Stéphane Le Borgne

Thèse d'habilitation à diriger des recherches

Université de Rennes 1

Mention : Mathématiques

Propriétés stochastiques de systèmes dynamiques quasi-hyperboliques

Stéphane Le Borgne

Soutenue le 11 décembre 2006 devant le jury composé de Messieurs les Professeurs :

Jérôme Buzzi (École Polytechnique)
Jean-Pierre Conze (Université de Rennes 1)
Yves Derriennic (Université de Bretagne Occidentale)
Yves Guivarc'h (Université de Rennes 1)
Bernard Schmitt (Université de Bourgogne)

Au vu des rapports de Messieurs les Professeurs :

Gerhard Keller (Université d'Erlangen)
Matthew Nicol (Université de Houston)
Bernard Schmitt (Université de Bourgogne)

Jérôme Buzzi, Jean-Pierre Conze, Yves Derriennic, Yves Guivarc'h, Bernard Schmitt ont accepté de faire partie du jury de mon habilitation à diriger des recherches. J'en suis très heureux et très honoré. Merci beaucoup à eux.
Gerhard Keller, Matthew Nicol, Bernard Schmitt ont consacré une partie de leur temps et de leur énergie à la lecture de ce mémoire, à l'étude de mes travaux et à l'écriture de rapports. Qu'ils soient ici assurés de ma profonde reconnaissance.

Introduction

Les sytèmes dynamiques hyperboliques

En mathématiques la donnée d'un système dynamique est la donnée d'un ensemble et d'une transformation de cet ensemble. Suivant les propriétés de l'ensemble et de la transformation on parle de dynamique mesurée, topologique, holomorphe, hyperbolique, discrète...

Mes travaux portent sur les propriétés stochastiques des systèmes dynamiques. C'est donc de systèmes dynamiques mesurés qu'il sera question. Mais les propriétés géométriques joueront un rôle important : les systèmes considérés ici sont définis par des difféomorphismes ou des flots dits hyperboliques ou quasi-hyperboliques.

Une question importante de la théorie des systèmes différentiels est la question de la stabilité structurelle. Un système est dit structurellement stable si lorsqu'on le perturbe légèrement on obtient un système conjugué. Il apparaît que les systèmes structurellement stables sont les systèmes hyperboliques ([57]).

L'un des premiers exemples de flot hyperbolique qu'on ait considéré est celui du flot géodésique sur le demi-plan de Poincaré. Anosov a résolu le problème de la stabilité structurelle pour les flots géodésiques sur les surfaces compactes de courbure négative, en introduisant une classe de systèmes hyperboliques plus large. Un difféomorphisme satisfaisant les propriétés suivantes s'appelle un difféomorphisme d'Anosov. Soit T un difféomorphisme d'une variété M compacte sans bord. La transformation Test dite uniformément hyperbolique si le fibré tangent de M est la somme de deux sous-fibrés invariants $TM = E_s \bigoplus E_u$ tels qu'il existe deux constantes $C > 0$ et $\lambda \in]0, 1[$ telles que, pour tout entier $n \geq 0$, on ait :

$$||DT^n_{|E_s}|| < C\lambda^n \quad ||DT^{-n}_{|E_u}|| < C\lambda^n.$$

On définit de manière analogue un flot d'Anosov (le fibré se décompose en la direction du flot et deux autres contractée et dilatée comme dans la définition précédente).

Néanmoins ces transformations forment un cadre trop rigide. Par exemple, il n'est pas possible de définir un difféomorphisme ou un flot d'Anosov sur toute variété ([63], [4], [17]). Mais surtout, plusieurs systèmes très étudiés (Lorenz, Hénon, billard de Sinaï), bien qu'hyperboliques par certains côtés, n'entrent pas dans cette classe. Ils faisaient l'objet de travaux ad hoc jusqu'à l'introduction des tours de Young qui fournissent aujourd'hui un très bon cadre unificateur.

Parallèlement, partant des systèmes d'Anosov, on a défini des conditions d'hyperbolicité plus faibles : systèmes «axiom A» de Smale, partiellement hyperboliques, quasi-hyperboliques, non-uniformément hyperboliques. On voit se développer une théorie abstraite de ces systèmes hyperboliques (au sens large) cherchant à en décrire les propriétés générales (nombres de mesures SRB, stabilité ergodique,...) ([12], [7], [28], [65], [15]).

Comportement qualitatif

Lorsque le comportement du système est chaotique il devient impossible de calculer avec précision les orbites des points du système pendant un temps long. On peut néanmoins parfois décrire l'évolution du système en établissant que *généralement* les orbites ont certaines propriétés qualitatives : densité, équirépartition... Bien entendu, il faut préciser le sens du mot *généralement*. En gros on distingue deux façons de définir ce mot. Une manière topologique (*généralement* peut signifier, par exemple, sur un ouvert dense), une manière métrique (*généralement* signifie presque partout au sens d'une mesure).

Dans le second cas il faut d'abord dire de quelle mesure on parle. La construction de bonnes mesures invariantes pour les systèmes dynamiques hyperboliques, faiblement hyperboliques ou dilatants est un des problèmes importants de la théorie. Une classe de mesures à laquelle on s'intéresse tout particulièrement est la classe des mesures dites SRB (pour Sinaï, Ruelle, Bowen).

Dans les travaux présentés ici les grandes questions évoquées ci-dessus sont résolues. Nous nous plaçons dans le cadre de systèmes ayant certaines propriétés d'hyperbolicité, pour lesquels on dispose d'une bonne mesure invariante ergodique. Notre objectif est d'établir des théorèmes de la théorie des probabilités pour ces systèmes. Depuis les premiers articles de Fortet [31] et de Sinaï [73] de très nombreux travaux ont porté sur ce type de problème : [66], [32], [34], [39], [35], [68], [14], [26], [77], [59], [60], [58],...

Soit (X, T, μ) un système dynamique probabilisé, ce qui signifie que $T : X \to X$ est une transformation mesurable d'un espace mesurable X qui préserve la mesure de probabilité μ. Si φ est une fonction mesurable de X vers $\mathbb{R}$, les fonctions $X_k = \varphi \circ T^k$ forment une suite de variables aléatoires sur l'espace probabilisé (X, μ) ; on s'attache alors à décrire le comportement asymptotique des sommes de Birkhoff

$$S_n = \sum_{j=0}^{n-1} X_j.$$

Le théorème ergodique affirme que, si le système dynamique est ergodique, les X_k satisfont la loi des grands nombres : dès que φ est intégrable, les moyennes $S_n(x)/n$ tendent μ-presque sûrement vers la constante $\int_X \varphi \, d\mu$.

Poussant l'analyse un cran plus loin, il convient de déterminer si la suite X_k satisfait un **théorème limite central**. Supposons que φ a une moyenne nulle et que son carré est intégrable. On dit que φ *satisfait le théorème limite central* s'il existe un réel *strictement positif* σ tel que

$$\mu\{x\,;\, \frac{1}{\sqrt{n}} S_n(x) \in A\} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_A \exp(\frac{-t^2}{2\sigma^2}) dt$$

pour tout intervalle de nombres réels A. À ce stade, la situation se complique considérablement et, contrairement à ce qui se produit pour la loi des grands nombres, il devient nécessaire de faire des hypothèses de régularité fortes sur φ. En effet, on sait d'une part, que les éléments de $L^2(X, \mu)$ d'intégrales nulles qui satisfont le théorème limite central forment un sous-espace dense de $L^2(X, \mu)$ lorsque le système est ergodique apériodique.

À l'opposé, on dispose du théorème suivant de Volný [75] montrant qu'il existe toujours un sous-ensemble G_δ-dense de fonctions dans $L^2(X,\mu)$ pour lesquelles les moyennes de Birkhoff suivent des lois arbitraires.

Théorème *Soit (X,T,μ) un système dynamique probabilisé ergodique et sans atome. Il existe un sous-ensemble $\mathcal{E}$ de $L^2_0(M,\mu)$ qui est un G_δ-dense et qui satisfait la propriété suivante : pour tout élément φ de $\mathcal{E}$ et pour toute mesure de probabilité ν sur $\mathbb{R}$ satisfaisant $\int_{\mathbb{R}} t\,d\nu(t) = 0$ et $\int_R t^2 d\nu(t) = 1$, il existe une suite n_i tendant vers l'infini telle que la loi de*

$$\frac{S_{n_i}}{\parallel S_{n_i} \parallel_2}$$

converge vers ν.

Le cadre général des fonctions de carré sommable est donc trop vaste ; il permet tout type de comportement pour les moyennes de Birkhoff.

Il est donc nécessaire de préciser un peu le but que nous fixons. Si l'espace X est muni d'une structure métrique, la notion de fonction lipschitzienne ou höldérienne prend un sens. Ce que nous attendons est que le théorème limite central soit valable si la fonction φ est régulière et la dynamique de T est suffisamment mélangeante.

Le système est dit **exponentiellement mélangeant** si, pour toute paire de fonctions φ et ψ régulières définies sur X et d'intégrales nulles, il existe deux nombres réels $\zeta > 1$ et $C > 0$ tels que, pour tout entier n, nous avons :

$$|\langle \varphi, \psi \circ T^n \rangle| \leq C\zeta^{-|n|}.$$

Description générale de mon travail

C'est à ce type de questions que je me suis intéressé le plus au cours des dernières années. Une des grandes figures du domaine rapidement décrit ci-dessus est Young. Elle a écrit les lignes suivantes dans un articles de synthèse.

Ce sont(le théorème limite central, la vitesse de mélange), je crois, des questions très importantes. Les techniques courantes ne permettent pas de les traiter dans le cas de systèmes dynamiques généraux. Aussi, nous limiterons-nous à des transformations qui géométriquement présentent de fortes propriétés de dilatation et de contraction sur une grosse partie de leur espace des phases.

These are, I believe, very important questions. Current techniques do not permit us to deal with them for completely general dynamical systems. Thus, following the theme of this article, we will limit ourselves to maps that geometrically have a great deal of expansion and contraction on large parts of their phase spaces.

Young a proposé une méthode pour étudier les systèmes hyperboliques basée sur ce qu'on appelle aujourd'hui les tours de Young qui consiste à induire sur une partie de l'espace des phases afin de retrouver de bonnes propriétés de dilatation et contraction. Cette méthode (décrite dans [77] ou elle est appliquée à différents systèmes) a permis d'étendre considérablement le champ d'application de la méthode des perturbations des opérateurs

([39], [35]). Les travaux récents de Gouëzel ou de Szasz et de leurs coauteurs, par exemple, prouvent la grande fécondité de cet angle d'attaque ([34], [3], [74]).

Mon travail se situe dans une ligne légèrement différente. Les systèmes que j'ai étudiés souffrent d'un manque d'hyperbolicité foncier. Sur tout l'espace, et pour toutes les itérées de la transformation, l'hyperbolicité est mise en défaut (le système a un exposant de Lyapounoff nul). Cela amène à penser que les méthodes d'induction ne peuvent pas être adaptées.

Les techniques que j'ai développées en vue d'établir le théorème limite central ou ses raffinements s'appuient le plus souvent sur le mélange rapide (qui aura été démontré en utilisant un autre outil). Ces techniques sont présentées dans les sections 2 et 3.

Dans la section 2, nous présentons en détail une technique de martingale pour démontrer le théorème limite central. L'étude est menée sur l'exemple des flots diagonaux sur les quotients compacts du groupe $SL(d, \mathbb{R})$. Dans ce cas le mélange rapide est une conséquence de travaux de différents auteurs sur les représentations des groupes de Lie semi-simples. Cet ingrédient algébrique (l'équivalent des séries de Fourier utilisées dans le cas des automorphismes des tores) réduit la portée du travail. Mais je suis heureux de m'être familiarisé avec cette très belle théorie. Dans ce cadre algébrique des flots sur les espaces homogènes plusieurs prolongements sont possibles.

Dans la section suivante nous nous intéressons à la vitesse dans le théorème limite central. Comparativement au mélange ou au théorème limite central cette question a été relativement peu étudiée. Dans le cas d'une suite de variables aléatoires indépendates de même loi, on sait que la vitesse de convergence est en $n^{-1/2}$. Les techniques de martingales ne sont pas bien adaptées pour aborder ce problème. La méthode de perturbation d'opérateurs, quand elle s'applique, donne des résultats optimaux : on retrouve la vitesse du cas indépendant. La méthode que nous proposons livre la vitesse optimale sous une condition de mélange multiple. Bien que les outils probabilistes utilisés soient différents (la partie probabiliste de la démonstration (qui n'est pas présentée dans ce texte) est basée sur le travail de Rio ([67]), ne reposant pas sur l'étude de la fonction caractéristique) les constructions géométriques sont assez proches de celles du paragraphe précédent.

Dans la dernière partie, nous présentons une classe de systèmes dynamiques non-uniformément partiellement hyperboliques pour lesquels les propriétés de mélange et le comportement stochastique des sommes de Birkhoff sont différents. Après les exemples de Pomeau et Maneville et quelques autres ([64], [55], [70], [33]), c'est un nouvel exemple de système à décorrélation lentes. Après plusieurs années de travail sur les systèmes à mélange exponentiel pour lesquels je m'efforçais d'établir le théorème limite central je me suis demandé si on pouvait trouver des exemples pour lesquels on observe autre chose. Là encore les travaux précédents m'ont été d'un grand secours. La transformation T, T^{-1}, puis sa version régulière déjà étudiée par Rudolph en 1988 ([69]) fournissent de tels exemples. Pour la transformation T, T^{-1} un théorème de Kesten et Spitzer ([46])donne une convergence en loi vers des lois non-gaussiennes.

Certains de mes travaux ne figurent pas dans ce mémoire (études des codages pour les automorphismes des tores, recherche sur des problèmes de régularité dans l'équation de cobord), d'autres (méthode de martingales pour les transformations polynomiales des espaces projectifs complexes, vitesse dans le théorème limite central pour l'exemple donné par Shub Wilkinson) ne font l'objet que d'une remarque. On pourra se reporter à mes travaux originaux (dont je donne la liste à la fin de ce texte) pour en prendre connaissance. J'ai essayé de rédiger un texte homogène sur mes recherches. Le mieux pour cela est, me semble-t-il, de garder autant que possible le même cadre. Les actions des flots diagonaux sur les quotients compacts de $SL(d, \mathbb{R})$ constituent ici ce cadre : la première section leur est consacrée.

1 Les flots diagonaux

Notons G le groupe $SL(d,\mathbb{R})$ et Γ un sous-groupe discret cocompact de $SL(d,\mathbb{Z})$. L'espace quotient G/Γ a une structure de variété différentiable. La mesure de Haar sur G, μ, donne une mesure finie sur G/Γ invariante par translation à gauche que nous noterons $\overline{\mu}$ et supposerons normalisée ($\overline{\mu}(G/\Gamma) = 1$).

Nous désignerons par $\overline{x}$ la classe à gauche modulo Γ de l'élément x de G.

Soient $(T_i)_{i=1}^d$ une suite décroissante de d nombres positifs non tous égaux à 1 dont le produit vaut un. Appelons T la matrice

$$T = \begin{pmatrix} T_1 & & & & \\ & T_2 & & 0 & \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & T_{d-1} & \\ & & & & T_d \end{pmatrix}.$$

Le groupe à un paramètre

$$\{T^t = \begin{pmatrix} T_1^t & & & & \\ & T_2^t & & 0 & \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & T_{d-1}^t & \\ & & & & T_d^t \end{pmatrix} \ / \ t \in \mathbb{R}\}$$

définit sur G/Γ un flot, noté encore T^t, préservant la mesure $\overline{\mu}$

$$T^t : G/\Gamma \longrightarrow G/\Gamma \ : \ \overline{x} \longmapsto T^t\overline{x}.$$

Le système dynamique $(G/\Gamma, T^t, \overline{\mu})$ est mélangeant ([36]). En particulier il est ergodique et, pour toute fonction f intégrable sur G/Γ, pour presque tout $\overline{x} \in G/\Gamma$, on a

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t f(T^s\overline{x})\ ds = \int_{G/\Gamma} f(\overline{y})\ d\overline{\mu}(\overline{y}).$$

Soit f une fonction de carré intégrable d'intégrale nulle. Sa variance, sous l'action du flot, peut être définie comme la limite, si elle existe

$$\sigma^2(f) = \lim_n \frac{1}{N} \| \int_0^N f(T^s\cdot)\ ds\|_2^2.$$

Sous la condition

$$\int_0^\infty |\langle T^s f, f\rangle|\ ds < \infty,$$

la variance existe et est égale à :

$$\sigma^2(f) = 2\int_0^\infty \langle T^s f, f\rangle\ ds.$$

Nous dirons qu'une fonction f est un cobord au sens du flot s'il existe une application h finie mesurable telle que, pour tout t, pour presque tout x, on ait :

$$\int_0^t f(T^s\overline{x})ds = h(T^t\overline{x}) - h(\overline{x}).$$

Dans ce cas, quand t tend vers l'infini, $\frac{1}{\sqrt{t}}\int_0^t f(T^s\overline{x})ds$ converge en probabilité vers 0 et f ne vérifie pas le théorème limite central.

Variétés stables, instables et neutres

Rappelons les propriétés hyperboliques du système dynamique $(X, \bar{\mu}, T)$ où $X = SL(d,\mathbb{R})/\Gamma$ et $T = T^1$. Les relations

$$\left(TxT^{-1}\right)_{ij} = \frac{T_i x_{ij}}{T_j}$$

permettent d'identifier les variétés stables, instables et neutres du difféomorphisme T. Considérons la partition de $\{1,\ldots,d\}$ en les ensembles J_k définis par :

- pour tout k, pour tout i,j appartenant à J_k, on a $T_i = T_j$,
- pour tous k,n tels que $k < n$, pour tout i appartenant à J_k, tout j appartenant à J_n, on a $T_i > T_j$.

Désignons par $h_{J_iJ_j}$ une matrice indexée par l'ensemble $J_i \times J_j$, par Id_{J_i} la matrice identité indexée par J_i. Les variétés stables, instables et neutres de T sont données par les orbites de groupes de matrices triangulaires ou diagonales par blocs.
La variété instable passant par $\bar{x} = x\Gamma$ est la variété immergée $H_u x\Gamma$ définie par le groupe H_u des matrices de la forme :

$$h_u = \begin{pmatrix} Id_{J_1} & h_{J_1J_2} & \ldots & h_{J_1J_{l-1}} & h_{J_1J_l} \\ 0 & Id_{J_2} & \ldots & h_{J_2J_{l-1}} & h_{J_2J_l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & Id_{J_{l-1}} & h_{J_{l-1}J_l} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & Id_{J_l} \end{pmatrix}.$$

De même la variété stable (resp. neutre) passant par $\bar{x} = x\Gamma$ est la variété immergée $H_s x\Gamma$ (resp. $H_e x\Gamma$) définie par le groupe H_s (resp. H_e) des matrices de la forme

$$h_s = \begin{pmatrix} Id_{J_1} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ h_{J_2J_1} & Id_{J_2} & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ h_{J_{l-1}J_1} & h_{J_{l-1}J_2} & \ldots & Id_{J_{l-1}} & 0 \\ h_{J_lJ_l} & h_{J_lJ_2} & \ldots & h_{J_lJ_{l-1}} & Id_{J_l} \end{pmatrix}.$$

$$(\text{resp. } h_e = \begin{pmatrix} h_{J_1J_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & h_{J_2J_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & h_{J_lJ_l} \end{pmatrix}).$$

Nous sommes donc face à un flot uniformément quasi-hyperbolique.

Fixons une distance riemannienne d_0 sur G invariante par translation à droite et définissons une distance sur G/Γ en posant

$$d(\overline{x}, \overline{y}) = \inf_{\gamma\in\Gamma} d_0(x, y\gamma).$$

Nous noterons $B(\overline{x}, r)$ (resp. $B_0(x, r)$) la boule de centre $\overline{x}$ (resp. x) et de rayon r pour la distance d (resp. d_0).

Soit $C > 0$ et $p \in]0, 1[$ deux réels. Nous dirons qu'une fonction f définie sur G/Γ est (C, p)**-höldérienne** si, pour tout couple de points $\overline{x}$ et $\overline{y}$ pris dans G/Γ, on a

$$|f(\overline{x}) - f(\overline{y})| \leq Cd(\overline{x}, \overline{y})^p.$$

Un ensemble $U \subset G/\Gamma$ étant donné, nous désignons son bord par ∂U et, pour tout réel positif r, définissons l'ensemble $\partial U(r)$ par

$$\partial U(r) = \{\overline{y} \in G/\Gamma \ / \ B_0(Id, r)\overline{y} \cap \partial U \neq \emptyset\}.$$

Nous dirons qu'un ensemble $U \subset G/\Gamma$ est (C, p)**-régulier** si, pour tout $r > 0$,

$$\overline{\mu}(\partial U(r)) \leq Cr^p.$$

Coordonnées locales

Appelons E_{ij} les éléments de la base canonique de $M(d, \mathbb{R})$. L'ensemble $B_u = \{E_{ij} \ / \ i \in J_k, j \in J_l, k < l\}$ forme une base de l'algèbre de Lie du groupe nilpotent H_u. Appelons d_u son cardinal et notons $(Y_{u,1}, \dots, Y_{u,d_u})$ ses éléments par commodité. On définit de même $(Y_{e,1}, \dots, Y_{e,d_e})$ et $(Y_{s,1}, \dots, Y_{s,d_s})$ des bases des algèbres de Lie de H_e et H_s ($d_s = d_u$, $(Y_{e,1}, \dots, Y_{e,d_e})$ contient des éléments de la forme $E_{ii} - E_{jj}$). Soit $D = d^2 - 1$ la dimension de $SL(d, \mathbb{R})$. L'application

$$\begin{aligned} \Phi \ : \ & \mathbb{R}^D = \mathbb{R}^{d_s+d_0+d_u} \longrightarrow G \\ & (t_{s,1}, \dots t_{s,d_s}, t_{e,1}, \dots t_{e,d_e}, t_{u,1} \dots t_{u,d_u}) \\ & \qquad \longmapsto \exp(\sum_1^{d_u} t_{u,i}Y_{u,i}) \exp(\sum_1^{d_e} t_{e,i}Y_{e,i}) \exp(\sum_1^{d_s} t_{s,i}Y_{s,i}) \end{aligned}$$

est un difféomorphisme d'un voisinage de 0 sur un voisinage de l'identité.

Notons $\Delta(r)$ l'ensemble $\{g \in SL(d, \mathbb{R}) \ / \ \exists h \in M(d, \mathbb{R}), ||h||_\infty \leq r, \ g = Id + h\}$, $B_0(x, r)$ (resp. $B(\overline{x}, r)$) la boule de centre x (resp. $\overline{x}$) et de rayon r pour la distance d_0 (resp. d). On montre l'existence de constantes C_0 et r_0, telles que, pour $r \leq r_0$, on ait :

$$\Delta(C_0^{-2}r) \subset \Phi(] - C_0^{-1}r, C_0^{-1}r[^D) \subset B_0(Id, r) \subset \Phi(] - C_0r, C_0r[^D) \subset \Delta(C_0^2r) \qquad (\mathbf{I}).$$

Décomposition de la mesure de Haar

Nous noterons m_s, m_u, m_e ou plus simplement dh_s, dh_u, dh_e, les mesures de Haar sur H_s, H_u, H_e. Il existe une fonction multiplicative Θ_e définie sur H_e telle que, pour toute fonction φ à continue à support dans $B_0(Id, r_0)$,

$$\int_G \varphi(g)d\mu(g) = \int_{H_s\times H_e\times H_u} \varphi(h_s h_e h_u)\Theta_e(h_e)\ dh_s\ dh_e\ dh_u.$$

Rayon d'injectivité

Désignons par π la projection canonique de G sur G/Γ.

Proposition *Il existe c_0 tel que, pour tout $\overline{x}$ appartenant à G/Γ, l'application*

$$\pi\circ\Phi\ :\ ]-c_0, c_0[^D \longrightarrow G/\Gamma\ :\ t\longmapsto \Phi(t)\overline{x}$$

est un difféomorphisme de $]-c_0, c_0[^D$ sur son image.

Mélange

Soient φ et ψ deux fonctions indéfiniment dérivables sur G/Γ de moyennes nulles. Grâce à la théorie des représentations des groupes de Lie, on donne une majoration du produit scalaire $\langle T^n\varphi, \psi\rangle$ ([13], [8], [44]).

Proposition *Il existe deux nombres réels $\zeta > 1$ et $C_3 > 0$ et un opérateur différentiel Ω tels que, pour toutes fonctions φ et ψ indéfiniment dérivables définies sur G/Γ d'intégrales nulles et pour tout entier n, nous avons :*

$$|\langle\varphi, \psi\circ T^n\rangle| \le C_3\|\Omega\varphi\|_2\|\Omega\psi\|_2\zeta^{-|n|}. \tag{1}$$

Approximation par des fonctions régulières

Pour tout nombre réel strictement supérieur à 1, ρ, nous appellerons ρ-identité approchée une suite (χ_n) de fonctions définies sur G, positives ou nulles, indéfiniment dérivables, d'intégrale 1, telle que, il existe $C > 0$ tel que, pour tout n,
– le support de χ_n soit inclus dans $B_0(Id, \rho^{-n})$,
– $||\Omega^m\chi_n||_\infty \le C\rho^{Cn}$,
– χ_n est lipschitzienne de constante de Lipschitz ρ^{Cn}.
De telles suites existent. (Etant donnée une fonction χ positive ou nulle, indéfiniment dérivable, d'intégrale 1 dont le support est inclus dans $B_0(Id, r_0)$ on peut poser $\chi_n(\cdot) = c_n\rho^{Dn}\chi(\Phi(\rho^n\Phi^{-1}(.)))$ où c_n est une constante de normalisation (Φ et r_0 sont définis au paragraphe consacré aux coordonnées locales).) Soit ψ une fonction localement intégrable sur G. Posons :

$$\chi_n * \psi(x) = \int_G \psi(g^{-1}x)\chi_n(g)\ d\mu(g) = \int_G \psi(g)\chi_n(xg^{-1})\ d\mu(g).$$

Identifions l'algèbre de Lie de G à l'ensemble des champs de vecteurs sur G invariants à **droite**. Alors, pour tout n, les fonctions $\chi_n * \psi$ sont indéfiniment différentiables et, pour tout opérateur différentiel Ω appartenant à l'algèbre enveloppante universelle de G, $\Omega(\chi_n * \psi) = (\Omega\chi_n) * \psi$. Soit φ une fonction $\overline{\mu}$-intégrable définie sur G/Γ. On lui associe une fonction φ définie sur G localement intégrable en posant $\varphi(x) = \varphi(\overline{x})$. On vérifie immédiatement (sur la première définition) que $\chi_n * \varphi$ est invariante par translation à droite par les éléments de Γ. Il lui correspond donc une fonction définie sur G/Γ : nous la noterons φ_n.

2 Martingales dans les systèmes dynamiques

2.1 Le principe de la méthode

Comme son nom l'indique, le théorème limite central est un théorème important de la théorie des probabilités. Ses applications tant pratiques que théoriques sont innombrables. D'abord établi pour les suites de variables indépendantes de même loi (théorème de De Moivre-Laplace), il a été démontré dans un grand nombre de situations (chaînes de Markov, processus stationnaires α- ou ϕ-mélangeants, martingales,...) qui affaiblissent de différentes façons la condition d'indépendance.

Le problème de la convergence vers une loi gaussienne des sommes ergodiques d'un système dynamique a été abordé dès les années quarante ([31]). Comme nous l'avons dit dans l'introduction, au début des années soixante en Russie de nombreux outils ont été créés permettant d'attaquer la question pour une classe plus large de systèmes dynamiques.

Depuis l'article de Sinaï ([73]) paru en 1960, la preuve du théorème limite central (TLC) dans les systèmes dynamiques de type hyperbolique a fait l'objet de très nombreux travaux. Pour les systèmes d'Anosov, on se sert généralement du codage obtenu grâce à la construction de partitions markoviennes (*cf.* par exemple [35], [66]). Lorsque l'on sort de ce cadre (abandon de la compacité de l'espace ou de la régularité de la transformation, affaiblissement de la condition de régularité) différentes techniques peuvent être utilisées ([56], [77],...).

La méthode des martingales, développée par Billingsley, Ibragimov puis Gordin ([32]) permet d'obtenir des résultats plus précis que le seul TLC, tel le principe d'invariance. Elle peut être appliquée à des situations où on ne dispose pas de partitions markoviennes (*cf.* par exemple les articles [48], [49], [77], [59], [60], [58]).

Définition : *Un processus à temps discret formé d'une suite de variables aléatoires de carré intégrable* $(\ldots, X_{-1}, X_0, X_1, \ldots)$ *est une suite de* **différences de martingale** *par rapport à une suite croissante de tribus* $(\mathcal{F}_n)$ *s'il vérifie les conditions suivantes :*
X_n *est* $\mathcal{F}_n$*- mesurable,*
$\mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_{n-1}) = 0$*, pour tout* n.

Billingsley et Ibragimov ont montré qu'une suite de différences de martingale vérifie le TLC. Depuis de nombreux autres résultats ont été prouvés ([37]).

Dans la terminologie des systèmes dynamiques, on peut énoncer le théorème suivant.

Théorème *Soient* $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ *un système dynamique ergodique inversible,* f *une fonction dans* $L^2(\mu)$ *et* $\mathcal{A}$ *une sous-tribu de* $\mathcal{B}$ *tels que*
$\mathcal{A} \subset T\mathcal{A}$,
f *est* $\mathcal{A}$*-mesurable,*
$\mathbb{E}(f|T^{-1}\mathcal{A}) = 0$,
$\int f^2 d\mu = \sigma^2(f) > 0$.
Alors la fonction f *vérifie le théorème limite central, les principes d'invariance de Donsker et de Strassen.*

Le principe d'invariance de Strassen est un raffinement de la loi du logarithme itéré : pour preque tout x pour μ,

$$\limsup \frac{1}{\left(2n\sigma^2 \log\log n\right)^{1/2}} \sum_{j=0}^{n-1} \phi \circ T^j\left(x\right) = 1,$$

$$\liminf \frac{1}{\left(2n\sigma^2 \log\log n\right)^{1/2}} \sum_{j=0}^{n-1} \phi \circ T^j\left(x\right) = -1.$$

L'hypothèse de différences de martingale est très forte. Mais, comme l'a remarqué Gordin ([32]), beaucoup de propriétés stochastiques des sommes ergodiques associées à une fonction f sont encore vérifiées par les fonctions homologues à f. On peut ainsi élargir le domaine de validité du théorème précédent.

Définition :*Nous dirons qu'une fonction f est* **homologue** *à une fonction engendrant une suite de différences de martingale si f est de la forme $f = g + h - Th$, avec h de carré intégrable et g engendrant une suite de différences de martingale sous l'action de T.*

Si f et g sont homologues, on a alors l'égalité

$$S_n f = S_n g + h - T^n h,$$

liant les sommes ergodiques, ce qui suggère qu'après normalisation elles ont des comportements limite analogues.

Le caractère hilbertien de la notion de différences de martingale permet d'obtenir facilement des critères d'homologie à une fonction engendrant une suite de différences de martingale.

Le théorème suivant (*cf* [37] page 145) par exemple est une conséquence des considérations précédentes :

Théorème *Soient $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ un système dynamique ergodique inversible, $(\mathcal{A}_n)$ une filtration de $\mathcal{A}$ telle que $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{A}_{n+1} = T^{-1}\mathcal{A}_n$ et f une fonction dans $L^2(\mu)$ telle que*

$$\sum_{n<0} ||E\left(f|\mathcal{A}_n\right)||_2 < \infty \quad \text{et} \quad \sum_{n>0} ||f - E\left(f|\mathcal{A}_n\right)||_2 < \infty.$$

Alors, soit il existe une fonction h de carré intégrable telle que $f = h - Th$, soit la fonction f vérifie le TLC et les principes d'invariance de Strassen et Donsker.

Il est facile de décrire comment on peut appliquer ce théorème pour démontrer les théorèmes limite dans les systèmes partiellement hyperboliques.

Supposons que X soit une variété différentiable et qu'en chaque point on puisse définir une variété locale dilatée par T. Supposons de plus qu'on puisse construire une filtration $(\mathcal{A}_n)$ telle que, pour tout n, les atomes de $\mathcal{A}_n$ soient des morceaux de feuilles dilatées. Alors les atomes de $\mathcal{A}_n$, images par T^{-n} des atomes de $\mathcal{A}_0$, sont de très petite taille lorsque n tend vers $+\infty$ et s'enroulent rapidement dans X lorsque n tend vers $-\infty$. Considérons alors une fonction f régulière sur X. La valeur de l'espérance conditionnelle $E\left(f|\mathcal{A}_n\right)$

en un point x est la moyenne de f sur l'atome de $\mathcal{A}_n$ contenant x. Pour n tendant vers l'infini $E\left(f|\mathcal{A}_n\right)(x)$ est donc très proche de $f(x)$ car f est régulière : la convergence de la deuxième série sera assez facile à établir (du moins dans les cas où la dilatation est uniforme). Pour n tendant vers moins l'infini $E\left(f|\mathcal{A}_n\right)(x)$ est l'intégrale de f sur un grand morceau de feuille dilatée passant par x : pour démontrer la convergence de la première série, il faut disposer d'un résultat d'équidistribution des variété instable de T dans X. Ce deuxième point est le plus délicat. Pour le traiter, on peut relier équirépartition des variétés instables et vitesse de décorélation pour les fonctions régulières.

Nous avons démontré qu'on pouvait utiliser ce théorème et cette stratégie pour plusieurs systèmes dynamiques : les automorphismes ergodiques des tores (non nécessairement hyperbolique) ([48]), certaines transformations de nilvariétés, les flots diagonaux sur $SL(d,\mathbb{R})/SL(d,\mathbb{Z})$ ([49]), les flots exponentiellement mélangeants sur les quotients compacts de groupes de Lie semi-simples. Nous décrivons plus bas comment on peut réaliser le programme décrit dans le cas des flots diagonaux sur les quotients compacts de $SL(d,\mathbb{R})$. Plusieurs prolongements sont possibles : généraliser les résultats à une classe de groupes et de quotient la plus large possible (des théorèmes généraux sont disponibles), les étendre aux cas de mesures singulières par rapport à la mesure de Haar (la mesure de Patterson-Sullivan dans le cas convexe cocompact par exemple, les travaux de Naud ([61]) pourraient nous y aider). D'autres systèmes dynamiques auxquels on peut essayer d'appliquer ces méthodes avec de bonnes chances de succès sont les extensions compactes de systèmes hyperboliques (de type Anosov ou Axiom A).

Nous avons également étudié le problème de la dégénérescence dans le théorème limite central. Le théorème donné plus haut indique que le TLC n'est pas vérifié seulement dans le cas où la fonction est un cobord. Nous sommes donc ramenés à ce qu'on appelle le problème de Livsic. On peut montrer dans les cas cités plus haut que la fonction est alors un cobord dans l'ensemble des fonctions continues. On en déduit par exemple qu'une fonction dont la somme le long d'une orbite périodique n'est pas nulle satisfait le TLC.

D'autres mathématiciens ont utilisé la méthode de Gordin ou des arguments analogues au cours des dernières années . Citons par exemple Liverani ([54]), Dolgopyat ([26]), Conze et Raugi ([21]). Cette méthode s'applique également à certains systèmes non inversibles. Nous avons ainsi pu l'utiliser dans l'étude des propriétés stochastiques des endomorphismes des espaces homogènes complexes ([18]), étendant un résultat de Denker, Przytycki et Urbański ([23]). Dinh et Sibony ont obtenu indépendamment et en utilisant aussi la méthode de Gordin un résultat analogue ([24]).

2.2 L'exemple des flots diagonaux

Pour illustrer la méthode nous avons choisi de présenter de manière assez détaillée la construction dans le cas de l'action des flots diagonaux sur les quotients compacts de $SL(d,\mathbb{R})$. Le cas d'un quotient non compact de volume fini se traite de manière analogue (la construction de la filtration est plus compliquée *cf.*[49]).

Théorème *Soit f une fonction höldérienne ou une indicatrice d'un ensemble régulier. Alors, si f n'est pas un cobord, elle vérifie le principe d'invariance de Donsker et le* *principe d'invariance de Strassen.*

La technique que nous proposons ne s'applique bien qu'en temps discret. Nous mènerons donc toute l'étude dans le cadre du système dynamique $(G/\Gamma, T = T^1, \overline{\mu})$ et nous ne traiterons que le cas des fonctions höldériennes. La **variance** $\sigma^2(\varphi)$ est définie comme la limite (si cette limite existe et est finie) :

$$\sigma^2(\varphi) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\|\varphi + T\varphi + ... + T^{n-1}\varphi\|_2^2.$$

Notons $S_n\varphi$ la somme $\varphi + T\varphi + ... + T^{n-1}\varphi$.

Le théorème en temps continu se déduit du théorème en temps discret.

2.2.1 Répartition des variétés instables

La démonstration repose sur le fait que les feuilles dilatées par T sont bien réparties dans G/Γ. Il est nécessaire de disposer d'une information quantitative. Nous l'obtenons à partir du résultat de décorrélation. Ce lien entre la décorrélation et la répartition des feuilles instables a déjà été utilisé par différents auteurs (*cf.* par exemple [47]).

Appelons $\Delta_u(r)$ l'ensemble des matrices unipotentes appartenant à H_u dont les coefficients non diagonaux sont de valeurs absolues inférieures à r.

Fixons $\epsilon > 0$ et considérons un ensemble $F \subset H_u$ contenant la "boule" $\Delta_u(\epsilon)$. Désignons par $B_s(Id, \epsilon)$ (resp. $B_e(Id, \epsilon)$) l'ensemble $H_s \cap B_0(Id, \epsilon)$ (resp. $H_e \cap B_0(Id, \epsilon)$).

Notons $\mathcal{U}_n$ l'ensemble $T^nB_s(Id, \epsilon)T^{-n} \times T^nB_e(Id, \epsilon)T^{-n} \times T^nFT^{-n} \subset H_s \times H_e \times H_u$. Si l'application

$$\mathcal{U}_0 \longrightarrow G \ : \ (h_s, h_e, h_u) \longmapsto h_sh_eh_u\overline{x}$$

est un difféomorphisme sur son image, notée $U_{\overline{x}}^{F,\epsilon}$, nous dirons que F définit un (F, ϵ)-pavé en $\overline{x}$. Pour alléger les notations nous noterons ci-dessous U l'ensemble $U_{\overline{x}}^{F,\epsilon}$.

Rappelons que $\partial U(\beta)$ désigne l'ensemble des points de G/Γ qui sont à une distance inférieure à β du bord de U et Ω l'opérateur différentiel introduit dans le paragraphe1. L'ensemble U est régulier dans le sens défini au paragraphe 1. Nous nous donnons une fonction φ (C, p)-höldérienne.

L'**inégalité de mélange** (1) appliquée à $\chi_n^{(\rho)} * 1_U$ et à $\chi_n^{(\rho)} * \varphi$ (de moyenne nulle si φ l'est) et les propriétés de la suite $\chi_n^{(\rho)}$ assurent l'existence d'une constante $C_7 > 0$ telle que :

$$\left|\langle\left(\chi_n^{(\rho)} * 1_U\right) \circ T^{-n}, \chi_n^{(\rho)} * \varphi\rangle\right| \leq C_3 \left\|\Omega\chi_n^{(\rho)} * 1_U\right\|_2 \left\|\Omega\left(\chi_n^{(\rho)} * \varphi\right)\right\|_2 \zeta^{-n} \leq C_7\|\varphi\|_\infty\rho^{2C_1'n}\zeta^{-n}.$$

D'autre part la vitesse d'approximation par les fonctions convolées assurent qu'on a :

$$\left|\langle 1_U \circ T^{-n}, \varphi\rangle - \langle(\chi_n^{(\rho)} * 1_U) \circ T^{-n}, \chi_n^{(\rho)} * \varphi\rangle\right| \leq \rho^{-np}C_\varphi^{(p)} + \|\varphi\|_\infty\bar{\mu}(\partial U(\rho^{-n})).$$

Par ailleurs, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \langle T^{-n}1_U, \varphi\rangle &= \int_{T^nU} \varphi(\overline{y})\ d\overline{\mu}(\overline{y}) \\ &= \int_{\mathcal{U}_n} \Theta_e(h_e)\varphi(h_s h_e h_u T^n\overline{x})\ dh_s\ dh_e\ dh_u. \end{aligned}$$

Les ensembles $B_e(Id,\epsilon)$ et $B_s(Id,\epsilon)$ sont respectivement invariant et contracté par T, donc, pour tout n, et tout $(h_s,h_e) \in B_s(Id,\epsilon)\times B_e(Id,\epsilon)$, il existe une constante $C_2>0$ telle que :

$$d(T^n h_s h_e h_u T^{-n}T^n\overline{x}, T^n h_u T^{-n}T^n\overline{x}) \leq C_2'\epsilon.$$

Comme φ est (C,p)-höldérienne, pour tout (h_s,h_e,h_u) appartenant à $\mathcal{U}_n$, on a :

$$|\varphi(h_s h_e h_u T^n\overline{x}) - \varphi(h_u T^n\overline{x})| \leq CC_2^p\epsilon^p,$$

donc,

$$|\langle T^{-n}1_U,\varphi\rangle - \int_{\mathcal{U}_n}\Theta_e(h_e)\varphi(h_u T^n\overline{x})\ dh_s\ dh_e\ dh_u| \leq CC_2^p\epsilon^p\overline{\mu}(U).$$

En utilisant les inégalités précédentes et en divisant par $\overline{\mu}(U))$ (qui est supérieur à $c\epsilon^D$ pour une certaine constante c car $\overline{\mu}$ est équivalente à la mesure de Lebesgue sur les coordonnées), on obtient l'existence d'une constante $C_0''>0$ telle que :

$$\begin{aligned} &|\frac{1}{m_u(T^nFT^{-n})}\int_{T^nFT^{-n}}\varphi(h_uT^n\overline{x})\ dh_u| \\ &\quad\leq\ C_0''(\frac{\overline{\mu}(\partial U(\rho^{-n})) + \zeta^{-n}\rho^{2C_0''n} + \rho^{-np}}{\epsilon^D} + \epsilon^p). \end{aligned}$$

Nous utiliserons cette majoration plus loin et fixerons ϵ et ρ selon nos besoins.

2.2.2 La filtration

Choisissons un recouvrement $\mathcal{R}$ de G/Γ fini vérifiant, pour une certaine constante positive C_1, les conditions suivantes :

(**R1**) Le recouvrement est décrit par une famille finie $(x_i)_{i=1}^N \in G^N$:

$$\mathcal{R} = \{\Phi(]-c,c[^D)\overline{x}_i\ :\ i\in\mathbb{N}\}.$$

(**R2**) Pour tout i, l'application

$$]-C_1c, C_1c[^D \to G/\Gamma\ :\ v\mapsto \Phi(v)\overline{x}_i$$

est un difféomorphisme de $]-C_1c,C_1c[^D$ sur son image.

Définissons la partition $\mathcal{Q}$ de G/Γ de la façon suivante :

$$\mathcal{Q} = \{\cap_{R\in\mathcal{R}} A_R \ / \ A_R = R \text{ ou } {}^cR\},$$

puis la partition $\mathcal{P}$ par

$$\mathcal{P}(\overline{x}) = \mathcal{Q}(\overline{x}) \cap \Delta_u(C_1c)\overline{x}.$$

La partition $\mathcal{P}$ est construite à partir de $\mathcal{Q}$ en découpant les atomes de $\mathcal{Q}$ en tranches dilatées : c'est une partition non dénombrable. Définissons ensuite

$$\mathcal{P}_0^\infty(\overline{x}) = \mathcal{P}(\overline{x}) \cap T\mathcal{P}(T^{-1}\overline{x}) \cap T^2\mathcal{P}(T^{-2}\overline{x}) \cap \ldots$$

C'est la partition la plus grossière parmi les partitions plus fines que $\mathcal{P}$ qui soit incluse dans son image par T^{-1}. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ appelons $\mathcal{A}_n$ la tribu dont les atomes sont les éléments de $T^{-n}\mathcal{P}_0^\infty$. L'introduction de $\mathcal{P}_0^\infty$ est nécessaire pour que la suite de tribu $\mathcal{A}_n$ soit une filtration (croissante). L'atome de $\mathcal{A}_n$ contenant $\overline{x}$ est

$$\mathcal{A}_n(\overline{x}) = T^{-n}\mathcal{P}(T^n\overline{x}) \cap T^{-(n-1)}\mathcal{P}(T^{n-1}\overline{x}) \cap T^{-(n-2)}\mathcal{P}(T^{n-2}\overline{x}) \cap \ldots = T^{-n}\mathcal{A}_0(T^n\overline{x}).$$

L'égalité $\mathcal{A}_0(\overline{x}) = \mathcal{P}(\overline{x}) \cap \mathcal{A}_{-1}(\overline{x})$ montre que les atomes de $\mathcal{A}_{-1}$ sont des réunions finies d'atomes de $\mathcal{A}_0$. La famille $(\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ vérifie donc la condition $\mathcal{A}_n \subset T^{-1}\mathcal{A}_n = \mathcal{A}_{n+1}$.

Définissons l'ensemble $W_n^{\delta,\beta}$ par ($\delta, \beta \in]1, \infty[$)

$$W_n^{\delta,\beta} = \{\overline{x} \in G/\Gamma \ / \ \forall k \geq 0 \ \Delta_u(\beta^n\delta^{-k})T^{-k}\overline{x} \subset \mathcal{Q}(T^{-k}\overline{x})\}.$$

Dans la suite l'entier n est négatif. Le groupe H_u est dilaté par la transformation T : il existe $\xi > 1$ tel que, pour tout $r > 0$, l'ensemble $T\Delta_u(r)T^{-1}$ contienne l'ensemble $\Delta_u(\xi r)$.

Si $\delta < \xi$ alors, pour $\overline{x}$ appartenant à $W_n^{\delta,\beta}$, on, pour tout $k \geq 0$, a les inclusions

$$\Delta_u(\beta^n)\overline{x} \subset \Delta_u(\beta^n\xi^k\delta^{-k})\overline{x} \subset T^k\Delta_u(\beta^n\delta^{-k})T^{-k}\overline{x},$$

donc

$$\Delta_u(\beta^n)\overline{x} \subset \mathcal{P}_0^\infty(\overline{x}).$$

D'autre part, comme les bords des éléments de $\mathcal{Q}$ sont réguliers, il existe $C_3 > 0$ tel que, pour tout $\epsilon > 0$, on ait

$$\overline{\mu}\{\overline{x} \in G/\Gamma \ : \ \Delta_u(\epsilon)\overline{x} \cap \partial\mathcal{Q}(\overline{x}) \neq \emptyset\} \leq C_3\epsilon.$$

On en déduit le lemme suivant :

Lemme *Il existe $C_4 > 0$ et $q > 0$ tels que*

$$\overline{\mu}({}^cW_n^{\delta,\beta}) \leq C_4\beta^n.$$

Démonstration : C'est une conséquence de la suite de majorations suivante (où l'on utilise l'invariance de la mesure à l'avant dernière ligne) :

$$\begin{aligned}
\overline{\mu}({}^cW_n^{\delta,\beta}) &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \overline{\mu}\{\overline{x}/\Delta_u(\beta^n\delta^{-k})T^{-k}\overline{x} \cap \partial\mathcal{Q}(T^{-k}\overline{x}) \neq \emptyset\} \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty} \overline{\mu}\{\overline{x}/\Delta_u(\beta^n\delta^{-k})\overline{x} \cap \partial\mathcal{Q}(\overline{x}) \neq \emptyset\} \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty} C_3\beta^n\delta^{-k}.
\end{aligned}$$

Les atomes de $\mathcal{P}_0^\infty$ contiennent donc avec grande probabilité un morceau de feuille dilatée de taille minorée par β^n $(n < 0)$.

Pour montrer la bonne répartition des atomes de $\mathcal{A}_n$, nous avons également besoin d'une information sur la régularité de leurs bords (il faut majorer le terme $\overline{\mu}(\partial U(\rho^{-n}))$ dans l'inégalité d'équirépartition obtenue plus haut). La nilpotence du groupe H_u permet d'obtenir cette information par des arguments algébriques très simples.

Par définition, il existe un compact $K \subset \mathbb{R}^{d_u}$ et $M > 0$ tels que, pour tout k, pour tout $\overline{x}$, il existe un ensemble $E_{\overline{x}}$ inclus dans K dont le bord est constitué d'au plus M morceaux de surfaces algébriques de degré d (les matrices T^k sont de taille $d \times d$) tel que l'on ait :

$$\mathcal{P}(\overline{x}) = exp(E_{\overline{x}})\overline{x}.$$

Notons λ_u la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^{d_u}$.

Lemme *Soient K un compact de $\mathbb{R}^{d_u}$ et ϵ un réel positif. Il existe une constante C_5 dépendant uniquement de K telle que, pour toute hypersurface algébrique $S \subset \mathbb{R}^{d_u}$ de degré inférieur ou égal à d, on ait*

$$\lambda_u\{x \in K \ / \ d(x, S) < \epsilon\} \leq C_5\epsilon,$$

Lemme *Il existe une constante $C_6 > 0$ telle que, si $\overline{x} \in W_n^{\delta,\beta}$ alors on a*

$$m_u\{\overline{y} \in \mathcal{P}_0^\infty(\overline{x}) \ / \ \Delta_u(\epsilon)\overline{x} \cap \partial\mathcal{P}_0^\infty(\overline{x}) \neq \emptyset\} < C_6\beta^{-C_6 n}\epsilon.$$

Démonstration : Soit $\overline{x}$ un élément de $W_n^{\delta,\beta}$. Par définition, pour tout entier $k \geq 0$, on a

$$\Delta_u(\beta^n\delta^{-k})T^{-k}\overline{x} \subset \mathcal{P}(T^{-k}\overline{x}),$$

donc

$$\Delta_u(\beta^n\delta^{-k}\xi^k)\overline{x} \subset T^k\mathcal{P}(T^{-k}\overline{x}).$$

Par ailleurs on sait que $\mathcal{P}(\overline{x}) \subset \Delta_u(r_0)\overline{x}$, donc, si $\beta^n\delta^{-k}\xi^k > r_0$, l'ensemble $\mathcal{P}(\overline{x})$ est inclus dans $\Delta_u(\beta^n\delta^{-k}\xi^k)\overline{x}$. On en déduit que $\mathcal{P}_0^\infty(\overline{x})$ est égal à

$$\mathcal{P}_0^\infty(\overline{x}) = \bigcap_{k=0}^{[(\ln r_0 + n\ln\beta)/\ln(\xi/\delta)]} T^k\mathcal{P}(T^{-k}\overline{x}).$$

On peut alors majorer le nombre de côtés de $\mathcal{P}_0^\infty(\overline{x})$ et obtenir la majoration grâce aux lemmes énoncés ci-dessus. $\square$

2.2.3 Conclusion

Nous voulons établir la convergence des deux séries :

$$\sum_{n<0} ||E\left(f|\mathcal{A}_n\right)||_2 < \infty \quad \text{et} \quad \sum_{n>0} ||f - E\left(f|\mathcal{A}_n\right)||_2 < \infty.$$

Les partitions $\mathcal{P}_n^\infty = T^{-n}\mathcal{P}_0^\infty$ sont mesurables au sens de Rokhlin. Pour tout n, il existe donc des familles de probabilités conditionnelles $(m_P)_{P\in\mathcal{P}_n^\infty}$ permettant d'exprimer l'espérance conditionnelle par rapport aux tribus $\mathcal{A}_n$: pour toute fonction f intégrable, pour m-presque tout x,

$$I\!\!E(f|\mathcal{A}_n)(\overline{x}) = \int_{\mathcal{P}_n^\infty(\overline{x})} f(y)\ dm_{\mathcal{P}_n^\infty(x)}(y).$$

Par construction, il existe une famille $\{F(n,\overline{x})\}_{n\in\mathbb{Z},\overline{x}\in G/\Gamma}$ de sous-ensembles de H_u relativement compacts contenant Id tels que, pour tout $n\in\mathbb{Z}$ et tout $\overline{x}\in G/\Gamma$, on ait :

$$\mathcal{A}_n(\overline{x}) = F(n,\overline{x})\overline{x} = T^{-n}\mathcal{A}_0(T^n\overline{x}) = T^{-n}F(0,T^n\overline{x})T^n\overline{x}.$$

Les probabilités conditionnelles s'expriment, pour toute fonction f intégrable, pour m-presque tout x, sous la forme :

$$I\!\!E(f|\mathcal{A}_n)(\overline{x}) = \frac{1}{m_u(T^{-n}F(0,T^nx)T^n)}\int_{T^{-n}F(0,T^nx)T^n} f(h_u\overline{x})\ dh_u.$$

Donnons-nous une fonction φ höldérienne.

Prenons un point $\overline{x}\in W_n^{\delta,\beta}$. Nous avons montré l'inclusion : $\Delta_u(\beta^n)\overline{x}\subset\mathcal{P}_0^\infty(\overline{x})$. L'ensemble $U_{\overline{x}}^{F(0,\overline{x}),\beta^n}$ est un pavé. L'inégalité d'équirépartition des feuilles dilatées donne (l'entier n considéré ici est négatif) :

$$\begin{aligned}&|\frac{1}{m_u(T^{-n}F(0,\overline{x})T^n)}\int_{T^{-n}F(0,\overline{x})T^n}\varphi(h_uT^{-n}\overline{x})\ dh_u|\\ &\quad\leq\ C_0''(\frac{\overline{\mu}(\partial U(\rho^n))+\zeta^n\rho^{-2C_0''n}+\rho^{pn}}{\beta^{nD}}+\beta^{np}),\end{aligned}$$

soit encore (*cf.* l'égalité (E))

$$|\mathbb{E}(\varphi|\mathcal{A}_n)(T^{-n}x)|\leq\ C_0''(\frac{\overline{\mu}(\partial U(\rho^n))+\zeta^n\rho^{-2C_0''n}+\rho^{pn}}{\beta^{nD}}+\beta^{np}),$$

et, puisque

$$\overline{\mu}(\partial U(\rho^n))\leq C_6\beta^{-C_6n}\rho^n,$$

$$|\mathbb{E}(\varphi|\mathcal{A}_n)(T^{-n}x)| \leq \; C_0''(\frac{C_6\beta^{-C_6 n}\rho^n + \zeta^n\rho^{-2C_0'' n} + \rho^{pn}}{\beta^{nD}} + \beta^{np}).$$

En prenant $\rho = \beta^{C_6+D+D/p}$ et $\beta > 1$ suffisamment proche de 1, cette majoration assure qu'il existe $\eta > 1$ et $C_8 > 0$ tels que

$$|\mathbb{E}(\varphi|\mathcal{A}_n)(T^{-n}x)| \leq C_8\eta^n.$$

Nous avons aussi montré que $\overline{\mu}({}^cW_n^{\delta,\beta})$ est inférieur à $C_4\beta^{nq}$. On a donc :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\mathbb{E}(\varphi|\mathcal{A}_n)^2) \;&=\; \int_{T^{-n}W_n^{\delta,\beta}} \mathbb{E}(\varphi|\mathcal{A}_n)^2(\overline{x}) \; d\overline{\mu}(\overline{x}) + \int_{T^{-n}{}^cW_n^{\delta,\beta}} \mathbb{E}(\varphi|\mathcal{A}_n)^2(\overline{x}) \; d\overline{\mu}(\overline{x}) \\
&\leq\; C_8\eta^n + C_4\beta^{nq}||\varphi||_\infty.
\end{aligned}$$

La convergence de la première série est établie.

Les atomes de la tribu $\mathcal{A}_n$ sont les images par T^{-n} des atomes de la tribu $\mathcal{A}_0$ qui sont des morceaux de feuilles dilatées par T. Par suite, lorsque n tend vers $+\infty$ le diamètre des atomes de $\mathcal{A}_n$ décroît exponentiellement vite vers 0 : il existe $C_9 > 0$ et $\gamma > 1$ tels que, pour tout $\overline{x} \in G/\Gamma$, pour tout $n \geq 0$, on ait

$$\mathrm{Diam}(\mathcal{P}_n^\infty) \leq C_9\gamma^{-n}.$$

Comme φ est höldérienne

$$||\mathbb{E}(\varphi|\mathcal{A}_n) - \varphi||_2 \leq C_{10}\gamma^{-np}$$

et la convergence de la deuxième série est démontrée.

3 Vitesse dans le théorème limite central

3.1 Le principe de la méthode

Nous nous intéressons maintenant à la vitesse de convergence dans le TLC. Elle se mesure au moyen de la quantité (lorsque φ est centrée) :

$$\sup_{x \in \mathbf{R}} \left| \mu \left(\frac{1}{\sigma \sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \varphi \circ T^k \leq x \right) - \mathbb{P}(N \leq x) \right| .$$

Lorsque le système $(X, \mathcal{F}, \mu, T)$ est un système d'Anosov, on peut établir (grâce à la technique basée sur la perturbation d'opérateur développée dans [35] ou [39]) une vitesse en $n^{-\frac{1}{2}}$, donc aussi bonne que celle obtenue par Esseen pour les suites de variables aléatoires indépendantes ([29]).

Dans le cas des suites de différences de martingales, les vitesses que l'on peut obtenir dépendent d'hypothèses de moments ([6], [38]). Il semble difficile d'appliquer ces méthodes dans les cas qui nous occupent ici. D'abord l'action de la transformation sur les fonctions régulières ne fait pas apparaître directement une suite de différences de martingale : il faut compter avec un terme pertubateur de type cobord. Ensuite les résultats de [6] et [38] comportent des conditions de contrôle non-stationnaire qui sont évidemment violées dans les cas qui nous intéressent. Par exemple, la vitesse en $n^{-\frac{1}{2}}$ prouvée dans [6] l'est sous une hypothèse portant sur les cubes des variables qui n'est généralement pas satisfaite dans notre cadre.

Depuis les travaux de Esseen, différentes méthodes ont été employées pour obtenir une vitesse dans le TLC. Nous suivrons ici la méthode développée par Rio dans [67] (voir aussi [41], [42], [62]) . En toute généralité, la décroissance exponentielle des corrélations n'entraîne pas le théorème limite central. Nous avons montré dans [52] qu'en renforçant convenablement la propriété de décorrélation, alors on peut démontrer un résultat de vitesse de convergence en $n^{-\frac{1}{2}}$ dans le TLC.

En reprenant un résultat de Rio et en le retravaillant (à la suite de Jan) on démontre le théorème suivant. La démonstration est longue, technique et suit de près celle de Rio (même si de nombreuses adaptations sont nécessaires([52])).

Théorème R *Soit* $(X_k)_{k\geq 0}$ *une suite stationnaire de variables aléatoires réelles* **bornées** *centrées définies sur un même espace probabilisé. Notons* S_n *la somme* $\sum_1^n X_i$*. Supposons qu'il existe trois nombres réels* $C \geq 1$, $M \geq \max(1, \|X_0\|_\infty)$ *et* $r \geq 1$ *et une suite à double indice de nombres réels* $(\xi_{p,l})_{p,l}$ *vérifiant* $\sum_{p\geq 1} p \max_{l=0,\ldots,\frac{p}{r}} \xi_{p,l} < +\infty$ *tels que, pour tous entiers naturels* a, b, c *vérifiant* $a + b + c \leq 3$*, pour tous entiers* j, k, l, p, q, s *vérifiant :* $1 \leq j \leq k \leq l \leq l+p \leq l+q \leq l+s$*, pour toute fonction différentiable* $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$*, nous ayons :*

$\left|\mathrm{Cov}\left(F\left(S_{j-1}, X_j, X_k, X_l\right), {X_{l+p}}^a {X_{l+q}}^b {X_{l+s}}^c\right)\right| \leq$

$$C\left(\left\|F\left(S_{j-1},X_j,X_k,X_l\right)\right\|_{L^1}+\left\|\sup_{|u|,|v|,|w|,|z|\leq M}\left|DF\left(S_{j-1}+u,X_j+v,X_k+w,X_l+z\right)\right|_\infty\right\|_{L^1}\right)\xi_{p,s-p},$$

(en identifiant, pour tout $(u,v,w,z)\in\mathbb{R}^4$, $DF(u,v,w,z)$ à un vecteur de $\mathbb{R}^4$ et en notant $|\cdot|_\infty$ la norme supérieure sur $\mathbb{R}^4$). Alors, la limite suivante existe :

$$\sigma:=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\mathbb{E}\left[{S_n}^2\right]\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Si $\sigma=0$, alors la suite $(S_n)_n$ est bornée dans L^2.
Si $\sigma>0$, alors la suite de variables aléatoires $\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire N de loi normale centrée de variance σ^2 et il existe un nombre réel $R>0$ tel que, pour tout entier $n\geq 1$, on ait :

$$\sup_{x\in\mathbf{R}}\left|\mu\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\leq x\right)-\mathbb{P}(N\leq x)\right|\leq\frac{R}{\sqrt{n}}.$$

Nous allons décrire comment on peut utiliser ce théorème. Le principe est assez simple.

Supposons que le système soit exponentiellement mélangeant. Cette propriété est généralement énoncée de la façon suivante : il existe deux constantes $C>0$ et $\zeta>1$ et une norme $\|.\|$ mesurant la régularité des fonctions, tels que

$$|\langle\varphi,\psi\circ T^n\rangle|\leq C\|\varphi\|\|\psi\|\zeta^{-|n|}.$$

Lorsqu'on applique une telle majoration pour tenter de vérifier l'hypothèse de décorrélation du théorème R, on obtient une inégalité sans intérêt car les normes $\left\|{X_{l+p}}^a{X_{l+q}}^b{X_{l+s}}^c\right\|_2$ et $\left\|F\left(S_{j-1},X_j,X_k,X_l\right)\right\|_2$ croissent généralement exponentiellement vite avec les nombres $(l-j)$ et s.

La régularité des fonctions le long des feuilles instables s'améliore sous l'action de T^{-1} et la régularité des fonctions le long des feuilles stables-neutres ne se détériore pas trop sous l'action de T. Cette remarque conduit à essayer de remplacer la norme apparaissant dans la formule précédente par deux normes différentes (l'une pour φ mesurant la régularité des fonctions le long des feuilles instables, l'autre pour ψ mesurant la régularité des fonctions le long des feuilles stables-neutres).

Pour tout nombre réel $\eta\in]0;1]$ et toute fonction $\varphi:X\to\mathbb{R}$, nous définissons le coefficient de Hölder d'ordre η de φ relativement à la distance d :

$$C_\varphi^{(\eta)}:=\sup_{\bar{x}\in X}\sup_{\bar{y}\neq\bar{x}}\frac{|\varphi(\bar{x})-\varphi(\bar{y})|}{(d(\bar{x},\bar{y}))^\eta},$$

le coefficient de Hölder d'ordre η de φ dans la direction stable-neutre :

$$C_\varphi^{(\eta,s,e)}:=\sup_{\bar{x}\in X}\sup_{\bar{y}\in H_sH_e\bar{x}\setminus\{\bar{x}\}}\frac{|\varphi(\bar{x})-\varphi(\bar{y})|}{(d^{s,e}(\bar{x},\bar{y}))^\eta},$$

et de manière analogue $D_\varphi^{(\eta,u,L)}$ une notion de coefficient de Hölder local dans la direction instable :

$$D_\varphi^{(\eta,u,L)}(\bar{x}) := \sup_{\bar{y}\in H_u\bar{x}, d^u(\bar{x},\bar{y})\leq L} \frac{|\varphi(\bar{x}) - \varphi(\bar{y})|}{(d^u(\bar{x},\bar{y}))^\eta}.$$

On peut alors exprimer formellement la remarque faite plus haut.

Lemme *S'il existe des nombres réels $C_4 > 1$, L_0 et $\alpha_0 \in]0,1[$ tels que, pour toutes fonctions φ et ψ centrées, et tout entier $n \geq 1$, nous ayons :*

$$|Cov\,(\varphi, \psi \circ T^n)| \leq C_4 \left(\|\varphi\|_{L^1}\|\psi\|_{(\eta,s,e)} + \|\psi\|_\infty \|D_\varphi^{(\eta,u,L_0)}\|_{L^1}\right)\alpha_0^n \tag{2}$$

alors, si f est une fonction höldérienne, bornée et centrée, l'hypothèse du théorème R est valable pour la suite de variables aléatoires $\left(X_k = f \circ T^k\right)_{k\geq 0}$.

La condition du lemme est *a priori* plus forte que le mélange exponentiel. À notre connaissance, Bressaud et Liverani [10] sont les seuls à avoir obtenu une majoration de ce type (pour les difféomorphismes d'Anosov, voir aussi [5]). Il nous semble cependant qu'un tel énoncé est naturel. En effet comme plusieurs auteurs l'ont déjà remarqué la décroissance des corrélations est liée à l'équirépartition des feuilles instables de T. D'autre part, dire que les variétés instables sont bien réparties dans l'espace X, c'est dire que l'intégrale d'une fonction ψ sur un grand morceau de variété instable est proche de l'intégrale de ψ sur X. Pour cela il faut évidemment une certaine régularité de la fonction ψ. Mais quand on prend la moyenne d'une fonction ψ le long d'une feuille instable, on régularise ψ dans la direction instable. On peut donc s'attendre à ce que la régularité de la fonction ψ le long de cette feuille ne soit pas importante quand on établit la propriété d'équirépartition.

Nous allons exploiter ce lemme sous une forme légèrement modifiée. Étant donnés une tribu $\mathcal{A}$ et un entier n, notons $\mathcal{A}_n$ la tribu $\mathcal{A}_n := T^n\mathcal{A}$.

Lemme *S'il existe une tribu $\mathcal{A}$ et trois nombres réels $C_5 > 0$, L_1 et $\alpha_1 \in]0,1[$ tels que, pour toutes fonctions φ et ψ, et tout entier $n \geq 1$, nous ayons :*

$$|\varphi - \mathbb{E}\left[\varphi\,|\mathcal{A}_{-n}\right]| \leq C_5 D_\varphi^{(\eta,u,L_1)} {\alpha_1}^n \tag{3}$$

et

$$\left\|\mathbb{E}\left[\psi\,|\mathcal{A}_n\right] - \int_X \psi\, d\mu\right\|_\infty \leq C_5 \left(\|\psi\|_\infty + C_\psi^{(\eta,s,e)}\right){\alpha_1}^n, \tag{4}$$

alors, pour toute fonction höldérienne f, le processus $(X_k)_{k\geq 0} = (f \circ T^k)_{k\geq 0}$ satisfait les hypothèses du théorème R.

Démonstration D'après la première partie de l'hypothèse, une fonction f est $\mathcal{A}_n$-mesurable si et seulement si $f \circ T^n$ est $\mathcal{A}_0$-mesurable. On a donc la relation suivante pour toute fonction μ-intégrable φ et pour tous entiers n et m :

$$\mathbb{E}\left[\varphi \circ T^m\,|\mathcal{A}_n\right] = \mathbb{E}\left[\varphi\,|\mathcal{A}_{n+m}\right] \circ T^m.$$

Considérons deux fonctions intégrables μ-centrées φ et ψ. Pour tout entier $n \geq 1$, nous avons ($\lfloor \cdot \rfloor$ désigne la partie entière) :

$$\begin{aligned}
|Cov\,(\varphi, \psi \circ T^n)| &= \mathbb{E}\left[\varphi.\psi \circ T^n\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\varphi \,\middle|\, \mathcal{A}_{-\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}\right].\psi \circ T^n\right] + \mathbb{E}\left[\left(\varphi - \mathbb{E}\left[\varphi \,\middle|\, \mathcal{A}_{-\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}\right]\right).\psi \circ T^n\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\varphi \,\middle|\, \mathcal{A}_{-\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}\right].\psi \circ T^n\right] + C_5 \|D_\varphi^{(\eta,u,L_1)}\|_1 \alpha_1{}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \|\psi\|_\infty \\
&\leq \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\varphi \,\middle|\, \mathcal{A}_{-\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}\right].\mathbb{E}\left[\psi \circ T^n \,\middle|\, \mathcal{A}_{-\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}\right]\right] + C_5 \|D_\varphi^{(\eta,u,L_1)}\|_1 \alpha_1{}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \|\psi\|_\infty \\
&\leq \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\varphi \,\middle|\, \mathcal{A}_{-\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}\right].\mathbb{E}\left[\psi \,\middle|\, \mathcal{A}_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}\right] \circ T^n\right] + C_5 \|D_\varphi^{(\eta,u,L_1)}\|_1 \alpha_1{}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \|\psi\|_\infty \\
&\leq \|\varphi\|_{L^1} C_5 \left(\|\psi\|_\infty + C_\psi^{(\eta,s,e)}\right) \alpha_1{}^{\lceil \frac{n}{2} \rceil} + C_5 \|D_\varphi^{(\eta,u,L_1)}\|_1 \alpha_1{}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \|\psi\|_\infty.
\end{aligned}$$

Il suffit maintenant d'appliquer le lemme précédent. $\square$

La tribu $\mathcal{A}_0$ sera la sous-tribu de $\mathcal{F}$ engendrée par une partition mesurable $\mathcal{P}$ de X dont les atomes sont des morceaux de variétés instables. La première des inégalités ci-dessus est immédiate si ψ est höldérienne dans la direction instable et si les atomes de $\mathcal{A}_{-n}$ sont de diamètres uniformément exponentiellement petits quand n tend vers l'infini. La deuxième signifie que les feuilles instables sont bien réparties dans X (les atomes de $\mathcal{A}_n$ sont de «très grands» morceaux de feuilles instables quand n tend vers l'infini). Insistons sur le fait, qu'ici, $\mathcal{A}_n$ n'est pas une filtration. La construction de la suite $\mathcal{A}_n$ est donc beaucoup plus simple que dans la partie précédente : il n'est pas nécessaire de considérer $\mathcal{P}_0^\infty$ et des contrôles de taille assez délicats nous sont épargnés.

La même technique de démonstration donnera le même résultat quand on dispose des mêmes outils, c'est-à-dire : la structure produit de la mesure invariante μ, la régularité du jacobien de l'application d'holonomie sur les feuilles instables le long des feuilles stables-neutres, une forme d'invariance par T des mesures conditionnelles de μ le long des feuilles instables. En particulier, on établit de la même manière un théorème analogue dans chacun des cas suivants : automorphismes ergodiques des tores, temps 1 du flot géodésique sur une surface riemannienne de courbure strictement négative, certaines transformations affines partiellement hyperboliques de nilvariétés traitées dans [20]. D'autres situations peuvent être traitées grâce au théorème. Nous avons par exemple montré, dans [53], qu'on pouvait l'appliquer pour le système étudié par Shub et Wilkinson dans [71]. Du dernier lemme on déduit également la propriété suivante, peut-être plus facile à manier.

Proposition *Soient m et m' deux entiers naturels, $(\Phi_i)_{i=i}^{m+m'}$ des fonctions höldériennes définies sur $G/\Gamma, t_1, \leq \ldots \leq t_m \leq 0 \leq s_1 \ldots \leq s_{m'}, T > 0$ des nombres réels. Il existe $C > 0$, et $\delta \in]0,1[$, tels que*

$$\mathrm{Cov}(\prod_{i=1}^{m} \Phi_i \circ T_{t_i}, \prod_{j=1}^{m'} \Phi_j \circ T_{s_j+T}) \leq C(\prod_{i=1}^{m+m'} \|\Phi_i\|_\infty + \sum_j C_{\Phi_j}^{(\eta)} \prod_{i \neq j} \|\phi_j\|_\infty)\delta^T.$$

Cette propriété a plusieurs conséquences intéressantes : suivant la méthode de Jan [41], on peut en déduire le TLC avec vitesse $1/n^\alpha$ pour tout $\alpha < 1/2$, on peut aussi l'utiliser pour un principe d'invariance pour les processus empiriques associés à certaines fonctions régulières définies sur des systèmes dynamiques quasi-hyperbolique (travail en cours de Durieu). Nous en verrons une autre application dans la dernière partie de ce mémoire.

3.2 L'exemple des flots diagonaux

Théorème *Soit $\varphi : X \to \mathbb{R}$ une fonction höldérienne, $\bar{\mu}$-centrée. Si φ n'est pas un cobord alors $\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\int_0^t \varphi \circ T^s\, ds\right)_{t>0}$ converge en loi relativement à la mesure de probabilité $\bar{\mu}$ (lorsque t tend vers $+\infty$) vers une variable aléatoire N de loi normale centrée de variance σ^2 et il existe un nombre réel $R > 0$ tel que, pour tout nombre réel $t \geq 1$, on ait :*

$$\sup_{x\in\mathbf{R}} \left| \bar{\mu}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\int_0^t \varphi \circ T^s\, ds \leq x\right) - \mathbb{P}(N \leq x) \right| \leq \frac{R}{\sqrt{t}}.$$

3.2.1 Équirépartition

On montre comme aux pages 14-15 la proposition suivante qui exprime le lien entre mélange et équirépartition.

Rappelons que, pour tout nombre réel $\beta > 0$ et tout sous-ensemble F de H_u, nous notons $\partial F(\beta)$ l'ensemble des points de H_u qui sont à une distance inférieure à β du bord de F et $\partial U(\beta)$ l'ensemble des points de G/Γ qui sont à une distance inférieure à β du bord de U. Le nombre r_0 est défini dans la partie 1 (au paragraphe intitulé Coordonnées locales).

Proposition *Soit $F \subseteq H_u$ un ensemble de diamètre inférieur à r_0 tel qu'il existe deux nombres réels $B > 0$ et $\alpha > 0$ tels que, pour tout $\beta > 0$, on ait :*

$$m_u(\partial F(\beta)) \leq B\beta^\alpha.$$

Alors, il existe deux nombres réels $K_0 > 0$ et $\xi_0 > 1$ tels que, pour toute fonction intégrable $\bar{\mu}$-centrée φ sur G/Γ, pour tout entier $n \geq 1$, pour tout $\bar{x} \in G/\Gamma$, on ait :

$$\left| \frac{1}{m_u(T^n F T^{-n})} \int_{T^n F T^{-n}} \varphi(h_u \bar{x})\ dh_u \right| \leq \frac{K_0}{m_u(F)} \left(\|\varphi\|_\infty + C_\varphi^{(\eta)}\right) \xi_0{}^{-n}.$$

On en déduit alors une estimation analogue faisant intervenir uniquement la régularité de φ dans la direction $H_e H_s$.

Proposition *Soit $F \subseteq H_u$ un ensemble de diamètre inférieur à r_0 tel qu'il existe $B > 0$ et α tels que, pour tout $\beta > 0$, on ait :*

$$m_u(\partial F(\beta)) \leq B\beta^\alpha.$$

Il existe $\xi_1 > 1$ et $K_1 > 0$ tels que, pour toute fonction intégrable φ $\bar{\mu}$-centrée, pour tout entier $n \geq 1$ et pour tout $\bar{x} \in G/\Gamma$ on ait :

$$\left| \frac{1}{m_u(T^n F T^{-n})} \int_{T^n F T^{-n}} \varphi(h_u \bar{x})\ dh_u \right| \leq \frac{K_1}{m_u(F)} \left(\|\varphi\|_\infty + C_\varphi^{(\eta,s,e)}\right) \xi_1^{-n}.$$

Démonstration Au moyen d'une partition de l'unité on se ramène au cas où φ est à support dans un pavé $P = B_u(r_0)B_e(r_0)B_s(r_0)\bar{x}$. Soit g une fonction C^∞ à support dans $B_u(r_0)$, positive, d'intégrale 1. Introduisons la fonction ψ définie par :

(a) $\psi(h_u h_e h_s \bar{x}) = g(h_u) \int_{B_u(r_0)} \varphi(h'_u h_e h_s \bar{x})\, dh'_u$ si $(h_u, h_e, h_s) \in B_u(r_0) \times B_e(r_0) \times B_s(r_0)$,

(b) $\psi(\bar{y}) = 0$ si $\bar{y}$ n'appartient pas à P.

La structure produit de la mesure et la régularité de φ dans la direction $H_e H_s$ permet de montrer que ψ étant η-höldérienne : il existe $C > 0$ telle que,

$$C_\psi^{(\eta)} \leq C \left(\|\varphi\|_\infty + C_\varphi^{(\eta,s,e)} \right).$$

Nous pouvons lui appliquer la proposition précédente (comme φ est centrée ψ l'est également). Pour tout entier $n \geq 1$, tout $\bar{x}$, nous avons :

$$\left| \frac{1}{m_u(T^n F T^{-n})} \int_{T^n F T^{-n}} \psi(h_u \bar{x})\, dh_u \right| \leq \frac{K_0 \left(C_\psi^{(\eta)} + \|\psi\|_\infty \right) {\xi_0}^{-n}}{m_u(F)},$$

donc

$$\left| \frac{1}{m_u(T^n F T^{-n})} \int_{T^n F T^{-n}} \psi(h_u \bar{x})\, dh_u \right| \leq \frac{K_1 \left(C_\varphi^{(\eta,s,e)} + \|\varphi\|_\infty \right) {\xi_0}^{-n}}{m_u(F)}.$$

Il reste alors à estimer la différence entre les deux intégrales

$$\frac{1}{m_u(T^n F T^{-n})} \int_{T^n F T^{-n}} \psi(h_u \bar{x})\, dh_u \quad \text{et} \quad \frac{1}{m_u(T^n F T^{-n})} \int_{T^n F T^{-n}} \varphi(h_u \bar{x})\, dh_u.$$

Ces intégrales sont des sommes d'intégrales de φ et ψ sur les composantes connexes des intersections de $P = B_u(r_0)B_e(r_0)B_s(r_0)\bar{x}$ avec $T^n F T^{-n}$. Ces intégrales ne diffèrent éventuellement que sur les morceaux contenant un point du bord de $T^n F T^{-n} \bar{x}$. Nous avons donc :

$$\left| \frac{1}{m_u(T^n F T^{-n})} \int_{T^n F T^{-n}} (\psi(h_u \bar{x}) - \varphi(h_u \bar{x}))\, dh_u \right| \leq 2 \|\varphi\|_\infty \frac{m_u(\partial T^n F T^{-n}(r_0))}{m_u(T^n F T^{-n})}.$$

D'après la propriété de contraction, pour tout $n \geq 1$ et tout couple $(h_u, h'_u) \in {H_u}^2$, on a :

$$d_0 \left(T^{-n} h_u T^n, T^{-n} h'_u T^n \right) \leq C_0 d_0 \left(h_u, h'_u \right) \delta^{-n}.$$

Soit h_u un point de $T^n F T^{-n}$ à une distance inférieure à r_0 du bord de $T^n F T^{-n}$; il existe $h'_u \in \partial T^n F T^{-n}$ tel que :

$$d(h_u, h'_u) \leq r_0.$$

On a alors $d(T^{-n} h_u T^n, T^{-n} h'_u T^n) \leq C r_0 \delta^{-n}$, autrement dit $T^{-n} h_u T^n$ appartient à $\partial F(C r_0 \delta^{-n})$. On en déduit que $\partial T^n F T^{-n}(r_0)$ est inclus dans $T^n \partial F(C r_0 \delta^{-n}) T^{-n}$. L'action de T sur

H_u par conjugaison est linéaire (les coordonnées canoniques sont multipliées par des constantes, la mesure m_u aussi). On a donc :

$$\begin{aligned}\frac{m_u(\partial T^n F T^{-n}(r_0))}{m_u\left(T^n F T^{-n}\right)} &\leq \frac{m_u(T^n \partial F(C r_0 \delta^{-n}) T^{-n})}{m_u(T^n F T^{-n})} \\ &\leq \frac{m_u(\partial F(C r_0 \delta^{-n}))}{m_u(F)}\end{aligned}$$

Pour terminer la preuve, grâce à une partition de l'unité liée à un recouvrement fini de G/Γ par des ensembles de la forme $B_u(r_0)B_e(r_0)B_s(r_0)\bar{y}$, on s'affranchit de la condition sur le support de φ. □

3.2.2 Démonstration du théorème

À partir d'un recouvrement $\mathcal{R}$ fini de G/Γ par des boîtes de la forme $B_u(r_0)B_e(r_0)B_s(r_0)\bar{y}$, nous construisons une partition $\mathcal{P}$ (non dénombrable) en morceaux de feuilles dilatées. On définit la partition $\mathcal{Q}$ de G/Γ par :

$$\mathcal{Q} = \{\cap_{R \in \mathcal{R}} A_R \ / \ A_R = R \text{ ou } {}^c R\},$$

puis la partition $\mathcal{P}$ par

$$\mathcal{P}(\bar{x}) = \mathcal{Q}(\bar{x}) \cap B_u(3r_0)\bar{x},$$

Nous notons $\mathcal{A}$ la tribu engendrée. Les atomes de $\mathcal{A}$ sont de la forme $F\bar{x}$ où les ensembles F sont des parties relativement compactes de H_u dont le bord est régulier. Nous supposons qu'il existe un nombre réel $\alpha > 0$ tel que pour tout atome $F\bar{x}$ de $\mathcal{A}$ on ait $m_u(F) > \alpha$ (on peut toujours s'y ramener). Notons $\mathcal{A}_n$ la tribu $T^n\mathcal{A}$. Soient φ et ψ deux fonctions d'intégrales nulles sur G/Γ et un entier $n \geq 1$. Les atomes de $\mathcal{A}_{-n}$ sont des ensembles de la forme $T^{-n}FT^nT^{-n}\bar{x}$. Les diamètres des atomes de $\mathcal{A}_{-n}$ sont donc inférieurs à $C_0\delta^{-n}$ et on a

$$|\varphi - \mathbb{E}\left[\varphi \,|\mathcal{A}_{-n}\right]| \leq C_0^\eta D_\varphi^{(\eta,u,3r_0)} \delta^{\eta n}. \tag{5}$$

Les valeurs de $\mathbb{E}\left[\psi \,|\mathcal{A}_n\right]$ sont données par les moyennes de ψ sur les atomes de $\mathcal{A}_n$. On peut appliquer la proposition 3.2.1. Vues les propriétés des atomes de $\mathcal{A}$, on obtient l'existence d'une constante K_3 telle que

$$\|\mathbb{E}\left[\psi \,|\mathcal{A}_n\right]\|_\infty \leq K_3 \left(\|\psi\|_\infty + C_\psi^{(\eta,s,e)}\right) \xi_1^{-n}. \tag{6}$$

Comme le montre les résultats précédents, les inégalités (5) et (6) donnent le résultat.

4 Exemples de systèmes à décorrélations lentes

Depuis quelques années plusieurs exemples de systèmes dynamiques ont été donnés pour lesquels les corrélations et les comportements en loi sont différents ([3], [55], [70], [33], [64]). Nous présentons ici une nouvelle famille d'exemples (de systèmes qui peuvent être inversibles) construits de manière très simple comme produits gauches de systèmes dynamiques.

Soit (X, A, μ) un système d'Anosov et (Y, ϕ_t, ν) un flot d'Anosov tous les deux exponentiellement mélangeants. Fixons une fonction régulière f de X dans $\mathbb{R}$. Sur le produit $X \times Y$ définissons la transformation

$$\begin{aligned} T : X \times Y &\longrightarrow X \times Y \\ (x, y) &\longmapsto (Ax, \phi_{f(x)} y). \end{aligned}$$

La transformation hyperbolique A agit sur la première coordonnée ; le flot agit sur la deuxième coordonnée pendant un temps dépendant de la première. La mesure produit $\mu \otimes \nu$ est invariante par T : le triplet $(X \times Y, T, \mu \otimes \nu)$ définit un système dynamique.

Notons $S_n f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} f(A^k x)$ (par convention posons $S_0 = 0$) les sommes ergodiques associées à l'action de A sur la fonction f. Un calcul simple montre qu'on a, pour tout $n \geq 0$, l'expression de la n$^{\text{ième}}$ itérée de T :

$$T^n(x, y) = (A^n x, T_{S_n f(x)} y)$$

Lorsque $\int_X f \; d\mu$ n'est pas nul (par exemple positif), alors le système défini est exponentiellement mélangeant. On le voit de la manière suivante. Si $0 < a < \int_X f \; d\mu$, les sommes $S_n f$ croissent linéairement et sont supérieures à na sur un ensemble A_n de mesure exponentiellement proche de 1 (inégalité de grandes déviations). En partitionnant $X \times Y$ en $A_n \times Y \cup^c A_n \times Y$ et en utilisant le mélange exponentiel pour T et ϕ_t on conclut facilement. On peut alors appliquer la démarche expliquée à la section 3 pour montrer que le système satisfait la proposition

Proposition *Soient m et m' deux entiers naturels, $(\Phi_i)_{i=i}^{m+m'}$ des fonctions höldériennes définies sur $X \times Y, k_1, \leq \ldots \leq k_m \leq 0 \leq l_1 \ldots \leq l_{m'}, n > 0$ des nombres réels. Il existe $C > 0$, et $\delta \in]0, 1[$, tels que*

$$\operatorname{Cov}(\prod_{i=1}^{m} \Phi_i \circ T^{k_i}, \prod_{j=1}^{m'} \Phi_j \circ T_{l_j+n}) \leq C(\prod_{i=1}^{m+m'} \|\Phi_i\|_\infty + \sum_j [\Phi_j] \sum_{i \neq j} \|\phi_j\|_\infty)\delta^n.$$

Le TLC en découle.

Nous nous placerons désormais dans le cas $\int_X f \; d\mu = 0$. La situation est très différente. Comme f est de moyenne nulle les sommes ergodiques $S_n f$ croissent presque sûrement moins vite que $n^{1/2+\varepsilon}$ (pour tout $\varepsilon > 0$). On en déduit que la transformation T a un exposant de Lyapounoff nul dans les sous-espaces tangents aux sous-variétés $\{x\} \times Y$.

4.1 Décroissance des corrélations

Notons $\sigma(f)$ la quantité positive définie par

$$\sigma^2(f) = \int_X f^2 d\mu + 2\sum_{k\geq 1} < f, A^k f > .$$

Théorème *Si la fonction f est apériodique et si $\varphi : X \times Y \to \mathbb{R}$ est une fonction höldérienne d'intégrale nulle pour la mesure m telle que la fonction $y \longmapsto \int_X \varphi(a,y)d\mu(a)$ n'est pas un cobord au sens du flot, alors le nombre*

$$\Sigma^2(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \int_Y \left(\int_X \varphi(a, g_b y) d\mu(a) \right) \left(\int_X \varphi(c,y)d\mu(c) \right) d\nu(y)\ db$$

est strictement positif et le coefficient de corrélation $< \varphi \circ T^k, \varphi >$ est équivalent, lorsque k tend vers l'infini, à

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi k}\sigma(f)} \Sigma^2(\varphi).$$

Démonstration : Nous voulons connaître le comportement aymptotique lorsque k tend vers l'infini de

$$\begin{aligned} < \varphi \circ T^k, \varphi > &= \mathbb{E}(\varphi(T^k ., g_{S_k f(.)} .)\varphi(.,.)) \\ &= \int_{X\times Y} \varphi(T^k x, g_{S_{k-1}f(x)} y)\varphi(x,y)d\mu(x)d\nu(y). \end{aligned}$$

Considérons la fonction F :

$$\begin{aligned} X \times \mathbb{R} \times X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (a,b,c) &\longmapsto \int_Y \varphi(a, g_b y)\varphi(c,y)d\nu(y) - (\int_Y \varphi(a,y)d\nu(y))(\int_Y \varphi(c,y)d\nu(y)). \end{aligned}$$

Le coefficient de corrélation $< \varphi \circ T^k, \varphi >$ est égal à

$$\int_X F(T^k x, S_{k-1}f(x), x)d\mu(x) + \int_X (\int_Y \varphi(T^k x, y)d\nu(y))(\int_Y \varphi(x,y)d\nu(y))d\mu(x).$$

L'action de A est exponentiellement mélangeante donc le deuxième élément de cette somme tend exponentiellement vite vers 0 lorsque k tend vers l'infini.

L'action du flot est exponentiellement mélangeante. La fonction F décroît donc exponentiellement vite lorsque b tend vers l'infini et le théorème local de Guivarc'h et Hardy [35] assure que l'intégrale

$$\int_X F(T^k x, S_{k-1}f(x), x)d\mu(x)$$

est équivalente à,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{2\pi k}\sigma(f)}\int_{X\times\mathbb{R}\times X} F(a,b,c)d\mu(a)\ db\ d\mu(c)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi k}\sigma(f)}\int_{\mathbb{R}}\Big(\int_X\int_X\int_Y \varphi(a,g_by)\varphi(c,y)d\nu(y)\ d\mu(a)\ d\mu(c)\\
&\quad \underbrace{-\int_X\int_X\int_Y \varphi(a,y)d\nu(y)\int_Y \varphi(c,y)d\nu(y)\ d\mu(a)\ d\mu(c)}_{0}\Big)db\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi k}\sigma(f)}\underbrace{\int_{\mathbb{R}}\int_Y\left(\int_X \varphi(a,g_by)d\mu(a)\right)\left(\int_X \varphi(c,y)d\mu(c)\right)d\nu(y)\ db.}_{\Sigma^2(\varphi).}
\end{aligned}$$

La quantité $\Sigma^2(\varphi)$ est nulle si et seulement si la fonction $y \longmapsto \int_X \varphi(a,y)d\mu(a)$ est un cobord au sens du flot (voir [19] pour plus de détails) c'est-à-dire si et seulement s'il existe une fonction $\varphi : Y \to \mathbb{R}$ telle que pour presque tout $y \in Y$ on ait

$$\int_X \varphi(a,y)d\mu(a) = \lim_{t\to 0}\frac{\psi(g+y)-\varphi(y)}{t}.$$

Corollaire : Si $\Sigma^2(\varphi)$ n'est pas nul, la variance de $\sum_{k=0}^{n-1}\varphi\circ T^k$ est équivalente à

$$\frac{8}{3}\frac{\Sigma^2(\varphi)}{\sqrt{2\pi}\sigma(f)}n^{3/2}.$$

Remarque : On peut faire une construction analogue en temps continu. Soit (Z,ψ_t,ρ) un flot d'Anosov. Définissons l'application

$$\begin{array}{rccc}
\chi_t : Z\times Y & \longrightarrow & Z\times Y\\
(z,y) & \longmapsto & (\psi_t z, \phi_{\int_0^t f(\psi_s z)ds}y).
\end{array}$$

On obtient un flot quasi-hyperbolique avec décroissance des corrélations en $t^{-1/2}$. Pour le montrer, il faut utiliser les résultats de Waddington ([76]).

4.2 La convergence en loi

Une fois fait le calcul du comportement des variances, se pose la question de la convergence en loi. Nous traitons ce problème sur un exemple. De nombreuses difficultés techniques surgissent lorsqu'on essaye de généraliser notre résultat.

L'exemple que nous examinons est le suivant. Considérons

- le groupe $G = PSL(d,\mathbb{R})$,

- Γ un réseau cocompact de G,

- le groupe diagonal à un paramètre T_t,

- le tore de dimension $2, \mathbf{T}^2$,

- une fonction f de $\mathbf{T}^2$ dans $\mathbb{R}$, d'intégrale nulle,

- la matrice $A := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Rudolph a introduit en 1988 l'application

$$\begin{array}{rcl} T : \mathbf{T}^2 \times G/\Gamma & \longrightarrow & \mathbf{T}^2 \times G/\Gamma \\ (x, y) & \longmapsto & (Ax, T_{f(x)}y). \end{array}$$

Un exemple de fonction «concrète» pour lequel le système a les propriétés adéquates est la fonction :

$$\begin{array}{rrcl} f : & \mathbf{T}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x_1, x_2) & \longmapsto & sin(2\pi x_1). \end{array}$$

La transformation T a deux exposants de Lyapounoff non nuls, $\lambda = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1}{\lambda}$, associées à deux directions l'une dilatée l'autre contractée uniformément par T et un exposant de Lyapounoff nul dans les sous-espaces de dimension 3 tangents aux sous-variétés $\{x\} \times G/\Gamma$.

Le système $(\mathbf{T}^2 \times G/\Gamma, T, m)$ est une version régulière de la transformation T, T^{-1}. Comme elle, c'est un exemple de K-système ne possédant pas la propriété de Bernoulli ([43]). C'est pour donner un exemple régulier de système ayant cette propriété que Rudolph a défini ce système ([69]).

Dans $\mathbb{R}^2$ appelons $\tilde{x}_0$ (resp. $\tilde{x}_{-1}$)le point d'intersection de la droite contractée par A passant par le point $(1, 0)$ (resp. $(1, -1)$) et de la droite dilatée par A passant par le point $(1, 1)$. Ce sont des points homoclines : dans le tore $T^k\tilde{x}_0$ et $T^k\tilde{x}_{-1}$ tendent vers zéro lorsque k tend vers $+\infty$ et vers $-\infty$.

Théorème *Soit f une fonction höldérienne telle que*

$$2\sum_{-\infty}^{\infty}(f(T^k\tilde{x}_0) - f(0)) \neq \sum_{-\infty}^{\infty}(f(T^k\tilde{x}_{-1}) - f(0)),$$

et si $\sigma^2(\varphi)$ n'est pas nul, alors il existe trois mouvements browniens indépendants (non nécessairement réduits) W, W_+, W_- tels que, si on note $L_t(x)$ le temps local de W en x, on ait :

$$\frac{1}{n^{3/4}}\sum_{k=0}^{n-1}\varphi \circ T^k \xrightarrow{\mathcal{L}} \int_0^{+\infty} L_1(x)dW_+(x) + \int_0^{+\infty} L_1(-x)dW_-(x).$$

Remarque : On vérifie aisément que si f est un cobord la condition portant sur f dans le théorème n'est pas remplie. Pour les fonction régulières et pour l'automorphisme A, être apériodique se réduit à n'être pas un cobord. La condition du théorème est plus forte que l'apériodicité *a priori*. Est-elle réellement plus forte ? Autre question : pour quels systèmes et quelles fonctions les notions de cobord et de périodicité coïncident-elles ?

On a toujours $\Sigma^2(\varphi - \int_{\mathbf{T}^2} \varphi(a,.)da) = 0$. L'étude de la convergence en loi de $\sum \varphi \circ T^k$ se ramène donc à celle de $\sum(\int_{\mathbf{T}^2} \varphi(a,.)da) \circ T^k$. Autrement dit on peut se limiter au cas où φ dépend uniquement de la deuxième coordonnée. C'est ce que nous ferons désormais.

Nous nous ramènerons à un cas particulier d'un théorème dû à Kesten et Spitzer [46].

Théorème *Soit X_i une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi centrée à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Soit (ξ_i) une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi centrée, indépendantes des variables X_i. Il existe trois mouvements browniens indépendants W, W_+, W_- tel que si, $L_t(x)$ désigne le temps local de W en x, on ait :*

$$\frac{1}{n^{3/4}} \sum_{k=0}^{n-1} \xi_{X_i+\ldots+X_k} \xrightarrow{\mathcal{L}} \int_0^{+\infty} L_1(x)dW_+(x) + \int_0^{+\infty} L_1(-x)dW_-(x)$$

Le théorème est une conséquence immédiate des deux propositions suivantes et du théorème de Kesten et Spitzer.

On commence par faire des paquets suivant les valeurs des sommes ergodiques de l'action de A sur f. Posons

$$N(n,p) = \sharp\{k \in \{0,\ldots,n-1\} | / S_k f \in [p, p+1[\}.$$

Proposition *Sous les hypothèses du théorème, on a*

$$\frac{1}{n^{3/4}} \sum_{p\in\mathbb{Z}} [N(n,p) \int_p^{p+1} \varphi(g_t\cdot)dt - \sum_{\substack{k: \\ S_k f \in [p,p+1[}} \varphi(g_{S_k f}\cdot)] \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$$

Notons Φ la fonction $\Phi(y) = \int_0^1 \varphi(g_t y)dt$. On a alors $\int_p^{p+1} \varphi(g_t y)dt = \Phi \circ g_p(y)$.

On montre ensuite qu'on peut se ramener au théorème de Kesten et Spitzer.

Proposition *Sous les hypothèses du théorème, il existe deux suites indépendantes de variables aléatoires indépendantes (X_i), (ξ_i) à valeurs entières telles que :*

$$\mathbb{E}(exp(it\frac{1}{n^{3/4}} \sum_{p\in\mathbb{Z}} N(n,p)\Phi \circ g_p)) - \mathbb{E}(exp(it\frac{1}{n^{3/4}} \sum_{k=0}^{n-1} \xi_{X_1+\ldots+X_2})) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Pour démontrer ces deux propositions il est possible de s'appuyer sur les trois lemmes suivants.

Lemme *(Ecarts modérés) Il existe $C > 0, c > 0$ tel que, pour tout n, tout $\beta \in]0, \frac{1}{2}[$, on ait*

$$\mathbb{P}(S_n f > n^{1-\beta}) \leq Ce^{-cn^{1-2\beta}}$$

(La probabilité $\mathbb{P}$ est ici la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{T}^2$).

Lemme *(Mélange multiple pour le flot diagonal)*

Soient m et m' deux entiers naturels, $(\Phi_i)_{i=i}^{m+m'}$ des fonctions höldériennes définies sur $G/\Gamma, t_1, \leq \ldots \leq t_m \leq 0 \leq s_1 \ldots \leq s_{m'}, L > 0$ des nombres réels. Il existe $C > 0$, et $\delta \in]0,1[$, tels que

$$\mathrm{Cov}(\prod_{i=1}^{m} \Phi_i \circ T_{t_i}, \prod_{j=1}^{m'} \Phi_j \circ T_{s_j+L}) \leq C(\prod_{i=1}^{m+m'} \|\Phi_i\|_\infty + \sum_j C_{\Phi_j}^{(\eta)} \prod_{i \neq j} \|\phi_j\|_\infty)\delta^L.$$

Un intervalle I étant donné, notons $N(n,I)$ la quantité :

$$N(n,I) = \sharp\{k \in \{0, -n-1\}/S_k f \in I\}.$$

Lemme *Il existe $\varepsilon_0 > 0$, $\xi > 0, C > 0$ tels que pour tout un intervalle I de longueur 1, tout nombre $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$, tout choix de deux sous intervalles J, K de I de longueur $\frac{1}{[n^\varepsilon]}$ on ait :*

$\mathbb{E}(N(n,I)^2) - [n^\varepsilon]\mathbb{E}(N(n,I)N(n,J))| \leq Cn^{1-\xi}$

$\mathbb{E}(N(n,J)N(n,K))[n^\varepsilon]^2 - \mathbb{E}(N(n,I))| \leq Cn^{1-\xi}$

$\mathbb{E}(N(n,I)^3)| \leq Cn^{3/2}$

Le premier lemme est un résultat de type “grands écarts” classique. Nous avons déjà rencontré le deuxième dans la troisième section de ce mémoire. Le troisième se déduit d'un résultat de vitesse dans le théorème limite local pour les sommes $S_n f$. Bien que naturelle cette question a semble-t-il été assez peu étudiée (pour les cas des variables aléatoires indépendantes citons le travail de Breuillard ([11])). Les démonstrations de ces résultats sont annoncées dans [50] et données dans [51].

On peut construire d'autres systèmes dynamiques ayant des propriétés différentes en suivant le même procédé. Il est possible par exemple d'empiler deux étages au dessus de l'automorphisme :

$$\begin{array}{rcl} T : \mathbf{T}^2 \times G/\Gamma \times G/\Gamma & \longrightarrow & \mathbf{T}^2 \times G/\Gamma \times G/\Gamma \\ (x,y,z) & \longmapsto & (Ax, g_{f(x)}y, g_{h(y)}z). \end{array}$$

Pour montrer que la décroissance des corrélations est en $k^{-1/2}$ nous utilisons le théorème limite local pour l'automorphisme du tore. Nous ne disposons pas de ce résultat pour le produit gauche à un étage. Si on fait l'hypothèse qu'il est satisfait on peut penser que la vitesse de décorrélation pour le système à deux étages est en $k^{-3/4}$. Des expériences numériques confirment cette hypothèse.

References

[1] D. V. Anosov, *Geodesic flows on closed Riemannian manifolds of negative curvature*, Trudy Mat. Inst. Steklov. 90 1967 209 pp.

[2] R.L.Adler & B.Weiss, *Entropy, a complete metric invariant for automorphisms of the torus*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 57, 1967, 1573–1576.

[3] P. Bálint & S. Gouëzel, *Limit theorems in the stadium billiard*, Comm. Math. Phys., 263, 2006, 2, 461–512.

[4] Y. Benoist & F. Labourie, *Sur les difféomorphismes d'Anosov affines à feuilletages stable et instable différentiables*, Invent. Math. 111 (1993), no. 2, 285–308.

[5] M. Blank & G. Keller & C. Liverani, *Ruelle-Perron-Frobenius spectrum for Anosov maps*, Nonlinearity 15 (2002), no. 6, 1905–1973.

[6] E. Bolthausen, *Exact convergence rates in some martingale central limit theorems*, Ann. Probab. 10 (1982), no. 3, 672–688.

[7] C. Bonatti & L. J. Díaz & M. Viana, *Dynamics beyond uniform hyperbolicity. A global geometric and probabilistic perspective*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, 102. Mathematical Physics, III. Springer-Verlag, Berlin, 2005. xviii+384 pp.

[8] N. Bourbaki , *Éléments de mathématique : groupes et algèbres de Lie. Chapitre 9. Groupes de Lie réels compacts.* Masson, Paris, 1982.

[9] N. Bourbaki , *Éléments de mathématique. Fascicule XXIX. Livre VI: Intégration. Chapitre 7: Mesure de Haar. Chapitre 8: Convolution et représentations* Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1306 Hermann, Paris 1963.

[10] X. Bressaud & C. Liverani, *Anosov Diffeomorphisms and coupling*, à paraitre dans la revue Ergodic Theory and Dynamical Systems.

[11] E. Breuillard, *Distributions diophantiennes et théorème limite local sur* $\mathbb{R}^d$, Probab. Theory Related Fields 132 (2005), no. 1, 39–73.

[12] M.I. Brin & Ja. B. Pesin, *Partially hyperbolic dynamical systems*, Uspehi Mat. Nauk 28 (1973), no. 3 (171), 169–170.

[13] T. Bröcker & T. tom Dieck, *Representations of compact Lie groups.* Graduate Texts in Mathematics, 98. Springer-Verlag, New York, 1995.

[14] A. Broise, *Transformations dilatantes de l'intervalle et théorèmes limites. Études spectrales d'opérateurs de transfert et applications*, Astérisque 1996, no. 238, 1–109.

[15] K. Burns & A. Wilkinson, *Stable ergodicity of skew products*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 32 (1999), no. 6, 859–889.

[16] R. Burton & Denker , *On the central limit theorem for dynamical systems.* Trans. Am. Math. Soc. 302, 715-726 (1987).

[17] S. Cantat, *Difféomorphismes holomorphes Anosov*, Comment. Math. Helv. 79 (2004), no. 4, 779–797.

[18] S. Cantat & S. Le Borgne, *Théorème limite central pour les endomorphismes holomorphes et les correspondances modulaires*, Int. Math. Res. Not. 56, 3479–3510.

[19] J. -P. Conze & S. Le Borgne, *Méthode de martingales et flot géodésique sur une surface de courbure constante négative*, Ergodic Theory Dynam. Systems 21 (2001), no. 2, 421–441.

[20] J.-P. Conze & S. Le Borgne, *Propriétés statistiques des systèmes dynamiques et méthode des martingales, l'exemple des nilvariétés*, en préparation.

[21] J.-P. Conze & A. Raugi, *Convergence des potentiels pour un opérateur de transfert, applications aux systèmes dynamiques et aux chaînes de Markov.* Fascicule de probabilités (Rennes, 1998), 52 pp., Publ. Inst. Rech. Math. Rennes, 1998, Univ. Rennes I, Rennes, 1998.

[22] M. Denker & W. Philipp, *Approximation by Brownian motion for Gibbs measures and flows under a function*, Ergodic Theory Dynam. Systems 4 (1984), no. 4, 541–552.

[23] M. Denker & F. Przytycki & M. Urbański, *On the transfer operator for rational functions on the Riemann sphere*, Ergodic Theory Dynam. Systems, 16, 1996, 2, 255–266.

[24] T.-C. Dinh & N. Sibony, *Decay of correlations and the central limit theorem for meromorphic maps*, Comm. Pure Appl. Math. 59 (2006), no. 5, 754–768.

[25] D. Dolgopyat, *On decay of correlations in Anosov flows*, Ann. of Math. (2) 147 (1998), no. 2, 357–390.

[26] D. Dolgopyat, *Limit Theorems for partially hyperbolic systems*, preprint.

[27] D. Dolgopyat, *On dynamics of mostly contracting diffeomorphisms*, Comm. Math. Physics , 213 (2000) 181-201.

[28] D. Dolgopyat, *Dmitry On differentiability of SRB states for partially hyperbolic systems*, Invent. Math. 155 (2004), no. 2, 389–449.

[29] C. Esseen, *Fourier Analysis of distribution functions. A mathematical study of the Laplace-Gaussian Law*, Acta Math., vol. 77 (1945), 1–125.

[30] M. Field & I. Melbourne & A. Török, *Decay of correlations, central limit theorems and approximation by Brownian motion for compact Lie group extensions*, Ergodic Theory Dynam. Systems 23 (2003), no. 1, 87–110.

[31] R. Fortet, *Sur une suite également répartie*, Polska Akademia Nauk. Instytut Matematyczny. Studia Mathematica, 9, (1940), 54–70.

[32] M. Gordin, *The central limit theorem for stationary processes.*(English. Russian original) Soviet Math., Dokl. 10 (1969), 1174-1176 (1970); translation from Dokl. Akad. Nauk SSSR 188, 739-741 (1969).

[33] S. Gouëzel, *Sharp polynomial estimates for the decay of correlations*, Israel J. Math. 139 (2004), 29–65.

[34] S. Gouëzel, *Central limit theorem and stable laws for intermittent maps*, Probab. Theory Related Fields, 128, 2004, 1, 82–122.

[35] Y. Guivarc'h & J. Hardy, *Théorèmes limites pour une classe de chaînes de Markov et applications aux difféomorphismes d'Anosov* , Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. 24 (1988), no. 1, 73–98.

[36] Y. Guivarc'h, *Propriétés de mélange pour les groupes à un paramètre de* $\mathrm{Sl}(d, \mathbf{R})$, Fascicule de probabilités, 11 pp., Publ. Inst. Rech. Math. Rennes, 1992, Univ. Rennes I, Rennes, 1992.

[37] P. Hall & C.C. Heyde, *Martingale limit theory and its application.* Probability and Mathematical Statistics. Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1980.

[38] E. Haeusler, *On the rate of convergence in the central limit theorem for martingales with discrete and continuous time*, Ann. Probab. 16 (1988), no. 1, 275–299.

[39] H.Hennion & L. Hervé, *Limit theorems for Markov chains and stochastic properties of dynamical systems by quasi-compactness*, Lecture Notes in Mathematics, 1766. Springer-Verlag, Berlin, 2001.

[40] R. Howe & E.-E. Tan, *Nonabelian harmonic analysis. Applications of* $\mathrm{SL}(2, R)$. Universitext. Springer-Verlag, New York, 1992.

[41] C. Jan, *Vitesse de convergence dans le TCL pour des processus associés à des systèmes dynamiques et aux produits de matrices aléatoires*, Thèse, Université de Rennes 1 (2001).

[42] C. Jan, *Rates of convergence for some processes under mixing conditions and application to random matrix products*, prépublication (2001).

[43] S. Kalikow, T, T^{-1} *transformation is not loosely Bernoulli*, Ann. of Math. (2) 115 (1982), no. 2, 393–409.

[44] A. Katok & R. J. Spatzier, *First cohomology of Anosov actions of higher rank abelian groups and applications to rigidity*, Publ. Math., Inst. Hautes Etud. Sci. 79, 131-156 (1994).

[45] R.Kenyon, A.Vershik, *Arithmetic construction of sofic partitions of hyperbolic toral automorphisms*, Ergodic Theory Dynam. Systems, 18, 1998, 2, 357–372.

[46] H. Kesten & F. Spitzer, *A limit theorem related to a new class of self-similar processes*, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete 50 (1979), no. 1, 5–25.

[47] D.Y. Kleinbock & G.A. Margulis, *Bounded orbits of nonquasiunipotent flows on homogeneous spaces.* Sinaĭ's Moscow Seminar on Dynamical Systems, 141–172, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 171, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996.

[48] S. Le Borgne, *Limit theorems for non-hyperbolic automorphisms of the torus*, Israel J. Math., 109, 1999, 61–73.

[49] S. Le Borgne, *Principes d'invariance pour les flots diagonaux sur* $SL(d,\mathbb{R})/SL(d,\mathbb{Z})$, Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist., PR 38, 4 (2002), 581–612.

[50] S. Le Borgne, *Exemples de systèmes dynamiques quasi-hyperboliques à décorrélations lentes*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris 343 (2006), no. 2, 125–128.

[51] S. Le Borgne, *Exemples de systèmes dynamiques quasi-hyperboliques à décorrélations lentes*, http://perso.univ-rennes1.fr/stephane.leborgne/.

[52] S. Le Borgne & F. Pène, *Vitesse dans le théoreme limite central pour certains processus stationnaires fortement décorrélés*, arXiv:math.PR/0306083.

[53] S. Le Borgne & F. Pène , *Vitesse dans le théorème limite central pour certains systèmes dynamiques quasi-hyperboliques*, Bull. Soc. Math. France 133 (2005), no. 3, 395–417.

[54] C. Liverani, *Central limit theorem for deterministic systems*, International Conference on Dynamical Systems (Montevideo, 1995), Pitman Res. Notes Math. Ser., 362, 56–75.

[55] C. Liverani & B. Saussol & S. Vaienti, *A probabilistic approach to intermittency*, Ergodic Theory Dyn. Syst. 19, 671–685 (1999).

[56] Y. Le Jan, *The central limit theorem for the geodesic flow on noncompact manifolds of constant negative curvature* , Duke Math. J. 74 (1994), no. 1, 159–175.

[57] R. Mañé, *A proof of the* C^1 *stability conjecture*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 66 (1988), 161–210.

[58] I. Melbourne & M. Nicol, *Statistical properties of endomorphisms and compact group extensions*, J. London Math. Soc. (2), 70, 2004, 2, 427–446.

[59] I. Melbourne & A. Török, *Central limit theorems and invariance principles for time-one maps of hyperbolic flows*, Comm. Math. Phys. 229 (2002), no. 1, 57–71.

[60] I. Melbourne & A. Török, *Statistical limit theorems for suspension flows*, Israel J. Math., 144, 2004, 191–209.

[61] F. Naud, *Expanding maps on Cantor sets and analytic continuation of zeta functions*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér., IV. Sér. 38, No.1, 116-153 (2005).

[62] F. Pène, *Rates of convergence in the CLT for two-dimensional dispersive billiards*, Comm. Math. Phys. (2001).

[63] J. F. Plante & W.P. Thurston, *Anosov flows and the fundamental group*, Topology 11 (1972), 147–150.

[64] Y. Pomeau & P. Manneville , *Intermittent transition to turbulence in dissipative dynamical systems*, Commun. Math. Phys. 74 (1980), 189–197.

[65] C. Pugh & M. Shub, *Stably ergodic dynamical systems and partial hyperbolicity*, J. Complexity 13 (1997), no. 1, 125–179.

[66] M. Ratner, *The central limit theorem for geodesic flows on n-dimensional manifolds of negative curvature* , Israel J. Math. 16 (1973), 181–197.

[67] E. Rio, *Sur le théorème de Berry-Esseen pour les suites faiblement dépendantes*, Probab. Th; Relat. Fields 104 (1996), 255–282.

[68] J. Rousseau-Egele, *Un théorème de la limite locale pour une classe de transformations dilatantes et monotones par morceaux*, Ann. Probab. 11 (1983), no. 3, 772–788.

[69] D.J. Rudolph, *Asymptotically Brownian skew products give non-loosely Bernoulli K-automorphisms*, Invent. Math. 91 (1988), no. 1, 105–128.

[70] O. Sarig, *Subexponential decay of correlations*, Invent. Math. 150 (2002), no. 3, 629–653.

[71] M. Shub & A. Wilkinson, *Pathological foliations and removable zero exponents*, Invent. Math., 139 (2000), no. 3, 495–508.

[72] J.G.Sinai, *Markov partitions and C-diffeomorphisms*, Funct. Anal. Appl. 2, 61-82 (1968); translation from Funkts. Anal. Prilozh. 2, No.1, 64-89 (1968).

[73] Ja. G. Sinaï, *The central limit theorem for geodesic flows on manifolds of constant negative curvature*, Dokl. Akad. Nauk SSSR 133, 1303–1306 (Russe); traduit en anglais dans Soviet Math. Dokl. 1 1960 983–987.

[74] D. Szász & T. Varjú, *Local limit theorem for the Lorentz process and its recurrence in the plane*, Ergodic Theory Dynam. Systems, 24, 2004, 1, 257–278.

[75] D. Volny : *Counter examples to the central limit problem for stationary dependent random variables.* Yokohama Math. J. 36, No., 70-78 (1988).

[76] S. Waddington, S., *Large deviation asymptotics for Anosov flows*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, 13, 1996, 4, 445–484.

[77] L.-S. Young, *Statistical properties of dynamical systems with some hyperbolicity. Ann. of Math.*, vol. 147 (1998), 585–650.

[78] L.-S. Young, *Devloppments in chaotic dynamics* Notices Amer. Math. Soc. 45 (1998), no. 10, 1318–1328.

[79] Young, L.S., *Recurrence times and rates of mixing*, Isr. J. Math. 110, 153–188 (1999).

5 Liste des travaux de l'auteur

1. (avec Françoise Pène) A Kesten-Spitzer result for a random walk in a stationary scenery with stong decorrelation properties, à paraître.

2. Exemples de systèmes dynamiques ayant une vitesse de décorrélation lente, C. R. Math. Acad. Sci. Paris 343 (2006), no. 2, 125–128.

3. (avec Serge Cantat) Théorème limite central pour les endomorphismes holomorphes et les correspondances modulaires, Int. Math. Res. Not. 2005, no. 56, 3479–3510. 60F05

4. (avec Françoise Pène) Vitesse dans le théorème limite central pour certains systèmes dynamiques quasi-hyperboliques, Bull. Soc. Math. France 133 (2005), no. 3, 395–417.

5. (avec Françoise Pène) Vitesse dans le théorème limite central pour certains processus stationnaires fortement décorrelés, Mathematics ArXiv

6. Principes d'invariance pour les flots diagonaux sur $\mathrm{SL}(d, \mathbb{R})/\mathrm{SL}(d, \mathbb{Z})$. Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. 38 (2002), no. 4, 581–612.

7. (avec Jean-Pierre Conze) Méthode de martingales et flot géodésique sur une surface de courbure constante négative. Ergodic Theory Dynam. Systems 21 (2001), no. 2, 421–441.

8. Algébricité des partitions markoviennes des automorphismes hyperboliques du tore. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 328 (1999), no. 11, 1045–1048.

9. Un codage sofique des automorphismes hyperboliques du tore. Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.) 30 (1999), no. 1, 61–93.

10. Limit theorems for non-hyperbolic automorphisms of the torus. Israel J. Math. 109 (1999), 61–73.

11. Un problème de régularité dans l'équation de cobord. Fascicule de probabilités (Rennes, 1998), 10 pp., Publ. Inst. Rech. Math. Rennes, 1998, Univ. Rennes I, Rennes, 1998.

12. Un codage sofique des automorphismes hyperboliques du tore. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 323 (1996), no. 10, 1123–1128.

13. Dynamique symbolique et propriétés stochastiques des automorphismes du tore : cas hyperbolique et quasi-hyperbolique, Thèse, Université de Rennes 1.

14. Un codage sofique des automorphismes hyperboliques du tore. Séminaires de Probabilités de Rennes, 35 pp., Publ. Inst. Rech. Math. Rennes, 1995, Univ. de Rennes I, Rennes, 1995.

15. Codage des automorphismes hyperboliques du tore et nombres de Pisot. Fascicule de probabilités, 41 pp., Publ. Inst. Rech. Math. Rennes, 1993, Univ. de Rennes I, Rennes, 1993.