

MODÉLISATION ET SIMULATION
NUMÉRIQUE DE MATÉRIAUX
MICROSTRUCTURÉS POUR L'ISOLATION
ACOUSTIQUE DES CABINES D'AVION

Adeline Augier

Université Paris-Sud XI

25 novembre 2010

Soutenance de thèse

Motivations

Modélisation

Existence et
unicité

Convergence
double échelle

Introduction
Estimations
Limites
Unicité

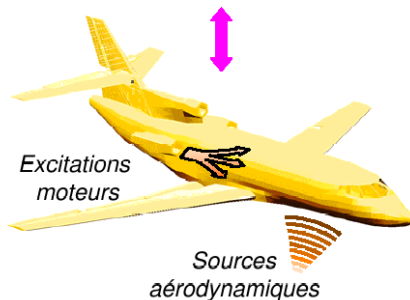
Numérique
microscopique
macroscopique

Biot

Perspectives

MOTIVATIONS

LES SOURCES DE BRUIT



Comment atténuer le bruit des vibrations du fuselage ?

COMPOSITION DU FUSELAGE



Objectif : trouver un **assemblage** de mousses et de laines de verre le plus **efficace** possible et le plus **mince** possible.

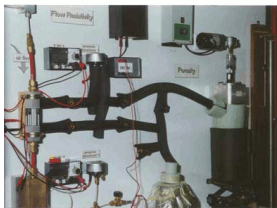
AU NIVEAU INDUSTRIEL

Problématiques pour un matériau donné :

- Comment une onde sonore le fait-elle vibrer ?
- Quelles performances acoustiques ?

Réponses :

- Tests empiriques effectués par le LAUM (Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine)
⇒ Constituants des matériaux poreux bien connus.
- Modèle de Biot : Coefficients difficiles à mesurer.



Difficultés industrielles

- Expériences sur les matériaux hétérogènes coûteuses.
- Forte influence de la géométrie.

Matériau homogène

Matériau **fictif équivalent** au matériau hétérogène et constitué d'un seul composant.

Intérêts : un **seul** composant

- Simplification du **modèle**.
- **Maillage** simplifié et pas de microstructure.

Objectifs :

- Obtention d'un **modèle fermé**.
- Cadre **mathématique**.
- Tests **numériques** du modèle.

Motivations

Modélisation

Existence et
unicité

Convergence
double échelle

Introduction
Estimations
Limites
Unicité

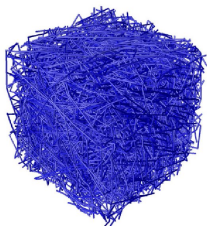
Numérique
microscopique
macroscopique

Biot

Perspectives

MODÉLISATION

LAINE DE VERRE : GÉOMÉTRIE



CAO au niveau
microscopique.

- Matériau hétérogène très complexe.
- Deux constituants :
 - ✓ air,
 - ✓ fibres de verre.

Longueur caractéristique

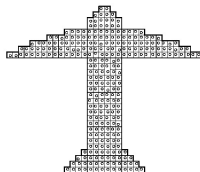
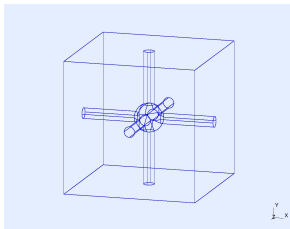
Longueur minimale du domaine qu'il faut étudier pour pouvoir observer une variation du déplacement de l'objet considéré.

Calcul fait à partir des coefficients physiques :

- $l_{\text{air}} \in [0.5 \cdot 10^{-5}; 40 \cdot 10^{-5}] \text{ m}$,
- $l_{\text{verre}} \in [0.2; 40] \text{ m}$,
- diamètre fibre de verre $\approx 0.5 \cdot 10^{-5} \text{ m}$.

HYPOTHÈSE DE PÉRIODICITÉ

Hypothèse : la laine de verre a une **structure périodique**.



Définition : Cellule Y

Cube de côté ε mis à l'échelle 1.

Importance de la forme du domaine **macroscopique**.

Motivations

Modélisation

Existence et
unicité

Convergence
double échelle

Introduction
Estimations
Limites
Unicité

Numérique
microscopique
macroscopique

Biot

Perspectives

DOMAINES MACROSCOPIQUE ET MICROSCOPIQUE

Description du domaine au niveau **microscopique**

- Cellule de référence Y de taille 1.
- Variable y .
- $\bar{Y} = \bar{S} \cup \bar{F}$.

Changement de variables : $y = \frac{x}{\varepsilon}$.

Description du domaine au niveau **macroscopique**

- Domaine général Ω défini **périodiquement** par εY .
- Variable x .
- $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_s \cup \bar{\Omega}_f$.

$$\bar{\partial\Omega} = \bar{\Gamma}_D^{\text{ext}} \cup \bar{\Gamma}_N^{\text{ext}} \cup \bar{\Gamma}_{\text{int}}.$$

et

$$\bar{\partial F} = \bar{\partial Y} \cup \bar{\partial F}_D, \quad \bar{\partial S} = \bar{\partial Y} \cup \bar{\partial S}_N.$$

AVANT D'ÉTABLIR LE SYSTÈME D'ÉQUATIONS

- Etude séparée des comportements **fluide** et **solide**,
- Trois **inconnues** :
 - ✓ déplacement $\mathbf{u} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$,
 - ✓ pression $p : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$,
 - ✓ température $\theta : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$.
- Fonctions **harmoniques en temps** :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x})e^{i\omega t}.$$

SYSTÈME EN VARIABLES DIMENSIONNÉES

- \mathbf{h} = relèvement régulier de la condition de Dirichlet, tel que $\nabla \cdot \mathbf{h} = 0$ dans Ω ,
- Θ = relèvement régulier de la condition de Dirichlet
- $(\theta, \mathbf{u})_{\text{non hom}} = (\Theta, \mathbf{u})_{\text{hom}} + (\Theta, \mathbf{h})$,
- $\mathbf{f}^f = \rho_f \omega^2 \mathbf{h} + i\omega\eta\Delta\mathbf{h}$, $f^\Theta = -i\omega\rho_f c_p \Theta + \kappa\Delta\Theta$,
- $\mathbf{f}^s = \rho_s \omega^2 \mathbf{h} + (\lambda + \mu)\nabla\nabla \cdot \mathbf{h} + \mu\Delta\mathbf{h}$.

Système couplé écrit en fréquence

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\rho_f \omega^2 \mathbf{u} - i\omega\eta\Delta\mathbf{u} + \nabla p & = \mathbf{f}^f \quad \text{dans } \Omega_f, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} & = 0 \quad \text{dans } \Omega_f, \\ i\omega\rho_f c_p \theta - \kappa\Delta\theta - i\omega p & = f^\Theta \quad \text{dans } \Omega_f, \\ -\rho_s \omega^2 \mathbf{u} - (\lambda + \mu)\nabla\nabla \cdot \mathbf{u} - \mu\Delta\mathbf{u} & = \mathbf{f}^s \quad \text{dans } \Omega_s. \end{array} \right. \quad (\text{F-S})$$

CONDITIONS DE BORD

Bord extérieur

- $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} = 0$ sur Γ_N^{ext} ,
- $\mathbf{u} = 0$ sur Γ_D^{ext} .

Bord intérieur Γ_{int}

- Continuité du déplacement.
- Continuité des tenseurs $\boldsymbol{\sigma}^s(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} = \boldsymbol{\sigma}^f(\mathbf{u}, p) \cdot \mathbf{n}$, où

$$\boldsymbol{\sigma}^s(\mathbf{u}) := \mu (\nabla \mathbf{u} + {}^t \nabla \mathbf{u}) + \lambda \nabla \cdot \mathbf{u} \text{ Id}$$

et

$$\boldsymbol{\sigma}^f(\mathbf{u}, p) := \eta \nabla \mathbf{u} - p \text{ Id}.$$

SYSTÈME EN VARIABLES ADIMENSIONNÉES

- Adimensionnement :

$$g = \underbrace{\bar{g}}_{\text{valeur caractéristique}} * \underbrace{\hat{g}}_{\text{sans unité}} .$$

- Définition : $\varepsilon = \frac{l_{\text{air}}}{l_{\text{verre}}} = \frac{l_{\text{temp}}}{l_{\text{verre}}} \in [10^{-5}; 1.810^{-4}]$.

Système en variables adimensionnées

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\omega^2 \rho_f \mathbf{u}_\varepsilon - i\omega \varepsilon^2 \eta \Delta \mathbf{u}_\varepsilon + \nabla p_\varepsilon = \mathbf{f}_\varepsilon^f & \text{dans } \Omega_f, \\ \nabla \cdot \mathbf{u}_\varepsilon = 0 & \text{dans } \Omega_f, \\ i\omega \rho_f c_p \theta_\varepsilon - \varepsilon^2 \kappa \Delta \theta_\varepsilon - i\omega p_\varepsilon = f_\varepsilon^\Theta & \text{dans } \Omega_f, \\ -\rho_s \omega^2 \mathbf{u}_\varepsilon - (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u}_\varepsilon - \mu \Delta \mathbf{u}_\varepsilon = \mathbf{f}_\varepsilon^s & \text{dans } \Omega_s. \end{array} \right. \quad ((F-S)_\varepsilon)$$

+ conditions de bord

REMARQUES SUR LE SYSTÈME $((F-S)_\varepsilon)$

Motivations

Modélisation

Existence et
unicité

Convergence
double échelle

Introduction
Estimations
Limites
Unicité

Numérique
microscopique
macroscopique

Biot

Perspectives

- ε petit :
 - ✓ air : déplacement **microscopique**.
 - ✓ fibre de verre : déplacement **macroscopique**.
- Viscosité $\rightarrow 0$: prise en compte de la nouvelle géométrie.
- Difficulté : en quel sens faire tendre ε vers 0 ?
 - ✓ équations,
 - ✓ domaines.

TRAVAUX ANTÉRIEURS

Travaux antérieurs

- **Onera** : étude asymptotique du cas rigide et code CELPER.
- $((F-S)_\varepsilon)$ **très proche** de celui étudié dans “Homogenizing the Acoustic Properties of the Seabed” Clopeau, Ferrín, Gilbert, Mikelić 2001.

Fonctions harmoniques en temps : résultats en **fonction de la fréquence**.

Conséquences de la gestion du temps

- Forme sesquilinéaire **non coercive** \Rightarrow difficultés :
 - ✓ Existence et unicité de $((F-S)_\varepsilon)$.
 - ✓ Estimations *a priori* du déplacement.
- Système de type **Helmholtz** sans problème de valeur propre interdite à cause du $\varepsilon \rightarrow 0$.
 - ✓ Utile pour l'unicité de la solution de $((F-S)_\varepsilon)$.

PLAN

- 1 EXISTENCE ET UNICITÉ
- 2 CONVERGENCE DOUBLE ÉCHELLE
 - Introduction
 - Estimations a priori
 - Limites double échelle
 - Existence et unicité
- 3 SIMULATIONS NUMÉRIQUES
 - Au niveau microscopique
 - Au niveau macroscopique
- 4 LIEN AVEC LE MODÈLE DE BIOT
- 5 PERSPECTIVES

- 1 EXISTENCE ET UNICITÉ
- 2 CONVERGENCE DOUBLE ÉCHELLE
 - Introduction
 - Estimations a priori
 - Limites double échelle
 - Existence et unicité
- 3 SIMULATIONS NUMÉRIQUES
 - Au niveau microscopique
 - Au niveau macroscopique
- 4 LIEN AVEC LE MODÈLE DE BIOT
- 5 PERSPECTIVES

Motivations

Modélisation

Existence et
unicité

Convergence
double échelle

Introduction
Estimations
Limites
Unicité

Numérique
microscopique
macroscopique

Biot

Perspectives

FORMULATION VARIATIONNELLE

Trouver $(\mathbf{u}_\varepsilon, p_\varepsilon) \in [H_{\text{Dir}}^1(\Omega)]^3 \times L^2_{\text{moy}}(\Omega_f)$ tels que
 $\forall \mathbf{v} \in [H_{\text{Dir}}^1(\Omega)]^3$ et $q \in L^2(\Omega_f)$ on ait

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega^2 \rho_s \int_{\Omega_s} \mathbf{u}_\varepsilon \cdot \bar{\mathbf{v}} + \omega^2 \rho_f \int_{\Omega_f} \mathbf{u}_\varepsilon \cdot \bar{\mathbf{v}} \\ - \lambda \int_{\Omega_s} \nabla \cdot \mathbf{u}_\varepsilon \overline{\nabla \cdot \mathbf{v}} - \mu \int_{\Omega_s} (\nabla \mathbf{u}_\varepsilon + {}^t \nabla \mathbf{u}_\varepsilon) : \overline{\nabla \mathbf{v}} \\ - i\omega\eta\varepsilon^2 \int_{\Omega_f} (\nabla \mathbf{u}_\varepsilon + {}^t \nabla \mathbf{u}_\varepsilon) : \overline{\nabla \mathbf{v}} + \int_{\Omega_f} p_\varepsilon \overline{\nabla \cdot \mathbf{v}} \\ = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \bar{\mathbf{v}}, \\ \int_{\Omega_f} \bar{q} \cdot \nabla \cdot \mathbf{u}_\varepsilon = 0, \end{array} \right. \quad (\text{FV (F-S)}_\varepsilon)$$

$$[H_{\text{Dir}}^1(\Omega)]^3 = \{ \mathbf{u} \in [H^1(\Omega)]^3, \mathbf{u} = 0 \text{ sur } \Gamma_D^{\text{ext}} \}$$

- On se place dans

$$H = \{ \mathbf{u} \in [H_{\text{Dir}}^1(\Omega)]^3, \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \text{ sur } \Omega_f \}.$$

- Une seule variable à traiter : \mathbf{u} .
- Reformulation : écriture de la FV sous la forme $A\mathbf{u} = \mathbf{f}$.
- Problème : A non coercif, théorème de Lax-Milgram ne s'applique pas.

DÉMARCHE 2/2

Théorème de Fredholm

Soit un opérateur $A = B + C$, alors A est bijectif si

- B est bijectif,
- C est compact,
- A est injectif.

Solution :

- écrire $A = B + C : H \rightarrow H'$,
- théorème de Fredholm,
 - ✓ B bijectif : inégalité de Korn pour coercivité,
 - ✓ C : compact par injection de $[H_{\text{Dir}}^1(\Omega)]^3$ dans $L^2(\Omega)$,
 - ✓ A : injectif par inégalité de Korn.
- existence et unicité de $\mathbf{u}_\varepsilon \in [H_{\text{Dir}}^1(\Omega)]^3$.

Pour p_ε :

$$H^\perp = \{ \mathbf{g} \in [H^{-1}(\Omega)]^3, \mathbf{g} = 0 \text{ sur } \Omega_s, \\ \exists p \in L^2(\Omega) \text{ tel que } \mathbf{g} = \nabla p \text{ sur } \Omega_f \}.$$

PLAN

- 1 EXISTENCE ET UNICITÉ
- 2 CONVERGENCE DOUBLE ÉCHELLE
 - Introduction
 - Estimations a priori
 - Limites double échelle
 - Existence et unicité
- 3 SIMULATIONS NUMÉRIQUES
 - Au niveau microscopique
 - Au niveau macroscopique
- 4 LIEN AVEC LE MODÈLE DE BIOT
- 5 PERSPECTIVES

PROPRIÉTÉS RELATIVES À L'HOMOGENÉISATION

Références

- H-mesures et Homogénéisation (80') : L. Tartar.
- Convergence double-échelle (90') : G. Allaire, G. Nguetseng.

Théorème de convergence double-échelle [G. Allaire]

Si $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est uniformément bornée dans $L^2(\Omega)$, alors on peut en extraire une sous-suite (toujours notée $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$) qui converge double échelle vers $u_0 \in L^2(\Omega \times Y)$.

On note $\mathbf{u}_\varepsilon \rightharpoonup \mathbf{u}_0$.

Estimation de type $\|\mathbf{u}_\varepsilon\|_\Omega \leq C(\varepsilon)$ facile car :

- l'opérateur $((F-S)_\varepsilon)$ est linéaire continu,
- l'opérateur de $((F-S)_\varepsilon)$ est inversible,
- théorème de l'application ouverte : l'opérateur inverse est linéaire continu.

DÉMARCHE SUIVIE

- Obtenir des estimations *a priori*.
- Utiliser le théorème de convergence double échelle pour caractériser les limites \mathbf{u}_0 et p_0 .
- Ecrire la FV pour une fonction test ψ bien choisie.
 - * $\psi = \psi\left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right)$ avec $\nabla_{\mathbf{y}} \cdot \psi = 0$ sur Ω_f pour trouver le problème **microscopique fluide**,
 - * $\psi = \varepsilon \psi\left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right)$ pour trouver le problème **microscopique solide**,
 - * $\psi = \psi(\mathbf{x})$ pour trouver le problème **macroscopique**.
- Faire converger la formulation variationnelle grâce aux caractérisations de \mathbf{u}_0 et de p_0 .

Motivations

Modélisation

Existence et
unicité

Convergence
double échelle

Introduction

Estimations

Limites

Unicité

Numérique

microscopique
macroscopique

Biot

Perspectives

Limite double échelle des inconnues

- $\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}) \rightharpoonup \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{u}(\mathbf{x}) + \chi_F(\mathbf{y})\mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{y}),$
- $\varepsilon (\nabla \mathbf{u}_\varepsilon + {}^t \nabla \mathbf{u}_\varepsilon) \rightharpoonup \chi_F(\mathbf{y})(\nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + {}^t \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{y})),$
- $\chi_{\Omega_s} (\nabla \mathbf{u}_\varepsilon + {}^t \nabla \mathbf{u}_\varepsilon) \rightharpoonup \chi_S(\mathbf{y}) (\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u} + {}^t \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u} + \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{u}_1 + {}^t \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{u}_1),$
- $p_\varepsilon(\mathbf{x}) \rightharpoonup p(\mathbf{x}) + \chi_S(\mathbf{y})q(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$

LIMITE DU SYSTÈME AU NIVEAU MICROSCOPIQUE FLUIDE

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div}_{\mathbf{y}} \mathbf{v} = 0 & \Omega \times F, \\ i\omega\eta\Delta_{\mathbf{y}\mathbf{y}}\mathbf{v} + \omega^2\rho_f\mathbf{v} - \nabla_{\mathbf{y}}p_1 = \nabla_{\mathbf{x}}p - \omega^2\rho_f\mathbf{U} & \Omega \times F, \\ \mathbf{v} = 0 & \Omega \times \partial F_D, \\ \mathbf{v} \text{ périodique} & \Omega \times \partial Y. \end{array} \right.$$

Intérêt : à \mathbf{x} fixé \Rightarrow étude uniquement sur Y .

- Second membre constant car **macroscopique**.
- Membre de gauche **microscopique**.
- **Linéarité** de Stokes :
 - ✓ $\langle \mathbf{v} \rangle_F = M_f (\nabla_{\mathbf{x}}p - \omega^2\rho_f\mathbf{U})$: relation entre problèmes **macroscopique** et **microscopique**.
 - ✓ Calcul avec les 3 fonctions de base pour second membre.
- But du calcul : récupérer M_f .

LIMITE DU SYSTÈME AU NIVEAU MICROSCOPIQUE SOLIDE

Pour le solide S

- Le déplacement est **constant** sur le solide.
- $\nabla \mathbf{u}_\varepsilon + {}^t \nabla \mathbf{u}_\varepsilon \rightharpoonup \chi_S(\mathbf{y}) (\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u} + {}^t \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u} + \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{u}_1 + {}^t \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{u}_1)$.
- \mathbf{u}_1 vérifie une edp d'élasticité.

EDP d'élasticité sur le solide

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \left(\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{y}}^s(\mathbf{u}_1) \right) = 0 & \Omega \times S, \\ \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{y}}^s(\mathbf{u}_1) \mathbf{n} = -(\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{x}}^s(\mathbf{U}) + p \mathbf{Id}) \mathbf{n} & \Omega \times \partial S_N, \\ \mathbf{u}_1 \text{ périodique} & \Omega \times \partial Y, \end{array} \right.$$

où

$$\boldsymbol{\sigma}^s(\mathbf{u}) = \lambda \nabla \cdot \mathbf{u} \mathbf{Id} + \mu (\nabla \mathbf{u} + {}^t \nabla \mathbf{u}).$$

$$\text{linéarité} \Rightarrow \langle \nabla_{\mathbf{y}}(\mathbf{u}_1) + {}^t \nabla_{\mathbf{y}}(\mathbf{u}_1) \rangle_S = -M_s (\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{x}}^s(\mathbf{U}) + p \mathbf{Id}).$$

LIMITE DU SYSTÈME AU NIVEAU MACROSCOPIQUE

Système macroscopique

- Equation scalaire donnant une **incompressibilité**

$$|F| \nabla \cdot \mathbf{U} + \nabla \cdot \langle \mathbf{v} \rangle_F - \langle \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{u}_1 \rangle_S = 0.$$

- **Elasticité** linéaire forcée par la pression

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left(\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{x}}^s(\mathbf{U}) + \langle \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{y}}^s(\mathbf{u}_1) \rangle_S \right) \\ + \omega^2 \rho (\mathbf{U} + \langle \mathbf{v} \rangle_F) - |F| \nabla p = 0. \end{aligned}$$

Système d'inconnues \mathbf{U} et p avec

- $\langle \nabla_{\mathbf{y}}(\mathbf{u}_1) + {}^t \nabla_{\mathbf{y}}(\mathbf{u}_1) \rangle_S = -M_s (\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{x}}^s(\mathbf{U}) + p \text{Id})$,
- $\langle \mathbf{v} \rangle_F = M_f (\nabla_{\mathbf{x}} p - \omega^2 \rho_f \mathbf{U})$.

RÉSULTATS D'EXISTENCE ET D'UNICITÉ

① Au niveau **microscopique**

- Sur le **fluide**, équations de Stokes linéaire : existence et unicité de la solution (\mathbf{v}, p_1) dans $[H_0^1(F)]^3 \times L_{2,\text{moy}}(F)$.
- Sur le **solide**, équations d'élasticité linéaire avec conditions de Neumann : existence et unicité de la solution \mathbf{u}_1 dans $[H^1(S)]^3$ à un déplacement solide près.

② Au niveau **macroscopique**

- **Existence** toujours vraie.
- **Solide touche** tous les bords de Y : unicité dans $[H_{\text{Dir}}^1(\Omega)]^3 \times H_{\text{moy}}^1(\Omega)$.
- **Sinon** : il n'y a plus unicité.

DÉTAIL UNICITÉ DANS L'ÉQUATION MACROSCOPIQUE

- Idée : utiliser à nouveau Fredholm
- Rappel du système :

$$\underbrace{\nabla \cdot \left(\sigma_{\mathbf{x}}^s(\mathbf{U}) + \langle \sigma_{\mathbf{y}}^s(\mathbf{u}_1) \rangle_S \right)}_{\text{ordre 2 en } \mathbf{U}, \text{ 1 en } p} + \underbrace{\nabla \cdot \langle \mathbf{v} \rangle_F}_{\text{ordre 1 en } \mathbf{U}, \text{ ordre 2 en } p} + \underbrace{\omega^2 \rho(\mathbf{U} + \langle \mathbf{v} \rangle_F) - |F| \nabla p - \langle \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{u}_1 \rangle_S + |F| \nabla \cdot \mathbf{U}}_{\text{ordre 0 ou 1 en } \mathbf{U} \text{ et en } p} = 0.$$

- But : termes d'ordre 2 **bijectifs**, termes d'ordre 0 ou 1 **compacts**, somme injective.
- Difficulté : coercivité de $\nabla \cdot \left(\sigma_{\mathbf{x}}^s(\mathbf{U}) + \langle \sigma_{\mathbf{y}}^s(\mathbf{u}_1) \rangle_S \right)$ suivant la **géométrie**.

PLAN

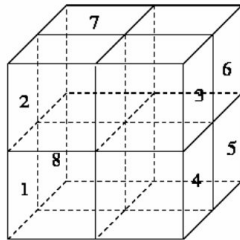
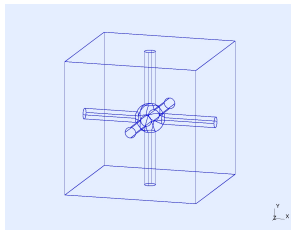
- 1 EXISTENCE ET UNICITÉ
- 2 CONVERGENCE DOUBLE ÉCHELLE
 - Introduction
 - Estimations a priori
 - Limites double échelle
 - Existence et unicité
- 3 SIMULATIONS NUMÉRIQUES
 - Au niveau microscopique
 - Au niveau macroscopique
- 4 LIEN AVEC LE MODÈLE DE BIOT
- 5 PERSPECTIVES

MÉTHODOLOGIE

Trois codes

- Deux codes **microscopiques** :
 - ✓ fluide : matrice M_f ,
 - ✓ solide : tenseur M_s .
- Un code **macroscopique** sur le domaine homogénéisé.

Symétrisation de la cellule de référence :



MAILLAGES

Motivations

Modélisation

Existence et
unicité

Convergence
double échelle

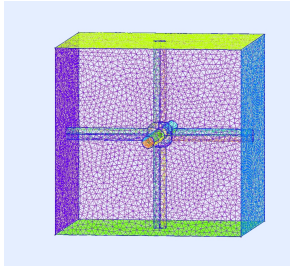
Introduction
Estimations
Limites
Unicité

Numérique

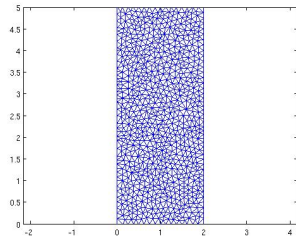
microscopique
macroscopique

Biot

Perspectives



Maillage des domaines
microscopiques.



Maillage du domaine
macroscopique.

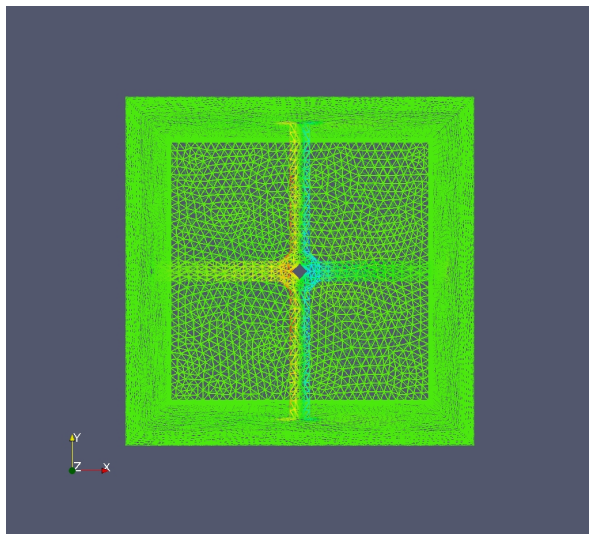
Rappel edp

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}_{\mathbf{y}} \mathbf{v} = 0 \quad \Omega \times F, \\ i\omega\eta\Delta_{\mathbf{y}\mathbf{y}}\mathbf{v} + \omega^2\rho_f\mathbf{v} - \nabla_{\mathbf{y}}p_1 = \mathbf{g} \quad \Omega \times F, \\ \mathbf{v} = 0 \quad \Omega \times \partial F_D. \end{array} \right.$$

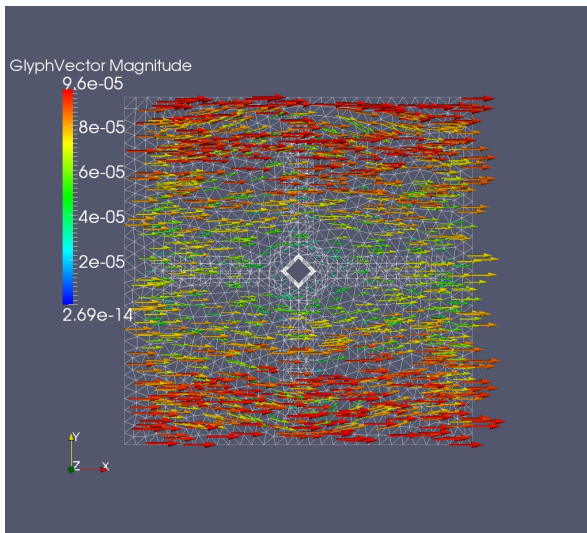
- Lecture d'un `maillage gmsh` symétrisé (conditions Dirichlet/Neumann plutôt que périodicité),
- Utilisation de la librairie `libMesh` (avec Sylvain Faure) : code éléments finis,
- Boucle sur les seconds membres,
- Résolution des systèmes de Stokes correspondants,
- Calcul de la matrice d'impédance.

Adeline Augier

CAS D'UN MATÉRIAU FIBREUX 1/2



Pression pour un second membre dépendant de l'abscisse x



Déplacement pour un second membre dépendant de l'abscisse x

EDP d'élasticité sur le solide

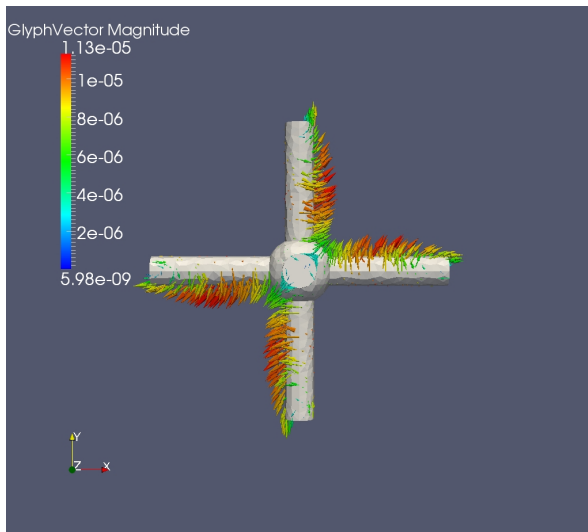
$$\begin{cases} \nabla_y \cdot (\boldsymbol{\sigma}_y^s(\mathbf{u}_1)) = 0 & \text{sur } S, \\ \boldsymbol{\sigma}_y^s(\mathbf{u}_1) \mathbf{n} = -\mathbf{G} \mathbf{n} & \text{sur } \partial S_N, \end{cases}$$

où

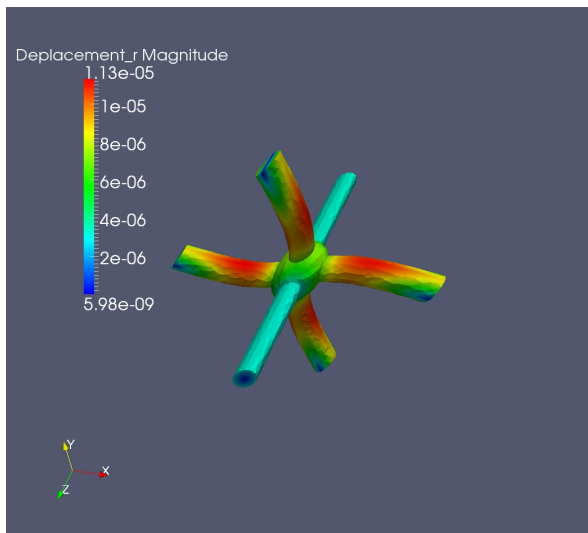
$$\boldsymbol{\sigma}^s(\mathbf{u}) = \lambda \nabla \cdot \mathbf{u} \mathbf{Id} + \mu (\nabla \mathbf{u} + {}^t \nabla \mathbf{u}).$$

- Lecture d'un **maillage gmsh** symétrisé,
- Utilisation de la librairie **libMesh** (avec Sylvain Faure),
- Prise en compte des 6 seconds membres,
- Résolution de l'élasticité.

CAS D'UN MATÉRIAU FIBREUX 1/2



Déplacement pour un second membre $G = (E_{12} + E_{21})/2$.



Déformation pour un second membre $G = (E_{12} + E_{21})/2$.

CODE 2D MACROSCOPIQUE

Motivations

Modélisation

Existence et
unicité

Convergence
double échelle

Introduction
Estimations
Limites
Unicité

Numérique
microscopique
macroscopique

Biot

Perspectives

- Utilisation de la toolbox éléments finis de F. Alouges.
- Code Matlab 2D.
- Lecture matrices impédances issues des codes microscopiques.
- Éléments finis \mathbb{P}_2 , \mathbb{P}_1 .
- Représentation sur un domaine macroscopique rectangulaire.

PRESSION POUR $\omega = 1000$

Motivations

Modélisation

Existence et
unicité

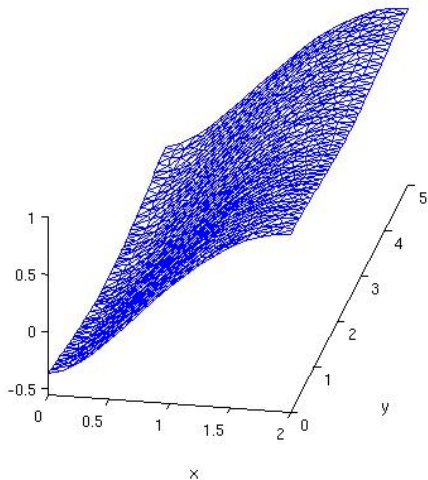
Convergence
double échelle

Introduction
Estimations
Limites
Unicité

Numérique
microscopique
macroscopique

Biot

Perspectives



PRESSION POUR $\omega = 5000$

Motivations

Modélisation

Existence et
unicité

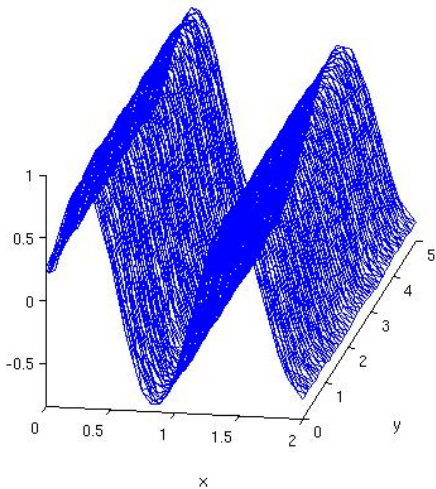
Convergence
double échelle

Introduction
Estimations
Limites
Unicité

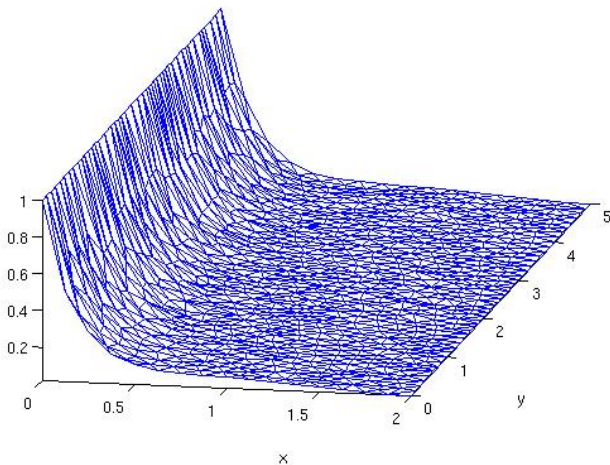
Numérique
microscopique
macroscopique

Biot

Perspectives



DÉPLACEMENT POUR $\omega = 1000$



Motivations

Modélisation

Existence et
unicité

Convergence
double échelle

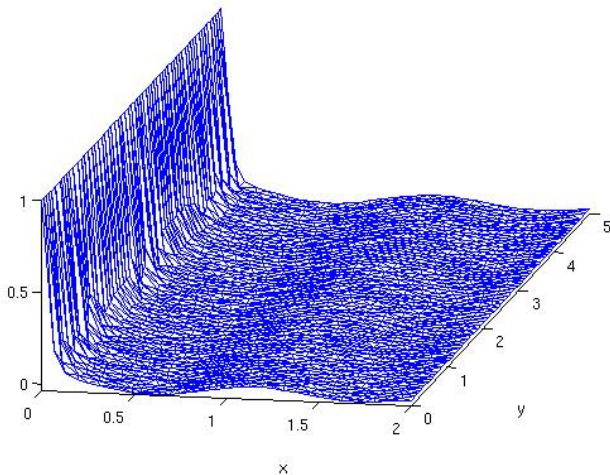
Introduction
Estimations
Limites
Unicité

Numérique
microscopique
macroscopique

Biot

Perspectives

DÉPLACEMENT POUR $\omega = 5000$



Motivations

Modélisation

Existence et
unicité

Convergence
double échelle

Introduction
Estimations
Limites
Unicité

Numérique
microscopique
macroscopique

Biot

Perspectives

PLAN

- 1 EXISTENCE ET UNICITÉ
- 2 CONVERGENCE DOUBLE ÉCHELLE
 - Introduction
 - Estimations a priori
 - Limites double échelle
 - Existence et unicité
- 3 SIMULATIONS NUMÉRIQUES
 - Au niveau microscopique
 - Au niveau macroscopique
- 4 LIEN AVEC LE MODÈLE DE BIOT
- 5 PERSPECTIVES

Formulation mixte (\mathbf{u}, p)

- Phase solide : $\nabla \cdot \widetilde{\boldsymbol{\sigma}}^s + \omega^2 \widetilde{\rho}_s \mathbf{u} + \widetilde{\gamma} \nabla p = 0,$
- Phase fluide : $\frac{\Phi^2}{\omega^2 \widetilde{\rho}_{22}} \Delta p + \frac{\Phi^2}{\widetilde{R}} p = \widetilde{\gamma} \nabla \cdot \mathbf{u}.$

Système homogénéisé

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot (Z_3 \boldsymbol{\sigma}^s(\mathbf{u} + \mathbf{h})) + Z_1(\mathbf{u} + \mathbf{h}) \\ \quad + Z_2 \nabla p + \nabla \cdot (Z_4 p \mathbf{Id}) = 0, \\ \nabla \cdot (M_f \nabla p) + \text{Tr}(Z_5 \boldsymbol{\sigma}^s(\mathbf{u} + \mathbf{h})) + \text{Tr}(Z_5 p \mathbf{Id}) \\ \quad - \nabla \cdot (Z_2(\mathbf{u} + \mathbf{h})) = 0, \end{array} \right.$$

Biot en 1D

$$\begin{aligned}u'' + \omega^2 \widetilde{\rho}_S u - (1 - \Phi + \widetilde{\gamma}) p' &= 0, \\ \frac{\Phi^2}{\omega^2 \widetilde{\rho}_{22}} p'' + \frac{\Phi^2}{\widetilde{R}} p &= \widetilde{\gamma} u'.\end{aligned}$$

En 1D : plus de dérivées croisées, comparaison possible

(Macro) en 1D

$$\begin{aligned}\alpha u'' + \beta u + \gamma p' &= 0, \\ \delta p'' + \zeta p + \eta u' &= 0.\end{aligned}$$

PLAN

- 1 EXISTENCE ET UNICITÉ
- 2 CONVERGENCE DOUBLE ÉCHELLE
 - Introduction
 - Estimations a priori
 - Limites double échelle
 - Existence et unicité
- 3 SIMULATIONS NUMÉRIQUES
 - Au niveau microscopique
 - Au niveau macroscopique
- 4 LIEN AVEC LE MODÈLE DE BIOT
- 5 PERSPECTIVES

① Théorie

- Cas critiques $\omega \rightarrow 0$ et $\omega \rightarrow +\infty$.
- Montrer que le développement asymptotique est vrai.
- Obtenir des hypothèses moins contraignantes sur les domaines.
- Cas de l'air compressible.

② Numérique

- Comparaison avec le modèle de Biot.
- Calcul de l'impédance acoustique.