



HAL
open science

Simulation numérique des écoulements de liquides polymères

Julie Joie

► **To cite this version:**

Julie Joie. Simulation numérique des écoulements de liquides polymères. Mathématiques [math]. Université de Pau et des Pays de l'Adour, 2010. Français. NNT: . tel-00546708v2

HAL Id: tel-00546708

<https://theses.hal.science/tel-00546708v2>

Submitted on 17 Feb 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE DE DOCTORAT

présentée à

L'Université de Pau et des Pays de l'Adour
École doctorale des sciences et leurs applications - ED 211

par

Julie JOIE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR de l'Université de Pau et des Pays de l'Adour

Spécialité : Mathématiques Appliquées

SIMULATION NUMÉRIQUE DES ÉCOULEMENTS DE LIQUIDES POLYMÈRES

soutenue le 25 novembre 2010

Après avis de :

M.	T. COLIN	Professeur - Université de Bordeaux 1	Rapporteur
M.	M. DEVILLE	Professeur - École Polytechnique de Lausanne (Suisse)	Rapporteur

Devant la commission d'examen formée de :

M.	R. BECKER	Professeur - UPPA	Directeur de thèse
Mme.	D. CAPATINA	Maître de Conférences - UPPA	Co-directrice
M.	T. COLIN	Professeur - Université de Bordeaux 1	Rapporteur
M.	M. DEVILLE	Professeur - École Polytechnique de Lausanne (Suisse)	Rapporteur
M.	D. GRAEBLING	Professeur - UPPA	Directeur de thèse
Mme.	A. SEQUEIRA	Professeur - Université Technique de Lisbonne (Portugal)	Présidente

Equipe Projet INRIA CONCHA, Institut National de Recherche en Informatique et en
Automatique (INRIA)

Laboratoire de Mathématiques et de leurs Applications de Pau, Unité Mixte de Recherche
CNRS 5142, Université de Pau et des Pays de l'Adour (UPPA)

Remerciements

Je veux ici remercier toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à l'aboutissement de ce travail.

Je tiens tout d'abord à remercier mes directeurs de thèse Roland Becker et Didier Graebing qui ont assuré l'encadrement de mon travail de recherche et qui ont orienté mes travaux. Je les remercie pour leur disponibilité et pour avoir toujours pris le temps de me faire partager leurs connaissances dans leurs spécialités respectives.

Je remercie très chaleureusement Daniela Capatina de m'avoir encadrée durant ces trois ans. Sa disponibilité et sa rigueur scientifique m'ont permis de mener à bien ce projet. Je la remercie également pour sa grande gentillesse, son soutien permanent et pour m'avoir toujours poussée à me dépasser. Je remercie encore une fois mes trois encadrants de m'avoir donné l'opportunité de faire cette thèse et d'avoir toujours contribué à ce qu'elle se passe dans les meilleures conditions.

Je remercie Thierry Colin et Michel Deville d'avoir accepté d'être les rapporteurs de cette thèse. Je les remercie pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon manuscrit, leurs remarques ont sans nul doute contribué à l'amélioration de ce manuscrit.

Je suis très reconnaissante de l'honneur que m'a fait Adélia Sequeira de venir de Lisbonne afin de présider mon jury de thèse.

Je tiens également à remercier toutes les personnes du Laboratoire de Mathématiques de Pau au sein duquel j'ai disposé des meilleures conditions pour effectuer cette thèse. Un grand merci à Marie-Claire Hummel, Marie-Laure Rius, Sylvie Berton, Josy Baron et Chantal Blanchard pour m'avoir toujours facilité les tâches administratives. Je remercie plus particulièrement les membres de l'équipe Concha au sein de laquelle j'ai effectué ma thèse.

Il est très important pour moi de remercier tous mes collègues ... et amis que j'ai croisés tout au long de ces années. Merci aux "anciens", et plus particulièrement à Anne-Gaëlle, Agnès et Caro pour votre accueil en première année et pour toujours avoir accepté de me faire partager vos expériences (on doit faire les comptes d'ailleurs Anne-Gaëlle) ! Merci de m'avoir guidée dans les étapes importantes de cette thèse. Merci à Nour, Ali, Hanen, Donatien, "ma promo" pour tous les bons et les mauvais moments que nous avons partagés durant ces trois années et je souhaite également bon courage aux "nouveaux" : Momo, Nelly, les "peutiots", trois ans ça passe vite !

Je souhaite remercier plus particulièrement Nour qui depuis le premier jour a été à mes côtés, ta présence a été un grand réconfort pour moi, merci pour tout !!

Je remercie également Elies, qui a partagé MON bureau, pour son soutien surtout à la fin de ma thèse, ça n'a pas dû être toujours facile de me supporter. Un grand merci à Véro pour tes conseils et ton soutien dans les moments les plus difficiles, merci d'avoir râlé avec moi de si nombreuses

fois ! Enfin je n'oublie pas Cyril qui par ses innombrables connaissances (mécanique, électricité, Tour de France des années 60, petit o grand o...) a souvent volé à mon secours ! Je joins à ces remerciements Pieyre, Guillaume, Flo et Juan, tous ces moments de détente à vos cotés (soirées, billards, bowling...) ont été un grand plaisir et j'espère que ce n'est pas fini ! !

Je souhaite aussi remercier mes amis fidèles depuis tant d'années : Maylis et Fanny, tous ces moments passés en votre compagnie à refaire le monde (... ou pas) ont été de vraies bouffées d'oxygène. Un grand merci également à Laura pour sa présence, on se comprend ! Une pensée pour ce voyage mémorable à Madrid avec Marion, merci les sisters. Titou, je te remercie pour ton écoute et tes conseils dans les moments de doute et de remise en question ! Ta venue à ma soutenance m'a énormément touchée. Un grand merci à Marjo, ma coach perso (Xena !). Tu as été à mes côtés dans les bons et les mauvais moments ! Maïka merci pour ton amitié depuis tant d'années (on ne comptera pas ! !). Que de bons moments passés en ta présence : Zaragoza, les voyages "à l'arrache", les week-ends, les soirées, etc ... (... ah oui les cours aussi !) et ce n'est pas fini ! ! ! Comment ne pas remercier aussi Jerem, Nico, Matias, Tonio et j'en oublie sûrement, pour leur compagnie toujours agréable et pour toutes ces soirées inoubliables ! !

Enfin je souhaite de tout coeur remercier ma famille pour son soutien et pour l'organisation de mon pot de thèse ! Merci à mes grand-parents qui sont "à la base" de tout. Merci à mes parents de m'avoir toujours encouragée, conseillée et d'avoir toujours été à l'écoute même si ça n'a pas toujours été facile ! Enfin un grand merci à ma soeur Emilie. Merci pour ton aide précieuse en anglais, pour m'avoir accueillie tant de fois, pour ta bonne humeur et pour ton soutien inconditionnel, pour tout cela et plein d'autres choses MERCI ! !

Table des matières

1	Introduction générale	1
1.1	Motivations et travaux effectués	1
1.2	Perspectives	4
1.3	Notations	6
I	Une méthode Galerkin discontinue pour le problème de Stokes liée aux éléments finis non-conformes	9
	Introduction	11
2	Nouvelle stabilisation Galerkin discontinue et robustesse de la méthode	13
2.1	Problème de Stokes et trois formulations variationnelles	13
2.2	Discrétisations	16
2.2.1	Résultats préliminaires	16
2.2.2	Formulations discrètes	18
2.2.2.1	Formulation $(\underline{\nabla}\mathbf{u}, \underline{\nabla}\mathbf{v})$ discrète	18
2.2.2.2	Formulation $(\underline{D}(\mathbf{u}), \underline{D}(\mathbf{v}))$ discrète	19
2.2.2.3	Formulation discrète à trois champs	20
2.2.3	Autres méthodes dG pour le problème de Stokes	20
2.2.4	Extensions à d'autres conditions de bord	22
2.3	Existence et unicité	23
2.3.1	Coercivité des formes $a_h(\cdot, \cdot)$ et $c_h(\cdot, \cdot)$	24
2.3.2	Conditions inf-sup	27
2.3.3	Continuité des formes $a_h(\cdot, \cdot)$, $c_h(\cdot, \cdot)$ et $b_h(\cdot, \cdot)$	29
2.4	Robustesse du schéma par rapport au paramètre de stabilisation	30
2.4.1	Passage à la limite lorsque $\gamma \rightarrow \infty$	30
2.4.2	Vitesse de convergence	34
3	Analyse d'erreur <i>a priori</i> et <i>a posteriori</i>	39
3.1	Estimations d'erreur <i>a priori</i>	39
3.2	Estimations d'erreur <i>a posteriori</i>	47

3.2.1	Fiabilité de l'indicateur d'erreur	48
3.2.2	Optimalité de l'indicateur d'erreur	51
3.2.3	Comportement de l'indicateur d'erreur par rapport à γ	54
4	Résultats numériques	57
4.1	Convergence de l'erreur	57
4.1.1	Formulation $(\underline{\nabla}\mathbf{u}, \underline{\nabla}\mathbf{v})$	58
4.1.2	Formulation $(\underline{D}(\mathbf{u}), \underline{D}(\mathbf{v}))$	61
4.2	Comportement par rapport au paramètre de stabilisation	62
4.2.1	Comportement de l'erreur en comparaison avec la stabilisation IP	62
4.2.1.1	Formulation $(\underline{\nabla}\mathbf{u}, \underline{\nabla}\mathbf{v})$	62
4.2.1.2	Formulation $(\underline{D}(\mathbf{u}), \underline{D}(\mathbf{v}))$	66
4.2.2	Écoulement de Poiseuille - Formulation $(\underline{\nabla}\mathbf{u}, \underline{\nabla}\mathbf{v})$	66
4.2.3	Écoulement de type Poiseuille à vitesse entrante constante	69
4.2.3.1	Formulation $(\underline{\nabla}\mathbf{u}, \underline{\nabla}\mathbf{v})$	69
4.2.3.2	Formulation $(\underline{D}(\mathbf{u}), \underline{D}(\mathbf{v}))$	72
4.2.4	Vitesse de convergence de la solution dG vers la solution non-conforme	73
4.3	Adaptation de maillage	73
4.3.1	Procédure de raffinement de maillage	74
4.3.2	Solution singulière	74
4.3.3	Solution régulière	77
4.3.4	Comportement quand $\gamma \rightarrow \infty$	80
II	Le modèle de Giesekus	81
	Introduction	83
5	Les liquides polymères	85
5.1	Quelques définitions	85
5.2	Écoulements particuliers : cisaillement et élongationnel	87
5.3	Équations de base	89
5.4	Modèles rhéologiques	89
5.4.1	Modèles linéaires	89
5.4.2	Modèles viscoélastiques linéaires	90
5.4.3	Dérivée de Gordon-Schowalter	91
5.4.4	Modèles viscoélastiques quasi-linéaires	92
5.4.4.1	Les modèles de type Maxwell	92
5.4.4.2	Modèles de type Jeffreys	93
5.4.5	Modèles viscoélastiques non-linéaires plus complexes	95
5.4.5.1	Modèles de Phan-Thien Tanner	95

5.4.5.2	Le modèle de Giesekus	96
5.5	Cas-tests	96
6	Approximation par éléments finis non-conformes du problème de Giesekus	99
6.1	Approximation du problème de Stokes sur un maillage triangulaire	99
6.1.1	Éléments finis non-conformes sur des triangles	99
6.1.2	Formulation discrète du problème de Stokes	100
6.1.2.1	Deux formulations discrètes équivalentes	101
6.1.2.2	Existence et unicité de la solution et estimation <i>a priori</i>	102
6.2	Approximation du problème de Stokes sur un maillage quadrangulaire	104
6.2.1	Éléments finis non-conformes de Rannacher-Turek	104
6.2.2	Formulation discrète à deux champs du problème de Stokes	106
6.2.3	Formulation discrète à trois champs	107
6.2.3.1	Première approche : formulation naturelle	107
6.2.3.2	Deuxième approche : problème régularisé	112
6.3	Problème de Giesekus	121
6.3.1	Cas stationnaire	122
6.3.2	Cas instationnaire	125
6.3.3	Positivité du tenseur de conformation	126
7	Résultats numériques	131
7.1	Quelques aspects numériques	131
7.1.1	Solveurs	131
7.1.2	Nombre de Weissenberg	131
7.2	Validation du code	132
7.2.1	Solution exacte	132
7.2.2	Comparaisons avec une solution analytique	133
7.2.3	Comparaisons avec des données expérimentales	134
7.2.4	Comparaisons avec Polyflow®	137
7.3	Comparaisons avec d'autres schémas numériques pour le modèle d'Oldroyd-B	141
7.3.1	Principe de la méthode multigrilles	141
7.3.2	Opérateurs de projection et de prolongement	143
7.3.3	Lisseur de type Vanka	145
7.3.3.1	Cas newtonien	145
7.3.3.2	Cas non-newtonien	147
7.3.4	Écoulement autour d'un cylindre centré	148
7.3.4.1	Description du cas-test	148
7.3.4.2	Calcul de la traînée	150
7.4	Comportement dans des écoulements réalistes	153
7.4.1	Pertinence des modèles rhéologiques utilisés	153
7.4.2	Contraction 4:1	153

7.4.3	Contraction 4:1:4	158
7.4.4	Écoulement autour d'un cylindre	160
7.4.5	Valeurs propres du tenseur de conformation	161
III Annexes		165
A Rhéologie - Modèle de Giesekus		167
A.1	Construction du modèle	167
A.2	Comportements rhéologiques	168
A.2.1	Écoulement de cisaillement simple	168
A.2.2	Écoulement élongationnel uniaxial	173
B Calcul du nombre de Weissenberg		175
B.1	Écoulement entre deux plans parallèles	175
B.2	Contractions 4:1 et 4:1:4	176
B.3	Écoulement autour d'un cylindre	178
Bibliographie		179

Chapitre 1

Introduction générale

Cette thèse a été financée par le Conseil Régional d'Aquitaine et a été effectuée au sein de l'équipe-projet INRIA Concha¹. L'objectif de cette équipe est le développement et l'analyse de nouveaux algorithmes et d'une librairie C++ nommée CONCHA pour la simulation d'écoulements complexes. Les applications sont, entre-autres, l'aérodynamique, les milieux poreux et les liquides viscoélastiques. Plus précisément, un des objectifs est de développer des méthodes robustes pour la simulation numérique des écoulements de liquides polymères.

Le plan de cette introduction générale est le suivant : nous allons d'abord exposer les motivations de cette thèse, ainsi que les travaux réalisés. Nous présenterons ensuite quelques perspectives avant d'introduire des notations utilisées dans cette thèse.

1.1 Motivations et travaux effectués

Cette thèse est consacrée au développement de schémas numériques pour la simulation des écoulements de liquides polymères. De tels liquides sont d'un point de vue rhéologique des fluides viscoélastiques non-newtoniens. Ils ont donc des comportements particuliers (effet de mémoire, apparition de contraintes normales...) qui ne peuvent être prévus par les équations de Navier-Stokes. Bien que ces liquides soient utilisés très fréquemment dans l'industrie, il existe peu de codes commerciaux pour simuler leurs écoulements.

Les principales difficultés sont dues aux propriétés intrinsèques des liquides polymères et au couplage entre la viscoélasticité du liquide et l'écoulement. Ce couplage est quantifié par le nombre de Weissenberg, défini par $We = \lambda \dot{\gamma}$, où λ est le temps de relaxation et $\dot{\gamma}$ est la vitesse de déformation ou le taux de cisaillement. Les codes commerciaux existants permettent généralement d'obtenir des résultats pour des nombres de Weissenberg inférieurs à 10, ce qui est insuffisant pour décrire des écoulements réalistes (cf [49] et [82]). La source du problème est la perte de la convergence des algorithmes pour des nombres de Weissenberg élevés.

De plus, le comportement des liquides polymères est si complexe qu'il existe dans la littérature plusieurs modèles pour le décrire. La loi linéaire de Newton ne pouvant être appliquée, tout

¹<http://sites.google.com/site/conchapau/>

un panel de lois constitutives existe pour simuler de manière plus ou moins réaliste de tels écoulements. On obtient donc des modèles non-linéaires ayant au moins trois inconnues : la vitesse, la pression et le tenseur déviateur des contraintes. Nous nous concentrerons dans ce mémoire sur les modèles de type différentiel et plus précisément sur le modèle non-linéaire de Giesekus qui nous semble être un des plus réalistes. Ce modèle contient un terme quadratique en tenseur des contraintes, mais a l'avantage de reproduire correctement le comportement pour des écoulements élongationnels, de cisaillement et mixtes. En outre, il ne requiert la connaissance que de deux paramètres du liquide facilement mesurables, sa viscosité η et son temps de relaxation λ .

L'objectif de cette thèse est de développer une approche numérique permettant d'obtenir des résultats réalistes pour des nombres de Weissenberg élevés.

Ce manuscrit est divisé en deux parties chacune étant composée de trois chapitres, auxquelles se rajoutent deux annexes. Les notations de chaque partie sont indépendantes.

Dans la **Partie 1** nous nous sommes intéressés au problème de Stokes pour lequel nous avons fait l'étude complète d'une méthode de Galerkin discontinue (dG) ayant un lien avec les éléments finis non-conformes. De nombreuses études ont été faites sur les méthodes dG dans le cas elliptique, on se réfère à [3] pour une présentation générale. Le principe de telles méthodes est basé sur l'utilisation d'éléments finis totalement discontinus et sur l'ajout d'un terme de stabilisation sur les arêtes assurant la coercivité discrète.

La méthode symétrique avec pénalisation interne («Interior Penalty») a été initialement introduite pour le laplacien dans [2]. La discrétisation ainsi obtenue est bien posée et des estimations d'erreur *a priori* optimales ont été obtenues. Cette méthode a été ensuite étendue aux problèmes de Stokes et Navier-Stokes dans [37].

Un des principaux avantages de la méthode dG est sa facilité d'implémentation et sa flexibilité. Cependant, même pour un degré polynomial bas, elle est très coûteuse en terme de nombre d'inconnues et de couplage de matrices. De plus, la dépendance par rapport au paramètre de stabilisation est un point crucial. C'est pourquoi il nous a semblé intéressant de considérer un terme de stabilisation moins coûteux permettant de rapprocher notre méthode dG d'une méthode d'éléments finis pour le problème de Stokes plus traditionnelle.

Comme dans la méthode IP classique de [37], notre approche consiste à approcher la vitesse par des éléments finis P_k et la pression par des éléments finis P_{k-1} pour $k = 1, 2$ et 3 . La principale différence provient du choix du terme de stabilisation. Dans [37], les auteurs considèrent la norme L^2 du saut de la vitesse à travers les arêtes. Dans ce cas, la méthode n'est pas robuste pour des valeurs élevées du paramètre de stabilisation, les espaces obtenus dans le cas limite n'étant pas inf-sup stables pour le problème de Stokes. Pour pallier cet inconvénient, nous considérons un terme de stabilisation faisant intervenir une projection adéquate du saut des vitesses à travers les arêtes. Ce choix présente deux principaux avantages.

Tout d'abord, on montre que la solution de cette formulation tend, lorsque le paramètre de stabilisation γ tend vers l'infini, vers la solution du problème de Stokes approché par éléments

finis $P_k \times P_{k-1}$ non-conformes. De plus, on montre que la vitesse de convergence est γ^{-1} . D'autre part, notre terme de stabilisation nous permet de construire un tenseur d'approximation localement conservatif dans l'espace d'éléments finis de Raviart-Thomas, ce qui nous permet d'établir un estimateur d'erreur *a posteriori* simple. De plus, on montre que cet estimateur tend, lorsque $\gamma \rightarrow \infty$, vers un estimateur d'erreur pour l'approximation non-conforme du problème de Stokes ; dans le cas $k = 1$, ce dernier peut-être rapproché de l'estimateur bien connu de Dari, Durán et Padra (cf [26]).

Nous avons aussi considéré la formulation en tenseur des vitesses de déformation $\underline{D}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\underline{\nabla}\mathbf{u} + \underline{\nabla}\mathbf{u}^T)$ du problème de Stokes. En effet, cette deuxième formulation est équivalente à la formulation à trois champs du problème de Stokes et semble donc être un point de départ intéressant pour traiter le modèle à trois champs de Giesekus. Dans ce cas, on rajoute un deuxième terme de stabilisation pour $k = 1$, nous permettant d'obtenir une inégalité de Korn pour les espaces discontinus.

Des résultats numériques sont présentés pour illustrer les résultats théoriques obtenus, des comparaisons avec la méthode «Interior Penalty» ont aussi été effectuées.

Néanmoins, les méthodes de type Galerkin discontinu sont très coûteuses et donc peu adaptées aux formulations non linéaires à trois champs que l'on doit traiter dans le cas des polymères.

Dans la **Partie 2**, on s'intéresse plus particulièrement à la simulation des écoulements de liquides polymères.

Après avoir présenté quelques propriétés des liquides polymères, on s'intéresse à la discrétisation par éléments finis du modèle de Giesekus. Ce modèle contient un terme de convection sur le tenseur des contraintes. On portera donc une attention particulière aux choix des espaces d'approximation, mais aussi au traitement du terme convectif.

Plusieurs méthodes mixtes bien posées ont été développées ces dernières années. Certaines approches consistent à stabiliser le schéma en rajoutant de l'ellipticité dans l'équation du mouvement. On cite par exemple la méthode EEME (Elasticity Elliptic Momentum Equation) de [51] qui reformule l'équation du mouvement afin de faire apparaître de manière explicite un terme elliptique. Une autre méthode populaire est la méthode EVSS (Elastic-Viscous Split Stress) introduite dans [73]. Le tenseur des contraintes est décomposé en une partie élastique et une partie visqueuse, le problème à quatre champs ainsi obtenu est alors approché après un changement de variable. La méthode AVSS (Adaptive Viscous Split Stress) de [77] introduit un nouveau changement de variable. Cependant, ces changements de variable ne peuvent pas être appliqués à tous les modèles rhéologiques. La méthode DEVSS (Discrete Elastic-Viscous Split Stress) de [39] permet de pallier ce problème, en effet la même décomposition du tenseur des contraintes est effectuée mais il n'y a pas de changement de variable.

En ce qui concerne la discrétisation du terme convectif, on trouve deux principales approches : la première est basée sur la méthode de décentrage en amont Streamline-Upwind (SU ou SUPG, voir [47] et [20]) et la deuxième est basée sur les méthodes de type Galerkin discontinu. La pre-

mière classe de méthodes, basée sur l’ajout de diffusivité artificielle, a été initialement appliquée aux liquides viscoélastiques dans [60]. La deuxième méthode basée sur le schéma décentré de Lesaint-Raviart (cf [55]) a été d’abord appliquée aux liquides viscoélastiques dans [32]. Un des avantages de cette méthode est que la condition de compatibilité entre l’espace discret de la vitesse et celui du tenseur des contraintes est facilement satisfaite. De plus, l’implémentation des méthodes dG est plus facile. Une description complète de ces méthodes peut être trouvée dans la littérature (cf [4], [5] et [69]).

Au vu des résultats obtenus avec la méthode dG, nous avons choisi d’utiliser pour le modèle de Giesekus, des éléments finis totalement discontinus pour approcher le tenseur des contraintes et des éléments finis non-conformes pour approcher la vitesse et la pression. Nous avons considéré le cas triangulaire, pour lequel nous utilisons pour approcher la vitesse et la pression les éléments finis de Crouzeix-Raviart (voir [24]), mais aussi le cas quadrangulaire, pour lequel nous utilisons alors les éléments finis de Rannacher-Turek (voir [74]). L’analyse de ces schémas numériques a été faite pour le problème de Stokes sous-jacent. Dans le cas quadrangulaire, on montre qu’il est nécessaire d’ajouter un terme de régularisation afin d’avoir une méthode convergente. Des vitesses de convergence optimales ont alors été obtenues dans les deux cas.

On s’intéresse aussi à la positivité d’un tenseur appelé tenseur de conformation qui est un point crucial pour la simulation numérique. Le problème du nombre de Weissenberg élevé semble être associé à la perte de la positivité de ce tenseur au niveau discret. On montre alors que sous certaines hypothèses, les schémas numériques utilisés préservent cette propriété au niveau discret.

Nous avons comparé les résultats obtenus à des valeurs expérimentales, trouvées dans la littérature (voir [72]). Ces comparaisons nous ont permis d’illustrer le bon comportement de notre schéma numérique mais aussi de montrer le réalisme du modèle de Giesekus par rapport à d’autres modèles rhéologiques. D’autre part, nous avons considéré des cas-test de référence en simulation numérique des écoulements de liquides polymères : la contraction 4:1, la contraction/expansion 4:1:4, et l’écoulement autour d’un cylindre. Nous avons effectué des comparaisons avec le code commercial Polyflow[®], connu dans le monde industriel pour sa fiabilité et sa robustesse. Les résultats obtenus sont similaires. Nous avons pu obtenir des résultats réalistes pour des nombres de Weissenberg élevés. Afin de pouvoir utiliser des maillages fins (de l’ordre de 1 million d’éléments), nous avons développé une méthode multigrilles basée sur un lisseur de type Vanka. Ceci nous a permis de valider notre méthode en comparant nos calculs, en particulier la traînée, aux résultats présents dans la littérature. Pour cela, nous avons considéré le cas-test populaire de l’écoulement autour d’un cylindre centré et le modèle d’Oldroyd-B.

1.2 Perspectives

Dans la suite, plusieurs perspectives à ce travail peuvent être envisagées.

- Analyse du modèle de Giesekus.

Tout d’abord, concernant l’analyse mathématique du problème instationnaire de Giesekus, il

serait intéressant d'établir des estimations d'énergie au niveau continu et discret, basées sur la positivité du tenseur de conformation. De telles estimations pourront ensuite être utilisées pour montrer l'existence d'une solution faible du problème continu. Cette approche a déjà été appliquée dans [6] à un modèle régularisé d'Oldroyd-B ; néanmoins, afin de garantir que le tenseur de conformation discret est symétrique défini positif, les auteurs sont amenés à introduire plusieurs régularisations du problème discret, en suivant la démarche de [7].

– Adaptation de maillage.

Le développement de méthodes adaptatives serait important pour améliorer l'efficacité des simulations numériques. En effet, les calculs effectués dans cette thèse montrent deux sources de singularités. La première est de nature géométrique et relève des coins rentrants (par exemple au niveau de la contraction 4:1). La seconde est liée au caractère des équations qui fait que les solutions présentent des couches limites (voir par exemple la figure Fig. 7.25). Le développement d'une méthode adaptative nécessite d'abord l'écriture d'un estimateur d'erreur *a posteriori*, ce qui est en cours.

– Extension au cas 3D.

Dans le but de se rapprocher des applications réalistes, on peut envisager l'extension des travaux effectués dans cette thèse aux écoulements de liquides viscoélastiques en trois dimensions. Cette extension inclut aussi bien un aspect algorithmique qu'un aspect numérique important. D'un point de vue numérique, il faut développer et implémenter dans la librairie CONCHA des schémas de discrétisation appropriés, qui soient stables pour les différents termes de convection présents dans les équations et qui préservent de plus certaines propriétés du système physique continu (comme la positivité du tenseur de conformation), afin de garantir la robustesse par rapport aux grands nombres de Weissenberg. D'un point de vue algorithmique, le passage de 2D à 3D implique le couplage non linéaire entre les différentes variables physiques, ce qui engendre un surcoût de calcul très important. D'où la nécessité de mettre en place des outils numériques performants et robustes comme le stockage des matrices, les méthodes multigrilles, les méthodes adaptatives et la parallélisation du code.

– Prise en compte de la thermique.

Enfin, toujours dans le but d'accroître le réalisme des simulations numériques, il faut prendre en compte le couplage thermomécanique. Ceci implique l'ajout de deux nouvelles variables, la température et la masse volumique, et de deux équations, l'équation de conservation de l'énergie et l'équation d'état. D'un point de vue numérique, ceci nécessite, le développement de schémas appropriés au cas où la masse volumique ρ n'est pas constante, en particulier pour traiter les termes de convection $\rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$ et $\rho \mathbf{v} \cdot \nabla T$ et l'équation de continuité $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0$. D'autres aspects, comme une viscosité thermo-dépendante pourront aussi être pris en compte.

1.3 Notations

Dans ce manuscrit, on utilisera les notations suivantes. Les vecteurs de dimension \mathbb{R}^d ($d = 2$ ou 3) seront notés en gras, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_d)$ et les tenseurs d'ordre 2 sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ seront soulignés d'un trait, $\underline{\tau} = (\tau_{ij})_{0 < i \leq d, 0 < j \leq d}$.

On utilisera la convention de sommation d'Einstein (de l'indice répété).

Le produit scalaire de deux tenseurs d'ordre 2 sera noté :

$$\underline{\tau} : \underline{\sigma} = \tau_{ij} \sigma_{ij} ;$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on notera par P_k l'ensemble des polynômes de \mathbb{R}^d de degré plus petit ou égal à k en chacune des variables.

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^d , de frontière lipschitzienne.

On rappelle la définition de quelques espaces fonctionnels usuels (voir par exemple [75]).

Pour $m \in \mathbb{N}$, on définit l'espace de Sobolev d'ordre m par :

$$H^m(\Omega) = \{ \mathbf{v} \in L^2(\Omega) : \forall \alpha \leq m, \partial^\alpha \mathbf{v} \in L^2(\Omega) \},$$

où $\partial^\alpha \mathbf{v}$ est la dérivée partielle (au sens des distributions) d'ordre $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{N}^m$ de \mathbf{v} :

$$\partial^\alpha \mathbf{v} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_m^{\alpha_m}}, \quad \text{avec } |\alpha| = \sum_{i=1}^m \alpha_i.$$

$H^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert muni de la norme :

$$\|\mathbf{v}\|_{m,\Omega} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |\partial^\alpha \mathbf{v}|^2 \right)^{1/2}.$$

On utilisera aussi la semi-norme définie par :

$$|\mathbf{v}|_{m,\Omega} = \left(\sum_{|\alpha|=m} \int_{\Omega} |\partial^\alpha \mathbf{v}|^2 dx \right)^{1/2}.$$

On introduit aussi les deux espaces usuels suivants :

$$H_0^1(\Omega) = \{ \mathbf{v} \in H^1(\Omega) : \mathbf{v} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \} = \overline{\mathcal{D}(\Omega)},$$

$$L_0^2(\Omega) = \left\{ q \in L^2(\Omega) : \int_{\Omega} q dx = 0 \right\}.$$

On introduit aussi l'espace de traces suivant :

$$H^{1/2}(\partial\Omega) = \{ \mathbf{g} \in L^2(\partial\Omega), \text{ tel que } \exists \mathbf{v} \in H^1(\Omega), \mathbf{v} = \mathbf{g} \text{ sur } \partial\Omega \}$$

muni de la norme :

$$\|\mathbf{g}\|_{1/2,\partial\Omega} = \inf_{\mathbf{v}=\mathbf{g} \text{ sur } \partial\Omega} \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega}$$

On utilisera aussi l'espace des traces normales partielles sur une partie du bord $\Gamma \subsetneq \partial\Omega$ défini par :

$$H^{-1/2}(\Gamma) = [H_{00}^{1/2}(\Gamma)]'$$

avec $[H_{00}^{1/2}(\Gamma)]'$ l'espace dual de :

$$H_{00}^{1/2}(\Gamma) = \{\varphi \in L^2(\Gamma), \text{ tel que } \exists \mathbf{v} \in H^1(\Omega), \mathbf{v} = \varphi \text{ sur } \Gamma \text{ et } \mathbf{v} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \setminus \Gamma\}.$$

Soit V un espace de Hilbert quelconque et soit $d = 2$ ou 3 , on utilisera les notations suivantes :

$$\mathbf{V} = \{\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_d); v_i \in V, 1 \leq i \leq d\} = V^d,$$

$$\underline{V} = \{\underline{\tau} = (\tau_{ij}); \tau_{ij} \in V, 1 < i \leq d, 1 < j \leq d\}.$$

On introduit maintenant des notations spécifiques aux méthodes d'éléments finis.

On supposera désormais que Ω est un domaine polygonal. On considère une famille régulière de triangulations, $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$, de Ω . Chaque triangulation \mathcal{T}_h est composée d'éléments T , qui peuvent être des triangles ou des quadrilatères, de telle manière que :

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{T \in \mathcal{T}_h} T.$$

On note ε_h^{int} l'ensemble des arêtes internes de \mathcal{T}_h , ε_h^∂ l'ensemble des arêtes du maillage situées sur le bord $\partial\Omega$ et ε_h l'ensemble des arêtes de \mathcal{T}_h , $\varepsilon_h = \varepsilon_h^{int} \cup \varepsilon_h^\partial$.

On note h_T le diamètre d'un triangle T , ρ_T le diamètre du cercle inscrit de T et on pose $h = \max_{T \in \mathcal{T}_h} h_T$. Comme $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$ est une famille régulière, il existe un paramètre $\varsigma > 0$ tel que :

$$\forall T \in \mathcal{T}_h, \frac{h_T}{\rho_T} = \varsigma_T \leq \varsigma. \quad (1.1)$$

Sur chaque arête e de ε_h^{int} , telle que $e = \partial T^i \cap \partial T^j$, on définit une fois pour toutes la normale unitaire \mathbf{n}_e . Pour une fonction donnée φ avec $\varphi|_{T^i} \in \mathcal{C}(T^i)$ ($1 \leq i \leq 2$), on définit sur e : $\varphi^{ext}(\mathbf{x}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi(\mathbf{x} - \varepsilon \mathbf{n}_e)$, $\varphi^{int}(\mathbf{x}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi(\mathbf{x} + \varepsilon \mathbf{n}_e)$. On construit alors le saut et la moyenne de φ de la manière suivante :

$$[\varphi] = \varphi^{ext} - \varphi^{int}, \quad (1.2)$$

$$\{\varphi\} = \frac{1}{2}(\varphi^{int} + \varphi^{ext}). \quad (1.3)$$

Si e se trouve sur $\partial\Omega$, la normale \mathbf{n}_e est la normale extérieure \mathbf{n} et le saut et la moyenne de φ correspondent à la trace de φ sur e .

On notera par la suite, les projections $L^2(e)$ -orthogonales d'une fonction quelconque $\varphi \in L^2(e)$ sur un espace polynomial P_k , $\forall k \in \mathbb{N}$, par $\pi_k \varphi$. On généralise cette notation pour $\omega \neq e$, en introduisant la projection $L^2(\omega)$ orthogonales sur un espace polynomial P_k , $\forall k \in \mathbb{N}$ notée $\pi_k^\omega \varphi$.

Ces projections satisfont les propriétés suivantes :

$$\|\pi_0^\omega \mathbf{u}\|_{0,\omega} \leq \|\mathbf{u}\|_{0,\omega}. \quad (1.4)$$

En effet, par définition de la projection on a :

$$\int_{\omega} \mathbf{u}v dx = \int_{\omega} \pi_0^{\omega} \mathbf{u}v dx, \quad \forall v \in P_0.$$

En prenant $v = \pi_0^{\omega} \mathbf{u}$, on obtient le résultat souhaité à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwartz.

On notera $\varphi^+ = \max\{\varphi, 0\}$ la partie positive de φ et $\varphi^- = \varphi - \varphi^+$ sa partie négative.

Première partie

Une méthode Galerkin discontinue pour le problème de Stokes liée aux éléments finis non-conformes

Introduction

Dans cette partie, on introduit et analyse une nouvelle méthode de type Galerkin discontinue (dG) pour le problème de Stokes. Cette partie est divisée en trois chapitres.

Dans un premier chapitre, nous décrivons la nouvelle méthode de type Galerkin discontinue appliquée aux trois formulations du problème de Stokes : la formulation *classique* en terme de gradient de vitesse mais aussi la formulation en terme de tenseur des vitesses de déformation équivalente à la formulation à trois champs. On montre alors que les problèmes discrets sont bien posés. De plus, on montre que les solutions de ces problèmes tendent, lorsque le paramètre de stabilisation tend vers l'infini vers la solution du problème de Stokes approché par éléments finis non-conformes.

Dans le second chapitre, nous faisons une analyse d'erreur *a priori* de ces schémas. En outre, on montre l'efficacité et l'optimalité d'un estimateur d'erreur *a posteriori* élaboré pour le problème de Stokes en terme de gradient de vitesse. Cet estimateur tend lorsque le paramètre de stabilisation tend vers l'infini vers un estimateur bien connu pour l'approximation non-conforme du problème de Stokes.

Finalement, dans le troisième chapitre, nous présentons des résultats numériques illustrant les résultats théoriques obtenus dans les deux premiers chapitres. Après avoir montré la convergence de notre méthode, nous avons comparé les résultats obtenus avec notre méthode avec ceux obtenus avec la méthode dG *classique* («Interior Penalty»). Nous présentons ensuite des tests sur l'adaptation de maillage.

Ces travaux ont donné lieu à un article intitulé *Connections between discontinuous Galerkin and nonconforming finite element methods for the Stokes equations* soumis dans la revue *Numerical Methods in PDE's* axé sur la formulation en terme de gradient de vitesse du problème de Stokes ainsi qu'à un proceeding de ENUMATH'09 *A dG method for the strain-rate formulation of the Stokes problem related with nonconforming finite element methods* (Proceedings of ENUMATH'09) (cf. [11]) traitant de la formulation en terme de tenseur des vitesses de déformation. De plus, un rapport de recherche INRIA a aussi été élaboré (cf. [10]). Enfin, ces travaux ont été présentés dans des conférences avec comités de lectures : MAFELAP (Londres, Royaume-Uni, 2009), ENUMATH (Uppsala, Suède, 2009), Workshop on Mathematical Fluid Mechanics and Applications (Évora, Portugal, 2010), MAMERN (Pau, France, 2009) .

Chapitre 2

Nouvelle stabilisation Galerkin discontinue et robustesse de la méthode

2.1 Problème de Stokes et trois formulations variationnelles

On s'intéresse aux équations de Stokes bi-dimensionnelles ($d=2$) qui décrivent l'écoulement stationnaire d'un fluide newtonien, incompressible pour des nombres de Reynolds peu élevés. Les équations régissant de tels écoulements sont les suivantes :

- Conservation de la quantité de mouvement :

$$-\nabla \cdot \underline{\Pi} = \underline{f}; \quad (2.1)$$

- Conservation de la masse :

$$\nabla \cdot \underline{u} = 0; \quad (2.2)$$

- Equation constitutive d'un liquide newtonien :

$$\underline{\tau} = 2\mu \underline{D}(\underline{u}); \quad (2.3)$$

- Conditions de bords (de type Dirichlet pour simplifier l'étude) :

$$\underline{u} = \underline{g}.$$

Avec :

- \underline{u} la vitesse et p la pression ;
- $\underline{\Pi}$ le tenseur des contraintes totales, défini par :

$$\underline{\Pi} = \underline{\tau} - p\underline{I}, \quad (2.4)$$

- $\underline{\tau}$ étant le tenseur déviateur des contraintes et \underline{I} la matrice identité ;
- $\underline{D}(\underline{u})$ le tenseur des vitesses de déformation, défini par :

$$\underline{D}(\underline{u}) = \frac{1}{2} (\underline{\nabla} \underline{u} + \underline{\nabla} \underline{u}^T); \quad (2.5)$$

◦ μ la viscosité dynamique, supposée constante.

Les données du problème sont $\mathbf{f} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ et $\mathbf{g} \in \mathbf{H}^{1/2}(\partial\Omega)$. Nous allons étudier dans cette partie trois formulations variationnelles mixtes de ce problème.

En substituant l'expression de $\underline{\Pi}$ dans (2.1), on écrit le problème de Stokes sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}\underline{\tau} + \nabla p &= \mathbf{f} && \text{dans } \Omega \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 && \text{dans } \Omega \\ \underline{\tau} &= 2\mu\underline{D}(\mathbf{u}) && \text{dans } \Omega \\ \mathbf{u} &= \mathbf{g} && \text{sur } \partial\Omega. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Les inconnues de ce problème sont le tenseur déviateur des contraintes $\underline{\tau}$, la vitesse \mathbf{u} et la pression p .

D'autre part, en remplaçant $\underline{\tau}$ dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement, on obtient :

$$\operatorname{div}\underline{\tau} = 2\mu\operatorname{div}\underline{D}(\mathbf{u}).$$

En prenant en compte la condition d'incompressibilité, on a aussi :

$$2\mu\operatorname{div}\underline{D}(\mathbf{u}) = \mu\Delta\mathbf{u},$$

ce qui nous mène aux deux formulations suivantes :

$$\begin{aligned} -\mu\Delta\mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f} && \text{dans } \Omega && -2\mu\operatorname{div}(\underline{D}(\mathbf{u})) + \nabla p &= \mathbf{f} && \text{dans } \Omega \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 && \text{dans } \Omega && \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 && \text{dans } \Omega \\ \mathbf{u} &= \mathbf{g} && \text{sur } \partial\Omega && \mathbf{u} &= \mathbf{g} && \text{sur } \partial\Omega \end{aligned} \quad (2.7) \quad (2.8)$$

Dans ces deux formulations, les inconnues sont la vitesse \mathbf{u} et la pression p .

Afin de proposer une formulation variationnelle, on introduit $\mathbf{u}_g \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ un relèvement de la donnée du bord $\mathbf{g} \in \mathbf{H}^{1/2}(\partial\Omega)$ tel que :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_g &= \mathbf{g} \text{ sur } \partial\Omega \text{ et} \\ \|\mathbf{u}_g\|_{1,\Omega} &\leq \|\mathbf{g}\|_{1/2,\partial\Omega}. \end{aligned}$$

On considère tout d'abord la formulation variationnelle classique, que l'on appellera la formulation $(\underline{\nabla}\mathbf{u}, \underline{\nabla}v)$ de (2.7) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\mathbf{u}, p) \in (\mathbf{u}_g + \mathbf{H}^1(\Omega)) \times L_0^2(\Omega) \text{ tels que :} \\ a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(p, \mathbf{v}) = l(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \\ b(q, \mathbf{u}) = 0 \quad \forall q \in L_0^2(\Omega) \end{array} \right. \quad (2.9)$$

où les formes bilinéaires, respectivement linéaires sont définies par :

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \mu \int_{\Omega} \underline{\nabla} \mathbf{u} : \underline{\nabla} \mathbf{v} dx, \\ b(p, \mathbf{v}) &= - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{v} dx, \\ l(\mathbf{v}) &= \int_{\Omega} \mathbf{f} \mathbf{v} dx. \end{aligned}$$

La formulation variationnelle de (2.8), appelée formulation $(\underline{D}(\mathbf{u}), \underline{D}(\mathbf{v}))$ est la suivante :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (\mathbf{u}, p) \in (\mathbf{u}_g + \mathbf{H}^1(\Omega)) \times L_0^2(\Omega) \text{ tels que :} \\ c(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(p, \mathbf{v}) = l(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \\ b(q, \mathbf{u}) = 0 \quad \forall q \in L_0^2(\Omega). \end{cases} \quad (2.10)$$

L'unique différence entre (2.9) et (2.10) est que la forme linéaire $a(\cdot, \cdot)$ est remplacée par :

$$c(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 2\mu \int_{\Omega} \underline{D}(\mathbf{u}) : \underline{D}(\mathbf{v}) dx.$$

Cette forme linéaire est obtenue en utilisant une propriété du produit entre un tenseur symétrique et un tenseur anti-symétrique, ce qui donne :

$$2\mu \int_{\Omega} \underline{D}(\mathbf{u}) : \underline{\nabla} \mathbf{v} dx = \mu \int_{\Omega} \underline{D}(\mathbf{u}) : \underline{D}(\mathbf{v}) dx.$$

Enfin, la formulation variationnelle à trois champs de (2.6) est :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (\mathbf{u}, p, \underline{\tau}) \in (\mathbf{u}_g + \mathbf{H}^1(\Omega)) \times L_0^2(\Omega) \times \underline{X} \text{ tels que :} \\ b(p, \mathbf{v}) + d(\underline{\tau}, \mathbf{v}) = l(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \\ b(q, \mathbf{u}) = 0 \quad \forall q \in L_0^2(\Omega) \\ d(\underline{\theta}, \mathbf{u}) - e(\underline{\theta}, \underline{\tau}) = 0 \quad \forall \underline{\theta} \in \underline{X} \end{cases} \quad (2.11)$$

où :

$$\begin{aligned} d(\underline{\tau}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega} \underline{\tau} : \underline{D}(\mathbf{v}) dx, \\ e(\underline{\theta}, \underline{\tau}) &= \frac{1}{2\mu} \int_{\Omega} \underline{\theta} : \underline{\tau} dx, \\ \underline{X} &= \{ \underline{\theta} = (\theta_{ij})_{1 \leq i, j \leq 2}; \theta_{ij} = \theta_{ji}, \theta_{ij} \in L^2(\Omega), i, j = 1, 2 \}. \end{aligned}$$

La preuve de l'existence et de l'unicité de la solution des problèmes (2.9) et (2.10) est bien connue (voir par exemple [36] pour une démonstration). En ce qui concerne la formulation à trois champs (2.11) on utilise son équivalence avec (2.10). En effet, si (\mathbf{u}, p) est la solution de (2.10) alors $(\mathbf{u}, p, 2\mu \underline{D}(\mathbf{u}))$ est solution de (2.11), ce qui nous assure l'existence d'une solution. D'autre part, si $(\mathbf{u}, p, 2\mu \underline{D}(\mathbf{u}))$ est solution de (2.11), alors (\mathbf{u}, p) vérifie (2.10) et $\underline{\tau} = 2\mu \underline{D}(\mathbf{u})$, ce qui nous assure l'unicité de cette solution.

On note que la formulation à trois champs nous permet de considérer le tenseur des contraintes comme inconnue et sera donc utile pour l'étude des écoulements de liquides non newtoniens, ce

qui est l'objectif de la deuxième partie de ce manuscrit. En effet, lorsque l'on étudie de tels fluides, on ne peut pas éliminer le tenseur des contraintes des équations constitutives correspondantes, et on doit donc traiter des formulations ayant au moins trois inconnues.

D'autre part, on montrera par la suite l'équivalence entre la formulation variationnelle discrète (2.8) et celle à trois champs, ce qui nous ramène de manière naturelle à l'étude de la formulation à deux champs (2.8). Enfin, un autre point d'intérêt de cette étude est lié aux conditions de bord de Neumann : dans la formulation (2.7) on doit imposer $(\nabla \mathbf{u})\mathbf{n}$ alors que dans la formulation (2.8), on doit imposer $\underline{D}(\mathbf{u})\mathbf{n}$ (i.e. $\underline{\tau}\mathbf{n}$ dans le cas newtonien) ce qui signifie d'un point de vue physique les forces normales.

On s'intéresse par la suite à l'approximation de ces trois problèmes par une méthode de type Galerkin discontinu (dG), avec une stabilisation plus faible que celle connue dans la littérature.

2.2 Discrétisations

2.2.1 Résultats préliminaires

On prend désormais $k = 1, 2$ ou 3 . On introduit les espaces discrets de dimension finie \mathbf{V}_h , Q_h et \underline{X}_h , dont les éléments sont complètement discontinus :

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_h &= \{\mathbf{v}_h \in \mathbf{L}^2(\Omega); \mathbf{v}_h|_T \in \mathbf{P}_k, \forall T \in \mathcal{T}_h\} \\ Q_h &= \{q_h \in L_0^2(\Omega); q_h|_T \in P_{k-1}, \forall T \in \mathcal{T}_h\} \\ \underline{X}_h &= \{\underline{\theta}_h \in \underline{X}; (\underline{\theta}_h)|_T \in \underline{P}_{k-1}, \forall T \in \mathcal{T}_h\}.\end{aligned}$$

On rappelle maintenant les propriétés d'approximation des espaces \mathbf{V}_h et Q_h (voir aussi [37]). On sait qu'il existe un opérateur d'interpolation noté $i_h \in \mathcal{L}(L_0^2(\Omega); Q_h)$ tel que, pour tout $T \in \mathcal{T}_h$ et pour chaque $k = 1, 2$ et 3 , on ait :

$$\forall p \in L_0^2(\Omega), \forall r \in P_{k-1}, \int_T r(i_h p - p) dx = 0. \quad (2.12)$$

De plus, pour s un réel de $[0, k]$ on a :

$$\forall q \in H^s(\Omega) \cap L_0^2(\Omega), \|q - i_h q\|_{0,T} \leq Ch_T^s |q|_{s,T} \quad (2.13)$$

Comme précédemment, pour chaque $k = 1, 2$ et 3 , il existe un opérateur d'interpolation $\mathbf{I}_h \in \mathcal{L}(H^1(\Omega); \mathbf{V}_h)$ qui vérifie :

$$\forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega), \forall r \in P_{k-1}, \int_T r \nabla \cdot (\mathbf{I}_h(\mathbf{v}) - \mathbf{v}) dx = 0 \quad (2.14)$$

$$\forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \forall e \in \varepsilon_h, \forall r \in P_{k-1} \int_e r [\mathbf{I}_h(\mathbf{v})] ds = 0 \quad (2.15)$$

On a de plus l'estimation d'erreur d'interpolation suivante :

$$\forall s \in [0, k], \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}^s(\Omega), |\mathbf{v} - \mathbf{I}_h(\mathbf{v})|_{1,T} \leq Ch_T^s |\mathbf{v}|_{s+1, \Delta_T} \quad (2.16)$$

où Δ_T est un macro-élément contenant T .

Le cas $k = 1$ est traité dans [24] (avec $\Delta_T = T$), celui $k = 2$ vient de [33] et la cas $k = 3$ est étudié dans [23].

On introduit la forme bilinéaire sur $(\mathbf{H}^1(\Omega) + \mathbf{V}_h) \times (\mathbf{H}^1(\Omega) + \mathbf{V}_h)$ qui est notre nouveau terme de stabilisation et qui a pour rôle d'assurer la coercivité discrète :

$$J(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mu \sum_{e \in \varepsilon_h} \frac{1}{|e|} \int_e [\pi_{k-1} \mathbf{u}] \cdot [\pi_{k-1} \mathbf{v}] ds. \quad (2.17)$$

On remarque que $J(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$ pour tout $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$.

On note $|\cdot|_{1,h}$ la semi-norme brisée de $H^1(\Omega)$ définie de la manière suivante :

$$|\mathbf{u}|_{1,h}^2 = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\nabla \mathbf{u}\|_{0,T}^2, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega) + \mathbf{V}_h$$

et on peut maintenant introduire la semi-norme sur $\mathbf{H}^1(\Omega) \times \mathbf{V}_h$:

$$\|\|\mathbf{u}\|\| = (\mu |\mathbf{u}|_{1,h}^2 + \gamma J(\mathbf{u}, \mathbf{u}))^{1/2} \quad (2.18)$$

où $\gamma > 0$ est le paramètre de stabilisation. On montre alors :

Lemme 2.2.1. *L'application $\mathbf{u} \rightarrow \|\|\mathbf{u}\|\|$ est une norme sur \mathbf{V}_h .*

Démonstration. On sait de manière triviale que $\|\|\mathbf{u}\|\|$ est une semi-norme dans \mathbf{V}_h .

Montrons que si $\|\|\mathbf{u}\|\| = 0$, alors $\mathbf{u} = 0$. Par définition, on a :

$$\|\|\mathbf{u}\|\| = 0 \iff \begin{cases} \mu |\mathbf{u}|_{1,h}^2 = 0 & \forall \mathbf{u} \in \mathbf{V}_h \\ \gamma J(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0 & \forall \mathbf{u} \in \mathbf{V}_h \end{cases}$$

D'une part on a :

$$\begin{aligned} |\mathbf{u}|_{1,h}^2 = 0 &\iff \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T (\nabla \mathbf{u})^2 dx = 0, \\ &\iff \nabla \mathbf{u}|_T = 0, \quad \forall T \in \mathcal{T}_h, \\ &\iff \mathbf{u} \text{ est constant sur } T, \quad \forall T \in \mathcal{T}_h. \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} J(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0 &\iff \mu \sum_{e \in \varepsilon_h} \frac{1}{|e|} \int_e [\pi_{k-1} \mathbf{u}]^2 ds = 0, \\ &\iff [\pi_{k-1} \mathbf{u}]|_e = 0 \quad \forall e \in \varepsilon_h. \end{aligned}$$

Si $e \in \varepsilon_h^{int}$, alors il existe deux triangles T^1 et T^2 de \mathcal{T}_h tels que $e = T^1 \cap T^2$. On a alors :

$$\pi_{k-1} \mathbf{u}|_{T^1} = \pi_{k-1} \mathbf{u}|_{T^2}.$$

Donc, $\forall e \in \varepsilon_h^{int}$, $\mathbf{u}|_e$ est continue aux points de Gauss. On en déduit donc que \mathbf{u} est constant sur Ω .

Si $e \in \varepsilon_h^\partial$, on a $\pi_{k-1}\mathbf{u}|_e = 0$ donc $\mathbf{u}|_e$ est nul aux points de Gauss.

Comme \mathbf{u} est constant sur Ω , on a bien :

$$\mathbf{u} = 0 \text{ sur } \Omega.$$

On a donc montré que $\|\mathbf{u}\|$ est une norme sur \mathbf{V}_h . □

2.2.2 Formulations discrètes

2.2.2.1 Formulation $(\nabla\mathbf{u}, \nabla\mathbf{v})$ discrète

On considère la formulation discrète du problème (2.9) suivante :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (\mathbf{u}_h, p_h) \in \mathbf{V}_h \times Q_h \text{ tels que :} \\ a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b_h(p_h, \mathbf{v}_h) = l_h(\mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h \\ b_h(q_h, \mathbf{u}_h) = g_h(q_h) \quad \forall q_h \in Q_h \end{cases} \quad (2.19)$$

où :

$$\begin{aligned} a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) &= \mu \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \nabla \mathbf{u}_h : \nabla \mathbf{v}_h dx + \gamma \mu \sum_{e \in \varepsilon_h} \frac{1}{|e|} \int_e [\pi_{k-1} \mathbf{u}_h] \cdot [\pi_{k-1} \mathbf{v}_h] ds \\ &\quad - \mu \sum_{e \in \varepsilon_h} \left(\int_e \left\{ \frac{\partial \mathbf{u}_h}{\partial \mathbf{n}_e} \right\} \cdot [\mathbf{v}_h] ds + \int_e \left\{ \frac{\partial \mathbf{v}_h}{\partial \mathbf{n}_e} \right\} \cdot [\mathbf{u}_h] ds \right) \\ b_h(q_h, \mathbf{v}_h) &= - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T q_h \nabla \cdot \mathbf{v}_h dx + \sum_{e \in \varepsilon_h} \int_e \{q_h\} [\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}_e] ds \\ l_h(\mathbf{v}_h) &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_h dx - \mu \sum_{e \in \varepsilon_h^\partial} \int_e \frac{\partial \mathbf{v}_h}{\partial \mathbf{n}_e} \cdot \mathbf{g} ds + \gamma \mu \sum_{e \in \varepsilon_h^\partial} \frac{1}{|e|} \int_e \pi_{k-1} \mathbf{g} \cdot \pi_{k-1} \mathbf{v}_h ds \\ g_h(q_h) &= \sum_{e \in \varepsilon_h^\partial} \int_e q_h \mathbf{g} \cdot \mathbf{n}_e ds. \end{aligned}$$

Afin d'alléger les notations, on décompose la forme $a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h)$ de la manière suivante :

$$a_h(\cdot, \cdot) = A_0(\cdot, \cdot) + A_1(\cdot, \cdot) + \gamma J(\cdot, \cdot),$$

où

$$\begin{aligned} A_0(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) &= \mu \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \nabla \mathbf{u}_h : \nabla \mathbf{v}_h dx, \\ A_1(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) &= -\mu \sum_{e \in \varepsilon_h} \left(\int_e \left\{ \frac{\partial \mathbf{u}_h}{\partial \mathbf{n}_e} \right\} \cdot [\mathbf{v}_h] + \int_e \left\{ \frac{\partial \mathbf{v}_h}{\partial \mathbf{n}_e} \right\} \cdot [\mathbf{u}_h] \right) ds. \end{aligned}$$

Le premier terme de $A_1(\cdot, \cdot)$ provient de l'intégration par parties de $-\Delta \mathbf{u}$. On rajoute le deuxième terme afin d'obtenir une forme $a_h(\cdot, \cdot)$ symétrique. On note que la solution (\mathbf{u}_h, p_h) dépend clairement de γ . Cependant, afin d'alléger les notations, on ne rajoutera l'indice γ que dans les sections 2.4 et 3.2.3 de cette partie où la dépendance de la méthode par rapport à ce paramètre est étudiée.

Remarque 1. Dans cette formulation (ainsi que dans toutes les méthodes dG), on prend en compte de manière faible la condition de bord de Dirichlet, $\mathbf{u} = \mathbf{g}$ sur $\partial\Omega$ en utilisant la méthode de Nitsche qui évite de rajouter des conditions de bord dans la définition de l'espace. En effet, la condition de bord est prise en compte de manière faible, dans la définition du second membre du système. Cette méthode a été introduite par J. Nitsche en 1971 [65]. Elle a d'abord été utilisée pour des méthodes d'approximation par éléments finis continus avant de l'être pour des méthodes discontinues (voir par exemple [12]).

2.2.2.2 Formulation $(\underline{D}(\mathbf{u}), \underline{D}(\mathbf{v}))$ discrète

On considère la formulation discrète du problème (2.10) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\mathbf{U}_h, P_h) \in \mathbf{V}_h \times Q_h \text{ tels que :} \\ c_h(\mathbf{U}_h, \mathbf{v}_h) + b_h(P_h, \mathbf{v}_h) = f_h(\mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h \\ b_h(q_h, \mathbf{U}_h) = g_h(q_h) \quad \forall q_h \in Q_h \end{array} \right. \quad (2.20)$$

où :

$$\begin{aligned} c_h(\cdot, \cdot) &= C_0(\cdot, \cdot) + C_1(\cdot, \cdot) + \gamma J(\cdot, \cdot) + \gamma_1 J_1(\cdot, \cdot) \\ C_0(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) &= 2\mu \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \underline{D}(\mathbf{u}_h) : \underline{D}(\mathbf{v}_h) dx \\ C_1(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) &= -2\mu \sum_{e \in \varepsilon_h} \left(\int_e \{ \underline{D}(\mathbf{u}_h) \mathbf{n}_e \} \cdot [\mathbf{v}_h] ds + \int_e \{ \underline{D}(\mathbf{v}_h) \mathbf{n}_e \} \cdot [\mathbf{u}_h] ds \right) \\ J_1(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) &= \mu \sum_{e \in \varepsilon_h^{int}} \frac{1}{|e|} \int_e [\boldsymbol{\pi}_1(\mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n}_e)] \cdot [\boldsymbol{\pi}_1(\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}_e)] ds \\ f_h(\mathbf{v}_h) &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_h dx - 2\mu \sum_{e \in \varepsilon_h^\partial} \int_e (\underline{D}(\mathbf{v}_h) \mathbf{n}_e) \cdot \mathbf{g} ds \\ &\quad + \mu \gamma \sum_{e \in \varepsilon_h^\partial} \frac{1}{|e|} \int_e \boldsymbol{\pi}_{k-1} \mathbf{g} \cdot \boldsymbol{\pi}_{k-1} \mathbf{v}_h ds \end{aligned}$$

et où maintenant $\gamma > 0$ et $\gamma_1 > 0$ sont deux paramètres de stabilisation (qui peuvent être choisis indépendants de h). Les termes $C_0(\cdot, \cdot)$ et $C_1(\cdot, \cdot)$ sont construits de la même manière que les termes $A_0(\cdot, \cdot)$ et $A_1(\cdot, \cdot)$ de la formulation précédente. Le deuxième terme de stabilisation $J_1(\cdot, \cdot)$ est rajouté afin de retrouver la coercivité de la forme $c_h(\cdot, \cdot)$ dans \mathbf{V}_h , à l'aide d'une inégalité de type Korn.

Remarque 2. On note que si l'ordre polynomial est égal à 2 ou 3, il n'est pas nécessaire de rajouter le terme $J_1(\cdot, \cdot)$. En effet, on a $\text{Ker}_h J(\cdot, \cdot) \subset \text{Ker}_h J_1(\cdot, \cdot)$. On le laisse afin d'avoir une écriture homogène pour toutes les valeurs de k .

D'autre part, on note que l'on a pas besoin de rajouter de stabilité sur le bord $\partial\Omega$.

On introduit la semi norme suivante sur $\mathbf{H}^1(\Omega) + \mathbf{V}_h$:

$$[[\mathbf{v}]] = \left(2\mu \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\underline{D}(\mathbf{v})\|_{0,T}^2 + \gamma J(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + \gamma_1 J_1(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \right)^{1/2}$$

Lemme 2.2.2. *L'application $\mathbf{v} \rightarrow [[\mathbf{v}]]$ est une norme sur \mathbf{V}_h , pour tout $k = 1, 2, 3$.*

Démonstration. Soit $[[\mathbf{v}]] = 0$. Alors $[\boldsymbol{\pi}_{k-1}\mathbf{v}] = \mathbf{0}$ sur chaque arête $e \in \varepsilon_h$, $[\boldsymbol{\pi}_1\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_e] = 0$ sur chaque arête interne $e \in \varepsilon_h^{int}$ et $\underline{D}(\mathbf{v}) = \underline{0}$ sur chaque triangle $T \in \mathcal{T}_h$. Cette dernière relation implique que \mathbf{v} est un mouvement rigide sur chaque $T \in \mathcal{T}_h$ (i.e. $\mathbf{v} = \mathbf{a}_T + b_T \mathbf{x}^\perp$ avec $\mathbf{a}_T \in \mathbb{R}^2$, $b_T \in \mathbb{R}$ et $\mathbf{x}^\perp = (x_2, -x_1)$), donc \mathbf{v} est linéaire par morceaux.

Pour $k = 2$ ou 3 , on obtient que $\boldsymbol{\pi}_{k-1}\mathbf{v} = \mathbf{v}$ et on peut donc en déduire de manière similaire que dans le lemme 2.2.1 que \mathbf{v} est continu à travers les arêtes et nul au bord. Donc $\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ et l'inégalité de Korn classique implique que $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ dans Ω .

Pour $k = 1$, on obtient que $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_e$ est continu à travers les arêtes internes mais \mathbf{v} est seulement continu aux points milieux des arêtes. On note (cf. [61]) que la trace tangentielle d'un mouvement rigide est constante sur un segment (et non pas une fonction entièrement linéaire) : en effet, $(b_T \mathbf{x}^\perp) \cdot \mathbf{t}_e = b_T \mathbf{x} \cdot \mathbf{n}_e$ est constant le long de l'arête e d'équation $\mathbf{x} \cdot \mathbf{n}_e = \text{const}$. On peut donc immédiatement en conclure que $\mathbf{v} \cdot \mathbf{t}_e$ est aussi continu à travers les arêtes internes, d'où $\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$. On a donc $\mathbf{v} = \mathbf{a} + b \mathbf{x}^\perp$ dans Ω avec $\boldsymbol{\pi}_0 \mathbf{v} = \mathbf{0}$ sur chaque arête du bord $e \in \varepsilon_h^\partial$, ce qui implique $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. \square

2.2.2.3 Formulation discrète à trois champs

On considère l'approximation du problème (2.11) par éléments finis de type dG suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\mathbf{U}'_h, P'_h, \underline{\boldsymbol{\tau}}'_h) \in \mathbf{V}_h \times Q_h \times \underline{X}_h \text{ tels que :} \\ k_h(\mathbf{U}'_h, \mathbf{v}_h) + b_h(P'_h, \mathbf{v}_h) + d_h(\underline{\boldsymbol{\tau}}'_h, \mathbf{v}_h) = f_h(\mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h \\ b_h(q_h, \mathbf{U}'_h) = g_h(q_h) \quad \forall q_h \in Q_h \\ d_h(\underline{\boldsymbol{\theta}}_h, \mathbf{U}'_h) - e(\underline{\boldsymbol{\theta}}_h, \underline{\boldsymbol{\tau}}'_h) = 0 \quad \forall \underline{\boldsymbol{\theta}}_h \in \underline{X}_h, \end{array} \right. \quad (2.21)$$

où

$$\begin{aligned} k_h(\cdot, \cdot) &= C_1(\cdot, \cdot) + \gamma J(\cdot, \cdot) + \gamma_1 J_1(\cdot, \cdot) \\ d_h(\underline{\boldsymbol{\theta}}_h, \mathbf{v}_h) &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \underline{\boldsymbol{\theta}}_h : \underline{D}(\mathbf{v}_h) dx. \end{aligned}$$

2.2.3 Autres méthodes dG pour le problème de Stokes

Dans [37], V. Girault, B. Rivière et M. F. Wheeler, font l'étude d'une méthode de type Galerkin discontinue pour les problèmes de Stokes et de Navier-Stokes avec décomposition de domaine, différente de celle que nous considérons. Plus précisément, ils considèrent le terme de stabilisation $J^*(\cdot, \cdot)$ issue de la méthode IP ("Interior Penalty") classique :

$$J^*(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = \mu \sum_{e \in \varepsilon_h} \frac{1}{|e|} \int_e [\mathbf{u}_h] \cdot [\mathbf{v}_h] ds.$$

Nous montrerons par la suite que notre méthode est robuste lorsque $\gamma \rightarrow \infty$. En effet, la solution de (2.19) tend lorsque γ , tend vers l'infini, vers l'unique solution du problème de Stokes par éléments finis $\mathbf{P}_k \times P_{k-1}$ non-conformes, qui est stable pour tout $k = 1, 2$, et 3 . En outre, on montre que la vitesse de convergence est γ^{-1} . Enfin, la constante inf-sup par rapport à notre norme énergie est indépendante de γ , ce qui n'est pas le cas dans [37] où elle est $\mathcal{O}(1/\sqrt{\gamma})$. D'autre part, en choisissant ce terme, on peut approcher les intégrales sur les arêtes avec des formules de Gauss de plus bas degrés que dans [37]. Enfin, cela nous permet de construire un tenseur d'approximation localement conservatif dans l'espace d'éléments finis de Raviart-Thomas, que nous utiliserons afin de définir un indicateur d'erreur *a posteriori* simple pour la méthode dG.

Un autre terme de stabilisation $\int_{\Omega} R([\mathbf{u}_h]) \cdot R([\mathbf{v}_h]) dx$ a été introduit par Bassi et Rebay dans [8], où R est un relèvement des sauts à travers les arêtes dans \mathbf{P}_k^{disc} . Dans le but de gagner en efficacité d'un point de vue du coût de calcul, ils remplacent les contributions venant de l'opérateur de relèvement global R , par un opérateur de relèvement local R_e , défini par

$$\sum_{\bar{T} \supseteq e} \int_T R_e(\mathbf{w}) \cdot \mathbf{v}_h dx = \int_e \mathbf{w} \cdot \{\mathbf{v}_h\} ds, \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{P}_k^{disc}.$$

D'où

$$\int_T R_e(\mathbf{w}) \cdot \mathbf{v}_h dx = \frac{1}{2} \int_e \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}_h ds, \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{P}_k^{disc}. \quad (2.22)$$

On peut donc finalement approcher ce terme de stabilisation par :

$$J^\#(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = \sum_{e \in \varepsilon_h} \sum_{\bar{T} \supseteq e} \gamma_T \int_T R_e([\mathbf{u}_h]) \cdot R_e([\mathbf{v}_h]) dx.$$

On suppose maintenant que $k = 1$. On décompose alors $R_e(\mathbf{w})$ sur un triangle T de la manière suivante :

$$R_e(\mathbf{w}) = \alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2 + \alpha_3 \varphi_3,$$

et la projection du vecteur \mathbf{w} sur une arête e de T :

$$\pi_1 \mathbf{w} = \beta_1 \varphi_1 + \beta_2 \varphi_2,$$

où les α_i et β_i sont des constantes et les φ_i sont les fonctions de forme associées au triangle T .

On choisit maintenant comme fonction test \mathbf{v}_h , la fonction φ_1 appartenant à \mathbf{P}_1^{disc} . (2.22) devient alors :

$$\int_T R_e(\mathbf{w}) \cdot \varphi_1 dx = \frac{1}{2} \int_e \mathbf{w} \cdot \varphi_1 ds = \frac{1}{2} \int_e \pi_1 \mathbf{w} \cdot \varphi_1 ds. \quad (2.23)$$

En appliquant des formules d'intégrations numériques de Simpson, on peut réécrire (2.23) de la manière suivante :

$$\frac{|T|}{12} (2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = \frac{|e|}{6} (2\beta_1 + \beta_2)$$

En prenant successivement $\mathbf{v}_h = \varphi_2$ et $\mathbf{v}_h = \varphi_3$, on obtient les deux équations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{|T|}{12} (\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3) &= \frac{|e|}{6} (\beta_1 + 2\beta_2) \\ \frac{|T|}{12} (\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3) &= 0 \end{aligned}$$

En résolvant le système formé des 3 équations précédentes on obtient que la restriction de $R_e(\mathbf{w})$ sur e s'écrit :

$$\begin{aligned} R_e(\mathbf{w})|_e &= \alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2 \\ &= 2 \frac{|e|}{|T|} (\beta_1 \varphi_1 + \beta_2 \varphi_2) + \frac{|e|}{2|T|} (\beta_1 + \beta_2) (\varphi_1 + \varphi_2) \\ &= 2 \frac{|e|}{|T|} \pi_1 \mathbf{w} + \frac{|e|}{2|T|} (\beta_1 + \beta_2) \end{aligned}$$

En remarquant que

$$\int_e \pi_0 \mathbf{w} ds = \int_e \mathbf{w} ds = \int_e \pi_1 \mathbf{w} ds,$$

il s'en suit que :

$$\pi_0 \mathbf{w} = \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}.$$

Et on obtient alors que :

$$R_e(\mathbf{w})|_e = 2 \frac{|e|}{|T|} \pi_1 \mathbf{w} + \frac{|e|}{|T|} \pi_0 \mathbf{w}$$

Ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} \int_T R_e([\mathbf{u}_h]) \cdot R_e([\mathbf{v}_h]) dx &= \frac{1}{2} \int_e [\mathbf{u}_h] \cdot R_e([\mathbf{v}_h]) ds \\ &= \frac{|e|}{|T|} \int_e [\mathbf{u}_h] \cdot [\mathbf{v}_h] ds + \frac{|e|}{2|T|} \int_e [\pi_0 \mathbf{u}_h] \cdot [\pi_0 \mathbf{v}_h] ds. \end{aligned}$$

En conclusion, en choisissant $\gamma_T = \gamma$ on obtient que sur des maillages *réguliers* : $J^\#(\cdot, \cdot) \simeq J^*(\cdot, \cdot) + \frac{1}{2} J(\cdot, \cdot)$. Si l'on change la définition de l'opérateur de relèvement et que l'on le cherche dans \mathbf{P}_{k-1} à la place de \mathbf{P}_k , alors il s'en suit que pour $k = 1$, $R_e(\mathbf{w})|_e = \frac{|e|}{2|T|} \pi_0 \mathbf{w}$ et donc, $J^\#(\cdot, \cdot) \simeq \frac{1}{2} J(\cdot, \cdot)$, puisque

$$\int_T R_e([\mathbf{u}_h]) \cdot R_e([\mathbf{v}_h]) dx = \frac{|e|}{4|T|} \int_e [\pi_0 \mathbf{u}_h] \cdot [\pi_0 \mathbf{v}_h] ds.$$

Des calculs similaires peuvent être effectués pour $k = 2$ ou 3 , permettant d'exprimer $J^\#(\cdot, \cdot)$ en fonction de $J^*(\cdot, \cdot)$ et de $J(\cdot, \cdot)$.

2.2.4 Extensions à d'autres conditions de bord

On s'intéresse ici au traitement de conditions de bord plus générales, plus particulièrement associées à la deuxième formulation variationnelle (2.10), en vue de la généralisation aux liquides non-newtoniens. On rappelle tout d'abord que $\underline{\tau} = 2\mu \underline{D}(\mathbf{u})$. En plus de la condition de bord classique de type Dirichlet, on peut vouloir aussi imposer une condition de Neumann $\underline{\tau} \mathbf{n} - p \mathbf{n} = \chi$. Néanmoins, pour certaines applications, il est important d'avoir un panel plus complet de conditions de bord. Par exemple, la solution exacte d'un écoulement de Poiseuille ne satisfait pas la condition de Neumann précédente à la sortie. On peut aussi souhaiter imposer que l'un des bords

du domaine soit un axe de symétrie, ce qui permet de diviser en deux le domaine de calcul.

On considère alors une partition du bord $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$ telle que $\Gamma_2 \neq \partial\Omega$ et on impose :

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{t} &= g_t, & \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} &= g_n & \text{sur } \Gamma_1 & \text{(Dirichlet pur)} \\ \underline{\boldsymbol{\tau}} \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} - p &= \chi_n, & \underline{\boldsymbol{\tau}} \mathbf{n} \cdot \mathbf{t} &= \chi_t & \text{sur } \Gamma_2 & \text{(Neumann pur)} \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{t} &= g_t, & \underline{\boldsymbol{\tau}} \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} - p &= \chi_n & \text{sur } \Gamma_3 \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} &= g_n, & \underline{\boldsymbol{\tau}} \mathbf{n} \cdot \mathbf{t} &= \chi_t & \text{sur } \Gamma_4, \end{aligned}$$

avec ε_h^i l'ensemble des arêtes sur Γ_i .

Afin de traiter ces conditions de bord nous utilisons une méthode de Nitsche. Les formes bilinéaires $J(\cdot, \cdot)$, $C_1(\cdot, \cdot)$ et $b_h(\cdot, \cdot)$, seront alors modifiées de la manière suivante :

$$\begin{aligned} J(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) &= \mu \sum_{e \in \varepsilon_h^{int} \cup \varepsilon_h^1 \cup \varepsilon_h^3} \frac{1}{|e|} \int_e [\boldsymbol{\pi}_{k-1} \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{t}_e] [\boldsymbol{\pi}_{k-1} \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{t}_e] ds \\ &\quad + \mu \sum_{e \in \varepsilon_h^{int} \cup \varepsilon_h^1 \cup \varepsilon_h^4} \frac{1}{|e|} \int_e [\boldsymbol{\pi}_{k-1} \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n}_e] [\boldsymbol{\pi}_{k-1} \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}_e] ds \\ C_1(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) &= -2\mu \sum_{e \in \varepsilon_h^{int} \cup \varepsilon_h^1 \cup \varepsilon_h^3} \left(\int_e \{ \underline{D}(\mathbf{v}_h) \mathbf{n}_e \cdot \mathbf{t}_e \} [\mathbf{u}_h \cdot \mathbf{t}_e] ds + \int_e \{ \underline{D}(\mathbf{u}_h) \mathbf{n}_e \cdot \mathbf{t}_e \} [\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{t}_e] ds \right) \\ &\quad - 2\mu \sum_{e \in \varepsilon_h^{int} \cup \varepsilon_h^1 \cup \varepsilon_h^4} \left(\int_e \{ \underline{D}(\mathbf{v}_h) \mathbf{n}_e \cdot \mathbf{n}_e \} [\mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n}_e] ds + \int_e \{ \underline{D}(\mathbf{u}_h) \mathbf{n}_e \cdot \mathbf{n}_e \} [\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}_e] ds \right) \\ b_h(q_h, \mathbf{v}_h) &= - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T q_h \nabla \cdot \mathbf{v}_h dx + \sum_{e \in \varepsilon_h^{int} \cup \varepsilon_h^1 \cup \varepsilon_h^4} \int_e \{ q_h \} [\mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n}_e] ds. \end{aligned}$$

De même, les formes linéaires sont modifiées comme suit :

$$\begin{aligned} f_h(\mathbf{v}_h) &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_h dx + \sum_{e \in \varepsilon_h^2 \cup \varepsilon_h^3} \int_e \chi_1 \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}_e ds + \sum_{e \in \varepsilon_h^2 \cup \varepsilon_h^4} \int_e \chi_2 \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{t}_e ds \\ &\quad - 2\mu \left(\sum_{e \in \varepsilon_h^1 \cup \varepsilon_h^3} \int_e \underline{D}(\mathbf{v}_h) \mathbf{n}_e \cdot \mathbf{t}_e g_1 ds + \sum_{e \in \varepsilon_h^1 \cup \varepsilon_h^4} \int_e \underline{D}(\mathbf{v}_h) \mathbf{n}_e \cdot \mathbf{n}_e g_2 ds \right) \\ &\quad + \mu \gamma \left(\sum_{e \in \varepsilon_h^1 \cup \varepsilon_h^3} \frac{1}{|e|} \int_e \boldsymbol{\pi}_{k-1} g_1 \boldsymbol{\pi}_{k-1} \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{t}_e ds + \sum_{e \in \varepsilon_h^1 \cup \varepsilon_h^4} \frac{1}{|e|} \int_e \boldsymbol{\pi}_{k-1} g_2 \boldsymbol{\pi}_{k-1} \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}_e ds \right) \\ g_h(q_h) &= \sum_{e \in \varepsilon_h^1 \cup \varepsilon_h^4} \int_e q_h g_2 ds. \end{aligned}$$

2.3 Existence et unicité

Dans cette section, on souhaite prouver l'existence et l'unicité de chacune des solutions des formulations discrètes introduites précédemment. Pour cela, on va donc montrer que les formulations à deux champs, (2.19) et (2.20), vérifient les hypothèses discrètes du théorème de Babuška-Brezzi. On va tout d'abord vérifier la coercivité des formes $a_h(\cdot, \cdot)$ et $c_h(\cdot, \cdot)$ sur le noyau discret

$Ker_h b_h$, puis la condition inf-sup pour b_h par rapport aux normes $\|\cdot\|$ et $[[\cdot]]$. On en déduira alors que la formulation à trois champs est bien posée en montrant qu'elle est équivalente à la formulation (2.20). On précise que si aucune spécification n'est donnée, les constantes utilisées sont indépendantes des paramètres de stabilisation γ et γ_1 , du paramètre de discrétisation h et de la viscosité μ .

2.3.1 Coercivité des formes $a_h(\cdot, \cdot)$ et $c_h(\cdot, \cdot)$

Lemme 2.3.1.

Pour γ suffisamment grand, il existe une constante $\alpha_1 > 0$ elle que :

$$\forall \mathbf{u}_h \in Ker_h b_h, a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h) \geq \alpha_1 \|\mathbf{u}_h\|^2. \quad (2.24)$$

Démonstration.

On a, par définition :

$$a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h) = \mu |\mathbf{u}_h|_{1,h}^2 + \gamma J(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h) + A_1(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h) = \|\mathbf{u}_h\|^2 + A_1(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h).$$

On souhaite donc contrôler le terme :

$$A_1(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h) = -2\mu \sum_{e \in \varepsilon_h} \left(\int_e \left\{ \frac{\partial \mathbf{u}_h}{\partial \mathbf{n}_e} \right\} \cdot [\mathbf{u}_h] \right) ds.$$

On note que $\left\{ \frac{\partial \mathbf{u}_h}{\partial \mathbf{n}_e} \right\} \Big|_e \in P_{k-1}$. Par définition de la projection sur P_{k-1} , on obtient :

$$A_1(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h) = -2\mu \sum_{e \in \varepsilon_h} \left(\int_e \left\{ \frac{\partial \mathbf{u}_h}{\partial \mathbf{n}_e} \right\} \cdot [\pi_{k-1} \mathbf{u}_h] \right) ds.$$

On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned} A_1(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h) &\geq -2\mu \sum_{e \in \varepsilon_h} \sqrt{|e|} \left\| \left\{ \frac{\partial \mathbf{u}_h}{\partial \mathbf{n}_e} \right\} \right\|_{0,e} \frac{1}{\sqrt{|e|}} \|\pi_{k-1} \mathbf{u}_h\|_{0,e} \\ &\geq -2\mu \left(\sum_{e \in \varepsilon_h} |e| \left\| \left\{ \frac{\partial \mathbf{u}_h}{\partial \mathbf{n}_e} \right\} \right\|_{0,e}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{e \in \varepsilon_h} \frac{1}{|e|} \|\pi_{k-1} \mathbf{u}_h\|_{0,e}^2 \right)^{1/2} \end{aligned}$$

Soit $e \in \varepsilon_h^{int}$, alors il existe deux triangles de \mathcal{T}_h , T^1 et T^2 tels que $e = \partial T^1 \cap \partial T^2$. On obtient en développant :

$$\sqrt{|e|} \left\| \left\{ \frac{\partial \mathbf{u}_h}{\partial \mathbf{n}_e} \right\} \right\|_{0,e} \leq \frac{\sqrt{|e|}}{2} \sum_{i=1}^2 \|\nabla \mathbf{u}_h|_{T^i}\|_{0,e}.$$

On peut donc appliquer la propriété suivant : soit $\mathbf{v} \in L^2(e)$, soit $F(\hat{x})$ la transformation affine d'une arête e à une arête de référence \hat{e} , on a alors :

$$\|\mathbf{v}\|_{0,e}^2 = \int_e \mathbf{v}^2(x) dx = \int_{\hat{e}} v(F(\hat{x}))^2 \frac{|e|}{|\hat{e}|} d\hat{x} = \frac{|e|}{|\hat{e}|} \|\hat{\mathbf{v}}\|_{0,\hat{e}}^2 \quad (2.25)$$

On applique cette propriété à $\underline{\nabla} \mathbf{u}_h$ appartenant à $L^2(e)$:

$$\|\underline{\nabla} \mathbf{u}_h|_{T^i}\|_{0,e} \leq \frac{\sqrt{|e|}}{\sqrt{|\hat{e}|}} \|\widehat{\underline{\nabla} \mathbf{u}_h}|_{T^i}\|_{0,\hat{e}}.$$

$\widehat{\underline{\nabla} \mathbf{u}_h}|_{T^i}$ appartient à un espace de dimension finie. On a donc :

$$\|\widehat{\underline{\nabla} \mathbf{u}_h}|_{T^i}\|_{0,\hat{e}} \leq c \|\widehat{\underline{\nabla} \mathbf{u}_h}|_{T^i}\|_{0,\hat{T}} \leq c \frac{\sqrt{|\hat{T}|}}{\sqrt{|T^i|}} \|\underline{\nabla} \mathbf{u}_h|_{T^i}\|_{0,T^i}.$$

Finalement, on obtient :

$$\|\underline{\nabla} \mathbf{u}_h|_{T^i}\|_{0,e} \leq c \frac{\sqrt{|e|}}{\sqrt{|T^i|}} \|\underline{\nabla} \mathbf{u}_h|_{T^i}\|_{0,T^i}.$$

D'où :

$$\sqrt{|e|} \left\| \left\{ \frac{\partial \mathbf{u}_h}{\partial \mathbf{n}_e} \right\} \right\|_{0,e} \leq \frac{\sqrt{|e|}}{2\sqrt{|T^1|}} |\mathbf{u}_h|_{1,T^1} + \frac{\sqrt{|e|}}{2\sqrt{|T^2|}} |\mathbf{u}_h|_{1,T^2}.$$

En utilisant la propriété de régularité (1.1), on obtient que , $\forall T \in \mathcal{T}_h$:

$$\frac{|e|}{\sqrt{|T|}} \leq \frac{h_T}{c\rho_T} \leq \varsigma$$

Ce qui nous permet de conclure que

$$\sqrt{|e|} \left\| \left\{ \frac{\partial \mathbf{u}_h}{\partial \mathbf{n}_e} \right\} \right\|_{0,e} \leq \frac{c}{2} (|\mathbf{u}_h|_{1,T^1} + |\mathbf{u}_h|_{1,T^2}).$$

On applique le même raisonnement sur les arêtes du bord (il y aura dans ces cas là un seul terme dans la somme sur i). En sommant sur toutes les arêtes , on obtient :

$$A_1(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h) \geq -2c\sqrt{\mu} |\mathbf{u}_h|_{1,h} \sqrt{J(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h)}.$$

On obtient alors :

$$a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h) \geq \mu |\mathbf{u}_h|_{1,h}^2 + \gamma J(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h) - \frac{2c}{\sqrt{\gamma}} \left(\sqrt{\mu} |\mathbf{u}_h|_{1,\Omega} \right) \left(\sqrt{\gamma J(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h)} \right).$$

En appliquant l'inégalité de Young : $2ab \leq \frac{1}{\varepsilon} a^2 + \varepsilon b^2$, pour tout $\varepsilon > 0$, on obtient :

$$a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h) \geq \mu |\mathbf{u}_h|_{1,h}^2 + \gamma J(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h) - \frac{c}{\sqrt{\gamma}} \left(\left(\mu |\mathbf{u}_h|_{1,\Omega}^2 \right) + (\gamma J(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h)) \right).$$

On en déduit que la forme $a_h(\cdot, \cdot)$ est définie positive si $1 - \frac{c}{\sqrt{\gamma}} > 0 \Leftrightarrow \gamma > c^2$. Il existe donc une constante $\alpha_1 = 1 - \frac{c}{\sqrt{\gamma}}$ indépendante de h et de μ telle que

$$a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h) \geq \alpha \left(\mu |\mathbf{u}_h|_{1,\Omega}^2 + J(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h) \right).$$

Pour γ suffisamment grand, la constante de coercivité admet une borne inférieure indépendante de γ . On a donc montré la coercivité de $a_h(\cdot, \cdot)$ sur tout l'espace \mathbf{V}_h , et donc en particulier, sur $\text{Ker}_h b_h$, pour γ assez grand. \square

Lemme 2.3.2.

Pour γ suffisamment grand, il existe une constante $\alpha_2 > 0$, telle que :

$$\forall \mathbf{u}_h \in \text{Ker}_h b_h, c_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h) \geq \alpha_2 [[\mathbf{u}_h]]^2. \quad (2.26)$$

Démonstration. La démonstration de ce lemme est similaire à la démonstration du lemme 2.3.1. Par définition, on a :

$$c_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h) = [[\mathbf{u}_h]]^2 - 4\mu \sum_{e \in \varepsilon_h} \left(\int_e \{ \underline{D}(\mathbf{u}_h) \cdot \mathbf{n}_e \} [\mathbf{u}_h] ds \right)$$

Comme précédemment, $\{ \underline{D}(\mathbf{u}_h) \cdot \mathbf{n}_e \} |_{e \in P_{k-1}}$, et donc :

$$4\mu \sum_{e \in \varepsilon_h} \left(\int_e \{ \underline{D}(\mathbf{u}_h) \cdot \mathbf{n}_e \} [\mathbf{u}_h] ds \right) = 4\mu \sum_{e \in \varepsilon_h} \left(\int_e \{ \underline{D}(\mathbf{u}_h) \cdot \mathbf{n}_e \} [\pi_{k-1} \mathbf{u}_h] ds \right).$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient directement que :

$$c_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h) \geq [[\mathbf{u}_h]]^2 - 4 \left(\mu \sum_{e \in \varepsilon_h} |e| \| \{ \underline{D}(\mathbf{u}_h) \mathbf{n}_e \} \|_{0,e}^2 \right)^{1/2} \sqrt{J(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h)}.$$

Sur chaque arête $e = \partial T^1 \cap \partial T^2$ on a :

$$\sqrt{|e|} \| \{ \underline{D}(\mathbf{u}_h) \mathbf{n}_e \} \|_{0,e} \leq c \left(\| \underline{D}(\mathbf{u}_h) \|_{0,T^1} + \| \underline{D}(\mathbf{u}_h) \|_{0,T^2} \right).$$

On obtient donc comme précédemment :

$$c_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h) \geq [[\mathbf{u}_h]]^2 - c \frac{4}{\sqrt{2\gamma}} \sqrt{2\mu} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \| \underline{D}(\mathbf{u}_h) \|_{0,T} \sqrt{\gamma J(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h)}.$$

Ce qui nous donne :

$$c_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h) \geq [[\mathbf{u}_h]]^2 - c \sqrt{\frac{2}{\gamma}} \left(2\mu \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \| \underline{D}(\mathbf{u}_h) \|_{0,T}^2 + \gamma J(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h) \right).$$

Or :

$$2\mu \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \| \underline{D}(\mathbf{u}_h) \|_{0,T}^2 + \gamma J(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h) < [[\mathbf{u}_h]]^2,$$

et donc

$$c_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h) \geq [[\mathbf{u}_h]]^2 - \sqrt{2} \frac{c}{\sqrt{\gamma}} [[\mathbf{u}_h]]^2.$$

Pour $1 - \sqrt{2} \frac{c}{\sqrt{\gamma}} > 0 \Leftrightarrow \gamma > 2c^2$, on a donc montré que la forme $c_h(\cdot, \cdot)$ est coercive sur tout l'espace \mathbf{V}_h , donc en particulier sur le noyau de la forme $b_h(\cdot, \cdot)$. Comme précédemment, pour γ suffisamment grand, $\alpha_2 = 1 - \sqrt{2} \frac{c}{\sqrt{\gamma}}$ admet une borne inférieure indépendante de γ . \square

On s'intéresse maintenant aux conditions inf-sup, par rapport aux normes $||| \cdot |||$ et $[[\cdot]]$

2.3.2 Conditions inf-sup

Lemme 2.3.3 (Condition inf-sup).

Il existe une constante $\beta_1 > 0$ telle que

$$\inf_{p_h \in Q_h} \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h} \frac{b_h(p_h, \mathbf{v}_h)}{\|p_h\|_{0,\Omega} \|\mathbf{v}_h\|} \geq \frac{\beta_1}{\sqrt{\mu}}. \quad (2.27)$$

Démonstration. On utilise l'argument de Fortin. Pour tout $p_h \in Q_h$, on associe un $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$ tel que :

$$b_h(p_h, \mathbf{v}_h) = \|p_h\|_{0,\Omega}^2 \quad \text{et} \quad \|\mathbf{v}_h\| \leq c \|p_h\|_{0,\Omega}.$$

Pour cela, on se base sur la condition inf-sup du problème continu (voir par exemple [36]). On sait en effet, que pour tout $p \in L_0^2(\Omega)$, il existe un $\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$, tel que :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{v} = p, \\ \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega} \leq c \|p\|_{0,\Omega}. \end{cases}$$

On l'applique en particulier à $p_h \in Q_h \subset L_0^2(\Omega)$ et on en déduit que $\exists \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$, tel que $\operatorname{div} \mathbf{v} = p_h$. On choisit maintenant $\mathbf{v}_h = \mathbf{I}_h \mathbf{v}$ avec \mathbf{I}_h l'opérateur d'interpolation de $\mathbf{H}^1(\Omega)$ dans \mathbf{V}_h introduit précédemment. Par construction, on a pour tout $p_h \in P_{k-1}$:

$$\int_T p_h \operatorname{div}(\mathbf{I}_h \mathbf{v}) dx = \int_T p_h \operatorname{div} \mathbf{v} dx \quad \forall T \in \mathcal{T}_h.$$

De plus la propriété (2.15) nous donne :

$$\int_e \{p_h\} [\mathbf{I}_h \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_e] ds = 0, \quad \forall e \in \varepsilon_h.$$

On en déduit donc que :

$$b_h(p_h, \mathbf{I}_h \mathbf{v}) = b(p_h, \mathbf{v}) = \|p_h\|_{0,\Omega}^2. \quad (2.28)$$

D'autre part, on a :

$$\|\mathbf{I}_h \mathbf{v}\| = \left(\mu \sum_{T \in \mathcal{T}_h} |\mathbf{I}_h \mathbf{v}|_{1,T}^2 + \gamma J(\mathbf{I}_h \mathbf{v}, \mathbf{I}_h \mathbf{v}) \right)^{1/2}.$$

Par définition de la projection on peut écrire :

$$\int_e [\pi_{k-1} \mathbf{I}_h \mathbf{v}] [\pi_{k-1} \mathbf{I}_h \mathbf{v}] ds = \int_e [\pi_{k-1} \mathbf{I}_h \mathbf{v}] [\mathbf{I}_h \mathbf{v}] ds. \quad (2.29)$$

Comme $\pi_{k-1} \mathbf{I}_h \mathbf{v} \in P_{k-1}$, d'après (2.15), on obtient que :

$$J((\mathbf{I}_h \mathbf{v}, \mathbf{I}_h \mathbf{v})) = 0. \quad (2.30)$$

On en déduit donc à l'aide de (2.16) que :

$$\|\mathbf{I}_h \mathbf{v}\| \leq \sqrt{\mu} |\mathbf{I}_h \mathbf{v}|_{1,h} \leq c\sqrt{\mu} |\mathbf{v}|_{1,h} \leq c\sqrt{\mu} \|p_h\|_{0,\Omega},$$

Donc,

$$\sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h} \frac{b_h(p_h, \mathbf{v}_h)}{\|\mathbf{v}_h\|} \geq \frac{b_h(p_h, \mathbf{I}_h \mathbf{v})}{\|\mathbf{I}_h \mathbf{v}\|} \geq \frac{1}{c\sqrt{\mu}} \|p_h\|_{0,\Omega} \geq \frac{\beta_1}{\sqrt{\mu}} \|p_h\|_{0,\Omega}.$$

□

Lemme 2.3.4 (Condition inf-sup).

Il existe une constante $\beta_2 > 0$ telle que

$$\inf_{p_h \in Q_h} \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h} \frac{b_h(p_h, \mathbf{v}_h)}{\|p_h\|_{0,\Omega} \|\mathbf{v}_h\|} \geq \frac{\beta_2}{\sqrt{\mu}}. \quad (2.31)$$

Démonstration.

On suit le même raisonnement que pour le lemme 2.3.3. On associe à un $p_h \in Q_h$ arbitraire la même fonction $\mathbf{v}_h = \mathbf{I}_h \mathbf{v} \in \mathbf{V}_h$ que précédemment. Il suffit donc de montrer que :

$$\|[\mathbf{v}_h]\| = \left(2\mu \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\underline{D}(\mathbf{v}_h)\|_{0,T}^2 + \gamma_1 J_1(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) \right)^{1/2} \leq c\sqrt{\mu} \|p_h\|_{0,\Omega}.$$

Pour $k = 2$ ou 3 , on a :

$J_1(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) = 0$, puisque $J(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) = 0$. En utilisant (2.16) on peut écrire :

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\underline{D}(\mathbf{v}_h)\|_{0,T} \leq c |\mathbf{v}|_{1,h} \leq c \|p_h\|_{0,\Omega}.$$

et on obtient donc le résultat souhaité.

Pour $k = 1$, on doit contrôler le terme :

$$J_1(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) = \mu \sum_{e \in \varepsilon_h^{int}} \frac{1}{|e|} \|[\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}_e]\|_{0,e}^2.$$

On considère tout d'abord le fait que $[\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_e] = 0$, et l'inégalité de trace sur $\{e\} = \partial T_1 \cap \partial T_2$:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{|e|}} \|[(\mathbf{I}_h \mathbf{v} - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}_e]\|_{0,e} \\ & \leq c \left(\frac{1}{h_{T_1}} \|\mathbf{I}_h \mathbf{v} - \mathbf{v}\|_{0,T_1} + \frac{1}{h_{T_2}} \|\mathbf{I}_h \mathbf{v} - \mathbf{v}\|_{0,T_2} + |\mathbf{I}_h \mathbf{v} - \mathbf{v}|_{1,T_1} + |\mathbf{I}_h \mathbf{v} - \mathbf{v}|_{1,T_2} \right) \end{aligned} \quad (2.32)$$

puis, les propriétés d'interpolation de l'opérateur de Crouzeix-Raviart \mathbf{I}_h . On obtient donc que

$$J_1(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) \leq c\mu |\mathbf{v}|_{1,h}^2$$

ce qui nous permet de conclure.

□

2.3.3 Continuité des formes $a_h(\cdot, \cdot)$, $c_h(\cdot, \cdot)$ et $b_h(\cdot, \cdot)$

Pour établir la continuité de la forme bilinéaire $a_h(\cdot, \cdot)$, il suffit d'étudier celle de $A_1(\cdot, \cdot)$. En effet, on a :

$$\begin{aligned} A_1(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) &= -\mu \sum_{e \in \varepsilon_h} \left(\int_e \left\{ \frac{\partial \mathbf{u}_h}{\partial \mathbf{n}_e} \right\} \cdot [\mathbf{v}_h] + \int_e \left\{ \frac{\partial \mathbf{v}_h}{\partial \mathbf{n}_e} \right\} \cdot [\mathbf{u}_h] \right) ds \\ &= -\mu \sum_{e \in \varepsilon_h} \left(\int_e \left\{ \frac{\partial \mathbf{u}_h}{\partial \mathbf{n}_e} \right\} \cdot [\pi_{k-1} \mathbf{v}_h] + \int_e \left\{ \frac{\partial \mathbf{v}_h}{\partial \mathbf{n}_e} \right\} \cdot [\pi_{k-1} \mathbf{u}_h] \right) ds \end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient :

$$\begin{aligned} |A_1(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h)| &\leq \left(\mu \sum_{e \in \varepsilon_h} \int_e \left(\left\{ \frac{\partial \mathbf{u}_h}{\partial \mathbf{n}_e} \right\}^2 + [\pi_{k-1} \mathbf{u}_h]^2 \right) ds \right)^{1/2} \left(\mu \sum_{e \in \varepsilon_h} \int_e \left(\left\{ \frac{\partial \mathbf{v}_h}{\partial \mathbf{n}_e} \right\}^2 + [\pi_{k-1} \mathbf{v}_h]^2 \right) ds \right)^{1/2} \\ &\leq \| \mathbf{u}_h \| \| \mathbf{v}_h \| \end{aligned}$$

Nous avons ici appliqué à $\varphi = \nabla \mathbf{u}_h$ l'inégalité de trace sur $e \subset \partial T$ combinée avec une inégalité inverse :

$$\frac{1}{\sqrt{|e|}} \|\varphi\|_{0,e} \leq c \left(\frac{1}{h_T} \|\varphi\|_{0,T} + |\varphi|_{1,T} \right) \leq \frac{c}{h_T} \|\varphi\|_{0,T}.$$

On obtient alors que

$$|a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h)| \leq 2 \| \mathbf{u}_h \| \| \mathbf{v}_h \|.$$

On obtient de la même manière la continuité de la forme $c_h(\cdot, \cdot)$:

$$\mu \sum_{e \in \varepsilon_h} \int_e \{ \underline{D}(\mathbf{u}_h) \mathbf{n}_e \} \cdot [\mathbf{v}_h] ds \leq \left(\mu \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \| \underline{D}(\mathbf{u}_h) \|_{0,T}^2 \right)^{1/2} J(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)^{1/2} \leq [[\mathbf{u}_h]] [[\mathbf{v}_h]]$$

et de $b_h(\cdot, \cdot)$:

$$\begin{aligned} \sum_{e \in \varepsilon_h} \int_e \{ q_h \} [\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}_e] ds &= \sum_{e \in \varepsilon_h} \int_e \{ q_h \} [\pi_{k-1} \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}_e] ds \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{\mu}} \left(\sum_{e \in \varepsilon_h} |e| \| q_h \|_{0,e}^2 \right)^{1/2} J(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)^{1/2} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{\mu}} \| q_h \|_{0,T} J(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)^{1/2}. \end{aligned}$$

La continuité des formes linéaires $l_h(\cdot)$, $f_h(\cdot)$ et $g_h(\cdot)$ s'obtient de la même manière.

Théorème 2.3.1.

Pour γ suffisamment grand, les problèmes mixtes (2.19) et (2.20) admettent une unique solution.

Démonstration. D'après les lemmes 2.3.1 et 2.3.3, respectivement, 2.3.2 et 2.3.4, le problème (2.19), respectivement (2.20), vérifie les conditions du théorème de Babuška-Brezzi (cf. [19]). Chacun des deux problèmes admet donc une unique solution. \square

Théorème 2.3.2. *Pour γ suffisamment grand, le problème (2.21) a une unique solution. De plus, sa solution est $(\mathbf{U}_h, P_h, 2\mu\underline{D}(\mathbf{U}_h))$ où (\mathbf{U}_h, P_h) est l'unique solution de (2.20).*

Démonstration. De manière évidente on a que $(\mathbf{U}_h, P_h, 2\mu\underline{D}(\mathbf{U}_h))$ appartient à $\mathbf{V}_h \times Q_h \times \underline{X}_h$ et vérifie le problème (2.21). Le fait que les espaces soient de dimensions finies, assure l'unicité de la solution. \square

2.4 Robustesse du schéma par rapport au paramètre de stabilisation

Afin de simplifier l'étude du schéma, on considérera par la suite des conditions de bords homogènes (i.e. $\mathbf{g} = \mathbf{0}$).

Dans cette section, on rajoute un indice γ aux inconnues des deux méthodes dG (2.19) et (2.20) et un indice $*$ pour les inconnues se rapportant aux méthodes non-conformes considérées par la suite.

2.4.1 Passage à la limite lorsque $\gamma \rightarrow \infty$

Nous avons vu précédemment que le paramètre de stabilisation γ doit être suffisamment élevé afin d'avoir la coercivité des formes $a_h(\cdot, \cdot)$ et $c_h(\cdot, \cdot)$ dans $Kernel_b_h$. Nous avons donc étudié le comportement de notre méthode de type dG lorsque ce paramètre tend vers l'infini et on montre qu'elle est robuste par rapport à des valeurs élevées de γ .

On s'intéresse tout d'abord à la formulation (2.19). Lorsque $\gamma \rightarrow \infty$, la solution de (2.19) tend vers la solution du problème de Stokes approché par des éléments finis $\mathbf{P}_k \times P_{k-1}$ non-conformes, définie de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\mathbf{u}_h^*, p_h^*) \in \mathbf{H}_h \times Q_h \text{ tels que :} \\ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \mu \int_T \nabla \mathbf{u}_h^* : \nabla \mathbf{v}_h^* dx + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T p_h^* \operatorname{div} \mathbf{v}_h^* dx = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \mathbf{f} \mathbf{v}_h^* dx \quad \forall \mathbf{v}_h^* \in \mathbf{H}_h \\ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T q_h^* \operatorname{div} \mathbf{u}_h^* dx = 0 \quad \forall q_h^* \in Q_h \end{array} \right. \quad (2.33)$$

où :

$$\mathbf{H}_h = \left\{ \mathbf{v}_h \in \mathbf{L}^2(\Omega) : \mathbf{v}_h|_T \in \mathbf{P}_k, \forall e \in \varepsilon_h^{int} \text{ (resp. } \varepsilon_h^\partial), \right. \\ \left. \mathbf{v}_h|_e \text{ continue (resp. nulle) aux points de Gauss} \right\}.$$

La principale différence avec notre schéma est que dans le cas non-conforme, la continuité de la vitesse aux points de Gauss sur chaque arête est imposée dans la définition de l'espace d'approximation de la vitesse.

Remarque 3. Lorsque $k=1$ on retrouve les éléments finis non-conformes de Crouzeix-Raviart [24], le cas $k=2$ correspond aux éléments finis non-conformes de Fortin-Soulis [33], et enfin lorsque $k=3$, on retrouve les éléments finis non conformes de Crouzeix-Falk [23]. On sait que le problème (2.33) est bien posé pour $k = 1, 2$ et 3 . La démonstration de ces résultats d'existence et d'unicité fait appel à une inégalité de Poincaré uniforme sur \mathbf{H}_h .

Remarque 4. On remarque que $\ker J(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = \mathbf{H}_h$. En effet :

$$\begin{aligned} \ker J(\cdot, \cdot) &= \left\{ \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h ; \sum_{e \in \varepsilon_h} \frac{1}{|e|} \int_e [\pi_{k-1} \mathbf{u}_h] [\pi_{k-1} \mathbf{v}_h] ds = 0, \forall \mathbf{u}_h \in \mathbf{V}_h \right\} \\ &= \{ \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h ; [\pi_{k-1} \mathbf{v}_h]|_e = 0, \forall e \in \varepsilon_h \} \\ &= \mathbf{H}_h \end{aligned}$$

Théorème 2.4.1.

Soit $(\mathbf{u}_h^\gamma, p_h^\gamma)$ la solution du problème (2.19), et soit (\mathbf{u}_h^*, p_h^*) celle du problème (2.33). On a alors :

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} (\|\mathbf{u}_h^\gamma - \mathbf{u}_h^*\| + \|p_h^\gamma - p_h^*\|) = 0$$

Démonstration.

Montrons d'abord que la suite $(\mathbf{u}_h^\gamma, p_h^\gamma)_\gamma$ est bornée dans \mathbf{V}_h par rapport à γ .

On prend tout d'abord comme fonction test $\mathbf{v}_h = \mathbf{u}_h^\gamma$, on obtient alors que $b_h(p_h^\gamma, \mathbf{u}_h^\gamma) = 0$ d'après la deuxième équation du problème (2.19).

Donc $a_h(\mathbf{u}_h^\gamma, \mathbf{u}_h^\gamma) = l_h(\mathbf{u}_h^\gamma)$, et l'inégalité de Cauchy-Schwarz nous donne $\mathbf{u}_h^\gamma \in \mathbf{V}_h$:

$$a_h(\mathbf{u}_h^\gamma, \mathbf{u}_h^\gamma) = l_h(\mathbf{u}_h^\gamma) \leq \|\mathbf{f}\|_{0,\Omega} \|\mathbf{u}_h^\gamma\|_{0,\Omega}$$

De plus, le lemme 2.3.1, nous donne :

$$a_h(\mathbf{u}_h^\gamma, \mathbf{u}_h^\gamma) \geq \alpha_1 \|\mathbf{u}_h^\gamma\|^2 \quad \forall \mathbf{u}_h^\gamma \in \mathbf{V}_h.$$

On rappelle maintenant une inégalité de Poincaré-Friedrichs pour les espaces d'éléments finis discontinus (cf. Brenner [17]) :

$$\|\mathbf{v}\|_{0,\Omega} \leq c \left(|\mathbf{v}|_{1,h}^2 + \sum_{e \in \varepsilon_h^{int}} \frac{1}{|e|} \|[\pi_0 \mathbf{v}]\|_{0,e}^2 + \phi(\mathbf{v}) \right)^{1/2}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_h \quad (2.34)$$

où $\phi : \mathbf{H}^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ est une semi-norme continue telle que pour une fonction constante \mathbf{c} , $\phi(\mathbf{c}) = 0$ si et seulement si $\mathbf{c} = \mathbf{0}$. On choisit ici :

$$\phi(\mathbf{v}) = \sum_{e \in \varepsilon_h^{\partial}} \|\pi_0 \mathbf{v}\|_{0,e}^2 \quad (2.35)$$

et on utilise le fait que $\|\pi_0 \mathbf{v}\|_{0,e} \leq \|\pi_{k-1} \mathbf{v}\|_{0,e}$, puisque

$$\|\pi_0 \mathbf{v}\|_{0,e}^2 = \int_e \pi_0 \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} ds = \int_e \pi_0 \mathbf{v} \cdot \pi_{k-1} \mathbf{v} ds \leq \|\pi_{k-1} \mathbf{v}\|_{0,e} \|\pi_0 \mathbf{v}\|_{0,e}.$$

On en déduit donc une inégalité de Poincaré-Friedrichs quelque peu différente de celles de [17] et que nous utiliserons dans la suite :

$$\|\mathbf{v}\|_{0,\Omega} \leq c \left(|\mathbf{v}|_{1,h}^2 + \frac{1}{\mu} J(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \right)^{1/2}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_h. \quad (2.36)$$

On obtient donc finalement que :

$$\begin{aligned} \alpha_1 \|\|\mathbf{u}_h^\gamma\|\|^2 &\leq \|f\|_{0,\Omega} \|\mathbf{u}_h^\gamma\|_{0,\Omega} \\ &\leq c \|f\|_{0,\Omega} \left(|\mathbf{u}_h^\gamma|_{1,h}^2 + \frac{1}{\mu} J(\mathbf{u}_h^\gamma, \mathbf{u}_h^\gamma) \right)^{1/2} \end{aligned}$$

Et on peut en déduire, pour γ suffisamment grand :

$$\|\|\mathbf{u}_h^\gamma\|\| \leq \frac{c}{\mu} \quad (2.37)$$

où c est une constante indépendante de μ , h et de γ . De plus, à l'aide de la condition inf-sup (cf. lemme 2.3.3) et de la continuité de la forme $a_h(\cdot, \cdot)$, on obtient :

$$\begin{aligned} \|p_h^\gamma\|_{0,\Omega} &\leq \frac{\sqrt{\mu}}{\beta_1} \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h} \frac{b_h(p_h^\gamma, \mathbf{v}_h)}{\|\|\mathbf{v}_h\|\|} \\ &= \frac{\sqrt{\mu}}{\beta_1} \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h} \frac{l_h(\mathbf{v}_h) - a_h(\mathbf{u}_h^\gamma, \mathbf{v}_h)}{\|\|\mathbf{v}_h\|\|} \\ &\leq \frac{\sqrt{\mu}}{\beta_1} \left(\|f\|_{0,\Omega} \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h} \frac{\|\mathbf{v}_h\|_{0,\Omega}}{\|\|\mathbf{v}_h\|\|} + 2 \|\|\mathbf{u}_h^\gamma\|\| \right) \end{aligned}$$

donc d'après (2.36), on a, pour γ suffisamment grand, que $\|p_h^\gamma\|_{0,\Omega} \leq c$ avec c une constante indépendante de h , μ et de γ .

On en déduit donc qu'il existe deux sous-suites de $(\mathbf{u}_h^\gamma)_h$ et $(p_h^\gamma)_h$ qui convergent faiblement (donc fortement, en dimension finie) vers deux valeurs $\mathbf{u}_h^\infty \in \mathbf{V}_h$ pour la vitesse et $p_h^\infty \in Q_h$ pour la pression. Compte tenu de la définition de la norme $\|\|\cdot\|\|$, on en déduit que $\mathbf{u}_h^\infty \in \mathbf{H}_h$. $(\mathbf{u}_h^\infty, p_h^\infty)$ est donc solution du problème limite (P_h^∞) suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\mathbf{u}_h^\infty, p_h^\infty) \in \mathbf{H}_h \times Q_h \text{ tels que :} \\ A_0(\mathbf{u}_h^\infty, \mathbf{v}_h) + A_1(\mathbf{u}_h^\infty, \mathbf{v}_h) + b_h(p_h^\infty, \mathbf{v}_h) = F_h(\mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{H}_h \\ b_h(q_h, \mathbf{u}_h^\infty) = G_h(q_h) \quad \forall q_h \in Q_h \end{array} \right. \quad (2.38)$$

D'autre part, on remarque que $\forall \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h \in \mathbf{H}_h \times \mathbf{H}_h$, $A_1(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = 0$

En effet, comme $\frac{\partial \mathbf{u}_h}{\partial \mathbf{n}_e}$ et $\frac{\partial \mathbf{u}_h}{\partial \mathbf{n}_e}$ appartiennent à P_{k-1} , on a, par définition de la projection :

$$A_1(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = -\mu \left(\sum_{e \in \varepsilon_h} \left(\int_e \left\{ \frac{\partial \mathbf{u}_h}{\partial \mathbf{n}_e} \right\} [\pi_{k-1} \mathbf{v}_h] ds \right) + \sum_{e \in \varepsilon_h} \left(\int_e \left\{ \frac{\partial \mathbf{v}_h}{\partial \mathbf{n}_e} \right\} [\pi_{k-1} \mathbf{u}_h] ds \right) \right)$$

Or $\forall \mathbf{u}_h \in \mathbf{H}_h$ et $\forall e \in \varepsilon_h$, on a $\int_e [\mathbf{u}_h] ds = 0$.

Donc $\forall (\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) \in \mathbf{H}_h \times \mathbf{H}_h$, $A_1(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = 0$ et d'après la remarque 2.38, $J(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = 0$

La solution du problème limite $(\mathbf{u}_h^\infty, \mathbf{v}_h^\infty)$ est donc solution du problème P_h^* .

Or, on sait que l'approximation par éléments finis $P_k \times P_{k-1}$ non-conformes du problème de Stokes est bien posée. Il admet donc une unique solution (\mathbf{u}_h^*, p_h^*) et on a donc :

$$(\mathbf{u}_h^\infty, p_h^\infty) = (\mathbf{u}_h^*, p_h^*).$$

De plus, l'unicité de la limite assure que toute la suite $(\mathbf{u}_h^\gamma, p_h^\gamma)_\gamma$ est convergente. \square

Remarque. Si le terme de stabilisation $J(\cdot, \cdot)$ est remplacé par le terme $J^*(\cdot, \cdot)$ introduit dans [37], alors la limite $(\mathbf{u}_h^\infty, p_h^\infty)$ appartient à $\text{Ker}_h J^* \times Q_h$, qui sont les espaces d'éléments finis $(P_k\text{-continu}) \times (P_{k-1}\text{-discontinu})$. Ce couple d'espaces n'est pas stable pour le problème de Stokes, et donc cela explique que la stabilisation IP classique ne soit pas robuste pour tout k lorsque γ tend vers l'infini.

On s'intéresse maintenant à la formulation (2.20). Comme précédemment, nous allons montrer que la solution obtenue à l'aide de cette formulation tend vers la solution du problème de Stokes par éléments finis $P_k \times P_{k-1}$ non-conformes correspondante lorsque γ tend vers l'infini. On distinguera les cas où $k = 2$ ou 3 où l'on peut négliger le terme $J_1(\cdot, \cdot)$, du cas où $k = 1$ où la convergence est obtenue pour un γ_1 fixé.

La formulation non-conforme est la suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\mathbf{U}_h^*, P_h^*) \in \mathbf{H}_h \times Q_h \text{ tels que :} \\ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} 2\eta \int_T \underline{D}(\mathbf{U}_h^*) : \underline{D}(\mathbf{v}_h^*) dx + \mu \gamma_1 \sum_{e \in \mathcal{E}_h^p} \frac{1}{|e|} \int_e [\pi_1(\mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n})][\pi_1(\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n})] ds \\ \quad + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T P_h^* \text{div } \mathbf{v}_h^* dx = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \mathbf{f} \mathbf{v}_h^* dx \quad \forall \mathbf{v}_h^* \in \mathbf{H}_h \\ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T q_h^* \text{div } \mathbf{U}_h^* dx = 0 \quad \forall q_h^* \in Q_h \end{array} \right. \quad (2.39)$$

Remarque. Lorsque $k = 2$ ou 3 , on obtient que $J_1(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = 0$ pour tout $\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h \in \mathbf{H}_h$.

On sait que la formulation (2.39) est bien posée, grâce au théorème de Babuška-Brezzi et aux lemmes 2.3.2 et 2.3.4 ; on utilise que pour tout $\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h \in \mathbf{H}_h$ on a

$$c_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = C_0(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + \gamma_1 J_1(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h).$$

Théorème 2.4.2. Soit $(\mathbf{U}_h^\gamma, P_h^\gamma)$ la solution de (2.20) et (\mathbf{U}_h^*, P_h^*) la solution de (2.39). Alors, pour γ_1 fixé, on a :

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} (\|[\mathbf{U}_h^\gamma - \mathbf{U}_h^*]\| + \|P_h^\gamma - P_h^*\|_{0,\Omega}) = 0$$

Démonstration. La démonstration est similaire à celle du théorème précédent. La seule différence concerne l'inégalité de Poincaré discrète (2.36) sur \mathbf{V}_h , que l'on doit remplacer ici par une inégalité de type Korn. Pour cela, on rappelle le résultat suivant, établi tout d'abord par Brenner dans [18] sous une forme plus forte, puis amélioré par Mardal et Whinter dans [61] :

$$|\mathbf{v}|_{1,h} \leq c \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\underline{D}(\mathbf{v})\|_{0,T}^2 + \frac{1}{\mu} J_1(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + \phi(\mathbf{v})^2 \right)^{1/2}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_h$$

où maintenant $\phi : \mathbf{H}^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ est une semi-norme continue telle que si $\phi(\mathbf{v}) = 0$ pour un mouvement rigide \mathbf{v} , alors \mathbf{v} est un vecteur constant. En choisissant

$$\phi(\mathbf{v}) = \sum_{e \in \varepsilon_h^\partial} \|\pi_0 \mathbf{v}\|_{0,e}$$

on en déduit l'inégalité de Korn suivante sur \mathbf{V}_h :

$$|\mathbf{v}|_{1,h} \leq c \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\underline{D}(\mathbf{v})\|_{0,T}^2 + \sum_{e \in \varepsilon_h^\partial} \frac{1}{|e|} \|\pi_{k-1} \mathbf{v}\|_{0,e}^2 + \frac{1}{\mu} J_1(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \right)^{1/2}, \quad (2.40)$$

$$\|\mathbf{v}\|_{0,\Omega} \leq c \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\underline{D}(\mathbf{v})\|_{0,T}^2 + \frac{1}{\mu} J(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + \frac{1}{\mu} J_1(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \right)^{1/2}. \quad (2.41)$$

Ce qui nous permet de conclure de la même manière que dans le théorème (2.4.1). \square

En ce qui concerne la formulation à trois champs (2.21), on obtient directement que pour γ_1 fixé,

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \|\underline{\tau}_h^{\gamma} - \underline{\tau}_h^*\|_{0,\Omega} = 0$$

où $\underline{\tau}_h^{\gamma} = 2\mu \underline{D}(\mathbf{U}_h^{\gamma})$ et $\underline{\tau}_h^* = 2\mu \underline{D}(\mathbf{U}_h^*)$. On note que $(\mathbf{U}_h^*, P_h^*, \underline{\tau}_h^*)$ est l'unique solution de l'approximation $\mathbf{P}_k \times P_{k-1} \times \underline{P}_{k-1}$ non-conforme de la formulation à trois champs (2.6), définie de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Trouver } (\mathbf{U}_h^*, P_h^*, \underline{\tau}_h^*) \in \mathbf{H}_h \times Q_h \times \underline{X}_h \text{ tels que :} & \\ \gamma_1 J_1(\mathbf{U}_h^*, \mathbf{v}_h) + b_h(P_h^*, \mathbf{v}_h) + d_h(\underline{\tau}_h^*, \mathbf{v}_h) & = f_h(\mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{H}_h \\ b_h(q_h, \mathbf{U}_h^*) & = 0 \quad \forall q_h \in Q_h \\ d_h(\underline{\theta}_h, \mathbf{U}_h^*) - e(\underline{\theta}_h, \underline{\tau}_h^*) & = 0 \quad \forall \underline{\theta}_h \in \underline{X}_h. \end{array} \right.$$

Remarque 5. Pour $k = 1$, si γ et γ_1 tendent vers l'infini, la vitesse obtenue appartient à $X_h = \text{Ker} J \cap \text{Ker} J_1$. On a $\mathbf{P}_{1/\partial\Omega}^{\text{cont}} \subset X_h \subset \mathbf{P}_{1/\partial\Omega}^{\text{nc}}$ avec $\mathbf{P}_{1/\partial\Omega}^{\text{cont}}$, respectivement $\mathbf{P}_{1/\partial\Omega}^{\text{nc}}$, l'espace d'éléments finis continus, respectivement d'éléments finis non-conformes avec des conditions de bord de Dirichlet homogènes sur $\partial\Omega$.

2.4.2 Vitesse de convergence

Dans ce paragraphe, on s'intéresse à la formulation (2.19) pour simplifier la présentation. On améliore le résultat du théorème 2.4.1 en montrant, pour γ suffisamment grand :

$$\sqrt{\mu} \|\|\mathbf{u}_h^{\gamma} - \mathbf{u}_h^*\|\| + \|p_h^{\gamma} - p_h^*\|_{0,\Omega} \leq \frac{C}{\gamma}.$$

Comme précédemment, la lettre C représente une constante quelconque indépendante de h , μ et de γ .

Pour établir ce résultat, l'outil principal est l'hybridisation de la méthode dG. On introduit le multiplicateur de Lagrange $\boldsymbol{\lambda}_h^\gamma$ appartenant à l'espace de dimension finie :

$$\mathbf{L}_h = \{ \boldsymbol{\theta}_h \in \Pi_{e \in \varepsilon_h} \mathbf{L}^2(e); \forall e \in \varepsilon_h, (\boldsymbol{\theta}_h)_{/e} \in \mathbf{P}_{k-1}, \}$$

et qui est défini par sa restriction sur chaque arête $e \in \varepsilon_h$ de la manière suivante :

$$\boldsymbol{\lambda}_{h|e}^\gamma = \frac{\gamma \sqrt{\mu}}{|e|} [\boldsymbol{\pi}_{k-1} \mathbf{u}_h^\gamma]_{|e}, \quad \forall e \in \varepsilon_h. \quad (2.42)$$

L'espace \mathbf{L}_h est muni de la norme $\|\cdot\|_{0,\varepsilon_h}$ associée au produit scalaire suivant :

$$\langle \boldsymbol{\vartheta}_h, \boldsymbol{\theta}_h \rangle_{0,\varepsilon_h} = \sum_{e \in \varepsilon_h} |e| \int_e \boldsymbol{\vartheta}_h \cdot \boldsymbol{\theta}_h ds, \quad \forall \boldsymbol{\vartheta}_h, \boldsymbol{\theta}_h \in \mathbf{L}_h.$$

On pose $x_h^\gamma = (\mathbf{u}_h^\gamma, p_h^\gamma)$, $\chi_h = (\mathbf{v}_h, q_h)$ et $X_h = \mathbf{V}_h \times Q_h$, muni de la norme produit :

$$[\chi_h] = (\mu |\mathbf{v}_h|_{1,h}^2 + J(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) + \frac{1}{\mu} \|q_h\|_{0,\Omega}^2)^{1/2}.$$

On introduit aussi les formes bilinéaires suivantes sur $X_h \times X_h$, respectivement $\mathbf{L}_h \times X_h$:

$$\begin{aligned} \Xi(x_h^\gamma, \chi_h) &= A_0(\mathbf{u}_h^\gamma, \mathbf{v}_h) + A_1(\mathbf{u}_h^\gamma, \mathbf{v}_h) + b_h(p_h^\gamma, \mathbf{v}_h) - b_h(q_h, \mathbf{u}_h^\gamma), \\ \Lambda_h(\boldsymbol{\theta}_h, \chi_h) &= \sum_{e \in \varepsilon_h} \sqrt{\mu} \int_e \boldsymbol{\theta}_h \cdot [\boldsymbol{\pi}_{k-1} \mathbf{v}_h] ds. \end{aligned}$$

La formulation discrète (2.19) peut alors être écrite de manière équivalente :

$$\begin{cases} (x_h^\gamma, \boldsymbol{\lambda}_h^\gamma) \in X_h \times \mathbf{L}_h \\ \Xi(x_h^\gamma, \chi_h) + \Lambda_h(\boldsymbol{\lambda}_h^\gamma, \chi_h) = \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_h dx & \forall \chi_h \in X_h \\ \Lambda_h(\boldsymbol{\theta}_h, x_h^\gamma) - \frac{1}{\gamma} \langle \boldsymbol{\lambda}_h^\gamma, \boldsymbol{\theta}_h \rangle_{0,\varepsilon_h} = 0 & \forall \boldsymbol{\theta}_h \in \mathbf{L}_h. \end{cases} \quad (2.43)$$

Lemme 2.4.1. *Pour γ suffisamment grand, la forme bilinéaire $\Lambda_h(\cdot, \cdot)$ est continue sur $\mathbf{L}_h \times X_h$ et satisfait la condition inf-sup suivante :*

$$\inf_{\boldsymbol{\theta}_h \in \mathbf{L}_h} \sup_{\chi_h \in X_h} \frac{\Lambda_h(\boldsymbol{\theta}_h, \chi_h)}{\|\boldsymbol{\theta}_h\|_{0,\varepsilon_h} [\chi_h]} \geq \delta > 0.$$

Démonstration. La preuve de la continuité est évidente. Pour établir la condition inf-sup uniforme, on utilise l'argument de Fortin : à chaque $\boldsymbol{\theta}_h = (\boldsymbol{\theta}_h^e)_{e \in \varepsilon_h} \in \mathbf{L}_h$, on associe une fonction $\chi_h = (\mathbf{v}_h, 0) \in X_h$ qui satisfait

$$\Lambda_h(\boldsymbol{\theta}_h, \chi_h) \geq C_1 \|\boldsymbol{\theta}_h\|_{0,\varepsilon_h}^2 \quad \text{et} \quad (\mu |\mathbf{v}_h|_{1,h}^2 + J(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h))^{1/2} \leq C_2 \|\boldsymbol{\theta}_h\|_{0,\varepsilon_h}.$$

Pour chaque arête $e \in \varepsilon_h$, on note T_e le triangle tel que $e \subseteq \partial T_e$ et tel que \mathbf{n}_e soit extérieure à T_e . D'où, $\mathcal{T}_h = \{T_e; e \in \varepsilon_h\}$. Sur chaque triangle T_e , on considère le problème auxiliaire suivant :

$$\begin{cases} -\Delta \mathbf{v}^e = 0 & \text{dans } T_e \\ \frac{\partial \mathbf{v}^e}{\partial \mathbf{n}_e} = \boldsymbol{\theta}_h^e & \text{sur } e \\ \mathbf{v}^e = 0 & \text{sur } \partial T_e \setminus \{e\}. \end{cases}$$

On en déduit de manière classique que $|\mathbf{v}^e|_{1,T_e} = \|\boldsymbol{\theta}_h^e\|_{-1/2,e}$. La formulation variationnelle nous permet de plus d'obtenir que $|\mathbf{v}^e|_{1,T_e} \leq \|\boldsymbol{\theta}_h^e\|_{-1/2,e}$. Les autres inégalités sont obtenues en utilisant la définition de la norme dans $H^{-1/2}(e)$, l'espace dual de $H_{00}^{1/2}(e)$:

$$\|\boldsymbol{\theta}_h^e\|_{-1/2,e} = \sup_{\mathbf{w} \in \mathbf{W}_e} \frac{\int_e \boldsymbol{\theta}_h^e \cdot \mathbf{w} \, ds}{|\mathbf{w}|_{1,T_e}} = \sup_{\mathbf{w} \in \mathbf{W}_e} \frac{\int_{T_e} \nabla \mathbf{v}^e : \nabla \mathbf{w} \, dx}{|\mathbf{w}|_{1,T_e}} \leq |\mathbf{v}^e|_{1,T_e},$$

avec $\mathbf{W}_e = \{\mathbf{w} \in \mathbf{H}^1(T_e); \mathbf{w} = \mathbf{0} \text{ sur } \partial T_e \setminus \{e\}\}$.

Soit \mathbf{v} une fonction définie sur Ω par $(\mathbf{v})_{/T_e} = \mathbf{v}^e$, pour tout $e \in \varepsilon_h$. On considère ensuite sur T_e la fonction discrète $\mathbf{v}_h^e = \mathbf{I}_h \mathbf{v}^e$ et on définit finalement \mathbf{v}_h sur Ω par $(\mathbf{v}_h)_{/T_e} = \mathbf{v}_h^e$, pour tout $e \in \varepsilon_h$. On obtient alors de manière évidente que $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$ et grâce aux propriétés de \mathbf{I}_h , que :

$$\int_e [\pi_{k-1} \mathbf{v}_h] \cdot [\pi_{k-1} \mathbf{v}_h] \, ds = \int_e [\pi_{k-1} \mathbf{v}_h] \cdot [\mathbf{v}] \, ds = \int_e [\pi_{k-1} \mathbf{v}_h] \cdot \mathbf{v}^e \, ds.$$

Il s'en suit $\|[\pi_{k-1} \mathbf{v}_h]\|_{0,e} \leq c\sqrt{|e|} |\mathbf{v}^e|_{1,T_e}$, qui nous permet d'obtenir :

$$(\mu |\mathbf{v}_h|_{1,h}^2 + J(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h))^{1/2} \leq c\sqrt{\mu} |\mathbf{v}|_{1,h}.$$

De plus, on a aussi que :

$$\Lambda_h(\boldsymbol{\theta}_h, \chi_h) = \sqrt{\mu} \sum_{e \in \varepsilon_h} \int_e \boldsymbol{\theta}_h^e \cdot \mathbf{v}^e \, ds = \sqrt{\mu} \sum_{e \in \varepsilon_h} |\mathbf{v}^e|_{1,T_e}^2 = \sqrt{\mu} |\mathbf{v}|_{1,h}^2.$$

On a prouvé que :

$$\sup_{\chi_h \in X_h} \frac{\Lambda_h(\boldsymbol{\theta}_h, \chi_h)}{\|\boldsymbol{\theta}_h\|_{0,\varepsilon_h} [\chi_h]} \geq C |\mathbf{v}|_{1,h} = C \left(\sum_{e \in \varepsilon_h} \|\boldsymbol{\theta}_h^e\|_{-1/2,e}^2 \right)^{1/2}.$$

On introduit ensuite $\underline{q}^e = \nabla \mathbf{v}^e \in \underline{H}(\text{div}, T_e)$ ainsi que son interpolée de Raviart-Thomas sur T_e , $\underline{q}_h^e \in \underline{RT}_{k-1}$. On note aussi que $\underline{q}_h^e \mathbf{n}_e = \underline{q}^e \mathbf{n}_e = \boldsymbol{\theta}_h^e$ sur e . On obtient alors, par passage à l'élément de référence basé sur la transformation de Piola (voir par exemple [76]), que :

$$\begin{aligned} \sqrt{|e|} \|\boldsymbol{\theta}_h^e\|_{0,e} &\leq C \left\| \hat{\underline{q}}_h^e \hat{\mathbf{n}}_e \right\|_{0,\hat{e}} \leq C \left\| \hat{\underline{q}}_h^e \hat{\mathbf{n}}_e \right\|_{-1/2,\hat{e}} = C \left\| \hat{\underline{q}}^e \hat{\mathbf{n}}_e \right\|_{-1/2,\hat{e}} \\ &\leq C \left\| \hat{\underline{q}}^e \right\|_{0,\hat{T}_e} \leq C \left\| \underline{q}^e \right\|_{0,T_e} = C \|\boldsymbol{\theta}_h^e\|_{-1/2,e}, \end{aligned}$$

Nous avons utilisé ci-dessus l'équivalence des normes dans des espaces de dimension finie et le Théorème de trace normale dans $\underline{H}(\text{div}, \hat{T}_e)$. Ceci nous permet de conclure. \square

Remarque 6. L'équivalence des normes $\|\cdot\|_{0,\varepsilon_h}$ et $\left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\cdot\|_{-1/2,\partial T}^2 \right)^{1/2}$ dans \mathbf{L}_h est un résultat connu pour les méthodes hybrides et est cité dans [76].

D'après le Théorème 2.4.1, on sait déjà que pour γ assez grand, la suite $(x_h^\gamma)_\gamma$ est uniformément bornée dans X_h et converge vers $x_h^* = (\mathbf{u}_h^*, p_h^*)$. Grâce au Lemme 2.4.1, on obtient de manière similaire que la suite $(\boldsymbol{\lambda}_h^\gamma)_\gamma$ est aussi uniformément bornée dans \mathbf{L}_h :

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{\lambda}_h^\gamma\|_{0,\varepsilon_h} &\leq \frac{1}{\delta} \sup_{\chi_h \in X_h} \frac{\int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_h dx - \Xi(x_h^\gamma, \chi_h)}{[\chi_h]} \\ &\leq \frac{C_1}{\sqrt{\mu}} + C_2(\mu |\mathbf{u}_h^\gamma|_{1,h}^2 + J(\mathbf{u}_h^\gamma, \mathbf{u}_h^\gamma) + \frac{1}{\mu} \|p_h^\gamma\|_{0,\Omega}^2)^{1/2} \leq \frac{C}{\sqrt{\mu}}. \end{aligned}$$

Il existe donc une sous-suite qui converge dans \mathbf{L}_h vers $\boldsymbol{\lambda}_h^*$ lorsque $\gamma \rightarrow \infty$. On passe à la limite dans le problème (2.43), et on obtient que $(x_h^*, \boldsymbol{\lambda}_h^*)$ satisfait le problème variationnel :

$$\begin{cases} (x_h^*, \boldsymbol{\lambda}_h^*) \in X_h \times \mathbf{L}_h \\ \Xi(x_h^*, \chi_h) + \Lambda_h(\boldsymbol{\lambda}_h^*, \chi_h) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_h dx & \forall \chi_h \in X_h \\ \Lambda_h(\boldsymbol{\theta}_h, x_h^*) = 0 & \forall \boldsymbol{\theta}_h \in \mathbf{L}_h. \end{cases} \quad (2.44)$$

Grâce au Théorème de Babuška-Brezzi, on en déduit que ce problème est bien posé, et comme précédemment, l'unicité de la solution implique que toute la suite $(\boldsymbol{\lambda}_h^\gamma)_\gamma$ est convergente.

On peut donc maintenant établir le résultat principal de cette section :

Théorème 2.4.3. *Soit γ suffisamment grand, alors on a :*

$$\| \|\mathbf{u}_h^\gamma - \mathbf{u}_h^*\| \| + \frac{1}{\sqrt{\mu}} \|p_h^\gamma - p_h^*\|_{0,\Omega} + \|\boldsymbol{\lambda}_h^\gamma - \boldsymbol{\lambda}_h^*\|_{0,\varepsilon_h} \leq \frac{C}{\gamma\sqrt{\mu}}.$$

Démonstration. En soustrayant les équations (2.43) et (2.44), on obtient :

$$\begin{aligned} \Xi(x_h^\gamma - x_h^*, \chi_h) + \Lambda_h(\boldsymbol{\lambda}_h^\gamma - \boldsymbol{\lambda}_h^*, \chi_h) &= 0, \\ \Lambda_h(\boldsymbol{\theta}_h, x_h^\gamma - x_h^*) - \frac{1}{\gamma} \langle \boldsymbol{\lambda}_h^\gamma, \boldsymbol{\theta}_h \rangle_{0,\varepsilon_h} &= 0. \end{aligned} \quad (2.45)$$

On note que $\text{Ker} \Lambda_h = \mathbf{H}_h \times P_h$ et on considère la décomposition orthogonale $\mathbf{V}_h = \mathbf{H}_h \oplus \mathbf{H}_h^\perp$ par rapport à la norme $\|\cdot\|$. On peut décomposer de manière unique chaque élément $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$ de la manière suivante :

$$\mathbf{v}_h = \mathbf{v}_h^0 + \mathbf{v}_h^\perp,$$

avec $\mathbf{v}_h^0 \in \mathbf{H}_h$ et $\mathbf{v}_h^\perp \in \mathbf{H}_h^\perp$. En prenant $\chi_h = ((\mathbf{u}_h^\gamma - \mathbf{u}_h^*)^0, p_h^\gamma - p_h^*)$ dans la première équation de (2.45), on obtient grâce à la coercivité de $\Xi(\cdot, \cdot)$ dans \mathbf{H}_h que

$$\|(\mathbf{u}_h^\gamma - \mathbf{u}_h^*)^0\| \leq C \|(\mathbf{u}_h^\gamma - \mathbf{u}_h^*)^\perp\|.$$

De plus, à l'aide de la condition inf-sup sur $\Lambda_h(\cdot, \cdot)$, on déduit de la seconde équation de (2.45) que

$$\|(\mathbf{u}_h^\gamma - \mathbf{u}_h^*)^\perp\| \leq \frac{C}{\gamma} \|\boldsymbol{\lambda}_h^\gamma\|_{0,\varepsilon_h} \leq \frac{C}{\gamma\sqrt{\mu}},$$

ce qui finalement nous donne $\|(\mathbf{u}_h^\gamma - \mathbf{u}_h^*)\| \leq \frac{C}{\gamma\sqrt{\mu}}$. Par conséquent, le Lemme 2.4.1 et le système (2.45) impliquent que :

$$\|\boldsymbol{\lambda}_h^\gamma - \boldsymbol{\lambda}_h^*\|_{0,\varepsilon_h} \leq C \|(\mathbf{u}_h^\gamma - \mathbf{u}_h^*)\| \leq \frac{C}{\gamma\sqrt{\mu}}.$$

On prend ensuite $\chi_h = (\mathbf{v}_h, 0)$ comme fonction test dans (2.43) et (2.44), on soustrait encore une fois les équations et on utilise la condition inf-sup sur $b_h(\cdot, \cdot)$. Cela nous permet d'obtenir $\|p_h^\gamma - p_h^*\|_{0,\Omega} \leq \frac{C}{\gamma}$, et donc de conclure. \square

Chapitre 3

Analyse d'erreur *a priori* et *a posteriori*

3.1 Estimations d'erreur *a priori*

On établit des estimations d'erreur *a priori* de la vitesse et de la pression. On considère d'abord l'erreur en norme énergie $\|\cdot\|$, respectivement $[[\cdot]]$, pour la vitesse et en norme L^2 pour la pression.

Lemme 3.1.1. *La solution (\mathbf{u}, p) du problème continu de Stokes vérifie la propriété de consistance :*

$$\begin{aligned} a_h(\mathbf{u}, \mathbf{v}_h) + b_h(p, \mathbf{v}_h) &= l_h(\mathbf{v}_h), \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h \\ b_h(q_h, \mathbf{u}) &= 0, \quad \forall q_h \in Q_h. \end{aligned}$$

Démonstration. La démonstration de ce lemme est classique (voir aussi [37]). La seconde relation est évidente, en effet on a $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ sur chaque triangle et $[\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_e] = 0$ à travers chaque arête interne e . On utilise maintenant la régularité du problème de Stokes (cf. [38]) : pour une donnée $\mathbf{f} \in \mathbf{L}^{4/3}(\Omega)$ dans un polygone Ω , on sait que $(\mathbf{u}, p) \in \mathbf{W}^{2,4/3}(\Omega) \times W^{1,4/3}(\Omega)$. Cela nous assure que $\nabla \mathbf{u}$ et p ont une trace sur chaque segment e , et de plus cette trace appartient à $L^2(e)$. On multiplie donc la première équation de (2.9) par une fonction test $\mathbf{v} \in \mathbf{W}^{2,4/3}(\Omega)$ et on intègre par partie :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (-\mu \Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \nabla p \cdot \mathbf{v}) dx &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T (-\mu \Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \nabla p \cdot \mathbf{v}) dx \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left(\int_T (\mu \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} - p \nabla \cdot \mathbf{v}) dx - \int_{\partial T} \left(\mu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}_T} - p \cdot \mathbf{n}_T \right) \cdot \mathbf{v} ds \right); \end{aligned}$$

où \mathbf{n}_T est la normale extérieure à ∂T .

Comme $\mu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}_e} - p \mathbf{n}_e$ est continu à travers chaque arête interne, on a sur chaque arête e :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}_e} - p \mathbf{n}_e = \left\{ \mu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}_e} - p \mathbf{n}_e \right\} = \left\{ \mu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}_e} \right\} - \{p\} \mathbf{n}_e$$

On obtient alors que :

$$\int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dx = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T (\mu \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} - p \nabla \cdot \mathbf{v}) dx - \sum_{e \in \varepsilon_h} \int_e \left\{ \mu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}_e} \right\} \cdot [\mathbf{v}] ds + \sum_{e \in \varepsilon_h} \int_e \{p\} [\mathbf{v}] \mathbf{n}_e ds.$$

De plus, \mathbf{u} est continue sur chaque arête interne du maillage et s'annule au bord du domaine, donc son saut à travers chaque arête du maillage est nul. Cela nous donne que (\mathbf{u}, p) vérifie bien la première équation de (2.19). \square

Lemme 3.1.2. *Il existe une constante $c > 0$ telle que :*

$$\left(\sum_{e \in \varepsilon_h} \frac{1}{|e|} \|[\mathbf{v}_h]\|_{0,e}^2 \right)^{1/2} \leq \frac{c \max(1, 1/\gamma)}{\sqrt{\mu}} \|\mathbf{v}_h\|, \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h.$$

Démonstration. De manière évidente, on a sur chaque arête $e \in \varepsilon_h$:

$$\|[\mathbf{v}_h]\|_{0,e} \leq \|[\mathbf{v}_h - \boldsymbol{\pi}_{k-1} \mathbf{v}_h]\|_{0,e} + \|[\boldsymbol{\pi}_{k-1} \mathbf{v}_h]\|_{0,e}.$$

Soit T un triangle tel que $e \subset \partial T$. Alors

$$\frac{1}{\sqrt{|e|}} \|\mathbf{v}_h - \boldsymbol{\pi}_{k-1} \mathbf{v}_h\|_{0,e} \leq \frac{1}{\sqrt{|e|}} \|\mathbf{v}_h - \boldsymbol{\pi}_{k-1}^T \mathbf{v}_h\|_{0,e} \leq \frac{c}{h_T} \|\mathbf{v}_h - \boldsymbol{\pi}_{k-1}^T \mathbf{v}_h\|_{0,T} \leq c |\mathbf{v}_h|_{1,T}$$

où $\boldsymbol{\pi}_{k-1}^T$ denote la projection $L^2(T)$ -orthogonale sur \mathbf{P}_{k-1} sur l'élément T . Ces inégalités nous permettent de conclure, pour $\gamma \geq 1$. \square

Lemme 3.1.3. *Soit $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^{k+1}$ et soit $\gamma \geq 1$, il existe une constante c telle que :*

$$\forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h, |a_h(\mathbf{u} - \mathbf{I}_h \mathbf{u}, \mathbf{v}_h)| \leq c \sqrt{\mu} h^k \|\mathbf{v}_h\| \|\mathbf{u}\|_{k+1, \Omega} \quad (3.1)$$

Démonstration. Par définition, on a :

$$\begin{aligned} a_h(\mathbf{u} - \mathbf{I}_h \mathbf{u}, \mathbf{v}_h) &= \mu \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \nabla(\mathbf{u} - \mathbf{I}_h \mathbf{u}) : \nabla \mathbf{v}_h - \mu \sum_{e \in \varepsilon_h} \int_e \left\{ \frac{\partial(\mathbf{u} - \mathbf{I}_h \mathbf{u})}{\partial \mathbf{n}_e} \right\} [\mathbf{v}_h] \\ &\quad - \mu \sum_{e \in \varepsilon_h} \int_e \left\{ \frac{\partial \mathbf{v}_h}{\partial \mathbf{n}_e} \right\} [\mathbf{u} - \mathbf{I}_h \mathbf{u}] + \sum_{e \in \varepsilon_h} \frac{\gamma}{|e|} \int_e [\boldsymbol{\pi}_{k-1}(\mathbf{u} - \mathbf{I}_h(\mathbf{u}))][\boldsymbol{\pi}_{k-1} \mathbf{v}_h] \\ &= A_0(\mathbf{u} - \mathbf{I}_h \mathbf{u}, \mathbf{v}_h) + A_1(\mathbf{u} - \mathbf{I}_h \mathbf{u}, \mathbf{v}_h) + \gamma J(\mathbf{u} - \mathbf{I}_h \mathbf{u}, \mathbf{v}_h) \end{aligned}$$

On a, en utilisant une inégalité Cauchy-Schwarz et la propriété (2.16) :

$$\begin{aligned} A_0(\mathbf{u} - \mathbf{I}_h \mathbf{u}, \mathbf{v}_h) &\leq \mu \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\nabla(\mathbf{u} - \mathbf{I}_h \mathbf{u})\|_{0,T} \|\nabla \mathbf{v}_h\|_{0,T}, \\ &\leq c \sqrt{\mu} h^k \|\mathbf{v}_h\| \|\mathbf{u}\|_{k+1, \Omega} \end{aligned}$$

De plus, en combinant la continuité de \mathbf{u} à travers les arêtes et la propriété (2.15), on obtient :

$$\begin{aligned}
J(\mathbf{u} - \mathbf{I}_h \mathbf{u}, \mathbf{v}_h) &= \sum_{e \in \varepsilon_h} \int_e \frac{1}{|e|} [\pi_{k-1}(\mathbf{u} - \mathbf{I}_h \mathbf{u})][\pi_{k-1} \mathbf{v}_h] ds \\
&= \sum_{e \in \varepsilon_h} \int_e \frac{1}{|e|} [\pi_{k-1} \mathbf{I}_h \mathbf{u}][\pi_{k-1} \mathbf{v}_h] ds \\
&= \sum_{e \in \varepsilon_h} \int_e \frac{1}{|e|} [\mathbf{I}_h \mathbf{u}][\pi_{k-1} \mathbf{v}_h] ds \\
&= 0.
\end{aligned}$$

De la même manière on a :

$$\sum_{e \in \varepsilon_h} \int_e \left\{ \frac{\partial \mathbf{v}_h}{\partial \mathbf{n}_e} \right\} \cdot [\mathbf{u} - \mathbf{I}_h \mathbf{u}] ds = 0.$$

On doit donc traiter le terme $\mu \sum_{e \in \varepsilon_h} \int_e \left\{ \frac{\partial(\mathbf{u} - \mathbf{I}_h \mathbf{u})}{\partial \mathbf{n}_e} \right\} \cdot [\mathbf{v}_h] ds$. On introduit alors, l'opérateur d'interpolation de Lagrange sur \mathbf{P}_k , noté \mathbf{L}_h . On peut alors écrire :

$$\int_e \left\{ \frac{\partial(\mathbf{u} - \mathbf{I}_h \mathbf{u})}{\partial \mathbf{n}_e} \right\} \cdot [\mathbf{v}_h] ds = \int_e \left(\left\{ \frac{\partial(\mathbf{u} - \mathbf{L}_h \mathbf{u})}{\partial \mathbf{n}_e} \right\} \cdot [\mathbf{v}_h] + \left\{ \frac{\partial(\mathbf{L}_h \mathbf{u} - \mathbf{I}_h \mathbf{u})}{\partial \mathbf{n}_e} \right\} \cdot [\mathbf{v}_h] \right) ds$$

On considère le premier terme de l'expression précédente et on a :

$$\int_e \left\{ \frac{\partial(\mathbf{u} - \mathbf{L}_h \mathbf{u})}{\partial \mathbf{n}_e} \right\} \cdot [\mathbf{v}_h] ds \leq \|[\mathbf{v}_h]\|_{0,e} \|\{\nabla(\mathbf{u} - \mathbf{L}_h \mathbf{u})\}\|_{0,e}.$$

Soit $e \in \varepsilon_h$ alors il existe deux triangles T^1 et T^2 tels que $e = \partial T^1 \cap \partial T^2$. La démonstration est la même sur le bord. Grace à l'inégalité de trace (2.32) et à l'estimation d'erreur d'interpolation classique pour \mathbf{L}_h , on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{|e|}} \|\{\nabla(\mathbf{u} - \mathbf{L}_h \mathbf{u})\}\|_{0,e} &\leq c \left(\frac{1}{h_{T^1}} \|\nabla(\mathbf{u} - \mathbf{L}_h \mathbf{u})\|_{0,T^1} + \frac{1}{h_{T^2}} \|\nabla(\mathbf{u} - \mathbf{L}_h \mathbf{u})\|_{0,T^2} \right) \\
&\quad + |\nabla(\mathbf{u} - \mathbf{L}_h \mathbf{u})|_{1,T^1 \cup T^2} \\
&\leq ch^{k-1} |\mathbf{u}|_{k+1, T^1 \cup T^2}.
\end{aligned}$$

Il s'en suit, grâce au lemme 3.1.2, que :

$$\sum_{e \in \varepsilon_h} \int_e \left\{ \frac{\partial(\mathbf{u} - \mathbf{L}_h \mathbf{u})}{\partial \mathbf{n}_e} \right\} \cdot [\mathbf{v}_h] ds \leq ch^k \left(\sum_{e \in \varepsilon_h} \frac{1}{|e|} \|[\mathbf{v}_h]\|_{0,e}^2 \right)^{1/2} |\mathbf{u}|_{k+1, \Omega} \leq \frac{c}{\sqrt{\mu}} h^k \|[\mathbf{v}_h]\| |\mathbf{u}|_{k+1, \Omega}.$$

Enfin, un utilisant le fait que $\mathbf{L}_h \mathbf{u} - \mathbf{I}_h \mathbf{u}$ est polynomial par maille, on obtient que :

$$\frac{1}{\sqrt{|e|}} \|\{\nabla(\mathbf{L}_h \mathbf{u} - \mathbf{I}_h \mathbf{u})\}\|_{0,e} \leq c \left(\frac{1}{h_{T^1}} \|\nabla(\mathbf{L}_h \mathbf{u} - \mathbf{I}_h \mathbf{u})\|_{0,T^1} + \frac{1}{h_{T^2}} \|\nabla(\mathbf{L}_h \mathbf{u} - \mathbf{I}_h \mathbf{u})\|_{0,T^2} \right).$$

Une inégalité triangulaire implique alors, sur chaque triangle T :

$$|\mathbf{L}_h \mathbf{u} - \mathbf{I}_h \mathbf{u}|_{1,T} \leq |\mathbf{L}_h \mathbf{u} - \mathbf{u}|_{1,T} + |\mathbf{u} - \mathbf{I}_h \mathbf{u}|_{1,T} \leq ch_T^k |\mathbf{u}|_{k+1, \Delta T},$$

et donc finalement,

$$\sum_{e \in \varepsilon_h} \int_e \left\{ \frac{\partial(\mathbf{L}_h \mathbf{u} - \mathbf{I}_h \mathbf{u})}{\partial \mathbf{n}_e} \right\} \cdot [\boldsymbol{\pi}_{k-1} \mathbf{v}_h] ds \leq \frac{c}{\sqrt{\mu}} h^k \sqrt{J(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)} |\mathbf{u}|_{k+1, \Omega}.$$

On peut maintenant rassembler toutes ces estimations pour obtenir le résultat souhaité. \square

Lemme 3.1.4. Soit $p \in H^k(\Omega)$ et soit $\gamma \geq 1$. Alors, il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h, \quad |b_h(p - i_h p, \mathbf{v}_h)| \leq \frac{c}{\sqrt{\mu}} h^k \|\mathbf{v}_h\| |p|_{k, \Omega}.$$

Démonstration. On rappelle que

$$\begin{aligned} b_h(p - i_h p, \mathbf{v}_h) &= - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T (p - i_h p) \nabla \cdot \mathbf{v}_h dx + \sum_{e \in \varepsilon_h} \int_e \{p - i_h p\} [\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}_e] ds \\ &= \sum_{e \in \varepsilon_h} \int_e \{p - i_h p\} [\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}_e] ds. \end{aligned}$$

D'après le Lemme 3.1.2, on a pour $\gamma \geq 1$ que

$$|b_h(p - i_h p, \mathbf{v}_h)| \leq \frac{c}{\sqrt{\mu}} \left(\sum_{e \in \varepsilon_h} |e| \|\{p - i_h p\}\|_{0,e}^2 \right)^{1/2} \|\mathbf{v}_h\|.$$

Sur chaque arête $e \in \varepsilon_h$ telle que $e \subset \partial T$, on borne le terme $\|p - i_h p\|_{0,e}$ de la même manière que dans le Lemme 3.1.3. On note l_h l'opérateur d'interpolation de Lagrange dans P_{k-1} et pour $k = 2$ ou 3 , on obtient :

$$\begin{aligned} \sqrt{|e|} \|p - i_h p\|_{0,e} &\leq \sqrt{|e|} (\|p - l_h p\|_{0,e} + \|l_h p - i_h p\|_{0,e}) \\ &\leq c \left(\|p - l_h p\|_{0,T} + h_T |p - l_h p|_{1,T} + \|l_h p - i_h p\|_{0,T} \right) \\ &\leq ch^k |p|_{k,T}. \end{aligned}$$

Pour $k = 1$, on obtient directement :

$$\sqrt{|e|} \|p - i_h p\|_{0,e} \leq c \left(\|p - i_h p\|_{0,T} + h_T |p - i_h p|_{1,T} \right) \leq ch |p|_{1,T}.$$

Ce qui nous permet de retrouver le résultat souhaité. \square

Remarque. Pour $\gamma < 1$, les deux Théorèmes précédents sont aussi vérifiés, mais dans ce cas, la constante dépend de γ .

Théorème 3.1.1. Soit $(\mathbf{u}, p) \in \mathbf{H}^{k+1}(\Omega) \times H^k(\Omega)$ la solution du problème de Stokes continu et soit γ suffisamment grand (comme dans le Lemme 2.3.1). Alors, la solution (\mathbf{u}_h, p_h) du problème discret (2.9) satisfait l'estimation d'erreur suivante :

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\| \leq ch^k (\sqrt{\mu} |\mathbf{u}|_{k+1, \Omega} + \frac{1}{\sqrt{\mu}} |p|_{k, \Omega}) \quad (3.2)$$

$$\|p - p_h\|_{0, \Omega} \leq ch^k (\mu |\mathbf{u}|_{k+1, \Omega} + |p|_{k, \Omega}) \quad (3.3)$$

avec c une constante indépendante de h et de μ .

Démonstration. D'après le Lemme 2.3.1, on sait que pour γ suffisamment grand, il existe une constante α indépendante de h , telle que :

$$\forall \mathbf{u}_h \in V_h, a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h) \geq \alpha \|\mathbf{u}_h\|^2.$$

En particulier, en remplaçant \mathbf{u}_h par $\mathbf{u}_h - \mathbf{I}_h \mathbf{u}$ appartenant aussi à V_h , on obtient :

$$\alpha \|\mathbf{u}_h - \mathbf{I}_h \mathbf{u}\|^2 \leq a_h(\mathbf{u}_h - \mathbf{I}_h \mathbf{u}, \mathbf{u}_h - \mathbf{I}_h \mathbf{u}) \quad (3.4)$$

On intègre dans cette équation, la solution $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^{k+1}(\Omega)$:

$$\alpha \|\mathbf{u}_h - \mathbf{I}_h \mathbf{u}\|^2 \leq a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h - \mathbf{I}_h \mathbf{u}) - a_h(\mathbf{u}, \mathbf{u}_h - \mathbf{I}_h \mathbf{u}) + a_h(\mathbf{u} - \mathbf{I}_h \mathbf{u}, \mathbf{u}_h - \mathbf{I}_h \mathbf{u}) \quad (3.5)$$

Or, d'après la définition du problème (2.19) on a :

$$a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h - \mathbf{I}_h \mathbf{u}) = l_h(\mathbf{u}_h - \mathbf{I}_h \mathbf{u}) - b_h(p_h, \mathbf{u}_h - \mathbf{I}_h \mathbf{u}).$$

Le Lemme 3.1.1 de consistance nous permet d'écrire :

$$a_h(\mathbf{u}, \mathbf{u}_h - \mathbf{I}_h \mathbf{u}) = l_h(\mathbf{u}_h - \mathbf{I}_h \mathbf{u}) - b_h(p, \mathbf{u}_h - \mathbf{I}_h \mathbf{u}).$$

L'équation (3.5) devient :

$$\alpha \|\mathbf{u}_h - \mathbf{I}_h \mathbf{u}\|^2 \leq b_h(p - p_h, \mathbf{u}_h - \mathbf{I}_h \mathbf{u}) + a_h(\mathbf{u} - \mathbf{I}_h \mathbf{u}, \mathbf{u}_h - \mathbf{I}_h \mathbf{u}).$$

D'une part, par continuité de la forme a_h (cf. Lemme 3.1.3) on obtient :

$$a_h(\mathbf{u} - \mathbf{I}_h \mathbf{u}, \mathbf{u}_h - \mathbf{I}_h \mathbf{u}) \leq c\sqrt{\mu}h^k |\mathbf{u}|_{k+1} \cdot \|\mathbf{u}_h - \mathbf{I}_h \mathbf{u}\|.$$

D'autre part, on peut écrire :

$$b_h(p - p_h, \mathbf{u}_h - \mathbf{I}_h \mathbf{u}) = b_h(p - i_h p, \mathbf{u}_h - \mathbf{I}_h \mathbf{u}) + b_h(i_h p - p_h, \mathbf{u}_h - \mathbf{I}_h \mathbf{u}).$$

La deuxième équation du problème (2.19), nous donne que :

$$b(i_h p - p_h, \mathbf{u}_h) = 0.$$

et donc on obtient en utilisant une propriété de l'interpolateur \mathbf{I}_h :

$$b_h(i_h p - p_h, \mathbf{u}_h - \mathbf{I}_h \mathbf{u}) = -b_h(i_h p - p_h, \mathbf{I}_h \mathbf{u}) = b_h(i_h p - p_h, \mathbf{u}) = 0.$$

De plus, le Lemme (3.1.4) nous donne :

$$b(p_h - i_h p, \mathbf{u}_h - \mathbf{I}_h \mathbf{u}) \leq \frac{c}{\sqrt{\mu}} h^k \|\mathbf{u}_h - \mathbf{I}_h \mathbf{u}\| |p|_{k,\Omega}.$$

On peut maintenant écrire que :

$$\alpha \|\mathbf{u}_h - \mathbf{I}_h \mathbf{u}\| \leq ch^k (\sqrt{\mu} |\mathbf{u}|_{k+1,\Omega} + \frac{1}{\mu} |p|_{k,\Omega}). \quad (3.6)$$

On obtient l'estimation d'erreur *a priori* souhaitée grâce à une inégalité triangulaire et à la relation suivante :

$$J(\mathbf{u} - \mathbf{I}_h \mathbf{u}, \mathbf{u} - \mathbf{I}_h \mathbf{u}) = J(\mathbf{I}_h \mathbf{u}, \mathbf{I}_h \mathbf{u}) = 0.$$

Dans le but d'établir l'erreur sur la pression, on écrit :

$$\|p - p_h\|_{0,h} \leq \|p - i_h p\|_{0,h} + \|i_h p - p_h\|_{0,h}.$$

D'après la condition inf-sup discrète, on a :

$$\|i_h p - p_h\|_{0,h} \leq \frac{\sqrt{\mu}}{\beta} \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h} \frac{b_h(i_h p - p_h, \mathbf{v}_h)}{\|\mathbf{v}_h\|}.$$

On introduit alors la solution $p \in H^k(\Omega)$ et on obtient :

$$\|i_h p - p_h\|_{0,h} \leq \frac{\sqrt{\mu}}{\beta} \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h} \frac{b_h(i_h p - p, \mathbf{v}_h) + b_h(p - p_h, \mathbf{v}_h)}{\|\mathbf{v}_h\|}.$$

Par continuité de la forme b_h , (cf. Lemme 3.1.4), on a :

$$b_h(i_h p - p, \mathbf{v}_h) \leq \frac{c}{\sqrt{\mu}} h^k |p|_{k,\Omega} \|\mathbf{v}_h\|.$$

D'autre part, en utilisant le Lemme 3.1.1 et la première équation du problème discret (2.19), on a :

$$a_h(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = -b_h(p - p_h, \mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h.$$

On peut alors montrer, grâce au Lemme 3.1.3 et à la continuité de $a_h(\cdot, \cdot)$ dans \mathbf{V}_h , que

$$\begin{aligned} a_h(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) &= a_h(\mathbf{u} - \mathbf{I}_h \mathbf{u}, \mathbf{v}_h) + a_h(\mathbf{I}_h \mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) \\ &\leq c\sqrt{\mu} h^k |\mathbf{u}|_{k+1,\Omega} \|\mathbf{v}_h\| + 2 \|\mathbf{I}_h \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\| \|\mathbf{v}_h\|. \end{aligned}$$

En conclusion, on obtient

$$\|i_h p - p_h\|_{0,\Omega} \leq ch^k (\mu |\mathbf{u}|_{k+1,\Omega} + |p|_{k,\Omega}) + c\sqrt{\mu} \|\mathbf{I}_h \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|,$$

qui combiné avec (3.6) donne l'estimation souhaitée (3.3). □

Théorème 3.1.2. *On suppose Ω convexe, $(\mathbf{u}, p) \in \mathbf{H}^{k+1}(\Omega) \times H^k(\Omega)$ et γ suffisamment grand. Il existe alors une constante c telle que*

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,\Omega} \leq ch^{k+1} (|\mathbf{u}|_{k+1,\Omega} + \frac{1}{\mu} |p|_{k,\Omega}).$$

Démonstration. On adapte l'argument de Aubin-Nitsche à notre discrétisation. On suit les mêmes étapes que dans [37], mais avec la norme $\|\cdot\|$ provenant d'une stabilisation différente.

On rappelle tout d'abord que grâce à la convexité de Ω , le problème de Stokes

$$\begin{cases} -\mu \Delta \phi + \nabla \xi &= \boldsymbol{\psi} & \text{dans } \Omega \\ \nabla \cdot \boldsymbol{\phi} &= 0 & \text{dans } \Omega \\ \boldsymbol{\phi} &= \mathbf{0} & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

admet une unique solution $(\phi, \xi) \in \mathbf{H}^2(\Omega) \times H^1(\Omega)$. De plus cette solution satisfait :

$$\mu \|\phi\|_{2,\Omega} + \|\xi\|_{1,\Omega} \leq c \|\psi\|_{0,\Omega}. \quad (3.7)$$

On considère maintenant le problème dual avec $\psi = \mathbf{u}_h - \mathbf{u}$ et on écrit, après intégration par parties sur chaque triangle $T \in \mathcal{T}_h$ et en utilisant la régularité de ϕ et de ξ , que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,\Omega}^2 &= \int_{\Omega} (\mathbf{u}_h - \mathbf{u}) \cdot (-\mu \Delta \phi + \nabla \xi) dx \\ &= a_h(\phi, \mathbf{u}_h - \mathbf{u}) + b_h(\xi, \mathbf{u}_h - \mathbf{u}). \end{aligned}$$

En utilisant les relations l'orthogonalité (cf. Lemme 3.1.1),

$$\begin{aligned} a_h(\mathbf{u}_h - \mathbf{u}, \mathbf{v}_h) + b_h(p_h - p, \mathbf{v}_h) &= 0, \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h \\ b_h(q_h, \mathbf{u}_h - \mathbf{u}) &= 0, \quad \forall q_h \in Q_h, \end{aligned}$$

on obtient, en choisissant $\mathbf{v}_h = \mathbf{I}_h \phi$ et $q_h = i_h \xi$:

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,\Omega}^2 = a_h(\phi - \mathbf{I}_h \phi, \mathbf{u}_h - \mathbf{u}) + b_h(\xi - i_h \xi, \mathbf{u}_h - \mathbf{u}) - b_h(p_h - p, \mathbf{I}_h \phi). \quad (3.8)$$

Dans la suite, nous allons donc estimer chacun des trois termes du second membre.

Le dernier terme peut être borné de la même manière que dans [37]. Nous allons donner quelques détails de la preuve. Tout d'abord, grâce aux propriétés de ϕ et des opérateurs d'interpolation \mathbf{I}_h et i_h , on écrit que :

$$b_h(p_h - p, \mathbf{I}_h \phi) = b_h(i_h p - p, \mathbf{I}_h \phi - \phi) = \sum_{e \in \varepsilon_h} \int_e \{i_h p - p\} [(\mathbf{I}_h \phi - \phi) \cdot \mathbf{n}_e] ds.$$

Puis, on utilise l'estimation d'interpolation (voir aussi le Lemme 3.1.4) et la régularité (3.7) pour conclure que

$$b_h(p_h - p, \mathbf{I}_h \phi) \leq \frac{c}{\mu} h^{k+1} |p|_{k,\Omega} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,\Omega}. \quad (3.9)$$

Pour le deuxième terme du second membre de (3.8), on peut écrire grâce à (2.12) et aux propriétés de \mathbf{u} que

$$\begin{aligned} b_h(\xi - i_h \xi, \mathbf{u}_h - \mathbf{u}) &= \sum_{e \in \varepsilon_h} \int_e \{\xi - i_h \xi\} [(\mathbf{u}_h - \mathbf{L}_h \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}_e] ds \\ &\leq ch \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,\Omega} \left(\sum_{e \in \varepsilon_h} \frac{1}{|e|} \|[\mathbf{u}_h - \mathbf{L}_h \mathbf{u}]\|_{0,e}^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

En utilisant le Lemme 3.1.2, le fait que $[\mathbf{u}] = [\mathbf{L}_h \mathbf{u}] = \mathbf{0}$ et l'estimation d'erreur (3.2), on obtient :

$$\left(\sum_{e \in \varepsilon_h} \frac{1}{|e|} \|[\mathbf{u}_h - \mathbf{L}_h \mathbf{u}]\|_{0,e}^2 \right)^{1/2} \leq c \left(|\mathbf{u} - \mathbf{L}_h \mathbf{u}|_{1,\Omega} + \frac{1}{\sqrt{\mu}} \|[\mathbf{u} - \mathbf{u}_h]\| \right) \leq ch^k (|\mathbf{u}|_{k+1,\Omega} + \frac{1}{\mu} |p|_{k,\Omega})$$

et donc finalement,

$$b_h(\xi - i_h \xi, \mathbf{u}_h - \mathbf{u}) \leq ch^{k+1} (|\mathbf{u}|_{k+1,\Omega} + \frac{1}{\mu} |p|_{k,\Omega}) \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,\Omega}. \quad (3.10)$$

Il nous reste donc à contrôler le terme :

$$a_h(\phi - \mathbf{I}_h\phi, \mathbf{u}_h - \mathbf{u}) = A_0(\phi - \mathbf{I}_h\phi, \mathbf{u}_h - \mathbf{u}) + A_1(\phi - \mathbf{I}_h\phi, \mathbf{u}_h - \mathbf{u}) + \gamma J(\phi - \mathbf{I}_h\phi, \mathbf{u}_h - \mathbf{u}).$$

On a que :

$$\begin{aligned} A_0(\phi - \mathbf{I}_h\phi, \mathbf{u}_h - \mathbf{u}) + \gamma J(\phi - \mathbf{I}_h\phi, \mathbf{u}_h - \mathbf{u}) &\leq \| \phi - \mathbf{I}_h\phi \| \| \mathbf{u}_h - \mathbf{u} \| \\ &\leq ch^{k+1} (|\mathbf{u}|_{k+1,\Omega} + \frac{1}{\mu} |p|_{k,\Omega}) \| \mathbf{u} - \mathbf{u}_h \|_{0,\Omega}; \end{aligned}$$

il nous suffit donc de borner le terme :

$$\begin{aligned} A_1(\phi - \mathbf{I}_h\phi, \mathbf{u}_h - \mathbf{u}) &= -\mu \sum_{e \in \varepsilon_h} \left(\int_e \left\{ \frac{\partial(\phi - \mathbf{I}_h\phi)}{\partial \mathbf{n}_e} \right\} \cdot [\mathbf{u}_h - \mathbf{u}] ds \right. \\ &\quad \left. + \int_e \left\{ \frac{\partial(\mathbf{u}_h - \mathbf{u})}{\partial \mathbf{n}_e} \right\} \cdot [\phi - \mathbf{I}_h\phi] ds \right). \end{aligned}$$

En suivant le raisonnement utilisé pour la preuve du Lemme 3.1.3, on obtient que :

$$\begin{aligned} \mu \sum_{e \in \varepsilon_h} \int_e \left\{ \frac{\partial(\phi - \mathbf{I}_h\phi)}{\partial \mathbf{n}_e} \right\} \cdot [\mathbf{u}_h - \mathbf{u}] ds &\leq c\mu h |\phi|_{2,\Omega} \left(\sum_{e \in \varepsilon_h} \frac{1}{|e|} \|[\mathbf{u}_h - \mathbf{L}_h\mathbf{u}]_{0,e}^2 \right)^{1/2} \\ &\leq ch^{k+1} (|\mathbf{u}|_{k+1,\Omega} + \frac{1}{\mu} |p|_{k,\Omega}) \| \mathbf{u} - \mathbf{u}_h \|_{0,\Omega}. \end{aligned}$$

On peut écrire à l'aide de (2.15) et du fait que $\left\{ \frac{\partial(\mathbf{u}_h - \mathbf{L}_h\mathbf{u})}{\partial \mathbf{n}_e} \right\} \in \mathbf{P}_{k-1}$ sur chaque arête $e \in \varepsilon_h$, que :

$$\begin{aligned} \mu \sum_{e \in \varepsilon_h} \int_e \left\{ \frac{\partial(\mathbf{u}_h - \mathbf{u})}{\partial \mathbf{n}_e} \right\} \cdot [\phi - \mathbf{I}_h\phi] ds &= \mu \sum_{e \in \varepsilon_h} \int_e \left\{ \frac{\partial(\mathbf{L}_h\mathbf{u} - \mathbf{u})}{\partial \mathbf{n}_e} \right\} \cdot [\phi - \mathbf{I}_h\phi] ds \\ &\leq c\mu h^{k+1} |\phi|_{2,\Omega} |\mathbf{u}|_{k+1,\Omega} \\ &\leq ch^{k+1} |\mathbf{u}|_{k+1,\Omega} \| \mathbf{u} - \mathbf{u}_h \|_{0,\Omega}. \end{aligned}$$

Les estimations précédentes nous donnent donc que :

$$a_h(\phi - \mathbf{I}_h\phi, \mathbf{u}_h - \mathbf{u}) \leq ch^{k+1} (|\mathbf{u}|_{k+1,\Omega} + \frac{1}{\mu} |p|_{k,\Omega}) \| \mathbf{u} - \mathbf{u}_h \|_{0,\Omega}. \quad (3.11)$$

En rassemblant (3.8), (3.9), (3.10) et (3.11), on retrouve le résultat souhaité. \square

Nous allons maintenant étudier les estimations d'erreur *a priori* pour la formulation (2.20).

Théorème 3.1.3. *Soit $(\mathbf{u}, p) \in \mathbf{H}^{k+1}(\Omega) \times H^k(\Omega)$ la solution du problème de Stokes continu et soit γ suffisamment grand (comme dans le Lemme 2.3.1). Alors la solution (\mathbf{U}_h, P_h) de (2.10) satisfait :*

$$\begin{aligned} \|[\mathbf{u} - \mathbf{U}_h]\| &\leq ch^k (\sqrt{\mu} |\mathbf{u}|_{k+1,\Omega} + \frac{1}{\sqrt{\mu}} |p|_{k,\Omega}) \\ \|p - P_h\|_{0,\Omega} &\leq ch^k (\mu |\mathbf{u}|_{k+1,\Omega} + |p|_{k,\Omega}) \end{aligned}$$

avec c une constante. Si, de plus, Ω est convexe alors :

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{U}_h\|_{0,\Omega} \leq ch^{k+1}(|\mathbf{u}|_{k+1,\Omega} + \frac{1}{\mu}|p|_{k,\Omega}).$$

Démonstration. La démonstration est similaire à celles des Théorèmes 3.1.1 et 3.1.2.

En ce qui concerne l'erreur en norme énergie, nous avons juste besoin d'utiliser les nouvelles estimations suivantes, pour tout $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$:

$$\begin{aligned} J_1(\mathbf{u} - \mathbf{I}_h\mathbf{u}, \mathbf{v}_h) &= 0 \quad \text{pour } k = 2, 3 \\ J_1(\mathbf{u} - \mathbf{I}_h\mathbf{u}, \mathbf{v}_h) &\leq c\sqrt{\mu} \left(\sum_{e \in \varepsilon_h^{int}} \frac{1}{|e|} \|\mathbf{u} - \mathbf{I}_h\mathbf{u}\|_{0,e}^2 \right)^{1/2} [[\mathbf{v}_h]] \\ &\leq c\sqrt{\mu}h^k |\mathbf{u}|_{k+1,\Omega} [[\mathbf{v}_h]] \quad \text{pour } k = 1 \\ \|\mathbf{v}_h\| &\leq c [[\mathbf{v}_h]], \end{aligned}$$

avec c indépendante de h de μ et de γ . La première estimation vient de l'inégalité de trace (2.32) et de l'erreur d'interpolation (2.16), alors que la seconde est une conséquence immédiate de (2.40).

Concernant l'erreur en norme \mathbf{L}^2 de la vitesse, le principal changement est que l'on doit maintenant contrôler le terme $\sum_{e \in \varepsilon_h} \frac{1}{\sqrt{|e|}} \|\mathbf{U}_h - \mathbf{L}_h\mathbf{u}\|_{0,e}$. Grâce au Lemme 3.1.2 et aux relations $[\mathbf{L}_h\mathbf{u}] = [\mathbf{u}] = \mathbf{0}$, on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{e \in \varepsilon_h} \frac{1}{\sqrt{|e|}} \|\mathbf{U}_h - \mathbf{L}_h\mathbf{u}\|_{0,e} &\leq \frac{c}{\sqrt{\mu}} \|\mathbf{U}_h - \mathbf{L}_h\mathbf{u}\| \leq \frac{c}{\sqrt{\mu}} [[\mathbf{U}_h - \mathbf{L}_h\mathbf{u}]] \\ &\leq c \left(\|\underline{D}(\mathbf{u}) - \underline{D}(\mathbf{L}_h\mathbf{u})\|_{0,\Omega} + \frac{1}{\sqrt{\mu}} [[\mathbf{u} - \mathbf{U}_h]] \right) \\ &\leq ch^k (|\mathbf{u}|_{k+1,\Omega} + \frac{1}{\mu}|p|_{k,\Omega}). \end{aligned}$$

□

3.2 Estimations d'erreur *a posteriori*

Notre analyse suit l'idée de K. Kim [50] qui propose un indicateur d'erreur *a posteriori* pour l'équation de Laplace basé sur la reconstruction d'un vecteur d'approximation $H(\text{div}, \Omega)$ -conforme localement conservatif. Nous allons développer ici une analyse *a posteriori* uniquement pour le problème (2.19) ; des résultats analogues peuvent être établis pour le problème (2.20). Pour cela, on notera

$$\underline{H}(\text{div}, \Omega) = \{\underline{\theta} \in \underline{L}^2(\Omega); \text{div}\underline{\theta} \in \mathbf{L}^2(\Omega)\}$$

et on introduit l'espace d'éléments finis de Raviart-Thomas (cf. [76])

$$\underline{\Sigma}_h = \{\underline{\theta}_h \in \underline{H}(\text{div}, \Omega); (\underline{\theta}_h)_{/T} \in \underline{RT}_{k-1}, \quad \forall T \in \mathcal{T}_h\}$$

où $\underline{RT}_{k-1} = \underline{P}_{k-1} + \mathbf{P}_{k-1} \otimes \mathbf{x}$. On construit alors un tenseur $\underline{\sigma}_h \in \underline{\Sigma}_h$ à partir de la solution (\mathbf{u}_h, p_h) de (2.19) en précisant ses degrés de liberté. Plus précisément, on impose sa trace normale :

$$\underline{\sigma}_h \mathbf{n}_e = \mu \left\{ \frac{\partial \mathbf{u}_h}{\partial \mathbf{n}_e} \right\} - \frac{\mu \gamma}{|e|} [\boldsymbol{\pi}_{k-1} \mathbf{u}_h] - \{p_h\} \mathbf{n}_e, \quad \forall e \in \varepsilon_h$$

et pour $k = 2$ ou 3 , on définit aussi les moments internes :

$$\int_T \underline{\sigma}_h : \underline{r} dx = \int_T (\mu \nabla \mathbf{u}_h - p_h \underline{I}) : \underline{r} dx, \quad \forall T \in \mathcal{T}_h \text{ et } \forall \underline{r} \in \underline{P}_{k-2}.$$

En prenant comme fonction test \mathbf{v}_h dans la formulation dG (2.9) un polynôme de degré $k - 1$ par morceaux, on obtient que

$$\int_T (\operatorname{div} \underline{\sigma}_h + \mathbf{f}) \cdot \underline{r} dx = 0, \quad \forall T \in \mathcal{T}_h \text{ et } \forall \underline{r} \in \underline{P}_{k-1} \quad (3.12)$$

donc on a $(\operatorname{div} \underline{\sigma}_h)_{/T} = -\boldsymbol{\pi}_{k-1}^T \mathbf{f}$ sur chaque triangle $T \in \mathcal{T}_h$. $\underline{\sigma}_h$ est donc localement conservatif. On introduit aussi $\underline{\sigma} = \mu \nabla \mathbf{u} - p \underline{I}$ qui appartient à $\underline{H}(\operatorname{div}, \Omega)$.

On définit maintenant, comme dans [50], un estimateur par résidu de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \eta_1^2 &= \frac{1}{\mu} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\underline{\sigma}_h - \mu \nabla \mathbf{u}_h + p_h \underline{I}\|_{0,T}^2, \\ \eta^2 &= \eta_1^2 + J^*(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h). \end{aligned}$$

On introduit aussi le terme d'ordre supérieur suivant, prenant en compte l'approximation des données :

$$\eta_{hot}^2 = \frac{1}{\mu} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 \|\mathbf{f} - \boldsymbol{\pi}_{k-1}^T \mathbf{f}\|_{0,T}^2.$$

3.2.1 Fiabilité de l'indicateur d'erreur

Dans le but d'établir la fiabilité de η , on note par $S(\cdot, \cdot)$ la forme bilinéaire du problème de Stokes continu (2.9), que l'on étend sur $(\mathbf{H}_0^1(\Omega) + \mathbf{V}_h) \times L_0^2(\Omega)$ de la manière suivante :

$$S((\mathbf{u}, p), (\mathbf{v}, q)) = \mu \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} dx - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T p \nabla \cdot \mathbf{v} dx + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T q \nabla \cdot \mathbf{u} dx$$

et soit $(\boldsymbol{\phi}, \xi) \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \times L_0^2(\Omega)$ l'unique solution de

$$S((\boldsymbol{\phi}, \xi), (\mathbf{v}, q)) = S((\mathbf{u}_h, p_h), (\mathbf{v}, q)), \quad \forall (\mathbf{v}, q) \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \times L_0^2(\Omega). \quad (3.13)$$

On peut maintenant majorer l'erreur à l'aide d'une inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} &\sqrt{\mu} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,\Omega} + \frac{1}{\sqrt{\mu}} \|p - p_h\|_{0,\Omega} \leq \\ &\left(\sqrt{\mu} \|\mathbf{u} - \boldsymbol{\phi}\|_{1,\Omega} + \frac{1}{\sqrt{\mu}} \|p - \xi\|_{0,\Omega} \right) + \left(\sqrt{\mu} \|\mathbf{u}_h - \boldsymbol{\phi}\|_{1,\Omega} + \frac{1}{\sqrt{\mu}} \|p_h - \xi\|_{0,\Omega} \right) \end{aligned}$$

et dans la suite, on bornera tous les termes du second membre par rapport à η et η_{hot} .

Dans le but de mieux caractériser les constantes contenues dans les inégalités suivantes, on introduit la constante inf-sup $\tilde{\beta} = \tilde{\beta}(\Omega)$ pour le problème de Stokes continu :

$$\tilde{\beta} \|r\|_{0,\Omega} \leq \sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)} \frac{b(r, \mathbf{v})}{|\mathbf{v}|_{1,\Omega}}$$

Lemme 3.2.1. *Il existe une constante $c(k)$ dépendant seulement de k telle que*

$$\sqrt{\mu} |\mathbf{u} - \phi|_{1,\Omega} + \frac{\tilde{\beta}}{2\sqrt{\mu}} \|p - \zeta\|_{0,\Omega} \leq \eta_1 + c(k) \left(\frac{1}{\tilde{\beta}} \sqrt{J^*(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h)} + \eta_{hot} \right).$$

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned} & a(\mathbf{u} - \phi, \mathbf{u} - \phi) \\ &= a(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{u} - \phi) + b(p - p_h, \mathbf{u} - \phi) + b(\xi - p, \mathbf{u} - \phi) \\ &= \int_{\Omega} (\underline{\sigma} - \underline{\sigma}_h) : \nabla(\mathbf{u} - \phi) dx + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T (\underline{\sigma}_h - \mu \nabla \mathbf{u}_h + p_h \mathbf{I}) : \nabla(\mathbf{u} - \phi) dx \\ & \quad + \int_{\Omega} (\xi - p) \nabla \cdot (\mathbf{u} - \phi) dx. \end{aligned}$$

Il s'en suit, après intégration par parties et après avoir utilisé (3.12), que

$$\begin{aligned} & a(\mathbf{u} - \phi, \mathbf{u} - \phi) = \\ & \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left(\int_T (\underline{\sigma}_h - \mu \nabla \mathbf{u}_h + p_h \mathbf{I}) : \nabla(\mathbf{u} - \phi) dx + \int_T (\mathbf{f} - \boldsymbol{\pi}_{k-1}^T \mathbf{f}) \cdot (\mathbf{u} - \phi) dx \right) \\ & \quad - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T (\xi - p) \nabla \cdot \mathbf{u}_h dx, \end{aligned}$$

ce qui implique que :

$$\begin{aligned} & \mu |\mathbf{u} - \phi|_{1,\Omega}^2 \leq \\ & \sqrt{\mu} |\mathbf{u} - \phi|_{1,\Omega} (\eta_1 + c_1(k) \eta_{hot}) + \|p - \xi\|_{0,\Omega} \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\nabla \cdot \mathbf{u}_h\|_{0,T}^2 \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

où $c_1(k)$ dénote une constante dépendant uniquement du degré polynomial k . Pour borner le terme $\|\nabla \cdot \mathbf{u}_h\|_{0,T}$, on choisit comme fonction test q_h dans (2.19) la fonction égale à $\nabla \cdot \mathbf{u}_h$ sur T et 0 ailleurs. Alors,

$$\begin{aligned} \|\nabla \cdot \mathbf{u}_h\|_{0,T}^2 &= \frac{1}{2} \sum_{e \in \partial T} \int_e (\nabla \cdot \mathbf{u}_h) [\mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n}_e] ds \\ &\leq c \|\nabla \cdot \mathbf{u}_h\|_{0,T} \left(\sum_{e \in \partial T} \frac{1}{|e|} \|[\mathbf{u}_h]\|_{0,e}^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

On obtient donc :

$$\left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\nabla \cdot \mathbf{u}_h\|_{0,T}^2 \right)^{1/2} \leq \frac{c_2(k)}{\sqrt{\mu}} \sqrt{J^*(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h)}$$

qui conduit à :

$$\mu |\mathbf{u} - \phi|_{1,\Omega}^2 \leq \sqrt{\mu} |\mathbf{u} - \phi|_{1,\Omega} (\eta_1 + c_1(k)\eta_{hot}) + \frac{c_2(k)}{\sqrt{\mu}} \|p - \xi\|_{0,\Omega} \sqrt{J^*(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h)}. \quad (3.14)$$

On écrit ensuite que

$$\begin{aligned} b(p - \xi, \mathbf{v}) &= b(p - p_h, \mathbf{v}) + a(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{v}) + a(\phi - \mathbf{u}, \mathbf{v}) \\ &\leq \sqrt{\mu}(\eta_1 + c_1(k)\eta_{hot}) |\mathbf{v}|_{1,\Omega} + \mu |\mathbf{u} - \phi|_{1,\Omega} |\mathbf{v}|_{1,\Omega} \end{aligned}$$

et en utilisant la condition inf-sup, cela nous permet d'obtenir que :

$$\frac{\tilde{\beta}}{\sqrt{\mu}} \|p - \xi\|_{0,\Omega} \leq \eta_1 + c_1(k)\eta_{hot} + \sqrt{\mu} |\mathbf{u} - \phi|_{1,\Omega}. \quad (3.15)$$

En combinant (3.14) et (3.15) avec l'inégalité de Young, on obtient que :

$$\begin{aligned} &\mu |\mathbf{u} - \phi|_{1,\Omega}^2 \\ &\leq (\eta_1 + c_1(k)\eta_{hot})^2 + \frac{c_2(k)^2}{\tilde{\beta}^2} J^*(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h) + \frac{4c_2(k)}{\tilde{\beta}} (\eta_1 + c_1(k)\eta_{hot}) \sqrt{J^*(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h)} \end{aligned}$$

qui nous conduit finalement à ;

$$\sqrt{\mu} |\mathbf{u} - \phi|_{1,\Omega} \leq \eta_1 + c_1(k)\eta_{hot} + \frac{2c_2(k)}{\tilde{\beta}} \sqrt{J^*(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h)}. \quad (3.16)$$

L'inégalité (3.15) nous permet maintenant de conclure. \square

Lemme 3.2.2. *Il existe une constante $c_3(k)$ dépendant de k telle que :*

$$\sqrt{\mu} |\mathbf{u}_h - \phi|_{1,h} + \frac{\tilde{\beta}}{\sqrt{\mu}} \|p_h - \zeta\|_{0,\Omega} \leq \frac{c_3(k)(1 + \sqrt{1 + \tilde{\beta}^2})}{\tilde{\beta}} \sqrt{J^*(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h)}.$$

Démonstration. La condition inf-sup continue sur $b(\cdot, \cdot)$ implique que

$$\tilde{\beta} \|p_h - \zeta\|_{0,\Omega} \leq \sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)} \frac{b(p_h - \xi, \mathbf{v})}{|\mathbf{v}|_{1,\Omega}} = \sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)} \frac{a(\mathbf{u}_h - \phi, \mathbf{v})}{|\mathbf{v}|_{1,\Omega}} \leq \mu |\mathbf{u}_h - \phi|_{1,h},$$

il est donc suffisant de borner le terme $\sqrt{\mu} |\mathbf{u}_h - \phi|_{1,h}$.

Un calcul simple combiné avec (3.13) donne, pour chaque $\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$:

$$\begin{aligned} &\mu |\mathbf{u}_h - \phi|_{1,h}^2 - \mu |\mathbf{u}_h - \mathbf{v}|_{1,h}^2 \\ &= S((\mathbf{u}_h - \phi, p_h - \xi), (\mathbf{u}_h - \phi, p_h - \xi)) - S((\mathbf{u}_h - \mathbf{v}, p_h - \xi), (\mathbf{u}_h - \mathbf{v}, p_h - \xi)) \\ &= S((\mathbf{u}_h - \phi, p_h - \xi), (\mathbf{v} - \phi, 0)) + S((\mathbf{v} - \phi, 0), (\mathbf{u}_h - \phi, p_h - \xi)) \\ &\quad - S((\phi - \mathbf{v}, 0), (\phi - \mathbf{v}, 0)) \\ &= 2 \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T (p_h - \xi) \nabla \cdot (\mathbf{v} - \phi) dx - \mu |\phi - \mathbf{v}|_{1,\Omega}^2 \\ &\leq 2 \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T (p_h - \xi) \nabla \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}_h) dx. \end{aligned}$$

On obtient alors que

$$|\mathbf{u}_h - \phi|_{1,h}^2 \leq |\mathbf{u}_h - \mathbf{v}|_{1,h}^2 + \frac{2}{\tilde{\beta}} |\mathbf{u}_h - \phi|_{1,h} |\mathbf{u}_h - \mathbf{v}|_{1,h}$$

et donc

$$|\mathbf{u}_h - \phi|_{1,h} \leq \frac{1 + \sqrt{1 + \tilde{\beta}^2}}{\tilde{\beta}} |\mathbf{u}_h - \mathbf{v}|_{1,h}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega).$$

On procède alors de la même manière que dans [50] (voir aussi [48]) et on prend pour $\mathbf{v} \in \mathbf{C}^0(\bar{\Omega})$ la fonction \mathbf{P}_k par élément définie par ses valeurs aux noeuds de Lagrange \mathbf{z} de la manière suivante :

$$\mathbf{v}(\mathbf{z}) = (\mathbf{u}_h)_{/T}(\mathbf{z}),$$

où $T \in \mathcal{T}_h$ est tel que $\mathbf{z} \in \bar{T}$. On peut alors établir (cf. [50]) que :

$$|\mathbf{u}_h - \mathbf{v}|_{1,h} \leq c_3(k) \sqrt{J^*(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h)}$$

ce qui nous permet de conclure la démonstration de ce lemme. \square

Les deux Théorèmes précédents nous permettent d'établir la fiabilité de η , présentée dans le Théorème suivant :

Théorème 3.2.1. *Il existe une constante $c(k)$ dépendant de k telle que :*

$$\sqrt{\mu} |\mathbf{u} - \mathbf{u}_h|_{1,h} + \frac{\tilde{\beta}}{2\sqrt{\mu}} \|p - p_h\|_{0,\Omega} \leq \eta_1 + c(k) \left(\frac{1 + \sqrt{1 + \tilde{\beta}^2}}{\tilde{\beta}} \sqrt{J^*(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h)} + \eta_{hot} \right).$$

Remarque 7. *On note que grâce à l'inégalité évidente suivante :*

$$J(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h) \leq J^*(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h),$$

on a aussi que :

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\| \leq \eta_1 + c(k, \tilde{\beta}) \sqrt{\gamma J^*(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h)} + c(k) \eta_{hot}.$$

3.2.2 Optimalité de l'indicateur d'erreur

On s'intéresse maintenant à l'optimalité de l'indicateur d'erreur *a posteriori*. On introduit sur chaque triangle $T \in \mathcal{T}_h$ les contributions locales de notre indicateur :

$$\begin{aligned} \eta_{1,T}^2 &= \frac{1}{\mu} \|\sigma_h - \mu \nabla \mathbf{u}_h + p_h \mathbf{I}\|_{0,T}^2, \\ \eta_{2,T}^2 &= \sum_{e \subset (\partial T \setminus \partial \Omega)} \frac{\mu}{2|e|} \|[\mathbf{u}_h]\|_{0,e}^2 + \sum_{e \subset (\partial T \cap \partial \Omega)} \frac{\mu}{|e|} \|[\mathbf{u}_h]\|_{0,e}^2, \end{aligned}$$

tels que

$$\eta^2 = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} (\eta_{1,T}^2 + \eta_{2,T}^2).$$

Il est utile de rappeler quelques résultats obtenus par Verfürth [81].

On note b_T la fonction bulle cubique sur $T \in \mathcal{T}_h$ et b_e la fonction bulle quadratique sur $e \in \varepsilon_h$, satisfaisant $0 \leq b_T \leq 1 = \max b_T$ et $0 \leq b_e \leq 1 = \max b_e$. Il existe alors une constante C dépendant uniquement de l'angle minimum de \mathcal{T}_h et du degré polynomial r tel que, pour tout $v \in P_r(T)$:

$$\|v\|_{0,T} \leq C \|b_T^{1/2} v\|_{0,T}, \quad \|v\|_{0,e} \leq C \|b_e^{1/2} v\|_{0,e}. \quad (3.17)$$

De plus, il existe un opérateur P_e qui relève toute fonction définie sur $e \in \varepsilon_h$ au triangle T et satisfait :

$$C_1 \sqrt{|e|} \|v\|_{0,e} \leq \|b_e P_e v\|_{0,T} \leq C_2 \sqrt{|e|} \|v\|_{0,e}, \quad \forall v \in P_r(e). \quad (3.18)$$

On obtient alors :

Théorème 3.2.2. *Il existe une constante $c(k, \mathcal{T}_h)$ dépendant de l'angle minimum de \mathcal{T}_h et de k et une constante $c(k)$ tels que, pour tout $T \in \mathcal{T}_h$, on a*

$$\begin{aligned} \eta_{1,T}^2 &\leq c(k, \mathcal{T}_h) \left(\mu \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,\omega_T}^2 + \frac{1}{\mu} \|p - p_h\|_{0,\omega_T}^2 \right) + c(k) \gamma^2 \sum_{e \subset \partial T} \frac{\mu}{|e|} \|[\boldsymbol{\pi}_{k-1} \mathbf{u}_h]\|_{0,e}^2, \\ \eta_{2,T}^2 &\leq c(k) \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,\omega_T}^2 + \sum_{e \subset \partial T} \frac{\mu}{|e|} \|[\boldsymbol{\pi}_{k-1} \mathbf{u}_h]\|_{0,e}^2 \end{aligned}$$

où ω_T est l'ensemble des éléments partageant une arête avec T . En conséquence,

$$\eta^2 \leq c_1(k, \mathcal{T}_h) \left(\mu \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,h}^2 + \frac{1}{\mu} \|p - p_h\|_{0,\Omega}^2 + (1 + \gamma^2) J(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h) \right).$$

Démonstration. Pour contrôler le terme $\frac{1}{\sqrt{\mu}} \|\underline{\sigma}_h - \mu \underline{\nabla} \mathbf{u}_h + p_h \underline{I}\|_{0,T}$, on note que

$$\underline{\sigma}_h - \mu \underline{\nabla} \mathbf{u}_h + p_h \underline{I}$$

appartient à $\underline{RT}_{k-1}(T)$ et pour $k \geq 2$, sa projection $\underline{L}^2(T)$ -orthogonale sur \underline{P}_{k-2} est nulle. Donc, $\|\underline{\sigma}_h - \mu \underline{\nabla} \mathbf{u}_h + p_h \underline{I}\|_{0,T}$ et $\|(\underline{\sigma}_h - \mu \underline{\nabla} \mathbf{u}_h + p_h \underline{I}) \mathbf{n}_e\|_{0,\partial T}$ sont des normes équivalentes. Par passage à l'élément de référence, on obtient :

$$\|\underline{\sigma}_h - \mu \underline{\nabla} \mathbf{u}_h + p_h \underline{I}\|_{0,T} \leq c \sum_{e \subset \partial T} \sqrt{|e|} \|(\underline{\sigma}_h - \mu \underline{\nabla} \mathbf{u}_h + p_h \underline{I}) \mathbf{n}_e\|_{0,e},$$

avec c une constante dépendant de k . Pour une arête donnée $e \subset \partial T$, on obtient ensuite

$$(\underline{\sigma}_h - \mu \underline{\nabla} \mathbf{u}_h + p_h \underline{I}) \mathbf{n}_e = \pm [\mu \underline{\nabla} \mathbf{u}_h - p_h \underline{I}] \mathbf{n}_e - \frac{\mu \gamma}{|e|} [\boldsymbol{\pi}_{k-1} \mathbf{u}_h]$$

le signe dépend de l'orientation de \mathbf{n}_e par rapport à T . Alors,

$$\begin{aligned} \|\underline{\sigma}_h - \mu \underline{\nabla} \mathbf{u}_h + p_h \underline{I}\|_{0,T} &\leq \\ c \sum_{e \subset \partial T} &\left(\sqrt{|e|} \|[\mu \underline{\nabla} \mathbf{u}_h - p_h \underline{I}] \mathbf{n}_e\|_{0,e} + \frac{\mu \gamma}{\sqrt{|e|}} \|[\boldsymbol{\pi}_{k-1} \mathbf{u}_h]\|_{0,e} \right). \end{aligned}$$

On remarque qu'une intégration par parties nous donne, pour tout $\mathbf{w} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$, que

$$\begin{aligned} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T (\underline{\sigma} - \mu \underline{\nabla} \mathbf{u}_h + p_h \underline{\mathbf{I}}) : \underline{\nabla} \mathbf{w} dx + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \operatorname{div} (\underline{\sigma} - \mu \underline{\nabla} \mathbf{u}_h + p_h \underline{\mathbf{I}}) \cdot \mathbf{w} dx \\ = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial T} (\underline{\sigma} - \mu \underline{\nabla} \mathbf{u}_h + p_h \underline{\mathbf{I}}) \mathbf{n} \cdot \mathbf{w} ds \\ = - \sum_{e \in \varepsilon_h} \int_e [\mu \underline{\nabla} \mathbf{u}_h - p_h \underline{\mathbf{I}}] \mathbf{n}_e \cdot \mathbf{w} ds. \end{aligned}$$

On emploie maintenant l'argument utilisé par Verfürth dans [81] qui est basé sur des normes pondérées par les fonctions bulles et sur des inégalités inverses. En prenant :

$$\mathbf{w} = b_T \operatorname{div} (\underline{\sigma} - \mu \underline{\nabla} \mathbf{u}_h + p_h \underline{\mathbf{I}}),$$

et en utilisant (3.17), on a tout d'abord que

$$h_T \|\operatorname{div} (\underline{\sigma} - \mu \underline{\nabla} \mathbf{u}_h + p_h \underline{\mathbf{I}})\|_{0,T} \leq c \|\underline{\sigma} - \mu \underline{\nabla} \mathbf{u}_h + p_h \underline{\mathbf{I}}\|_{0,T}.$$

On prend ensuite $\mathbf{w} = b_e P_e([\mu \underline{\nabla} \mathbf{u}_h - p_h \underline{\mathbf{I}}] \mathbf{n}_e)$ et on obtient, grâce à (3.17) et à (3.18),

$$\sqrt{|e|} \|[\mu \underline{\nabla} \mathbf{u}_h - p_h \underline{\mathbf{I}}] \mathbf{n}_e\|_{0,e} \leq c \|\underline{\sigma} - \mu \underline{\nabla} \mathbf{u}_h + p_h \underline{\mathbf{I}}\|_{0,T_1 \cup T_2},$$

avec c qui dépend maintenant de l'angle minimum de \mathcal{T}_h et de k . Finalement, cela implique que :

$$\begin{aligned} \eta_{1,T} \leq c(k, \mathcal{T}_h) \left(\sqrt{\mu} \sum_{S \in \omega_T} |\mathbf{u} - \mathbf{u}_h|_{1,S} + \frac{1}{\sqrt{\mu}} \|p - p_h\|_{0,\omega_T} \right) \\ + \gamma c(k) \left(\sum_{e \subset \partial T} \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{|e|}} \|[\boldsymbol{\pi}_{k-1} \mathbf{u}_h]\|_{0,e} \right). \end{aligned}$$

Il nous reste à borner $\eta_{2,T}$, ce qui revient à borner le terme $\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{|e|}} \|[\mathbf{u}_h]\|_{0,e}$, sur chaque arête $e \subset \partial T$. Pour cela, on procède de la même manière que pour le Lemme 3.1.2 et, en utilisant que $[\mathbf{u}] = 0$, on écrit que :

$$\|[\mathbf{u}_h]\|_{0,e} \leq \|[(\mathbf{u}_h - \mathbf{u}) - \boldsymbol{\pi}_{k-1}(\mathbf{u}_h - \mathbf{u})]\|_{0,e} + \|[\boldsymbol{\pi}_{k-1} \mathbf{u}_h]\|_{0,e}.$$

Soit S un triangle de \mathcal{T}_h tel que $e \subset \partial S$. L'inégalité de trace et les propriétés d'interpolation de $\boldsymbol{\pi}_{k-1}^S$ donnent que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{|e|}} \|(\mathbf{u}_h - \mathbf{u}) - \boldsymbol{\pi}_{k-1}(\mathbf{u}_h - \mathbf{u})\|_{0,e} &\leq \frac{1}{\sqrt{|e|}} \|(\mathbf{u}_h - \mathbf{u}) - \boldsymbol{\pi}_{k-1}^S(\mathbf{u}_h - \mathbf{u})\|_{0,e} \\ &\leq c(k) \left(\frac{1}{h_S} \|(\mathbf{u}_h - \mathbf{u}) - \boldsymbol{\pi}_{k-1}^S(\mathbf{u}_h - \mathbf{u})\|_{0,S} + \|(\mathbf{u}_h - \mathbf{u}) - \boldsymbol{\pi}_{k-1}^S(\mathbf{u}_h - \mathbf{u})\|_{1,S} \right) \\ &\leq c(k) |\mathbf{u}_h - \mathbf{u}|_{1,S}. \end{aligned}$$

Il s'en suit que

$$\sum_{e \subset \partial T} \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{|e|}} \|[\mathbf{u}_h]\|_{0,e} \leq c(k) \sqrt{\mu} \left(\sum_{S \in \omega_T} |\mathbf{u}_h - \mathbf{u}|_{1,S} \right) + \sum_{e \subset \partial T} \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{|e|}} \|[\boldsymbol{\pi}_{k-1} \mathbf{u}_h]\|_{0,e},$$

ce qui termine la démonstration. \square

3.2.3 Comportement de l'indicateur d'erreur par rapport à γ

On s'intéresse à la limite lorsque $\gamma \rightarrow \infty$ de

$$\eta^\gamma = \left(\frac{1}{\mu} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\underline{\sigma}_h^\gamma - \mu \nabla \mathbf{u}_h^\gamma + p_h^\gamma \underline{I}\|_{0,T}^2 + J^*(\mathbf{u}_h^\gamma, \mathbf{u}_h^\gamma) \right)^{1/2}.$$

En prenant en compte les résultats de la section 2.4 sur la convergence de notre méthode, on définit un tenseur $\underline{\sigma}_h^* \in \underline{\Sigma}_h$ en précisant ses degrés de liberté de la manière suivante :

$$\underline{\sigma}_h^* \mathbf{n}_e = \mu \left\{ \frac{\partial \mathbf{u}_h^*}{\partial \mathbf{n}_e} \right\} - \sqrt{\mu} \lambda_h^* - \{p_h^*\} \mathbf{n}_e, \quad \forall e \in \varepsilon_h$$

pour $k = 2$ ou 3 ,

$$\int_T \underline{\sigma}_h^* : \underline{r} dx = \int_T (\mu \nabla \mathbf{u}_h^* - p_h^* \underline{I}) : \underline{r} dx, \quad \forall T \in \mathcal{T}_h \text{ et } \forall \underline{r} \in \underline{P}_{k-2}.$$

On rappelle que $(\mathbf{u}_h^*, p_h^*, \lambda_h^*)$ est la solution non-conforme de (2.44). On introduit alors :

$$\begin{aligned} \eta_1^* &= \left(\frac{1}{\mu} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\underline{\sigma}_h^* - \mu \nabla \mathbf{u}_h^* + p_h^* \underline{I}\|_{0,T}^2 \right)^{1/2}, \\ \eta^* &= ((\eta_1^*)^2 + J^*(\mathbf{u}_h^*, \mathbf{u}_h^*))^{1/2}. \end{aligned}$$

On montre alors :

Théorème 3.2.3. *Il existe une constante c indépendante de h , μ , et γ telle que :*

$$|\eta^\gamma - \eta^*| \leq \frac{c}{\gamma \sqrt{\mu}}. \quad (3.19)$$

Démonstration. Ce résultat est obtenu à l'aide du Théorème 2.4.3 et des inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{\mu}} \|\underline{\sigma}_h^\gamma - \underline{\sigma}_h^*\|_{0,T} \\ & \leq c \sum_{e \in \partial T} \sqrt{|e|} \left(\sqrt{\mu} \left\| \left\{ \frac{\partial(\mathbf{u}_h^\gamma - \mathbf{u}_h^*)}{\partial \mathbf{n}_e} \right\} \right\|_{0,e} + \frac{1}{\sqrt{\mu}} \|\{p_h^\gamma - p_h^*\}\|_{0,e} + \|\lambda_h^\gamma - \lambda_h^*\|_{0,e} \right) \\ & \leq c \left(\sqrt{\mu} \|\mathbf{u}_h^\gamma - \mathbf{u}_h^*\|_{1,\omega_T} + \frac{1}{\sqrt{\mu}} \|p_h^\gamma - p_h^*\|_{0,\omega_T} + \sum_{e \in \partial T} \sqrt{|e|} \|\lambda_h^\gamma - \lambda_h^*\|_{0,e} \right) \leq \frac{c}{\gamma \sqrt{\mu}}. \end{aligned}$$

□

Pour $k = 1$, l'indicateur d'erreur non-conforme η_1^* peut être écrit de manière plus simple. Pour simplifier, on se restreint au cas où le second membre \mathbf{f} est constant par maille.

Théorème 3.2.4. *Soit $k = 1$ et soit le second membre \mathbf{f} constant par morceaux par rapport à \mathcal{T}_h . Alors on obtient :*

$$\eta_1^* = \left(\frac{1}{4\mu} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\mathbf{f} \otimes (\mathbf{x} - \mathbf{x}_T)\|_{0,T}^2 \right)^{1/2}. \quad (3.20)$$

Démonstration. En suivant l'approche de Marini (cf. [62]), on définit sur chaque triangle T un élément de \underline{RT}_0 par :

$$\underline{\sigma}'_h = \mu \nabla \mathbf{u}_h^* - p_h^* \mathbf{I} - \frac{1}{2} \mathbf{f} \otimes (\mathbf{x} - \mathbf{x}_T).$$

Soit un $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$ quelconque. Alors $\operatorname{div} \underline{\sigma}'_h = -\mathbf{f}$, $\underline{\sigma}'_h \in \underline{\Sigma}_h$ et, en utilisant le fait que $\int_T (\mathbf{x} - \mathbf{x}_T) dx = \mathbf{0}$:

$$\begin{aligned} \sum_{e \in \varepsilon_h} \int_e \underline{\sigma}'_h \mathbf{n}_e \cdot [\mathbf{v}_h] ds &= \int_{\Omega} \operatorname{div} \underline{\sigma}'_h \cdot \mathbf{v}_h dx + \int_{\Omega} \underline{\sigma}'_h : \nabla \mathbf{v}_h dx \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left(- \int_T \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_h dx + \mu \int_T \nabla \mathbf{u}_h^* : \nabla \mathbf{v}_h dx - \int_T p_h^* \nabla \cdot \mathbf{v}_h dx \right). \end{aligned}$$

En prenant comme fonction test $\chi_h = (\mathbf{v}_h, 0)$ dans le problème (2.44) et en utilisant l'expression de $\underline{\sigma}_h^*$, on obtient immédiatement que

$$\sum_{e \in \varepsilon_h} \int_e \underline{\sigma}'_h \mathbf{n}_e \cdot [\mathbf{v}_h] ds = \sum_{e \in \varepsilon_h} \int_e \underline{\sigma}_h^* \mathbf{n}_e \cdot [\mathbf{v}_h] ds, \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h.$$

On obtient finalement $\underline{\sigma}'_h = \underline{\sigma}_h^*$, ce qui nous permet de conclure. \square

L'estimateur d'erreur *a posteriori* η^* obtenu dans le cas limite est semblable à l'estimateur introduit par Dari, Durán et Padra dans [26] pour la discrétisation P_1 non-conforme (2.33). On rappelle sa définition :

$$\eta^{DDP} = \left(\frac{1}{\mu} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} |T| \|\mathbf{f}\|_{0,T}^2 + \mu \sum_{e \in \varepsilon_h} |e| \int_e \left[\frac{\partial \mathbf{u}_h^*}{\partial \mathbf{t}_e} \right]^2 ds \right)^{1/2} \quad (3.21)$$

où \mathbf{t}_e dénote la tangente unitaire d'une arête e . Grâce à la condition de continuité de l'espace non-conforme, on a sur chaque arête $e \in \varepsilon_h$ que

$$\frac{1}{|e|} \int_e [\mathbf{u}_h^*]^2 ds = \frac{|e|}{12} \int_e \left[\frac{\partial \mathbf{u}_h^*}{\partial \mathbf{t}_e} \right]^2 ds.$$

On obtient finalement :

$$c_1 \eta^{DDP} \leq \eta^* \leq c_2 \eta^{DDP}.$$

où c_1 et c_2 sont deux constantes numériques,

Chapitre 4

Résultats numériques

Dans ce chapitre, nous allons présenter des résultats numériques dans le but d'illustrer et de valider les résultats théoriques précédents. On s'intéresse à l'ordre de convergence de notre méthode lors du raffinement de maillage et à l'influence du terme de stabilisation. Nous avons comparé notre méthode à la méthode dG proposée dans [37] afin d'illustrer la robustesse de notre schéma. Enfin, nous présentons des résultats concernant l'adaptation de maillage via l'estimateur *a posteriori* proposé. Nous avons implémenté ces méthodes dans la librairie C++ CONCHA.

4.1 Convergence de l'erreur

Nous avons montré une estimation d'erreur théorique optimale pour notre schéma. L'erreur converge avec l'ordre $\mathcal{O}(h^k)$ en norme énergie ($\|\cdot\|$ pour la formulation (2.19) et $[\![\cdot]\!]$ pour la formulation (2.20)) pour la vitesse et en norme L^2 pour la pression. De plus, l'erreur en norme L^2 pour la vitesse converge avec l'ordre $\mathcal{O}(h^{k+1})$.

Dans cette partie, nous allons donc étudier le comportement de nos formulations par rapport à des raffinements de maillage globaux, pour $k = 1, 2$ et 3 .

La triangulation est obtenue en divisant d'abord le domaine en carré puis en décomposant chaque carré en triangles comme on peut le voir sur la figure Fig. 4.1. On obtient donc un maillage de type "CrissCross".

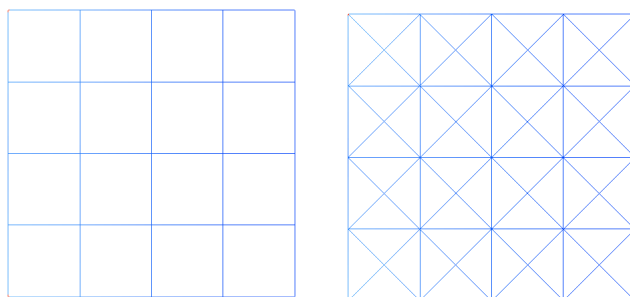


FIG. 4.1 – Maillage triangulaire à partir d'un maillage quadrangulaire

À chaque pas de raffinement, le pas de discrétisation h sera donc divisé par 2. On notera N le nombre de triangles.

Dans un premier temps on considère la solution exacte suivante pour le problème de Stokes avec des conditions de bord non homogènes :

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \pi \cos(\pi x) \sin(\pi y) \\ -\pi \sin(\pi x) \cos(\pi y) \end{pmatrix}, \quad p = \sin(\pi x) \sin(\pi y), \quad (4.1)$$

sur un domaine carré $\Omega = [-1; 1] \times [-1; 1]$. Cette solution vérifie bien $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ et $\int_{\Omega} p dx = 0$.

4.1.1 Formulation $(\nabla \mathbf{u}, \nabla v)$

On choisit une valeur de $\gamma = 10$ et une viscosité $\mu = 1$.

On récapitule dans le tableau Tab. 4.1 les erreurs obtenues pour la vitesse, ici notée \mathbf{u} , et pour la pression p en fonction du nombre d'éléments du maillage. On présente les erreurs ainsi que le rapport entre l'erreur sur le maillage grossier et l'erreur obtenue sur le nouveau maillage raffiné. Ce tableau regroupe les données obtenues pour $k = 1$.

N	$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ _{0,\Omega}$	rapport	$\ (\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\)\ $	rapport	$\ p - p_h\ _{0,\Omega}$	rapport
64	0,843959	—	10,010565	—	2,79255	—
256	0,276895	3,04793	4,767698	2,09966	1,77575	1,572603
1024	0,078143	3,54341	2,382578	2,00107	0,884179	2,008360
4096	0,020192	3,86998	1,188162	2,00526	0,43601	2,027886
16384	0,005090	3,96664	0,592460	2,00547	0,216991	2,009346
65536	0,001275	3,99174	0,295707	2,00354	0,108361	2,002482

TAB. 4.1 – Formulation $(\nabla \mathbf{u}, \nabla v)$: erreurs pour $k = 1$ ($\gamma = 10$)

On obtient donc :

$$\frac{(\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,\Omega})_{fin}}{(\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,\Omega})_{grossier}} \simeq \frac{1}{4}, \quad \frac{(\|(\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|)\|)_{fin}}{(\|(\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|)\|)_{grossier}} \simeq \frac{1}{2}, \quad \frac{(\|p - p_h\|_{0,\Omega})_{fin}}{(\|p - p_h\|_{0,\Omega})_{grossier}} \simeq \frac{1}{2}.$$

On retrouve bien numériquement l'ordre de convergence $\mathcal{O}(h)$ pour la vitesse en norme énergie et $\mathcal{O}(h^2)$ en norme L^2 , ainsi qu'une convergence d'ordre $\mathcal{O}(h)$ en norme L^2 pour la pression.

On s'intéresse maintenant au cas où $k = 2$ et les résultats sont alors présentés dans le tableau Tab. 4.2.

On obtient bien :

$$\frac{(\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,\Omega})_{fin}}{(\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,\Omega})_{grossier}} \simeq \frac{1}{8}, \quad \frac{(\|(\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|)\|)_{fin}}{(\|(\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|)\|)_{grossier}} \simeq \frac{1}{4}, \quad \frac{(\|p - p_h\|_{0,\Omega})_{fin}}{(\|p - p_h\|_{0,\Omega})_{grossier}} \simeq \frac{1}{4}.$$

Enfin, on passe au cas où $k = 3$. Dans un premier temps, nous avons choisi, comme dans les test précédents, $\gamma = 10$. Cependant, la méthode ne converge pas. Cela n'est pas en contradiction

N	$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ _{0,\Omega}$	rapport	$\ \ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ \ $	rapport	$\ p - p_h\ _{0,\Omega}$	rapport
64	0,046359	—	2,122048	—	0,539482	—
256	0,004927	9,40802	0,492963	4,30468	0,125013	4,315407
1024	0,000557	8,83647	0,118451	4,16172	0,029860	4,186553
4096	6,645e-05	8,39157	0,029019	4,08185	0,007281	4,100626

TAB. 4.2 – Formulation $(\nabla \mathbf{u}, \nabla v)$: erreurs pour $k = 2$ ($\gamma = 10$)

avec les résultats théoriques. En effet, dans le Lemme 2.3.1, on note que γ doit être suffisamment grand pour avoir un problème bien posé, et que cette valeur dépend du degré polynomial. On étudiera plus en détails l'influence du paramètre de stabilisation dans la partie suivante. Pour le moment, nous avons choisi de faire ce test avec une valeur de γ plus élevée, $\gamma = 100$. Le tableau Tab. 4.3 présente les résultats ainsi obtenus.

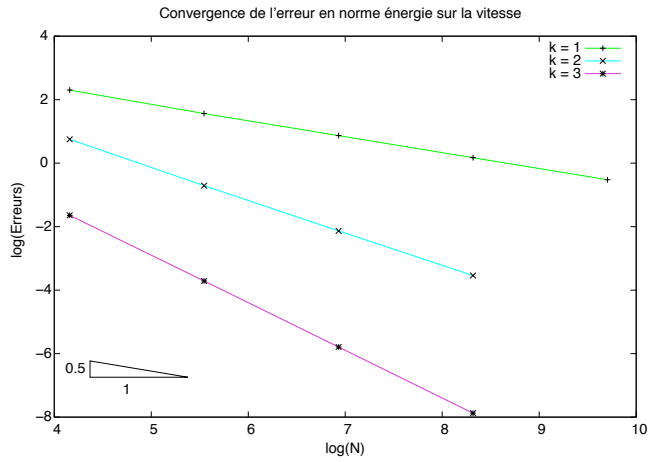
N	$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ _{0,\Omega}$	rapport	$\ \ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ \ $	rapport	$\ p - p_h\ _{0,\Omega}$	rapport
64	0,006025	—	0,193471	—	0,062737	—
256	0,000387	15,5564	0,024415	7,9241	0,007919	7,921984
1024	2,443e-05	15,8513	0,003050	8,00418	0,001001	7,181947
4096	1,528e-06	15,9876	0,000380	8,02131	0,000126	7,907046

TAB. 4.3 – Formulation $(\nabla \mathbf{u}, \nabla v)$: erreurs pour $k = 3$ ($\gamma = 100$)

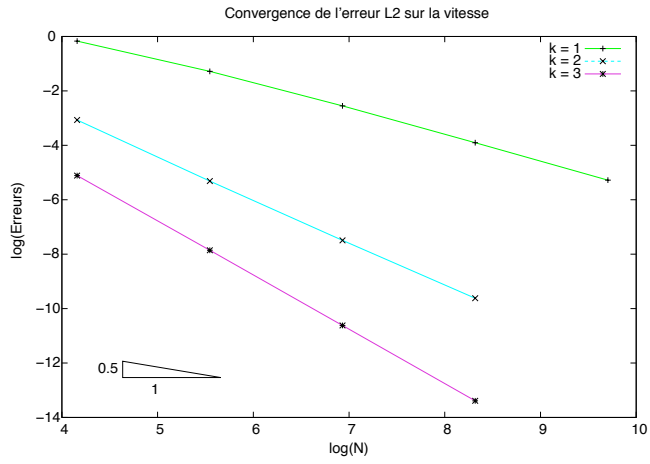
On obtient :

$$\frac{(\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,\Omega})_{fin}}{(\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,\Omega})_{grossier}} \simeq \frac{1}{16}, \quad \frac{(\|\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|\|)_{fin}}{(\|\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|\|)_{grossier}} \simeq \frac{1}{8}, \quad \frac{(\|p - p_h\|_{0,\Omega})_{fin}}{(\|p - p_h\|_{0,\Omega})_{grossier}} \simeq \frac{1}{8}.$$

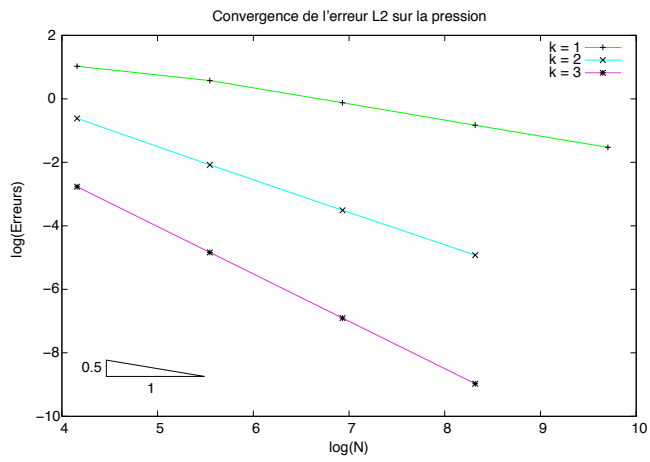
On trace maintenant les courbes représentant le logarithme des trois erreurs calculées en fonction du logarithme du nombre d'éléments pour $k = 1, 2$, et 3 . Nous retrouvons dans la figure Fig. 4.2 l'ordre de convergence théorique. Nous avons obtenus des résultats semblables pour différentes valeurs de μ , ce qui confirme que comme nous l'avions prévu théoriquement, la valeur de μ n'a pas d'influence sur la vitesse de convergence. Nous présentons dans la figure Fig. 4.3 les courbes d'erreur obtenues pour $\mu = 100$ et $k = 1$.



(a) V - erreur en norme énergie



(b) V - erreur en norme L^2



(c) Pression - erreur en norme L^2

FIG. 4.2 – Formulation $(\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v})$: ordre de convergence pour différents k

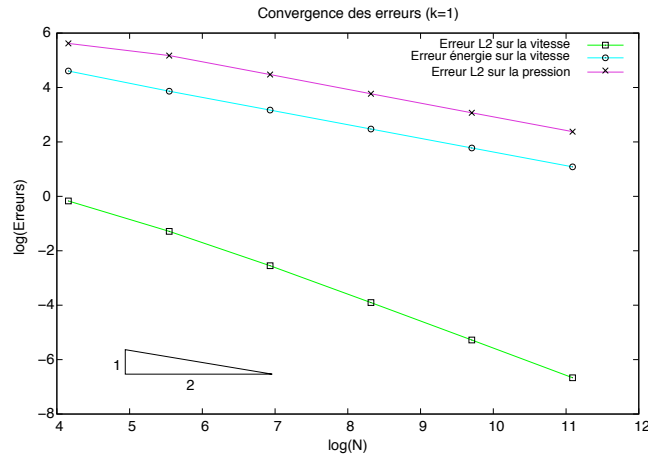


FIG. 4.3 – Formulation $(\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v})$: ordre de convergence pour $k = 1$ et $\mu = 100$

4.1.2 Formulation $(\underline{D}(\mathbf{u}), \underline{D}(\mathbf{v}))$

On procède maintenant au même test que dans le paragraphe précédent, mais en utilisant la formulation (2.20). On rappelle que le deuxième terme de stabilisation $J_1(\cdot, \cdot)$, dont le rôle est d'assurer la coercivité de la formulation, est seulement nécessaire dans le cas où $k = 1$. Pour cela, nous ne présenterons ici que la convergence des erreurs pour $k = 1$. Comme précédemment, le tableau Tab. 4.4 récapitule les résultats obtenus. Les résultats obtenus sont en accord avec la

N	$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ _{0,\Omega}$	rapport	$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ $	rapport	$\ p - p_h\ _{0,\Omega}$	rapport
64	0,732828	—	16,625998	—	3,06364	—
256	0,156187	4,69197	7,740131	2,14803	1,0945	2,799122
1024	0,037076	4,2126	3,750639	2,06368	0,470646	2,325527
4096	0,009035	4,1034	1,847880	2,0297	0,212294	2,216953
16384	0,002228	4,05541	0,916672	2,01586	0,100356	2,115409
65536	0,000553	4,02883	0,456425	2,00837	0,048785	2,057082

TAB. 4.4 – Formulation $(\underline{D}(\mathbf{u}), \underline{D}(\mathbf{v}))$: rreurs pour $k = 1$ ($\gamma = 10, \mu = 1$)

théorie, c'est à dire :

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,\Omega} = O(h^2), \quad [[\mathbf{u} - \mathbf{u}_h]] = O(h), \quad \|p - p_h\|_{0,\Omega} = O(h).$$

Nous avons représenté dans la figure Fig. 4.4 les courbes des erreurs sur la vitesse en norme énergie et en norme L^2 et sur la pression en norme L^2 . Comme précédemment, on représente la logarithme des erreurs en fonction du logarithme du nombre de triangles.

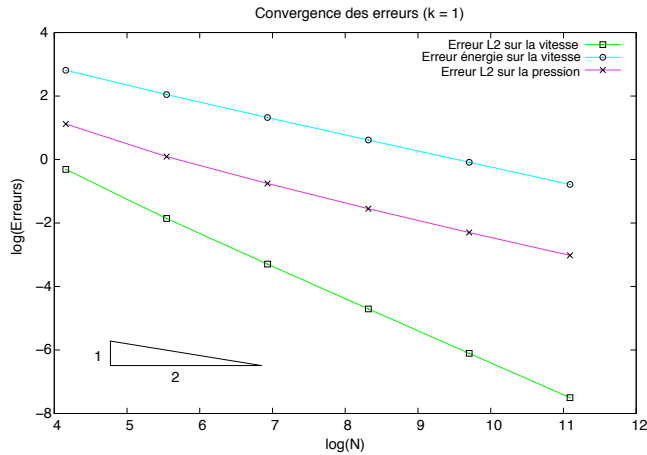


FIG. 4.4 – Formulation $(\underline{D}(u), \underline{D}(v))$: ordre de convergence des erreurs pour $k = 1$

4.2 Comportement par rapport au paramètre de stabilisation

Dans cette partie, nous allons étudier le comportement des résultats obtenus avec notre discrétisation en faisant varier le paramètre de stabilisation, afin de mettre en évidence sa robustesse lorsque $\gamma \rightarrow \infty$. On comparera les résultats obtenus avec notre méthode avec ceux obtenus avec la méthode IP usuelle proposée dans [37] que l'on appellera aussi par la suite "GRW", sur un maillage fixé. Dans une première partie, on considère le cas test défini précédemment pour lequel la solution exacte est connue, puis on s'intéressera à des écoulements de type Poiseuille.

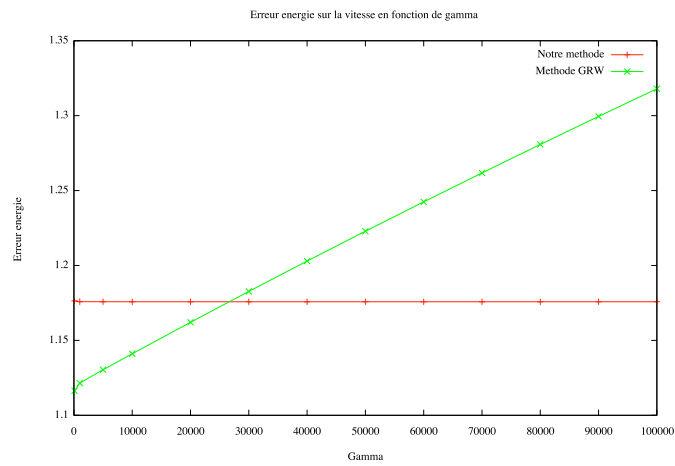
4.2.1 Comportement de l'erreur en comparaison avec la stabilisation IP

On considère la solution exacte (4.1). On utilise le même domaine que précédemment, $\Omega = [-1, 1] \times [-1, 1]$, et un maillage composé de 4 096 éléments. Nous étudions le comportement de l'erreur obtenue sur la vitesse en norme énergie et sur la pression en norme L^2 pour diverses valeurs de γ et nous les comparons avec les erreurs obtenues avec la méthode IP (cf. [37]).

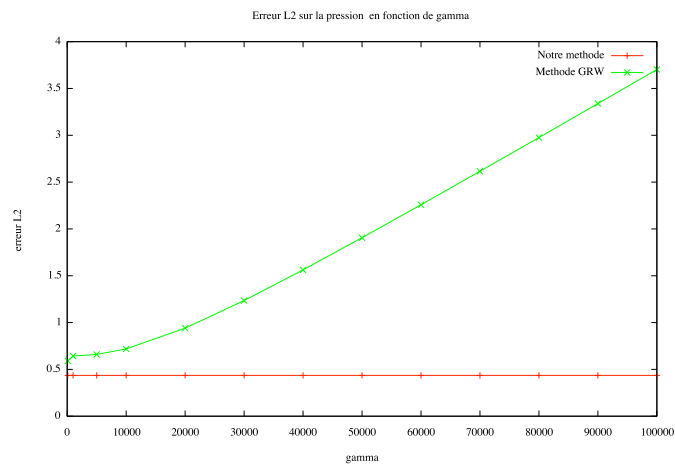
4.2.1.1 Formulation $(\underline{\nabla}u, \underline{\nabla}v)$

La figure Fig.4.5 correspond au cas $k = 1$, Fig. 4.6 au cas $k = 2$ et enfin Fig. 4.7 correspond à $k = 3$. Les courbes rouges représentent les erreurs obtenues avec notre méthode alors que les courbes vertes sont celles obtenues avec la méthode de [37]. Nous avons choisi différentes valeurs pour la viscosité afin de montrer que les schémas étudiés sont bien indépendants de ce paramètre.

On observe que notre schéma est stable indépendamment de γ , contrairement à la méthode IP. De plus pour des valeurs de γ très grandes, l'erreur obtenue sur la vitesse avec la méthode [37] devient supérieure à celle obtenue avec notre méthode. L'erreur obtenue sur la pression est dans tous les cas moins élevée que celle obtenue avec la méthode [37].

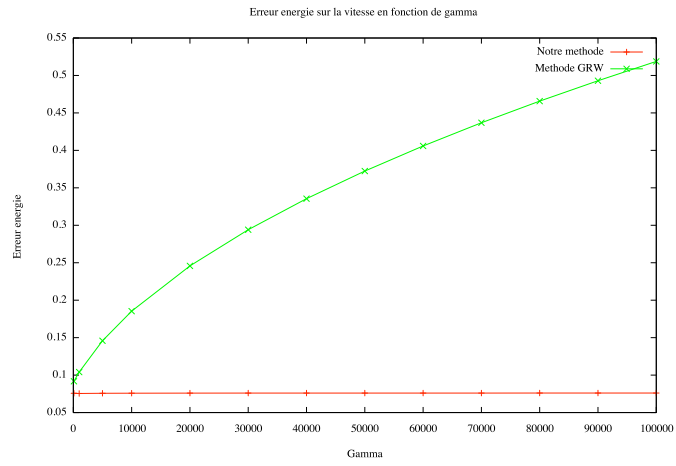


(a) Erreur énergie sur la vitesse

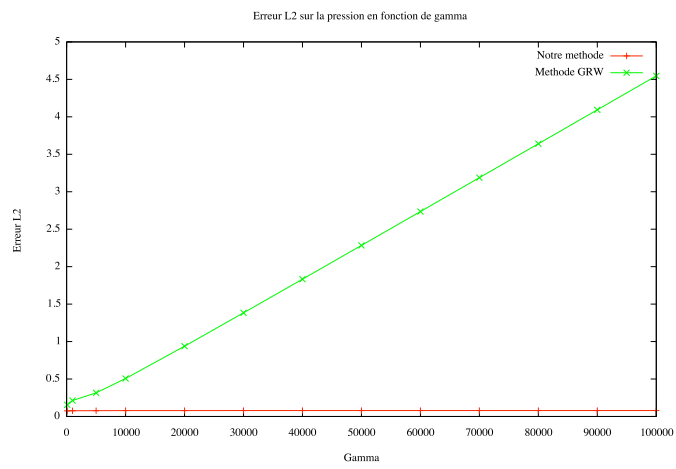


(b) Erreur sur la pression

FIG. 4.5 – $k = 1$, comportement des erreurs par rapport à γ ($\mu = 1$)

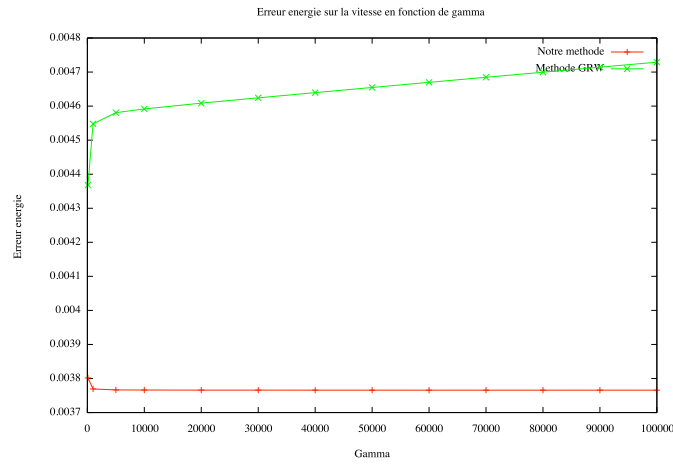


(a) Erreur énergie sur la vitesse

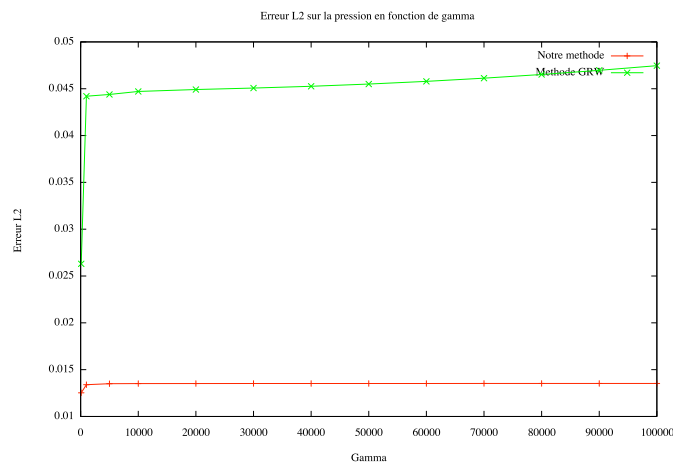


(b) Erreur sur la pression

FIG. 4.6 – $k = 2$, comportement des erreurs par rapport à γ ($\mu = 10$)



(a) Erreur énergie sur la vitesse

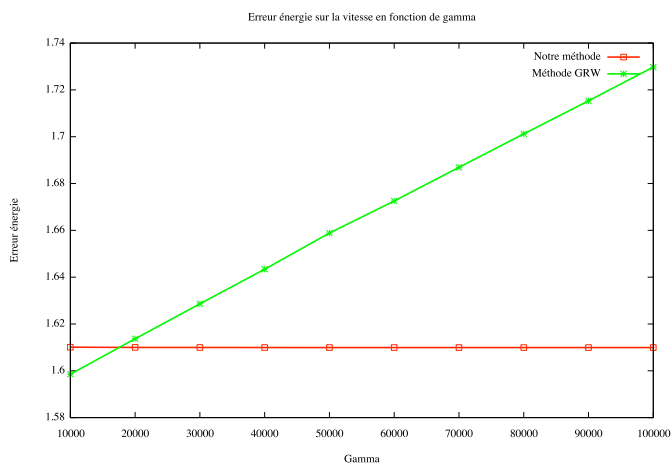


(b) Erreur sur la pression

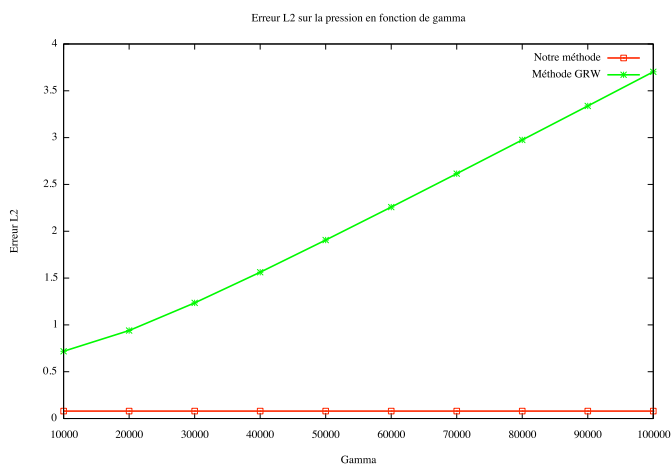
FIG. 4.7 – $k = 3$, comportement des erreurs par rapport à γ ($\mu = 100$)

4.2.1.2 Formulation $(\underline{D}(u), \underline{D}(v))$

Pour $k = 1$, on considère le même test que précédemment, mais en considérant cette fois-ci la formulation (2.20), pour γ_1 fixé et égal à 10. Dans la figure Fig. 4.8, on compare donc les résultats obtenus avec notre méthode, avec ceux obtenus avec la méthode IP usuelle pour cette deuxième formulation. Comme précédemment, notre schéma a un comportement stable indépendamment de γ .



(a) Erreur énergie sur la vitesse



(b) Erreur sur la pression

FIG. 4.8 – Formulation $(\underline{D}(u), \underline{D}(v))$: comportement des erreurs par rapport à γ pour $k = 1$ ($\mu = 1, \gamma_1 = 10$)

4.2.2 Ecoulement de Poiseuille - Formulation $(\underline{\nabla}u, \underline{\nabla}v)$

On considère maintenant un écoulement de Poiseuille et on compare la solution obtenue avec notre méthode avec celle obtenue avec la méthode GRW. On considère donc le domaine

$\Omega = [0; 0,06] \times [-0,01; 0,01]$ et afin d'obtenir un écoulement de Poiseuille parabolique, on impose les conditions de bord suivantes où \mathbf{t} dénote la tangente unitaire :

$$\begin{array}{ll} \text{À l'entrée} & \text{À la sortie, condition de Neumann homogène} \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{t} = 0, & \mu(\nabla \mathbf{u})\mathbf{n} - p\mathbf{n} = \mathbf{0} \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = a(0,01^2 - y^2), & \end{array}$$

La solution exacte est connue et elle est de la forme :

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= (a(0,01^2 - y^2), 0), \\ p &= bx + c. \end{aligned}$$

Les tests numériques ont été réalisés sur un maillage non structuré composé de 10954 triangles.

Comme prévu, lorsque $k \geq 2$, on retrouve la solution exacte avec les deux méthodes. On présente dans Fig. 4.9, la solution exacte obtenue pour $k = 2$ qui nous servira de solution de référence pour la suite.

On note que dans la suite U_0 et U_1 correspondent à la première, respectivement à la deuxième, composante de la vitesse.

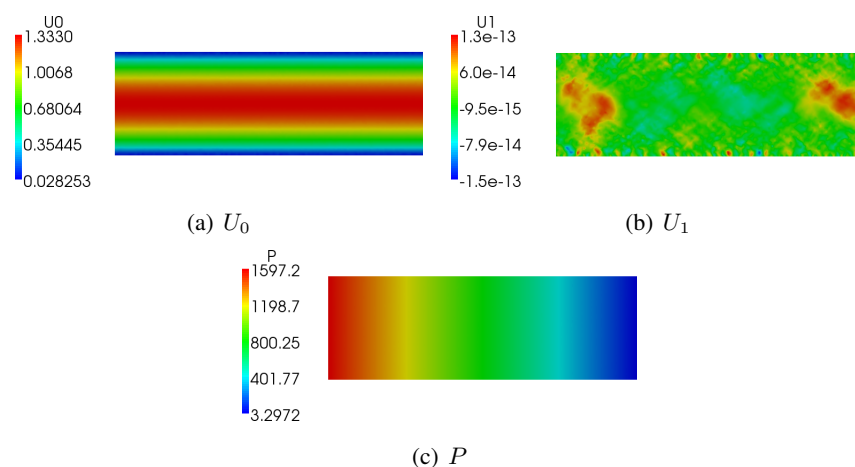


FIG. 4.9 – Solution exacte de l'écoulement de Poiseuille avec des éléments $P_2 \times P_1$

On fait donc varier γ et on compare les solutions obtenues pour $k = 1$.

Nous avons obtenus des résultats similaires pour la vitesse, pour γ compris entre 10 et 100 000, même si la méthode de [37] présente quelques instabilités pour γ grand. (voir Fig. 4.10 et 4.11). Cependant, on note des différences significatives entre les deux méthodes en ce qui concerne la pression, c'est pourquoi nous en présentons ici une étude plus détaillée par rapport à γ . On peut voir dans Fig. 4.12 que la méthode de [37] est moins précise et moins stable que la nôtre.

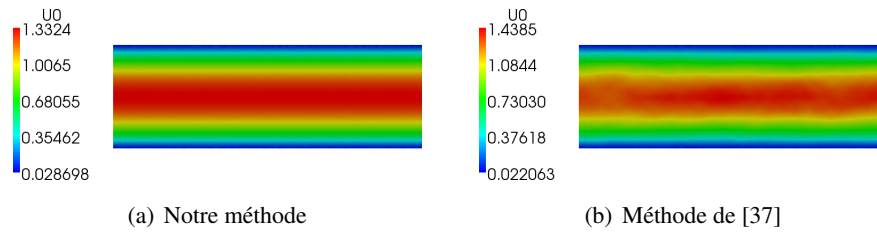


FIG. 4.10 – Comparaison de U_0 pour un écoulement de Poiseuille avec $\gamma = 100\,000$

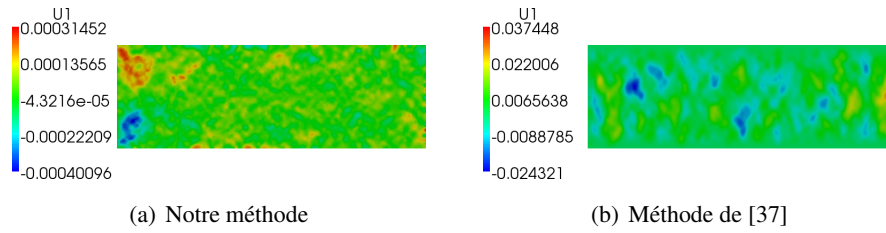


FIG. 4.11 – Comparaison de U_1 pour un écoulement de Poiseuille avec $\gamma = 10\,000$

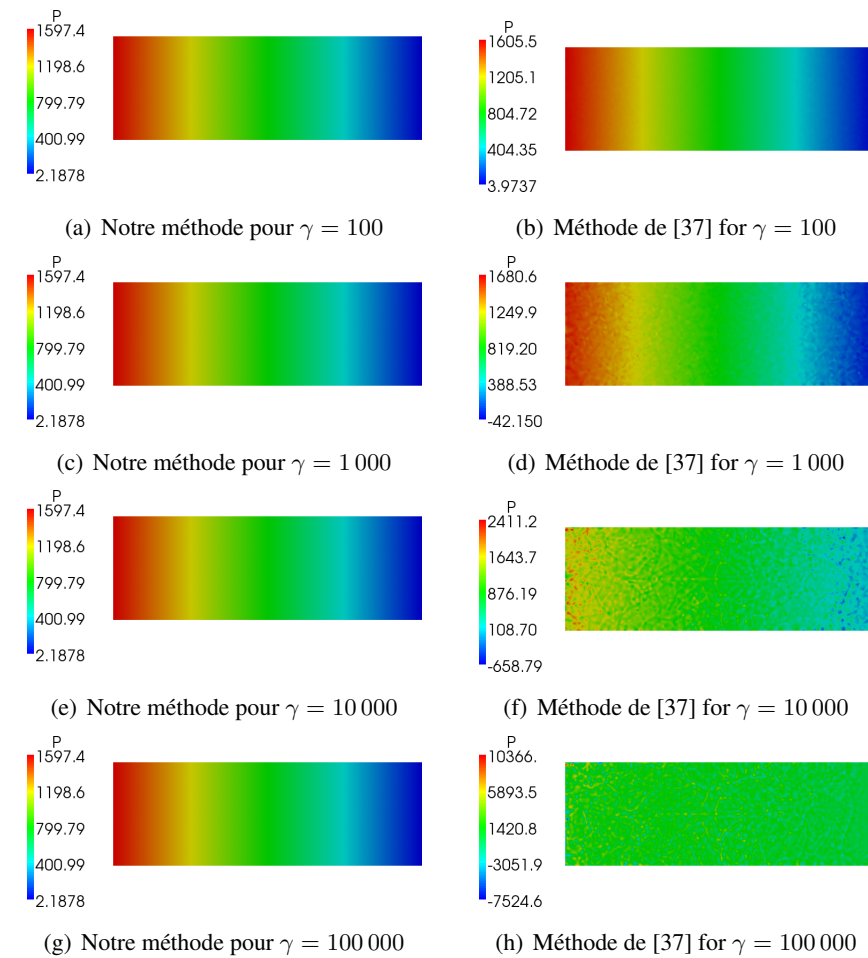


FIG. 4.12 – Ecoulement de Poiseuille : comparaison des pressions pour différents γ

4.2.3 Écoulement de type Poiseuille à vitesse entrante constante

On souhaite maintenant tester notre méthode avec une solution non régulière. Pour cela, on considère un écoulement de type Poiseuille et on impose à l'entrée du tube une vitesse normale constante : $v \cdot n = 1$. Les autres conditions de bord restent inchangées. On utilise un maillage CrissCross composé de 18 432 triangles.

4.2.3.1 Formulation $(\nabla u, \nabla v)$

On note que la vitesse exacte vérifiant ce problème n'appartient pas à $H^1(\Omega)$. Pour avoir une solution de référence, nous l'avons approché avec des éléments finis non-conformes de Crouzeix-Raviart (voir Fig. 4.13).

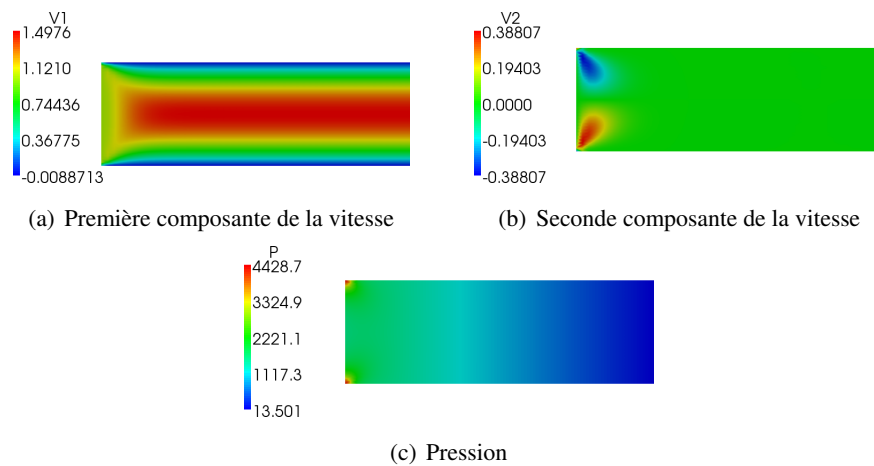


FIG. 4.13 – Solution obtenue avec des éléments $P_1 \times P_0$ non-conformes

On fait maintenant varier le terme de stabilisation γ . Comme précédemment, les vitesses obtenues avec les deux méthodes sont similaires (voir Fig. 4.14 et 4.15). On présentera donc de manière plus détaillée dans Fig. 4.16 une comparaison des pressions obtenues avec les deux méthodes. On note que la stabilisation IP est clairement moins stable et cela devient visible pour des valeurs de γ relativement faibles.

Plus γ augmente et plus la méthode de [37] nous donne des résultats éloignés des résultats que nous devrions théoriquement obtenir. Cet exemple illustre bien la robustesse de notre méthode lorsque $\gamma \rightarrow \infty$.

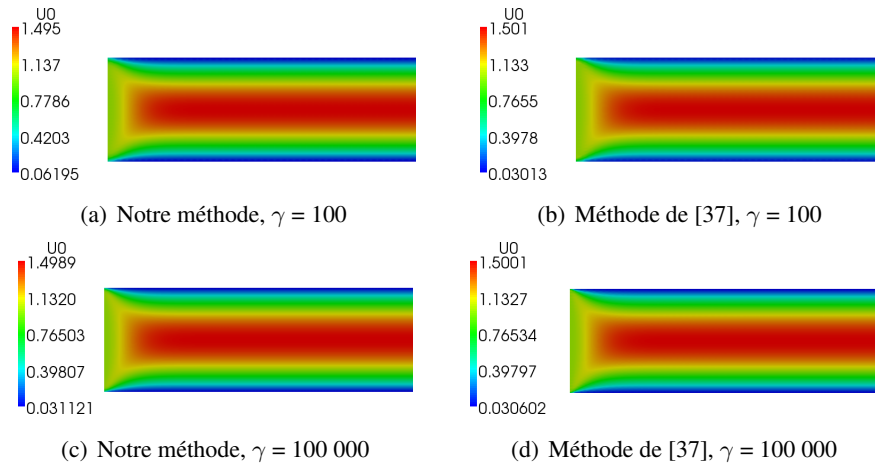


FIG. 4.14 – Première composante de la vitesse pour différents γ

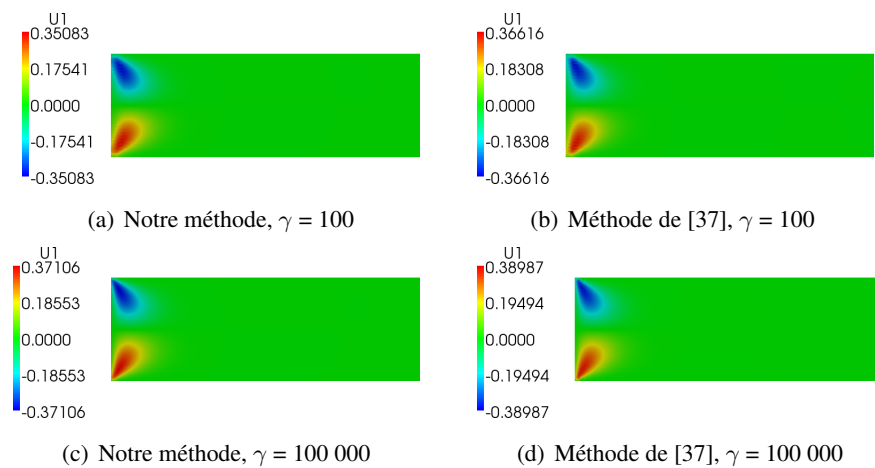


FIG. 4.15 – Deuxième composante de la vitesse pour différents γ

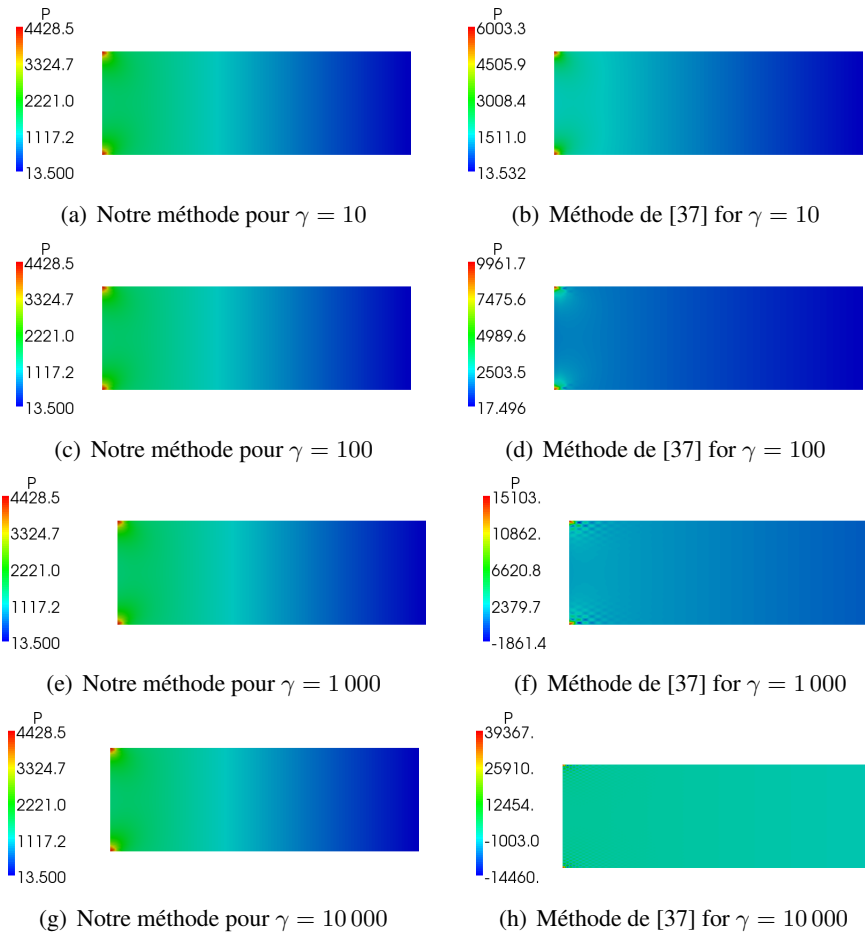
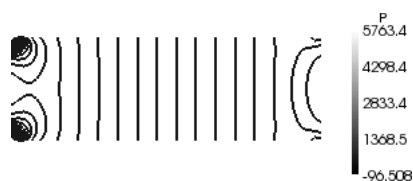


FIG. 4.16 – Écoulement de Poiseuille : comparaison des pressions pour différents γ

4.2.3.2 Formulation $(\underline{D}(u), \underline{D}(v))$

On considère maintenant la formulation (2.20) et on effectue les mêmes tests que précédemment. Cette fois-ci, on présente dans la figure Fig.4.18 les lignes de courant obtenues avec les deux méthodes. On considère uniquement la pression, pour laquelle les résultats sont plus parlants. Comme précédemment, on choisit $\gamma_1 = 10$. La pression de référence présentée dans la figure Fig. 4.17 est obtenue en utilisant des éléments finis non-conformes de Crouzeix-Raviart. On note bien que la méthode IP n'est pas stable et cela devient visible pour des valeurs faibles de γ .



(a) P

FIG. 4.17 – Pression exacte de l'écoulement de Poiseuille avec des éléments finis de Crouzeix-Raviart

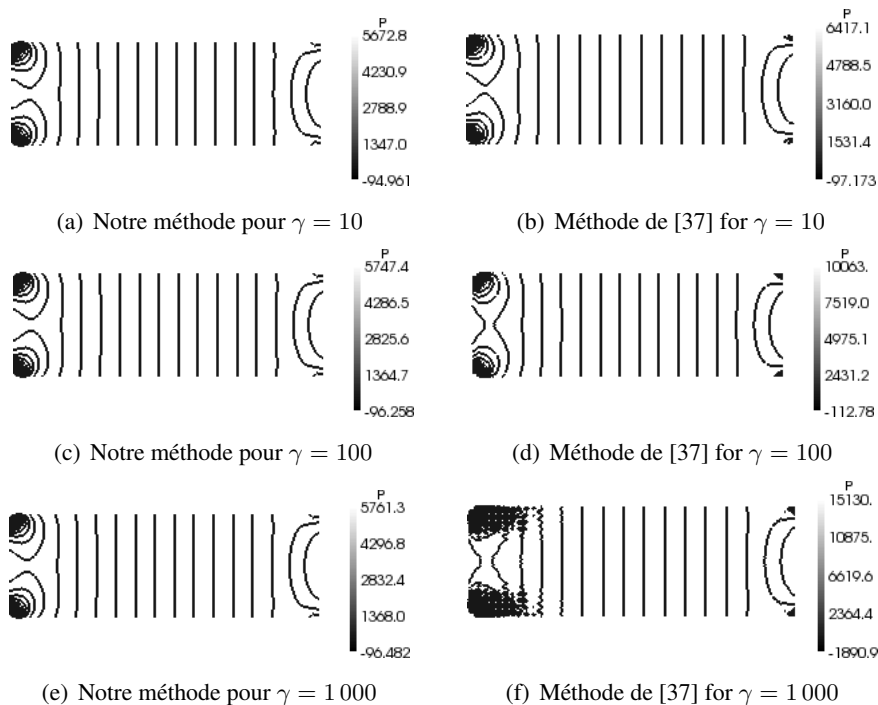


FIG. 4.18 – Écoulement de Poiseuille : comparaison des pressions pour différents γ

4.2.4 Vitesse de convergence de la solution dG vers la solution non-conforme

Théoriquement, nous avons montré que la vitesse de convergence par rapport à γ est de l'ordre de $\mathcal{O}(\frac{1}{\gamma})$. Afin de valider ce résultat, nous avons tracé dans la figure Fig. 4.19 le logarithme de l'erreur $|\mathbf{u}_h^\gamma - \mathbf{u}_h^*|_{1,h}$ en fonction du logarithme de γ pour $k = 1$ et pour la première formulation du problème de Stokes. On rappelle que u_h^* est dans ce cas la solution obtenue avec des éléments finis de Crouzeix-Raviart. Nous avons aussi tracé en noir la droite de référence de pente -1 , et on constate que l'on retrouve bien le comportement souhaité.

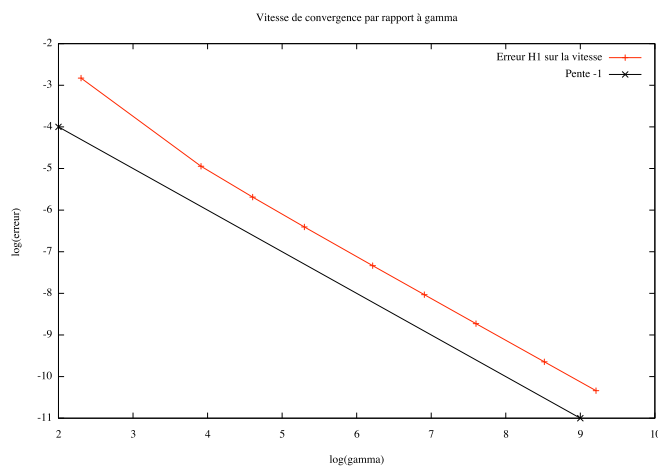


FIG. 4.19 – Vitesse de convergence par rapport à γ

4.3 Adaptation de maillage

Dans la section 3.2, nous avons considéré des conditions de bord de Dirichlet homogènes. Cet estimateur peut être généralisé pour des conditions de bord non-homogènes, $\mathbf{u} = \mathbf{g}$ sur ε_h^D et des conditions de Neumann χ sur ε_h^N en rajoutant des termes sur les bords. Les degrés de liberté du tenseur $\underline{\sigma}_h$ sur les arêtes sont alors définis de la manière suivante :

$$\underline{\sigma}_h \cdot \mathbf{n}_e = \begin{cases} \mu \left\{ \frac{\partial \mathbf{u}_h}{\partial \mathbf{n}_e} \right\} - \frac{\mu\gamma}{|e|} [\pi_{k-1} \mathbf{u}_h] - \{p_h\} \mathbf{n}_e, & \forall e \in \varepsilon_h^{int} \\ \mu \frac{\partial \mathbf{u}_h}{\partial \mathbf{n}_e} - \frac{\mu\gamma}{|e|} \pi_{k-1} (\mathbf{u}_h - \mathbf{g}) - p_h \mathbf{n}_e, & \forall e \in \varepsilon_h^D \\ \pi_{k-1} \chi, & \forall e \in \varepsilon_h^N \end{cases}$$

4.3.1 Procédure de raffinement de maillage

On rappelle la définition des estimateurs d'erreur *a posteriori* :

$$\begin{aligned}\eta^2 &= \frac{1}{\mu} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\underline{\sigma}_h - \mu \underline{\nabla} \mathbf{u}_h + p_h \underline{\mathbf{I}}\|_{0,T}^2 + J^*(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h), \\ \eta_{hot}^2 &= \frac{1}{\mu} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 \|\mathbf{f} - \boldsymbol{\pi}_{k-1}^T \mathbf{f}\|_{0,T}^2.\end{aligned}$$

Pour chaque itération k , on détermine l'ensemble \mathcal{M}_k des mailles marquées en suivant l'algorithme 1. Le raffinement est ensuite propagé de manière à ne pas avoir plus d'un niveau d'écart sur une arête.

Algorithme 1 Procédure de raffinement de maillage - itération k

ENTRÉES: $\gamma^{amr} \in [0, 1]$, $\theta^{amr} \in]0, 1]$

si $\eta^2 > \gamma^{amr} \eta_{hot}^2$ **alors**

On choisit \mathcal{M}_k de cardinalité minimale tel que :

$$\eta^2(\mathcal{M}_k) \geq \theta^{amr} \eta^2$$

sinon

On choisit \mathcal{M}_k de cardinalité minimale tel que :

$$\eta_{hot}^2(\mathcal{M}_k) \geq \theta^{amr} \eta_{hot}^2$$

finsi

4.3.2 Solution singulière

On considère un domaine fissuré $\Omega = [-1, 1] \times [-1, 1] \setminus (\{0\} \times [-1, 0])$.

Ce problème est aussi utilisé dans [26] mais sur un domaine circulaire (cf. exemple 2). La solution exacte est alors obtenue en résolvant le système :

$$\begin{cases} -\Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{0} & \text{dans } \Omega \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 & \text{dans } \Omega, \end{cases}$$

avec des conditions de bord non-homogènes. L'expression de la solution analytique s'écrit alors en coordonnées polaires :

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \begin{pmatrix} \sqrt{r} \left(1,5 \sin(\varphi) \psi(\varphi) + \cos(\varphi) \frac{\partial}{\partial \varphi} \psi(\varphi) \right) \\ \sqrt{r} \left(\sin(\varphi) \frac{\partial}{\partial \varphi} \psi(\varphi) - 1,5 \cos(\varphi) \psi(\varphi) \right) \end{pmatrix} \\ p &= -2r^{-1/2} \left((3/2)^2 \frac{\partial}{\partial \varphi} \psi(\varphi) + \frac{\partial^3}{\partial \varphi^3} \psi(\varphi) \right)\end{aligned}$$

où

$$\psi(\varphi) = 3 \sin(0,5\varphi) - \sin(1,5\varphi)$$

et

$$\varphi = \begin{cases} \operatorname{atan2}(y, x) & \text{si } y \geq 0 \\ 2\pi - \operatorname{atan2}(-y, x) & \text{sinon,} \end{cases} \quad r = \sqrt{(x^2 - y^2)}.$$

Dans la suite, on considère $k = 1$ et on prend $\eta = 1$, $\gamma = 10$ et N est le nombre d'éléments. Afin d'étudier le comportement de l'estimateur et de l'erreur $H^1(\Omega)$ de la vitesse, on calcule les quotients suivants :

$$\mathcal{K}_1 = \left(\frac{N_{fin}}{N_{grossier}} \right)^{-1/2}, \quad \mathcal{K}_2 = \frac{\eta_{fin}}{\eta_{grossier}}, \quad \mathcal{K}_3 = \frac{(|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h|_{1,\Omega})_{fin}}{(|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h|_{1,\Omega})_{grossier}}.$$

On considère tout d'abord un raffinement global (θ^{amr} est égal à 1,0). Dans ce cas, $\mathcal{K}_1 = 0,5$.

On présente dans le tableau Tab. 4.5 l'erreur $H^1(\Omega)$ sur la vitesse et les valeurs de l'estimateur pour un raffinement de maillage uniforme.

N	η	\mathcal{K}_2	$ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h _{1,\Omega}$	\mathcal{K}_3
64	1,550	-	3,001	-
256	1,332	0,859	2,387	0,792
1024	1,058	0,794	1,813	0,759
4096	0,795	0,751	1,332	0,735
16384	0,579	0,728	0,960	0,721

TAB. 4.5 – Solution singulière : erreurs $H^1(\Omega)$ et estimateur d'erreurs sur un raffinement uniforme ($\gamma=10$)

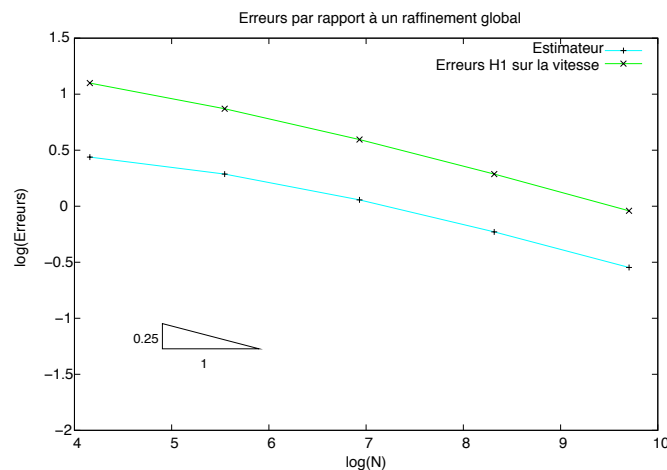


FIG. 4.20 – Solution singulière : comportement de l'erreur $H^1(\Omega)$ et de l'estimateur d'erreur par rapport au nombre d'éléments sur des maillages uniformément raffinés

On remarque que l'on obtient $\mathcal{K}_2 \approx \mathcal{K}_3 \approx \frac{1}{\sqrt{2}}$, l'ordre de convergence est donc $\mathcal{O}(h^{1/2}) = \mathcal{O}(N^{-1})$. Afin d'illustrer ces résultats, nous avons tracé dans la figure Fig. 4.20 le logarithme de l'erreur $H^1(\Omega)$ et de l'estimateur en fonction du logarithme du nombre d'éléments.

On considère maintenant un raffinement local, θ^{amr} est alors égal à 0.5 .

Le tableau Tab. 4.6, présente les valeurs de l'erreur $H^1(\Omega)$ de la vitesse et de l'estimateur η . On constate que pour cette solution exacte fortement singulière, on a un ordre de convergence $\mathcal{O}(N^{-1/2})$. Dans la figure Fig. 4.21, nous avons tracé le logarithme de l'erreur $H^1(\Omega)$ de la vitesse et de l'estimateur, en fonction du logarithme du nombre d'éléments.

N	\mathcal{K}_1	η	\mathcal{K}_2	$ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h _{1,\Omega}$	\mathcal{K}_3
64	-	1,550	-	3,001	-
94	0,825	1,471	0,949	2,537	0,845
150	0,791	1,352	0,919	2,166	0,841
206	0,853	1,254	0,927	1,882	0,869
354	0,763	1,086	0,866	1,526	0,811
649	0,738	0,8695	0,800	1,182	0,774
1177	0,742	0,6822	0,784	0,9104	0,770
1998	0,767	0,5334	0,782	0,6959	0,7643
3616	0,743	0,4026	0,754	0,5204	0,7478
6544	0,743	0,3046	0,7565	0,3911	0,751
11372	0,758	0,231	0,758	0,2942	0,7522
19502	0,764	0,1778	0,769	0,2252	0,7654

TAB. 4.6 – Solution singulière : erreur H^1 et estimateur d'erreur sur un raffinement local ($\gamma=10$)

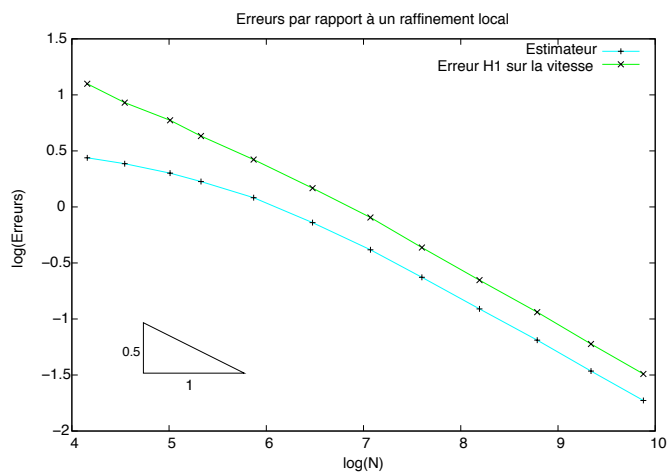


FIG. 4.21 – Solution singulière : comportement de l'erreur $H^1(\Omega)$ et de l'estimateur d'erreur par rapport au nombre d'éléments sur des maillages localement raffinés

La figure Fig. 4.22 représente les maillages obtenus à différents pas. Comme attendu, le maillage est très raffiné autour de la singularité à l'origine.

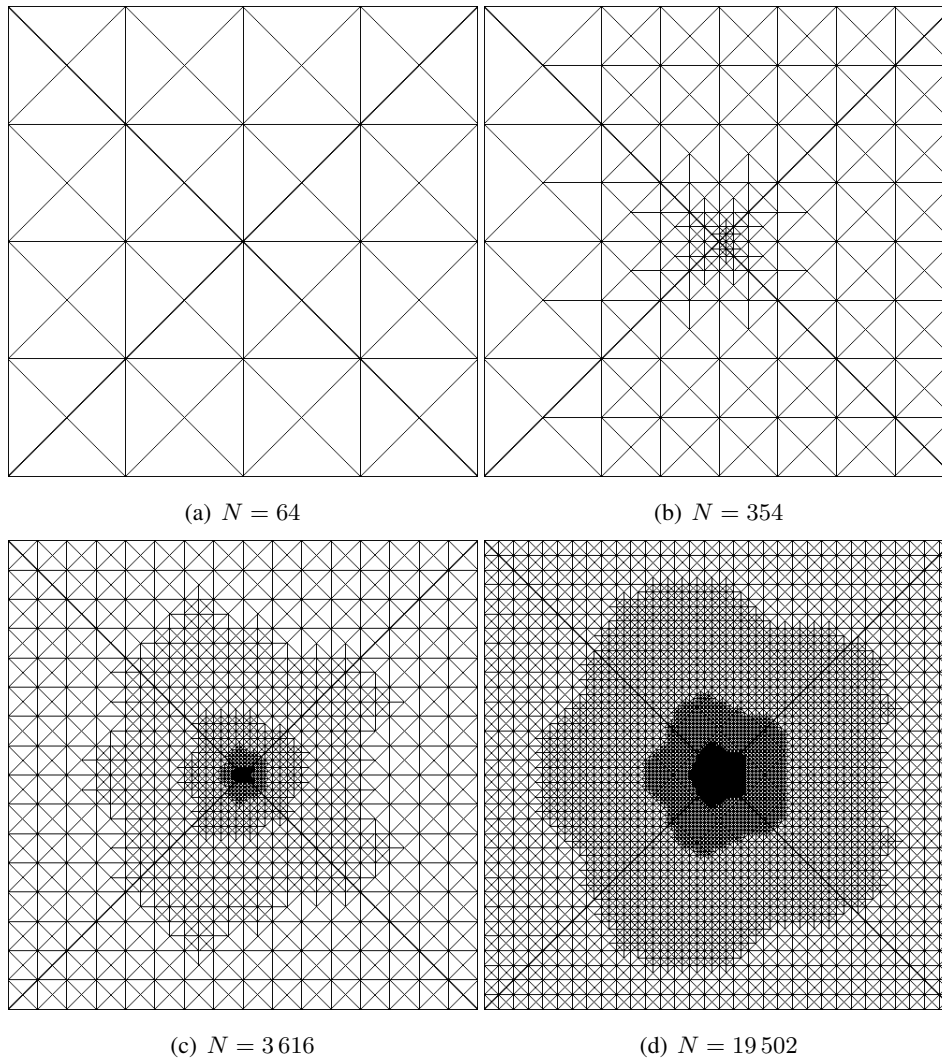


FIG. 4.22 – Solution singulière : maillages localement raffinés

4.3.3 Solution régulière

On considère maintenant la solution exacte définie dans la section précédente (cf (4.1)) et le cas $k = 1$. On calcule les mêmes grandeurs que dans le cas précédent pour $\gamma = 10$ et $\mu = 1$.

On considère tout d'abord un raffinement de maillage uniforme, les résultats sont présentés dans le tableau Tab. 4.7. On obtient bien pour l'estimateur et pour l'erreur $H^1(\Omega)$ un ordre de convergence égal à $\mathcal{O}(h)$. On illustre ce comportement dans la figure Fig. 4.23.

On considère ensuite un raffinement de maillage local et comme précédemment, on choisit $\theta^{amr} = 0,5$. Le tableau 4.8 présente les résultats obtenus, et la figure Fig. 4.24 présente les courbes correspondantes. On constate que l'on ne retrouve pas l'ordre de convergence espéré, il reste cependant inférieur à $\mathcal{O}(N^{-1})$.

N	η	\mathcal{K}_2	$ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h _{1,\Omega}$	\mathcal{K}_3
64	10,570	-	9,382	-
256	5,129	0,485	4,756	0,507
1024	2,554	0,498	2,379	0,500
4096	1,276	0,500	1,186	0,499
16384	0,638	0,500	0,592	0,499

TAB. 4.7 – Solution régulière : erreur $H^1(\Omega)$ et estimateur d'erreurs sur un raffinement uniforme

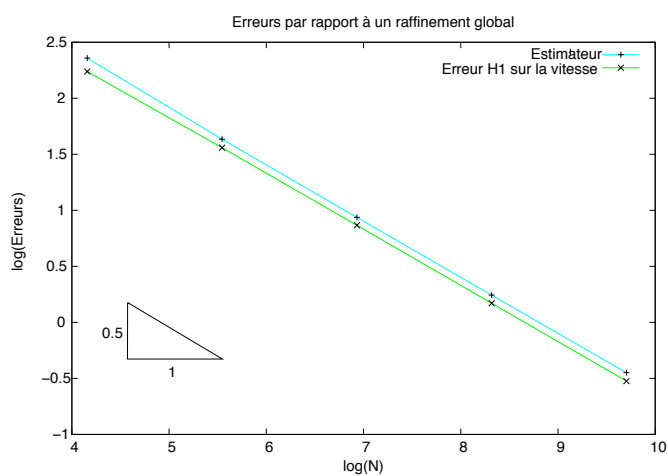


FIG. 4.23 – Solution régulière : comportement de l'erreur $H^1(\Omega)$ et de l'estimateur d'erreur par rapport au nombre d'éléments sur des maillages globalement raffinés

N	\mathcal{K}_1	η	\mathcal{K}_2	$ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h _{1,\Omega}$	\mathcal{K}_3
64	-	10,570	-	9,382	-
247	0,509	5,373	0,508	4,907	0,523
567	0,660	4,421	0,823	4,040	0,823
796	0,844	3,715	0,840	3,305	0,818
1024	0,882	2,554	0,687	2,379	0,720
2688	0,617	2,156	0,844	1,971	0,828
3776	0,844	1,548	0,718	1,410	0,715
9344	0,636	1,148	0,742	1,061	0,752
14048	0,816	0,881	0,768	0,806	0,760
18464	0,872	0,637	0,723	0,591	0,733

TAB. 4.8 – Solution régulière : erreur $H^1(\Omega)$ et estimateur d'erreurs sur un raffinement local

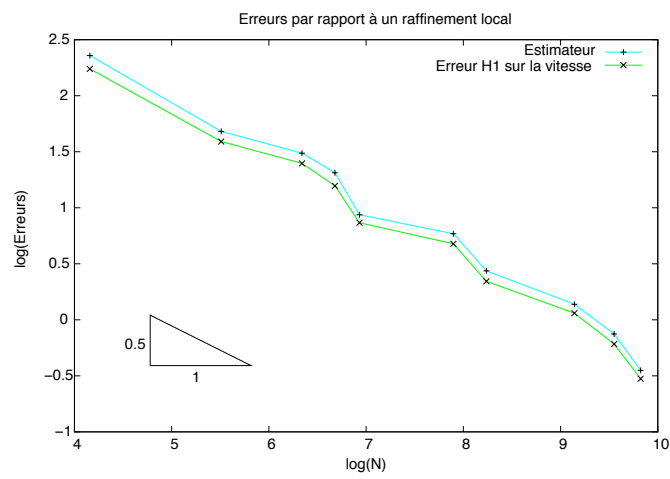


FIG. 4.24 – Solution régulière : comportement de l'erreur $H^1(\Omega)$ et de l'estimateur d'erreur par rapport au nombre d'éléments sur des maillages localement raffinés

4.3.4 Comportement quand $\gamma \rightarrow \infty$

Afin de valider numériquement le théorème 3.2.4, nous nous intéressons au comportement de η lorsque $\gamma \rightarrow \infty$. Nous avons montré théoriquement que si \mathbf{f} est constant par maille, notre estimateur η tend vers l'estimateur η^* défini de la manière suivante :

$$\eta^* = \frac{1}{4\mu} \sum_{T \in T_h} \|\mathbf{f} \otimes (\mathbf{x} - \mathbf{x}_T)\|_{0,T}^2 + J^*(\mathbf{u}_h^*, \mathbf{u}_h^*)$$

où \mathbf{u}_h^* est la solution obtenue avec des éléments finis de Crouzeix-Raviart. On notera :

$$\eta_1^* = \frac{1}{4\mu} \sum_{T \in T_h} \|\mathbf{f} \otimes (\mathbf{x} - \mathbf{x}_T)\|_{0,T}^2.$$

On considère alors la solution exacte suivante :

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 + x + 2x^2 + 2y^2 + xy \\ 1 - y + 2x^2 - \frac{1}{2}y^2 - 4xy \end{pmatrix}, \quad p = x - y. \quad (4.2)$$

On note que des résultats similaires ont été obtenus pour d'autres solutions exactes. Dans le tableau Tab. 4.9 nous présentons les valeurs successives de η pour un maillage donné comportant 4096 éléments. Plus précisément, on étudie le comportement du terme η_1 qui devrait tendre vers η_1^* et du terme $J^*(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h)$ qui devrait tendre vers le terme $J^*(\mathbf{u}_h^*, \mathbf{u}_h^*)$ lorsque $\gamma \rightarrow \infty$.

γ	10	20	30	100	1000	$\gamma \rightarrow \infty$
η_1	0,1687	0,1681	0,1680	0,1680	0,1680	$\eta_1^*=0,1680$
$J^*(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h)^{1/2}$	0,1920	0,1918	0,1917	0,1917	0,1917	$J^*(\mathbf{u}_h^*, \mathbf{u}_h^*)^{1/2} = 0,1917$

TAB. 4.9 – Comportement de chaque terme de η lorsque $\gamma \rightarrow \infty$

Deuxième partie

Le modèle de Giesekeus

Introduction

Dans cette partie on s'intéresse à la discrétisation du problème de Giesekus pour la simulation numérique des écoulements de liquides polymères. L'organisation de cette partie est la suivante.

Dans un premier chapitre, nous présentons quelques comportements des liquides polymères et nous faisons une revue brève des modèles rhéologiques, permettant d'expliquer pourquoi nous avons choisi de considérer principalement le modèle de Giesekus. Pour ce chapitre, nous nous sommes appuyés sur les livres [58], [69] et [68].

Dans le second chapitre, on introduit la discrétisation du modèle de Giesekus par éléments finis non-conformes sur des maillages triangulaires et quadrangulaires. Une analyse du problème de Stokes sous-jacent sera présentée. En outre, on présente des résultats concernant la positivité du tenseur de conformation, et on montre que notre schéma préserve sous certaines hypothèses cette propriété au niveau discret.

Enfin, dans le troisième chapitre, on présente des résultats numériques. Des comparaisons avec le code commercial Polyflow[®], mais aussi avec des données expérimentales, nous ont permis de valider les schémas numériques mais aussi de mettre en évidence leur bon comportement pour des nombres de Weissenberg élevés.

Ces travaux ont donné lieu à deux articles : le premier, intitulé *Discretization of Phan-Thien-Tanner and Giesekus fluids through contraction/expansion flows using nonconforming finite elements*, est en préparation et est axé sur le cas triangulaire alors que le deuxième, intitulé *Non-conforming finite element approximation of the Giesekus model for polymer flows* et soumis dans *Computers and Fluids - Special Issue : ICFD 2010* est en cours de révision et est axé sur le cas quadrangulaire. D'autre part, ces travaux ont été présentés dans diverses conférences et workshop : Tenth International Conference Zaragoza- Pau on Applied Mathematics and Statistics (Jaca, Espagne, 2008), ICFD (Reading, Royaume-Uni, 2010), CANUM (Carcans, France, 2010), ECCOMAS CFD (Lisbonne, Portugal, 2010), Workshop on Mathematical Fluid Mechanics and Applications (Évora, Portugal, 2010).

Chapitre 5

Les liquides polymères

5.1 Quelques définitions

Étymologiquement, le mot polymère vient du grec « *polus* » qui signifie « plusieurs » et de « *meros* » qui signifie « partie ». Il s'agit d'une molécule constituée de l'enchaînement répété d'un même motif, appelé le monomère. Les polymères sont caractérisés par une masse molaire élevée, généralement comprise entre $3 \cdot 10^4 \text{ g.mol}^{-1}$ et 10^6 g.mol^{-1} . Nous les qualifions de macromolécules. À titre de comparaison, le carbone a une masse molaire de 12 g.mol^{-1} .

La rhéologie désigne, par définition, l'étude des relations entre la déformation et la contrainte d'un matériau. De par leurs structures, les polymères ont des propriétés rhéologiques particulières que l'on détaillera par la suite.

On s'intéresse tout d'abord à la viscosité qui est la propriété la plus importante d'un liquide, elle traduit sa résistance à l'écoulement. On rappelle que l'on distingue la viscosité dynamique notée η [Pa.s]¹ de la viscosité cinématique notée ν [m².s⁻¹]. Ces viscosités sont liées par la relation suivante :

$$\nu = \frac{\eta}{\rho},$$

avec ρ [kg.m⁻³], la masse volumique du liquide. Les liquides polymères sont caractérisés par une viscosité dynamique importante. On présente dans le tableau Tab. 5.1, les viscosités de quelques liquides à 20°C et à pression atmosphérique.

Considérons un écoulement laminaire (i.e. entre deux plans parallèles). L'intensité de l'écoulement est caractérisé par la vitesse de déformation notée $\dot{\gamma}$. Un liquide est alors qualifié de newtonien si sa viscosité est indépendante de la vitesse de déformation. Dans le cas contraire, il est qualifié de non-newtonien. Pour ces liquides et au dessus d'une certaine vitesse de déformation dite critique, la viscosité du liquide va :

- décroître. Le liquide est qualifié de rhéofluidifiant ou pseudoplastique. C'est le cas des liquides polymères.
- augmenter. Le liquide est qualifié de rhéoépaississant ou dilatant. C'est le cas du bitume.

¹On rappelle que l'on note μ la viscosité dynamique d'un liquide newtonien

	ν [m ² .s ⁻¹]	η [Pa.s]
air	10 ⁻⁹	10 ⁻⁶
eau	10 ⁻⁶	10 ⁻³
huiles	10 ⁻⁵ à 10 ⁻³	10 ⁻² à 1
miel	0,01	10
polymères	0,1 à 100	10 ² à 10 ⁵

TAB. 5.1 – Ordres de grandeurs de viscosités de quelques liquides

Dans le cas d'un liquide polymère, il est difficile de définir une viscosité car cette grandeur varie en fonction de la vitesse de déformation. C'est pour cela qu'est définie la viscosité limite :

$$\eta_0 = \lim_{\dot{\gamma} \rightarrow \infty} \eta(\dot{\gamma}).$$

Il faut noter qu'en raison de la taille de leurs molécules, les liquides polymères sont sensibles à la nature de l'écoulement. Si ces liquides ont un comportement pseudoplastique pour un écoulement de cisaillement, ils ont un comportement de type dilatant dans le cas d'un écoulement élongationnel². De plus, les polymères sont des liquides viscoélastiques. D'un point de vue rhéologique, cela correspond à un état intermédiaire entre un liquide visqueux et un solide élastique.

On se propose maintenant de présenter quelques comportements typiques des liquides polymères :

- Dans la figure Fig. 5.1, une tige en rotation est placée dans un récipient contenant un polymère liquide. On observe que le liquide monte le long de la tige en rotation, ceci s'explique par l'existence de contraintes normales. Ce phénomène est appelé **effet Weissenberg**. Dans le cas newtonien, le liquide aurait eu le comportement inverse, la surface se serait creusée autour de la tige.

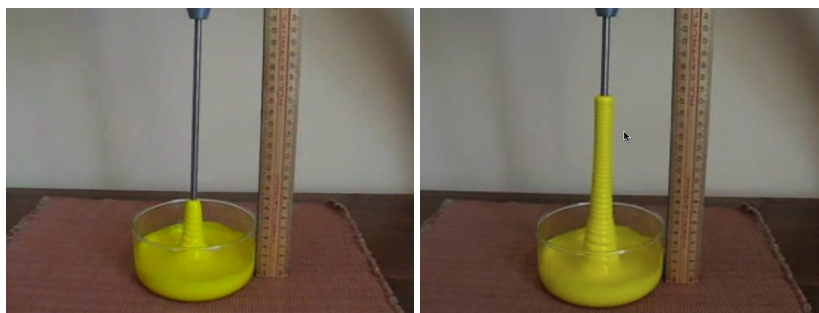


FIG. 5.1 – Effet Weissenberg

- La figure Fig.5.2, met en évidence l'**effet mémoire** d'un liquide polymère. En effet, le polymère *se rappelle* de la forme qu'il avait dans le tube le plus large et va donc reprendre son état initial en générant un gonflement à la sortie du tube le plus fin.

²Écoulement équivalent à une traction que l'on rencontre dans les divergents ou convergents.



FIG. 5.2 – Gonflement en sortie de filière

- Dans la figure Fig. 5.3, une seringue est immergée dans un liquide polymère. En même temps que l'on remplit la seringue, on l'éloigne du récipient. On observe que le liquide continue à alimenter la seringue. Cet effet est nommé le **siphon sans tube**. Les polymères sont constitués de longues chaînes enchevêtrées, enchevêtrement que l'on peut assimiler à des nœuds. Lorsque le liquide est étiré, les nœuds se figent empêchant la rupture du tube de liquide.



FIG. 5.3 – Expérience du siphon

5.2 Écoulements particulières : cisaillement et élongationnel

Afin d'évaluer le réalisme des modèles rhéologiques, on réalise des expériences d'écoulements de cisaillement et élongationnels. Des grandeurs physiques associées aux matériaux, telle la viscosité sont alors mesurées et comparées à celles déterminées à partir des modèles. On distinguera deux types d'écoulements : l'écoulement de cisaillement simple et l'écoulement élongationnel uniaxial.

L'écoulement entre deux plaques parallèles comme le montre la figure Fig. 5.4 est le cas typique d'un écoulement de cisaillement simple. Un liquide d'épaisseur e est soumis à l'action d'une plaque se déplaçant à la vitesse V_0 . Pour cet écoulement, x correspond à la direction de l'écoulement, y est perpendiculaire aux surfaces de cisaillement et z sera la direction neutre.

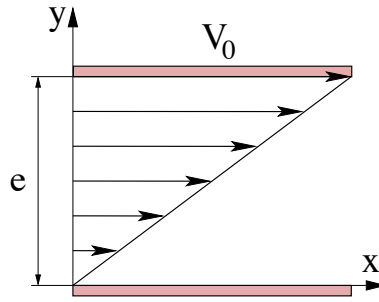


FIG. 5.4 – Écoulement de cisaillement simple

La vitesse du liquide est alors :

$$\mathbf{u} = (\dot{\gamma} y, 0, 0), \quad \text{avec} \quad \dot{\gamma} = \frac{V_0}{e}.$$

L'apparition d'une contrainte de cisaillement τ_{xy} constitue la seule réponse d'un liquide newtonien soumis à cet écoulement. Par contre pour un liquide quelconque tel qu'un polymère, il peut apparaître des contraintes normales aux plans de cisaillement (effet Weissenberg). À partir du champ de contraintes, on construit trois grandeurs physiques, appelées fonctions viscosimétriques :

– la viscosité de cisaillement :

$$\eta(\dot{\gamma}) = \frac{\tau_{xy}}{\dot{\gamma}},$$

– la première différence des contraintes normales :

$$\Psi_1(\dot{\gamma}) = \frac{N_1(\dot{\gamma})}{\dot{\gamma}^2} = \frac{\tau_{xx} - \tau_{yy}}{\dot{\gamma}^2},$$

– la seconde différence des contraintes normales :

$$\Psi_2(\dot{\gamma}) = \frac{N_2(\dot{\gamma})}{\dot{\gamma}^2} = \frac{\tau_{yy} - \tau_{zz}}{\dot{\gamma}^2}.$$

L'écoulement élongationnel uniaxial est similaire à un essai de traction (cf. figure Fig. 5.5). Le liquide est soumis à une force dirigée selon la direction x qui s'applique sur la surface de normale x . La vitesse du liquide est alors :

$$\mathbf{u} = (u_x(x), u_y(y), u_z(z))$$

La vitesse de déformation élongationnelle est notée $\dot{\epsilon}$ et est définie par : $\frac{\partial u_x}{\partial x}$. Il existe plusieurs types d'écoulements élongationnels. Dans le cas d'un écoulement élongationnel uniaxial, la viscosité élongationnelle est définie par la relation :

$$\eta_e = \frac{\tau_{xx} - \tau_{yy}}{\dot{\epsilon}}$$

Pour un liquide newtonien, on a :

$$\eta_e = 3\eta,$$

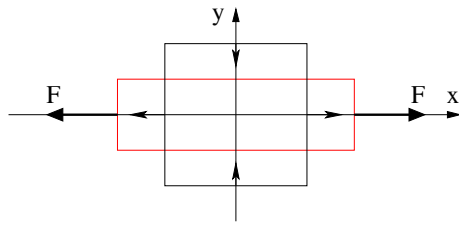


FIG. 5.5 – Écoulement élongationnel uniaxial

et on parle alors de comportement troutonien.

Dans la section suivante, on présente plusieurs modèles rhéologiques, et on étudiera pour chaque modèle les valeurs des fonctions viscosimétriques afin d'étudier leur réalisme.

5.3 Équations de base

On rappelle ici les équations décrivant l'écoulement isotherme d'un liquide incompressible :

- l'équation de conservation du moment :

$$\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t} \mathbf{u} - \nabla \cdot \underline{\tau} + \nabla p = \mathbf{0}, \quad (5.1)$$

- l'équation de conservation de la masse :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (5.2)$$

- l'équation constitutive.

On rappelle que le rôle de l'équation constitutive est de relier l'état de contrainte d'un matériau, caractérisé par le tenseur déviateur des contraintes $\underline{\tau}$ à son état de déformation caractérisé par la déformation γ , ou par la vitesse de déformation $\dot{\gamma}$. Dans le cas d'un liquide newtonien, l'équation constitutive est définie de manière unique, comme nous le verrons par la suite. Les liquides polymères étant non-newtoniens, il existe dans la littérature plusieurs modèles pour simuler de manière plus ou moins réaliste leurs écoulements. Nous avons choisi de considérer dans ce travail les équations constitutives sous forme d'équations différentielles mais on trouve aussi des modèles intégraux.

5.4 Modèles rhéologiques

5.4.1 Modèles linéaires

Dans le cas d'un liquide visqueux newtonien, l'équation constitutive est définie de manière unique et est donnée par la loi linéaire de Newton :

$$\underline{\tau} = 2\eta \underline{D}(\mathbf{u}), \quad (5.3)$$

où η est la viscosité newtonienne. Ce modèle ne traduit pas les comportements particuliers des liquides polymères. Il permet d'aboutir en remplaçant l'expression de $\underline{\tau}$ dans l'équation (5.1) au modèle bien connu de Navier-Stokes.

D'autres modèles, appelés newtoniens généralisés, décrivent uniquement le caractère non-newtonien du liquide, c'est à dire la dépendance de la viscosité par rapport à la vitesse de déformation. On trouve dans la littérature plusieurs modèles pour les fluides rhéofluidifiants comme pour les fluides rhéoépaississants. On note par exemple, la loi de puissance introduite par Oswald dans [67] pour les fluides rhéofluidifiants qui s'écrit de la manière suivante :

$$\eta(\dot{\gamma}) = K\dot{\gamma}^{n-1},$$

où n est l'indice de pseudoplasticité traduisant l'écart avec le comportement newtonien (obtenu pour $n = 1$) et K est une constante à déterminer. Ce modèle permet de prendre en compte les effets non-newtoniens obtenus pour de grandes déformations mais pas les effets newtoniens obtenus pour de petites déformations.

5.4.2 Modèles viscoélastiques linéaires

On s'intéresse maintenant à des modèles prenant en compte la viscoélasticité du liquide. On rappelle qu'un tel liquide présente un comportement intermédiaire entre un liquide visqueux et un solide élastique. Dans le cas d'un solide élastique, l'équation constitutive unidimensionnelle la plus simple est celle de Hooke :

$$\tau = G\gamma, \quad (5.4)$$

où G est le module de torsion ou de cisaillement. Les modèles viscoélastiques linéaires sont donc construits en combinant les comportements de base du liquide visqueux et du solide élastique.

Le modèle de Maxwell est le modèle de liquide viscolélastique linéaire le plus simple, l'équation constitutive est la suivante :

$$\underline{\tau} + \lambda \frac{d}{dt} \underline{\tau} = 2\eta \underline{D}(\mathbf{u}). \quad (5.5)$$

Le temps de relaxation λ est défini par :

$$\lambda = \frac{\eta}{G}.$$

Ce temps est caractéristique du matériau. Si le liquide de Maxwell est soumis à une déformation constante γ_0 à partir d'un temps t_0 , il apparaît une contrainte qui va décroître au cours du temps de la manière suivante :

$$\tau = \tau_0 \exp\left(-\frac{t}{\lambda}\right),$$

où $\tau_0 = G\gamma_0$. Pour un écoulement stationnaire, le modèle de Maxwell est donc identique au modèle de Newton.

Il existe d'autres modèles viscoélastiques linéaires, nous présentons ici uniquement le modèle de Jeffreys. Son équation constitutive est :

$$\underline{\tau} + \lambda \frac{d}{dt} \underline{\tau} = 2\eta \left(\underline{D}(\mathbf{u}) + \lambda_r \frac{d}{dt} \underline{D}(\mathbf{u}) \right) \quad (5.6)$$

Ici, λ_r est un autre temps caractéristique du liquide appelé temps de retard.

Ces modèles permettent donc de simuler uniquement des effets de viscoélasticité linéaire. De plus, ces modèles ne sont pas objectifs, c'est à dire qu'ils ne sont pas invariants au changement de repère. La difficulté vient des dérivées temporelles. Il faut donc construire d'autres types de dérivées permettant de conserver l'invariance du tenseur considéré.

5.4.3 Dérivée de Gordon-Schowalter

On introduit la dérivée de Gordon-Schowalter d'un tenseur \underline{A} notée $\underline{\overset{\square}{A}}$:

$$\underline{\overset{\square}{A}} = \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t}\underline{A} + \underline{A}\underline{\Omega}(\mathbf{u}) - \underline{\Omega}(\mathbf{u})\underline{A} - a(\underline{A}\underline{D}(\mathbf{u}) + \underline{D}(\mathbf{u})\underline{A}), \quad (5.7)$$

où a est un paramètre $\in [-1, 1]$, et $\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t}$ est la dérivée particulaire définie de la manière suivante :

$$\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t}\underline{A} = \frac{\partial \underline{A}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \underline{A}.$$

Pour des valeurs entières de a , on obtient les dérivées suivantes :

– pour $a = 1$, on obtient la dérivée convectée contravariante notée $\underline{\overset{\nabla}{A}}$ et définie par :

$$\underline{\overset{\nabla}{A}} = \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t}\underline{A} + \underline{A}\underline{\Omega}(\mathbf{u}) - \underline{\Omega}(\mathbf{u})\underline{A} - (\underline{A}\underline{D}(\mathbf{u}) + \underline{D}(\mathbf{u})\underline{A}).$$

– pour $a = 0$, on obtient la dérivée corotationnelle ou de Jaumann notée $\underline{\overset{\circ}{A}}$ et définie par :

$$\underline{\overset{\circ}{A}} = \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t}\underline{A} + \underline{A}\underline{\Omega}(\mathbf{u}) - \underline{\Omega}(\mathbf{u})\underline{A}.$$

– pour $a = -1$, on obtient la dérivée convectée covariante notée $\underline{\overset{\Delta}{A}}$ et définie par :

$$\underline{\overset{\Delta}{A}} = \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t}\underline{A} + \underline{A}\underline{\Omega}(\mathbf{u}) - \underline{\Omega}(\mathbf{u})\underline{A} + (\underline{A}\underline{D}(\mathbf{u}) + \underline{D}(\mathbf{u})\underline{A}).$$

En utilisant la définition du tenseur des vitesses de déformation :

$$\underline{D}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\underline{\nabla}\mathbf{u} + \underline{\nabla}\mathbf{u}^T), \quad (5.8)$$

et celle du tenseur de vorticité :

$$\underline{\Omega}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\underline{\nabla}\mathbf{u} - \underline{\nabla}\mathbf{u}^T), \quad (5.9)$$

on obtient les expressions simplifi es des dérivées définies précédemment :

– D riv e convect e contravariante :

$$\underline{\overset{\nabla}{A}} = \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t}\underline{A} - \underline{A}\underline{\nabla}\mathbf{u}^T - \underline{\nabla}\mathbf{u}\underline{A}.$$

– D riv e convect e covariante :

$$\underline{\overset{\Delta}{A}} = \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t}\underline{A} + \underline{A}\underline{\nabla}\mathbf{u} + \underline{\nabla}\mathbf{u}^T\underline{A}.$$

Remarque 8. Dans cette thèse, on utilise la définition suivante du gradient d'un vecteur \mathbf{u} :
 $(\underline{\nabla}\mathbf{u})_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ i.e. pour un vecteur $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\underline{\nabla}\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

On trouve cependant une autre définition, généralement employée par les physiciens : $(\underline{\nabla}\mathbf{u})_{ij} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$. Dans ce cas là, les transposées dans les formules précédentes n'auront pas la même position.

Remarque 9. L'utilisation de la dérivée particulaire, permettant le passage d'une description eulérienne à une description lagrangienne est déjà un premier pas pour obtenir des modèles objectifs.

5.4.4 Modèles viscoélastiques quasi-linéaires

L'utilisation de ces dérivées objectives dans les modèles (5.5) et (5.6) conduits à deux types de modèles, les modèles de type Maxwell et les modèles de type Jeffreys, appelés aussi modèles d'Oldroyd.

5.4.4.1 Les modèles de type Maxwell

- Le modèle de Maxwell convecté contravariant (appelé aussi "UCM" pour "Upper-Convected Maxwell") :

$$\underline{\tau} + \lambda \overset{\nabla}{\underline{\tau}} = 2\eta \underline{D}(\mathbf{u}). \quad (5.10)$$

- Le modèle de Maxwell corotationnel :

$$\underline{\tau} + \lambda \overset{\circ}{\underline{\tau}} = 2\eta \underline{D}(\mathbf{u}).$$

- Le modèle de Maxwell convecté covariant :

$$\underline{\tau} + \lambda \overset{\Delta}{\underline{\tau}} = 2\eta \underline{D}(\mathbf{u}).$$

Les expressions des différentes fonctions viscosimétriques pour ces modèles sont présentées dans le tableau Tab. 5.2.

Dans le cas élongationnel, les modèles de Maxwell covariant et contravariant prédisent une viscosité élongationnelle variant en fonction de $\dot{\epsilon}$ ce qui est conforme à la réalité. Néanmoins, pour des écoulements de cisaillement, ces deux modèles ne permettent pas d'obtenir des comportements réalistes. En effet, la viscosité ne dépend pas de la vitesse de déformation $\dot{\gamma}$. En outre, l'existence de contraintes normales ($\Psi_1(\dot{\gamma}) \neq 0$), fait que ces modèles ne conviennent pas pour décrire correctement les écoulements de liquides newtoniens.

En cisaillement, le modèle de Maxwell corotationnel prédit le comportement rhéofluidifiant du liquide et l'existence des deux différences des contraintes normales, il semble donc convenir

Modèle	Cisaillement			Elongationnel
	$\eta(\dot{\gamma})$	$\Psi_1(\dot{\gamma})$	$\Psi_2(\dot{\gamma})$	$\eta_e(\dot{\epsilon})$
Maxwell contravariant, $a = 1$	η	$2\eta\lambda$	0	$\frac{3\eta}{(1 - 2\dot{\epsilon}\lambda)(1 + \dot{\epsilon}\lambda)}$
Maxwell corotationnel, $a = 0$	$\frac{\eta}{1 + \dot{\gamma}^2\lambda^2}$	$\frac{2\lambda\eta}{1 + \dot{\gamma}^2\lambda^2}$	$-\frac{\lambda\eta}{1 + \dot{\gamma}^2\lambda^2}$	3η
Maxwell covariant, $a = -1$	η	$2\eta\lambda$	$-2\eta\lambda$	$\frac{3\eta}{(1 + 2\dot{\epsilon}\lambda)(1 - \dot{\epsilon}\lambda)}$

TAB. 5.2 – Fonctions viscosimétriques - Modèles de Maxwell

pour simuler des écoulements de cisaillement de polymères. Cependant, nous ne détaillerons pas les résultats ici, mais la variation de ces grandeurs est surestimée. Dans le cas élongationnel, la viscosité élongationnelle ne dépend pas de $\dot{\epsilon}$ (comportement troutonien), ce qui n'est pas réaliste.

On voit donc que ces modèles semblent convenir pour simuler des écoulements cisailés ou des écoulements élongationnels mais pas des écoulements mixtes.

5.4.4.2 Modèles de type Jeffreys

- Le modèle de Jeffreys covariant ou modèle d'Oldroyd-B

$$\underline{\tau} + \lambda \overset{\nabla}{\underline{\tau}} = 2\eta \left(\underline{D}(\mathbf{u}) + \lambda_r \overset{\nabla}{\underline{D}}(\mathbf{u}) \right). \quad (5.11)$$

Ce modèle populaire a été introduit sous cette forme par Oldroyd en 1950 dans [66]. De nombreuses études numériques et mathématiques ont été faites sur ce modèle, cependant, comme on le verra par la suite, il ne traduit pas le comportement de liquides polymères.

- Le modèle de Jeffreys corotationnel :

$$\underline{\tau} + \lambda \overset{\circ}{\underline{\tau}} = 2\eta(\underline{D}(\mathbf{u}) + \lambda_r \overset{\circ}{\underline{D}}(\mathbf{u})). \quad (5.12)$$

On récapitule dans le tableau Tab. 5.3 les expressions des fonctions viscosimétriques pour les deux modèles précédents.

On constate que, comme dans le cas des modèles de Maxwell, ces modèles ne permettent pas de traduire des comportements réalistes dans des écoulements mixtes. Dans le cas du modèle d'Oldroyd-B, on retrouve une expression de la viscosité élongationnelle qui varie en fonction de $\dot{\epsilon}$. Cependant, dans le cas d'un écoulement de cisaillement, on voit que la viscosité obtenue ne dépend pas de $\dot{\gamma}$, ce qui est typique pour un liquide newtonien.

A l'inverse, le modèle de Jeffreys corotationnel prévoit un comportement rhéofluidifiant et l'existence de différences des contraintes normales. Néanmoins, il ne traduit pas la dépendance de la viscosité élongationnelle avec $\dot{\epsilon}$.

Modèle	Cisaillement			Elongationnel
	$\eta(\dot{\gamma})$	$\Psi_1(\dot{\gamma})$	$\Psi_2(\dot{\gamma})$	$\eta_e(\dot{\varepsilon})$
Oldroyd-B	η	$2\eta(\lambda - \lambda_r)$	0	$3\eta \frac{1 - \dot{\varepsilon}\lambda_r - 2\dot{\varepsilon}^2\lambda\lambda_r}{(1 - 2\dot{\varepsilon}\lambda)(1 + \dot{\varepsilon}\lambda_r)}$
Jeffreys corotationnel	$\eta \frac{1 + \lambda\lambda_r\dot{\gamma}^2}{1 + \lambda^2\dot{\gamma}^2}$	$2\eta \frac{\lambda - \lambda_r}{1 + \lambda^2\dot{\gamma}^2}$	$-\frac{\Psi_1(\dot{\gamma})}{2}$	3η

TAB. 5.3 – Fonctions viscosimétriques - Modèles de Jeffreys

Remarque 10. *Il existe une autre formulation du modèle d'Oldroyd-B. On considère la décomposition suivante du tenseur déviateur des contraintes :*

$$\underline{\tau} = \underline{\tau}_p + \underline{\tau}_n.$$

$\underline{\tau}_n$ représente la partie newtonienne ou la partie solvant de la contrainte et est calculé à l'aide de l'équation de Newton (5.3), $2\eta_n \underline{D}(\mathbf{u})$. $\underline{\tau}_p$ correspond à la partie polymère et est donné par l'équation constitutive UCM (5.10).

$$\underline{\tau}_n = 2\eta_n \underline{D}(\mathbf{u}) \quad (5.13)$$

$$\underline{\tau}_p + \lambda \underline{\tau}_p^\nabla = 2\eta_p \underline{D}(\mathbf{u}). \quad (5.14)$$

Dans ce cas là, la contribution du solvant apparaît dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement et l'équation constitutive est celle du modèle UCM. Le modèle complet de Oldroyd-B s'écrit donc de manière équivalente :

$$\begin{cases} \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t} \mathbf{u} - 2\eta_n \text{div}(\underline{D}(\mathbf{u})) + \nabla p = \text{div} \underline{\tau}_p \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \\ \underline{\tau}_p + \lambda \underline{\tau}_p^\nabla = 2\eta_p \underline{D}(\mathbf{u}) \end{cases} \quad (5.15)$$

On peut montrer l'équivalence entre ces deux modèles. On a $\underline{\tau}_p = \underline{\tau} - \underline{\tau}_n$ l'équation (5.14) devient alors :

$$(\underline{\tau} - \underline{\tau}_n) + \lambda(\underline{\tau}^\nabla - \underline{\tau}_n^\nabla) = 2\eta_p \underline{D}(\mathbf{u}).$$

En remplaçant l'expression (5.13) de $\underline{\tau}_n$ dans cette équation on obtient :

$$\underline{\tau} + \lambda \underline{\tau}^\nabla = 2(\eta_n + \eta_p) \left(\underline{D}(\mathbf{u}) + \lambda \frac{\eta_n}{\eta_n + \eta_p} \underline{D}(\mathbf{u})^\nabla \right).$$

On retrouve bien l'équation (5.11) avec :

$$\eta = \eta_n + \eta_p \quad \text{et} \quad \lambda_r = \lambda \frac{\eta_n}{\eta_n + \eta_p}.$$

On constate que la prise en compte des critères d'objectivité conduit à l'établissement de modèles rhéologiques décrivant de manière réaliste des écoulements de liquides polymères. Cependant, ils ne conviennent pas pour des écoulements mixtes.

5.4.5 Modèles viscoélastiques non-linéaires plus complexes

Les modèles non-linéaires que l'on considérera dans cette section, ont été souvent établis à partir de considérations moléculaires. L'ajout d'un terme non-linéaire doit permettre de traiter convenablement le cas des écoulements mixtes. On s'intéresse ici plus particulièrement aux modèles de Phan-Thien Tanner et de Giesekus, qui sont basés sur l'ajout d'un terme non-linéaire à l'équation d'UCM (5.10). Il existe cependant d'autres modèles non-linéaires dans la littérature, notamment le modèle de Leonov.

5.4.5.1 Modèles de Phan-Thien Tanner

On considère tout d'abord le modèle de Phan-Thien et Tanner, introduit dans [71] et [70], et qui s'écrit sous forme exponentielle de la manière suivante :

$$\lambda \overset{\nabla}{\tau} + \exp\left(\frac{\epsilon\lambda}{\eta} \text{tr } \tau\right) \tau = 2\eta \underline{D}(\mathbf{u}), \quad (5.16)$$

où ϵ est un paramètre adimensionnel et ajustable, appelé paramètre extensionnel.

La version linéarisée de l'équation constitutive de Phan-Thien Tanner est obtenue en effectuant un développement de Taylor sur le terme exponentiel :

$$\lambda \overset{\nabla}{\tau} + \tau + \frac{\epsilon\lambda}{\eta} (\text{tr } \tau) \tau = 2\eta \underline{D}(\mathbf{u}). \quad (5.17)$$

Cette nouvelle forme de l'équation constitutive est appelée modèle affine de Phan-Thien Tanner. Par la suite, on nommera « PTT » cette version.

Les fonctions viscosimétriques associées à ce modèle sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \eta(\dot{\gamma}) &= \frac{\tau_{xy}}{\dot{\gamma}} \quad \text{où} \quad \tau_{xy} = \frac{-24^{1/3} \frac{\epsilon\lambda}{\eta} + 2^{1/3} \kappa_1^{2/3}}{6^{2/3} \frac{\epsilon\lambda}{\eta} \kappa_1^{1/3}}, \\ \Psi_1(\dot{\gamma}) &= \frac{N_1(\dot{\gamma})}{\dot{\gamma}^2} \quad \text{où} \quad N_1(\dot{\gamma}) = \frac{2\eta}{\epsilon^2 \lambda} \left(\frac{-6^{2/3} \epsilon + 6^{1/3} \kappa_2^{2/3}}{6 \kappa_2^{1/3}} \right)^2, \\ \Psi_2(\dot{\gamma}) &= 0, \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= 9 \left(\frac{\epsilon\lambda}{\eta} \right)^2 \eta \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \sqrt{3 \left(\frac{\epsilon\lambda}{\eta} \right)^3 \left(4 + 27 \frac{\epsilon\lambda}{\eta} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right)^2 \right)}, \\ \kappa_2 &= 9\dot{\gamma}\epsilon^2\lambda + \sqrt{3\epsilon^3(2 + 27\epsilon\dot{\gamma}^2\lambda^2)}. \end{aligned}$$

Ce modèle traduit correctement le comportement rhéofluidifiant du liquide et prédit une première différence des contraintes normales réaliste. Cependant, la deuxième différence des contraintes normales est nulle. Dans le cas d'un écoulement élongationnel, on ne présente pas ici l'expression de $\eta_e(\dot{\epsilon})$ qui est très complexe, ce modèle traduit convenablement le comportement d'un liquide polymère.

5.4.5.2 Le modèle de Giesekus

On s'intéresse dans cette thèse plus particulièrement au modèle non-linéaire de Giesekus, (cf. [34] et [35]) dont l'équation constitutive est la suivante (cf Annexe A.1) :

$$\lambda \overset{\nabla}{\underline{\tau}} + \frac{\alpha \lambda}{\eta} \underline{\tau} \underline{\tau} + \underline{\tau} = 2\eta \underline{D}(\mathbf{u}), \quad (5.18)$$

où α est un paramètre $\in [0, 1]$.

Pour $\alpha = 0$, on retrouve le modèle UCM. La valeur $\alpha = 0,5$ donne le comportement le plus réaliste et c'est donc cette valeur que nous avons retenue pour ce travail.

Les fonctions viscosimétriques associées à ce modèle sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \eta(\dot{\gamma}) &= \frac{2\eta}{1 + \sqrt{1 + 4\lambda^2\dot{\gamma}^2}}, \\ \psi_1(\dot{\gamma}) &= \frac{\eta\sqrt{2}}{\lambda^2\dot{\gamma}^3} \frac{-1 - 2\lambda^2\dot{\gamma}^2 + \sqrt{1 + 4\lambda^2\dot{\gamma}^2}}{\sqrt{\sqrt{1 + 4\lambda^2\dot{\gamma}^2} - 1}}, \\ \psi_2(\dot{\gamma}) &= -\frac{\eta}{\lambda\dot{\gamma}^2} \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2\lambda\dot{\gamma}} \sqrt{\sqrt{1 + 4\lambda^2\dot{\gamma}^2} - 1} \right). \end{aligned}$$

On présente en Annexe A.2 les calculs effectués pour retrouver ces fonctions ainsi que l'expression complexe de la viscosité élongationnelle.

On retrouve à l'aide de ce modèle les comportements caractéristiques des liquides polymères. En effet, il traduit le caractère rhéofluidifiant du liquide et prédit une première et une deuxième différence des contraintes normales non-nulles dont les valeurs sont en accord avec les expériences. Il traduit aussi de manière satisfaisante la dépendance de la viscosité élongationnelle par rapport à $\dot{\epsilon}$.

De plus, en comparaison avec d'autres modèles qui contiennent un nombre important de paramètres à ajuster, ce modèle est simple. Il ne requiert la connaissance que de deux paramètres du matériau, sa viscosité η et son temps de relaxation λ , grandeurs aisément mesurables.

5.5 Cas-tests

Dans cette section, on se propose de présenter des cas-tests permettant de mettre en évidence les comportements de liquides polymères. Lorsque l'on considère des liquides viscoélastiques, on utilise souvent pour des simulations des géométries comportant des contractions et/ou des expansions. Les géométries que nous utiliserons dans ce travail lors des essais numériques (voir chapitre 7), sont présentées dans la figure Fig. 5.6. Il s'agit de la contraction 4:1, de la contraction/expansion 4:1:4, et de l'écoulement autour d'un cylindre.

Ces trois géométries comportent des divergents et des convergents, zones qui sont le siège d'écoulements mixtes. Ces géométries sont donc susceptibles de mettre en évidence les différences de comportement entre les modèles rhéologiques choisis. Dans le cas d'un liquide polymère, l'écoulement devrait avoir les caractéristiques suivantes :

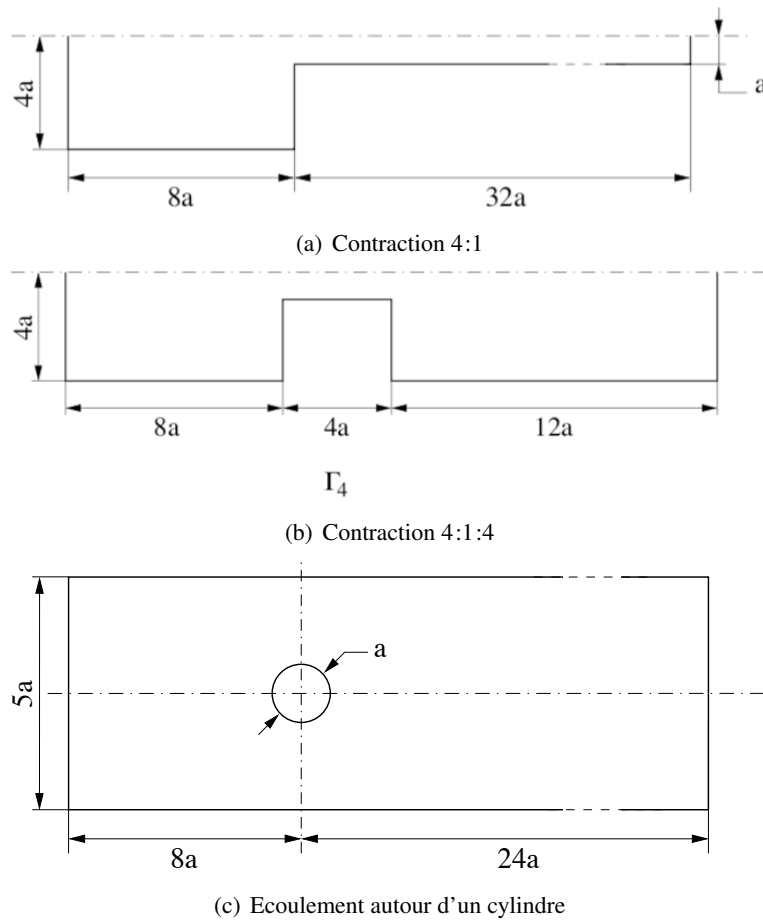


FIG. 5.6 – Géométries de référence

- contraction 4:1. En amont, loin de la contraction, on a un écoulement de cisaillement, caractérisé par un profil de vitesse non parabolique et l'apparition de contraintes normales. Ces effets sont peu marqués en raison des faibles valeurs de la vitesse de déformation. Près de la contraction, il apparaît une composante élongationnelle à l'écoulement (écoulement mixte). L'existence de contraintes normales provoque l'accroissement des zones de recirculation dans le coin entrant. En aval de la contraction, dans le canal, la composante élongationnelle disparaît, faisant place à un écoulement de cisaillement simple, pour lequel la vitesse de déformation est 4 fois plus élevée qu'avant la contraction.
- contraction/expansion 4:1:4. Par rapport à la géométrie précédente, l'expansion 1:4 permet de mettre en évidence le gonflement en sortie de filière qui est une conséquence de plusieurs phénomènes (effet mémoire, changement brutal du profil de vitesse, effet Weissenberg).
- écoulement autour d'un cylindre. Par rapport aux deux autres géométries, la transition entre les écoulements de cisaillement et mixtes se fait de manière progressive. D'autre part, le calcul de la traînée générée par le cylindre permet de comparer différentes approches numériques associées à différents modèles rhéologiques.

Chapitre 6

Approximation par éléments finis non-conformes du problème de Giesekus

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'approximation non-conforme du problème de Giesekus sur des maillages triangulaires et quadrangulaires. Dans un premier temps, nous faisons l'étude du problème de Stokes sous-jacent, c'est pourquoi nous considérons uniquement sa formulation à trois champs :

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}\underline{\tau} + \nabla p &= \mathbf{f} && \text{dans } \Omega \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 && \text{dans } \Omega \\ \underline{\tau} &= 2\mu \underline{D}(\mathbf{u}) && \text{dans } \Omega \\ \mathbf{u} &= \mathbf{g} && \text{sur } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{6.1}$$

ainsi que sa formulation $(\underline{D}(\mathbf{u}), \underline{D}(\mathbf{v}))$ équivalente :

$$\begin{aligned} -2\mu \operatorname{div}(\underline{D}(\mathbf{u})) + \nabla p &= \mathbf{f} && \text{dans } \Omega \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 && \text{dans } \Omega \\ \mathbf{u} &= \mathbf{g} && \text{sur } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{6.2}$$

On décrira ensuite ces schémas numériques appliqués au problème de Giesekus.

6.1 Approximation du problème de Stokes sur un maillage triangulaire

6.1.1 Éléments finis non-conformes sur des triangles

Dans cette section, on introduit les éléments finis non-conformes sur des triangles, pour le degré polynomial $k = 1, 2$ ou 3 . On note que le modèle de Giesekus étant non-linéaire sa résolution est coûteuse, on considérera donc pour sa discrétisation uniquement des éléments de plus bas degré.

Tout d'abord, on rappelle que la dénomination non-conforme vient du fait que les fonctions contenues dans l'espace d'approximation ne sont pas continues sur tout le domaine mais par élément, l'espace n'est donc pas inclus dans $H^1(\Omega)$. Leur continuité à travers chaque arête du maillage est alors imposée de manière faible dans la définition de l'espace.

Pour $k = 1$, on s'intéresse aux éléments finis de Crouzeix-Raviart, introduits en 1973 dans [24], pour $k = 2$, on considère les éléments finis de Fortin-Soulie, introduits en 1983 dans [33]. Finalement, pour $k = 3$ on considère les éléments finis de Crouzeix-Falk introduits dans [23] en 1989. Pour $k = 1, 2$ et 3 , on considère donc les espaces de dimension finie suivants :

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_h &= \{ \mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega); (\mathbf{v})|_T \in \mathbf{P}_k, \forall T \in \mathcal{T}_h \text{ et } [\pi_{k-1}\mathbf{v}]|_e = 0, \forall e \in \varepsilon_h \}, \\ Q_h &= \{ q \in L_0^2(\Omega); (q)|_T \in P_{k-1}, \forall T \in \mathcal{T}_h \}, \\ \underline{X}_h &= \{ \underline{\sigma} \in \underline{X}; (\underline{\sigma})|_T \in \underline{P}_{k-1}, \forall T \in \mathcal{T}_h \}. \end{aligned}$$

Les degrés de liberté pour $k = 1$ sont représentés dans la figure Fig. 6.1.

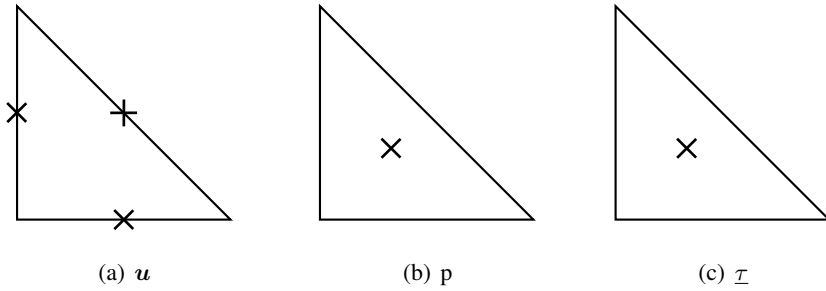


FIG. 6.1 – Degrés de liberté : Crouzeix-Raviart dG0

On note que dans le cas triangulaire les degrés de liberté de l'espace d'approximation de la vitesse peuvent être choisis de deux manières équivalentes. Ainsi, l'espace discret s'écrit aussi, dans le cas de conditions de bord homogènes :

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_h &= \{ \mathbf{v}_h \in \mathbf{L}^2(\Omega); \mathbf{v}_h|_T \in \mathbf{P}_k, \forall T \in \mathcal{T}_h \text{ et } \forall e \in \varepsilon_h^{int} \text{ (resp. } \varepsilon_h^\partial), \\ &\quad \mathbf{v}_h|_e \text{ continue (resp. nulle) aux } k \text{ points de Gauss} \}. \end{aligned}$$

On rappelle (voir [24], [33] et [23]) qu'il existe deux opérateurs d'interpolation $\mathbf{I}_h \in \mathcal{L}(\mathbf{H}^1(\Omega); \mathbf{V}_h)$ et $i_h \in \mathcal{L}(L_0^2(\Omega); Q_h)$ satisfaisant les estimations habituelles et :

$$\begin{aligned} \int_T r \nabla \cdot (\mathbf{I}_h \mathbf{v} - \mathbf{v}) dx &= 0, \quad \int_e \mathbf{r} \cdot [\mathbf{I}_h \mathbf{v}] ds = 0, \quad \forall r \in P_{k-1}, \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \\ \int_T r (i_h q - q) dx &= 0, \quad \forall r \in P_{k-1}, \forall q \in L_0^2(\Omega). \end{aligned}$$

6.1.2 Formulation discrète du problème de Stokes

On s'intéresse ici à la discrétisation du problème de Stokes à trois champs par éléments finis non-conformes sur des maillages composés de triangles. Comme précédemment, on considère

un domaine polygonal Ω de \mathbb{R}^2 et on prend la donnée $\mathbf{f} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$. Afin de simplifier l'étude mathématique, on considère des conditions de bord de Dirichlet homogènes. On considère alors une triangulation \mathcal{T}_h composée de triangles T de telle manière que :

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{T \in \mathcal{T}_h} T.$$

La formulation variationnelle associée à (6.1) s'écrit :

$$\begin{cases} (\mathbf{u}, p, \underline{\tau}) \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \times L_0^2(\Omega) \times \underline{X} \\ b(p, \mathbf{v}) + c_0(\underline{\tau}, \mathbf{v}) = l(\mathbf{v}) & \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \\ b(q, \mathbf{u}) = 0 & \forall q \in L_0^2(\Omega) \\ 2\mu c_0(\underline{\sigma}, \mathbf{u}) - d_0(\underline{\sigma}, \underline{\tau}) = 0 & \forall \underline{\sigma} \in \underline{X}, \end{cases} \quad (6.3)$$

où

$$\begin{aligned} c_0(\underline{\tau}, \mathbf{v}) &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \underline{\tau} : \underline{D}(\mathbf{v}) dx, & d_0(\underline{\sigma}, \underline{\tau}) &= \int_{\Omega} \underline{\sigma} : \underline{\tau} dx, \\ b(p, \mathbf{v}) &= - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T p \nabla \cdot \mathbf{v} dx, & l(\mathbf{v}) &= \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dx, \end{aligned}$$

et où : $\underline{X} = \{ \underline{\tau} = (\tau_{ij})_{1 \leq i, j \leq 2}; \tau_{ij} = \tau_{ji}, \tau_{ij} \in L_2(\Omega), i, j = 1, 2 \}$.

La troisième équation de (6.3) nous donne que $\underline{\tau} = 2\mu \underline{D}(\mathbf{u})$ et donc la formulation à trois champs est équivalente à la formulation à deux champs suivante :

$$\begin{cases} (\mathbf{u}, p) \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \times L_0^2(\Omega) \\ a_0(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(p, \mathbf{v}) = l(\mathbf{v}) & \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \\ b(q, \mathbf{u}) = 0 & \forall q \in L_0^2(\Omega), \end{cases} \quad (6.4)$$

où $a_0(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 2\mu \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \underline{D}(\mathbf{u}) : \underline{D}(\mathbf{v}) dx$.

Ce problème est bien posé, voir par exemple [36] pour une démonstration.

6.1.2.1 Deux formulations discrètes équivalentes

L'approximation discrète du problème de Stokes à deux champs s'écrit :

$$\begin{cases} (\mathbf{u}_h, p_h) \in \mathbf{V}_h \times Q_h \\ a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b(p_h, \mathbf{v}_h) = l(\mathbf{v}_h) & \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h \\ b(q_h, \mathbf{u}_h) = 0 & \forall q_h \in Q_h \end{cases} \quad (6.5)$$

où

$$a_h(\cdot, \cdot) = a_0(\cdot, \cdot) + \gamma_1 J_1(\cdot, \cdot), \quad J_1(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = \mu \sum_{e \in \mathcal{E}_h^{int}} \frac{1}{|e|} \int_e [\pi_1(\mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n}_e)] [\pi_1(\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}_e)] ds$$

et γ_1 est un paramètre de stabilisation qui peut être choisi indépendant de h . Le terme de stabilisation $J_1(\cdot, \cdot)$ est ajouté seulement pour $k = 1$ afin d'obtenir la coercivité de la forme $a_h(\cdot, \cdot)$, à l'aide d'une inégalité de type Korn.

Remarque 11. On note que pour $k = 2$ ou 3 , $\forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$, $\pi_1 \mathbf{v}_h \subset \mathbf{v}_h$. D'après la définition de l'espace \mathbf{V}_h , on a donc $J_1(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = 0$ pour tout $\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$.

Remarque 12. On rappelle que dans [18], Brenner introduit un terme de stabilisation différent du nôtre :

$$J_1^*(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = \mu \sum_{e \in \varepsilon_h^{int}} \frac{1}{|e|} \int_e [\pi_1 \mathbf{u}_h][\pi_1 \mathbf{v}_h] ds,$$

et que plus tard, Mardal et Winther dans [61] ont introduit le terme de stabilisation $J_1(\cdot, \cdot)$.

L'approximation du problème à trois champs s'écrit :

$$\begin{cases} (\mathbf{U}_h, P_h, \underline{\tau}_h) \in \mathbf{V}_h \times Q_h \times \underline{X}_h \\ \gamma_1 J_1(\mathbf{U}_h, \mathbf{v}_h) + b(P_h, \mathbf{v}_h) + c_0(\underline{\tau}_h, \mathbf{v}_h) = l(\mathbf{v}_h) & \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h \\ b(q_h, \mathbf{U}_h) = 0 & \forall q_h \in Q_h \\ 2\mu c_0(\underline{\sigma}_h, \mathbf{U}_h) - d_0(\underline{\sigma}_h, \underline{\tau}_h) = 0 & \forall \underline{\sigma}_h \in \underline{X}_h. \end{cases} \quad (6.6)$$

Il est utile d'introduire la semi-norme suivante sur $\mathbf{H}_0^1(\Omega) + \mathbf{V}_h$:

$$[[\mathbf{v}]] = (2\mu \|\underline{D}(\mathbf{v})\|_{0,h}^2 + \gamma_1 J_1(\mathbf{v}, \mathbf{v}))^{1/2} = a_h(\mathbf{v}, \mathbf{v})^{1/2}.$$

Lemme 6.1.1. L'application $\mathbf{v} \rightarrow [[\mathbf{v}]]$ est une norme sur \mathbf{V}_h .

Démonstration. La démonstration est similaire à celle du Lemme 2.2.2 de la première partie de ce manuscrit. Soit $[[\mathbf{v}]] = 0$ alors $[\pi_1 \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}] = 0$ sur chaque arête interne $e \in \varepsilon_h^{int}$ et $\underline{D}(\mathbf{v}) = 0$ sur chaque triangle $T \in \mathcal{T}_h$. Comme précédemment, $\underline{D}(\mathbf{v}) = 0$ implique que \mathbf{v} est un mouvement rigide et donc \mathbf{v} est affine par morceaux. Ainsi, $\pi_1 \mathbf{v}|_e = \mathbf{v}|_e$ et comme $[\pi_1 \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}] = 0$ sur chaque arête interne, on en déduit (cf. Lemme 2.2.2) que $\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$. D'après la définition de l'espace, on a $\pi_0 \mathbf{v} = 0$ au bord ce qui implique que \mathbf{v} est nul. \square

6.1.2.2 Existence et unicité de la solution et estimation a priori

On emploiera par la suite une inégalité de Korn discrète, déjà utilisée dans la première partie de ce manuscrit. Nous avons appliqué le résultat suivant pour des fonctions \mathbf{H}^1 par morceaux établi par Brenner [18] :

$$|\mathbf{v}|_{1,h} \leq c \left(\|\underline{D}(\mathbf{v})\|_{0,h}^2 + \frac{1}{\mu} J_1(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + \phi(\mathbf{v})^2 \right)^{1/2},$$

où $\phi : \mathbf{H}^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ est une semi-norme telle que si $\phi(\mathbf{v}) = 0$ pour un mouvement rigide \mathbf{v} , alors \mathbf{v} est un vecteur constant. En prenant

$$\phi(\mathbf{v}) = \sum_{e \in \varepsilon_h^\partial} \|\pi_0 \mathbf{v}\|_{0,e},$$

$\phi(\mathbf{v}) = 0$ sur \mathbf{V}_h , d'où l'inégalité de Korn suivante :

$$|\mathbf{v}|_{1,h} \leq c \left(\|\underline{D}(\mathbf{v})\|_{0,h}^2 + \frac{1}{\mu} J_1(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \right)^{1/2}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_h \quad (6.7)$$

Théorème 6.1.1. *Le problème (6.5) a une solution unique.*

Démonstration. On vérifie les hypothèses du théorème de Babuška-Brezzi. La coercivité en norme $|\cdot|_{1,h}$ de la forme $a_h(\cdot, \cdot)$ sur \mathbf{V}_h est obtenue de manière immédiate, grâce à (6.7). On doit donc prouver la condition inf-sup. Pour cela on utilise la condition inf-sup du problème de Stokes continu (cf. [36]), et à tout $q \in Q_h \subset L_0^2(\Omega)$ on associe $\mathbf{z} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ tel que $\nabla \cdot \mathbf{z} = q$ et $\|\mathbf{z}\|_{1,\Omega} \leq c\|q\|_{0,\Omega}$. En prenant $\mathbf{w} = \mathbf{I}_h \mathbf{z} \in \mathbf{V}_h$, on obtient immédiatement que $b(q, \mathbf{w}) = \|q\|_{0,\Omega}^2$ et $|\mathbf{w}|_{1,h} \leq c\|q\|_{0,\Omega}$. Pour $k = 2$ ou 3 , on a $J_1(\mathbf{w}, \mathbf{w}) = 0$, le résultat est donc immédiat. Pour $k = 1$, on doit encore borner :

$$J_1(\mathbf{w}, \mathbf{w}) = \mu \sum_{e \in \varepsilon_h} \frac{1}{|e|} \|[\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}_e]\|_{0,e}^2.$$

En utilisant le fait que $[\mathbf{z} \cdot \mathbf{n}_e] = 0$, et l'inégalité de trace (déjà utilisée dans la première partie) sur $\{e\} = \partial T^1 \cap \partial T^2$ suivante :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{|e|}} \|[(\mathbf{I}_h \mathbf{z} - \mathbf{z}) \cdot \mathbf{n}_e]\|_{0,e} &\leq c \left(\frac{1}{h_{T^1}} \|\mathbf{I}_h \mathbf{z} - \mathbf{z}\|_{0,T^1} + \frac{1}{h_{T^2}} \|\mathbf{I}_h \mathbf{z} - \mathbf{z}\|_{0,T^2} + |\mathbf{I}_h \mathbf{z} - \mathbf{z}|_{1,T^1} \right. \\ &\quad \left. + |\mathbf{I}_h \mathbf{z} - \mathbf{z}|_{1,T^2} \right) \\ &\leq c |\mathbf{z}|_{1,T^1 \cup T^2}, \end{aligned}$$

on obtient

$$J_1(\mathbf{w}, \mathbf{w}) \leq c\mu |\mathbf{z}|_{1,\Omega}^2 \leq c\|q\|_{0,\Omega},$$

grâce aux propriétés de l'opérateur d'interpolation \mathbf{I}_h , ce qui nous permet de conclure. \square

L'existence et l'unicité de la solution de (6.6) sont maintenant immédiates, grâce à son équivalence avec (6.5).

Théorème 6.1.2. *Le problème (6.6) a une unique solution donnée par $(\mathbf{u}_h, p_h, 2\mu \underline{D}(\mathbf{u}_h))$, où (\mathbf{u}_h, p_h) est la solution de (6.5).*

Pour établir les estimations d'erreur *a priori* suivantes, nous avons utilisé les outils classiques pour les méthodes d'éléments finis stabilisés. Le traitement des termes traduisant l'erreur non-conforme sera présenté en détail pour le cas quadrangulaire dans la section suivante.

Théorème 6.1.3. *Soit $(\mathbf{u}, p) \in \mathbf{H}^{k+1}(\Omega) \times H^k(\Omega)$ la solution du problème de Stokes continu. Alors la solution (\mathbf{u}_h, p_h) de (6.5) satisfait les estimations d'erreur *a priori* suivantes :*

$$[[\mathbf{u} - \mathbf{u}_h]] + \frac{1}{\sqrt{\mu}} \|p - p_h\|_{0,\Omega} \leq ch^k (\sqrt{\mu} |\mathbf{u}|_{k+1,\Omega} + \frac{1}{\sqrt{\mu}} |p|_{k,\Omega})$$

avec c une constante indépendante de h et de μ . Si de plus, Ω est convexe, alors :

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,\Omega} \leq ch^{k+1} (|\mathbf{u}|_{k+1,\Omega} + \frac{1}{\mu} |p|_{k,\Omega}).$$

6.2 Approximation du problème de Stokes sur un maillage quadrangulaire

6.2.1 Éléments finis non-conformes de Rannacher-Turek

On souhaite maintenant utiliser des éléments finis non-conformes sur des maillages composés de quadrilatères. On considère ici uniquement le cas où le degré polynomial $k = 1$. Dans la littérature, il existe plusieurs éléments finis non-conformes de bas degré pour l'approximation du problème de Stokes. Nous avons choisi d'étudier plus en détail les éléments finis de Rannacher-Turek que nous présenterons dans la suite. On considère donc un maillage \mathcal{K}_h composé de quadrilatères K de telle manière que

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{K \in \mathcal{K}_h} K.$$

Dans un premier temps, on présente les éléments finis de Rannacher-Turek introduits dans [74]. On note $\hat{K} = [-1, 1] \times [-1, 1]$ l'élément fini de référence. On introduit l'espace vectoriel défini par $\hat{Q}_1^{rot} = \text{vect}\{1, \hat{x}, \hat{y}, \hat{x}^2 - \hat{y}^2\}$.

Remarque 13. On retrouve l'espace \hat{Q}_1^{rot} à partir de l'espace polynomial classique :

$$Q_1 = \text{vect}\{1, x, y, xy\}$$

en effectuant une rotation de 45° en prenant :

$$\begin{cases} \hat{x} = x + y \\ \hat{y} = x - y \end{cases}$$

Pour chaque quadrangle $K \in \mathcal{K}_h$, on notera $\Psi_k : \hat{K} \rightarrow K$ la transformation de l'élément de référence à un élément quelconque. On introduit alors l'espace vectoriel suivant :

$$Q_K = \{\mathbf{v}; \mathbf{v} \circ \Psi_k \in \hat{Q}_1^{rot}\}.$$

Les espaces de dimension finie non-conformes que l'on considère sont les suivants et les degrés de liberté sont présentés dans le figure Fig. 6.2 :

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_h &= \{\mathbf{v}_h \in \mathbf{L}^2(\Omega); \mathbf{v}_h|_K \in Q_K \forall K \in \mathcal{K}_h, \frac{1}{|e|} \int_e [\mathbf{v}_h] ds = 0 \forall e \in \varepsilon_h\} \\ Q_h &= \{q_h \in L_0^2(\Omega); q_h|_K \in Q_0 \forall K \in \mathcal{K}_h\} \\ \underline{\mathbf{X}}_h &= \{\underline{\boldsymbol{\theta}}_h \in \underline{\mathbf{X}}; (\underline{\boldsymbol{\theta}}_h)|_K \in \underline{Q}_0 \forall K \in \mathcal{K}_h\}. \end{aligned}$$

Remarque 14. Si on suppose que K est un parallélogramme, alors Ψ_K est une transformation affine, i.e. on peut l'écrire sous la forme $\Psi_K(\hat{\mathbf{x}}) = \underline{B}_K \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{b}_K = \mathbf{x}$, où $\hat{\mathbf{x}}$ représente le vecteur de coordonnées sur \hat{K} et \mathbf{x} celui sur K . On a alors $P_1(K) \subset Q_K$.

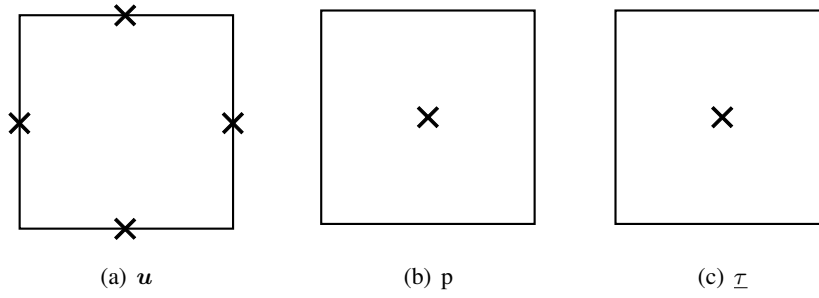


FIG. 6.2 – Degrés de liberté : Rannacher-Turek dG0

Si, de plus, K est un carré dont les cotés de longueur h sont parallèles aux axes Ox et Oy , on a :

$$\underline{B}_K = \begin{pmatrix} h/2 & 0 \\ 0 & h/2 \end{pmatrix}.$$

On obtient donc que $Q_K = \text{vect}\{1, x, y, x^2 - y^2\} = Q_1^{\text{rot}}$.

Ce n'est pas le cas lorsque K est un rectangle de longueur h_1 et de largeur h_2 , $h_1 \neq h_2$. On a dans ce cas :

$$\underline{B}_K = \begin{pmatrix} h_1/2 & 0 \\ 0 & h_2/2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_K = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix},$$

ce qui conduit à $Q_k \neq Q_1^{\text{rot}}$. En effet, en prenant :

$$v = x^2 - y^2 \in \text{vect}\{1, x, y, x^2 - y^2\},$$

on obtient :

$$(v \circ \Psi_K)(\hat{x}, \hat{y}) = \Psi_K^1(\hat{x}, \hat{y})^2 - \Psi_K^2(\hat{x}, \hat{y})^2 = \frac{h_1^2}{4} \hat{x}^2 - \frac{h_2^2}{4} \hat{y}^2 + 2h_1b_1\hat{x} - 2h_2b_2\hat{y} - b_2^2 + b_1^2$$

et donc $v \circ \Psi_K \notin \hat{Q}_1^{\text{rot}}$, c'est à dire, $v \notin Q_K$. On montre de manière similaire, avec $v(x, y) = (\frac{1}{h_1}x)^2 - (\frac{1}{h_2}y)^2$ que $Q_k \not\subset Q_1^{\text{rot}}$.

On rappelle les propriétés d'approximation des espaces \mathbf{V}_h et Q_h . On sait qu'il existe un opérateur d'interpolation noté $i_h \in \mathcal{L}(L_0^2(\Omega); Q_h)$ tel que, pour tout $K \in \mathcal{K}_h$, on ait :

$$\forall q \in P_0, \quad \int_K q(i_h(p) - p) dx = 0. \quad (6.8)$$

D'après [74], il existe un opérateur d'interpolation $\mathbf{I}_h \in \mathcal{L}(H^1(\Omega); \mathbf{V}_h)$ qui vérifie :

$$\forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(K), \quad \forall q_h \in P_0, \quad \int_K q_h \nabla \cdot (\mathbf{I}_h \mathbf{v} - \mathbf{v}) dx = 0, \quad (6.9)$$

$$\forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \quad \forall e \in \varepsilon_h, \quad \forall q_h \in P_0, \quad \int_e q_h [\mathbf{I}_h \mathbf{v}] ds = 0. \quad (6.10)$$

On a de plus les estimations d'erreur d'interpolation suivantes :

$$\forall q \in H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega), \quad \|q - i_h q\|_{0,K} \leq Ch_K |q|_{1,K}, \quad (6.11)$$

$$\forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega), \quad |\mathbf{v} - \mathbf{I}_h \mathbf{v}|_{1,K} \leq Ch_K |\mathbf{v}|_{2,K}. \quad (6.12)$$

Remarque 15. Les degrés de liberté pour l'espace de discrétisation de la vitesse peuvent être choisis d'une manière différente (cf. [74]) :

$$\mathbf{V}_h^{PM} = \{\mathbf{v}_h \in \mathbf{L}^2(\Omega); \mathbf{v}_h|_K \in \mathbf{P}_k, \forall K \in \mathcal{K}_h \text{ et } \forall e \in \varepsilon_h^{int} (\text{resp. } \varepsilon_h^\partial), \\ \mathbf{v}_h|_e \text{ continue (resp. nulle) aux points de Gauss}\}$$

Contrairement au cas triangulaire, les espaces \mathbf{V}_h et \mathbf{V}_h^{PM} ne sont pas équivalents ; l'utilisation de \mathbf{V}_h^{PM} implique de définir l'opérateur d'interpolation sur l'ensemble des fonctions continues, i.e. d'utiliser $H^2(\Omega)$ au lieu de $H^1(\Omega)$.

Remarque 16. Il existe d'autres éléments finis non-conformes sur des quadrilatères pour le problème de Stokes, les premiers à avoir été considérés sont ceux de Han (cf. [42]). Contrairement à l'élément fini de Rannacher-Turek qui comprend 4 degrés de liberté, l'élément fini de Han en a 5. Les 4 premiers degrés de liberté sont les valeurs moyennes de la vitesse sur chacune des quatre arêtes, et le cinquième est sa valeur moyenne sur toute la maille K .

L'espace d'approximation pour la vitesse est défini de la manière suivante :

$$\mathbf{V}_h^{Han} = \{\mathbf{v}_h \in \mathbf{L}^2(\Omega); \mathbf{v}_h|_K \in \text{vect}\{1, x, y, x^2, y^2\}, \forall K \in \mathcal{K}_h, \text{ et } \frac{1}{|e|} \int_e [\mathbf{v}_h] ds = 0, \forall e \in \varepsilon_h\}.$$

6.2.2 Formulation discrète à deux champs du problème de Stokes

La formulation discrète du problème de Stokes (6.2) s'écrit :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (\mathbf{u}_h^*, p_h^*) \in \mathbf{V}_h \times Q_h \text{ tels que :} \\ a_h(\mathbf{u}_h^*, \mathbf{v}_h) + b(p_h^*, \mathbf{v}_h) = l(\mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h \\ b(q_h, \mathbf{u}_h^*) = 0 \quad \forall q_h \in Q_h \end{cases} \quad (6.13)$$

où :

$$\begin{aligned} a_h(\cdot, \cdot) &= a_0(\cdot, \cdot) + \gamma_1 J_1(\cdot, \cdot), \\ a_h(\mathbf{u}_h^*, \mathbf{v}_h) &= 2\mu \sum_{K \in \mathcal{K}_h} \int_K \underline{D}(\mathbf{u}_h^*) : \underline{D}(\mathbf{v}_h) dx, \\ J_1(\mathbf{u}_h^*, \mathbf{v}_h) &= \mu \sum_{e \in \varepsilon_h^{int}} \frac{1}{|e|} \int_e [\pi_1(\mathbf{u}_h^* \cdot \mathbf{n}_e)] \cdot [\pi_1(\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}_e)] ds, \\ b(p_h^*, \mathbf{v}_h) &= - \sum_{K \in \mathcal{K}_h} \int_K p_h^* \text{div} \mathbf{v}_h dx, \quad l(\mathbf{v}_h) = \int_\Omega \mathbf{f} \mathbf{v}_h dx. \end{aligned}$$

Remarque 17. Contrairement au cas triangulaire, $\pi_1[\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}_e]$ n'est pas égal à $\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}_e$, pour tout $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$. En effet, les éléments finis de Rannacher-Turek ainsi que ceux de Han, nous donnent que $\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}_e \in P_2(e)$.

On utilise la semi-norme $[[\cdot]]$ sur $\mathbf{H}_0^1(\Omega) + \mathbf{V}_h$ définie de la manière suivante :

$$[[\mathbf{v}]] = \left(\gamma_1 J_1(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + 2\mu \sum_{K \in \mathcal{K}_h} \|\underline{D}(\mathbf{v})\|_{0,K}^2 \right)^{1/2}.$$

De la même manière que dans la cas triangulaire, on montre que cette application est une norme sur V_h .

Théorème 6.2.1. *Le problème (6.13) admet une unique solution et admet des estimations d'erreur a priori optimales.*

Démonstration. La démonstration est similaire à la démonstration du Théorème 6.1.1 et du Théorème 6.1.3. \square

6.2.3 Formulation discrète à trois champs

On rappelle que la formulation variationnelle à trois champs du problème de Stokes que l'on cherche à discrétiser s'écrit de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\mathbf{u}, p, \underline{\tau}) \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \times L_0^2(\Omega) \times \underline{X} \text{ tels que :} \\ \qquad \qquad \qquad b(p, \mathbf{v}) + c_0(\underline{\tau}, \mathbf{v}) = l(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \\ b(q, \mathbf{u}) = 0 \quad \forall q \in L_0^2(\Omega) \\ 2\mu c_0(\underline{\theta}, \mathbf{u}) - d_0(\underline{\theta}, \underline{\tau}) = 0 \quad \forall \underline{\theta} \in \underline{X} \end{array} \right. \quad (6.14)$$

où les formes bilinéaires supplémentaires $c_0(\cdot, \cdot)$ et $d_0(\cdot, \cdot)$ sont définies par :

$$c_0(\underline{\tau}, \mathbf{v}) = \sum_{K \in \mathcal{K}_h} \int_K \underline{\tau} : \underline{D}(\mathbf{v}) dx, \quad d_0(\underline{\theta}, \underline{\tau}) = \sum_{K \in \mathcal{K}_h} \int_K \underline{\theta} : \underline{\tau} dx.$$

6.2.3.1 Première approche : formulation naturelle

Pour sa discrétisation par éléments finis non-conformes et par analogie au cas triangulaire, il semble naturel de considérer la formulation suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\mathbf{U}_h, P_h, \underline{\tau}_h) \in \mathbf{V}_h \times Q_h \times \underline{X}_h \text{ tels que :} \\ \gamma_1 J_1(\mathbf{U}_h, \mathbf{v}_h) + b(P_h, \mathbf{v}_h) + c_0(\underline{\tau}_h, \mathbf{v}_h) = l(\mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h \\ b(q_h, \mathbf{U}_h) = 0 \quad \forall q_h \in Q_h \\ 2\mu c_0(\underline{\theta}_h, \mathbf{U}_h) - d_0(\underline{\theta}_h, \underline{\tau}_h) = 0 \quad \forall \underline{\theta}_h \in \underline{X}_h \end{array} \right. \quad (6.15)$$

Il est à noter que contrairement au cas triangulaire, cette formulation n'est pas équivalente à la formulation vitesse-pression (6.13). En effet, la troisième équation de (6.15) nous donne :

$$\underline{\tau}_h = 2\mu\pi_0^K \underline{D}(\mathbf{U}_h). \quad (6.16)$$

En remplaçant cette expression de $\underline{\tau}_h$ dans la première équation, on obtient la formulation à deux champs équivalente :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\mathbf{U}_h, P_h) \in \mathbf{V}_h \times Q_h \text{ tels que :} \\ \tilde{a}_h(\mathbf{U}_h, \mathbf{v}_h) + b(P_h, \mathbf{v}_h) = l(\mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h \\ b(q_h, \mathbf{U}_h) = 0 \quad \forall q_h \in Q_h \end{array} \right. \quad (6.17)$$

où

$$\begin{aligned}\tilde{a}_h(\cdot, \cdot) &= \tilde{a}_0(\cdot, \cdot) + \gamma_1 J_1(\cdot, \cdot), \\ \tilde{a}_0(\mathbf{U}_h, \mathbf{v}_h) &= 2\mu \sum_{K \in \mathcal{K}_h} \int_K \pi_0^K \underline{D}(\mathbf{U}_h) : \pi_0^K \underline{D}(\mathbf{v}_h) dx.\end{aligned}$$

La forme bilinéaire $\tilde{a}_0(\cdot, \cdot)$ est donc différente de $a_0(\cdot, \cdot)$ sur \mathbf{V}_h . En effet, toute fonction $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$ peut s'écrire sous la forme :

$$\mathbf{v}_h|_K = \begin{pmatrix} a_1 + b_1x + c_1y + d_1(x^2 - y^2) \\ a_2 + b_2x + c_2y + d_2(x^2 - y^2) \end{pmatrix} \quad (6.18)$$

où a_i, b_i, c_i, d_i ($1 \leq i \leq 2$) sont des constantes numériques. En calculant alors $\underline{D}(\mathbf{v}_h)$ sur K , on obtient la matrice :

$$\begin{pmatrix} b_1 + 2d_1x & \frac{1}{2}(c_1 + b_2) - 2d_1y + 2d_2x \\ \frac{1}{2}(c_1 + b_2) - 2d_1y + 2d_2x & c_2 - 2d_2y \end{pmatrix}$$

qui n'est pas une matrice constante. On a que $\underline{D}(\mathbf{v}_h)|_K$ appartient à $\underline{P}_1(K)$ et non à $\underline{P}_0(K)$, ainsi $\pi_0^K \underline{D}(\mathbf{v}_h) \neq \underline{D}(\mathbf{v}_h)$.

Nous allons montrer que la formulation (6.17) n'est pas consistante et ne permet donc pas d'obtenir de bons résultats d'approximation pour le problème de Stokes. On introduit une nouvelle semi-norme $[[[\cdot]]]$ sur $\mathbf{H}_0^1(\Omega) \times \mathbf{V}_h$:

$$[[[\mathbf{v}]]] = \left(\gamma_1 J_1(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + 2\mu \sum_{k \in \mathcal{K}_h} \|\pi_0^K \underline{D}(\mathbf{v})\|_{0,k}^2 \right)^{1/2}.$$

Nous avons essayé de prouver que cette application est bien une norme sur \mathbf{V}_h . On constate que $[[[\mathbf{v}]]] = 0$ implique que $\int_K \underline{D}(\mathbf{v}) dx = 0$. On prend un vecteur $\mathbf{v} \in \hat{Q}_1^{rot}$ sur la maille de référence \hat{K} . En prenant en compte la contrainte $\int_{\hat{K}} \underline{D}(\hat{\mathbf{v}}) d\hat{x} = 0$, on en déduit seulement que :

$$\underline{D}(\hat{\mathbf{v}}) = \begin{pmatrix} 2d_1\hat{x} & -2d_1\hat{y} + 2d_2\hat{x} \\ -2d_1\hat{y} + 2d_2\hat{x} & -2d_2\hat{y} \end{pmatrix}.$$

On ne peut donc pas en conclure que $\underline{D}(\hat{\mathbf{v}}) = 0$ sur \hat{K} .

Néanmoins, nous avons pu établir que le nombre de contraintes imposées en considérant $[[[\mathbf{v}]]] = 0$, est supérieur au nombre de degrés de liberté de $\mathbf{v} \in \mathbf{V}_h$. On considère pour cela un maillage composé de rectangles avec n intervalles horizontaux et m intervalles verticaux. Une fonction vectorielle, appartenant à Q_K sur chaque maille, est déterminée par $8nm$ paramètres. Le nombre de contraintes imposées dans l'espace \mathbf{V}_h est $2 * (2nm - n - m)$, nombre correspondant au nombre d'arêtes internes, multiplié par le nombre de composantes. Enfin, on impose des conditions de bord de Dirichlet ce qui rajoute $2 * (2n + 2m)$ contraintes. Le nombre de degrés de liberté est donc $4nm - 2n - 2m$.

On calcule maintenant le nombre de contraintes correspondant à $[[[\mathbf{v}]]] = 0$. La condition $\int_K \underline{D}(\mathbf{v}) dx = 0, \forall K \in \mathcal{K}_h$, rajoute $3nm$ contraintes, correspondant au nombre de mailles multiplié par les 3 composantes du tenseur symétrique $\underline{D}(\mathbf{v})$. La condition $J_1(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0$ impose la continuité de $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ aux deux points de Gauss sur chaque arête interne du maillage, et rajoute donc $2 * (2nm - n - m)$ contraintes. On obtient un total de $7nm - 2n - 2m$ contraintes, supérieur au nombre de degré de liberté. Cela ne nous permet pas de conclure que $[[[\mathbf{v}]]]$ est une norme sur \mathbf{V}_h mais cela montre qu'il n'y a pas de contradiction.

On admet donc par la suite que $[[[\cdot]]]$ est une norme sur \mathbf{V}_h . Notons que nous avons obtenu des résultats numériques que nous présenterons dans la suite, ce qui prouve que la matrice du système correspondant est inversible et donc que le problème équivalent (6.17) admet une unique solution.

On s'intéresse alors à l'analyse du problème (6.17). Notre objectif ici est de montrer théoriquement que la formulation (6.17) ne permet pas d'obtenir de bons résultats pour le problème de Stokes. En effet, on montre que l'on ne peut pas borner de manière optimale l'erreur de consistance. On ne détaillera pas ici l'étude de ce problème, mais une analyse complète du problème régularisé sera effectuée dans la section suivante utilisant les mêmes outils que pour ce problème.

Comme par définition de la projection $[[[\mathbf{v}_h]]] \leq [[\mathbf{v}_h]]$, pour tout $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$, la condition inf-sup est satisfaite ; $\tilde{a}_h(\cdot, \cdot)$ est uniformément coercive et continue pour la norme $[[[\cdot]]]$.

On s'intéresse maintenant à l'étude de l'erreur *a priori*. On a alors, en suivant la démonstration classique du second Lemme de Strang (voir aussi [22]) :

$$\begin{aligned} [[[\mathbf{u}_h - \mathbf{v}_h]]]^2 &\leq \tilde{a}_h(\mathbf{u}_h - \mathbf{v}_h, \mathbf{u}_h - \mathbf{v}_h) \\ &= \tilde{a}_h(\mathbf{u} - \mathbf{v}_h, \mathbf{u}_h - \mathbf{v}_h) + l(\mathbf{u}_h - \mathbf{v}_h) - b_h(p_h, \mathbf{u}_h - \mathbf{v}_h) - \tilde{a}_h(\mathbf{u}, \mathbf{u}_h - \mathbf{v}_h) \\ &\leq [[[\mathbf{u} - \mathbf{v}_h]]] \cdot [[[\mathbf{u}_h - \mathbf{v}_h]]] + [[[\mathbf{u}_h - \mathbf{v}_h]]] \cdot \sup_{\mathbf{w}_h \in \mathbf{V}_h} \frac{l(\mathbf{w}_h) - \tilde{a}_h(\mathbf{u}, \mathbf{w}_h) - b_h(p, \mathbf{w}_h)}{[[[\mathbf{w}_h]]]} \\ &\quad + [[[\mathbf{u}_h - \mathbf{v}_h]]] \cdot \sup_{\mathbf{w}_h \in \mathbf{V}_h} \frac{b_h(p, \mathbf{w}_h) - b_h(p_h, \mathbf{w}_h)}{[[[\mathbf{w}_h]]]} \end{aligned}$$

et donc

$$[[[\mathbf{u}_h - \mathbf{v}_h]]] \leq [[[\mathbf{u} - \mathbf{v}_h]]] + \sup_{\mathbf{w}_h \in \mathbf{V}_h} \frac{l(\mathbf{w}_h) - \tilde{a}_h(\mathbf{u}, \mathbf{w}_h) - b_h(p, \mathbf{w}_h)}{[[[\mathbf{w}_h]]]} + \sup_{\mathbf{w}_h \in \mathbf{V}_h} \frac{b_h(p, \mathbf{w}_h) - b_h(p_h, \mathbf{w}_h)}{[[[\mathbf{w}_h]]]}$$

On obtient de manière immédiate que :

$$\sup_{\mathbf{w}_h \in \mathbf{V}_h} \frac{b_h(p, \mathbf{w}_h) - b_h(p_h, \mathbf{w}_h)}{[[[\mathbf{w}_h]]]} \leq \|p - p_h\|_{0, \Omega}$$

Ce terme pourra donc être majorer à l'aide de la condition inf-sup.

On doit donc majorer le terme de consistance :

$$\frac{l(\mathbf{w}_h) - \tilde{a}_h(\mathbf{u}, \mathbf{w}_h) - b_h(p, \mathbf{w}_h)}{[[[\mathbf{w}_h]]]}.$$

Or, on peut écrire que :

$$\tilde{a}_h(\mathbf{u}, \mathbf{w}_h) = 2\mu \sum_{K \in \mathcal{K}_h} \int_K \underline{D}(\mathbf{u}) : \underline{D}(\mathbf{w}_h) dx + 2\mu \sum_{K \in \mathcal{K}} \int_K \underline{D}(\mathbf{u}) : (\pi_0^K \underline{D}(\mathbf{w}_h) - \underline{D}(\mathbf{w}_h)) dx$$

On note que par définition de la projection on a :

$$\begin{aligned}
\int_K \underline{D}(\mathbf{u}) : (\pi_0^K \underline{D}(\mathbf{w}_h) - \underline{D}(\mathbf{w}_h)) dx &= \int_K \pi_0^K \underline{D}(\mathbf{u}) : \pi_0^K \underline{D}(\mathbf{w}_h) dx - \int_K \underline{D}(\mathbf{u}) : \underline{D}(\mathbf{w}_h) dx \\
&= \int_K \pi_0^K \underline{D}(\mathbf{u}) : \underline{D}(\mathbf{w}_h) dx - \int_K \underline{D}(\mathbf{u}) : \underline{D}(\mathbf{w}_h) dx \\
&= \int_K \pi_0^K (\underline{D}(\mathbf{u}) - \underline{D}(\mathbf{u})) : \underline{D}(\mathbf{w}_h) dx
\end{aligned}$$

Après intégration par parties, et en utilisant le problème de Stokes continu, il nous reste à majorer :

$$\sup_{\mathbf{w}_h \in \mathbf{V}_h} \frac{\Sigma_u(\mathbf{u}, \mathbf{w}_h) + \Sigma_p(\mathbf{w}_h, p) + 2\mu \sum_{K \in \mathcal{K}_h} \int_K \underline{D}(\mathbf{u}) : (\pi_0^K \underline{D}(\mathbf{w}_h) - \underline{D}(\mathbf{w}_h)) dx}{[[[\mathbf{w}_h]]]}$$

avec

$$\begin{aligned}
\Sigma_u(\mathbf{u}, \mathbf{w}_h) &= 2\mu \sum_{e \in \varepsilon_h} \int_e \underline{D}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}_e[\mathbf{w}_h] ds \\
\Sigma_p(\mathbf{w}_h, p) &= \sum_{e \in \varepsilon_h} \int_e p[\mathbf{w}_h] \cdot \mathbf{n}_e ds
\end{aligned}$$

Comme on le montrera dans la section suivante, les deux premiers termes peuvent être bornés de la manière suivante :

$$\left| 2\mu \sum_{e \in \varepsilon_h} \int_e \underline{D}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}_e[\mathbf{w}_h] ds + \sum_{e \in \varepsilon_h} \int_e p[\mathbf{w}_h] \cdot \mathbf{n}_e ds \right| \leq ch(|\mathbf{u}|_{2,\Omega} + |p|_{1,\Omega}) |\mathbf{w}_h|_{1,h}$$

tandis que pour le dernier terme, on a :

$$\left| 2\mu \sum_{K \in \mathcal{K}_h} \int_K \underline{D}(\mathbf{u}) : (\pi_0^K \underline{D}(\mathbf{w}_h) - \underline{D}(\mathbf{w}_h)) dx \right| \leq ch |\mathbf{u}|_{2,\Omega} \|\underline{D}(\mathbf{w}_h)\|_{0,h}$$

Or, il n'existe pas deux constantes c_1 et c_2 telles que :

$$\begin{aligned}
|\mathbf{w}_h|_{1,h} &\leq c_1 [[[\mathbf{w}_h]]] \\
\|\underline{D}(\mathbf{w}_h)\|_{0,\Omega} &\leq c_2 [[[\mathbf{w}_h]]].
\end{aligned}$$

On ne peut donc pas obtenir des estimations d'erreur *a priori* optimales.

Afin d'illustrer ce problème de consistance, on présente les résultats obtenus pour le cas-test de la cavité entraînée. La figure Fig. 6.3 montre les résultats obtenus avec des éléments finis de Crouzeix-Raviart sur des triangles (à titre de solution de référence), à gauche on montre ceux obtenus à l'aide de la formulation (6.15) pour $\mu = 100$ et $\gamma_1 = 10$. On constate donc que cette dernière formulation ne permet pas d'obtenir une bonne approximation du problème de Stokes.

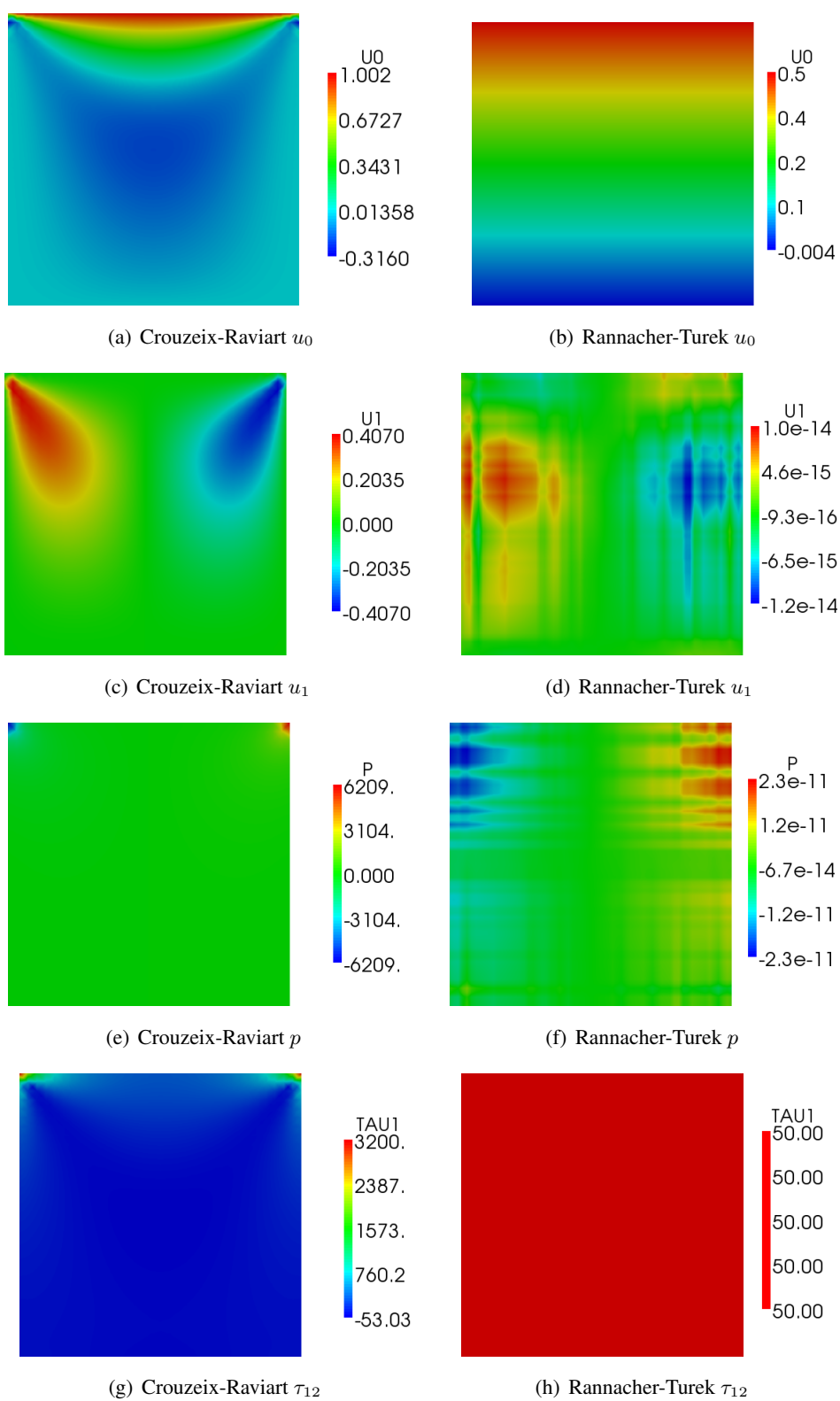


FIG. 6.3 – Cavité entraînée : comparaison entre la formulation (6.6) (à droite) et la formulation (6.15) (à gauche)

6.2.3.2 Deuxième approche : problème régularisé

Formulation discrète

Nous avons vu dans la partie précédente que la formulation à trois champs (6.15) n'est pas consistante et n'est donc pas une bonne approximation du problème de Stokes. Pour pallier cet inconvénient, nous avons choisi de rajouter un terme de stabilisation. La formulation correspondante est la suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\mathbf{u}_h, p_h, \underline{\tau}_h) \in \mathbf{V}_h \times Q_h \times \underline{X}_h \text{ tels que :} \\ \gamma_1 J_1(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + \delta R(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b(p_h, \mathbf{v}_h) + c_0(\underline{\tau}_h, \mathbf{v}_h) = l(\mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h \\ b(q_h, \mathbf{u}_h) = 0 \quad \forall q_h \in Q_h \\ 2\mu c_0(\underline{\theta}_h, \mathbf{u}_h) - d_0(\underline{\theta}_h, \underline{\tau}_h) = 0 \quad \forall \underline{\theta}_h \in \underline{X}_h. \end{array} \right. \quad (6.19)$$

Le terme de régularisation $R(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h)$ est défini de la manière suivante :

$$R(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = \mu \sum_{K \in \mathcal{K}_h} \int_K (\underline{D}(\mathbf{u}_h) - \pi_0^K \underline{D}(\mathbf{u}_h)) : \underline{D}(\mathbf{v}_h) dx, \quad (6.20)$$

et, par définition de la projection, est aussi égal à :

$$R(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = \mu \sum_{K \in \mathcal{K}_h} \int_K \underline{D}(\mathbf{u}_h) : \underline{D}(\mathbf{v}_h) dx - \mu \sum_{K \in \mathcal{K}_h} \int_K \pi_0^K \underline{D}(\mathbf{u}_h) : \pi_0^K \underline{D}(\mathbf{u}_h) dx. \quad (6.21)$$

Ci-dessus, $\delta > 0$ est un paramètre de régularisation.

En remplaçant l'expression (6.16) de $\underline{\tau}_h$ dans la première équation, on obtient le problème discret à deux champs équivalent suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\mathbf{u}_h, p_h) \in \mathbf{V}_h \times Q_h \text{ tels que :} \\ a_h^\delta(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b(p_h, \mathbf{v}_h) = l(\mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h \\ b(q_h, \mathbf{u}_h) = 0 \quad \forall q_h \in Q_h \end{array} \right. \quad (6.22)$$

où

$$a_h^\delta(\cdot, \cdot) = \tilde{a}_0(\cdot, \cdot) + \gamma_1 J_1(\cdot, \cdot) + \delta R(\cdot, \cdot).$$

Remarque 18. En choisissant $\delta = 2$, le problème (6.22) est équivalent au problème initial à deux champs (6.13).

Lien avec la formulation à 4 champs

Cette formulation à trois champs régularisée peut être rapprochée de formulations à 4 champs utilisées pour traiter des écoulements de liquides viscoélastiques. La méthode EVSS ("elastic-viscous stress split") introduite par Rajagopalan *et al.* dans [73] et la méthode DEVSS ("discrete elastic-viscous stress split") de Guénette et Fortin, introduite dans [39], sont basées sur le rajout du tenseur des vitesses de déformation $\underline{D}(\mathbf{u})$ comme une quatrième inconnue.

Dans la suite, on présente brièvement ces méthodes dans le cas newtonien. On rappelle d'abord la formulation classique à trois champs du problème de Stokes continu :

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}\underline{\tau} + \nabla p &= \mathbf{f} & \text{dans } \Omega \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 & \text{dans } \Omega \\ \underline{\tau} &= 2\mu\underline{D}(\mathbf{u}) & \text{dans } \Omega \end{aligned}$$

La méthode EVSS est basée sur un changement de variable : $\underline{s} = \underline{\tau} - 2\mu\underline{D}(\mathbf{u})$ et le rajout dans la formulation d'une quatrième inconnue définie par $\underline{d} = \underline{D}(\mathbf{u})$. La motivation de ce changement de variable provient du fait que pour les modèles viscoélastiques (notamment le modèle PTT), les équations du moment et de continuité ne sont pas bien posées si $\underline{\tau}$ est fixé. À partir de là, la quatrième inconnue est rajoutée pour obtenir la coercivité du problème en terme de vitesse-pression. Le problème de Stokes s'écrit alors de la manière suivante :

$$\begin{aligned} -2\mu\operatorname{div}\underline{D}(\mathbf{u}) + \nabla p &= \mathbf{f} + \operatorname{div}\underline{s} & \text{dans } \Omega \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 & \text{dans } \Omega \\ \underline{s} &= 0 & \text{dans } \Omega \\ \underline{d} &= \underline{D}(\mathbf{u}) & \text{dans } \Omega \end{aligned} \tag{6.23}$$

Compte tenu du fait que le changement de variable $\underline{s} = \underline{\tau} - 2\mu\underline{D}(\mathbf{u})$ ne peut être effectué pour toutes les classes de modèles viscoélastiques, Guénette et Fortin ont rajouté dans les deux membres de l'équation du mouvement le terme $-2\alpha\operatorname{div}\underline{D}(\mathbf{u})$. Cela correspond à effectuer un nouveau changement de variable $\underline{s} = \underline{\tau} - 2\alpha\underline{D}(\mathbf{u})$ où α est une constante positive. On obtient la formulation en $(\mathbf{u}, p, \underline{\tau}, \underline{d})$ suivante :

$$\begin{aligned} -2\alpha\operatorname{div}\underline{D}(\mathbf{u}) + \nabla p &= \mathbf{f} + \operatorname{div}\underline{\tau} - 2\alpha\operatorname{div}\underline{d} & \text{dans } \Omega \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 & \text{dans } \Omega \\ \underline{\tau} &= 2\mu\underline{D}(\mathbf{u}) & \text{dans } \Omega \\ \underline{d} &= \underline{D}(\mathbf{u}) & \text{dans } \Omega \end{aligned} \tag{6.24}$$

Remarque 19. Dans [73] et [39], la loi constitutive considérée est non-linéaire de la forme :

$$f(\underline{\tau}) + \lambda\underline{\tau}^\nabla + \underline{\tau} = 2\eta\underline{D}(\mathbf{u}).$$

avec $f(\underline{\tau})$ une fonction non-linéaire. En effectuant la changement de variable $\underline{s} = \underline{\tau} - 2\mu\underline{D}(\mathbf{u})$ la troisième équation de s'écrit alors en terme de \underline{s} :

$$f(\underline{s} - 2\mu\underline{D}(\mathbf{u})) + \lambda\underline{s}^\nabla = -2\mu\lambda\underline{d}^\nabla$$

Les problèmes non-linéaires sont ensuite traités par une méthode de point fixe, ce qui justifie le passage des inconnues au second membre.

On remarque qu'au niveau discret, la formulation (6.24) est équivalente à la formulation régularisée (6.19). La formulation discrète associée à (6.24), en utilisant les mêmes espaces d'éléments

finis que pour (6.19), s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\mathbf{u}_h, p_h, \underline{\tau}_h, \underline{d}_h) \in \mathbf{V}_h \times Q_h \times \underline{X}_h \times \underline{X}_h \text{ tels que :} \\ \gamma_1 J_1(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + \sum_{K \in \mathcal{K}_h} \int_K 2\alpha \underline{D}(\mathbf{u}_h) : \underline{D}(\mathbf{v}_h) dx - \sum_{K \in \mathcal{K}_h} \int_K p_h \nabla \cdot \mathbf{v}_h dx \\ \quad = \sum_{K \in \mathcal{K}_h} \int_K (2\alpha \underline{d}_h - \underline{\tau}_h) : \underline{D}(\mathbf{v}_h) dx + l(\mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h \\ \sum_{K \in \mathcal{K}_h} \int_K q_h \nabla \cdot \mathbf{u}_h dx = 0 \quad \forall q_h \in Q_h \\ \sum_{K \in \mathcal{K}_h} \int_K \underline{\tau}_h : \underline{\theta}_h dx = 2\mu \sum_{K \in \mathcal{K}_h} \int_K \underline{D}(\mathbf{u}_h) : \underline{\theta}_h dx \quad \forall \underline{\theta}_h \in \underline{X}_h \\ \sum_{K \in \mathcal{K}_h} \int_K \underline{d}_h : \underline{\theta}_h dx = \sum_{K \in \mathcal{K}_h} \int_K \underline{D}(\mathbf{u}_h) : \underline{\theta}_h dx \quad \forall \underline{\theta}_h \in \underline{X}_h \end{array} \right.$$

La quatrième équation nous donne $\underline{d}_h = \pi_0^K \underline{D}(\mathbf{u}_h)$. En remplaçant ces expressions dans la première équation on obtient alors :

$$\begin{aligned} & \gamma_1 J_1(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + \sum_{K \in \mathcal{K}_h} \int_K 2\alpha (\underline{D}(\mathbf{u}_h) - \pi_0^K \underline{D}(\mathbf{u}_h)) : \underline{D}(\mathbf{v}_h) dx - \sum_{K \in \mathcal{K}_h} \int_K p_h \nabla \cdot \mathbf{v}_h dx \\ & = \sum_{K \in \mathcal{K}_h} \int_K -\underline{\tau}_h : \underline{D}(\mathbf{v}_h) dx + l(\mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h. \end{aligned}$$

En prenant $\delta\mu = 2\alpha$, on retrouve notre formulation régularisée (6.19).

Existence et unicité de la solution du problème régularisé

On s'intéresse maintenant à l'existence et à l'unicité de la solution du problème (6.22) par rapport à la norme énergie $[[\cdot]]$ définie par (6.2.2) .

Théorème 6.2.2 (Coercivité de la forme $a_h^\delta(\cdot, \cdot)$ sur $Ker_h b$).

Il existe une constante α indépendante de h et de μ , telle que :

$$\forall \mathbf{v}_h \in Ker_h b, a_h^\delta(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) \geq \alpha [[\mathbf{v}_h]]^2. \quad (6.25)$$

De plus, si $\delta \geq 2$, α est aussi indépendante de δ .

Démonstration. On a par définition, $\forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$

$$a_h^\delta(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) = \gamma_1 J_1(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) + \delta\mu \sum_{K \in \mathcal{K}_h} \|\underline{D}(\mathbf{v}_h)\|_{0,K}^2 + (2-\delta)\mu \sum_{K \in \mathcal{K}_h} \|\pi_0^K \underline{D}(\mathbf{v}_h)\|_{0,K}^2.$$

On distingue alors deux cas.

Si $\delta \geq 2$, $(2-\delta) \leq 0$ et à l'aide de la continuité de l'opérateur de projection π_0^K , on obtient :

$$(2-\delta)\mu \sum_{K \in \mathcal{K}_h} \int_K \pi_0^K \underline{D}(\mathbf{v}_h) : \pi_0^K \underline{D}(\mathbf{v}_h) dx \geq (2-\delta)\mu \sum_{K \in \mathcal{K}_h} \int_K \underline{D}(\mathbf{v}_h) : \underline{D}(\mathbf{v}_h) dx.$$

Il s'en suit que

$$a_h^\delta(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) \geq \gamma_1 J_1(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) + 2\mu \|\underline{D}(\mathbf{v}_h)\|_{0,h}^2.$$

On en déduit donc la coercivité de $a_h^\delta(\cdot, \cdot)$ dans \mathbf{V}_h . De plus, la constante de coercivité est égale à 1.

Si $\delta < 2$, on obtient

$$\begin{aligned} a_h^\delta(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) &\geq \gamma_1 J_1(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) + \delta\mu \sum_{K \in \mathcal{K}_h} \|\underline{D}(\mathbf{v}_h)\|_{0,K}^2 \\ &\geq \min(1, \frac{\delta}{2}) (\gamma_1 J_1(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) + 2\mu \|\underline{D}(\mathbf{v}_h)\|_{0,h}^2) \end{aligned}$$

On en déduit la coercivité de $a_h^\delta(\cdot, \cdot)$ dans \mathbf{V}_h , avec une constante de coercivité qui dépend dans ce cas de δ . \square

Lemme 6.2.1 (Condition inf-sup).

Il existe une constante $\beta > 0$, indépendante de h et de μ , telle que

$$\inf_{p_h \in Q_h} \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h} \frac{b(p_h, \mathbf{v}_h)}{\|p_h\|_{0,\Omega} \|\mathbf{v}_h\|} \geq \frac{\beta}{\sqrt{\mu}} \quad (6.26)$$

Démonstration. On suit le même raisonnement que dans le Théorème 6.1.1. \square

Lemme 6.2.2 (Continuité de $a_h^\delta(\cdot, \cdot)$). Il existe une constante c indépendante de h et de μ telle que $\forall \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$:

$$|a_h^\delta(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h)| \leq c \|\mathbf{u}_h\| \|\mathbf{v}_h\|.$$

Si $\delta \leq 2$, alors $c = 1$.

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned} a_h^\delta(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) &\leq \delta\mu \sum_{K \in \mathcal{K}_h} \left| \int_K \underline{D}(\mathbf{u}_h) : \underline{D}(\mathbf{v}_h) dx \right| + (2 - \delta)\mu \sum_{K \in \mathcal{K}_h} \left| \int_K \pi_0^K \underline{D}(\mathbf{u}_h) : \underline{D}(\mathbf{v}_h) dx \right| \\ &\quad + \gamma_1 |J_1(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h)|. \end{aligned}$$

En utilisant la continuité $L^2(K)$ de l'opérateur de projection π_0^K et en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on obtient que :

$$\begin{aligned} |a_h^\delta(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h)| &\leq \delta\mu \sum_{K \in \mathcal{K}_h} \|\underline{D}(\mathbf{u}_h)\|_{0,K} \|\underline{D}(\mathbf{v}_h)\|_{0,K} + |2 - \delta|\mu \sum_{K \in \mathcal{K}_h} \|\underline{D}(\mathbf{u}_h)\|_{0,K} \|\underline{D}(\mathbf{v}_h)\|_{0,K} \\ &\quad + \gamma_1 J_1(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h). \end{aligned}$$

Si $\delta \leq 2$, alors on obtient :

$$\begin{aligned} |a_h^\delta(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h)| &\leq 2\mu \sum_{K \in \mathcal{K}_h} \|\underline{D}(\mathbf{u}_h)\|_{0,K} \|\underline{D}(\mathbf{v}_h)\|_{0,K} + \gamma_1 J_1(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) \\ &\leq \|\mathbf{u}_h\| \|\mathbf{v}_h\|. \end{aligned}$$

Si $\delta > 2$ alors la constante dépend de δ . \square

La continuité des formes $b(\cdot, \cdot)$ et $l(\cdot)$ est classique.

Estimations d'erreur *a priori*

Lemme 6.2.3.

La solution (\mathbf{u}, p) du problème de Stokes continu vérifie :

$$\begin{aligned} a_h^\delta(\mathbf{u}, \mathbf{v}_h) + b(p, \mathbf{v}_h) &= l(\mathbf{v}_h) - \sum_{e \in \varepsilon_h} \int_e p[\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}] ds + 2\mu \sum_{e \in \varepsilon_h} \int_e \underline{D}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}[\mathbf{v}_h] ds \\ &+ (2 - \delta)\mu \sum_{K \in \mathcal{K}_h} \int_K (\pi_0^K \underline{D}(\mathbf{u}) - \underline{D}(\mathbf{u})) : \underline{D}(\mathbf{v}_h) dx, \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h \\ b(q_h, \mathbf{u}) &= 0, \quad \forall q_h \in Q_h. \end{aligned}$$

Démonstration. Soit (\mathbf{u}, p) la solution du problème de Stokes continu, on a alors :

$$a_h^\delta(\mathbf{u}, \mathbf{v}_h) = \delta\mu \sum_{K \in \mathcal{K}_h} \int_K \underline{D}(\mathbf{u}) : \underline{D}(\mathbf{v}_h) dx + (2 - \delta)\mu \sum_{K \in \mathcal{K}_h} \int_K \pi_0^K \underline{D}(\mathbf{u}) : \underline{D}(\mathbf{v}_h) dx$$

En effet, on a par définition de la projection π_1 :

$$\int_e [\pi_1(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_e)] \cdot [\pi_1(\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}_e)] ds = \int_e [\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_e] \cdot [\pi_1(\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}_e)] ds.$$

Or, \mathbf{u} est continue à travers chaque arête du maillage et s'annule au bord, donc $[\mathbf{u}] = 0$ à travers toutes les arêtes du maillage. Le terme $J_1(\mathbf{u}, \mathbf{v}_h)$ est donc nul. On peut alors écrire que :

$$a_h^\delta(\mathbf{u}, \mathbf{v}_h) = 2\mu \sum_{K \in \mathcal{K}_h} \int_K \underline{D}(\mathbf{u}) : \underline{D}(\mathbf{v}_h) dx + (2 - \delta)\mu \sum_{K \in \mathcal{K}_h} \int_K (\pi_0^K \underline{D}(\mathbf{u}) - \underline{D}(\mathbf{u})) : \underline{D}(\mathbf{v}_h) dx,$$

et donc :

$$\begin{aligned} a_h^\delta(\mathbf{u}, \mathbf{v}_h) + b(p, \mathbf{v}_h) &= 2\mu \sum_{K \in \mathcal{K}_h} \int_K \underline{D}(\mathbf{u}) : \underline{D}(\mathbf{v}_h) dx + \sum_{K \in \mathcal{K}_h} \int_K p \nabla \cdot \mathbf{v}_h dx \\ &+ (2 - \delta)\mu \sum_{K \in \mathcal{K}_h} \int_K (\pi_0^K \underline{D}(\mathbf{u}) - \underline{D}(\mathbf{u})) : \underline{D}(\mathbf{v}_h) dx. \end{aligned}$$

Après intégration par parties, on obtient :

$$\begin{aligned} a_h^\delta(\mathbf{u}, \mathbf{v}_h) + b(p, \mathbf{v}_h) &= \sum_{K \in \mathcal{K}_h} \int_K (-2\mu \operatorname{div} \cdot \underline{D}(\mathbf{u}) + \nabla p) \mathbf{v}_h dx - \sum_{K \in \mathcal{K}_h} \int_{\partial K} p \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n} ds \\ &+ 2\mu \sum_{K \in \mathcal{K}_h} \int_{\partial K} \underline{D}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} \mathbf{v}_h ds \\ &+ (2 - \delta)\mu \sum_{K \in \mathcal{K}_h} \int_K (\pi_0^K \underline{D}(\mathbf{u}) - \underline{D}(\mathbf{u})) : \underline{D}(\mathbf{v}_h) dx. \end{aligned}$$

On en déduit donc :

$$\begin{aligned} a_h^\delta(\mathbf{u}, \mathbf{v}_h) + b(p, \mathbf{v}_h) &= l(\mathbf{v}_h) - \sum_{e \in \varepsilon_h} \int_e p[\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}] ds + 2\mu \sum_{e \in \varepsilon_h} \int_e \underline{D}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}[\mathbf{v}_h] ds \\ &+ (2 - \delta)\mu \sum_{K \in \mathcal{K}_h} \int_K (\pi_0^K \underline{D}(\mathbf{u}) - \underline{D}(\mathbf{u})) : \underline{D}(\mathbf{v}_h) dx. \end{aligned}$$

La seconde équation est évidente, $\operatorname{div} \mathbf{u}$ étant nul sur chaque maille K . □

Remarque 20. Les termes $-\sum_{e \in \varepsilon_h} \int_e p[\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}] ds$ et $2\mu \sum_{e \in \varepsilon_h} \int_e \underline{D}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}[\mathbf{v}_h] ds$ traduisent l'erreur de consistance due au fait que la méthode n'est pas conforme, i.e. $\mathbf{V}_h \not\subset \mathbf{H}^1(\Omega)$.

Le terme $(2 - \delta)\mu \sum_{K \in \mathcal{K}_h} \int_K (\pi_0^K \underline{D}(\mathbf{u}) - \underline{D}(\mathbf{u})) : \underline{D}(\mathbf{v}_h) dx$ traduit l'erreur de consistance due à l'ajout du terme de régularisation dans la formulation discrète.

Dans la suite, on notera :

$$\begin{aligned} \Sigma_p(\mathbf{v}_h, p) &= \sum_{e \in \varepsilon_h} \int_e p[\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}] ds, \\ \Sigma_u(\mathbf{u}, \mathbf{v}_h) &= 2\mu \sum_{e \in \varepsilon_h} \int_e \underline{D}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}[\mathbf{v}_h] ds, \\ \varepsilon(\mathbf{u}, \mathbf{v}_h) &= (2 - \delta)\mu \sum_{K \in \mathcal{K}_h} \int_K (\pi_0^K \underline{D}(\mathbf{u}) - \underline{D}(\mathbf{u})) : \underline{D}(\mathbf{v}_h) dx. \end{aligned}$$

Afin d'établir des estimations d'erreur *a priori*, il est utile d'introduire le résultat préliminaire suivant :

Lemme 6.2.4. Soit $(\mathbf{u}, p) \in \mathbf{H}^2(\Omega) \times H^1(\Omega)$ la solution du problème de Stokes continu, alors il existe une constante c indépendante de h et de μ telle que :

$$\begin{aligned} \sum_{e \in \varepsilon_h} \int_e p[\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}] ds &\leq \frac{c}{\sqrt{\mu}} h |p|_{1\Omega} [[\mathbf{v}_h]] \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h, \\ 2\mu \sum_{e \in \varepsilon_h} \int_e \underline{D}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}[\mathbf{v}_h] ds &\leq c\sqrt{\mu} h |\mathbf{u}|_{2,\Omega} [[\mathbf{v}_h]] \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h. \end{aligned}$$

Démonstration. Les termes $\Sigma_u(\mathbf{u}, \mathbf{v}_h)$ et $\Sigma_p(\mathbf{v}_h, p)$ sont traités de manière analogue que dans [74]. On a :

$$\begin{aligned} \Sigma_u(\mathbf{u}, \mathbf{v}_h) &= 2\mu \sum_{e \in \varepsilon_h} \int_e (\underline{D}(\mathbf{u}) - \pi_0^e \underline{D}(\mathbf{u})) \cdot \mathbf{n}[\mathbf{v}_h - \pi_0^e \mathbf{v}_h] ds \\ &+ 2\mu \sum_{e \in \varepsilon_h} \int_e \pi_0^e \underline{D}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}[\mathbf{v}_h] ds + 2\mu \sum_{e \in \varepsilon_h} \int_e (\pi_0^e \underline{D}(\mathbf{u}) - \underline{D}(\mathbf{u})) \cdot \mathbf{n}[\pi_0^e \mathbf{v}_h] ds, \end{aligned}$$

ce qui nous donne finalement, par définition de la projection sur $P_0(e)$ et de l'espace discret \mathbf{V}_h (i.e. $\int_e [\mathbf{v}_h] = 0$) :

$$\Sigma_u(\mathbf{u}, \mathbf{v}_h) = 2\mu \sum_{e \in \varepsilon_h} \int_e (\underline{D}(\mathbf{u}) - \pi_0^e \underline{D}(\mathbf{u})) \cdot \mathbf{n}[\mathbf{v}_h - \pi_0^e \mathbf{v}_h] ds.$$

On applique alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\Sigma_u(\mathbf{u}, \mathbf{v}_h) \leq 2\mu \sum_{e \in \varepsilon_h} \|(\underline{D}(\mathbf{u}) - \pi_0^e \underline{D}(\mathbf{u})) \cdot \mathbf{n}\|_{0,e} \|\mathbf{v}_h - \pi_0^e \mathbf{v}_h\|_{0,e}.$$

Or, en appliquant une inégalité de trace, on obtient

$$\begin{aligned} \|\underline{D}(\mathbf{u}) - \pi_0^e \underline{D}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}\|_{0,e} &\leq c\sqrt{h} \left(\frac{1}{h} \|\underline{D}(\mathbf{u}) - \pi_0^K \underline{D}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}\|_{0,K} + |(\underline{D}(\mathbf{u}) - \pi_0^K \underline{D}(\mathbf{u})) \cdot \mathbf{n}|_{1,K} \right) \\ &\leq c\sqrt{h} \left(\frac{1}{h} \|(\underline{D}(\mathbf{u}) - \pi_0^K \underline{D}(\mathbf{u})) \cdot \mathbf{n}\|_{0,K} + |\underline{D}(\mathbf{u})|_{1,K} \right) \\ &\leq c\sqrt{h} |\underline{D}(\mathbf{u})|_{1,K}. \end{aligned}$$

Soit maintenant $\{e\} = K^1 \cap K^2$:

$$\begin{aligned} \|[\mathbf{v}_h - \pi_0^e \mathbf{v}_h]\|_{0,e} &\leq c\sqrt{h} \left(\frac{1}{h} \|\mathbf{v}_h - \pi_0^{K^1} \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}\|_{0,K^1} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{h} \|\mathbf{v}_h - \pi_0^{K^2} \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}\|_{0,K^2} + |\mathbf{v}_h|_{1,K^1} + |\mathbf{v}_h|_{1,K^2} \right) \\ &\leq c\sqrt{h} (2|\mathbf{v}_h|_{1,K^1} + 2|\mathbf{v}_h|_{1,K^2}); \end{aligned}$$

On obtient le résultat souhaité en utilisant l'inégalité de Korn discrète pour les espaces discontinus :

$$|\mathbf{v}|_{1,h} \leq c \left(\sum_{K \in \mathcal{K}_h} \|\underline{D}(\mathbf{v})\|_{0,K}^2 + \frac{1}{\mu} J_1(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \right)^{1/2}, \quad (6.27)$$

d'où :

$$\sum_{e \in \mathcal{E}_h} \|[\mathbf{v}_h - \pi_0^e \mathbf{v}_h]\|_{0,e} \leq c\sqrt{h} |\mathbf{v}_h|_{1,h} \leq \sqrt{h} \frac{1}{\sqrt{\mu}} [[\mathbf{v}_h]].$$

Et donc finalement :

$$\Sigma_u(\mathbf{u}, \mathbf{v}_h) \leq ch\sqrt{\mu} |\mathbf{u}|_{2,\Omega} [[\mathbf{v}_h]]. \quad (6.28)$$

On parcourt les mêmes étapes pour traiter le terme $\Sigma_p(\mathbf{v}_h, p)$. On a :

$$\begin{aligned} \Sigma_p(\mathbf{v}_h, p) &= \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e (p - \pi_0^e p) [(\mathbf{v}_h - \pi_0^e \mathbf{v}_h) \cdot \mathbf{n}] ds \\ &\leq \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \|(p - \pi_0^e p)\|_{0,e} \|[(\mathbf{v}_h - \pi_0^e \mathbf{v}_h) \cdot \mathbf{n}]\|_{0,e}. \end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de trace, on en déduit :

$$\|(p - \pi_0^e p)\|_{0,e} \leq c\sqrt{h} |p|_{1,\Omega}.$$

En combinant, l'inégalité de trace et l'inégalité de Korn (6.27), on obtient

$$\sum_{e \in \mathcal{E}_h} \|[(\mathbf{v}_h - \pi_0^e \mathbf{v}_h) \cdot \mathbf{n}]\|_{0,e} \leq \sqrt{h} \frac{1}{\sqrt{\mu}} [[\mathbf{v}_h]].$$

Ce qui nous permet de conclure :

$$\Sigma_p(\mathbf{v}_h, p) \leq \frac{c}{\sqrt{\mu}} h |p|_{1,\Omega} [[\mathbf{v}_h]]. \quad (6.29)$$

□

Théorème 6.2.3 (Estimations d'erreur *a priori*).

Soit $(\mathbf{u}, p) \in \mathbf{H}^2(\Omega) \times H^1(\Omega)$ la solution du problème de Stokes continu. Alors, la solution (\mathbf{u}_h, p_h) du problème discret régularisé (6.22) satisfait l'estimation d'erreur suivante :

$$[[\mathbf{u} - \mathbf{u}_h]] \leq ch(\sqrt{\mu}|\mathbf{u}|_{2,\Omega} + \frac{1}{\sqrt{\mu}}|p|_{1,\Omega}), \quad (6.30)$$

$$\|p - p_h\|_{0,\Omega} \leq ch(\mu|\mathbf{u}|_{2,\Omega} + |p|_{1,\Omega}), \quad (6.31)$$

avec c une constante indépendante de h et de μ .

Démonstration. D'après le Lemme 6.2.3, on a :

$$a_h^\delta(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = a_h^\delta(\mathbf{u}, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}_h, p - p_h) + \Sigma_p(\mathbf{v}_h, p) - \Sigma_u(\mathbf{u}, \mathbf{v}_h) - \varepsilon(\mathbf{u}, \mathbf{v}_h).$$

Soit $V_h^0 = \text{Ker}_h b = \{\mathbf{r}_h \in \mathbf{V}_h, \forall q_h \in Q_h, b(\mathbf{r}_h, q_h) = 0\}$.

Soit $\mathbf{I}_h \mathbf{u}$ l'opérateur d'interpolation de Rannacher-Turek défini précédemment, on a $\mathbf{I}_h \mathbf{u} \in \mathbf{V}_h$ et on peut donc écrire :

$$\begin{aligned} a_h^\delta(\mathbf{u}_h - \mathbf{I}_h \mathbf{u}, \mathbf{v}_h) &= a_h^\delta(\mathbf{u} - \mathbf{I}_h \mathbf{u}, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}_h, p - p_h) \\ &+ \Sigma_p(\mathbf{v}_h, p) - \Sigma_u(\mathbf{u}, \mathbf{v}_h) - \varepsilon(\mathbf{u}, \mathbf{v}_h) \end{aligned}$$

On prend maintenant $\mathbf{v}_h = \mathbf{u}_h - \mathbf{I}_h \mathbf{u}$, et d'après le Théorème 6.2.2, la coercivité de la forme $a_h^\delta(\cdot, \cdot)$ nous donne :

$$\begin{aligned} \alpha[[\mathbf{u}_h - \mathbf{I}_h \mathbf{u}]]^2 &\leq a_h^\delta(\mathbf{u} - \mathbf{I}_h \mathbf{u}, \mathbf{u}_h - \mathbf{I}_h \mathbf{u}) + b(\mathbf{u}_h - \mathbf{I}_h \mathbf{u}, p - p_h) \\ &+ \Sigma_p(\mathbf{u}_h - \mathbf{I}_h \mathbf{u}, p) - \Sigma_u(\mathbf{u}, \mathbf{u}_h - \mathbf{I}_h \mathbf{u}) - \varepsilon(\mathbf{u}, \mathbf{u}_h - \mathbf{I}_h \mathbf{u}). \end{aligned}$$

Or on a :

$$\begin{aligned} a_h^\delta(\mathbf{u} - \mathbf{I}_h \mathbf{u}, \mathbf{u}_h - \mathbf{I}_h \mathbf{u}) &= \delta\mu \sum_{K \in \mathcal{K}_h} \int_K \underline{D}(\mathbf{u} - \mathbf{I}_h \mathbf{u}) : \underline{D}(\mathbf{u}_h - \mathbf{I}_h \mathbf{u}) dx \\ &+ (2 - \delta)\mu \sum_{K \in \mathcal{K}_h} \int_K \pi_0^K \underline{D}(\mathbf{u} - \mathbf{I}_h \mathbf{u}) : D(\mathbf{u}_h - \mathbf{I}_h \mathbf{u}) dx \\ &+ \gamma_1 J_1(\mathbf{u} - \mathbf{I}_h \mathbf{u}, \mathbf{u}_h - \mathbf{I}_h \mathbf{u}). \end{aligned}$$

Or on a vu dans la première partie de ce manuscrit (voir par exemple le Théorème 3.1.3) que :

$$J_1(\mathbf{u} - \mathbf{I}_h \mathbf{u}, \mathbf{u}_h - \mathbf{I}_h \mathbf{u}) \leq c\sqrt{\mu}|\mathbf{u}|_{2,\Omega}[[\mathbf{u}_h - \mathbf{I}_h \mathbf{u}]].$$

De manière similaire que pour le Lemme 6.2.2, on obtient :

$$\begin{aligned} a_h^\delta(\mathbf{u} - \mathbf{I}_h \mathbf{u}, \mathbf{u}_h - \mathbf{I}_h \mathbf{u}) &\leq c\sqrt{\mu} \sum_{K \in \mathcal{K}_h} \|\underline{D}(\mathbf{u} - \mathbf{I}_h \mathbf{u})\|_{0,K} [[\underline{D}(\mathbf{u}_h - \mathbf{I}_h \mathbf{u})]] dx \\ &+ c\sqrt{\mu}|\mathbf{u}|_{2,\Omega}[[\mathbf{u}_h - \mathbf{I}_h \mathbf{u}]]. \end{aligned}$$

D'où :

$$a_h^\delta(\mathbf{u} - \mathbf{I}_h \mathbf{u}, \mathbf{u}_h - \mathbf{I}_h \mathbf{u}) \leq ch\sqrt{\mu}|\mathbf{u}|_{2,\Omega}[[\mathbf{u}_h - \mathbf{I}_h \mathbf{u}]]. \quad (6.32)$$

D'autre part, on peut écrire que :

$$b(\mathbf{u}_h - \mathbf{I}_h \mathbf{u}, p - p_h) = b(\mathbf{u}_h - \mathbf{I}_h \mathbf{u}, p - i_h p) + b(\mathbf{u}_h - \mathbf{I}_h \mathbf{u}, i_h p - p_h).$$

La deuxième équation du problème (6.22) nous donne que $b(\mathbf{u}_h - \mathbf{I}_h \mathbf{u}, i_h p - p_h) = 0$. De plus par continuité de la forme $b(\cdot, \cdot)$ et d'après la propriété de l'opérateur d'interpolation (6.11), on obtient :

$$b(\mathbf{u}_h - \mathbf{I}_h \mathbf{u}, p - i_h p) \leq ch \frac{1}{\sqrt{\mu}} [[\mathbf{u}_h - \mathbf{I}_h \mathbf{u}]] |p|_{1,\Omega}.$$

On obtient donc que :

$$\begin{aligned} \alpha [[\mathbf{u}_h - \mathbf{I}_h \mathbf{u}]]^2 &\leq ch |\mathbf{u}|_{2,\Omega} [[\mathbf{u}_h - \mathbf{I}_h \mathbf{u}]] + ch [[\mathbf{u}_h - \mathbf{I}_h \mathbf{u}]] |p|_{1,\Omega} \\ &+ \Sigma_p(\mathbf{u}_h - \mathbf{I}_h \mathbf{u}, p) - \Sigma_u(\mathbf{u}, \mathbf{u}_h - \mathbf{I}_h \mathbf{u}) - \varepsilon(\mathbf{u}, \mathbf{u}_h - \mathbf{I}_h \mathbf{u}), \end{aligned}$$

et :

$$\alpha [[\mathbf{u}_h - \mathbf{I}_h \mathbf{u}]] \leq ch |\mathbf{u}|_{2,\Omega} + ch |p|_{1,\Omega} + \sup_{\mathbf{w}_h \in \mathbf{V}_h} \frac{|\Sigma_p(\mathbf{w}_h, p) - \Sigma_u(\mathbf{u}, \mathbf{w}_h) - \varepsilon(\mathbf{u}, \mathbf{w}_h)|}{[[\mathbf{w}_h]]}.$$

D'après le Lemme 6.2.4, on a :

$$\Sigma_p(\mathbf{w}_h, p) \leq \frac{c}{\sqrt{\mu}} h |p|_{1,\Omega} [[\mathbf{w}_h]], \quad (6.33)$$

$$\Sigma_u(\mathbf{u}, \mathbf{w}_h) \leq c \sqrt{\mu} h |\mathbf{u}|_{2,\Omega} [[\mathbf{w}_h]]. \quad (6.34)$$

Il nous reste donc à contrôler le terme sur les quadrangles :

$$\varepsilon(\mathbf{u}, \mathbf{w}_h) = (2 - \delta) \mu \sum_{K \in \mathcal{K}_h} \int_K (\pi_0^K \underline{D}(\mathbf{u}) - \underline{D}(\mathbf{u})) : \underline{D}(\mathbf{w}_h) dx.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz nous donne :

$$\varepsilon(\mathbf{u}, \mathbf{w}_h) \leq |2 - \delta| \mu \sum_{K \in \mathcal{K}_h} \|\pi_0^K \underline{D}(\mathbf{u}) - \underline{D}(\mathbf{u})\|_{0,K} \|\underline{D}(\mathbf{w}_h)\|_{0,K}.$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} \varepsilon(\mathbf{u}, \mathbf{w}_h) &\leq |2 - \delta| \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{2}} h \sum_{K \in \mathcal{K}_h} |\underline{D}(\mathbf{u})|_{1,K} [[\mathbf{w}_h]] \\ &\leq |2 - \delta| \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{2}} h |\mathbf{u}|_{2,h} [[\mathbf{w}_h]]. \end{aligned}$$

D'où :

$$\varepsilon(\mathbf{u}, \mathbf{w}_h) \leq ch \sqrt{\mu} |\mathbf{u}|_{2,h} [[\mathbf{w}_h]]. \quad (6.35)$$

Finalement, on obtient :

$$\alpha [[\mathbf{u}_h - \mathbf{I}_h \mathbf{u}]] \leq ch \sqrt{\mu} |\mathbf{u}|_{2,\Omega} + ch |p|_{1,\Omega} + (ch |p|_{1,\Omega} + ch \sqrt{\mu} |\mathbf{u}|_{2,\Omega} + ch \sqrt{\mu} |\mathbf{u}|_{2,\Omega}).$$

$$\Leftrightarrow \quad \alpha[[\mathbf{u}_h - \mathbf{I}_h \mathbf{u}]] \leq ch \left(\sqrt{\mu} |\mathbf{u}|_{2,\Omega} + \frac{1}{\mu} |p|_{1,\Omega} \right), \quad (6.36)$$

ce qui à l'aide d'une inégalité triangulaire nous donne le résultat souhaité (6.30).

On s'intéresse maintenant à l'erreur sur la pression. On suit les étapes classiques de la démonstration. On écrit :

$$\|p - p_h\|_{0,\Omega} = \|p - i_h p\|_{0,\Omega} + \|i_h p - p_h\|_{0,\Omega},$$

et la condition inf-sup discrète nous donne :

$$\|i_h p - p_h\|_{0,\Omega} \leq \frac{\sqrt{\mu}}{\beta} \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h} \frac{b(i_h p - p, \mathbf{v}_h) + b(p - p_h, \mathbf{v}_h)}{[[\mathbf{v}_h]]}. \quad (6.37)$$

Or, grâce au Lemme 6.2.3 et à la première équation du problème discret (6.22) on peut écrire :

$$-b(p - p_h, \mathbf{v}_h) = a_h^\delta(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h) + \Sigma_p(p, \mathbf{v}_h) - \Sigma_u(\mathbf{u}, \mathbf{v}_h) - \varepsilon(\mathbf{u}, \mathbf{v}_h).$$

On introduit alors l'opérateur d'interpolation \mathbf{I}_h , ce qui nous donne :

$$-b(p - p_h, \mathbf{v}_h) = a_h^\delta(\mathbf{u} - \mathbf{I}_h \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + a_h^\delta(\mathbf{I}_h \mathbf{u}_h - \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + \Sigma_p(p, \mathbf{v}_h) - \Sigma_u(\mathbf{u}, \mathbf{v}_h) - \varepsilon(\mathbf{u}, \mathbf{v}_h).$$

En utilisant la continuité de la forme a_h^δ ainsi que les estimations (6.33), (6.34) et (6.35), on obtient :

$$|b(p - p_h, \mathbf{v}_h)| \leq ch\sqrt{\mu} |\mathbf{u}|_{2,\Omega} [[\mathbf{v}_h]] + \frac{c}{\sqrt{\mu}} h |p|_{1,\Omega} + [[\mathbf{I}_h \mathbf{u} - \mathbf{u}_h]] [[\mathbf{v}_h]].$$

On remplace cette expression dans (6.37) et en utilisant la continuité de la forme $b(\cdot, \cdot)$ et les propriétés de l'opérateur d'interpolation i_h , on obtient :

$$\|i_h p - p_h\|_{0,\Omega} \leq ch (|p|_{1,\Omega} + \mu |\mathbf{v}|_{2,\Omega}) + c\sqrt{\mu} [[\mathbf{I}_h \mathbf{u} - \mathbf{u}_h]]. \quad (6.38)$$

Le résultat souhaité (6.31) est alors obtenu en utilisant l'inégalité (6.36). □

6.3 Problème de Giesekus

On s'intéresse désormais à l'approximation du problème de Giesekus en 2 dimensions, et comme précédemment, on considère un domaine polygonal Ω . Le modèle complet de Giesekus, s'écrit alors de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u} + \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nabla \cdot \underline{\tau} + \nabla p &= \mathbf{f} & \text{dans } \Omega \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 & \text{dans } \Omega \\ \lambda \left(\frac{\partial}{\partial t} \underline{\tau} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \underline{\tau} - (\underline{\tau} \nabla \mathbf{u}^T + \nabla \mathbf{u} \underline{\tau}) \right) + \frac{1}{2G} \underline{\tau} \underline{\tau} + \underline{\tau} &= 2\eta \underline{D}(\mathbf{u}) & \text{dans } \Omega \end{aligned} \quad (6.39)$$

On rajoute des conditions de bord sur la vitesse : $\mathbf{u} = \mathbf{g}$ sur $\partial\Omega$. De plus, l'équation de Giesekus contient un terme convectif sur le tenseur des contraintes, ce qui implique l'ajout de conditions de

bord pour $\underline{\tau}$ sur le bord entrant du domaine $\partial\Omega^- = \{x \in \partial\Omega; \mathbf{u}(x) \cdot \mathbf{n}(x) < 0\} : \underline{\tau} = \underline{\tau}^{int}$. Dans le cas instationnaire, on rajoute aussi des conditions initiales sur \mathbf{u} et $\underline{\tau}$.

Dans un premier temps, on considère le cas stationnaire et on présentera la discrétisation correspondante, puis on considérera le cas instationnaire et on décrira le traitement des termes évolutifs. Pour simplifier la présentation, on considère dans la suite des conditions de type Dirichlet homogènes.

6.3.1 Cas stationnaire

Formellement, la formulation faible du problème de Giesekus s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\mathbf{u}, p, \underline{\tau}) \in \mathbf{V} \times Q \times \underline{X} \text{ tels que :} \\ a_1(\mathbf{u}, \mathbf{u}; \mathbf{v}) + b(p, \mathbf{v}) + c_0(\underline{\tau}, \mathbf{v}) = l(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V} \\ b(q, \mathbf{u}) = 0 \quad \forall q \in Q \\ c(\mathbf{u}, \underline{\tau}; \underline{\sigma}) + d(\underline{\tau}, \underline{\tau}; \underline{\sigma}) = 0 \quad \forall \underline{\sigma} \in \underline{X} \end{array} \right. \quad (6.40)$$

On rappelle ici que les formes $a_1(\cdot, \cdot; \cdot)$, $b(\cdot, \cdot)$ et $c_0(\cdot, \cdot)$ correspondent au problème newtonien sous-jacent :

$$\begin{aligned} a_1(\mathbf{u}, \mathbf{u}; \mathbf{v}) &= \int_{\Omega} \rho \mathbf{u} \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} dx, & b(q, \mathbf{v}) &= - \int_{\Omega} q \operatorname{div} \mathbf{v} dx, \\ c_0(\underline{\tau}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega} \underline{\tau} : \underline{D}(\mathbf{v}) dx. \end{aligned}$$

Les formes non-linéaires spécifiques au modèle de Giesekus sont définies par :

$$\begin{aligned} c(\mathbf{u}, \underline{\tau}; \underline{\sigma}) &= -2\eta c_0(\underline{\tau}, \mathbf{v}) + c_1(\mathbf{u}, \underline{\tau}; \underline{\sigma}) + c_2(\mathbf{u}, \underline{\tau}; \underline{\sigma}), \\ d(\underline{\tau}, \underline{\tau}; \underline{\sigma}) &= d_0(\underline{\tau}, \underline{\sigma}) + d_1(\underline{\tau}, \underline{\tau}; \underline{\sigma}), \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} c_1(\mathbf{u}, \underline{\tau}; \underline{\sigma}) &= \lambda \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \nabla \underline{\tau} : \underline{\sigma} dx, \\ c_2(\mathbf{u}, \underline{\tau}; \underline{\sigma}) &= -\lambda \int_{\Omega} (\underline{\tau} \nabla \mathbf{u}^T + \nabla \mathbf{u} \underline{\tau}) : \underline{\sigma} dx, \\ d_0(\underline{\tau}, \underline{\sigma}) &= \int_{\Omega} \underline{\tau} : \underline{\sigma} dx, \\ d_1(\underline{\tau}, \underline{\tau}; \underline{\sigma}) &= \frac{1}{2G} \int_{\Omega} (\underline{\tau} \cdot \underline{\tau}) : \underline{\sigma} dx. \end{aligned}$$

Remarque 21. *On présente ici un problème formel car dans le cadre de cette thèse, on ne s'est pas intéressé à l'existence d'une solution de (6.40). Cependant, en choisissant : $\mathbf{V} \times Q \times \underline{X} = (\mathbf{H}_0^1(\Omega) \times L_0^2(\Omega) \times \underline{L}_{sym}^2(\Omega) \cap \underline{H}^1(\Omega))$ toutes les intégrales sont bien définies.*

On s'intéresse maintenant à l'approximation de ce problème en utilisant des éléments finis non-conformes. Dans le cas triangulaire, la vitesse et la pression sont approchées par des éléments finis de Crouzeix-Raviart alors que dans le cas quadrangulaire on utilise des éléments finis de

Rannacher-Turek. Dans tous les cas, le tenseur des contraintes est approché par des éléments finis totalement discontinus et constants par maille. On note que désormais la triangulation \mathcal{T}_h dénote un maillage qui peut être quadrangulaire ou triangulaire.

En se basant sur les résultats obtenus précédemment pour le problème de Stokes, on considère la formulation discrète suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\mathbf{u}_h, p_h, \underline{\tau}_h) \in \mathbf{V}_h \times Q_h \times \underline{X}_h \text{ tels que :} \\ e(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b(p_h, \mathbf{v}_h) + c_0(\underline{\tau}_h, \mathbf{v}_h) = l(\mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h \\ b(q_h, \mathbf{u}_h) = 0 \quad \forall q_h \in Q_h \\ c_h(\mathbf{u}_h, \underline{\tau}_h; \underline{\sigma}_h) + d(\underline{\tau}_h, \underline{\tau}_h; \underline{\sigma}_h) = 0 \quad \forall \underline{\sigma}_h \in \underline{X}_h \end{array} \right. \quad (6.41)$$

Le terme $e(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h)$ prend en compte le terme convectif sur la vitesse ainsi que les termes de stabilisation, qui diffèrent selon le type de maillage considéré. Dans le cas triangulaire, la forme $e(\cdot, \cdot)$ est composée de deux termes :

$$e(\cdot, \cdot) = a_h(\cdot, \cdot; \cdot) + \gamma_1 J_1(\cdot, \cdot).$$

Dans le cas quadrangulaire on rajoute le terme de régularisation :

$$e(\cdot, \cdot) = a_h(\cdot, \cdot; \cdot) + \gamma_1 J_1(\cdot, \cdot) + \delta R(\cdot, \cdot).$$

Les autres termes de (6.41) restent les mêmes dans les deux cas.

Le terme non-linéaire $a_h(\cdot, \cdot; \cdot)$ prend en compte le terme convectif sur la vitesse :

$$a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h; \mathbf{v}_h) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \rho \mathbf{u}_h \nabla \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{v}_h dx.$$

La forme $c_h(\cdot, \cdot; \cdot)$ est composée de trois termes :

$$c_h(\cdot, \cdot; \cdot) = -2\eta c_0(\cdot, \cdot) + c_{1h}(\cdot, \cdot; \cdot) + c_2(\cdot, \cdot; \cdot).$$

Le terme $c_{1h}(\cdot, \cdot; \cdot)$ prend en compte le terme convectif dans la loi constitutive. Nous avons traité ce terme en utilisant un schéma décentré de type Lesaint-Raviart (cf. [55]), que nous avons adapté à un champ de vitesse non-conforme. On approche alors en discret $\int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \nabla \underline{\tau} : \underline{\sigma} dx$, par :

$$c_{1h}(\mathbf{u}_h, \underline{\tau}_h; \underline{\sigma}_h) = \sum_{e \in \varepsilon_h} \int_e F_e(\underline{\tau}_h, \mathbf{u}_h, \mathbf{n}_e) : [\underline{\sigma}_h] ds$$

où le flux numérique est défini par :

$$F_e(\underline{\tau}_h, \mathbf{u}_h, \mathbf{n}_e) = \{\mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n}_e\}^+_{\underline{\tau}_h^{int}} + \{\mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n}_e\}^-_{\underline{\tau}_h^{ext}}.$$

On note que l'on a $F_e(\underline{\tau}_h, \mathbf{u}_h, -\mathbf{n}_e) = -F_e(\underline{\tau}_h, \mathbf{u}_h, \mathbf{n}_e)$.

En utilisant les propriétés de continuité de l'espace non-conforme \mathbf{V}_h , on a $\int_e \{\mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n}_e\} ds = \int_e \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n}_e ds$. Comme $\underline{\tau}_h$ et $\underline{\sigma}_h$ sont constants par mailles, on peut alors réécrire la forme $c_{1h}(\cdot, \cdot; \cdot)$ de manière équivalente :

$$c_{1h}(\mathbf{u}_h, \underline{\tau}_h; \underline{\sigma}_h) = \lambda \sum_{e \in \varepsilon_h} \int_e ((\mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n}_e)^+_{\underline{\tau}_h^{int}} + (\mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n}_e)^-_{\underline{\tau}_h^{ext}}) : [\underline{\sigma}_h] ds$$

Remarque 22. Dans [55], Lesaint et Raviart considèrent un terme de transport de la forme $\beta \cdot \nabla \mathbf{u}$, où β est une constante et \mathbf{u} est approché par des éléments finis P_1 de type Galerkin discontinus. Ils introduisent alors l'ensemble des arêtes entrantes du maillage ∂T^- défini par :

$$\partial T^- = \{(x, y) \in \partial T; \text{tel que } \beta \cdot \mathbf{n} < 0\}$$

avec \mathbf{n} la normale extérieure à ∂T . Le terme de transport est alors approché par :

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \beta \cdot \nabla \mathbf{u}_h \mathbf{v}_h dx - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial T^-} \beta \cdot \mathbf{n} (\mathbf{u}_h - \mathbf{u}_h^{ext}) \mathbf{v}_h ds$$

Remarque 23. Nous avons présenté ici la discrétisation du modèle de Giesekus. Cependant, à titre de comparaison, on considérera aussi le modèle de Phan-Thien Tanner. Le terme non-linéaire $d(\cdot, \cdot; \cdot)$ est dans ce cas remplacé par :

$$d^{PTT}(\underline{\tau}_h, \underline{\tau}_h; \underline{\sigma}_h) = \frac{\epsilon \lambda}{\eta} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T (\text{tr } \underline{\tau}_h) \underline{\tau}_h : \underline{\sigma}_h dx$$

Le système non-linéaire est résolu en utilisant une méthode de Newton, ce qui implique le calcul de la matrice jacobienne :

$$\begin{pmatrix} A_{h,\mathbf{u}} + \gamma_1 J_1 + \delta R & B & C_0 \\ B^T & 0 & 0 \\ -2\eta C_0^T + C_{1,\mathbf{u}} + C_{2,\mathbf{u}} & 0 & D_0 + C_{1,\underline{\tau}} + C_{2,\underline{\tau}} + \alpha D_{1,\underline{\tau}} \end{pmatrix}.$$

On note $\underline{\tau}^i$ et \mathbf{v}^i le tenseur des contraintes et la vitesse calculés à l'itération de Newton précédente. Les formes sont alors définies par :

$$\begin{aligned} a_{h,\mathbf{u}}(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \left((\mathbf{u}^i \cdot \nabla) \mathbf{u}_h \mathbf{v}_h + (\mathbf{u}_h \cdot \nabla) \mathbf{u}^i \mathbf{v}_h \right) dx, \\ c_{1,\mathbf{u}}(\mathbf{u}_h, \underline{\sigma}_h) &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial T^-} \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n} \underline{\tau}^{ext} : (\underline{\sigma}_h^{int} - \underline{\sigma}_h^{ext}) ds, \\ c_{1,\underline{\tau}}(\underline{\tau}_h, \underline{\sigma}_h) &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial T^-} \mathbf{u}^i \cdot \mathbf{n} \underline{\tau}_h^{ext} : (\underline{\sigma}_h^{int} - \underline{\sigma}_h^{ext}) ds, \\ c_{2,\mathbf{u}}(\mathbf{u}_h, \underline{\sigma}_h) &= -\lambda \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \underline{\tau}^i (\nabla \mathbf{u}_h)^T : \underline{\sigma}_h dx - \lambda \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \nabla \mathbf{u}_h \underline{\tau}^i : \underline{\sigma}_h dx, \\ c_{2,\underline{\tau}}(\underline{\tau}_h, \underline{\sigma}_h) &= -\lambda \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \underline{\tau}_h (\nabla \mathbf{u}^i)^T : \underline{\sigma}_h dx - \lambda \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \nabla \mathbf{u}^i \underline{\tau}_h : \underline{\sigma}_h dx, \\ d_{1,\underline{\tau}}(\underline{\tau}_h, \underline{\sigma}_h) &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \frac{1}{G} \int_T (\underline{\tau}_h \underline{\tau}^i + \underline{\tau}^i \underline{\tau}_h) : \underline{\sigma}_h dx. \end{aligned}$$

La matrice jacobienne du problème de Giesekus, s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{C}_0 \\ \mathcal{C} & \mathcal{D} \end{pmatrix} \text{ avec } \mathcal{A} = \begin{pmatrix} \mathcal{A} & B \\ B^T & 0 \end{pmatrix}.$$

Le théorème de Babuška-Brezzi a été étendu par Nicolaïdes dans [64] aux opérateurs des problèmes mixtes du type :

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{C}_0 \\ \mathcal{C} & 0 \end{pmatrix}.$$

Chacune des formes, \mathcal{A} , \mathcal{C} et \mathcal{C}_0 doit satisfaire des conditions inf-sup pour que l'opérateur mixte soit inversible. Lorsque $\mathcal{D} \neq 0$, ce qui est notre cas, il suffit de montrer en plus que \mathcal{D} est positive.

Remarque 24. Dans le cas du problème de Stokes, la matrice jacobienne correspondante s'écrit :

$$\begin{pmatrix} A & B & C_0 \\ B^T & 0 & 0 \\ -2\eta C_0^T & 0 & D_0 \end{pmatrix}.$$

On peut alors éliminer la troisième inconnue et se ramener à la matrice de la formulation à deux champs équivalente :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^T & 0 \end{pmatrix},$$

qui est inversible grâce à la théorie de Babuška-Brezzi. En particulier, notre analyse précédente montre que B satisfait une condition inf-sup et que A est coercive, où :

$$A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathcal{A}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + 2\eta \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \pi_0^T \underline{D}(\mathbf{u}) : \pi_0^T \underline{D}(\mathbf{v}) dx.$$

6.3.2 Cas instationnaire

On considère maintenant le cas où le modèle précédent dépend du temps. On considère alors les expressions complètes des deux dérivées particulières. La première est la dérivée de la vitesse dans la première équation :

$$\frac{\mathcal{D}\mathbf{u}}{\mathcal{D}t} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}, \quad (6.42)$$

et la deuxième est la dérivée du tenseur des contraintes de l'équation constitutive :

$$\frac{\mathcal{D}\underline{\tau}}{\mathcal{D}t} = \frac{\partial \underline{\tau}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \underline{\tau}. \quad (6.43)$$

Pour traiter la dépendance en temps, on utilise un θ -schéma. On note la pas de temps Δt et on aura donc $t^n = n\Delta t$.

Pour simplifier la présentation de cette méthode, on note $\mathcal{U} = (\mathbf{u}, p, \underline{\tau})^t$ et \mathcal{U}_n dénotera alors la solution obtenue au temps t^n . On écrit alors le problème de Giesekus sous la forme :

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} + A(\mathcal{U}) = \mathbf{f}(\mathcal{U})$$

Soit $\theta \in [0, 1]$ une constante, on discrétise les dérivées en temps de la manière suivante :

$$\frac{\mathcal{U}_{n+1} - \mathcal{U}_n}{\Delta t} = -\theta A(\mathcal{U}_{n+1}) + \theta \mathbf{f}(\mathcal{U}_{n+1}) + (1 - \theta) A(\mathcal{U}_n) - (1 - \theta) \mathbf{f}(\mathcal{U}_n)$$

A chaque pas de temps, on résout le système suivant en utilisant la méthode de Newton :

$$\frac{\mathcal{U}_{n+1}}{\theta \Delta t} + A(\mathcal{U}_{n+1}) - \mathbf{f}(\mathcal{U}_{n+1}) = \frac{1 - \theta}{\theta} A(\mathcal{U}_n) - \frac{1 - \theta}{\theta} \mathbf{f}(\mathcal{U}_n) + \frac{\mathcal{U}_n}{\theta \Delta t}$$

Dans les tests réalisés, nous avons choisi de prendre $\theta = 1$, qui correspond au schéma d'Euler.

6.3.3 Positivité du tenseur de conformation

On s'intéresse ici brièvement à la positivité d'un tenseur appelé tenseur de conformation. En effet, l'arrêt de la convergence des algorithmes pour des nombres de Weissenberg élevés est souvent associé à la perte de cette propriété au niveau discret.

On introduit tout d'abord le tenseur de conformation continu noté \underline{C} et défini par :

$$\underline{C} = \frac{\lambda}{\eta} \underline{\tau} + \underline{I}, \quad (6.44)$$

où \underline{I} est la matrice identité.

Remarque 25. Dans [34], Giesekus a introduit son modèle en utilisant un tenseur de configuration qui coïncide avec \underline{C} . D'autre part, le tenseur de conformation peut-être aussi vu, dans le cas d'un solide élastique comme le tenseur de Cauchy, noté \underline{C} . En effet, la loi généralisée de Hooke nous donne $\underline{\tau} = 2G\underline{E}$ avec $\underline{E} = \frac{1}{2}(\underline{C} - \underline{I})$ le tenseur de Green-Lagrange. Or (6.44) est équivalent à la relation $\underline{\tau} = G(\underline{C} - \underline{I})$, ce qui implique que $\underline{C} = \underline{C}$ si on considère le liquide viscoélastique comme un solide élastique.

On rappelle qu'au niveau continu, l'équation de Giesekus s'écrit de la manière suivante :

$$\lambda \overset{\nabla}{\underline{\tau}} + \frac{1}{2G} \underline{\tau} \underline{\tau} + \underline{\tau} = 2\eta \underline{D}(\mathbf{u}),$$

avec, dans le cas stationnaire :

$$\overset{\nabla}{\underline{\tau}} = \mathbf{u} \cdot \underline{\nabla} \underline{\tau} - \underline{\tau} \underline{\nabla} \mathbf{u}^T - \underline{\nabla} \mathbf{u} \underline{\tau}.$$

En utilisant que $\overset{\nabla}{\underline{I}} = -2\underline{D}(\mathbf{u})$ et que $\lambda G = \eta$, cette équation s'écrit en terme de tenseur de conformation de la manière suivante :

$$\lambda(\mathbf{u} \cdot \underline{\nabla} \underline{C} - \underline{\nabla} \mathbf{u} \underline{C} - \underline{C} \underline{\nabla} \mathbf{u}^T) + \frac{1}{2} \underline{C} \cdot \underline{C} = \frac{1}{2} \underline{I}. \quad (6.45)$$

Le loi de Giesekus peut s'écrire sous une forme plus générale :

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \underline{\nabla} \underline{C} - \underline{A} \underline{C} - \underline{C} \underline{A}^T + \underline{C}^2 &= \underline{F} & \text{dans } \Omega \\ \underline{C} &= \underline{C}^{int} & \text{sur } \partial\Omega^-, \end{aligned} \quad (6.46)$$

avec $\mathbf{v} := 2\lambda \mathbf{u}$, $\underline{A} := 2\lambda \underline{\nabla} \mathbf{u}$ and $\underline{F} := \underline{I}$ (\underline{F} symétrique défini positif).

Remarque 26. Pour $\alpha \neq \frac{1}{2}$, la loi constitutive s'écrit en terme de tenseur de conformation :

$$\lambda \overset{\nabla}{\underline{C}} + \alpha \underline{C}^2 + (1 - 2\alpha) \underline{C} = (1 - \alpha) \underline{I},$$

et se met aussi sous la forme (6.46), avec $\mathbf{v} := \frac{\lambda}{\alpha} \mathbf{u}$, $\underline{A} := \frac{\lambda}{\alpha} (\underline{\nabla} \mathbf{u} - \frac{1-2\alpha}{2} \underline{I})$ et $\underline{F} := \frac{1-\alpha}{\alpha} \underline{I}$.

Il est connu, pour certains modèles viscoélastiques que \underline{C} est symétrique défini positif au niveau continu. On peut effectivement montrer pour le modèle de Giesekus le résultat suivant :

Théorème 6.3.1. Soit \underline{A} et \underline{F} , respectivement \underline{C}^{int} , des matrices aux coefficients bornés et continus par morceaux sur Ω , respectivement sur $\partial\Omega^-$, avec \underline{F} and \underline{C}^{int} symétrique défini positif (s.d.p.). Si la solution de (6.46) est continue sur $\bar{\Omega}$, alors \underline{C} est s.d.p.

L'ingrédient principal de la démonstration est l'expression de la solution des équations différentielles de Riccati :

$$\begin{aligned} \partial_t \underline{C} - \underline{A} \underline{C} - \underline{C} \underline{A}^T + \underline{C} \underline{B} \underline{C} &= \underline{F} \quad \text{dans } \Omega \\ \underline{C}(0) &= \underline{C}_0 \quad \text{sur } \partial\Omega^-, \end{aligned}$$

avec \underline{C}_0 , \underline{B} et \underline{F} s.d.p. (voir par exemple [27]).

Dans [54], cet argument a été appliqué à des équations constitutives instationnaires pour des liquides viscoélastiques de la forme :

$$\overset{\nabla}{\underline{C}} + \alpha \underline{C} = \beta \underline{I} \quad \text{avec } \beta > 0.$$

Les auteurs écrivent cette équation sous la forme d'une équation généralisée de Riccati en utilisant des dérivées de Lie. On adapte alors cette démonstration au cas stationnaire en combinant l'idée précédente et la méthode des caractéristiques.

Remarque 27. Une autre démonstration a été donnée par Hulsen (voir [43] pour le cas 2D et [44] pour le cas 3D) pour des équations quadratiques de type Giesekus ou Leonov, mais en négligeant la convection, $\overset{\nabla}{\underline{C}} := \partial_t \underline{C} - \nabla \mathbf{u} \underline{C} - \underline{C} \nabla \mathbf{u}^T$. Il analyse le signe de $\partial_t(\det \underline{C})$, et implicitement le signe des valeurs propres de \underline{C} , à l'aide de l'équation différentielle ordinaire que satisfait $\det \underline{C}$. À titre d'exemple, le modèle de Giesekus en 2D satisfait l'équation suivante :

$$\lambda \frac{\partial(\det \underline{C})}{\partial t} = -(\alpha \text{tr} \underline{C} + 2(1 - 2\alpha)) \det \underline{C} + (1 - \alpha) \text{tr} \underline{C}.$$

Plus récemment, une idée similaire a été utilisée dans [13] pour le modèle d'Oldroyd-B instationnaire avec le terme de convection, pour prouver la positivité du tenseur de conformation à tout temps t , sous une hypothèse de régularité $\underline{C} \in \mathcal{C}^1(0, T; \mathcal{C}^1(\Omega))$.

Les schémas numériques qui préservent la positivité du tenseur de conformation au niveau discret semblent être plus stables et souvent, des estimations d'énergie discrètes peuvent être établies (voir par exemple [6], [54] et [57] pour le modèle d'Oldroyd-B). Récemment, deux approches ont été introduites pour obtenir de tels schémas.

Tout d'abord, Fatal et Kupfferman dans [30] utilisent la positivité de \underline{C} au niveau continu pour introduire $\underline{\Psi} = \ln \underline{C}$. Ils écrivent l'équation constitutive en terme de $\underline{\Psi}$ en utilisant une décomposition spécifique de $\nabla \mathbf{u}$. Plus précisément, ils utilisent la décomposition suivante :

$$\nabla \mathbf{u} = \underline{\Omega} + \underline{S} + \underline{N} \cdot \underline{C}^{-1}$$

avec $\underline{\Omega} = -\underline{\Omega}^T$, $\underline{N} = -\underline{N}^T$, $\underline{S} = \underline{S}^T$, $\underline{S} \underline{C}^{-1} = \underline{C}^{-1} \underline{S}$. Pour le modèle de Giesekus, on obtient finalement :

$$\lambda(\mathbf{u} \cdot \nabla \underline{\Psi} - \underline{\Omega} \underline{\Psi} + \underline{\Psi} \underline{\Omega} - 2\underline{S}) = \frac{1}{2}(e^{-\underline{\Psi}} - e^{\underline{\Psi}}).$$

Ils approchent alors $\underline{\Psi}$ par $\underline{\Psi}_h$ et ils retrouvent le tenseur de conformation discret en posant $\underline{C}_h := e^{\underline{\Psi}_h}$. Cette approche garantit que \underline{C}_h est s.d.p. et ces dernières années plusieurs papiers l'utilisant ont été publiés. Néanmoins, à ce jour aucune analyse de l'erreur d'approximation pour cette transformation n'est connue.

Une idée différente a été introduite par Lee et Xu dans [54]. Ils ont remarqué que les équations constitutives de certains liquides viscoélastiques peuvent être vu, en utilisant des dérivées de Lie, comme des équations de Riccati généralisées. Les équations différentielles et algébriques de Riccati ont été largement étudiées dans la littérature et sont souvent utilisées en théorie du contrôle optimal (voir par exemple [52] et [63] pour une présentation générale). Dans [54], les auteurs font l'étude d'équations constitutives du type $\underline{\dot{C}} + \alpha \underline{C} = \beta \underline{I}$ avec $\beta > 0$. Pour leurs discrétisation, ils proposent soit d'approcher la solution analytique du problème continu sous forme intégrale (qui ne peut être obtenue dans notre cas de loi quadratique), soit d'utiliser la méthode des caractéristiques combinée avec un opérateur préservant la positivité. Cependant, dans ce dernier cas, l'équation discrète obtenue est une équation de type Lyapunov et non de type Riccati, c'est à dire qu'il manque le terme quadratique. Des conditions sur la matrice \underline{A} sont alors nécessaires pour assurer la positivité de la solution. Cet aspect semble avoir été négligé dans [54].

Dans [9], les auteurs utilisent l'approche basée sur les équations de Riccati et l'appliquent au modèle de Giesekus et à notre schéma numérique. Ils montrent que sous certaines hypothèses, le schéma numérique préserve cette propriété de positivité. Nous allons présenter dans la suite ces résultats.

On rappelle qu'une équation algébrique de Riccati s'écrit de la manière suivante :

$$\underline{A}\underline{X} + \underline{X}\underline{A}^T - \underline{X}\underline{B}\underline{X} + \underline{F} = \underline{0}. \quad (6.47)$$

La solution d'une telle équation n'est pas unique. Cependant si \underline{B} et \underline{F} sont s.d.p. alors on sait qu'il existe une solution s.d.p. maximale \underline{X}^* (i.e. $\underline{X}^* - \underline{X}$ est s.d.p., pour toute autre solution s.d.p. \underline{X}).

En utilisant notre schéma numérique, l'équation discrète de Giesekus que satisfait \underline{C}_h s'écrit sous toute maille T quadrangulaire ou triangulaire sous la forme d'une équation algébrique de Riccati :

$$\underline{A}_h \underline{C}_h + \underline{C}_h \underline{A}_h^T - \underline{C}_h^2 + \underline{F}_h = \underline{0} \quad (6.48)$$

où :

$$\underline{A}_h = 2\lambda\pi_0^T \underline{\nabla} \mathbf{u}_h - \lambda d_h \underline{I}, \quad \underline{F}_h = \underline{I} + 2\lambda \underline{C}_h^*.$$

Remarque 28. Dans le cas triangulaire, $\pi_0^T \underline{\nabla} \mathbf{u}_h = \underline{\nabla} \mathbf{u}_h$.

Le schéma décentré utilisé nous donne :

$$d_h = \frac{1}{|T|} \sum_{e \in \partial T^+} \int_e |\mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n}_e| ds > 0, \quad C_h^* = \frac{1}{|T|} \sum_{e \in \partial T^-} \int_e |\mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n}_e| \underline{C}_h^{ext} ds.$$

Par définition, $\underline{\mathcal{B}} := \underline{I}$ est toujours symétrique défini positif. Il nous reste donc à nous assurer que \underline{C}_h^* l'est aussi sur tout T , pour que $\underline{\mathcal{F}} := \underline{F}_h$ soit s.d.p. Pour cela, on suppose que \underline{C}_h^{int} est s.d.p. sur $\partial\Omega^-$ et qu'il existe une numérotation des cellules $\Omega = \cup_{i=1}^N T_i$ de telle manière que $\forall i$:

$$\partial T_i^- \subset \partial\Omega^- \quad \text{ou} \quad \partial T_i^- \subset \cup_{j < i} \partial T_j^+. \quad (6.49)$$

Remarque 29. Une telle numérotation peut être trouvée lorsqu'il n'y a pas de recirculation. Dans le cas \mathbf{u} constant la condition précédente est toujours satisfaite (cf. par exemple [55]). Dans le cas général, on peut se passer de cette hypothèse via une modification de la méthode de Newton ; de telles stratégies de numérotation ont déjà été utilisées en CFD (voir par exemple [41]).

Sous ces hypothèses, on a l'existence d'une solution de (6.48) s.d.p. maximale (voir par exemple [52]).

On considère maintenant que \mathbf{u} est donné et on montre que la méthode de Newton tend vers la solution maximale sous certaines hypothèses sur la donnée initiale. En effet, on montre qu'une itération de Newton pour résoudre le problème correspondant satisfait sur un élément T l'équation suivante :

$$(\underline{A}_h - \underline{C}_h^{n-1})\underline{C}_h^n + \underline{C}_h^n(\underline{A}_h - \underline{C}_h^{n-1})^T = -\underline{F}_h - (\underline{C}_h^{n-1})^2$$

Il s'agit d'une équation de Lyapunov que l'on écrit généralement sous la forme :

$$\underline{A}\underline{\mathcal{X}} + \underline{\mathcal{X}}\underline{A}^T = -\underline{\mathcal{F}}.$$

On utilise le résultat suivant (cf. par exemple [52]) :

Lemme 6.3.1. Si \underline{A} est stable (i.e. $Re(\lambda) < 0$) et $\underline{\mathcal{F}}$ est s.d.p., alors $\underline{\mathcal{X}}$ est s.d.p. Réciproquement, si $\underline{\mathcal{X}}$ et $\underline{\mathcal{F}}$ sont s.d.p. alors \underline{A} est stable .

On peut alors montrer (cf. [52]) sur tout élément T que :

Théorème 6.3.2. Si $(\underline{A}_h - \underline{C}_h^0)$ est stable et \underline{F}_h et \underline{C}_h^0 sont s.d.p., alors $(\underline{A}_h - \underline{C}_h^n)$ est stable et \underline{C}_h^n est s.d.p. pour tout n . De plus, $(\underline{C}_h^n)_n$ converge de manière monotone vers la solution s.d.p. maximale \underline{C}_h^* sur T .

Grâce à ce résultat, on en déduit par récurrence le résultat global sur Ω :

Théorème 6.3.3. On suppose que l'hypothèse (6.49) est vérifiée et que \underline{C}_h^{int} est s.d.p. Si \underline{C}_h^0 satisfait sur chaque maille T les hypothèses du Théorème 6.3.2, alors les itérés de Newton sont s.d.p. et convergent vers la solution maximale s.d.p. de (6.48) sur Ω .

Dans le cas instationnaire, la matrice \underline{A}_h est remplacée par $\underline{A}_h - \frac{1}{2\Delta t}\underline{I}$ qui va d'autant plus satisfaire la condition de stabilité. D'un point de vue numérique, nous avons constaté que le cas instationnaire permet en effet d'atteindre des nombres de Weissenberg plus élevés.

Remarque 30. Si l'on considère le même schéma dG pour le modèle d'Oldroyd-B, l'équation constitutive s'écrit :

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \underline{C} - \nabla \mathbf{u} \underline{C} - \underline{C} \nabla \mathbf{u}^T + \frac{1}{We} \underline{C} = \frac{1}{We} \underline{I}.$$

Sur chaque triangle T , \underline{C}_h satisfait alors une équation de Lyapunov de matrice :

$$\underline{A}_h := \pi_0^T \nabla \mathbf{u}_h - \frac{d_h}{2} \underline{I} - \frac{1}{2We} \underline{I},$$

qui, d'après le Lemme 6.3.1, doit être stable afin d'obtenir une solution s.d.p. On constate que cette condition peut ne pas être satisfaite si le nombre de Weissenberg est trop élevé. Le cas instationnaire est plus facile à traiter. En effet, la matrice \underline{A}_h étant remplacée par $\underline{A}_h - \frac{1}{2\Delta t} \underline{I}$, la propriété de stabilité peut être obtenue en choisissant Δt suffisamment petit.

Chapitre 7

Résultats numériques

Ce chapitre est consacré à la présentation de résultats numériques pour des liquides polymères, principalement pour le modèle de Giesekus. Après avoir traité quelques aspects importants de l'implémentation des différents modèles dans la librairie C++ CONCHA, nous allons présenter des tests réalisés afin de valider numériquement notre schéma numérique : comparaisons avec une expérience, comparaisons avec un autre code de calcul, avec une solution analytique.... Finalement on montre que nos schémas permettent d'obtenir des simulations réalistes pour des nombres de Weissenberg élevés sur des géométries de référence.

7.1 Quelques aspects numériques

7.1.1 Solveurs

Le modèle de Giesekus étant non-linéaire, nous utilisons une méthode de Newton pour résoudre ce problème. A chaque itération de Newton, on doit donc résoudre un système linéaire.

Dans un premier temps et pour éviter toute ambiguïté issue de la résolution itérative incomplète, nous avons utilisé une méthode directe (UMF Pack).

Nous avons aussi développé une méthode multigrilles pour les méthodes non-conformes utilisant un lisseur de type Vanka. Ce nouveau solveur linéaire nous a permis d'utiliser des maillages plus fins nous avons ainsi effectué des comparaisons avec des résultats trouvés dans la littérature. On décrit cette méthode ainsi que les résultats correspondants dans la section 7.3.

7.1.2 Nombre de Weissenberg

Un de nos objectifs est d'obtenir des simulations réalistes pour des nombres de Weissenberg élevés. On rappelle que ce nombre adimensionnel est défini de la manière suivante :

$$We = \lambda\dot{\gamma}.$$

Il est important de noter que dans la littérature, on trouve plusieurs manières de définir le nombre de Weissenberg. En effet, on peut choisir la valeur de $\dot{\gamma}$ de manière différente. Par exemple,

pour un écoulement entre deux plaques parallèles de largeur a , Lim et Schowalter utilisent dans [56], $\dot{\gamma} = \frac{\mathbf{u}_{max}}{a}$ avec \mathbf{u}_{max} la valeur de la vitesse sur l'axe central de l'écoulement, alors que Xue *et al* utilisent dans [86], $\dot{\gamma} = \frac{\bar{u}}{a}$ avec \bar{u} la vitesse moyenne dans le tube. Nous considérons la valeur maximale de $\dot{\gamma}$, i.e. calculée à la paroi du domaine, équivalente pour un liquide newtonien. Pour les géométries utilisées, le calcul du nombre de Weissenberg est donné en Annexe B.

Si l'on considère initialement une valeur trop grande de We , les algorithmes divergent. On doit donc augmenter ce nombre petit à petit. Nous avons utilisé deux techniques pour cela.

Dans le cas stationnaire, on utilise une méthode d'évolution. On fixe la valeur de la vitesse à l'entrée puis, on résout tout d'abord le cas newtonien (i.e. pour $\lambda = 0$). La solution ainsi obtenue sera prise comme solution initiale pour l'étape suivante, où la valeur du temps de relaxation sera augmentée. On réitère ce procédé et à chaque étape, on adapte l'augmentation de λ pour avoir la convergence de la méthode.

Dans le cas instationnaire, on fixe cette fois la valeur de λ et on impose la vitesse suivante à l'entrée du domaine :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \bar{u}(1 - e^{-\beta t}).$$

\bar{u} est la vitesse moyenne et β est le paramètre définissant la vitesse à laquelle on augmente le nombre de Weissenberg.

7.2 Validation du code

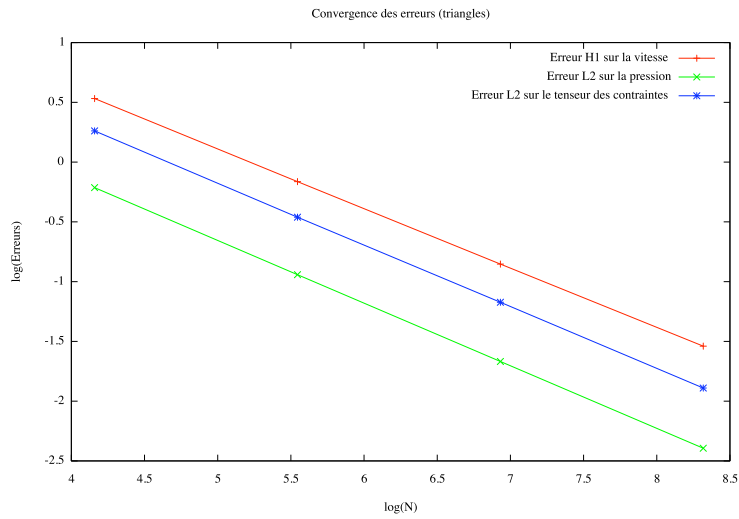
7.2.1 Solution exacte

Dans un premier temps, et pour valider notre code, nous avons considéré la solution exacte suivante sur un domaine $\Omega = [-1; 1] \times [-1; 1]$:

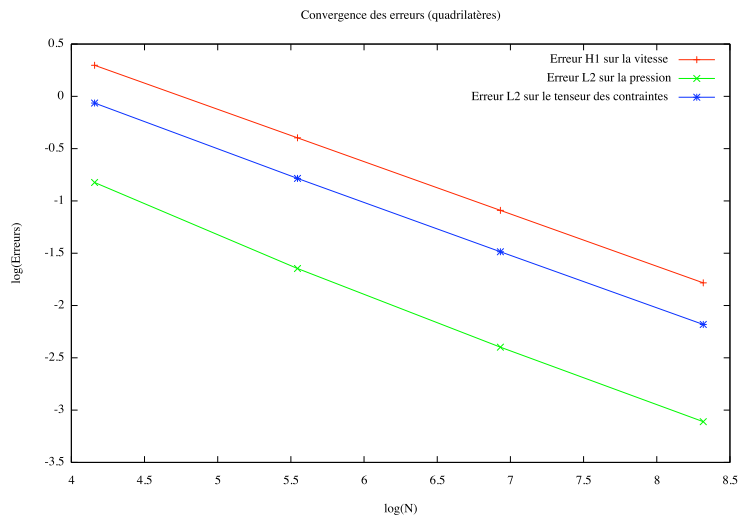
$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 + x + 2x^2 + 2y^2 + xy \\ 1 - y + 2x^2 - \frac{1}{2}y^2 - 4xy \end{pmatrix}, \quad p = x - y, \quad \tau \text{ constant.} \quad (7.1)$$

On fixe alors la valeur de λ et on prend $\gamma_1 = 10$ et $\delta = 2$ pour le cas quadrangulaire. Nous avons approché le problème de Giesekus avec second membre pour calculer différentes erreurs. Pour $\lambda = 0,005$ s, on présente dans la figure Fig. 7.3 le logarithme de l'erreur H^1 sur la vitesse et de l'erreur L^2 sur la pression et sur le tenseur des contraintes en fonction du logarithme du nombre d'éléments. On présente tout d'abord les résultats obtenus sur des maillages triangulaires et ensuite ceux obtenus sur des maillages quadrangulaires. Pour le cas triangulaire, on utilise des maillages "CrissCross" définis dans le chapitre 4, dans le cas quadrangulaire, on utilise des maillages structurés et à chaque pas de raffinement, un élément est subdivisé en 4 éléments. Dans les deux cas, le pas de discrétisation h est divisé par deux à chaque raffinement.

On obtient un ordre de convergence $\mathcal{O}(h)$ qui est l'ordre de convergence optimal que l'on pouvait espérer.



(a) Triangles



(b) Quadrilatères

FIG. 7.1 – Convergence des erreurs pour $\lambda = 0,005$ s

7.2.2 Comparaisons avec une solution analytique

On considère un écoulement entre deux plans parallèles. La géométrie est présentée dans la figure Fig 7.2. On choisit $a = 1$ mm et les conditions de bord sont les suivantes :

- Γ_1 est le bord entrant, on impose un profil de vitesse plat égal à 0,1 m.s et $\underline{\tau}^{int} = \underline{0}$.
- Sur Γ_2 , on impose une condition de Dirichlet homogène.
- Γ_3 est la sortie, on impose une condition de type Neumann homogène, $-p + \underline{\tau} \cdot \underline{n} = 0$.
- Γ_4 est un axe de symétrie, ce qui nous permet de diviser le domaine de calcul par deux.

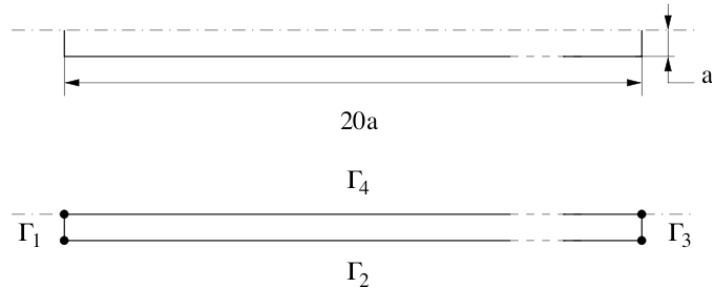


FIG. 7.2 – Écoulement dans un tube

Pour cette géométrie, on calcule le nombre de Weissenberg de la manière suivante (cf. Annexe B.1) :

$$\text{We} = \lambda \frac{3\bar{u}}{a},$$

où \bar{u} est la vitesse à l'entrée du tube.

Pour ce canal 2D, on trouve dans [56] une solution analytique pour le modèle de Giesekus dans le cas d'un écoulement développé. Les composantes du tenseur des contraintes ainsi que la vitesse, sont alors fonctions de y uniquement. On a :

$$u_x(y) = u_{max} \left(1 - \frac{\ln(1 - \beta^2 y^2)}{\ln(1 - \beta^2 a^2)} \right), \quad \text{We} = \frac{3}{a\beta} \left(1 - \frac{a \tanh(a\beta)}{a\beta} \right). \quad (7.2)$$

Ci-dessus β est relié au gradient de pression de la manière suivante $\beta = \frac{\lambda}{\eta} \frac{\partial p}{\partial x}$. On calcule tout d'abord ce paramètre à l'aide du nombre de Weissenberg. Puis ce dernier nous permet de calculer le profil de vitesse, *via* l'équation (7.2).

On présente dans la figure Fig. 7.3 la première composante de la vitesse obtenue à l'aide de CONCHA pour différentes valeurs du nombre de Weissenberg. Ces résultats ont été obtenus sur un maillage composé de 40 960 triangles avec les données suivantes : $\mu = 1000 \text{ Pa}\cdot\text{s}$, $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ et $\gamma_1 = 10$.

On constate un bon accord entre les solutions analytiques et celles obtenues avec CONCHA. Pour $\text{We} = 6$, on remarque un écart des valeurs obtenues près de la paroi. Le nombre d'éléments dans cette zone semble donc être insuffisant pour *capturer* convenablement le comportement du liquide. Il semble donc important de pouvoir utiliser des maillages plus fins.

7.2.3 Comparaisons avec des données expérimentales

En 1994, dans [72], Quinzani et ses collaborateurs, ont étudié expérimentalement l'écoulement d'une solution de polymère parfaitement caractérisée dans une contraction par anémométrie laser Doppler (LDA)¹ et par biréfringence d'écoulement².

¹Laser-Doppler velocimetry (LDV)

²flow-induced birefringence (FIB)

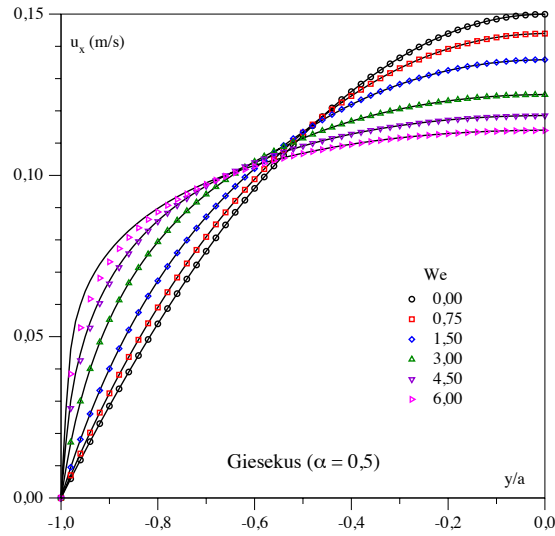


FIG. 7.3 – Giesekus : comparaison avec une solution analytique

Le liquide d'essai est constitué d'un polyisobutylène (PIB) de masse molaire élevée en solution dans du tétradécane ($C_{14}H_{30}$). Les paramètres matériels de cette solution à $25^\circ C$ sont : η_0 , la viscosité limite est égale à $1,24 \text{ Pa}\cdot\text{s}$, $\lambda = 0,006 \text{ s}$ et la masse volumique $\rho = 800 \text{ kg/m}^3$.

La géométrie employée est une contraction brusque d'un facteur $3,97:1$. Un rapport de 10 entre l'épaisseur du réservoir en amont de la contraction et sa profondeur permet d'assimiler cet écoulement à un écoulement bidimensionnel. La vitesse moyenne dans le canal en aval de la contraction est de $2,14 \text{ cm/s}$, ce qui correspond à une vitesse de $0,539 \text{ cm/s}$ à l'entrée de la géométrie. Toutes les données expérimentales employées ont été digitalisées à partir des figures de la publication de Quinzani *et al.*. La géométrie que nous avons utilisée pour nos simulations est donnée dans la Fig. 7.4. Les conditions de bord sont les mêmes que pour l'écoulement de la section 7.2.2 :

- Γ_1 est le bord entrant, on impose un profil de vitesse plat égal à $0,539 \text{ cm/s}$ et $\underline{\tau}^{int} = \underline{0}$.
- Sur Γ_2 , on impose une condition de Dirichlet homogène.
- Γ_3 est la sortie, on impose une condition de Neumann homogène.
- Γ_4 est un axe de symétrie.

Nous avons utilisé un maillage composé de $32\,768$ triangles.

Dans [72], le nombre de Weissenberg est défini de la manière suivante :

$$We = \lambda \frac{u_{moy}}{h}$$

où u_{moy} est la vitesse moyenne dans le canal et h est sa demi-hauteur. Dans ces conditions, ils obtiennent $We = 0,25$.

Dans la Fig. 7.5, on compare les valeurs de la première composante de la vitesse u_x des données expérimentales et des résultats numériques obtenus grâce à CONCHA pour un liquide de

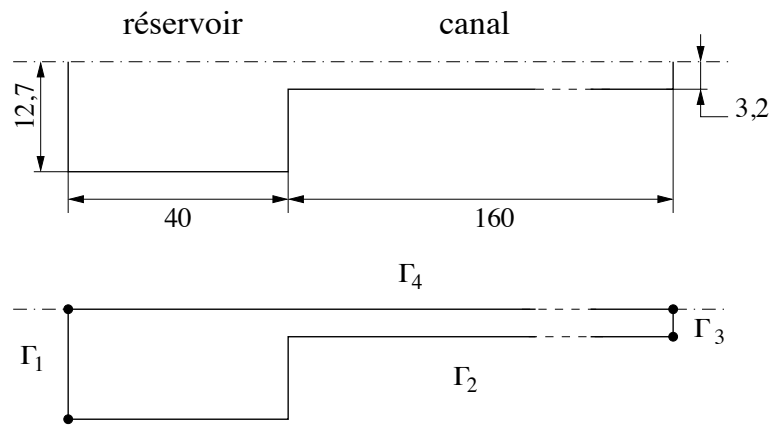


FIG. 7.4 – Contraction 3,97 :1 (en mm)

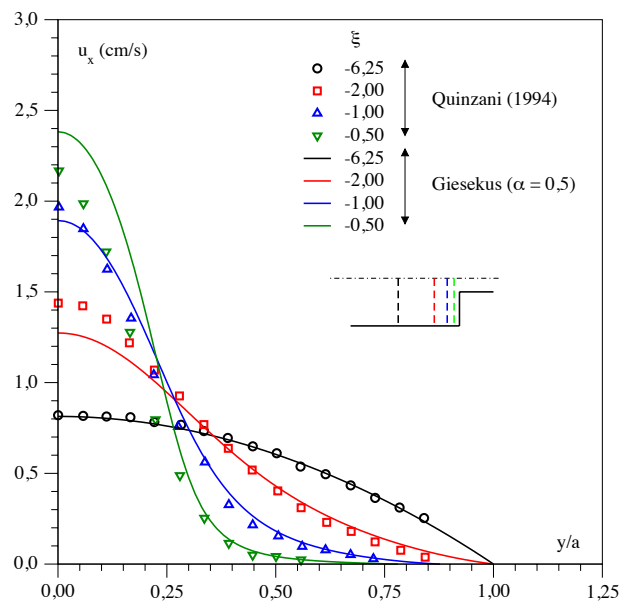


FIG. 7.5 – Giesekus : comparaisons avec des données expérimentales des profils de vitesse dans le réservoir

Giesekus. ξ représente l'écart à la contraction et est donnée par $\xi = \frac{x - x_0}{h}$ avec x_0 l'abscisse de la contraction. Ces profils de vitesses sont obtenus le long de différentes abscisses dans la partie réservoir de l'écoulement. Près de la partie centrale de l'écoulement, on remarque des différences entre la simulation et les données. Aucune incertitude d'erreur sur les mesures n'est donnée, ce qui rend difficile la comparaison avec les résultats numériques. En effet, en calculant le débit à partir des mesures expérimentales, on constate des variations de l'ordre de 10% qui ne sont pas réalistes pour un liquide incompressible et semblent avoir pour origine des imprécisions sur les mesures.

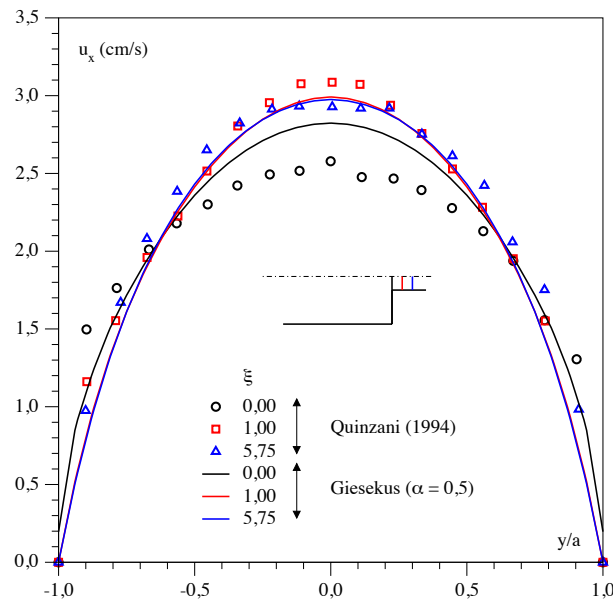


FIG. 7.6 – Giesekus : comparaisons avec des données expérimentales des profils de vitesse dans le canal

Dans la figure Fig. 7.6, les mêmes comparaisons sont effectuées mais cette fois-ci dans la partie canal de l'écoulement. On obtient des résultats similaires pour des abscisses éloignées de la contraction. Cependant, pour l'abscisse se situant sur la contraction on constate un écart plus important. Nous avons constaté qu'au niveau de la contraction, le profil de vitesse est particulièrement sensible à l'abscisse à laquelle il est mesuré. En effet, en décalant de seulement 0,5 mm l'abscisse, la vitesse maximale obtenue numériquement diffère d'environ 4% de celle obtenue au niveau de la contraction. Une imprécision même très faible dans les mesures peut donc induire des erreurs importantes.

7.2.4 Comparaisons avec Polyflow®

Polyflow® est un des codes commerciaux les plus populaires pour la simulation numérique des écoulements de liquides polymères (cf. [1]). Ce code a été développé dans les années 1980 par l'équipe CESAME de l'Université catholique de Louvain. Ce code permet d'utiliser, en 2D et 3D, un grand nombre de modèles rhéologiques différentiels comme le modèle de Giesekus, de PTT ou d'Oldroyd-B mais aussi des modèles intégraux. Il reste une référence dans ce domaine même s'il ne permet pas d'obtenir de simulations pour des nombres de Weissenberg élevés (en général supérieurs à 10).

Dans Polyflow®, la vitesse est approchée par des éléments finis continus quadratiques et la pression par des éléments finis linéaires. Pour l'approximation du tenseur des contraintes, plusieurs

méthodes sont proposées, nous avons choisi d'utiliser la méthode EVSS et la méthode SU pour traiter le terme convectif dans la loi constitutive. Pour cette comparaison, nous avons considéré deux cas-tests classiques, la contraction/expansion 4 : 1 : 4 et l'écoulement autour d'un cylindre. Tout d'abord on s'intéresse à une contraction/expansion 4:1:4 dont la géométrie est donnée dans la figure Fig. 7.7. Comme précédemment, les conditions de bord sont les suivantes :

- Γ_1 est le bord entrant, on impose un profil de vitesse plat égal à 0,1m/s et $\underline{\tau}^{int} = \underline{0}$.
- Sur Γ_2 , on impose une condition de Dirichlet homogène.
- Γ_3 est la sortie, on impose une condition de Neumann homogène.
- Γ_4 est un axe de symétrie.

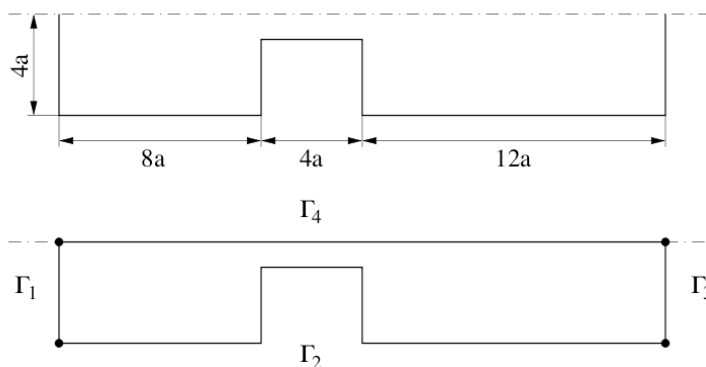


FIG. 7.7 – Contraction/Expansion 4:1:4

Nous avons comparé la vitesse le long d'un axe vertical au milieu de la partie contractée de l'écoulement et la pression de long de l'axe de symétrie. Avec CONCHA, nous avons utilisé un maillage triangulaire composé de 25 794 éléments et avec Polyflow® un maillage quadrangulaire composé de 14 866 éléments, (voir la figure Fig. 7.8 pour le maillage autour de la partie contractée utilisé avec CONCHA).

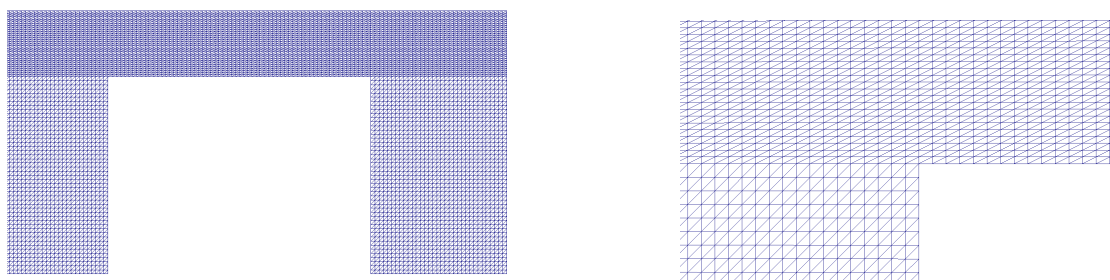
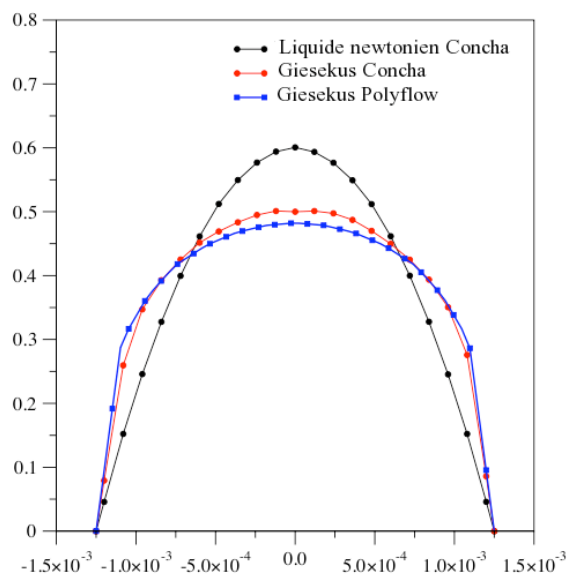


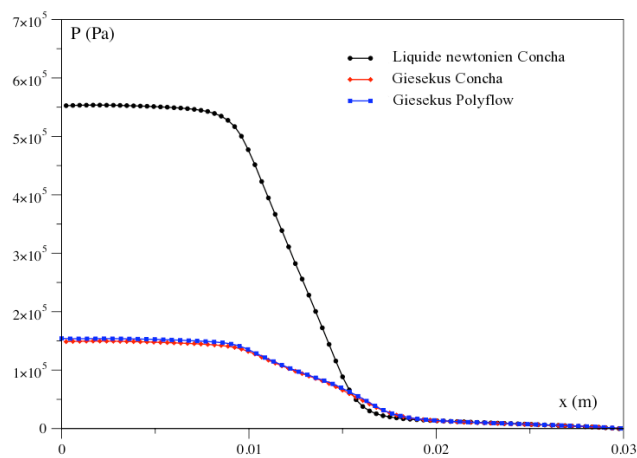
FIG. 7.8 – Maillage utilisé pour la contraction 4:1:4

Nous avons considéré un nombre de Weissenberg égal à 7,68, qui est pour ce cas, la valeur limite pour laquelle Polyflow® converge. Les résultats sont présentés dans la figure Fig. 7.9 qui

contient aussi les résultats obtenus avec CONCHA pour un liquide Newtonien (i.e pour $\lambda = 0$ s).



(a) Profils de vitesse dans la partie contracté



(b) Pressions le long de l'axe de symétrie

FIG. 7.9 – Contraction/Expansion 4:1:4 : comparaison avec Polyflow®

Pour le modèle de Giesekus, la simulation a été obtenue en 1 500 s avec CONCHA, et en 3 110 s avec Polyflow®.

On constate que les résultats obtenus sont très proches. De plus, les deux codes numériques prennent bien en compte le caractère rhéofluidifiant du liquide, caractérisé par l'aplatissement du profil de vitesse. En outre, cela implique la chute de la viscosité à la paroi. Comme on le voit dans

la figure Fig. 7.9(b), la pression nécessaire pour faire s'écouler un liquide polymère sera donc moins élevée que dans le cas newtonien.

On considère maintenant un écoulement autour d'un cylindre. La géométrie est donnée dans la figure Fig. 7.10 et nous avons pris $a = 0,001$ m. Les conditions de bord sont les mêmes que pour la contraction 4:1:4 mais nous n'utilisons pas cette fois d'axe de symétrie. Sur le bord du cylindre, on impose une condition de Dirichlet homogène. Nous avons utilisé un maillage composé de 3 100 quadrilatères avec CONCHA et 7 600 avec Polyflow[®] (voir la figure Fig. 7.11 pour le maillage autour du cylindre utilisé avec CONCHA). Les paramètres de stabilisation choisis sont $\gamma_1 = 10$ et $\delta = 2$.

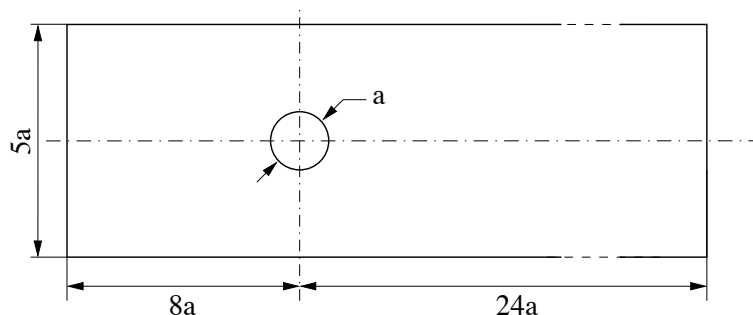


FIG. 7.10 – Écoulement autour d'un cylindre

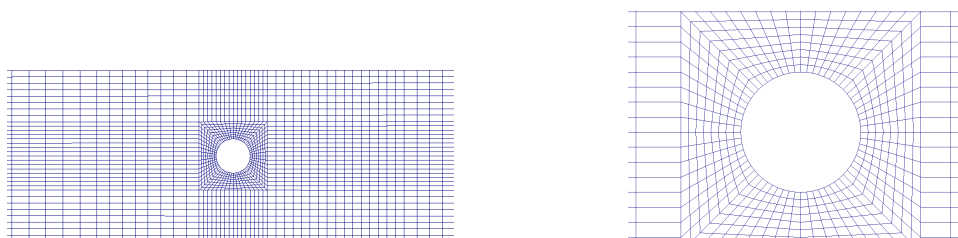
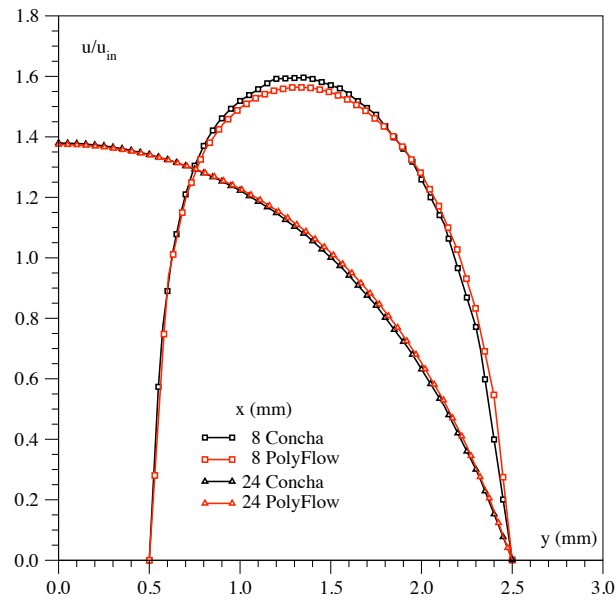
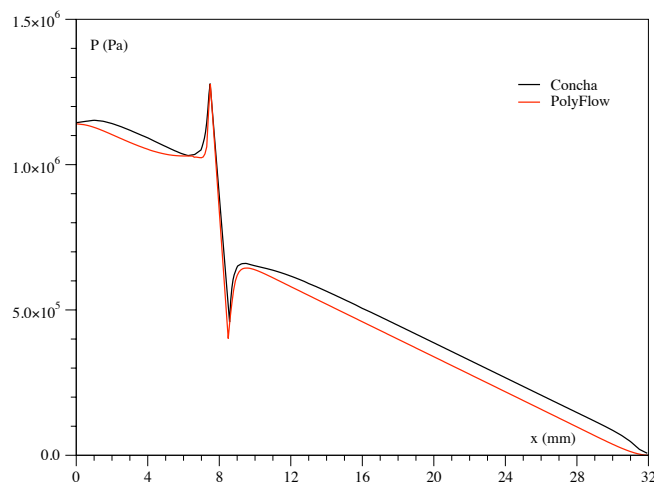


FIG. 7.11 – Maillage utilisé pour l'écoulement autour d'un cylindre

Nous présentons en figure Fig. 7.12 quelques comparaisons des simulations obtenues. Ces résultats correspondent à un nombre de Weissenberg de 3,75 ; au delà, Polyflow[®] présente des difficultés pour converger. Nous avons comparé les profils de vitesse le long de deux axes verticaux, un passant par le centre du cylindre ($x = 8\text{mm}$) et le second se situant entre le cylindre et la sortie ($x = 24\text{mm}$). On obtient alors des résultats similaires. Nous nous sommes ensuite intéressés à la pression le long de l'axe de symétrie de la géométrie. L'allure des courbes est semblable, les différences pouvant être expliquées par l'utilisation de maillages n'ayant pas le même nombre d'éléments.



(a) Profils de vitesse



(b) Pressions le long de l'axe de symétrie

FIG. 7.12 – Écoulement autour d'un cylindre : comparaison avec Polyflow®

7.3 Comparaisons avec d'autres schémas numériques pour le modèle d'Oldroyd-B

7.3.1 Principe de la méthode multigrilles

La méthode des multigrilles a été introduite par Fedorenko dans les années 1960 ([31]) pour la résolution du système linéaire issu de la discrétisation par différences finies de l'équation de

Poisson. Le principe consiste à utiliser une hiérarchie de maillages pour pallier le mauvais conditionnement du système linéaire ($O(h^{-1})$ si h est le pas de maillage), qui fatalement détériore la convergence de méthodes simples comme Jacobi, Gauss-Seidel ou le gradient conjugué. Cette méthode a ensuite été étendue à des problèmes elliptiques généraux et à d'autres équations, voir par exemple Hackbush [40] et Wesseling [83]. La théorie est riche dans le contexte des éléments finis, voir le livre de Bramble ([15]) et l'article synoptique de Yserantant [87] qui utilise les outils d'analyse fonctionnelle ainsi que l'analyse mathématique des éléments finis. L'approche la plus performante est aujourd'hui celle de Xu (voir [84] et [85]), qui interprète l'algorithme comme une correction de sous-espaces (*successive subspace correction*).

L'avantage principal de cette méthode est que l'ordre asymptotique du nombre d'opérations nécessaires pour résoudre un problème est de $\mathcal{O}(n)$, où n est le nombre d'inconnues du système. A titre de comparaison, les méthodes itératives dites *classiques* ont des ordres de convergence $\mathcal{O}(n^p)$ avec $1 < p \leq 2$. Par exemple, le nombre d'itérations du gradient conjugué double à chaque raffinement de maillage. En ce qui concerne les solveurs directs, le progrès des algorithmes a permis d'améliorer considérablement la constante, mais leur complexité ne peut être linéaire. Ils sont utilisés dans le contexte des multigrilles sur le maillage le plus grossier.

Pour expliquer la méthode des multigrilles, on considère tout d'abord deux maillages hiérarchiques, en notant par h le pas de discrétisation de la grille la plus fine et par $2h$ celui de la grille grossière. On cherche à résoudre le système

$$A_h \mathbf{u}_h = \mathbf{f}_h, \quad (7.3)$$

dont on note par \mathbf{u}_h la solution (supposé existante et unique).

Par la suite, pour un vecteur \mathbf{v}_h on notera sur une grille de pas h le résidu

$$\mathbf{r}_h = \mathbf{f}_h - A_h \mathbf{v}_h.$$

L'erreur $\mathbf{e}_h := \mathbf{u}_h - \mathbf{v}_h$ satisfait l'équation :

$$A_h \mathbf{e}_h = \mathbf{r}_h.$$

L'algorithme de résolution du système (7.3) avec deux grilles est le suivant :

1 – On effectue n_l itérations de lissage à l'aide d'une méthode itérative notée S, afin d'éliminer les erreurs de hautes fréquences et d'obtenir ainsi une solution approchée $\widetilde{\mathbf{v}}_h$ de \mathbf{v}_h sur le maillage fin.

$$\widetilde{\mathbf{v}}_h = S(A_h, \mathbf{f}_h, \mathbf{v}_h^0, n_l)$$

2 – On calcule le résidu :

$$\mathbf{r}_h = \mathbf{f}_h - A_h \widetilde{\mathbf{v}}_h$$

3 – On projette le résidu sur le maillage grossier à l'aide d'un opérateur de restriction P_{2h}^h :

$$\mathbf{r}_{2h} = P_{2h}^h \mathbf{r}_h$$

4 – On résout l'équation de l'erreur sur le maillage grossier à l'aide d'une méthode directe, afin d'obtenir la correction à apporter :

$$\mathbf{w}_{2h} = A_{2h}^{-1} \mathbf{r}_{2h}$$

5 – On prolonge cette erreur sur le maillage fin à l'aide d'un opérateur de prolongement P_h^{2h} :

$$\mathbf{w}_h = P_h^{2h} \mathbf{w}_{2h}$$

6 – On corrige la solution $\widetilde{\mathbf{v}}_h$:

$$\widetilde{\mathbf{v}}_h \leftarrow \widetilde{\mathbf{v}}_h + \mathbf{w}_h$$

7 – On effectue n_p itérations de post-lissage à l'aide d'une méthode itérative.

Le cas de deux grilles traité précédemment se généralise à une méthode multigrilles. Pour cela, à la fin de la troisième étape, à la place de calculer la correction, on recommence une itération à deux grilles. On peut dans ce cas enchaîner le passage d'un niveau à un autre de plusieurs manières. On considérera par la suite deux cas (voir la figure Fig 7.13) :

- Le V-cycle : on fait une opération de pré-lissage entre chaque passage d'une grille fine à une grille grossière et une opération de post-lissage entre chaque passage d'une grille grossière à une grille fine.
- Le W-cycle : on effectue la projection sur une grille qu'après avoir effectué deux cycles sur la grille grossière consécutive.

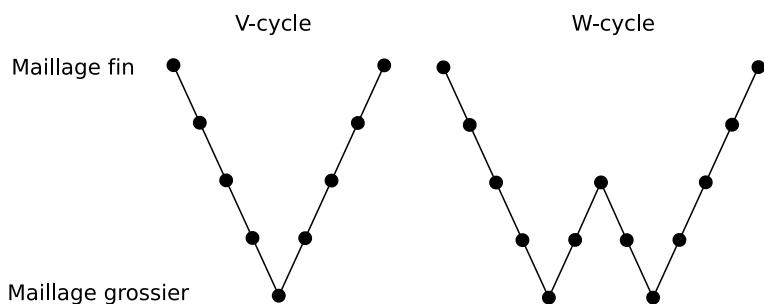


FIG. 7.13 – Schémas du V-cycle et du W-cycle

Il est donc important de déterminer de manière adéquate la méthode itérative utilisée pour les opérations de lissage, ainsi que les opérateurs de prolongement et de restriction.

7.3.2 Opérateurs de projection et de prolongement

Soit \mathbf{V}_h l'espace d'approximation sur la grille la plus fine notée \mathcal{K}_h i.e. de pas h , et soit \mathbf{V}_{2h} celui sur la grille de pas $2h$, notée \mathcal{K}_{2h} . On note φ_i^{2h} , $1 \leq i \leq N$ les fonctions de base de \mathbf{V}_h et ϕ_j^{2h} , $1 \leq j \leq M$ les fonctions de base de \mathbf{V}_{2h} . On cherche à construire un opérateur de

prolongement P_{2h}^h , ainsi qu'un opérateur de restriction P_h^{2h} définis par :

$$\begin{aligned} P_{2h}^h &: \mathbf{V}_{2h} \rightarrow \mathbf{V}_h, \\ P_h^{2h} &: \mathbf{V}_h \rightarrow \mathbf{V}_{2h}. \end{aligned}$$

Si l'on considère des espaces d'éléments finis conformes (voir aussi [53]), on aura $\mathbf{V}_{2h} \subset \mathbf{V}_h$. Dans ce cas, P_{2h}^h peut être défini comme l'injection canonique. Il s'avère que son transposé est la projection L^2 et on prendra toujours

$$P_h^{2h} = \left(P_{2h}^h \right)^T. \quad (7.4)$$

Toujours dans le cas conforme, une fonction de base grossière s'écrit comme une combinaison linéaire de fonctions de base fines :

$$\phi_j^{2h} = \sum_i r_{ji} \phi_i^h,$$

où r_{ji} sont des coefficients.

Une fonction $\mathbf{v}_{2h} \in \mathbf{V}_{2h}$ donnée par :

$$\mathbf{v}_{2h} = \sum_j x_j \phi_j^{2h},$$

s'écrit donc comme élément de \mathbf{V}_h de la façon suivante :

$$\mathbf{v}_{2h} = \sum_j x_j \sum_i r_{ji} \phi_i^h = \sum_i y_i \phi_i^h, \text{ avec } y_i := \sum_j r_{ji} x_j.$$

La dernière égalité donne l'opérateur de prolongement P_{2h}^h sous forme matricielle.

Lorsque l'on considère des espaces d'éléments finis non-conformes, ce qui est notre cas, on a $\mathbf{V}_{2h} \not\subset \mathbf{V}_h$. Les opérateurs de prolongement et de restriction doivent alors être construits. On trouve dans la littérature plusieurs travaux sur la construction de tels opérateurs, on cite par exemple [14] et [16] pour les éléments finis P_1 non-conformes sur les triangles.

Une idée est de chercher un opérateur de prolongement P_{2h}^h satisfaisant :

$$\langle P_{2h}^h \mathbf{v}_{2h}, \mathbf{w}_h \rangle_h = \langle \mathbf{v}_{2h}, \mathbf{w}_h \rangle_h, \quad \forall \mathbf{w}_h \in \mathbf{V}_h,$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle_h$ est un produit scalaire discret, qui doit être bien choisi pour éviter l'inversion de la matrice de masse associée.

Soit K^1 et K^2 deux mailles adjacentes appartenant au maillage grossier \mathcal{K}_{2h} . Dans le cas des éléments finis de Rannacher-Turek que l'on considère ici, les degrés de liberté étant la valeur moyenne sur chaque arête e , l'opérateur P_{2h}^h peut être défini par (voir aussi [21]) :

$$\int_e P_{2h}^h \mathbf{v}_{2h} ds = \begin{cases} \int_e \mathbf{v}_{2h} ds & \text{si } e \notin \partial K \text{ pour tout } K \in \mathcal{K}_{2h} \\ \frac{1}{2} \int_e (\mathbf{v}_{2h}|_{K^1} + \mathbf{v}_{2h}|_{K^2}) ds & \text{si } e \in \partial K^1 \cap \partial K^2 \end{cases}$$

Soient maintenant e_1 et e_2 deux arêtes du maillage fin \mathcal{K}_h formant l'arête e appartenant au maillage grossier \mathcal{K}_{2h} , alors l'opérateur de restriction P_h^{2h} est défini par :

$$\frac{1}{|e|} \int_e P_h^{2h} \mathbf{v}_h ds = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{|e_1|} \int_{e_1} \mathbf{v}_h ds + \frac{1}{|e_2|} \int_{e_2} \mathbf{v}_h ds \right)$$

Remarque 31. La même démarche est utilisée dans le cas des éléments finis de Crouzeix-Raviart, sur des triangles.

7.3.3 Lisseur de type Vanka

On présente ici la méthode utilisée pour lisser le résidu, c'est à dire éliminer les erreurs de hautes fréquences. En général, on utilise une méthode itérative *classique*. Ici une méthode de type ILU (Incomplete LU), ne peut pas être utilisée car le bloc diagonal correspondant est nul. Nous allons utiliser à la place une méthode de type Vanka (voir [79] et [80]), qui est bien adaptée aux matrices issues des problèmes de point-selle. Le principe de cette méthode est de résoudre des sous-systèmes de la matrice globale du système linéaire. Ces sous-systèmes seront choisis en tenant compte de la structure du système global. Une fois déterminés de manière adéquate, ils peuvent être résolus en utilisant une méthode directe.

Le lisseur de Vanka a été appliqué avec succès pour la simulation de fluides incompressibles, voir par exemple [78] et [46].

On introduit tout d'abord quelques notations. Soit $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une matrice creuse de *stencil* noté $\mathcal{S}(A)$. Il indique pour chaque ligne d'indice i l'ensemble $\mathcal{S}_i(A)$ des indices des entrées non nulles, c'est à dire :

$$\mathcal{S}_i(A) := \{1 \leq j \leq n : A_{ij} \neq 0\}.$$

Pour des ensembles d'indices I, J on note $A_{I,J}$ la sous-matrice correspondante de A .

7.3.3.1 Cas newtonien

Pour simplifier la description de la méthode, on considère dans un premier temps le problème de Stokes approché par éléments finis de Rannacher-Turek. Le système correspondant est de la forme :

$$\begin{pmatrix} A & C \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \quad (7.5)$$

Une première étape est de définir la taille de la sous-matrice considérée. Soient N , respectivement M , la dimension de l'espace de la vitesse, respectivement de la pression. Pour chaque $1 \leq i \leq M$ on définit l'ensemble J_i^r des indices des degrés de liberté pour la pression, dépendant de manière récursive d'un paramètre $r = 0, 1, \dots$. Pour $r = 0$ on prend $J_i^0 := \{i\}$ et pour $r > 0$ on a :

$$J_i^r := \bigcup_{j \in J_i^{r-1}} \bigcup_{k \in \mathcal{S}_j(B)} \mathcal{S}_k(C). \quad (7.6)$$

On définit alors l'ensemble I_i^r des indices de la vitesse qui couplent avec ces pressions de la manière suivante :

$$I_i^r = \bigcup_{j \in J_i^r} \mathcal{S}_j(B). \quad (7.7)$$

Les cas $r = 0$ et $r = 1$ sont présentés dans la figure Fig. 7.14.

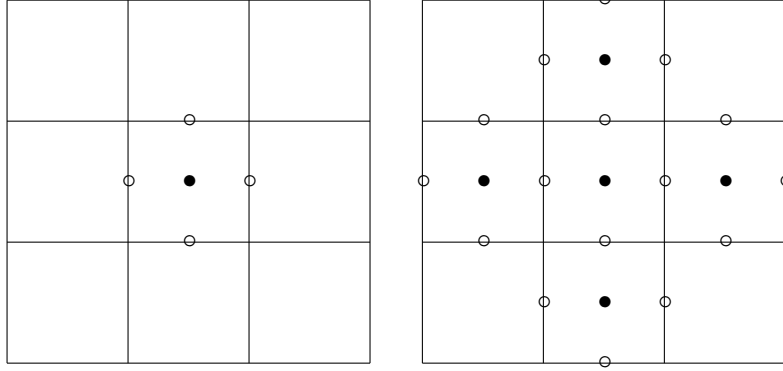


FIG. 7.14 – *Patches* pour le lisseur de Vanka. • indique les degrés de libertés de la pression et ◦ de la vitesse : $r = 0$ (à gauche) et $r = 1$ (à droite).

Pour simplifier la présentation, on omet l'indice r dans la suite.

Soit $m_i := \text{card} J_i$ et $n_i := \text{card} I_i$. Le passage d'une itération de lissage n à l'itération $n + 1$ se fait de la manière suivante :

1. On considère que (\mathbf{v}^n, p^n) est connu. On pose alors $(\mathbf{v}^{n,0}, p^{n,0}) = (\mathbf{v}^n, p^n)$
2. Pour $i = 1, \dots, M$
 - (a) On calcule l'ensemble des résidus $(\mathbf{r}^i, \mathbf{s}^i) \in \mathbb{R}^{n_i} \times \mathbb{R}^{m_i}$ pour chaque sous-matrice :

$$\begin{cases} k \in I_i : & \mathbf{r}_k^i = \mathbf{f}_k - \sum_{l \in \mathcal{S}_k(A)} A_{k,l} \mathbf{v}_l^{n,i-1} - \sum_{l \in \mathcal{S}_k(C)} C_{k,l} p_l^{n,i-1} \\ k \in J_i : & \mathbf{s}_k^i = g_k - \sum_{l \in \mathcal{S}_k(B)} B_{k,l} \mathbf{v}_l^{n,i-1} \end{cases}$$

- (b) On résout alors le sous-système suivant à l'aide d'une méthode directe pour obtenir la correction $(\delta \mathbf{v}^i, \delta p^i) \in \mathbb{R}^{n_i} \times \mathbb{R}^{m_i}$:

$$\begin{pmatrix} A_{I_i, I_i} & C_{I_i, J_i} \\ B_{J_i, I_i} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta \mathbf{v}^i \\ \delta p^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}^i \\ \mathbf{s}^i \end{pmatrix}.$$

- (c) On met à jour la solution par sous-ensembles, de la manière suivante :

$$k \in I_i : \quad \mathbf{v}_k^{n,i} = \mathbf{v}_k^{n,i-1} + \omega_v \delta \mathbf{v}_k^i; \quad k \in J_i : \quad p_k^{n,i} = p_k^{n,i-1} + \omega_p \delta p_k^i,$$

avec ω_v, ω_p deux paramètres de relaxation.

3. On pose $(\mathbf{v}^{n+1}, p^{n+1}) = (\mathbf{v}^{n,m}, p^{n,m})$.

L'itération décrite correspond à une méthode de Gauss-Seidel relaxée par bloc avec recouvrement. Le sous-système résolu à chaque étape garantit que la correction des vitesses satisfait la condition $\int_{K_i} \text{div} v_k^{n,i} = 0$. Elle correspond donc à la minimisation de l'énergie sous cette contrainte, ce qui permet d'obtenir la correction de la pression comme multiplicateur associé. La convergence de cette itération, sans toutefois donner des estimations de convergence précises, a été établie par Manservigi [59].

7.3.3.2 Cas non-newtonien

On généralise la méthode précédente aux formulations à trois champs. On rappelle que la vitesse et la pression sont approchées par des éléments finis de Rannacher-Turek et le tenseur des contraintes par des éléments finis constants par maille. Dans le cas non-newtonien, on aura à résoudre à chaque itération de Newton un système linéaire de la forme :

$$\begin{pmatrix} A & B & C_0 \\ B^T & 0 & 0 \\ C & 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ p \\ \underline{\tau} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ g \\ \underline{l} \end{pmatrix}. \quad (7.8)$$

La matrice du système linéaire est la matrice Jacobienne associée au problème considéré.

On note par P la dimension de l'espace du tenseur des contraintes. Les degrés de liberté pour le tenseur des contraintes sont les mêmes que ceux considérés pour la pression. On notera K_i^r , l'ensemble des indices correspondants à ces degrés de liberté. Les cas $r = 0$ et $r = 1$ sont présentés dans la figure Fig. 7.15.

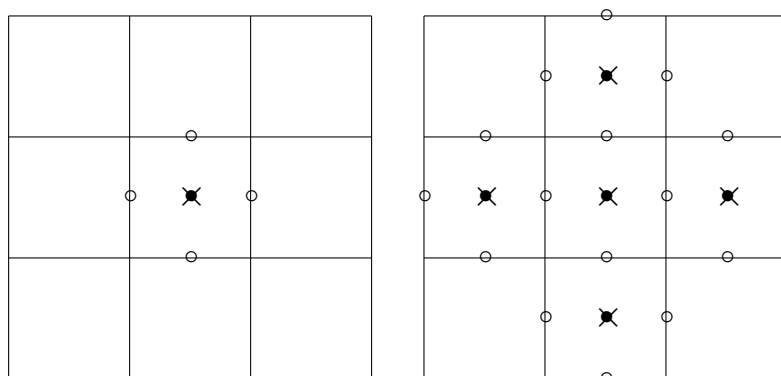


FIG. 7.15 – Patches pour le lisseur de Vanka. ● indique les degrés de liberté de la pression, ○ de la vitesse et × du tenseur des contraintes : $r = 0$ (à gauche) et $r = 1$ (à droite).

Le passage d'une itération n à une itération $n+1$ se fait de manière similaire au cas newtonien, en rajoutant les données sur $\underline{\tau}$:

1. On considère que $(\mathbf{v}^n, p^n, \underline{\tau}^n)$ est connu. On pose alors $(\mathbf{v}^{n,0}, p^{n,0}, \underline{\tau}^{n,0}) = (\mathbf{v}^n, p^n, \underline{\tau}^n)$
2. Pour $i = 1, \dots, M$

(a) On calcule les résidus $(\mathbf{r}^i, \mathbf{s}^i, \underline{q}^i) \in \mathbb{R}^{n_i} \times \mathbb{R}^{m_i} \times \mathbb{R}^{p_i}$ pour chaque sous-matrice :

$$\left\{ \begin{array}{l} k \in I_i : \quad \mathbf{r}_k^i = \mathbf{f}_k - \sum_{l \in \mathcal{S}_k(A)} A_{k,l} \mathbf{v}_l^{n,i-1} - \sum_{l \in \mathcal{S}_k(B)} B_{k,l} p_l^{n,i-1} - \sum_{l \in \mathcal{S}_k(C_0)} C_{0k,l} \underline{\tau}_l^{n,i-1} \\ k \in J_i : \quad \mathbf{s}_k^i = \mathbf{g}_k - \sum_{l \in \mathcal{S}_k(B^T)} B_{k,l}^T \mathbf{v}_l^{n,i-1} \\ k \in K_i : \quad \underline{q}_k^i = \underline{l}_k - \sum_{l \in \mathcal{S}_k(C)} C_{k,l} \mathbf{v}_l^{n,i-1} - \sum_{l \in \mathcal{S}_k(D)} D_{k,l} \underline{\tau}_l^{n,i-1} \end{array} \right.$$

(b) On résout alors le sous-système suivant pour obtenir l'erreur $(\delta \mathbf{v}^i, \delta p^i, \delta \underline{\tau}^i) \in \mathbb{R}^{n_i} \times \mathbb{R}^{m_i} \times \mathbb{R}^{p_i}$ à l'aide d'une méthode directe :

$$\begin{pmatrix} A_{I_i, I_i} & B_{I_i, J_i} & C_{0I_i, K_i} \\ B_{J_i, I_i}^T & 0 & 0 \\ C_{K_i, I_i} & 0 & D_{K_i, K_i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta \mathbf{v}^i \\ \delta p^i \\ \delta \underline{\tau}^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}^i \\ \mathbf{s}^i \\ \underline{q}^i \end{pmatrix}.$$

(c) On met à jour la solution par sous-ensembles de la manière suivante :

$$\begin{aligned} k \in I_i : \quad \mathbf{v}_k^{n,i} &= \mathbf{v}_k^{n,i-1} + \omega_v \delta \mathbf{v}_k^i \\ k \in J_i : \quad p_k^{n,i} &= p_k^{n,i-1} + \omega_p \delta p_k^i \\ k \in K_i : \quad \underline{\tau}_k^{n,i} &= \underline{\tau}_k^{n,i-1} + \omega_{\underline{\tau}} \delta \underline{\tau}_k^i \end{aligned}$$

avec $\omega_{\underline{\tau}}$ un paramètre de relaxation supplémentaire.

3. On pose $(\mathbf{v}^{n+1}, p^{n+1}, \underline{\tau}^{n+1}) = (\mathbf{v}^{n,m}, p^{n,m}, \underline{\tau}^{n,m})$.

7.3.4 Écoulement autour d'un cylindre centré

7.3.4.1 Description du cas-test

On souhaite ici comparer les résultats obtenus avec notre schéma numérique avec ceux que l'on peut trouver dans la littérature.

Nous avons donc considéré un écoulement autour d'un cylindre centré. Cet écoulement a été étudié dans divers papiers pour le modèle d'Oldroyd-B. Le calcul de la traînée permet d'obtenir un critère de comparaison des divers schémas numériques.

Dans [45] et [25], les auteurs considèrent une formulation en terme de logarithme du tenseur de conformation (cf. chapitre 6.3.3) du modèle d'Oldroyd-B. Dans ces papiers la vitesse est approchée par des éléments finis Q_2 continus et la pression par des éléments finis P_1 discontinus. Le tenseur de conformation est approché dans [45] par des éléments finis continus Q_1 et dans [25] par des éléments finis Q_2 .

Dans [29], les auteurs utilisent une formulation en terme de tenseur des contraintes où la vitesse est approchée par des éléments finis P_2 continus, la pression par des éléments finis P_1 continus et pour le tenseur des contraintes par élément finis P_1 discontinus. D'autres auteurs ([28]) présentent des résultats obtenus sur ce même cas-test mais en utilisant des schémas de volumes finis.

On rappelle que le modèle d'Oldroyd-B s'écrit sous la forme suivante (voir aussi 5.15) :

$$\begin{cases} \frac{D}{Dt} \mathbf{v} - 2\eta_n \text{div}(\underline{D}(\mathbf{v})) + \nabla p = \text{div} \underline{\tau}_p \\ \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \\ \underline{\tau}_p + \lambda \overset{\nabla}{\underline{\tau}}_p = 2\eta_p \underline{D}(\mathbf{v}) \end{cases} \quad (7.9)$$

La géométrie est décrite dans la figure Fig. 7.16, avec $a = 2R$ et avec R , le rayon du cylindre, égal à 1.

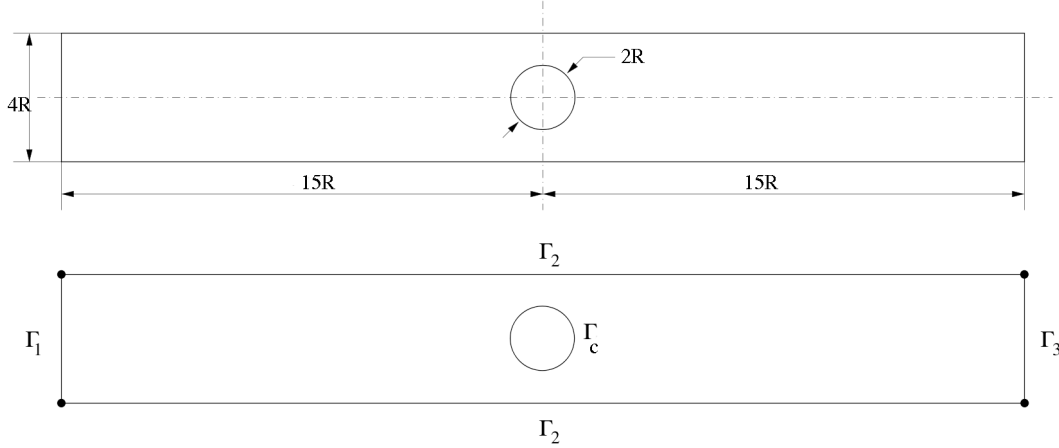


FIG. 7.16 – Écoulement autour d'un cylindre centré

Pour ce cas-test les paramètres sont les suivants :

- $\frac{\eta_n}{\eta} = 0,59$ avec $\eta = \eta_n + \eta_p = 1$.
 - On néglige le terme de transport sur la vitesse $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$.
 - Le nombre de Weissenberg est donné par $We^* = \frac{\lambda \bar{v}}{R}$, avec \bar{v} la vitesse moyenne.
- A l'entrée on impose le même profil de vitesse que celui utilisé dans [25] :

$$v_x(y) = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{y^2}{4} \right).$$

Remarque 32. Ce profil de vitesse est correct pour le modèle d'Oldroyd-B, car comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, ce modèle conduit à un profil de vitesse newtonien.

On souhaite maintenant calculer la valeur du tenseur des contraintes correspondante à imposer à l'entrée du domaine, sur le bord entrant. Tout d'abord on a :

$$\underline{\nabla} \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{3}{4}y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et donc } \underline{D}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{3}{4}y \\ -\frac{3}{4}y & 0 \end{pmatrix}.$$

On note

$$\underline{\tau} = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \tau_{yy} \end{pmatrix}.$$

D'autre part, on a $\mathbf{v} \cdot \nabla \underline{\tau} = v_x \partial_x \underline{\tau} = 0$, car $\underline{\tau}$ est indépendant de x .

En remplaçant ces expressions dans l'équation constitutive on obtient :

$$\begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \tau_{yy} \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} -\frac{3}{4}y\tau_{xy} & 0 \\ -\frac{3}{4}y\tau_{yy} & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} -\frac{3}{4}y\tau_{xy} & -\frac{3}{4}y\tau_{yy} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \eta_p \begin{pmatrix} 0 & -\frac{3}{4}y \\ -\frac{3}{4}y & 0 \end{pmatrix}.$$

Ceci conduit au système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \tau_{xx} + \lambda\frac{3}{2}y\tau_{xy} = 0 \\ \tau_{xy} + \lambda\frac{3}{4}y\tau_{yy} = -\eta_p\frac{3}{4}y \\ \tau_{yy} = 0 \end{cases}$$

et on obtient finalement :

$$\begin{cases} \tau_{xx} = 2\lambda\eta_p\left(\frac{3}{2}y\right)^2 \\ \tau_{xy} = -\eta_p\frac{3}{4}y \\ \tau_{yy} = 0 \end{cases}.$$

On récapitule les conditions de bord que l'on utilisera pour cette géométrie :

– sur Γ_1 on impose :

$$\begin{cases} v_x = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{y^2}{4}\right) \\ v_y = 0 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \tau_{xx}^{int} = 2\lambda\eta_p\left(\frac{3}{2}y\right)^2 \\ \tau_{xy}^{int} = -\eta_p\frac{3}{4}y \\ \tau_{yy}^{int} = 0 \end{cases}.$$

– Sur Γ_2 , on impose une conditions de bord de Dirichlet homogène.

– Sur Γ_3 , on impose une condition de Neumann.

7.3.4.2 Calcul de la traînée

On calcule alors la traînée le long du cylindre :

$$\mathcal{C} = \int_{\Gamma_c} (1, 0)^T \cdot \underline{\underline{\Pi}} \underline{\underline{n}} ds$$

avec $\underline{\underline{\Pi}}$ le tenseur des contraintes totales défini, pour la formulation (7.9) du modèle d'Oldroyd-B, par :

$$\underline{\underline{\Pi}} = \underline{\underline{\tau}}_p - p\underline{\underline{I}} + 2\eta_m \underline{\underline{D}}(\mathbf{u}),$$

et \mathbf{n} la normale unitaire extérieure.

Dans la suite, N désigne le nombre d'éléments, n_N le nombre d'itérations de Newton et n_M la somme des itérations effectuées par le solveur linéaire. Concernant la méthode multigrilles, nous avons utilisé les paramètres suivants : $r = 1$, $\omega_v = 1, 0$, $\omega_p = 1, 0$ et $\omega_\tau = 1, 0$. La tolérance pour la méthode de Newton est de 10^{-8} .

On compare dans les tableaux Tab 7.1, Tab 7.4 et Tab 7.5 les résultats obtenus sur différents maillages pour $\lambda = 0$, $\lambda = 0,3$ et $\lambda = 0,6$ respectivement. On constate que la méthode de Newton

N	n_N	n_M	\mathcal{C}	$\Delta\mathcal{C}$	\mathcal{C}^*
1024	3	5	131,704	-	-
4096	3	6	131,982	0,278	-
16384	3	5	132,229	0,247	132,311
65536	3	10	132,321	0,092	132,352
262144	3	8	132,348	0,027	132,357
1048576	4	28	132,355	0,007	132,357

TAB. 7.1 – Valeur de la traînée en fonction du nombre d'éléments pour $\lambda=0$

converge avec un nombre d'itérations faible, indépendamment du pas de maillage. Le nombre d'itérations de multigrilles reste aussi quasiment constant, mais augmente avec λ .

Dans le cas newtonien ($\lambda = 0$), on peut observer un comportement d'ordre deux de l'erreur de discrétisation (les écarts sont divisés par quatre à chaque itération de raffinement), voir Tab. 7.1. Cela justifie l'extrapolation aux limites pour augmenter la précision. Les valeurs extrapolées, notées \mathcal{C}^* dans le même tableau, fournissent une erreur d'ordre 3.

Remarque 33. À titre de comparaison, nous avons considéré les formulations à deux champs ($\underline{\nabla}\mathbf{u}, \underline{\nabla}\mathbf{v}$) et ($\underline{D}(\mathbf{u}), \underline{D}(\mathbf{v})$) du problème de Stokes (voir (2.7) et (2.8), respectivement) approchées par éléments finis de Rannacher-Turek. On présente dans les tableaux Tab. 7.3 et Tab. 7.2 la valeur de la traînée en fonction du nombre d'éléments. Dans ces cas, le tenseur des contraintes totales est défini par $\underline{\Pi} = \eta\Delta\mathbf{u} - p\mathbf{I}$ pour la formulation ($\underline{\nabla}\mathbf{u}, \underline{\nabla}\mathbf{v}$) respectivement, $\underline{\Pi} = 2\eta\underline{D}(\mathbf{u}) - p\mathbf{I}$ pour la formulation ($\underline{D}(\mathbf{u}), \underline{D}(\mathbf{v})$). On retrouve des valeurs similaires avec les deux formulations.

N	n_N	n_M	\mathcal{C}	$\Delta\mathcal{C}$	\mathcal{C}^*
1024	1	8	129,023	-	-
4096	1	8	131,507	2,484	-
16384	1	8	132,144	0,637	132,356
65536	1	8	132,304	0,160	132,357
262144	1	8	132,344	0,040	132,357
1048576	1	9	132,354	0,010	132,357

TAB. 7.2 – Valeur de la traînée en fonction du nombre d'éléments pour la formulation ($\underline{\nabla}\mathbf{u}, \underline{\nabla}\mathbf{v}$) du problème de Stokes

Le comportement de l'erreur de discrétisation dans le cas non-newtonien est moins satisfaisant, car nous observons un comportement d'ordre 1. Cela semble provenir de l'opérateur de transport

N	n_N	n_M	\mathcal{C}	$\Delta\mathcal{C}$	\mathcal{C}^*
1024	1	13	130,804	-	-
4096	1	14	131,903	1,099	-
16384	1	15	132,235	0,331	132,345
65536	1	15	132,325	0,090	132,355
262144	1	19	132,349	0,023	132,357
1048576	1	17	132,355	0,006	132,357

TAB. 7.3 – Valeur de la traînée en fonction du nombre d'éléments pour la formulation $(\underline{D}(\mathbf{u}), \underline{D}(\mathbf{v}))$ du problème de Stokes

N	n_N	n_M	\mathcal{C}	$\Delta\mathcal{C}$	\mathcal{C}^*
1024	6	11	121,701	-	-
4096	6	8	122,221	0,520	-
16384	4	8	122,623	0,402	123,025
65536	4	9	122,889	0,266	123,155
262144	5	14	123,038	0,149	123,187
1048576	4	22	123,114	0,076	123,190

TAB. 7.4 – Valeur de la traînée en fonction du nombre d'éléments pour $\lambda=0,3$

sur le tenseur des contraintes $\underline{\tau}$. On calcule alors des valeurs extrapolées notées \mathcal{C}^* telles que l'erreur soit d'ordre 2.

N	n_N	n_M	\mathcal{C}	$\Delta\mathcal{C}$	\mathcal{C}^*
1024	7	19	118,081	-	-
4096	6	12	118,421	0,340	-
16384	6	18	118,349	0,072	-
65536	6	24	118,085	0,264	117,821
262144	5	20	117,936	0,149	117,787
1048576	5	31	117,858	0,078	117,780

TAB. 7.5 – Valeur de la traînée en fonction du nombre d'éléments pour $\lambda=0,6$

On compare dans le tableau Tab. 7.6 les valeurs obtenues extrapolées sur le maillage le plus

fin avec des valeurs données dans la littérature (voit [28], [45], [29] et [25]). On observe une très bonne concordance.

λ	CONCHA	Dou <i>et al.</i> [28]	Hulsen <i>et al.</i> [45]	Étienne <i>et al.</i> [29]	Damanik <i>et al.</i> [25]
0	132,357	131,809	132,358	132,33	-
0,3	123,190	123,514	123,193	123,41	123,194
0,6	117,780	120,485	117,792	-	117,779

TAB. 7.6 – Valeur de la traînée, comparaisons avec d’autres schémas numériques pour $\lambda = 0 ; 0,3$ et $0,6$

7.4 Comportement dans des écoulements réalistes

Toutes ces simulations nous ont permis de valider notre code pour le modèle de Giesekus. Après avoir montré la supériorité du réalisme de ce modèle, on s’intéresse à des simulations dans des écoulements de référence pour différentes valeurs de We .

7.4.1 Pertinence des modèles rhéologiques utilisés

On considère la géométrie définie dans la figure Fig. 7.4. On compare alors la première composante de la vitesse u_x obtenue expérimentalement (cf. [72]) avec celle obtenue numériquement pour différents modèles rhéologiques : Giesekus, PTT et Oldroyd-B. Les résultats obtenus sont présentés dans la figure Fig. 7.17.

On constate que le profil de vitesse obtenu avec le modèle de Giesekus est très proche de la vitesse expérimentale. Pour le modèle de PTT, nous avons considéré deux valeurs de ϵ : 0,05 et 0,25. Pour ces modèles, la vitesse est surestimée mais il est possible d’optimiser la valeur de ϵ , afin de se rapprocher du profil de vitesse souhaité. Par contre, la valeur optimale pour cet écoulement serait totalement inadaptée pour décrire convenablement l’écoulement élongationnel au niveau du convergent. Avec le modèle de Giesekus et de PTT, on observe le comportement rhéofluidifiant des liquides polymères. Cependant, dans le cas du liquide d’Oldroyd-B, on retrouve un profil de vitesse parabolique, caractéristique d’un liquide newtonien. Cette simulation justifie notre choix de considérer le modèle de Giesekus comme équation constitutive de référence pour décrire le comportement des liquides polymères.

7.4.2 Contraction 4:1

On considère un écoulement dans une contraction 4:1 dont la géométrie est présentée dans la figure Fig.7.18 avec $a = 0,001$ m. On considère un maillage composé de triangles et les conditions de bord sont les suivantes :

- Γ_1 est le bord entrant, on impose un profil de vitesse plat égal à $0,1$ m/s et $\underline{\tau}^{int} = \underline{0}$.

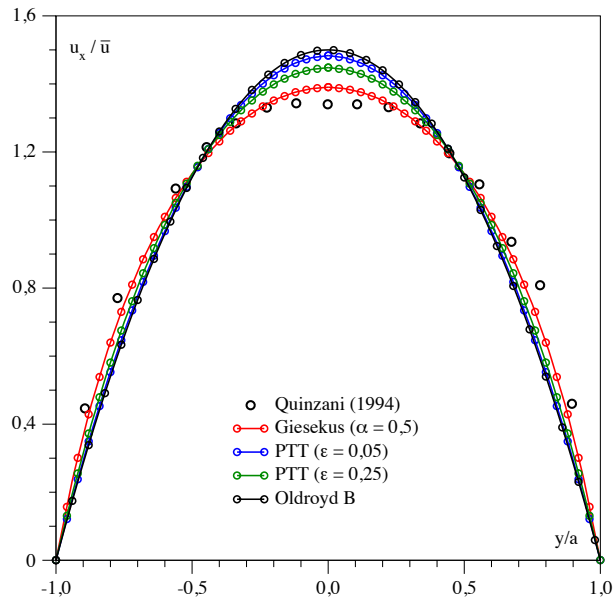


FIG. 7.17 – Comparaison des modèles de Giesekus, PTT et Oldroyd-B avec des données expérimentales

- Sur Γ_2 , on impose une condition de Dirichlet homogène.
- Γ_3 est la sortie, on impose une condition de Neumann homogène.
- Γ_4 est un axe de symétrie.

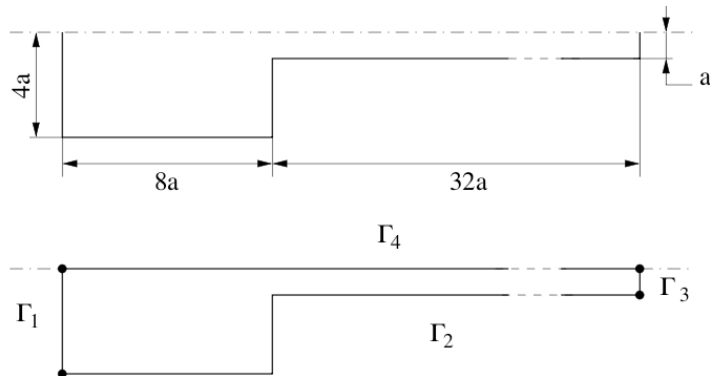


FIG. 7.18 – Contraction 4:1

On calcule le nombre de Weissenberg maximum pour un liquide newtonien équivalent (cf. Annexe B.2) :

$$We = \frac{12\lambda\bar{u}}{a}$$

où \bar{u} est la vitesse à l'entrée du domaine.

Dans la figure Fig. 7.19, on présente les lignes de courant obtenues pour différentes valeurs du nombre de Weissenberg pour le modèle de Giesekus, le modèle de PTT avec $\epsilon = 0,05$ et pour le modèle d'Oldroyd-B. Pour ces trois modèles, il existe une zone de recirculation en amont de la contraction. Les dimensions de ces recirculations augmentent avec le nombre de Weissenberg. Ce comportement est typique des liquides polymères et a pour origine l'existence des contraintes normales quantifiées par $N_1(\dot{\gamma})$, ce qui peut être assimilé à une augmentation locale de l'élasticité du liquide. Dans le domaine des grandes vitesses de déformation (au niveau de la contraction), et pour des valeurs élevées du nombre de Weissenberg la variation de $N_1(\dot{\gamma})$ est donnée par :

- Giesekus : $N_1(\dot{\gamma}) \approx \dot{\gamma}^{1/2}$
- Phan-Thien–Tanner : $N_1(\dot{\gamma}) \approx \dot{\gamma}^{2/3}$
- Oldroyd-B : $N_1(\dot{\gamma}) \approx \dot{\gamma}^2$

Pour des nombres de Weissenberg élevés, la taille de la zone de recirculation augmente plus rapidement pour un liquide d'Oldroyd-B que pour les deux autres liquides, comme nous pouvons le constater dans la figure Fig. 7.19.

Nous avons tracé dans la figure Fig. 7.20, la composante u_x de la vitesse le long de l'axe de symétrie pour les trois modèles considérés et pour différentes valeurs du nombre de Weissenberg. Contrairement aux modèles de Giesekus et de PTT, pour le modèle d'Oldroyd-B, la vitesse est supérieure à celle du liquide newtonien. Cela illustre le fait que le modèle d'Oldroyd-B ne traduit pas le comportement rhéofluidifiant du liquide, impliquant l'aplatissement du profil de vitesse et ne permet donc pas d'obtenir des simulations réalistes. D'autre part, on observe un pic de la vitesse u_x au niveau de la contraction que nous expliquons par l'apparition de contraintes normales aux plans de cisaillement dans la zone du convergent.

En outre, pour les modèles PTT et Oldroyd-B, on remarque l'apparition d'oscillations d'amplitude croissante avec le nombre de Weissenberg. Ces oscillations n'ont aucun sens physique et traduisent certainement des instabilités numériques. Elles semblent donc avoir un lien avec la perte de la convergence des algorithmes pour des nombres de Weissenberg élevés, à mettre en relation avec la positivité du tenseur de conformation discret.

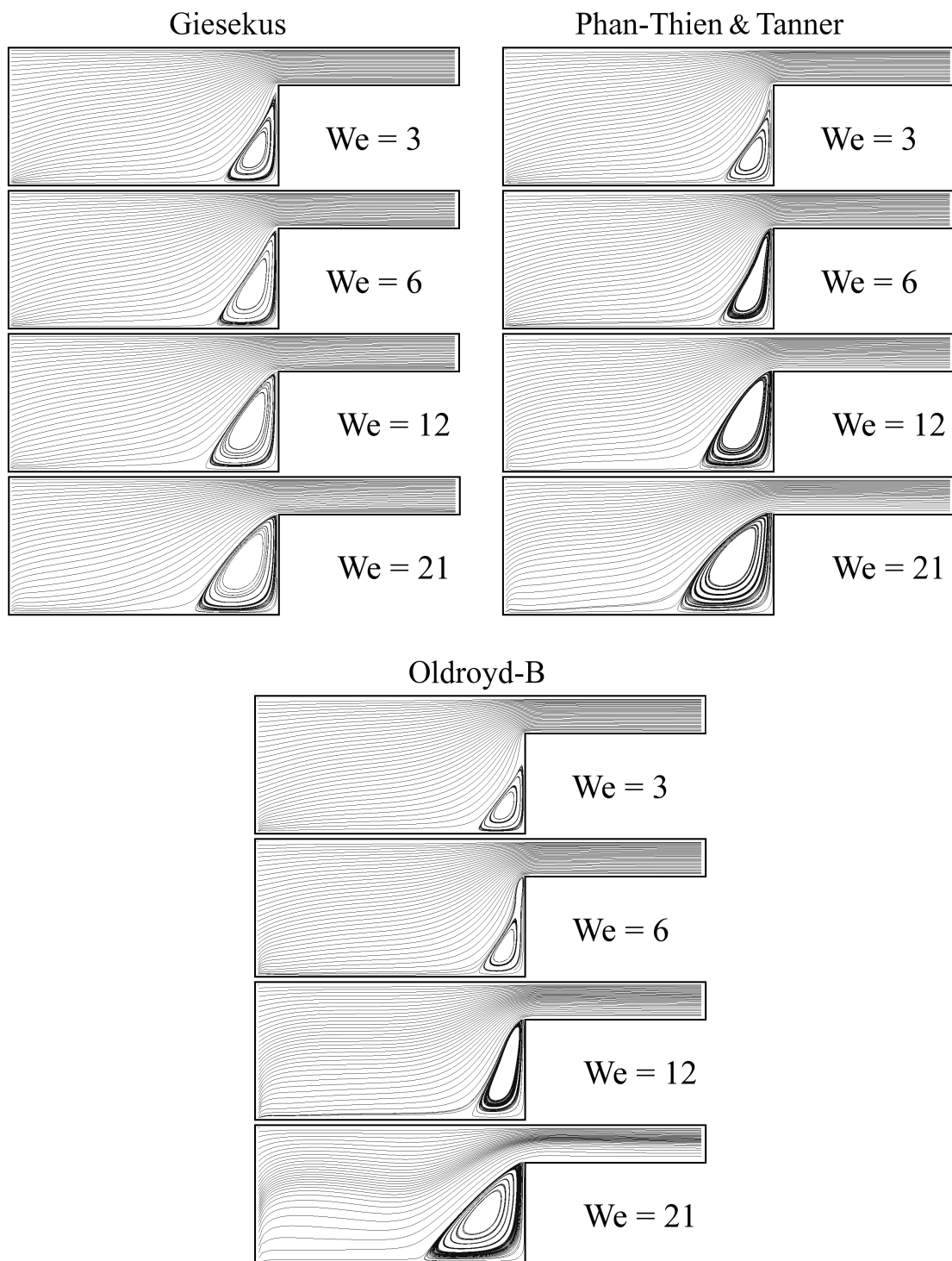
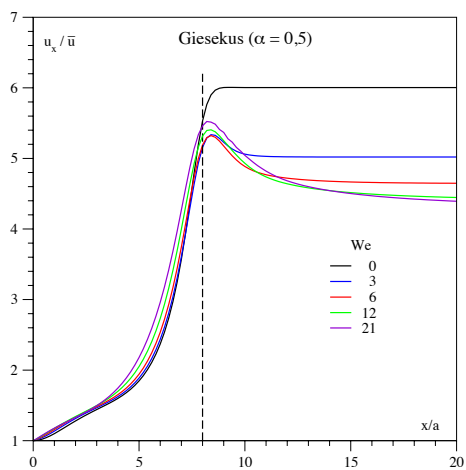
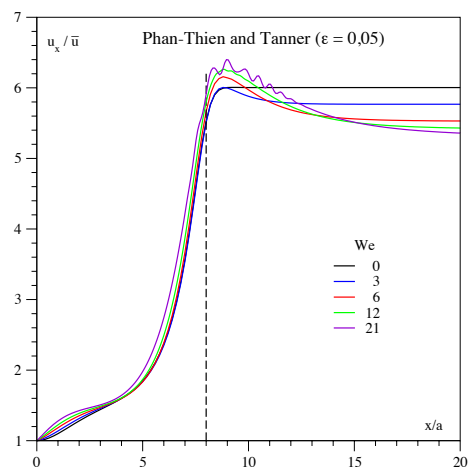


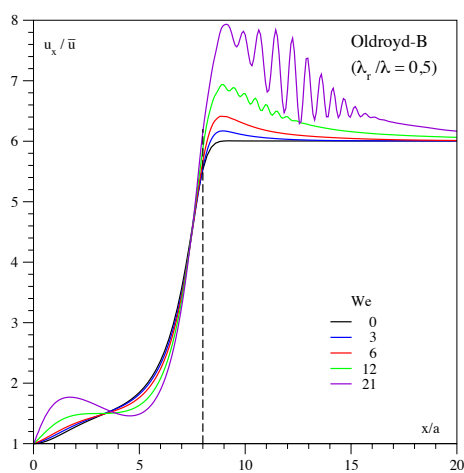
FIG. 7.19 – Contraction 4:1 : lignes de courant



(a) Modèle de Giesekus



(b) Modèle de PTT



(c) Modèle d'Oldroyd-B

FIG. 7.20 – Contraction 4:1 : profils de vitesse le long de l'axe de symétrie

7.4.3 Contraction 4:1:4

Au vu des résultats précédemment obtenus, nous considérerons dorénavant uniquement le modèle de Giesekus.

On reprend la géométrie de la contraction 4:1:4 introduite dans la sous-section 7.2.4 et le même maillage composé de triangles. Comme pour la contraction 4:1, nous avons tracé dans la figure Fig. 7.21 les lignes de courant pour différentes valeurs de We pour le modèle de Giesekus.



FIG. 7.21 – Contraction 4:1:4 : lignes de courant pour le modèle de Giesekus

Comme dans le cas de la géométrie 4:1, en amont de la contraction, on constate que la dimension de la zone de recirculation augmente avec le nombre de Weissenberg. Par contre, la taille de la recirculation située en aval du divergent diminue lorsque le nombre de Weissenberg augmente. Ce phénomène est similaire à un gonflement en sortie de filière qui est provoqué par la combinaison de trois effets :

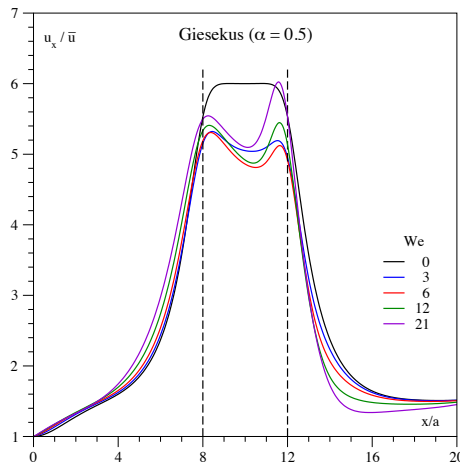
- les contraintes normales. Dans le canal, l'écoulement du liquide génère l'apparition de contraintes normales aux plans de cisaillement. Ces contraintes sont contenues par les parois du canal. Au niveau de sa sortie, ces contraintes sont libérées brutalement et provoquent l'écartement des plans de cisaillement.
- l'effet mémoire. Le liquide *se souvient* de la forme qu'il avait dans le réservoir amont et va donc essayer de la reprendre à la sortie du canal. Cependant, dans le canal le liquide va relaxer. Si le canal est suffisamment long sa relaxation sera totale et cet effet ne générera

pas de gonflement en sortie.

- Pour un liquide newtonien, le passage brutal du profil de vitesse parabolique dans le canal à un profil plat implique une expansion du liquide. Bien que cet effet se retrouve pour les liquides non-newtoniens, il est moins important pour ces liquides en raison de l’aplatissement du profil de vitesse.

Pour nos simulations, l’augmentation du nombre de Weissenberg se fait par l’augmentation du temps de relaxation. Il en découle un accroissement des contraintes normales et aussi une diminution de la relaxation du fluide dans le canal. Par contre, le profil de vitesse s’aplatit de plus en plus lorsque le nombre de Weissenberg augmente, le gonflement associé à cet effet est de plus en plus négligeable. L’*explosion* du liquide en sortie du canal provoque donc l’écrasement de la zone de recirculation.

Dans la figure Fig. 7.22, on présente la vitesse u_x le long de l’axe de symétrie pour différentes valeurs du nombre de Weissenberg. On observe au niveau de la contraction, les mêmes phénomènes que pour la contraction 4:1. De plus, juste avant l’expansion, la vitesse u_x augmente dans le cas non-newtonien. Cette accélération est due à l’explosion du liquide.



(a) $We \leq 21$

FIG. 7.22 – Contraction 4:1:4 : profils de vitesse le long de l’axe de symétrie

Pour ce cas test nous présentons aussi des résultats obtenus en utilisant le modèle instationnaire. On montre dans la figure Fig. 7.23 que les résultats sont identiques à ceux obtenus dans le cas stationnaire.

D’autre part, dans le cas instationnaire, nous avons pu obtenir des résultats pour des nombres de Weissenberg allant jusqu’à 60. Le terme évolutif semble donc stabiliser la formulation. On présente dans la figure Fig.7.24 les profils de vitesse le long de l’axe de symétrie. On note que l’accélération avant l’expansion continue d’augmenter avec le nombre de Weissenberg.

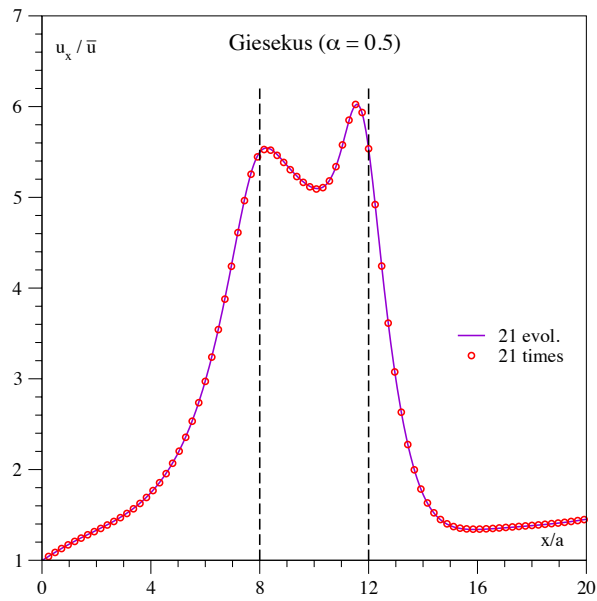


FIG. 7.23 – Contraction 4:1:4 : comparaison entre le schéma stationnaire et instationnaire

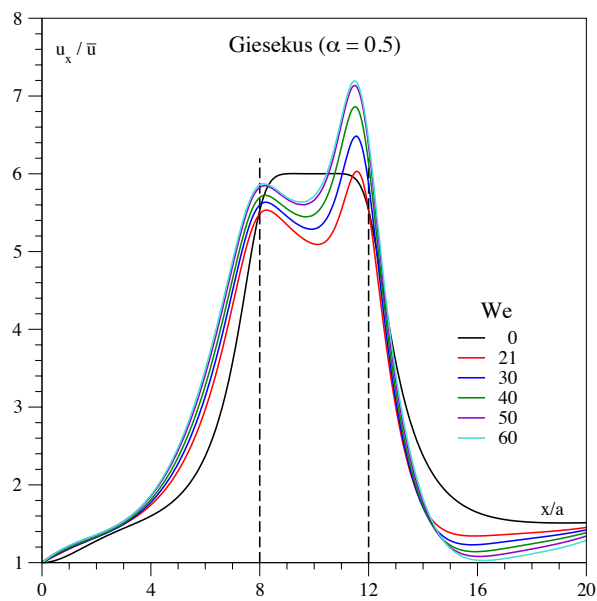


FIG. 7.24 – Contraction 4:1:4 : profils de vitesse avec le schéma instationnaire

7.4.4 Écoulement autour d'un cylindre

On considère maintenant un écoulement autour d'un cylindre, et on utilise la géométrie décrite dans la section 7.2.4. Comme précédemment, on utilise un maillage composé de 3 100 quadrila-

tères. On présente les profils de vitesse obtenus dans la figure Fig 7.25.

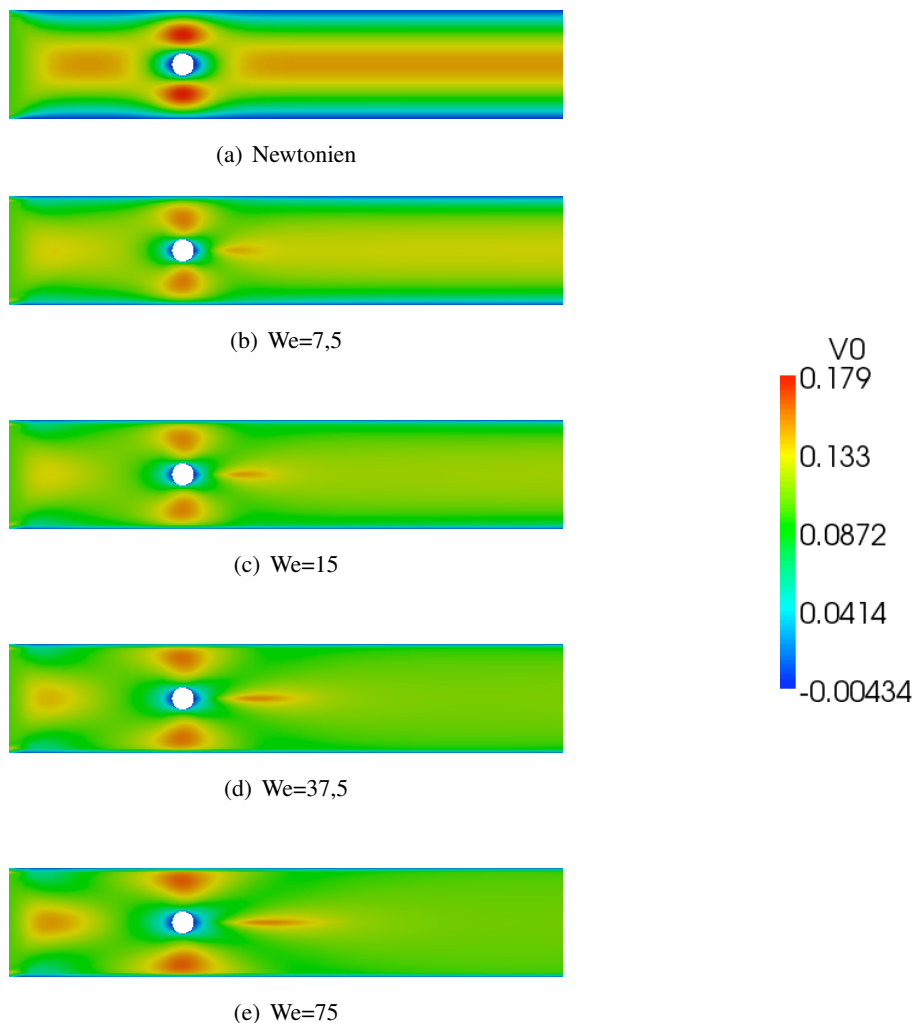


FIG. 7.25 – Écoulement autour d'un cylindre : première composante de la vitesse

Au niveau du cylindre, on constate un aplatissement du profil de vitesse, en effet la surface des domaines de vitesses maximales augmente avec le nombre de Weissenberg. À l'arrière du cylindre on observe un *effet de pointe* s'expliquant, comme pour la géométrie 4 : 1 : 4, par une expansion brutale du liquide.

Pour cette géométrie, nous n'avons pas atteint de limite en terme de nombre de Weissenberg.

7.4.5 Valeurs propres du tenseur de conformation

On s'intéresse ici à la positivité du tenseur de conformation. En effet, il a été montré dans le chapitre précédent (cf. section 6.3.3) que notre schéma numérique préserve cette propriété au niveau discret. Pour valider numériquement ce résultat, nous avons calculé les valeurs propres du tenseur de conformation pour un écoulement dans la contraction 4:1 et un écoulement autour d'un

cylindre dont les géométries ont été données dans la section 7.2.4. Ces résultats sont présentés dans les figures Fig. 7.26 et Fig. 7.27 pour la contraction 4:1 et Fig. 7.28 et Fig. 7.29 pour l'écoulement autour d'un cylindre.

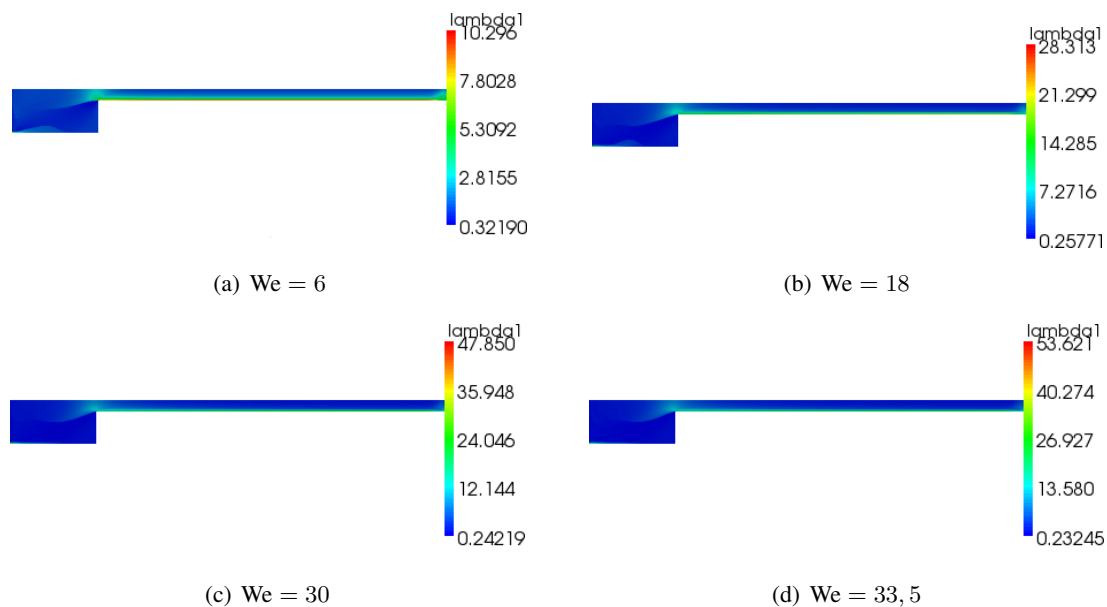


FIG. 7.26 – Contraction 4:1 : première valeur propre de \underline{C}_h

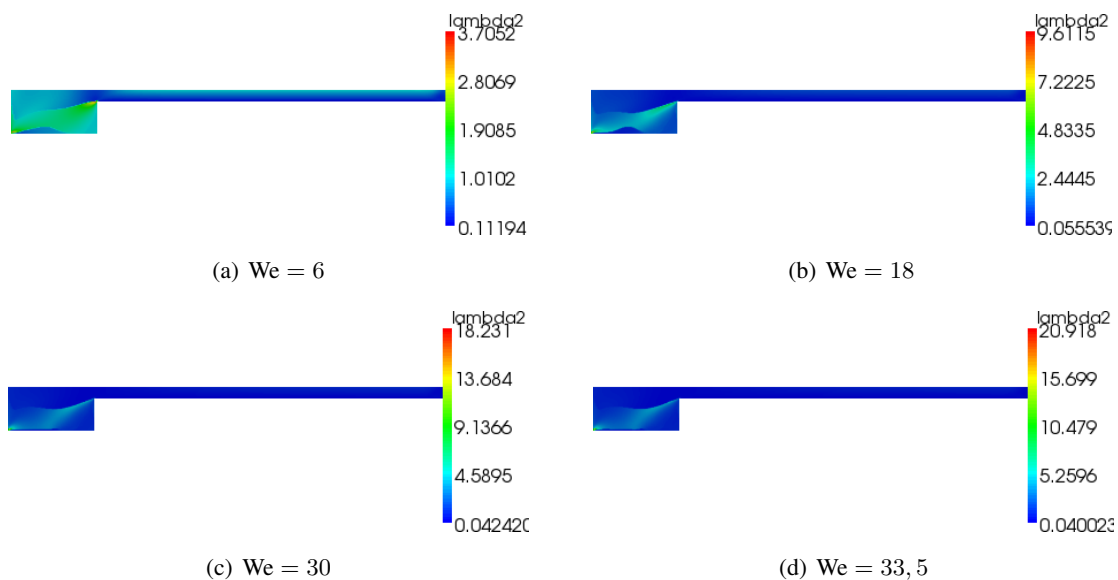


FIG. 7.27 – Contraction 4:1 : deuxième valeur propre de \underline{C}_h

On constate que les valeurs propres restent positives, aussi bien dans le cas triangulaire que dans celui quadrangulaire.

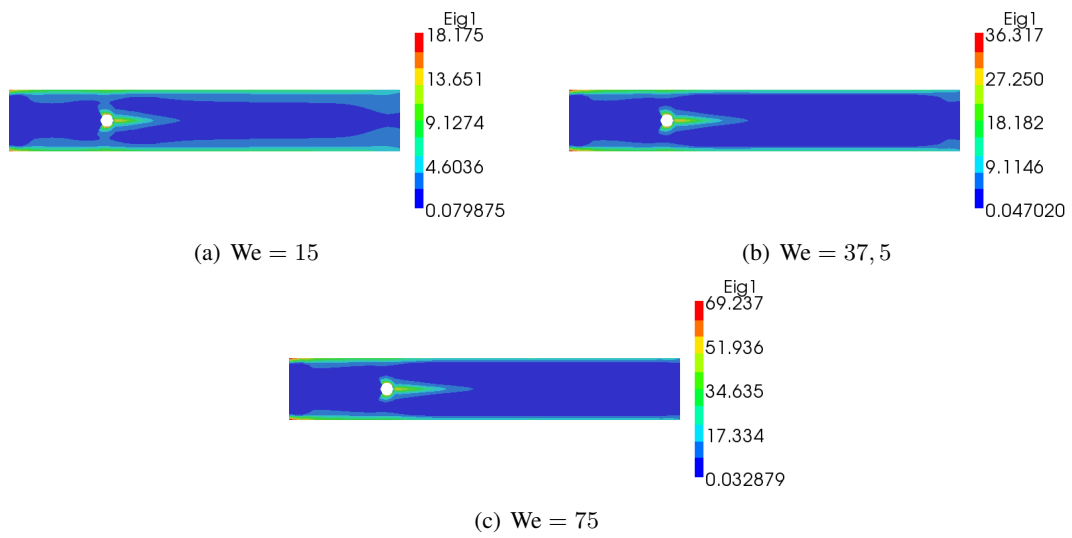


FIG. 7.28 – Écoulement autour d'un cylindre : première valeur propre de \underline{C}_h

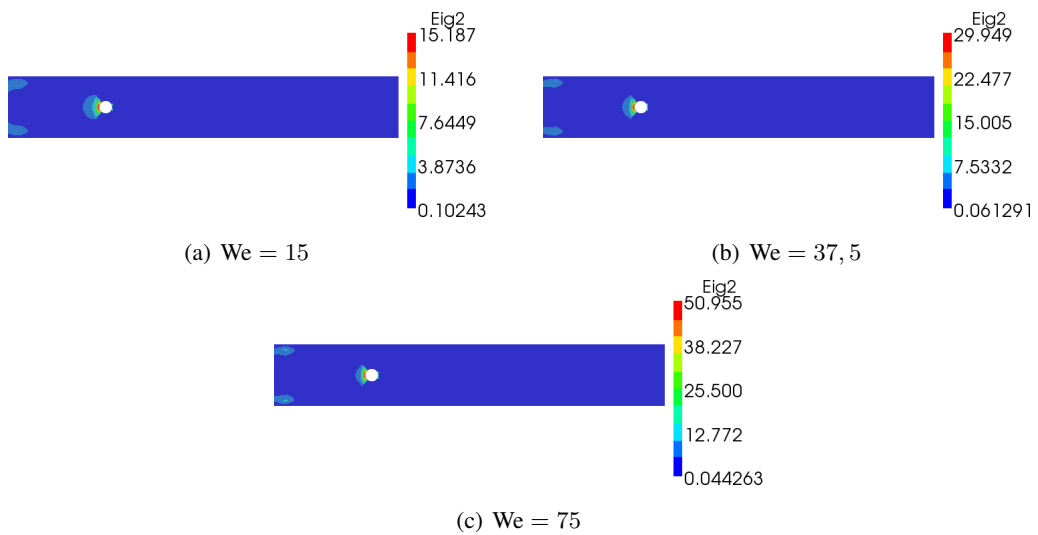


FIG. 7.29 – Écoulement autour d'un cylindre : deuxième valeur propre de \underline{C}_h

Troisième partie

Annexes

Annexe A

Rhéologie - Modèle de Giesekus

A.1 Construction du modèle

Ce modèle est construit à partir du modèle de Maxwell convecté contravariant ou *upper-convected Maxwell model* (UCM) :

$$\underline{\tau} + \lambda \overset{\nabla}{\underline{\tau}} = 2\eta \underline{D}$$

En exprimant l'état de contrainte du fluide en fonction du tenseur de Cauchy \underline{C}^1 , l'équation constitutive du modèle de Maxwell devient :

$$\underline{\tau} + \eta \overset{\nabla}{\underline{C}} = \underline{0}$$

Giesekus propose de rendre non-linéaire cette équation constitutive en introduisant un tenseur d'*anisotropie de mobilité des chaînes* $\underline{\beta}$. Ce tenseur exprime la relation entre la relaxation d'une chaîne et sa *forme* induite par l'écoulement. Un élément de chaîne fortement déformé donc très orienté sera peu mobile et emmagasinerà une part importante de la contrainte :

$$\frac{1}{2} \{ \underline{\beta} \cdot \underline{\tau} + \underline{\tau} \cdot \underline{\beta} \} + \eta \overset{\nabla}{\underline{C}} = \underline{0}$$

Dans le cas d'un ensemble de chaînes uniforme, le tenseur de mobilité est symétrique :

$$\underline{\beta} \cdot \underline{\tau} = \underline{\tau} \cdot \underline{\beta} \quad \Rightarrow \quad \underline{\beta} \cdot \underline{\tau} + \eta \overset{\nabla}{\underline{C}} = \underline{0} \quad (\text{A.1})$$

Pour relier le tenseur de mobilité au tenseur de Cauchy, Giesekus construit une fonction linéaire en considérant que lorsque le liquide est au repos, nous savons que $\lim_{\underline{\tau} \rightarrow \underline{0}} \underline{\beta} = \underline{I}$:

$$\underline{\beta} = \underline{I} + \alpha \{ \underline{C} - \underline{I} \} \quad \Rightarrow \quad \underline{\beta} = (1 - \alpha) \underline{I} + \alpha \underline{C} \quad \text{avec} \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

En tenant compte de l'expression ci-dessus, l'équation (A.1) devient :

$$(1 - \alpha) \underline{\tau} + \alpha \underline{C} \cdot \underline{\tau} + \eta \overset{\nabla}{\underline{C}} = \underline{0}$$

¹Tenseur de déformation droit de Cauchy-Green selon la terminologie de Noll-Truesdell

En éliminant le tenseur déviateur des contraintes par son expression en fonction du tenseur de Cauchy $\underline{\tau} = G \{ \underline{C} - \underline{I} \}$, nous obtenons une première forme de l'équation constitutive du modèle de Giesekus :

$$\alpha \underline{C} \cdot \underline{C} + (1 - 2\alpha) \underline{C} - (1 - \alpha) \underline{I} + \lambda \overset{\nabla}{\underline{C}} = \underline{0}$$

Et en exprimant le tenseur de Cauchy en fonction du tenseur déviateur des contraintes, nous aboutissons à la deuxième forme du modèle de Giesekus :

$$\underline{\tau} + \frac{\alpha}{G} \underline{\tau} \cdot \underline{\tau} + \lambda \overset{\nabla}{\underline{\tau}} = 2\eta \underline{D}$$

Comme par définition $\lambda = \eta / G$, nous obtenons :

$$\underline{\tau} + \frac{\alpha\lambda}{\eta} \underline{\tau} \cdot \underline{\tau} + \lambda \overset{\nabla}{\underline{\tau}} = 2\eta \underline{D}$$

Remarque. Pour $\alpha = 0$, nous retrouvons le modèle de Maxwell convecté contravariant.

A.2 Comportements rhéologiques

Nous allons analyser les comportements rhéologiques prévus par ce modèle dans le cas d'un écoulement de cisaillement simple et celui d'un écoulement élongationnel uniaxial. La valeur $\alpha = 1/2$ est retenue car comme nous allons le voir, elle seule conduit à une description réaliste des liquides polymères. La loi de comportement du liquide de Giesekus s'écrit alors :

$$\underline{\tau} + \frac{\lambda}{2\eta} \underline{\tau} \cdot \underline{\tau} + \lambda \overset{\nabla}{\underline{\tau}} = 2\eta \underline{D} \quad (\text{A.2})$$

A.2.1 Écoulement de cisaillement simple

Pour cet écoulement, la vitesse est donnée par :

$$\mathbf{u} = (\dot{\gamma} y, 0, 0)$$

Le tenseur des vitesses de déformation est donc défini de la manière suivante :

$$\underline{D}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial u_x}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.3})$$

Le liquide ayant un comportement non-newtonien, le tenseur déviateur des contraintes est de la forme :

$$\underline{\tau} = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \tau_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{zz} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

En remplaçant les tenseurs par leurs expressions (A.3) et (A.4), l'équation constitutive (A.2) devient :

$$\begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \tau_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{zz} \end{pmatrix} + \frac{\lambda}{2\eta} \begin{pmatrix} \tau_{xx}^2 + \tau_{xy}^2 & \tau_{xy}(\tau_{xx} + \tau_{yy}) & 0 \\ \tau_{xy}(\tau_{xx} + \tau_{yy}) & \tau_{yy}^2 + \tau_{xy}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{zz}^2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 2\tau_{xy} & \tau_{yy} & 0 \\ \tau_{yy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial y} = \eta \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial y}, \quad (\text{A.5})$$

ce qui conduit au système d'équations :

$$\tau_{xx} + \frac{\lambda}{2\eta} (\tau_{xx}^2 + \tau_{xy}^2) - 2\lambda\tau_{xy} \frac{\partial u_x}{\partial y} = 0 \quad (\text{A.6})$$

$$\tau_{yy} + \frac{\lambda}{2\eta} (\tau_{yy}^2 + \tau_{xy}^2) = 0 \quad (\text{A.7})$$

$$\tau_{zz} + \frac{\lambda}{2\eta} \tau_{zz}^2 = 0 \quad (\text{A.8})$$

$$\tau_{xy} + \frac{\lambda}{2\eta} \tau_{xy} (\tau_{xx} + \tau_{yy}) - \lambda\tau_{yy} \frac{\partial u_x}{\partial y} = \eta \frac{\partial u_x}{\partial y}. \quad (\text{A.9})$$

De (A.8), nous obtenons $\tau_{zz} = 0$ ou $\tau_{zz} = -2\frac{\eta}{\lambda}$. Seule la première solution a un sens physique.

On pose $\chi = \lambda \frac{\partial u_x}{\partial y} = \lambda \dot{\gamma}$ et $\beta = \frac{\lambda}{2\eta}$, alors :

$$\tau_{xx} + \beta (\tau_{xx}^2 + \tau_{xy}^2) - 2\chi\tau_{xy} = 0 \quad (\text{A.10})$$

$$\tau_{yy} + \beta (\tau_{yy}^2 + \tau_{xy}^2) = 0 \quad (\text{A.11})$$

$$\tau_{xy} + \beta \tau_{xy} (\tau_{xx} + \tau_{yy}) - \chi\tau_{yy} = \eta \dot{\gamma}. \quad (\text{A.12})$$

On commence par effectuer la soustraction (A.10) - (A.11) :

$$(\tau_{xx} - \tau_{yy}) \left(1 + \beta (\tau_{xx} + \tau_{yy}) \right) = 2\chi\tau_{xy} \quad (\text{A.13})$$

On écrit, à partir de (A.12) :

$$\tau_{xy} + \beta \tau_{xy} (\tau_{xx} + \tau_{yy}) = \eta \dot{\gamma} + \chi\tau_{yy} = \chi \left(\frac{\eta}{\lambda} + \tau_{yy} \right)$$

$$\tau_{xy} (1 + \beta (\tau_{xx} + \tau_{yy})) = \frac{\chi}{2\beta} (1 + 2\beta\tau_{yy}). \quad (\text{A.14})$$

Il s'en suit que :

$$\tau_{xy} \left(1 + \beta (\tau_{xx} + \tau_{yy}) \right) = \frac{\chi}{2\beta} (1 + 2\beta\tau_{yy}). \quad (\text{A.15})$$

En remplaçant l'expression (A.15) dans (A.13), on obtient :

$$\frac{\tau_{xx} - \tau_{yy}}{\tau_{xy}} = \frac{2\chi\tau_{xy}}{\frac{\chi}{2\beta}(1 + 2\beta\tau_{yy})} \Rightarrow \frac{1}{4\beta}(\tau_{xx} - \tau_{yy})(1 + 2\beta\tau_{yy}) = \tau_{xy}^2. \quad (\text{A.16})$$

De (A.11) on sait que :

$$\tau_{yy}(1 + \beta\tau_{yy}) = -\beta\tau_{xy}^2, \quad (\text{A.17})$$

ce qui grâce à (A.16) conduit à :

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\beta}(\tau_{xx} - \tau_{yy})(1 + 2\beta\tau_{yy}) &= -\frac{1}{\beta}\tau_{yy}(1 + \beta\tau_{yy}) \\ \Leftrightarrow (\tau_{xx} - \tau_{yy})(1 + 2\beta\tau_{yy}) + 4\tau_{yy}(1 + \beta\tau_{yy}) &= 0 \\ \Leftrightarrow \tau_{xx} &= -\tau_{yy} \frac{3 + 2\beta\tau_{yy}}{1 + 2\beta\tau_{yy}} \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Ainsi on a :

$$\tau_{xx} + \tau_{yy} = -\tau_{yy} \left(\frac{3 + 2\beta\tau_{yy}}{1 + 2\beta\tau_{yy}} - 1 \right) = -2 \frac{\tau_{yy}}{1 + 2\beta\tau_{yy}} \quad (\text{A.19})$$

Les relations (A.19) et (A.14) impliquent :

$$\tau_{xy} \left(1 - 2\beta \frac{\tau_{yy}}{1 + 2\beta\tau_{yy}} \right) = \frac{\chi}{2\beta}(1 + 2\beta\tau_{yy}) \Leftrightarrow \tau_{xy} = \frac{\chi}{2\beta}(1 + 2\beta\tau_{yy})^2 \quad (\text{A.20})$$

En effectuant la multiplication (A.14) \times (A.13), on obtient :

$$(\tau_{xx} - \tau_{yy}) \left(1 + \beta(\tau_{xx} + \tau_{yy}) \right)^2 = \frac{\chi^2}{\beta}(1 + 2\beta\tau_{yy}). \quad (\text{A.21})$$

De (A.18) on déduit :

$$\tau_{xx} - \tau_{yy} = -\tau_{yy} \left(\frac{3 + 2\beta\tau_{yy}}{1 + 2\beta\tau_{yy}} + 1 \right) \quad (\text{A.22})$$

$$\begin{aligned} &= -\tau_{yy} \frac{3 + 2\beta\tau_{yy} + 1 + 2\beta\tau_{yy}}{1 + 2\beta\tau_{yy}} \\ &= -4\tau_{yy} \frac{1 + \beta\tau_{yy}}{1 + 2\beta\tau_{yy}}. \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

En remplaçant l'expression (A.23) dans (A.21) et dans (A.19), on obtient :

$$\begin{aligned}
& -4\tau_{yy} \frac{1 + \beta\tau_{yy}}{1 + 2\beta\tau_{yy}} \left(1 + \beta - 2 \frac{\tau_{yy}}{1 + 2\beta\tau_{yy}} \right)^2 = \frac{\chi^2}{\beta} (1 + 2\beta\tau_{yy}) \\
\iff & -4\tau_{yy} \frac{1 + \beta\tau_{yy}}{1 + 2\beta\tau_{yy}} \left(\frac{1 + 2\beta\tau_{yy} - 2\beta\tau_{yy}}{1 + 2\beta\tau_{yy}} \right)^2 = \frac{\chi^2}{\beta} (1 + 2\beta\tau_{yy}) \\
\iff & -4\beta\tau_{yy} \frac{1 + \beta\tau_{yy}}{1 + 2\beta\tau_{yy}} \frac{1}{(1 + 2\beta\tau_{yy})^2} = \chi^2 (1 + 2\beta\tau_{yy}) \\
\iff & -4\beta\tau_{yy} \frac{1 + \beta\tau_{yy}}{(1 + 2\beta\tau_{yy})^3} = \chi^2 (1 + 2\beta\tau_{yy}) \\
& \iff \chi^2 = -4\beta\tau_{yy} \frac{1 + \beta\tau_{yy}}{(1 + 2\beta\tau_{yy})^4} \quad (\text{A.24})
\end{aligned}$$

L'équation (A.24) admet pour solution² :

$$\begin{aligned}
\tau_{yy} &= \frac{-2\beta^2\chi^2 \pm \sqrt{2} \sqrt{-\beta^4\chi^2 + \beta^3\chi^2 \sqrt{\beta^2 + 4\beta^2\chi^2}}}{4\beta^3\chi^2} \\
&= \frac{-2\beta^2\chi^2 \pm \sqrt{2} \sqrt{-\beta^4\chi^2 + \beta^4\chi^2 \sqrt{1 + 4\chi^2}}}{4\beta^3\chi^2} \\
&= \frac{-2\beta^2\chi^2 \pm \beta^2\chi\sqrt{2} \sqrt{-1 + \sqrt{1 + 4\chi^2}}}{4\beta^3\chi^2} \\
&= \frac{-2\chi \pm \sqrt{2} \sqrt{-1 + \sqrt{1 + 4\chi^2}}}{4\beta\chi} \\
&= -\frac{1}{2\beta} \left(1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2\chi} \sqrt{\sqrt{1 + 4\chi^2} - 1} \right).
\end{aligned}$$

Comme $\tau_{yy} \leq 0$ alors :

$$\tau_{yy} = -\frac{1}{2\beta} \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2\chi} \sqrt{\sqrt{1 + 4\chi^2} - 1} \right)$$

Finalement, on obtient :

$$\tau_{yy} = \frac{-2\chi \pm \sqrt{2} \sqrt{-1 + \sqrt{1 + 4\chi^2}}}{4\beta\chi} = -\frac{1}{2\beta} \left(1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2\chi} \sqrt{\sqrt{1 + 4\chi^2} - 1} \right). \quad (\text{A.25})$$

Pour obtenir la contrainte de cisaillement τ_{xy} , reprenons l'équation (A.20) et remplaçons la

²Ce résultat a été obtenu à l'aide du logiciel MATHEMATICA.

contrainte normale τ_{yy} par son expression donnée ci-dessus :

$$\begin{aligned}\tau_{xy} &= \frac{\chi}{2\beta} (1 + 2\beta\tau_{yy})^2 = \frac{\chi}{2\beta} \left(1 + 2\beta \left(-\frac{1}{2\beta} + \frac{\sqrt{2}}{4\beta\chi} \sqrt{\sqrt{1+4\chi^2}-1} \right) \right)^2 \\ &= \frac{\chi}{2\beta} \left(\frac{\sqrt{2}}{2\chi} \sqrt{\sqrt{1+4\chi^2}-1} \right)^2 = \frac{1}{4\beta\chi} (\sqrt{1+4\chi^2}-1) \\ \Rightarrow \tau_{xy} &= \frac{\chi}{\beta} \frac{1}{1 + \sqrt{1+4\chi^2}}\end{aligned}$$

Déterminons maintenant les différences des contraintes normales. De (A.23), on déduit :

$$\tau_{xx} - \tau_{yy} = -4\tau_{yy} \frac{1 + \beta\tau_{yy}}{1 + 2\beta\tau_{yy}}.$$

Or, on a :

$$\begin{aligned}1 + \beta\tau_{yy} &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2\chi} \sqrt{\sqrt{1+4\chi^2}-1} - 1 \right) \\ 1 + 2\beta\tau_{yy} &= -\frac{\sqrt{2}}{2\chi} \sqrt{\sqrt{1+4\chi^2}-1},\end{aligned}$$

et donc :

$$\frac{1 + \beta\tau_{yy}}{1 + 2\beta\tau_{yy}} = \frac{\chi}{\sqrt{2}} \frac{\frac{\sqrt{2}}{2\chi} \sqrt{\sqrt{1+4\chi^2}-1} - 1}{\sqrt{\sqrt{1+4\chi^2}-1}}$$

La première différences des contraintes normales s'écrit :

$$\begin{aligned}\tau_{xx} - \tau_{yy} &= \frac{4\chi}{2\sqrt{2}\beta} \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2\chi} \sqrt{\sqrt{1+4\chi^2}-1} \right) \frac{\frac{\sqrt{2}}{2\chi} \sqrt{\sqrt{1+4\chi^2}-1} - 1}{\sqrt{\sqrt{1+4\chi^2}-1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}\beta\chi} \frac{-1 - 2\chi^2 + \sqrt{1+4\chi^2}}{\sqrt{\sqrt{1+4\chi^2}-1}}\end{aligned}$$

Les trois fonctions viscosimétriques s'écrivent finalement :

$$\begin{aligned}\eta(\dot{\gamma}) &= \frac{\tau_{xy}}{\dot{\gamma}} = \frac{2\eta}{1 + \sqrt{1+4\lambda^2\dot{\gamma}^2}} \\ \psi_1(\dot{\gamma}) &= \frac{\tau_{xx} - \tau_{yy}}{\dot{\gamma}^2} = \frac{\eta\sqrt{2}}{\lambda^2\dot{\gamma}^3} \frac{-1 - 2\lambda^2\dot{\gamma}^2 + \sqrt{1+4\lambda^2\dot{\gamma}^2}}{\sqrt{\sqrt{1+4\lambda^2\dot{\gamma}^2}-1}} \\ \psi_2(\dot{\gamma}) &= \frac{\tau_{yy} - \tau_{zz}}{\dot{\gamma}^2} = -\frac{\eta}{\lambda\dot{\gamma}^2} \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2\lambda\dot{\gamma}} \sqrt{\sqrt{1+4\lambda^2\dot{\gamma}^2}-1} \right)\end{aligned}$$

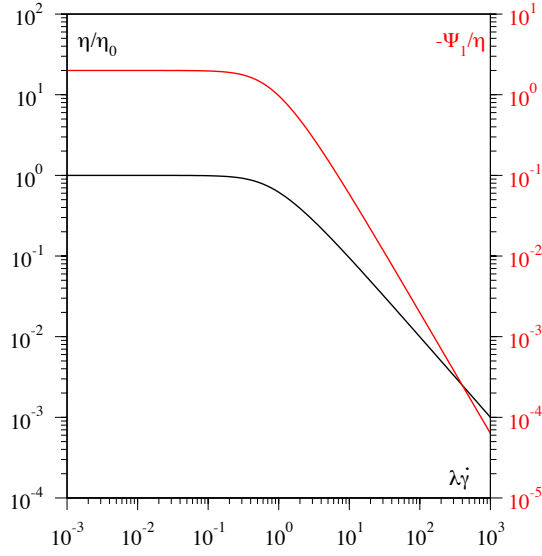


FIG. A.1 – Variation de la viscosité et de la première différence des contraintes en fonction de la vitesse de déformation pour un liquide de Giesekus ($\lambda = 1$ s).

A.2.2 Écoulement élongationnel uniaxial

Pour cet écoulement, la vitesse est donc donnée par :

$$\mathbf{u} = (u_x(x), u_y(y), u_z(z))$$

Le tenseur des vitesses de déformation est donc définie de la manière suivante :

$$\underline{D}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial u_y}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

En posant $\dot{\varepsilon} = \partial u_x / \partial x$ la vitesse de déformation élongationnelle, en utilisant la condition d'incompressibilité, $\text{tr} \underline{D}(\mathbf{u}) = 0$ et le caractère uniaxial de l'écoulement, le tenseur vitesse de déformation s'écrit :

$$\underline{D}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \dot{\varepsilon} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\dot{\varepsilon}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\dot{\varepsilon}}{2} \end{pmatrix} \quad (\text{A.26})$$

Le tenseur déviateur des contraintes est de la forme :

$$\underline{\tau} = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \tau_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{zz} \end{pmatrix} \quad (\text{A.27})$$

Généralement, dans le cas d'un écoulement élongationnel, le régime établi n'est pas atteint. Ainsi les trois fonctions rhéologiques caractéristiques du liquide sont les coefficients d'accroissement de contraintes définis par :

$$\begin{cases} \eta_{e_1}^+(\dot{\epsilon}, t) = \frac{\tau_{xx} - \tau_{zz}}{\dot{\epsilon}} \\ \eta_{e_2}^+(\dot{\epsilon}, t) = \frac{\tau_{yy} - \tau_{zz}}{\dot{\epsilon}} \\ \eta_{e_3}^+(\dot{\epsilon}, t) = \frac{\tau_{xx} - \tau_{yy}}{\dot{\epsilon}} \end{cases} \quad (\text{A.28})$$

Pour un écoulement élongationnel uniaxial, comme $\tau_{yy} = \tau_{zz}$, nous obtenons un seul coefficient d'accroissement de contrainte :

$$\eta_e^+(\dot{\epsilon}, t) = \frac{\tau_{xx} - \tau_{yy}}{\dot{\epsilon}} \quad (\text{A.29})$$

Définition. La viscosité élongationnelle est définie par :

$$\eta_e(\dot{\epsilon}) = \lim_{t \rightarrow \infty} \eta_e^+(\dot{\epsilon}, t)$$

En exprimant les différents tenseurs dans le cas d'un écoulement instationnaire, l'équation constitutive (A.2), devient :

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \tau_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \tau_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{zz} \end{pmatrix} + \frac{\lambda}{2\eta} \begin{pmatrix} \tau_{xx}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \tau_{yy}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{zz}^2 \end{pmatrix} \\ & + \lambda \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \tau_{xx} - 2\dot{\epsilon}\tau_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial t} \tau_{yy} + \dot{\epsilon}\tau_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial t} \tau_{zz} + \dot{\epsilon}\tau_{zz} \end{pmatrix} = \eta \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \dot{\epsilon} \quad (\text{A.30}) \end{aligned}$$

Ce qui conduit au système d'équations différentielles :

$$\lambda \frac{\partial}{\partial t} \tau_{xx} + (1 - 2\dot{\epsilon}\lambda) \tau_{xx} + \frac{\lambda}{2\eta} \tau_{xx}^2 = 2\eta\dot{\epsilon}$$

$$\lambda \frac{\partial}{\partial t} \tau_{yy} + (1 + \dot{\epsilon}\lambda) \tau_{yy} + \frac{\lambda}{2\eta} \tau_{yy}^2 = -\eta\dot{\epsilon}$$

La résolution de ces équations différentielles conduit à :

$$\tau_{xx} = \frac{\lambda}{\eta} \frac{-4\chi \left(1 - \exp \frac{\sqrt{(1-2\chi)^2 + 4\chi}}{\lambda} t \right)}{1 - 2\chi - \sqrt{(1-2\chi)^2 + 4\chi} - \left(1 - 2\chi + \sqrt{(1-2\chi)^2 + 4\chi} \right) \exp \frac{\sqrt{(1-2\chi)^2 + 4\chi}}{\lambda} t}$$

$$\tau_{yy} = \frac{\lambda}{\eta} \frac{2\chi \left(1 - \exp \frac{\sqrt{(1-2\chi)^2 - 2\chi}}{\lambda} t \right)}{1 - 2\chi - \sqrt{(1-2\chi)^2 - 2\chi} - \left(1 - 2\chi + \sqrt{(1-2\chi)^2 - 2\chi} \right) \exp \frac{\sqrt{(1-2\chi)^2 - 2\chi}}{\lambda} t}$$

Annexe B

Calcul du nombre de Weissenberg

On détaille ici le calcul du nombre de Weissenberg d'un liquide newtonien équivalent dans les quatre configurations de référence.

B.1 Écoulement entre deux plans parallèles

On s'intéresse ici au calcul du nombre de Weissenberg dans le cas d'un écoulement entre deux plaques parallèles. On rappelle la géométrie considérée dans la figure Fig. B.1

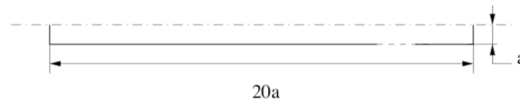


FIG. B.1 – Écoulement entre deux plans parallèles

La vitesse \mathbf{u} s'écrit donc $(u_x(y), 0, 0)$. On considère l'écoulement d'un liquide newtonien, l'équation de conservation de la quantité de mouvement s'écrit alors : $-\eta\Delta\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{0}$, ce qui nous donne :

$$\frac{\partial^2 u_x(y)}{\partial y^2} = \frac{1}{\eta} \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (\text{B.1})$$

En intégrant deux fois on obtient donc l'expression de la vitesse :

$$u_x(y) = \frac{y^2}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial x} + C_1 y + C_2. \quad (\text{B.2})$$

On sait que la vitesse est nulle au bord, i.e. pour $y = -a$ et $y = a$ et est maximale au milieu de l'écoulement, i.e. pour $y = 0$. On en déduit le système suivant :

$$\begin{cases} u_x(a) = 0 \\ \frac{\partial u_x(0)}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a^2}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial x} + C_1 a + C_2 = 0 \\ C_1 = 0. \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

On obtient donc directement :

$$C_2 = -\frac{a^2}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial x},$$

d'où

$$u_x(y) = \frac{y^2 - a^2}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial x}.$$

On calcule maintenant le débit dans le tube noté Q_{a0} :

$$\begin{aligned} Q_{a0} &= \int_0^a u_x(y) dy \\ &= \frac{1}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \int_0^a (y^2 - a^2) dy \\ &= -\frac{2a^3}{6\eta} \frac{\partial p}{\partial x}. \end{aligned}$$

En utilisant la définition du débit, on a :

$$a\bar{u} = Q_{a0}$$

avec \bar{u} la moyenne de la vitesse à l'entrée de l'écoulement. Ce qui nous donne :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\bar{u}\eta \frac{3}{a^2}.$$

On en déduit l'expression de la vitesse :

$$v_x(y) = -\frac{3}{2}\bar{u} \frac{y^2 - a^2}{a^2}.$$

On calcule alors la vitesse de déformation $\dot{\gamma}(y) = \frac{\partial v_x(y)}{\partial y}$:

$$\dot{\gamma}(y) = \frac{3}{a^2}\bar{u}y.$$

La valeur maximum de la vitesse de déformation se situe à la paroi, on obtient donc :

$$\dot{\gamma}_{\max} = \frac{3}{a}\bar{u},$$

ce qui nous permet d'obtenir l'expression du nombre de Weissenberg pour cet écoulement :

$$\text{We} = \frac{3}{a}\lambda\bar{u}.$$

B.2 Contractions 4:1 et 4:1:4

Le nombre de Weissenberg est le même pour les contractions 4:1 et 4:1:4 dont les géométries sont rappelées dans la figure Fig. B.2 :

On sait que la vitesse est nulle au bord, i.e. pour $y = a$ et $y = -a$. Á partir de l'expression de u_x (B.2), on déduit le système suivant :

$$\begin{cases} u_x(a) = 0 \\ u_x(-a) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a^2}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial x} + C_1 a + C_2 = 0 \\ \frac{a^2}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial x} - C_1 a + C_2 = 0 \end{cases}. \quad (\text{B.4})$$

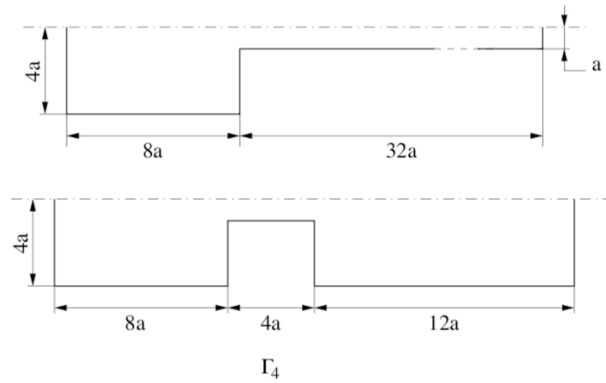


FIG. B.2 – Contractions 4:1 et 4:1:4

En soustrayant ces deux équations on obtient directement que $C_1 = 0$. En remplaçant dans la première équation on a :

$$C_2 = -\frac{a^2}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial x},$$

d'où

$$u_x(y) = \frac{y^2 - a^2}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial x}.$$

On calcule maintenant le débit dans la partie la plus fine du tube :

$$\begin{aligned} Q_{-aa} &= \int_{-a}^a u_x(y) dy \\ &= \frac{1}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \int_{-a}^a (y^2 - a^2) dy \\ &= -\frac{2a^3}{3\eta} \frac{\partial p}{\partial x}. \end{aligned}$$

Par conservation du débit on a :

$$Q_0 = 8a\bar{u} = Q_{-aa},$$

avec \bar{u} la vitesse moyenne à l'entrée. D'où :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\bar{u}\eta \frac{12}{a^2}.$$

On obtient donc l'expression de la vitesse :

$$u_x(y) = \frac{y^2 - a^2}{a^2} 6\bar{u}.$$

On calcule maintenant la vitesse de déformation $\dot{\gamma}(y) = \frac{\partial u_x(y)}{\partial y}$:

$$\dot{\gamma}(y) = \frac{12y}{a^2} \bar{u}.$$

La vitesse de déformation étant maximale au bord, on a :

$$\dot{\gamma}_{\max} = \dot{\gamma}(a) = \frac{12}{a}\bar{u},$$

ce qui nous donne l'expression du nombre de Weissenberg :

$$\text{We} = \lambda \frac{12\bar{u}}{a}.$$

B.3 Écoulement autour d'un cylindre

On considère l'écoulement autour d'un cylindre d'un liquide newtonien dans la géométrie définie dans la figure Fig B.3.

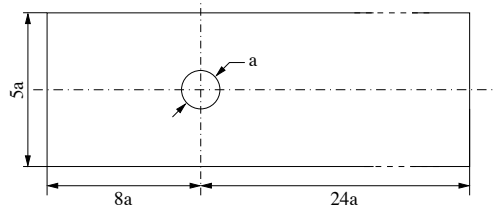


FIG. B.3 – Écoulement autour d'un cylindre

On cherche à nouveau à exprimer C_1 et C_2 dans (B.2). On sait que la vitesse à la paroi du domaine et à celle du cylindre est nulle. En considérant le demi-domaine et en posant $r = \frac{a}{2}$ le rayon du cylindre et $l = \frac{5a}{2}$ la largeur du demi-domaine on obtient la système :

$$\begin{cases} v_x(r) = 0 \\ v_x(l) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{r^2}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial x} + C_1 r + C_2 = 0 \\ \frac{l^2}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial x} + C_1 l + C_2 = 0 \end{cases}. \quad (\text{B.5})$$

En soustrayant les équations de (B.5) on obtient :

$$C_1 = -\frac{r+l}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial x}.$$

On remplace cette expression dans la première équation de (B.5), ce qui nous donne :

$$C_2 = \frac{rl}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial x},$$

et finalement on a :

$$v_x(y) = \frac{1}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial x} (l-y)(r-y). \quad (\text{B.6})$$

On calcule maintenant le débit dans la partie la plus fine du tube, qui a pour largeur $l - r$:

$$\begin{aligned} Q_{lr} &= \int_r^l v_x(y) dy \\ &= \frac{1}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \int_r^l (l-y)(r-y) dy \\ &= \frac{1}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial x} (r-l)^3. \end{aligned}$$

Le liquide étant incompressible, le débit est conservé tout au long de l'écoulement. Soit Q_0 le débit à l'entrée du tube et \bar{u} la vitesse moyenne à l'entrée du tube. On a, par définition du débit :

$$Q_0 = l\bar{u} = Q_{lr},$$

et donc :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -12\eta \frac{l}{(l-r)^3} \bar{u}.$$

On obtient donc l'expression de la vitesse :

$$v_x(y) = -6(l-y)(r-y) \frac{l}{(l-r)^3} \bar{u}. \quad (\text{B.7})$$

On peut maintenant calculer $\dot{\gamma}(y) = \frac{\partial v_x(y)}{\partial y}$:

$$\dot{\gamma}(y) = -6\bar{u}l \frac{2y-l-r}{(l-r)^3}. \quad (\text{B.8})$$

On veut maintenant évaluer la valeur maximale de $\dot{\gamma}$, on la calcule donc à la paroi $y = l$:

$$\dot{\gamma}_{\max} = \dot{\gamma}(l) = \frac{-6\bar{u}l}{(l-r)^2}$$

En exprimant l et r en fonction de a , il vient :

$$\dot{\gamma}_{\max} = \frac{15\bar{u}}{4a}$$

Ce qui nous permet d'obtenir l'expression du nombre de Weissenberg :

$$\text{We} = \lambda \frac{15\bar{u}}{4a}.$$

Bibliographie

- [1] <http://www.ansys.com/products/fluid-dynamics/polyflow/default.asp>.
- [2] D. Arnold. An interior penalty finite element method with discontinuous elements. *SIAM J. Numer. Anal.*, 19(4) :742–760, 1982.
- [3] D. N. Arnold, F. Brezzi, B. Cockburn, and L. D. Marini. Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems. *SIAM J. Numer. Anal.*, 39(5) :1749–1779, 2002.
- [4] F. P. T. Baaijens. Mixed finite element methods for viscoelastic flow analysis : a review. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 79 :361–385, 1998.
- [5] F. P. T. Baaijens, M. A. Hulsen, and P. D. Anderson. *The Use of Mixed Finite Element Methods for Viscoelastic Fluid Flow Analysis*, volume 3 Fluids of *Encyclopedia of Computational Mechanics*, chapter 14, page 481. John Wiley & Sons, Ltd, Chichester, 2004.
- [6] J. W. Barrett and S. Boyaval. Existence and approximation of a (regularized) Oldroyd-B model. Technical report, 2009.
- [7] J. W. Barrett and E. Süli. Existence of global weak solutions to dumbbell models for dilute polymers with microscopic cut-off. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 18(6) :935–971, 2008.
- [8] F. Bassi, A. Crivellini, D. D. Pietro, and S. Rebay. An artificial compressibility flux for the discontinuous Galerkin solution of the incompressible Navier-Stokes equations. *Journal of Computational Physics*, 218(2) :794 – 815, 2006.
- [9] R. Becker and D. Capatina. Finite element discretization of the Giesekus model for polymer flows. *Proceedings of ENUMATH'09, Springer Verlag (to appear)*, 2010.
- [10] R. Becker, D. Capatina, and J. Joie. A dG method for the Stokes equations related to nonconforming approximations. *Research Report*, <http://hal.inria.fr/inria-00380772/en/>, page 34, 2009.
- [11] R. Becker, D. Capatina, and J. Joie. A dG method for the strain-rate formulation of the Stokes problem related with nonconforming finite element methods. *Proceedings of ENUMATH'09, Springer Verlag (to appear)*, 2010.
- [12] R. Becker, P. Hansbo, and R. Stenberg. A finite element method for domain decomposition with non-matching grids. *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, 37(2) :209–225, 2003.
- [13] S. Boyaval, T. Lelièvre, and C. Mangoubi. Free-energy-dissipative schemes for the Oldroyd-B model. *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, 43(3) :523–561, 2008.

- [14] D. Braess and R. Verfurth. Multigrid methods for nonconforming finite element methods. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 27(4) :979–986, 1990.
- [15] J. Bramble. *Multigrid methods*. Pitman Research Notes in Mathematics Series 294, Longman Scientific & Technical,, 1993.
- [16] S. C. Brenner. An optimal-order multigrid method for p1 nonconforming finite elements. *Mathematics of Computation*, 52(185) :1–15, 1989.
- [17] S. C. Brenner. Poincaré-Friedrichs inequalities for piecewise H^1 functions. *J. Numerical Analysis*, 41(1) :306–324, 2003.
- [18] S. C. Brenner. Korn’s inequalities for piecewise H^1 vector fields. *Math. Comp.*, 73(247) :1067–1087, 2004.
- [19] F. Brezzi and M. Fortin. *Mixed and hybrid finite element methods*, volume 15 of *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1991.
- [20] A. Brooks and T. Hughes. Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 31 :199–259, 1982.
- [21] Z. Chen and P. Oswald. Multigrid and multilevel methods for nonconforming rotated q1 elements. *Math. Comp*, pages 67–667, 1998.
- [22] P. G. Ciarlet. *The finite element method for elliptic problems*. North Holland, 1978.
- [23] M. Crouzeix and R. S. Falk. Nonconforming finite elements for the Stokes problem. *Math. Comp.*, 52(186) :437–456, 1989.
- [24] M. Crouzeix and P.-A. Raviart. Conforming and nonconforming finite element methods for solving the stationary Stokes equations. I. *Rev. Française Automat. Informat. Recherche Opérationnelle Sér. Rouge*, 7(R-3) :33–75, 1973.
- [25] H. Damanik, J. Hron, A. Ouazzi, and S. Turek. A monolithic FEM approach for the log-conformation reformulation (lcr) of viscoelastic flow problems. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 2010. accepted in press (DOI information : 10.1016/j.jnnfm.2010.05.008).
- [26] E. Dari, R. Durán, and C. Padra. Error estimators for nonconforming finite element approximations of the Stokes problem. *Math. Comp.*, 64(211) :1017–1033, 1995.
- [27] L. Dieci and T. Eirola. Positive definiteness in the numerical solution of Riccati differential equations. *Numerische Mathematik*, 67 :303–313, 1994.
- [28] H.-S. Dou and N. Phan-Thien. The flow of an Oldroyd-B fluid past a cylinder in a channel : adaptive viscosity vorticity (DAVSS- ω) formulation. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 87 :47, 1999.
- [29] J. Étienne, E. J. Hinch, and J. Li. A Lagrangian–Eulerian approach for the numerical simulation of free-surface flow of a viscoelastic material. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 136 :157, 2006.

- [30] R. Fattal and R. Kupferman. Constitutive laws for the matrix-logarithm of the conformation tensor. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 123 :281–285, 2004.
- [31] R. P. Fedorenko. A relaxation method for solving elliptic difference equations. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1(4) :1092 – 1096, 1962.
- [32] M. Fortin and A. Fortin. A new approach for the FEM simulation of viscoelastic flows. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 32 :295–310, 1989.
- [33] M. Fortin and M. Soulie. A nonconforming piecewise quadratic finite element on triangles. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 19(4) :505–520, 1983.
- [34] H. Giesekus. A simple constitutive equation for polymer fluids based on the concept of deformation-dependent tensorial mobility. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 11 :69–109, 1982.
- [35] H. Giesekus. Constitutive equations for polymer fluids based on the concept of configuration-dependent molecular mobility : a generalized mean-configuration model. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 17 :349–372, 1985.
- [36] V. Girault and P.-A. Raviart. *Finite element methods for Navier-Stokes equations*, volume 5 of *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1986. Theory and algorithms.
- [37] V. Girault, B. Rivière, and M. F. Wheeler. A discontinuous Galerkin method with nonoverlapping domain decomposition for the Stokes and Navier-Stokes problems. *Math. Comp.*, 74(249) :53–84, 2005.
- [38] P. Grisvard. *Elliptic problems in nonsmooth domains*, volume 24 of *Pitman Monographs and Studies in Mathematics*. Pitman, Boston, 1985.
- [39] R. Guénette and M. Fortin. A new mixed finite element method for computing viscoelastic flows. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 60(1) :27–52, 1995.
- [40] W. Hackbusch. *Multi-Grid Methods and Applications*. Springer, Berlin, 1985.
- [41] W. Hackbusch and T. Probst. Downwind Gauß-Seidel smoothing for convection dominated problems. *Numerical Linear Algebra with Applications*, 4 :85–102, 1997.
- [42] H. D. Han. Nonconforming elements in the mixed finite element method. *J. Comp. Math.*, 2 :223–233, 1984.
- [43] M. A. Hulsen. Some properties and analytical expressions for plane flow of Leonov and Giesekus models. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 30 :85–92, 1988.
- [44] M. A. Hulsen. A sufficient condition for a positive definite configuration tensor in differential models. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 38 :93, 1990.
- [45] M. A. Hulsen, R. Fattal, and R. Kupferman. Flow of viscoelastic fluids past a cylinder at high Weissenberg number : Stabilized simulations using matrix logarithms. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 127 :27, 2005.

- [46] V. John. Higher order finite element methods and multigrid solvers in a benchmark problem for the 3D Navier-Stokes equations. *Int. J. Num. Meth. Fluids*, 40(775 - 798), 2002.
- [47] C. Johnson, U. Nävert, and J. Pitkäranta. Finite element methods for linear hyperbolic problems. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 45 :285–312, 1984.
- [48] O. Karakashian and F. Pascal. A posteriori error estimates for a discontinuous Galerkin approximation of a second-order elliptic problem. *SIAM J. Numer. Anal.*, 41(6) :2374–2399, 2003.
- [49] R. Keunings. On the high Weissenberg number problem. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 20 :209–226, 1986.
- [50] K. Y. Kim. A posteriori error analysis for locally conservative mixed methods. *Math. Comp.*, 76(257) :43–66, 2007.
- [51] R. C. King, M. R. Apelian, R. C. Armstrong, and R. A. Brown. Numerically stable finite element techniques for viscoelastic calculations in smooth and singular geometries. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 29 :147–216, 1988.
- [52] P. Lancaster and L. Rodman. *Algebraic Riccati Equations*. Clarendon Press, 1995.
- [53] P. Lascaux and R. Théodor. *Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur 2. Methodes itératives*. DUNOD, 2000.
- [54] Y.-J. Lee and J. Xu. New formulations, positivity preserving discretizations and stability analysis for non-Newtonian flow models. *Computers methods in applied mechanics and engineering*, 195 :1180–1206, 2006.
- [55] P. Lesaint and P. Raviart. *On a finite element method for solving the neutron transport equation*. Mathematical Aspects of Finite Element Methods in Partial Differential Equations. C.A. de Boor (Ed.), Academic Press, 1974.
- [56] F. J. Lim and W. R. Schowalter. Pseudo-spectral analysis of the stability of pressure-driven flow of a Giesekus fluid between parallel planes. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 26 :135–142, 1987.
- [57] A. Lozinski and R. G. Owens. An energy estimate for the Oldroyd-B model : theory and applications. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 112 :161–176, 2003.
- [58] C. W. Macosko. *Rheology principles, measurements, and applications*. VHC, 1994.
- [59] S. Manservisin. Numerical analysis of Vanka-type solvers for steady Stokes and Navier-Stokes flows. *SIAM J. Numer. Anal.*, 44(5) :2025–2056, 2006.
- [60] J. M. Marchal and M. J. Crochet. A new mixed finite element for calculating viscoelastic flow. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 26 :77–114, 1987.
- [61] K.-A. Mardal and R. Winther. An observation on Korn's inequality for nonconforming finite element methods. *Math. Comp.*, 75(253) :1–6, 2005.
- [62] L. D. Marini. An inexpensive method for the evaluation of the solution of the lowest order Raviart-Thomas mixed method. *SIAM J. Numer. Anal.*, 22(3) :493–496, 1985.

- [63] V. L. Mehrmann. *The autonomous linear quadratic control problem*, volume 163. Springer Verlag, Berlin, 1991.
- [64] R. A. Nicolaïdes. Existence, uniqueness and approximation for generalized saddle point problems. *SIAM J. Numer. Anal.*, 19(2) :349–357, 1982.
- [65] J. Nitsche. Über ein Variationsprinzip zur Lösung von Dirichlet-Problemen bei Verwendung von Teilräumen, die keinen Randbedingungen unterworfen sind. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 36 :9–15, 1971. Collection of articles dedicated to Lothar Collatz on his sixtieth birthday.
- [66] J. G. Oldroyd. On the formulation of rheological equations of state. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 200 :523–541, 1950.
- [67] W. Ostwald. “ueber die geschwindigkeitsfunktion der viskositat disperser systeme i. (about the rate function of the viscosity of dispersed systems.). *Kolloid-Z*, 36 :99–117, 1925.
- [68] P. Oswald. *Rhéophysique ou comment coule la matière*. Belin, 2005.
- [69] R. G. Owens and T. N. Phillips. *Computational Rheology*. Imperial College Press, London, 2002.
- [70] N. Phan-Thien. A nonlinear network viscoelastic model. *Journal of Rheology*, 22(3) :259–283, 1978.
- [71] N. Phan-Thien and R. I. Tanner. A new constitutive equation derived from network theory. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2 :353–365, 1977.
- [72] L. M. Quinzani, R. C. Armstrong, and R. A. Brown. Birefringence and laser-Doppler velocimetry (LDV) studies of viscoelastic flow through a planar contraction. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 52(1) :1–36, 1994.
- [73] D. Rajagopalan, R. C. Armstrong, and R. A. Brown. Finite element methods for calculation of steady, viscoelastic flow using constitutive equations with a Newtonian viscosity. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 36 :159–192, 1990.
- [74] R. Rannacher and S. Turek. Simple nonconforming quadrilateral Stokes element. *Numer. Methods Partial Differential Equations*, 8(2) :97–111, 1992.
- [75] P.-A. Raviart and J.-M. Thomas. *Introduction à l’analyse numérique des équations aux dérivées partielles*. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. Masson, Paris, 1983.
- [76] J. Roberts and J.-M. Thomas. *Mixed and Hybrid Methods*, volume II of *Handbook of Numerical Analysis*. North Holland, Amsterdam, 1991.
- [77] J. Sun, N. Phan-Thien, and R. I. Tanner. An adaptive viscoelastic stress splitting scheme and its applications : AVSS/SI and AVSS/SUPG. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 65 :75–91, 1996.
- [78] S. Turek. *Efficient Solvers for Incompressible Flow Problems : An Algorithmic and Computational Approach*. Springer, Berlin, 1999. ISBN 3-540-65433-X.

- [79] S. Vanka. Block-implicit calculation of steady turbulent recirculating flows. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 28(11) :2093 – 2103, 1985.
- [80] S. Vanka. Block-implicit multigrid calculation of two-dimensional recirculating flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 59(1) :29 – 48, 1986.
- [81] R. Verfürth. *A review of a posteriori error estimation and adaptive mesh-refinement techniques*. Wiley-Teubner, 1996.
- [82] K. Walters and M. Webster. The distinctive CFD challenges of computational rheology. *International Journal for Numerical Methods of Fluids*, 43 :577–596, 2003.
- [83] P. Wesseling. *An introduction to multigrid methods*. Pure and Applied Mathematics (New York), 1992.
- [84] J. Xu. *Theory of Multilevel Methods*. PhD thesis, Cornell University, 1989.
- [85] J. Xu. The method of subspace corrections. *J. Comput. Appl. Math.*, 128((1-2)) :335–362, 2001.
- [86] S.-C. Xue, N. Phan-Thien, and R. I. Tanner. Three dimensional numerical simulations of viscoelastic flows through planar contractions. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 74 :195–245, 1998.
- [87] H. Yserentant. Old and new convergence proofs for multigrid methods. In *Iserles, A. (ed.), Acta Numerica Cambridge : Cambridge University Press.*, pages 285–326, 1993.

Simulation numérique des écoulements de liquides polymères

Il existe peu de codes commerciaux pour la simulation numérique des écoulements de liquides polymères. Les difficultés proviennent des propriétés intrinsèques des polymères, qui sont des fluides viscoélastiques non-newtoniens. Ceci implique un couplage entre la viscoélasticité du liquide et l'écoulement, couplage quantifié par le nombre de Weissenberg. D'un point de vue numérique, la source du problème est la perte de convergence des algorithmes lorsque ce nombre devient trop élevé. Cette thèse porte sur le développement de schémas numériques robustes pour la simulation de ces écoulements en considérant principalement le modèle de Giesekus.

Nous nous sommes d'abord intéressés au problème de Stokes et nous avons fait l'étude d'une méthode de Galerkin discontinue moins coûteuse et plus robuste que la méthode "Interior Penalty" classique. Nous avons fait une analyse *a priori* et *a posteriori* et nous avons mis en évidence les relations entre cette méthode dG et les éléments finis non-conformes. Les résultats théoriques obtenus ont été validés numériquement.

Par la suite, nous avons considéré le modèle à trois champs de Giesekus. La vitesse et la pression sont approchées par éléments finis non-conformes tandis que l'équation constitutive est traitée à l'aide d'éléments finis discontinus et d'un schéma décentré de type Lesaint-Raviart. L'analyse de ces schémas dans le cas quadrangulaire et triangulaire a été faite pour le problème de Stokes sous-jacent. Ces schémas ont ensuite été implémentés dans la librairie C++ Concha. Nous avons effectué des comparaisons avec des données expérimentales mettant en évidence le bon comportement du modèle de Giesekus mais aussi avec le code commercial Polyflow et une solution semi-analytique afin de valider nos schémas numériques. Nous avons obtenu des simulations réalistes pour des nombres de Weissenberg élevés sur des cas-tests populaires : écoulement autour d'un cylindre, contractions 4:1 et 4:1:4.

Mots clés : Polymères ; modèle de Giesekus ; équations de Stokes ; méthodes de Galerkin discontinues ; éléments finis non-conformes ; analyse d'erreur *a priori* et *a posteriori*

Numerical simulation of polymer flows

There exist few commercial codes for the simulation of polymer flows. The difficulties stem from the intrinsic properties of polymers which are viscoelastic non-Newtonian. This implies a coupling between the viscoelasticity of the liquid and the flow, quantified by the Weissenberg number. The source of the problem is the breakdown in the convergence of the algorithms at critical values of this number. This work is devoted to the development of robust numerical schemes for the simulation of polymer flows, mainly considering the Giesekus model.

We have first focused on the Stokes problem and we proposed a discontinuous Galerkin method less expensive and more robust than the classical Interior Penalty method. We carried out an *a priori* and *a posteriori* error analysis and we highlighted the connections between our dG method and nonconforming finite elements.

Then, we have considered the three-fields Giesekus model. The velocity and the pressure are approximated by nonconforming finite elements, whereas the stress tensor is treated by discontinuous finite elements and an upwinding scheme of Lesaint-Raviart type. The analysis for triangular and quadrilateral meshes has been performed for the underlying Stokes problem. All the schemes have been implemented in the C++ library Concha. Comparisons with experimental data have been carried out illustrating the good behaviour of the Giesekus model. Moreover, comparisons with the commercial code Polyflow and a semi-analytical solution have also been performed, validating our numerical schemes. We obtained realistic simulations for high Weissenberg numbers on typical benchmark problems such as flows past a cylinder, 4:1 and 4:1:4 contractions.

Keywords : Polymers ; Giesekus model ; Stokes equations ; discontinuous Galerkin methods ; nonconforming methods ; *a priori* and *a posteriori* error analysis