



**HAL**  
open science

# Représentations Temps-Fréquence et Temps-Echelle Bilinéaires: Synthèse et Contributions

Paulo Gonçalves

► **To cite this version:**

Paulo Gonçalves. Représentations Temps-Fréquence et Temps-Echelle Bilinéaires: Synthèse et Contributions. Traitement du signal et de l'image [eess.SP]. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG, 1993. Français. NNT: . tel-00572335

**HAL Id: tel-00572335**

**<https://theses.hal.science/tel-00572335>**

Submitted on 1 Mar 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# **T H E S E**

présentée par

Paulo GONÇALVÈS

pour obtenir le grade de **DOCTEUR**

de **l'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE**

(arrêté ministériel du 30 Mars 1992)

(Spécialité : **Traitement du Signal** )

---

**REPRESENTATIONS TEMPS-FREQUENCE ET TEMPS-ECHELLE BILINEAIRES:**

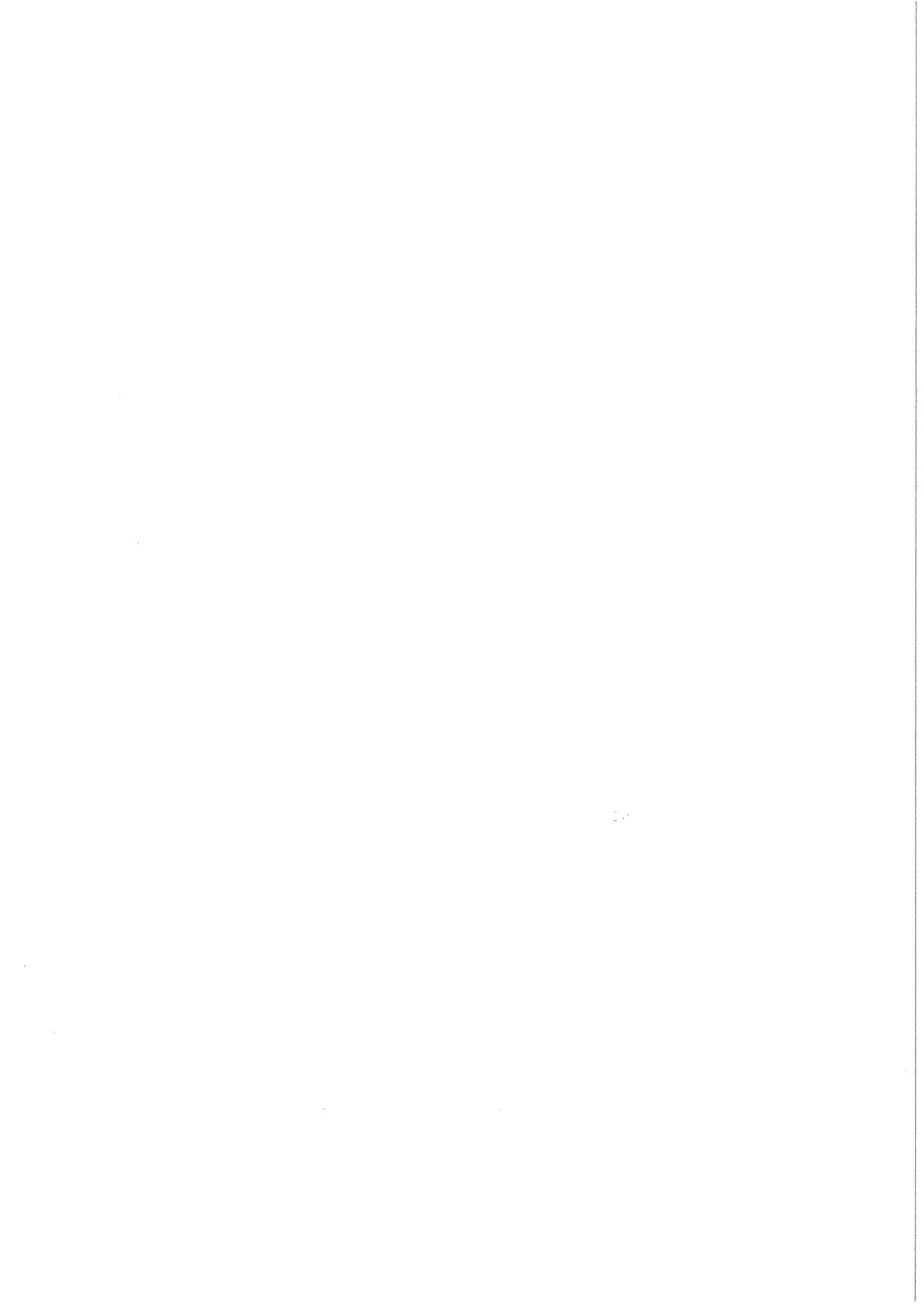
**SYNTHESE ET CONTRIBUTIONS**

---

Soutenu le 26 Novembre 1993  
devant la commission d'examen

<b>JURY :</b>	Monsieur	<b>J. L. LACOUME</b>	Président
	Messieurs	<b>F. CASTANIE</b>	Rapporteur
		<b>A. GROSSMANN</b>	Rapporteur
		<b>P. FLANDRIN</b>	Directeur de thèse
		<b>F. HLAWATSCH</b>	

Thèse préparée au sein du **Laboratoire de Physique de l'Ecole Normale Supérieure de Lyon**



Il est normal d'associer à ce travail le nom de ceux et celles qui par leurs compétences scientifiques et qualités humaines se sont révélés les garants indispensables du bon déroulement de cette thèse. Je veux donc profiter du cadre un peu protocolaire de ces remerciements pour dire combien je leur suis reconnaissant de la confiance qu'ils ont bien voulu m'accorder.

Le plaisir que j'ai éprouvé à travailler ces trois dernières années aux cotés de Patrick Flandrin lui vaut ma profonde gratitude. Par sa lucidité et l'intégrité de son engagement, il a su canaliser avec bienveillance le cours inexpérimenté de mes élucubrations sans jamais faire valoir l'autorité de son statut. Ces qualités, et bien d'autres encore, ont préservé intact un respect qui dès le début lui était acquis.

A messieurs les Professeurs Francis Castanié et Alex Grossmann qui ont bien voulu se prêter à la tâche ingrate de rapporteurs, je veux exprimer toute ma reconnaissance. Qu'ils soient également remerciés pour leur patience dont les diverses versions du manuscrit auraient pu avoir raison.

C'est avec non moins de plaisir que je constate les bénéfiques dégagés de nos nombreux échanges avec Franz Hlawatsch, le caractère jugé parfois prolix du manuscrit (...) n'ayant jamais émoussé la rigueur et la pertinence de son jugement.

Monsieur le Professeur Jean-Louis Lacoume en me faisant l'honneur d'accepter la présidence du jury, m'offre l'occasion de lui témoigner ma gratitude ainsi qu'à l'ensemble de la formation doctorale "Signal Image Parole" de Grenoble.

Il serait injuste de négliger l'influence exercée par l'opportunité de certaines rencontres. Ainsi, Patrice Abry et Richard Baraniuk ont largement contribué à cette étude en infléchissant à bon escient certaines de ses orientations. Qu'ils soient donc assurés de ma très grande sympathie. Que se sentent également concernés Christophe Baudet et Jean-François Pinton pour m'avoir inculqué quelques rudiments sur la théorie de la turbulence et surtout fourni un support expérimental pour le test de certaines méthodes d'analyse.

Enfin, je ne saurais sous-estimer le rôle d'Olivier Michel dont l'initiative personnelle a permis la création d'une équipe "Traitement du Signal" au sein du Laboratoire de Physique de l'Ecole Normale Supérieure de Lyon. A lui et à l'ensemble du Laboratoire de Physique dirigé par Jean-Pierre Hansen, un grand merci pour leur accueil.





# Table des matières

<b>Introduction</b> . . . . .	<b>1</b>
<b>1 Les Outils d'Analyse Temps-Fréquence et Temps-Echelle.</b> . . . . .	<b>5</b>
1.1 Nécessité de représentations conjointes: du Temps-Fréquence . . . . .	6
1.1.1 Représentation dans un espace à une dimension . . . . .	6
1.1.2 Représentation conjointe linéaire . . . . .	8
1.1.3 Une représentation conjointe bilinéaire: Wigner-Ville . . . . .	11
1.1.4 Temps-fréquence énergétique : un formalisme général . . . . .	15
1.1.5 La réduction des interférences . . . . .	17
1.2 ... au Temps-Echelle . . . . .	25
1.2.1 Décomposition en ondelettes continues . . . . .	25
1.2.2 Analyse en ondelettes et analyse "continue" de Gabor . . . . .	27
1.2.3 Temps-échelle énergétique . . . . .	30
1.3 Uniformisation et ouverture sur d'autres classes . . . . .	35
1.3.1 Rappels et définitions sur groupes et représentations . . . . .	35
1.3.2 Groupe de Weyl-Heisenberg. Opérateurs "translation" de Weyl . .	36
1.3.3 Groupe affine . . . . .	41
1.4 Conclusion . . . . .	44
<b>2 Différentes Structures de Noyaux - Différentes Classes de Distributions.</b> <b>47</b>	<b>47</b>
2.1 Un choix de paramétrisation . . . . .	48
2.2 Lissages affines . . . . .	48
2.2.1 Une résolution conjointe liée à l'échelle . . . . .	48
2.2.2 Lissage affine des interférences . . . . .	50
2.2.3 Localisation des <i>DPWVLA</i> . . . . .	54
2.3 Les noyaux bi-fréquentiels localisés . . . . .	59
2.3.1 Le problème de la localisation. Définition . . . . .	59
2.3.2 Admissibilité des solutions . . . . .	62
2.3.3 Existence des solutions . . . . .	63
2.3.4 Localisation et interférences . . . . .	66
2.3.5 Extension à trois paramètres du groupe affine . . . . .	92
2.3.6 La distribution de Altes-Marinovic . . . . .	94
2.4 Résumons... . . . .	95

<b>3 Applications.</b>	<b>97</b>
3.1 Détection. Estimation	98
3.1.1 Place des représentations énergétiques dans la discipline	98
3.1.2 Estimation de retard et tolérance à l'effet Doppler	101
3.1.3 Application à des données réelles	104
3.2 Temps-Fréquence et Temps-Echelle: un Cadre pour l'Analyse Spectrale	107
3.2.1 Analyse spectrale classique et pavage du plan temps-fréquence	107
3.2.2 Transformée en ondelettes et spectres en $1/f$	109
3.2.3 Mise en œuvre sur des signaux de turbulence développée	120
3.3 Caractérisation temps-échelle de singularités	122
3.3.1 Le mouvement Brownien fractionnaire	122
3.3.2 Auto-similarité et ondelettes	126
3.3.3 Distributions affines et singularités non stationnaires	130
3.3.4 Caractérisation de la régularité locale d'une fonction	140
<b>Conclusion</b>	<b>145</b>
<b>Annexe A. Covariance par Rotations</b>	<b>147</b>
<b>Annexe B. Echantillonnage des signaux et repli spectral des DPWVLA</b>	<b>148</b>
<b>Annexe C. Exposant de spectre en <math>1/f</math> et régularité d'ondelette</b>	<b>150</b>
<b>Annexe D. Variance sur le résultat d'une régression linéaire</b>	<b>152</b>
<b>Annexe E. Auto-similarité statistique des <math>fBm</math></b>	<b>154</b>
<b>Références</b>	<b>155</b>
<b>Liste des figures</b>	<b>165</b>

# Introduction

La représentation temporelle demeure sans doute la représentation la plus intuitive pour caractériser l'histoire d'un événement. Dans notre vie au quotidien, les exemples de cette description sont omniprésents: du signal d'élocution au signal de sortie d'un capteur en passant par l'évolution d'indicateurs économiques, invariablement, l'information se distribue sur le paramètre *temps*.

Avec l'introduction de l'analyse de Fourier, un autre point de vue prend corps: c'est l'idée qu'un signal peut se modéliser par une superposition de trains d'ondes *éternels* (les harmoniques). Pour paradoxal qu'il soit, ce résultat montre que la séquence des états d'un système est parfaitement décrite par un ensemble de composantes dont le principal attribut est d'avoir un comportement uniforme au cours du temps... Dans beaucoup de domaines pour lesquels la notion d'onde repose sur une réalité physique, cette vision du signal a conduit à tous les développements accomplis en analyse spectrale, tant du point de vue théorique que de l'instrumentation. De plus, la diversité des disciplines impliquées est un signe de l'*universalité* de ce mode descriptif des signaux. Il est toutefois essentiel de souligner que le concept original de fréquence pure, à la base de l'analyse de Fourier, renferme sa propre limite. En effet, on ne peut donner sens à cette notion que pour des situations de régimes établis (par opposition aux régimes transitoires), de sorte que les signaux non stationnaires sortent naturellement du cadre de cette modélisation.

Or, étant unanimement acquis que les non-stationnarités (prises au sens large) sont porteuses d'une part importante de l'information, on comprend aisément que l'enjeu de leur exploitation ait su galvaniser le développement et la maîtrise d'outils adaptés. Dans cette direction, les *représentations temps-fréquence* ont alors la faculté d'arbitrer le conflit entre descriptions temporelle et fréquentielle en formalisant l'intuition de spectre évolutif et de *fréquence instantanée*. Quoique cette dernière ne soit pas sans soulever des objections de principe, on dispose aujourd'hui de tout un arsenal d'outils temps-fréquence orientés prioritairement vers l'identification de certains types de non-stationnarités. Ces représentations temps-fréquence sont *a priori* des transformations non triviales des signaux, et il a donc fallu investir beaucoup pour comprendre puis modéliser leur comportement. Initié par exemple dans le cas des représentations bilinéaires (définissant en particulier la classe de Cohen), ce travail a permis une classification méthodique des représentations, reposant sur le respect (ou à l'inverse, le non respect) d'un certain nombre de propriétés théoriques. Ce faisant, il devient alors possible pour chaque nature de problème traité, de sélectionner dans le rang des solutions proposées, la distribution *ad hoc* du point de vue de ses propriétés.

A la fois marginale et tributaire de ces propriétés théoriques, la vocation commune à l'ensemble des distributions bilinéaires temps-fréquence repose sur l'idée d'une description bidimensionnelle et géométrique de l'énergie d'un signal dans le plan temps-fréquence. (Parmi les problèmes liés à ce type d'approche, on peut citer celui d'expliquer l'organisation de l'information et l'existence de termes *additifs* (les interférences) dans

une signature temps-fréquence par l'action d'opérateurs de symétries usuelles).

D'un point de vue différent mais parallèle, d'autres représentations sont possibles. Les *représentations temps-échelle* peuvent ainsi apparaître dans la continuité du temps-fréquence et donnent une image des signaux qui est celle de leur comportement temporel à différentes *échelles* d'observation. En abandonnant la notion de fréquence au profit de celle d'échelle, il est évident que la nature des distributions obtenues change. En particulier les propriétés théoriques ne sont plus les mêmes: alors que les distributions temps-fréquence sont naturellement covariantes par rapport aux translations en temps et en fréquence, les distributions temps-échelle ont pour racine commune des propriétés de covariance par rapport aux translations et dilatations en temps. Ce résultat important permet alors d'axer la construction de chacune de ces deux classes de représentation autour du couple d'opérateurs qui les caractérise. C'est cette démarche qu'il nous a semblé intéressant de reproduire dans le premier chapitre de cette thèse. On y trouvera ainsi un certain nombre de résultats généraux qui, s'ils ne sont pas nouveaux, sont présentés de façon à bien souligner les points communs et les différences (de principe ou d'interprétation) existant entre classe de Cohen et classe affine (la classe affine regroupant les distributions bilinéaires temps-échelle).

De fait, lorsque l'on s'efforce d'uniformiser les contextes du temps-fréquence et du temps-échelle, on s'aperçoit assez rapidement de l'existence d'une trame commune pouvant servir de guide à la construction de ces deux classes. Nous avons voulu confirmer cette intuition en construisant selon un même scénario les représentations conjointes naturellement covariantes par l'action de deux opérateurs arbitraires. Un modeste recours à quelques éléments de la théorie des groupes nous fournit alors un cadre méthodologique permettant notamment de resynthétiser les distributions "centrales" des classes de Cohen, affine et hyperbolique (classe des distributions covariantes par dilatation et translation hyperbolique en temps).

D'apparition plus récente, la classe affine n'a certainement pas encore bénéficié des mêmes attentions que la classe de Cohen. En particulier, si les mécanismes de génération des interférences engendrées par les représentations bilinéaires temps-fréquence de la classe de Cohen sont parfaitement identifiés et modélisés, ce travail reste en partie à faire dans le cadre des distributions affines. Présentée au deuxième chapitre, notre contribution à cette étude s'oriente alors dans une direction délibérément géométrique et, en même temps, se nourrit de résultats déjà connus pour la classe de Cohen. Dans un premier temps, nous réintroduisons la classe affine à travers un formalisme original déduit de contraintes de localisation dans le plan temps-fréquence. Ces contraintes particulières s'accompagnent ensuite de règles géométriques de construction permettant d'expliquer pour une large gamme de distributions affines la position des termes interférentiels. Corrélativement, se dégage alors une interprétation de ces représentations mettant en évidence le rôle de symétries relatives à des géométries modifiées. Dans ce même chapitre, nous généralisons enfin la notion de valeur moyenne d'opérateur établie pour la classe de Cohen, à l'ensemble de ces distributions affines dites "localisées".

D'avantage tourné vers des applications potentielles, le dernier chapitre aborde trois types de problèmes de traitement du signal pour lesquels une approche temps-échelle peut

se révéler une solution originale et efficace. Dans chaque cas, la nature des problèmes posés fait appel à des propriétés et spécificités propres aux distributions affines, illustrant ainsi le potentiel, encore peu exploité, de ces dernières.

La première des applications envisagées est un exemple de ce que l'on peut espérer des distributions pouvant se localiser dans le plan temps-fréquence sur des lois de fréquence non linéaires. En l'occurrence, nous abordons le problème de l'estimation de retard en présence d'effet Doppler, situation pour laquelle on sait le rôle prépondérant des signaux à modulation hyperbolique de fréquence (signaux *Doppler-tolérants*). Nous comparons alors les résultats d'un filtrage adapté classique avec ceux d'un *filtrage adapté temps-fréquence* construit à partir de distributions affines unitaires se localisant précisément sur des trajectoires hyperboliques du plan. A titre d'illustration, la structure d'estimateur obtenue est confrontée au problème réel d'écholocation et pour cela, nous utilisons des signaux émis par des chauve-souris (sonars biologiques).

Le deuxième problème soulevé met en avant la notion de filtrage à surtension constante couramment associé aux distributions temps-échelle et notamment aux transformations en ondelettes continues. Pour ce faire, nous nous plaçons dans un cadre d'analyse spectrale en calculant la distribution marginale de fréquence d'un scalogramme. Cette opération conduit à un type d'estimateur spectral qui se distingue des méthodes classiques (Welch) par une bande relative d'analyse de largeur constante. Par suite, c'est la résolution spectrale d'analyse qui se distribue de façon non uniforme sur les fréquences. Appliqué à des spectres modélisables par une loi en  $1/f^\alpha$ , cet estimateur adapte naturellement l'évolution de sa résolution au taux de décroissance de la densité spectrale. Une des contributions de notre travail est alors de montrer que cette procédure permet d'accéder à une estimation non biaisée de l'exposant de puissance  $\alpha$  (ce qui n'est pas le cas de l'analyse spectrale classique) et que de plus il s'agit d'un *estimateur asymptotiquement efficace* (donc convergeant vers un estimateur du type maximum de vraisemblance). Ces résultats sont finalement illustrés sur des signaux de turbulence développée pour lesquels la théorie prédit un modèle spectral compatible avec des variations en  $1/f^\alpha$ , avec  $\alpha$  proche de  $5/3$ .

Dans un dernier volet, nous traitons le cas de signaux présentant localement une structuration en loi d'échelle (e.g. du type *auto-similarité*). La question soulevée est alors celle de l'identification d'un exposant d'échelle local (ou encore exposant de singularité), potentiellement susceptible d'évoluer au cours du temps. Dans une certaine mesure, ce type de problème est très proche de celui posé par le suivi de fréquence instantanée dans un signal, et pour lequel des méthodes temps-fréquence bien choisies apportent une solution rationnelle. Un point de vue analogue transposé au temps-échelle, nous incite à croire que l'information de structure d'échelle portée localement par le signal va s'organiser de manière cohérente à travers les échelles d'une représentation affine. De plus, la dépendance en temps de ces représentations préserve l'aspect localisé de la singularité. Nous vérifions l'exactitude de cette assertion pour certaines distributions temps-échelle pour lesquelles on sait exprimer le critère d'admissibilité.



# **1. Les Outils d'Analyse Temps-Fréquence et Temps-Echelle**



# 1.1 Nécessité de représentations conjointes: du Temps-Fréquence ...

## 1.1.1 Représentation dans un espace à une dimension

Le relevé pluviométrique d'un pays au fil des années, la position d'un pendule excité paramétriquement, la pression atmosphérique au cours d'une combustion explosive, ou encore l'évolution spatiale de la température dans un solide placé dans des conditions aux limites données ... sont autant d'expériences qui, toutes, conduisent à la description physique d'un état en fonction d'un paramètre d'observation: le temps, l'espace ... Bien que différentes par la dimension des phénomènes mesurés, ces descriptions nous semblent naturelles car elles ont en commun de quantifier l'évolution (ou au contraire la permanence) d'un caractère, et que cette notion est parfaitement adaptée au fonctionnement séquentiel de nos capacités à raisonner. Maintenant (ou ici), un système est décrit par un état; plus tard (ou plus loin), cet état aura changé. Par ce mode descriptif, on peut complètement caractériser le système sur un intervalle de temps (ou d'espace) fini ou infini. On repère l'ensemble de ces données par la fonction  $x(u)$ , où  $x$  est le phénomène étudié, appelé *signal* dans notre contexte, et  $u$ , le paramètre de dimensionnement de l'espace d'observation dans lequel est décrite l'évolution du système.

En traitement du signal, on restreint souvent le cadre des fonctions  $x$  à celui des signaux d'énergie  $E_x$  finie<sup>1</sup>,

$$E_x = \int |x(u)|^2 du < \infty. \quad (1.1)$$

Ceux-ci définissent un espace de Hilbert,  $L^2(\mathbb{R})$ , muni d'un produit scalaire

$$\langle x_1, x_2 \rangle = \int x_1(u)x_2^*(u) du \quad (1.2)$$

et d'une norme quadratique associée

$$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle = \int |x(u)|^2 du = E_x. \quad (1.3)$$

Tout choix d'une famille appropriée de cet espace (e.g. une base) fournit un mode de représentation de  $L^2(\mathbb{R})$ . Par conséquent, chaque signal d'énergie finie admet une formulation unique comme projection, au sens du produit scalaire défini en (1.2), sur l'ensemble des éléments de la famille considérée. Dans l'hypothèse d'une famille paramétrée par la variable continue  $\xi$ , ( $e_\xi(u)$ , avec  $\xi \in \mathbb{R}$ ), le résultat du produit scalaire s'écrit

$$X(\xi) = \langle x, e_\xi \rangle = \int x(u)e_\xi^*(u) du, \quad (1.4)$$

où  $X(\xi)$  est également une fonction de la variable  $\xi$ . Réciproquement, si la base de la décomposition vérifie la condition dite de fermeture (i.e.  $\int e_\xi(u)e_\xi(u') d\xi = \delta(u - u')$ ), on recouvre le signal initial  $x$  par reconstruction dans le nouvel espace de projection. Il

---

<sup>1</sup>Par convention, lorsque les bornes d'intégration ne sont pas spécifiées, l'intégration porte sur tout l'axe réel, i.e.  $\int \dots \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \dots$ .

est ainsi possible d'établir un lien biunivoque entre deux formes de représentation,  $x(u)$  et  $X(\xi)$ , d'une même entité. La nature de l'information que ces types de représentation révèlent dans le signal est susceptible de varier avec la structure de la décomposition choisie. Un soin particulier, quant au choix de la famille dans laquelle seront décomposés les signaux, est le gage d'un mode de représentation judicieux de cette information. En particulier, un tel choix peut être motivé par un souci d'économie de représentation des données. La satisfaction de ce critère impose que le signal, après projection sur la base, présente un taux minimum de redondance entre ses coefficients. Souvent, *les bases orthogonales* sont les plus à même d'optimiser le compromis entre quantité d'information et concision de la représentation, mais cette orthogonalité restreint fatalement le cadre d'étude à un contexte de représentations discrètes [52], en marge des priorités de cette introduction.

Le choix le plus célèbre des vecteurs de décomposition, suggéré par Joseph Fourier en 1822, est sans doute l'ensemble des exponentielles complexes,  $e_\xi(u) = \exp(i2\pi\xi u)$ . Le succès de la transformée à laquelle son nom reste attaché, provient en partie de l'interprétation qui peut en être donnée. Mettant en jeu la notion de fréquences pures (harmoniques), cette transformation traduit l'idée que tout signal *intégrable* ( $x \in L^1(\mathbb{R})$ ) peut se voir comme une superposition infinie de motifs élémentaires sinusoïdaux. Ainsi, l'équation (1.4) transposée au cas des exponentielles complexes,

$$X(\xi) = (\mathcal{F} x)(\xi) = \langle x, e_\xi \rangle = \int x(u) e^{-i2\pi\xi u} du \quad (1.5)$$

définit un passage entre formulation *temporelle* et *fréquentielle*, qu'il est possible d'inverser dans le cas des signaux appartenant à  $L^2(\mathbb{R})$

$$x(u) = (\mathcal{F}^{-1} X)(u) = \int X(\xi) e^{i2\pi\xi u} d\xi. \quad (1.6)$$

Par cet isomorphisme de  $L^2(\mathbb{R})$ , la conservation du produit scalaire est un résultat important que traduit l'égalité de Plancherel-Parseval

$$\begin{aligned} \langle x_1, x_2 \rangle &= \int X_1(\xi) X_2^*(\xi) d\xi \\ \int |x(u)|^2 du &= \int |X(\xi)|^2 d\xi. \end{aligned} \quad (1.7)$$

L'intérêt d'un tel choix n'est plus à démontrer, mais la transformée de Fourier n'est pas sans soulever un certain nombre de problèmes conceptuels qui vont motiver le développement de méthodes d'analyse conjointes.

La première remarque porte sur *la non-appartenance* des exponentielles complexes à l'espace  $L^2(\mathbb{R})$ . Conformément à (1.6), la transformée de Fourier exprime formellement le paradoxe qu'un signal à énergie finie peut s'obtenir par superposition d'éléments, qui eux, sont d'énergie infinie. D'un point de vue mathématique, on sait cependant donner un sens à ce qui physiquement semble une aberration, il convient alors de rappeler que la transformée de Fourier définie en (1.5) sur les éléments de  $L^2(\mathbb{R})$ , est *le prolongement* d'un opérateur linéaire continu de l'espace vectoriel des fonctions indéfiniment

dérivables à décroissances rapides, vers lui-même, espace dans lequel les fonctions ne sont pas nécessairement de carré sommable (donc d'énergie finie) [52].

Une seconde remarque, en lien avec le désaccord soulevé par la précédente, nous amène à considérer les supports temporels des éléments d'analyse. Les exponentielles complexes sont des modèles théoriques n'ayant ni début, ni fin! Ce résultat est d'ailleurs immédiat lorsque l'on compare les deux relations

$$|e^{i2\pi\xi u}|^2 = 1 \text{ et } \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{i2\pi\xi u}|^2 du = \infty.$$

Cette pérennité des exponentielles force la transformée de Fourier  $S(\xi)$  à intégrer le signal sur toute sa durée, afin d'en extraire l'information relative à une fréquence pure  $\xi$ . La perte de localisation temporelle dans l'espace de Fourier, est duale du fait que la connaissance ponctuelle d'un système masque l'état harmonique dans lequel celui-ci se trouve.

Cette exclusivité entre représentations est transparente si l'information n'est pas contenue dans le séquençement des composantes fréquentielles du signal. En revanche, lorsque cette hypothèse n'est pas vraie, les limitations propres à chacun de ces modes de représentation trahissent une relative pauvreté des analyses à une dimension, et soulignent l'importance de définir un isomorphisme de  $L^2(\mathbb{R})$  capable d'isoler la même information qu'une étude spectrale, sans sacrifier la structure de localisation temporelle du signal. Pour formaliser ce besoin, on conçoit assez intuitivement l'idée d'une base paramétrée conjointement par les variables d'observation et leur duale harmonique dont elle cumulerait schématiquement chacun des avantages. Les méthodes temps-fréquence (prises au sens large) offrent un paradigme naturel pour réorganiser l'information initialement contenue dans le signal, en termes de contributions ponctuelles *d'atomes*. Idéalement, on souhaite ces atomes très *concentrés* sur l'axe fréquentiel, tout en restant à support temporel raisonnablement compact.

En fait, bien qu'assez récemment formalisée, cette notion n'est pas nouvelle puisqu'elle reprend le concept ancien et implicite des partitions musicales [115].

### 1.1.2 Représentation conjointe linéaire

Une façon simple de contourner l'antinomie entre une description temporelle et une décomposition fréquentielle, est de limiter la durée d'existence des fonctions d'analyse. L'exponentielle complexe de la transformation de Fourier est alors restreinte au voisinage d'une date  $t$  donnée, par multiplication par une fenêtre  $\phi$ . Cette restriction présente en outre l'avantage de borner l'énergie de l'atome d'analyse, rectifiant ainsi le paradoxe mentionné au paragraphe 1.1.1. La *transformée de Fourier à court terme* qui en résulte s'écrit [51]

$$T_x(t, \nu) = \int x(u) \phi^*(u - t) e^{-i2\pi\nu u} du. \quad (1.8)$$

Comme pour la transformée de Fourier conventionnelle (1.5), la transformée à court terme se déduit de l'action du produit scalaire défini en (1.2)

$$T_x(t, \nu) = \langle x, \phi_{t\nu} \rangle = \int x(u) \phi_{t\nu}^*(u) du \quad (1.9)$$

que l'on l'interprète comme la projection du signal  $x$  sur l'atome  $\phi_{t\nu}(u) = \phi(u-t)e^{i2\pi\nu u}$ . Chacun de ces atomes est déduit de la fenêtre élémentaire  $\phi$  par l'action d'opérateurs de translation en temps et en fréquence

$$\phi_{t\nu}(u) = (\mathcal{M}_\nu \mathcal{T}_t \phi)(u) \quad (1.10)$$

*Remarque.* L'opérateur  $\mathcal{M}_\nu$  a pour effet de translater le signal dans le domaine fréquentiel, mais il s'apparente à une modulation linéaire dans le domaine temporel

$$(\mathcal{M}_\nu \phi)(u) = \phi(u)e^{i2\pi\nu u}.$$

En tant qu'objet frontière entre les représentations temporelle et fréquentielle du signal, la transformée de Fourier à court terme peut se dériver formellement de  $(\mathcal{F} x)$

$$T_x(t, \nu) = \int X(\theta) \Phi^*(\theta - \nu) e^{i2\pi(\theta - \nu)t} d\theta = \langle X, \Phi_{t\nu} \rangle \quad (1.11)$$

où, là encore  $\Phi_{t\nu}(\theta) = (\mathcal{T}_\nu \mathcal{M}_t \Phi)(\theta)$ . Il est intéressant de souligner l'ordre des opérations de translation de la cellule élémentaire  $\Phi$ : une décalage en temps de  $t$ , suivie d'une translation en fréquence de valeur  $\nu$ . Une permutation de ces opérations conduirait à l'adjonction d'un terme supplémentaire du type  $e^{i2\pi\nu t}$  dans  $T_x(t, \nu)$ . Cette phase pure, si elle laisse inchangée le module de  $T_x$ , en modifie l'argument.

La transformée de Fourier, on l'a vu, projette de façon unique un signal  $x$  dans le domaine dual des fréquences. Cette unicité est importante et assure l'existence d'une formule d'inversion. Vouloir préserver cette relation bijective entre  $L^2(\mathbb{R})$  et un sous espace fermé de  $L^2(\mathbb{R}^2)$  dans le domaine temps-fréquence impose une contrainte supplémentaire sur la fenêtre analysante  $\phi$ . Plus précisément, si  $E_\phi = \int |\phi(\tau)|^2 d\tau = \int |\Phi(\nu)|^2 d\nu$ , est une quantité finie (et bien sûr différente de zéro), alors on montre que [61]]

$$x(t) = \frac{1}{E_\phi} \iint T_x(u, \theta) \phi(t-u) e^{i2\pi\theta t} dud\theta, \quad x \in L^2(\mathbb{R}). \quad (1.12)$$

La même condition sur  $\phi$  garantit l'existence d'une forme réciproque de  $T_x$  vers  $(\mathcal{F} x)$

$$X(\nu) = \frac{1}{E_\phi} \iint T_x(u, \theta) \Phi(\nu - \theta) e^{-i2\pi(\nu - \theta)u} dud\theta. \quad (1.13)$$

Comme pour les analyses à une dimension, le choix de la famille de décomposition se heurte à un certain nombre de contraintes. En particulier, l'interdit notoire portant sur la compacité stricte et simultanée des supports temporel et fréquentiel d'un signal, fait obstacle au concept théorique de cellules capables de confiner toute leur énergie sur un domaine compact du plan temps fréquence [107],[81]. Dans une logique rigoureuse, c'est alors le principe essentiel des représentations bi-dimensionnelles des signaux qui s'en trouve compromis. On peut pourtant assouplir le dilemme en définissant sur les cellules, des supports équivalents (en temps et en fréquence) liés à une mesure de leur *concentration énergétique*. Par exemple,

$$\Delta t_\phi^2 = \frac{\int t^2 |\phi(t)|^2 dt}{\int |\phi(t)|^2 dt}$$

$$\Delta \nu_\phi^2 = \frac{\int \nu^2 |\Phi(\nu)|^2 d\nu}{\int |\Phi(\nu)|^2 d\nu}$$

sont des mesures couramment admises dans le cas de signaux centrés. Le produit de ces deux grandeurs est ensuite soumis au fameux principe d'incertitude de Gabor-Heisenberg [116],[51]

$$\Delta t_\phi \Delta \nu_\phi \geq \frac{1}{4\pi}, \quad (1.14)$$

selon lequel il y a incompressibilité du produit durée bande en dessous d'une certaine valeur seuil (avec égalité si le signal est d'enveloppe gaussienne). Autrement dit, il n'est pas possible de concentrer l'énergie d'un signal sur une durée et une largeur de bande aussi arbitrairement petites que voulues, ce qui par suite, exclue l'idéal d'une représentation conjointe capable de décrire *ponctuellement* dans le plan temps-fréquence l'état du signal à un instant  $t$  donné et relativement à une fréquence  $\nu$  unique. Parce que la cellule élémentaire  $\phi_{t\nu}$  occupe dans le plan temps-fréquence une surface de mesure non nulle,  $T_x(t, \nu)$  caractérise le signal  $x$  sur des horizons  $\Delta t_\phi$  et  $\Delta \nu_\phi$  respectivement autour des points  $t$  et  $\nu$  (les cas limites ( $\Delta t_\phi \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta \nu_\phi \rightarrow \infty$ ) et ( $\Delta \nu_\phi \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta t_\phi \rightarrow \infty$ ) convergent respectivement vers les représentations temporelle de Shannon et fréquentielle de Fourier).

Dans le cadre des décompositions continues, le recouvrement des cellules voisines d'analyse est responsable d'une certaine redondance d'information. Si, dans un contexte d'analyse, cette redondance est souhaitable car elle facilite la lisibilité de l'image temps-fréquence en assurant une certaine continuité entre composantes, elle fait obstacle à l'obtention de représentations minimales que justifieraient des perspectives de codage. Échantillonner le plan temps-fréquence permet toutefois de réduire la redondance d'information de ces décompositions continues, et donc le nombre de coefficients nécessaires à la description du signal. Pratiquement, cette discrétisation revient à appliquer sur le plan temps-fréquence une grille dont la taille des mailles est fixée par les grandeurs  $\Delta t_\phi$  et  $\Delta \nu_\phi$  et à ne calculer la représentation conjointes qu'aux points d'intersection de ce maillage. Moralement, cette opération peut se voir comme une concentration de l'information portée par chaque cellule élémentaire en un seul point significatif du plan temps-fréquence. De plus, si l'on fait l'hypothèse d'une base orthogonale de décomposition, il est possible de minimiser la taille de la série des coefficients obtenus [59], [60]. Ce cas particulier de décompositions orthogonales discrètes [74] se heurte cependant au problème de la délocalisation qui affecte les éléments de la base.

Le théorème de Balian-Low [5],[10] traduit cette incompatibilité entre contrainte d'orthogonalité (ou de façon moins contraignante hypothèse de *frame*<sup>2</sup>, [36]) et com-

<sup>2</sup>Une famille de fonctions discrètes  $(\phi_j)_{(j \in J)}$  est un *frame* de l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  si il existe deux réels  $A > 0$  et  $B < \infty$  tels que pour tout élément  $x$  de  $\mathcal{H}$ , on ait  $A\|x\|^2 \leq \sum_j |\langle x, \phi_j \rangle|^2 \leq B\|x\|^2$ . Les familles particulières pour lesquelles  $A = B$ , sont désignées dans la terminologie anglo-saxonne par *tight frame*.

pacité de support en temps et en fréquence en énonçant que:

Si  $\{\phi_{t_i\nu_j}, \forall (i, j) \in I \times J\}$  constitue un frame tel que le pavage correspondant dans le plan temps-fréquence soit de densité minimum (i.e. suffisamment dense pour ne pas perdre d'information et suffisamment lâche pour éviter le phénomène de redondance), alors  $\Delta t_\phi^2 = \infty$  ou  $\Delta \nu_\phi^2 = \infty$ .

Cette dernière remarque conduit, dans bien des applications, à sacrifier la contrainte d'orthogonalité à la faveur d'un compromis sur les localisations temporelle et fréquentielle. L'optimisation conjointe de ces résolutions étant subordonnée, par exemple, à la minimisation du produit durée-bande ( $\Delta t_\phi \Delta \nu_\phi$ ) de la fenêtre d'analyse  $\phi$ , la gaussienne prévaut naturellement sur tout autre choix [46].

C'est dans cette optique de l'analyse par paquets gaussiens (harmoniques purs modulés par une fenêtre gaussienne),

$$\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} e^{i2\pi\nu_0 t}. \quad (1.15)$$

que Gabor introduisit en 1946 [51], le terme de *logons* comme "aire minimum représentative d'un *quantum* d'information"<sup>3</sup>.

Le logon est ici une solution adéquate au critère particulier de localisation conjointe, mais il est évident que si l'on choisit de privilégier une autre propriété, il faudra adapter en conséquence la fenêtre analysante.

### 1.1.3 Une représentation conjointe bilinéaire: Wigner-Ville

Dans l'étude harmonique des signaux, c'est souvent la densité spectrale<sup>4</sup> qui est considérée. On peut alors transposer cette approche aux distributions temps-fréquence, en ne considérant que le module carré des transformées de Fourier à court terme, ce qui naturellement, gomme toute notion de phase dans la représentation. Le nouvel objet d'analyse obtenu, appelé *spectrogramme*, vise plus à décomposer l'énergie du signal en termes de contributions localisées "d'unités" énergétiques, que de décrire la forme même du signal. Dans cette optique, le spectrogramme n'est qu'un élément particulier d'une large classe de distributions énergétiques temps-fréquence. Un très grand nombre de propositions ont été faites, mais celle qui a suscité le plus vif intérêt et inspiré la plus large étude est sans doute la *distribution de Wigner-Ville* [118],[115], dont on rappellera ici la définition, ainsi que les principales caractéristiques

$$\begin{aligned} W_x(t, \nu) &= \int x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-i2\pi\nu\tau} d\tau, \\ &= \int X^*\left(\nu + \frac{\theta}{2}\right) X\left(\nu - \frac{\theta}{2}\right) e^{i2\pi\theta t} d\theta. \end{aligned} \quad (1.16)$$

<sup>3</sup>Cette interprétation est empruntée à [46].

<sup>4</sup>module carré de la transformée de Fourier pour les signaux déterministes, Fourier-Stieljes des fonctions de corrélation pour les processus stochastiques.

La dimension énergétique de ces représentations est portée par la structure bilinéaire de leurs expressions, mais cette structure permet également d'identifier la distribution de Wigner-Ville à une transformée de Fourier à court terme d'un type particulier

$$W_x(t, \nu) = 2 e^{i\pi 4\nu t} T_x(2t, 2\nu), \text{ avec } \phi(u) = x(-u), \quad (1.17)$$

où la fenêtre à court terme utilisée est elle-même une image (retournée en temps) du signal. En un certain sens, cette adaptation entre fenêtre analysante et signal à analyser peut argumenter de l'optimalité de la distribution de Wigner-Ville en termes de représentations conjointes localisées .

### Quelques propriétés intéressantes

Nous citons ici, quelques exemples des avantages offerts par la définition de la distribution de Wigner-Ville:

- *Conservation de supports.* Si le signal  $x$  est à support temporel compact, ou à bande spectrale limitée, alors  $W_x$  est nulle en dehors des intervalles correspondant dans le plan temps-fréquence.
- *Marginales.* Par intégration de la distribution de Wigner-Ville selon l'une des deux variables (temps ou fréquence), on retrouve respectivement la densité spectrale d'énergie et la puissance instantanée du signal

$$|X(\nu)|^2 = \int W_x(t, \nu) dt, \quad (1.18)$$

$$|x(t)|^2 = \int W_x(t, \nu) d\nu. \quad (1.19)$$

- *Conservation de l'énergie.* Une conséquence immédiate de (1.18) et (1.19) est que

$$E_x = \iint W_x(t, \nu) dt d\nu. \quad (1.20)$$

- *Unitarité.* En tant qu'isomorphisme de  $L^2(\mathbb{R})$  vers un sous espace de l'espace de Hilbert  $L^2(\mathbb{R}^2)$ , la distribution de Wigner-Ville conserve le produit scalaire. La *formule de Moyal* [90] traduit ce résultat

$$\left| \int x(t) y^*(t) dt \right|^2 = \iint W_x(t, \nu) W_y(t, \nu) dt d\nu \equiv \ll W_x, W_y \gg. \quad (1.21)$$

- *Covariance par translations.* Simultanément vérifiées, les covariances par translation en temps et en fréquence assurent la commutativité du diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} x(t) & \longrightarrow & x(t - t_0)e^{-i2\pi\nu_0 t} = (\mathcal{T}_{t_0}\mathcal{M}_{\nu_0} x)(t) \\ \downarrow & & \downarrow \\ W_x(t, \nu) & \longrightarrow & W_x(t - t_0, \nu - \nu_0) \end{array} \quad (1.22)$$

- *Covariance par changement d'échelle.* La distribution de Wigner-Ville d'un signal dilaté (ou comprimé) subit les mêmes effets dans le plan conjoint temps-fréquence

$$\begin{array}{ccc} x(t) & \longrightarrow & \sqrt{|\alpha|}x(\alpha t) \\ \downarrow & & \downarrow \end{array} \quad (1.23)$$

$$W_x(t, \nu) \longrightarrow W_x\left(\alpha t, \frac{\nu}{\alpha}\right)$$

- *Fréquence instantanée.* On accède à la fréquence instantanée du signal  $x(t)$

$$x(t) = |x(t)| e^{i\Phi_x(t)} \implies \nu_x(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \Phi_x(t)$$

où  $\Phi_x(t)$  est la phase instantanée du signal (supposé analytique)  $x$ , par le moment du premier ordre de la distribution de Wigner-Ville  $W_x(t, \nu)$

$$\nu_x(t) = \frac{\int \nu W_x(t, \nu) d\nu}{\int W_x(t, \nu) d\nu} \quad (1.24)$$

- *Retard de groupe.* De même, le retard de groupe

$$X(\nu) = |X(\nu)| e^{i\tilde{\Phi}_x(\nu)} \implies \tau_x(\nu) = -\frac{1}{2\pi} \frac{d}{d\nu} \tilde{\Phi}_x(\nu)$$

est donné par

$$\tau_x(\nu) = \frac{\int t W_x(t, \nu) dt}{\int W_x(t, \nu) dt} \quad (1.25)$$

## Un élément nouveau: les interférences

La structure non linéaire de la distribution de Wigner-Ville (1.16) fait interagir le signal avec lui-même en deux dates (respectivement deux fréquences) différentes mais symétriques par rapport à  $t$  (respectivement  $\nu$ ). De cette interaction, peuvent naître des composantes localisées en des coordonnées du plan temps-fréquence où le signal n'est pas censé exister. Ces termes interférentiels, (qui *a priori*, pourraient être perçus comme des artefacts induits par la représentation), sont non seulement essentiels au respect de certaines propriétés théoriques des distributions, mais encore sont à la base de l'existence toute entière des signatures temps-fréquence (les em auto-composantes s'interprètent alors comme une conséquence des interférences internes). C'est parce que la frontière entre ces interférences internes et externes est floue qu'il est important de bien en comprendre la génération, afin de mieux circonscrire les composantes propres du signal. On sait en particulier, que la distribution de Wigner-Ville d'un signal  $x$  constitué de  $N$  composantes ( $x_i$  pour  $i = 1 \dots N$ ), se caractérise dans le plan temps-fréquence, par  $N + C_N^2$  termes [62], [66]

$$W_x(t, \nu) = \sum_{k=1}^N W_{x_k}(t, \nu) + 2\text{Ré} \left[ \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N W_{x_i x_j}(t, \nu) \right], \quad (1.26)$$



où  $W_{x_k}$  sont les distributions individuelles de chacune des composantes (elles définissent les “*auto-composantes*” de la représentation), et  $W_{x_i x_j}$  sont les termes interférentiels, construits sur le modèle d’une distribution de Wigner-Ville croisée

$$W_{x_i x_j}(t, \nu) = \int x_i \left( t + \frac{\tau}{2} \right) x_j^* \left( t - \frac{\tau}{2} \right) e^{-i2\pi\nu\tau} d\tau. \quad (1.27)$$

Pour avoir une idée plus précise de la localisation et de la structure de ces composantes interférentielles, il convient de prendre un exemple simple de (1.26), et d’appliquer (1.27). Choisissons alors  $N = 2$ ,  $x_1(t) = e^{i2\pi\nu_1 t}$  et  $x_2(t) = e^{i2\pi\nu_2 t + \Phi_0}$ . En calculant directement le terme  $\text{Ré}[W_{x_1 x_2}(t, \nu)]$ , il vient

$$\text{Ré}[W_{x_1 x_2}(t, \nu)] = \cos(2\pi|\nu_1 - \nu_2|t - \Phi_0) \delta\left(\nu - \frac{\nu_1 + \nu_2}{2}\right) \quad (1.28)$$

où  $\delta$  symbolise la distribution de Dirac. Dans ce cas particulier, on voit que le terme interférentiel est formé d’une composante harmonique oscillant à la fréquence  $|\nu_1 - \nu_2|$ , et théoriquement localisée en  $\nu = (\nu_1 + \nu_2)/2$ . On généralisera ce résultat à une disposition quelconque des *auto-composantes*, en évoquant la covariance de la distribution de Wigner par rotation dans le plan temps-fréquence<sup>5</sup>. Deux composantes propres du signal, localisées en  $(t_1, \nu_1)$  et  $(t_2, \nu_2)$ , interfèrent en un point  $(t_i, \nu_i)$

$$\begin{cases} t_i = \frac{t_1 + t_2}{2} \\ \nu_i = \frac{\nu_1 + \nu_2}{2} \end{cases} \quad (1.29)$$

qui n’est autre que le milieu du segment joignant les deux *auto-composantes* du signal. Cette règle de construction est réversible, de sorte qu’*a posteriori*, sur une image de Wigner-Ville, toute valeur non nulle située en  $(t, \nu)$  est le lieu des combinaisons interférentielles de l’ensemble des couples symétriques par rapport au point  $(t, \nu)$  au sens de la moyenne arithmétique. Le formalisme mathématique de ce résultat est donné par la *formule des interférences de Janssen* [70]

$$|W_x(t, \nu)|^2 = \iint W_x \left( t + \frac{\tau}{2}, \nu + \frac{\theta}{2} \right) W_x \left( t - \frac{\tau}{2}, \nu - \frac{\theta}{2} \right) d\tau d\theta. \quad (1.30)$$

Du point de vue de l’interprétation géométrique, la relation (1.30) permet de bien comprendre la localisation de la distribution de Wigner-Ville sur des signaux modulés linéairement en fréquence, puisqu’alors toutes les composantes d’interférence sont confondues avec “la partie signal” de la représentation.

L’autre inconvénient des termes interférentiels, porte sur leur structure oscillante. Si celle-ci est essentielle au respect des marginales vraies, elle est également responsable de la *non positivité* de la distribution de Wigner. Il devient, dans ces conditions, délicat d’associer à cette analyse temps-fréquence l’image d’une mesure de densité énergétique, grandeur a priori rigoureusement positive.

<sup>5</sup>Cf. Annexe 1, où l’on démontre le cas particulier de la covariance par rapport à l’opérateur de rotation.

Enfin, la prolifération des zones interférentielles dans des contextes de signaux “multicomposantes”, complique très rapidement l’expertise visuelle d’une image temps-fréquence.

Toutes ces raisons justifient des efforts employés à la réduction des interférences tout en préservant au maximum les propriétés de localisation de la distribution.

#### 1.1.4 Temps-fréquence énergétique : un formalisme général

La distribution de Wigner-Ville n’est pas la seule représentation énergétique temps-fréquence envisageable. On peut situer la recherche d’autres candidats dans le contexte plus général de l’étude de la fonctionnelle intégrale suivante

$$\rho_x(t, \nu) = \iint k(t, \nu, t_1, t_2) x(t_1) x^*(t_2) dt_1 dt_2 \quad (1.31)$$

dans laquelle la structure bilinéaire traduit la contrainte énergétique. Les choix de  $k$ , noyaux de l’opérateur, sont multiples, mais on restreint le champ des solutions admissibles, en imposant simplement à l’opérateur  $\rho_x$  de vérifier la covariance par translation (1.22). Sous cette contrainte, le choix des structures  $k$  est réduit aux seuls noyaux du type [23], [24], [25], [26], [27], [40]

$$k(t, \nu, t_1, t_2) = F\left(\frac{t_1 + t_2}{2} - t, t_1 - t_2\right) e^{i2\pi\nu(t_1 - t_2)}, \quad (1.32)$$

où  $F$  est une fonction bitemporelle arbitraire. La classe des transformations  $\rho_x$  paramétrée par cette structure, porte le nom de *classe de Cohen* (1966), et s’écrit

$$C_x(t, \nu) = \iint F(u - t, \tau) x\left(u + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(u - \frac{\tau}{2}\right) e^{-i2\pi\nu\tau} dud\tau. \quad (1.33)$$

En déclinant les expressions de  $F$  selon les combinaisons possibles entre les variables  $(u, \tau)$  et de leurs duales par Fourier, on obtient quatre formes équivalentes de (1.32)

$$\begin{array}{ccc} F(u, \tau) & \xleftrightarrow{\mathcal{F}_{\tau \leftrightarrow \theta}} & \Pi(u, \theta) \\ \mathcal{F}_{u \leftrightarrow n} \downarrow & & \downarrow \mathcal{F}_{u \leftrightarrow n} \\ f(n, \tau) & = \xleftrightarrow{\mathcal{F}_{\theta \leftrightarrow \zeta}} & \pi(n, \theta) \end{array}$$

chacune d’elles correspondant à une écriture spécifique de (1.33). Un cas particulier intéressant met en jeu la formulation *temps-fréquence*  $\Pi$  de  $F$ , puisqu’alors (1.33) devient

$$C_x(t, \nu) = \iint W_x(u, \theta) \Pi(u - t, \theta - \nu) dud\theta, \quad (1.34)$$

que l’on identifie à la corrélation de la distribution de Wigner-Ville par le noyau  $\Pi$ . Dans une perspective particulière de réduction des interférences de la distribution de Wigner-Ville, le choix judicieux d’une fonction de paramétrisation à caractère passe-bas (selon les

Table 1.1: Quelques propriétés de la classe de Cohen et contraintes sur les noyaux associés

Propriétés	Contraintes sur le noyau
distribution énergétique	$f(0, 0) = 1$
conservation support temporel	$\int f(n, \tau) e^{i2\pi n t} dn = 0 ;  \tau  < 2 t $
conservation support fréquentiel	$\int f(n, \tau) e^{-i2\pi \nu \tau} d\tau = 0 ;  n  < 2 \nu $
marginale en fréquence	$f(0, \tau) = 1$
marginale en temps	$f(n, 0) = 1$
unitarité (Moyal)	$ f(n, \tau)  = 1$
distribution réelle	$f(n, \tau) = f^*(-n, -\tau)$
covariance par dilatation	$f\left(\frac{n}{\alpha}, \alpha\tau\right) = f(n, \tau) \forall \alpha$
fréquence instantanée	$f(n, 0) = 1$ et $\frac{\partial f}{\partial \tau}(n, \tau) _{\tau=0} = 0$
retard de groupe	$f(0, \tau) = 1$ et $\frac{\partial f}{\partial n}(n, \tau) _{n=0} = 0$

deux directions temps et fréquence) isole la sous classe des distributions de *Wigner-Ville lissées* [27], [65].

La paramétrisation générique définie en (1.33), englobe une majorité de distributions temps-fréquence suggérées de façon éparsée dans la littérature; le spectrogramme (cf. §1.1.3) n'échappe pas à cette règle, puisqu'en combinant formule de Moyal (1.21) et covariance par translation (1.22), il vient

$$\begin{aligned}
 |T_x(t, \nu)|^2 &= \left| \int x(u) \phi^*(u-t) e^{-i2\pi \nu u} du \right|^2 \\
 &= \iint W_x(u, \theta) W_\phi(u-t, \theta-\nu) dud\theta.
 \end{aligned} \tag{1.35}$$

Un des avantages de cette classification est alors de pouvoir traduire en termes de contraintes sur  $\Pi$ , ou toute autre forme équivalente, les propriétés des distributions correspondantes [65], [64], [63]. Quelques unes de ces propriétés et leurs implications sur les noyaux sont répertoriées dans le tableau 1.1.

Le problème de la compatibilité entre les différentes propriétés a fait l'objet de discussions abondantes [25], [40], [119], en particulier l'impossibilité d'une distribution qui vérifierait simultanément des marginales correctes et assurerait une positivité partout dans le plan temps-fréquence est un résultat établi [40], [71], [72], [73].

Dans le respect de ces principes d'incompatibilité, on peut alors envisager d'imposer un certain nombre de contraintes sur un noyau pour en déduire une distribution "optimale" au sens d'un critère choisi.

Le paragraphe suivant rappelle l'existence de distributions bilinéaires qui cherchent à optimiser le compromis entre réduction des interférences et maintien de certaines propriétés théoriques importantes. Nous ferons également référence à certaines *méthodes adaptatives* qui visent à isoler au mieux les composantes propres d'un signal.

### 1.1.5 La réduction des interférences

Nous avons déjà souligné les motivations qui conduisent à gommer au maximum l'effet des interférences inhérentes aux distributions bilinéaires. Les représentations mettant en œuvre un lissage passe-bas bidimensionnel de la distribution de Wigner-Ville (1.34), dont le spectrogramme est un cas particulier (1.35), sont en ce sens, des solutions *triviales*. Malheureusement, ces approches vont de pair avec la perte d'un certain nombre de propriétés initialement liées à la distribution de Wigner-Ville. Quelques arguments simples permettent d'expliquer ce conflit entre lissage et maintien des propriétés théoriques:

- A l'instar du filtrage temporel à une dimension, il existe un compromis entre la recherche d'une intégration dite *forte*, et une réponse impulsionnelle causale et finie. Appliqué au cas particulier du spectrogramme, le premier argument assure l'élimination des composantes oscillantes (i.e des interférences) générées par la distribution de Wigner-Ville, alors que le second argument favorise la conservation des supports temporels et/ou fréquentiels des signaux. Il en résulte qu'un lissage des termes interférentiels s'accompagne inéluctablement d'une délocalisation des "auto-composantes". La non-conservation des supports couplée à la positivité du spectrogramme s'opposent au respect d'autres propriétés théoriques importantes telles que les marginales correctes ou l'unitarité.
- Par le jeu de transformées de Fourier partielles, réécrivons la relation (1.34) sous forme d'une paramétrisation *fréquence-temps*

$$\begin{aligned} C_x(t, \nu) &= \iint \left( \int x \left( u + \frac{\tau}{2} \right) x^* \left( u - \frac{\tau}{2} \right) e^{i2\pi n u} du \right) f(n, \tau) e^{-i2\pi(nt + \nu\tau)} dn d\tau \\ &= \iint A_x(n, \tau) f(n, \tau) e^{-i2\pi(nt + \nu\tau)} dn d\tau, \end{aligned} \quad (1.36)$$

où  $A_x(n, \tau)$ , transformée de Fourier relativement aux deux variables temps et fréquence de la distribution de Wigner-Ville, désigne également la *fonction d'ambiguïté* au sens de Sussman [109] (comparable à la fonction d'ambiguïté symétrisée de Woodward à une conjugaison près [120])

$$A_x(n, \tau) = \int x \left( u + \frac{\tau}{2} \right) x^* \left( u - \frac{\tau}{2} \right) e^{i2\pi n u} du. \quad (1.37)$$

Dans cette autre paramétrisation de la classe de Cohen, les *auto-composantes* du signal se localisent globalement autour de l'origine, alors que les composantes interférentielles, de par leurs structures oscillantes dans le plan temps-fréquence, se décentrent dans le plan des ambiguïtés. Le rôle de la fenêtre de pondération  $f(n, \tau)$  est alors d'atténuer au maximum les composantes *haute fréquence*, tout en préservant (par ses propriétés de symétrie hermitique) la signature réelle du

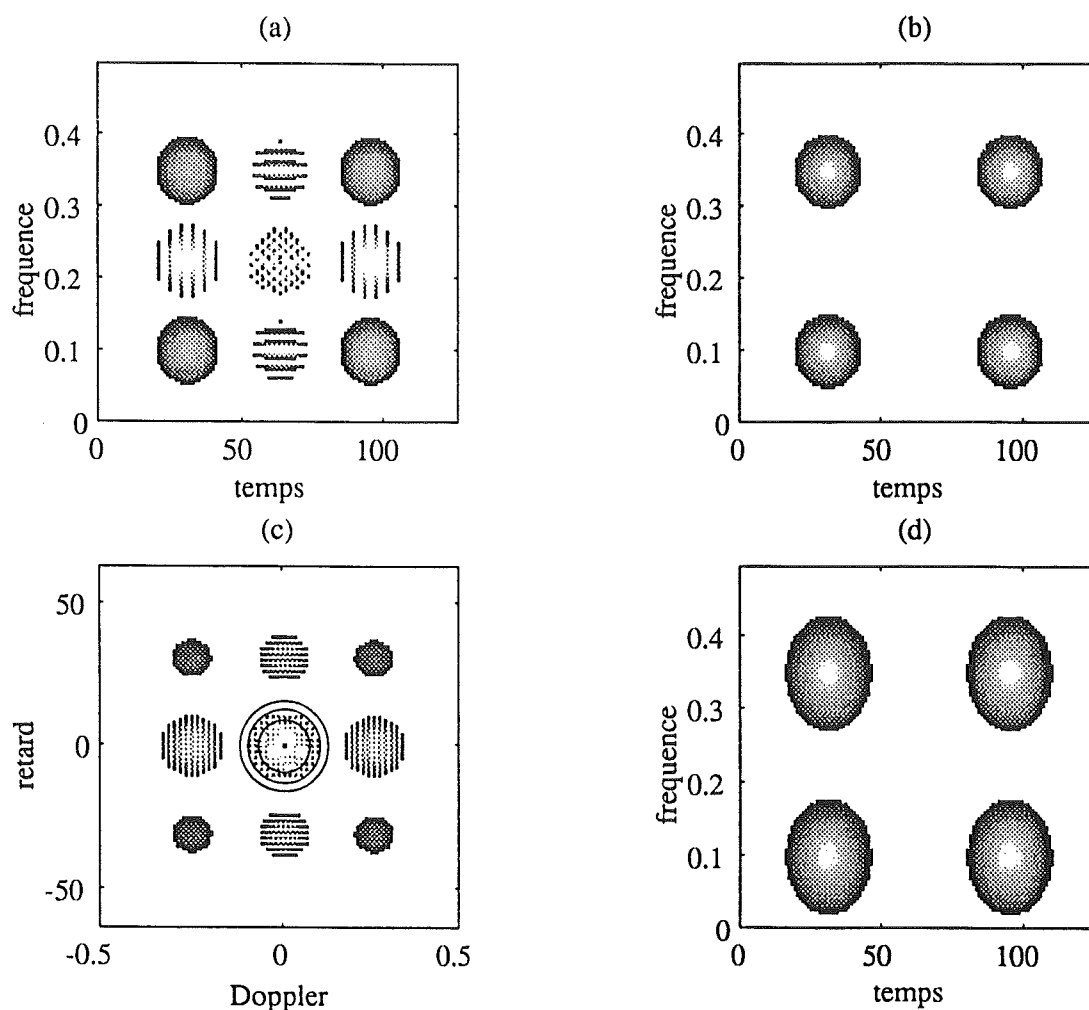


Figure 1.1: (a) Wigner-Ville du signal - (b) représentation "idéale" (du point de vue visuel) du signal - (c) fonction d'ambiguïté et, superposé, le gabarit de la fenêtre  $f(n, \tau)$  correspondant au spectrogramme - (d) spectrogramme.

signal. La figure 1.1 illustre ces comportements dans le cas d'un spectrogramme (décomposition énergétique sur des atomes de Gabor) calculé sur un signal composé de deux logons quasi-disjoints en temps et en fréquence.

On comprend donc bien que cette circonscription de la fonction d'ambiguïté sur un voisinage de l'origine ne permettra pas, dans le cas général, de préserver des marginales correctes (tableau 1.1).

Une représentation sans interférences (externes) et bénéficiant des mêmes propriétés théoriques que la distribution de Wigner-Ville n'existe pas. On peut cependant s'intéresser à des situations de compromis, où la suppression des interférences n'hypothèque pas le maintien d'un ensemble de propriétés importantes.

## Distributions à Interférences Réduites (RID)

C'est dans cette optique consensuelle que certains auteurs proposent une synthèse sous contraintes de la fonction  $f(n, \tau)$  [65], [75]

$$(i) f(n, \tau) = g(n\tau)$$

$$(ii) g(0) = 1 \quad \text{assure les marginales correctes}$$

$$(iii) |g(r_2)| \leq |g(r_1)| \quad \forall r_2 \geq r_1 \quad \text{assure un lissage des interférences.}$$

Désignées sous le terme de RID (reduced interference distributions), les représentations bilinéaires qui en résultent restent des produits dérivés par corrélation de la distribution de Wigner-Ville, mais contrairement aux analyses du type spectrogramme, elles préservent des marginales en temps et en fréquence correctes. Citons parmi celles-ci les distributions de Choi-Williams (CW) [18], [22]

$$f(n, \tau) = \exp\left(-\frac{(2\pi n\tau)^2}{\sigma}\right)$$

Butterworth [95]

$$f(n, \tau) = \frac{1}{1 + \left(\frac{n\tau}{\sigma_0}\right)^{2N}},$$

ou exponentielles généralisées [95]

$$f(n, \tau) = \exp\left(\left(-\frac{n\tau}{\sigma_0}\right)^{2N}\right).$$

Comme l'on peut s'y attendre, le respect de contraintes aussi paradoxales s'équilibre par des artefacts de représentation. Par exemple, la distribution de CW appliquée au signal de la figure 1.1, montre clairement le biais introduit sur la réalité géométrique des auto-composantes (cf. figure 1.2).

Parallèlement à cette volonté conjointe de supprimer les termes interférentiels d'une représentation sans sacrifier au respect de certaines propriétés, émerge le problème de conformité entre type d'analyse et structure du signal. Problème d'autant plus critique ici, que la géométrie de la fonction de pondération est subordonnée à certaines contraintes fortes qui la rendent symétrique et prédéfinie sur différentes régions du plan des ambiguïtés (e.g. de valeur unité sur les axes de retard et de taux Doppler). Pour fixer les idées, considérons à nouveau la distribution de CW estimée sur un signal composé de deux modulations linéaires de fréquence parallèles (figure 1.3). La forme imposée à  $f(n, \tau)$  ne lui permet pas d'isoler correctement la zone signal sans intégrer également une partie des termes croisés.

Le comportement décevant des distributions RID face à certaines signatures provient essentiellement du peu de degré de liberté qu'offre la synthèse du noyau  $f(n, \tau)$ . La double symétrie suivant les axes  $\tau = 0$  et  $n = 0$  impose notamment une influence mutuelle entre résolutions temporelle et fréquentielle. La scission du noyau  $f(n, \tau)$  en deux fonctions d'une seule variable,  $G(n)$  et  $h(\tau)$  découple les actions sur chacune des variables  $n$  et  $\tau$ . Ces noyaux séparables définissent un sous-produit de la classe de Cohen, les distributions *pseudo Wigner-Ville lissées* [40], [47], [49] et font l'objet du paragraphe suivant.

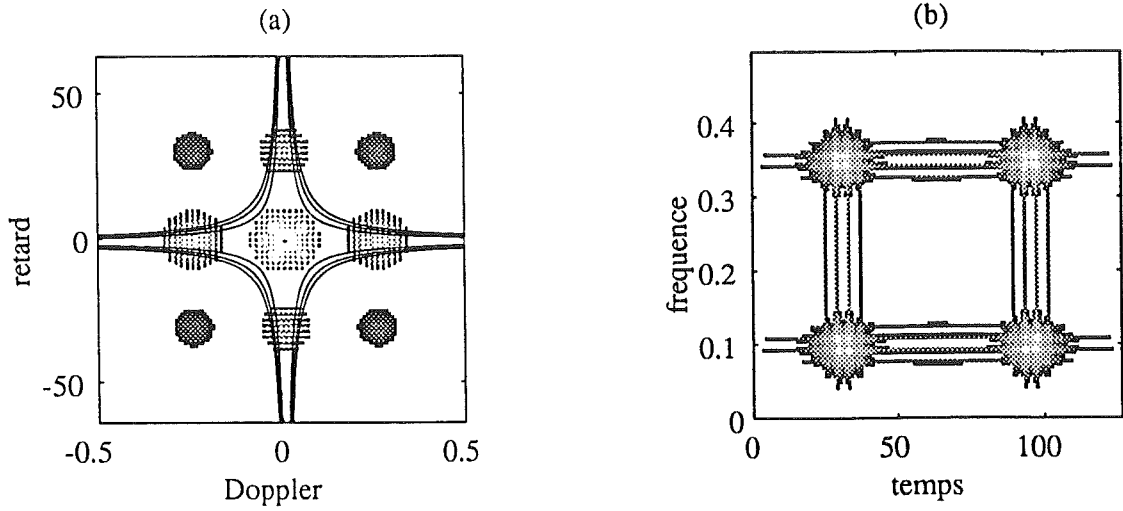


Figure 1.2: (a) Fonction d'ambiguïté et, superposé, le gabarit de la fenêtre  $f(n, \tau)$  correspondant à la distribution de Choi-Williams - (b) Distribution de Choi-Williams.

### Distributions pseudo Wigner-Ville lissées (SPWVD)

Ecrire le noyau  $f(n, \tau)$  sous forme de variables séparables permet d'ajuster indépendamment les résolutions en temps et en fréquence de l'analyse. On peut ainsi réduire les interférences selon l'une ou l'autre direction sans dégrader le comportement de la distribution relativement à sa variable conjointe (par exemple, un lissage unitaire sur une direction est sans effet sur la distribution marginale dans le domaine canoniquement conjugué),

$$\begin{aligned}
 DPWVL(t, \nu) &= \iint W_x(u, \theta) g(u - t) H(\theta - \nu) du d\theta \\
 &= \iint A_x(n, \tau) G(n) h(\tau) e^{-i2\pi(nt + \nu\tau)} dn d\tau, \quad (1.38)
 \end{aligned}$$

$$= \int g(u - t) \int x\left(u + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(u - \frac{\tau}{2}\right) h(\tau) e^{-i2\pi\nu\tau} d\tau du. \quad (1.39)$$

Il est cependant facile de voir que ce type de pondération elliptique privilégie naturellement les axes horizontaux et verticaux du plan de corrélation. Appliquées au signal de la figure 1.3, lequel nécessiterait idéalement une fenêtre de géométrie oblique (dans le plan des ambiguïtés), les  $DPWVL$  ne fournissent pas un résultat réellement satisfaisant, elles permettent tout au plus une situation intermédiaire entre les deux degrés de lissage extrêmes d'une représentation de Wigner-Ville et d'un spectrogramme (figure 1.4) [113].

*Remarque.* Formellement, la comparaison entre un spectrogramme et une  $DPWVL$  n'est possible que dans le cas où la fenêtre à court terme  $\phi$  utilisée est d'expression gaussienne. Dans ce cas précis, la fonction  $W_\phi(t, \nu)$  servant de noyau de corrélation de la distribution de Wigner-Ville dans le schéma de Cohen (1.35), est elle-même à variables séparables

$$\phi(t) = e^{-\alpha t^2} e^{i2\pi\nu_0 t} \Rightarrow W_\phi(t, \nu) = \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha}} \underbrace{e^{-2\alpha t^2}}_{g(t)} \underbrace{e^{-\frac{2\pi^2(\nu - \nu_0)^2}{\alpha}}}_{H(\nu)}.$$

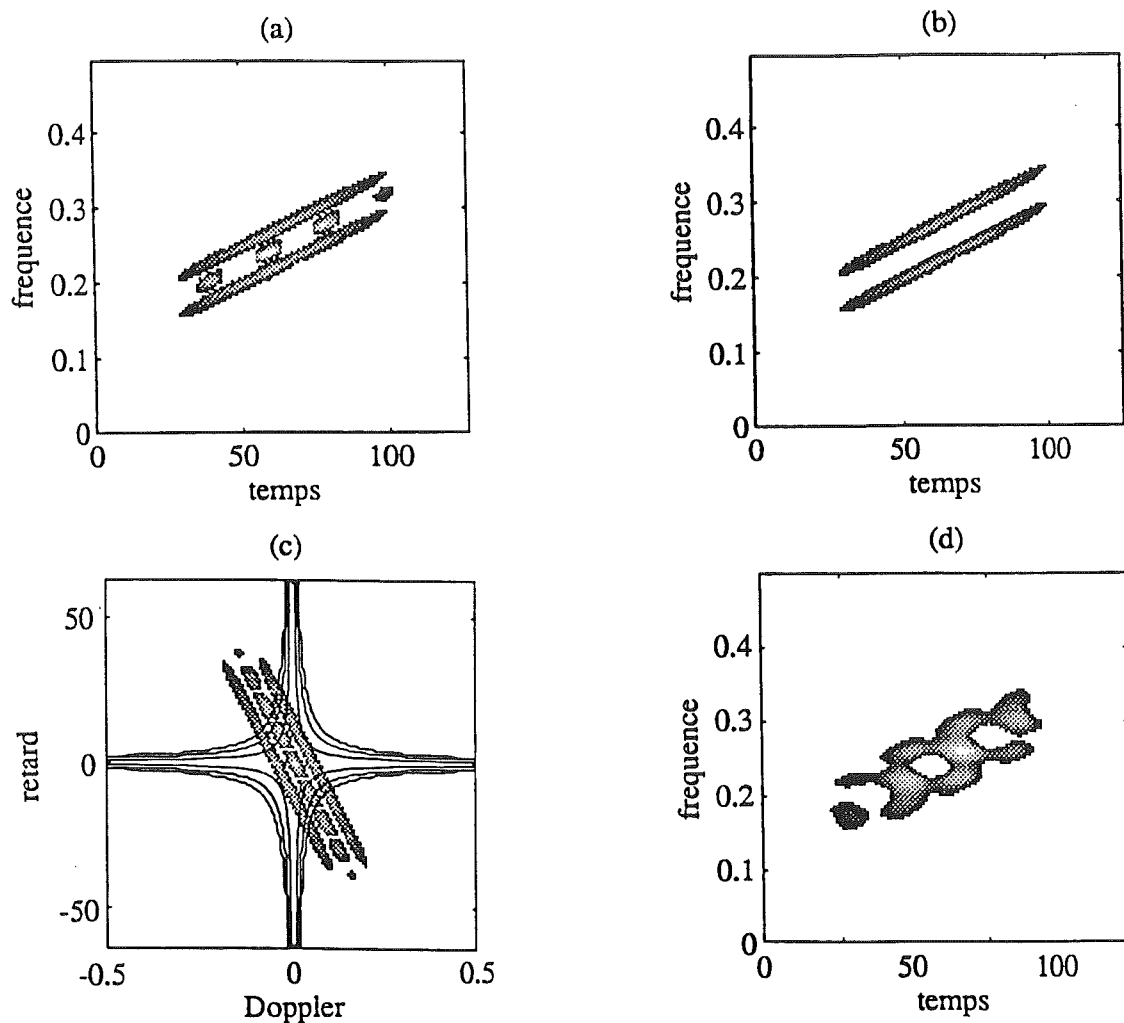


Figure 1.3: (a) Wigner-Ville du signal - (b) Représentation "idéale" du signal - (c) Fonction d'ambiguïté et, superposé, le gabarit de la fenêtre  $f(n, \tau)$  correspondant à la distribution de Choi-Williams (CW) - (d) Représentation de CW.

Les quelques exemples de distributions cités ici, font état de la diversité des approches possibles en temps-fréquence et donc de la variété des noyaux envisageables. Pourtant, l'équilibre difficile entre une réduction raisonnable des interférences et le maintien de certaines propriétés théoriques (parmi lesquelles une bonne concentration des auto-composantes est toujours souhaitable) fait qu'aucune ne semble offrir de solution "universelle" au problème de la représentation facile d'interprétation, d'une large gamme de signaux. En marge de ce compromis, les méthodes adaptatives mettent l'accent sur la lisibilité de l'image temps-fréquence.

### Des méthodes adaptatives

En relaxant un maximum de propriétés théoriques sur les distributions, les formes adaptatives constituent une alternative "extrême" à la dualité soulevée. La fonction de



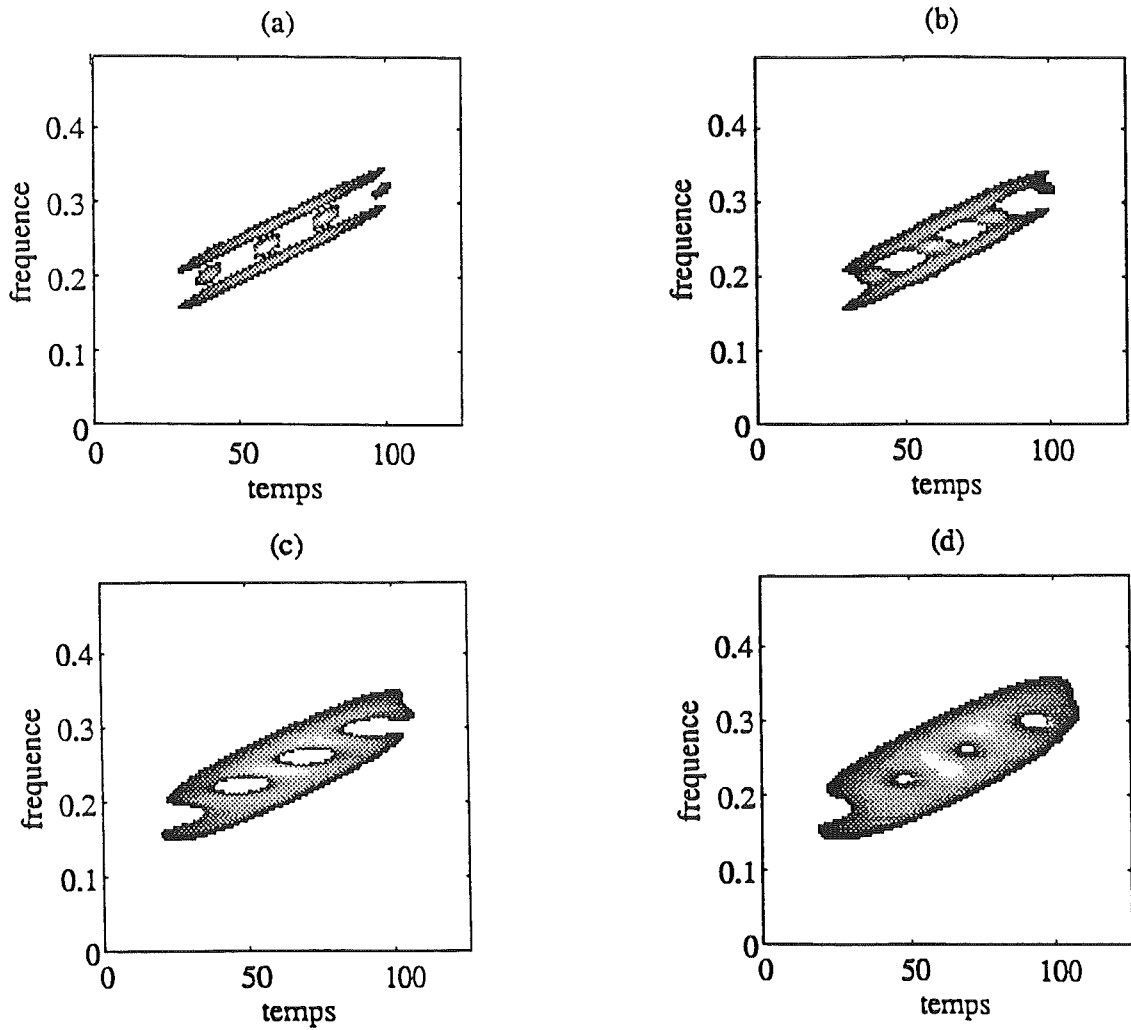


Figure 1.4: (a) Wigner-Ville ( $\Delta\nu_h = 0 \text{ Hz}$ ,  $\Delta t_g = 0 \text{ sec.}$ )- (b) DPWVL ( $\Delta\nu_h = 0 \text{ Hz}$ ,  $\Delta t_g = 7.43 \text{ sec.}$ ) - (c) DPWVL ( $\Delta\nu_h = 0.019 \text{ Hz}$ ,  $\Delta t_g = 15.7 \text{ sec.}$ ) - (d) Spectrogramme ( $\Delta\nu_h = 0.032 \text{ Hz}$ ,  $\Delta t_g = 15.7 \text{ sec.}$ )

pondération  $f(n, \tau)$  n'est pas prédéfinie et sa synthèse est envisagée comme un problème d'optimisation sous contraintes. L'efficacité du noyau  $f(n, \tau)$  résultant essentiellement du bon compromis entre une intégration de toutes les composantes du signal et une suppression totale des zones interférentielles, il s'agit alors de définir un critère de contrôle, indicateur de l'adéquation entre un signal arbitraire et un noyau à géométrie variable. Dans cette optique, la démarche suivie par R.G. Baraniuk et D.L. Jones [6], [8], [7] est inspirée du constat général selon lequel les *auto-composantes* se concentrent autour de l'origine, alors que les termes croisés ont tendance à se diffuser dans le plan des ambiguïtés.

Etant donné un signal et sa fonction d'ambiguïté  $A_x(n, \tau)$ , le noyau optimal est défini comme la fonction réelle, non-négative  $f_{\text{opt}}(n, \tau)$ , solution au

problème d'optimisation suivant

$$\max_f \iint |A_x(n, \tau) f(n, \tau)|^2 dn d\tau \quad (1.40)$$

sous contrainte que

$$f(0, 0) = 1$$

$f(n, \tau)$  à décroissance radiale

$$\frac{1}{2\pi} \iint |f(n, \tau)|^2 dn d\tau \leq \alpha, \quad \alpha \geq 0.$$

Les contraintes imposées sur le noyau  $f_{\text{opt}}$  assurent une distribution *optimale* (figure 1.5)

- covariante par translation en temps et en fréquence (par construction);
- préservant l'énergie du signal;
- résultante d'un filtrage (i) passe-bas de la distribution de Wigner-Ville (ii) dont le gabarit est adapté au signal dans le plan des ambiguïtés.

Des caractéristiques d'analyse plus spécifiques (e.g. covariance par rotation dans le plan, marginales correctes, fréquence instantanée ...) peuvent solliciter d'autres contraintes plus *fortes* sur les noyaux. Il faut cependant veiller à ce que ces contraintes supplémentaires ne soient pas incompatibles avec le principe de synthèse de  $f_{\text{opt}}$ . Cette remarque exclue en particulier l'unitarité, pour laquelle  $|f(n, \tau)| = 1$ , comme propriété envisageable de la classe des distributions *optimales*.

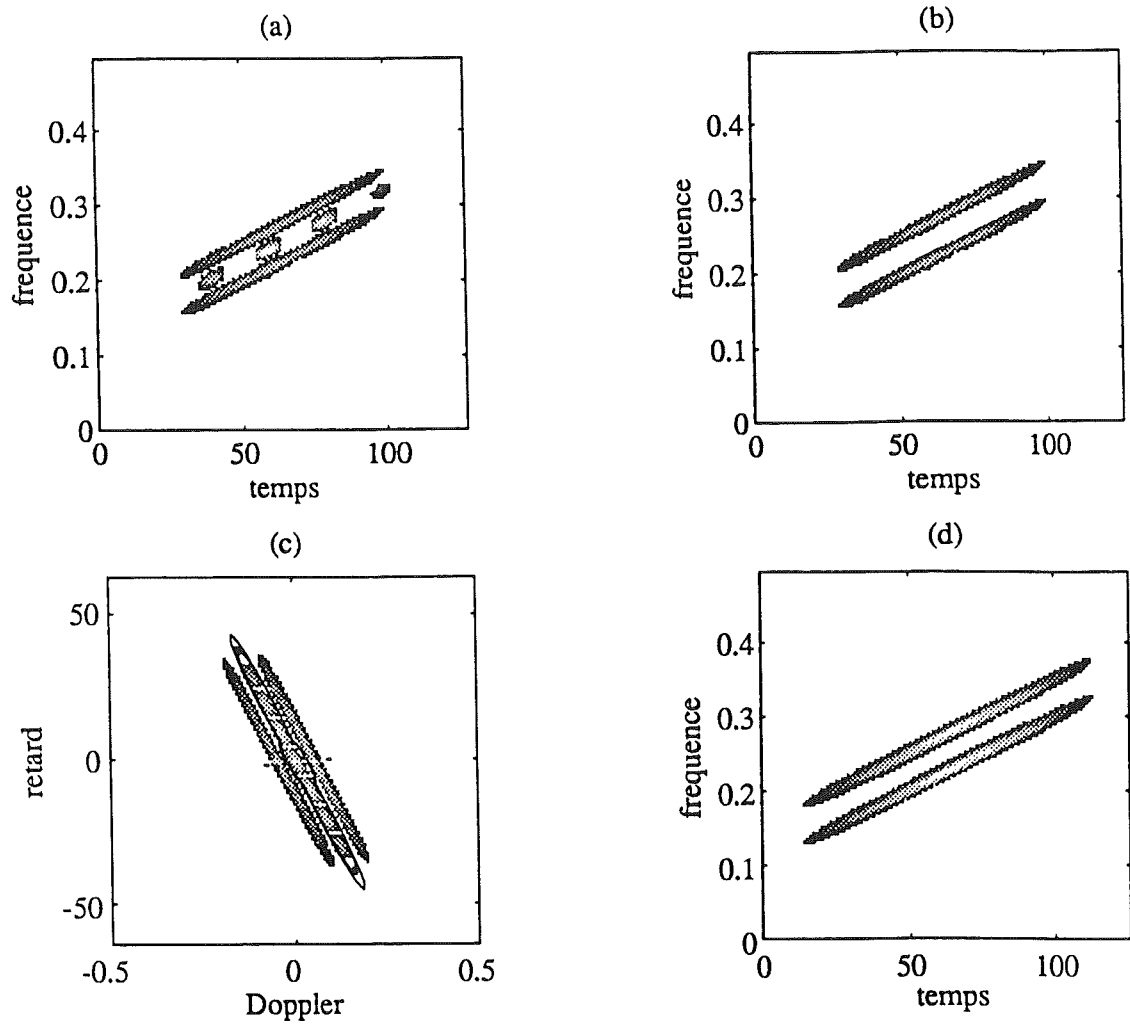


Figure 1.5: (a) Wigner-Ville du signal - (b) Représentation "idéale" du signal - (c) Fonction d'ambiguïté et, superposé, le gabarit de la fenêtre  $f(n, \tau)$  optimale - (d) Distribution adaptative.

## 1.2 ... au Temps-Echelle

Le paragraphe précédent fait état de la nécessité de représentations conjointes, besoin auquel les méthodes d'analyse temps-fréquence apportent une réponse déterminante. Toutefois, si l'ampleur des travaux qui leur sont dédiées atteste de l'impact qu'elles ont en traitement du signal, elles n'explorent qu'en partie le champ très vaste des études spectrales paramétrées dans le temps. Dans ce domaine, chacune des potentialités offertes repose sur le couple particulier d'opérateurs qui permet de dupliquer la cellule élémentaire d'analyse en diverses localisations du plan temps-fréquence; pour sa part, la classe standard de Cohen n'exploite *que* les possibilités combinées des translations en temps et en fréquence (1.10). De l'action d'autres transformations sur les atomes d'analyse, résultent de nouvelles classes de distributions qui, par leurs propriétés, peuvent se révéler complémentaires de la classe de Cohen [9], [28]. Par exemple, la combinaison des opérateurs de translation en temps et de dilatation en fréquence définissent "une classe temps-échelle" qui suscite un intérêt comparable à l'enthousiasme que souleva la classe de Cohen [13], [28], [43], [50], [102]. L'enjeu des représentations temps-fréquence et temps-échelle est considérable, mais rien ne s'oppose à une émergence d'autres représentations basées sur la conjonction d'autres opérateurs du plan; seule peut-être leur pertinence permet d'en juguler le flot.

Dans les paragraphes suivants, une démarche analogue à celle suivie pour les distributions temps-fréquence nous permet de rappeler les concepts *d'ondelettes* et de *transformations temps-échelle*, puis délargir le débat à la *classe des distributions bilinéaires énergétiques affines*.

### 1.2.1 Décomposition en ondelettes continues

En gardant la même définition de produit scalaire qu'en (1.2), il est possible de définir un nouvel objet d'analyse conjointe selon

$$S_x(t, a) = \langle x, \psi_{ta} \rangle = \int x(u) \psi_{ta}^*(u) du. \quad (1.41)$$

L'interprétation de la décomposition du signal  $x$  sur une famille de cellules d'analyse ( $\psi_{ta} \forall (t, a) \in \mathbb{R}^2$ ) reste commune à la transformée de Fourier à court terme (1.9). La différence majeure entre ces deux types de décomposition provient de ce que  $\psi_{ta}$  est ici déduite de la cellule de base  $\psi$  par le biais de translation et de dilatation en temps

$$\psi_{ta}(u) = |a|^{-1/2} \psi\left(\frac{u-t}{a}\right) = (\mathcal{T}_t \mathcal{S}_{a^{-1}} \psi)(u) \quad (1.42)$$

où  $\mathcal{S}_{a^{-1}}$  symbolise l'opérateur de dilatation (ou changement d'échelle) d'un facteur  $a$

$$(\mathcal{S}_{a^{-1}} \psi)(u) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{u}{a}\right),$$

et  $\mathcal{T}_t$  demeure l'opérateur de translation en temps. Finalement, en substituant (1.42) dans (1.41), la nouvelle représentation conjointe du signal s'écrit [31], [35], [58], [103]

$$S_x(t, a) = |a|^{-1/2} \int x(u) \psi^*\left(\frac{u-t}{a}\right) du. \quad (1.43)$$

Avant d'explorer davantage les atouts de cette autre approche du "temps-fréquence", discutons la structure de la fonction  $\psi$ . Pour cela, adoptons l'image très schématique du produit scalaire (1.43) vu comme un appareil de mesure dont la fonction  $\psi$  serait l'étalon. La nature de ce que l'on cherche à mesurer sur le signal est ici *l'échelle des oscillations locales*. Pris séparément, les trois termes de cette mesure décrivent assez fidèlement ce que doit être la cellule  $\psi$ :

- *oscillations*: la forme la plus "atomique" (élémentaire) d'une oscillation étant l'onde sinusoïdale, on conçoit aisément que celle-ci joue un rôle privilégié dans la structure de l'étalon  $\psi$ ;
- *locales*: toujours dans la perspective de l'étude de signaux transitoires, la mesure doit refléter la "ponctualité" des fluctuations autour d'une date  $t$ . La fonction  $\psi$  devrait idéalement être à support temporel fini, ou à défaut concentrer essentiellement l'analyse sur un intervalle restreint du signal; il ne peut s'agir d'une onde, on adopte le terme *d'ondelettes* (onde limitée dans sa durée par pondération par une fenêtre à support compact). L'équation (1.43) s'appelle alors *la transformée en ondelettes continues*;
- *échelle*: on veut caractériser le signal à différents niveaux de résolutions<sup>6</sup>. Par le jeu de compressions (ou de dilatations), l'ondelette doit s'adapter à différentes finesses d'analyse. Scruter une échelle  $a$  c'est prendre l'homothétie  $a$  de l'ondelette mère  $\psi$  comme étalon de mesure, et si  $\Psi(\nu)$  (transformée de Fourier de  $\psi(t)$ ) est centrée autour de la fréquence  $\nu_0$ , alors  $\Psi_{ta}(\nu)$  isole dans le signal, l'information relative au voisinage de la fréquence  $\nu_0/a$  et localisée en  $t$ . Ces changements d'échelle par homothéties opèrent une découpe passe-bande de l'axe des fréquences, en même temps qu'il imposent à l'ondelettes  $\psi$  d'être d'intégrale nulle (i.e.  $\Psi(0) = 0$ ), condition élémentaire pour que l'information relative à la fréquence nulle ne se duplique à toutes les échelles. Cette contrainte constitue d'ailleurs l'une des conditions d'admissibilité pour une ondelette. En outre, le moment d'ordre zéro d'une ondelette peut ne pas être le seul à s'annuler, plus généralement, on désigne par *ordre de cancellation*, que nous noterons  $\mathcal{R}_\psi$ , le nombre des premiers moments nuls de la fonction  $\psi$

$$\int \psi(t) dt = \dots = \int t^{\mathcal{R}-1} \psi(t) dt = 0. \quad (1.44)$$

*Remarque.* Comme pour les fenêtres de pondération  $\phi(\cdot)$  de la transformée de Fourier à court terme, l'ondelette  $\psi$  est tributaire du principe d'incertitude de Gabor-Heisenberg, le compromis entre résolution temporelle et fréquentielle est optimisé par le choix des exponentielles gaussiennes. En toute rigueur cette ondelette n'est pas admissible puisque  $\Psi(0) \neq 0$ . Soit on se satisfait d'une admissibilité dite asymptotique, soit on utilisera

---

<sup>6</sup>Dans ce contexte, le terme *d'échelle* qualifie le *degré de détail* prélevé sur l'observation. Pour fixer les idées, on peut citer l'exemple du grossissement d'un microscope optique qui, en jouant sur la profondeur de champ, fixe cette échelle d'observation et révèle ainsi une finesse de structure plus ou moins importante de la préparation. Toutefois, cette interprétation de l'échelle n'est pas la seule possible. Dans la mesure où il n'existe pas de définition précise de ce que recouvre ce terme, tous rapports (e.g.  $\nu_1/\nu_2$ ,  $t_1/t_2$ ...) ou produit (e.g.  $t\nu$ ) sans dimension peut *a priori* sous-tendre un type particulier de notion d'échelle.

l'ondelette de *Morlet* qui conceptuellement reste une gaussienne à laquelle on soustrait la valeur à l'origine  $\Psi(0)$ .

L'égalité de Plancherel-Parseval (1.7) appliquée à la relation (1.43) conduit à une formulation fréquentielle de la transformée en ondelettes

$$S_x(t, a) = |a|^{1/2} \int X(\nu) \Psi^*(a\nu) e^{i2\pi\nu t} d\nu. \quad (1.45)$$

que l'on interprète sans peine comme l'observation du signal  $X(\nu)$  "à travers" une fenêtre  $\Psi(a\nu)$  dont la largeur de bande et la position sur l'axe des fréquences sont déterminées par l'échelle  $a$ .

A l'image des décompositions temps-fréquence, une propriété essentielle des décompositions en ondelettes est leur réversibilité. Ainsi,  $S_x$  est isomorphe de  $L^2(\mathbb{R})$  vers l'espace fonctionnel à deux dimensions moyennant l'hypothèse

$$C_\psi = \int |\Psi(\nu)|^2 \frac{d\nu}{|\nu|} < \infty, \quad (1.46)$$

laquelle constitue une condition plus rigoureuse d'admissibilité. La synthèse de  $x$ , respectivement  $X$ , s'obtiennent par les formules de reconstruction suivantes [60],[61], [74],

$$\begin{cases} x(u) &= \frac{1}{C_\psi} \iint S_x(t, a) \psi_{ta}(u) \frac{dt da}{a^2} \\ X(\nu) &= \frac{1}{C_\psi} \iint S_x(t, a) \Psi_{ta}(\nu) \frac{dt da}{a^2}. \end{cases} \quad (1.47)$$

## 1.2.2 Analyse en ondelettes et analyse "continue" de Gabor

Dans le principe de leur construction, analyse en ondelettes et analyse de Gabor partagent un grand nombre de points communs: symboliquement, dans les deux cas il s'agit de modéliser la signature temps-fréquence d'un signal par une agrégation de briques de base. La différence essentielle entre les deux représentations réside dans la géométrie de ces briques. Pour une cartographie de Gabor, ces briques sont toutes identiques, car clônées par translations en temps et en fréquence sur un unique modèle, alors que pour une construction temps-échelle, largeur de bande et durée des briques sont modulées par l'échelle d'observation (ou indirectement par la fréquence considérée). Schématiquement, le partitionnement du plan temps-fréquence qui résulte de ces deux modes de représentation est respectivement *un pavage uniforme* (Gabor) et *un pavage à surtension constante* (ondelettes), comme le montre la figure 1.6.

Cette approche pragmatique du temps-fréquence et du temps-échelle permet de bien comprendre en quoi l'idée d'une rivalité entre représentations serait un non-sens. L'optimalité dans le cas général n'existe évidemment pas, les équations (1.12) et (1.47) prouvent que toute l'information utile est présente à part égale dans les deux types de décomposition. D'ailleurs, quelque soit la distribution choisie, la projection du signal dans un espace de dimension supérieure que celui de l'observation accroît le taux de redondance d'information. Dans un contexte bien défini, la représentation est intéressante

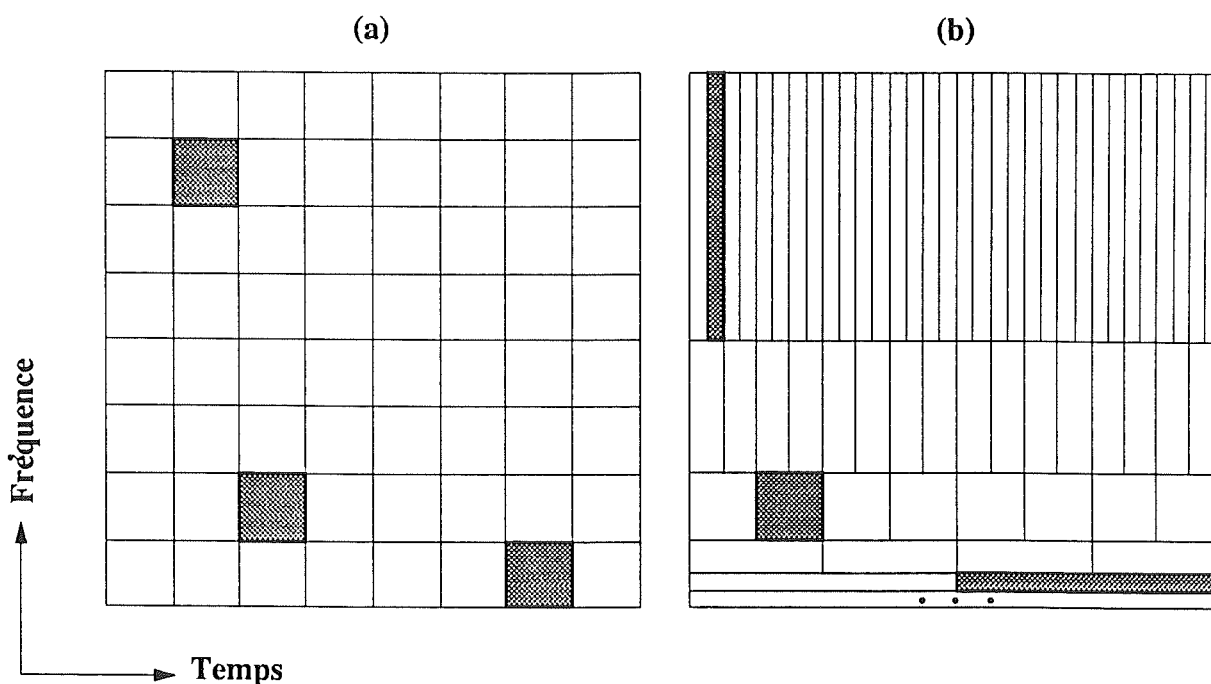


Figure 1.6: (a) Pavage uniforme du plan temps-fréquence (Gabor) - (b) Partage à surtension constante du plan temps-fréquence (ondelettes).

si elle permet de focaliser l'étude sur un sous-espace donné pour mieux isoler une structure particulière du signal. Si tel est le cas, de façon plus nuancée, on conclurera sur l'efficacité d'une méthode face à une situation bien précise. En fait, le gain potentiel de chaque nouvelle approche réside dans l'optique de leur exploitation, celle-ci doit rester compatible avec la structure de la représentation en faisant coïncider la nature du problème avec les aptitudes naturelles de l'outil d'analyse.

Enfin pour conforter l'idée selon laquelle toutes ces transformées ne sont que des *représentations* différentes d'un même signal, envisageons-les sous leur aspect "projection sur une base". Parce que transformée de Fourier à court terme et décomposition en ondelettes sont définies par des formes linéaires réversibles (on fera l'hypothèse  $C_\phi = C_\psi = 1$ ), le passage d'une représentation à une autre rejoint le problème classique d'un changement de bases que l'on sait écrire explicitement [46]

$$S_x(t, a) = \iint T_x(\tau, \xi) \langle \phi_{\tau\xi}, \psi_{ta} \rangle d\tau d\xi$$

$$T_x(t, \nu) = \iint S_x(\tau, \alpha) \langle \psi_{\tau\alpha}, \phi_{t\nu} \rangle \frac{d\tau d\alpha}{\alpha^2}.$$

### Une question de filtrage

Les produits scalaires des équations (1.8) et (1.43) définissant analyse continue de Gabor (dans une plus large mesure transformée de Fourier à court terme) et analyse

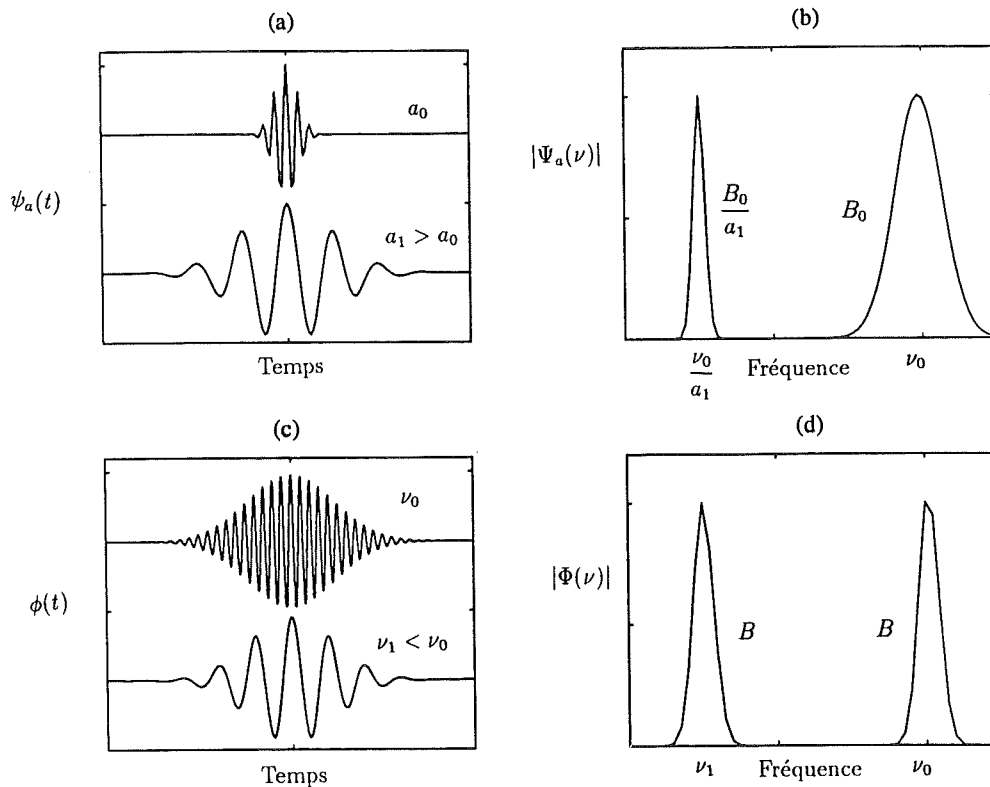


Figure 1.7: (a) Ondelette analysante  $\psi_a(t)$  à deux échelles différentes. On passe de l'une à l'autre par une opération de dilatation en temps - (b) Gabarits fréquentiels correspondants, illustrant la notion de filtrage à surtension  $Q$  constante - (c) Fenêtres à court terme pour deux fréquences différentes. On passe de l'une à l'autre par une opération de translation en fréquence - (d) Gabarits fréquentiels correspondants, illustrant le filtrage à bande  $B$  constante.

continue en ondelettes, peuvent également souscrire à une interprétation en termes de filtrage. Cet autre schéma use d'arguments simples de traitement du signal pour illustrer la différence essentielle déjà soulignée, entre analyse temps-fréquence et analyse temps-échelle. Les atomes de décomposition ( $\phi$  et  $\psi$ ) s'identifient dans cette approche à des réponses impulsionnelles de *filtres passe-bande* par lesquels le signal est convolué. A chaque fréquence ou échelle scrutée correspond un filtre accordé dont le gabarit est fixé par le choix de la fenêtre  $\phi$  ou de l'ondelette  $\psi$ . L'originalité de chaque transformation provient du mode de passage d'une fréquence d'analyse à une autre. Dans le cas de la transformée de Fourier à court terme, le gabarit du filtre passe-bande reste globalement invariant car simplement translaté autour de la fréquence d'analyse. En particulier la largeur de bande fréquentielle reste constante ce qui explique que l'analyse de Gabor soit souvent associée à l'idée d'*analyse à bande constante* (figure 1.7). Par contre pour la transformée en ondelettes, l'accord sur une fréquence d'analyse se fait par une transformation homothétique du gabarit de l'ondelette mère. Ce rapport homothétique s'il fixe



la position de l'ondelette sur l'axe des fréquences, affecte dans les mêmes proportions la largeur de la bande passante du filtre. Ainsi, c'est le rapport  $Q$  entre fréquence centrale et support spectral de l'ondelette qui reste invariant d'une échelle à l'autre, on parle alors d'*analyse à coefficient de surtension  $Q$  constant* (figure 1.7).

Au delà d'une simple interprétation, ces différentes natures de filtrage sont responsables d'un certain nombre de propriétés attribuées aux analyses temps-fréquence et temps-échelle. Notamment, il est impossible de dissocier les notions de bande passante et durée de réponses impulsionnelles de grandeurs telles que résolution fréquentielle et résolution temporelle des analyses. Dans le cas des décompositions de Gabor, la finesse d'analyse en fréquence ainsi que la précision sur la localisation en temps sont des données figées par le gabarit de la fenêtre  $\Phi$  et constantes à toutes les fréquences. Au contraire dans une décomposition en ondelettes ces mêmes quantités varient, dans des proportions inverses, selon la fréquence (ou l'échelle) considérée. Les composantes fréquentielles seront d'autant mieux résolues qu'elles se situent à *basse fréquence* dans le signal, alors que, par dualité du principe d'incertitude, un événement ponctuel en temps se localisera davantage au niveau des *hautes fréquences* que des *basses fréquences*. On notera toutefois que le produit des résolutions en temps et en fréquence des deux types d'analyse reste une constante en tous points du plan temps-fréquence.

### 1.2.3 Temps-échelle énergétique

#### Le scalogramme

Pour les mêmes raisons qui font préférer les représentations temps-fréquence énergétiques aux décompositions linéaires de signaux, on s'intéresse, dans le domaine des analyses temps-échelle, à des formes bilinéaires caractérisant l'évolution de l'énergie du signal au cours du temps et sa répartition suivant les échelles. En suivant une démarche analogue à celle qui conduisit au spectrogramme, considérons le module carré de la transformée en ondelettes, on obtient alors un élément particulier des distributions énergétiques temps-échelle: *le scalogramme* [43], [50], [102]. On vérifie qu'en intégrant cette nouvelle distribution selon l'axe des temps et des échelles, on retrouve bien l'énergie du signal

$$E_x = \frac{1}{C_\psi} \iint |S_x(t, a)|^2 \frac{dt da}{a^2}. \quad (1.48)$$

Un certain nombre d'autres propriétés sont à mettre à l'actif du scalogramme, parmi lesquelles:

- **Positivité.** Défini comme le module carré d'une décomposition en ondelettes, le scalogramme est partout positif ou nul.
- **Covariance par translation en temps.** Une translation temporelle sur un signal

s'accompagne des mêmes effets sur le scalogramme associé

$$\begin{array}{ccc}
 x(t) & \longrightarrow & x(t - t_0) = (\mathcal{T}_{t_0} x)(t) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 |S_x(t, a)|^2 & \longrightarrow & |S_x(t - t_0, a)|^2
 \end{array} \tag{1.49}$$

- **Covariance par changement d'échelle.** Une dilatation (ou compression) d'un facteur  $\alpha$  sur le signal provoque une dilatation (ou une compression) comparable dans l'espace de représentation du scalogramme

$$\begin{array}{ccc}
 x(t) & \longrightarrow & \sqrt{|\alpha|}x(\alpha t) = (\mathcal{S}_\alpha x)(t) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 |S_x(t, a)|^2 & \longrightarrow & |S_x(\alpha t, \alpha a)|^2
 \end{array} \tag{1.50}$$

Les covariances par translation en temps et changement d'échelle, sont deux propriétés importantes que partage également la distribution de Wigner-Ville. En faisant référence à l'unitarité de cette dernière on établit alors le résultat suivant

$$\begin{aligned}
 |S_x(t, a)|^2 &= |\langle x, \psi_{ta} \rangle|^2 \\
 &= \ll W_x, W_{\psi_{ta}} \gg \quad (\text{Moyal}) \\
 &= \iint W_x(u, \theta) W_\psi\left(\frac{u-t}{a}, a\theta\right) du d\theta,
 \end{aligned} \tag{1.51}$$

égalité qui n'est pas sans rappeler la structure de l'équation (1.35). Celle-ci intégrait le spectrogramme dans une classe plus vaste de distributions covariantes par le groupe des translations (encore appelé groupe de Weyl-Heisenberg), alors que le résultat (1.51) établit un lien entre la distribution temps-fréquence de Wigner-Ville et le scalogramme, via un opérateur de corrélation affine. En substituant à  $W_\psi$  un noyau arbitraire  $\Pi$ , cet opérateur de corrélation affine ne permettrait-il pas alors, de préserver les propriétés de covariance par translation en temps et changement d'échelle offertes en particulier par la distribution de Wigner-Ville pour définir une classe très générale de représentations bilinéaires, elles-mêmes covariantes par ce nouveau groupe affine? L'objet du paragraphe suivant est de rappeler que la classe affine offre tous les éléments de réponse à cette question.

## Un formalisme général

Nous cherchons donc un formalisme assez général pour englober l'ensemble des transformations bilinéaires covariantes face aux opérateurs de translation en temps et de dilatation. Une façon d'aboutir consiste à résoudre l'équation fonctionnelle posée en (1.31),

réécrite dans le domaine temps-échelle, et de remplacer les contraintes de covariance issues du groupe de Weyl-Heisenberg (translation en temps et en fréquence) par celles relatives au groupe affine (translation et dilatation en temps) [28], [50], [68]

$$\rho_x(t, a) = \iint k(t, a; t_1, t_2) x(t_1) x^*(t_2) dt_1 dt_2.$$

Les seuls noyaux compatibles prennent alors la forme

$$k(t, a, t_1, t_2) = \frac{1}{a} \mathcal{K} \left( \frac{t_1 - t}{a}, \frac{t_2 - t}{a} \right).$$

Le passage à la fonction  $\Pi(u, \theta)$  suivante

$$\Pi(u, \theta) = \int \mathcal{K} \left( u + \frac{\tau}{2}, u - \frac{\tau}{2} \right) e^{i2\pi\theta\tau} du$$

fait apparaître une structure de corrélation affine de la distribution de Wigner-Ville

$$\rho_x(t, a) \equiv \Omega_x(t, a; \Pi) = \iint W_x(u, \theta) \Pi \left( \frac{u - t}{a}, a\theta \right) du d\theta, \quad (1.52)$$

et permet ainsi de paramétrer de façon très globale une nouvelle famille de distributions temps-échelle, covariante par le groupe affine: *la classe affine*. On retrouve bien le scalogramme comme un cas particulier de cette classe, où  $\Pi(t, \nu)$  devient explicitement la distribution de Wigner-Ville de l'ondelette utilisée.

*Remarque.* Classe de Cohen standard et classe affine sont toutes deux construites sur la distribution de Wigner-Ville, il n'est donc pas étonnant que l'intersection entre ces deux groupes ne soit pas nulle. La distribution de Wigner-Ville est un élément évident de cette intersection, mais elle n'est pas la seule. Si l'on appelle  $\Pi_c$  et  $\Pi_a$  les noyaux respectifs des paramétrisations données des classes de Cohen et affine, on sait établir des conditions nécessaires et suffisantes pour que les distributions associées appartiennent à l'intersection des deux groupes. Ainsi, [43], [102]

$$\begin{aligned} \Pi_c(u, \theta) &= g_0(u\theta) \\ \text{et } \Pi_a(u, \theta) &= \Pi_0(u, \theta - \nu_0) \\ &= g_0(u(\theta - \nu_0)) \end{aligned} \quad (1.53)$$

entraînent que les distributions  $C_x(t, \nu; \Pi_c)$  et  $\Omega_x(t, a; \Pi_a)$  sont simultanément covariantes par le groupe de Weyl-Heisenberg et le groupe affine, et de plus

$$\Omega_x(t, a; \Pi_a) = C_x \left( t, \frac{\nu_0}{a}; \Pi_0 \right).$$

Comme pour la classe de Cohen, les transformations des variables temps et fréquence donnent lieu à autant de réécritures possibles de la classe affine. On dénombre ainsi trois

formes supplémentaires équivalentes de (1.52) liées chacune à une expression déduite du noyau  $\Pi(u, \theta)$  par transformées de Fourier partielles sur l'une des deux variables

$$\Omega_x(t, a; \Pi) = \begin{cases} \frac{1}{a} \iint F\left(\frac{u-t}{a}, \frac{\tau}{a}\right) x\left(u + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(u - \frac{\tau}{2}\right) d\tau du & \text{temps-temps} \\ \iint f\left(an, \frac{\tau}{a}\right) e^{-i2\pi n\tau} A_x(n, \tau) dn d\tau & \text{fréquence-temps} \\ \frac{1}{a} \iint \pi(n, \theta) X\left(\frac{1}{a}\left(\theta - \frac{n}{2}\right)\right) X^*\left(\frac{1}{a}\left(\theta + \frac{n}{2}\right)\right) e^{-i2\pi \frac{t}{a}n} dn d\theta & \text{fréquence-fréquence} \end{cases} \quad (1.54)$$

où  $A_x(n, \tau)$  représente la fonction d'ambiguïté (1.37) du signal  $x$ .

Chacune de ces expressions de la classe affine implique une structure bilinéaire particulière du signal (distribution de Wigner-Ville, fonction d'ambiguïté, forme corrélative en temps et duale en fréquence), en lien avec le plan de représentation considéré. Ces formes quadratiques se retrouvent dans les paramétrisations coplanaires de la classe de Cohen où elles donnent lieu à des descriptions simples et pertinentes des opérations subies par le signal. En construisant la classe affine autour des mêmes structures bilinéaires du signal, on s'attend à pouvoir inférer des conclusions portant sur la classe de Cohen, des actions comparables relativement aux noyaux affines. Cette démarche est effectivement possible moyennant la restriction aux seules fonctions de paramétrisation autorisant une équivalence formelle entre échelle  $a$  et inverse de la fréquence  $\nu$  selon la relation  $a = \nu_0/\nu$ , avec  $\nu_0$  une fréquence arbitraire non nulle. Par la *dimension* de l'échelle mise en jeu, cette correspondance est en particulier vraie dans le cas du scalogramme, et plus généralement toute distribution dont le noyau  $\Pi(u, \theta)$  peut se réécrire sous la forme [43]

$$\Pi(u, \theta) = \Pi_0(u, \theta - \nu_0) \iff f(n, \tau) = f_0(n, \tau) e^{-i2\pi\nu_0\tau}. \quad (1.55)$$

On peut alors conclure qu'une partie de la classe affine dérive d'opérations de corrélations ou pondérations des différentes formes bilinéaires du signal, mais se distingue de la classe de Cohen en ce sens que ces opérations dépendent fonctionnellement du paramètre d'échelle  $a$ .

Cependant, sans aucune forme d'hypothèse faite sur le noyau de convolution affine  $\Pi$ , il est très difficile de se satisfaire des commentaires que pourraient susciter chacune de ces formes. Par exemple, la version fréquence-temps qui se prêtait idéalement à la compréhension de la classe de Cohen (cf. §1.1.3), semble dans le contexte présent, soulever davantage de questions qu'elle n'offre d'éléments d'interprétation. On ne peut plus en particulier, parler de pondération de la fonction d'ambiguïté suivie d'une transformée de Fourier bidimensionnelle selon les variables de retard et de Doppler. Des arguments analogues font que l'ensemble des interprétations dérivées de chacune des formes équivalentes de la classe de Cohen, ne se transposent pas simplement au cadre des représentations affines. Mais d'une certaine façon, la difficulté d'interprétation que soulèvent ces paramétrisations affines, si elle conforte l'adéquation entre transformée de Fourier et translations, engendre un doute quant à l'opportunité d'une transformation de Fourier sur des opérateurs de dilatation. En effet, on sait que les exponentielles complexes sont les vecteurs propres des opérateurs de translation, il apparaît donc naturel

dans le cadre des covariances par translations, de changer d'espace de représentation par le biais de transformées de Fourier. Mais ne faut-il pas se garder d'une démarche analogue dans le contexte de la covariance par changement d'échelle, opérateur dont les exponentielles complexes ne sont plus les vecteurs propres? Dans un autre ordre d'idée, mais toujours dans le respect d'une conformité entre le groupe (e.g. Weyl-Heisenberg, affine) sur la base duquel on cherche à construire des distributions et les outils utilisés pour y parvenir, on peut s'interroger sur le rôle de la distribution de Wigner-Ville (distribution typiquement *temps-fréquence*) comme génératrice d'une classe de représentations *temps-échelle* covariantes par le groupe affine.

### Propriétés

Malgré les controverses que peut soulever la paramétrisation de la classe affine à partir d'objets temps-fréquence, celle-ci constitue un formalisme très souple qui, comme elle l'a permis pour la classe de Cohen, met en correspondance propriétés souhaitées sur les distributions et contraintes particulières sur les noyaux correspondants (tableau 1.2).

Table 1.2: *Quelques propriétés de la classe affine et contraintes sur les noyaux associés.*

Propriétés	Contraintes sur noyau
distribution énergétique	$\int \pi(0, \nu) \frac{d\nu}{ \nu } = 1$
marginale en fréquence	$f(0, \tau) = e^{-i2\pi f_0 \tau}$
marginale en temps	$\int f\left(an, \frac{\tau}{a}\right) \frac{da}{a^2} = \delta(\tau), \forall n$
unitarité (Moyal)	$\int f\left(an, \frac{\tau}{a}\right) f^*\left(an, \frac{\tau'}{a}\right) \frac{da}{a^2} = \delta(\tau - \tau'), \forall n$
covariance par translation en fréquence	$\Pi(u, \theta) = g(u(\theta - \nu_0))$

## 1.3 Uniformisation et ouverture sur d'autres classes

Nous venons de rappeler l'existence de deux classes de distributions construites chacune sur la base de covariances par des opérateurs particuliers. La nature de ces opérateurs (i.e. translation ou dilatation) semble privilégier de façon assez naturelle les dimensions des variables de représentation (i.e. temps-fréquence ou temps-échelle), en l'occurrence la pertinence physique de celles-ci a sans doute contribué à l'intérêt porté sur ces classes. On peut cependant resituer le problème de construction de classes de distributions dans le cadre plus général de la théorie des groupes et montrer alors qu'il existe pour un même groupe, plusieurs solutions possédant les mêmes propriétés de covariance mais résultant de l'action d'autres opérateurs.

### 1.3.1 Rappels et définitions sur groupes et représentations

Nous rappelons ici quelques résultats essentiels de la théorie des groupes. L'essentiel de ces rappels est issu de l'ouvrage de N. Ja Vilenkin "fonctions spéciales et théorie de la représentation des groupes" [114], auquel nous vous engageons à vous référer pour plus de précision et de rigueur et occasionnellement aux références [12], [77].

**Définition 1.1** *Un ensemble  $\mathcal{G}$  muni d'une loi de composition  $\bullet$  est un groupe si:*

1. *la loi  $\bullet$  est interne:  $(g \bullet g') \in \mathcal{G}, \forall g, g' \in \mathcal{G}$ ;*
2. *la loi  $\bullet$  est associative:  $g \bullet (g' \bullet g'') = (g \bullet g') \bullet g'', \forall g, g', g'' \in \mathcal{G}$ ;*
3. *il existe un élément neutre  $e$  de  $\mathcal{G}$  pour la loi  $\bullet$ :  $g \bullet e = e \bullet g = g, \forall g \in \mathcal{G}$ ;*
4. *chaque élément  $g$  de  $\mathcal{G}$  admet un inverse, noté  $g^{-1}$ , dans  $\mathcal{G}$  par la loi  $\bullet$ :  
 $g \bullet g^{-1} = g^{-1} \bullet g = e, \forall g \in \mathcal{G}$ .*

**Définition 1.2** *On appelle représentation du groupe  $\mathcal{G}$ , une application  $\gamma$  de  $\mathcal{G}$  dans l'espace des opérateurs linéaires continus sur un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  ( $\gamma : \mathcal{G} \rightarrow L(\mathcal{H})$ ), et satisfaisant à l'équation fonctionnelle*

$$\gamma(g \bullet g') = \gamma(g)\gamma(g'), \quad \forall g, g' \in \mathcal{G}.$$

Pour fixer les idées, la fonction exponentielle  $e^{ix}$  est la solution de l'équation fonctionnelle  $\gamma(g + g') = \gamma(g)\gamma(g')$ , où le groupe  $\mathcal{G}$  est l'axe réel muni de la loi de composition additive, et  $L^1(\mathbb{R})$  l'espace de Hilbert. La représentation de groupe tend à généraliser la fonction exponentielle à un groupe  $\mathcal{G}$  quelconque.

**Définition 1.3** *Soit  $\gamma(g) : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$*

$$h \rightarrow (\gamma(g)h)$$

une application de  $\mathcal{H}$  dans  $\mathcal{H}$ .  $\gamma$  est une représentation unitaire de  $\mathcal{G}$  si  $\{\gamma(g)_{g \in \mathcal{G}}\}$  est un opérateur unitaire (i.e. surjectif et isométrique  $\|h\| = \|\gamma(g)h\|$ ,  $\forall g \in \mathcal{G}$ ) pour tout élément  $g$  de  $\mathcal{G}$ . L'ensemble  $\{\gamma(g)h\}_{g \in \mathcal{G}}$  désigne l'orbite de la fonction  $h$  par la représentation  $\gamma$ .

### 1.3.2 Groupe de Weyl-Heisenberg. Opérateurs “translation” de Weyl

Cette terminologie est empruntée à [116]

#### Classe de Cohen [26], [27]

Soit  $\mathbf{T}$  le sous-ensemble des nombres complexes de module unitaire (i.e.  $z \in \mathbf{T} \Leftrightarrow |z| = 1$ ). L'ensemble  $\mathbf{T} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , muni de la loi de composition suivante

$$(z_1, t_1, \nu_1) \bullet (z_2, t_2, \nu_2) = (z_1 z_2 e^{i2\pi\nu_1 t_2}, t_1 + t_2, \nu_1 + \nu_2),$$

définit le groupe de Weyl-Heisenberg ( $\mathcal{WH}$ ). Il est facile de vérifier qu'une représentation unitaire de ce groupe sur l'espace de Hilbert  $L^2(\mathbb{R})$  est:

$$(\gamma(z, t, \nu)h)(u) = z e^{i2\pi\nu(u-t)} h(u-t), \quad (1.56)$$

puisque,

$$\begin{aligned} (\gamma(z_1, t_1, \nu_1)\gamma(z_2, t_2, \nu_2)h)(u) &= z_1 z_2 e^{i2\pi\nu_1 t_2} e^{i2\pi(\nu_1 + \nu_2)(u-(t_1+t_2))} h(u-(t_1+t_2)) \\ &= (\gamma(z_1 z_2 e^{i2\pi\nu_1 t_2}, t_1 + t_2, \nu_1 + \nu_2)h)(u). \end{aligned}$$

Exception faite du terme de phase  $z e^{-i2\pi\nu t}$ , il est aisé de reconnaître en (1.56) l'action des opérateurs de translation  $\mathcal{M}_\nu$  et  $\mathcal{T}_t$  rencontrés en (1.10). Finalement, si l'on définit une transformée de  $\mathcal{G}$  sur  $\mathcal{H}$ , à partir de  $\gamma$  par le produit scalaire suivant

$$\Gamma_x(z, t, \nu) = \langle x, \gamma(z, t, \nu)h \rangle = z e^{i2\pi\nu t} \int x(u) h^*(u-t) e^{-i2\pi\nu u} du, \quad (1.57)$$

on retrouve une structure identique à la transformée de Fourier à court terme de la relation (1.8) (le terme de phase se trouvant en facteur n'étant pas dépendant du signal, sa suppression n'affecte pas l'information portée par la transformée). Une étude plus approfondie de ce groupe [114] montre que toute fonction  $h$  de  $L^2(\mathbb{R})$  est admissible, en ce sens qu'il est possible de reconstruire  $x \in L^2(\mathbb{R})$  à partir de la transformée  $\Gamma_x(z, t, \nu)$  de  $x$  construite sur l'orbite de n'importe quelle fonction  $h$ . En particulier, si l'on choisit  $h = x$ , on peut écrire

$$\begin{aligned} \Gamma_x(z, t, \nu) &= \langle x, \gamma(z, t, \nu)x \rangle \\ &= z e^{i2\pi\nu t} \int x(u) x^*(u-t) e^{-i2\pi\nu u} du \end{aligned}$$

expression, appelée *valeur moyenne de la combinaison des opérateurs*  $\mathcal{M}_\nu \mathcal{T}_t$  (ou encore *forme quadratique* ou *hermitienne* et notée  $\langle \mathcal{M}_\nu \mathcal{T}_t \rangle_x$ ), que l'on peut réécrire après symétrisation

$$\begin{aligned}\Gamma_x(z, t, \nu) &= z e^{i\pi\nu t} \int \left( x \left( u + \frac{t}{2} \right) e^{-i2\pi\frac{\nu}{2}u} \right) \left( x \left( u - \frac{t}{2} \right) e^{i2\pi\frac{\nu}{2}u} \right)^* du \\ &= z e^{i\pi\nu t} \langle \mathcal{M}_{-\nu/2} \mathcal{T}_{t/2} x, \mathcal{M}_{\nu/2} \mathcal{T}_{-t/2} x \rangle \\ &= z e^{i\pi\nu t} A_x(-\nu, t).\end{aligned}\tag{1.58}$$

Le fait d'aboutir sur une quantité liée à la fonction d'ambiguïté (1.37), laquelle est au cœur de la classe de Cohen, constitue un indice probant du rôle essentiel des opérateurs de translation en temps et en fréquence par rapport au groupe de Weyl-Heisenberg. La transformée de Fourier, relation canonique de passage entre les deux espaces (temps et fréquence) est en lien étroit avec la structure de groupe. Il suffit pour cela de remarquer que l'exponentielle complexe,  $e^{i2\pi\nu_0 t}$  est la fonction propre de l'opérateur de translation ( $\mathcal{T}$ ) et que la transformée de Fourier de celle-ci,  $\delta(\nu - \nu_0)$ , est elle-même la fonction propre de l'opérateur de modulation ( $\mathcal{M}$ ). Ces deux opérateurs sont alors liés par la relation

$$(\mathcal{M}_{\nu_0} x)(u) = (\mathcal{F}^{-1} \mathcal{T}_{\nu_0} \mathcal{F} x)(u).\tag{1.59}$$

### Classe hyperbolique [97], [96], [98], [67]

La représentation  $\gamma$  de l'équation (1.56) est la seule représentation unitaire du groupe de  $\mathcal{WH}$  (théorème de Stone et de Von Neumann), si bien que toute autre forme explicite vérifiant la définition 1.2 se déduit de celle-ci par une équivalence unitaire. Considérons par exemple la représentation

$$(\gamma(z, \zeta, \alpha) H)(\theta) = z e^{i2\pi\zeta \log \theta} e^{\alpha/2} H(e^\alpha \theta),\tag{1.60}$$

elle est unitaire sur  $L^2(\mathbb{R})$  et vérifie la relation fonctionnelle

$$\begin{aligned}(\gamma(z_1, \zeta_1, \alpha_1) \gamma(z_2, \zeta_2, \alpha_2) H)(\theta) &= z_1 z_2 e^{i2\pi\alpha_1 \zeta_2} e^{\frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)} e^{i2\pi(\zeta_1 + \zeta_2) \log \theta} H(e^{\alpha_1 + \alpha_2} \theta) \\ &= \left( \gamma(z_1 z_2 e^{i2\pi\alpha_1 \zeta_2}, \zeta_1 + \zeta_2, \alpha_1 + \alpha_2) H \right)(\theta).\end{aligned}$$

*Remarque.* Le domaine de définition de la fonction logarithmique impose à la fonction  $H$  de n'être définie que sur le domaine  $\mathbb{R}_+$ . Par conséquent, la représentation (1.60) est une représentation du groupe  $\mathcal{WH}$  sur l'espace des fonctions de Hardy ( $H^2(\mathbb{R}) = \{h \in L^2(\mathbb{R}) \text{ telle que } (\mathcal{F}h)(\theta) \equiv 0, \forall \theta < 0\}$ ). Il convient alors d'adapter la norme quadratique à ce nouvel espace de Hilbert, ainsi nous conviendrons de noter

$$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle \equiv \int_0^\infty |x(\xi)|^2 \frac{d\xi}{\xi}, \quad \text{si } x \in H^2(\mathbb{R}).\tag{1.61}$$

En introduisant un nouvel opérateur  $\mathcal{Y}_\zeta$  de translation hyperbolique en temps

$$(\mathcal{Y}_\zeta X)(\theta) = e^{i2\pi\zeta \log \theta} X(\theta),$$



il s'avère que la nouvelle représentation de  $\mathcal{WH}$  combine les actions des opérateur  $\mathcal{Y}_\zeta$  et de dilatation  $\mathcal{S}_{e^\alpha}$  sur la fonction  $H$ .

$$(\gamma(z, \zeta, \alpha)H)(\theta) = z(\mathcal{Y}_\zeta \mathcal{S}_{e^\alpha} H)(\theta)$$

On peut alors de la même façon qu'en (1.57) dériver une transformée de  $\mathcal{WH}$  sur  $H^2(\mathbb{R})$  et basée sur cette autre représentation du groupe de  $\mathcal{WH}$

$$\Gamma_X(z, \zeta, \alpha) = \langle X, \gamma(z, \zeta, \alpha)H \rangle = ze^{\alpha/2} \int_0^{+\infty} X(\theta)H^*(e^\alpha\theta) e^{-i2\pi\zeta \log \theta} d\theta, \quad (1.62)$$

$\Gamma_X(z, \zeta, \alpha)$  mesure le degré de ressemblance entre un signal  $x$  et une version modifiée (par translation hyperbolique en temps et dilatation) d'une fonction mère  $H$ . Si l'on estime  $\Gamma_X$  sur l'orbite  $\{\gamma(g)H\}_{g \in \mathcal{G}}$  de  $H$ , on obtient une description de  $X$  en fonction des deux paramètres de "temps hyperbolique"  $\zeta$  et dilatation  $\alpha$  (ici encore la phase  $z$  n'est qu'un terme multiplicatif qui ne joue pas un rôle déterminant dans la transformation de l'atome d'analyse). Les changements de variables  $e^\alpha = \frac{\nu_0}{\nu}$ ,  $\zeta = t\nu$ , et l'élévation au carré du module de  $\Gamma_X$ , font apparaître l'*hyperbologramme* [96], autre représentation énergétique du signal, d'expression:

$$Y_X(t, \nu) = \left| \frac{1}{z} \Gamma_X(z, t\nu, \log \frac{\nu}{\nu_0}) \right|^2 = \frac{\nu_0}{\nu} \left| \int_0^{+\infty} X(\theta)H^*\left(\frac{\nu_0}{\nu}\theta\right) e^{-i2\pi t\nu \log \frac{\theta}{\nu_0}} d\theta \right|^2. \quad (1.63)$$

*Remarque.* L'hyperbologramme décrit ici l'énergie du signal selon les variables de temps et de fréquence, mais sans le changement de variables qui identifie explicitement le paramètre  $\alpha$  à un rapport de fréquence et le paramètre  $\zeta$  au produit sans dimension du temps par la fréquence, la représentation  $\Gamma$  décompose initialement un signal dans le plan décrit conjointement par le retard hyperbolique et l'échelle. L'hyperbologramme établit une correspondance entre ce plan et celui plus commun du temps et de la fréquence.

Dans la classe des distributions hyperboliques récemment introduite par A. Papan-dreou, F.Hlawatsch et G.F. Boudreaux-Bartels,  $Y(t, \nu)$  est l'homologue du spectrogramme. Les travaux récents de ces mêmes auteurs ont montré qu'il était même possible reproduire la notion de fonction d'ambiguïté en introduisant le concept de fonction d'ambiguïté hyperbolique ( $HAF$ ), celle-ci est alors à la classe hyperbolique ce que la fonction d'ambiguïté (au sens de Sussman) est à la classe de Cohen: une mesure de la corrélation en échelle et en translation hyperbolique du signal. Par le jeu de pondérations de cette nouvelle fonction d'ambiguïté, on définit également l'ensemble des distributions appartenant à la classe hyperbolique.

Pour déduire de (1.62) l'expression de  $HAF$ , il convient à nouveau de remplacer  $H$  par  $X$  et de symétriser l'action des opérateurs

$$\begin{aligned} \Gamma_X(z, \zeta, \alpha) &= \langle x, \gamma(z, \zeta, \alpha)x \rangle \\ &= ze^{i\pi\zeta\alpha} \int_0^{+\infty} \left( X\left(e^{-\frac{\alpha}{2}}\theta\right) e^{-i2\pi\frac{\zeta}{2}\log \theta} \right) \left( X\left(e^{\frac{\alpha}{2}}\theta\right) e^{i2\pi\frac{\zeta}{2}\log \theta} \right)^* d\theta \\ &= ze^{i\pi\zeta\alpha} \langle \mathcal{Y}_{-\zeta/2} \mathcal{S}_{e^{-\alpha/2}} X, \mathcal{Y}_{\zeta/2} \mathcal{S}_{e^{\alpha/2}} X \rangle \\ &= ze^{i\pi\zeta\alpha} HAF_X^*(\zeta, \alpha). \end{aligned} \quad (1.64)$$

La transformée de Fourier est dans la classe de Cohen l'isomorphisme qui lie temps et fréquence; dans la classe hyperbolique il existe aussi une transformation unitaire (pour la norme définie en (1.61)) bijective entre paramètre d'échelle et retard hyperbolique: *la transformée de Mellin*  $\mathcal{J}$  (Erdelyi 1954, [19], [30])

$$(\mathcal{J}\mathcal{F}x)(\beta) = (\mathcal{J}X)(\beta) = \underline{X}(\beta) = \int_0^{+\infty} X(\theta)\theta^{i2\pi\beta-1} d\theta, \quad \beta \in \mathbb{R}, x \in H^2(\mathbb{R}),$$

et la transformée inverse:

$$X(\theta) = \int \underline{X}(\beta)\theta^{-i2\pi\beta} d\beta.$$

Quoique *prévisible*, il est frappant de souligner la similitude entre les éléments de la classe de Cohen et ceux de la classe hyperbolique. Notamment la relation

$$(\mathcal{S}_{e^\alpha}X)(\theta) = \lambda X(\theta) \Leftrightarrow X(\theta) = k e^{\sigma \log \theta}, \quad \sigma \in \mathbb{C}$$

nous dit que la transformée de Mellin projette un signal sur les vecteurs propres de l'opérateur de dilatation (réponses impulsionnelles hyperboliques). On avait le même type de construction entre transformation de Fourier et opérateur de translation sur la classe de Cohen. D'autre part, le calcul des fonctions propres de l'opérateur  $\mathcal{Y}_\zeta$  (soit  $\underline{X}(\beta) = \delta(\beta - \beta_0)$ ) nous permet de vérifier sans peine que

$$\delta(\beta - \beta_0) \xleftrightarrow{\mathcal{J}_{\beta \leftrightarrow \theta}} e^{i2\pi\beta_0 \log \theta}.$$

En faisant alors appel à l'isomorphisme<sup>7</sup> trivial de passage de  $L^2(\mathbb{R}_+)$  dans  $L^2(\mathbb{R})$

$$(\mathcal{U}_{\mathcal{H}}X)(\xi) = e^{\frac{\xi}{2}} X(e^\xi), \quad x \in H^2(\mathbb{R}), \quad (1.65)$$

et son inverse

$$(\mathcal{U}_{\mathcal{H}}^{-1}X)(u) = \frac{1}{\sqrt{u}} X(\log u), \quad (1.66)$$

on peut établir une relation de dualité entre les opérateurs  $\mathcal{Y}_\zeta$  et  $\mathcal{S}_{e^\alpha}$  basée sur la transformée de Mellin

$$e^{-\frac{\alpha}{2}} (\mathcal{S}_{e^\alpha}X)(\theta) = \mathcal{J}^{-1}\mathcal{U}_{\mathcal{H}}\mathcal{Y}_\alpha\mathcal{U}_{\mathcal{H}}^{-1}\mathcal{J}X(\theta). \quad (1.67)$$

Par suite, on prolonge le parallèle établi entre classe de Cohen et classe hyperbolique en faisant agir une double transformée de Mellin sur la fonction d'ambiguïté hyperbolique. Cette démarche s'inscrit dans le droit fil de celle qui consistait à passer du domaine de corrélation (fonction d'ambiguïté à bande étroite) à l'espace des représentations bilinéaires covariantes par translations (Wigner-Ville) par le biais de transformées de Fourier. Ainsi, on considère la fonction

$$HAF(\zeta, \beta) = \int_0^\infty X(\sqrt{\beta}\theta) X^* \left( \frac{1}{\sqrt{\beta}}\theta \right) \theta^{i2\pi\zeta} d\theta,$$

---

<sup>7</sup>Cet isomorphisme a été réintroduit récemment sous la terminologie d'anamorphose (traduction libre de "*warping*") hyperbolique, par les auteurs de la classe hyperbolique. Dans la définition qu'ils proposent, il convient d'introduire une fréquence de référence  $f_r > 0$ , l'action de l'opérateur sur un signal  $X$  est alors donnée par  $(\mathcal{U}_{\mathcal{H}}X)(\xi) = e^{\xi/2f_r} X(f_r e^{\xi/f_r})$ . Pour en alléger l'écriture, nous supposons par la suite que  $f_r = 1$ .

dont on calcule l'image par une double transformée de Mellin

$$\begin{aligned}
Q_x(c, \nu) &= \int \int_0^\infty HAF(\zeta, \beta) \nu^{-i2\pi\zeta} \beta^{i2\pi c-1} d\beta d\zeta \\
&= \int_0^\infty X(\sqrt{\beta}\nu) X^*\left(\frac{1}{\sqrt{\beta}}\nu\right) \beta^{i2\pi c-1} d\beta \\
&= \int X(e^{\beta/2}\nu) X^*(e^{-\beta/2}\nu) e^{i2\pi\beta c} d\beta,
\end{aligned}$$

En reprenant alors le même changement de variable utilisé pour l'hyperbogramme  $c = t\nu$ , la distribution temps-fréquence obtenue

$$Q_x(t, \nu) = \int X(e^{\beta/2}\nu) X^*(e^{-\beta/2}\nu) e^{i2\pi t\nu\beta} d\beta, \quad (1.68)$$

correspond à la distribution introduite par Altes [3], [88], dont on sait qu'elle est unitaire et *naturellement* covariante par translation hyperbolique en temps et changement d'échelle.

Nous n'avons évoqué ici que deux représentations possibles du groupe  $\mathcal{WH}$ , mais il n'est pas exclu qu'il en existe d'autres, associées à d'autres types d'opérateurs, et fournissant une description conjointe du signal selon deux variables d'une nature différente. Mais d'une façon générique l'ensemble de ces représentations se déduit de la classe de Cohen, et donc des opérateurs  $\mathcal{T}$  et  $\mathcal{F}$ , par l'action d'une anamorphose quelconque  $\mathcal{U}$ . On pourrait alors obtenir une nouvelle "classe" axée sur les opérateurs

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}_1 &= \mathcal{U}^{-1}\mathcal{T}\mathcal{U} \text{ et} \\
\mathcal{O}_2 &= \mathcal{U}^{-1}\mathcal{M}\mathcal{U}.
\end{aligned}$$

Une illustration directe de ce résultat nous renvoie aux travaux de A. Papandreou, F. Hlawatsch et G.F. Boudreaux-Bartels [98] où est explicitement établie la relation de passage entre classe de Cohen et classe hyperbolique. Formellement, il est possible de déduire de toute distribution de la classe de Cohen une forme homologue existant dans la classe hyperbolique selon:

$$T_x^H(t, \nu) \equiv (\underline{\mathcal{U}}_{\mathcal{H}}^{-1} C_{(\mathcal{U}_{\mathcal{H}}X)}) (t, \nu).$$

$\mathcal{U}_{\mathcal{H}}$  est l'opérateur décrit en (1.65) et  $\underline{\mathcal{U}}_{\mathcal{H}}^{-1}$  l'opérateur matriciel traduisant sur les variables du plan temps-fréquence l'effet de l'opérateur inverse (1.66), son action sur la distribution  $C(t, \nu)$  s'écrit:

$$T_x^H(t, \nu) \equiv C_{(\mathcal{U}_{\mathcal{H}}X)}(t\nu, \log \nu). \quad (1.69)$$

Appliquée à la distribution de Wigner-Ville, cette transformation de dynamique d'axes, lui associe pour image la distribution de Altes. On aurait d'ailleurs pu pressentir cette correspondance à travers la symétrie en perpétuel filigrane des approches faites de ces deux représentations du groupe de  $\mathcal{WH}$ .

### 1.3.3 Groupe affine

Les représentations du groupe de  $\mathcal{WH}$  sont d'un intérêt majeur pour la caractérisation de situations physiques qui se manifestent sur les signaux au travers de translations (en temps et/ou en fréquence). Typiquement, les estimations de temps de propagation ou de vitesses dans les cas de signaux à bande étroite fournissent un champ propice d'applications de ces objets d'analyse. Malheureusement les verrous de l'analyse temps-fréquence (principalement associée à la classe de Cohen), apparaissent dès lors que l'on cherche à estimer ces mêmes types de paramètres sur des signaux à bande large. L'effet Doppler, principal facteur de cette limitation, agit sur le signal comme un opérateur de dilatation. Par nature, les décompositions temps-échelle vont jouer un rôle essentiel dans le cadre des représentations du groupe affine.

Le groupe affine est l'ensemble des réels de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$  muni de la loi de composition interne [58]

$$(t_1, a_1) \bullet (t_2, a_2) = (t_1 + a_1 t_2, a_1 a_2).$$

La combinaison des opérateurs de dilatation et de translation agissant sur une fonction de  $H^2(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} (\gamma(t, a)h)(u) &= \frac{1}{\sqrt{a}} h\left(\frac{u-t}{a}\right) \\ &= (T_t \mathcal{S}_{a^{-1}} h)(u) \quad \forall h \in H^2(\mathbb{R}), \end{aligned}$$

définit une représentation du groupe affine sur  $H^2(\mathbb{R})$ , puisque

$$\begin{aligned} (\gamma(t_1, a_1)\gamma(t_2, a_2)h)(u) &= \frac{1}{\sqrt{a_1 a_2}} h\left(\frac{u - (t_1 + a_1 t_2)}{a_1 a_2}\right) \\ &= (\gamma(t_1 + a_1 t_2, a_1 a_2)h)(u). \end{aligned}$$

De plus, on peut vérifier que cette représentation est unitaire.

*Remarque.* L'exponentiation de la variable  $a = e^\beta$  avec  $\beta \in \mathbb{R}$  est une reparamétrisation triviale pour considérer le groupe affine défini sur le plan réel  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .

Comme pour le groupe de  $\mathcal{WH}$ , on peut définir une transformée du groupe affine vers  $H^2(\mathbb{R})$ , construite sur la représentation  $\gamma$

$$\Gamma_x(t, a) = \langle x, \gamma(t, a)h \rangle = \frac{1}{\sqrt{a}} \int x(u) h^*\left(\frac{u-t}{a}\right) du,$$

elle chiffre le degré de ressemblance entre un signal  $x$  et l'orbite décrite par dilatation et translation en temps de  $h$ . On reconnaît dans cette dernière équation la définition de la transformée en ondelettes continues (1.43).

La condition d'admissibilité sur la fonction  $h \in H^2(\mathbb{R})$ , permettant une resynthèse du signal  $x$  à partir de  $\Gamma_x(t, a)$ , est la même qu'en (1.46) et spécifie en substance que  $h$  doit être du type passe-bande.

Pour dériver de la structure particulière de ce groupe affine une forme équivalente large bande de la fonction d'ambiguïté (1.37), notée  $\chi(a, t)$  ici, substituons dans l'expression de  $\Gamma_x(t, a)$ , l'atome de décomposition  $h$  par le signal lui-même. La forme quadratique obtenue s'écrit [3]

$$\begin{aligned}\Gamma_x(t, a) &= \frac{1}{\sqrt{a}} \int x(u)x^* \left( \frac{u-t}{a} \right) du \\ &= \sqrt{a} \int X(\nu)X^*(a\nu)e^{i2\pi\nu t} d\nu \\ &= \chi(a, t),\end{aligned}$$

forme que l'on peut symétriser par le changement de variables  $t = (a-1)\tau/\log a$  [106], [105]. Il vient alors l'expression  $\chi^{(s)}(a, \tau)$  suivante:

$$\chi^{(s)}(a, \tau) = \int_0^\infty \sqrt{a}X(a\theta)X^*(\theta)e^{i2\pi(a-1)\frac{\theta\tau}{\log a}} d\theta,$$

(dont une traduction possible sous forme d'action d'opérateurs nous est donnée par  $\chi^{(s)}(a, \tau) = \langle \mathcal{S}_{a-1} \mathcal{T}_{\tau/\log a} x, \mathcal{T}_{\tau/\log a} x \rangle$ ).

*Remarque.* La symétrisation de  $\chi(a, t)$  ne résulte pas simplement d'une redistribution des facteurs de dilatation et de translation sur les deux membres de la forme quadratique, les lois de compositions opératoriels de l'algèbre de Lie associée au groupe affine (comme au groupe de  $\mathcal{WH}$ ) ne pouvant commuter. Du fait également de cette non commutativité des opérateurs, la formalisation symétrique  $\chi^{(s)}(a, t)$  retenue ici, correspond à une définition possible de fonction d'ambiguïté large bande et ne provient que de l'arbitraire dans le choix de l'ordre des transformations appliquées aux signaux. On pourra en particulier trouver dans [46], d'autres propositions de fonctions d'ambiguïté large bande.

Nous avons rappelé dans le cas du groupe de  $\mathcal{WH}$ , les projections qui permettaient de passer de l'espace des corrélations à une représentation quadratique du signal (i.e. transformée de Fourier ou de Mellin sur les deux variables); une démarche analogue pour la classe affine nous amène à considérer les fonctions propres des opérateurs de translation et de dilatation. En "projetant" la fonction d'ambiguïté large bande sur ces fonctions, on construit une distribution bilinéaire du signal, naturellement covariante par translation et changement d'échelle. En l'occurrence, transformée de Fourier et transformée de Mellin étant les deux isomorphismes construits sur les exponentielle complexes respectivement sur les réponses impulsionnelles hyperboliques, appliquons successivement ces deux transformations à  $\chi^{(s)}(a, \tau)$  ( $\tau \xrightarrow{\mathcal{F}} \nu$ , et  $a \xrightarrow{\mathcal{J}} \zeta$ ),

$$\begin{aligned}P(\zeta, \nu) &= \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \chi^{(s)}(a, \tau) e^{-i2\pi\nu\tau} a^{i2\pi\zeta-1} d\tau da \\ &= \int_0^\infty \frac{\log a}{a-1} \sqrt{a}X\left(a\frac{\log a}{a-1}\nu\right) X^*\left(\frac{\log a}{a-1}\nu\right) a^{i2\pi\zeta-1} da \\ &= \int \frac{u}{2\sinh(u/2)} X\left(\frac{ue^{u/2}}{2\sinh(u/2)}\nu\right) X^*\left(\frac{ue^{-u/2}}{2\sinh(u/2)}\nu\right) e^{i2\pi\zeta u} du.\end{aligned}$$

$\zeta$  est un paramètre d'échelle sans dimension que l'on peut convenir de poser égal au produit sans dimension  $t\nu$ . La distribution temps-fréquence affine, covariante par translation en temps et changement d'échelle qui en résulte n'est autre que la *distribution unitaire de Bertrand* [14].

## 1.4 Conclusion

Au terme de ce chapitre, nous avons voulu insister sur les différences et points communs entre distributions temps-fréquence et temps-échelle des signaux. Nous ne reviendrons pas sur la nécessité de ces objets, mais rappelons qu'il s'agit dans tous les cas de *représentations bidimensionnelles* qui visent à isoler dans le signal le comportement de chacune de ses composantes (fréquence ou échelle). En ce sens, on peut interpréter ces distributions comme des prismes au travers desquels le signal est observé et décomposé. C'est pour caractériser la nature de cette décomposition, que l'on adopte le formalisme mathématique lié à l'action d'opérateurs. Ceux-ci, appliqués sur les signaux, modélisent une réalité physique (temps de propagation, effet Doppler, dispersion ...) dont les effets se mesurent sur des dimensions telles que fréquence ou échelle. L'appartenance d'une distribution à une classe spécifique (e.g. Cohen ou affine) résulte d'avantage des propriétés de covariance de celles-ci relativement à un couple d'opérateurs que de la dimension même des variables de sortie de la représentation. A cet égard, nous avons vu qu'il existait des intersections non vides entre groupes de représentations et qu'il était possible dans certains cas de faire correspondre notions d'échelle et de fréquence. Le synoptique de la figure 1.8 dresse un bilan partiel des quelques classes de représentations abordées. Encore une fois, il existe d'autres variations possibles sur ces classes, toutes dérivées de l'action d'opérateurs unitaires de changement d'axes.

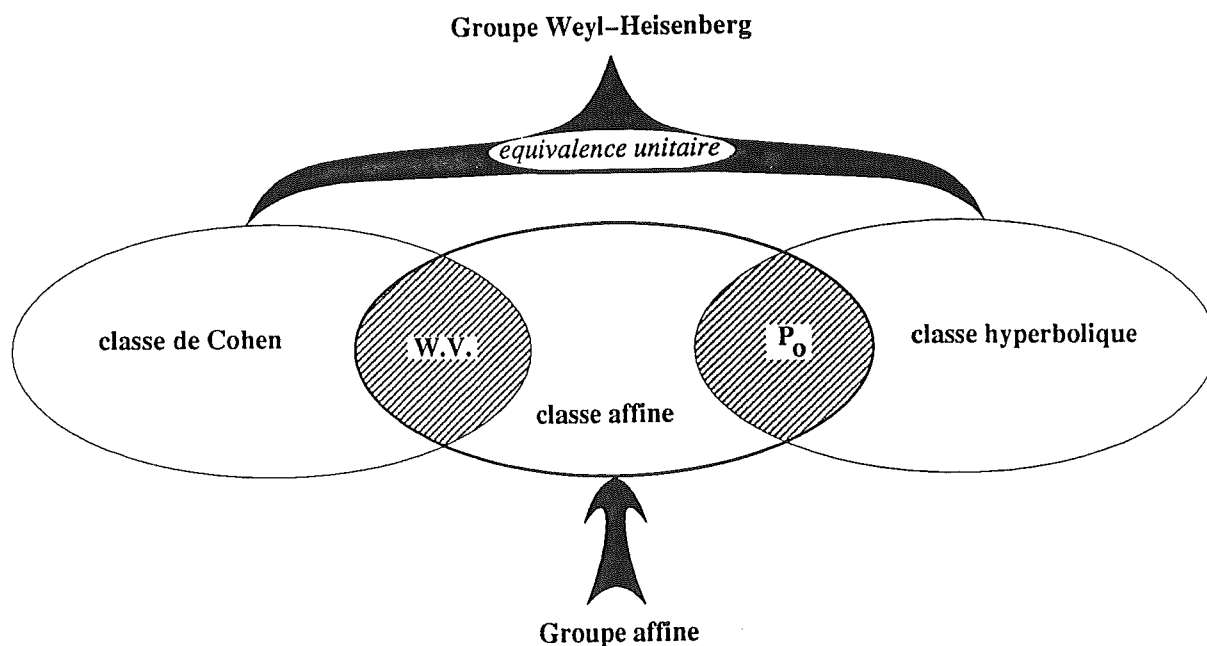


Figure 1.8: *Intersections entre classe de Cohen, classe affine et classe hyperbolique. Les classes de Cohen et hyperboliques sont deux représentations unitairement équivalentes du groupe de Weyl-Heisenberg. La classe affine est construite sur des principes de covariance par les opérateurs de translation en temps et changement d'échelle.*

L'équivalence unitaire qui s'ensuit entre représentations d'un même groupe permet de conférer de façon univoque les propriétés d'une classe particulière aux classes qui lui sont équivalentes. Par exemple, les travaux [97], [96], [98] établissent cette correspondance entre classe de Cohen et classe hyperbolique, comme représentations unitairement équivalentes du groupe de Weyl-Heisenberg.

L'intérêt visuel d'une représentation bidimensionnelle des signaux est évident, cependant ce changement d'espace de visualisation ne se limite pas à ce seul enjeu. La redondance qui accompagne les distributions temps-fréquence (ou temps-échelle) doit en contrepartie favoriser l'identification de paramètres difficilement mesurables dans une représentation à une seule dimension. L'évaluation de ces paramètres, comme l'expertise des images, requièrent alors une étude précise des propriétés offertes par les distributions, ainsi qu'une bonne compréhension de leurs comportements face à des situations simples. Dans le chapitre suivant, en nous restreignant à la perspective des distributions temps-échelle, nous étudierons l'influence de la nature des filtrages affines sur des aspects tels que la localisation ou la construction géométrique des interférences.





## **2. Différentes Structures de noyaux - Différentes classes de distributions**

## 2.1 Un choix de paramétrisation

On peut trouver deux explications au succès rencontré par les méthodes d'analyses temps-fréquence. D'un point de vue qualitatif, les images obtenues par ces traitements sont des empreintes très figuratives de l'état et de la dynamique d'un système au travers de son évolution fréquentielle. La simplicité de représentation, atout majeur dans ce contexte, favorise naturellement les distributions dépourvues de termes interférentiels (le spectrogramme est à cet égard un candidat privilégié), ou à défaut des distributions dont on sait modéliser le principe de génération des interférences. L'autre intérêt des analyses conjointes est orienté vers des considérations d'ordre plus quantitatif. En répartissant dans le plan temps-fréquence l'information concentrée dans le signal, on peut, sous couvert de certaines propriétés théoriques, mesurer différents aspects du comportement d'un signal. Typiquement, on tire profit de la dépendance temporelle de l'analyse pour estimer des valeurs instantanées de paramètres. Cette situation s'illustre bien dans le cas de la fréquence instantanée d'un signal, que l'on sait chiffrer sans biais par le calcul du moment de premier ordre de la distribution de Wigner-Ville associée [27], [40]. Cependant, ces deux aspects des distributions temps-fréquence font souvent appel à des contraintes antinomiques sur leurs structures (cf. §1.1.5). Dans la classe de Cohen, différents choix de noyaux de corrélation peuvent constituer des solutions intermédiaires, réalisant un bon compromis entre ces deux tendances.

Nous nous proposons, dans ce chapitre de transposer cette démarche au cas des distributions temps-échelle. Pour cela, et bien qu'il existe pour cette classe une grande diversité de paramétrisations (cf. §1.3.3), nous retiendrons, pour des raisons de symétrie avec la classe de Cohen, le formalisme construit sur différentes corrélations affines de la distribution de Wigner-Ville (équation 1.52). Du point de vue *représentation*, comme du point de vue *analyse*, nous verrons alors quels peuvent être les avantages d'un filtrage fonctionnellement dépendant de l'échelle. Dans une deuxième partie, nous étudierons plus précisément les distributions à noyaux bi-fréquentiels localisés et en particulier nous étudierons la géométrie interférentielle associée à ce type de structure.

## 2.2 Lissages affines

### 2.2.1 Une résolution conjointe liée à l'échelle

Classe de Cohen et classe affine peuvent se définir en faisant usage de deux types de corrélation sur la distribution de Wigner-Ville. Dans le cas des covariances par translation en temps et en fréquence, la corrélation standard utilisée assure le transfert de ces propriétés depuis la distribution de Wigner-Ville vers l'ensemble des distributions de la classe de Cohen. Parallèlement, et pour étendre à la classe affine la structure covariante par dilatation et translation en temps de la distribution de Wigner-Ville, il est naturel de faire appel à une transformation assurant le maintien de ces propriétés: la corrélation affine. L'ensemble de la classe affine peut alors se réduire au choix arbitraire d'un noyau

de corrélation affine  $\Pi$ , et s'écrire

$$\Omega_x(t, a) = \iint W_x(u, \theta) \Pi\left(\frac{u-t}{a}, a\theta\right) dud\theta.$$

Nous avons déjà évoqué les difficultés d'interprétation que pouvaient soulever cette définition de la classe affine, et notamment l'absence de connexion avec la fonction d'ambiguïté large bande. Cependant, dans le contexte très précis du filtrage passe-bas des interférences générées par Wigner-Ville, ce formalisme permet d'étendre le champ d'étude abordé au paragraphe (1.1.5). Dans une certaine mesure, on peut effectivement considérer les lissages affines de la distribution de Wigner-Ville comme une échappatoire au problème des lissages uniformes du plan temps-fréquence, liés à la classe de Cohen. Nous nous proposons donc d'illustrer cette potentialité des classes affines en comparant les comportements des spectrogrammes et scalogrammes face à certaines situations où un gradient de lissage en fonction de la fréquence présente un intérêt. La similitude des structures de ces deux distributions se prête bien à une symétrisation entre les deux classes. Rappelons alors que

$$C_x(t, \nu; W_\phi) = \left| \int x(u) \phi^*(u-t) e^{-i2\pi\nu u} du \right|^2 = \iint W_x(u, \theta) W_{\phi_{t\nu}}(u, \theta) dud\theta$$

$$\Omega_x\left(t, a = \frac{\nu_0}{\nu}; W_\psi\right) = \frac{1}{a} \left| \int x(u) \psi\left(\frac{u-t}{a}\right) du \right|^2 = \iint W_x(u, \theta) W_{\psi_{ta}}(u, \theta) dud\theta$$

pour lesquelles on choisira la même fenêtre d'analyse gaussienne

$$\phi(t) = |\psi(t)| = e^{-\alpha t^2} \implies W_\phi(t, \nu) = W_\psi(t, \nu) = \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha}} \underbrace{e^{-2\alpha t^2}}_{g(t)} \underbrace{e^{-\frac{2\pi^2 \nu^2}{\alpha}}}_{H(\nu)}. \quad (2.1)$$

Dans les deux cas, l'action des noyaux  $W_{\phi_{t\nu}}(u, \theta)$  et  $W_{\psi_{ta}}(u, \theta)$  se solde par un lissage dans les deux directions de la distribution de Wigner-Ville. Pour chiffrer le degré de lissage correspondant, on peut alors estimer, à fréquence  $f$  donnée, les largeurs des réponses impulsionnelles  $\Delta t_f(C)$  et  $\Delta t_f(\Omega)$  ainsi que les bandes spectrales équivalentes  $\Delta \nu_f(C)$  et  $\Delta \nu_f(\Omega)$  liées aux analyses. Compte tenu des propriétés de localisation de la distribution de Wigner-Ville, ces taux de lissage s'obtiennent simplement en estimant les moments de second ordre en temps et en fréquence des cellules  $W_{\phi_{tf}}$  et  $W_{\psi_{ta}}$

$$\Delta t_f^2(C) = \Delta t_{W_{\phi_{tf}}}^2 = \frac{\int (u-t)^2 W_{\phi_{tf}}(u, \theta) du}{\int W_{\phi_{tf}}(u, \theta) du} = \frac{1}{4\alpha} \quad (2.2)$$

$$\Delta t_{f=\frac{f_0}{a}}^2(\Omega) = \Delta t_{W_{\psi_{ta}}}^2 = \frac{\int (u-t)^2 W_{\psi_{ta}}(u, \theta) du}{\int W_{\psi_{ta}}(u, \theta) du} = a^2 \frac{1}{4\alpha} \quad (2.3)$$

$$\Delta \nu_f^2(C) = \Delta \nu_{W_{\phi_{tf}}}^2 = \frac{\int (\theta-f)^2 W_{\phi_{tf}}(u, \theta) d\theta}{\int W_{\phi_{tf}}(u, \theta) d\theta} = \frac{\alpha}{4\pi^2} \quad (2.4)$$

$$\Delta\nu_{f=\frac{f_0}{a}}^2(\Omega) = \Delta\nu_{W_{\psi_{ta}}}^2 = \frac{\int (\theta - f_0/a)^2 W_{\psi_{ta}}(u, \theta) d\theta}{\int W_{\psi_{ta}}(u, \theta) d\theta} = \frac{1}{a^2} \frac{\alpha}{4\pi^2}. \quad (2.5)$$

Ces résultats chiffrant le fait que l'analyse par spectrogramme présente une résolution conjointe constante à toutes les fréquences, alors qu'une décomposition du type scalogramme (et par extension toute analyse à coefficient de surtension  $Q$  constant) offre des résolutions en temps et en fréquence fonctionnellement dépendantes de l'échelle (et par conséquent de la fréquence). L'aspect pragmatique de ces relations fait simplement référence à l'horizon d'observation (imposé par la largeur de la fenêtre à court terme de l'analyse) sur lequel est estimé le comportement local du signal relativement à une fréquence donnée. En haute fréquence, et conformément à la rapidité de variation du signal, on peut se contenter d'une fenêtre étroite en temps; réciproquement, à basse fréquence, compte tenu de la lenteur à laquelle le signal évolue, un horizon d'observation large est indispensable pour une identification correcte de la pulsation. Ces arguments font des analyses à  $Q$  constant des méthodes temps-fréquence "hybrides" combinant en une seule représentation la transition continue d'un spectrogramme très lissé en temps vers un spectrogramme très lissé en fréquence. Les figures 2.1(b)-(c) illustrent ces commentaires.

Appliqué à une série périodique d'impulsions, le spectrogramme peut présenter deux comportements extrêmes, en fonction de la largeur  $\Delta t_f(C)$  choisie. En l'occurrence, la figure (2.1(b)) correspond à une fenêtre d'analyse à court terme suffisamment étroite pour que les impulsions soient analysées individuellement: c'est l'acuité temporelle qui est ici privilégiée, symbolisée par un déferlement énergétique ponctuel et périodique à travers toutes les fréquences. A l'inverse la figure 2.1(c) résulte d'une analyse à court terme où la fenêtre  $\phi(t)$  est de taille supérieure à la période des impulsions. La délocalisation qui s'ensuit profite à une meilleure résolution fréquentielle, orientant d'avantage la représentation vers une décomposition harmonique du signal.

Sur le même signal, une décomposition à  $Q$  constant (figure 2.1(d)) fournit pour les hautes fréquences une description à très petite échelle du signal, retraçant bien son intermittence temporelle. A basse fréquence, l'ondelette étant de résolution moindre que la période des événements, c'est une vue très globale du signal qui est rendue: à cette échelle d'observation une bonne résolution spectrale se substitue à la localisation temporelle. Cet exemple n'est d'ailleurs pas sans rappeler l'analogie qui a été faite au paragraphe 1.2.1 entre l'analyse en ondelettes continue et une mesure référée à un étalon variable.

La dualité temps-fréquence de ces décompositions fait que leur comportement est tout à fait comparable dans le cas où le signal analysé est une collection d'harmoniques purs. Suivant l'échelle considérée, c'est tantôt le spectre du signal qui est caractérisé tantôt l'aspect cyclique temporel (figure 2.2).

## 2.2.2 Lissage affine des interférences

Par nature, un lissage appliqué à la distribution de Wigner-Ville tend à en réduire les termes interférentiels [27], [40], et qu'il soit affine ne le soustrait pas au compromis difficile entre la suppression de ces interférences et la délocalisation des composantes

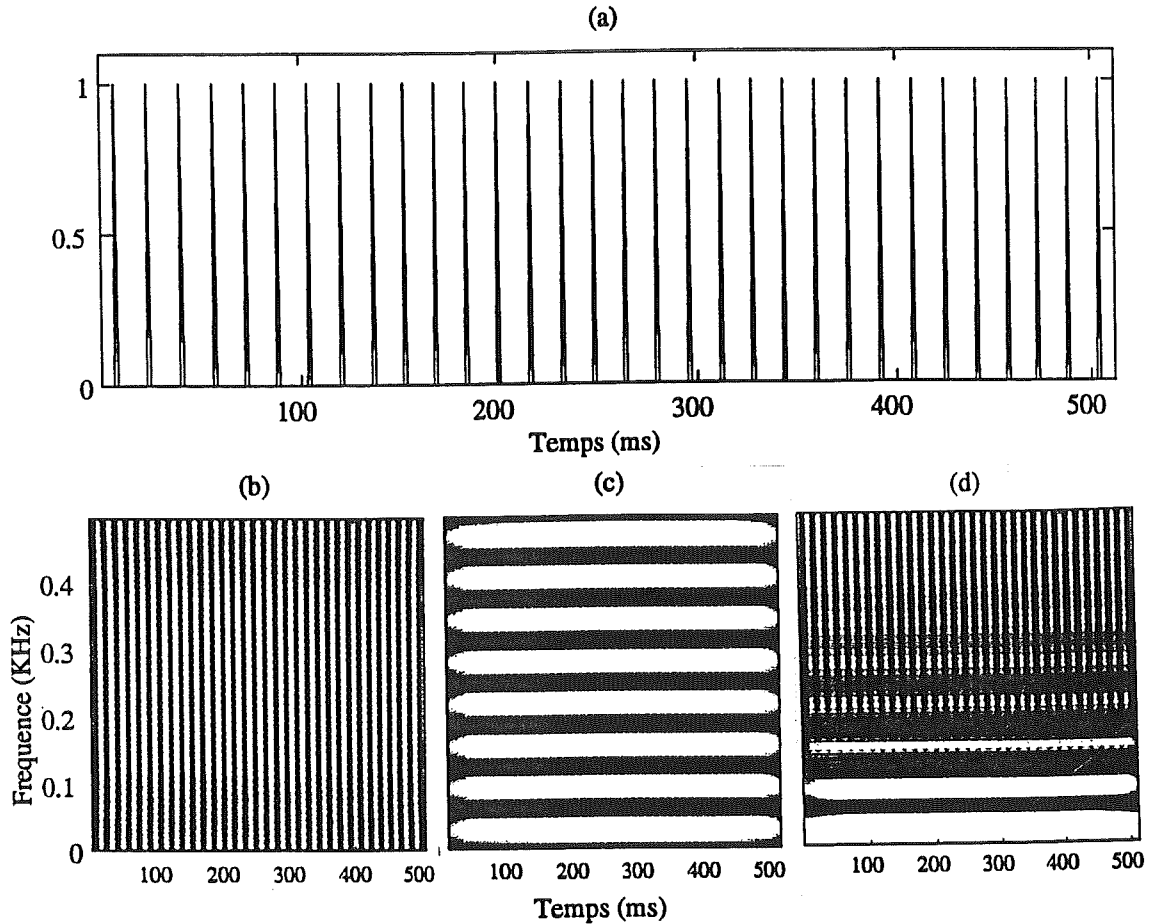


Figure 2.1: (a) Signal - (b) Spectrogram  $\Delta t_f(C) = 2.64$  ms - (c) Spectrogram  $\Delta t_f(C) = 20.8$  ms - (d) Scalogram  $\Delta t_{f=f_0/a}(\Omega) = 3.2$  ms pour  $f = 0.5$  KHz et  $\Delta t_{f=f_0/a}(\Omega) = 32$  ms pour  $f = 0.05$  KHz.

dans le plan temps-fréquence. Par contre, de la dépendance fonctionnelle établie au paragraphe précédent, entre résolution et échelle, on infère une relation de même ordre entre réduction des interférences et échelle analysée. Ainsi, on vérifie qu'une importante délocalisation dans l'une des deux directions va de pair avec une forte atténuation des composantes oscillantes suivant cette même direction, simultanément on observe l'effet contraire sur la variable conjointe. L'étude particulière du scalogramme suffirait à confirmer ces comportements, mais dans ce cas précis,  $\Delta t_{f=f_0/a}(\Omega)$  et  $\Delta \nu_{f=f_0/a}(\Omega)$  étant fixés par le seul choix du coefficient de surtension  $Q$  de l'ondelette, il est impossible de dissocier les effets du lissage selon l'axe des fréquences de celui relatif au temps. En calquant la démarche qui nous a conduit à considérer les distributions pseudo Wigner-Ville lissées (cf. §1.1.5), on peut gagner un degré de liberté supplémentaire sur les lissages affines en misant sur la séparabilité des variables du noyau  $\Pi$ . Dans le cas d'une ondelette d'enveloppe gaussienne, et dans ce cas seulement, le scalogramme résulte des

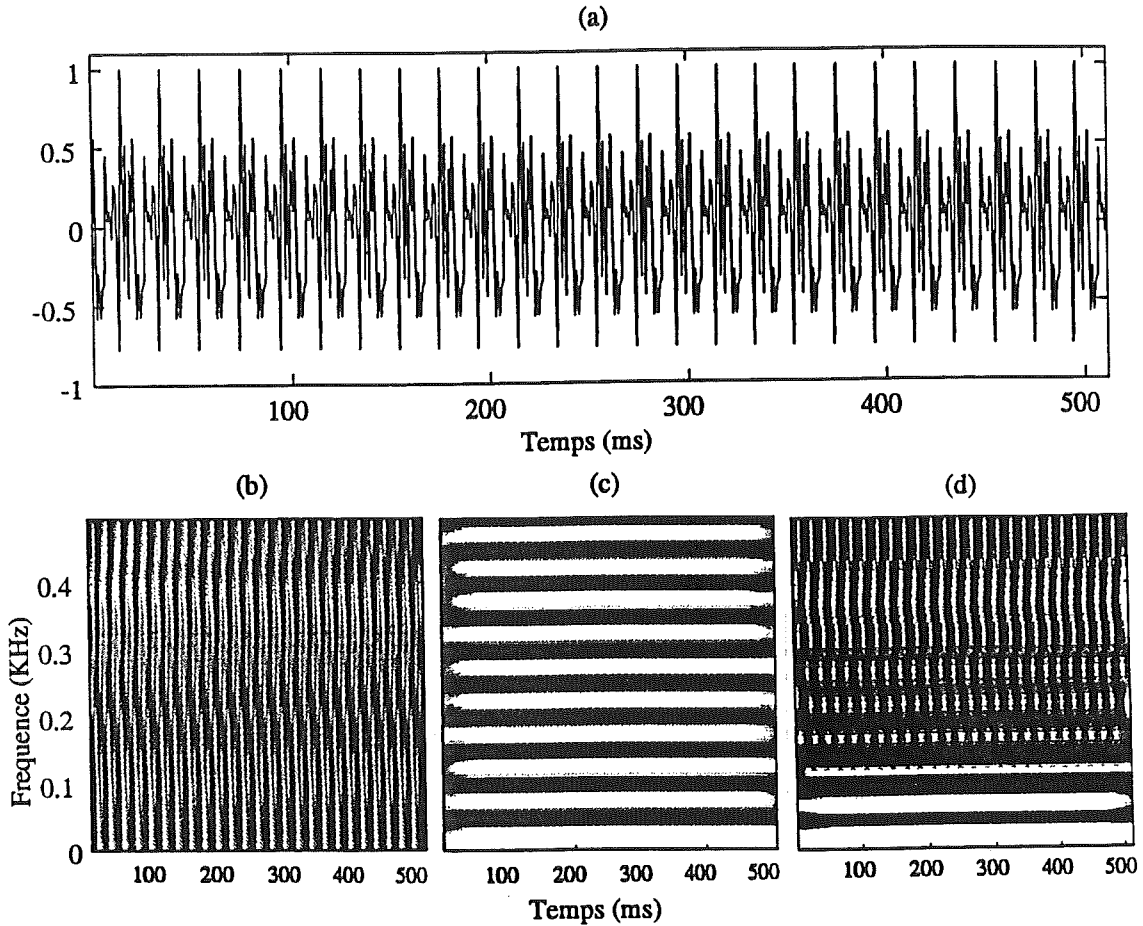


Figure 2.2: (a) Signal - (b) Spectrogram  $\Delta t_f(C) = 2.64$  ms - (c) Spectrogram  $\Delta t_f(C) = 20.8$  ms - (d) Scalogram  $\Delta t_{f=\frac{f_0}{a}}(\Omega) = 3.2$  ms pour  $f = 0.5$  KHz et  $\Delta t_{f=\frac{f_0}{a}}(\Omega) = 32$  ms pour  $f = 0.05$  KHz.

actions indépendantes de deux fonctions  $H(f)$  et  $g(t)$  sur la distribution de Wigner-Ville (substituer la forme (2.1) dans l'équation (1.51)) [50], [102]. Les distributions pseudo Wigner-Ville lissées affines (DPWVLA) obtenues intègrent scalogramme et Wigner-Ville dans un panorama de représentations temps-échelle pour lesquelles les rôles de  $\Delta t_{f=\frac{f_0}{a}}(\Omega)$  et de  $\Delta \nu_{f=\frac{f_0}{a}}(\Omega)$  sont désolidarisés et donc sans influence mutuelle. La figure 2.3 montre quelques DPWVLA d'une transition progressive de la distribution de Wigner-Ville vers le scalogramme<sup>1</sup>.

Ces quelques exemples soulignent l'influence de l'échelle analysée sur l'interprétation que l'on peut faire d'un lissage affine de la distribution de Wigner-Ville.

<sup>1</sup>L'évaluation numérique de ces distributions requière un certain nombre de précautions quant à l'échantillonnage du signal, faute de quoi on risque d'observer des phénomènes de repli spectral (cf. Annexe 2).

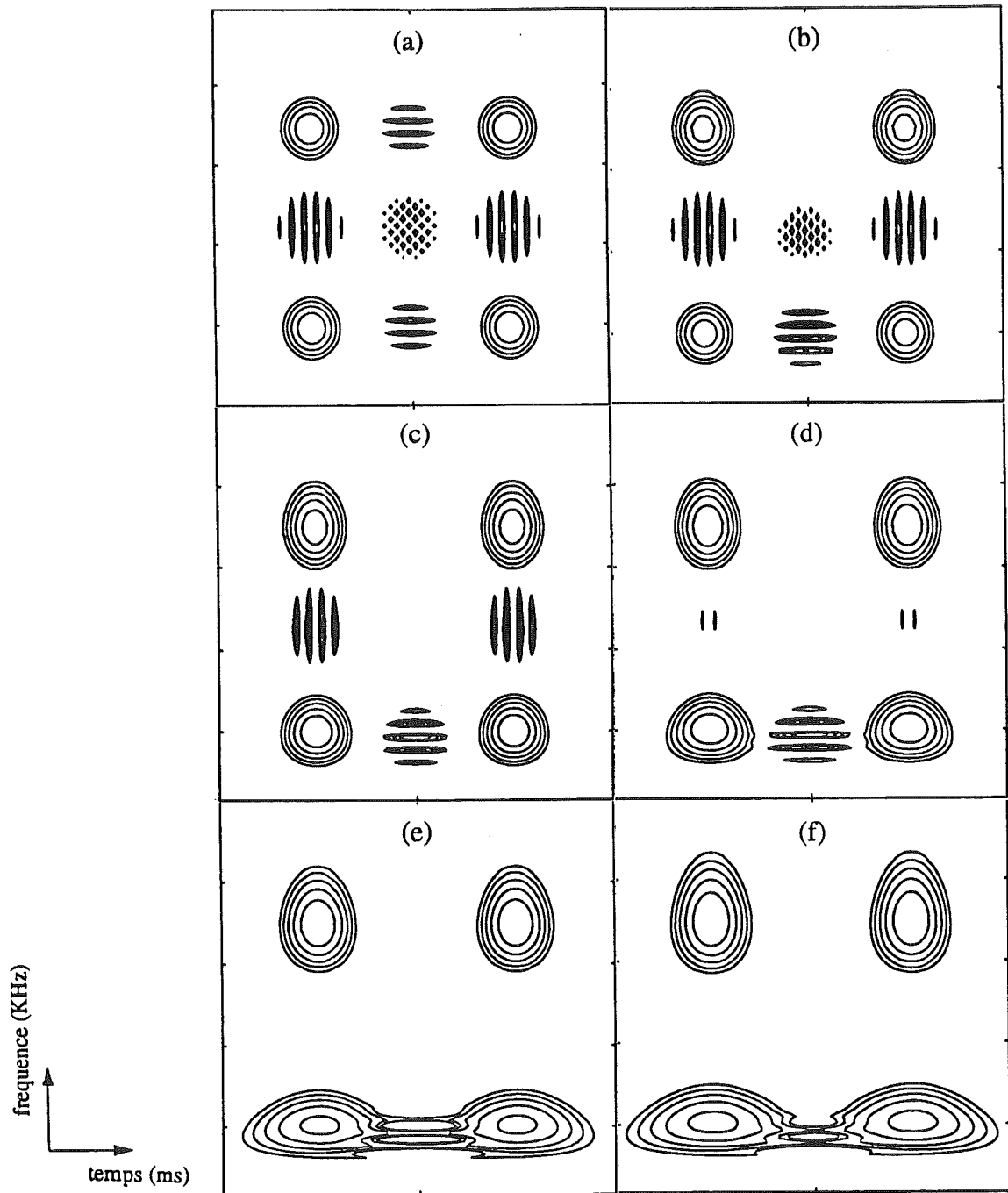


Figure 2.3: DPWVLA calculées pour différents couples de résolution en temps et en fréquence sur le signal décrit à la figure 1.1. Les différentes valeurs choisies assurent une transition progressive entre distribution de Wigner-Ville (a) et scalogramme (f). (a)  $\Delta t_{f_0}(\Omega) = 0$  ms,  $\Delta \nu_{f_0}(\Omega) = 0$  KHz (Wigner-Ville) - (b)  $\Delta t_{f_0}(\Omega) = 0.226$  ms,  $\Delta \nu_{f_0}(\Omega) = 0.0035$  KHz - (c)  $\Delta t_{f_0}(\Omega) = 0.565$  ms,  $\Delta \nu_{f_0}(\Omega) = 0.007$  KHz - (d)  $\Delta t_{f_0}(\Omega) = 1.13$  ms,  $\Delta \nu_{f_0}(\Omega) = 0.007$  KHz - (e)  $\Delta t_{f_0}(\Omega) = 2.82$  ms,  $\Delta \nu_{f_0}(\Omega) = 0.01$  KHz - (f)  $\Delta t_{f_0}(\Omega) = 3.2$  ms,  $\Delta \nu_{f_0}(\Omega) = 0.025$  KHz (scalogramme).



### 2.2.3 Localisation des DPWVLA

Nous reprenons dans ce paragraphe un résultat déjà développé dans [40] traitant de l'optimalité de la distribution de Wigner-Ville (et dans une large mesure des pseudo Wigner-Ville lissées) face à des contextes de signaux modulés linéairement en fréquence. Cette vision des représentations temps-fréquence sera ensuite projetée sur les représentations lissées affines pour lesquelles nous dégagerons une catégorie de signaux de prédilection.

Pour une transformée de Fourier à court terme, la finesse d'analyse en fréquence est essentiellement liée à la largeur de la fenêtre à court terme: améliorer la résolution spectrale impose d'élargir l'horizon d'observation autour de chaque date  $t$ . Sous l'hypothèse d'une certaine stationnarité (i.e. fréquence instantanée constante), cette extension de la fenêtre n'est contrainte que par les capacités de l'outil d'analyse et la propre taille des données. Il n'en est pas de même dans un contexte de fréquence instantanée variable, puisqu'alors l'élargissement de la fenêtre d'observation se trouve confronté au problème du déferlement fréquentiel. Le compromis optimal est celui qui concilie une taille de fenêtre maximale tout en validant sur la durée équivalente du signal un modèle quasi-stationnaire. Dans l'expression des pseudo Wigner-Ville lissées (équation 1.39), considérons le produit  $x(u + \frac{\tau}{2}) x^*(u - \frac{\tau}{2})$  comme un signal  $y_u(\tau)$  paramétré par la date  $u$  et de la variable  $\tau$ . (1.39) se réécrit alors

$$DPWVL(t, \nu) = \int g(u - t) \left\{ \int y_u(\tau) h(\tau) e^{-i2\pi\nu\tau} d\tau \right\} du,$$

où le terme entre accolades prend les traits d'une transformée de Fourier à court terme évaluée sur  $y_u(t)$  à la date arbitraire  $t = 0$ . Par ailleurs, le calcul de la fréquence instantanée  $\nu_{y_u(\tau)}$  de ce signal montre qu'il s'exprime en fonction de  $\nu_x(\tau)$  par la relation [40]

$$\nu_{y_u}(\tau) = \frac{1}{2}(\nu_x(\tau) + \nu_x(-\tau)).$$

Par conséquent, l'analyse à court terme de  $y_u(\tau)$  étant optimale pour une fréquence instantanée raisonnablement constante sur l'horizon d'observation défini par  $h(\tau)$ , cette hypothèse est vérifiée si la fréquence instantanée du signal  $x$  est simplement linéaire sur cette même largeur d'analyse. La structure symétrique bilinéaire des DPWVL repousse donc le compromis sur la fenêtre  $h$  d'un ordre de grandeur et confirme l'adéquation entre distribution de Wigner-Ville (DPWVL pour laquelle  $h(t) = 1$  et  $g(t) = \delta(t)$ ) et signaux à modulation linéaire de fréquence.

Ces stratégies sur le choix de la fenêtre d'analyse  $h$  restent partiellement valables pour les DPWVLA, puisqu'à chaque échelle  $a$  celles-ci s'interprètent comme un lissage standard de la distribution de Wigner-Ville par les fonctions dilatées  $h_a(t)$  et  $g_a(t)$  [50]

$$\begin{aligned} \Omega(t, a; g H) &= \int \frac{1}{\sqrt{a}} g\left(\frac{u-t}{a}\right) \left\{ \int x\left(u + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(u - \frac{\tau}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{a}} h\left(\frac{\tau}{a}\right) d\tau \right\} du \quad (2.6) \\ &= \int g_a(u-t) \left\{ \int x\left(u + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(u - \frac{\tau}{2}\right) h_a(\tau) d\tau \right\} du \end{aligned}$$

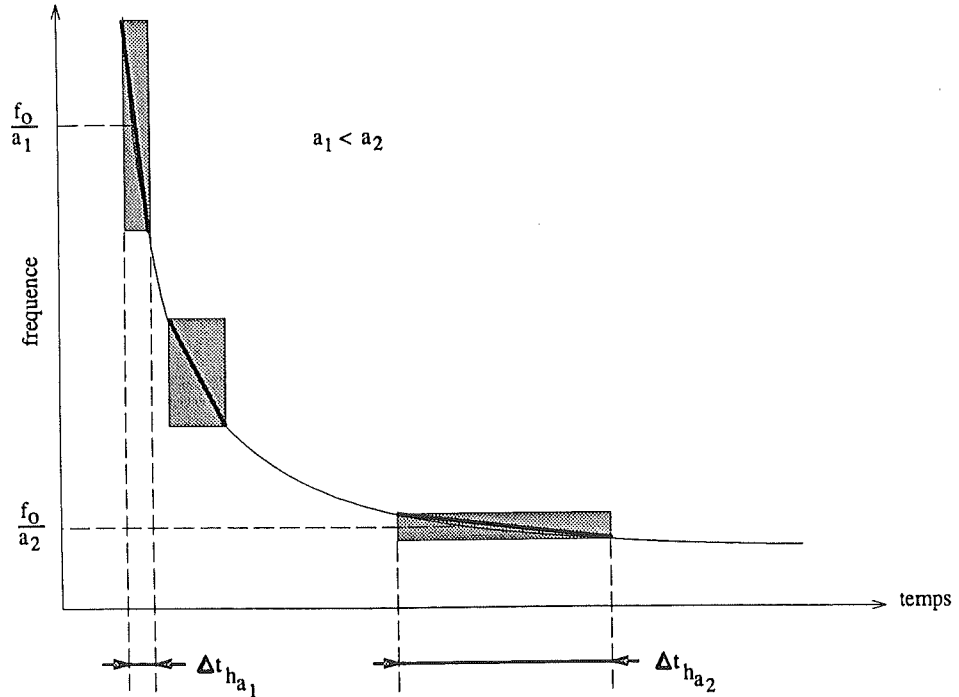


Figure 2.4: Adaptation entre l'évolution de la fenêtre à court terme d'un lissage affine de la distribution de Wigner-Ville et une loi de modulation hyperbolique en fréquence.

$$= DPWVL \left( t, f = \frac{f_0}{a}; g_a H_a \right). \quad (2.7)$$

La différence remarquable entre ces deux types de lissages provient de l'accroissement linéaire de la largeur de  $h_a(t)$  en fonction de l'échelle, avec pour amendement sur le compromis une révision permanente du déferlement fréquentiel: plus la fenêtre d'analyse s'élargit, plus l'approximation linéaire de la fréquence instantanée repose sur une diminution de la déviation maximale de  $\nu_x(t)$  sur cet horizon d'observation. Intuitivement, les signaux à modulations hyperboliques de fréquence ont une signature dans le plan temps-fréquence telle que leur géométrie leur permet de tirer le meilleur profit de ce genre d'analyse. A haute fréquence, alors que la pente de modulation est importante, la fenêtre  $h_a(t)$  restreint l'analyse à un faible domaine temporel qui limite ainsi le déferlement en fréquence. A grande échelle, la fréquence instantanée est lentement variable et, bien que le domaine d'existence de la fonction  $h_a(t)$  se soit accru, on peut encore adopter un modèle linéaire pour  $\nu_x(t)$ . (figure 2.4)

Par rapport aux signaux modulés hyperboliquement en fréquence, l'auto adaptation de la fenêtre d'analyse rend ces méthodes temps-échelle ad hoc, puisque celles-ci réalisent en chaque point du plan temps-fréquence le compromis optimal assurant, dans le cadre des lissages passe-bas de la distribution de Wigner-Ville, la meilleure résolution conjointe. Pour chiffrer cette supériorité des analyses à  $Q$  constant, replaçons-nous dans le contexte du scalogramme à ondelette d'analyse Gaussienne  $\psi(t) = e^{-at^2} e^{i2\pi\nu_0 t}$  (ondelette de Morlet), et définissons-nous une trame inspirée des travaux de Storey (1953)

[108]; Koderá, Gendrin et de Villedary (1978) [78]. Ceux-ci ont montré que la meilleure résolution fréquentielle  $\Delta\nu(T_x)$  d'une analyse à court terme appliquée à un signal modulé linéairement  $\nu_x(u) = \beta u + \gamma$  est obtenue pour une fenêtre gaussienne  $\phi(t) = e^{-\alpha t^2}$  pour laquelle

$$\Delta t_\phi = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} = \frac{1}{2\sqrt{\pi\beta}}. \quad (2.8)$$

D'autre part, on peut interpréter la transformée en ondelettes (de Morlet), comme étant à chaque échelle une décomposition particulière de Gabor et écrire

$$S_x(t, a; \psi) = e^{i2\pi\frac{\nu_0}{a}t} \int x(u) \left( \frac{1}{\sqrt{a}} e^{-\frac{\alpha}{a^2}(u-t)^2} \right) e^{-i2\pi\frac{\nu_0}{a}u} du = e^{i2\pi\frac{\nu_0}{a}t} T_x \left( t, \frac{\nu_0}{a}; |\psi_a| \right),$$

où  $\Delta t_{|\psi_a|} = \frac{a}{2\sqrt{\alpha}} = a\Delta t_{|\psi|}$ . Par suite, à échelle  $a$  donnée, l'analyse en ondelettes offre une résolution spectrale maximale sur une modulation linéaire de fréquence, si, *localement*, la borne de Storey (équation 2.8) est atteinte (i.e  $\Delta t_{|\psi_a|} = \frac{1}{2\sqrt{\pi\beta}}$ ). Considérons à présent une modulation hyperbolique de fréquence  $\nu_x(t) = \frac{1}{t}$  (arbitrairement on choisit les coordonnées des asymptotes comme origines des axes). Au voisinage de la date  $t = t_0$  telle que  $\nu_x(t_0) = \nu_0 = \frac{1}{t_0}$  on peut (par application du théorème des accroissements finis) approximer linéairement la loi de fréquence instantanée,

$$\nu_x(t) \sim \nu'_x(t_0)(t - t_0) + \nu_x(t_0) = -\frac{1}{t_0^2}(t - t_0) + \frac{1}{t_0} = \beta(t - t_0) + \gamma_0.$$

Supposons que la borne de Storey soit atteinte sur ce domaine de fréquences, c'est à dire

$$\Delta t_{|\psi|} = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} = \frac{1}{2\sqrt{\pi\beta}}.$$

Calculons alors quelle devrait être la largeur de fenêtre optimale pour que cette condition de Storey reste valide à toutes les échelles. Pour cela il nous faut approximer  $\nu_x(t)$  au voisinage d'une date  $t$  quelconque. Soit donc la date  $t_1$  telle que l'on ait

$$\nu_x(t_1) = \frac{\nu_0}{a} = \frac{1}{t_1} = \frac{1}{at_0}.$$

Réécrivons le théorème des accroissements finis autour de  $t_1$

$$\nu_x(t) \sim \nu'_x(t_1)(t - t_1) + \nu_x(t_1) = -\frac{1}{a^2 t_0^2}(t - t_1) + \frac{1}{at_0} = \frac{1}{a^2}\beta(t - t_1) + \gamma_1.$$

La borne de Storey correspondant à cette nouvelle pente de modulation vaut

$$\frac{a}{2\sqrt{\pi\beta}} = \frac{a}{2\sqrt{\alpha}},$$

quantité qui se trouve être justement égale à la largeur de fenêtre  $\Delta t_{|\psi_a|}$ . Nous démontrons donc qu'un choix judicieux de fenêtre  $\psi(t)$  permet d'obtenir la meilleure résolution

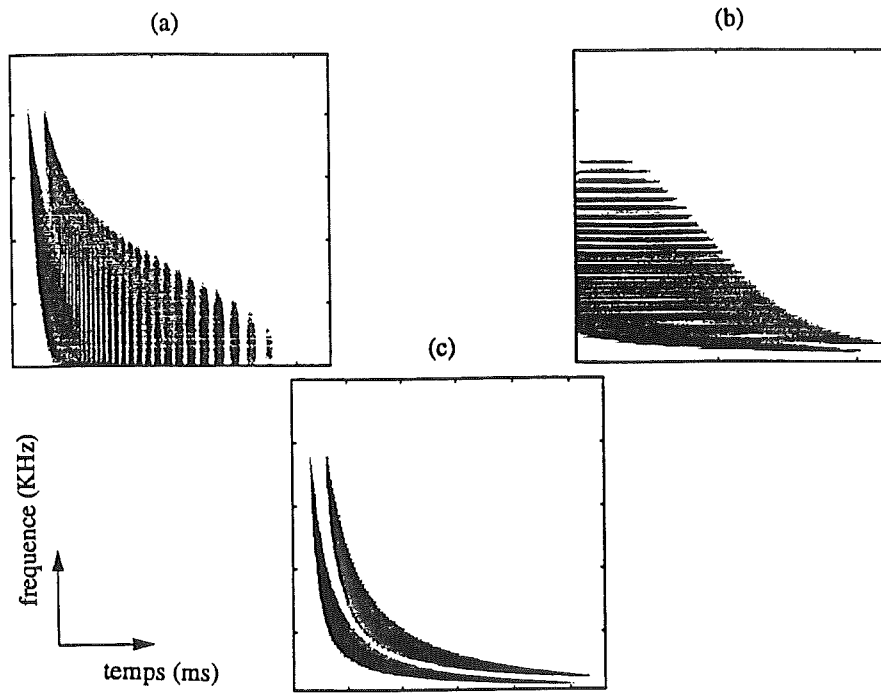


Figure 2.5: (a) Spectrogram,  $\Delta t(|T_x|^2) = 1.55$  ms - (b) Spectrogram,  $\Delta t(|T_x|^2) = 77.37$  ms - (c) Scalogram,  $\Delta t_{f_0}(|S_x|^2) = 1.55$  ms.

fréquentielle sur une modulation hyperbolique de fréquence, et ce à toutes les échelles. Grâce à des simulations numériques, on compare les résultats issus de lissages standards s'adaptant au signal soit aux hautes fréquences (figure 2.5(a)) soit aux basses fréquences (figure 2.5(b)), et un lissage affine s'accordant continuellement à la pente de la modulation (figure 2.5(c)). Il est clair qu'un filtrage du type bande constante ne satisfait que de façon partielle le compromis entre largeur de la fenêtre d'analyse et extension en fréquence du signal sur ce domaine; des résolutions optimales à hautes et basses fréquences s'excluent mutuellement. La figure 2.5(c) nous confirme qu'une décomposition à  $Q$  constant parvient, quant à elle, à étendre cette optimalité à toutes les fréquences.

En dépit du comportement remarquable de ces distributions temps-échelle relativement aux modulations hyperboliques de fréquence, une certaine circonspection est de mise face à la spécificité de cette situation. En effet, la relative concentration de la représentation sur la trajectoire théorique de fréquence instantanée n'est pas le fruit d'une localisation, au sens strict, sur cette loi de modulation, mais repose simplement sur l'optimisation d'un filtrage évolutif de la distribution de Wigner-Ville. D'ailleurs, si le sens de variation de la largeur  $\Delta t_{|\psi_a|}$  est contraire à l'évolution de la pente de modulation, le compromis entre approximation linéaire et horizon d'analyse ne peut que se dégrader au fil des échelles. Ce cas défavorable est illustré par la figure 2.6.

On peut argumenter autrement de cette absence de conformité systématique entre lissage affine et modulation hyperbolique en rappelant une des spécificités de la distribution de Wigner-Ville. Celle-ci, compte tenu du précepte de génération des interférences

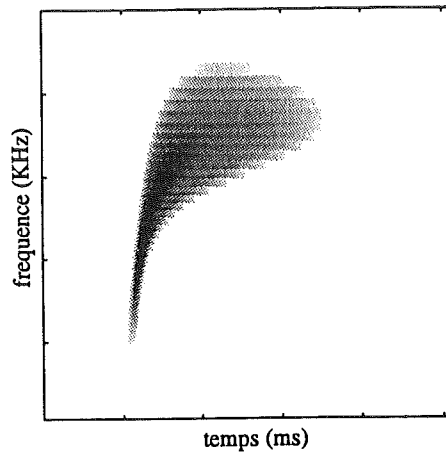


Figure 2.6: Scalogramme,  $\Delta t_{f_0}(|S_x|^2) = 1.55$  ms.

(équation 1.29), se localise parfaitement sur des trajectoires de modulation linéaires de fréquence et sur elles seules. Un filtrage linéaire, qu'il soit standard ou affine, n'agit pas directement sur la géométrie de cette règle de construction.

Nous allons voir par la suite, comment des structures non linéaires de noyaux de corrélation  $\Pi$  dans l'expression (1.52) peuvent influencer les principes de constructions géométriques des distributions quadratiques associées et constituer ainsi une solution au problème de la localisation sur des lois temps-fréquence non linéaires.

## 2.3 Les noyaux bi-fréquentiels localisés

Dans le champ des représentations temps-fréquence, la classe de Cohen s'appuie sur des lissages (en général bidimensionnels) de la distribution de Wigner-Ville, et même si cette classe s'est récemment enrichie de méthodes adaptatives (cf. §1.1.5), la suppression des interférences se paie toujours d'une délocalisation plus ou moins importante des *auto-composantes*. Parallèlement, le terme de "classe affine" pour désigner les représentations énergétiques temps-échelle de même nature que le scalogramme, souligne bien l'aspect de lissage affine qui sous-tend la structure de ces distributions. Par conséquent, le dilemme entre atténuation des termes croisés et concentration de l'information persiste. Le choix des gabarits de type passe-bas pour les noyaux  $\Pi$  dans les expressions (1.34) et (1.52) se justifie principalement par les propriétés de moyenne nulle des termes interférentiels. Mais il est clair qu'en termes de localisation, la distribution de Wigner-Ville étant naturellement sous-jacente, chacune de ses versions lissées hérite de sa spécificité relative aux modulations linéaires. Il faut donc abandonner cette notion de lissage si l'on veut adapter le comportement des distributions à des signaux caractérisés par des structures non linéaires telles que retards de groupe ou fréquences instantanées. Dans cette optique, la voie initiée par J. et P. Bertrand [13], [14], [15] nous assure de l'existence de telles solutions pour des retards de groupe hyperboliques dans un premier temps, puis généralisées à l'ensemble des lois de puissances. Les arguments qui non seulement justifient ces solutions, mais encore certifient leur unicité, reposent sur des contraintes de covariance sur une extension à trois paramètres du groupe affine. Nous aurons bien évidemment à revenir sur ces concepts puisque notre propos est ici de réintroduire ces familles de distributions comme une sous-classe particulière des représentations affines (équation (1.52)), établies à partir de critères de localisations strictes sur des lois de retards de groupe non linéaires. Cette approche originale du problème nous livrera également un jeu de règles de construction géométriques par lesquelles s'expliquent les signatures temps-fréquence liées à ces distributions.

### 2.3.1 Le problème de la localisation. Définition

Rappelons tout d'abord le formalisme qui avait été adopté pour désigner les distributions énergétiques affines. Nous avons alors:

$$\Omega_x(t, a; \Pi) = \iint W_x(u, \theta) \Pi\left(\frac{u-t}{a}, a\theta\right) du d\theta.$$

Dans cette expression, chaque choix arbitraire de noyau  $\Pi$  définit sans équivoque une distribution assurée au minimum d'être covariante par translation et dilatation en temps. De plus, la théorie des représentations énergétiques temps-échelle nous ayant appris qu'il était possible de formuler chacune des propriétés théoriques sur les distributions en termes de contraintes équivalentes sur les noyaux, nous transposons le problème de la recherche de distributions localisées sur des retards de groupe arbitraires en celui de l'identification d'une structure appropriée de noyaux.

**Définition 2.1** *Pour une distribution bilinéaire énergétique quelconque  $\Omega_x(t, \nu)$ , la localisation sur un retard de groupe  $\tau_g(\nu)$  (d'un signal supposé analytique) est assurée si:*

$$X_\delta(\nu) = \nu^{-\frac{1}{2}} e^{i\Phi_x(\nu)} \implies \Omega_{x_\delta}(t, \nu) = \nu^{-1} \delta(t - \tau_g(\nu)), \quad (2.9)$$

où  $\Phi_x(\nu)$  est le spectre de phase du signal, lié au retard de groupe par la relation

$$\tau_g(\nu) = -\frac{1}{2\pi} \frac{d\Phi_x(\nu)}{d\nu}.$$

Implicitement, cette définition de la localisation suppose que les distributions temps-échelle recherchées admettent une équivalence formelle entre échelle et inverse de la fréquence. Si cette hypothèse est vérifiée, la version fréquence-fréquence<sup>2</sup> de  $\Omega_x$  s'écrit:

$$\Omega_x\left(t, \nu = \frac{\nu_0}{a}, \Pi\right) = \frac{\nu}{\nu_0} \iint \pi(n, \theta) X\left(\frac{\nu}{\nu_0}\left(\theta - \frac{n}{2}\right)\right) X^*\left(\frac{\nu}{\nu_0}\left(\theta + \frac{n}{2}\right)\right) e^{-i2\pi\frac{n}{\nu_0}t\nu} d\theta dn.$$

En remplaçant formellement  $X$  par le signal *test* de la définition 2.1, nous déduisons une condition *sine qua non* sur la fonction arbitraire  $\Pi$  pour que l'expression obtenue soit de nature compatible avec le *Dirac* de la localisation. Le changement de variables  $\gamma\nu_0 = n$  conduit au résultat intermédiaire suivant:

$$\begin{aligned} \Omega_{x_\delta}\left(t, \nu = \frac{\nu_0}{a}, \Pi\right) &= \iint \frac{\pi(\nu_0\gamma, \theta)}{\sqrt{(\theta/\nu_0)^2 - (\gamma/2)^2}} \\ &\exp\left\{i\Phi_x\left[\nu\left(\frac{\theta}{\nu_0} - \frac{\gamma}{2}\right)\right] - i\Phi_x\left[\nu\left(\frac{\theta}{\nu_0} + \frac{\gamma}{2}\right)\right]\right\} e^{-i2\pi\gamma\nu t} d\gamma d\theta. \end{aligned}$$

Dans cette expression, intégrer l'exponentielle complexe d'argument  $(-i2\pi\gamma\nu t)$  revient à conjuguer canoniquement la variable  $\gamma$  au produit  $(\nu t)$  par transformation de Fourier. Ce faisant, l'expression duale de l'exponentielle en  $\Phi_x$  peut correspondre au résultat (2.9) recherché, moyennant de supprimer la dépendance en  $\theta$  dans l'argument de cette exponentielle. Une façon d'y parvenir sans tenir compte de la forme particulière du spectre de phase, nous amène à ne considérer que les noyaux de structure canonique suivante [43], [50], [102]:

$$\pi_\delta(n, \theta) = G(n) \delta(\theta - H(n)), \quad (2.10)$$

où  $G$  et  $H$  sont deux fonctions arbitraires. Le couplage introduit entre les variables  $\gamma$  et  $\theta$  contraint alors l'existence de la fonction de paramétrisation  $\pi$  à une trajectoire bien particulière dans le plan bi-fréquentiel, trajectoire associée au choix de  $H$ . Par suite, la sous-classe des distributions énergétiques temps-échelle dérivant de cette spécificité de noyaux s'exprime simplement:

$$\Omega_x(t, \nu, \Pi_\delta) = \nu \int G(\nu_0\gamma) X\left(\nu\left(\frac{H(\nu_0\gamma)}{\nu_0} - \frac{\gamma}{2}\right)\right) X^*\left(\nu\left(\frac{H(\nu_0\gamma)}{\nu_0} + \frac{\gamma}{2}\right)\right) e^{-i2\pi\nu t\gamma} d\gamma, \quad (2.11)$$

et fut introduite par P. Flandrin et O. Rioul sous le terme de *classe des distributions à noyaux bi-fréquentiels localisés*, rejoignant, par une paramétrisation différente, la classe proposée par P. et J. Bertrand [14].

<sup>2</sup>La définition de la localisation portant sur l'expression fréquentielle du signal, il est alors vraisemblable que la version fréquence-fréquence des distributions se prêtera à une plus grande simplicité de calcul.

*Remarques.* Subordonner l'existence de la variable  $\theta$  à celle de  $\gamma$  n'est qu'une condition nécessaire au problème de la localisation sur un retard de groupe quelconque. Mais d'ores et déjà, on peut présumer de la difficulté d'interprétation qu'entraînera ce couplage, d'autant que la dépendance fonctionnelle entre les deux variables limite le nombre d'écritures équivalentes du noyau. D'ailleurs, l'autre seule forme algébrique connue de  $\pi$  correspond à sa version fréquence-temps

$$f(n, \tau) = G(n) e^{-i2\pi H(n)\tau},$$

agissant sur la fonction d'ambiguïté à bande étroite  $A_x$  du signal. Il est alors facile de vérifier que la sous-classe des distributions affines localisées admet l'écriture équivalente:

$$\Omega_x(t, \nu, \Pi_\delta) = \nu \iint G(\nu_0\gamma) e^{-i2\pi\nu\tau \frac{H(\nu_0\gamma)}{\nu_0}} A_x(\nu\gamma, \tau) e^{-i2\pi\nu t\gamma} d\gamma d\tau.$$

Selon la situation, on privilégiera l'une ou l'autre des expressions de  $\Omega_x$  (respectivement du noyau). Par exemple, nous avons fait l'hypothèse en début de ce paragraphe qu'il existait une correspondance formelle entre l'échelle des classes affines et la notion de fréquence. Cette hypothèse est confirmée par la deuxième écriture du noyau dans laquelle il est possible d'introduire la fréquence non nulle  $\nu_0$ :

$$f(n, \tau) = \underbrace{G(n) e^{-i2\pi(H(n)-\nu_0)\tau}}_{f_0(n, \tau)} e^{-i2\pi\nu_0\tau}.$$

On vérifie ainsi que cette structure est bien cohérente avec la condition de l'équation (1.55).

Parallèlement, on sait que les fonctions  $f_0(n, \tau)$  ne dépendant que du produit des variables  $(n\tau)$ , caractérisent les distributions situées à l'intersection des classe de Cohen et affine (i.e. les distributions simultanément covariantes par changement d'échelle et décalages en temps et en fréquence). Parmi elles, citons notamment les représentations de Choi-Williams [22], de Born-Jordan [17], de Rihaczek [101] et bien sûr les distributions généralisées de Wigner-Ville. Nous cherchons à isoler dans ces distributions covariantes par translations en temps, fréquence et changement d'échelle, celles qui de plus se concentrent sur une loi de fréquence arbitraire. Les noyaux solutions de cette sous-classe particulièrement contrainte se réduisent alors aux uniques fonctions du type:

$$\left. \begin{array}{l} G(n) = 1 \\ H(n) = \alpha n + \nu_0, \quad \alpha \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \iff f(n, \tau) = e^{-i2\pi\alpha n\tau} e^{-i2\pi\nu_0\tau}, \quad (2.12)$$

lesquelles, après substitution dans (2.11), définissent les distributions de la forme:

$$\Omega_x\left(t, \nu = \frac{\nu_0}{a}; \Pi_\delta\right) = \int X\left(\nu - \left(\frac{1}{2} - \alpha\right)\xi\right) X^*\left(\nu + \left(\frac{1}{2} + \alpha\right)\xi\right) e^{-i2\pi\xi t} d\xi. \quad (2.13)$$

En restreignant  $\alpha$  à l'intervalle  $[0, 1]$ , on reconnaît dans cette expression, la définition des distributions de Wigner-Ville généralisées, avec comme cas particuliers:



- $\alpha = 1/2 \Rightarrow f_0(n, \tau) = e^{-i\pi n\tau}$ , la distribution de Rihaczek conjuguée<sup>3</sup> (1968) [101]:

$$R_x^*(t, \nu) = X(\nu) x^*(t) e^{i2\pi\nu t}.$$

Pour cette valeur de  $\alpha$ , comme pour toute autre valeur non nulle de ce paramètre, la distribution  $R_x$  se concentre sur des modèles de signaux composés d'harmoniques pures.

- $\alpha = 0 \Rightarrow f_0(n, \tau) = 1$ , la distribution de Wigner-Ville. On retrouve dans ce cas, le résultat connu selon lequel:

$$\Pi_\delta(u, \theta) = \delta(u)\delta(\theta - \nu_0) \implies \Omega_x(t, a; \Pi) = W_x\left(t, \frac{\nu_0}{a}\right).$$

La localisation est alors étendue à toutes les lois de modulations linéaires de fréquence.

La distribution de Wigner-Ville, vue à travers le prisme des distributions localisées, peut devenir un acteur privilégié dans l'étude de cette classe. En effet, si le bon comportement de la distribution de Wigner-Ville relativement à des structures linéaires de signaux se déduit d'un cadre plus général de localisation, on pourrait réciproquement, envisager d'étendre d'autres propriétés de cette distribution à l'ensemble de la classe affine localisée.

### 2.3.2 Admissibilité des solutions

Le noyau  $\pi$  tel qu'il apparaît dans l'équation (2.10) paramètre une vaste classe de distributions pouvant être de structure *Dirac* sur une loi de fréquence arbitraire. Cette condition est nécessaire mais non suffisante, si bien que, pour identifier complètement la distribution qui se localisera sur la trajectoire  $\tau_g(\nu)$ , il nous faut résoudre l'équation (2.9) dans le cas spécifique des noyaux bi-fréquentiels localisés. Réécrite sur cette classe, la condition de localisation devient:

$$\begin{aligned} \Omega_{x_\delta}(t, \nu, \Pi_\delta) &= \int \frac{G(\nu_0\gamma)}{\sqrt{(H(\nu_0\gamma)/\nu_0)^2 - (\gamma/2)^2}} \\ &\cdot \exp\left\{-i2\pi\gamma\left(t\nu - \frac{1}{2\pi\gamma}\left(\Phi_x\left[\nu\left(\frac{H(\nu_0\gamma)}{\nu_0} - \frac{\gamma}{2}\right)\right] - \Phi_x\left[\nu\left(\frac{H(\nu_0\gamma)}{\nu_0} + \frac{\gamma}{2}\right)\right]\right)\right\} d\gamma \\ &= |\nu|^{-1}\delta(t - \tau_g(\nu)), \end{aligned}$$

dans laquelle il est possible d'isoler les rôles des fonctions  $H$  et  $G$ . En particulier, après transformation de Fourier sur  $\gamma$ , argument exponentiel et argument de la distribution de

<sup>3</sup>Si on s'autorise des valeurs négatives pour  $\alpha$ , on retrouve la distribution de Rihaczek pour  $\alpha = -1/2$ .

Dirac doivent être égaux, ce qui, compte tenu de la relation de passage entre  $\tau_g$  et  $\Phi_x$ , n'est vrai que si  $H$  vérifie la relation de phase suivante:

$$\Phi_x \left[ \nu \left( \frac{H(\nu_0 \gamma)}{\nu_0} + \frac{\gamma}{2} \right) \right] - \Phi_x \left[ \nu \left( \frac{H(\nu_0 \gamma)}{\nu_0} - \frac{\gamma}{2} \right) \right] = \gamma \nu \frac{d\Phi_x(\nu)}{d\nu} \quad \forall \nu, \gamma \quad (2.14)$$

Sous réserve d'existence, la solution  $H$  assure à la distribution d'être au minimum centrée sur la trajectoire  $\tau_g(\nu)$ .

Par contre sous l'effet convolutif de la quantité

$$J^{[H,G]}(\nu t) \equiv \int \frac{G(\nu_0 \gamma)}{\sqrt{(H(\nu_0 \gamma)/\nu_0)^2 - (\gamma/2)^2}} e^{-i2\pi \nu \gamma t} d\gamma,$$

un choix non conditionné de  $G$  risque de créer un épanouissement de la représentation dans le plan temps-fréquence.

On peut alors dans un deuxième temps, imposer la localisation *stricto sensu* (i.e. au sens *Dirac*), et contraindre  $G$  selon:

$$J^{[H,G]}(\nu t) = \delta(\nu t) \implies G^2(\nu_0 \gamma) = \left( \frac{H(\nu_0 \gamma)}{\nu_0} \right)^2 - \left( \frac{\gamma}{2} \right)^2.$$

Finalement, on peut exprimer le couple des équations fonctionnelles en terme de paramètre d'échelle  $a$  selon [48], [55]

$$\begin{cases} \Phi_x \left( \frac{H(a\xi)}{a} + \frac{\xi}{2} \right) - \Phi_x \left( \frac{H(a\xi)}{a} - \frac{\xi}{2} \right) = \xi \frac{d\Phi_x}{d\nu} \left( \frac{\nu_0}{a} \right) \quad \forall a > 0, \forall \xi \\ \nu_0^2 G^2(\xi) = H^2(\xi) - \left( \frac{\xi}{2} \right)^2 \end{cases} \quad (2.15)$$

Ce système complètement déterminé fournit lorsqu'elle existe, une distribution solution au problème de la localisation sur un retard de groupe arbitraire.

### 2.3.3 Existence des solutions

La covariance par le groupe affine est une donnée essentielle commune à l'ensemble des distributions vérifiant le système (2.15). Cette propriété exerce alors une limitation sévère sur la nature des phases  $\Phi_x$  garantissant l'existence d'une solution à l'équation des phases. Dans cette direction, nous allons montrer que seule la famille des retards de groupe du type loi de puissance admet une solution  $(H, G)$  au problème de la localisation.

En remarquant que<sup>4</sup>

$$\gamma = \left( \frac{H(\nu_0 \gamma)}{\nu_0} + \frac{\gamma}{2} \right) - \left( \frac{H(\nu_0 \gamma)}{\nu_0} - \frac{\gamma}{2} \right) = F(\gamma) - F(-\gamma),$$

avec  $F(\gamma) \equiv H(\gamma) + \frac{\gamma}{2}$ , il est possible de réorganiser les termes dans l'équation des phases et écrire:

<sup>4</sup>La fonction  $H$  est assurée d'être paire si la distribution associée est réelle.

$$\frac{\Phi_x(F(\gamma)\nu) - \Phi_x(F(-\gamma)\nu)}{\nu(F(\gamma) - F(-\gamma))} = \dot{\Phi}_x(\nu) \quad \forall \nu, \gamma. \quad (2.16)$$

Cette relation devant être vraie quelque soit la fréquence  $\nu$ , nous pouvons l'appliquer à deux valeurs arbitraires  $\nu_1$  et  $\nu_2$ . Par suite, en effectuant le rapport des deux égalités obtenues, nous dérivons une condition équivalente à la relation des phases, selon laquelle:

$$\frac{\Phi_x(F(\gamma)\nu_1) - \Phi_x(F(-\gamma)\nu_1)}{\Phi_x(F(\gamma)\nu_2) - \Phi_x(F(-\gamma)\nu_2)} = \frac{\nu_1 \dot{\Phi}_x(\nu_1)}{\nu_2 \dot{\Phi}_x(\nu_2)}.$$

Cette dernière équation nous permet de vérifier rapidement qu'une phase du type loi de puissance,

$$\Phi_x(\nu) = \Phi_0 + c\nu^k \quad \forall (c, k) \in \mathbb{R}^2 \quad (2.17)$$

est un candidat admissible, puisqu'alors:

$$\begin{aligned} \frac{\Phi_x(F(\gamma)\nu_1) - \Phi_x(F(-\gamma)\nu_1)}{\Phi_x(F(\gamma)\nu_2) - \Phi_x(F(-\gamma)\nu_2)} &= \frac{(\Phi_0 + cF^k(\gamma)\nu_1^k) - (\Phi_0 + cF^k(-\gamma)\nu_1^k)}{(\Phi_0 + cF^k(\gamma)\nu_2^k) - (\Phi_0 + cF^k(-\gamma)\nu_2^k)} \\ &= \frac{c\nu_1^k(F^k(\gamma) - F^k(-\gamma))}{c\nu_2^k(F^k(\gamma) - F^k(-\gamma))} \\ &= \frac{\nu_1 c\nu_1^{k-1}}{\nu_2 c\nu_2^{k-1}} = \frac{\nu_1 \dot{\Phi}_x(\nu_1)}{\nu_2 \dot{\Phi}_x(\nu_2)}. \end{aligned}$$

*Remarque.* Nous ne cherchons pas ici, à identifier l'expression de la fonction  $H$ , solution à ce type de retard de groupe. Nous démontrons simplement dans un premier temps que cette solution existe.

Considérons à présent une combinaison linéaire quelconque de lois de puissance:

$$\Phi_x(\nu) = \Phi_0 + \sum_i c_i \nu^i, \quad i \in \mathbb{N}$$

et supposons qu'il existe pour cette phase, une fonction  $F$  telle que la relation sur la phase de l'équation (2.14) soit vérifiée, i.e.:

$$\frac{\sum_{(i)} c_i (F(\gamma)\nu)^i - \sum_{(i)} c_i (F(-\gamma)\nu)^i}{\nu(F(\gamma) - F(-\gamma))} = \sum_i i c_i \nu^{i-1}.$$

Après identification des termes polynômiaux de part et d'autre de l'égalité, on a la relation générale sur les coefficients:

$$\begin{aligned} \frac{F^i(\gamma) - F^i(-\gamma)}{F(\gamma) - F(-\gamma)} &= i \iff \\ \left( \frac{H(\nu_0\gamma)}{\nu_0} + \frac{\gamma}{2} \right)^i - \left( \frac{H(\nu_0\gamma)}{\nu_0} - \frac{\gamma}{2} \right)^i &= i\gamma \quad \forall i \in \mathbb{N}, \forall \gamma \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Il est évident qu'il n'existe pas de solution  $F$  (respectivement  $H$ ) vérifiant simultanément cette propriété pour toutes valeurs de  $i$ . Pour nous en convaincre, il suffit de résoudre l'équation pour deux valeurs particulières de  $i$ :

- $i = 2$ ,

$$2\gamma H(\gamma) = 2\gamma \iff H(\gamma) = 1, \quad \forall \gamma;$$

- $i = 3$ ,

$$3\gamma H^2(\gamma) + \frac{\gamma^3}{4} = 3\gamma \iff H(\gamma) = \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{12}}, \quad \forall \gamma.$$

Les deux solutions trouvées étant visiblement différentes, nous pouvons conclure:

Pour un spectre de phase pouvant se décomposer sous forme polynômiale, il n'existe pas, dans la classe des distributions affines, de solution satisfaisant à la localisation sur le retard de groupe associé.

Cette proposition s'adresse tout particulièrement aux fonctions  $\Phi_x(\nu)$  de classe  $C^\infty$ , indéfiniment dérivables, bornées sur un intervalle  $[a, b]$  et admettant en tout point  $\nu$  de cet intervalle, un développement en série de Maclaurin:

$$\Phi_x(\nu) = \Phi_x(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\nu^k}{k!} \left. \frac{d^k \Phi_x(\nu)}{d\nu^k} \right|_{\nu=0}.$$

Celui-ci fait apparaître une combinaison linéaire de lois de puissances. Par conséquent, si dans cette expression au moins deux coefficients  $\left. \frac{d^k \Phi_x(\nu)}{d\nu^k} \right|_{\nu=0}$  sont non nuls, il n'existe pas, dans la classe affine, de distributions localisées sur la trajectoire  $\tau_g(\nu) = -(1/2\pi)\Phi_x(\nu)$ . Les seuls développements en série se réduisant à un monôme non nul correspondent précisément aux spectres en loi de puissance, et confirment par là-même que ceux-ci sont des candidats admissibles, pour lesquels l'équation des phases (2.15) admet une solution en  $H$ .

Pour des spectres de phase n'admettant pas de développement en série de Maclaurin, seule une étude individualisée permet de statuer sur leur admissibilité et sur l'existence d'une distribution se localisant sur la loi de retard de groupe associée. Notamment, on trouvera dans [14] une démonstration de l'existence d'une solution pour  $\Phi_x(\nu) = \nu \log \nu$ .

### 2.3.4 Localisation et interférences

Le caractère bi-fréquentiel localisé des noyaux de paramétrisation sélectionne, au sein de la classe affine, les distributions régentées par des structures bilinéaires plus riches que la symétrie usuelle rencontrée dans le cas Wigner-Ville (équation (2.11)). Les fonctions *a priori* non linéaires  $H$  qui sont introduites dans les arguments des signaux  $X$  et  $X^*$  généralisent le concept de corrélation standard à des lois de compositions “naturelles” pour des retards de groupe autres que des droites. Le paragraphe précédent nous a même appris que les seules solutions  $H$  possibles étaient relatives à la famille des lois de puissances, laquelle englobe la structure linéaire comme exemple particulier. On peut alors imaginer d’étendre certaines connaissances acquises sur la distribution de Wigner-Ville, et notamment les arguments géométriques qui sous-tendent l’aspect interférentiel de celle-ci, au contexte plus général des distributions affines localisées.

#### Opérateurs de symétrie et valeurs moyennes

La structure corrélatrice standard apparaissant dans l’expression de la distribution de Wigner-Ville fait naturellement interagir deux versions d’un même signal, translatées symétriquement en temps et en fréquence par rapport au point  $(t, \nu)$  d’évaluation de la distribution. Autrement dit, l’existence de la distribution en un point quelconque  $(t, \nu)$  du plan temps-fréquence résulte du cumul de toutes les interactions de bi-points appartenant à la signature du signal (i.e. aux auto-composantes) et ayant pour milieu géométrique le point  $(t, \nu)$ . Cette règle de construction par laquelle deux points interfèrent en un troisième justifie du bon comportement de la distribution de Wigner-Ville sur des modulations linéaires de fréquence: en supposant que chaque point généré peut à son tour interférer avec ses voisins, et en itérant le processus à l’infini, le domaine continu engendré s’assimile à une droite. Il s’ensuit alors une règle de construction simple pour les interférences, basée sur une construction de point milieu, elle combine les couples  $(t_1, \nu_1)$  et  $(t_2, \nu_2)$  des *auto-composantes* du signal pour créer le point interférentiel  $(t_i, \nu_i)$  selon [66]:

$$\begin{cases} t_i = \frac{1}{2}(t_1 + t_2) \\ \nu_i = \frac{1}{2}(\nu_1 + \nu_2) \end{cases} \quad (2.18)$$

On peut donner un autre éclairage de cette géométrie du point milieu en considérant le point de vue réciproque selon lequel chaque point  $(t, \nu)$  de la cartographie du signal est le centre d’une symétrie ponctuelle qui à un point arbitraire  $(t_1, \nu_1)$  associe l’image  $(t_2, \nu_2)$  par la relation de passage [104]:

$$\begin{pmatrix} t_2 \\ \nu_2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} t \\ \nu \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} t_1 \\ \nu_1 \end{pmatrix}. \quad (2.19)$$

Pour favoriser cette autre interprétation de la règle du point milieu, on préférera une écriture homogène de la distribution de Wigner-Ville selon:

$$W_x(t, \nu) = 2 \int \left\{ x(2t - \tau) e^{-i4\pi\nu(t-\tau)} \right\} x^*(\tau) d\tau,$$

écriture dont l'intérêt est double, puisqu'elle fait également apparaître le lien avec la notion de valeur moyenne d'un opérateur (cf. §1.3.2).

Pour clarifier ce point, il est nécessaire de réécrire l'action conjointe des opérateurs de translation en temps et en fréquence définis en (1.10), sous forme d'un *opérateur de déplacement* (dit de Glauber) [46], [57]:

$$\mathcal{D}_{t\nu} = e^{i2\pi(\nu\hat{t}-t\hat{\nu})}, \quad (2.20)$$

Les grandeurs  $\hat{t}$  et  $\hat{\nu}$  sont deux opérateurs auto-adjoints dont les actions sur  $x$  sont définies comme suit:

$$(\hat{t}x)(t) = tx(t) \quad \text{et} \quad (\hat{\nu}x)(t) = \frac{1}{i2\pi} \frac{dx}{dt}.$$

et dont l'exponentiation se résume à l'action des opérateurs  $\mathcal{M}_\nu$  et  $\mathcal{T}_t$  puisqu'alors

$$\begin{cases} (e^{i2\pi\nu\hat{t}}x)(t) = e^{i2\pi\nu t}x(t) = (\mathcal{M}_\nu x)(t) \\ (e^{-i2\pi\hat{\nu}t}x)(u) = \int X(\nu)e^{-i2\pi\nu t}e^{i2\pi\nu u}d\nu = (\mathcal{T}_t x)(u). \end{cases}$$

Bien que non-commutatifs, ces opérateurs vérifient une relation de composition mettant en jeu la notion de commutateur selon:

$$[\hat{t}, \hat{\nu}] \equiv \hat{t}\hat{\nu} - \hat{\nu}\hat{t} = \frac{i}{2\pi}\mathcal{I}, \quad (2.21)$$

avec  $\mathcal{I}$  l'opérateur identité. De plus, ces opérateurs commutent avec leur commutateur, i.e.:

$$[\hat{t}, [\hat{t}, \hat{\nu}]] = [\hat{\nu}, [\hat{t}, \hat{\nu}]] = 0,$$

le *lemme de Glauber-Jordan* nous fournit une règle opératorielle de factorisation de  $\mathcal{D}_{t\nu}$  suivant laquelle [26], [29]:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{t\nu} &= e^{i2\pi\nu\hat{t}}e^{i2\pi t\hat{\nu}}e^{\frac{1}{2}(i2\pi)^2\nu t[\hat{t}, \hat{\nu}]} \\ &= e^{i2\pi\nu\hat{t}}e^{i2\pi t\hat{\nu}}e^{-2\pi^2\nu t(\hat{\nu}\hat{t}-\hat{t}\hat{\nu})} \\ &= \mathcal{M}_\nu\mathcal{T}_{-t}e^{-i\pi\nu t}. \end{aligned}$$

En accord avec le résultat de l'équation (1.58), on retrouve le fait que la fonction d'ambiguïté (symétrique) est, à une conjugaison près, la valeur moyenne de l'opérateur  $\mathcal{D}_{t\nu}$ .

Par une démarche analogue, on montre que la distribution de Wigner-Ville, dont on rappelle qu'elle est liée à la fonction d'ambiguïté par une double transformation de Fourier, offre une interprétation duale en termes de *valeur moyenne d'opérateur*, et plus précisément [32], [33], [57], [104]:

$$W_x(t, \nu) = 2 \langle \mathcal{D}_{t\nu} \hat{\Pi} \mathcal{D}_{-t, -\nu} \rangle_x.$$

$\hat{\Pi}$  est appelé *opérateur de parité*, et associe à un vecteur  $x$  du plan temps-fréquence, une image symétrique par rapport à l'origine:

$$(\hat{\Pi}x)(t) = x(-t) \quad ; \quad (\hat{\Pi}X)(\nu) = X(-\nu).$$

Compte tenu des règles opératorielles énoncées ci-dessus, il est toujours possible de factoriser différemment l'action des opérateurs, et d'écrire en particulier:

$$\mathcal{D}_{t\nu} \hat{\Pi} \mathcal{D}_{-t, -\nu} = e^{-i2\pi t \hat{\nu}} \left( e^{i2\pi \nu \hat{t}} \hat{\Pi} e^{-i2\pi \nu \hat{t}} \right) e^{i2\pi t \hat{\nu}}.$$

Sous cette forme, on désigne l'opérateur central par *opérateur de parité en fréquence*. Explicitement, son action sur le signal  $X$

$$(\hat{\Pi}_\nu X)(\xi) = \left( e^{i2\pi \nu \hat{t}} \hat{\Pi} e^{-i2\pi \nu \hat{t}} X \right)(\xi) = X(2\nu - \xi), \quad (2.22)$$

formalise le concept de *moyenne arithmétique*, caractéristique de la distribution de Wigner-Ville et de sa localisation sur des lois linéaires de modulation. Finalement [56],

$$W_x(t, \nu) = 2 \langle e^{-i2\pi t \hat{\nu}} \hat{\Pi}_\nu e^{i2\pi t \hat{\nu}} \rangle_x. \quad (2.23)$$

Dans une optique comparable, on cherche alors à définir un cadre opératoire axé sur la géométrie non linéaire propre aux distributions affines localisées.

A l'instar de la symétrie ponctuelle, les symétries modifiées par lesquelles les lois de puissances sont globalement invariantes se déduisent de l'action d'opérateurs de parité fréquentielle "généralisée". L'existence de ces opérateurs repose en fait sur la continuité et la monotonie stricte de la fonction  $F$  (on rappelle que  $F(\gamma) = H(\nu_0 \gamma) / \nu_0 + \gamma/2$ ), lesquelles propriétés assurent à la fonction d'être inversible. Avec ce nouveau formalisme, les contraintes de localisation (équation (2.15)) combinées au changement de variable  $\nu F(-\gamma) = \xi$ , orientent l'écriture de la distribution  $\Omega$  vers une forme propice à l'identification d'un opérateur de parité en fréquence

$$\Omega(t, \nu; \Pi_\delta) = \int_0^\infty \left\{ \frac{\sqrt{\xi(\xi - \nu F^{-1}(\xi/\nu))}}{\nu \hat{F}(F^{-1}(\xi/\nu))} X \left( \xi \nu F^{-1} \left( \frac{\xi}{\nu} \right) \right) e^{i2\pi \nu F^{-1}(\xi/\nu) t} \right\} X^*(\xi) d\xi.$$

Avec cette formulation, l'opérateur de parité fréquentielle que nous proposons peut s'écrire:

$$(\hat{\Omega}_\nu X)(\xi) = \frac{\sqrt{\xi(\xi - \nu F^{-1}(\xi/\nu))}}{\nu \hat{F}(F^{-1}(\xi/\nu))} X \left( \xi - \nu F^{-1} \left( \frac{\xi}{\nu} \right) \right), \quad (2.24)$$

où  $F^{-1}$ , fonction inverse de  $F$ , introduit une non-linéarité dans la symétrie usuelle de Wigner-Ville pour la rendre compatible avec les lois de puissances sur lesquelles se localisent les distributions.

Par suite, en retenant ce choix d'opérateur central dans la relation (2.23), un calcul direct nous convainc que:

$$\Omega_x(t, \nu) \propto e^{i2\pi t \hat{\nu}} \hat{\Omega}_\nu e^{-i2\pi t \hat{\nu}} \rangle_x. \quad (2.25)$$

Sous cette forme, la classe des distributions à noyaux bi-fréquentiels localisés se prête à une interprétation en termes de valeur moyenne d'opérateurs de déplacement et de parité fréquentielle, parité étendue à un contexte plus large que la seule symétrie ponctuelle.

## Interférences: règle de construction et interprétation géométrique

Par nature, toute forme bilinéaire de distributions crée en divers points du plan temps-fréquence des composantes “artificielles” issues de l’interaction des composantes “signal”. Une autre façon d’envisager la localisation sur des trajectoires non linéaires de fréquence instantanée repose alors sur l’étude de ces interférences, et plus précisément sur celle du mécanisme de leur génération. Naturellement, la dynamique de la transformation que subit le signal (i.e. l’action de l’opérateur de parité vu au paragraphe précédent), régit les principes de construction des interférences, au même titre qu’elle définit les lois de localisation des distributions. Par conséquent, une distribution se localise sur une loi de retard de groupe donnée parce que la trajectoire associée à cette loi est une structure globalement invariante par les règles de construction interférentielle.

Cette autre approche de la localisation met en exergue toute l’importance de la maîtrise des phénomènes interférentiels. L’identification des règles de construction de ces interférences présente alors un double intérêt:

- pour un contexte précis, elle permet, par anticipation sur le positionnement des interférences, d’adapter au mieux l’outil d’analyse au signal.
- en inversant la perspective, la connaissance des principes de génération des interférences facilite l’expertise des images délivrées par ces représentations affines.

Nous avons vu que l’équation des phases (2.16) n’admettait de solutions en  $F$  (respectivement en  $H$ ) que pour des phases du type loi de puissance. Mais indépendamment de la nature de cette loi, la relation de passage entre spectre de phase et retard de groupe reste toujours valide. De plus, en posant par commodité d’écriture le changement de variables:

$$\begin{cases} \nu F(\gamma) = \nu \left( \frac{H(\nu_0\gamma)}{\nu_0} + \frac{\gamma}{2} \right) = \nu_2 \\ \nu F(-\gamma) = \nu \left( \frac{H(\nu_0\gamma)}{\nu_0} - \frac{\gamma}{2} \right) = \nu_1, \end{cases} \quad (2.26)$$

l’équation (2.16) admet une forme équivalente selon [55]

$$\tau_g(\nu) = \frac{1}{\nu_2 - \nu_1} \int_{\nu_1}^{\nu_2} \tau_g(\theta) d\theta. \quad (2.27)$$

Cette dernière se prête alors à une interprétation géométrique très simple selon laquelle la quantité  $\tau_g(\nu)$  n’est autre que la *valeur moyenne* du retard de groupe calculée entre les bornes  $\nu_1$  et  $\nu_2$ . Par suite et compte tenu de la stricte monotonie de la fonction  $\tau_g(\nu)$ , l’estimation de la valeur  $\nu$  se fait sans ambiguïté. Nous notons au passage, que ce formalisme traduit en termes de moyennes géométriques ce que résumait l’action des opérateurs de symétrie généralisée du paragraphe précédent. Notamment, un retard de groupe linéaire ( $\tau_g(\nu) = t_0 + \alpha\nu$ ) appliqué à l’équation (2.27) fait ressortir les règles de composition du point milieu propres à la distribution de Wigner-Ville:

$$\tau_g(\nu) = t_0 + \alpha\nu = t_0 + \alpha \frac{\nu_1 + \nu_2}{2} \iff \nu = \frac{\nu_1 + \nu_2}{2}$$



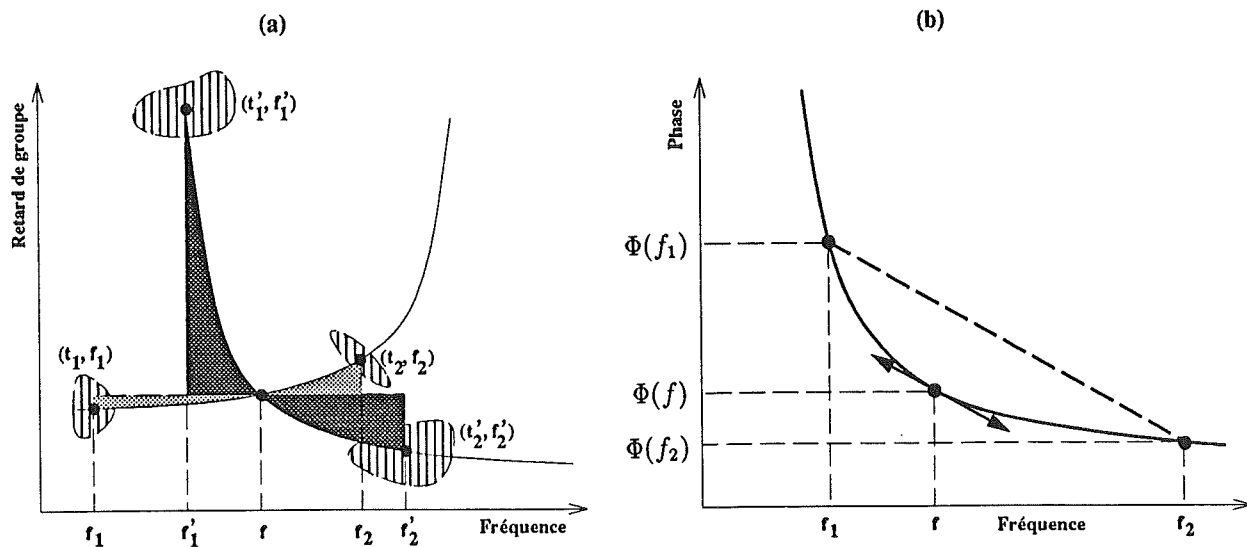


Figure 2.7: (a) Origine de l'existence de la distribution affine  $\Omega$  en un point quelconque  $(t, \nu)$  du plan temps-fréquence. Les aires grisées de la même trame sont identiques. Les surfaces hachurées symbolisent des composantes "signal" - (b) Dans le plan des phases, deux composantes "signal" interfèrent en un lieu où la dérivée de la phase est égale à la différence finie formée par  $\Phi_x(\nu_1)$  et  $\Phi_x(\nu_2)$ .

Dans le cadre plus vaste des lois de puissances, la non-linéarité du retard de groupe apparait explicitement comme une *fonction de pondération* dans le calcul de la moyenne. En ce sens, on peut alors considérer que les mécanismes de construction interférentielle sont soumis à des principes étendus de moyennes définies sur des *mesures*  $\tau_g(\nu)$ .

Réciproquement, en se donnant la trace temps-fréquence d'une distribution, on peut remonter par application du principe relatif à ces géométries modifiées, aux raisons de son existence.

L'existence d'une distribution affine localisée  $\Omega$  en un point quelconque  $(t, \nu)$  du plan, résulte de la composition de tous couples  $(t_1, \nu_1)$ ,  $(t_2, \nu_2)$  sur lesquels on ajuste une loi du type particulier  $\tau_g(\nu)$  (i.e. trajectoire de localisation de  $\Omega$ ) et tels que la valeurs moyenne de cette fonction entre  $\nu_1$  et  $\nu_2$  corresponde à la valeur  $\tau_g(\nu)$ .

Rapportée à l'espace des phases, cette règle de construction suggère qu'au point  $(t, \nu)$ , la dérivée  $\dot{\Phi}_x(\nu)$  est égale à la différence finie prise sur les valeurs  $\Phi_x(\nu_1)$  et  $\Phi_x(\nu_2)$ . Les schémas de la figure 2.7 illustrent les deux formes synonymes de cette interprétation.

## Interférences et lois de puissances

En vertu de la seule solvabilité du système (2.15) pour des retards de groupe en lois de puissances, c'est dans ce contexte spécifique que nous cherchons à repérer algébriquement la position  $(t_i, \nu_i)$  des interférences par rapport aux composantes "signal". Ainsi, on reprend l'équation (2.27) dans laquelle on exprime le retard de groupe

$$\tau_g(\nu) = t_0 + c\nu^{k-1},$$

ce qui nous conduit à une relation fréquentielle entre les valeurs  $\nu_i$ ,  $\nu_1$  et  $\nu_2$ , selon:

$$\begin{aligned} \tau_g(\nu_i) = t_0 + c\nu_i^{k-1} &= \frac{1}{\nu_2 - \nu_1} \int_{\nu_1}^{\nu_2} (t_0 + c\xi^{k-1}) d\xi \\ &= t_0 + \frac{c}{k} \frac{\nu_2^k - \nu_1^k}{\nu_2 - \nu_1} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \nu_i = \left( \frac{1}{k} \frac{\nu_2^k - \nu_1^k}{\nu_2 - \nu_1} \right)^{\frac{1}{k-1}} \equiv \Theta_k(\nu_1, \nu_2). \quad (2.28)$$

Comme de plus, chaque triplet  $\{(t_1, \nu_1), (t_2, \nu_2), (t_i, \nu_i)\}$  s'organise virtuellement sur une trajectoire de fréquence instantanée d'expression réciproque de  $\tau_g(\cdot)$ ,

$$\nu_x(t) = \left( \frac{1}{c} (t - t_0) \right)^{\frac{1}{k-1}} \equiv \left( \frac{1}{c} \sigma \right)^{\frac{1}{k-1}},$$

dans laquelle on a posé le changement d'origine  $\sigma \equiv t - t_0$ , on obtient par substitution dans (2.28):

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{c} \sigma_i \right)^{\frac{1}{k-1}} &= \left( \frac{1}{k} \frac{\left( \frac{1}{c} \sigma_2 \right)^{\frac{k}{k-1}} - \left( \frac{1}{c} \sigma_1 \right)^{\frac{k}{k-1}}}{\left( \frac{1}{c} \sigma_2 \right)^{\frac{1}{k-1}} - \left( \frac{1}{c} \sigma_1 \right)^{\frac{1}{k-1}}} \right)^{\frac{1}{k-1}} \\ \Leftrightarrow \sigma_i^{\frac{1}{k-1}} &= \left( \frac{1}{k} \frac{\sigma_2^{\frac{k}{k-1}} - \sigma_1^{\frac{k}{k-1}}}{\sigma_2^{\frac{1}{k-1}} - \sigma_1^{\frac{1}{k-1}}} \right)^{\frac{1}{k-1}} = \Theta_k(\sigma_1^{\frac{1}{k-1}}, \sigma_2^{\frac{1}{k-1}}) \end{aligned} \quad (2.29)$$

Les équations (2.28) et (2.29) peuvent donc se ramener à une écriture remarquable commune basée sur la seule fonction non linéaire  $\Theta_k$  suivant:

$$\omega_i = \Theta_k(\omega_1, \omega_2), \text{ moyennant } \begin{cases} \omega = \nu \\ \text{ou } \omega = \sigma^{\frac{1}{k-1}} \end{cases}. \quad (2.30)$$

## Quelques cas particuliers

Le cas de la distribution de Wigner-Ville a déjà été évoqué comme un membre particulier de la classe affine localisée. On peut néanmoins s'assurer qu'en choisissant  $k = 2$

dans l'équation (2.30), la position du point  $(t_i, \nu_i)$  coïncide avec le milieu géométrique du segment  $[(t_1, \nu_1), (t_2, \nu_2)]$ :

$$\omega_i = \frac{1}{2} \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2) \implies \begin{cases} \nu_i = \frac{1}{2} (\nu_1 + \nu_2) \\ \sigma_i = \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2) \Leftrightarrow t_i = \frac{1}{2} (t_1 + t_2). \end{cases}$$

De plus, le changement de variables effectué en (2.26) nous permet de revenir à la fonction de paramétrisation  $H$  du cas Wigner-Ville puisque:

$$\nu_i = \frac{1}{2} \left( \nu_i \left( \frac{H(\nu_0 \gamma)}{\nu_0} + \frac{\gamma}{2} \right) + \nu_i \left( \frac{H(\nu_0 \gamma)}{\nu_0} - \frac{\gamma}{2} \right) \right) \Rightarrow H(\nu_0 \gamma) = \nu_0.$$

On pourrait réitérer cette démarche pour toute valeur arbitraire du paramètre  $k$ , mais compte tenu des non-linéarités rencontrées, seules quelques valeurs isolées de ce paramètre fournissent une solution algébrique  $H$  au problème de la localisation. Les simplifications liées à ces choix particuliers ne sont d'ailleurs pas étrangères au fait que la plupart des distributions correspondantes aient déjà été l'objet d'attentions d'origines diverses.

- $k = 1/2$ .

$$\begin{aligned} \omega_i = \Theta_{1/2}(\omega_1, \omega_2) &= \left( 2 \frac{\sqrt{\omega_2} - \sqrt{\omega_1}}{\omega_2 - \omega_1} \right)^{-2} \Leftrightarrow \sqrt{\omega_i} = \frac{1}{2} (\sqrt{\omega_1} + \sqrt{\omega_2}) \\ \implies &\begin{cases} \sqrt{\nu_i} = \frac{1}{2} (\sqrt{\nu_1} + \sqrt{\nu_2}) \\ \sigma_i^{-1} = \frac{1}{2} (\sigma_1^{-1} + \sigma_2^{-1}) \end{cases} \end{aligned}$$

La fonction  $H$  qui paramétrise la distribution localisée sur le retard de groupe  $\tau_g(\nu) = t_0 + c \nu^{-1/2}$  est solution de l'équation des phases (2.14):

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{H(\nu_0 \gamma)}{\nu_0} + \frac{\gamma}{2}} - \sqrt{\frac{H(\nu_0 \gamma)}{\nu_0} - \frac{\gamma}{2}} &= \frac{1}{2} \gamma \\ \Leftrightarrow H(\nu_0 \gamma) = \nu_0 \left( 1 + \left( \frac{\gamma}{4} \right)^2 \right) &\Leftrightarrow H(\xi) = \nu_0 \left( 1 + \left( \frac{\xi}{4\nu_0} \right)^2 \right). \end{aligned}$$

La valeur de la fonction  $G$  est donnée par la seconde équation du système (2.15)

$$G(\xi) = 1 - \left( \frac{\xi}{4\nu_0} \right)^2.$$

Finalement la *distribution*  $D$  résultant de cette double paramétrisation a pour expression [43]:

$$D_x(t, \nu) = \nu \int X \left( \nu \left( 1 - \frac{\gamma}{4} \right) \right) X^* \left( \nu \left( 1 + \frac{\gamma}{4} \right) \right) \left( 1 - \left( \frac{\gamma}{4} \right)^2 \right) e^{-i2\pi \nu t \gamma} d\gamma. \quad (2.31)$$

- $k = 0$ .

Pour établir les règles de construction géométriques qui régissent ce cas, il n'est pas possible d'appliquer purement et simplement la forme généralisée (2.28). Par contre, on peut chercher à résoudre directement l'équation fonctionnelle (2.27) en spécifiant  $\tau_g(\nu) = t_0 + c\nu^{-1}$  et en négligeant le changement de variables (2.26):

$$t_0 + c\nu^{-1} = \frac{1}{\nu\gamma} \int_{\nu(H(\nu_0\gamma)/\nu_0-\gamma/2)}^{\nu(H(\nu_0\gamma)/\nu_0+\gamma/2)} (t_0 + c\xi^{-1}) d\xi \Leftrightarrow \gamma = \log \left( \frac{H(\nu_0\gamma) + \frac{\nu_0\gamma}{2}}{H(\nu_0\gamma) - \frac{\nu_0\gamma}{2}} \right)$$

$$\Leftrightarrow H(\nu_0\gamma) = \nu_0 \left( \frac{\gamma}{2} \frac{e^\gamma + 1}{e^\gamma - 1} \right) \Leftrightarrow H(\xi) = \frac{\xi}{2} \coth \frac{\xi}{2\nu_0}.$$

Avec la fonction  $G$  déduite des contraintes de localisation,

$$G(\xi) = \frac{\frac{\xi}{2\nu_0}}{\sinh \frac{\xi}{2\nu_0}},$$

on réintroduit, par des arguments de localisation, la *distribution unitaire de Bertrand* [14], [13]:

$$B_x(t, \nu) = \nu \int \frac{\gamma/2}{\sinh(\gamma/2)} X \left( \nu \frac{\gamma/2}{\sinh(\gamma/2)} e^{-\frac{\gamma}{2}} \right) X^* \left( \nu \frac{\gamma/2}{\sinh(\gamma/2)} e^{+\frac{\gamma}{2}} \right) e^{-i2\pi\nu t\gamma} d\gamma. \quad (2.32)$$

Les règles ponctuelles d'interférence associées à cette valeur de  $k$ , ont déjà fait l'objet d'une étude particulière par J. P. Ovarlez dans [94], [93], nous reproduisons ici, un calcul analogue conforme au choix fait de la paramétrisation des distributions. En appliquant formellement le changement de variables proposé en (2.26) à ce cas particulier de fonction  $H$ , puis en formant le rapport des deux fréquences  $\nu_1$  et  $\nu_2$ , il vient que:

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = \frac{\nu \frac{\gamma/2}{\sinh(\gamma/2)} e^{+\frac{\gamma}{2}}}{\nu \frac{\gamma/2}{\sinh(\gamma/2)} e^{-\frac{\gamma}{2}}} = e^\gamma \Leftrightarrow \gamma = \log \left( \frac{\nu_2}{\nu_1} \right).$$

Enfin, il suffit de rappeler l'égalité qu'implique le changement de variables (2.26) et selon laquelle,

$$\nu(F(\gamma) - F(-\gamma)) = \nu_2 - \nu_1 = \nu\gamma,$$

pour établir un lien de passage entre coordonnées fréquentielles des composantes et position de leur interaction:

$$\nu_i = \frac{\nu_2 - \nu_1}{\gamma} = \frac{\nu_2 - \nu_1}{\log \nu_2 - \log \nu_1}.$$

Pour compléter la procédure de construction interférentielle dans le cas de la distribution de Bertrand, on adopte le point de vue précisant que composantes et interférence induite appartiennent à une même loi de puissance (hyperbole en l'occurrence). En substituant alors dans l'équation ci-dessus  $\sigma = t - t_0 = c \nu^{-1}$ , la localisation des termes croisés est complètement définie, puisque:

$$\frac{c}{\sigma_i} = \frac{\frac{c}{\sigma_2} - \frac{c}{\sigma_1}}{\log \frac{c}{\sigma_2} - \log \frac{c}{\sigma_1}} \iff \sigma_i = \frac{\sigma_2 \sigma_1 (\log \sigma_2 - \log \sigma_1)}{\sigma_2 - \sigma_1}.$$

On vérifie sans peine que les expressions de  $\nu_i$  et  $\sigma_i$  se déduisent de la forme plus générale suivante:

$$\omega_i = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\log \omega_2 - \log \omega_1}.$$

- $k = -1$ .

La distribution résultant de ce choix de paramètre est amenée à se localiser sur des lois théoriques de retard de groupe de la forme  $\tau_g(\nu) = t_0 + c \nu^{-2}$ . Les règles de construction géométrique s'y rapportant se déduisent aisément de la forme générale proposée:

$$\begin{aligned} \omega_i = \Theta_{-1}(\omega_1, \omega_2) &= \left( (-1) \frac{\omega_2^{-1} - \omega_1^{-1}}{\omega_2 - \omega_1} \right)^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\omega_1 \omega_2} \\ \implies &\begin{cases} \nu_i = \sqrt{\nu_1 \nu_2} \\ \sigma_i = \sqrt{\sigma_1 \sigma_2} \end{cases} \end{aligned}$$

Pour cette valeur de  $k$ , nous résolvons l'équation (2.14),

$$\begin{aligned} \left( \frac{H(\nu_0 \gamma)}{\nu_0} + \frac{\gamma}{2} \right)^{-1} - \left( \frac{H(\nu_0 \gamma)}{\nu_0} - \frac{\gamma}{2} \right)^{-1} &= -\gamma \\ \iff H(\nu_0 \gamma) = \nu_0 \sqrt{1 + \left( \frac{\gamma}{2} \right)^2} &\iff H(\xi) = \sqrt{\nu_0^2 + \left( \frac{\xi}{2} \right)^2}. \end{aligned}$$

La localisation *stricto sensu* impose une fonction  $G$  telle que

$$G(\xi) = 1.$$

L'expression de la distribution qui s'ensuit correspond à la *forme active de la distribution de Unterberger* [112] et s'écrit:

$$U_x^a(t, \nu) = \nu \int \left( 1 + \frac{1}{\gamma^2} \right) X(\gamma \nu) X^* \left( \frac{1}{\gamma} \nu \right) e^{i2\pi \left( \gamma - \frac{1}{\gamma} \right) t \nu} d\gamma. \quad (2.33)$$

*Remarque.* Il existe également une forme dite *passive* de la distribution de Unterberger, différente de la forme active par l'expression de la fonction  $G$  qui vaut alors:

$$G^p(\xi) = \frac{\nu_0}{\sqrt{\nu_0^2 + \left(\frac{\xi}{2}\right)^2}}.$$

La nuance entre ces deux versions de Unterberger ne portant pas sur la fonction  $H$ , forme active et forme passive partagent les mêmes règles de symétrie fréquentielle responsables de la superposition des interférences avec les composantes "signal" de type loi de puissance ( $k = -1$ ). Cependant, alors que la réponse "active" préserve une structure *Dirac* sur la trajectoire  $\tau_g(\nu)$ , la forme passive offre, sous l'effet convolutif de  $J^{[H, G^p]}(\nu t) \neq \delta(\nu t)$  une signature temps-fréquence délocalisée par rapport à la structure théorique du signal. La distribution passive de Unterberger ne se concentre pas *stricto sensu* sur une trajectoire de modulation du type loi de puissance, de même qu'elle ne peut pas préserver les supports temporels des signaux (bien qu'elle soit unitaire).

La réalité physique de ces modèles de construction des interférences est mise en évidence de façon spectaculaire lorsqu'on les applique aux structures propres des distributions (i.e. modulations en lois de puissances). Les neuf signatures temps-fréquence résultant de la combinaison des trois représentations ( $D$ , Bertrand, Unterberger) et de leurs structures respectives de localisation ( $k = 0.5, 0, -1$ ), traduisent parfaitement l'adéquation entre les règles de symétrie et la nature des trajectoires de fréquence instantanée. La relation d'ordre qui existe entre la puissance  $k_s$  de la trajectoire signal  $\tau_g(\nu) = t_0 + c\nu^{k_s-1}$ , et celle  $k_d$  propre à la structure de localisation de la distribution, fait alterner l'existence d'interférences:

1. du côté convexe de la trajectoire si  $k_d < k_s$  (figures 2.9(a), 2.10(a)-(b)),
2. localisées sur la loi théorique de modulation lorsque  $k_d = k_s$  (figures 2.8(a), 2.9(b), 2.10(c))
3. dans la zone de concavité de la fréquence instantanée pour  $k_d > k_s$  (figures 2.8(b)-(c), 2.9(c)).

### Moyennes généralisées

On sait déjà à quel point les règles de construction géométrique décrivant la distribution de Wigner-Ville sont liées au concept de moyenne arithmétique et de point milieu. La relation de symétrie proposée en (2.33) établit quant à elle une dualité tout aussi remarquable entre la distribution de Unterberger et le précepte de *moyenne géométrique*. On peut d'ailleurs envisager cette règle de composition comme une forme particulière de *moyenne généralisée* ( $\langle x \rangle_\mu = \mu^{-1}(1/N \sum_{i=1}^N \mu(x_i))$ ), moyennant de considérer comme fonction  $\mu$ , la transformée logarithmique des variables, ainsi:

$$\log \omega_i = \frac{1}{2}(\log \omega_1 + \log \omega_2).$$

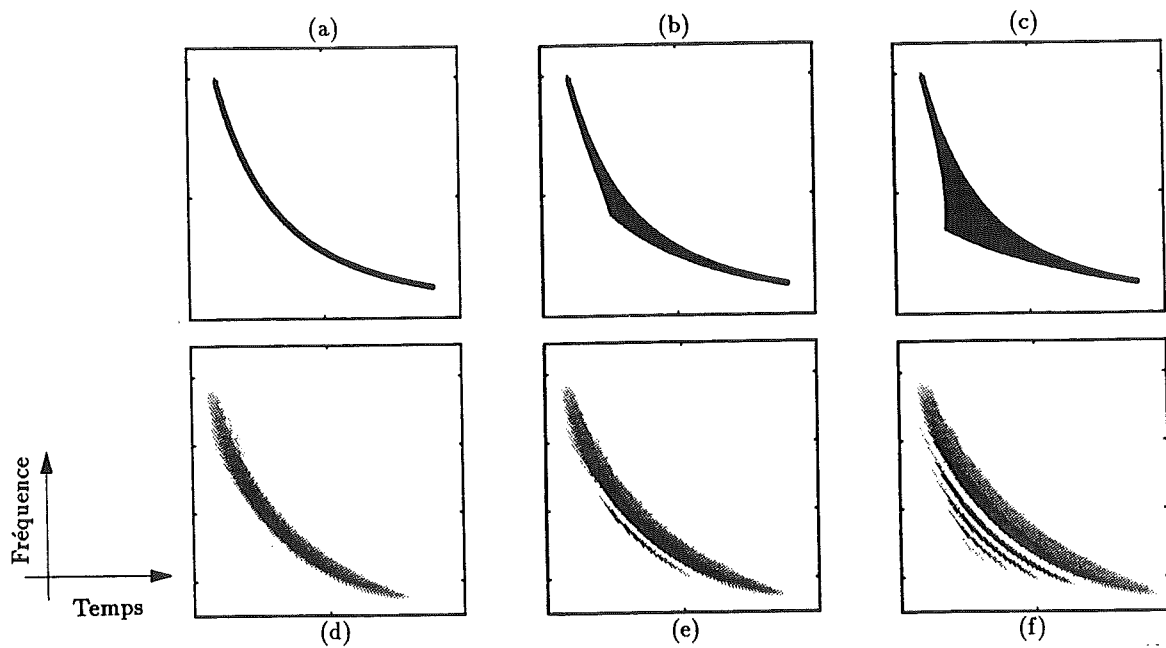


Figure 2.8: Distribution  $D$  ( $k_d = 0.5$ ) et retards de groupe  $\tau_g(\nu) = t_0 + c\nu^{k_s-1}$ . Ligne 1: Evaluation du lieu théorique des interférences par les règles de construction géométriques. (a)  $k_s = 0.5$  - (b)  $k_s = 0$  - (c)  $k_s = -1$ . Ligne 2: Calcul numérique de la distribution  $D$ . (d)  $k_s = 0.5$  - (e)  $k_s = 0$  - (f)  $k_s = -1$ .

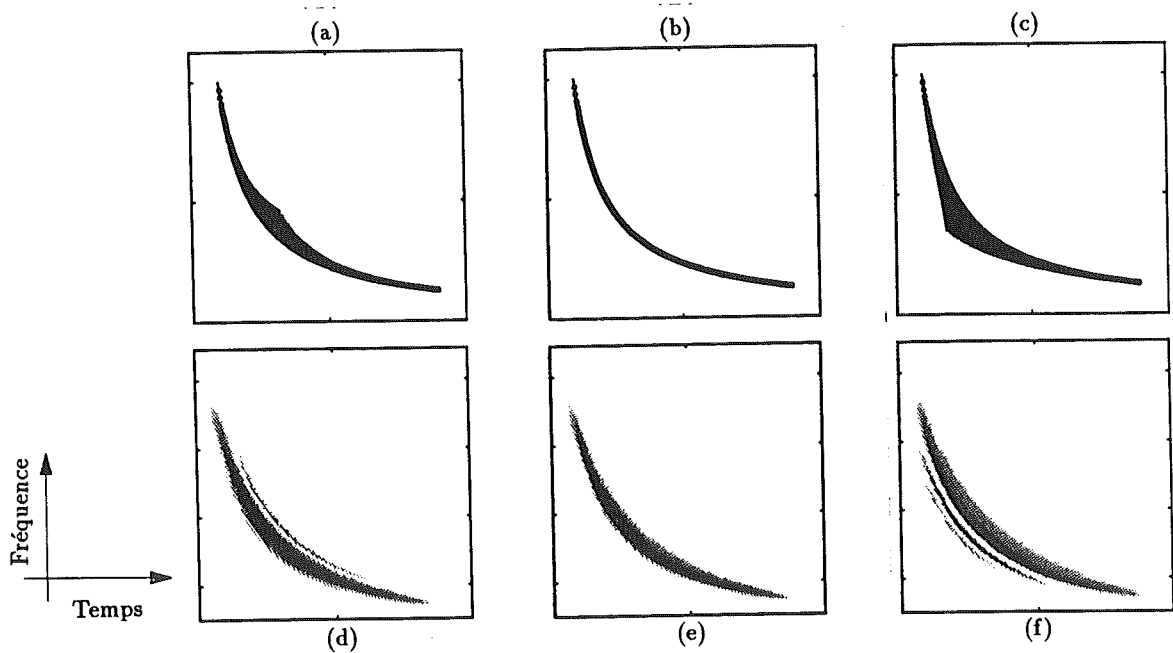


Figure 2.9: Distribution unitaire de Bertrand ( $k_d = 0$ ) et retards de groupe  $\tau_g(\nu) = t_0 + c\nu^{k_s-1}$ . Ligne 1: Evaluation du lieu théorique des interférences par les règles de construction géométriques. (a)  $k_s = 0.5$  - (b)  $k_s = 0$  - (c)  $k_s = -1$ . Ligne 2: Calcul numérique de la distribution (unitaire) de Bertrand. (d)  $k_s = 0.5$  - (e)  $k_s = 0$  - (f)  $k_s = -1$ .

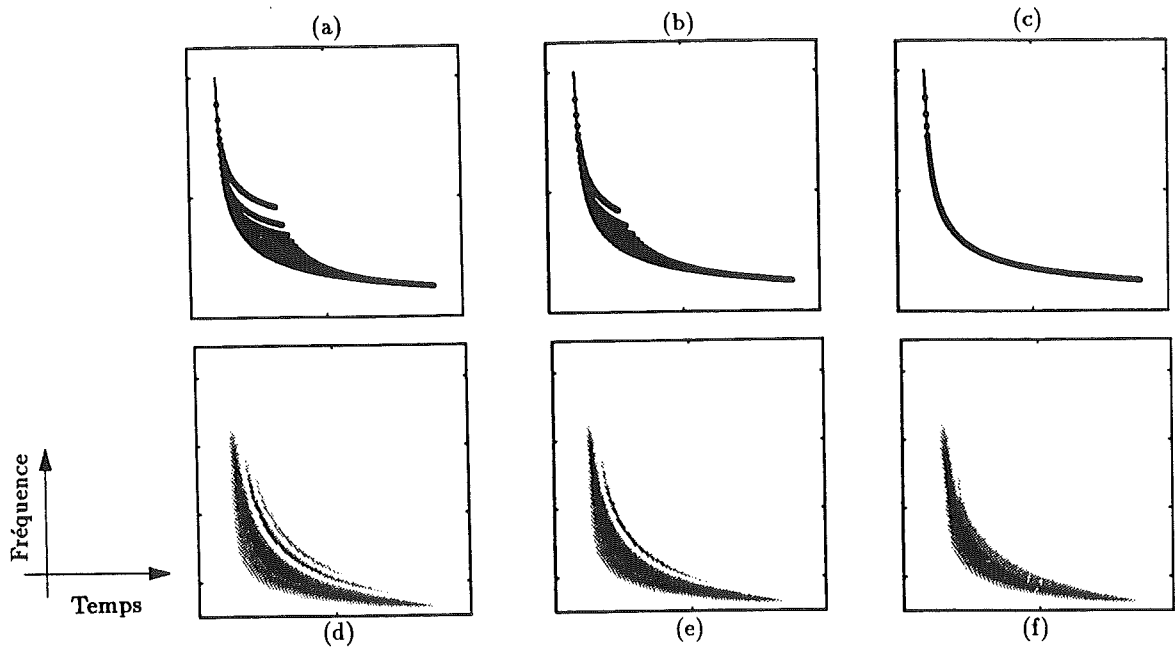


Figure 2.10: *Distribution active de Unterberger ( $k_d = -1$ ) et retards de groupe  $\tau_g(\nu) = t_0 + c\nu^{k_s-1}$ . Ligne 1: Evaluation du lieu théorique des interférences par les règles de construction géométriques. (a)  $k_s = 0.5$  - (b)  $k_s = 0$  - (c)  $k_s = -1$ . Ligne 2: Calcul numérique de la distribution (active) de Unterberger. (d)  $k_s = 0.5$  - (e)  $k_s = 0$  - (f)  $k_s = -1$ .*

Le modèle de moyenne géométrique est encore plus évident sur la distribution  $D$ , où la non-linéarité des arguments se manifeste à travers la fonction racine carrée (éq. (2.31)).

Dans le plan temps-fréquence, ces transformations non linéaires (logarithme ou racine carrée) prennent une dimension très naturelle puisqu'elles définissent des dynamiques nouvelles d'axes par rapport auxquelles les structures propres de localisation (i.e. lois de puissances) deviennent linéaires (e.g.  $k = -1 \Rightarrow \sigma = c\nu^{-2} \Leftrightarrow \log \sigma = -2c \log \nu$ ). Il est toutefois important de noter qu'une transformation logarithmique sur les variables  $\sigma$  et  $\nu$  est toujours suffisante à la linéarisation d'une loi de puissance, mais elle ne garantit pas dans le cas général, la commutation des symétries  $\Theta_k$  en une règle généralisée de point milieu.

De plus, ces deux seuls exemples de moyenne généralisée ne présument en rien de l'existence d'une moyenne généralisée adaptée à chaque valeur du paramètre  $k$ . Bien au contraire, elle s'avèrent n'être que des situations favorables d'un contexte généralement plus complexe.

On peut en effet formaliser ce problème en cherchant la fonction  $\mu_k$  telle que:

$$\langle \omega_i \rangle_{\mu_k} = \mu_k^{-1} \left( \frac{1}{2}(\mu_k(\omega_1) + \mu_k(\omega_2)) \right) \iff \mu_k(\Theta_k(\omega_1, \omega_2)) = \frac{1}{2}(\mu_k(\omega_1) + \mu_k(\omega_2)).$$

Faisons alors l'hypothèse de fonctions  $\mu_k$ ,  $\Theta_k$  et de leurs dérivées premières continues et dérivables sur  $\mathbb{R}$  (resp. sur  $\mathbb{R}^2$ ). Après double dérivation, l'égalité ci-dessus devient:



$$\ddot{\mu}_k(\Theta_k(\omega_1, \omega_2)) \frac{\partial \Theta_k(\omega_1, \omega_2)}{\partial \omega_1} \frac{\partial \Theta_k(\omega_1, \omega_2)}{\partial \omega_2} + \dot{\mu}_k(\Theta_k(\omega_1, \omega_2)) \frac{\partial^2 \Theta_k(\omega_1, \omega_2)}{\partial \omega_1 \partial \omega_2} = 0.$$

$\mu_k$  étant une fonction de la variable réelle, cette équation différentielle n'a de sens que si le rapport

$$\frac{\ddot{\mu}_k(\Theta_k(\omega_1, \omega_2))}{\dot{\mu}_k(\Theta_k(\omega_1, \omega_2))} = - \frac{\frac{\partial^2 \Theta_k(\omega_1, \omega_2)}{\partial \omega_1 \partial \omega_2}}{\frac{\partial \Theta_k(\omega_1, \omega_2)}{\partial \omega_1} \frac{\partial \Theta_k(\omega_1, \omega_2)}{\partial \omega_2}},$$

dépend seulement de  $\Theta_k$ . Or, il est facile de se convaincre que ce rapport n'est pas toujours une fonction de  $\Theta_k$  uniquement. Par exemple, dans le cas de la distribution unitaire de Bertrand ( $k = 0$ ):

$$\Theta_0(\omega_1, \omega_2) = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\log \omega_2 - \log \omega_1}$$

$$\Rightarrow - \frac{\frac{\partial^2 \Theta_0(\omega_1, \omega_2)}{\partial \omega_1 \partial \omega_2}}{\frac{\partial \Theta_0(\omega_1, \omega_2)}{\partial \omega_1} \frac{\partial \Theta_0(\omega_1, \omega_2)}{\partial \omega_2}} = \frac{1}{\omega_1 - \Theta_0(\omega_1, \omega_2)} + \frac{1}{\omega_2 - \Theta_0(\omega_1, \omega_2)},$$

il n'est donc pas possible de résoudre l'équation différentielle en supposant que  $\mu_0$  est fonction d'une seule variable. Par contre, si l'on reprend l'exemple de la distribution  $D$ , le rapport des dérivées partielles de  $\Theta_{1/2}$  valant:

$$- \frac{\frac{\partial^2 \Theta_k(\omega_1, \omega_2)}{\partial \omega_1 \partial \omega_2}}{\frac{\partial \Theta_k(\omega_1, \omega_2)}{\partial \omega_1} \frac{\partial \Theta_k(\omega_1, \omega_2)}{\partial \omega_2}} = - \frac{1}{2} \frac{1}{\Theta_{1/2}(\omega_1, \omega_2)},$$

l'équation en  $\mu_{1/2}$  se résout comme une équation différentielle usuelle et donne le résultat connu:

$$\frac{\ddot{\mu}_{1/2}(\Theta_{1/2})}{\dot{\mu}_{1/2}(\Theta_{1/2})} = \frac{d}{d\Theta_{1/2}} \log \dot{\mu}_{1/2}(\Theta_{1/2}) = - \frac{1}{2} \frac{1}{\Theta_{1/2}}$$

$$\Rightarrow \log \dot{\mu}_{1/2}(\Theta_{1/2}) = \log \frac{1}{\sqrt{\Theta_{1/2}}}$$

$$\Rightarrow \mu_{1/2}(\Theta_{1/2}) \propto \sqrt{\Theta_{1/2}}.$$

On peut cependant restreindre le cadre de cette étude aux signaux à bande étroite. Dans ce cas, on cherche à résoudre l'équation différentielle dans la limite des  $\omega_2$  tendant vers  $\omega_1$ . Formellement, la grandeur  $\Theta_k$  ne dépend plus que de la valeur de  $\omega_1$  par la relation:

$$\lim_{\omega_2 \rightarrow \omega_1} \Theta_k(\omega_1, \omega_2) = \omega_1.$$

Table 2.1: Formes exactes ( $k = 2, 0.5$ ) ou approchées ( $k = 0, -1$ )  $\tilde{\mu}_k$  des transformations non linéaires définissant les moyennes généralisées de construction géométrique pour quelques valeurs de  $k$ .

$k$	Distributions	$\tilde{\mu}_k(\omega)$
2	distribution de Wigner-Ville	$\omega$
0.5	distribution D	$\omega^{1/2}$
0	distribution unitaire de Bertrand	$\omega^{1/3}$
-1	distribution de Unterberger (forme active)	$\log \omega$

De la même façon, on évalue les différentes limites:

$$\begin{aligned} \lim_{\omega_2 \rightarrow \omega_1} \frac{\partial \Theta_k(\omega_1, \omega_2)}{\partial \omega_1} &= \frac{1}{2} \\ \lim_{\omega_2 \rightarrow \omega_1} \frac{\partial \Theta_k(\omega_1, \omega_2)}{\partial \omega_2} &= \frac{1}{2} \\ \lim_{\omega_2 \rightarrow \omega_1} \frac{\partial^2 \Theta_k(\omega_1, \omega_2)}{\partial \omega_1 \partial \omega_2} &= -\frac{1}{12} \frac{k-2}{\omega_1}, \end{aligned}$$

qui donc, nous conduisent à l'équation différentielle simplifiée et à la solution approchée  $\tilde{\mu}_k$ :

$$\begin{aligned} \frac{\ddot{\tilde{\mu}}_k(\omega_1)}{\dot{\tilde{\mu}}_k(\omega_1)} &= \frac{d}{d\omega_1} \log \dot{\tilde{\mu}}_k(\omega_1) = \frac{1}{3} \frac{k-2}{\omega_1} \\ \Rightarrow \log \dot{\tilde{\mu}}_k(\omega_1) &= \log \omega_1^{\frac{k-2}{3}} \\ \Rightarrow \tilde{\mu}_k(\omega_1) &= \frac{3}{k+1} \omega_1^{\frac{k+1}{3}} \propto \omega_1^{\frac{k+1}{3}}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Estimée aux valeurs particulières de  $k$  pour lesquelles on sait exister une forme exacte de moyenne généralisée, la fonction  $\tilde{\mu}_k$  coïncide avec les expressions vraies de  $\mu_k$  (celles-ci restant valables même dans la limite des signaux à bande étroite). C'est par exemple le cas pour  $k = -1$  où il faut reprendre l'équation différentielle  $\log \dot{\tilde{\mu}}_k(\omega_1) = \log \omega_1^{(k-2)/3}$  qui devient

$$\log \dot{\tilde{\mu}}_{-1}(\omega_1) = \frac{1}{\omega},$$

et dont la solution triviale est donnée par

$$\mu_{-1}(\omega) = \log \omega.$$

En fonction de  $k$ , une procédure intéressante nous permet de comparer l'évolution du lieu d'interférence  $(t_i, \nu_i)$  issu de deux points fixes arbitraires du plan temps-fréquence, selon qu'on applique les règles exactes de construction géométrique (équation (2.28) et (2.29)), ou l'expression approchée de moyenne généralisée (équation (2.34)).

Les figures 2.11(a) et 2.11(b) témoignent alors d'une très bonne conformité entre version exacte et approchée des règles d'interférences ponctuelles lorsque  $k$  parcourt l'intervalle approximatif  $[-1, 2]$ , les deux trajectoires pouvant alors se superposer sans révéler de différence notable. En dehors de ces valeurs, la divergence des trajectoires rappelle qu'en tout état de cause, l'approximation faite n'est valide que dans la limite des signaux à bande relative étroite, hypothèse qui, en l'occurrence, n'est pas vérifiée ( $\Delta\nu/\nu \sim 2$ ). On peut cependant rejouer les mêmes procédures sur une situation de bande relative effectivement étroite ( $\Delta\nu/\nu \sim 0.2$ ) et vérifier que la cohérence entre les deux constructions (exactes et approchée) se prolonge au delà des seuils trouvés précédemment (figure 2.12).

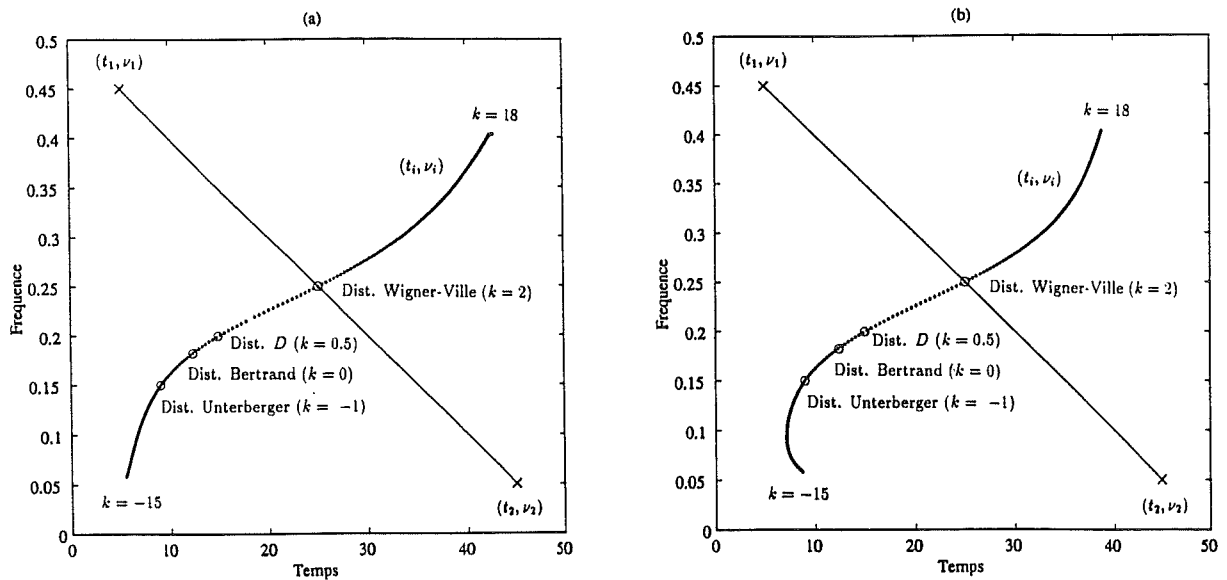


Figure 2.11: A partir de deux points arbitraires  $(t_1, \nu_1)$  et  $(t_2, \nu_2)$  du plan temps-fréquence, on repère la position théorique  $(t_i, \nu_i)$  du lieu de leur interférence, pour  $-15 \leq k \leq 18$ . (a) En appliquant les règles de construction géométrique exactes (équations (2.28) et (2.29)) - (b) En utilisant l'approximation de moyenne généralisée (équation (2.34)).

Dans le même temps, on note que les points milieux (au sens des moyennes généralisées) convergent massivement vers le milieu arithmétique du segment, en accord avec le fait que la distribution de Wigner-Ville est le cas limite bande étroite pour toutes ces distributions affines localisées.

Par ailleurs, P. et J. Bertrand montrent en [14] que la forme obtenue en moyennant les distributions associées aux cas limites  $k \rightarrow \infty$  et  $k \rightarrow -\infty$  tend vers la distribution de Rihaczek [101]. Parallèlement, l'étude interférentielle des distributions de Wigner-Ville généralisées [66] (dont la distribution de Rihaczek est un cas particulier), nous apprend que deux composantes d'un signal, centrées en  $(t_1, \nu_1)$  et  $(t_2, \nu_2)$ , interfèrent par la distri-

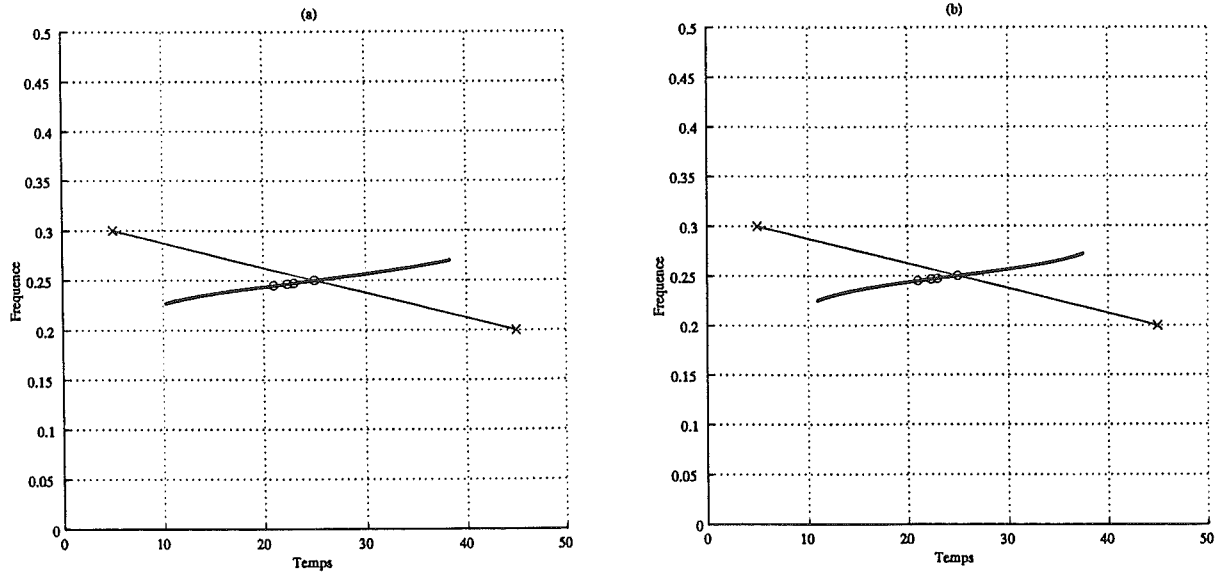


Figure 2.12: Mêmes constructions qu'en 2.11 mais dans le cas de signaux à bandes étroites.

bution de Rihaczek, en deux zones du plan temps-fréquence repérées par les coordonnées  $(t_1, \nu_2)$ , respectivement  $(t_2, \nu_1)$ . Pour sa part, le diagramme 2.11(a) fait le lien entre ces deux résultats indépendants puisque la trajectoire des points d'interférence se dirige pour les valeurs  $k = -15$  et  $k = 18$  vers les extrémités de la diagonale  $[(t_1, \nu_2), (t_2, \nu_1)]$ .

Sur des structures de signaux plus "complexes" que des lois de puissances (cf. figures 2.8, 2.9 et 2.10), ces règles de construction, qu'elles soient exactes ou, sur le domaine de validité de  $k$ , approchées par une extension non linéaire de moyenne arithmétique, fournissent des réseaux d'interférences internes très révélateurs des géométries mises en jeu. Par exemple, l'image de la figure 2.13 montre les zones théoriques d'existence de la distribution de Wigner-Ville calculée sur une modulation sinusoïdale de fréquence, ainsi que l'évaluation numérique de la distribution sur le signal correspondant (dans ce dernier cas, on note la présence d'interférences additionnelles qui s'expliquent par le choix d'une fenêtre rectangulaire pour limiter la durée du signal). Les règles de point milieu qui caractérisent ce cas expliquent que les points d'inflexion repérés par  $I$  et  $I'$  soient le centre d'une infinité de cordes joignant deux points symétriques de la structure du signal.

La même analyse effectuée avec la distribution unitaire de Bertrand (figure 2.14) ne fait plus apparaître ces points multiples puisqu'ils ne sont plus les points d'intersection d'une infinité d'hyperboles passant par deux points du signal et symétriques (au sens de la moyenne généralisée).

En fait, les points multiples  $I$  et  $I'$  sont *par construction*, des points très instables qui se délocalisent vite lorsque le paramètre  $k$  s'éloigne légèrement de la valeur critique 2 (figure 2.15).

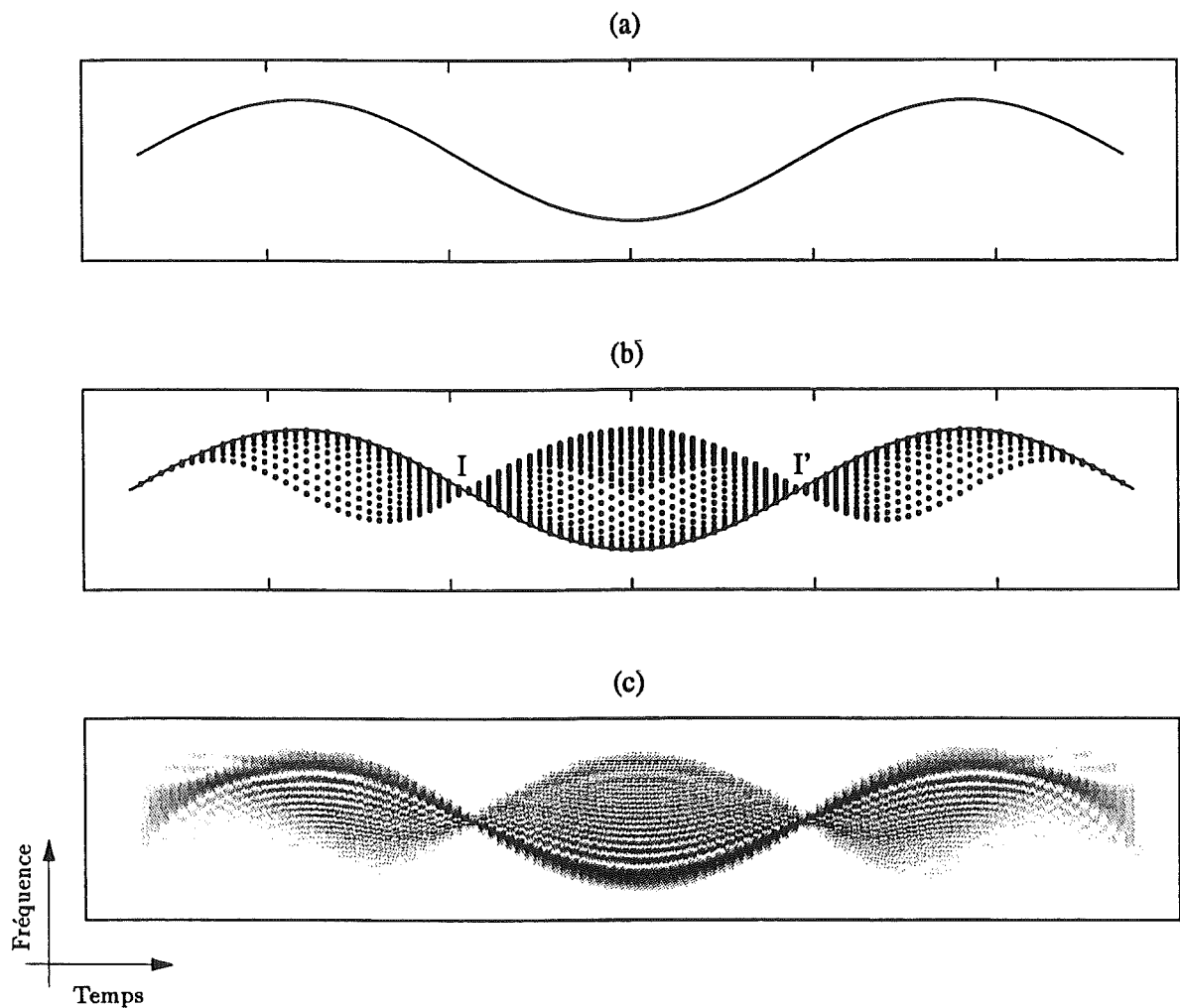


Figure 2.13: (a) Loi théorique de fréquence instantanée d'un signal modulé sinusoidalement - (b) Estimation par application de la moyenne généralisée du lieu des interférences générées par la distribution de Wigner-Ville - (c) Représentation de la distribution de "Wigner-Ville" calculée sur le même signal. On note que les points d'inflexion de la loi de modulation correspondent à des points multiples pour la symétrie du point milieu, ils sont repérés par une forte concentration énergétique.

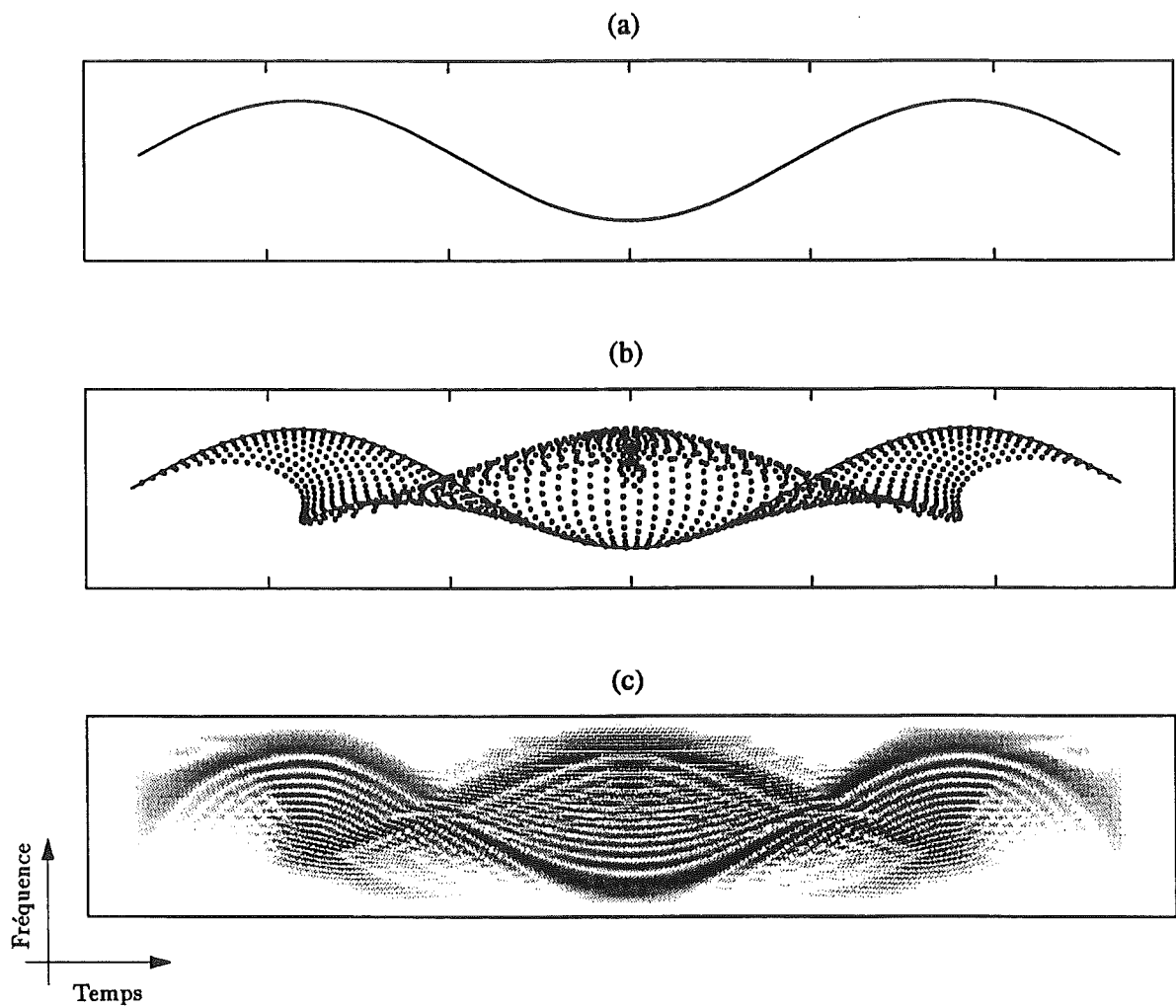


Figure 2.14: (a) Loi théorique de fréquence instantanée d'un signal modulé sinusoidalement - (b) Estimation par application de la moyenne généralisée du lieu des interférences générées par la distribution unitaire de Bertrand - (c) Représentation de la distribution unitaire de "Bertrand" calculée sur le même signal.

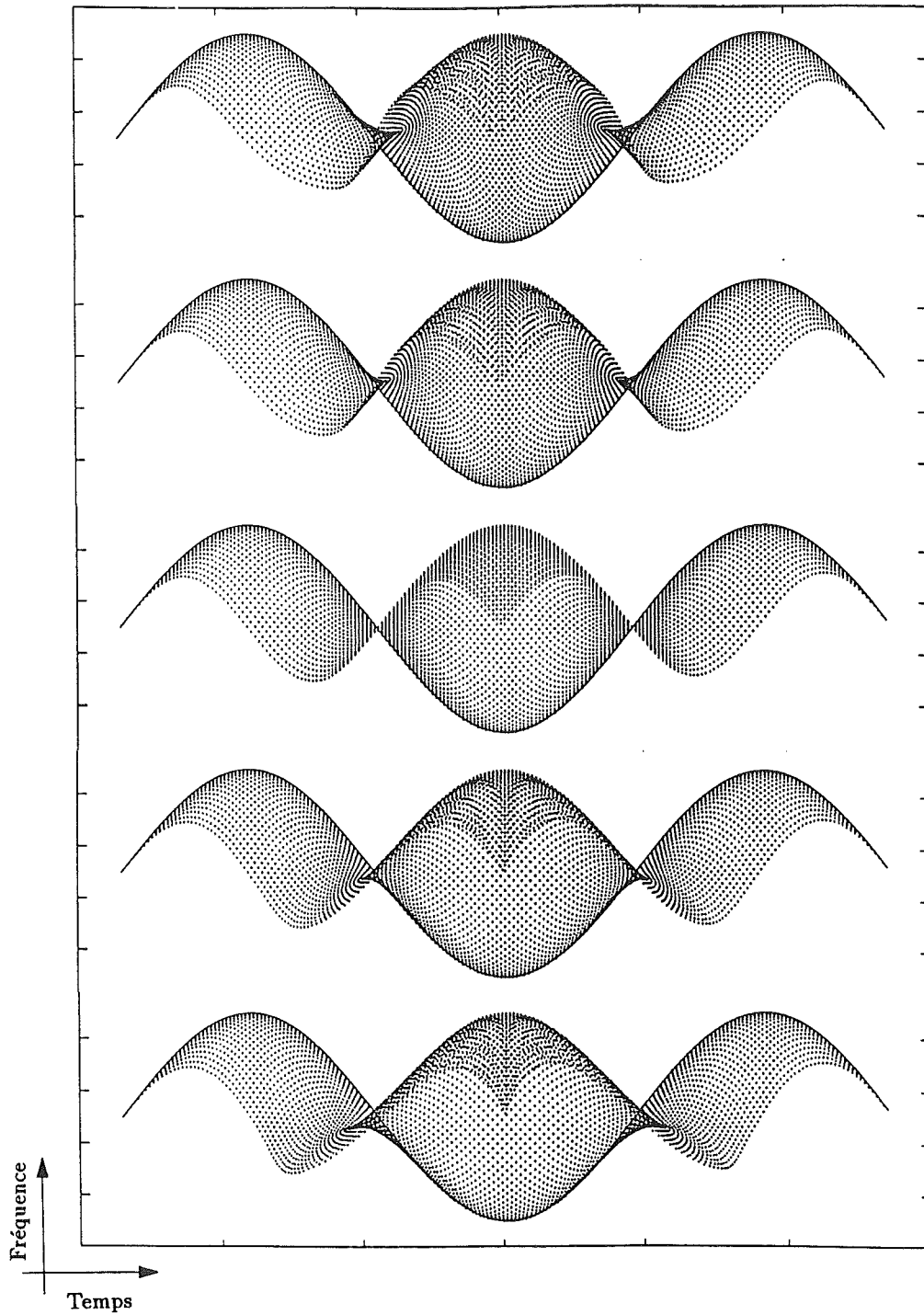


Figure 2.15: *Comportement théorique des distributions localisées affines correspondantes à des valeurs voisines de  $k = 2$ . De haut en bas:  $k = 2.5$ ,  $k = 2.25$ ,  $k = 2$ ,  $k = 1.75$ ,  $k = 1.5$ .*

Bien qu'il ne semble pas y avoir de points *multiples* sur ces structures soumises à des symétrie non linéaires (il faudrait pour cela que la loi de fréquence instantanée présente des points d'inflexion redéfinis sur chaque géométrie modifiée particulière), on note cependant des zones de fortes concentrations. Celles-ci correspondent en général à des (i) points de rebroussement pour la règle construction ponctuelle, (ii) à des *nœuds*, lieux d'intersection d'un grand nombre de lois de puissance joignant chacune un couple de points de la fréquence instantanée. Ces zones de forte concentration varient notablement pour de faibles variations du paramètre  $k$  (figure 2.16)

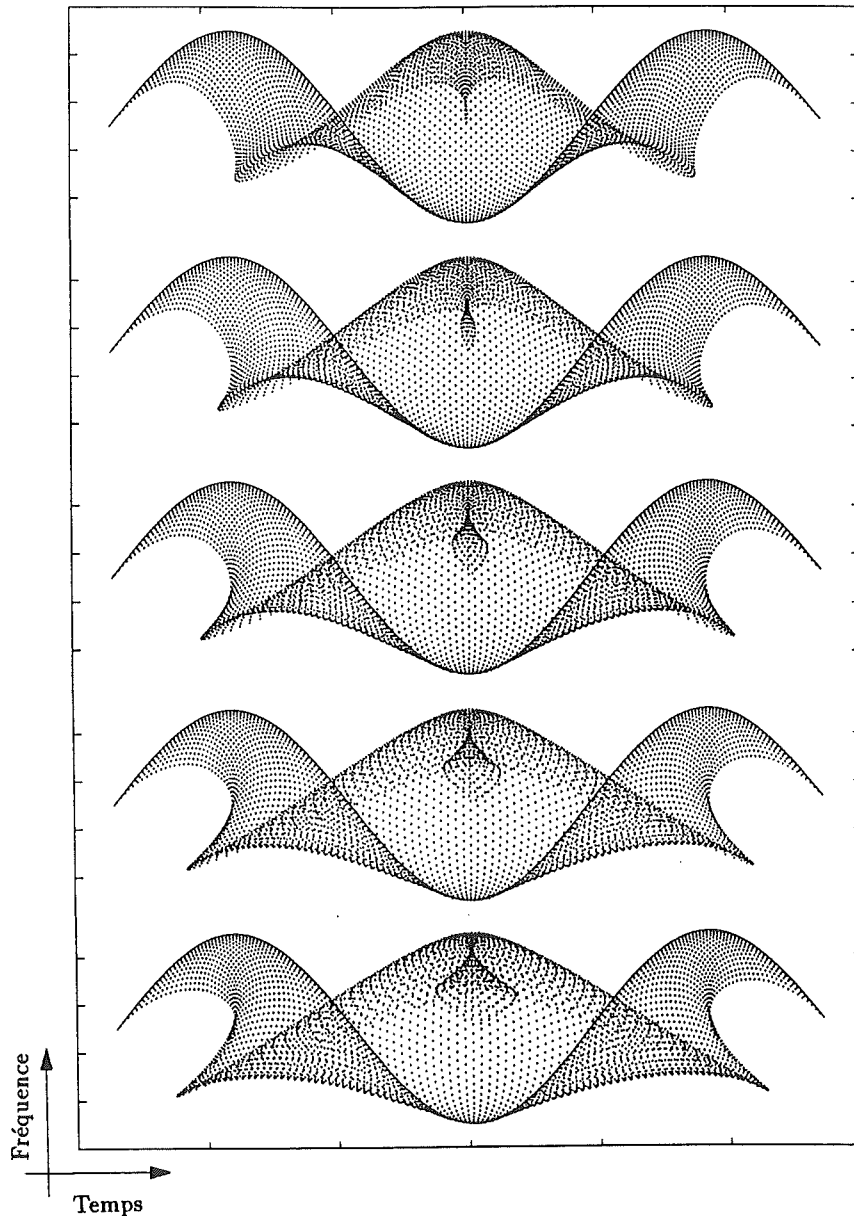


Figure 2.16: Application des règles de construction ponctuelle correspondantes à des variations de  $k$  autour de la valeur 0. De haut en bas:  $k = 1$ ,  $k = 0.5$ ,  $k = 0$ ,  $k = -0.5$ ,  $k = -1$ .



D'un point de vue visuel, les structures interférentielles autres que celle liée à la distribution de Wigner-Ville, peuvent toutes s'interpréter comme une anamorphose de celle-ci. Symboliquement, la "torsion" s'exerçant sur la distribution de Wigner-Ville est du même ordre que celle qui agirait sur une droite pour la transformer en loi de puissance. On peut alors par rapport à la distribution de Wigner-Ville, accentuer l'effet de cette "torsion" ( $k \rightarrow -\infty$ , figure 2.17), ou au contraire inverser le sens de son action ( $k \rightarrow \infty$ , figure 2.18).

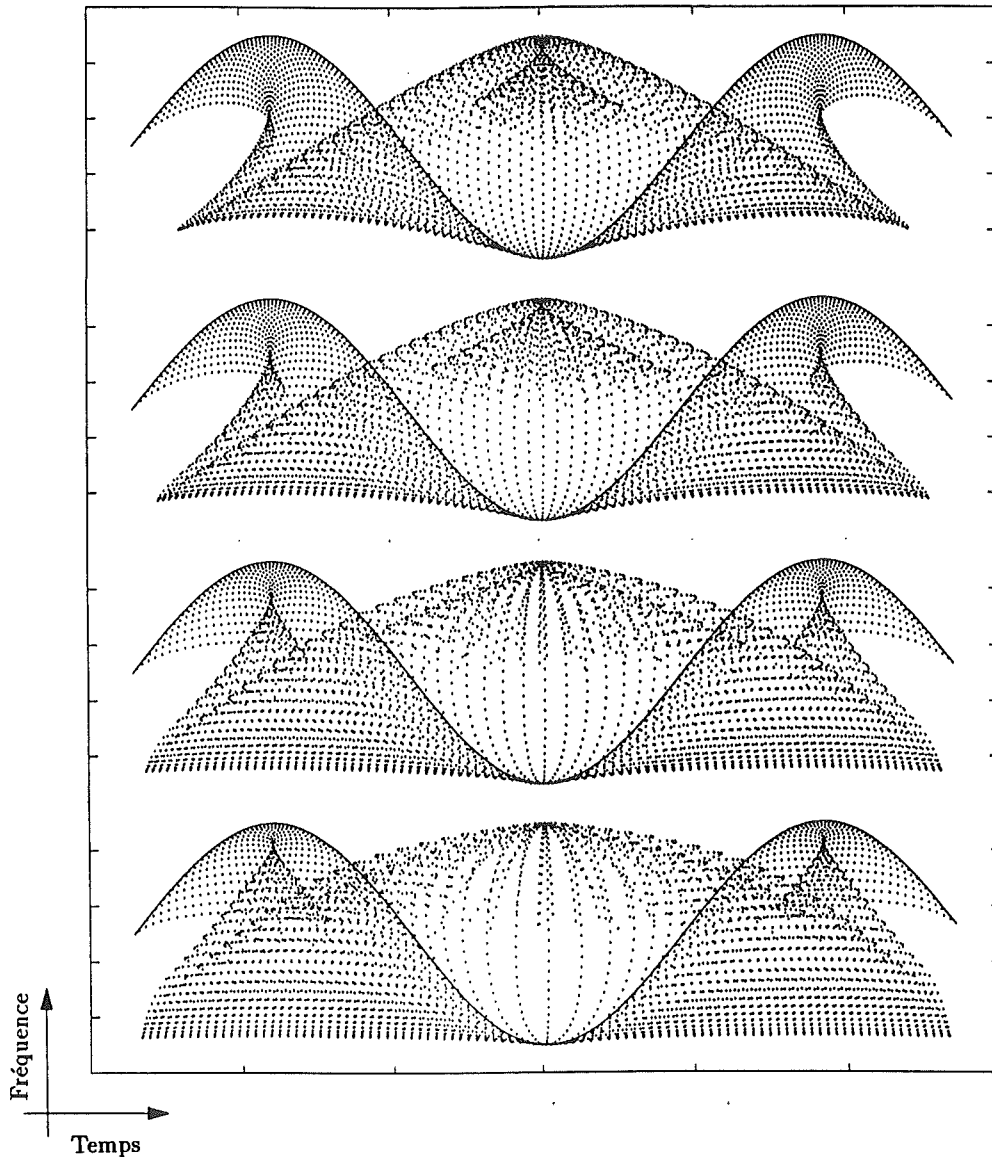


Figure 2.17: Sur un signal modulé sinusoidalement en fréquence, application des règles de symétries non linéaires associées à une évolution négative du paramètre  $k$ . De haut en bas  $k = -2$ ,  $k = -4$ ,  $k = -8$ ,  $k = -15$ .

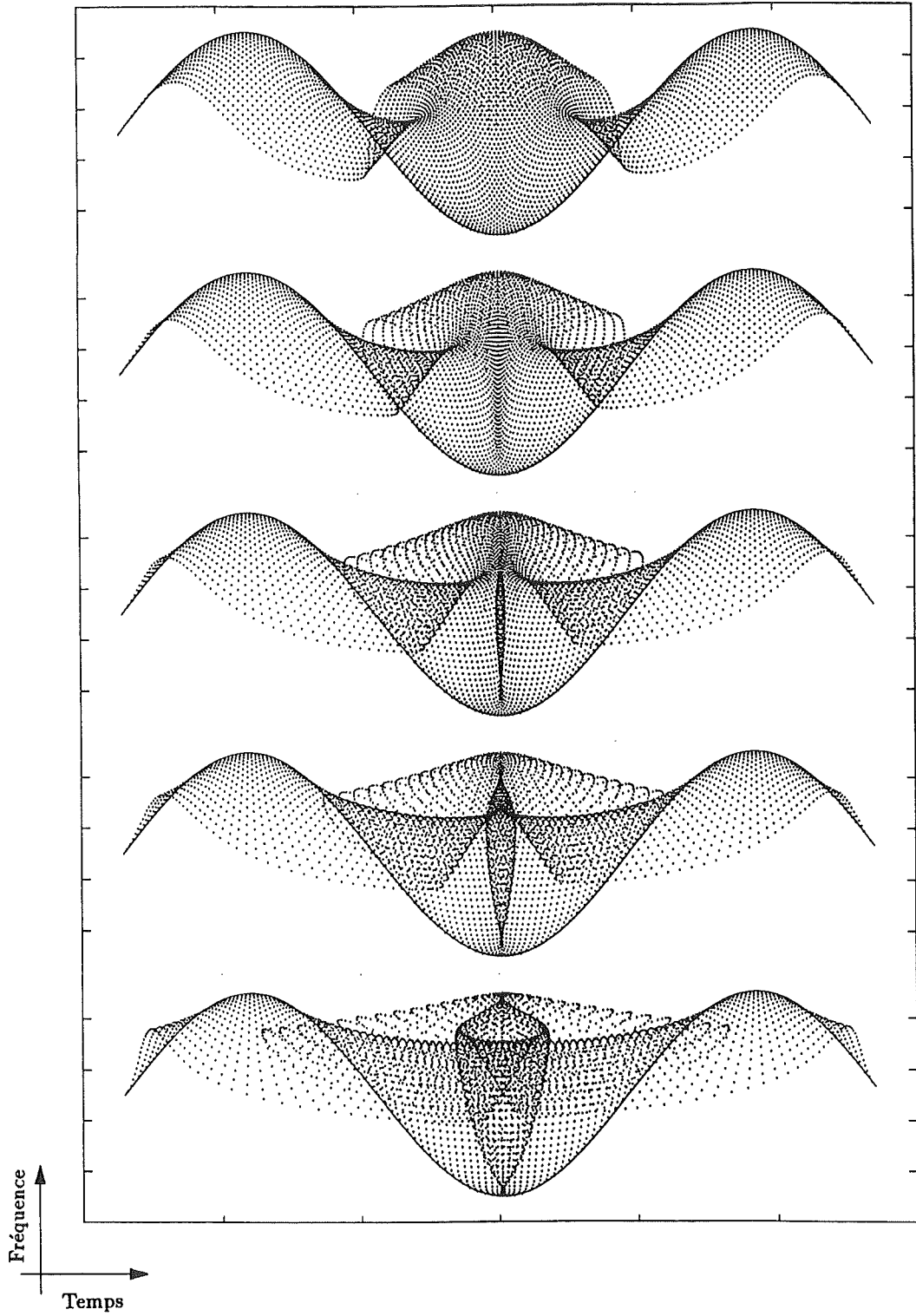


Figure 2.18: Sur un signal modulé sinusoidalement en fréquence, application des règles de symétries non linéaires associées à une évolution positive du paramètre  $k$ . De haut en bas  $k = 3, k = 4, k = 5, k = 6, k = 10$ .

Nous n'avons jusqu'à présent appliqué les règles de construction géométrique qu'à des contextes d'interférences internes (i.e. générées par un signal mono-composante), mais rien ne limite la validité de ces symétries non linéaires à ce cas particulier. A titre d'exemple considérons le signal formé de deux modulations hyperboliques de fréquence, et de concavités opposées. La distribution de Bertrand, bien que localisée sur ce type de loi de modulation fait apparaître alors des interférences externes issues de l'interaction des deux composantes (figure 2.19). De plus, la structure du signal est telle que sa signature théorique offre un axe de symétrie verticale. Par suite, chaque point  $(t_1, f_1)$  d'une des hyperboles interfère avec son homologue "miroir"  $(t_2, f_1)$  situé sur l'autre hyperbole en un point de même fréquence  $f_1$  et situé à mi-chemin  $(t_1 + t_2)/2$ , et ce, bien que les règles de symétrie appliquées ne soient pas celles du point milieu.

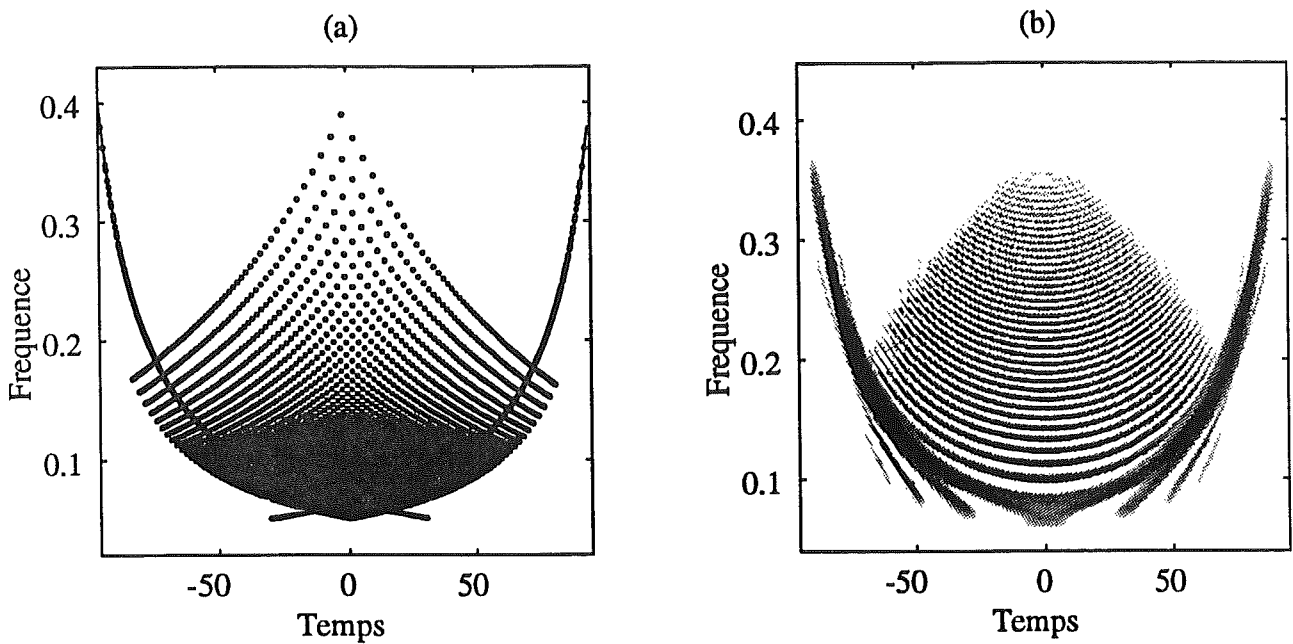


Figure 2.19: (a) Profil des interférences externes générées par la distribution unitaire de Bertrand, dans le cas de deux signaux modulés hyperboliquement en fréquence - (b) Evaluation numérique correspondante.

Enfin, pour préciser le comportement de ces termes croisés, reprenons le signal de la figure 1.1 constitué de quatre atomes gaussiens symétriquement répartis dans le plan temps-fréquence. Globalement, deux composantes de fréquence identique interfèrent à cette même fréquence et à mi-chemin entre elles. Cependant ce résultat est assorti d'un discernement supplémentaire relatif à la largeur de bande relative des composantes. Plus précisément, les deux composantes haute fréquence interfèrent par des lois de construction ponctuelle comparables à celles du cas Wigner-Ville, en accord avec le fait que toutes ces distributions affines localisées convergent dans la limite des bandes relatives étroites vers la distribution de Wigner-Ville. Par contre, cette approximation n'est plus valide pour les deux composantes situées à basse fréquence, et bien que celles-ci vivent à la même fréquence, le principe par lequel elles interfèrent reste attaché au type de distribution

appliquée.

Cette étude s'applique sans restriction à la localisation des termes croisés issus de composantes synchrones. L'interférence apparaît alors à la même date, mais à une position fréquentielle qui, par rapport à la fréquence milieu de Wigner-Ville subit une correction d'autant plus importante que l'hypothèse de bande relative étroite ne s'applique pas.

Précisons que la disposition rectangulaire des composantes, combinée aux règles de point milieu propres à Wigner-Ville fait interférer les composantes diagonales en une même région du plan (les diagonales d'un rectangle se coupant en leur milieu). Cette superposition n'est plus valable pour  $k \neq 2$  puisqu'alors le point d'intersection des deux lois de puissance joignant les composantes diagonalement opposées ne correspond plus au milieu respectif des longueurs d'arc.

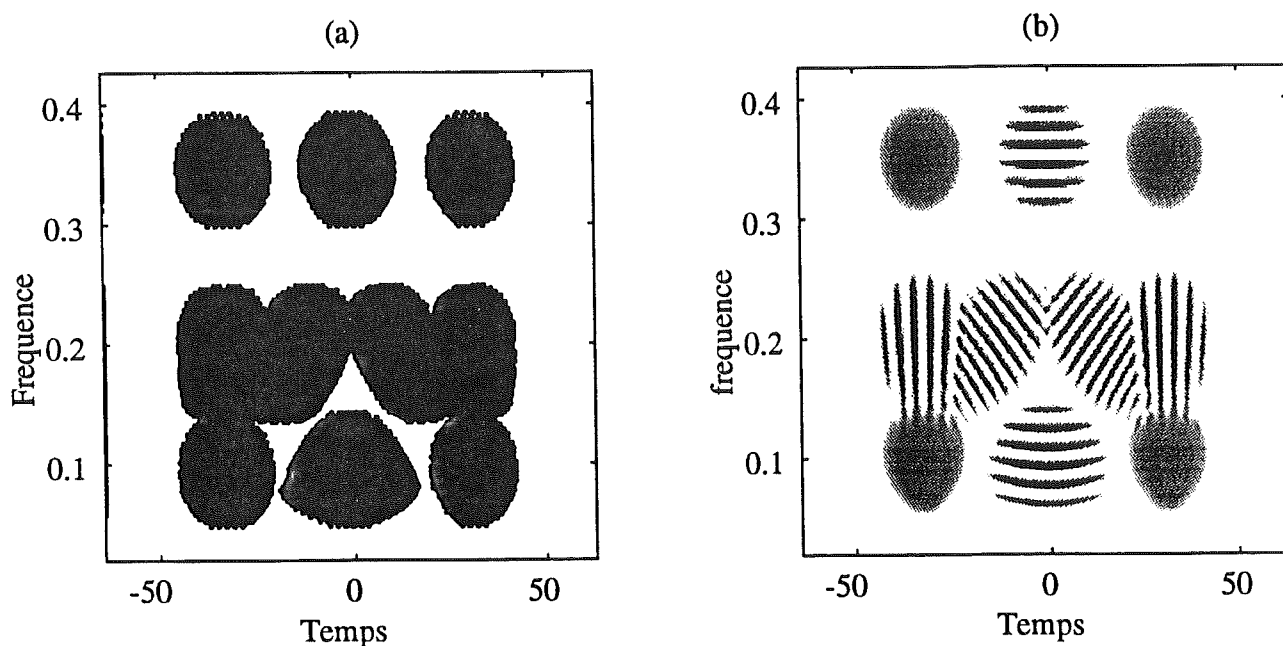


Figure 2.20: (a) Profil des interférences externes générées par la distribution unitaire de Bertrand, dans le cas de quatre atomes répartis sur les coins d'un rectangle dans le plan temps-fréquence. - (b) Evaluation numérique de la distribution dans ce contexte.

### Une description empirique des oscillations

Si, dans une phase ultérieure, on veut rationaliser le type de post-traitement à effectuer sur les distributions pour en atténuer les interférences, la caractérisation locale des oscillations de ces termes est une donnée essentielle. Sur ce point, l'état actuel de nos travaux se limite à des remarques d'ordre général, motivées par certaines observations et inspirées en partie des résultats développés sur la distribution de Wigner-Ville [66].

Par exemple, considérons une gaussienne centrée sur la date  $t_0$ , modulée par une fréquence pure  $\nu_0$ , et construisons deux images de celle-ci par translations symétriques en  $(t_0 + \tau, \nu_0 + \theta)$ , respectivement  $(t_0 - \tau, \nu_0 - \theta)$ . Sur le signal formé par la somme

de ces deux atomes reproduits, on calcule une distribution de Wigner-Ville. Un résultat connu [66] nous montre alors que le terme croisé résultant de l'interaction des deux composantes est égal (à un facteur 2 près) à la propre distribution de Wigner-Ville de l'atome générateur assortie d'une modulation que l'on sait caractériser ponctuellement. En effet, deux points pris chacun sur l'une des composantes, interfèrent au milieu géométrique du segment qui les joint (en accord avec la règle de construction du point milieu) et localement, la direction principale des oscillations est orthogonale à ce segment. On sait également que la fréquence du battement est alors proportionnelle à la différence des dates et des fréquences repérant le bipoint.

On se propose alors de jouer le même essai sur la distribution de Bertrand, mais relativement à des composantes qui se déduisent de l'action des opérateurs par lesquels la distribution est covariante, sur un atome de référence. En l'occurrence la distribution de Bertrand étant covariante par translation hyperbolique en temps, si  $x_0(t) = x(t - t_0)$  est un logon modulé translaté en  $t_0$ , les versions dupliquées de celui-ci s'obtiennent par deux dilatations symétriques (au sens de la géométrie généralisée étudiée précédemment) de facteur  $F(\gamma_0)$  et  $F(-\gamma_0)$  (la fonction  $F$  étant celle définie en (2.26) et  $\gamma_0$  un réel arbitraire),

$$x_1(t) = x\left(\frac{t}{F(\gamma_0)} - t_0\right) \quad \text{et} \quad x_2(t) = x\left(\frac{t}{F(-\gamma_0)} - t_0\right).$$

Le "centre" des composantes  $x_0$ ,  $x_1$  et  $x_2$  se situent alors dans le plan temps-fréquence sur une même trajectoire hyperbolique.

Sans faire le calcul explicite de la distribution de Bertrand appliquée à la somme  $x_1(t) + x_2(t)$ , on voit sur l'évaluation numérique de la figure 2.21, que le terme interférentiel peut se superposer (en termes de localisation et d'enveloppe dans le plan temps-fréquence) à la distribution de Bertrand de l'atome générateur  $x_0$ . Les oscillations semblent former quant à elles un réseau d'hyperboles cohérent (i) avec la géométrie *naturelle* de la distribution, (ii) avec la procédure de génération des composantes. Localement, il apparaît aussi que l'orientation de ces oscillations privilégie une direction principale: celle de la normale à la tangente à l'hyperbole joignant les deux points qui créent l'interférence ponctuelle.

La relation de passage entre l'atome générateur et les deux répliques du signal est en grande partie responsable de l'organisation du terme croisé selon un réseau d'hyperboles. Cette structure régulière n'est évidemment pas maintenue si les versions clônées de l'atome de référence ne respectent plus les propriétés intrinsèques de covariance de la distribution. En particulier, des versions translatées symétriquement en temps et en fréquence, fournissent des interférences dont les directions d'oscillation se distribuent de façon plus erratique dans le plan temps-fréquence (figure 2.22). Toutefois, il n'en reste pas moins vrai que localement, l'orientation des battements se déduit encore de la tangente à l'hyperbole passant par les deux points en interaction.

Enfin, on peut vérifier qu'en vertu des règles de construction ponctuelle des interférences, le support temps-fréquence de celles-ci est borné par les deux hyperboles *extrêmes* que l'on peut faire passer par deux points pris sur chacune des composantes<sup>5</sup>.

---

<sup>5</sup>Ce résultat repose sur l'hypothèse implicite que les composantes sont à support compact en temps et en fréquence

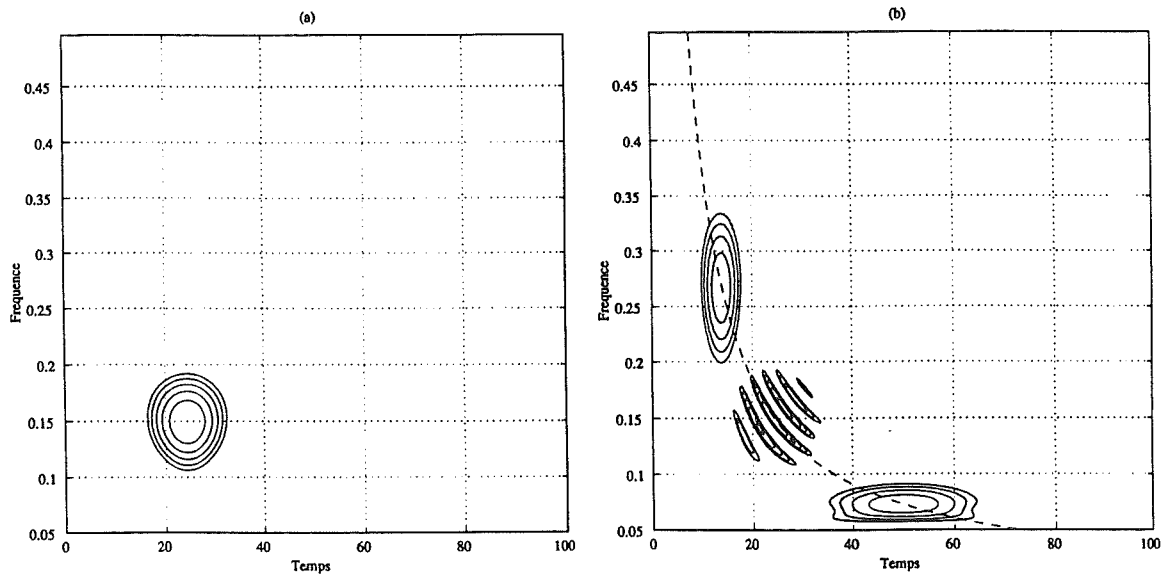


Figure 2.21: - (a) Distribution de Bertrand estimée sur un logon gaussien modulé en fréquence ( $\nu_0 = 0.15\text{Hz}$ ) et centré sur la date  $t_0 = 24\text{s}$  - (b) Distribution de Bertrand estimée sur deux versions dilatées ( $F(\gamma_0) = 0.487$  et  $F(-\gamma_0) = 1.787$ ) du signal générateur décrit en (a).

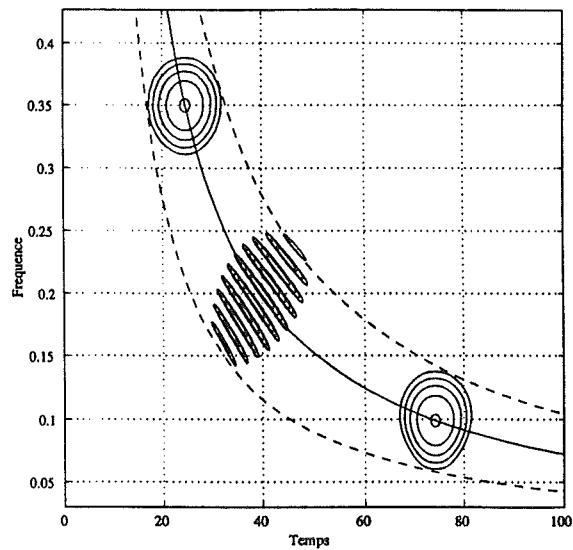


Figure 2.22: Distribution unitaire de Bertrand évaluée sur un signal composé de deux atomes gaussiens (obtenus par translations symétriques en temps et en fréquence d'un même modèle). Le terme croisé résultant de l'interférence des deux composantes se localise entre deux hyperboles frontières passant par les composantes "signal". La direction locale des oscillations est déterminée par la normale à l'hyperbole joignant le bipoint en interaction.

### 2.3.5 Extension à trois paramètres du groupe affine

L'étude des distributions affines à noyaux bi-fréquentiels localisés faite aux paragraphes précédents repose essentiellement sur les propriétés de localisation de ces représentations. Par le jeu de règles de symétries simples, nous avons essayé de comprendre et de vulgariser les mécanismes a priori complexes liés à ces structures non linéaires peu usuelles, et c'est dans cette philosophie que s'inscrit principalement l'originalité de ce travail.

Toutefois, nous l'avons cité en introduction du paragraphe §2.3, il existe un cadre formel mathématique associé à cette famille de distributions. Celui-ci traduit la contrainte de localisation sur des lois de retards de groupe non-linéaires, en termes de représentation d'un *groupe de Lie à trois paramètres* [14], [13], [15], [93]. Les distributions considérées devant rester covariantes par translation en temps et changement d'échelle, le groupe correspondant doit implicitement intégrer l'algèbre affine du groupe du même nom. De plus, imposer sur les représentations des contraintes supplémentaires de localisation sur des lois non linéaires élargit la dimension du groupe à trois paramètres. La nature de la non-linéarité, repérée par le paramètre  $k$ , se reflète également dans la structure du groupe recherché. On montre alors [69] que les seuls groupes (à trois paramètres) solubles tels que leur algèbre de Lie inclue également l'algèbre de Lie affine, ont pour loi de composition interne:

$$\begin{aligned}
 (a, b, c) \bullet (a', b', c') &= (aa', b + ab', c + a^k c') \rightarrow \text{groupe } \mathcal{G}_k, \quad k \neq 0, 1 \\
 (a, b, c) \bullet (a', b', c') &= (aa', b + ab', c + c') \rightarrow \text{groupe } \mathcal{G}_0 \\
 (a, b, c) \bullet (a', b', c') &= (aa', b + ab' + a \log(a)c', c + ac') \rightarrow \text{groupe } \mathcal{G}_1.
 \end{aligned} \tag{2.35}$$

J. Bertrand et P. Bertrand ont alors montré que la seule représentation de l'espace des phases assurant la commutativité des diagrammes suivants

$$\begin{array}{ccc}
 \text{pour } k \neq 0, 1 : & x(t) & \longrightarrow & (\gamma_k(a, b, c) x)(t), \\
 & \downarrow & & \downarrow \\
 & P_x(t, \nu) & \longrightarrow & P_x(at - b - kcL_k a^{1-k} \nu^{k-1}, a^{-1} \nu) \\
 \\
 \text{pour } k = 0 : & x(t) & \longrightarrow & (\gamma_0(a, b, c) x)(t) \\
 & \downarrow & & \downarrow \\
 & P_x(t, \nu) & \longrightarrow & P_x(at - b - kcL_0 a \nu^{-1}, a^{-1} \nu) \\
 \\
 \text{pour } k = 1 : & x(t) & \longrightarrow & (\gamma_1(a, b, c) x)(t), \\
 & \downarrow & & \downarrow \\
 & P_x(t, \nu) & \longrightarrow & P_x(at - b - c(1 + \log(a^{-1} \nu) + L_1), a^{-1} \nu)
 \end{array}$$

où  $\gamma_k(a, b, c)$  sont les représentations unitaires des groupes  $\mathcal{G}_k$  (cf. déf. 1.2) et  $L_k, L_0, L_1$  des constantes, s'écrit:

$$P_x^{(k)}(t, \nu) = \nu^{2r+2} \int X(\lambda_k(u)\nu) X^*(\lambda_k(-u)\nu) e^{i2\pi\nu t(\lambda_k(u) - \lambda_k(-u))} \mu_k(u) du. \quad (2.36)$$

Le coefficient  $r$  est relatif à l'espace des fonctions  $H$  sur lequel est définie la représentation  $\gamma$ , la norme associée à cet espace étant:

$$\|X\| = \int_{\mathbb{R}^+} |X(\nu)|^2 \nu^{2r+1} d\nu < \infty.$$

Les fonction  $\lambda_k$  et  $\mu_k$  sont des nouvelles fonctions de paramétrisation de cette classe affine "étendue". On peut néanmoins, comme pour la terminologie basé sur les fonction  $H$  et  $G$ , réduire d'un ordre le degré de liberté de cette paramétrisation, en imposant notamment la localisation temporelle. Dans ces conditions, la fonction  $\mu_k$  est fonctionnellement dépendante de  $\lambda_k$  par la relation:

$$\mu_k = (\lambda_k(u)\lambda_k(-u))^{r+\frac{1}{2}} \frac{d}{du}(\lambda_k(u) - \lambda_k(-u))$$

et l'expression générale de  $\lambda_k$  est donnée par:

$$\begin{cases} \lambda_k(u) = \left(k \frac{e^{-u}-1}{e^{-ku}-1}\right)^{\frac{1}{k-1}}, & k \neq 0, 1 \\ \lambda_0(u) = \frac{-u}{e^{-u}-1}, & k = 0 \\ \lambda_1(u) = \exp\left(1 + \frac{ue^{-u}}{e^{-u}-1}\right), & k = 1 \end{cases}$$

Les deux dernières versions  $\lambda_0$  et  $\lambda_1$  se déduisent de  $\lambda_k$  par continuité.

A titre d'exemple, et en remarquant que  $\lambda_k$  vérifie la relation

$$\frac{\lambda_k(u)}{\lambda_k(-u)} = e^u,$$

on peut vérifier la spécificité hyperbolique liée à la classe de Bertrand. Pour cela réécrivons l'équation des phase (2.14) à partir de l'expression:

$$P_x^{(k)}(t, \nu) = \nu \int X(\lambda_k(u)\nu) X^*(\lambda_k(-u)\nu) e^{i2\pi\nu t(\lambda_k(u) - \lambda_k(-u))} \sqrt{\lambda_k(u)\lambda_k(-u)} d(\lambda_k(u) - \lambda_k(-u)).$$

En considérant un signal analytique de la forme  $X_\delta(\nu) = \nu^{-\frac{1}{2}} e^{i\Phi_x(\nu)}$ , et en imposant la localisation de  $P_x(t, \nu)$  sur le retard de groupe correspondant, on obtient la condition immédiate suivante sur  $\Phi_x$ :

$$\Phi_x(\lambda_k(u)\nu) - \Phi_x(\lambda_k(-u)\nu) = \nu(\lambda_k(u) - \lambda_k(-u)) \dot{\Phi}_x(\nu). \quad (2.37)$$



Lorsque de plus on tient compte d'une phase du type loi de puissance, il s'agit alors de résoudre le système d'équations:

$$\begin{cases} \lambda_k^k(u) - \lambda_k^k(-u) = k(\lambda_k(u) - \lambda_k(-u)) \\ \lambda_k(-u) = e^{-u}\lambda_k(u) \end{cases},$$

dont la solution unique est bien  $\lambda_k$ , que l'on peut encore écrire sous la forme:

$$\lambda_k(u) = e^{\frac{u}{2}} \left( \frac{1 e^{-k\frac{u}{2}} - e^{k\frac{u}{2}}}{k e^{-\frac{u}{2}} - e^{\frac{u}{2}}} \right)^{\frac{1}{1-k}} = e^{\frac{u}{2}} \Theta_k^{-1}(e^{\frac{u}{2}}, e^{-\frac{u}{2}}).$$

avec  $\Theta_k$  la fonction définie en (2.28).

Un avantage certain de cet autre formalisme de la classe affine localisée est de pouvoir associer à chaque valeur du coefficient  $k$ , l'expression algébrique d'une distribution affine bilinéaire parfaitement localisée sur le retard de groupe correspondant.

Enfin, nous conclurons en soulignant que les résultats proposés, pour certains existant déjà à travers les travaux de J. Bertrand et P. Bertrand, sont tous duals de propriétés liées à la théorie des groupes. Notre dessein était ici, d'aborder par le biais original de constructions géométriques cet outil d'analyse temps-fréquence qui aujourd'hui encore peut paraître ésotérique par certains de ses aspects.

### 2.3.6 La distribution de Altes-Marinovic

Bien que n'appartenant pas à la classe des distributions affines (et *a fortiori* à la classe des distributions affines localisées) car elle n'est pas covariante par translation en temps, la représentation de Altes-Marinovic [3], [88] (équation 1.68) mérite par son statut *générateur* de la classe hyperbolique une attention toute particulière [97], [96], [98]. En effet, il est facile de vérifier qu'elle se localise sur une loi de retard de groupe hyperbolique d'origine temporelle nulle, selon

$$X(\nu) = \frac{1}{\sqrt{\nu}} e^{i2\pi c \log \nu} \Rightarrow \frac{1}{|f|} \delta\left(t + \frac{c}{f}\right).$$

De plus, la discussion menée au paragraphe 1.3.2 nous ayant appris une règle d'équivalence simple entre représentations de la classe de Cohen et représentations de la classe hyperbolique, on peut présumer d'une correspondance de même nature entre les propriétés respectives de ces distributions. En particulier, on profite de cette dualité entre classes, pour inférer de la formule des interférences due à Janssen (équation 1.30), une écriture corollaire relative à la distribution de Altes<sup>6</sup>. Pour cela, précisons la relation (1.30) exprimée sur le signal  $(\mathcal{U}_H X)(\nu)$  évaluée au point de coordonnées  $((t\nu)/f_r, f_r \log(\nu/f_r))$ , il vient

<sup>6</sup>Dans une étude simultanée et indépendante de la nôtre, les travaux de F. Hlawatsch, A. Papandreou et G.F. Boudreaux-Bartels font état d'un résultat analogue à celui que nous nous proposons d'établir.

$$\left| W_{(u_{\mathcal{H}X})} \left( \frac{t\nu}{f_r}, f_r \log \frac{\nu}{f_r} \right) \right|^2 = \int \int W_{(u_{\mathcal{H}X})} \left( \frac{t\nu}{f_r} + \frac{\tau}{2}, f_r \log \frac{\nu}{f_r} + \frac{\xi}{2} \right) W_{(u_{\mathcal{H}X})} \left( \frac{t\nu}{f_r} - \frac{\tau}{2}, f_r \log \frac{\nu}{f_r} - \frac{\xi}{2} \right) d\tau d\xi.$$

Compte tenu de la loi de passage donnée en (1.69), on peut substituer dans l'équation ci-dessus la distribution de Altes  $Q_x$  à la distribution de Wigner, ainsi

$$\begin{aligned} |Q_x(t, \nu)|^2 &= \int \int Q_x \left( \left( \frac{t\nu}{f_r} + \frac{\tau}{2} \right) e^{\frac{-1}{f_r} (f_r \log \frac{\nu}{f_r} + \frac{\xi}{2})}, f_r e^{\frac{1}{f_r} (f_r \log \frac{\nu}{f_r} + \frac{\xi}{2})} \right) \\ &\quad Q_x \left( \left( \frac{t\nu}{f_r} - \frac{\tau}{2} \right) e^{\frac{-1}{f_r} (f_r \log \frac{\nu}{f_r} - \frac{\xi}{2})}, f_r e^{\frac{1}{f_r} (f_r \log \frac{\nu}{f_r} - \frac{\xi}{2})} \right) d\tau d\xi \\ &= \int \int Q_x \left( \left( t + \frac{\tau f_r}{2\nu} \right) e^{-\frac{\xi}{2f_r}}, \nu e^{\frac{\xi}{2f_r}} \right) Q_x \left( \left( t - \frac{\tau f_r}{2\nu} \right) e^{\frac{\xi}{2f_r}}, \nu e^{-\frac{\xi}{2f_r}} \right) d\tau d\xi. \end{aligned}$$

Finalement, en posant le changement de variables  $e^{\xi/2f_r} = \sqrt{\gamma}$ , la formule recherchée a pour expression

$$|Q_x(t, \nu)|^2 = \int_0^\infty \int f_r Q_x \left( \frac{1}{\sqrt{\beta}} \left( t + \frac{\tau f_r}{2\nu} \right), \sqrt{\beta} \nu \right) Q_x \left( \sqrt{\beta} \left( t - \frac{\tau f_r}{2\nu} \right), \frac{\nu}{\sqrt{\beta}} \right) d\tau \frac{d\beta}{\beta}. \quad (2.38)$$

Les règles de compositions par lesquelles la distribution de Altes interfère sont clairement régies par des opérations affines (facteur  $\sqrt{\beta}$ ) responsables de sa localisation sur des lois de modulation hyperboliques en fréquence.

## 2.4 Résumons...

Au terme de ce chapitre, nous avons voulu insister sur la diversité des représentations bilinéaires affines pouvant se cacher derrière la paramétrisation (1.52). Les deux types de noyaux qui ont été développés définissent en particulier deux orientations distinctes d'exploration de la classe affine.

Le lissage affine, tout en préservant la géométrie propre de la distribution de Wigner-Ville (et dans quelques cas certaines de ses propriétés relatives aux lois d'échelle), permet dans une certaine mesure, d'en supprimer les interférences. C'est principalement dans cette optique que l'on peut chercher à rationaliser le choix du type de noyaux de convolution affine par rapport à une signature temps-fréquence donnée. Ce faisant, les représentations qui en dérivent restent sous domaine d'influence de la distribution de Wigner-Ville et plus ou moins directement les mécanismes de construction interférentielle selon les règles du point milieu s'y retrouvent. Par contre, ce n'est plus vrai lorsque l'on

recourt aux noyaux bi-fréquentiels localisés. Ceux-ci permettent en effet de sortir du giron de la distribution de Wigner-Ville en introduisant de nouvelles représentations bilinéaires (unitaires pour certaines) obéissant à des règles de construction ponctuelle basées sur une géométrie modifiée. La démarche que nous avons adoptée dans ce chapitre tendait à prouver l'aspect biunivoque des liens entre ces géométries généralisées et quelques distributions affines localisées.

Fort des relations de passage entre représentations unitaires localisées, rien ne s'oppose par la suite à articuler l'ensemble de la classe affine autour de l'une de ces nouvelles distributions en lieu et place de la distribution de Wigner-Ville [14], [105] .

### **3. Applications**

Au cours du premier chapitre, nous avons rappelé quelques unes des motivations qui furent à l'origine des représentations bi-dimensionnelles des signaux. L'intérêt porté aux processus non-stationnaires a été un catalyseur notable dans l'évolution des méthodes de description conjointe en temps et en fréquence, méthode dont l'enjeu vise schématiquement à lire un signal comme on le ferait d'une partition musicale.

Pour sa part, le deuxième chapitre nous sensibilise à la pertinence d'autres modèles d'analyse, parmi lesquels les distributions temps-échelle occupent une place de choix. Dans cette direction, les points de vue relatifs à la dimension d'échelle sont alors souvent complémentaires de ceux inspirés par la notion de fréquence, comme peut l'être par analogie, le concept d'accord en solfège face à celui de note.

Si ces deux types de représentations ne se font pas concurrence en termes de *contenu informatif*, les propriétés qui les accompagnent offrent cependant deux lectures différentes d'une même information. En ce sens il est des champs d'applications pour lesquels analyses temps-échelle ou temps-fréquence ne sont pas d'un attrait comparable (on sait par exemple que la distribution de Wigner-Ville est un outil particulièrement bien adapté dans le suivi de lois de fréquences instantanées).

Réciproquement, on devine que les représentations énergétiques affines, par leurs spécificités, ouvrent la voie d'applications vers lesquelles les analyses temps-fréquence étaient mal orientées. Dans ce dernier chapitre, nous évoquerons donc quelques-unes des problématiques, en lien avec des situations physiques concrètes, pour lesquelles les potentialités des distributions temps-échelle sont d'un recours avantageux.

## 3.1 Détection. Estimation

### 3.1.1 Place des représentations énergétiques dans la discipline

Une vue pragmatique simple permet de bien cerner le problème posé par la théorie de la détection binaire en traitement du signal:

Disposant d'un *signal  $x$  de référence*<sup>1</sup>, on cherche à localiser dans une observation  $y$  (généralement perturbée additivement d'un bruit  $b$ )<sup>2</sup> une version (éventuellement transformée  $(\mathcal{V}x)$ )<sup>3</sup> de celui-ci.

Les deux seuls états auxquels peut être confronté un tel système relèvent ensuite du couple d'hypothèses suivantes [111]:

$$\begin{cases} H0 & : y(t) = b(t) \\ H1 & : y(t) = b(t) + (\mathcal{V}x)(t). \end{cases} \quad (3.1)$$

<sup>1</sup>on fera l'hypothèse simplificatrice que  $x$  est déterministe et d'énergie  $E_x$  finie sur un intervalle d'observation  $(T)$

<sup>2</sup> $b$  sera supposé Gaussien centré stationnaire et à corrélation microscopique  $r_b(t-s) \equiv \mathbf{E}(b(t)b^*(s)) = \sigma_b^2 \delta(t-s)$ . De plus,  $b$  et  $x$  sont indépendants

<sup>3</sup>On restreindra le champ de cette étude aux transformations  $\mathcal{V}$  unitaires (i.e.  $\|(\mathcal{V}x)\|^2 = \|x\|^2 = E_x$  dans  $L^2(\mathbb{R})$ )

La finalité d'un détecteur consiste alors à dériver de l'observation  $y$  une fonction  $\Lambda$  qui, après comparaison avec un seuil fixe  $\sigma$ , soit indicatrice de l'état instantané du système

$$\Lambda(y) \underset{H0}{\overset{H1}{\gtrless}} \sigma.$$

Comme l'on peut s'y attendre, la discrimination entre hypothèses  $H0$  et  $H1$  qu'entraîne ce seuillage est entachée d'une marge d'erreur provenant du franchissement *accidentel* de  $\sigma$ .

Sous hypothèse gaussienne, pour détecter le signal à une information de phase près (ce qui, dans le cadre des distributions énergétiques conjointes, est ce que l'on pourra espérer de mieux compte tenu de la perte incontournable du référentiel des phases), on peut faire appel à un critère de maximum de vraisemblance. En l'occurrence, la stratégie optimale qui ressort met en jeu une image du module (carré) de la sortie du *filtre adapté classique* [117],

$$\Lambda(y) = \left| \int y(t) x^*(t) dt \right|^2 = | \langle y, x \rangle |^2. \quad (3.2)$$

Dans ce cas de détecteur *semi-cohérent*, il est facile de vérifier que le rapport signal sur bruit  $(s/b)$  défini par<sup>4</sup>

$$(s/b)(\Lambda) = \frac{|\mathbf{E}(\Lambda(y)|H1) - \mathbf{E}(\Lambda(y)|H0)|}{[\text{var}(\Lambda(y)|H0)]^{1/2}}. \quad (3.3)$$

atteint alors sa borne maximale, c'est-à-dire

$$(s/b)_{\text{max}}(\Lambda) = \frac{E_x}{\sigma_b^2}. \quad (3.4)$$

En choisissant volontairement de travailler sur l'enveloppe carrée de la sortie du filtre adapté, on devine le lien possible entre filtrage adapté classique et représentations énergétiques de signaux. Il suffit pour cela de remarquer qu'en faisant usage d'une distribution unitaire (cf. tableau 1.1), il est possible de réécrire la sortie du détecteur (3.2) selon

$$\Lambda(y) = | \langle y, x \rangle |^2 = \iint C_y(t, \nu; \Pi) C_x(t, \nu; \Pi) dt d\nu,$$

la borne maximale (3.4) étant évidemment atteinte dans ce contexte.

Bien que l'efficacité de ces méthodes monodimensionnelles soit depuis longtemps reconnue, il est donc possible d'envisager le problème de la détection du point de vue plus large des représentations conjointes des signaux. Symboliquement le problème posé étant toujours celui de la reconnaissance d'une structure dans un environnement complexe, on peut considérer un gabarit de filtre adapté, calqué sur la *signature temps-fréquence* du signal. L'image délivrée par ces méthodes peut alors, dans certains contextes, caractériser

<sup>4</sup>Cette définition de  $(s/b)$  n'est pas unique. Certains auteurs proposent notamment d'utiliser dans ce rapport la variance sur  $\Lambda$  conditionnellement à l'hypothèse  $H1$ , soit  $[\text{var}(\Lambda(y)|H1)]^{1/2}$  [16]

de manière plus pertinente la structure du signal et par conséquent faciliter son identification dans l'observation. L'analogie musicale présentée en début de chapitre souscrit d'ailleurs parfaitement à ce point de vue. En effet, s'il est difficile pour une oreille peu mélomane de localiser un "la" dans une mélodie, il est par contre trivial de repérer cette même note sur la partition musicale correspondante.

En nous limitant volontairement au cadre des distributions de la classe affine, le système d'hypothèses (3.1) peut alors se réécrire à partir du formalisme (1.52) selon

$$\begin{cases} H0 : \Omega_y(t, a = \nu_0/\nu; \Pi) = \Omega_b(t, a = \nu_0/\nu; \Pi) \\ H1 : \Omega_y(t, a = \nu_0/\nu; \Pi) = \Omega_{b+x}(t, a = \nu_0/\nu; \Pi). \end{cases} \quad (3.5)$$

Par suite, pour repérer les deux états en compétition de  $\Omega_y$ , on peut également imaginer d'extrapoler la structure corrélative temporelle de l'équation (3.2) à une version bi-dimensionnelle de filtrage adapté. La double intégration temps-fréquence qui s'ensuit

$$\Lambda(y, \Pi) = \iint \Omega_y(t, \nu; \Pi) \Omega_x(t, \nu; \Pi) dt d\nu = \ll \Omega_y, \Omega_x \gg, \quad (3.6)$$

s'interprète alors comme la corrélation entre un *masque* profilé sur la signature du signal à détecter et l'image temps-fréquence de l'observation (on remarque que le détecteur ainsi défini est, à l'image de (3.2), de nature semi-cohérente).

Bien qu'issue d'une démarche heuristique, ce concept de filtre adapté temps-fréquence ne constitue pas simplement un indicateur approximatif de l'état du système. Bien au contraire, il est possible d'en apprécier les performances en évaluant la fonction de contraste (3.3) réécrite à partir de  $\Lambda(y, \Pi)$ , il vient alors

$$(s/b)(\Lambda, \Pi) = \frac{|\mathbf{E}(\Lambda(y, \Pi)|H1) - \mathbf{E}(\Lambda(y, \Pi)|H0)|}{[\text{var}(\Lambda(y, \Pi)|H0)]^{1/2}}. \quad (3.7)$$

Dans cette expression, l'arbitraire du noyau de paramétrisation  $\Pi$  offre un degré supplémentaire d'optimisation. Précisément, en retenant le choix d'une distribution unitaire, la formule de Moyal (1.21) établit une équivalence formelle entre le caractère optimal d'un filtrage adapté classique et les performances d'un filtrage adapté temps-fréquence, on retrouve alors le résultat précédemment évoqué, à savoir [42]

$$|\langle y, x \rangle|^2 = \ll \Omega_y, \Omega_x \gg \implies (s/b)_{\text{max}}(\Lambda, \Pi) = (s/b)_{\text{max}}(\Lambda) = \frac{E_x}{\sigma_b^2}.$$

A la lumière de cette égalité, il n'y a *a priori* aucun avantage à attendre de la formulation temps-fréquence d'une structure usuelle de filtrage adapté. Les performances restent identiques pour, dans une majorité des cas, une mise en œuvre plus lourde. En fait, l'intérêt de cette approche devient évident dans la conjonction des deux hypothèses suivantes (i) le signal à détecter est un "chirp" caractérisé par une loi de fréquence instantanée  $\nu_x(t)$  (ou de retard de groupe  $\tau_g(\nu)$ ) et (ii) la distribution  $\Omega$  est unitaire et se localise (conformément à l'équation (2.9)) sur la structure temps-fréquence de cette modulation. Appliqué à l'équation (3.6), ce cas particulier réduit alors la procédure de détection à une simple intégration de la distribution  $\Omega_y$  sur la trajectoire de fréquence instantanée

$\nu_x(t)$ , ou de façon équivalente sur le retard de groupe, dans le plan temps-fréquence, ce qui s'écrit

$$\Lambda(y, \Pi_\delta) = \int \Omega_y \left( \tau_g \left( \frac{\nu_0}{a}; \Pi_\delta \right), a \right) \frac{da}{a^2}.$$

ou, à partir de la formulation temps-fréquence de  $\Omega_y$

$$\Lambda(y, \Pi_\delta) = \int \Omega_y \left( \tau_g(\nu), \frac{\nu_0}{\nu}; \Pi_\delta \right) d\nu \equiv \int \tilde{\Omega}_y(\tau_g(\nu), \nu, \Pi_\delta) d\nu. \quad (3.8)$$

Notons que ce schéma simplifié préserve néanmoins les caractéristiques d'une détection optimale puisque l'unitarité de la distribution assure à la quantité  $(s/b)(\Lambda, \Pi_\delta)$  associée d'atteindre la borne maximale  $E_x/\sigma_b^2$ .

### 3.1.2 Estimation de retard et tolérance à l'effet Doppler

Nous avons évoqué en début de ce paragraphe l'éventualité selon laquelle le signal à détecter pouvait avoir subi une transformation par rapport au signal de référence, nous appellerons  $(\mathcal{V}x)$  cette version transformée. Une telle situation est couramment rencontrée dans les domaines radar et sonar où, entre l'émission du signal  $x$  et la réception de son écho, s'intercalent généralement des temps de propagation (formalisés par des opérations de translation temporelle) et, si la cible est animée d'une vitesse relative par rapport à l'émetteur, un effet Doppler (formalisé par des opérateurs de dilatation). Au problème de la détection se superpose alors celui, plus délicat, de l'estimation. Si, dans des contextes de retards seuls introduits entre les versions  $x$  et  $(\mathcal{V}x)$  (i.e  $(\mathcal{V}x)(t) = x(t - \tau_0)$ ), les techniques classiques de filtrage adaptés fournissent une estimation non biaisée du retard  $\tau_0$ , elles se prêtent mal à des situations de signaux large bande où retard  $\tau_0$  et taux Doppler  $\eta$  se combinent ( $(\mathcal{V}x)(t) = x(\eta(t - \tau_0))$ ). On sait en effet, que l'estimation faite du retard  $\tau_0$  est dans ce cas biaisée par l'indétermination sur  $\eta$ . De plus, opérateurs de translation et de dilatation ne commutent pas, la nature du biais introduit sur la valeur estimée  $\hat{\tau}_0$  varie avec l'ordre des opérations subies par le dispositif physique.

Une stratégie naturelle face à ce couplage entre taux Doppler et retard nous amène à considérer des structures temps-fréquence de signaux globalement invariantes par dilatation. Pour cela, on sait formaliser l'influence d'un effet Doppler de taux  $\eta$  sur la cartographie temps-fréquence par la transformation du plan

$$(t, \nu) \longrightarrow \left( \eta t, \frac{\nu}{\eta} \right). \quad (3.9)$$

Par suite, si un signal  $x$  est tel qu'en chaque point  $(t, \nu)$  de sa signature temps-fréquence la relation de produit  $t\nu = c = C^{\text{te}}$  soit vérifiée, il en sera de même pour son image *dopplérisée*. Il apparaît donc que les signaux *tolérants à l'effet Doppler* sont ceux caractérisés par une loi de fréquence instantanée (ou de retard de groupe) hyperbolique définie par [2], [4]

$$\nu_x(t) = \frac{c}{t - t_0},$$

où l'origine  $t_0$  peut arbitrairement être nulle (si ce n'est pas le cas, il faut s'assurer que la dilatation se fait relativement à cette origine; au besoin, on translatera préalablement



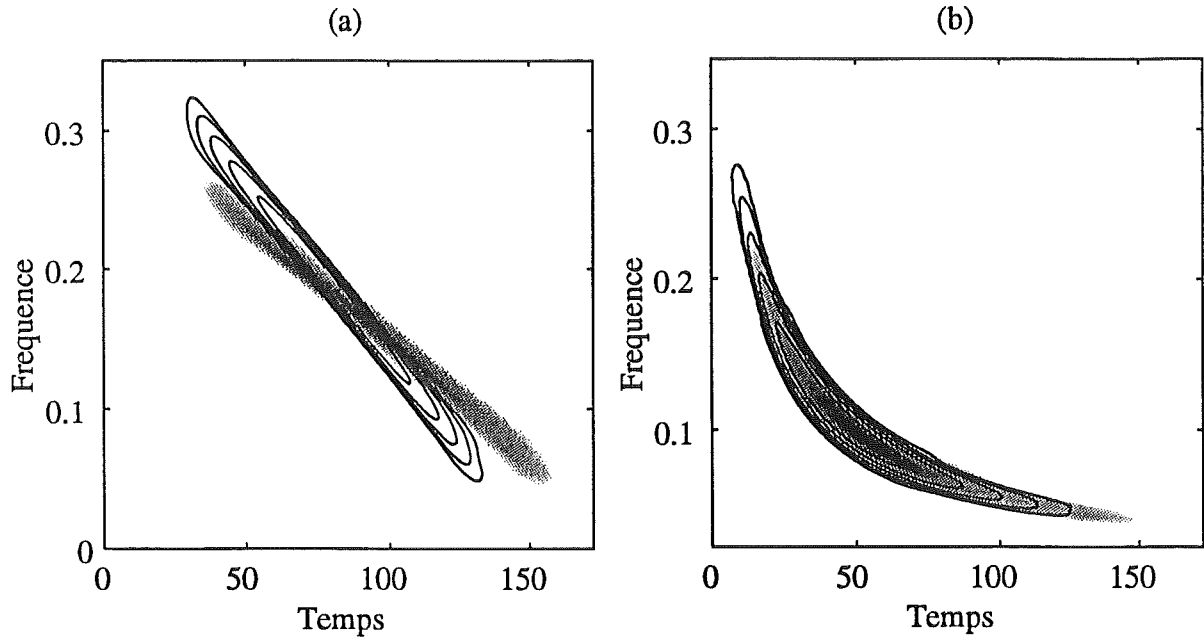


Figure 3.1: (a) En contours de niveaux, représentation de Wigner-Ville d'un chirp linéaire  $x_l(t)$  (signal modulé linéairement en fréquence). En niveaux de gris représentation de Wigner d'un écho simulé de ce chirp  $(\mathcal{S}_{\eta_0} x)(t)$  (taux Doppler  $\eta_0 = 0.833$ , retard  $\tau_0 = 0$ ). Le changement d'orientation de la loi marque la non-tolérance à l'effet Doppler des chirps linéaires. (b) Mêmes simulations avec une loi de modulation hyperbolique en fréquence  $x_h(t)$  et les distributions unitaires de Bertrand associées. La transformation du plan (3.9) formalisant l'effet Doppler laisse la trajectoire hyperbolique globalement invariante. En calculant le moment de premier ordre sur la variable temps de la distribution de Bertrand, on identifie la loi de retard de groupe et par conséquent le chemin d'intégration qui, dans une stratégie simplifiée de détection, est commun au signal et à l'écho.

le signal d'un temps  $t_0$ ). Ce résultat a pour justification géométrique simple que la trajectoire décrite par une hyperbole et soumise à une dilatation, *glisse* sur elle-même en laissant globalement invariant le lieu de ses points (figure 3.1).

Il s'en déduit que le problème de l'estimation non biaisée d'un retard  $\tau_0$  en présence d'effet Doppler  $\eta$  inconnu trouve une solution efficace dans l'association d'un chirp hyperbolique et d'une distribution énergétique (i) unitaire (pour garantir l'optimalité du détecteur au sens d'un critère de maximisation de la fonction de contraste (3.7)), (ii) covariante par translation (indispensable à l'estimation de  $\tau_0$ ) et (iii) localisée sur une loi  $\nu_x(t)$  hyperbolique (laissant ainsi invariant le chemin d'intégration dans le plan temps-fréquence). Ainsi, le respect simultané de ces trois contraintes désigne sans équivoque la *distribution unitaire de Bertrand*<sup>5</sup> (cf. §2.3.4) comme le seul candidat à une estimation de retard, tolérante face à l'effet Doppler [94]. En définitive, la stratégie sim-

<sup>5</sup>D'un point de vue strict, la localisation de la distribution unitaire de Bertrand est relative au retard de groupe, lequel peut s'identifier à la réciproque de la fréquence instantanée si le signal est à grand produit durée-bande (hypothèse facilement vérifiée dans le cas des modulations hyperboliques de fréquence).

plifié d'intégration de chemin dans le plan fournit une structure d'estimateur optimal d'expression suivante

$$\hat{\tau}_0 = \arg \max_{\tau} \int B_y \left( t + \tau, \frac{c}{t - t_0} \right) dt. \quad (3.10)$$

Nous reprenons les signaux décrits aux figures 3.1(a)-(b) auxquels nous superposons un bruit blanc gaussien centré, le rapport signal sur bruit vaut en l'occurrence 0dB. La figure 3.2(a) montre les résultats d'une stratégie d'intégration de la distribution de Wigner-Ville sur un chemin linéaire. La courbe en pointillés correspond à l'estimation  $\hat{\tau}_0$  du retard  $\tau_0 = 0$  en absence de bruit et d'effet Doppler, elle fournit la même information que la fonction d'autocorrélation du signal. En trait plein, la même structure appliquée sur l'écho bruité Dopplérisé traduit clairement la perte de contraste due au changement de pente de modulation (cf. figure 3.1(a)). De plus l'effet Doppler induit sur l'estimation  $\hat{\tau}_0$  un biais significatif. Une procédure analogue menée dans le cas de la distribution de Bertrand et du chirp hyperbolique (équation (3.10)) illustre la tolérance Doppler de cet estimateur ( $\hat{\tau}_0 = 0$ ) (figure 3.2(b)). Hormis une légère perte de contraste, la caractéristique de détection obtenue en contexte bruité et dopplérisé (courbe en trait plein) offre une précision d'estimation du même ordre que le filtrage adapté sur le signal non transformé (courbe pointillés) et ce, compte tenu du maintien de la trajectoire hyperbolique d'intégration.

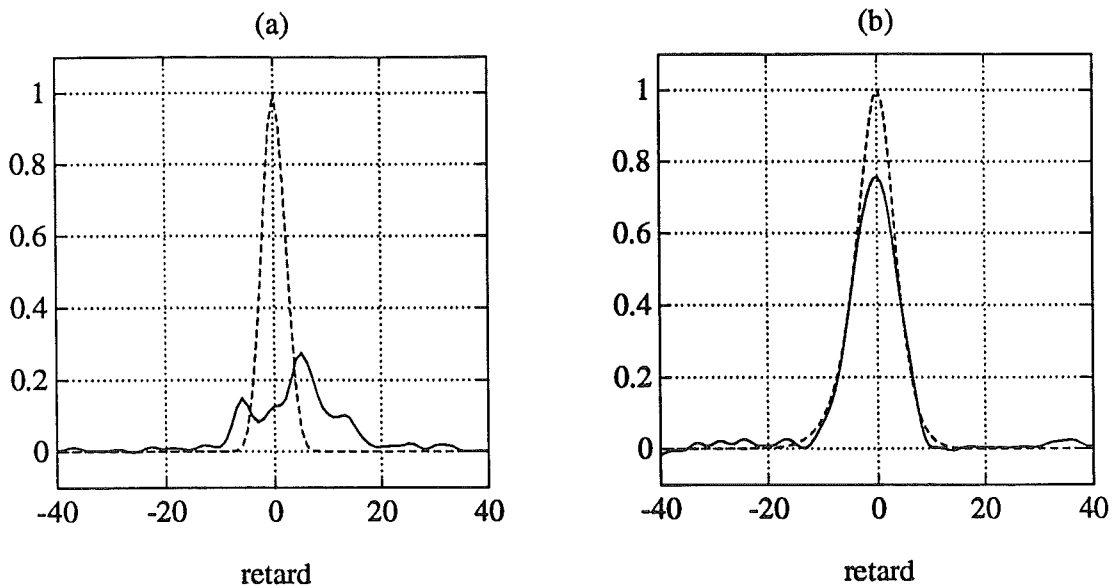


Figure 3.2: (a) Application d'un filtre adapté temps-fréquence sur la distribution de Wigner-Ville d'un chirp linéaire  $x_l(t)$ . Pointillés: caractéristique obtenue par filtrage adapté temps-fréquence de  $x_l(t)$  - trait plein: estimation du retard sur  $(\mathcal{S}_{\eta_0} x_l)(t) \rightarrow \hat{\tau}_0 \neq 0$  - (b) Construction d'un filtre adapté temps-fréquence à partir de la distribution unitaire de Bertrand d'un chirp hyperbolique  $x_h(t)$ . Pointillés: caractéristique issue du filtrage adapté temps-fréquence de  $x_h(t)$  - trait plein: estimation du retard sur  $(\mathcal{S}_{\eta_0} x_h)(t) \rightarrow \hat{\tau}_0 = 0$ .

### 3.1.3 Application à des données réelles

Le nombre important des études faites sur les *sonars biologiques* a permis de valider le modèle de chirp hyperbolique pour les signaux servant à l'*écholocation* de certains mammifères [91]. La chauve-souris est à cet égard un sujet souvent mentionné. Pour illustrer en contexte réel la procédure de filtrage adapté temps-fréquence, nous utilisons des enregistrements de chauve-souris effectués *in situ* au parc de Villars-les-Dombes (France) le 06 mai 1982. Ces données correspondent à des signaux de *Myotis mystacinus* en situation de chasse. Après réduction d'un facteur 32 de la vitesse de défilement de la bande (pour ramener l'enregistrement dans une bande passante audible), le signal est échantillonné à 7.2kHz après un filtrage passe-bande entre [250Hz, 2.5kHz]. Sur le signal non dilaté, cela correspond à une fréquence d'échantillonnage de 230.4kHz pour une bande passante réelle de [8kHz, 80kHz]. Enfin, ce travail s'inscrivait dans le cadre du programme de recherche RCP445 financé par le CNRS et développé au sein de ICPI Lyon.

La figure 3.3(a) montre la représentation temporelle d'un signal émis suivi d'un écho complexe de feuillage (l'ensemble des feuilles d'un arbre se comporte comme un champ aléatoire de sources ponctuelles réfléchissant chacune un écho du signal émis). L'origine des temps est arbitrairement choisie et coïncide avec le milieu temporel du signal émis. Dans ce référentiel, le premier écho arrive approximativement à la date  $t_1 \sim 8\text{ms}$ .

La sortie du filtre adapté (3.2) appliquée au signal émis s'identifie au carré de l'enveloppe de sa fonction d'autocorrélation (figure 3.3(b)). Le maximum atteint correspond alors au carré de l'énergie du signal (calculée sur une durée  $T = 7\text{ms}$ ). Les échos multiples sont ensuite repérés par une suite de *rebonds* dont les amplitudes vont en s'atténuant conformément à l'affaiblissement énergétique des échos (figure 3.3(c)).

Une structure de filtre adapté temps-fréquence (au sens de la discussion du paragraphe 3.1.2) nécessite l'identification préalable du gabarit temps-fréquence du signal de référence. Dans ce cas précis, on fait l'hypothèse que retard de groupe et fréquence instantanée sont fonctions réciproques l'une de l'autre (cette hypothèse étant licite dans le cadre des signaux à grand produit durée-bande et pour lesquels la loi de fréquence instantanée est une fonction strictement monotone). Cette propriété permet alors de substituer à l'identification exacte du retard de groupe, une estimation de la loi de fréquence instantanée basée un algorithme de détection de lignes de crête.

La loi de fréquence instantanée isolée sur la représentation de Bertrand du signal émis (figure 3.4(a)) possède alors une structure pseudo-hyperbolique<sup>6</sup> qui se reproduit partiellement dans la signature temps-fréquence de l'écho (figure 3.4(b)). Les figures 3.4(c)-(d) représentent les courbes de détection obtenues par la stratégie d'intégration de chemin dans le plan. Les réponses obtenues sont dans leur forme, parfaitement cohérentes avec celles d'une détection *classique*. Bien sûr, toute l'énergie du signal émis n'étant pas strictement concentrée sur le gabarit hyperbolique modélisant la fréquence instantanée,

---

<sup>6</sup>La distribution de Bertrand ne se localise pas *stricto sensu* sur la structure propre du signal. Les termes interférentiels apparaissant dans la concavité de l'auto-composante attestent d'un modèle sensiblement différent de l'hypothèse hyperbolique. De plus, la dynamique d'affichage (logarithmique sur 16dB) ne permet pas de voir la composante harmonique haute fréquence de la modulation. Par interaction, harmonique et fondamental créent également une zone d'interférences externes responsables de la non-localisation stricte de la représentation.

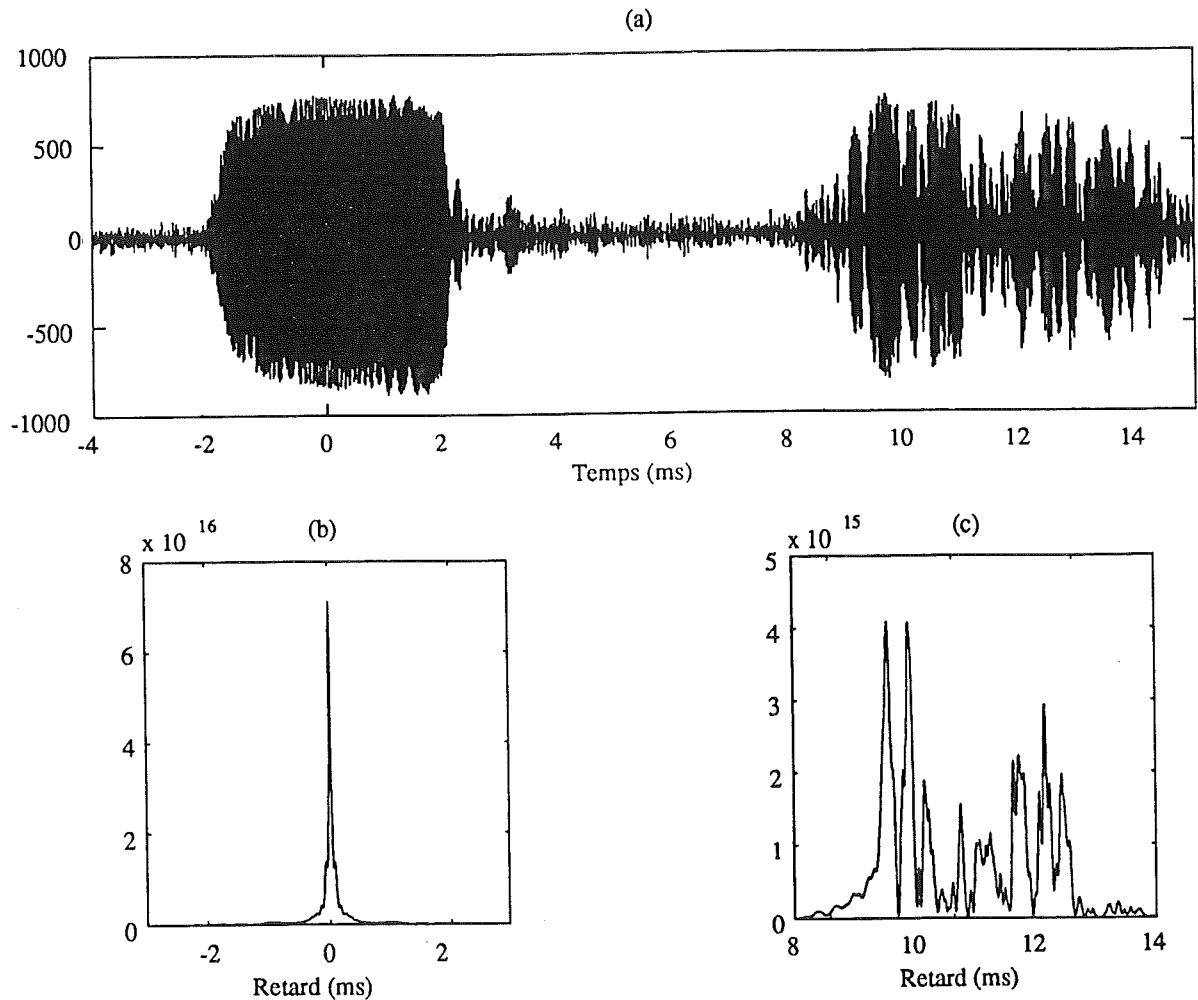


Figure 3.3: (a) Enregistrement in situ d'un signal de veille (émis par une chauve-souris) suivi d'échos - (b) Carré de l'enveloppe de la fonction d'autocorrélation du signal émis - (c) Carré de l'enveloppe de la sortie du filtre adapté classique appliqué à l'écho.

on constate une diminution d'amplitude entre le maximum de la sortie du filtre adapté temps-fréquence et celui du filtre adapté temporel (i.e. énergie du signal émis). Par contre, si l'on définit le rapport entre les maxima locaux de détection de la référence et de l'écho

$$\varepsilon = \frac{\Lambda(y(t + \hat{\tau}_0))}{\Lambda(y(t + \hat{\tau}_1))},$$

on observe un accroissement de celui-ci avec le traitement temps-fréquence. En effet, en n'intégrant les signaux que sur leur composante tolérante à l'effet Doppler (i.e. celle qui décrit une trajectoire hyperbolique), le rapport  $\varepsilon$  qui s'en déduit ne chiffre que la perte d'énergie relative à la propagation. Avec un filtrage adapté *classique*, le rapport  $\varepsilon$  cumule les effets de la propagation et de la déformation due à l'effet Doppler (autrement dit de la perte de cohérence entre le signal de référence et le signal reçu).

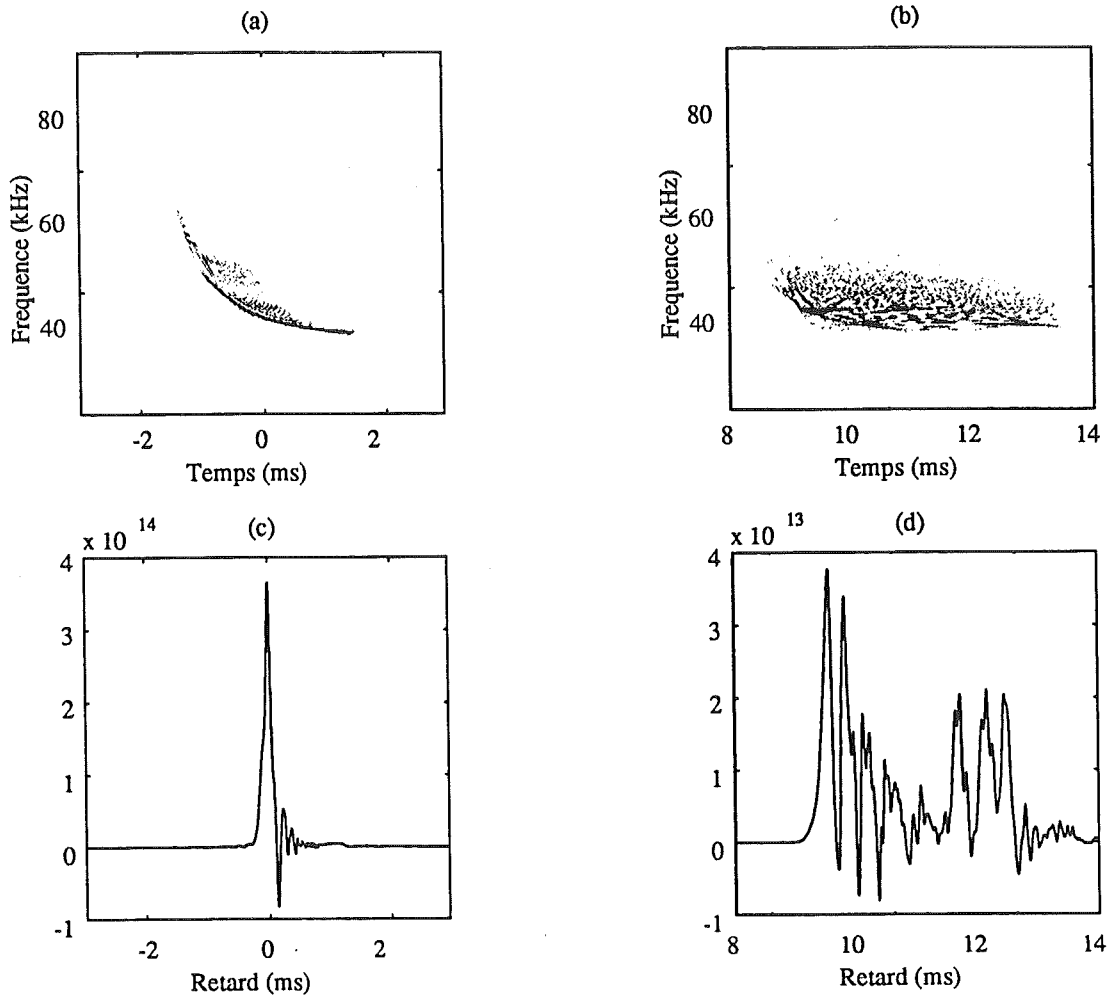


Figure 3.4: (a) *Distribution unitaire de Bertrand évaluée sur le signal de veille émis de la figure 3.3(a)* - (b) *Distribution unitaire de Bertrand de l'écho du signal 3.3(a)* - (c) *Approximation de la fonction d'autocorrélation du signal émis par intégration temps-fréquence (équation 3.10).* (d) *Comparaison signal émis-écho par intégration de chemin de la distribution 3.4(b) sur le gabarit temps-fréquence du signal de référence.*

En conclusion, les résultats de ces méthodes ne supplantent pas les procédures classiques par leur efficacité. Mais d'une part, ils illustrent de façon intéressante la tolérance à l'effet Doppler des modèles hyperboliques et surtout, ils offrent un support simple à l'interprétation en servant de guide pour des modèles simplifiés de récepteurs (à bancs de filtres) davantage compatibles avec les données physiologiques que le modèle temporel du filtre adapté [91], [37].

## 3.2 Temps-Fréquence et Temps-Echelle: un Cadre pour l'Analyse Spectrale

Les caractérisations des divers aspects non stationnaires d'un signal sont autant de problèmes face auxquels les méthodes d'analyse conjointe n'ont cessé de s'aguerrir. Ce faisant, les progrès accomplis dans ce domaine peuvent profiter au traitement de certains signaux stationnaires en proposant des alternatives nouvelles à l'analyse de Fourier.

### 3.2.1 Analyse spectrale classique et pavage du plan temps-fréquence

Un des principes de l'analyse spectrale classique non paramétrique des signaux aléatoires repose sur le moyennage de *périodogrammes* [76], [89]. Dans la mesure où le processus à analyser vérifie les hypothèses usuelles de stationnarité et d'ergodicité, la segmentation de celui-ci en  $N$  tranches idéalement indépendantes fournit artificiellement plusieurs réalisations  $x_k(t)$  d'une même variable aléatoire  $x$ . Par suite, la moyenne sur les  $N$  modules carrés des transformations de Fourier prises individuellement sur chacun de ces segments estime, par passage à la limite, la densité spectrale de puissance  $\Gamma_x(\nu)$  définie au sens de Wiener-Kintchine selon

$$\begin{aligned}\Gamma_x(\nu) &= \int r_x(\tau) e^{-i2\pi\nu\tau} d\tau \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \mathbf{E} \left\{ \frac{1}{T} \left| \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-i2\pi\nu t} dt \right|^2 \right\} \\ \Rightarrow \hat{\Gamma}_x(\nu) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left| \int x_k(t) e^{-i2\pi\nu t} dt \right|^2.\end{aligned}$$

Rapportée au cadre d'étude qui nous intéresse (i.e. celui des représentations conjointes des signaux), l'analyse par périodogrammes moyennés établit un lien implicite avec l'idée de *pavage du plan temps-fréquence*. L'effet de transformations de Fourier sur l'observation préalablement segmentée est analogue à une découpe du plan conjoint temps-fréquence en cellules élémentaires d'analyse dont les dimensions sont doublement imposées par le choix de la fenêtre à court termes, (i) en temps, par la largeur de celle-ci, (ii) en fréquence, par la bande équivalente de son spectre. Le pavage virtuel ainsi décrit ressemble par son uniformité, au quadrillage temps-fréquence caractéristique de l'analyse de Gabor (filtres à largeur de bande  $B$  constante), et finalement l'opération de moyenne prise sur les modules carrés des transformations de Fourier de chacun des segments recouvre la même réalité qu'une *distribution marginale de spectrogramme*<sup>7</sup>. A travers cette autre vision de *l'analyse spectrale classique*, il est particulièrement facile de formaliser l'influence de la

<sup>7</sup>Le signal  $x$  étant dans ce contexte d'estimation spectrale, un processus stochastique de puissance moyenne finie ( $x \in L_p^2(\mathbb{R})$ ), il convient d'adapter la définition de distribution marginale à la notion de puissance moyenne. Concrètement, on considère dans la limite des tailles d'échantillons ( $T$ ) infinies, l'énergie du signal sur la durée d'observation ( $T$ ) divisée par ( $T$ ).

largeur de la fenêtre à court terme  $\phi$  sur le biais de l'estimateur. Formellement, le calcul direct de la quantité (où  $T_x(t, \nu)$  est la transformée de Fourier à court terme définie en (1.8))

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} \left\{ \hat{\Gamma}_x(\nu) \right\} &= \mathbf{E} \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{(T)} |T_x(t, \nu)|^2 dt \right\} \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{(T)} \iint \mathbf{E} \{ W_x(u, \theta) \} W_\phi(u - t, \theta - \nu) dud\theta dt \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{(T)} \iint \Gamma_x(\theta) W_\phi(u - t, \theta - \nu) dud\theta dt \\
&= \int \Gamma_x(\theta) |\Phi(\theta - \nu)|^2 d\theta,
\end{aligned}$$

fait apparaître l'estimation de la densité spectrale de puissance comme étant en moyenne, une version lissée de la valeur vraie recherchée. Cette dernière équation résume le dilemme auquel se trouve confrontée l'analyse spectrale non paramétrique, à savoir qu'on ne peut pas arbitrairement réduire la taille de la fenêtre à court terme - ce qui, à durée d'observation fixe, accroît le nombre de tranches moyennées<sup>8</sup> et profite à la variance d'estimation - sans en contre partie, encourir le risque d'un biais sur  $\hat{\Gamma}_x(\nu)$ .

Il existe pourtant des situations pour lesquelles les cellules d'analyse, par l'uniformité de leur géométrie et de leur taille, offrent une structure *ad hoc* d'estimation spectrale. Typiquement, si l'on considère les signaux caractérisés par des modèles de spectres *linéaires* en fonction de la fréquence ( $\Gamma_x(\nu) = \rho|\nu| + C$ ), quelque soit la largeur de bande des fenêtres à court terme utilisées, le biais introduit reste constant à toutes les fréquences et  $\mathbf{E} \left\{ \hat{\Gamma}_x(\nu) \right\}$  vaut, dans le cas idéalisé d'un filtre de gabarit rectangulaire

$$\left. \begin{array}{l} |\Phi(\nu)| = 1, \quad \text{si } |\nu| \leq \frac{B}{2} \\ |\Phi(\nu)| = 0, \quad \text{ailleurs} \end{array} \right\} \implies \mathbf{E} \left\{ \hat{\Gamma}_x(\nu) \right\} = B\rho\nu + BC = B \Gamma_x(\nu), \quad \forall \nu.$$

Par suite, si l'on s'intéresse à l'estimation de la pente  $\rho$  à partir de  $\hat{\Gamma}_x(\nu)$ , celle-ci est en moyenne non biaisée (cf. figure 3.5(a)).

Etant donnée l'interprétation faite de l'analyse spectrale classique en termes de distributions marginales de spectrogrammes, on est naturellement tenté d'inverser la perspective en s'interrogeant sur le rôle d'autres types de représentations temps-fréquence ou temps-échelle, relativement à l'estimation spectrale. En particulier, les distributions relaxant la contrainte sur l'uniformité des cellules dans le plan doivent s'identifier par leur marginale à des versions de périodogrammes modifiés s'ajustant à une gamme plus étendue de lois spectrales.

<sup>8</sup>Il est possible de repousser les limites du compromis biais-variance en s'autorisant un taux de recouvrement entre segments consécutifs. Corrélativement, cette alternative s'oppose alors à l'hypothèse d'indépendance des réalisations et pénalise la rapidité de décroissance de la variance en fonction du nombre de tranches moyennées [76], [89].

### 3.2.2 Transformée en ondelettes et spectres en $1/f$

#### Le non-biais

La discussion menée au paragraphe 1.2.2 nous ayant rappelé que transformée de Fourier à court terme et transformée en ondelettes se distinguaient essentiellement par des arguments de filtrage, quel est alors l'impact de cette différence sur l'estimateur spectral construit sur la distribution marginale d'un scalogramme? Et comment la spécificité d'un filtrage à surtension constante se diffuse-t-elle à travers les propriétés de celui-ci?

Le pavage à *surtension* constante associé aux décompositions en ondelettes (figure 1.6) garantit, par la géométrie variable de ses segments, une bonne résolution fréquentielle aux basses fréquences (respectivement une mauvaise résolution en temps), et des résolutions en proportions contraires vers les hautes fréquences. Ce faisant, le nombre de segments disponibles à haute fréquence est important, ce qui assure *a priori* une faible variance sur la distribution marginale, alors qu'aux basses fréquences, la tendance est renversée car la durée accrue des cellules n'autorise pas de prendre en compte, pour une même taille d'observation, la même densité d'échantillons. De ce fait,  $\hat{\Gamma}_x(\nu)$  basée sur une statistique appauvrie est pénalisée par une plus forte variance d'estimation.

Par le couplage du compromis biais-variance avec la fréquence, les estimateurs construits sur les distributions marginales de scalogrammes sont des outils d'analyse adaptés à des évolutions non constantes de densités spectrales de puissance (cf. figure 3.5(b)). Plus précisément, nous allons montrer que les densités spectrales du type *lois de puissance* ("bruits en  $1/f$ "), sont des situations pour lesquelles les ondelettes offrent un cadre d'analyse adapté.

Les bruits en  $1/f$  sont dans la majorité des cas, des processus gaussiens (cette hypothèse est implicite dans tout ce qui suit) et le modèle mathématique adopté pour décrire leur comportement spectral, particulièrement justifié en basse fréquence, est de la forme générale<sup>9</sup>

$$\Gamma_x(\nu) = \frac{\sigma^2}{|\nu|^\alpha}. \quad (3.11)$$

Dans ce modèle, l'exposant  $\alpha$  est un paramètre important, porteur de l'information relative à l'état du système physique. Souvent, le problème de l'estimation spectrale se réduit alors à l'estimation de ce seul paramètre, ce que l'on accomplit par le biais d'une régression linéaire du spectre *versus* la fréquence dans un diagramme *log-log*, conformément à l'expression suivante

$$\ln \Gamma_x(\nu) = \ln \sigma^2 - \alpha \ln |\nu|. \quad (3.12)$$

Reprenons dans un premier temps, le cadre des estimateurs construits sur le formalisme de la classe de Cohen (équation (1.33))

$$\hat{\Gamma}_x(\nu) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{(T)} C_x(t, \nu; \Pi) dt, \quad (3.13)$$

---

<sup>9</sup>En général, la notion de spectre de puissance n'a de sens que s'il se réfère à un signal stationnaire. Pour les processus qui nous concernent ce n'est pas toujours le cas, on peut alors contourner la difficulté en adoptant la notion de *spectre de puissance moyen* au sens proposé dans [41], [122]



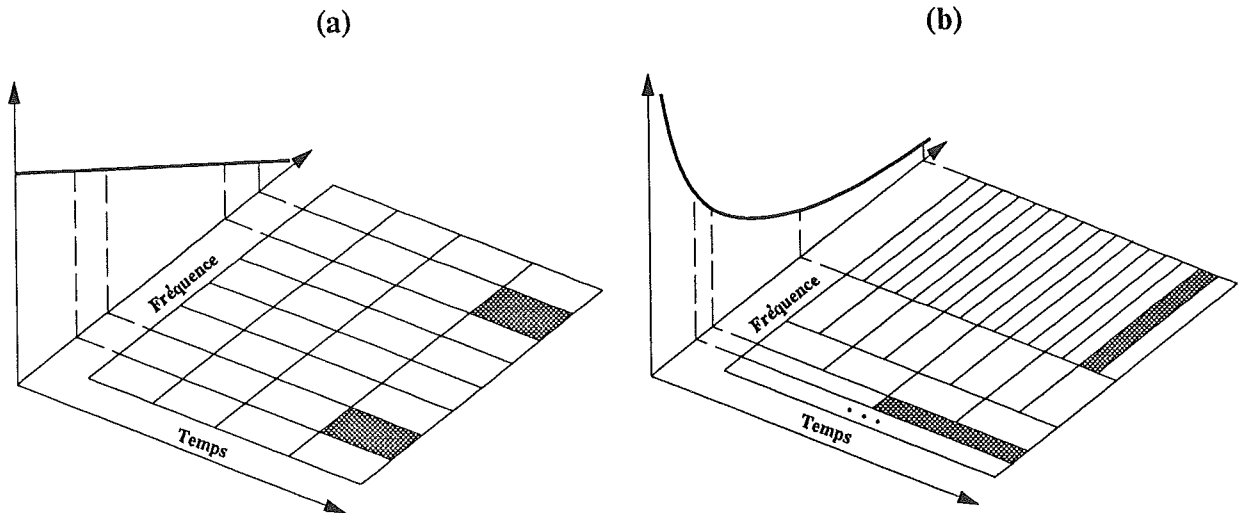


Figure 3.5: (a) Pavage correspondant au spectrogramme et distribution marginale associée. Les cellules de largeur identique quelle que soit la fréquence analysée font de cet estimateur spectral un outil adapté à des évolutions linéaires de spectres. (b) Pavage à surtension constante et distribution marginale associée. La distribution non uniforme du compromis biais-variance sur les fréquences fournit un cadre ad hoc d'estimation de spectres à évolution en loi de puissance.

pour lequel il est facile de vérifier la nature du biais introduit sur l'estimation de (3.11). Un calcul direct montre alors que [1]

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E} \{ \hat{\Gamma}_x(\nu) \} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{(T)} \iint \mathbf{E} \{ W_x(u, \theta) \} \Pi(u - t, \theta - \nu) \, dud\theta dt \\
 &= \int \sigma^2 |\theta|^{-\alpha} \pi(0, \theta - \nu) \, d\theta \\
 &= \sigma^2 |\nu|^{-\alpha} \int \left| 1 + \frac{\xi}{\nu} \right|^{-\alpha} \pi(0, \xi) \, d\xi, \tag{3.14}
 \end{aligned}$$

ce qui signifie encore que la valeur estimée du spectre de puissance est biaisée de façon non uniforme selon l'axe des fréquences. Ce biais multiplicatif, en tant que fonction de la fréquence analysée modifie la dynamique linéaire du schéma (3.12) lorsque  $\hat{\Gamma}_x(\nu)$  se substitue à  $\Gamma_x(\nu)$ , et se répercute inévitablement sur l'évaluation de la pente  $\alpha$ .

Dans la mesure où périodogramme moyenné et distribution marginale du spectrogramme, pour lequel  $\pi(0, \xi) = |\Phi(\xi)|^2$ , sont deux formes synonymes, l'emploi de méthodes classiques d'analyse spectrale sur les bruits en  $1/f$  biaise de la même façon l'estimation de l'exposant  $\alpha$ .

Si, à présent, on envisage l'estimateur homologue de (3.13) exprimé à l'intérieur de la

Table 3.1: Contraintes sur le noyau  $\pi(\zeta, \xi)$  de certaines distributions temps-échelle pour assurer la convergence de l'intégrale (3.16).

Distribution	$\Pi(t, \xi)$	$\pi(0, \xi)$	contrainte sur $\mathcal{R}$
DPWVLA	$g(t) H(\xi)$	$G(0) H(\xi)$	$\mathcal{R}_h \geq \alpha - 1$
scalogramme	$W_\psi(t, \xi)$	$ \Psi(\xi) ^2$	$\mathcal{R}_\psi \geq \frac{\alpha - 1}{2}$

classe affine, celui-ci s'écrit

$$\hat{\Gamma}_x \left( \nu = \frac{\nu_0}{a} \right) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{(T)} \Omega_x \left( t, \nu = \frac{\nu_0}{a}; \Pi \right) dt, \quad (3.15)$$

où, comme au paragraphe 1.2.3, la fréquence analysée  $\nu$  est rapportée à l'inverse de l'échelle  $a$  par l'entremise d'une fréquence arbitraire non nulle  $\nu_0$ .

En faisant usage de la version temps-fréquence du formalisme donné en (1.52), on procède à un calcul analogue à celui de l'équation (3.14) et il vient alors [1]

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left\{ \hat{\Gamma}_x(\nu) \right\} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{(T)} \iint \mathbf{E} \{ W_x(u, \theta) \} \Pi \left( \frac{u-t}{a}, a\theta \right) dud\theta dt \\ &= \int \sigma^2 |\theta|^{-\alpha} \pi \left( 0, \frac{\nu_0}{\nu} \theta \right) \frac{\nu_0}{\nu} d\theta \\ &= \sigma^2 |\nu|^{-\alpha} \nu_0^\alpha \int |\xi|^{-\alpha} \pi(0, \xi) d\xi. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Bien que le résultat soit ici encore une image biaisée du spectre (3.11), le biais multiplicatif introduit est constant à toutes les fréquences scrutées. Cela étant, la version *log-log* de  $\hat{\Gamma}_x(\nu)$  diffère de l'expression exacte (3.12) par l'addition d'un terme constant qui n'affecte pas l'estimation de la pente  $\alpha$ .

*Remarque.* Il est toutefois utile de préciser les limites d'existence de l'équation (3.16), dans la mesure où l'espérance mathématique décrite n'a de sens *a priori*, que si le terme intégral est lui-même défini. Dans cette direction, nous montrons en annexe 3 quel est, dans le cas du scalogramme, et d'une manière plus générale sur les distributions énergétiques affines à *noyaux séparables*, le tribut à payer pour assurer la convergence de l'intégrale. Nous retiendrons alors de cette étude la condition imposée sur l'ondelette, et dans une plus large mesure sur le noyau de paramétrisation  $\pi(\zeta, \xi) = G(\zeta)H(\xi)$ , corrélant le nombre  $\mathcal{R}$  de moments nuls de celle-ci à l'exposant  $\alpha$  recherché. Le tableau 3.1 résume les inégalités obtenues.

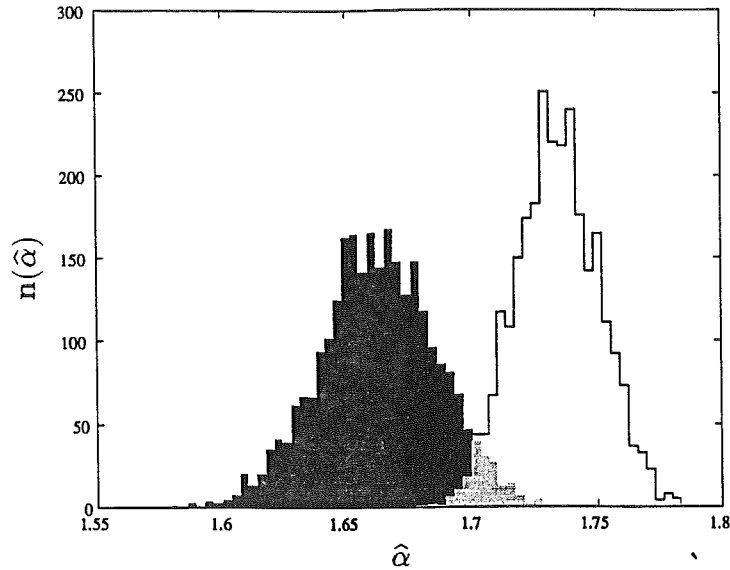


Figure 3.6: Histogrammes des estimations de l'exposant théorique  $\alpha = 5/3$  sur une population de 2729 réalisations indépendantes de bruits en  $1/f$  (chaque échantillon comporte 32768 points,  $\nu_e = 1\text{kHz}$ ). Deux stratégies sont employées. Histogramme en clair: régressions linéaires dans un diagramme log-log de l'estimateur (3.13) de la classe de Cohen (spectrogramme  $\Delta t_f(C) = 42\text{ms}$ ) - Histogramme en foncé: régressions linéaires dans un diagramme log-log de l'estimateur (3.15) de la classe affine (scalogramme  $\Delta t_{f_{\min}}(\Omega) = 42\text{ms}$ ). Dans les deux cas, les ajustements linéaires se limitent au même intervalle de fréquence ( $0.02\text{kHz} \leq \nu \leq 0.5\text{kHz}$ ) fixé conjointement par la limite de bande spectrale analysée et la nécessité d'un nombre raisonnable de coefficients décorrélés aux grandes échelles.

On vérifie expérimentalement la différence significative entre biais introduit sur  $\alpha$  par des méthodes d'analyse spectrale classique et *non-biais* théorique accordé aux schémas d'analyse temps-échelle. Pour ce faire, on considère une batterie de bruits en  $1/f$  générés par synthèse spectrale (i.e. bruit blanc gaussien centré dont on pondère la transformée de Fourier par une loi théorique d'expression  $|\nu|^{-\alpha/2}$ ). Pour chacune de ces réalisations indépendantes, on calcule un spectrogramme (sur 128 points utiles en fréquence) et une analyse temps-échelle<sup>10</sup> dont on estime ensuite les distributions marginales correspondantes. Les régressions linéaires faites sur celles-ci dans un diagramme *log-log* fournissent enfin deux séries d'exposants estimés via chacune des stratégies. La figure 3.6 illustre sous forme d'histogrammes les résultats de ces simulations dans le cas où  $\alpha = 5/3$ .

L'erreur relative moyenne commise sur l'estimation de  $\alpha = 5/3$  par périodogrammes moyennés s'élève à 4% ( $\langle \hat{\alpha} \rangle_C = 1.73$ ) contre 0.4% dans le cas des méthodes d'analyse

<sup>10</sup>Le type d'analyse effectué correspond à une décomposition discrète en ondelettes orthogonales (ondelettes de Daubechies de régularité 6) [34], [84]. On passe ensuite à la distribution énergétique associée en élevant au carré les modules des coefficients de détail. Moralement, cette démarche s'apparente à l'échantillonnage d'un scalogramme sur une grille dyadique, où chaque point retenu coïncide avec une intersection du maillage à surtension constante.

temps-échelle ( $\langle \hat{\alpha} \rangle_{\Omega} = 1.66$ ).

*Remarque.* Dans cette dernière estimation, l'écart avec la valeur théorique s'explique en partie par la fiabilité des méthodes de générations de bruits en  $1/f$ . En effet, le modèle de l'équation (3.11) décrit un spectre théorique non borné et de largeur de bande infinie, hypothèses évidemment incompatibles avec les outils numériques dont nous disposons. D'une part, le théorème d'échantillonnage de Shannon s'oppose à une discrétisation temporelle du signal sans création d'un repli dans le domaine spectral, d'autre part, la discrétisation des amplitudes spectrales a pour conséquence de tronquer artificiellement la dynamique de la loi de puissance (essentiellement aux basses fréquences). Toutes ces approximations font qu'en amont de l'estimateur la valeur effective de l'exposant  $\alpha$  est déjà biaisée par la procédure de génération.

## La variance

Le *non-biais* qui accompagne l'estimateur dérivé de la classe affine est un atout important dans la caractérisation des bruits en  $1/f$ , la variance sur l'estimation en est un autre. Nous nous proposons dans ce paragraphe de compléter l'étude sur la statistique de l'estimateur proposé et en particulier d'écrire formellement le moment de deuxième ordre sur la quantité  $\hat{\alpha}$ .

L'estimation de la variance empirique d'une variable aléatoire  $x$  repose sur la moyenne temporelle du carré des échantillons prélevés sur une épreuve particulière. Dans ce cas, on sait que les seules contributions significatives sur cette moyenne temporelle proviennent des échantillons *décorrélés* prélevés sur l'observation  $x(t)$ . Ceci est vrai en particulier pour l'estimation à une échelle  $a$  fixée, de la distribution marginale d'un scalogramme par la quantité (3.15), de sorte que cette opération peut se satisfaire d'une version préalablement échantillonnée du scalogramme. En retenant alors la solution d'une décomposition en ondelettes orthogonales [34], le choix d'un degré de régularité suffisamment élevé garantit une décorrélation quasi-totale des coefficients de détail à l'échelle  $a = 2^j$ ,  $j \in \mathbb{Z}$  [44], [45], [110]. Par suite, si l'on convient de noter  $d_j(i)$  le détail à l'échelle  $2^j$  et à la position  $i$  sur l'échantillon, l'estimation d'une distribution marginale associée à la représentation énergétique équivalente repose sur le calcul de la variance de ces détails.

Dans le cadre des bruits en  $1/f$ , une décomposition en ondelettes orthogonales fournit une série de coefficients dont on sait exprimer la variance à chaque échelle en fonction de la densité spectrale théorique (3.11) selon la relation<sup>11</sup> [45]

$$\sigma_j^2 \equiv \mathbf{E}\{d_j^2(i)\} = \frac{\sigma^2}{2} V_{\psi}(\alpha) (2^j)^{\alpha} \propto \Gamma_x(2^{-j}).$$

où  $V_{\psi}(\alpha) = - \int \psi(u) |u|^{\alpha-1} du$  est, par rapport à l'échelle  $2^j$  une constante ne dépendant que du choix de l'ondelette  $\psi$  et de l'exposant  $\alpha$ . En pratique, on calcule la variance

<sup>11</sup>La fréquence de référence  $\nu_0$  est arbitrairement posée égale à 1.

empirique sur les coefficients en utilisant

$$\hat{\sigma}_j^2 = \frac{1}{N_j} \sum_{i=1}^{N_j} d_j^2(i),$$

où  $N_j$  est le nombre de coefficients décorrélés disponibles à l'échelle  $2^j$ . Chacun de ces coefficients appartenant virtuellement à un nœud du pavage à surtension constante, leur nombre en fonction de l'échelle  $a$  décroît en proportion inverse de la largeur  $\Delta t_{f=\frac{f_0}{a}}(\Omega)$  des cellules (équation (2.3)), et s'écrit

$$N_j = 2^{-j} N_0,$$

si  $N_0$  est le nombre initial d'échantillons que comporte l'observation.

A présent, si l'on considère le rapport des deux variables

$$\delta_j = \frac{\hat{\sigma}_j^2}{\sigma_j^2} \propto \frac{\hat{\Gamma}_x(2^{-j})}{\Gamma_x(2^{-j})},$$

celui-ci chiffre la dispersion de la distribution marginale autour de la valeur théorique du spectre, si bien qu'une régression linéaire entre  $\log \delta_j$  et  $j$  (suivant le schéma (3.12)) fournit une estimation de l'exposant centré  $\tilde{\alpha}$  (avec  $\tilde{\alpha} = \hat{\alpha} - \alpha$ ). A partir de distributions temps-échelle, l'estimation de  $\alpha$  étant non biaisée, il vient que

$$\mathbf{E}\{\hat{\alpha}\} = \alpha \implies \mathbf{E}\{\tilde{\alpha}\} = 0.$$

On est donc tout naturellement conduit à étudier la variable  $\delta_j$  et plus précisément la fonction logarithme de cette quantité<sup>12</sup>. Notons au passage que  $\ln \delta_j$  recouvre la même réalité que ce qu'il est convenu d'appeler en analyse spectrale classique le *log-périodogramme normalisé*.

En développant l'expression de  $\delta_j$  selon

$$\delta_j = \sum_{i=1}^{N_j} \left( \frac{d_j(i)}{N_j^{1/2} \sigma_j} \right)^2,$$

on fait apparaître une nouvelle variable aléatoire  $\tilde{d}_j(i) \equiv d_j(i)/(N_j^{1/2} \sigma_j)$  dont on sait qu'elle est (i) de probabilité gaussienne (la décomposition en ondelettes est une opération linéaire sur l'observation  $x$ ), (ii) centrée (la condition d'admissibilité sur l'ondelette imposant  $|\Psi(0)| = 0$ ). Enfin, par un calcul direct on montre que la variance sur  $\tilde{d}_j(i)$  vaut simplement

$$S_i^2 \equiv \mathbf{E}\{\tilde{d}_j^2(i)\} = \frac{1}{N_j}.$$

Par suite,  $\delta_j$  étant la somme de  $N_j$  variables aléatoires gaussiennes d'écart-type  $S_i$ , sa propre densité de probabilité est alors régie par une loi du  $\chi^2$  à  $N_j$  degré de liberté

<sup>12</sup>On préférera travailler sur le logarithme à base 2 qui est ici la forme réciproque de la fonction d'échelle  $a = 2^j$ .

suivant l'expression<sup>13</sup>

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_\Delta(\delta_j) &= \frac{1}{(s_i\sqrt{2})^{N_j}\Gamma\left(\frac{N_j}{2}\right)} \delta_j^{\left(\frac{N_j}{2}-1\right)} e^{-\frac{\delta_j}{2s_i^2}} U(\delta_j) \\ &= \frac{(N_j/2)^{\frac{N_j}{2}}}{\Gamma\left(\frac{N_j}{2}\right)} \delta_j^{\left(\frac{N_j}{2}-1\right)} e^{-\frac{N_j}{2}\delta_j} U(\delta_j).\end{aligned}\quad (3.17)$$

La statistique relative à la transformation  $\log_2 \delta_j$  se déduit alors de façon immédiate de  $\mathcal{P}_\Delta$  puisque l'on a

$$\mathcal{P}_\Delta(\eta_j = \log_2 \delta_j) = \frac{\left(\frac{N_j}{2}\right)^{\frac{N_j}{2}} \ln 2}{\Gamma\left(\frac{N_j}{2}\right)} e^{\frac{N_j}{2}(\eta_j \ln 2 - e^{\eta_j \ln 2})}.$$

Asymptotiquement, la valeur estimée  $\hat{\sigma}_j^2$  tend vers la variance vraie  $\sigma_j^2$  dans la limite de  $N$  (le nombre d'échantillons décorrélés) tendant vers l'infini, et par conséquent

$$\lim_{N_j \rightarrow \infty} \left( \delta_j = \frac{\hat{\sigma}_j^2}{\sigma_j^2} \right) = 1 \iff \lim_{N_j \rightarrow \infty} (\eta_j = \log_2 \delta_j) = 0.$$

En utilisant alors le développement limité à l'ordre 2 de la fonction  $e^{\log 2 \eta_j}$  au voisinage de zéro, ainsi que la formule de Stirling selon laquelle

$$\frac{N^N e^{-N}}{\Gamma(N+1)} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi N}}, \quad N \rightarrow \infty$$

on peut approximer la densité de probabilité de la variable aléatoire  $\eta_j$  par une loi normale du type

$$\mathcal{P}_\Delta(\eta_j) \sim \mathcal{N}\left(\bar{m} = 0, S_j = \frac{2^{j+1}}{N_0 \ln^2 2}\right), \quad N_j = 2^{-j} N_0 \rightarrow \infty. \quad (3.18)$$

Le problème posé est alors celui d'une régression linéaire *versus* l'indice d'échelle  $j$  d'une série de points normalement distribués mais dont la variance théorique de chacun varie également en fonction de l'échelle (figure 3.7).

Le schéma classique d'un ajustement linéaire de points par la stratégie des moindres carrés nous fournit l'expression de la pente  $\tilde{\alpha}$  en fonction des couples d'abscisses  $x_i$  et d'ordonnées  $y_i$ , on a ainsi

$$\tilde{\alpha} = \frac{\text{cov}(x, y)}{\text{var}(x)}.$$

Transposée à notre contexte d'estimation de l'exposant  $\alpha$ , l'abscisse  $x_i$  vaut simplement  $\log_2(2^j) = j$  et les ordonnées correspondent à  $\eta_j$ . L'estimée  $\tilde{\alpha}$  s'écrit encore

$$\tilde{\alpha} = \frac{\frac{1}{J} \sum_{j=1}^J \eta_j (j - \langle j \rangle)}{\frac{1}{J} \sum_{j=1}^J j^2 - \langle j \rangle^2}, \quad (3.19)$$

<sup>13</sup> $\Gamma$  est dans le cas présent, la fonction eulérienne de seconde espèce et  $U$  la pseudo-fonction de Heaviside.

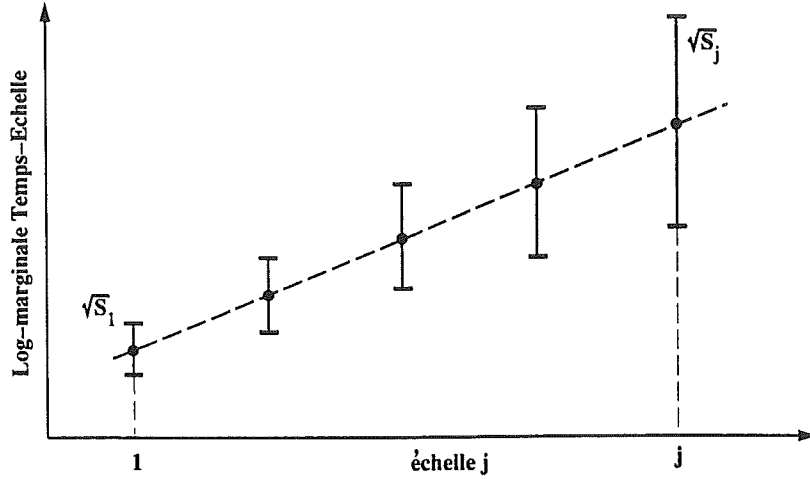


Figure 3.7: Régression linéaire sur une série de points normalement distribués et dont la variance est elle-même une fonction de l'abscisse  $j$ .

où  $J$  est le nombre d'échelles mises en jeu dans la régression linéaire et la notation  $\langle . \rangle$  symbolise une moyenne empirique. La valeur  $\tilde{\alpha}$  apparaît dans cette expression comme une combinaison linéaire de la seule variable aléatoire gaussienne  $\eta_j$ . Par suite, l'exposant estimé  $\hat{\alpha}$  est également de statistique gaussienne dont on connaît déjà la valeur moyenne puisque  $\langle \tilde{\alpha} \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle \hat{\alpha} \rangle = \alpha$ . Le calcul des propriétés de second ordre de cette variables est détaillé en annexe 4 et nous livre le résultat important suivant [1]

$$\sigma_{\hat{\alpha}}^2 = \sigma_{\tilde{\alpha}}^2 = \frac{144}{N_0 \ln^2 2} \frac{2^J (J^2 - 6J + 17) - (J^2 + 6J + 17)}{J^2 (J^2 - 1)^2}. \quad (3.20)$$

On reprend alors les simulations numériques de la figure 3.6. Sur les distributions marginales calculées à partir des décompositions en ondelettes de chacune des réalisations particulières de bruit en  $1/f$ , on ajuste une série de modèles linéaires (dans une représentation *log-log*) paramétrée par le nombre  $J$  d'échelles mises en jeu. La variance empirique sur les pentes obtenues dans chacun de ces cas est alors tracée en fonction de la variable  $J$  (figure 3.8). Sur le même diagramme on superpose l'évolution théorique de cette même variance (équation (3.20)).

L'écart qui se creuse entre les deux courbes, alors que le nombre d'échelles impliquées dans la régression augmente, résulte d'une conformité, entre  $\eta_j$  et le modèle gaussien, qui se dégrade au fur et à mesure que l'on progresse dans les échelles. En effet celui-ci n'est vérifié que dans la limite des  $N_j$  tendant vers l'infini, or à durée d'échantillon constant ( $N_0$ ), plus on scrute les échelles *grossières* moins le nombre des coefficients correspondant à ce degré de détail est important. Mais malgré cette divergence, il est intéressant de noter que les deux courbes présentent un minimum commun indiquant qu'au delà d'une certaine valeur critique ( $J \sim 5$ ), l'information potentielle attendue de l'exploration des grandes échelles s'équilibre avec la variance  $S_j$  croissante qui les accompagne !

On peut cependant arbitrer la compétition entre ces deux tendances en pondérant les

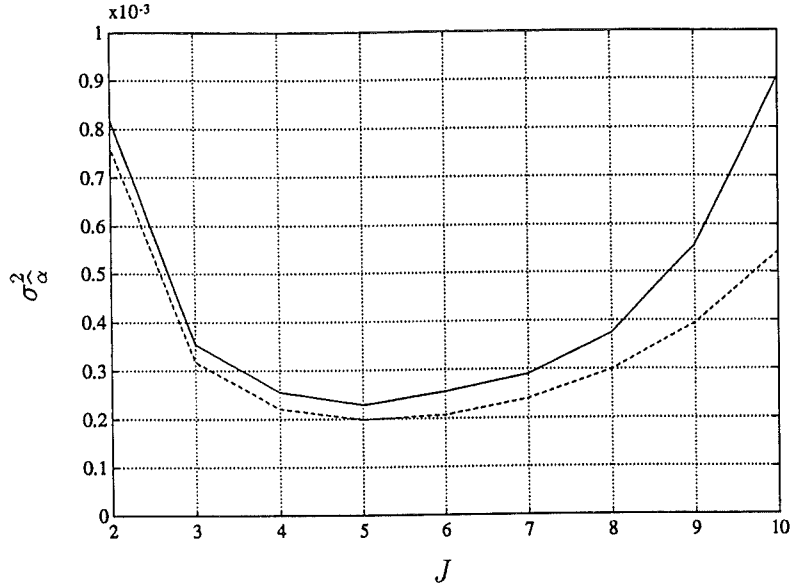


Figure 3.8: Evolution de la variance sur  $\hat{\alpha}$  en fonction du nombre  $J$  d'échelles intervenant dans la régression linéaire. En trait continu: variance empirique sur simulations numériques (2729 réalisations de bruits en  $1/f$  avec  $N_0 = 32 K$  et  $\alpha = 5/3$ ). En trait pointillé: variance théorique (équation (3.20)).

termes  $\eta_j$  par leur propre variance théorique avant de procéder à leur ajustement linéaire. Cette redistribution de la variance  $S_j$  sur les échelles enrichit alors notre connaissance *a priori* du système en favorisant les points donnés comme *fiables* et en relativisant l'incertitude sur les mesures issues d'une statistique plus pauvre. Le nouvel estimateur qui se déduit de cet exercice a pour expression

$$\tilde{\alpha} = \frac{\sum_{j=1}^J p_j \eta_j (j - \langle j \rangle)}{\sum_{j=1}^J p_j (j - \langle j \rangle)^2}, \quad (3.21)$$

dans laquelle on sous-entend que la valeur moyenne empirique sur  $j$  est également calculée relativement au poids  $p_j$  ( $\langle j \rangle = \sum_{(j)} p_j j$ ) lequel vaut ici

$$p_j = \left( \sum_{i=1}^J \frac{1}{S_i} \right)^{-1} \frac{1}{S_j}.$$

Par un principe de calcul identique à celui reproduit en annexe 4, on chiffre la dispersion de cet estimateur amélioré de  $\alpha$  par la variance explicite suivante [1]

$$\sigma_{\tilde{\alpha}}^2 = \sigma_{\alpha}^2 = \frac{1}{N_0 \ln^2 2} \frac{1 - 2^{-J}}{1 - 2^{-(J+1)}(J^2 + 4) + 2^{-2J}}. \quad (3.22)$$

Les résultats de simulations analogues à celles de la figure 3.8 sont alors sans équivoque sur l'influence strictement favorable d'un accroissement du nombre d'échelles de régression (figure 3.9).



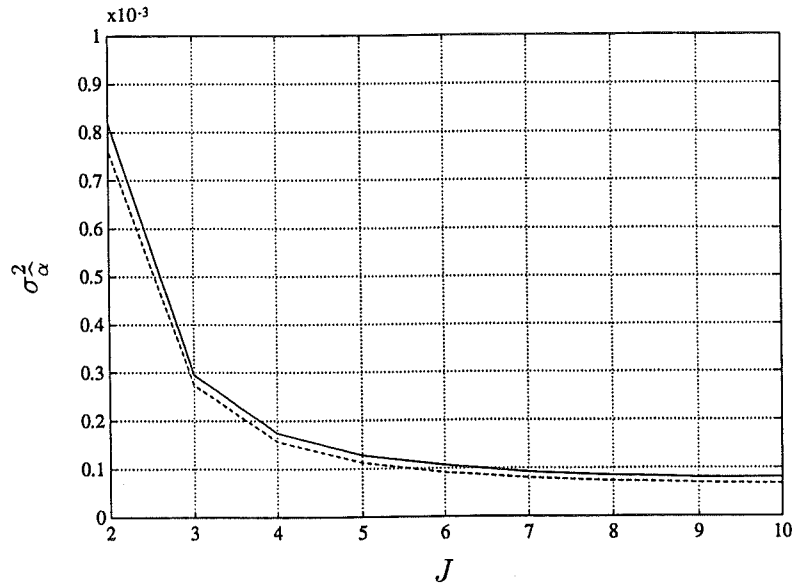


Figure 3.9: Evolution de la variance sur  $\hat{\alpha}$  estimé par un ajustement pondéré, en fonction du nombre  $J$  d'échelles de régression. En trait continu: variance empirique sur simulations numériques (2729 réalisations de bruits en  $1/f$  avec  $N_0 = 32768$  et  $\alpha = 5/3$ ). En trait pointillé: variance théorique (équation (3.22)).

On note cependant que la valeur de  $\sigma_{\hat{\alpha}}^2$  converge très rapidement vers une valeur asymptotique, ce qui signifie qu'au delà de quelques échelles ( $J \sim 6$ ), augmenter encore le nombre de points de régression n'améliore la variance que de façon anecdotique.

On obtient une image des densités de probabilité relatives aux deux types d'estimation en représentant sous forme d'histogrammes les deux séries d'exposants obtenus à partir d'un moindre carré classique et d'un moindre carré pondéré par la variance théorique des points  $\eta_j$  (figure 3.10). Les deux histogrammes restent sensiblement centrés sur la même moyenne ( $\langle \hat{\alpha} \rangle = 1.6609$  pour la régression usuelle contre  $\langle \hat{\alpha} \rangle = 1.6523$  pour la régression pondérée). Par contre, l'histogramme correspondant à la stratégie pondérée se disperse moins autour de sa valeur moyenne traduisant ainsi un gain en termes de précision d'estimation.

### Borne de Cramér-Rao

Il est intéressant de comparer la valeur asymptotique  $\lim_{J \rightarrow \infty} (\sigma_{\hat{\alpha}}^2)$  à la borne de Cramér-Rao. Le calcul de celle-ci passe alors par l'étude de la matrice d'information de Fisher, qui dans le cas où l'exposant  $\alpha$  et la puissance moyenne  $\sigma^2$  dans (3.11) sont conjointement recherchés, vaut [83], [121]

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} \frac{\ln^2 2}{2} \sum_{(j)} (J+1-j)^2 N_j & -\frac{\ln 2}{2} \sum_{(j)} (J+1-j) N_j \\ -\frac{\ln 2}{2} \sum_{(j)} (J+1-j) N_j & \frac{1}{2} \sum_{(j)} N_j \end{bmatrix}.$$

La variance minimale que l'on peut espérer sur l'estimation de  $\alpha$  (indépendamment de

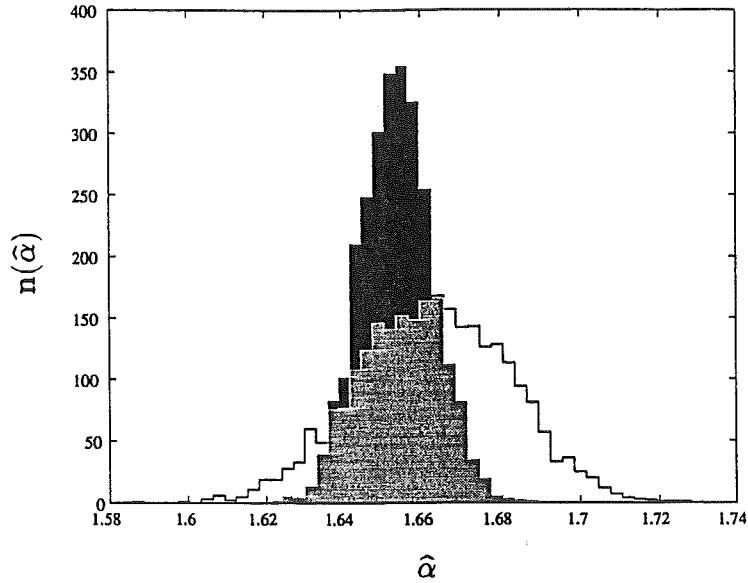


Figure 3.10: Estimation de l'exposant  $\alpha$  sur 2729 épreuves de bruits en  $1/f$  ( $N_0 = 32768$ ,  $\alpha = 5/3$ ). Histogramme en clair: régressions par les moindres carrés non pondérés. Histogramme en foncé: régressions linéaires pondérées par la variance théorique des points. Dans les deux cas  $J = 7$ .

l'estimateur choisi) est ensuite fixée par la borne de Cramér-Rao selon la relation

$$\text{var}(\hat{\alpha}) \geq \frac{d_{11}}{\det(\mathbf{I})},$$

si  $d_{11}$  est le facteur co-adjoint au premier terme de la diagonale de la matrice de Fisher. Il vient alors que

$$\text{var}(\hat{\alpha}) \geq \frac{1}{2 \det(\mathbf{I})} \sum_{(j)} N_j, \quad (3.23)$$

avec

$$\det(\mathbf{I}) = \frac{N_0^2 \ln^2 2}{4} \left[ \left( \sum (J+1-j)^2 2^{-j} \right) \left( \sum_{(j)} 2^{-j} \right) - \left( \sum_{(j)} (J+1-j) 2^{-j} \right)^2 \right]$$

Un calcul linéaire pour chacun des termes de l'expression (3.23) montre alors que la borne de Cramér-Rao prend pour valeur

$$\text{var}(\hat{\alpha}) \geq \frac{1}{N_0 \ln^2 2} \frac{2^J - 1}{(2^J + 2^{-J} - J^2/2 - 2)},$$

que l'on peut encore approximer dans la limite des  $J$  tendant vers l'infini par la borne asymptotique suivante

$$\lim_{J \rightarrow \infty} \text{var}(\hat{\alpha})_{\min} = \frac{1}{N_0 \ln^2 2}. \quad (3.24)$$

A présent si l'on calcule la tendance asymptotique de  $\sigma_\alpha^2$  obtenue par la procédure des moindres carrés pondérés (équation (3.22)), il vient simplement

$$\lim_{J \rightarrow \infty} (\sigma_\alpha^2) = \frac{1}{N_0 \ln^2 2}.$$

Cela étant, on vérifie que l'estimateur de l'exposant  $\alpha$  d'un bruit en  $1/f$ , construit sur la régression linéaire pondérée de la distribution marginale d'une décomposition énergétique temps-échelle est un estimateur *asymptotiquement efficace*<sup>14</sup>.

### 3.2.3 Mise en œuvre sur des signaux de turbulence développée

Le transfert d'énergie est un problème central en turbulence: l'énergie est injectée à grande échelle et dissipée à petite échelle sous l'effet de la viscosité. Si il y a une grande séparation entre échelles d'injection et de dissipation, on postule l'existence d'une région *universelle* où l'énergie est transmise d'échelle à échelle avec un taux de transfert  $\epsilon$  constant.

Par conséquent, si l'on convient de noter  $\langle u_l^2 \rangle$ , la variance sur les fluctuations de vitesse à l'intérieur d'une sphère de taille  $l$  appartenant au milieu turbulent, dans la région universelle - encore appelée domaine inertiel - cette quantité ne peut dépendre que du taux  $\epsilon$  et du diamètre  $l$ . Dimensionnellement, ce résultat s'énonce:

$$\langle u_l^2 \rangle = c(\epsilon l)^{\frac{2}{3}},$$

où  $c$  est une constante universelle.

Par suite, la densité spectrale d'énergie<sup>15</sup> à l'échelle  $k \sim 1/l$  est [79]:

$$\Gamma(k) = \frac{d}{dk} [\langle u_k^2 \rangle] = \frac{d}{dk} [c\epsilon^{\frac{2}{3}} k^{-\frac{2}{3}}] \sim k^{-\frac{5}{3}}. \quad (3.25)$$

La mesure de la décroissance  $\Gamma(k) \sim k^\alpha$  est donc un test de l'existence d'une région universelle en turbulence. Les développements récents [80], [100], [21] ont de plus, relié les légères variations de  $\alpha$  par rapport à l'exposant de Kolmogorov ( $-5/3$ ) aux caractéristiques d'intermittence de la turbulence. Le problème est ouvert, et l'on comprend bien l'enjeu d'estimateurs à la fois non-biaisés et précis de cet exposant  $\alpha$ .

Par ailleurs, l'hypothèse de Taylor montre que la variation instantanée de vitesse en un point  $x_0$  de l'espace se reproduit de façon identique au point  $x_0 + \delta l$  mais avec un délai temporel  $\delta t = \delta l v_g^{-1}$ , si  $v_g$  est la vitesse de groupe de l'écoulement turbulent. Par cette équivalence spatio-temporelle, le modèle en loi de puissance de l'équation (3.25) se transporte au cas des enregistrements temporels de vitesse, autorisant ainsi le recours à l'analyse spectrale de ces signaux pour identifier la valeur de l'exposant  $\alpha$ .

Des expériences de turbulence développée réalisées en soufflerie ont fourni 400 échantillons temporels de 65536 points chacun. Les estimations  $\hat{\alpha}_C$  et  $\hat{\alpha}_\Omega$  obtenues par

<sup>14</sup>Il est montré dans [92] que cette stratégie de régression pondérée correspond à un estimateur au sens du maximum de vraisemblance.

<sup>15</sup>Il s'agit ici de spectres relatifs à des fréquences spatiales.

régression linéaire non pondérée<sup>16</sup> dans un diagramme *log-log* (i) des spectrogrammes et (ii) des distributions marginales des scalogrammes associés à ces données, se distribuent respectivement autour de la valeur moyenne  $\langle \hat{\alpha} \rangle_C = 1.775$  et  $\langle \hat{\alpha} \rangle_\Omega = 1.665$  (figure 3.11).

Contrairement aux simulations numériques, il est difficile d'évaluer sur ces résultats expérimentaux la part relative de ce qui peut être attribué à un manque de précision sur les mesures, de ce qui est inhérent à la méconnaissance du modèle théorique des signaux. En particulier, il est difficile de se définir un intervalle de confiance sur le paramètre estimé  $\hat{\alpha}$  si l'on ne connaît pas avec certitude le degré de correction à apporter au coefficient de Kolmogorov. Cette absence de valeur de référence exacte pour l'exposant  $\alpha$  se heurte ensuite à une grande sensibilité quant au choix de la plage fréquentielle de régression. Par conséquent, bien que la valeur  $\hat{\alpha} = 1.665$  délivrée par un estimateur *a priori* non-biaisé semble indiquer l'absence de corrections intermittentes, une certaine prudence est de mise face aux inconnues physiques dont le choix influence notablement l'estimation de l'exposant.

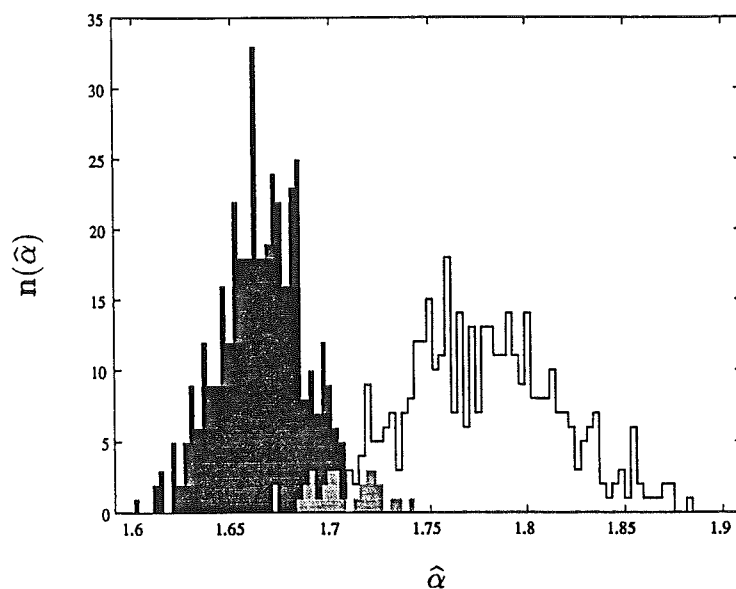


Figure 3.11: Sur 400 enregistrements de "jets" turbulents, estimation du coefficient de Kolmogorov. Histogramme en clair: estimation basée sur une analyse spectrale classique ( $\Delta t_f(C) = 21\text{ms}$ ). Histogramme en foncé: estimation basée sur les distributions marginales de scalogrammes ( $\Delta t_{f_{\min}}(\Omega) = 21\text{ms}$ ). Dans les deux cas, la plage de régression linéaire est comprise dans l'intervalle  $[0.2\text{kHz}, 2\text{kHz}]$ , la fréquence d'échantillonnage valant  $2\text{kHz}$ .

<sup>16</sup>Compte tenu du nombre d'échelles impliquées dans la régression, le recours à une stratégie pondérée du type 3.21 n'améliore que très peu la précision d'estimation sur  $\hat{\alpha}$ .

### 3.3 Caractérisation temps-échelle de singularités

Très largement justifié, le recours à des méthodes d'analyse temps-échelle pour l'étude de bruit en  $1/f$  peut toutefois paraître *sous-exploité* dans la mesure où les représentations conjointes sont réduites par l'intégration temporelle à une description *globale* du processus. En revanche, la caractérisation de certaines propriétés temporelles des modèles en  $1/f$  s'inscrit dans un contexte non stationnaire où, parce qu'elles sont aussi paramétrées par le temps, les distributions temps-échelle offrent un paradigme naturel pour l'estimation, par exemple, de singularités isolées.

#### 3.3.1 Le mouvement Brownien fractionnaire

Le *mouvement Brownien fractionnaire* (*fBm*) est un modèle de bruit en  $1/f$  auquel il est couramment fait référence. Historiquement introduit en 1968 par B. Mandelbrot et J. W. van Ness [87], [86], le concept de mouvement brownien fractionnaire généralise à une dimension  $D$  comprise dans l'intervalle  $[1, 2]$ , la notion plus ancienne de *mouvement Brownien ordinaire* [20] pour lequel  $D = 1.5$ . L'expression d'un *fBm* est liée à un bruit blanc gaussien centré  $W(t)$  par la relation intégrale

$$B_H(t) \equiv \frac{1}{\Gamma\left(H + \frac{1}{2}\right)} \left[ \int_{-\infty}^0 (|t-s|^{H-\frac{1}{2}} - |s|^{H-\frac{1}{2}}) W(s) ds + \int_0^t |t-s|^{H-\frac{1}{2}} W(s) ds \right], \quad (3.26)$$

où la dimension fractale  $D$  se déduit de l'exposant de Hölder  $H$  selon la relation usuellement admise

$$D = 2 - H \quad \text{et} \quad 0 < H < 1. \quad (3.27)$$

En spécifiant  $H = 1/2$  dans la définition (3.26) on retrouve le cas particulier du mouvement Brownien ordinaire, encore appelé processus de Wiener-Lévy [82], comme intégrale glissante de la variable aléatoire gaussienne  $W$

$$B(t) = \int_{-\infty}^t W(s) ds. \quad (3.28)$$

Il vient alors que tout *fBm* se construit à partir du Brownien ordinaire puisqu'une deuxième écriture de (3.26) est

$$\begin{aligned} B_H(t) &= \frac{1}{\Gamma\left(H + \frac{1}{2}\right)} \left[ \int_{-\infty}^t |t-s|^{H-\frac{1}{2}} dB(s) - \int_{-\infty}^0 |s|^{H-\frac{1}{2}} dB(s) \right] \\ &= \frac{1}{\Gamma\left(H + \frac{1}{2}\right)} \int_0^{\infty} |\tau|^{H-\frac{1}{2}} dB(t-\tau) + C(H). \end{aligned}$$

Cette autre formulation des *fBm* fournit une interprétation simple du principe de leur génération. En effet, à chaque date  $t$ , le signal  $B_H$  résulte de la somme cumulée

des incréments passés d'un Brownien ordinaire préalablement pondérés par une fonction conjointe du retard et du paramètre  $H$ . Le sens, mais aussi la vitesse de variation de cette fonction de pondération sont des données essentielles qui vont préfigurer des propriétés statistiques du  $fBm$ . Ainsi, suivant la valeur de l'exposant  $H$ , on distingue deux comportements possibles:

$1/2 \leq H < 1$ , la fonction de pondération est croissante avec  $\tau$ . L'influence rétroactive des incréments du Brownien ordinaire s'intensifie avec leur éloignement et éclipse le rôle de l'innovation sur  $B_H(t)$ . Cette rémanence des événements lointains se manifeste sur la trajectoire des  $fBm$  par un effet de lissage et sur leur mémoire par une *persistance* qui s'accroît quand  $H$  tend vers 1.

$0 < H < 1/2$ , la fonction de pondération est décroissante sur  $\tau$ . Le passé du Brownien ordinaire est alors progressivement oublié au profit d'*innovations* plus récentes. Entre les instants  $t$  et  $t + \delta t$ , le signal  $B_H$  subit une réactualisation d'autant plus drastique que la valeur de  $H$  est proche de zéro. La mémoire du  $fBm$  est alors qualifiée d'*anti-persistante* et se caractérise par une trajectoire  $B_H(t)$  de rugosité importante.

Quelques synthèses de  $fBm$  correspondant à différentes valeurs de l'exposant  $H$  illustrent ces deux tendances (figure 3.12).

Pour toute valeur de  $H$  comprise dans l'intervalle  $[0, 1]$ , la construction du processus  $B_H(t)$  sur un modèle *régressif* se traduit sur sa structure corrélative par une dépendance à long terme. On sait alors écrire la covariance sur  $B_H$  pris à deux dates  $t$  et  $s$  [122], il vient

$$\mathbf{E}\{B_H(t)B_H(s)\} = r_{B_H}(t, s) = \frac{\sigma_{B_H}^2}{2} [|t|^{2H} + |s|^{2H} + |t - s|^{2H}]. \quad (3.29)$$

avec

$$\sigma_{B_H}^2 = \Gamma(1 - 2H) \frac{\cos \pi H}{\pi H}.$$

En outre, pour  $H = 1/2$  on retrouve le résultat particulier

$$r_B(t, s) = \frac{\sigma_B^2}{2} \min(t, s) \implies r_B(t, t) = \text{var}_B(t) = \sigma_B^2 |t|,$$

selon lequel la variance d'un brownien ordinaire est une fonction linéaire du temps.

Au delà de cette propriété, les formes corrélatives obtenues induisent un certain nombre de commentaires qui permettent de mieux cerner la structure des  $fBm$ .

*Auto-similarité.* En effectuant le changement d'échelle  $(t, s) \rightarrow (at, as)$ , on met en évidence sur (3.29) une structuration en loi d'échelle du type

$$r_{B_H}(at, as) = a^{2H} r_{B_H}(t, s),$$

laquelle formalise le fait que la structure corrélative d'un *fBm* se répète, homothétique à elle-même, à toutes les échelles d'observation. Cette propriété fondamentale d'*auto-similarité* se transpose également au contexte stochastique du mouvement  $B_H$  puisqu'il est alors possible d'écrire (cf. Annexe 5)

$$B_H(at) \stackrel{D}{=} a^H B_H(t), \quad (3.30)$$

où l'égalité  $\stackrel{D}{=}$  est prise en loi (cf. figure 3.13).

La reproduction itérée du signal à toutes les échelles fournit ensuite un éclairage simple de la dimension fractale  $D$  qui le caractérise. En effet, si l'on cherche à recouvrir par des boîtes de dimension  $r$  la trajectoire d'un brownien fractionnaire de paramètre  $H$  sur un intervalle de temps donné, l'évolution du nombre de boîtes nécessaires dans la limite de  $r$  tendant vers zéro, suit une loi de puissance du type [38], [39]

$$n(r) \propto r^{-(2-H)}, \quad r \rightarrow 0.$$

Ce résultat est une conséquence directe des propriétés d'auto-similarité du processus, et il est alors convenu d'appeler  $D$ , dimension fractale, l'exposant de la loi de puissance, elle est liée à l'exposant de Hölder par la relation simple  $D = 2 - H$ .

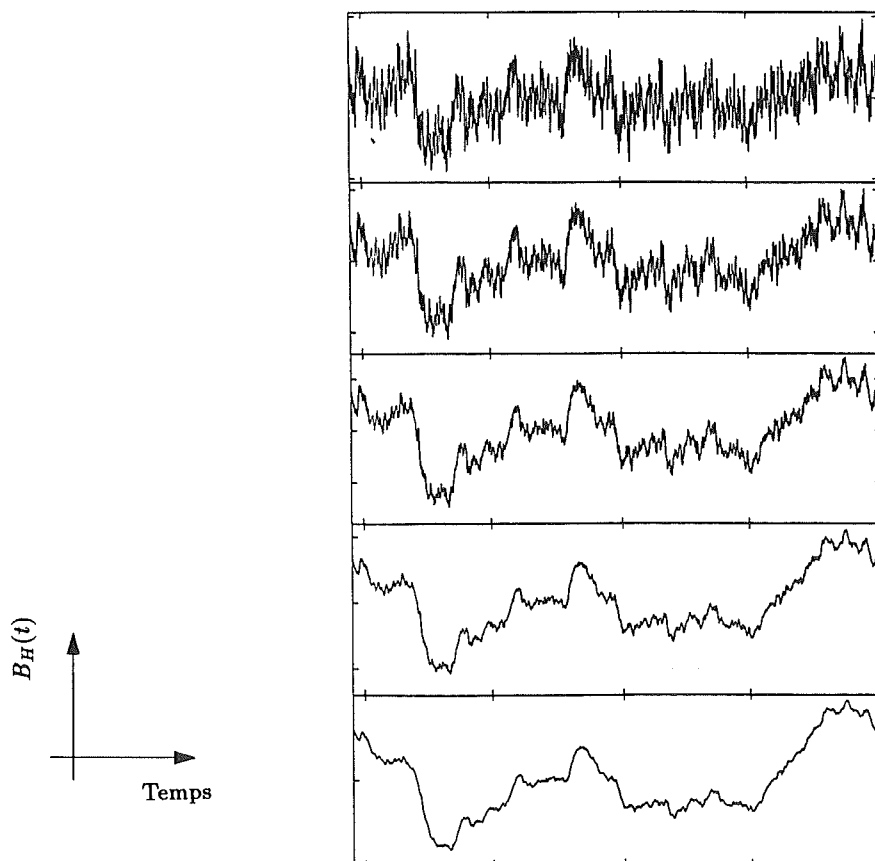


Figure 3.12: Différentes réalisations de fBm pour différentes valeurs de l'exposant de Hölder  $H$ . De haut en bas  $H = 0.1 - H = 0.3 - H = 1/2 - H = 0.7 - H = 0.9$ .

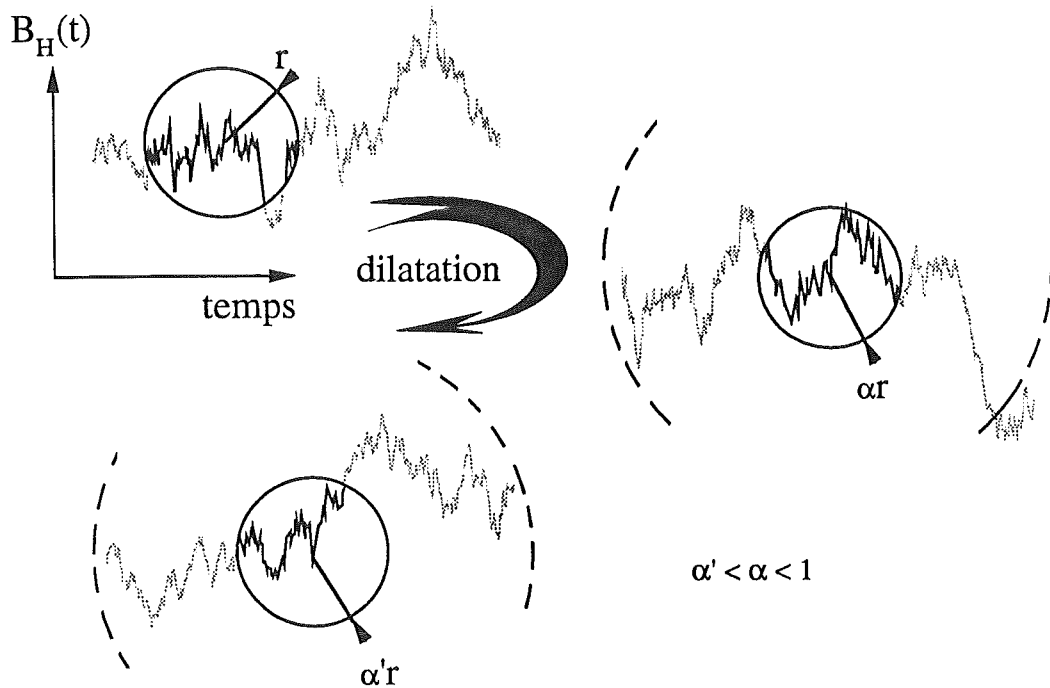


Figure 3.13: Quelle que soit l'échelle d'observation  $\alpha$ , un processus auto-similaire se caractérise par la reproduction statistique de son comportement temporel.

*Incréments stationnaires.* Clairement, les *fBm* sont des processus non stationnaires, mais si l'on considère le processus incrément calculé sur  $B_H$  selon  $\delta B_H(t, \tau) = B_H(t + \tau) - B_H(t)$ , le calcul direct du moment de second ordre de cette variable aléatoire montre que celui-ci vaut

$$\mathbf{E}\{\delta B_H(t, \tau)\delta B_H(t, u)\} = \frac{\sigma_{B_H}^2}{2}[|\tau|^{2H} + |u|^{2H} - |\tau - u|^{2H}], \quad (3.31)$$

et traduit sont indépendance par rapport à l'origine  $t$ . Pour cette raison, les *fBm* sont des processus à incréments stationnaires. Si de plus, on se place dans une situation où les incréments  $\tau$  et  $u$  sont symétriques par rapport à la date  $t$ , on peut calculer un coefficient de corrélation normalisé pour le processus incrément [46], on a

$$\rho_{\delta B_H} = -\frac{\mathbf{E}\{\delta B_H(t, \tau)\delta B_H(t, -\tau)\}}{\text{var}\{\delta B_H(t, \pm\tau)\}} = 2^{2H-1} - 1.$$

Pour aussi grand qu'il soit, l'horizon sur lequel est calculé l'incrément n'affecte pas ce taux de corrélation, à travers lui, la dépendance à grande échelle pour un *fBm* prend donc tout son sens. Le deuxième enseignement que nous livre la valeur de  $\rho_{\delta B_H}$  est relatif à l'influence de l'exposant  $H$  sur le signe de la corrélation. Ainsi,  $H$  parcourant l'intervalle  $[0, 1/2]$  correspond à un coefficient  $\rho_{\delta B_H}$  négatif et reflète la situation d'*anti-persistance*



déjà évoquée; pour une valeur de  $H > 1/2$ , la corrélation des incréments est positive et force la trajectoire  $B_H(t)$  à une relative *persistence* dans son évolution.

*Spectre moyen.* Face à la non-stationnarité des  $fBm$  se pose enfin la question du sens à accorder à une éventuelle densité spectrale de puissance. Intuitivement, la décroissance en loi de puissance des corrélations suppose un comportement spectral décrit par une loi analogue, ce qui correspondrait à la situation de bruits en  $1/f$ . L'application du théorème de Wiener-Kintchine étant naturellement exclue de ce cas non stationnaire, on peut reformuler le problème du point de vue des estimateurs discutés au paragraphe 3.2. Ce faisant, l'approche temps-fréquence, prioritairement orientée vers l'analyse des signaux non-stationnaires, permet de définir via la structure d'estimation (3.13) un spectre moyen pour les  $fBm$  selon [41], [122]

$$\Gamma_{B_H}(\nu) \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{(T)} W_{B_H}(t, \nu) dt = \frac{\sigma_{B_H}^2}{|\nu|^{2H+1}}. \quad (3.32)$$

### 3.3.2 Auto-similarité et ondelettes

Nous avons vu au paragraphe 3.2 l'intérêt des analyses à surtension constante dans l'estimation spectrale des bruits en  $1/f$ . Par ailleurs, l'auto-similarité étant également une propriété sous-jacente au principe de la décomposition d'un signal en ondelettes continues, l'étude des  $fBm$  doit certainement trouver avantage dans l'utilisation de méthodes temps-échelle. Dans le cas précis d'une transformation en ondelettes  $\psi$  admissibles (i.e. à moyenne nulle), évaluons alors la covariance sur les coefficients à chaque échelle, il vient

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\{S_{B_H}(t, a)S_{B_H}^*(s, a)\} &= \frac{1}{|a|} \iint \mathbf{E}\{B_H(u)B_H^*(v)\} \psi^*\left(\frac{u-t}{a}\right) \psi\left(\frac{v-s}{a}\right) dudv \\ &= \frac{1}{2|a|} \sigma_{B_H}^2 \left\{ \int |u|^{2H} \psi^*\left(\frac{u-t}{a}\right) \left( \int \psi\left(\frac{v-s}{a}\right) dv \right) du \right. \\ &\quad \left. + \int |v|^{2H} \psi\left(\frac{v-s}{a}\right) \left( \int \psi^*\left(\frac{u-t}{a}\right) du \right) dv \right. \\ &\quad \left. - \iint |u-v|^{2H} \psi^*\left(\frac{u-t}{a}\right) \psi\left(\frac{v-s}{a}\right) dudv \right\} \\ &= -\frac{1}{2}|a|^{2H+1} \sigma_{B_H}^2 \int |\tau|^{2H} S_\psi\left(\frac{t-s}{a} - \tau, 1\right) d\tau. \quad (3.33) \end{aligned}$$

Comme pour la fonction de corrélation des incréments du brownien fractionnaire (cf. équation (3.29)), cette fonction ne dépend finalement que de la différence des dates  $(t-s)$ , résultat pour lequel le contexte discret des ondelettes de Haar (i.e.  $\psi(k) = -\text{sgn}(k)$  pour  $|k| \leq 1/2$  et 0 ailleurs) fournit un éclairage naturel. En effet, on sait que décomposer un signal sur cette base revient à calculer une différence finie entre échantillons prélevés

sur des horizons variables avec l'échelle. L'ondelette de Haar agit donc sur le signal comme un différentiateur élémentaire. On peut moralement extrapoler cette interprétation au cas des ondelettes continues dont l'action sur  $B_H(t)$  s'assimile alors à une *pseudo-différentiation* à différents degrés de résolution. La décomposition en ondelettes *stationnarise* donc les browniens fractionnaires échelle par échelle, ce qui permet dans un deuxième temps de définir une fonction d'autocorrélation résiduelle par échelle en symétrisant les variables  $t$  et  $s$  dans (3.33), ainsi

$$\begin{aligned}\gamma_{B_H}(\tau, a) &\equiv \mathbf{E} \left\{ S_{B_H} \left( t + \frac{\tau}{2}, a \right) S_{B_H}^* \left( t - \frac{\tau}{2}, a \right) \right\} \\ &= -\frac{1}{2} |a|^{2H+1} \sigma_{B_H}^2 \int |u|^{2H} S_\psi \left( \frac{\tau}{a} - u, 1 \right) du \\ &= -\frac{1}{2} |a|^{2H+1} \sigma_{B_H}^2 \int \frac{|\Psi(\xi)|^2}{|\xi|^{2H+1}} e^{i2\pi \frac{\tau}{a} \xi} d\xi.\end{aligned}\quad (3.34)$$

La convergence intégrale sur les bornes infinies est assurée par la décroissance du spectre en  $1/f$  accentuée encore par l'évanouissement aux grandes fréquences du gabarit passe-bande lié à l'ondelette. Par contre à la fréquence nulle, le rapport  $|\Psi(\xi)|^2/|\xi|^{2H+1}$  met en compétition la divergence du spectre en  $1/f$  avec la façon dont s'atténue l'enveloppe complexe de l'ondelette analysante au voisinage de zéro. En l'occurrence, pour une ondelette  $\psi$  possédant  $\mathcal{R}$  moments nuls, on sait approcher son comportement à l'origine par un monôme d'ordre  $\mathcal{R}$  (cf. annexe 3)

$$|\psi(\nu)| \sim \nu^{\mathcal{R}} + O(\nu^{\mathcal{R}+1}), \quad \nu \rightarrow 0.$$

Il s'ensuit que le rapport  $|\Psi(\xi)|^2/|\xi|^{2H+1}$  se comporte comme  $\nu^{2(\mathcal{R}-H)-1}$  au voisinage de l'origine. De cette façon, le même critère qui fait d'une ondelette un bon candidat à l'estimation spectrale de bruits en  $1/f$  (tableau 3.1), assure ici la convergence de l'intégrale dans (3.34). Précisément, ce critère s'exprime en termes de contraintes sur le nombre  $\mathcal{R}$  de moments nuls de l'ondelette relativement à la valeur  $H$  de l'exposant de Hölder par la relation

$$\mathcal{R} > H. \quad (3.35)$$

Cette contrainte respectée, on sait que le comportement lointain d'une fonction de corrélation est dual de celui de sa transformation de Fourier à l'origine du plan transformé. On peut alors déduire de (3.34) le comportement asymptotique de la fonction d'autocorrélation résiduelle à l'échelle  $a$  et écrire que

$$\gamma_{B_H}(\tau, a) \sim |\tau|^{2(H-\mathcal{R})}, \quad \tau \rightarrow \infty. \quad (3.36)$$

D'une manière générale, plus le nombre  $\mathcal{R}$  de moments nuls de l'ondelette est grand devant l'exposant  $H$  et plus on réduit la dépendance à grande échelle de la corrélation résiduelle (figure 3.14).

En marge de ce premier résultat, il est toujours possible d'imposer une décroissance systématique de la dépendance à long terme de la corrélation résiduelle par rapport à celle

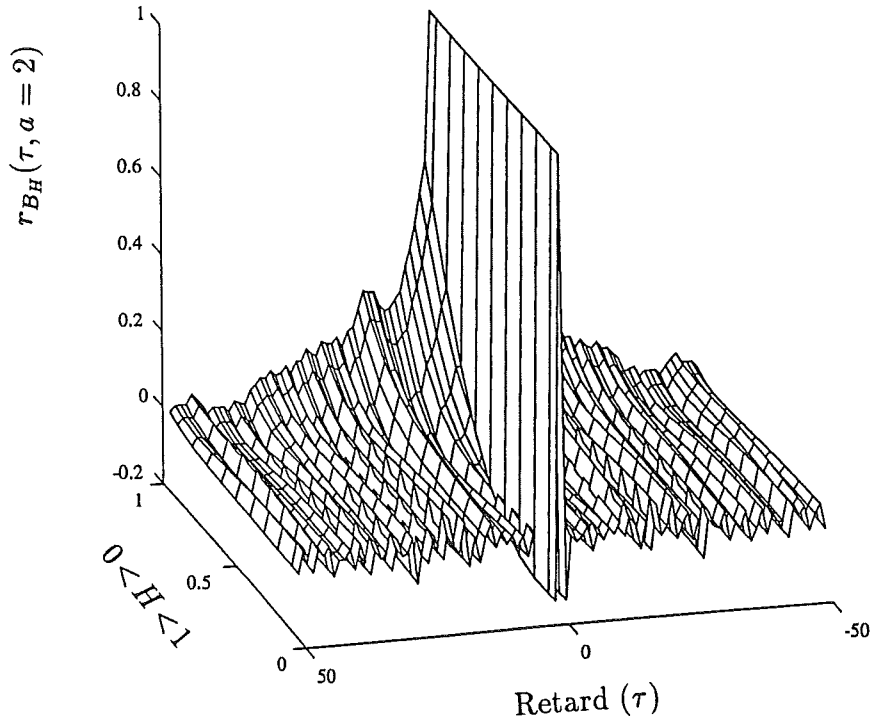


Figure 3.14: *Fonction de corrélation résiduelle des détails à l'échelle  $a = 2$  de décompositions de mouvements browniens fractionnaires sur une base de Haar ( $\mathcal{R} = 1$ ). L'exposant  $H$  varie entre 0.05 et 0.95 et les échantillons comportent 2048 points chacun. Plus  $\mathcal{R}$  est grand devant  $H$ , plus la dépendance à long terme s'atténue.*

des incréments (équation (3.29)). Ce point de vue conduit alors à borner la divergence du rapport  $|\Psi(\xi)|^2/|\xi|^{2H+1}$  en zéro ce qui corrélativement exerce sur le paramètre  $\mathcal{R}$  de l'ondelette une contrainte plus sévère que le seul critère de convergence de l'intégrale. Dimensionnellement, il faut accroître d'un ordre de grandeur le minorant dans l'inégalité (3.35), ce qui équivaut à poser [44]

$$2(H - \mathcal{R}) - 1 > 0 \iff \mathcal{R} > H + \frac{1}{2}. \quad (3.37)$$

Ainsi, la décomposition d'un brownien fractionnaire d'exposant  $H$  proche de 1 sur une base de Haar ( $\mathcal{R} = 1 \sim H$ ) fournit une série de coefficients qui restent encore fortement corrélés à grande échelle (figure 3.15). Par contre, le choix d'une ondelette de Daubechies possédant  $\mathcal{R} = 2$  moments nuls, réduit considérablement le rayon de corrélation résiduelle, validant par la même l'hypothèse de décorrélation entre les segments adjacents d'un scalogramme<sup>17</sup> [44], [45].

Un cas particulier intéressant nous est donné par l'étude de la corrélation résiduelle (3.34) à retard nul. Dans ce cas, on peut écrire que

<sup>17</sup>C'est notamment cette hypothèse qui a été faite dans le paragraphe 3.2.2 où l'on fait usage de la variance empirique des détail à chaque échelle. Le choix d'une ondelette ayant  $\mathcal{R} = 6$  moments nuls lors des essais numériques assure donc une décorrélation presque totale des coefficients.

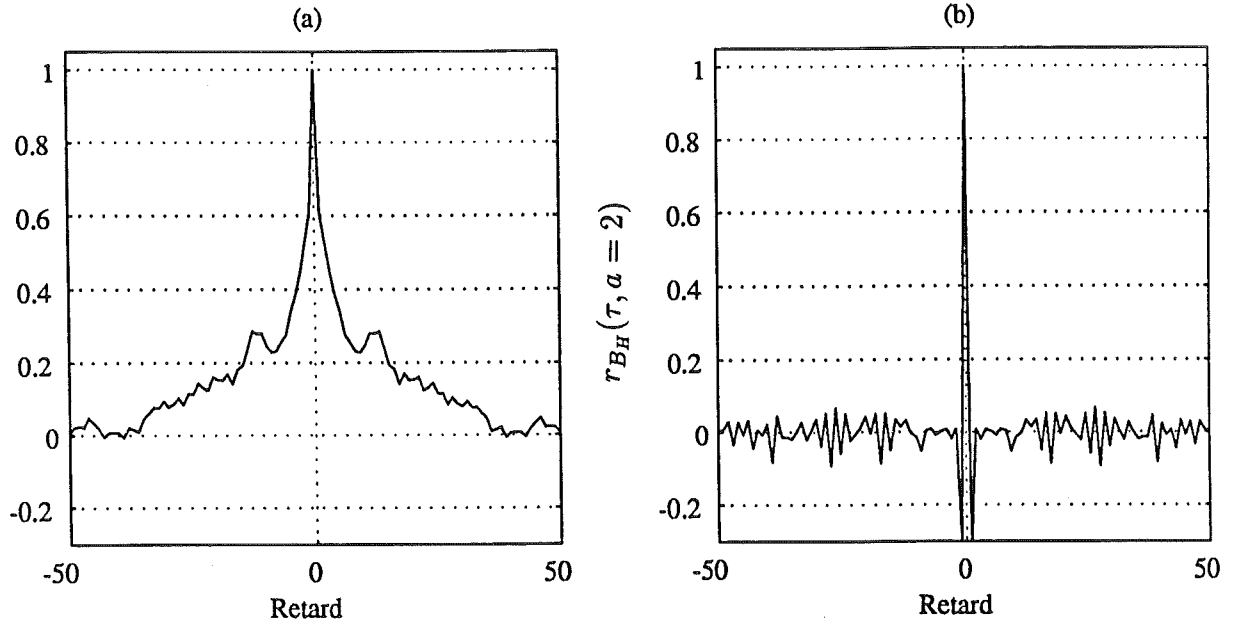


Figure 3.15: Sur une brownien fractionnaire  $H = 0.95$ , corrélation résiduelle à l'échelle  $a = 2$  d'une décomposition (a) sur des ondelettes de Haar ( $\mathcal{R} = 1$ ) - (b) sur des ondelettes de Daubechies d'ordre de cancellation 2 ( $\mathcal{R} = 2$ ). La dépendance longue des coefficients diminue ostensiblement lorsque  $\mathcal{R} > H + 1/2$ .

$$\gamma_{B_H}(0, a) = \mathbf{E}\{|S_{B_H}(t, a)|^2\} = |a|^{2H+1} V_\psi, \quad (3.38)$$

où  $V_\psi = -\frac{1}{2}\sigma_{B_H}^2 \int |\Psi(\xi)|^2 / |\xi|^{2H+1} d\xi$  est une constante par rapport à l'échelle scrutée. Il apparaît donc que la propriété d'auto-similarité des mouvements browniens fractionnaires se reflète dans la progression constante de la moyenne de son scalogramme à travers les échelles puisque

$$\mathbf{E}\{|S_{B_H}(t, \alpha a)|^2\} = \alpha^{2H+1} \mathbf{E}\{|S_{B_H}(t, a)|^2\}.$$

Parallèlement et en lien avec cette structuration en loi d'échelle, il est possible à partir de (3.38) d'accéder à l'exposant  $H$  par une régression linéaire *versus* l'échelle de la quantité

$$\log \mathbf{E}\{|S_{B_H}(t, a)|^2\} = (2H + 1) \log a + \log V_\psi. \quad (3.39)$$

Dans cette expression, faire usage de la variance empirique (3.15) calculée sur  $|S_{B_H}(t, a)|^2$ , conduit à une estimation *globale* de l'exposant  $H$ . Formulé en ces termes le problème posé est alors connexe de celui abordé au paragraphe 3.2.2 sur l'estimation spectrale des bruits en  $1/f$  et face auquel les outils temps-échelle sont d'un recours efficace. Toutefois, le brassage temporel des coefficients du scalogramme suppose implicitement que l'exposant  $H$  soit uniforme à toutes les dates d'observation. Si cette contrainte

n'est pas satisfaite par le processus  $B_H(t)$ , il n'est plus possible d'utiliser l'approximation empirique de  $\mathbf{E}\{|S_{B_H}(t, a)|^2\}$  dans (3.39).

La dimension temporelle des méthodes d'analyse temps-échelle permet de jouer le jeu d'une substitution de la valeur de moyenne d'ensemble par une réalisation particulière du scalogramme. Une des motivations à l'origine de cette démarche concerne les signaux *auto-similaires* pour lesquels la force de singularité  $H$  est susceptible de varier au cours du temps [53], [54]. Dans cette direction, une façon simple de justifier ce schéma est d'étendre le formalisme des browniens fractionnaires uniformes à une notion nouvelle de *non-stationnarité* de la singularité Hölderienne.

### 3.3.3 Distributions affines et singularités non stationnaires

#### Distribution bimodale de singularités

Une première configuration qui interdit l'utilisation de la variance empirique dans (3.39) nous est fourni par des signaux dont la singularité est distribuée selon une loi bimodale dans le temps. Une illustration simple de ce modèle résulte par exemple de la juxtaposition de deux mouvements browniens fractionnaires d'exposant de Hölder différents. La force de la singularité peut alors être vue comme une fonction du temps, en l'occurrence continue par morceaux et qui s'écrit

$$H(t) = \begin{cases} H_0, & \text{si } t \leq t_0 \\ H_1, & \text{si } t > t_0 \end{cases} .$$

Il est alors nécessaire d'adapter l'expression de la corrélation des incréments donnée par (3.31) dans le cas d'une singularité uniforme, à cette notion un peu particulière de non-stationnarité. Ainsi, au voisinage de chaque date  $t$ , on suppose que le processus incrément réel garde les mêmes propriétés de corrélation à long terme selon

$$\mathbf{E}\{[B_H(t) - B_H(t - \tau)]^2\} \sim |\tau|^{2H(t)}, \quad \tau \rightarrow 0,$$

Du développement de cette quantité, on peut déduire la structure de covariance du processus  $B_H$ , il vient alors

$$\mathbf{E}\{B_H(t)B_H(s)\} \sim \frac{1}{2}[\mathbf{E}\{B_H^2(t)\} + \mathbf{E}\{B_H^2(s)\} - |t - s|^{2H(t)}], \quad (3.40)$$

dans la limite de la différence  $|t - s|$  tendant vers zéro.

Le choix *pertinent*, au sens des critères établis au paragraphe précédent, d'une ondelette analysante  $\psi$  permet alors de calculer un scalogramme sur le processus à distribution bimodale de singularité et un développement analogue à (3.33) nous livre ensuite la corrélation résiduelle dans la limite des petites échelles, soit

$$\mathbf{E}\{|S_{B_H}(t, a)|^2\} = \frac{1}{a} \iint \mathbf{E}\{B_H(u)B_H(v)\} \psi^* \left( \frac{u-t}{a} \right) \psi \left( \frac{v-t}{a} \right) dudv$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{a}{2} \iint [\mathbf{E}\{B_H^2(t+au)\} + \mathbf{E}\{B_H^2(t+av)\} \\
&\quad - |a(u-v)|^{2H(t+au)}] \psi^*(u)\psi(v) dudv \\
&= \frac{a}{2} \iint |a(u-v)|^{2H(t+au)} \psi^*(u)\psi(v) dudv, \quad a \rightarrow 0.
\end{aligned}$$

De plus, sur le domaine où la fonction  $H(t)$  est continue, si l'on considère son développement limité autour de zéro, l'échelle exponentiée dans l'intégrale ci-dessus admet alors l'écriture approchée suivante

$$a^{2H(t+au)} \sim a^{2H(t)} a^{au\dot{H}(t)} \sim a^{2H(t)}, \quad a \rightarrow 0$$

qui après substitution dans la corrélation résiduelle conduit au résultat final

$$\mathbf{E}\{|S_{B_H}(t, a)|^2\} \sim -\frac{1}{2}|a|^{2H(t)+1} \int |\tau|^{2H(t)} S_\psi(-\tau, 1) d\tau, \quad a \rightarrow 0. \quad (3.41)$$

On voit donc que le comportement singulier instantané du processus  $B_H(t)$  se retrouve dans la règle de progression des coefficients de son scalogramme à travers les échelles, et ce de façon également locale en temps. Par suite, en adaptant la structure de l'estimateur (3.39) à une version dépendante du temps, il est facile de tirer la valeur instantanée du paramètre  $H(t)$ , comme lié à la pente de régression de  $\mathbf{E}\{|S_{B_H}(t, a)|^2\}$  versus les petites échelle dans un diagramme *log-log* [48], [53], [54],

$$\log \mathbf{E}\{|S_{B_H}(t, a)|^2\} \sim (2H(t) + 1) \log a, \quad a \rightarrow 0. \quad (3.42)$$

Cette autre lecture des décompositions temps-échelles met alors l'accent sur le dualisme des analyses temps-fréquence et temps-échelle au sein des descriptions conjointes de signaux. Alors que les distributions temps-fréquence s'orientent prioritairement vers la description temporelle de la loi fréquentielle d'un signal, les représentations temps-échelle constituent quant à elles un moyen naturel pour caractériser sur un signal, ses propriétés de structuration en échelle.

Concrètement, on peut se laisser guider par l'exploitation faite de certaines distributions temps-fréquence pour accéder, par exemple, à la loi de fréquence instantanée  $\nu_x(t)$  d'un signal<sup>18</sup>, i.e.

$$\nu_x(t) = \frac{\int \nu C_x(t, \nu; \Pi) d\nu}{\int C_x(t, \nu; \Pi) d\nu},$$

pour obtenir la singularité locale  $H(t)$  via l'estimation du centre de gravité local d'un scalogramme pondéré. Une simple intégration par partie sur la quantité

$$\int_0^\infty a e^{-\alpha a} \mathbf{E}\{|S_{B_H}(t, a)|^2\} da \sim \int_0^\infty a^{2H(t)+2} e^{-\alpha a} da, \quad a \rightarrow 0,$$

<sup>18</sup>Avec la paramétrisation (1.36) de la classe de Cohen, seules les distributions dont le noyau  $f(n, \tau)$  vérifie les hypothèses de la table 1.1 permettent d'estimer correctement la loi de fréquence instantanée d'un signal.

montre que

$$H(t) = \frac{\alpha \int_0^\infty a e^{-\alpha a} \mathbf{E}\{|S_{B_H}(t, a)|^2\} da}{2 \int_0^\infty e^{-\alpha a} \mathbf{E}\{|S_{B_H}(t, a)|^2\} da}, \quad a \rightarrow 0, \quad (3.43)$$

où  $\alpha$  est choisi de sorte à ce que le scalogramme satisfasse au comportement (3.41) sur la zone d'intégration utile des échelles.

Indépendamment de l'estimateur choisi ((3.42) ou (3.43)), la bonne structuration en loi d'échelle du scalogramme se reflète à travers la moyenne d'ensemble de ses coefficients. Dans le contexte stochastique de singularités évolutives (distributions bimodales en l'occurrence), il est assez rare de disposer de plusieurs épreuves indépendantes de la variable aléatoire. Comme on admet de le faire en contexte d'estimation spectrale de processus aléatoires [99], on suppose alors de pouvoir remplacer formellement dans (3.42) la valeur moyenne par la variable elle-même, c'est à dire

$$|S_{B_H}(t, a)|^2 \sim (2H(t) + 1) \log a, \quad a \rightarrow 0. \quad (3.44)$$

On sait que cet estimateur *rudimentaire* de l'espérance, bien que non biaisé, s'accompagne d'une importante variance d'estimation, ce que confirme très clairement le suivi local de  $H(t)$  sur la décomposition en ondelettes d'un brownien fractionnaire *bimodal* (figure 3.16-(b)).

Par suite, si l'on représente sous forme d'histogramme la collection des singularités  $\widehat{H}$  estimées, les deux impulsions théoriques localisées en  $H_0$  et  $H_1$  sont moralement convoluées par la *réponse impulsionnelle* de l'estimateur (figure 3.16-(c)).

L'estimation faite de  $\mathbf{E}\{|S_{B_H}(t, a)|^2\}$  est ici trop *grossière* pour que la finesse d'analyse qui s'ensuit sur  $H(t)$  permette de discerner correctement les deux valeurs théoriques de la singularité Höldérienne.

## Une gamme plus large d'estimateurs

La mise en évidence des structures d'échelle propres aux signaux auto-similaires est une propriété que peut partager le scalogramme avec d'autres distributions de la classe affine. Pour ce faire, une représentation temps-échelle est qualifiée de *bon candidat* à l'estimation d'une singularité locale (et *a fortiori* globale) de force  $H(t)$  si son comportement aux petites échelles est dicté par

$$\mathbf{E}\{\Omega_x(t, a; \Pi)\} \sim |a|^{2H(t)+1}, \quad a \rightarrow 0, \quad (3.45)$$

cette généralisation de (3.41) devant être vérifiée à tous les instants  $t$ .

En adoptant les notations du paragraphe 1.2.3 (équation (1.2.3)) et en tenant compte des propriétés locales d'un processus auto-similaire de singularité non stationnaire  $H(t)$  (3.40), la moyenne d'ensemble d'une distribution affine  $\Omega(t, a; \Pi)$  est donnée dans ce cas par

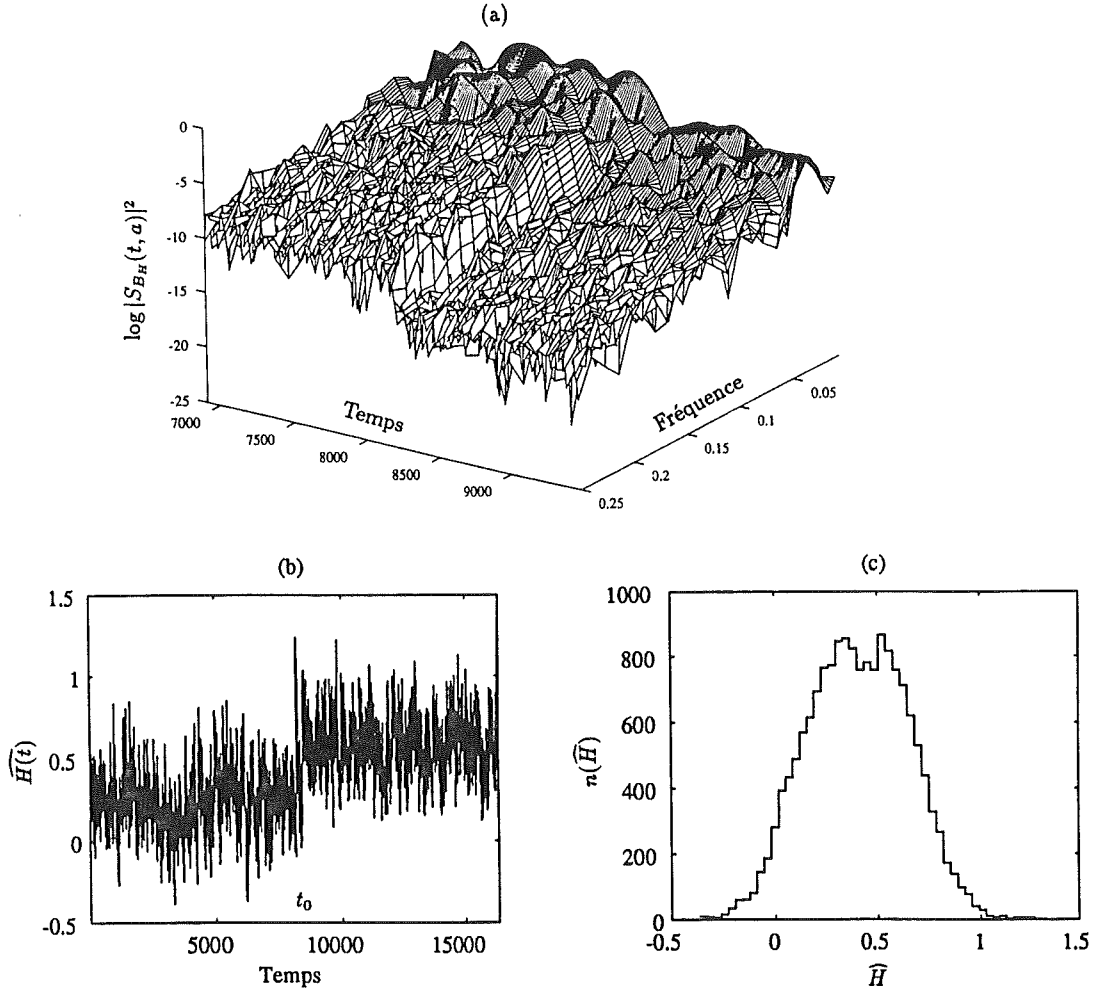


Figure 3.16: Scalogramme d'un brownien fractionnaire bimodal,  $H_0 = 0.2$ ,  $H_1 = 0.5$  et  $t_0 = 8192$ . L'ondelette de Morlet est choisie avec un coefficient de surtension  $Q = 0.25$ . (a) Représentation du log-scalogramme au voisinage de la transition  $t_0$  - (b) Suivi local de la singularité  $H(t)$  par régressions linéaires de (3.44) - (c) Histogramme des forces de singularité estimées.

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\{\Omega_{B_H}(t, a; \Pi)\} &= \frac{1}{a} \iint \mathbf{E}\left\{B_H\left(u + \frac{v}{2}\right) B_H^*\left(u - \frac{v}{2}\right)\right\} F\left(\frac{u-t}{a}, \frac{v}{a}\right) dudv. \\
&= a \iint \mathbf{E}\left\{B_H\left(t + a\left(\theta + \frac{\tau}{2}\right)\right) B_H^*\left(t + a\left(\theta - \frac{\tau}{2}\right)\right)\right\} F(\theta, \tau) d\theta d\tau \\
&\sim -a \iint \mathbf{E}\left\{B_H^2\left(t + a\left(\theta + \frac{\tau}{2}\right)\right)\right\} F(\theta, \tau) d\theta d\tau \\
&\quad - \frac{1}{2} |a|^{2H(t)+1} \int |\tau|^{2H(t)} f(0, \tau) d\tau, \quad a \rightarrow 0.
\end{aligned}$$



Pour avoir le comportement souhaité, il faut que le premier terme intégral de cette expression s'annule, ce qui en posant le changement de variables

$$\begin{cases} x = \theta + \frac{\tau}{2} \\ y = \theta - \frac{\tau}{2} \end{cases},$$

revient à dire

$$a \int \mathbf{E}\{B_H^2(t+ax)\} \left( \int F\left(\frac{x+y}{2}, x-y\right) dy \right) dx = 0,$$

soit encore, de façon équivalente [53], [54]

$$\begin{aligned} 0 &= \int F\left(\frac{x+y}{2}, x-y\right) dy \\ &= \int \left( \int F\left(\frac{x+y}{2}, x-y\right) dy \right) e^{-i2\pi\xi x} dx \\ &= \pi \left( \xi, \frac{\xi}{2} \right). \end{aligned} \tag{3.46}$$

Cette condition sur la version *fréquence-fréquence* du noyau de paramétrisation des distributions affines est naturellement vérifiée par le cas particulier du scalogramme. En effet, moyennant que l'ondelette analysante soit admissible (au sens usuel de la moyenne nulle  $\Psi(0) = 0$ ), (3.46) vaut simplement

$$\pi \left( \xi, \frac{\xi}{2} \right) = \Psi(\xi)\Psi^*(0) = 0.$$

Dans ce cas toujours, on s'assure de la compatibilité entre cette structure d'estimation de singularité locale et le schéma (3.33) relatif à une force de singularité globale en retrouvant le même biais multiplicatif sur la loi d'échelle, soit

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\{\Omega_{B_H}(t, a; W_\psi)\} &\sim |a|^{2H(t)+1} \int |\tau|^{2H(t)} f(0, \tau) d\tau, \\ &\sim |a|^{2H(t)+1} \int |\tau|^{2H(t)} S_\psi(-\tau, 1) d\tau, \quad a \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Les distributions pseudo Wigner-Ville lissées affines étudiées au paragraphe 2.2 se révèlent dans certaines circonstances comme des versions à différents degrés de lissage de scalogrammes. De plus, le choix de noyaux de paramétrisation à variables séparables permet dans une certaine mesure de découpler résolution temporelle et résolution fréquentielle des analyses temps-échelle. Cette souplesse que l'on gagne sur le choix des paramètres de lissage rend en particulier possible l'accroissement de l'horizon de lissage en temps sans dégénérescence des propriétés spectrales de l'ondelette analysante (e.g. les critères d'admissibilité restent inchangés).

Plus précisément supposons que le noyau de paramétrisation  $\Pi$  puisse se factoriser sous la forme

$$\Pi(t, a) \equiv (W_\psi(\cdot, a) \star g(\cdot))(t, a) = (g_\psi \star g)(t) H_\psi\left(\frac{\nu_0}{a}\right),$$

où  $\psi$  est une ondelette d'enveloppe complexe gaussienne (sans quoi  $W_\psi(t, a)$  ne peut pas s'écrire comme produit des variables [50]) asymptotiquement admissible ( $\Psi(0) \sim 0$ ), et à partir de laquelle on construit le scalogramme de noyau  $W_\psi(t, a)$ . Exprimée dans son formalisme *fréquence-fréquence*, la fonction  $\Pi(t, a = \nu_0/\nu)$  est telle que

$$\pi\left(\xi, \frac{\xi}{2}\right) = \Psi(\xi)\Psi^*(0)G(\xi) \sim 0,$$

ce qui assure à la distribution  $\Omega(t, a; \Pi)$  une structuration en loi de puissance aux basses échelles du type de (3.45) dans le cas de l'analyse de signaux auto-similaires.

Si à présent, on effectue le calcul direct de la distribution sur un signal quelconque, il vient

$$\begin{aligned} \Omega_x(t, a; \Pi) &= \iint (g_\psi \star g)\left(\frac{\tau-t}{a}\right) x\left(u + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(u - \frac{\tau}{2}\right) h_\psi\left(\frac{\tau}{2}\right) dud\tau \\ &= \int g(v) \left( \iint g_\psi\left(\frac{u-(t+av)}{a}\right) x\left(u + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(u - \frac{\tau}{2}\right) h_\psi\left(\frac{\tau}{a}\right) dud\tau \right) dv \\ &= \int \frac{1}{a} g\left(\frac{v-t}{a}\right) |S_x(v, a)|^2 dv \\ &= \left( \left(\frac{1}{a} g\left(\frac{\cdot}{a}\right)\right) \star |S_x(\cdot, a)|^2 \right)(t, a). \end{aligned} \quad (3.47)$$

Ce type de noyau donne lieu à une distribution  $\Omega_x$  qui peut s'interpréter comme un lissage local du scalogramme autour de chaque date  $t$  et sur un horizon fonctionnellement dépendant de l'échelle d'analyse. C'est en outre cette adaptation entre force du lissage et échelle qui préserve à la distribution  $\Omega$  ses bonnes propriétés de structuration en échelle dans le cas des signaux singuliers de la forme (3.40). Par suite, lorsque l'on remplace dans (3.45), la moyenne d'ensemble de la distribution par sa valeur particulière  $\Omega_{BH}(t, a)$ , la variance d'estimation qui s'ensuit est moindre que dans le schéma du scalogramme, ces distributions pseudo Wigner-Ville lissées affines agissant moralement comme un estimateur local de  $\mathbf{E}\{|S_{BH}(t, a)|^2\}$ ,

$$\Omega_{BH}(t, a) \sim \mathbf{E}\{|S_{BH}(t, a)|^2\}, \quad a \rightarrow 0.$$

La structure de l'estimateur de la singularité  $H(t)$  devient alors

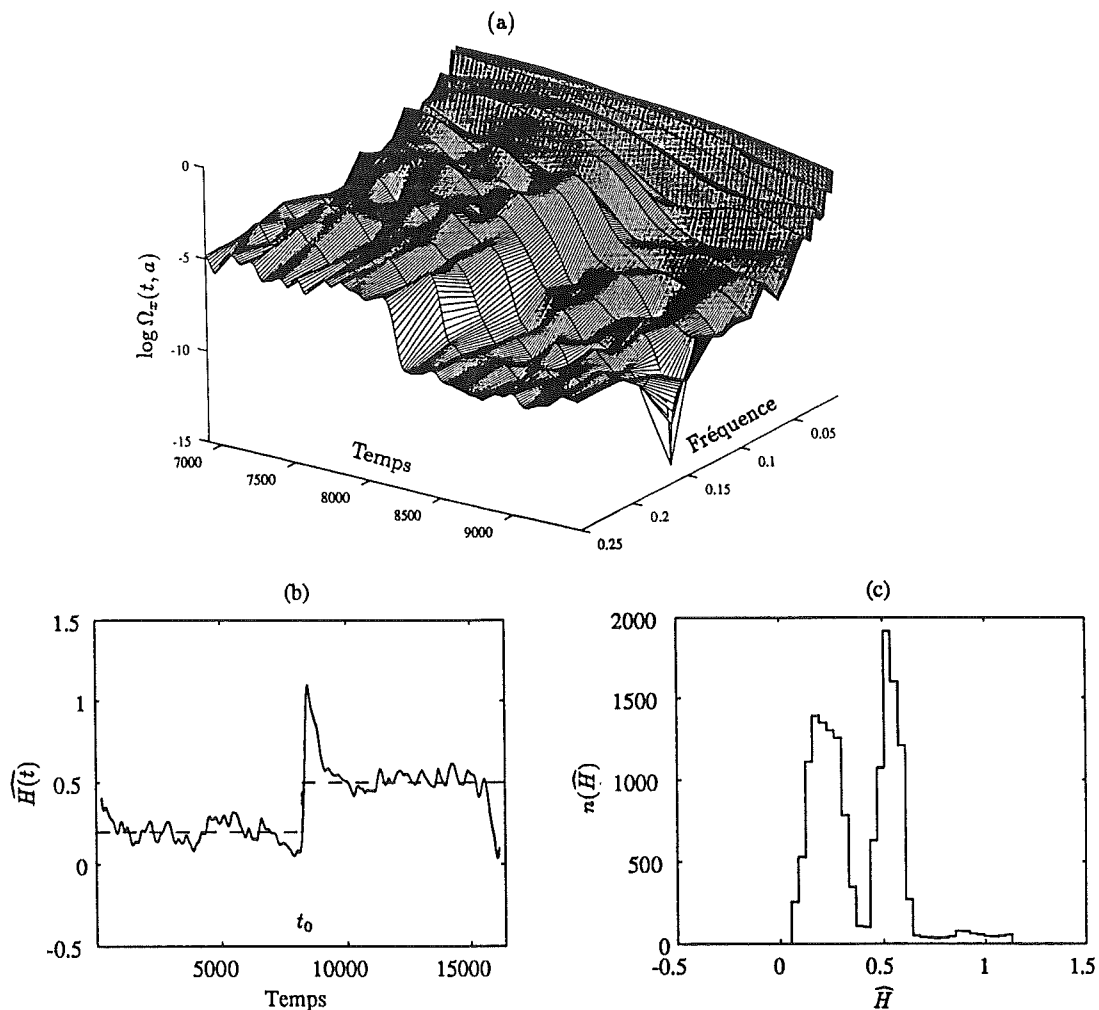


Figure 3.17: Pseudo Wigner-Ville lissée affine d'un brownien fractionnaire bimodal,  $H_0=0.2$ ,  $H_1 = 0.5$  et  $t_0 = 8192$ . Le coefficient de surtension du filtre passe-bande ( $h(t)$ ) vaut 0.25, le produit durée-bande  $BT$  de l'analyse est égal à 64 (vaut 1 dans le cas du scalogramme). (a) Représentation de la log-distribution au voisinage de la transition  $t_0$  - (b) Suivi local de la singularité  $H(t)$  par application de (3.48) - (c) Histogramme des forces de singularité estimées.

$$\hat{H}(t) = \frac{1}{2} \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\log \Omega_{B_H}(t, a)}{\log a} - \frac{1}{2}. \quad (3.48)$$

En appliquant cet estimateur à l'exemple de la figure 3.16, le suivi temporel de  $H(t)$  montre une réduction importante de la variance sur les zones uniformes de  $H$  (figure 3.17). L'histogramme des valeurs trouvées reflète bien cette amélioration puisque la résolution atteinte est suffisante pour résoudre sans ambiguïté les deux valeurs possibles  $H_0$  et  $H_1$ .

*Remarque.* En lissant le scalogramme suivant la direction temporelle, on observe clairement une délocalisation des phénomènes transitoires. Par exemple, la représentation de la *log-distribution* en 3.17-(a) montre que la transition entre  $H_0$  et  $H_1$  est fortement adoucie aux basses fréquences et de plus en plus abrupte aux hautes fréquences (faibles échelles). Du coup, en désynchronisant le comportement des petites échelles par rapport aux grandes, la progression de la moyenne d'ensemble de la distribution à travers les échelles n'est plus, au voisinage de la transition  $t_0$ , fixée par une loi de puissance constante ( $H(t_0)$ ) à toutes les fréquences, mais par une dérive continue de  $H$  entre  $H_0$  et  $H_1$  avec l'échelle  $a$ . L'estimation locale  $\widehat{H}(t_0)$  est alors fortement biaisée puisque loi d'échelle vraie et modèle supposé ne sont plus compatibles.

Bien qu'en théorie le comportement de la distribution ne soit révélateur des singularités que dans la limite des petites échelles (c'est à dire lorsque l'horizon de lissage tend vers zéro), en pratique, il existe un compromis numérique à trouver entre la vitesse de variation de la singularité et le taux de lissage appliqué au scalogramme.

### Singularités continuellement évolutives

Le brownien fractionnaire n'est pas le seul modèle possible de processus auto-similaire. Entre autres, on peut considérer la fonction de Weierstrass-Mandelbrot [86], dont la synthèse s'obtient en sommant une infinité d'harmoniques dont l'amplitude et la fréquence suivent une progression géométrique de raison arbitraire  $\lambda$  ( $\lambda \geq 1$  pour assurer la convergence de la série), il vient

$$W(t) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda^{-n(2-D)} (1 - e^{i\lambda^n t}) e^{i\phi_n}. \quad (3.49)$$

La phase  $\phi_n$  est une variable aléatoire que l'on peut simplement convenir d'annuler pour travailler sur des signaux déterministes. Des études menées sur cette fonction [11] montrent alors que la trajectoire associée est de dimension fractale égale à  $D$  que l'on peut, par analogie avec les *fBm*, identifier à un paramètre de singularité hôlderienne  $H$  par la relation (3.27). A titre d'illustration, on peut, pour une même valeur de  $H$ , comparer les réalisations d'un brownien fractionnaire et d'un processus de Weierstrass (figure 3.18). La mesure d'auto-similarité étant identique dans les deux cas, elle se reflète sur les trajectoires en terme de *rugosité* comparable. De plus, on peut montrer [86] que ces deux trajectoires sont continues mais dérivables en aucun point.

Bien que la construction de la fonction de Weierstrass soit définie dans le domaine temporel, il est facile de l'interpréter comme une procédure de synthèse fréquentielle dans la mesure où la superposition (infinie) d'harmoniques en temps revient à faire une construction ponctuelle du spectre. Ensuite, une pondération *ad hoc* de chacune des composantes ajoutées fait en sorte que la densité spectrale de puissance suive une décroissance en loi de puissance (modèle de bruit en  $1/f$ ).

La synthèse temporelle gagne pourtant en intérêt lorsque l'on cherche un modèle de processus auto-similaire dont la singularité est susceptible de varier continuellement au

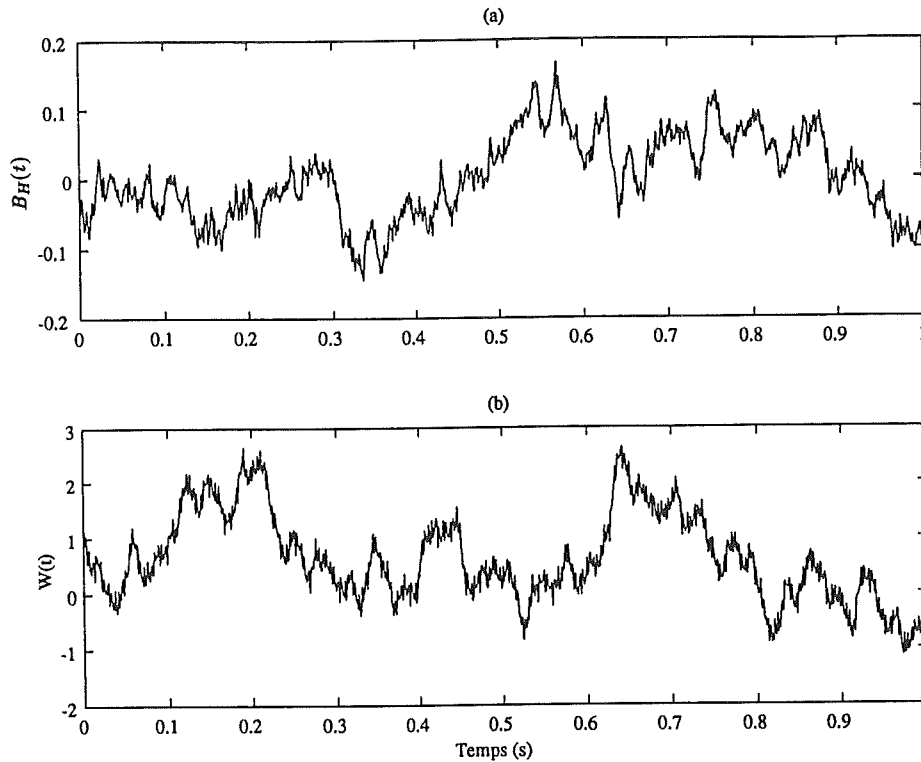


Figure 3.18: (a) Simulation d'un mouvement brownien fractionnaire (3.26) de singularité Hölderienne uniforme  $H = 1/3$  - (b) Représentation de la fonction singulière de Weierstrass-Mandelbrot correspondant à une dimension fractale  $D = 2 - H = 5/3$ .

cours du temps. Il est alors facile de remplacer dans (3.49) le paramètre  $H$  a priori constant par une fonction elle-même dépendante du temps. L'expression ainsi révisée de la fonction de Weierstrass devient [53], [54]

$$W(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda^{-nH(t)} (1 - e^{i\lambda^n t}) e^{i\phi_n}, \quad (3.50)$$

La fonction *Arctangente* pour  $H(t)$ , nous permet en particulier d'étudier plusieurs types de transitions de la singularité hölderienne entre deux valeurs extrêmes. Pour chacune de ces configurations, on effectue le suivi local de la singularité à partir d'un scalogramme et d'une version lissée affine de celui-ci (figure 3.19). Dans chaque cas, les distributions pseudo Wigner-Ville lissées affines offrent une précision d'estimation bien meilleure que celle donnée par le scalogramme, sans introduction significative de biais.

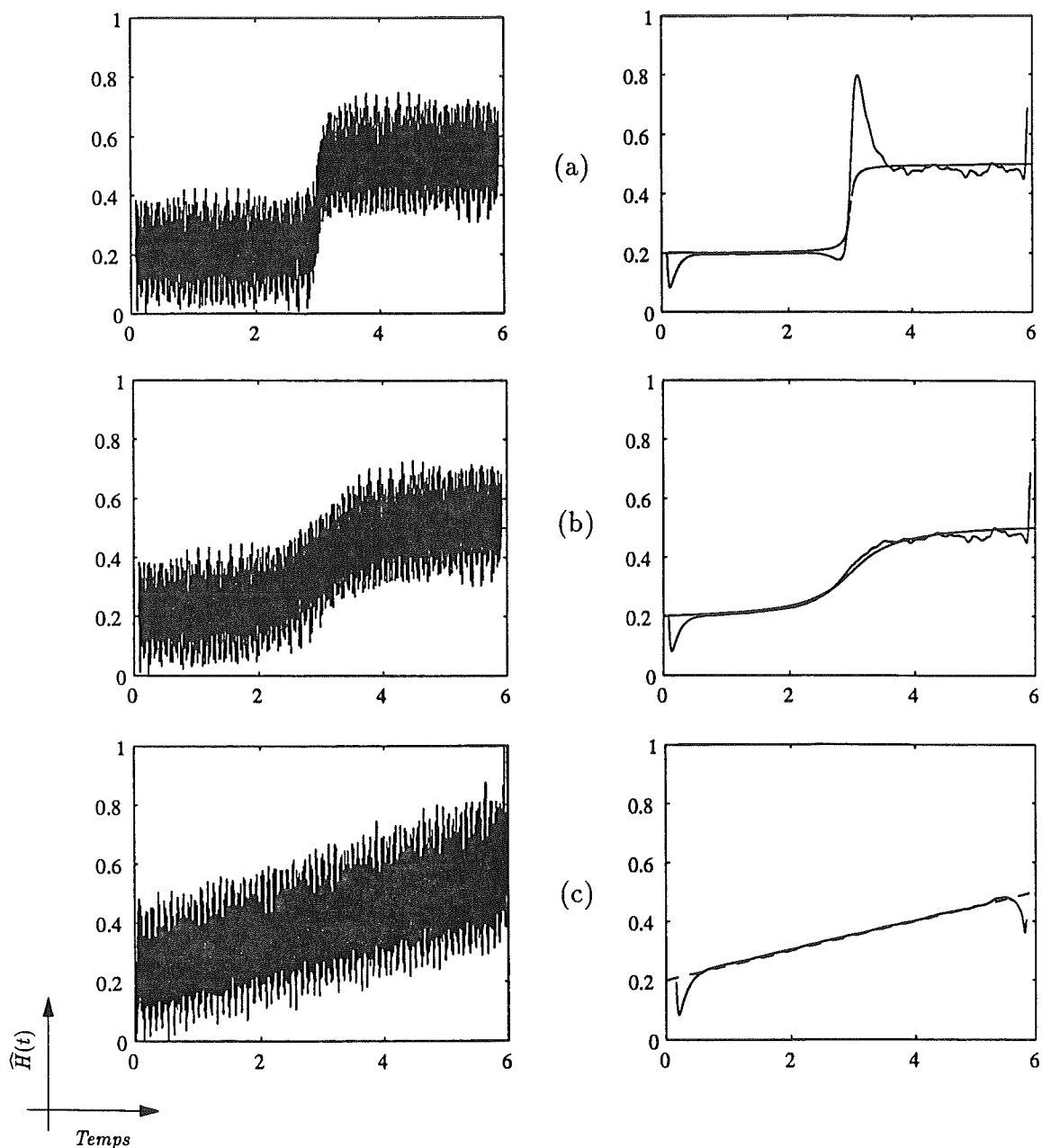


Figure 3.19: Suivi instantané de la singularité  $H(t)$  sur différentes réalisations de fonction déterministes de Weierstrass-Mandelbrot. Le paramètre de singularité  $H$  est rendu dépendant du temps par le biais d'une fonction Arctan ((a),(b)), et d'une loi linéaire (c). Dans les trois cas,  $\lambda = 1.5$ ,  $0 \leq t \leq 6$ ,  $0.2 < H(t) < 0.5$ . La colonne de gauche correspond aux estimations issues de scalogrammes ( $Q = 0.25$ ,  $BT = 1$ ), la colonne de droite correspond aux estimations faites par régression linéaire locale de pseudo Wigner-Ville lissées affines ( $Q = 0.25$ ,  $BT = 64$ ).

### 3.3.4 Caractérisation de la régularité locale d'une fonction

Les mouvements browniens fractionnaires sont des modèles aux travers desquels certaines distributions temps-échelle s'illustrent par la mise en évidence de propriétés d'*auto-similarité statistique*. Qu'elles soient globales ou locales, ces propriétés caractérisent d'une certaine façon la *régularité* d'un processus stochastique. Parallèlement la notion de régularité existe aussi pour les fonctions déterministes et une mesure de celle-ci nous est donnée par la régularité (locale ou globale) de hölderienne (ou encore de Lipschitz [85]). Ainsi, une fonction  $f$  est dite localement de régularité hölderienne  $H$  en  $t_0$ , si et seulement si il existe deux constantes  $C$  et  $\tau_0$  et un polynôme  $P_n(\tau)$  d'ordre  $n$  (avec  $n \leq H \leq n + 1$ ) tels que pour tout  $\tau \leq \tau_0$  l'on ait [85]

$$|f(t_0 + \tau) - P_n(\tau)| \leq C |\tau|^H. \quad (3.51)$$

*Remarque.* Une forme dérivée de l'équation (3.30) permet d'écrire pour un brownien fractionnaire [39]

$$[B_H(t_0 + \tau) - B_H(t_0)] \stackrel{D}{=} |\tau|^H [B_H(t_0 + 1) - B_H(t_0)],$$

où l'égalité est prise en loi. En restreignant la valeur de  $H$  à l'intervalle  $[0, 1]$ ,  $B_H(t_0)$  peut alors être vu comme un polynôme d'ordre  $n = 0$  et  $[B_H(t_0 + 1) - B_H(t_0)]$  une constante indépendante de l'incrément  $\tau$ . De cette manière, l'auto-similarité offre une traduction naturelle de la notion de régularité hölderienne au cadre des fonctions aléatoires, et en particulier, l'exposant de Hölder  $H$  (lié à la dimension fractale  $D$  par (3.27)) apparaît comme une mesure stochastique de la régularité du brownien fractionnaire.

Si la fonction est de régularité uniforme (ce qui est typiquement le cas des browniens fractionnaires), alors la relation (3.51) est vérifiée pour toute valeur du temps  $t$ . On sait dans ce cas que la régularité du signal se retrouve uniformément dans le comportement aux petites échelles de sa transformée en ondelettes. En effet, si l'ondelette analysante  $\psi(t)$  est admissible (i.e.  $\Psi(0) = 0$ ) et si  $t\psi(t)$  est absolument sommable, on sait écrire pour une signal de régularité uniforme

$$\begin{aligned} S_x(t, a) &= |a|^{-\frac{1}{2}} \int x(u) \psi^* \left( \frac{u-t}{a} \right) du \\ &= |a|^{-\frac{1}{2}} \int [x(u) - x(t)] \psi^* \left( \frac{u-t}{a} \right) du. \end{aligned}$$

Par suite, en faisant usage de la majoration (3.51), il vient [85]

$$\begin{aligned} |S_x(t, a)| &\leq C |a|^{-\frac{1}{2}} \int |u-t|^H \left| \psi \left( \frac{u-t}{a} \right) \right| du \\ &\leq C |a|^{H+1/2} \int |u|^H |\psi(u)| du \\ &= O(|a|^{H+1/2}). \end{aligned} \quad (3.52)$$

Dans le cas du scalogramme calculé sur un brownien fractionnaire, la progression (3.34) de sa variance à travers les échelles est cohérente avec le résultat ci-dessus et confirme l'idée que la trajectoire d'un *fBm* décrit une fonction aléatoire de régularité hölderienne uniforme  $H$ .

Si la singularité est non stationnaire, la dépendance temporelle des distributions temps-échelle (et en particulier du scalogramme) permet de suivre l'évolution de  $H(t)$  en étudiant localement la décroissance des coefficients d'ondelette (cf. (3.44)). Supposons alors une fonction partout régulière (i.e. de régularité uniforme  $H = 1$ ) sauf au point  $t_0$  où elle est singulière de force  $H(t_0) < 1$ ,

$$|x(t_0 + \tau) - x(t_0)| \leq C |\tau|^{H(t_0)}. \quad (3.53)$$

Les distributions affines pour lesquelles (3.46) est vérifiée, fournissent une image de cette singularité ponctuelle, que l'on peut moralement associer à l'idée de réponse impulsionnelle. Par exemple, une transformée en ondelettes conduit à l'égalité suivante

$$\begin{aligned} S_x(t, a) &= |a|^{-\frac{1}{2}} \int x(u) \psi\left(\frac{u-t}{a}\right) du \\ &= |a|^{-\frac{1}{2}} \int x(t_0 + \tau) \psi\left(\frac{\tau - (t-t_0)}{a}\right) d\tau \\ &= |a|^{-\frac{1}{2}} \int [x(t_0 + \tau) - x(t_0)] \psi\left(\frac{\tau - (t-t_0)}{a}\right) d\tau, \end{aligned}$$

que l'on sait majorer grâce à (3.53), il vient alors

$$\begin{aligned} |S_x(t, a)| &\leq C |a|^{-\frac{1}{2}} \int |\tau|^{H(t_0)} \left| \psi\left(\frac{\tau - (t-t_0)}{a}\right) \right| d\tau \\ &\leq C |a|^{\frac{1}{2}} \int |au + (t-t_0)|^{H(t_0)} |\psi(u)| du \\ &\leq C |a|^{H(t_0)+\frac{1}{2}} \int |u|^{H(t_0)} |\psi(u)| du + C |a|^{\frac{1}{2}} |t-t_0|^{H(t_0)} \int |\psi(u)| du \\ &= O\left(|a|^{H(t_0)+\frac{1}{2}} + |a|^{\frac{1}{2}} |t-t_0|^{H(t_0)}\right). \end{aligned} \quad (3.54)$$

A  $t = t_0$ , la régularité de la fonction se traduit dans l'évolution des coefficients d'ondelette. Aux petites échelles, une régression linéaire de  $\log |s_x(t_0, a)|$  versus  $\log a$  permet d'identifier la force de la singularité  $H(t_0)$ , ce qui est un résultat connu par ailleurs (équation (3.42)). Par contre, la localisation temporelle de la singularité se dégrade au fur et à mesure de la progression dans les échelles puisque l'effet de l'*impulsion singulière* se diffuse dans un *cône d'influence* centré sur  $t_0$  (figure 3.20).

Il est clair aussi que toute version lissée affine de la distribution de Wigner-Ville, même si elle maintient les propriétés de structuration en échelle, crée un cône d'influence



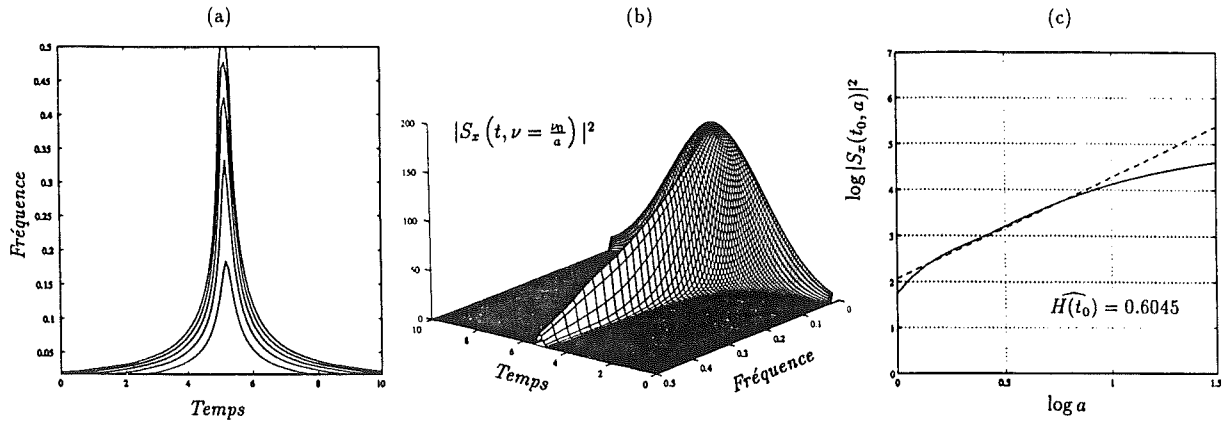


Figure 3.20: Scalogramme appliquée à une singularité locale du type  $x(t) \sim |t - t_0|^H$ , avec  $H = 0.6$ . L'influence de la singularité se délocalise et fait apparaître un cône d'influence centré sur  $t_0 = 5.14$  (a). Localement, le scalogramme suit une progression en loi de puissance à travers les échelles (b). Par régression linéaire de la distribution dans un diagramme log-log, il est possible de retrouver la force de la singularité locale (c).

en lieu et place de la singularité ponctuelle. Mais les DPWVLA ne sont pas les seuls membres de la classe affine, et en particulier on peut s'intéresser aux distributions à noyaux bifréquentiels localisés abordées au paragraphe 2.3. Tout d'abord, on peut associer à la propriété temporelle (3.53) la décroissance spectrale asymptotique suivante

$$X(\nu) \sim |\nu|^{-H(t_0)-1} e^{-i2\pi\nu t_0}, \quad |\nu| \rightarrow \infty.$$

Suivant les notations du paragraphe 2.3.1, la définition (2.11) exprimée sur la singularité locale devient

$$\begin{aligned} \Omega(t, a; \Pi_\delta) &\sim \frac{1}{a} \int G(\xi) \left| \frac{1}{a^2} \left( H^2(\xi) - \frac{\xi^2}{4} \right) \right|^{-H(t_0)-1} e^{-i2\pi \frac{\xi}{a} (t-t_0)} d\xi \\ &\sim |a|^{2H(t_0)+2} \int \frac{G(a\zeta)}{(H^2(a\zeta) - (a\zeta)^2/4)^{H(t_0)+1}} e^{-i2\pi\zeta(t-t_0)} d\zeta, \quad a \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Imposer à la fois la structuration correcte en échelle (i.e. une progression géométrique de la distribution à travers les échelles) et une localisation temporelle *stricto sensu* pour la distribution, restreint le choix des fonctions  $G(\gamma)$  et  $F(\gamma)$  à l'unique solution

$$\begin{cases} G(\gamma) = 1 \\ F(\gamma) = \sqrt{1 + \gamma^2/4}. \end{cases}$$

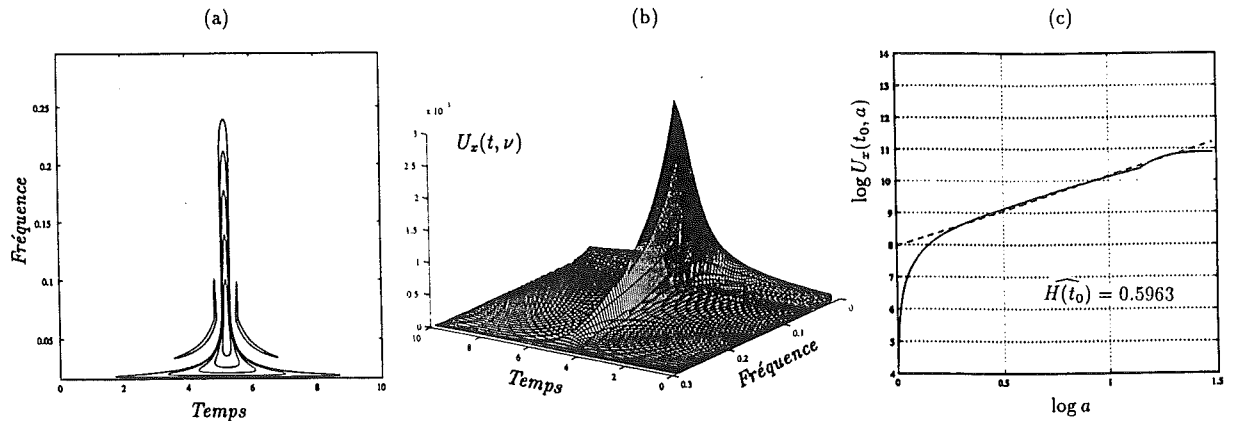


Figure 3.21: (a) Signature temps-fréquence de la distribution de Unterberger (forme active) évaluée sur la singularité ponctuelle décrite en figure 3.20. Sur une large gamme de fréquence, la distribution reste localisée sur un support temporel constant - (b) Localement, la loi d'échelle est révélée par le progression de la distribution à travers les fréquences - (c) estimation de la force de singularité par régression linéaire de la log-distribution à la date  $t_0$  versus  $\log a$ .

On reconnaît alors la paramétrisation de la forme active de la distribution de Unterberger, dont le comportement aux petites échelles est finalement guidé par [48]

$$U_x(t, a) \sim |a|^{2H(t_0)+2} \delta(t - t_0), \quad a \rightarrow 0.$$

La régression linéaire de cette quantité dans un diagramme *log-log* nous livre alors la même information que le scalogramme avec pour avantage sur celui-ci de préserver la localisation temporelle de la singularité dans le plan temps-fréquence (figure 3.21).

L'absence de cône d'influence dans ce cas de figure provient de ce que la distribution de Unterberger ne résulte pas d'un lissage (au sens usuel) de la représentation de Wigner-Ville. Si cette structure est favorable à la localisation d'événements isolés dans le temps, elle pénalise les situations où plusieurs singularités coexistent: parce que la distribution de Unterberger est une forme bilinéaire, elle fait interagir les singularités deux à deux, donnant ainsi naissance à autant d'interférences externes (figure 3.22).

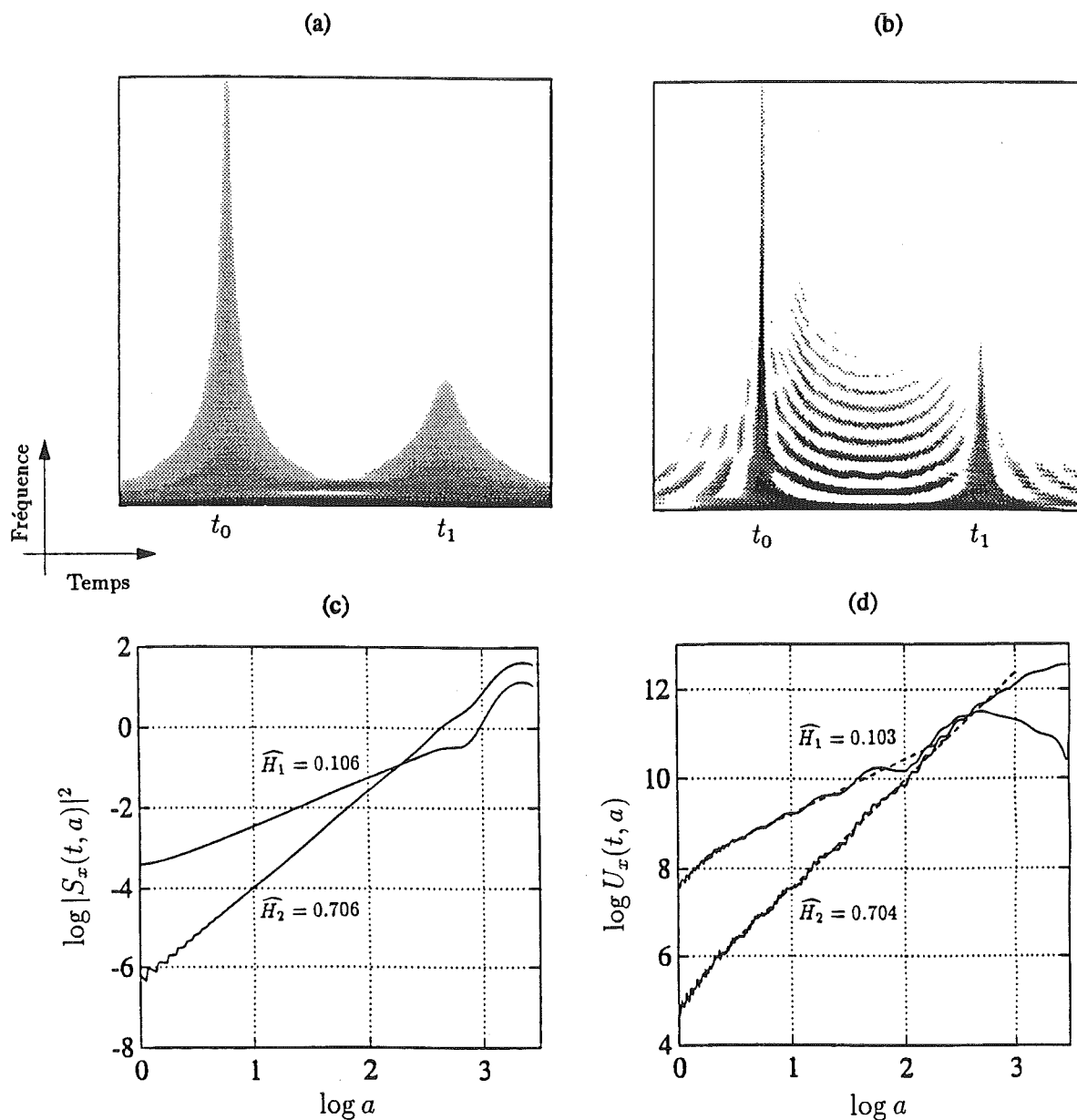


Figure 3.22: Scalogram (a) et distribution de Unterberger (b) d'un signal singulier (au sens de la régularités hölderienne) en deux dates  $t_0 = 2.5$  et  $t_1 = 7.5$ , les singularités valant respectivement  $H(t_0) = 0.1$  et  $H(t_1) = 0.7$ . A partir des deux analyse, il est possible de mesurer la force des singularités (c)-(d). Mais, alors que le scalogramme ne développe pas de structure interférentielle externe lorsqu'il y a multiplicité des événements (a), la distribution de Unterberger (b), parcequ'elle est une transformée bilinéaire non triviale, génère des franges d'interférence (dont la géométrie peut être décrite par les règles de construction (2.30)).

# Conclusion

La conclusion d'une thèse est en général l'occasion de brosser un bilan critique des divers résultats ou points de vue développés. Pourtant, nous ne sacrifierons pas à cette tâche fastidieuse, mais profiterons plutôt de cette opportunité pour rappeler l'esprit dans lequel ce travail a été accompli.

En partant d'outils d'analyse connus et éprouvés, les représentations temps-fréquence et temps-échelle, nous avons tout d'abord cherché à identifier un squelette qui soit commun à l'ensemble de ces méthodes et sur lequel peuvent ensuite se greffer et se conjuguer propriétés et différences de principe. Dans cette démarche, nous avons, entre autres, dû composer avec la difficulté qu'engendre la diversité des approches existantes (quelques fois d'un même objet) et préserver une certaine cohésion entre ces différents langages. Nonobstant, le paradigme sur lequel reposent toutes ces représentations conjointes est celui d'un accroissement de la redondance d'information initialement contenue dans le signal, le but désigné de cette restructuration étant de souligner un aspect particulier des données, à charge ensuite pour l'expertise d'extraire de cette redondance un nombre minimum de paramètres judicieux. Par suite, ce qui distingue les représentations entre elles (qu'il s'agisse des classes temps-fréquence ou temps-échelle), c'est leur aptitude propre à révéler telle caractéristique du signal plutôt que telle autre. De ce point de vue, la notion de compétition entre représentations est évidemment un non sens, et l'utilisateur avisé est celui qui sait gérer la complémentarité de ces outils, en rationalisant le choix de la distribution par rapport au type de problématique posée par le signal.

Réciproquement, une bonne exploitation des signatures temps-fréquence ou temps-échelle nécessite un apprentissage poussé des mécanismes par lesquels l'information se redistribue dans le plan (temps-fréquence par exemple). Cet effort de compréhension est en même temps le tribut à payer si l'on ambitionne une large diffusion de ces méthodes au sein des différentes communautés scientifiques. Connaître mieux les distributions affines est donc le fer de lance de notre investissement dans l'identification et la modélisation géométrique de ces principes. Dans cet état d'avancement, l'approche proposée ne saurait prétendre à l'exhaustivité, mais elle apporte un éclairage simple et naturel à des distributions non triviales sans lequel quelques unes de leurs potentialités resteraient dans l'ombre d'un certain ésotérisme mathématique.



# Annexe A.

## Covariance par rotation de la distribution de Wigner-Ville

Avant d'intégrer la covariance par rotation au nombre des propriétés de la distribution de Wigner-Ville, il nous faut identifier quelle transformation de  $L^1(\mathbb{R})$  est responsable d'une rotation de la distribution dans le plan temps-fréquence. Considérons la distribution de Wigner-Ville d'un signal  $x$  et plus particulièrement sa version fréquence-temps

$$\iint W_x(t, \nu) e^{-i2\pi(nt + \nu\tau)} dt d\nu = A_x(n, \tau),$$

ou encore fonction d'ambiguïté. L'opérateur de rotation d'un angle  $\theta$ , noté  $\Upsilon(\theta)$ , dans le plan de Wigner étant son propre dual dans le plan des ambiguïtés, on peut indifféremment travailler sur l'une ou l'autre des fonctions. La matrice de transformation équivalente s'écrit alors

$$\Upsilon(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

Cette matrice étant unimodulaire,  $\det \Upsilon(\theta) = 1$ , on peut la décomposer en éléments simples du type [99]

$$P(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, Q(\beta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\beta \end{bmatrix} \text{ et } \Delta(a) = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix},$$

lesquels formalisent les opérateurs "d'étirement" en fréquence (modulation linéaire de fréquence), "d'étirement" en temps (filtrage à phase quadratique) et de dilatation (ou compression). Ainsi, faire subir à une fonction d'ambiguïté  $A_x(n, \tau)$  chacune des transformations définies par les matrices ci-dessus, revient à calculer respectivement les fonctions d'ambiguïté des signaux

$$\begin{aligned} x_P(t) &= x(t) e^{i\alpha t^2/2} \\ x_Q(t) &= x(t) * e^{it^2/2\beta} \\ x_\Delta(t) &= \sqrt{|a|} x(at). \end{aligned}$$

En fonction des opérateurs  $P(\alpha), Q(\beta)$  et  $\Delta(a)$ , la décomposition de la matrice  $\Upsilon(\theta)$  devient

$$\Upsilon(\theta) = P(-\tan \theta) Q(\cos \theta \sin \theta) \Delta(\cos \theta),$$

ce qui nous permet alors de conclure sur la commutativité du diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} x(t) & \longrightarrow & (\{x(u) e^{-i \tan \theta u^2/2}\} * e^{iu^2/2 \cos \theta \sin \theta})(t \cos \theta) \sqrt{|\cos \theta|} \\ \downarrow & & \downarrow \\ W_x(t, \nu) & \longrightarrow & W_x(t \cos \theta + \nu \sin \theta, -t \sin \theta + \nu \cos \theta) \end{array} \quad (3.55)$$

# Annexe B.

## Echantillonnage des signaux et repli spectral des DPWVLA

Bien que l'évaluation numérique des DPWVLA ne fasse appel à aucune astuce particulière de programmation, il est toutefois nécessaire d'adapter les règles d'échantillonnage usuelles à ce contexte de formes bilinéaires.

L'équivalent discret de la distribution (2.7) s'écrivant

$$\hat{\Omega}_x(n, a) \equiv \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_a(k-n) \left\{ \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(k+l)x^*(k-l) h_a(2l) \right\},$$

si le signal  $x$  occupe une largeur de bande  $B_x$  sur l'axe des fréquences, le produit  $x(k+l)x^*(k-l)$  a pour largeur de bande équivalente  $2B_x$ . Ce doublement du battement fréquentiel impose alors de suréchantillonner d'un facteur deux le signal  $x$ , ou de travailler sur le signal analytique associé

$$z(t) = x(t) + i(\mathcal{Q}x)(t),$$

où  $(\mathcal{Q}x)(t)$  est le signal en quadrature de  $x$ . C'est cette dernière solution que nous retiendrons.

A présent, on modélise le gabarit de la fenêtre réelle  $h_a$  par une porte de largeur  $B_a = B_0/a$  et centrée en  $\nu_a = \nu_0/a$ , et on se propose d'étudier le terme entre accolades de (2.7). Pour fixer les idées, on choisit un signal analytique  $z$  monochromatique  $z(t) = e^{i2\pi\nu_x t}$ , le produit  $y_k(l) = z(k+l)z^*(k-l)$  est lui même un harmonique de fréquence  $2\nu_x$ . En interprétant alors la somme  $\sum_{(l)} y_k(l) h_a(2l)$  dans le domaine fréquentiel, il s'agit de l'évaluation du produit de convolution de  $Y(\nu)$  par  $H_a(\nu/2)$  à la fréquence nulle (ou, compte tenu de la périodicité des spectres discrets, à tous les multiples entiers de la fréquence d'échantillonnage  $\nu_e$ ). Sur la figure 3.23, on voit que le résultat de ce produit de convolution est non nul sur les plages de fréquence  $2(\nu_x + \nu_a) \pm B_a$  et  $2(\nu_x - \nu_a) \pm B_a$ . La première de ces plages résulte de la superposition du motif latéral supérieur (A) de  $h_a(2l)$  avec le signal  $\delta(\nu - 2\nu_x)$  et la deuxième de la superposition entre motif latéral inférieur (B) et Dirac. Par suite, la distribution  $\hat{\Omega}_x(t, a)$  est non nulle pour les échelles  $a$  telles que

$$\left. \begin{array}{l} 2(\nu_x + \nu_a) \pm B_a = \nu_e \\ 2(\nu_x - \nu_a) \pm B_a = 0 \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} \nu_a = \frac{1}{2}(\nu_e \pm B_a) - \nu_x \\ \nu_a = \nu_x \pm \frac{1}{2}B_a. \end{array} \right.$$

L'image d'un signal monochromatique correspond donc à deux composantes symétriques par rapport à la valeur  $\nu_e/4$ , dans le plan temps fréquence. Pour éviter ce repli spectral, il faudrait donc suréchantillonner le signal analytique  $z$  d'un facteur 2 (soit donc une fréquence d'échantillonnage pour  $x$  quatre fois supérieure à la fréquence limite de Shannon). Une façon de contourner ce problème de repli nous amène à ne considérer qu'un

seul motif du filtre  $h_a$ , c'est à dire d'utiliser une ondelette d'analyse qui soit elle-même analytique. En fait, pour avoir une image exacte du signal (et non symétrique par rapport à  $\nu_c/4$ ), il faut garder le motif latéral inférieur (fréquences négatives) de  $h_a$ , car c'est lui qui fait exister la distribution  $\hat{\Omega}_x(t, a)$  pour  $\nu_a = \nu_x$ . En définitive, on travaillera avec l'ondelette analytique conjuguée (figure 3.24).

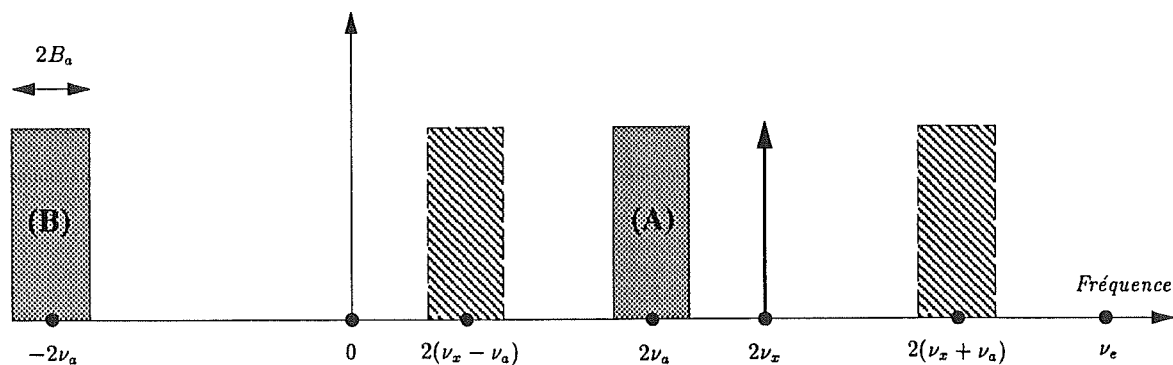


Figure 3.23: Interprétation fréquentielle de l'opération intermédiaire  $\sum_{(l)} y_k(l) h_a(2l)$  intervenant dans le calcul d'une DPWVLA.

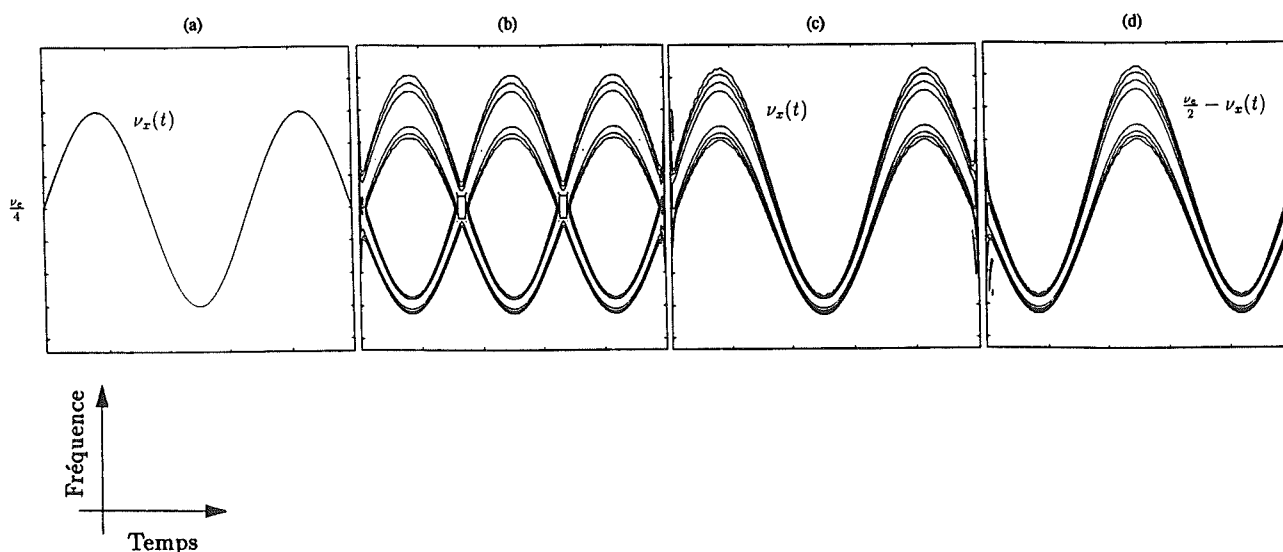


Figure 3.24: (a) Modèle théorique d'un signal modulé sinusoidalement en fréquence - (b) DPWVLA calculée avec une ondelette analysante  $h(t)$  réelle - (c) calculée avec une ondelette analytique conjuguée - (d) DPWVLA DPWVLA calculée avec une ondelette analytique.



# Annexe C.

## Exposant de spectre en $1/f$ et régularité d'ondelette

Dans le cadre des distributions bilinéaires affines à noyaux séparables, l'équation (3.16) se réécrit à partir des deux fonctions  $G(\nu)$  et  $H(\nu)$  selon

$$\mathbf{E}\{\hat{\Gamma}_x(\nu)\} = \sigma^2 |\nu|^{-\alpha} \nu_0^\alpha \int |\xi|^{-\alpha} G(0)H(\xi) d\xi.$$

Dans cette expression,  $G(\nu)$  correspond au filtre de gabarit passe-bas et  $H(\nu)$  possède dans le domaine temporel une structure oscillante à moyenne nulle. Dans ces conditions  $G(0) \neq 0$  et l'origine d'une divergence éventuelle ne peut provenir que du comportement de l'ondelette  $H(\nu)$ .

Pour sa part, l'exposant  $\alpha$  est en général compris dans l'intervalle  $[1, 3]$  de sorte que le problème de la convergence intégrale relativement à la borne infinie ne se pose pas en termes de contraintes particulières sur la fonction  $H(\nu)$ , la décroissance de celle-ci quand  $\nu \rightarrow \infty$  étant assurée par son caractère passe-bande. Par contre, au voisinage de la fréquence nulle,  $H(\nu)$  doit tempérer la divergence de la fonction  $|\xi|^{-\alpha}$ . Rappelons alors que la régularité  $\mathcal{R}$  d'une ondelette désigne ici, le nombre de ses moments nuls:

$$\int t^{r-1} h(t) dt = 0, \quad \forall r \leq \mathcal{R}.$$

Exprimée de façon équivalente dans le domaine fréquentielle cette propriété devient

$$\frac{d^{(r-1)}}{d\nu^{(r-1)}} H(\nu)|_{\nu=0} = 0, \quad \forall r \leq \mathcal{R},$$

et par suite le développement limité d'ordre  $\mathcal{R}$  de la fonction  $H(\nu)$  au voisinage de zéro se réduit aux seuls termes suivants

$$\begin{aligned} \lim_{\nu \rightarrow 0} H(\nu) &= \underbrace{H(0) + \nu \dot{H}(0) + \dots + \frac{\nu^{\mathcal{R}-1}}{(\mathcal{R}-1)!} H^{(\mathcal{R}-1)}(0)}_{=0} + \frac{\nu^{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}!} H^{(\mathcal{R})}(0) + O(\nu^{(\mathcal{R}+1)}) \\ &= \frac{\nu^{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}!} H^{(\mathcal{R})}(0) + O(\nu^{(\mathcal{R}+1)}) \propto \nu^{\mathcal{R}}, \quad \nu \rightarrow 0. \end{aligned}$$

En substituant alors dans l'intégrale (3.16)  $H(\nu)$  par son développement limité, le critère de convergence à l'origine est imposé par la règle de Riemann, c'est à dire

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^A \xi^{-\alpha} H(\xi) d\xi < \infty &\iff \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^A \xi^{-\alpha} \xi^{\mathcal{R}} d\xi < \infty \\ &\iff \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^A \xi^{\mathcal{R}-\alpha} d\xi < \infty \\ &\iff \mathcal{R} > \alpha - 1. \end{aligned}$$

Dans le cas particulier du scalogramme construit sur une ondelette  $\psi$ , le noyau de paramétrisation  $\pi(\nu, \xi)$  est tel que

$$\pi(0, \xi) = |\Psi(\xi)|^2.$$

Par suite, si  $\mathcal{R}_\psi$  correspond au nombre des moments nuls de l'ondelette, le développement limité de  $|\Psi(\nu)|^2$  au voisinage de zéro donne

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} |\Psi(\nu)|^2 = \left| \frac{\nu^{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}!} |\Psi^{(\mathcal{R})}(0)| + \nu^{(\mathcal{R}+1)} O(\nu) \right|^2 \propto \nu^{2\mathcal{R}}, \quad \nu \rightarrow 0$$

et la limite intégrale existe si et seulement si

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^A \xi^{2\mathcal{R}-\alpha} d\xi < \infty \iff \mathcal{R} > \frac{\alpha-1}{2}.$$

Ceci montre qu'une ondelette simplement admissible (i.e. à moyenne nulle), pour laquelle  $\mathcal{R}_\psi = 1$ , ne permettra pas l'estimation d'exposants supérieurs à 3.

## Annexe D.

### Variance sur le résultat d'une régression linéaire

Connaissant la densité de probabilité de la variable aléatoire  $\eta_j$ , on se propose de calculer le moment de second ordre de la quantité suivante

$$\hat{\alpha} = \frac{\frac{1}{J} \sum_{j=1}^J \eta_j (j - \langle j \rangle)}{\frac{1}{J} \sum_{j=1}^J j^2 - \langle j \rangle^2}.$$

Le dénominateur de cette expression est un terme constant que l'on évalue sans peine,

$$\frac{1}{J} \sum_{j=1}^J j^2 - \langle j \rangle^2 = \frac{J^2 - 1}{12}.$$

La variable aléatoire formée par le produit  $\eta_j (j - \langle j \rangle)$  est gaussienne et a pour variance  $\text{var}(\eta_j)(j - \langle j \rangle)^2$ . Sachant alors que  $\text{var}(\eta_j) = S_j = \frac{2^{j+1}}{N_0 \ln^2 2}$ , il vient que

$$\begin{aligned} \text{var}(\eta_j)(j - \langle j \rangle)^2 &= \frac{2^{j+1}}{N_0 \ln^2 2} \left( j - \frac{J+1}{2} \right)^2 \\ &= \frac{2^{j+1}}{N_0 \ln^2 2} \left( j^2 + \left( \frac{J+1}{2} \right)^2 - j(J+1) \right). \end{aligned}$$

Enfin, la statistique de la somme de plusieurs variables aléatoires gaussiennes centrées indépendantes reste décrite par une loi gaussienne dont la variance résulte elle-même de la somme des variances individuelles. Par suite, la quantité  $\sum_{(j)} \eta_j (j - \langle j \rangle)$  est régie par une loi normale de variance donnée par

$$\begin{aligned} \text{var} \left( \sum_{j=1}^J \eta_j (j - \langle j \rangle) \right) &= \sum_{j=1}^J \text{var}(\eta_j (j - \langle j \rangle)) \\ &= \sum_{j=1}^J \frac{2^{j+1}}{N_0 \ln^2 2} j^2 + \sum_{j=1}^J \frac{2^{j+1}}{N_0 \ln^2 2} \left( \frac{J+1}{2} \right)^2 - \sum_{j=1}^J \frac{2^{j+1}}{N_0 \ln^2 2} j(J+1). \end{aligned}$$

Après calcul séparé de chacune des trois séries de cette somme,

$$\text{var} \left( \sum_{j=1}^J \eta_j (j - \langle j \rangle) \right) = \frac{1}{N_0 \ln^2 2} \left( 2^J (J^2 - 6J + 17) - (J^2 + 6J + 17) \right),$$

et finalement la variance sur l'exposant  $\hat{\alpha}$  prend la forme

$$\begin{aligned}\text{var}(\hat{\alpha}) &= \frac{\text{var}\left(\sum_{j=1}^J \eta_j(j - \langle j \rangle)\right)}{J^2 \left(\frac{J^2-1}{12}\right)^2} \\ &= \frac{144}{N_0 \ln^2 2} \frac{2^J(J^2 - 6J + 17) - (J^2 + 6J + 17)}{J^2(J^2 - 1)^2}.\end{aligned}$$

# Annexe E.

## Auto-similarité statistique des $fBm$

On définit à partir d'un  $fBm$  le processus incrément correspondant  $\delta B_H(t, s) \equiv B_H(t) - B_H(s)$ , dont on calcule le moment du second ordre

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}\{\delta B_H^2(t, s)\} &= \mathbf{E}\{[B_H(t) - B_H(s)]^2\} \\
 &= \mathbf{E}\{B_H^2(t)\} + \mathbf{E}\{B_H^2(s)\} - 2\mathbf{E}\{B_H(t)B_H(s)\} \\
 &= r_{B_H}(t, t) + r_{B_H}(s, s) - 2r_{B_H}(t, s) \\
 &= \sigma_{B_H}^2 |t|^{2H} + \sigma_{B_H}^2 |s|^{2H} - 2\frac{\sigma_{B_H}^2}{2} (|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H}) \\
 &= \sigma_{B_H}^2 |t-s|^{2H}.
 \end{aligned}$$

Ce résultat manifestement indépendant des dates  $t$  et  $s$  peut alors s'écrire avec un changement d'origine élémentaire

$$\left. \begin{array}{l} s = t_0 = 0 \\ B_H(t_0) = 0 \end{array} \right\} \implies \mathbf{E}\{\delta B_H^2(t, t_0)\} = \mathbf{E}\{B_H^2(t)\} = \sigma_{B_H}^2 |t|^{2H}.$$

L'équation (3.26) qui définit les  $fBm$  correspond à une transformation linéaire d'un processus stochastique gaussien centré, par suite il reste possible de modéliser la densité de probabilité des  $fBm$  par une loi normale d'espérance nulle. Dans ce contexte particulier de statistique gaussienne, on sait évaluer le moment de premier ordre de la valeur absolue de la  $v. a.$  en fonction de sa variance selon

$$\mathbf{E}\{|B_H(t)|\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\mathbf{E}\{B_H^2(t)\}}.$$

Il est alors immédiat, compte tenu du résultat précédent, que

$$\mathbf{E}\{|B_H(t)|\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma_{B_H} |t|^H.$$

Enfin, un changement d'échelle sur  $B_H(t)$  met clairement en évidence la propriété statistique d'*auto-similarité* de celui-ci et on note

$$B_H(at) \stackrel{D}{=} a^H B_H(t).$$

## Références

- [1] P. Abry, P. Gonçalvès, and P. Flandrin. Wavelet-based spectral analysis of  $1/f$  processes. In *IEEE Int. Conf. on Acoust., Speech and Signal Proc. ICASSP-93*, pages III.237–III.240, Minneapolis (MN), 1993.
- [2] R. A. Altes. The Fourier-Mellin transform and mammalian hearing. *J. Acoust. Soc. Amer.*, 63:174–183, 1978.
- [3] R. A. Altes. Wideband, proportional-bandwidth Wigner-Ville analysis. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 38(6):1005–1012, June 1990.
- [4] R. A. Altes and E. L. Titlebaum. Bat signals as optimally Doppler tolerant waveforms. *J. Acoust. Soc. Amer.*, 48:1014–1020, 1970.
- [5] R. Balian. Un principe d'incertitude fort en théorie du signal ou en mécanique quantique. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris*, 292, Série II:1357–1362, Juin 1981.
- [6] R. G. Baraniuk. Shear madness: Signal-dependent and metaplectic time-frequency representations. Technical report, no. UILU-ENG-92-2226, Coordinated Science Laboratory, University of Illinois at Urbana-Champaign, 1992.
- [7] R. G. Baraniuk and D. L. Jones. A radially Gaussian, signal-dependent time-frequency representation. *Signal Processing*, 32(2), 1993.
- [8] R. G. Baraniuk and D. L. Jones. A signal-dependent time-frequency representation: Optimal kernel design. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 41(4):1589–1602, April 1993.
- [9] R. G. Baraniuk and D. L. Jones. Warped wavelet bases: Unitary equivalence and signal processing. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing — ICASSP '93*, 1993.
- [10] G. Battle. Heisenberg proof of the Balian-Low theorem. *Letters on Mathematical Physics*, 15:175–177, 1988.
- [11] M. V. Berry and Z. V. Lewis. On the Weierstrass-Mandelbrot fractal function. *Proc. R. Soc. Lond.*, A 370:459–484, 1980.
- [12] A. Berthon. Operator Groups and Ambiguity Functions in signal processing. In J. M. Combes, A. Grossman, and Ph. Tchamitchian, editors, *Wavelets: Time-Frequency Methods and Phase Space*, pages 172–180, New York, 1989. Springer Verlag.

- [13] J. Bertrand and P. Bertrand. Time-frequency representations of broad-band signals. In *IEEE Int. Conf. on Acoust., Speech and Signal Proc. ICASSP-88*, pages 2196–2199, New-York (NY), 1988.
- [14] J. Bertrand and P. Bertrand. A class of affine Wigner functions with extended covariance properties. *Journal of Mathematical Physics*, 33(7):2515–2527, July 1992.
- [15] J. Bertrand, P. Bertrand, and J. P. Ovarlez. Discrete Mellin transform for signal analysis. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing — ICASSP '90*, pages 1603–1606, 1990.
- [16] A. Blanc-Lapierre and B. Picinbono. *Propriétés statistiques du bruit de fond*. Masson, 1961.
- [17] M. Born and P. Jordan. Zur Quantenmechanik. *Zeit. f. Phys.*, 34:858–888, 1925.
- [18] G. F. Boudreaux-Bartels and A. Papandreou. On a Generalization of the Choi-Williams time-frequency distribution. In *Proceedings of the Asilomar Conference*, 1991.
- [19] R. N. Bracewell. *The Fourier transform and its applications*. McGraw-Hill, 1978.
- [20] R. Brown. On the existence of active molecules in organic and inorganic bodies. *Phil. Mag.*, 4:162–173, 1928.
- [21] B. Castaing, Y. Gagne, and E. J. Hopfinger. Velocity probability density functions of high Reynolds number turbulence. *Physica D*, 46(177), 1990.
- [22] H. I. Choi and W. J. Williams. Improved time-frequency representation of multicomponent signals using exponential kernels. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 37(6):862–871, June 1989.
- [23] T. A. C. M. Claasen and W. F. G. Mecklenbräuker. The Wigner distribution — A tool for time-frequency signal analysis — Part I: Continuous-time signals. *Philips Journal of Research*, 35(3):217–250, 1980.
- [24] T. A. C. M. Claasen and W. F. G. Mecklenbräuker. The Wigner distribution — A tool for time-frequency signal analysis — Part II: Discrete-time signals. *Philips Journal of Research*, 35(4/5):277–300, 1980.
- [25] T. A. C. M. Claasen and W. F. G. Mecklenbräuker. The Wigner distribution — A tool for time-frequency signal analysis — Part III: Relations with other time-frequency signal transformations. *Philips Journal of Research*, 35(6):372–389, 1980.
- [26] L. Cohen. Generalized phase space distribution functions. *Journal of Mathematical Physics*, 7:781–786, 1966.
- [27] L. Cohen. Time-frequency distributions — A review. *Proceedings of the IEEE*, 77(7):941–981, July 1989.

- [28] L. Cohen. Scale, frequency, time, and the scale transform. In *Proceedings of the Sixth IEEE-SP Workshop on Statistical Signal and Array Processing*, pages 9–12, Victoria, Canada, 1992.
- [29] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, and F. Laloe. *Mécanique Quantique*. Hermann, Paris, 1973.
- [30] S. Colombo. *Les Transformations de Mellin et de Hankel*. La recherche scientifique, CNRS, 1959.
- [31] J.M. Combes, A. Grossmann, and Ph. Tchamitchian, editors. *Wavelets*. Springer-Verlag, 1989.
- [32] J. P. Dahl. On the Group of Translations and Inversions of Phase Space and the Wigner Functions. *Physica Scripta*, 25:499–503, 1982.
- [33] J. P. Dahl. The Wigner Function. *Physica*, 114A:439–444, 1982.
- [34] I. Daubechies. Orthonormal bases of compactly supported wavelets. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, XLI:909–996, 1988.
- [35] I. Daubechies. The wavelet transform, time-frequency localization and signal analysis. *IEEE Transactions on Information Theory*, IT-36(5):961–1005, September 1990.
- [36] I. Daubechies. *Ten Lectures on Wavelets*. SIAM, 1992.
- [37] B. Escudié and B. Torrésani. Wavelet Representation, Time-Scale Matched Receiver for Asymptotic Sonar Signals Emitted by Bats. In L. Torres, E. Masgrau, and M.A. Lagunas, editors, *Signal Processing V. Theories and Applications*, pages 305–308. Elsevier, 1990.
- [38] K. Falconer. *Fractal Geometry*. J. Wiley and Sons, 1990.
- [39] J. Feder. *Fractals*. Plenum Press, 1988.
- [40] P. Flandrin. *Représentations Temps-Fréquence Des Signaux Non-Stationnaires*. Thèse d'Etat, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1987.
- [41] P. Flandrin. On the spectrum of fractional Brownian motions. *IEEE Trans. on Info. Theory*, IT-35(1):197–199, June 23, 1989.
- [42] P. Flandrin. Signal Detection in the Time-Frequency Plane. In *Workshop on Advanced Information Processing in Automatic Control AIPAC-89*, pages 131–134, Nancy, 1989.
- [43] P. Flandrin. Sur une classe générale d'extensions affines de la distribution de Wigner-Ville. In *13ème Colloque GRETSI*, pages 17–20, Juan Les Pins, France, Septembre 1991.



- [44] P. Flandrin. Fractional Brownian Motion and Wavelets. In M. Farge, J.C.R. Hunt, and J.C. Vassilicos, editors, *Wavelets, Fractals and Fourier Transforms - New Developments and New Applications*, pages 69–124. Oxford Univ. Press, 1992.
- [45] P. Flandrin. Wavelet analysis and synthesis of fractional Brownian motion. *IEEE Trans. on Info. Theory*, IT-38(2):910–917, 1992.
- [46] P. Flandrin. *Temps-Fréquence*. Hermès, Paris, 1993.
- [47] P. Flandrin and B. Escudié. An Interpretation of the Pseudo-Wigner-Ville Distribution. *Signal Processing*, 6(1):27–36, 1984.
- [48] P. Flandrin and P. Gonçalves. From wavelets to time-scale energy distributions. In LL. Schumaker and G. Webb, editors, *Recent Advances in the Theory of Wavelets*. Academic Press, New York, 1993.
- [49] P. Flandrin and W. Martin. Pseudo-Wigner Estimators for the Analysis of Non-Stationary Processes. In *IEEE ASSP Spectrum Estimation Workshop II*, pages 181–185, Tampa (FL), 1983.
- [50] P. Flandrin and O. Rioul. Affine Smoothing of the Wigner-Ville distribution. In *IEEE Int. Conf. on Acoust., Speech and Signal Proc. ICASSP-90*, pages 2455–2458, Albuquerque (NM), 1990.
- [51] D. Gabor. Theory of communication. *Journal of the IEE*, 93:429–457, 1946.
- [52] C. Gasquet and P. Witomsky. *Analyse de Fourier et Applications*. Masson, Paris, 1990.
- [53] P. Gonçalves and P. Flandrin. Bilinear time-scale analysis applied to local scaling exponents estimation. In Y. Meyer and S. Roques, editors, *Progress in Wavelet Analysis and Applications*, pages 271–276, Toulouse, France, 1992.
- [54] P. Gonçalves and P. Flandrin. Scaling exponents estimation from time-scale energy distributions. In *IEEE Int. Conf. on Acoust., Speech and Signal Proc. ICASSP-92*, pages V.157–V.160, San Francisco (CA), 1992.
- [55] P. Gonçalves and P. Flandrin. Sur la localisation et la géométrie des distributions affines. In *14ème Colloque GRETSI*, pages 355–358, Juan Les Pins, France, 1993.
- [56] A. Grossmann. Parity Operator and Quantization of  $\delta$ -Functions. *Commun. Math. Phys.*, 48:191–194, 1976.
- [57] A. Grossmann and P. Huguenin. Group-theoretical aspects of the Wigner-Weyl isomorphism. *Helvetica Physica Acta*, 51:252–261, 1978.
- [58] A. Grossmann and J. Morlet. Decomposition of Hardy Functions into Square Integrable Wavelets of Constant Shape. *SIAM J. Math Anal.*, 15(4):723–736, 1984.

- [59] A. Grossmann, J. Morlet, and T. Paul. Transforms associated with square-integrable group representations. Part 1. General results. *Journal of Mathematical Physics*, 26(10):2473–2479, October 1985.
- [60] A. Grossmann, J. Morlet, and T. Paul. Transforms associated with square-integrable group representations. Part 2. Examples. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, 45(3):293–309, 1986.
- [61] C. Heil and D. Walnut. Continuous and discrete wavelet transforms. *SIAM Review*, 31(4):628–666, December 1989.
- [62] F. Hlawatsch. Interference terms in the Wigner distribution. In *Proceedings of the International Conference on Digital Signal Processing*, pages 363–367, Florence, Italy, 1984.
- [63] F. Hlawatsch. Duality and Classification of Bilinear Time-Frequency Signal Representations. *IEEE Trans. Signal Processing*, 39(7):1564–1574, July 1991.
- [64] F. Hlawatsch. Regularity and Unitarity of Bilinear Time-Frequency Signal Representations. *IEEE Trans. on Information Theory*, 38(1):82–94, January 1992.
- [65] F. Hlawatsch and G. F. Boudreaux-Bartels. Linear and quadratic time-frequency representations. *IEEE Signal Processing Magazine*, 9(2):21–67, April 1992.
- [66] F. Hlawatsch and P. Flandrin. The interference structure of Wigner distribution and related time-frequency signal representations. In W. Mecklenbräuker, editor, *The Wigner Distribution - Theory and Applications in Signal Processing*. Elsevier, 1993. A paraître.
- [67] F. Hlawatsch, A. Papandreou, and G. F. Boudreaux-Bartels. The Power Classes of Quadratic Time-Frequency Representations: A Generalization of the Affine and Hyperbolic Classes. In *Proceedings of the 27th Asilomar Conf.*, Pacific Grove, (CA), Nov. 1993.
- [68] F. Hlawatsch and R. Urbanke. Bilinear Time-Frequency Representations of Signals: The Shift-Scale Invariant Class. *IEEE Trans. Signal Processing*, 42(2), February 1994. to appear.
- [69] N. Jacobson. *Lie Algebras*. Interscience, New York, 1962.
- [70] A. J. E. M. Janssen. On the locus and spread of pseudo-density functions in the time-frequency plane. *Philips Journal of Research*, 37(3):79–110, 1982.
- [71] A. J. E. M. Janssen. Positivity Properties of Phase-Plane Distribution Functions. *J. Math. Phys.*, 25(7):2240–2252, 1984.
- [72] A. J. E. M. Janssen. Bilinear Phase-Plane Distribution Functions and Positivity. *J. Math. Phys.*, 26(8):1986–1994, 1985.

- [73] A. J. E. M. Janssen. Positivity of Time-Frequency Distribution Function. In *Proceedings of IMA Int. Conf. on Math. in Signal Proc.*, Bath, (UK), 1985.
- [74] H. E. Jensen, T. Høholdt, and J. Justesen. Double series representation of bounded signals. *IEEE Transactions on Information Theory*, IT-34(4):613–624, July 1988.
- [75] J. Jeong and W. J. Williams. Kernel Design for Reduced Interference Distributions. *IEEE, Trans. Sig. Proc.*, 40(2):402–412, Feb. 1992.
- [76] S. M. Kay. *Modern Spectral Estimation. Theory and Application*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1988.
- [77] A. A. Kirillov. *Elements of the Theory of Representations*. Springer-Verlag, 1976.
- [78] K. Kodera, R. Gendrin, and C. de Villedary. Analysis of Time-Varying Signals with Small BT Values. *IEEE Trans. on ASSP*, ASSP-26(1):64–76, 1978.
- [79] A. N. Kolmogorov. *C. R. Acad. Sci. USSR*, 30(301,358), 1941.
- [80] A. N. Kolmogorov. A refinement of previous hypothesis concerning the local structure of turbulence in a viscous incompressible fluid at high Reynolds number. *J. Fluid Mech.*, 13(82), 1962.
- [81] H. J. Landau and H. O. Pollak. Prolate Spheroidal Functions, Fourier Analysis and Uncertainty – II. *Bell Syst. Tech. J.*, 40:65–84, 1961.
- [82] P. Lévy. Le Mouvement Brownien. *Mém. Sc. Math.*, 126:1–81, 1954.
- [83] T. Lundhal, W. J. Ohley, S. M. Kay, and R. Siffert. Fractional brownian motion: A maximum likelihood estimator and its application to image texture. *IEEE Trans. on Medical Imaging*, MI-5(3):152–161, September 1986.
- [84] S.G. Mallat. A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation. *IEEE Trans. on Pattern Anal. and Machine Intell.*, PAMI-11(7):674–693, 1989.
- [85] S.G. Mallat and W. L. Hwang. Singularity detection and processing with wavelets. *IEEE Trans. on Information theory*, 38(2):617–643, March 1992.
- [86] B.B. Mandelbrot. *The Fractal Geometry of Nature*. W. H. Freeman, New York, 1982.
- [87] B.B. Mandelbrot and J.W. van Ness. Fractional Brownian motions, fractional noises and applications. *SIAM Rev.*, 10(4):422–437, 1968.
- [88] N.M. Marinovic. *The Wigner distribution and the ambiguity function: generalizations, enhancement, compression and some applications*. PhD thesis, The City University of New-York, 1986.

- [89] S. L. Marple Jr. *Digital Spectral Analysis with applications*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, a. v. oppenheim edition, 1987.
- [90] J. E. Moyal. Quantum mechanics as a statistical theory. *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 45:99–124, 1949.
- [91] P. E. Nachtigall and P. W. B. Moore, editors. *Animal Sonar, Processes and Performance*. NATO ASI Series, Plenum Press, New York, 1986.
- [92] M. Najim. *Modélisation et identification en traitement du signal*. Masson, Paris, 1988.
- [93] J. P. Ovarlez, J. Bertrand, and P. Bertrand. Computation of affine time-frequency distributions using the fast Mellin transform. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing — ' ICASSP '92*, pages V117–V120, 1992.
- [94] J. Ph. Ovarlez. *La Transformation de Mellin: Un Outil pour l'Analyse des Signaux à Large Bande*. Thèse de Doctorat, Université de Paris 6, 1992.
- [95] A. Papandreou and G. F. Boudreaux-Bartels. Distributions for time-frequency analysis: a generalization of Choi-Williams and the Butterworth distribution. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing — ICASSP '92*, pages V181–V184, San Francisco (CA), 1992.
- [96] A. Papandreou, F. Hlawatsch, and G. F. Boudreaux-Bartels. Quadratic time-frequency distributions: the new hyperbolic class and its intersection with the affine class. In *Proceedings of the Sixth IEEE-SP Workshop on Statistical Signal and Array Processing*, pages 26–29, Victoria, Canada, 1992.
- [97] A. Papandreou, F. Hlawatsch, and G. F. Boudreaux-Bartels. A unified framework for the Bertrand distribution and the Altes distribution: the new hyperbolic class of quadratic time-frequency distributions. In *Proceedings of the IEEE International Symposium on Time-Frequency and Time-Scale Analysis*, pages 27–30, Victoria, Canada, 1992.
- [98] A. Papandreou, F. Hlawatsch, and G. F. Boudreaux-Bartels. The hyperbolic class of quadratic time-frequency representations. Part I: Constant-Q warping, the hyperbolic paradigm, properties, and members. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 41(12), December 1993.
- [99] A. Papoulis. *Signal Analysis*. McGraw-Hill, New York, 1977.
- [100] G. Parisi and U. Frisch. In M. Ghil, R. Benzi, and G. Parisi, editors, *Turbulence and predictability in geophysical fluid dynamics and climate dynamics*, page 71. North-Holland, Amsterdam, 1985.
- [101] A. W. Rihaczek. *Principles of High Resolution Radar*. McGraw Hill, New York, 1969.

- [102] O. Rioul and P. Flandrin. Time-scale energy distributions: A general class extending wavelet transforms. *IEEE Transactions on Signal Processing*, SP-40(7):1746–1757, July 1992.
- [103] O. Rioul and M. Vetterli. Wavelets and signal processing. *IEEE Signal Processing Magazine*, 8(4):14–38, October 1991.
- [104] A. Royer. Wigner function as expectation value of a parity operator. *Phys. Rev. A*, 15(2):449–450, 1977.
- [105] R. G. Shenoy and T. W. Parks. Wide-band ambiguity functions and affine Wigner distributions. *Signal Processing*. submitted.
- [106] R. G. Shenoy and T. W. Parks. Affine Wigner distributions. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing — ICASSP '92*, pages V185–V188, 1992.
- [107] D. Slepian and H. O. Pollack. Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty. *Bell System Technical Journal*, 40:43–64, January 1961.
- [108] L. R. O. Storey. An Investigation of Whistling Atmospherics. *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, A(246):113–141, 1953.
- [109] S. M. Sussman. Least Square Synthesis of Radar Ambiguity Function. *Trans. IRE, IT*, 8:246–254, 1962.
- [110] A.H. Tewfik and M. Kim. Correlation structure of the discrete wavelet coefficients of fractional Brownian motions. *IEEE Trans. on Info. Theory*, IT-38(2):904–909, 1992.
- [111] H. L. Van Trees. *Detection, Estimation and Modulation Theory*. J. Wiley and sons, New York, 1968.
- [112] A. Unterberger. The Calculus of Pseudo-Differential Operators of Fuchs Type. *Comm. in Part. Diff. Eq.*, 9:1179–1236, 1984.
- [113] B. Vidalie and P. Flandrin. Comparaison pratique de deux méthodes temps-fréquence et temps-échelle obtenues par lissage de la distribution de Wigner-Ville. Technical Report TS-89-06, LTS-ICPI, UA 346 CNRS, Juillet 1989.
- [114] N. Ja. Vilenkin. *Special Functions and the Theory of Group Representations*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1968.
- [115] J. Ville. Théorie et applications de la notion de signal analytique. *Cables et Transmission*, 2A:61–74, 1948.
- [116] H. Weyl. *Gruppentheorie und Quantenmechanik*. S. Hirzel, Basel, 1928.
- [117] A. D. Whalen. *Detection of signals in noise*. Academic Press, New York, 1971.

- [118] E. P. Wigner. On the quantum correction for thermodynamic equilibrium. *Physical Review*, 40:749–759, 1932.
- [119] E. P. Wigner. Quantum-Mechanical Distribution Functions Revisited. In W. Yourgrau and A. Van de Merve, editors, *Perspectives in Quantum Theory*, pages 25–36. MIT press, 1971.
- [120] P. M. Woodward. *Probability and Information Theory with Applications to Radar*. Pergamon, London, 1953.
- [121] G.W. Wornell and A. V. Oppenheim. Estimation of fractal signals from noisy measurements using wavelets. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 40(3):611–623, March 1992.
- [122] A.M. Yaglom. *Correlation Theory of Stationary and Related Random Functions*. Springer-Verlag, London, 1986.



# Liste des figures

1.1	(a) Wigner-Ville du signal - (b) représentation "idéale" (du point de vue visuel) du signal - (c) fonction d'ambiguïté et, superposé, le gabarit de la fenêtre $f(n, \tau)$ correspondant au spectrogramme - (d) spectrogramme. . .	18
1.2	(a) Fonction d'ambiguïté et, superposé, le gabarit de la fenêtre $f(n, \tau)$ correspondant à la distribution de Choi-Williams - (b) Distribution de Choi-Williams. . . . .	20
1.3	(a) Wigner-Ville du signal - (b) Représentation "idéale" du signal - (c) Fonction d'ambiguïté et, superposé, le gabarit de la fenêtre $f(n, \tau)$ correspondant à la distribution de Choi-Williams (CW) - (d) Représentation de CW. . . . .	21
1.4	(a) Wigner-Ville ( $\Delta\nu_h = 0 \text{ Hz}$ , $\Delta t_g = 0 \text{ sec.}$ )- (b) DPWVL ( $\Delta\nu_h = 0 \text{ Hz}$ , $\Delta t_g = 7.43 \text{ sec.}$ ) - (c) DPWVL ( $\Delta\nu_h = 0.019 \text{ Hz}$ , $\Delta t_g = 15.7 \text{ sec.}$ ) - (d) Spectrogramme ( $\Delta\nu_h = 0.032 \text{ Hz}$ , $\Delta t_g = 15.7 \text{ sec.}$ ) . . . . .	22
1.5	(a) Wigner-Ville du signal - (b) Représentation "idéale" du signal - (c) Fonction d'ambiguïté et, superposé, le gabarit de la fenêtre $f(n, \tau)$ optimale - (d) Distribution adaptative. . . . .	24
1.6	(a) Pavage uniforme du plan temps-fréquence (Gabor) - (b) Partage à surtension constante du plan temps-fréquence (ondelettes). . . . .	28
1.7	(a) Ondelette analysante $\psi_a(t)$ à deux échelles différentes. On passe de l'une à l'autre par une opération de dilatation en temps- (b) Gabarits fréquentiels correspondants, illustrant la notion de filtrage à surtension $Q$ constante - (c) Fenêtres à court terme pour deux fréquences différentes. On passe de l'une à l'autre par une opération de translation en fréquence - (d) Gabarits fréquentiels correspondants, illustrant le filtrage à bande $B$ constante. . . . .	29
1.8	Intersections entre classe de Cohen, classe affine et classe hyperbolique. Les classes de Cohen et hyperboliques sont deux représentations unitairement équivalentes du groupe de Weyl-Heisenberg. La classe affine est construite sur des principes de covariance par les opérateurs de translation en temps et changement d'échelle. . . . .	44
2.1	(a) Signal - (b) Spectrogramme $\Delta t_f(C) = 2.64 \text{ ms}$ - (c) Spectrogramme $\Delta t_f(C) = 20.8 \text{ ms}$ - (d) Scalogramme $\Delta t_{f=\frac{f_0}{a}}(\Omega) = 3.2 \text{ ms}$ pour $f = 0.5 \text{ KHz}$ et $\Delta t_{f=\frac{f_0}{a}}(\Omega) = 32 \text{ ms}$ pour $f = 0.05 \text{ KHz}$ . . . . .	51



2.2	(a) Signal - (b) Spectrogramme $\Delta t_f(C) = 2.64$ ms - (c) Spectrogramme $\Delta t_f(C) = 20.8$ ms - (d) Scalogramme $\Delta t_{f=\frac{f_0}{a}}(\Omega) = 3.2$ ms pour $f = 0.5$ KHz et $\Delta t_{f=\frac{f_0}{a}}(\Omega) = 32$ ms pour $f = 0.05$ KHz. . . . .	52
2.3	DPWVLA calculées pour différents couples de résolution en temps et en fréquence sur le signal décrit à la figure 1.1. Les différentes valeurs choisies assurent une transition progressive entre distribution de Wigner-Ville (a) et scalogramme (f). (a) $\Delta t_{f_0}(\Omega) = 0$ ms, $\Delta \nu_{f_0}(\Omega) = 0$ KHz (Wigner-Ville) - (b) $\Delta t_{f_0}(\Omega) = 0.226$ ms, $\Delta \nu_{f_0}(\Omega) = 0.0035$ KHz - (c) $\Delta t_{f_0}(\Omega) = 0.565$ ms, $\Delta \nu_{f_0}(\Omega) = 0.007$ KHz - (d) $\Delta t_{f_0}(\Omega) = 1.13$ ms, $\Delta \nu_{f_0}(\Omega) = 0.007$ KHz - (e) $\Delta t_{f_0}(\Omega) = 2.82$ ms, $\Delta \nu_{f_0}(\Omega) = 0.01$ KHz - (f) $\Delta t_{f_0}(\Omega) = 3.2$ ms, $\Delta \nu_{f_0}(\Omega) = 0.025$ KHz (scalogramme). . . . .	53
2.4	Adaptation entre l'évolution de la fenêtre à court terme d'un lissage affine de la distribution de Wigner-Ville et une loi de modulation hyperbolique en fréquence. . . . .	55
2.5	(a) Spectrogramme, $\Delta t( T_x ^2) = 1.55$ ms - (b) Spectrogramme, $\Delta t( T_x ^2) = 77.37$ ms - (c) Scalogramme, $\Delta t_{f_0}( S_x ^2) = 1.55$ ms. . . . .	57
2.6	Scalogramme, $\Delta t_{f_0}( S_x ^2) = 1.55$ ms. . . . .	58
2.7	(a) Origine de l'existence de la distribution affine $\Omega$ en un point quelconque $(t, \nu)$ du plan temps-fréquence. Les aires grisées de la même trame sont identiques. Les surfaces hachurées symbolisent des composantes "signal" - (b) Dans le plan des phases, deux composantes "signal" interfèrent en un lieu où la dérivée de la phase est égale à la différence finie formée par $\Phi_x(\nu_1)$ et $\Phi_x(\nu_2)$ . . . . .	70
2.8	Distribution $D$ ( $k_d = 0.5$ ) et retards de groupe $\tau_g(\nu) = t_0 + c\nu^{k_s-1}$ . Ligne 1: Evaluation du lieu théorique des interférences par les règles de construction géométriques. (a) $k_s = 0.5$ - (b) $k_s = 0$ - (c) $k_s = -1$ . Ligne 2: Calcul numérique de la distribution $D$ . (d) $k_s = 0.5$ - (e) $k_s = 0$ - (f) $k_s = -1$ . . . . .	76
2.9	Distribution unitaire de Bertrand ( $k_d = 0$ ) et retards de groupe $\tau_g(\nu) = t_0 + c\nu^{k_s-1}$ . Ligne 1: Evaluation du lieu théorique des interférences par les règles de construction géométriques. (a) $k_s = 0.5$ - (b) $k_s = 0$ - (c) $k_s = -1$ . Ligne 2: Calcul numérique de la distribution (unitaire) de Bertrand. (d) $k_s = 0.5$ - (e) $k_s = 0$ - (f) $k_s = -1$ . . . . .	76
2.10	Distribution active de Unterberger ( $k_d = -1$ ) et retards de groupe $\tau_g(\nu) = t_0 + c\nu^{k_s-1}$ . Ligne 1: Evaluation du lieu théorique des interférences par les règles de construction géométriques. (a) $k_s = 0.5$ - (b) $k_s = 0$ - (c) $k_s = -1$ . Ligne 2: Calcul numérique de la distribution (active) de Unterberger. (d) $k_s = 0.5$ - (e) $k_s = 0$ - (f) $k_s = -1$ . . . . .	77
2.11	A partir de deux points arbitraires $(t_1, \nu_1)$ et $(t_2, \nu_2)$ du plan temps-fréquence, on repère la position théorique $(t_i, \nu_i)$ du lieu de leur interférence, pour $-15 \leq k \leq 18$ . (a) En appliquant les règles de construction géométrique exactes (équations (2.28) et (2.29)) - (b) En utilisant l'approximation de moyenne généralisée (équation (2.34)). . . . .	80

2.12	<i>Mêmes constructions qu'en 2.11 mais dans le cas de signaux à bandes étroites. . . . .</i>	81
2.13	<i>(a) Loi théorique de fréquence instantanée d'un signal modulé sinusoïdalement - (b) Estimation par application de la moyenne généralisée du lieu des interférences générées par la distribution de Wigner-Ville - (c) Représentation de la distribution de "Wigner-Ville" calculée sur le même signal. On note que les points d'inflexion de la loi de modulation correspondent à des points multiples pour la symétrie du point milieu, ils sont repérés par une forte concentration énergétique. . . . .</i>	82
2.14	<i>(a) Loi théorique de fréquence instantanée d'un signal modulé sinusoïdalement - (b) Estimation par application de la moyenne généralisée du lieu des interférences générées par la distribution unitaire de Bertrand - (c) Représentation de la distribution unitaire de "Bertrand" calculée sur le même signal. . . .</i>	83
2.15	<i>Comportement théorique des distributions localisées affines correspondantes à des valeurs voisines de <math>k = 2</math>. De haut en bas: <math>k = 2.5</math>, <math>k = 2.25</math>, <math>k = 2</math>, <math>k = 1.75</math>, <math>k = 1.5</math>. . . . .</i>	84
2.16	<i>Application des règles de construction ponctuelle correspondantes à des variations de <math>k</math> autour de la valeur 0. De haut en bas: <math>k = 1</math>, <math>k = 0.5</math>, <math>k = 0</math>, <math>k = -0.5</math>, <math>k = -1</math>. . . . .</i>	85
2.17	<i>Sur un signal modulé sinusoïdalement en fréquence, application des règles de symétries non linéaires associées à une évolution négative du paramètre <math>k</math>. De haut en bas <math>k = -2</math>, <math>k = -4</math>, <math>k = -8</math>, <math>k = -15</math>. . . . .</i>	86
2.18	<i>Sur un signal modulé sinusoïdalement en fréquence, application des règles de symétries non linéaires associées à une évolution positive du paramètre <math>k</math>. De haut en bas <math>k = 3</math>, <math>k = 4</math>, <math>k = 5</math>, <math>k = 6</math>, <math>k = 10</math>. . . . .</i>	87
2.19	<i>(a) Profil des interférences externes générées par la distribution unitaire de Bertrand, dans le cas de deux signaux modulés hyperboliquement en fréquence - (b) Evaluation numérique correspondante. . . . .</i>	88
2.20	<i>(a) Profil des interférences externes générées par la distribution unitaire de Bertrand, dans le cas de quatre atomes répartis sur les coins d'un rectangle dans le plan temps-fréquence. - (b) Evaluation numérique de la distribution dans ce contexte. . . . .</i>	89
2.21	<i>- (a) Distribution de Bertrand estimée sur un logon gaussien modulé en fréquence (<math>\nu_0 = 0.15\text{Hz}</math>) et centré sur la date <math>t_0 = 24\text{s}</math> - (b) Distribution de Bertrand estimée sur deux versions dilatées (<math>F(\gamma_0) = 0.487</math> et <math>F(-\gamma_0) = 1.787</math>) du signal générateur décrit en (a). . . . .</i>	91
2.22	<i>Distribution unitaire de Bertrand évaluée sur un signal composé de deux atomes gaussiens (obtenus par translations symétriques en temps et en fréquence d'un même modèle). Le terme croisé résultant de l'interférence des deux composantes se localise entre deux hyperboles frontières passant par les composantes "signal". La direction locale des oscillations est déterminée par la normale à l'hyperbole joignant le bipoint en interaction. . . . .</i>	91

- 3.1 (a) *En contours de niveaux, représentation de Wigner-Ville d'un chirp linéaire  $x_l(t)$  (signal modulé linéairement en fréquence). En niveaux de gris représentation de Wigner d'un écho simulé de ce chirp  $(\mathcal{S}_{\eta_0}x)(t)$  (taux Doppler  $\eta_0 = 0.833$ , retard  $\tau_0 = 0$ ). Le changement d'orientation de la loi marque la non-tolérance à l'effet Doppler des chirps linéaires. (b) Mêmes simulations avec une loi de modulation hyperbolique en fréquence  $x_h(t)$  et les distributions unitaires de Bertrand associées. La transformation du plan (3.9) formalisant l'effet Doppler laisse la trajectoire hyperbolique globalement invariante. En calculant le moment de premier ordre sur la variable temps de la distribution de Bertrand, on identifie la loi de retard de groupe et par conséquent le chemin d'intégration qui, dans une stratégie simplifiée de détection, est commun au signal et à l'écho. . . . . 102*
- 3.2 (a) *Application d'un filtre adapté temps-fréquence sur la distribution de Wigner-Ville d'un chirp linéaire  $x_l(t)$ . Pointillés: caractéristique obtenue par filtrage adapté temps-fréquence de  $x_l(t)$  - trait plein: estimation du retard sur  $(\mathcal{S}_{\eta_0}x_l)(t) \rightarrow \hat{\tau}_0 \neq 0$  - (b) Construction d'un filtre adapté temps-fréquence à partir de la distribution unitaire de Bertrand d'un chirp hyperbolique  $x_h(t)$ . Pointillés: caractéristique issue du filtrage adapté temps-fréquence de  $x_h(t)$  - trait plein: estimation du retard sur  $(\mathcal{S}_{\eta_0}x_h)(t) \rightarrow \hat{\tau}_0 = 0$ . 103*
- 3.3 (a) *Enregistrement in situ d'un signal de veille (émis par une chauve-souris) suivi d'échos - (b) Carré de l'enveloppe de la fonction d'autocorrélation du signal émis - (c) Carré de l'enveloppe de la sortie du filtre adapté classique appliqué à l'écho. . . . . 105*
- 3.4 (a) *Distribution unitaire de Bertrand évaluée sur le signal de veille émis de la figure 3.3(a) - (b) Distribution unitaire de Bertrand de l'écho du signal 3.3(a) - (c) Approximation de la fonction d'autocorrélation du signal émis par intégration temps-fréquence (équation 3.10). (d) Comparaison signal émis-écho par intégration de chemin de la distribution 3.4(b) sur le gabarit temps-fréquence du signal de référence. . . . . 106*
- 3.5 (a) *Pavage correspondant au spectrogramme et distribution marginale associée. Les cellules de largeur identique quelle que soit la fréquence analysée font de cet estimateur spectral un outil adapté à des évolutions linéaires de spectres. (b) Pavage à surtension constante et distribution marginale associée. La distribution non uniforme du compromis biais-variance sur les fréquences fournit un cadre ad hoc d'estimation de spectres à évolution en loi de puissance. . . . . 110*

3.6	<i>Histogrammes des estimations de l'exposant théorique <math>\alpha = 5/3</math> sur une population de 2729 réalisations indépendantes de bruits en <math>1/f</math> (chaque échantillon comporte 32768 points, <math>\nu_e = 1\text{kHz}</math>). Deux stratégies sont employées. Histogramme en clair: régressions linéaires dans un diagramme log-log de l'estimateur (3.13) de la classe de Cohen (spectrogramme <math>\Delta t_f(C) = 42\text{ms}</math>) - Histogramme en foncé: régressions linéaires dans un diagramme log-log de l'estimateur (3.15) de la classe affine (scalogramme <math>\Delta t_{f_{\min}}(\Omega) = 42\text{ms}</math>). Dans les deux cas, les ajustements linéaires se limitent au même intervalle de fréquence (<math>0.02\text{kHz} \leq \nu \leq 0.5\text{kHz}</math>) fixé conjointement par la limite de bande spectrale analysée et la nécessité d'un nombre raisonnable de coefficients décorrélés aux grandes échelles. . . . .</i>	112
3.7	<i>Régression linéaire sur une série de points normalement distribués et dont la variance est elle-même une fonction de l'abscisse <math>j</math>. . . . .</i>	116
3.8	<i>Evolution de la variance sur <math>\hat{\alpha}</math> en fonction du nombre <math>J</math> d'échelles intervenant dans la régression linéaire. En trait continu: variance empirique sur simulations numériques (2729 réalisations de bruits en <math>1/f</math> avec <math>N_0 = 32\text{K}</math> et <math>\alpha = 5/3</math>). En trait pointillé: variance théorique (équation (3.20)). . . . .</i>	117
3.9	<i>Evolution de la variance sur <math>\hat{\alpha}</math> estimé par un ajustement pondéré, en fonction du nombre <math>J</math> d'échelles de régression. En trait continu: variance empirique sur simulations numériques (2729 réalisations de bruits en <math>1/f</math> avec <math>N_0 = 32768</math> et <math>\alpha = 5/3</math>). En trait pointillé: variance théorique (équation (3.22)). . . . .</i>	118
3.10	<i>Estimation de l'exposant <math>\alpha</math> sur 2729 épreuves de bruits en <math>1/f</math> (<math>N_0 = 32768</math>, <math>\alpha = 5/3</math>). Histogramme en clair: régressions par les moindres carrés non pondérés. Histogramme en foncé: régressions linéaires pondérées par la variance théorique des points. Dans les deux cas <math>J = 7</math>. . . . .</i>	119
3.11	<i>Sur 400 enregistrements de "jets" turbulents, estimation du coefficient de Kolmogorov. Histogramme en clair: estimation basée sur une analyse spectrale classique (<math>\Delta t_f(C) = 21\text{ms}</math>). Histogramme en foncé: estimation basée sur les distributions marginales de scalogrammes (<math>\Delta t_{f_{\min}}(\Omega) = 21\text{ms}</math>). Dans les deux cas, la plage de régression linéaire est comprise dans l'intervalle <math>[0.2\text{kHz}, 2\text{kHz}]</math>, la fréquence d'échantillonnage valant <math>2\text{kHz}</math>. . . . .</i>	121
3.12	<i>Différentes réalisation de fBm pour différentes valeurs de l'exposant de Hölder <math>H</math>. De haut en bas <math>H = 0.1</math> - <math>H = 0.3</math> - <math>H = 1/2</math> - <math>H = 0.7</math> - <math>H = 0.9</math>. . . . .</i>	124
3.13	<i>Quelle que soit l'échelle d'observation <math>\alpha</math>, un processus auto-similaire se caractérise par la reproduction statistique de son comportement temporel. . . . .</i>	125
3.14	<i>Fonction de corrélation résiduelle des détails à l'échelle <math>a = 2</math> de décompositions de mouvements browniens fractionnaires sur une base de Haar (<math>\mathcal{R} = 1</math>). L'exposant <math>H</math> varie entre 0.05 et 0.95 et les échantillons comportent 2048 points chacun. Plus <math>\mathcal{R}</math> est grand devant <math>H</math>, plus la dépendance à long terme s'atténue. . . . .</i>	128

- 3.15 Sur une brownien fractionnaire  $H = 0.95$ , corrélation résiduelle à l'échelle  $a = 2$  d'une décomposition (a) sur des ondelettes de Haar ( $\mathcal{R} = 1$ ) - (b) sur des ondelettes de Daubechies d'ordre de cancellation 2 ( $\mathcal{R} = 2$ ). La dépendance longue des coefficients diminue ostensiblement lorsque  $\mathcal{R} > H + 1/2$ . . . . . 129
- 3.16 Scalogramme d'un brownien fractionnaire bimodal,  $H_0 = 0.2$ ,  $H_1 = 0.5$  et  $t_0 = 8192$ . L'ondelette de Morlet est choisie avec un coefficient de surtension  $Q = 0.25$ . (a) Représentation du log-scalogramme au voisinage de la transition  $t_0$  - (b) Suivi local de la singularité  $H(t)$  par régressions linéaires de (3.44) - (c) Histogramme des forces de singularité estimées. . . . . 133
- 3.17 Pseudo Wigner-Ville lissée affine d'un brownien fractionnaire bimodal,  $H_0 = 0.2$ ,  $H_1 = 0.5$  et  $t_0 = 8192$ . Le coefficient de surtension du filtre passe-bande ( $h(t)$ ) vaut 0.25, le produit durée-bande  $BT$  de l'analyse est égal à 64 (vaut 1 dans le cas du scalogramme). (a) Représentation de la log-distribution au voisinage de la transition  $t_0$  - (b) Suivi local de la singularité  $H(t)$  par application de (3.48) - (c) Histogramme des forces de singularité estimées. . . . . 136
- 3.18 (a) Simulation d'un mouvement brownien fractionnaire (3.26) de singularité Hölderienne uniforme  $H = 1/3$  - (b) Représentation de la fonction singulière de Weierstrass-Mandelbrot correspondant à une dimension fractale  $D = 2 - H = 5/3$ . . . . . 138
- 3.19 Suivi instantané de la singularité  $H(t)$  sur différentes réalisations de fonction déterministes de Weierstrass-Mandelbrot. Le paramètre de singularité  $H$  est rendu dépendant du temps par le biais d'une fonction  $\text{Arctan}((a),(b))$ , et d'une loi linéaire (c). Dans les trois cas,  $\lambda = 1.5$ ,  $0 \leq t \leq 6$ ,  $0.2 < H(t) < 0.5$ . La colonne de gauche correspond aux estimations issues de scalogrammes ( $Q = 0.25$ ,  $BT = 1$ ), la colonne de droite correspond aux estimations faites par régression linéaire locale de pseudo Wigner-Ville lissées affines ( $Q = 0.25$ ,  $BT = 64$ ). . . . . 139
- 3.20 Scalogramme appliquée à une singularité locale du type  $x(t) \sim |t - t_0|^H$ , avec  $H = 0.6$ . L'influence de la singularité se délocalise et fait apparaître un cône d'influence centré sur  $t_0 = 5.14$  (a). Localement, le scalogramme suit une progression en loi de puissance à travers les échelles (b). Par régression linéaire de la distribution dans un diagramme log-log, il est possible de retrouver la force de la singularité locale (c). . . . . 142
- 3.21 (a) Signature temps-fréquence de la distribution de Unterberger (forme active) évaluée sur la singularité ponctuelle décrite en figure 3.20. Sur une large gamme de fréquence, la distribution reste localisée sur un support temporel constant - (b) Localement, la loi d'échelle est révélée par le progression de la distribution à travers les fréquences - (c) estimation de la force de singularité par régression linéaire de la log-distribution à la date  $t_0$  versus  $\log a$ . . . . . 143

3.22	<i>Scalogramme (a) et distribution de Unterberger (b) d'un signal singulier (au sens de la régularités hölderienne) en deux dates <math>t_0 = 2.5</math> et <math>t_1 = 7.5</math>, les singularités valant respectivement <math>H(t_0) = 0.1</math> et <math>H(t_1) = 0.7</math>. A partir des deux analyse, il est possible de mesurer la force des singularités (c)-(d). Mais, alors que le scalogramme ne développe pas de structure interférentielle externe lorsqu'il y a multiplicité des événements (a), la distribution de Unterberger (b), parcequ'elle est une transformée bilinéaire non triviale, génère des franges d'interférence (dont la géométrie peut être décrite par les règles de construction (2.30)). . . . .</i>	144
3.23	<i>Interprétation fréquentielle de l'opération intermédiaire <math>\sum_{(l)} y_k(l) h_a(2l)</math> intervenant dans le calcul d'une DPWVLA. . . . .</i>	149
3.24	<i>(a) Modèle théorique d'un signal modulé sinusoidalement en fréquence - (b) DPWVLA calculée avec une ondelette analysante <math>h(t)</math> réelle - (c) calculée avec une ondelette analytique conjuguée - (d) DPWVLA DPWVLA calculée avec une ondelette analytique. . . . .</i>	149

**Thèse de Doctorat**  
Institut National Polytechnique de Grenoble

Paulo Gonçalves

**Représentations Temps-Fréquence et Temps-Echelle Bilinéaires:  
Synthèse et Contributions**

**Résumé** : Cette thèse est consacrée à l'étude des distributions énergétiques temps-fréquence et temps-échelle, qui sont deux types de représentations conjointes bilinéaires de signaux. Bien que leurs vocations respectives diffèrent, on montre dans une première partie qu'il est possible d'unifier le cadre de leur étude en les présentant comme des représentations unitaires dans un espace de Hilbert, de groupes algébriques munis de règles opératoires particulières. Ainsi, la classe de Cohen, représentation unitaire du groupe de Weyl-Heisenberg, est attachée à des propriétés naturelles de covariance par translations en temps et en fréquence. Les distributions temps-échelle de la classe affine étant, quant à elles, des représentations du groupe affine, sont précisément des distributions covariantes par translation en temps et changement d'échelle. Ce faisant, il est ensuite possible d'élargir le champ des distributions covariantes par un couple spécifique d'opérateurs en faisant usage d'équivalences unitaires entre classes de représentations. Un autre aspect de ces représentations bilinéaires, qui est abordé dans la deuxième partie de la thèse, est lié aux formes quadratiques qui les sous-tendent. Celles-ci, sont notamment responsables de l'existence d'interférences obéissant à des règles de construction géométrique en lien avec la nature des opérateurs mis en jeu. Ces règles de construction sont formalisées dans le cas de certaines distributions affines localisées, et les prédictions théoriques sont confrontées à des résultats de simulation. Enfin, dans une dernière partie, nous abordons certaines situations pour lesquelles les caractérisations temps-échelle sont d'un recours avantageux face aux analyses temps-fréquence. Parmi les problématiques soulevées (qui incluent la tolérance à l'effet Doppler et l'estimation spectrale de bruits "en  $1/f$ "), l'estimation de singularités du type hölderienne occupe une place importante dans la mesure où ces dernières développent une structuration en loi d'échelle que les représentations affines permettent de révéler.

**Abstract** : In the first part of this thesis, we present a unified approach to time-frequency and time-scale analysis. Time-frequency and time-scale representations are multidimensional transformations that indicate the joint time-frequency and joint time-scale content of a signal. Although different in their goals, both the time-frequency and the time-scale tools can be expressed in terms of unitary group representations based on particular covariance operators on the time-frequency plane. Thus, the time-frequency distributions of Cohen's class, which correspond to the Weyl-Heisenberg group, are naturally covariant to time shift and frequency shift, whereas the time-scale distributions of the affine class, which correspond to the affine group, are covariant to time shift and scale change. Moreover, by means of unitary equivalence, it is possible to generate classes of distributions covariant to other operators on the time-frequency plane.

In the second part, we present a new approach for generating bilinear signal representations based on the geometry of cross-terms that arise from the quadratic structure of the distributions. Using geometrical rules and parity operators, we derive a class of affine-localized distributions.

Finally, we emphasize the role of time-scale analysis in several applications, including Doppler radar and sonar processing,  $1/f$  spectral estimation, and characterization of processes displaying scale-law organization. In particular, singularities in signals described by Hölder exponents can be easily revealed and estimated by affine distributions when the scale dependence of these tools is matched to the self-similarity of the processes.