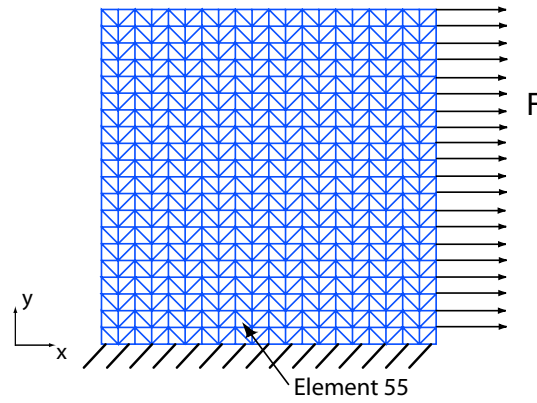


FIG. 3.6: La plaque étudiée.

où  $Y_1$  et  $Y_2$  sont les modules d'Young dans les deux directions d'orthotropie.

L'opérateur de Hooke s'exprime alors, dans ce cas d'orthotropie bi-dimensionnelle, de la façon suivante :

$$\hat{\mathcal{K}} = \bar{Y}(1 - m_{Y_1}) \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \bar{Y}(1 - m_{Y_2}) \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{2\bar{Y}}{1 - 2\nu}(1 - m_\nu) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Cette description des méconnaissances utilisant des opérateurs de méconnaissances élastiques permet une modélisation plus fine des incertitudes d'une famille de structures considérées : le niveau de méconnaissance sur la rigidité dans une direction peut être différent du niveau présent sur la rigidité dans une autre direction. On se rapproche alors d'une description paramétrique des incertitudes, en descendant d'un cran dans l'échelle de leur modélisation, mais tout en gardant une spécificité de l'approche par méconnaissances, à savoir conserver une modélisation par sous-structures.

### 3.4 Exemple : structure rectangulaire orthotrope bi-dimensionnelle

#### 3.4.1 Le modèle associé

Nous appliquons ici la propagation à une structure rectangulaire orthotrope (voir Figure 3.6) avec des méconnaissances anisotropes sur les rigidités. La plaque étudiée est en matériau "nid d'abeille" d'aluminium (NIDA) : il est constitué d'un coeur et de 7 plis de matériau composite, dont les caractéristiques matériau sont données dans le tableau 3.10.

La structure étudiée est soumise à un effort quasi-statique  $F$  (voir la figure 3.6). La description des méconnaissances sur les rigidités adoptée est anisotrope. L'opérateur des méconnaissances élastiques est supposé diagonal (c.f. paragraphe 3.3). Le repère d'orthotropie  $(x, y)$  est tel que le module d'Young indicé  $Y_1$  (respectivement  $Y_2$ ) est le module dans la direction  $x$  (respectivement  $y$ ).

**TAB. 3.10:** Composition de la plaque.

Partie	$Y_1$	$Y_2$	$G_{12}$	$\nu_{12}$	$\rho$
plis	215 GPa	7.5 GPa	2.88 GPa	0.30	1400 kg/m <sup>3</sup>
coeur	0.1 GPa	0.07 GPa	90 MPa	0.40	140 kg/m <sup>3</sup>

### 3.4.2 Résultats de la propagation

La propagation est programmée sous CAST3M. Les quantités d'intérêt sont ici des contraintes EF locales moyennées sur un élément, situé en particulier dans la zone la plus sollicitée. La description des méconnaissances adoptée est la même pour les plis que pour le coeur (paramètres indicés  $[\cdot]_0$ ) :

$$m_{Y_1}(\theta) = m_{Y_{10}}(\theta) \quad (3.33a)$$

$$m_{Y_2}(\theta) = m_{Y_{20}}(\theta) \quad (3.33b)$$

$$m_\gamma(\theta) = m_{\gamma_0}(\theta) \quad (3.33c)$$

Ces méconnaissances portant sur la rigidité sont définies à partir de lois gaussiennes. Les résultats de propagation de ce modèle avec  $(m_{Y_1}(\theta), m_{Y_2}(\theta), m_\gamma(\theta))$  sur la contrainte  $\bar{\sigma}_{xx}$  (respectivement  $\bar{\sigma}_{yy}$ ) moyennée sur l'élément numéroté 55 (voir sa localisation sur la Figure 3.6) sont présentés dans le Tableau 3.11 (respectivement dans le Tableau 3.12).

**TAB. 3.11:** Modèle avec opérateur des méconnaissances élastiques ; quantité d'intérêt  $\bar{\sigma}_{xx}^{55}$  (bornes à 99% de probabilité).

bornes $[-\bar{m}_{Y_1}^-, \bar{m}_{Y_1}^+]$	bornes $[-\bar{m}_{Y_2}^-, \bar{m}_{Y_2}^+]$	bornes $[-\bar{m}_\gamma^-, \bar{m}_\gamma^+]$	bornes $[-\Delta\sigma_{xx\text{mod}}^-, \Delta\sigma_{xx\text{mod}}^+]$
$\pm 7 \%$	$\pm 7 \%$	$\pm 7 \%$	$[-3, 9\%; +4, 4\%] \bar{\sigma}_{xx}^{55}$
$\pm 7 \%$	aucune	aucune	$[-3, 9\%; +4, 4\%] \bar{\sigma}_{xx}^{55}$
aucune	$\pm 7 \%$	aucune	$[-0, 1\%; +1\%] \bar{\sigma}_{xx}^{55}$
aucune	aucune	$\pm 7 \%$	$[-0, 002\%; +0, 2\%] \bar{\sigma}_{xx}^{55}$
$\pm 7 \%$	$\pm 15 \%$	aucune	$[-3, 9\%; +4, 4\%] \bar{\sigma}_{xx}^{55}$

**TAB. 3.12:** Modèle avec opérateur des méconnaissances élastiques ; quantité d'intérêt  $\bar{\sigma}_{yy}^{55}$  (bornes à 99% de probabilité).

bornes $[-\bar{m}_{Y_1}^-, \bar{m}_{Y_1}^+]$	bornes $[-\bar{m}_{Y_2}^-, \bar{m}_{Y_2}^+]$	bornes $[-\bar{m}_\gamma^-, \bar{m}_\gamma^+]$	bornes $[-\Delta\sigma_{yy\text{mod}}^-, \Delta\sigma_{yy\text{mod}}^+]$
$\pm 7 \%$	$\pm 7 \%$	$\pm 7 \%$	$[-4, 1\%; +4, 6\%] \bar{\sigma}_{yy}^{55}$
$\pm 7 \%$	aucune	aucune	$[-4, 1\%; +4, 6\%] \bar{\sigma}_{yy}^{55}$
aucune	$\pm 7 \%$	aucune	$[-0, 2\%; +0, 4\%] \bar{\sigma}_{yy}^{55}$

Avant tout, il est intéressant de noter que, lorsque l'on introduit des méconnaissances de même valeur  $(m_{Y_1}(\theta), m_{Y_2}(\theta), m_\gamma(\theta)) = (\pm 7\%, \pm 7\%, \pm 7\%)$ , l'ordre de grandeur de dispersion de la quantité d'intérêt (quelques pourcents) est le même que celui de la valeur de méconnaissance de base. Par ailleurs, l'effet d'une méconnaissance  $m_\gamma(\theta)$  sur la déformation volumique (c.f. la quatrième ligne du Tableau 3.11) est insignifiant comparé à celui d'une méconnaissance sur un module d'Young dans une direction  $m_{Y_1}(\theta)$  ou  $m_{Y_2}(\theta)$ . En effet, le coefficient de déformation volumique ne modifie que le coefficient de Poisson et le module de distorsion de la structure, qui sont peu influents dans ce cas de chargement.

L'effet de  $m_{Y_2}(\theta)$  est bien moins important que celui de  $m_{Y_1}(\theta)$  : pour une même méconnaissance de  $\pm 7\%$  appliquée uniquement sur  $m_{Y_2}$ , on obtient une dispersion 45 à 400 fois inférieure sur la quantité d'intérêt  $\bar{\sigma}_{xx}^{55}$  que si elle est appliquée sur  $m_{Y_1}$ . De plus, l'orientation de la quantité d'intérêt ne change pas le fait que la méconnaissance  $m_{Y_2}$  a peu d'influence, comme on peut le voir dans le Tableau 3.12 : pour la quantité d'intérêt  $\bar{\sigma}_{yy}^{55}$ , la méconnaissance  $m_{Y_2}$  a aussi peu d'influence. C'est donc l'orientation du chargement (ici appliqué dans la direction  $x$ , correspondante à  $Y_1$ ) qui justifie le fait que le module d'Young  $Y_1$  a, dans ce cas, un rôle majeur dans la rigidité de la structure. La valeur de méconnaissance  $m_{Y_2}$  importe alors peu.

Cette modélisation des incertitudes par des méconnaissances anisotropes est très bien adaptée pour des structures comportant des parties en NIDA ou en d'autres genres de matériaux intrinsèquement anisotropes, ou encore des pièces dont le caractère orthotrope résulte d'un procédé de fabrication, comme le laminage.

En effet, grâce à cette description, on peut intégrer dans le modèle le fait que des incertitudes subsistent essentiellement dans une certaine direction plutôt que dans d'autres. Cela peut aussi permettre d'éviter des sur-dimensionnements dus à l'emploi d'un modèle qui ne prendrait pas en compte le fait que certaines orientations dans le matériau, dans certains cas de chargement, tolèrent une grande incertitude car elles n'ont pas d'influence énergétique sur la quantité d'intérêt évaluée.

### 3.5 Bilan

Nous avons présenté ici une extension du concept de méconnaissances afin de traiter des problèmes comportant des paramètres incertains anisotropes. La modélisation adoptée s'inspire de la théorie de l'endommagement anisotrope, et permet de définir un opérateur des méconnaissances. Ainsi, sur une sous-structure donnée, l'information sur la méconnaissance d'un paramètre modélisé peut être variable selon la direction considérée.

Cette modélisation revient à descendre d'un cran dans l'échelle de modélisation des incertitudes, en se rapprochant des méthodes paramétriques. Cela est nécessaire lorsque les paramètres sont fortement anisotropes, comme dans le cas d'élasticité orthotrope, pour lequel on a présenté un exemple. En effet, dans le cas d'un paramètre pour lequel l'incer-

titude est bien plus forte dans une direction (la direction qui a été la plus endommagée dans le cas d'un matériau composite, par exemple), adopter une modélisation avec une même méconnaissance, quelle que soit la direction d'étude de l'incertitude, revient à devoir surestimer l'incertitude présente dans la ou les direction(s) qui sont bien connue(s).

## 4 Conclusion

Grâce aux extensions présentées dans ce chapitre, il est maintenant possible d'avoir une modélisation complète des incertitudes portant sur un problème de statique. Il est aussi dorénavant possible de propager ces méconnaissances sur une quantité d'intérêt (qui peut être une contrainte ou un déplacement local) obtenue par une technique d'extraction à partir du déplacement solution du problème, et d'obtenir ainsi sa dispersion résultante. Les exemples présentés ont permis de juger de l'efficacité de cette méthode pour se faire une idée de l'importance que peut prendre tel type de méconnaissances pour une structure donnée.

L'étape suivante pour traiter un problème de conception en statique est de pouvoir comparer ces dispersions à des valeurs admissibles. C'est l'objet du chapitre suivant, dans lequel on s'attache à définir un cadre permettant d'utiliser la théorie des méconnaissances en conception robuste.



# Chapitre 4

## Prédiction d'une défaillance par la théorie des méconnaissances

*Dans le but de pouvoir utiliser la description par méconnaissances dans une perspective de conception robuste, nous présentons ici comment évaluer une probabilité de défaillance.*

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Évaluation d'une probabilité de défaillance . . . . .</b>	<b>102</b>
1.1	La théorie des méconnaissances pour la conception robuste . . . . .	102
1.2	Expression de la probabilité de défaillance du modèle . . . . .	103
1.3	Quantification de la surestimation : exemple 1D . . . . .	104
1.4	Définition d'un indicateur de marge sur la probabilité de défaillance	108
<b>2</b>	<b>Application 1D . . . . .</b>	<b>109</b>
2.1	Cas d'une limite déterministe $\alpha_c$ . . . . .	109
2.2	Cas d'une limite stochastique $\alpha_c(\theta)$ . . . . .	110
<b>3</b>	<b>Application 3D : accouplement élastique . . . . .</b>	<b>114</b>
3.1	Problématique et paramétrage . . . . .	114
3.2	Résultats de la propagation des méconnaissances . . . . .	115
3.3	Résultats en terme de prévision de défaillance . . . . .	115
<b>4</b>	<b>Bilan . . . . .</b>	<b>116</b>

---



# 1 Évaluation d'une probabilité de défaillance

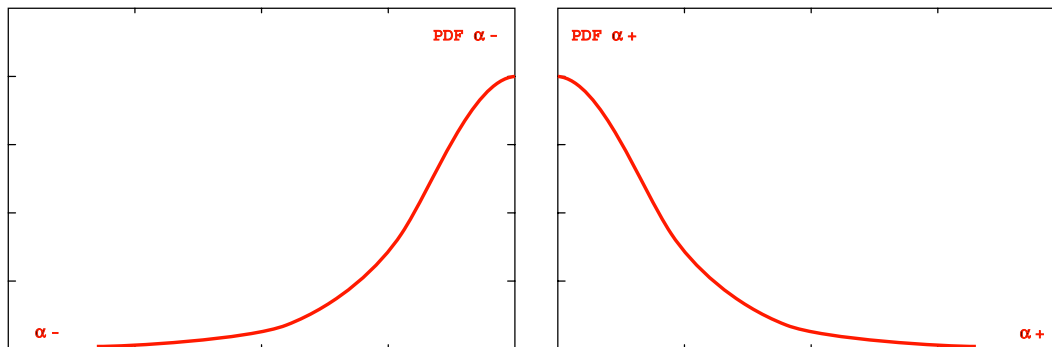
## 1.1 La théorie des méconnaissances pour la conception robuste

L'objectif de ce chapitre est de situer la théorie des méconnaissances dans une perspective de conception robuste, en s'intéressant ici en particulier à la prédiction d'un phénomène de défaillance, comme la rupture, décrit par comparaison d'une quantité d'intérêt donnée à une certaine limite. Comme dans le travail présenté précédemment, on se limite à des études en statique.

Il s'agit donc d'étudier comment utiliser la théorie des méconnaissances lors du dimensionnement d'une structure dans le but de s'assurer de sa fiabilité.

Le terme de conception robuste est ici à prendre au sens où la conception d'une structure dans un certain environnement doit permettre d'être représentatif de toutes les structures réelles dans leur environnement réel. La prédiction doit alors tenir compte des incertitudes portant sur la modélisation (géométrie, comportement structural) et des dispersions portant sur l'environnement (conditions aux limites, efforts).

Dans un premier temps, on s'intéresse à un critère de défaillance correspondant à une limite déterministe, notée  $\alpha_c$ , sur une certaine quantité d'intérêt. Pour la quantité  $\alpha$ , la propagation du modèle avec méconnaissances permet de calculer les densités de probabilité des variables aléatoires  $\alpha^+(\theta)$  et  $\alpha^-(\theta)$  des bornes de l'enveloppe (voir Figure 4.1). La question à laquelle nous allons essayer de répondre est : comment caractériser la défaillance d'une structure réelle ?



**FIG. 4.1:** Fonctions densité de probabilité des bornes du modèle avec méconnaissances.

Ces développements de la théorie des méconnaissances s'insèrent dans la politique de réduction des marges actuellement observée dans l'industrie. Dans cette optique, les méthodes basées sur des analyses de fiabilité sont couramment employées. Pour plus de précisions à leur sujet, on se reportera au bref état de l'art réalisé dans au paragraphe 2.12 du premier chapitre.

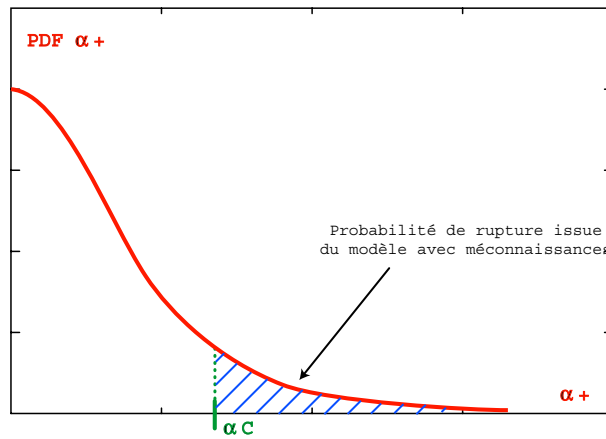


FIG. 4.2: Probabilité de défaillance du modèle avec méconnaissances pour une limite déterministe  $\alpha_c$ .

## 1.2 Expression de la probabilité de défaillance du modèle

### Cas d'une limite déterministe $\alpha_c$

On s'intéresse dans un premier temps au cas où la limite à rupture  $\alpha_c$  est déterministe. La densité de probabilité de la borne supérieure  $\alpha^+(\theta)$  de l'enveloppe de la quantité d'intérêt  $\alpha$  issue du modèle avec méconnaissances permet de déterminer une évaluation par ce modèle de la probabilité de défaillance, notée  $P_f^{LOK}$ . En effet, tous les cas possibles vérifiant  $\alpha^+ > \alpha_c$  mènent à la défaillance de la structure, et la probabilité de défaillance  $P_f^{LOK}$  peut s'exprimer ainsi :

$$P_f^{LOK} = \int_{\alpha_c}^{+\infty} f_{\alpha^+}(x) dx \quad (4.1)$$

où  $f_{\alpha^+}$  est la fonction densité de probabilité de la borne supérieure du modèle avec méconnaissances pour la quantité d'intérêt  $\alpha$ . Cette probabilité de défaillance issue du modèle avec méconnaissances, qui correspond à l'aire hachurée sur la Figure 4.2, correspond au pire cas réel, c'est-à-dire celui pour lequel la quantité  $\alpha$  correspond à la borne supérieure  $\alpha^+$  du modèle avec méconnaissances :

$$\alpha = \alpha^+ \quad (4.2)$$

Cette situation aboutit peut aboutir à une surestimation de la probabilité de défaillance réelle, et donc à un surdimensionnement. Nous tenterons de le chiffrer dans les exemples suivants.

### Cas d'une limite stochastique $\alpha_c(\theta)$

Dans le cas où la limite de défaillance est une variable aléatoire  $\alpha_c(\theta)$  de densité de probabilité  $f_{\alpha_c}$  (voir Figure 4.3), la probabilité de défaillance de l'équation 4.1 est pondérée par

la loi de probabilité de  $\alpha_c(\theta)$ . La valeur de la quantité d'intérêt critique du modèle pour la rupture d'une part, et les méconnaissances introduites dans le modèle décrivant les incertitudes de rigidité et d'efforts d'autre part, étant considérés comme des événements indépendants, l'évaluation de la probabilité de défaillance par le modèle avec méconnaissances peut s'exprimer sous la forme :

$$P_f^{LOK} = \int_{\alpha_c^{min}}^{\alpha_c^{max}} f_{\alpha_c}(x) \left( \int_x^{+\infty} f_{\alpha^+}(y) dy \right) dx \quad (4.3)$$

Pour chaque valeur critique possible (occurrence pondérée suivant sa loi de probabilité), cela revient à calculer la probabilité comme indiqué dans l'équation 4.1 pour le cas où la limite est déterministe. De la même manière, nous étudierons en quelles proportions cette probabilité surestime la probabilité de défaillance réelle.

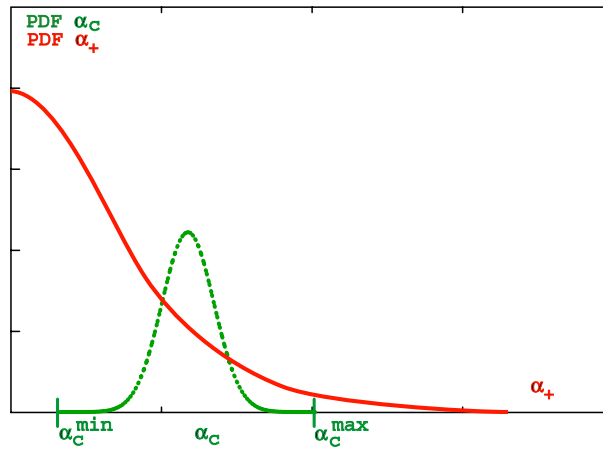


FIG. 4.3: Fonctions densité de probabilité de la borne supérieure du modèle avec méconnaissances et de la limite stochastique considérée.

### 1.3 Quantification de la surestimation : exemple 1D

Afin de quantifier la surestimation de la probabilité de défaillance réelle par le modèle avec des méconnaissances postulées a priori, considérons une barre en traction (voir Figure 4.4) sur laquelle nous comparerons la probabilité de défaillance issue du modèle avec méconnaissances à celle obtenue analytiquement par un modèle de référence comportant une rigidité aléatoire. Les résultats sont donnés pour des valeurs unitaires de longueur ( $L = 1m$ ) et de section ( $S = 1m^2$ ). L'effort de traction appliqué vaut  $F = 10^3N$ ; le déplacement déterministe associé vaut alors :  $\bar{U} = 1,4286.10^{-2}m$ .

#### Modèle avec méconnaissances

Dans le modèle avec méconnaissances, on introduit un couple de méconnaissances ( $m_E^-(\theta)$ ;  $m_E^+(\theta)$ ) sur la rigidité de la barre. On a retranscrit dans le Tableau 4.1 les probabilités



FIG. 4.4: Barre en traction.

de défaillance du modèle avec méconnaissances, notées  $P_f^{LOK}$ , pour différentes valeurs de déplacement critique déterministe  $U_c$ , et ceci pour différentes valeurs des bornes de méconnaissances  $[-\bar{m}_E^-, \bar{m}_E^+]$ . Sur la Figure 4.5, on a représenté la valeur de la probabilité de défaillance du modèle avec méconnaissances (avec  $[-\bar{m}_E^-, \bar{m}_E^+] = \pm 0, 1$  dans ce cas) sur la fonction densité de probabilité cumulée (CDF) de la borne supérieure  $\alpha^+(\theta)$  de ce modèle.

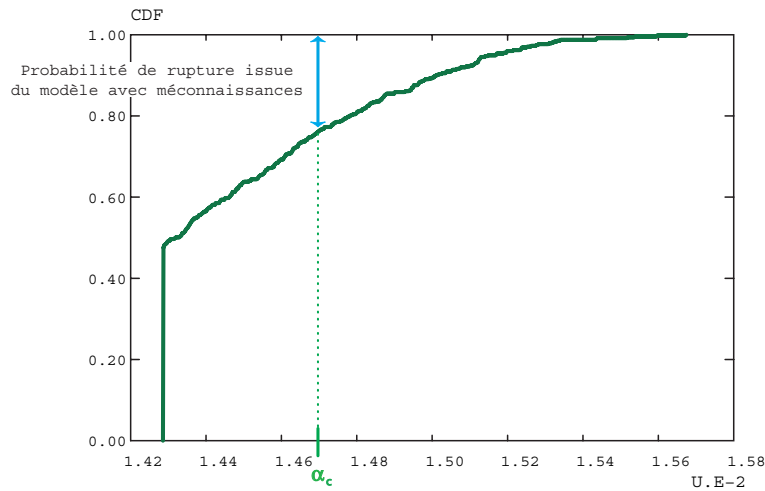


FIG. 4.5: Fonction densité de probabilité cumulée de la borne supérieure du modèle avec méconnaissances et probabilité de défaillance du modèle associée à  $\alpha_c$  donné ( $[-\bar{m}_E^-, \bar{m}_E^+] = \pm 0, 1$ ).

### Modèle de référence

Dans le modèle de référence, qui est le modèle permettant d'obtenir une réalité simulée, la rigidité de la barre, considérée aléatoire et notée  $K(\theta)$ , suit une loi lognormale dont on rappelle la fonction densité de probabilité :

$$f_K(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\delta\bar{K}}} \exp\left(\frac{-(\log(x) - \bar{M})^2}{2\delta^2\bar{K}^2}\right) \quad \forall x \in [0; +\infty[ \quad (4.4)$$

où  $\bar{M}$  assure que la moyenne de la distribution  $K(\theta)$  vaille  $\bar{K}$  donné, soit :

**TAB. 4.1:** Résultats, en terme de probabilité de défaillance, de différentes modélisations avec méconnaissances sur la rigidité de la barre (bornes à 99% de probabilité).

bornes $[-\bar{m}_E^-, \bar{m}_E^+]$	bornes $[-\Delta U^{-LOK}, \Delta U^{+LOK}]$	limite $U_c$	$P_f^{LOK}$
$\pm 10\%$	$\pm 8,2\%$ de $\bar{U}$	$1,47.10^{-2}$	23%
		$1,46.10^{-2}$	31%
		$1,45.10^{-2}$	36%
		$1,44.10^{-2}$	43%
		$1,43.10^{-2}$	50%
$\pm 8\%$	$\pm 6,6\%$ de $\bar{U}$	$1,47.10^{-2}$	19%
		$1,46.10^{-2}$	28%
		$1,45.10^{-2}$	34%
		$1,44.10^{-2}$	41%
		$1,43.10^{-2}$	50%
$\pm 6\%$	$\pm 4,9\%$ de $\bar{U}$	$1,47.10^{-2}$	11%
		$1,46.10^{-2}$	19%
		$1,45.10^{-2}$	28%
		$1,44.10^{-2}$	39%
		$1,43.10^{-2}$	50%

$$\exp\left(\bar{M} + \frac{\sigma^2}{2}\right) = \bar{K} \quad (4.5)$$

Le paramètre  $\delta$  pilotant l'écart type  $\sigma$  de cette loi ( $\sigma = \delta\bar{K}$ ) est pris de telle sorte que l'intervalle contenant 99% des valeurs de la loi lognormale, soit  $[-3\sigma; 3\sigma]$ , corresponde à la dispersion de rigidité à 99% de probabilité qui résulte des méconnaissances employées :

$$[-3\sigma; +3\sigma] = [-\bar{m}_E^- \bar{K}; +\bar{m}_E^+ \bar{K}] \quad (4.6)$$

Les valeurs de probabilité de défaillance obtenues par ce modèle sont reportées dans le Tableau 4.2. On y donne les résultats pour différentes étendues de loi lognormale, et pour différentes valeurs de déplacement critique  $U_c$ .

### Comparaison

Nous avons vu dans le paragraphe 3 du chapitre 2 (voir Tableau 2.1) que les deux modèles ainsi associés (voir l'équation 4.6) aboutissent à une même dispersion du déplacement en bout  $U$ . On a donc récapitulé les résultats de ces deux modèles dans le Tableau 4.3, afin de pouvoir effectuer une comparaison des valeurs de probabilité de défaillance obtenues par chacun des modèles.

Ces résultats permettent de vérifier que la probabilité de défaillance évaluée par le modèle avec méconnaissances,  $P_f^{LOK}$ , surestime la probabilité de défaillance issue du modèle analytique,  $P_f$ , représentant la réalité. Cependant, la différence entre ces deux

**TAB. 4.2:** Probabilité de défaillance du réel simulé pour une barre de rigidité lognormale (bornes à 99% de probabilité).

limite $U_c$	$\delta$	$P_f$ rigidité aléatoire
$1,47.10^{-2}$	$\frac{10}{3}$	20%
$1,46.10^{-2}$		26%
$1,45.10^{-2}$		33%
$1,44.10^{-2}$		41%
$1,43.10^{-2}$		49%
$1,47.10^{-2}$	$\frac{8}{3}$	15%
$1,46.10^{-2}$		21%
$1,45.10^{-2}$		29%
$1,44.10^{-2}$		38%
$1,43.10^{-2}$		49%
$1,47.10^{-2}$	$\frac{6}{3}$	7,9%
$1,46.10^{-2}$		14%
$1,45.10^{-2}$		23%
$1,44.10^{-2}$		35%
$1,43.10^{-2}$		48%

**TAB. 4.3:** Comparaison modèle/réel des probabilités de défaillance de la barre (bornes à 99% de probabilité).

limite $U_c$	Bornes $[-\bar{m}_E^-, \bar{m}_E^+]$	$P_f^{LOK}$	$\delta$	$P_f$ rigidité aléatoire	Écart
$1,47.10^{-2}$	$\pm 10\%$	23%	$\frac{10}{3}$	20%	13%
$1,46.10^{-2}$		31%		26%	16%
$1,45.10^{-2}$		36%		33%	8,3%
$1,44.10^{-2}$		43%		41%	4,7%
$1,43.10^{-2}$		51%		49%	3,9%
$1,47.10^{-2}$	$\pm 8\%$	19%	$\frac{8}{3}$	15%	21%
$1,46.10^{-2}$		28%		21%	25%
$1,45.10^{-2}$		34%		29%	15%
$1,44.10^{-2}$		41%		38%	7,4%
$1,43.10^{-2}$		50%		49%	0,5%
$1,47.10^{-2}$	$\pm 6\%$	11%	$\frac{6}{3}$	7,9%	37%
$1,46.10^{-2}$		19%		14%	26%
$1,45.10^{-2}$		28%		23%	18%
$1,44.10^{-2}$		39%		35%	10%
$1,43.10^{-2}$		50%		48%	1%

probabilités est de l'ordre de grandeur de 10% à 30% au maximum, et est d'autant plus petite que la probabilité est élevée (que cela soit dû à une méconnaissance importante, ou

à une limite basse). On a donc construit un modèle conservatif permettant une évaluation, certes majorante mais donc conservative, et assez précise de la probabilité de défaillance.

L'intérêt de la théorie des méconnaissances pour traiter un phénomène de défaillance, comme la rupture, se situe encore une fois dans le coût de la méthode : en globalisant les incertitudes à une échelle de sous-structure et en les modélisant par des méconnaissances, cette théorie permet d'obtenir une évaluation intéressante d'une probabilité de défaillance, sans avoir à modéliser de façon paramétrique toutes les incertitudes. De plus, le calcul de probabilité de défaillance est basé sur la densité de probabilité de la borne supérieure du modèle avec méconnaissances, densité de probabilité qui est généralement déjà évaluée lors d'un calcul de propagation de méconnaissances. Ce calcul de probabilité s'effectue donc très facilement et très rapidement, ce qui constitue un avantage supplémentaire.

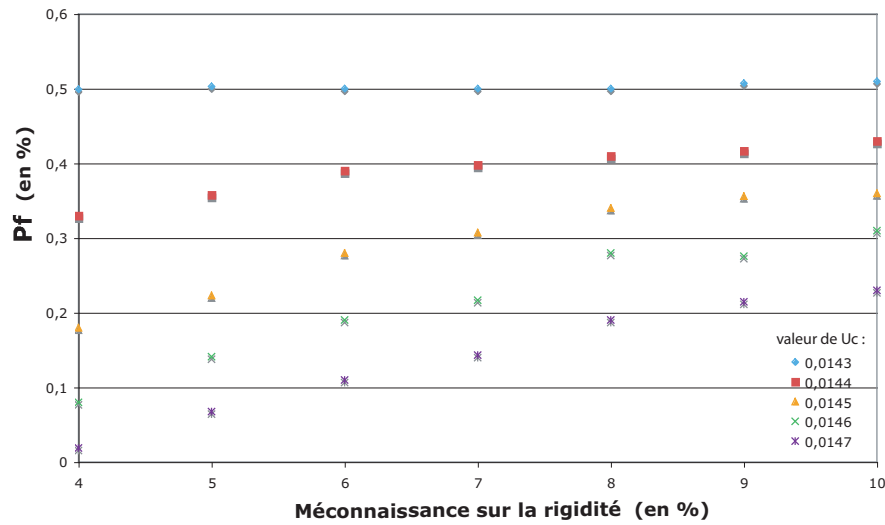
## 1.4 Définition d'un indicateur de marge sur la probabilité de défaillance

Bien que la probabilité de défaillance  $P_f^{LOK}$  obtenue par le modèle avec méconnaissances soit assez précise, on ne peut se satisfaire de sa seule donnée. En effet, cela ne donne aucune information sur sa sensibilité aux méconnaissances : quel gain, en terme de probabilité de défaillance, est possible après diminution des méconnaissances ? Une telle information est importante pour savoir s'il est utile d'affiner sa connaissance du comportement de tout ou partie de la structure, par exemple par des essais complémentaires ou par une meilleure modélisation.

Nous proposons donc d'ajouter à la donnée de la probabilité de défaillance obtenue par le modèle avec méconnaissances, celle d'un indicateur, noté  $I$ , de la marge disponible par réduction des méconnaissances, défini comme suit :

$$I(\beta) = \frac{P_f^{LOK}(m_{init}) - P_f^{LOK}((1 - \beta) \cdot m_{init})}{\beta \cdot m_{init}} \quad (4.7)$$

où  $P_f^{LOK}(m_{init})$  est la probabilité de défaillance obtenue par le modèle avec méconnaissances initiales  $\{m_{init}\}$ , et  $P_f^{LOK}((1 - \beta) \cdot m_{init})$  celle pour des valeurs de méconnaissances diminuées de  $\beta$ . Généralement, on choisit  $\beta = 10\%$ . En évaluant la pente de la courbe  $P_f^{LOK}(m_E)$  présentée Figure 4.6, cet indicateur quantifie la sensibilité aux méconnaissances de la probabilité de défaillance : plus il a une valeur élevée, plus une diminution des méconnaissances a une action significative sur la probabilité de défaillance. Le coût de cet indicateur est celui d'un calcul de propagation de méconnaissances (celui du modèle avec  $(1 - \beta) \cdot m_{init}$  comme méconnaissances), et d'un calcul de probabilité de défaillance supplémentaires (celui de  $P_f^{LOK}((1 - \beta) \cdot m_{init})$ ).



**FIG. 4.6:** Probabilité de défaillance fonction de la méconnaissance sur la rigidité de la barre, pour différents déplacements critiques déterministes ( $U_c$ ) et bornes de méconnaissances symétriques ( $\bar{m}_E^+ = \bar{m}_E^-$ ).

## 2 Application 1D

### 2.1 Cas d'une limite déterministe $\alpha_c$

On étudie ici une application de la théorie des méconnaissances pour traiter un phénomène de défaillance, comme la rupture, sur une barre en traction (Figure 4.4). L'effort  $F$  est supposé déterministe, la rigidité  $K(\theta)$  stochastique, et la quantité d'intérêt est le déplacement en bout  $U$ . Pour décrire le caractère aléatoire de la rigidité, on introduit un couple de méconnaissances  $(\bar{m}_E^-, \bar{m}_E^+)$  comme au paragraphe 1.3. Les résultats du modèle, dans le cas d'une limite déterministe, sont présentés dans le Tableau 4.4 par la donnée de la probabilité de défaillance issue du modèle avec méconnaissances et de l'indicateur de la marge, ceci pour différentes valeurs de méconnaissances et différentes valeurs de limite à rupture  $U_c$ . On introduit ici uniquement des méconnaissances sur la rigidité de la barre.

Il est intéressant de remarquer que l'indicateur de la marge disponible est plus élevé dans le cas où les méconnaissances introduites sont plus faibles. L'étude de la courbe de la probabilité de défaillance fonction de la valeur de méconnaissances (voir Figure 4.6) justifie ceci : la fonction  $P_f^{LOK}(m_E)$  est croissante et de dérivée positive décroissante. De façon pratique, lorsque l'indicateur est inférieur à 1, il est peu intéressant de diminuer la méconnaissance car il en faudrait une forte diminution pour obtenir une légère baisse de la probabilité de défaillance.



**TAB. 4.4:** Modèle pour la défaillance de la barre, cas d'une limite déterministe (bornes à 99% de probabilité, et  $\beta = 10\%$ ).

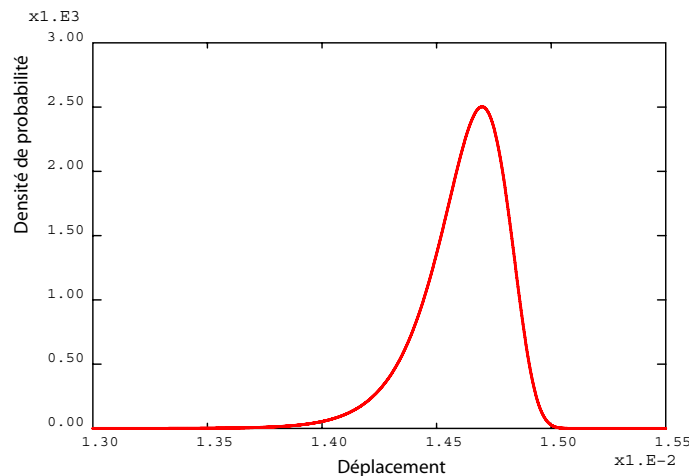
limite $U_c$	Bornes $[-\bar{m}_E^-, \bar{m}_E^+]$	$P_f^{LOK}(m_E)$	Indicateur de la marge
$1,47.10^{-2}$	$\pm 10\%$	23%	1,93
$1,45.10^{-2}$		36%	0,44
$1,47.10^{-2}$	$\pm 6\%$	11%	5,0
$1,45.10^{-2}$		28%	5,7

## 2.2 Cas d'une limite stochastique $\alpha_c(\theta)$

Le Tableau 4.5 et les Figures 4.9 et 4.10 présentent les résultats du modèle avec méconnaissances pour traiter la rupture dans le cas d'une limite aléatoire  $\alpha_c(\theta)$  suivant une loi de Weibull décrite par la fonction densité de probabilité suivante :

$$f_{\alpha_c}(x) = \frac{k}{\lambda} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1} \exp^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k} \quad \forall x \in [0; +\infty[ \quad (4.8)$$

Le paramètre  $k$  influe sur la finesse de la distribution autour de la valeur moyenne, contrôlée par le paramètre  $\lambda$ , comme on peut le voir en comparant les Figures 4.7 et 4.8. Le point de vue utilisé pour représenter la rupture dans le modèle de Weibull est qu'elle s'initie sur un défaut du matériau et se propage instantanément dans la structure. L'activation des défauts microscopiques, modélisée en utilisant un processus ponctuel de Poisson, aboutit en effet à une loi de Weibull pour la rupture à l'échelle macroscopique du matériau. Ce modèle correspond bien aux matériaux fragiles, pour lesquels l'activation d'un défaut correspond à la rupture de l'ensemble de la structure (suivant l'hypothèse du maillon le plus faible).



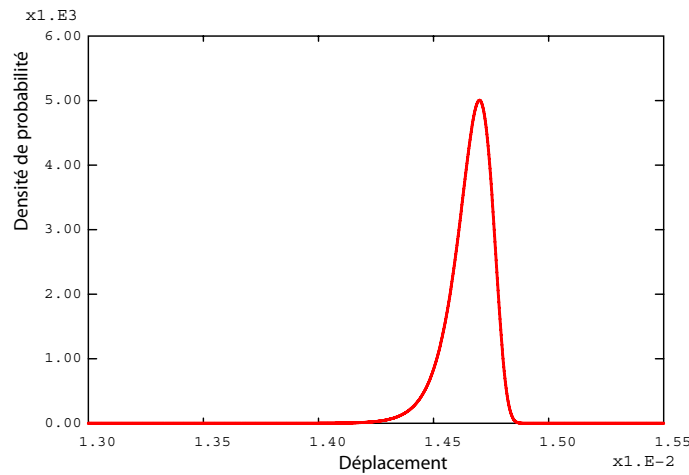
**FIG. 4.7:** Fonction densité de probabilité du déplacement critique suivant une loi de Weibull pour ( $k = 100$  ;  $\lambda = 0,0147$ ).

**TAB. 4.5:** Modèle pour la défaillance de la barre, cas d'une limite stochastique (bornes à 99% de probabilité).

$U_c$ (paramètres Weibull)	Bornes $[-\bar{m}_E^-, \bar{m}_E^+]$	$P_f^{LOK}(m_E)$	Indicateur
$(k; \lambda) = (200; 1,47.10^{-2})$	$\pm 10\%$	27%	2,3
$(k; \lambda) = (200; 1,45.10^{-2})$		42%	1,2
$(k; \lambda) = (100; 1,47.10^{-2})$	$\pm 10\%$	32%	2,0
$(k; \lambda) = (100; 1,45.10^{-2})$		50%	1,1
$(k; \lambda) = (200; 1,47.10^{-2})$	$\pm 6\%$	15%	4,4
$(k; \lambda) = (200; 1,45.10^{-2})$		34%	3,2
$(k; \lambda) = (100; 1,47.10^{-2})$	$\pm 6\%$	22%	3,7
$(k; \lambda) = (100; 1,45.10^{-2})$		44%	2,7
$(k; \lambda) = (200; 1,47.10^{-2})$	$\pm 5\%$	11%	4,8
$(k; \lambda) = (200; 1,45.10^{-2})$		31%	4,1
$(k; \lambda) = (100; 1,47.10^{-2})$	$\pm 5\%$	18%	3,8
$(k; \lambda) = (100; 1,45.10^{-2})$		41%	3,2

**TAB. 4.6:** Comparaison des probabilités de défaillance de la barre, selon les cas stochastique et déterministe, pour une même moyenne de déplacement critique (bornes à 99% de probabilité).

Bornes $[-\bar{m}_E^-, \bar{m}_E^+]$	$U_c$ (paramètres Weibull)	$P_f^{LOK}$ <i>stoch.</i>	$U_c$ déterministe	$P_f^{LOK}$ <i>déter.</i>
$\pm 10\%$	$(k; \lambda) = (200; 1,47.10^{-2})$	27%	$1,47.10^{-2}$	23%
	$(k; \lambda) = (100; 1,47.10^{-2})$	32%	$1,47.10^{-2}$	23%
	$(k; \lambda) = (200; 1,45.10^{-2})$	42%	$1,45.10^{-2}$	36%
	$(k; \lambda) = (100; 1,45.10^{-2})$	50%	$1,45.10^{-2}$	36%
$\pm 6\%$	$(k; \lambda) = (200; 1,47.10^{-2})$	15%	$1,47.10^{-2}$	11%
	$(k; \lambda) = (100; 1,47.10^{-2})$	22%	$1,47.10^{-2}$	11%
	$(k; \lambda) = (200; 1,45.10^{-2})$	34%	$1,45.10^{-2}$	28%
	$(k; \lambda) = (100; 1,45.10^{-2})$	44%	$1,45.10^{-2}$	28%

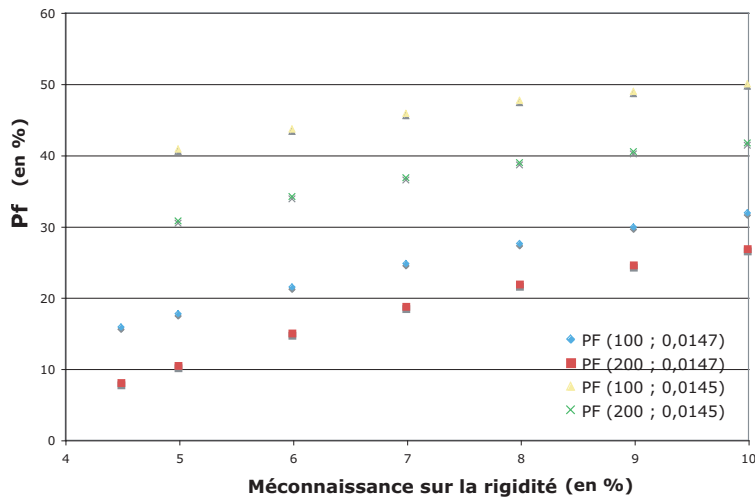


**FIG. 4.8:** Fonction densité de probabilité du déplacement critique suivant une loi de Weibull pour ( $k = 200$  ;  $\lambda = 0,0147$ ).

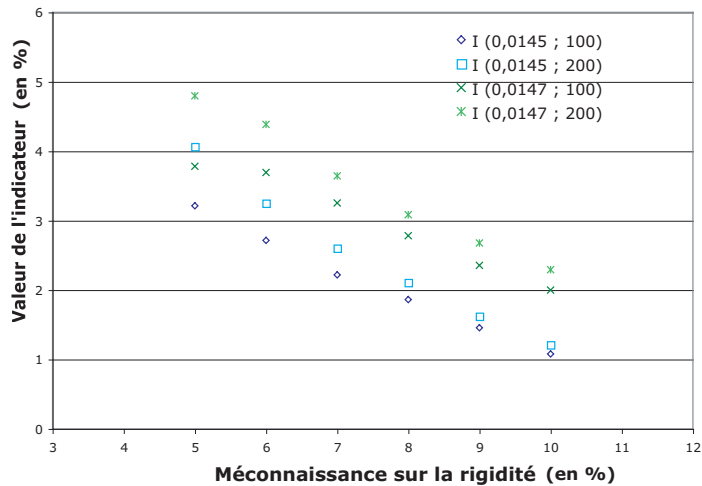
En comparant la valeur de probabilité de défaillance obtenue pour un certain jeu de paramètres de loi de Weibull à celle obtenue pour une limite déterministe  $U_c$  correspondant à la moyenne  $\lambda$  (voir le Tableau 4.6 où sont comparés des résultats donnés dans les Tableaux 4.3 et 4.5), et ceci pour une même méconnaissance, on remarque que la valeur obtenue dans le cas aléatoire est légèrement supérieure, et ceci d'autant plus que la dispersion de la loi est grande (ce qui correspond à  $k$  petit). La queue de distribution de la limite stochastique aboutissant à des valeurs inférieures à la moyenne prend ici toute son importance.

Sur la Figure 4.10 est présentée la courbe de l'indicateur de la marge disponible sur la probabilité de défaillance par diminution des méconnaissances, en fonction de la méconnaissance sur la rigidité de la barre.

Comme on peut le voir sur cette Figure ou dans le Tableau 4.5, cet indicateur prend ici des valeurs entre 1 et 5. Les valeurs les plus importantes sont atteintes pour les plus faibles méconnaissances (comme dans le cas d'une limite déterministe examiné précédemment) et bien sûr pour des limites basses ( $1,45.10^{-2}m$  contre  $1,47.10^{-2}m$ ). Cela peut aussi être visualisé sur la courbe de la probabilité de défaillance fonction de la méconnaissance sur la rigidité de la barre (Figure 4.9). De par la non linéarité de cette fonction, on met ici en évidence une propriété : plus les méconnaissances de base sur la rigidité sont élevées, plus l'effort de connaissance à fournir pour diminuer d'une certaine proportion la probabilité de défaillance sera élevé.



**FIG. 4.9:** Probabilité de défaillance fonction de la méconnaissance sur la rigidité de la barre, pour des bornes de méconnaissances symétriques ( $\bar{m}_E^+ = \bar{m}_E^-$ ) et pour différents déplacements critiques suivant une loi de Weibull.



**FIG. 4.10:** Indicateur de la marge sur la probabilité de défaillance fonction de la méconnaissance sur la rigidité de la barre, pour des bornes de méconnaissances symétriques ( $\bar{m}_E^+ = \bar{m}_E^-$ ) et pour différents déplacements critiques suivant une loi de Weibull.

### 3 Application 3D : accouplement élastique

#### 3.1 Problématique et paramétrage

L'exemple étudié ici est l'accouplement flexible présenté dans le paragraphe 2.2.2. Les conditions aux limites considérées sont récapitulées sur la Figure 4.11 : la structure est étudiée en torsion pure. Le couple nominal appliqué est de  $7,7Nm$ .

Cette structure comporte des incertitudes de rigidité et des incertitudes sur l'amplitude du couple appliqué. Ces incertitudes sont modélisées par des méconnaissances,  $(\bar{m}_E^-, \bar{m}_E^+)$ , portant sur la rigidité et des méconnaissances,  $(\bar{m}_\lambda^-, \bar{m}_\lambda^+)$ , portant sur l'amplitude des efforts locaux à l'origine du couple de torsion. Les valeurs de ces méconnaissances de base sont récapitulées dans le Tableau 4.7.

On rappelle que l'on ne tient pas compte des contacts, des frottements, ni des précontraintes dans les assemblages boulonnés, et on fait l'hypothèse que les assemblages ne sont pas les parties dimensionnantes.

On se place dans l'optique d'un constructeur qui étudierait l'utilisation de cet accouplement pour une application. L'objet de cette application est de prédire la probabilité de défaillance de l'accouplement, le phénomène étant modélisé par une contrainte à rupture  $\sigma_C = 90MPa$  au niveau des plaques en élastomères, qui sont les plus sollicitées. L'objectif du constructeur est de s'assurer qu'il résultera une probabilité de défaillance convenable de l'utilisation de cet accouplement, dans les conditions d'environnement qu'il prévoit. Nous allons donc utiliser les développements théoriques précédents pour prédire la probabilité de défaillance, à l'aide de la théorie des méconnaissances. Comme les méconnaissances de base sont suffisamment petites, nous utiliserons la propagation linéarisée du modèle.

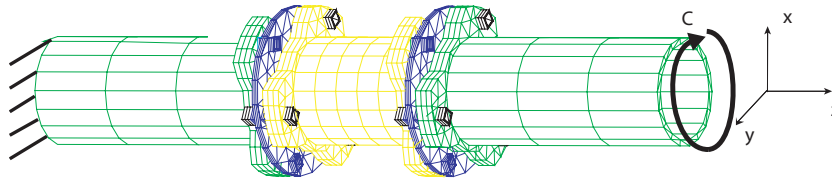


FIG. 4.11: Conditions d'étude de l'accouplement.

TAB. 4.7: Données du modèle avec méconnaissances.

Type de méconnaissance	Loi	Bornes à 99% de probabilité
sur la rigidité des éléments	gaussienne	$[-\bar{m}_E^-, \bar{m}_E^+] = \pm 7\%$
sur l'amplitude des efforts	uniforme	$[-\bar{m}_\lambda^-, \bar{m}_\lambda^+] = \pm 10\%$

### 3.2 Résultats de la propagation des méconnaissances

Dans cette optique, la quantité d'intérêt est la contrainte maximale,  $\bar{\sigma}_{zz}^{2285}$  moyennée sur l'élément numéroté 2285 qui est situé sur une plaque en élastomère. La contrainte déterministe est de  $81MPa$ . Les résultats sont présentés dans le Tableau 4.8. Sur chacune des deux premières lignes de ce Tableau sont présentés les résultats de propagation du modèle avec un type de méconnaissances (sur la rigidité pour la première ligne, sur l'amplitude des efforts sur la seconde), et le résultat de propagation du modèle complet (avec ces deux types de méconnaissances) est présenté sur la dernière ligne.

### 3.3 Résultats en terme de prévision de défaillance

La probabilité de défaillance obtenue avec cette modélisation avec méconnaissances est de 24,8%. Comme le modèle complet comporte plusieurs types de méconnaissances, il n'est pas possible de définir un unique indicateur de la marge disponible : en effet, chaque type de méconnaissance aura sa propre influence, plus ou moins marquée, lors d'une diminution de sa valeur. On définit donc ici un indicateur pour chaque type de méconnaissance, indicateur qui évalue le gain en terme de probabilité de défaillance d'une diminution de 10% de la méconnaissance correspondante. Ainsi, l'indicateur de la marge disponible par réduction de la méconnaissance sur la rigidité est noté  $I_E$  et s'exprime :

$$I_E = \frac{P_f^{LOK}(\{m_E, m_\lambda\}) - P_f^{LOK}(\{0,9.m_E, m_\lambda\})}{0,1.m_E} \quad (4.9)$$

Celui associé à la méconnaissance sur l'amplitude des efforts, noté  $I_\lambda$ , vaut :

$$I_\lambda = \frac{P_f^{LOK}(\{m_E, m_\lambda\}) - P_f^{LOK}(\{m_E, 0,9.m_\lambda\})}{0,1.m_\lambda} \quad (4.10)$$

Les valeurs de ces indicateurs dans le cas étudié sont reportés dans le Tableau 4.9.

On remarque que l'indicateur de la marge disponible par réduction de la méconnaissance sur l'amplitude des efforts est bien plus important que celui correspondant aux rigidités (valeur de 10 contre 1,7). Dans ce cas, il est donc bien plus intéressant d'améliorer la connaissance ou le contrôle de la valeur du couple à transmettre par l'accouplement que de diminuer la méconnaissance sur la rigidité des éléments le constituant, d'autant plus que, dans le cadre de l'utilisation de cet accouplement pour une application d'un certain

constructeur, il est impossible de diminuer la méconnaissance sur la rigidité de l'accouplement en lui-même. Ainsi, le constructeur devra mieux cerner les dispersions d'amplitude du couple, ou moins solliciter l'accouplement pour obtenir une probabilité de défaillance convenable, de l'ordre de 5 à 8% au maximum.

**TAB. 4.8:** Résultats de la propagation du modèle avec méconnaissances (bornes à 99% de probabilité).

Bornes de méconnaissances	Bornes de la quantité d'intérêt
$[-\bar{m}_E^-, \bar{m}_E^+] = \pm 7\%$	$[-\Delta\sigma_{zz}^{2285-}, \Delta\sigma_{zz}^{2285+}] = \pm 12,1\%$ de $\bar{\sigma}_{zz}^{2285}$
$[-\bar{m}_\lambda^-, \bar{m}_\lambda^+] = \pm 10\%$	$[-\Delta\sigma_{zz}^{2285-}, \Delta\sigma_{zz}^{2285+}] = \pm 9,0\%$ de $\bar{\sigma}_{zz}^{2285}$
modèle complet	$[-\Delta\sigma_{zz}^{2285-}, \Delta\sigma_{zz}^{2285+}] = \pm 15,6\%$ de $\bar{\sigma}_{zz}^{2285}$

**TAB. 4.9:** Modèle pour la défaillance de l'accouplement élastique, cas d'une limite déterministe et quantité d'intérêt  $\sigma_{zz}^{2285}$  ( $\bar{\sigma}_{zz}^{2285} = 81MPa$ ,  $\sigma_c = 90MPa$ ). Les bornes données sont les bornes à 99% de probabilité.

$P_f^{LOK}$	24,8%
$I_E(\beta = 10\%)$	1,7
$I_\lambda(\beta = 10\%)$	10

## 4 Bilan

Nous avons détaillé dans ce chapitre un cadre pour prévoir la défaillance d'une structure dont les incertitudes sont décrites par la théorie des méconnaissances. La probabilité de défaillance d'une structure peut ainsi être évaluée facilement. On propose d'ajouter un indicateur de la marge disponible afin d'orienter au mieux la conception en faisant des efforts de connaissance sur les paramètres les plus influents. Les applications présentées ont montré tout l'intérêt de cette description.

La probabilité de défaillance obtenue ne surévalue pas trop la probabilité de défaillance réelle, comme on l'a vu en la comparant à celle obtenue par une modélisation de la rigidité d'une barre en traction par une variable aléatoire. De plus, la donnée de l'indicateur de la marge disponible par réduction des méconnaissances permet de caractériser l'information, fondamentale en conception, qui consiste à savoir quelle(s) est (ou sont) la (les) méconnaissance(s) très influente(s) dans un problème considéré. En effet, dans une approche de conception de produit, cet indicateur pourra se révéler précieux pour savoir où faire un effort de connaissance ou de modélisation.

---

C'est cet intérêt de l'utilisation de la théorie des méconnaissances dans une approche de conception que nous allons maintenant illustrer, en l'appliquant sur un problème industriel.





# Chapitre 5

## Conception robuste grâce aux méconnaissances : exemple

*Dans ce dernier chapitre, nous illustrons l'intérêt de la théorie des méconnaissances pour effectuer une conception robuste.*

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Objectif de l'étude</b> . . . . .	<b>120</b>
<b>2</b>	<b>Présentation de la structure étudiée</b> . . . . .	<b>120</b>
2.1	Géométrie et conditions aux limites . . . . .	120
2.2	Modélisation des incertitudes . . . . .	121
2.3	Échelle de description des méconnaissances . . . . .	121
<b>3</b>	<b>Propagation du modèle avec méconnaissances</b> . . . . .	<b>122</b>
<b>4</b>	<b>Résultats pour la défaillance du modèle avec méconnaissances</b> . . . . .	<b>123</b>
4.1	Limite de défaillance déterministe . . . . .	123
4.2	Limite de défaillance incertaine . . . . .	124
4.3	Bilan . . . . .	125
<b>5</b>	<b>Conclusion</b> . . . . .	<b>126</b>

---

# 1 Objectif de l'étude

Les problèmes que rencontrent les ingénieurs portent classiquement sur des études de structures complexes. La complexité se situe à la fois sur le plan élément finis, avec la présence de concentration de contraintes dans certaines zones, mais aussi au niveau des sollicitations et des lois de comportement, avec, par exemple, apparition de fissuration sous un chargement de fatigue.

Lorsque l'ingénieur souhaite, en plus, tenir compte de la variabilité des rigidités et des sollicitations en jeu pour dimensionner au plus juste la structure étudiée, peu de méthodes permettant un calcul relativement rapide sont à sa disposition.

L'objectif de ce chapitre est d'appliquer les développements présentés précédemment à une structure dans son environnement industriel, afin d'évaluer la probabilité de défaillance de la structure et d'étudier l'importance des incertitudes, en chiffrant le gain obtenu par un apport de connaissance. L'étude présentée ici consiste à caractériser la défaillance d'une tête de rotor d'hélicoptère par fatigue, en tenant compte des différentes incertitudes présentes, détaillées ci-après.

## 2 Présentation de la structure étudiée

### 2.1 Géométrie et conditions aux limites

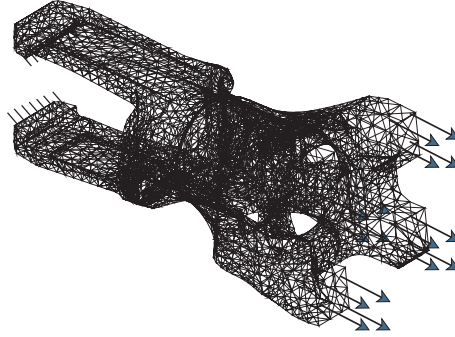
Le système étudié ici fait partie de l'hélicoptère militaire EADS NH90. Cet appareil, développé pour la France, l'Italie, l'Allemagne et les Pays-Bas, appartient à la catégorie des engins de moins de 10 tonnes.

Nous nous intéressons plus particulièrement au dimensionnement de la tête de rotor dont le maillage est présenté sur la figure 5.1. Il est à remarquer que cette pièce ne comporte pas de symétrie, de même que, contrairement à ce que l'on pourrait penser à la vue de cette Figure, elle n'est pas rectiligne mais comporte une légère courbure. La société Eurocopter (EADS) a étudié plusieurs cas de chargement dans la conception de cette structure. Le test étudié ici concerne un chargement constitué d'un encastrement d'un côté, et de l'application d'un effort sur les faces planes, orientées selon leur normale (notée  $z$ ), des quatre bossages du côté opposé (voir la Figure 5.1). Le maillage est constitué de 19 778 éléments TET10 tétraédriques (i.e. 36 393 nœuds), et est étudié en élasto-statique. Le matériau employé est du titane, il est modélisé par un matériau élastique isotrope, de module d'Young  $E = 200GPa$ , de module de Poisson  $\nu = 0,3$ .

On considère un dimensionnement en fatigue. Dans ce cas, la contrainte associée au critère de défaillance vaut  $\sigma_c = 270MPa$ . L'effort total appliqué pour notre étude vaut  $3,5kN$ .

Remarque : Il est important de mentionner que les données utilisées ici ont été définies par le LMT-Cachan à titre d'illustration et ne sont pas issues de données fournies par Eurocopter.

Dans [77], cette structure a été l'objet de l'application d'une technique de validation basé sur l'erreur en relation de comportement permettant d'obtenir des erreurs locales.



**FIG. 5.1:** Conditions aux limites et efforts imposés au manchon.

## 2.2 Modélisation des incertitudes

Pour représenter les incertitudes présentes sur les caractéristiques matériau et l'effort appliqué, des méconnaissances sont introduites sur la rigidité du manchon ( $-m_E^-(\theta); m_E^+(\theta)$ ), ainsi que sur l'amplitude ( $-m_\lambda^-(\theta); m_\lambda^+(\theta)$ ), et sur la direction de la distribution d'efforts ( $m_Z(\theta)$ ). Les méconnaissances sur l'amplitude sont définies à partir d'une loi uniforme, tandis que les autres sont définies à partir de lois gaussiennes. Les valeurs des bornes à 99% de probabilité des méconnaissances sont données dans le Tableau 5.1. On modélise ainsi les incertitudes à leur niveau réel : les incertitudes présentes sur la rigidité sont de  $\pm 5\%$  ; celles présentes sur les efforts sont autant élevées sur leur amplitude ( $\pm 15\%$ ) que sur leur direction ( $\pm 15\%$ ).

Les valeurs précisées ici sont issues d'une évaluation a priori des incertitudes en présence. Elles relèvent du bon sens et n'ont pas fait l'objet d'une procédure de recalage vis à vis d'une réalité expérimentale.

## 2.3 Échelle de description des méconnaissances

Comme nous l'avons détaillé au paragraphe 2.3 du chapitre 3, le choix de l'échelle de description des méconnaissances sur la rigidité est très important, car une incertitude locale subit une sorte d'homogénéisation à une échelle plus globale.

De manière générale, lorsque l'on souhaite modéliser une incertitude de rigidité portant sur une grande zone d'une structure composée d'un matériau homogène et isotrope, on la modélisera par des méconnaissances très locales, de valeurs assez faibles. En effet, pour ce genre de matériaux, les paramètres sont alors souvent très bien connus, et ce n'est que très localement qu'il peut subsister des dispersions.

Pour les méconnaissances portant sur l'amplitude ou la direction d'une distribution d'efforts, le choix est fait de les décrire globalement à l'échelle de la surface d'application de chaque effort, car c'est généralement à cette échelle que résident les sources d'incertitudes.

Ainsi, dans le problème posé ici, l'échelle de sous-structuration pour la définition des méconnaissances de base portant sur la rigidité se situe au niveau des éléments finis de toute la structure, celle pour les méconnaissances sur les efforts est au niveau de chaque surface d'application d'efforts : on définit 4 méconnaissances  $\bar{m}_Z$  sur les directions des efforts, et 4 couples  $(-\bar{m}_\lambda^-; \bar{m}_\lambda^+)$  sur leurs amplitudes.

**TAB. 5.1:** Données du modèle avec méconnaissances.

Type de méconnaissance	Loi	Bornes à 99% de probabilité
sur la rigidité	gaussienne	$[-\bar{m}_E^-, \bar{m}_E^+] = \pm 5\%$
sur l'amplitude des efforts	uniforme	$[-\bar{m}_\lambda^-, \bar{m}_\lambda^+] = \pm 15\%$
sur la direction des efforts	gaussienne	$[-\bar{m}_Z^-, \bar{m}_Z^+] = \pm 15\%$

### 3 Propagation du modèle avec méconnaissances

En effectuant un calcul déterministe de la structure, on trouve les contraintes les plus fortes près de l'encastrement, mais ce n'est pas la zone dimensionnante. La zone d'intérêt, définie par Eurocopter, est en effet la partie grisée présentée sur la Figure 5.2. Nous nous intéressons donc aux contraintes locales maximales dans cet zone, et plus particulièrement à la contrainte moyenne  $\bar{\sigma}_{zz}$  sur l'élément numéroté 5876, qui est dimensionnante. La valeur correspondante du modèle EF est  $\bar{\sigma}_{zz}^{5876} = 203MPa$ .

Les résultats de la propagation du modèle avec méconnaissances sur cette quantité d'intérêt sont donnés dans le Tableau 5.2. On y présente sur les trois premières lignes les résultats de la propagation de chaque type de méconnaissances étudié séparément, et le résultat de la propagation du modèle complet sur la dernière ligne. La dispersion résultante est ainsi de 45% de la quantité d'intérêt  $\bar{\sigma}_{zz}^{5876}$ .

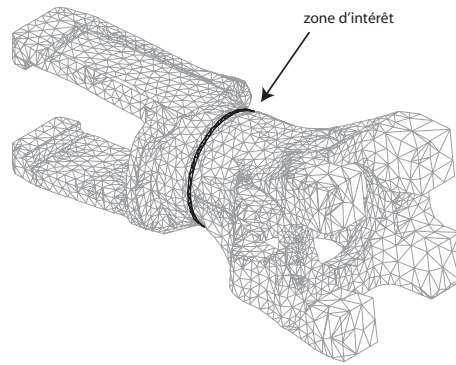


FIG. 5.2: La zone d'intérêt du manchon.

TAB. 5.2: Résultats de la propagation du modèle avec méconnaissances (bornes à 99% de probabilité).

Bornes de méconnaissances	Bornes de la quantité d'intérêt
$[-\bar{m}_E^-, \bar{m}_E^+] = \pm 5\%$	$[-\Delta\sigma_{zz}^{5876-}, \Delta\sigma_{zz}^{5876+}] = \pm 5,2\%$ de $\bar{\sigma}_{zz}^{5876}$
$[-\bar{m}_\lambda^-, \bar{m}_\lambda^+] = \pm 15\%$	$[-\Delta\sigma_{zz}^{5876-}, \Delta\sigma_{zz}^{5876+}] = \pm 14,5\%$ de $\bar{\sigma}_{zz}^{5876}$
$[-\bar{m}_Z^-, \bar{m}_Z^+] = \pm 15\%$	$[-\Delta\sigma_{zz}^{5876-}, \Delta\sigma_{zz}^{5876+}] = \pm 30,2\%$ de $\bar{\sigma}_{zz}^{5876}$
Modèle complet	$[-\Delta\sigma_{zz}^{5876-}, \Delta\sigma_{zz}^{5876+}] = \pm 45,6\%$ de $\bar{\sigma}_{zz}^{5876}$

## 4 Résultats pour la défaillance du modèle avec méconnaissances

### 4.1 Limite de défaillance déterministe

Nous appliquons la théorie des méconnaissances pour traiter la défaillance de la structure, en considérant tout d'abord le cas où la contrainte limite de défaillance est déterministe (voir les résultats dans le Tableau 5.3). On rappelle la valeur de la contrainte associée au critère de défaillance en fatigue :  $\sigma_c = 270MPa$ . Conformément au travail effectué auparavant dans ce chapitre, il est possible de calculer la probabilité de défaillance  $P_f^{LOK}$ , associée à la défaillance de la structure décrite par le modèle complet avec méconnaissances.

Comme le modèle complet comporte plusieurs types de méconnaissances, on définit un indicateur pour chaque type de méconnaissance, indicateur qui évalue le gain en terme de probabilité de défaillance d'une diminution de 10% de la méconnaissance correspondante. On rappelle que l'indicateur de la marge disponible par réduction de la méconnaissance sur la rigidité est noté  $I_E$  et s'exprime :

$$I_E = \frac{P_f^{LOK}(\{m_E, m_\lambda, m_Z\}) - P_f^{LOK}(\{0,9.m_E, m_\lambda, m_Z\})}{0,1.m_E} \quad (5.1)$$

Celui associé à la méconnaissance sur l'amplitude des efforts, noté  $I_\lambda$ , vaut :

$$I_\lambda = \frac{P_f^{LOK}(\{m_E, m_\lambda, m_Z\}) - P_f^{LOK}(\{m_E, 0, 9.m_\lambda, m_Z\})}{0,1.m_\lambda} \quad (5.2)$$

Enfin, l'indicateur,  $I_Z$ , correspondant à la méconnaissance sur la direction des efforts s'exprime comme suit :

$$I_Z = \frac{P_f^{LOK}(\{m_E, m_\lambda, m_Z\}) - P_f^{LOK}(\{m_E, m_\lambda, 0, 9.m_Z\})}{0,1.m_Z} \quad (5.3)$$

Les résultats de ce modèle pour la défaillance du manchon sont donnés dans le Tableau 5.3. La probabilité de défaillance associée au modèle avec méconnaissances est ainsi de 17% environ. Les valeurs des différents indicateurs sur la marge disponible par réduction des méconnaissances nous enseignent que la probabilité de défaillance est essentiellement sensible à une variation de méconnaissance sur la direction des efforts appliqués. En effet, la valeur de l'indicateur de la marge disponible par réduction des méconnaissances sur la direction est d'un ordre de grandeur 10 fois plus grand que ceux concernant les méconnaissances sur les rigidités des éléments ou sur l'amplitude des efforts (valeur de 3,5 contre 0,35 et 0,25).

Si l'on souhaite diminuer la probabilité de défaillance, il est donc essentiel d'améliorer, dans un premier temps, la connaissance ou la modélisation des direction des effort appliqués à la structure. C'est en effet en diminuant la valeur des méconnaissances portant sur ces directions que l'on diminuera significativement la probabilité de défaillance.

**TAB. 5.3:** Modèle pour la défaillance de la tête de rotor, cas d'une limite déterministe et quantité d'intérêt  $\sigma_{zz}^{5876}$  ( $\bar{\sigma}_{zz}^{5876} = 2,03.10^2 MPa$ ,  $\sigma_c = 270 MPa$ ).

$P_f^{LOK}$	17%
$I_E$	0,35
$I_\lambda$	0,25
$I_Z$	3,5

## 4.2 Limite de défaillance incertaine

En réalité, de par les légères différences de caractéristiques matériau et de géométrie entre différents manchons, la contrainte associée à la défaillance connaît une certaine dispersion. En faisant l'hypothèse d'un comportement fragile, le meilleur modèle consiste à modéliser par une loi de Weibull cette dispersion. La densité de probabilité de la contrainte de défaillance s'exprime alors :

$$f_{\sigma_c}(x) = k \left( \frac{x}{\lambda} \right)^{k-1} \exp^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k} \quad (5.4)$$

Elle est paramétrée par  $k$  et  $\lambda$ . Le paramètre  $k$ , dont la valeur est ici  $k = 10$ , influe sur la finesse de la distribution autour de la valeur moyenne contrôlée par le paramètre  $\lambda$ , dont la valeur est ici  $\lambda = 270MPa$ . Les résultats de cette modélisation sont présentés dans le Tableau 5.4. Les remarques effectuées dans le cas où la limite de défaillance était considérée déterministe sont encore valables ici, à savoir que ce sont les incertitudes portant sur la direction des efforts qu'il est le plus important de maîtriser. La probabilité de défaillance obtenue est comparable à celle obtenue avec une limite déterministe de valeur  $270MPa$ , légèrement supérieure car la distribution de Weibull autorise des occurrences de défaillance pour des valeurs de contrainte inférieures à cette valeur de  $\lambda$ .

**TAB. 5.4:** Modèle pour la défaillance de la tête de rotor, cas d'une limite incertaine et quantité d'intérêt  $\sigma_{zz}^{5876}$  ( $\bar{\sigma}_{zz}^{5876} = 2,03.10^2MPa$ ,  $(k;\lambda) = (10; 2,7.10^2MPa)$ ).

$P_f^{LOK}$	19%
$I_E$	3,5
$I_\lambda$	2,0
$I_Z$	9,0

### 4.3 Bilan

En phase de conception, la théorie des méconnaissances peut donc apporter des informations cruciales : selon la valeur acceptable de probabilité de défaillance, les indicateurs proposés permettent d'informer le concepteur sur l'intérêt de progresser dans la connaissance ou la modélisation de telle ou telle information.

Concernant la modélisation des efforts, il est intéressant de remarquer que c'est lorsque l'on introduit une méconnaissance ( $m_Z(\theta)$ ) sur la direction de la distribution d'efforts que l'indicateur de la marge est le plus élevé. Cela signifie que la contrainte d'intérêt étudiée ici  $\sigma_{zz}^{5876}$  est plus sensible à une incertitude sur la direction des efforts qu'à une incertitude sur leur amplitude. Il est donc particulièrement important de se donner les moyens de bien connaître ou maîtriser la direction de ces efforts.

Ainsi, l'apport de la théorie des méconnaissances dans cette étude de caractérisation de la défaillance de la tête de rotor d'hélicoptère pour un cas de chargement réside en deux points :

- l'obtention d'une évaluation précise de la probabilité de défaillance à la fatigue, qui est de 17% environ ;
- l'information de la sensibilité de cette probabilité de défaillance aux méconnaissances introduites pour modéliser les incertitudes, ce qui permet au concepteur de se décider



sur l'intérêt de réduire les taux de méconnaissances introduites. Ici, la principale connaissance à affiner est celle de la direction des distributions d'efforts.

Concernant la valeur de probabilité de défaillance obtenue, il est à remarquer que les valeurs de méconnaissances mériteraient d'être affinées, par un apport de connaissance donnant lieu à une étape de réduction préalable au calcul de probabilité de défaillance.

## 5 Conclusion

Dans ce dernier chapitre, nous avons présenté une application complète de la théorie des méconnaissances et de son utilisation dans un cadre de conception robuste. En modélisant les incertitudes présentes sur la rigidité de la structure et celles sur les distributions d'efforts appliqués par des méconnaissances adaptées, les résultats obtenus donnent une indication de la probabilité de défaillance de 17% environ. De plus, par la donnée des indicateurs de la marge disponible en réduisant les taux de méconnaissances, les résultats présentés permettent de cibler le besoin d'amélioration de la connaissance des paramètres du modèle.

# Conclusion

Dans ce document, nous avons proposé des extensions de la théorie des méconnaissances en mécanique des structures pour modéliser les incertitudes présentes sur l'environnement des structures, et évaluer une probabilité de défaillance. Ces développements ont été effectués dans le cadre de la statique ; il a donc été nécessaire de définir une propagation des méconnaissances à des quantités d'intérêt de types contraintes ou déplacements locaux, par une technique d'extraction dans le cas de faibles valeurs de méconnaissances. Nous avons aussi présenté des travaux montrant la pertinence d'une description par méconnaissances.

Afin de garder l'intérêt de globalisation des incertitudes par la description par méconnaissances, nous avons proposé de modéliser les incertitudes sur l'environnement en introduisant des méconnaissances sur l'amplitude de chaque distribution d'efforts, et une autre sur leurs directions. En outre, cela est en adéquation avec les données issues de capteurs, pour lesquelles on peut séparer les incertitudes sur leur position et celles sur la valeur mesurée.

Le calcul de la probabilité de défaillance issue du modèle avec méconnaissances se base sur la borne supérieure de la quantité d'intérêt dimensionnante issue du modèle avec méconnaissances. Pour qualifier la sensibilité aux valeurs de méconnaissances, on a proposé de rajouter à la donnée de cette probabilité celle d'un indicateur sur la marge disponible. Les applications présentées ont montré tout l'intérêt de ces travaux, en permettant la prédiction d'une défaillance par une approche globale, légère en temps de calcul, correspondant mieux aux attentes d'un ingénieur qu'une vision microscopique des incertitudes par une modélisation paramétrique. Une telle approche intervient dans une politique de réduction des marges.

Les perspectives envisageables pour continuer d'étendre la théorie des méconnaissances sont les suivantes :

- *Élargir le champ des incertitudes susceptibles d'être décrites à des incertitudes portant sur un comportement non-linéaire d'un matériau, comme un comportement plastique, ou la présence de contacts, de jeux et de frottements.*

Dans tous les cas, il faudra garder à l'esprit que la spécificité de l'approche avec méconnaissances réside dans le fait qu'elles sont définies à un niveau énergétique global. Il n'y a aucun intérêt à définir les méconnaissances par paramètre. L'objectif à atteindre est de trouver une définition des méconnaissances globale et énergétique, mais suffisamment pratique pour pouvoir les identifier clairement, et d'obtenir comme sortie du modèle les dispersions des paramètres utiles à l'ingénieur.

Pour définir des méconnaissances sur la plasticité, il faudra essayer de construire un modèle spécifique, s'inspirant des approches existantes, mais simple, et reflétant les problématiques des ingénieurs. On peut imaginer définir des méconnaissances sur une grandeur énergétique comme le potentiel d'écoulement plastique.

Une des difficultés pour ces extensions réside dans la difficulté à propager les incertitudes de façon conservative dans des modèles non-linéaires, tout en ne sur-

dimensionnant pas trop.

- *Propager des méconnaissances de tous types dans le cas de fortes valeurs.* Des travaux ont été déjà effectués concernant la prise en compte de fortes méconnaissances de rigidité en dynamique. Il s'agira ici de définir un cadre pour propager de fortes méconnaissances sur les efforts, pour des quantités d'intérêt statiques.

- *Définir une stratégie claire pour l'identification des méconnaissances à partir de données expérimentales (le processus nommé "réduction"), et la définition des essais pertinents à effectuer.*

Cela suppose de mener des études pour quantifier à quel point les données expérimentales utilisées dans le processus de réduction permettent, par l'intermédiaire du coefficient de représentativité, une vision juste des méconnaissances de base, qui doivent être intrinsèques, sur une sous-structure considérée.

À cela s'ajoute la nécessité de déterminer quels essais, complémentaires de ceux dont on dispose déjà, permettraient de réduire au mieux une méconnaissance donnée. Il sera alors possible d'établir une stratégie du choix des meilleurs essais à effectuer sur une structure donnée, permettant ainsi une optimisation importante des coûts liés à l'expérimentation.

- *À plus long terme, on peut aussi envisager d'étendre le concept de méconnaissances à l'amortissement des structures, pour ainsi aboutir à une théorie complète en dynamique.*

Comme l'amortissement, en particulier celui des structures aéronautiques, est souvent très mal connu, les challenges à relever sont nombreux, et l'on ne pourra pas se contenter d'utiliser des approches linéarisées.



# Bibliographie

- [1] P. Ladevèze and D. Leguillon. Error estimate procedure in the finite element method and application. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 20(3) :485–509, 1983.
- [2] I. Babuska and W.C. Reinboldt. Error estimates for adaptive finite element computation. *SIAM J. Num. Anal.*, 15, 1978.
- [3] O.C. Zienkiewicz and J.Z. Zhu. A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis. *Int. J. for Num. Meth. in Engrg.*, 24 :337–357, 1987.
- [4] I. Babuška and T. Strouboulis. *The finite element method and its reliability*. Oxford University Press, 2001.
- [5] P. Ladevèze and J.P. Pelle. *Mastering calculations in linear and nonlinear mechanics*. Springer, Mechanical Engineering Series, 2004.
- [6] K. Popper. *The Logic of Scientific Discovery*. Routledge Classics. Taylor and Francis, 2003.
- [7] J.T. Oden, T. Belytschko, I. Babuska, and T. Hughes. Research directions in computational mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192 :913–922, 2003.
- [8] F. M. Hemez, S. W. Doebling, and M. C. Anderson. A brief tutorial on verification and validation. In *Proceedings of the 22th International Modal Analysis Conference (IMAC-XXII)*, Dearborn, Michigan, January 26-29 2004.
- [9] W. Oberkampf, T. Trucano, and C. Hirsh. Verification, validation and predictive capability in computational engineering and physics. Technical report, Sandia Report 2003-3769, 2003.
- [10] A. Saltelli, S. Tarantola, F. Campolongo, and M. Ratto. *Sensitivity Analysis in Practice : A Guide to Assessing Scientific Models*. John Wiley and Sons, 2004.
- [11] A. Deraemaeker, P. Ladevèze, and T. Romeuf. Model validation in the presence of uncertain experimental data. *Engineering Computations*, 21(8) :808–833, 2004.
- [12] P. Ladevèze, G. Puel, A. Deraemaeker, and T. Romeuf. Validation of structural dynamics model with uncertainties. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(4-6) :373–393, 2006.
- [13] P. Ladevèze. Model validation or how can one describe the lack of knowledge. *IACM Expression*, 2005.

- [14] P. Ladevèze. Sur une théorie des méconnaissances en calcul des structures. Programme RAF 2001 SY/XS 136 127, EADS Launch Vehicles, Avril 2002.
- [15] P. Ladevèze, G. Puel, A. Deraemaeker, and T. Romeuf. Sur une théorie des méconnaissances en calcul des structures. *Revue Européenne des Éléments Finis*, 13 :571–584, 2004. Giens 2003.
- [16] P. Ladevèze, G. Puel, and T. Romeuf. Lack of knowledge in structural model validation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195 :4697–4710, July 2006 2006.
- [17] P. Ladevèze, G. Puel, P. Enjalbert, and T. Romeuf. Theory of the lack of knowledge : basic aspects and applications. In *Proceedings of the 6th International symposium on launcher technologies*, Munich, Germany, November 8-11 2005.
- [18] G. Puel, P. Ladevèze, and T. Romeuf. How to reduce the lack of knowledge of an industrial model in structural dynamics. In *Proceedings of the 23rd International Modal Analysis Conference (IMAC-XXIII)*, Orlando, Florida, January 31st - February 3th 2005.
- [19] G. Puel, P. Ladevèze, and T. Romeuf. Réduction des méconnaissances d'une structure industrielle. In *Actes du 7e Colloque National en Calcul des Structures*, Giens, Var, May 17-20 2005.
- [20] P. Ladevèze, G. Puel, and T. Romeuf. On a strategy for the reduction of the lack of knowledge (LOK) in model validation. *Reliability Engineering and System Safety*, 91 :1452–1460, October-November 2006.
- [21] P. Ladevèze, G. Puel, and T. Romeuf. Reduction of the lack of knowledge of an industrial structural dynamics model. In *8th US National Congress on Computational Mechanics*, Austin, Texas, July 25-27 2005.
- [22] P. Ladevèze, G. Puel, and T. Romeuf. Quantifying the lack of knowledge of an industrial model in structural dynamics. In *Proceedings of the 8th International Conference on Computational Plasticity (COMPLAS VIII)*, Barcelona, Spain, September 5-7 2005.
- [23] P. Ladevèze, P. Enjalbert, G. Puel, and T. Romeuf. Extension of the theory of the lack of knowledge. In *Proceedings of the 24th International Modal Analysis Conference (IMAC-XXIV)*, Saint Louis, Missouri, January 30. - February 2. 2006.
- [24] P. Ladevèze, P. Enjalbert, F. Louf, G. Puel, and T. Romeuf. On the lack of knowledge theory for computational elasticity problems. In *Proceedings of the 25th International Modal Analysis Conference (IMAC-XXV)*, Orlando, Florida, February 19-22. 2007.
- [25] P. Ladevèze, P. Enjalbert, F. Louf, and T. Romeuf. The lack of knowledge theory for anisotropic elasticity problems. In *Proceedings of the International Conference on Engineering Dynamics (ICED 2007)*, Carvoeiro, Portugal, April 16-18. 2007.
- [26] C. Blanzé. Rapport interne. (in french), LMT-Cachan, Cachan, 2000.

- [27] E. T. Jaynes. Information theory and statistical mechanics. *Physical Review*, 106(4) :620–630, 1957.
- [28] E. T. Jaynes. Information theory and statistical mechanics II. *Physical Review*, 108(2) :171–190, 1957.
- [29] C. Soize. Maximum entropy approach for modeling random uncertainties in transient elastodynamics. *Journal of the Acoustical Society of America*, 109 :1979–1996, 2001.
- [30] C. Soize. Non-gaussian positive-definite matrix-valued random fields for elliptic stochastic partial differential operators. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 195 :26–64, 2006.
- [31] C. Soize R. Cottureau, D. Clouteau. Construction of a probabilistic model for impedance matrices. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 196 :2252–2267, 2007.
- [32] C. E. Shannon. A mathematical theory of communication. *Bell System Technology Journal*, 27 :379–423 ; 623–659, 1948.
- [33] M. Loève. *Probability Theory*. Springer Verlag, 1977. 4th edition.
- [34] R. G. Ghanem and P. D. Spanos. *Stochastic Finite Elements : a Spectral Approach*. Springer, 1991.
- [35] N. Wiener. The homogeneous chaos. *American Journal of Mathematics*, 60 :897–936, 1938.
- [36] R. G. Ghanem and P. D. Spanos. *Stochastic Finite Elements : a Spectral Approach, revised edition*. Springer, 2003.
- [37] M.F. Ngah and A. Young. Application of the spectral stochastic finite element method for performance prediction of composite structures. *Composite Structures*, 78 :447–456, 2007.
- [38] Alireza Doostan, Roger G. Ghanem, and John Red-Horse. Stochastic model reduction for chaos representations. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 196 :3951–3966, 2007.
- [39] B. Sudret G. Blatman. Sparse polynomial chaos expansions and adaptive stochastic finite elements using a regression approach. *C. R. Mecanique*, 336 :518–523, 2008.
- [40] A. Nouy. A generalized spectral decomposition technique to solve a class of linear stochastic partial differential equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196 :4521–4537, 2007.
- [41] V. Retel N. Carrère, Y. Rollet and L. Boubakar. Composites structural modelling with uncertain data. *Composites Science and Technology*, 69 :60–66, 2009.
- [42] F.-H. Leroy N. Carrère, Y. Rollet and J.-F. Maire. Efficient structural computations with parameters uncertainty for composite applications. *Composites Science and Technology*, 69, 2009.
- [43] Giunta A Romero VJ, Swiler LP. Construction of responses surfaces based on progressive-lattice-sampling experimental designs with application to uncertainty propagation. *Struct Safety*, 26, 2004.



- [44] Rutherford B. A response-modeling approach to characterization and propagation of uncertainty specified over intervals. *Reliability Engineering System*, 85, 2004.
- [45] C. Soize. A nonparametric model of random uncertainties for reduced matrix models in structural dynamics. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 15 :277–294, 2000.
- [46] E. Capiez-Lernout, M. Pellissetti, H. Pradlwarter, G.I. Schueller, and C. Soize. Data and model uncertainties in complex aerospace engineering systems. *Journal of Sound and Vibration*, 295 :923–938, 2006.
- [47] A. M. Hasofer and N. C. Lind. Exact and invariant second-moment code format (an exact and invariant first order reliability format). *Journal of Engineering Mechanics*, 100 :111–121, 1974.
- [48] M. Rosenblatt. On a multivariate transformation. *Ann Math Statist*, 23 :470–2, 1952.
- [49] M. Lemaire. Reliability and mechanical design. *Reliability Engineering and System Safety*, 55(2) :163–170, 1997.
- [50] X. Du and A. Sudjianto. First order saddlepoint approximation for reliability analysis. *AIAA*, 42 :1199–207, 2004.
- [51] B. Huang and X. Du. Probabilistic uncertainty analysis by mean-value first order saddlepoint approximation. *Reliability Engineering and System Safety*, article in press.
- [52] R. M. Moore. *Interval Analysis*. Prentice-Hall, 1966.
- [53] R.M. Moore. *Methods and Applications of Interval Analysis*. Studies in Applied Mathematics (SIAM), 1979.
- [54] O. Dessombz. *Analyse dynamique de structures comportant des paramètres incertains*. PhD thesis, École Centrale de Lyon, 2000.
- [55] A. Neumaier. *Interval Methods for Systems of Equations*, volume 43. Cambridge University Press, 1990.
- [56] R. Muhanna and R.L. Mullen. Uncertainty in mechanics problems—interval-based approach. *J. Eng. Mech. ASCE*, 127 :557–566, 2008.
- [57] L. A. Zadeh. Fuzzy sets. *Information and Control*, 8 :338–353, 1965.
- [58] S.S. Rao and L. Chen. Numerical solution of fuzzy linear equations in engineering analysis. *Internat. J. Numer. Methods Eng.*, 43 :391–408, 1998.
- [59] Iwona Skalnaa, M.V. Rama Raob, and Andrzej Pownukc. Systems of fuzzy equations in structural mechanics. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, article in press.
- [60] U. Gauger, S. Turrin, M. Hanss, and L. Gaul. A new uncertainty analysis for the transformation method. *Fuzzy Sets and Systems*, 159 :1273 – 1291, 2008.
- [61] F. Massa, K. Ruffin, T. Tison, and B. Lallemand. A complete method for efficient fuzzy modal analysis. *Journal of Sound and Vibration*, 309 :63–85, 2008.

- [62] Javier Toraño, Isidro Diego, Mario Menéndez, and Malcolm Gent. A finite element method (fem) – fuzzy logic (soft computing) – virtual reality model approach in a coalface longwall mining simulation. *Automation in Construction*, 17 :413–424, 2008.
- [63] Y. Ben-Haim and I. Elishakoff. *Convex Models of Uncertainty in Applied Mechanics*. Elsevier, 1990.
- [64] Y. Ben-Haim. *Information-Gap Decision Theory*. Academic Press, London, 2001.
- [65] Y. Ben-Haim. *Information-gap decision theory for engineering design, Or : Why 'Good' is Preferable to 'Best', in Engineering Reliability Handbook*. E. Nikolaidis, D. Ghiocel (Eds), 2005.
- [66] Y. Ben-Haim and F. M. Hemez. Robustness-to-uncertainty, fidelity-to-data and prediction-looseness of models. In *Proceedings of the 22nd International Modal Analysis Conference (IMAC-XXII)*, Dearborn, Michigan, January 26-29 2004.
- [67] Izuru Takewakia and Yakov Ben-Haim. Info-gap robust design with load and model uncertainties. *Journal of Sound and Vibration*, 288 :551–570, 2005.
- [68] L. Jezequel S. Lignon. A robust approach for seismic damage assessment. *Computers and Structures*, 85 :4–14, 2007.
- [69] G. Klir. Generalized information theory. *Fuzzy Sets and Systems*, 40 :127–142, 1991.
- [70] A. P. Dempster. Upper and lower probabilities generated by a random interval. *Annals of Mathematical Statistics*, 39(3) :957–966, 1968.
- [71] G. Shafer. *A Mathematical Theory of Evidence*. Princeton University Press, 1976.
- [72] E. Florentin P. Ladevèze. Verification of stochastic models in uncertain environments using the constitutive relation error method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196 :225–234, 2006.
- [73] G. Puel, P. Ladevèze, A. Deraemaeker, and D. Barthe. Sur une théorie des méconnaissances en calcul des structures. In *Actes du Sixième Colloque National en Calcul des Structures*, pages 399–406, Giens (Var), 20-23 Mai 2003.
- [74] F. Louf, P.E. Charbonnel, P. Ladevèze, and C. Gratien. An updating method for structural dynamics models with unknown excitations. In *Proceedings of the 6th International Conference on Inverse Problems in Engineering (ICIPE 2008)*, Dourdan, Essonne, June 15-19 2008.
- [75] P. Ladevèze and A. Chouaki. Application of a posteriori error estimation for structural model updating. *Inverse Problems*, 15 :49–58, 1999.
- [76] P. Ladevèze. *Continuum Damage Mechanics of Materials and Structures. An anisotropic damage theory with unilateral effects : applications to laminates and to three- and four- dimensional composites*. Elsevier, 2002.
- [77] E. Florentin, P. Ladeveze, P. Blanchard, and E. Greco. A local stress error upper-bound applied to elastic industrial structures. In *ECCM 2001 - European Conference on Computational Mechanics. Cracovie, Pologne, Orlando, Florida, 2001*.