L'intégrabilité des réseaux de 2-Toda et de Full Kostant-Toda périodique pour toute algèbre de Lie simple.

Khaoula Ben Abdeljelil

THESE
pour l'obtention du Grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE POITIERS

(Faculté des Sciences Fondamentales et Appliquées)

Diplôme National - Arrêté du 7 aout 2006

Ecole Doctorale : Sciences et Ingénierie pour l'Information

Secteur de Recherche : Mathématiques et leurs Interactions

Présentée par :

Khaoula BEN ABDELJELIL

L'intégrabilité des réseaux de 2-Toda et de Full Kostant-Toda périodique pour toute algèbre de Lie simple

---

Directeur de thèse : **Pol VANHAECKE**

Co-Directeur de thèse : **Camille LAURENT-GENGOUX**

Soutenue le 19 mars 2010
devant la commission d'Examen

JURY

G. FALQUI	Professeur, Université de Milan	Rapporteur
J. NUNES DA COSTA	Professeur, Université de Coïmbra	Rapporteur
A. BOUAZIZ	Professeur, Université de Poitiers	Examinateur
N. KAMOUN	Professeur, Université de Monastir	Examinateur
C. LAURENT-GENGOUX	Maître de Conférences (HDR), Université de Coïmbra	Examinateur
P. VANHAECKE	Professeur, Université de Poitiers	Examinateur

Remerciements

Il est habituel de remercier à la fin d'un tel travail tous ceux qui, de près ou de loin, ont contribué à le rendre possible. Même si dans mon cas, cette liste peut sembler plus longue que de coutume, c'est avec mon enthousiasme le plus vif et le plus sincère que je voudrais rendre hommage à tous ceux qui à leur manière m'ont aidé à mener à bien cette thèse.

Je désire alors exprimer ma profonde gratitude :

Au Professeur et ami Pol Vanhaecke pour m'avoir proposé un sujet de thèse très intéressant et d'avoir su me faire confiance pour mener à bien cette thèse. Je lui en suis d'autant plus reconnaissante qu'il m'a laissé une très grande liberté de travail aussi bien dans la conception que dans l'orientation de ma réflexion tout en me conseillant et en veillant à ce que je ne me disperse pas trop.

A mon Co-Directeur de thèse Camille Laurent-Gengoux pour sa sympathie, sa disponibilité et ses conseils intéressants et bien profitables pour l'avancement de mon travail. Pendants toutes les heures passées ensemble, j'ai pu apprendre et profiter pleinement de son expérience et de ses qualités scientifiques.

Aux professeurs Grégorio Falqui et Joana Nunes da Costa, qui ont eu l'extrême gentillesse d'accepter d'être rapporteurs de cette thèse. Je les remercie pour leurs efforts et leur patience.

Au Professeur Abderrazak Bouaziz, qui a bien voulu me faire l'honneur d'être Examinateur dans ce Jury, pour sa disponibilité et ses conseils qui m'ont étés extrêmement précieux tout au long de ce travail. Nos discussions m'ont énormément apporté et stimulée. Je lui en suis infiniment reconnaissante et je le remercie de m'avoir proposé un financement pour réaliser ce travail dans de très bonnes conditions.

Au Professeur Nouri Kamoun, qui m'a honorée en acceptant d'être Examinateur dans ce Jury, pour avoir dirigé mon mémoire de mastère et ainsi guidé les premiers pas de ma recherche.

Je tiens à remercier tous les mathématiciens auxquels j'ai posé des questions, et particulièrement : Pantelis Damianou, Marco Pedroni, Mostapha Raïs, Hervé Sabourin, Patrice Tauvel, Pierre van Moerbeke et Rupert Yu.

Je voudrais également remercier la région Poitou-Charentes pour avoir apporté sa contribution financière dans la réalisation de cette thèse.

Je voudrais remercier les membres du Laboratoire de Mathématiques et Applications de l'Université de Poitiers, qui m'ont permis de travailler dans de très bonnes conditions.

Je remercie tout le personnel de mon laboratoire pour leur disponibilité, leur patience et surtout leur gentillesse : Jocelyne Attab travaillant à la reprographie et à la bibliothèque , Brigitte Brault au secrétariat, Nathalie Marlet à la bibliothèque, Nathalie Mongin travaillant au service comptabilité et Benoit Metrot au service informatique

Merci à mes amis et camarades Doctorants : Helène, Appolinaire, Houssem, Guilhem, Brice, Caroline, Gang, Caroline, Wisam, Le, Jule, Haydi, Sami, Willy.

Pour ceux qui ont quitté le Laboratoire entre temps, je souhaiterais distribuer quelques remerciements, notamment à Ariane, Anne, Armel, Céline, Koléhé, Patience et Sami.

Un merci tout particulier à Rabaa, Chadoul, Assem, Sami, Dorra et Sana pour leur soutient et leur amitié.

Je ne pourrais jamais oublier le soutien et l'aide des personnes de ma nombreuse et merveilleuse famille, mes parents Sadok et Naima, mes frères et soeurs Mohamed, Youssef, Wafa, Mouna, Sarah, Dorra, à mon beau frère Nizar et au petit Hamza qui apporte la joie dans la famille. Je réserve une reconnaissance particulière à Aymen.

L'intégrabilité des réseaux de 2-Toda et de Full Kostant Toda pour toute algèbre de Lie simple

Résumé

Cette thèse traite essentiellement de deux systèmes intégrables associés à des algèbres de Lie simples. Les deux résultats principaux sont la construction et l'intégrabilité au sens de Liouville des réseaux de 2-Toda et de Full Kostant-Toda périodique sur toute algèbre de Lie simple.

Ces réseaux sont l'un et l'autre décrit par un champ hamiltonien associé à un crochet de Poisson qui provient d'une algèbre de Lie munie d'une R-matrice. Nous construisons dans les deux cas une grande famille de constantes de mouvement que nous utilisons pour démontrer l'intégrabilité au sens de Liouville des deux systèmes. Nos constructions et nos démonstrations font appel à de nombreux résultats sur les algèbres de Lie simples, leurs R-matrices, leurs fonctions Ad-invariantes et leurs systèmes de racines.

Mots clés : Systèmes intégrables, réseaux de Toda, variétés de Poisson, algèbres de Lie, R-matrices.

The integrability of the 2-Toda lattice and the periodic Full Kostant-Toda littice for simple Lie algebras

Abstract

In this thesis we construct two integrable systems associated with an arbitrary simple Lie algebras : the 2-Toda lattice and the periodic Full Kostant-Toda lattice for simple Lie algebras.

Each of these lattices is given by a Hamiltonian vector field, associated to a Poisson bracket which results from an R-matrix of the underlying Lie algebra. We construct in both cases a big family of constants of motion which we use to prove the Liouville integrability of the two systems. We achieve the proof of their integrability by using several results on simple Lie algebras, R-matrices, invariant functions and root systems.

Keywords : Integrable systems, Toda lattice, Poisson manifold, Lie Algebra, R-matrices.

Table des matières

Table des matières i

1 Introduction **1**
1.1 Systèmes intégrables et réseau de Toda 1
1.2 Le réseau de 2-Toda et le réseau de Full Kostant Toda périodique . . 6
1.3 Principaux résultats de la thèse 9
1.3.1 Le réseau de 2-Toda associé à une algèbre de Lie simple . . . 9
1.3.2 Le réseau de Full Kostant-Toda périodique 15

2 Préliminaires **19**
2.1 Variétés de Poisson 19
2.1.1 Définitions et propriétés 19
2.1.2 Quelques exemples de structures de Poisson 20
2.1.3 Morphisme de Poisson et sous-variété de Poisson 22
2.1.4 Structure de Lie-Poisson sur le dual d'une algèbre de Lie . . . 22
2.1.5 Théorie générale des R-matrices et équations de Yang-Baxter classiques et classiques modifiées 27
2.1.6 R-crochets de Poisson linéaires 29
2.1.7 R-crochets de Poisson quadratiques et cubiques 30
2.2 Systèmes intégrables sur une variété de Poisson 31
2.3 Algèbres de Lie simples 33
2.3.1 Quelques propriétés des fonctions Ad^*-invariantes 33
2.3.2 Algèbres de Lie simple et systèmes de racines 34
2.3.3 Polynômes invariants et exposants 38

3 $\mathcal{R}$-matrices et fonctions en involution sur $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ **45**
3.1 Quelques constructions de sous-algèbres de Lie supplémentaires de $\mathfrak{g}^2$ 45
3.2 Construction de $\mathcal{R}$-matrices de $\mathfrak{g}^2$ 47
3.2.1 Le cas d'une décomposition en somme directe 47
3.2.2 Le cas d'une solution de l'équation de Yang-Baxter modifiée . 47
3.2.3 Le cas général 49
3.3 Casimirs et fonctions en involution pour $\{\cdot\,,\cdot\}_{\mathcal{R}}$ 51
3.3.1 Structures de Poisson linéaires sur $\mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*$ 51
3.3.2 Fonctions de Casimir et fonctions en involution sur $\mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*$ . . 51
3.3.3 Version du théorème 3.8 sur $\mathfrak{g}^2$ 57
3.4 $\mathcal{R}$-crochets de Poisson quadratiques et cubiques sur $\mathfrak{g}^2$ 59

4 Le réseau de 2-Toda et son intégrabilité **63**
4.1 Le réseau de 2-Toda associé à une algèbre de Lie simple 64
4.1.1 Quelques définitions 64
4.1.2 L'espace de phases est une sous-variété de Poisson 66
4.1.3 Le réseau de 2-Toda est un système hamiltonien 69
4.1.4 Le $\mathcal{R}$-crochet de Poisson sur $\mathcal{T}^2$ 69
4.1.5 L'intégrabilité au sens de Liouville du réseau de 2-Toda 76
4.1.6 Conclusion 80
4.2 Solutions de 2-Toda et solutions du système du Mishchenko-Fomenko 83
4.2.1 Le système de Mishchenko-Fomenko 83
4.2.2 Du réseau de 2-Toda au système de Mishchenko-Fomenko . . . 85
4.3 Le réseau de 2-Toda sur $\mathfrak{sl}_n(\mathbf{C})$ et son origine 88
4.3.1 L'origine du réseau de 2-Toda 89
4.3.2 Restriction et construction du réseau de 2-Toda classique . . . 91
4.4 Restrictions du réseau de 2-Toda 92
4.4.1 Le réseau de Toda associé à toute algèbre de Lie simple 92
4.4.2 Du réseau de 2-Toda au réseau de Toda 94

5 Le réseau de full Kostant-Toda périodique **97**
5.1 Construction du réseau de Full Kostant-Toda périodique associé à une algèbre de Lie simple 98
5.2 Structure de Poisson sur l'espace de phases du réseau de Full Kostant-Toda périodique 99
5.2.1 Structure de Poisson sur l'algèbre de lacets $\mathfrak{g} \otimes \mathbf{C}[\lambda, \lambda^{-1}]$ . . . 99
5.2.2 Le $\tilde{R}$-crochet de Poisson sur $\mathcal{F}(\mathcal{T}_\lambda)$ 101
5.2.3 Le réseau de Full Kostant-Toda périodique est hamiltonien . . 102
5.3 Le réseau de Full Kostant-Toda est Liouville intégrable 102
5.3.1 Construction du système intégrable 103
5.3.2 Le rang du $\tilde{R}$-crochet de Poisson sur $\mathcal{T}_\lambda$ 106
5.3.3 Indépendance de la famille de fonctions sur $\mathcal{T}_\lambda$ 119
5.4 Appendice 123

Bibliographie **127**

Chapitre 1

Introduction

Cette thèse traite essentiellement de deux systèmes intégrables associés à des algèbres de Lie simples. Les deux résultats principaux sont la construction et l'intégrabilité au sens de Liouville des réseaux de 2-Toda et de Full Kostant-Toda périodique, réseaux que nous construisons sur toute algèbre de Lie simple.

Ces réseaux sont l'un et l'autre donnés par des champs de vecteurs, décrits par des systèmes d'équations différentielles. Celles-ci sont d'un type bien particulier appelées équations hamiltoniennes, c'est-à-dire associées à une fonction et à un crochet de Poisson. La construction des systèmes intégrables et la démonstration de son intégrabilité fait appel à de nombreux résultats fins sur les algèbres de Lie simples, leurs R-matrices, leurs fonctions Ad-invariantes et leurs systèmes de racines.

L'utilisation de Maple fut nécessaire, soit pour traiter les cas des algèbres de Lie exceptionnelles E_6,E_7,E_8,F_4 et G_2 (dans le cas du réseau de Full Kostant-Toda périodique), soit pour vérifier et orienter les calculs.

Nous divisons cette introduction en trois parties. Dans la première section, nous rappelons ce qu'est un système intégrable au sens de Liouville, expliquons pourquoi ceux-ci peuvent provenir d'algèbres de Lie du fait notamment du théorème d'Adler-Kostant-Symes, et expliquons que tel est le bon contexte pour étudier les réseaux de Toda périodiques et non-périodiques. Dans la seconde section, nous introduisons les réseaux de 2-Toda et de Full-Kostant Toda périodique. Nous exposons les principaux résultats obtenus dans la thèse dans la troisième section.

1.1 Systèmes intégrables et réseau de Toda

Dans cette section, nous revenons sur les systèmes intégrables au sens de Liouville dont tous les systèmes étudiés ici sont des exemples, à savoir le réseau de Toda, avec un double objectif : expliquer l'intérêt et l'histoire de ce système, et donner quelques résultats et définitions qui seront utiles pour la suite.

Nous commençons par définir l'intégrabilité au sens de Liouville. Nous supposons le lecteur familier avec la notion de structure de Poisson.

Intégrabilité au sens de Liouville. Intégrer une équation différentielle par quadratures est la résoudre à l'aide de trois opérations élémentaires, inverser les difféomorphimes locaux, prendre des primitives et faire des opérations algébriques. Par exemple, toutes les équations différentielles dont l'inconnue est une fonction de $\mathbb{R}$

dans $\mathbb{R}$, du type

$$\dot{x} = F(x),$$

peuvent être ainsi intégrées. Ceci n'est plus le cas lorsque l'inconnue est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$, où, ce qui revient au même, si l'équation est du type

$$\ddot{x} = F(\dot{x}, x).$$

Il existe toutefois un cas bien connu où l'équation précédente est intégrable : lorsque la fonction F ne dépend pas de la variable $\dot{x}$. En effet, la conservation de l'énergie totale $\frac{(\dot{x})^2}{2} + V(x)$, où V est une primitive de $-F$, permet de se ramener au cas précédent.

Plus théoriquement, cette intégrabilité s'explique ainsi. L'équation $\ddot{x} = F(x) = -\frac{\partial V}{\partial x}$ équivaut au système $\dot{q} = p = \frac{\partial H}{\partial p}$ et $\dot{p} = F(q) = -\frac{\partial H}{\partial q}$ où $H(p,q) = \frac{p^2}{2} + V(q)$, système qui est un système hamiltonien vis-à-vis du crochet de Poisson canonique à deux variables. De ce fait, $H(p,q)$ est une constante de mouvement, ce qui permet de se ramener au cas d'un système en dimension 1.

Un autre système hamiltonien qui s'intègre explicitement est celui associé à une particule dans $\mathbb{R}^2$ soumis à une force qui dérive d'un potentiel qui ne dépend que de la distance à l'origine. Il faut alors utiliser la conservation de deux fonctions : l'énergie totale et le moment cinétique, lesquelles, qui plus est, commutent entre elles - puisque le moment cinétique est une constante du mouvement.

Ceci se généralise : pourvu qu'un système hamiltonien (donc construit sur une variété de Poisson) possède un nombre de constantes du mouvement suffisamment grand, et que celles-ci commutent entre elles, il est possible de le résoudre à l'aide d'opérations élémentaires parmi lesquelles l'intégration - du moins théoriquement. Plus exactement, on démontre que peuvent être intégrés les systèmes intégrables dits intégrables au sens de Liouville, définis comme suit (pour la notion de rang d'une structure de Poisson, voir la définition 2.2, pour la notion d'indépendence d'une famille de fonctions voir la définition 2.32).

Définition 1.1. *Soient* $(M, \{\cdot\,,\cdot\})$ *une variété de Poisson de rang* $2r$*. Une famille de fonctions* $\mathbf{F} = (F_1, \ldots, F_s)$ *sur* M *est dite* intégrable *(au sens de Liouville) si*

(1) Pour tous $i, j = 1, \ldots, s$*, les fonctions* F_i, F_j *commutent, c'est-à-dire* $\{F_i, F_j\} = 0$ *;*

(2) La famille de fonctions $\mathbf{F}$ *est indépendante sur* M *;*

(3) $s = \dim M - r$*, c'est-à-dire,* $\operatorname{card} \mathbf{F} = \dim M - \frac{1}{2} \operatorname{Rk} \{\cdot\,,\cdot\}$.

On dit alors que $(M, \{\cdot\,,\cdot\}, \mathbf{F})$ *est un* système intégrable *(au sens de Liouville) de* rang $2r$*.*

Par abus de language, on dit qu'une équation différentielle est intégrable (au sens de Liouville) si on peut trouver un système intégrable (au sens de Liouville) dont un des champs hamiltoniens donne cette équation.

Les algèbres de Lie (ou leurs duaux), qui sont munies de (nombreux) crochets de Poisson, fournissent l'espace de phases de nombreux systèmes intégrables. Prouver l'intégrabilité de ceux-ci fait souvent appel à des résultats sur les algèbres de Lie sous-jacentes. Un exemple désormais bien connu est le réseau de Toda, qui se construit sur des sous-espaces affines d'algèbres de Lie simples.

Réseaux de Toda non-périodique et périodique : l'origine. Les réseaux de Toda originaux n'étaient pourtant pas à priori un chapitre de l'étude des algèbres de Lie simples, mais l'équation du mouvement d'un système de n particules placées sur une courbe, soumises à des forces d'interactions dérivant d'un potentiel exponentiel, les interactions entre les particules non-voisines étant négligées. On distingue deux cas, correspondant intuitivement, aux cas où cette courbe est une droite et au cas où cette courbe est un cercle, cas que nous appelons non-périodique et périodique respectivement.

Plus précisément, on prend des variables q_j, p_j, pour $1 \leq j \leq n$ (représentant la position et la quantité de mouvement, respectivement, de la $j^{\text{ième}}$ particule). Dans le cas non-périodique, on considère par convention que

$$q_0 = -\infty \qquad \text{et} \qquad q_{n+1} = +\infty$$

(c'est-à-dire que l'on place les particules numéro 0 et $n+1$ aux deux points à l'infini de la droite). Dans le cas périodique, on considère par convention que

$$q_j = q_{n+j}$$

pour tout $j \in \mathbf{N}$, (c'est-à-dire que l'on identifie les particules numéro j et $n+j$).

Dans l'un et l'autre cas, on considère le système hamiltonien associé à l'énergie totale

$$H = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} p_j^2 + \sum_{k=1}^{n} \exp[2(q_k - q_{k+1})].$$

L'équation de mouvement du réseau de Toda périodique et non périodique est donc donnée par :

$$\left\{\begin{array}{lllll} \dot{q_j} & = & \dfrac{\partial H}{\partial p_j} & = & p_j, \\ \dot{p_j} & = & -\dfrac{\partial H}{\partial q_j} & = & 2\exp[2(q_{j-1} - q_j)] - 2\exp[2(q_j - q_{j+1})]. \end{array}\right. \qquad 1 \leq j \leq n, \tag{1.1}$$

Ce système a été considéré par Toda [49] en 1967. Son intégrabilité au sens de Liouville a été démontrée en 1974 par Flaschka [22], voir aussi Henon [25] et Manakov [37]. Par intégrabilité, nous entendons ici qu'il est possible de complèter H en un système intégrable. Pour ce faire, nous allons avoir besoin d'expliquer pourquoi le réseau de Toda est lié à l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_n(\mathbf{C})$.

Réseau de Toda : l'équation de Lax. Il possible de réécrire les équations de mouvement des deux réseaux de Toda sous-forme matricielle, ce que l'on appelle une équation de Lax.

On appelle transformation de Flaschka le changement de variable :

$$\begin{array}{ll} a_k = \exp[2(q_k - q_{k+1})], & 1 \leq k \leq n-1, \\ b_j = p_j, & 1 \leq j \leq n, \end{array}$$

qui transforme l'équation de mouvement (1.1) du réseau de Toda en l'équation (dite de Lax) :

$$\dot{L} = [L, M], \tag{1.2}$$

où L et M sont des matrices $n \times n$ et M que nous donnons :

1. Dans le cas non-périodique, les deux matrices sont les matrices tridiagonales :

$$L = \begin{pmatrix} b_1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_1 & b_2 & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & a_{n-2} & b_{n-1} & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{n-1} & b_n \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} 0 & & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_1 & 0 & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & a_{n-2} & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.3}$$

2. Dans le cas périodique, les deux matrices en question sont :

$$L = \begin{pmatrix} b_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & a_n\lambda^{-1} \\ a_1 & b_2 & 1 & \ddots & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & a_{n-2} & b_{n-1} & 1 \\ \lambda & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} & b_n \end{pmatrix}, \tag{1.4}$$

et

$$M = -2 \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_n\lambda^{-1} \\ a_1 & 0 & & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & a_{n-2} & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Nous avons ainsi obtenu une nouvelle équation sur chacun de ces deux nouveaux espaces de phases que sont l'ensemble des matrices L de la forme (1.3) et de la forme (1.4). Ce sont ces espaces affines que nous désignons désormais par *espace de phases du réseau de Toda* (*non-périodique et périodique*) et que nous notons respectivement $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}_\lambda$.

Ces deux espaces de phases (non-périodique et périodique) sont en fait du même type et les deux équations de Toda sont de même forme.

Lemme 1.2. *Les espaces de phases $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}_\lambda$ sont obtenus en translatant par un élément constant de poids 1 la somme des espaces homogènes de poids 0 et -1. De plus, les équations de mouvement du réseau de Toda non-périodique et du réseau de Toda périodique se réécrivent $\dot{L} = [L, L_-]$, où L_- est la partie de poids strictement négative de L.*

Expliquons ce que l'on entend par poids d'un élément. Abstraitement, l'espace des éléments de poids k est l'espace engendré par les vecteurs propres associés aux racines de longueur k, le système de racines étant calculé à partir d'une sous-algèbre de Cartan, dont les éléments sont considérés comme étant de longueur 0. Plus concrètement, dans le cas de $\mathfrak{sl}_n(\mathbf{C})$, l'espace homogène de poids k est l'espace engendré par les matrices élémentaires E_{ij} avec $j - i = k$, tandis que dans le cas de $\mathfrak{sl}_n(\mathbf{C})[\lambda, \lambda^{-1}]$, l'espace homogène de poids k est l'espace engendré par éléments

$\lambda^p E_{ij}$ avec $j - i + np = k$. La partie négative d'un élément est la somme de ces composantes de poids strictement négatives.

Plonger le réseau de Toda dans les algèbres de Lie $\mathfrak{sl}_n(\mathbf{C})$ ou $\mathfrak{sl}_n(\mathbf{C})[\lambda, \lambda^{-1}]$ a deux intérêts. Le premier est qu'il est clair, étant donné la forme de l'équation (1.2), que toute fonction Ad-invariante sur ces algèbres de Lie donnera une constante du mouvement. En particulier, les fonctions

$$\begin{cases} H_i(L) = \frac{1}{i}\operatorname{Trace}(L^i), & \forall i \in \mathbf{N}^*, \forall L \in \mathfrak{sl}_n(\mathbf{C}) \\ \tilde{H}_{i,j}(L(\lambda)) = \operatorname{Res}(\frac{\operatorname{Trace}(L(\lambda)^i)}{i\lambda^{j+1}}), & \forall i, j \in \mathbf{N}^*, \forall L(\lambda) \in \mathfrak{sl}_n(\mathbf{C})[\lambda, \lambda^{-1}], \end{cases} \tag{1.5}$$

sont des constantes de mouvement.

Un second intérêt est de permettre de construire une structure de Poisson sur $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}_\lambda$ à l'aide des crochets de Lie sur $\mathfrak{sl}_n(\mathbf{C})$ et $\mathfrak{sl}_n(\mathbf{C})[\lambda, \lambda^{-1}]$. Commençons par quelques généralités. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie munie d'une forme $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$ bilinéaire, symétrique, non-dégénérée et Ad-invariante. Le crochet de Lie usuel sur $\mathfrak{g}$ donne une structure de Poisson sur $\mathfrak{g}$ appelée le crochet de *Lie-Poisson* et définie, pour tous $F, G \in \mathcal{F}(\mathfrak{g})$ et $x \in \mathfrak{g}$, par :

$$\{F, G\}(x) = \langle x \mid [\nabla_x F, \nabla_x G] \rangle, \tag{1.6}$$

où $\nabla_x F$ est le gradient de F au point x, calculé à l'aide de $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$. De plus, si $\mathfrak{g}$ admet une décomposition en some directe d'espaces vectoriels $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_+ \oplus \mathfrak{g}_-$, où $\mathfrak{g}_+$ et $\mathfrak{g}_-$ sont deux sous-algèbres de Lie, il existe un deuxième crochet de Lie sur $\mathfrak{g}$, qui est le crochet $[\cdot\,,\cdot]_R$ donné, pour tous $x, y \in \mathfrak{g}$, par :

$$[x, y]_R = [x_+, y_+] - [x_-, y_-],$$

où x_+, y_+ et x_-, y_- désignent les composantes de x, y dans $\mathfrak{g}_+$ et $\mathfrak{g}_-$.

Ce crochet de Lie définit une structure de Poisson sur $\mathfrak{g}$, notée $\{\cdot\,,\cdot\}_R$, dite *R-crochet de Poisson* et donnée, pour tous $F, G \in \mathcal{F}(\mathfrak{g})$ et $x \in \mathfrak{g}$, par :

$$\{F, G\}_R(x) = \langle x \mid [\nabla_x F, \nabla_x G]_R \rangle. \tag{1.7}$$

Les algèbres de Lie $\mathfrak{sl}_n(\mathbf{C})$ et $\mathfrak{sl}_n(\mathbf{C})[\lambda, \lambda^{-1}]$ se décomposent en somme directe de deux sous-algèbres de Lie, celle engendrée par les éléments de poids positifs et celle engendrée par les éléments de poids strictement négatifs. Cette décomposition munit $\mathfrak{sl}_n(\mathbf{C})$ et $\mathfrak{sl}_n(\mathbf{C})[\lambda, \lambda^{-1}]$ d'un R-crochet de Poisson. On vérifie que, pour cette structure $\mathcal{R}$ les espaces de phases $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}_\lambda$ sont deux sous-variétés de Poisson, respectivement, de $(\mathfrak{sl}_n(\mathbf{C}), \{\cdot\,,\cdot\}_R)$ et de $(\mathfrak{sl}_n(\mathbf{C})[\lambda, \lambda^{-1}], \{\cdot\,,\cdot\}_{R_\lambda})$. De plus on vérifie que la transformation de Flaschka est un morphisme de Poisson. Enfin et surtout, cette structure est celle qui apparaît dans le théorème AKS, qui montrera l'intégrablité de nos systèmes.

Système intégrable sur des algèbres de Lie simples : le théorème AKS. Le théorème de Adler-Kostant-Symes explique l'importance du R-crochet de Poisson sur une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. En effet, ce théorème donne d'une part des fonctions en involution pour le crochet $\{\cdot\,,\cdot\}_R$, d'autre part montre qu'il est possible de construire des sous-variétés de Poisson affines de $(\mathfrak{g}, \{\cdot\,,\cdot\}_R)$. Enfin, il donne explicitement les champs hamiltoniens définis pour le R-crochet de Poisson.

Théorème 1.3 (Théorème AKS)**.** *[7] Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_+ \oplus \mathfrak{g}_-$ une décomposition d'algèbre de Lie. On suppose $\mathfrak{g}$ munie d'une forme bilinéaire symétrique,* Ad*-invariante, non-dégénérée $\langle \cdot | \cdot \rangle$. Soient F et H deux functions* Ad*-invariantes sur $\mathfrak{g}$. On suppose que l'on se donne $e \in \mathfrak{g}$ qui satisfait*

$$[e, \mathfrak{g}_+] \subset \mathfrak{g}_+^{\perp}, \qquad [e, \mathfrak{g}_-] \subset \mathfrak{g}_-^{\perp}. \tag{1.8}$$

(1) Le sous-espace affine $\mathfrak{g}_-^{\perp} + e \subset \mathfrak{g}$ est une sous-variété de Poisson de $(\mathfrak{g}, \{\cdot\,,\cdot\}_R)$;

(2) Les fonctions F et H commutent pour le crochet $\{\cdot\,,\cdot\}_R$;

(3) Le champ hamiltonien de H pour $\{\cdot\,,\cdot\}_R$ est donné par

$$\mathcal{X}_H(y) = \pm[y, (\nabla_y H)_{\mp}],$$

pour tout $y \in \mathfrak{g}$.

Le théorème AKS donne aussi une résolution explicite de l'équation différentielle, que nous n'explicitons pas ici.

Le théorème AKS et l'intégrabilité du réseau de Toda. Nous expliquons dans ce paragraphe que le théorème AKS suffit pour montrer l'intégrabilité au sens de Liouville du réseau de Toda périodique et non-périodique.

Considérons une famille indépendante de fonctions Ad-invariantes sur $\mathfrak{sl}_n(\mathbf{C})$ et $\mathfrak{sl}_n(\mathbf{C})[\lambda, \lambda^{-1}]$. Le choix le plus naturel est de prendre la famille $H_i : X \to \frac{1}{i+1} \operatorname{Trace}(X^{i+1})$ et $\tilde{H}_{i,0} : X(\lambda) \to \operatorname{Res}(\frac{1}{\lambda(i+1)} \operatorname{Trace}(X(\lambda)^{i+1}))$ pour $1 \le i \le n-1$.

Le théorème AKS implique que ces fonctions commutent pour $\{\cdot\,,\cdot\}_R$. On peut montrer qu'elles vérifient les hypothèses nécessaires à l'intégrabilité au sens de Liouville, ce qui donne le théorème suivant.

Théorème 1.4. *[22] Soient $\mathcal{F} = (H_1, \dots, H_{n-1})$ et $\mathcal{F}_\lambda = (\tilde{H}_{1,0}, \dots, \tilde{H}_{n-1,0})$. Alors*

(1) Le triplet $(\mathcal{T}, \{\cdot\,,\cdot\}_R, \mathcal{F})$ est un système intégrable au sens de Liouville et le champ hamiltonien $\mathcal{X}_{H_1} := \{\cdot\,, H_1\}_R$ sur $\mathcal{T}$ décrit le mouvement de réseau de Toda non-périodique.

(2) Le triplet $(\mathcal{T}_\lambda, \{\cdot\,,\cdot\}_{R_\lambda}, \mathcal{F}_\lambda)$ est un système intégrable au sens de Liouville et le champ hamiltonien $\mathcal{X}_{\tilde{H}_1} := \left\{\cdot\,, \tilde{H}_1\right\}_{R_\lambda}$ sur $\mathcal{T}_\lambda$ décrit le mouvement de réseau de Toda périodique.

Généralisations des réseaux de Toda non-périodique et périodique aux algèbres de Lie simples. Le lemme 1.2 invite à généraliser le réseau de Toda non-périodique et périodique à toute algèbre de Lie simple. Cette généralisation fut proposée par Bogoyavlensky [9], qui exprima l'équation de mouvement (1.1) du réseau de Toda non-périodique et périodique en fonction des racines simples de l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_n(\mathbf{C})$. L'intégrabilité (au sens de Liouville) dans ce cadre général a été démontrée par Kostant dans [32].

1.2 Le réseau de 2-Toda et le réseau de Full Kostant Toda périodique

Les deux systèmes d'équations différentielles que nous allons étudier sont un réseau de Toda non-périodique que l'on appelle *réseau de 2-Toda* et un réseau de Toda périodique que l'on appelle *réseau de Full Kostant-Toda périodique.*

Le réseau de 2-Toda. Le réseau de Toda non-périodique admet une extension naturelle, introduite en dimension infinie par Ueno et Takasaki [50] suivis par Adler et van Moerbeke [6]. Nous décrivons ce réseau dans la forme donnée par ces derniers. On se place sur le carré $\mathfrak{gl}((\infty)) \times \mathfrak{gl}((\infty))$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}((\infty))$. Le réseau de 2-Toda est la paire d'équations différentielles donnée sous la forme de Lax suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial(L,M)}{\partial t} &= [(L_+, L_+), (L,M)], \\ \dfrac{\partial(L,M)}{\partial s} &= [(M_-, M_-), (L,M)], \end{cases} \tag{1.9}$$

où

$$(L,M) = \left(\begin{pmatrix} \ddots & \ddots & & & & 0 & \\ \ddots & a_{11} & 1 & & & & \\ & a_{2,1} & \ddots & \ddots & & & \\ & & \ddots & \ddots & 1 & & \\ * & & & a_{n,n-1} & a_{nn} & 1 & \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & & & & * \\ \ddots & b_{11} & b_{12} & & & \\ & b_{2,1} & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & b_{n-1,n} & \\ 0 & & & b_{n,n-1} & b_{nn} & \ddots \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \right),$$

L_+ est la partie triangulaire supérieure de L et M_- est la partie triangulaire strictement inférieure de M. On peut montrer que les flots de ces deux équations commutent - condition évidemment indispensable pour les inclure dans un système intégrable.

Ce système infini se restreint à $\mathfrak{gl}_n(C)$, et même à $\mathfrak{sl}_n(\mathbf{C})$. On obtient ainsi un nouveau système qui est donné par la même équation de Lax (1.9), sauf que dans ce cas (L,M) est un élément de $\mathfrak{sl}_n(\mathbf{C}) \times \mathfrak{sl}_n(\mathbf{C})$ de la forme :

$$(L,M) = \left(\begin{pmatrix} a_{11} & 1 & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & b_{n,n-1} & b_{nn} \end{pmatrix} \right). \tag{1.10}$$

Remarquons que lorsque nous imposons en plus la condition $L = M$, l'espace de phases $\mathcal{T}^2$ du réseau de 2-Toda devient la diagonale $\Delta(\mathcal{T}) := \{(X,X) \mid X \in \mathcal{T}\}$ de l'espace de phases du réseau de Toda non-périodique, et que la paire d'équations de Lax (1.9) donne exactement l'équation de Lax (1.2) du réseau de Toda non-périodique. Ceci justifie l'affirmation initiale voyant dans le réseau de 2-Toda une extension du réseau de Toda non-périodique.

Il est clair à l'aide des équations de Lax (1.9) que le réseau de 2-Toda en dimension infinie admet un nombre infini de constantes de mouvement, ce sont les fonctions

$$P_i(L,M) := \frac{1}{i+1}\operatorname{Trace}(L^{i+1}), \qquad \tilde{P}_i(L,M) := \frac{1}{i+1}\operatorname{Trace}(M^{i+1}), \qquad \forall i \in \mathbf{N}.$$

En dimension finie les $2n-2$ fonctions $P_1, \ldots, P_{n-1}, \tilde{P}_1, \ldots, \tilde{P}_{n-1}$ sont des constantes de mouvement du réseau de 2-Toda sur $\mathfrak{sl}_n(\mathbf{C})$. Ces fonctions sont en cardinal trés petit devant la dimension de l'espace de phases $\mathcal{T}^2$ du réseau de 2-Toda, qui est n^2+2n-3. Donc la famille $\mathcal{F}_0 := (P_1, \ldots, P_{n-1}, \tilde{P}_1, \ldots, \tilde{P}_{n-1})$ est insuffisante pour prouver l'intégrabilité au sens de Liouville du réseau de 2-Toda sur $\mathfrak{sl}_n(\mathbf{C})$. Un de nos premiers travaux (voir les théorèmes 3.11 et 4.22) a été de construire une grande famille de fonctions involutive, contenant $\mathcal{F}_0$ et qui est intégrable au sens de Liouville. Ensuite nous définissons le réseau de 2-Toda pour toute algèbre de Lie simple (voir le paragraphe 4.1.1), et c'est dans ce contexte élargi que nous montrons l'intégrabilité. Nous reviendrons sur ces points dans la section 1.3.

Le réseau de Full Kostant-Toda périodique. Par le lemme 1.2, le réseau de Toda non-périodique est un sous-espace affine de $\mathfrak{sl}_n(\mathbf{C})$ dont l'espace de phases est la somme des espaces homogènes de poids -1 et 0, translaté par une constante de poids 1. Prenons maintenant pour espace de phases la somme des espaces homogènes de poids compris entre $-n+1$ et 0 (en translatant par la même constante de poids 1 que précédemment). Nous rappelons alors, suivant [18] et [14], le système d'équations différentielles connu sous le nom *réseau de Full Kostant-Toda (non-périodique)* en considérant l'équation de Lax suivante :

$$\dot{L} = [L, L_-], \tag{1.11}$$

où

$$L = \begin{pmatrix} a_{11} & 1 & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathfrak{gl}_n(\mathbf{C}) \tag{1.12}$$

et L_- est la partie triangulaire strictement inférieure de L.

Le théorème AKS donne que l'espace de phases du réseau de Full Kostant-Toda est une sous-variété de Poisson de la variété $\mathfrak{sl}_n(\mathbf{C})$ munie du R-crochet de Poisson, où R provient d'une décomposition de l'algèbre de Lie. Le théorème AKS donne aussi une famille de fonctions en involution pour le même R-crochet de Poisson mais ces fonctions sont en nombre trop limité pour espérer obtenir un système intégrable. L'intégrabilité au sens de Liouville de ce réseau a été démontrée dans [14], où les auteurs parviennent à compléter les fonctions données par le théorème AKS par des fonctions rationnelles bien précises appelées les k-chops de L, où L est un élément de l'espace de phases du réseau de Full Kostant-Toda. Gekhtman et Shapiro [24] ont démontré que ce réseau se généralise à toute algèbre de Lie simple et qu'il est intégrable.

Pour construire le réseau de Full Kostant-Toda périodique, il faut évidemment faire une construction similaire en utilisant l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_n(\mathbf{C})[\lambda, \lambda^{-1}]$ en lieu de $\mathfrak{sl}_n(\mathbf{C})$. On considère donc la somme des espaces homogènes dont le poids est compris entre $-n+1$ et 0, et on définit l'espace de phases du réseau de Full Kostant-Toda périodique comme étant son translaté par le même élément constant que pour le réseau de Toda périodique, élément qui est de poids 1. Le *réseau de Full-Kostant Toda périodique* est le système d'équations différentielles donné sous la forme de l'équation de Lax suivante :

$$\dot{L}(\lambda) = [L(\lambda), L(\lambda)_-], \tag{1.13}$$

où

$$L(\lambda) = \begin{pmatrix} a_{11} & 1+b_{12}\lambda^{-1} & b_{13}\lambda^{-1} & \cdots & b_{1n}\lambda^{-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & b_{n-2,n}\lambda^{-1} \\ a_{n-1,1} & \cdots & \cdots & \ddots & 1+b_{n-1,n}\lambda^{-1} \\ a_{n1}+\lambda & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{1.14}$$

et $L(\lambda)_-$ est la partie négative de $L(\lambda)$ (vis-à-vis de la notion de poids introduite après le lemme 1.2 :

$$L(\lambda)_- = \begin{pmatrix} 0 & b_{12}\lambda^{-1} & \cdots & b_{1n}\lambda^{-1} \\ a_{21} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b_{n-1,n}\lambda^{-1} \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Contrairement au cas non-périodique, ce ne sont pas les fonctions k-chops qui donnent un système intégrable, mais tout simplement les fonctions Ad-invariantes sur l'espace ambiant.

Dans le dernier chapitre de cette thèse, nous commençons par généraliser le réseau de Full Kostant-Toda à toute algèbre de Lie simple et montrons l'intégrabilité au sens de Liouville dans ce contexte élargi.

1.3 Principaux résultats de la thèse

Le chapitre 2, intitulé "Préliminaires", définit les notions de crochet de Poisson, de système intégrable au sens de Liouville, d'algèbres de Lie simples et donne à leurs propos un certain nombre de résultats, dont la plupart sont classiques, hormis quelques résultats moins connus sur les polynômes Ad*-invariants sur une algèbre de Lie.

1.3.1 Le réseau de 2-Toda associé à une algèbre de Lie simple

L'intégrabilité du réseau de 2-Toda est l'objet des chapitres 3 et 4, chapitres dont nous donnons maintenant les principaux résultats. Pour commencer, définissons le réseau de 2-Toda, non seulement sur $\mathfrak{sl}_n(\mathbf{C})$, mais plus généralement sur toute algèbre de Lie simple.

Définitions. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple complexe de dimension finie, dont on note ℓ le rang et que l'on munit de sa forme de Killing $\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle$. On se fixe $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$, Φ le système de racines de $\mathfrak{g}$ associé à $\mathfrak{h}$ et $(\alpha_1,\ldots,\alpha_\ell)$ une base de Φ. L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ admet la décomposition suivante :

$$\mathfrak{g} := \bigoplus_{k\in\mathbf{Z}} \mathfrak{g}_k,$$

où $\mathfrak{g}_0 := \mathfrak{h}$ et, pour $k \neq 0$, $\mathfrak{g}_k := \{e_\alpha \mid \alpha \in \Phi, |\alpha| = k\}$ est l'espace engendré par les vecteurs associés aux racines de longueur k. On note, pour tout $k \in \mathbf{Z}$,

$$\mathfrak{g}_{<k} := \bigoplus_{i<k} \mathfrak{g}_i, \qquad \mathfrak{g}_{\leq k} := \bigoplus_{i\leq k} \mathfrak{g}_i$$
$$\mathfrak{g}_{>k} := \bigoplus_{i>k} \mathfrak{g}_i, \qquad \mathfrak{g}_{\geq k} := \bigoplus_{i\geq k} \mathfrak{g}_i.$$

On utilise aussi les notations $\mathfrak{g}_+ := \mathfrak{g}_{\geq 0}$ et $\mathfrak{g}_- := \mathfrak{g}_{<0}$.

Définition 1.5.

(1) On appelle espace de phases du réseau de 2-Toda *la sous-variété $\mathcal{T}^2$ de $\mathfrak{g}^2$, définie par :*

$$\mathcal{T}^2 := \mathfrak{g}_{\leq 0} \times \mathfrak{g}_{\geq -1} + (e, 0), \text{ où } e = \sum_{i=1}^{\ell} e_i, \tag{1.15}$$

et où e_i, pour $1 \leq i \leq \ell$, est un vecteur propre non nul de $\mathfrak{g}_1$ associé à la racine simple α_i. Tout élément (L, M) de $\mathcal{T}^2$ est donc de la forme

$$\begin{cases} L &= \sum_{i=1}^{\ell}(a_i h_i + e_i) + \sum_{\alpha\in\Phi_-} a_\alpha e_\alpha, \\ M &= \sum_{i=1}^{\ell}(b_i h_i + b_{-i} e_{-i}) + \sum_{\alpha\in\Phi_+} b_\alpha e_\alpha, \end{cases} \tag{1.16}$$

où e_{-i}, pour $1 \leq i \leq \ell$, est un vecteur propre non nul associé à la racine $-\alpha_i$ et e_α est un vecteur propre non nul associé à la racine α. Inversement, pour tous L, M de la forme (1.16) le couple (L, M) appartient à $\mathcal{T}^2$.

(2) On appelle réseau de 2-Toda, associé à une algèbre de Lie simple $\mathfrak{g}$, *la paire d'équations différentielles sur $\mathcal{T}^2$ donné par la paire d'équations de Lax suivante :*

$$\frac{\partial(L, M)}{\partial t} = [(L_+, L_+), (L, M)], \tag{1.17}$$
$$\frac{\partial(L, M)}{\partial s} = [(M_-, M_-), (L, M)], \tag{1.18}$$

où (L, M) est un élément de $\mathcal{T}^2$, L_+ (resp. M_-) est le projeté de L (resp. de M) sur $\mathfrak{g}_+$ (resp. $\mathfrak{g}_-$).

On construit maintenant une structure de Poisson sur l'espace de phases $\mathcal{T}^2$, par rapport à laquelle les équations de 2-Toda sont hamiltoniennes.

Tout d'abord, nous construisons une $\mathcal{R}$-matrice sur $\mathfrak{g}^2$. L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}^2 := \mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$ est une somme directe des sous-algèbres de Lie $\mathfrak{g}^2_+$ et $\mathfrak{g}^2_-$, où

$$\mathfrak{g}^2_+ = \{(x, x) \mid x \in \mathfrak{g}\} \quad \text{et} \quad \mathfrak{g}^2_- = \{(x, y) \mid x \in \mathfrak{g}_- \text{ et } y \in \mathfrak{g}_+\}.$$

La différence des projections de $\mathfrak{g}^2$ sur les sous-algèbres de Lie $\mathfrak{g}^2_+$ et $\mathfrak{g}^2_-$ est une $\mathcal{R}$-matrice $\mathcal{R}$ qui vérifie

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(x, y) &= (x_+ + y_-, x_+ + y_-) + (x_- - y_-, y_+ - x_+) \\ &= (R(x - y) + y), R(x - y) + x). \end{aligned} \tag{1.19}$$

où $R : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ est la différence des projections de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{g}_+$ et $\mathfrak{g}_-$.

On munit $\mathfrak{g}^2$ de la forme bilinéaire, symétrique, Ad-invariante, non-dégénérée suivante

$$\begin{array}{cccc} \langle \cdot \mid \cdot \rangle_2 & : & \mathfrak{g}^2 \times \mathfrak{g}^2 & \to & \mathbf{C} \\ & & ((x_1, y_1), (x_2, y_2)) & \mapsto & \langle x_1 \mid x_2 \rangle + \langle y_1 \mid y_2 \rangle . \end{array} \tag{1.20}$$

La $\mathcal{R}$-matrice $\mathcal{R}$ et la forme bilinéaire, symétrique, non-dégénérée $\langle \cdot \mid \cdot \rangle_2$ permettant de munir l'algèbre de fonctions sur $\mathcal{T}^2$ du $\mathcal{R}$-crochet de Poisson $\{\cdot\, , \cdot\}_{\mathcal{R}}$.

Les deux propositions suivantes impliquent que l'espace de phases est préservé par le flot des équations de 2-Toda, et que celles-ci sont hamiltoniennes (voir les propositions 4.6 et 4.8).

Proposition 1.6. *La variété $\mathcal{T}^2$ est une sous-variété de Poisson de $(\mathfrak{g}^2, \{\cdot\, , \cdot\}_{\mathcal{R}})$ de dimension* $\dim \mathfrak{g} + 2\ell$.

Proposition 1.7. *Soient H et $\tilde{H}$ les fonctions définies en tout point (x, y) de $\mathfrak{g}^2$ par :*

$$H(x, y) := \frac{1}{2} \langle x \mid x \rangle \quad \textit{et} \quad \tilde{H}(x, y) := \frac{1}{2} \langle y \mid y \rangle . \tag{1.21}$$

L'équation du champ hamiltonien $\mathcal{X}_H$ (resp. $\mathcal{X}_{\tilde{H}}$), vis-à-vis du crochet de Poisson $\{\cdot\, , \cdot\}_{\mathcal{R}}$ décrit sur $\mathcal{T}^2$ l'équation de mouvement (1.17) (resp. (1.18)) du réseau de 2-Toda classique.

Construction du système intégrable du réseau de 2-Toda. Nous donnons dans le chapitre 3 des propriétés des $\mathcal{R}$-matrices de l'algèbre de Lie produit $\mathfrak{g}^2$. Nous expliquons tout d'abord (voir les propositions 3.2, 3.3 et 3.6) comment un endomorphisme de $\mathfrak{g}$ peut, sous certaines conditions, donner une $\mathcal{R}$-matrice sur $\mathfrak{g}^2$ (ce dont nous venons de voir un exemple en (1.19)). Nous donnons ensuite (voir le théorème 3.11) une série de quatre propriétés du $\mathcal{R}$-crochet de Poisson associé, qui sont les quatre points du théorème ci-dessous.

Théorème 1.8. *Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension finie, munie d'une forme $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ bilinéaire, symétrique,* Ad*-invariante, non-dégénérée. Soit $\langle \cdot \mid \cdot \rangle_2$ la forme sur $\mathfrak{g}^2$ définie par :*

$$\begin{array}{cccc} \langle \cdot \mid \cdot \rangle_2 & : & \mathfrak{g}^2 \times \mathfrak{g}^2 & \to & \mathbf{K} \\ & & ((x, y), (x', y')) & \mapsto & \langle x \mid x' \rangle + \langle y \mid y' \rangle . \end{array}$$

Soient λ une constante et φ_λ l'application

$$\begin{array}{cccc} \varphi_\lambda : & \mathfrak{g}^2 & \to & \mathfrak{g} \\ & (x, y) & \mapsto & \lambda x + y. \end{array} \tag{1.22}$$

Soient R un endomorphisme de $\mathfrak{g}$ et c une constante. Si l'opérateur $\mathcal{R}$ de $\mathfrak{g}^2$ dans $\mathfrak{g}^2$, défini, pour tous $x, y \in \mathfrak{g}$, par :

$$\mathcal{R}(x, y) := (R(x - y) + cy, R(x - y) + cx) \tag{1.23}$$

est une $\mathcal{R}$-matrice de $\mathfrak{g}^2$, le $\mathcal{R}$-crochet de Poisson sur $\mathfrak{g}^2$, associé à $\mathcal{R}$, vérifie les propriétés suivantes :

(1) Pour toute fonction Ad*-invariante F sur $\mathfrak{g}$ la fonction $F \circ \varphi_1$ est un Casimir pour le $\mathcal{R}$-crochet de Poisson $\{\cdot\, , \cdot\}_{\mathcal{R}}$;*

(2) Soient F, G deux fonctions Ad*-invariantes sur $\mathfrak{g}$ et γ, λ des constantes. Les fonctions $F \circ \varphi_\lambda$ et $G \circ \varphi_\gamma$ sont en involution pour $\{\cdot\,,\cdot\}_{\mathcal{R}}$. En particulier, si F et G sont deux polynômes* Ad*-invariants de degré respectivement l et k, alors les polynômes $F_0, \ldots, F_l, G_0, \ldots, G_k$ définies, pour tout $(x, y) \in \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$, par :*

$$F(\varphi_\lambda(x, y)) = \sum_{i=0}^{l} \lambda^i F_i(x, y) \qquad \text{et} \qquad G(\psi_\gamma(x, y)) = \sum_{j=0}^{k} \gamma^j G_j(x, y),$$

sont en involution pour le crochet $\{\cdot\,,\cdot\}_{\mathcal{R}}$;

(3) Si $c = 1$, l'application $\varphi_1 : (\mathfrak{g}^2, \{\cdot\,,\cdot\}_{\mathcal{R}}) \to (\mathfrak{g}, \{\cdot\,,\cdot\})$ est un morphisme de Poisson ;

(4) Soit H une fonction Ad*-invariante. L'équation du champ hamiltonien $\mathcal{X}_{H \circ \varphi_\lambda} := \{\cdot\,, H \circ \varphi_\lambda\}_{\mathcal{R}}$ en tout point $(x, y) \in \mathfrak{g}^2$ est :*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & \dfrac{\lambda - 1}{2}[x, (R - cI)\nabla_{\lambda x + y} H], \\ \dot{y} & = & \dfrac{\lambda - 1}{2}[y, (R + cI)\nabla_{\lambda x + y} H]. \end{array} \right. \tag{1.24}$$

Dans le cas particulier où $R := P_+ - P_-$ est la différence des projections sur deux sous-algèbres de Lie supplémentaires, on a :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & (1 - \lambda)[x, (\nabla_{\lambda x + y} H)_-], \\ \dot{y} & = & (\lambda - 1)[y, (\nabla_{\lambda x + y} H)_+]. \end{array} \right. \tag{1.25}$$

Le second point de ce théorème a un intérêt évident : il donne un très grand nombre de fonctions en involution, fonctions parmi lesquelles on retrouve les fonctions que l'on sait être en involution du fait du théorème AKS. Le quatrième point donne les champs hamiltoniens de ces fonctions en involution. Le premier et le troisième point donnent des majorations et minorations du rang de la $\mathcal{R}$-structure de Poisson, et seront invoqués lorsqu'il s'agira de le calculer.

Il est clair que $\mathcal{R}$, la différence de projections de $\mathfrak{g}^2$ sur $\mathfrak{g}^2_+$ et $\mathfrak{g}^2_-$, définie dans (1.19) satisfait les hypothèses du théorème 1.8. Ce qui nous permet de construire une grande famille de fonctions qui commutent pour le $\mathcal{R}$-crochet de Poisson sur la sous-variété de Poisson $\mathcal{T}^2$.

Dans le chapitre 4 nous donnons dans le théorème 4.22 le résultat principal suivant

Théorème 1.9. *Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple de rang ℓ, $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$, Φ le système de racines de $\mathfrak{g}$ associé à $\mathfrak{h}$, $(\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell)$ une base de Φ, et e_i, pour $1 \leq i \leq \ell$ un vecteur propre non nul associé à la racine simple α_i. On considère :*

- *L'espace de phases du réseau de 2-Toda, qui est défini par*

$$\mathcal{T}^2 := (\sum_{i=1}^{\ell} e_i, 0) + \mathfrak{g}_{\leq 0} \times \mathfrak{g}_{\geq -1}.$$

- *Le crochet de Poisson* $\{\cdot\,,\cdot\}_{\mathcal{R}}$ *sur* $\mathfrak{g}^2$ *associé à la* $\mathcal{R}$*-matrice* $\mathcal{R} := \mathcal{P}_+ - \mathcal{P}_-$*, où* $\mathcal{P}_\pm$ *est la projection de* $\mathfrak{g}^2$ *sur* $\mathfrak{g}^2_\pm$*, avec* $\mathfrak{g}^2_+ = \{(x,x) \mid x \in \mathfrak{g}\}$ *et* $\mathfrak{g}^2_- = \mathfrak{g}_{\leq -1} \times \mathfrak{g}_{\geq 0}$.
- *Une famille de fonctions* $\mathcal{F}$ *que l'on construit ainsi. On choisit* $P_1, \ldots, P_\ell$ *une famille génératrice de polynômes homogènes de l'algèbre des fonctions polynomiales,* Ad*-invariantes sur* $\mathfrak{g}$*. On note leurs degrés respectifs par* $m_1 + 1, \ldots, m_\ell + 1$*, et on construit la famille de fonctions :*

$$\mathcal{F} = (F_{j,i}, 1 \leq i \leq \ell \text{ et } 0 \leq j \leq m_i + 1),$$

où $P_i(\lambda x + y) = \sum_{j=0}^{m_i+1} \lambda^j F_{j,i}(x,y)$*, pour tous* $x, y \in \mathfrak{g}$.

Le triplet $(\mathcal{T}^2, \mathcal{F}, \{\cdot\,,\cdot\}_{\mathcal{R}})$ *forme un système intégrable.*

Points principaux de la preuve de ce théorème.

- Le second point du théorème 1.8 implique que $\mathcal{F}$ est une famille en involution pour le crochet de Poisson $\{\cdot\,,\cdot\}_{\mathcal{R}}$.
- Nous montrons l'indépendance de cette famille de fonctions. L'idée est de montrer que leurs différentielles sont indépendantes en un point bien choisi, à savoir le point $(e,h) \in \mathcal{T}^2$, où e et h appartiennent à un $\mathfrak{sl}(2)$-triplet principal. Pour prouver ce résultat nous utilisons des théorèmes de Kostant [31, théorème 9] et [32, théorème 5.2] et de Raïs [46] sur les fonctions Ad-invariantes sur $\mathfrak{g}$.
- Le premier point du théorème 1.8 construit ℓ Casimirs sur $(\mathcal{T}^2, \{\cdot\,,\cdot\}_{\mathcal{R}})$ qui sont les fonctions $(L,M) \to P_i(L+M)$, pour $1 \leq i \leq \ell$. Cela implique que le rang de la restriction de la structure de Poisson $\{\cdot\,,\cdot\}_{\mathcal{R}}$ à $\mathcal{T}^2$ est inférieur ou égal à $\dim \mathcal{T}^2 - \ell$. Nous montrons de deux façons différentes que le rang est en fait égal à $\dim \mathcal{T}^2 - \ell$. Une de ces méhodes est un calcul direct, une autre consiste à réaliser un isomorphisme de Poisson entre $(\mathcal{T}^2, \{\cdot\,,\cdot\}_{\mathcal{R}})$ et le produit de la variété de Poisson $\mathfrak{g}$ (munie du crochet de Lie-Poisson usuel) et de $\mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ (munie du R-crochet de Poisson où R est la différence de projections sur $\mathfrak{g}_+$ et $\mathfrak{g}_-$).
- Il reste alors à vérifier que le cardinal s de $\mathcal{F}$, le rang $2r$ de la restriction de $\{\cdot\,,\cdot\}_{\mathcal{R}}$ à $\mathcal{T}^2$ et la dimension $\dim \mathcal{T}^2$ vérifient $s = \dim \mathcal{T}^2 - r$. Cette vérification repose essentiellement sur une formule remarquable valable pour toute algèbre de Lie simple : $\sum_{i=1}^{\ell} m_i = \frac{1}{2}(\dim \mathfrak{g} - \ell)$.

Etude de ce système intégrable : les champs hamiltoniens. On sait que les deux équations du réseau de 2-Toda sont des champs hamiltoniens associés à deux éléments de $\mathcal{F}$. Les autres champs hamiltoniens sont donnés par la proposition suivante (voir la proposition 4.23).

Proposition 1.10. *Les équations des champs hamiltoniens* $\mathcal{X}_{F_{j,i}} := \{\cdot\,, F_{j,i}\}_{\mathcal{R}}$*, pour tous* $1 \leq i \leq \ell$ *et* $0 \leq j \leq m_i + 1$*, sont donnés par :*

$$\begin{cases} \mathcal{X}_{F_{m_i+1,i}}(L,M) = [(\nabla_L P_i, 0)_-, (L,M)], \\ \mathcal{X}_{F_{j,i}}(L,M) = [(K_{j-1,i}(L,M), 0)_- - (K_{j,i}(L,M), 0)_-, (L,M)], \\ \mathcal{X}_{F_{0,i}}(L,M) = [-(\nabla_M P_i, 0)_-, (L,M)], \end{cases} \tag{1.26}$$

où les $K_{j,i}$ sont définis par :

$$\nabla_{\lambda L+M} P_i = \sum_{j=0}^{m_i} \lambda^j K_{j,i}(L, M). \tag{1.27}$$

Des combinaisons linéaires des fonctions hamiltoniennes $F_{j,i}$, pour $1 \leq i \leq \ell$ et $0 \leq j \leq m_i + 1$, donnent d'autres hamiltoniens, qui simplifient les formules du système (1.26). Posons, pour tous $1 \leq i \leq \ell$, et $0 \leq j \leq m_i + 1$

$$\tilde{F}_{j,i} := \sum_{k=0}^{j} F_{k,i}. \tag{1.28}$$

Ces nouvelles fonctions ont pour champs hamiltoniens les champs de vecteurs

$$\mathcal{X}_{\tilde{F}_{j,i}}(L, M) = [-(K_{j,i}(L, M), 0)_-, (L, M)], \tag{1.29}$$

pour tout $j = 0, .., m_i$. De plus, la fonction $\tilde{F}_{m_i+1,i}$ est un Casimir. Evidement ces nouvelles fonctions définissent le même système intégrable.

Etude de ce système intégrable : Relation entre les solutions du réseau de 2-Toda et les paires de solutions du système de Mishchenko-Fomenko. On peut faire correspondre à toute solution du réseau de 2-Toda une paire de solutions du système d'équations de Mishchenko-Fomenko, équations différentielles qui sont associées à un certain système bihamiltonien (voir la section 4.2).

Proposition 1.11. *Soient $1 \leq i \leq \ell$ et $0 \leq j \leq m_i + 1$. Soit $(L(t), M(t))$ une solution de l'équation de 2-Toda associée à l'hamiltonien $\tilde{F}_{j,i}$. Soient $g_+(t), g_-(t)$ les fonctions construites par :*

$$\begin{cases} g_-(0) = g_+(0) = 1, \\ \dot{g}_-(t)g_-^{-1}(t) = -(K_{j,i}(L(t), M(t)))_-, \\ \dot{g}_+(t)g_+^{-1}(t) = (K_{j,i}(L(t), M(t)))_+, \end{cases} \tag{1.30}$$

et soit $g(t) = g_+^{-1}(t)g_-(t)$. Les fonctions $\hat{L}(t) := \mathrm{Ad}_g(L_0)$ et $\hat{M}(t) := \mathrm{Ad}_{g^{-1}}(M_0)$ sont solutions de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \hat{L}(t)}{\partial t} = -[K_{j,i}(\hat{L}(t), M_0), \hat{L}(t)], \\ \dfrac{\partial \hat{M}(t)}{\partial t} = [K_{j,i}(L_0, \hat{M}(t)), \hat{M}(t)]. \end{cases} \tag{1.31}$$

En effet cette correspondance est bijective.

Etude de ce système intégrable : les restrictions. Nous énonçons un théorème dans lequel nous expliquons que le réseau de 2-Toda se restreint de deux façons différentes à deux systèmes, le premier est intégrable au sens de Liouville et isomorphe au réseau de Toda non-périodique et nous conjecturons que le deuxième est aussi intégrable au sens de Liouville.

Théorème 1.12. *Soit $\mathcal{T}^2$ l'espace de phases du réseau de 2-Toda, qui s'écrit*

$$\mathcal{T}^2 := \mathfrak{g}_{\leq -1} \times \mathfrak{g}_{\geq 0} + (e, -e) + \Delta_a(\mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0), \tag{1.32}$$

où $\Delta_a(\mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0) := \{(x, -x) \mid x \in \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0\}$. On a les résultats suivants :

(1) Les sous-variétés $\mathcal{T}^{2'} := \mathfrak{g}_{\leq -1} \times \mathfrak{g}_{\geq 0} + (e, -e)$ et $\mathcal{T}' := \Delta_a(\mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0) + (e, -e)$ sont deux sous-variétés de Poisson de $(\mathcal{T}^2, \{\cdot\,,\cdot\}_{\mathcal{R}})$.

(2) La restriction de la famille de fonctions $\mathcal{F}$ à $\mathcal{T}^{2'}$ et à $\mathcal{T}'$ est une famille involutive pour $\{\cdot\,,\cdot\}_{\mathcal{R}}$.

(3) Soit $(\mathcal{T}, \{\cdot\,,\cdot\}_R)$ l'espace de phases du réseau de Toda muni de la R-structure de Poisson, où R est la différence de projections sur $\mathfrak{g}_+$ et $\mathfrak{g}_-$. L'application

$$\begin{array}{rcccc} \varphi & : & (\mathcal{T}, \{\cdot\,,\cdot\}_R) & \to & (\mathcal{T}', \{\cdot\,,\cdot\}_{\mathcal{R}}) \\ & & x & \mapsto & (x, -x) \end{array} \tag{1.33}$$

est un isomorphisme de systèmes intégrables.

1.3.2 Le réseau de Full Kostant-Toda périodique

Nous passons maintenant au réseau de Full Kostant-Toda périodique, qui est le sujet du chapitre 5 de cette thèse.

Nous définissons le réseau de Full Kostant-Toda périodique pour toute algèbre de Lie simple $\mathfrak{g}$. Evidemment, on retrouve pour $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(\mathbf{C})$ les équations (1.13) et (1.14) introduites en section 1.2.

Définition 1.13. *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple et $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$.*

(1) On appelle espace de phases du réseau de Full Kostant-Toda périodique *la variété $\mathcal{T}_\lambda \subset \mathfrak{g}[\lambda, \lambda^{-1}]$ définie par :*

$$\mathcal{T}_\lambda := \lambda^{-1}\mathfrak{g}_{>0} + (\mathfrak{g}_{\leq 0} + \sum_{i=1}^{\ell} e_i) + \lambda e_{-\beta}, \tag{1.34}$$

où e_i, pour $1 \leq i \leq \ell$, est un vecteur propre non nul associé à la racine simple α_i, et où β est la plus longue racine, et $e_{-\beta}$ un vecteur propre non nul associé à $-\beta$. Tout élément $L(\lambda)$ de $\mathcal{T}_\lambda$ est donc de la forme

$$L(\lambda) = \lambda e_{-\beta} + \sum_{i=1}^{\ell}(a_i h_i + e_i) + \sum_{\alpha \in \Phi_+} a_{-\alpha} e_{-\alpha} + \lambda^{-1} \sum_{\alpha \in \Phi_+} b_\alpha e_\alpha \tag{1.35}$$

et inversement tout élément $L(\lambda)$ de la forme (1.35) est dans $\mathcal{T}_\lambda$. Dans la formule précédente, Φ_+ désigne un ensemble de racines positives de $\mathfrak{g}$ par rapport à $\mathfrak{h}$.

(2) On appelle réseau de Full Kostant-Toda périodique, associé à $\mathfrak{g}$, *le système d'équations différentielles sur $\mathcal{T}_\lambda$ donné sous la forme de l'équation de Lax :*

$$\dot{L}(\lambda) = [L(\lambda), L(\lambda)_-], \tag{1.36}$$

où $L(\lambda)$ est comme en (1.35) et

$$L(\lambda)_- := \sum_{\alpha\in\Phi_+} a_{-\alpha} e_{-\alpha} + \lambda^{-1} \sum_{\alpha\in\Phi_+} b_\alpha e_\alpha,$$

(c'est la partie négative de L vis-à-vis d'un poids que l'on définit ci-dessous).

Structure de Poisson sur $\mathcal{T}_\lambda$. Il est commode de noter $\tilde{\mathfrak{g}}$ l'algèbre dite "de lacets" $\tilde{\mathfrak{g}} := \mathfrak{g}[\lambda, \lambda^{-1}]$, le crochet de Lie sur $\tilde{\mathfrak{g}}$ étant l'unique crochet $\mathbf{C}[\lambda, \lambda^{-1}]$ linéaire qui étend le crochet de $\mathfrak{g}$.

L'algèbre de lacets $\tilde{\mathfrak{g}}$ admet la décomposition suivante en somme de deux sous-algèbres de Lie :

$$\tilde{\mathfrak{g}} = \tilde{\mathfrak{g}}_+ \oplus \tilde{\mathfrak{g}}_-, \tag{1.37}$$

avec

$$\tilde{\mathfrak{g}}_+ := \bigoplus_{i\geq 0} \tilde{\mathfrak{g}}_i \qquad \text{et} \qquad \tilde{\mathfrak{g}}_- := \bigoplus_{i<0} \tilde{\mathfrak{g}}_i,$$

où $\tilde{\mathfrak{g}}_i$ est le sous-espace de poids i, défini par :

$$\tilde{\mathfrak{g}}_i := \langle \lambda^k e_\alpha, \text{ tel que } |\alpha| + (|\beta|+1)k = i, \text{ où } \alpha \in \Phi, k \in \mathbf{Z}\rangle,$$

où Φ est le système de racines de $\mathfrak{g}$ associé à $\mathfrak{h}$. Soit $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle_\lambda$ la forme bilinéaire, symétrique, Ad-invariante, non-dégénérée suivante :

$$\begin{array}{cccc} \langle \cdot \,|\, \cdot \rangle_\lambda : & \tilde{\mathfrak{g}} \times \tilde{\mathfrak{g}} & \to & \mathbf{C} \\ & (X(\lambda), Y(\lambda)) & \mapsto & \sum_{k\in\mathbf{Z}} \langle X_k \,|\, Y_{-k} \rangle, \end{array} \tag{1.38}$$

Soit $\tilde{R} := \tilde{P}_+ - \tilde{P}_-$ la différence des projections de $\tilde{\mathfrak{g}}$ sur $\tilde{\mathfrak{g}}_+$ et $\tilde{\mathfrak{g}}_-$. L'endomorphisme $\tilde{R}$ et la forme bilinéaire $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle_\lambda$ amènent un $\tilde{R}$-crochet de Poisson $\{\cdot\,,\cdot\}_{\tilde{R}}$ sur $\mathcal{F}(\tilde{\mathfrak{g}})$, l'algèbre des fonctions polynômes sur $\tilde{\mathfrak{g}}$.

Les deux propositions suivantes impliquent que l'espace de phases est préservé par le flot de l'équation de full Kostant Toda, et que celui ci est hamiltonienne (voir les propositions 5.6 et 5.7).

Proposition 1.14. *L'espace de phases du réseau de Full Kostant-Toda périodique $\mathcal{T}_\lambda$ hérite d'une structure de Poisson de $(\mathcal{F}(\tilde{\mathfrak{g}}), \{\cdot\,,\cdot\}_{\tilde{R}})$.*

Proposition 1.15. *Soit H la fonction de $\mathcal{T}_\lambda$ définie en tout point $L(\lambda)$ de $\mathcal{T}_\lambda$ par :*

$$H(L(\lambda)) := \frac{1}{2}\langle L(\lambda) \,|\, L(\lambda)\rangle_\lambda. \tag{1.39}$$

L'équation de mouvement du réseau de Full Kostant-Toda périodique est l'équation du champ hamiltonien $\mathcal{X}_H := \{\cdot\,, H\}_{\tilde{R}}$.

Construction du système intégrable. Chaque polynôme $P : \mathfrak{g} \to \mathbf{C}$ s'étend en une application $\tilde{P} : \tilde{\mathfrak{g}} \to \mathbf{C}[\lambda, \lambda^{-1}]$ que l'on appelle son extension. Les coefficients en λ de $\tilde{P}$ sont des fonctions (polynomiales) sur $\mathfrak{g}$.

Choisissons une famille génératrice de polynômes homogènes de l'algèbre de fonctions polynomiales Ad-invariantes $P_1, \ldots, P_\ell$ de degrés, respectivement, $m_1 + 1, \ldots, m_\ell + 1$. La restriction à $\mathcal{T}_\lambda$ des coefficients en λ de leurs extensions $\tilde{P}_1, \ldots, \tilde{P}_\ell$ définit donc une famille infinie de fonctions sur $\mathcal{T}_\lambda$. Cette famille est finie car on vérifie qu'elle s'écrit, pour tout $L(\lambda) \in \mathcal{T}(\lambda)$, sous la forme :

$$\tilde{P}_i(L(\lambda)) = \sum_{k=0}^{m_i} \lambda^{-k} \tilde{F}_{k,i}(L(\lambda)) + \lambda\, c\, \delta_{i,\ell}, \tag{1.40}$$

où c est une constante non nulle.

Intégrabilité du système. On donne le résultat principal (voir le théorème 5.19).

Théorème 1.16. *Soit $(\mathcal{T}_\lambda, \{\cdot\,,\cdot\}_{\tilde{R}})$ l'espace de phases du réseau de Full Kostant-Toda périodique et $\tilde{\mathcal{F}}_\lambda$ la famille de fonctions $(\tilde{F}_{k,i},\ 1 \leq i \leq \ell,\ 0 \leq k \leq m_i)$. Le triplet $(\mathcal{T}_\lambda, \tilde{\mathcal{F}}_\lambda, \{\cdot\,,\cdot\}_{\tilde{R}})$ forme un système intégrable au sens de Liouville et l'équation de Full Kostant-Toda (5.7) est donnée par :*

$$\mathcal{X}_{\tilde{F}_{0,i}}(L(\lambda)) = [\tilde{P}_+(\nabla_{L(\lambda)} \tilde{F}_{0,i}), L(\lambda)].$$

Nous donnons une idée de la preuve.

- Le théorème AKS donne directement l'involutivité de la famille $\tilde{\mathcal{F}}_\lambda$ pour le $\tilde{R}$-crochet de Poisson $\{\cdot\,,\cdot\}_{\tilde{R}}$.
- La famille $\tilde{\mathcal{F}}_\lambda$ est indépendante au point $L_1(\lambda) = \lambda e_{-\beta} + h + (\lambda^{-1} + 1) \sum_{i=1}^{\ell} e_i$, où h est tel que $\{e = \sum_{i=1}^{\ell} e_i, h\}$ appartient à un $\mathfrak{sl}(2)$-triplet principal.
- On montre que le rang de la structure de Poisson est bien égal à $2(\dim \mathcal{T}_\lambda - \operatorname{card} \tilde{\mathcal{F}}_\lambda)$. Ce point est surprenamment délicat. En fait, ce résultat est démontré au cas par cas : les algèbres de Lie exceptionnelles sont traitées à l'aide de Maple, quant aux autres, une preuve “à la main” est possible à l'aide des descriptions explicites des racines simples.

Chapitre 2

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous introduisons les outils et les notions de base sur les variétés de Poisson, les systèmes intégrables au sens de Liouville, les R-matrices et les algèbres de Lie simples, objets que nous allons rencontrer tout au long de notre travail.

Nos références principales pour cette section préliminaire sont le livre *Algebraic Integrability, Painlevé Geometry and Lie Algebras* [7] de M. Adler, P. Van Moerbeke et P. Vanhaecke, dans lequel se trouvent les détails de certaines démonstrations des deux première sections. Concernant la partie algèbre de Lie simple, nous avons utilisé comme référence les livres *Lecture on representation theory* [26] de Jing-Song Huang, *Lie Algebras and Algebraic Groups* [48] de P. Tauvel et R. Yu et *Algèbres enveloppantes* [17] de Jacques Diximier.

2.1 Variétés de Poisson

2.1.1 Définitions et propriétés

Dans cette thèse, nous travaillerons toujours sur une sous-variété M de $\mathbf{K}^n$, où $\mathbf{K}$ est ou bien le corps $\mathbf{R}$ ou bien le corps $\mathbf{C}$. Notons $\mathcal{F}(M)$ l'algèbre de fonctions sur M ; selon le contexte , $\mathcal{F}(M)$ sera l'algèbre de fonctions de classe $\mathbf{C}^\infty$, holomorphes ou polynomiales sur M.

Nous commençons par définir les variétés de Poisson.

Définition 2.1. *Soit M une variété (réelle ou complexe) et soit Π un champ de bivecteurs sur M. On dit que Π est une* structure de Poisson *sur M si, pour tout ouvert U de M, la bidérivation antisymétrique définie, pour tous $F, G \in \mathcal{F}(U)$ et $m \in U$, par :*

$$\{F, G\}(m) := \Pi_m(\mathsf{d}_m F, \mathsf{d}_m G)$$

satisfait l'identité de Jacobi

$$\{F, \{G, H\}\} + \{H, \{F, G\}\} + \{G, \{H, F\}\} = 0, \qquad \forall F, G, H \in \mathcal{F}(U). \tag{2.1}$$

Il découle de la définition que, pour tout $H \in \mathcal{F}(M)$, l'application

$$\begin{array}{rccl} \mathcal{X}_H & : & \mathcal{F}(M) & \to & \mathcal{F}(M) \\ & & F & \mapsto & \{F, H\} \end{array} \tag{2.2}$$

est une dérivation de $\mathcal{F}(M)$. Si M est une variété différentielle ou une sous-variété complexe de $\mathbf{C}^n$, ceci est un champ de vecteurs sur M, car les dérivations de $\mathcal{F}(M)$ sont alors en correspondance bijective avec les champs de vecteurs sur M. Le champ de vecteurs $\mathcal{X}_H := \{\cdot\,, H\}$ est appelé le *champ hamiltonien* associé à la fonction H, appelée dans ce contexte, *hamiltonien*. L'espace des champs hamiltoniens est noté

$$\mathrm{Ham}(M, \{\cdot\,,\cdot\}) := \{\mathcal{X}_H \mid H \in \mathcal{F}(M)\}.$$

Définition 2.2. *Soit $(M, \{\cdot\,,\cdot\})$ une variété de Poisson.*

(1) Une fonction $H \in \mathcal{F}(M)$ dont le champ hamiltonien $\mathcal{X}_H := \{\cdot\,, H\}$ est nul est dite fonction de Casimir *ou* Casimir. *On note* $\mathrm{Cas}(M, \{\cdot\,,\cdot\})$ *l'ensemble de fonctions Casimirs, dont on vérifie aisement que c'est une sous-algèbre de $\mathcal{F}(M)$ (pour le produit) ;*

(2) Soit $x \in M$. Le rang *du crochet de Poisson en x est la dimension de l'espace vectoriel formé par la restriction en x des champs hamiltoniens. Il découle de l'antisymétrie du crochet de Poisson que le rang est toujours pair. On le note* $\mathrm{Rk}_x\,\{\cdot\,,\cdot\}$ *;*

(3) L'entier pair $\max\{\mathrm{Rk}_x\,\{\cdot\,,\cdot\} \mid x \in M\}$ *est appelé le* rang *de la structure de Poisson $(M, \{\cdot\,,\cdot\})$ et est noté* $\mathrm{Rk}\,\{\cdot\,,\cdot\}$. *On dit que le crochet de Poisson $\{\cdot\,,\cdot\}$ est de* rang constant *sur M si* $\mathrm{Rk}_x\,\{\cdot\,,\cdot\}$ *est indépendant de x pour tout point x de cette variété.*

Remarque 2.3. *Soit $(M, \{\cdot\,,\cdot\})$ une variété de Poisson de dimension n. S'il existe ℓ Casimirs $F_1, \ldots, F_\ell$, tel que $\mathsf{d}F_1 \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}F_\ell \neq 0$ sur un ouvert dense de M, alors* $\mathrm{Rk}\,\{\cdot\,,\cdot\} \leq n - \ell$.

Définition 2.4. *Soit $(M, \{\cdot\,,\cdot\})$ une variété de Poisson. On dit que F, G deux fonctions de $\mathcal{F}(M)$ sont en* involution *si le crochet $\{F, G\}$ est nul. Une partie $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}(M)$, qui est souvent un n-uplet, est dite* involutive *si pour tous $F, G \in \mathcal{F}$, $\{F, G\} = 0$.*

Remarque 2.5. *Etant donné un hamiltonien $H \in \mathcal{F}(M)$, une fonction $G \in \mathcal{F}(M)$ est en involution avec H si et seulement si pour toute courbe intégrale $x(t)$ de $\mathcal{X}_H$, on a*

$$\frac{\mathsf{d}G(x(t))}{\mathsf{d}t} = \mathcal{X}_H[G](x(t)) = \{G, H\}\,(x(t)) = 0.$$

Pour cette raison les fonctions en involution avec H sont appelées des constantes de mouvement *de $\mathcal{X}_H$.*

2.1.2 Quelques exemples de structures de Poisson

Exemple 2.6. *Soit (M, ω) une variété symplectique de dimension $2n$. On peut munir M de la structure de Poisson dite "symplectique", donnée entre deux fonctions F et G dans $\mathcal{F}(M)$, par :*

$$\{F, G\} := \omega(\mathcal{X}_F, \mathcal{X}_G), \tag{2.3}$$

où le champ de vecteurs $\mathcal{X}_F$ est défini par $\mathsf{d}F(.) = \omega(\mathcal{X}_F, .)$. On vérifie que $\mathcal{X}_F$ est le champ de vecteur hamiltonien associé à F, ce qui justifie sa notation. En tout point m de M le rang de la structure de Poisson est $2n$. Cela implique que chaque

Casimir de la variété de Poisson symplectique $(M, \{\cdot\,,\cdot\})$ *est localement constant. Le théorème de Darboux [36, Théorème 17.1] donne l'existence au voisinage de tout point* $m \in M$ *d'un système de coordonnées* $(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)$ *dans lequel la structure de Poisson est donnée par :*

$$\{\cdot\,,\cdot\} := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial q_i} \wedge \frac{\partial}{\partial p_i}.$$

C'est-à-dire, pour tout $m \in M$*, il existe un ouvert* U *de* M *et il existe* $(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)$ *un système de coordonnées de* U*, tel que, pour tous* $F, G \in \mathcal{F}(U)$*, on a :*

$$\{F, G\} := \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial q_j}\frac{\partial G}{\partial p_j} - \frac{\partial F}{\partial p_j}\frac{\partial G}{\partial q_j}\right). \tag{2.4}$$

Exemple 2.7. *Soit* M *la variété* $\mathbf{R}^{2n+s}$*. Notons* $(p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n, z_1, \ldots, z_s)$ *un système de coordonnées sur* M*. On peut munir* M *de la structure de Poisson, définie par :*

$$\{\cdot\,,\cdot\} := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial q_i} \wedge \frac{\partial}{\partial p_i}.$$

Les champs hamiltoniens $\mathcal{X}_{z_1}, \ldots, \mathcal{X}_{z_s}$ *sont nuls. Cela implique que* $(M, \{\cdot\,,\cdot\})$ *admet au moins* s *Casimirs indépendants, à savoir les fonctions* $z_1, \ldots, z_s$*. En fait, le rang de la structure de Poisson* $\{\cdot\,,\cdot\}$ *sur* M *est égal à* $2n$ *et toute structure de Poisson dont le rang est constant est localement de ce type [36, Théorème 17.2].*

Exemple 2.8. *Considérons la variété* $\mathbf{R}^3$*. On munit* $\mathbf{R}^3$ *de la structure de Poisson, donnée dans le système de coordonnées canonique* (x, y, z) *de* $\mathbf{R}^3$*, par :*

$$\{\cdot\,,\cdot\} := \frac{\partial}{\partial x} \wedge \left(z\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial z}\right) + x\frac{\partial}{\partial y} \wedge \frac{\partial}{\partial z}.$$

La fonction $F = x^2 + y^2 + z^2$ *est un Casimir pour* $\{\cdot\,,\cdot\}$*. De plus le rang de* $\{\cdot\,,\cdot\}$ *est égal à* 2 *en tout point de* $\mathbf{R}^3$ *sauf en* $(0, 0, 0)$ *où il vaut* 0*.*

Exemple 2.9. *Considérons la variété* $\mathbf{R}^3$ *et notons* (x, y, z) *son système de coordonnées canonique. La bidérivation antisymétrique suivante :*

$$\{\cdot\,,\cdot\} := \left(y\frac{\partial}{\partial y} - \alpha x\frac{\partial}{\partial x}\right) \wedge \frac{\partial}{\partial z},$$

où $\alpha \in \mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}$*, est un crochet de Poisson sur* $\mathbf{R}^3$*.*

Si H *est Casimir de* $\{\cdot\,,\cdot\}$ *alors* $H = G(xy^\alpha) + c$*, où* G *est une fonction et* $c \in \mathbf{R}$*. Ce Casimir ne peut jamais être une fonction polynomiale non constante. La variété de Poisson* $(\mathbf{R}^3, \{\cdot\,,\cdot\})$ *n'admet donc pas de fonctions Casimir polynomiales non constantes. Le rang de cette structure de Poisson est égal à* 2 *en tout point de* $\mathbf{R}^3$ *si* $x \neq 0$ *ou* $y \neq 0$ *et* 0 *sinon.*

2.1.3 Morphisme de Poisson et sous-variété de Poisson

Définition 2.10. *Soient* $(M_1, \{\cdot\,,\cdot\}_1)$ *et* $(M_2, \{\cdot\,,\cdot\}_2)$ *deux variétés de Poisson. Une application* $\varphi : M_1 \to M_2$*, est appelée* morphisme de Poisson*, si*

$$\begin{array}{cccc} \varphi^* & : & (\mathcal{F}(M_2), \{\cdot\,,\cdot\}_2) & \to & (\mathcal{F}(M_1), \{\cdot\,,\cdot\}_1) \\ & & F & \mapsto & F \circ \varphi \end{array}$$

vérifie

$$\varphi^*(\{F, G\}_2) = \{\varphi^*(F), \varphi^*(G)\}_1,$$

pour tout U *ouvert dans* M_2 *et pour tous* $F, G \in \mathcal{F}(U)$*. De plus, si* φ *est inversible, alors* φ^{-1} *est un morphisme de Poisson. On dit alors que* φ *est un* isomorphisme de Poisson*.*

Comme souvent, avoir défini ce qu'est un morphisme permet de définir ce qu'est un sous-objet.

Définition 2.11. *Soit* $(M, \{\cdot\,,\cdot\})$ *une variété de Poisson. Une sous-variété immergée* N *de* M *est appelée une* sous-variété de Poisson *de* $(M, \{\cdot\,,\cdot\})$*, si elle admet une structure de Poisson pour laquelle l'injection* $i : N \hookrightarrow M$ *est un morphisme de Poisson.*

Une variété N est une sous-variété de Poisson de $(M, \{\cdot\,,\cdot\})$ si et seulement si pour tout ouvert U de M, tel que $U \cap N \neq \emptyset$ et pour tout $H \in \mathcal{F}(U)$ le champ hamiltonien $\mathcal{X}_H := \{\cdot\,, H\}$ est tangent à N en tout point de $U \cap N$. Ce qui est équivalent à dire que pour tout ouvert U de M, tel que $U \cap N \neq \emptyset$ l'ensemble $\{H \in \mathcal{F}(U) \mid H_{|U\cap N} = 0\}$ est un idéal de Poisson de $(U, \{\cdot\,,\cdot\})$.

2.1.4 Structure de Lie-Poisson sur le dual d'une algèbre de Lie

Soit $(\mathfrak{g}, [\cdot\,,\cdot])$ une algèbre de Lie réelle ou complexe de dimension finie. A chaque élément e de $\mathfrak{g}$ on associe la fonction linéaire sur $\mathfrak{g}^*$ suivante :

$$\begin{array}{cccc} e^* & : & \mathfrak{g}^* & \to & \mathbf{K} \\ & & \xi & \mapsto & \langle \xi, e \rangle = \xi(e). \end{array}$$

L'espace des fonctions linéaires sur $\mathfrak{g}^*$, noté $\mathcal{F}_{\ell in}(\mathfrak{g}^*)$ est canoniquement isomorphe à $\mathfrak{g}$. Ceci permet de munir $\mathcal{F}_{\ell in}(\mathfrak{g}^*)$ d'un crochet de Lie, noté $\{\cdot\,,\cdot\}$, qui est donné par :

$$\{e_1^*, e_2^*\}(\xi) := [e_1, e_2]^*(\xi) = \langle \xi, [e_1, e_2] \rangle, \qquad \forall e_1, e_2 \in \mathfrak{g} \text{ et } \forall \xi \in \mathfrak{g}^*. \tag{2.5}$$

Le crochet défini dans la formule (2.5) s'étend de manière unique à un crochet de Poisson sur l'algèbre de fonctions polynomiales $\mathcal{F}(\mathfrak{g}^*)$. On peut vérifier qu'il est donné, pour tous $F, G \in \mathcal{F}(\mathfrak{g}^*)$ et $\xi \in \mathfrak{g}^*$, par :

$$\{F, G\}(\xi) = \langle \xi, [\mathsf{d}_\xi F, \mathsf{d}_\xi G] \rangle\,. \tag{2.6}$$

Cette formule mérite quelques explications. On peut identifier canoniquement $\mathsf{d}_\xi F$ et $\mathsf{d}_\xi G$, qui sont à priori dans $\mathcal{F}_{\ell in}(\mathfrak{g}^*)$, à des éléments de $\mathfrak{g}$, ce qui autorise à considérer leur crochet de Lie $[\mathsf{d}_\xi F, \mathsf{d}_\xi G]$, qui appartient à $\mathfrak{g}$ et qui, après appliquation de ξ, donne un élément de $\mathbf{K}$.

La structure de Poisson définie dans (2.6) est appelée *crochet de Lie-Poisson* de $\mathfrak{g}^*$. On peut faire apparaître le champ hamiltonien associé à G dans la relation (2.6) :

$$\mathcal{X}_G[F](\xi) = \langle \xi, -\operatorname{ad}_{\mathsf{d}_\xi G} \mathsf{d}_\xi F \rangle = \left\langle \operatorname{ad}^*_{\mathsf{d}_\xi G} \xi, \mathsf{d}_\xi F \right\rangle .$$

Ceci signifie que l'équation de mouvement associée à l'hamiltonien $G \in \mathcal{F}(\mathfrak{g}^*)$ est la suivante :

$$\mathcal{X}_G(\xi) = \operatorname{ad}^*_{\mathsf{d}_\xi G} \xi. \tag{2.7}$$

On note souvent $\dot{\xi} := \mathcal{X}_G(\xi)$. La relation (2.7) permet de donner les Casimirs. On rappelle les définitions suivantes.

Définition 2.12. *Soit* $\mathbf{G}$ *un groupe de Lie connexe d'algèbre de Lie* $\mathfrak{g}$.

(1) Une fonction F définie sur $\mathfrak{g}$ est dite Ad*-invariante si*

$$F \circ \operatorname{Ad}_g(X) = F(X), \qquad \forall g \in \mathbf{G} \text{ et } \forall X \in \mathfrak{g} \ ;$$

(2) Une fonction F définie sur $\mathfrak{g}^*$ est dite Ad^**-invariante si*

$$F \circ \operatorname{Ad}^*_g(\xi) = F(\xi), \qquad \forall g \in \mathbf{G} \text{ et } \forall \xi \in \mathfrak{g}^*.$$

Notons $\mathcal{F}(\mathfrak{g})^{\mathbf{G}}$ (resp. $\mathcal{F}(\mathfrak{g}^*)^{\mathbf{G}}$) l'algèbre des fonctions Ad-invariantes sur $\mathfrak{g}$ (resp. Ad^*-invariantes sur $\mathfrak{g}^*$).

Soit $F \in \mathcal{F}(\mathfrak{g}^*)$. L'$\operatorname{Ad}^*$-invariance de F est équivalente à

$$\operatorname{ad}^*_{\mathsf{d}_\xi F} \xi = 0, \qquad \forall \xi \in \mathfrak{g}^*. \tag{2.8}$$

Proposition 2.13. *Les Casimirs de* $(\mathfrak{g}^*, \{\cdot\,,\cdot\})$ *sont les fonctions* Ad^**-invariantes sur* $\mathfrak{g}^*$.

Pour un sous-espace vectoriel, être une sous-variété de Poisson est une propriété qui se traduit en termes de l'algèbre de Lie.

Proposition 2.14. *Soit* $(\mathfrak{g}^*, \{\cdot\,,\cdot\})$ *le dual d'une l'algèbre de Lie* $(\mathfrak{g}, [\cdot\,,\cdot])$, *muni du crochet de Lie-Poisson. Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}^*$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) V est une sous-variété de Poisson de $\mathfrak{g}^*$ pour le crochet de Poisson $\{\cdot\,,\cdot\}$;

(ii) L'orthogonal $V^\perp$ de V est un idéal de Lie.

De plus, si une des conditions (i) *ou* (ii) *est satisfaite alors V est Poisson isomorphe à* $(\mathfrak{g}/V^\perp)^*$.

Pour un sous-espace affine, on a la propriété suivante.

Proposition 2.15. *Soit* $(\mathfrak{g}^*, \{\cdot\,,\cdot\})$ *le dual d'une l'algèbre de Lie* $(\mathfrak{g}, [\cdot\,,\cdot])$, *muni du crochet de Lie-Poisson. Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}^*$ et soit $\alpha \in \mathfrak{g}^*$. On suppose que*

(1) V est une sous-variété de Poisson de $\mathfrak{g}^*$ pour le crochet de Poisson $\{\cdot\,,\cdot\}$;

(2) Pour tout $x, y \in \mathfrak{g}$, on a :
$$\langle \alpha, [x,y] \rangle = 0.$$
Alors l'espace affine $\alpha + V$ est aussi une sous-variété de Poisson de $(\mathfrak{g}^*, \{\cdot\,,\cdot\})$. De plus, la translation par α est un isomorphisme de Poisson entre V et $\alpha + V$.

Preuve:
Montrons que $V + \alpha$ est une sous-variété de Poisson revient à montrer que l'idéal $\mathcal{I}$ des fonctions nulles sur $V + \alpha$ est un idéal de Poisson. Soient $F \in \mathcal{I}$, $\xi + \alpha \in V + \alpha$. Nous remarquons que $\mathsf{d}_{\xi+\alpha} F$ est un élément de $V^{\perp}$, qui est d'après la première condition de cette proposition et d'après la proposition 2.14 un idéal de Lie. Donc, pour tout $G \in \mathcal{F}(\mathfrak{g}^*)$, on a $[\mathsf{d}_{\xi+\alpha} F, \mathsf{d}_{\xi+\alpha} G] \in V^{\perp}$. Calculons maintenant le crochet de Poisson entre F et $G \in \mathcal{F}(\mathfrak{g}^*)$ au point $\xi + \alpha$.

$$\begin{aligned} \{F, G\}(\xi + \alpha) &= \langle \xi + \alpha, [\mathsf{d}_{\xi+\alpha} F, \mathsf{d}_{\xi+\alpha} G] \rangle \\ &= \langle \xi, [\mathsf{d}_{\xi+\alpha} F, \mathsf{d}_{\xi+\alpha} G] \rangle \\ &= 0, \end{aligned}$$

où on a utilisé la deuxième condition de la proposition pour passer de la première à la deuxième ligne et on a le résultat final car $\xi \in V$ et $[\mathsf{d}_{\xi+\alpha} F, \mathsf{d}_{\xi+\alpha} G] \in V^{\perp}$.

Montrons que la translation par α est un isomorphisme de Poisson entre $\mathfrak{g}^*$ et $\mathfrak{g}^*$. Notons T_α la translation par α, définie pour tout $\xi \in \mathfrak{g}^*$, par $T_\alpha(\xi) = \xi + \alpha$. Pour tous $F, G \in \mathcal{F}(\mathfrak{g}^*)$ et $\xi \in \mathfrak{g}^*$, on a :

$$\begin{aligned} \{F \circ T_\alpha, G \circ T_\alpha\}(\xi) &= \langle \xi, [\mathsf{d}_\xi (F \circ T_\alpha), \mathsf{d}_\xi (G \circ T_\alpha)] \rangle \\ &= \left\langle \xi, [\mathsf{d}_{T_\alpha(\xi)} F, \mathsf{d}_{T_\alpha(\xi)} G] \right\rangle \\ &= \left\langle \xi + \alpha, [\mathsf{d}_{T_\alpha(\xi)} F, \mathsf{d}_{T_\alpha(\xi)} G] \right\rangle \\ &= \{F, G\}(T_\alpha(\xi)), \end{aligned}$$

où on a utilisé la condition (2) pour aller de la deuxième à la troisième ligne. Comme V est une sous-variété de Poisson de $(\mathfrak{g}^*, \{\cdot\,,\cdot\})$ alors la restriction de l'isomorphisme de Poisson T_α à V est aussi un isomorphisme de Poisson sur son image. $\square$

Remarque 2.16. *Si on remplace la deuxième condition de la proposition 2.15 par $\operatorname{ad}^*_y \alpha = 0$, pour tout $y \in V^{\perp}$ le résultat de la proposition reste vraie (voir la preuve de cette proposition).*

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, et soit $\omega \in \wedge^2 \mathfrak{g}^*$. La bidérivation de $\mathcal{F}(\mathfrak{g}^*)$ définie par :

$$\{F, G\}_\omega(\xi) := \langle \xi, [\mathsf{d}_\xi F, \mathsf{d}_\xi G] \rangle + \omega(\mathsf{d}_\xi F, \mathsf{d}_\xi G) \tag{2.9}$$

est un crochet de Poisson si et seulement si ω est un 2-cocycle, c'est-à-dire ω vérifie, pour tous $x, y, z \in \mathfrak{g}$

$$\omega([x,y], z) + \omega([y,z], x) + \omega([z,x], y) = 0.$$

Appelons ce crochet de Poisson le *crochet de Lie-Poisson (associé à $\mathfrak{g}$) modifié par ω*. Cette structure de Poisson est isomorphe à la structure de Lie-Poisson $\{\cdot\,,\cdot\}$ sur $\mathfrak{g}^*$ si et seulement si ω est un cobord, c'est-à-dire si il existe $\alpha \in \mathfrak{g}^*$ tel que

$$\omega(x, y) = \langle \alpha, [x,y] \rangle, \qquad \forall x, y \in \mathfrak{g}.$$

La translation par α donne alors un isomorphisme de Poisson entre $(\mathfrak{g}^*, \{\cdot\,,\cdot\})$ et $(\mathfrak{g}^*, \{\cdot\,,\cdot\}_\omega)$.

Proposition 2.17. *Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, V un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}^*$, α un élément de $\mathfrak{g}^*$ et $W = \alpha + V$ un sous-espace affine de $\mathfrak{g}^*$.*

(1) Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) W est une sous-variété de Poisson de $\mathfrak{g}^*$;

(ii) $V^\perp$ est un idéal de Lie de $\mathfrak{g}$, et $\mathrm{ad}^*_y \alpha = 0$ pour tout $y \in V^\perp$;

(iii) V est une sous-variété de Poisson de $\mathfrak{g}^*$ et $\mathrm{ad}^*_y \alpha = 0$ pour tout $y \in V^\perp$.

(2) Si une des conditions (i), (ii) *ou* (iii) *est satisfaite alors la structure de Poisson obtenue sur W est isomorphe (via la translation par α) à la structure de Lie-Poisson de V modifiée par le 2-cocycle Ω donné, pour tous $\overline{x}, \overline{y} \in \mathfrak{g}/V^\perp$, par :*

$$\Omega(\overline{x}, \overline{y}) = \langle \alpha, [x, y] \rangle ,$$

où $x, y \in \mathfrak{g}$ sont deux éléments arbitraires de $\mathfrak{g}$ dont la classe modulo $V^\perp$ est $\overline{x}$ et $\overline{y}$ respectivement et elle est alors isomorphe à la structure de Lie-Poisson sur V si et seulement si Ω est un cobord, c'est-à-dire, s'il existe $\beta \in V \simeq (\mathfrak{g}/V^\perp)^*$ tel que $\Omega(\overline{x}, \overline{y}) = \langle \beta, [\overline{x}, \overline{y}] \rangle$, pour tous $\overline{x}, \overline{y} \in \mathfrak{g}/V^\perp$. En ce cas, $\xi \mapsto \alpha + \beta + \xi$ est un isomorphisme de Poisson entre V, muni du crochet de Lie-Poisson, et W.

Preuve:

Montrons le premier point de la proposition. D'après la proposition 2.14 les conditions *(ii)* et *(iii)* sont équivalentes et de plus on a montré dans la proposition 2.15 que *(iii)* implique *(i)*. Donc il suffit de montrer que *(i)* implique *(iii)*.

Supposons que W est une sous-variété de Poisson de $\mathfrak{g}^*$ (muni de sa structure de Lie-Poisson) alors, pour tout $x \in \mathfrak{g}$ et tout $\xi \in V$, le champ hamiltonien de la fonction linéaire associée à x est tangent à W au point $\alpha + \xi$, autrement dit :

$$\mathrm{ad}^*_x(\alpha + \xi) \subset V.$$

Exprimons ceci d'une autre manière : pour tout $\xi \in V$, la relation suivante doit être satisfaite pour tout $x \in \mathfrak{g}$ et tout $y \in V^\perp$:

$$\langle \alpha + \xi, [x, y] \rangle = 0. \tag{2.10}$$

En particulier, lorsque $\xi = 0$ l'équation (2.10) devient :

$$\langle \alpha, [x, y] \rangle = 0, \qquad \forall x \in \mathfrak{g} \text{ et } \forall y \in V^\perp. \tag{2.11}$$

Donc $\mathrm{ad}^*_y \alpha = 0$ pour tout $y \in V^*$. De plus, les équations (2.10) et (2.11) impliquent que

$$\langle \xi, [x, y] \rangle = 0 \qquad \forall \xi \in V,\ \forall x \in \mathfrak{g} \text{ et } \forall y \in V^\perp. \tag{2.12}$$

Ce qui signifie que $V^\perp$ est un ideal de Lie de $\mathfrak{g}$.

Montrons maintenant *(2)*. Si une des trois conditions de *(1)* est satisfaite on a $V^\perp$ est un ideal de Lie de $\mathfrak{g}$. Ce qui permet de munir $\mathfrak{g}/V^\perp$ d'une structure d'algèbre de Lie, et munir son dual, qui est isomorphe à V, d'un crochet de Lie-Poisson. Ce qui signifie que la forme bilinéaire antisymétrique définie sur $\mathfrak{g}$ par $(x, y) \mapsto \langle \alpha, [x, y] \rangle$ pour tout $x, y \in \mathfrak{g}$ passe au quotient en une forme bilinéaire Ω sur $\mathfrak{g}/V^\perp$. Notons que Ω est automatiquement un 2-cocycle, et que la translation $\xi \mapsto \alpha + \xi$ donne un isomorphisme entre V, muni du crochet de Lie-Poisson modifié par Ω, et W. Le troisième point de le proposition est une conséquence de deuxième point et du résultat donné juste avant cette proposition. $\square$

En identifiant $\mathfrak{g}$ avec son dual, on peut transporter la structure de Poisson de $\mathfrak{g}^*$ à $\mathfrak{g}$, on parle alors de la structure de *Lie-Poisson de* $\mathfrak{g}$. Lorsque cette identification est faite vis-à-vis d'une forme $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$ bilinéaire, symétrique, non-dégénérée sur $\mathfrak{g}$, on obtient un crochet de Poisson sur $\mathfrak{g}$ donné par la proposition 2.18.

Donnons d'abord quelques propriétés, qui seront utliles dans cette thèse. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, munie d'une forme bilinéaire $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$ et soit $\mathbf{G}$ un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. On dit que $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$ est Ad-invariante si, pour tous $g \in \mathbf{G}$ et $x, y \in \mathfrak{g}$, on a :

$$\langle \mathrm{Ad}_g\, x \mid \mathrm{Ad}_g\, y \rangle = \langle x \mid y \rangle \tag{2.13}$$

et que $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$ est ad-invariante si, pour tous $x, y, z \in \mathfrak{g}$, on a :

$$\langle x \mid [y, z] \rangle = \langle [x, y] \mid z \rangle \,. \tag{2.14}$$

De plus, si $\mathbf{G}$ est connexe alors ces deux propriétés (l'Ad-invariance et ad-invariance de $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$) sont équivalentes (dans ce travail on se place toujours dans ce cas).

Proposition 2.18. *Soit* $(\mathfrak{g}, [\cdot\,,\cdot])$ *une algèbre de Lie de dimension finie, munie d'une forme* $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$ *bilinéaire, symétrique, non-dégénérée sur* $\mathfrak{g}$*. La structure de Lie-Poisson de* $\mathfrak{g}$ *est donnée, pour tous* $F, G \in \mathcal{F}(\mathfrak{g})$ *et* $x \in \mathfrak{g}$*, par :*

$$\{F, G\}(x) = \langle x \mid [\nabla_x F, \nabla_x G] \rangle \,, \tag{2.15}$$

où $\nabla_x F$ *est le gradient de* F *en* $x \in \mathfrak{g}$*, c'est-à-dire*

$$\langle \nabla_x F \mid y \rangle = \langle \mathsf{d}_x F, y \rangle \,, \qquad \forall y \in \mathfrak{g}.$$

En particulier, lorsque $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$ est ad-invariante sur $\mathfrak{g}$, on a pour toute fonction $H \in \mathcal{F}(\mathfrak{g})$, l'équation du champ hamiltonien $\mathcal{X}_H$ est :

$$\dot{x} = \mathrm{ad}_{\nabla_x H}(x) = [\nabla_x H, x], \qquad \forall x \in \mathfrak{g}. \tag{2.16}$$

Une équation de la forme $\dot{x} := [F(x), x]$ sur une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ ou sur une sous-variété de $\mathfrak{g}$, où $F : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ une application [1], est dite *équation de Lax.* Par exemple l'équation (2.16) est de Lax.

Proposition 2.19. *Soit* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie munie d'une forme* $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$ *bilinéaire, symétrique, non-dégénérée. Si* $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$ *est* Ad*-invariante sur* $\mathfrak{g}$*, les fonctions* Ad*-invariantes de* $\mathfrak{g}$ *sont exactement les Casimirs de la structure de Lie-Poisson* $\{\cdot\,,\cdot\}$.

Que la forme bilinéaire $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$ soit Ad-invariante ou non, la proposition 2.14 prend la forme suivante.

Proposition 2.20. *Soit* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie, munie d'une forme* $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$ *bilinéaire, symétrique, non-dégénérée. Soit* E *un sous-espace de* $\mathfrak{g}$*. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. L'élément $F(x)$ de $\mathfrak{g}$ est souvent le projeté de x sur une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$.

(i) E est une sous-variété de Poisson de $\mathfrak{g}$ pour le crochet de Poisson $\{\cdot\,,\cdot\}$;

(ii) L'orthogonal[2] $E^\perp$ de E est un idéal de Lie de $\mathfrak{g}$. De plus, E est Poisson isomorphe à $(\mathfrak{g}/E^\perp)^*$.

La proposition 2.15 admet quant à elle la traduction suivante.

Proposition 2.21. *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, munie d'une forme $\langle\cdot\,|\cdot\,\rangle$ bilinéaire, symétrique, non-dégénérée. Soit $a \in \mathfrak{g}$ et soit E un sous-espace de $\mathfrak{g}$. On suppose que*

(1) E est une sous-variété de Poisson de $\mathfrak{g}$ pour le crochet de Lie-Poisson $\{\cdot\,,\cdot\}$;

(2) Pour tout $x, y \in \mathfrak{g}$, on a :

$$\langle a \,|\, [x, y]\rangle = 0.$$

Alors $a + E$ est sous-variété de Poisson de $(\mathfrak{g}, \{\cdot\,,\cdot\})$ et l'application $x \mapsto a + x$ est un isomorphisme de Poisson.

2.1.5 Théorie générale des R-matrices et équations de Yang-Baxter classiques et classiques modifiées

Définition 2.22. *Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, R un endomorphisme de $\mathfrak{g}$. On dit que R est une R-*matrice *de $\mathfrak{g}$ si, pour tous $x, y \in \mathfrak{g}$, le crochet*

$$[x, y]_R = \frac{1}{2}([Rx, y] + [x, Ry]) \tag{2.17}$$

est de Lie.

L'application $[\cdot\,,\cdot]_R$ est par définition antisymétrique, il suffit donc qu'il satisfasse l'identité de Jacobi. Si le crochet $[\cdot\,,\cdot]_R$ est de Lie il est appelé *R-crochet de Lie*.

Proposition 2.23. *Soient R un endomorphisme de $(\mathfrak{g}, [\cdot\,,\cdot])$ et B_R l'opérateur de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ suivant :*

$$B_R(x, y) = [Rx, Ry] - R([Rx, y] + [x, Ry]). \tag{2.18}$$

Le R-crochet $[\cdot\,,\cdot]_R$ satisfait l'identité de Jacobi si et seulement si

$$[B_R(x, y), z] + [B_R(y, z), x] + [B_R(z, x), y] = 0, \qquad \forall x, y, z \in \mathfrak{g}. \tag{2.19}$$

Une condition suffisante pour que (2.19) soit satisfait est qu'il existe une constante $c \in \mathbf{K}$ tel que :

$$B_R(x, y) = -c^2[x, y], \qquad \forall x, y \in \mathfrak{g}. \tag{2.20}$$

On appelle (2.20) *l'équation de Yang-Baxter classique modifiée* (mCYBE) de constante c. Un cas particulier de (2.20) est lorsque $c = 0$, c'est à dire

$$B_R(x, y) = 0, \qquad \forall x, y \in \mathfrak{g}.$$

On dit dans ce cas que *R est solution de l'équation de Yang-Baxter classique* (CYBE).

2. Il s'agit ici de l'orthogonalité par rapport à la forme $\langle\cdot\,|\cdot\,\rangle$.

Exemple 2.24. *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie qui se décompose en deux sous-algèbres de Lie supplémentaires $\mathfrak{g}_+$ et $\mathfrak{g}_-$. Notons P_+ et P_- les projections de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{g}_+$ et $\mathfrak{g}_-$, respectivement, et considérons l'endomorphisme de $\mathfrak{g}$ suivant :*

$$R := P_+ - P_-. \tag{2.21}$$

Pour ce R, l'expression du R-crochet de Lie (2.17) devient :

$$[x, y]_R = [x_+, y_+] - [x_-, y_-], \tag{2.22}$$

où $x_\pm := P_\pm(x)$ et $y_\pm := P_\pm(y)$. Par la formule (2.22) le crochet $[\cdot\,,\cdot]_R$ est la différence des crochets de Lie de $\mathfrak{g}_+$ et $\mathfrak{g}_-$, ce qui prouve qu'il vérifie l'identité de Jacobi, donc est un crochet de Lie. Il suit en fait de (2.21) et (2.18) que,

$$B_R(x, y) = -[x, y]\,, \qquad\qquad \forall x, y \in \mathfrak{g}.$$

Autrement dit, R est solution de l'équation de Yang-Baxter classique modifiée de constante $c = 1$.

Exemple 2.25. *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, qui admet une décomposition*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_n \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_p, \tag{2.23}$$

telle que

(1) *$\mathfrak{g}_n, \mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_p$ sont des sous-algèbres de Lie de $\mathfrak{g}$;*

(2) *$\mathfrak{g}_0$ est commutative ;*

(3) *$\mathfrak{g}_0$ normalise $\mathfrak{g}_n$ et $\mathfrak{g}_p$ (c'est à dire $[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_n] \subset \mathfrak{g}_n$ et $[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_p] \subset \mathfrak{g}_p$).*

Soit P_n, P_0 et P_p les projections de $\mathfrak{g}$ sur, respectivement $\mathfrak{g}_n$, $\mathfrak{g}_0$ et $\mathfrak{g}_p$. L'endomorphisme $R := P_n - P_p$ n'est pas la différence de projections sur deux sous-algèbres de Lie supplémentaires mais il est solution de (mCYBE) de constante $c = 1$. Nous allons montrer ce résultat. Pour $x \in \mathfrak{g}$, notons $x_n := P_n(x), x_0 := P_0(x)$ et $x_p := P_p(x)$. Soient $x, y \in \mathfrak{g}$,

$$\begin{aligned}
B_R(x, y) &= [Rx, Ry] - R[Rx, y] - R[x, Ry] \\
&= [x_n, y_n] - [x_n, y_p] - [x_p, y_n] + [x_p, y_p] \\
&\quad -R[x_n, y_n] - R[x_n, y_0] - R[x_n, y_p] + R[x_p, y_n] + R[x_p, y_0] + R[x_p, y_p] \\
&\quad -R[x_n, y_n] - R[x_0, y_n] - R[x_p, y_n] + R[x_n, y_p] + R[x_0, y_p] + R[x_p, y_p] \\
&= -[x_n, y_n] - [x_n, y_p] - [x_p, y_n] - [x_p, y_p] \\
&\quad -[x_n, y_0] - [x_p, y_0] - [x_0, y_n] - [x_0, y_p] \\
&= -[x, y],
\end{aligned}$$

où dans le deuxième passage on a remplacé R par son expression et pour établir le dernier passage on a utilisé les hypothèses $\mathfrak{g}_0$ est commutative et normalise $\mathfrak{g}_n$ et $\mathfrak{g}_p$.

Nous reprenons l'exemple 2.25 ci-dessus dans le paragraphe 3.1 et la remarque 3.5 du chapitre suivant.

2.1.6 R-crochets de Poisson linéaires

On a vu dans le paragraphe 2.1.4 qu'étant donnée une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de dimension finie, le dual de $\mathfrak{g}$ est muni de la structure de Lie-Poisson. En appliquant cette propriété à $(\mathfrak{g}, [\cdot\,,\cdot]_R)$, on munit $\mathfrak{g}^*$ d'une structure de Poisson, appelée *R-crochet de Poisson* et donnée, pour tous $F, G \in \mathcal{F}(\mathfrak{g}^*)$ et $\xi \in \mathfrak{g}^*$, par :

$$\{F, G\}_R(\xi) = \left\langle \xi, [\mathsf{d}_\xi F, \mathsf{d}_\xi G]_R \right\rangle .$$

Nous remarquons que le R-crochet de Poisson entre deux fonctions linéaires sur $\mathfrak{g}^*$ est linéaire, le crochet $\{\cdot\,,\cdot\}_R$ est appelé alors *R-crochet de Poisson linéaire.*

Proposition 2.26. *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension finie et soit R une R-matrice sur $\mathfrak{g}$. Soient H et F deux fonctions* Ad^**-invariantes sur $\mathfrak{g}^*$. Alors*

(1) H et F sont en involution sur $(\mathfrak{g}^*, \{\cdot\,,\cdot\}_R)$;

(2) L'équation du champ hamiltonien $\mathcal{X}_H := \{\cdot\,, H\}_R$ est donnée sur $\mathfrak{g}^*$ par :

$$\dot{\xi} = \frac{1}{2}\,\mathrm{ad}^*_{R\mathsf{d}_\xi H}\,\xi \ ; \tag{2.24}$$

(3) Si $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_+ \oplus \mathfrak{g}_-$,et si R est la différence des projections sur $\mathfrak{g}_+$ et $\mathfrak{g}_-$, alors l'équation (2.24) devient :

$$\dot{\xi} = \mathrm{ad}^*_{(\mathsf{d}_\xi H)_+}\,\xi = -\,\mathrm{ad}^*_{(\mathsf{d}_\xi H)_-}\,\xi. \tag{2.25}$$

Supposons maintenant que l'algèbre de Lie est munie d'une forme bilinéaire, symétrique, Ad-invariante, non-dégénérée, alors on peut transcrire la proposition 2.26 sur $\mathfrak{g}$. Rappelons avant que l'Ad-invariance d'une fonction F définie sur $\mathfrak{g}$ implique que, pour tout $x \in \mathfrak{g}$, on a :

$$\mathrm{ad}_{\nabla_x F}\, x = 0. \tag{2.26}$$

Proposition 2.27. *Soit $(\mathfrak{g}, [\cdot\,,\cdot])$ une algèbre de Lie de dimension finie, munie d'une forme bilinéaire, symétrique,* Ad*-invariante, non-dégénérée et soit R une R-matrice de $\mathfrak{g}$.*

(1) Les fonctions Ad*-invariantes sur $\mathfrak{g}$ sont en involution sur $(\mathfrak{g}, \{\cdot\,,\cdot\}_R)$;*

(2) Soit H une fonction Ad*-invariante sur $\mathfrak{g}$. L'équation du champ hamiltonien $\mathcal{X}_H := \{\cdot\,, H\}_R$ s'écrit :*

$$\dot{x} = \frac{1}{2}[R\nabla_x H, x]. \tag{2.27}$$

(3) Si $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_+ \oplus \mathfrak{g}_-$, et si R est la différence de projections sur $\mathfrak{g}_+$ et $\mathfrak{g}_-$ alors l'équation (2.27) s'écrit encore :

$$\dot{x} = [(\nabla_x H)_+, x] = -[(\nabla_x H)_-, x]. \tag{2.28}$$

2.1.7 R-crochets de Poisson quadratiques et cubiques

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre Lie de dimension finie, munie d'une forme bilinéaire, symétrique, Ad-invariante, non-dégénérée. Cela permet d'identifier $\mathfrak{g}$ avec son dual (on peut alors construire des structures de Poisson sur $\mathfrak{g}$). Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre associative, nous disons qu'un crochet de Poisson sur $\mathfrak{g}$ est quadratique (resp. cubique) lorsque ce crochet de Poisson entre deux fonctions linéaires sur $\mathfrak{g}$ est quadratique (resp. cubique).

Soit R un endomorphisme de $\mathfrak{g}$, l'adjoint de R est noté R^* et défini, pour tout $x, y \in \mathfrak{g}$, par :

$$\langle R(x) \,|\, y\rangle = \langle x \,|\, R^*(y)\rangle\,, \tag{2.29}$$

et la partie antisymétrique de R est noté R_- et donné, pour tout $x \in \mathfrak{g}$, par :

$$R_-(x) = \frac{R(x) - R^*(x)}{2}. \tag{2.30}$$

Nous construisons à l'aide d'un endomorphisme R de $\mathfrak{g}$ qui satisfait certaines conditions une structure de Poisson quadratique sur $\mathfrak{g}$. Rappelons que toute algèbre associative $\mathfrak{g}$ devient une algèbre de Lie, si on prend $[x, y] := xy - yx$. De plus, si $\langle \cdot \,|\, \cdot\rangle$ est une forme bilinéaire, non-dégénérée sur $\mathfrak{g}$ pour laquelle la multiplication est symétrique, c'est-à-dire, pour tout triplet (x, y, z) dans $\mathfrak{g}$, on a $\langle xy \,|\, z\rangle = \langle x \,|\, yz\rangle$ alors la forme $\langle \cdot \,|\, \cdot\rangle$ est ad-invariante.

Proposition 2.28. *[35] Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie d'une algèbre associative de dimension finie, munie d'une forme $\langle \cdot \,|\, \cdot\rangle$ bilinéaire symétrique, non-dégénérée, pour laquelle la multiplication est symétrique. Soit R un endomorphisme de $\mathfrak{g}$. Si R et sa partie antisymétrique R_- sont deux solutions de l'équation de Yang-Baxter modifiée de même constante, alors le crochet défini, pour tous $F, G \in \mathcal{F}(\mathfrak{g})$ et $x \in \mathfrak{g}$, par :*

$$\begin{aligned} \{F, G\}^Q_R(x) \;&:=\; \frac{1}{2}\,\langle [x, \nabla_x F] \,|\, R(x\nabla_x G + \nabla_x G x)\rangle \\ &\quad -\frac{1}{2}\,\langle [x, \nabla_x G] \,|\, R(x\nabla_x F + \nabla_x F x)\rangle \end{aligned} \tag{2.31}$$

*est une structure de Poisson sur $\mathfrak{g}$, appelé le R-*crochet de Poisson quadratique.

Remarque 2.29. *Les fonctions* Ad*-invariantes sur $\mathfrak{g}$ sont en involution pour le R-crochet de Poisson quadratique.*

Soit H une fonction Ad-invariante sur $\mathfrak{g}$ et soit $F \in \mathcal{F}(\mathfrak{g})$. D'après la formule (2.31) et l'Ad-invariance de H (voir (2.26)), le R-crochet de Poisson quadratique entre H et F au point $x \in \mathfrak{g}$ est donné par :

$$\begin{aligned} \{F, H\}^Q_R(x) \;&=\; \frac{1}{2}(\langle [x, \nabla_x F] \,|\, R(x\nabla_x H + \nabla_x H x)\rangle \\ &=\; \frac{1}{2}(\langle [R(x\nabla_x H + \nabla_x H x), x] \,|\, \nabla_x F\rangle \\ &=\; \left\langle \mathsf{d}_x F, \frac{1}{2}[R(x\nabla_x H + \nabla_x H x), x] \right\rangle. \end{aligned}$$

Ce qui implique que l'expression du champ hamiltonien $\mathcal{X}_H^Q := \{\cdot\,, H\}_R^Q$ est donné par l'équation de Lax :

$$\mathcal{X}_H^Q(x) = \frac{1}{2}[R(x\nabla_x H + \nabla_x H x), x]. \tag{2.32}$$

Un troisième crochet sur $\mathfrak{g}$, qu'on peut construire à l'aide d'une R-matrice de $\mathfrak{g}$, est donné par la proposition suivante.

Proposition 2.30. *[35] Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie d'une algèbre associative de dimension finie, munie d'une forme $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$ bilinéaire symétrique, non-dégénérée, pour laquelle la multiplication est symétrique. Soit R une solution de l'équation de Yang-Baxter modifiée (mCYBE). Alors le crochet défini, pour tous $F, G \in \mathcal{F}(\mathfrak{g})$ et $x \in \mathfrak{g}$, par :*

$$\{F, G\}_R^C(x) := \frac{1}{2}\langle [x, \nabla_x F] \,|\, R(x\nabla_x G x)\rangle - \frac{1}{2}\langle [x, \nabla_x G] \,|\, R(x\nabla_x F x)\rangle \tag{2.33}$$

*est une structure de Poisson sur $\mathfrak{g}$, appelé le R-*crochet de Poisson cubique. *De plus, l'équation du champ hamiltonien associé à une fonction* Ad*-invariante H est donnée par l'équation de Lax :*

$$\mathcal{X}_H^C(x) = [R(x\nabla_x H x), x].$$

Remarque 2.31. *Les fonctions* Ad*-invariantes sur $\mathfrak{g}$ sont en involution pour le crochet $\{\cdot\,,\cdot\}_R^C$.*

2.2 Systèmes intégrables sur une variété de Poisson

On définit dans cette section la notion de système intégrable et on donne quelques propriétés.
Soit $\mathbf{F} = (F_1, \dots, F_s)$ un s-uplet d'éléments de $\mathcal{F}(M)$. L'application

$$\begin{array}{rccc} \mathbf{F}: & M & \to & \mathbf{K}^s \\ & m & \mapsto & (F_1(m), \dots, F_s(m)) \end{array}$$

est appelée *application moment* si $\mathbf{F}$ est involutive. On appelle *fibre* de $\mathbf{F}$ tout ensemble de niveau commun des fonctions F_i. Soit $c \in \mathbf{K}^s$, on note $\mathbf{F}_c := \mathbf{F}^{-1}(c)$ la fibre au-dessus de c. Pour $m \in M$, la fibre de $\mathbf{F}$ passant par m est

$$\mathbf{F}_m = \{p \in M \mid F_i(p) = F_i(m), \forall i \in \{1, \dots, s\}\}.$$

Ainsi nous pouvons définir l'intégrabilité au sens de Liouville. On commence par la notion de famille indépendante, et fixons quelques notations.

Définition 2.32. *Soit M une variété. Une famille $(F_1, \dots, F_s)$ de fonctions sur M est dite* indépendante *sur M, si l'ouvert*

$$\mathcal{U}_{\mathbf{F}} := \{m \in M \mid \mathsf{d}_m F_1 \wedge \dots \wedge \mathsf{d}_m F_s \neq 0\}$$

est dense dans M. En termes de coordonnées locales $(x_1, \dots, x_n)$ au voisinage de m, on a

$$m \in \mathcal{U}_{\mathbf{F}} \text{ si et seulement si } \operatorname{Rk}\left(\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(m)\right)_{\substack{1\le i\le s\\ 1\le j\le n}}\right) = s.$$

On note $M_{(r)}$ l'ouvert de M, pour lequel la structure de Poisson est de rang $2r$.

On définit alors l'intégrabilité au sens de Liouville.

Définition 2.33. *Soient* $(M, \{\cdot, \cdot\})$ *une variété de Poisson de rang* $2r$. *Une famille de fonctions* $\mathbf{F} = (F_1, \ldots, F_s)$ *sur* M *est dite* intégrable *au sens de Liouville si*

(1) $\mathbf{F}$ *est involutive pour le crochet* $\{\cdot, \cdot\}$ *;*

(2) $\mathbf{F}$ *est indépendante sur* M *;*

(3) $s = \dim M - r$, *c'est-à-dire,* $\operatorname{card} \mathbf{F} = \dim M - \frac{1}{2} \operatorname{Rk} \{\cdot, \cdot\}$.

On dit alors que $(M, \{\cdot, \cdot\}, \mathbf{F})$ *est un* système intégrable au sens de Liouville de rang $2r$.

Un premier point est que si l'on restreint un système intégrable au sens de Liouville aux points où "tout se passe bien", on obtient un ouvert qui est stable par les flots des hamiltoniens du système en question.

Proposition 2.34. *[7, Propsition 4.24] Soient* $\mathbf{F} = (F_1, \ldots, F_s)$ *et* $(M, \{\cdot, \cdot\}, \mathbf{F})$ *un système intégrable de rang 2r. L'ouvert* $\mathcal{U}_{\mathbf{F}} \cap M_{(r)}$ *est conservé par les flots de tous les champs* $\mathcal{X}_{F_i}$. *De plus, les champs* $\mathcal{X}_{F_1}, \ldots, \mathcal{X}_{F_s}$ *définissent sur* $\mathcal{U}_{\mathbf{F}} \cap M_{(r)}$ *une distribution intégrable de rang* r.

Preuve:

Comme $\mathsf{d}F_1 \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}F_s$ et $\{\cdot, \cdot\}$ sont conservés par les flots de tous champs de vecteurs $\mathcal{X}_{F_i}$, alors $M_{(r)}$ est aussi conservé par ces flots. La proposition 4.12 de [7], affirme que si $\mathbf{F}$ est involutive et $s = \dim M - r$, alors $\dim(\operatorname{vect}\{\mathcal{X}_{F_1}(m), \ldots, \mathcal{X}_{F_s}(m)\}) = r$ pour tout $m \in \mathcal{U}_{\mathbf{F}} \cap M_{(r)}$. On conclut que les champs hamiltoniens $\mathcal{X}_{F_i}$, $i \in \{1, \ldots, s\}$ définissent une distribution D sur $\mathcal{U}_{\mathbf{F}} \cap M_{(r)}$ de rang r. Les champs hamitoniens $\mathcal{X}_{F_i}$, $i \in \{1, \ldots, s\}$, commutent (en effet, $[\mathcal{X}_{F_i}, \mathcal{X}_{F_j}] = -\mathcal{X}_{\{F_i, F_j\}} = 0$), donc cette distribution est engendrée par des champs involutifs. D'après le théorème de Frobenius elle est intégrable. □

Pour $m \in \mathcal{U}_{\mathbf{F}} \cap M_{(r)}$, la variété intégrale de cette distribution passant par m est appelée la *variété invariante passant par* m, et notée $\mathbf{F}'_m$.

Remarque 2.35. *Une étude un peu plus fine montre que* $\mathbf{F}'_m$ *est la composante connexe de* $\mathcal{U}_{\mathbf{F}} \cap \mathbf{F}_m \cap M_{(r)}$ *passant par* m.

Une première raison d'étudier les systèmes intégrables est qu'on peut déterminer les courbes intégrales des $\mathcal{X}_{F_i}, 1 \leq i \leq s$ par quadratures (c'est-à-dire en utilisant des opérations algèbriques, le théorème de fonctions implicites et intégration) . Une seconde raison est le theorème de Liouville suivant.

Théorème 2.36. *[7, Théorème 4.28] Soit* $(M, \{\cdot, \cdot\}, \mathbf{F} = F_1, \ldots, F_s)$ *un système intégrable réel. On pose* $dim M = n$ *et* $\operatorname{Rk} \{\cdot, \cdot\} = 2r$. *Soit* $m \in \mathcal{U}_{\mathbf{F}} \cap M_{(r)}$.

(1) Si $\mathbf{F}_m$ *est compact, il existe un difféomorphisme entre* $\mathbf{F}_m$ *et* $\mathbf{T}^r = (\mathbf{R}/\mathbf{Z})^r$, *tel que les champs de vecteurs* $\mathcal{X}_{F_1}, \ldots, \mathcal{X}_{F_s}$ *correspondent à des champs de vecteurs constants sur* $\mathbf{T}^r$ *;*

(2) Si $\mathbf{F}_m$ *n'est pas compact mais toutes les courbes intégrales des* $\mathcal{X}_{F_i}$ *sont complètes, il existe un difféomorphisme entre* $\mathbf{F}_m$ *et un cylindre* $\mathbf{R}^{r-q} \times \mathbf{T}^q$, $(0 \leq q < r)$, *tel que les champs hamiltoniens* $\mathcal{X}_{F_i}, 1 \leq i \leq s$ *correspondent aux champs de vecteurs constants.*

Notons que supposer que les champs hamiltoniens sont complets n'est pas une hypothèse légère : elle n'est pas satisfaite lorsque l'on étudie, ainsi que c'est le cas dans cette thèse, des champs polynomiaux.

2.3 Algèbres de Lie simples

Cette section est surtout consacrée aux algèbres de Lie simples, uniquement nous donnons dans son premier paragraphe deux propriétés des fonctions Ad^*-invariantes, valables pour toute algèbre de Lie de dimension finie. A partir du deuxième paragraphe jusqu'a la fin de cette section, le corps $\mathbf{K}$ désigne $\mathbf{C}$ et l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie simple complexe.

2.3.1 Quelques propriétés des fonctions Ad^*-invariantes

Nous donnons dans ce paragraphe deux lemmes sur les fonctions Ad^*-invariantes, utiles dans la suite de notre travail.

Lemme 2.37. *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie réelle ou complexe de dimension finie. Soient F et G deux fonctions Ad^*-invariantes sur $\mathfrak{g}^*$ et soit ξ dans $\mathfrak{g}^*$. Les différentielles de F et de G en ξ commutent, c'est-à-dire :*

$$[\mathsf{d}_\xi F, \mathsf{d}_\xi G] = 0. \tag{2.34}$$

Preuve:
En utilisant l'Ad^*-invariance de F et G on obtient :

$$\mathrm{ad}^*_{\mathsf{d}_\xi F}\, \xi = 0 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{ad}^*_{\mathsf{d}_\xi G}\, \xi = 0. \tag{2.35}$$

En terme du centralisateur $\mathfrak{g}^\xi$ de ξ dans $\mathfrak{g}$, les équations (2.35) donnent

$$\mathsf{d}_\xi F \in \mathfrak{g}^\xi \qquad \text{et} \qquad \mathsf{d}_\xi G \in \mathfrak{g}^\xi. \tag{2.36}$$

Supposons que ξ est régulier, d'après [48, proposition 19.7.5] le centralisateur $\mathfrak{g}^\xi$ est abélien et donc

$$[\mathsf{d}_\xi F, \mathsf{d}_\xi G] = 0. \tag{2.37}$$

Or (voir [48, proposition 19.7.5]) l'ensemble des éléments réguliers de $\mathfrak{g}^*$ est un ouvert dense de $\mathfrak{g}^*$, ce qui implique que $\xi \to [\mathsf{d}_\xi F, \mathsf{d}_\xi G]$ est nulle sur un ouvert dense donc elle est nulle sur $\mathfrak{g}^*$. □

Lemme 2.38. *Soient F, G deux fonctions Ad^*-invariantes sur $\mathfrak{g}^*$. Soient ξ, η deux éléments de $\mathfrak{g}^*$ et $a, b \in \mathbf{K}$. Alors*

$$\langle a\xi + b\eta, [\mathsf{d}_\xi F, \mathsf{d}_\eta G] \rangle = 0. \tag{2.38}$$

Preuve:
En utilisant l'Ad^*-invariance de F et G sur $\mathfrak{g}^*$, laquelle donne la nullité de $\mathrm{ad}^*_{\mathsf{d}_\xi F}(\xi)$ et $\mathrm{ad}^*_{\mathsf{d}_\eta G}(\eta)$, on obtient :

$$\begin{cases} 0 &= \langle \xi, [\mathsf{d}_\xi F, \mathsf{d}_\eta G] \rangle\,, \\ 0 &= \langle \eta, [\mathsf{d}_\eta G, \mathsf{d}_\xi F] \rangle\,. \end{cases} \tag{2.39}$$

Le résultat est obtenu en prenant une combinaison linéaire des équations du système (2.39).

□

Remarque 2.39. *Il ne faut pas confondre le terme de droite de (2.38) avec le crochet de Poisson entre F et G, les différentielles de ces deux fonctions n'étant pas prises au même point.*

2.3.2 Algèbres de Lie simple et systèmes de racines

Définitions et propriétés

Définition 2.40. *Une algèbre de Lie* $\mathfrak{g}$ *est dite* simple*, si* $\dim \mathfrak{g} > 1$ *et si* $\mathfrak{g}$ *est l'unique idéal non réduit à* $\{0\}$ *de* $\mathfrak{g}$*.*

Il nous faudra en général choisir une sous-algèbre de Cartan, objet dont on rappelle la définition.

Définition 2.41. *Soit* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie simple. Une* sous-algèbre de Cartan *de* $\mathfrak{g}$ *est un sous-espace* $\mathfrak{h}$ *de* $\mathfrak{g}$*, qui est commutative (c'est-à-dire* $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] = 0$*) et maximale (c'est-à-dire le normalisateur de* $\mathfrak{h}$ *est* $\mathfrak{h}$*).*

Théorème 2.42. *Chaque algèbre de Lie simple admet une sous-algèbre de Cartan. De plus, deux sous-algèbres de Cartan de* $\mathfrak{g}$ *sont conjuguées.*

Exemple 2.43. *Soit* $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(\mathbf{C})$*, la sous-algèbre de Lie* $\mathfrak{h}$ *formée par les matrices diagonales de trace nulle est une sous-algèbre de Cartan de* $\mathfrak{g}$*.*

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple et $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$. Considèrons l'application $\mathrm{ad} : \mathfrak{h} \to \mathrm{End}(\mathfrak{g})$, définie, pour tout $x \in \mathfrak{h}$, par :

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{ad}_x : & \mathfrak{g} & \to & \mathfrak{g} \\ & y & \mapsto & [x, y]. \end{array} \tag{2.40}$$

Les endomorphismes $\{\mathrm{ad}_x \mid x \in \mathfrak{h}\}$ commutent deux à deux, et sont donc simultanément diagonalisables. L'algèbre de Lie simple $\mathfrak{g}$ admet une décomposition en espaces propres comme suit

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{h}^*} \mathfrak{g}_\alpha, \tag{2.41}$$

où $\mathfrak{g}_\alpha$ est l'espace des éléments e_α qui satisfont à l'équation

$$\mathrm{ad}_x(e_\alpha) = \langle \alpha, x \rangle \, e_\alpha, \qquad \forall x \in \mathfrak{h}. \tag{2.42}$$

Si $\mathfrak{g}_\alpha \neq \{0\}$, on dit que α est une racine de $\mathfrak{g}$ (associée à $\mathfrak{h}$). L'ensemble des racines de $\mathfrak{g}$ (associé à $\mathfrak{h}$) est appelé le *système de racines* de $\mathfrak{g}$ (associé à $\mathfrak{h}$), il est noté Φ. Si α est une racine de $\mathfrak{g}$ alors $-\alpha$ est aussi une racine de $\mathfrak{g}$. On peut réécrire l'équation (2.41) sous la forme

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha, \tag{2.43}$$

où $\mathfrak{g}_\alpha$ est un sous-espace non réduit à $\{0\}$, pour tout $\alpha \in \Phi$.

Exemple 2.44. *Soient* $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(\mathbf{C})$ *et* $\mathfrak{h}$ *la sous-algèbre de Cartan donnée dans l'exemple 2.43. Dans ce cas, la décomposition (2.43) est donnée sous la forme suivante :*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{i \neq j} \mathbf{C} E_{ij},$$

où $(E_{ij}, 1 \leq i, j \leq n)$ est la base canonique de $\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})$. En effet, tout élément $D \in \mathfrak{h}$ s'écrit

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix},$$

où $d_1 + \cdots + d_n = 0$. On vérifie aisement que $[D, E_{ij}] = (d_i - d_j)E_{ij}$. Définissons $\lambda_i \in \mathfrak{h}^*$ par $\lambda_i(D) := d_i$. Alors l'ensemble de racines de $\mathfrak{g}$ est $\Phi = \{\lambda_i - \lambda_j \mid 1 \leq i \neq j \leq n\}$ et $\mathfrak{g}_{\lambda_i - \lambda_j} = \langle E_{ij} \rangle$, pour tous $1 \leq i \neq j \leq n$.

Définition 2.45. *Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple, $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ et Φ le système de racines de $\mathfrak{g}$ associé à $\mathfrak{h}$.*

(1) Une partie Π de Φ est appelée une base *de Φ, si*
   - *(a) Π est une base de $\mathfrak{h}^*$;*
   - *(b) Toute racine β de Φ s'écrit comme combinaison linéaire d'éléments de Π à coefficients entiers lesquels sont tous positifs ou bien tous négatifs.*

   La base Π est appelée un système de racines simples *de Φ et les éléments de Π sont dites les* racines simples *de $\mathfrak{g}$.*

(2) Le sous-ensemble de Φ formé par les éléments qui s'écrivent comme combinaison linéaire à coefficients entiers positifs (resp. négatifs) des racines simples est appelé l'ensemble des racines positives *(resp.* négatives*) de Φ par rapport à Π et noté Φ_+ (resp. Φ_-).*

Proposition 2.46. *[48, paragraphe 18.7] Tout système de racines admet une base.*

Exemple 2.47. *Pour $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(\mathbf{C})$, une base de Φ est donnée par :*

$$\Pi = \{\alpha_i = \lambda_i - \lambda_{i+1} \mid 1 \leq i \leq n-1\},$$

où les $\lambda_i, 1 \leq i \leq n$, sont comme dans l'exemple 2.44 et pour $1 \leq i, j \leq n$, on a :

$$\begin{aligned} \lambda_i - \lambda_j &= (\lambda_i - \lambda_{i+1}) + (\lambda_{i+1} - \lambda_{i+2}) + \cdots + (\lambda_{j-1} - \lambda_j), && \text{si } i < j, \\ \lambda_i - \lambda_j &= -(\lambda_j - \lambda_{j+1}) - (\lambda_{j+1} - \lambda_{j+2}) - \cdots - (\lambda_{i-1} - \lambda_i), && \text{si } i > j. \end{aligned}$$

Cela donne :

$$\Phi_+ = \langle \lambda_i - \lambda_j \mid i < j \rangle \qquad \text{et} \qquad \Phi_- = \langle \lambda_i - \lambda_j \mid i > j \rangle.$$

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple de rang ℓ. Soient $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ et soit $\Pi = (\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell)$ une base de son système de racines Φ. On définit la longueur $|\alpha|$ de $\alpha \in \Phi$, par :

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^{\ell} a_i, \qquad \text{où} \quad \alpha = \sum_{i=1}^{\ell} a_i \alpha_i.$$

Pour tout α une racine, on note e_α un vecteur propre non nul associé à α. On définit ainsi sur $\mathfrak{g}$ une graduation, c'est-à-dire que l'on a une décomposition sous la forme

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{k \in \mathbf{Z}} \mathfrak{g}_k, \tag{2.44}$$

telle que $[\mathfrak{g}_k, \mathfrak{g}_l] \subset \mathfrak{g}_{k+l}$, pour tous $k, l \in \mathbf{Z}$. Il suffit pour cela de prendre $\mathfrak{g}_0 := \mathfrak{h}$ et pour $k \neq 0$, de définir $\mathfrak{g}_k$ comme l'espace engendré par $\{e_\alpha \mid \alpha \in \Phi, |\alpha| = k\}$. En particulier,

$$\mathfrak{g}_- := \sum_{k \leq -1} \mathfrak{g}_k \quad \text{et} \quad \mathfrak{g}_+ := \sum_{k \geq 0} \mathfrak{g}_k \tag{2.45}$$

sont deux sous-algèbres de Lie de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_+ \oplus \mathfrak{g}_-$.

Les sous-algèbres de Lie $\mathfrak{g}_n := \sum_{k \leq -1} \mathfrak{g}_k$, $\mathfrak{g}_0 := \mathfrak{h}$ et $\mathfrak{g}_p := \sum_{k \geq 1} \mathfrak{g}_k$ vérifient les hypothèses de l'exemple 2.25, c'est-à-dire que, $\mathfrak{g}_0$ est commutative, normalise $\mathfrak{g}_p$ et $\mathfrak{g}_n$, et

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_n \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_p.$$

Base de Chevalley

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple. Considérons la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$, qui est définie par :

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{ad}: & \mathfrak{g} & \to & \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) \\ & x & \mapsto & \mathrm{ad}_x . \end{array} \tag{2.46}$$

On appelle *forme de Killing* de $\mathfrak{g}$ la forme bilinéaire symétrique suivante :

$$\begin{array}{rccc} \langle \cdot \,|\, \cdot \rangle: & \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} & \to & \mathbf{C} \\ & (x, y) & \mapsto & \mathrm{Trace}(\mathrm{ad}_x \circ \mathrm{ad}_y). \end{array} \tag{2.47}$$

Exemple 2.48. *Dans le cas où $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(\mathbf{C})$, la forme de Killing (2.47) est proportionnelle à*

$$(X, Y) \to \mathrm{Trace}(XY), \qquad \forall X, Y \in \mathfrak{sl}_n(\mathbf{C}).$$

Proposition 2.49. *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple. La forme de Killing de $\mathfrak{g}$ est bilinéaire, symétrique,* Ad*-invariante et non-dégénérée.*

Corollaire 2.50. *Si $\alpha, \beta \in \Phi$ et $\alpha + \beta \neq 0$, alors $\mathfrak{g}_\alpha$ est orthogonal à $\mathfrak{g}_\beta$ (c'est-à-dire $\langle \mathfrak{g}_\alpha \,|\, \mathfrak{g}_\beta \rangle = 0$).*

Preuve:

Prenons $x \in \mathfrak{g}_\alpha$ et $y \in \mathfrak{g}_\beta$. Pour tout $z \in \mathfrak{h}$, on a

$$\alpha(z) \langle x \,|\, y \rangle = \langle [z, x] \,|\, y \rangle = - \langle x \,|\, [z, y] \rangle = -\beta(z) \langle x \,|\, y \rangle .$$

On en déduit que $(\alpha + \beta)(z) \langle x \,|\, y \rangle = 0$, pour tout $z \in \mathfrak{h}$. Ce qui implique $\langle x \,|\, y \rangle = 0$. □

Remarque 2.51. *La restriction de la forme de Killing à $\mathfrak{h}$ est non-dégénérée. Ce qui implique que pour chaque $\alpha \in \mathfrak{h}^*$, il existe un unique $H_\alpha \in \mathfrak{h}$, tel que*

$$\langle \alpha \,, \cdot \rangle = \langle H_\alpha \,|\, \cdot \rangle .$$

L'élément h_α de $\mathfrak{h}$, défini par

$$h_\alpha := 2 \frac{H_\alpha}{\langle H_\alpha \,|\, H_\alpha \rangle} \tag{2.48}$$

est appelé la coracine *de α. En particulier, les coracines des racines simples sont appelées les* coracines simples.

Théorème 2.52. *(Théorème de Chevalley)*
Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple de rang ℓ, soit $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$, dont le système de racines est noté Φ et soit $\Pi = (\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell)$ une base de Φ. Alors, pour tout $\alpha \in \Phi$, il existe un vecteur propre non nul e_α associé à α, tels que pour tous $\alpha, \beta \in \Phi$ et $h, h' \in \mathfrak{h}$, on a :

$$\begin{aligned} [h, h'] &= 0, \\ [h, e_\alpha] &= \langle \alpha, h \rangle \, e_\alpha, \\ [e_\alpha, e_\beta] &= \begin{cases} h_\alpha & si\ \alpha + \beta = 0, \\ 0 & si\ \alpha + \beta \notin \Phi \cup \{0\}, \\ N_{\alpha\beta} e_{\alpha+\beta} & si\ \alpha + \beta \in \Phi, \end{cases} \end{aligned}$$

où $N_{\alpha\beta} = \pm(p+1)$, avec

$$p = max\{n \mid \beta - n\alpha \in \Phi\}.$$

Une telle base $(h_1, \ldots, h_\ell) \cup (e_\alpha)_{\alpha \in \Phi}$ de $\mathfrak{g}$ est appelée une base de Chevalley *de $\mathfrak{g}$.*

Matrice de Cartan

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple de rang ℓ, soit $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ et soit Φ le système de racines de $\mathfrak{g}$ associé à $\mathfrak{h}$. Fixons une base $(\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell)$ de Φ. La matrice $C = (c_{ij})_{1 \leq i,j \leq \ell}$ dont les coefficients sont donnés par :

$$c_{ij} := 2\frac{\langle \alpha_i \mid \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_j \mid \alpha_j \rangle} = \left\langle \alpha_i, h_{\alpha_j} \right\rangle$$

est appelée la *matrice de Cartan* de $\mathfrak{g}$. On a $c_{ii} = 2$ et $c_{ij} \leq 0$, pour $i \neq j$.

La matrice de Cartan d'une algèbre de Lie ne dépend pas du choix de la sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$. De plus, deux algèbres de Lie sont isomorphes si et seulement si elles ont la même matrice de Cartan.

La classification des matrices de Cartan donne quatre familles infinies de matrices de Cartan et cinq familles individuelles, qui correspondent à quatre familles infinies d'algèbres de Lie simples appelées A_ℓ, B_ℓ, C_ℓ et D_ℓ (ici ℓ est le rang de l'algèbre de Lie) et à cinq algèbres de Lie simples exceptionnelles appelées E_6, E_7, E_8, F_4 et G_2. De plus, chaque algèbre de Lie (simple) est isomorphe à une algèbre de matrices, c'est-à-dire à une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}_N(\mathbf{C})$. Une telle sous-algèbre de Lie est donnée, dans le cas des algèbres de Lie simples classiques, sous forme du tableau 2.1.

$\mathfrak{g}$	Algèbre de matrices
A_ℓ	$\mathfrak{sl}_{\ell+1}(\mathbb{C})$
B_ℓ	$\mathfrak{so}_{2\ell+1}(\mathbb{C})$
C_ℓ	$\mathfrak{sp}_{2\ell}(\mathbb{C})$
D_ℓ	$\mathfrak{so}_{2\ell}(\mathbb{C})$

Table 2.1 – Les algèbres de Lie simples vues comme des sous-algèbres de $\mathfrak{gl}_N(\mathbf{C})$

2.3.3 Polynômes invariants et exposants

Dans ce paragraphe nous donnons quelques propriétés techniques sur les polynômes Ad-invariants d'une algèbre de Lie simple $\mathfrak{g}$, qui seront importantes dans notre travail. Nous commençons par énoncer et démontrer la proposition 2.53. Nous donnons ensuite deux théorèmes connus, le premier permet de donner une famille génératrice de l'algèbre de fonctions polynomiales, Ad-invariantes sur $\mathfrak{g}$ et le deuxième est un résultat de Raïs [46] qui prouve l'indépendance d'une grande famille de fonctions définies sur $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ (nous reprenons que la preuve du deuxième théorème).

Nous introduisons quelques notations. Soit $x \in \mathfrak{g}$, on note x^k le k-uplet $(x, \ldots, x)$. Soient F une fonction définie sur $\mathfrak{g}$ et k un entier naturel, on note $\mathsf{d}_x^k F$ la différentielle d'ordre k de F en x.

Soit P un polynôme de degré $m+1$. A l'aide des notations, que nous venons de donner, la formule de Taylor, appliquée à P au point $x + ty \in \mathfrak{g}$, s'écrit

$$P(x+ty) = \sum_{k=0}^{m+1} \frac{t^k}{k!} \left\langle \mathsf{d}_x^k P, y^k \right\rangle . \tag{2.49}$$

Proposition 2.53. *Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple de rang ℓ, $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$, Φ le système de racines de $\mathfrak{g}$ associé à $\mathfrak{h}$, $(\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell)$ une base de Φ et $h_1, \ldots, h_\ell$ les coracines simples correspondantes. Pour tout $\gamma \in \Phi$, on choisit e_γ un vecteur non nul associé à la racine γ. Soit*

$$(x_1, \ldots, x_\ell) \cup (x_\gamma)_{\gamma \in \Phi}$$

le système de coordonnées sur $\mathfrak{g}$ donné, pour tous $1 \leq i \leq \ell$ et $\gamma \in \Phi$ et pour tout $x \in \mathfrak{g}$, par :

$$\begin{cases} x_i(x) = \langle h_i \,|\, x \rangle , \\ x_\gamma(x) = \langle e_{-\gamma} \,|\, x \rangle . \end{cases}$$

Soit P un polynôme homogène, Ad*-invariant sur $\mathfrak{g}$ de degré $m+1$.*

(1) Le polynôme P est une combinaison linéaire de monômes de la forme suivante :

$$x_{\gamma_1} \ldots x_{\gamma_k} x_{p_1} \ldots x_{p_j}, \tag{2.50}$$

où $p_1, \ldots, p_j \in \{1, \ldots, \ell\}$ et tels que :

$$\begin{cases} k + j = m + 1, \\ \sum_{i=1}^k |\gamma_i| = 0. \end{cases} \tag{2.51}$$

(2) Soient $i_1, \ldots, i_p \in \{1, \ldots, \ell\}$ et $\gamma_1, \ldots, \gamma_q \in \Phi$, où $p, q \in \mathbf{N}$. Si

$$m + 1 - (p+q) + \sum_{i=1}^q |\gamma_i| < 0 \qquad ou \qquad \sum_{i=1}^q |\gamma_i| > 0 \tag{2.52}$$

alors, pour tout $y \in \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}_1$,

$$\left\langle \mathsf{d}_y^{p+q} P, (h_{i_1}, \ldots, h_{i_p}, e_{\gamma_1}, \ldots, e_{\gamma_q}) \right\rangle = 0. \tag{2.53}$$

Preuve:
(1) Tout polynôme homogène de degré $m+1$ s'écrit comme combinaison linéaire de monômes de la forme (2.50) avec $k+j=m+1$. Montrons alors que lorsque ce polynôme est Ad-invariant la deuxième condition du système (2.51) est vérifiée pour tous les monômes qui apparaissent dans la décomposition.
Soit $h \in \mathfrak{h}$, tel que $\alpha_i(h)=1$, pour tout $i=1,\ldots,\ell$. On définit un champ de vecteurs linéaire $\widetilde{\mathrm{ad}}_h$ sur $\mathfrak{g}$ par :

$$\widetilde{\mathrm{ad}}_h[F](x) := \langle \mathsf{d}_x F, \mathrm{ad}_h\, x\rangle = \langle \nabla_x F \mid \mathrm{ad}_h\, x\rangle\,,$$

pour tous $F \in \mathcal{F}(\mathfrak{g})$ et $x \in \mathfrak{g}$. On a pour tout $\gamma \in \Phi$

$$\widetilde{\mathrm{ad}}_h[x_\gamma](x) = \langle \mathrm{ad}_h\, x \mid e_{-\gamma}\rangle = \gamma(h)x_\gamma(x) = |\gamma|\, x_\gamma(x)$$

et $\widetilde{\mathrm{ad}}_h[x_i] = \langle \mathrm{ad}_h\, x \mid h_i\rangle = 0$, pour $i \in \{1,\ldots,\ell\}$. Ces deux propriétés impliquent que le polynôme P, défini dans l'enoncé de la proposition 2.53, vérifie

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathrm{ad}}_h[P] &= \sum_{i=1}^{k} \tilde{\mathrm{ad}}_h[x_{\gamma_i}] x_{\gamma_1}\ldots\hat{x}_{\gamma_i}\ldots x_{\gamma_k}x_{p_1}\ldots x_{p_j}\\ &= (\sum_{i=1}^{k}|\gamma_i|)x_{\gamma_1}\ldots x_{\gamma_k}x_{p_1}\ldots x_{p_j}.\end{aligned} \tag{2.54}$$

Comme P est un polynôme Ad-invariant, on a $\widetilde{\mathrm{ad}}_h[P](x) = \langle \mathrm{ad}_h\, x \mid \nabla_x P\rangle = \langle h \mid [x, \nabla_x P]\rangle = 0$ (voir (2.26)). Donc d'après (2.54) la somme $\sum_{i=1}^{k}|\gamma_i| = 0$ est nulle pour chaque monôme apparaissant dans la décomposition de P.

(2) Si $p+q \geq m+2$, le résultat (2.53) est évidemment vrai, puisque le degré de P est $m+1$. Supposons $p+q \leq m+1$. Il découle du point (1) de la proposition que, pour tout $y \in \mathfrak{g}$ et pour tous éléments $z_1,\ldots,z_{m+1} \in \mathfrak{g}$ homogènes avec $\sum_{k=1}^{m+1}|z_i| \neq 0$, on a :

$$\left\langle \mathsf{d}_y^{m+1} P, (z_1,\ldots,z_{m+1})\right\rangle = 0. \tag{2.55}$$

Soient $i_1,\ldots,i_p \in \{1,\ldots,\ell\}$ et $\gamma_1,\ldots,\gamma_q \in \Phi$. La fonction

$$y \mapsto \left\langle \mathsf{d}_y^{p+q} P, (h_{i_1},\ldots,h_{i_p},e_{\gamma_1},\ldots,e_{\gamma_q})\right\rangle,$$

étant homogène de degré $m+1-p-q$ est, d'après la formule de Taylor, égale à

$$y \mapsto \frac{1}{(m+1-p-q)!}\left\langle \mathsf{d}_y^{m+1} P, (h_{i_1},\ldots,h_{i_p},e_{\gamma_1},\ldots,e_{\gamma_q},y^{m+1-p-q})\right\rangle.$$

Restreinte à $\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{g}_1$, cette dernière fonction est une combinaison linéaire de monômes de la forme

$$x_1^{a_1}\ldots,x_\ell^{a_\ell}x_{\alpha_1}^{b_1}\ldots x_{\alpha_\ell}^{b_\ell}$$

où $\sum_{k=1}^{\ell}(a_k+b_k) = m+1-p-q$. Le coefficient du monôme précédent dans P est

$$\frac{1}{(m+1-p-q)!}\left\langle \mathsf{d}_y^{m+1} P, (h_{i_1},\ldots,h_{i_p},h_1^{a_1},\ldots,h_\ell^{a_\ell},e_{\gamma_1},\ldots,e_{\gamma_q},e_{\alpha_1}^{b_1},\ldots,e_{\alpha_\ell}^{b_\ell})\right\rangle.$$

Ce coefficient est nul, d'après (2.55), si

$$\sum_{i=1}^{q} |\gamma_i| + \sum_{k=1}^{\ell} b_k \neq 0.$$

Comme $\sum_{k=1}^{\ell} b_k \in \{0, \ldots, m+1-p-q\}$, tous ces coefficients sont nuls si une des deux conditions de (2.52) est vérifiée.

$\square$

Théorème 2.54. *[17, théorème 7.3.8] Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple de rang ℓ et soit $\mathbf{G}$ un groupe de Lie connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$.*

(1) L'algèbre des fonctions polynômes, Ad*-invariantes sur $\mathfrak{g}$ est engendrée par ℓ polynômes homogènes $P_1, \ldots, P_\ell$.*

(2) Les degrés $d_1 \leq \cdots \leq d_\ell$ de, respectivement $P_1, \ldots, P_\ell$ sont indépendants du choix de ces polynômes. De plus

$$d_1 + \cdots + d_\ell = \frac{1}{2}(\ell + \dim \mathfrak{g}). \tag{2.56}$$

Définition 2.55. *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple. Les* exposants *de $\mathfrak{g}$ sont les entiers positifs $d_1 - 1, \ldots, d_\ell - 1$ lesquels sont notés $m_1, \ldots, m_\ell$.*

Remarque 2.56.
(1) *L'équation (2.56) s'écrit en fonction des exposants de $\mathfrak{g}$ sous la forme :*

$$m_1 + \cdots + m_\ell = \frac{1}{2}(\dim \mathfrak{g} - \ell). \tag{2.57}$$

(2) *L'entier $m_i + m_{\ell - i}$, $1 \leq i \leq \ell$, est constant et appelé* le nombre de Coxeter *de $\mathfrak{g}$.*
(3) *L'exposant m_ℓ est la longueur de la plus longue racine de $\mathfrak{g}$. La somme (2.44) s'écrit donc :*

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{k=-m_\ell}^{m_\ell} \mathfrak{g}_k. \tag{2.58}$$

Dans le tableau suivant nous précisons pour chaque algèbre de Lie simple son rang, ses exposants, son nombre de Coxeter et sa dimension.

Théorème 2.57. *Soient $P_1, \ldots, P_\ell$ des polynômes sur $\mathfrak{g}$,* Ad*-invariants, tels que définis dans théorème 2.54. Soient e et h deux éléments de $\mathfrak{g}$, tels que e est régulier et $[h, e] = 2e$.*

On note $V_{k,i}$, pour tout $1 \leq i \leq \ell$ et $0 \leq k \leq m_i$, l'élément de $\mathfrak{g}$ défini, pour tout $z \in \mathfrak{g}$, par :

$$\langle V_{k,i} \,|\, z \rangle = \left\langle \mathsf{d}_h^{k+1} P_i, (e^k, z) \right\rangle. \tag{2.59}$$

(1) La famille $\mathcal{F}_0 := (V_{k,i}, 1 \leq i \leq \ell$ et $0 \leq k \leq m_i)$ est linéairement indépendante.

(2) Le sous-espace vectoriel engendré par $\mathcal{F}_0$ est la sous-algèbre de Lie formée par la somme des sous-espaces propres de ad_h associés aux valeurs propres positives ou nulles.

Nous avons besoin de la proposition 2.58 dans la preuve du théorème 2.57.

$\mathfrak{g}$	rang	Exposants	Coxeter	$\dim \mathfrak{g}$
A_ℓ	$\ell \geq 1$	$1, 2, \ldots, \ell$	$\ell + 1$	$\ell(\ell+2)$
B_ℓ	$\ell \geq 2$	$1, 3, 5, \ldots, 2\ell - 1$	2ℓ	$2\ell^2 + \ell$
C_ℓ	$\ell \geq 3$	$1, 3, 5, \ldots, 2\ell - 1$	2ℓ	$2\ell^2 + \ell$
D_ℓ	$\ell \geq 4$ (ℓ pair)	$1, 3, \ldots, \ell - 1, \ell - 1, \ell + 1, \ldots, 2\ell - 3$	$2\ell - 2$	$\ell(2\ell - 1)$
D_ℓ	$\ell \geq 4$ (ℓ impair)	$1, 3, \ldots, \ell - 2, \ell - 1, \ell, \ldots 2\ell - 3$	$2\ell - 2$	$\ell(2\ell - 1)$
E_6	6	$1, 4, 5, 7, 8, 11$	12	78
E_7	7	$1, 5, 7, 9, 11, 13, 17$	18	133
E_8	8	$1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29$	30	248
F_4	4	$1, 5, 7, 11$	12	52
G_2	2	$1, 5$	6	14

TABLE 2.2 – Exposants, nombre de Coxeter et dimension des algèbres de Lie simples

Proposition 2.58. *Soient $e, h \in \mathfrak{g}$, tels que $[h, e] = 2e$. Soit P un polynôme* Ad-*invariant sur $\mathfrak{g}$ et homogène de degré $m+1$. Soit V_k, pour $k \geq 0$, l'élément de $\mathfrak{g}$, défini par :*

$$\langle V_k \,|\, z \rangle = \left\langle \mathsf{d}_h^{k+1} P, (e^k, z) \right\rangle, \qquad \forall z \in \mathfrak{g}. \tag{2.60}$$

On a, pour tout $n \in \mathbf{N}$ et pour tout $0 \leq k \leq m$:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} [h, V_k] & = & 2kV_k, \\ (\mathrm{ad}_e)^n V_k & = & (-2)^n V_{n+k}. \end{array} \right. \tag{2.61}$$

En particulier, $(\mathrm{ad}_e)^n V_k = 0$, si $n > m - k$.

Preuve:
Commençons par montrer que le polynôme P vérifie la propriété suivante :

$$\nabla_{\mathrm{Ad}_g x} P = \mathrm{Ad}_g \left(\nabla_x P \right), \qquad \forall (x, g) \in \mathfrak{g} \times \mathbf{G}. \tag{2.62}$$

Soient $x, y \in \mathfrak{g}$ et $g \in \mathbf{G}$. On a :

$$\begin{array}{rcl} \langle \mathrm{Ad}_g \nabla_x P \,|\, y \rangle & = & \langle \nabla_x P \,|\, \mathrm{Ad}_{g^{-1}} y \rangle \\ & = & \langle \mathsf{d}_x P, \mathrm{Ad}_{g^{-1}} y \rangle \\ & = & \left\langle \mathsf{d}_{\mathrm{Ad}_g x} (P \circ \mathrm{Ad}_{g^{-1}}), y \right\rangle \\ & = & \left\langle \mathsf{d}_{\mathrm{Ad}_g x} P, y \right\rangle \\ & = & \left\langle \nabla_{\mathrm{Ad}_g x} P \,|\, y \right\rangle, \end{array}$$

où on a utilisé le fait que P est Ad-invariant et $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$ est une forme non-dégénérée et Ad-invariante.

Soient $x, y \in \mathfrak{g}$ et $t \in \mathbf{C}$. En dérivant la formule de Taylor (2.49) on trouve :

$$\left(\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}u} \right)_{|u=0} P(x + ty + uz) = \sum_{k=0}^{m} \frac{t^k}{k!} \left\langle \mathsf{d}_x^{k+1} P, (y^k, z) \right\rangle, \qquad \forall z \in \mathfrak{g}.$$

Exprimé à l'aide du gradient ∇P, ceci s'écrit :

$$\langle \nabla_{x+ty} P \,|\, z \rangle = \sum_{k=0}^{m} \frac{t^k}{k!} \left\langle \mathsf{d}_x^{k+1} P, (y^k, z) \right\rangle, \qquad \forall z \in \mathfrak{g}. \tag{2.63}$$

On peut alors définir des applications $F_k : \mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$, $(0\le k\le m)$ par la relation

$$\nabla_{x+ty}P=\sum_{k=0}^{m}\frac{t^k}{k!(m-k)!}F_k(x,y),\qquad \forall(x,y)\in\mathfrak{g}^2 \text{ et } \forall t\in\mathbf{C}. \tag{2.64}$$

Nous remarqons à l'aide des équations (2.60), (2.63) et (2.64) que

$$V_k=\frac{1}{(m-k)!}F_k(h,e). \tag{2.65}$$

Donc, lorsque $k=m$, on a

$$V_m=m!\nabla_e P. \tag{2.66}$$

Puisque la fonction P vérifie la propriété (2.62) alors chaque F_k vérifie, pour tous $x,y\in\mathfrak{g}$ et $g\in\mathbf{G}$, la propriété suivante

$$F_k(\mathrm{Ad}_g\,x,\mathrm{Ad}_g\,y)=\mathrm{Ad}_g(F_k(x,y)). \tag{2.67}$$

De plus, chaque F_k est homogène de degré k par rapport à sa deuxième variable et de degré $m-k$ par rapport à sa première variable. Par suite, en comparant (2.64) avec (2.63), on trouve

$$\langle F_k(x,y)\,|\,z\rangle=(m-k)!\left\langle \mathsf{d}_x^{k+1}P,(y^k,z)\right\rangle,\qquad \forall z\in\mathfrak{g}. \tag{2.68}$$

Comme F_k vérifie la propriété (2.67) alors

$$\left\langle \mathrm{Ad}_{\exp(tw)}\,F_k(x,y)\,|\,z\right\rangle=\left\langle F_k(\mathrm{Ad}_{\exp(tw)}\,x,\mathrm{Ad}_{\exp(tw)}\,y)\,|\,z\right\rangle,\qquad \forall w,z\in\mathfrak{g},$$

ce qui équivaut à

$$\left\langle \mathsf{d}_x^{k+1}P,(y^k,\mathrm{Ad}_{\exp(-tw)}\,z)\right\rangle=\left\langle \mathsf{d}^{k+1}_{\mathrm{Ad}_{\exp(tw)}\,x}P,((\mathrm{Ad}_{\exp(tw)}\,y)^k,z)\right\rangle. \tag{2.69}$$

En dérivant (2.69) par rapport à t, au point $t=0$, on obtient

$$\left\langle \mathsf{d}_x^{k+1}P,(y^k,\mathrm{ad}_{-w}\,z)\right\rangle=\left\langle \mathsf{d}_x^{k+2}P(x),(\mathrm{ad}_w\,x,y^k,z)\right\rangle+k\left\langle \mathsf{d}_x^{k+1}P,(\mathrm{ad}_w\,y,y^{k-1},z)\right\rangle,$$

pour tous $w,z\in\mathfrak{g}$. En particulier, pour tout $z\in\mathfrak{g}$, on a :

$$\begin{cases}\left\langle \mathsf{d}_x^{k+1}P,(y^k,\mathrm{ad}_{-x}\,z)\right\rangle=k\left\langle \mathsf{d}_x^{k+1}P,(\mathrm{ad}_x\,y,y^{k-1},z)\right\rangle,\\ \left\langle \mathsf{d}_x^{k+1}P,(y^k,\mathrm{ad}_{-y}\,z)\right\rangle=\left\langle \mathsf{d}_x^{k+2}P(x),(\mathrm{ad}_y\,x,y^k,z)\right\rangle.\end{cases} \tag{2.70}$$

En remplaçant x par h et y par e le système (2.70) devient

$$\begin{cases}\left\langle \mathsf{d}_h^{k+1}P,(e^k,\mathrm{ad}_{-h}\,z)\right\rangle=2k\left\langle \mathsf{d}_e^{k+1}P,(e,e^{k-1},z)\right\rangle,\\ \left\langle \mathsf{d}_h^{k+1}P,(e^k,\mathrm{ad}_{-e}\,z)\right\rangle=-2\left\langle \mathsf{d}_h^{k+2}P,(e,e^k,z)\right\rangle.\end{cases}$$

On en déduit, pour tout $z\in\mathfrak{g}$, les relations :

$$\begin{cases}\langle [h,V_k]\,|\,z\rangle=2k\,\langle V_k\,|\,z\rangle,\\ \langle [e,V_k]\,|\,z\rangle=-2\,\langle V_{k+1}\,|\,z\rangle.\end{cases} \tag{2.71}$$

On a donc la première formule de (2.61), qui est la première formule du système (2.71). La deuxième formule de (2.61) s'obtient par itération de la deuxième formule du système (2.71). $\square$

Montrons alors le théorème 2.57.
Preuve:

Montrons le premier point du théorème 2.57. Soit ($\alpha_{ki},\ \ 0 \leq k \leq m_i$ et $1 \leq i \leq \ell$) une famille de nombres complexes, telle que $\sum_{k,i} \alpha_{ki} V_{k,i} = 0$. Notons m le plus grand des m_i, alors, d'après (2.61)

$$\begin{aligned} 0 &= (\mathrm{ad}_e)^m \sum_{k,i} \alpha_{ki} V_{k,i} \\ &= (-2)^m \sum_{k,i} \alpha_{ki} V_{m+k,i} \\ &= (-2)^m \sum_{i \in J} \alpha_{0i} V_{m,i}, \end{aligned}$$

car $V_{m_i+k,i} = 0$ pour $k > 0$, donc $V_{m+k,i} = 0$ pour $k > 0$ et où $J := \{i \mid 1 \leq i \leq \ell \text{ et } m_i = m\}$. Ce qui implique, à l'aide de l'équation (2.66) que

$$\sum_{i \in J} \alpha_{0i} \mathsf{d}_e P_i = 0.$$

Comme e est un élément régulier, d'après les théorèmes de Kostant [31, théorème 9] et [32, théorème 5.2], la famille $(\mathsf{d}_e P_1, \ldots, \mathsf{d}_e P_\ell)$ est linéairement indépendante. Ce qui implique que $\alpha_{0i} = 0$, pour tout i dans J. A nouveau

$$\begin{aligned} 0 &= (\mathrm{ad}_e)^{m-1} \sum_{k,i} \alpha_{ki} V_{k,i} \\ &= (-2)^{m-1} (\sum_{i \in J} \alpha_{1i} V_{m,i} + \sum_{k=0}^{1} \sum_{i \notin J} \alpha_{ki} V_{m-1+k,i}). \end{aligned} \tag{2.72}$$

D'après la première formule du système (2.61), on a $[h, V_{k,i}] = 2k V_{k,i}, \forall k \geq 0$. Ce qui implique que la première somme de l'équation (2.72) appartient à l'espace propre de ad_h correspondant à la valeur propre $2m$ tandis que la deuxième somme est une combinaison linéaire de vecteurs propres de ad_h, associés à des valeurs propres inférieures à $2m$. Donc $\sum_{i \in J} \alpha_{1i} V_{m,i} = 0$. Ce qui implique en utilisant l'équation (2.66) et le fait que $(\mathsf{d}_e P_1, \ldots, \mathsf{d}_e P_\ell)$ est une famille indépendante que $\alpha_{1i} = 0$, pour tout $i \in J$. Par itération de ce procédé, il vient que

$$\alpha_{ki} = 0, \qquad \forall i \in J \text{ et } 0 \leq k \leq m.$$

Par conséquent, dans la somme $\sum_{k,i} \alpha_{k,i} V_{k,i}$ on peut affirmer que les termes sont nuls sauf peut être ceux correspondant aux indices i tels que $i \notin J$. Soit m' le plus grand des m_i, tel que $m_i < m$. On peut recommencer le raisonnement en substituant m' à m. On a ainsi de proche en proche la nullité de tous les coefficients.

Montrons maintenant le second résultat du théorème 2.57. Soit $\mathfrak{b}$ la somme des sous-espaces propres de ad_h associés aux valeurs propres positives ou nulles. Il est clair que $\mathfrak{b}$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$. Comme e est régulier et $[h, e] = 2e$, d'après le théorème de Jacobson-Morozov [48, théorème 32.1.5] les éléments e et h appartiennent à un $\mathfrak{sl}(2)$ triplet principal. Ce qui implique que les valeurs propres de ad_h sont des entiers pairs et que $\mathfrak{b}$ est une sous-algèbre de Borel de $\mathfrak{g}$ (voir [48, proposition 32.5.3]) .

Soit V le sous espace vectoriel de $\mathfrak{g}$ engendré par les $V_{k,i}$, pour tous $1 \leq i \leq \ell$ et $0 \leq k \leq m_i$. D'après la première formule du système (2.61) on a $[h, V_{k,i}] = 2kV_{k,i}$. Ce qui implique que $V \subset \mathfrak{b}$. Or, le calcul de $\dim V$ donne

$$\dim V = \sum_{i=1}^{\ell}(m_i + 1) = \frac{1}{2}(\dim \mathfrak{g} + \ell) = \dim \mathfrak{b},$$

où on a utilisé la formule (2.57) pour établir la première égalité et on a la dernière égalité car $\mathfrak{b}$ est la somme d'une sous-algèbre de Cartan et de $\mathfrak{g}_{>0}$. Les deux propriétés $V \subset \mathfrak{b}$ et $\dim V = \dim \mathfrak{b}$ donnent alors le résultat. $\square$

Chapitre 3

$\mathcal{R}$-matrices, structures de Poisson et fonctions en involution sur le carré d'une algèbre de Lie

Soit $\mathbf{K}$ le corps $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ et soit $(\mathfrak{g}, [\cdot\,,\cdot])$ une algèbre de Lie sur $\mathbf{K}$ de dimension finie ou infinie. Munissons l'espace vectoriel $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ du crochet de Lie produit

$$[(x,y),(z,s)] := ([x,z],[y,s]), \qquad \forall x,y,z,s \in \mathfrak{g}. \tag{3.1}$$

Alors $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ devient une algèbre de Lie, dite le carré de $\mathfrak{g}$ et noté $\mathfrak{g}^2$.

Dans ce chapitre nous étudions certaines structures sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}^2$. En reprenant le travail de Semenov [47], nous commençons par construire des $\mathcal{R}$-matrices sur $\mathfrak{g}^2$. Nous munissons le dual de $\mathfrak{g}^2$ lorsque $\mathfrak{g}$ est de dimension finie de $\mathcal{R}$-crochets de Poisson linéaires, quadratiques et cubiques. En identifiant ensuite $\mathfrak{g}^2$ avec son dual nous expliquons comment construire un grand nombre de fonctions sur $\mathfrak{g}^2$ qui commutent pour la structure de Poisson linéaire, associée à une $\mathcal{R}$-matrice. Nous décrivons les fonctions de Casimir et écrivons les expressions de leurs champs hamiltoniens.

3.1 Quelques constructions de sous-algèbres de Lie supplémentaires de $\mathfrak{g}^2$

On a vu dans le chapitre 2 que dans la théorie des systèmes intégrables la construction de constantes de mouvement peut se faire à travers une décomposition d'une algèbre de Lie en somme directe de deux sous-algèbres de Lie. Dans ce paragraphe nous nous intéressons à décomposer le carré $\mathfrak{g}^2$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ en somme directe de deux (resp. trois) sous-algèbres de Lie, lorsque l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est une somme directe de deux (resp. trois) sous-algèbres de Lie.

Construction 1

Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, $\mathfrak{g}_+$ et $\mathfrak{g}_-$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathfrak{g}$, tels que

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_+ \oplus \mathfrak{g}_- \tag{3.2}$$

et $\mathfrak{g}_+$, et $\mathfrak{g}_-$ sont deux sous-algèbres de Lie de $\mathfrak{g}$. En écrivant chaque élément x de $\mathfrak{g}$ comme somme de $x_+ \in \mathfrak{g}_+$ et de $x_- \in \mathfrak{g}_-$, tout couple (x, y) de $\mathfrak{g}^2$ s'écrit sous la forme

$$(x, y) = (x_+ + y_-, x_+ + y_-) + (x_- - y_-, y_+ - x_+). \tag{3.3}$$

Ce qui amène à définir

$$\mathfrak{g}^2_+ = \{(x, x) \mid x \in \mathfrak{g}\} \quad \text{et} \quad \mathfrak{g}^2_- = \{(x, y) \mid x \in \mathfrak{g}_- \text{ et } y \in \mathfrak{g}_+\}. \tag{3.4}$$

Il est clair que

$$\mathfrak{g}^2 = \mathfrak{g}^2_+ \oplus \mathfrak{g}^2_- \tag{3.5}$$

et que $\mathfrak{g}^2_+$ et $\mathfrak{g}^2_-$ sont deux sous-algèbres de Lie de $\mathfrak{g}^2$.

Remarque 3.1. *Dans le cas où $\mathfrak{g}$ est l'algèbre des matrices infinies $\mathfrak{gl}((\infty))$ la construction* 1 *n'est autre que celle donnée par M. Adler et P. van Moerbeke [6].*

Construction 2

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, qui admet une décomposition

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_p \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_n, \tag{3.6}$$

telle que

(1) $\mathfrak{g}_p, \mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_n$ sont des sous-algèbres de Lie de $\mathfrak{g}$;

(2) $\mathfrak{g}_0$ est commutative ;

(3) $\mathfrak{g}_0$ normalise $\mathfrak{g}_p$ et $\mathfrak{g}_n$ (c'est-à-dire $[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_p] \subset \mathfrak{g}_p$ et $[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_n] \subset \mathfrak{g}_n$).

Nous montrons que le carré $\mathfrak{g}^2$ admet aussi une telle décomposition. Soit $x \in \mathfrak{g}$, notons les projections de x sur $\mathfrak{g}_p, \mathfrak{g}_0$ et $\mathfrak{g}_n$ par, respectivement x_p, x_0 et x_n. On peut décomposer tout élément (x, y) de $\mathfrak{g}^2$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned}(x, y) \;=\; & (x_p + y_n, x_p + y_n) + (\frac{1}{2}(x_0 + y_0), \frac{1}{2}(x_0 + y_0)) \\ & + (x_n - y_n + \frac{1}{2}(x_0 - y_0), y_p - x_p - \frac{1}{2}(x_0 - y_0)).\end{aligned} \tag{3.7}$$

Ainsi, les sous-espaces de $\mathfrak{g}^2$ définis par :

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}^2_\Delta &:= \{(x, x) \mid x_0 = 0 \text{ et } x \in \mathfrak{g}\} \;; \\ \mathfrak{g}^2_d &:= \{(w, w) \mid w \in \mathfrak{g}_0\} \;; \\ \mathfrak{g}^2_s &:= \{(u + w, v - w) \mid u \in \mathfrak{g}_n,\ v \in \mathfrak{g}_p \text{ et } w \in \mathfrak{g}_0\},\end{aligned}$$

satisfont

$$\mathfrak{g}^2 = \mathfrak{g}^2_\Delta \oplus \mathfrak{g}^2_d \oplus \mathfrak{g}^2_s. \tag{3.8}$$

De plus $\mathfrak{g}^2_d, \mathfrak{g}^2_\Delta$ et $\mathfrak{g}^2_s$ sont des sous-algèbres de Lie de $\mathfrak{g}^2$, telles que $\mathfrak{g}^2_d$ est commutative et normalise $\mathfrak{g}^2_\Delta$ et $\mathfrak{g}^2_s$. En conclusion $\mathfrak{g}^2$ se décompose comme (3.6) et satisfait (1), (2) et (3) ci-dessus. (Il s'agit dans (3.8) comme dans (3.5) d'une somme d'espaces vectoriels).

3.2 Construction de $\mathcal{R}$-matrices de $\mathfrak{g}^2$

3.2.1 Le cas d'une décomposition en somme directe

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie et soient $\mathfrak{g}_+$ et $\mathfrak{g}_-$ deux sous-algèbres de Lie de $\mathfrak{g}$. On sait que, si $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_+ \oplus \mathfrak{g}_-$, alors

(1) D'après l'exemple 2.24, l'endomorphisme $R := P_+ - P_-$, la différence des projections sur respectivement $\mathfrak{g}_+$ et $\mathfrak{g}_-$, est une solution de l'équation de Yang Baxter modifiée (2.20) de constante $c = 1$;

(2) Par la construction 1 du paragraphe 3.1, $\mathfrak{g}^2$ admet la décomposition $\mathfrak{g}^2 = \mathfrak{g}^2_+ \oplus \mathfrak{g}^2_-$ (voir (3.4) et (3.5)).

D'où $\mathcal{R} := \mathcal{P}_+ - \mathcal{P}_-$, la différence des projections sur, respectivement $\mathfrak{g}^2_+$ et $\mathfrak{g}^2_-$ est une solution de (mCYBE) de constante $c = 1$. Dans la proposition ci-dessous nous exprimons l'endomorphisme $\mathcal{R}$ de $\mathfrak{g}^2$ en fonction de l'endomorphisme R de $\mathfrak{g}$.

Proposition 3.2. *Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, $\mathfrak{g}_+$ et $\mathfrak{g}_-$ deux sous-algèbres de Lie de $\mathfrak{g}$ telles que $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_+ \oplus \mathfrak{g}_-$ et soit $\mathfrak{g}^2 = \mathfrak{g}^2_+ \oplus \mathfrak{g}^2_-$ le carré de $\mathfrak{g}$, où*

$$\mathfrak{g}^2_+ := \{(x,x) \mid x \in \mathfrak{g}\} \quad \textit{et} \quad \mathfrak{g}^2_- := \{(x,y) \mid x \in \mathfrak{g}_- \textit{ et } y \in \mathfrak{g}_+\}.$$

Soient $P_\pm$ (resp. $\mathcal{P}_\pm$) les projections de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{g}_\pm$ (resp. de $\mathfrak{g}^2$ sur $\mathfrak{g}^2_\pm$). Les endomorphismes $R := P_+ - P_-$ et $\mathcal{R} := \mathcal{P}_+ - \mathcal{P}_-$ satisfont la relation suivante :

$$\mathcal{R}(x,y) = (R(x-y) + y, R(x-y) + x), \qquad \forall x, y \in \mathfrak{g}. \tag{3.9}$$

Preuve:
Soit $x = x_+ + x_- \in \mathfrak{g}$, où $x_\pm = P_\pm(x)$. D'après (3.3), pour tout $(x,y) \in \mathfrak{g}^2$, on a :

$$\begin{cases} \mathcal{P}_+(x,y) &= (x,y)_+ = (x_+ + y_-, x_+ + y_-), \\ \mathcal{P}_-(x,y) &= (x,y)_- = (x_- - y_-, y_+ - x_+). \end{cases}$$

Cela implique que

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(x,y) &= (\mathcal{P}_+ - \mathcal{P}_-)(x,y) \\ &= (x_+ - x_- + 2y_-, y_- - y_+ + 2x_+) \\ &= (R(x-y) + y, R(x-y) + x). \end{aligned}$$

□

3.2.2 Le cas d'une solution de l'équation de Yang-Baxter modifiée

La formule (3.9) de la proposition 3.2 est une façon d'exprimer une $\mathcal{R}$-matrice, qui vient d'une décomposition de $\mathfrak{g}^2$ en fonction d'une R-matrice, qui vient aussi d'une décomposition de $\mathfrak{g}$. On peut montrer que si R est solution de (mCYBE) de $\mathfrak{g}$ de constante $c = 1$ alors (3.9) définit une solution de (mCYBE) de constante $c = 1$ (voir Semenov [47]). Nous prouvons ici ce résultat pour toute solution de (mCYBE) de $\mathfrak{g}$.

Proposition 3.3. *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie et soit R un endomorphisme de $\mathfrak{g}$. Si R est une solution de (mCYBE) de constante c, alors l'endomorphisme $\mathcal{R}$ de $\mathfrak{g}^2$, défini pour tout $(x,y) \in \mathfrak{g}^2$ par :*

$$\mathcal{R}(x,y) := (R(x-y) + cy, R(x-y) + cx), \tag{3.10}$$

est une solution de (mCYBE) de constante c.

La proposition suit immédiatement du lemme suivant.

Lemme 3.4. *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie et soit c une constante. Soient R un endomorphisme de $\mathfrak{g}$ et $\mathcal{R}$ l'endomorphisme de $\mathfrak{g}^2$, défini pour tout $(x,y) \in \mathfrak{g}^2$, par :*

$$\mathcal{R}(x,y) := (R(x-y) + cy, R(x-y) + cx).$$

Les applications B_R et $B_{\mathcal{R}}$, définies comme dans la formule (2.18), sont reliées par la formule suivante :

$$\begin{aligned} B_{\mathcal{R}}((x,y),(z,s)) &= (B_R(x-y, z-s) + c^2([x-y, z-s] - [x,z]), \\ &\quad\ B_R(x-y, z-s) + c^2([x-y, z-s] - [y,s])). \end{aligned} \tag{3.11}$$

Preuve:
A partir de la formule (2.18), l'opérateur $B_{\mathcal{R}}$ s'écrit :

$$\begin{aligned} B_{\mathcal{R}}((x,y),(z,s)) &= [\mathcal{R}(x,y), \mathcal{R}(z,s)] - \mathcal{R}([\mathcal{R}(x,y),(z,s)] + [(x,y), \mathcal{R}(z,s)]) \\ &= [(R(x-y) + cy, R(x-y) + cx), (R(z-s) + cs, R(z-s) + cz)] \\ &\quad -\mathcal{R}([(R(x-y) + cy, R(x-y) + cx), (z,s)]) \\ &\quad -\mathcal{R}([(x,y), (R(z-s) + cs, R(z-s) + cz)]), \end{aligned} \tag{3.12}$$

où nous avons remplacé quatre fois $\mathcal{R}$ par sa valeur (3.10). Les deux composantes de la formule (3.12) se calculent de la même façon. Montrons que la première composante de (3.12) est égale à celle de (3.11). En remplaçant encore deux fois $\mathcal{R}$ par sa valeur dans (3.10) et en notant $[B_{\mathcal{R}}]_1$ la première composante de $B_{\mathcal{R}}$. nous vérifions que :

$$\begin{aligned} [B_{\mathcal{R}}((x,y),(z,s))]_1 &= [R(x-y) + cy, R(z-s) + cs] \\ &\quad -R[R(x-y) + cy, z] + R[R(x-y) + cx, s] - c[R(x-y) + cx, s] \\ &\quad -R[x, R(z-s) + cs] + R[y, R(z-s) + cz] - c[y, R(z-s) + cz] \\ &= [R(x-y), R(z-s)] + c^2[y,s] \\ &\quad -R[R(x-y), z-s] - c^2[x,s] \\ &\quad -R[x-y, R(z-s)] - c^2[y,z] \\ &= [R(x-y), R(z-s)] - R([R(x-y), z-s] + [x-y, R(z-s)]) \\ &\quad +c^2([y,s] - [y,z] - [x,s]) \\ &= B_R(x-y, z-s) + c^2([x-y, z-s] - [x,z]). \end{aligned}$$

$\square$

Remarque 3.5. *Comme nous l'avons dit ci-dessus, le cas $\mathcal{R}$ est solution de l'équation de (mCYBE) de constante $c = 1$ est aussi traité par Semenov [47]. Il montre que la donnée d'une R-matrice sur $\mathfrak{g}$ (qui n'est pas nécessairement la différence de projections sur deux sous-algèbres de Lie de $\mathfrak{g}$) permet de construire sur $\mathfrak{g}^2$ une $\mathcal{R}$-matrice qui est par contre la différence de projections sur deux sous-algèbres de Lie de $\mathfrak{g}^2$ supplémentaires, et telle que la relation (3.10) est satisfaite. Explicitement, l'endomorphisme $\mathcal{R}$ est donné par :*

$$\mathcal{R}(x, y) = (R(x - y) + y, R(x - y) + x).$$

Nous détaillons sa construction. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie et soit R une R-matrice sur $\mathfrak{g}$. Notons $R_\pm := \frac{1}{2}(I \pm R)$ et $x_\pm := R_\pm(x), \forall x \in \mathfrak{g}$. On a, pour tout $x \in \mathfrak{g}$,

$$x = x_+ + x_-, \qquad \text{et} \qquad R(x) = x_+ - x_-. \tag{3.13}$$

On a donc $\mathfrak{g} = R_+(\mathfrak{g}) + R_-(\mathfrak{g})$ mais la somme n'est pas forcément directe. Chaque élément (x, y) de $\mathfrak{g}^2$ s'écrit

$$(x, y) = (x_+ + y_-, x_+ + y_-) + (x_- - y_-, y_+ - x_+). \tag{3.14}$$

Ce qui implique la décomposition de $\mathfrak{g}^2$ suivante :

$$\mathfrak{g}^2 = \mathfrak{g}^2_R \oplus \mathfrak{g}^2_\Delta,$$

où $\mathfrak{g}^2_R$ et $\mathfrak{g}^2_\Delta$ sont les deux sous-espaces de $\mathfrak{g}^2$ suivants :

$$\mathfrak{g}^2_R := \{(R_-(x), R_+(y)) \mid x, y \in \mathfrak{g}\}, \qquad \mathfrak{g}^2_\Delta := \{(x, x) \mid x \in \mathfrak{g}\}.$$

On vérifie que $\mathfrak{g}^2_R$ et $\mathfrak{g}^2_\Delta$ sont deux sous-algèbres de Lie de $\mathfrak{g}^2$. Notons $\mathcal{P}_R$ et $\mathcal{P}_\Delta$ les projections de $\mathfrak{g}^2$ sur $\mathfrak{g}^2_R$ et $\mathfrak{g}^2_\Delta$. D'après l'exemple 2.24, l'endomorphisme $\mathcal{R} := \mathcal{P}_\Delta - \mathcal{P}_R$ est une solution de (mCYBE) de constante $c = 1$ et pour tout $(x, y) \in \mathfrak{g}^2$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}(x, y) &= (x_+ + y_-, x_+ + y_-) - (x_- - y_-, y_+ - x_+) \\
&= (R(x) + y_- + y - y_+, -R(y) + x_+ + x - x_-) \\
&= (R(x - y) + y, R(x - y) + x).
\end{aligned}$$

Pour donner un exemple nous utiliserons les notations de la construction 2 du paragraphe 3.1. Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_p \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_n$ comme dans (3.6). L'endomorphisme R de $\mathfrak{g}$ défini par $R(x) := x_p - x_n$ n'est pas la différence des projections de $\mathfrak{g}$ sur deux sous-algèbres supplémentaires, mais comme nous l'avons montré dans l'exemple 2.25 il est solution de (mCYBE) de constante $c = 1$. D'après la construction ci-dessus, la solution correspondante $\mathcal{R}$ de (mCYBE) de $\mathfrak{g}^2$ est la différence de projections sur deux sous-algèbre de Lie supplémentaires de $\mathfrak{g}^2$.

3.2.3 Le cas général

Dans ce paragraphe nous donnons une condition nécessaire et suffisante sur R pour que l'endomorphisme $\mathcal{R}$ définie en (3.10) soit une $\mathcal{R}$-matrice de $\mathfrak{g}^2$.

Proposition 3.6. *Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ son centre et c une constante. Soient R un endomorphisme de $\mathfrak{g}$ et $\mathcal{R}$ l'endomophisme de $\mathfrak{g}^2$, défini pour tout $(x, y) \in \mathfrak{g}^2$ par :*

$$\mathcal{R}(x, y) := (R(x-y) + cy, R(x-y) + cx)\,. \tag{3.15}$$

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) Pour tous $x, y \in \mathfrak{g}$, on a :

$$B_R(x, y) + c^2[x, y] \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})\ ;$$

(ii) L'endomorphisme $\mathcal{R}$ est une $\mathcal{R}$-matrice de $\mathfrak{g}^2$.

Preuve:
D'après la proposition 2.23, montrer que $\mathcal{R}$ est une $\mathcal{R}$-matrice de $\mathfrak{g}^2$ est équivalent à prouver que, pour tous $(x, y), (x', y')$ et $(x'', y'') \in \mathfrak{g}^2$, on a :

$$[B_{\mathcal{R}}((x, y), (x', y')), (x'', y'')] + \circlearrowleft = (0, 0), \tag{3.16}$$

où $\circlearrowleft =$ cycl$((x, y), (x', y'), (x'', y''))$. En utilisant la formule (3.11) du lemme 3.4 la partie de gauche de l'équation (3.16) s'écrit :

$$\big([B_R(x-y, x'-y') + c^2[x-y, x'-y'], x''], [B_R(x-y, x'-y') + c^2[x-y, x'-y'], y'']\big) + \circlearrowleft, \tag{3.17}$$

où on a utilisé le fait que

$$[[x, x'], x''] + \mathrm{cycl}(x, x', x'') = 0,$$

de même pour (y, y', y''). Or, si on a *(i)*, alors (3.17) est nulle (même sans permutation circulaire). Ce qui implique la condition *(ii)*.
Montrons maintenant le sens *(ii)* $\Longrightarrow$ *(i)*. Supposons que l'équation (3.16) soit satisfaite, alors on a en particulier la première composante de la partie de gauche de l'équation (3.17) est nulle, c'est à dire :

$$\begin{aligned} &[B_R(x-y, x'-y') + c^2[x-y, x'-y'], x''] \\ &\quad + \ [B_R(x''-y'', x-y) + c^2[x''-y'', x-y], x'] \\ &\quad + \ [B_R(x'-y', x''-y'') + c^2[x'-y', x''-y''], x] = 0. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Puisque l'équation (3.18) est vérifiée pour tous $x, y, x', y', x'', y'' \in \mathfrak{g}$, en particulier pour $x' = x'' = 0$, on obtient

$$[B_R(y', y'') + c^2[y', y''], x] = 0, \qquad \forall y', y'', x \in \mathfrak{g},$$

d'où la condition *(i)*. □

Dans le cas particulier où $\mathfrak{g}$ est une l'algèbre de Lie semi-simple complexe, le centre de $\mathfrak{g}$ est trivial et donc la proposition 3.6 donne le corollaire suivant :

Corollaire 3.7. *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple complexe et soit $c \in \mathbf{C}$. Soient R un endomorphisme de $\mathfrak{g}$ et $\mathcal{R}$ l'endomorphisme de $\mathfrak{g}^2$, défini pour tout $(x, y) \in \mathfrak{g}^2$ par :*

$$\mathcal{R}(x, y) := (R(x-y) + cy, R(x-y) + cx). \tag{3.19}$$

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) L'endomorphisme R est solution de (mCYBE) de constante c ;

(ii) L'endomorphisme $\mathcal{R}$ est une $\mathcal{R}$-matrice de $\mathfrak{g}^2$.

3.3 Structures de Poisson linéaires, fonctions de Casimir et fonctions en involution

3.3.1 Structures de Poisson linéaires sur $\mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*$

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension finie et soit $\mathfrak{g}^*$ son dual. D'après le paragraphe 2.1.4 le dual $(\mathfrak{g}^2)^*$ de $\mathfrak{g}^2$ est muni de la structure de Poisson linéaire définie, pour tout $F, G \in \mathcal{F}((\mathfrak{g}^2)^*)$ et pour tout $\varphi \in (\mathfrak{g}^2)^*$, par :

$$\{F, G\}(\varphi) := \langle \varphi, [\mathsf{d}_\varphi F, \mathsf{d}_\varphi G] \rangle \,. \tag{3.20}$$

Nous explicitons d'abord les isomorphismes naturels entre $(\mathfrak{g}^2)^*$ et $\mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*$ et entre $\mathfrak{g}^2$ et $(\mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*)^*$. Ce qui nous permettra ensuite de munir $\mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*$ de structures de Poisson. Soit Φ l'application

$$\begin{array}{rccc} \Phi & : & \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^* & \to & (\mathfrak{g}^2)^* \\ & & (\xi, \eta) & \mapsto & \Phi(\xi, \eta), \end{array}$$

tel que, pour tous $x, y \in \mathfrak{g}$, on a : $\langle \Phi(\xi, \eta), (x, y) \rangle := \langle \xi, x \rangle + \langle \eta, y \rangle$ et soit Ψ l'application

$$\begin{array}{rccc} \Psi & : & \mathfrak{g}^2 & \to & (\mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*)^* \\ & & (x, y) & \mapsto & \Psi(x, y), \end{array}$$

tel que, pour tous $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$, $\langle \Psi(x, y), (\xi, \eta) \rangle := \langle \xi, x \rangle + \langle \eta, y \rangle$. Il est clair que Φ et Ψ sont des isomorphismes. Ce qui permet d'identifier, $(\mathfrak{g}^2)^*$ avec $\mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*$ et $\mathfrak{g}^2$ avec $(\mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*)^*$. Dans la suite, pour tous $\xi, \eta \in \mathfrak{g}^*$ et pour tous $x, y \in \mathfrak{g}$, on confond $\Phi(\xi, \eta)$ avec (ξ, η) et $\Psi(x, y)$ avec (x, y) et on note

$$\langle (\xi, \eta), (x, y) \rangle := \langle \xi, x \rangle + \langle \eta, y \rangle \,. \tag{3.21}$$

A l'aide des identifications ci-dessus et de la structure de Poisson (3.20), l'espace vectoriel $\mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*$ est muni de la structure de Poisson définie, pour tous $F, G \in \mathcal{F}(\mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*)$ et pour tout $(\xi, \eta) \in \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*$, par :

$$\{F, G\}(\xi, \eta) := \left\langle (\xi, \eta), [\mathsf{d}_{(\xi,\eta)} F, \mathsf{d}_{(\xi,\eta)} G] \right\rangle .$$

Par ailleurs nous avons construit dans la section 3.2 des $\mathcal{R}$-matrices de $\mathfrak{g}^2$. Cela implique, lorsqu'on considère une telle $\mathcal{R}$-matrice, que $\mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*$ est munie du $\mathcal{R}$-crochet de Poisson, défini, pour tous $F, G \in \mathcal{F}(\mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*)$ et pour tout $(\xi, \eta) \in \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*$, par :

$$\begin{aligned} \{F, G\}_{\mathcal{R}}(\xi, \eta) &:= \left\langle (\xi, \eta), [\mathsf{d}_{(\xi,\eta)} F, \mathsf{d}_{(\xi,\eta)} G]_{\mathcal{R}} \right\rangle & (3.22) \\ &= \frac{1}{2} \left\langle (\xi, \eta), [\mathcal{R}\mathsf{d}_{(\xi,\eta)} F, \mathsf{d}_{(\xi,\eta)} G] + [\mathsf{d}_{(\xi,\eta)} F, \mathcal{R}\mathsf{d}_{(\xi,\eta)} G] \right\rangle . & (3.23) \end{aligned}$$

3.3.2 Fonctions de Casimir et fonctions en involution sur $\mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*$

Soit $\mathbf{G}$ un groupe de Lie connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Alors $\mathbf{G} \times \mathbf{G}$ est un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}^2$. Soit Ad^* (resp. ad^*) l'action coadjointe de $\mathbf{G}$ (resp. $\mathfrak{g}$)

sur $\mathfrak{g}^*$. En identifiant $(\mathfrak{g}^2)^*$ à $\mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*$, comme ci-dessus, les actions coadjointes de $\mathbf{G} \times \mathbf{G}$ et de $\mathfrak{g}^2$ sur $(\mathfrak{g}^2)^*$ sont données par :

$$\mathrm{Ad}^*_{(g,h)}(\xi,\eta) = (\mathrm{Ad}^*_g(\xi), \mathrm{Ad}^*_h(\eta)) \quad \text{et} \quad \mathrm{ad}^*_{(x,y)}(\xi,\eta) = (\mathrm{ad}^*_x(\xi), \mathrm{ad}^*_y(\eta)), \tag{3.24}$$

pour tous $g, h \in \mathbf{G}$, $x, y \in \mathfrak{g}$ et $\xi, \eta \in \mathfrak{g}^*$. Une fonction $F \in \mathcal{F}(\mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*)$ est donc Ad^*-invariante sur $\mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*$ si et seulement si, pour tous $g, h \in \mathbf{G}$ et $\xi, \eta \in \mathfrak{g}^*$,

$$F(\mathrm{Ad}^*_g(\xi), \mathrm{Ad}^*_h(\eta)) = F(\xi, \eta).$$

On sait construire, d'après le théorème de Adler-Kostant-Symes [7, théorème 4.37] des fonctions en involution pour la structure de Poisson associé à une $\mathcal{R}$-matrice. En effet, d'après ce théorème les fonctions Ad^*-invariantes sur $\mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*$ sont en involution. Mais il y a en général peu de fonctions Ad^*-invariantes sur $\mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*$; par exemple si $\mathfrak{g}$ est simple les fonctions Ad^*-invariantes sur $\mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*$ est une algèbre polynomiale engendrée par $2\,\mathrm{Rg}(\mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*) = 2\,\mathrm{Rg}\,\mathfrak{g}$ éléments. Ce qui nécessite la construction d'autres fonctions non-Ad^*-invariantes sur $\mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*$ pour prouver l'intégrabilité de systèmes hamiltoniens dont l'espace de phases est un sous-espace de Poisson de $(\mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*, \{\cdot\,,\cdot\}_{\mathcal{R}})$. Nous verrons cela dans le chapitre 4.

Nous construisons en utilisant les fonctions Ad^*-invariantes sur $\mathfrak{g}^*$ une grande famille de fonctions, définies sur $\mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*$, en involution pour le crochet $\{\cdot\,,\cdot\}_{\mathcal{R}}$, qui est défini en (3.22) et contenant, les fonctions Ad^*-invariantes sur $\mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*$ et également des (mais, en général, pas toutes les) fonctions de Casimir de $\{\cdot\,,\cdot\}_{\mathcal{R}}$. Nous énonçons et démontrons un théorème d'involutivité sur $\mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*$ qui se rapproche du théorème d'Adler-Kostant-Symes [7, théorème 4.37].

Théorème 3.8. *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension finie. Soit λ une constante et soit ψ_λ l'application*

$$\begin{array}{rccc} \psi_\lambda & : \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^* & \to & \mathfrak{g}^* \\ & (\xi, \eta) & \mapsto & \lambda\xi + \eta. \end{array} \tag{3.25}$$

Soient R un endomorphisme[1] *de $\mathfrak{g}$ et c une constante. Si l'opérateur $\mathcal{R}$ de $\mathfrak{g}^2$ dans $\mathfrak{g}^2$, défini pour tout $(x,y) \in \mathfrak{g}^2$, par :*

$$\mathcal{R}(x,y) := (R(x-y) + cy, R(x-y) + cx) \tag{3.26}$$

est une $\mathcal{R}$-matrice de $\mathfrak{g}^2$ et si $\{\cdot\,,\cdot\}_{\mathcal{R}}$ est le crochet de Poisson associé à $\mathcal{R}$, alors :

(1) Pour toute fonction Ad^*-invariante F sur $\mathfrak{g}^*$, la fonction $F \circ \psi_1$ est un Casimir pour $\{\cdot\,,\cdot\}_{\mathcal{R}}$;

(2) Soient F, G deux fonctions Ad^*-invariantes sur $\mathfrak{g}^*$ et soient λ, γ des constantes. Les fonctions $F \circ \psi_\lambda$ et $G \circ \psi_\gamma$ sont en involution pour $\{\cdot\,,\cdot\}_{\mathcal{R}}$. En particulier, si F et G sont deux polynômes de degré respectivement l et k, alors les fonctions $F_0, \ldots, F_l, G_0, \ldots, G_k$, définies, pour tout $(\xi,\eta) \in \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*$, par :

$$F(\psi_\lambda(\xi,\eta)) = \sum_{i=0}^{l} \lambda^i F_i(\xi,\eta) \qquad \text{et} \qquad G(\psi_\gamma(\xi,\eta)) = \sum_{j=0}^{k} \gamma^j G_j(\xi,\eta),$$

sont en involution pour le crochet $\{\cdot\,,\cdot\}_{\mathcal{R}}$;

1. R n'est pas nécessairement une R-matrice.

(3) *Si $c = 1$, l'application $\psi_1 : (\mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*, \{\cdot\,,\cdot\}_{\mathcal{R}}) \to (\mathfrak{g}^*, \{\cdot\,,\cdot\})$ est un morphisme de Poisson ;*

(4) *Soit H une fonction Ad^*-invariante sur $\mathfrak{g}^*$. Le champ hamiltonien $\mathcal{X}_{H\circ\psi_\lambda} := \{\cdot\,, H\circ\psi_\lambda\}_{\mathcal{R}}$ au point $(\xi,\eta) \in \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*$ est donné par :*

$$\mathcal{X}_{H\circ\psi_\lambda}(\xi,\eta) = \frac{1}{2}(1-\lambda)\,\mathrm{ad}^*_{((R-cI)\mathsf{d}_{\lambda\xi+\eta}H,(R+cI)\mathsf{d}_{\lambda\xi+\eta}H)}(\xi,\eta). \tag{3.27}$$

Dans le cas particulier où $R := P_+ - P_-$, la différence des projections sur deux sous-algèbres de Lie supplémentaires de $\mathfrak{g}$, on a :

$$\mathcal{X}_{H\circ\varphi_\lambda}(\xi,\eta) = (1-\lambda)\,\mathrm{ad}^*_{((-\mathsf{d}_{\lambda\xi+\eta}H)_-,(\mathsf{d}_{\lambda\xi+\eta}H)_+)}(\xi,\eta). \tag{3.28}$$

On a besoin de quelques résultats pour prouver ce théorème, que l'on donne sous forme des lemmes suivants. Dans ces lemmes $(\mathfrak{g}, [\cdot\,,\cdot])$ est une algèbre de Lie réelle ou complexe de dimension finie. On ne montre pas le premier lemme, on l'obtient par des opérations de substitution.

Lemme 3.9. *Soient R un endomorphisme de $\mathfrak{g}$ et c une constante. L'endomorphisme $\mathcal{R}$ de $\mathfrak{g}^2$, défini pour tout $(x,y) \in \mathfrak{g}^2$, par :*

$$\mathcal{R}(x,y) := (R(x-y)+cy, R(x-y)+cx), \tag{3.29}$$

vérifie, pour tous $x, y \in \mathfrak{g}$ et λ une constante, les propriétés suivantes :

$$\mathcal{R}(x,x) = c(x,x)\ ; \tag{3.30}$$
$$\mathcal{R}(x,y) + c(x,y) = (R(x-y)+c(x+y), R(x-y)+c(x+y))\ ; \tag{3.31}$$
$$\mathcal{R}(\lambda x,x) = (\lambda-1)(R(x),R(x)) + c(x,\lambda x). \tag{3.32}$$

Lemme 3.10. *Soient $F \in \mathcal{F}(\mathfrak{g}^*)$, $(\xi,\eta) \in \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*$ et λ une constante.*

(1) *La différentielle de $F\circ\psi_\lambda$ en (ξ,η) s'écrit en fonction de la différentielle de F en $\psi_\lambda(\xi,\eta)$ grâce à la formule suivante :*

$$\mathsf{d}_{(\xi,\eta)}(F\circ\psi_\lambda) = (\lambda\mathsf{d}_{\lambda\xi+\eta}F, \mathsf{d}_{\lambda\xi+\eta}F). \tag{3.33}$$

(2) *Soient R un endomorphisme de $\mathfrak{g}$ et $\mathcal{R}$ l'endomorphisme de $\mathfrak{g}^2$ défini en (3.29). Alors*

$$\mathcal{R}\mathsf{d}_{(\xi,\eta)}(F\circ\psi_\lambda) = (\lambda-1)(R\mathsf{d}_{\lambda\xi+\eta}F, R\mathsf{d}_{\lambda\xi+\eta}F) + c(\mathsf{d}_{\lambda\xi+\eta}F, \lambda\mathsf{d}_{\lambda\xi+\eta}F). \tag{3.34}$$

Preuve:
Comme la fonction ψ_λ est linéaire alors, pour tous $(\xi,\eta), (\mu,\zeta) \in \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*$, on a :

$$\begin{aligned}\left\langle(\mu,\zeta), \mathsf{d}_{(\xi,\eta)}(F\circ\psi_\lambda)\right\rangle &= \left\langle\psi_\lambda(\mu,\zeta), \mathsf{d}_{\psi_\lambda(\xi,\eta)}F\right\rangle\\ &= \left\langle\mu, \lambda\mathsf{d}_{\psi_\lambda(\xi,\eta)}F\right\rangle + \left\langle\zeta, \mathsf{d}_{\psi_\lambda(\xi,\eta)}F\right\rangle\\ &= \left\langle(\mu,\zeta), (\lambda\mathsf{d}_{\lambda\xi+\eta}F, \mathsf{d}_{\lambda\xi+\eta}F)\right\rangle,\end{aligned}$$

ce qui donne (3.33). En utilisant les formules (3.32) et (3.33) nous déduisons l'équation (3.34). □

Prouvons maintenant le théorème 3.8. **Preuve:**
(1) Soient $K\in\mathcal{F}(\mathfrak{g}^*\times\mathfrak{g}^*)$ et $(\xi,\eta)\in\mathfrak{g}^*\times\mathfrak{g}^*$, écrivons le $\mathcal{R}$-crochet de Poisson (3.23) entre $\psi_1^*F=F\circ\psi_1$ et K en (ξ,η).

$$\{\psi_1^*F,K\}_{\mathcal{R}}(\xi,\eta)=\frac{1}{2}\left\langle(\xi,\eta),[\mathcal{R}\,\mathsf{d}_{(\xi,\eta)}(F\circ\psi_1),\mathsf{d}_{(\xi,\eta)}K]\right\rangle+\frac{1}{2}\left\langle(\xi,\eta),[\mathsf{d}_{(\xi,\eta)}(F\circ\psi_1),\mathcal{R}\,\mathsf{d}_{(\xi,\eta)}K]\right\rangle.$$

D'après (3.33) et (3.34), on a $\mathsf{d}_{(\xi,\eta)}(F\circ\psi_1)=(\mathsf{d}_{\xi+\eta}F,\mathsf{d}_{\xi+\eta}F)$ et $\mathcal{R}\,\mathsf{d}_{(\xi,\eta)}(F\circ\psi_1)=c(\mathsf{d}_{\xi+\eta}F,\mathsf{d}_{\xi+\eta}F)$. Ceci implique que

$$\begin{aligned}\{\psi_1^*F,K\}_{\mathcal{R}}(\xi,\eta) &= \frac{1}{2}\left\langle(\xi,\eta),[c(\mathsf{d}_{\xi+\eta}F,\mathsf{d}_{\xi+\eta}F),\mathsf{d}_{(\xi,\eta)}K]\right\rangle\\ &\quad+\frac{1}{2}\left\langle(\xi,\eta),[(\mathsf{d}_{\xi+\eta}F,\mathsf{d}_{\xi+\eta}F),\mathcal{R}\,\mathsf{d}_{(\xi,\eta)}K]\right\rangle\\ &= \frac{1}{2}\left\langle(\xi,\eta),[(\mathsf{d}_{\xi+\eta}F,\mathsf{d}_{\xi+\eta}F),\mathcal{R}\,\mathsf{d}_{(\xi,\eta)}K+c\mathsf{d}_{(\xi,\eta)}K]\right\rangle.\end{aligned}\tag{3.35}$$

D'après la formule (3.31) du lemme 3.9 la quantité $\mathcal{R}\,\mathsf{d}_{(\xi,\eta)}K+c\mathsf{d}_{(\xi,\eta)}K$ s'écrit sous la forme (x,x) (on n'a pas besoin dans cette preuve d'expliciter x). Cette écriture permet de réécrire (3.35) sous la forme :

$$\begin{aligned}\{\psi_1^*F,K\}_{\mathcal{R}}(\xi,\eta) &= \frac{1}{2}\langle(\xi,\eta),[(\mathsf{d}_{\xi+\eta}F,\mathsf{d}_{\xi+\eta}F),(x,x)]\rangle\\ &= \frac{1}{2}\langle\xi,[\mathsf{d}_{\xi+\eta}F,x]\rangle+\frac{1}{2}\langle\eta,[\mathsf{d}_{\xi+\eta}F,x]\rangle\\ &= \frac{1}{2}\langle\xi+\eta,[\mathsf{d}_{\xi+\eta}F,x]\rangle\\ &= 0,\end{aligned}$$

car F est Ad^*-invariante sur $\mathfrak{g}$.

(2) Soit $(\xi,\eta)\in\mathfrak{g}^*\times\mathfrak{g}^*$, prouvons que le $\mathcal{R}$-crochet de Poisson entre $F\circ\psi_\lambda$ et $G\circ\psi_\gamma$ vaut zéro au point $(\xi,\eta)\in\mathfrak{g}^*\times\mathfrak{g}^*$. Commençons par rappeler que par définition

$$\begin{aligned}\left\{\psi_\lambda^*F,\psi_\gamma^*G\right\}_{\mathcal{R}}(\xi,\eta) &= \tfrac{1}{2}\left\langle(\xi,\eta),[\mathcal{R}\,\mathsf{d}_{(\xi,\eta)}(F\circ\psi_\lambda),\mathsf{d}_{(\xi,\eta)}(G\circ\psi_\gamma)]\right\rangle\\ &\quad+\tfrac{1}{2}\left\langle(\xi,\eta),[\mathsf{d}_{(\xi,\eta)}(F\circ\psi_\lambda),\mathcal{R}\,\mathsf{d}_{(\xi,\eta)}(G\circ\psi_\gamma)]\right\rangle.\end{aligned}\tag{3.36}$$

A partir des formules (3.33) et (3.34) le $\mathcal{R}$-crochet de Poisson $\left\{\psi_\lambda^*F,\psi_\gamma^*G\right\}_{\mathcal{R}}(\xi,\eta)$ de

(3.36) devient

$$\begin{aligned}
\left\{\psi_\lambda^* F, \psi_\gamma^* G\right\}_{\mathcal{R}}(\xi,\eta) &= \frac{1}{2}\left\langle(\xi,\eta),[(\lambda-1)(R\,\mathsf{d}_{\lambda\xi+\eta}F, R\,\mathsf{d}_{\lambda\xi+\eta}F),(\gamma\mathsf{d}_{\gamma\xi+\eta}G,\mathsf{d}_{\gamma\xi+\eta}G)]\right\rangle \\
&\quad +\frac{1}{2}\left\langle(\xi,\eta),[(c\mathsf{d}_{\lambda\xi+\eta}F, c\lambda\mathsf{d}_{\lambda\xi+\eta}F),(\gamma\mathsf{d}_{\gamma\xi+\eta}G,\mathsf{d}_{\gamma\xi+\eta}G)]\right\rangle \\
&\quad -((F,\lambda)\leftrightarrow(G,\gamma)) \\
&= \frac{(\lambda-1)}{2}\left\langle\gamma\xi+\eta,[R\,\mathsf{d}_{\lambda\xi+\eta}F,\mathsf{d}_{\gamma\xi+\eta}G]\right\rangle \\
&\quad +\frac{c\gamma}{2}\left\langle\xi,[\mathsf{d}_{\lambda\xi+\eta}F,\mathsf{d}_{\gamma\xi+\eta}G]\right\rangle+\frac{c\lambda}{2}\left\langle\eta,[\mathsf{d}_{\lambda\xi+\eta}F,\mathsf{d}_{\gamma\xi+\eta}G]\right\rangle \\
&\quad -((F,\lambda)\leftrightarrow(G,\gamma)) \\
&= \frac{c\gamma}{2}\left\langle\xi,[\mathsf{d}_{\lambda\xi+\eta}F,\mathsf{d}_{\gamma\xi+\eta}G]\right\rangle+\frac{c\lambda}{2}\left\langle\eta,[\mathsf{d}_{\lambda\xi+\eta}F,\mathsf{d}_{\gamma\xi+\eta}G]\right\rangle \\
&\quad -((F,\lambda)\leftrightarrow(G,\gamma)),
\end{aligned}$$

car F et G sont Ad*-invariantes sur $\mathfrak{g}^*$. D'après la formule (2.38), on a

$$(\lambda-\gamma)\left\langle\xi,[\mathsf{d}_{\lambda\xi+\eta}F,\mathsf{d}_{\gamma\xi+\eta}G]\right\rangle=0.$$

(a) Si $\lambda\neq\gamma$,

$$\left\langle\xi,[\mathsf{d}_{\lambda\xi+\eta}F,\mathsf{d}_{\gamma\xi+\eta}G]\right\rangle=0.$$

Ce qui implique à l'aide de l'Ad*-invariance de F ou G que

$$\left\langle\eta,[\mathsf{d}_{\lambda\xi+\eta}F,\mathsf{d}_{\gamma\xi+\eta}G]\right\rangle=0.$$

Cela permet de simplifier l'expression du crochet $\left\{\psi_\lambda^* F,\psi_\gamma^* G\right\}_{\mathcal{R}}$, qui devient

$$\left\{\psi_\lambda^* F,\psi_\gamma^* G\right\}_{\mathcal{R}}(\xi,\eta)=0\ ;$$

(b) Si $\lambda=\gamma$, l'expression du crochet $\left\{\psi_\lambda^* F,\psi_\gamma^* G\right\}_{\mathcal{R}}$, devient

$$\{\psi_\lambda^* F,\psi_\lambda^* G\}_{\mathcal{R}}(\xi,\eta)=c\lambda\left\langle\xi+\eta,[\mathsf{d}_{\lambda\xi+\eta}F,\mathsf{d}_{\lambda\xi+\eta}G]\right\rangle=0,$$

d'après la formule (2.34).

Supposons maintenant que λ et γ sont deux paramètres et considérons les polynômes F_i, $i=1,\ldots,l$ et G_j, $j=1,\ldots,k$, définies dans l'énoncé du théorème 3.8. Par définition

$$\{F\circ\psi_\lambda,G\circ\psi_\gamma\}_{\mathcal{R}}=\sum_{i=0}^{l}\sum_{j=0}^{k}\lambda^i\gamma^j\{F_i,G_j\}_{\mathcal{R}}. \tag{3.37}$$

Or nous venons de montrer que le terme à gauche de l'équation (3.37) est nul. Ce qui implique que chaque coefficient en $\lambda^i\gamma^j$ de la somme $\sum_{i=0}^{l}\sum_{j=0}^{k}\lambda^i\gamma^j\{F_i,G_j\}_{\mathcal{R}}$ est nul.

(3) Soit $c=1$ et soient $F,G\in\mathcal{F}(\mathfrak{g}^*)$. Montrons que $\{\psi_1^*F,\psi_1^*G\}_{\mathcal{R}}=\psi_1^*\{F,G\}$. Ce qui prouve que ψ_1 est un morphisme de Poisson. Soit (ξ,η) un élément de $\mathfrak{g}^*\times\mathfrak{g}^*$,

le $\mathcal{R}$-crochet de Poisson entre ψ_1^*F et ψ_1^*G en (ξ,η) est, selon (3.36), (3.34) et (3.33), donné par :

$$\begin{aligned}\{\psi_1^*F,\psi_1^*G\}_{\mathcal{R}}(\xi,\eta) &= \langle \xi+\eta, [\mathsf{d}_{\xi+\eta}F, \mathsf{d}_{\xi+\eta}G]\rangle \\ &= \{F,G\}\left(\psi_1(\xi,\eta)\right) \\ &= \psi_1^*\{F,G\}(\xi,\eta).\end{aligned}$$

(4) Soient K une fonction sur $\mathfrak{g}^*\times\mathfrak{g}^*$ et (ξ,η) un élément de $\mathfrak{g}^*\times\mathfrak{g}^*$. Par définition,

$$\begin{aligned}\mathcal{X}_{H\circ\psi_\lambda}(\xi,\eta)[K] &= \{K, H\circ\psi_\lambda\}_{\mathcal{R}}(\xi,\eta) \\ &= \frac{1}{2}\left\langle(\xi,\eta), [\mathcal{R}\,\mathsf{d}_{(\xi,\eta)}K, \mathsf{d}_{(\xi,\eta)}(H\circ\psi_\lambda)] + [\mathsf{d}_{(\xi,\eta)}K, \mathcal{R}\,\mathsf{d}_{(\xi,\eta)}(H\circ\psi_\lambda)]\right\rangle.\end{aligned} \tag{3.38}$$

Pour simplifier, on note $(x,y) := \mathsf{d}_{(\xi,\eta)}K$. D'après (3.26), la valeur de $\mathcal{R}\,\mathsf{d}_{(\xi,\eta)}K = \mathcal{R}(x,y)$ égale à

$$\mathcal{R}\,\mathsf{d}_{(\xi,\eta)}K = (R(x-y), R(x-y)) + c(y,x). \tag{3.39}$$

Les formules (3.39) et (3.33) permettent de réécrire le premier terme de (3.38) de la façon suivante

$$\begin{aligned}&\left\langle(\xi,\eta), [\mathcal{R}\mathsf{d}_{(\xi,\eta)}K, \mathsf{d}_{(\xi,\eta)}(H\circ\psi_\lambda)]\right\rangle \\ &\quad= \langle(\xi,\eta), [(R(x-y), R(x-y)), (\lambda\mathsf{d}_{\lambda\xi+\eta}H, \mathsf{d}_{\lambda\xi+\eta}H)]\rangle \\ &\quad\quad+c\,\langle(\xi,\eta), [(y,x), (\lambda\mathsf{d}_{\lambda\xi+\eta}H, \mathsf{d}_{\lambda\xi+\eta}H)]\rangle \\ &\quad= \langle\lambda\xi+\eta, [R(x-y), \mathsf{d}_{\lambda\xi+\eta}H]\rangle + c\,\langle\lambda\xi, [y, \mathsf{d}_{\lambda\xi+\eta}H]\rangle + c\,\langle\eta, [x, \mathsf{d}_{\lambda\xi+\eta}H]\rangle \\ &\quad= -c\,\langle\eta, [y, \mathsf{d}_{\lambda\xi+\eta}H]\rangle - c\,\langle\lambda\xi, [x, \mathsf{d}_{\lambda\xi+\eta}H]\rangle\,,\end{aligned} \tag{3.40}$$

où, on a utilisé dans la deuxième étape trois fois l'Ad*-invariance de H. Donc

$$\left\langle(\xi,\eta), [\mathcal{R}\,\mathsf{d}_{(\xi,\eta)}K, \mathsf{d}_{(\xi,\eta)}(H\circ\psi_\lambda)]\right\rangle = \langle(\xi,\eta), [(c\lambda\mathsf{d}_{\lambda\xi+\eta}H, c\mathsf{d}_{\lambda\xi+\eta}H), (x,y)]\rangle\,. \tag{3.41}$$

En remplaçant le premier terme de (3.38) par son expression (3.41) et en utisant pour le deuxième terme de (3.38) la formule (3.34) nous réécrivons $\mathcal{X}_{H\circ\psi_\lambda}(\xi,\eta)[F]$, qui devient

$$\begin{aligned}\mathcal{X}_{H\circ\psi_\lambda}(\xi,\eta)[K] &= \frac{1}{2}\langle(\xi,\eta), [(c\lambda\mathsf{d}_{\lambda\xi+\eta}H, c\mathsf{d}_{\lambda\xi+\eta}H), (x,y)]\rangle \\ &\quad-\frac{(\lambda-1)}{2}\langle(\xi,\eta), [(R\,\mathsf{d}_{\lambda\xi+\eta}H, R\,\mathsf{d}_{\lambda\xi+\eta}H), (x,y)]\rangle \\ &\quad-\frac{1}{2}\langle(\xi,\eta), [(c\mathsf{d}_{\lambda\xi+\eta}H, c\lambda\mathsf{d}_{\lambda\xi+\eta}H), (x,y)]\rangle \\ &= \frac{(\lambda-1)}{2}\left\langle(\xi,\eta), [((cI-R)\mathsf{d}_{\lambda\xi+\eta}H, -(R+cI)\mathsf{d}_{\lambda\xi+\eta}H), \mathsf{d}_{(\xi,\eta)}K]\right\rangle.\end{aligned}$$

Ce qui prouve (3.27). $\square$

3.3.3 Version du théorème 3.8 sur $\mathfrak{g}^2$

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension finie, munie d'une forme [2] $\langle\cdot\,|\cdot\,\rangle$ bilinéaire, symétrique, Ad-invariante, non-dégénérée. Grâce à la forme $\langle\cdot\,|\cdot\,\rangle_2$ bilinéaire, symétrique, Ad-invariante, non-dégénérée suivante :

$$\begin{array}{rccc} \langle\cdot\,|\cdot\,\rangle_2 & : & \mathfrak{g}^2\times\mathfrak{g}^2 & \rightarrow & \mathbf{K} \\ & & ((x,y),(z,s)) & \mapsto & \langle x\,|\,z\rangle + \langle y\,|\,s\rangle \end{array} \tag{3.42}$$

l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}^2$ s'identifie avec son dual $(\mathfrak{g}^2)^*$, qui s'identifie à son tour à $\mathfrak{g}^*\times\mathfrak{g}^*$ et par suite, lorsque $\mathfrak{g}^2$ admet une $\mathcal{R}$-matrice, elle est munie de la structure du $\mathcal{R}$-crochet de Poisson donnée entre $F,G\in\mathcal{F}(\mathfrak{g}^2)$ en $(x,y)\in\mathfrak{g}^2$, par :

$$\{F,G\}_{\mathcal{R}}(x,y) = \big\langle(x,y)\,|\,[\nabla_{(x,y)}F,\nabla_{(x,y)}G]_{\mathcal{R}}\big\rangle_2 \tag{3.43}$$

$$= \frac{1}{2}\big\langle(x,y)\,|\,[\mathcal{R}\nabla_{(x,y)}F,\nabla_{(x,y)}G] + [\nabla_{(x,y)}F,\mathcal{R}\nabla_{(x,y)}G]\big\rangle_2, \tag{3.44}$$

où $\nabla_{(x,y)}F$ est le gradient de F en (x,y) calculé à partir de la forme $\langle\cdot\,|\cdot\,\rangle_2$, tel que, pour tout $(z,s)\in\mathfrak{g}^2$, on a :

$$\begin{aligned} \big\langle\nabla_{(x,y)}F\,|\,(z,s)\big\rangle_2 &= \big\langle \mathsf{d}_{(x,y)}F,(z,s)\big\rangle \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{F((x,y)+t(z,s)) - F(x,y)}{t}. \end{aligned} \tag{3.45}$$

Soit $\mathbf{G}$ un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et soit Ad (resp. ad) l'action adjointe de $\mathbf{G}$ (resp. de $\mathfrak{g}$) sur $\mathfrak{g}$. Pour tous $g,h\in\mathbf{G}$ et $x,y,z,s\in\mathfrak{g}$, les actions adjointes de $\mathbf{G}\times\mathbf{G}$ et de $\mathfrak{g}^2$ sur $\mathfrak{g}^2$ sont respectivement :

$$\mathrm{Ad}_{(g,h)}(x,y) = (\mathrm{Ad}_g(x),\mathrm{Ad}_h(y)) \quad \text{et} \quad \mathrm{ad}_{(z,s)}(x,y) = (\mathrm{ad}_z(x),\mathrm{ad}_s(y)). \tag{3.46}$$

Nous pouvons réécrire le théorème 3.8 sur $\mathfrak{g}^2$.

Théorème 3.11. *Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension finie, munie d'une forme $\langle\cdot\,|\cdot\,\rangle$ bilinéaire, symétrique,* Ad*-invariante, non-dégénérée. Soit $\langle\cdot\,|\cdot\,\rangle_2$ la forme sur $\mathfrak{g}^2$ définie par :*

$$\begin{array}{rccc} \langle\cdot\,|\cdot\,\rangle_2 & : & \mathfrak{g}^2\times\mathfrak{g}^2 & \rightarrow & \mathbf{K} \\ & & ((x,y),(x',y')) & \mapsto & \langle x\,|\,x'\rangle + \langle y\,|\,y'\rangle\,. \end{array}$$

Soient λ une constante et φ_λ l'application

$$\begin{array}{rccc} \varphi_\lambda : & \mathfrak{g}^2 & \rightarrow & \mathfrak{g} \\ & (x,y) & \mapsto & \lambda x + y. \end{array} \tag{3.47}$$

Soient R un endomorphisme de $\mathfrak{g}$ et c une constante. Si l'opérateur $\mathcal{R}$ de $\mathfrak{g}^2$ dans $\mathfrak{g}^2$, défini, pour tous $x,y\in\mathfrak{g}$, par :

$$\mathcal{R}(x,y) := (R(x-y)+cy, R(x-y)+cx) \tag{3.48}$$

est une $\mathcal{R}$-matrice de $\mathfrak{g}^2$, le $\mathcal{R}$-crochet de Poisson sur $\mathfrak{g}^2$, associé à $\mathcal{R}$, vérifie les propriétés suivantes :

2. Lorsque $\mathfrak{g}$ est semi-simple la forme $\langle\cdot\,|\cdot\,\rangle$ pourra être la forme de Killing.

(1) *Pour toute fonction* Ad-*invariante F sur $\mathfrak{g}$ la fonction $F \circ \varphi_1$ est un Casimir pour $\{\cdot\,,\cdot\}_{\mathcal{R}}$;*

(2) *Soient F, G deux fonctions* Ad-*invariantes sur $\mathfrak{g}$ et γ, λ des constantes. Les fonctions $F \circ \varphi_\lambda$ et $G \circ \varphi_\gamma$ sont en involution pour $\{\cdot\,,\cdot\}_{\mathcal{R}}$. En particulier, si F et G sont deux polynômes* Ad-*invariants de degré respectivement l et k, alors les polynômes $F_0, \ldots, F_l, G_0, \ldots, G_k$ définies, pour tout $(x, y) \in \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$, par :*

$$F(\varphi_\lambda(x, y)) = \sum_{i=0}^{l} \lambda^i F_i(x, y) \qquad \textit{et} \qquad G(\psi_\gamma(x, y)) = \sum_{j=0}^{k} \gamma^j G_j(x, y),$$

sont en involution pour le crochet $\{\cdot\,,\cdot\}_{\mathcal{R}}$;

(3) *Si $c = 1$, l'application $\varphi_1 : (\mathfrak{g}^2, \{\cdot\,,\cdot\}_{\mathcal{R}}) \to (\mathfrak{g}, \{\cdot\,,\cdot\})$ est un morphisme de Poisson ;*

(4) *Soit H une fonction* Ad-*invariante. L'équation du champ hamiltonien $\mathcal{X}_{H\circ\varphi_\lambda} := \{\cdot\,, H \circ \varphi_\lambda\}_{\mathcal{R}}$ en tout point $(x, y) \in \mathfrak{g}^2$ est :*

$$\begin{cases} \dot{x} &= \dfrac{\lambda - 1}{2}[x, (R - cI)\nabla_{\lambda x+y} H], \\ \dot{y} &= \dfrac{\lambda - 1}{2}[y, (R + cI)\nabla_{\lambda x+y} H]. \end{cases} \tag{3.49}$$

Dans le cas particulier où $R := P_+ - P_-$ est la différence des projections sur deux sous-algèbres de Lie supplémentaires, on a :

$$\begin{cases} \dot{x} &= (1 - \lambda)[x, (\nabla_{\lambda x+y} H)_-], \\ \dot{y} &= (\lambda - 1)[y, (\nabla_{\lambda x+y} H)_+]. \end{cases} \tag{3.50}$$

Nous détaillons ce théorème dans cas où $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie semi-simple.

Corollaire 3.12. *Soit $\mathfrak{g} := \mathfrak{g}_+ \oplus \mathfrak{g}_-$ une algèbre de Lie semi-simple, munie de sa forme de Killing $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$. Soit $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle_2$ la forme bilinéaire, symétrique,* Ad-*invariante, non-dégénérée, définie, pour tout $(x, y), (z, s) \in \mathfrak{g}^2$, par : $\langle (x, y) \,|\, (z, s) \rangle_2 = \langle x \,|\, z \rangle + \langle y \,|\, s \rangle$. Soient $R := P_+ - P_-$ la différence des projections de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{g}_+$ et $\mathfrak{g}_-$ et on note $\{\cdot\,,\cdot\}_{\mathcal{R}}$ le crochet de Poisson associé à la $\mathcal{R}$-matrice de $\mathfrak{g}^2$, définie pour tout $(x, y) \in \mathfrak{g}^2$ par :*

$$\mathcal{R}(x, y) := (R(x - y) + y, R(x - y) + x). \tag{3.51}$$

Soient λ une constante et φ_λ l'application

$$\begin{array}{rccc} \varphi_\lambda : & \mathfrak{g}^2 & \to & \mathfrak{g} \\ & (x, y) & \mapsto & \lambda x + y. \end{array} \tag{3.52}$$

Alors

(1) *Pour toute fonction* Ad-*invariante F sur $\mathfrak{g}$ la fonction $F \circ \varphi_1$ est un Casimir pour $\{\cdot\,,\cdot\}_{\mathcal{R}}$;*

(2) *Soient F, G deux polynômes* Ad*-invariants sur $\mathfrak{g}$ de degré respectivement l et k. Les fonctions $F_0, \ldots, F_l, G_0, \ldots, G_k$ définies, pour tout $(x,y) \in \mathfrak{g}^2$, par :*

$$F(\psi_\lambda(x,y)) = \sum_{i=0}^{l} \lambda^i F_i(x,y) \qquad \text{et} \qquad G(\psi_\gamma(x,y)) = \sum_{j=0}^{k} \gamma^j G_j(x,y).$$

sont en involution pour le crochet $\{\cdot\,,\cdot\}_{\mathcal{R}}$;

(3) *L'application $\varphi_1 : (\mathfrak{g}^2, \{\cdot\,,\cdot\}_{\mathcal{R}}) \to (\mathfrak{g}, \{\cdot\,,\cdot\})$ est un morphisme de Poisson ;*

(4) *Soit H une fonction* Ad*-invariante sur $\mathfrak{g}$. L'équation du champ hamiltonien $\mathcal{X}_{H\circ\varphi_\lambda} := \{\cdot\,, H\circ\varphi_\lambda\}_{\mathcal{R}}$ en (x,y) est*

$$\begin{cases} \dot{x} &=& (1-\lambda)[x, (\nabla_{\lambda x+y} H)_-], \\ \dot{y} &=& (\lambda-1)[y, (\nabla_{\lambda x+y} H)_+]. \end{cases} \tag{3.53}$$

3.4 $\mathcal{R}$-crochets de Poisson quadratiques et cubiques sur $\mathfrak{g}^2$

Nous achevons ce chapitre par la construction de $\mathcal{R}$-crochets de Poisson quadratiques et cubiques sur le carré $\mathfrak{g}^2$ de $\mathfrak{g}$. Nous montrons dans chacune des propositions 3.13 et 3.14 que avoir un endomorphisme de $\mathfrak{g}$ qui satisfait dans chaque cas quelques hypothèses, permet de construire des structures de Poisson quadratiques et cubiques. Nous utilisons dans cette partie les deux propositions du paragraphe 2.1.7 dans lesquelles nous avons rappelé la construction sur l'algèbre de Lie d'une algèbre associative de dimension finie des crochets de Poisson quadratiques et cubiques.

Proposition 3.13. *Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie d'une algèbre associative de dimension finie et soit $\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle$ une forme bilinéaire, symétrique, non-dégénérée pour laquelle la multiplication est symétrique. Soit ${\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle_2}'$ la forme bilinéaire de $\mathfrak{g}^2$ suivante :*

$$\begin{array}{cccc} {\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle_2}' : & \mathfrak{g}^2 \times \mathfrak{g}^2 & \to & \mathbf{K} \\ & ((x,y),(x',y')) & \mapsto & \langle x\,|\,x'\rangle - \langle y\,|\,y'\rangle\,. \end{array} \tag{3.54}$$

Soient c une constante, R un endomorphisme de $\mathfrak{g}$ et $\mathcal{R}$ l'endomorphisme de $\mathfrak{g}^2$, défini, pour tout $(x,y) \in \mathfrak{g}^2$, par :

$$\mathcal{R}(x,y) := (R(x-y) + cy, R(x-y) + cx). \tag{3.55}$$

Si R et sa partie antisymétrique R_- sont deux solutions de l'équation de Yang-Baxter modifiée de même constante c, la bidérivation définie, pour tous $F, G \in \mathcal{F}(\mathfrak{g}^2)$ et tout $(x,y) \in \mathfrak{g}^2$, par :

$$\begin{array}{rcl} \{F,G\}^Q_{\mathcal{R}}(x,y) & := & \dfrac{1}{2}\Big\langle [(x,y), \nabla_{(x,y)} F] \,\Big|\, \mathcal{R}((x,y)\nabla_{(x,y)} G + \nabla_{(x,y)} G(x,y)) \Big\rangle_2 \\ & & -(F \leftrightarrow G), \end{array} \tag{3.56}$$

est un $\mathcal{R}$-crochet de Poisson quadratique sur $\mathfrak{g}^2$.

Preuve:
On définit, pour tous $(x,y),(x',y')\in\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$ le produit de (x,y) par (x',y') par (xx',yy') et on prend son algèbre de Lie, qui est bien l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}^2$ munie du crochet de Lie (3.1). De plus, $\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle_2'$ est une forme bilinéaire, symétrique, non-dégénérée pour laquelle la multiplication est symétrique. Pour que la bidérivation (3.56) soit un crochet quadratique il faut d'après la proposition 2.28 vérifier que $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}_-$ sont deux solutions de (mCYBE) de même constante c.

Montrons alors que lorsque R et R_- sont deux solution de (mCYBE) de même constante c, alors les endomorphismes $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}_-$ sont aussi solutions de (mCYBE) de même constante c. Pour R, ceci est le contenu de la proposition 3.3.

Nous allons montrer que l'endomorphisme $\mathcal{R}_-$ satisfait la condition (3.10). Commençons d'abord par la détermination de son expression. La partie antisymétrique de $\mathcal{R}$ est donnée par :

$$\mathcal{R}_-(x,y)=\frac{1}{2}(\mathcal{R}-\mathcal{R}^*)(x,y). \tag{3.57}$$

Or en remplaçant $\mathcal{R}$ par son expression (3.55) et en utilisant la forme bilinéaire (3.54) on vérifie aisement que

$$\mathcal{R}^*(x,y)=(R^*(x-y)-cy,R^*(x-y)-cx),\qquad \forall x,y\in\mathfrak{g}. \tag{3.58}$$

Réécrivons alors l'équation (3.57) à l'aide des équations (3.55) et (3.58)

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_-(x,y) &= \frac{1}{2}(R(x-y)+cy,R(x-y)+cx)\\ &\quad -\frac{1}{2}(R^*(x-y)-cy,R^*(x-y)-cx)\\ &= (\frac{R-R^*}{2}(x-y)+cy,\frac{R-R^*}{2}(x-y)+cx)\\ &= (R_-(x-y)+cy,R_-(x-y)+cx).\end{aligned}$$

L'endomorphisme $\mathcal{R}_-$ satisfait donc à la relation (3.10). D'après la proposition 3.3, l'endomorphisme $\mathcal{R}_-$ est aussi solution de (mCYBE) de constante c. D'où le résultat demandé. $\square$

Proposition 3.14. *Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie d'une algèbre associative de dimension finie et soit $\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle$ une forme bilinéaire, symétrique, non-dégénére pour laquelle la multiplication est symétrique. On munit $\mathfrak{g}^2$ de la forme suivante :*

$$\begin{array}{cccc}\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle_2{}' : & \mathfrak{g}^2\times\mathfrak{g}^2 & \to & \mathbf{K}\\ & ((x,y),(x',y')) & \mapsto & \langle x\,|\,x'\rangle-\langle y\,|\,y'\rangle\,.\end{array}$$

Soit c une constante. Si R est une solution de l'équation de Yang-Baxter modifiée de constante c et $\mathcal{R}$ l'endomorphisme de $\mathfrak{g}^2$, défini, pour tout $(x,y)\in\mathfrak{g}^2$, par :

$$\mathcal{R}(x,y):=(R(x-y)+cy,R(x-y)+cx).$$

Alors l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}^2$ est munie du $\mathcal{R}$-crochet de Poisson cubique, défini, pour tous $F,G\in\mathcal{F}(\mathfrak{g}^2)$ et pour tout $(x,y)\in\mathfrak{g}^2$, par :

$$\begin{aligned}\{F,G\}^C_{\mathcal{R}}(x,y) &:= \left\langle[(x,y),\nabla_{(x,y)}F]\,|\,\mathcal{R}((x,y)\nabla_{(x,y)}G(x,y))\right\rangle_2\\ &\quad -(G\leftrightarrow F).\end{aligned}$$

Preuve:
Il suffit de montrer, d'après la proposition 2.30, que $\mathcal{R}$ est une solution de (mCYBE) de constante c. Comme R est par hypothèse une solution de (mCYBE) de constante c, d'après la proposition 3.3 l'endomorphisme $\mathcal{R}$ est solution de (mCYBE) de constante c. $\square$

Chapitre 4

Le réseau de 2-Toda associé à une algèbre de Lie simple et son intégrabilité

Le *réseau de* 2*-Toda en dimension infinie* est un système d'équations différentielles, qui a été introduit en 1982 par Ueno et Takasaki [50] et après par Adler et van Moerbeke [6] puis Carlet [11]. Il s'agit de la paire d'équations de Lax suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial(L,M)}{\partial t} &= [(L_u, L_u), (L, M)], \\ \dfrac{\partial(L,M)}{\partial s} &= [(M_\ell, M_\ell), (L, M)], \end{cases}$$

où

$$(L, M) = \left(\begin{pmatrix} \ddots & \ddots & & & & 0 & \\ \ddots & a_{11} & 1 & & & & \\ & a_{2,1} & \ddots & \ddots & & & \\ & & \ddots & \ddots & 1 & & \\ * & & & a_{n,n-1} & a_{nn} & 1 & \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & & & & * & \\ \ddots & b_{11} & b_{12} & & & & \\ & b_{2,1} & \ddots & \ddots & & & \\ & & \ddots & \ddots & b_{n-1,n} & & \\ 0 & & & b_{n,n-1} & b_{nn} & \ddots & \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \right),$$

L_u est la partie triangulaire supérieure de L et M_ℓ est la partie triangulaire strictement inférieure de M.

Le réseau de 2-Toda infini se restreint à $\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C}) \times \mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})$. A l'aide d'une construction d'une $\mathcal{R}$-matrice sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C}) \times \mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})$ nous montrons que ce nouveau système est hamiltonien et qu'il existe deux Casimirs linéaires, qui sont $\mathrm{Trace}(L)$ et $\mathrm{Trace}(M)$. Cela nous permet de restreindre l'étude du réseau de 2-Toda à $\mathfrak{sl}_n(\mathbf{C}) \times \mathfrak{sl}_n(\mathbf{C})$. On appelle le système obtenu *réseau de* 2*-Toda associé à* $\mathfrak{sl}_n(\mathbf{C})$.

La question d'intégrabilité au sens de Liouville du réseau de 2-Toda associé à $\mathfrak{sl}_n(\mathbf{C})$ se pose, car même avec l'utilisation des fonctions, qui sont construites à l'aide du théorème de Adler-Kostant-Symes nous n'avons pas assez de fonctions. Nous montrons à l'aide du théorème 3.11 que les coefficients $F_{j,i}$ en λ^j de Trace$(\lambda L+M)^{i+1}$, pour $1 \leq i \leq n-1$ et $0 \leq j \leq n$ donnent un système intégrable au sens Liouville contenant le réseau de 2-Toda associé à $\mathfrak{sl}_n(\mathbf{C})$.

Nous montrons que la définition, la construction et l'intégrabilité du réseau de 2-Toda associé à $\mathfrak{sl}_n(\mathbf{C})$ se généralisent aux algèbres de Lie simples. Dans la première section de ce chapitre nous définissons le réseau de 2-Toda associé à une algèbre de Lie simple et nous montrons son intégrabilité au sens de Liouville.

Nous montrons ensuite qu'une première restriction du réseau de 2-Toda associé à $\mathfrak{g}$ donne le système intégrable connu comme le réseau de Toda et une deuxième donne un autre système intégrable sur $\mathfrak{g}$.

Dans la dernière section de ce chapitre nous montrons qu'en dimension infinie la construction du système intégrable du réseau de 2-Toda donne le système intégrable du réseau de Pfaff.

4.1 Le réseau de 2-Toda associé à une algèbre de Lie simple

4.1.1 Quelques définitions

Commençons par quelques notations. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple complexe de dimension finie de rang ℓ, munie de sa forme de Killing $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$. Soient $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$, Φ le système de racines de $\mathfrak{g}$ associé à $\mathfrak{h}$, $(\alpha_1, \dots, \alpha_\ell)$ une base de Φ et $(h_1, \dots, h_\ell)$ une base de $\mathfrak{h}$. Pour tout α dans $\Phi \backslash \{a_i, -\alpha_i, 1 \leq i \leq \ell\}$ notons e_α un vecteur propre non nul associé à α et pour tout $1 \leq i \leq \ell$ notons e_i et e_{-i} des vecteurs non nuls associé aux racines respectivement α_i et $-\alpha_i$. On rappelle la décomposition de $\mathfrak{g}$ suivante (voir (2.44)) :

$$\mathfrak{g} := \bigoplus_{k \in \mathbf{Z}} \mathfrak{g}_k,$$

où, pour $k \neq 0$, $\mathfrak{g}_k = \text{Vect}\{e_\alpha \mid \alpha \in \Phi, |\alpha| = k\}$ et $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$. On note, pour tout $k \in \mathbf{Z}$,

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_{<k} &:= \textstyle\bigoplus_{i<k} \mathfrak{g}_i, & \mathfrak{g}_{\leq k} &:= \textstyle\bigoplus_{i \leq k} \mathfrak{g}_i \\ \mathfrak{g}_{>k} &:= \textstyle\bigoplus_{i>k} \mathfrak{g}_i, & \mathfrak{g}_{\geq k} &:= \textstyle\bigoplus_{i \geq k} \mathfrak{g}_i. \end{aligned}$$

On utilise aussi les notations $\mathfrak{g}_+ := \mathfrak{g}_{\geq 0}$ et $\mathfrak{g}_- := \mathfrak{g}_{<0}$.

Définition 4.1. *On appelle* l'espace de phases du réseau de 2-Toda*, la sous-variété $\mathcal{T}^2$ de $\mathfrak{g}^2$ définie par :*

$$\mathcal{T}^2 := \mathfrak{g}_{\leq 0} \times \mathfrak{g}_{\geq -1} + (e, 0), \;\; \text{où } e = \sum_{i=1}^{\ell} e_i, \tag{4.1}$$

où e_i, pour $1 \leq i \leq \ell$, est un vecteur propre non nul de $\mathfrak{g}_1$ associé à la racine simple α_i. Tout élément (L, M) de $\mathcal{T}^2$ est donc de la forme

$$\begin{cases} L &= \sum_{i=1}^{\ell}(a_i h_i + e_i) + \sum_{\alpha \in \Phi_-} a_\alpha e_\alpha, \\ M &= \sum_{i=1}^{\ell}(b_i h_i + b_{-i} e_{-i}) + \sum_{\alpha \in \Phi_+} b_\alpha e_\alpha, \end{cases} \tag{4.2}$$

où e_{-i}, pour $1 \leq i \leq \ell$, est un vecteur propre non nul associé à la racine $-\alpha_i$, et inversement pour tous L, M de la forme (4.2) le couple $(L, M) \in \mathcal{T}^2$.

Exemple 4.2. *(1) Pour l'algèbre de Lie simple $\mathfrak{sl}_n(\mathbf{C})$, on peut prendre $\mathfrak{h}$ la sous-algèbre de Lie formée par les matrices diagonales, auquel cas $\mathfrak{g}_+$ (resp. $\mathfrak{g}_-$) est la sous-algèbre de $\mathfrak{sl}_n(\mathbf{C})$ formée par les matrices triangulaires supérieures (resp. strictement inférieures). L'espace de phase $\mathcal{T}^2$ est formé par des couples de matrices de $\mathfrak{sl}_n(\mathbf{C}) \times \mathfrak{sl}_n(\mathbf{C})$ de la forme :*

$$(L, M) = \left(\begin{pmatrix} a_{11} & 1 & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & b_{n,n-1} & b_{nn} \end{pmatrix} \right). \tag{4.3}$$

(2) Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de type G_2. On sait que les éléments de $\mathfrak{g}$ se réalisent à l'aide de matrices dans $\mathfrak{gl}_7(\mathbf{C})$. Une base d'une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ est (h_1, h_2) tels que

$$h_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad h_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et une base de vecteurs de racines simples est (e_1, e_2) tels que

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi l'espace de phase du réseau de 2-Toda associé à $G2$ est formé par des couples de matrices (L, M) de $\mathfrak{gl}_7(\mathbf{C}) \times \mathfrak{gl}_7(\mathbf{C})$, tels que

$$L = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & -a_1 + a_2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_5 & -a_4 & 2\,a_1 - a_2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2\,a_6 & -a_5 & a_3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 6\,a_7 & -2\,a_6 & 0 & 2\,a_3 & -2\,a_1 + a_2 & 1 & 0 \\ 6\,a_8 & 0 & 2\,a_6 & -2\,a_5 & a_4 & a_1 - a_2 & -1 \\ 0 & -6\,a_8 & -6\,a_7 & 4\,a_6 & -a_5 & -a_3 & -a_1 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} y_1 & b_3 & -b_5 & 4\,b_6 & -6\,y_7 & 6\,b_8 & 0 \\ y_9 & -y_1+y_2 & -b_4 & 2\,b_5 & -2\,b_6 & 0 & -6\,b_8 \\ 0 & -y_{10} & 2\,y_1-y_2 & 2\,b_3 & 0 & 2\,b_6 & 6\,y_7 \\ 0 & 0 & y_9 & 0 & b_3 & b_5 & 2\,b_6 \\ 0 & 0 & 0 & 2\,y_9 & -2\,y_1+y_2 & b_4 & b_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & y_{10} & y_1-y_2 & -b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -y_9 & -y_1 \end{pmatrix}.$$

Définition 4.3. *On appelle* le réseau de 2-Toda, associé à une algèbre de Lie simple $\mathfrak{g}$*, le système d'équations différentielles sur* $\mathcal{T}^2$ *donné par la paire d'équations de Lax suivantes :*

$$\frac{\partial(L,M)}{\partial t} = [(L_+,L_+),(L,M)], \tag{4.4}$$

$$\frac{\partial(L,M)}{\partial s} = [(M_-,M_-),(L,M)], \tag{4.5}$$

où (L,M) *est un élément de* $\mathcal{T}^2$*,* L_+ *(resp.* M_-*) est le projeté de* L *(resp. de* M*) sur* $\mathfrak{g}_+$ *(resp.* $\mathfrak{g}_-$*).*

Remarque 4.4. *La définition 4.3 sera justifiée par la proposition 4.6 ou le corollaire 4.9, qui impliquent qu'une solution de (4.4) partant d'un point de l'espace affine défini par (4.2) reste dans cet espace pour tout temps pour lequel elle est définie.*

4.1.2 L'espace de phases est une sous-variété de Poisson

Considérons la décomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_+ \oplus \mathfrak{g}_-$, où $\mathfrak{g}_- := \mathfrak{g}_{<0} = \sum_{k<0} \mathfrak{g}_k$ et $\mathfrak{g}_+ := \mathfrak{g}_{\geq 0} = \sum_{k\geq 0} \mathfrak{g}_k$. D'après la construction 1 du paragraphe 3.1, l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}^2 := \mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$ est une somme directe des sous-algèbres de Lie $\mathfrak{g}^2_+$ et $\mathfrak{g}^2_-$, où

$$\mathfrak{g}^2_+ := \{(x,x) \mid x \in \mathfrak{g}\} \quad \text{et} \quad \mathfrak{g}^2_- := \{(x,y) \mid x \in \mathfrak{g}_- \text{ et } y \in \mathfrak{g}_+\}.$$

Chaque $(x,y) \in \mathfrak{g}^2$ se décompose comme somme des deux termes suivants :

$$\begin{cases} (x,y)_+ = (x_+ + y_-, x_+ + y_-) \in \mathfrak{g}^2_+ \\ (x,y)_- = (x_- - y_-, y_+ - x_+) \in \mathfrak{g}^2_-. \end{cases} \tag{4.6}$$

Soit $\mathcal{R}$ la différence des projections de $\mathfrak{g}^2$ sur les sous-algèbres de Lie $\mathfrak{g}^2_+$ et $\mathfrak{g}^2_-$, qui est, d'après (4.6), égale à

$$\mathcal{R}(x,y) = (x_+ - x_- + 2y_-, y_- - y_+ + 2x_+). \tag{4.7}$$

On munit $\mathfrak{g}^2$ de la forme bilinéaire, symétrique, Ad-invariante, non-dégénérée suivante

$$\begin{array}{cccc} \langle\cdot\,|\,\cdot\rangle_2 & : & \mathfrak{g}^2\times\mathfrak{g}^2 & \to & \mathbf{C} \\ & & ((x_1,y_1),(x_2,y_2)) & \mapsto & \langle x_1\,|\,x_2\rangle + \langle y_1\,|\,y_2\rangle\,. \end{array} \tag{4.8}$$

Remarque 4.5. *Soit* E *et* F *deux sous-espaces vectoriels de* $\mathfrak{g}$*. L'orthogonal par rapport à la forme* $\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle_2$ *de* $E\times F$ *est le produit d'orthogonaux de* E *et de* F *par rapport à la forme de Killing. En particulier, pour tout* $i,j \in \mathbf{Z}$*, on a :*

$$(\mathfrak{g}_i \times \mathfrak{g}_j)^\perp = \mathfrak{g}_i^\perp \times \mathfrak{g}_j^\perp, \qquad et \qquad (\mathfrak{g}_{\leq i}\times\mathfrak{g}_{\geq j})^\perp = \mathfrak{g}_{<-i}\times\mathfrak{g}_{>-j}.$$

Il suit des paragraphes 3.3.1 et 3.3.3, que la variété $\mathfrak{g}^2$ est munie du $\mathcal{R}$-crochet de Poisson, défini, pour toutes fonctions $F, G \in \mathcal{F}(\mathfrak{g}^2)$ et pour tout $(x, y) \in \mathfrak{g}^2$, par :

$$\{F, G\}_{\mathcal{R}}(x, y) = \frac{1}{2}\big\langle (x, y) \,|\, [\mathcal{R}\nabla_{(x,y)}F, \nabla_{(x,y)}G] + [\nabla_{(x,y)}F, \mathcal{R}\nabla_{(x,y)}G]\big\rangle_2 \tag{4.9}$$

où $\nabla_{(x,y)}F$ est le gradient de F en $(x, y) \in \mathfrak{g}^2$ calculé à l'aide de la forme $\langle \cdot\,|\,\cdot \rangle_2$ comme dans (3.45).

Proposition 4.6. *La variété $\mathcal{T}^2$ est une sous-variété de Poisson de $(\mathfrak{g}^2, \{\cdot\,,\cdot\}_{\mathcal{R}})$ de dimension* $\dim \mathfrak{g} + 2\ell$.

Preuve:
Montrons d'abord que $\dim \mathcal{T}^2 = \dim \mathfrak{g} + 2\ell$. Puisque $\mathcal{T}^2 = (e, 0) + \mathfrak{g}_{\leq 0} \times \mathfrak{g}_{\geq -1}$, alors

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{T}^2 &= \dim \mathfrak{g}_{\leq 0} + \dim \mathfrak{g}_{\geq -1} \\ &= \dim \mathfrak{g} + \dim \mathfrak{g}_0 + \dim \mathfrak{g}_{-1} \\ &= \dim \mathfrak{g} + 2\ell. \end{aligned}$$

Nous proposons deux preuves différentes pour montrer que $\mathcal{T}^2$ est une sous-variété de Poisson de $(\mathfrak{g}^2, \{\cdot\,,\cdot\}_{\mathcal{R}})$.

(1) Première méthode
Soient $\mathcal{I}$ l'idéal des fonctions nulles sur $\mathcal{T}^2$, F un élément de $\mathcal{I}$, (x, y) un élément de $\mathcal{T}^2$ et $(z, s) \in \mathfrak{g}_{\leq 0} \times \mathfrak{g}_{\geq -1}$, on a :

$$\big\langle \nabla_{(x,y)}F \,|\, (z, s)\big\rangle_2 = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{F(x + tz, y + ts) - F(x, y)}{t} = 0,$$

car $F \in \mathcal{I}$ et $(x + tz, y + ts) \in \mathcal{T}^2$. Ce qui implique que

$$\nabla_{(x,y)}F \in (\mathfrak{g}_{\leq 0} \times \mathfrak{g}_{\geq -1})^{\perp}.$$

Or d'après la remarque 4.5 on a $(\mathfrak{g}_{\leq 0} \times \mathfrak{g}_{\geq -1})^{\perp} = \mathfrak{g}_{\leq 0}^{\perp} \times \mathfrak{g}_{\geq -1}^{\perp} = \mathfrak{g}_{<0} \times \mathfrak{g}_{>1}$. D'où

$$\nabla_{(x,y)}F \in \mathfrak{g}_{<0} \times \mathfrak{g}_{>1} \subset \mathfrak{g}^2_{-}.$$

Soit $G \in \mathcal{F}(\mathfrak{g}^2)$. Le $\mathcal{R}$-crochet de Poisson de F et G est nul sur $\mathcal{T}^2$. En effet,

$$\begin{aligned} \{F, G\}_{\mathcal{R}}(x, y) &= \big\langle (x, y) \,|\, [(\nabla_{(x,y)}F)_+, (\nabla_{(x,y)}G)_+]\big\rangle_2 \\ &\quad -\big\langle (x, y) \,|\, [(\nabla_{(x,y)}F)_-, (\nabla_{(x,y)}G)_-]\big\rangle_2 \\ &= -\big\langle (x, y) \,|\, [\nabla_{(x,y)}F, (\nabla_{(x,y)}G)_-]\big\rangle_2, \text{ car } \nabla_{(x,y)}F \in \mathfrak{g}^2_- \\ &= -\big\langle [(x, y), \nabla_{(x,y)}F] \,|\, (\nabla_{(x,y)}G)_-\big\rangle_2 \\ &= 0, \end{aligned}$$

car $[(x, y), \nabla_{(x,y)}F]$ appartient à $\mathfrak{g}_{\leq 0} \times \mathfrak{g}_{>0}$, qui est contenu dans $(\mathfrak{g}^2_-)^{\perp} = \mathfrak{g}_-^{\perp} \times \mathfrak{g}_+^{\perp}$ (on rappelle que $(x, y) \in \mathfrak{g}_{\leq 1} \times \mathfrak{g}_{\geq -1}$ et $\nabla_{(x,y)}F \in \mathfrak{g}_{<0} \times \mathfrak{g}_{>1}$). Ceci signifie que $\mathcal{I}$ est un idéal de Poisson, donc la variété $\mathcal{T}^2$ correspondante est une sous-variété de Poisson.

(2) Deuxième méthode

La sous-variété $\mathcal{T}^2$ qui est par définition $(e,0)+\mathfrak{g}_{\leq 0}\times\mathfrak{g}_{\geq -1}$ s'écrit aussi

$$\mathcal{T}^2 = (e,-e) + \Delta_a(\mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_{-1}) \oplus \mathfrak{g}^2_-, \tag{4.10}$$

où $\Delta_a(\mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_{-1}) = \{(x,-x) \mid x \in (\mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_{-1})\}$. Vérifions que les conditions de la proposition 2.21 sont satisfaites.

(a) Montrons que $\Delta_a(\mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_{-1}) \oplus \mathfrak{g}^2_-$ est une sous-variété de Poisson sur $\mathfrak{g}^2$ pour le crochet $\{\cdot\,,\cdot\}_{\mathcal{R}}$. Il est clair, d'après les deux formules précédentes de $\mathcal{T}^2$ que $\Delta_a(\mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_{-1}) \oplus \mathfrak{g}^2_- = \mathfrak{g}_{\leq 0}\times\mathfrak{g}_{\geq -1}$. Or l'orthogonal de $\mathfrak{g}_{\leq 0}\times\mathfrak{g}_{\geq -1}$ est $\mathfrak{g}_{<0}\times\mathfrak{g}_{>1} \subset \mathfrak{g}^2_-$, qui est bien un idéal de Lie pour le crochet $[\cdot\,,\cdot]_{\mathcal{R}}$, car, pour tous $(x,y)\in\mathfrak{g}_{\leq -1}\times\mathfrak{g}_{\geq 2}$ et $(z,s)\in\mathfrak{g}^2$, on a :

$$[(x,y),(z,s)]_{\mathcal{R}} = -[(x,y),(z,s)_-] \in \mathfrak{g}_{<-1}\times\mathfrak{g}_{>1} \subset \mathfrak{g}_{<0}\times\mathfrak{g}_{>1}.$$

(b) pour tous $(x,y),(x',y')\in\mathfrak{g}^2$, on a :

$$\langle (e,-e) \,|\, [(x,y),(x',y')]_{\mathcal{R}}\rangle_2 = \big\langle (e,-e) \,|\, [(x,y)_+,(x',y')_+] - [(x,y)_-,(x',y')_-]\big\rangle_2. \tag{4.11}$$

Soit $(u,u) = [(x,y)_+,(x',y')_+]$ et $(v,w) = [(x,y)_-,(x',y')_-]$. Remarquons que l'élément (v,w) est dans $\mathfrak{g}_{\leq -2}\times\mathfrak{g}_{\geq 0}$. Puisque $e\in\mathfrak{g}_1$, on a

$$\begin{aligned}
\big\langle (e,-e) \,|\, [(x,y),(x',y')]_+ - [(x,y),(x',y')]_-\big\rangle_2 &= \langle (e,-e) \,|\, (u,u)\rangle_2 - \langle (e,-e) \,|\, (v,w)\rangle_2\\
&= \langle e \,|\, u\rangle - \langle e \,|\, u\rangle - \langle e \,|\, v\rangle + \langle e \,|\, w\rangle\\
&= \langle e \,|\, v\rangle + \langle e \,|\, w\rangle\\
&= 0
\end{aligned}$$

où pour passer de l'avant-dernière à la dernière ligne, on a utilisé l'orthogonalité de $\mathfrak{g}_1$ avec $\mathfrak{g}_{\leq -2}$ et $\mathfrak{g}_{>0}$.

Les conditions *(1)* et *(2)* de la proposition 2.21 étant remplies, l'espace affine $\mathcal{T}^2 = (e,-e) + \Delta_a(\mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_{-1}) \oplus \mathfrak{g}^2_-$ est une sous-variété de Poisson de $\mathfrak{g}^2$ pour le crochet $\{\cdot\,,\cdot\}_{\mathcal{R}}$.

□

Remarque 4.7. *Ce que nous venons de démontrer reste vraie si la forme bilinéaire sur $\mathfrak{g}^2$ est*

$$\begin{array}{rccc}
\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle_2' : & \mathfrak{g}^2\times\mathfrak{g}^2 & \to & \mathbf{C}\\
& ((x_1,y_1),(x_2,y_2)) & \mapsto & \langle x_1 \,|\, x_2\rangle - \langle y_1 \,|\, y_2\rangle\,.
\end{array}$$

Dans ce cas il suffit de prendre

$$\mathcal{T}^2 = (e,e) + \Delta(\mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_{-1}) + \mathfrak{g}^2_-,$$

où $\Delta(\mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_{-1}) = \{(x,x) \mid x \in \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_{-1}\}$.

4.1.3 Le réseau de 2-Toda est un système hamiltonien

Proposition 4.8. *Soient H et $\tilde{H}$ les fonctions définies en tout point (x, y) de $\mathfrak{g}^2$ par :*

$$H(x, y) := \frac{1}{2} \langle x \mid x \rangle \quad \text{et} \quad \tilde{H}(x, y) := \frac{1}{2} \langle y \mid y \rangle . \tag{4.12}$$

L'équation du champ hamiltonien $\mathcal{X}_H$ (resp. $\mathcal{X}_{\tilde{H}}$), vis à vis du crochet de Poisson $\{\cdot\,,\cdot\}_{\mathcal{R}}$, défini en (4.9) décrit sur $\mathcal{T}^2$ l'équation de mouvement (4.4) (resp. (4.5)) du réseau de 2-Toda.

Preuve:
Puisqu'on utilise la même méthode pour déterminer les champs hamiltoniens $\mathcal{X}_H$ et $\mathcal{X}_{\tilde{H}}$ nous ne prouvons le résultat que pour $\mathcal{X}_H$. La fonction H étant Ad-invariante sur $\mathfrak{g}^2$, d'après les formules (2.28) et (4.6), on a :

$$\mathcal{X}_H(L, M) = [(\nabla_{(L,M)} H)_+, (L, M)] = [(L, 0)_+, (L, M)] = [(L_+, L_+), (L, M)]. \tag{4.13}$$

□

Il suit des propositions 4.6 et 4.8 que

Corollaire 4.9. *Les champs hamiltoniens du réseau de 2-Toda sont tangents à $\mathcal{T}^2$.*

Exemple 4.10. *Lorsque $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(\mathbf{C})$ la forme de Killing est proportionnelle à*

$$(X, Y) \mapsto \mathrm{Trace}(XY), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}$$

et les hamiltoniens du réseau de 2-Toda classique sont alors :

$$H(X, Y) = \frac{1}{2} \mathrm{Trace}\, X^2, \qquad \tilde{H}(X, Y) = \frac{1}{2} \mathrm{Trace}\, Y^2, \qquad \forall X, Y \in \mathfrak{sl}_n(\mathbf{C}). \tag{4.14}$$

4.1.4 Le $\mathcal{R}$-crochet de Poisson sur $\mathcal{T}^2$

Dans ce paragraphe, on montre que le rang de la restriction de la structure de Poisson $\{\cdot\,,\cdot\}_{\mathcal{R}}$ à $\mathcal{T}^2$ vaut $\dim \mathfrak{g} + \ell$.

Commençons par quelques généralités. Soit E un espace vectoriel muni d'une structure de Poisson linéaire. La restriction d'une structure de Poisson linéaire à un sous-espace affine T est forcément affine, lorsque T est une sous-variété de Poisson. Or une structure affine de Poisson est la somme d'une structure de Poisson constante et d'une linéaire, pourvu que l'on choisisse une origine. La structure de Poisson linéaire du sous-espace affine coïncide avec la structure linéaire du sous-espace vectoriel sous-jacent à T, que nous pouvons montrer qu'il est une sous-variété de Poisson. Dans notre cas toutefois, le $\mathcal{R}$-crochet de Poisson sur $\mathcal{T}^2$, qui est donc à priori affine, peut être rendu linéaire par un choix judicieux de coordonnées affines. Nous donnons un argument théorique expliquant pourquoi il en est ainsi.

Proposition 4.11. *La variété de Poisson $(\mathcal{T}^2, \{\cdot\,,\cdot\}_{\mathcal{R}})$ est isomorphe à la variété de Poisson produit $(\mathfrak{g}^*, \{\cdot\,,\cdot\}) \times (\mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1, \{\cdot\,,\cdot\}_R)$, où $\{\cdot\,,\cdot\}$ est le crochet de Lie-Poisson sur $\mathfrak{g}^*$, R est la différence des projections sur $\mathfrak{g}_+$ et $\mathfrak{g}_-$ et $\{\cdot\,,\cdot\}_R$ est le R-crochet de Poisson sur $\mathfrak{g}$ (restreint à $\mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$).*

Preuve:
D'après la proposition 4.6, $\mathcal{T}^2 = (e,-e)+E$, où $E = \mathfrak{g}^2_- \oplus \Delta_a(\mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_{-1})$ est une sous-variété de Poisson de $(\mathfrak{g}^2, \{\cdot\,,\cdot\}_{\mathcal{R}})$. La translation par $(e,-e)$, qui est un isomorphisme de Poisson d'après la proposition 2.21, se restreint donc en un isomorphisme de Poisson entre $\mathcal{T}^2$ et le sous-espace vectoriel $E := \mathfrak{g}^2_- \oplus \Delta_a(\mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_{-1}) \subset \mathfrak{g}^2$. D'après la proposition 2.20, l'orthogonal[1] de E est un idéal de Lie de $\mathfrak{g}^2$ (munie du crochet $[\cdot\,,\cdot]_{\mathcal{R}}$), et la structure de Poisson restreinte sur E est isomorphe à la structure de Lie-Poisson sur le dual $(\mathfrak{g}^2/E^\perp)^*$ de l'algèbre de Lie quotient $\mathfrak{g}^2/E^\perp$, où $\mathfrak{g}^2$ est munie du crochet $[\cdot\,,\cdot]_{\mathcal{R}}$. Determinons le quotient $\mathfrak{g}^2/E^\perp$. L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}^2$ (munie du crochet $[\cdot\,,\cdot]_{\mathcal{R}}$) est isomorphe à la somme directe des algèbres de Lie $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_{\leq -1}$ et $\mathfrak{g}_{\geq 0}$, l'isomorphisme étant donné, pour tous $x \in \mathfrak{g}, y_- \in \mathfrak{g}_-, y_+ \in \mathfrak{g}_+$, par

$$(x, y_-, y_+) \to (x,x) + (y_-, y_+).$$

On vérifie immédiatement que $E^\perp = \mathfrak{g}_- \times \mathfrak{g}_{\geq 2}$. Via l'isomorphisme entre $\mathfrak{g}^2$ et $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}_- \times \mathfrak{g}_+$ le sous-espace $E^\perp$ s'identifie à $(0, \mathfrak{g}_-, \mathfrak{g}_{\geq 2})$. Le quotient $\mathfrak{g}^2/E^\perp$ est donc la somme directe de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ (munie du crochet usuel) et de l'algèbre de Lie quotient $\mathfrak{g}_+/\mathfrak{g}_{\geq 2}$. En conclusion, $\mathcal{T}^2$ est isomorphe au dual de la somme directe d'algèbres de Lie $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}_+/\mathfrak{g}_{\geq 2}$, muni de la structure de Lie-Poisson, et est donc isomorphe au produit de la variété de Poisson $\mathfrak{g}^*$ (munie du crochet de Lie-Poisson) avec $(\mathfrak{g}_+/\mathfrak{g}_{\geq 2})^*$ (munie du crochet de Lie-Poisson). Pour achever la démonstration, il suffit de voir à l'aide de la proposition 2.14 que $\mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ est une sous-variété de Poisson de $(\mathfrak{g}, \{\cdot\,,\cdot\}_R)$ isomorphe à la structure de Lie-Poisson sur le dual de l'algèbre de Lie quotient $\mathfrak{g}/(\mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1)^\perp = \mathfrak{g}_+/\mathfrak{g}_{\geq 2}$.

□

L'isomorphisme donné dans la proposition ci-dessus permet de calculer le rang de la structure de Poisson sur $\mathcal{T}^2$. Nous donnons le résultat sous forme de proposition.

Proposition 4.12. *Le rang de la restriction du $\mathcal{R}$-crochet de Poisson $\{\cdot\,,\cdot\}_{\mathcal{R}}$ à la variété $\mathcal{T}^2$ est* $\dim \mathfrak{g} + \ell$.

Preuve:
D'après la proposition 4.11 la sous-variété de Poisson $(\mathcal{T}^2, \{\cdot\,,\cdot\}_{\mathcal{R}})$ est isomorphe à la variété de Lie-Poisson $(\mathfrak{g}^*, \{\cdot\,,\cdot\}) \times ((\mathfrak{g}_{\geq 0}/\mathfrak{g}_{\geq 2})^*, \{\cdot\,,\cdot\})$. Ce résultat prouve que le rang de la restriction du $\mathcal{R}$-crochet de Poisson $\{\cdot\,,\cdot\}_{\mathcal{R}}$ à la variété $\mathcal{T}^2$ est la somme du rang de la structure de Lie-Poisson sur $\mathfrak{g}^*$, soit $\dim \mathfrak{g}^* - \ell$, et du rang du crochet de Lie-Poisson sur $(\mathfrak{g}_{\geq 0}/\mathfrak{g}_{\geq 2})^*$.

Calculons ce dernier rang. Soit $(z_1, \ldots, z_{2\ell})$ le système de coordonnées sur $\mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$, tel que

$$\left\{ \begin{array}{rcl} z_i(x) &=& \langle h_i \,|\, x \rangle\,, \\ z_{i+\ell}(x) &=& \langle e_{-i} \,|\, x \rangle\,, \end{array} \right. \qquad \forall i \in \{1 \ldots, \ell\},$$

où, pour $1 \leq i \leq \ell$ l'élément e_{-i} est un vecteur propre non nul associé à la racine $-\alpha_i$. Le crochet de Lie-Poisson entre ces fonctions coordonnées est donné par les formules suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \{z_i, z_j\} &=& \{z_{i+\ell}, z_{j+\ell}\} = 0, \\ \{z_{i+\ell}, z_j\} &=& c_{ij} z_{i+\ell}, \end{array} \right. \qquad \forall i,j \in \{1, \ldots, \ell\},$$

[1]. $E^\perp$ est l'orthogonal de E calculé par rapport à la forme bilinéaire (4.8)

où $C := (c_{ij})_{1\leq i,j\leq \ell}$ est la matrice de Cartan de $\mathfrak{g}$. Donc la matrice de Poisson $M = (\{z_i, z_j\})_{1\leq i,j\leq 2\ell}$ est égale à

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -{}^T\!A \\ A & 0 \end{pmatrix},$$

où A est la matrice vC avec v est le vecteur ligne $(z_{1+\ell}, \ldots, z_{2\ell})$ et C est la matrice de Cartan. La matrice C étant inversible ceci implique, que le rang de la matrice A est ℓ, donc le rang de M est 2ℓ et par suite le rang de la structure de Lie-Poisson de $(\mathfrak{g}_{\geq 0}/\mathfrak{g}_{\geq 2})^*$ est 2ℓ. $\square$

Nous donnons aussi une démonstration directe de la proposition 4.12. Commençons par les trois lemmes suivants :

Lemme 4.13. *Soient $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$, Φ l'ensemble des racines de $\mathfrak{g}$ associé à $\mathfrak{h}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell$ une base de Φ, et $(h_1, \ldots, h_\ell) \cup (e_\gamma)_{\gamma\in\Phi}$ une base de Chevalley. Soit*

$$(x_i, y_j, x_{-\gamma}, y_\beta, y_{-\alpha_k}, \quad 1 \leq i, j, k \leq \ell, \quad \gamma, \beta \in \Phi_+)$$

le système de coordonnées de $\mathcal{T}^2$, défini, pour tout $(x + e, y) \in \mathcal{T}^2$, par :

$$\begin{array}{ll} x_i(x + e, y) = \langle h_i \,|\, x\rangle\,, & x_{-\gamma},(x + e, y) = \langle e_\gamma \,|\, x\rangle\,, \\ y_i(x + e, y) = \langle h_i \,|\, y\rangle\,, & y_\gamma(x + e, y) = \langle e_{-\gamma} \,|\, y\rangle\,, \\ y_{-\alpha_i}(x + e, y) = \langle e_{\alpha_i} \,|\, y\rangle\,, & \end{array}$$

L'expression du $\mathcal{R}$-crochet de Lie-Poisson sur $\mathcal{T}^2$ est :

$$\begin{array}{lcl} \{x_i, y_{-\alpha_j}\}_\mathcal{R} &=& \alpha_j(h_i) y_{-\alpha_j}, \\ \{y_i, y_{-\alpha_j}\}_\mathcal{R} &=& -\alpha_j(h_i) y_{-\alpha_j}, \\ \{y_\beta, y_{-\alpha_i}\}_\mathcal{R} &=& \{x_{-\beta}, y_{-\alpha_i}\}_\mathcal{R} = \{y_{-\alpha_j}, y_{-\alpha_i}\}_\mathcal{R} = 0, \\ \{x_i, x_j\}_\mathcal{R} = \{y_i, y_j\}_\mathcal{R} &=& \{x_i, y_j\}_\mathcal{R} = 0, \\ \{x_i, x_{-\gamma}\}_\mathcal{R} &=& \gamma(h_i) x_{-\gamma}, \\ \{x_i, y_\beta\}_\mathcal{R} &=& -\beta(h_i) y_\beta, \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} \{y_i, x_{-\gamma}\}_\mathcal{R} &=& \left\{ \begin{array}{ll} -\alpha_j(h_i) y_{-\alpha_j} & si\ \gamma = \alpha_j, 1 \leq j \leq \ell, \\ 0 & sinon, \end{array} \right. \\ \{y_i, y_\beta\}_\mathcal{R} &=& 0, \\ \{x_{-\gamma}, x_{-\beta}\}_\mathcal{R} &=& \eta_{\gamma+\beta} N_{\gamma,\beta} x_{-(\gamma+\beta)}, \\ \{y_\gamma, y_\beta\}_\mathcal{R} &=& \eta_{\gamma+\beta} N_{-\gamma,-\beta} y_{\gamma+\beta}, \\ \{x_{-\gamma}, y_\beta\}_\mathcal{R} &=& \eta_{\beta-\gamma} N_{\gamma,-\beta}((1 - \eta^+_{\beta-\gamma}) x_{\beta-\gamma} + \eta^+_{\beta-\gamma} y_{\beta-\gamma}) + \delta_{\gamma+\beta} \sum_{i=1}^r a_i(\beta)(x_i + y_i), \end{array}$$

où,

$$\delta_{\gamma+\beta} = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & si\ \gamma + \beta = 0, \\ 0, & sinon, \end{array} \right. \qquad \eta_\gamma = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & si\ \gamma \in \Phi, \\ 0, & sinon, \end{array} \right. \qquad \eta^+_\gamma = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & si\ \gamma \in \Phi_+, \\ 0, & sinon, \end{array} \right.$$

et $a_i(-\gamma)$ est donné par :

$$[e_\gamma, e_{-\gamma}] = h_{-\gamma} = \sum_{i=1}^{r} a_i(-\gamma) h_i.$$

Preuve:
Il est clair que, pour tout $1 \leq i \leq \ell$ et pour tout γ une racine positive, on a :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \nabla_{(x+e,y)} x_i & = & (h_i, 0), \\ \nabla_{(x+e,y)} y_i & = & (0, h_i), \\ \nabla_{(x+e,y)} x_{-\gamma} & = & (e_\gamma, 0), \\ \nabla_{(x+e,y)} y_\gamma & = & (0, e_{-\gamma}), \\ \nabla_{(x+e,y)} y_{-\alpha_i} & = & (0, e_{\alpha_i}). \end{array}\right. \tag{4.15}$$

On rappelle l'expression (4.7) de l'endomorphisme $\mathcal{R}$ suivante :

$$\mathcal{R}(z,s) = (z_+ - z_- + 2s_-, s_- - s_+ + 2z_+), \qquad \forall (z,s) \in \mathfrak{g}^2.$$

Ce qui implique que

$$\left\{\begin{array}{rcl} \mathcal{R}\nabla_{(x+e,y)} x_i & = & (h_i, 2h_i), \\ \mathcal{R}\nabla_{(x+e,y)} y_i & = & (0, -h_i), \\ \mathcal{R}\nabla_{(x+e,y)} x_{-\gamma} & = & (e_\gamma, 2e_\gamma), \\ \mathcal{R}\nabla_{(x+e,y)} y_\gamma & = & (2e_{-\gamma}, e_{-\gamma}), \\ \mathcal{R}\nabla_{(x+e,y)} y_{-\alpha_i} & = & (0, -e_{\alpha_i}). \end{array}\right. \tag{4.16}$$

Pour montrer les formules du lemme 4.13, il suffit d'utiliser les résultats des deux systèmes (4.15) et (4.16). Nous ne montrons que la première formule de ce lemme, car les autres se démontrent de la même façon. Par la formule (4.9) du $\mathcal{R}$-crochet de Poisson, on a :

$$\begin{array}{rcl} \left\{x_i, y_{-\alpha_j}\right\}_{\mathcal{R}}(x+e,y) & = & \frac{1}{2}\left\langle (x+e,y) \,|\, [\mathcal{R}\nabla_{(x+e,y)} x_i, \nabla_{(x+e,y)} y_{-\alpha_j}]\right\rangle_2 \\ & & +\frac{1}{2}\left\langle (x+e,y) \,|\, [\nabla_{(x+e,y)} x_i, \mathcal{R}\nabla_{(x+e,y)} y_{-\alpha_j}]\right\rangle_2 \\ & = & \frac{1}{2}\left\langle (x+e,y) \,|\, [(h_i, 2h_i), (0, e_{\alpha_j})] + [(h_i, 0), (0, -e_{\alpha_j})]\right\rangle_2 \\ & = & \left\langle y \,|\, [h_i, e_{\alpha_j}]\right\rangle \\ & = & \alpha_j(h_i) y_{-\alpha_j}(x+e,y). \end{array}$$

□

Lemme 4.14. *Soit $\mathrm{Rk}_{\mathcal{T}^2}\{\cdot\,,\cdot\}_{\mathcal{R}}$ le rang de la restriction à $\mathcal{T}^2$ du $\mathcal{R}$-crochet de Poisson. Les inégalités suivantes sont satisfaites :*

$$\dim \mathfrak{g} - \ell \leq \mathrm{Rk}_{\mathcal{T}^2}\{\cdot\,,\cdot\}_{\mathcal{R}} \leq \dim \mathfrak{g} + \ell$$

Preuve:

(1) Soit φ_1 l'application définie en (3.52), par :

$$\begin{array}{rccc} \varphi_1 & : & (\mathfrak{g}^2, \{\cdot\,,\cdot\}_{\mathcal{R}}) & \to & (\mathfrak{g}, \{\cdot\,,\cdot\}) \\ & & (x,y) & \mapsto & x+y. \end{array}$$

La restriction de φ_1 à la sous-variété $\mathcal{T}^2$ est notée φ. On sait, d'après le troisième point du corollaire 3.12 que φ_1 est un morphisme de Poisson, et d'après la proposition 4.6, la variété $\mathcal{T}^2$ est une sous-variété de Poisson de $(\mathfrak{g}^2, \{\cdot\,,\cdot\}_{\mathcal{R}})$. Cela implique que φ est un morphisme de Poisson. Il est évident que φ est surjective de $(\mathcal{T}^2, \{\cdot\,,\cdot\}_{\mathcal{R}})$ sur $(\mathfrak{g}, \{\cdot\,,\cdot\})$. Par suite,

$$\mathrm{Rk}_{\mathcal{T}^2}\{\cdot\,,\cdot\}_{\mathcal{R}} \geq \mathrm{Rk}\{\cdot\,,\cdot\}. \tag{4.17}$$

D'après l'équation (2.16) de la proposition 2.18, les Casimirs pour $\{\cdot\,,\cdot\}$ sont les fonctions Ad-invariantes sur l'algèbre de Lie simple $\mathfrak{g}$. Mais une famille de générateurs de l'algèbre de fonctions Ad-invariantes sur $\mathfrak{g}$ est de cardinal ℓ. Cela donne, en utilisant la remarque 2.3, l'égalité $\mathrm{Rk}\{\cdot\,,\cdot\} = \dim\mathfrak{g} - \ell$, qui permet de réécrire (4.17) sous la forme de l'inégalité suivante :

$$\mathrm{Rk}_{\mathcal{T}^2}\{\cdot\,,\cdot\}_{\mathcal{R}} \geq \dim\mathfrak{g} - \ell. \tag{4.18}$$

(2) Le premier résultat du corollaire 3.12 implique que la structure de Poisson $\{\cdot\,,\cdot\}_{\mathcal{R}}$ admet au moins ℓ Casimirs (ce sont les fonctions $P_i \circ \varphi_1$, pour tout $1 \leq i \leq \ell$), où $P_1, \ldots, P_\ell$ est une famille génératrice de l'algèbre de fonctions Ad-invariantes sur $\mathfrak{g}$. Puisque $\mathcal{T}^2$ est une sous-variété de Poisson de $(\mathfrak{g}^2, \{\cdot\,,\cdot\}_{\mathcal{R}})$, la restriction de ces Casimirs à $\mathcal{T}^2$ sont encore des Casimirs, qui restent indépendants, car φ est une submersion. Cela implique, d'après la remarque 2.3, que

$$\mathrm{Rk}_{\mathcal{T}^2}\{\cdot\,,\cdot\}_{\mathcal{R}} \leq \dim\mathcal{T}^2 - \ell = \dim\mathfrak{g} + \ell.$$

□

Lemme 4.15. *Soient $(\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell)$ une base de racines simples positives de $\mathfrak{g}$ et soient $y_{-\alpha_1}, \ldots, y_{-\alpha_\ell}$ les fonctions définies, pour tout $(x+e, y) \in \mathcal{T}^2$, par :*

$$y_{-\alpha_i}(x+e,y) = \langle e_{\alpha_i} \,|\, y\rangle, \qquad 1 \leq i \leq \ell.$$

Soit φ la restriction de φ_1 à $\mathcal{T}^2$ suivante :

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & (\mathcal{T}^2, \{\cdot\,,\cdot\}_{\mathcal{R}}) & \to & (\mathfrak{g}, \{\cdot\,,\cdot\}) \\ & (x+e,y) & \mapsto & x+e+y. \end{array}$$

Les champs hamiltoniens $\mathcal{X}_{y_{-\alpha_1}}, \ldots, \mathcal{X}_{y_{-\alpha_\ell}}$ sont indépendants sur un ouvert dense de $\mathcal{T}^2$ et tangents aux fibres de φ.

Preuve:

Soit x_j, pour $1 \leq j \leq \ell$ les fonctions définies, pour tout $(x+e, y) \in \mathcal{T}^2$, par $x_j(x,y) = \langle h_j \,|\, x\rangle$. D'après le lemme 4.13, on a, pour tous $1 \leq i, j \leq \ell$

$$\mathcal{X}_{y_{-\alpha_i}}[x_j] = \alpha_j(h_i) y_{-\alpha_i} = c_{ji} y_{-\alpha_i},$$

où $C = (c_{ij})_{1\le i,j\le \ell}$ est la matrice de Cartan de $\mathfrak{g}$. L'inversibilité de C implique donc l'indépendance des champs hamiltoniens $\mathcal{X}_{y_{-\alpha_1}}, \ldots, \mathcal{X}_{y_{-\alpha_\ell}}$ sur un ouvert dense de $\mathcal{T}^2$. Il reste à montrer que pour tout $F \in \mathcal{F}(\mathfrak{g})$ et pour tout $1 \le i \le \ell$,

$$\mathcal{X}_{y_{-\alpha_i}}[\varphi^* F] = 0.$$

Soient $F \in \mathcal{F}(\mathfrak{g})$ et $(x+e, y) \in \mathcal{T}^2$. Soit $\tilde{y}_{-\alpha_i}$ la fonction définie sur $\mathfrak{g}^2$ tel que sa restriction à $\mathcal{T}^2$ est la fonction $y_{-\alpha_i}$. L'expression du champ hamiltonien $\mathcal{X}_{y_{-\alpha_i}}$ au point $(x+e, y)$ en $\varphi^* F$ est donnée par :

$$\begin{aligned}
\mathcal{X}_{y_{-\alpha_i}}(x+e,y)[\varphi^*F] &= \{F\circ\varphi, y_{-\alpha_i}\}_{\mathcal{R}}(x+e,y)\\
&= \{F\circ\varphi_1, \tilde{y}_{-\alpha_i}\}_{\mathcal{R}}(x+e,y)\\
&= \big\langle (x+e,y)\,|\,[\nabla_{(x+e,y)}(F\circ\varphi_1), \nabla_{(x+e,y)}\tilde{y}_{-\alpha_i}]_{\mathcal{R}}\big\rangle_2. \qquad (4.19)
\end{aligned}$$

De plus, en utilisant la dernière formule du système (4.15) et par un simple calcul, on vérifie que

$$\left\{\begin{array}{lcl}
\nabla_{(x+e,y)}(F\circ\varphi_1) &=& (\nabla_{x+e+y}F, \nabla_{x+e+y}F),\\
\nabla_{(x+e,y)}\tilde{y}_{-\alpha_i} &=& (0, e_{\alpha_i}).
\end{array}\right. \qquad (4.20)$$

A l'aide des deux équations du système (4.20), l'équation (4.19) devient

$$\begin{aligned}
\mathcal{X}_{y_{-\alpha_i}}(x+e,y)[\varphi^*F] &= \big\langle x+e, y\,|\,[(\nabla_{x+e+y}F, \nabla_{x+e+y}F), (0, e_{\alpha_i})]_{\mathcal{R}}\big\rangle\\
&= \frac{1}{2}\,\langle x+e, y\,|\,[\mathcal{R}(\nabla_{x+e+y}F, \nabla_{x+e+y}F), (0, e_{\alpha_i})]\rangle\\
&\quad +\frac{1}{2}\,\langle x+e, y\,|\,[(\nabla_{x+e+y}F, \nabla_{x+e+y}F), \mathcal{R}(0, e_{\alpha_i})]\rangle \qquad (4.21)
\end{aligned}$$

On rappelle que $\mathcal{R}$ satisfait la formule (3.51)

$$\mathcal{R}(z,s) = (R(z-s)+s, R(z-s)+z), \qquad (z,s) \in \mathfrak{g}^2,$$

où R est la différence des projections sur $\mathfrak{g}_+$ et $\mathfrak{g}_-$. Cela implique que $\mathcal{R}$ laisse invariant $(\nabla_{x+e+y}F, \nabla_{x+e+y}F)$ et transforme $(0, e_{\alpha_i})$ à $(0, -e_{\alpha_i})$ (en effet $R(e_{\alpha_i}) = e_{\alpha_i}$). En utilisant ces deux résultats, l'équation (4.21) donne que $\mathcal{X}_{y_{-\alpha_i}}(x+e,y)[\varphi^*F]$ est égal à zéro. □

Prouvons maintenant la proposition 4.12. **Preuve:**
Soit $\{\cdot\,,\cdot\}$ le crochet de Lie-Poisson sur $\mathfrak{g}$. On sait que le rang de ce crochet de Poisson est $\dim\mathfrak{g} - \ell$. Par suite il existe des fonctions $G_1, \ldots, G_{\dim\mathfrak{g}-\ell}$ sur $\mathfrak{g}$, dont les champs hamiltoniens $\mathcal{X}_{G_1}, \ldots, \mathcal{X}_{G_{\dim\mathfrak{g}-\ell}}$ sont indépendants sur un ouvert dense de $\mathfrak{g}$ (il est clair que les fonctions $G_1, \ldots, G_{\dim\mathfrak{g}-\ell}$ sont alors indépendantes sur $\mathfrak{g}$).
Comme φ est une submersion surjective de Poisson de $(\mathcal{T}^2, \{\cdot\,,\cdot\}_{\mathcal{R}})$ sur $(\mathfrak{g}, \{\cdot\,,\cdot\})$ (voir la deuxième partie de la preuve du lemme 4.14), les champs $\mathcal{X}_{\varphi^*G_1}, \ldots, \mathcal{X}_{\varphi^*G_{\dim\mathfrak{g}-\ell}}$ sont indépendants sur un ouvert dense de $\mathcal{T}^2$. Il nous manque 2ℓ autres champs hamiltoniens indépendants entre eux et indépendants des $\mathcal{X}_{\varphi^*G_k}$, pour $1 \le k \le \dim\mathfrak{g} - \ell$. Il suffit de trouver 2ℓ champs hamiltoniens indépendants entre eux et tangents aux fibres de φ. Le lemme 4.15 en donne ℓ. Il suffit donc de trouver ℓ champs hamiltoniens indépendants entre eux et indépendants de la famille $(\mathcal{X}_{y_{-\alpha_1}}, \ldots, \mathcal{X}_{y_{-\alpha_\ell}})$

et tangents aux fibres de φ. On procède ainsi pour tout i variant de 1 à ℓ. On considère D_i la distribution définie par :

$$D_i = \left\langle \mathcal{X}_{\varphi^* G_k}, \mathcal{X}_{y-\alpha_j}, (1 \leq j \neq i \leq \ell \text{ et } 1 \leq k \leq \dim \mathfrak{g} - \ell) \right\rangle .$$

On se place en un point régulier de $\mathcal{T}^2$, c'est-à-dire un point $(L, M) \in \mathcal{T}^2$, tel que les champs hamiltoniens $\mathcal{X}_{G_1}, \ldots, \mathcal{X}_{G_{\dim \mathfrak{g}-\ell}}$, évalués en $L + M$, les champs hamiltoniens $\mathcal{X}_{y-\alpha_1}, \ldots, \mathcal{X}_{y-\alpha_\ell}$, évalués en (L, M) et les différentielles $(\mathsf{d}_{L+M} P_1, \ldots, \mathsf{d}_{L+M} P_\ell)$ forment chacune une famille indépendante (on rappelle que $P_1, \ldots, P_\ell$ sont les ℓ polynômes définis dans le théorème 2.54). Ce qui implique qu'en ces points le rang de D_i est maximum (est $\dim \mathfrak{g} - 1$). En utilisant les lemmes 4.15 et 4.13 on vérifie que :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} [\mathcal{X}_{y-\alpha_i}, \mathcal{X}_{y-\alpha_j}] & = & 0, \\ [\mathcal{X}_{y-\alpha_i}, \mathcal{X}_{\varphi^* G_k}] & = & 0. \end{array} \right. \tag{4.22}$$

On vérifie aussi que, pour tout $1 \leq l, k \leq \dim \mathfrak{g} - \ell$, on a :

$$\begin{array}{rcl} [\mathcal{X}_{\varphi^* G_k}, \mathcal{X}_{\varphi^* G_l}](L, M) & = & -\mathcal{X}_{\{\varphi^* G_k, \varphi^* G_l\}_{\mathcal{R}}}(L, M) \\ & = & -\mathcal{X}_{\varphi^* \{G_k, G_l\}}(L, M), \end{array} \tag{4.23}$$

car φ est un morphisme de Poisson (voir le point *(3)* du corollaire 3.12). De plus, pour tout $1 \leq l, k \leq \dim \mathfrak{g} - \ell$, il existe des constantes c_i, pour $1 \leq i \leq \dim \mathfrak{g} - \ell$ et d_j, pour $1 \leq j \leq \ell$ tels que :

$$\mathsf{d}_{(L,M)} \varphi^* \{G_k, G_l\} = \sum_{i=1}^{\dim \mathfrak{g} - \ell} c_i \mathsf{d}_{(L,M)} \varphi^* G_i + \sum_{j=1}^{\ell} d_j \mathsf{d}_{(L,M)} \varphi^* P_j, \tag{4.24}$$

En appliquant l'application linéaire

$$\begin{array}{rcccl} \tilde{P}_{(L,M)} & : & \mathbf{T}^*_{(L,M)} \mathfrak{g}^2 & \to & \mathbf{T}_{(L,M)} \mathfrak{g}^2 \\ & & \mathsf{d}_{(L,M)} \varphi^* F & \mapsto & \mathcal{X}_{\varphi^* F}(L, M) \end{array}$$

à la formule (4.24), on obtient

$$\begin{array}{rcl} -\mathcal{X}_{\varphi^* \{G_k, G_l\}}(L, M) & = & \mathcal{X}_{\sum_{i=1}^{\dim \mathfrak{g} - \ell} c_i \varphi^* G_i}(L, M) + \mathcal{X}_{\sum_{j=1}^{\ell} d_j \varphi^* P_j}(L, M) \\ & = & \mathcal{X}_{\varphi^* \sum_{i=1}^{\dim \mathfrak{g} - \ell} c_i G_i}(L, M), \end{array}$$

car, pour tout $1 \leq j \leq \ell$, $\varphi^* P_j$ est un Casimir d'après le point *(1)* du corollaire 3.12. On conclut alors que

$$[\mathcal{X}_{\varphi^* G_k}, \mathcal{X}_{\varphi^* G_l}](L, M) = \mathcal{X}_{\varphi^* \sum_{i=1}^{\dim \mathfrak{g} - \ell} c_i G_i}(L, M). \tag{4.25}$$

Il découle du système (4.22) et de l'équation (4.25) que la distribution D_i est involutive, donc intégrable. De plus, le système (4.22) donne que le flot $\mathcal{X}_{y-\alpha_i}$ préserve la distribution D_i (sans lui être tangent). Ceci implique qu'il existe une fonction $F_i \in \mathcal{F}(\mathcal{T}^2)$, telle que :

$$\mathcal{X}_{\varphi^* G_k}[F_i] = 0, \qquad 1 \leq k \leq \dim \mathfrak{g} - \ell. \tag{4.26}$$

$$\mathcal{X}_{y-\alpha_j}[F_i] = 0, \qquad 1 \leq j \neq i \leq \ell. \tag{4.27}$$

$$\mathcal{X}_{y-\alpha_i}[F_i] = 1. \tag{4.28}$$

Les ℓ fonctions $F_1, \ldots, F_\ell$ vérifient par construction que :

1. Les champs hamiltoniens $\mathcal{X}_{F_1}, \ldots, \mathcal{X}_{F_\ell}$ sont indépendants entres eux (il suffit d'utiliser (4.27) et (4.28)) et indépendants des champs hamiltoniens $\mathcal{X}_{y-\alpha_1}, \ldots, \mathcal{X}_{y-\alpha_\ell}$ (d'après (4.27) et (4.28)).
2. Les champs hamiltoniens $\mathcal{X}_{F_1}, \ldots, \mathcal{X}_{F_\ell}$ sont tangents aux fibres de φ. En effet, il suffit d'utiliser la formule (4.26) et aussi la formule $\mathcal{X}_{F_i}(\varphi^* H) = 0$ pour toute H fonction Casimir sur $(\mathfrak{g}, \{\cdot\,,\cdot\})$, c'est-à-dire Ad-invariante sur $\mathfrak{g}$ (on a ce résultat d'après le premier point du corollaire 3.12).

Donc les champs hamiltoniens $\mathcal{X}_{F_1}, \ldots, \mathcal{X}_{F_\ell}$ sont indépendants entre eux et indépendants de la famille $(\mathcal{X}_{y-\alpha_1}, \ldots, \mathcal{X}_{y-\alpha_\ell})$ et tangents aux fibres de φ. $\square$

4.1.5 L'intégrabilité au sens de Liouville du réseau de 2-Toda

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple et soient $P_1, \ldots, P_\ell$ les ℓ polynômes sur $\mathfrak{g}$, Ad-invariants, indépendants, homogènes de degré respectivement, $m_1+1, \ldots, m_\ell+1$, définis tels que dans le théorème 2.54. Soient H_i et $\tilde{H}_i$, pour $1 \leq i \leq \ell$, les fonctions sur $\mathfrak{g}^2$, définies pour tout $(x,y) \in \mathfrak{g}^2$, par :

$$H_i(x,y) := P_i(x) \qquad \text{et} \qquad \tilde{H}_i(x,y) := P_i(y). \tag{4.29}$$

Soient $\mathbf{G}$ un groupe de Lie connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Par construction les fonctions $H_i, \tilde{H}_i$, pour $1 \leq i \leq \ell$ sont indépendantes et Ad-invariantes [2] sur $\mathfrak{g}^2$. Donc d'après le théorème de Adler-Kostant-Symes [7, théorème 4.37] elles sont en involution pour le crochet $\{\cdot\,,\cdot\}_{\mathcal{R}}$.

Remarque 4.16. *Les Hamiltoniens H et $\tilde{H}$ du réseau de 2-Toda, définis en (4.12) sont, à une constante près, les fonctions H_1 et $\tilde{H}_1$.*

L'indépendance sur $\mathfrak{g}^2$ et l'involutivité pour le crochet de Poisson $\{\cdot\,,\cdot\}_{\mathcal{R}}$ des fonctions $H_1, \ldots, H_\ell, \tilde{H}_1, \ldots, \tilde{H}_\ell$ pourraient en faire de bonnes candidates pour prouver l'intégrabilité au sens de Liouville du réseau de 2-Toda. Mais en comparant leur cardinal, qui est 2ℓ, à $\dim \mathcal{T}^2 - \frac{1}{2}\operatorname{Rk}\{\cdot\,,\cdot\}_{\mathcal{R}}$, qui vaut $\frac{1}{2}(\dim \mathfrak{g} + 3\ell)$, on voit qu'elles ne sont pas en nombre suffisant.

Construction d'une grande famille de fonctions $\mathcal{F}$ sur $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$

Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple de rang ℓ. Soient λ dans $\mathbf{K}$ et φ_λ l'application définie en (3.52) par

$$\begin{array}{cccc} \varphi_\lambda : & \mathfrak{g}^2 & \to & \mathfrak{g} \\ & (x,y) & \mapsto & \lambda x + y. \end{array}$$

Soient maintenant $P_1, \ldots, P_\ell$ les ℓ polynômes sur $\mathfrak{g}$, Ad-invariants, indépendants, homogènes de degré respectivement, $m_1+1, \ldots, m_\ell+1$, définis tels qu'en théorème 2.54. Chaque P_i permet de définir, m_i+2 fonctions $F_{k,i}$ définies dans $\mathfrak{g}^2$ et à valeurs dans $\mathbf{K}$, par :

$$P_i(\varphi_\lambda(x,y)) = \sum_{0 \leq j \leq m_i+1} \lambda^j F_{j,i}(x,y). \tag{4.30}$$

2. Il s'agit de l'Ad-invariance par rapport à l'action du groupe $\mathbf{G} \times \mathbf{G}$

Chaque fonction $F_{j,i}$, pour $1 \leq i \leq \ell$ et $0 \leq j \leq m_i + 1$ est homogène de degré j par rapport à sa première variable et de degré $m_i + 1 - j$ par rapport à sa deuxième variable (et est “globalement” homogène de degré $m_i + 1$).

Notation. On note $\mathcal{F}$ la famille de fonctions définies sur $\mathfrak{g}^2$ par :

$$\mathcal{F} := (F_{j,i}, 1 \leq i \leq \ell \text{ et } 0 \leq j \leq m_i + 1), \tag{4.31}$$

Lemme 4.17. *Le cardinal de $\mathcal{F}$ est égal à $\frac{1}{2}(\dim \mathfrak{g} + 3\ell)$.*

Preuve:

le cardinal de $\mathcal{F}$ est donné en fonction des exposants m_i, pour $1 \leq i \leq \ell$ de $\mathfrak{g}$, par :

$$\operatorname{card} \mathcal{F} = \sum_{i=1}^{\ell} (m_i + 2) = \sum_{i=1}^{\ell} m_i + 2\ell.$$

L'équation (2.57) donne $\sum_{i=1}^{\ell} m_i = \frac{1}{2}(\dim \mathfrak{g} - \ell)$. Ce qui prouve le résultat. □

Exemple 4.18. *Lorsque $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_4(\mathbf{C})$, une famille de polynômes* Ad*-invariants sur $\mathfrak{g}$ est formée par :*

$$P_1(X) := \frac{1}{2} \operatorname{Trace} X^2, \quad P_2(X) := \frac{1}{3} \operatorname{Trace} X^3, \quad P_3(X) := \frac{1}{4} \operatorname{Trace} X^4.$$

Dans ce cas, la famille de $\mathcal{F}$ est de cardinal 12 *et formée par les fonctions suivantes :*

$$\begin{array}{ll}
F_{0,1}(L,M) = \frac{1}{2} \operatorname{Trace} M^2, & F_{0,3}(L,M) = \frac{1}{4} \operatorname{Trace} M^4, \\
F_{1,1}(L,M) = \operatorname{Trace} LM, & F_{1,3}(L,M) = \operatorname{Trace} LM^3, \\
F_{2,1}(L,M) = \frac{1}{2} \operatorname{Trace} L^2, & F_{2,3}(L,M) = \operatorname{Trace} L^2M^2 \\
F_{0,2}(L,M) = \frac{1}{3} \operatorname{Trace} M^3, & \qquad + \frac{1}{2} \operatorname{Trace} LMLM, \\
F_{1,2}(L,M) = \operatorname{Trace} LM^2, & F_{3,3}(L,M) = \operatorname{Trace} ML^3, \\
F_{2,2}(L,M) = \operatorname{Trace} L^2M, & F_{4,3}(L,M) = \frac{1}{4} \operatorname{Trace} L^4. \\
F_{3,2}(L,M) = \operatorname{Trace} L^3, &
\end{array}$$

La famille $\mathcal{F}$ est involutive pour $\{\cdot\,,\cdot\}_{\mathcal{R}}$

Proposition 4.19. *La famille de fonctions $\mathcal{F}$ et sa restriction à la sous-variété $\mathcal{T}^2$ sont involutives pour $\{\cdot\,,\cdot\}_{\mathcal{R}}$.*

Preuve:

Les polynômes $P_1, \ldots, P_\ell$ étant Ad-invariants sur $\mathfrak{g}$, le deuxième point du corollaire 3.12 donne que la famille $\mathcal{F}$ est involutive sur $(\mathfrak{g}^2, \{\cdot\,,\cdot\}_{\mathcal{R}})$. Or $\mathcal{T}^2$ est une sous-variété de Poisson de $(\mathfrak{g}^2, \{\cdot\,,\cdot\}_{\mathcal{R}})$ donc la restriction à $\mathcal{T}^2$ d'une famille involutive est involutive. □

La famille $\mathcal{F}$ est indépendante

On va étudier l'indépendance sur $\mathcal{T}^2$ de la famille $\mathcal{F} = (F_{k,i}, 1 \leq i \leq \ell$ et $0 \leq k \leq m_i + 1)$ de fonctions (definies sur $\mathfrak{g}^2$). Nous commençons par prouver à l'aide du premier point du théorème 2.57 l'indépendance de $\mathcal{F}$ en un point (e, h) bien choisi de $\mathcal{T}^2$. Ce qui implique l'indépendance de $\mathcal{F}$ sur $\mathfrak{g}^2$, puisque les fonctions qui composent $\mathcal{F}$ sont polynomiales. Ensuite en utilisant le deuxième point du théorème 2.57 nous montrons que la restriction de $\mathcal{F}$ à l'espace de phases $\mathcal{T}^2$ du réseau de 2-Toda est encore une famille indépendante de fonctions.

La famille $\mathcal{F}$ est indépendante en un point $(e, h) \in \mathfrak{g}^2$

On rappelle qu'un point x de $\mathfrak{g}$ est régulier si son centralisateur dans $\mathfrak{g}$ est de dimension égale au rang ℓ de $\mathfrak{g}$. Notons que les points réguliers forment un ouvert dense de $\mathfrak{g}$ dont l'intersection avec toute sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ est un ouvert dense de $\mathfrak{h}$. Notons aussi que si x, y sont deux éléments de $\mathfrak{g}$, tels que x est régulier et $[y, x] = 2x$ alors x, y appartiennent à un $\mathfrak{sl}(2)$ triplet principal (voir le théorème de Jacobson-Morozov [48, théorème 32.1.5]). Dans la suite nous utilisons le point $e = \sum_{i=1}^{\ell} e_i$, qui est un point régulier.

Proposition 4.20. *Soit $h \in \mathfrak{h}$, tel que $[h, e] = 2e$. Soit la famille $\mathcal{F} = (F_{j,i},\ 1 \leq i \leq \ell$ et $0 \leq j \leq m_i + 1)$, definie en (4.31). On a :*

(1) Les fonctions polynomiales $F_{0,1}, \ldots, F_{0,\ell}$ ne dépendent que de la deuxième variable y et leurs différentielles sont indépendantes au point (e, h) ;

(2) Les $\frac{1}{2}(\dim \mathfrak{g} + \ell)$ dérivées partielles $\frac{\partial F_{j,i}}{\partial x}(e, h)$, $1 \leq i \leq \ell$ et $1 \leq j \leq m_i + 1$ sont indépendantes ;

(3) La famille $(\mathsf{d}_{(e,h)} F_{j,i},\ 1 \leq i \leq \ell$ et $0 \leq j \leq m_i + 1)$ est indépendante.

Preuve:

(1) Pour tout $1 \leq i \leq \ell$ et pour tout $(x, y) \in \mathfrak{g}^2$, on a $F_{0,i}(x, y)$ est le terme de degré 0 en λ de $P_i(\lambda x + y)$, soit $P_i(y)$, ce qui prouve que les fonctions $F_{0,i}$, pour $1 \leq i \leq \ell$ sont des polynômes homogènes de degré $m_i + 1$ qui ne dépendent que de la deuxième variable y. De plus, d'après les théorèmes de Kostant [31, théorème 9] et [32, théorème 5.2], les différentielles des polynômes $P_1, \ldots, P_\ell$ sont indépendants en tout point régulier de $\mathfrak{g}$, tel est en particuler le cas au point régulier h[3]. Les différentielles des fonctions $F_{0,1}, \ldots, F_{0,\ell}$ sont donc indépendantes au point (e, h).

(2) On rappelle que nous notons, pour tous $x \in \mathfrak{g}$ et k un entier x^k le k-uplet $(x, \ldots, x)$ et pour tous $F \in \mathcal{F}(\mathfrak{g})$, et $y \in \mathfrak{g}$, $\mathsf{d}_y^k F$ la différentielle de F à l'ordre k au point y.

Soit $1 \leq i \leq \ell$. La formule de Taylor écrite pour le polynôme P_i au point $\lambda x + y$ est :

$$P_i(\lambda x + y) = \sum_{k=0}^{m_i+1} \frac{\lambda^k}{k!} \left\langle \mathsf{d}_y^k P_i, x^k \right\rangle . \tag{4.32}$$

En identifiant les coefficients des deux équations (4.32) et (4.30), on obtient, pour tous $1 \leq i \leq \ell$ et $1 \leq k \leq m_i + 1$, l'égalité

$$F_{k,i}(x, y) = \frac{1}{k!} \left\langle \mathsf{d}_y^k P_i, x^k \right\rangle . \tag{4.33}$$

En dérivant $F_{k+1,i}$ par rapport à la première variable x on obtient :

$$\left\langle \frac{\partial F_{k+1,i}}{\partial x}(x, y), z \right\rangle = \frac{1}{k!} \left\langle \mathsf{d}_y^{k+1} P_i, (x^k, z) \right\rangle,\ 0 \leq k \leq m_i,\ \text{et } \forall z \in \mathfrak{g}. \tag{4.34}$$

3. L'élément h de $\mathfrak{g}$ est régulier car il appartient à un $\mathfrak{sl}(2)$ triplet principal puisqu'il vérifie $[h, e] = 2e$, où e est un élément régulier de $\mathfrak{g}$ (voir [48, théorème 32.1.5])

(On note $\frac{\partial}{\partial x}$ la différentielle par rapport à x). En particulier, d'après le théorème 2.57 lorsque $(x, y) = (e, h)$, pour tous $1 \leq i \leq \ell$ et $1 \leq k \leq m_i + 1$, l'équation (4.34) devient

$$\left\langle \frac{\partial F_{k+1,i}}{\partial x}(e,h), z \right\rangle = \frac{1}{k!} \left\langle \mathsf{d}_h^{k+1} P_i, (e^k, z) \right\rangle = \frac{1}{k!} \left\langle V_{k,i} \,|\, z \right\rangle, \qquad \forall z \in \mathfrak{g}. \quad (4.35)$$

Or, d'après le théorème 2.57 la famille $(V_{k,i}, 1 \leq i \leq \ell$ et $0 \leq k \leq \ell)$ est indépendante. Ce qui implique l'indépendance de la famille $(\frac{\partial F_{k,i}}{\partial x}(e,h), 1 \leq i \leq \ell, 1 \leq k \leq m_i + 1)$.

(3) Notons M la matrice

$$\begin{aligned} M &= (\mathsf{d}_{(e,h)} F_{k,i}, \quad 0 \leq k \leq m_i + 1 \text{ et } 1 \leq i \leq \ell) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial F_{0,1}}{\partial x}(e,h) & \frac{\partial F_{0,1}}{\partial y}(e,h) \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial F_{0,\ell}}{\partial x}(e,h) & \frac{\partial F_{0,\ell}}{\partial y}(e,h) \\ \frac{\partial F_{1,1}}{\partial x}(e,h) & \frac{\partial F_{1,1}}{\partial y}(e,h) \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial F_{m_\ell+1,\ell}}{\partial x}(e,h) & \frac{\partial F_{m_\ell+1,\ell}}{\partial y}(e,h) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

D'après *(1)*, la matrice M est de la forme

$$M = \begin{pmatrix} 0 & A \\ B & * \end{pmatrix}$$

où $A = (\frac{\partial F_{0,i}}{\partial y}(e,h), 1 \leq i \leq \ell)$ et $B = (\frac{\partial F_{k,i}}{\partial x}(e,h), 1 \leq k \leq m_i + 1, 1 \leq i \leq \ell)$. D'après *(1)* et *(2)*, les ℓ vecteurs lignes de la matrice A et, les $\frac{1}{2}(\dim \mathfrak{g} + \ell)$ vecteurs lignes de la matrice B sont indépendants. Ceci suffit pour montrer l'indépendance de toutes les lignes de M, et donc le fait que les différentielles la famille des fonctions $\mathcal{F}$ sont indépendantes au point (e, h).

□

La famille $\mathcal{F}$ est indépendante sur $\mathcal{T}^2$

L'indépendance de la famille de fonctions $\mathcal{F}$ au point $(e, h) \in \mathfrak{g}^2$, démontré dans le paragraphe précédent, implique l'indépendance de $\mathcal{F}$ sur la variété $\mathfrak{g}^2$. Mais, en général, si N est une sous-variété d'une variété M, la restriction d'une famille indépendante de fonctions sur M à la sous-variété N n'est pas indépendante. Dans ce paragraphe, nous montrerons que lorsque la famille de fonctions est $\mathcal{F}$, la variété est $\mathfrak{g}^2$ et la sous-variété est $\mathcal{T}^2$ cette restriction reste une famille indépendante.

Proposition 4.21. *La restriction de la famille de fonctions $\mathcal{F}$ à l'espace de phases $\mathcal{T}^2$ du réseau de 2-Toda est une famille indépendante.*

Preuve:
Remarquons en premier lieu qu'il suffit de démontrer que les restrictions à l'espace tangent $\mathbf{T}_{(e,h)}\mathcal{T}^2$ des différentielles

$$(\mathsf{d}_{(e,h)} F_{j,i}, \quad 1 \leq i \leq \ell \ , \ 0 \leq j \leq m_i + 1)$$

sont indépendantes.

Remarquons ensuite que l'espace tangent de l'espace affine $\mathcal{T}^2$ s'identifie naturellement au produit direct $\mathfrak{g}_{\leq 0} \times \mathfrak{g}_{\geq -1}$, il suffit de démonter que

(a) la restriction à l'espace $\{0\} \times \mathfrak{h}$ des formes linéaires (indépendantes sur $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$)

$$(\mathsf{d}_{(e,h)} F_{0,i}, \quad 1 \leq i \leq \ell \;)$$

est une famille de formes linéaires indépendante et que

(b) la restriction à l'espace $\mathfrak{g}_{\leq 0} \times \{0\}$ des formes linéaires (indépendantes sur $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$)

$$(\mathsf{d}_{(e,h)} F_{j,i}, \quad 1 \leq i \leq \ell \;, \; 1 \leq j \leq m_i + 1)$$

est une famille de formes linéaires indépendante.

Soit $(x, y) \in \mathfrak{g}^2$, d'après la définition (4.30) on a $F_{0,i}(x, y) = P_i(y)$, pour tout $1 \leq i \leq \ell$. Donc $\frac{\partial F_{0,i}}{\partial x}(e, h) = 0$ et

$$\left\langle \frac{\partial F_{0,i}}{\partial y}(e, h), z \right\rangle = \langle \nabla_h P_i \,|\, z \rangle \,, \qquad \forall z \in \mathfrak{g}. \tag{4.36}$$

Or $\nabla_h P_i \in \mathfrak{h}$, (car $[h, \nabla_h P_i] = 0$ et $h \in \mathfrak{h}$ est régulier) donc la restriction à $\mathfrak{h}$ de la famille $(\frac{\partial F_{0,1}}{\partial y}(e, h), \ldots, \frac{\partial F_{0,\ell}}{\partial y}(e, h))$ est une famille de formes linéaires indépendante. Ce qui implique l'indépendance de la réstriction à $\{0\} \times \mathfrak{h}$ de $\mathsf{d}_{(e,h)} F_{0,1}, \ldots, \mathsf{d}_{(e,h)} F_{0,\ell}$.

D'après l'équation (4.35), on a, pour tous $1 \leq i \leq \ell$ et $0 \leq k \leq \ell$,

$$\langle V_{k,i} \,|\, z \rangle = k! \left\langle \frac{\partial F_{k+1,i}}{\partial x}(e, h), z \right\rangle. \tag{4.37}$$

Or le deuxième point du théorème 2.57 montre que le sous-espace vectoriel engendré par la famille des $V_{k,i}$, pour $1 \leq i \leq \ell$ et $0 \leq k \leq m_i$ est dans la sous-algèbre de Lie formée par la somme des sous-espaces propres de ad_h associées aux valeurs propres positives ou nulles, qui est dans notre cas $\mathfrak{g}_{\geq 0}$. Ce qui prouve en utilisant l'équation (4.37) que la restriction à $\mathfrak{g}_{\leq 0}$ de la famille formes linéaires $(\frac{\partial F_{k,i}}{\partial x}(e, h), 1 \leq i \leq \ell$ et $1 \leq k \leq m_i + 1)$ est une famille indépendante. D'où la restriction à $\mathfrak{g}_{\leq 0} \times \{0\}$ de $(\mathsf{d}_{(e,h)} F_{k,i}, 1 \leq i \leq \ell$ et $1 \leq i \leq m_i + 1)$ est une famille indépendante.

□

4.1.6 Conclusion

Théorème 4.22. *Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple de rang ℓ, $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$, Φ le système de racines, $(\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell)$ une base de Φ, et e_i, pour $1 \leq i \leq \ell$ un vecteur propre non nul associé à la racine simple α_i. On considère :*

- *L'espace de phase du réseau de 2-Toda, qui est défini par*

$$\mathcal{T}^2 = (\sum_{i=1}^{\ell} e_i, 0) + \mathfrak{g}_{\leq 0} \times \mathfrak{g}_{\geq -1}$$

- *Le crochet de Poisson $\{\cdot\,, \cdot\}_{\mathcal{R}}$ sur $\mathfrak{g}^2$ associé à la $\mathcal{R}$-matrice $\mathcal{R} := \mathcal{P}_+ - \mathcal{P}_-$, où $\mathcal{P}_\pm$ est la projection de $\mathfrak{g}^2$ sur $\mathfrak{g}^2_\pm$, avec $\mathfrak{g}^2_+ = \{(x, x) \mid x \in \mathfrak{g}\}$ et $\mathfrak{g}^2_- = \mathfrak{g}_{\leq -1} \times \mathfrak{g}_{\geq 0}$.*

- *Une famille de fonctions $\mathcal{F}$ que l'on construit ainsi. On choisit $P_1, \dots, P_\ell$ une famille génératrice, des polynômes homogènes, de l'algèbre des fonctions polynomiales* Ad*-invariantes sur $\mathfrak{g}$. On note leurs degrés respectifs par $m_1 + 1, \dots, m_\ell + 1$, et on construit la famille de fonctions :*

$$\mathcal{F} = (F_{j,i}, 1 \leq i \leq \ell \text{ et } 0 \leq j \leq m_i + 1),$$

où $P_i(\lambda x + y) = \sum_{j=0}^{m_i+1} \lambda^j F_{j,i}(x, y)$, pour tous $x, y \in \mathfrak{g}$.

Le triplet $(\mathcal{T}^2, \mathcal{F}_{|\mathcal{T}^2}, \{\cdot\,,\cdot\}_\mathcal{R})$ forme un système intégrable.

Preuve:
D'après la définition 2.33 de l'intégrabilité au sens de Liouville, il faut montrer que

(1) $\mathcal{F}_{|\mathcal{T}^2}$ est involutive pour le crochet $\{\cdot\,,\cdot\}_\mathcal{R}$.

(2) $\mathcal{F}_{|\mathcal{T}^2}$ est indépendante.

(3) $\operatorname{card} \mathcal{F}_{|\mathcal{T}^2} = \dim \mathcal{T}^2 - \frac{1}{2} \operatorname{Rk} \{\cdot\,,\cdot\}_\mathcal{R}$.

Prouvons alors ces trois conditions.

(1) La proposition 4.19 donne l'involutivité de $\mathcal{F}$ pour le crochet de Poisson $\{\cdot\,,\cdot\}_\mathcal{R}$. Puisque $\mathcal{T}^2$ est une sous-variété de Poisson de $(\mathfrak{g}^2, \{\cdot\,,\cdot\}_\mathcal{R})$, la restriction de la famille $\mathcal{F}$ à $\mathcal{T}^2$ est aussi involutive pour $\{\cdot\,,\cdot\}_\mathcal{R}$.

(2) La proposition 4.21 dit que la restriction de la famille de fonctions $\mathcal{F}$ à $\mathcal{T}^2$ est une famille de fonctions indépendantes.

(3) D'après le lemme 4.17 on a $\operatorname{card} \mathcal{F} = \frac{1}{2}(\dim \mathfrak{g} + 3\ell)$, donc $\operatorname{card} \mathcal{F}_{|\mathcal{T}^2} = \frac{1}{2}(\dim \mathfrak{g} + 3\ell)$. De plus, la proposition 4.12 donne que $\operatorname{Rk} \{\cdot\,,\cdot\}_\mathcal{R} = \dim \mathfrak{g} + \ell$. La dimension de $\mathcal{T}^2$ étant, d'après la proposition 4.6, égale à $\dim \mathfrak{g} + 2\ell$, la relation ci-dessous est satisfaite :

$$\operatorname{card} \mathcal{F}_{|\mathcal{T}^2} = \dim \mathcal{T}^2 - \frac{1}{2} \operatorname{Rk} \{\cdot\,,\cdot\}_\mathcal{R}.$$

Ce qui achève la preuve. □

Ecrivons explicitement les champs hamiltoniens du système intégrable.

Proposition 4.23. *Les champs intégrables $\mathcal{X}_{F_{i,j}} := \{\cdot\,, F_{j,i}\}_\mathcal{R}$, pour tous $1 \leq i \leq \ell$ et $1 \leq j \leq m_i$, sont donnés par :*

$$\begin{cases} \mathcal{X}_{F_{m_i+1,i}}(L, M) = [(\nabla_L P_i, 0)_-, (L, M)], \\ \mathcal{X}_{F_{j,i}}(L, M) = [(K_{j-1,i}(L, M), 0)_- - (K_{j,i}(L, M), 0)_-, (L, M)], \\ \mathcal{X}_{F_{0,i}}(L, M) = [-(\nabla_M P_i, 0)_-, (L, M)], \end{cases} \tag{4.38}$$

où les $K_{j,i}$ sont définis par :

$$\nabla_{\lambda L + M} P_i = \sum_{j=0}^{m_i} \lambda^j K_{j,i}(L, M). \tag{4.39}$$

Preuve:
On rappelle que $P_1, \dots, P_\ell$ sont les polynômes sur $\mathfrak{g}$, Ad-invariants, indépendants et

de degré respectivement $m_1+1,\ldots,m_\ell+1$, définis tels que dans le théorème 2.54. D'après le quatrième point du théorème 3.12, on a :

$$\mathcal{X}_{P_i\circ\varphi_\lambda}(L,M) = [(L,M),(\lambda-1)(-(\nabla_{\lambda L+M}P_i)_-,(\nabla_{\lambda L+M}P_i)_+)]. \tag{4.40}$$

A l'aide des fonctions $K_{j,i}$ définies dans l'équation (4.39), on peut écrire $(\lambda-1)\nabla_{\lambda L+M}P_i$ sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
&(\lambda-1)\nabla_{\lambda L+M}P_i\\
&= \sum_{j=0}^{m_i}(\lambda^{j+1}K_{j,i}(L,M)-\lambda^jK_{j,i}(L,M))\\
&= \lambda^{m_i+1}K_{m_i,i}(L,M)+\sum_{j=1}^{m_i}\lambda^j(K_{j-1,i}(L,M)-K_{j,i}(L,M))-K_{0,i}(L,M)\\
&= \lambda^{m_i+1}\nabla_LP_i+\sum_{j=1}^{m_i}\lambda^j(K_{j-1,i}(L,M)-K_{j,i}(L,M))-\nabla_MP_i.
\end{aligned}$$

Cela permet de réécrire l'équation (4.40) sous la forme

$$\begin{aligned}
&\mathcal{X}_{P_i\circ\varphi_\lambda}(L,M)\\
&= \lambda^{m_i+1}[(L,M),(-(\nabla_LP_i)_-,(\nabla_LP_i)_+)]+[(L,M),((\nabla_MP_i)_-,-(\nabla_MP_i)_+)]\\
&\quad+\sum_{j=1}^{m_i}\lambda^j[(L,M),(-K_{j-1,i}(L,M)_-,K_{j-1,i}(L,M)_+)]\\
&\quad-\sum_{j=1}^{m_i}\lambda^j[(L,M),(-K_{j,i}(L,M)_-,K_{j,i}(L,M)_+)]\\
&= \lambda^{m_i+1}[(\nabla_LP_i,0)_-,(L,M)]+[(0,\nabla_MP_i)_-,(L,M)]\\
&\quad+\sum_{j=1}^{m_i}\lambda^j[(K_{j-1,i}(L,M),0)_- -(K_{j,i}(L,M),0)_-,(L,M)].
\end{aligned}$$

Pour obtenir les équations des champs hamiltoniens $\mathcal{X}_{F_{j,i}}$, il suffit d'identifier coefficient par coefficient ce qu'on a obtenu avec l'équation suivante :

$$\mathcal{X}_{P_i\circ\varphi_\lambda}(L,M)=\sum_{j=0}^{m_i+1}\lambda^j\mathcal{X}_{F_{j,i}}(L,M).$$

□

Remarque 4.24. *En faisant des combinaisons linéaires des hamiltoniens $F_{j,i}$, pour $1\le i\le\ell$ et $0\le j\le m_i+1$, on peut construire d'autres hamiltoniens, qui donnent des formules plus simples du système (4.38). Posons, pour tous $1\le i\le\ell$, et $0\le j\le m_i+1$*

$$\tilde{F}_{j,i} := \sum_{k=0}^{j}F_{k,i}. \tag{4.41}$$

Pour tous $1\le i\le\ell$ et $0\le j\le m_i+1$, le champ hamiltonien de la fonction $\tilde{F}_{j,i}$ est donné par :

$$\mathcal{X}_{\tilde{F}_{j,i}}(L,M) = -[(K_{j,i}(L,M),0)_-,(L,M)], \tag{4.42}$$

pour tout $j = 0, .., m_i$ *et* $\tilde{F}_{m_i+1,i}$ *est un Casimir. Evidement, ces nouveaux hamiltoniens défінssent le même système intégrable.*

4.2 Relation entre les solutions du réseau de 2-Toda et les paires de solutions du système de Mishchenko-Fomenko

On montre dans cette section qu'on peut faire correspondre à toute solution du réseau de 2-Toda une paire de solutions du *système de Mishchenko-Fomenko* [39] et inversement. Nous commençons par décrire ce dernier système.

4.2.1 Le système de Mishchenko-Fomenko

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie et soit $\alpha \in \mathfrak{g}^*$. Notons $\pi_\alpha := \{\cdot\,,\cdot\}^\alpha$ le crochet de Poisson constant sur $\mathfrak{g}^*$ associé à α, c'est-à-dire le crochet donné, pour tous $F, G \in \mathcal{F}(\mathfrak{g}^*)$ et $\xi \in \mathfrak{g}^*$, par :

$$\{F, G\}^\alpha(\xi) = \pi_\alpha[F, G](\xi) := \langle \alpha, [\mathsf{d}_\xi F, \mathsf{d}_\xi G] \rangle \,. \tag{4.43}$$

Soit $\pi := \{\cdot\,,\cdot\}$ le crochet de Lie-Poisson sur $\mathfrak{g}^*$. Nous rappelons que, d'après le paragraphe 2.1.4, le crochet $\pi+\lambda\pi_\alpha$ est un crochet de Poisson et la translation T_α par $\lambda\alpha$ est un isomorphisme de Poisson entre $(\mathfrak{g}^*, \pi)$ et $(\mathfrak{g}^*, \pi + \lambda\pi)$. Cela implique que, pour toute fonction de Casimir P de π, les coefficients en λ de $P(\xi+\lambda\alpha)$ forment une hiérarchie bi-hamiltonienne pour les structures π et π_α et ces coefficients sont donc en involution pour les deux structures de Poisson. En effet, puisque la translation par $\lambda\alpha$ donne un isomophisme de Poisson entre $(\mathfrak{g}^*, \pi)$ et $(\mathfrak{g}^*, \pi + \lambda\pi_\alpha)$, pour toute P fonction de Casimir de π et tout $\xi \in \mathfrak{g}^*$, on a

$$\{\cdot\,, P \circ T_\alpha\} + \lambda\{\cdot\,, P \circ T_\alpha\}^\alpha = 0. \tag{4.44}$$

Soit $m + 1$ le degré de P et soient $H_0^\alpha, \ldots, H_{m+1}^\alpha$ les coefficients en λ de $P \circ T_\alpha$. D'après l'équation (4.44), on a

$$\{\cdot\,, H_0^\alpha\} + \sum_{j=1}^{m+1} \lambda^j(\{\cdot\,, H_j^\alpha\} + \{\cdot\,, H_{j-1}^\alpha\}^\alpha) + \lambda^{m+2}\{\cdot\,, H_{m+1}^\alpha\}^\alpha = 0. \tag{4.45}$$

Ce qui implique, pour tout $0 \leq i \leq m + 2$, que

$$\{\cdot\,, H_i^\alpha\} = -\{\cdot\,, H_{i-1}^\alpha\}^\alpha, \tag{4.46}$$

où par convention $H_{-1}^\alpha = H_{m+2}^\alpha = 0$. Pour montrer l'involutivité de ces fonctions, il suffit d'utiliser la proposition 3.35 de [53].

En particulier, pour $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple, munie de sa forme de Killing, a un élément de $\mathfrak{g}$, et $P_1, \ldots, P_\ell$ la famille indépendante de fonctions Ad-invariantes, homogènes, de degrés $m_1+1, \ldots, m_\ell+1$, déjà considérée tout au long de ce chapitre, les coefficients en λ de $P_i(x + \lambda a)$, à savoir les fonctions

$$P_i(x + \lambda a) = \sum_{j=0}^{m_i+1} H_{j,i}^a(x)\lambda^j, \tag{4.47}$$

sont en involution pour les deux crochets de Poisson (voir la proposition 3.35 de [53]), à savoir

(1) Le crochet de Lie-Poisson sur $\mathfrak{g}$;

(2) Le crochet constant associé à a, qui, via l'identification entre $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}^*$, prend la forme suivante

$$\{F, G\}^a(x) = \pi_a [F, G] (x) = \langle a \mid [\nabla_x F, \nabla_x G] \rangle \tag{4.48}$$

pour tous $F, G \in \mathcal{F}(\mathfrak{g})$ et pour tout $x \in \mathfrak{g}$.

Le caractère bi-hamiltonien se traduit, pour tous $1 \leq i \leq \ell$, $0 \leq k \leq m_i + 1$ et $G \in \mathcal{F}(\mathfrak{g})$, par la relation

$$\left\{G, H^a_{j,i}\right\} = -\left\{G, H^a_{j-1,i}\right\}^a .$$

Cette dernière relation s'écrit aussi, pour tous $1 \leq i \leq \ell$ et $0 \leq k \leq m_i + 1$, par :

$$[x, \nabla_x H^a_{j,i}] = -[a, \nabla_x H^a_{j-1,i}].$$

On appelle *système de Mishchenko-Fomenko associé à* $a \in \mathfrak{g}$ le système bi-hamiltonien défini par les fonctions $\{H^a_{j,i} \mid i = 1, \ldots, \ell \text{ et } j = 0, \ldots, m_i + 1\}$.

Remarque 4.25. *Notons que les fonctions $H^a_{m_i+1,i}$ sont en fait constantes, on peut donc les ignorer.*

Exemple 4.26. *Dans $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(\mathbf{C})$, les équations*

$$\dot{x} = [x^i, a] = -[(ax^{i-1} + xax^{i-2} + \cdots + x^{i-1}a), x]$$

appartiennent au système de Mishchenko-Fomenko associé à $a \in \mathfrak{sl}_n(\mathbf{C})$: plus précisément, ce sont les champs hamiltoniens associés aux coefficients de degré 0 et 1 en λ de $\frac{1}{i+1}\operatorname{Trace}((x + \lambda a)^{i+1})$ pour les crochets constants et linéaires respectivement.

Donnons quelques propriétés de ce système. La comparaison des équations (4.47) et (4.30) donne pour tous $x, a \in \mathfrak{g}$, $1 \leq i \leq \ell$ et $0 \leq k \leq m_i + 1$, les identités

$$H^a_{j,i}(x) = F_{j,i}(x, a) = F_{m_i+1-j,i}(a, x).$$

Par ailleurs, les gradients des fonctions $H^a_{j,i}$ sont reliés aux fonctions $K_{j,i}$ définis dans (4.39) par :

$$\begin{aligned} \nabla_x H^a_{j,i} &= \nabla_{(x,a)} F_{j,i} = K_{j,i}(x, a) &(4.49)\\ &= \nabla_{(a,x)} F_{m_i+1-j,i} = K_{m_i+1-j,i}(a, x). &(4.50) \end{aligned}$$

En changeant les indices les équations (4.49) et (4.50) deviennent :

$$\begin{aligned} \nabla_x H^a_{m_i+1-j,i} &= \nabla_{(x,a)} F_{m_i+1-j,i} = K_{m_i+1-j,i}(x, a) &(4.51)\\ &= \nabla_{(a,x)} F_{j,i} = K_{j,i}(a, x). &(4.52) \end{aligned}$$

4.2.2 Du réseau de 2-Toda au système de Mishchenko-Fomenko

Dans cette section, on choisit un groupe de Lie connexe $\mathbf{G}$ dont l'algèbre de Lie est $\mathfrak{g}$. Pour simplifier les notations dans ce qui suit nous supposons que $\mathbf{G}$ est un groupe linéaire tel que, pour tous $g \in \mathbf{G}$ et $x \in \mathfrak{g}$, on a $\mathrm{Ad}_g\, x = gxg^{-1}$.

Soit $\tilde{F}_{j,i}$, pour $1 \leq i \leq \ell$ et $0 \leq j \leq m_i$, la fonction définie en (4.41). On rappelle la formule (4.42) des champs hamiltoniens $\mathcal{X}_{\tilde{F}_{j,i}}$, $0 \leq j \leq m_i$ et $1 \leq i \leq \ell$, du réseau de 2-Toda suivantes :

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{\tilde{F}_{j,i}}(L, M) &= -[(K_{j,i}(L, M), 0)_-, (L, M)] \\ &= [(-(K_{j,i}(L, M))_-, (K_{j,i}(L, M))_+, (L, M)]. \end{aligned} \tag{4.53}$$

On rappelle aussi que $\tilde{F}_{m_i+1,i}$ est un Casimir et que les fonctions $K_{j,i}$ sont définies par la relation (4.39), à savoir

$$\nabla_{\lambda L+M} P_i = \sum_{j=0}^{m_i} \lambda^j K_{j,i}(L, M).$$

L'Ad-invariance sous l'action adjointe de la fonction P_i implique, d'après ce que nous avons montré dans la preuve de la proposition 2.58, que, pour tout $g \in \mathbf{G}$, on a :

$$\mathrm{Ad}_g(K_{j,i}(L, M)) = K_{j,i}(\mathrm{Ad}_g(L), \mathrm{Ad}_g(M)), \tag{4.54}$$

une relation dont nous allons bientôt faire usage.

Les deux composantes de l'équation (4.53) du champ hamiltonien donnent les deux équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{L} = -[(K_{j,i}(L, M))_-, L], \\ \dot{M} = [(K_{j,i}(L, M))_+, M]. \end{cases} \tag{4.55}$$

On se donne maintenant une solution $(L(t), M(t))$ de (4.55) partant de $(L_0, M_0) \in \mathcal{T}^2$. On construit $g_-(t), g_+(t)$ les deux solutions des équations différentielles

$$\begin{cases} g_-(0) = g_+(0) = 1, \\ \dot{g}_-(t) g_-^{-1}(t) = -(K_{j,i}(L(t), M(t)))_-, \\ \dot{g}_+(t) g_+^{-1}(t) = (K_{j,i}(L(t), M(t)))_+, \end{cases} \tag{4.56}$$

lesquelles sont bien définies pour t au voisiange de 0. Par construction, $g_+(t)$ et $g_-(t)$ sont à valeurs dans les sous-groupes $\mathbf{G}_+$ et $\mathbf{G}_-$ correspondants aux algèbres de Lie $\mathfrak{g}_+$ et $\mathfrak{g}_-$ et permettent de reconstruire $L(t)$ et $M(t)$, par :

$$\begin{cases} L(t) = \mathrm{Ad}_{g_-(t)}\, L_0, \\ M(t) = \mathrm{Ad}_{g_+(t)}\, M_0. \end{cases} \tag{4.57}$$

Remarque 4.27. *On peut déterminer $g_+(t)$ et $g_-(t)$ à l'aide de $L(t)$ et $M(t)$, au moins pour $|t|$ petit, sans avoir à résoudre l'équation différentielle qui les définit, à condition que les valeurs initiales L_0 et M_0 soient telles que les centralisateurs de L_0 et M_0 ont des intersections avec $\mathfrak{g}_-$ et $\mathfrak{g}_+$ respectivement réduites à zéro.*

Sous cette condition, en effet, les applications $\sigma_+ : \mathbf{G}_+ \to \mathfrak{g}$ et $\sigma_- : \mathbf{G}_- \to \mathfrak{g}$ définies par $\sigma_+(h) = \mathrm{Ad}_h\, M_0$ et $\sigma_-(h) = \mathrm{Ad}_h\, L_0$ sont des immersions dans un voisinage de l'identité. Il suffit donc de construire, sur leurs images, des applications inverses σ_+^{-1} et σ_-^{-1}, pour retrouver $g_+(t) = \sigma_+^{-1} M(t)$ et $g_-(t) = \sigma_-^{-1} L(t)$.

Proposition 4.28. *Soient* $1 \leq i \leq \ell$ *et* $0 \leq j \leq m_i + 1$. *Soit* $(L(t), M(t))$ *une solution de l'équation de* 2*-Toda associée à l'hamiltonien* $\tilde{F}_{j,i}$*, soient* $g_+(t), g_-(t)$ *les fonctions construites comme dans (4.56), et soit* $g(t) = g_+^{-1}(t)g_-(t)$*. La fonction* $\hat{L}(t) := \mathrm{Ad}_{g(t)}(L_0)$ *(resp.* $\hat{M}(t) := \mathrm{Ad}_{g^{-1}(t)}(M_0)$ *est solution de l'équation du système Mishchenko-Fomenko associé à* M_0 *(resp.* L_0*) associée à l'hamiltonien* $H_{j,i}^{M_0}$ *(resp.* $H_{m_i+1-j,i}^{L_0}$*). Autrement dit :*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{\partial \hat{L}(t)}{\partial t} & = & -[\nabla_{\hat{L}(t)} H_{j,i}^{M_0}, \hat{L}(t)], \\ \dfrac{\partial \hat{M}(t)}{\partial t} & = & [\nabla_{\hat{M}(t)} H_{m_i+1-j,i}^{L_0}, \hat{L}(t)]. \end{array} \right. \tag{4.58}$$

Preuve:
En utilisant les équations (4.49) et (4.52) le système (4.58) devient

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{\partial \hat{L}(t)}{\partial t} & = & -[K_{j,i}(\hat{L}(t), M_0), \hat{L}(t)], \\ \dfrac{\partial \hat{M}(t)}{\partial t} & = & [K_{j,i}(L_0, \hat{M}(t)), \hat{M}(t)]. \end{array} \right. \tag{4.59}$$

Commençons par montrer la première équation du système (4.59). Lorsqu'on dérive $\hat{L}(t) := \mathrm{Ad}_{g(t)}(L_0)$ par rapport à t on vérifie aisément que

$$\frac{\partial \hat{L}(t)}{\partial t} = [\dot{g}(t)g^{-1}(t), \hat{L}(t)]. \tag{4.60}$$

En comparant la première équation du système (4.59) avec l'équation (4.60), il suffit de montrer que

$$\dot{g}(t)g^{-1}(t) = -K_{j,i}(\hat{L}(t), M_0). \tag{4.61}$$

Or $g(t) = g_+^{-1}(t)g_-(t)$ donc le terme à gauche de l'équation (4.61) s'écrit

$$\begin{array}{rcl} \dot{g}(t)g^{-1}(t) & = & -\mathrm{Ad}_{g_+^{-1}(t)}(\dot{g}_+g_+^{-1}) + \mathrm{Ad}_{g_+^{-1}(t)}(\dot{g}_-g_-^{-1}) \\ & = & -\mathrm{Ad}_{g_+^{-1}(t)}(\dot{g}_+g_+^{-1} - \dot{g}_-g_-^{-1}) \\ & = & -\mathrm{Ad}_{g_+^{-1}}((K_{j,i}(L(t), M(t)))_+ + (K_{j,i}(L(t), M(t)))_-) \\ & = & -\mathrm{Ad}_{g_+^{-1}} K_{j,i}(L(t), M(t)) \\ & = & -K_{j,i}(\mathrm{Ad}_{g_+^{-1}} L(t), \mathrm{Ad}_{g_+^{-1}} M(t)), \end{array}$$

où on a utilisé, les deux dernières formules du système (4.56) pour passer de la deuxième à la troisième équation, et la formule (4.54) pour passer de la quatrième à la cinquième équation. Pour en déduire (4.61), il suffit d'utliser les deux équations du système (4.57) et les deux expressions $g(t) = g_+^{-1}(t)g_-(t)$ et $\hat{L}(t) := \mathrm{Ad}_g(L_0)$. Montrons maintenant la deuxième équation du système (4.59). Comme pour $\hat{L}(t)$, lorsque on dérive $\hat{M}(t) := \mathrm{Ad}_{g^{-1}(t)}(M_0)$ par rapport à t on obtient

$$\frac{\partial \hat{M}(t)}{\partial t} = -[g^{-1}(t)\dot{g}(t), \hat{M}(t)].$$

Donc il suffit de montrer que

$$-g^{-1}(t)\dot{g}(t) = K_{j,i}(L_0, \hat{M}(t)), \tag{4.62}$$

qui est n'est autre que $-\operatorname{Ad}_{g^{-1}}$ appliqué à l'équation (4.61). $\square$

Nous avons expliqué dans la proposition comment on fait correspondre à une solution $(L(t), M(t))$ du réseau de 2-Toda, avec la condition initiale (L_0, M_0), une paire de solutions $(\hat{L}(t), \hat{M}(t))$ du système de Mishchenko-Fomenko. Il est naturel de se demander s'il est possible de faire l'opération inverse, c'est-à-dire de retrouver une solution $(L(t), M(t))$ du réseau de 2-Toda à partir de deux solutions $\hat{L}(t)$ et $\hat{M}(t)$, de conditions initiales L_0 et M_0, des deux équations suivantes :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \hat{L}(t)}{\partial t} &= -[K_{j,i}(\hat{L}(t), M_0), \hat{L}(t)], \\ \dfrac{\partial \hat{M}(t)}{\partial t} &= [K_{j,i}(L_0, \hat{M}(t)), \hat{M}(t)]. \end{cases}$$

Nous allons voir que la réponse est oui.

Pour commencer, notons qu'une fonction $g(t)$ à valeurs dans $\mathbf{G}$ est solution de l'équation différentielle

$$\dot{g}(t)g^{-1}(t) = -K_{ji}(\operatorname{Ad}_{g(t)} L_0, M_0) \qquad \text{et} \qquad g(0) = 1 \tag{4.63}$$

si est seulement si elle est solution de l'équation différentielle

$$-g^{-1}(t)\dot{g}(t) = K_{ji}(L_0, \operatorname{Ad}_{g^{-1}(t)} M_0) \qquad \text{et} \qquad g(0) = 1.$$

(On passe de la première équation à la seconde en appliquant $-\operatorname{Ad}_{g^{-1}}$ et en utlisant (4.54). La solution de cette équation différentielle vérifie par conséquent les deux relations suivantes

$$\hat{L}(t) = \operatorname{Ad}_{g(t)} L_0 \qquad \text{et} \qquad \hat{M}(t) = \operatorname{Ad}_{g^{-1}(t)} M_0. \tag{4.64}$$

Nous pouvons maintenant écrire $g(t)$ sous la forme

$$g(t) = g_+^{-1}(t)g_-(t), \tag{4.65}$$

avec $g_+(t) \in \mathbf{G}_+$ et $g_-(t) \in \mathbf{G}_-$.

Remarque 4.29. *On peut en fait déterminer $g_+(t)$ et $g_-(t)$ à l'aide de $\hat{L}(t)$ et $\hat{M}(t)$, du moins pour t petit, sans avoir à résoudre l'équation différentielle qui définit $g(t)$, à condition toutefois que les valeurs initiales L_0 et M_0 soient telles que les centralisateurs de L_0 et M_0 ont une intersection réduite à $\{0\}$.*

En effet, l'hypothèse faite sur les centralisateurs de L_0 et M_0 implique que la fonction $\sigma : \mathbf{G} \to \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ donnée par $g \mapsto (\operatorname{Ad}_g L_0, \operatorname{Ad}_{g^{-1}} M_0)$ est une immersion dans un voisinage $\mathcal{U}$ de l'unité, donc, quitte à restreindre $\mathcal{U}$, σ est un difféomorphisme sur une certaine sous-variété de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ que l'on notera Σ. Comme, d'après (4.64), $(\hat{L}(t), \hat{M}(t))$ appartient à Σ pour t assez petit, la relation $g(t) = \sigma^{-1}(\hat{L}(t), \hat{M}(t))$ permet de retrouver $g(t)$ sans résoudre d'équation différentielle.

Connaissant $g(t)$, les fonctions $g_+(t), g_-(t)$ sont simplement obtenues en appliquant un certain difféomorphisme local entre des voisinages de l'unités dans $\mathbf{G}$ et $\mathbf{G}_+ \times \mathbf{G}_-$. (Ce difféomorphisme, dans le cas de $\mathbf{SL}(n, \mathbf{C})$, est exactement l'algorithme de Gauss). L'obtention de $g_+(t), g_-(t)$ à partir de $\hat{L}(t), \hat{M}(t)$ n'a donc réclamé que des inversions de difféomorphismes locaux, mais pas de résolutions d'équations différentielles.

Proposition 4.30. *Soient $\hat{L}(t)$ et $\hat{M}(t)$ deux solutions des équations (4.64) de conditions initiales L_0, M_0, et soit $(g_+(t), g_-(t))$ le couple de fonctions à valeurs dans $\mathbf{G}_+$ et $\mathbf{G}_-$ respectivement définies en (4.65). Le couple $(L(t), M(t))$ défini par $L(t) = \operatorname{Ad}_{g_-(t)} L_0$ et $M(t) = \operatorname{Ad}_{g_+(t)} M_0$ est une solution de 2-Toda, de condition initiale (L_0, M_0).*

Preuve:
Il est clair que $L(0) = L_0$ et $M(0) = M_0$. Pour vérifier que l'on obtient bien ainsi une solution de 2-Toda, on peut repartir des équations (4.63) et (4.65), qui donnent :

$$-g_+^{-1}\dot{g}_+ + g_+^{-1}\dot{g}_- g_-^{-1} g_+ = -K_{ji}(\operatorname{Ad}_{g_+^{-1}} \operatorname{Ad}_{g_-} L_0, M_0),$$

puis, en appliquant Ad_{g_+} à cette relation et en utilisant (4.54) on obtient

$$-\dot{g}_+ g_+^{-1} + \dot{g}_- g_-^{-1} = -K_{ji}(\operatorname{Ad}_{g_-} L_0, \operatorname{Ad}_{g_+} M_0)$$

Par définition de $L(t)$ et de $M(t)$, on obtient :

$$-\dot{g}_+ g_+^{-1} + \dot{g}_- g_-^{-1} = -K_{ji}(L(t), M(t)),$$

puis, en prenant les parties positives et négatives de cette dernière relation, on trouve

$$\dot{g}_+ g_+^{-1} = (K_{ji}(L(t), M(t)))_+ \qquad \text{et} \qquad \dot{g}_- g_-^{-1} = -(K_{ji}(L(t), M(t)))_-.$$

Ces dernières relations impliquent que

$$\dot{L} = [\dot{g}_- g_-^{-1}, L(t)] = -[(K_{ji}(L(t), M(t)))_-, L(t)]$$

et

$$\dot{M} = [\dot{g}_+ g_+^{-1}, L(t)] = [(K_{ji}(L(t), M(t)))_+, M(t)].$$

Les équations vérifient donc bien les relations de 2-Toda. □

4.3 Le réseau de 2-Toda sur $\mathfrak{sl}_n(\mathbf{C})$ et son origine

Dans ce paragraphe nous expliquons comment on construit le réseau de 2-Toda sur $\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})$ à l'aide des équations matricielle dites de hiérarchie. Dans un premier lieu, en reprenant le travail d'Adler et van. Moerbeke [6] nous vérifions que l'origine du réseau de 2-Toda en dimension infinie est donné par des équations de hiérarchie. Ensuite nous expliquons la restriction du réseau de 2-Toda sur $\mathfrak{gl}((\infty))$ à $\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})$.

Pour commencer, nous fixons quelques notations à propos de l'algèbre des matrices infinies $\mathfrak{gl}((\infty))$. Considérons l'algèbre engendrée par la famille de matrices élémentaires $\{(E_{ij})_{i,j\in\mathbf{Z}}\}$, munie du produit $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$. On définit chaque élément m_∞ de $\mathfrak{gl}((\infty))$ comme étant la somme formelle

$$m_\infty = \sum_{i,j\in\mathbf{Z}} a_{ij} E_{ij},$$

où la famille $((a_{ij})_{i,j\in\mathbf{Z}})$ est nulle loin de la diagonale, (c'est-à-dire qu'il existe un entier $k \in \mathbf{N}$ tel que si $|i-j| > k$ alors $a_{ij} = 0$). Cette structure d'algèbre induit une structure d'algèbre de Lie, donnée par le commutateur. Etant donné $A = \sum_{i,j\in\mathbf{Z}} a_{ij}E_{ij}$ dans $\mathfrak{gl}((\infty))$, on définit les parties triangulaires supérieures A_u et strictement inférieures A_ℓ de A, par :

$$A_u = \sum_{\substack{i,j\in\mathbf{Z}\\ i\leq j}} a_{ij}E_{ij}, \qquad A_\ell = \sum_{\substack{i,j\in\mathbf{Z}\\ i>j}} a_{ij}E_{ij}. \tag{4.66}$$

4.3.1 L'origine du réseau de 2-Toda

Considérons les équations suivantes sur $\mathfrak{gl}((\infty))$:

$$\frac{\partial m_\infty}{\partial t_i} = \Lambda^i m_\infty, \qquad \frac{\partial m_\infty}{\partial s_i} = -m_\infty({}^t\Lambda)^i, \qquad\qquad i = 1, 2, \ldots, \tag{4.67}$$

où m_∞ est une matrice de $\mathfrak{gl}((\infty))$ et $\Lambda^i := \sum_{j\in\mathbf{Z}} E_{j,i+j}$. M. Adler et P. van Moerbeke ont montré dans [6] que les équations de hiérarchie (4.67) sont liées du système du réseau de 2-Toda de dimension infinie. Construction que nous expliquons maintenant.

Soit m_∞ une matrice qui admet une décomposition du type de Borel [40], c'est-à-dire qu'il existe deux matrices S_1 et S_2 dans $\mathfrak{gl}((\infty))$, telles que :

$$m_\infty = S_1^{-1}S_2, \tag{4.68}$$

où $S_1, S_2 \in \mathfrak{gl}((\infty))$ sont respectivement, une matrice triangulaire inférieure avec des 1 sur la diagonale principale et une matrice triangulaire supérieure avec des coefficients non nuls sur la diagonale principale. Notons que cette décomposition est unique si elle est possible et rappelons qu'en dimension finie cette décomposition est possible sur un ouvert dense (en dimension infinie la théorie est un peu plus compliquée, nous laissons ce point de côté). Les matrices S_1 et S_2 permettent de définir deux matrices L et M, (dont nous montrerons dans la suite qu'elles appartiennent à l'espace de phases du réseau de 2-Toda), par :

$$L = S_1\Lambda S_1^{-1} \qquad \text{et} \qquad M = S_2\Lambda^T S_2^{-1}. \tag{4.69}$$

On vérifie à partir de la définition de S_1 et S_2 que les matrices L et M s'écrivent sous la forme :

$$L = \sum_{\substack{i,j\in\mathbf{Z}\\ i\geq j}} a_{ij}E_{ij} + \sum_{i\in\mathbf{Z}} E_{i,i+1}, \qquad \textit{et} \qquad M = \sum_{\substack{i,j\in\mathbf{Z}\\ i-j\leq 1}} b_{ij}E_{ij}, \tag{4.70}$$

où a_{ij} et b_{ij} sont des nombres complexes. Dans [6], M. Adler et P. van Moerbeke montrent que les équations (4.67) imposent que L et M satisfont à un système d'équations différentielles, appelé *le réseau de 2-Toda infini*, qui est donné par les équations de Lax suivantes :

$$\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{\partial L}{\partial t_i} = [(L^i)_u, L], & \dfrac{\partial M}{\partial t_i} = [(L^i)_u, M], \\[2mm] \dfrac{\partial L}{\partial s_i} = [(M^i)_\ell, L], & \dfrac{\partial M}{\partial s_i} = [(M^i)_\ell, M], \end{array}\right. \qquad i \in \mathbf{N}^*. \tag{4.71}$$

On redonne les détails de cette preuve. **Preuve:**
Les équations du système (4.71) se démontrent de la même manière, il suffit alors de prouver les deux premières.
En utilisant (4.68) et (4.67), on voit que la dérivée partielle de $m_\infty(t,s)$ par rapport à t_i satisfait

$$-S_1^{-1}\frac{\partial S_1}{\partial t_i}S_1^{-1}S_2 + S_1^{-1}\frac{\partial S_2}{\partial t_i} = \Lambda^i S_1^{-1}S_2. \tag{4.72}$$

D'après l'équation (4.69), l'équation (4.72) devient :

$$-\frac{\partial S_1}{\partial t_i}S_1^{-1} + \frac{\partial S_2}{\partial t_i}S_2^{-1} = S_1\Lambda^i S_1^{-1} = L^i. \tag{4.73}$$

Comme $\frac{\partial S_2}{\partial t_i}S_2^{-1}$ est une matrice triangulaire supérieure et $-\frac{\partial S_1}{\partial t_i}S_1^{-1}$ est une matrice triangulaire strictement inférieure, on déduit, en prenant les parties supérieures et inférieures des deux côtés de (4.73), que

$$\left\{\begin{array}{lcl} -\dfrac{\partial S_1}{\partial t_i}S_1^{-1} & = & (L^i)_\ell, \\[2ex] \dfrac{\partial S_2}{\partial t_i}S_2^{-1} & = & (L^i)_u. \end{array}\right. \tag{4.74}$$

Considérons les matrices L et M définies en (4.69), leurs dérivées partielles par rapport à t_i sont données par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dfrac{\partial L}{\partial t_i} & = & \dfrac{\partial S_1}{\partial t_i}\Lambda S_1^{-1} - S_1\Lambda S_1^{-1}\dfrac{\partial S_1}{\partial t_i}S_1^{-1} = [\dfrac{\partial S_1}{\partial t_i}S_1^{-1}, L], \\[2ex] \dfrac{\partial M}{\partial t_i} & = & \dfrac{\partial S_2}{\partial t_i}\Lambda^T S_2^{-1} - S_2\Lambda^T S_2^{-1}\dfrac{\partial S_2}{\partial t_i}S_2^{-1} = [\dfrac{\partial S_2}{\partial t_i}S_2^{-1}, M]. \end{array}\right. \tag{4.75}$$

En remplaçant $\frac{\partial S_1}{\partial t_i}S_1^{-1}$ et $\frac{\partial S_2}{\partial t_i}S_2^{-1}$ par leurs expressions données dans le système (4.74), le système (4.75) devient

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dfrac{\partial L}{\partial t_i} & = & [-(L^i)_\ell, L], \\[2ex] \dfrac{\partial M}{\partial t_i} & = & [(L^i)_u, M], \end{array}\right.$$

Pour obtenir la première équation du système (4.71), il suffit de remplacer $-(L^i)_\ell$ par $L^i - (L^i)_u$ et d'utiliser la relation $[L^i, L] = 0$. $\square$

En utilisant la structure d'algèbre de Lie sur $\mathfrak{gl}((\infty)) \times \mathfrak{gl}((\infty))$ on réécrit le système d'équations (4.71) sous la forme équivalente suivante :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dfrac{\partial(L,M)}{\partial t_i} & = & [((L^i)_u, (L^i)_u), (L, M)], \\[2ex] \dfrac{\partial(L,M)}{\partial s_i} & = & [((M^i)_\ell, (M^i)_\ell), (L, M)], \end{array}\right. \qquad i \in \mathbf{N}^*. \tag{4.76}$$

4.3.2 Restriction et construction du réseau de 2-Toda classique

Notons $(\widehat{E}_{ij}, 1 \leq i, j \leq n)$ la base canonique de l'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})$. On note A_u (resp. A_ℓ) la partie triangulaire supérieure (resp. strictement inférieure) de A. On plonge l'algèbre des matrices finies $\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})$ dans l'algèbre des matrices infinies $\mathfrak{gl}((\infty))$ à travers le morphisme

$$\begin{array}{cccc} \varphi : & \mathfrak{gl}_n(\mathbf{C}) & \to & \mathfrak{gl}((\infty)) \\ & A = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\widehat{E}_{ij} & \mapsto & \varphi(A) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}E_{ij} \end{array} \tag{4.77}$$

Remarque 4.31.

(1) Les projections sur les matrices triangulaires supérieures et strictement inférieures commutent avec φ. C'est-à-dire,

$$\begin{cases} (\varphi(A))_u &= \varphi(A_u), \\ (\varphi(A))_\ell &= \varphi(A_\ell), \end{cases} \qquad \forall A \in \mathfrak{gl}_n(\mathbf{C}).$$

(2) A chaque instant t, par linéarité de φ, on vérifie que :

$$\frac{\partial \varphi(A)}{\partial t} = \varphi(\frac{\partial A}{\partial t}).$$

Cette remarque montre que le réseau de 2-Toda se restreint en dimension finie.

Définition 4.32. *Le* réseau de 2-Toda classique *est le système d'équations différentielles, donné, pour tout $1 \leq i \leq n$, par les équations de Lax*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial(L,M)}{\partial t_i} &= [(L_u^i, L_u^i), (L,M)], \\ \dfrac{\partial(L,M)}{\partial s_i} &= [(M_\ell^i, M_\ell^i), (L,M)], \end{cases} \tag{4.78}$$

où (L,M) est un élément de l'espace de phases du réseau de 2-Toda, qui s'écrit sous la forme suivante :

$$(L,M) = \left(\begin{pmatrix} a_{11} & 1 & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & b_{n,n-1} & b_{nn} \end{pmatrix} \right). \tag{4.79}$$

Remarque 4.33. *Dans la définition 4.32 on prend i variant de 1 à n car, pour $i > n$, les équations $\dfrac{\partial(L,M)}{\partial t_i}$ et $\dfrac{\partial(L,M)}{\partial s_i}$ sont des combinaisons linéaires des précédents.*

La remarque 4.31 et la définition 4.32 prouvent la proposition suivante.

Proposition 4.34. *Un couple de matrices (L,M) de $\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C}) \times \mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})$ vérifie le système (4.78) si et seulement si le couple de matrices infinies $(\varphi(L), \varphi(M))$ vérifie le système (4.76).*

4.4 Restrictions du réseau de 2-Toda

Dans cette section nous montrons que le réseau de 2-Toda se restreint de deux façons différentes à deux systèmes, dont le premier est intégrable au sens de Liouville et il est isomorphe au *réseau de Toda*. Nous commençons par rappeler la construction du réseau de Toda associé à toute algèbre de Lie simple.

4.4.1 Le réseau de Toda associé à toute algèbre de Lie simple

Le *réseau de Toda classique* (sur $\mathfrak{sl}_n(\mathbf{C})$) est un système hamiltonien qui décrit un système de particules, qui sont placées sur une ligne droite et qui sont soumises à une force d'interaction entre les particules voisines. Depuis sa découverte il est considéré comme un prototype de système intégrable au sens de Liouville, qui en plus est fortement lié aux algèbres de Lie simples [49], [22], [25], [37], [9], [32].

Nous donnons quelques définitions et propriétés du *réseau de Toda*, qui seront utiles dans la suite de cette section. Pour le faire, nous rappelons quelques notations.

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple de rang ℓ, munie de sa forme de Killing $\langle\cdot\,|\cdot\rangle$. Soient $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$, Φ le système de racines de $\mathfrak{g}$ associé à $\mathfrak{h}$, $(\alpha_1, \dots, \alpha_\ell)$ une base de Φ et $(h_1, \dots, h_\ell) \cup (e_\alpha)_{\alpha\in\Phi}$ une base de Chevalley de $\mathfrak{g}$. On note e_i, pour tout $1 \leq i \leq \ell$ le vecteur e_{α_i} et $e := \sum_{i=1}^{\ell} e_i$. On rappelle que

$$\mathfrak{g} := \bigoplus_{k\in\mathbf{Z}} \mathfrak{g}_k,$$

où, pour $k \neq 0$, $\mathfrak{g}_k := \{e_\alpha, \alpha \in \Phi, |\alpha| = k\}$ et $\mathfrak{g}_0 := \mathfrak{h}$. On note, pour tout $k \in \mathbf{Z}$

$$\mathfrak{g}_{<k} := \textstyle\bigoplus_{i<k} \mathfrak{g}_i, \qquad \mathfrak{g}_{\leq k} := \bigoplus_{i\leq k} \mathfrak{g}_i,$$
$$\mathfrak{g}_{>k} := \textstyle\bigoplus_{i>k} \mathfrak{g}_i, \qquad \mathfrak{g}_{\geq k} := \bigoplus_{i\geq k} \mathfrak{g}_i.$$

Définition 4.35. L'espace de phases $\mathcal{T}$ du réseau de Toda *est le sous-espace affine de* $\mathfrak{g}$ *donné par :*

$$\mathcal{T} := \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 + e. \tag{4.80}$$

Chaque élément A *de* $\mathcal{T}$ *s'écrit*

$$A = \sum_{i=1}^{\ell} (a_i e_{-\alpha_i} + b_i h_i) + e.$$

Pour définir le réseau de Toda, nous utilisons la décomposition

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_+ \oplus \mathfrak{g}_-,$$

où $\mathfrak{g}_- := \sum_{k<0} \mathfrak{g}_k$ et $\mathfrak{g}_+ := \sum_{k\geq 0} \mathfrak{g}_k$.

Définition 4.36. *Le réseau de Toda est le système d'équations différentielles sur* $\mathcal{T}$*, donnée par l'équation de Lax*

$$\dot{A} = [A_+, A], \tag{4.81}$$

où A_+ *est le projeté de* A *sur* $\mathfrak{g}_+$*.*

Considérons l'endomorphisme $R := P_+ - P_-$ de $\mathfrak{g}$, la différence des projections sur $\mathfrak{g}_+$ et $\mathfrak{g}_-$. A l'aide de la forme de Killing on munit $\mathfrak{g}$ du R-crochet de Poisson, défini, pour tous $F, G \in \mathcal{F}(\mathfrak{g})$ et $x \in \mathfrak{g}$, par :

$$\{F, G\}_R := \frac{1}{2} \langle x \,|\, [R\nabla_x F, \nabla_x G] + [\nabla_x F, R\nabla_x G] \rangle \,.$$

Proposition 4.37.

(1) Le sous-espace affine $\mathcal{T}$ de $\mathfrak{g}$ est une sous-variété de Poisson de $(\mathfrak{g}, \{\cdot\,,\cdot\}_R)$;

(2) Soit $H \in \mathcal{F}(\mathfrak{g})$, définie pour tout $x \in \mathfrak{g}$ par $H(x) = \frac{1}{2} \langle x \,|\, x \rangle$. L'equation du champ hamiltonien $\mathcal{X}_H := \{\cdot\,, H\}_R$ est l'équation de mouvement (4.81) du réseau de Toda.

Notons que le premier point de la proposition 4.37 découle de la proposition 2.21 appliquée à $\mathcal{T}$.

Soit $(y_{-\alpha_i}, x_j,$ pour tous $1 \leq i, j \leq \ell)$ un système de coordonnées sur $\mathcal{T}$, défini, pour tout $x + e \in \mathcal{T}$, par :

$$y_{-\alpha_i}(x+e) = \langle e_i \,|\, x \rangle \qquad \text{et} \qquad x_i(x+e) = \langle h_i \,|\, x \rangle \,.$$

En fonction de ce système de coordonnées, l'expression du R-crochet de Poisson sur $\mathcal{T}$ est le suivant :

$$\begin{cases} \{y_{-\alpha_i}, y_{-\alpha_j}\}_R = 0, \\ \{x_i, x_j\}_R = 0, \\ \{x_i, y_{-\alpha_j}\}_R = \alpha_j(h_i) y_{-\alpha_j}. \end{cases} \tag{4.82}$$

Remarque 4.38. *La matrice M du R-crochet de Poisson au point $A_0 := e + \sum_{i=1}^{\ell} e_{-\alpha_i}$ est donnée par :*

$$M = \begin{pmatrix} 0 & vC \\ -{}^tC\,{}^tv & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.83}$$

où C est la matrice de Cartan de $\mathfrak{g}$ et v est le vecteur ligne $(y_{-\alpha_1}, \ldots, y_{-\alpha_\ell})$. Comme C est inversible la matrice M est de rang 2ℓ en un point générique de $\mathcal{T}$.

Théorème 4.39. *[45] Soit $P_1, \ldots, P_\ell$ les ℓ polynômes sur $\mathfrak{g}$,* Ad*-invariants, indépendants, homogènes de degré respectivement, $m_1+1, \ldots, m_\ell+1$, définis dans le théorème 2.54. Notons $\mathcal{F}_0 := (P_1, \ldots, P_\ell)$. Le triplet $(\mathcal{F}_0, \{\cdot\,,\cdot\}_R, \mathcal{T})$ est un système intégrable au sens de Liouville et l'équation du réseau de Toda est donnée (à une constante près) par :*

$$\dot{A} = [(\nabla_A P_1)_+, A]. \tag{4.84}$$

Preuve:

(1) Le triplet $(\mathcal{F}_0, \{\cdot\,,\cdot\}_R, \mathcal{T})$ est un système intégrable car :

(a) La famille $\mathcal{F}_0$ est une famille de fonctions Ad-invariantes donc elle est involutive pour le crochet de Poisson $\{\cdot\,,\cdot\}_R$;

(b) $\mathcal{F}_0$ est indépendante sur $\mathcal{T}$ (d'après les thèorèmes de Kostant [31, théorème 9] et [32, théorème 5.2], la famille $(\mathsf{d}_e P_1, \ldots, \mathsf{d}_e P_\ell)$ est linéairement indépendante au point régulier $e \in \mathcal{T}$) ;

(c) $\operatorname{card} \mathcal{F}_0 = \dim \mathcal{T} - \frac{1}{2} \operatorname{Rk} \{\cdot\,,\cdot\}_R$.

(2) Pour prouver l'équation (4.84) il suffit de remarquer qu'on peut prendre P_1 égal à l'hamiltonien H du réseau de Toda, qui est défini, pour tout $x \in \mathfrak{g}$, par $H(x) = \frac{1}{2} \langle x \,|\, x \rangle$. □

4.4.2 Du réseau de 2-Toda au réseau de Toda

Théorème 4.40. *Soit $\mathcal{T}^2$ l'espace de phases du réseau de 2-Toda, qui s'écrit*

$$\mathcal{T}^2 := \mathfrak{g}_{\leq -1} \times \mathfrak{g}_{\geq 0} + (e, -e) + \Delta_a(\mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0), \tag{4.85}$$

où $\Delta_a(\mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0) := \{(x, -x) \mid x \in \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0\}$.

(1) Les sous-variétés $\mathcal{T}^{2'} := \mathfrak{g}_{\leq -1} \times \mathfrak{g}_{\geq 0} + (e, -e)$ et $\mathcal{T}' := \Delta_a(\mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0) + (e, -e)$ sont deux sous-variétés de Poisson de $(\mathfrak{g}^2, \{\cdot\,,\cdot\}_{\mathcal{R}})$;

(2) Les restrictions de la famille de fonctions $\mathcal{F}$ à $\mathcal{T}^{2'}$ et à $\mathcal{T}'$ sont deux familles involutives pour $\{\cdot\,,\cdot\}_{\mathcal{R}}$;

(3) Soit $(\mathcal{T}, \{\cdot\,,\cdot\}_R)$ l'espace de phases du réseau de Toda muni de la R-structure de Poisson, où R est la différence de projections sur $\mathfrak{g}_+$ et $\mathfrak{g}_-$. L'application

$$\begin{array}{cccc} \varphi & : & (\mathcal{T}, \{\cdot\,,\cdot\}_R) & \to & (\mathcal{T}', \{\cdot\,,\cdot\}_{\mathcal{R}}) \\ & & x & \mapsto & (x, -x) \end{array} \tag{4.86}$$

est un isomorphisme de systèmes intégrables.

Preuve:

(1) Nous utilisons la proposition 2.21 pour démontrer que $\mathcal{T}^{2'}$ est une sous-variété de Poisson. Nous vérifions uniquement le premier point de cette proposition car le deuxième point est le *(b)* de la preuve de la proposition 4.6. Montrons alors que $F := \mathfrak{g}_{\leq -1} \times \mathfrak{g}_{\geq 0}$ est une sous-variété de Poisson. Il suffit pour cela de prouver que $F^{\perp}$ est un idéal de Lie pour le crochet $[\cdot\,,\cdot]_{\mathcal{R}}$. Soit $(x, y) \in F^{\perp} = \mathfrak{g}_{<1} \times \mathfrak{g}_{>0} \subset \mathfrak{g}^2_-$ et soit $(z, s) \in \mathfrak{g}^2$. On a :

$$[(x, y), (z, s)]_{\mathcal{R}} = -[(x, y), (z, s)_-] \in \mathfrak{g}_{<1} \times \mathfrak{g}_{>0}.$$

On a alors que $F^{\perp}$ est un idéal de Lie de $[\cdot\,,\cdot]_{\mathcal{R}}$ donc F est une sous-variété de Poisson de $(\mathcal{T}^2, \{\cdot\,,\cdot\}_{\mathcal{R}})$. Ce qui implique en utilisant le fait que $\langle (e, -e) \,|\, [(x, y), (x', y')]_{\mathcal{R}} \rangle = 0$, pour tous $(x, y), (x', y') \in \mathfrak{g}^2$, que $\mathcal{T}^{2'}$ est une sous-variété de Poisson de $(\mathcal{T}^2, \{\cdot\,,\cdot\}_{\mathcal{R}})$.

Montrons maintenant que $\mathcal{T}'$ est une sous-variété de Poisson de $(\mathcal{T}^2, \{\cdot\,,\cdot\}_{\mathcal{R}})$. Soit $\Delta_a(\mathfrak{g}) := \{(x, -x) \mid x \in \mathfrak{g}\}$. Nous remarquons que $\mathcal{T}' := \Delta_a(\mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 + e)$ est l'intersection de $\mathcal{T}^2$ et de $\Delta_a(\mathfrak{g})$. Puisque $\mathcal{T}^2$ est une sous-variété de Poisson de $(\mathfrak{g}^2, \{\cdot\,,\cdot\}_{\mathcal{R}})$ (voir proposition 4.6), il suffit de montrer que $\Delta_a(\mathfrak{g})$ est une sous-variété de Poisson de $(\mathfrak{g}^2, \{\cdot\,,\cdot\}_{\mathcal{R}})$ pour conclure que $\mathcal{T}'$ est aussi une sous-variété de Poisson de $(\mathfrak{g}^2, \{\cdot\,,\cdot\}_{\mathcal{R}})$. Ce qui est le cas car l'orthogonal de $\Delta_a(\mathfrak{g})$, qui est $\mathfrak{g}^2_+$, est un idéal de Lie pour le crochet $[\cdot\,,\cdot]_{\mathcal{R}}$.

*(*2*)* D'après le corollaire 3.12 la famille de fonctions $\mathcal{F} := (F_{j,i}, 1 \leq i \leq \ell$ et $0 \leq j \leq m_i + 1)$ est involutive pour le crochet $\{\cdot\,,\cdot\}_{\mathcal{R}}$ et puisque les deux sous-espaces affines $\mathcal{T}'$ et $\mathcal{T}^{2'}$ sont deux sous-variétés de Poisson de $(\mathfrak{g}^2, \{\cdot\,,\cdot\}_{\mathcal{R}})$ (d'après le premier point) alors les restrictions de la famille $\mathcal{F}$ à $\mathcal{T}'$ et à $\mathcal{T}^{2'}$ sont involutives pour le crochet $\{\cdot\,,\cdot\}_{\mathcal{R}}$.

(3) En comparant les formules du lemme 4.13 avec celles de (4.82), il clair que l'application φ est un isomorphisme de Poisson. De plus, les fonctions du système intégrable $\mathcal{F} = (F_{k,i}, 1 \leq i \leq \ell, 0 \leq k \leq m_i + 1)$, restreintes a $\mathcal{T}'$, et tirées en arrière sur $\mathcal{T}$ par φ, sont les fonctions du réseau de Toda. Plus précisément, pour tout i

dans $1, \ldots, \ell$ et pour tout $0 \leq k \leq m_i + 1$, les fonctions $F_{k,i} \circ \varphi$ sont toutes égales (à des coefficients multiplicatifs près) à la fonction P_i. En effet, pour tout $x \in \mathfrak{g}$, on a

$$\begin{array}{rcl} P_i \circ \varphi_\lambda(\varphi(x)) & = & P_i(\varphi_\lambda(x, -x)) \\ & = & P_i(\lambda x - x) \\ & = & (\lambda - 1)^{m_i+1} P_i(x), \end{array}$$

d'où

$$\sum_{k=0}^{m_i+1} \lambda^k F_{k,i}(\varphi(x)) = \sum_{k=0}^{m_i+1} \lambda^k (-1)^{m_i+1-k} C^k_{m_i+1} P_i(x).$$

□

Remarque 4.41.

(1) Soit $\{\cdot\,,\cdot\}$ le crochet de Lie-Poisson sur $\mathfrak{g}$. L'application

$$\begin{array}{rcccc} \varphi & : & (\mathcal{T}^{2'}, \{\cdot\,,\cdot\}_{\mathcal{R}}) & \to & (\mathfrak{g}, \{\cdot\,,\cdot\}) \\ & & (x, y) & \mapsto & x + y \end{array}$$

est un isomorphisme de Poisson donc le rang de la restriction du $\mathcal{R}$-crochet de Poisson à $\mathcal{T}^{2'}$ est $\dim \mathfrak{g} - \ell$. En effet, l'application φ est bijective et de plus φ est la restriction du morphisme de Poisson φ_1 (voir le corollaire 3.12) à la sous-variété de Poisson $\mathcal{T}^{2'}$ de $(\mathfrak{g}^2, \{\cdot\,,\cdot\}_{\mathcal{R}})$ (voir le théorème 4.40) donc φ est un morphisme de Poisson bijective entre $(\mathcal{T}^{2'}, \{\cdot\,,\cdot\}_{\mathcal{R}})$ et $(\mathfrak{g}, \{\cdot\,,\cdot\})$ et par suite $(\mathrm{Rk}\,\{\cdot\,,\cdot\}_{\mathcal{R}})_{|\mathcal{T}^{2'}} = \mathrm{Rk}\,\{\cdot\,,\cdot\} = \dim \mathfrak{g} - \ell$.

(2) Les restrictions des fonctions $F_{j,i}$, pour $1 \leq i \leq \ell$ et $0 \leq j \leq m_i + 1$ à la sous-variété $\mathcal{T}^{2'}$ sont dépendantes. Nous avons vérifié sur des algèbres de Lie de petite dimension ($\mathfrak{sl}_3(\mathbf{C})$ et $\mathfrak{sl}_4(\mathbf{C})$) qu'on peut construire une sous-famille $\mathcal{F}_1$ de la restriction de $\mathcal{F}$ à $\mathcal{T}^{2'}$ intégrable au sens de Liouville ($\mathcal{F}_1$ est de cardinal $\frac{1}{2}(\dim \mathfrak{g} + \ell) = dim \mathcal{T}^2 - (\mathrm{Rk}\,\{\cdot\,,\cdot\}_{\mathcal{R}})_{|\mathcal{T}^{2'}}$ et indépendante sur $\mathcal{T}^{2'}$). Ce qui nous permet de conjecturer que la restriction du réseau de 2-Toda à $\mathcal{T}^{2'}$ est un système intégrable au sens de Liouville.

Chapitre 5

Le réseau de full Kostant-Toda périodique

Considérons le *réseau de Full Toda*, qui était construit par Deift, Li, Nanda, Tomei [14], il s'agit des champs de vecteurs, décrits par des systèmes d'équations différentielles donné sous la forme de l'équation de Lax :

$$\dot{L} = [L, L_-]$$

où L est une matrice symétrique de $\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})$ et L_- est le projeté de L sur la sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})$ formée par les matrices antisymétriques. Dans [14] les auteurs ont montré l'intégrabilité du réseau de Full Toda. Nous remarquons que le cas periodique de ce système est un cas particulier des systèmes donnés dans [52] par van Moerbeke et Mumford.

A un morphisme de Poisson près, le réseau de Full Toda donne un autre système intégrable, qui est le cas non-symétrique de ce dernier, appelé *réseau de Full Kostant-Toda*. Ce système est donné par Ercolani, Flaschka et Singer [18] par l'équation de Lax :

$$\dot{L} = [L, L_-], \tag{5.1}$$

où

$$L = \begin{pmatrix} a_{11} & 1 & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} & \end{pmatrix} \in \mathfrak{gl}_n(\mathbf{C}) \tag{5.2}$$

et L_- est la partie triangulaire strictement inférieure de L. Il est clair que si L est dans le sous-espace affine $\mathcal{T}$ formé par des éléments de la forme (5.2), $[L, L_-]$ est dans le sous-espace vectoriel sous-jacent à $\mathcal{T}$ ce qui donne un sens à l'équation (5.1). De plus, le coté droit de (5.1) est toujours de trace nulle, on peut également considérer (5.1) et (5.2) avec $L \in \mathfrak{sl}_n(\mathbf{C})$ (de même pour le cas symétrique).

Comme pour le réseau de Toda, le cas non symétrique, c'est-à-dire le réseau de Full Kostant Toda, se généralise aux algèbres de Lie simples. L'intégrabilité dans ce cadre général a été prouvé par Gekhtman et Shapiro [24].

En reprenant la construction du réseau de Toda périodique à partir du réseau de Toda classique nous construisons ici le *réseau de Full Kostant-Toda périodique*. Nous le définissons comme un système d'équations différentielles donné par l'équation de Lax

$$\dot{L}(\lambda) = [L(\lambda), L(\lambda)_-], \tag{5.3}$$

où

$$L(\lambda) = \begin{pmatrix} a_{11} & 1+b_{12}\lambda^{-1} & b_{13}\lambda^{-1} & \cdots & b_{1n}\lambda^{-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & b_{n-2,n}\lambda^{-1} \\ a_{n-1,1} & \cdots & \cdots & \ddots & 1+b_{n-1,n}\lambda^{-1} \\ a_{n1}+\lambda & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{5.4}$$

et

$$L(\lambda)_- = \begin{pmatrix} 0 & b_{12}\lambda^{-1} & \cdots & b_{1n}\lambda^{-1} \\ a_{21} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b_{n-1,n}\lambda^{-1} \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Dans ce chapitre, nous construisons le réseau de full Kostant-Toda périodique associé à toute algèbre de Lie simple et nous prouvons son intégrabilité au sens de Liouville.

5.1 Construction du réseau de Full Kostant-Toda périodique associé à une algèbre de Lie simple

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple (complexe) de dimension finie, de rang ℓ, munie de la forme de Killing $\langle\cdot\,|\cdot\,\rangle$. Soient $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$, Φ le système de racines de $\mathfrak{g}$ associé à $\mathfrak{h}$, Φ_+ l'ensemble des racines positives de Φ, $\Pi := (\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell)$ une base de Φ, β la plus longue racine positive et $(h_1, \ldots, h_\ell)$ la base de $\mathfrak{h}$ associée à Π.

Notons, pour tout α une racine de $\mathfrak{g}$, e_α un vecteur propre non nul associé à la racine $\alpha \in \Phi$, en particulier lorsque $\alpha = \alpha_i$, pour $1 \le i \le \ell$ on note e_i le vecteur e_{α_i}. Considérons la décomposition de $\mathfrak{g}$ suivante (voir (2.44)) :

$$\mathfrak{g} := \bigoplus_{k\in\mathbf{Z}} \mathfrak{g}_k,$$

où, pour $k \neq 0$, $\mathfrak{g}_k := \{e_\alpha \mid \alpha \in \Phi, |\alpha| = k\}$ et $\mathfrak{g}_0 := \mathfrak{h}$. On note, pour tout $k \in \mathbf{Z}$,

$$\mathfrak{g}_{<k} := \bigoplus\nolimits_{i<k} \mathfrak{g}_i, \qquad \mathfrak{g}_{\le k} := \bigoplus\nolimits_{i\le k} \mathfrak{g}_i,$$
$$\mathfrak{g}_{>k} := \bigoplus\nolimits_{i>k} \mathfrak{g}_i, \qquad \mathfrak{g}_{\ge k} := \bigoplus\nolimits_{i\ge k} \mathfrak{g}_i.$$

Définition 5.1.

(1) On appelle espace de phases du réseau de Full Kostant-Toda périodique *la variété $\mathcal{T}_\lambda$ définie par :*

$$\mathcal{T}_\lambda := \lambda^{-1}\mathfrak{g}_{>0} + (\mathfrak{g}_{\le 0} + \sum_{i=1}^{\ell} e_i) + \lambda e_{-\beta}. \tag{5.5}$$

Tout élément $L(\lambda)$ de $\mathcal{T}_\lambda$ est donc de la forme

$$L(\lambda) = \lambda e_{-\beta} + \sum_{i=1}^{\ell}(a_i h_i + e_i) + \sum_{\alpha\in\Phi_+} a_{-\alpha}e_{-\alpha} + \lambda^{-1}\sum_{\alpha\in\Phi_+} b_\alpha e_\alpha \tag{5.6}$$

et inversement tout élément $L(\lambda)$ de la forme (5.6) est dans $\mathcal{T}_\lambda$.

(2) On appelle réseau de Full Kostant-Toda périodique, associé à $\mathfrak{g}$, *le système d'équations différentielles sur $\mathcal{T}_\lambda$ donné sous la forme de l'équation de Lax :*

$$\dot{L}(\lambda) = [L(\lambda), L(\lambda)_-], \tag{5.7}$$

où $L(\lambda)$ et donné dans (5.6) et

$$L(\lambda)_- = \sum_{\alpha\in\Phi_+} a_{-\alpha}e_{-\alpha} + \lambda^{-1}b_\alpha e_\alpha,$$

Nous justifierons plus tard l'équation (5.7). C'est-à-dire, nous montrerons que lorsque $L(\lambda) \in \mathcal{T}_\lambda$, le crochet de Lie $[L(\lambda), L(\lambda)_-]$ est dans le sous-espace vectoriel sous-jacent à l'espace affine $\mathcal{T}_\lambda$.

Remarque 5.2.

(1) On retrouve évidemment pour $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(\mathbf{C})$ le réseau de Full Kostant-Toda périodique défini dans (5.1) et (5.2) (où nous choisissons pour $\mathfrak{h}$ la sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ formée par les matrices diagonales).

(2) La dimension de l'espace de phases du réseau de Full Kostant-Toda périodique est la dimension de $\mathfrak{g}$. En effet, $\mathcal{T}_\lambda := \lambda^{-1}\mathfrak{g}_{>0} + (\mathfrak{g}_{\leq 0} + \sum_{i=1}^{\ell} e_i) + \lambda e_{-\beta}$. Donc

$$\dim \mathcal{T}_\lambda = \dim \mathfrak{g}_{>0} + \dim \mathfrak{g}_{\leq 0} = \dim \mathfrak{g}.$$

5.2 Structure de Poisson sur l'espace de phases du réseau de Full Kostant-Toda périodique

5.2.1 Structure de Poisson sur l'algèbre de lacets $\mathfrak{g}\otimes\mathbf{C}[\lambda, \lambda^{-1}]$

Soit $\tilde{\mathfrak{g}}$ l'algèbre dite "de lacets", à savoir le produit tensoriel $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}\otimes\mathbf{C}[\lambda, \lambda^{-1}]$. Pour chaque $x(\lambda)$ dans $\tilde{\mathfrak{g}}$, il existe un nombre fini non nul d'éléments x_i de $\mathfrak{g}$, tels que :

$$x(\lambda) = \sum_{i\in\mathbf{Z}} x_i\lambda^i.$$

Le premier crochet de Lie que nous considérons sur $\tilde{\mathfrak{g}}$ est l'unique crochet $\mathbf{C}[\lambda, \lambda^{-1}]$ bilinéaire qui étend le crochet de $\mathfrak{g}$.

On va construire une structure de Poisson sur $\tilde{\mathfrak{g}}$ pour laquelle l'espace de phasess du réseau de Full Kostant-Toda périodique est une sous-variété de Poisson. On introduit une graduation sur $\tilde{\mathfrak{g}}$ en définissant le degré de $\lambda^k e_\alpha$, α une racine de $\mathfrak{g}$ et $k \in \mathbf{Z}$, comme étant $|\alpha| + (|\beta| + 1)k$, où on rappelle que β est la plus longue racine positive.
Notons $\tilde{\mathfrak{g}}_i$ le sous-espace de poids i, lequel est défini par :

$$\tilde{\mathfrak{g}}_i := \langle\lambda^k e_\alpha,\ \text{tel que } |\alpha| + (|\beta| + 1)k = i,\ \text{où } \alpha\in\Phi, k\in\mathbf{Z}\rangle.$$

Remarque 5.3.

(1) *Pour* $i = 0$, *on a* $\tilde{\mathfrak{g}}_0 = \mathfrak{h}$ *;*

(2) *Pour tout* $-|\beta| \leq i \leq -1$, *on a :*

$$\tilde{\mathfrak{g}}_i = \mathfrak{g}_i \oplus \lambda^{-1}\mathfrak{g}_{i+|\beta|+1}$$

et pour tout $1 \leq i \leq |\beta|$, *on a :*

$$\tilde{\mathfrak{g}}_i = \mathfrak{g}_i \oplus \lambda\mathfrak{g}_{i-|\beta|-1}.$$

Lemme 5.4.

(1) *Pour tous* $k, l \in \mathbf{Z}$, *les sous-espaces* $\tilde{\mathfrak{g}}_k$ *et* $\tilde{\mathfrak{g}}_l$ *vérifient*

$$[\tilde{\mathfrak{g}}_k, \tilde{\mathfrak{g}}_l] \subset \tilde{\mathfrak{g}}_{k+l},$$

(*autrement dit,* $\tilde{\mathfrak{g}}$ *est graduée*).

(2) *L'algèbre de lacets* $\tilde{\mathfrak{g}}$ *admet la décomposition suivante :*

$$\tilde{\mathfrak{g}} = \tilde{\mathfrak{g}}_+ \oplus \tilde{\mathfrak{g}}_-, \tag{5.8}$$

où

$$\tilde{\mathfrak{g}}_+ := \bigoplus_{i\geq 0} \tilde{\mathfrak{g}}_i \qquad \text{et} \qquad \tilde{\mathfrak{g}}_- := \bigoplus_{i<0} \tilde{\mathfrak{g}}_i$$

sont des sous-algèbres de Lie de $\tilde{\mathfrak{g}}$ *.*

Soit $\tilde{\mathfrak{g}}^*$ l'espace formée par toutes les formes linéaires, qui sont nulles sur tous les $\tilde{\mathfrak{g}}_i$ sauf sur un nombre fini d'entre eux (autrement dit $\tilde{\mathfrak{g}}^*$ est le sous-espace du dual de $\tilde{\mathfrak{g}}$, engendré par les $\mathfrak{g}_i^*$) et soit $\tilde{R}$ l'endomorphisme de $\tilde{\mathfrak{g}}$, défini par :

$$\tilde{R} := \tilde{P}_+ - \tilde{P}_-, \tag{5.9}$$

où $\tilde{P}_\pm$ est la projection de $\tilde{\mathfrak{g}}$ sur $\tilde{\mathfrak{g}}_\pm$. Pour tout élément $x(\lambda)$, on note $x(\lambda)_\pm := \tilde{P}_\pm(x(\lambda))$. D'après l'exemple 2.24, l'endomorphisme $\tilde{R}$ est une $\tilde{R}$-matrice de $\tilde{\mathfrak{g}}$. Comme dans le le cas du dual d'une algèbre de Lie de dimension finie, $\tilde{\mathfrak{g}}^*$ est muni du $\tilde{R}$-crochet de Poisson, défini, pour tous $F, G \in \mathcal{F}(\tilde{\mathfrak{g}}^*)$ et pour tout $\xi(\lambda) \in \tilde{\mathfrak{g}}^*$, par :

$$\{F, G\}_{\tilde{R}}(\xi(\lambda)) = \left\langle \xi(\lambda), [\mathsf{d}_{\xi(\lambda)}F, \mathsf{d}_{\xi(\lambda)}G]_{\tilde{R}} \right\rangle.$$

Pour donner un sens à ce crochet le plus simple est de prendre comme $\mathcal{F}(\tilde{\mathfrak{g}}^*)$, l'algèbre symétrique engendré par les éléments de $\tilde{\mathfrak{g}}$ (qui est une sous-algèbre de fonctions polynomiales sur $\mathfrak{g}^*$ et par construction est tel que la différentielle d'une fonction en un point est bien définie). A l'aide de la forme bilinéaire, Ad-invariante, non-dégénérée suivante :

$$\begin{array}{cccc} \langle \cdot \,|\, \cdot \rangle_\lambda : & \tilde{\mathfrak{g}} \times \tilde{\mathfrak{g}} & \to & \mathbf{C} \\ & (X(\lambda), Y(\lambda)) & \mapsto & \sum_{k\in\mathbf{Z}} \langle X_k \,|\, Y_{-k} \rangle, \end{array} \tag{5.10}$$

on peut identifier $\tilde{\mathfrak{g}}$ avec $\tilde{\mathfrak{g}}^*$. Alors la différentielle d'une fonction en un point de $\tilde{\mathfrak{g}}^*$ s'identifie à un élément de $\tilde{\mathfrak{g}}$, car la restriction de $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle_\lambda$ à tout sous-espace $\bigoplus_{i=-k}^{k} \lambda^i \mathfrak{g}$ est non-dégénérée.

Remarque 5.5.

(1) L'espace $\tilde{\mathfrak{g}}^*$ admet la décomposition suivante :

$$\tilde{\mathfrak{g}}^* := \bigoplus_{i \in \mathbf{Z}} \tilde{\mathfrak{g}}_i^*,$$

où

$$\tilde{\mathfrak{g}}_i^* := \{\xi \in \tilde{\mathfrak{g}}^* \mid \xi \text{ est nulle sur } \tilde{\mathfrak{g}}_j, \text{pour tout } j \neq i\} \ ;$$

(2) A l'aide de la forme (5.10) chaque $\tilde{\mathfrak{g}}_i^*$ s'identifie à $\tilde{\mathfrak{g}}_{-i}$;

(3) L'orthogonal de $\tilde{\mathfrak{g}}_i$, pour tout $i \in \mathbf{Z}$, par rapport à la forme (5.10) est $\tilde{\mathfrak{g}}_i^{\perp} = \bigoplus_{j \neq i} \tilde{\mathfrak{g}}_{-j}$.

Soit $\mathcal{F}(\tilde{\mathfrak{g}})$ l'algèbre symétrique engendrée par les éléments de $\tilde{\mathfrak{g}}^*$ (qui est une sous-algèbre de l'algèbre des fonctions polynomiales sur $\mathfrak{g}$ et par construction est tel que le gradient d'une fonction en un point de $\tilde{\mathfrak{g}}$ est bien défini dans $\tilde{\mathfrak{g}}$). Alors $\tilde{\mathfrak{g}}$ est munie de la structure de Poisson, donnée pour tous $F, G \in \mathcal{F}(\tilde{\mathfrak{g}})$ et pour tout $x(\lambda) \in \tilde{\mathfrak{g}}$, par :

$$\{F, G\}_{\tilde{R}}(x(\lambda)) = \left\langle x(\lambda) \,|\, [\nabla_{x(\lambda)} F, \nabla_{x(\lambda)} G]_{\tilde{R}} \right\rangle_{\lambda} \tag{5.11}$$

où $\nabla_{x(\lambda)} F$ est le gradient de F en $x(\lambda)$, calculé à l'aide de la forme $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle_{\lambda}$.

Par construction, l'identification entre $\tilde{\mathfrak{g}}^*$ et $\tilde{\mathfrak{g}}$ induite par $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle_{\lambda}$ est un isomorphisme d'algèbre de Poisson entre $\mathcal{F}(\tilde{\mathfrak{g}})$ et $\mathcal{F}(\tilde{\mathfrak{g}}^*)$.

5.2.2 Le $\tilde{R}$-crochet de Poisson sur $\mathcal{F}(\mathcal{T}_{\lambda})$

Proposition 5.6. *L'espace de phases du réseau de Full Kostant-Toda périodique $\mathcal{T}_{\lambda}$ hérite d'une structure de Poisson de $(\mathcal{F}(\tilde{\mathfrak{g}}), \{\cdot\,,\cdot\}_{\tilde{R}})$.*

Preuve:

D'après la remarque 5.3, le sous-espace affine $\mathcal{T}_{\lambda}$ de $\tilde{\mathfrak{g}}$ satisfait la formule suivante :

$$\mathcal{T}_{\lambda} := \bigoplus_{-|\beta| \leq i \leq 0} \tilde{\mathfrak{g}}_i + f, \tag{5.12}$$

où $f := \sum_{i=1}^{\ell} e_i + \lambda e_{-\beta} \in \tilde{\mathfrak{g}}_1$.

Nous allons vérifier que l'idéal $\mathcal{I}$ des fonctions nulles sur $\mathcal{T}_{\lambda}$ est de Poisson pour le crochet $\{\cdot\,,\cdot\}_{\tilde{R}}$. Remarquons d'abord que pour tout $L(\lambda) \in \mathcal{T}_{\lambda}$ et pour tout $F \in \mathcal{I}$, on a :

$$\nabla_{L(\lambda)} F \in \bigoplus_{-|\beta| \leq i \leq 0} \tilde{\mathfrak{g}}_i^{\perp} = \tilde{\mathfrak{g}}_{<0} \oplus \tilde{\mathfrak{g}}_{\geq |\beta|+1}. \tag{5.13}$$

Soit $G \in \mathcal{F}(\tilde{\mathfrak{g}})$ et soient $x(\lambda) \in \tilde{\mathfrak{g}}_{<0}$ et $y(\lambda) \in \tilde{\mathfrak{g}}_{\geq |\beta|+1}$, tel que $\nabla_{L(\lambda)} F = x(\lambda) + y(\lambda)$, on a :

$$\begin{aligned} \{F, G\}_{\tilde{R}}(L(\lambda)) &= \left\langle L(\lambda) \,|\, [(\nabla_{L(\lambda)} F)_+, (\nabla_{L(\lambda)} G)_+] - [(\nabla_{L(\lambda)} F)_-, (\nabla_{L(\lambda)} G)_-] \right\rangle \\ &= \left\langle L(\lambda) \,|\, [y(\lambda), (\nabla_{L(\lambda)} G)_+] - [x(\lambda), (\nabla_{L(\lambda)} G)_-] \right\rangle = 0, \end{aligned}$$

car $L(\lambda) \in \bigoplus_{-|\beta| \leq i \leq 1} \tilde{\mathfrak{g}}_i$ est orthogonal à $[y(\lambda), (\nabla_{L(\lambda)} G)_+] \in \tilde{\mathfrak{g}}_{\geq |\beta|+1}$ et aussi orthogonal à $[x(\lambda), (\nabla_{L(\lambda)} G)_-] \in \tilde{\mathfrak{g}}_{<-1}$. L'idéal $\mathcal{I}$ est donc de Poisson ce qui implique que $(\mathcal{F}(\tilde{\mathfrak{g}})/\mathcal{I}, \{\cdot\,,\cdot\}_{\tilde{R}})$ est une algèbre de Poisson. Puisque $\mathcal{F}(\tilde{\mathfrak{g}})/\mathcal{I}$ est canoniquement isomorphe à $\mathcal{F}(\mathcal{T}_{\lambda})$ alors cette dernière algèbre de fonctions est une algèbre de Poisson pour le crochet $\{\cdot\,,\cdot\}_{\tilde{R}}$ et par suite $\mathcal{T}_{\lambda}$ hérite d'une structure de Poisson de $(\mathcal{F}(\tilde{\mathfrak{g}}), \{\cdot\,,\cdot\}_{\tilde{R}})$. □

5.2.3 Le réseau de Full Kostant-Toda périodique est hamiltonien

Dans ce paragraphe, on va justifier la définition 5.1 du réseau de Full Kostant-Toda périodique.

Proposition 5.7. *Soit H la fonction de $\tilde{\mathfrak{g}}$ définie en tout point par :*

$$H(L(\lambda)) := \frac{1}{2}\langle L(\lambda) \mid L(\lambda)\rangle_{\lambda}. \tag{5.14}$$

L'équation du champ hamiltonien $\mathcal{X}_H := \{\cdot\,, H\}_{\tilde{R}}$ sur $\mathcal{T}_\lambda$ est l'équation (5.7) qui décrit le mouvement du réseau de Full Kostant-Toda périodique.

Preuve:
(1) On rappelle que le $\tilde{R}$-crochet de Poisson (5.11) est donné, pour tous $F, G \in \mathcal{F}(\tilde{\mathfrak{g}})$ et pour tout $x(\lambda)$, par :

$$\{F, G\}_{\tilde{R}}(x(\lambda)) = \left\langle x(\lambda) \,|\, [\nabla_{x(\lambda)}F, \nabla_{x(\lambda)}G]_{\tilde{R}} \right\rangle_{\lambda},$$

où $\tilde{R} := \tilde{P}_+ - \tilde{P}_-$ la différence des projections sur $\tilde{\mathfrak{g}}_+$ et $\tilde{\mathfrak{g}}_-$;
(2) Il est clair que H est Ad-invariante sur $\tilde{\mathfrak{g}}$ et que pour tout $L(\lambda) \in \tilde{\mathfrak{g}}$, on a :

$$\nabla_{L(\lambda)}H = L(\lambda).$$

Les deux points (1) et (2) impliquent, d'après l'équation (2.28) de la proposition 2.27, que les équations du mouvement sont données par :

$$\dot{L}(\lambda) = -[(L(\lambda))_-, L(\lambda)],$$

qui n'est autre que l'équation (5.7) du réseau de Full Kostant-Toda périodique. □

5.3 Le réseau de Full Kostant-Toda est Liouville intégrable

Comme dans le paragraphe 5.2, $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie simple, munie de la forme de Killing $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$ et $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan. Soient $P_1, \ldots, P_\ell$ les ℓ polynômes sur $\mathfrak{g}$, Ad-invariants et indépendants de degrés $m_1+1, \ldots, m_\ell+1$, tels que définis dans le théorème 2.54. Chaque P_i s'étend sur $\tilde{\mathfrak{g}}$ en une fonction $\tilde{P}_i$ à valeurs dans $\mathbf{C}[\lambda, \lambda^{-1}]$, chacune de ces fonctions est une fonction Ad-invariante de $\tilde{\mathfrak{g}}$ à valeurs dans $\mathbf{C}[\lambda]$, donc chaque coefficient en λ est une fonction Ad-invariante sur $\tilde{\mathfrak{g}}$ à valeur dans $\mathbf{C}$.

Remarque 5.8.

(1) *Soit H l'hamiltonien du réseau de Full Kostant Toda périodique, on rappelle qu'il est homogène de degré 2 et* Ad-*invariant sur $\tilde{\mathfrak{g}}$ et qu'il est défini dans (5.14), pour tout point $L(\lambda)$ de $\mathcal{T}_\lambda$, par :*

$$H(L(\lambda)) := \frac{1}{2}\langle L(\lambda) \mid L(\lambda)\rangle_{\lambda}.$$

Il est clair que H est homogène, Ad-*invariant de degré $2 = m_1 + 1$, donc on peut prendre $\tilde{P}_1 := H$;*

(2) Les coefficients en λ^k*, pour tout* $k \in \mathbf{Z}$*, des fonctions* $\tilde{P}_1, \ldots, \tilde{P}_\ell$ *sont tous* Ad*-invariants sur* $\tilde{\mathfrak{g}}$*, d'après la proposition 2.27 ils sont en involution pour le* $\tilde{R}$*-crochet de Poisson* $\{\cdot\,,\cdot\}_{\tilde{R}}$*. Par conséquent tous les coefficients des Hamiltoniens* $\tilde{P}_1, \ldots, \tilde{P}_\ell$ *sont des constantes de mouvement du réseau de Full Kostant-Toda périodique ;*

(3) On dispose donc d'un très grand nombre de fonctions en involution susceptible de donner l'intégrabilité du réseau de Full Kostant-Toda périodique. On verra bientôt que la plupart d'entre elles sont des fonctions nulles ou des constantes et les fonctions restantes donnent exactement l'intégrabilité.

5.3.1 Construction du système intégrable

Soient comme précédemment $\tilde{P}_1, \ldots, \tilde{P}_\ell$ les extensions des polynômes $P_1, \ldots, P_\ell$ à $\tilde{\mathfrak{g}}$. Il existe une famille de fonctions $\tilde{F}_{k,i} \in \mathcal{F}(\tilde{\mathfrak{g}})$ sur $\tilde{\mathfrak{g}}$, définies par :

$$\tilde{P}_i(L(\lambda)) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda^{-k} \tilde{F}_{k,i}(L(\lambda)), \qquad \forall L(\lambda) \in \tilde{\mathfrak{g}}. \tag{5.15}$$

Restreinte à $\mathcal{T}_\lambda$ la plupart de ces fonctions sont constantes ou nulles.

Lemme 5.9. *Pour* $i = 1, \ldots, \ell$*, la restriction de* $\tilde{P}_i$ *à* $\mathcal{T}_\lambda$*, s'écrit, pour tout* $L(\lambda) \in \mathcal{T}(\lambda)$ *sous la forme :*

$$\tilde{P}_i(L(\lambda)) = \sum_{k=0}^{m_i} \lambda^{-k} \tilde{F}_{k,i}(L(\lambda)) + \lambda\, c\, \delta_{i,\ell}, \tag{5.16}$$

où c *est une constante non nulle.*

Preuve:
Puisque le degré de $\tilde{P}_i$, pour tout $1 \leq i \leq \ell$ est égal à $m_i + 1$ alors les retrictions à $\mathcal{T}_\lambda$ de $\tilde{F}_{k,i}(L(\lambda))$, construites en (5.15), sont nulles pour tous $1 \leq i \leq \ell$ et pour k plus grand que $m_i + 1$ et plus petit que $-m_i - 1$ et

$$\tilde{P}_i(L(\lambda)) = \sum_{k=-m_i-1}^{m_i+1} \lambda^{-k} \tilde{F}_{k,i}(L(\lambda)).$$

Montrons maintenant que $\tilde{F}_{m_i+1,i}$ est nulle sur $\mathcal{T}_\lambda$, pour tout $1 \leq i \leq \ell$. Soit $L(\lambda) = \lambda e_{-\beta} + X + \lambda^{-1} Y \in \mathcal{T}_\lambda$, on remarque que

$$\tilde{P}_i(L(\lambda)) = \lambda^{-m_i-1} \tilde{P}_i(Y + \lambda^2 e_{-\beta} + \lambda X).$$

Donc le coefficient en degré $-m_i - 1$, s'écrit

$$\tilde{F}_{m_i+1,i}(L(\lambda)) = P_i(Y).$$

Puisque Y est un élément de $\mathfrak{g}_{>0}$, il est nilpotent. Ce qui implique, d'après [17, théorème 8.1.3] que $P(Y)$ est nul pour tout P polynôme Ad-invariant sur $\mathfrak{g}$.

Montrons que les fonctions $\tilde{F}_{k,i}$, pour tout k strictement inférieur à -1 sont nuls et que la fonction $\tilde{F}_{-1,i}$ est nulle sauf pour $i = \ell$, auquel cas elle est constante.

On rappelle que $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie simple de rang ℓ, $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$, Φ est l'ensemble des racines de $\mathfrak{g}$, $\Pi = (\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell)$ est une base de Φ et β est la plus longue racine positive. Pour tout $\gamma \in \Phi$, on note e_γ un vecteur propre de $\mathfrak{g}$ associé à la racine γ. Les extensions $\tilde{x}_i$ et $\tilde{x}_\gamma$, pour tout $1 \leq i \leq \ell$ et pour tout $\gamma \in \Phi$ à $\tilde{\mathfrak{g}}$ des fonctions coordonnées $(x_i, x_\gamma, 1 \leq i \leq \ell, \gamma \in \Phi)$ sur $\mathfrak{g}$ de la proposition 2.53 ont des restrictions à $\mathcal{T}_\lambda$ données par :

$$\begin{cases} x_i, & 1 \leq i \leq \ell, & (\text{ type } I) \\ x_{-\gamma}, & \text{si } \gamma \in \Phi_+ \backslash \beta, & (\text{ type } II) \\ x_{-\beta} + \lambda, & \text{si } \gamma = \beta, & (\text{ type } III) \\ \lambda^{-1} y_\gamma + 1, & \text{si } \gamma \in \Pi, & (\text{ type } IV) \\ \lambda^{-1} y_\gamma, & \text{si } \gamma \in \Phi_+ \backslash \Pi, & (\text{ type } V) \end{cases} \tag{5.17}$$

ici y_γ désigne x_γ pour toute γ racine positive. Donc, pour chaque P_i polynôme homogène Ad-invariant sur $\mathfrak{g}$ de degré $m_i + 1$, la restriction à $\mathcal{T}_\lambda$ de son extension $\tilde{P}_i$ sur $\tilde{\mathfrak{g}}$ s'écrit comme combinaison de monômes de la forme :

$$\begin{array}{l} x_{p_1} \ldots x_{p_h}, \\ \times \\ x_{-\gamma_1} \ldots x_{-\gamma_p}, \\ \times \\ (x_{-\beta} + \lambda)^j, \\ \times \\ (\lambda^{-1} y_{\alpha_{j_1}} + 1) \ldots (\lambda^{-1} y_{\alpha_{j_k}} + 1), \\ \times \\ \lambda^{-1} y_{\delta_1} \ldots \lambda^{-1} y_{\delta_q}, \end{array} \tag{5.18}$$

où $\alpha_{j_1}, \ldots \alpha_{j_k} \in \Pi$ sont des racines simples, $\gamma_1, \ldots, \gamma_p \in \Phi_+ \backslash \beta$, $\delta_1, \ldots, \delta_q \in \Phi_+ \backslash \Pi$ sont des racines positives de $\mathfrak{g}$, $j \in \mathbf{N}$ et $p_1 \ldots, p_h \in \{1, \ldots, \ell\}$ et où les conditions suivantes sont satisfaites :

$$\begin{cases} h + p + j + k + q = m_i + 1 & \text{(C1)}, \\ \sum_{i=1}^{p} -|\gamma_i| - j|\beta| + k + \sum_{i=1}^{q} |\delta_i| = 0 & \text{(C2)} . \end{cases}$$

La première condition signifie juste que P_i est homogène de degré $m_i + 1$ et la deuxième est une conséquence du premier point de la proposition 2.53, qui affirme que les P_i sont homogènes de degré zéro en les poids des racines. Les termes de (5.18) sont supposés égaux à 1 si $h = 0$ ou $p = 0$ ou $j = 0$ ou $k = 0$ ou $q = 0$.

Montrons maintenant que les fonctions $\tilde{F}_{k,i}$, pour tout k strictement inférieur à -1 sont nuls.

On sait que pour tout $1 \leq i \leq q$ la longueur de la racine δ_i est inférieure ou égale à $|\beta| = m_\ell$. De plus, k est inférieur ou égal à $m_i + 1$, donc à $m_\ell + 1$. Mais, on ne peut pas avoir $k = m_\ell + 1$ car cela impliquerait $h = p = j = q = 0$ et contredirait la seconde condition (C2). Donc $k \leq m_\ell$, et on obtient l'inégalité

$$S = \sum_{i=1}^{p} |\gamma_i| = -jm_\ell + k + \sum_{i=1}^{q} |\delta_i| \leq (1 + q - j)m_\ell. \tag{5.19}$$

Puisque les longueurs des racines $\gamma_1, \dots, \gamma_p$ sont positives, leur somme S est positive ou nulle (car p peut être 0). Donc $j \leq q+1$. Ceci implique que les monômes qui composent la restriction à $\mathcal{T}_\lambda$ de $\tilde{P}_i$ ont au moins $j-1$ produits de fonctions du type V à chaque fois qu'ils ont une puissance j-ième de la fonction de type III. Ce produit ne peut faire apparaître de terme en λ^k pour $k \geq 2$. Comme les autres types (I-II-IV) sont des polynômes en λ^{-1}, la restriction à $\mathcal{T}_\lambda$ de $\tilde{P}_i$ ne peut faire apparaître de terme en λ^k pour $k \geq 2$. Autrement dit, les restrictions des fonctions $\tilde{F}_{k,i}$ sont nulles pour 0, pour tout $k \leq -2$.

Montrons maintenant que la fonction $\tilde{F}_{-1,i}$ est nulle sauf pour $i = \ell$, auquel cas elle est constante non nulle. Il découle des formules dans (5.18) qu'un terme en λ ne peut apparaître dans les monômes qui composent $\tilde{P}_i$ que si $j \geq q+1$. Or, on a vu que $j \leq q+1$, d'où $j = q+1$. D'après (5.19), ceci implique que $p = 0$, et que $k = m_\ell$. Ces données, en utilisant la condition (C1), donnent $h + 2q + 1 + m_\ell = m_i + 1$, ce qui, à son tour, implique $m_i = m_\ell$ et $h = q = 0$, d'où $j = 1$. Les monômes qui sont suscepibles de faire apparaître un terme en λ font donc apparaître un terme qui est le produit de m_ℓ termes du type IV avec le terme de type III, c'est-à-dire de la forme

$$(x_{-\beta} + \lambda)(\lambda^{-1} y_{\alpha_{j_1}} + 1) \dots (\lambda^{-1} y_{\alpha_{j_{m_\ell}}} + 1),$$

où $\alpha_{j_1}, \dots, \alpha_{j_{m_\ell}}$ sont des racines simples. Mais le coefficient en λ qui apparaît dans ce cas est constant. $\square$

Remarque 5.10. *Chaque fonction $\tilde{F}_{k,i}$, pour $1 \leq i \leq \ell$ et $0 \leq k \leq m_i$, est égale à*

$$\tilde{F}_{k,i}(L(\lambda)) = \operatorname{Res} \frac{\tilde{P}_i(L(\lambda))}{\lambda^{k+1}}, \qquad \forall L(\lambda) \in \mathcal{T}_\lambda, \tag{5.20}$$

avec $\operatorname{Res}(\sum_{k=-q}^{p} \lambda^k a_k) := a_{-1}$.

Définition 5.11. *On appelle $\tilde{\mathcal{F}}_\lambda$ la famille formée par les restrictions des $\tilde{F}_{k,i}$, pour $1 \leq i \leq \ell$ et $0 \leq k \leq m_i$, à $\mathcal{T}_\lambda$ suivante :*

$$\tilde{\mathcal{F}}_\lambda := (\tilde{F}_{k,i}, 1 \leq i \leq \ell, \quad 0 \leq k \leq m_i). \tag{5.21}$$

Nous montrons dans la suite que la famille $\tilde{\mathcal{F}}_\lambda$ est intégrable au sens de Liouville. Pour commencer, du fait de la formule (2.57), que l'on rappelle :

$$m_1 + \dots + m_\ell = \frac{1}{2}(\dim \mathfrak{g} - \ell),$$

on déduit le lemme ci-dessous :

Lemme 5.12. *Le cardinal de la famille de fonctions $\tilde{\mathcal{F}}_\lambda$ est*

$$\operatorname{card} \tilde{\mathcal{F}}_\lambda = \sum_{i=1}^{\ell} (m_i + 1) = \frac{1}{2}(\dim \mathfrak{g} + \ell). \tag{5.22}$$

Pour vérifier que la famille $\tilde{\mathcal{F}}_\lambda$ est intégrable au sens de Liouville nous allons montrer que le rang de la structure de Poisson $\{\cdot\,,\cdot\}_{\tilde{R}}$ sur l'espace de phases $\mathcal{T}_\lambda$ est $\dim \mathcal{T}_\lambda - \ell$, et que $\tilde{\mathcal{F}}_\lambda$ est une famille indépendante de fonctions.

5.3.2 Le rang du $\tilde{R}$-crochet de Poisson sur $\mathcal{T}_\lambda$

Nous montrons dans ce paragraphe qu'il existe ℓ Casimirs indépendants sur $\mathcal{T}_\lambda$ et qu'il existe un point $L_0(\lambda)$ de $\mathcal{T}_\lambda$, tel que le rang de la structure de Poisson à ce point est $\dim \mathcal{T}_\lambda - \ell = \dim \mathfrak{g} - \ell$. Ceci prouvera que le rang de la structure de Poisson sur $\mathcal{T}_\lambda$ est $\dim \mathfrak{g} - \ell$.

Proposition 5.13. *Les fonctions $\tilde{F}_{m_1,1}, \ldots, \tilde{F}_{m_\ell,\ell}$, définies dans (5.16), sont des Casimirs pour le $\tilde{R}$-crochet de Poisson $\{\cdot\,,\cdot\}_{\tilde{R}}$.*

Nous utilisons le lemme 5.14 ci-dessous pour démontrer la proposition 5.13.

Lemme 5.14.

(1) Pour tous $1 \leq i \leq \ell$, $Z(\lambda) = \sum_{k\geq 0} \lambda^k Z_k \in \sum_{k\geq 0} \lambda^k \mathfrak{g}$ et $Y \in \mathfrak{g}_{>0}$, on a :

$$\tilde{F}_{m_i,i}(Z(\lambda) + \lambda^{-1}Y) = \langle \mathsf{d}_Y P_i, P_{\leq 0}(Z_0)\rangle\,,$$

où $P_{\leq 0}$ est la projection de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{g}_{\leq 0}$;

(2) En tout point de $\mathcal{T}_\lambda$, les gradients des fonctions $\tilde{F}_{m_1,1}, \ldots, \tilde{F}_{m_\ell,\ell}$ sont dans $\tilde{\mathfrak{g}}_+$.

Preuve:

(1) On note, pour tous $k \in \mathbf{N}$ et $X(\lambda) \in \tilde{\mathfrak{g}}$, $(X(\lambda))^k$ le k-uplet $(X(\lambda), \ldots, X(\lambda))$ et pour tout $\tilde{P}$, $\mathsf{d}^k\tilde{P}_i$ la différentielle $k^{\text{ième}}$ de $\tilde{P}_i$. La formule de Taylor de $\tilde{P}_i$ au point $Z(\lambda) + \lambda^{-1}Y$ est donnée par :

$$\begin{aligned} \tilde{P}_i(Z(\lambda) + \lambda^{-1}Y) &= \lambda^{-m_i-1}\tilde{P}_i(\lambda Z(\lambda) + Y) \\ &= \sum_{k=0}^{m_i+1} \frac{\lambda^{k-m_i-1}}{k!} \left\langle \mathsf{d}^k_Y \tilde{P}_i, (Z(\lambda))^k \right\rangle. \end{aligned} \tag{5.23}$$

On rappelle de (5.15) que la fonction $\tilde{F}_{m_i,i}$ est le coefficient de degré $-m_i$ en λ du polynôme $\tilde{P}_i$. Etant donné $Z(\lambda) \in \sum_{k\geq 0} \lambda^k \mathfrak{g}$, la formule (5.23) donne :

$$\tilde{F}_{m_i,i}(Z(\lambda) + \lambda^{-1}Y) = \left\langle \mathsf{d}_Y \tilde{P}_i, Z_0 \right\rangle = \langle \mathsf{d}_Y P_i, Z_0\rangle\,. \tag{5.24}$$

Le polynôme $\langle \mathsf{d}_Y P_i, Z_0\rangle$ est homogène de degré $m_i + 1$, de degré m_i en Y et 1 en Z_0. Puisque $Y \in \mathfrak{g}_{>0}$ et P_i est Ad-invariant, on a comme dans la proposition 2.53,

$$\langle \mathsf{d}_Y P_i, P_{>0}(Z_0)\rangle = 0,$$

où $P_{>0}$ est la projection de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{g}_{>0}$. Donc l'équation (5.24) devient

$$\tilde{F}_{m_i,i}(Z(\lambda) + \lambda^{-1}Y) = \langle \mathsf{d}_Y P_i, P_{\leq 0}(Z_0)\rangle\,,$$

où $P_{\leq 0}$ est la projection de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{g}_{\leq 0}$.
(2) Soient $X \in \mathfrak{g}_{\leq 0}$, $Y \in \mathfrak{g}_{>0}$, $L(\lambda) = \lambda e_{-\beta} + X + e + \lambda^{-1}Y \in \mathcal{T}_\lambda$ et $Z(\lambda) \in \tilde{\mathfrak{g}}_{\geq 1}$. Rappelons qu'un élément $Z(\lambda)$ dans $\tilde{\mathfrak{g}}_{\geq 1}$, s écrit $Z(\lambda) = \sum_{k\geq 0} \lambda^k Z_k$, avec $Z_0 \in \mathfrak{g}_{\geq 1}$ et $Z_k \in \mathfrak{g}$, pour tout $k > 0$. D'après le premier résulat de ce lemme que nous venons de démontrer

$$\tilde{F}_{m_i,i}(L(\lambda)) = \tilde{F}_{m_i,i}(L(\lambda) + Z(\lambda)), \qquad \forall Z(\lambda) \in \tilde{\mathfrak{g}}_{\geq 1}.$$

L'égalité ci-dessus implique

$$\left\langle \nabla_{L(\lambda)} \tilde{F}_{m_i,i} \,|\, Z(\lambda) \right\rangle_\lambda = 0, \qquad \forall Z(\lambda) \in \tilde{\mathfrak{g}}_{\geq 1}.$$

Ce qui implique que le gradient de $\tilde{F}_{m_i,i}$ en tout point de $\mathcal{T}_\lambda$ est dans $\tilde{\mathfrak{g}}_+$. □

Montrons alors la proposition 5.13.

Preuve:

Soient $G \in \mathcal{F}(\mathcal{T}_\lambda)$, $X \in \mathfrak{g}_{\leq 0}$, $Y \in \mathfrak{g}_{>0}$ et $L(\lambda) = \lambda^{-1} Y + X + e + \lambda e_{-\beta} \in \mathcal{T}_\lambda$, on a :

$$\begin{aligned}
\left\{ \tilde{F}_{m_i,i}, G \right\}_{\tilde{R}} (L(\lambda)) &= \left\langle L(\lambda) \,|\, [\nabla_{L(\lambda)} \tilde{F}_{m_i,i}, \nabla_{L(\lambda)} G]_{\tilde{R}} \right\rangle_\lambda \\
&= \left\langle L(\lambda) \,|\, [(\nabla_{L(\lambda)} \tilde{F}_{m_i,i})_+, (\nabla_{L(\lambda)} G)_+] - [(\nabla_{L(\lambda)} \tilde{F}_{m_i,i})_-, (\nabla_{L(\lambda)} G)_-] \right\rangle_\lambda \\
&= \left\langle L(\lambda) \,|\, [\nabla_{L(\lambda)} \tilde{F}_{m_i,i}, (\nabla_{L(\lambda)} G)_+] \right\rangle_\lambda \\
&= \left\langle [L(\lambda), \nabla_{L(\lambda)} \tilde{F}_{m_i,i}] \,|\, (\nabla_{L(\lambda)} G)_+ \right\rangle_\lambda \\
&= 0,
\end{aligned}$$

où on a utilisé que $\nabla_{L(\lambda)} \tilde{F}_{m_i,i} \in \tilde{\mathfrak{g}}_+$ pour passer de deuxième à la troisième ligne et on a le dernier passage car $\tilde{F}_{m_i,i}$ est Ad-invariante sur $\tilde{\mathfrak{g}}$. □

Corollaire 5.15. *Le rang* $\mathrm{Rk}_{\mathcal{T}_\lambda} \{\cdot\,,\cdot\}_{\tilde{R}}$ *du* $\tilde{R}$*-crochet de Poisson sur* $\mathcal{T}_\lambda$ *est inférieur ou égal à* $\dim \mathfrak{g} - \ell$.

Preuve:

D'après la proposition 5.13, les fonctions $\tilde{F}_{m_i,i}$, pour $1 \leq i \leq \ell$ sont des Casimirs pour le crochet $\{\cdot\,,\cdot\}_{\tilde{R}}$. Montrons alors que ces fonctions sont indépendantes sur $\mathcal{T}_\lambda$. Pour cela, il suffit de montrer que les différentielles par rapport à la variable X de $\tilde{F}_{m_i,i}$, pour $1 \leq i \leq \ell$ sont indépendantes. Or d'après le premier point du lemme 5.14, pour tout $1 \leq i \leq \ell$ et pour tout $L(\lambda) = \lambda e_{-\beta} + e + X + \lambda^{-1} Y$, où $X \in \mathfrak{g}_{\leq 0}$ et $Y \in \mathfrak{g}_{>0}$, on a :

$$\tilde{F}_{m_i,i}(L(\lambda)) = \langle \mathsf{d}_Y P_i, X \rangle .$$

Donc la dérivée partielle de $\tilde{F}_{m_i,i}$ par rapport à X au point $L(\lambda)$ est égale à :

$$\frac{\partial \tilde{F}_{m_i,i}}{\partial X} (\lambda^{-1} Y + X + e + \lambda e_{-\beta}) = \mathsf{d}_Y P_i. \tag{5.25}$$

Plus précisement, en un point $L(\lambda)$ de la forme $L(\lambda) = \lambda e_{-\beta} + e + X + \lambda^{-1} e$, (où $e = \sum_{i=1}^{\ell} e_i$ et $X \in \mathfrak{g}_{\leq 0}$ arbitraire), l'équation (5.25) devient :

$$\left\langle \frac{\partial \tilde{F}_{m_i,i}}{\partial X} (\lambda e_{-\beta} + X + e + \lambda^{-1} e), A \right\rangle = \langle \mathsf{d}_e P_i, A \rangle , \qquad \forall A \in \mathfrak{g}_{\leq 0} \cap T_{L(\lambda)} \mathcal{T}_\lambda.$$

Puisque le point e est régulier, d'après les théorèmes de Kostant [31, théorème 9] et [32, théorème 5.2], les différentielles de la famille $(P_1, \ldots, P_\ell)$ sont indépendantes au point e. De plus, comme $e \in \mathfrak{g}_{\geq 1}$ leurs restriction à $\mathfrak{g}_{\leq 0}$ sont encore indépendantes car leurs gradients sont dans $\mathfrak{g}_{\geq 1}$. Par suite la famille $(\tilde{F}_{m_1,1}, \ldots, \tilde{F}_{m_\ell,\ell})$ est indépendante sur $\mathcal{T}_\lambda$. □

Proposition 5.16. *Le rang* $\mathrm{Rk}_{\mathcal{T}_\lambda}$ *du* $\tilde{R}$*-crochet de Poisson sur* $\mathcal{T}_\lambda$ *est égal à* $\dim \mathfrak{g} - \ell$.

D'après le corollaire 5.15 ci-dessus, pour montrer la proposition 5.16 nous avons besoin de trouver un point $L_0(\lambda) \in \mathcal{T}_\lambda$ tel que le rang de la structure de Poisson en ce point est $\dim \mathfrak{g} - \ell$. Commençons par donner le lemme 5.17 ci-dessous, qui sera utile dans la suite.

Lemme 5.17. *Soit* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie simple,* $\mathfrak{h}$ *une sous-algèbre de Cartan de* $\mathfrak{g}$*,* Φ *un système de racines de* $\mathfrak{g}$ *associé à* $\mathfrak{h}$ *et* $(h_1, \ldots, h_\ell) \cup (e_\alpha)_{\alpha \in \Phi}$ *une base de Chevalley. Soient* $x_i, x_{-\alpha}, y_\alpha, \forall \alpha \in \Phi_+$ *les fonctions coordonnées sur* $\mathcal{T}_\lambda$*, définies en tout point* $L(\lambda) = \lambda e_{-\beta} + e + X + \lambda^{-1} Y$ *de* $\mathcal{T}_\lambda$*, où* $X \in \mathfrak{g}_{\leq 0}$ *et* $Y \in \mathfrak{g}_{>0}$*, par :*

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \langle x_i, L(\lambda) \rangle & := & \langle h_i \,|\, X \rangle \,, \\ \langle x_{-\alpha}, L(\lambda) \rangle & := & \langle e_\alpha \,|\, X \rangle \,, \\ \langle y_\alpha, L(\lambda) \rangle & := & \langle e_{-\alpha} \,|\, Y \rangle \,, \end{array} \right. \quad 1 \leq i \leq \ell, \ \forall \alpha \in \Phi_+.$$

L'expression du $\tilde{R}$*-crochet de Poisson sur* $\mathcal{T}_\lambda$ *est donnée, pour tous* $1 \leq i, j \leq \ell$ *et* $\alpha, \gamma \in \Phi_+$*, par :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \{x_i, x_j\}_{\tilde{R}} = 0, \\ \{x_i, x_{-\alpha}\}_{\tilde{R}} = \alpha(h_i) x_{-\alpha}, \\ \{x_i, y_\alpha\}_{\tilde{R}} = -\alpha(h_i) y_\alpha, \\ \{x_{-\alpha}, x_{-\gamma}\}_{\tilde{R}} = \eta_{\alpha+\gamma} N_{\alpha,\gamma} x_{-\alpha-\gamma}, \\ \{x_{-\alpha}, y_\gamma\}_{\tilde{R}} = \eta_{\gamma-\alpha} N_{\alpha,-\gamma} y_{\gamma-\alpha}, \\ \{y_\alpha, y_\gamma\}_{\tilde{R}} = 0, \end{array} \right. \tag{5.26}$$

où $\eta_\alpha = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & \text{si } \alpha \in \Phi_+, \\ 0, & \text{sinon,} \end{array} \right.$ *et* $N_{\alpha,\gamma} = \pm(p+1)$*, avec* $p := max\{n \mid \gamma - n\alpha \in \Phi\}$.

Preuve:
Il est clair que, pour tout $1 \leq i \leq \ell$ et pour tout $\alpha \in \Phi_+$, on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla_{L(\lambda)} x_i = h_i, \\ \nabla_{L(\lambda)} x_{-\alpha} = e_\alpha, \\ \nabla_{L(\lambda)} y_\alpha = \lambda e_{-\alpha}. \end{array} \right. \tag{5.27}$$

Nous ne montrons que la deuxième formule de ce lemme, car les autres se démontrent de la même façon. On a :

$$\begin{array}{rcl} \{x_i, x_{-\alpha}\}_{\tilde{R}}(L(\lambda)) & = & \left\langle L(\lambda) \,|\, [\nabla_{L(\lambda)} x_i, \nabla_{L(\lambda)} x_{-\alpha}]_{\tilde{R}} \right\rangle_\lambda \\ & = & \langle L(\lambda) \,|\, [h_i, e_\alpha] \rangle_\lambda \\ & = & \langle L(\lambda) \,|\, \alpha(h_i) e_\alpha \rangle_\lambda \\ & = & \alpha(h_i) x_{-\alpha}(L(\lambda)). \end{array}$$

□

Montrons alors la proposition 5.16.

Preuve:
Soient $b_1, \ldots, b_\ell$ des constantes non nulles et soit

$$L_0(\lambda) := \sum_{i=1}^{\ell} (1 + \lambda^{-1} b_i) e_i + \lambda e_{-\beta}. \tag{5.28}$$

D'après (5.26), pour tous $1 \leq i, j \leq \ell$, l'expression du $\tilde{R}$-crochet de Poisson au point $L_0(\lambda)$ est le suivant :

$$\begin{cases} \{x_i, x_j\}_{\tilde{R}} = 0, \\ \{x_i, x_{-\alpha}\}_{\tilde{R}} = 0, \\ \{x_i, y_\alpha\}_{\tilde{R}} = \begin{cases} -c_{ji} b_j & \text{si } \alpha \text{ est une racine simple } \alpha_j, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \\ \{x_{-\alpha}, x_{-\gamma}\}_{\tilde{R}} = 0, \\ \{x_{-\alpha}, y_\gamma\}_{\tilde{R}} = \begin{cases} N_{\alpha,-\gamma} b_i & \text{si } \gamma - \alpha \text{ est une racine simple } \alpha_i, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \\ \{y_\alpha, y_\gamma\}_{\tilde{R}} = 0, \end{cases} \tag{5.29}$$

où $C = (c_{ij})_{1 \leq i,j \leq \ell}$ est la matrice de Cartan de $\mathfrak{g}$. Notons $\gamma_1, \ldots, \gamma_{\frac{\dim \mathfrak{g} - \ell}{2}}$ les racines positives de $\mathfrak{g}$, telle que $|\gamma_1| \leq |\gamma_2| \leq \cdots \leq |\gamma_{\frac{\dim \mathfrak{g} - \ell}{2}}|$ et notons $(z_1, \ldots, z_{\dim \mathfrak{g}})$ la base $(x_1, \ldots, x_\ell, x_{-\gamma}, y_\gamma, \forall \gamma \in \Phi_+)$ telle que :

$$\begin{cases} z_i = x_i, & 1 \leq i \leq \ell, \\ z_{\ell+k} = x_{-\gamma_k}, & 1 \leq k \leq \frac{\dim \mathfrak{g} - \ell}{2}, \\ z_{(\frac{\dim \mathfrak{g} + \ell}{2} + j)} = y_{\gamma_j}, & 1 \leq j \leq \frac{\dim \mathfrak{g} - \ell}{2}. \end{cases}$$

A l'aide des formules du système (5.29), on détermine la matrice

$$M = (\{z_i, z_j\}_{\tilde{R}})_{1 \leq i,j \leq \dim \mathfrak{g}}$$

du $\tilde{R}$-crochet de Poisson calculé au point $L_0(\lambda)$, on trouve une matrice de la forme

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -\Lambda^T \\ \Lambda & 0 \end{pmatrix}, \tag{5.30}$$

où Λ est une matrice de taille $\frac{1}{2}(\dim \mathfrak{g} - \ell) \times \frac{1}{2}(\dim \mathfrak{g} + \ell)$ diagonale par blocs de la forme

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_0 & & & 0 & 0 \\ & \Lambda_1 & & & \vdots \\ & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & \Lambda_{m_\ell - 1} & 0 \end{pmatrix}, \tag{5.31}$$

où $\Lambda_0 \ldots, \Lambda_{m_\ell - 1}$ sont des matrices dont on va bientôt donner les expressions, (les 0 alignés verticalement à droite de la matrice représentent une seule colonne et non pas un groupe de colonnes).

(a) On rappelle que

$$\begin{cases} \dim \mathfrak{g}_0 = \dim \mathfrak{g}_1 = \dim \mathfrak{g}_{-1} = \ell, \\ \dim \mathfrak{g}_{m_\ell} = 1, \\ \sum_{i=1}^{m_\ell} \dim \mathfrak{g}_i = \frac{1}{2}(\dim \mathfrak{g} - \ell). \end{cases}$$

Dorénavant, on note d_i la dimension de $\mathfrak{g}_i$. Notons, pour $k \neq 0$, $(\gamma_1, \ldots, \gamma_{d_k})$ une base des racines de $\mathfrak{g}$ de longueur k, $(\beta_1, \ldots, \beta_{d_{k+1}})$ une base des racines de $\mathfrak{g}$ de longueur $k+1$. On obtient ainsi

$$\Lambda_k^T = \begin{pmatrix} \mathcal{X}_{y_{\beta_1}}[x_{-\gamma_1}] & \cdots & \mathcal{X}_{y_{\beta_{d_{k+1}}}}[x_{-\gamma_1}] \\ \vdots & & \vdots \\ \mathcal{X}_{y_{\beta_1}}[x_{-\gamma_{d_k}}] & \cdots & \mathcal{X}_{y_{\beta_{d_{k+1}}}}[x_{-\gamma_{d_k}}] \end{pmatrix}; \tag{5.32}$$

(b) Soient $B = \begin{pmatrix} b_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & b_\ell \end{pmatrix}$ et C la matrice de Cartan de $\mathfrak{g}$, on a $\Lambda_0 = BC$.

Il est clair que montrer $\mathrm{Rk}_{L_0(\lambda)}\{\cdot\,,\cdot\}_{\tilde{R}} = \dim \mathfrak{g} - \ell$ est équivalent à prouver que le rang de la matrice Λ est $\frac{1}{2}(\dim \mathfrak{g} - \ell)$, qui est équivalent à montrer que chaque matrice Λ_k, pour $1 \leq k \leq m_\ell - 1$ est de rang d_{k+1} et que le rang de Λ_0 est ℓ.

(1) La matrice de Cartan est inversible. Si on suppose que $b_1, \ldots, b_\ell$ soit tous non nuls, la matrice $\Lambda_0 = BC$ est inversible et donc de rang ℓ ;

(2) On rappelle que, pour tout $1 \leq i \leq d_k$ et pour tout $1 \leq j \leq d_{k+1}$, on a :

$$\mathcal{X}_{y_{\beta_j}}[x_{-\gamma_i}] = \begin{cases} N_{-\beta_j,\gamma_i} b_p, & \text{si } \beta_j - \gamma_i \text{ est une racine simple } \alpha_p, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit $1 \leq j \leq d_{k+1}$. Pour chaque β_j, il existe une indice $i \in \{1, \ldots, d_k\}$ et une indice $F(i,j) \in \{1, \ldots, \ell\}$, tel que :

$$\beta_j = \gamma_i + \alpha_{F(i,j)}.$$

Ce qui implique que :

$$\mathcal{X}_{y_{\beta_j}}[x_{\gamma_i}] = N_{-\beta_j,\gamma_i} b_{F(i,j)}.$$

Par construction, la constante $N_{-\beta_j,\gamma_i}$ ci dessus est non nulle et égale à 1. On va montrer pour chaque algèbre de Lie simple que, lorsque $b_1, \ldots, b_\ell$ sont génériques la matrice Λ_k est de rang d_{k+1}, pour tout $k = 1, \ldots, m_\ell - 1$.

(a) Pour les algèbres de Lie simples exceptionelles G_2, F_4, E_6, E_7 et E_8, nous avons vérifié le résultat par un calcul direct sur le logiciel Maple (voir appendice).

(b) Pour démontrer le résultat pour les algèbres de Lie simples classiques $\mathfrak{g}$ de type A_ℓ, B_ℓ, C_ℓ et D_ℓ nous fixons un ordre sur les racines de même longueur. Ensuite nous montrons que les matrices ainsi obtenues ont le rang demandé.

Cas A_ℓ : Soient $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie simple de type A_ℓ et $\alpha_1, \ldots \alpha_\ell$ les racines simples de $\mathfrak{g}$. On choisit d'ordonner les racines de longueur k de $\mathfrak{g}$ selon l'ordre (lexicographique) suivant

$$\begin{array}{lcl} \gamma_1 & = & \alpha_1 + \cdots + \alpha_k, \\ \gamma_2 & = & \alpha_2 + \cdots + \alpha_{k+1}, \\ \vdots & & \vdots \\ \gamma_{\ell-k} & = & \alpha_{\ell-k} + \cdots + \alpha_{\ell-1}, \\ \gamma_{\ell-k+1} & = & \alpha_{\ell-k+1} + \cdots + \alpha_\ell, \end{array}$$

et les racines de longueur $k+1$ de $\mathfrak{g}$ selon l'ordre (lexicographique) suivant

$$\begin{array}{lcl} \beta_1 & = & \alpha_1 + \cdots + \alpha_k + \alpha_{k+1}, \\ \beta_2 & = & \alpha_2 + \cdots + \alpha_{k+1} + \alpha_{k+2}, \\ \vdots & & \vdots \\ \beta_{\ell-k} & = & \alpha_{\ell-k} + \cdots + \alpha_{\ell-1} + \alpha_\ell. \end{array}$$

Or, pour tout $1 \leq j \leq \ell - k$, on a la relation suivante :

$$\beta_j = \gamma_j + \alpha_{k+j} = \gamma_{j+1} + \alpha_j. \tag{5.33}$$

Ce qui permet de réécrire la matrice Λ_k^T, définie en (5.32) sous la forme suivante :

$$\Lambda_k^T = \begin{pmatrix} b_{k+1} & & & & 0 \\ b_1 & b_{k+2} & & & \\ & b_2 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & b_\ell \\ 0 & & & & b_{\ell-k} \end{pmatrix}. \tag{5.34}$$

Si on enlève la dernière ligne de Λ_k^T on obtient une matrice Γ_k carrée ($d_{k+1} \times d_{k+1}$) triangulaire inférieure et qui est, lorsque $b_{k+1}, \ldots b_\ell$ sont non nuls, de rang d_{k+1}. Ce qui implique que le rang de Λ_k est d_{k+1}.

Cas B_ℓ **:** Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple de type B_ℓ et soit $(\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell)$ une base de racines simples de $\mathfrak{g}$. Les racines positives de $\mathfrak{g}$ s'écrivent

$$\begin{cases} \lambda_i = \alpha_i + \cdots + \alpha_\ell, & 1 \leq i \leq \ell, \\ \lambda_i - \lambda_j = \alpha_i + \cdots + \alpha_{j-1}, & 1 \leq i < j \leq \ell, \\ \lambda_i + \lambda_j = \alpha_i + \cdots + \alpha_{j-1} + 2(\alpha_j + \cdots + \alpha_\ell), & 1 \leq i < j \leq \ell. \end{cases}$$

Nous vérifions que, pour tout $1 \leq i \leq \ell$, on a :

$$\begin{aligned} \lambda_i &= \alpha_i + \lambda_{i+1}, \\ &= \lambda_i - \lambda_\ell + \alpha_\ell, \end{aligned}$$

pour tout $1 \leq i < j \leq \ell$, on a :

$$\begin{aligned} \lambda_i - \lambda_j &= \alpha_i + \lambda_{i+1} - \lambda_j \\ &= \lambda_i - \lambda_{j-1} + \alpha_{j-1} \end{aligned}$$

et

$$\lambda_i + \lambda_j = \begin{cases} \alpha_i + \lambda_{i+1} + \lambda_j = \lambda_i + \lambda_{j+1} + \alpha_j, & \text{si } 1 \leq i < j - 1 < \ell, \\ \lambda_i + \alpha_\ell = \alpha_i + \lambda_{i+1} + \lambda_\ell, & \text{si } j = \ell \text{ et } 1 \leq i < \ell - 1, \\ \lambda_i + \lambda_{i+2} + \alpha_{i+1} & \text{si } j = i + 1 \text{ et } 1 \leq i < \ell. \end{cases}$$

Pour déterminer le rang de la matrice Λ_k, où k est une longueur d'un ensemble de racines de $\mathfrak{g}$, on distingue deux cas selon que k soit pair ou impair. Considérons d'abord le premier cas (k est pair). On choisit d'ordonner les racines de longueur k de $\mathfrak{g}$ selon l'ordre (lexicographique) suivant

$$\begin{array}{rcl}
\gamma_1 & = & \lambda_1 - \lambda_{k+1}, \\
\vdots & & \vdots \\
\gamma_{\ell-k} & = & \lambda_{\ell-k} - \lambda_\ell, \\
\gamma_{\ell-k+1} & = & \lambda_{\ell-k+1}, \\
\gamma_{\ell-k+2} & = & \lambda_{\ell-k+2} + \lambda_\ell, \\
\vdots & & \vdots \\
\gamma_{\ell-\frac{k}{2}-1} & = & \lambda_{\ell-\frac{k}{2}-1} + \lambda_{\ell-\frac{k}{2}+3}, \\
\gamma_{\ell-\frac{k}{2}} & = & \lambda_{\ell-\frac{k}{2}} + \lambda_{\ell-\frac{k}{2}+2}
\end{array}$$

et les racines de longueur $k+1$ de $\mathfrak{g}$ selon l'ordre (lexicographique) suivant

$$\begin{array}{lcl}
\beta_1 & = & \lambda_1 - \lambda_{k+2} = \begin{cases} \alpha_1 + \gamma_2, \\ \gamma_1 + \alpha_{k+1}, \end{cases} \\
\vdots & & \vdots \\
\beta_{\ell-k-1} & = & \lambda_{\ell-k-1} - \lambda_\ell = \begin{cases} \alpha_{\ell-k-1} + \gamma_{l-k}, \\ \gamma_{\ell-k-1} + \alpha_{\ell-1}, \end{cases} \\
\beta_{\ell-k} & = & \lambda_{\ell-k} = \begin{cases} \alpha_{\ell-k} + \lambda_{\ell-k+1}, \\ \gamma_{\ell-k} + \alpha_\ell, \end{cases} \\
\beta_{\ell-k+1} & = & \lambda_{\ell-k+1} + \lambda_\ell = \begin{cases} \gamma_{\ell-k+1} + \alpha_\ell, \\ \alpha_{\ell-k+1} + \gamma_{\ell-k+2}, \end{cases} \\
\vdots & & \vdots \\
\beta_{\ell-\frac{k}{2}-1} & = & \lambda_{\ell-\frac{k}{2}-1} + \lambda_{\ell-\frac{k}{2}+2} = \begin{cases} \alpha_{\ell-\frac{k}{2}-1} + \gamma_{\ell-\frac{k}{2}}, \\ \gamma_{\ell-\frac{k}{2}-1} + \alpha_{\ell-\frac{k}{2}+2}, \end{cases} \\
\beta_{\ell-\frac{k}{2}} & = & \lambda_{\ell-\frac{k}{2}} + \lambda_{\ell-\frac{k}{2}+1} = \gamma_{\ell-\frac{k}{2}} + \alpha_{\ell-\frac{k}{2}+1}.
\end{array}$$

On peut alors écrire la matrice ${}^t\Lambda_k$, définie en (5.32) sous la forme suivante :

$$
{}^t\Lambda_k = \begin{pmatrix}
b_{k+1} & & & & & & & & \\
b_1 & \ddots & & & & 0 & & & \\
& \ddots & \ddots & & & & & & \\
& & b_{\ell-k-1} & b_\ell & & & & & \\
& & & b_{\ell-k} & b_\ell & & & & \\
& & & & b_{\ell-k+1} & b_{\ell-1} & & & \\
& & & & & b_{\ell-k+2} & \ddots & & \\
& & & & & & \ddots & \ddots & \\
& 0 & & & & & & \ddots & b_{\ell-\frac{k}{2}+2} \\
& & & & & & & & b_{l-\frac{k}{2}-1} & b_{\ell-\frac{k}{2}+1}
\end{pmatrix}.
$$

Nous remarquons que ${}^t\Lambda_k$ est une matrice carrée $(d_{k+1} \times d_{k+1})$ triangulaire inférieure. Son determinant est un produit fini de certain nombre de b_i, donc non nul (nous rappelons que les $b_1, \ldots, b_\ell$ sont non nuls). Cela implique que le rang de ${}^t\Lambda_k$ est bien d_{k+1}.

Etudions maintenant le cas où k est impair, les racines de longueur k de $\mathfrak{g}$ ordonnées selon l'ordre lexicographique choisi sont

$$
\begin{array}{rcl}
\gamma_1 & = & \lambda_1 - \lambda_{k+1}, \\
\vdots & & \vdots \\
\gamma_{\ell-k} & = & \lambda_{\ell-k} - \lambda_\ell, \\
\gamma_{\ell-k+1} & = & \lambda_{\ell-k+1}, \\
\gamma_{\ell-k+2} & = & \lambda_{\ell-k+2} + \lambda_\ell, \\
\vdots & & \vdots \\
\gamma_{\ell-\frac{k-1}{2}-1} & = & \lambda_{\ell-\frac{k-1}{2}-1} + \lambda_{\ell-\frac{k-1}{2}+2}, \\
\gamma_{\ell-\frac{k-1}{2}} & = & \lambda_{\ell-\frac{k-1}{2}} + \lambda_{\ell-\frac{k-1}{2}+1}
\end{array}
$$

et les racines de longueur $k+1$ de $\mathfrak{g}$ ordonnées selon l'ordre (lexicographique) choisi sont

$$
\begin{array}{lcl}
\beta_1 & = & \lambda_1 - \lambda_{k+2} = \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 + \gamma_2, \\ \gamma_1 + \alpha_{k+1}, \end{array} \right. \\
\vdots & & \vdots \\
\beta_{\ell-k-1} & = & \lambda_{\ell-k-1} - \lambda_\ell = \left\{ \begin{array}{l} \alpha_{\ell-k-1} + \gamma_{l-k}, \\ \gamma_{\ell-k-1} + \alpha_{\ell-1}, \end{array} \right. \\
\beta_{\ell-k} & = & \lambda_{\ell-k} = \left\{ \begin{array}{l} \alpha_{\ell-k} + \lambda_{\ell-k+1}, \\ \gamma_{\ell-k} + \alpha_\ell, \end{array} \right. \\
\beta_{\ell-k+1} & = & \lambda_{\ell-k+1} + \lambda_\ell = \left\{ \begin{array}{l} \gamma_{\ell-k+1} + \alpha_\ell, \\ \alpha_{\ell-k+1} + \gamma_{\ell-k+2}, \end{array} \right. \\
\vdots & & \vdots \\
\beta_{\ell-\frac{k-1}{2}-1} & = & \lambda_{\ell-\frac{k-1}{2}-1} + \lambda_{\ell-\frac{k-1}{2}+1} = \left\{ \begin{array}{l} \alpha_{\ell-\frac{k-1}{2}-1} + \gamma_{\ell-\frac{k-1}{2}}, \\ \gamma_{\ell-\frac{k-1}{2}-1} + \alpha_{\ell-\frac{k-1}{2}+1}. \end{array} \right.
\end{array}
$$

Donc la matrice ${}^t\Lambda_k$, définie en (5.32) s'écrit sous la forme suivante :

$$
{}^t\Lambda_k = \begin{pmatrix}
b_{k+1} & & & & & & 0 & & \\
b_1 & \ddots & & & & & & & \\
 & \ddots & \ddots & & & & & & \\
 & & \ddots & b_{\ell-1} & & & & & \\
 & & & b_{\ell-k-1} & b_\ell & & & & \\
 & & & & b_{\ell-k} & b_\ell & & & \\
 & & & & & b_{\ell-k+1} & b_{\ell-1} & & \\
 & & & & & & \ddots & \ddots & \\
 & 0 & & & & & & \ddots & b_{\ell-\frac{k-1}{2}+1} \\
 & & & & & & & & b_{\ell-\frac{k-1}{2}-1}
\end{pmatrix}
$$

Si on enlève la dernière ligne de Λ_k^T on obtient une matrice Γ_k carrée ($d_{k+1} \times d_{k+1}$) triangulaire inférieure et qui est, lorsque chacun des $b_{k+1}, \ldots b_\ell$ est non nul, de rang d_{k+1}. Ce qui implique que le rang de Λ_k est d_{k+1}.

Cas C_ℓ : Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple de type C_ℓ et soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_\ell)$ une base de racines simples de $\mathfrak{g}$. Les racines positives de $\mathfrak{g}$ s'écrivent

$$\begin{cases} 2\lambda_i = 2(\alpha_i + \cdots + \alpha_{\ell-1}) + \alpha_\ell, & 1 \le i \le \ell, \\ \lambda_i - \lambda_j = \alpha_i + \cdots + \alpha_{j-1}, & 1 \le i < j \le \ell, \\ \lambda_i + \lambda_j = \alpha_i + \cdots + \alpha_{j-1} + 2(\alpha_j + \cdots + \alpha_{\ell-1}) + \alpha_\ell, & 1 \le i < j \le \ell. \end{cases}$$

Nous vérifions que, pour tout $1 \le i \le \ell$, on a :

$$2\lambda_i = \alpha_i + \lambda_i + \lambda_{i+1},$$

pour tout $1 \le i < j \le \ell$, on a :

$$\begin{aligned} \lambda_i - \lambda_j &= \alpha_i + \lambda_{i+1} - \lambda_j, \\ &= \lambda_i - \lambda_{j-1} + \alpha_{j-1}, \end{aligned}$$

et pour tout $1 \le i < j \le \ell$, on a

$$\lambda_i + \lambda_j = \begin{cases} \alpha_i + 2\lambda_{i+1} = \alpha_{i+1} + \lambda_i + \lambda_{i+2}, & \text{si } j = i+1, \\ \alpha_i + \lambda_{i+1} + \lambda_j = \alpha_j + \lambda_i + \lambda_{j+1}, & \text{si } j > i+1. \end{cases}$$

Pour calculer le rang de la matrice Λ_k on distingue deux cas selon que k est pair ou impair. Commençons par le cas ou k est pair. On choisit d'ordonner les racines de longueur k ainsi

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \lambda_1 - \lambda_{k+1} \\ &\vdots \\ \gamma_{\ell-k-1} &= \lambda_{\ell-k-1} - \lambda_{\ell-1}, \\ \gamma_{\ell-k} &= \lambda_{\ell-k} - \lambda_\ell, \\ \gamma_{\ell-k+1} &= \lambda_{\ell-k+1} + \lambda_\ell, \\ \gamma_{\ell-k+2} &= \lambda_{\ell-k+2} + \lambda_{\ell-1}, \\ &\vdots \\ \gamma_{\ell-\frac{k}{2}-1} &= \lambda_{\ell-\frac{k}{2}-1} + \lambda_{\ell-\frac{k}{2}+2}, \\ \gamma_{\ell-\frac{k}{2}} &= \lambda_{\ell-\frac{k}{2}} + \lambda_{\ell-\frac{k}{2}+1}, \end{aligned}$$

et les racines de longueur $k+1$ ainsi

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \lambda_1 - \lambda_{k+2}, \\ &\vdots \\ \beta_{\ell-k-1} &= \lambda_{\ell-k-1} - \lambda_\ell, \\ \beta_{\ell-k} &= \lambda_{\ell-k} + \lambda_\ell, \\ \beta_{\ell-k+1} &= \lambda_{\ell-k+1} + \lambda_{\ell-1}, \\ &\vdots \\ \beta_{\ell-\frac{k}{2}-1} &= \lambda_{\ell-\frac{k}{2}-1} + \lambda_{\ell-\frac{k}{2}+1}, \\ \beta_{\ell-\frac{k}{2}} &= 2\lambda_{\ell-\frac{k}{2}}. \end{aligned}$$

On peut alors écrire la matrice ${}^t\Lambda_k$, définie en (5.32) sous la forme suivante :

$$
{}^t\Lambda_k = \begin{pmatrix}
b_{k+1} & & & & & & & & & \\
b_1 & \ddots & & & & & & 0 & & \\
& \ddots & \ddots & & & & & & & \\
& & \ddots & b_{\ell-1} & & & & & & \\
& & & b_{\ell-k-1} & b_\ell & & & & & \\
& & & & b_{\ell-k} & b_{\ell-1} & & & & \\
& & & & & b_{\ell-k+1} & \ddots & & & \\
& & & & & & \ddots & \ddots & & \\
0 & & & & & & & \ddots & b_{\ell-\frac{k}{2}+1} & \\
& & & & & & & & b_{\ell-\frac{k}{2}-1} & b_{\ell-\frac{k}{2}}
\end{pmatrix}
$$

Nous remarquons que ${}^t\Lambda_k$ est une matrice carrée $(d_{k+1} \times d_{k+1})$ triangulaire inférieure. Son déterminant est un produit fini de certain nombre de b_i, donc non nul (nous rappelons que les $b_1, \ldots, b_\ell$ sont non nuls). Cela implique que le rang de ${}^t\Lambda_k$ est bien d_{k+1}.

Etudions maintenant le cas où k est impair. Les racines de longueur k sont

$$
\begin{array}{rcl}
\gamma_1 & = & \lambda_1 - \lambda_{k+1} \\
\vdots & & \vdots \\
\gamma_{\ell-k-1} & = & \lambda_{\ell-k-1} - \lambda_{\ell-1}, \\
\gamma_{\ell-k} & = & \lambda_{\ell-k} - \lambda_\ell, \\
\gamma_{\ell-k+1} & = & \lambda_{\ell-k+1} + \lambda_\ell, \\
\gamma_{\ell-k+2} & = & \lambda_{\ell-k+2} + \lambda_{\ell-1}, \\
\vdots & & \vdots \\
\gamma_{\ell-\frac{k-1}{2}-2} & = & \lambda_{\ell-\frac{k-1}{2}-2} + \lambda_{\ell-\frac{k-1}{2}+2}, \\
\gamma_{\ell-\frac{k-1}{2}-1} & = & \lambda_{\ell-\frac{k-1}{2}-1} + \lambda_{\ell-\frac{k-1}{2}+1}, \\
\gamma_{\ell-\frac{k-1}{2}} & = & 2\lambda_{\ell-\frac{k-1}{2}},
\end{array}
$$

et les racines de longueur $k+1$ données dans l'ordre choisi sont

$$
\begin{array}{rcl}
\beta_1 & = & \lambda_1 - \lambda_{k+2}, \\
\vdots & & \vdots \\
\beta_{\ell-k-1} & = & \lambda_{\ell-k-1} - \lambda_\ell, \\
\beta_{\ell-k} & = & \lambda_{\ell-k} + \lambda_\ell, \\
\beta_{\ell-k+1} & = & \lambda_{\ell-k+1} + \lambda_{\ell-1}, \\
\vdots & & \vdots \\
\beta_{\ell-\frac{k-1}{2}-2} & = & \lambda_{\ell-\frac{k-1}{2}-2} + \lambda_{\ell-\frac{k-1}{2}+1}, \\
\beta_{\ell-\frac{k-1}{2}-1} & = & \lambda_{\ell-\frac{k-1}{2}-1} + \lambda_{\ell-\frac{k-1}{2}}.
\end{array}
$$

On peut alors écrire la matrice ${}^t\Lambda_k$, définie en (5.32) sous la forme suivante :

$$
{}^t\Lambda_k = \left(\begin{array}{cccccccccc}
b_{k+1} & & & & & & & 0 & & \\
b_1 & \ddots & & & & & & & & \\
 & \ddots & \ddots & & & & & & & \\
 & & \ddots & b_{\ell-1} & & & & & & \\
 & & & b_{\ell-k-1} & b_\ell & & & & & \\
 & & & & b_{\ell-k} & b_{\ell-1} & & & & \\
 & & & & & b_{\ell-k+1} & \ddots & & & \\
 & & & & & & \ddots & \ddots & & \\
 & & & & & & & \ddots & b_{\ell-\frac{k-1}{2}+1} & \\
0 & & & & & & & & b_{\ell-\frac{k-1}{2}-2} & b_{\ell-\frac{k-1}{2}} \\
 & & & & & & & & & b_{\ell-\frac{k-1}{2}-1}
\end{array}\right)
$$

Si on enlève la dernière ligne de Λ_k^T on obtient une matrice Γ_k carrée $(d_{k+1} \times d_{k+1})$ triangulaire inférieure et qui est, lorsque $b_{k+1}, \dots b_\ell$ sont non nuls, de rang d_{k+1}. Ce qui implique que le rang de Λ_k est d_{k+1}.

Cas D_ℓ **:** Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple de type D_ℓ et soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_\ell)$ une base de racines simples de $\mathfrak{g}$. Les racines positives de $\mathfrak{g}$ s'écrivent

$$
\left\{\begin{array}{ll}
\lambda_i - \lambda_j = \alpha_i + \cdots + \alpha_{j-1}, & 1 \leq i < j \leq \ell, \\
\lambda_i + \lambda_\ell = \alpha_i + \cdots + \alpha_{\ell-2} + \alpha_\ell, & 1 \leq i < \ell, \\
\lambda_i + \lambda_j = \alpha_i + \cdots + \alpha_{j-1} + 2(\alpha_j + \cdots + \alpha_{\ell-2}) + \alpha_{\ell-1} + \alpha_\ell, & 1 \leq i < j < \ell.
\end{array}\right.
$$

Nous vérifions que, pour tout $1 \leq i < j \leq \ell$,

$$
\begin{array}{rcl}
\lambda_i - \lambda_j & = & \alpha_i + \lambda_{i+1} - \lambda_j, \\
 & = & \lambda_i - \lambda_{j-1} + \alpha_{j-1},
\end{array}
$$

pour tout $1 \leq i < \ell$, on a

$$
\begin{array}{rcl}
\lambda_i + \lambda_\ell & = & \alpha_i + \lambda_{i+1} + \lambda_\ell, \\
 & = & \lambda_i - \lambda_{\ell-1} + \alpha_\ell,
\end{array}
$$

pour $1 \leq i < j < \ell - 1$, on a

$$
\begin{array}{rcl}
\lambda_i + \lambda_j & = & \alpha_i + \lambda_{i+1} + \lambda_j, \\
 & = & \lambda_i + \lambda_{j+1} + \alpha_j,
\end{array}
$$

et pour tout $1 \leq i < \ell - 1$, on a

$$
\begin{array}{rcl}
\lambda_i + \lambda_{\ell-1} & = & \lambda_i - \lambda_\ell + \alpha_\ell \\
 & = & \lambda_i + \lambda_\ell + \alpha_{\ell-1} \\
 & = & \alpha_i + \lambda_{i+1} + \lambda_{\ell-1}.
\end{array}
$$

Comme dans le cas B_ℓ, pour calculer le rang de la matrice Λ_k on traite séparement le cas où l'entier k est pair et impair. Commençons par le cas k est pair. Les racines de longueur k de $\mathfrak{g}$ (selon l'ordre précédent) sont :

$$\begin{array}{rcl}
\gamma_1 &=& \lambda_1 - \lambda_{k+1}, \\
\vdots && \vdots \\
\gamma_{\ell-k-1} &=& \lambda_{\ell-k-1} - \lambda_{\ell-1}, \\
\gamma_{\ell-k} &=& \lambda_{\ell-k} - \lambda_\ell, \\
\gamma_{\ell-k+1} &=& \lambda_{\ell-k} + \lambda_\ell, \\
\gamma_{\ell-k+2} &=& \lambda_{\ell-k+1} + \lambda_{\ell-1}, \\
\vdots && \vdots \\
\gamma_{\ell-\frac{k}{2}-1} &=& \lambda_{\ell-\frac{k}{2}-2} + \lambda_{\ell-\frac{k}{2}+2}, \\
\gamma_{\ell-\frac{k}{2}} &=& \lambda_{\ell-\frac{k}{2}-1} - \lambda_{\ell-\frac{k}{2}+1},
\end{array}$$

et les racines de longueur $k+1$ sont

$$\begin{array}{rcl}
\beta_1 &=& \lambda_1 - \lambda_{k+2}, \\
\vdots && \vdots \\
\beta_{\ell-k-1} &=& \lambda_{\ell-k-1} - \lambda_\ell, \\
\beta_{\ell-k} &=& \lambda_{\ell-k-1} + \lambda_\ell, \\
\beta_{\ell-k+1} &=& \lambda_{\ell-k} + \lambda_{\ell-1}, \\
\beta_{\ell-k+2} &=& \lambda_{\ell-k+1} + \lambda_{\ell-2}, \\
\vdots && \vdots \\
\beta_{\ell-\frac{k}{2}-1} &=& \lambda_{\ell-\frac{k}{2}-2} + \lambda_{\ell-\frac{k}{2}+1}, \\
\beta_{\ell-\frac{k}{2}} &=& \lambda_{\ell-\frac{k}{2}-1} + \lambda_{\ell-\frac{k}{2}}.
\end{array}$$

On peut alors écrire la matrice ${}^t\Lambda_k$, définie en (5.32) sous la forme suivante :

$${}^t\Lambda_k = \begin{pmatrix}
b_{k+1} &&&&&&&&& \\
b_1 & \ddots &&&&&&&& \\
& \ddots & \ddots &&&&&&& \\
&& \ddots & b_{\ell-1} & b_\ell &&&&& \\
&&& b_{\ell-k-1} & 0 & b_\ell &&&& \\
&&&& b_{\ell-k-1} & b_{\ell-1} &&&& \\
&&&&& b_{\ell-k} & b_{\ell-2} &&& \\
&&&&&& b_{\ell-k+1} & \ddots && \\
&&&&&&& \ddots & b_{\ell-\frac{k}{2}+1} & \\
&&&&&&&& b_{\ell-\frac{k}{2}-2} & b_{\ell-\frac{k}{2}}
\end{pmatrix}$$

La matrice ${}^t\Lambda_k$ est carrée et on vérifie que

$$\det{}^t\Lambda_k = \prod_{j=2}^{\ell-k-1}\prod_{i=2}^{\frac{k}{2}} b_{\ell-j}b_{\ell-i}\det\begin{pmatrix} b_{\ell-1} & b_\ell & 0 \\ b_{\ell-k-1} & 0 & b_\ell \\ 0 & b_{\ell-k-1} & b_{\ell-1}\end{pmatrix}.$$

Donc $\det{}^t\Lambda_k = -2b_{\ell-1}b_\ell b_{\ell-k-1}\prod_{j=2}^{\ell-k-1}\prod_{i=2}^{\frac{k}{2}} b_{\ell-j}b_{\ell-i}$, qui est non nul. On déduit alors que le rang de ${}^t\Lambda_k$ est d_{k+1}.
Etudions maintenant le cas où k est impair. Les racines de longueurs k de $\mathfrak{g}$ sont

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= \lambda_1 - \lambda_{k+1},\\
&\vdots \\
\gamma_{\ell-k-1} &= \lambda_{\ell-k-1} - \lambda_{\ell-1},\\
\gamma_{\ell-k} &= \lambda_{\ell-k} - \lambda_\ell,\\
\gamma_{\ell-k+1} &= \lambda_{\ell-k} + \lambda_\ell,\\
\gamma_{\ell-k+2} &= \lambda_{\ell-k+1} + \ell_{\ell-1},\\
&\vdots \\
\gamma_{\ell-\frac{k-1}{2}-2} &= \lambda_{\ell-\frac{k-1}{2}-3} + \lambda_{\ell-\frac{k-1}{2}+2},\\
\gamma_{\ell-\frac{k-1}{2}-1} &= \lambda_{\ell-\frac{k-1}{2}-2} + \lambda_{\ell-\frac{k-1}{2}+1},\\
\gamma_{\ell-\frac{k-1}{2}} &= \lambda_{\ell-\frac{k-1}{2}-1} - \lambda_{\ell-\frac{k-1}{2}},
\end{aligned}$$

et les racines de longueur $k+1$ sont

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= \lambda_1 - \lambda_{k+2},\\
&\vdots \\
\beta_{\ell-k-1} &= \lambda_{\ell-k-1} - \lambda_\ell,\\
\beta_{\ell-k} &= \lambda_{\ell-k-1} + \lambda_\ell,\\
\beta_{\ell-k+1} &= \lambda_{\ell-k} + \lambda_{\ell-1},\\
\beta_{\ell-k+2} &= \lambda_{\ell-k+1} + \lambda_{\ell-2},\\
&\vdots \\
\beta_{\ell-\frac{k-1}{2}-2} &= \lambda_{\ell-\frac{k-1}{2}-3} + \lambda_{\ell-\frac{k-1}{2}+1},\\
\beta_{\ell-\frac{k-1}{2}-1} &= \lambda_{\ell-\frac{k-1}{2}-2} + \lambda_{\ell-\frac{k-1}{2}}.
\end{aligned}$$

On peut alors écrire la matrice ${}^t\Lambda_k$, définie en (5.32) sous la forme suivante :

$${}^t\Lambda_k = \begin{pmatrix}
b_{k+1} &&&&&&&&& \\
b_1 & \ddots &&&&&&&& \\
& \ddots & \ddots &&&&&&& \\
&& \ddots & b_{\ell-1} & b_\ell &&&&& \\
&&& b_{\ell-k-1} & 0 & b_\ell &&&& \\
&&&& b_{\ell-k-1} & b_{\ell-1} &&&& \\
&&&&& b_{\ell-k} & b_{\ell-2} &&& \\
&&&&&& b_{\ell-k+1} & \ddots && \\
&&&&&&& \ddots & b_{\ell-\frac{k-1}{2}+1} & \\
&&&&&&&& b_{\ell-\frac{k-1}{2}-3} & b_{\ell-\frac{k-1}{2}} \\
&&&&&&&&& b_{\ell-\frac{k-1}{2}-2}
\end{pmatrix}$$

Si on enlève la première ligne de Λ_k^T, on obtient une matrice Γ_k carrée ($d_{k+1} \times d_{k+1}$) triangulaire supérieure et qui est, lorsque $b_{k+1}, \dots b_\ell$ sont non nuls, de rang d_{k+1}. Ce qui implique que le rang de Λ_k est d_{k+1}.

$\square$

5.3.3 Indépendance de la famille de fonctions sur $\mathcal{T}_\lambda$

On va montrer l'indépendance des différentielles de la famille de fonctions $\tilde{\mathcal{F}}_\lambda$ en un point particulier de $\mathcal{T}_\lambda$ (ce qui donne l'indépendance de la famille $\tilde{\mathcal{F}}_\ell$ puisque ses éléments sont des polynômes). On rappelle que :

$$\tilde{\mathcal{F}}_\lambda = (\tilde{F}_{k,i}, \quad 1 \le i \le \ell, \quad 0 \le k \le m_i),$$

où, pour chaque $1 \le i \le \ell$, les fonctions $\tilde{F}_{k,i}$, pour $0 \le k \le m_i$ sont données (voir le lemme 5.9) de la façon suivante :

$$\tilde{P}_i(L(\lambda)) = \sum_{k=0}^{m_i} \lambda^{-k} \tilde{F}_{k,i}(L(\lambda)) + \lambda\, c\, \delta_{i,l}.$$

On notera $e := \sum_{i=1}^{\ell} e_i$, où on rappelle que e_i, pour tout $1 \le i \le \ell$, est un vecteur propre non nul associé à la racine simple α_i.

Proposition 5.18. *La famille de fonctions $\tilde{\mathcal{F}}_\lambda$ est indépendante sur $\mathcal{T}_\lambda$.*

Preuve:
Soit $h \in \mathfrak{h}$, tel que $[h, e] = 2e$. Nous prouvons d'abord que $\tilde{\mathcal{F}}_\lambda$ est indépendante au point $L_1(\lambda) := \lambda e_{-\beta} + h + e + \lambda^{-1} e$.

Calculons la différentielle de la fonction $\tilde{P}_i$ (qui est à valeurs dans $\mathbf{C}[\lambda, \lambda^{-1}]$) au point $L_1(\lambda)$. Soit $a(\lambda) := A + \lambda^{-1} B \in T_{L_1(\lambda)} \mathcal{T}_\lambda = \bigoplus_{-|\beta| \le i \le 0} \tilde{\mathfrak{g}}_i$, on a les égalités :

$$\begin{aligned}
\left\langle \mathsf{d}_{L_1(\lambda)} \tilde{P}_i, a(\lambda) \right\rangle &= \left\langle \mathsf{d}_{h+(1+\lambda^{-1})e+\lambda e_{-\beta}} \tilde{P}_i, a(\lambda) \right\rangle \\
&= \sum_{k=0}^{m_i} \frac{\lambda^k}{k!} \left\langle \mathsf{d}^{k+1}_{h+(1+\lambda^{-1})e} \tilde{P}_i, ((e_{-\beta})^k, a(\lambda)) \right\rangle \\
&= \left\langle \mathsf{d}_{h+(1+\lambda^{-1})e} \tilde{P}_i, a(\lambda) \right\rangle + \sum_{k=1}^{m_i} \frac{\lambda^k}{k!} \left\langle \mathsf{d}^{k+1}_{h+(1+\lambda^{-1})e} \tilde{P}_i, ((e_{-\beta})^k, a(\lambda)) \right\rangle \\
&= \left\langle \mathsf{d}_{h+(1+\lambda^{-1})e} \tilde{P}_i, A \right\rangle + \lambda^{-1} \left\langle \mathsf{d}_{h+(1+\lambda^{-1})e} \tilde{P}_i, B \right\rangle \\
&\quad + \sum_{k=1}^{m_i} \frac{\lambda^k}{k!} \left\langle \mathsf{d}^{k+1}_{h+(1+\lambda^{-1})e} \tilde{P}_i, ((e_{-\beta})^k, A) \right\rangle \\
&\quad + \sum_{k=1}^{m_i} \frac{\lambda^{k-1}}{k!} \left\langle \mathsf{d}^{k+1}_{h+(1+\lambda^{-1})e} \tilde{P}_i, ((e_{-\beta})^k, B) \right\rangle .
\end{aligned} \tag{5.35}$$

Pour aller de la première à la seconde ligne, nous avons utilisé le fait que le polynôme $\tilde{P}_i$ est de degré $m_i + 1$ (donc sa différentielle est de degré m_i). Les opérations des lignes suivantes ne sont que des réarrangements.

Puisque $A \in \mathfrak{g}_{\leq 0}$, il est de la forme $A = \sum_{i=1}^{\ell} a_i h_i + \sum_{\gamma\in\Phi_+} a_\gamma e_{-\gamma}$. Or, pour $1 \leq k \leq m_i$, les entiers, respectivement $m_i + 1 - k - 1 + k|-\beta| + |h_i|$ et $m_i + 1 - k - 1 + k|-\beta| + |e_{-\gamma}|$ qui sont inférieurs ou égals, respectivement à $-k - m_\ell(k-1)$ et $-k - m_\ell(k-1) + |e_{-\gamma}|$ sont strictement négatifs. Donc, d'après le deuxième point de la proposition 2.53

$$\sum_{k=1}^{m_i} \frac{\lambda^k}{k!} \left\langle \mathsf{d}^{k+1}_{h+(1+\lambda^{-1})e} \tilde{P}_i, ((e_{-\beta})^k, A)\right\rangle = 0. \tag{5.36}$$

De plus, $B \in \mathfrak{g}_{>0}$, il est donc de la forme $B = \sum_{\gamma\in\Phi_+} b_\gamma e_\gamma$. En utilisant de nouveau la proposition 2.53, on déduit que :

$$\left\langle \mathsf{d}_{h+(1+\lambda^{-1})e} \tilde{P}_i, B\right\rangle = 0. \tag{5.37}$$

A l'aide des équations (5.36) et (5.37), (5.35) se simplifie et donne :

$$\left\langle \mathsf{d}_{L_1(\lambda)} \tilde{P}_i, a(\lambda)\right\rangle = \left\langle \mathsf{d}_{h+(1+\lambda^{-1})e} \tilde{P}_i, A\right\rangle + \left\langle \sum_{k=1}^{m_i} \frac{\lambda^{k-1}}{k!} \mathsf{d}^{k+1}_{h+(1+\lambda^{-1})e} \tilde{P}_i, ((e_{-\beta})^k, B)\right\rangle. \tag{5.38}$$

Notons $\tilde{H}_{k,i}$ les fonctions définies sur $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ par :

$$\tilde{P}_i(X + \lambda^{-1} Y) = \sum_{k=0}^{m_i+1} \lambda^{-k} \tilde{H}_{k,i}(X, Y).$$

On a évidemment :

$$\tilde{P}_i(X + (1+\lambda^{-1}) Y) = \sum_{k=0}^{m_i+1} \lambda^{-k} \tilde{H}_{k,i}(X+Y, Y).$$

On remarque que sur $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}_{>0}$,

(1) La fonction $\tilde{H}_{m_i+1,i}(X+Y, Y) = P_i(Y) = 0$;

(2) Les différentielles de $\tilde{H}_{0,i}, \ldots, \tilde{H}_{m_i,i}$ au point $(h+e, e)$ ne dépendent pas de la variable Y, car d'après (5.37), $\left\langle \mathsf{d}_{h+(1+\lambda^{-1})e} \tilde{P}_i, B\right\rangle = 0, \forall B \in \mathfrak{g}_{>0}$.

Ces deux points impliquent que

$$\mathsf{d}_{h+(1+\lambda^{-1})e} \tilde{P}_i = \sum_{k=0}^{m_i} \lambda^{-k} \frac{\partial \tilde{H}_{k,i}}{\partial X}(h+e, e), \tag{5.39}$$

où $\frac{\partial \tilde{H}_{k,i}}{\partial X}$, pour tous $1 \leq i \leq \ell$ et $0 \leq k \leq m_i$, la différentielle de $\tilde{H}_{k,i}$ par rapport à la première variable. A l'aide de l'équation (5.39), l'équation (5.38) devient :

$$\begin{aligned} \left\langle \mathsf{d}_{L_1(\lambda)} \tilde{P}_i, a(\lambda)\right\rangle &= \sum_{k=0}^{m_i} \lambda^{-k} \left\langle \frac{\partial \tilde{H}_{k,i}}{\partial X}(h+e, e), A\right\rangle \\ &\quad + \sum_{k=1}^{m_i} \frac{\lambda^{k-1}}{k!} \left\langle \mathsf{d}^{k+1}_{h+(1+\lambda^{-1})e} \tilde{P}_i, ((e_{-\beta})^k, B)\right\rangle. \end{aligned} \tag{5.40}$$

Puisque $L_1(\lambda)$ est un élément de $\mathcal{T}_\lambda$, d'après la relation (5.16),

$$\mathsf{d}_{L_1(\lambda)}\tilde{P}_i = \sum_{k=0}^{m_i} \lambda^{-k} \mathsf{d}_{L_1(\lambda)}\tilde{F}_{k,i}. \tag{5.41}$$

En utilisant les équations (5.40) et (5.41), on conclut que

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{m_i} \lambda^{-k} \left\langle \mathsf{d}_{L_1(\lambda)}\tilde{F}_{k,i}, a(\lambda)\right\rangle &= \sum_{k=0}^{m_i} \lambda^{-k} \left\langle \frac{\partial \tilde{H}_{k,i}}{\partial X}(h+e,e), A\right\rangle \\ &+ \sum_{k=1}^{m_i} \frac{\lambda^{k-1}}{k!} \left\langle \mathsf{d}^{k+1}_{h+(1+\lambda^{-1})e}\tilde{P}_i, ((e_{-\beta})^k, B)\right\rangle .\end{aligned} \tag{5.42}$$

Soit $h' = h+e$, puisque $e = \sum_{i=1}^{\ell} e_i$ est un élément régulier de $\mathfrak{g}$ et $[h',e] = e$, d'après le premier point du théorème 2.57 les différentielles

$$\frac{\partial \tilde{H}_{0,i}}{\partial X}(h',e), \ldots, \frac{\partial \tilde{H}_{m_i,i}}{\partial X}(h',e), \qquad 1 \le i \le \ell$$

sont indépendantes. Ces formes linéaires sont données par des gradients $V_{k,i}$, pour $1 \le i \le \ell$ et $0 \le k \le m_i$, qui appartiennent à l'espace E engendré par les espaces propres des valeurs propres positives de $\mathrm{ad}_{h'}$ (voir le deuxième point du théorème 2.57). Mais dans le cas $h' = h+e$, donc cet espace E coincide avec les espaces propres des valeurs propres positives de ad_h, qui est $\mathfrak{g}_{\ge 0}$. Par conséquent les restrictions à $\mathfrak{g}_{\le 0}$ de ces dérivées partielles restent indépendantes. Par suite les différentielles de la famille des fonctions $(\tilde{F}_{k,i}, 0 \le i \le m_i, 1 \le i \le \ell)$ sont indépendantes au point $L_1(\lambda)$ et donc $\tilde{\mathcal{F}}_\lambda$ est indépendante sur $\mathcal{T}_\lambda$. □

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat principal de cette section.

Théorème 5.19. *Soit $(\mathcal{T}_\lambda, \{\cdot\,,\cdot\}_{\tilde{R}})$ l'espace de phases du réseau de Full Kostant-Toda périodique et $\tilde{\mathcal{F}}_\lambda$ la famille des fonctions $(\tilde{\mathcal{F}}_{k,i},\ 1 \le i \le \ell,\ 0 \le k \le m_i)$. Le triplet $(\mathcal{T}_\lambda, \tilde{\mathcal{F}}_\lambda, \{\cdot\,,\cdot\}_{\tilde{R}})$ forme un système intégrable au sens de Liouville et l'équation de Full-Kostant-Toda (5.7) est donnée par :*

$$\mathcal{X}_{\tilde{F}_{0,i}}(L(\lambda)) = [\tilde{P}_+(\nabla_{L(\lambda)}\tilde{F}_{0,i}), L(\lambda)].$$

Preuve:

On sait que la variété de Poisson $(\mathcal{T}_\lambda, \{\cdot\,,\cdot\}_{\tilde{R}})$ est de dimension $\dim \mathfrak{g}$. D'après la définition 2.33 de l'intégrabilité au sens de Liouville, il faut montrer que

(1) $\tilde{\mathcal{F}}_\lambda$ est involutive pour le crochet $\{\cdot\,,\cdot\}_{\tilde{R}}$;

(2) $\tilde{\mathcal{F}}_\lambda$ est indépendante ;

(3) $\operatorname{card} \tilde{\mathcal{F}}_\lambda = \dim \mathcal{T}_\lambda - \frac{1}{2}\operatorname{Rk}\{\cdot\,,\cdot\}_{\tilde{R}}$.

Vérifions que ces trois conditions sont satisfaites.

(1) Les fonctions $\tilde{F}_{k,i}$, pour tous $1 \le i \le \ell$ et $0 \le k \le m_i$ sont Ad-invariantes, donc en involution pour le crochet $\{\cdot\,,\cdot\}_{\tilde{R}}$. Ce qui implique que $\tilde{\mathcal{F}}_\lambda$ est involutive pour le $\tilde{R}$-crochet de Poisson ;

(2) La proposition 5.18 prouve l'indépendance de la famille de fonctions $\tilde{\mathcal{F}}_\lambda$;

(3) On a montré, dans la proposition 5.16 que $\mathrm{Rk}\,\{\cdot\,,\cdot\}_{\tilde{R}}$ est $\dim\mathfrak{g}-\ell$, et dans le lemme 5.12 que $\operatorname{card}\tilde{\mathcal{F}}_\lambda = \frac{\dim\mathfrak{g}+\ell}{2}$. Ces deux résultats impliquent que :

$$\operatorname{card}\tilde{\mathcal{F}}_\lambda = \dim\tilde{\mathcal{T}}_\lambda - \frac{1}{2}\,\mathrm{Rk}\,\{\cdot\,,\cdot\}_{\tilde{R}}.$$

$\square$

5.4 Appendice

Nous donnons dans cette section le programme `Maple` que nous avons fait pour compléter la preuve de la proposition 5.16 dans le cas des algèbres de Lie exceptionelles. Nous prenons le cas particulier où l'algèbre de Lie est de type E_6 car pour les autres on utilise le même programme (avec un vecteur `R` adapté).

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple de type E_6, $\mathfrak{h}$ un sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$, Φ le système de racine de $\mathfrak{g}$ associé à $\mathfrak{h}$ et $\Phi_+ := \{\alpha_1, \ldots, \alpha_N\}$ un système dans Φ, où $N := \operatorname{card}\Phi_+ = 36$. On supposera que les éléments de Φ_+ sont indexés de sorte que $|\alpha_1| \leq |\alpha_2| \leq \cdots \leq \alpha_N$. A chaque élément α de Φ_+ on associé un vecteur ligne $R[i] := [a_1, \ldots, a_6]$ tel que $\alpha = \sum_{j=1}^{\ell} a_j \alpha_j$.

```
with(linalg):
N:=36:
rang:=6;
```

$$
\begin{aligned}
\mathtt{R}[1] &:= [1,0,0,0,0,0]: \\
\mathtt{R}[2] &:= [0,1,0,0,0,0]: \\
\mathtt{R}[3] &:= [0,0,1,0,0,0]: \\
\mathtt{R}[4] &:= [0,0,0,1,0,0]: \\
\mathtt{R}[5] &:= [0,0,0,0,1,0]: \\
\mathtt{R}[6] &:= [0,0,0,0,0,1]: \\
\mathtt{R}[7] &:= [1,0,1,0,0,0]: \\
\mathtt{R}[8] &:= [0,1,0,1,0,0]: \\
\mathtt{R}[9] &:= [0,0,1,1,0,0]: \\
\mathtt{R}[10] &:= [0,0,0,1,1,0]: \\
\mathtt{R}[11] &:= [0,0,0,0,1,1]: \\
\mathtt{R}[12] &:= [1,0,1,1,0,0]: \\
\mathtt{R}[13] &:= [0,1,1,1,0,0]: \\
\mathtt{R}[14] &:= [0,1,0,1,1,0]: \\
\mathtt{R}[15] &:= [0,0,1,1,1,0]: \\
\mathtt{R}[16] &:= [0,0,0,1,1,1]: \\
\mathtt{R}[17] &:= [1,1,1,1,0,0]: \\
\mathtt{R}[18] &:= [1,0,1,1,1,0]: \\
\mathtt{R}[19] &:= [0,1,1,1,1,0]: \\
\mathtt{R}[20] &:= [0,1,0,1,1,1]: \\
\mathtt{R}[21] &:= [0,0,1,1,1,1]: \\
\mathtt{R}[22] &:= [1,1,1,1,1,0]: \\
\mathtt{R}[23] &:= [0,1,1,2,1,0]: \\
\mathtt{R}[24] &:= [1,0,1,1,1,1]: \\
\mathtt{R}[25] &:= [0,1,1,1,1,1]:
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\texttt{R}[26] &:= [1,1,1,2,1,0]: \\
\texttt{R}[27] &:= [1,1,1,1,1,1]: \\
\texttt{R}[28] &:= [0,1,1,2,1,1]: \\
\texttt{R}[29] &:= [1,1,2,2,1,0]: \\
\texttt{R}[30] &:= [1,1,1,2,1,1]: \\
\texttt{R}[31] &:= [0,1,1,2,2,1]: \\
\texttt{R}[32] &:= [1,1,2,2,1,1]: \\
\texttt{R}[33] &:= [1,1,1,2,2,1]: \\
\texttt{R}[34] &:= [1,1,2,2,2,1]: \\
\texttt{R}[35] &:= [1,1,2,3,2,1]: \\
\texttt{R}[36] &:= [1,2,2,3,2,1]:
\end{aligned}
$$

```
# on définit une procédure qui permet de calculer la longueur d'une racine
X

long:=proc(X)
  sum(X[k],k=1..nops(X))
end:

#Nous construisons des liste contenant chacune les racines de même longueur

lis:=proc(i)
local k, list;
list:=[];
  for k from 1 to N do
    if long(R[k])=i then
      list:=[op(list),R[k]]
    fi
  od
end:

#Relation entre une i racine de longeur k et une j racine de longueur
k+1

a:=proc(k,i,j)
local l,res,dL;
res:=0:
dL:=lis(k+1)[j]-lis(k)[i];
  for l from 1 to rang do
    if dL=R[l] then res:=b[l]
    fi;
  od;
res
end:

Gammas:=proc(k)
```

```
  matrix(nops(lis(k)),nops(lis(k+1)),(i,j)->a(k,i,j))
end:
```

On vérifie si le rang de la matrice Γ_k (qui est ${}^t\Lambda_k$ dans la preuve de la proposition 5.16) est bien le nombre de racines de longueur k.

```
verif:=proc(k)
  if nops(lis(k+1))-rank(Gammas(k))=0 then 1 else 0
  fi
end:

K:=1;
for i from 1 to long(R[N])-1 do K:=K*verif(i)
od:

if K=1 then print(OK)
  else print("pas OK")
fi;
                        OK
```

Bibliographie

[1] M. Adler. Completely integrable systems and symplectic actions. *J. Math. Phys.*, 20(1) :60–67, 1979.

[2] M. Adler, E. Horozov, and P. van Moerbeke. The Pfaff lattice and skew-orthogonal polynomials. *Internat. Math. Res. Notices*, (11) :569–588, 1999.

[3] M. Adler and P. van Moerbeke. Toda versus Pfaff lattice and related polynomials. *Duke Math. J.*, 112(1) :1–58, 2002.

[4] Mark Adler, Jonathan Delépine, and Pierre van Moerbeke. Dyson's nonintersecting Brownian motions with a few outliers. *Comm. Pure Appl. Math.*, 62(3) :334–395, 2009.

[5] Mark Adler and Pierre van Moerbeke. The Toda lattice, Dynkin diagrams, singularities and abelian varieties. *Invent. Math.*, 103(2) :223–278, 1991.

[6] Mark Adler and Pierre van Moerbeke. String-orthogonal polynomials, string equations, and 2-Toda symmetries. *Comm. Pure Appl. Math.*, 50(3) :241–290, 1997.

[7] Mark Adler, Pierre van Moerbeke, and Pol Vanhaecke. *Algebraic integrability, Painlevé geometry and Lie algebras*, volume 47 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics]*. Springer-Verlag, Berlin, 2004.

[8] Khaoula Ben Abdeljelil. L'intégrabilité du réseau de 2-Toda sur $\mathfrak{sl}_n(\mathbf{C})$ et sa généralisation aux algèbres de Lie semi-simples. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 347(15-16) :943–946, 2009.

[9] O. I. Bogoyavlensky. On perturbations of the periodic Toda lattice. *Comm. Math. Phys.*, 51(3) :201–209, 1976.

[10] Nicolas Bourbaki. *Lie groups and Lie algebras. Chapters 7–9*. Elements of Mathematics (Berlin). Springer-Verlag, Berlin, 2005. Translated from the 1975 and 1982 French originals by Andrew Pressley.

[11] Guido Carlet. The Hamiltonian structures of the two-dimensional Toda lattice and R-matrices. *Lett. Math. Phys.*, 71(3) :209–226, 2005.

[12] Pantelis A. Damianou. Master symmetries and R-matrices for the Toda lattice. *Lett. Math. Phys.*, 20(2) :101–112, 1990.

[13] Pantelis A. Damianou. Lax pairs, symmetries and recursion operators for Toda lattices. In *Proceedings of the XXIX Symposium on Mathematical Physics (Toruń, 1996)*, volume 40, pages 443–453, 1997.

[14] P. Deift, L. C. Li, T. Nanda, and C. Tomei. The Toda flow on a generic orbit is integrable. *Comm. Pure Appl. Math.*, 39(2) :183–232, 1986.

[15] P. Deift, L. C. Li, and C. Tomei. Toda flows with infinitely many variables. *J. Funct. Anal.*, 64(3) :358–402, 1985.

[16] Dennis DeTurck, Hubert Goldschmidt, and Janet Talvacchia. Connections with prescribed curvature and Yang-Mills currents : the semi-simple case. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 24(1) :57–112, 1991.

[17] Jacques Dixmier. *Enveloping algebras*, volume 11 of *Graduate Studies in Mathematics.* American Mathematical Society, Providence, RI, 1996. Revised reprint of the 1977 translation.

[18] N. M. Ercolani, H. Flaschka, and S. Singer. The geometry of the full Kostant-Toda lattice. In *Integrable systems (Luminy, 1991)*, volume 115 of *Progr. Math.*, pages 181–225. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1993.

[19] Gregorio Falqui, Franco Magri, and Marco Pedroni. Bi-Hamiltonian geometry, Darboux coverings, and linearization of the KP hierarchy. *Comm. Math. Phys.*, 197(2) :303–324, 1998.

[20] Rui Loja Fernandes and Pol Vanhaecke. Hyperelliptic Prym varieties and integrable systems. *Comm. Math. Phys.*, 221(1) :169–196, 2001.

[21] H. Flaschka. On the Toda lattice. II. Inverse-scattering solution. *Progr. Theoret. Phys.*, 51 :703–716, 1974.

[22] H. Flaschka. The Toda lattice. I. Existence of integrals. *Phys. Rev. B (3)*, 9 :1924–1925, 1974.

[23] H. Flaschka. Discrete and periodic illustrations of some aspects of the inverse method. In *Dynamical systems, theory and applications (Rencontres, Battelle Res. Inst., Seattle, Wash., 1974)*, pages 441–466. Lecture Notes in Phys., Vol. 38. Springer, Berlin, 1975.

[24] M. I. Gekhtman and M. Z. Shapiro. Noncommutative and commutative integrability of generic Toda flows in simple Lie algebras. *Comm. Pure Appl. Math.*, 52(1) :53–84, 1999.

[25] M. Hénon. Integrals of the Toda lattice. *Phys. Rev. B (3)*, 9 :1921–1923, 1974.

[26] Jing-Song Huang. *Lectures on representation theory.* World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, NJ, 1999.

[27] James E. Humphreys. *Introduction to Lie algebras and representation theory.* Springer-Verlag, New York, 1972. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 9.

[28] D. Kazhdan, B. Kostant, and S. Sternberg. Hamiltonian group actions and dynamical systems of Calogero type. *Comm. Pure Appl. Math.*, 31(4) :481–507, 1978.

[29] Yuji Kodama and Virgil U. Pierce. Geometry of the Pfaff lattices. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (23) :Art. ID rnm120, 55, 2007.

[30] Bertram Kostant. The principal three-dimensional subgroup and the Betti numbers of a complex simple Lie group. *Amer. J. Math.*, 81 :973–1032, 1959.

[31] Bertram Kostant. Lie group representations on polynomial rings. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 69 :518–526, 1963.

[32] Bertram Kostant. The solution to a generalized Toda lattice and representation theory. *Adv. in Math.*, 34(3) :195–338, 1979.

[33] Monique Laurent and Bernard Mourrain. A generalized flat extension theorem for moment matrices. *Arch. Math. (Basel)*, 93(1) :87–98, 2009.

[34] D. Levi, M. A. Olshanetsky, A. M. Perelomov, and O. Ragnisco. Group theoretical approach to nonlinear evolution equations of Lax type. III. The Boussinesq equation. *Phys. Lett. A*, 77(5) :307–311, 1980.

[35] Luen Chau Li and Serge Parmentier. Nonlinear Poisson structures and r-matrices. *Comm. Math. Phys.*, 125(4) :545–563, 1989.

[36] Paulette Libermann and Charles-Michel Marle. *Symplectic geometry and analytical mechanics*, volume 35 of *Mathematics and its Applications*. D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1987. Translated from the French by Bertram Eugene Schwarzbach.

[37] S. V. Manakov. Complete integrability and stochastization of discrete dynamical systems. *Ž. Èksper. Teoret. Fiz.*, 67(2) :543–555, 1974.

[38] Henry P. McKean and Pierre van Moerbeke. Sur le spectre de quelques opérateurs et les variétés de Jacobi. In *Séminaire Bourbaki, 28ème année, 1975/76, Exp. No. 474*, pages 54–68. Lecture Notes in Math., Vol. 567. Springer, Berlin, 1977.

[39] A. S. Miščenko and A. T. Fomenko. Euler equation on finite-dimensional Lie groups. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 42(2) :396–415, 471, 1978.

[40] Rached Mneimné and Frédéric Testard. *Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques*. Collection Méthodes. [Methods Collection]. Hermann, Paris, 1986.

[41] J. M. Nunes da Costa and C.-M. Marle. Master symmetries and bi-Hamiltonian structures for the relativistic Toda lattice. *J. Phys. A*, 30(21) :7551–7556, 1997.

[42] Joana M. Nunes da Costa and Pantelis A. Damianou. Toda systems and exponents of simple Lie groups. *Bull. Sci. Math.*, 125(1) :49–69, 2001.

[43] M. A. Olshanetsky and A. M. Perelomov. Integrable systems and Lie algebras. In *Mathematical physics reviews, Vol. 3*, volume 3 of *Soviet Sci. Rev. Sect. C : Math. Phys. Rev.*, pages 151–220. Harwood Academic, Chur, 1982.

[44] M. A. Olʹshanetsky, A. M. Perelomov, A. G. Reyman, and M. A. Semenov-Tyan-Shansky. Integrable systems. II. In *Current problems in mathematics. Fundamental directions, Vol. 16 (Russian)*, Itogi Nauki i Tekhniki, pages 86–226, 307. Akad. Nauk SSSR Vsesoyuz. Inst. Nauchn. i Tekhn. Inform., Moscow, 1987.

[45] A. M. Perelomov. *Integrable systems of classical mechanics and Lie algebras. Vol. I.* Birkhäuser Verlag, Basel, 1990. Translated from the Russian by A. G. Reyman.

[46] Mustapha Rais. Sur les dérivées des polynômes invariants sur une algèbre de lie semi-simple complexe. 1991.

[47] Michael A. Semenov-Tian-Shansky. Dressing transformations and Poisson group actions. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 21(6) :1237–1260, 1985.

[48] Patrice Tauvel and Rupert W. T. Yu. *Lie algebras and algebraic groups*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2005.

[49] Morikazu Toda. Studies of a non-linear lattice. *Phys. Rep.*, 18C(1) :1–123, 1975.

[50] Kimio Ueno and Kanehisa Takasaki. Toda lattice hierarchy. II. *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*, 59(6) :215–218, 1983.

[51] Pierre van Moerbeke. The spectrum of Jacobi matrices. *Invent. Math.*, 37(1) :45–81, 1976.

[52] Pierre van Moerbeke and David Mumford. The spectrum of difference operators and algebraic curves. *Acta Math.*, 143(1-2) :93–154, 1979.

[53] Pol Vanhaecke. *Integrable systems in the realm of algebraic geometry*, volume 1638 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1996.