



HAL
open science

Nouvelles approches pour la synthèse de lois de commande non linéaires robustes. Application à un actionneur électropneumatique et proposition d'une solution au problème de redécollage

Karima Turki

► **To cite this version:**

Karima Turki. Nouvelles approches pour la synthèse de lois de commande non linéaires robustes. Application à un actionneur électropneumatique et proposition d'une solution au problème de redécollage. Sciences de l'ingénieur [physics]. INSA de Lyon, 2010. Français. NNT : . tel-00564361

HAL Id: tel-00564361

<https://theses.hal.science/tel-00564361>

Submitted on 8 Feb 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

Présentée devant

L'INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES DE LYON

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR

Formation Doctorale : *Énergie des Systèmes*
École Doctorale : Électronique, Électrotechnique, Automatique (EEA)
ECL – INSAL – UCBL

par

KARIMA TURKI

INGÉNIEUR INSAT

**NOUVELLES APPROCHES POUR LA SYNTHÈSE DE LOIS DE COMMANDE NON LINÉAIRES ROBUSTES.
APPLICATION À UN ACTIONNEUR ÉLECTROPNEUMATIQUE
ET
PROPOSITION D'UNE SOLUTION AU PROBLÈME DU REDÉCOLLAGE**

Soutenue le 23 Septembre 2010 devant la Commission d'Examen

Jury :

M. E. Richard	Rapporteur	Maître de Conférences HDR à l'I.U.T de Longwy
M. J.C. Vivalda	Rapporteur	Directeur de Recherches à l'INRIA Nancy Grand-Est
M. J. Lottin	Examineur	Professeur à Polytech' Savoie
M. N. M'Sirdi	Examineur	Professeur à Polytech' Marseille
M. D. Thomasset	Directeur	Professeur à l'INSA de Lyon
M. M. Smaoui	Co-Directeur	Maître de Conférences à l'INSA de Lyon
M. X. Brun	Invité	Maître de Conférences à l'INSA de Lyon

INSA Direction de la Recherche - Ecoles Doctorales – Quadriennal 2007-2010

SIGLE	ECOLE DOCTORALE	NOM ET COORDONNEES DU RESPONSABLE
CHIMIE	<u>CHIMIE DE LYON</u> http://sakura.cpe.fr/ED206 M. Jean Marc LANCELIN Insa : R. GOURDON	M. Jean Marc LANCELIN Université Claude Bernard Lyon 1 Bât CPE 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72.43 13 95 Fax : lancelin@hikari.cpe.fr
E.E.A.	<u>ELECTRONIQUE,</u> <u>ELECTROTECHNIQUE, AUTOMATIQUE</u> http://www.insa-lyon.fr/eea M. Alain NICOLAS Insa : C. PLOSSU ede2a@insa-lyon.fr Secrétariat : M. LABOUNE AM. 64.43 – Fax : 64.54	M. Alain NICOLAS Ecole Centrale de Lyon Bâtiment H9 36 avenue Guy de Collongue 69134 ECULLY Tél : 04.72.18 60 97 Fax : 04 78 43 37 17 eea@ec-lyon.fr Secrétariat : M.C. HAVGOUDOUKIAN
E2M2	<u>EVOLUTION, ECOSYSTEME,</u> <u>MICROBIOLOGIE, MODELISATION</u> http://biomserv.univ-lyon1.fr/E2M2 M. Jean-Pierre FLANDROIS Insa : H. CHARLES	M. Jean-Pierre FLANDROIS CNRS UMR 5558 Université Claude Bernard Lyon 1 Bât G. Mendel 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cédex Tél : 04.26 23 59 50 Fax 04 26 23 59 49 06 07 53 89 13 e2m2@biomserv.univ-lyon1.fr
EDISS	<u>INTERDISCIPLINAIRE SCIENCES-</u> <u>SANTE</u> Sec : Safia Boudjema M. Didier REVEL Insa : M. LAGARDE	M. Didier REVEL Hôpital Cardiologique de Lyon Bâtiment Central 28 Avenue Doyen Lépine 69500 BRON Tél : 04.72.68 49 09 Fax :04 72 35 49 16 Didier.revel@creatis.uni-lyon1.fr
INFOMATHS	<u>INFORMATIQUE ET</u> <u>MATHEMATIQUES</u> http://infomaths.univ-lyon1.fr M. Alain MILLE	M. Alain MILLE Université Claude Bernard Lyon 1 LIRIS - INFOMATHS Bâtiment Nautibus 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72. 44 82 94 Fax 04 72 43 13 10 infomaths@bat710.univ-lyon1.fr - alain.mille@liris.cnrs.fr
Matériaux	<u>MATERIAUX DE LYON</u> M. Jean Marc PELLETIER Secrétariat : C. BERNAVON 83.85	M. Jean Marc PELLETIER INSA de Lyon MATEIS Bâtiment Blaise Pascal 7 avenue Jean Capelle 69621 VILLEURBANNE Cédex Tél : 04.72.43 83 18 Fax 04 72 43 85 28 Jean-marc.Pelletier@insa-lyon.fr
MEGA	<u>MECANIQUE, ENERGETIQUE, GENIE</u> <u>CIVIL, ACOUSTIQUE</u> M. Jean Louis GUYADER Secrétariat : M. LABOUNE PM : 71.70 –Fax : 87.12	M. Jean Louis GUYADER INSA de Lyon Laboratoire de Vibrations et Acoustique Bâtiment Antoine de Saint Exupéry 25 bis avenue Jean Capelle 69621 VILLEURBANNE Cedex Tél :04.72.18.71.70 Fax : 04 72 43 72 37 mega@lva.insa-lyon.fr
ScSo	<u>ScSo*</u> M. OBADIA Lionel Insa : J.Y. TOUSSAINT	M. OBADIA Lionel Université Lyon 2 86 rue Pasteur 69365 LYON Cedex 07 Tél : 04.78.77.23.88 Fax : 04.37.28.04.48 Lionel.Obadia@univ-lyon2.fr

*ScSo : Histoire, Géographie, Aménagement, Urbanisme, Archéologie, Science politique, Sociologie, Anthropologie

A celui qui a fait de moi ce que je suis : A mon très cher et regretté

PAPA

A celui qui est né et qui a grandi avec cette thèse : A mon adorable

DEDDY

Remerciements

Je tiens tout particulièrement à exprimer ma reconnaissance à Monsieur **Daniel THOMASSET**, mon directeur de thèse, qui m'a encouragé tout au long de ce travail. J'ai éprouvé un réel plaisir à travailler avec lui tout au long de cette thèse. Ses qualités scientifiques et humaines ont été pour moi une source de motivation.

Je suis également reconnaissante à Monsieur **Mohamed SMAOUI**, mon co-directeur de thèse, pour la confiance qu'il m'a accordée. Ses compétences et son expérience dans les différents domaines abordés ont contribué à l'aboutissement de cette thèse.

J'exprime ma profonde gratitude à Messieurs **Edouard RICHARD** et **Jean Claude VIVALDA** pour l'honneur qu'ils m'ont fait d'accepter d'être les rapporteurs de ces travaux et pour leurs conseils pour la réalisation de cette version finale de ce document.

J'adresse mes sincères remerciements à Messieurs **Jacques LOTIIN** et **Nacer M'SIRDI** pour l'intérêt qu'ils ont manifesté à l'égard de ce travail et l'honneur qu'ils m'ont fait de participer à mon jury de thèse en tant qu'examineurs.

Que Monsieur **Xavier BRUN** soit vivement remercié pour ses conseils, son aide et ses encouragements. Je suis très honorée qu'il ait accepté l'invitation pour faire partie de mon jury de thèse.

Mes remerciements s'adressent également à tous les membres du Laboratoire Ampère, en particulier à Mesdames **Marie-Guy MERCIER**, et **Sylvie SESMAT**, à Messieurs **Eric BIDEAUX**, **Christophe DUCAT**, **Minh Tu PHAM** et **Tanneguy REDARCE**. Merci à tous pour l'aide qu'ils m'ont apportée de diverses manières et pour l'amitié qu'ils m'ont témoignée.

A mes amis que j'ai connus au cours de cette thèse, qui sont encore là ou qui ont quitté le laboratoire: **Lilia, Mehdi, Rosario, Kfuan, Mariem, Mohamed, Sajeh, Alaa** et **Gregory**.

Enfin, derniers de cette liste mais bien plus haut dans mon cœur, je tiens à remercier ceux qui m'ont soutenu dès le début : **Maman** pour ces prières et pour la solide formation de la langue française qu'elle a su instruire en moi, **Mon Mari** pour sa patience et ses encouragements, **Ma Sœur** et **Mes Deux Frères**, pour leur soutien et leur amour.

RÉSUMÉ

Une partie des travaux présentés dans ce mémoire est inspirée du modèle mathématique écrit sous forme « semi strict feedback » du vérin électropneumatique présent au centre d'essais Fluid Power du laboratoire Ampère. En effet, ce modèle a suscité un approfondissement des travaux de recherche concernant la synthèse de lois de commandes non linéaires robustes des systèmes « strict feedback » (ou triangulaires) généraux. Ainsi deux approches directes sont développées pour l'élaboration de lois de commandes continues mono et multidimensionnelles en suivi de trajectoires. La stabilité exponentielle globale du point d'équilibre est prouvée pour le système nominal. La preuve de la stabilité au sens entrée bornée / état borné (« input-state stable ») est également proposée dans le cas de variations paramétriques ou de dynamiques mal modélisées. De plus, une solution au problème du suivi de trajectoire pour une classe de systèmes non linéaires monodimensionnels sous forme « strict feedback » avec une dynamique interne à minimum ou non minimum de phase est énoncée.

Après un rappel des modèles de simulation et de commande utilisés, la mise en œuvre sur le vérin électropneumatique des approches proposées est alors décrite. Les résultats expérimentaux obtenus sont convaincants et ont permis de compléter le benchmark de l'ensemble des travaux du groupe « Automatique, Commande et Mécatronique » du laboratoire par une extension du tableau comparatif initialisé en 1999 des lois de commandes appliquées à ce type d'actionneur.

Enfin, une solution est proposée pour résoudre le phénomène du redécollage du vérin électropneumatique. Ce problème, rencontré par le groupe depuis de nombreuses années, concerne toutes les commandes linéaires et non linéaires mono et multidimensionnelles étudiées au laboratoire. Il se traduit par un mouvement saccadé du vérin lorsque les trajectoires suivies en position comportent des phases statiques. Il résulte conjointement de l'existence des forces de frottement sec et du fait que le système atteint lors de ces régimes seulement un équilibre mécanique alors que les pressions dans les chambres continuent à évoluer. Pour pallier à cet inconvénient, la dernière partie de ce mémoire propose de commuter la commande sur deux régulations de pressions quand le système atteint cet équilibre partiel. Cette technique est finalement mise en œuvre et son efficacité est constatée.

MOTS CLÉS : Commande non linéaire robuste, stabilité exponentielle, stabilité au sens entrée/état, benchmark industriel, expérimentation, redécollage des vérins électropneumatiques.

ABSTRACT

Part of the work presented in this thesis is inspired by the mathematical model written as "semi strict feedback" form of the electro-pneumatic cylinder within Ampere Laboratory's in the « Fluid Power Center». Indeed, this model has led to a deepening of research on the synthesis of robust nonlinear control laws of systems written as "strict feedback" form in general. Thus, two approaches are developed to direct the development of control laws in continuous mono and multidimensional trajectory tracking. The global exponential stability of equilibrium point is proved for the nominal system. The proof of Input-State Stability is also proposed in the case of parametric variations or poorly modeled dynamics. In addition, a solution to the problem of trajectory tracking for a class of nonlinear systems mono-dimensional as "strict feedback" with a minimum or non-minimum internal dynamic phase is set.

After a review of used simulation and control models, the implementation of the proposed approaches electro-pneumatic actuator is then described. The experimental results are convincing and have filled the benchmark of the overall work of the group "Automation, Control and Mechatronics" laboratory by extending the comparative table initialized in 1999 control laws applied to this type of actuator.

Finally, a solution is proposed to solve the problem of the "Stick-Slip". This phenomenon, encountered by the group for many years concerning all linear and nonlinear, mono and multidimensional control laws studied in the laboratory. It results in a jerky movement of the actuator when the position trajectories include static phases. It follows from the existence of dry friction and the fact that the system achieves at these plans only a mechanical equilibrium, meanwhile pressures in the rooms continue to evolve. To overcome this drawback, the last part of this thesis proposes to switch the control law on two regulation pressures when the system reaches the partial equilibrium. This technique is finally implemented and its effectiveness is proven.

KEY WORDS: Nonlinear robust control, exponential stability, Input State Stability, Industrial Benchmark, Experimental Results, "Stick-Slip" Phenomenon of Electro-pneumatic Cylinders.

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES FIGURES.....	10
LISTE DES TABLEAUX.....	12
INTRODUCTION GÉNÉRALE.....	13

CHAPITRE 1 : CONTRIBUTION À LA COMMANDE NON LINÉAIRE ROBUSTE : APPROCHES DIRECTES POUR L'ÉLABORATION DE LOIS DE COMMANDES CONTINUES ET ÉTUDE DE STABILITÉ

1. INTRODUCTION.....	20
2. ÉLÉMENTS DE THÉORIE.....	21
2.1 STABILITÉ AU SENS DE <i>LYAPUNOV</i>	21
2.2 STABILITÉ ENTRÉE/ÉTAT.....	22
3. SYSTÈMES SOUS FORME « STRICT FEEDBACK ».....	23
3.1 SYSTÈMES MONODIMENSIONNELS SOUS FORME « STRICT FEEDBACK ».....	23
3.2 SYSTÈMES MULTIDIMENSIONNELS SOUS FORME « SEMI STRICT FEEDBACK ».....	26
4. COMMANDES EN SUIVI DE TRAJECTOIRE DE SYSTÈMES SANS DYNAMIQUE INTERNE.....	29
4.1 APPROCHE N°1.....	30
4.1.1 SYSTÈMES MONODIMENSIONNELS.....	30
4.1.1.1 MODÈLE SANS INCERTITUDES.....	30
4.1.1.2 MODÈLE AVEC INCERTITUDES.....	33
4.1.2 SYSTÈMES MULTIDIMENSIONNELS.....	35
4.1.2.1 MODÈLE SANS INCERTITUDES.....	35
4.1.2.2 MODÈLE AVEC INCERTITUDES.....	37
4.2 APPROCHE N°2.....	39
4.2.1 SYSTÈMES MONODIMENSIONNELS.....	39
4.2.1.1 MODÈLE SANS INCERTITUDES.....	39
4.2.1.2 MODÈLE AVEC INCERTITUDES.....	42
4.2.2 SYSTÈMES MULTIDIMENSIONNELS.....	43
4.2.2.1 MODÈLE SANS INCERTITUDES.....	43
4.2.2.2 MODÈLE AVEC INCERTITUDES.....	46
4.3 EXEMPLE ACADÉMIQUE.....	47
5. COMMANDE EN SUIVI DE TRAJECTOIRE AVEC PRÉSENCE DE DYNAMIQUE INTERNE.....	49
5.1 RAPPEL DU RÉSULTAT DE [KRSTIĆ'95].....	50
5.2 SUIVI DE TRAJECTOIRE AVEC UNE DYNAMIQUE INTERNE DE DIMENSION 1.....	51
5.3 SUIVI DE TRAJECTOIRE AVEC UNE DYNAMIQUE INTERNE SOUS FORME « STRICT FEEDBACK ».....	60
6. CONCLUSION.....	62

**CHAPITRE 2 : ACTIONNEUR ÉLECTROPNEUMATIQUE : MODÉLISATION, SYNTHÈSE ET
EXPÉRIMENTATION DE COMMANDES NON LINÉAIRES**

1. INTRODUCTION.....	66
2. DESCRIPTION DU BANC D’ESSAI ÉLECTROPNEUMATIQUE.....	67
2.1 LA SOURCE D’ÉNERGIE PNEUMATIQUE.....	68
2.2 LES SERVODISTRIBUTEURS.....	69
2.3 L’ENSEMBLE VÉRIN-CHARIOT.....	71
3. MODÈLE DE SIMULATION DU SYSTÈME ÉLECTROPNEUMATIQUE.....	73
3.1 MODÉLISATION DU SERVODISTRIBUTEUR.....	73
3.2 MODÉLISATION D’UNE CHAMBRE PNEUMATIQUE À VOLUME VARIABLE.....	73
3.3 MODÉLISATION DE LA PARTIE MÉCANIQUE EN TRANSLATION.....	74
3.4 MODÈLE DE SIMULATION RETENU.....	76
4. LA CO-SIMULATION.....	77
5. DU MODÈLE DE SIMULATION AU MODÈLE DE COMMANDE.....	78
5.1 HYPOTHÈSES.....	78
5.2 APPROXIMATION DES CARACTÉRISTIQUES BIDIMENSIONNELLES DU SERVODISTRIBUTEUR.....	80
5.3 MISE SOUS LA FORME « SEMI STRICT FEEDBACK » DU MODÈLE DE COMMANDE...	83
6. COMMANDES EN POSITION – PRESSION DU VÉRIN.....	84
6.1 SYNTHÈSE ET EXPÉRIMENTATION DE LA COMMANDE EN POSITION-PRESSION SANS PRISE EN COMPTE DES INCERTITUDES	86
6.1.1 SYNTHÈSE DE LA COMMANDE PAR L’APPROCHE N°1.....	86
6.1.2 SYNTHÈSE DE LA COMMANDE PAR L’APPROCHE N°2.....	87
6.1.3 RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX.....	88
6.2 SYNTHÈSE ET EXPÉRIMENTATION DE LA COMMANDE EN POSITION-PRESSION AVEC PRISE EN COMPTE DES INCERTITUDES AU NIVEAU DU DÉBIT DE FUITE.....	93
6.2.1 SYNTHÈSE DE LA COMMANDE PAR L’APPROCHE N°1.....	93
6.2.2 SYNTHÈSE DE LA COMMANDE PAR L’APPROCHE N°2.....	94
6.2.3 RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX.....	95
6.3 SYNTHÈSE ET EXPÉRIMENTATION DE LA COMMANDE EN POSITION-PRESSION AVEC PRISES EN COMPTE DES INCERTITUDES AU NIVEAU DU DÉBIT ET DES VARIATIONS DE LA MASSE.....	97
6.3.1 SYNTHÈSE DE LA COMMANDE PAR L’APPROCHE N°1.....	98
6.3.2 SYNTHÈSE DE LA COMMANDE PAR L’APPROCHE N°2.....	98
6.3.3 RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX.....	99
6.4 ÉTUDE COMPARATIVE DE DIFFÉRENTES STRATÉGIES DE COMMANDES.....	102
7. CONCLUSION.....	103

CHAPITRE 3 : PHÉNOMÈNE DE REDÉCOLLAGE DU VÉRIN ÉLECTROPNEUMATIQUE

1. INTRODUCTION.....	106
2. CONDITIONS D’EXISTENCE DU PHÉNOMÈNE DE REDÉCOLLAGE.....	107
3. PROPOSITION D’UNE SOLUTION AU PHÉNOMÈNE DE REDÉCOLLAGE DES SYSTÈMES ÉLECTROPNEUMATIQUES.....	109
3.1 CRITÈRES DE COMMUTATION	111
3.2 PRESSIONS DÉSIRÉES DURANT LE RÉGIME STATIQUE.....	112
3.3 PRÉSENTATION GLOBALE DE LA STRATÉGIE PROPOSÉE.....	112
4. MISE EN ŒUVRE DE LA STRATÉGIE PROPOSÉE.....	114
4.1 ÉTUDE DANS LE CAS D’UNE COMMANDE MONODIMENSIONNELLE EN SUIVI DE POSITION	114
4.1.1 EXISTENCE DU PHÉNOMÈNE DE REDÉCOLLAGE.....	114
4.1.2 APPLICATION DE LA SOLUTION POUR ÉVITER LE REDÉCOLLAGE.....	117
4.2 ÉTUDE DANS LE CAS D’UNE COMMANDE MULTIDIMENSIONNELLE EN SUIVI DE POSITION-PRESSION.....	120
5. CONCLUSION.....	122
CONCLUSION GÉNÉRALE.....	126
RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES.....	130
ANNEXE 1 : LES DIFFÉRENTES FORMES « NORMALES »	140
ANNEXE 2 : STABILITÉ EXPONENTIELLE.....	144
ANNEXE 3 : PREUVE DU LEMME 1.1 : STABILITÉ ENTRÉE/ ÉTAT.....	145

LISTE DES FIGURES

- Figure 1.1 :** Vérin électrohydraulique
- Figure 1.2 :** Palier magnétique
- Figure 1.3 :** Sous-systèmes SPR en cascades avec une entrée nulle
- Figure 1.4 :** Résultats de simulation de l'exemple (1.3) pour les états initiaux:
 $x_{10} = 0.5, x_{20} = 0.2, x_{30} = 0.1$
- Figure 1.5 :** Résultats de simulation de l'exemple (1.3) pour les états initiaux:
 $x_{10} = 5, x_{20} = 6, x_{30} = 0$
- Figure 1.6 :** Résultats de simulation de l'exemple 1.4
- Figure 1.7 :** Résultats de simulation de l'exemple 1.4
- Figure 1.8 :** Résultats de simulation de l'exemple 1.5
- Figure 2. 1 :** Principe d'un asservissement électropneumatique de position
- Figure 2. 2 :** Schéma de principe du banc d'essai
- Figure 2. 3 :** Alimentation et traitement de l'air
- Figure 2. 4 :** Servodistributeur Servotronic
- Figure 2. 5 :** Schéma de principe de la Servotronic en régulation de débit
- Figure 2. 6 :** Utilisations des vérins pneumatiques
- Figure 2. 7 :** Vérin pneumatique, double effet, simple tige
- Figure 2. 8 :** Absorbeurs de chocs
- Figure 2. 9 :** Loi d'évolution du modèle de simulation des frottements secs
- Figure 2.10 :** Principe de la co-simulation Simulink / AMESim
- Figure 2.11 :** Modèle AMESim
- Figure 2.12 :** Modèle Simulink
- Figure 2.13 :** Caractéristique bidimensionnelle globale statique
- Figure 2.14a :** La fonction $\varphi(p_{(.)})$
- Figure 2.14b :** Les fonctions $\psi(p_{(.)}, u_{(.)} > 0)$ et $\psi(p_{(.)}, u_{(.)} < 0)$
- Figure 2.15 :** Trajectoire de la position désirée
- Figure 2.16 :** Trajectoire de la pression désirée
- Figure 2.17 :** Résultats expérimentaux obtenus avec la commande (2.29)
- Figure 2.18 :** Résultats expérimentaux obtenus avec la commande (2.40)
- Figure 2.19 :** Résultats expérimentaux obtenus avec la commande (2.48) à vide
- Figure 2.20 :** Résultats expérimentaux obtenus avec la commande (2.48) et $M=32$ kg

- Figure 3.1** : Loi d'évolution du modèle des frottements secs
- Figure 3.2** : Phénomène de redécollage
- Figure 3.3** : Pas de phénomène de redécollage
- Figure 3.4** : Commutation entre les deux lois de commande (position/pressions)
- Figure 3.5** : Commutation entre les deux lois de commande (position-pression/pressions)
- Figure 3.6** : Explication graphique de la nécessité du critère « c_3 »
- Figure 3.7** : Stratégie proposée
- Figure 3.8** : Résultats expérimentaux obtenus avec la commande en position (3.8)
- Figure 3.9** : Résultats expérimentaux obtenus
- Figure 3.10** : Résultats expérimentaux obtenus

LISTE DES TABLEAUX

- Tableau 1.1 :** Nomenclature du système électrohydraulique
- Tableau 2.1 :** Principales caractéristiques du servodistributeur
- Tableau 2.2 :** Principales caractéristiques du vérin
- Tableau 2.3 :** Résultats du suivi en position obtenus avec différentes commandes
- Tableau 2.4 :** Résultats de suivi en pression obtenus avec différentes commandes
- Tableau 2.5 :** Résultats du suivi en position obtenus avec la commande (2.38)
- Tableau 2.6 :** Résultats du suivi en pression obtenus avec la commande (2.38)
- Tableau 2.7 :** Résultats du suivi en position obtenus avec la commande (2.46)
- Tableau 2.8 :** Résultats du suivi en pression obtenus avec la commande (2.46)
- Tableau 2.9 :** Étude comparative de différentes stratégies de commande

INTRODUCTION GÉNÉRALE

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Après les premières publications de [Jebar'80], [Hunt'83] et [Isidori'81], la littérature concernant la commande non linéaire pour les systèmes affines s'est fortement développée, citons quelques références de synthèse [Isidori89], [Slotine'91], [Utkin92], [Marino'95] et [Fliess'95]. Après ces premiers travaux, l'objectif devient la recherche d'une commande non linéaire robuste (pour des modèles avec présence d'incertitudes), qui assure une stabilité asymptotique, exponentielle globale d'un point d'équilibre ou une stabilité au sens entrée bornée/sortie bornée ou au sens entrée bornée/état borné. Parmi les nombreuses contributions qui traitent de ce problème, deux grandes familles de lois de commande ont émergé:

- la commande par mode glissant d'ordre un ou d'ordre supérieur qui utilise des lois dont la synthèse est relativement aisée mais commutante entraînant plus au moins du « chattering » et nécessitant les dérivées successives des variables d'états [Slotine'84], [Levant'00] et [Fridman'02]. La prise en compte de modèles possédant une dynamique interne, n'est pas aisée avec ce type de loi de commande. Par contre, le choix des gains assurant une robustesse en maintenant la stabilité asymptotique du point d'équilibre ne pose pas généralement de problème.
- les lois de commande continues dont la plus connue est la commande par la technique du backstepping [Kanellakopoulos'91], [Krstić'95] et [Khalil'02]. Ces lois ont évidemment l'avantage d'être sans commutations, mais les conditions assurant la robustesse sont plus difficiles à expliciter. Cependant, la prise en compte d'une éventuelle dynamique interne est possible, comme le montre le paragraphe 5 du chapitre 1.

L'objectif général des recherches menées au « Laboratoire Ampère » consiste à gérer et utiliser de façon rationnelle l'énergie dans les systèmes en relation avec leur environnement. Le laboratoire est contractualisé avec le Centre National de la Recherche Scientifique (CNRS, UMR 5005) et trois établissements lyonnais : l'École Centrale de Lyon (ECL), l'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon (INSA Lyon) et l'Université Claude Bernard Lyon 1 (UCBL). Le travail présenté dans ce rapport a été effectué au sein du groupe « Automatique Commande Mécatronique » faisant partie du département « Méthodes pour l'Ingénierie des Systèmes ».

Le groupe « Automatique Commande Mécatronique » a mené de nombreuses recherches pour tester l'applicabilité de différentes méthodes de commande sur les systèmes électropneumatique. Ainsi, ce groupe s'est fixé comme objectif une comparaison sous forme de benchmark global d'un grand nombre de commandes. En effet, Richard [Richard'90] a synthétisé et testé des lois de commandes linéaires et non linéaires pour asservir en position un axe électropneumatique rotatif. Det [Det'91] a étudié la faisabilité d'une pince à souder électropneumatique et a abordé des problèmes de commande en position et en effort. Lin [Lin'92] a présenté une première approche du problème posé par la commande des vérins de grande longueur. Bouhal [Bouhal'94] a traité de la commande linéaire et non linéaire adaptative d'un dispositif de contrôle de pression et d'un asservissement de position électropneumatique. Bouri [Bouri'97] a testé la commande par modes glissants d'ordre un pour un axe électropneumatique rotatif. Il a montré une amélioration des performances par rapport à celles obtenues avec une loi de commande non linéaire linéarisante mais au détriment d'excitations à fréquences élevées (réticence) de la commande. Brun [Brun'99 b] a testé, sur un actionneur électropneumatique linéaire, des lois de commandes linéaires avec un retour d'état à gains fixes ou variables et des lois de commandes non linéaires linéarisantes ainsi qu'une loi non linéaire multidimensionnelle basée sur la théorie de la platitude sous contraintes de critères énergétiques. Sur le même actionneur, [Smaoui'04] a synthétisé et expérimenté des lois de commandes non linéaires par les techniques du backstepping, des modes glissants d'ordre un et d'ordre supérieur.

Cette thèse s'inscrit dans ce contexte. En effet, le système électropneumatique sur lequel ont été testées les commandes développées dans les thèses de Brun [Brun'99 b] et Smaoui [Smaoui'04] a été développé, lors de la thèse de Sesmat [Sesmat'96 b], dans le cadre d'une collaboration avec la société Asco Numatic (ex Asco Joucomatic). Sesmat [Sesmat'96 b] s'est intéressée à la modélisation, la simulation et la commande des deux servodistributeurs électropneumatiques présents dans le système. Un modèle mathématique, a donc été conçu lors de sa thèse afin de représenter le mieux possible le vérin électropneumatique.

Dans le but de synthétiser des lois de commandes en suivi de trajectoires assurant une stabilité exponentielle du point d'équilibre du système d'erreurs, un difféomorphisme a été appliqué au modèle proposé par Sesmat. Ce modèle se présente alors sous une forme non linéaire multidimensionnelle assez particulière qui est nommée tout au long de ce rapport « forme semi strict feedback ». La particularité de cette forme est qu'elle est triangulaire supérieure en les états, triangulaire inférieure en les entrées de commande et aussi triangulaire en les sorties.

D'où l'idée de proposer des approches directes pour l'élaboration de lois de commandes continues en suivi de trajectoire pour cette classe de système et d'étendre ces travaux aux formes monodimensionnelles « strict feedback » avec et sans dynamique interne.

Ainsi, le premier chapitre propose d'une part, deux approches différentes de synthèse de loi de commande en suivi de trajectoire pour la classe de systèmes non linéaires sous la forme monodimensionnelle « Strict Feedback » et sous la forme multidimensionnelle « Semi Strict Feedback ». Il s'agit d'une méthode directe qui synthétise simultanément un « générateur de trajectoires » et une loi de commande. Les expressions analytiques complètes de ce « générateur de trajectoire » et de la loi de commande sont obtenues grâce à l'étude de la stabilité du système d'erreur. Dans le cas où le modèle de commande ne contiendrait pas d'incertitudes paramétriques, et/ou de dynamiques mal modélisées, la stabilité exponentielle globale du point d'équilibre du système d'erreur est prouvée. Dans le cas contraire, grâce à des arguments relevant des résultats sur les systèmes à entrée/état stable, il est montré que les écarts de trajectoires restent bornés pour des perturbations bornées. D'autre part, ce chapitre propose une stratégie pour le problème de suivi de trajectoire des systèmes monodimensionnels avec une dynamique interne de dimension 1 ou avec une dynamique interne sous forme « strict feedback ». En reprenant les arguments relevant des résultats sur les systèmes à entrée/état stable, il est montré que les états du système dynamique d'erreur et la dynamique interne sont bornés.

Le chapitre 2 traite de l'application des résultats précédents à l'actionneur électropneumatique présent au Centre d'Essais Fluid Power du Laboratoire Ampère. Après la présentation de ce système, le modèle mathématique global de l'axe électropneumatique est développé pour la simulation. Ce modèle n'étant pas exploitable directement pour la synthèse de loi de commande, un modèle non linéaire avec une forme affine en la commande est donc élaboré sous certaines hypothèses. Ensuite, des commandes en position et en pression sont synthétisées et implémentées sur le procédé expérimental, après essais préalables en simulation. Des expérimentations réelles sont effectuées afin de vérifier la robustesse des approches proposées en considérant des incertitudes au niveau du débit massique et des variations de la masse durant les tests. Les résultats expérimentaux trouvent le benchmark de l'ensemble des travaux du groupe « Automatique Commande Mécatronique » avec un tableau comparatif des commandes multidimensionnelles implantées sur le vérin électropneumatique dans les mêmes conditions.

Lors de tous ces résultats expérimentaux fondés sur les approches proposées, un phénomène dit de « redécollage » est observé. Ce phénomène a aussi été constaté avec d'autres lois de commandes comme celles basées sur les techniques du backstepping ou par modes glissants [Brun'99] [Smaoui'04]. Il se traduit par un mouvement de secousses saccadées quand le système est à l'arrêt et constitue un problème crucial pour la mise en œuvre industrielle de cette technologie. Ainsi, dans le chapitre 3, ce phénomène est étudié et une solution à ce problème est proposée. Durant le régime statique, quand le système est à l'arrêt, les pressions dans les chambres du vérin continuent à évoluer. Ce qui veut dire que le système a atteint son équilibre mécanique et non son équilibre pneumatique. Il est donc en équilibre partiel, ce qui peut causer le phénomène du redécollage du piston. La solution proposée afin d'éviter ce problème se résume en l'utilisation de commandes en commutation : durant le régime dynamique, le système est commandé en suivi de position. En régime statique, sous certains critères, le système est régulé en pressions.

Enfin, afin de rendre auto-suffisant la lecture de ce mémoire, trois annexes ont été introduites.

CHAPITRE 1 :

CONTRIBUTION À LA COMMANDE NON LINÉAIRE ROBUSTE : APPROCHES DIRECTES POUR L'ÉLABORATION DE LOIS DE COMMANDES CONTINUES ET ÉTUDE DE STABILITÉ

1. INTRODUCTION

Parmi les nombreuses contributions qui traitent du problème de la commande non linéaire robuste, deux grandes familles de lois ont émergé:

- la commande par mode glissant d'ordre un ou d'ordre supérieur [Slotine'84], [Levant'00] et [Fridman'02] qui utilise des lois dont la synthèse est relativement aisée entraînant plus au moins de réticence (« chattering ») et nécessitant un nombre de dérivées successives des variables d'états croissant avec l'ordre choisi. L'obtention de la stabilité asymptotique du point d'équilibre même en présence d'incertitudes ne pose généralement pas de problème. Par contre, la prise en compte de modèles possédant une dynamique interne n'est pas aisée.
- les lois de commande continues [Isidori'81] [Kanellakopoulos'91] [Krstić'95] [Khalil'02] ont l'avantage d'être sans commutation et permettent dans certains cas la prise en compte de la dynamique interne, comme le montre le paragraphe 5 de ce chapitre. Par contre, le problème de la robustesse est plus difficile à expliciter.

Ce premier chapitre se situe dans le cadre de cette dernière alternative et propose deux approches différentes de synthèse de loi de commande en suivi de trajectoire pour la classe de systèmes non linéaires mono et multi dimensionnels sous forme « Strict Feedback » ou triangulaire [Annexe 1]. Tout en se différenciant, l'idée de la méthodologie proposée est inspirée des travaux de [Alleyne'00][Alleyne'02] qui développent une loi de commande passive pour les systèmes monodimensionnels sous forme triangulaire. Il s'agit, contrairement à la technique récursive du backstepping d'une méthode directe qui propose de synthétiser simultanément un « générateur de trajectoires » (ou entrées fictives) et la loi de commande. Les expressions analytiques complètes de ce « générateur » et de la commande sont obtenues grâce à l'étude de la stabilité globale du point d'équilibre du système d'erreur.

Les développements proposés portent au départ sur les systèmes mono et multi dimensionnels sans dynamique interne. Le problème des systèmes avec dynamique interne sera développé en fin de chapitre.

Afin de rendre auto-suffisant la lecture de ce mémoire, le paragraphe suivant rappelle succinctement les éléments de théorie utilisés dans ce mémoire, concernant la stabilité d'un point d'équilibre au sens de Lyapunov et de la notion de la stabilité entrée/état [Sontag'89] [Khalil'02].

2. ÉLÉMENTS DE THÉORIE

2.1 STABILITÉ AU SENS DE *LYAPUNOV* [Hahn'67] [Praly'02]

Ce mémoire utilise, au sens de Lyapunov, la stabilité d'un point d'équilibre x_e (choisi comme l'origine de l'espace d'état) d'un système continu autonome de dimension finie décrit par une équation différentielle vectorielle non-linéaire du premier ordre :

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathfrak{R}^n$$

Le champ de vecteur $f(x)$ sera considéré *Lipschitzien* sur un domaine $\Omega \subset \mathfrak{R}^n$ incluant l'origine ou *globalement Lipschitzien* sur \mathfrak{R}^n .

DÉFINITION 1.1 : FONCTION DÉFINIE POSITIVE

Une fonction scalaire $V(x): \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ est dite *localement* (resp. *globalement*) *définie positive* dans le domaine Ω (resp. \mathfrak{R}^n) si :

- (1) $V(0) = 0$
- (2) $V(x) > 0 \quad \forall x \in \Omega / x \neq 0$ (resp. $\forall x \in \mathfrak{R}^n / x \neq 0$)

DÉFINITION 1.2 : FONCTION DÉFINIE NÉGATIVE

Une fonction scalaire $V(x): \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ est dite *localement* (resp. *globalement*) *définie négative* dans le domaine Ω (resp. \mathfrak{R}^n) si :

- (1) $V(0) = 0$
- (2) $V(x) < 0 \quad \forall x \in \Omega / x \neq 0$ (resp. $\forall x \in \mathfrak{R}^n / x \neq 0$)

DÉFINITION 1.3 : FONCTION PROPRE

Une fonction scalaire $V(x): \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ est dite *propre* si :

$$V(x) \rightarrow +\infty \text{ quand } \|x\| \rightarrow +\infty$$

THÉORÈME 1.1 : STABILITÉ EXPONENTIELLE [ANNEXE 2]

Soit $x = 0$ le point d'équilibre de $\dot{x} = f(x)$ et $D \subset \mathfrak{R}^n$ un domaine contenant $x = 0$. Soient $V : D \rightarrow \mathfrak{R}$ une fonction C^1 , et a, k_1, k_2, k_3 des constantes strictement positives telles que $\forall x \in D$:

$$\begin{aligned} k_1 \|x\|^a &\leq V(x) \leq k_2 \|x\|^a \\ \dot{V}(x) &\leq -k_3 \|x\|^a \end{aligned} \quad (\text{A2.1})$$

Alors $x = 0$ est exponentiellement stable. Si $D = \mathfrak{R}^n$ alors $x = 0$ est globalement exponentiellement stable.

2.2 STABILITÉ ENTRÉE/ETAT
DÉFINITION 1.4 : DÉFINITION D'UN SYSTÈME ENTRÉE/ETAT STABLE [Sontag'89]

Le système $\dot{x} = f(x, u)$, ($x \in \mathfrak{R}^n$, $u \in \mathfrak{R}^m$, $f(0,0) = 0$) où le champ de vecteur f est Lipschitzien en x et u , et l'entrée $u(t)$ est continue et bornée $\forall t \geq 0$, est dit entrée/état stable s'il est possible de trouver une fonction γ de classe \mathcal{K} (sachant qu'une fonction $\lambda(\nu) : \mathfrak{R}^+ \rightarrow \mathfrak{R}^+$ est de classe \mathcal{K} si elle est strictement croissante lorsque ν croît et vaut 0 pour $\nu = 0$) et une fonction β de classe \mathcal{KL} (sachant qu'une fonction $\lambda(\nu, \rho) : \mathfrak{R}^+ \cdot \mathfrak{R}^+ \rightarrow \mathfrak{R}^+$ est de classe \mathcal{KL} si elle est de classe \mathcal{K} en ν , strictement décroissante en ρ et de plus $\lambda(\nu, \rho) \rightarrow 0$ quand $\rho \rightarrow +\infty$), telles que pour tout état initial $x(t_0)$ et pour toute entrée bornée $u(t)$, une trajectoire solution existe et vérifie:

$$\|x(t)\| \leq \beta(\|x(t_0)\|, t - t_0) + \gamma(\sup_{t_0 \leq \tau \leq t} \|u(\tau)\|) \quad (1.1)$$

PROPRIÉTÉ 1.1 : PROPRIÉTÉ DE LA STABILITÉ ENTRÉE/ ETAT

Compte tenu des propriétés des fonctions β et γ , si l'inégalité (1.1) est vérifiée, alors pour toute entrée $u(t)$ bornée, la trajectoire $x(t)$ initialisée en $x(t_0)$ est bornée.

D'autre part, cette inégalité (1.1) devant être vérifiée $\forall u(t)$, pour $u(t) \equiv 0$ l'inégalité précédente devient $\|x(t)\| \leq \beta(\|x(t_0)\|, t - t_0)$, ce qui signifie (compte tenu que β est de classe \mathcal{KL}) que le point d'équilibre (l'origine) du système $\dot{x} = f(x, u = 0)$ est globalement asymptotiquement stable.

Il existe un théorème et un lemme permettant de conclure à la stabilité entrée/état d'un système non linéaire [Khalil'02][Krstić'95], seul le lemme sera utilisé dans ces travaux et donc énoncé dans ce rappel d'éléments de théorie et sa démonstration est rappelée dans l'annexe 3 [Annexe 3].

LEMME 1.1 : STABILITÉ ENTRÉE/ ETAT [ANNEXE 3]

Si le système $\dot{x} = f(x, u)$, ($x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $f(0,0) = 0$) est tel que:

- f est globalement Lipschitzien en x et u
- $\dot{x} = f(x, u = 0)$ globalement exponentiellement stable à l'origine

alors ce système est entrée/état stable.

Après avoir rappelé ces éléments de théorie, la suite de ce chapitre propose deux approches directes de synthèse de commande non linéaire robuste en suivi de trajectoire pour des systèmes mono et multi dimensionnels dont les modèles peuvent s'écrire sous la forme « strict feedback ». Les systèmes sans ou avec dynamique interne sont abordés et des exemples illustratifs sont développés.

3. SYSTÈMES SOUS FORME « STRICT FEEDBACK »

3.1 SYSTÈMES MONODIMENSIONNELS SOUS FORME « STRICT FEEDBACK »

La classe des modèles monodimensionnels étudiée s'écrit sous la forme « strict feedback » [Krstić'95] suivante:

$$\begin{cases} \dot{\xi}_j(t) = f_{\xi_j}(\xi_1(t), \dots, \xi_{n_\xi}(t)) + g_{\xi_j}(\xi_1(t), \dots, \xi_{n_\xi}(t))x_1(t) & \forall j \in \{1, \dots, n_\xi\} \\ \dot{x}_i(t) = f_i(\xi_1(t), \dots, \xi_{n_\xi}(t), x_1(t), \dots, x_i(t)) \\ \quad + g_i(\xi_1(t), \dots, \xi_{n_\xi}(t), x_1(t), \dots, x_i(t))x_{i+1}(t) & \forall i \in \{1, \dots, n-1\} \\ \dot{x}_n(t) = f_n(\xi_1(t), \dots, \xi_{n_\xi}(t), x_1(t), \dots, x_n(t)) \\ \quad + g_n(\xi_1(t), \dots, \xi_{n_\xi}(t), x_1(t), \dots, x_n(t))u(t) \\ y(t) = h(x_1(t)) \end{cases} \quad (1.2)$$

où $u(t) \in \mathfrak{R}$ et $y(t) \in \mathfrak{R}$ représentent respectivement l'entrée de commande et la sortie.

$x(t) \in \mathbb{R}^n$ et $\xi(t) \in \mathbb{R}^{n_\xi}$ représentent les états du système. Les fonctions non linéaires (de $\mathbb{R}^{n_\xi+i} \rightarrow \mathfrak{R}$), $f_i(\xi_1(t), \dots, \xi_{n_\xi}(t), x_1(t), \dots, x_i(t))$, $g_i(\xi_1(t), \dots, \xi_{n_\xi}(t), x_1(t), \dots, x_i(t))$, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ et

les fonctions non linéaires (de $\mathbb{R}^{n_\xi} \rightarrow \mathfrak{R}$), $f_{\xi_j}(\xi_1(t), \dots, \xi_{n_\xi}(t))$, $g_{\xi_j}(\xi_1(t), \dots, \xi_{n_\xi}(t))$,

$\forall j \in \{1, \dots, n_\xi\}$ seront considérées Lipschitziennes. Nous admettrons également que ces

fonctions ainsi que $h(x_1(t))$ sont suffisamment dérivables.

Le modèle (1.2) est considéré localement (resp. globalement) à minimum de phase si le point d'équilibre de la dynamique des zéros $\dot{\xi}_j(t) = f_{\xi_j}(\xi_1(t), \dots, \xi_{n_\xi}(t))$, $\forall j \in \{1, \dots, n_\xi\}$ est localement (resp. globalement) asymptotiquement stable sur $\Omega \subset \mathfrak{R}^{n_\xi}$ (resp. sur \mathfrak{R}^{n_ξ}). Sinon, (si le point s'équilibre de la dynamique des zéros est instable) le système est dit à non minimum de phase.

A des fins d'illustrations, voici un exemple de système physique dont le modèle, sous certaines hypothèses, peut se mettre sous la forme « strict feedback » monodimensionnelle:

Exemple 1.1 [Alleyne'00] : Vérin électrohydraulique (figure 1.1) commandé par une servovalve, attaché à une charge composée d'une masse reliée à une armature rigide au moyen d'un ressort et d'un amortisseur.

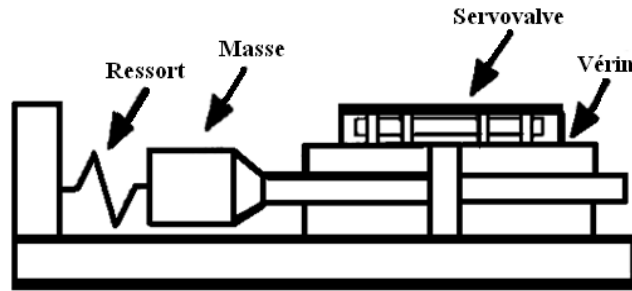


Figure 1.1 : Vérin électrohydraulique

En supposant que les sections des chambres du vérin sont symétriques et que la connexion entre la tige du vérin et la masse de la charge est rigide, l'équation dynamique de la masse mobile s'écrit : $m \ddot{z} + b \dot{z} + k z = A P_L + F_{Friction}$ où z et P_L représentent respectivement la position du vérin et la différence de pression dans les chambres du vérin (les notations sont détaillées dans le tableau 1.1).

La servovalve utilisée est de type proportionnel à 4 voies. La géométrie de ses orifices est considérée idéale et donc les sections de passage du fluide $S_{(i)}$ sont symétriques : $S_1(x_v) = S_2(-x_v) = S_3(x_v) = S_4(-x_v)$, où x_v est la position du tiroir. D'autre part, cette servovalve est à centre critique (donc à $x_v = 0$, le débit est nul).

En négligeant le régime laminaire du fluide et en prenant en compte uniquement le régime turbulent et en considérant que les volumes des chambres sont quasiment identiques, l'équation du débit Q_L s'écrit sous la forme:

$$Q_L = \begin{cases} C_d S_1 \sqrt{\frac{P_s - P_L}{\rho}} & \text{pour } x_v > 0 \\ -C_d S_2 \sqrt{\frac{P_s + P_L}{\rho}} & \text{pour } x_v < 0 \end{cases}, \text{ expression qui peut être réécrite en une seule}$$

$$\text{relation : } Q_L = C_d |S_1| \operatorname{sgn}(x_v) \sqrt{\frac{P_s - \operatorname{sgn}(x_v) P_L}{\rho}}.$$

De plus, en considérant les orifices de la servovalve rectangulaires, l'équation du débit

$$\text{devient : } Q_L = C_d w x_v \sqrt{\frac{P_s - \operatorname{sgn}(x_v) P_L}{\rho}}.$$

D'autre part, l'équation différentielle de la différence de pression P_L dans les chambres du

$$\text{vérin est donnée par : } \frac{V_t}{4\beta_e} \dot{P}_L = -A \dot{z} - C_{im} P_L + Q_L.$$

La servovalve utilise pour son premier étage un moteur électrique linéaire et un capteur de position LVDT pour commander la position du tiroir dont la dynamique peut être modélisée

par une équation différentielle de premier ordre : $\dot{x}_v(t) = -\frac{1}{\tau} x_v(t) + \frac{K}{\tau} u(t)$, où u est la commande.

En considérant l'équation dynamique de la masse mobile, l'équation du débit, l'équation différentielle de la différence de pression dans les chambres du vérin, l'équation de la dynamique de la servovalve et une sortie $y = P_L$, le système d'état suivant est obtenu, avec

$$[\xi_1 \ \xi_2 \ x_1 \ x_2] = [z \ \dot{z} \ P_L \ x_v] :$$

$$\begin{aligned} \xi &\Rightarrow \begin{cases} \dot{\xi}_1 = \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 = -\frac{k}{m} \xi_1 - \frac{b}{m} \xi_2 - \frac{F_{\text{Friction}}}{m} + \frac{A}{m} x_1 \end{cases} \\ x &\Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = \underbrace{-\alpha \xi_2 - \beta x_1}_{f_1(\xi, x_1)} + \underbrace{\left(\gamma \sqrt{P_s - \operatorname{sgn}(x_2)} x_1\right)}_{g_1(\xi, x_1)} x_2 \\ \dot{x}_2 = \underbrace{-\frac{1}{\tau} x_2}_{f_2(\xi, x_1, x_2)} + \underbrace{\frac{K}{\tau} u}_{g_2(\xi, x_1, x_2)} \end{cases} \\ y &\Rightarrow \begin{cases} y = x_1 \end{cases} \end{aligned} \quad \text{où : } \begin{cases} \alpha = 4A\beta_e / V_t \\ \beta = 4C_{im}\beta_e / V_t \\ \gamma = (4C_d w \beta_e / V_t) / \sqrt{\rho} \end{cases} \quad (1.3)$$

Nomenclature	Description et Unité
m	Masse en déplacement (Kg)
k	Raideur du ressort ($N.m^{-1}$)
b	Coefficient de viscosité ($N/(m/s)$)
$F_{Friction}$	Frottement sec (N)
P_s	Pression source (Pa)
A	Section du piston (m^2)
K	Gain statique de la servovalve ($m.V$)
τ	Constante de temps de la servovalve (s)
V_t	Volume total des chambres (m^3)
β_e	Module de compressibilité de l'huile (Pa)
C_d	Coefficient de décharge ($Kg.m^{-1}.s^2.Pa^{-1}$)
C_m	Coefficient du débit de fuite inter-chambres ($m^3.s^{-1}.Pa^{-1}$)
ρ	Masse volumique du fluide ($Kg.m^{-3}$)
w	Gradient de la section de la valve (m)
α	Coefficient hydraulique (Nm^{-3})
β	Coefficient hydraulique (s^{-1})
γ	Coefficient hydraulique ($Kg^{0.5}.m^{-1.5}.s^2$)

Tableau 1.1 : Nomenclature du système électrohydraulique

3.2 SYSTÈMES MULTIDIMENSIONNELS SOUS FORME « SEMI STRICT FEEDBACK »

La forme multidimensionnelle des systèmes « strict feedback » [Krstić'95] est une succession de block de systèmes monodimensionnels sous forme « strict feedback ». L'extension au cas multidimensionnel des deux approches proposées dans le cas monodimensionnel, ne présentant pas de spécificité particulière, ne sera donc pas élaborée dans ce travail.

Par contre, une autre classe de systèmes multidimensionnels que nous nommerons « semi strict feedback » sera étudiée. Le choix de cette classe de système est dû à la forme du modèle du système électropneumatique sur lequel nous appliquerons les deux approches en suivi de trajectoires proposées dans ce chapitre.

Ainsi, le modèle s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{\xi}_j(t) = f_{\xi_j}(\xi_1(t), \dots, \xi_{n_\xi}(t)) + g_{\xi_j}(\xi_1(t), \dots, \xi_{n_\xi}(t))x_1(t) & \forall j \in \{1, \dots, n_\xi\} \\ \dot{x}_i(t) = f_i(\xi_1(t), \dots, \xi_{n_\xi}(t), x_1(t), \dots, x_i(t)) + g_i(\xi_1(t), \dots, \xi_{n_\xi}(t), x_1(t), \dots, x_i(t))x_{i+1}(t) & \forall i \in \{1, \dots, n\} \\ \dot{x}_{n+i}(t) = f_{n+i}(\xi_1(t), \dots, \xi_{n_\xi}(t), x_1(t), \dots, x_{n+m}(t)) + \sum_{j=1}^{m-i+1} g_{n+i,j}(\xi_1(t), \dots, \xi_{n_\xi}(t), x_1(t), \dots, x_{n+m}(t))u_j(t) & \forall i \in \{1, \dots, m\} \\ y_1(t) = h_1(x_1(t)) \\ y_i(t) = h_i(x_1(t), \dots, x_{n+i}(t)) & \forall i \in \{2, \dots, m\} \end{cases} \quad (1.4)$$

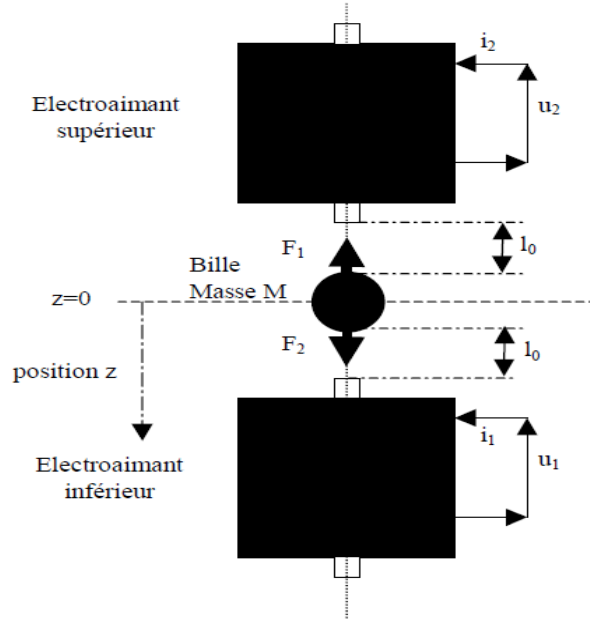
où $u(t), y(t) \in \mathfrak{R}^m$ représentent respectivement les entrées de commande et les sorties.

$x(t) \in \mathfrak{R}^{n+m}$ et $\xi(t) \in \mathfrak{R}^{n_\xi}$ représentent les états du système.

Les fonctions non linéaires (de $\mathfrak{R}^{n_\xi+i} \rightarrow \mathfrak{R}$), $f_i(\xi_1(t), \dots, \xi_{n_\xi}(t), x_1(t), \dots, x_i(t))$, $\forall i \in \{1, \dots, n+m\}$, $g_i(\xi_1(t), \dots, \xi_{n_\xi}(t), x_1(t), \dots, x_i(t))$, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, les fonctions non linéaires (de $\mathfrak{R}^{n_\xi+n+m} \rightarrow \mathfrak{R}$), $g_{n+i,j}(\xi_1(t), \dots, \xi_{n_\xi}(t), x_1(t), \dots, x_{n+m}(t))$, $\forall i \in \{1, \dots, m\}$ et les fonctions non linéaires (de $\mathfrak{R}^{n_\xi} \rightarrow \mathfrak{R}$) $f_{\xi_j}(\xi_1(t), \dots, \xi_{n_\xi}(t))$, $g_{\xi_j}(\xi_1(t), \dots, \xi_{n_\xi}(t))$ $\forall j \in \{1, \dots, n_\xi\}$ seront considérées Lipschitziennes. Nous admettrons également que ces fonctions ainsi que les $h_i(x)$, $\forall i \in \{1, \dots, m\}$ soient suffisamment dérivables.

A des fins d'illustrations, voici un exemple simplifié de palier magnétique dont le modèle peut se mettre sous la forme « semi strict feedback » multidimensionnelle. Le vérin électropneumatique, présenté au chapitre suivant, sera également un exemple de ce type de modèle.

Exemple 1.2 [Mouille'94][Lévine'96] : Une version simplifiée d'un palier magnétique est représentée sur la figure 1.2. Il est composé d'une bille de masse M soumise à l'action de la pesanteur (l'accélération de la pesanteur est notée g) et de deux électroaimants. Chaque électroaimant exerce sur la bille une force proportionnelle au carré du courant $i_{1/2}$ et inversement proportionnelle au carré de la distance entre la position de la bille z (son centre) et l'électroaimant. D'un point de vue électrique, les deux électroaimants sont supposés absolument identiques et chacun d'eux se comporte comme l'association en série d'une inductance (L) et d'une résistance (R). Les variables de commandes sont les deux tensions u_1 et u_2 aux bornes des électroaimants.


Figure 1.2 : Palier magnétique

Sous les hypothèses suivantes :

- absence de saturation ou d'hystérésis du matériau magnétique
- variation de réluctance négligeable
- force due à la résistance de l'air lors du déplacement de la bille négligeable

ce système peut être modélisé comme suit:

$$\begin{cases} \frac{dz}{dt} = v \\ \frac{dv}{dt} = \frac{D}{M} \left[\frac{i_1^2}{(l_0 - z)^2} - \frac{i_2^2}{(l_0 + z)^2} \right] + g \\ \frac{di_1}{dt} = -\frac{R}{L} i_1 + \frac{1}{L} u_1 \\ \frac{di_2}{dt} = -\frac{R}{L} i_2 + \frac{1}{L} u_2 \end{cases} \quad \text{dans le domaine physique } D \subset \mathfrak{R}^4 = \begin{cases} z \in [-l_0, l_0] \\ v \in \mathfrak{R} \\ i_1 \in [0, +\infty[\\ i_2 \in [0, +\infty[\end{cases}$$

Il est sous la forme $\dot{x} = f(x) + g(x)u$ où :

$$x = \begin{bmatrix} z \\ v \\ i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} \frac{D}{M} \left[\frac{i_1^2}{(l_0 - z)^2} - \frac{i_2^2}{(l_0 + z)^2} \right] + g \\ v \\ -\frac{R}{L} i_1 \\ -\frac{R}{L} i_2 \end{bmatrix} \quad \text{et } g = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L} \end{bmatrix}$$

En utilisant le difféomorphisme $\Phi(z, v, i_1, i_2) = [z \ L_f z \ L_f^2 z \ i_1]$ ce modèle peut se mettre sous la forme « semi strict feedback » multidimensionnelle suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= f_1(x_1) + g_1(x_1)x_2 \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2) + g_2(x_1, x_2)x_3 \\ \dot{x}_3 &= f_3(x_1, \dots, x_4) + g_{3,1}(x_1, \dots, x_4)u_1 + g_{3,2}(x_1, \dots, x_4)u_2 \\ \dot{x}_4 &= f_4(x_1, \dots, x_4) + g_{4,1}(x_1, \dots, x_4)u_1 \\ y &= [x_1 \ x_4] \end{cases} \quad (1.5)$$

Où $[x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T = [z \ v \ a \ i_1]^T$ et :

$$\begin{cases} f_1(x_1) &= f_2(x_1, x_2) = 0 \\ g_1(x_2) &= g_2(x_1, x_2) = 1 \\ f_3(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \frac{D}{M} \left[\frac{-2x_4^2}{(l_0 - x_1)^3} \left(\frac{R}{L}(l_0 - x_1) - x_2 \right) + \frac{2i_2^2}{(l_0 + x_1)^3} \left(\frac{R}{L}(l_0 + x_1) + x_2 \right) \right] \\ g_{3,1}(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \frac{2Dx_4}{ML(l_0 - x_1)^2} \\ g_{3,2}(x_1, x_2, x_3, x_4) &= -\frac{2Di_2}{ML(l_0 + x_1)^2} \\ f_4(x_1, x_2, x_3, x_4) &= -\frac{R}{L}x_4 \\ g_{4,1}(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \frac{1}{L} \end{cases}$$

$$\text{avec : } i_2 = (l_0 + x_1) \sqrt{\frac{M}{D} (g - x_3) + \frac{x_4^2}{(l_0 - x_1)^2}} \quad \text{et} \quad x_3 \leq g + \frac{D}{M} \frac{x_4^2}{(l_0 - x_1)^2}$$

4. COMMANDES EN SUIVI DE TRAJECTOIRE DE SYSTÈMES SANS DYNAMIQUE INTERNE

Dans cette partie, deux approches différentes de synthèse de loi de commande en suivi de trajectoire pour la classe de systèmes non linéaires mono et multi dimensionnels, sans dynamique interne et sous la forme « Strict Feedback », sont proposées. Le problème des systèmes avec dynamique interne sera développé au paragraphe 5.

Les modèles monodimensionnels sans dynamique interne s'écrivent sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) &= f_i(x_1(t), \dots, x_i(t)) + g_i(x_1(t), \dots, x_i(t))x_{i+1}(t) \quad \forall i \in \{1, \dots, n-1\} \\ \dot{x}_n(t) &= f_n(x_1(t), \dots, x_n(t)) + g_n(x_1(t), \dots, x_n(t))u(t) \\ y(t) &= h(x_1(t)) \end{cases} \quad (1.6)$$

Et les modèles multidimensionnels sans dynamique interne s'écrivent sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) &= f_i(x_1(t), \dots, x_i(t)) + g_i(x_1(t), \dots, x_i(t)) x_{i+1}(t) & \forall i \in \{1, \dots, n\} \\ \dot{x}_{n+i}(t) &= f_{n+i}(x_1(t), \dots, x_{n+m}(t)) + \sum_{j=1}^{m-i+1} g_{n+i,j}(x_1(t), \dots, x_{n+m}(t)) u_j(t) & \forall i \in \{1, \dots, m\} \\ y_1(t) &= h_1(x_1(t)) \\ y_i(t) &= h_i(x_1(t), \dots, x_{n+i}(t)) & \forall i \in \{2, \dots, m\} \end{cases} \quad (1.7)$$

Les hypothèses du modèle (1.2) monodimensionnel et (1.4) multidimensionnel sont conservées et de plus les fonctions non linéaires (de $\mathfrak{R}^i \rightarrow \mathfrak{R}$), $g_i(x_1, \dots, x_i)$, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ et les fonctions non linéaires (de $\mathfrak{R}^{n+m} \rightarrow \mathfrak{R}$), $g_{n+i,j}(x_1, \dots, x_{n+m})$ $\forall i \in \{1, \dots, m\}$, seront supposées différentes de zéro.

NOTE 1.1:

Afin de ne pas alourdir l'écriture, la variable temps « t » sera omise des vecteurs d'états, de commande et de sortie. De plus, seront omises les variables d'états x_i dans les fonctions non linéaires $f_i(x_1, \dots, x_i)$, $g_i(x_1, \dots, x_i)$ $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ dans le cas monodimensionnel et dans les fonctions non linéaires $f_i(x_1, \dots, x_i)$, $\forall i \in \{1, \dots, n+m\}$, $g_i(x_1, \dots, x_i)$ $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ et $g_{n+i,j}(x_1, \dots, x_{n+m})$, $\forall i \in \{1, \dots, m\}$ dans le cas multidimensionnel.

4.1 APPROCHE N°1

4.1.1 SYSTÈMES MONODIMENSIONNELS

4.1.1.1 MODÈLE SANS INCERTITUDES

Le but de la commande étant un suivi de trajectoire de la sortie y du système (1.6), une base d'erreur e_i , $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ est créée comme étant la différence entre tous les états du système et leurs états désirés x_{id} :

$$e_i = x_i - x_{id}, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad (1.8)$$

La dérivée de chaque erreur de (1.8) est alors donnée par :

$$\begin{cases} \dot{e}_i = \dot{x}_i - \dot{x}_{id} = f_i + g_i x_{i+1} - \dot{x}_{id} & \forall i \in \{1, \dots, n-1\} \\ \dot{e}_n = \dot{x}_n - \dot{x}_{nd} = f_n + g_n u - \dot{x}_{nd} \end{cases} \quad (1.9)$$

Considérons $y_d(t)$, au moins C^n , une trajectoire désirée. Sous l'hypothèse que la fonction h est bijective et h^{-1} est C^n , le choix de y_d permet de calculer une trajectoire admissible unique x_{1d} de classe C^n pour x_1 .

Il est alors possible de construire un « générateur de trajectoire » pour x_2 à x_n sous la forme :

$$\begin{cases} x_{1d} &= h^{-1}(y_d) \\ x_{2d} &= \frac{1}{g_1}(-f_1 + \dot{x}_{1d} - k_1 e_1) \\ x_{(i+1)d} &= \frac{1}{g_i}(-f_i + \dot{x}_{id} - g_{i-1}e_{i-1} - k_i e_i) \quad \forall i \in \{2, \dots, n-1\} \end{cases} \quad (1.10)$$

et d'utiliser la loi de commande :

$$u = \frac{1}{g_n}(-f_n + \dot{x}_{nd} - g_{n-1}e_{n-1} - k_n e_n) \quad (1.11)$$

Compte-tenu des équations (1.10) et (1.11), le système (1.9) devient :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 &= g_1 e_2 - k_1 e_1 \\ \dot{e}_i &= g_i e_{i+1} - g_{i-1} e_{i-1} - k_i e_i \quad \forall i \in \{2, \dots, n-1\} \\ \dot{e}_n &= -g_{n-1} e_{n-1} - k_n e_n \end{cases} \quad (1.12)$$

ou encore sous la forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \vdots \\ \dot{e}_{i-1} \\ \dot{e}_i \\ \dot{e}_{i+1} \\ \vdots \\ \dot{e}_{n-1} \\ \dot{e}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1 & g_1 & 0 & & \dots & & & & & 0 \\ -g_1 & -k_2 & g_2 & & & & & & & \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & & \\ & & -g_{i-2} & -k_{i-1} & g_{i-1} & \ddots & & & & \vdots \\ & & & -g_{i-1} & -k_i & g_i & & & & \\ \vdots & & & \ddots & -g_i & -k_{i+1} & g_{i+1} & & & \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots & & & 0 \\ & & & & & -g_{n-2} & -k_{n-1} & g_{n-1} & & \\ 0 & & & & \dots & 0 & -g_{n-1} & -k_n & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_{i-1} \\ e_i \\ e_{i+1} \\ \vdots \\ e_{n-1} \\ e_n \end{bmatrix} \quad (1.13)$$

La preuve suivante montre que l'origine est l'unique point d'équilibre.

PREUVE DE L'UNICITÉ DU POINT D'ÉQUILIBRE À L'ORIGINE :

L'étude du point d'équilibre de (1.12) revient à résoudre le système suivant :

$$\begin{aligned}
 e_1 &= \frac{g_1}{k_1} e_2 \\
 e_n &= -\frac{g_{n-1}}{k_n} e_{n-1} \\
 e_i &= \frac{\frac{g_i}{k_i + \frac{g_{i-1}^2}{k_{i-1} + \frac{g_{i-2}^2}{k_{i-2} + \frac{g_{i-3}^2}{\ddots + \frac{g_1^2}{k_2 + \frac{g_1^2}{k_1}}}}} e_{i+1}}{\quad} \quad \forall i \in \{2, \dots, n-2\}
 \end{aligned} \tag{1.14}$$

Soit en reportant (1.14) dans la $(n-1)$ ^{ème} équation de (1.12) avec $\dot{e}_{n-1} = 0$:

$$e_{n-1} \left(\frac{\frac{g_{n-1}^2}{k_n} + k_{n-1} + \frac{\frac{g_{n-2}^2}{k_{n-2} + \frac{g_{n-3}^2}{k_{n-3} + \frac{g_{n-4}^2}{k_{n-4} + \frac{g_{n-5}^2}{\ddots + \frac{g_1^2}{k_2 + \frac{g_1^2}{k_1}}}}}}}{\quad} \right) = 0 \tag{1.15}$$

Et sous les hypothèses déjà effectuées : $k_i > 0, \forall i \in \{1, \dots, n\}$ et $g_i \neq 0, \forall i \in \{1, \dots, n\}$, l'unique solution du système (1.14) est $e_1 = e_2 = \dots e_i = \dots e_n = 0$.

PREUVE DE LA STABILITÉ EXPONENTIELLE GLOBALE DU POINT D'ÉQUILIBRE:

Considérons la fonction de *Lyapunov* suivante:

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n e_i^2 \quad (1.16)$$

La dérivée directionnelle de Lie de cette fonction s'écrit :

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \sum_{i=1}^n e_i \dot{e}_i \\ &= g_1 e_1 e_2 - k_1 e_1^2 + \sum_{i=2}^{n-1} (g_i e_i e_{i+1} - g_{i-1} e_{i-1} e_i - k_i e_i^2) - g_{n-1} e_{n-1} e_n - k_n e_n^2 \end{aligned} \quad (1.17)$$

Ce qui donne après calculs :

$$\dot{V} = - \sum_{i=1}^n k_i e_i^2, \quad \text{avec } k_i > 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad (1.18)$$

Ainsi (cf. théorème 1.1, § 2) le point d'équilibre $e_1 = e_2 = \dots e_i = \dots e_n = 0$ est globalement exponentiellement stable.

4.1.1.2 MODÈLE AVEC INCERTITUDES

Dans ce paragraphe, les systèmes étudiés sont sous la forme (1.6) mais avec présence d'incertitudes affectant les fonctions non linéaires f_i et g_i , $\forall i \in \{1, \dots, n\}$.

Ces incertitudes sont considérées sous la forme suivante :

$$\begin{cases} f_i = f_{iN} + \Delta f_i & \forall i \in \{1, \dots, n\} \\ g_i = g_{iN} + \Delta g_i & \forall i \in \{1, \dots, n\} \end{cases} \quad (1.19)$$

expressions dans lesquelles les f_{iN} et g_{iN} , $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ sont les valeurs nominales connues et les Δf_i et Δg_i les incertitudes qui seront considérées comme bornées de la manière suivante :

$$\begin{cases} \Delta_i = \Delta f_i + \Delta g_i x_{i+1} & \forall i \in \{1, \dots, n-1\} \\ \Delta_n = \Delta f_n + \Delta g_n u \end{cases} \quad (1.20)$$

et

$$|\Delta_i| \leq \Delta_{i_{\max}}, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad (1.21)$$

où $\Delta_{i_{\max}}$, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ sont des bornes connues.

En suivant alors la même démarche qu'au paragraphe précédent 4.1.1.1 mais dans ce cas le « générateur de trajectoire » ne comporte que des dynamiques connues et s'écrit donc sous la forme suivante:

$$\begin{cases} x_{1d} & = h^{-1}(y_d) \\ x_{2d} & = \frac{1}{g_{1N}}(-f_{1N} + \dot{x}_{1d} - k_1 e_1) \\ x_{(i+1)d} & = \frac{1}{g_{iN}}(-f_{iN} + \dot{x}_{id} - g_{i-1,N} e_{i-1} - k_i e_i) \quad \forall i \in \{2, \dots, n-1\} \end{cases} \quad (1.22)$$

et avec le choix de la commande qui, comme le générateur de trajectoires, ne comporte que des dynamiques connues:

$$u = \frac{1}{g_{nN}}(-f_{nN} + \dot{x}_{nd} - g_{n-1,N} e_{n-1} - k_n e_n) \quad (1.23)$$

La base d'erreurs (1.9) devient alors :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 & = \Delta_1 + g_{1N} e_2 - k_1 e_1 \\ \dot{e}_i & = \Delta_i + g_{iN} e_{i+1} - g_{(i-1)N} e_{i-1} - k_i e_i \quad \forall i \in \{2, \dots, n-1\} \\ \dot{e}_n & = \Delta_n - g_{(n-1)N} e_{n-1} - k_n e_n \end{cases} \quad (1.24)$$

Ou encore sous la forme matricielle

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \vdots \\ \dot{e}_{i-1} \\ \dot{e}_i \\ \dot{e}_{i+1} \\ \vdots \\ \dot{e}_{n-1} \\ \dot{e}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1 & g_{1N} & 0 & & & & & & \\ & -g_{1N} & -k_2 & g_{2N} & & & & & \\ & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\ & & & -g_{(i-2)N} & -k_{i-1} & g_{(i-1)N} & \ddots & & \\ & & & & -g_{(i-1)N} & -k_i & g_{iN} & & \\ \vdots & & & & \ddots & -g_{iN} & -k_{i+1} & g_{(i+1)N} & \\ & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & & & -g_{(n-2)N} & -k_{n-1} & g_{(n-1)N} \\ 0 & & & & & & 0 & -g_{(n-1)N} & -k_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_{i-1} \\ e_i \\ e_{i+1} \\ \vdots \\ e_{n-1} \\ e_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_{i-1} \\ \Delta_i \\ \Delta_{i+1} \\ \vdots \\ \Delta_{n-1} \\ \Delta_n \end{bmatrix} \quad (1.25)$$

Dans le cas général, les $\Delta_i (e_1 = 0 \dots e_n = 0)$, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ ne sont pas toutes nulles, alors $e_1 = e_2 = \dots e_i = \dots e_n = 0$ n'est plus point d'équilibre. Cependant, une stabilité au sens entrée bornée/ état borné peut être établie.

PREUVE DE LA STABILITÉ ENTRÉE/ETAT :

Le système nominal (1.13) sans les incertitudes étant exponentiellement stable à l'origine et les composantes du vecteur des incertitudes étant bornées (1.21), d'après le lemme 1.1, le système (1.25) est entrée/état stable.

REMARQUE 1.1 :

Dans le cas où les incertitudes n'apparaîtraient que sur les fonctions non linéaires $f_i, \forall i \in \{1, \dots, n\}$, les hypothèses (1.20) et (1.21) se résumeront à:

$$|\Delta f_i| \leq \Delta_{f_i \max}, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad (1.26)$$

où $\Delta_{f_i \max}, \forall i \in \{1, \dots, n\}$ seront des bornes connues.

Cette remarque est valable pour tout ce qui suit dans le cas où les incertitudes n'affecteraient que les fonctions non linéaires $f_{(\cdot)}$.

4.1.2 SYSTÈMES MULTIDIMENSIONNELS
4.1.2.1 MODÈLE SANS INCERTITUDES

Dans le but d'une commande en suivi de trajectoire des sorties du système (1.7), la base d'erreur s'écrit:

$$e_i = x_i - x_{id}, \quad \forall i \in \{1, \dots, n+m\} \quad (1.27)$$

et sa dérivée est alors donnée par :

$$\begin{cases} \dot{e}_i &= f_i + g_i x_{i+1} - \dot{x}_{id} & \forall i \in \{1, \dots, n\} \\ \dot{e}_{n+i} &= f_{n+i} - \dot{x}_{(n+i)d} + \sum_{j=1}^{m-i+1} g_{n+i,j} u_j & \forall i \in \{1, \dots, m\} \end{cases} \quad (1.28)$$

Avec le « générateur de trajectoire »:

$$\begin{cases} x_{1d} &= h_1^{-1}(y_{1d}) \\ x_{2d} &= \frac{1}{g_1}(-f_1 + \dot{x}_{1d} - k_1 e_1) \\ x_{(i+1)d} &= \frac{1}{g_i}(-f_i + \dot{x}_{id} - g_{i-1} e_{i-1} - k_i e_i) & \forall i \in \{2, \dots, n\} \end{cases} \quad (1.29)$$

en supposant que les $x_{(n+i)d}$ puissent s'écrire sous la forme : $x_{(n+i)d} = \mathbf{F}_i(y_{1d}, \dots, y_{id}) \quad \forall i \in \{2, \dots, m\}$, avec \mathbf{F}_i de classe C^l .

et les lois de commande :

$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{g_{n+m,1}} (-f_{n+m} + \dot{x}_{(n+m)d} - k_{n+m} e_{n+m}) \\ u_i = \frac{1}{g_{m+n-i+1,i}} \left(-f_{m+n-i+1} - \sum_{j=1}^{i-1} g_{m+n-i+1,j} u_j + \dot{x}_{(m+n-i+1)d} - k_{m+n-i+1} e_{m+n-i+1} \right) \quad \forall i \in \{2, \dots, m-1\} \\ u_m = \frac{1}{g_{n+1,m}} \left(-f_{n+1} - \sum_{j=1}^{m-1} g_{n+1,j} u_j + \dot{x}_{(n+1)d} - g_n e_n - k_{n+1} e_{n+1} \right) \end{cases} \quad (1.30)$$

le système (1.29) devient :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = g_1 e_2 - k_1 e_1 \\ \dot{e}_i = g_i e_{i+1} - g_{i-1} e_{i-1} - k_i e_i \quad \forall i \in \{2, \dots, n\} \\ \dot{e}_{n+1} = -g_n e_n - k_{n+1} e_{n+1} \\ \dot{e}_{n+i} = -k_{n+i} e_{n+i} \quad \forall i \in \{2, \dots, m\} \end{cases} \quad (1.31)$$

ou encore sous la forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \vdots \\ \dot{e}_i \\ \vdots \\ \dot{e}_n \\ \dot{e}_{n+1} \\ \dot{e}_{n+2} \\ \vdots \\ \dot{e}_{n+i} \\ \vdots \\ \dot{e}_{n+m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1 & g_1 & 0 & & & & \dots & & & & 0 \\ -g_1 & -k_2 & g_2 & 0 & & & & & & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & & \\ 0 & 0 & -g_{i-1} & -k_i & g_i & 0 & & & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\ 0 & & & 0 & -g_{n-1} & -k_n & g_n & 0 & & & \vdots \\ 0 & & & & 0 & -g_n & -k_{n+1} & 0 & 0 & & \\ 0 & & & & & 0 & 0 & -k_{n+2} & 0 & 0 & \\ \vdots & \vdots & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & & & & & & 0 & 0 & -k_{n+i} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & & \dots & & & & 0 & 0 & -k_{n+m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ e_n \\ e_{n+1} \\ e_{n+2} \\ \vdots \\ e_{n+i} \\ \vdots \\ e_{n+m} \end{bmatrix} \quad (1.32)$$

dont l'unique point d'équilibre est l'origine (la démonstration de la preuve de l'unicité de ce point d'équilibre s'effectue d'une manière analogue au cas monodimensionnel).

PREUVE DE LA STABILITÉ EXPONENTIELLE GLOBALE :

Soit la fonction de *Lyapunov* suivante:

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n+m} e_i^2 \quad (1.33)$$

La dérivée directionnelle de Lie de cette fonction s'écrit :

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \sum_{i=1}^{n+m} e_i \dot{e}_i \\ &= g_1 e_1 e_2 - k_1 e_1^2 + \sum_{i=2}^n (g_i e_i e_{i+1} - g_{i-1} e_{i-1} e_i - k_i e_i^2) - g_n e_n e_{n+1} - k_n e_n^2 - \sum_{i=1}^m (k_{n+i} e_{n+i}^2) \end{aligned} \quad (1.34)$$

ou encore, après calculs :

$$\dot{V} = - \sum_{i=1}^{n+m} k_i e_i^2, \quad \text{avec } k_i > 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, n+m\} \quad (1.35)$$

Ainsi (cf théorème 1.1, § 2) le point d'équilibre $e_1 = e_2 = \dots e_i = \dots e_{n+m} = 0$ est globalement exponentiellement stable.

4.1.2.2 MODÈLE AVEC INCERTITUDES

Dans ce paragraphe, les systèmes étudiés sont sous la forme (1.7) avec des incertitudes affectant les fonctions non linéaires $f_i, \forall i \in \{1, \dots, n+m\}$, $g_i, \forall i \in \{1, \dots, n\}$ et $g_{n+i,j}, \forall i \in \{1, \dots, m\}$. Ces incertitudes sont considérées sous la même forme et les mêmes hypothèses décrites dans (1.19), (1.20), (1.21) et :

$$\Delta_{n+i} = \Delta f_{n+i} + \sum_{j=1}^{m-i+1} \Delta g_{n+i,j} u_j \quad \forall i \in \{1, \dots, m\} \quad (1.36)$$

avec :

$$|\Delta_{n+i}| \leq \Delta_{(n+i)_{\max}}, \quad \forall i \in \{1, \dots, m\} \quad (1.37)$$

En suivant la même procédure que dans le cas sans incertitudes, un « générateur de trajectoire » ne comportant que des dynamiques connues est construit:

$$\begin{cases} x_{1d} &= h^{-1}(y_{1d}) \\ x_{2d} &= \frac{1}{g_{1N}} (-f_{1N} + \dot{x}_{1d} - k_1 e_1) \\ x_{(i+1)d} &= \frac{1}{g_{iN}} (-f_{iN} + \dot{x}_{id} - g_{(i-1)N} e_{i-1} - k_i e_i) \quad \forall i \in \{2, \dots, n-1\} \end{cases} \quad (1.38)$$

avec les mêmes hypothèses qu'au §4.1.2.1 pour le calcul des $x_{(n+i)d}, \forall i \in \{2, \dots, m\}$.

4.2 APPROCHE N°2

4.2.1 SYSTÈMES MONODIMENSIONNELS

De manière analogue à l'approche n°1, les modèles (1.6) et (1.7), avec les mêmes hypothèses associées, seront pris en considération.

4.2.1.1 MODÈLE SANS INCERTITUDES

Toujours dans le but de commander le système (1.6) en suivi de trajectoire de la sortie y , une trajectoire désirée $y_d(t)$, au moins C^n , est envisagée. Sous la même hypothèse que la fonction h est bijective, le choix de y_d permet de calculer une trajectoire admissible unique x_{1d} de classe C^n pour x_1 .

Il est alors possible de construire un « générateur de trajectoire » pour x_2 à x_n , différent du « générateur » utilisé dans la première approche:

$$\begin{cases} x_{1d} &= h^{-1}(y_d) \\ x_{(i+1)d} &= \dot{x}_{id} - f_i - g_i x_{(i+1)} + x_{(i+1)} \quad \forall i \in \{1, \dots, n-1\} \end{cases} \quad (1.42)$$

et la loi de commande:

$$u = \frac{1}{g_n} (-f_n + \dot{x}_{nd} - K_1 e_1 \dots - K_n e_n) \quad (1.43)$$

Le système différentiel d'erreurs s'écrit alors :

$$\begin{cases} \dot{e}_i &= \dot{x}_i - \dot{x}_{id} = e_{i+1} \\ \dot{e}_n &= \dot{x}_n - \dot{x}_{nd} = -K_1 e_1 - \dots - K_n e_n \end{cases} \quad \forall i \in \{1, \dots, n-1\} \quad (1.44)$$

qui peut se mettre sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \vdots \\ \dot{e}_{n-1} \\ \dot{e}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ -K_1 & \dots & \dots & -K_n & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_{n-1} \\ e_n \end{bmatrix} \quad (1.45)$$

Il est alors bien connu que le système linéaire (1.45) possède un seul point d'équilibre $e_1 = e_2 = \dots e_i = \dots e_n = 0$ exponentiellement stable dès lors que le choix des gains K_i conduit à un polynôme $s^n + K_n s^{n-1} + \dots K_2 s + K_1$ de type « Hurwitz ».

Cependant le lemme suivant propose une autre approche pour l'étude de cette stabilité, approche à priori sans intérêt car plus complexe que la condition précédente mais qui trouvera une utilité dans le choix des gains. En effet, avec ce lemme les gains K_i sont calculés à partir de constantes α_i qui doivent être seulement strictement positives pour assurer la stabilité exponentielle à l'origine du système (1.45).

LEMME 1.2

Le changement de coordonnées :

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = T \cdot \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} \quad (1.46)$$

défini par la matrice triangulaire inférieure T , telle que :

$$\begin{cases} T(i, i) = 1 & \forall i \in \{1, \dots, n\} \\ T(i, j < i) = \alpha_{i-1}T(i-1, j) + T(i-1, j-1) & \begin{cases} \forall i \in \{2, \dots, n\} \\ \forall j \in \{1, \dots, n-1\} \end{cases} \\ T(i, 0) = 0 & \forall i \in \{1, \dots, n\} \end{cases} \quad (1.47)$$

avec $\alpha_i \in \mathbb{R}^+$, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$

et le choix des gains :

$$K_i = \alpha_n T(n, i) + T(n, i-1) \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad (1.48)$$

permet de réécrire le système (1.45) sous la forme d'une cascade de systèmes strictement positifs réels (SPR) [Khalil'02] et par la suite la stabilité exponentielle du point d'équilibre peut être prouvée.

PREUVE DU LEMME 1.2

La forme de T garantit à la fois l'existence de son inverse et le fait que T^{-1} soit aussi une matrice triangulaire inférieure qui peut être calculée analytiquement avec les formules suivantes :

$$\begin{cases} T^{-1}(i, i) = 1 & \forall i \in \{1, \dots, n\} \\ T^{-1}(i, j < i) = -\alpha_j T^{-1}(i-1, j) + T^{-1}(i-1, j-1) & \begin{cases} \forall i \in \{2, \dots, n\} \\ \forall j \in \{1, \dots, n-1\} \end{cases} \\ T^{-1}(i, 0) = 0 & \forall i \in \{1, \dots, n\} \end{cases} \quad (1.49)$$

Le calcul de

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \vdots \\ \dot{z}_{n-1} \\ \dot{z}_n \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ -K_1 & & & & -K_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{n-1} \\ z_n \end{bmatrix} \quad (1.50)$$

conduit au système :

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \vdots \\ \dot{z}_{n-1} \\ \dot{z}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\alpha_2 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & -\alpha_{n-1} & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -\alpha_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{n-1} \\ z_n \end{bmatrix} \quad (1.51)$$

Ce nouveau système d'état (1.51) peut être représenté par le schéma bloc suivant :

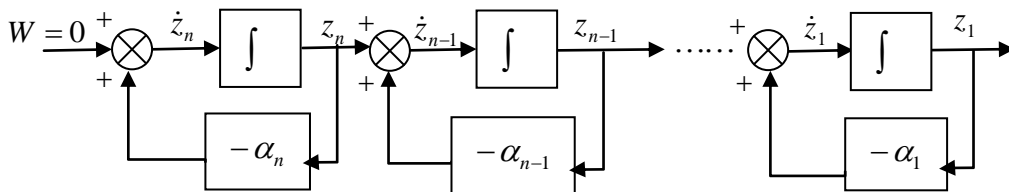


Figure 1.3 : Sous-systèmes SPR en cascades avec une entrée nulle

z_n tend exponentiellement vers zéro quand $t \rightarrow +\infty$ et donc les sorties des systèmes SPR en cascade tendent, elles-aussi, exponentiellement vers zéro. Ainsi, vu que la transformation T est régulière, toutes les erreurs $e_i, i \in \{1, \dots, n\}$ tendent également exponentiellement vers zéro.

Notons que les gains $K_i, i \in \{1, \dots, n\}$ sont obtenus à partir des choix des gains $\alpha_i, i \in \{1, \dots, n\}$ et la formule récursive (1.48). D'une part, ceci a l'avantage de proposer une forme de « découplage » des gains caractérisant le taux de décroissance vers zéro de différentes erreurs de trajectoires. D'autre part, il suffit de choisir les gains $\alpha_i, i \in \{1, \dots, n\}$ strictement positifs pour assurer la stabilité exponentielle à l'origine du système (1.45)

Note 1.2: Bien que le calcul de la commande dans l'équation (1.43) fasse appel à la variable \dot{x}_{nd} qui elle-même contient la variable \dot{x}_n (comme le montre le générateur de trajectoire (1.42)) et que cette dernière fait aussi intervenir la variable de commande (1.7), le calcul de l'entrée de commande n'est pas implicite, en effet :

$$\begin{cases} u &= \frac{1}{g_n}(-f_n + \dot{x}_{nd} - K_1 e_1 \dots - K_n e_n) \\ \dot{x}_{nd} &= \ddot{x}_{(n-1)d} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_i} \dot{x}_i - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial g_{n-1}}{\partial x_i} \dot{x}_i x_n - g_{n-1} \dot{x}_n + \dot{x}_n \\ \dot{x}_n &= f_n + g_n u \end{cases} \quad (1.52)$$

d'où :

$$u = \frac{1}{g_n g_{n-1}} \left(\ddot{x}_{(n-1)d} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_i} (f_i + g_i x_{i+1}) - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial g_{n-1}}{\partial x_i} (f_i + g_i x_{i+1}) x_n - g_{n-1} f_n - K_1 e_1 \dots - K_n e_n \right) \quad (1.53)$$

De plus, le calcul de la commande n'impose l'ajout d'aucune autre hypothèse car les fonctions non linéaires g_i sont différentes de zéro.

4.2.1.2 MODÈLE AVEC INCERTITUDES

Les incertitudes affectant les fonctions non linéaires f_i et $g_i, \forall i \in \{1, \dots, n\}$ du système (1.7) sont considérées sous la forme générale (1.19) et (1.20) et sous l'hypothèse (1.21).

En suivant la même démarche qu'au paragraphe précédent 4.2.1.1, le « générateur de trajectoire » ne comporte que des dynamiques connues et s'écrit sous la forme suivante:

$$\begin{cases} x_{1d} &= h^{-1}(y_d) \\ x_{(i+1)d} &= \dot{x}_{id} - f_{iN} - g_{iN} x_{(i+1)} + x_{(i+1)} \quad \forall i \in \{1, \dots, n-1\} \end{cases} \quad (1.54)$$

Le choix de la loi de commande qui, comme le générateur de trajectoires, ne comporte que des dynamiques connues:

$$u = \frac{1}{g_{nN}}(-f_{nN} + \dot{x}_{nd} - K_1 e_1 \dots - K_n e_n) \quad (1.55)$$

conduit à la base d'erreurs suivante :

$$\begin{cases} \dot{e}_i &= e_{i+1} + \Delta_i \\ \dot{e}_n &= -K_1 e_1 - \dots - K_n e_n + \Delta_n \end{cases} \quad \forall i \in \{1, \dots, n-1\} \quad (1.56)$$

qui peut s'écrire sous la forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \vdots \\ \dot{e}_{n-1} \\ \dot{e}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ -K_1 & \dots & \dots & -K_n & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_{n-1} \\ e_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \Delta_{n-1} \\ \Delta_n \end{bmatrix} \quad (1.57)$$

Le système (1.57) est composé d'un système linéaire dont le point d'équilibre $e_1 = e_2 = \dots = e_n = 0$ est exponentiellement stable (preuve au paragraphe précédent 4.2.1.1) et d'un vecteur de perturbations bornées. D'après le lemme 1.1, les composantes du vecteur d'état de (1.57) sont bornées.

Le calcul des gains $K_i, i \in \{1, \dots, n\}$ du système (1.57) est obtenu, de la même manière que dans le cas sans incertitudes, à partir des choix des gains $\alpha_i, i \in \{1, \dots, n\}$ et par la formule récursive (1.48). Il suffit donc de choisir $\alpha_i, i \in \{1, \dots, n\}$ strictement positifs pour assurer la stabilité entrée/état du système (1.57).

4.2.2 SYSTÈMES MULTIDIMENSIONNELS

Dans ce paragraphe, les modèles sous la forme (1.7), avec les mêmes hypothèses associées, seront pris en considération.

4.2.2.1 MODÈLE SANS INCERTITUDES

De manière analogue au cas monodimensionnel, un « générateur de trajectoire » est construit :

$$\begin{cases} x_{1d} &= h^{-1}(y_{1d}) \\ x_{(i+1)d} &= \dot{x}_{id} - f_i - g_i x_{(i+1)d} + x_{(i+1)d} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \end{cases} \quad (1.58)$$

en supposant que les $x_{(n+i)d}$ puissent s'écrire sous la forme : $x_{(n+i)d} = \mathbf{F}_i(y_{1d}, \dots, y_{id}) \quad \forall i \in \{2, \dots, m\}$, avec \mathbf{F}_i de classe C^1 .

et une loi de commande soit utilisée:

$$\begin{cases} u_i = \frac{1}{g_{(m+n-i+1),i}} \left(-f_{m+n-i+1} - \sum_{j=1}^{i-1} g_{(m+n-i+1),j} u_j + \dot{x}_{(m+n-i+1)d} - K_{m+n-i+1} e_{m+n-i+1} \right) \\ u_m = \frac{1}{g_{(n+1),m}} \left(-f_{n+1} - \sum_{j=1}^{m-1} g_{(n+1),j} u_j + \dot{x}_{(n+1)d} - K_1 e_1 - \dots - K_{n+1} e_{n+1} \right) \end{cases} \quad \forall i \in \{1, \dots, m-1\} \quad (1.59)$$

Le système différentiel des erreurs s'écrit alors :

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \vdots \\ \dot{e}_n \\ \dot{e}_{n+1} \\ \dot{e}_{n+2} \\ \vdots \\ \dot{e}_{n+m} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & & \ddots & \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & & & \\ -K_1 & \dots & -K_{n+1} & 0 & \dots & 0 & & \\ 0 & \dots & 0 & -K_{n+2} & \ddots & \vdots & & \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 & & \\ 0 & \dots & & & 0 & -K_{n+m} & & \end{bmatrix}}_{A_e} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \\ e_{n+1} \\ e_{n+2} \\ \vdots \\ e_{n+m} \end{bmatrix} \quad (1.60)$$

Il est alors bien connu que le système linéaire (1.60) possède un seul point d'équilibre $e_1 = e_2 = \dots e_i = \dots e_{n+m} = 0$ exponentiellement stable dès lors que le choix des gains K_i conduit à une matrice A_e « Hurwitz ».

De manière analogue au cas monodimensionnel, le lemme suivant propose une autre approche pour l'étude de cette stabilité, qui impose seulement un choix de gains strictement positifs pour prouver la stabilité exponentielle de l'origine du système (1.60).

LEMME 1.4

Le changement de coordonnées :

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_{n+m} \end{bmatrix} = T \cdot \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_{n+m} \end{bmatrix} \quad (1.61)$$

défini par la matrice triangulaire inférieure T , tel que :

$$\begin{cases} T(i, i) = 1 & \forall i \in \{1, \dots, n+m\} \\ T(i, j < i) = \alpha_{i-1} T(i-1, j) + T(i-1, j-1) & \begin{cases} \forall i \in \{2, \dots, n+1\} \\ \forall j \in \{1, \dots, n\} \end{cases} \\ T(i, j < i) = 0 & \begin{cases} \forall i \in \{n+2, \dots, n+m\} \\ \forall j \in \{1, \dots, n+m\} \end{cases} \\ T(i, 0) = 0 & \forall i \in \{1, \dots, n+m\} \end{cases} \quad (1.62)$$

avec $\alpha_i \in \mathbb{R}^+$, $\forall i \in \{1, \dots, n+m\}$

et le choix des gains :

$$\begin{aligned} K_i &= \alpha_n T(n, i) + T(n, i-1) & \forall i \in \{1, \dots, n+1\} \\ K_i &= \alpha_i & \forall i \in \{n+2, \dots, n+m\} \end{aligned} \quad (1.63)$$

permet de réécrire le système (1.60) sous la forme d'une cascade de systèmes strictement positifs réels (SPR) [Khalil'02] et par la suite la stabilité exponentielle du point d'équilibre peut être prouvée.

PREUVE DU LEMME 1.4

La forme de T garantit l'existence de son inverse. De plus T^{-1} est aussi une matrice triangulaire inférieure qui peut être calculée analytiquement avec les formules suivantes :

$$\begin{cases} T^{-1}(i, i) = 1 & \forall i \in \{1, \dots, n+m\} \\ T^{-1}(i, j < i) = -\alpha_j T^{-1}(i-1, j) + T^{-1}(i-1, j-1) & \begin{cases} \forall i \in \{2, \dots, n+1\} \\ \forall j \in \{1, \dots, n\} \end{cases} \\ T^{-1}(i, j < i) = 0 & \begin{cases} \forall i \in \{n+2, \dots, n+m\} \\ \forall j \in \{1, \dots, n+m\} \end{cases} \\ T^{-1}(i, 0) = 0 & \forall i \in \{1, \dots, n+m\} \end{cases} \quad (1.64)$$

Le calcul de

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \vdots \\ \dot{z}_n \\ \dot{z}_{n+1} \\ \dot{z}_{n+2} \\ \vdots \\ \dot{z}_{n+m} \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & & \ddots & \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & & & \\ -K_1 & \dots & \dots & -K_{n+1} & 0 & \dots & 0 & \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -K_{n+2} & \ddots & \vdots & \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 & \\ 0 & \dots & \dots & & & 0 & -K_{n+m} & \end{bmatrix} T^{-1} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \\ z_{n+1} \\ z_{n+2} \\ \vdots \\ z_{n+m} \end{bmatrix} \quad (1.65)$$

conduit au système :

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \vdots \\ \dot{z}_n \\ \dot{z}_{n+1} \\ \dot{z}_{n+2} \\ \vdots \\ \dot{z}_{n+m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\alpha_2 & 1 & \ddots & \vdots & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & -\alpha_n & 1 & & \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -\alpha_{n+1} & 0 & & \\ \vdots & & & & \ddots & -\alpha_{n+2} & \ddots & \\ \vdots & & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & & & & 0 & -\alpha_{n+m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \\ z_{n+1} \\ z_{n+2} \\ \vdots \\ z_{n+m} \end{bmatrix} \quad (1.66)$$

z_{n+m} à z_{n+1} tendent exponentiellement vers zéro quand $t \rightarrow +\infty$. Les sorties des systèmes SPR en cascade dépendent de z_{n+1} qui les fait tendre, elles-aussi, exponentiellement vers zéro. Ainsi, vu que la transformation T est régulière, toutes les erreurs $e_i, i \in \{1, \dots, n+m\}$ tendent également exponentiellement vers zéro.

4.2.2.2 MODÈLE AVEC INCERTITUDES

Les incertitudes affectant les fonctions non linéaires $f_i, \forall i \in \{1, \dots, n+m\}$, $g_i, \forall i \in \{1, \dots, n\}$ et $g_{n+i,j}, \forall i \in \{1, \dots, m\}$ du système (1.7) sont considérées sous les mêmes formes que (1.19), (1.20), (1.36) et sous les mêmes hypothèses que (1.21) et (1.37).

Suivons alors la même démarche qu'au paragraphe précédent le « générateur de trajectoire » ne comportant que des dynamiques connues, s'écrit sous la forme suivante:

$$\begin{cases} x_{1d} &= h^{-1}(y_{1d}) \\ x_{(i+1)d} &= \dot{x}_{id} - f_{iN} - g_{iN}x_{(i+1)} + x_{(i+1)} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \end{cases} \quad (1.67)$$

avec les mêmes hypothèses qu'au §4.2.2.1 pour le calcul des $x_{(n+i)d}, \forall i \in \{2, \dots, m\}$.

Le choix des entrées de commande :

$$\begin{cases} u_i = \frac{1}{g_{((m+n-i+1),i)N}} \left(-f_{(m+n-i+1)N} - \sum_{j=1}^{i-1} g_{((m+n-i+1),j)N} u_j + \dot{x}_{(m+n-i+1)d} - K_{m+n-i+1} e_{m+n-i+1} \right) \quad \forall i \in \{1, \dots, m-1\} \\ u_m = \frac{1}{g_{((n+1),m)N}} \left(-f_{(n+1)N} - \sum_{j=1}^{m-1} g_{((n+1),j)N} u_j + \dot{x}_{(n+1)d} - K_1 e_1 - \dots - K_{n+1} e_{n+1} \right) \end{cases} \quad (1.68)$$

avec $K_i > 0, \forall i \in \{1, \dots, n+m\}$

transforme la base d'erreurs en:

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \vdots \\ \dot{e}_n \\ \dot{e}_{n+1} \\ \dot{e}_{n+2} \\ \vdots \\ \dot{e}_{n+m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & & \ddots & \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & & & \\ -K_1 & \dots & -K_{n+1} & 0 & \dots & 0 & & \\ 0 & \dots & 0 & -K_{n+2} & \ddots & \vdots & & \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 & & \\ 0 & \dots & & & 0 & -K_{n+m} & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \\ e_{n+1} \\ e_{n+2} \\ \vdots \\ e_{n+m} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \Delta_n \\ \Delta_{n+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \Delta_{n+m} \end{bmatrix} \quad (1.69)$$

Le système (1.69) est composé d'un système linéaire dont le point d'équilibre $e_1 = e_2 = \dots = e_i = \dots = e_{n+m} = 0$ est exponentiellement stable et d'un vecteur de perturbations bornées. D'après le rappel théorique sur les systèmes entrée/état stables, les composantes du vecteur d'état de (1.69) sont bornées.

Le calcul des gains $K_i, i \in \{1, \dots, n+m\}$ du système (1.69) est obtenu, de la même manière que dans le cas sans incertitudes, à partir des choix des gains $\alpha_i, i \in \{1, \dots, n+m\}$ et par la formule récursive (1.63). Il suffit donc de choisir $\alpha_i, i \in \{1, \dots, n+m\}$ strictement positifs pour assurer la stabilité entrée/état du système (1.69).

4.3 EXEMPLE ACADÉMIQUE

Exemple 1.3 :

Soit le système non linéaire monovarié, sous la forme « strict feedback », suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= e^{x_1} x_3 \\ \dot{x}_3 &= u \\ y &= x_1 \end{cases} \quad (1.70)$$

En appliquant l'approche n°1, la loi de commande obtenue est la suivante :

$$u = \dot{x}_{3d} - e^{x_1}(x_2 - x_{2d}) - k_3(x_3 - x_{3d}) \quad (1.71)$$

où :

$$\begin{cases} x_{2d} = \dot{x}_{1d} - k_1(x_1 - x_{1d}) \\ \dot{x}_{2d} = \ddot{x}_{1d} - k_1(x_2 - \dot{x}_{1d}) \\ x_{3d} = e^{-x_1} [\dot{x}_{2d} - (x_1 - x_{1d}) - k_2(x_2 - x_{2d})] \\ \dot{x}_{3d} = -x_2 e^{-x_1} [\dot{x}_{2d} - (x_1 - x_{1d}) - k_2(x_2 - x_{2d})] + \\ e^{-x_1} [\ddot{x}_{1d} - k_1(e^{x_1} x_3 - \ddot{x}_{1d}) - (x_2 - \dot{x}_{1d}) - k_2(e^{x_1} x_3 - \dot{x}_{2d})] \end{cases} \quad k_1, k_2, k_3 > 0 \quad (1.72)$$

La loi de commande obtenue avec l'approche n°2 est la suivante:

$$u = e^{-x_1} [\ddot{x}_{1d} - e^{x_1} x_2 x_3 - K_1(x_1 - x_{1d}) - K_2(x_2 - \dot{x}_{1d}) - K_3(e^{x_1} x_3 - \ddot{x}_{1d})] \quad (1.73)$$

où :

$$\begin{cases} K_1 = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \\ K_2 = \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2 \alpha_3 + \alpha_1 \alpha_3 \\ K_3 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \end{cases} \quad \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 > 0 \quad (1.74)$$

Les deux lois de commandes assurent une stabilité exponentielle à l'origine. La simulation (Solveur Runge-Kutta Ode45 de Matlab) du système commandé en suivi de trajectoire a donné les résultats suivants (fig. 1.5 et 1.6):

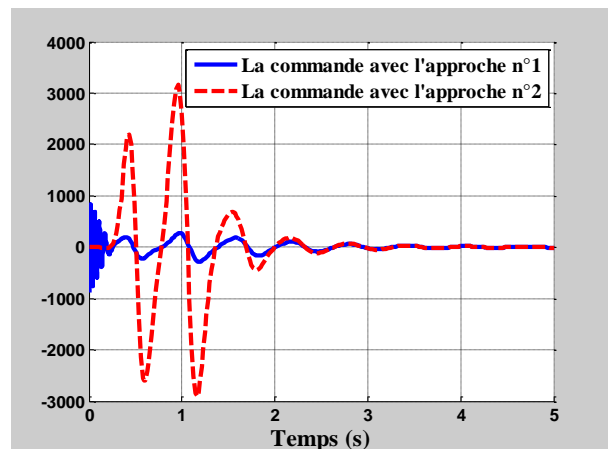
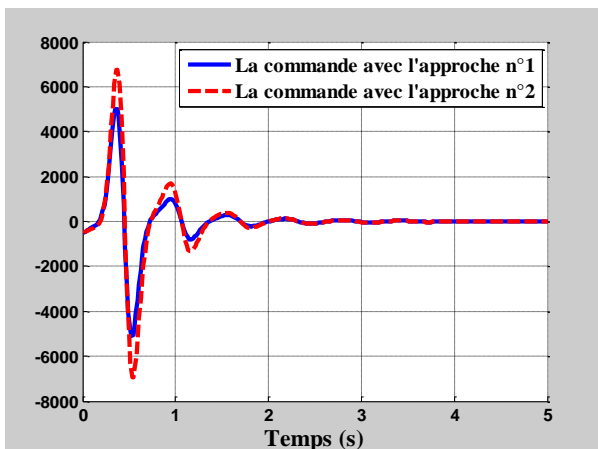
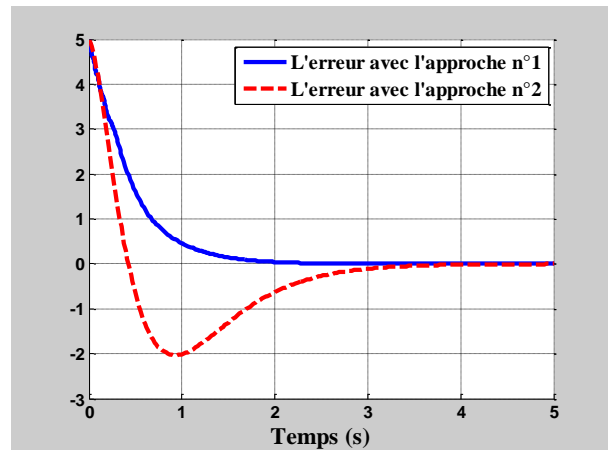
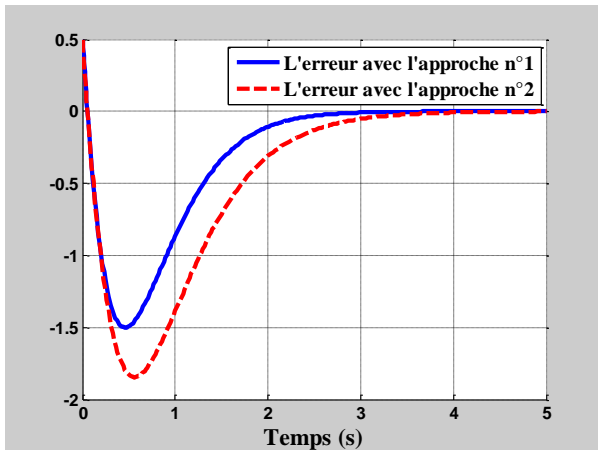
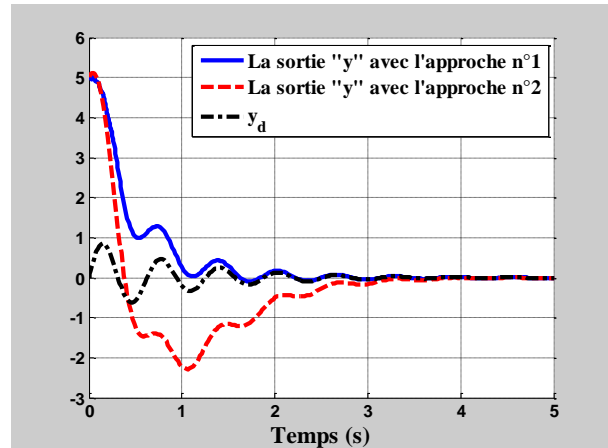
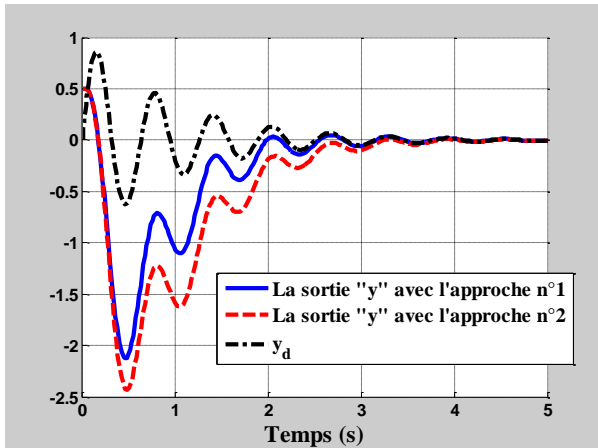


Figure 1.4 : Résultats de simulation de l'exemple (1.3) pour les états initiaux:

$$\begin{cases} x_{10} = 0.5 \\ x_{20} = 0.2 \\ x_{30} = 0.1 \end{cases}$$

Figure 1.5 : Résultats de simulation de l'exemple (1.3) pour les états initiaux:

$$\begin{cases} x_{10} = 5 \\ x_{20} = 6 \\ x_{30} = -1 \end{cases}$$

Les figures montrent l'évolution de la sortie y de l'exemple (1.70) et de la sortie désirée $y_d = e(-t)\sin(10t)$, l'erreur entre y et y_d et l'évolution des lois de commandes (1.71), trouvées avec l'approche n°1, et (1.73) trouvées avec l'approche n°2.

Les gains utilisés pour ces simulations avec l'approche n°1 sont :

$$\begin{aligned} k_1 &= 2 \\ k_2 &= 3 \\ k_3 &= 4 \end{aligned} \tag{1.75}$$

Les gains (1.74) utilisés pour ces simulations avec l'approche n°2 sont:

$$\begin{cases} K_1 &= \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 &= 24 \\ K_2 &= \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2 \alpha_3 + \alpha_1 \alpha_3 &= 26 \\ K_3 &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 9 \end{cases} \tag{1.76}$$

où $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 3$, $\alpha_3 = 4$ ont les mêmes valeurs que k_1, k_2, k_3 utilisés pour l'approche n°1.

Les figures 1.4 et 1.5 ne présentent que deux simulations pour des états initiaux différents et les gains précités. D'autres essais non mentionnés ici permettent de vérifier les résultats théoriques énoncés précédemment. Il ne s'agit pas de comparer les performances respectives des deux lois de commande (ce qui n'aurait aucun sens car lié aux gains respectifs choisis) mais de vérifier les résultats théoriques précédents même si ici deux jeux de valeurs initiales sont présentées.

5. COMMANDE EN SUIVI DE TRAJECTOIRE AVEC PRÉSENCE DE DYNAMIQUE INTERNE

Le problème de la stabilisation ou du suivi de trajectoire pour les systèmes non linéaires avec dynamique interne demeure partiellement résolu. Des schémas de stabilisation ont été proposés par [Byrnes'91 a] et [Byrnes'91 b] en utilisant deux hypothèses principales: le système est localement ou globalement presque minimum de phase (weakly minimum phase) et le degré relatif est égal à 1. Plus récemment, [Travieso-Torres'07] [Travieso-Torres'06] en utilisant les mêmes hypothèses que [Byrnes'91 b] ont étendu le résultat à la stabilisation de systèmes non linéaires à non minimum de phase en utilisant des arguments de passivité (normes L_2 et L_∞). Pour le problème du suivi de trajectoire, ces mêmes auteurs utilisent l'hypothèse supplémentaire que la trajectoire de référence bornée vérifie également la propriété au moins locale de presque minimum de phase (locally bounded reference weakly minimum phase). En outre, [Krstić'95] ont résolu, au moins formellement, le problème de la stabilisation pour la forme strict feedback (1.3).

Dans ce chapitre, seul le cas des systèmes strict feedback monodimensionnels (1.2) est étudié. D'abord, le résultat de Krstic est rappelé. Puis une proposition est faite pour résoudre le problème du suivi de trajectoire pour une dynamique interne de dimension 1, ensuite pour une classe particulière de dynamique interne de dimension supérieure à 1 (cette classe n'est pas la classe très particulière ou la dynamique interne s'écrit sous forme « strict feedback » et linéaire avec une matrice d'état « Hurwitz » car dans ce cas cette dynamique interne est « naturellement » entrée/état stable).

NOTE 1.3:

Sauf cas particulier, afin de ne pas alourdir l'écriture, la variable temps « t » sera omise des vecteurs d'états, de commande et de sortie.

5.1 RAPPEL DU RÉSULTAT DE [KRSTIĆ'95]

Pour les systèmes du type (1.2), les auteurs précités considèrent :

a- Il existe une fonction $\pi(\xi_1, \dots, \xi_{n_\xi})$ de $R^{n_\xi} \rightarrow R$, avec $\pi(0) = 0$, qui stabilise l'origine du sous-système :

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \vdots \\ \dot{\xi}_{n_\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{\xi_1}(\xi_1, \dots, \xi_{n_\xi}) \\ \vdots \\ f_{\xi_{n_\xi}}(\xi_1, \dots, \xi_{n_\xi}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_{\xi_1}(\xi_1, \dots, \xi_{n_\xi}) \\ \vdots \\ g_{\xi_{n_\xi}}(\xi_1, \dots, \xi_{n_\xi}) \end{bmatrix} \pi(\xi_1, \dots, \xi_{n_\xi}) \quad (1.77)$$

b- Il existe une fonction de Lyapunov $V_\xi(\xi_1, \dots, \xi_{n_\xi})$ définie positive et propre telle que $\dot{V}_\xi(\xi_1, \dots, \xi_{n_\xi})$ est définie négative:

$$\dot{V}_\xi = \frac{\partial V_\xi}{\partial \xi} \left[\begin{bmatrix} f_{\xi_1}(\xi_1, \dots, \xi_{n_\xi}) \\ \vdots \\ f_{\xi_{n_\xi}}(\xi_1, \dots, \xi_{n_\xi}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_{\xi_1}(\xi_1, \dots, \xi_{n_\xi}) \\ \vdots \\ g_{\xi_{n_\xi}}(\xi_1, \dots, \xi_{n_\xi}) \end{bmatrix} \pi(\xi_1, \dots, \xi_{n_\xi}) \right] \quad (1.78)$$

Alors, l'origine du sous-système:

$$\begin{cases} \dot{\xi}_j = f_{\xi_j}(\xi_1, \dots, \xi_{n_\xi}) + g_{\xi_j}(\xi_1, \dots, \xi_{n_\xi}) x_1 & \forall j \in \{1, \dots, n_\xi\} \\ \dot{x}_1 = f_1(\xi_1, \dots, \xi_{n_\xi}, x_1) + g_1(\xi_1, \dots, \xi_{n_\xi}, x_1) u^* \end{cases} \quad (1.79)$$

est globalement asymptotiquement stable avec le choix de la commande :

$$u^* = \frac{1}{g_1} \left(-f_1 - \frac{\partial V_\xi}{\partial \xi} \begin{bmatrix} g_{\xi_1} \\ \vdots \\ g_{\xi_n} \end{bmatrix} + \frac{\partial \pi}{\partial \xi} \left[\begin{bmatrix} f_{\xi_1} \\ \vdots \\ f_{\xi_n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_{\xi_1} \\ \vdots \\ g_{\xi_n} \end{bmatrix} x_1 \right] - K(x_1 - \pi) \right), \quad K \in \{\mathfrak{R}^+ / 0\} \quad (1.80)$$

NOTE 1.4:

Dans l'équation (1.80), afin de ne pas alourdir l'écriture, les variables d'états x_i et ξ_i ont été omises des fonctions non linéaires $f_1(\xi_1, \dots, \xi_{n_\xi}, x_1)$, $g_1(\xi_1, \dots, \xi_{n_\xi}, x_1)$, $f_{\xi_j}(\xi_1, \dots, \xi_{n_\xi})$, $g_{\xi_j}(\xi_1, \dots, \xi_{n_\xi})$, $\forall j \in \{1, \dots, n_\xi\}$, $V_\xi(\xi_1, \dots, \xi_{n_\xi})$ et $\pi(\xi_1, \dots, \xi_{n_\xi})$.

La démonstration s'effectue en utilisant la fonction de Lyapunov :

$$V_1(\xi_1(t), \dots, \xi_{n_\xi}(t), x_1(t)) = V_\xi(\xi_1(t), \dots, \xi_{n_\xi}(t)) + \frac{1}{2} [x_1(t) - \pi(\xi_1(t), \dots, \xi_{n_\xi}(t))]^2 \quad (1.81)$$

La stabilisation complète de l'origine du système (1.2) est ensuite obtenue en prolongeant sur les x_i la classique méthode du backstepping.

REMARQUE 1.2 :

Ce résultat qui permet de stabiliser les systèmes de type (1.2) sans hypothèse de minimum de phase, reste cependant théorique, dans la mesure où (sauf cas particulier) les choix de la fonction $\pi(\xi_1(t), \dots, \xi_{n_\xi}(t))$ et de la fonction de Lyapunov associée $V_\xi(\xi_1(t), \dots, \xi_{n_\xi}(t))$ restent des problèmes ouverts.

Les deux paragraphes suivants proposent une solution constructive et systématique dans le cas où la dynamique interne est de dimension 1 et dans le cas où la dynamique interne est sous forme « strict feedback ».

5.2 SUIVI DE TRAJECTOIRE AVEC UNE DYNAMIQUE INTERNE DE DIMENSION 1

Les systèmes étudiés dans ce paragraphe sont du type :

$$\begin{cases} \dot{\xi} &= f_\xi(\xi) + g_\xi(\xi)x_1 \\ \dot{x}_i &= f_i(\xi, x_1, \dots, x_i) + g_i(\xi, x_1, \dots, x_i)x_{i+1} \quad \forall i \in \{1, \dots, n-1\} \\ \dot{x}_n &= f_n(\xi, x_1, \dots, x_n) + g_n(\xi, x_1, \dots, x_n)u \\ y &= h(x_1) \end{cases} \quad (1.82)$$

avec $u(t) \in \mathfrak{R}$, $y(t) \in \mathfrak{R}$, $x(t) = [x_1(t), \dots, x_n(t)] \in R^n$, $\xi(t) \in \mathfrak{R}$. Les fonctions non linéaires $f_i(\xi(t), x_1(t), \dots, x_i(t))$, $g_i(\xi(t), x_1(t), \dots, x_i(t)) \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$ et $f_\xi(\xi(t))$, $g_\xi(\xi(t))$ seront considérées Lipschitziennes sur \mathfrak{R}^{n+1} et \mathfrak{R} . Nous admettrons également que ces fonctions non linéaires ainsi que $y(t)$ soient suffisamment dérivables et que (au besoin après une translation) $f_\xi(0) = 0$. De plus les fonctions non linéaires $g_i(\xi(t), x_1(t), \dots, x_i(t))$ et $g_\xi(\xi(t))$ seront supposées différents de zéro, $\forall x(t) \in \mathfrak{R}^n$, $\forall \xi(t) \in \mathfrak{R}$. Enfin la fonction $h(x_1)$ est supposée bijective.

NOTE 1.5:

Afin de ne pas alourdir l'écriture, les variables d'états x_i et ξ_i seront omises des fonctions non linéaires $f_i(\xi(t), x_1(t), \dots, x_i(t))$, $g_i(\xi(t), x_1(t), \dots, x_i(t))$, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ et $f_\xi(\xi(t))$, $g_\xi(\xi(t))$.

Le système (1.82) s'écrit alors sous la forme suivante:

$$\begin{cases} \dot{\xi} &= f_\xi + g_\xi x_1 \\ \dot{x}_1 &= f_1 + g_1 x_2 \\ \dot{x}_2 &= f_2 + g_2 x_3 \\ \vdots & \\ \dot{x}_{n-1} &= f_{n-1} + g_{n-1} x_n \\ \dot{x}_n &= f_n + g_n u \\ y &= h(x_1) \end{cases} \quad (1.83)$$

Soient une trajectoire x_{1d} au moins C^n et un « générateur de trajectoire » du même type que celui de l'approche n°2 (un résultat presque identique peut être obtenu avec l'approche n°1):

$$\begin{cases} x_{1d} &= h^{-1}(y_d) \\ x_{2d} &= \dot{x}_{1d} - f_1 - g_1 x_2 + x_2 + \dot{u}_{dynr} \\ x_{(i+1)d} &= \dot{x}_{id} - f_i - g_i x_{(i+1)} + x_{(i+1)} + \frac{d^i x_{1d}}{dt^i} \quad \forall i \in \{2, \dots, n-1\} \end{cases} \quad (1.84)$$

où :

$$u_{dynr} = \frac{1}{g_\xi} (-f_\xi + \theta_1 + x_{1d}) - \theta_1 \quad (1.85)$$

avec :

$$\theta_1 = x_1 - u_{dynr} \quad (1.86)$$

La loi de commande est choisie telle que :

si $n = 1$:

$$u = \frac{1}{g_1} \left(-f_1 + \dot{u}_{dynr} - K_0 \xi - K_1 \theta_1 \right) \quad (1.87)$$

si $n \neq 1$:

$$u = \frac{1}{g_n} \left(-f_n + \dot{x}_{nd} - K_0 \xi - K_1 \theta_1 - K_2 e_2 - \dots - K_n e_n + \frac{d^n x_{1d}}{dt^n} \right)$$

Le système dynamique d'erreur s'écrit alors en boucle fermée:

$$\begin{cases} \dot{\xi} &= \theta_1 + x_{1d} \\ \dot{\theta}_1 &= e_2 + \dot{x}_{1d} \\ \dot{e}_2 &= e_3 + \ddot{x}_{1d} \\ \vdots & \vdots \\ \dot{e}_{n-1} &= e_n + \frac{d^{n-1} x_{1d}}{dt^{n-1}} \\ \dot{e}_n &= -K_0 \xi - K_1 \theta_1 - K_2 e_2 - \dots - K_n e_n + \frac{d^n x_{1d}}{dt^n} \end{cases} \quad (1.88)$$

Soit sous la forme matricielle :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \vdots \\ \dot{e}_{n-1} \\ \dot{e}_n \end{bmatrix}}_{\dot{z}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \\ -K_0 & \dots & \dots & \dots & \dots & -K_n \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} \xi \\ \theta_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_{n-1} \\ e_n \end{bmatrix}}_z + \underbrace{\begin{bmatrix} x_{1d} \\ \frac{dx_{1d}}{dt} \\ \vdots \\ \vdots \\ \frac{d^n x_{1d}}{dt^n} \end{bmatrix}}_{\psi(t)} \quad (1.89)$$

Ce système (1.89) est du type $\dot{z} = Az + \psi(t)$ et est donc en fait un système linéaire perturbé par une perturbation bornée $\psi(t)$. Un choix adéquat de K_0, \dots, K_n conduit à une matrice A « Hurwitz » et donc à la stabilité exponentielle globale de l'origine du système non perturbé ce qui permet de conclure que (1.89) est à entrée/état stable et donc que la dynamique interne ξ et les écarts $[\theta_1 \ e_2 \ \dots \ e_n]^T$ sont bornés.

REMARQUE 1.3 :

Si le résultat précédent prouve que la dynamique interne et le vecteur d'erreur sont bornés, sans aucune hypothèse de minimum de phase du système (1.89), il n'indique pas qu'il existe un choix des gains K_0, \dots, K_n tel que l'écart de trajectoire $e_1 \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$.

Cependant, si une trajectoire x_{1d} est choisie telle que $\psi(t) = \begin{bmatrix} x_{1d} & \dot{x}_{1d} & \dots & \frac{d^n x_{1d}}{dt^n} \end{bmatrix}^T \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} [C \ 0 \ \dots \ 0]^T$, avec $C \in \mathfrak{R}$, alors la démonstration suivante prouve que toutes les dérivées des variables d'états tendent vers zéro quand $t \rightarrow +\infty$.

En effet, la solution de (1.89) s'écrit sous la forme :

$$z(t) = e^{tA} z_0 + \int_0^t e^{sA} \psi(t-s) ds \quad (1.90)$$

avec :

$$\psi(t) = \psi_0(t) + v, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \psi_0(t) = 0 \quad \text{et} \quad v = [C \ 0 \ \dots \ 0]^T \quad (1.91)$$

Ainsi, la solution $z(t)$ peut être décomposée comme suit :

$$z(t) = \underbrace{e^{tA} z_0 + \int_0^t e^{sA} \psi_0(t-s) ds}_{z_0(t)} + \underbrace{\int_0^t e^{sA} v ds}_{z_1(t)} \quad (1.92)$$

Puisque $\lim_{t \rightarrow +\infty} \psi_0(t) = 0$ et A est une matrice « Hurwitz », alors $\lim_{t \rightarrow +\infty} z_0(t) = 0$. Le terme $z_1(t)$, quant à lui, ne tend pas forcément vers 0, mais il admet tout de même une limite :

D'après le critère de Cauchy :

$$z_1(t_2) - z_1(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} e^{sA} v ds \quad (1.93)$$

Puisque A est Hurwitz, il existe $\alpha, K > 0$ tel que $\|e^{sA}\| \leq K e^{-\alpha s}$ et donc :

$$\|z_1(t_2) - z_1(t_1)\| \leq K \int_{t_1}^{t_2} e^{-\alpha s} ds = -\frac{K}{\alpha} (e^{-\alpha t_2} - e^{-\alpha t_1}) \quad (1.94)$$

Cette quantité peut être rendue arbitrairement petite pour tout t_1 et t_2 suffisamment grands. Du fait que $z(t)$ est continue et admet une limite en $+\infty$, elle est donc uniformément continue sur l'intervalle $[0, +\infty)$. C'est le cas aussi de l'application $t \rightarrow \psi(t)$. Il s'en suit que $\dot{z}(t) = A z(t) + \psi(t)$ est uniformément continue.

D'après le lemme de Barbalat, l'application $t \rightarrow z(t)$ admet une limite en $+\infty$ et sa dérivée $\dot{z}(t)$ est uniformément continue, par conséquent $\lim_{t \rightarrow +\infty} \dot{z}(t) = 0$.

CAS OÙ $C=0$:

Dans ce cas, $\xi \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$, $\theta_1 \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ et vu que $x_{1d} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$, $u_{dynr} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ et donc $e_1 = \theta_1 + u_{dynr} - x_{1d} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$.

Exemple 1.4 : Soit le système à non minimum de phase:

$$\begin{cases} \dot{\xi} &= \xi^3 + (2 + \sin \xi)x_1 \\ \dot{x}_1 &= \xi x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= u \end{cases} \quad (1.95)$$

Soit la trajectoire de référence choisie $x_{1d} = 10e^{-t} \cdot \cos 10t$ qui vérifie $x_{1d}, \dot{x}_{1d}, \ddot{x}_{1d} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$.

L'application de (1.85) mène au résultat suivant :

$$u_{dynr} = -\xi^3 - x_1(1 + \sin \xi) + x_{1d} \quad (1.96)$$

d'où :

$$\dot{u}_{dynr} = -3\xi^5 - x_1\xi^3 \cos \xi - 6x_1\xi^2 - 2x_1^2 \cos \xi - 3x_1\xi^2 \sin \xi - \frac{x_1^2}{2} \sin 2\xi - \xi \dot{x}_1 - x_1 \xi \sin \xi - x_2 - x_2 \sin \xi + \dot{x}_{1d} \quad (1.97)$$

Le générateur de trajectoire s'écrit alors sous cette forme :

$$\begin{cases} x_{1d} = 10 e^{-t} \cos 10 t \\ x_{2d} = -2\xi \dot{x}_1 - 3\xi^5 - x_1 \xi^3 \cos \xi - 6x_1 \xi^2 - 2x_1^2 \cos \xi - 3x_1 \xi^2 \sin \xi - \frac{x_1^2}{2} \sin 2\xi - x_1 \xi \sin \xi - x_2 - x_2 \sin \xi + 2\dot{x}_{1d} \end{cases} \quad (1.98)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \dot{x}_{2d} &= -2\dot{\xi} \dot{x}_1 - 2\xi \ddot{x}_1 - 15\xi^4 \dot{\xi} - \dot{x}_1 \xi^3 \cos \xi - x_1(3\xi^2 \cos \xi - \xi^3 \sin \xi) \dot{\xi} - 6\dot{x}_1 \xi^2 - 12x_1 \xi \dot{\xi} \\ &\quad - 4x_1 \dot{x}_1 \cos \xi + 2x_1^2 \dot{\xi} \sin \xi - 3\dot{x}_1 \xi^2 \sin \xi - 3x_1(2\xi \sin \xi + \xi^2 \cos \xi) \dot{\xi} - x_1 \dot{x}_1 \sin 2\xi \\ &\quad - x_1^2 \dot{\xi} \cos 2\xi - \dot{x}_1 \xi \sin \xi - x_1(\sin \xi + \xi \cos \xi) \dot{\xi} - \dot{x}_2 - \dot{x}_2 \sin \xi - x_2 \dot{\xi} \cos \xi + 2\ddot{x}_{1d} \end{aligned} \quad (1.99)$$

et la commande s'écrit finalement:

$$u = \frac{1}{g_2(\xi, x_1, x_2)} \left(-f_2(\xi, x_1, x_2) + \dot{x}_{2d} - K_0 \xi - K_1 (x_1 - u_{dynr}) - K_2 e_2 + \ddot{x}_{1d} \right) \quad (1.100)$$

soit :

$$\begin{aligned} u = \frac{1}{2 + \sin \xi} & \left[-2\dot{\xi}x_1 - 2\xi\dot{x}_1 - 15\xi^4 \dot{\xi} - \dot{x}_1 \xi^3 \cos \xi - x_1 (3\xi^2 \cos \xi - \xi^3 \sin \xi) \dot{\xi} - 6\dot{x}_1 \xi^2 \right. \\ & - 12x_1 \xi \dot{\xi} - 4x_1 \dot{x}_1 \cos \xi + 2x_1^2 \dot{\xi} \sin \xi - 3\dot{x}_1 \xi^2 \sin \xi - 3x_1 (2\xi \sin \xi + \xi^2 \cos \xi) \dot{\xi} \\ & - x_1 \dot{x}_1 \sin 2\xi - x_1^2 \dot{\xi} \cos 2\xi - \dot{x}_1 \xi \sin \xi - x_1 (\sin \xi + \xi \cos \xi) \dot{\xi} - x_2 \dot{\xi} \cos \xi + 3\ddot{x}_{1d} \\ & \left. - K_0 \xi - K_1 (x_1 - u_{dynr}) - K_2 (x_2 - x_{2d}) \right] \quad (1.101) \end{aligned}$$

Un premier exemple de simulation (Solveur Adams Ode113 de Matlab) est présenté dans la figure 1.6, avec un choix de gains : $K_0 = 40$, $K_1 = 40$, $K_2 = 20$, et d'états initiaux : $\xi_0 = 2$, $x_{10} = -1$, $x_{20} = 10$. Comme prévu, la stabilisation de la dynamique interne et la convergence asymptotique vers zéro de l'erreur de trajectoire sont obtenues.

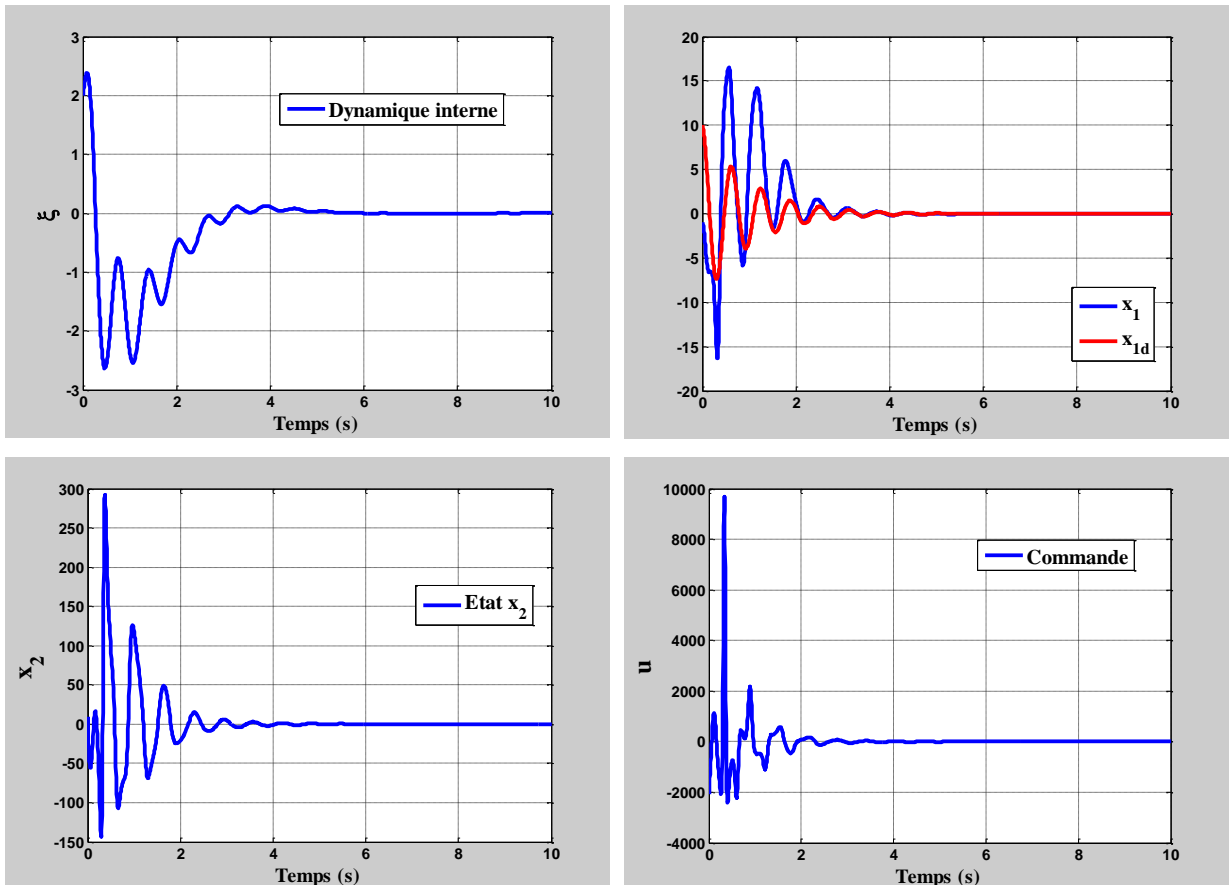


Figure 1.6 : Résultats de simulation de l'exemple 1.4

Un deuxième exemple de simulation est présenté sur la figure 1.7, avec un choix de gains : $K_0 = 5$, $K_1 = 5$, $K_2 = 5$, et d'états initiaux : $\xi_0 = 2$, $x_{10} = -1$, $x_{20} = 10$. Malgré des gains plus faibles, la stabilisation de la dynamique interne et une convergence asymptotique de l'erreur de trajectoire, mais avec écart important en régime transitoire, sont aussi obtenues.

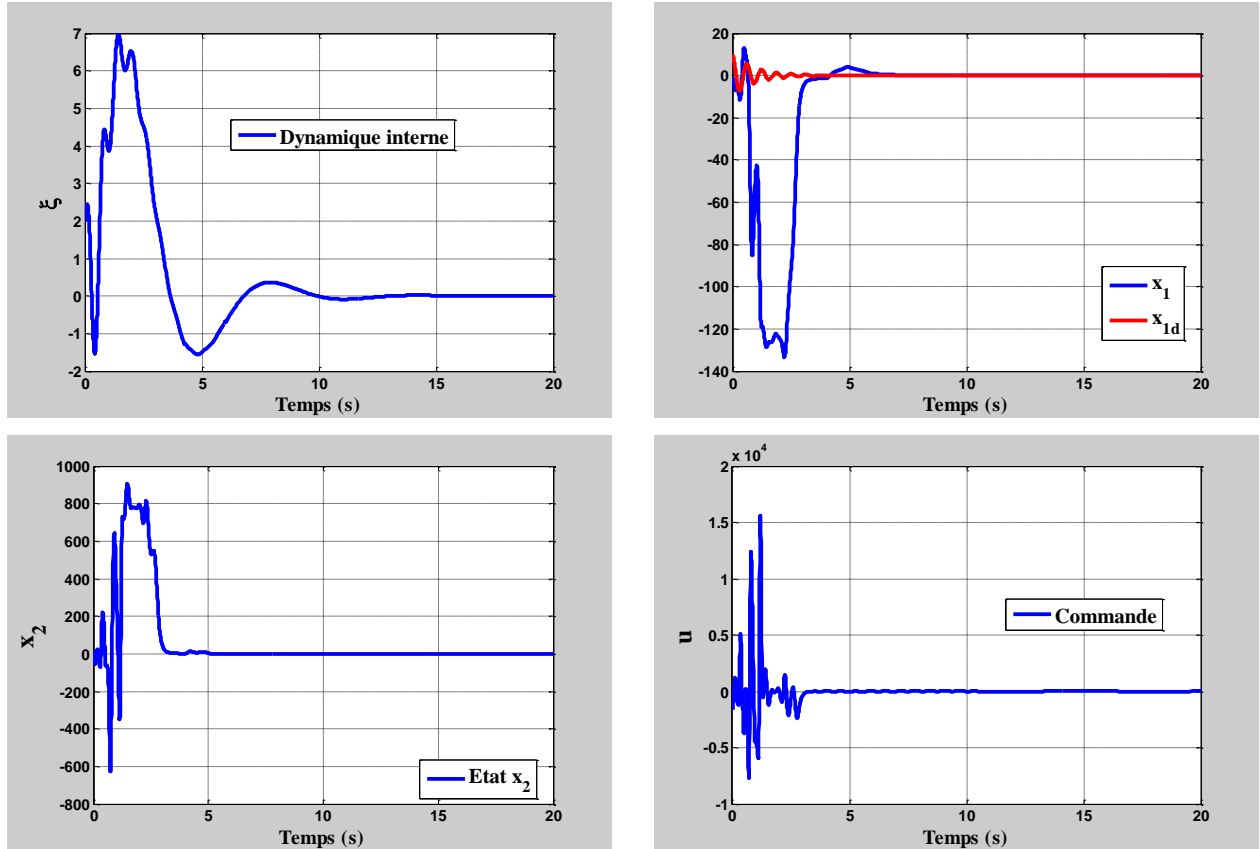


Figure 1.7: Résultats de simulation de l'exemple 1.4

CAS OÙ $C \neq 0$:

Lorsque $t \rightarrow +\infty$ les valeurs finales sont calculées à partir du système (1.89) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_1 \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} -x_{1d} = -C \\ e_2, \dots, e_{n-1} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0 \\ \xi \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} -\frac{K_1}{K_0} \theta_1 = \frac{K_1}{K_0} C \end{array} \right. \quad (1.102)$$

D'où $e_1 = \theta_1 + u_{dynr} - x_{1d}$ conduit lorsque $t \rightarrow +\infty$ à l'équation :

$$e_1 \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \Omega \left(\frac{K_1}{K_0} \right) = - \frac{f_\xi \left(\frac{K_1}{K_0} C \right)}{g_\xi \left(\frac{K_1}{K_0} C \right)} - C \quad (1.103)$$

et donc minimiser e_1 revient à rechercher les gains K_1 et K_0 qui minimisent la fonction

$$\Omega \left(\frac{K_1}{K_0} \right), \text{ sous la contrainte que la matrice } A \text{ du système non perturbé (1.89) soit « Hurwitz ».}$$

Exemple 1.5 :

Soit le système à non minimum de phase:

$$\begin{cases} \dot{\xi} &= -\xi^2 + x_1 \\ \dot{x}_1 &= \xi x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= u \end{cases} \quad (1.104)$$

Soit la trajectoire de référence choisie $x_{1d} = 1 - e^{-t}$ qui vérifie $x_{1d} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 1$ et $\dot{x}_{1d}, \ddot{x}_{1d} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$.

L'application de (1.85) mène au résultat suivant :

$$u_{dynr} = \xi^2 + x_{1d} \quad (1.105)$$

d'où :

$$\dot{u}_{dynr} = -2\xi^3 + 2\xi x_1 + \dot{x}_{1d} \quad (1.106)$$

Le générateur de trajectoire s'écrit alors sous cette forme :

$$\begin{cases} \dot{x}_{1d} &= 1 - e^{-t} \\ \dot{x}_{2d} &= -2\xi^3 + \xi x_1 + 2\dot{x}_{1d} \end{cases} \quad (1.107)$$

Ainsi,

$$\dot{x}_{2d} = 6\xi^4 - 6\xi^2 x_1 + \xi x_2 + x_1^2 + 2\dot{x}_{1d} \quad (1.108)$$

et la commande s'écrit finalement:

$$u = 6\xi^4 - 6\xi^2 x_1 + \xi x_2 + x_1^2 - K_0 \xi - K_1 (x_1 - u_{dynr}) - K_2 (x_2 - x_{2d}) + 3\ddot{x}_{1d} \quad (1.109)$$

La fonction $\Omega\left(\frac{K_1}{K_0}\right)$ est sous la forme :

$$\Omega\left(\frac{K_1}{K_0}\right) = -\frac{f_\xi\left(\frac{K_1}{K_0}C\right)}{g_\xi\left(\frac{K_1}{K_0}C\right)} - C = \left(\frac{K_1}{K_0}C\right)^2 - C \quad (1.110)$$

Un exemple de simulation est présenté sur la figure (1.8), avec un choix de gains : $K_0 = 200$, $K_1 = 200$, $K_2 = 50$ satisfaisant les contraintes $K_0, K_1, K_2 > 0$ et $K_1 K_2 - K_0 > 0$, et des états initiaux : $\xi_0 = 2$, $x_{10} = 0$, $x_{20} = 4$.

Cette simulation montre que tous les états du système (1.104) sont bornés. De plus, ici

$C = x_{1d} = 1$ et donc $\Omega\left(\frac{K_1}{K_0}\right) = \left(\frac{K_1}{K_0}\right)^2 - 1$. Le choix $\frac{K_1}{K_0} = 1$ et $K_2 = 50$ respecte l'inégalité

$K_1 K_2 - K_0 > 0$ et permet de faire tendre vers zéro l'écart de trajectoire.

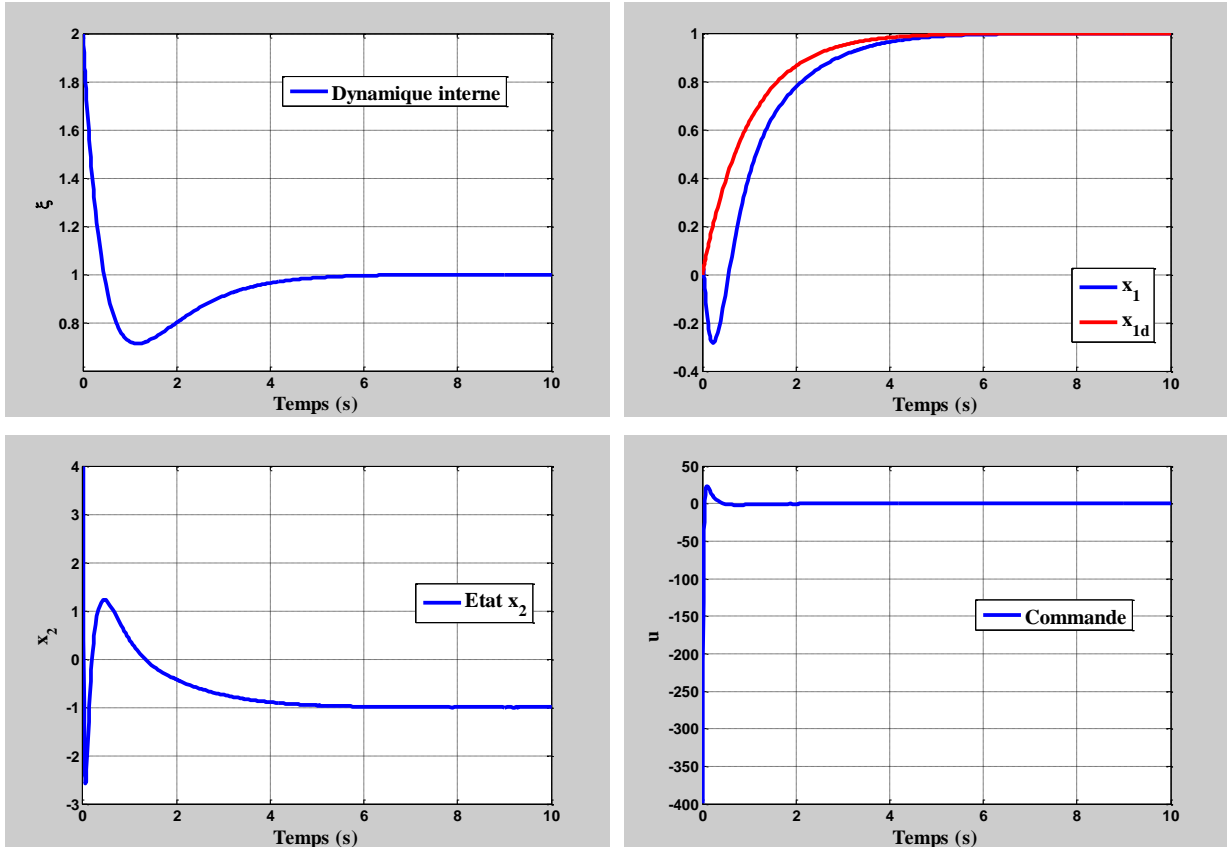


Figure 1.8 : Résultats de simulation de l'exemple 1.5

5.3 SUIVI DE TRAJECTOIRE AVEC UNE DYNAMIQUE INTERNE SOUS FORME « STRICT FEEDBACK »

Ce paragraphe prolonge l'étude précédente aux systèmes monodimensionnels sous forme « strict feedback » dont la dynamique interne est également sous forme « strict feedback ». Cette forme de la dynamique interne est la même que celle proposée par [Andrieu'08] [cf annexe 1]. Soit :

$$\begin{cases} \dot{\xi}_j(t) = f_{\xi_j}(\xi_1(t), \dots, \xi_j(t)) + g_{\xi_j}(\xi_1(t), \dots, \xi_j(t)) \xi_{j+1}(t) & \forall j \in \{1, \dots, \mu-1\} \\ \dot{\xi}_\mu(t) = f_{\xi_\mu}(\xi_1(t), \dots, \xi_\mu(t)) + g_{\xi_\mu}(\xi_1(t), \dots, \xi_\mu(t)) x_1(t) \\ \dot{x}_i(t) = f_i(\xi_1(t), \dots, \xi_\mu(t), x_1(t), \dots, x_i(t)) + g_i(\xi_1(t), \dots, \xi_\mu(t), x_1(t), \dots, x_i(t)) x_{i+1}(t) & \forall i \in \{1, \dots, n-1\} \\ \dot{x}_n(t) = f_n(\xi_1(t), \dots, \xi_\mu(t), x_1(t), \dots, x_n(t)) + g_n(\xi_1(t), \dots, \xi_\mu(t), x_1(t), \dots, x_n(t)) u \\ y(t) = h(x_1(t)) \end{cases} \quad (1.111)$$

avec $\xi = [\xi_1(t), \dots, \xi_\mu(t)] \in R^\mu$ et $x(t) = [x_1(t), \dots, x_n(t)] \in R^n$, l'ensemble des fonctions non linéaires $f_{(\cdot)}$ et $g_{(\cdot)}$ sont Lipschitziennes sur leurs domaines, ces fonctions non linéaires ainsi que $h(x_1(t))$ (bijective) sont suffisamment dérivables. De plus $g_{(\cdot)} \neq 0$, $\forall x(t) \in \mathfrak{R}^n$, $\forall \xi(t) \in \mathfrak{R}^\mu$ et $f_{\xi_j}(0, \dots, 0) = 0$, $\forall j \in \{1, \dots, \mu\}$.

NOTE 1.6:

Comme dans le paragraphe précédent, afin de ne pas alourdir l'écriture, les variables d'états x_i et ξ_i seront omises des fonctions non linéaires $f_i(\xi_1(t), \dots, \xi_\mu(t), x_1(t), \dots, x_i(t))$, $g_i(\xi_1(t), \dots, \xi_\mu(t), x_1(t), \dots, x_i(t))$, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ et $f_{\xi_j}(\xi_1(t), \dots, \xi_j(t))$, $g_{\xi_j}(\xi_1(t), \dots, \xi_j(t))$, $\forall j \in \{1, \dots, \mu\}$.

Le système (1.111) est réécrit alors sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 & = f_{\xi_1} + g_{\xi_1} \xi_2 \\ \vdots & \vdots \\ \dot{\xi}_{\mu-1} & = f_{\xi_{\mu-1}} + g_{\xi_{\mu-1}} \xi_\mu \\ \dot{\xi}_\mu & = f_{\xi_\mu} + g_{\xi_\mu} x_1 \\ \dot{x}_1 & = f_1 + g_1 x_2 \\ \vdots & \vdots \\ \dot{x}_{n-1} & = f_{n-1} + g_{n-1} x_n \\ \dot{x}_n & = f_n + g_n u \\ y & = x_1 \end{cases} \quad (1.112)$$

Soit une trajectoire x_{1d} au moins C^n et le même type de «générateur de trajectoire» que précédemment:

$$\begin{cases} x_{1d} &= h^{-1}(y_d) \\ x_{2d} &= \dot{x}_{1d} - f_1 - g_1 x_2 + x_2 + \dot{u}_{\mu,dynr} \\ x_{(i+1)d} &= \dot{x}_{id} - f_i - g_i x_{(i+1)} + x_{(i+1)} + \frac{d^i x_{1d}}{dt^i} \quad \forall i \in \{2, \dots, n-1\} \end{cases} \quad (1.113)$$

avec :

$$\begin{cases} u_{\mu,dynr} &= \frac{1}{g_{\xi_\mu}} (-f_{\xi_\mu} + \theta_\mu + x_{1d} + \dot{u}_{\mu-1,dynr}) - \theta_\mu \\ u_{\mu-1,dynr} &= \frac{1}{g_{\xi_{\mu-1}}} (-f_{\xi_{\mu-1}} + \theta_{\mu-1} + \dot{u}_{\mu-2,dynr}) - \theta_{\mu-1} \\ \vdots & \vdots \\ u_{1,dynr} &= \frac{1}{g_{\xi_1}} (-f_{\xi_1} + \theta_1) - \theta_1 \end{cases} \quad (1.114)$$

où :

$$\begin{cases} \theta_\mu &= x_1 - u_{\mu,dynr} \\ \theta_{\mu-1} &= \xi_\mu - u_{\mu-1,dynr} \\ \vdots & \vdots \\ \theta_1 &= \xi_2 - u_{1,dynr} \end{cases} \quad (1.115)$$

La loi de commande est choisie telle que :

si $n = 1$:

$$u = \frac{1}{g_1} [-f_1 + \dot{u}_{1,dynr} - K_{\xi_1} \xi_1 - K_{\xi_2} \theta_1] \quad (1.116)$$

si $n \neq 1$:

$$u = \frac{1}{g_n} \left[-f_n + \dot{x}_{nd} - K_{\xi_1} \xi_1 - K_{\xi_2} \theta_1 - \dots - K_{\xi_\mu} \theta_{\mu-1} - K_1 \theta_\mu - K_2 e_2 - \dots - K_n e_n + \frac{d^n x_{1d}}{dt^n} \right]$$

Le système dynamique d'erreur s'écrit alors en boucle fermée:

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 &= \theta_1 \\ \dot{\theta}_i &= \theta_{i+1}, \quad \forall i \in \{1, \dots, \mu-2\} \\ \dot{\theta}_{\mu-1} &= \theta_\mu + x_{1d} \\ \dot{\theta}_\mu &= e_2 + \dot{x}_{1d} \\ \dot{e}_i &= e_{i+1} + \frac{d^i x_{1d}}{dt^i} \quad \forall i \in \{2, \dots, n-1\} \\ \dot{e}_n &= -K_{\xi_1} \xi_1 - K_{\xi_2} \theta_1 - \dots - K_{\xi_\mu} \theta_{\mu-1} - K_1 \theta_\mu - K_2 e_2 - \dots - K_n e_n + \frac{d^n x_{1d}}{dt^n} \end{cases} \quad (1.117)$$

Soit sous la forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\theta}_1 \\ \vdots \\ \dot{\theta}_{\mu-2} \\ \dot{\theta}_{\mu-1} \\ \dot{\theta}_\mu \\ \dot{e}_2 \\ \vdots \\ \dot{e}_{n-1} \\ \dot{e}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & & \dots & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & & & & & \ddots & \ddots \\ 0 & & & \dots & & & 0 & 1 \\ -K_{\xi_1} & -K_{\xi_2} & \dots & -K_{\xi_{\mu-2}} & -K_{\xi_{\mu-1}} & -K_{\xi_\mu} & -K_1 & -K_2 & \dots & -K_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_{\mu-2} \\ \theta_{\mu-1} \\ \theta_\mu \\ e_2 \\ \vdots \\ e_{n-1} \\ e_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{x_{1d}}{dt} \\ \vdots \\ \frac{d^n x_{1d}}{dt^n} \end{bmatrix} \quad (1.118)$$

Comme dans le paragraphe précédent, ce système (1.118) est du type $\dot{x} = Ax + \psi(t)$ soit un système linéaire perturbé par une perturbation bornée $\psi(t)$. Un choix adéquat des gains $K(\cdot)$ conduit à une matrice A « Hurwitz » et donc à la stabilité exponentielle globale de l'origine du système non perturbé ce qui permet de conclure que ce système est à entrée/état stable et donc que la dynamique interne et les écarts de trajectoire sont bornés.

6. CONCLUSION

Dans ce chapitre, plusieurs propositions ont été formulées : une synthèse directe de lois de commande non linéaire en suivi de trajectoire pour les systèmes sous forme « strict feedback » (ou triangulaire) grâce à l'utilisation d'un « générateur de trajectoire » (ou entrées fictives). Deux approches en mono et multi dimensionnel ont été proposées. Pour les deux approches, la stabilité exponentielle du point d'équilibre du système dynamique d'erreur est démontrée dans le cas sans incertitudes. Dans le cas incertain, grâce à des arguments relevant des résultats sur les systèmes à entrée/état stable, il est montré que les écarts de trajectoires restent bornés pour des perturbations bornées.

Dans le cas des systèmes monodimensionnels avec une dynamique interne de dimension 1 ou sous forme « strict feedback », cette dynamique interne et les états du système dynamique d'erreur sont également prouvés bornés. Cette preuve est constructive et obtenue sans aucune hypothèse sur la dynamique des zéros (c'est à dire pour les systèmes à minimum ou à non minimum de phase). Pour certaines classes de trajectoires, la loi de commande obtenue assure la nullité asymptotique de l'erreur.

Plusieurs exemples académiques illustrent les différents résultats obtenus.

Le chapitre suivant fera l'objet de la présentation du système électropneumatique sur lequel nous appliquerons les approches proposées dans ce chapitre.

CHAPITRE 2 :

***ACTIONNEUR ÉLECTROPNEUMATIQUE :
MODÉLISATION, SYNTHÈSE ET EXPÉRIMENTATION
DE COMMANDES NON LINEAIRES***

1. INTRODUCTION

Les actionneurs pneumatiques sont de plus en plus présents dans un très grand nombre de procédés industriels touchant la fabrication, la manutention, la médecine, la robotique, l'armement, etc... En effet, ces systèmes se caractérisent d'une part, par leur faible poids et coût énergétique, d'autre part, par leur facilité d'installation, de maintenance et de transfert de puissance.

Le frein à la pénétration industrielle de ces types d'actionneurs est le fait que la commande de ces systèmes est difficile. En effet, ces derniers présentent de fortes non linéarités essentiellement liées à la compressibilité de l'air et aux lois d'écoulements aux travers des restrictions des modulateurs de puissance. De plus, la difficulté de modélisation du phénomène de frottement sec et la présence d'incertitudes paramétriques compliquent la tâche.

Depuis plus d'une vingtaine d'années, le groupe « Automatique, Commande et Mécatronique » du « Laboratoire Ampère » étudie l'adaptation et la mise en œuvre des commandes « modernes » sur les systèmes à fluide sous pression tant sur le plan des performances (caractéristiques statiques et dynamiques, robustesse, ...) que sur le plan économique (difficulté d'implémentation, facilité ou non de réglage des paramètres du correcteur, nombre de capteurs, ...). Ainsi, l'équipe s'est fixé comme objectif une comparaison sous forme de benchmark global d'un grand nombre de commandes. Ce chapitre décrira donc dans un premier temps les composants du banc d'essai électropneumatique du Laboratoire Ampère qui est utilisé pour cette étude. Ce banc a été développé dans le cadre d'une collaboration avec la société Asco Numatic (ex Asco Joucomatic).

Dans un second temps, le modèle de simulation de l'ensemble du système, sera donné. Il s'agit du modèle qui servira de base ensuite pour la validation des différentes lois de commandes développées. Ce modèle de simulation, n'étant pas exploitable directement pour la synthèse de loi de commande, un modèle non linéaire avec une forme affine en la commande sera donc élaboré. Ensuite, des commandes en position et en pression seront synthétisées.

Avant la mise en œuvre pratique sur le vérin électropneumatique, la co-simulation a été utilisée afin de prérégler les gains et d'étudier la sensibilité des lois de commande à des dynamiques mal modélisées et à des variations paramétriques. Des essais réels ont ensuite été effectués sur le vérin électropneumatique et ont permis de compléter le benchmark de l'ensemble des travaux de l'équipe.

2. DESCRIPTION DU BANC D'ESSAI ELECTROPNEUMATIQUE

Un asservissement électropneumatique de position (figure 2.1) est construit autour d'un actionneur pneumatique entraînant une charge à positionner. Le mouvement du vérin est commandé au moyen d'un modulateur de puissance (servodistributeur) dont l'entrée est le signal de commande élaboré par l'unité de traitement. Des capteurs (position, vitesse, accélération, pression, température,...) délivrent des informations sous forme de signaux électriques à l'unité de traitement. Cette dernière élabore à l'aide d'un algorithme les signaux de commande.

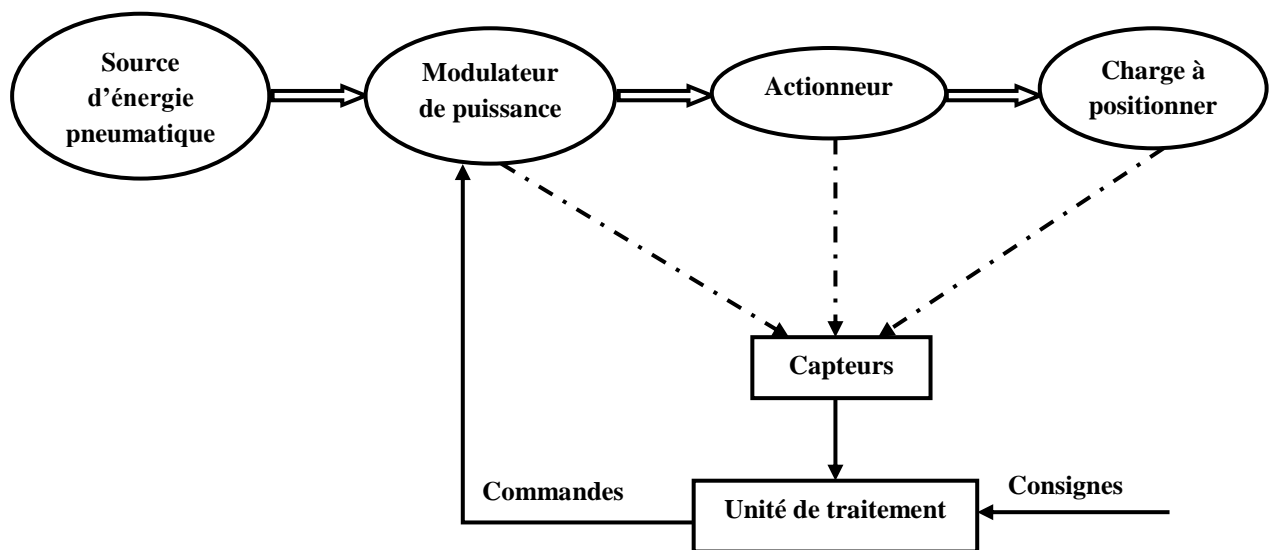


Figure 2. 1 : Principe d'un asservissement électropneumatique de position

Le banc d'essai électropneumatique présent au Centre d'Essais Fluid Power du Laboratoire Ampère (Figure 2.2) est destiné à des applications en mouvements rectilignes d'un actionneur pneumatique : il permet le positionnement d'une charge à masse variable avec la possibilité de choisir le profil des mouvements.

L'actionneur est un vérin double effet, simple tige, de sections asymétriques. La tige du vérin est reliée à un chariot guidé sur rails. Le banc d'essai est alimenté en air comprimé par un compresseur. L'air est filtré et la pression source est réglée manuellement à 7 bars absolus à l'aide d'un détendeur. Deux servodistributeurs (Servotronic de chez Asco Numatic) modulent, en fonction de la commande, les débits d'air fournis aux deux chambres du vérin. Le système est équipé de capteurs afin de mesurer la position et les pressions des deux chambres du vérin. Le traitement des signaux ainsi que le calcul des commandes sont effectués par une carte d'acquisition dSpace DS1104.

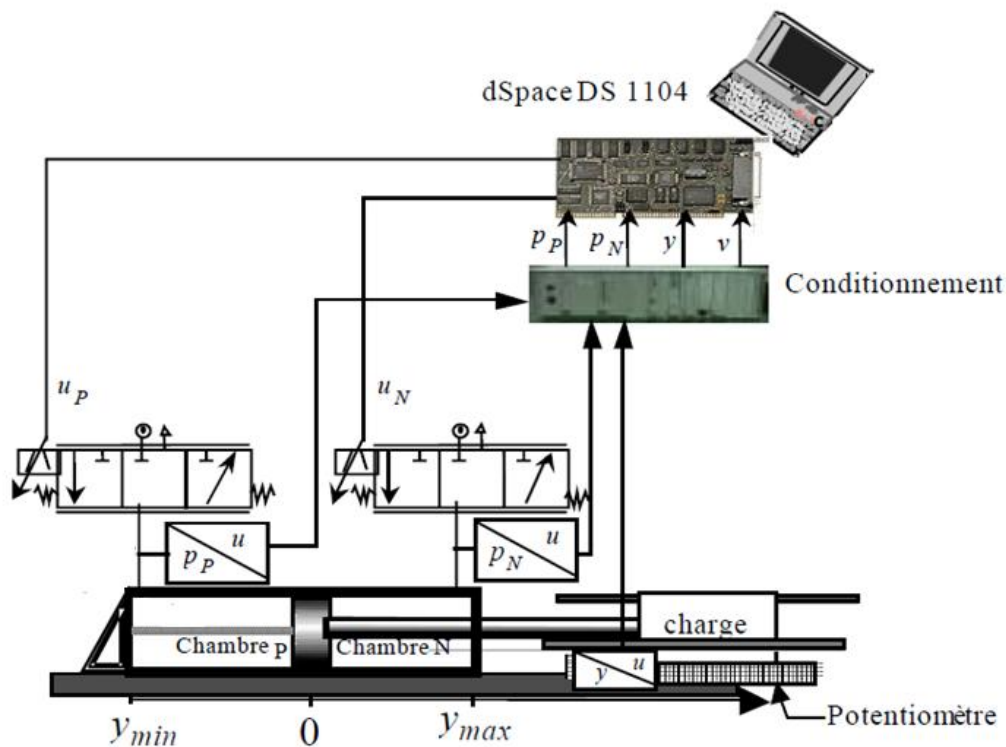


Figure 2. 2 : Schéma de principe du banc d'essai

2.1 LA SOURCE D'ÉNERGIE PNEUMATIQUE

L'air comprimé délivré par un compresseur (Figure 2.3) contient souvent une quantité de vapeur d'eau qui, par condensation, se transforme en eau et se mélange alors aux particules solides issues de la calamine ou de déchets de soudure. Afin d'éviter l'encrassement des orifices du servodistributeur, un pré-filtre puis un filtre sont utilisés afin d'éliminer les impuretés et les gouttes d'eau.

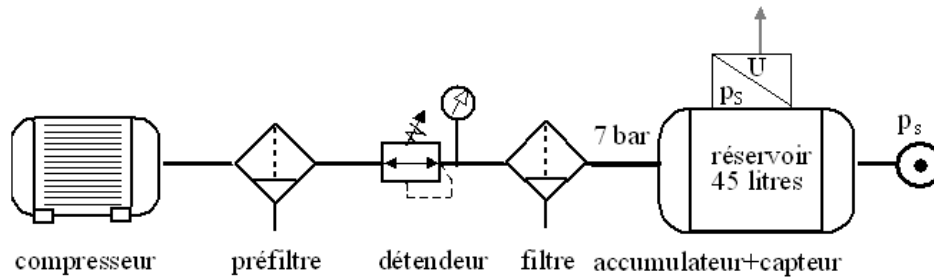


Figure 2. 3 : Alimentation et traitement de l'air

La pression d'alimentation est réglée manuellement à 7 bars absolus à l'aide d'un détendeur. Elle peut être considérée comme constante grâce à la présence d'un réservoir de grand volume (45 litres) par rapport à la cylindrée totale de l'actionneur (environ 0.3 litres). Ses variations ne seront donc pas prises en compte dans le modèle de simulation.

2.2 LES SERVODISTRIBUTEURS

Les servodistributeur permettent de moduler la puissance transmise au système en fonction d'un signal électrique. La société Asco Numatic a commercialisé une génération de servodistributeur Servotronic (figure 2.4) dont la conception, le développement et la mise au point ont été réalisés en partenariat avec le Laboratoire Ampère lors de la thèse de Sylvie SESMAT [Sesmat'96 b].

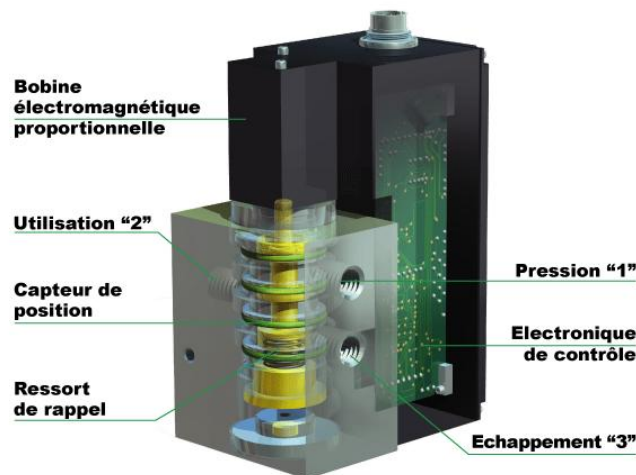


Figure 2. 4 : Servodistributeur Servotronic

L'axe électropneumatique présent au Laboratoire Ampère est équipé de 2 servodistributeur Servotronic en régulation de débit (figure 2.5). Il s'agit de servodistributeur à tiroir 3 orifices/ 3 positions à commande électronique. La position du tiroir peut être modifiée en continu à partir d'un signal de consigne $\pm 10V$ entre les positions extrêmes.

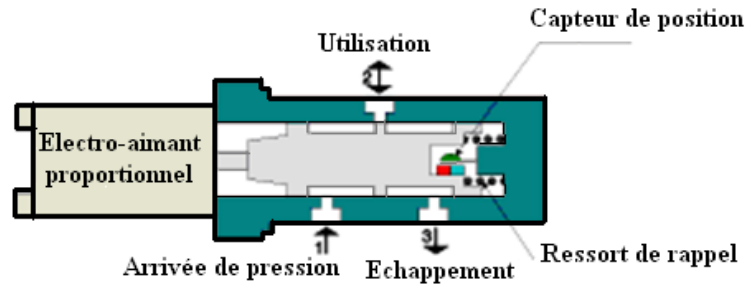


Figure 2. 5 : Schéma de principe de la Servotronic en régulation de débit

Le tiroir est asservi en position à partir d'un capteur de position à effet Hall qui délivre un signal proportionnel à la position du tiroir.

Les principales caractéristiques données par le constructeur sont résumées dans le tableau suivant :

Pression maximale admissible	10 bar
Signal de consigne	$\pm 10V$
Caractéristiques en débit [Norme ISO 6358]	Conductance sonique : $C = 3.29 \times 10^{-8} m^3 \cdot s^{-1} \cdot Pa^{-1}$ Rapport de pression critique : $b=0.44$
Débit pour $P_{Source} = 7 \text{ baret}$ $P_{Utilisation} = P_{Echappement}$	1400 Nl / mn à pleine ouverture $1 \text{ } Nl / mn = 2.13 \times 10^{-5} \text{ } kg / s$
Débit de fuite maximum pour $P_S = 7 \text{ baret } P_U = P_E$	50 Nl / mn (consigne 0 V)
Température du fluide	+5 °C à +40 °C
Bande passante à -3 dB	150 Hz à 50% d'amplitude
Temps de réponse mécanique	5 ms à 50% d'amplitude
Tension d'alimentation	24 V
Courant maximum	1.25 A
Puissance maximum	30 W

Tableau 2.1 : Principales caractéristiques du servodistributeur

La Servotronic est proposée en 2 versions suivant l'état souhaité du composant lors de la coupure de l'alimentation (position « Failsafe »): mise à l'échappement (centre ouvert) ou Interruption de débit (centre fermé). Sur le banc d'essai, les servodistributeurs sont à centre ouvert.

2.3 L'ENSEMBLE VERIN-CHARIOT

La figure 2.6 présente les principaux emplois des vérins pneumatiques en automatisation de production, qui sont le transfert, le serrage, l'élévation, l'indexage, le bridage, le formage, l'arrêt, l'éjection, le pivotement, la rotation et le transfert guidé.

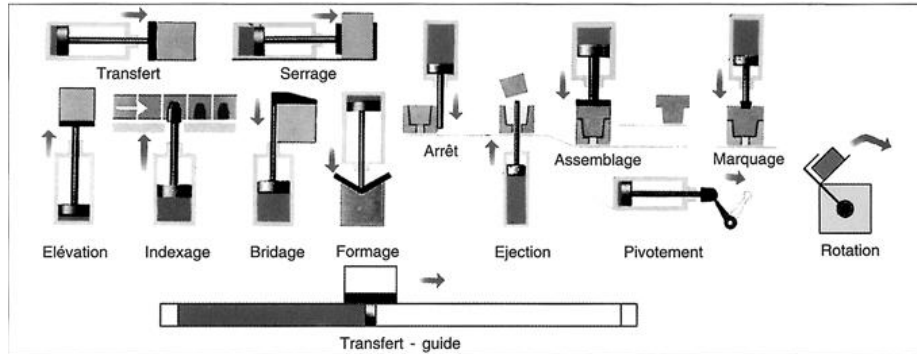


Figure 2. 6 : Utilisations des vérins pneumatiques

Le vérin du banc d'essai électropneumatique utilisé est destiné à déplacer horizontalement un chariot. Il s'agit d'un vérin double effet simple tige (figure 2.7). Sa particularité est la dissymétrie de ses sections. En effet, la surface effective de la chambre est définie comme celle du piston en contact avec l'air sous pression, donc il s'agit de la section du piston diminué de la section de la tige. En général, cette différence de section effective varie de 4 à 20% pour les vérins à simple tige [Kain'73]. Dans notre cas, elle vaut 33%. Le tableau 2.2 résume les principales caractéristiques du vérin utilisé.

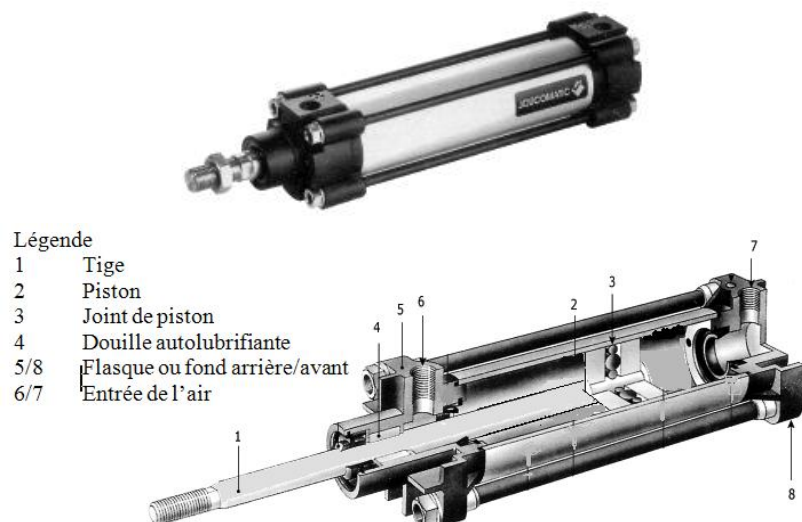


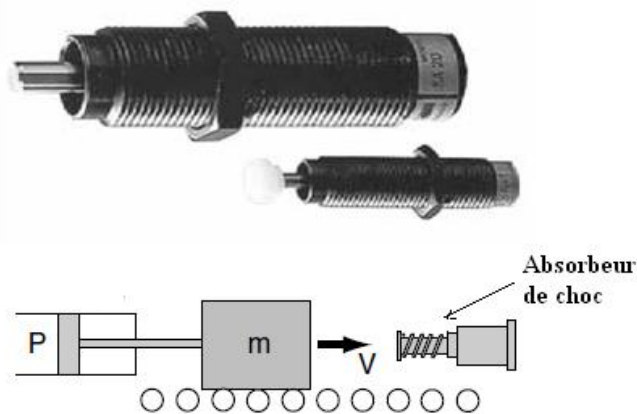
Figure 2. 7 : Vérin pneumatique, double effet, simple tige

Paramètres	Définitions	Valeurs Numériques	Unités
l	Course du vérin	500	mm
M	Masse de la partie mobile (avec chariot non chargé)	17	Kg
S_P	Section utile du vérin chambre P (voir figure 2.2)	$7.2727 \cdot 10^{-4}$	m^2
S_N	Section utile du vérin chambre N (voir figure 2.2)	$4.9009 \cdot 10^{-4}$	m^2
S_{tige}	Section de la tige	$3.1416 \cdot 10^{-4}$	m^2
V_{DP}	Volume mort côté P	$1 \cdot 10^{-5}$	m^3
V_{DN}	Volume mort côté N	$1.2 \cdot 10^{-5}$	m^3

Tableau 2.2 : Principales caractéristiques du vérin

La tige du vérin est reliée à un chariot guidé sur rails. La liaison tige / chariot est une rotule sphérique, considérée comme rigide et indéformable. Le chariot se déplace sur deux glissières cylindriques. La liaison chariot / unité de guidage est assurée par douilles à billes, dans le but de limiter les frottements. La masse totale à vide de la partie mobile correspondant à l'ensemble piston-tige-chariot est de $17 Kg$.

Deux absorbeurs de chocs (figure 2.8) sont aussi disposés en fin de course du vérin afin d'augmenter la durée de vie de l'ensemble du mécanisme.


Figure 2. 8 : Absorbeurs de chocs

3. MODÈLE DE SIMULATION DU SYSTÈME ELECTROPNEUMATIQUE

Le modèle de simulation du système électropneumatique retenu est le résultat de travaux antérieurs réalisés au sein du Laboratoire Ampère (ex LAI) : [Sesmat'96 b] pour la modélisation des servodistributeurs et [Brun'99 b] pour la modélisation des frottements. De ce fait, seuls les résultats nécessaires à la compréhension des calculs postérieurs concernant la commande, seront rappelés dans ce paragraphe.

3.1 MODÉLISATION DU SERVODISTRIBUTEUR

Un modèle d'aide à la conception, faisant apparaître les différents composants mécaniques et électroniques du servodistributeur Servotronic, a été élaboré lors d'une collaboration entre la société Asco Numatic et le Laboratoire Ampère [Sesmat'96 b]. Le modèle du servodistributeur est composé d'une partie dynamique de positionnement du tiroir et d'un modèle statique de l'étage en débit :

- Un asservissement local est réalisé à partir d'un retour d'état en position x , vitesse et accélération. Le comportement dynamique en boucle fermée est représenté par le modèle d'état suivant :

$$\begin{cases} \frac{d\ddot{x}}{dt} = -a_{11}\ddot{x} - a_{12}\dot{x} - a_{13}x + K u_{cal} \\ \frac{d\dot{x}}{dt} = \ddot{x} \\ \frac{dx}{dt} = \dot{x} \end{cases} \quad (2.1)$$

- La partie statique est un tableau de mesures expérimentales [Sesmat'96 a] obtenues en régime stationnaire, donnant la valeur du débit massique q_m en fonction de la pression p d'utilisation et de la commande u (image de la position x).

3.2 MODÉLISATION D'UNE CHAMBRE PNEUMATIQUE À VOLUME VARIABLE

Tous les modèles thermodynamiques d'une chambre de volume variable V [Kellal87] s'appuient sur l'application du premier principe de la thermodynamique et sur l'équation de continuité (conservation de la masse). Les hypothèses classiquement admises pour établir le modèle dynamique d'une chambre sont les suivantes [Jebar'77] : l'air est un gaz parfait, l'énergie cinétique est négligeable dans la chambre, l'écoulement s'effectue sans échange de travail, ni de chaleur avec l'extérieur (adiabatique), l'échange de travail avec le piston est réversible, les conduites de mise sous pression et de mise à l'échappement sont à la même hauteur.

Deux équations d'états régissant l'évolution de la pression p et de la température T dans la chambre sont alors obtenues :

$$\begin{cases} \frac{dp}{dt} = -\gamma \frac{p}{V} \frac{dV}{dt} + \frac{\gamma rT}{V} q_{m_{in}} - \frac{\gamma rT}{V} q_{m_{out}} + \frac{(\gamma-1)}{V} \frac{\delta Q}{dt} \\ \frac{dT}{dt} = -(\gamma-1) \frac{T}{V} \frac{dV}{dt} + \frac{rT}{pV} (\gamma T_s - T) q_{m_{in}} - \frac{rT^2}{pV} (\gamma-1) q_{m_{out}} + (\gamma-1) \frac{T}{pV} \frac{\delta Q}{dt} \end{cases} \quad (2.2)$$

Où δQ est la quantité de chaleur échangée avec la paroi de la chambre et qui s'écrit sous la forme :

$$\frac{\delta Q}{dt} = S h (T_s - T) \quad (2.3)$$

avec :

T_s : température des parois de la chambre égale à la température source sous l'hypothèse d'une inertie thermique importante des parois.

γ : rapport des chaleurs spécifiques à pression et volume constants

S : surface d'échange entre le gaz et les parois de la chambre

h : coefficient de convection entre la paroi et le gaz, sous l'hypothèse que les échanges de chaleur par conduction et la capacité thermique des parois soient négligés.

D'autre part, le vérin du banc d'essai électropneumatique possède deux chambres à volume variable, qui seront notées P et N . Leurs volumes tiennent compte des volumes morts :

$$\begin{cases} V_P(y) = V_P(0) + S_P y \\ V_N(y) = V_N(0) - S_N y \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} V_P(0) = V_{DP} + S_P \frac{l}{2} \\ V_N(0) = V_{DN} + S_N \frac{l}{2} \end{cases} \quad (2.4)$$

Où $V_{DP/DN}$ représente le volume mort dans la chambre P/N .

3.3 MODÉLISATION DE LA PARTIE MÉCANIQUE EN TRANSLATION

D'après la deuxième loi de Newton appliquée au solide en mouvement et sous les hypothèses d'une liaison tige/chariot rigide et d'un solide indéformable, l'équation dynamique du mouvement y de la partie mécanique en translation de l'axe électropneumatique est :

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = v \\ \frac{dv}{dt} = \frac{1}{M} [S_P p_P - S_N p_N - F_{vis}(v) - F_f(v) - F_{ext}] \end{cases} \quad (2.5)$$

Les forces de frottements visqueux F_{vis} sont proportionnelles à la vitesse par un coefficient de viscosité b_v :

$$F_{vis} = b_v v \quad (2.6)$$

Les forces extérieures F_{ext} , considérées constantes, représentent l'action de la pression atmosphérique p_{atmos} sur la partie mobile.

$$F_{ext} = (S_P - S_N)p_{atmos} \quad (2.7)$$

Dans la littérature, plusieurs modèles représentent les forces de frottements secs [Tustin'47][Armstrong'94][Canudas'91]. Le modèle adopté pour l'axe électropneumatique est celui proposé par le logiciel AMESim (que nous avons utilisé pour la simulation) de la société LMS Imagine. Ce modèle est basé sur les travaux de Karnopp et Armstrong-Helouvry [Karnopp'85] [Armstrong'94] :

$$F_f(v) = \begin{cases} F_S \operatorname{sgn}(v) & \text{si } |v| < d_{vit} \\ \left[F_C + (F_S - F_C) \exp\left(-\frac{|v - d_{vit}|}{c}\right) \right] \operatorname{sgn}(v) & \text{si } |v| \geq d_{vit} \end{cases} \quad (2.8)$$

où la fonction « sign » est définie comme suit :

$$\begin{cases} \text{si } v > 0 & \operatorname{sgn}(v) = 1 \\ \text{si } v = 0 & -1 \leq \operatorname{sgn}(v) \leq 1 \\ \text{si } v < 0 & \operatorname{sgn}(v) = -1 \end{cases} \quad (2.9)$$

F_C représente les forces de frottement de Coulomb, F_S les forces de frottement de Stiction et c le coefficient de friction. Les valeurs retenues pour la simulation sont : $F_S = 40 \text{ N}$, $F_C = 30 \text{ N}$, $c = 0.01 \text{ m/s}$ et $d_{vit} = 10^{-6} \text{ m/s}$. La figure 2.9 représente la loi d'évolution du modèle des frottements secs retenu pour la simulation :

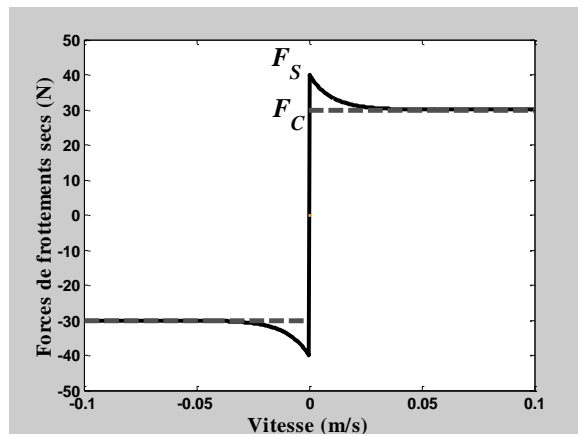


Figure 2. 9 : Loi d'évolution du modèle de simulation des frottements secs

3.4 MODÈLE DE SIMULATION RETENU

Ainsi, le modèle global de l'axe électropneumatique retenu pour la simulation est présenté par le système d'équation suivant :

$$\begin{aligned}
 \left. \begin{aligned}
 \frac{d\ddot{x}_P}{dt} &= -a_{11}\ddot{x}_P - a_{12}\dot{x}_P - a_{13}x_P + K u_{Pcal} \\
 \frac{d\dot{x}_P}{dt} &= \ddot{x}_P \\
 \frac{dx_P}{dt} &= \dot{x}_P \\
 u_P &= \frac{a_{13}}{K} x_P
 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Servo-} \\ \text{distributeur} \\ \text{chambre } P \end{array} \\
 \\
 \left. \begin{aligned}
 \frac{d\ddot{x}_N}{dt} &= -a_{11}\ddot{x}_N - a_{12}\dot{x}_N - a_{13}x_N + K u_{Ncal} \\
 \frac{d\dot{x}_N}{dt} &= \ddot{x}_N \\
 \frac{dx_N}{dt} &= \dot{x}_N \\
 u_N &= \frac{a_{13}}{K} x_N
 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Servo-} \\ \text{distributeur} \\ \text{chambre } N \end{array} \\
 \\
 \left. \begin{aligned}
 \frac{dp_P}{dt} &= -\gamma \frac{S_P p_P}{V_P(y)} v + \frac{\gamma r T_P}{V_P(y)} q_{m_{inP}} - \frac{\gamma r T_P}{V_P(y)} q_{m_{outP}} + \frac{(\gamma-1) \delta Q_P}{V_P(y) dt} \\
 \frac{dT_P}{dt} &= \left[-\frac{S_P T_P}{V_P(y)} v - \frac{r T_P^2 q_{m_{outP}}}{p_P V_P(y)} + \frac{T_P}{p_P V_P(y)} \frac{\delta Q_P}{dt} \right] (\gamma-1) + \frac{r T_P}{p_P V_P(y)} (\gamma T_s - T_P) q_{m_{inP}}
 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Chambre} \\ \text{enthalpique} \\ P \end{array} \\
 \\
 \left. \begin{aligned}
 \frac{dp_N}{dt} &= \gamma \frac{S_N p_N}{V_N(y)} v + \frac{\gamma r T_N}{V_N(y)} q_{m_{inN}} - \frac{\gamma r T_N}{V_N(y)} q_{m_{outN}} + \frac{(\gamma-1) \delta Q_N}{V_N(y) dt} \\
 \frac{dT_N}{dt} &= \left[\frac{S_N T_N}{V_N(y)} v - \frac{r T_N^2 q_{m_{outN}}}{p_N V_N(y)} + \frac{T_N}{p_N V_N(y)} \frac{\delta Q_N}{dt} \right] (\gamma-1) + \frac{r T_N}{p_N V_N(y)} (\gamma T_s - T_N) q_{m_{inN}}
 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Chambre} \\ \text{enthalpique} \\ N \end{array} \\
 \\
 \left. \begin{aligned}
 \frac{dy}{dt} &= v \\
 \frac{dv}{dt} &= \frac{1}{M} [S_P p_P - S_N p_N - b_v v - F_f(v) - F_{ext}]
 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Equations} \\ \text{mécaniques} \end{array}
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

Ce modèle de simulation servira à tester et régler les gains des différentes lois de commande, avant l'implantation sur le procédé expérimental.

4. LA CO-SIMULATION

Avant la mise en œuvre pratique des commandes sur le vérin électropneumatique, il a fallu valider sur le modèle de simulation les lois de commande développées. Comme indiqué au §3, le modèle de frottement sec utilisé est celui de AMESim. Ce logiciel métier ne se prêtant que très mal à l'implantation de loi de commande non linéaire, le recours à la co-simulation était nécessaire.

La figure (2.10) représente le principe de la co-simulation entre Simulink et AMESim pour un système en boucle fermée classique. Pour un même modèle, plusieurs lois de commande peuvent être appliquées et comparées.

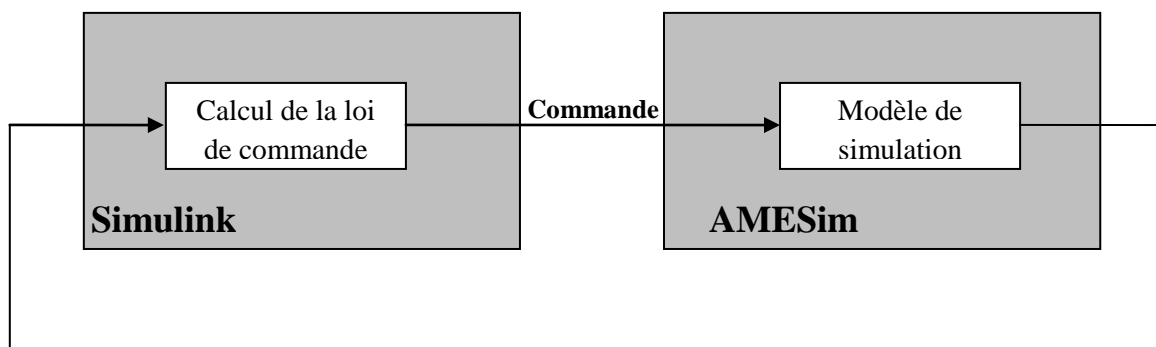


Figure 2.10 : Principe de la co-simulation Simulink / AMESim

L'un des avantages également important de cette stratégie est de permettre le codage immédiat sur DSP ou microcontrôleur dans le cas de l'utilisation d'une carte dSpace via l'outil Real Time Workshop et Real Time Interface. De plus, cela est vrai pour tout autre type de carte d'acquisition compatible XPC Target (Toolbox Matlab).

Pour un tel protocole de communication, AMESim utilise une S-Function spécifique qui sera le lien entre les deux logiciels (figure 2.11). Cette dernière fonction est insérée dans la boucle de commande de Simulink (figure 2.12) où elle représente le modèle physique.

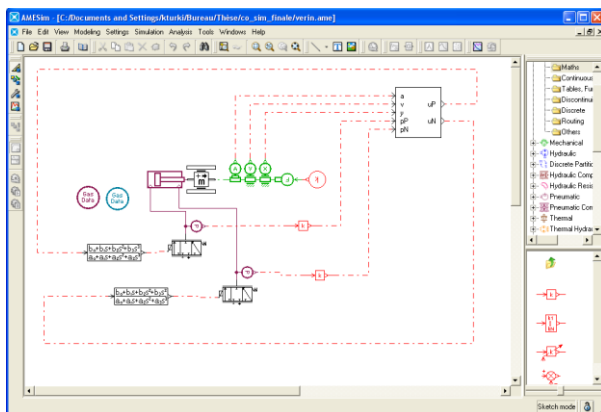


Figure 2.11 : Modèle AMESim

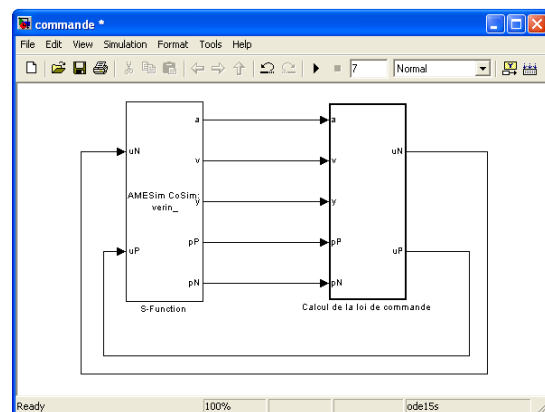


Figure 2.12 : Modèle Simulink

5. DU MODÈLE DE SIMULATION AU MODELE DE COMMANDE

Afin d'obtenir une loi de commande non linéaire explicite, il est nécessaire d'avoir un modèle qui soit affine en la commande. Autrement dit, avoir un modèle dont la dérivée temporelle de l'état est linéairement dépendante des variables de commande. A la vue du modèle global de simulation (2.10) développé au paragraphe précédent, il est évident que ce n'est pas le cas. Dans ce but certaines hypothèses vont être formulées et une approximation des caractéristiques bidimensionnelles (cf. figure 2.13) du servodistributeur sera établie.

5.1 HYPOTHÈSES

Des modèles simplifiés issus d'hypothèses sur la quantité de chaleur échangée ont été proposés afin d'identifier le coefficient h d'échange convectif entre la paroi et le gaz. De nombreux auteurs ont utilisé une loi d'évolution théorique du fluide pour établir le modèle d'une chambre :

- Burrows [Burrows'72] a utilisé un modèle adiabatique réversible (isentropique)
- Zalmanzon [Zalmanzon'65] a adopté un modèle isotherme
- Andersen [Andersen'67] et Chitty et Lambert [Chitty'76] ont choisi un modèle polytropique.

En utilisant une intégrale première construite à partir des équations différentielles (2.2), Bouhal [Bouhal'94] a montré qu'il y a trois modèles (2.12), (2.13) et (2.14) ne comportant qu'une seule équation différentielle et une relation algébrique de la forme :

$$T^k p^{1-k} = \text{constant} \quad (2.11)$$

Cas **isotherme** ($k=1$)

$$\frac{dp}{dt} = \frac{p}{V} \frac{dV}{dt} + \frac{rT}{V} (q_{m_{in}} - q_{m_{out}}) \quad (2.12)$$

Cas **isentropique** (adiabatique réversible : $\delta Q = 0$) et ($k = \gamma = 1.4$)

$$\begin{cases} \frac{dp}{dt} &= -\gamma \frac{p}{V} \frac{dV}{dt} + \frac{\gamma rT}{V} (q_{m_{in}} - q_{m_{out}}) \\ T^\gamma p^{1-\gamma} &= T_0^\gamma p_0^{1-\gamma} \end{cases} \quad (2.13)$$

Cas **polytropique** ($1 < k < \gamma$)

$$\begin{cases} \frac{dp}{dt} &= -k \frac{p}{V} \frac{dV}{dt} + \frac{k rT}{V} (q_{m_{in}} - q_{m_{out}}) \\ T^k p^{1-k} &= T_0^k p_0^{1-k} \end{cases} \quad (2.14)$$

Le modèle retenu pour la commande est le modèle polytropique (2.14), qui peut être vu comme un modèle moyen pour une grande plage de fonctionnement. Le coefficient polytropique k a été ajusté expérimentalement. Il est compris entre la valeur d'une loi isotherme ($k = 1$) et la valeur d'une loi isentropique ($k = \gamma = 1.4$). La valeur retenue pour les deux chambres du vérin est $k = 1.2$.

De plus, il a été constaté [Kain'73] que les variations de température dans les deux chambres P et N du vérin peuvent être négligées devant la température source T_s . Ce modèle, bien que simpliste, est en général suffisant pour les besoins de commande, ainsi cette hypothèse sera retenue:

$$T_P = T_N = T_S = T \quad (2.15)$$

Au modèle de simulation (2.10) obtenu précédemment, correspondent deux échelles de temps différentes. En effet, la dynamique rapide du positionnement du tiroir du servodistributeur peut être négligée devant la dynamique lente de positionnement du vérin [Bouhal'94].

Enfin, les forces de frottements seront limitées aux forces de frottement visqueux. Cette hypothèse qui néglige les frottements secs $F_f(v)$ ne s'explique pas uniquement du fait que tous les modèles de frottement ne sont que C^0 et donc ne permettent pas d'appliquer les résultats théoriques du chapitre 1 qui fait l'hypothèse de champs de vecteurs suffisamment dérivable voire C^∞ . Certes l'approximation de $F_s \operatorname{sgn}(v)$ par la fonction $F_s \frac{2}{\Pi} \arctan(\sigma v)$ est possible, mais les paramètres F_s et σ sont d'une part difficile à obtenir et d'autre part présentent des fluctuations importantes avec l'environnement du vérin et la durée des essais.

En utilisant ces quatre hypothèses simplificatrices, le modèle (2.10) devient :

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} &= v \\ \frac{dv}{dt} &= \frac{1}{M} [S_P p_P - S_N p_N - b_v v - F_{ext}] \\ \frac{dp_P}{dt} &= \frac{k r T}{V_P(y)} \left[q_{m_P}(u_P, p_P) - \frac{S_P}{r T} p_P v \right] \\ \frac{dp_N}{dt} &= \frac{k r T}{V_N(y)} \left[q_{m_N}(u_N, p_N) + \frac{S_N}{r T} p_N v \right] \end{cases} \quad (2.16)$$

Dans le modèle (2.16), la tension de commande u du servodistributeur intervient de manière non linéaire via les débits massiques $q_{m_P}(u_P, p_P)$ et $q_{m_N}(u_N, p_N)$ entrants et sortants des chambres du vérin. L'objectif est donc d'établir une approximation des caractéristiques bidimensionnelles du servodistributeur, qui permettra de mettre le modèle sous la forme affine en la commande.

5.2 APPROXIMATION DES CARACTÉRISTIQUES BIDIMENSIONNELLES DU SERVODISTRIBUTEUR

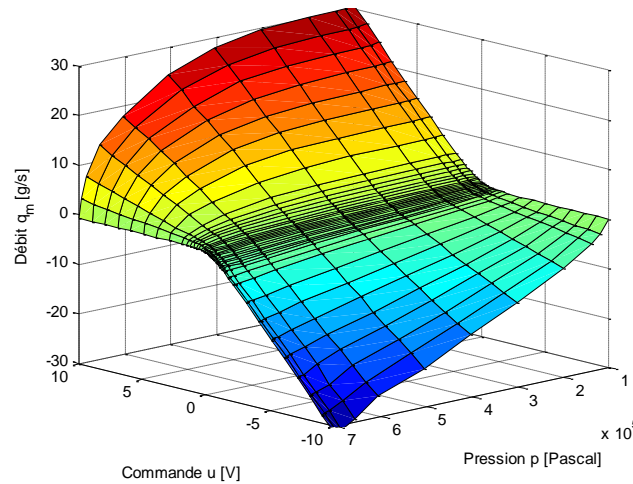


Figure 2. 13 : Caractéristique bidimensionnelle globale statique

Les caractéristiques statiques $q_m(u_{(.)}, p_{(.)})$ (cf. figure 2.13) issues des mesures expérimentales ont été approximées au sens des moindres carrés par des fonctions φ et ψ affines en commande [Belgharbi'99] :

$$q_m(u_{(.)}, p_{(.)}) = \varphi(p_{(.)}) + \psi(p_{(.)}, \text{sgn}(u_{(.)}))u_{(.)} \quad (2.17)$$

$\varphi(p_{(.)})$ en Kg/s représente le débit de fuite dans le servodistributeur. $\psi(p_{(.)}, \text{sgn}(u_{(.)}))$ en $Kg/s/V$ représente en fait 2 fonctions : une fonction pour l'admission ($u_{(.)} > 0$) et une autre pour l'échappement ($u_{(.)} < 0$).

Les deux équations de ces approximations sont données par (2.18) où p représente la pression en bar:

$$\varphi(p_{(.)}) = \sum_{i=0}^n a_i p_{(.)}^i, \quad \psi(p_{(.)}, u_{(.)} > 0) = \sum_{i=0}^n b_i p_{(.)}^i \quad \text{et} \quad \psi(p_{(.)}, u_{(.)} < 0) = \sum_{i=0}^n c_i p_{(.)}^i \quad (2.18)$$

Les figures (2.14a) et (2.14b) représentent l'évolution de ces fonctions polynomiales. Notons que d'une part le débit de fuite $\phi(p_{(.)})$ et les fonctions $\psi(p_{(.)}, \text{sgn}(u_{(.)}))$ sont bornés sur le domaine physique d'évolution des pressions $p_{(.)} \in [1 \ 7](bar)$. D'autre part les fonctions $\psi(p_{(.)}, \text{sgn}(u_{(.)}))$ sont strictement positives, $\forall p_{(.)} \in [1 \ 7](bar)$.

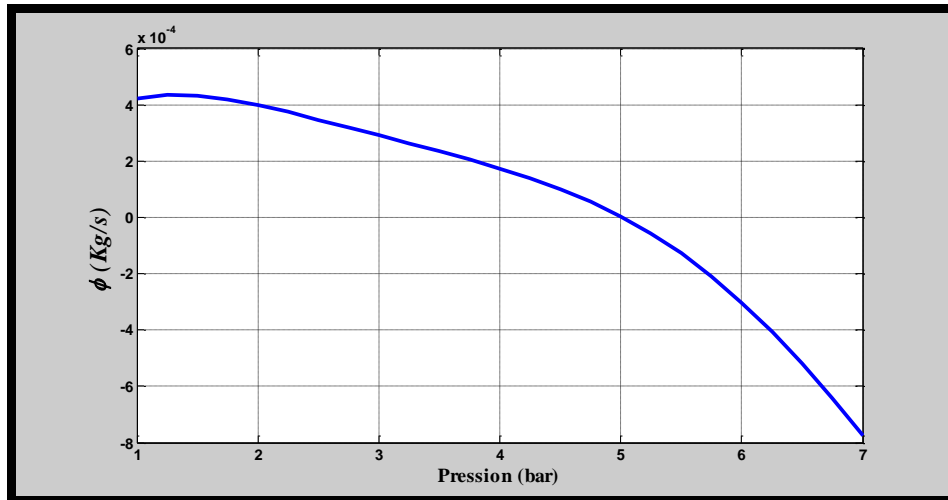


Figure 2.14a : La fonction $\phi(p)$

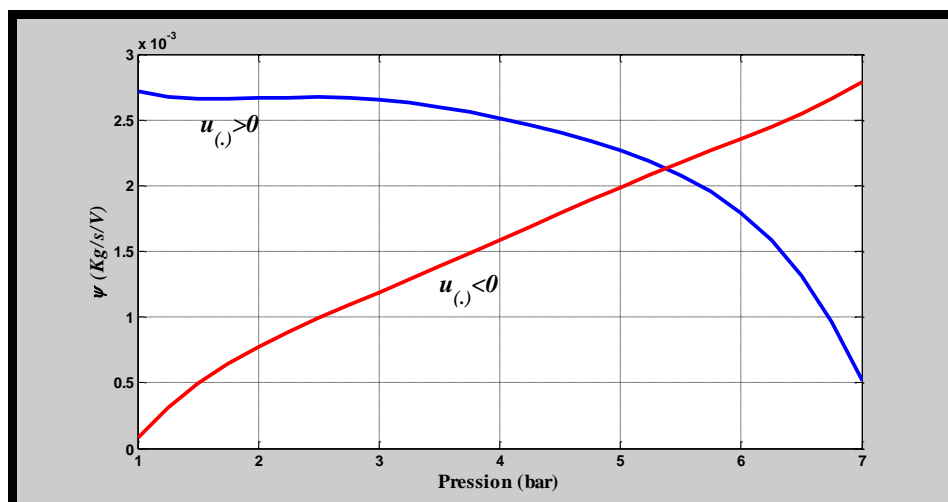


Figure 2.14b : Les fonctions $\psi(p, u > 0)$ et $\psi(p, u < 0)$

Les erreurs sur les débits massiques engendrées par ces approximations sont très faibles. Elles sont inférieures à $0.5 \cdot 10^{-3} \text{ Kg/s}$ [Belgharbi'99].

Le modèle (2.16) est alors remplacé par :

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} &= v \\ \frac{dv}{dt} &= \frac{1}{M} [S_P p_P - S_N p_N - b_v v - F_{ext}] \\ \frac{dp_P}{dt} &= \frac{k r T}{V_P(y)} \left[\varphi(p_P) - \frac{S_P}{r T} p_P v \right] + \frac{k r T}{V_P(y)} \psi(p_P, \text{sgn}(u_P)) u_P \\ \frac{dp_N}{dt} &= \frac{k r T}{V_N(y)} \left[\varphi(p_N) + \frac{S_N}{r T} p_N v \right] + \frac{k r T}{V_N(y)} \psi(p_N, \text{sgn}(u_N)) u_N \end{cases} \quad (2.19)$$

$$\text{Le domaine physique } D \subset \mathfrak{R}^4 = \begin{bmatrix} -0.25 \leq y \leq 0.25 \\ -2.7 \leq v \leq 2.7^* \\ 1 \leq p_P \leq 7 \\ 1 \leq p_N \leq 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ m/s \\ bar \\ bar \end{bmatrix}$$

* Le domaine physique de la vitesse a été démontré dans [Smaoui'04].

Cependant, bien que le modèle (2.19) soit sous la forme affine en la commande, il n'est pas sous la forme multidimensionnelle « semi-strict feedback » (1.7) définie dans le chapitre 1. Le paragraphe fera l'objet de cette mise en forme.

Note 2.1 : Afin de ne pas alourdir les écritures, les fonctions du débit massique seront notées, dans tout ce qui

$$\text{suit, de la manière suivante : } \begin{cases} \varphi(p_P) &= \varphi_P \\ \varphi(p_N) &= \varphi_N \\ \psi(p_P, \text{sgn}(u_P)) &= \psi_P \\ \psi(p_N, \text{sgn}(u_N)) &= \psi_N \end{cases}$$

5.3 MISE SOUS LA FORME « SEMI STRICT FEEDBACK » DU MODÈLE DE COMMANDE

En utilisant les coordonnées $[y \ L_f y \ L_f^2 y \ p_p]^T$ ce modèle de commande (2.19) peut s'écrire sous la forme « semi strict feedback » (1.7) suivante :

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = v \\ \frac{dv}{dt} = a \\ \frac{da}{dt} = \frac{S_p k r T}{M V_p(y)} \left[\varphi_p - \frac{S_p}{r T} p_p v \right] - \frac{S_N k r T}{M V_N(y)} \left[\varphi_N + \frac{S_N}{r T} p_N v \right] - \frac{b_v}{M} a + \frac{S_p k r T}{M V_p(y)} \psi_p u_p - \frac{S_N k r T}{M V_N(y)} \psi_N u_N \\ \frac{dp_p}{dt} = \frac{k r T}{V_p(y)} \left[\varphi_p - \frac{S_p}{r T} p_p v \right] + \frac{k r T}{V_p(y)} \psi_p u_p \end{cases} \quad (2.20)$$

avec :

$$p_N = \frac{1}{S_N} (S_p p_p - b_v v - F_{ext} - M a) \quad (2.21)$$

Le modèle (2.20) est bien sous la forme multidimensionnelle « semi strict feedback » (1.7) décrite dans le premier chapitre:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1) + g_1(x_1) x_2 \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) + g_2(x_1, x_2) x_3 \\ \dot{x}_3 = f_3(x_1, x_2, x_3, x_4) + g_{3,1}(x_1, x_2, x_3, x_4) u_1 + g_{3,2}(x_1, x_2, x_3, x_4) u_2 \\ \dot{x}_4 = f_4(x_1, x_2, x_3, x_4) + g_{4,1}(x_1, x_2, x_3, x_4) u_1 \\ y = [x_1 \ x_4] \end{cases} \quad (2.22)$$

avec $[x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T = [y \ v \ a \ p_p]^T$, $[u_1 \ u_2]^T = [u_p \ u_N]^T$ et :

$$\begin{cases} f_1(x_1) = f_2(x_1, x_2) = 0 \\ g_1(x_1) = g_2(x_1, x_2) = 1 \\ f_3(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{S_p k r T}{M V_p(x_1)} \left[\varphi_p(x_4) - \frac{S_p}{r T} x_4 x_2 \right] - \\ \frac{S_N k r T}{M V_N(x_1)} \left[\varphi_N(x_2, x_3, x_4) + \frac{S_N}{r T} (S_p x_4 - b_v x_2 - F_{ext} - M x_3) x_2 \right] - \frac{b_v}{M} x_3 \\ g_{3,1}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{S_p k r T}{M V_p(x_1)} \psi_p(x_4) \\ g_{3,2}(x_1, x_2, x_3, x_4) = - \frac{S_N k r T}{M V_N(x_1)} \psi_N(x_2, x_3, x_4) \\ f_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{k r T}{V_p(x_1)} \left[\varphi_p(x_4) - \frac{S_p}{r T} x_4 x_2 \right] \\ g_{4,1}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{k r T}{V_p(x_1)} \psi_p(x_4) \end{cases} \quad (2.23)$$

6. COMMANDES EN POSITION – PRESSION DU VÉRIN

Le but de la commande est un suivi de trajectoire en position et en pression du vérin. Le degré relatif de la position étant égal à 3, la fonction de la trajectoire désirée y_d de la position doit donc être au moins trois fois dérivable. Il est alors possible de choisir une fonction polynomiale d'ordre 3. Toutefois cette trajectoire doit satisfaire certains critères physiques : la position initiale et finale, la vitesse initiale, finale et maximale. Ainsi, la fonction de la trajectoire désirée y_d de la position est définie par des fonctions polynomiales d'ordre 5 pour les phases dynamiques (figure 2.15). Ces trajectoires sont le résultat de travaux antérieurs [Cerezo'01] réalisés au laboratoire Ampère (ex LAI). Elles ont été obtenues en optimisant la consommation de l'énergie des servodistributeurs.

De même, le degré relatif de la pression étant égal à 1, la trajectoire désirée p_d de la pression doit donc être au moins une fois dérivable. Toutefois cette trajectoire doit satisfaire certains critères physiques en relation avec la trajectoire de la position désirée : durant le régime statique la pression désirée doit être constante, un déplacement positif correspond à une augmentation de la pression et un déplacement négatif correspond à une diminution de la pression. En respectant ces critères et en tenant en compte du domaine physique, des conditions initiales et finales des pressions, la trajectoire désirée (figure 2.16) est un polynôme d'ordre 3 durant le régime dynamique.

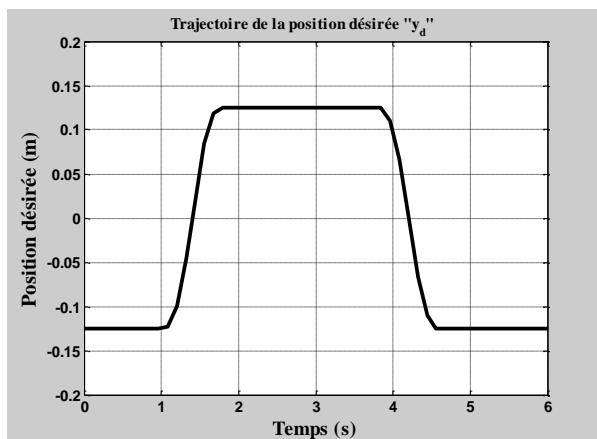


Figure 2.15 : Trajectoire de la position désirée

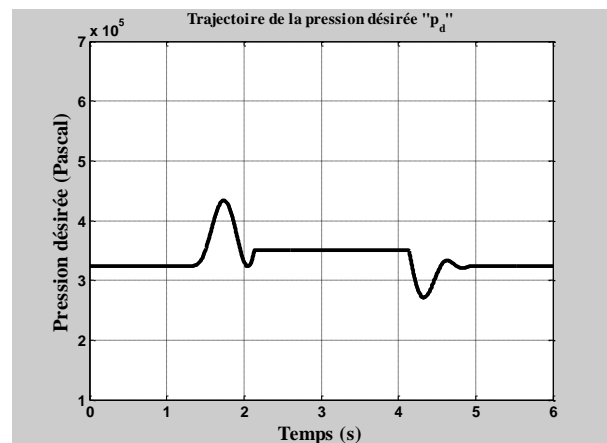


Figure 2.16 : Trajectoire de la pression désirée

Dans ce paragraphe sera donnée la loi de commande, en suivi de trajectoire en position et en pression du vérin électropneumatique, par les deux approches présentées au chapitre 1. Dans un premier temps le cas sans incertitudes sera étudié, ensuite des incertitudes au niveau du débit massique et des variations au niveau de la masse seront prises en compte.

Les résultats expérimentaux obtenus avec l'implantation sur le vérin électropneumatique des lois de commande développées seront présentés sur 2 cycles complets de fonctionnement permettant d'observer les régimes statiques en deux positions d'équilibre ainsi que la sortie et l'entrée de la tige. Ils sont proposés suite à une analyse de $n_e = 20$ essais expérimentaux mais afin de limiter le nombre de courbes et de ne pas fausser l'étude comparative entre les lois de commandes, seuls les résultats qualifiés de moyens seront présentés. Chaque analyse portera sur les mêmes critères que le benchmark proposé dans les thèses antérieures [Brun'99 b][Smaoui'04] du laboratoire : l'erreur maximale et moyenne en suivi de position et en pression, l'écart type en position et en pression, la complexité à synthétiser la commande, la complexité à régler les gains, la réticence, le nombre de capteurs utilisés et la stabilité asymptotique ou exponentielle globale.

L'écart type e_{type} des erreurs des trajectoires, « image » de la répétabilité des résultats est donné et calculé par la relation :

$$e_{type} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n_e} (|e_i| - e_{moy})^2}{n_e - 1}}$$

où e_{moy} désigne l'erreur moyenne et est définie comme suit :

$$e_{moy} = \frac{\sum_{i=1}^{n_e} |e_i|}{n_e} .$$

6.1 SYNTHÈSE ET EXPÉRIMENTATION DE LA COMMANDE EN POSITION-PRESSION SANS PRISE EN COMPTE DES INCERTITUDES

Le but de la commande étant le suivi de trajectoire en position et en pression, une base d'erreurs, entre les états et leurs états désirés, est créée telle que :

$$\begin{cases} e_y = y - y_d \\ e_v = v - v_d \\ e_a = a - a_d \\ e_p = p_p - p_d \end{cases} \quad (2.24)$$

6.1.1 SYNTHÈSE DE LA COMMANDE PAR L'APPROCHE N°1

L'application de l'approche n°1 (cf. §4.1 du chapitre 1) au système électropneumatique (2.19) conduit au « générateur de trajectoire » suivant :

$$\begin{cases} v_d = \dot{y}_d - k_y e_y \\ a_d = \dot{v}_d - e_y - k_v e_v \end{cases} \quad (2.25)$$

et la loi de commande suivante pour le suivi de trajectoire en position et pression :

$$\begin{cases} u_p = -\frac{1}{\psi_p} \left[\varphi_p - \frac{S_p}{rT} p_p v \right] + \frac{V_p(y)}{k rT \psi_p} (\dot{p}_d - k_p e_p) & k_y, k_v, k_a, k_p > 0 \\ u_N = \frac{S_p V_N(y)}{S_N V_p(y)} \frac{1}{\psi_N} \left(\psi_p u_p + \varphi_p - \frac{S_p}{rT} p_p v \right) - \frac{1}{\psi_N} \left(\varphi_N + \frac{S_N}{rT} p_N v \right) - \frac{M V_N(y)}{S_N k rT \psi_N} \left(\frac{b_v}{M} a + \dot{a}_d - e_v - k_a e_a \right) \end{cases} \quad (2.26)$$

En prenant en compte la loi de commande (2.26) et le « générateur de trajectoire » (2.25), le système bouclé de la base d'erreur s'écrit sous la forme suivante d'après (1.31):

$$\begin{cases} \dot{e}_y = e_v - k_y e_y \\ \dot{e}_v = e_a - e_y - k_v e_v \\ \dot{e}_a = -e_v - k_a e_a \\ \dot{e}_p = -k_p e_p \end{cases} \quad (2.27)$$

D'après les résultats du §4.1 du chapitre 1, l'unique point d'équilibre $[e_y = 0 \quad e_v = 0 \quad e_a = 0 \quad e_p = 0]^T$ de la base d'erreur est globalement exponentiellement stable.

6.1.2 SYNTHÈSE DE LA COMMANDE PAR L'APPROCHE N°2

L'application de l'approche n°2 (cf. §4.2 du chapitre 1) au système électropneumatique (2.19) conduit au « générateur de trajectoire » suivant :

$$\begin{cases} v_d = \dot{y}_d \\ a_d = \dot{v}_d \end{cases} \quad (2.28)$$

et à la loi de commande suivante pour le suivi de trajectoire en position et pression :

$$\begin{cases} u_p = -\frac{1}{\psi_p} \left[\varphi_p - \frac{S_p}{rT} p_p v \right] + \frac{V_p(y)}{k r T \psi_p} (\dot{p}_d - K_p e_p) \\ u_N = \frac{S_p V_N(y)}{S_N V_p(y) \psi_N} \frac{1}{\psi_N} \left(\psi_p u_p + \varphi_p - \frac{S_p}{rT} p_p v \right) - \frac{1}{\psi_N} \left(\varphi_N + \frac{S_N}{rT} p_N v \right) - \frac{M V_N(y)}{S_N k r T \psi_N} \left(\frac{b_v}{M} a + \dot{a}_d - K_y e_y - K_v e_v - K_a e_a \right) \end{cases} \quad K_y, K_v, K_a, K_p > 0 \quad (2.29)$$

Note 2.2 : K_y, K_v, K_a, K_p sont calculés comme décrit dans l'équation (2.33).

En prenant en compte la loi de commande (2.29) et le générateur de trajectoire (2.28), le système différentiel d'erreurs s'écrit sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_y \\ \dot{e}_v \\ \dot{e}_a \\ \dot{e}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -K_y & -K_v & -K_a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -K_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_y \\ e_v \\ e_a \\ e_p \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

Comme indiqué au §4.2 du chapitre 1, le système linéaire (2.30) possède un seul point d'équilibre $e_y = e_v = e_a = e_p = 0$ exponentiellement stable dès lors que le choix des gains K_i conduit à un polynôme $s^3 + K_a s^2 + K_v s + K_a$ de type Hurwitz et $K_p > 0$. Cependant le lemme 1.2 permet un calcul des gains K_i à partir de constantes $\alpha_i > 0$.

Le changement de coordonnées :

$$\begin{bmatrix} z_y \\ z_v \\ z_a \\ z_p \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} e_y \\ e_v \\ e_a \\ e_p \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

défini par la matrice triangulaire inférieure T , telle que :

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_y & 1 & 0 & 0 \\ \alpha_v \alpha_y & \alpha_v + \alpha_y & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha_y, \alpha_v > 0 \quad (2.32)$$

et le choix des gains :

$$\begin{cases} K_y = \alpha_a \alpha_v \alpha_y \\ K_v = \alpha_a \alpha_v + \alpha_a \alpha_y + \alpha_v \alpha_y \\ K_a = \alpha_a + \alpha_v + \alpha_y \\ K_p = \alpha_p \end{cases}, \quad \alpha_y, \alpha_v, \alpha_a, \alpha_p > 0 \quad (2.33)$$

conduit au système :

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_y \\ \dot{z}_v \\ \dot{z}_a \\ \dot{z}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha_y & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha_v & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha_a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_y \\ z_v \\ z_a \\ z_p \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

z_p et z_a tendent exponentiellement vers zéro quand $t \rightarrow +\infty$ et donc les sorties z_y, z_v des systèmes SPR en cascade tendent elles aussi exponentiellement vers zéro. Ainsi, vu que la transformation T est régulière toutes les erreurs e_y, e_v, e_a, e_p tendent également exponentiellement vers zéro.

6.1.3 RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX

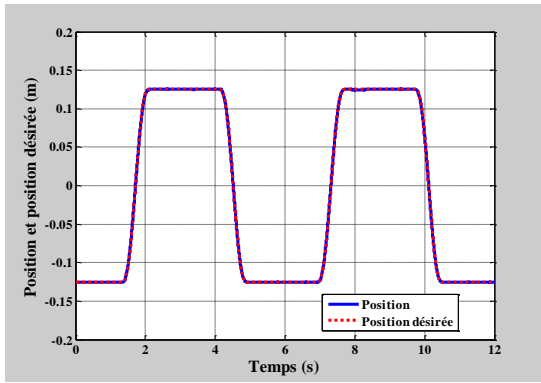
Afin d'implémenter des lois de commandes sur le vérin électropneumatique, une carte d'acquisition DS 1104, commercialisée par la société dSpace, a été utilisée. Elle convient parfaitement au prototypage rapide des lois de commande. S'articulant autour du processeur MPC8240 de Texas Instrument, la carte est connectée via le bus ISA du PC. Cette liaison permet le téléchargement de codes exécutables pour le DSP depuis le PC siège de la compilation. Le lien par bus ISA est également mis à profit pour permettre un dialogue entre le DSP et le logiciel de supervision (Control Desk). Le processeur est programmable à partir de Simulink grâce à l'interface software RTI (Real Time Interface) et RTW (Real Time Workshop).

Aussi, pour le calcul des lois de commandes développées aux paragraphes précédents, les mesures de la position, de la vitesse et de l'accélération du vérin s'avèrent nécessaires, ainsi que les deux pressions dans les chambres. Pour cela :

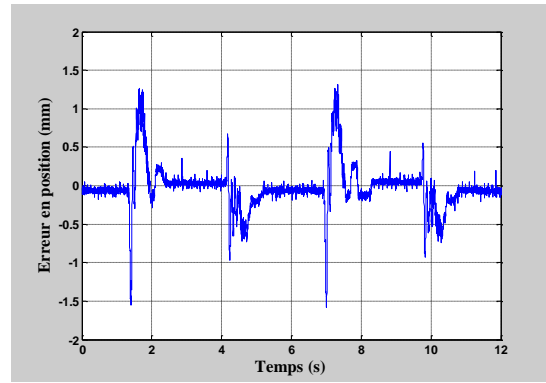
- La position a été mesurée par un potentiomètre externe de la marque **novotechnik** dont la résolution est de $10 \mu m$ sur une étendue de mesure de $500 mm$.
- La vitesse a été obtenue par une dérivation analogique de la position.
- L'accélération a été calculée par un différentiateur robuste de la vitesse via un algorithme généralement utilisé pour la commande par modes glissants d'ordre supérieur [Smaoui'08].
- Deux capteurs de pression KULITE miniatures ont aussi été utilisés. Leur précision est égale à $70 Pa$ ($0,1\%$ de l'étendue de mesure).

Un dispositif électronique est également utilisé. Il se présente sous la forme d'un boîtier comprenant les alimentations, la carte de dérivation analogique et les différentes cartes de conditionnement assurant le filtrage et l'amplification des signaux.

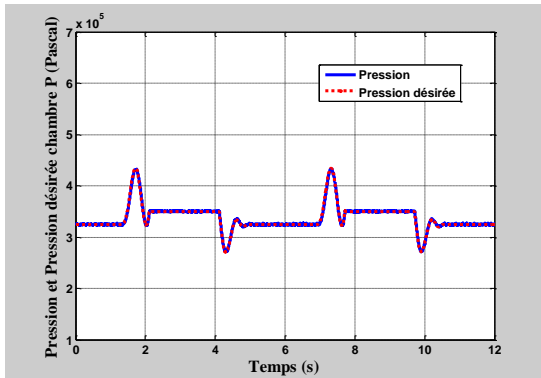
L'application des deux approches sur le vérin électropneumatique conduit analytiquement à la même loi de commande. Ainsi seuls les résultats expérimentaux de l'implantation de la loi de commande (2.29) correspondante à l'approche n°2 seront présentés. Cette loi de commande a été implémentée à travers la carte DSpace 1104 et avec une fréquence d'échantillonnage de $1 kHz$. Elle nécessite le réglage de 4 gains, qui selon l'approche n°2 doivent être positifs afin d'assurer la stabilité exponentielle globale du point d'équilibre du système différentiel de la base d'erreur. Cependant, ces gains doivent aussi satisfaire lors du suivi une erreur en position et en pression aussi faible que possible et sans dépassement dans les phases statiques. Un bon compromis a été obtenu pour : $\alpha_y = 30$, $\alpha_v = 40$, $\alpha_a = 80$, $\alpha_p = 300$.



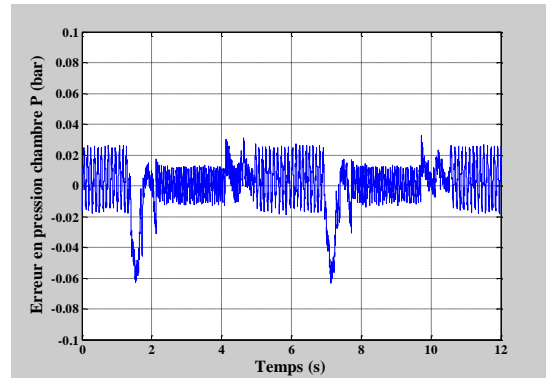
a) Position et position désirée (m)



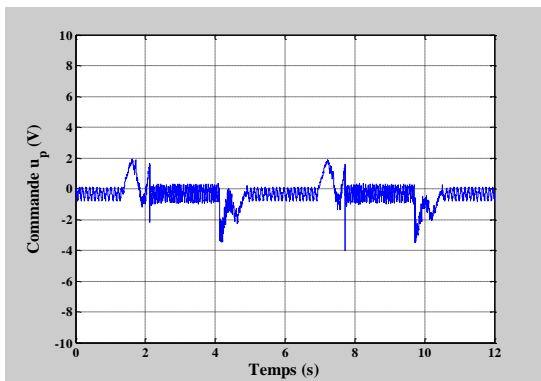
b) Erreur en position (mm)



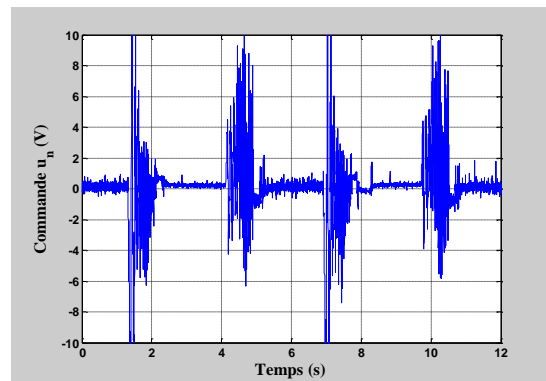
c) Pression et pression désirée (Pascal)



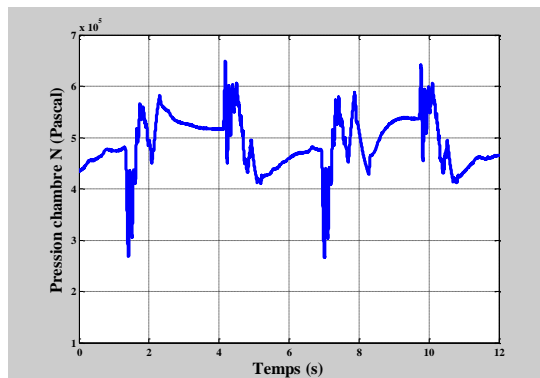
d) Erreur en pression (bar)



e) Commande u_p (V)



f) Commande u_n (V)



g) Pression chambre N (Pascal)

Figure 2.17 : Résultats expérimentaux obtenus avec la commande (2.29)

La figure 2.17.a présente la position mesurée et la position désirée. L'erreur étant de l'ordre de quelques millimètres, la différence entre ces deux courbes est très peu visible. La figure 2.17.b présente l'erreur en position sur une amplitude de déplacement de 250 mm ce qui représente 50% de la course totale. Le tableau 2.3 résume les différentes erreurs en position trouvées en appliquant la loi de commande (2.29) et les lois de commandes multidimensionnelles déjà appliquées par [Brun'99 b] et [Smaoui'04] sur le vérin électropneumatique.

	Commande basée sur la théorie de la platitude	Commande par la technique du backstepping	Commande par la technique du mode glissant d'ordre 1	Commande par la technique du mode glissant d'ordre 2	Commande par l'approche proposée
L'erreur maximale moyenne en régime dynamique (mm)	5.56	1.22	1.4	3	1.27
L'erreur moyenne en régime statique (mm)	0.27	0.15	0.13	0.19	0.11

Tableau 2.3 : Résultats du suivi en position obtenus avec différentes commandes

L'écart type en position en régime dynamique est de l'ordre de 0.29 mm et en régime statique, il est de l'ordre de 0.07 mm . Les résultats obtenus sont donc très proches des résultats obtenus avec la commande par la technique du backstepping.

L'erreur en position est toujours maximale lors de la sortie du vérin. Ceci s'explique par la dissymétrie des sections du vérin. En effet, la section effective de la chambre N étant inférieure à celle de la chambre P, les efforts liés aux variations de pression dans chaque chambre ne sont pas identiques. De plus, il a été constaté [Brun'99 b] que les frottements secs sont dissymétriques, ce qui a entraîné une dissymétrie des erreurs en régime statique.

La figure 2.17.c présente la pression mesurée dans la chambre P du vérin et la pression désirée. L'erreur étant aussi de l'ordre de quelques centième de bar, la différence entre ces deux courbes est peu visible. La figure 2.17.d présente cette erreur en pression et le tableau 2.4 la détaille et la compare aux résultats trouvés avec d'autres commandes déjà appliquées sur le vérin électropneumatique.

	Commande basée sur la théorie de la platitude	Commande par la technique du backstepping	Commande par la technique du mode glissant d'ordre 1	Commande par la technique du mode glissant d'ordre 2	Commande par l'approche proposée
L'erreur maximale moyenne en régime dynamique (bar)	0.12	0.054	0.043	0.05	0.04
L'erreur moyenne en régime statique (bar)	0.02	0.017	0.01	0.01	0.013

Tableau 2.4 : Résultats du suivi en pression obtenus avec différentes commandes

Les figures 2.17.e et 2.17.f présentent la commande u_p respectivement la commande u_n . Elles sont toutes les deux chahutées mais non saturées en régime statique. Cette réticence peut être due, d'une part, à l'utilisation de la fonction « sgn » dans le choix du polynôme $\psi_{(.)}$ du débit massique, d'autre part, au bruit lié à l'utilisation d'un dérivateur analogique de la position mesurée par le potentiomètre, pour le calcul de la vitesse, et d'un dérivateur numérique de la vitesse, pour le calcul de l'accélération. De plus, le gain utilisé pour la commande de la pression est de l'ordre de 300 ce qui assure certes un bon suivi de trajectoire en pression, mais accentue évidemment l'amplitude du bruit. De plus, les commandes sont calculées d'une manière récursive. En effet, la loi de commande u_n est calculée en fonction de la loi de commande u_p .

La figure 2.17.g présente l'évolution de la pression dans la chambre N du vérin. Cependant, durant le régime statique, la pression continue à évoluer, donc le système n'a pas atteint un équilibre total. En effet, il faut distinguer l'équilibre mécanique, l'équilibre pneumatique et l'équilibre du système électropneumatique. Un système est à l'arrêt lorsque la position de sa partie mobile est constante et sa vitesse est nulle. Cependant, les pressions peuvent continuer à évoluer. Dans ce cas, seul l'équilibre partiel est obtenu et cela peut causer le phénomène de redécollage du vérin. Ce phénomène est observé sur les courbes de la figure 2.17 à $t=8.3s$.

6.2 SYNTHÈSE ET EXPÉRIMENTATION DE LA COMMANDE EN POSITION-PRESSION AVEC PRISES EN COMPTE DES INCERTITUDES AU NIVEAU DU DÉBIT DE FUITE

Dans une première étape, le débit de fuite $\varphi_{(.)}$ sera considéré connu seulement par sa valeur nominale φ_{Nom} et sa variation maximale $|\Delta\varphi|_{\max}$. En effet le débit de fuite n'apparaît que dans les champs de vecteur f_3 et f_4 , ce qui nécessite une hypothèse moins forte pour prouver la stabilité au sens entrée\état (c.f remarque 1.1 au chapitre 1).

f_3 et f_4 s'écrivent alors sous la forme :

$$\begin{cases} f_3 &= f_{3N} + \Delta f_3 \\ f_4 &= f_{4N} + \Delta f_4 \end{cases} \quad (2.35)$$

où :

$$\begin{cases} f_{3N} = \frac{S_P k r T}{M V_P(y)} \left[\varphi_{Nom} - \frac{S_P}{r T} p_P v \right] - \frac{S_N k r T}{M V_N(y)} \left[\varphi_{Nom} + \frac{S_N}{r T} p_N v \right] - \frac{b_v}{M} a \\ \Delta f_3 = \Delta\varphi \left[\frac{S_P k r T}{M V_P(y)} - \frac{S_N k r T}{M V_N(y)} \right] \\ |\Delta f_3| \leq \Delta f_{3\max} = |\Delta\varphi|_{\max} \frac{k r T}{M} \max \left(\left| \frac{S_P}{V_{DP}} - \frac{S_N}{V_{N\max}} \right|, \left| \frac{S_P}{V_{P\max}} - \frac{S_N}{V_{DN}} \right| \right) \end{cases} \quad (2.36)$$

et :

$$\begin{cases} f_{4N} = \frac{k r T}{V_P(y)} \left[\varphi_{Nom} - \frac{S_P}{r T} p_P v \right] \\ \Delta f_4 = \Delta\varphi \frac{k r T}{V_P(y)} \\ |\Delta f_4| \leq \Delta f_{4\max} = |\Delta\varphi|_{\max} \frac{k r T}{V_{DP}} \end{cases} \quad (2.37)$$

6.2.1 SYNTHÈSE DE LA COMMANDE PAR L'APPROCHE N°1

Dans le cas d'incertitude sur le débit de fuite $\varphi_{(.)}$, l'application de l'approche n°1 sur le système (2.19) conduit à la loi de commande suivante:

$$\begin{cases} u_p = -\frac{1}{\psi_p} \left[\varphi_{Nom} - \frac{S_p}{rT} p_p v \right] + \frac{V_p(y)}{k rT \psi_p} (\dot{p}_d - k_p e_p) \\ u_N = \frac{S_p V_N(y)}{S_N V_p(y) \psi_N} \frac{1}{\psi_p} \left(\psi_p u_p + \varphi_{Nom} - \frac{S_p}{rT} p_p v \right) - \frac{1}{\psi_N} \left(\varphi_{Nom} + \frac{S_N}{rT} p_N v \right) - \frac{M V_N(y)}{S_N k rT \psi_N} \left(\frac{b_v}{M} a + \dot{a}_d - e_v - k_a e_a \right) \end{cases} \quad k_y, k_v, k_a, k_p > 0 \quad (2.38)$$

Le système bouclé de la base des erreurs s'écrit selon l'approche n°1:

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_y \\ \dot{e}_v \\ \dot{e}_a \\ \dot{e}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_y & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -k_v & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -k_a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_y \\ e_v \\ e_a \\ e_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta f_3 \\ \Delta f_4 \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

Le système (2.39) est composé du système (2.27) dont l'origine est globalement exponentiellement stable et de perturbations bornées (2.36) et (2.37). D'après le lemme 1.1, il est stable au sens entrée/état.

6.2.2 SYNTHÈSE DE LA COMMANDE PAR L'APPROCHE N°2

Dans le cas d'incertitude sur le débit de fuite $\varphi_{(.)}$, l'application de l'approche n°2 sur le système (2.19) conduit à la loi de commande suivante:

$$\begin{cases} u_p = -\frac{1}{\psi_p} \left[\varphi_{Nom} - \frac{S_p}{rT} p_p v \right] + \frac{V_p(y)}{k rT \psi_p} (\dot{p}_d - \alpha_p e_p) \\ u_N = \frac{S_p V_N(y)}{S_N V_p(y) \psi_N} \frac{1}{\psi_p} \left(\psi_p u_p + \varphi_{Nom} - \frac{S_p}{rT} p_p v \right) - \frac{1}{\psi_N} \left(\varphi_{Nom} + \frac{S_N}{rT} p_N v \right) + \\ - \frac{M V_N(y)}{S_N k rT \psi_N} \left(\frac{b_v}{M} a + \dot{a}_d - (\alpha_y \alpha_v \alpha_a) e_y - (\alpha_y \alpha_v + \alpha_y \alpha_a + \alpha_v \alpha_a) e_v - (\alpha_y + \alpha_v + \alpha_a) e_a \right) \end{cases} \quad \alpha_y, \alpha_v, \alpha_a, \alpha_p > 0 \quad (2.40)$$

Le système bouclé de la base des erreurs s'écrit selon l'approche n°2:

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_y \\ \dot{e}_v \\ \dot{e}_a \\ \dot{e}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -K_y & -K_v & -K_a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -K_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_y \\ e_v \\ e_a \\ e_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta f_3 \\ \Delta f_4 \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

De même, le système (2.41) est composé du système (2.30) dont l'origine est globalement exponentiellement stable et de perturbations bornées (2.36) et (2.37). D'après le lemme 1.1, il est stable au sens entrée/état.

6.2.3 RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX

Le but de cette partie est de montrer la robustesse de la commande (2.40). Cette dernière a été implémentée sur le vérin électropneumatique en utilisant seulement la valeur nominale du débit de fuite à la place de sa fonction polynomiale $\varphi_{(.)}$ et en gardant les mêmes gains utilisés pour la commande (2.29) qui ne prend pas en compte les incertitudes : $\alpha_y = 30$, $\alpha_v = 40$, $\alpha_a = 80$, $\alpha_p = 300$.

La figure 2.18.a présente la position mesurée et la position désirée. Le tableau 2.5 résume les différentes erreurs en position trouvées en appliquant la loi de commande (2.40) sur le vérin électropneumatique.

L'erreur maximale moyenne en position en régime dynamique (<i>mm</i>)	1.36
L'écart type en régime dynamique (<i>mm</i>)	0.29
L'erreur moyenne en position en régime statique (<i>mm</i>)	0.09
L'écart type en régime statique (<i>mm</i>)	0.05

Tableau 2.5 : Résultats du suivi en position obtenus avec la commande (2.40)

La figure 2.18.c présente la pression mesurée dans la chambre *P* du vérin et la pression désirée. La figure 2.18.d présente cette erreur en pression et le tableau 2.6 la détaille :

L'erreur maximale moyenne en pression en régime dynamique (<i>bar</i>)	0.04
L'écart type en régime dynamique (<i>bar</i>)	0.009
L'erreur moyenne en pression en régime statique (<i>bar</i>)	0.02
L'écart type en régime statique (<i>bar</i>)	0.016

Tableau 2.6 : Résultats du suivi en pression obtenus avec la commande (2.40)

Ces résultats obtenus sur un ensemble de 20 essais montrent un bon suivi en position et en pression.

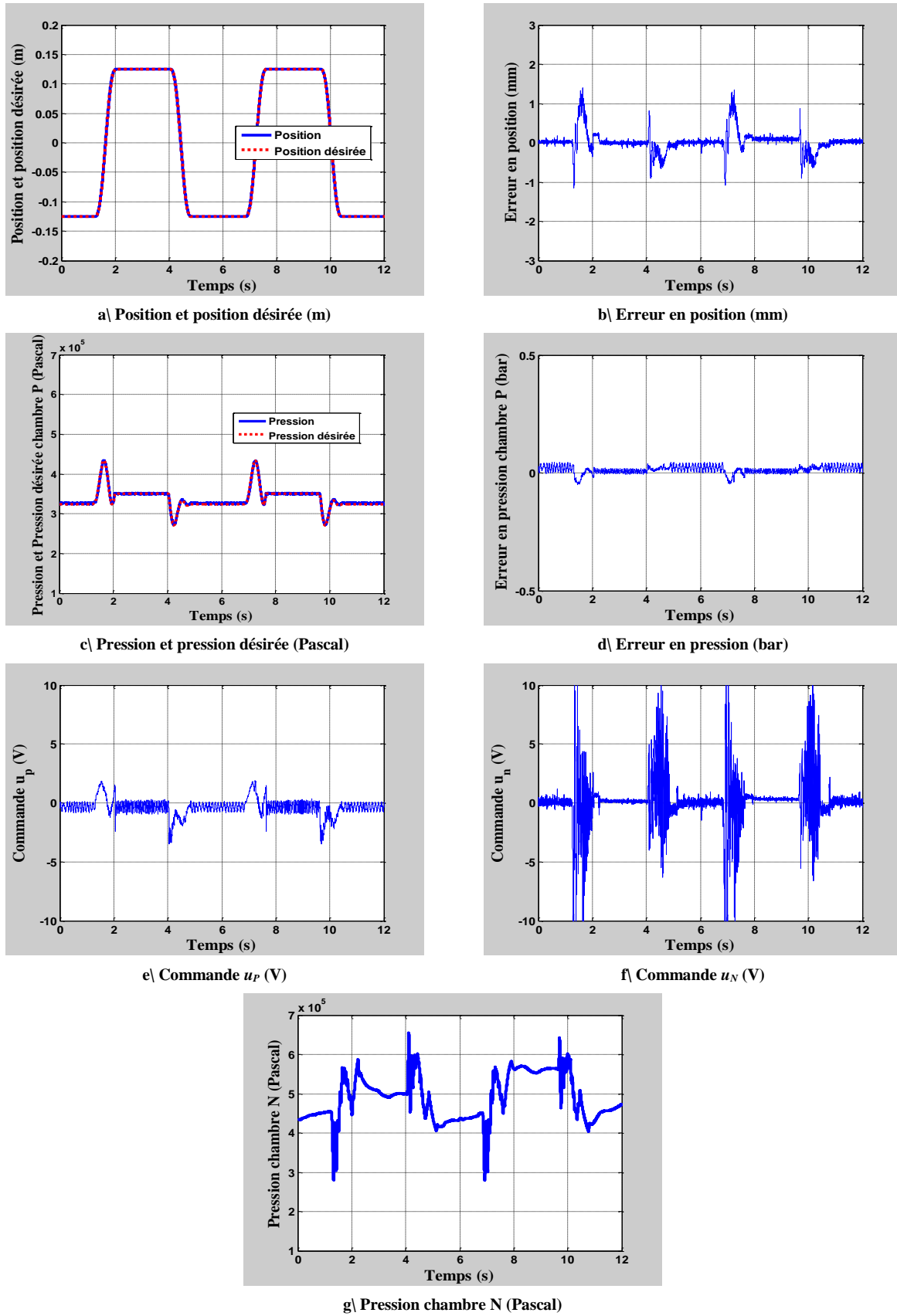


Figure 2.18 : Résultats expérimentaux obtenus avec la commande (2.40)

6.3 SYNTHÈSE ET EXPÉRIMENTATION DE LA COMMANDE EN POSITION-PRESSION AVEC PRISE EN COMPTE DES INCERTITUDES AU NIVEAU DU DÉBIT ET DES VARIATIONS DE LA MASSE

Dans ce paragraphe, les fonctions $\varphi_{(.)}$ et $\psi_{(.)}$ du débit massique seront considérées connues seulement par leurs valeurs nominales φ_{Nom} , ψ_{Nom} et leurs variations maximales $|\Delta\varphi|_{\max}$ et $|\Delta\psi|_{\max}$. De plus, la masse sera variable durant les tests et ne seront utilisées que sa valeur nominale M_{Nom} et la valeur max de sa variation ΔM_{\max} .

La masse M et les fonctions $\varphi_{(.)}$ et $\psi_{(.)}$ apparaissent dans les champs de vecteurs f_3 , f_4 et $g_{3,1}$, $g_{3,2}$, $g_{4,1}$. Ces derniers s'écrivent sous la forme suivante:

$$\begin{cases} f_3 & = f_{3N} + \Delta f_3 \\ g_{3,1} & = g_{3,1N} + \Delta g_{3,1} \\ g_{3,2} & = g_{3,2N} + \Delta g_{3,2} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} f_4 & = f_{4N} + \Delta f_4 \\ g_{4,1} & = g_{4,1N} + \Delta g_{4,1} \end{cases} \quad (2.42)$$

où :

$$\begin{cases} f_{3N} & = \frac{S_p k r T}{M_{Nom} V_p(y)} \left[\varphi_{Nom} - \frac{S_p}{r T} p_P v \right] - \frac{S_N k r T}{M_{Nom} V_N(y)} \left[\varphi_{Nom} + \frac{S_N}{r T} p_N v \right] - \frac{b_v}{M_{Nom}} a \\ g_{3,1N} & = \frac{S_p k r T}{M_{Nom} V_p(y)} \psi_{Nom} \\ g_{3,2N} & = - \frac{S_N k r T}{M_{Nom} V_N(y)} \psi_{Nom} \\ f_{4N} & = \frac{k r T}{V_p(y)} \left[\varphi_{Nom} - \frac{S_p}{r T} p_P v \right] \\ g_{4,1N} & = \frac{k r T}{V_p(y)} \psi_{Nom} \end{cases} \quad (2.43)$$

et

$$\begin{cases} \Delta_3 = \Delta f_3 + \Delta g_{3,1} u_P + \Delta g_{3,2} u_N \\ \Delta_4 = \Delta f_4 + \Delta g_{4,1} u_P \end{cases} \quad (2.44)$$

est tel que :

$$\begin{cases} \Delta_3 \leq |\Delta_3|_{\max} = |\Delta f_3|_{\max} + |\Delta g_{3,1}|_{\max} |u_P|_{\max} + |\Delta g_{3,2}|_{\max} |u_N|_{\max} \\ \Delta_4 \leq |\Delta_4|_{\max} = |\Delta f_4|_{\max} + |\Delta g_{4,1}|_{\max} |u_P|_{\max} \end{cases} \quad (2.45)$$

6.3.1 SYNTHÈSE DE LA COMMANDE PAR L'APPROCHE N°1

Dans ces conditions, l'application de l'approche n°1 au système (2.19) conduit à la loi de commande suivante :

$$\begin{cases} u_p = -\frac{1}{\psi_{Nom}} \left[\varphi_{Nom} - \frac{S_p}{rT} p_p v \right] + \frac{V_p(y)}{k rT \psi_{Nom}} \left(\dot{p}_d - \underbrace{k_p}_{\frac{k_p}{k}} e_p \right) \\ u_N = \frac{S_p V_N(y)}{S_N V_p(y) \psi_{Nom}} \frac{1}{\psi_{Nom}} \left(\psi_{Nom} u_p + \varphi_{Nom} - \frac{S_p}{rT} p_p v \right) - \frac{1}{\psi_{Nom}} \left(\varphi_{Nom} + \frac{S_N}{rT} p_N v \right) + \frac{-M_{Nom} V_N(y)}{S_N k rT \psi_{Nom}} \left(\frac{b_v}{M_{Nom}} a + \dot{a}_d - e_v - k_a e_a \right) \end{cases} \quad k_y, k_v, k_a, k_p > 0 \quad (2.46)$$

Le système bouclé de la base des erreurs s'écrit selon l'approche n°1 :

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_y \\ \dot{e}_v \\ \dot{e}_a \\ \dot{e}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_y & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -k_v & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -k_a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_y \\ e_v \\ e_a \\ e_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta_3 \\ \Delta_4 \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

De manière analogue au cas avec incertitudes au niveau du débit de fuite, le système (2.47) est composé du système (2.27) dont l'origine est globalement exponentiellement stable et de perturbations bornées (2.45), il est donc stable au sens entrée/état d'après le lemme 1.1.

6.3.2 SYNTHÈSE DE LA COMMANDE PAR L'APPROCHE N°2

Dans ces conditions, l'application de l'approche n°2 au système (2.19) conduit à la loi de commande suivante :

$$\begin{cases} u_p = -\frac{1}{\psi_{Nom}} \left[\varphi_{Nom} - \frac{S_p}{rT} p_p v \right] + \frac{V_p(y)}{k rT \psi_{Nom}} (\dot{p}_d - \alpha_p e_p) \\ u_N = \frac{S_p V_N(y)}{S_N V_p(y) \psi_{Nom}} \frac{1}{\psi_{Nom}} \left(\psi_{Nom} u_p + \varphi_{Nom} - \frac{S_p}{rT} p_p v \right) - \frac{1}{\psi_{Nom}} \left(\varphi_{Nom} + \frac{S_N}{rT} p_N v \right) + \frac{-M_{Nom} V_N(y)}{S_N k rT \psi_{Nom}} \left(\frac{b_v}{M_{Nom}} a + \dot{a}_d - (\alpha_y \alpha_v \alpha_a) e_y - (\alpha_y \alpha_v + \alpha_y \alpha_a + \alpha_v \alpha_a) e_v - (\alpha_y + \alpha_v + \alpha_a) e_a \right) \end{cases} \quad \alpha_y, \alpha_v, \alpha_a, \alpha_p > 0 \quad (2.48)$$

Le système bouclé de la base des erreurs s'écrit selon l'approche n°2 :

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_y \\ \dot{e}_v \\ \dot{e}_a \\ \dot{e}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -K_y & -K_v & -K_a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -K_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_y \\ e_v \\ e_a \\ e_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta_3 \\ \Delta_4 \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

De même, le système (2.49) est composé du système (2.30) dont l'origine est globalement exponentiellement stable et de perturbations bornées (2.45), il est donc stable au sens entrée/état d'après le lemme 1.1.

6.3.3 RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX

Toujours dans le but de prouver la robustesse de la commande proposée, des variations de charges ont été effectuées durant les tests. De plus, la commande est calculée à partir des valeurs nominales des fonctions du débit massique. Les gains ont été fixés à : $\alpha_y = 15$, $\alpha_v = 40$, $\alpha_a = 80$, $\alpha_p = 300$.

Malgré les variations de la masse et la présence d'incertitudes au niveau du débit massique, un bon suivi en position et en pression a été obtenu. Des premiers essais à vide ont été réalisés, ensuite, une masse de 15kg a été rajoutée. Les figures 2.19.a et 2.20a présentent la position mesurée et la position désirée. Les figures 2.19.b et 2.20b présentent l'erreur de la position. Le tableau 2.7 résume les différentes erreurs en position pour des essais à vide.

Les figures 2.19.c et 2.20.c présentent la pression mesurée dans la chambre P du vérin et la pression désirée. Les figures 2.19.d et 2.20.d présentent cette erreur en pression et le tableau 2.8 la détaille.

	A vide (M=17 Kg)	M=32 kg
L'erreur maximale moyenne en position en régime dynamique (mm)	1.64	2.4
L'écart type en régime dynamique (mm)	0.075	0.15
L'erreur moyenne en position en régime statique (mm)	0.05	0.06
L'écart type en régime statique (mm)	0.009	0.013

Tableau 2.7 : Résultats du suivi en position obtenus avec la commande (2.48)

	A vide (M=17 Kg)	M=32 kg
L'erreur maximale moyenne en pression en régime dynamique (bar)	0.04	0.03
L'écart type en régime dynamique (bar)	0.0019	0.002
L'erreur moyenne en pression en régime statique (bar)	0.025	0.023
L'écart type en régime statique (bar)	0.042	0.0037

Tableau 2.8 : Résultats du suivi en pression obtenus avec la commande (2.48)

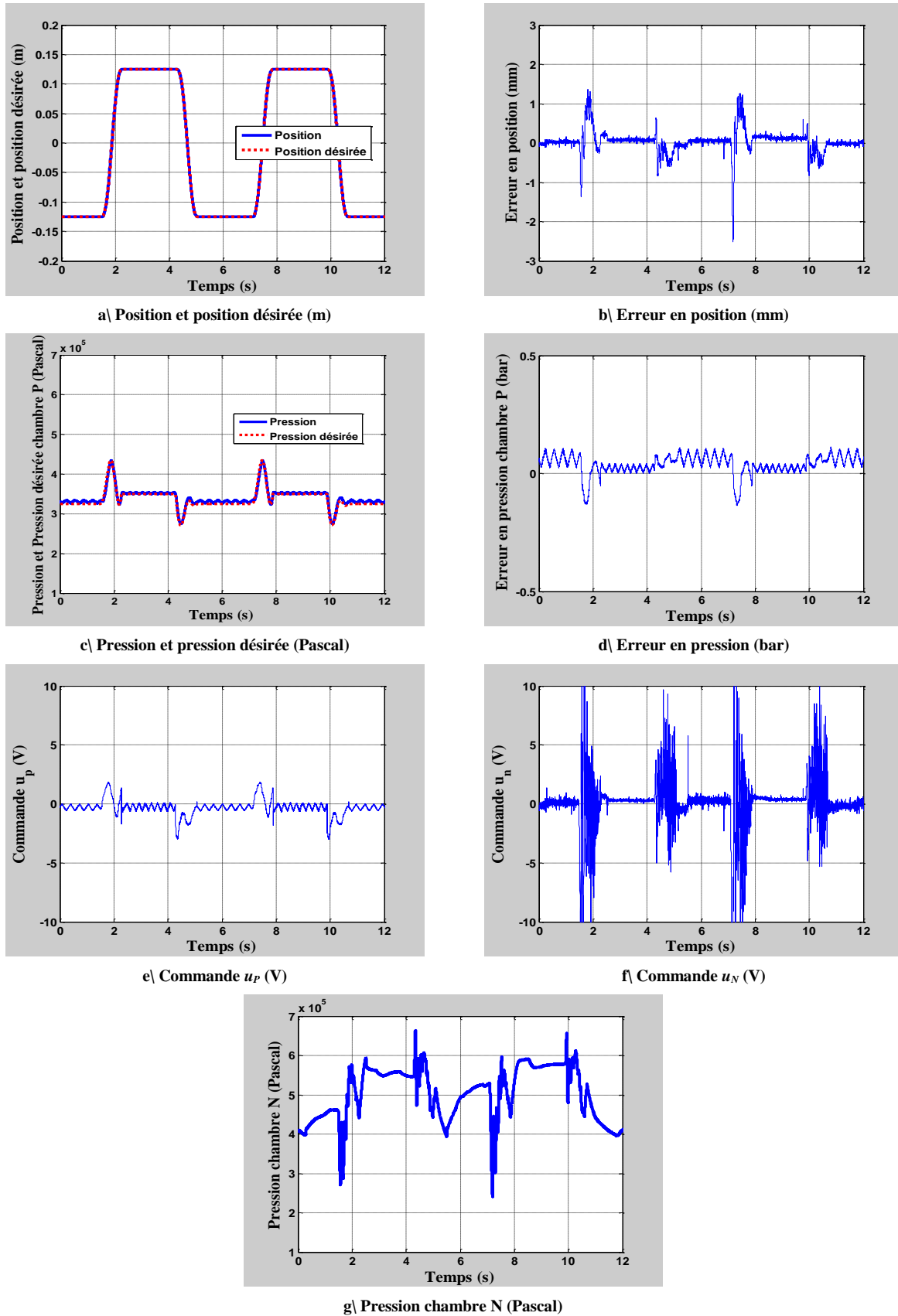
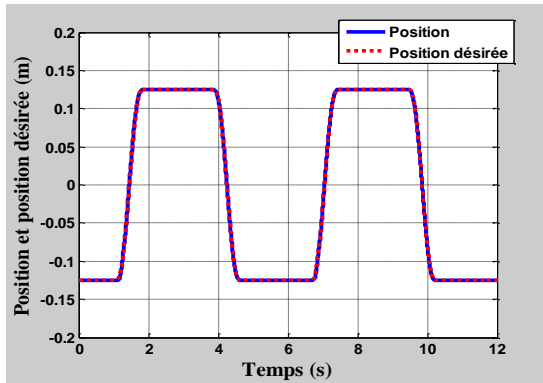
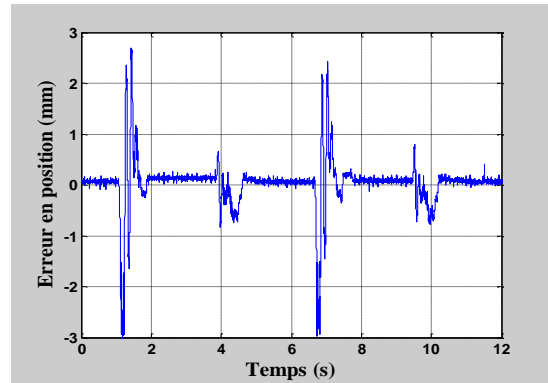


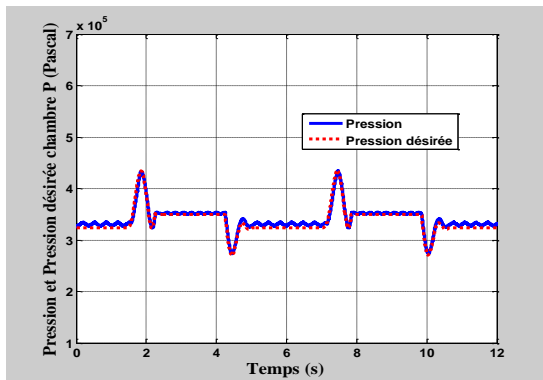
Figure 2.19 : Résultats expérimentaux obtenus avec la commande (2.48) à vide



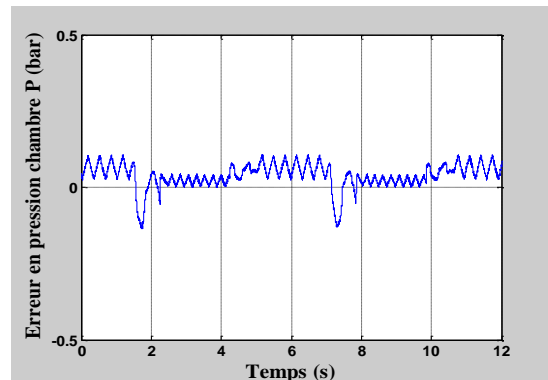
a) Position et position désirée (m)



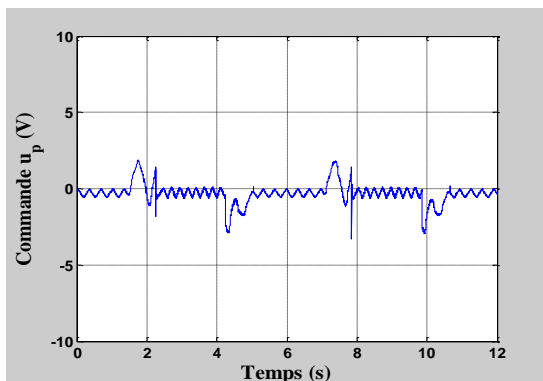
b) Erreur en position (mm)



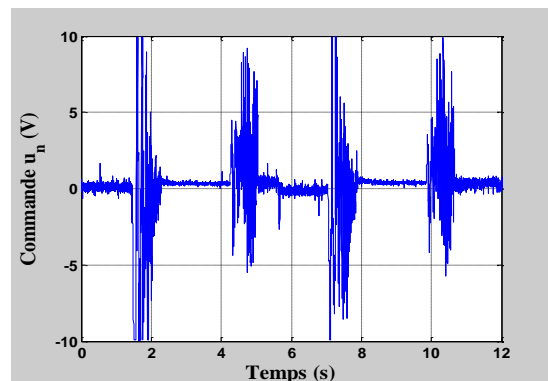
c) Pression et pression désirée (Pascal)



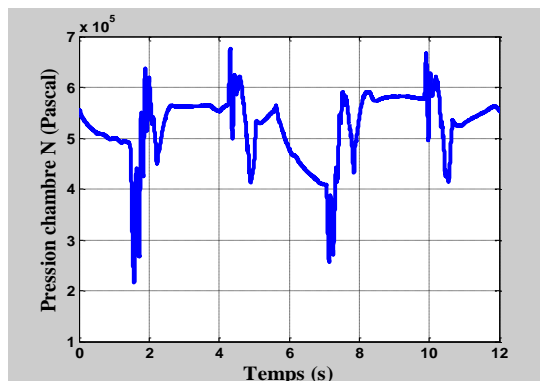
d) Erreur en pression (bar)



e) Commande u_p (V)



f) Commande u_n (V)



g) Pression chambre N (Pascal)

Figure 2.20 : Résultats expérimentaux obtenus avec la commande (2.48) et $M=32$ kg

6.4 ÉTUDE COMPARATIVE DE DIFFÉRENTES STRATÉGIES DE COMMANDES

Afin de compléter le benchmark adopté par l'équipe, le tableau déjà présenté dans les thèses de [Brun'99 b] et [Smaoui'04], résumant l'étude de différentes stratégies de commande multidimensionnelles appliquées sur le vérin électropneumatique sans prise en compte des incertitudes, est complété par les résultats présentés dans ce mémoire (cf. Tableau 2.9). Il permet à l'utilisateur de choisir la loi de commande qui répond le mieux à son cahier de charges. Les signes + et – dans le tableau désignent que le critère est satisfait respectivement peu satisfait.

Commande	Erreur en suivi de trajectoire	Erreur statique	Complexité à synthétiser	Complexité à régler	Réticence	Nombre de capteurs	Stabilité globale
Commande basée sur la théorie de la platitude	--	-	+	+	++	2	EXPONENTIELLE
Commande par Backstepping	++	+	-	+	++	3	ASYMPTOTIQUE
Commande par Mode Glissant d'ordre 1	+	+	-	+	--	3	ASYMPTOTIQUE
Commande par Mode Glissant d'ordre supérieur	+	+	-	-	-	3	ASYMPTOTIQUE
Commande basée sur la théorie de l'approche n°1	++	+	-	+	+	3	EXPONENTIELLE
Commande basée sur la théorie de l'approche n°2	++	+	+	++	+	3	EXPONENTIELLE

Tableau 2.9 : Etude comparative de différentes stratégies de commande

Cependant, le tableau 2.9 complète le benchmark seulement dans le cas de la commande multidimensionnelle, bien que des essais expérimentaux ont été effectués en monodimensionnel avec une commande en suivi de position. En effet, cette partie du travail de la thèse ne sera introduite que dans le chapitre suivant pour la raison suivante :

En supposant que les deux servodistributeurs soient pilotés avec une source de pression commune et une commande de signe opposé : $\begin{cases} u_P = u \\ u_N = -u \end{cases}$, le modèle de commande du système électropneumatique s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases}
 \frac{dy}{dt} &= v \\
 \frac{dv}{dt} &= \frac{1}{M} [S_P p_P - S_N p_N - b_v v - F_{ext}] \\
 \frac{dp_P}{dt} &= \frac{k r T}{V_P(y)} \left[\varphi(p_P) - \frac{S_P}{r T} p_P v \right] + \frac{k r T}{V_P(y)} \psi(p_P, \operatorname{sgn}(u)) u \\
 \frac{dp_N}{dt} &= \frac{k r T}{V_N(y)} \left[\varphi(p_N) + \frac{S_N}{r T} p_N v \right] - \frac{k r T}{V_N(y)} \psi(p_N, \operatorname{sgn}(-u)) u
 \end{cases} \quad (2.50)$$

Avec dans ce cas:

$$\begin{cases}
 \psi_P = \psi(p_P, \operatorname{sgn}(u)) \\
 \psi_N = \psi(p_N, \operatorname{sgn}(-u))
 \end{cases} \quad (2.51)$$

Le choix de la sortie « y », position du vérin, conduit à un degré relatif égal à 3 et donc à une dynamique interne de dimension 1. Afin de pouvoir utiliser les résultats du §5 du chapitre 1, évitant ainsi de démontrer la stabilité globale du point d'équilibre de la dynamique interne, il faut trouver un difféomorphisme qui permet d'écrire le système sous la forme (1.82). Ce qui revient à rechercher une quatrième composante (afin d'obtenir le difféomorphisme

$\left[y \quad L_f y \quad L_f^2 y \quad z_4 \right]^T$) telle que :

$$\dot{z}_4 = f_\xi(z_4) + g_\xi(z_4) y \quad (2.52)$$

Ceci reste un problème ouvert.

7. CONCLUSION

Dans ce chapitre le banc d'essai électropneumatique présent au Centre d'Essais Fluid Power du Laboratoire Ampère à l'INSA de Lyon a d'abord été présenté. Ensuite un modèle mathématique global de l'axe électropneumatique a été développé pour la simulation. Ce modèle a servi à tester et à prérégler les gains des différentes lois de commande, avant l'implantation sur le procédé expérimental. Un modèle de commande a ensuite été proposé en utilisant certaines hypothèses supplémentaires et en approximant par des polynômes les caractéristiques statiques de l'étage en débit du servodistributeur, afin d'obtenir un modèle non linéaire affine en la commande. Ensuite, les deux approches de commandes en suivi de trajectoire, présentées au chapitre 1, ont été appliquées sur le vérin électropneumatique.

La robustesse des lois de commande proposées a été vérifiée en prenant en compte des incertitudes au niveau du débit massique et des variations de la masse durant les tests, évidemment sans changer les paramètres de réglage. Les résultats expérimentaux ont été exposés et analysés.

Ce travail a enrichi le benchmark de l'ensemble des travaux du groupe « Automatique, Commande et Mécatronique » et permis de compléter le tableau comparatif des commandes multidimensionnelles implantées sur le vérin dans les mêmes conditions.

Durant tous les résultats expérimentaux présentés dans ce chapitre, le phénomène de redécollage du vérin électropneumatique en régime statique a été observé. Ce problème a aussi été observé avec toutes les commandes déjà implémentées sur le système. Le chapitre suivant fera donc l'objet de l'étude de ce phénomène et proposera une solution à ce problème.

CHAPITRE 3 :

PHÉNOMÈNE DU REDÉCOLLAGE

DU

VÉRIN ÉLECTROPNEUMATIQUE

1. INTRODUCTION

Le phénomène de redécollage d'un vérin électropneumatique s'apparente au phénomène de « stick-slip » (ou « collé-glissé ») bien connu des mécaniciens (tribologie, sismologie,...) qui se présente sous un mouvement de secousses spontanées et saccadées.

Sans entrer dans les détails mathématiques (ce qui sera fait au §2 de ce chapitre), ce phénomène qui peut apparaître quel que soit le type de loi de commande utilisée (linéaire ou non linéaire, mono ou multidimensionnelle) s'explique qualitativement par le fait que l'effort moteur du vérin ($S_P p_P - S_N p_N$ ou $S \Delta p$ pour un vérin sans tige) est issu des deux dynamiques qui sont en parallèles dans les régimes statiques des trajectoires de référence en position. Ainsi, le vérin électropneumatique peut atteindre un équilibre partiel (c'est-à-dire $y = y_{stop}$, $v = 0$ et $a = 0$: le système est à l'arrêt) alors que les pressions n'ont pas atteint leurs points d'équilibre. Dans ce cas, l'effort dû à ces variations de pression peut devenir supérieur aux forces de frottement de stiction (issu des forces de frottements secs $F_f(v)$). Le vérin qui était immobile, va donc de nouveau bouger (cf. courbes 2.17, 2.18 et 2.19 du chapitre 2), et l'erreur en position va s'accroître et la commande va avoir tendance à ramener le vérin dans sa position précédente. Le phénomène peut évidemment se reproduire.

Le phénomène de redécollage est un inconvénient industriel moyen pour le développement de la technologie pneumatique. Cependant, il n'y a pas de travaux scientifiques dans la littérature qui présentent une solution pouvant être généralisée à tous les processus hydrauliques et pneumatiques pour éliminer ce phénomène. Seules quelques solutions spécifiques qui peuvent être qualifiées d'empiriques ont été testées dans des contextes particuliers pour réduire ce phénomène. Quelques exemples sont cités : Control Engineering Staff [Control Engineering Staff'03] ont proposé une amélioration technologique en développant des valves spécifiques. Ming-Chang et al. [Ming-Chang'95] ont utilisé des lois de commande spécifiques pour réduire l'effet du frottement dans les applications électropneumatique en utilisant des lois de commande avec un suivi de trajectoire en vitesse et en accélération. Hamiti et al. [Hamiti'96] ont pu faire face au problème causé par les frottements secs dans un système pneumatique et proposé une méthode visant à limiter et à éliminer de façon progressive l'effet de stiction en diminuant le gain intégral des contrôleurs PI. Pai et al. Häggglund [Häggglund'02] a présenté une procédure qui compense les forces de frottement de Stiction dans les vannes pneumatique en ajoutant des impulsions au signal de commande. Renn et al. [Renn'04] ont

proposé un contrôleur floue-mode glissant à faible vitesse de rotation d'un moteur servo-pneumatique.

Le plan de ce chapitre est le suivant : tout d'abord les conditions d'existence du phénomène de redécollage des systèmes électropneumatiques seront synthétisées. Puis, une solution sera proposée afin d'éviter ce problème. Enfin cette solution sera appliquée sur le vérin électropneumatique.

2. CONDITIONS D'EXISTENCE DU PHÉNOMÈNE DE REDÉCOLLAGE

Durant le régime statique, un système électropneumatique doit atteindre son équilibre mécanique et son équilibre pneumatique. L'équilibre mécanique peut être défini par une vitesse nulle. L'équilibre pneumatique est atteint quand les pressions dans les chambres du vérin sont constantes. Ainsi, si cette dernière condition n'est pas satisfaite, c'est-à-dire que les pressions continuent à évoluer, alors que le système est à l'arrêt, le phénomène de redécollage peut être observé. Brun et al. [Brun'05] ont présenté les conditions nécessaires et suffisantes pour ne pas avoir le phénomène de redécollage et donné une estimation du moment de redécollage, si les conditions ne sont pas satisfaites.

Un système électropneumatique à l'équilibre mécanique satisfait ces conditions :

$$\begin{cases} \dot{v} = 0 \\ v = 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

d'où d'après l'équation différentielle de la vitesse dans le modèle (2.19), les forces de frottements secs à vitesse nulle sont égales à :

$$F_f(0) = S_P p_P - S_N p_N - F_{ext} \quad (3.2)$$

et d'après le modèle (2.8) les forces de frottements secs (cf. figure 3.1), à vitesse nulle, sont égales à :

$$F_f(0) = F_s \text{sign}(0) \quad (3.3)$$

où la fonction « sign » est définie comme suit :

$$\begin{cases} \text{si } v > 0 & \text{sign}(v) = 1 \\ \text{si } v = 0 & -1 \leq \text{sign}(v) \leq 1 \\ \text{si } v < 0 & \text{sign}(v) = -1 \end{cases} \quad (3.4)$$

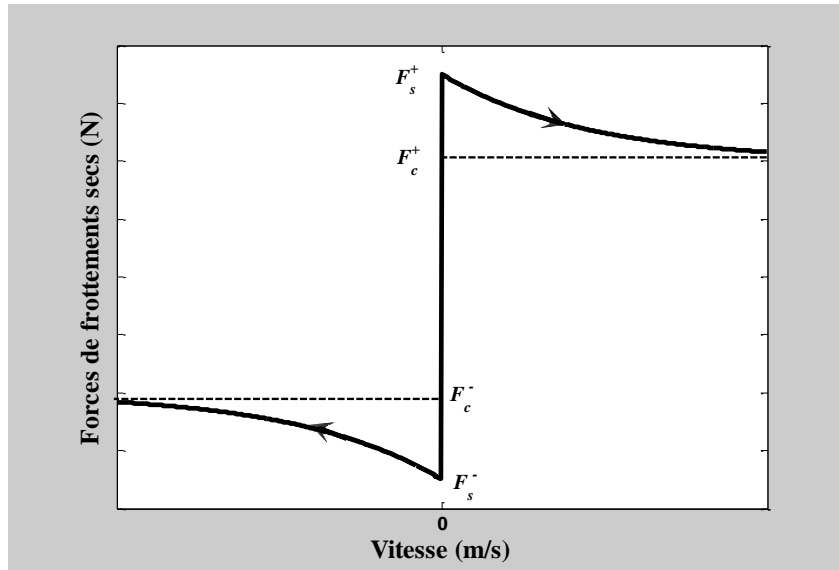


Figure 3.1 : Loi d'évolution du modèle des frottements secs

Note 3.1 : Par souci de généralité, les courbes présentées au §2 et au §3 de ce chapitre sont proposées avec des axes volontairement non gradués. Évidemment, celles proposées lors de l'application sur le vérin au §4 et au §5 possèdent des graduations.

Dans la figure 3.1, apparaissent quatre paramètres F_s^- , F_s^+ , F_c^- et F_c^+ qui représentent respectivement les valeurs des forces de frottements de Stiction pour $v < 0$ et $v > 0$ et les valeurs des forces de frottements de Coulomb pour $v < 0$ et $v > 0$. Expérimentalement, ces valeurs ne sont pas forcément symétriques et présentent des fluctuations dues à l'environnement, à la durée des essais, au vieillissement de l'actionneur,...

En prenant en compte les équations (3.1) à (3.4), le phénomène de redécollage n'aura pas lieu (cf. figure 3.2 et 3.3), si cette condition est satisfaite :

$$\begin{aligned} F_s^- &\leq F_f(0) \leq F_s^+ \\ F_s^- + F_{ext} &\leq S_P p_P - S_N p_N \leq F_s^+ + F_{ext} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Ainsi, si durant le régime statique, l'évolution de $S_P p_P$ en fonction de $S_N p_N$ dépasse la zone limitée par $F_s^- + F_{ext}$ et $F_s^+ + F_{ext}$, le phénomène de redécollage est observé.

Les figures 3.2 et 3.3 représentent l'évolution des pressions durant le régime statique dans le plan $(S_P p_P, S_N p_N)$, avec t_{stop} désigne l'instant dans lequel le système a atteint son équilibre mécanique.

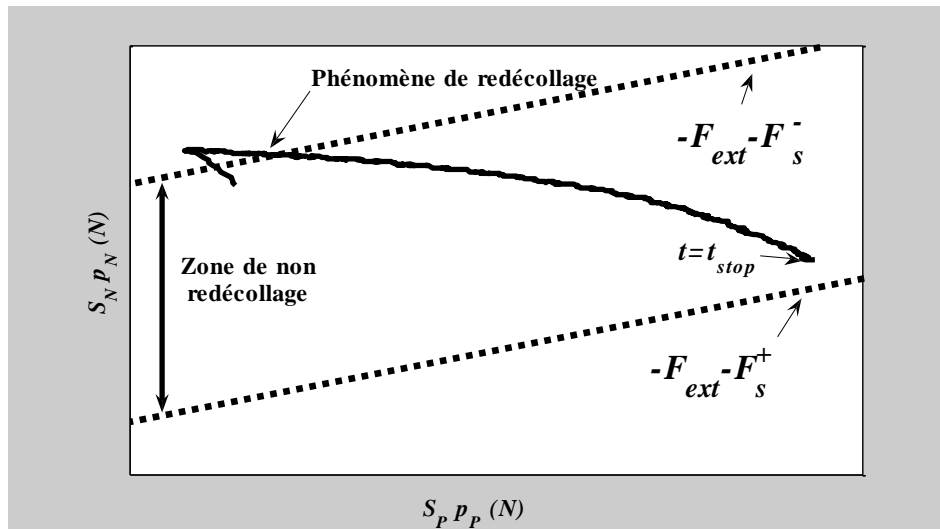


Figure 3.2 : Phénomène de redécollage

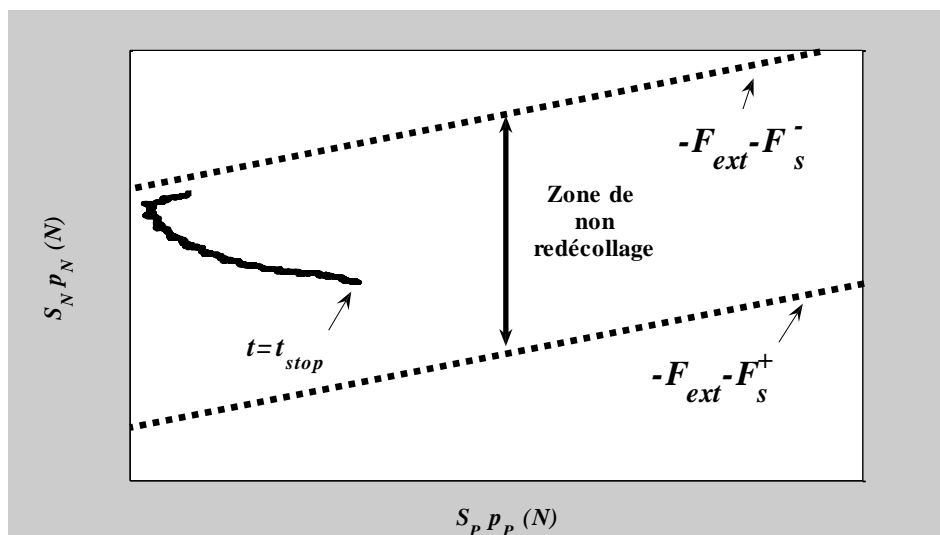


Figure 3.3 : Pas de phénomène de redécollage

3. PROPOSITION D'UNE SOLUTION AU PHÉNOMÈNE DE REDÉCOLLAGE DES SYSTÈMES ÉLECTROPNEUMATIQUES

L'idée de base de la solution proposée pour remédier au phénomène de redécollage des systèmes électropneumatiques est de maintenir les pressions des chambres du vérin constantes durant le régime statique. Pour cela, durant le régime dynamique, le système est commandé en suivi de trajectoire en position dans le cas d'une commande monodimensionnelle en position, et commandé en suivi de trajectoire en position et pression d'une chambre dans le cas d'une commande multidimensionnelle en position – pression. Durant le régime statique, le système en boucle fermée (avec une commande mono ou multidimensionnelle) commute vers un autre système bouclé qui consiste en deux régulations de pressions dans les chambres du vérin.

La figure 3.4 illustre la solution proposée dans le cas de l'existence du phénomène de redécollage avec une loi de commande monodimensionnelle :

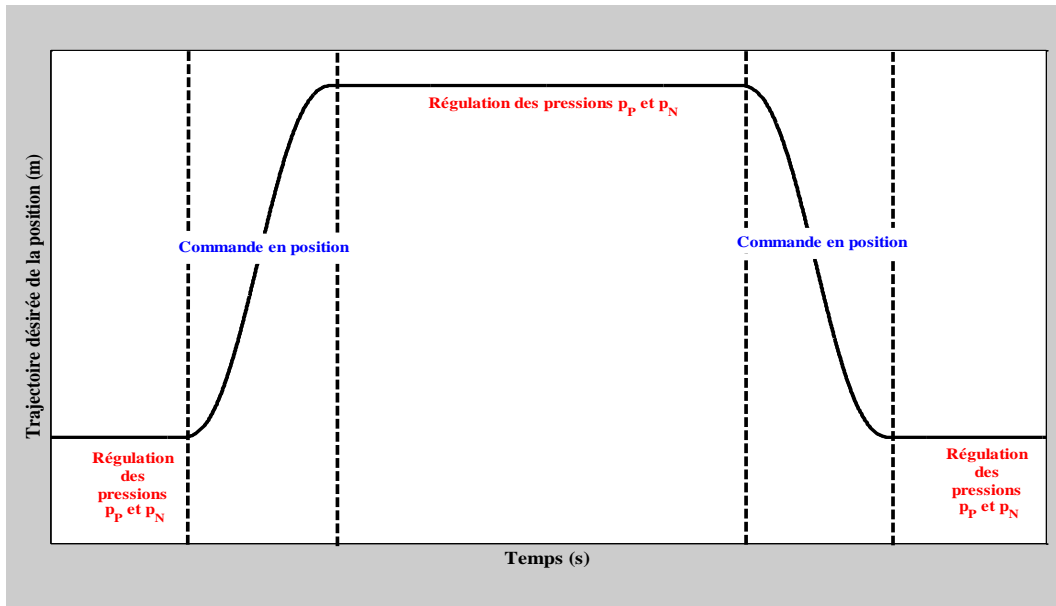


Figure 3.4 : Commutation entre les deux lois de commande (position/pressions)

La figure 3.5 illustre la solution proposée dans le cas de l'existence du phénomène de redécollage avec une loi de commande multidimensionnelle :

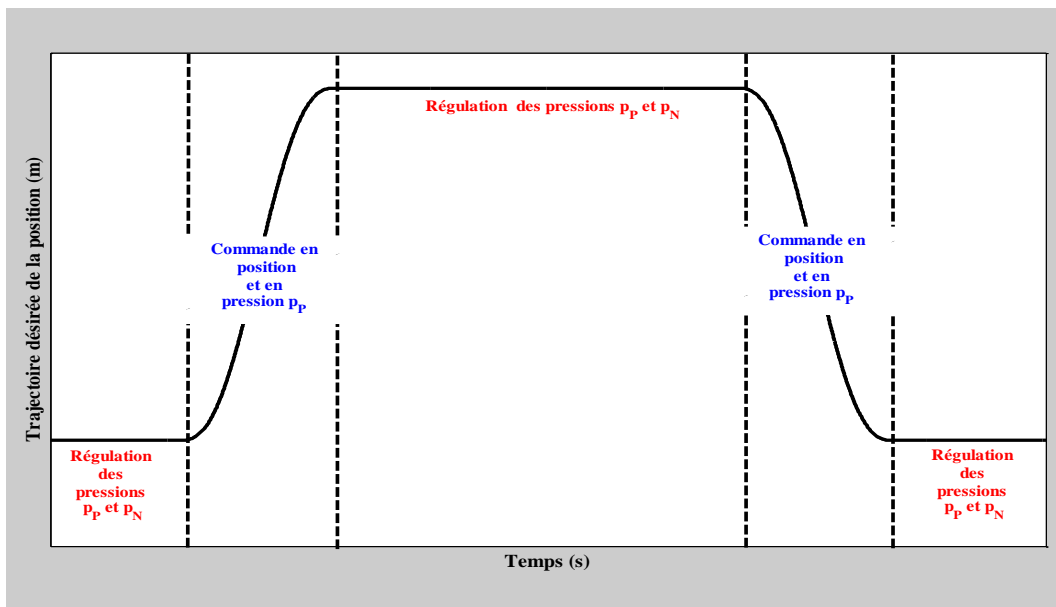


Figure 3.5 : Commutation entre les deux lois de commande (position-pression/pressions)

Quels sont donc les critères de commutations entre les deux lois de commandes et comment seront calculées les valeurs des pressions désirées durant le régime statique de la trajectoire désirée en position ? Les paragraphes suivants, proposent une réponse à ces deux interrogations.

3.1 CRITÈRES DE COMMUTATION

Les critères de commutation choisis entre les deux lois de commande reposent sur l'erreur en position et l'évolution de la vitesse. En effet, si les trois conditions (c1, c2 et c3), décrites dans ce qui suit, sont toutes satisfaites alors le système est commandé en régulation de pressions. Sinon, si au moins l'une des conditions n'est pas satisfaite, le système est commandé en suivi de trajectoire en position (dans le cas de la commande monodimensionnelle) ou en suivi de trajectoire en position et une pression (dans le cas de la commande multidimensionnelle).

c1- $v_d = 0$: la vitesse désirée est nulle.

c2- $|y - y_{stop}| \leq \varepsilon_1$: l'erreur en position durant le régime statique est inférieure à une certaine valeur ε_1 très faible et fixée à l'avance, avec y_{stop} désigne la valeur désirée de la trajectoire en position dans les phases statiques.

c3- $|v| \leq \varepsilon_2$: la vitesse est inférieure à une certaine valeur ε_2 très faible.

Pourquoi ce choix de critères et quelles sont leurs contributions respectives ?

Le premier critère « c1 » : $v_d = 0$ vérifie que la trajectoire désirée de la position est en régime statique et donc $y_d = y_{stop}$. Le deuxième critère « c2 » : $|y - y_{stop}| \leq \varepsilon_1$, bien qu'il teste une erreur faible en position et donc $y \approx y_{stop}$ à un instant t , il n'assure pas que la position demeure à la même valeur à $t + \Delta t$ (avec Δt un pas d'échantillonnage). D'où la nécessité de rajouter le troisième critère « c3 » : $|v| \leq \varepsilon_2$, afin de vérifier que la vitesse est très faible voire nulle et donc que le système est à l'arrêt.

La figure 3.6 explicite le besoin d'ajouter ce troisième critère et illustre le cas où le système peut être en régime statique avec une erreur en position très faible (satisfaisant les deux premiers critères « c1 » et « c2 ») mais une vitesse assez grande (ne satisfaisant pas le troisième critère « c3 »). Autrement dit, le système peut être considéré en régime stationnaire à cet instant alors qu'il ne l'est pas.

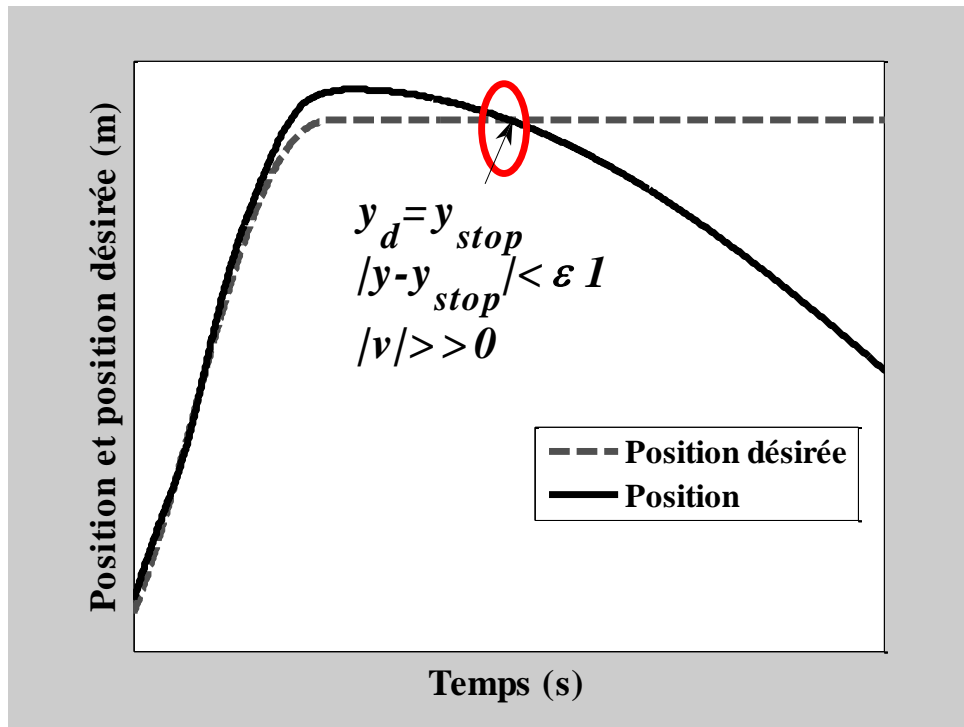


Figure 3.6 : Explication graphique de la nécessité du critère « c3 »

Si les trois critères sont satisfaits et donc le système va être commandé en deux régulations de pressions, quelles sont les valeurs désirées des consignes de ces régulations ? le paragraphe suivant explique la stratégie proposée afin d'obtenir ces valeurs.

3.2 PRESSIONS DÉSIRÉES DURANT LE RÉGIME STATIQUE

Initialement les valeurs des pressions désirées p_{Pd} et p_{Nd} pour les régulations de pressions sont fixées aux valeurs des pressions dans les chambres quand le système est au repos. Ensuite, à chaque commutation vers les régulations de pressions, les consignes des pressions sont les valeurs des pressions $p_{P_{stop}}$ et $p_{N_{stop}}$ dans les chambres du vérin au moment de la commutation. Ces valeurs de consignes sont évidemment maintenues constantes durant chaque régime statique correspondant.

3.3 PRÉSENTATION GLOBALE DE LA STRATÉGIE PROPOSÉE

La figure 3.7 résume la méthode utilisée pour la commutation des lois de commandes pour éviter le phénomène de redécollage du vérin électropneumatique (sur cette figure les courbes des pressions désirées sont présentées dans le cas d'une commande monodimensionnelle en suivi de position).

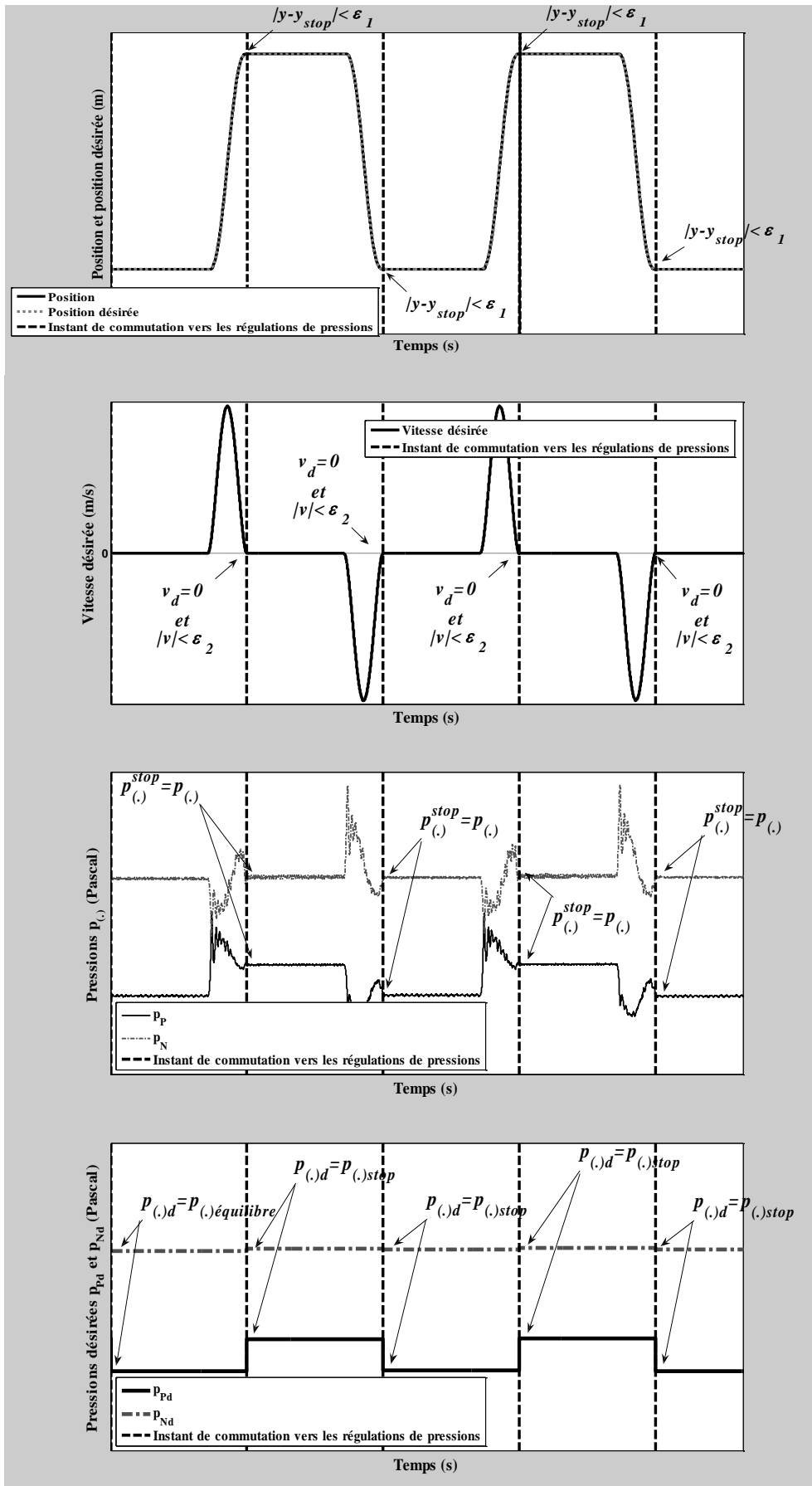


Figure 3.7 : Stratégie proposée

4. MISE EN ŒUVRE DE LA STRATÉGIE PROPOSÉE

Le phénomène de redécollage a été observé avec toutes les commandes mono et multidimensionnelles déjà appliquées sur le vérin électropneumatique : avec la commande linéarisante [Brun'99 b], la commande basée sur la théorie de la platitude [Brun'99 b], la commande par la technique du backstepping [Smaoui'06], la commande par la technique du mode glissant [Bouri'01] [Laghrouche'06] [Smaoui'08].

4.1 ÉTUDE DANS LE CAS D'UNE COMMANDE MONODIMENSIONNELLE EN SUIVI DE POSITION

Le phénomène de redécollage existe lors de l'implantation des commandes proposées au §4.1.1 et §4.2.1 du chapitre 1. Le paragraphe suivant ne développe que l'approche du §4.2.1.

4.1.1 EXISTENCE DU PHÉNOMÈNE DE REDÉCOLLAGE

Afin d'appliquer l'une des approches précitées sur le vérin électropneumatique, une mise en forme du modèle (2.50) est nécessaire.

Suite au difféomorphisme $\begin{bmatrix} y & L_f y & L_f^2 y & p_P \end{bmatrix}^T$, le modèle s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = v \\ \frac{dv}{dt} = a \\ \frac{da}{dt} = \frac{S_P k r T}{M V_P(y)} \left[\varphi_P - \frac{S_P}{r T} p_P v \right] - \frac{S_N k r T}{M V_N(y)} \left[\varphi_N + \frac{S_N}{r T} p_N v \right] - \frac{b_v}{M} a + \left(\frac{S_P k r T}{M V_P(y)} \psi_P + \frac{S_N k r T}{M V_N(y)} \psi_N \right) u \\ \frac{dp_P}{dt} = \frac{k r T}{V_P(y)} \left[\varphi_P - \frac{S_P}{r T} p_P v \right] + \frac{k r T}{V_P(y)} \psi_P u \end{cases} \quad (3.6)$$

Le but de la commande étant un suivi en position une base d'erreur entre la position, la vitesse, l'accélération et leurs trajectoires désirées est créée :

$$\begin{cases} e_y = y - y_d \\ e_v = v - v_d \\ e_a = a - a_d \end{cases} \quad (3.7)$$

L'application de l'approche n°2 (cf. §4.2 du chapitre 1) sur le système (3.6) conduit à la loi de commande suivante :

$$u = \frac{1}{\left[\frac{S_p \psi_p + S_N \psi_N}{V_p(y) + V_N(y)} \right]} \left[-\frac{S_p}{V_p(y)} \left[\varphi_p - \frac{S_p}{rT} p_p v \right] + \frac{S_N}{V_N(y)} \left[\varphi_N + \frac{S_N}{rT} p_N v \right] + \frac{b_v}{krT} a + \frac{M}{krT} (\dot{a}_d - K_y e_y - K_v e_v - K_a e_a) \right] \quad (3.8)$$

avec :

$$\begin{cases} K_y = \alpha_a \alpha_v \alpha_y \\ K_v = \alpha_a \alpha_v + \alpha_a \alpha_y + \alpha_v \alpha_y \\ K_a = \alpha_a + \alpha_v + \alpha_y \end{cases} \quad \alpha_a, \alpha_v, \alpha_y > 0 \quad (3.9)$$

Note 3.1 les termes apparaissant aux dénominateurs de la loi de commande (3.8) ne sont jamais nuls vu que $V_p(y) > 0, \forall y$ (cf. chapitre 2 §3.2) et $\psi_p > 0, \forall p$ (cf. chapitre 2 §5.2).

Comme indiqué au chapitre 2, les résultats théoriques proposés au §4 du chapitre pour ce modèle possédant une dynamique interne de dimension 1 seraient applicables à condition de trouver une quatrième composante du difféomorphisme $[y \ L_f y \ L_f^2 y \ z_4]^T$ vérifiant une équation différentielle du même type que dans le modèle (1.82) (cf. §5 du chapitre 1). Cette recherche ayant été infructueuse, une étude de la stabilité du point d'équilibre de la dynamique en p_p du modèle (3.6) a été faite. Il faut conclure que la stabilité globale du point d'équilibre de la dynamique résiduelle reste un problème ouvert [Hildebrandt'05]. Seule la stabilité locale de ce point d'équilibre a été prouvée dans [Brun'99 a].

L'implantation de la commande (3.8) sur le vérin électropneumatique nécessite le réglage de 3 gains qui doivent être strictement positifs. Afin d'assurer une erreur en position aussi faible que possible, ces gains ont été fixé comme suit : $\alpha_y = 30, \alpha_v = 40, \alpha_a = 80$.

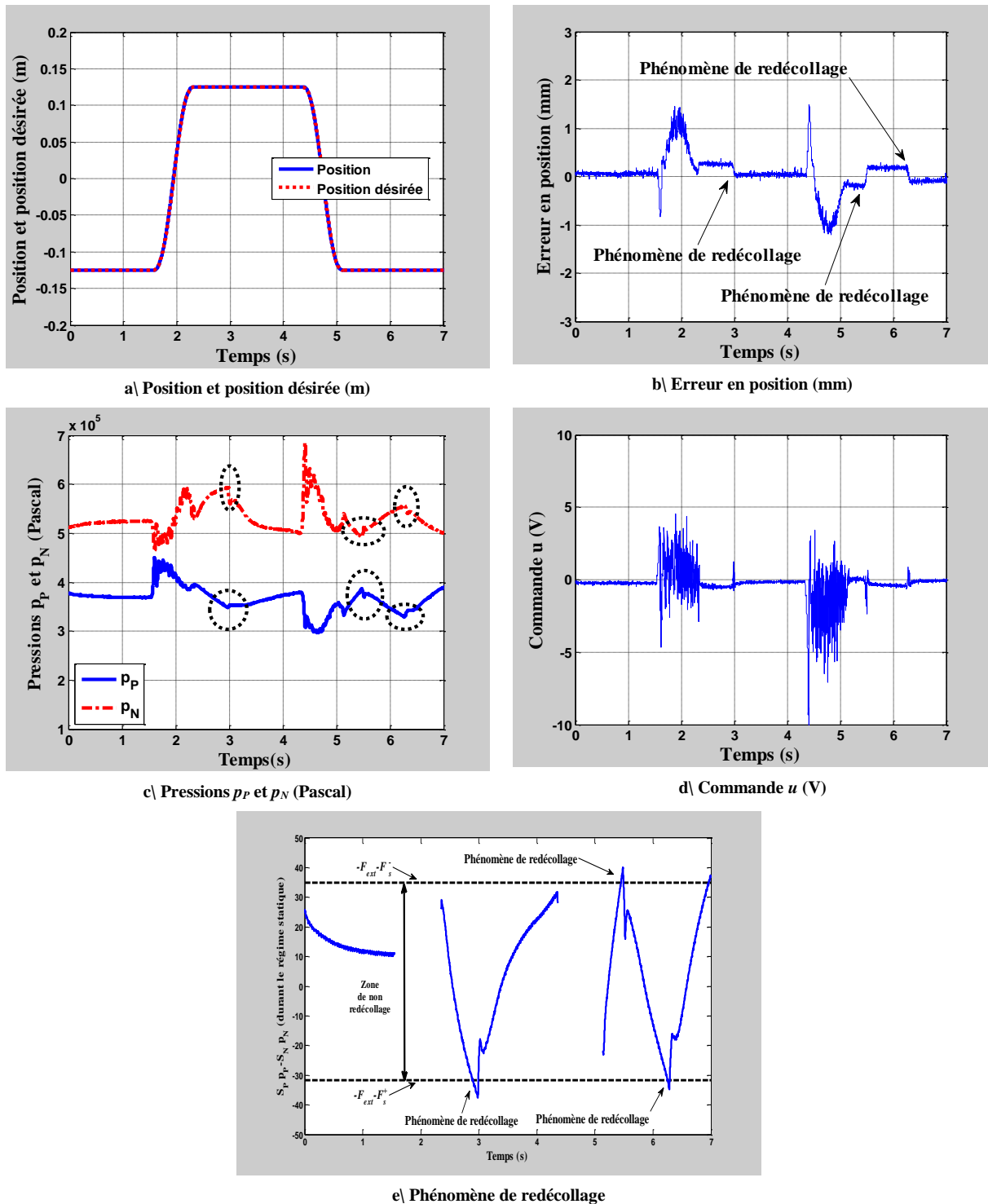


Figure 3.8 : Résultats expérimentaux obtenus avec la commande en position (3.8)

La figure 3.8 montre le phénomène de redécollage du vérin durant le régime statique. En effet, quand le système est à l'arrêt, les pressions continuent à évoluer jusqu'à ce que « $S_P p_P - S_N p_N$ » dépasse la zone délimitée par $-F_S^- - F_{ext}$ et $-F_S^+ - F_{ext}$, ce qui provoque le redécollage. Ce phénomène est observé sur toutes les courbes de la figure 3.8 à $t = 3$ s, $t = 5,4$ s et $t = 6,2$ s.

4.1.2 APPLICATION DE LA SOLUTION POUR ÉVITER LE REDÉCOLLAGE

L'application de la solution proposée dans le paragraphe 3 sur le modèle (3.6) du vérin électropneumatique consiste à commander le système en position avec la loi de commande (3.8) durant le régime dynamique, et quand les trois critères (décrits dans le §3.1) sont satisfaits, à commuter vers deux régulations de pression durant le régime statique afin de maintenir les pressions constantes et égales aux pressions dans les chambres du vérin au moment de la commutation (cf. §3.2).

Pour la régulation en pressions, la méthode classique de commande non linéaire linéarisante [Isidori'81] est utilisée. Durant le régime statique, quand le système atteint l'équilibre mécanique, le modèle du vérin électropneumatique s'écrit :

$$\begin{cases} y &= y_{stop} + \Delta y & |\Delta y| \leq \varepsilon_1 \\ v &= \Delta v & |\Delta v| \leq \varepsilon_2 \\ \dot{p}_P &= f_P(y_{stop} + \Delta y, \Delta v, p_P) + g_P(y_{stop} + \Delta y, p_P)u_P \\ \dot{p}_N &= f_N(y_{stop} + \Delta y, \Delta v, p_N) + g_N(y_{stop} + \Delta y, p_N)u_N \\ z_P &= [p_P \quad p_N]^T \end{cases} \quad (3.10)$$

Où les deux pressions p_P et p_N représentent les sorties du système et :

$$\begin{aligned} f_P(y_{stop} + \Delta y, \Delta v, p_P) &= \frac{krT}{V_P(y_{stop} + \Delta y)} \left[\varphi_P - \frac{S_P}{rT} p_P \Delta v \right] \\ g_P(y_{stop} + \Delta y, p_P) &= \frac{krT}{V_P(y_{stop} + \Delta y)} \psi_P \\ f_N(y_{stop} + \Delta y, \Delta v, p_N) &= \frac{krT}{V_N(y_{stop} + \Delta y)} \left[\varphi_N + \frac{S_N}{rT} p_N \Delta v \right] \\ g_N(y_{stop} + \Delta y, p_N) &= \frac{krT}{V_N(y_{stop} + \Delta y)} \psi_N \end{aligned} \quad (3.11)$$

Le but de la commande étant dans cette phase une régulation de pression, une base d'erreur, entre les pressions et leurs valeurs désirées, est créée :

$$\begin{cases} e_P = p_P - p_{Pd} \\ e_N = p_N - p_{Nd} \end{cases} \quad (3.12)$$

Le choix des lois de commande :

$$\begin{cases} u_P &= \frac{1}{g_P(y_{stop} + \Delta y, p_P)} \left(-f_P(y_{stop} + \Delta y, \Delta v, p_P) + \dot{p}_{Pd} - k_{p_P} e_P \right) \\ u_N &= \frac{1}{g_N(y_{stop} + \Delta y, p_N)} \left(-f_N(y_{stop} + \Delta y, \Delta v, p_N) + \dot{p}_{Nd} - k_{p_N} e_N \right) \end{cases} \quad (3.13)$$

permet d'écrire:

$$\begin{cases} \dot{e}_P &= -k_{p_P} e_P \\ \dot{e}_N &= -k_{p_N} e_N \end{cases} \quad (3.14)$$

Ainsi, tant que k_{p_P} et k_{p_N} sont strictement positifs, e_P et e_N convergent exponentiellement vers zéro.

L'implantation des lois de commandes (3.8) et (3.13) en commutation sur le vérin électropneumatique nécessite le réglage de cinq gains. Les gains correspondant à la loi de commande (3.8) du régime dynamique n'ont pas été modifiés : $\alpha_y = 30$, $\alpha_v = 40$, $\alpha_a = 80$. Les gains correspondant à la loi de commande (3.13) du régime statique ont été choisis comme suit : $k_{p_P} = 300$, $k_{p_N} = 300$ afin d'assurer une bonne régulation de pressions.

La figure 3.8 résume les résultats expérimentaux et montre bien que le phénomène de redécollage a été évité. En effet, les pressions p_P et p_N dans les chambres du vérin qui continuaient à évoluer durant le régime statique (cf. figure 3.8.c) avec la commande (3.8) sont devenues constantes (cf. figures 3.9.c et 3.9.d) avec la commande (3.13). Ce qui a évité à « $S_P p_P - S_N p_N$ » de dépasser la zone de non redécollage limitée par $-F_S^- - F_{ext}$ et $-F_S^+ - F_{ext}$ (cf. figure 3.9.g) durant le régime statique.

Cependant, une légère dégradation de 0.05 mm dans les performances en suivi de trajectoire en position durant le régime statique a été constatée. En effet, l'erreur moyenne en position durant le régime statique était de 0.13 mm (cf. figure 3.8. b) avec la commande (3.89) en suivi de trajectoire de position. Cette erreur est égale à 0.18 mm (cf. figure 3.9. b) avec l'utilisation des lois de commande en commutation. Ceci est expliqué par le fait qu'au moment du redécollage, le vérin va bouger et donc l'erreur en position peut croître ou décroître légèrement. Dans le deuxième cas, la valeur moyenne en erreur est évidemment plus faible.

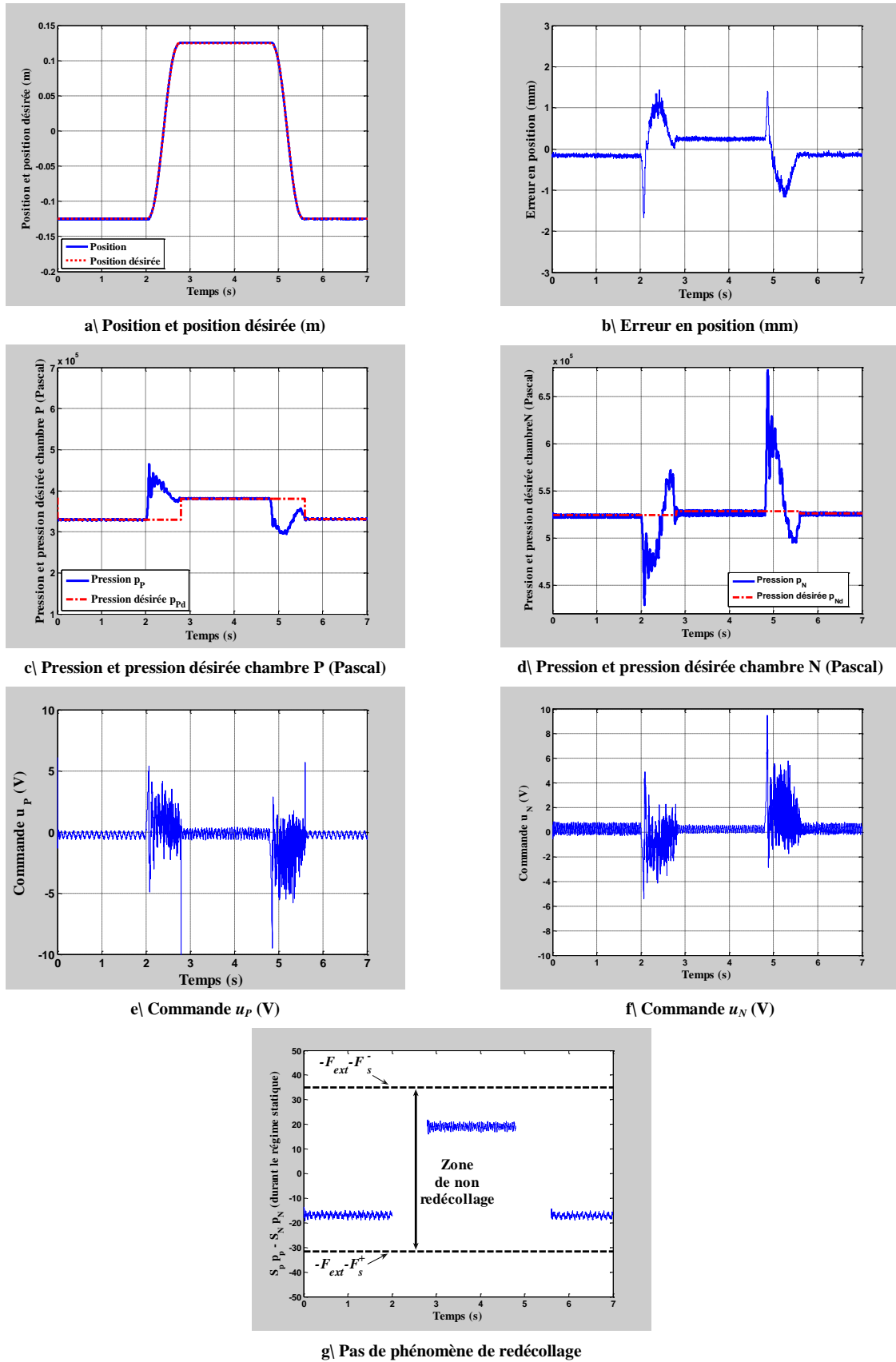


Figure 3.9 : Résultats expérimentaux obtenus

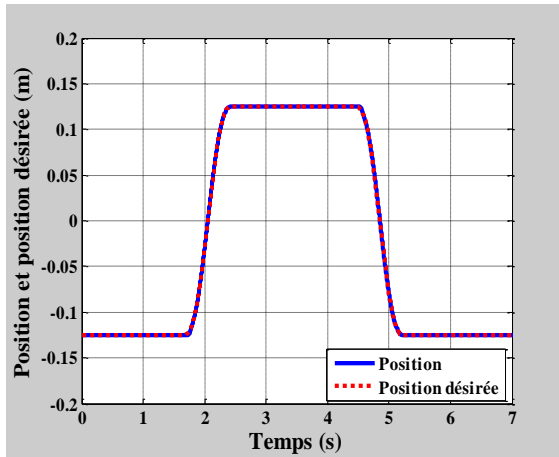
4.2 ÉTUDE DANS LE CAS D'UNE COMMANDE MULTIDIMENSIONNELLE EN SUIVI DE POSITION-PRESSION

Dans le chapitre 2, le phénomène de redécollage a bien été observé même avec une commande multidimensionnelle en suivi de trajectoire en position-pression (cf. figures 2.17 à 2.19). En effet, même si une des deux pressions est constante durant le régime statique l'autre pression continue à évoluer, ce qui peut causer le phénomène de redécollage du vérin. De ce fait, le paragraphe suivant montre que la solution proposée au paragraphe 3 pour éviter ce phénomène doit aussi être utilisée avec une commande multidimensionnelle.

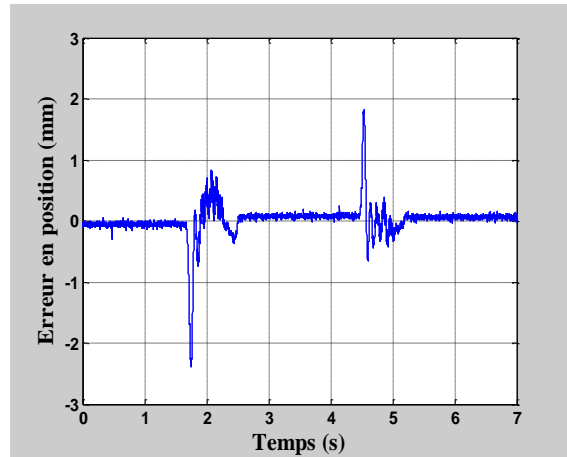
Ainsi si les trois critères décrits aux §3.1 sont satisfaits, les régulations de pressions (3.13) dans les deux chambres P et N du vérin sont appliquées et les pressions désirées sont choisies telles que définies dans le §3.2. Sinon, si au moins un des trois critères n'est pas satisfait, la commande (2.29) (cf. §6.1.2 du chapitre 2) en suivi de trajectoire en position et pression de la chambre P est appliquée.

L'implantation des lois de commande en commutation sur le vérin électropneumatique nécessite le réglage de six gains : les quatre gains correspondants à la loi de commande (2.29) en position-pression dans la chambre P ont les mêmes valeurs utilisées au §6.1.3 du chapitre 2 : $\alpha_y = 30$, $\alpha_v = 40$, $\alpha_a = 80$, $\alpha_p = 300$. Les gains correspondants aux régulations de pressions (3.13) des deux chambres P et N dans le vérin ont été choisis comme suit : $k_{p_p} = 300$, $k_{p_n} = 300$.

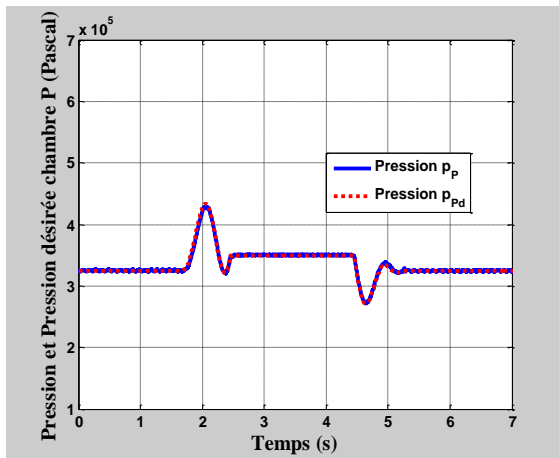
La figure 3.10 résume les résultats expérimentaux obtenus et montre que la solution proposée dans ce chapitre, afin d'éviter le phénomène de redécollage, est aussi valable pour les commandes multidimensionnelles.



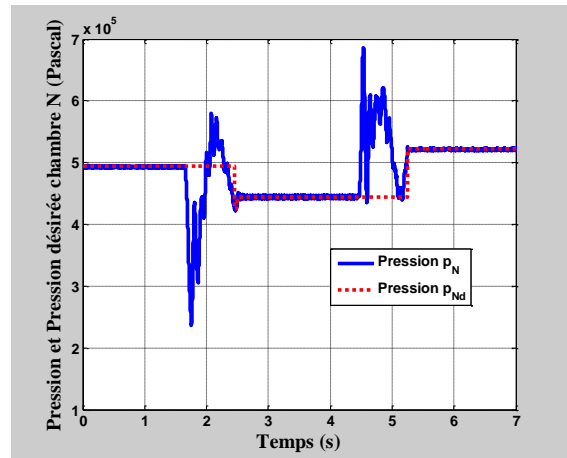
a) Position et position désirée (m)



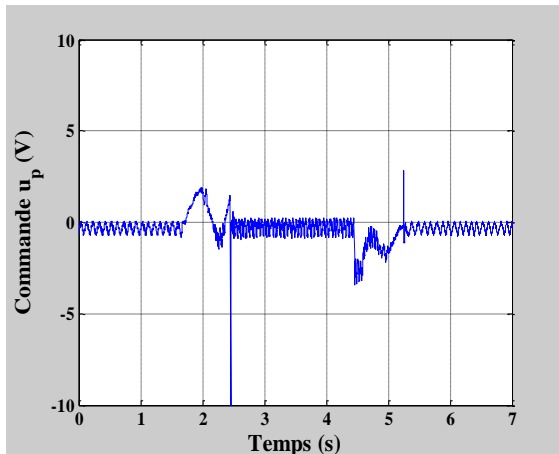
b) Erreur en position (mm)



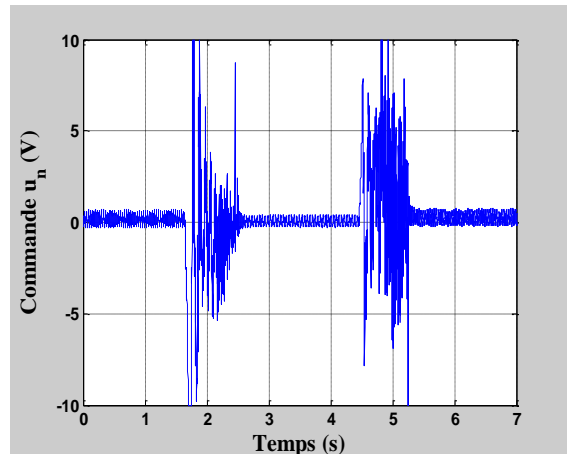
c) Pression et pression désirée chambre P (Pascal)



d) Pression et pression désirée chambre N (Pascal)



e) Commande u_p (V)



f) Commande u_n (V)

Figure 3.10 : Résultats expérimentaux obtenus

La figure 3.10.c présente l'évolution de la pression chambre P et sa trajectoire désirée dans le régime dynamique et statique. Durant le régime dynamique la trajectoire de la pression désirée dans la chambre P est celle utilisée au chapitre 2 (cf. figure 2.16). Durant le régime statique, ou plus précisément, durant la régulation de pression, la valeur de la pression désirée est la valeur de la pression dans la chambre P du vérin au moment de la commutation.

La figure 3.10.d présente l'évolution de la pression dans la chambre N du vérin et ses valeurs désirées durant le régime statique. En effet, la pression de la chambre N n'est commandée que durant le régime stationnaire. Et de manière analogue aux pressions désirées de la chambre P, les valeurs désirées des pressions de la chambre N sont les valeurs de la pression au moment de la commutation vers une régulation de pressions.

Ainsi les figures 3.10.c et 3.10.d montrent bien que les pressions se sont stabilisées durant les régimes statiques et donc le système reste à chaque régime stationnaire à l'équilibre pneumatique en plus de l'équilibre mécanique (arrêt du système), ce qui évite l'apparition du phénomène de redécollage.

La figure 3.10.b présente l'erreur entre la position et sa trajectoire désirée. L'erreur moyenne durant le régime statique est de l'ordre de 0.02 mm alors que elle était de 0.11 mm avec la commande (2.29) en suivi de position et pression de la chambre P. Une légère amélioration a donc été constatée. Ceci s'explique par le fait que le phénomène de redécollage a été évité et donc la variation de l'erreur a été évitée.

5. CONCLUSION

Le phénomène de redécollage a été observé avec toutes les commandes mono et multidimensionnelles en suivi de position appliquées sur le vérin électropneumatique. Il s'agit d'un mouvement saccadé du vérin lors des phases stationnaires des trajectoires. Ce mouvement est lié à la fois à la présence des forces de frottements secs et aux pressions dans les chambres du vérin qui continuent à évoluer.

Dans ce chapitre, les conditions d'existence du phénomène de redécollage ont d'abord été identifiées. Ensuite, une solution à ce problème a été proposée. Elle se résume en une commutation d'une commande en position en régime dynamique vers une régulation de pressions dans les chambres du vérin, quand le système atteint l'équilibre mécanique.

Les critères de commutations reposent sur l'erreur en position et l'évolution de la vitesse. Les valeurs des consignes des régulations de pressions sont égales aux valeurs des pressions dans les chambres du vérin au moment de la commutation.

Cette solution a été implémentée sur le vérin électropneumatique. Les résultats expérimentaux ont été très satisfaisants et ont bien montré le bien fondé de l'ensemble de la stratégie.

CONCLUSION GÉNÉRALE

CONCLUSION GÉNÉRALE

Le travail présenté se situe dans la continuité des activités du groupe « Automatique, Commande et Mécatronique » du Laboratoire Ampère concernant l'étude et la mise en œuvre des commandes « modernes » sur les systèmes à fluide sous pression. Ainsi, l'équipe s'est fixée comme objectif une comparaison sous forme de benchmark global, alliant critiques des performances obtenues et bilan économique, d'un grand nombre de commandes. Ceci explique que le chapitre 2 se termine par une extension du tableau comparatif proposé dans les thèses de Brun [Brun'99] et Smaoui [Smaoui'04].

Cependant, le modèle multidimensionnel du vérin écrit sous forme « semi strict feedback » a suscité un approfondissement des travaux de recherche concernant la synthèse de lois de commandes non linéaires robustes des systèmes « strict feedback » généraux. Ainsi, deux approches directes ont été développées pour l'élaboration de lois de commandes continues en suivi de trajectoire. L'étude de la stabilité exponentielle globale du point d'équilibre a été prouvée pour le système nominal. La preuve de la stabilité au sens entrée bornée / état borné (ISS) dans le cas de présence de variations paramétriques ou de dynamiques mal modélisées, a également été proposée. Ces deux approches sont valables pour la classe de systèmes mono et multidimensionnels qui peuvent se mettre sous la forme « strict feedback » sans dynamique interne respectivement « semi strict feedback » sans dynamique interne. Cette dernière forme est assez particulière du fait que les équations différentielles ne dépendant que des états sont sous la forme triangulaire supérieure en les états, les équations différentielles contenant les entrées de commande sont sous la forme triangulaire inférieure en les entrées de commande et les équations des sorties sont aussi sous la forme triangulaire en les états désirés.

De plus, une solution pour le problème du suivi de trajectoire pour les systèmes non linéaires monodimensionnels sous forme « strict feedback » avec une dynamique interne a été proposée. Cette solution a tout d'abord été développée dans le cas de dynamique interne de dimension 1, puis dans le cas des dynamiques internes sous forme « strict feedback ».

Avant la mise en œuvre pratique sur le vérin électropneumatique du Centre d'Essai Fluid Power du Laboratoire Ampère, la co-simulation a été utilisée. Ainsi, le modèle physique du système électropneumatique a été développé au moyen du logiciel AMESim (LMS Imagine) et les commandes ont été implémentées sur le logiciel Simulink. Des essais réels ont ensuite été effectués sur le vérin électropneumatique et ont permis de compléter le benchmark de l'ensemble des travaux de l'équipe. Une partie de ces travaux a fait l'objet d'un premier papier au Fluid Power Net International 2008, puis d'un second au World Congress IFAC 2008 et d'un troisième au IEEE 6th International Multi-Conference on Systems, Signals and Devices 2009. Sur proposition du comité scientifique de ce congrès, une extension de cette dernière communication a été réalisée et publiée en 2010 dans la revue Transactions on Systems, Signals and Devices" (Issues on Systems, Analysis & Automatic Control), SHAKER-VERLAG.

Il faut noter que dans cette partie du travail, le modèle de commande monodimensionnel du vérin électropneumatique n'a pas été utilisé. En effet, il possède une dynamique interne de dimension 1, mais aucun difféomorphisme n'a été trouvé afin de mettre le système sous la forme « strict feedback » avec une dynamique interne pour laquelle la synthèse d'une loi de commande a été proposée. Ceci est une première perspective qu'ouvre ce travail.

Ensuite, un problème rencontré par le groupe depuis de nombreuses années mais non résolu a été abordé. Ce problème concerne toutes les commandes mono et multidimensionnelles développées dans le laboratoire (retour d'état sur linéarisé tangent, backstepping, mode glissant,...) et se traduit par le redécollage du vérin électropneumatique du fait que le système atteint l'équilibre mécanique alors que l'équilibre pneumatique n'est pas obtenu. Autrement dit, comme les températures des chambres ne sont pas stabilisées, les pressions continuent à évoluer alors que la position est en régime statique.

L'idée est alors d'utiliser une commande en position pour le suivi de trajectoire et si celui-ci comporte des phases statiques, de commuter sur deux régulations de pressions pendant cette phase. Les critères de commutation choisis entre ces deux lois de commande reposent sur un écart entre la position désirée et la position réelle, inférieur à une valeur fixée à l'avance, durant le régime statique (vitesse désirée nulle) et sur l'évolution de la vitesse du vérin, inférieure à une valeur très faible et fixée aussi à l'avance et toujours en régime stationnaire.

Les consignes de pressions sont initialement les valeurs de pressions dans les chambres lorsque le vérin est au repos, puis sont actualisées à chaque commutation. Cette technique a été mise en œuvre en co-simulation puis appliquée sur le vérin électropneumatique. Des résultats satisfaisants ont ainsi été obtenus. Cette partie du travail a fait l'objet d'une soumission d'un article à International Journal of Fluid Power.

Cependant, une étude approfondie de la commutation des lois de commandes n'a pas été faite dans ce travail et en particulier l'effet « Zeno » [Liberzon'03] n'a pas été étudié. Ceci fait aussi l'objet de perspectives de recherche.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [Alleyne'00] **Alleyne, A.G., Liu, R.** Systematic Control of a Class of Nonlinear Systems with Application to Electrohydraulic Cylinder Pressure Control, IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2000, Vol. 8, n°4, pp. 623-634.
- [Alleyne'02] **Alleyne, A.G.** Addendum to “Systematic Control of a Class of Nonlinear Systems with Application to Electrohydraulic Cylinder Pressure Control”, IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2002, Vol. 10, n°5, pp. 756.
- [Andersen'67] **Andersen, B.W.** The analysis and design of pneumatic systems. New-York: Jhon Willy and Sons, 1967, 302p.
- [Andrieu'08] **Andrieu, V., Praly, L.** Global asymptotic stabilization for non-minimum phase non linear systems admitting a strict normal form. IEEE Transactions on Automatic Control, 2008, Vol. 53, n°5, pp 1120-1132.
- [Armstrong'94] **Armstrong, B., Dupont, P., Canudas de Wit, C.** A survey of models, analysis tools and compensation methods for the control of machines with friction, Automatica, 1994, Vol. 30, n°7, pp. 1083-1138.
- [Belgharbi'99] **Belgharbi, M., Thomasset, D., Scavarda, S., Sesmat, S.** Analytical model of the flow stage of a pneumatic servodistributor for simulation and nonlinear control, In the 6th Scandinavian International Conference on Fluid Power, SICFP'99, Tampere, Finland, 1999, pp. 847-860.

- [Bouhal'94]** **Bouhal, A.** Contribution à la commande linéaire et non linéaire adaptative des systèmes électropneumatiques, Thèse de doctorat, Lyon, INSA de Lyon, 1994, 202p.
- [Bouri'97]** **Bouri, M.** Contribution à la commande non linéaire par mode de glissement, application aux actionneurs électropneumatiques, Thèse de Doctorat, Lyon, INSA de Lyon, 1997, 194p.
- [Bouri'01]** **Bouri, M., Thomasset, D.** Sliding control of an electropneumatic actuator using an integral switching surface, IEEE Transactions on control systems technology, 2001, Vol. 9. n°2, pp. 368-375.
- [Brun'99 a]** **Brun, X., Belgharbi, M., Sesmat, S., Thomasset, D. and Scavarda, S.** Control of an electropneumatic actuator, comparison between some linear and nonlinear control laws, Journal of Systems and Control Engineering, 1999, Vol. 213, n°15, pp. 387-406.
- [Brun'99 b]** **Brun, X.** Comandes linéaires et non linéaires en électropneumatique. Méthodologies et Applications, Thèse de Doctorat, Lyon, INSA de Lyon, 1999, 209 p.
- [Brun'05]** **Brun, X., Sesmat, S., Thomasset, D. and Scavarda, S.** Study of “sticking and restarting phenomenon” on electropneumatic positioning systems. Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, 2005, Vol. 127, pp. 173-184.
- [Burrows'72]** **Burrows, C.R.** Fluid Power Servomechanisms. London: Van Nostrand Reinhold Compagny, 1972, 237 p.
- [Byrnes'91 a]** **Byrnes, C.I., Isidori, A., Willems, J.C.** Passivity, feedback equivalence, and the global stabilization of minimum phase nonlinear systems, IEEE Transactions on Automatic Control, 1991, Vol. 33, n°11, pp. 1228-1240.

- [Byrnes'91 b]** **Byrnes, C.I., Isidori, A.** Asymptotic Stabilization of Minimum Phase Nonlinear Systems, IEEE Transactions on Automatic Control, 1991, Vol. 36, pp. 1122-1137.
- [Canudas'91]** **Canudas De Wit, C., Noël, P., Aubin, A., Brogliato, B.** Adaptive friction compensation in robot manipulators : low velocities. Int. Journal of Robotics Research, 1991, Vol. 10, n°3, pp 189-199.
- [Cerezo'01]** **Cerezo, A.** Optimisation énergétique. Résultats expérimentaux et analyse d'un système plat. Rapport de stage de D.E.A, Lyon Laboratoire Ampère (ex Laboratoire d'Automatique Industrielle), INSA de Lyon, 2001, 76p.
- [Chitty'76]** **Chitty, A., Lambert, T.H.** Modeling a loaded two-way pneumatic actuator, Journal of Dynamic Systems Measurements and Control, 1976, Vol. 9, n°1, pp. 19-25.
- [Control Engineering Staff'03]** **Control Engineering Staff.** Servo Pneumatics Finding its Niche, Bit by Bit, Control Engineering Europe, 2003, pp. 32–33.
- [Det'91]** **Det, F.** Modélisation en bond graphs, simulation et commande d'une pince à souder électropneumatique, Thèse de Doctorat, Lyon, INSA de Lyon, 1991, 278p.
- [Fridman'02]** **Fridman, L., Levant, A.** Higher order sliding modes, In: W. Perruquetti et JP Barbot, Sliding mode Control in Engineering, New York: Marcel Dekker, 2002, pp. 53-101.
- [Hägglund'02]** **Hägglund, Tore.** A friction compensator for pneumatic control valves. 2002, Journal of Process Control, Vol. 12, n°8, pp. 897-904.

- [Hahn'67]** **Hahn, W.** Stability of Motion, New York, Springer-Verlag, 1967.
- [Hamiti'96]** **Hamiti, K., Voda-Besancon, A., Roux-Buisson, H.** Position control of a pneumatic actuator under the influence of stiction, Control Engineering Practice, 1996, Vol. 4, n°8, pp. 1079-1088.
- [Hildebrandt'05]** **Hildebrandt, A., Kharitonov, A., Sawodny, O., Götttert, M., Hartmann, A.** On the zero dynamic of servo pneumatic actuators and its usage for trajectory planning and control, IEEE Conference on Mechatronics, and Automation, Niagara Falls, Canada, July 2005, pp. 1241-1246.
- [Hunt'83]** **Hunt, L.R., Su, R., Meyer, G.** Global transformations of non linear systems, IEEE Transaction on Automatic Control, 1983, Vol. 28, Issue 1, pp. 24-31.
- [Isidori'81]** **Isidori, A., Krener, A., Gori-Giorgi, C. Monaco, S.** Nonlinear decoupling via feedback: a differential geometric approach. IEEE Transactions on Automatic control, 1981, Vol. 26, n°2, pp. 331-345.
- [Isidori'89]** **Isidori, A.** Nonlinear Control Systems, Second Edition, Communications and Control Engineering Series, Springer, 1989, 479 p.
- [Jebar'77]** **Jebar, H.S.** Design of pneumatic actuator systems, Thèse de Doctorat, Université de Nottingham, Angleterre, 1977, 426p.
- [Jebar'80]** **Jakubczyk, B., Respondek, W.** On linearization of control systems, Bull. Acad. Polonaise Ser. Sci. Math., 1980, pp. 517-522.
- [Kain'73]** **Kain, J., Wartelle, C.** Dynamique des vérins pneumatiques, Les mémoires Techniques du CETIM, Septembre 1973, n°17, p95.

- [Kanellakopoulos'91] **Kanellakopoulos, I., Kokotović, P., Morse, A.S.** Systematic design of adaptive controllers for feedback linearizable systems, IEEE Transactions on Automatic Control, 1991, Vol. 36, pp. 1241-1253.
- [Karagiannis'05] **Karagiannis, D., Jiang, Z-P., Ortega, R., Astofli, A.** Output-feedback stabilization of a class of uncertain non-minimum-phase nonlinear systems, Automatica, 2005, Vol. 41, n°9, pp. 1609-1615.
- [Karnopp'85] **Karnopp, D.** Computer Simulation of Stick-Slip Friction in Mechanical Dynamic Systems, Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, 1985, Vol. 107, pp 100-103.
- [Kellal'87] **Kellal, A.** Contribution à l'étude des asservissements électropneumatiques. Application à la réalisation d'un asservissement numérique d'un axe de robot. Thèse de doctorat, Lyon, INSA de Lyon, 1987, 173p.
- [Khalil'02] **Khalil, H.K.** Nonlinear Systems, Third Edition, Prentice Hall, 2002, 750p.
- [Krstić'95] **Krstić, M., Kanellakopoulos, I., Kokotović, P.** Nonlinear and adaptative control design, New York : John Wiley & Sons, 1995, 563 p.
- [Laghrouche'06] **Laghrouche, S., Smaoui, M., Plestan, F., Brun, X.** Higher order sliding mode control based on optimal approach of an electropneumatic actuator. International Journal of Control, 2006, Vol. 79, n°2, pp. 119-131.
- [Levant'00] **Levant, A.** Variable measurement step in 2-sliding control, Kybernetika, 2000, Vol. 36, n°1, pp. 77-93.

- [Lévine'96] **Lévine, J., Lottin, J. and Ponsart, J.C.** A non linear approach to the control of magnetic bearings, IEEE Transactions on Control Systems Technology, 1996, Vol. 4, n°5, pp. 524-544.
- [Liberzon'03] **Liberzon, D.** Switching in Systems and Control, Systems and Control: Foundations and Applications, Birkhäuser, 2003, 234 p.
- [Lin'92] **Lin, X.F.** Contribution à la modélisation et à la commande d'un vérin pneumatique de grande longueur, Thèse de Doctorat, Lyon, INSA de Lyon, 1992, 193p.
- [Marino'91] **Marino, R., Tomei, P.** Global Adaptive Output-Feedback Control of Nonlinear Systems, Proc. Of the 30th IEEE CDC, 1991.
- [Marino'95] **Marino, R., Tomei, P.** Non linear Control Design, Prentice Hall, 1995, 396p.
- [Marino'05] **Marino, R., Tomei, P.** A class of globally output feedback stabilizable nonlinear non minimum phase systems. IEEE Trans. On Automat. Cont., 2005, Vol. 50, n°12.
- [Ming-Chang'95] **Ming-Chang, S. Shy-I, T.** Identification and Position Control of a Servo Pneumatic Cylinder. Control Engineering Practice, 1995, Vol. 9. pp. 1285–1290.
- [Mouille'94] **Mouille, P.** Commande non linéaire de pallier magnétique, Thèse de Doctorat, Université de Savoie, 1994, 209p.
- [Praly'02] **Praly, L.** Fonctions de Lyapunov et stabilisation de point d'équilibre, Notes de cours de DEA, Ecole des mines de Paris, Centre Automatique des Systèmes, 2002, 259 p.

- [Renn'04]** **Renn, J.-C., Liao, C.-M.** A study on the speed control performance of a servo-pneumatic motor and the application to pneumatic tools, International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 2004, Vol. 23, n°7-8, pp 572-576.
- [Richard'90]** **Richard, E.** De la commande linéaire et non linéaire en position des systèmes électropneumatiques, Thèse de Doctorat, Lyon, INSA de Lyon, 1990, 291p.
- [Sesmat'96 a]** **Sesmat, S. Scavarda, S.** Static characteristics of a three way servovalve, In: 12th Aachen Conference on Fluid Power Technology, Aachen, Germany, March 12-13, 1996, pp. 643-652.
- [Sesmat'96 b]** **Sesmat, S.** Modélisation, simulation et commande d'une servovalve électropneumatique, Thèse de Doctorat, Lyon, INSA de Lyon, 1996, 307p.
- [Slotine'84]** **Slotine, J.J.** Sliding mode controller design for non linear systems, International Journal Control, 1984, Vol. 40, n°2, pp. 421-434.
- [Slotine'91]** **Slotine, J.J., Li, W.** Applied non linear control. Prentice Hall, 1991, 461 p.
- [Smaoui'04]** **Smaoui, M.** Commandes Non Linéaires Robustes Mono et Multidimensionnelles de Dispositifs Électropneumatiques : Synthèses et Application, Thèse de Doctorat, Lyon, INSA de Lyon, 2004, 191 p.
- [Smaoui'06]** **Smaoui, M., Brun, X. and Thomasset, D.** A study on tracking position control of an electropneumatic system using backstepping design, Control Engineering Practice, 2006, Vol. 14, n°8, pp. 923-933.

- [Smaoui'08] **Smaoui, M., Brun, X., Thomasset, D.** High Order Sliding Mode for an Electropneumatic System: A Differentiator-Controllers Design, International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2008, Vol. 18, pp. 481-501.
- [Sontag'89] **Sontag, E.D.** Smooth stabilization implies coprime factorization, IEEE Transaction on Automatic Control, 1989, Vol. 34, n°4, pp. 435-443.
- [Travieso-Torres'06] **Travieso-Torres, J.C., Duarte-Mermound, M.A., Estrada, J.L.** Tracking control of cascade systems base on passivity: the non adaptive and adaptive case, Transactions of the Instrumentation, Systems and Automation Society, 2006, Vol. 45, n° 3, pp. 435-445, 2006.
- [Travieso-Torres'07] **Travieso-Torres, J.C., Duarte-Mermound, M.A., Sepuleveda, D.I.** Passivity-based control for stabilization, regulation and tracking purposes of a class of non linear systems, International Journal of adaptive control and signal processing, 2007, Vol. 21, pp. 582-602.
- [Tustin'47] **Tustin, A.** The effect of backlash and speed-dependent friction on the stability of closed-cycle control systems, Journal of the Institution of Electrical Engineers, 1947, Vol. 94, n° 2A, pp. 143-151.
- [Utkin'92] **Utkin, V.I.** Sliding mode in control and optimization. Springer Verlag, 1995, 287 p.
- [Zalmanzon'65] **Zalmanzon, L.A.** Components for pneumatic control instruments. Oxford: Pergamon press, 1965, 320 p.

ANNEXES

ANNEXE 1 : LES DIFFÉRENTES FORMES « NORMALES »

Cette annexe se présente comme un résumé bibliographique non exhaustif des différentes formes « normales » rencontrées dans la littérature. Il s'agit essentiellement de situer les formes « strict feedback » mono et multi dimensionnelles utilisées au chapitre 1 par rapport à ces formes « normales ».

HYPOTHÈSES:

Pour toutes les formes normales présentées ci-dessous, seuls les systèmes non linéaires monodimensionnels sous la forme affine en la commande sont considérés. Ils sont du type :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{cases} \quad (\text{A1.1})$$

avec $x \in \mathbb{R}^n$, u et $y \in \mathbb{R}$. Les champs de vecteurs f et g sont lipchitziens. Ces mêmes champs de vecteurs et la fonction h sont suffisamment dérivables. Dans tous les cas, l'origine est le point d'équilibre du système A1.1 et le degré relatif de ce même système sera noté $\rho < n$.

FORME NORMALE LOCALE:

Historiquement (et inspiré du « linéaire ») la première forme appelée **forme normale locale** a été la forme dite d'Isidori (cf [Isidori'89]).

A partir du difféomorphisme :

$$z = \begin{bmatrix} z_\lambda \\ z_\xi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_\lambda(x) \\ \phi_\xi(x) \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \lambda \in [1 & \rho] \\ \xi \in [\rho+1 & n] \end{matrix} \quad (\text{A1.2})$$

tel que

$$z_\lambda(\lambda = 1, \rho) = \begin{bmatrix} h(x) \\ L_f h(x) \\ L_f^2 h(x) \\ \cdot \\ \cdot \\ L_f^{\rho-1} h(x) \end{bmatrix} \quad (\text{A1.3})$$

Et en considérant $\frac{\partial \phi_\xi}{\partial x} g(x) = 0, \forall \xi \in [\rho+1 \quad n]$, le système initial (A1.1) s'écrit sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = z_3 \\ \vdots \\ \dot{z}_\rho = F(z_\lambda, z_\xi) + G(z_\lambda, z_\xi) u \\ \dot{z}_\xi = \phi_\xi(z_\lambda, z_\xi) \\ y = z_1 \end{array} \right. \quad (\text{A1.4})$$

Cette forme (A1.4) est clairement locale (en effet, il peut exister soit une sous-variété pour laquelle l'expression $L_g L_f^{\rho-1} h(x)$ qui définit le degré relatif ρ est nulle, soit une sous-variété pour laquelle le déterminant de la matrice Jacobienne du difféomorphisme s'annule).

FORME NORMALE GLOBALE:

En 1991, Byrnes et Isidori donne une caractérisation complète des systèmes non linéaires, sous la forme affine en la commande, pour lesquels une **forme normale** dite **globale** (voir corollaire 5.7 de [Byrnes'91 b]) peut être définie :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = z_3 \\ \vdots \\ \dot{z}_\rho = F(z, z_\xi) + G(z, z_\xi) u \\ \dot{z}_\xi = \phi_\xi(z_1, z_\xi) \\ y = z_1 \end{array} \right. \quad (\text{A1.5})$$

Dans (A1.5) seul z_1 apparaît dans ϕ_ξ . Ce travail a servi de base à de nombreux travaux sur la stabilisation par retour de sortie où de nombreux auteurs par exemple [Kanellakopoulos'91], [Marino'91],... utilisent des « variantes » de cette forme normale avec des hypothèses supplémentaires sur les champs de vecteurs et/ou des hypothèses de minimum de phase.

FORME STRICTEMENT NORMALE

Récemment une autre « variante » de cette forme normale a permis de résoudre (avec des hypothèses plus ou moins « relaxées » sur les champs de vecteurs) la stabilisation par retour de sortie sans l'hypothèse de minimum de phase [Karagiannis'05], [Marino'05], [Andrieu'08]. Cette forme dite forme **strictement normale** s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = z_3 \\ \vdots \\ \dot{z}_\rho = F(z, z_\xi) + G(z_1) u \\ \dot{z}_\xi = \phi_\xi(z_1, z_\xi) \\ y = z_1 \end{cases} \quad (\text{A1.6})$$

Dans (A1.6) seul z_1 apparaît dans G .

Egalement des variantes de cette « strict normal form » sont apparues, par exemple Andrieu et Praly [Andrieu'08] utilisent la forme particulière:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = b_1(z_\xi, z_1) + a_1(z_\xi, z_1)z_2 \\ \dot{z}_2 = b_2(z_\xi, z_1, z_2) + a_2(z_\xi, z_1, z_2)z_3 \\ \vdots \\ \dot{z}_\rho = b_\rho(z_\xi, z_1, \dots, z_\nu) + a_\rho(z_1)u \\ \dot{z}_\xi = \phi_\xi(z_1, z_\xi) \\ y = z_1 \end{cases} \quad (\text{A1.7})$$

avec les $a_i > 0$.

Dans le même article, [Andrieu'08] considère la dynamique résiduelle en z_ξ écrite sous forme « strict feedback ». On notera donc que la seule différence avec la « strict feedback form » avec dynamique résiduelle (1.106 utilisée au chapitre 1) (les hypothèses $a_i \neq 0$ étant vérifiées dans les deux cas) soit le fait que dans a_ρ seul z_1 intervient.

D'AUTRES FORMES

Il convient également de citer un cas particulier des deux premières formes normales utilisées par [Byrnes'91 a] et reprises dans les travaux de [Travieso-Torres'06] et [Travieso-Torres'07].

Soit le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{cases} \quad (\text{A1.8})$$

avec $x \in R^n$, u et $y \in R$. Le degré relatif de (A1.8) est alors $\rho = 1 < n$. L'origine est considérée comme point d'équilibre du système non commandé (soit $f(0) = 0$ et $h(0) = 0$). Du fait que $\rho = 1$ (ou (111,...1) dans les papiers cités car l'étude est présentée en multidimensionnel), la forme normale locale et globale sont identiques et peuvent s'écrire sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{z}_\xi = \phi_\xi(z_1, z_\xi) \\ \dot{z}_1 = F(z_1, z_\xi) + G(z_1, z_\xi)u \\ y = z_1 \end{cases} \quad (\text{A1.9})$$

avec $G \neq 0$, $\forall z_1, \forall z_\xi$.

(A1.9) est alors ré-écrit (moyennant une hypothèse) sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{z}_\xi = Q(0, z_\xi) + P(z_1, z_\xi)z_1 \\ \dot{z}_1 = F(z_1, z_\xi) + G(z_1, z_\xi)u \\ y = z_1 \end{cases} \quad (\text{A1.10})$$

avec $G \neq 0$, $\forall z_1, \forall z_\xi$ et $\dot{z}_\xi = Q(0, z_\xi)$ dynamique des zéros.

Avec cette forme et en supposant que la dynamique des zéros soit globalement « weakly minimum phase » (i.e. $\exists W > 0$ et propre telle que $L_Q W \leq 0$), Byrnes, Isidori et Willems [Byrnes'91 a] concluent à l'existence d'un feedback continu stabilisant le point d'équilibre.

On rappelle que les travaux de [Travieso-Torres'06] et [Travieso-Torres'07] sont une extension des travaux précédents au cas du suivi de trajectoire de sortie avec l'hypothèse locale de « tracking weakly minimum phase ».

ANNEXE 2 : STABILITÉ EXPONENTIELLE

THEOREME [KHALIL'02]:

Soit $x = 0$ un point d'équilibre de $\dot{x} = f(x)$ et $D \subset \mathfrak{R}^n$ un domaine contenant $x = 0$. Soient $V : D \rightarrow \mathfrak{R}$ une fonction C^1 , et a, k_1, k_2, k_3 des constantes strictement positives telles que $\forall x \in D$:

$k_1 \ x\ ^a \leq V(x) \leq k_2 \ x\ ^a$	(A2.1)
$\dot{V}(x) = L_f V(x) \leq -k_3 \ x\ ^a$	(A2.2)

Alors $x = 0$ est exponentiellement stable. Si les hypothèses précédentes sont vérifiées pour $D = \mathfrak{R}^n$, alors $x = 0$ est globalement exponentiellement stable.

PREUVE [KHALIL'02]:

Cette preuve est donnée ici pour $D = \mathfrak{R}^n$.

Les inégalités (A2.1) et (A2.2) montre que la fonction $V(x)$ satisfait l'inégalité différentielle suivante :

$$\dot{V}(x) = L_f V(x) \leq -\frac{k_3}{k_2} V(x) \quad (\text{A2.3})$$

Et par intégration :

$$V(x) \leq V(x_0) e^{-\frac{k_3}{k_2}(t-t_0)} \quad (\text{A2.4})$$

D'où :

$$\|x\| \leq \left[\frac{V(x)}{k_1} \right]^{\frac{1}{a}} \leq \left[\frac{V(x_0) e^{-\frac{k_3}{k_2}(t-t_0)}}{k_1} \right]^{\frac{1}{a}} \leq \left[\frac{k_2 \|x_0\|^a e^{-\frac{k_3}{k_2}(t-t_0)}}{k_1} \right]^{\frac{1}{a}} = \left(\frac{k_2}{k_1} \right)^{\frac{1}{a}} \|x_0\| e^{-\frac{k_3}{ak_2}(t-t_0)} \quad (\text{A2.5})$$

Ainsi, l'origine est globalement exponentiellement stable.

ANNEXE 3 : PREUVE DU LEMME 1.1 : STABILITÉ ENTRÉE/ ETAT

Vu que ce lemme est utilisé dans la thèse à plusieurs reprises, il nous est apparu logique d'en donner la preuve.

Cette démonstration utilise le théorème inverse (ou réciproque) de Lyapunov et le théorème concernant les systèmes stables au sens entrée/état. Ceux-ci par contre seront donnés sans démonstration (on pourra se référer à [Khalil'02]).

THEOREME TA3.1 : THEOREME INVERSE DE LYAPUNOV :

Soit $x = 0$ un point d'équilibre du système $\dot{x} = f(x)$ où $f : D \rightarrow \mathfrak{R}^n$ une fonction C^1 , $D = \{x \in \mathfrak{R}^n \mid \|x\| < r\}$ et la matrice Jacobienne $[\partial f / \partial x]$ bornée sur le domaine D . Soient k , λ et r_0 des constantes positives avec $r_0 < \frac{r}{k}$. Soit $D_0 = \{x \in \mathfrak{R}^n \mid \|x\| < r_0\}$. Supposons que les trajectoires du système aient satisfait :

$$\|x\| \leq k \|x_0\| e^{-\lambda(t-t_0)}, \quad \forall x_0 \in D_0, \forall t \geq t_0 \geq 0 \quad (\text{A3.1})$$

Alors, il existe une fonction $V : D_0 \rightarrow \mathfrak{R}$ et c_1, c_2, c_3, c_4 des constantes strictement positives qui vérifient les inégalités suivantes :

$$\begin{cases} c_1 \|x\|^2 \leq V(x) \leq c_2 \|x\|^2 \\ \dot{V}(x) = L_f V(x) \leq -c_3 \|x\|^2 \\ \left\| \frac{\partial V}{\partial x} \right\| \leq c_4 \|x\| \end{cases} \quad (\text{A3.2})$$

En outre, si $r = \infty$ et l'origine est globalement exponentiellement stable, alors $V(x)$ est définie et satisfait les inégalités ci-dessus sur \mathfrak{R}^n .

THEOREME TA3.2:

Soit $V(x) : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ une fonction C^1 telle que :

$$\begin{cases} \alpha_1 (\|x\|) \leq V(x) \leq \alpha_2 (\|x\|) \\ \frac{\partial V}{\partial x} f(x, u) \leq -W_3(x) \quad \forall \|x\| \geq \rho(\|u\|) > 0 \end{cases} \quad (\text{A3.3})$$

$\forall x \in \mathfrak{R}^n, \forall u \in \mathfrak{R}^m$ et où α_1, α_2 sont des fonctions de classe \mathcal{K}_∞ , ρ une fonction de classe \mathcal{K} et $W_3(x)$ une fonction définie continue positive sur \mathfrak{R}^n . Ainsi le système $\dot{x} = f(x, u)$ est stable au sens entrée-état.

LEMME 1.1:

Supposons $f(x,u)$ une fonction C^∞ et globalement Lipschitzienne en les deux arguments (x,u) . Si le système non commandé $\dot{x} = f(x,0)$ est globalement exponentiellement stable à l'origine, alors le système $\dot{x} = f(x,u)$ est stable au sens entrée-état (i.e. si l'entrée est bornée, l'état est borné).

PREUVE:

Considérons le système $\dot{x} = f(x,u)$ comme un système perturbé par rapport au système nominal $\dot{x} = f(x,0)$. En utilisant l'hypothèse que l'origine du système nominal est exponentiellement stable, le théorème inverse de Lyapunov montre l'existence d'une fonction de Lyapunov qui satisfait (A3.2) globalement. En utilisant l'hypothèse que f est globalement Lipschitzienne en u , le terme de perturbation satisfait :

$$\|f(x,u) - f(x,0)\| \leq L\|u\| \quad (\text{A3.4})$$

La dérivée de la fonction V , en ce qui concerne le système perturbé, satisfait :

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{\partial V}{\partial x} f(x,0) + \frac{\partial V}{\partial x} [f(x,u) - f(x,0)] \\ &\leq -c_3\|x\|^2 + c_4\|x\|L\|u\| \end{aligned} \quad (\text{A3.5})$$

Afin d'utiliser le terme $-c_3\|x\|^2$ pour dominer $c_4\|x\|L\|u\|$, l'inégalité précédente est réécrite comme suit :

$$\dot{V} \leq -c_3(1-\theta)\|x\|^2 - c_3\theta\|x\|^2 + c_4\|x\|L\|u\| \quad (\text{A3.6})$$

Inégalité vraie $\forall \theta$ et en particulier pour $0 < \theta < 1$. Alors :

$$\dot{V} \leq -c_3(1-\theta)\|x\|^2, \quad \forall \|x\| \geq \frac{c_4L\|u\|}{c_3\theta} \quad (\text{A3.7})$$

Ainsi, les conditions du théorème TA3.2 sont satisfaites avec $\alpha_1(r) = c_1r^2$, $\alpha_2(r) = c_2r^2$ et $\rho(r) = \frac{c_4L}{c_3\theta}r$ ce qui termine la démonstration.

EXEMPLES:

- $\dot{x} = Ax + \psi(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ avec $A(n,n)$ Hurwitz et $\psi(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ continue et bornée $\forall x$ est entrées/états stables, $\psi(x)$ étant vue comme une entrée.

- $\dot{x} = -x + \arctan(u)$. $x, u \in \mathbb{R}$ est entrée/état stable car l'origine point d'équilibre du système $\dot{x} = -x$ est exponentiellement stable et que les champs de vecteurs $-x$ et $\arctan(u)$ sont globalement lipschitziens (en effet $\frac{\partial(-x)}{\partial x} = -1$ et $\frac{\partial(\arctan(u))}{\partial u} = \frac{1}{1+u^2}$ sont bornés $\forall x, \forall u$)

- par contre $\dot{x} = -\frac{x}{1+x^2} + u$. $x, u \in \mathbb{R}$ possède des champs de vecteurs globalement

lipschitziens (en effet $\frac{\partial(-\frac{x}{1+x^2})}{\partial x} = \frac{-1+x^2}{(1+x^2)^2}$ et $\frac{\partial(u)}{\partial u} = 1$ sont bornés $\forall x, \forall u$) mais le point

d'équilibre $x = 0$ du système $\dot{x} = f(x, u=0) = -\frac{x}{1+x^2}$ n'est pas globalement

exponentiellement stable mais globalement asymptotiquement stable. En effet, la fonction de Lyapunov globalement définie positive et propre $V(x) = \frac{1}{2}x^2$ conduit à $L_f V(x) = \frac{-x^2}{1+x^2}$ qui

est globalement définie négative. Le lemme précédent ne permet pas dans ce cas de conclure à la stabilité entrée/état (dans cet exemple, il est facile de voir que le choix $u(t) \equiv 1$ conduit au

système différentiel $\dot{x} = \frac{1+x^2-x}{1+x^2} = 1 - \frac{x}{1+x^2}$ dont l'intégration par la méthode d'Euler

conduit à $x(t_i) = x(t_{i-1}) + h(1 - \frac{x(t_{i-1})}{1+x^2(t_{i-1})})$ avec $h > 0$ soit $x(t_i) \geq x(t_{i-1}) + \frac{h}{2}$, $\forall t_i > t_0$ ce qui

prouve que la trajectoire $x(t)$ est non bornée).

FOLIO ADMINISTRATIF

THÈSE SOUTENUE DEVANT L'INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES DE LYON

NOM : TURKI épouse SAIED (avec précision du nom de jeune fille, le cas échéant)	DATE de SOUTENANCE : 23 Septembre 2010
Prénoms : <u>Karima</u>	
TITRE : NOUVELLES APPROCHES POUR LA SYNTHÈSE DE LOIS DE COMMANDE NON LINEAIRES ROBUSTES. APPLICATION A UN ACTIONNEUR ELECTROPNEUMATIQUE ET PROPOSITION D'UNE SOLUTION AU PROBLEME DU REDÉCOLLAGE	
NATURE : Doctorat Numéro d'ordre : 2010-ISAL-0059	
École doctorale : Électronique, Électrotechnique, Automatique (EEA) ECL – INSAL – UCBL	
Spécialité : ÉNERGIE DES SYSTÈMES	
Cote B.I.U. - Lyon : / et bis CLASSE :	
RÉSUMÉ : Une partie des travaux présentés dans ce mémoire est inspirée du modèle mathématique écrit sous forme « semi strict feedback » du vérin électropneumatique présent au centre d'essais Fluid Power du laboratoire Ampère. En effet, ce modèle a suscité un approfondissement des travaux de recherche concernant la synthèse de lois de commandes non linéaires robustes des systèmes « strict feedback » (ou triangulaires) généraux. Ainsi deux approches directes sont développées pour l'élaboration de lois de commandes continues mono et multidimensionnelles en suivi de trajectoires. La stabilité exponentielle globale du point d'équilibre est prouvée pour le système nominal. La preuve de la stabilité au sens entrée bornée / état borné (« input-state stable ») est également proposée dans le cas de variations paramétriques ou de dynamiques mal modélisées. De plus, une solution au problème du suivi de trajectoire pour une classe de systèmes non linéaires monodimensionnels sous forme « strict feedback » avec une dynamique interne à minimum ou non minimum de phase est énoncée. Après un rappel des modèles de simulation et de commande utilisés, la mise en œuvre sur le vérin électropneumatique des approches proposées est alors décrite. Les résultats expérimentaux obtenus sont convaincants et ont permis de compléter le benchmark de l'ensemble des travaux du groupe «Automatique, Commande et Mécatronique » du laboratoire par une extension du tableau comparatif initialisé en 1999 des lois de commandes appliquées à ce type d'actionneur. Enfin, une solution est proposée pour résoudre le phénomène du redécollage du vérin électropneumatique. Ce problème, rencontré par le groupe depuis de nombreuses années, concerne toutes les commandes linéaires et non linéaires mono et multidimensionnelles étudiées au laboratoire. Il se traduit par un mouvement saccadé du vérin lorsque les trajectoires suivies en position comportent des phases statiques. Il résulte conjointement de l'existence des forces de frottement sec et du fait que le système atteint lors de ces régimes seulement un équilibre mécanique alors que les pressions dans les chambres continuent à évoluer. Pour pallier à cet inconvénient, la dernière partie de ce mémoire propose de commuter la commande sur deux régulations de pressions quand le système atteint cet équilibre partiel. Cette technique est finalement mise en œuvre et son efficacité est constatée.	
MOTS-CLÉS : Commande non linéaire robuste, stabilité exponentielle, stabilité au sens entrée/état, benchmark industriel, expérimentation, redécollage des vérins pneumatiques.	
Laboratoire (s) de recherches : Laboratoire Ampère (UMR CNRS 5005) – ECL – INSAL – UCBL	
Directeur de thèse: Daniel THOMASSET (Dir.), Mohamed SMAOUI (Co-Dir.)	
Président de jury : N. M'SIRDI	
Composition du jury : E. RICHARD (R), J.C. VIVALDA (R), J. LOTTIN (E), N. M'SIRDI (E), D. THOMASSET (Dir.), M. SMAOUI (Co-Dir.), X. BRUN (invité).	