



HAL
open science

Étude mathématique et numérique de cristaux photoniques fortement contrastés

Christophe Bourel

► **To cite this version:**

Christophe Bourel. Étude mathématique et numérique de cristaux photoniques fortement contrastés. Mathématiques [math]. Université du Sud Toulon Var, 2010. Français. NNT: . tel-00562138

HAL Id: tel-00562138

<https://theses.hal.science/tel-00562138>

Submitted on 2 Feb 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DU SUD TOULON-VAR
U.F.R. SCIENCES ET TECHNIQUES

THÈSE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DU SUD TOULON-VAR

Discipline : Mathématiques Appliquées

Présentée et soutenue publiquement

par

Christophe BOUREL

le 13 décembre 2010

Titre :

**Étude mathématique et numérique de cristaux
photoniques fortement contrastés**

JURY ET RAPPORTEURS :

M. AMMARI Habib, École normale supérieure, Paris	Rapporteur
M. BELLIEUD Michel, Université de Perpignan Via Domitia	Examineur
M. BONNETIER Eric, Université Joseph Fourier, Grenoble	Rapporteur
M. BOUCHITTE Guy, IMATH, Université du Sud Toulon-Var	Directeur de thèse
M. NICOLET André, Institut Fresnel, Marseille	Rapporteur
M. SEPPECHER Pierre, IMATH, Université du Sud Toulon-Var	Examineur
M. ZOLLA Frédéric, Institut Fresnel, Marseille	Examineur

Remerciements

Je souhaite adresser mes remerciements les plus profonds à certaines personnes sans qui cette thèse n'aurait pu voir le jour :

Monsieur Guy BOUCHITTE, mon maître de thèse, qui m'a transmis sa passion pour les métamatériaux et qui a partagé avec moi ses très nombreuses connaissances. Je le remercie pour sa grande disponibilité et sa patience particulièrement durant la période de rédaction.

Éric BONNETIER et Habib AMMARI pour avoir effectué la délicate tâche de rapporter ma thèse.

Frédéric ZOLLA et André NICOLET, pour avoir fait partie de mon jury. Je les remercie également de m'avoir accueilli à Marseille et prodigué de nombreux conseils numériques, en particulier à propos des éléments d'arêtes de Nédélec. Merci à André d'avoir accepté de rapporter ma thèse de son point de vue physique.

Michel BELLIEUD, d'avoir accepté d'être membre de mon jury. Je le remercie également de m'avoir orienté vers Guy dans mon choix de thèse et de m'avoir suivi et conseillé au début de ces trois années de travail.

Pierre SEPPECHER, pour avoir accepté d'être membre de mon jury et pour son cours de calcul des variations que j'ai suivi en première année avec grand intérêt.

Didier FELBACQ, pour m'avoir accueilli de nombreuses fois à Montpellier et pour ses conseils, en particulier sur la méthode d'approximation spectrale du chapitre 6.

Cédric GALUSINSKI, pour les nombreuses discussions que nous avons eues autour de problèmes numériques.

Un grand merci à l'ensemble des membres du laboratoire IMATH pour leur accueil sympathique et les échanges, scientifiques ou non, que j'ai eu avec eux durant ces trois années.

Mickaël BARBOTTEU, mon encadrant de stage de M2 à Perpignan, pour m'avoir initié aux joies de l'analyse numérique et de la programmation en Fortran, outils sans lesquels le chapitre 6 n'aurait pu voir le jour.

Toute l'équipe enseignante de l'Université de Perpignan, source de ma passion pour les mathématiques.

Un remerciement à ma famille et mes amis pour leur soutien affectif et leurs encouragements.

Table des matières

Introduction	1
1 Contexte physique	7
1 Diffraction d'une onde électromagnétique	7
1.1 Équations de Maxwell	7
1.2 Régime harmonique	8
1.3 Lois constitutives	9
1.4 Problème de diffraction, conditions de rayonnement	12
1.5 Métal infiniment conducteur.	14
1.6 Les cas de polarisation $E//$ et $H//$	15
2 Métamatériaux et cristaux photoniques	16
2.1 Indice de réfraction négatif	18
2.2 Fréquences interdites	19
2.3 Comment obtenir des résonances, milieux extrêmes.	20
3 Applications récentes	20
3.1 Super-lentille	20
3.2 Cape d'invisibilité	21
2 Outils mathématiques	23
1 Éléments d'analyse fonctionnelle	23
1.1 Espaces de Sobolev	25
1.2 Fonctions périodiques	27
1.3 Compacité par compensation : lemme "div-rot"	31
1.4 Éléments de théorie spectrale	32
1.5 Un peu de théorie des probabilités	37
1.6 Résultats classiques pour le problème de diffraction	38
2 Homogénéisation	40
2.1 Notion de milieux effectifs	40
2.2 Convergence double-échelle	41
2.3 Exemples de limites double-échelle	47
3 Nanofibres métalliques et tenseurs de permittivité réalisables	51
Introduction	51
1 Homogénéisation de nano-fibres métalliques (cas capacitair)	52
1.1 Description de la structure	52
1.2 Analyse asymptotique	55

1.3	Loi effective non locale	57
2	Loi effective obtenue par homogénéisation réitérée	59
2.1	Description de la structure	59
2.2	Résultat principal et simulations numériques	61
2.3	Estimations et résultats préliminaires	66
2.4	Analyse double-échelle	68
2.5	Etude du problème de micro- résonances	71
2.6	Démonstration du théorème principal	74
2.7	Propriétés de la résonance fondamentale	78
3	Cas de nano-fibres orientées dans les trois directions	81
3.1	Variante avec les directions alternées	82
3.2	Variante avec les fibres croisées	84
3.3	Éléments de démonstration	89
3.4	Permittivités effectives atteignables par homogénéisation	92
	Conclusion	93
4	Inclusions diélectriques et magnétisme artificiel	95
	Historique et description du modèle 3D	95
1	Résultat principal	98
1.1	Loi effective homogénéisée et convergence	98
1.2	Simulations numériques	100
1.3	Schéma de la démonstration	101
2	Estimations et résultats préliminaires	102
2.1	Comportement du champ loin de l'obstacle et bornes L^2	103
2.2	Analyse double-échelle	105
3	Solutions élémentaires sur le tore	106
3.1	Description du champ électrique microscopique	106
3.2	Description du champ magnétique microscopique	107
4	Perméabilité effective en fonction de la fréquence	115
4.1	Analyse spectrale sur le tore	115
4.2	Tenseur de permittivité effectif	116
5	Démonstration du résultat principal	117
5.1	Obtention de la loi effective	117
5.2	Convergence <i>forte</i> double-échelle	119
5.3	Justification de l'hypothèse d'énergie.	126
6	Reformulation du problème spectral (4.47)	126
	Conclusion	131
5	Quelques résultats dans le cas aléatoire	133
	Description du modèle	133
1	Résultat principal	136
2	Cadre mathématique stochastique	138
2.1	Description de l'ensemble des événements Ω	138
2.2	Système dynamique et résultats d'analyse stochastique	139

2.3	Reformulation du problème de diffraction	142
3	Estimations et résultats préliminaires	143
3.1	Comportement loin de l'obstacle et borne L^2	143
3.2	Analyse double-échelle stochastique	144
4	Solutions élémentaires sur la cellule unité	146
4.1	Caractérisation du tenseur de permittivité effectif	146
4.2	Caractérisation de la perméabilité effective	147
5	Démonstration du résultat principal	149
5.1	Loi effective homogénéisée	149
5.2	Convergence <i>forte</i> double-échelle	150
5.3	Justification de l'hypothèse d'énergie	154
6	Loi de perméabilité effective dépendant de la fréquence	154
6.1	Simulations numériques	155
6.2	Le cas de diélectriques avec très faibles pertes	155
6	Approximation numérique des tenseurs effectifs	161
	Introduction	161
1	Méthode de Galerkin pour l'approximation spectrale	162
2	Approximation du tenseur $\epsilon^{\text{eff}}(\omega)$ obtenu dans le chapitre 3	165
3	Approximation du tenseur $\mu^{\text{eff}}(\omega)$ obtenu dans le chapitre 4	167
3.1	Éléments d'arêtes de Nédélec	167
3.2	Un résultat de densité	174
3.3	Approximation du tenseur μ^{eff}	180
4	Calcul effectif des opérateurs discrétisés	181
4.1	Noyau de Green périodique.	181
4.2	Extraction de la singularité du noyau.	183
	Conclusion et perspectives	187
	Bibliographie	189

Introduction

Dans le milieu des années 90, les avancées en nano-technologies ont rendu possible l'élaboration de matériaux artificiels dont le comportement vis-à-vis des ondes électromagnétiques est tout à fait surprenant et, pour cette raison, ils sont appelés parfois métamatériaux. Depuis lors, ces matériaux intéressent beaucoup la communauté scientifique, notamment dans le domaine de l'optique, en raison de leur capacité à “contrôler” *la propagation lumineuse*.

Ces milieux sont en fait des matériaux composites (plus ou moins structurés) pour lesquels une théorie effective peut parfois être mise en œuvre et fait apparaître des tenseurs de permittivité ou de perméabilité *qui diffèrent complètement de ceux que l'on peut rencontrer dans des milieux homogènes naturels*. Dans le domaine de l'optique, des avancées majeures ont été obtenues récemment par J. B. Pendry ainsi que M. Lassas, G. Uhlmann et al. [27]. Notamment, Pendry a obtenu en 1996 [43] un milieu à permittivité négative en dessous d'une fréquence de coupure et en 1999 [42] il obtient un milieu à perméabilité négative dans certaines bandes de fréquences. Dans chacun de ces cas, les structures envisagées sont formées de micro-composants métalliques de grande conductivité formant différents motifs disposés périodiquement (fibres parallèles dans le premier cas et anneaux fendus dans le second). L'association de ces deux structures permet d'obtenir un milieu se comportant, à certaines fréquences, comme un milieu de permittivité et de perméabilité simultanément négatives [38]. Il s'agit de l'un des métamatériaux les plus populaires du fait de ses propriétés de réfraction inverse. Notons que, bien des années auparavant, quelques applications théoriques de tels matériaux à indices négatifs (notamment les lentilles planes) avaient été découvertes par Veselago et présentées dans son célèbre article de 1968 [51].

Ces matériaux composites sont souvent formés d'une structure périodique dont les composants sont métalliques ou diélectriques avec des paramètres constitutifs (permittivité, conductivité) présentant de forts contrastes avec la matrice (ou le vide) les entourant. Une telle structure est illuminée par une onde incidente *dont la longueur d'onde est grande devant la taille et l'espacement de ces inclusions*. C'est pour cette raison que le comportement macroscopique de telles structures peut parfois être assimilé à celui d'un milieu homogène décrit par des paramètres effectifs : l'étude mathématique est ainsi placée dans le cadre de l'homogénéisation.

Les objectifs principaux de cette thèse sont :

- Comprendre sous quelles conditions (géométrie des inclusions, ordre du contraste relativement à la période) la structure composite se comporte asymptotiquement comme un obstacle homogène caractérisé par des tenseurs effectifs de permittivité et de perméabilité.

- Étudier la dépendance de ces tenseurs effectifs relativement à la fréquence de l'onde incidente et plus particulièrement dans le cas où ces tenseurs admettent des valeurs propres de partie réelle négative.

Nous nous placerons essentiellement dans le domaine de l'optique (longueur d'onde inférieure à 800 nm) où la perméabilité des matériaux reste "proche" de celle du vide. Les effets de contraste concerneront donc le coefficient de permittivité (qui peut être assez important notamment pour des métaux).

Dans chacune des structures étudiées, nous effectuerons une analyse asymptotique relativement à un petit paramètre noté η en fonction duquel nous ferons varier la période, la permittivité relative des inclusions ainsi que leur géométrie. Plus précisément, la période de la structure sera $d\eta$ (où d est un paramètre de normalisation), les inclusions occuperont un sous-ensemble Σ_η de l'obstacle diffractant $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^3$ et $\varepsilon_\eta(x)$ décrira localement la permittivité du milieu. La structure dépend ainsi du seul paramètre η et reste contenue dans le domaine borné \mathcal{B} . Nous considérons alors, pour tout $\eta > 0$, le problème de diffraction d'une onde incidente monochromatique $(\mathbf{E}^{\text{inc}}, \mathbf{H}^{\text{inc}})$ (représentant les champs électriques et magnétiques "venant" de l'infini), indépendante de η et de fréquence angulaire donnée $\omega > 0$. Le champ électromagnétique total $(\mathbf{E}_\eta, \mathbf{H}_\eta)$ est alors solution du système de Maxwell

$$\begin{cases} \mathbf{rot} \mathbf{E}_\eta = i\omega\mu_0\mathbf{H}_\eta, \\ \mathbf{rot} \mathbf{H}_\eta = -i\omega\varepsilon_0\varepsilon_\eta\mathbf{E}_\eta. \end{cases} \quad (0.1)$$

Ici ε_0 et μ_0 sont les permittivité et perméabilité du vide (si bien que $\varepsilon_\eta = 1$ dans $\mathbb{R}^3 \setminus \Sigma_\eta$) et les équations dans (0.1) sont vérifiées au sens des distributions sur tout \mathbb{R}^3 . La résolution du système (0.1) couplé à des conditions d'ondes sortantes à l'infini pour le champ diffracté $(\mathbf{E}_\eta - \mathbf{E}^{\text{inc}}, \mathbf{H}_\eta - \mathbf{H}^{\text{inc}})$ conduit à une solution unique $(\mathbf{E}_\eta, \mathbf{H}_\eta)$. Notre problème mathématique principal est classique en théorie de l'homogénéisation : il s'agit d'étudier le comportement asymptotique quand η tend vers 0 de $(\mathbf{E}_\eta, \mathbf{H}_\eta)$ et d'identifier le champ limite (\mathbf{E}, \mathbf{H}) en tant que solution d'un problème de diffraction caractérisé par des tenseurs effectifs homogénéisés. Dans les situations que nous allons rencontrer, cette étude s'avère délicate pour différentes raisons :

- L'obstacle \mathcal{B} est borné et tridimensionnel : cela exclut la possibilité de réduire l'étude au cas de champs électriques ou magnétiques polarisés. Notons que cette hypothèse simplificatrice est très souvent utilisée par les physiciens et permet de ramener le système (0.1) à une équation de type Helmholtz en dimension deux. Elle est légitime seulement quand l'obstacle est invariant dans une direction (donc non borné).
- Le fait de choisir un facteur de contraste important ("milieux extrêmes") donne un rôle crucial à la topologie des inclusions au sein de la cellule de périodicité.
- Dans certains cas, la recherche d'une loi homogénéisée décrite par des tenseurs de permittivité et de permittivité s'avère infructueuse. L'analyse asymptotique peut en effet conduire à des lois effectives non locales comme nous le verrons dans le chapitre 3.
- Due à la nature vectorielle du système de Maxwell et au fait que les estimations a priori mettent en jeu uniquement le rotationnel des champs \mathbf{E}_η et \mathbf{H}_η , il est très délicat d'établir une borne uniforme de ces champs dans L^2_{loc} . Celle-ci se fera a posteriori en

utilisant l'unicité de la solution du problème limite.

Nous considérerons essentiellement deux types de structures (parfois avec une variante stochastique) :

Dans un premier cas, elles sont composées d'inclusions métalliques fortement conductrices avec faible taux de remplissage (pour limiter la dissipation). C'est de cette façon que nous atteindrons des tenseurs de permittivité négatifs.

Dans le second cas, ces structures seront composées d'inclusions fortement diélectriques disposées avec une fraction volumique restant strictement positive. Il en résultera du "magnétisme artificiel" et des tenseurs de perméabilité négatifs.

Dans les deux cas, la loi homogénéisée globale sera régie par un problème spectral sur la cellule de périodicité ("micro-résonateurs") qui apparaîtra lors de l'analyse asymptotique double-échelle du champ $(\mathbf{E}_\eta, \mathbf{H}_\eta)$. Les oscillations de ces champs à l'ordre de la période η sont en fait excitées par des résonances internes associées.

Le plan du manuscrit est le suivant :

Après quelques rappels sur les équations de Maxwell, nous présentons brièvement dans le premier chapitre les cristaux photoniques et métamatériaux ainsi que quelques applications récentes.

Nous introduisons dans le second chapitre les différentes notations et notions mathématiques qui seront utilisées tout au long de la thèse. Nous y présenterons notamment la méthode de convergence double-échelle avec quelques exemples illustratifs, quelques éléments concernant les espaces de Sobolev périodiques ainsi que la théorie spectrale d'opérateurs compacts.

Dans le troisième chapitre, nous proposons la construction d'un cristal photonique 3D conduisant à un tenseur de permittivité effectif négatif. C'est à notre connaissance le premier résultat mathématique rigoureux permettant d'obtenir de tels matériaux effectifs dans le cadre de la diffraction d'onde électromagnétique par un obstacle borné 3D. Notre métamatériau est construit en deux étapes :

- La première, inspirée des travaux de D. Felbacq et G. Bouchitté [12], consiste à considérer un composite formé de fibres métalliques parallèles très fines, très conductrices et de longueur finie. Contrairement à l'idée communément admise, la loi constitutive qui résulte de l'homogénéisation d'une telle structure est non locale (toutefois une permittivité négative peut être atteinte lorsque la longueur des fibres est infinie [25]).
- La seconde étape est entièrement nouvelle. Elle consiste à considérer une structure formée de la reproduction périodique, à une petite échelle, du matériau composite précédent. En appliquant une procédure d'homogénéisation réitérée, nous obtenons un milieu effectif local tridimensionnel décrit par un tenseur de permittivité dépendant de la fréquence et faisant intervenir un problème spectral sur la cellule unité.

Le tenseur effectif obtenu dépend en outre des différents paramètres physiques décrivant la structure (conductivité, taux de remplissage des fibres, coefficient capacitair). En faisant varier ces paramètres, nous montrons qu'il est possible d'atteindre tous les

tenseurs de permittivité décrits par une matrice réelle symétrique. Cela permet de répondre à des questions concernant les milieux “atteignables” par homogénéisation telles que traitées dans l’article récent de G. Milton [34] (voir aussi le résultat de P. Seppecher [15] dans le cas de l’élasticité linéaire).

Dans le quatrième chapitre, nous proposons une extension 3D des résultats obtenus dans un cadre bidimensionnel par J. Pendry [39] en 2002 puis démontrés rigoureusement par G. Bouchitté et D. Felbacq [20] en 2005. Rappelons que dans ces travaux, le cristal photonique était constitué d’un réseau de fibres diélectriques parallèles de longueur infinie et, pour un choix judicieux du contraste, faisait apparaître une perméabilité négative dans la direction des fibres.

La structure que nous étudions ici est formée d’inclusions simplement connexes (typiquement des sphères), fortement diélectriques, et disposées périodiquement au sein d’un domaine borné de \mathbb{R}^3 . En maintenant constant le *diamètre optique* des inclusions (ce qui impose un contraste de l’ordre de $1/\eta^2$), l’analyse double-échelle fait apparaître une activité magnétique au niveau du système d’équations (vectorielles) sur la cellule de périodicité. Ce système est résolu par méthodes spectrales et fait apparaître des résonances. Il est entièrement déterminé par le champ magnétique macroscopique qui résulte d’une moyennisation géométrique particulière liée au 1-formes différentielles sur le tore.

Notre résultat d’homogénéisation conduit à une loi de perméabilité locale décrite par un tenseur effectif dont les valeurs propres sont de partie réelle changeant de signe avec la fréquence. Ceci est une alternative à la célèbre construction de Pendry [42] formée d’anneaux fendus qui a été étudiée mathématiquement par R. V. Kohn et S. P. Shipman [30] dans un cas 2D et par G. Bouchitté et B. Schweizer [9] dans le cas général 3D.

Dans le cinquième chapitre, nous nous intéressons à l’extension des résultats du chapitre 4 lorsque les inclusions sont disposées aléatoirement. Nous nous plaçons dans le cas simplifié d’une structure infinie et invariante dans une direction afin de pouvoir considérer des champs polarisés et rendre ainsi le problème bidimensionnel. Cette structure est formée de fibres circulaires parallèles infinies dont les sections sont des disques qui restent dans un domaine borné de \mathbb{R}^2 . La disposition (centres, rayons) et la permittivité de ces inclusions circulaires sont aléatoires et respectent une hypothèse d’ergodicité adéquate.

L’analyse asymptotique est effectuée en utilisant une variante stochastique de la convergence double-échelle introduite par Zhikov et Piatnitski dans [53]. Nous mettons en évidence un critère sur la loi de distribution des rayons et des permittivités permettant de justifier l’analyse asymptotique. La loi homogénéisée est déterministe et fait intervenir une perméabilité effective donnée explicitement en fonction de la fréquence et de la loi de probabilité de la distribution initiale.

Le dernier chapitre de la thèse est dédié à l’analyse numérique des tenseurs de permittivité et perméabilité effectifs obtenus dans les chapitres 3 et 4. Dans chacun des cas, le tenseur est caractérisé par les valeurs et vecteurs propres du problème spectral décrivant les résonances microscopiques de la structure et doit être calculé numériquement. Nous utiliserons pour cela la méthode de Galerkin dans le cadre de l’approximation spectrale

d'opérateurs compacts auto-adjoints. Notamment, dans le chapitre 4, le problème spectral sera décrit par un opérateur défini sur un espace de fonctions à divergence nulle. La décomposition en éléments finis de ce dernier sera déduite des éléments d'arêtes de Nédélec [36].

Dans chacun des cas, l'opérateur discrétisé sera obtenu par l'intermédiaire d'un noyau de Green périodique évalué à l'aide d'une formulation explicite [32] de laquelle nous extrairons les singularités.

Enfin, nous donnerons quelques conclusions générales et perspectives à la fin du manuscrit.

1 Contexte physique

Sommaire

1	Diffraction d'une onde électromagnétique	7
1.1	Équations de Maxwell	7
1.2	Régime harmonique	8
1.3	Lois constitutives	9
1.4	Problème de diffraction, conditions de rayonnement	12
1.5	Métal infiniment conducteur.	14
1.6	Les cas de polarisation $E//$ et $H//$	15
2	Métamatériaux et cristaux photoniques	16
2.1	Indice de réfraction négatif	18
2.2	Fréquences interdites	19
2.3	Comment obtenir des résonances, milieux extrêmes.	20
3	Applications récentes	20
3.1	Super-lentille	20
3.2	Cape d'invisibilité	21

1 Diffraction d'une onde électromagnétique

1.1 Équations de Maxwell

Le champ électromagnétique est représenté à l'aide de quatre fonctions vectorielles dépendant de la position $x \in \mathbb{R}^3$ et du temps $t \in \mathbb{R}^+$:

\mathcal{E} : le champ électrique, \mathcal{H} : le champ magnétique,
 \mathcal{D} : le champ de déplacement électrique, \mathcal{B} : l'induction magnétique.

Les équations de Maxwell lient ces champs aux termes sources

ρ : la densité de charge et \mathcal{J} : la densité de courant,

au travers du système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} \mathbf{rot} \mathcal{E} &= -\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} \quad , \quad \mathbf{rot} \mathcal{H} = \mathcal{J} + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t} \quad , \\ \mathbf{div} \mathcal{D} &= \rho \quad , \quad \mathbf{div} \mathcal{B} = 0 \quad . \end{aligned} \tag{1.1}$$

Dans les situations usuelles, les champs $\mathcal{E}, \mathcal{H}, \mathcal{D}$ et \mathcal{B} sont des fonctions de carré localement sommable qui peuvent admettre des singularités (discontinuités), notamment lorsque le milieu dans lequel se propage l'onde est hétérogène. Pour cette raison, les équations apparaissant dans (1.1) doivent être envisagées au sens des distributions (voir chapitre 2). Ce point est fondamental et permet de mieux comprendre les conditions de transmissions des champs à la traversée d'une interface.

1.2 Régime harmonique

On sait, grâce à la transformée de Fourier, que toute fonction réelle $f(x, t)$ peut être considérée comme superposition d'une infinité de fonctions sinusoïdales en temps. Ces régimes sinusoïdaux, dits aussi régimes harmoniques, vont ainsi jouer un rôle essentiel dans l'étude des équations de Maxwell.

Transformée de Fourier. Au lieu de nous intéresser aux fonctions $\mathcal{E}, \mathcal{H}, \mathcal{D}, \mathcal{B}, \rho$ et \mathcal{J} , nous allons considérer leur transformée de Fourier partielle par rapport à la variable temporelle. Ce sont des distributions, notées $\hat{\mathbf{E}}, \hat{\mathbf{H}}, \hat{\mathbf{D}}, \hat{\mathbf{B}}, \hat{\mathbf{J}}, \hat{\rho}$, de la variable (x, ν) où ν est la variable conjuguée de t .

Suivant les notations du livre de Schwartz [47], nous utiliserons la transformée de Fourier qui, à toute fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$, associe la fonction $\hat{f}(\nu)$ définie par

$$\hat{f}(\nu) := \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-2i\pi\nu t} dt ,$$

et qui peut être étendue aux distributions tempérées. D'un point de vue physique, la variable ν représente la fréquence des champs et nous utiliserons plutôt la variable $\omega := 2\pi\nu$ qui désigne la fréquence angulaire ou pulsation.

Il est maintenant facile de déduire des équations (1.1) les relations vérifiées par les transformées de Fourier pour chaque valeur ω de la fréquence angulaire.

$$\begin{aligned} \mathbf{rot} \hat{\mathbf{E}} - i\omega \hat{\mathbf{B}} &= 0 \quad , \quad \mathbf{rot} \hat{\mathbf{H}} + i\omega \hat{\mathbf{D}} = \hat{\mathbf{J}} \quad , \\ \operatorname{div} \hat{\mathbf{D}} &= \hat{\rho} \quad , \quad \operatorname{div} \hat{\mathbf{B}} = 0 \quad . \end{aligned} \tag{1.2}$$

Les équations de Maxwell en régime harmonique. On se place dans le cas où les champs et les sources dépendent sinusoïdalement du temps, c'est-à-dire si toutes composantes de champs, toutes composantes de \mathcal{J} ainsi que la densité de charge ρ , s'écrivent sous la forme

$$\mathcal{U}(x, t) = a(x) \cos(\omega t + \phi(x)) \quad . \tag{1.3}$$

Bien entendu, nous pouvons choisir aussi la dépendance $\cos(-\omega t + \phi(x))$. Il est commode de représenter les champs de cette forme à l'aide de la quantité complexe $U(x) := a(x)e^{-i\phi(x)}$ (qui ne dépendent que de la variable d'espace) vérifiant la relation

$$\mathcal{U}(x, t) = \Re(U(x)e^{-i\omega t}) \quad . \tag{1.4}$$

Si nous avons choisi la dépendance $\cos(-\omega t + \phi(x))$ pour \mathcal{U} , la définition de $U(x)$ deviendrait $\mathcal{U}(x, t) = \Re(U(x)e^{i\omega t})$. Dans toute la thèse nous utiliserons une dépendance temporelle en $e^{-i\omega t}$.

À l'aide de l'équation (1.4), nous introduisons les fonctions de $L^2_{loc}(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3)$, \mathbf{E} , \mathbf{H} , \mathbf{D} , \mathbf{B} , \mathbf{J} et $\rho \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^3; \mathbb{C})$ (ne dépendant que de $x \in \mathbb{R}^3$) associées aux champs réels \mathcal{E} , \mathcal{H} , \mathcal{D} , \mathcal{B} et aux sources \mathcal{J} , ρ .

Ces quantités complexes vérifient alors le système de Maxwell harmonique

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{E} - i\omega \mathbf{B} &= 0 \quad , \quad \text{rot } \mathbf{H} + i\omega \mathbf{D} = \mathbf{J} \quad , \\ \text{div } \mathbf{D} &= \rho \quad , \quad \text{div } \mathbf{B} = 0 \quad . \end{aligned} \tag{1.5}$$

1.3 Lois constitutives

Pour simplifier, plaçons nous en régime harmonique de pulsation $\omega > 0$. Le milieu dans lequel l'onde électromagnétique se propage est décrit par les relations liant d'une part \mathbf{D} à \mathbf{E} et d'autre part \mathbf{B} à \mathbf{H} .

Propagation dans le vide.

Dans le vide, ces relations sont simplement des relations de proportionnalité

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} \quad \text{et} \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \quad ,$$

où ε_0 et μ_0 sont constantes de permittivité et de perméabilité du vide. Lorsque l'on se place en l'absence de charge et de courant ($\rho = 0$ et $\mathbf{J} = 0$), les équations (1.5) deviennent

$$\text{rot } \mathbf{E} = i\omega \mu_0 \mathbf{H} \quad , \quad \text{rot } \mathbf{H} = -i\omega \varepsilon_0 \mathbf{E} \quad . \tag{1.6}$$

En prenant le rotationnel successivement dans les équations (1.6) et en exploitant le fait que $\text{div } \mathbf{H} = \text{div } \mathbf{E} = 0$, on déduit que toutes les composantes de (\mathbf{E}, \mathbf{H}) satisfont l'équation de Helmholtz

$$\Delta \mathbf{u} + k_0^2 \mathbf{u} = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^3 \quad , \tag{1.7}$$

où $k_0 := \frac{2\pi}{\lambda} = \varepsilon_0 \mu_0 \omega$ représente le nombre d'onde et λ la longueur d'onde.

Ondes planes.

Ce sont les solutions de (1.7) de la forme

$$\mathbf{u}(x) = A e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \quad , \tag{1.8}$$

où $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3$ vérifie $|\mathbf{k}| = k_0$. Cette solution particulière $\mathbf{u}(x)$ représente une onde plane d'amplitude A , venant de l'infini et se propageant dans la direction \mathbf{k} .

Ce type d'onde a un rôle important dans les problèmes de diffraction où un obstacle contenu dans le vide est illuminé par une onde incidente que l'on décompose en la superposition d'ondes planes (ce qui correspond à une transformée de Fourier en x de l'onde incidente).

Onde sphérique.

Dans \mathbb{R}^3 , on connaît le noyau de l'équation de Helmholtz obtenu en résolvant, au sens des distributions, l'équation

$$\Delta \mathbf{G} + k^2 \mathbf{G} = \delta(x) \quad \text{dans } \mathbb{R}^3 ,$$

où δ est la distribution de Dirac en zéro. Cette équation a deux solutions particulières radiales données par

$$\mathbf{G}^\pm(x) := -\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|} e^{\pm ik|\mathbf{x}|} . \quad (1.9)$$

Si une amplitude complexe est de la forme

$$U(x) = \frac{1}{|\mathbf{x}|} e^{\pm ik|\mathbf{x}|} ,$$

la fonction réelle $\mathcal{U}(x, t)$ qui lui est associée est

$$\mathcal{U}(x, t) = \frac{1}{|\mathbf{x}|} \cos(\omega t \pm k|\mathbf{x}|) = \frac{1}{|\mathbf{x}|} \cos\left(\omega\left(t \pm \frac{k|\mathbf{x}|}{\omega}\right)\right) ,$$

ce qui correspond à une *onde sphérique* (les surfaces équiphasées et équiamplitudes sont des sphères) avec le signe \pm suivant que l'onde est entrante ou sortante.

Propagation en milieu hétérogène. Loi locale. Dans les milieux usuels, les relations constitutives sont données par

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r(x, \omega) \mathbf{E} \quad \text{et} \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mu_r(x, \omega) \mathbf{H} ,$$

où $\varepsilon_r(x, \omega)$ et $\mu_r(x, \omega)$ sont des tenseurs d'ordre deux qui représentent les permittivité et perméabilité relatives en chaque point de l'espace. Les hétérogénéités du milieu se traduisent par la dépendance de ces tenseurs par rapport à la variable x (qui est en général discontinue). Les équations de Maxwell (1.5) prennent ainsi la forme

$$\begin{aligned} \mathbf{rot} \mathbf{E} &= i\omega \mu_0 \mu_r(x, \omega) \mathbf{H} \quad , \quad \mathbf{rot} \mathbf{H} = -i\omega \varepsilon_0 \varepsilon_r(x, \omega) \mathbf{E} + \mathbf{J} , \\ \mathbf{div}(\varepsilon_r(x, \omega) \mathbf{E}) &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} . \end{aligned} \quad (1.10)$$

Il reste maintenant à préciser le courant \mathbf{J} . Dans le cas de milieux diélectriques parfaits (isolant électrique), on a $\mathbf{J} = 0$ et de ce fait $\rho = 0$. Ainsi, les équations de Maxwell sont données par

$$\mathbf{rot} \mathbf{E} = i\omega \mu_0 \mu_r(x, \omega) \mathbf{H} \quad , \quad \mathbf{rot} \mathbf{H} = -i\omega \varepsilon_0 \varepsilon_r(x, \omega) \mathbf{E} . \quad (1.11)$$

Dans les milieux métalliques, on se réfère en général à la loi d'Ohm donnée par

$$\mathbf{J} = \sigma(x, \omega) \mathbf{E} , \quad (1.12)$$

où $\sigma(x, \omega)$ est la conductivité du matériau au point x . Pour un milieu donné, la conductivité σ dépend très fortement de la fréquence et il s'avère qu'elle est très difficilement mesurable dans le domaine de l'optique. Un métal qui satisfait la loi d'Ohm (1.12) est appelé métal ohmique.

Dans le cas de matériaux "infiniment conducteurs", la situation devient plus complexe dans la mesure où le courant \mathbf{J} obtenu dans l'analyse limite $\sigma \rightarrow +\infty$, devient une distribution singulière concentrée sur le bord du conducteur.

Formulation mixte métal-diélectrique.

Écrivons côte à côte les relations constitutives données dans les diélectriques et dans les métaux ohmiques :

$$\begin{array}{ll} \text{dans le métal ohmique :} & \text{dans le diélectrique :} \\ \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{rot} \mathbf{E} = i\omega\mu_0 \mu_r \mathbf{H} , \\ \mathbf{rot} \mathbf{H} = -i\omega\varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E} + \sigma \mathbf{E} = -i\omega\varepsilon_0 \left(\varepsilon_r + \frac{i\sigma}{\omega\varepsilon_0} \right) \mathbf{E} , \end{array} \right. & \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{rot} \mathbf{E} = i\omega\mu_0 \tilde{\mu}_r \mathbf{H} , \\ \mathbf{rot} \mathbf{H} = -i\omega\varepsilon_0 \tilde{\varepsilon}_r \mathbf{E} . \end{array} \right. \end{array} \quad (1.13)$$

Il apparaît alors par simple comparaison que les équations du cas métallique sont identiques à celles du cas diélectrique dès que

$$\tilde{\mu}_r = \mu_r \quad \text{et} \quad \tilde{\varepsilon}_r = \varepsilon_r + \frac{i\sigma}{\omega} . \quad (1.14)$$

Ainsi, un métal ohmique homogène $(\varepsilon_r, \mu_r, \sigma)$ par un diélectrique homogène $(\tilde{\varepsilon}_r, \tilde{\mu}_r)$ peut être vu de la même manière qu'un diélectrique homogène de permittivité relative $\tilde{\varepsilon}_r$ donnée par (1.14). De ce fait, la quantité \mathbf{J} dans le système de Maxwell est incorporée dans le second membre $-i\omega\varepsilon_0\tilde{\varepsilon}_r\mathbf{E}$ de la seconde équation de la seconde équation de Maxwell. La quantité $\mathbf{d} = \varepsilon_0\tilde{\varepsilon}_r\mathbf{E}$ sera appelée courant de déplacement. Pour le physicien, ce courant est une quantité *macroscopique* : elle se distingue du courant lié à la loi d'Ohm que l'on observe à l'échelle de l'électron.

Conditions de transmission.

Rappelons que les équations (1.11) sont à interpréter au sens des distributions dans \mathbb{R}^3 . De ce fait, elle contiennent intrinsèquement des conditions de transmission dans des zones de discontinuité des coefficients ε_r, μ_r . Considérons une surface S séparant deux milieux homogènes \mathcal{B}^+ et \mathcal{B}^- , ou même plus généralement deux milieux pour lesquels chacun des paramètres ε_r, μ_r et σ sont des fonctions continues. Chacun de ces coefficients est décrit par les complexes $(\varepsilon^\pm, \mu^\pm)$ de la façon suivante

$$\varepsilon_r(x) = \varepsilon^+ 1_{\mathcal{B}^+}(x) + \varepsilon^- 1_{\mathcal{B}^-}(x) \quad , \quad \mu(x) = \mu^+ 1_{\mathcal{B}^+}(x) + \mu^- 1_{\mathcal{B}^-}(x) .$$

De telles surfaces se rencontrent typiquement à l'interface entre deux milieux. Dans chacun des domaines, les fonctions \mathbf{E}, \mathbf{H} sont régulières, au moins une fois différentiable mais elles subissent éventuellement un saut à la traversée de S . Dans le cas où ρ et \mathbf{J} sont des fonctions régulières, on peut déduire des équations (1.11) les conditions de raccordement suivantes

$$\mathbf{E}^+ \wedge \mathbf{n} = \mathbf{E}^- \wedge \mathbf{n} \quad , \quad \mathbf{H}^+ \wedge \mathbf{n} = \mathbf{H}^- \wedge \mathbf{n} ,$$

$$(\varepsilon_r \mathbf{E})^+ \cdot \mathbf{n} = (\varepsilon_r \mathbf{E})^- \cdot \mathbf{n} \quad , \quad (\mu_r \mathbf{H})^+ \cdot \mathbf{n} = (\mu_r \mathbf{H})^- \cdot \mathbf{n} \quad ,$$

avec \mathbf{n} un vecteur unitaire normal à S et $(\mathbf{E}^\pm, \mathbf{H}^\pm)$ la restriction à \mathcal{B}^\pm de (\mathbf{E}, \mathbf{H}) (voir chapitre 2 pour plus de détails sur la théorie des distributions). Ainsi, dès que les fonctions ρ et \mathbf{J} sont suffisamment régulières, on a continuité des composantes tangentielles de \mathbf{E} et \mathbf{H} ainsi que la continuité de la composante normale de $\mathbf{D} := \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E}$ et $\mathbf{B} := \mu_0 \mu_r \mathbf{H}$.

1.4 Problème de diffraction, conditions de rayonnement

Supposons qu'un faisceau lumineux éclaire un objet opaque. Certain des rayons sont donc bloqués par l'objet et il peut apparaître derrière celui-ci une zone d'ombre. Ceci n'est exact que si l'objet est grand devant la longueur d'onde incidente. Dans le cas contraire, le phénomène est plus complexe et tout se passe comme si l'obstacle se comportait à son tour comme une source lumineuse émettant un champ, dit champ diffracté, dans tout l'espace. Mathématiquement, cela revient à considérer un domaine borné $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^3$ représentant l'obstacle diffractant et une onde incidente $(\mathbf{E}^{\text{inc}}, \mathbf{H}^{\text{inc}})$. On se place en régime harmonique de fréquence angulaire ω où la dépendance en temps est de la forme $e^{-i\omega t}$. Le champ électromagnétique total (\mathbf{E}, \mathbf{H}) est la somme du champ incident et du champ diffracté. Il vérifie les équations de Maxwell

$$\begin{cases} \text{rot } \mathbf{E} = i\omega\mu_0 \mathbf{H} \quad , \\ \text{rot } \mathbf{H} = -i\omega\varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E} \quad , \end{cases} \quad (1.15)$$

où $\varepsilon_r = \varepsilon_r(x, \omega)$ est la permittivité relative en chaque point de l'espace et vérifie $\varepsilon_r(x, \omega) = 1$ hors de \mathcal{B} (ici on se place en fréquence optique ce qui justifie le choix $\mu_r = 1$).

Pour obtenir l'existence et l'unicité de la solution de (1.15), il faut ajouter une condition aux limites à l'infini. Cette condition porte sur le comportement du champ diffracté $(\mathbf{E}^d, \mathbf{H}^d) := (\mathbf{E} - \mathbf{E}^{\text{inc}}, \mathbf{H} - \mathbf{H}^{\text{inc}})$ qui doit se comporter à l'infini comme la superposition d'ondes sortantes. Plus précisément, il devra vérifier la condition de Silver-Müller suivante

$$(\mathbf{E}^d, \mathbf{H}^d) = O\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|}\right), \quad \omega\varepsilon_0 \left(\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} \wedge \mathbf{E}^d\right) - k_0 \mathbf{H}^d = o\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|}\right). \quad (1.16)$$

De façon équivalente, se référant à la solution sphérique sortante de l'équation de Helmholtz ϕ donnée par (1.9) i.e. $\phi(x) = \frac{e^{ik_0|x|}}{4\pi|x|}$, cette condition peut être réduite sous la forme d'une équation intégrale. Cette relation due à Stratton et Chu est donnée par

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\eta^d(x) &= \int_{|z|=R} \left[i\omega\mu_0 \phi(x-z) \left(\frac{z}{|z|} \wedge \mathbf{H}_\eta^d \right) + \nabla \phi(x-z) \wedge \left(\frac{z}{|z|} \wedge \mathbf{E}_\eta^d \right) \right] d\sigma \quad , \\ \mathbf{H}_\eta^d(x) &= \int_{|z|=R} \left[-i\omega\varepsilon_0 \phi(x-z) \left(\frac{z}{|z|} \wedge \mathbf{E}_\eta^d \right) + \nabla \phi(x-z) \wedge \left(\frac{z}{|z|} \wedge \mathbf{H}_\eta^d \right) \right] d\sigma \quad , \end{aligned}$$

où $d\sigma$ désigne la mesure de surface. Elle permet d'exprimer le champs $(\mathbf{E}^d, \mathbf{H}^d)$ à l'extérieur d'une boule B_R de rayon R (en dehors de laquelle on a du vide, $\varepsilon_r = \mu_r = 1$) en fonction de sa trace sur la sphère $\{|\mathbf{x}| = R\}$.

Vecteur de Pointing. Il s'agit du vecteur complexe défini par

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2} \mathbf{E} \wedge \overline{\mathbf{H}} .$$

Ce vecteur permet de caractériser l'énergie électromagnétique $W_{\mathcal{B}}$ dissipée par effet Joule lors de la diffraction de l'onde incidente. On a la relation suivante

$$W_{\mathcal{B}} = \Re \left(\int_S \mathcal{P} \cdot \mathbf{n} \, ds \right) ,$$

où S est une surface fermée délimitant un domaine Ω tel que $\mathcal{B} \subset\subset \Omega$ (voir [44]).

À l'aide des équations (1.15) et d'une intégration par parties, on obtient

$$W_{\mathcal{B}} = \frac{1}{2} \Re \left(i\omega \varepsilon_0 \int_{\Omega} \varepsilon_r |\mathbf{E}|^2 \, dx - i\omega \mu_0 \int_{\Omega} |\mathbf{H}|^2 \, dx \right) \quad (1.17)$$

$$= -\frac{1}{2} \omega \varepsilon_0 \Im(\varepsilon_r) \int_{\Omega} |\mathbf{E}|^2 \, dx . \quad (1.18)$$

En particulier, si l'obstacle est un métal ohmique caractérisé par une conductivité σ , on déduit de (1.15) que l'énergie dissipée par le métal est donnée par

$$W_{\mathcal{B}} = -\frac{\sigma}{2} \int_{\Omega} |\mathbf{E}|^2 \, dx . \quad (1.19)$$

Les paramètres ε , μ dans le domaine de l'optique. Comme nous l'avons fait remarquer, les matériaux sont généralement dispersifs, c'est-à-dire décrits par des tenseurs de permittivité et de perméabilité qui dépendent de la fréquence ω de l'onde incidente. Dans les problèmes de diffraction que nous étudierons dans cette thèse, la fréquence de l'onde incidente sera toujours dans le domaine de l'optique. Ce domaine est formé des ondes *infrarouges*, dont les fréquences sont comprises entre 300 GHz et 375 THz (longueur d'onde entre $0.8 \mu\text{m}$ et 1mm), ainsi que de la *lumière visible* dont les fréquences sont comprises entre 375 THz et 750 THz (longueur d'onde entre $0.8 \mu\text{m}$ et $0.4 \mu\text{m}$). On précise que les matériaux composites que nous considérerons seront toujours constitués de matériaux homogènes classiques (naturels). Or, dans ce domaine de fréquences, tous les milieux naturels, métalliques ou diélectriques, ont une perméabilité relative proche de 1 (alors que la permittivité relative a sa partie réelle pouvant varier entre des valeurs négatives dans le cas de métaux et de "grandes" valeurs pour des diélectriques. En pratique, nous serons donc contraint de considérer des milieux décrits par une perméabilité relative $\mu_r = 1$ et le seul degré de liberté sur les paramètres constitutifs concernera la permittivité relative ε_r (que nous choisirons à forts contrastes).

Donnons quelques exemples de permittivité que l'on rencontre dans le domaine visible (voir [31] pour plus de détails).

Matériau	Longueur d'onde (μm)	Permittivité relative
Or	0.4	-2.4+6.4i
	0.83	-2.9+2i
Argent	0.4	-3.77+0.67i
	0.82	-30.2+1.59i
Cuivre	0.41	3.5+5.2i
	0.83	-27.6+2.73i
Silicium	0.4	-27.6+2.73i
	0.8	13.6+0.04i

Notons que dans le domaine des micro-ondes (de fréquence comprises entre 300 Mz et 300 Gz) on peut utiliser le modèle de Drude pour décrire précisément le comportement des métaux ohmiques. La permittivité ε_r d'un tel métal vérifie alors $\varepsilon_r = 1 + \frac{i\sigma}{\varepsilon_0\omega}$ où σ est la conductivité donnée par

$$\sigma = \frac{\varepsilon_0\tau\omega_p^2}{1 - i\omega\tau},$$

avec ω_p et τ des paramètres décrivant le métal (respectivement la fréquence plasma et le temps de collision moyen). Pour les fréquences élevées (comme celle de l'optique) ce modèle perd de sa précision et ne sera donc pas utilisé ici.

1.5 Métal infiniment conducteur.

Pour étudier les phénomènes de diffraction par des obstacles métalliques, on utilise parfois le modèle du métal infiniment conducteur. Il s'agit d'un milieu théorique obtenu en passant à la limite quand la conductivité σ tend vers l'infini dans un métal ohmique décrit par $\varepsilon_r = 1 + \frac{i\sigma}{\omega\varepsilon_0}$.

Considérons un tel milieu occupant un volume $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^3$ de frontière Γ .

Le champ électromagnétique est nul à l'intérieur de \mathcal{B} et il apparaît de plus un courant \mathbf{J}_Γ et une densité de charge ρ_Γ localisés sur la surface (voir [44]). En notant \mathbf{n} la normale orientée de l'intérieur vers l'extérieur de \mathcal{B} , les conditions de transmission sont données sur Γ par

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \wedge \mathbf{E} &= 0 & , & & \mathbf{n} \wedge \mathbf{H} &= \mathbf{J}_\Gamma \delta_\Gamma , \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{H} &= 0 & , & & \mathbf{n} \cdot \mathbf{D} &= \rho_s \delta_\Gamma . \end{aligned} \tag{1.20}$$

Notons que dans ce cas, bien que la conductivité converge vers l'infini dans la relation (1.19), le métal ne dissipe plus d'énergie (nous renvoyons à [13] pour la démonstration). Euristiquement, l'énergie dissipée limite est caractérisée par le terme $\int_\Gamma \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_\Gamma$ qui s'annule puisque \mathbf{E} est normal à Γ alors que \mathbf{J}_Γ lui est tangentiel (voir (1.20)).

Les relations (1.20) ont lieu lorsque l'épaisseur du métal reste fixée lors du passage à la limite $\sigma \rightarrow +\infty$. Il est crucial d'observer que la situation est différente lorsque l'on autorise le métal à s'affiner. Dans ce cas, il peut apparaître des conditions de transmission différentes. Par exemple, considérons la diffraction par un métal de conductivité $\frac{\kappa}{h}$ formant le cylindre $\mathcal{D}_0 \times \{-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\}$ où \mathcal{D}_0 est un ensemble borné de \mathbb{R}^2 .

Il est montré dans [10], que le champ limite (\mathbf{E}, \mathbf{H}) lorsque $h \rightarrow 0$ vérifie

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{E} = i\omega\mu_0 \mathbf{H} & \text{dans } \mathbb{R}^3 \setminus \Sigma_0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} = -i\omega\varepsilon_0 \mathbf{E} & \text{dans } \mathbb{R}^3 \setminus \Sigma_0, \end{cases}$$

ainsi que les conditions de transmissions à la traversée de la surface $\Sigma_0 := \mathcal{D}_0 \times \{x_3 = 0\}$ données par

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^+ \wedge \mathbf{n} &= \mathbf{E}^- \wedge \mathbf{n}, \\ [\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{n}] &= \kappa \mathbf{E}^+. \end{aligned}$$

Ainsi, bien que la conductivité du métal considéré dans cet exemple converge vers l'infini, les conditions de transmissions limites ne sont pas celles d'un métal infiniment conducteur mais sont caractérisées par la paramètre κ (rapport entre la conductivité du matériau et son épaisseur). Par ailleurs, dans ce cas la dissipation limite par effet joule n'est pas nulle et dépend du paramètre κ .

Cet exemple met en évidence que l'ordre de grandeur du volume d'un obstacle relativement à ses paramètres constitutifs intervient de façon crucial dans son comportement limite. En particulier, même des matériaux de volume infinitésimal peuvent influencer sur la dispersion de l'onde incidente.

1.6 Les cas de polarisation $E//$ et $H//$

Lorsque l'on considère un problème de diffraction par une structure infinie et invariante dans une direction (par exemple \mathbf{e}_3), il est intéressant de simplifier l'étude du problème en se ramenant à des champs orientés dans cette direction. On dit dans ce cas que le champ est polarisé (magnétique si $\mathbf{H}//\mathbf{e}_3$ et électrique si $\mathbf{E}//\mathbf{e}_3$).

Il y a deux cas de polarisation rectiligne, notés $E//$ et $H//$, qui correspondent respectivement à des champs de la forme

$$\mathbf{E}(x) = u(x_1, x_2)\mathbf{e}_3 \quad \text{et} \quad \mathbf{H}(x) = u(x_1, x_2)\mathbf{e}_3, \quad (1.21)$$

où u est une fonction scalaire (complexe) indépendante de la variable x_3 (ainsi, \mathbf{E} et \mathbf{H} sont à divergence nulle).

En prenant successivement le rotationnel dans chacun des équations de (1.15), il est facile de voir que la fonction u satisfait

$$\Delta u + \varepsilon_r k_0^2 u = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^2 \quad : \quad \text{dans le cas } E//,$$

et

$$\operatorname{div}\left(\frac{1}{\varepsilon_r} \nabla u\right) + k_0^2 u = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^2 \quad : \quad \text{dans le cas } H//.$$

Si l'on considérait des matériaux de perméabilité variable différente de 1, il faudrait naturellement remplacer Δu par $\operatorname{div}\left(\frac{1}{\mu_r} \nabla u\right)$ dans le premier cas et $k_0^2 u$ par $k_0^2 \mu_r u$ dans le second.

Dans chacun des cas de polarisation, les conditions de rayonnement à l'infini de Silver-Müller (1.16) se simplifient et prennent la forme donnée par Sommerfeld

$$u = O\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|}\right) \quad , \quad \left(\frac{\partial u^d}{\partial |\mathbf{x}|} - ik_0 u^d\right) = o\left(\frac{1}{\sqrt{|\mathbf{x}|}}\right) .$$

2 Métamatériaux et cristaux photoniques

Les cristaux photoniques sont des matériaux structurés remarquables dans lesquels la lumière (ou plus généralement un champ électromagnétique) ne peut se propager librement. Elle peut être bloquée (réfléchi), autorisée uniquement dans certaines directions ou même localisée dans certaines zones. Ces matériaux offrent donc un moyen de *contrôler* la propagation de la lumière. Ce sont des matériaux composites qui sont généralement constitués d'un réseau périodique d'inclusions diélectriques ou métalliques dont la taille caractéristique de la structuration est de l'ordre de la longueur d'onde incidente. La propriété principale des cristaux photoniques est l'existence de *bandes de fréquences interdites*, c'est-à-dire que la propagation de la lumière est interdite dans certaines directions et pour certaines fréquences. Ce phénomène est connu sous le nom de *Electromagnetic Band Gap*. On retrouve comme application de cet effet plusieurs dispositifs comme par exemple les miroirs de Bragg ou les filtres diélectriques de Fabry-Perot qui ont des propriétés de réflexion et de transmission remarquables (bien que très dépendantes de la fréquence de l'onde incidente ainsi que de son angle d'illumination).

Notons que l'on rencontre des cristaux photoniques dans la nature aussi bien dans le monde organique que minéral. En effet, de nombreux animaux présentent des microstructures périodiques sur leurs écailles, leur carapace ou leurs plumes faisant apparaître des phénomènes d'iridescence très marqués (variations rapides de la couleur apparente du matériau en fonction de l'angle d'illumination). Ce phénomène est aussi présent dans des structures minérales ; par exemple l'opale, qui est une roche constituée de micro-billes de silice réparties selon un arrangement plus ou moins régulier.

D'un autre côté, il y a les *métamatériaux* qui sont des matériaux composites *artificiels* présentant également des propriétés extraordinaires vis-à-vis des ondes électromagnétiques. L'échelle de leur structuration est à la fois grande devant l'échelle atomique et petite devant la longueur d'onde (de l'ordre de dix fois). En physique, on appelle cette échelle *l'échelle mésoscopique*. Par exemple, dans la gamme des micro-ondes, une structure sera susceptible d'être un métamatériau si son échelle est comprise entre le nanomètre et le centimètre environ. Cette condition sur l'échelle fera que ces milieux hétérogènes pourront parfois être décrits macroscopiquement par une loi effective (voir paragraphe suivant). L'intérêt principal de ces milieux artificiels est que cette loi effective pourra être associée à des paramètres de permittivité et de perméabilité que l'on ne rencontre pas dans les milieux naturels.

Les métamatériaux sont ainsi des matériaux composites structurés qui, vis à vis du contrôle de la propagation d'ondes électromagnétiques, vont jouer un rôle similaire à celui des cristaux photoniques (bien que les phénomènes physiques en jeu ne soit pas

les mêmes). De ce point de vue, et en raison de la différence d'échelle des structurations, on pourra voir les métamatériaux comme des cristaux photoniques actifs à basses fréquences.

Notion de paramètres effectifs. De la même manière qu'un milieu peut être considéré comme homogène à une échelle macroscopique (bien que très hétérogène au niveau atomique), une structure à l'échelle mésoscopique aura un comportement pouvant être modélisé par une loi "moyennée" appelée *loi effective* ou *loi homogénéisée*. Notons que, même si la longueur d'onde est grande devant la taille caractéristique de la structure, la loi effective ne sera pas toujours celle d'un milieu homogène, mais pourra au contraire faire apparaître des propriétés plus complexes telle que celles qu'on rencontre dans les milieux non locaux (on renvoie pour cela au chapitre 3).

Dans cette thèse, nous considérerons des structures de perméabilité effective égale à 1 illuminées par une onde monochromatique de longueur d'onde λ grande devant l'écart séparant les inclusions. Notre objectif sera de savoir si la structure peut être remplacée par un milieu homogène décrit par des paramètres de permittivité et de perméabilité effectif (n'ayant donc pas un comportement non local). D'un point de vue mathématique, l'identification de ce comportement effectif se place dans le cadre de la théorie de l'homogénéisation. Elle sera obtenue à l'issue d'une analyse asymptotique quand le nombre d'inclusions tend vers l'infini. Cette analyse asymptotique peut être traitée suivant deux points de vue différents.

- Dans le premier, la taille des inclusions est fixée alors que l'obstacle contenant ces inclusions augmente de façon homothétique ainsi que la longueur d'onde. Ainsi, la longueur d'onde tend vers l'infini alors que l'obstacle remplit l'espace tout entier. Cette approche, souvent utilisée par les physiciens, peut donner des intuitions correctes (notamment par l'obtention de courbes de dispersion obtenues à l'aide de développements en ondes de Bloch). Cependant elle n'apporte aucune information sur la transmission des ondes au la traversée du bord de l'obstacle. Or ceci est le point essentiel lorsqu'il s'agit d'un problème de diffraction.

- Nous adopterons le second point de vue où, dans l'analyse asymptotique, l'obstacle contenant les diffuseurs ainsi que la longueur d'onde incidente sont fixés, le petit paramètre étant la taille des inclusions. On travaille ainsi à fréquence fixée et avec une onde incidente donnée. En particulier la condition de rayonnement à l'infini est indépendante des paramètres infinitésimaux intervenant dans l'analyse. La loi effective sera ainsi déduite du comportement asymptotique de la structure lorsque la taille caractéristique des inclusions, typiquement la période, converge vers zéro. Le problème pratique dans l'exploitation de ces résultats théoriques sera bien entendu lié à leur domaine de validité. En effet, bien qu'il soit légitime de vouloir identifier le métamatériau à son équivalent homogénéisé (puisque la période est petite devant la longueur d'onde), il est difficile d'obtenir dans un cadre général la vitesse de convergence de l'écart entre les solutions des problèmes réels et la solution du problème limite. Ainsi, même si on saura démontrer la *convergence forte* dans L^2_{loc} de ces solutions dans chacun des cas étudiés, la pertinence pratique de nos résultats ne sera acquise qu'après une validation numérique à l'aide

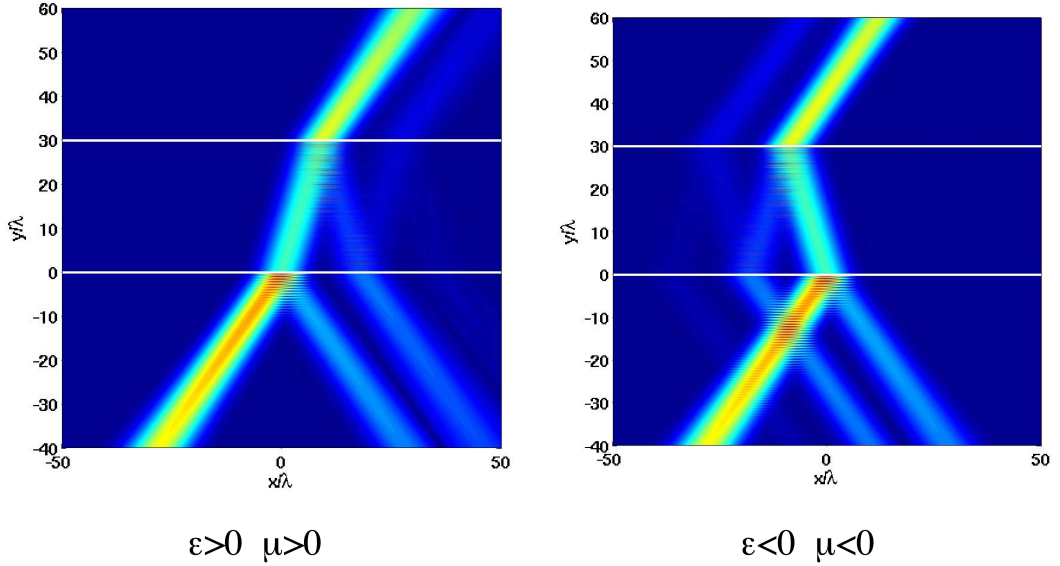


FIGURE 1.1: Différence entre la réfraction dans un milieu classique (à gauche) et un milieu à indice négatif (à droite)

de codes 3D qui restent à mettre en place (voir [24] pour ce type d'études dans le cas bidimensionnel). En dépit de ces restrictions, l'analyse théorique de la convergence des solutions dans les structures complexes fortement contrastées que nous allons considérer est un challenge mathématique intéressant qui enrichit la théorie de l'homogénéisation. De plus, comme on va le voir permettra d'élargir de façon importante la classe des lois atteignables. Un cadre théorique rigoureux est ainsi donné à certains modèles de nouveaux métamatériaux.

2.1 Indice de réfraction négatif

Les métamatériaux les plus célèbres sont sans doute ceux présentant des paramètres de permittivité et de perméabilité simultanément négatifs. Le premier à avoir étudié le comportement de tels milieux fut Veselago en 1967 [51]. Évidemment il s'agissait de spéculations théoriques puisque de tels matériaux n'existaient pas à cette époque. Il remarqua que la propagation des ondes électromagnétiques dans de tels milieux pouvait réserver quelques surprises notamment la possibilité d'une *réfraction inverse* telle que représentée dans la figure 1.1.

Depuis les années 2000, ce phénomène extraordinaire a pu être vérifié expérimentalement sur des métamatériaux élaborés en laboratoire. Ces structures constituées de micro-résonateurs ont une réponse macroscopique négative à la fois pour la permittivité et la perméabilité. Le premier prototype a été proposée par Pendry [38] où est considérée la superposition d'un réseau formé d'anneaux concentriques coupés, appelés "split-ring resonators" (SRR), et d'un réseau de fils métalliques continus comme représenté dans la figure 1.2. Dans deux articles successifs [42], [43], JP Pendry a prédit qu'un arran-

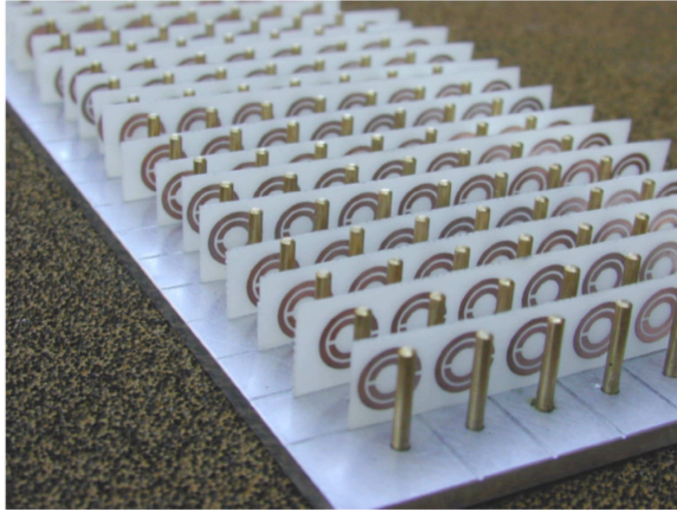


FIGURE 1.2: Exemple de structure donnée par Pendry ayant un indice négatif. Les anneaux coupés donne le $\mu < 0$ et les tiges le $\varepsilon < 0$.

gement périodique de fils métalliques continus parallèles présentait, en basse fréquence, une permittivité négative (nous reviendrons sur ce point dans le chapitre 3), puis qu'un réseau périodique de SRR présentait une perméabilité négative autour d'une fréquence de résonance. Il était alors raisonnable de penser que la superposition de ces deux structures pourrait conduire à un indice de réfraction négatif au voisinage de la fréquence de résonance des SRR.

2.2 Fréquences interdites

Comme nous l'avons déjà indiqué, une des propriétés remarquables des cristaux photoniques est la présence de zones de fréquences, dites interdites, dans lesquelles le champ électromagnétique ne peut se propager. Ceci peut résulter de phénomènes de diffraction complexes qui font que les contributions des ondes sont destructives, empêchant ainsi la propagation.

Dans le cas plus spécifique des métamatériaux, ces zones de fréquences interdites peuvent également exister mais elles proviennent d'un phénomène différent : il suffit que l'un des paramètres effectifs permittivité ou perméabilité soit négatif sur un domaine de fréquence alors que l'autre reste positif. L'onde est alors exponentiellement amortie dans le milieu. Deux situations apparaitrons :

- Les zones de fréquences interdites forment des intervalles disjoints ("electromagnetic band gap"). Ceci apparaitra dans dans le cas des structures étudiées dans les chapitres 3, 4 et 5. Chaque bande interdite sera associée à une fréquence de résonance d'une micro-inclusion.
- La zone interdite est constituée d'un seul intervalle. Cet intervalle peut être associé à une fréquence de coupure en dessous de laquelle la permittivité devient négative.

Ce phénomène se rencontre par exemple lorsque l'on considère un réseau de fibres métalliques parallèles très conductrices et très longues (cf. [25, 43]). Dans le cas de la structure en anneaux coupés de Pendry, c'est la perméabilité qui devient négative dans un intervalle autour d'une unique fréquence de résonance.

2.3 Comment obtenir des résonances, milieux extrêmes.

Les propriétés exotiques des métamatériaux sont généralement la conséquence de la superposition de phénomènes électromagnétiques à l'échelle des micro-composants formant la structure. Dans certains cas, ces phénomènes peuvent s'ajouter les uns aux autres et engendrer des effets perceptibles à l'échelle macroscopique. Ces phénomènes microscopiques sont souvent provoqués par des effets de résonances : c'est-à-dire un mode privilégié de fonctionnement qui a lieu à certaines fréquences.

On peut par exemple penser aux résonances de Mie qui apparaissent dans un volume diélectrique de géométrie simple : typiquement des sphères (voir chapitre 4). En illuminant une telle sphère par une onde plane, des modes résonants se développent à des fréquences dépendant du rayon de la sphère et ses paramètres de permittivité et perméabilité. Cependant lorsque ces sphères deviennent les micro-inclusions d'un métamatériau, la longueur d'onde incidente est trop grande pour que ces modes résonants soient excités et c'est pour cette raison que les résultats classiques en homogénéisation ne permettent pas d'incorporer les phénomènes intéressants qui pourraient en découler.

Pour y remédier, le point clé est d'obtenir ce type de résonances à un niveau microscopique (ce qui revient à déplacer les modes résonants vers les basses fréquences). Pour cela il est essentiel de disposer de matériaux de *très grande permittivité* de telle façon que le contraste entre les inclusions et la matrice les entourant puisse être considéré comme un paramètre très grand dans l'analyse asymptotique. Plus précisément le *diamètre optique* des inclusions (qui est proportionnel à la racine carrée de la permittivité multiplié par le diamètre réel) doit être du même ordre que la longueur d'onde incidente, ce qui impose un contraste en permittivité de l'ordre de η^{-2} (rappelons que la perméabilité relative reste de l'ordre de l'unité). En résumé il est donc nécessaire à faire appel à des matériaux à caractéristique "extrêmes".

3 Applications récentes

3.1 Super-lentille

Une application très importante des métamatériaux en imagerie concerne l'élaboration d'une lentille plane. Celle-ci a été imaginée par V. Veselago en 1968 [51] en s'appuyant simplement sur l'exploitation des règles de réfraction à l'interface entre deux milieux d'indices opposés, voir figure 1.3.

Le premier intérêt de ce type de lentille est leur invariance par translation : la lentille étant plane, elle n'a pas d'axe optique. De plus, J. B. Pendry a montré que les lentilles planes ont un comportement exceptionnel en terme de résolution maximale [40].

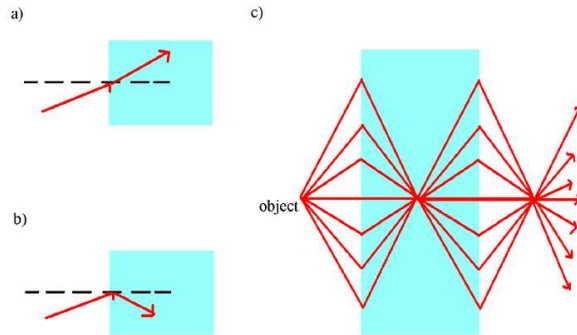


FIGURE 1.3: Lentille plane formée d'un milieu à indice négatif.

C'est ce comportement qui est à l'origine de leur intérêt applicatif et de l'utilisation du qualificatif "super-lentille" pour les désigner. En effet, une importante limitation des systèmes d'imagerie usuels est leur limite de résolution, de l'ordre de la moitié de la longueur d'onde : si deux points sources ont une distance inférieure à cette limite, il n'est pas possible de différencier leurs images dès que la distance entre l'image et la source est de l'ordre de quelques longueurs d'onde. Ceci est dû aux ondes évanescentes qui ne peuvent être restituées au niveau de l'image en raison de leur décroissance exponentielle. Dans une lentille plane, on a une situation très différente : à l'intérieur de la lentille, les composantes évanescentes sont exaltées. Au niveau du point image, elles retrouvent le niveau qu'elles avaient au point source. En d'autres termes, de la même façon que les composantes propagatives, elles contribuent à la formation de l'image, qui devient ainsi une image "parfaite". Bien évidemment, ce phénomène présente différentes limitations (liées en particulier à la présence de pertes dans les métamatériaux à indice négatif) qui font que la résolution accessible en pratique reste finie. Toutefois, des résultats expérimentaux montrent des résolutions supérieures à la limite de diffraction avec des lentilles planes, dans des gammes de fréquences allant des micro-ondes [26] à l'optique [22].

3.2 Cape d'invisibilité

Les milieux avec un indice de réfraction effectif négatif ne représentent qu'une partie des domaines couverts par les métamatériaux. En effet, certaines applications mettent à profit la capacité des métamatériaux à se comporter de manière non homogène et exploitent en particulier leur gradient d'indice de réfraction pour contrôler la propagation lumineuse. C'est le cas du dispositif de "cape d'invisibilité" introduit par J. B. Pendry dans son célèbre article de 2006 [41]. Il s'agit d'un milieu hétérogène et isotrope de forme annulaire qui va dévier l'onde incidente de façon à ce qu'elle contourne l'objet. Ce milieu a été obtenu expérimentalement pour les micro-ondes en 2006 [46] (cf. figure 1.4). Dans le cas d'une cape parfaite (sans perte), l'onde transmise reprend sa forme initiale (comme si l'obstacle et la cape n'étaient pas présents) rendant ainsi le dispositif invisible pour tout observateur extérieur (cf. figure 1.5). Les paramètres de permittivité et de perméabilité de ce milieu sont obtenus théoriquement en exploitant l'invariance

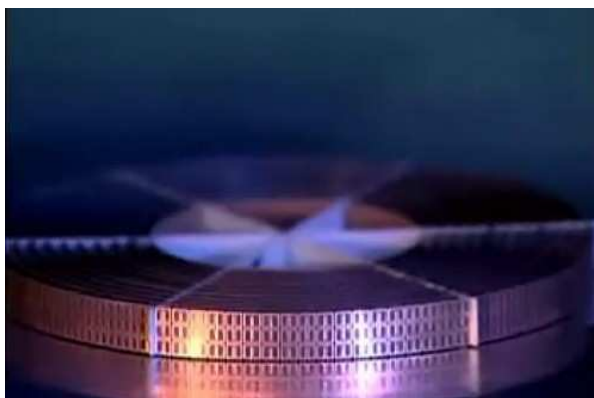


FIGURE 1.4: Exemple de cape d'invisibilité en dimension deux en régime micro-ondes.

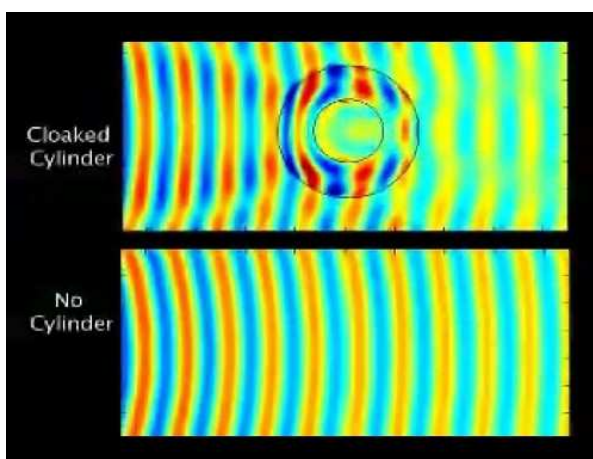


FIGURE 1.5: Comparaison entre une onde se propageant dans le vide et une autre traversant un milieu entouré d'une cape d'invisibilité (propagation de gauche à droite). La forme des fronts d'ondes transmises est semblable dans les deux cas ce qui fait qu'un observateur se trouvant à droite de l'obstacle ne distingue que très faiblement l'objet.

des équations de Maxwell par transformation d'espace et sont approchés en pratique par l'intermédiaire de métamatériaux.

Ce concept est particulièrement prometteur en terme d'applications, notamment dans le domaine de la défense. Dans ce contexte, ce "cloaking" se distingue de l'approche classique de la furtivité. Un revêtement de furtivité a pour but premier d'annuler le coefficient de réflexion dans certaines directions spécifiques (typiquement celle d'une antenne de détection). Pour ce faire, l'idée est d'absorber les ondes incidentes ou de les réfléchir dans une autre direction. À l'inverse, dans un dispositif de "cape d'invisibilité" parfait, on annule à la fois le coefficient de réflexion et l'absorption, et on rend le coefficient de transmission égal à 1.

2 Outils mathématiques

Sommaire

1	Éléments d'analyse fonctionnelle	23
1.1	Espaces de Sobolev	25
1.2	Fonctions périodiques	27
1.3	Compacité par compensation : lemme "div-rot"	31
1.4	Éléments de théorie spectrale	32
1.5	Un peu de théorie des probabilités	37
1.6	Résultats classiques pour le problème de diffraction	38
2	Homogénéisation	40
2.1	Notion de milieux effectifs	40
2.2	Convergence double-échelle	41
2.3	Exemples de limites double-échelle	47

Dans ce chapitre, nous présentons les notations et les résultats de base dont nous aurons besoin tout au long de cette thèse.

1 Éléments d'analyse fonctionnelle

Espaces fonctionnels. On se placera en général sur un ouvert connexe (domaine) borné de \mathbb{R}^N où $N \in \{2, 3\}$. Pour tout $p \in [1, +\infty[$, $L^p(\mathcal{B})$ désigne l'espace des fonctions mesurables $u : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{C}$ (définies à l'équivalence près) telles que $\int_{\mathcal{B}} |u|^p dx < +\infty$ avec la norme $\|u\|_{L^p(\mathcal{B})} := \left(\int_{\mathcal{B}} |u|^p\right)^{\frac{1}{p}}$. On note $\mathcal{D}(\mathcal{B})$ (ou $C_c^\infty(\mathcal{B})$) l'ensemble des fonctions infiniment différentiables à support compact dans \mathcal{B} et $\mathcal{D}'(\mathcal{B})$ son dual topologique qui n'est autre que l'espace des distributions.

Rappelons que les dérivées distributionnelles de f sont données par

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle = - \int_{\mathcal{B}} f \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \quad , \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{B}) . \tag{2.1}$$

À ce niveau, il est utile de rappeler les principes élémentaires concernant les dérivées distributionnelles de fonctions admettant des sauts.

Étant donnée une interface "régulière" $\Gamma \subset \mathcal{B}$ et une fonction $u : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{C}$ régulière dans $\mathcal{B} \setminus \Gamma$, alors

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\} + [u] \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_i \delta_\Gamma , \tag{2.2}$$

où $\{\frac{\partial f}{\partial x_i}\}$ est la dérivée sur $\mathcal{B} \setminus \Gamma$ (définie presque partout), $[u]$ le saut de u à la traversée de Γ orienté suivant la normale \mathbf{n} et δ_Γ la distribution vérifiant

$$\langle \delta_\Gamma, \varphi \rangle = \int_\Gamma \varphi(x) d\sigma(x) \quad , \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{B}) \quad ,$$

($d\sigma$ est la mesure de surface).

Bien entendu, la régularité de u doit être suffisante pour définir les traces de u de chaque côté de l'interface.

L'ensemble $W^{1,p}(\mathcal{B})$ est le sous-espace des fonctions $u \in L^p(\mathcal{B})$ telles que $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ s'identifie à un élément de $L^p(\mathcal{B})$, c'est-à-dire qu'il existe $v_i \in L^p(\mathcal{B})$ vérifiant

$$\int_{\mathcal{B}} v_i \varphi = - \int_{\mathcal{B}} f \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \quad , \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{B}) \quad .$$

Muni de la norme $\|f\|_{W^{1,p}(\mathcal{B})} := \|f\|_{L^p(\mathcal{B})} + \|\nabla f\|_{L^p(\mathcal{B})}$, $W^{1,p}(\mathcal{B})$ est un espace de Banach. On notera $W_0^{1,p}(\mathcal{B}) = \overline{\mathcal{D}(\mathcal{B})}$ l'adhérence de $\mathcal{D}(\mathcal{B})$ dans cet espace et $W^{-1,p'}(\mathcal{B})$ (p' adjoint de p) le dual topologique de $W_0^{1,p}(\mathcal{B})$. Ce dernier s'identifie aux distributions $T \in \mathcal{D}'(\mathcal{B})$ telles qu'il existe $C > 0$ vérifiant

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C \|\varphi\|_{W^{1,p}(\mathcal{B})} \quad , \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{B}) \quad .$$

Toutes ces notations se transposent au cas de fonctions à valeurs dans \mathbb{R}^d ou \mathbb{C}^d et on notera $L^2(\mathcal{B}; \mathbb{C}^d)$, $W^{1,2}(\mathcal{B}; \mathbb{C}^d)$ etc.

Espaces L_{loc}^p , $W_{loc}^{1,p}$.

Étant donné un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^N$,

- $L_{loc}^p(\Omega)$ est l'espace de fonctions mesurables de $\Omega \rightarrow \mathbb{C}$ telles que $\int_K |u|^p dx < +\infty$ pour tout compact $K \subset \Omega$.
- $W_{loc}^{1,p}(\Omega)$ est le sous-espace de $L_{loc}^p(\Omega)$ des fonctions u telles que $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L_{loc}^p(\Omega)$ (ie. (2.1) à lieu avec $v_i \in L_{loc}^p(\Omega)$).

Analyse vectorielle élémentaire et intégration par parties.

Fixons $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \in (\mathbb{C}^3)^3$ et $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in (W^{1,2}(\mathcal{B}))^2$. Rappelons les relations classiques suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} &= \mathbf{c} \wedge \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \quad , \quad \mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c} \quad , \\ \mathbf{rot}(\rho \mathbf{u}) &= \nabla \rho \wedge \mathbf{u} + \rho \mathbf{rot} \mathbf{u} \quad , \quad \text{div}(\rho \mathbf{u}) = \nabla \rho \cdot \mathbf{u} + \rho \text{div} \mathbf{u} \quad , \\ \text{div}(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) &= \mathbf{rot} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{rot} \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} \quad , \quad \mathbf{rot}_y(\mathbf{a} \wedge \mathbf{y}) = 2\mathbf{a} \quad . \end{aligned}$$

D'autre part, on rappelle les formules d'intégration par parties suivantes.

Lemme 2.1 *Soit $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in W^{1,2}(\mathcal{B}; \mathbb{C}^3)^2$ et $w \in W^{1,2}(\mathcal{B})$. On a les relations suivantes*

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{B}} \text{div} \mathbf{u} w dx &= - \int_{\mathcal{B}} \mathbf{u} \cdot \nabla w dx + \int_{\partial \mathcal{B}} \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} w d\sigma \quad , \\ \int_{\mathcal{B}} \mathbf{rot} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} dx &= \int_{\mathcal{B}} \mathbf{u} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{v} dx + \int_{\partial \mathcal{B}} \mathbf{n} \wedge \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} d\sigma \quad . \end{aligned}$$

1.1 Espaces de Sobolev

Cas de l'electromagétisme.

On se place dans le cadre Hilbertien ($p = 2$) et on introduit les sous-espaces de $L^2(\mathcal{B})$ suivants

$$L^2(\operatorname{div}, \mathcal{B}) := \{ \mathbf{f} \in L^2(\mathcal{B}; \mathbb{C}^3) , \operatorname{div} \mathbf{f} \in L^2(\mathcal{B}) \} ,$$

$$L^2(\operatorname{rot}, \mathcal{B}) := \{ \mathbf{f} \in L^2(\mathcal{B}; \mathbb{C}^3) , \operatorname{rot} \mathbf{f} \in L^2(\mathcal{B}; \mathbb{C}^3) \} ,$$

$$L^2(\operatorname{div}, \operatorname{rot}, \mathcal{B}) := \{ \mathbf{f} \in L^2(\mathcal{B}; \mathbb{C}^3) , \operatorname{div} \mathbf{f} \in L^2(\mathcal{B}) , \operatorname{rot} \mathbf{f} \in L^2(\mathcal{B}; \mathbb{C}^3) \} ,$$

Il est clair que ce sont des espaces de Hilbert lorsqu'ils sont munis des produits scalaires

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle_{L^2(\operatorname{div}, \mathcal{B})} := \int_{\mathcal{B}} \mathbf{f} \cdot \mathbf{g} + \int \operatorname{div} \mathbf{f} \operatorname{div} \mathbf{g} ,$$

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle_{L^2(\operatorname{rot}, \mathcal{B})} := \int_{\mathcal{B}} \mathbf{f} \cdot \mathbf{g} + \int \operatorname{rot} \mathbf{f} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{g} ,$$

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle_{L^2(\operatorname{div}, \operatorname{rot}, \mathcal{B})} := \int_{\mathcal{B}} \mathbf{f} \cdot \mathbf{g} + \int \operatorname{div} \mathbf{f} \operatorname{div} \mathbf{g} + \int \operatorname{rot} \mathbf{f} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{g} .$$

Remarque 2.2 Le fait que la divergence distributionnelle de \mathbf{u} soit une fonction de $L^2(\mathcal{B}; \mathbb{C}^3)$ entraîne que le saut de la composante normale de \mathbf{u} sur une interface Γ doit être nulle. En effet, la formule de saut correspondant à la (2.2) est

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \{ \operatorname{div} \mathbf{u} \} + \mathbf{n} \cdot [\mathbf{u}] \delta_{\Gamma} .$$

De la même manière, la formule de saut pour l'opérateur rotationnel est

$$\operatorname{rot} \mathbf{u} = \{ \operatorname{rot} \mathbf{u} \} + \mathbf{n} \wedge [\mathbf{u}] \delta_{\Gamma} .$$

Il est à noter que l'inclusion des espaces de Hilbert $W^{1,2}(\mathcal{B}) \subset L^2(\operatorname{div}, \operatorname{rot}, \mathcal{B})$ est stricte. Cependant, si le bord de \mathcal{B} est régulier (C^2) et si l'on contrôle la trace tangentielle ou normale, les deux espaces deviennent équivalents. Plus précisément, on a le résultat suivant (donné dans [19]).

Proposition 2.3 Soit $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^N$ un ouvert borné de classe C^2 , de bord $\partial\mathcal{B}$. Alors, les espaces de Sobolev

$$L_n^2(\operatorname{div}, \operatorname{rot}, \mathcal{B}) := \{ \mathbf{u} \in L^2(\operatorname{div}, \operatorname{rot}, \mathcal{B}) , \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\mathcal{B}} \in W^{\frac{1}{2},2}(\partial\mathcal{B}) \} ,$$

$$L_t^2(\operatorname{div}, \operatorname{rot}, \mathcal{B}) := \{ \mathbf{u} \in L^2(\operatorname{div}, \operatorname{rot}, \mathcal{B}) , \mathbf{u} \wedge \mathbf{n}|_{\partial\mathcal{B}} \in W^{\frac{1}{2},2}(\partial\mathcal{B}) \} ,$$

s'identifient topologiquement avec l'espace de Hilbert $W^{1,2}(\mathcal{B}; \mathbb{R}^3)$. En particulier, il existe des constantes C_1 et C_2 telles que

$$\| \mathbf{u} \|_{W^{1,2}(\mathcal{B})} \leq C_1 \left(\| \mathbf{u} \|_{L^2(\mathcal{B}; \mathbb{R}^3)} + \| \operatorname{div} \mathbf{u} \|_{L^2(\mathcal{B})} + \| \operatorname{rot} \mathbf{u} \|_{L^2(\mathcal{B}; \mathbb{R}^3)} + \| \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \|_{W^{\frac{1}{2},2}(\partial\mathcal{B})} \right) ,$$

$$\| \mathbf{u} \|_{W^{1,2}(\mathcal{B})} \leq C_2 \left(\| \mathbf{u} \|_{L^2(\mathcal{B}; \mathbb{R}^3)} + \| \operatorname{div} \mathbf{u} \|_{L^2(\mathcal{B})} + \| \operatorname{rot} \mathbf{u} \|_{L^2(\mathcal{B}; \mathbb{R}^3)} + \| \mathbf{u} \wedge \mathbf{n} \|_{W^{\frac{1}{2},2}(\partial\mathcal{B}; \mathbb{R}^3)} \right) .$$

Corollaire 2.4 Si $\mathbf{u} \in L^2(\operatorname{div}, \mathbf{rot}, \mathcal{B})$, alors $\mathbf{u} \in W_{loc}^{1,2}(\mathcal{B}; \mathbb{C}^3)$.

PREUVE. Soit K un compact de \mathcal{B} et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{B})$ tel que $\varphi = 1$ dans K . Il est alors évident que la fonction $\varphi \mathbf{u}$ soit élément de $L_n^2(\operatorname{div}, \mathbf{rot}, \mathcal{B})$ d'où il résulte d'après la proposition 2.3 que $\varphi \mathbf{u} \in W^{1,2}(\mathcal{B}; \mathbb{C}^3)$. Le fait que $\varphi = 1$ dans K implique que $\mathbf{u} \in W^{1,2}(K; \mathbb{C}^3)$. \square

Inégalité de Poincaré.

On considère \mathcal{B} un domaine borné de \mathbb{R}^N , $N \in \{2, 3\}$. On notera, pour toute fonction f intégrable, $\int_{\mathcal{B}} f dx = \frac{1}{|\mathcal{B}|} \int_{\mathcal{B}} f dx$.

Proposition 2.5 Il existe $C = C(\mathcal{B}) > 0$ tel que

$$\int_{\mathcal{B}} \left| u - \int_{\mathcal{B}} u \right|^2 dx \leq C \int_{\mathcal{B}} |\nabla u|^2, \quad \forall u \in W^{1,2}(\mathcal{B}). \quad (2.3)$$

On fixe $\eta > 0$ et on note Y_{η}^k pour $k \in \mathbb{N}^N$ le cube de côté η , centré en k , donné par

$$Y_{\eta}^k = \eta(Y + k). \quad (2.4)$$

En notant J_{η} l'ensemble d'indices défini par

$$J_{\eta} := \{k \in \mathbb{N}^N, Y_{\eta}^k \subset \mathcal{B}\}, \quad (2.5)$$

on associe à $u \in W^{1,2}(\mathcal{B})$ la fonction en escalier $[u]_{\eta}$ donnée par

$$[u]_{\eta} := \sum_{k \in J_{\eta}} \left(\int_{Y_{\eta}^k} u dx \right) 1_{Y_{\eta}^k}(x). \quad (2.6)$$

Corollaire 2.6 Il existe $C = C(\mathcal{B}) > 0$ tel que

$$\int_{\mathcal{B}} |u - [u]_{\eta}|^2 dx \leq \eta^2 C \int_{\mathcal{B}} |\nabla u|^2, \quad \forall u \in W^{1,2}(\mathcal{B}). \quad (2.7)$$

PREUVE. On introduit la fonction v_{η} définie par $v_{\eta}(y) = u(\eta y)$ pour tout $u \in W^{1,2}(\mathcal{B})$. On a,

$$\int_{\mathcal{B}} |u - [u]_{\eta}|^2 dx = \sum_{k \in J_{\eta}} \int_{Y_{\eta}^k} |u - [u]_{\eta}|^2 dx \quad (2.8)$$

$$= \eta^N \sum_{k \in J_{\eta}} \int_{Y+k} \left| u(\eta y) - \int_{Y_{\eta}^k} u(x) dx \right|^2 dy \quad (2.9)$$

À l'aide d'un changement de variable, on a immédiatement que $\int_{Y_{\eta}^k} u(x) dx = \int_{Y+k} u(\eta z) dz$.

Ceci entraîne par définition de v_{η} que

$$\int_{\mathcal{B}} |u - [u]_{\eta}|^2 dx = \eta^N \sum_{k \in J_{\eta}} \int_{Y+k} \left| v_{\eta} - \int_{Y+k} v_{\eta} \right|^2 dy$$

Pour terminer la démonstration, on applique l'inégalité de Poincaré (2.3) dans le membre de droite de l'équation précédente. Il suffit alors de remarquer que $\nabla v_{\eta}(y) = \eta \nabla u(\eta y)$ puis de faire le changement de variable inverse. \square

1.2 Fonctions périodiques

Introduisons les espaces fonctionnels suivants :

$$L_{\sharp}^2 := \{u \in L_{loc}^2(\mathbb{R}^N), f(\mathbf{y}) = f(\mathbf{y} + \mathbf{k}), \forall \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^3\},$$

$$W_{\sharp}^{1,2} := \{u \in W_{loc}^{1,2}(\mathbb{R}^N), u \in L_{\sharp}^2\}.$$

Il est évident qu'une fonction de L_{\sharp}^p est complètement déterminée si l'on connaît sa restriction à un hypercube unité (un motif). Au cours de cette thèse, on se référera en général à la cellule élémentaire $Y := [-1/2, 1/2]^N$ (la famille $\{k+Y, k \in \mathbb{Z}^N\}$ forme une partition de \mathbb{R}^N). Les espaces L_{\sharp}^p et $W_{\sharp}^{1,p}$ pourront donc être identifiés à des fonctions sur le tore $\mathbb{T} := Y/\mathbb{Z}^N$ et pour cela nous utiliserons la notation $L_{\sharp}^p(Y)$ et $W_{\sharp}^{1,p}(Y)$. Il est important de noter que l'espace $W_{\sharp}^{1,p}(Y)$ s'identifie aux fonctions de $W^{1,p}(Y)$ dont les traces sur les faces opposées coïncident presque partout (relativement à la mesure de surface sur ∂Y)

On note que la périodicité des fonctions de $L_{\sharp}^2(\text{div}, \mathbf{rot}, Y)$ apporte un contrôle de leur trace sur le bord de Y . Ainsi, de la même façon que dans la proposition 2.3, les espaces $W_{\sharp}^{1,2}(Y)$ et $L_{\sharp}^2(\text{div}, \mathbf{rot}, Y)$ pourront être identifiés. On a en fait le résultat plus précis suivant.

Proposition 2.7 *Soit $\mathbf{u} \in L_{\sharp}^2(Y; \mathbb{C}^3)$. Si on a*

$$\mathbf{rot} \mathbf{u} \in L_{\sharp}^2(Y; \mathbb{C}^3) \quad \text{et} \quad \text{div} \mathbf{u} \in L_{\sharp}^2(Y),$$

alors $\mathbf{u} \in W_{\sharp}^{1,2}(Y)$. De plus on a

$$\|\mathbf{u}\|_{W^{1,2}(Y)} = \|\mathbf{u}\|_{L^2(Y; \mathbb{C}^3)} + \|\text{div} \mathbf{u}\|_{L^2(Y)} + \|\mathbf{rot} \mathbf{u}\|_{L^2(Y; \mathbb{C}^3)}. \quad (2.10)$$

PREUVE. Décomposons les champs \mathbf{u} , $\mathbf{rot} \mathbf{u}$ et $\text{div} \mathbf{u}$ en séries de Fourier. Il existe alors $\{\mathbf{c}^k \in \mathbb{C}^3 : \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^3\}$ tel que

$$\mathbf{u}(\mathbf{y}) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^3} e^{2i\pi \mathbf{k} \cdot \mathbf{y}} \mathbf{c}^k,$$

$$\mathbf{rot} \mathbf{u}(\mathbf{y}) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^3} 2i\pi e^{2i\pi \mathbf{k} \cdot \mathbf{y}} \mathbf{k} \wedge \mathbf{c}^k, \quad \text{div} \mathbf{u}(\mathbf{y}) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^3} 2i\pi e^{2i\pi \mathbf{k} \cdot \mathbf{y}} \mathbf{k} \cdot \mathbf{c}^k.$$

avec $\sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^3} |\mathbf{c}^k|^2 = \|\mathbf{u}\|_{L^2(Y)}^2$, $\sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^3} |\mathbf{k} \wedge \mathbf{c}^k|^2 = \|\mathbf{rot} \mathbf{u}\|_{L^2(Y)}^2$ et $\sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^3} |\mathbf{k} \cdot \mathbf{c}^k|^2 = \|\text{div} \mathbf{u}\|_{L^2(Y)}^2$.

Considérons à présent les matrices $(\mathbf{B}^k)_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^3}$ dont les composantes sont données pour $(p, q) \in \{1, 2, 3\}^2$ par

$$(\mathbf{B}^k)_{p,q} = (\mathbf{c}^k \cdot \mathbf{e}_p)(\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_q).$$

Il est facile de vérifier que l'on a $|\mathbf{B}^k|^2 = |\mathbf{k} \wedge \mathbf{c}^k|^2 + |\mathbf{k} \cdot \mathbf{c}^k|^2 \quad \forall \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^3$ pour tout $k \in \mathbb{Z}^3$, ce qui entraîne en particulier que

$$\sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^3} |\mathbf{B}^k|^2 = \|\mathbf{rot} \mathbf{u}\|_{L^2(Y)}^2 + \|\text{div} \mathbf{u}\|_{L^2(Y)}^2. \quad (2.11)$$

Il en résulte que la fonction tensorielle $\mathbf{M}(\mathbf{y})$ donnée par $\mathbf{M}(\mathbf{y}) := \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^3} e^{2i\pi \mathbf{k} \cdot \mathbf{y}} \mathbf{B}^{\mathbf{k}}$ est élément de $L^2_{\sharp}(Y)$. On en déduit alors que $\mathbf{u} \in W^{1,2}_{\sharp}(Y)$ du fait que $\mathbf{M}(\mathbf{y})$ est exactement $\nabla \mathbf{u}$. La relation (2.10) est une conséquence immédiate de (2.11). \square

Ce résultat peut être localisé à des fonctions de $L^2_{\sharp}(Y)$ dont la divergence et le rotationnel ne sont réguliers que sur l'ouvert complémentaire de Σ . Plus précisément, en notant $K_{\sharp} := \cup_{k \in \mathbb{Z}^3} (k + \bar{\Sigma})$ le périodisé du compact $\bar{\Sigma}$, on a le résultat suivant.

Corollaire 2.8 *Soit $\mathbf{u} \in L^2_{\sharp}(Y; \mathbb{C}^3)$ tel que $\mathbf{rot} \mathbf{u} \in L^2_{\text{loc}}(Y; \mathbb{C}^3)$ et $\text{div} \mathbf{u} \in L^2_{\text{loc}}(Y)$. Alors, pour tout ouvert $\Sigma' \subset \subset Y$ il existe $\tilde{\mathbf{u}} \in W^{1,2}_{\sharp}(Y)$ tel que $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}$ dans $Y \setminus \Sigma'$ et $\tilde{\mathbf{u}} = 0$ dans Σ' .*

PREUVE. On fixe une fonction $\alpha \in C^{\infty}_{\sharp}(Y; [0, 1])$ telle que $\alpha = 1$ dans $Y \setminus \Sigma'$ et $\alpha = 0$ sur un voisinage V de Σ tel que $\Sigma \subset V \subset \Sigma'$. Alors la fonction $\tilde{\mathbf{u}} := \alpha \mathbf{u}$ coïncide avec \mathbf{u} sur $Y \setminus \Sigma'$ et vérifie les hypothèses de la proposition 2.7.

Remarque 2.9 Le corollaire 2.8, qui ne nécessite aucune régularité de $\partial \Sigma$, sera utilisé pour justifier les intégrations du champ électromagnétique microscopique sur le bord de la cellule Y .

Champs irrotationnels, solénoïdaux.

Dans les développements multi-échelles que nous utiliserons dans cette thèse, le champ électromagnétique microscopique sera souvent représenté par des fonctions vectorielles périodiques à divergence ou à rotationnel nuls. Pour les identifier, le lemme de décomposition suivant sera très utile.

Lemme 2.10 *Soit $\mathbf{u} \in L^2_{\sharp}(Y; \mathbb{C}^3)$. Alors :*

- Si $\mathbf{rot} \mathbf{u} = 0$ dans Y , il existe $\rho \in W^{1,2}_{\sharp}(Y)$ tel que

$$\mathbf{u} = \nabla \rho + \int_Y \mathbf{u} \quad \text{dans } Y .$$

- Si $\text{div} \mathbf{u} = 0$ dans Y , il existe $\boldsymbol{\psi} \in W^{1,2}_{\sharp}(Y; \mathbb{C}^3)$ tel que

$$\mathbf{u} = \mathbf{rot} \boldsymbol{\psi} + \int_Y \mathbf{u} \quad \text{dans } Y .$$

PREUVE.

Montrons le premier point.

Soit $\{\mathbf{c}^{\mathbf{k}} : \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^3\}$ les coefficients de Fourier de \mathbf{u} . On a ainsi

$$\mathbf{u}(\mathbf{y}) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^3} \mathbf{c}^{\mathbf{k}} e^{2i\pi \mathbf{k} \cdot \mathbf{y}} \quad \text{avec} \quad \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^3} |\mathbf{c}^{\mathbf{k}}|^2 = \|\mathbf{u}\|_{L^2(Y)}^2 < +\infty . \quad (2.12)$$

De plus, on déduit simplement de la relation $\mathbf{rot} \mathbf{u} = 0$ que $\mathbf{k} \wedge \mathbf{c}^k = 0$, $\forall \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^3$.
Posons

$$\beta^0 = 0 \quad \text{et} \quad \beta^k := \frac{\mathbf{c}^k \cdot \mathbf{k}}{2i\pi|\mathbf{k}|^2} \quad \forall \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{0\} .$$

Il résulte de (2.12) que l'on a

$$\sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^3} |\beta^k|^2 < +\infty \quad \text{et} \quad \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^3} |\beta^k \mathbf{k}|^2 < +\infty$$

et donc que la fonction $\psi(y) := \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^3} \beta^k e^{2i\pi \mathbf{k} \cdot \mathbf{y}}$ est élément de $W_{\#}^{1,2}(Y)$. Les coefficients de Fourier de $\nabla \psi$ sont de plus donnés par

$$2i\pi \beta^k \mathbf{k} = \frac{(\mathbf{c}^k \cdot \mathbf{k}) \mathbf{k}}{|\mathbf{k}|^2} = \mathbf{c}^k \quad \forall \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{0\} ,$$

où la dernière égalité résulte du fait que $(\mathbf{c}^k \cdot \mathbf{k}) \mathbf{k} = |\mathbf{k}| \mathbf{c}^k$ dès lors que $\mathbf{k} \wedge \mathbf{c}^k = 0$. Nous venons donc de prouver que $\mathbf{u} = \nabla \psi + \mathbf{c}^0$ qui n'est autre que le résultat attendu puisque $\mathbf{c}^0 = \int_Y \mathbf{u}$.

Le second point se démontre en utilisant les mêmes types d'arguments où fonction recherchée ψ aura ces coefficients de Fourier donnés par

$$\beta^0 = 0 \quad \text{et} \quad \beta^k := \frac{\mathbf{c}^k \wedge \mathbf{k}}{2i\pi|\mathbf{k}|^2} \quad \forall \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{0\} .$$

□

Le résultat précédent peut être localisé à des fonctions $\mathbf{u} \in L_{\#}^2(Y; \mathbb{C}^3)$ vérifiant la condition de rotationnel nul seulement dans le complémentaire d'un ensemble $\Sigma \subset\subset Y$ tel que $Y \setminus \Sigma$ soit *simplement connexe*. Plus précisément on a le résultat suivant.

Proposition 2.11 Soit Σ un ouvert de Y tel que $\Sigma \subset\subset Y$ et $Y \setminus \Sigma$ est *simplement connexe*. Soit $\mathbf{u} \in L_{\#}^2(Y; \mathbb{C}^3)$ tel que $\mathbf{rot} \mathbf{u} = 0$ dans $Y \setminus \Sigma$.

Alors, il existe $\rho \in W_{\#}^{1,2}(Y \setminus \Sigma)$ et $\mathbf{z} \in \mathbb{C}$ tel que

$$\mathbf{u} = \nabla \rho + \mathbf{z} \quad \text{dans } Y \setminus \Sigma .$$

PREUVE. Dans le cas de fonctions régulières, ce résultat est très classique en géométrie différentielle (cf. [6] p. 197). L'extension au cas de fonctions de $L^2(\mathbf{rot}, Y, \mathbb{C}^3)$ va être obtenu par densité.

Considérons ρ_n une suite régularisante et $v_n := \rho_n * u$. On vérifie simplement que le produit de convolution conserve la périodicité et la conditions de rotationnel nul. On peut alors appliquer le résultat classique à cette suite v_n ce qui entraîne l'existence de $\rho_n \in W_{\#}^{1,2}(Y \setminus \Sigma)$ et $\mathbf{z}_n \in \mathbb{C}$ tel que $\int_{Y \setminus \Sigma} \rho_n = 0$ et

$$\mathbf{v}_n = \nabla \rho_n + \mathbf{z}_n \quad \text{dans } Y \setminus \Sigma . \tag{2.13}$$

Comme nous le verrons dans l'équation (4.39), la suite (z_n) est bornée dans \mathbb{C}^3 et va de plus converger vers un certain $z \in \mathbb{C}^3$. Il s'en suit que $(\nabla \rho_n)$ est une suite bornée dans $L^2(Y; \mathbb{C}^3)$. Ainsi, puisque $\int_{Y \setminus \Sigma} \rho_n = 0$, la suite (ρ_n) est bornée dans $W^{1,2}(Y \setminus \Sigma)$. On en déduit l'existence de $\rho \in W^{1,2}(Y \setminus \Sigma)$ tel que $\rho_n \rightarrow \rho$ fortement dans $W^{1,2}(Y \setminus \Sigma)$. Le passage à la limite dans (2.13) termine la démonstration. \square

Inégalité de Poincaré dans le cas d'un domaine perforé. Nous donnons ici deux variantes de l'inégalité (2.7) qui seront utilisées dans le chapitre 5 pour obtenir des estimations amenant à une convergence forte double-échelle des solutions.

Lemme 2.12 *Soit $\delta \in (0, 1/2)$. Alors, il existe $C_\delta > 0$ tel que, pour tout $u \in W^{1,2}(\eta Y)$ vérifiant*

$$\Delta u = 0 \quad \text{dans } \eta B(\theta, \rho), \quad \text{dist}(\theta, \partial Y) \geq \rho + \delta, \quad (2.14)$$

on a

$$\int_{\eta B(\theta, \rho)} |u|^2 \leq C_\delta \int_{\eta(Y \setminus B(\theta, \rho))} (|u|^2 + \eta^2 |\nabla u|^2). \quad (2.15)$$

PREUVE. Montrons l'assertion pour $\eta = 1$. Fixons $\delta \in (0, \frac{1}{2})$. D'après l'inégalité de Poincaré ainsi qu'un argument de contradiction, il existe $C_\delta > 0$ tel que

$$\int_{B(0, \frac{1}{2} - \delta)} |u|^2 dx \leq C_\delta \int_{Y \setminus B(0, \frac{1}{2} - \delta)} (|u|^2 + |\nabla u|^2) dx,$$

pour tout $u \in W_{\#}^{1,2}(Y)$ satisfaisant $\Delta u = 0$ dans $B(0, \frac{1}{2} - \delta)$. Notons que $B(0, \frac{1}{2} - \delta)$ est la plus grande boule de Y restant éloignée de ∂Y d'au moins δ .

Maintenant, prenons $u \in W_{\#}^{1,2}(Y)$, $\theta \in Y$ et $\rho \in (0, \frac{1}{2})$ tel que (2.14) est satisfaite avec $\eta = 1$. Nous observons que les ensembles $(\theta + \frac{\rho}{\frac{1}{2} - \delta} Y) \setminus B(\theta, \rho)$ et $\frac{\rho}{\frac{1}{2} - \delta} (Y \setminus B(0, \frac{1}{2} - \delta))$ sont isométriques. Enfin, nous pouvons utiliser la dernière inégalité pour trouver, après une mise à l'échelle de facteur $\frac{\rho}{\frac{1}{2} - \delta}$, que

$$\int_{B(\theta, \rho)} |u|^2 dx \leq C_\delta \int_{(\theta + \frac{\rho}{\frac{1}{2} - \delta} Y) \setminus B(\theta, \rho)} \left(|u|^2 + \frac{\rho^2}{(\frac{1}{2} - \delta)^2} |\nabla u|^2 \right) dx,$$

pour tout $u \in W_{\#}^{1,2}(Y)$ vérifiant $\Delta u = 0$ dans $B(\theta, \rho)$. Finalement, on déduit de $\rho/(\frac{1}{2} - \delta) < 1$ et $(\theta + \frac{\rho}{\frac{1}{2} - \delta} Y) \setminus B(\theta, \rho) \subset (Y \setminus B(\theta, \rho))$, la relation (2.15) avec $\eta = 1$. On obtient le résultat pour $\eta > 0$ par le même type d'arguments de remise à l'échelle que ceux présentés dans la démonstration du corollaire 2.6. \square

Lemme 2.13 Fixons $\delta \in (0, 1/2)$, $\rho > 0$ et $\theta \in Y$ tels que $\text{dist}(\theta, \partial Y) \geq \rho + \delta$. Alors, il existe $C_\delta > 0$ tel que pour tout $\eta > 0$, $\alpha \in \mathbb{C}$ et $u \in W_{\#}^{1,2}(\eta Y)$ vérifiant $\Delta u \in L^2(\eta B(\theta, \rho))$, on a

$$\text{dist}\left(\alpha, \frac{\sigma_0}{\rho^2}\right) \|u\|_{L^2(\eta B(\theta, \rho))}^2 \leq c_\delta \left[(|\alpha|^2 \left(\|u\|_{L^2(\eta(Y \setminus B(\theta, \rho)))}^2 + \eta^2 \|\nabla u\|_{L^2(\eta(Y \setminus B(\theta, \rho)))}^2 \right) + \|\Delta u + \alpha u\|_{L^2(\eta B(\theta, \rho))}^2) \right].$$

où σ_0 est le spectre de l'opérateur $-\Delta$ avec conditions de Dirichet sur le bord de la boule unité.

PREUVE. Il est suffisant de montrer le résultat pour $\eta = 1$, il sera étendu par une simple remise à l'échelle. On pose $u = u_1 + v_2$, où

$$\begin{aligned} \Delta u_1 &= 0 \quad \text{on } B(\theta, \rho), & u_1 &= u \quad \text{dans } Y^*; \\ u_2 &= u - u_1. \end{aligned}$$

Soit φ_n , $n \in \mathbb{N}$, les vecteurs propres de l'opérateur $-\Delta$ dans le disque $B(0, 1)$ et soit λ_n les valeurs propres associées. Il est clair que sur le disque $B(\theta, \rho)$, les valeurs propres sont $\rho^{-2}\lambda_n$, $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$\begin{aligned} \text{dist}^2\left(\alpha, \rho^{-2}\sigma_0\right) \|u_2\|_{L^2(B(\theta, \rho))}^2 &= \inf_n |\alpha - \rho^{-2}\lambda_n|^2 \|u_2\|_{L^2(B(\theta, \rho))}^2 \leq \\ &\leq \|\Delta u_2 + \alpha u_2\|_{L^2(B(\theta, \rho))}^2 \leq 2|\alpha|^2 \|u_1\|_{L^2(B(\theta, \rho))}^2 + 2\|\Delta u + \alpha u\|_{L^2(B(\theta, \rho))}^2 \end{aligned}$$

De plus grâce au lemme 2.12 on a

$$\|u_1\|_{L^2(B(\theta, \rho))}^2 \leq c_\delta \left(\|u_1\|_{L^2(Y \setminus B(\theta, \rho))}^2 + \|\nabla u_1\|_{L^2(Y \setminus B(\theta, \rho))}^2 \right).$$

On obtient alors le résultat puisque $u_1 = u$ dans $Y \setminus B(\theta, \rho)$. □

1.3 Compacité par compensation : lemme “div-rot”

Lemme 2.14 [Lemme “div-rot”] Soit \mathcal{B} un ouvert borné de \mathbb{R}^3 . Soit (\mathbf{u}_η) et (\mathbf{v}_η) deux suites de $L^2(\mathcal{B}; \mathbb{R}^3)$ qui convergent respectivement vers \mathbf{u} et \mathbf{v} faiblement dans $L^2(\mathcal{B}; \mathbb{R}^3)$. Si, de plus, on a

$$\begin{aligned} (\text{div } \mathbf{u}_\eta) &\text{ est compacte dans } W^{-1,2}(B), \\ (\text{rot } \mathbf{u}_\eta) &\text{ est compacte dans } (W^{-1,2}(B))^3, \end{aligned}$$

alors la suite produit $\mathbf{u}_\eta \cdot \mathbf{v}_\eta$ converge vers $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ au sens des distributions dans \mathcal{B} .

On réfère à [35, 50] pour la démonstration. En appliquant ce résultat au couple (u_η, u_η) , nous pourrions démontrer une convergence forte dans $L^2(\mathcal{B})$ lorsque la suite u_η aura un bon comportement sur le bord de \mathcal{B} .

Pour caractériser la forte compacité dans $W^{-1,2}(B)$, nous allons utiliserons parfois le résultat suivant.

Proposition 2.15 Soit $(T_n)_n \subset W^{-1,2}(\mathcal{B})$ une suite bornée. Alors, la suite (T_n) est relativement compacte (pour la topologie de la norme) si et seulement si, pour toute suite $(\varphi_n)_n$ telle que $\varphi_n \rightarrow 0$ dans $W_0^{1,2}(\mathcal{B})$, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle T_n, \varphi_n \rangle = 0 . \quad (2.16)$$

PREUVE. L'implication (\Rightarrow) est évidente.

Montrons (\Leftarrow) . On peut supposer, quitte à extraire une sous-suite, que la suite (T_n) converge faiblement vers $T \in W^{-1,2}(\mathcal{B})$ (i.e. $\langle T_n, \varphi \rangle \rightarrow \langle T, \varphi \rangle$ pour tout $\varphi \in W_0^{1,2}(\mathcal{B})$). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut choisir $\varphi_n \in W_0^{1,2}(\mathcal{B})$ tel que $\|\varphi_n\|_{W^{1,2}(\mathcal{B})} = 1$ et

$$\|T_n - T\|_{W^{-1,2}(\mathcal{B})} = \langle T_n - T, \varphi_n \rangle .$$

Quitte à extraire une sous-suite, il existe $\varphi \in W_0^{1,2}(\mathcal{B})$ tel que $\varphi_n - \varphi \rightarrow 0$ dans $W_0^{1,2}(\mathcal{B})$. D'après l'hypothèse (2.16), on a donc que $\langle T_n, \varphi_n - \varphi \rangle \rightarrow 0$. On termine la démonstration à l'aide de l'égalité suivante

$$\|T_n - T\|_{W^{-1,2}(\mathcal{B})} = \langle T_n - T, \varphi_n \rangle = \langle T_n, \varphi_n - \varphi \rangle - \langle T, \varphi_n - \varphi \rangle + \langle T_n - T, \varphi \rangle .$$

□

Théorème 2.16 (Lax-Milgram) Soit $a(u, v) : X \times X \rightarrow \mathbb{C}$ une forme sesquilinéaire continue. Si il existe $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| = 1$ tel que

$$\Re(z a(u, u)) \geq C \|u\|^2 \quad , \quad \forall u \in X .$$

Alors pour tout $f \in X$ il existe un unique $u \in X$ vérifiant pour tout $v \in X$

$$a(u, v) = \langle f, v \rangle_X . \quad (2.17)$$

1.4 Éléments de théorie spectrale

Dans cette partie, X sera un espace de Hilbert muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$. On note B_X sa boule unité et $\mathcal{L}(X)$ l'espace des opérateurs linéaires continus de X dans X , muni de la norme

$$\|T\|_{\mathcal{L}(X)} := \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} \|Tx\|_X ,$$

qui est un espace de Banach.

Définition 2.17 Soit un opérateur $T \in \mathcal{L}(X)$.

- On note T^* l'opérateur adjoint de T , uniquement déterminé par la relation suivante

$$\langle T^*x, y \rangle = \langle x, Ty \rangle \quad \forall (x, y) \in X^2 ,$$

(on utilise ici le théorème de représentation de Riesz).

- T est dit auto-adjoint si $T = T^*$
- T est dit positif si $\langle Tx, x \rangle \geq 0 \quad \forall x \in X$.
- T est compact si $T(B_X)$ est fortement relativement compact dans X .

Proposition 2.18 (Hilbert-Schmidt) Soit $K : X \rightarrow X$ un opérateur compact auto-adjoint positif. Alors, les valeurs propres de K $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ forment une suite qui converge vers zéro. De plus, il existe $\{v_n, n \in \mathbb{N}\}$ une base Hilbertienne de X telle que $Tv_n = \lambda_n v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a alors la décomposition

$$Tu := \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n \langle u, v_n \rangle v_n ,$$

où la convergence de la série a lieu relativement à la topologie forte de X .

Alternative de Fredholm. Pour un opérateur compact $K \in \mathcal{L}(X)$, $f \in X$ et $\alpha \in \mathbb{C}$, on s'intéresse au problème suivant : trouver $u \in X$ tel que

$$Ku - \alpha u = f . \quad (2.18)$$

Théorème 2.19 On a l'alternative :

- ou bien $Ku - \alpha u = f$ admet une unique solution,
- ou bien α est valeur propre de K et, dans ce cas, l'équation $Ku - \alpha u = f$ est résoluble si, et seulement si, f est orthogonale au noyau de $(K^* - \bar{\alpha}I)$.

Ceci est une conséquence du résultat suivant (cf. [17]) où $N(K)$ est le noyau de K et $R(K)$ son image :

Proposition 2.20 Soit $K \in \mathcal{L}(X)$ un opérateur compact. Alors,

$$\begin{aligned} N(K - \alpha I) & \text{ est de dimension finie ,} \\ R(K - \alpha I) & \text{ est fermé et donc } R(K - \alpha I) = N(K^* - \bar{\alpha}I)^\perp , \\ N(K - \alpha I) = \{0\} & \Leftrightarrow R(K - \alpha I) = X . \end{aligned}$$

Application à un cadre variationnel.

Soit $a : X \times X \rightarrow \mathbb{C}$ une forme sesquilinéaire continue et coercive dans le sens où il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que

$$\Re(z a(u, u)) \geq C \|u\|_X^2 , \quad \forall u \in X. \quad (2.19)$$

On considère de plus une seconde fonction sesquilinéaire continue $b : X \times X \rightarrow \mathbb{C}$ et $f \in X$. Pour toute valeur du paramètre $\lambda \in \mathbb{C}$, on s'intéresse au problème variationnel suivant : trouver $u \in X$ tel que

$$a(u, v) - \lambda b(u, v) = \langle f, v \rangle_X , \quad \forall v \in X . \quad (2.20)$$

Pour $\lambda = 0$, on retrouve le cadre de Lax-Milgram et on peut voir le terme $\lambda b(u, v)$ comme une perturbation de (2.17). La question est de décrire l'influence de cette perturbation sur l'existence et l'unicité de la solution de (2.20).

Proposition 2.21 *Supposons que b vérifie l'hypothèse suivante :*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b(u_n, v_n) = 0 , \quad (2.21)$$

pour toute suite $u_n \rightharpoonup u$, $v_n \rightharpoonup v$ faiblement dans X .

Alors on a l'alternative :

- *ou bien le problème (2.20) admet une solution unique,*
- *ou bien il existe $u \in X \setminus \{0\}$ tel que*

$$a(u, v) = \lambda b(u, v) \quad , \quad \forall v \in X .$$

Dans ce cas, si on suppose de plus que a et b sont hermitiennes, il existe une solution de (2.20) si et seulement si

$$f \in \left\{ g \in X : a(g, h) = \bar{\lambda} b(g, h) , \forall h \in X \right\}^\perp . \quad (2.22)$$

PREUVE. Notons A et B les deux opérateurs de $\mathcal{L}(X)$ représentant les formes sesquili-néaires a et b respectivement. Le problème (2.20) s'écrit donc sous la forme $(A - B)u = f$. D'autre part, en appliquant Lax-Milgram, on déduit de (2.19) que l'opérateur auto-adjoint A est inversible. En notant A^{-1} son inverse, problème (2.20) n'est autre que

$$(I_d - \lambda A^{-1}B)u = A^{-1}f .$$

Or, la condition (2.21) étant équivalente au fait que l'opérateur B est compact, on se trouve dans le cadre d'application du théorème 2.19 avec l'opérateur compact $K := \lambda A^{-1}B$. Ainsi, ou bien le problème (2.20) admet une solution unique, ou bien 1 est valeur propre de l'opérateur $\lambda A^{-1}B$ ce qui est équivalent à dire que $a(u, v) = \lambda b(u, v)$ pour tout $v \in X$. De plus, le problème (2.20) est résoluble si et seulement si $A^{-1}f$ est orthogonal à $N(I_d - \bar{\lambda}(A^{-1}B)^*)$. Dans le cas où a et b sont hermitiennes, les opérateurs A et B sont auto-adjoint. Ainsi, un élément g est dans le noyau $N(I_d - \bar{\lambda}(A^{-1}B)^*)$ si et seulement si $g = \bar{\lambda}BA^{-1}g$, ce qui équivaut à dire que $g = Ah$ avec h vérifiant

$$Ah = \bar{\lambda}Bh . \quad (2.23)$$

L'élément $A^{-1}f$ est orthogonal à un tel g si $\langle A^{-1}f, g \rangle = 0$ c'est à dire $\langle f, h \rangle = 0$ avec h vérifiant (2.23). Par définition des opérateurs A et B on obtient (2.22). □

Krein-Rutman.

Définition 2.22 *On dit qu'un ensemble $K \subset X$ est un cône de X si K est fermé et vérifie*

$$\begin{aligned} 0 &\in K , \\ x, y \in K , \quad \alpha, \beta \geq 0 &\Rightarrow \alpha x + \beta y \in K , \\ x \in K \text{ et } -x \in K &\Rightarrow x = 0 . \end{aligned}$$

Il sera dit reproduisant si

$$X = K - K .$$

Théorème 2.23 Soit K un cône reproduisant dans un espace de Banach X . Soit T un opérateur linéaire positif sur K (i.e. $T(K) \subset K$). On suppose que T est compact de rayon spectral $r(B) \neq 0$, alors, il existe $x \in K$ ($x \neq 0$) tel que

$$Tx = r(B)x .$$

Autrement dit, un des vecteurs propres associés à la valeur propre fondamentale appartient au cône K .

On renvoie à [19] pour la démonstration.

Approximation spectrale. dans lequel la convergence est parfois appelée “convergence uniforme” au sens des opérateurs. La notion de “convergence forte des opérateurs” est une version affaiblie de cette convergence uniforme.

Définition 2.24 On dira que T_n converge vers T fortement au sens des opérateurs, si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|T_n u - Tu\|_X \rightarrow 0 \quad \forall u \in X , \quad (2.24)$$

et on notera $T_n \rightarrow T$.

On introduit l’ensemble résolvant $\rho(T) \subset \mathbb{C}$ formé des complexes λ tels que l’opérateur $(\lambda - T)$ est inversible. On note de plus $\sigma(T) := \mathbb{C} \setminus \rho(T)$ le spectre de T . En particulier, on a que

$$\{\text{valeurs propres de } T\} \subset \sigma(T).$$

Définition 2.25 On dira qu’une famille d’opérateurs $\{T_n \in \mathcal{L}(X) , n \in \mathbb{N}\}$ est uniformément compacte si l’ensemble $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} T_n(B_X)$ est relativement compact dans X .

Lors des approximations numériques présentées dans le chapitre 6, nous aurons à approcher les valeurs et vecteurs propres d’opérateurs compacts auto-adjoints. La méthode utilisée sera de type Galerkin et reposera sur les résultats d’approximation spectrale qui suivent.

Lemme 2.26 Soit $T, T_n \in \mathcal{L}(X)$ tels que $T_n \rightarrow T$ fortement au sens des opérateurs (cf. (2.24)) et tels que la famille $\{T_n - T\}$ soit uniformément compacte. On fixe $\Lambda \subset \rho(T)$ un fermé. Alors,

- i) il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\Lambda \subset \rho(T_n)$ pour tout $n \geq N$,
- ii) L’ensemble $\{(\lambda - T_n)^{-1} , \lambda \in \Lambda , n \geq N\}$ est borné,
- iii) $(\lambda - T_n)^{-1} \rightarrow (\lambda - T)^{-1}$ uniformément par rapport à $\lambda \in \Lambda$.

On renvoie à [2, théorème 5.3] pour la démonstration.

Remarque 2.27 En particulier, le point i) du lemme précédent entraîne que pour tout Ω voisinage de $\sigma(T)$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sigma(T_n) \subset \Omega \quad \forall n > N .$$

On considère $\Gamma \subset \rho(T)$ une courbe de Jordan. On déduit du théorème précédent que $\Gamma \subset \rho(T_n)$ à partir d'un certain rang. Cela nous permet d'introduire les projections suivantes

$$E^\Gamma := \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma (\lambda - T)^{-1} d\lambda ,$$

$$E_n^\Gamma := \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma (\lambda - T_n)^{-1} d\lambda .$$

Remarque 2.28 Il s'avère que les projections définies ci-dessus sont les projections orthogonales sur la somme des espaces propres associés aux valeurs propres contenues dans l'ensemble B_Γ délimité par la courbe Γ .

Proposition 2.29 Soient $T_n, T \in \mathcal{L}(X)$ tels que $T_n \rightarrow T$ fortement au sens des opérateurs et que la famille $\{T_n - T\}$ est uniformément compacte. On fixe $\Gamma \subset \rho(T)$ une courbe de Jordan délimitant une zone notée B_Γ . Alors,

$$E_n^\Gamma \rightarrow E^\Gamma \quad \text{fortement au sens des opérateurs,} \quad (2.25)$$

$$\{E_n^\Gamma - E^\Gamma\} \quad \text{est uniformément compacte ,} \quad (2.26)$$

$$\dim E_n^\Gamma(X) = \dim E^\Gamma(X) \quad \text{pour } n \text{ assez grand .} \quad (2.27)$$

PREUVE.

La convergence (2.25) est déduite de la relation suivante (obtenue par définition de E et E_n) et à l'aide du point *iii*) du lemme 2.26

$$E_n^\Gamma - E^\Gamma = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma (\lambda - T_n)^{-1} - (\lambda - T)^{-1} d\lambda .$$

Montrons l'assertion (2.26). On a

$$E_n^\Gamma - E^\Gamma = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma (\lambda - T)^{-1} (T_n - T) (\lambda - T_n)^{-1} d\lambda .$$

Or, la famille $\{T - T_n\}$ est uniformément compacte, l'opérateur $(\lambda - T)^{-1}$ borné et la suite $(\lambda - T_n)^{-1}$ est uniformément bornée d'après le lemme 2.26. En conséquence, la famille $\{(\lambda - T)^{-1} (T_n - T) (\lambda - T_n)^{-1}\}$ est uniformément compacte ce qui entraîne (2.26).

Montrons que $\dim E_n^\Gamma X \geq \dim E^\Gamma X$. On fixe $m \in \mathbb{N}$ et $\{x_j, j \in \{1, \dots, m\}\} \subset X$ tels que la famille $\{E^\Gamma x_j, j = 1, \dots, m\}$ soit orthonormale dans $E^\Gamma(X)$. On considère

$$C := \left\{ \sum_{j=1}^m c_j x_j, \max_j |c_j| = 1 \right\} .$$

Alors C et $E^\Gamma(C)$ sont des ensembles compacts ce qui entraîne que $E_n^\Gamma \rightarrow E^\Gamma$ uniformément sur C et que $\min_{x \in C} \|E_n x\|_X > 0$.

Finalement, on déduit de $\min_{x \in C} \|E_n x\| > 0$ que la famille $\{E_n x_j, j = 1 \dots m\}$ est libre. Ceci prouve que $\dim E_n^\Gamma(X) \geq \dim E^\Gamma(X)$.

Montrons que $\dim E_n^\Gamma X \leq \dim E^\Gamma X$. On suppose, sans perte de généralité, que $\dim E^\Gamma(X) := m < +\infty$. On en déduit que E est un opérateur compact et que $\{E_n\}$ est uniformément compact.

Par l'absurde, on suppose que $\dim E_n^\Gamma X > m$ pour tout $n \geq 1$. Soit $\{x_n^k, k = 1, \dots, m\} \subset E_n^\Gamma(X)$ une famille orthonormale de $E_n^\Gamma(X)$. Puisque la famille $\{E_n^\Gamma\}$ est uniformément compact, on a existence de $x^k \in X$ tel que

$$x_n^k \rightarrow x^k \quad \forall k \in \{1, \dots, m+1\},$$

où la convergence a lieu à une sous-suite près. Il en résulte que $\{x^k, k = 1, \dots, m\}$ est une famille orthonormale de X . Or, $\{E_n^\Gamma\}$ est étant uniformément compact, on a que $\|E_n\|$ uniformément borné par rapport à n et il en résulte que $E_n^\Gamma x_n^k \rightarrow E^\Gamma x^k = x^k$. Ainsi, pour tout $k \in \{1, \dots, m\}$, $x^k \in E^\Gamma(X)$. L'ensemble $E^\Gamma(X)$ contient donc une famille orthonormale de cardinalité $m+1 > m := \dim(E^\Gamma(X))$ ce qui est impossible. L'inégalité $\dim E_n^\Gamma X \leq \dim E^\Gamma X$ est donc démontrée. □

1.5 Un peu de théorie des probabilités

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. A toute variable aléatoire $X(\omega) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\int |X| d\mathbb{P} < +\infty$, on associe l'espérance mathématique de X définie par $\mathbb{E}(X) = \int X(\omega) d\mathbb{P}(\omega)$.

Lemme 2.30 *Soit $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, une suite de variables aléatoires positives indépendantes et identiquement distribuées dans $L^1(\Omega, \mathbb{P})$. Alors,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \mathbb{E} \left[\sup_{1 \leq i \leq n} X_i \right] = 0.$$

PREUVE.

Soit $g(r) = \mathbb{P}(X_1 \leq r)$. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Z_n := \sup\{X_i, 1 \leq i \leq n\}$. D'après l'indépendance des variables X_i , on a

$$\frac{1}{n} \mathbb{E}(Z_n) = \frac{1}{n} \int_0^\infty \mathbb{P}(\{Z_n > r\}) dr = \int_0^\infty \frac{1 - g^n(r)}{n} dr.$$

Puisque $g(r) \in [0, 1]$, on a la majoration $\frac{1 - g^n(r)}{n} \leq 1 - g(r)$ avec

$$\int_0^\infty (1 - g(r)) dr = \int_0^\infty \mathbb{P}(\{X_1 > r\}) dr = \mathbb{E}(X_1) < +\infty.$$

On peut donc conclure par convergence dominée. □

Un résultat de théorie ergodique. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité.

Définition 2.31 On dit qu'une transformation $T : \Omega \rightarrow \Omega$ préserve la mesure si pour tout $A \in \mathcal{A}$ on a

$$\mathbb{P}(T^{-1}(A)) = \mathbb{P}(A) .$$

Elle sera dit ergodique si

$$\{A \in \mathcal{A} \text{ et } \mathbb{P}(T(A) \Delta A) = 0\} \Rightarrow \{\mathbb{P}(A) = 0 \text{ ou } \mathbb{P}(A) = 1\} ,$$

où Δ désigne la différence symétrique.

Nous donnons dans le théorème suivant une variante du théorème de Birkhoff dont la démonstration est donnée dans [18] (proposition 12.2.II).

Théorème 2.32 Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $\{T_x : x \in \mathbb{R}^d\}$ une famille de transformations de $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ergodiques et préservant la mesure. Alors, pour toute variable aléatoire f sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telle que $\mathbb{E}(|f|) < +\infty$ et presque tout $\omega \in \Omega$, on a

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{|B(0, R)|} \int_{B(0, R)} f(T_x \omega) dx = \mathbb{E}(f) ,$$

où $B(0, R) \subset \mathbb{R}^d$ est la boule de centre 0 et de rayon R .

1.6 Résultats classiques pour le problème de diffraction

On considère $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^3$ un domaine borné. On étudie la diffraction par l'obstacle \mathcal{B} d'une onde incidente plane $(\mathbf{E}^i, \mathbf{H}^i)$ (dépendance harmonique en temps $e^{-i\omega t}$ de fréquence ω). Le champ électromagnétique total (\mathbf{E}, \mathbf{H}) vérifie les équations de Maxwell dans \mathbb{R}^3

$$\begin{cases} \mathbf{rot} \mathbf{E} = i\omega\mu_0\mu(x)\mathbf{H} , \\ \mathbf{rot} \mathbf{H} = -i\omega\varepsilon_0\varepsilon(x)\mathbf{E} , \\ (\mathbf{E} - \mathbf{E}^{\text{inc}}, \mathbf{H} - \mathbf{H}^{\text{inc}}) \text{ satisfait la condition (2.29)} , \end{cases} \quad (2.28)$$

où μ_0 et ε_0 sont les paramètres du vide et $\mu(x)$ et $\varepsilon(x)$ sont les perméabilité et permittivité relatives données pour $\varepsilon_r, \mu_r \in \mathbb{C}^+$, par

$$\mu(x) = 1_{\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{B}} + \mu_r 1_{\mathcal{B}} \quad , \quad \varepsilon(x) = 1_{\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{B}} + \varepsilon_r 1_{\mathcal{B}} .$$

La condition de rayonnement de Silver-Müller s'écrit pour $(\mathbf{E}^d, \mathbf{H}^d) := (\mathbf{E} - \mathbf{E}^{\text{inc}}, \mathbf{H} - \mathbf{H}^{\text{inc}})$ par

$$(\mathbf{E}^d, \mathbf{H}^d) = O\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|}\right), \quad \omega\varepsilon_0 \left(\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} \wedge \mathbf{E}^d\right) - k_0 \mathbf{H}^d = o\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|}\right). \quad (2.29)$$

Théorème 2.33 Si $\Im(\varepsilon_r) > 0$ ou $\Im(\mu_r) > 0$, alors il existe une unique solution (\mathbf{E}, \mathbf{H}) du problème (2.28).

Ce résultat, donné dans [16], sera régulièrement utilisé au cours de cette thèse. La propriété d'unicité de la solution sera parfois redémontrée pour le problème homogénéisé faisant intervenir des paramètres de permittivité et de perméabilité sous forme tensorielle.

Tout au long de cette thèse, nous allons nous intéresser à l'homogénéisation de problèmes de diffraction par différentes structures périodiques mettant en œuvre des matériaux à forts contrastes. Chaque structure sera caractérisée par un paramètre de permittivité relative $\varepsilon_\eta(x)$ égal à 1 hors de l'obstacle et oscillant périodiquement, de petite période η , dans le milieu noté \mathcal{B} . Le problème pré-homogénéisé est le suivant et l'objectif sera d'étudier le comportement de sa solution $(\mathbf{E}_\eta, \mathbf{H}_\eta)$ lorsque $\eta \rightarrow 0$.

On considère une onde incidente $(\mathbf{E}^{\text{inc}}, \mathbf{H}^{\text{inc}})$ (de dépendance harmonique en temps $e^{-i\omega t}$) et la solution $(\mathbf{E}_\eta, \mathbf{H}_\eta)$ vérifiant

$$\begin{cases} \text{rot } \mathbf{E}_\eta = i\omega\mu_0\mu(x)\mathbf{H}_\eta, \\ \text{rot } \mathbf{H}_\eta = -i\omega\varepsilon_0\varepsilon_\eta(x)\mathbf{E}_\eta, \\ (\mathbf{E}_\eta - \mathbf{E}^{\text{inc}}, \mathbf{H}_\eta - \mathbf{H}^{\text{inc}}) \text{ satisfait la condition (2.29)}. \end{cases} \quad (2.30)$$

La difficulté dans le passage à la limite va être liée aux oscillations rapides du champ $(\mathbf{E}_\eta, \mathbf{H}_\eta)$ dans l'obstacle. À l'inverse, la convergence de la suite loin de l'obstacle sera très forte. Plus précisément, on a le résultat suivant où B_R désigne une boule vérifiant $\mathcal{B} \subset\subset B_R$.

Lemme 2.34 *Soit $(\mathbf{E}_\eta, \mathbf{H}_\eta)$ la solution du problème (2.30) associée à une onde incidente $(\mathbf{E}_\eta^{\text{inc}}, \mathbf{H}_\eta^{\text{inc}})$ qui converge uniformément vers $(\mathbf{E}^{\text{inc}}, \mathbf{H}^{\text{inc}})$. Si $(\mathbf{E}_\eta, \mathbf{H}_\eta) \rightharpoonup (\mathbf{E}, \mathbf{H})$ faiblement dans $L^2(B_R)$ alors, la convergence de $(\mathbf{E}_\eta, \mathbf{H}_\eta)$ a lieu dans $C^\infty(K)$ pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\mathcal{B}}$. De plus, le champ limite (\mathbf{E}, \mathbf{H}) vérifie l'équation de Helmholtz $\Delta \mathbf{u} + k_0^2 \mathbf{u} = 0$ dans $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\mathcal{B}}$ et le champ diffracté $(\mathbf{E} - \mathbf{E}^{\text{inc}}, \mathbf{H} - \mathbf{H}^{\text{inc}})$ vérifie (2.29).*

PREUVE. Puisque $\varepsilon_\eta = 1$ est constant hors de l'obstacle \mathcal{B} , on déduit de (2.30) que toutes les composantes des champs \mathbf{E}_η et \mathbf{H}_η satisfont l'équation de Helmholtz

$$\Delta u + k_0^2 u = 0,$$

sur l'ouvert $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\mathcal{B}}$. Grâce aux propriétés des opérateurs hypoelliptiques (voir par exemple [48]), la convergence faible de $(\mathbf{E}_\eta, \mathbf{H}_\eta)$ vers (\mathbf{E}, \mathbf{H}) est uniforme, ainsi que pour toutes ses dérivées, sur tout compact de $B_R \setminus \overline{\mathcal{B}}$. On étend cette convergence à tout $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\mathcal{B}}$ de la façon suivante : on considère une sphère $S_{R'} = \{|x| = R'\}$ de sorte que $\mathcal{B} \subset\subset \{|x| \leq R'\} \subset\subset B_R$. Alors, on applique au champ diffracté $(\mathbf{E}_\eta^d, \mathbf{H}_\eta^d) := (\mathbf{E}_\eta - \mathbf{E}_\eta^{\text{inc}}, \mathbf{H}_\eta - \mathbf{H}_\eta^{\text{inc}})$ l'identité intégrale de Stratton-Chu suivante, qui est en fait équivalente à la condition de rayonnement (2.29) (voir [16, 49]) :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\eta^d(x) &= \int_{|z|=r} \left[i\omega\mu_0\phi(x-z) \left(\frac{z}{|z|} \wedge \mathbf{H}_\eta^d \right) + \nabla\phi(x-z) \wedge \left(\frac{z}{|z|} \wedge \mathbf{E}_\eta^d \right) \right] d\sigma, \\ \mathbf{H}_\eta^d(x) &= \int_{|z|=r} \left[-i\omega\varepsilon_0\phi(x-z) \left(\frac{z}{|z|} \wedge \mathbf{E}_\eta^d \right) + \nabla\phi(x-z) \wedge \left(\frac{z}{|z|} \wedge \mathbf{H}_\eta^d \right) \right] d\sigma, \end{aligned} \quad (2.31)$$

où $\phi(x) = \frac{e^{i k_0 x}}{4\pi|x|}$ et $d\sigma$ désigne la mesure de surface. En passant à la limite quand $\eta \rightarrow 0$, on étend la définition de (\mathbf{E}, \mathbf{H}) hors de \mathcal{B} et on obtient la convergence de $(\mathbf{E}_\eta, \mathbf{H}_\eta)$ vers (\mathbf{E}, \mathbf{H}) dans $C^\infty(K)$ pour tout K compact de $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\mathcal{B}}$. Il est clair que les relations (2.31) seront satisfaites pour $(\mathbf{E} - \mathbf{E}^{\text{inc}}, \mathbf{H} - \mathbf{H}^{\text{inc}})$, et donc il vérifiera les conditions de Silver-Müller (2.29). □

2 Homogénéisation

2.1 Notion de milieux effectifs

L'apparition de l'industrie de matériaux composites a fait émerger une nouvelle branche des mathématiques appelée homogénéisation.

Ces matériaux sont complexes en raison de leur micro-structure interne, ce qui rend difficile leur étude aussi bien théorique que numérique. L'enjeu de la théorie de l'homogénéisation est, d'une part, de justifier que le comportement de telles structures est *assimilable* à celui d'un nouveau milieu homogène (plus simple) et, d'autre part, d'identifier les lois de comportement de ce milieu qui sera appelé *milieu effectif* ou *milieu homogénéisé*.

Considérons par exemple un matériau composite occupant un domaine borné \mathcal{B} dont l'hétérogénéité est caractérisée par une micro-structure que nous supposons périodique. La période séparant ses micro-composants est décrite par un petit paramètre réel positif noté η .

Le comportement de ce matériau vis-à-vis des phénomènes physiques que nous souhaitons étudier est modélisé à l'aide d'un opérateur aux dérivées partielles noté L_η . Le problème réel (à l'échelle η) est appelé pré-homogénéisé et prend la forme

$$L_\eta u_\eta = f \quad \text{dans } \mathcal{B}, \quad (2.32)$$

où f est un terme source donné.

Le comportement effectif du milieu sera déduit du problème (2.32) en passant à la limite $\eta \rightarrow 0$. En supposant que u_η converge dans un certain sens vers une limite u , on cherche à identifier le problème homogénéisé que doit vérifier u . Le problème est donc d'identifier l'opérateur limite L de sorte que

$$Lu = f \quad \text{dans } \mathcal{B}. \quad (2.33)$$

Passer du problème (2.32) au problème (2.33) est le processus d'homogénéisation. Notons que ce processus comporte deux difficultés principales :

- Établir la relative compacité de la suite u_η dans un espace fonctionnel adéquat,
- Trouver l'opérateur effectif L .

Si les coefficients oscillants intervenant dans la définition des opérateurs L_η sont uniformément majorés et minorés, on s'attend à ce que l'opérateur limite L soit de la même forme que les opérateurs L_η . À l'inverse, lorsque ces conditions de bornes ne sont pas

vérifiées, l'opérateur limite peut être tout à fait différent. Par exemple, le processus d'homogénéisation peut engendrer l'apparition d'effets non locaux ou de mémoires [4, 12].

Dans cette thèse, nous allons entreprendre l'homogénéisation de problèmes de diffractions par des cristaux photoniques. La méthode utilisée sera toujours la méthode de convergence double-échelle que nous rappelons dans la section suivante.

2.2 Convergence double-échelle

Cette notion de convergence a été introduite par Ngutseng [37] et Allaire [1] et se place à l'origine dans un cadre *périodique*. Elle a depuis été étendue par Piatninski [53] dans un cas aléatoire (nous introduirons cette notion dans le chapitre 5). Dans le cas périodique, elle permet de donner un cadre rigoureux à la technique de développement asymptotique deux échelles. Cette dernière prend pour postulat la décomposition de la solution u_η suivante :

$$u_\eta(x) := u_0(x, \frac{x}{\eta}) + \eta u_1(x, \frac{x}{\eta}) + \eta^2 u_2(x, \frac{x}{\eta}) + \dots, \quad (2.34)$$

où les fonctions $u_i(x, y)$ sont périodiques par rapport à y . La substitution de (2.34) dans (2.32) et l'identification des puissances de η conduisent à une cascade d'équations pour chacune des fonctions u_i . La résolution de ces problèmes peut amener trouver la forme de l'opérateur L déterminant le problème limite.

La méthode de convergence double-échelle va permettre d'identifier le premier terme de la décomposition (2.34) de manière *rigoureuse*. En s'inspirant de [1], on présente cette méthode dans le cas où la micro-structure du matériau est *périodique*.

Commençons par quelques notations.

On se place dans un ouvert borné $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^3$. On introduit $Y \subset \mathbb{R}^3$ défini par

$$Y := \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]^3.$$

Cet ensemble est appelé *cellule de base* ou *cellule unité* et représente une période élémentaire de la structure. Les variables contenues dans Y sont notées y et appelées *variables rapides* ou *microscopiques*.

La convergence double-échelle est une notion faible de convergence dans le sens où sa caractérisation passe par l'intermédiaire de fonctions test. Nous avons besoin d'une certaine classe de fonctions que nous appellerons admissible dont nous donnons ici la définition.

Définition 2.35 (Fonctions admissibles) *On dira qu'une fonction $\varphi \in L^2(\mathcal{B} \times Y)$ est admissible lorsque la suite $\varphi_n(x) := \varphi\left(x, \frac{x}{\eta}\right)$ est bornée dans $L^2(\mathcal{B})$ et vérifie*

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{\mathcal{B}} \left| \varphi\left(x, \frac{x}{\eta}\right) \right|^2 dx = \int_{\mathcal{B} \times Y} |\varphi(x, y)|^2 dx dy.$$

Il est important de noter que les fonctions de $L^2(\mathcal{B}; L^2_{\#}(Y))$ ne satisfont pas toujours cette relation puisque l'on ne peut pas assurer que la fonction $x \rightarrow \varphi(x, x/\eta)$ est mesurable sur \mathcal{B} . Il est par ailleurs prouvé dans [37] le résultat suivant.

Lemme 2.36 *Les espaces $L^2(\mathcal{B}; C_{\#}(Y))$, $C(\overline{\mathcal{B}}; C_{\#}(Y))$ et $L^2_{\#}(Y; C(\overline{\mathcal{B}}))$ sont des espaces de fonctions admissibles qui s'identifient à des sous-ensembles denses de $L^2(\mathcal{B} \times Y)$.*

Définition 2.37 (convergence double-échelle) *On dit qu'une suite de fonctions u_{η} de $L^2(\mathcal{B})$ converge double-échelle vers $u_0(x, y) \in L^2(\mathcal{B} \times Y)$ si pour tout $\varphi(x, y) \in C^{\infty}(\mathcal{B}; C_{\#}(Y))$ on a,*

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{\mathcal{B}} u_{\eta} \varphi\left(x, \frac{x}{\eta}\right) dx = \int_{\mathcal{B} \times Y} u_0(x, y) \varphi(x, y) dx dy . \quad (2.35)$$

Dans ce cas on notera $u_{\eta} \rightharpoonup u_0$.

Exemples

- (i) Pour une fonction régulière $a(x, y)$, périodique par rapport à y , la suite $a_{\eta}(x) := a(x, x/\eta)$ converge double-échelle vers a .
- (ii) Une suite u_{η} qui converge *fortement* vers u dans $L^2(\mathcal{B})$ converge double-échelle vers la même limite u .
- (iii) Toutes les suites u_{η} qui satisfont le développement $u_{\eta} = u_0(x, x/\eta) + \eta u_1(x, x/\eta) + \dots$ avec des fonctions $u_i(x, y)$ régulières et périodiques par rapport à y convergent double-échelle vers le premier terme de l'extension.

Le point (iii) met en avant le principal intérêt de la convergence double-échelle : même si le développement asymptotique (2.34) n'a pas lieu, on peut justifier rigoureusement l'existence du premier terme u_0 .

Proposition 2.38 *Soit $u_{\eta} \in L^2(\mathcal{B})$ et $u_0(x, y) \in L^2(\mathcal{B} \times Y)$ tels que $u_{\eta} \rightharpoonup u_0$. Alors, la relation (2.35) a lieu pour toutes fonctions φ admissibles dans le sens de la définition 2.35.*

Le résultat fondamental lié à cette notion de convergence est la propriété de compacité suivante.

Théorème 2.39 *Soit u_{η} une suite bornée dans $L^2(\mathcal{B})$. Quitte à extraire une sous-suite, il existe $u_0 \in L^2(\mathcal{B} \times Y)$ telle que $u_{\eta} \rightharpoonup u_0$.*

PREUVE.

Soit u_{η} une suite bornée dans $L^2(\mathcal{B})$. Pour toute fonction test $\varphi \in L^2(\mathcal{B}; C_{\#}(Y))$ on a, grâce au lemme 2.36, que $\varphi(x, x/\eta)$ appartient à $L^2(\mathcal{B} \times Y)$. L'inégalité de Cauchy-Swartz amène à

$$\left| \int_{\mathcal{B}} u_{\eta}(x) \varphi\left(x, \frac{x}{\eta}\right) dx \right| \leq \|u_{\eta}\|_{L^2(\mathcal{B})} \left\| \varphi\left(x, \frac{x}{\eta}\right) \right\|_{L^2(\mathcal{B})} \leq C \|\varphi(x, y)\|_{L^2(\mathcal{B}; C_{\#}(Y))} . \quad (2.36)$$

Donc pour η fixé, l'application $\varphi \rightarrow \int_{\mathcal{B}} u_\eta(x) \varphi\left(x, \frac{x}{\eta}\right) dx$ est continue de $L^2(\mathcal{B}; C_\#(Y))$ dans \mathbb{R} . Par ailleurs, l'espace dual de $L^2(\mathcal{B}; C_\#(Y))$ est donné par $L^2(\mathcal{B}; \mathcal{M}_\#(Y))$ où $\mathcal{M}_\#(Y)$ représente l'espace des mesures de radon Y -périodiques. À l'aide du théorème de représentation de Riez, on a l'existence d'une unique mesure $\mu_\eta \in L^2(\mathcal{B}; \mathcal{M}_\#(Y))$ vérifiant

$$\langle \mu_\eta, \varphi \rangle = \int u_\eta(x) \varphi\left(x, \frac{x}{\eta}\right) dx ,$$

où les crochets représentent le produit de dualité entre $L^2(\mathcal{B}; \mathcal{M}_\#(Y))$ et $L^2(\mathcal{B}; C_\#(Y))$. De plus, puisque l'espace $L^2(\mathcal{B}; \mathcal{M}_\#(Y))$ est séparable, on peut extraire de toute suite bornée une sous-suite qui converge $*$ -faiblement. La suite μ_η étant bornée dans $L^2(\mathcal{B}; \mathcal{M}_\#(Y))$ d'après (2.36), il existe $\mu_0 \in L^2(\mathcal{B}; \mathcal{M}_\#(Y))$ tel que $\mu_\eta \xrightarrow{*} \mu_0$ c'est-à-dire

$$\langle \mu_\eta, \varphi \rangle \rightarrow \langle \mu_0, \varphi \rangle ,$$

pour tout $\varphi \in L^2(\mathcal{B}; C_\#(Y))$. Par définition de μ_η , on obtient alors, à une sous-suite près,

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \int u_\eta(x) \varphi\left(x, \frac{x}{\eta}\right) dx = \langle \mu_0, \varphi \rangle . \quad (2.37)$$

D'autre part, grâce au lemme 2.36, on sait que

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \left\| \varphi\left(x, \frac{x}{\eta}\right) \right\|_{L^2(\mathcal{B})} = \|\varphi(x, y)\|_{L^2(\mathcal{B} \times Y)} . \quad (2.38)$$

En passant à la limite dans les deux premiers membres de (2.36) et à l'aide de (2.37) et (2.38), il vient

$$|\langle \mu_0, \varphi \rangle| \leq C \|\varphi\|_{L^2(\mathcal{B} \times Y)} .$$

Grâce à la densité de $L^2(\mathcal{B}; C_\#(Y))$ dans $L^2(\mathcal{B} \times Y)$ et au théorème de Riez, la mesure μ_0 est identifiée à une fonction u_0 de $L^2(\mathcal{B} \times Y)$. Il en résulte ainsi

$$\langle \mu_0, \varphi \rangle = \int_{\mathcal{B} \times Y} u_0(x, y) \varphi(x, y) dx dy .$$

La relation précédente et l'équation (2.37) terminent la démonstration. □

Interprétation à l'aide de l'analyse de Fourier.

L'existence d'une limite double-échelle est ainsi assurée par le théorème 2.39 sous une condition simple (suite bornée dans $L^2(B_R)$). Il est intéressant de se représenter plus explicitement cette limite double-échelle, en particulier à l'aide de ses coefficients de Fourier.

On considère une suite $(u_\eta)_\eta \subset L^2(\mathcal{B})$ qui converge double-échelle vers $u_0 \in L^2(\mathcal{B} \times Y)$. On introduit $u^k(x)$, pour $k \in \mathbb{Z}$, les coefficients de Fourier de u_0 de sorte que

$$u_0(x, y) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} u^k(x) e^{2i\pi k y} .$$

On introduit d'autre part, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, la suite $(v_\eta^k)_\eta \subset L^2(\mathcal{B})$ définie par

$$v_\eta^k(x) := u_\eta(x) e^{-2i\pi k \frac{x}{\eta}},$$

qui est bornée dans $L^2(\mathcal{B})$. Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, il existe une sous-suite et $v^k \in L^2(\mathcal{B})$ tels que l'on ait $v_\eta^k \rightharpoonup v^k$ faiblement dans $L^2(\mathcal{B})$. Chacune de ces sous-suites dépend à priori de l'entier k . Cependant, à l'aide d'un principe de diagonalisation, on construit une nouvelle sous-suite (encore notée η) telle que

$$v_\eta^k \rightharpoonup v^k \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Lemme 2.40 *Avec les notations précédentes, les fonctions $v^k \in L^2(\mathcal{B})$ sont exactement les coefficients de Fourier de u_0 , c'est-à-dire :*

$$u^k = v^k \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

PREUVE. On pose pour $l \in \mathbb{Z}$, la fonction test $\varphi(x, y) := \rho(x) e^{-2i\pi l y}$ avec $\rho \in C_c^\infty(\mathcal{B})$. Alors

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{B} \times Y} u_0(x, y) \varphi(x, y) dx dy &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{\mathcal{B} \times Y} u^k(x) \rho(x) e^{2i\pi k y} e^{-2i\pi l y} dx dy \\ &= \int_{\mathcal{B}} u^l(x) \rho(x) dx. \end{aligned} \quad (2.39)$$

D'autre part, on a

$$\int_{\mathcal{B} \times Y} u_0(x, y) \varphi(x, y) dx dy = \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{\mathcal{B}} u_\eta(x) \varphi\left(x, \frac{x}{\eta}\right) dx,$$

et d'après les définitions de φ , v_η^l et v^l , il résulte que

$$\int_{\mathcal{B} \times Y} u_0(x, y) \varphi(x, y) dx dy = \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{\mathcal{B}} v_\eta^l(x) \rho(x) dx = \int_{\mathcal{B}} v^l(x) \rho(x) dx. \quad (2.40)$$

On déduit alors des équations (2.39) et (2.40) que $u^k = v^k$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. □

Proposition 2.41 *Soit u_η une suite de $L^2(\mathcal{B})$ qui converge double-échelle vers $u_0 \in L^2(\mathcal{B} \times Y)$.*

Alors u_η converge faiblement dans $L^2(\mathcal{B})$ vers $u(x) := \int_Y u_0(x, y) dy$. On a de plus

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \|u_\eta\|_{L^2(\mathcal{B})} \geq \|u_0\|_{L^2(\mathcal{B} \times Y)} \geq \|u\|_{L^2(\mathcal{B})}. \quad (2.41)$$

Remarque 2.42 La proposition précédente indique que la limite double-échelle u_0 contient plus d'informations que u , la limite faible dans $L^2(\mathcal{B})$. La limite u_0 contient des informations sur les oscillations de la suite u_η alors que u décrit uniquement son comportement moyen. On insiste cependant sur le fait que la limite double-échelle ne capture que les oscillations de la suite qui sont en résonance avec $\varphi(x, x/\eta)$, c'est-à-dire à l'échelle η .

PREUVE DE LA PROPOSITION 2.41. En prenant des fonctions tests $\varphi \in L^2(\mathcal{B})$ indépendantes de la variable y dans l'équation (2.35), on obtient que u_η converge vers $u(x) := \int_Y u_0(x, y) dy$. Pour prouver (2.41), on observe que

$$\int_{\mathcal{B}} \left(u_\eta(x) - \varphi\left(x, \frac{x}{\eta}\right) \right)^2 dx = \int_{\mathcal{B}} u_\eta(x)^2 dx - 2 \int_{\mathcal{B}} u_\eta(x) \varphi\left(x, \frac{x}{\eta}\right) dx + \int_{\mathcal{B}} \varphi\left(x, \frac{x}{\eta}\right)^2 dx \geq 0 . \quad (2.42)$$

En passant à la limite $\eta \rightarrow 0$, on déduit

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{\mathcal{B}} u_\eta(x)^2 dx \geq 2 \int_{\mathcal{B}} u_0(x, y) \varphi(x, y) dx dy - \int_{\mathcal{B}} \varphi(x, y)^2 dx dy .$$

Par densité, on peut considérer une suite de fonctions régulières qui converge fortement vers $u_0(x, y)$ dans $L^2(\mathcal{B} \times Y)$. On obtient

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{\mathcal{B}} u_\eta(x)^2 dx \geq \int_{\mathcal{B}} u_0(x, y)^2 dx dy .$$

D'un autre côté, on déduit la seconde relation de (2.41) simplement de la relation $u(x) := \int_Y u_0(x, y) dy$. □

Définition 2.43 On dit qu'une suite u_η de $L^2(\mathcal{B})$ converge fortement à deux échelles vers $u_0 \in L^2(\mathcal{B} \times Y)$ si

$$u_\eta \rightharpoonup u_0 \quad \text{et} \quad \lim_{\eta \rightarrow 0} \|u_\eta\|_{L^2(\mathcal{B})} = \|u_0\|_{L^2(\mathcal{B} \times Y)} .$$

et on notera $u_\eta \twoheadrightarrow u_0$.

Propriété 2.44 Soient deux suites u_η et v_η de $L^2(B)$ et deux éléments u_0 et v_0 de $L^2(B \times Y)$ tels que $u_\eta \twoheadrightarrow u_0$ et $v_\eta \twoheadrightarrow v_0$.

Alors

$$u_\eta v_\eta \twoheadrightarrow u_0 v_0 . \quad (2.43)$$

Si, de plus, u_0 est admissible alors

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{\mathcal{B}} \left| u_\eta - u_0\left(x, \frac{x}{\eta}\right) \right|^2 = 0 .$$

Remarque 2.45 En considérant des fonctions tests indépendantes de y dans la définition (2.35), la propriété (2.43) implique en particulier que

$$u_\eta v_\eta \rightharpoonup \int_Y u_0 v_0 dy \quad \text{au sens des distributions.}$$

Comportement par rapport aux opérateurs différentiels.

Proposition 2.46 Soit $u_\eta \in L^2(\mathcal{B})$ une suite qui converge double-échelle vers $u_0 \in L^2(\mathcal{B}; W_\#^{1,2}(Y))$.

- Si la suite $(\frac{\partial}{\partial x_i} u_\eta)$ est bornée dans $L^2(\mathcal{B})$, alors

$$\frac{\partial}{\partial y_i} u_0(x, y) := 0 . \quad (2.44)$$

- Si (u_η) est une suite bornée dans $W^{1,2}(B)$, alors il existe $u_1 \in L^2(\mathcal{B}; W_\#^{1,2}(Y))$ tel que

$$\nabla u_\eta \rightharpoonup \nabla u + \nabla_y u_1 , \quad (2.45)$$

où u est la limite forte de la suite u_η dans $L^2(\mathcal{B})$.

- Si la suite $(\mathbf{rot} u_\eta)$ est bornée dans $L^2(\mathcal{B}; \mathbb{C}^3)$, alors il existe $\mathbf{u}_1 \in L^2(\mathcal{B}; W_\#^{1,2}(Y; \mathbb{C}^3))$ tel que

$$\mathbf{rot} u_\eta \rightharpoonup \mathbf{rot} u_0 + \mathbf{rot}_y \mathbf{u}_1 . \quad (2.46)$$

- Si la suite $(\eta \nabla u_\eta)$ est bornée dans $L^2(\mathcal{B})$, alors

$$\eta \nabla u_\eta \rightharpoonup \nabla_y u_0 . \quad (2.47)$$

- Si la suite $(\eta \mathbf{rot} u_\eta)$ (resp. $(\eta \operatorname{div} u_\eta)_\eta$) est bornée dans $L^2(\mathcal{B}; \mathbb{C}^3)$, alors

$$\eta \mathbf{rot} u_\eta \rightharpoonup \mathbf{rot}_y u_0 \quad (\text{resp.} \quad \eta \operatorname{div} u_\eta \rightharpoonup \operatorname{div}_y u_0) . \quad (2.48)$$

PREUVE. Montrons la relation (2.44).

Soit $\varphi \in C_c^\infty(\mathcal{B}; C_\#(Y))$ une fonction test. On déduit d'une intégration par parties que

$$\begin{aligned} \eta \int_{\mathcal{B}} \frac{\partial}{\partial x_i} u_\eta(x) \varphi\left(x, \frac{x}{\eta}\right) dx &= -\eta \int_{\mathcal{B}} u_\eta(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi\left(x, \frac{x}{\eta}\right) dx \\ &\quad - \int_{\mathcal{B}} u_\eta(x) \frac{\partial}{\partial y_i} \varphi\left(x, \frac{x}{\eta}\right) dx . \end{aligned} \quad (2.49)$$

Puisque les suites (u_η) et $(\frac{\partial}{\partial x_i} u_\eta)$ sont bornées dans $L^2(\mathcal{B})$, on peut passer à la limite et obtenir

$$\int_{\mathcal{B} \times Y} u_0(x) \frac{\partial}{\partial y_i} \varphi(x, y) dx dy = 0 ,$$

qui n'est autre que la relation (2.44).

Montrons la relation (2.45).

D'après la propriété (2.44), on sait que la limite u_0 est constante par rapport à la variable y . On note alors $u = u_0$. Quitte à extraire une sous-suite, on introduit $\mathbf{v}_0 \in L^2(\mathcal{B} \times Y; \mathbb{C}^3)$ une limite double-échelle de ∇u_η . Soit $\varphi \in C_c^\infty(\mathcal{B}; C_\#(Y))$ une fonction test à divergence nulle par rapport à la variable y . On déduit d'une intégration par parties que

$$\int_{\mathcal{B}} \nabla u_\eta(x) \varphi\left(x, \frac{x}{\eta}\right) dx = - \int_{\mathcal{B}} u_\eta(x) \operatorname{div}_x \varphi\left(x, \frac{x}{\eta}\right) dx .$$

En passant à la limite double-échelle, on obtient

$$\int_{\mathcal{B} \times Y} \mathbf{v}_0 \cdot \boldsymbol{\varphi} \, dx \, dy = - \int_{\mathcal{B} \times Y} u \operatorname{div}_x \boldsymbol{\varphi} \, dx \, dy . \quad (2.50)$$

Il en résulte que la fonction $\mathbf{v}_0 - \nabla_x u_0$ est orthogonale aux fonctions à divergence nulle dans $L^2(\mathcal{B} \times Y)$. Ceci entraîne l'existence de $u_1 \in L^2(\mathcal{B}, W_{\#}^{1,2}(Y))$ et de $\mathbf{z} \in \mathbb{C}$ tels que

$$v_0(x, y) = \nabla u(x) + \nabla_y u_1(x, y) + \mathbf{z} .$$

On termine la démonstration en remarquant que $\mathbf{z} = \int_Y v_0(x, y) - \nabla u(x) = 0$ (résultant de (2.50) avec $\boldsymbol{\varphi}$ constant par rapport à la variable y).

Les démonstrations de (2.46), (2.47) et (2.48) reprennent les mêmes types d'arguments. \square

2.3 Exemples de limites double-échelle

Nous donnons dans cette partie quelques cas particuliers de calculs de limites double-échelle. Ces exemples sont donnés sous forme de propositions.

On considère la partition Y_{η}^k donnée dans (2.4), l'ensemble J_{η} défini dans (2.5) et la fonction en escalier introduite dans (2.6).

L'inégalité de Poincaré (2.7) entraîne aisément, pour tout u dans $W^{1,2}(\mathcal{B})$,

$$[u]_{\eta} \rightarrow u \quad \text{dans} \quad L^2(\mathcal{B}) , \quad (2.51)$$

$$\frac{u - [u]_{\eta}}{\eta} \quad \text{est borné dans} \quad L^2(\mathcal{B}) . \quad (2.52)$$

On cherche dans cet exemple à déterminer la limite double-échelle de $\frac{u - [u]_{\eta}}{\eta}$ dont l'existence est assurée par le théorème de compacité 2.39.

Proposition 2.47 *Soient $u \in W^{1,2}(\mathcal{B})$ et $[u]_{\eta}$ la fonction en escalier introduite en (2.6). Alors on a la convergence suivante*

$$\frac{u - [u]_{\eta}}{\eta} \rightharpoonup \nabla u(x) \cdot (\mathbf{y} - [\mathbf{y}]_1) . \quad (2.53)$$

On précise que la fonction $[\mathbf{y}]_1$, dans la proposition précédente, est donnée par la définition (2.6) lorsque η vaut un. Il est facile de voir que $[\mathbf{y}]_1 = \mathbf{k}$ dans chaque cellule $Y_1^k = Y + \mathbf{k}$. La fonction $(\mathbf{y} - [\mathbf{y}]_1)$ est ainsi Y -périodique.

PREUVE.

On commence par montrer que pour tout $u \in W^{1,2}(\mathcal{B})$, on a

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{\mathcal{B}} \left| \frac{u(x) - [u]_{\eta}(x)}{\eta} - \nabla u(x) \cdot \left(\frac{x - [x]_{\eta}}{\eta} \right) \right|^2 dx = 0 . \quad (2.54)$$

Par densité, il suffit de vérifier la relation précédente pour des fonctions u régulières. On fixe $u \in C^1(\mathcal{B})$. Grâce à une approximation de Taylor de u , on a, pour tout $k \in J_\eta$ et $(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \in \eta(Y + k) = Y_\eta^k$,

$$u(\mathbf{z}) = u(\mathbf{x}) + \nabla u(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{z} - \mathbf{x}) + o(\eta) , \quad (2.55)$$

où $o(\eta)$ est tel que $o(\eta)/\eta \rightarrow 0$. On moyenne sur Y_η^k par rapport à \mathbf{z} et on divise par η pour avoir

$$\frac{1}{\eta} \left(u(\mathbf{x}) - \int_{Y_\eta^k} u(\mathbf{z}) d\mathbf{z} \right) = \frac{1}{\eta} \nabla u(\mathbf{x}) \cdot \left(\mathbf{x} - \int_{Y_\eta^k} \mathbf{z} d\mathbf{z} \right) + \frac{o(\eta)}{\eta} .$$

La relation précédente est vérifiée pour tout $\mathbf{x} \in Y_\eta^k$. Ainsi, en multipliant par la fonction indicatrice de Y_η^k puis en prenant la somme sur $k \in J_\eta$, on justifie que

$$\frac{u - [u]_\eta(\mathbf{x})}{\eta} - \nabla u(\mathbf{x}) \cdot \left(\frac{\mathbf{x} - [\mathbf{x}]_\eta}{\eta} \right) = \frac{o(\eta)}{\eta} ,$$

ce qui prouve la convergence (2.54).

Pour terminer la démonstration, on fixe une fonction test $\psi \in C_c^\infty(\mathcal{B}; C_\#^\infty(Y))$. On a

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{B}} \frac{u - [u]_\eta}{\eta}(x) \psi\left(x, \frac{x}{\eta}\right) dx &= \int_{\mathcal{B}} \left(\frac{u - [u]_\eta}{\eta}(x) - \nabla u(x) \cdot \left(\frac{\mathbf{x} - [\mathbf{x}]_\eta}{\eta} \right) \right) \psi\left(x, \frac{x}{\eta}\right) dx \\ &\quad + \int_{\mathcal{B}} \nabla u(x) \cdot \left(\frac{\mathbf{x} - [\mathbf{x}]_\eta}{\eta} \right) \psi\left(x, \frac{x}{\eta}\right) dx , \end{aligned} \quad (2.56)$$

où le premier terme du second membre converge vers zéro d'après la relation (2.54). D'autre part, on peut passer à la limite dans le second terme pour obtenir

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{\mathcal{B}} \frac{u - [u]_\eta}{\eta} \psi\left(x, \frac{x}{\eta}\right) dx = \int_{\mathcal{B} \times Y} \nabla u(x) \cdot (\mathbf{y} - [\mathbf{y}]_1) \psi(x, y) dx dy .$$

La relation précédente est exactement la convergence (2.53). □

Proposition 2.48 *Soient (u_η) une suite faiblement convergente vers u dans $W^{1,2}(\mathcal{B})$ et $[u_\eta]_\eta$ la fonction constante par morceaux introduite dans (2.6).*

Alors, la suite $(\frac{u_\eta - [u_\eta]_\eta}{\eta})$ est bornée dans $L^2(\mathcal{B})$ et, quitte à extraire une sous-suite, il existe une fonction $u_1 \in L^2(\mathcal{B}; W_\#^{1,2}(Y))$ telle que

$$\nabla u_\eta \rightharpoonup \nabla_x u(x) + \nabla_y u_1(x, y) , \quad (2.57)$$

$$\frac{u_\eta - [u_\eta]_\eta}{\eta} \rightharpoonup u_1(x, y) + \nabla_x u(x) \cdot (\mathbf{y} - [\mathbf{y}]_1) . \quad (2.58)$$

où $[\mathbf{y}]_1$ est le centre de la cellule Y_1^k contenant \mathbf{y} .

Remarque 2.49 La limite double-échelle de $\frac{u_\eta - [u_\eta]_\eta}{\eta}$ est discontinue à la traversée des faces de Y dès que $\nabla u(x)$ est différent de zéro.

PREUVE DE LA PROPOSITION 2.48.

La suite u_η étant bornée dans $W^{1,2}(\mathcal{B})$, il résulte facilement de l'inégalité de Poincaré (2.7) que $(\frac{u_\eta - [u_\eta]_\eta}{\eta})$ est bornée dans $L^2(\mathcal{B})$. Quitte à extraire une sous-suite, on note alors $v_0 \in L^2(\mathcal{B} \times Y)$ la limite double-échelle de $\frac{u_\eta - [u_\eta]_\eta}{\eta}$.

On considère d'autre part une fonction définie à une constante près $u_1 \in L^2(\mathcal{B}; W_{\#}^{1,2}(Y))$ vérifiant

$$\nabla u_\eta \rightharpoonup \nabla_x u(x) + \nabla_y u_1(x, y) ,$$

dont l'existence est déduite de la proposition (2.45).

Le reste de la preuve consiste à mettre en relation les fonctions u_1 et v_0 .

On commence, dans une première étape, par considérer le cas où la limite $u = 0$. On fixe une fonction test $\varphi(x, y) := \rho(x)\theta(y)$ avec $\rho \in C_c^\infty(\mathcal{B})$ et $\theta \in C_{\#}^\infty(Y; \mathbb{C}^3)$. On déduit d'une intégration par parties que

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{B}} \nabla u_\eta(x) \rho(x) \cdot \theta\left(\frac{x}{\eta}\right) dx &= - \int_{\mathcal{B}} u_\eta(x) \nabla \rho(x) \cdot \theta\left(\frac{x}{\eta}\right) dx \\ &\quad - \frac{1}{\eta} \int_{\mathcal{B}} u_\eta(x) \rho(x) \operatorname{div} \theta\left(\frac{x}{\eta}\right) dx . \end{aligned} \quad (2.59)$$

On décompose le second terme du membre de droite pour avoir

$$\begin{aligned} \frac{1}{\eta} \int_{\mathcal{B}} u_\eta(x) \rho(x) \operatorname{div} \theta\left(\frac{x}{\eta}\right) dx &= \int \left(\frac{u_\eta(x) - [u_\eta]_\eta}{\eta} \right) \rho(x) \operatorname{div} \theta\left(\frac{x}{\eta}\right) dx \\ &\quad + \int [u_\eta]_\eta(x) \left(\frac{\rho(x) - [\rho]_\eta}{\eta} \right) \operatorname{div} \theta\left(\frac{x}{\eta}\right) dx + \frac{1}{\eta} \int [u_\eta]_\eta(x) [\rho]_\eta \operatorname{div} \theta\left(\frac{x}{\eta}\right) dx \\ &= I_\eta^1 + I_\eta^2 + I_\eta^3 . \end{aligned}$$

L'intégrale I_η^3 est égale à zéro : en effet, les fonctions $[u_\eta]_\eta$ et $[\rho]_\eta$ sont constantes sur chaque cellule Y_η^k où la moyenne de $\operatorname{div} \theta$ est nulle.

On peut passer à la limite double-échelle dans l'intégrale I_η^2 . En effet, la fonction $[u_\eta]_\eta$ converge fortement dans $L^2(\mathcal{B})$ vers $u = 0$, la fonction $\frac{\rho(x) - [\rho]_\eta}{\eta}$ est bornée dans $L^2(\mathcal{B})$ d'après l'inégalité de Poincaré (donc converge double-échelle) et la fonction $\operatorname{div} \theta\left(\frac{x}{\eta}\right)$ est une fonction test pour la définition de la convergence double-échelle. Ainsi, puisque $u = 0$, on a $I_\eta^2 \rightarrow 0$.

L'équation (2.59) devient alors

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{B}} \rho(x) \nabla u_\eta(x) \cdot \theta\left(\frac{x}{\eta}\right) dx &= \int_{\mathcal{B}} u_\eta(x) \nabla \rho(x) \cdot \theta\left(\frac{x}{\eta}\right) dx \\ &\quad + \int \left(\frac{u_\eta(x) - [u_\eta]_\eta}{\eta} \right) \rho(x) \operatorname{div} \theta\left(\frac{x}{\eta}\right) dx + \varepsilon(\eta) , \end{aligned} \quad (2.60)$$

où $\varepsilon(\eta) \rightarrow 0$.

En passant à la limite dans l'équation précédente, on obtient, puisque $u = 0$ et par définition de v_0 ,

$$\int_{\mathcal{B} \times Y} \rho(x) \nabla_y u_1(x, y) \cdot \boldsymbol{\theta}(y) dx = \int_{\mathcal{B} \times Y} v_0(x, y) \rho(x) \operatorname{div} \boldsymbol{\theta}(y) dx \quad . \quad (2.61)$$

En effectuant une intégration par parties et en considérant des fonctions test $\boldsymbol{\theta}$ à support compact dans Y , on obtient

$$\nabla_y u_1(x, y) = \nabla_y v_0(x, y) \quad \text{dans } \mathcal{B} \times Y \text{ .}$$

Les deux fonctions u_1 et v_0 sont donc égales à une constante près. Ainsi, parmi les fonctions u_1 vérifiant (2.57), il en existe une exactement égale à v_0 . Cela justifie la relation (2.58) dans le cas où $u = 0$.

On se place à présent dans le cas où $u \neq 0$.

On fixe $w_\eta := u_\eta - u$ et on déduit de 2.57 que

$$\nabla w_\eta = \nabla(u_\eta - u) \rightsquigarrow \nabla u + \nabla_y u_1 - \nabla u = \nabla_y u_1 \text{ .} \quad (2.62)$$

D'autre part, grâce à la relation (2.53),

$$\frac{w_\eta - [w_\eta]_\eta}{\eta} = \frac{u_\eta - [u_\eta]_\eta}{\eta} - \frac{u - [u]_\eta}{\eta} \rightsquigarrow w_0(x, y) := v_0(x, y) - \nabla u \cdot (y - [y]_1) \text{ .} \quad (2.63)$$

Puisque w_η converge faiblement vers 0 dans $L^2(\mathcal{B})$, on peut appliquer la proposition 2.48 à w_η . On obtient alors

$$w_0(x, y) = u_1(x, y) \text{ ,}$$

qui entraîne directement (2.58) du fait de la relation (2.63)

□

Remarque 2.50 La proposition se généralise à des fonctions vectorielles et la relation (2.57) peut être particularisée dans le cas des opérateurs divergence et rotationnel. On obtient dans ce cadre l'existence de u_1 tel que les relations (2.57) et (2.58) ont lieu en remplaçant l'opérateur ∇ par **rot** ou **div** (la fonction u_1 diffère dans chacun des cas).

3 Nanofibres métalliques et tenseurs de permittivité réalisables

Sommaire

Introduction	51
1 Homogénéisation de nano-fibres métalliques (cas capacitair)	52
1.1 Description de la structure	52
1.2 Analyse asymptotique	55
1.3 Loi effective non locale	57
2 Loi effective obtenue par homogénéisation réitérée	59
2.1 Description de la structure	59
2.2 Résultat principal et simulations numériques	61
2.3 Estimations et résultats préliminaires	66
2.4 Analyse double-échelle	68
2.5 Etude du problème de micro- résonances	71
2.6 Démonstration du théorème principal	74
2.7 Propriétés de la résonance fondamentale	78
3 Cas de nano-fibres orientées dans les trois directions	81
3.1 Variante avec les directions alternées	82
3.2 Variante avec les fibres croisées	84
3.3 Éléments de démonstration	89
3.4 Permittivités effectives atteignables par homogénéisation	92
Conclusion	93

Introduction

L'intérêt de réaliser en pratique des structures diffractantes, dont la permittivité effective a des valeurs propres négatives, a été évoqué dans le chapitre 1. En fait, l'obtention de cristaux photoniques à permittivité négative (en dessous d'une fréquence de coupure contrôlée) a été un des premiers résultats spectaculaires concernant les métamatériaux dans le domaine de l'optique [43]. La permittivité effective était de la forme

$$\epsilon^{\text{eff}}(\omega) = 1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \quad (3.1)$$

où ω_c est la fréquence de coupure.

Ces résultats ont trouvé leurs premières justifications en 1997 [25] sous une hypothèse simplificatrice permettant une analyse purement bidimensionnelle : la structure envisagée (fibres parallèles infinies dans une direction) est invariante dans la direction \mathbf{e}_3 et le champ électrique est supposé parallèle à \mathbf{e}_3 .

Dans la première partie de ce chapitre (section 1), nous montrons que la généralisation de ces résultats au cas de fibres finies n'est pas possible en tant que telle. En effet, il s'avère que la loi effective obtenue est *non locale* et de ce fait, l'affirmation communément admise qu'un réseau de fibres métalliques finies permet l'obtention d'un métamatériau de permittivité 3D donné par une loi effective de type (3.1) est erronée.

Dans la seconde partie du chapitre, nous proposons une structure nouvelle, obtenue par homogénéisation réitérée, pour laquelle il est possible de justifier une loi effective *locale* $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{eff}}(\omega)$. Ce tenseur de permittivité peut avoir des valeurs propres négatives et de grands modules sur des intervalles de fréquences appropriés. Les fibres métalliques sont ici disposées dans une seule direction.

L'extension au cas de directions alternées est traitée de manière similaire dans la section 3. Nous en déduisons notamment que, à fréquence donnée, toutes les matrices $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{eff}}$ réelles symétriques sont atteignables par homogénéisation.

Ce résultat a permis (cf Milton [34]) de répondre à une question dont le cadre dépasse l'ambition de ce chapitre : quels sont les couples de tenseurs $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{eff}}(\omega)$, $\boldsymbol{\mu}^{\text{eff}}(\omega)$ atteignables par homogénéisation ?

On note cependant que ce modèle n'inclut pas le cas d'une activité magnétique artificielle comme c'est le cas dans [11, 20, 23, 39] et comme nous le présenterons dans les chapitre 4 et 5.

1 Homogénéisation de nano-fibres métalliques (cas capacitair)

Nous décrivons dans cette section des résultats tirés de [12].

1.1 Description de la structure

On considère une structure formée de fibres parallèles à la direction \mathbf{e}_3 et de longueurs *finies* contenues dans un domaine *borné* de \mathbb{R}^3 , que l'on représente dans la figure 3.1. Ces fibres sont constituées d'un métal très conducteur et sont disposées périodiquement dans les direction \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 . La période, notée η , sera le petit paramètre de notre analyse asymptotique.

Description géométrique On note $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^3$ l'obstacle diffractant *borné* contenant les fibres. Cet obstacle est un cylindre pour lequel on note $L \in \mathbb{R}^+$ sa hauteur, $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ sa section verticale et \mathcal{D}_L^\pm ses bases. Il vient alors

$$\mathcal{B} := \mathcal{D} \times \left] -\frac{L}{2}, \frac{L}{2} \right[\quad , \quad \mathcal{D}_L^\pm := \mathcal{D} \times \left\{ \pm \frac{L}{2} \right\} .$$

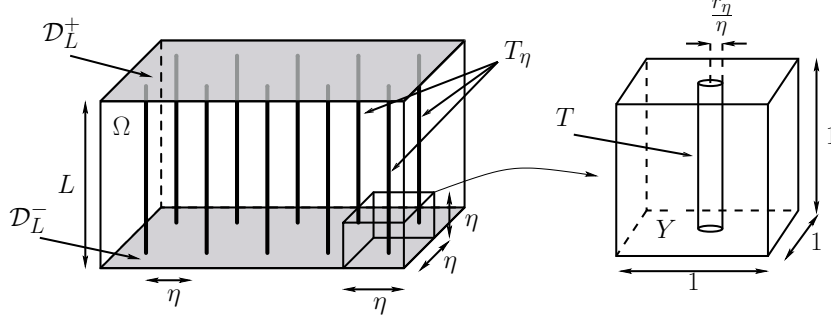


FIGURE 3.1: Le réseau de nano-fibres.

On introduit l'ensemble $T_\eta \subset \mathcal{B}$ représentant la zone occupée par les fibres. Sa section horizontale $x_3 = s$ pour $|s| < L/2$ consiste en un réseau périodique (de période η) de disques de rayons r_η .

On considère la *cellule de base* $Y :=]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[^3 \subset \mathbb{R}^3$ qui servira de cube de référence et l'ensemble S_η représentant une fibre élémentaire dans Y donnée par

$$S_\eta := \left\{ (y_1, y_2, y_3) \in Y, \sqrt{y_1^2 + y_2^2} \leq \frac{r_\eta}{\eta} \right\} .$$

L'ensemble T_η s'écrit alors

$$T_\eta := \bigcup_{i \in I_\eta} \eta(i + S_\eta) \quad , \quad I_\eta = \{i \in \mathbb{Z}^3, \eta(i + S_\eta) \subset \mathcal{B}\} . \quad (3.2)$$

Le taux de remplissage des fibres est défini par le réel $\theta_\eta := \frac{\pi r_\eta^2}{\eta^2}$. Dans notre modèle, il est important que ce taux tende vers zéro lorsque la période $\eta \rightarrow 0$ (i.e. $r_\eta \ll \eta$). Le cylindre élémentaire S_η se concentre alors lorsque $\eta \rightarrow 0$ et devient le segment S_0 défini par

$$S_0 = \left\{ (0, 0, y_3) : |y_3| \leq \frac{1}{2} \right\} \subset Y . \quad (3.3)$$

Permittivité relative.

Bien que plusieurs variantes soient possibles, nous considérons ici que les fibres sont plongées dans le vide. La permittivité des fibres est celle d'un métal ohmique de grande conductivité que l'on décrira par le paramètre réel σ_η .

Ainsi la permittivité en tout point de l'espace est entièrement décrite à l'aide de la fonction ε_η définie par ,

$$\varepsilon_\eta := \begin{cases} 1 & \text{dans } \mathbb{R}^3 \setminus T_\eta \\ 1 + i\sigma_\eta & \text{dans } T_\eta \end{cases} . \quad (3.4)$$

Dans notre modèle, la conductivité σ_η tend vers l'infini lorsque $\eta \rightarrow 0$.

Problème pré-homogénéisé.

La structure est illuminée par une onde incidente plane monochromatique $(\mathbf{E}^{\text{inc}}, \mathbf{H}^{\text{inc}})$ fixée, de fréquence ω et indépendante de η (dépendance harmonique en temps $(e^{-i\omega t})$).

Pour tout $\eta > 0$, le champ électromagnétique total $(\mathbf{E}_\eta, \mathbf{H}_\eta)$ vérifie les équations de Maxwell données au sens des distributions par

$$\begin{cases} \text{rot } \mathbf{E}_\eta = i\omega\mu_0\mathbf{H}_\eta \\ \text{rot } \mathbf{H}_\eta = -i\omega\varepsilon_0\varepsilon_\eta\mathbf{E}_\eta \end{cases}, \quad (3.5)$$

où ε_0 et μ_0 représentent respectivement les permittivité et perméabilité du vide.

Le champ diffracté $(\mathbf{E}_\eta^d, \mathbf{H}_\eta^d) := (\mathbf{E}_\eta - \mathbf{E}^{\text{inc}}, \mathbf{H}_\eta - \mathbf{H}^{\text{inc}})$ satisfait de plus les conditions de rayonnement à l'infini de Silver-Müller :

$$(\mathbf{E}_\eta^d, \mathbf{H}_\eta^d) = O\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|}\right), \quad \omega\varepsilon_0\left(\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} \wedge \mathbf{E}_\eta^d\right) - k_0\mathbf{H}_\eta^d = o\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|}\right). \quad (3.6)$$

Remarque 3.1 Le fait que $\eta \rightarrow 0$ nous place dans le cas où la longueur d'onde $\lambda := \frac{2\pi}{\omega}$ est grande devant la période η ; on parle alors de régime quasi-statique. Il est essentiel de pouvoir répondre à la question suivante :

A t-on le droit de remplacer la structure diffractante par un milieu *homogène* occupant le domaine \mathcal{B} ?

Nous allons voir que la réponse à cette question est négative.

Choix des facteurs d'échelles

Nous avons indiqué que la fraction volumique $\theta_\eta = \frac{\pi r_\eta}{\eta^2}$ tend vers zéro alors que la conductivité des fibres σ_η tend vers l'infini. Il est maintenant nécessaire d'être plus précis :

Les vitesses de convergences sont régies par les deux conditions suivantes :

$$\frac{1}{\eta^2 |\log r_\eta|} \rightarrow \gamma \quad \text{avec } \gamma \in]0, +\infty], \quad (3.7)$$

$$\sigma_\eta \theta_\eta \rightarrow \kappa \quad \text{avec } \kappa \in]0, +\infty]. \quad (3.8)$$

La condition (3.7) correspond à ce que nous appellerons "taille capacitaire". En se référant à la capacité d'un disque de rayon r_η dans \mathbb{R}^2 qui est donné par $\frac{2\pi}{|\ln(r_\eta)|}$ (voir par exemple [14]), il apparaît en effet que la capacité de l'ensemble T_η dans \mathbb{R}^3 est équivalente à $\frac{2\pi}{\eta^2 |\ln(r_\eta)|} |\mathcal{B}|$. Ainsi, γ représente la limite de la capacité moyenne des fibres T_η par unité de volume.

Par ailleurs, la conductivité dans $\mathcal{B} \setminus T_\eta$ étant nulle (zone contenant du vide), le paramètre κ_η représente simplement la conductivité moyenne par unité de volume sur l'ensemble \mathcal{B} .

Le cas $\kappa = +\infty$ correspondra à priori à une modélisation dans laquelle les fibres constituant la structure sont infiniment conductrices dès le départ.

Ce point présuppose évidemment un principe de commutativité des passages à la limite

sur lequel nous reviendrons.

Dans la suite de la section, nous allons étudier le comportement asymptotique des champs \mathbf{E}_η et \mathbf{H}_η lorsque la période η tend vers zéro sous les conditions (3.7) et (3.8).

1.2 Analyse asymptotique

Afin de présenter l'analyse limite du système (3.5), il est nécessaire d'introduire le champ de vecteur \mathbf{J}_η donné par

$$\mathbf{J}_\eta := \sigma_\eta \mathbf{E}_\eta 1_{T_\eta} , \quad (3.9)$$

de telle sorte que le vecteur déplacement $\mathbf{D}_\eta := \varepsilon_\eta \mathbf{E}_\eta$ soit décomposé en $(\mathbf{E}_\eta + i\mathbf{J}_\eta)$. Ainsi, la seconde équation de (3.5) devient :

$$\mathbf{rot} \mathbf{H}_\eta = -i\omega\varepsilon_0(\mathbf{E}_\eta + i\mathbf{J}_\eta) . \quad (3.10)$$

On introduit $B_R := \{x \in \mathbb{R}^3, \|x\| \leq R\}$ une boule de référence telle que $\mathcal{B} \subset\subset B_R$. Il est montré dans [12] que les estimations suivantes sont satisfaites

$$\|\mathbf{E}_\eta\|_{L^2(B_R)} < C \quad , \quad \|\mathbf{H}_\eta\|_{L^2(B_R)} < C \quad \text{et} \quad \|\mathbf{J}_\eta\|_{L^1(B_R)} < C , \quad (3.11)$$

où $C > 0$ ne dépend pas de η .

Remarque 3.2 Les deux premières relations de (3.11) sont démontrées à *posteriori* (i.e. en utilisant le problème homogénéisé). En effet, si on les *suppose vraies à priori*, on est capable de faire l'étude asymptotique qui conduit au problème limite (3.17). Dans un second temps, on peut montrer par l'absurde, en utilisant l'unicité de la solution de (3.17), que ces relations sont effectivement vérifiées.

Un raisonnement similaire sera utilisé dans la section 2 ainsi que dans les chapitres 4 et 5.

Les estimations (3.11) nous permettent d'introduire les champs $(\mathbf{E}, \mathbf{H}) \in (L^2(B_R))^2$ et $\mathbf{J} \in \mathcal{M}_b(B_R)$ tels que

$$\mathbf{E}_\eta \rightharpoonup \mathbf{E}, \quad \mathbf{H}_\eta \rightharpoonup \mathbf{H} \quad \text{dans} \quad L^2(B_R) \quad \text{et} \quad \mathbf{J}_\eta \xrightarrow{*} \mathbf{J} \quad \text{dans} \quad \mathcal{M}_b(B_R) , \quad (3.12)$$

où $\mathcal{M}_b(B_R)$ représente l'espace des mesures borelliennes bornées sur B_R . On précise que les convergences précédentes n'ont lieu qu'à une sous-suite près que nous notons encore η .

En passant à la limite dans le système (3.5), nous obtenons que $(\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{J})$ vérifie, au sens des distributions,

$$\begin{cases} \mathbf{rot} \mathbf{E} = i\omega\mu_0 \mathbf{H} , \\ \mathbf{rot} \mathbf{H} = -i\omega\varepsilon_0(\mathbf{E} + i\mathbf{J}) . \end{cases} \quad (3.13)$$

Nous allons obtenir des précisions sur \mathbf{J} en observant les oscillations rapides de \mathbf{J}_η grâce à des outils de convergence double-échelle (cf chapitre 2). Une étude précise, donnée dans [12], permet de montrer l'existence de \mathbf{J}_0 , limite double-échelle de \mathbf{J}_η , et se décomposant sous la forme

$$\mathbf{J}_0 = \mathbf{u}_0(x, y) + \mathbf{j}_0(x, y_3)\delta_{S_0}(y) ,$$

avec $\mathbf{u}_0 \in L^2(B_R \times Y)$, $\mathbf{j}_0 \in L^2(B_R \times S_0)$ et δ_{S_0} la mesure unidimensionnelle restreinte au segment S_0 .

Remarque 3.3 Il n'est pas surprenant d'obtenir une limite double-échelle ayant une partie mesure puisque la suite (\mathbf{J}_η) n'est pas bornée dans $L^2(B_R)$ mais seulement dans $L^1(B_R)$.

Une étude plus fine de cette limite \mathbf{J}_0 , montre qu'elle est à support dans S_0 et qu'elle vérifie $\operatorname{div}_y \mathbf{J}_0(x, \cdot) = 0$ dans $B_R \times Y$. Ces deux points impliquent que \mathbf{J}_0 est vertical et se réduit à

$$\mathbf{J}_0 = j(x) \delta_{S_0} \mathbf{e}_3 , \quad (3.14)$$

où $j \in L^2(\mathcal{B})$.

On peut lier \mathbf{J} et \mathbf{J}_0 en utilisant la relation classique (cf chapitre 2) $\mathbf{J} = \int_Y \mathbf{J}_0 dy$. Le système (3.13) devient alors

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{E} = i\omega\mu_0 \mathbf{H}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} = -i\omega\varepsilon_0(\mathbf{E} + i j \mathbf{e}_3) \end{cases} . \quad (3.15)$$

Le champ macroscopique résultant $j(x)\mathbf{e}_3$ peut être interprété comme étant une densité volumique de courant de déplacement dans l'obstacle \mathcal{B} . La possibilité que ce courant j soit non nul montre que l'effet des fibres peut rester présent malgré leur faible taux de remplissage.

Pour clore le système (3.15), nous avons besoin d'une relation décrivant précisément comment le courant $j(x)$ est induit par le champ macroscopique \mathbf{E} . Cette étude délicate est traitée dans [12] et conduit au problème de Sturm-Liouville suivant

$$\frac{\partial^2 j}{\partial x_3^2} + \left(k_0^2 + \frac{2i\pi\gamma}{\kappa}\right)j = 2i\pi\gamma E_3 \quad \text{dans } \mathcal{B} \quad , \quad \frac{\partial j}{\partial x_3} = 0 \quad \text{sur } \mathcal{D}_L^+ \cup \mathcal{D}_L^- . \quad (3.16)$$

Notons que la condition de Neumann dans (3.16) est assez inattendue. En effet, si les fibres infiniment fines sont assimilées à des antennes, la théorie classique conduirait à adopter une condition de Dirichlet homogène sur $\mathcal{D}_L^+ \cup \mathcal{D}_L^-$.

Remarque 3.4 Le fait que l'on obtienne un "courant de déplacement" non nul aux extrémités des fibres a une conséquence : d'après la seconde équation de (3.15), on a $\operatorname{div}(\mathbf{E} + i j \mathbf{e}_3) = 0$ dans \mathbb{R}^3 ce qui engendre un saut de la composante E_3 du champ électrique à la traversée de \mathcal{D}_L^+ et \mathcal{D}_L^- . Cela peut être interprété comme des densités de charges concentrées sur les bases du cylindre décrivant l'obstacle.

1.3 Loi effective non locale

Les équations (3.15) et (3.16) déterminent la loi effective de la structure. On donne le résultat d'homogénéisation, dans le théorème suivant.

Théorème 3.5 *Soit κ et γ donnés par (3.8) et (3.7) respectivement. Alors, la convergence suivante a lieu lorsque $\eta \rightarrow 0$:*

$$(\mathbf{E}_\eta, \mathbf{H}_\eta) \rightharpoonup (\mathbf{E}, \mathbf{H}) \quad \text{dans } L^2_{loc}(\mathbb{R}^3) \quad , \quad \mathbf{J}_\eta \xrightarrow{*} j(x)\mathbf{e}_3 \quad \text{dans } (L^1(\mathcal{B}))^3 \quad ,$$

où $\mathbf{E}, \mathbf{H}, j$ sont les uniques solutions (au sens des distributions) du système

$$\left\{ \begin{array}{lll} \mathbf{rot} \mathbf{E} & = & i\omega\mu_0\mathbf{H} & \text{dans } \mathbb{R}^3 \\ \mathbf{rot} \mathbf{H} & = & -i\omega\varepsilon_0(\mathbf{E} + ij1_{\mathcal{B}}\mathbf{e}_3) & \text{dans } \mathbb{R}^3 \\ \frac{\partial^2 j}{\partial x_3^2} + (k_0^2 + \frac{2i\pi\gamma}{\kappa})j & = & 2i\pi\gamma E_3 & \text{dans } \mathcal{B} \\ \frac{\partial j}{\partial x_3} & = & 0 & \text{sur } \mathcal{D}_L^+ \cup \mathcal{D}_L^- \\ (\mathbf{E} - \mathbf{E}^i; \mathbf{H} - \mathbf{H}^i) & & \text{vérifie les conditions (3.6)} & \end{array} \right. \quad (3.17)$$

On remarque que le système (3.17) ne se présente pas sous la forme classique des équations de Maxwell du fait de la présence de la variable j . En introduisant le noyau de Neumann associé au problème (3.16), on peut mettre la deuxième équation de (3.17) sous la forme $\mathbf{rot} \mathbf{H} = -i\omega\mathbf{D}$ où

$$\mathbf{D}(x) = \varepsilon_0 \left(\mathbf{E}(x) - 2\pi\gamma\mathbf{e}_3 \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} g(x_3, s)E_3(x_1, x_2, s) ds \right) .$$

avec g le noyau associé à (3.16) donné pour $K := k_0^2 + \frac{2i\pi\gamma}{\kappa}$ par

$$g(t, s) = \frac{1}{K \sin(KL)} \cos \left(K \left(\min(t, s) + \frac{L}{2} \right) \right) \cos \left(K \left(\max(t, s) - \frac{L}{2} \right) \right) .$$

On remarque que le champ de déplacement \mathbf{D} est induit en chaque point $x \in \mathcal{B}$ par les valeurs du champ électrique \mathbf{E} sur le segment $\{(x_1, x_2, s), |s| \leq L/2\}$. Cette dépendance indique que la loi (3.17) est non locale et en conséquence que le milieu effectif ne peut pas être caractérisé par un tenseur de permittivité effectif.

Remarque 3.6 Le caractère non local de la loi (3.17) dépend à priori des valeurs de κ et γ . Il s'avère en réalité qu'aucun couple $(\kappa, \gamma) \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^2$ ne peut la rendre locale.

Cas limite lorsque $L \rightarrow \infty$. Dans le cas où la longueur des fibres est infinie, une simplification apparaît : par transformé de Fourier par rapport à x_3 , il est possible de se ramener à une onde incidente ayant une dépendance multiplicative en $e^{i\beta x_3}$. On peut alors montrer que les solutions \mathbf{E}, \mathbf{H} et j de (3.17) ont la même dépendance par rapport à x_3 et, en utilisant (3.16), que j et E_3 sont explicitement liés par la relation

$$j = \frac{2i\pi\gamma}{k_0^2 - \beta^2 + \frac{2i\pi\gamma}{\kappa}} E_3 .$$

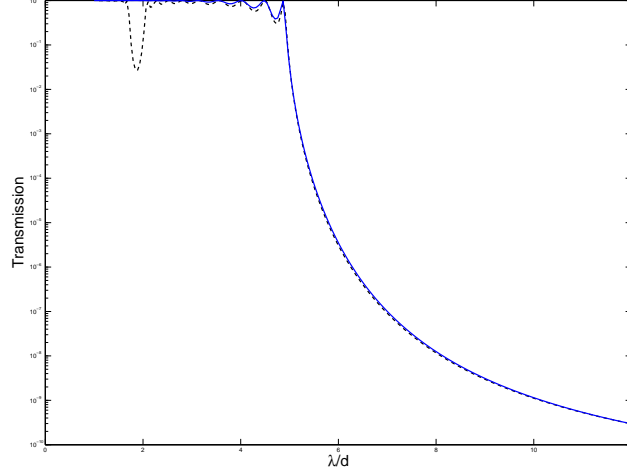


FIGURE 3.2: Énergie transmise à travers la structure réelle (courbe en pointillés) et à travers la structure effective (courbe continue).

En écrivant $E_3^{\text{inc}}(x) = u^{\text{inc}}(x_1, x_2)e^{i\beta x_3}$ et $E_3 = u(x_1, x_2)e^{i\beta x_3}$ et en substituant dans (3.17), on obtient que u est solution du problème bidimensionnel suivant

$$\begin{cases} \Delta u + (k_0^2 \varepsilon(x) - \beta^2)u = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^2 \\ \lim_{r \rightarrow +\infty} \left(\frac{\partial u^d}{\partial r} - ik_0 u^d \right) = 0, \end{cases}$$

où $u^d := u - u^{\text{inc}}$, $\varepsilon(x) := 1_{\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{D}}(x_1, x_2) + \varepsilon^{\text{eff}}(\beta)1_{\mathcal{D}}(x_1, x_2)$ et $\varepsilon^{\text{eff}}(\beta)$ est donné par

$$\varepsilon^{\text{eff}}(\beta) = 1 - \frac{2i\pi\gamma}{k_0^2} \left(\frac{k_0^2 - \beta^2}{k_0^2 - \beta^2 + \frac{2i\pi\gamma}{\kappa}} \right) \quad (3.18)$$

Le fait que $\varepsilon_{33}^{\text{eff}}$ dépende de β montre que, malgré la simplification, le comportement limite est encore non local. Cependant, on peut faire disparaître cet effet en faisant tendre $\kappa \rightarrow \infty$ (fibres de conductivité infinie) ce qui rend ε^{eff} de la forme (3.1) pour une

fréquence de coupure $w_c = \sqrt{\frac{2\pi\gamma}{\varepsilon_0\mu_0}}$.

Domaine de validité. La précision de la formule (3.18) a été vérifiée dans [12] où un réseau de fibres infinies dans la direction \mathbf{e}_3 a été considéré. Le réseau est infini dans la direction \mathbf{e}_1 et contient 10 périodes dans la direction \mathbf{e}_2 . Dans ce test numérique, les fibres sont infiniment conductrices ($\kappa = +\infty$) et la période d est choisie égale dans les deux directions \mathbf{e}_1 et \mathbf{e}_2 . Le rayon des fibres est $r = d/200$ de sorte que le coefficient théorique donné en (3.7) est $\gamma \sim 0,2$. Le test numérique tracé dans la figure 3.2 a été effectué pour $\gamma = 0,25$ et représente l'énergie transmise lorsque la structure est illuminée

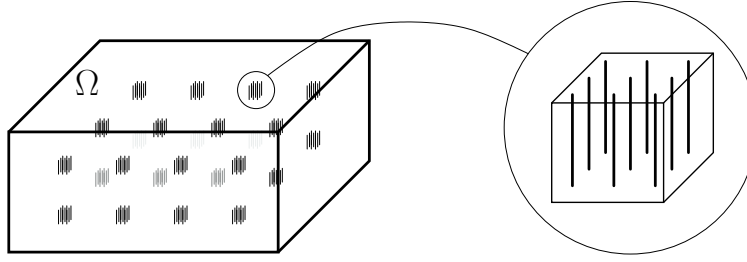


FIGURE 3.3: Schéma de la structure globale du métamatériau.

par une onde plane de longueur d'onde λ sous incidence normale (courbe en pointillés). Elle est comparée avec l'énergie transmise à travers un obstacle homogène de permittivité ϵ^{eff} (courbe continue). On constate que les deux courbes sont presque confondues pour des longueurs d'ondes qui ne sont pas très grandes $\lambda/d > 4$.

Conclusion. Nous avons montré dans cette partie qu'un réseau de fils métalliques fins n'est pas modélisé par les équations de Maxwell classiques. Il a un comportement non local et n'est donc pas caractérisé par des tenseurs de permittivité et perméabilité effectifs. Une telle structure ne répond pas à notre problématique consistant à obtenir des matériaux effectifs ayant une permittivité *négative*. Pour y répondre, nous allons considérer dans la section suivante, une structure plus complexe utilisant ce milieu non local comme micro-composant.

2 Loi effective obtenue par homogénéisation réitérée

Dans cette seconde étape, nous allons étudier une structure périodique bornée dont les micro-composants sont constitués du milieu effectif non local décrit par les équations du système (3.17). En d'autres mots, grâce à l'homogénéisation effectuée dans la section précédente, nous avons à disposition le matériaux non local décrit par (3.17); nous construisons la nouvelle structure en le reproduisant périodiquement avec une petite période dans un domaine borné.

Les deux étapes pourraient être effectuées simultanément en utilisant une structure ayant double-échelle différentes comme celle représentée dans la figure 3.3. Le problème se place dans le cadre la théorie de l'homogénéisation réitérée [5].

2.1 Description de la structure

Dans cette étude, le petit paramètre η sera la période séparant les inclusions. Nous allons démontrer qu'à la limite $\eta \rightarrow 0$, la structure a un comportement *local* décrit par

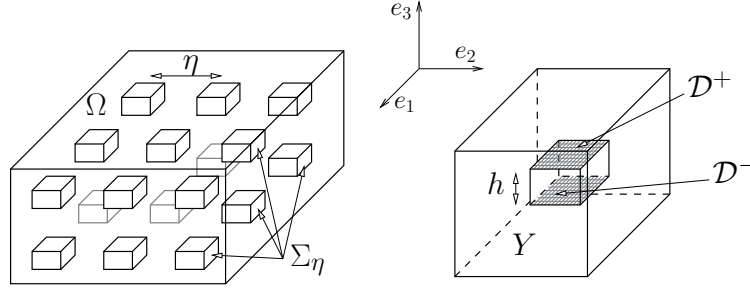


FIGURE 3.4: Schéma de la structure diffractante étudiée dans la procédure d'homogénéisation réitérée.

un tenseur de permittivité dépendant de la fréquence et que nous caractériserons à l'aide d'un problème spectral sur le tore.

L'obstacle diffractant \mathcal{B} est un domaine borné de \mathbb{R}^3 . On note $\Sigma_\eta \subset \mathcal{B}$ la région de \mathcal{B} occupée par les inclusions cylindriques. Σ_η est défini comme étant la périodisation dans les trois directions de l'ensemble $\eta\Sigma$ où $\Sigma := \mathcal{D} \times]-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}[$ représente une inclusion élémentaire dans la cellule de base $Y :=]-1/2, 1/2[^3$. L'ensemble Σ_η prend alors la forme :

$$\Sigma_\eta := \bigcup_{i \in I_\eta} \eta(i + \Sigma) \quad , \quad J_\eta = \{i \in \mathbb{Z}^3 \mid \eta(i + \Sigma) \subset \mathcal{B}\} . \quad (3.19)$$

De plus, nous introduisons $\mathcal{D}^+ := \mathcal{D} \times \{\frac{l}{2}\}$ et $\mathcal{D}^- := \mathcal{D} \times \{-\frac{l}{2}\}$ les deux bases du cylindre Σ et $\mathcal{D}_\eta^\pm := \bigcup_{i \in I_\eta} \eta(i + \mathcal{D}^\pm)$ l'union des bases de toutes les inclusions.

Contrairement au cas précédent, le taux de remplissage des inclusions reste strictement positif lors du passage à la limite $\eta \rightarrow 0$ et converge vers $|\Sigma|$.

Problème pré-homogénéisé.

La structure est illuminée par une onde incidente $(\mathbf{E}^{\text{inc}}, \mathbf{H}^{\text{inc}})$ dont on suppose une dépendance harmonique en temps ($e^{-i\omega t}$) de fréquence ω fixée. En remplaçant dans le système (3.17) \mathcal{B} par Σ_η et \mathcal{D}_L^\pm par \mathcal{D}_η^\pm , on obtient un problème de diffraction décrit par un triplet $(\mathbf{E}_\eta, \mathbf{H}_\eta, j_\eta)$ dans $L^2_{loc}(\mathbb{R}^3)$ vérifiant

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{rot} \mathbf{E}_\eta & = i\omega\mu_0 \mathbf{H}_\eta & \text{dans } \mathbb{R}^3 \\ \mathbf{rot} \mathbf{H}_\eta & = -i\omega\varepsilon_0 (\mathbf{E}_\eta + ij_\eta \mathbf{e}_3) & \text{dans } \mathbb{R}^3 \\ \frac{\partial^2 j_\eta}{\partial x_3^2} + (k_0^2 + \frac{2i\pi\gamma}{\kappa}) j_\eta & = 2i\pi\gamma \mathbf{E}_\eta \cdot \mathbf{e}_3 & \text{dans } \Sigma_\eta \\ \frac{\partial j_\eta}{\partial x_3} & = 0 & \text{sur } \mathcal{D}_\eta^+ \cup \mathcal{D}_\eta^- \\ (\mathbf{E}_\eta - \mathbf{E}^i, \mathbf{H}_\eta - \mathbf{H}^i) & \text{satisfait les conditions (3.6)} \end{array} \right. \quad (3.20)$$

où la fonction scalaire j_η est étendue par 0 hors de Σ_η .

On note que, dans cette structure, les fibres initiales sont toutes orientées dans la direction \mathbf{e}_3 . Cette hypothèse a pour but de simplifier la présentation de l'étude et le cas plus général sera traité dans la section 3 de ce chapitre.

Remarque 3.7 On précise que nous nous plaçons dans un cadre adimensionnel où toutes les distances ont été divisées par le paramètre $d > 0$ représentant l'écart séparant les inclusions de la structure de départ (lorsque $\eta = 1$). De ce fait, la longueur d'onde des champs que nous considérons est donnée par λ/d . Pour simplifier les notations, nous ne ferons plus intervenir ce coefficient dans les démonstrations mathématiques mais il apparaîtra dans les simulations numériques données dans la partie suivante.

2.2 Résultat principal et simulations numériques

Loi effective homogénéisée.

Introduisons quelques notations.

À tout $\varphi \in W^{1,2}(Y)$, on associe $[\varphi]_l$ la fonction de $W^{\frac{1}{2},2}(\mathcal{D})$ définie par

$$[\varphi]_l(y_1, y_2) := \frac{1}{l} \left(\varphi\left(y_1, y_2, \frac{l}{2}\right) - \varphi\left(y_1, y_2, -\frac{l}{2}\right) \right) .$$

On introduit l'opérateur R , qui associe à $w \in L^2(\mathcal{D})$ la fonction $[\varphi^w]_l \in L^2(\mathcal{D})$ où φ^w est l'unique élément (à une constante près) de $W_{\#}^{1,2}(Y)$ vérifiant au sens des distributions l'égalité suivante

$$-\Delta \varphi^w = w(\delta_{\mathcal{D}^+} - \delta_{\mathcal{D}^-}) .$$

L'opérateur R est compact auto-adjoint (cf. lemme 3.19). Notons $\{\lambda_n, n \in \mathbb{N}\}$ les valeurs propres distinctes de R rangées dans l'ordre décroissant. On a bien sûr $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n = 0$ (avec $\lambda_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ d'après le lemme 3.19).

Pour tout $\lambda \in \{\lambda_n, n \in \mathbb{N}\}$, on note

- P_{V_λ} le projecteur orthogonal sur l'espace propre V_{λ_n} de R associé à la valeur propre λ_n .
- $\sigma_0 := \{\lambda_n, P_{V_{\lambda_n}}(1) \neq 0\}$.

Notons que, d'après l'égalité de Parseval

$$|\mathcal{D}| = \|1\|_{L^2(\mathcal{D})}^2 = \sum_{\lambda \in \sigma_0} \|P_{V_\lambda}(1)\|_{L^2(\mathcal{D})}^2 ,$$

et en particulier

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|P_{V_{\lambda_n}}(1)\|_{L^2(\mathcal{D})} = 0 . \quad (3.21)$$

On introduit la densité de courant de déplacement microscopique

$$j_0(x, y) = iE_3(x)\zeta(y_1, y_2)1_\Sigma(y) \quad , \quad \zeta(y_1, y_2) = \sum_{\lambda \in \sigma_0} \frac{P_{V_\lambda}(1)(y_1, y_2)}{\frac{k_0^2}{2\pi\gamma} - \lambda + \frac{i}{\kappa}} ,$$

où E_3 est la troisième composante du champ électrique macroscopique (limite faible de $\mathbf{E}_\eta \cdot \mathbf{e}_3$). Le champ électrique microscopique \mathbf{E}_0 est donné par

$$\mathbf{E}_0(x, y) := \mathbf{E}(x) + E_3(x)\nabla\chi(y)$$

où $\chi \in W_{\#}^{1,2}(Y)$ est l'unique solution (à une constante près) du problème

$$-\Delta \chi = \zeta(\delta_{\mathcal{D}^+} - \delta_{\mathcal{D}^-}) \quad \text{dans } Y .$$

De plus, on considère

$$\Lambda(\omega, \gamma, \kappa) := \int_{\mathcal{D}} \zeta(y_1, y_2) = \sum_{\lambda \in \sigma_0} \frac{\|P_{V_\lambda}(1)\|_{L^2(\mathcal{D})}^2}{\frac{k_0^2}{2\pi\gamma} - \lambda + \frac{i}{\kappa}} .$$

Le tenseur de permittivité effectif est donné par

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{eff}}(\omega) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - l \Lambda(\omega, \kappa, \gamma) \end{pmatrix} . \quad (3.22)$$

Théorème 3.8 (Homogénéisation)

Le champ $(\mathbf{E}_\eta, \mathbf{H}_\eta, j_\eta)$ solution de (3.20) converge vers $(\mathbf{E}, \mathbf{H}, j)$ faiblement dans $L_{loc}^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3)^2 \times L_{loc}^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C})$ où $j(x) := \int_Y j_0(x, y) dy$ et (\mathbf{E}, \mathbf{H}) est l'unique solution au sens des distributions du problème

$$\begin{cases} \text{rot } \mathbf{E} = i\omega\mu_0 \mathbf{H} , \\ \text{rot } \mathbf{H} = -i\omega\varepsilon_0 \boldsymbol{\varepsilon}(x, \omega) \mathbf{E} , \\ (\mathbf{E}, \mathbf{H}) \text{ satisfait les conditions (3.6) ,} \end{cases} \quad (3.23)$$

avec

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x) := \mathbf{I}_d 1_{\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{B}}(x) + \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{eff}}(\omega) 1_{\mathcal{B}}(x)$$

et $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{eff}}(\omega)$ donné en (3.22).

Plus précisément, on a la convergence uniforme de $(\mathbf{E}_\eta, \mathbf{H}_\eta)$ vers (\mathbf{E}, \mathbf{H}) (ainsi que de toutes ses dérivées) sur tout compact $K \subset \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\mathcal{B}}$. D'autre part, on a la convergence forte double-échelle de $(\mathbf{E}_\eta, j_\eta)$ vers (\mathbf{E}_0, j_0) dans un voisinage borné de \mathcal{B} et la convergence forte dans $L_{loc}^2(\mathbb{R}^3)$ de (\mathbf{H}_η) vers \mathbf{H} .

Résonances et permittivité négative.

Nous obtenons un milieu effectif homogène de perméabilité relative $\mu = 1$ et de permittivité $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{eff}}$ donnée dans (3.22). Il s'agit d'un tenseur diagonal dont la troisième composante dépend de la fréquence ω .

Les fréquences de résonances ω_λ sont associées aux valeurs propres $\lambda \in \sigma_0$ et sont données par

$$\omega_\lambda := \sqrt{\frac{2\pi\gamma\lambda}{\varepsilon_0\mu_0}} . \quad (3.24)$$

Lorsque $\kappa = +\infty$ (fibres de conductivité infinie), $\boldsymbol{\varepsilon}_{33}^{\text{eff}}(\omega)$ est une fonction réelle singulière en chacun des ω_λ . En effet,

$$\lim_{\omega \rightarrow \omega_\lambda^+} \boldsymbol{\varepsilon}_{33}^{\text{eff}}(\omega) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{\omega \rightarrow \omega_\lambda^-} \boldsymbol{\varepsilon}_{33}^{\text{eff}}(\omega) = +\infty .$$

De plus, la fonction $\varepsilon_{33}^{\text{eff}}(\omega)$ étant monotone croissante par morceaux, l'ensemble $\{\omega > 0, \varepsilon^{\text{eff}}(\omega) < 0\}$ est constitué de bandes qui correspondent à des intervalles de fréquences où la propagation est interdite dans la direction \mathbf{e}_3 (puisque $\mu = 1 > 0$).

Dans le cas $0 < \kappa < +\infty$, $\varepsilon_{33}^{\text{eff}}(\omega)$ est une fonction à valeurs dans \mathbb{C}^+ . Introduisons

$$\xi_\lambda(\omega) := \frac{1}{\frac{k_0^2}{2\pi\gamma} - \lambda + \frac{i}{\kappa}}, \quad \forall \lambda \in \sigma_0, \quad (3.25)$$

que l'on décompose comme $\xi_\lambda = \Re(\xi_\lambda) + i\Im(\xi_\lambda)$ avec

$$\Re(\xi_\lambda) = \frac{\frac{k_0^2}{2\pi\gamma} - \lambda}{\left(\frac{k_0^2}{2\pi\gamma} - \lambda\right)^2 + \frac{1}{\kappa^2}}, \quad \Im(\xi_\lambda) = \frac{1}{\kappa \left(\frac{k_0^2}{2\pi\gamma} - \lambda_n\right)^2 + \frac{1}{\kappa}}. \quad (3.26)$$

On remarque alors que

$$\Im(\xi_\lambda) > 0, \quad \max \Im(\xi_\lambda(\omega)) = \kappa \quad \text{et} \quad -\min_\omega \Re(\xi_\lambda(\omega)) = \max_\omega \Re(\xi_\lambda(\omega)) = \frac{\kappa}{2}. \quad (3.27)$$

Ainsi, $\varepsilon_{33}^{\text{eff}}$ oscille entre les valeurs $1 \pm l\frac{\kappa}{2}\|P_\lambda(1)\|_{L^2(\mathcal{D})}^2$ dans un intervalle de fréquences centré en ω_λ (en négligeant les termes de la série (3.22) associés aux autres valeurs propres). On en déduit que $\Re(\varepsilon_{33}^{\text{eff}})$ devient négatif lorsque $l\kappa\|P_\lambda(1)\|_{L^2(\mathcal{D})}^2$ est suffisamment grand. À l'aide de (3.21), on a alors qu'il y aura seulement un nombre fini de bandes de fréquences interdites.

D'autre part, le paramètre γ intervient comme un facteur multiplicatif du nombre d'onde k_0^2 . En particulier, ce paramètre va permettre de déplacer les fréquences de résonances ω_λ (données dans (3.24)) sans faire varier les valeurs atteintes par $\varepsilon_{33}^{\text{eff}}(\omega)$.

Nous avons obtenu une structure dont le comportement effectif répond partiellement à notre problématique : trouver des matériaux composites dont la loi macroscopique est donnée par un tenseur de permittivité négatif 3D. De plus, pour toute fréquence ω fixée, il est même possible d'amener le coefficient $\Re(\varepsilon_{33}^{\text{eff}}(\omega))$ à une valeur *quelconque* dans \mathbb{R} en faisant varier les paramètres κ et γ . La limitation dans notre modèle provient du fait que l'effet de résonance responsable du changement de signe dans la loi de permittivité apparaît dans une direction unique (\mathbf{e}_3 dans notre exemple). Dans la section 3 de ce chapitre, deux variantes de la géométrie de la structure seront considérées. Le comportement macroscopique de chacune de ces structures fera apparaître le même type d'effet de résonance dans les trois directions d'espace. En particulier, les paramètres caractérisant ces résonances seront indépendants dans chacune des directions. La conséquence sera qu'une grande catégorie de milieux effectifs est atteignable par homogénéisation, incluant ceux décrits par un tenseur de permittivité symétrique, de partie réelle quelconque (cf. section 3.4).

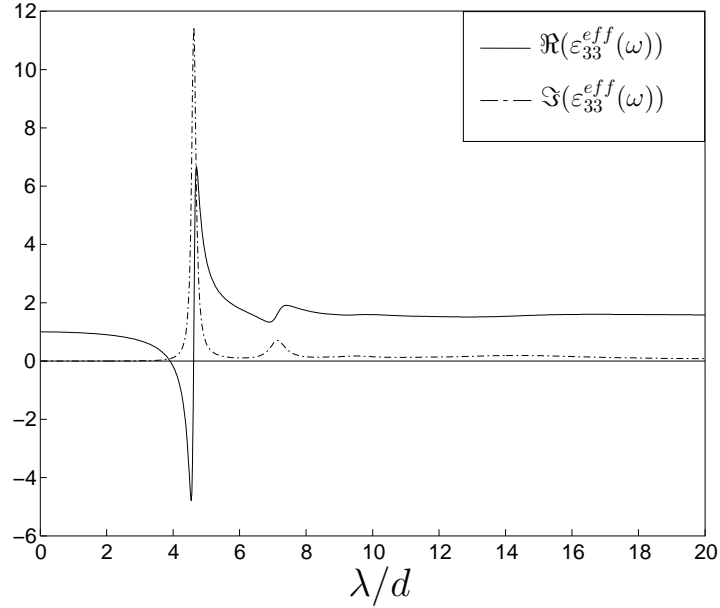


FIGURE 3.5: Parties réelle et imaginaire de $\varepsilon_{33}^{\text{eff}}$ en fonction de λ/d (longueur d'onde sur distance) avec les paramètres donnés dans (3.28).

Simulations numériques. Nous précisons le comportement du tenseur $\varepsilon^{\text{eff}}(\omega)$ à l'aide de son approximation numérique présentée dans le chapitre 6. Ce calcul numérique repose sur une approximation spectrale de l'opérateur R déterminant $\varepsilon^{\text{eff}}(\omega)$. Elle est obtenue à l'aide d'une décomposition de Galerkin de l'espace vectoriel $\mathcal{L}^2(\mathcal{D})$ (domaine de R). On notera que tous les résultats numériques effectués sont en accord avec les conditions nécessaires qui seront obtenues théoriquement dans la proposition 3.24.

On fixe $\mathcal{D} :=]-\frac{l_1}{2}, \frac{l_1}{2}[\times]-\frac{l_2}{2}, \frac{l_2}{2}[$. On considère une partition de \mathcal{D} formée de N^2 rectangles D_i^N de côtés $\frac{l_1}{N} \times \frac{l_2}{N}$. La famille $\{u_i, i \in \{1, \dots, N^2\}\}$, orthonormale dans $L^2(\mathcal{D})$, est donnée par

$$u_i := \frac{1}{\sqrt{|D_i^N|}} 1_{D_i^N},$$

avec $1_{D_i^N}$ la fonction caractéristique de l'ensemble D_i^N .

On représente, dans la figure 3.5, les parties réelle et imaginaire de $\varepsilon_{33}^{\text{eff}}(\omega)$ en fonction de la longueur d'onde normalisée λ/d , dans le cas où la structure est décrite par les paramètres

$$N = 50, \quad \kappa = 100, \quad \gamma = 1, \quad l = l_1 = l_2 = 0,5. \quad (3.28)$$

On rappelle que d représente la distance réelle séparant les inclusions lorsque $\eta = 1$ (cf. remarque 3.7).

Cette figure fait apparaître la grande variation de $\varepsilon_{33}^{\text{eff}}$, décrite théoriquement dans le paragraphe précédent, et la bande de fréquences interdites (où $\varepsilon_{33}^{\text{eff}}(\omega) < 0$). On remarque que seule la résonance fondamentale est suffisamment importante pour rendre $\varepsilon_{33}^{\text{eff}}(\omega)$ négatif.

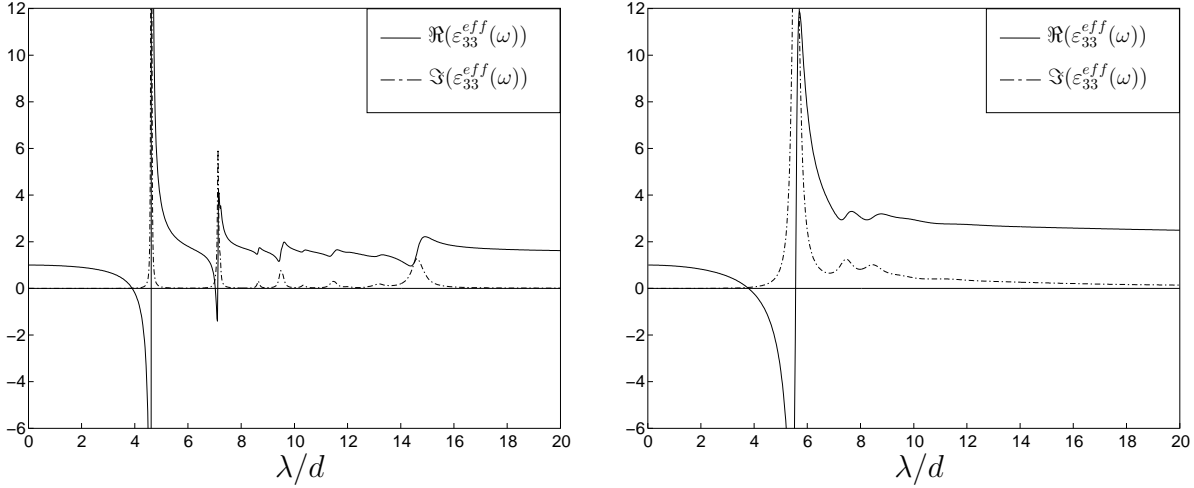


FIGURE 3.6: Parties réelle et imaginaire de $\varepsilon_{33}^{\text{eff}}$ en fonction de λ/d (longueur d'onde sur distance) où les paramètres donnés dans 3.28 sont modifiés : à gauche $\kappa = 1000$ et à droite $\mathcal{D} =]-0.35, 0.35[^2$.

Dans la figure 3.6, on représente les parties réelle et imaginaire de $\varepsilon_{33}^{\text{eff}}(\omega)$ dans deux situations différentes :

$$\begin{aligned} \text{à gauche, } & \kappa = 1000 \quad , \quad \gamma = 1 \quad , \quad l = 0.5 \quad , \quad l_1 = l_2 = 0,5 \quad , \\ \text{à droite, } & \kappa = 100 \quad , \quad \gamma = 1 \quad , \quad l = 0.5 \quad , \quad l_1 = l_2 = 0,35 \quad . \end{aligned} \quad (3.29)$$

Dans la figure de gauche, on remarque que la bande de fréquences interdites associée à la résonance fondamentale a très peu variée. D'autre part, la zone où la partie imaginaire est non nulle s'est réduite ce qui aura pour conséquence la possibilité d'obtenir un milieu à permittivité de grand module (positive ou non) associée à une faible dissipation. On voit d'autre part apparaître une nouvelle bande de fréquences interdites (beaucoup plus étroite) associée à une autre valeur propre de l'opérateur R .

Dans la figure de droite, on met en évidence la dépendance de la taille de l'intervalle de fréquences interdites associé à la résonance fondamentale. Cet intervalle c'est agrandi par rapport au cas où $\mathcal{D} = [-0,5, 0,5]^2$ en raison de la valeur $\|P_{V_\lambda}(1)\|$ qui est plus grande pour tout $\lambda \in \sigma_0$.

Remarque 3.9 Une conséquence de cette dernière propriété est que, lorsque κ est fixé, plus le taux de remplissage des inclusions (donné par $|\Sigma|$) est grand, plus les intervalles de fréquences interdites (s'ils existent) sont larges.

Il est à noter cependant que, en pratique, le domaine de validité de la loi homogénéisée dépend du taux de remplissage. Par exemple, comme on le met en évidence dans un cadre bidimensionnel dans [24], lorsque le taux de remplissage est trop grand ($> 0,5$ dans cet exemple), la loi homogénéisée n'est plus valable pour des fréquences proches des résonances.

2.3 Estimations et résultats préliminaires

Afin de justifier que la suite de champs $(\mathbf{E}_\eta, \mathbf{H}_\eta)$ est bornée dans $L^2_{loc}(\mathbb{R}^3)$, nous allons utiliser un raisonnement en deux temps :

- On commence par supposer que le champ $(\mathbf{E}_\eta, \mathbf{H}_\eta)$ vérifie, pour une boule B_R vérifiant $\mathcal{B} \subset\subset B_R$,

$$\sup_{\eta>0} \int_{B_R} |\mathbf{E}_\eta|^2 + |\mathbf{H}_\eta|^2 < +\infty . \quad (3.30)$$

Nous étudions alors le comportement oscillant du champ sous cette hypothèse dans le but de caractériser les équations du problème homogénéisé ainsi que la convergence des solutions.

- Dans un second temps, on utilise l'*unicité* du problème limite pour mettre en œuvre un raisonnement par contradiction justifiant l'hypothèse.

Avec cela en tête, on fixe une boule B_R telle que $\mathcal{B} \subset\subset B_R$ et on suppose que (3.30) est satisfaite.

Comportement de l'onde loin de l'obstacle. L'hypothèse (3.30) nous permet d'appliquer le lemme suivant qui a été rappelé dans le chapitre 2.

Lemme 3.10 *Soit $(\mathbf{E}_\eta, \mathbf{H}_\eta)$ la solution du problème (3.20) associée à une onde incidente $(\mathbf{E}_\eta^{\text{inc}}, \mathbf{H}_\eta^{\text{inc}})$ qui converge uniformément vers $(\mathbf{E}^{\text{inc}}, \mathbf{H}^{\text{inc}})$.*

Si $(\mathbf{E}_\eta, \mathbf{H}_\eta) \rightharpoonup (\mathbf{E}, \mathbf{H})$ faiblement dans $L^2(B_R)$, alors, la convergence de $(\mathbf{E}_\eta, \mathbf{H}_\eta)$ a lieu dans $C^\infty(K)$ pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\mathcal{B}}$. De plus, le champ limite (\mathbf{E}, \mathbf{H}) vérifie l'équation de Helmholtz $\Delta \mathbf{u} + k_0^2 \mathbf{u} = 0$ dans $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\mathcal{B}}$ et est tel que $(\mathbf{E} - \mathbf{E}^{\text{inc}}, \mathbf{H} - \mathbf{H}^{\text{inc}})$ vérifie (3.6).

Estimations. Dans le reste de la section nous allons étudier le comportement asymptotique du champ électromagnétique proche de l'obstacle, c'est-à-dire dans B_R . Dans cette région, le champ présentera de fortes oscillations qui vont l'empêcher de former une suite fortement compacte de $L^2(B_R)$. Afin de décrire ces oscillations, nous utiliserons les outils de convergence double-échelle qui ont été rappelés dans le chapitre 2.

Lemme 3.11 *Sous l'hypothèse (3.30), on a :*

- (i) *les suites $(j_\eta)_\eta$ et $(\frac{\partial j_\eta}{\partial x_3} 1_{\Sigma_\eta})_\eta$ sont bornées dans $L^2(B_R)$,*
- (ii) *la suite \mathbf{H}_η est bornée dans $W^{1,2}(B_R)$,*
- (iii) *si $\mathbf{E} = 0$ dans B_R alors $\mathbf{E}_\eta \rightarrow 0$ fortement dans $L^2(B_R)$ (\mathbf{E} la limite faible de \mathbf{E}_η).*

Preuve de (i)

On introduit \mathcal{P}_η et \mathcal{P} les flux du vecteur de Poynting sur le bord de B_R définis par :

$$\mathcal{P}_\eta := \int_{\partial B_R} \mathbf{E}_\eta \wedge \overline{\mathbf{H}}_\eta \cdot \mathbf{n} \, d\sigma \quad , \quad \mathcal{P} := \int_{\partial B_R} \mathbf{E} \wedge \overline{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma . \quad (3.31)$$

D'après le lemme 3.10, le champ $(\mathbf{E}_\eta, \mathbf{H}_\eta)$ est régulier sur ∂B_R ce qui nous permet d'intégrer par parties dans (3.31) et d'obtenir

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_\eta &= \int_{B_R} (\mathbf{rot} \mathbf{E}_\eta \cdot \overline{\mathbf{H}}_\eta - \mathbf{rot} \overline{\mathbf{H}}_\eta \cdot \mathbf{E}_\eta) dx \\ &= i\omega \int_{B_R} (\mu_0 |\mathbf{H}_\eta|^2 - \varepsilon_0 |\mathbf{E}_\eta|^2) - \omega \varepsilon_0 \int_{\Sigma_\eta} \bar{j}_\eta \mathbf{E}_\eta \cdot \mathbf{e}_3 dx . \end{aligned} \quad (3.32)$$

Par ailleurs, on multiplie par \bar{j}_η la troisième équation de (3.20) et grâce à la condition de Neumann sur \mathcal{D}_η^\pm vérifiée par j_η , on obtient

$$2i\pi\gamma \int_{B_R} \bar{j}_\eta \mathbf{E}_\eta \cdot \mathbf{e}_3 = - \left\| \frac{\partial j_\eta}{\partial x_3} \right\|_{L^2(B_R)}^2 + (k_0^2 + \frac{2i\pi\gamma}{\kappa}) \|j_\eta\|_{L^2(B_R)}^2 . \quad (3.33)$$

En substituant l'équation précédente dans (3.32), il résulte

$$\Re(\mathcal{P}_\eta) = -\frac{\omega\varepsilon_0}{\kappa} \|j_\eta\|_{L^2(B_R)}^2 , \quad (3.34)$$

et

$$\begin{aligned} \Im(\mathcal{P}_\eta) &= \omega \left(\mu_0 \|\mathbf{H}_\eta\|_{L^2(B_R)}^2 - \varepsilon_0 \|\mathbf{E}_\eta\|_{L^2(B_R)}^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{\varepsilon_0}{2\pi\gamma} \left\| \frac{\partial j_\eta}{\partial x_3} \right\|_{L^2(\Sigma_\eta)}^2 + \frac{\varepsilon_0 k_0^2}{2\pi\gamma} \|j_\eta\|_{L^2(B_R)}^2 \right) . \end{aligned} \quad (3.35)$$

D'après l'uniforme convergence de $(\mathbf{E}_\eta, \mathbf{H}_\eta)$ donnée dans le lemme 3.10, on a que \mathcal{P}_η est borné. L'équation (3.34) démontre alors la borne dans $L^2(B_R)$ de j_η . On en déduit ensuite, à l'aide des équations (3.30) et (3.35), que la suite $\frac{\partial j_\eta}{\partial x_3}$ est bornée dans $L^2(B_R)$. Ceci termine la démonstration du point (i).

Preuve de (ii) : La première équation du système (3.20) indique que le champ \mathbf{H}_η est à divergence nulle. Par ailleurs, (\mathbf{E}_η) et (j_η) étant bornés dans $L^2(B_R)$, la deuxième équation de (3.20) implique que $\mathbf{rot} \mathbf{H}_\eta$ reste borné dans $L^2(B_R)$. Pour finir, la trace de (\mathbf{H}_η) sur ∂B_R converge uniformément d'après le lemme 3.10. Ces trois bornes associées à l'hypothèse (3.30) impliquent que

$$\|\operatorname{div} \mathbf{H}_\eta\|_{L^2(B_R)} + \|\mathbf{rot} \mathbf{H}_\eta\|_{L^2(B_R)} + \|\mathbf{H}_\eta\|_{L^2(B_R)} + \|\mathbf{H}_\eta\|_{W^{\frac{1}{2},2}(\partial B_R)} \leq C ,$$

pour $C > 0$ indépendant de η . On en déduit, à l'aide de la propriété (2.3), que la suite (\mathbf{H}_η) reste bornée dans $W^{1,2}(B_R)$.

Preuve de (iii) : Nous allons appliquer un raisonnement de compacité par compensation à la suite (\mathbf{E}_η) (cf. lemme div-rot 2.14). Montrons alors que $\mathbf{rot} \mathbf{E}_\eta$ et $\operatorname{div} \mathbf{E}_\eta$ convergent vers zéro fortement dans $W^{-1,2}(B_R)$.

Puisque $\mathbf{E} = 0$ dans B_R , on a $\lim_{\eta \rightarrow 0} \mathcal{P}_\eta = \mathcal{P} = 0$ et donc d'après (3.34), on obtient que $j_\eta \rightarrow 0$ fortement dans $L^2(B_R)$. De plus, l'équation (3.33) entraîne que $\frac{\partial j_\eta}{\partial x_3} \rightarrow 0$ fortement dans $L^2(B_R)$. En prenant la divergence dans la seconde équation de (3.20), on obtient que $\operatorname{div} \mathbf{E}_\eta = -i\omega\varepsilon_0 \frac{\partial j_\eta}{\partial x_3}$ converge fortement vers 0 dans $L^2(B_r)$ (donc dans $W^{-1,2}(B_R)$).

Par ailleurs, puisque $\mathbf{H}_\eta \rightarrow 0$ fortement dans $L^2(B_R)$, on a, d'après la première équation de (3.20), que $\operatorname{rot} \mathbf{E}_\eta \rightarrow 0$ dans $W^{-1,2}(B_R)$.

On applique alors le lemme div-rot au couple $(\mathbf{E}_\eta, \mathbf{E}_\eta)$ pour obtenir que $|\mathbf{E}_\eta|^2 \rightarrow 0$ au sens des distributions dans B_R . Ainsi, pour tout $\varphi \in C_c^\infty(B_R)$, on a $\lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{B_R} \varphi |\mathbf{E}_\eta|^2 = 0$. En prenant $\varphi = 1$ sur une boule $B_{R'}$ plus petite que B_R vérifiant $\mathcal{B} \subset\subset B_{R'} \subset\subset B_R$, on obtient la convergence forte de \mathbf{E}_η dans $L^2(B_{R'}; \mathbb{C}^3)$. On termine la preuve grâce à la convergence uniforme de \mathbf{E}_η dans $B_R \setminus B_{R'}$ démontrée dans le lemme 3.10. \square

Remarque 3.12 L'hypothèse (3.30) indique que \mathbf{E}_η et \mathbf{H}_η sont bornés dans $L^2(B_R)$. La première assertion du lemme 3.11 montre qu'il en est de même pour la suite $(j_\eta)_\eta$. En notant \mathbf{E} , \mathbf{H} et j les limites faibles des suites (\mathbf{E}_η) , (\mathbf{H}_η) et (j_η) , nous passons à la limite faible dans les deux premières équations de (3.20) pour obtenir

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{E} = i\omega\mu_0 \mathbf{H} \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} = -i\omega\varepsilon_0(\mathbf{E} + i j \mathbf{e}_3 1_{\mathcal{B}}) \end{cases} . \quad (3.36)$$

Le point fondamental de notre étude va être de déterminer une relation locale entre \mathbf{E} et j . Pour cela, nous allons étudier le comportement oscillant des solutions $(\mathbf{E}_\eta, \mathbf{H}_\eta, j_\eta)$ du problème (3.20) en identifiant leurs limites double-échelle.

2.4 Analyse double-échelle

Comme nous l'avons rappelé dans le théorème 2.39, une condition suffisante pour avoir existence d'une limite double-échelle (à une sous-suite près) est que la suite soit bornée dans L^2 . Cette condition est vérifiée par les suites (\mathbf{E}_η) , (\mathbf{H}_η) et (j_η) d'après l'hypothèse (3.30) et le lemme 3.11. Nous allons alors fixer une sous-suite de η , encore notée η , telle qu'il existe trois fonctions de $L^2(\Omega \times Y)$ notées \mathbf{E}_0 , \mathbf{H}_0 et j_0 vérifiant

$$\mathbf{E}_\eta \rightharpoonup \mathbf{E}_0 \quad , \quad \mathbf{H}_\eta \rightharpoonup \mathbf{H}_0 \quad , \quad j_\eta \rightharpoonup j_0 .$$

L'unicité de la solution du problème limite (3.23) impliquera à posteriori que ces champs ne dépendent pas du choix de cette sous-suite. Ainsi nous choisissons, pour alléger les notations, de ne pas faire apparaître cette dépendance sur les champs \mathbf{E}_0 , \mathbf{H}_0 et j_0 .

Remarque 3.13 D'après la deuxième assertion du lemme 3.11, la suite (\mathbf{H}_η) est bornée dans $W^{1,2}(B_R)$. En utilisant la proposition 2.46, on a que sa limite double-échelle est indépendante de y ($\mathbf{H}_0(x, y) = \mathbf{H}(x)$). Cette absence d'oscillation aura pour conséquence que le milieu effectif n'a pas d'activité magnétique ($\mu^{\text{eff}} = 1$). Il est essentiel de noter que cela ne sera pas le cas pour les suites (\mathbf{E}_η) et (j_η) .

Proposition 3.14 *Pour presque tout $x \in \mathcal{B}$, les fonctions Y -périodiques $\mathbf{E}_0(x, \cdot)$ et $j_0(x, \cdot)$ vérifient au sens des distributions dans Y les relations suivantes*

$$\mathbf{rot}_y \mathbf{E}_0(x, \cdot) = 0 \quad , \quad j_0 = 0 \quad \text{dans } Y \setminus \Sigma \quad , \quad \frac{\partial j_0}{\partial y_3} = 0 \quad \text{dans } \Sigma \quad , \quad (3.37)$$

$$\operatorname{div}_y(\mathbf{E}_0 + i j_0 \mathbf{e}_3 1_\Sigma) = 0 \quad , \quad (3.38)$$

$$j_0(x, y) = j_0(x, y_1, y_2) = \frac{2i\pi\gamma}{k_0^2 + \frac{2i\pi\gamma}{\kappa}} \langle \mathbf{E}_0 \rangle_h(x, y_1, y_2) \quad \text{dans } \Sigma \quad , \quad (3.39)$$

où $\langle \mathbf{E}_0 \rangle_l(x, y_1, y_2) := \frac{1}{l} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \mathbf{E}_0(x, y_1, y_2, s) \cdot \mathbf{e}_3 ds$ représente la circulation normalisée de \mathbf{E}_0 le long de chemins verticaux joignant les bases \mathcal{D}_l^\pm de l'inclusion Σ .

Preuve

On a $\mathbf{E}_\eta \rightharpoonup \mathbf{E}_0$ et la suite $\mathbf{rot} \mathbf{E}_\eta = i\omega\mu_0 \mathbf{H}_\eta$ est bornée dans $L^2(B_R)$. Il est alors classique (voir chapitre 2) de conclure que $\mathbf{rot}_y \mathbf{E}_0 = 0$. De la même façon, on montre (3.38) et $\frac{\partial j_0}{\partial y_3} = 0$ dans Σ . Par ailleurs, le fait que $j_0 1_{Y \setminus \Sigma}(y) = 0$ découle directement de $j_\eta 1_{B_R \setminus \Sigma_\eta} = 0$.

Preuve de (3.39)

On fixe une fonction test $\varphi(x, y) := \rho(x)\theta(y_1, y_2)$ avec $\rho \in C_c^\infty(\mathcal{B})$ et $\theta \in C_c^\infty(\mathcal{D})$. On multiplie la troisième équation de 3.20 par $\varphi(x, \frac{x}{\eta})$ puis on intègre sur Σ_η pour avoir

$$\int_{\Sigma_\eta} \frac{\partial^2 j_\eta}{\partial x_3^2} \varphi\left(x, \frac{x}{\eta}\right) + \left(k_0^2 + \frac{2i\pi\gamma}{\kappa}\right) \int_{\Sigma_\eta} j_\eta \varphi\left(x, \frac{x}{\eta}\right) = 2i\pi\gamma \int_{\Sigma_\eta} \mathbf{E}_\eta \cdot \mathbf{e}_3 \varphi\left(x, \frac{x}{\eta}\right) . \quad (3.40)$$

En utilisant (3.41), on peut passer à la limite dans l'équation précédente et obtenir, puisque ni j_0 ni θ ne dépendent de y_3 ,

$$h\left(k_0^2 + \frac{2i\pi\gamma}{\kappa}\right) \int_{B \times \mathcal{D}} j_0(x, y_1, y_2) \rho(x) \theta(y_1, y_2) = 2i\pi\gamma \int_{B \times \Sigma} \rho(x) \theta(y_1, y_2) \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{e}_3 .$$

À l'aide de l'égalité $\int_{\Sigma} \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{e}_3 = l \int_{\mathcal{D}} \langle \mathbf{E}_0 \rangle_h$, on obtient la relation (3.39).

Pour terminer la démonstration, il suffit de montrer la propriété suivante : pour toute fonction test $\varphi \in C_c^\infty(B_R; C_c^\infty(Y))$ ne dépendant pas de y_3 , on a

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{\Sigma_\eta} \frac{\partial^2 j_\eta}{\partial x_3^2} \varphi\left(x, \frac{x}{\eta}\right) = 0 . \quad (3.41)$$

Preuve de (3.41) :

À une fonction test φ indépendante de y_3 , on associe $[\varphi]_\eta$ la fonction en escalier donnée par

$$[\varphi]_\eta(x, y) = \sum_p \left(\int_{\Sigma_\eta^p} \varphi(z, y) dz \right) 1_{\Sigma_\eta^p}(x)$$

où $\Sigma_\eta^p := \eta(\Sigma + p)$.

On commence par remarquer que

$$\int_{\Sigma_\eta} \frac{\partial^2 j_\eta}{\partial x_3^2} \left[\varphi\left(x, \frac{x}{\eta}\right) - [\varphi]_\eta\left(x, \frac{x}{\eta}\right) \right] \rightarrow 0$$

puisque $\int_{\Sigma_\eta} \left| \frac{\partial^2 j_\eta}{\partial x_3^2} \right|^2$ est borné d'après la troisième équation de (3.20) et que $\|\varphi\left(x, \frac{x}{\eta}\right) - [\varphi]_\eta\left(x, \frac{x}{\eta}\right)\|_{L^2(B_R)} \rightarrow 0$.

D'autre part, on a

$$\int_{\Sigma_\eta} \frac{\partial^2 j_\eta}{\partial x_3^2} [\varphi]_\eta\left(x, \frac{x}{\eta}\right) = \sum_p \int_{\Sigma_\eta^p} \frac{\partial^2 j_\eta}{\partial x_3^2} [\varphi]_\eta\left(x, \frac{x}{\eta}\right),$$

et en intégrant par parties le terme de droite dans l'équation précédente, on montre que $\int_{\Sigma_\eta} \frac{\partial^2 j_\eta}{\partial x_3^2} [\varphi]_\eta\left(x, \frac{x}{\eta}\right) = 0$. □

Opérateur capacitance.

A présent que nous avons obtenu les équations sur le tore, nous allons préciser la relation entre les champs j_0 et \mathbf{E}_0 . Pour cela, nous introduisons l'opérateur défini ci-dessous.

Définition 3.15 On définit R l'opérateur de $L^2(\mathcal{D})$ dans $L^2(\mathcal{D})$ qui associe à w la fonction scalaire $[\varphi^w]_h$ avec φ^w l'unique solution de

$$\begin{cases} \varphi^w \in W_\#^{1,2}(Y) \\ -\Delta \varphi^w = w(\delta_{\mathcal{D}^+} - \delta_{\mathcal{D}^-}) \end{cases}, \quad (3.42)$$

$$\text{et } [\varphi^w]_l(x, y_1, y_2) := \frac{1}{l} \left(\varphi^w\left(y_1, y_2, \frac{l}{2}\right) - \varphi^w\left(y_1, y_2, -\frac{l}{2}\right) \right).$$

Remarque 3.16 Dans la définition précédente, la fonction scalaire w peut être vue comme une densité surfacique de charges disposées sur les faces parallèles \mathcal{D}^+ et \mathcal{D}^- que l'on peut considérer comme étant les deux plaques d'un condensateur. La fonction φ^w est alors le potentiel engendré par ces charges et R associe la différence de potentiel au niveau des deux plaques.

Cet opérateur que nous appellerons *capacitance* est de plus compact auto-adjoint d'après le lemme 3.19 ci-après.

Lemme 3.17 Pour presque tout $x \in \mathcal{B}$ le champ scalaire $j_0(x, \cdot)$ vérifie

$$R(j_0) - \left(\frac{k_0^2}{2\pi\gamma} + \frac{i}{\kappa} \right) j_0 = -iE_3. \quad (3.43)$$

PREUVE.

On a d'après (3.37) que $\mathbf{rot}_y \mathbf{E}_0 = 0$ dans $\mathcal{B} \times Y$. Il existe alors $\psi \in L^2(\mathcal{B}; W_{\#}^{1,2}(Y))$ (unique à une constante près) tel que

$$\mathbf{E}_0(x, y) = \mathbf{E}(x) + \nabla_y \psi(x, y) . \quad (3.44)$$

En substituant \mathbf{E}_0 dans les équations (3.38) et (3.39), on obtient le système suivant

$$\begin{cases} \Delta_y \psi - i j_0 (\delta_{\mathcal{D}^+} - \delta_{\mathcal{D}^-}) = 0 & \text{dans } \mathcal{B} \times Y \\ \left(\frac{k_0^2}{2i\pi\gamma} + \frac{1}{\kappa} \right) j_0 = E_3 + [\psi]_l & \text{dans } \mathcal{B} \times \mathcal{D} \end{cases} , \quad (3.45)$$

qui n'est autre que (3.43) compte tenu de la définition de l'opérateur R .

□

2.5 Etude du problème de micro- résonances

Dans cette section, nous allons établir l'existence et l'unicité de la solution du problème (3.37-3.39). La limite faible $j = \int_Y j_0(x, y) dy$ de la suite (j_η) pourra ainsi être exprimée en fonction du champ électrique macroscopique $\mathbf{E} = \int_Y \mathbf{E}_0(x, y) dy$ via la résolution d'un problème spectral sur Y .

Proposition 3.18 *Le système d'équations (3.37-3.39) admet une solution unique (\mathbf{E}_0, j_0) . On a de plus les relations :*

$$j_0(x, y) = i E_3(x) \zeta(y_1, y_2) 1_{\Sigma}(y) , \quad (3.46)$$

$$\mathbf{E}_0(x, y) = \mathbf{E}(x) + E_3(x) \nabla \chi(y) , \quad (3.47)$$

où $\zeta \in L^2(\mathcal{D})$ est l'unique solution de

$$R \zeta - \left(\frac{k_0^2}{2\pi\gamma} + \frac{i}{\kappa} \right) \zeta = -1 , \quad (3.48)$$

et $\chi \in W_{\#}^{1,2}(Y)$ est l'unique solution (à une constante près) de l'équation

$$-\Delta \chi = \zeta (\delta_{\mathcal{D}^+} - \delta_{\mathcal{D}^-}) . \quad (3.49)$$

PREUVE. L'existence et l'unicité de la solution de (3.43) est obtenue en appliquant Lax-Milgram à la forme sur $L^2(\mathcal{D}) \times L^2(\mathcal{D})$ définie par

$$a(u, v) := \int_Y R u \bar{v} - \left(\frac{k_0^2}{2\pi\gamma} + \frac{i}{\kappa} \right) \int_Y u \bar{v} ,$$

Compte tenu du fait que R est un opérateur compact auto-adjoint (cf. lemme 3.19), cette forme est évidemment sesquilinéaire et continue. Pour montrer la coercivité (cf.

2.16), il suffit de remarquer que $\Re\left(i a(u, u)\right) \geq \frac{1}{\kappa}$. Ainsi, j_0 est déterminé de manière unique.

Il est clair alors que la solution $\psi \in L^2(\mathcal{B}; W_{\sharp}^{1,2}(Y))$ de la première équation du système (3.45), définie de façon unique à l'addition d'une constante additive près, détermine complètement \mathbf{E}_0 via la relation (3.44).

Les relations (3.46) et (3.47) résultent trivialement de la linéarité des équations. \square

On introduit le tenseur de permittivité effectif diagonal $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{eff}}$ dont les composantes sont données par

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{11}^{\text{eff}} = \boldsymbol{\varepsilon}_{22}^{\text{eff}} = 1 \quad , \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{33}^{\text{eff}} = 1 - \int_Y \zeta(y_1, y_2) 1_{\Sigma}(y) dy . \quad (3.50)$$

de sorte que la seconde équation dans (3.36) puisse être réécrite sous la forme

$$\mathbf{rot} \mathbf{H} = -i\omega\varepsilon_0 \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{eff}} \mathbf{E} .$$

Notons que la fonction ζ dépend de la fréquence ω en raison de l'équation (3.48) ($k_0 = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$) et qu'il en est de ce fait de même pour le tenseur $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{eff}}$. Cette dépendance est précisée dans la partie suivante.

Permittivité effective en fonction de la fréquence.

Lemme 3.19 *L'opérateur R est un opérateur strictement positif, compact, auto-adjoint et vérifie de plus*

$$\forall w \in L^2(\mathcal{D}) , \quad w \geq 0 \text{ pp}, \quad \text{on a} \quad R w \geq 0 . \quad (3.51)$$

Remarque 3.20 La condition de positivité (3.51) nous permet d'appliquer le théorème de Krein-Rutmann (cf. théorème 2.23) à l'opérateur R . On en déduit que la valeur propre fondamentale λ_0 est associée à un vecteur propre *positif* presque partout. Ceci entraîne en particulier que $\int w_0 > 0$ et donc que $\lambda_0 \in \sigma_0$. Il existe donc une fréquence de résonance associée à la valeur propre fondamentale et l'effet de permittivité négative pourra être obtenu au moins à cette fréquence.

PREUVE DU THÉORÈME 3.19

Montrons que R est positif et auto-adjoint. Pour tout w, w' de $L^2(\mathcal{D})$, on note φ^w la solution de (3.42) associée à w et on a

$$\langle R w, w' \rangle_{L^2(\mathcal{D})} = \int_{\mathcal{D}} (R w) w' = \frac{1}{l} \int_Y w' (\delta_{\mathcal{D}^+} - \delta_{\mathcal{D}^-}) \varphi^w . \quad (3.52)$$

On note $\varphi^{w'}$ la solution de (3.42) associée à w' et on obtient

$$\langle R w, w' \rangle = -\frac{1}{l} \int_Y \varphi^w \Delta \varphi^{w'} = \frac{1}{l} \int_Y \nabla \varphi^w \nabla \varphi^{w'} . \quad (3.53)$$

L'équation précédente montre que R est auto-adjoint et positif. Si $\langle Rw, w \rangle = 0$, on déduit de (3.53) que φ^w est constant dans Y ce qui entraîne, d'après (3.42), que $w = 0$ dans \mathcal{D} . L'opérateur R est donc strictement positif.

Compacité de R .

Soit (w_n) une suite bornée dans $L^2(\mathcal{D})$. Puisque l'injection de $W^{1,2}(Y)$ dans $L^2(\mathcal{D}^\pm)$ est compacte, il nous suffit de montrer que la suite (φ^{w_n}) est bornée dans $W^{1,2}(Y)$ (avec φ^{w_n} la solution de 3.42 associée à w_n).

Puisque la suite (w_n) est bornée dans $L^2(\mathcal{D})$, la suite $(w_n(\delta_{\mathcal{D}^+} - \delta_{\mathcal{D}^-}))$ est bornée dans $(W_{\#}^{1,2}(Y))'$. Pour finir, on utilise le fait que l'opérateur $(-\Delta)^{-1}$ est continu de $(W_{\#}^{1,2}(Y))'$ dans $W^{1,2}(Y)$ pour prouver que (φ^{w_n}) est bornée dans $W^{1,2}(Y)$.

Preuve de (3.51).

Pour tout $w \in L^2(\mathcal{D})$, il existe une unique solution $\varphi^w \in W_{\#}^{1,2}(Y)$ vérifiant $-\Delta\varphi^w = w(\delta_{\mathcal{D}^+} - \delta_{\mathcal{D}^-})$ dans Y . Du fait de la symétrie du problème, une telle solution est impaire par rapport à la variable y_3 ce qui entraîne,

$$(\varphi^w)^+ - (\varphi^w)^- = (\varphi^w)^+ + (\varphi^{-w})^- = 2(\varphi^w)^+ \quad \text{dans } \mathcal{D} .$$

On en déduit en particulier que pour tout $y' \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^2$, on a

$$\varphi^w\left(y', \frac{1}{2}\right) = \varphi^w\left(y', -\frac{1}{2}\right) = \varphi^w(y', 0) = 0 .$$

On peut donc définir φ^w comme solution du problème sur le demi-cube suivant :

$$\begin{cases} -\Delta\varphi^w = w\delta_{\mathcal{D}^+} , \\ \varphi^w \in V , \end{cases} \quad (3.54)$$

où

$$V := \left\{ u \in W_{\#}^{1,2}\left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^2; W^{1,2}\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right)\right) , u(y', 0) = u\left(y', \frac{1}{2}\right) = 0 \right\} . \quad (3.55)$$

On remarque qu'une telle fonction est aussi solution de :

$$\varphi^w \in \arg \min_{v \in V} \left\{ \frac{1}{2} \int |\nabla v|^2 - w\delta_{\mathcal{D}^+} \right\} \quad (3.56)$$

Or, si une fonction φ^w est solution de (3.56) pour un $w \geq 0$, on a que sa partie positive est aussi solution. Cette solution étant unique, on a que φ_w est positive dans $[0, \frac{1}{2}] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^2$ si $w \geq 0$. Le résultat désiré est alors déduit de la définition de R .

□

D'après la proposition 3.19, il existe une suite $(\lambda_n, v_n) \in \mathbb{R}^+ \times L^2(\mathcal{D})$ formée des valeurs et vecteurs propres de R telle que $\{v_n\}$ forme une base hilbertienne de $L^2(\mathcal{D})$. Décomposons ζ dans cette base : il existe une suite de complexes (c_n) telle que

$$\zeta(y) = \sum_{\mathbb{N}} c_n v_n(y) . \quad (3.57)$$

On fixe $m \in \mathbb{N}$ et on prend le produit scalaire par v_m dans (3.48). Il vient

$$\langle R\zeta, v_m \rangle_{L^2(\mathcal{D})} - \left(\frac{k_0^2}{2\pi\gamma} + \frac{i}{\kappa} \right) \langle \zeta, v_m \rangle_{L^2(\mathcal{D})} = -\langle 1, v_m \rangle_{L^2(\mathcal{D})} .$$

Puisque R est auto-adjoint et que v_m est vecteur propre de R associé à la valeur propre λ_m , on déduit de l'équation précédente :

$$\left(\lambda_n - \frac{k_0^2}{2\pi\gamma} - \frac{i}{\kappa} \right) \langle \zeta, v_m \rangle_{L^2(\mathcal{D})} = -\langle 1, v_m \rangle_{L^2(\mathcal{D})} .$$

La décomposition (3.57) de ζ amène à

$$c_m = \frac{1}{\frac{k_0^2}{2\pi\gamma} - \lambda_n + \frac{i}{\kappa}} \langle 1, v_n \rangle_{L^2(\mathcal{D})} . \quad (3.58)$$

En associant les équations (3.57) et (3.58), il vient

$$\zeta(y) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\langle 1, v_n \rangle_{L^2(\mathcal{D})}}{\frac{k_0^2}{2\pi\gamma} - \lambda_n + \frac{i}{\kappa}} v_n(y) . \quad (3.59)$$

En conséquence, le tenseur $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{eff}}$, défini en (3.50), prend la forme

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{11}^{\text{eff}} = \boldsymbol{\varepsilon}_{22}^{\text{eff}} := 1 \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{33}^{\text{eff}} = \boldsymbol{\varepsilon}_{33}^{\text{eff}}(\kappa, \gamma, \omega) := 1 - l \sum_n \frac{\langle v_n, 1 \rangle_{L^2(\mathcal{D})}^2}{\frac{k_0^2}{2\pi\gamma} - \lambda_n + \frac{i}{\kappa}} . \quad (3.60)$$

La dépendance par rapport à la fréquence est ainsi donnée de manière explicite. Pour retrouver la formulation (3.22), il suffit de factoriser l'expression précédente en exploitant la multiplicité des valeurs propres de l'opérateur R .

2.6 Démonstration du théorème principal

La résolution du problème sur le tore (3.43) a permis d'exprimer le champ *microscopique* j_0 en fonction du champ *macroscopique* \mathbf{E} (cf. proposition 3.18). Il reste à établir la loi homogénéisée que devra satisfaire le champ électromagnétique (\mathbf{E}, \mathbf{H}) .

Loi effective.

Lemme 3.21 *Soit $(\mathbf{E}^{\text{inc}}, \mathbf{H}^{\text{inc}})$ une onde incidente et soit $(\mathbf{E}_\eta, \mathbf{H}_\eta, j_\eta)$ la solution de (3.20) associée. On suppose que $\kappa, \gamma > 0$. Si l'hypothèse (3.30) est satisfaite alors $(\mathbf{E}_\eta, \mathbf{H}_\eta) \rightharpoonup (\mathbf{E}, \mathbf{H})$ dans $L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^3)$ où (\mathbf{E}, \mathbf{H}) est l'unique solution au sens des distributions du problème de diffraction suivant :*

$$\begin{cases} \text{rot } \mathbf{E} = i\omega\mu_0 \mathbf{H} & \text{dans } B_R \\ \text{rot } \mathbf{H} = -i\omega\varepsilon_0 \boldsymbol{\varepsilon}(x) \mathbf{E} & \text{dans } B_R \\ (\mathbf{E} - \mathbf{E}^i, \mathbf{H} - \mathbf{H}^i) & \text{satisfait les conditions (3.6)} \end{cases} \quad (3.61)$$

PREUVE.

Les équations limites sont simplement obtenues en passant à la limite faible dans le système (3.20) puis grâce aux relations (3.46), (3.50) et (3.59).

Unicité de la solution de (3.61).

Par linéarité, il suffit de montrer que la solution $(\mathbf{E}, \mathbf{H}) = (0, 0)$ lorsque l'onde incidente est nulle. Dans ce cas il est facile de voir, grâce à la condition de rayonnement (3.6), que $\Re \left(\int_{\partial B_R} (\mathbf{E} \wedge \overline{\mathbf{H}}) \cdot \mathbf{n} \right) \geq 0$. D'autre part on a

$$\begin{aligned} \Re \left(\int_{\partial B_R} (\mathbf{E} \wedge \overline{\mathbf{H}}) \cdot \mathbf{n} \right) &= \Re \left(\int_{B_R} \operatorname{rot} \mathbf{E} \cdot \overline{\mathbf{H}} - \operatorname{rot} \overline{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{E} \right) \\ &= \omega \Im \left(-\mu_0 \int_{B_R} |\mathbf{H}|^2 + \varepsilon_0 \int_{B_R} \overline{\varepsilon}(x) \mathbf{E} \cdot \overline{\mathbf{E}} \right) \\ &= -\omega \varepsilon_0 \Im(\varepsilon_{33}^{\text{eff}}) \|E_3\|_{L^2(\mathcal{B})}^2 . \end{aligned} \quad (3.62)$$

On en déduit que $E_3 = 0$ dans \mathcal{B} . Il résulte alors, puisque $\varepsilon_{11}^{\text{eff}} = \varepsilon_{22}^{\text{eff}} = 1$, que le champ (\mathbf{E}, \mathbf{H}) est solution des équations de Maxwell dans le vide. L'onde incidente étant nulle, on a que $(\mathbf{E}, \mathbf{H}) = (0, 0)$ dans tout \mathbb{R}^3 . □

Convergence forte double-échelle.

Proposition 3.22 *Soit $(\mathbf{E}_\eta, \mathbf{H}_\eta, j_\eta)$ la solution du problème (3.20). Alors, on a les convergences fortes double-échelles suivantes.*

$$\left\| j_\eta(x) - j_0\left(x, \frac{x}{\eta}\right) \right\|_{L^2(\mathcal{B})} \rightarrow 0 \quad , \quad \left\| \mathbf{E}_\eta(x) - \mathbf{E}_0\left(x, \frac{x}{\eta}\right) \right\|_{L^2(\mathcal{B})} \rightarrow 0 \quad ,$$

PREUVE.

Étape 1. On établit la convergence

$$\left\| j_\eta(x) - j_0\left(x, \frac{x}{\eta}\right) \right\|_{L^2(B_R)} \rightarrow 0 . \quad (3.63)$$

Puisque j_η converge double-échelle vers j_0 avec j_0 admissible, cela revient à montrer (cf. proposition 2.44)

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \|j_\eta\|_{L^2(B_R)} = \|j_0\|_{L^2(B_R \times Y)} . \quad (3.64)$$

Nous allons établir (3.64) en étudiant le comportement asymptotique de l'énergie dissipée par la structure. Celle-ci est donnée par la partie réelle du flux du vecteur de Pointing \mathcal{P}_η . La convergence uniforme de $(\mathbf{E}_\eta, \mathbf{H}_\eta)$ sur le compact ∂B_R nous permet de déduire que \mathcal{P}_η converge vers \mathcal{P} . On rappelle que ces quantités sont données par

$$\mathcal{P}_\eta := \int_{\partial B_R} \mathbf{E}_\eta \wedge \overline{\mathbf{H}}_\eta \cdot \mathbf{n} \, ds \quad , \quad \mathcal{P} := \int_{\partial B_R} \mathbf{E} \wedge \overline{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{n} \, ds .$$

À l'aide de (3.32) et (3.33), il est facile d'obtenir les égalités suivantes.

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_\eta &= i\omega \int_{B_R} (\mu_0 |\mathbf{H}_\eta|^2 - \varepsilon_0 |\mathbf{E}_\eta|^2) + \frac{\omega \varepsilon_0}{2i\pi\gamma} \left\| \frac{\partial j_\eta}{\partial x_3} \right\|_{L^2(\Sigma_\eta)}^2 - \omega \varepsilon_0 \left(\frac{k_0^2}{2i\pi\gamma} + \frac{1}{\kappa} \right) \|j_\eta\|_{L^2(\Sigma_\eta)}^2, \\ \mathcal{P} &= i\omega \left(\mu_0 \int_{B_R} |\mathbf{H}|^2 - \varepsilon_0 \int_{B_R} \bar{\varepsilon}(x) \mathbf{E} \cdot \bar{\mathbf{E}} \right).\end{aligned}\tag{3.65}$$

En prenant la partie réelle on a

$$\begin{aligned}\Re(\mathcal{P}_\eta) &= -\frac{\omega \varepsilon_0}{\kappa} \|j_\eta\|_{L^2(\Sigma_\eta)}^2, \\ \Re(\mathcal{P}) &= \omega \varepsilon_0 \int_B \Im(\bar{\varepsilon}^{eff} \mathbf{E} \cdot \bar{\mathbf{E}}) = -\omega \varepsilon_0 \int_B \Im(\varepsilon_{33}^{eff}) |E_3|^2,\end{aligned}$$

ce qui entraîne, grâce à la convergence de \mathcal{P}_η vers \mathcal{P} , que

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \|j_\eta\|_{L^2(B_R)}^2 = \kappa \Im(\varepsilon_{33}^{eff}) \|E_3\|_{L^2(B)}^2.\tag{3.66}$$

Il reste à comparer le membre de droite dans (3.66) avec $\|j_0(x, y)\|_{L^2(B_R \times Y)}^2$.

D'après la décomposition (3.46) de j_0 , on a

$$\int_{B \times Y} |j_0|^2 = \|E_3\|_{L^2(B)}^2 \|\zeta\|_{L^2(\Sigma)}^2.\tag{3.67}$$

Par ailleurs, on prend le produit scalaire par $\bar{\zeta}$ dans l'égalité (3.48) pour avoir

$$\langle R\zeta, \bar{\zeta} \rangle - \left(\frac{k_0^2}{2i\pi\gamma} + \frac{i}{\kappa} \right) \|\zeta\|_{L^2(\Sigma)}^2 = -\langle 1, \bar{\zeta} \rangle.$$

En prenant la partie imaginaire dans l'équation précédente et en multipliant par κ on obtient

$$\kappa \Im \langle R(\zeta), \bar{\zeta} \rangle - \|\zeta\|_{L^2(\Sigma)}^2 = -\kappa \Im \langle 1, \bar{\zeta} \rangle.$$

Or, on déduit de (3.53) que $\langle R(\zeta), \bar{\zeta} \rangle \in \mathbb{R}$. Il résulte ainsi de l'équation précédente que

$$\|\zeta\|_{L^2(\Sigma)}^2 = \kappa \Im \langle 1, \bar{\zeta} \rangle.\tag{3.68}$$

D'autre part, à l'aide de la définition du tenseur ε^{eff} donnée dans (3.50), on a

$$\Im \langle 1, \bar{\zeta} \rangle = \Im(\varepsilon_{33}^{eff}).$$

Cette dernière égalité associée aux relations (3.67) et (3.68) nous permet de montrer que

$$\|j_0\|^2 = \kappa \Im(\varepsilon_{33}^{eff}) \|E_3\|_{L^2(B)}^2.\tag{3.69}$$

Grâce à la relation (3.66), on a montré que $\lim_{\eta \rightarrow 0} \|j_\eta\|_{L^2(B_R)}^2 = \|j_0\|^2$. Ceci termine la première étape.

Étape 2. On établit la convergence

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{B_R} \left| \mathbf{E}_\eta(x) - \mathbf{E}_0\left(x, \frac{x}{\eta}\right) \right|^2 = 0 . \quad (3.70)$$

Puisque \mathbf{E}_η converge double-échelle vers \mathbf{E}_0 et que \mathbf{E}_0 est admissible, il suffit de montrer que $\|\mathbf{E}_\eta\|_{L^2(B_R)} \rightarrow \|\mathbf{E}_0(x, y)\|_{L^2(B_R) \times Y}$ (cf. proposition 2.44).

En prenant la partie imaginaire dans (3.65), on obtient

$$\Im(\mathcal{P}_\eta) = \omega(\mu_0 \|\mathbf{H}_\eta\|^2 - \varepsilon_0 \|\mathbf{E}_\eta\|^2) - \omega \varepsilon_0 \int_{\Sigma_\eta} \Im(\bar{j}_\eta \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{E}_\eta) \quad (3.71)$$

$$\Im(\mathcal{P}) = \omega \left(\mu_0 \|\mathbf{H}\|^2 - \varepsilon_0 \int_{\mathcal{B}} \Re(\bar{\varepsilon}(x) \mathbf{E} \cdot \bar{\mathbf{E}}) \right) . \quad (3.72)$$

On commence par remarquer qu'en raison de la convergence forte double-échelle de j_η vers j_0 , on a

$$\begin{aligned} \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{\Sigma_\eta} \bar{j}_\eta \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{E}_\eta &= \int_{\mathcal{B} \times \Sigma} \bar{j}_0 \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{E}_0 \\ &= \int_{\mathcal{B} \times \Sigma} \bar{j}_0 \mathbf{e}_3 \cdot (\mathbf{E} + \nabla_y \psi) \end{aligned} \quad (3.73)$$

On a exploité ici la décomposition de \mathbf{E}_0 donnée dans (3.44) qui résulte de la relation $\text{rot}_y \mathbf{E}_0 = 0$ dans Y . De plus, d'après la définition du tenseur de permittivité ε^{eff} donnée dans (3.50), on a

$$\int_{\mathcal{B} \times \Sigma} \bar{j}_0 \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{E} = i \int_{\mathcal{B}} E_3 \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{E} \int_{\Sigma} \zeta = i \int_{\mathcal{B}} (\bar{\varepsilon}(x) - I_d) \mathbf{E} \cdot \bar{\mathbf{E}} . \quad (3.74)$$

D'autre part, à l'aide d'une intégration par parties on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{B} \times \Sigma} \bar{j}_0 \mathbf{e}_3 \cdot \nabla_y \psi &= - \int_{\mathcal{B} \times Y} \text{div}_y(\bar{j}_0 \mathbf{e}_3 1_\Sigma) \psi \\ &= - \int_{\mathcal{B} \times Y} \bar{j}_0 (\delta_{\mathcal{D}^+} - \delta_{\mathcal{D}^-}) \psi , \end{aligned}$$

où \mathcal{D}^\pm sont les bases du cylindre Σ . A présent, à l'aide de la seconde équation de (3.45), il vient

$$\int_{\mathcal{B} \times \Sigma} \bar{j}_0 \mathbf{e}_3 \cdot \nabla \psi = i \int_{\mathcal{B} \times Y} \Delta \bar{\psi} \psi . \quad (3.75)$$

On associe les équations (3.73), (3.74) et (3.75) pour déduire

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{\Sigma_\eta} \bar{j}_\eta \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{E}_\eta = i \left(\int_{\mathcal{B}} (\bar{\varepsilon}(x) - I_d) \mathbf{E} \cdot \bar{\mathbf{E}} + \int_{\mathcal{B} \times Y} \Delta \bar{\psi} \psi \right) . \quad (3.76)$$

D'autre part, en combinant les deux égalités (3.71) et (3.72) on peut obtenir

$$\begin{aligned} \omega\varepsilon_0\|\mathbf{E}_\eta\|^2 &= \mathfrak{S}(\mathcal{P}) - \mathfrak{S}(\mathcal{P}_\eta) + \omega\mu_0\left(\|\mathbf{H}_\eta\|^2 - \|\mathbf{H}\|^2\right) \\ &\quad - \omega\varepsilon_0 \int_{\Sigma_\eta} \mathfrak{S}(\bar{\mathbf{j}}_\eta \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{E}_\eta) + \omega\varepsilon_0 \int_{B_R} \Re(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(x) \mathbf{E} \cdot \bar{\mathbf{E}}) . \end{aligned} \quad (3.77)$$

Ainsi, d'après la convergence (3.76), la convergence forte dans $L^2(B_R)$ de \mathbf{H}_η vers \mathbf{H} (cf. lemme 3.11) et la convergence de \mathcal{P}_η vers \mathcal{P} on obtient

$$\begin{aligned} \lim_{\eta \rightarrow 0} \|\mathbf{E}_\eta\|^2 &= \left(\int_{B_R} \Re(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(x) \mathbf{E} \cdot \bar{\mathbf{E}}) - \int_{\mathcal{B}} \Re(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(x) - I_d) \mathbf{E} \cdot \bar{\mathbf{E}} - \int_{\mathcal{B} \times Y} \Re(\Delta \bar{\psi} \psi) \right) \\ &= \left(\int_{\mathcal{B}} |\mathbf{E}|^2 + \int_{\mathcal{B} \times Y} |\nabla \psi|^2 \right) = \|\mathbf{E}_0\|_{L^2(\mathcal{B} \times Y)} , \end{aligned} \quad (3.78)$$

où la dernière égalité résulte de la décomposition (3.44) du champ \mathbf{E}_0 . Ceci termine l'étape 2 ainsi que la démonstration de la proposition 3.22. \square

Justification de l'hypothèse d'énergie.

Proposition 3.23 *Si $\kappa \neq +\infty$, alors, l'hypothèse (3.30) est satisfaite.*

PREUVE. On procède par l'absurde. Supposons alors que la solution $(\mathbf{E}_\eta, \mathbf{H}_\eta)$ ne soit pas bornée dans $L^2(B_R)$. On note alors

$$t_\eta := \left(\int_{B_R} |\mathbf{E}_\eta|^2 + \int_{B_R} |\mathbf{H}_\eta|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \rightarrow +\infty , \quad \tilde{\mathbf{E}}_\eta := \frac{\mathbf{E}_\eta}{t_\eta} \quad \text{et} \quad \tilde{\mathbf{H}}_\eta := \frac{\mathbf{H}_\eta}{t_\eta} , \quad (3.79)$$

de telle sorte que

$$\int_{B_R} |\hat{\mathbf{E}}_\eta|^2 + \int_{B_R} |\hat{\mathbf{H}}_\eta|^2 = 1 . \quad (3.80)$$

La suite $(\tilde{\mathbf{E}}_\eta, \tilde{\mathbf{H}}_\eta)$ vérifie l'hypothèse (3.30) et est solution de (3.20) avec $(\frac{\mathbf{E}^i}{t_\eta}, \frac{\mathbf{H}^i}{t_\eta})$ pour onde incidente. Nous pouvons alors appliquer les lemmes 3.21 et 3.10 à cette suite. On a alors la convergence faible de $(\tilde{\mathbf{E}}_\eta, \tilde{\mathbf{H}}_\eta)$ vers (\mathbf{E}, \mathbf{H}) l'unique solution de (3.61) avec $(\mathbf{E}^i, \mathbf{H}^i) = (0, 0)$. Cette solution étant nulle, on peut appliquer la troisième assertion du lemme 3.11 pour dire que la convergence de $(\tilde{\mathbf{E}}_\eta, \tilde{\mathbf{H}}_\eta)$ vers $(0, 0)$ est forte dans $L^2(B_R)$. Cette convergence forte est incompatible avec (3.80) ce qui entraîne la contradiction. \square

2.7 Propriétés de la résonance fondamentale

Proposition 3.24 *La plus grande valeur propre $\lambda_0(l, |\mathcal{D}|)$ de l'opérateur R vérifie*

$$|\mathcal{D}|(1-l) \leq \lambda_0(l, |\mathcal{D}|) \leq 1, \quad (3.81)$$

de plus pour \mathcal{D} fixé, on a

$$\lim_{l \rightarrow 0} \lambda_0(l, |\mathcal{D}|) = 1. \quad (3.82)$$

PREUVE.

La valeur propre fondamentale est déterminée de manière générale par :

$$\lambda_0(l, |\mathcal{D}|) = \max_w \left\{ \langle Rw, w \rangle : w \in L^2_{\#}(Y), \|w\|_{L^2(Y)} = 1 \right\}. \quad (3.83)$$

Commençons par montrer que

$$\langle Rw, w \rangle = \max_{\varphi} \left\{ 2 \int_{\mathcal{D}} w[\varphi]_l - \frac{1}{l} \int_Y |\nabla \varphi|^2 : \varphi \in W_{\#}^{1,2}(Y) \right\} \quad (3.84)$$

$$= \min_{\sigma} \left\{ \frac{1}{l} \int_Y |\sigma|^2 : \sigma \in L^2_{\#}(Y; \mathbb{R}^3), -\operatorname{div} \sigma = w(\delta_{\mathcal{D}^+} - \delta_{\mathcal{D}^-}) \right\}. \quad (3.85)$$

où $[\varphi]_l$ est introduit dans la définition 3.15.

Preuve de (3.84).

Comme nous l'avons montré dans la démonstration du théorème 3.19, on a

$$\langle Rw, w \rangle = \frac{1}{l} \int_Y |\nabla \varphi_w|^2, \quad (3.86)$$

où $\varphi_w \in W_{\#}^{1,2}(Y)$ vérifie $-\Delta \varphi_w = w(\delta_{\mathcal{D}^+} - \delta_{\mathcal{D}^-})$. Cette solution est déterminée de manière équivalente par le problème d'optimisation suivant,

$$\frac{1}{2} \int_Y |\nabla \varphi_w|^2 - \int_{\mathcal{D}} w(\varphi_w^+ - \varphi_w^-) = \min_{\varphi \in W_{\#}^{1,2}(Y)} \left\{ \frac{1}{2} \int_Y |\nabla \varphi|^2 - \int_{\mathcal{D}} w(\varphi^+ - \varphi^-) \right\}. \quad (3.87)$$

Or, la valeur atteinte par le minimum est $-\frac{1}{2} \int_Y |\nabla \varphi_w|^2$. En effet, en notant que la fonction

$$t > 0 \quad \rightarrow \quad t^2 \frac{1}{2} \int_Y |\nabla \varphi_w|^2 - t \int_{\mathcal{D}} w(\varphi_w^+ - \varphi_w^-),$$

admet un minimum en $t = 1$, on prouve que la solution φ_w vérifie

$$\int_Y |\nabla \varphi_w|^2 = \int_{\mathcal{D}} w(\varphi_w^+ - \varphi_w^-).$$

À l'aide de cette propriété, la solution φ_w du problème (3.87) vérifie

$$\int_Y |\nabla \varphi_w|^2 = \max_{\varphi_{\#}} \left\{ 2 \int_{\mathcal{D}} w(\varphi^+ - \varphi^-) - \int_Y |\nabla \varphi|^2 \right\}, \quad (3.88)$$

ce qui, ajouté à l'équation (3.86), justifie la relation (3.84).

Preuve de (3.85).

On commence par remarquer de manière évidente que

$$\int_Y |\nabla \varphi_w|^2 = \min_{\varphi} \left\{ \int_Y |\nabla \varphi|^2 : \varphi \in W_{\#}^{1,2}(Y), -\Delta \varphi = w(\delta_{\mathcal{D}^+} - \delta_{\mathcal{D}^-}) \right\}. \quad (3.89)$$

Pour montrer que le minimum dans (3.85) coïncide avec celui de l'équation précédente, on considère une décomposition de Helmholtz de $\boldsymbol{\sigma} \in L^2_{\#}(Y; \mathbb{R}^3)$:

$$\boldsymbol{\sigma} = \nabla\varphi + \mathbf{rot} \boldsymbol{\psi} ,$$

avec $(\varphi, \boldsymbol{\psi}) \in W^1_{\#}(Y) \times W^1_{\#}(Y \times \mathbb{R}^3)$. Il est alors évident que, dans (3.85), la contrainte sur $\boldsymbol{\sigma}$ se répercute uniquement sur φ de manière à retrouver celle du problème (3.89). De plus, on a

$$\int_Y |\boldsymbol{\sigma}|^2 = \int_Y |\nabla\varphi|^2 + 2 \int_Y \nabla\varphi \cdot \mathbf{rot} \boldsymbol{\psi} + \int_Y |\mathbf{rot} \boldsymbol{\psi}|^2 .$$

La périodicité des champs fait disparaître l'intégrale contenant les termes croisés dans l'équation précédente. Il devient clair que le minimum proposé va être atteint pour $\boldsymbol{\psi} = 0$. Cela justifie la relation (3.85).

Montrons (3.81).

Pour tout $w \in L^2(\mathcal{D})$, le champ $\boldsymbol{\sigma}(y) := w(y_1, y_2)1_{\Sigma}\mathbf{e}_3$ est admissible dans le problème (3.85) et conduit, à l'aide de l'égalité (3.83), à

$$\lambda_0(h, |\mathcal{D}|) \leq \max_w \left\{ \frac{1}{l} \int_{\Sigma} |w|^2 : \|w\|_{L^2(\mathcal{D})} = 1 \right\} = 1 , \quad (3.90)$$

qui n'est autre que la seconde inégalité de (3.81).

À l'inverse, on choisit $w = 1$ et $\varphi = \varphi(y_3)$ dans (3.84) avec φ une fonction impaire de $W_0^{1,2}([-1/2, 1/2])$ pour obtenir :

$$|\mathcal{D}|\lambda_0 \geq (R(1), 1) \geq \frac{1}{l} \max_{\varphi} \left\{ 4|\mathcal{D}|\varphi\left(\frac{l}{2}\right) - 2 \int_0^{1/2} (\varphi')^2 : \varphi(0) = \varphi\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \right\} .$$

En choisissant dans l'équation précédente la fonction $\varphi \in W_0^{1,2}([-1/2, 1/2])$ vérifiant

$$\varphi' = \begin{cases} |\mathcal{D}|(1-l) & \text{dans } [-l/2, l/2] \\ -|\mathcal{D}|l & \text{dans } \mathbb{R} \setminus [-l/2, l/2] \end{cases}$$

on obtient la première inégalité dans (3.81).

Preuve de (3.82) :

Grâce aux équations (3.83) et (3.84) on a

$$\lambda_0(l, |\mathcal{D}|) = \frac{1}{l} \max_{\varphi_{\#}} \left\{ 2\|\varphi^+ - \varphi^-\|_{L^2(\mathcal{D})} - \int_Y |\nabla\varphi|^2 \right\} . \quad (3.91)$$

D'autre part, en introduisant

$$\alpha(l, |\mathcal{D}|) = \min_{\varphi_{\#}} \left\{ \int_Y |\nabla\varphi|^2 , \|\varphi^+ - \varphi^-\|_{L^2(\mathcal{D})} = 1 \right\} , \quad (3.92)$$

on obtient facilement la relation $\lambda_0(l, |\mathcal{D}|) = \frac{1}{l\alpha(l, |\mathcal{D}|)}$. En effet, on a

$$\begin{aligned}\lambda_0(l, |\mathcal{D}|) &= \frac{1}{l} \max_t \max_{\phi^\# / \|\phi^+ - \phi^-\| = t} \left\{ 2t - \int_Y |\nabla \phi|^2 \right\} \\ &= \frac{1}{l} \max_t \{2t - t2\alpha(l, |\mathcal{D}|)\} = \frac{1}{l\alpha(l, |\mathcal{D}|)} .\end{aligned}\quad (3.93)$$

On fixe $\varepsilon > 0$ et on choisi dans (3.92) une fonction $\varphi_\varepsilon(y)$ de la forme $\varphi_\varepsilon(y) := \chi_\varepsilon(y_1, y_2)\psi(y_3)$ avec

$$\begin{aligned}\psi &\in W_\#^{1,2} \left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \right) \quad \text{vérifiant} \quad \psi\left(\frac{l}{2}\right) - \psi\left(-\frac{l}{2}\right) = 1 \\ \text{et } \chi_\varepsilon &\in C_c^\infty \left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^2 \right) \quad \text{vérifiant} \quad \chi_\varepsilon 1_{\mathcal{D}} = \frac{1}{\sqrt{|\mathcal{D}|}} 1_{\mathcal{D}} .\end{aligned}$$

On suppose de plus que ψ affine dans $[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}]$ et $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \setminus [-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}]$, et que χ_ε satisfait

$$\int_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^2 \setminus \mathcal{D}} |\chi_\varepsilon|^2 \leq \varepsilon .$$

On a alors

$$\begin{aligned}l\alpha(l, |\mathcal{D}|) &\leq l \left(\int_Y |\psi'(x_3)\chi_\varepsilon(x_1x_2)|^2 + |\psi(x_3)\nabla\chi_\varepsilon(x_1x_2)|^2 \right) \\ &= l \left(\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} |\psi'|^2 + \int_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \setminus [-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}]} |\psi'|^2 \right) \left(\int_{\mathcal{D}} |\chi_\varepsilon|^2 + \int_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^2 \setminus \mathcal{D}} |\chi_\varepsilon|^2 \right) \\ &\quad + l \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} |\psi|^2 \int_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^2} |\nabla\chi_\varepsilon|^2 \\ &= l \left(\frac{1}{l} + O(l) \right) (1 + \varepsilon) + O(l) \|\nabla\chi_\varepsilon\|_{L^2([-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^2)}^2 \\ &= 1 + \varepsilon + O(l^2)(1 + \varepsilon) + O(l) \|\nabla\chi_\varepsilon\|_{L^2([-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^2)}^2 .\end{aligned}$$

L'inégalité précédente est vraie pour tout $\varepsilon > 0$ donc en passant à la limite lorsque $l \rightarrow 0$ puis quand $\varepsilon \rightarrow 0$ on obtient finalement

$$\lim_{l \rightarrow 0} l\alpha(l, |\mathcal{D}|) \leq 1 ,$$

ce qui combiné à l'inégalité (3.81) termine la démonstration de la proposition 3.24. \square

3 Cas de nano-fibres orientées dans les trois directions

Dans la géométrie considérée dans la section 2, il apparaît que seule la composante $\varepsilon_{33}^{\text{eff}}$ du tenseur de permittivité effectif est affectée par le phénomène de micro-résonances.

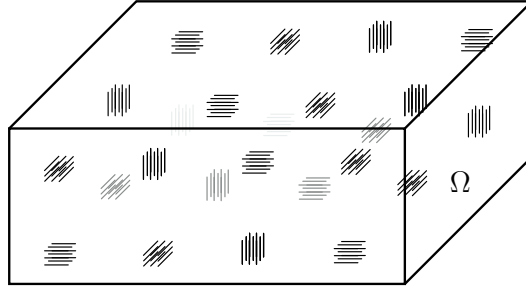


FIGURE 3.7: Structure constituée de paquets de fibres parallèles de directions alternées.

Rappelons que ces résonances sont responsables du changement de signe caractéristique des métamatériaux. Il est en fait possible d'envisager des variantes de la géométrie des inclusions où l'effet de changement de signe se produit dans les trois directions simultanément.

Dans cette section, nous allons proposer deux variantes qui répondent à cet objectif :

Dans la première, nous adoptons une stratégie de directions alternées pour les inclusions cylindriques dont le comportement est décrit par la loi non locale résultant du processus d'homogénéisation étudié dans la section 1.

Dans la seconde variante, les inclusions apparaissant dans la dernière étape du processus sont décrites par l'homogénéisation de réseaux fins de fibres métalliques *croisées*. Un effet dispersif dans les trois directions est ainsi obtenu au niveau de la loi non locale décrivant chacune de ces inclusions (généralisation du résultat présenté dans la section 1).

3.1 Variante avec les directions alternées

On considère la structure décrite dans la figure (3.7) où chaque cellule de périodicité fait apparaître trois inclusions cylindriques disjointes orientées respectivement dans les directions e_1, e_2 et e_3 .

Description de la géométrie. On note $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^3$ l'obstacle diffractant contenant la structure et Σ_η^k la région de \mathcal{B} occupée par les inclusions cylindriques. Chacune d'entre elles est composée du milieu effectif résultant de l'homogénéisation de fibres métalliques orientées dans la direction e_k (obtenu dans la section 1). L'ensemble Σ_η^k est la périodisation dans les trois directions de $\eta\Sigma^k$ où $\Sigma^k \subset Y$ est donné par

$$\Sigma^k := \left\{ y \in Y, y_k \in [a^k, a^k + l^k] \text{ et } \hat{y}_k \in \mathcal{D}^k \right\},$$

où la notation $\hat{y}_k \in \mathbb{R}^2$ est donnée par

$$\hat{y}_1 = (y_2, y_3) \quad , \quad \hat{y}_2 = (y_1, y_3) \quad \text{et} \quad \hat{y}_3 = (y_1, y_2) . \tag{3.94}$$

Notant $\mathcal{D}^k := \{\hat{y}_k \in \mathbb{R}^2, y \in \Sigma^k\}$, les faces de Σ^k sont définies par

$$\mathcal{D}^{k\pm} = \left\{ y \in \mathbb{R}^3, \hat{y}_k \in \mathcal{D}^k, y_k = \pm \frac{l^k}{2} \right\}.$$

L'ensemble des micro-cylindres dans la direction \mathbf{e}_k est ainsi donné par

$$\Sigma_\eta^k := \bigcup_{i \in I_\eta} \eta(i + \Sigma^k), \quad I_\eta = \left\{ i \in \mathbb{Z}^3 \mid \eta(i + \Sigma^k) \subset \mathcal{B}, \forall k \in \{1, 2, 3\} \right\}. \quad (3.95)$$

Enfin, on pose $\mathcal{D}_\eta^{k\pm} := \bigcup_{i \in I_\eta} \eta(i + \mathcal{D}^{k\pm})$ l'union des bases des inclusions de direction \mathbf{e}_k .

Problème pré-homogénéisé.

La structure diffractante $\Sigma_\eta = \bigcup_{k=1}^3 \Sigma_\eta^k$ est illuminée par une onde incidente $(\mathbf{E}^i, \mathbf{H}^i)$. De manière similaire à (3.17), le problème de diffraction est décrit par le triplet $(\mathbf{E}_\eta, \mathbf{H}_\eta, \mathbf{J}_\eta)$ solution dans $L_{loc}^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^3)$ du système suivant

$$\left\{ \begin{array}{lll} \mathbf{rot} \mathbf{E}_\eta & = & i\omega\mu_0 \mathbf{H}_\eta & \text{dans } \mathbb{R}^3 \\ \mathbf{rot} \mathbf{H}_\eta & = & -i\omega\varepsilon_0(\mathbf{E}_\eta + i\mathbf{J}_\eta) & \text{dans } \mathbb{R}^3 \\ \frac{\partial^2 j_\eta^k}{\partial x_k^2} + \left(k_0^2 + \frac{2i\pi\gamma}{\kappa}\right) j_\eta^k & = & 2i\pi\gamma \mathbf{E}_\eta \cdot \mathbf{e}_k & \text{dans } \Sigma_\eta^k \\ \frac{\partial j_\eta^k}{\partial x_k} & = & 0 & \text{sur } \mathcal{D}_\eta^{k+} \cup \mathcal{D}_\eta^{k-} \\ (\mathbf{E}_\eta - \mathbf{E}^i, \mathbf{H}_\eta - \mathbf{H}^i) & & \text{satisfait les conditions (3.6)} & \end{array} \right. \quad (3.96)$$

où les fonctions scalaires $j_\eta^k := \mathbf{J}_\eta \cdot \mathbf{e}_k$ sont à support dans Σ_η^k pour tout $k \in \{1, 2, 3\}$.

Analyse limite. Comme dans la section 2, on aura la convergence faible de la suite $(\mathbf{E}_\eta, \mathbf{H}_\eta, \mathbf{J}_\eta)$ vers un triplet $(\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{J})$ où $\mathbf{J} = (j^1(x), j^2(x), j^3(x))$ est une fonction vectorielle nulle en dehors de \mathcal{B} qui représente le courant volumique de déplacement obtenu par homogénéisation. D'après les deux premières équations dans (3.96), on aura

$$\mathbf{rot} \mathbf{E} = i\omega\mu_0 \mathbf{H}, \quad \mathbf{rot} \mathbf{H} = -i\omega\varepsilon_0(\mathbf{E} + i\mathbf{J}). \quad (3.97)$$

Le point crucial est de savoir s'il existe, comme c'était le cas dans la section 2, une relation *locale* entre \mathbf{J} et le champ électrique macroscopique \mathbf{E} .

En premier lieu, l'opérateur capacitance R apparaissant dans la définition 3.15 doit être reformulé pour les trois cylindres. Cela donne naissance (cf la définition 3.31) à trois opérateurs distincts R^k chacun étant compact auto-adjoint strictement positif. Notons $\{\lambda_n^k, n \in \mathbb{N}\}$ les valeurs propres distinctes de R^k rangées dans l'ordre décroissant et telles que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n^k = 0$. À toute valeur propre $\lambda \in \{\lambda_n^k, n \in \mathbb{N}\}$, on associe

- $P_{V_\lambda^k}$ le projecteur orthogonal sur l'espace propre V_λ^k de R^k associé à la valeur propre λ .
- $\sigma_0^k := \{\lambda_n^k, P_{V_{\lambda_n^k}^k}(1) \neq 0\}$.

Ceci nous permet d'introduire les fonctions scalaires

$$\Lambda^k(\omega, \gamma^k, \kappa^k) = \sum_{\lambda \in \sigma_0^k} \frac{\|P_{V_\lambda^k}(1)\|_{L^2(\mathcal{D}^k)}^2}{\frac{\kappa_0^2}{2\pi\gamma^k} - \lambda + \frac{i}{\kappa^k}}. \quad (3.98)$$

Nous allons montrer le résultat suivant.

Proposition 3.25 *Les composantes j^1, j^2, j^3 de $\mathbf{J}(x)$ sont identifiées sur \mathcal{B} par les relations*

$$j^k(x) = i l^k \Lambda^k(\omega, \gamma^k, \kappa^k) E_k(x).$$

Il en résulte que le problème de diffraction limite sera donné par le système

$$\begin{cases} \mathbf{rot} \mathbf{E} = i\omega\mu_0 \mathbf{H} \\ \mathbf{rot} \mathbf{H} = -i\omega\varepsilon_0 \boldsymbol{\varepsilon}(x, \omega) \mathbf{E} \\ (\mathbf{E}, \mathbf{H}) \text{ satisfait les conditions (3.6)} \end{cases} \quad (3.99)$$

avec

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x) := \mathbf{I}_d 1_{\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{B}}(x) + \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{eff}}(\omega) 1_{\mathcal{B}}(x)$$

et $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{eff}}(\omega)$ donné par

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{eff}} = \begin{pmatrix} 1 - l^1 \Lambda^1(\omega, \kappa^1, \gamma^1) & 0 & 0 \\ 0 & 1 - l^2 \Lambda^2(\omega, \kappa^2, \gamma^2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 - l^3 \Lambda^3(\omega, \kappa^3, \gamma^3) \end{pmatrix}. \quad (3.100)$$

Il est facile de voir que les arguments utilisés dans la démonstration du théorème 3.8 s'appliquent à l'identique, en particulier l'unicité de (\mathbf{E}, \mathbf{H}) , la convergence en dehors de l'obstacle et l'estimation (3.30). Ainsi, nous pouvons conclure que le champ électromagnétique $(\mathbf{E}_\eta, \mathbf{H}_\eta)$ converge faiblement dans $L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^3)$ vers l'unique solution du système (3.99). La convergence est uniforme (ainsi que pour toutes les dérivées) sur toute partie compacte de $\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{B}$. Enfin, alors que la convergence de \mathbf{H}_η est forte dans $L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^3)$, on aura seulement pour $(\mathbf{E}_\eta, \mathbf{J}_\eta)$ la convergence forte double-échelle vers un couple $(\mathbf{E}_0(x, y), \mathbf{J}_0(x, y))$ dont la dépendance en y pour $x \in \mathcal{B}$ est explicitée au cours de la démonstration de la proposition 3.25 (section 3.3).

3.2 Variante avec les fibres croisées

Première étape. Dans l'homogénéisation décrite dans la section 1, on remplace le réseau de fibres parallèles par un réseau de fibres croisées comme représenté dans la figure 3.8.

Description géométrique.

On note $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^3$ l'obstacle diffractant *borné* contenant les fibres. Cet obstacle est un pavé de côtés $L^1 \times L^2 \times L^3$ donné par

$$\mathcal{B} := \left] -\frac{L^1}{2}, \frac{L^1}{2} \left[\times \left] -\frac{L^2}{2}, \frac{L^2}{2} \left[\times \left] -\frac{L^3}{2}, \frac{L^3}{2} \left[.$$

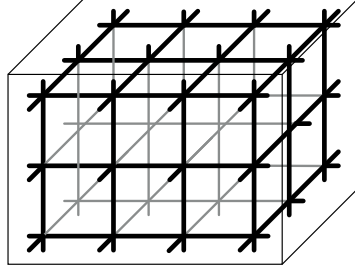


FIGURE 3.8: Structure constituée de fibres orientées dans les trois directions.

On note \mathcal{D}^k la section de \mathcal{B} dans la direction \mathbf{e}_k donnée par

$$\mathcal{D}^k := \{\hat{y}_k \in \mathbb{R}^2, y \in \mathcal{B}\},$$

où la notation \hat{y}_k est donnée dans (3.94). Les faces de \mathcal{B} dans la direction k sont notées $\mathcal{D}^{k\pm}$ et définies par

$$\mathcal{D}^{k\pm} = \left\{ y \in \mathbb{R}^3, \hat{y}_k \in \mathcal{D}^k, y_k = \pm \frac{L^k}{2} \right\}.$$

L'ensemble $T_\eta^k \subset \mathcal{B}$ représente la zone occupée par les fibres parallèles à la direction \mathbf{e}_k . Son intersection par le plan d'équation $x_k = s$ pour $|s| < L^k/2$ consiste en un réseau périodique (de période η) de disques de rayon r_η^k .

On définit l'ensemble S_η^k , représentant une fibre de direction \mathbf{e}_k dans la cellule de base $Y :=]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[^3$, donné par

$$S_\eta^k := \left\{ (y_1, y_2, y_3) \in Y, |\hat{y}_k| \leq \frac{r_\eta^k}{\eta} \right\}.$$

L'ensemble occupé par les fibres périodiques T_η^k s'écrit alors

$$T_\eta^k := \bigcup_{i \in I_\eta^k} \eta(i + S_\eta^k) \quad , \quad I_\eta^k = \left\{ i \in \mathbb{Z}^3 \mid \eta(i + S_\eta^k) \subset \mathcal{B}, \forall k \in \{1, 2, 3\} \right\}. \quad (3.101)$$

Le taux de remplissage des fibres est donné par le réel $\theta_\eta^k := \frac{\pi(r_\eta^k)^2}{\eta^2}$ et, comme dans la section 1, nous le choisissons tel que $\lim_{\eta \rightarrow 0} \theta_\eta^k = 0$ pour tout $k \in \{1, 2, 3\}$ (i.e. $r_\eta^k \ll \eta$). Le cylindre élémentaire S_η^k se concentre lorsque $\eta \rightarrow 0$ et devient le segment S_0^k défini par

$$S_0^k = \{y \in Y, \hat{y}_k = 0\}. \quad (3.102)$$

Permittivité relative.

La permittivité des fibres parallèles à \mathbf{e}_k est celle d'un métal ohmique de grande conductivité décrite par le paramètre σ_η^k . La permittivité relative en tout point de l'espace est alors donnée par

$$\varepsilon_\eta := \begin{cases} 1 & \text{dans } \mathbb{R}^3 \setminus \bigcup_{k=1}^3 T_\eta^k, \\ 1 + i\sigma_\eta^k & \text{dans } T_\eta^k, \quad k \in \{1, 2, 3\}. \end{cases} \quad (3.103)$$

Comme dans la section 1, nous choisissons la conductivité σ_η^k telle que $\sigma_\eta^k \rightarrow +\infty$.

Problème pré-homogénéisé.

La structure est illuminée par une onde incidente plane monochromatique $(\mathbf{E}^{\text{inc}}, \mathbf{H}^{\text{inc}})$ de fréquence ω fixée, indépendante de η (dépendance harmonique en temps $(e^{-i\omega t})$).

Pour tout $\eta > 0$, le champ électromagnétique total $(\mathbf{E}_\eta, \mathbf{H}_\eta)$ vérifie les équations de Maxwell données au sens des distributions par

$$\begin{cases} \mathbf{rot} \mathbf{E}_\eta = i\omega\mu_0\mathbf{H}_\eta & \text{dans } \mathbb{R}^3, \\ \mathbf{rot} \mathbf{H}_\eta = -i\omega\varepsilon_0\varepsilon_\eta\mathbf{E}_\eta & \text{dans } \mathbb{R}^3, \\ (\mathbf{E}_\eta^d, \mathbf{H}_\eta^d) & \text{satisfait la condition (3.6)}, \end{cases} \quad (3.104)$$

où ε_0 et μ_0 représentent respectivement les permittivité et perméabilité du vide.

Choix des facteurs d'échelles.

On note $\theta_\eta^k := \frac{\pi r_\eta^k}{\eta^2}$, la fraction volumique des fibres de direction k . De la même façon que dans la section 1, on introduit les paramètres κ^k et γ^k liés aux vitesses de convergences. Ils sont donnés par

$$\frac{1}{\eta^2 |\log r_\eta^k|} \rightarrow \gamma^k \quad \text{avec } \gamma^k \in]0, +\infty], \quad (3.105)$$

$$\sigma_\eta^k \theta_\eta^k \rightarrow \kappa^k \quad \text{avec } \kappa^k \in]0, +\infty]. \quad (3.106)$$

Ainsi, le paramètre γ^k représente la limite de la capacité moyenne des fibres T_η^k par unité de volume et κ^k représente la conductivité moyenne de ces fibres par unité de volume sur l'ensemble \mathcal{B} .

Analyse double-échelle.

En reprenant le schéma de démonstration du théorème 3.5, on introduit les champs électriques \mathbf{J}_η^k donnés par

$$\mathbf{J}_\eta^k := \sigma_\eta^k \mathbf{E}_\eta 1_{T_\eta^k}, \quad (3.107)$$

de telle sorte que le vecteur déplacement $\mathbf{D}_\eta := \varepsilon_\eta \mathbf{E}_\eta$ soit décomposé en $(\mathbf{E}_\eta + i \sum_{k=1}^3 \mathbf{J}_\eta^k)$. En réalité, cette décomposition n'est exacte que si les fibres ne se croisent pas. Dans le cas contraire, il faut tenir compte de la contribution liée à l'intersection des fibres. Cet intersection occupant un volume très faible, il s'avère que sa contribution n'interviendra pas lors du passage à la limite. Ainsi, la seconde équation de (3.104) devient

$$\mathbf{rot} \mathbf{H}_\eta = -i\omega\varepsilon_0 \left(\mathbf{E}_\eta + i \sum_{k=1}^3 \mathbf{J}_\eta^k \right) + o(1). \quad (3.108)$$

La borne (3.11) est aussi obtenue dans ce cas et devient

$$\|\mathbf{E}_\eta\|_{L^2(B_R)} < C, \quad \|\mathbf{H}_\eta\|_{L^2(B_R)} < C \quad \text{et} \quad \|\mathbf{J}_\eta^k\|_{L^1(B_R)} < C \quad \forall k \in \{1, 2, 3\}, \quad (3.109)$$

où $C > 0$ ne dépend pas de η .

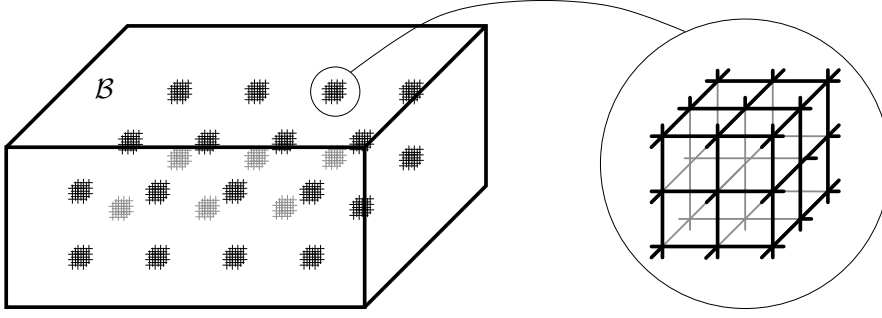


FIGURE 3.9: Structure globale dans le processus d'homogénéisation réitéré.

De la même façon que dans (3.14), la limite double-échelle de \mathbf{J}_η^k , notée \mathbf{J}_0^k , se décompose sous la forme

$$\mathbf{J}_0^k(x, y) = j^k(x) \delta_{S_0^k}(y) ,$$

avec $j^k \in L^2(\mathcal{B})$ et S_0^k défini dans (3.102).

Le passage à la limite faible dans le système (3.104) conduit alors à

$$\begin{cases} \text{rot } \mathbf{E} = i\omega\mu_0\mathbf{H}, \\ \text{rot } \mathbf{H} = -i\omega\varepsilon_0(\mathbf{E} + i\sum_{k=1}^3 j^k \mathbf{e}_k) \end{cases} . \quad (3.110)$$

Ce système est de plus complété par trois équations liant la densité de courant j^k au champ électrique macroscopique \mathbf{E} . Cette étude délicate peut être reconduite en s'inspirant de [12] et conduit aux équations suivantes pour $k \in \{1, 2, 3\}$

$$\frac{\partial^2 j^k}{\partial x_k^2} + (k_0^2 + \frac{2i\pi\gamma^k}{\kappa^k})j^k = 2i\pi\gamma^k E_k \quad \text{dans } \mathcal{B} , \quad \frac{\partial j^k}{\partial x_k} = 0 \quad \text{sur } \mathcal{D}^{k+} \cup \mathcal{D}^{k-} . \quad (3.111)$$

Les équations (3.110) et (3.111) forment le système homogénéisé.

Remarque 3.26 Il est important de noter que le croisement des fibres ne crée pas d'équation supplémentaire liant les densités de courant j^1 , j^2 et j^3 . Cela est dû au fait que dans le modèle capacitif, le taux de remplissage des fibres est infinitésimal et le volume correspondant à leurs intersections est d'ordre encore plus petit.

Seconde étape. Comme cela a été expliqué dans la section 2, on reproduit de façon périodique, et avec un facteur d'échelle η , la structure non locale décrite par les équations (3.110) et (3.111). Cette structure est représentée dans la figure 3.9.

On note $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^3$ l'obstacle diffractant contenant la structure et Σ_η la région de \mathcal{B} occupée par les inclusions en forme de pavé. L'ensemble Σ_η est la périodisation dans les trois directions de $\eta\Sigma$ où $\Sigma \subset Y$ est donné par

$$\Sigma :=]a^1, a^1 + l^1[\times]a^2, a^2 + l^2[\times]a^3, a^3 + l^3[.$$

L'ensemble Σ_η prend alors la forme :

$$\Sigma_\eta := \bigcup_{i \in I_\eta} \eta(i + \Sigma) \quad , \quad I_\eta = \{i \in \mathbb{Z}^3 \mid \eta(i + \Sigma) \subset \mathcal{B}\} . \quad (3.112)$$

De plus, nous introduisons $\mathcal{D}^{k\pm}$ les bases du pavé Σ dans la direction \mathbf{e}_k et $\mathcal{D}_\eta^{k\pm} := \bigcup_{i \in I_\eta} \eta(i + \mathcal{D}^{k\pm})$ l'union des bases de ces inclusions de direction \mathbf{e}_k .

En remplaçant \mathcal{B} par Σ_η et $\mathcal{D}^{k\pm}$ par $\mathcal{D}_\eta^{k\pm}$ dans les équations (3.110) et (3.111), le nouveau système pré-homogénéisé devient

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{rot} \mathbf{E}_\eta & = i\omega\mu_0 \mathbf{H}_\eta & \text{dans } \mathbb{R}^3 \\ \mathbf{rot} \mathbf{H}_\eta & = -i\omega\varepsilon_0 (\mathbf{E}_\eta + i \sum_{k=1}^3 j_\eta^k \mathbf{e}_k) & \text{dans } \mathbb{R}^3 \\ \frac{\partial^2 j_\eta^k}{\partial x_k^2} + (k_0^2 + \frac{2i\pi\gamma^k}{\kappa^k}) j_\eta^k & = 2i\pi\gamma^k E_\eta^k & \text{dans } \mathcal{B} \\ \frac{\partial j_\eta^k}{\partial x_k} & = 0 & \text{sur } \mathcal{D}_\eta^{k\pm} \\ (\mathbf{E} - \mathbf{E}^i, \mathbf{H} - \mathbf{H}^i) & \text{vérifie les conditions (3.6)} & \end{array} \right. \quad (3.113)$$

où les fonctions j_η^k sont à support dans Σ_η^k .

Loi effective homogénéisée.

Le système pré-homogénéisé (3.113) a la même formulation que le système (3.96) apparaissant dans le cas de la variante avec les directions alternées. Chacun de ces problèmes pré-homogénéisé met en œuvre trois densités de courant de déplacement j^k qui vont avoir le même comportement au cours de l'étude asymptotique (bien que leur support diffère dans chacune des variantes). Ainsi, les résultats obtenus dans le cas des fibres alternées vont pouvoir être retrouvés dans ce cadre.

Nous aurons donc la convergence faible de la suite $(\mathbf{E}_\eta, \mathbf{H}_\eta, \mathbf{J}_\eta)$ vers un triplet $(\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{J})$ où $\mathbf{J} = (j^1(x), j^2(x), j^3(x))$ est une fonction vectorielle nulle en dehors de \mathcal{B} . D'après les deux premières équations dans (3.113), on aura, comme dans (3.97), les relations

$$\mathbf{rot} \mathbf{E} = i\omega\mu_0 \mathbf{H} \quad , \quad \mathbf{rot} \mathbf{H} = -i\omega\varepsilon_0 (\mathbf{E} + i\mathbf{J}) . \quad (3.114)$$

Il reste à faire apparaître une relation explicite entre \mathbf{J} et le champ électrique macroscopique \mathbf{E} .

Les trois opérateurs capacitances R^k sont maintenant donnés de la même façon que dans la définition 3.31, où il faut faire la substitution $\Sigma^k = \Sigma$ pour tout $k \in \{1, 2, 3\}$. L'opérateur R^k étant compact auto-adjoint strictement positif, on note $\{\lambda_n^k, n \in \mathbb{N}\}$ ses valeurs propres distinctes rangées dans l'ordre décroissant et telles que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n^k = 0$. À toute valeur propre $\lambda \in \{\lambda_n^k, n \in \mathbb{N}\}$, on associe également

- $P_{V_\lambda^k}$ le projecteur orthogonal sur l'espace propre V_λ^k de R^k associé à la valeur propre λ .
- $\sigma_0^k := \{\lambda_n^k, P_{V_{\lambda_n^k}^k}(1) \neq 0\}$.

En reprenant la définition (3.98), on introduit les fonctions scalaires Λ^k données par

$$\Lambda^k(\omega, \gamma^k, \kappa^k) = \sum_{\lambda \in \sigma_0^k} \frac{\|P_{V_\lambda^k}(1)\|_{L^2(\mathcal{D}^k)}^2}{\frac{k_0^2}{2\pi\gamma^k} - \lambda + \frac{i}{\kappa^k}} . \quad (3.115)$$

Les équations limites seront déduites du système (3.114) et du résultat suivant.

Proposition 3.27 *Les composantes j^1, j^2, j^3 de $\mathbf{J}(x)$ sont identifiées sur \mathcal{B} par les relations*

$$j^k(x) = i l^k \Lambda^k(\omega, \gamma^k, \kappa^k) E_k(x) .$$

En reprenant les arguments utilisés dans la démonstration du théorème 3.8 (unicité de (\mathbf{E}, \mathbf{H}) , la convergence en dehors de l'obstacle et l'estimation (3.30)), il est possible de prouver que le problème de diffraction homogénéisé est donné par (3.116). De plus, la convergence du champ $(\mathbf{E}_\eta, \mathbf{H}_\eta, \mathbf{J}_\eta)$ vers la solution limite aura lieu dans les mêmes conditions que celles données dans le théorème 3.8.

$$\begin{cases} \mathbf{rot} \mathbf{E} = i\omega\mu_0 \mathbf{H} \\ \mathbf{rot} \mathbf{H} = -i\omega\varepsilon_0 \boldsymbol{\varepsilon}(x, \omega) \mathbf{E} \\ (\mathbf{E}, \mathbf{H}) \text{ satisfait les conditions (3.6)} \end{cases} \quad (3.116)$$

avec

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x) := \mathbf{I}_d 1_{\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{B}}(x) + \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{eff}}(\omega) 1_{\mathcal{B}}(x)$$

et $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{eff}}(\omega)$ donné par

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{eff}} = \begin{pmatrix} 1 - l^1 \Lambda^1(\omega, \kappa^1, \gamma^1) & 0 & 0 \\ 0 & 1 - l^2 \Lambda^2(\omega, \kappa^2, \gamma^2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 - l^3 \Lambda^3(\omega, \kappa^3, \gamma^3) \end{pmatrix}. \quad (3.117)$$

Remarque 3.28 L'effet de résonance dans chacune des trois directions est induit dans ce cadre par l'unique inclusion Σ alors que dans la variante avec les directions alternées (sous-section précédente), celui-ci était induit par chacune des trois inclusions cylindriques Σ^k . Cette différence a une conséquence liée à la remarque 3.9. Celle-ci indique que la taille des bandes de fréquences interdites dépend du taux de remplissage des inclusions responsables de l'effet. Ainsi, dans chacune des directions \mathbf{e}_k , les bandes de fréquences interdites dépendent de $|\Sigma|$, dans la variante avec les fibres croisées, et de $|\Sigma^k|$ dans la variante avec les directions alternées. Or, puisque les cylindres élémentaires Σ^k doivent être disjoints, on a en général, $|\Sigma| > |\Sigma^k|$ pour tout $k \in \{1, 2, 3\}$. Il va en résulter qu'un effet de résonance plus important va être engendré par la structure constituée des paquets de fibres croisées, qui est par contre plus complexe à construire expérimentalement.

3.3 Éléments de démonstration

Dans cette sous-section, nous allons établir les propositions 3.25 et 3.27 en nous basant sur la preuve du théorème 3.23 et en indiquant au fur et à mesure les points qu'il convient de modifier.

On part de l'hypothèse de borne d'énergie (3.30), qui est

$$\int_{B_R} |\mathbf{E}_\eta|^2 dx < +\infty \quad , \quad \int_{B_R} |\mathbf{H}_\eta|^2 dx < +\infty \quad , \quad (3.118)$$

où B_R est une boule telle que $\mathcal{B} \subset\subset B_R$. Le comportement du champ électromagnétique $(\mathbf{E}_\eta, \mathbf{H}_\eta)$ décrit dans le lemme 3.10 est encore valable dans notre cas puisque les fonctions j_η^k pour $k \in \{1, 2, 3\}$ sont nulles à l'extérieur de \mathcal{B} . Nous nous concentrons donc sur l'étude du comportement des champs $(\mathbf{E}_\eta, \mathbf{H}_\eta, \mathbf{J}_\eta)$ à l'intérieur de la boule B_R . \square

Les estimations du lemme 3.11 deviennent

Lemme 3.29 *Sous l'hypothèse (3.118) on a :*

- (i) (j_η^k) et $(\frac{\partial j_\eta^k}{\partial x_k} 1_{\Sigma_\eta^k})$ sont bornés dans $L^2(B_R)$ pour tout $k = 1, 2, 3$.
- (ii) \mathbf{H}_η est borné dans $W^{1,2}(B_R)$.

Ainsi, en notant $(\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{J})$ la limite faible dans $L^2(B_R)$ de $(\mathbf{E}_\eta, \mathbf{H}_\eta, \mathbf{J}_\eta)$, on peut passer à la limite dans les deux premières équations du système (3.96) pour obtenir

$$\begin{cases} \mathbf{rot} \mathbf{E} = i\omega\mu_0 \mathbf{H} \\ \mathbf{rot} \mathbf{H} = -i\omega\varepsilon_0(\mathbf{E} + i \sum_{k=1}^3 j^k \mathbf{e}_k) \end{cases} . \quad (3.119)$$

Il reste à obtenir la relation liant les fonctions j^k et \mathbf{E} .

Analyse double-échelle. Nous fixons une sous-suite de η (encore notée η) telle qu'il existe trois fonctions de $L^2(\Omega \times Y; \mathbb{C}^3)$ notées $\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0$ et \mathbf{J}_0 vérifiant

$$\mathbf{E}_\eta \rightharpoonup \mathbf{E}_0 \quad , \quad \mathbf{H}_\eta \rightharpoonup \mathbf{H}_0 \quad , \quad \mathbf{J}_\eta \rightharpoonup \mathbf{J}_0 .$$

On déduit de la deuxième assertion du lemme 3.29 que la limite double-échelle \mathbf{H}_0 est indépendante de la variable y et donc $\mathbf{H}_0(x, y) = \mathbf{H}(x)$.

La proposition (3.14) devient

Proposition 3.30 *Pour tout $k \in \{1, 2, 3\}$ et presque tout $x \in \mathcal{B}$, les fonctions Y -périodiques $\mathbf{E}_0(x, \cdot)$ et $j_0^k(x, \cdot)$ sont uniquement déterminées par les relations suivantes (données au sens des distributions dans Y)*

$$\mathbf{rot}_y \mathbf{E}_0(x, \cdot) = 0 \quad , \quad j_0^k = 0 \quad \text{dans } Y \setminus \Sigma^k \quad , \quad \frac{\partial j_0^k}{\partial y_k} = 0 \quad \text{dans } \Sigma^k \quad , \quad (3.120)$$

$$\operatorname{div}_y(\mathbf{E}_0 + i \sum_{k=1}^3 j_0^k \mathbf{e}_k 1_{\Sigma^k}) = 0 . \quad (3.121)$$

En utilisant la notation \hat{y}_k donnée dans (3.94), on a pour tout $k \in \{1, 2, 3\}$

$$j_0^k(x, y) = j_0^k(x, \hat{y}_k) = \frac{2i\pi\gamma^k}{k_0^2 + \frac{2i\pi\gamma^k}{\kappa^k}} \langle \mathbf{E}_0 \rangle^k(x, \hat{y}_k) \quad \text{dans } \Sigma^k \quad , \quad (3.122)$$

où $\langle \mathbf{E}_0 \rangle^k(x, \hat{y}_k) := \frac{1}{l^k} \int_{a^k}^{a^k+l^k} \mathbf{E}_0(x, y) \cdot \mathbf{e}_k dy_k$ représente la circulation normalisée de \mathbf{E}_0 le long de chemins de direction \mathbf{e}_k joignant les bases $\mathcal{D}^{k\pm}$.

En suivant le plan de la preuve du théorème (3.8) (section 2), nous introduisons les opérateurs capacitances R^k donnés dans la définition suivante.

Définition 3.31 On définit R^k l'opérateur de $L^2(\mathcal{D}^k)$ dans $L^2(\mathcal{D}^k)$ qui associe à w la fonction scalaire $[\varphi^w]^k$ avec φ^w l'unique solution de

$$\begin{cases} \varphi^w \in W_{\#}^{1,2}(Y) \\ -\Delta \varphi^w = w (\delta_{\mathcal{D}^{k+}} - \delta_{\mathcal{D}^{k-}}) \end{cases}, \quad (3.123)$$

et $[\varphi^w]^k(x, \hat{y}_k) := \frac{1}{j^k} \left(\varphi^w(\hat{y}_k, a^k + l^k) - \varphi^w(\hat{y}_k, a^k) \right)$ avec \hat{y}_k donné dans (3.94).

Ces opérateurs permettent, comme dans le lemme 3.17, de reformuler le système (3.121), (3.122) en ne faisant intervenir que les fonctions j_0^k et le champ *macroscopique* \mathbf{E} ($= \int_Y \mathbf{E}_0 dy$). Plus précisément, on a le résultat suivant

Lemme 3.32 Pour tout $k \in \{1, 2, 3\}$ et presque tout $x \in \mathcal{B}$, le champ scalaire $j_0^k(x, \cdot)$ vérifie

$$R^k(j_0^k) - \left(\frac{k_0^2}{2\pi\gamma^k} + \frac{i}{\kappa^k} \right) j_0^k = -i\mathbf{E} \cdot \mathbf{e}_k. \quad (3.124)$$

Par linéarité, il est alors naturel d'introduire pour $k \in \{1, 2, 3\}$, la fonction $j^k \in L^2(\mathcal{D}^k)$ unique solution du problème suivant (cf. proposition 3.18)

$$j_0^k(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{dans } Y \setminus \Sigma^k \\ iE_k(x)\zeta^k(\hat{y}_k) & \text{dans } \Sigma^k \end{cases}. \quad (3.125)$$

En substituant la limite faible $j^k(x) = \int_Y j_0^k(x, y)$ dans la seconde équation du système (3.119), nous obtenons

$$\mathbf{rot} \mathbf{H} = -i\omega\varepsilon_0 \left(\mathbf{E} - \sum_{k=1}^3 \left(\int_{\Sigma^k} \zeta^k \right) E_k \mathbf{e}_k \right) \quad (3.126)$$

$$= -i\omega\varepsilon_0 \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{eff}} \mathbf{E}, \quad (3.127)$$

où le tenseur diagonal $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{eff}}$ est défini par

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{eff}} := \text{diag} \left(1 - \int_{\Sigma^1} \zeta^1, 1 - \int_{\Sigma^2} \zeta^2, 1 - \int_{\Sigma^3} \zeta^3 \right).$$

De la même façon que dans l'équation (3.57), nous pouvons utiliser les propriétés des opérateurs R^k (compacts, auto-adjoints et positifs) pour décomposer chacune des fonctions ζ^k dans une base de vecteurs propres de R^k . Le fait que ζ^k est solution de (3.124) permet alors de calculer explicitement ses coefficients dans la base propre (cf. (3.58)) et ainsi retrouver l'expression des fonctions Λ^k données dans (3.98).

3.4 Permittivités effectives atteignables par homogénéisation

Il résulte de l'étude réalisée dans la section 3.1, qu'un milieu effectif caractérisé par des tenseurs $\boldsymbol{\mu}^{\text{eff}} = 1$ et

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{eff}}(\omega) = \begin{pmatrix} 1 - \Lambda^1(\omega, \kappa^1, \gamma^1) & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \Lambda^2(\omega, \kappa^2, \gamma^2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \Lambda^3(\omega, \kappa^3, \gamma^3) \end{pmatrix},$$

est atteignable par homogénéisation (Λ^k défini dans (3.98)). Il est clair que pour une fréquence fixée ω , les coefficients $\boldsymbol{\varepsilon}_{kk}^{\text{eff}}(\omega)$ dépendent continûment des paramètres $\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3, \kappa^1, \kappa^2, \kappa^3, \mathcal{D}^1, \mathcal{D}^2, \mathcal{D}^3, l^1, l^2, l^3$ et que ω peut être rendu arbitrairement proche des fréquences de résonances associées à ces paramètres (cf. équation (3.24)). Ainsi, en considérant de grandes valeurs de κ^k , il va résulter de (3.27) que l'ensemble décrit par

$$\left\{ \Re(\boldsymbol{\varepsilon}_{11}^{\text{eff}}(\omega)), \Re(\boldsymbol{\varepsilon}_{22}^{\text{eff}}(\omega)), \Re(\boldsymbol{\varepsilon}_{33}^{\text{eff}}(\omega)) \right\},$$

pour cette fréquence ω , va recouvrir \mathbb{R}^3 tout entier.

D'autre part, il est facile de montrer que pour tout $\omega \neq \omega_{\lambda^k}$ (ω_{λ^k} fréquence de résonance associée à la valeur propre $\lambda^k \in \sigma_0^k$), on a

$$\lim_{\kappa^k \rightarrow +\infty} \Im(\boldsymbol{\varepsilon}_{kk}^{\text{eff}}(\omega)) = \begin{cases} 0 & \text{si } \omega \neq \omega_{\lambda^k}, \forall \lambda^k \in \sigma_0^k, \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par ailleurs, en effectuant une rotation ou une permutation sur les axes de coordonnées, on peut, à partir d'une matrice diagonale $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{eff}}$, engendrer tous les tenseurs $R \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{eff}} R^T$ où R est une matrice orthogonale.

En résumé, nous avons obtenu le résultat suivant

Théorème 3.33 *Étant donné une fréquence $\omega > 0$, un réel $h > 0$ et un tenseur symétrique réel arbitraire M , il est possible de construire une structure constituée de fibres métalliques dont le comportement macroscopique est décrit par*

$$\boldsymbol{\mu}^{\text{eff}} = 1 \quad , \quad \Re(\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{eff}}(\omega)) = M \quad , \quad \left| \Im(\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{eff}}(\omega)) \right| < h .$$

Remarque 3.34 Une conséquence du théorème précédent est que la fermeture des tenseurs atteignables par homogénéisation contient tous les tenseurs réels symétriques. Pour des applications de ce résultat, nous renvoyons à G. Milton [34].

Conclusion

Nous avons établi mathématiquement la possibilité de réaliser, à partir de nanotubes métalliques, des structures diffractantes dont la réponse effective est caractérisée par un tenseur de permittivité dont les valeurs propres ont une partie réelle arbitrairement grande, positive ou négative suivant la fréquence. Ces structures sont formées de la reproduction périodique de composants, de taille petite devant la longueur d'onde, eux-mêmes constitués de réseaux de nanofibres métalliques parallèles (figure 3.7). Le point essentiel dans l'analyse limite est que le taux de remplissage de ces fibres très conductrices est infinitésimal (“taille capacitaire”) de sorte que la dissipation dans le métal reste finie ou négligeable. Dans cette construction, il apparaît deux petits paramètres d'échelle : la distance a entre les fibres de chaque micro-composant et la distance η séparant les différents composants qui sera supposée du même ordre que la longueur des fibres. L'intérêt d'avoir choisi $a \ll \eta$ est que les effets de dispersion spatiale, inévitables à l'échelle des paquets de fibres, deviennent négligeables dans le processus d'homogénéisation réitérée.

Il s'agit à notre connaissance, du premier résultat rigoureux permettant d'établir, dans un cadre purement 3D, la réalisabilité de tels tenseurs effectifs pour la permittivité. En particulier, pour une fréquence donnée, la construction que nous proposons permet d'atteindre une très large classe de tenseurs effectifs ; notamment *tous les tenseurs réels symétriques*.

4 Inclusions diélectriques et magnétisme artificiel

Sommaire

Historique et description du modèle 3D	95
1 Résultat principal	98
1.1 Loi effective homogénéisée et convergence	98
1.2 Simulations numériques	100
1.3 Schéma de la démonstration	101
2 Estimations et résultats préliminaires	102
2.1 Comportement du champ loin de l'obstacle et bornes L^2	103
2.2 Analyse double-échelle	105
3 Solutions élémentaires sur le tore	106
3.1 Description du champ électrique microscopique	106
3.2 Description du champ magnétique microscopique	107
4 Perméabilité effective en fonction de la fréquence	115
4.1 Analyse spectrale sur le tore	115
4.2 Tenseur de permittivité effectif	116
5 Démonstration du résultat principal	117
5.1 Obtention de la loi effective	117
5.2 Convergence <i>forte</i> double-échelle	119
5.3 Justification de l'hypothèse d'énergie.	126
6 Reformulation du problème spectral (4.47)	126
Conclusion	131

Les résultats présentés dans ce chapitre ont fait l'objet d'une note au CRAS [11] (2009).

Historique et description du modèle 3D

Les structures composites (métamatériaux) présentant une activité magnétique artificielle ont été découvertes très récemment. La première d'entre elles, imaginée par Pendry [42], a été obtenue expérimentalement en considérant des anneaux métalliques fendus, disposés périodiquement avec une période d relativement petite devant la longueur d'onde λ ($d/\lambda < 1/5$). Cette structure, connue sous le nom de "Split Ring Resonator structure", fait apparaître du magnétisme artificiel dans le domaine des micro-ondes.

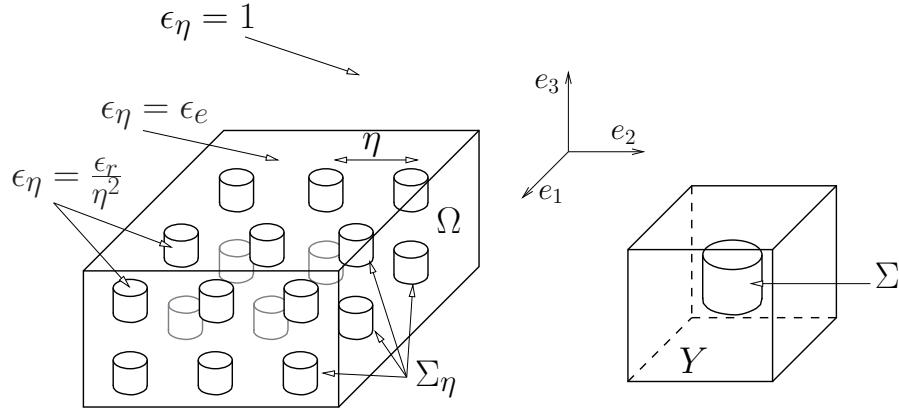


FIGURE 4.1: Schéma de la structure diffractante et de la cellule de base.

En particulier, le matériau résultant se comporte dans certaines bandes de fréquences, comme un milieu dont la perméabilité est *négative*. La démonstration mathématique rigoureuse de ce phénomène, dans le cas de boucles métalliques, a été obtenue très récemment dans [30] pour le cas 2D et dans [9] pour le cas général 3D.

Dans ce chapitre, nous allons établir, dans un cadre purement tridimensionnel, que des effets similaires peuvent être obtenus en utilisant une géométrie moins complexe : l'obstacle sera constitué d'inclusions diélectriques connexes (par exemple des sphères) placées périodiquement à l'intérieur d'un domaine *borné*. L'ensemble formé par ces inclusions sera non connexe (voir figure 4.1) et occupera un volume que l'on maintiendra constante dans l'analyse limite. Ce type de structure est similaire au cas étudié expérimentalement dans [52].

Ce type de structure a déjà été très étudié dans un cadre 2D lorsque les inclusions sont remplacées par des cylindres parallèles de longueur infinie et que le champ incident est polarisé avec un champ magnétique parallèle à la direction des cylindres [8, 20]. Dans ce cas, la loi homogénéisée pour la perméabilité $\boldsymbol{\mu}^{\text{eff}}(\omega)$ a pu être identifiée. Elle met en évidence des phénomènes de *micro-résonances* entraînant une dépendance par rapport à la fréquence avec des changements de signe de sa partie réelle. L'extension de ces résultats apparaîtra dans un cadre aléatoire au chapitre 5 avec des compléments importants sur la convergence (forte double-échelle) des solutions.

L'enjeu de ce chapitre est d'étendre ce type de résultat à un cadre 3D, en considérant une structure finie telle que celle décrite dans la figure 4.1.

Dans cette étude, le petit paramètre η sera la période séparant les inclusions. Nous allons démontrer qu'à la limite $\eta \rightarrow 0$, la structure a un comportement *local* décrit par un tenseur de perméabilité dépendant de la fréquence et que nous caractériserons en fonction du problème spectral sur le tore.

Description géométrique de la structure.

L'obstacle diffractant \mathcal{B} est un sous-ensemble borné de \mathbb{R}^3 . On note $\Sigma_\eta \subset \mathcal{B}$ l'ensemble

occupé par les inclusions. Il est défini comme étant la périodisation dans les trois directions de l'ensemble $\eta\Sigma$ où Σ représente une inclusion remise à l'échelle dans la cellule de base $Y := [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^3$. De cette façon, Σ_η prend la forme :

$$\Sigma_\eta := \bigcup_{k \in I_\eta} \eta(k + Y) \quad , \quad I_\eta = \{i \in \mathbb{Z}^3 \mid \eta(i + \Sigma) \subset \mathcal{B}\} \quad . \quad (4.1)$$

Il est important de préciser que la topologie de l'inclusion Σ va jouer un rôle crucial dans l'étude. Nous travaillerons sous l'hypothèse suivante :

Σ est un compact connexe tel que

$$\begin{aligned} \Sigma &\subset\subset Y \quad , \\ Y \setminus \Sigma &\text{ est simplement connexe.} \end{aligned} \quad (4.2)$$

Contrairement au cas de la structure étudiée dans le chapitre 3, le taux de remplissage des inclusions reste strictement positif dans l'analyse limite $\eta \rightarrow 0$ et converge vers la valeur $|\Sigma|$.

Description des paramètres physiques.

Le comportement électromagnétique de la structure est décrit localement par les permittivité et perméabilité relatives. Étant dans le domaine de l'optique, la perméabilité relative dans le diélectrique reste voisine de 1 (cf. chapitre 1) et, pour simplifier l'étude, nous allons la supposer égale à 1 dans tout \mathbb{R}^3 .

À l'inverse, nous allons modéliser une permittivité à fort contraste en choisissant deux paramètres $\varepsilon_e \in \mathbb{R}^+$ et $\varepsilon_r \in \mathbb{C}$ de partie imaginaire positive. Ils sont associés respectivement à la permittivité dans la matrice et dans les inclusions diélectriques et nous faisons l'hypothèse suivante qui va s'avérer *essentielle* dans la suite

$$\Im(\varepsilon_r) > 0 \quad . \quad (4.3)$$

La permittivité en tout point de \mathbb{R}^3 est donnée par :

$$\varepsilon_\eta(x) := \begin{cases} 1 & \text{dans } \mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{B} \quad , \\ \varepsilon_e & \text{dans } \mathcal{B} \setminus \Sigma_\eta \quad , \\ \frac{\varepsilon_r}{\eta^2} & \text{dans } \Sigma_\eta \quad . \end{cases} \quad (4.4)$$

Le contraste entre matrice et inclusions fait apparaître le facteur d'échelle $\frac{1}{\eta^2} \rightarrow +\infty$ qui va jouer un rôle crucial dans l'étude. Du point de vue de la physique, (cf. [20]) ce choix ε_r/η^2 dans le diélectrique correspond à imposer un diamètre optique constant pour chaque inclusion : le temps mis par l'onde pour traverser une inclusion de diamètre η , de permittivité $\varepsilon_0\varepsilon_r/\eta^2$ et perméabilité μ_0 est en effet donné par $\eta\sqrt{\varepsilon_0\mu_0\frac{\varepsilon_r}{\eta^2}}$.

Problème pré-homogénéisé.

La structure est illuminée par une onde incidente $(\mathbf{E}^i, \mathbf{H}^i)$ dont on suppose une dépendance harmonique en temps ($e^{-i\omega t}$) de fréquence ω fixée. Le champ électromagnétique total $(\mathbf{E}_\eta, \mathbf{H}_\eta)$ vérifie les équations de Maxwell données au sens des distributions par

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{E}_\eta = i\omega\mu_0\mathbf{H}_\eta, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H}_\eta = -i\omega\varepsilon_0\varepsilon_\eta\mathbf{E}_\eta, \end{cases} \quad (4.5)$$

où ε_0 et μ_0 représentent respectivement les permittivité et perméabilité du vide.

Le champ diffracté $(\mathbf{E}_\eta^d, \mathbf{H}_\eta^d) := (\mathbf{E}_\eta - \mathbf{E}^i, \mathbf{H}_\eta - \mathbf{H}^i)$ satisfait de plus les conditions de rayonnement à l'infini de Silver-Müller :

$$(\mathbf{E}_\eta^d, \mathbf{H}_\eta^d) = O\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|}\right), \quad \omega\varepsilon_0\left(\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} \wedge \mathbf{E}_\eta^d\right) - k_0\mathbf{H}_\eta^d = o\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|}\right). \quad (4.6)$$

Remarque 4.1 On précise que nous nous plaçons dans un cadre adimensionnel où toutes les distances ont été divisées par le paramètre $d > 0$ représentant l'écart séparant les inclusions de la structure de départ (lorsque $\eta = 1$). De ce fait, la longueur d'onde des champs que nous considérons est donnée par λ/d . Pour simplifier les notations, nous ne ferons plus intervenir ce coefficient dans les démonstrations mathématiques mais il apparaîtra dans les simulations numériques données dans la partie 1.2 de ce chapitre.

1 Résultat principal

1.1 Loi effective homogénéisée et convergence

Afin de donner la forme du problème limite et le résultat principal d'homogénéisation, nous définissons les tenseurs de permittivité et de perméabilité effectifs.

Le tenseur de permittivité effectif a ses composantes données pour $(k, l) \in \{1, 2, 3\}^2$ par

$$\varepsilon_{kl}^{\text{eff}} := \varepsilon_e \int_Y (e_k + \nabla\chi_k) \cdot (e_l + \nabla\chi_l), \quad (4.7)$$

avec $\chi_k \in W_{\#}^{1,2}(Y; \mathbb{R})$ les uniques fonctions (à une constante près) vérifiant

$$\Delta_y \chi_k = 0 \quad \text{dans } Y \setminus \Sigma \quad \text{et} \quad \chi_k = -y_k \quad \text{dans } \Sigma.$$

Ce tenseur est *réel positif* ($\varepsilon_e \in \mathbb{R}$) et caractérisé par la géométrie des inclusions. En particulier, il ne dépend pas de la fréquence ni de la permittivité relative ε_r . On introduit de plus le champ électrique microscopique $\mathbf{E}_0 \in L^2(B_R; L_{\#}^2(Y; \mathbb{C}^3))$ défini par

$$\mathbf{E}_0(x, y) = \sum_{k=1}^3 E_k(x) (e_k + \nabla\chi_k(y)),$$

où E_k est la k -ième composante du champ limite \mathbf{E} tel que (\mathbf{E}, \mathbf{H}) est la solution du problème (4.10).

Le tenseur de perméabilité effectif a ses composantes données pour $(k, l) \in \{1, 2, 3\}^2$ par

$$\boldsymbol{\mu}_{kl}^{\text{eff}}(\omega) := 1 + \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\varepsilon_r k_0^2}{\lambda_n - \varepsilon_r k_0^2} \left(\int_Y \mathbf{w}_n \cdot \mathbf{e}_k \right) \left(\int_Y \mathbf{w}_n \cdot \mathbf{e}_l \right), \quad (4.8)$$

où $(\lambda_n, \mathbf{w}_n) \in \mathbb{R}^+ \times X_0$ sont les valeurs et vecteurs propres du problème spectral suivant (on renvoie à la section 4.1 pour l'existence du spectre)

$$\int_{\Sigma} \mathbf{rot} \mathbf{w}_n \cdot \mathbf{rot} \mathbf{v} + \int_Y \text{div} \mathbf{w}_n \text{div} \mathbf{v} = \lambda_n \int_Y \mathbf{w}_n \cdot \mathbf{v} \quad , \quad \forall \mathbf{v} \in X_0. \quad (4.9)$$

L'ensemble X_0 est défini par

$$X_0 := \{ \mathbf{v} \in W_{\sharp}^{1,2}(Y) \text{ , } \mathbf{v} = \nabla \psi \text{ dans } Y \setminus \Sigma \text{ , } \psi \in W_{\sharp}^{1,2}(Y) \}$$

et sera décrit plus précisément dans (4.40).

On introduit de plus $\mathbf{H}_0(x, y) \in L^2(B_R; W_{\sharp}^{1,2}(Y; \mathbb{C}^3))$, le champ magnétique microscopique donné par

$$\mathbf{H}_0(x, y) = \sum_{k=1}^3 H_k(x) \left[\mathbf{e}_k + \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle \mathbf{e}_k, \mathbf{w}_n \rangle \frac{\varepsilon_r k_0^2}{\lambda_n - \varepsilon_r k_0^2} \mathbf{w}_n(y) \right],$$

où H_k est la k -ième composante du champ limite \mathbf{H} tel que (\mathbf{E}, \mathbf{H}) est la solution du problème (4.10).

Théorème 4.2 (Homogénéisation)

Le champ électromagnétique $(\mathbf{E}_{\eta}, \mathbf{H}_{\eta})$ solution de (4.5) converge vers $(\mathbf{E}, \boldsymbol{\mu} \mathbf{H})$ faiblement dans $L_{loc}^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3)$ où (\mathbf{E}, \mathbf{H}) est l'unique solution (au sens des distributions) du problème

$$\begin{cases} \mathbf{rot} \mathbf{E} = i\omega \mu_0 \boldsymbol{\mu}(x, \omega) \mathbf{H} \\ \mathbf{rot} \mathbf{H} = -i\omega \varepsilon_0 \boldsymbol{\varepsilon}(x) \mathbf{E} \\ (\mathbf{E}, \mathbf{H}) \text{ satisfait les conditions (4.6)} \end{cases} \quad (4.10)$$

avec

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x) := \mathbf{I} 1_{\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{B}}(x) + \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{eff}} 1_{\mathcal{B}}(x) \quad , \quad \boldsymbol{\mu}(x, \omega) := \mathbf{I} 1_{\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{B}}(x) + \boldsymbol{\mu}^{\text{eff}}(\omega) 1_{\mathcal{B}}(x) \text{ ,}$$

et $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{eff}}$, $\boldsymbol{\mu}^{\text{eff}}$ donnés respectivement en (4.7) et (4.8).

Plus précisément, on a d'une part, la convergence uniforme de $(\mathbf{E}_{\eta}, \mathbf{H}_{\eta})$ vers (\mathbf{E}, \mathbf{H}) sur tout compact $K \subset \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\mathcal{B}}$ et d'autre part, la convergence forte double-échelle de $(\mathbf{E}_{\eta}, \mathbf{H}_{\eta})$ vers $(\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0)$ dans un voisinage de \mathcal{B} .

Remarque 4.3 Le champ \mathbf{H} n'est pas la limite faible de \mathbf{H}_{η} puisqu'on a la convergence $\mathbf{H}_{\eta} \rightharpoonup \boldsymbol{\mu} \mathbf{H}$ avec $\boldsymbol{\mu} \neq Id$. Par ailleurs, la convergence des champs hors de l'obstacle nous permet d'interpréter le résultat physiquement : la structure diffractante se comporte, vue de l'extérieur, comme un milieu homogène caractérisé par les tenseurs effectifs $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{eff}}$ et $\boldsymbol{\mu}^{\text{eff}}$. Le comportement des champs à l'intérieur de l'obstacle présente de fortes oscillations décrites précisément par le champ $(\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0)$.

Résonances et perméabilité négative. Nous obtenons finalement un milieu effectif homogène (non isotrope a priori), de permittivité $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{eff}}$ et de perméabilité $\boldsymbol{\mu}^{\text{eff}}$ donnés en (4.7) et (4.8). Contrairement à $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{eff}}$, le tenseur $\boldsymbol{\mu}^{\text{eff}}$ dépend de la fréquence ω et a des valeurs propres de partie réelle *négative* sur certaines bandes de fréquences.

Plus précisément, on introduit V_λ l'espace propre associé à une valeur propre λ du problème (4.9). On note P_{V_λ} le projecteur orthogonal sur V_λ par rapport au produit scalaire de $L^2(Y; \mathbb{R}^3)$. Le tenseur de perméabilité effectif prend la forme

$$\boldsymbol{\mu}^{\text{eff}}(\omega) := 1 + \sum_{\lambda \in \sigma_0} \frac{\varepsilon_r k_0^2}{\lambda - \varepsilon_r k_0^2} M_\lambda \quad , \quad (M_\lambda)_{kl} := (P_{V_\lambda}(\mathbf{e}_k), P_{V_\lambda}(\mathbf{e}_l)) . \quad (4.11)$$

Ici, σ_0 représente l'ensemble des valeurs propres telles que $M_\lambda \neq 0$. On note que la matrice M_λ est de rang 1 si λ est simple et que, pour avoir une matrice de rang maximal, il est nécessaire d'avoir λ au moins d'ordre 3.

Supposons pour simplifier que $\varepsilon_r \in \mathbb{R}$ (diélectrique sans perte). On note μ^\pm la plus grande (respectivement la plus petite) valeur propre du tenseur réel $\boldsymbol{\mu}^{\text{eff}}$. Les *fréquences de résonances* sont données par $\omega_\lambda := \sqrt{\lambda}(\varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon_r)^{-1/2}$ pour tout $\lambda \in \sigma_0$. Elles localisent les zones où une des valeurs propres de $\boldsymbol{\mu}^{\text{eff}}$ présente de fortes variations. En effet, on déduit simplement de l'égalité (4.11) que $\lim_{\omega \rightarrow \omega_\lambda^+} \mu^-(\omega) = -\infty$ qui est également valable pour μ^+ lorsque M_λ est de rang maximal. Dans ce dernier cas, nous obtenons un intervalle de fréquences dans lequel toutes les valeurs propres du tenseur de perméabilité effectif sont négatives. Dans cette zone, le champ électromagnétique ne peut se propager, puisque $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{eff}}$ est défini positif, ce qui correspond à une bande de fréquences interdites.

Dans le cas où M_λ n'est pas de rang maximal, les vecteurs de son noyau forment les directions selon lesquelles le champ électromagnétique reste propagatif. Une situation similaire a été évoquée dans le contexte des ondes élastiques dans un composite [3].

1.2 Simulations numériques

Pour mieux décrire les intervalles de fréquences interdites du tenseur $\boldsymbol{\mu}^{\text{eff}}(\omega)$, nous avons effectué son approche numérique. Cette approximation est présentée dans le chapitre 6 et repose sur une approximation spectrale de l'opérateur \mathbf{A} (défini dans (4.81)) qui déterminera le comportement de $\boldsymbol{\mu}^{\text{eff}}(\omega)$, comme nous le montrerons dans la section 6 de ce chapitre. La nouvelle formulation repose sur une décomposition de Galerkin de l'espace vectoriel

$$Z_0 := \{ \mathbf{f} \in L^2(\Sigma; \mathbb{R}^3) / \operatorname{div} \mathbf{f} = 0, \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\Sigma \} ,$$

le domaine de l'opérateur \mathbf{A} .

On considère une inclusion de forme cubique $\Sigma := [-a/2, a/2]^3$ avec $a \in]0; 1/2[$. Du fait des symétries de l'inclusion, le tenseur $\boldsymbol{\mu}^{\text{eff}}$ est proportionnel à la matrice identité. On introduit alors le complexe $\mu = \mu(\omega)$ tel que $\boldsymbol{\mu}^{\text{eff}}(\omega) = \mu(\omega)I_d$. Dans la figure 4.2, on représente les parties réelle et imaginaire de $\mu(\omega)$ en fonction de la longueur d'onde normalisée λ/d (on rappelle que d représente la distance réelle séparant les inclusions lorsque $\eta = 1$ cf. remarque 4.1).

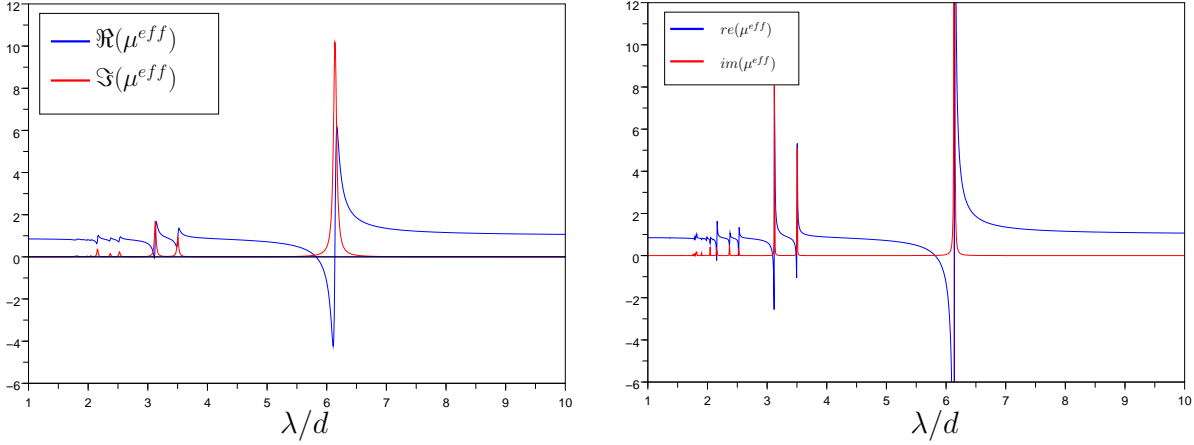


FIGURE 4.2: Parties réelle et imaginaire de μ en fonction de la longueur d'onde λ/d dans le cas où Σ est un cube de côté $0,5$: à gauche $\varepsilon_r = 100 + 5i$ et à droite $\varepsilon_r = 100 + i$

Cette figure fait apparaître la grande variation de $\mu(\omega)$ décrite théoriquement dans le paragraphe précédent ainsi que la bande de fréquences interdites (où $\mu(\omega) < 0$). À gauche, seule la résonance fondamentale est suffisamment importante pour rendre $\mu(\omega)$ négatif alors que dans le cas où $\Im(\varepsilon_r) = 1$ on voit apparaître deux nouvelles bandes de fréquences interdites (beaucoup plus étroites) associées à d'autres valeurs propres de l'opérateur \mathbf{A} .

De plus, la bande de fréquences interdites associée à la résonance fondamentale est restée essentiellement identique alors que la zone où $\Im(\mu) > 0$ s'est réduite. Ceci a pour conséquence la possibilité d'avoir un milieu à perméabilité de grand module (positive ou non) associée à une faible dissipation.

1.3 Schéma de la démonstration

Dans un premier temps, nous allons travailler sous la borne (4.14) qui sera démontrée à posteriori dans la dernière étape.

Pour passer à la limite dans le système (4.5) et obtenir le problème limite (4.10), il est nécessaire de connaître de façon très précise, le comportement oscillant du champ $(\mathbf{E}_\eta, \mathbf{H}_\eta)$. Ces oscillations seront décrites en utilisant la notion de convergence double-échelle introduite dans le chapitre 2.

Dans la section 2, nous obtiendrons les équations microscopiques vérifiées par la limite double-échelle de $(\mathbf{E}_\eta, \mathbf{H}_\eta)$ notée $(\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0)$. Pour formuler ces problèmes, il s'avèrera utile de considérer \mathbf{J}_0 la limite double-échelle du champ de déplacement électrique normalisé $\mathbf{J}_\eta := \eta \varepsilon_\eta \mathbf{E}_\eta$. Une borne dans L^2 pour \mathbf{J}_η sera prouvée pour justifier l'existence de cette limite double-échelle. Deux systèmes indépendants seront obtenus ; l'un concernant \mathbf{E}_0 et l'autre couplant \mathbf{H}_0 et \mathbf{J}_0 .

Dans la section 3, nous caractérisons l'espace des solutions des problèmes microscopiques.

Le comportement du champ électrique \mathbf{E}_0 est purement électrostatique : il est décrit par trois “fonctions de forme” $\mathbf{E}^k(y)$ de moyenne égale à \mathbf{e}_k qui sont déterminées par la topologie de l’inclusion Σ . Le champ macroscopique $\mathbf{E}(x) := \int_Y \mathbf{E}_0(x, y) dy$, limite faible de la suite (\mathbf{H}_η) , caractérise la limite double-échelle \mathbf{E}_0 de manière unique par la relation :

$$\mathbf{E}_0(x, y) = \sum_{k=1}^3 E_k(x) \mathbf{E}^k(y) . \quad (4.12)$$

On définit de plus le tenseur de permittivité effectif $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{eff}}$ à partir de ces fonctions \mathbf{E}^k .

D’autre part, nous montrons que le champ magnétique microscopique \mathbf{H}_0 vérifie en fait une équation variationnelle plus forte que le système qui le couple à \mathbf{J}_0 . Cette équation fait intervenir de manière essentielle la fréquence ω ainsi que le caractère simplement connexe de $Y \setminus \Sigma$. Cette dernière hypothèse nous permet de définir une nouvelle notion de normalisation appelée *vecteur de circulation moyen*. Il s’agit de la circulation le long de chemins reliant des points opposés de ∂Y et restant hors de Σ . On démontre que l’ensemble des solutions de l’équation variationnelle forme un espace vectoriel de dimension trois, engendré par des champs notés \mathbf{H}^k , $k \in \{1, 2, 3\}$. Chacun d’eux a une *circulation* égale à \mathbf{e}_k et dépend de la fréquence ω . Le champ magnétique macroscopique, noté $\mathbf{H}(x) = (H_k(x))$, est le vecteur circulation moyen de \mathbf{H}_0 (différent de la limite faible de la suite (\mathbf{H}_η)) et détermine le champ microscopique \mathbf{H}_0 de manière unique par la relation :

$$\mathbf{H}_0(x, y) = \sum_{k=1}^3 H_k(x) \mathbf{H}^k(y) . \quad (4.13)$$

On définit le tenseur de perméabilité effectif $\boldsymbol{\mu}^{\text{eff}}$ à partir des fonctions \mathbf{H}^k qui va ainsi dépendre de ω .

Dans la section 4, nous introduisons un problème aux valeurs propres associé à la forme sesquilinéaire décrivant l’équation variationnelle. Nous caractérisons ensuite les champs \mathbf{H}^k à l’aide de leur décomposition dans une base de vecteurs propres associée à ce problème. Cela nous permet de donner une formulation précise du tenseur $\boldsymbol{\mu}^{\text{eff}}$ dans laquelle la dépendance par rapport à la fréquence ω est explicite (cf. équation (4.8)).

Dans la section 5, nous commençons par établir la loi homogénéisée et l’unicité du problème associé que doivent vérifier les champs macroscopiques \mathbf{E} et \mathbf{H} . Ce système limite est obtenu à l’aide des décompositions des champs microscopiques (4.12) et (4.13) ainsi que de certaines fonctions tests appliquées aux équations du système (4.5).

Nous montrons pour finir la *convergence forte double-échelle* de $(\mathbf{E}_\eta, \mathbf{H}_\eta)$ vers $(\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0)$ ainsi que l’estimation à priori (4.14).

2 Estimations et résultats préliminaires

Afin de justifier que la suite de champs $(\mathbf{E}_\eta, \mathbf{H}_\eta)$ est bornée dans $L^2_{loc}(\mathbb{R}^3)$, nous allons utiliser un raisonnement en deux étapes.

On commencera par supposer que le champ $(\mathbf{E}_\eta, \mathbf{H}_\eta)$ vérifie

$$\sup_{\eta>0} \int_{B_R} |\mathbf{E}_\eta|^2 + |\mathbf{H}_\eta|^2 < +\infty, \quad (4.14)$$

où B_R est une boule fixée contenant \mathcal{B} . Nous étudierons le comportement oscillant du champ sous cette hypothèse dans le but de caractériser les équations du problème homogénéisé.

Dans un second temps, on utilisera l'*unicité* du problème limite pour mettre en œuvre un raisonnement par contradiction justifiant l'hypothèse.

Avec cela en tête, on fixe une boule B_R telle que $\mathcal{B} \subset\subset B_R$ et on suppose que (4.14) est satisfaite.

Remarque 4.4 L'hypothèse (4.14) entraîne la convergence faible dans $L^2(B_R)$ de \mathbf{E}_η et \mathbf{H}_η vers deux champs notés $\tilde{\mathbf{E}}$ et $\tilde{\mathbf{H}}$. Il est alors possible de passer à la limite faible dans la première équation de (4.5) pour obtenir

$$\mathbf{rot} \tilde{\mathbf{E}} = i\omega\mu_0\tilde{\mathbf{H}} \quad \text{dans } \mathbb{R}^3.$$

Cette relation montre que les limites faibles sont liées par la première équation de Maxwell qui *ne fait pas intervenir de perméabilité effective*.

On peut donc en conclure que :

- soit le problème homogénéisé (s'il existe) ne fait pas apparaître d'activité magnétique,
- soit il ne fait pas uniquement intervenir les limites faibles du champ électromagnétique $(\mathbf{E}_\eta, \mathbf{H}_\eta)$.

Nous allons voir, dans la section 3, que c'est la deuxième interprétation qui va s'avérer exacte puisque le champ magnétique macroscopique sera décrit par la *circulation* (cf. définition 4.38) du champ microscopique.

2.1 Comportement du champ loin de l'obstacle et bornes L^2

L'hypothèse (4.14) nous permet d'appliquer le lemme suivant (démontré dans le chapitre 2).

Lemme 4.5 *Soit $(\mathbf{E}_\eta, \mathbf{H}_\eta)$ la solution du problème (4.5) associée à une onde incidente $(\mathbf{E}_\eta^i, \mathbf{H}_\eta^i)$ qui converge uniformément vers $(\mathbf{E}^i, \mathbf{H}^i)$. Si $(\mathbf{E}_\eta, \mathbf{H}_\eta) \rightharpoonup (\mathbf{E}, \mathbf{H})$ faiblement dans $L^2_{loc}(B_R)$, alors la convergence de $(\mathbf{E}_\eta, \mathbf{H}_\eta)$ a lieu dans $C^\infty(K)$ pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\mathcal{B}}$. De plus, le champ limite (\mathbf{E}, \mathbf{H}) vérifie l'équation de Helmholtz $\Delta \mathbf{u} + k_0^2 \mathbf{u} = 0$ dans $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\mathcal{B}}$ et est tel que $(\mathbf{E} - \mathbf{E}^i, \mathbf{H} - \mathbf{H}^i)$ vérifie (4.6).*

Dans le reste de la section, nous allons étudier le comportement asymptotique du champ électromagnétique proche de l'obstacle, c'est-à-dire dans B_R . Ce champ présentera de fortes oscillations qui vont l'empêcher de former une suite fortement compacte

de $L^2(B_R)$. Nous utiliserons, afin de décrire ces oscillations, les outils de convergence double-échelle qui ont été rappelés dans le chapitre 2.

Comme nous l'avons vu dans le théorème 2.39, une condition suffisante pour avoir existence d'une limite double-échelle, à une sous-suite près, est que la suite soit bornée dans $L^2(B_R)$. Cette condition est vérifiée par \mathbf{E}_η et \mathbf{H}_η d'après l'hypothèse (4.14). Nous allons alors fixer une sous-suite de η , encore notée η , telle qu'il existe deux fonctions de $L^2(\Omega \times Y; \mathbb{C}^3)$ notées \mathbf{E}_0 et \mathbf{H}_0 , Y -périodiques, vérifiant

$$\mathbf{E}_\eta \rightharpoonup \mathbf{E}_0 \quad , \quad \mathbf{H}_\eta \rightharpoonup \mathbf{H}_0 .$$

L'unicité de la solution du problème limite impliquera à posteriori que ces champs ne dépendent pas du choix de cette sous-suite. Ainsi, nous choisissons pour alléger les notations de ne pas faire apparaître cette dépendance sur les variables \mathbf{E}_0 et \mathbf{H}_0 .

Lemme 4.6 *Le champ de déplacement électrique \mathbf{J}_η défini par*

$$\mathbf{J}_\eta := \eta \varepsilon_\eta \mathbf{E}_\eta , \tag{4.15}$$

vérifie la borne suivante

$$\sup_{\eta > 0} \|\mathbf{J}_\eta\|_{L^2(B_R; \mathbb{C}^3)} < +\infty . \tag{4.16}$$

En conséquence, il existe un champ $\mathbf{J}_0 \in L^2(\Omega \times Y; \mathbb{C}^3)$ tel que $\mathbf{J}_\eta \rightharpoonup \mathbf{J}_0$ (à une sous-suite près, encore notée η).

Preuve de (4.16)

On introduit \mathcal{P}_η et \mathcal{P} , les flux du vecteur de Poynting sur le bord de B_R définis par :

$$\mathcal{P}_\eta := \int_{\partial B_R} \mathbf{E}_\eta \wedge \overline{\mathbf{H}}_\eta \cdot \mathbf{n} \, d\sigma \quad , \quad \mathcal{P} := \int_{\partial B_R} \mathbf{E} \wedge \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma . \tag{4.17}$$

D'après le Lemme 4.5, le champ $(\mathbf{E}_\eta, \mathbf{H}_\eta)$ est régulier et converge uniformément sur ∂B_R . On a de ce fait $\mathcal{P}_\eta \rightarrow \mathcal{P}$. À l'aide d'une intégration par parties on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_\eta &= \int_{B_R} (\mathbf{rot} \mathbf{E}_\eta \cdot \overline{\mathbf{H}}_\eta - \mathbf{rot} \overline{\mathbf{H}}_\eta \cdot \mathbf{E}_\eta) \, dx = i\omega \int_{B_R} (\mu_0 |\mathbf{H}_\eta|^2 - \varepsilon_0 \overline{\varepsilon}_\eta |\mathbf{E}_\eta|^2) \\ &= i\omega \left(\mu_0 \int_{B_R} |\mathbf{H}_\eta|^2 - \varepsilon_0 \varepsilon_e \int_{B_R \setminus \Sigma_\eta} |\mathbf{E}_\eta|^2 - \varepsilon_0 \frac{\overline{\varepsilon}_r}{\eta^2} \int_{\Sigma_\eta} |\mathbf{E}_\eta|^2 \right) . \end{aligned} \tag{4.18}$$

On prend la partie réelle dans l'équation précédente. On obtient alors, en raison de l'hypothèse $\Im(\varepsilon_r) > 0$ et de la convergence de \mathcal{P}_η vers \mathcal{P} que

$$\frac{1}{\eta^2} \int_{\Sigma_\eta} |\mathbf{E}_\eta|^2 \leq C , \tag{4.19}$$

où $C > 0$ est indépendant de η . La définition de \mathbf{J}_η (4.15) termine la démonstration. \square

2.2 Analyse double-échelle

Proposition 4.7 (Problème électrique sur le tore)

Pour presque tout $x \in B_R$, on a $\mathbf{E}_0(x, \cdot) \in L^2(Y, \mathbb{C}^3) \cap W_{\sharp}^{1,2}(Y \setminus \Sigma; \mathbb{C}^3)$ et vérifie au sens des distributions dans $\mathcal{B} \times Y$ les relations suivantes

$$\mathbf{rot}_y \mathbf{E}_0 = 0, \quad \operatorname{div}_y \mathbf{E}_0 = 0 \quad \text{dans } \mathcal{B} \times Y \setminus \Sigma, \quad \mathbf{E}_0 = 0 \quad \text{dans } \mathcal{B} \times \Sigma. \quad (4.20)$$

De plus, $\mathbf{E}_0 = \tilde{\mathbf{E}}$ dans $B_R \setminus \overline{\mathcal{B}} \times Y$ ($\tilde{\mathbf{E}}$ désigne la limite faible de \mathbf{E}_η).

PREUVE.

Pour montrer la première relation de (4.20), on multiplie la première équation de (4.5) par une fonction test oscillante $\eta\varphi(x, x/\eta)$ avec φ un élément de $C_c^\infty(\mathcal{B}; C_{\sharp}^\infty(Y; \mathbb{C}^3))$. On effectue ensuite une intégration par parties pour obtenir

$$\eta \int_Y \mathbf{E}_\eta \cdot \mathbf{rot}_x \varphi \left(x, \frac{x}{\eta} \right) + \int_Y \mathbf{E}_\eta \cdot \mathbf{rot}_y \varphi \left(x, \frac{x}{\eta} \right) = -i\omega\mu_0\eta \int_Y \mathbf{H}_\eta \cdot \varphi \left(x, \frac{x}{\eta} \right).$$

On passe à la limite dans l'équation précédente et, puisque les suites (\mathbf{E}_η) et (\mathbf{H}_η) sont bornées dans $L^2(\mathcal{B})$, on obtient

$$\int_{\mathcal{B} \times Y} \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{rot}_y \varphi \left(x, \frac{x}{\eta} \right) = 0. \quad (4.21)$$

Après avoir intégré par parties, on peut conclure grâce au caractère arbitraire de φ que $\mathbf{rot} \mathbf{E}_0 = 0$ dans Y .

La deuxième relation de (4.20) s'obtient de la même façon en considérant des fonctions tests à support dans $Y \setminus \Sigma$ appliquées à l'équation $\operatorname{div}(\varepsilon_\eta \mathbf{E}_\eta) = 0$ (résultant de la seconde équation de (4.5)).

La dernière équation de (4.20) est une conséquence immédiate de l'équation (4.19).

Pour finir, la convergence forte de \mathbf{E}_η dans $L^2(B_R \setminus \overline{\mathcal{B}})$ donnée dans le lemme 4.5 entraîne que $\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}$ dans $B_R \setminus \overline{\mathcal{B}} \times Y$. □

Proposition 4.8 (Problème magnétique sur le tore)

Pour presque tout $x \in B_R$, on a $\mathbf{H}_0(x, \cdot) \in W_{\sharp}^{1,2}(Y, \mathbb{C}^3)$ et vérifie au sens des distributions :

$$\begin{aligned} \mathbf{rot}_y \mathbf{J}_0 &= i\omega\mu_0 \mathbf{H}_0 & \text{dans } \mathcal{B} \times \Sigma, & \quad \mathbf{J}_0 = 0 & \text{dans } \mathcal{B} \times Y \setminus \Sigma \\ \mathbf{rot}_y \mathbf{H}_0 &= -i\omega\varepsilon_0 \mathbf{J}_0 & \text{dans } \mathcal{B} \times Y, & \quad \operatorname{div}_y \mathbf{J}_0 = 0 & \text{dans } \mathcal{B} \times Y. \end{aligned} \quad (4.22)$$

De plus, on a l'égalité $\mathbf{H}_0(x, \cdot) = \tilde{\mathbf{H}}(x)$ presque partout dans $B_R \setminus \overline{\mathcal{B}} \times Y$ avec $\tilde{\mathbf{H}}$ la limite faible de la suite (\mathbf{H}_η) .

PREUVE.

La relation $\mathbf{J}_0 = 0$ dans $\mathcal{B} \times Y \setminus \Sigma$ est une conséquence immédiate de la définition de \mathbf{J}_η et du fait que $\|\mathbf{E}_\eta 1_{B_R \setminus \Sigma_\eta}\|_{L^2(B_R; \mathbb{C}^3)}$ est borné.

La relation $\operatorname{div}_y \mathbf{J}_0 = 0$ est déduite naturellement de $\operatorname{rot}_y \mathbf{H}_0 = -i\omega\varepsilon_0 \mathbf{J}_0$.

Les deux autres équations sont prouvées en utilisant les mêmes arguments que ceux donnés dans la preuve de la proposition 4.7.

Pour finir, on obtient $\mathbf{H}_0 = \tilde{\mathbf{H}}$ dans $B_R \setminus \overline{\mathcal{B}} \times Y$ d'après le lemme 4.5 qui prouve la convergence forte de \mathbf{H}_η dans $L^2(B_R \setminus \overline{\mathcal{B}})$. □

3 Solutions élémentaires sur le tore

Dans cette section, nous allons caractériser l'ensemble des solutions des problèmes microscopiques (4.20) et (4.22) et montrer que chacun d'eux forme un espace vectoriel de dimension trois. De cette façon, nous pourrions exprimer les limites double-échelle $\mathbf{E}_0(x, y)$ et $\mathbf{H}_0(x, y)$ sous la forme

$$\mathbf{E}_0(x, y) = \sum_{k=1}^3 E_k(x) \mathbf{E}^k(y) \quad , \quad \mathbf{H}_0(x, y) = \sum_{k=1}^3 H_k(x) \mathbf{H}^k(y) \quad ,$$

où les solutions élémentaires de base \mathbf{E}^k et \mathbf{H}^k vont être choisies suivant une normalisation adéquate.

3.1 Description du champ électrique microscopique

Proposition 4.9 *L'ensemble des solutions de (4.20) forme un espace vectoriel de dimension 3 engendré par les champs $\mathbf{E}^k \in L^2(Y; \mathbb{R}^3) \cap W_{\#}^{1,2}(Y \setminus \Sigma; \mathbb{R}^3)$ définis pour $k = 1, 2, 3$ par :*

$$\mathbf{E}^k = \mathbf{e}_k + \nabla_y \chi_k \quad . \quad (4.23)$$

Les fonctions χ_k dans (4.23) sont les uniques (à une constante près) éléments de $W_{\#}^{1,2}(Y; \mathbb{R})$ vérifiant

$$\Delta_y \chi_k = 0 \quad \text{dans } Y \setminus \Sigma \quad \text{et} \quad \chi_k = -y_k \quad \text{dans } \Sigma \quad . \quad (4.24)$$

En particulier, \mathbf{E}_0 peut se décomposer sous la forme

$$\mathbf{E}_0(x, y) = \sum_{k=1}^3 E_k(x) \mathbf{E}^k(y) \quad (4.25)$$

avec $E_k(x) = \int \mathbf{E}_0(x, y) \cdot \mathbf{e}_k \, dy$.

PREUVE. Il est évident que la décomposition (4.25) satisfait le système (4.20) et vérifie bien la condition nécessaire $\int_Y \mathbf{E}_0(x, y) dx = \mathbf{E}(x)$.

Il reste à montrer que la solution de (4.20) est unique. Considérant \mathbf{F} une solution à moyenne nulle, on déduit facilement de l'égalité $\mathbf{rot} \mathbf{F} = 0$ dans Y qu'il existe $\psi \in W_{\#}^{1,2}(Y)$ tel que $\mathbf{F} = \nabla \psi$ dans Y . Il résulte alors de (4.20) que $\Delta \psi = 0$ dans $Y \setminus \Sigma$ et que $\psi = 0$ sur $\partial \Sigma$. Ceci entraîne que $\psi = 0$ dans $Y \setminus \Sigma$ et ainsi que $\mathbf{F} = 0$ dans tout Y . \square

Les fonctions $\mathbf{E}^k(y)$ dépendent uniquement de la géométrie de l'inclusion Σ et seront appelées *fonctions de forme*. Elles déterminent le comportement microscopique du champ électrique et permettent de décrire le tenseur de permittivité effectif. Ce dernier, noté $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{eff}}$, est défini en (4.7) par

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{kl}^{\text{eff}} := \varepsilon_e \int_Y \mathbf{E}^k \cdot \mathbf{E}^l ,$$

où ε_e étant la permittivité dans la matrice $\mathcal{B} \setminus \Sigma_\eta$.

Il est facile de voir que ce tenseur est *indépendant* de la fréquence ω et qu'il est réel symétrique défini positif (puisque $\varepsilon_e \in \mathbb{R}$). Par conséquent, aucun effet spécifique (résonance, dispersion) n'est attendu en ce qui concerne le champ électrique.

3.2 Description du champ magnétique microscopique

Contrairement au cas du champ électrique $\mathbf{E}_0(x, \cdot)$, la résolution du système (4.22) vérifié par le champ microscopique $\mathbf{H}_0(x, \cdot)$ va faire intervenir de façon cruciale la fréquence ω . Une difficulté majeure pour la caractérisation des solutions du système (4.22) est qu'il n'y a pas d'information a priori sur la composante tangentielle du champ $\mathbf{J}_0(x, \cdot)$ sur $\partial \Sigma$ (on sait seulement que sa composante normale est nulle du fait que $\text{div} \mathbf{J}_0 = 0$ dans Y et $\mathbf{J}_0 = 0$ dans $Y \setminus \Sigma$).

Nous allons établir que $\mathbf{H}_0(x, \cdot)$ vérifie en fait une équation variationnelle plus précise que (4.22). Il en résultera, de manière similaire au cas du champ électrique $\mathbf{E}_0(x, \cdot)$, que $\mathbf{H}_0(x, \cdot)$ appartient à un sous-espace vectoriel de dimension trois.

Formulation variationnelle sur le tore.

On remarque que la fonction $\mathbf{H}_0(x, \cdot)$, étant (pour $x \in \mathcal{B}$ fixé) une fonction périodique (élément de $W_{\#}^{1,2}(Y)$) et a rotationnel nul sur $Y \setminus \Sigma$, il est possible de l'écrire dans $Y \setminus \Sigma$ sous la forme

$$\mathbf{H}_0(x, \cdot) = \mathbf{z} + \nabla_y \psi ,$$

où le vecteur $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^3$ est unique et $\psi \in W_{\#}^{1,2}(Y)$. Le vecteur \mathbf{z} correspond à la "circulation" de $\mathbf{H}_0(x, \cdot)$ entre les faces du tore et sera caractérisé de façon précise dans le lemme 4.14.

L'espace des "variations" est construit en considérant les champs \mathbf{v} à rotationnel nul sur $Y \setminus \Sigma$ pour lequel \mathbf{z} est nul. Plus précisément, nous introduisons les sous-espaces de Hilbert de $W_{\#}^{1,2}(Y)$ définis par

$$X := \left\{ \mathbf{v} \in W_{\#}^{1,2}(Y) , \mathbf{rot} \mathbf{v} = 0 \text{ dans } Y \setminus \Sigma \right\} , \quad (4.26)$$

$$X_0 := \left\{ \mathbf{v} \in W_{\#}^{1,2}(Y) , \mathbf{v} = \nabla\psi \text{ dans } Y \setminus \Sigma , \psi \in W_{\#}^{1,2}(Y) \right\} , \quad (4.27)$$

Il est facile de vérifier que X_0 est un sous-espace fermé de X . Notons que les fonctions constantes non nulles n'appartiennent pas à X_0 (une fonction $\psi \in W_{\#}^{1,2}(Y)$ ne peut être affine sur $Y \setminus \Sigma$ sans y être constante). Une caractérisation plus intuitive de X_0 sera donnée un peu plus loin en utilisant une notion de "vecteur de circulation moyen".

Introduisons le problème variationnel suivant :

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } \mathbf{u} \in X \text{ tel que } \forall \mathbf{v} \in X_0, \\ & \int_{\Sigma} \mathbf{rot} \mathbf{u} \cdot \mathbf{rot} \bar{\mathbf{v}} dy + \int_Y \operatorname{div} \mathbf{u} \operatorname{div} \bar{\mathbf{v}} dy = \varepsilon_r k_0^2 \int_Y \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{v}} dy . \end{aligned} \quad (4.28)$$

Lemme 4.10

Pour presque tout $x \in \mathcal{B}$, le champ microscopique \mathbf{H}_0 vérifie (4.28).

PREUVE. Soit $\rho(x) \in C_c^\infty(B_R)$ et $\mathbf{v} \in X_0$. On note $\boldsymbol{\varphi}_\eta(x) := \rho(x)\mathbf{v}(x/\eta)$ et en testant la seconde équation de (4.5) avec $\mathbf{rot} \boldsymbol{\varphi}_\eta$ on obtient

$$\int_{B_R} \frac{1}{\varepsilon_\eta} \mathbf{rot} \mathbf{H}_\eta \cdot \mathbf{rot} \boldsymbol{\varphi}_\eta = -i\omega\varepsilon_0 \int_{B_R} \mathbf{E}_\eta \cdot \mathbf{rot} \boldsymbol{\varphi}_\eta .$$

On utilise la première équation de (4.5) et la définition de ε_η pour déduire

$$\int_{B_R \setminus \Sigma_\eta} \frac{1}{\varepsilon_e} \mathbf{rot} \mathbf{H}_\eta \cdot \mathbf{rot} \boldsymbol{\varphi}_\eta + \int_{\Sigma_\eta} \frac{\eta^2}{\varepsilon_r} \mathbf{rot} \mathbf{H}_\eta \cdot \mathbf{rot} \boldsymbol{\varphi}_\eta = k_0^2 \int_{B_R} \mathbf{H}_\eta \cdot \boldsymbol{\varphi}_\eta .$$

Par définition de $\boldsymbol{\varphi}_\eta$ et en raison de $\mathbf{rot} \mathbf{v} = 0$ dans $Y \setminus \Sigma$, il vient

$$\begin{aligned} & -i\omega \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_e} \int_{B_R \setminus \Sigma_\eta} \mathbf{E}_\eta(x) \cdot \nabla \rho(x) \wedge \mathbf{v} \left(\frac{x}{\eta} \right) + \int_{\Sigma_\eta} \frac{\eta^2}{\varepsilon_r} \mathbf{rot} \mathbf{H}_\eta(x) \cdot \nabla \rho(x) \wedge \mathbf{v} \left(\frac{x}{\eta} \right) \\ & + \int_{\Sigma_\eta} \frac{\eta}{\varepsilon_r} \rho(x) \mathbf{rot} \mathbf{H}_\eta(x) \cdot \mathbf{rot} \mathbf{v} \left(\frac{x}{\eta} \right) = k_0^2 \int_{B_R} \rho(x) \mathbf{H}_\eta(x) \cdot \mathbf{v} \left(\frac{x}{\eta} \right) . \end{aligned} \quad (4.29)$$

On passe à la limite dans l'équation précédente en exploitant la convergence $\eta \mathbf{rot} \mathbf{H}_\eta \rightarrow \mathbf{rot}_y \mathbf{H}_0$ pour obtenir

$$\begin{aligned} & -i\omega\varepsilon_0 \int_{B_R \times Y \setminus \Sigma} \mathbf{E}_0(x, y) \wedge \nabla \rho(x) \cdot \mathbf{v}(y) + \int_{B_R \times \Sigma} \frac{1}{\varepsilon_r} \rho(x) \mathbf{rot}_y \mathbf{H}_0(x, y) \cdot \mathbf{rot} \mathbf{v}(y) \\ & = k_0^2 \int_{B_R \times Y} \rho(x) \mathbf{H}_0(x, y) \cdot \mathbf{v}(y) . \end{aligned} \quad (4.30)$$

Le premier terme du membre de gauche de l'équation précédente est nul. En effet, puisque $\mathbf{v} \in X_0$, on a l'existence de $\psi \in W_{\#}^{1,2}(Y)$ tel que $\mathbf{v} = \nabla\psi$ dans $Y \setminus \Sigma$. À l'aide d'une intégration par parties et grâce à la relation $\mathbf{E}_0 = 0$ dans Σ , on a

$$\begin{aligned} \int_{B_R \times Y \setminus \Sigma} \mathbf{E}_0(x, y) \wedge \nabla \rho(x) \cdot \mathbf{v}(y) &= \int_{B_R \times Y} \mathbf{E}_0(x, y) \wedge \nabla \rho(x) \cdot \nabla \psi(y) \\ &= - \int_{B_R \times Y} \mathbf{rot}_y \mathbf{E}_0(x, y) \cdot \nabla \rho(x) \psi(y) = 0 , \end{aligned}$$

où la dernière égalité à lieu puisque $\mathbf{rot}_y \mathbf{E}_0 = 0$ dans Y . L'équation (4.30) devient alors :

$$\int_{B_R \times \Sigma} \rho(x) \mathbf{rot}_y \mathbf{H}_0(x, y) \cdot \mathbf{rot} \mathbf{v}(y) = \varepsilon_r k_0^2 \int_{B_R \times Y} \rho(x) \mathbf{H}_0(x, y) \cdot \mathbf{v}(y) .$$

Le caractère arbitraire de ρ et la propriété $\operatorname{div}_y \mathbf{H}_0 = 0$ terminent la démonstration. \square

Remarque 4.11 Il est facile de voir qu'une solution \mathbf{u} de l'équation variationnelle (4.28) vérifie

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \text{ dans } Y \quad , \quad \mathbf{rot} \mathbf{u} = 0 \text{ dans } Y \setminus \Sigma \quad , \quad \Delta \mathbf{u} + \varepsilon_r k_0^2 \mathbf{u} = 0 \text{ dans } \Sigma .$$

En particulier, savoir que $\mathbf{H}_0(x, \cdot)$ satisfait (4.28) entraîne qu'il est solution de (4.22).

Résolution du problème variationnel (4.28).

Tout élément $\mathbf{u} \in X$ se décompose de façon unique sous la forme

$$\mathbf{u} = \mathbf{z} + \mathbf{w} \quad , \quad (4.31)$$

avec $\mathbf{w} \in X_0$ et $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^3$. Si on fixe le vecteur \mathbf{z} , alors la solution $\mathbf{u} = \mathbf{z} + \mathbf{w}$ de (4.28) est telle que \mathbf{w} vérifie

$$b_0(\mathbf{w}, \mathbf{v}) - \varepsilon_r k_0^2 \int_Y \mathbf{w} \cdot \bar{\mathbf{v}} = \varepsilon_r k_0^2 \int_Y \mathbf{z} \cdot \bar{\mathbf{v}} \quad , \quad \forall \mathbf{v} \in X_0 \quad , \quad (4.32)$$

avec

$$b_0(\mathbf{w}, \mathbf{v}) := \int_{\Sigma} \mathbf{rot} \mathbf{w} \cdot \mathbf{rot} \bar{\mathbf{v}} + \int_Y \operatorname{div} \mathbf{w} \operatorname{div} \bar{\mathbf{v}} . \quad (4.33)$$

Lemme 4.12

(i) b_0 est une forme hermitienne sur X_0 et $\mathbf{v} \rightarrow \sqrt{b_0(\mathbf{v}, \mathbf{v})}$ définit une norme équivalente à la norme dans $W_{\sharp}^{1,2}(Y; \mathbb{C}^3)$.

(ii) Pour tout $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^3$, la solution \mathbf{w}_z de (4.32) existe et est unique.

PREUVE.

(i) Il suffit de monter l'existence d'une constante $k > 0$ telle que

$$\forall \mathbf{v} \in X_0 \quad , \quad b_0(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \int_Y (|\operatorname{div} \mathbf{v}|^2 + |\mathbf{rot} \mathbf{v}|^2) \geq k \int_Y |\mathbf{v}|^2 . \quad (4.34)$$

En effet, on aura alors que $b_0(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq \frac{k}{k+1} \int_Y (|\operatorname{div} \mathbf{v}|^2 + |\mathbf{rot} \mathbf{v}|^2 + |\mathbf{v}|^2)$ qui d'après la proposition 2.7 est équivalent au carré de la norme de \mathbf{v} dans $W_{\sharp}^{1,2}(Y; \mathbb{R}^3)$. Or la non existence de $k > 0$ dans (4.34) entraînerait l'existence d'une suite (\mathbf{v}_n) dans X_0 telle que $\|\mathbf{v}_n\|_{L^2} = 1$, $\operatorname{div} \mathbf{v}_n \rightarrow 0$ et $\mathbf{rot} \mathbf{v}_n \rightarrow 0$ dans $L^2(Y)$. Cette suite serait alors bornée dans $W_{\sharp}^{1,2}(Y; \mathbb{R}^3)$ et convergerait (à une sous suite près) vers $\mathbf{v} \in X_0$ tel que $\|\mathbf{v}\|_{L^2} = 1$, $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ et $\mathbf{rot} \mathbf{v} = 0$. Cette fonction \mathbf{v} est alors une constante non nulle ce qui est incompatible avec l'appartenance au sous espace X_0 .

(ii) Il est clair que la forme sesquilinéaire

$$b(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := b_0(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - \varepsilon_r k_0^2 \int_Y \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{v}} ,$$

est continue sur $X_0 \times X_0$. De plus, en fixant un complexe $\alpha := a + ib$ ($a, b \in \mathbb{R}$) on a

$$\Re(\alpha b(\mathbf{u}, \mathbf{u})) = \int_Y \left(a |\mathbf{rot} \mathbf{u}|^2 + a |\operatorname{div} \mathbf{u}|^2 + k_0^2 (b \Im(\varepsilon_r) - a \Re(\varepsilon_r)) |\mathbf{u}|^2 \right) .$$

Le membre de droite dans l'équation précédente forme une norme équivalente à $\|\mathbf{u}\|_{W_{\sharp}^{1,2}(Y; \mathbb{C}^3)}$ pour α tel que $(b \Im(\varepsilon_r) - a \Re(\varepsilon_r)) > 0$ (cf. proposition 2.7). L'existence et l'unicité de la solution du problème (4.32) résulte alors du théorème de Lax-Milgram. \square

La linéarité du problème (4.28), l'existence et l'unicité données dans le lemme 4.12 nous permettent de déduire le résultat suivant.

Proposition 4.13 *L'ensemble des solutions de (4.28) forme un espace vectoriel de dimension trois, engendré par les champs $\mathbf{H}^k \in X$ définis pour $k \in \{1, 2, 3\}$ par*

$$\mathbf{H}^k(y) := \mathbf{e}_k + \mathbf{u}^k(y) , \quad (4.35)$$

où les champs $\mathbf{u}^k \in X_0$ sont les uniques solutions de (4.32) pour $\mathbf{z} = \mathbf{e}_k$. En particulier, le champ microscopique $\mathbf{H}_0(x, y)$ solution de l'équation (4.28) peut se décomposer sous la forme

$$\mathbf{H}_0(x, y) = \sum_{k=1}^3 H_k(x) \mathbf{H}^k(y) . \quad (4.36)$$

avec $H_k \in L^2(\mathcal{B})$.

Il est maintenant crucial de décrire précisément les fonctions scalaires $H_1(x)$, $H_2(x)$ et $H_3(x)$ intervenant dans (4.36). Un point essentiel est que le vecteur $\mathbf{H} = (H_k)_k$ ne coïncide pas avec la limite faible de la suite (\mathbf{H}_η) mais correspond à une moyennisation géométrique du champ magnétique microscopique que nous allons décrire dans le paragraphe suivant.

Vecteur circulation associé à une fonction de X . Le champ microscopique $\mathbf{H}_0(x, \cdot)$ est à rotationnel nul dans le complémentaire de l'obstacle Σ . Puisque $Y \setminus \Sigma$ est *simplement connexe*, la circulation le long de courbes de $Y \setminus \Sigma$ joignant des points opposés de ∂Y est indépendant du chemin choisi et des points sur chaque face (dans une direction k). Il est donc naturel de définir le vecteur "circulation moyenne", noté $\oint \mathbf{H}_0$, dont les composantes sont données par :

$$\left(\oint \mathbf{H}_0(x, \cdot) \right) \cdot \mathbf{e}_k := \int_{\Gamma_k} \mathbf{H}_0(x, \cdot) \cdot \mathbf{e}_k dl(x) , \quad (4.37)$$

où Γ_k est une courbe contenue dans $Y \setminus \Sigma$ et joignant deux points opposés sur les faces de Y orthogonales à \mathbf{e}_k .

Cette définition du vecteur circulation ne peut s'appliquer qu'à des fonctions *régulières*. Dans notre cas plus général, où les fonctions sont seulement dans $W_{\#}^{1,2}(Y)$, on peut étendre sa définition à l'aide du lemme suivant.

Lemme 4.14 *Soit $\mathbf{u} \in L_{\#}^2(Y; \mathbb{C}^3)$ tel que $\mathbf{rot} \mathbf{u} = 0$ dans $Y \setminus \Sigma$. Alors, il existe un vecteur unique noté $\oint \mathbf{u}$ vérifiant les conditions équivalentes suivantes.*

(i) $\forall \mathbf{f} \in L_{\#}^2(Y)$ tel que $\operatorname{div} \mathbf{f} = 0$ et $\mathbf{f} = 0$ dans Σ

$$\int \mathbf{u} \cdot \mathbf{f} \, dy = \oint \mathbf{u} \, dy \cdot \int \mathbf{f} \, dy . \quad (4.38)$$

(ii) Il existe $\psi \in W_{\#}^{1,2}(Y \setminus \Sigma)$ (unique à une constante près) tel que

$$\mathbf{u} = \nabla \psi + \oint \mathbf{u} \quad \text{dans } Y \setminus \Sigma .$$

(iii) Si \mathbf{u} est régulier et $\mathbf{k} \in \{1, 2, 3\}$, alors

$$\left(\oint \mathbf{u} \right) \cdot \mathbf{e}_k = \int_0^1 \mathbf{u}(\gamma(s)) \cdot \gamma'(s) \, ds ,$$

pour tout $\gamma \in C^1([0, 1]; Y \setminus \Sigma)$ tel que $\gamma^k(1) - \gamma^k(0) = \mathbf{e}_k$.

Enfin, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\left| \oint \mathbf{u} \right| \leq C \|\mathbf{u}\|_{L^2(Y; \mathbb{C}^3)} . \quad (4.39)$$

PREUVE. i) et ii) Puisque l'ouvert $Y \setminus \overline{\Sigma}$ est simplement connexe, le fait que $\mathbf{rot} \mathbf{u} = 0$ sur $Y \setminus \overline{\Sigma}$ entraîne l'existence d'un potentiel périodique ψ et d'un vecteur unique $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^3$ tel que $\mathbf{u} = \nabla \psi + \mathbf{z}$ sur $Y \setminus \overline{\Sigma}$. Le bord de Σ étant supposé assez régulier, ψ peut être prolongé à tout Y en un élément de $W_{\#}^{1,2}(Y)$. Puisque \mathbf{f} est nul sur Σ et périodique à divergence nulle, on a donc

$$\int_Y \mathbf{u} \cdot \mathbf{f} \, dy = \int_Y (\nabla \psi + \mathbf{z}) \cdot \mathbf{f} \, dy = \mathbf{z} \cdot \int_Y \mathbf{f} \, dy .$$

Le vecteur \mathbf{z} ne dépend que de \mathbf{u} et devient $\oint \mathbf{u}$. L'appartenance à X_0 au sens de la définition (4.27) se traduit donc par le fait que $\oint \mathbf{u} = 0$.

iii) Si \mathbf{u} est continu, le potentiel périodique ψ associé est Lipschitzien sur $Y \setminus \overline{\Sigma}$ et on obtient avec $\mathbf{z} := \oint \mathbf{u}$

$$\int_0^1 \mathbf{u}(\gamma(s)) \cdot \gamma'(s) \, ds = \int_0^1 (\nabla \psi + \mathbf{z})(\gamma(s)) \cdot \gamma'(s) \, ds = \psi(\gamma(1)) - \psi(\gamma(0)) + \mathbf{z} \cdot \mathbf{e}_k ,$$

d'où la conclusion grâce à la périodicité de ψ .

Pour établir l'estimation (4.39), qui aura en fait lieu pour tout $\mathbf{u} \in L^2_{\sharp}(Y; \mathbb{C}^3)$ avec $\mathbf{rot} \mathbf{u} = 0$, on considère trois cylindres $C_k \subset Y$. Chacun d'eux traverse entièrement la cellule de base Y , est orienté dans la direction \mathbf{e}_k et tel que $\Sigma \cap C_k = \emptyset$. On leur associe les trois fonctions $\mathbf{f}_k \in L^2(Y)$ donnée pour $\alpha_k \in \mathbb{C}$ par

$$\mathbf{f}_k(y) = \frac{\alpha_k}{|C_k|} 1_{C_k}(y) \mathbf{e}_k ,$$

qui sont naturellement nulle dans Σ et à divergence nulle dans tout Y . En testant l'équation (4.38) avec $\mathbf{f} = \mathbf{f}_k$ on obtient que

$$\alpha_k \oint \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_k = \int_Y \mathbf{f}_k \cdot \mathbf{u} \leq C \|\mathbf{u}\|_{L^2(Y)} .$$

Le caractère aléatoire de α_k entraîne (4.39). □

D'après le point (ii) de la proposition 4.14, l'espace X_0 donné dans (4.40) est caractérisé par l'égalité suivante

$$X_0 := \left\{ \mathbf{u} \in X , \oint \mathbf{u} = 0 \right\} . \quad (4.40)$$

Par ailleurs, le vecteur \mathbf{z} intervenant dans la décomposition de $\mathbf{u} \in X$ donné dans (4.31) est exactement le vecteur circulation $\oint \mathbf{u}$. Autrement dit les fonctions de forme \mathbf{H}^k ont été normalisées de la façon suivante

$$\oint \mathbf{H}^k = \mathbf{e}_k . \quad (4.41)$$

Ce choix va s'avérer *essentiel*. En effet, si comme cela est souvent le cas, la condition de normalisation était donnée par $\int_Y \mathbf{H}^k(y) = \mathbf{e}_k$; alors le champ $\mathbf{H}(x) = (H_1(x), H_2(x), H_3(x))$ intervenant dans la décomposition (4.36) correspondrait à la limite faible de (\mathbf{H}_η) . Ce choix n'est pas pertinent et conduirait à un système limite sur l'obstacle du type

$$\begin{cases} \mathbf{rot} \mathbf{E} = i\omega\mu_0 \mathbf{H} , \\ \mathbf{rot}(\mathbf{M}\mathbf{H}) = -i\omega\varepsilon_0 \mathbf{N}\mathbf{E} , \end{cases}$$

où \mathbf{M} est une matrice non proportionnelle à l'identité. Il serait alors impossible d'interpréter le résultat en terme de permittivité et perméabilité effectives.

Le champ macroscopique $\mathbf{H}(x) = (H_1(x), H_2(x), H_3(x))$ est caractérisé en terme du champ microscopique $\mathbf{H}_0(x, y)$ par la relation

$$\mathbf{H}(x) = \oint \mathbf{H}_0(x, \cdot) . \quad (4.42)$$

Remarque 4.15 La définition (4.38) peut être vue comme une extension de la propriété classique liée au “lemme div-rot” :

$$\int_Y \mathbf{f} \cdot \mathbf{g} \, dy = \left(\int_Y \mathbf{f} \, dy \right) \cdot \left(\int_Y \mathbf{g} \, dy \right) \quad , \quad \forall (\mathbf{f}, \mathbf{g}) \in (L^2(Y))^2 \quad ,$$

pourvu que $\mathbf{rot} \mathbf{f} = 0$ et $\mathbf{div} \mathbf{g} = 0$ dans Y . Notons de plus que si $\mathbf{rot} \mathbf{u} = 0$ dans Y tout entier, alors

$$\oint \mathbf{u} = \int_Y \mathbf{u} \quad .$$

Remarque 4.16 La normalisation (4.41) que nous avons adoptée peut être interprétée d’un point de vue physique. La perméabilité d’un milieu décrit la relation constitutive entre les champs \mathbf{B} (l’induction magnétique) et \mathbf{H} ($\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$). Bien que cela n’apparaisse pas directement dans cette relation, les quantités \mathbf{B} et \mathbf{H} n’ont pas les mêmes dimensions et ne sont pas mesurées de la même façon. En terme de géométrie différentielle, le champ \mathbf{H} est une 1–forme et doit en principe être évalué localement par sa circulation le long de segments élémentaires dans \mathbb{R}^3 . Par contre, le champ \mathbf{B} (de divergence nulle) agit comme une 2–forme et doit être mesuré par son flux à travers les faces du cube élémentaire (ce qui revient à calculer sa moyenne volumique, puisque $\mathbf{div} \mathbf{B} = 0$).

Remarque 4.17 On insiste sur le fait que la décomposition du champ magnétique microscopique \mathbf{H}_0 (4.36) a lieu uniquement sous l’hypothèse : $Y \setminus \Sigma$ est *simplement connexe*. Par exemple si Σ est un tore, la décomposition $\mathbf{u} = \nabla \psi + \oint \mathbf{u}$ n’est plus valable pour tous les champs $\mathbf{u} \in X$ et il est montré dans [9] que l’espace vectoriel des solutions du système (4.22) est de dimension quatre.

Perméabilité effective. On introduit le tenseur de permittivité effectif μ^{eff} dont les composantes sont données par

$$\mu_{kl}^{\text{eff}} := \int_Y \mathbf{H}^k \cdot \mathbf{e}_l \quad , \quad k, l \in \{1, 2, 3\} \quad . \quad (4.43)$$

Il résulte de cette définition que la limite faible $\tilde{\mathbf{H}}$ de la suite (\mathbf{H}_η) est donnée, pour presque tout $x \in \mathcal{B}$, par

$$\tilde{\mathbf{H}}(x) := \int_Y \mathbf{H}_0(x, y) = \mu^{\text{eff}} \mathbf{H}(x) \quad . \quad (4.44)$$

Le tenseur μ^{eff} dépend de la fréquence ω qui apparaît dans (4.32) (par l’intermédiaire du nombre d’onde $k_0 := \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \omega$). Cette dépendance est expliquée en détails dans la section 4. On peut auparavant établir que le tenseur μ^{eff} est symétrique (non auto-adjoint), plus précisément on a le résultat suivant.

Lemme 4.18 *Le tenseur $\mu^{\text{eff}}(\omega)$ vérifie :*

(i) (symétrie) $\forall (k, l) \in \{1, 2, 3\}^2$, $\boldsymbol{\mu}_{kl}^{\text{eff}} = \boldsymbol{\mu}_{lk}^{\text{eff}}$.

(ii) Pour tout $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^3$, $\mathbf{z} \neq 0$ on a

$$\Im(\boldsymbol{\mu}^{\text{eff}} \mathbf{z} \cdot \bar{\mathbf{z}}) > 0 .$$

PREUVE.

(i) Soit $(k, l) \in \{1, 2, 3\}^2$ tels que $k \neq l$. Les champs \mathbf{u}^l et \mathbf{u}^k vérifient (4.32) avec $\mathbf{z} = \mathbf{e}_l$ et $\mathbf{z} = \mathbf{e}_k$ respectivement. En choisissant successivement $\mathbf{v} = \mathbf{u}_k$ et $\mathbf{v} = \mathbf{u}_l$ dans ces équations, on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} \mathbf{rot} \mathbf{u}^l \cdot \mathbf{rot} \bar{\mathbf{u}}^k - \varepsilon_r k_0^2 \int_Y \mathbf{u}^l \cdot \bar{\mathbf{u}}^k &= \int_Y \mathbf{e}_l \cdot \bar{\mathbf{u}}^k . \\ \int_{\Sigma} \mathbf{rot} \mathbf{u}^k \cdot \mathbf{rot} \bar{\mathbf{u}}^l - \varepsilon_r k_0^2 \int_Y \mathbf{u}^k \cdot \bar{\mathbf{u}}^l &= \int_Y \mathbf{e}_k \cdot \bar{\mathbf{u}}^l . \end{aligned}$$

On obtient donc l'égalité $\int_Y \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{u}^l = \int_Y \mathbf{e}_l \cdot \mathbf{u}^k$. Il en résulte alors le point (i) à l'aide de la définition de $\boldsymbol{\mu}^{\text{eff}}$ ainsi que la décomposition $\mathbf{H}^k = \mathbf{e}_k + \mathbf{u}^k$ (données dans (4.43) et (4.35) respectivement).

(ii) Fixons $\mathbf{z} = (z_k) \in \mathbb{C}^3$. D'après (4.43) et (4.35), on a

$$\boldsymbol{\mu}^{\text{eff}} \mathbf{z} \cdot \bar{\mathbf{z}} = \sum_{k,l=1}^3 z_k \bar{z}_l \int_Y \mathbf{H}^k \cdot \mathbf{e}_l = \sum_{k,l=1}^3 z_k \bar{z}_l \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_l + \sum_{k,l=1}^3 z_k \bar{z}_l \int_Y \mathbf{u}^k \cdot \mathbf{e}_l . \quad (4.45)$$

Le champ \mathbf{u}^l est solution de (4.32) pour $\mathbf{z} = \mathbf{e}_l$ et vérifie alors

$$\int_{\Sigma} \mathbf{rot} \mathbf{u}^l \cdot \mathbf{rot} \bar{\mathbf{v}} - \varepsilon_r k_0^2 \int_Y \mathbf{u}^l \cdot \bar{\mathbf{v}} = \varepsilon_r k_0^2 \int_Y \mathbf{e}_l \cdot \bar{\mathbf{v}} \quad , \quad \forall \mathbf{v} \in X_0 .$$

Choisissant $\mathbf{v} = \mathbf{u}^k$ dans l'égalité précédente et passant au conjugué, on peut ainsi récrire (4.45) sous la forme

$$\boldsymbol{\mu}^{\text{eff}} \mathbf{z} \cdot \bar{\mathbf{z}} = |\mathbf{z}|^2 + \frac{1}{\bar{\varepsilon}_r k_0^2} \sum_{k,l=1}^3 z_k \bar{z}_l \int_{\Sigma} \mathbf{rot} \bar{\mathbf{u}}^l \cdot \mathbf{rot} \mathbf{u}^k - \sum_{k,l=1}^3 z_k \bar{z}_l \int_Y \bar{\mathbf{u}}^l \cdot \mathbf{u}^k .$$

En prenant la partie imaginaire, il vient

$$\begin{aligned} \Im(\boldsymbol{\mu}^{\text{eff}} \mathbf{z} \cdot \bar{\mathbf{z}}) &= \frac{\Im(\varepsilon_r)}{|\varepsilon_r|^2 k_0^2} \sum_{k,l=1}^3 z_k \bar{z}_l \int_{\Sigma} \mathbf{rot} \bar{\mathbf{u}}^l \cdot \mathbf{rot} \mathbf{u}^k \\ &= \frac{\Im(\varepsilon_r)}{|\varepsilon_r|^2 k_0^2} \left\| \sum_{k=1}^3 z_k \mathbf{rot} \mathbf{u}^k \right\|_{L^2(\Sigma)}^2 \geq 0 . \end{aligned} \quad (4.46)$$

Il reste à montrer que le second membre de (4.46) est strictement positif pour $\mathbf{z} > 0$. Supposons que cela n'est pas le cas. Alors, il existe $\mathbf{z} \neq 0$ tel que la solution $\mathbf{u}_z = \sum_k z_k \mathbf{u}^k$ est à rotationnel nul sur Σ (donc sur Y tout entier). Ainsi, le champ \mathbf{u}_z est périodique, à divergence et rotationnel nuls dans Y . Il est donc constant et identiquement nul du fait de $\oint \mathbf{u} = 0$. Ceci contredit le fait que \mathbf{u}_z est solution de (4.32) pour $\mathbf{z} \neq 0$.

4 Perméabilité effective en fonction de la fréquence

Dans cette section, nous allons caractériser les solutions \mathbf{u}^k du problème (4.32) à l'aide de valeurs et vecteurs propres associés à la forme bilinéaire b_0 . Cela nous permettra de donner une formulation précise du tenseur de perméabilité $\boldsymbol{\mu}^{\text{eff}}$ dans laquelle la dépendance par rapport à la fréquence ω sera explicite.

4.1 Analyse spectrale sur le tore

En relation avec la formulation variationnelle (4.32), on se propose d'étudier le problème spectral suivant.

Trouver $(\mathbf{w}, \lambda) \in X_0 \times \mathbb{R}^+$ tels que

$$b_0(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = \lambda \int_Y \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}, \quad \forall \mathbf{v} \in X_0. \quad (4.47)$$

Proposition 4.19 *Il existe une base orthonormale $\{\mathbf{w}_n\}$ dans $L^2(Y; \mathbb{R}^3)$ et une suite $0 < \lambda_0 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots$ avec $\lambda_n \rightarrow \infty$ telle que $(\mathbf{w}_n, \lambda_n)$ soit solution de (4.47). On peut de plus choisir la suite $\{\mathbf{w}_n\}$ de telle sorte que*

$$\operatorname{div} \mathbf{w}_n = 0 \quad \text{ou bien} \quad \int_Y \mathbf{w}_n = 0. \quad (4.48)$$

PREUVE. On associe à la forme variationnelle b_0 l'opérateur $\mathbf{Q} : \mathbf{f} \in L^2(Y; \mathbb{R}^3) \rightarrow \mathbf{u}_f \in L^2(Y; \mathbb{R}^3)$ où \mathbf{u}_f est l'unique élément de $X_0 \cap L^2(Y; \mathbb{R}^3)$ vérifiant l'égalité

$$b_0(\mathbf{u}_f, \mathbf{v}) = \int_Y \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}, \quad \forall \mathbf{v} \in X_0 \cap L^2(Y; \mathbb{R}^3), \quad (4.49)$$

L'existence et l'unicité de la solution de (4.49) résulte du lemme de Lax-Milgram appliqué sur l'espace de Hilbert $X_0 \cap L^2(Y; \mathbb{R}^3)$. En effet, rappelant que d'après l'assertion i) du Lemme 4.12, $b_0(\mathbf{v}, \mathbf{v})$ est équivalent au carré de la norme de \mathbf{v} dans $W_{\#}^{1,2}(Y; \mathbb{R}^3)$, la forme bilinéaire positive symétrique $b_0(\mathbf{u}_f, \mathbf{v})$ est continue, coercive relativement à la norme de $W_{\#}^{1,2}(Y)$. Il en résulte de plus que l'opérateur (résolvent) \mathbf{Q} est continu de $L^2(Y; \mathbb{R}^3)$ dans $W_{\#}^{1,2}(Y)$, donc compact en tant qu'opérateur à valeurs dans $L^2(Y; \mathbb{R}^3)$. Il est par ailleurs auto-adjoint strictement positif. L'existence de la suite $(\mathbf{w}_n, \lambda_n)$ vérifiant (4.47) est alors une conséquence immédiate de l'équivalence :

$$\mathbf{Q}\mathbf{w} = \mu\mathbf{w} \iff (\mathbf{w}, \frac{1}{\mu}) \text{ solution de (4.47).}$$

Enfin si \mathbf{w}_0 est un vecteur propre normalisé associé à la plus petite valeur propre λ_0 , on aura $b_0(\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_0) = \lambda_0 > 0$ du fait que b_0 est un produit scalaire hermitien (cf l'assertion i) du Lemme 4.12).

Montrons maintenant la dernière partie de la Proposition. Pour satisfaire à la condition supplémentaire (4.48), on considère le sous-espace fermé $W \subset X_0$ engendré par

$\{\nabla\beta_{\mathbf{k}}, \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{0\}\}$ avec $\beta_{\mathbf{k}}(\mathbf{y}) = (2\pi|\mathbf{k}|)^{-1} \exp(2i\pi\mathbf{k} \cdot \mathbf{y})$. Il est constitué des fonctions propres de (4.47) associées aux valeurs propres $4\pi^2|\mathbf{k}|^2$ et son orthogonal dans $L^2_{\#}(Y, \mathbb{R}^3)$ coïncide avec les fonctions à divergence nulle. En effet, pour tout $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{0\}$ et tout $\mathbf{w} \in W^\perp$, on a (au sens des distributions périodiques)

$$\int_Y \mathbf{w} \cdot \nabla\beta_{\mathbf{k}} = -\frac{1}{2\pi|\mathbf{k}|} \langle \operatorname{div} \mathbf{w}, e^{2i\pi\mathbf{k} \cdot \mathbf{y}} \rangle = 0,$$

d'où résulte que $\operatorname{div} \mathbf{w} = 0$ (puisque $\langle \operatorname{div} \mathbf{w}, 1 \rangle = 0$). L'espace W étant invariant par \mathbf{Q} , il en est de même de W^\perp et il est donc possible de compléter le système orthonormal $\{\nabla\beta_{\mathbf{k}}, \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{0\}\}$ avec une base orthonormale de vecteurs propres dans W^\perp . On obtient ainsi une base orthonormale de vecteurs propres dans $L^2(Y; \mathbb{R}^3)$ vérifiant (4.48). \square

4.2 Tenseur de permittivité effectif

Nous sommes maintenant en mesure d'établir la relation de dispersion (4.8) où apparaissent les fréquences de résonances résultant du problème spectral (4.47).

Soit $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \rightarrow +\infty$ les valeurs propres du problème spectral (4.47) et considérons une base (\mathbf{w}_n) de $L^2(Y, \mathbb{R}^3)$ formée de vecteurs propres associés. Dans cette base, la solution \mathbf{u}_k se décompose sous la forme

$$\mathbf{u}^k = \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n^k \mathbf{w}_n, \quad \text{avec } c_n^k \in \mathbb{C}. \quad (4.50)$$

Puisque $b_0(\mathbf{u}_k, \mathbf{w}_n) = \lambda_n \int_Y \mathbf{u}_k \cdot \mathbf{w}_n$, en choisissant $\mathbf{v} = \mathbf{w}_n$ (n fixé) dans l'équation (4.47) on obtient

$$(\lambda_n - \varepsilon_r k_0^2) \int_Y \mathbf{u}^k \cdot \mathbf{w}_n = \varepsilon_r k_0^2 \int_Y \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{w}_n.$$

On en déduit la valeur de c_n^k , ce qui amène à récrire (4.50) sous la forme

$$\mathbf{u}^k(y) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\varepsilon_r k_0^2}{\lambda_n - \varepsilon_r k_0^2} \left(\int_Y \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{w}_n \right) \mathbf{w}_n(y).$$

Ainsi, en utilisant la décomposition $\mathbf{H}^k = \mathbf{e}_k + \mathbf{u}^k$, le tenseur $\boldsymbol{\mu}^{\text{eff}}$ donné par (4.43) peut être développé suivant la formule donnée dans (4.8) i.e. pour tout $(k, l) \in \{1, 2, 3\}^2$

$$\boldsymbol{\mu}_{kl}^{\text{eff}}(\omega) = \delta_{kl} + \sum_n \frac{\varepsilon_r k_0^2}{\lambda_n - \varepsilon_r k_0^2} \left(\int_Y \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{w}_n \right) \left(\int_Y \mathbf{e}_l \cdot \mathbf{w}_n \right). \quad (4.51)$$

Dans l'expression précédente la dépendance de $\boldsymbol{\mu}^{\text{eff}}$ vis-à-vis de la fréquence ω apparaît de manière explicite. Les effets de résonance vont apparaître lorsque la fréquence est telle que le dénominateur d'un des termes de la série de l'équation précédente est de module proche de zéro. Une analyse plus précise a été présentée dans la section 1 avec des simulations numériques s'appuyant sur une méthode d'approximation numérique développée dans le chapitre 6 et une reformulation de $\boldsymbol{\mu}^{\text{eff}}$ faisant intervenir un nouveau problème spectral que nous décrirons dans la section 6.

Remarque 4.20 Les valeurs propres λ_n apparaissant dans le développement (4.51) sont en général multiples (par exemple lorsque la géométrie des inclusions présente des symétries). Il est clair que la somme de la série est indépendante de la base orthonormale choisie $\{w_n\}$. La condition supplémentaire (4.48) permet de ne considérer que des fonctions propres à divergence nulle.

5 Démonstration du résultat principal

La résolution des problèmes sur le tore, obtenue dans les propositions 4.9 et 4.13, a permis d'exprimer les champs *microscopiques* $\mathbf{E}_0(x, y)$ et $\mathbf{H}_0(x, y)$ en fonction des champs *macroscopiques* $\mathbf{E}(x)$ et $\mathbf{H}(x)$. Il reste à établir la loi homogénéisée que devra satisfaire le champ électromagnétique (\mathbf{E}, \mathbf{H}) .

5.1 Obtention de la loi effective

Lemme 4.21

Sous l'hypothèse (4.14), le champ électromagnétique $(\mathbf{E}_\eta, \mathbf{H}_\eta)$ converge vers $(\mathbf{E}, \boldsymbol{\mu}\mathbf{H})$ faiblement dans $L^2_{loc}(\mathbb{R}^3; \mathbb{C})$, où (\mathbf{E}, \mathbf{H}) est l'unique solution du problème

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{E} = i\omega\mu_0 \boldsymbol{\mu}(x, \omega) \mathbf{H} & \text{dans } B_R \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} = -i\omega\varepsilon_0 \boldsymbol{\varepsilon}(x) \mathbf{E} & \text{dans } B_R \\ (\mathbf{E}, \mathbf{H}) \text{ satisfait les conditions (4.6)} \end{cases} \quad (4.52)$$

avec

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x) := \mathbf{I} 1_{\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{B}}(x) + \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{eff}} 1_{\mathcal{B}}(x) \quad , \quad \boldsymbol{\mu}(x, \omega) := \mathbf{I} 1_{\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{B}}(x) + \boldsymbol{\mu}^{\text{eff}}(\omega) 1_{\mathcal{B}}(x) \quad ,$$

et $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{eff}}, \boldsymbol{\mu}^{\text{eff}}$ donnés respectivement en (4.7) et (4.8).

PREUVE. Commençons par prouver les relations suivantes.

$$\int_Y \mathbf{E}^k \wedge \mathbf{H}^l = \mathbf{e}_k \wedge \mathbf{e}_l \quad , \quad \forall (k, l) \in \{1, 2, 3\}^2 \quad , \quad (4.53)$$

$$\sum_{l=1}^3 \operatorname{div} (H_l(x) \mathbf{e}_k \wedge \mathbf{e}_l) = -(\operatorname{rot} \mathbf{H}) \cdot \mathbf{e}_k \quad , \quad \forall k \in \{1, 2, 3\} \quad . \quad (4.54)$$

Preuve de (4.53).

À l'aide de la proposition 4.13, on décompose le champ \mathbf{H}^k sous la forme $\mathbf{H}^k = \mathbf{e}_k + \mathbf{u}_k$ où \mathbf{u}^k est solution de (4.32) avec $\mathbf{z} = \mathbf{e}_k$. Pour tout $\mathbf{d} \in \mathbb{C}^3$, on a

$$\begin{aligned} \int_Y (\mathbf{E}^l \wedge \mathbf{H}^k) \cdot \mathbf{d} &= \int_Y (\mathbf{E}^l \wedge \mathbf{e}_k) \cdot \mathbf{d} + \int_Y \mathbf{E}^l \wedge \mathbf{u}^k \cdot \mathbf{d} \\ &= \mathbf{e}_l \wedge \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{d} + \int_{Y \setminus \Sigma} \mathbf{E}^l \wedge \mathbf{u}^k \cdot \mathbf{d} \quad . \end{aligned}$$

Il reste à établir que $\int_{Y \setminus \Sigma} \mathbf{E}^l \wedge \mathbf{u}^k \cdot \mathbf{d} = 0$ pour tout $z \in \mathbb{C}^3$. D'après le lemme 4.14, il existe $\phi_k \in W_{\#}^{1,2}(Y)$ tel que $\mathbf{u}^k = \nabla \phi_k$ dans $Y \setminus \bar{\Sigma}$. Il vient

$$\begin{aligned} \int_{Y \setminus \Sigma} \mathbf{E}^l \wedge \mathbf{u}^k \cdot \mathbf{d} &= \int_{Y \setminus \Sigma} \mathbf{d} \wedge \mathbf{E}^l \cdot \nabla \phi_k \\ &= - \int_{Y \setminus \Sigma} \operatorname{div}(\mathbf{d} \wedge \mathbf{E}^l) \phi_k + \int_{\partial \Sigma} \mathbf{d} \wedge \mathbf{E}^l \cdot \mathbf{n} \phi_k, \end{aligned}$$

où la dernière égalité est obtenue à l'aide d'une intégration par parties. L'intégrale sur le bord de Σ est nulle puisque \mathbf{E}^k est nul dans Σ et que sa composante tangentielle est continue à la traversée de $\partial \Sigma$ ($\operatorname{rot} \mathbf{E}^k \in L^2(Y)$). D'autre part, on a $\operatorname{div}(\mathbf{d} \wedge \mathbf{E}^l) \phi_k = \operatorname{rot} \mathbf{E}^k \cdot \mathbf{d} \phi_k = 0$ puisque $\operatorname{rot} \mathbf{E}^k = 0$ dans Y .

Preuve de (4.54).

Il est facile de remarquer, par définition de l'opérateur rotationnel, que l'on a pour tout \mathbf{f}

$$(\operatorname{rot} \mathbf{f})_k := \sum_{i,l=1}^3 \frac{\partial f_l}{\partial x_i} (\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_l) \cdot \mathbf{e}_k.$$

On a

$$\sum_{l=1}^3 \operatorname{div} (H_l(x) \mathbf{e}_k \wedge \mathbf{e}_l) = \sum_{i,l=1}^3 \frac{\partial H_l}{\partial x_i} (\mathbf{e}_k \wedge \mathbf{e}_l) \cdot \mathbf{e}_i = -(\operatorname{rot} \mathbf{H}) \cdot \mathbf{e}_k$$

□

Obtention des équations limites.

Le comportement du champ $(\mathbf{E}_\eta, \mathbf{H}_\eta)$ hors de l'obstacle \mathcal{B} est donné dans le lemme 4.5. Il reste à étudier son comportement dans B_R .

On passe à la limite faible dans la première équation de (4.5) pour avoir

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = i\omega\mu_0 \tilde{\mathbf{H}} \quad \text{dans } B_R, \quad (4.55)$$

où $(\mathbf{E}, \tilde{\mathbf{H}})$ est la limite faible de la suite $(\mathbf{E}_\eta, \mathbf{H}_\eta)$. En utilisant l'égalité (4.44), on obtient la première équation de (4.52).

Pour obtenir la seconde équation de (4.52), on multiplie la deuxième équation de (4.5) par la fonction test $\phi_k(x) \mathbf{E}^k(x/\eta)$ avec $\phi := \sum_k \phi_k \mathbf{e}_k \in C_c^\infty(\mathcal{B}; \mathbb{R}^3)$. On intègre le premier membre par parties et puisque $\operatorname{rot}_y \mathbf{E}^k = 0$, on obtient pour tout $k \in \{1, 2, 3\}$

$$\int_{\mathcal{B}} \mathbf{H}_\eta \cdot \left[\nabla \phi_k(x) \wedge \mathbf{E}^k \left(\frac{x}{\eta} \right) \right] = -i\omega\varepsilon_0\varepsilon_e \int_{\mathcal{B}} \phi_k(x) \mathbf{E}_\eta \cdot \mathbf{E}^k \left(\frac{x}{\eta} \right).$$

En passant à la limite dans l'équation précédente, il vient

$$\int_{\mathcal{B} \times Y} \mathbf{H}_0(x, y) \cdot [\nabla \phi_k(x) \wedge \mathbf{E}^k(y)] = -i\omega\varepsilon_0\varepsilon_e \int_{\mathcal{B} \times Y} \phi_k(x) \mathbf{E}^k(y) \cdot \mathbf{E}_0(x, y).$$

À l'aide des décompositions (4.25) et (4.36) de \mathbf{E}_0 et \mathbf{H}_0 , on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^3 \int_{\mathcal{B} \times Y} H_l(x) \nabla \phi_k(x) \cdot [\mathbf{E}^k(y) \wedge \mathbf{H}^l(y)] & \quad (4.56) \\ & = -i\omega \varepsilon_0 \varepsilon_e \sum_{l=1}^3 \int_{\mathcal{B} \times Y} \phi_k(x) E_l(x) \mathbf{E}^k(y) \cdot \mathbf{E}^l(y). \end{aligned}$$

On utilise la relation (4.53) ainsi qu'une intégration par parties dans le membre de gauche et la définition de $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{eff}}$ dans le membre de droite. On déduit

$$-\sum_{l=1}^3 \int_{\mathcal{B}} \phi_k(x) \operatorname{div}_x [H_l(x) (\mathbf{e}_k \wedge \mathbf{e}_l)] = -i\omega \varepsilon_0 \sum_{l=1}^3 \boldsymbol{\varepsilon}_{kl}^{\text{eff}} \int_{\mathcal{B}} \phi_k(x) E_l(x).$$

Grâce à l'équation (4.54), il résulte

$$\int_{\mathcal{B}} \phi_k(x) (\operatorname{rot}_x \mathbf{H}) \cdot \mathbf{e}_k = -i\omega \varepsilon_0 \sum_{l=1}^3 \boldsymbol{\varepsilon}_{kl}^{\text{eff}} \int_{\mathcal{B}} \phi_k(x) E_l(x).$$

L'équation précédente est vraie pour tout $k \in \{1, 2, 3\}$ et tout $\phi \in C_c^\infty(\mathcal{B}; \mathbb{R}^3)$ ce qui prouve la deuxième équation de (4.52). \square

Unicité de la solution du problème limite.

Par linéarité, il suffit de montrer que la solution $(\mathbf{E}, \mathbf{H}) = (0, 0)$ lorsque l'onde incidente est nulle. Dans ce cas, il est facile de voir, grâce à la condition de rayonnement (4.6), que $\Re \left(\int_{\partial B_R} (\mathbf{E} \wedge \overline{\mathbf{H}}) \cdot \mathbf{n} \right) \geq 0$. D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \Re \left(\int_{\partial B_R} (\mathbf{E} \wedge \overline{\mathbf{H}}) \cdot \mathbf{n} \right) & = \Re \left(\int_{B_R} \operatorname{rot} \mathbf{E} \cdot \overline{\mathbf{H}} - \operatorname{rot} \overline{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{E} \right) \\ & = \omega \Im \left(\int_{B_R} (-\mu_0 \boldsymbol{\mu}(x) \mathbf{H} \cdot \overline{\mathbf{H}} + \varepsilon_0 \boldsymbol{\varepsilon}(x) \mathbf{E} \cdot \overline{\mathbf{E}}) \right) \\ & = -\omega \mu_0 \int_{\mathcal{B}} \Im \left(\boldsymbol{\mu}^{\text{eff}} \mathbf{H} \cdot \overline{\mathbf{H}} \right). \end{aligned} \quad (4.57)$$

On montre dans l'équation (4.61) que $\Im \left(\boldsymbol{\mu}^{\text{eff}} \mathbf{H} \cdot \overline{\mathbf{H}} \right) \geq 0$, ce qui permet de montrer que $\mathbf{H} = \mathbf{E} = 0$ dans \mathcal{B} . Il est alors classique de déduire que $(\mathbf{E}, \mathbf{H}) = (0, 0)$ dans \mathbb{R}^3 . \square

5.2 Convergence forte double-échelle

Nous allons établir que les convergences double-échelles obtenues dans le lemme 4.21 sont en fait vraies dans un sens beaucoup plus fort.

Proposition 4.22 Soit $(\mathbf{E}_\eta, \mathbf{H}_\eta)$ la solution du problème (4.5) et $\mathbf{J}_\eta := \eta \varepsilon_\eta \mathbf{E}_\eta$. Alors, on a les convergences suivantes

$$\begin{aligned} \left\| \mathbf{J}_\eta(x) - \mathbf{J}_0\left(x, \frac{x}{\eta}\right) \right\|_{L^2(B_R)} &\rightarrow 0 \quad , \quad \left\| \mathbf{H}_\eta(x) - \mathbf{H}_0\left(x, \frac{x}{\eta}\right) \right\|_{L^2(B_R)} \rightarrow 0 \quad , \\ \left\| \mathbf{E}_\eta - \mathbf{E}_0\left(x, \frac{x}{\eta}\right) \right\|_{L^2(B_R)} &\rightarrow 0 \quad . \end{aligned}$$

PREUVE.

La démonstration de la proposition s'effectue en trois étapes :

Étape 1. On établit la convergence suivante

$$\left\| \mathbf{J}_\eta(x) - \mathbf{J}_0\left(x, \frac{x}{\eta}\right) \right\|_{L^2(B_R)} \rightarrow 0 \quad . \quad (4.58)$$

On introduit \mathbf{F}_η défini par

$$\mathbf{F}_\eta := \frac{1}{\eta} \mathbf{E}_\eta 1_{\Sigma_\eta} \quad .$$

D'après (4.16), on a que la suite (\mathbf{F}_η) est bornée dans $L^2(B_R)$ et converge double-échelle vers $\mathbf{F}_0 := \frac{1}{\varepsilon_r} \mathbf{J}_0$. De plus, d'après (4.14) on a

$$\|\varepsilon_r \mathbf{F}_\eta - \mathbf{J}_\eta\|_{L^2(B_R)}^2 = \eta^2 \int_{B_R \setminus \Sigma_\eta} |\mathbf{E}_\eta|^2 \rightarrow 0 \quad .$$

Ainsi, pour établir (4.58), il suffit de justifier la convergence

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \left\| \mathbf{F}_\eta(x) - \mathbf{F}_0\left(x, \frac{x}{\eta}\right) \right\|_{L^2(B_r)} = 0 \quad .$$

Puisque \mathbf{F}_η converge double-échelle vers \mathbf{F}_0 avec \mathbf{F}_0 admissible (cf. définition 2.35), cela revient à montrer

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \|\mathbf{F}_\eta\|_{L^2(B_R)} = \|\mathbf{F}_0\|_{L^2(B_R \times Y)} \quad . \quad (4.59)$$

Nous allons établir (4.59) en étudiant le comportement asymptotique de l'énergie dissipée par la structure. Celle-ci est donnée par la partie réelle du flux du vecteur de Poynting \mathcal{P}_η . La convergence uniforme de $(\mathbf{E}_\eta, \mathbf{H}_\eta)$ sur le compact ∂B_R nous permet de déduire que \mathcal{P}_η converge vers \mathcal{P} . On rappelle que ces quantités sont données par

$$\mathcal{P}_\eta := \int_{\partial B_R} \mathbf{E}_\eta \wedge \overline{\mathbf{H}_\eta} \cdot \mathbf{n} \, ds \quad , \quad \mathcal{P} := \int_{\partial B_R} \mathbf{E} \wedge \overline{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{n} \, ds \quad .$$

D'après (4.18) et (4.57), on a

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_\eta &= i\omega \left(\mu_0 \int_{B_R} |\mathbf{H}_\eta|^2 - \varepsilon_0 \varepsilon_e \int_{B_R \setminus \Sigma_\eta} |\mathbf{E}_\eta|^2 - \varepsilon_0 \frac{\bar{\varepsilon}_r}{\eta^2} \int_{\Sigma_\eta} |\mathbf{E}_\eta|^2 \right), \\ \mathcal{P} &= i\omega \left(\mu_0 \int_{B_R} \boldsymbol{\mu}(x) \mathbf{H} \cdot \bar{\mathbf{H}} - \varepsilon_0 \int_{B_R} \boldsymbol{\varepsilon}(x) \mathbf{E} \cdot \bar{\mathbf{E}} \right).\end{aligned}\tag{4.60}$$

On prend la partie réelle pour obtenir

$$\begin{aligned}\Re(\mathcal{P}_\eta) &= -\omega \varepsilon_0 \int_{B_R} \Im(\varepsilon_\eta) |\mathbf{E}_\eta|^2 = -\omega \varepsilon_0 \int_{\Sigma_\eta} \Im(\varepsilon_r) \left| \frac{\mathbf{E}_\eta}{\eta} \right|^2 = -\omega \varepsilon_0 \Im(\varepsilon_r) \|\mathbf{F}_\eta\|_{L^2(B_R)}^2, \\ \Re(\mathcal{P}) &= -\omega \mu_0 \int_B \Im(\boldsymbol{\mu}^{eff} \mathbf{H} \cdot \bar{\mathbf{H}}).\end{aligned}$$

La convergence de \mathcal{P}_η vers \mathcal{P} entraîne alors que

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \|\mathbf{F}_\eta\|_{L^2(B_R)}^2 = \frac{\mu_0}{\varepsilon_0 \Im(\varepsilon_r)} \int_B \Im(\boldsymbol{\mu}^{eff} \mathbf{H} \cdot \bar{\mathbf{H}}).\tag{4.61}$$

Il reste à comparer le membre de droite dans (4.61) avec $\|\mathbf{J}_0(x, x/\eta)\|_{L^2(B_R)}^2$. Or, d'après (4.22), on a $\mathbf{rot}_y \mathbf{H}_0 = -i\omega \varepsilon_0 \mathbf{J}_0 = -i\omega \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{F}_0$ (cf. (4.22)). Il en résulte

$$\int_{B_R \times Y} |\mathbf{F}_0|^2 = \frac{1}{\omega^2 \varepsilon_0^2 |\varepsilon_r|^2} \int_{B \times Y} |\mathbf{rot}_y \mathbf{H}_0|^2.$$

En exploitant la décomposition (4.36) de \mathbf{H}_0 , on obtient

$$\begin{aligned}\int_{B_r \times Y} |\mathbf{F}_0|^2 &= \frac{1}{\omega^2 \varepsilon_0^2 |\varepsilon_r|^2} \int \left| \mathbf{H}_0 \left(x, \frac{x}{\eta} \right) \right|^2 \\ &= \frac{1}{\omega^2 \varepsilon_0^2 |\varepsilon_r|^2} \sum_{k,l=1}^3 \int_{B_R} H_k(x) \bar{H}_l(x) dx \int_Y \mathbf{rot} \mathbf{H}^k(y) \cdot \mathbf{rot} \bar{\mathbf{H}}^l(y) dy.\end{aligned}\tag{4.62}$$

On utilise maintenant la décomposition $\mathbf{H}^k = \mathbf{u}^k + \mathbf{e}_k$ donnée dans le lemme (4.35) et la caractérisation des fonctions \mathbf{u}^k donnée dans (4.32). En tenant compte de la définition de $\boldsymbol{\mu}^{eff}$ donnée dans (4.8), on en déduit

$$\begin{aligned}\int_Y \mathbf{rot} \mathbf{H}^k \cdot \mathbf{rot} \bar{\mathbf{H}}^l &= \int_Y \mathbf{rot} \mathbf{u}^k \cdot \mathbf{rot} \bar{\mathbf{u}}^l = \varepsilon_r k_0^2 \int_Y \mathbf{H}^k \cdot \bar{\mathbf{u}}^l \\ &= \varepsilon_r k_0^2 \int_Y \mathbf{H}^k \cdot \bar{\mathbf{H}}^l - \varepsilon_r k_0^2 \int_Y \mathbf{H}^k \cdot \mathbf{e}_l \\ &= \omega^2 \varepsilon_0 \varepsilon_r \mu_0 \left[\int_Y \mathbf{H}^k \cdot \bar{\mathbf{H}}^l - \boldsymbol{\mu}_{kl}^{eff} \right].\end{aligned}\tag{4.63}$$

Grâce à cette identité, l'égalité (4.62) devient

$$\int_{B_r \times Y} |\mathbf{F}_0|^2 = \frac{\mu_0}{\varepsilon_0 \bar{\varepsilon}_r} \left[\int_{B_R} |\mathbf{H}_0|^2 - \int_{B_R} \boldsymbol{\mu}(x) \mathbf{H} \cdot \overline{\mathbf{H}} \right].$$

En multipliant par $\bar{\varepsilon}_r$ puis en prenant la partie imaginaire, on obtient

$$-\Im(\varepsilon_r) \int_{B_r \times Y} |\mathbf{F}_0|^2 = -\frac{\mu_0}{\varepsilon_0} \int_{B_R} \Im(\boldsymbol{\mu}(x) \mathbf{H} \cdot \overline{\mathbf{H}}). \quad (4.64)$$

Cette dernière relation associée à l'équation (4.61) entraîne la convergence (4.59) ce qui termine la démonstration de (4.58).

Étape 2. Nous allons établir la convergence *forte* double-échelle de \mathbf{H}_η vers \mathbf{H}_0 , c'est-à-dire

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{B_R} \left| \mathbf{H}_\eta(x) - \mathbf{H}_0\left(x, \frac{x}{\eta}\right) \right|^2 dx = 0. \quad (4.65)$$

Cette démonstration est basée sur un raisonnement de compacité par compensation. On montre que les suites $\operatorname{div}[\mathbf{H}_\eta - \mathbf{H}_0(x, x/\eta)]$ et $\operatorname{rot}[\mathbf{H}_\eta - \mathbf{H}_0(x, x/\eta)]$ convergent fortement vers zéro dans $W^{-1,2}(B_R)$. Il en résultera que la suite de fonctions $|\mathbf{H}_\eta - \mathbf{H}_0(x, x/\eta)|^2$ converge vers zéro au sens des distributions sur B_R . La convergence uniforme à l'extérieur d'un voisinage de l'obstacle \mathcal{B} permettra alors de conclure (4.65).

- On commence par montrer que la suite $(\operatorname{div}[\mathbf{H}_\eta(x) - \mathbf{H}_0(x, x/\eta)])$ est fortement compacte dans $W_0^{-1,2}(B_R)$. On introduit pour cela la fonction $a_\eta \in W^{-1,2}(B_R)$ définie pour tout $\varphi \in W^{1,2}(B_R)$ par

$$a_\eta(\varphi) := \int_{B_R} \operatorname{div} \left[\mathbf{H}_\eta - \mathbf{H}_0\left(x, \frac{x}{\eta}\right) \right] \varphi.$$

Après une intégration par parties, on déduit des bornes L^2 de \mathbf{H}_η et de \mathbf{H}_0 que la suite $(a_\eta)_\eta$ est bornée dans $W^{-1,2}(B_R)$. Il résulte alors de la propriété 2.15 que montrer la compacité de a_η dans $W^{-1,2}(B_R)$ consiste à prouver que $a_\eta(\varphi_\eta) \rightarrow 0$ pour tout φ_η vérifiant $\varphi_\eta \rightharpoonup 0$ dans $W_0^{1,2}(B_R)$.

On fixe une telle suite φ_η et on remarque, d'après la proposition 2.46, qu'il existe $\boldsymbol{\psi}_0 \in L^2(B_R; W_{\sharp}^{1,2}(Y; \mathbb{C}^3))$ tel que

$$\nabla \varphi_\eta \rightharpoonup \nabla_y \boldsymbol{\psi}_0.$$

Grâce à la relation $\operatorname{div} \mathbf{H}_\eta = 0$, on obtient

$$a_\eta(\varphi_\eta) = \int_{B_R} \operatorname{div}[\mathbf{H}_0(x, \frac{x}{\eta})] \varphi_\eta(x) dx = \int_{B_R} \mathbf{H}_0\left(x, \frac{x}{\eta}\right) \cdot \nabla \varphi_\eta(x) dx.$$

On passe à la limite dans l'équation précédente afin d'obtenir

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} a_\eta(\varphi_\eta) = \int_{B_R \times Y} \mathbf{H}_0 \cdot \nabla_y \boldsymbol{\psi}_0.$$

Le terme de droite dans l'équation précédente est nul en raison de la périodicité et de la relation $\operatorname{div}_y \mathbf{H}_0 = 0$ dans tout Y .

- La partie délicate consiste à montrer que la suite

$$\mathbf{rot} [\mathbf{H}_\eta(x) - \mathbf{H}_0(x, x/\eta)] \quad \text{est compacte dans } W^{-1,2}(B_R; \mathbb{C}^3) . \quad (4.66)$$

On introduit comme précédemment, la fonction $b_\eta \in W^{-1,2}(B_R; \mathbb{C}^3)$ définie pour $\varphi \in W_0^{1,2}(B_R; \mathbb{C}^3)$ par

$$b_\eta(\varphi) := \int_{B_R} \mathbf{rot} \left[\mathbf{H}_\eta(x) - \mathbf{H}_0\left(x, \frac{x}{\eta}\right) \right] \cdot \varphi \, dx .$$

Comme pour a_η , la suite $(b_\eta)_\eta$ est bornée dans $W_0^{-1,2}(B_R; \mathbb{C}^3)$. Pour montrer sa compacité dans $W_0^{-1,2}(B_R; \mathbb{C}^3)$, il suffit donc (d'après la proposition 2.15) de montrer que $b_\eta(\varphi_\eta) \rightarrow 0$ pour toute suite $(\varphi_\eta)_\eta \subset W_0^{1,2}(B_R; \mathbb{C}^3)$ telle que $\varphi_\eta \rightharpoonup 0$ faiblement dans $W^{1,2}(B_R; \mathbb{C}^3)$.

On commence par un développement suivi d'une intégration par parties. Il vient

$$b_\eta(\varphi_\eta) = \int_{B_R} \mathbf{rot} \mathbf{H}_\eta \cdot \varphi_\eta - \int_{B_R} \mathbf{H}_0\left(x, \frac{x}{\eta}\right) \cdot \mathbf{rot} \varphi_\eta .$$

D'après la définition de \mathbf{J}_η (cf. 4.15), on a

$$b_\eta(\varphi_\eta) = -i\omega\varepsilon_0 \frac{1}{\eta} \int_{B_R} \mathbf{J}_\eta \cdot \varphi_\eta - \int_{B_R} \mathbf{H}_0\left(x, \frac{x}{\eta}\right) \cdot \mathbf{rot} \varphi_\eta . \quad (4.67)$$

On introduit la fonction constante par morceaux

$$[\varphi_\eta]_\eta(x) := \sum_{k \in I_\eta} \left(\int_{Y_\eta^k} \varphi_\eta \right) 1_{Y_\eta^k}(x) .$$

On décompose le premier terme du membre de droite de l'équation (4.67) comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\eta} \int_{B_R} \mathbf{J}_\eta \cdot \varphi_\eta &= \int_{B_R} (\mathbf{J}_\eta - \mathbf{J}_0) \cdot \left(\frac{\varphi_\eta - [\varphi_\eta]_\eta}{\eta} \right) + \int_{B_R} \mathbf{J}_0 \cdot \left(\frac{\varphi_\eta - [\varphi_\eta]_\eta}{\eta} \right) \\ &\quad + \frac{1}{\eta} \int_{B_R} \mathbf{J}_\eta \cdot [\varphi_\eta]_\eta \\ &= I_\eta^1 + I_\eta^2 + I_\eta^3 . \end{aligned}$$

On justifie facilement que l'intégrale I_η^1 converge vers zéro grâce à la relation (4.58) et puisque $\| \frac{\varphi_\eta - [\varphi_\eta]_\eta}{\eta} \|_{L^2(B_R)}$ est borné (conséquence de l'inégalité de Poincaré).

Montrons que I_η^3 converge vers zéro.

On fixe pour tout $k \in \{1, 2, 3\}$, une fonction $\theta_k \in C_c^\infty(\mathbb{T})$ (\mathbb{T} est le tore Y/\mathbb{Z}^3) telle que

$\nabla\theta_k = \mathbf{e}_k$ dans Σ . On a

$$\begin{aligned} I_\eta^3 &= \frac{1}{\eta} \sum_{k=1}^3 \int_{B_R} [\boldsymbol{\varphi}_\eta \cdot \mathbf{e}_k]_\eta(x) \mathbf{J}_\eta(x) \cdot \mathbf{e}_k \\ &= \frac{1}{\eta} \sum_{k=1}^3 \int_{B_R} [\boldsymbol{\varphi}_\eta \cdot \mathbf{e}_k]_\eta(x) \mathbf{J}_\eta(x) \cdot \left[\mathbf{e}_k - \nabla\theta_k\left(\frac{x}{\eta}\right) \right] \\ &\quad + \frac{1}{\eta} \sum_{k=1}^3 \int_{B_R} [\boldsymbol{\varphi}_\eta \cdot \mathbf{e}_k]_\eta(x) \mathbf{J}_\eta(x) \cdot \nabla\theta_k\left(\frac{x}{\eta}\right). \end{aligned}$$

Par définition, on a $\mathbf{J}_\eta = \eta\varepsilon_\eta \mathbf{E}_\eta$. De plus, puisque $\mathbf{e}_k(x) - \nabla\theta_k\left(\frac{x}{\eta}\right) = 0$ dans Σ_η , il vient

$$\begin{aligned} I_\eta^3 &= \int_{B_R \setminus \Sigma_\eta} [\boldsymbol{\varphi}_\eta \cdot \mathbf{e}_k]_\eta(x) \mathbf{E}_\eta(x) \cdot \left[\mathbf{e}_k - \nabla\theta_k\left(\frac{x}{\eta}\right) \right] \\ &\quad + \frac{1}{\eta} \sum_{k=1}^3 \int_{B_R} \varepsilon_\eta [\boldsymbol{\varphi}_\eta \cdot \mathbf{e}_k]_\eta(x) \mathbf{E}_\eta(x) \cdot \nabla\theta_k\left(\frac{x}{\eta}\right). \end{aligned}$$

D'une part, on peut passer à la limite double-échelle dans le premier terme du membre de droite de l'équation précédente. En effet, $[\boldsymbol{\varphi}_\eta]_\eta$ converge fortement dans $L^2(B_R)$, \mathbf{E}_η converge double-échelle et $\left[\mathbf{e}_k - \nabla\theta_k\left(\frac{x}{\eta}\right) \right]$ converge fortement double-échelle. On obtient une limite nulle puisque $\|[\boldsymbol{\varphi}_\eta]_\eta\|_{L^2(B_R)} \rightarrow 0$ (cf. relation (2.51)).

D'autre part, à l'aide d'une intégration par parties, on montre que le second terme est nul. En effet, $[\boldsymbol{\varphi}_\eta \cdot \mathbf{e}_k]_\eta$ est constant dans chaque cellule, $\operatorname{div}(\varepsilon_\eta \mathbf{E}_\eta) = 0$ et θ_k a son support hors de la zone où $\nabla[\boldsymbol{\varphi}_\eta \cdot \mathbf{e}_k]_\eta$ est singulier.

Dans l'équation (4.67), la contribution de $\frac{1}{\eta} \int_{B_R} \mathbf{J}_\eta \cdot \boldsymbol{\varphi}_\eta$ se réduit à l'intégrale I_η^2 . On obtient alors

$$b_\eta(\boldsymbol{\varphi}_\eta) = -i\omega\varepsilon_0 \int_{B_R} \mathbf{J}_0 \cdot \left(\frac{\boldsymbol{\varphi}_\eta - [\boldsymbol{\varphi}_\eta]_\eta}{\eta} \right) - \int_{B_R} \mathbf{H}_0\left(x, \frac{x}{\eta}\right) \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{\varphi}_\eta.$$

Grâce à la propriété 2.48 et à la remarque 2.50, on a l'existence de $\boldsymbol{\varphi}_1 \in W_\#^{1,2}(B_R \times Y)$ tel que

$$\frac{\boldsymbol{\varphi}_\eta - [\boldsymbol{\varphi}_\eta]_\eta}{\eta} \rightharpoonup \boldsymbol{\varphi}_1, \quad \operatorname{rot}_y \boldsymbol{\varphi}_\eta \rightharpoonup \operatorname{rot}_y \boldsymbol{\varphi}_1.$$

La convergence double-échelle de $\mathbf{J}_0\left(x, \frac{x}{\eta}\right)$ vers \mathbf{J}_0 étant forte, il est possible de passer à la limite dans l'équation précédente et d'obtenir

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} b_\eta(\boldsymbol{\varphi}_\eta) = -i\omega\varepsilon_0 \int_{B_R \times Y} \mathbf{J}_0 \cdot \boldsymbol{\varphi}_1 - \int_{B_R \times Y} \mathbf{H}_0 \cdot \operatorname{rot}_y \boldsymbol{\varphi}_1.$$

Une intégration par parties et la relation $\operatorname{rot}_y \mathbf{H}_0 = -i\omega\varepsilon_0 \mathbf{J}_0$ suffisent à montrer que la limite précédente est nulle. Ceci termine la démonstration de (4.66).

Étape 3. On établit pour finir la convergence suivante

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{B_R} \left| \mathbf{E}_\eta(x) - \mathbf{E}_0\left(x, \frac{x}{\eta}\right) \right|^2 = 0 . \quad (4.68)$$

Puisque \mathbf{E}_η converge double-échelle vers \mathbf{E}_0 et que \mathbf{E}_0 est admissible, il suffit de montrer que $\|\mathbf{E}_\eta\|_{L^2(B_R)} \rightarrow \|\mathbf{E}_0(x, x/\eta)\|_{L^2(B_R)}$ (cf. proposition 2.44).

Cette démonstration est basée sur la convergence du flux du vecteur de Pointing \mathcal{P}_η vers \mathcal{P} . En prenant la partie imaginaire dans (4.60), on obtient

$$\Im(\mathcal{P}_\eta) = \omega \left(\mu_0 \int_{B_R} |\mathbf{H}_\eta|^2 - \varepsilon_0 \varepsilon_e \int_{B_R \setminus \Sigma_\eta} |\mathbf{E}_\eta|^2 - \varepsilon_0 \Re(\varepsilon_r) \int_{\Sigma_\eta} \left| \frac{\mathbf{E}_\eta}{\eta} \right|^2 \right) , \quad (4.69)$$

$$\Im(\mathcal{P}) = \omega \left(\mu_0 \int_{B_R} \Re(\boldsymbol{\mu}(x) \mathbf{H} \cdot \overline{\mathbf{H}}) - \varepsilon_0 \int_{B_R} \boldsymbol{\varepsilon}(x) \mathbf{E} \cdot \overline{\mathbf{E}} \right) . \quad (4.70)$$

D'après les convergences fortes double-échelle (4.61) et (4.65) et la convergence de \mathcal{P}_η vers \mathcal{P} , on peut affirmer que la suite $(\int_{B_R \setminus \Sigma_\eta} |\mathbf{E}_\eta|^2)$ est convergente. En faisant la différence entre les deux égalités (4.69) et (4.70), on se ramène à l'égalité suivante

$$\begin{aligned} & \varepsilon_0 \left(\varepsilon_e \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{B_R \setminus \Sigma_\eta} |\mathbf{E}_\eta|^2 - \int_{B_R} \boldsymbol{\varepsilon}(x) \mathbf{E} \cdot \overline{\mathbf{E}} \right) \\ &= \mu_0 \left(\lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{B_R} |\mathbf{H}_\eta|^2 - \int_{B_R} \Re(\boldsymbol{\mu}(x) \mathbf{H} \cdot \overline{\mathbf{H}}) \right) - \varepsilon_0 \Re(\varepsilon_r) \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{\Sigma_\eta} \left| \frac{\mathbf{E}_\eta}{\eta} \right|^2 \\ &= \mu_0 \left(\int_{B_R \times Y} |\mathbf{H}_0|^2 - \int_{B_R} \Re(\boldsymbol{\mu}(x) \mathbf{H} \cdot \overline{\mathbf{H}}) \right) - \varepsilon_0 \Re(\varepsilon_r) \int_{B_R \times \Sigma} |\mathbf{F}_0|^2 . \end{aligned} \quad (4.71)$$

D'autre part, en prenant la partie réelle dans l'égalité (4.64), on obtient

$$\frac{\mu_0}{\varepsilon_0} \int_{B_R} |\mathbf{H}_0|^2 = \Re(\varepsilon_r) \int_{B_R \times Y} |\mathbf{F}_0|^2 + \frac{\mu_0}{\varepsilon_0} \int_{B_R} \Re(\boldsymbol{\mu}(x) \mathbf{H} \cdot \overline{\mathbf{H}}) .$$

Cette relation montre que le membre de droite de l'égalité (4.71) est nul ce qui nous permet de déduire la convergence suivante

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{B_R \setminus \Sigma_\eta} |\mathbf{E}_\eta|^2 = \frac{1}{\varepsilon_e} \int_{B_R} \boldsymbol{\varepsilon}(x) \mathbf{E} \cdot \overline{\mathbf{E}} . \quad (4.72)$$

Grâce à la décomposition de \mathbf{E}_0 et à la définition de $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{eff}}$ données respectivement dans (4.12) et (4.7), on vérifie facilement que

$$\int_{B_R} \boldsymbol{\varepsilon}(x) \mathbf{E} \cdot \overline{\mathbf{E}} = \varepsilon_e \int_{B_R \times Y} |\mathbf{E}_0|^2 .$$

Par ailleurs, d'après (4.16), on sait que la suite $(\int_{\Sigma_\eta} |\mathbf{E}_\eta|^2)_\eta$ converge vers zéro.

Ces deux remarques, associées à (4.72), permettent de justifier la convergence (4.68) ce qui termine la démonstration de la proposition 4.22. \square

5.3 Justification de l'hypothèse d'énergie.

Proposition 4.23 *L'hypothèse (4.14) est satisfaite.*

PREUVE.

Supposons par l'absurde que $(\mathbf{E}_\eta, \mathbf{H}_\eta)$ soit solution de (4.5) sans être bornée dans $L^2(B_R; \mathbb{C}^3)$. On note alors

$$t_\eta := \left(\int_{B_R} |\mathbf{E}_\eta|^2 + \int_{B_R} |\mathbf{H}_\eta|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \rightarrow +\infty, \quad \hat{\mathbf{E}}_\eta := \frac{\mathbf{E}_\eta}{t_\eta} \quad \text{et} \quad \hat{\mathbf{H}}_\eta := \frac{\mathbf{H}_\eta}{t_\eta}. \quad (4.73)$$

On a $(\hat{\mathbf{E}}_\eta, \hat{\mathbf{H}}_\eta)$ qui vérifie l'hypothèse (4.14) et est solution de (4.5) avec $(\frac{\mathbf{E}^i}{t_\eta}, \frac{\mathbf{H}^i}{t_\eta})$ pour onde incidente. Nous pouvons alors appliquer les lemmes 4.21 et 4.5 à cette suite. On a alors la convergence faible de $(\hat{\mathbf{E}}_\eta, \hat{\mathbf{H}}_\eta)$ vers (\mathbf{E}, \mathbf{H}) l'unique solution de (4.52) avec $(\mathbf{E}^i, \mathbf{H}^i) = (0, 0)$. On en déduit que $(\mathbf{E}, \mathbf{H}) = (0, 0)$. Par ailleurs, on peut prouver que $\lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{B_R} |\hat{\mathbf{H}}_\eta|^2 = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_0 + \mu_0}$.

En effet, on a

$$\begin{aligned} \int_{\partial B_R} \frac{\mathbf{E}^i}{t_\eta} \wedge \frac{\overline{\mathbf{H}^i}}{t_\eta} \cdot \mathbf{n} &= \int_{\partial B_R} (\hat{\mathbf{E}}_\eta \wedge \overline{\hat{\mathbf{H}}_\eta}) \cdot \mathbf{n} \\ &= \int_{B_R} -\mathbf{rot} \hat{\mathbf{E}}_\eta \cdot \overline{\hat{\mathbf{H}}_\eta} + \mathbf{rot} \overline{\hat{\mathbf{H}}_\eta} \cdot \hat{\mathbf{E}}_\eta \\ &= i\omega \int_{B_R} (-\mu_0 |\hat{\mathbf{H}}_\eta|^2 + \varepsilon_0 \overline{\varepsilon_\eta} |\hat{\mathbf{E}}_\eta|^2). \end{aligned}$$

On prend la partie réelle dans l'équation précédente et on remarque, grâce à l'uniforme convergence hors de l'obstacle, que son membre de gauche tend vers 0. Cela conduit à $\int_{\Sigma_\eta} \varepsilon_\eta |\hat{\mathbf{E}}_\eta|^2 \rightarrow 0$. De plus, grâce à (4.73), on a $\int_{B_R} |\hat{\mathbf{E}}_\eta|^2 = 1 - \int_{B_R} |\hat{\mathbf{H}}_\eta|^2$ et donc $\int_{B_R} |\hat{\mathbf{H}}_\eta|^2 = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_0 + \mu_0} + o(1)$.

On obtient alors la contradiction grâce à la convergence forte double-échelle donnée dans la proposition 4.22 qui équivaut dans ce cadre à $\|\hat{\mathbf{H}}_\eta\|_{L^2(B_R)} \rightarrow 0$ puisque $\hat{\mathbf{H}}_0$ est nul.

□

6 Reformulation du problème spectral (4.47)

L'expression de $\boldsymbol{\mu}^{\text{eff}}$ obtenue dans la section 4 peut paraître explicite mais fait appel à la résolution d'un problème spectral 3D sur le tore (cf formule (4.8)). La résolution effective de ce problème spectral et son approche numérique sont d'autant plus complexes que les fonctions propres recherchées sont vectorielles (et le couplage des équations n'autorise pas à réduire à un problème spectral scalaire).

Le but de cette section est de donner une formulation équivalente du problème (4.47) qui sera plus exploitable en vue des applications numériques. C'est cette formulation

qui sera utilisée dans le chapitre 6 et sur laquelle s'appuient les simulations numériques présentées dans la section 1.

L'idée est de déduire la recherche d'une solution $\mathbf{w} \in X_0$ pour le problème (4.47) à celle de $\mathbf{f} := \mathbf{rot} \mathbf{w}$. Cette nouvelle inconnue \mathbf{f} , nulle en dehors de Σ , sera identifiée en tant qu'élément du sous espace (fermé) $Z_0 \subset L^2(\Sigma; \mathbb{R}^3)$ défini par

$$Z_0 := \left\{ \mathbf{f} \in L^2(\Sigma; \mathbb{R}^3) : \operatorname{div} \mathbf{f} = 0, \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ dans } W^{-1/2,2}(\partial\Sigma) \right\}. \quad (4.74)$$

Nous allons réduire (4.47) à une équation du type $\mathbf{A}\mathbf{f} = \nu\mathbf{f}$ pour un opérateur $\mathbf{A} : Z_0 \rightarrow Z_0$ compact auto-adjoint.

Construction de l'opérateur \mathbf{A} . Tout d'abord nous remarquons que les fonctions de Z_0 forment un sous espace fermé de l'espace de Hilbert

$$Z := \left\{ \mathbf{f} \in L^2(\Sigma; \mathbb{R}^3) : \operatorname{div} \mathbf{f} = 0 \right\}. \quad (4.75)$$

Une fonction de Z appartient à Z_0 si et seulement si son prolongement par zéro sur $Y \setminus \Sigma$ est une fonction (périodique) à divergence nulle.

On introduit l'opérateur $P_0 : Z \rightarrow Z_0$ de projection orthogonale sur Z_0 . Il est caractérisé par la résolution d'un problème de Neumann non homogène sur Σ (\mathbf{n} désigne la normale extérieure sur $\partial\Sigma$).

Lemme 4.24 *Pour tout $\mathbf{f} \in Z$, on a la relation $P_0 \mathbf{f} = \mathbf{f} - \nabla \rho$ où ρ est solution dans $W^{1,2}(\Sigma)$ de*

$$\begin{cases} \Delta \rho = 0 & \text{dans } \Sigma, \\ \frac{\partial \rho}{\partial n} = \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} & \text{sur } \partial\Sigma. \end{cases} \quad (4.76)$$

PREUVE. Le fait que $\operatorname{div} \mathbf{f} = 0$ sur Σ entraîne que la trace normale $\mathbf{f} \cdot \mathbf{n}$ en tant qu'élément de $W^{-\frac{1}{2},2}(\partial\Sigma)$ est de moyenne nulle sur $\partial\Sigma$. Le problème (4.76) admet donc une solution $\rho \in W^{1,2}(\Sigma)$ unique à l'addition d'une constante près (elle minimise $\frac{1}{2} \int_{\Sigma} |\nabla \varphi|^2 - \int_{\Sigma} \mathbf{f} \cdot \nabla \varphi$). Par construction $P_0 \mathbf{f} = \mathbf{f} - \nabla \rho$ est à divergence nulle sur Σ et $P_0 \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} = 0$ sur $\partial\Sigma$. De plus pour tout $\mathbf{f} \in Z_0$, on a en intégrant par parties on a $\int \mathbf{f} \cdot \nabla \rho = 0$ Il en résulte que $\mathbf{f} - P_0 \mathbf{f} = \nabla \rho$ appartient à l'orthogonal de Z_0 . \square

On introduit maintenant deux opérateurs de Z_0 à valeurs dans Z . Le premier Ξ associe à tout $\mathbf{f} \in Z_0$ la restriction $\psi_f|_{\Sigma}$ de l'unique solution de

$$\begin{cases} -\Delta \psi_f = \mathbf{f} \mathbf{1}_{\Sigma} & \text{dans } Y, \\ \psi_f \in W_{\#}^{1,2}(Y), \\ \int_Y \psi_f = 0. \end{cases} \quad (4.77)$$

Remarquons que l'intégration par parties $\int_Y \nabla \psi_f : \nabla \psi_g = - \int_Y \psi_f \Delta \psi_g$ combinée avec (4.77) entraîne

$$\langle \Xi \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \int_Y \nabla \psi_f : \nabla \psi_g, \quad \forall (\mathbf{f}, \mathbf{g}) \in Z_0 \times Z_0. \quad (4.78)$$

Le second opérateur $\Gamma : Z_0 \rightarrow Z$ est l'opérateur de rang fini donné par :

$$\Gamma \mathbf{f}(\mathbf{y}) = \frac{1}{4} \left(\int_{\Sigma} \mathbf{z} \wedge \mathbf{f}(\mathbf{z}) d\mathbf{z} \right) \wedge \mathbf{y} . \quad (4.79)$$

La fonction linéaire $\Gamma \mathbf{f}(\mathbf{y})$ est bien à divergence nulle et on a d'autre part

$$\langle \Gamma \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \frac{1}{4} \left(\int_{\Sigma} \mathbf{z} \wedge \mathbf{f} d\mathbf{z} \right) \cdot \left(\int_{\Sigma} \mathbf{z} \wedge \mathbf{g} d\mathbf{z} \right) , \quad \forall (\mathbf{f}, \mathbf{g}) \in Z_0 \times Z_0 . \quad (4.80)$$

On obtient finalement un opérateur $A : Z_0 \rightarrow Z_0$ en posant

$$\mathbf{A}\mathbf{f} := P_0(\Xi \mathbf{f} + \Gamma \mathbf{f}), \quad \forall \mathbf{f} \in Z_0 , \quad (4.81)$$

D'après (4.78) et (4.80) et puisque $P_0(\mathbf{g}) = \mathbf{g}$ pour tout $\mathbf{g} \in Z_0$, on a

$$\langle \mathbf{A}\mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \int_Y \nabla \psi_f \nabla \psi_g + \frac{1}{4} \left(\int_{\Sigma} \mathbf{z} \wedge \mathbf{f} d\mathbf{z} \right) \cdot \left(\int_{\Sigma} \mathbf{z} \wedge \mathbf{g} d\mathbf{z} \right) . \quad (4.82)$$

Lemme 4.25 *L'opérateur $\mathbf{A} : Z_0 \rightarrow Z_0$ défini par (4.81) est compact auto-adjoint strictement positif.*

PREUVE. Le fait que A soit auto-adjoint résulte évidemment de (4.82) et la stricte positivité de l'égalité

$$\langle \mathbf{A}\mathbf{f}, \mathbf{f} \rangle = \int_Y |\nabla \psi_f|^2 + \frac{1}{4} \left| \int_{\Sigma} \mathbf{z} \wedge \mathbf{f} d\mathbf{z} \right|^2$$

dont le second membre ne peut s'annuler que si \mathbf{f} est p.p. nulle sur Σ .

Montrons que \mathbf{A} est compact. D'après (4.81) et puisque P_0 est borné, il suffit de vérifier que l'opérateur Ξ est compact. Soit (\mathbf{f}_n) une suite bornée dans Z_0 . Alors puisque ψ_{f_n} est de moyenne nulle sur Y avec $\int_Y |\nabla \psi_{f_n}|^2 = \int_{\Sigma} |\mathbf{f}_n|^2$, la suite (ψ_{f_n}) est bornée dans $W_{\#}^{1,2}(Y)$ donc relativement compacte dans $L^2(Y)$. La suite de ses restrictions à Σ coïncide avec $(\Xi \mathbf{f}_n)$ qui est donc relativement compacte dans Z_0 . \square

Principe d'équivalence. L'espace Z_0 s'identifie au sous espace des fonctions de X_0 à divergence nulle (voir (4.27)). On a en effet

Proposition 4.26

(i) *Pour tout $\mathbf{f} \in Z_0$, il existe une fonction unique $\mathbf{w}_f \in X_0$ telle que $\operatorname{div} \mathbf{w}_f = 0$ et vérifiant $\operatorname{rot} \mathbf{w}_f = \mathbf{f}$ sur Σ . On a de plus les relations :*

$$\int_Y \mathbf{w}_f = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \mathbf{y} \wedge \mathbf{f} , \quad \mathbf{w}_f = \operatorname{rot} \psi_f + \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \mathbf{y} \wedge \mathbf{f} , \quad (4.83)$$

où ψ_f est donnée par (4.77).

(ii) *Pour tout \mathbf{f}, \mathbf{g} dans $Z_0 \times Z_0$, on a les relations*

$$\langle \mathbf{A}\mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \int_Y \mathbf{w}_f \cdot \mathbf{w}_g , \quad b_0(\mathbf{w}_f, \mathbf{w}_g) = \int_Y \mathbf{f} \cdot \mathbf{g} . \quad (4.84)$$

PREUVE. i) On obtient une fonction de $\tilde{\mathbf{f}} \in L_{\#}^2(Y; \mathbb{C}^3)$ à divergence nulle en prolongeant \mathbf{f} par zéro sur $Y \setminus \Sigma$ (et en périodisant). D'après le lemme 2.10 du chapitre 2, il existe donc une fonction $\psi \in (W_{\#}^{1,2}(Y))^3$ à divergence nulle telle que $\mathbf{rot} \psi = \tilde{\mathbf{f}}$. Cette fonction ψ est clairement définie à l'addition d'un vecteur constant près. La fonction $\mathbf{w}_f = \Psi - \oint \psi$ est bien un élément de l'espace X_0 répondant à la question. Il est l'unique solution dans X_0 du fait qu'une fonction périodique à divergence et rotationnel nuls est constante.

Pour établir la première égalité dans (4.83), on fixe $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$ et on considère une fonction périodique $\Phi \in W_{\#}^{1,2}(Y; \mathbb{R}^3)$ telle que $\Phi(\mathbf{y}) := \frac{1}{2} \mathbf{z} \wedge \mathbf{y}$ sur Σ . Alors la fonction $\chi(\mathbf{y}) := \mathbf{rot} \Phi - \mathbf{z}$ est une fonction de $L_{\#}^2(Y; \mathbb{R}^3)$ à divergence nulle et qui, par construction s'annule, sur Σ . En appliquant l'assertion (i) de la Proposition 4.14, on obtient $\int_Y \mathbf{w}_f \cdot \chi = \oint \mathbf{w}_f \int \chi = 0$, en raison de l'appartenance de \mathbf{w}_f à l'espace X_0 . En intégrant par parties, on en déduit les égalités

$$\mathbf{z} \cdot \int_Y \mathbf{w}_f = \int_Y \mathbf{rot} \Phi \cdot \mathbf{w}_f = \int_Y \Phi \cdot \mathbf{rot} \mathbf{w}_f = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} (\mathbf{z} \wedge \mathbf{y}) \cdot \mathbf{f} ,$$

d'où l'égalité cherchée en faisant varier \mathbf{z} .

Pour établir la seconde égalité dans (4.83), rappelons que la fonction ψ_f donnée par (4.78) est à divergence nulle et donc vérifie l'égalité $-\Delta \psi_f = \tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{rot} \mathbf{w}_f$. Il suffit alors de remarquer que la fonction périodique

$$\mathbf{v} := \mathbf{w}_f - \left(\mathbf{rot} \psi_f + \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \mathbf{y} \wedge \mathbf{f} \right)$$

vérifie $\text{div} \mathbf{v} = 0$, $\mathbf{rot} \mathbf{v} = 0$ et $\int_Y \mathbf{v} = 0$ et donc est identiquement nulle.

ii) La seconde égalité dans (4.84) est une conséquence immédiate de la définition de \mathbf{w}_f et \mathbf{w}_g et du fait qu'ils sont à divergence nulle. Pour la première égalité de (4.84), il suffit d'utiliser (4.82) combiné avec (4.84). En effet puisque les fonctions $\mathbf{rot} \psi_f$ et $\mathbf{rot} \psi_g$ sont de moyennes nulles et grâce à (2.10), on obtient

$$\begin{aligned} \int_Y \mathbf{w}_f \cdot \mathbf{w}_g &= \int_Y \mathbf{rot} \psi_f \mathbf{rot} \psi_g + \frac{1}{4} \left(\int_{\Sigma} \mathbf{z} \wedge \mathbf{f} \right) \cdot \left(\int_{\Sigma} \mathbf{z} \wedge \mathbf{g} \right) \\ &= \int_Y \nabla \psi_f \nabla \psi_g + \frac{1}{4} \left(\int_{\Sigma} \mathbf{z} \wedge \mathbf{f} \right) \cdot \left(\int_{\Sigma} \mathbf{z} \wedge \mathbf{g} \right) \\ &= \langle \mathbf{A} \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle . \end{aligned} \quad \square$$

Une conséquence immédiate de (4.84) est que, pour tout $\alpha > 0$, on a l'équivalence

$$\mathbf{A} \mathbf{f} = \alpha \mathbf{f} \iff (\mathbf{w}_f, \frac{1}{\alpha}) \text{ vérifie (4.47)} \quad (4.85)$$

Le corollaire suivant permet de ramener la diagonalisation du problème (4.47) à celle de l'opérateur \mathbf{A} . Rappelons que $\beta_k(\mathbf{y}) := (2\pi|k|)^{-1} \exp(2i\pi \mathbf{k} \cdot \mathbf{y})$.

Corollaire 4.27 *Soit $\{\mathbf{g}_n, n \in \mathbb{N}\}$ une base orthonormale de Z_0 telle que $\mathbf{A} \mathbf{g}_n = \alpha_n \mathbf{g}_n$. Posons $\mathbf{u}_n := \frac{1}{\sqrt{\alpha_n}} \mathbf{w}_{g_n}$. Alors la famille $\{\mathbf{u}_n, n \in \mathbb{N}\} \cup \{\nabla \beta_k, k \in \mathbb{Z}^3\}$ est une base orthonormale de vecteurs propres pour (4.47). En particulier on a $b_0(\mathbf{u}_n, \mathbf{v}) = \alpha_n^{-1} \int_Y \mathbf{u}_n \cdot \mathbf{v}$ pour tout $\mathbf{v} \in X_0$.*

PREUVE. La dernière égalité est une conséquence de (4.85). D'après (4.84), on a pour tout m, n :

$$\int_Y \mathbf{u}_n \cdot \mathbf{u}_m = (\alpha_n \alpha_m)^{-1/2} \int_{\Sigma} \mathbf{w}_{g_n} \cdot \mathbf{w}_{g_m} = (\alpha_n \alpha_m)^{-1/2} (\mathbf{A} \mathbf{g}_n | \mathbf{g}_m) = \delta_{mn}.$$

Les fonctions \mathbf{u}_n sont à divergence nulle et par conséquent orthogonales à la famille $\{\nabla \beta_k, k \in \mathbb{Z}^3\}$. Il reste à montrer que la famille $\{\mathbf{u}_n, n \in \mathbb{N}\} \cup \{\nabla \beta_k, k \in \mathbb{Z}^3\}$ est totale dans Z_0 . Soit $\mathbf{v} \in X_0$ appartenant à l'orthogonal. La nullité des produits scalaires $\int_Y \mathbf{v} \cdot \nabla \beta_k$ entraîne que \mathbf{v} est à divergence nulle. Par conséquent, d'après l'assertion (i) de la proposition 4.26, on a la relation $\mathbf{v} = \mathbf{w}_f$ où $\mathbf{f} \in Z_0$ est la restriction à Σ du rotationnel de \mathbf{v} . On a donc pour tout entier n

$$0 = \frac{1}{\sqrt{\alpha_n}} \int_{\Sigma} \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_n = \frac{1}{\sqrt{\alpha_n}} \int_{\Sigma} \mathbf{w}_f \cdot \mathbf{w}_{g_n} = \frac{1}{\sqrt{\alpha_n}} \langle \mathbf{A} \mathbf{f}, \mathbf{g}_n \rangle = \sqrt{\alpha_n} \langle \mathbf{f}, \mathbf{g}_n \rangle.$$

Il en résulte donc que $\mathbf{f} = 0$ et ainsi $\mathbf{v} = \mathbf{w}_f = 0$. □

Nouvelles représentations de $\boldsymbol{\mu}^{\text{eff}}$ Nous sommes maintenant en mesure de donner une nouvelle expression pour les coefficients du tenseur $\boldsymbol{\mu}^{\text{eff}}$ qui sera mieux adaptée en pratique que celle donnée dans la formule (4.8)

Proposition 4.28 *Soit $\{\alpha_n\}$ les valeurs propres rangées en ordre décroissant de l'opérateur positif compact auto-adjoint \mathbf{A} défini par (4.81). Soit $\{\mathbf{g}_n\}$ une base orthonormale dans Z_0 telle que $\mathbf{A} \mathbf{g}_n = \alpha_n \mathbf{g}_n$. Alors le tenseur de perméabilité effectif donné dans (4.8) admet le développement en série suivant*

$$\boldsymbol{\mu}_{ij}^{\text{eff}}(k_0) = \delta_{ij} + \frac{1}{4} \sum_n \frac{\varepsilon_r k_0^2}{1 - \varepsilon_r \alpha_n k_0^2} \left[\int_{\Sigma} \mathbf{y} \wedge \mathbf{g}_n \cdot \mathbf{e}_i \right] \left[\int_{\Sigma} \mathbf{y} \wedge \mathbf{g}_n \cdot \mathbf{e}_j \right]. \quad (4.86)$$

PREUVE. On applique la formule (4.8) en choisissant la base orthonormale $\{\mathbf{u}_n, n \in \mathbb{N}\} \cup \{\nabla \beta_k, k \in \mathbb{Z}^3\}$ définie dans le Corollaire 4.27. La contribution des vecteurs propres $\nabla \beta_k$ est nulle (puisque $\int_Y \nabla \beta_k = 0$). Par ailleurs \mathbf{u}_n est associé à la valeur propre $\lambda_n = \alpha_n^{-1}$ pour (4.47) et d'après (4.83), on a $\int_Y \mathbf{u}_n = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \mathbf{y} \wedge \mathbf{g}_n$. La formule (4.86) en résulte immédiatement. □

Conclusion

Nous avons démontré dans un cadre totalement tridimensionnel que des métamatériaux présentant une activité magnétique pouvaient être obtenus à l'aide de structures formées de diélectriques. Plus précisément, nous avons obtenu un milieu homogénéisé *local* décrit par des tenseurs de permittivité et perméabilité effectifs. Le tenseur de perméabilité dépend de la fréquence et la partie réelle de ses valeurs propres change de signe sur certaines bandes de fréquences. Ce phénomène est dû à des résonances internes microscopiques du champ magnétique faisant apparaître une grande composante sur un certain espace propre de (4.47). Celle-ci produit une boucle de courant qui induit un moment magnétique microscopique dans chaque période de la structure. Ces moments s'ajoutent pour produire un moment magnétique macroscopique qui engendre le magnétisme artificiel du milieu effectif.

Ce type de structure est donc une alternative à la célèbre structure en anneaux coupés imaginée par Pendry [42].

5 Quelques résultats dans le cas aléatoire

Sommaire

Description du modèle	133
1 Résultat principal	136
2 Cadre mathématique stochastique	138
2.1 Description de l'ensemble des évènements Ω	138
2.2 Système dynamique et résultats d'analyse stochastique	139
2.3 Reformulation du problème de diffraction	142
3 Estimations et résultats préliminaires	143
3.1 Comportement loin de l'obstacle et borne L^2	143
3.2 Analyse double-échelle stochastique	144
4 Solutions élémentaires sur la cellule unité	146
4.1 Caractérisation du tenseur de permittivité effectif	146
4.2 Caractérisation de la perméabilité effective	147
5 Démonstration du résultat principal	149
5.1 Loi effective homogénéisée	149
5.2 Convergence <i>forte</i> double-échelle	150
5.3 Justification de l'hypothèse d'énergie	154
6 Loi de perméabilité effective dépendant de la fréquence	154
6.1 Simulations numériques	155
6.2 Le cas de diélectriques avec très faibles pertes	155

L'étude présentée dans ce chapitre est le sujet d'un article en cours de rédaction en collaboration avec Guy Bouchitté et Luigi Manca.

Description du modèle

Dans ce chapitre, nous nous proposons d'étendre les résultats obtenus dans le chapitre précédent au cas de structures aléatoires.

La structure que nous étudions ici est formée de fibres circulaires parallèles, infinies dans la direction e_3 dont les sections horizontales (centres, rayons) sont réparties aléatoirement dans un ensemble borné $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^2$. Le caractère aléatoire des fibres intervient comme une variante des réseaux périodiques considérés dans les chapitres 3 et 4 : chaque

inclusion circulaire de \mathcal{B} est contenue dans une “cellule de périodicité” et caractérisée par des paramètres physiques et géométriques (centres, rayons, permittivités) donnés aléatoirement (cf. figure 5.1).

Nous avons choisi une structure invariante dans la direction \mathbf{e}_3 afin de simplifier le modèle en rendant son étude bidimensionnelle (à l’aide d’une polarisation du champ électromagnétique en $\mathbf{H}||$). Ce type de structure a déjà été étudié dans un cadre périodique [8] et les résultats de convergences obtenus vont être complétés par ceux donnés dans ce chapitre : convergence forte double-échelle des solutions.

Description géométrique de la structure. Les propriétés géométriques et physiques de la structure vont être décrites par des variables aléatoires définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$. Chaque configuration sera repérée par un événement $\omega \in \Omega$.

L’obstacle diffractant \mathcal{B} est un sous-ensemble borné de \mathbb{R}^2 . On note $\mathcal{D}_\eta(\omega) \subset \mathcal{B}$ l’ensemble occupé par les inclusions circulaires. $\mathcal{D}_\eta(\omega)$ est l’union d’ensembles de la forme $\mathcal{D}_\eta^k(\omega) := \eta(k - \mathbf{y}(\omega) + B(\boldsymbol{\theta}_k(\omega), \boldsymbol{\rho}_k(\omega)))$ où $B(\boldsymbol{\theta}_k(\omega), \boldsymbol{\rho}_k(\omega))$ est une boule dans la cellule unité $Y := [0, 1]^2$ de centre $\boldsymbol{\theta}_k(\omega)$ et de rayon $\boldsymbol{\rho}_k(\omega)$ et $\mathbf{y}(\omega) \in Y$ est une translation de la “grille” repérant les inclusions. Pour des raisons techniques, nous supposons qu’il existe $\delta > 0$ tel que $\text{dist}(\boldsymbol{\theta}_k, \partial Y) > \boldsymbol{\rho}_k + \delta$, pour $k \in \mathbb{Z}^2$ (cette hypothèse servira pour appliquer l’inégalité de type Poincaré donnée dans le lemme 2.12, en vue de montrer la convergence forte double-échelle).

L’ensemble \mathcal{D}_η prend la forme :

$$\mathcal{D}_\eta(\omega) := \bigcup_{k \in J_\eta(\omega)} \mathcal{D}_\eta^k(\omega), \quad J_\eta(\omega) = \{k \in \mathbb{Z}^2 \mid \eta(k - \mathbf{y}(\omega) + Y) \subset \mathcal{B}\}. \quad (5.1)$$

On note que le taux de remplissage des inclusions reste strictement positif dans l’analyse limite $\eta \rightarrow 0$ et converge vers une valeur qui dépendra des lois de distribution des rayons et des centres.

Description des paramètres physiques.

Le comportement électromagnétique de la structure est décrit localement par les permittivité et perméabilité relatives. Nous choisissons, comme dans le chapitre précédent, de considérer des diélectriques ayant une perméabilité égale à 1 dans tout \mathbb{R}^2 afin de modéliser des matériaux naturels à fréquences optiques.

À l’inverse, nous allons modéliser une permittivité à fort contraste à l’aide de paramètres $\boldsymbol{\varepsilon}_k \in \mathbb{C}^+ := \mathbb{R} \times i\mathbb{R}^+$ pour $k \in \mathbb{Z}^2$. Chacun d’eux caractérisera la permittivité dans l’inclusion k . La permittivité en tout point de \mathbb{R}^3 est donnée par :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_\eta(x, \omega) := \begin{cases} 1 & \text{dans } \mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{D}_\eta(\omega), \\ \frac{\boldsymbol{\varepsilon}_k(\omega)}{\eta^2} & \text{dans } \mathcal{D}_\eta^k(\omega). \end{cases} \quad (5.2)$$

Le contraste entre matrice et inclusion fait apparaître le facteur d’échelle $\frac{1}{\eta^2} \rightarrow +\infty$ qui va jouer un rôle crucial dans l’étude. Du point de vue de la physique (cf. [20]), le

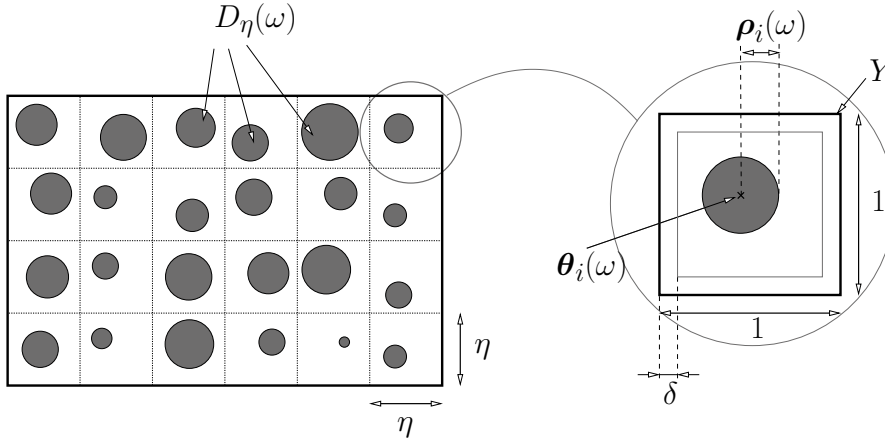


FIGURE 5.1: Schéma de la structure diffractante

choix ε_r/η^2 dans le diélectrique correspond à imposer un diamètre optique constant pour chaque inclusion.

Nous faisons de plus l'hypothèse suivante qui va s'avérer essentielle pour que le problème limite admette une solution *unique*

$$\Im(\varepsilon_k(\omega)) > 0 \quad \text{presque partout dans } \Omega . \quad (5.3)$$

Introduisons la fonction scalaire $a_\eta(x, \omega)$ représentant l'inverse de la permittivité en chaque point de \mathbb{R}^2 :

$$a_\eta(x, \omega) = 1_{\mathcal{B} \setminus \mathcal{D}_\eta(\omega)}(x) + \sum_{k \in J_\eta(\omega)} \frac{\eta^2}{\varepsilon_k(\omega)} 1_{\mathcal{D}_\eta^k(\omega)}(x) . \quad (5.4)$$

Les variables aléatoires $(\theta_k(\omega), \rho_k(\omega), \varepsilon_k(\omega))_k$ sont choisies indépendantes et identiquement distribuées en suivant la même loi que des variables notées $(\theta(\omega), \rho(\omega), \varepsilon(\omega))$.

Problème pré-homogénéisé. La structure diffractante est illuminée par une onde incidente plane (de dépendance harmonique en temps e^{-ift}), polarisée en mode $\mathbf{H}||$. Ainsi, le champ magnétique prend la forme $\mathbf{H}(x, t) = u(x_1, x_2)e^{-ift}\mathbf{e}_3$ et les équations de Maxwell se réduisent à

$$\operatorname{div}(a_\eta(x, \omega)\nabla u_\eta(x, \omega)) + k_0^2 u_\eta(x, \omega) = 0 \quad x \in \mathbb{R}^2, \omega \in \Omega , \quad (5.5)$$

où le champ diffracté $u^d = u_\eta - u^i$ vérifie la condition d'onde sortante de Sommerfeld

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial u^d}{\partial r} - ik_0 u^d \right) = 0 . \quad (5.6)$$

Remarque 5.1 On précise que nous nous plaçons dans un cadre adimensionnel où toutes les distances ont été divisées par le paramètre $d > 0$ représentant l'écart caractéristique séparant les inclusions de la structure de départ (lorsque $\eta = 1$). De ce fait,

la longueur d'onde des champs que nous considérons est donnée par λ/d . Pour simplifier les notations, nous ne ferons plus intervenir ce coefficient dans les démonstrations mathématiques mais il apparaîtra dans les simulations numériques de la sous-section 6.1.

1 Résultat principal

Définissons les paramètres effectifs. Pour alléger les notations, nous écrivons $(\theta, \rho, \varepsilon)$ au lieu de $(\theta(\omega), \rho(\omega), \varepsilon(\omega))$.

La permittivité effective est un scalaire réel indépendant de la fréquence. Sa valeur est donnée par l'inverse du paramètre a^{eff} défini par

$$a^{\text{eff}} = \mathbb{E}[A^{\text{hom}}(\rho)],$$

où \mathbb{E} est l'espérance mathématique par rapport à la probabilité \mathbb{P} .

Afin de définir $A^{\text{hom}}(\rho)$, on considère la boule $B(\theta, \rho) \subset\subset Y$ et la fonction $w_{\theta, \rho}^1 : Y \setminus B(\theta, \rho) \rightarrow \mathbb{R}$ solution de

$$\begin{cases} \Delta_y w_{\theta, \rho}^1 = 0 & \text{dans } Y \setminus B(\theta, \rho), \\ \frac{\partial w_{\theta, \rho}^1}{\partial n} = -\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{n} & \text{dans } \partial B(\theta, \rho), \\ w_{\theta, \rho}^1 & \text{périodique sur } \partial Y, \end{cases}$$

où \mathbf{e}_1 est le premier vecteur de la base canonique de \mathbb{R}^2 . Le réel A^{hom} est alors donné par

$$A^{\text{hom}}(\rho) = \int_{Y \setminus B(\theta, \rho)} |\mathbf{e}_1 + \nabla w_{\theta, \rho}^1(y)|^2 dy.$$

La périodicité de la fonction $w_{\theta, \rho}^1$ entraîne naturellement que A^{hom} ne dépend pas du centre θ .

On introduit $\sigma_0 = \{\lambda_n, n \in \mathbb{N}\}$, le spectre de l'opérateur $(-\Delta)$ dans le disque unité avec conditions de Dirichlet et φ_n les vecteurs propres correspondants (formant une base Hilbertienne de $L^2(B_1)$).

La perméabilité effective $\mu^{\text{eff}}(k_0)$ prend la forme

$$\mu^{\text{eff}}(k_0) = 1 + \sum_n \mathbb{E} \left[\frac{\varepsilon \rho^4 k_0^2}{\lambda_n - \varepsilon \rho^2 k_0^2} \right] \left(\int_{B_1} \varphi_n(y) dy \right)^2. \quad (5.7)$$

On introduit de plus le champ magnétique microscopique $u_0(x, \omega) := u(x)\Lambda(\omega)$ où Λ sera défini dans (5.32) et vérifie $\mathbb{E}(\Lambda) := \boldsymbol{\mu}^{\text{eff}}$.

Théorème 5.2 *On suppose que l'hypothèse (5.3) est satisfaite et qu'il existe $h > 0$ tel que*

$$\mathbb{E} \left[\left| \frac{\varepsilon \rho}{\text{dist}(\varepsilon \rho^2 k_0^2, \sigma_0)} \right|^{2+h} \right] < \infty . \quad (5.8)$$

Alors, le champ magnétique $u_\eta(\cdot, \omega)$ solution de (5.5) converge vers μ faiblement dans $L^2_{loc}(\mathbb{R}^2)$ pour presque tout ω où u est l'unique solution du problème

$$\begin{cases} \text{div} \left(a(x) \nabla u(x) \right) + k_0^2 \mu(x, k_0) u(x) = 0, \\ u - u^i \text{ satisfait la condition (5.6) .} \end{cases} \quad (5.9)$$

De plus, $u_\eta(\cdot, \omega)$ converge uniformément vers u dans $L^2_{loc}(\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{B})$ et on a la convergence suivante pour \mathbb{P} -presque tout $\tilde{\omega}$ dans Ω ,

$$\begin{aligned} \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{B_R} |u_\eta(x, \tilde{\omega})|^2 dx &= \mathbb{E} \left(\int_{B_R} |u_0(x, \omega)|^2 dx \right) \\ &= \int_{B_R} |u(x)|^2 dx \mathbb{E}(|\Lambda(\omega)|^2) , \end{aligned} \quad (5.10)$$

où B_R est un voisinage compact de \mathcal{B} .

Remarque 5.3 Ce résultat généralise au cas aléatoire, les résultats démontrés dans [8] où un cadre périodique est considéré. Plus précisément, ce cas périodique est obtenu quand la probabilité \mathbb{P} est une masse de Dirac en un point fixé de Ω . Dans ce cadre, l'espace de probabilité (Ω, \mathbb{P}) peut être identifié à (Y, \mathcal{L}^2) . La fonction u_0 coïncide alors avec la limite double-échelle classique de u_η . On peut de plus déduire de (5.10) la convergence forte double-échelle de u_η vers u_0 ce qui est une amélioration par rapport à la note [8].

Remarque 5.4 Nous avons besoin de l'hypothèse (4.3) pour avoir l'unicité de la solution du problème limite (5.9) et ainsi démontrer le théorème principal. Lorsque ce n'est pas le cas, il est possible d'introduire un petit paramètre de dissipation permettant l'application du résultat principal et conduisant ainsi au problème homogénéisé. En étudiant ensuite le comportement de la perméabilité effective quand ce paramètre tend vers zéro, nous remarquons que, étonnamment, le milieu effectif peut rester *dissipatif* (cf. proposition 5.32). Cela prouve qu'une homogénéisation directe partant d'une loi de permittivité réelle ne peut être effectuée.

Remarque 5.5 Il est à noter que la condition (5.8) concerne toutes les valeurs propres de l'opérateur de Laplace, même si la formule (5.7) ne fait intervenir que celles pour lesquelles $\int \varphi_n = 0$.

2 Cadre mathématique stochastique

2.1 Description de l'ensemble des événements Ω

Afin de donner une description mathématique rigoureuse de la structure aléatoire, construisons explicitement l'espace des événements Ω . Nous avons vu dans la définition de l'ensemble $\mathcal{D}_\eta(\omega)$ (voir (5.1), (5.4)), qu'un événement $\omega \in \Omega$ contient les informations physiques et géométriques de toutes les inclusions $\mathcal{D}_\eta^k(\omega)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}^2$.

Avec cela en tête, on introduit

$$\Pi = \prod_{\mathbb{Z}^2} M \quad , \quad M = \{(\theta, \rho, \varepsilon) \in Y \times [0, 1/2] \times \mathbb{C}^+ : \text{dist}(\theta, \partial Y) \geq \rho + \delta\} \quad ,$$

où $\delta > 0$ est fixé, $Y = [0, 1]^2$ et $\mathbb{C}^+ := \mathbb{R} \times i\mathbb{R}^+$.

Remarque 5.6 Si $(\theta, \rho, \varepsilon) \in M$, alors la boule de centre θ et de rayon ρ est contenue dans Y et sa distance à la frontière ∂Y est au moins δ . Le paramètre δ est utilisé dans la preuve du lemme 2.12 afin d'obtenir une estimation de type Poincaré *uniforme* dans $L^2(Y \setminus B(\theta_0(\omega), \rho_0(\omega)))$ pour $\omega \in \Omega$. Nous avons pu prouver ce résultat seulement quand les inclusions sont assez loin de la frontière ∂Y . Cependant, malgré cette hypothèse technique, nous pensons que les résultats du chapitre restent suffisamment généraux.

Les propriétés physiques et géométriques de chaque inclusion sont données aléatoirement, et elles sont distribuées dans l'ensemble M en suivant la loi de probabilité p sur la tribu $\mathcal{B}(M)$. On munit Π de la tribu produit \mathcal{F} et de la mesure π données par

$$\mathcal{F} = \bigotimes_{\mathbb{Z}^2} \mathcal{B}(M), \quad \pi = \bigotimes_{\mathbb{Z}^2} p.$$

Pour terminer la définition de Ω , on ajoute à Π la contribution $y(\omega)$ apparaissant dans (5.1) et qui représente une translation de l'origine de la grille caractérisant la position des inclusions.

On définit enfin Ω , son algèbre \mathcal{G} et sa mesure \mathbb{P} par

$$\Omega := \Pi \times Y \quad , \quad \mathcal{G} = \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(Y) \quad , \quad \mathbb{P} = \pi \otimes \mathcal{L}^2 \quad ,$$

où \mathcal{L}^2 est la mesure de Lebesgue sur Y .

Un élément ω de Ω a donc la forme

$$\omega = ((\theta_k, \rho_k, \varepsilon_k)_{k \in \mathbb{Z}^2}, y) = ((m_k)_{k \in \mathbb{Z}^2}, y) \quad ,$$

où $m_k \in M$, $\forall k \in \mathbb{Z}^2$. On introduit de plus, pour tout $k \in \mathbb{Z}^2$, les projections suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_k : \Omega \rightarrow Y \\ \omega \mapsto \theta_k \end{array} \right. \quad , \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho_k : \Omega \rightarrow [0, \frac{1}{2}] \\ \omega \mapsto \rho_k \end{array} \right. \quad ,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_k : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^+ \\ \omega \mapsto \varepsilon_k \end{array} \right\}, \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{y} : \Omega \rightarrow Y \\ \omega \mapsto \mathbf{y} \end{array} \right\},$$

de telle sorte que dans l'équation (5.1) on ait $\mathcal{D}_\eta^k(\omega)$ donné par $\mathcal{D}_\eta^k(\omega) = \eta(k - \mathbf{y}(\omega) + B(\boldsymbol{\theta}_k(\omega), \boldsymbol{\rho}_k(\omega)))$. Les variables aléatoires $(\boldsymbol{\theta}_k, \boldsymbol{\rho}_k, \varepsilon_k)_{k \in \mathbb{Z}^2}$ sont indépendantes, identiquement distribuées et leurs distributions sont uniquement déterminées par la probabilité p .

2.2 Système dynamique et résultats d'analyse stochastique

Dans le même esprit que [53], nous allons construire un système dynamique qui va permettre de décrire mathématiquement la structure aléatoire. On considère le groupe de transformations $T_x : \Omega \rightarrow \Omega$, $x \in \mathbb{R}^2$ donné par

$$T_x((m_k)_{k \in \mathbb{Z}^2}, \mathbf{y}) = ((m_{k+[x+y]})_{k \in \mathbb{Z}^2}, x + \mathbf{y} - [x + \mathbf{y}]),$$

qui vérifie les propriétés usuelles des systèmes dynamiques

$$T_0 = I_d \quad , \quad T_x \circ T_y = T_{x+y} .$$

Ici, la notation $[x]$, pour $x \in \mathbb{R}^2$, désigne le couple $([x_1], [x_2])$ formé des parties entières des composantes de x .

Il est facile de voir que T_x preserve la mesure \mathbb{P} et que si pour $A \in \mathcal{G}$ on a $\mathbb{P}(T_x A \Delta A) = 0$, alors $\mathbb{P}(A) = 0$ ou $\mathbb{P}(A) = 1$ (Δ désigne la différence symétrique). En d'autres mots, le système dynamique préserve la mesure et est *ergodique*.

Remarque 5.7 Le groupe de transformations T_x agit sur un événement $\omega \in \Omega$ en mélangeant ses composantes. Cela nous permettra d'exprimer les propriétés d'une inclusion $D_\eta^k(\omega) = \eta(k - \mathbf{y}(\omega) + D(\omega))$ en fonction de l'inclusion D_η^0 dans la configuration $T_{\frac{x}{\eta}}\omega$. Plus précisément, $\boldsymbol{\theta}_0(T_{\frac{x}{\eta}}\omega) = \boldsymbol{\theta}_{[\frac{x}{\eta} + \mathbf{y}(\omega)]}(\omega)$. On déduit alors naturellement que

$$x \in D_\eta^k \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{x}{\eta} + \mathbf{y}(\omega) \right] = k \\ \mathbf{y}(T_{\frac{x}{\eta}}\omega) \in B(\boldsymbol{\theta}_k(\omega), \boldsymbol{\rho}_k(\omega)) \end{array} \right. .$$

Maintenant, posons

$$\Sigma = \{\omega \in \Omega : |y - \theta_0| < \rho_0 + \delta\} \quad , \quad \Sigma^* = \Omega \setminus \Sigma .$$

La remarque précédente entraîne la formule suivante qui sera souvent utilisée dans la suite du chapitre.

$$x \in \mathcal{D}_\eta(\omega) \iff \left\{ \left[\frac{x}{\eta} + \mathbf{y}(\omega) \right] \in J_\eta(\omega) \quad \text{et} \quad T_{\frac{x}{\eta}}\omega \in \Sigma \right\} . \quad (5.11)$$

On remarque que l'ensemble Σ est ouvert dans Ω et que si $\omega \in \Sigma$, alors $y \in B(\theta_0(\omega), \rho_0(\omega))$. Il est facile de montrer que la frontière $\partial\Sigma$ de Σ est formée de $\{\omega : |y - \theta_0| = \rho_0 + \delta\}$

et est de \mathbb{P} -mesure nulle. De plus, $\mathbb{P}(\Sigma), \mathbb{P}(\Sigma^*) \in]0, 1[$ et $\mathbb{P}(\Sigma)$ est le *taux de remplissage* des inclusions.

Le groupe $(T_x)_{x \in \mathbb{R}^2}$ est associé au groupe de transformations $U_x, x \in \mathbb{R}^2$ agissant sur les fonctions mesurables dans Ω de la façon suivante : si $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est \mathcal{G} -mesurable, alors

$$(U_x f)(\omega) = f(T_x \omega), \quad \omega \in \Omega, \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Proposition 5.8 *Pour tout $p \in [1, \infty[$, le groupe U_x est fortement continu dans $L^p(\Omega, \mathbb{P})$. C'est à dire que*

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_{\Omega} |U_x g(\omega) - g(\omega)|^p d\mathbb{P} = 0.$$

PREUVE. Il est suffisant de montrer le résultat avec g continu. Pour $y \notin \partial Y$ et pour x assez petit pour que $[x + y] = 0$, on a

$$U_x g(\omega) = g((m_z)_{z \in \mathbb{Z}}, x + y).$$

Puisque g est continu, $\lim_{|x| \rightarrow 0} U_x g(\omega) = g(\omega)$, pour tout $\omega \in \{\omega : y \notin \partial Y\}$.

On conclut en remarquant que

$$\int_{\Omega} |U_x g(\omega) - g(\omega)|^p d\mathbb{P} = \int_{\Omega \setminus \{\omega : y \notin \partial Y\}} |U_x g(\omega) - g(\omega)|^p d\mathbb{P}$$

et en appliquant le théorème de convergence dominé. □

En conséquence de la proposition 5.8 pour $i = 1, 2$, le groupe d'opérateurs unidimensionnels $t \rightarrow U_{te_i}$ est fortement continu dans $L^p(\Omega; \mathbb{P}), p \in [1, \infty)$. Les notations suivantes des dérivées et divergence stochastiques sont fortement inspirées de [53].

Définition 5.9 (dérivée partielle stochastique)

La dérivée partielle stochastique ∂_i^s ($i=1,2$) est le générateur infinitésimal du semi-groupe fortement continu $U_{te_i}, t \geq 0$ dans l'espace $L^2(\Omega, \mathbb{P})$. Pour $i = 1, 2$, le domaine $D(\partial_i^s) \subset L^2(\Omega, \mathbb{P})$ de ∂_i^s est donné par

$$D(\partial_i^s) = \left\{ f \in L^2(\Omega; \mathbb{P}) \quad : \quad \exists \lim_{t \rightarrow 0} \frac{U_{te_i} f - f}{t} \in L^2(\Omega; \mathbb{P}) \right\}$$

et ∂_i^s est défini par

$$\partial_i^s f(\omega) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{U_{te_i} f(\omega) - f(\omega)}{t}, \quad \omega \in \Omega, f \in D(\partial_i^s).$$

Définition 5.10 (Gradient et divergence stochastiques) On introduit le gradient stochastique $\nabla_s : D(\nabla_s) \rightarrow (L^2(\Omega; \mathbb{P}))^2$ défini par

$$\nabla_s f := (\partial_1^s f, \partial_2^s f), \quad f \in D(\nabla_s) := D(\partial_1^s) \cap D(\partial_2^s),$$

et la divergence stochastique $div_s : D(div_s) \rightarrow L^2(\Omega; \mathbb{P})$ définie par

$$div_s g := \partial_1^s g_1 + \partial_2^s g_2, \quad g = (g_1, g_2) \in D(div_s) := D(\partial_1^s) \times D(\partial_2^s).$$

L'espace $D(\nabla_s)$ sera noté $H_s^1(\Omega; \mathbb{P})$ et c'est un espace de Banach relativement à la norme

$$\|f\|_{H_s^1} = \|f\|_{L^2(\Omega; \mathbb{P})} + \sum_{i=1}^2 \|\partial_i^s f\|_{L^2(\Omega; \mathbb{P})} .$$

De plus, on note que pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, $\omega \in \Omega$, $f \in D(\partial_i^s)$, on a

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f(T_x \omega)) = (\partial_i^s f)(T_x \omega) . \quad (5.12)$$

Proposition 5.11 *On a*

$$H_s^1(\Omega; \mathbb{P}) = L^2(\Pi, \pi; W_{\#}^{1,2}(Y)) . \quad (5.13)$$

et pour $i = 1, 2$

$$\partial_i^s f(\omega) = \frac{\partial f}{\partial y_i}(\omega) \quad \forall f \in L^2(\Pi, \pi; W_{\#}^{1,2}(Y)) . \quad (5.14)$$

PREUVE. Comme on l'a constaté dans la preuve de la proposition 5.8, pour \mathbb{P} -presque tout $\omega \in \Omega$ et tout $x \in \mathbb{R}^2$ assez proche de 0, on a $U_x f(\omega) = f((m_z)_{z \in \mathbb{Z}}, x + y)$. Il en résulte que, pour tout x assez petit, l'incrément $U_x f(\omega) - f(\omega)$ agit seulement sur la variable y tout comme les dérivées directionnelles. En conséquence, on a pour $i \in 1, 2$,

$$\begin{aligned} \partial_i^s f(\omega) &= \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \ll 1}} \frac{1}{t} \left[f((m_z)_{z \in \mathbb{Z}^2}, y + te_i) - f((m_z)_{z \in \mathbb{Z}}, y) \right] = \\ &= \frac{\partial f}{\partial y_i}((m_z)_{z \in \mathbb{Z}^2}, y) = \frac{\partial f}{\partial y_i}(\omega) . \end{aligned}$$

On rappelle que ces relations sont vraies pour tout ω tel que $y \notin \partial Y$. Cependant, puisque cet ensemble est de \mathbb{P} -mesure égale à 1, on peut supposer que la relation a lieu pour tout $\omega \in \Omega$. On déduit (5.13) du théorème de Fubini. □

Proposition 5.12 *Prenons $u \in H_s^1(\Omega; \mathbb{P})$, $v \in D(\text{div}_s)$. Alors, on a l'intégration par parties suivante*

$$\int_{\Omega} \nabla_s u(\omega) \cdot v(\omega) d\mathbb{P} = - \int_{\Omega} u(\omega) \text{div}_s v(\omega) d\mathbb{P} . \quad (5.15)$$

PREUVE. On a facilement que $\text{div}_s(uv) \in L^1(\Omega; \mathbb{P})$ et que $\int_{\Omega} \text{div}_s(uv) d\mathbb{P} = 0$. Finalement, l'identité $\text{div}_s(uv) = \nabla_s u \cdot v + u \text{div}_s v$ (dédiuite de la définition du générateur infinitésimal) complète la preuve. □

Définition 5.13 (Convergence double-échelle stochastique)

On dit qu'une suite $f_{\eta} \in L^2(B_R)$ converge double-échelle vers $f \in L^2(B_R \times \Omega, \mathcal{L}^2 \otimes \mathbb{P})$ si pour tout $\tilde{\omega} \in \Omega$ et $(\varphi, \psi) \in C_c^{\infty}(B_R) \times C^1(\Omega)$, on a

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{B_R} f_{\eta}(x) \varphi(x) \psi(T_{\frac{x}{\eta}} \tilde{\omega}) dx = \int_{B_R \times \Omega} f_0(x, \omega) \varphi(x) \psi(\omega) dx \mathbb{P}(d\omega) . \quad (5.16)$$

Cette convergence sera notée $f_\eta(x) \rightharpoonup f_0(x, \omega)$.

La suite converge fortement double-échelle si on a

$$\lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int_{B_R} \left| f_\eta(x) - f_0(x, T_{\frac{x}{\eta}} \tilde{\omega}) \right|^2 dx = 0.$$

Comme pour la notion classique de convergence double-échelle, on rappelle (cf. [53]) qu'une condition suffisante pour qu'une suite f_η admette une sous-suite convergeant double-échelle (stochastique) est que l'on ait

$$\limsup_{\eta \rightarrow 0} \int_{B_R} |f_\eta(x)|^2 dx < \infty. \quad (5.17)$$

Remarque 5.14 Le choix de la fonction test dans la définition de la convergence double-échelle peut être étendue à toutes fonctions $\psi \in L^2(\Omega)$, voir ([53] lemme 5.2).

2.3 Reformulation du problème de diffraction

Le modèle que nous considérons est un cas particulier de *milieu perforé aléatoire*. Le cadre général est le suivant.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilités, $\mathcal{U} \subset \Omega$ tel que $\mathbb{P}(\mathcal{U}) \in]0, 1[$ et $Q(\omega) := \{x : T_x \omega \in \mathcal{U}\}$. Quand le complémentaire de $Q(\omega)$ est l'union d'ensembles non connexes (appelés *grains* ou *inclusions*), alors il est appelé *milieu perforé* et la quantité $\mathbb{P}(\mathcal{U})$ correspond à son *taux de remplissage*. Dans la suite, nous utiliserons le résultat général suivant.

Lemme 5.15 *On considère $\mathcal{U} \subset \Omega$, $Q(\omega) := \{x : T_x \omega \in \mathcal{U}\} \subset \mathbb{R}^2$ et $f \in L^1(\mathcal{U}; \mathbb{P})$. Si f est tel que $f(T_x \omega) = f(\omega)$ pour presque tout $\omega \in \mathcal{U}$ et $x \in Q(\omega)$ alors, f est constant sur \mathcal{U} .*

PREUVE. On peut étendre f à tout Ω en considérant \bar{f} son prolongement nul hors de \mathcal{U} . Puisque le système est ergodique et que $\bar{f} \in L^1(\Omega)$, le théorème d'ergodicité 2.32 amène à

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{\mathcal{L}^2(B_r)} \int_{B_r} \bar{f}(T_x \omega) dx = \int_{\mathcal{U}} f d\mathbb{P} \quad , \quad \mathbb{P} - \text{p.p.} .$$

D'un autre côté, encore à l'aide du théorème d'ergodicité, pour \mathbb{P} -presque tout $\omega \in \mathcal{U}$, on a

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{\mathcal{L}^2(B_r)} \int_{B_r} \bar{f}(T_x \omega) dx = f(\omega) \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{L}^2(B_r \cap Q(\omega))}{\mathcal{L}^2(B_r)} = f(\omega) \mathbb{P}(\mathcal{U}) .$$

Il en résulte que f est constant sur \mathcal{U} , \mathbb{P} -p.p. □

Grâce aux notations introduites dans la section précédente, on reformule le paramètre a_η (donné dans (5.4)) de la façon suivante

$$a_\eta(x, \omega) = 1_{\mathcal{B}}(x) \left(\frac{\eta^2}{\varepsilon_0(T_{\frac{x}{\eta}} \omega)} 1_{\Sigma}(T_{\frac{x}{\eta}} \omega) + 1_{\Sigma^*}(T_{\frac{x}{\eta}} \omega) \right) + 1_{\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{B}}(x) , \quad (5.18)$$

où

$$\Sigma = \{\omega \in \Omega : |y - \theta_0| < \rho_0\} \quad , \quad \Sigma^* = \Omega \setminus \Sigma .$$

En effet, pour $\omega \in \Omega$ fixé, on doit montrer que pour $x \in \mathcal{D}_\eta^k(\omega)$, on a $a_\eta(x, \omega) := \frac{\eta^2}{\varepsilon_k(\omega)}$, à l'aide de la définition (5.18). De la formule (5.11), on déduit $1_\Sigma(T_{\frac{x}{\eta}}\omega) = 1$ puis $a_\eta(x, \omega) = \frac{\eta^2}{\varepsilon_0(T_{\frac{x}{\eta}}\omega)}$. On utilise la remarque 5.7 pour conclure que $\varepsilon_0(T_{\frac{x}{\eta}}\omega) = \varepsilon_k(\omega)$ pour tout $x \in \mathcal{D}_\eta^k(\omega)$. On en déduit que les deux définitions de a_η concordent pour tout $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{D}_\eta(\omega)$.

3 Estimations et résultats préliminaires

Afin de justifier que la suite de champs $(u_\eta(\cdot, \tilde{\omega}))$ est bornée dans $L_{loc}^2(\mathbb{R}^3)$, nous allons utiliser le raisonnement en deux temps suivant.

- On commence par supposer qu'il existe $\tilde{\omega} \in \Omega$ tel que la suite $(u_\eta(\cdot, \tilde{\omega}))$ vérifie, pour une boule B_R fixée contenant \mathcal{B}

$$\sup_{\eta > 0} \int_{B_R} |u_\eta(x, \tilde{\omega})|^2 dx < +\infty . \quad (5.19)$$

Nous étudions ensuite le comportement oscillant du champ sous cette hypothèse dans le but de caractériser les équations du problème homogénéisé.

- Dans un second temps, on utilise l'*unicité* du problème limite pour mettre en œuvre un raisonnement par contradiction justifiant l'hypothèse.

Avec cela en tête, on fixe une boule B_R telle que $\mathcal{B} \subset\subset B_R$ et on suppose que (5.19) est satisfaite.

On note que *à priori*, la limite u_0 dépend de la configuration initiale $\tilde{\omega}$ de l'obstacle et du choix de la sous-suite. Comme nous le montrerons dans la proposition 5.23, cette limite ne dépendra ni de $\tilde{\omega}$ (i.e. $u_0 = u_0(x, \omega)$) ni de la sous-suite.

Ainsi, pour simplifier les notations, nous noterons $u_0(x, \omega)$ la limite double-échelle stochastique de u_η , et nous ne rappellerons pas sa dépendance par rapport à $\tilde{\omega}$ et à la sous-suite.

3.1 Comportement loin de l'obstacle et borne L^2

L'hypothèse (5.19) nous permet d'appliquer le lemme suivant donné dans le chapitre 2 dans le cas 3D.

Lemme 5.16 *Soit $\tilde{\omega} \in \Omega$ et $u_\eta(\cdot, \tilde{\omega})$ la solution du problème (5.5) associée à une onde incidente u_η^i qui converge uniformément vers u^i . Si u_η converge faiblement dans $L_{loc}^2(B_R)$ vers une limite u , alors la convergence de u_η a lieu dans $C^\infty(K)$ pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\mathcal{B}}$. De plus, le champ limite u vérifie l'équation de Helmholtz $\Delta u + k_0^2 u = 0$ dans $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{\mathcal{B}}$ et est tel que $(u_0 - u^i)$ vérifie (5.6).*

Le reste de cette section est consacré à l'étude de la convergence près des inclusions, c'est-à-dire dans B_R .

Lemme 5.17 *Pour tout $\tilde{\omega}$ vérifiant la condition (5.19), les suites $(u_\eta(x, \tilde{\omega}))$ ($\eta \nabla u_\eta(x, \tilde{\omega})$) et $(1_{B_R \setminus \mathcal{D}_\eta}(x) \nabla u_\eta(x, \tilde{\omega}))$ sont bornées dans $L^2(B_R)$ et, quitte à extraire une sous-suite, satisfont*

$$\begin{aligned} u_\eta(x, \tilde{\omega}) &\rightharpoonup u_0(x, \omega) , \\ \eta \nabla u_\eta(x, \tilde{\omega}) &\rightharpoonup D_0(x, \omega) , \\ 1_{B_R \setminus \mathcal{D}_\eta(\tilde{\omega})}(x) \nabla u_\eta(x, \tilde{\omega}) &\rightharpoonup \chi_0(x, \omega) , \end{aligned} \tag{5.20}$$

où $u_0 \in L^2(B_R \times \Omega, \mathcal{L}^2 \otimes \mathbb{P})$, $\chi_0 \in (L^2(B_R \times \Omega, \mathcal{L}^2 \otimes \mathbb{P}))^2$ et $D_0 \in (L^2(B_R \times \Omega, \mathcal{L}^2 \otimes \mathbb{P}))^2$.

PREUVE. On multiplie l'équation (5.5) par \bar{u}_η et on intègre par parties sur la boule B_R pour obtenir

$$\begin{aligned} - \int_{B_R} (a_\eta(x, \tilde{\omega}) |\nabla_x u_\eta(x, \tilde{\omega})|^2 + k_0^2 |u_\eta(x, \tilde{\omega})|^2) dx \\ = \int_{\partial B_R} u_\eta(x, \tilde{\omega}) \frac{\partial \bar{u}_\eta}{\partial n}(x, \tilde{\omega}) dx . \end{aligned}$$

Grâce au lemme 5.16, on a que le membre de droite est uniformément borné dans $\eta > 0$. De plus l'hypothèse 5.19 nous permet d'obtenir

$$\sup_\eta \left\| \sqrt{a_\eta(\cdot, \tilde{\omega})} \nabla u_\eta(\cdot, \tilde{\omega}) \right\|_{L^2(B_R)} < +\infty .$$

À l'aide de [53] Corollaire 5.1, il existe $u_0 \in L^2(\mathcal{B} \times \Omega, \mathcal{L}^2 \otimes \mathbb{P})$, $\chi_0, D_0 \in (L^2(\mathcal{B} \times \Omega, dx \otimes \mathbb{P}))^2$ tel que l'on a la convergence double-échelle (5.20). □

3.2 Analyse double-échelle stochastique

Proposition 5.18 *Les fonctions u_0, D_0 et χ_0 définies dans (5.20) satisfont pour $dx \otimes \mathbb{P}$ -presque tout $(x, \omega) \in \mathcal{B} \times \Omega$, les conditions suivantes*

$$D_0(x, \omega) = 0 \quad \text{dans } \mathcal{B} \times \Sigma^* , \tag{5.21}$$

$$\operatorname{div}_s \chi_0(x, \omega) = 0 \quad \text{dans } \mathcal{B} \times \Omega , \tag{5.22}$$

$$\nabla^s u_0(x, \omega) = D_0(x, \omega) \quad \text{dans } \mathcal{B} \times \Omega , \tag{5.23}$$

$$\chi_0(x, \omega) = 0 \quad \text{dans } \mathcal{B} \times \Sigma . \tag{5.24}$$

PREUVE.

On prend $\varphi \in (C^1(B_R; H_s^1(\Omega; \mathbb{P})))^2$ à support compact dans $B_R \times \Sigma^*$. Alors, en vertu de (5.11), le support de $x \mapsto \varphi(x, T_{\frac{x}{\eta}} \tilde{\omega})$ est contenu dans $\mathcal{D}_\eta(\tilde{\omega})$ et donc

$$\eta \int_{B_R} \nabla_x u_\eta(x, \tilde{\omega}) \cdot \varphi(x, T_{\frac{x}{\eta}} \tilde{\omega}) dx = \eta \int_{B_R \setminus \mathcal{D}_\eta(\tilde{\omega})} \nabla_x u_\eta(x, \tilde{\omega}) \cdot \varphi(x, T_{\frac{x}{\eta}} \tilde{\omega}) dx .$$

On conclut en remarquant, à l'aide du lemme 5.17, que $\nabla u_\eta(x, \tilde{\omega})1_{\mathcal{B} \setminus \mathcal{D}_\eta(\tilde{\omega})}$ est borné dans $L^2(B_R)$. La relation (5.21) est alors démontrée.

On prend $\varphi \in (C^1(B_R; H_s^1(\Omega; \mathbb{P})))^2$ et on multiplie l'équation (5.5) par $\eta\varphi$ pour obtenir

$$\int_{\mathcal{B}} 1_{\Sigma^*}(T_{\frac{x}{\eta}}\tilde{\omega}) \nabla_s u_\eta(x, \tilde{\omega}) \cdot D^s \varphi(x, T_{\frac{x}{\eta}}\tilde{\omega}) dx = o(1) .$$

On obtient la relation (5.22) en passant à la limite et grâce à une intégration par parties (formule (5.15)).

La démonstration de (5.23) reprend le même type d'arguments et (5.24) résulte directement de la définition de χ_0 donnée dans (5.20). □

Proposition 5.19 *Il existe $u \in L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^2)$ tel que \mathbb{P} -presque sûrement, on a*

$$u_0(x, \omega) = u(x) \quad (x, \omega) \in (\mathcal{B} \times \Sigma^*) \cup ((\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{B}) \times \Omega) . \quad (5.25)$$

De plus, u_0 vérifie

$$\Delta_s u_0(x, \omega) + \varepsilon_0(\omega) k_0^2 u_0(x, \omega) = 0 \quad \text{dans } \mathcal{B} \times \Sigma . \quad (5.26)$$

PREUVE.

Montrons (5.25). D'après le lemme 5.16, la suite $(u_\eta(\cdot, \tilde{\omega}))$ est bornée dans $W^{1,2}(K)$ pour tout K compact de $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{\mathcal{B}}$. Il en résulte que $u_0(x, \omega) = u(x)$ dans K .

Maintenant prenons $(x, \omega) \in \mathcal{B} \times \Sigma^*$. On commence par remarquer d'après les équations (5.21) et (5.23), que l'on a $\nabla_s u_0(x, \omega) = 0$ dans $\mathcal{B} \times \Sigma^*$, $\mathcal{L}^2 \otimes \mathbb{P}$ p.p. Maintenant, prenons $\hat{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{D}_1(\omega)$ (ici $\mathcal{D}_1(\omega)$ n'est autre que $\mathcal{D}_\eta(\omega)$ avec $\eta = 1$). Par la relation (5.12), on a

$$\nabla_{\hat{x}} u_0(x, T_{\hat{x}}\omega) = \nabla_s u_0(x, T_{\hat{x}}\omega) = 0 .$$

Ainsi, la fonction $\hat{x} \mapsto u_0(x, T_{\hat{x}}\omega)$ est de gradient nul sur l'ensemble connexe $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{D}_1(\omega)$. Il s'en suit que l'on a $u_0(x, T_{\hat{x}}\omega) = u_0(x, \omega)$ pour presque tout $x \in B_R$, $\omega \in \Sigma^*$, $\hat{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{D}_1(\omega)$. Le résultat est alors déduit de la proposition 5.15 avec $f = u_0$, $Q(\omega) = \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{D}_1(\omega)$ et $\mathcal{U} = \Sigma^*$. L'égalité (5.25) est démontrée.

Montrons (5.26). On fixe $\varphi \in C^1(B_R; H_s^1(\Omega; \mathbb{P}))$ à support dans $\mathcal{B} \times \Sigma$ et on multiplie l'équation (5.5) par $\varphi(x, T_{\frac{x}{\eta}}\tilde{\omega})$. En intégrant par parties sur B_R , on obtient (on rappelle que pour tout φ , l'application $x \mapsto \varphi(x, T_{\frac{x}{\eta}}\tilde{\omega})$ a son support dans $\mathcal{D}_\eta(\tilde{\omega})$)

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{D}_\eta(\tilde{\omega})} \eta^2 \nabla_x u_\eta(x, \tilde{\omega}) \cdot \left(-\nabla_x \varphi(x, T_{\frac{x}{\eta}}\tilde{\omega}) - \frac{1}{\eta} \nabla_s \varphi(x, T_{\frac{x}{\eta}}\tilde{\omega}) \right) dx \\ + \int_{\mathcal{D}_\eta(\tilde{\omega})} \varepsilon_0(T_{\frac{x}{\eta}}\tilde{\omega}) k_0^2 u_\eta(x, \tilde{\omega}) \varphi(x, T_{\frac{x}{\eta}}\tilde{\omega}) dx = 0 . \end{aligned}$$

En conséquence, on a

$$- \int_{\mathcal{B} \times \Sigma} D_0(x, \omega) \cdot \nabla_s \varphi(x, \omega) dx + \int_{\mathcal{B} \times \Sigma} \varepsilon_0(\omega) k_0^2 u_0(x, \omega) \varphi(x, \omega) dx = 0 .$$

Une intégration par parties et l'équation (5.23) nous permettent alors d'obtenir (5.26). □

4 Solutions élémentaires sur la cellule unité

4.1 Caractérisation du tenseur de permittivité effectif

Dans cette section, on étudie la limite double-échelle χ_0 .

Introduisons quelques notations. Pour tout $m = (\theta, \rho, \varepsilon) \in M$, posons $w_m^i : Y \setminus B(\theta, \rho) \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2$ une solution (unique à une constante près) de

$$\begin{cases} \Delta_y w_m^i = 0 & \text{dans } Y \setminus B(\theta, \rho), \\ \frac{\partial w_m^i}{\partial n} = -e_i \cdot n & \text{dans } \partial B(\theta, \rho), \\ w_m^i & \text{périodique dans } \partial Y, \end{cases} \quad (5.27)$$

où $\{e_i : i = 1, 2\}$ est la base canonique de \mathbb{R}^2 . Notons A^{hom} la matrice 2×2 donnée par

$$(A^{\text{hom}})_{ij} = \int_{Y \setminus B(\theta, \rho)} (e_i + \nabla w_m^i(y)) \cdot (e_j + \nabla w_m^j(y)) dy. \quad (5.28)$$

où $m = (\theta, \rho, \varepsilon) \in M$.

Remarque 5.20 Par des arguments classiques (voir [28] pag. 90), on sait que A^{hom} est symétrique, définie positive et donnée par

$$A^{\text{hom}}(m)\xi \cdot \xi = \inf_{u \in W_{\#}^{1,2}(Y)} \int_{Y \setminus B(\theta, \rho)} |\xi + \nabla_y u(y)|^2 dy,$$

ne dépendant pas de θ et ε , c'est-à-dire $A^{\text{hom}}(m) = A^{\text{hom}}(\rho)$.

Proposition 5.21 On a

$$\int_{\Omega} \chi_0(x, \omega) d\mathbb{P} = A^{\text{eff}} \nabla u(x) \quad (5.29)$$

où

$$A^{\text{eff}} = \int_M A^{\text{hom}}(m) dp. \quad (5.30)$$

De plus, $A^{\text{eff}} = a^{\text{eff}} I_d$.

PREUVE.

Étape 1. Soit $\varphi \in (C^1(B_R; H_s^1(\Omega; \mathbb{P})))^2$ à support dans $\mathcal{B} \times \Sigma^*$ et vérifiant $\text{div}_s \varphi = 0$ dans $\mathcal{B} \times \Omega$. D'après la formule (5.15), on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{B} \times \Omega} \chi_0(x, \omega) \cdot \varphi(x, \omega) dx d\mathbb{P} &= \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int_{\mathcal{B} \setminus \mathcal{D}_\eta(\omega)} \nabla_x u_\eta(x, \tilde{\omega}) \cdot \varphi(x, T_{\frac{x}{\eta}} \tilde{\omega}) dx \\ &= - \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int_{\mathcal{B}} u_\eta(x, \omega) \text{div}_x \varphi(x, T_{\frac{x}{\eta}} \tilde{\omega}) dx = - \int_{\mathcal{B} \times \Omega} u_0(x, \omega) \text{div}_x \varphi(x, \omega) dx d\mathbb{P}. \end{aligned}$$

Alors, d'après (5.25), on déduit que pour tout $\mathbf{g} \in D(\partial_1^s) \times D(\partial_2^s)$ tel que $\text{supp}(\mathbf{g}) \subset \Sigma^*$ et $\text{div}_s \mathbf{g} = 0$ dans Ω , on a

$$\int_{\Omega} \chi_0(x, \omega) \cdot \mathbf{g}(\omega) d\mathbb{P} = \nabla_x u(x) \cdot \int_{\Omega} \mathbf{g}(\omega) d\mathbb{P}, \quad \mathcal{L}^2\text{-p.p. dans } \mathcal{B}.$$

Étape 2. On teste l'équation précédente avec la fonction à divergence nulle

$$(\mathbf{e}_i + \nabla w_m^i(y)) 1_{Y \setminus B(\theta_0(\omega), \rho_0(\omega))}(y) \quad , \quad \text{avec } i = 1, 2 .$$

Il en résulte que

$$\int_{\Sigma^*} \chi_0(x, \omega) \cdot (\mathbf{e}_i + \nabla w_m^i(y)) d\mathbb{P} = \nabla_x u(x) \cdot \int_{\Omega} (\mathbf{e}_i + \nabla w_m^i(y)) d\mathbb{P} .$$

On voit que le terme $\int_{\Sigma^*} \chi_0(x, \omega) \cdot \nabla w_m^i(y)$ dans l'équation précédente est égal à zéro puisque $\text{div}_s \chi_0 = 0$, $\chi_0 \cdot \mathbf{n} = 0$ sur $\partial B(\theta, \rho)$ et χ_0, w_m^i sont Y -périodiques. On obtient (5.28) simplement en remarquant que l'on a

$$\int_{\Omega} (\mathbf{e}_i + \nabla w_m^i(y)) \cdot \mathbf{e}_j d\mathbb{P} = \int_{\Omega} (\mathbf{e}_i + \nabla w_m^i(y)) \cdot (\mathbf{e}_j + \nabla w_m^j(y)) d\mathbb{P} = A_{ij}^{\text{eff}},$$

du fait que $\mathbf{e}_j + \nabla w_m^j(y)$ est à divergence nulle dans tout Y .

Les symétries de la géométries entraînent finalement que le tenseur A^{hom} est proportionnel à l'identité. □

Remarque 5.22 Le tenseur effectif (5.30) peut aussi être exprimé en fonction de la mesure p par

$$A^{\text{eff}} = \left(1 - \pi \int_M \rho^2 dp \right) I + \int_M \int_{Y \setminus B(\theta, \rho)} \left(\frac{\nabla w_m^1(y)}{\nabla w_m^2(y)} \right) dy dp.$$

Notons que si p est une masse de Dirac concentrée au point $m = (\theta, \rho, \varepsilon)$, alors la formule précédente coïncide avec celle obtenue dans [8] (équation (9)), qui a lieu dans le cas déterministe.

4.2 Caractérisation de la perméabilité effective

On considère $0 < \lambda_1 \leq \dots$ les valeurs propres du problème de Dirichlet sur la boule $B_1 := B(0, 1)$

$$-\Delta \varphi = \lambda \varphi \quad \text{in } B_1, \quad \varphi = 0 \quad \text{on } \partial B_1,$$

et on note φ_n les vecteurs propres associés formant une base orthonormale de $L^2(B_1)$.

Proposition 5.23 *On suppose que l'hypothèse (5.19) est satisfaite. Soit u_0 la limite double-échelle stochastique de u_η , quitte à extraire une sous-suite.*

Alors u_0 admet la représentation suivante

$$u_0(x, \omega) = \begin{cases} u(x), & \text{si } x \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{B} \\ u(x)\Lambda(\omega), & \text{si } x \in \mathcal{B} \end{cases} \quad (5.31)$$

où $\Lambda(\omega) = 1$ dans Σ^* et vérifie pour $\omega \in \Sigma$

$$\Lambda(\omega) = 1 + \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{k_0^2 \varepsilon_0(\omega) \rho_0^2(\omega)}{\lambda_n - k_0^2 \varepsilon_0(\omega) \rho_0^2(\omega)} \left(\int_{B_1} \varphi_n(y) dy \right) \varphi_n \left(\frac{y - \theta_0(\omega)}{\rho_0(\omega)} \right). \quad (5.32)$$

PREUVE. Le fait que $u_0(x, \omega) = u(x)$ dans $\mathcal{B} \times \Sigma^*$ a été démontré dans la proposition 5.19.

Maintenant, pour $\omega \in \Omega$, posons $\omega = (m, y) \in \Pi \times Y$. En prenant en compte (5.13), on déduit que $u_0 \in L^2(\mathcal{B} \times \Pi, \mathcal{L}^2 \otimes \pi; H_{\#}^1(Y, \mathcal{L}^2))$. D'après la proposition 5.19 et à l'aide de la formule (5.14), on déduit que pour tout $(x, m) \in \mathcal{B} \times \Pi$, la fonction $y \mapsto u_0(x, (m, y))$ vérifie

$$\Delta_y u_0(x, (m, \cdot)) + \varepsilon_0(\omega) k_0^2 u_0(x, (m, \cdot)) = 0 \quad \text{dans } B(\theta_0(\omega), \rho_0(\omega)) \quad (5.33)$$

et

$$u_0(x, (m, y)) = u(x) \quad \text{pour } y \in Y \setminus B(\theta_0(\omega), \rho_0(\omega)).$$

Notons que $\theta_0(\omega), \rho_0(\omega)$ sont indépendants de y .

Il résulte de l'équation (5.23) que $u_0(x, (m, \cdot)) \in H^1(Y)$ ce qui entraîne que la trace de $u_0(x, (m, \cdot))$ est continu à la traversée d'interfaces dans Y . En conséquence, $u_0(x, (m, \cdot))$ est solution de (5.33) avec la condition $u_0(x, (m, y)) = u(x)$ sur $\partial B(\theta_0(\omega), \rho_0(\omega))$.

Du fait de la linéarité du problème, on cherche une solution de la forme $u_0(x, (m, y)) = u(x)(1 + v_m(y))$, où v vérifie

$$\begin{cases} \Delta_y v_m(y) + \varepsilon_0(\omega) k_0^2 v_m(y) = -\varepsilon_0(\omega) k_0^2, & y \in B(\theta_0(\omega), \rho_0(\omega)), \\ v_m(y) = 0, & y \in \partial B(\theta_0(\omega), \rho_0(\omega)). \end{cases} \quad (5.34)$$

On considère (λ_n, φ_n) les valeurs et vecteurs propres de l'opérateur Laplacien dans B_1 avec condition de Dirichlet. En introduisant $\tilde{\varphi}_n(y) = \varphi_n \left(\frac{y - \theta_0(\omega)}{\rho_0(\omega)} \right)$, on voit clairement que $\tilde{\varphi}_n$ est une famille orthogonale de $L^2(B(\theta_0(\omega), \rho_0(\omega)); \mathcal{L}^2)$ et que

$$-\Delta_y \tilde{\varphi}_n = \frac{\lambda_n}{\rho_0(\omega)^2} \tilde{\varphi}_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Le problème (5.34) peut être résolu par une méthode de décomposition spectrale conduisant à l'égalité (5.32). \square

Remarque 5.24 À l'aide des propositions 5.19 et 5.23, on obtient que $\Lambda \in H_s^1(\Omega, \mathbb{P})$. Il en résulte que

$$\int_M \left(\sum_{n \in I_0} \frac{\lambda_n k^2 \varepsilon \rho^2}{\lambda_n - k^2 \varepsilon \rho^2} \right)^2 dp \left(\int_{B_1} \varphi_n dy \right)^2 < \infty.$$

Notons qu'il s'agit d'une condition *nécessaire* sur la loi de probabilité p , puisque tous les résultats de la proposition 5.23 proviennent de l'hypothèse (5.19). Comme nous le verrons, pour prouver (5.19) pour \mathbb{P} -presque tout $\tilde{\omega} \in \Omega$, nous devons faire une hypothèse légèrement plus forte (cf. (5.35)) sur la mesure de probabilité p .

5 Démonstration du résultat principal

La résolution des problèmes sur le tore obtenue dans les propositions 5.21 et 5.23 a permis d'exprimer les champs *microscopiques* χ_0 et u_0 en fonction des champs *macroscopiques* ∇u et u . Il reste à établir la loi homogénéisée que devra satisfaire le champ magnétique u .

5.1 Loi effective homogénéisée

Lemme 5.25 *On suppose que l'hypothèse (5.3) est satisfaite et qu'il existe $h > 0$ tel que*

$$\int_M \left(\frac{\varepsilon \rho}{d_0(\varepsilon, \rho, k_0)} \right)^{2+h} dp < \infty \quad (5.35)$$

avec $d_0(\varepsilon, \rho, k_0) := \text{dist}(\varepsilon \rho^2 k_0^2, \sigma_0)$ (σ_0 le spectre de l'opérateur Δ).

Alors, pour \mathbb{P} -presque tout $\tilde{\omega} \in \Omega$, les solutions $u_\eta(\cdot, \tilde{\omega})$ convergent faiblement dans $L^2_{B_R}(\mathbb{R}^2)$ pour $\mu(\cdot, k_0)u$, où u est l'unique solution du problème homogénéisé suivant

$$\text{div}(A(x)\nabla u(x)) + \mu(x, k_0)k_0^2 u(x) = 0, \quad x \in B_R, \quad (5.36)$$

avec

$$a(x) = 1_{\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{B}}(x) + 1_{\mathcal{B}}(x)a^{\text{eff}},$$

et $\mu(\cdot, k_0)$ est donné par

$$\mu(x, k_0) = 1_{\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{B}}(x) + \mu^{\text{eff}}(k_0)1_{\mathcal{B}}(x).$$

La démonstration consiste à passer à la limite faible dans (5.5) puis à utiliser les relations (5.20), (5.29), (5.31) et (5.32).

D'autre part, on peut voir facilement que la partie imaginaire de $\mu^{\text{eff}}(k_0)$ est strictement positive si, et seulement si, la condition $p(\{(\theta, \rho, \varepsilon) \in M \mid \Im m(\varepsilon) > 0\}) > 0$ est vérifiée. On en déduit alors l'unicité du problème (5.36).

5.2 Convergence *forte* double-échelle

Proposition 5.26 *On suppose que l'hypothèse (5.3) est satisfaite. Alors, pour \mathbb{P} -presque tout $\tilde{\omega} \in \Omega$, la solution $u_\eta(\cdot, \tilde{\omega})$ converge fortement double-échelle vers $u_0(x, \tilde{\omega})$, c'est-à-dire*

$$\lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int_{B_R} \left| u_\eta(x, \tilde{\omega}) - u_0(x, T_{\frac{x}{\eta}} \tilde{\omega}) \right|^2 dx = 0. \quad (5.37)$$

Remarque 5.27 Ce résultat généralise donc au cadre aléatoire, les résultats de [8] obtenus dans un cadre périodique. Plus précisément, le cas périodique est obtenu lorsque la mesure p est une mesure de Dirac en un point $m \in M$. Dans ce cas, l'espace de probabilité (Ω, \mathbb{P}) peut être identifié à (Y, \mathcal{L}^2) et le système dynamique se comporte comme $T_{\frac{x}{\eta}} \tilde{\omega} = \tilde{y} + \frac{x}{\eta} - [\tilde{y} + \frac{x}{\eta}]$. On peut voir que, à la translation \tilde{y} près, la formule (5.16) recouvre la définition classique de la convergence double-échelle.

Ainsi, on déduit de la proposition 5.26 que la convergence forte double-échelle a également lieu dans le cas déterministe.

Lemme 5.28 *Fixons $\tilde{\omega} \in \Omega$ et notons $u_\eta(\cdot, \tilde{\omega})$ la solution (5.5), associée à la suite d'ondes incidentes (u_η^i) , convergeant uniformément vers u^i .*

En décomposant $\tilde{\omega} = ((\theta_k)_k, (\rho_k)_k, (\varepsilon_k)_k, y)$, on a

$$\begin{aligned} \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \sup_{k \in J_\eta(\tilde{\omega})} \frac{\eta^2}{d_0^2(\varepsilon_k, \rho_k, k_0)} &= 0, \\ \limsup_{\eta \rightarrow 0^+} \eta \|\Lambda(T_{\frac{\cdot}{\eta}} \tilde{\omega})\|_{H^1(\mathcal{B})} &= 0, \\ \limsup_{\eta \rightarrow 0^+} \sum_{k \in J_\eta(\tilde{\omega})} \frac{\eta^2}{d_0^{2+h}(\varepsilon_k, \rho_k, k_0)} &< \infty, \end{aligned} \quad (5.38)$$

où $h > 0$ et Λ est défini dans (5.32).

PREUVE.

Il existe $\alpha > 0$ tel que $\#J_\eta(\tilde{\omega}) \leq \alpha \eta^{-2}$; alors on peut appliquer la loi forte des grands nombres pour obtenir la première borne dans (5.38) \mathbb{P} -p.s.

D'un autre côté, la proposition 5.23 entraîne que $\Lambda \in H_s^1(\Omega, \mathbb{P})$. La relation (5.12) amène à $\Lambda(T_{\frac{\cdot}{\eta}} \tilde{\omega}) \in L^2(\mathcal{B})$, $\nabla \Lambda(T_{\frac{\cdot}{\eta}} \tilde{\omega}) \in (L^2(\mathcal{B}))^2$. Alors, d'après l'ergodicité du système dynamique, on obtient

$$\begin{aligned} \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int_{\mathcal{B}} |\Lambda(T_{\frac{x}{\eta}} \tilde{\omega})|^2 dx &= |\mathcal{B}| \int_{\Omega} |\Lambda(\omega)|^2 \mathbb{P}(d\omega), \\ \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int_{\mathcal{B}} |\nabla_s \Lambda(T_{\frac{x}{\eta}} \tilde{\omega})|^2 dx &= |\mathcal{B}| \int_{\Omega} |\nabla_s \Lambda(\omega)|^2 \mathbb{P}(d\omega), \end{aligned}$$

pour \mathbb{P} -presque tout $\tilde{\omega} \in \Omega$. En particulier, cela implique que pour un tel $\tilde{\omega}$, on a $\eta \|\Lambda(T_{\frac{x}{\eta}} \tilde{\omega})\|_{H^1(\mathcal{B})}^2$ uniformément borné pour $\eta \in (0, 1)$. En conséquence, la dernière condition de (5.38) est vérifiée \mathbb{P} -p.s.

La troisième borne de (5.38) est vraie \mathbb{P} -p.s. d'après le lemme 2.30. □

PREUVE DE LA PROPOSITION 5.26.

La convergence double-échelle de u_η vers u_0 entraîne la borne

$$\sup_{\eta>0} \|u_\eta(\cdot, \tilde{\omega})\|_{L^2(B_R)} < \infty .$$

En conséquence, grâce au lemme 5.17, on a

$$\sup_{\eta>0} \|u_\eta(\cdot, \tilde{\omega})\|_{H^1(B_R \setminus \mathcal{D}_\eta(\omega))} < \infty . \quad (5.39)$$

Puisque l'hypothèse (5.19) est satisfaite, les résultats de la proposition 5.23 et du théorème 5.25 sont applicables et on a $u_0(x, \omega) = u(x)\Lambda(\omega)$, où u est solution de (5.36) et Λ est donné dans (5.32). Posons

$$\begin{aligned} Y_{k,\eta} &= \eta(k - y + Y), & \mathcal{D}_{k,\eta} &= \eta(k - y + B(\theta_k, \rho_k)) , \\ Y_{k,\eta}^* &= Y_{k,\eta} \setminus \mathcal{D}_{k,\eta}, & J_\eta &= \{i \in \mathbb{Z}^2 : Y_{k,\eta} \subset \mathcal{B}\} , \\ \mathcal{D}_\eta &= \bigcup_{i \in J_\eta} \mathcal{D}_{k,\eta}. \end{aligned}$$

Pour alléger les notations, on préfère écrire $Y_{k,\eta}$ à la place de $Y_{k,\eta}(\tilde{\omega})$ (et de même pour les autres termes).

Avec ces notations, on rappelle que $u_0(x, T_{\frac{x}{\eta}}\tilde{\omega}) = u(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{D}_\eta$. La démonstration est déduite des lemmes 5.29 et 5.30 qui suivent. □

Lemme 5.29 *On a*

$$\lim_{\eta \rightarrow 0^+} \|u_\eta(\cdot, \tilde{\omega}) - u\|_{L^p(B_R \setminus \mathcal{D}_\eta)} = 0, \quad \forall p \in [1, \infty[. \quad (5.40)$$

PREUVE. Considérons les fonctions modifiées $\tilde{u}_\eta \in H^1(B_R)$ définies par

$$\begin{cases} \tilde{u}_\eta(x) = u_\eta(x, \tilde{\omega}) , & x \in B_R \setminus \mathcal{D}_\eta , \\ \Delta \tilde{u}_\eta(x) = 0 , & x \in \mathcal{D}_\eta . \end{cases}$$

À l'aide du lemme (2.12), on déduit

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}_\eta\|_{H^1(B_R)}^2 &= \|u_\eta(\cdot, \tilde{\omega})\|_{H^1(B_R \setminus \mathcal{D}_\eta)}^2 + \sum_{i \in J_\eta} \|\tilde{u}_\eta\|_{H^1(\mathcal{D}_\eta^k)}^2 \\ &\leq \|u_\eta(\cdot, \tilde{\omega})\|_{H^1(B_R \setminus \mathcal{D}_\eta)}^2 + c_\delta \sum_{i \in J_\eta} \|\tilde{u}_\eta\|_{H^1(Y_\eta^k \setminus \mathcal{D}_\eta^k)}^2 = (1 + c_\delta) \|u_\eta(\cdot, \tilde{\omega})\|_{H^1(B_R \setminus \mathcal{D}_\eta)}^2 \end{aligned}$$

qui est uniformément borné par rapport à η en raison de (5.39). Ainsi, à l'aide de l'inclusion compacte de $H^1(B_R) \subset L^p(B_R)$, $p \in [1, \infty[$, on peut extraire une sous-suite

(encore notée \tilde{u}_η) convergeant fortement dans $L^p(B_R)$, $\forall p \in [1, \infty[$. Montrons que sa limite est u (cf. (5.31)). En effet, soit \tilde{u} la limite forte de \tilde{u}_η . En passant à la limite double-échelle avec une fonction test de la forme $\varphi(x)\psi(\omega)$ où ψ est à support dans Σ^* , on obtient

$$\int_{B_R \times \Sigma^*} \tilde{u}(x)\varphi(x)\psi(\omega) dx \mathbb{P}(d\omega) = \int_{B_R \times \Sigma^*} u_0(x, \omega)\varphi(x)\psi(\omega) dx \mathbb{P}(d\omega).$$

Puisque $u_0(x, \omega) = u(x)$ dans Σ^* , on obtient $\tilde{u} = u$ dans B_R . La relation (5.40) est alors déduite de la convergence $\|\tilde{u}_\eta - u\|_{L^2(B_R)} \rightarrow 0$ et de la définition de \tilde{u}_η . \square

Lemme 5.30 *Posons $v_\eta(x) = u_\eta(x, \tilde{\omega}) - u_0(x, T_{\frac{x}{\eta}}\tilde{\omega})$. Sous l'hypothèse (5.38), on a*

$$\lim_{\eta \rightarrow 0^+} \|v_\eta\|_{L^2(\mathcal{D}_\eta)} = 0.$$

PREUVE. On a $\|v_\eta\|_{L^2(\mathcal{D}_\eta)}^2 = \sum_{i \in J_\eta} \|v_\eta\|_{L^2(\mathcal{D}_\eta^k)}^2$. Pour tout $i \in J_\eta$, on applique le lemme 2.13 au terme $\|v_\eta\|_{L^2(\mathcal{D}_\eta^k)}$ avec $\alpha = \frac{\varepsilon_k k_0^2}{\eta^2}$. On obtient

$$\begin{aligned} \|v_\eta\|_{L^2(\mathcal{D}_\eta)}^2 &\leq b_\eta \int_{B_R \setminus \mathcal{D}_\eta} |\nabla v_\eta(x)|^2 dx + b_\eta \sum_{i \in J_\eta} \eta^2 \int_{\mathcal{D}_\eta^k} |\Delta v_\eta(x) + \frac{\varepsilon_k k_0^2}{\eta^2} v_\eta(x)|^2 dx \\ &\quad + \sum_{i \in J_\eta} \frac{C}{d_0^2(\varepsilon_k, \rho_k, k_0)} \int_{Y_\eta^k \setminus \mathcal{D}_\eta^k} |v_\eta(x)|^2 dx \quad (5.41) \end{aligned}$$

où $b_\eta := \sup_{k \in J_\eta} \frac{\eta^2}{d_0^2(\varepsilon_k, \rho_k, k_0)}$. On montre en trois étapes que tous les termes dans (5.41) convergent vers zéro quand $\eta \rightarrow 0$.

Étape 1. Montrons que $b_\eta \int_{B_R \setminus \mathcal{D}_\eta} |\nabla v_\eta(x)|^2 dx \rightarrow 0$.

On déduit de (5.11) et de (5.25) que $u_0(x, T_{\frac{x}{\eta}}\tilde{\omega}) = u(x)$ pour $x \in B_R \setminus \mathcal{D}_\eta$. D'après l'inégalité de Young, il vient alors

$$\sup_{\eta > 0} \int_{B_R \setminus \mathcal{D}_\eta} |\nabla v_\eta(x)|^2 dx \leq 2 \sup_{\eta > 0} \int_{B_R \setminus \mathcal{D}_\eta} |\nabla u_\eta(x, \tilde{\omega})|^2 dx + 2 \|\nabla u\|_{L^2(B_R)}^2 < \infty.$$

On termine alors l'étape 1 à l'aide de l'équation (5.38) qui montre que $b_\eta \rightarrow 0$.

Étape 2. Montrons que

$$\lim_{\eta \rightarrow 0^+} b_\eta \sum_{i \in J_\eta} \eta^2 \int_{\mathcal{D}_{k, \eta}} |\Delta v_\eta(x) + \frac{\varepsilon_k k_0^2}{\eta^2} v_\eta(x)|^2 dx = 0. \quad (5.42)$$

De la même manière que dans l'étape précédente, on utilise le fait que $T_{\frac{x}{\eta}}\tilde{\omega} \in \Sigma$ si $x \in \mathcal{D}_\eta$ ainsi que la représentation (5.25). Nous rappelons aussi que $\varepsilon_k = \varepsilon_0(T_{\frac{x}{\eta}}\tilde{\omega})$ pour $x \in \mathcal{D}_\eta^k$. Alors

$$\begin{aligned} \Delta v_\eta(x) + \frac{\varepsilon_k k_0^2}{\eta^2} v_\eta(x) &= \Delta u_\eta(x) + \varepsilon_0(T_{\frac{x}{\eta}}\tilde{\omega}) \frac{k_0^2}{\eta^2} u_\eta(x) \\ &\quad - \eta^{-2} u(x) \left(\Delta_s \Lambda(T_{\frac{x}{\eta}}\tilde{\omega}) + \varepsilon_0(T_{\frac{x}{\eta}}\tilde{\omega}) k_0^2 \Lambda(T_{\frac{x}{\eta}}\tilde{\omega}) \right) \\ &\quad - \eta^{-1} \nabla u(x) \cdot \nabla_s \Lambda(T_{\frac{x}{\eta}}\tilde{\omega}) - \Delta_x u(x) \Lambda(T_{\frac{x}{\eta}}\tilde{\omega}) \\ &= -\eta^{-1} \nabla u(x) \cdot \nabla_s \Lambda(T_{\frac{x}{\eta}}\tilde{\omega}) - \Delta_x u(x) \Lambda(T_{\frac{x}{\eta}}\tilde{\omega}). \end{aligned}$$

Ici nous avons exploité le fait que u_η est solution de (5.5) et que $\varepsilon_0(T_{\frac{x}{\eta}}\tilde{\omega})\eta^{-2} = (a_\eta(x, \tilde{\omega}))^{-1}$ pour $x \in \mathcal{D}_\eta$. Nous avons aussi utilisé la relation $u(x)\Lambda(\omega) = u_0(x, \omega)$ et le fait que u_0 est solution de (5.26). Il résulte alors

$$\begin{aligned} \eta^2 \sum_{i \in J_\eta} \int_{\mathcal{D}_\eta^k} \left| \Delta v_\eta(x) + \frac{\varepsilon_k k_0^2}{\eta^2} v_\eta(x) \right|^2 dx &\leq \\ &\leq \eta \int_{\mathcal{D}_\eta} |\nabla_x u(x) \cdot \nabla_s \Lambda(T_{\frac{x}{\eta}}\tilde{\omega})|^2 dx + \eta^2 \int_{\mathcal{D}_\eta} |\Delta_x u(x) \Lambda(T_{\frac{x}{\eta}}\tilde{\omega})|^2 dx. \end{aligned} \quad (5.43)$$

Puisque u est solution du problème elliptique (5.36), on a $u \in C^\infty(\mathcal{B})$ et donc que (5.43) est borné par

$$\eta \|\nabla_x u\|_{L^\infty(\mathcal{B})}^2 \int_{\mathcal{B}} |\nabla_s \Lambda(T_{\frac{x}{\eta}}\tilde{\omega})|^2 dx + \eta^2 \|\Delta_x u\|_{L^\infty(\mathcal{B})}^2 \int_{\mathcal{B}} |\Lambda(T_{\frac{x}{\eta}}\tilde{\omega})|^2 dx.$$

Il résulte donc de (5.38) la convergence (5.42).

Étape 3. Montrons pour finir que

$$\sum_{i \in J_\eta} \frac{1}{d_0^2(\varepsilon_k, \rho_k, k_0)} \int_{Y_\eta^k \setminus \mathcal{D}_\eta^k} |v_\eta(x)|^2 dx \rightarrow 0.$$

Posons $q = (2 + h)/2$, où h est comme dans le lemme 5.28 et q^* tel que $q^{-1} + q^{*-1} = 1$. En appliquant deux fois l'inégalité de Hölder, une fois sur l'intégrale et une autre sur la somme par rapport à $i \in J_\eta$, on obtient

$$\sum_{i \in J_\eta} \frac{1}{d_0^2(\varepsilon_k, \rho_k, k_0)} \int_{Y_{k, \eta}^*(\omega)} |v_\eta|^2 \leq \left(\sum_{i \in J_\eta(\omega)} \frac{\eta^2}{d_0^{2q}(\varepsilon_k, \rho_k, k_0)} \right)^{\frac{1}{q}} \|v_\eta\|_{L^{2q^*}(B_R \setminus \mathcal{D}_\eta)}^2.$$

D'après (5.38), le premier terme du membre de droite est borné pour $\eta \rightarrow 0^+$. D'autre part, à l'aide du lemme 5.29, le second terme converge vers zéro quand $\eta \rightarrow 0^+$. Ceci termine la dernière étape. Le lemme 5.30 est alors démontré. \square

5.3 Justification de l'hypothèse d'énergie

Théorème 5.31 *Sous la condition (5.35), la borne (5.19) a lieu \mathbb{P} -presque sûrement dans toute boule B_R telle que $\mathcal{B} \subset\subset B_R$.*

PREUVE. Supposons par l'absurde que l'équation (5.35) est vraie pour un certain $\tilde{\omega} \in \Omega$ et que les solutions $u_{\eta_n}(\cdot, \tilde{\omega})$ ne sont pas uniformément bornées dans $L^2(B_R)$ par rapport à η . On suppose de plus que pour de tels $\tilde{\omega}$ et $h > 0$ donnés dans (5.35), la borne (5.38) est vérifiée.

On suppose que pour une suite $\eta_n \searrow 0$, $n \in \mathbb{N}$ on a

$$t_n = \|u_{\eta_n}(\cdot, \tilde{\omega})\|_{L^2(B_R)} \nearrow \infty \quad \text{as } n \rightarrow \infty.$$

Posons

$$\tilde{u}_n = \frac{u_{\eta_n}(\cdot, \tilde{\omega})}{t_n}.$$

Les fonctions \tilde{u}_n satisfont

$$\begin{cases} \operatorname{div} a_{\eta_n}(x, \omega) \nabla \tilde{u}_n(x) + k_0^2 \tilde{u}_n(x) = 0, & x \in \mathbb{R}^2, \\ \|\tilde{u}_n\|_{L^2(B_R)} = 1, \\ \tilde{u}_n - u^i/t_n \text{ vérifie la condition (5.6)}. \end{cases} \quad (5.44)$$

Puisque la famille de solutions $\{\tilde{u}_n, n \in \mathbb{N}\}$ vérifie (5.19), on déduit du lemme 5.16 et de la proposition 5.23 que \tilde{u}_n converge double-échelle vers $\tilde{u}_0(x, \omega) := u(x)\Lambda(\omega)$ satisfaisant (5.31) avec u la solution de (5.36) associée à une onde incidente nulle. Du fait que $\Im m(\mu^{\text{eff}}(k_0)) > 0$, la solution de (5.36) est unique et donc identiquement nulle tout comme la limite double-échelle de \tilde{u}_n . D'un autre côté, à l'aide de l'hypothèse (5.35), on peut appliquer le théorème 5.26 avec $\tilde{u}_0 = 0$ et déduire

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\tilde{u}_n\|_{L^2(B_R)} = 0.$$

Ceci est en contradiction avec (5.44) et nous permet de conclure que si p vérifie (5.35) alors, la borne (5.19) est satisfaite \mathbb{P} -presque sûrement. □

6 Loi de perméabilité effective dépendant de la fréquence

Nous avons montré, dans un cadre aléatoire, que des métamatériaux présentant une activité magnétique pouvaient être obtenus à l'aide de structures diélectriques. À ce niveau, il est important de préciser le comportement de la perméabilité effective μ^{eff} en fonction de la fréquence et de la loi de distribution des permittivités et des rayons décrivant la structure.

6.1 Simulations numériques

Commençons avec le cas où p est une masse de Dirac en un point fixé $(\rho_0, \theta_0, \varepsilon_0) \in M$. Nous sommes donc dans le cas déterministe comme dans [8] et la perméabilité effective est donnée par

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu}^{\text{eff}}(k_0) &= 1 + \sum_{\lambda \in \sigma_0} \frac{\varepsilon_0 \rho_0^4 k_0^2}{\lambda - \varepsilon_0 \rho_0^2 k_0^2} \|P_{V_\lambda(1)}\|^2 \\ &= 1 + \sum_{\lambda \in \sigma_0} \xi(\lambda) \|P_{V_\lambda(1)}\|^2. \end{aligned} \quad (5.45)$$

On suppose pour simplifier que $\Im(\varepsilon_0) = 0$ (diélectrique sans perte). On associe, à chaque valeur propre $\lambda \in \Lambda$, la fréquence f_λ qui rend la composante $\xi(\lambda)$ singulière ($k_0^2 = \varepsilon_0 \mu_0 f^2$). Ces fréquences sont appelées *fréquences de résonances*. Elles localisent les zones où $\boldsymbol{\mu}^{\text{eff}}(\omega)$ présente de fortes variations. Plus précisément, il est évident d'après (5.45) que

$$\lim_{f \rightarrow f_\lambda^+} \boldsymbol{\mu}^{\text{eff}}(f) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{f \rightarrow f_\lambda^-} \boldsymbol{\mu}^{\text{eff}}(f) = +\infty.$$

Ceci montre en particulier que la perméabilité effective est négative dans autant de bandes de fréquences qu'il y a de valeurs propres dans σ_0 . Ces zones où $\boldsymbol{\mu}^{\text{eff}}(f) < 0$ constituent des bandes de fréquences interdites (le champ est non propagatif dans le matériau) du fait que la permittivité reste positive (cf. chapitre 1).

Cet effet est représenté dans la partie gauche de la figure 5.2, où les parties réelle et imaginaire de $\boldsymbol{\mu}^{\text{eff}}$ sont tracées pour $\varepsilon_0 = 100 + 5i$ et $\rho_0 = 0.375$ en fonction de la longueur d'onde normalisée $\frac{\lambda}{d}$ ($\lambda = \frac{2\pi}{k_0}$ et d est la distance initiale séparant les inclusions (cf. remarque 5.1)).

Précisons maintenant l'influence du caractère aléatoire de la structure sur le comportement de la loi de perméabilité. On remarque facilement que l'intégrale dans (5.7) va moyenniser les effets des résonances. En effet, puisque $(\rho, \theta, \varepsilon) \in M$ n'est pas fixé dans ce cas, nous avons pour chacun d'eux une fréquence de résonance *différente* $k_n(\varepsilon, \rho) = \sqrt{\frac{\lambda_n}{\Re(\varepsilon)\rho^2}}$. Ceci va amortir les variations de $\boldsymbol{\mu}^{\text{eff}}$ comme nous le met en évidence dans la partie droite de la figure 5.2.

Notons d'autre part que, dans le cas de déterministe, il a été étudié numériquement le domaine de validité de la loi homogénéisée (cf. [24]). Il est montré en particulier que le taux de remplissage doit rester en dessous de 0,5 pour que la loi limite décrive bien le comportement de la structure réelle.

6.2 Le cas de diélectriques avec très faibles pertes

Dans cette section, nous voulons discuter de la dépendance du problème effectif par rapport à la loi de permittivité : en particulier dans le cas où cette loi a son support sur l'axe des réels (milieux non dissipatifs) et peut violer la condition d'application de notre

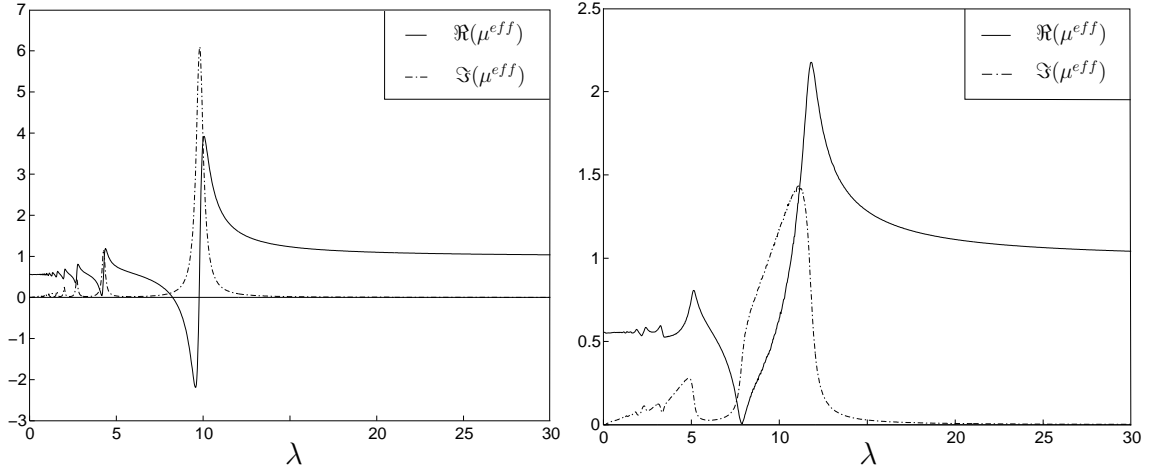


FIGURE 5.2: Influence de la loi p sur la perméabilité μ^{eff} . Sur la gauche, les rayons des inclusions sont fixés à 0.375 et sur la droite les rayons suivent une loi uniforme entre 0.3 et 0.45. Dans les deux cas la loi de permittivité est une masse de Dirac au point $100 + 5i$.

théorème principal (5.35). Pour cela, on utilise la procédure d'approximation standard dans laquelle la loi de distribution des centres, rayons et permittivités est donnée par

$$p_h := \frac{1}{h} p\left(\theta, \rho, a + i\frac{b}{h}\right), \quad (5.46)$$

où $h > 0$ est un petit paramètre destiné à tendre vers zéro. Ici, on suppose pour simplifier que p est donné par

$$p(\theta, \rho, a + ib) = g(a) da \otimes \nu(\theta, \rho) \otimes \zeta(b).$$

Pour tout $h > 0$, le théorème 5.25 nous donne la loi de perméabilité suivante

$$\mu_h^{\text{eff}} := 1 + \sum_n I_{h,n} \left(\int_{B_1} \varphi_n \right)^2,$$

où $I_{h,n}$ est défini par

$$I_{h,n} := \int_M \frac{\varepsilon \rho^4}{\alpha_n - \rho^2 \varepsilon} p_h(d\theta d\rho d\varepsilon), \quad \alpha_n := \frac{\lambda_n}{k_0}. \quad (5.47)$$

Lorsque $h \rightarrow 0$, la loi de permittivité se concentre sur l'axe des réels

$$p_h \xrightarrow{*} \tilde{p} := g(a) da \otimes \bar{\nu}(d\rho),$$

où $\bar{\nu}$ est la marginale de ν . On suppose que la densité g satisfait la condition suivante pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \int \|g'\|_{L^\infty([\frac{\alpha_n}{\rho^2} - \beta, \frac{\alpha_n}{\rho^2} + \beta])} \bar{\nu}(d\rho) < \infty. \quad (5.48)$$

Proposition 5.32 *Sous l'hypothèse (5.48), on a que $\boldsymbol{\mu}_h^{\text{eff}} \rightarrow \boldsymbol{\mu}^{\text{eff}}$ où*

$$\boldsymbol{\mu}^{\text{eff}}(k_0) = 1 + \sum_{n \in \mathbb{N}} I_n(k_0) \left(\int_{B_1} \varphi_n \right)^2, \quad (5.49)$$

avec I_n le nombre complexe dont les parties réelle et imaginaire sont données par

$$\Re(I_n(k_0)) = \int \text{PV} \left(\int \frac{a\rho^4}{\lambda_n - a\rho^2} g(a) da \right) \bar{\nu}(d\rho),$$

$$\Im(I_n(k_0)) = \frac{\pi\lambda_n}{k_0^2} \int g\left(\frac{\lambda_n}{k_0^2\rho^2}\right) \bar{\nu}(d\rho).$$

La notation PV réfère à la valeur principale de Cauchy d'une intégrale singulière définie par

$$\text{PV} \left(\int \frac{1}{a} g(a) \right) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R} \setminus]-\varepsilon, \varepsilon[} \frac{1}{a} g(a) da,$$

(voir [45, Vol 1 p. 136]).

Remarque 5.33 Si $\Im(\boldsymbol{\mu}^{\text{eff}}(k_0)) > 0$, on peut montrer un résultat légèrement plus fort. Considérant u_h la solution de (5.36) associée à la loi p_h , on a que $u_h \rightarrow u$ converge fortement dans $L_{loc}^2(\mathbb{R}^2)$ vers la solution u de

$$\begin{cases} \text{div}(a(x)\nabla u(x)) + \mu(x, k_0)k_0^2 u(x) = 0, & x \in \mathbb{R}^2, \\ u - u^i \text{ vérifie la condition de radiation de Somerfield,} \end{cases}$$

avec $\mu(x, k_0) = 1_{\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{B}}(x) + \boldsymbol{\mu}^{\text{eff}}(k_0)1_{\mathcal{B}}(x)$ et $\boldsymbol{\mu}^{\text{eff}}(k_0)$ donné dans (5.49).

(La preuve de ce résultat utilise le même type d'argument par contradiction que celui utilisé dans la preuve du théorème 5.31.)

PREUVE DE LA PROPOSITION 5.32.

On prouve ici la convergence $I_{n,h} \rightarrow I_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En substituant les expressions de p_h , g , $\bar{\nu}$ et ζ dans (5.47), on obtient

$$I_{h,n} = \int \rho^2 \frac{(a + ihb)\rho^2}{\alpha_n - (a + ihb)\rho^2} g(a) da \bar{\nu}(d\rho) \zeta(db) = \Re(I_{h,n}) + i\Im(I_{h,n}), \quad (5.50)$$

où

$$\begin{aligned} \Re(I_{h,n}) &= - \int \rho^2 \bar{\nu}(d\rho) + \int \frac{\rho^2 \alpha_n (\alpha_n - a\rho^2)}{(\alpha_n - a\rho^2)^2 + (hb\rho^2)^2} g(a) da \bar{\nu}(d\rho) \zeta(db), \\ \Im(I_{h,n}) &= \int \frac{\rho^4 \alpha_n hb}{(\alpha_n - a\rho^2)^2 + (hb\rho^2)^2} g(a) da \bar{\nu}(d\rho) \zeta(db). \end{aligned}$$

On fixe $\beta > 0$ et pour $\Re(I_h)$ on a, après le changement de variables $(a\rho^2 - \alpha_n) \rightarrow a\rho^2$,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho^2 \alpha_n (\alpha_n - a\rho^2)}{(\alpha_n - a\rho^2)^2 + (hb\rho^2)^2} g(a) da &= - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha_n a \rho^4}{(a\rho^2)^2 + (hb\rho^2)^2} g\left(a + \frac{\alpha_n}{\rho^2}\right) da \\ &= - \int_{|a|>\beta} \frac{\alpha_n a \rho^4}{(a\rho^2)^2 + (hb\rho^2)^2} g\left(a + \frac{\alpha_n}{\rho^2}\right) da - \int_{|a|\leq\beta} \frac{\alpha_n a \rho^4}{(a\rho^2)^2 + (hb\rho^2)^2} g\left(a + \frac{\alpha_n}{\rho^2}\right) da \end{aligned}$$

Le dernier terme dans le membre de droite est borné par

$$\begin{aligned} \int_{|a|\leq\beta} \left| \frac{\alpha_n a \rho^4}{(a\rho^2)^2 + (hb\rho^2)^2} g\left(a + \frac{\alpha_n}{\rho^2}\right) \right| da &= \\ &= \int_0^\beta \left| \frac{\alpha_n a \rho^4}{(a\rho^2)^2 + (hb\rho^2)^2} \left(g\left(a + \frac{\alpha_n}{\rho^2}\right) - g\left(-a + \frac{\alpha_n}{\rho^2}\right) \right) \right| da \\ &= \int_0^\beta \frac{\alpha_n a \rho^4}{(a\rho^2)^2 + (hb\rho^2)^2} \left| \int_{-a}^{+a} g'\left(a' + \frac{\alpha_n}{\rho^2}\right) da' \right| da \\ &\leq 2 \|g'\|_{L^\infty([\frac{\alpha_n}{\rho^2}-\beta, \frac{\alpha_n}{\rho^2}+\beta])} \int_0^\beta \frac{\alpha_n a^2 \rho^4}{(a\rho^2)^2 + (hb\rho^2)^2} da \\ &\leq 2\beta \alpha_n \|g'\|_{L^\infty([\frac{\alpha_n}{\rho^2}-\beta, \frac{\alpha_n}{\rho^2}+\beta])}. \end{aligned}$$

Alors, pour tout $\beta > 0$, on a

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho^2 \alpha_n (\alpha_n - a\rho^2)}{(\alpha_n - a\rho^2)^2 + (hb\rho^2)^2} g(a) da \right| \\ \leq \int_{|a-\frac{\alpha_n}{\rho^2}|>\beta} \frac{\alpha_n \rho^2}{|a\rho^2 - \alpha_n|} g(a) da + 2\beta \alpha_n \|g'\|_{L^\infty([\frac{\alpha_n}{\rho^2}-\beta, \frac{\alpha_n}{\rho^2}+\beta])} \end{aligned}$$

qui est indépendant de b et uniformément intégrable par rapport à ρ à l'aide de (5.48) et de la remarque 5.24.

On peut alors appliquer le théorème de convergence dominé pour avoir, pour tout $\beta > 0$,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \Re(I_h) = - \int \rho^2 \bar{\nu}(d\rho) - \iint \left(\int_{|a|>\beta} \frac{\alpha_n}{a} g\left(a + \frac{\alpha_n}{\rho^2}\right) da \right) \zeta(db) \bar{\nu}(d\rho) + O(\beta),$$

où $O(\beta) \rightarrow 0$ quand $\beta \rightarrow 0$. En passant à la limite $\beta \rightarrow 0$ dans la relation précédente, on obtient $\Re(I_{h_n}) \rightarrow \Re(I_n)$.

Pour calculer $\lim_{h \rightarrow 0} \Im(I_h)$, on définit la fonction $f_{h,\rho,b}(a)$ par

$$f_{h,\rho,b}(a) = \frac{\alpha_n hb\rho^4}{(\alpha_n - a\rho^2)^2 + (hb\rho^2)^2}.$$

On vérifie facilement que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{h,\rho,b}(a) da = \alpha_n \pi.$$

De plus, $f_{h,\rho,b}$ converge uniformément vers 0 sur $(-\infty, \alpha_n/\rho^2 - \beta] \cup [\alpha_n/\rho^2 + \beta, \infty)$, pour tout $\beta > 0$. Puisque g est continu, on a immédiatement que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{h,\rho,b}(a)g(a) da = \alpha_n \pi g\left(\frac{\alpha_n}{\rho^2}\right).$$

De plus, la fonction $(\rho, b) \mapsto \int f_{h,\rho,b}(a)g(a)da$ satisfait la borne

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} f_{h,\rho,b}(a)g(a) da \right| \leq \alpha_n \pi \|g(a)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}.$$

On peut alors appliquer le théorème de convergence dominée pour obtenir $\mathfrak{S}(I_{h,n}) \rightarrow \mathfrak{S}(I_n)$.

□

6 Approximation numérique des tenseurs effectifs

Sommaire

Introduction	161
1 Méthode de Galerkin pour l'approximation spectrale	162
2 Approximation du tenseur $\epsilon^{\text{eff}}(\omega)$ obtenu dans le chapitre 3	165
3 Approximation du tenseur $\mu^{\text{eff}}(\omega)$ obtenu dans le chapitre 4	167
3.1 Éléments d'arêtes de Nédélec	167
3.2 Un résultat de densité	174
3.3 Approximation du tenseur μ^{eff}	180
4 Calcul effectif des opérateurs discrétisés	181
4.1 Noyau de Green périodique.	181
4.2 Extraction de la singularité du noyau.	183

Introduction

Le comportement de cristaux photoniques fortement contrastés a été étudié théoriquement dans deux situations différentes, dans les chapitres 3 et 4. La théorie de l'homogénéisation, conjuguée à une étude des micro-résonances, a permis d'identifier des tenseurs de permittivité et de perméabilité effectifs dépendant de la fréquence ω . Les phénomènes de changements de signes, mis en évidence sur la partie réelle des valeurs propres de ces tenseurs, ont des conséquences importantes en physique. Pour que ces phénomènes soient observés dans la pratique, il est crucial de connaître de façon précise, les intervalles de fréquences où les tenseurs ϵ^{eff} et μ^{eff} présentent ces propriétés exotiques. L'objet de ce chapitre est de mettre en œuvre une méthode d'approximation numérique tridimensionnelle qui pourra être testée sur des exemples types de géométries.

Ce chapitre est organisé en quatre sections.

Nous commençons par présenter une méthode générale de type Galerkin permettant d'approcher les valeurs et vecteurs propres d'un opérateur compact, auto-adjoint et strictement positif.

Dans la seconde section, nous mettrons en œuvre cette méthode afin d'approcher le spectre de l'opérateur R et de déduire l'approximation du tenseur de permittivité effectif ϵ^{eff} obtenu dans le chapitre 3.

Dans la troisième section, nous approcherons le spectre de l'opérateur \mathbf{A} . La discrétisation de $Z_0 := \{\mathbf{f} \in \mathcal{L}^2(\Sigma; \mathbb{C}^3), \operatorname{div} \mathbf{f} = 0, \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\Sigma\}$ sera obtenue à l'aide des éléments d'arêtes de Nédélec pour lesquels nous démontrerons un résultat de "densité". Il en résultera l'approximation des composantes du tenseur $\boldsymbol{\mu}^{\text{eff}}$.

Pour finir, nous donnerons une formulation explicite et implémentable des opérateurs discrétisés résultant de la méthode d'approximation spectrale.

1 Méthode de Galerkin pour l'approximation spectrale

Introduisons quelques notations.

On considère X un espace de Hilbert complexe muni du produit scalaire noté $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$ et B et $(B_h)_{h>0}$ des opérateurs linéaires compacts auto-adjoints de X dans X .

Notons $\mathcal{L}(X)$ l'ensemble des fonctions linéaires continues de X dans X et introduisons $\|\cdot\|_h$ la semi-norme de $\mathcal{L}(X)$ définie par

$$\|C\|_h := \sup_{\substack{x \in X_h \\ \|x\|_X=1}} \|Cx\|_X \quad \forall C \in \mathcal{L}(X).$$

On considère $\lambda^1 > \lambda^2 > \dots > \lambda^n > \dots \geq 0$ les valeurs propres de l'opérateur B et V_{λ^n} le sous-espace propre associé à λ^n $\{n \in \mathbb{N}\}$. De même, on notera $\lambda_h^1 > \lambda_h^2 > \dots > \lambda_h^N > 0$ les valeurs propres de B_h et $V_{\lambda_h^n}^n$ le sous-espace propre associé à λ_h^n .

À un espace vectoriel $V \subset X$, on associe P_V le projecteur orthogonal de X dans V . De plus, on introduit la distance

$$d(u, V) = \inf_{v \in V} \|u - v\|_X.$$

On considère les deux conditions suivantes

$$\|B_h x - Bx\|_X \rightarrow 0 \quad \forall x \in X, \quad (6.1)$$

$$\{B_h - B\} \quad \text{uniformément compact,} \quad (6.2)$$

(voir définition 2.25 pour l'uniforme compacité).

Théorème 6.1 *On suppose que les conditions (6.1) et (6.2) sont satisfaites.*

Alors, pour tout λ valeur propre de B de multiplicité $m \in \mathbb{N}$, il existe des valeurs propres $(\lambda_h^n)_{n \in I_\lambda}$ de B_h ($I_\lambda \subset \mathbb{N}$) telles que leur multiplicité totale soit exactement m et que

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \lambda_h^n = \lambda \quad \forall n \in I_h. \quad (6.3)$$

De plus en notant $W_{I_\lambda}^h := \bigoplus_{n \in I_\lambda} V_{\lambda_h^n}^n$, on a

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \|P_{W_{I_\lambda}^h} x - P_{V_\lambda} x\|_X = 0 \quad \forall x \in X. \quad (6.4)$$

Ce résultat fondamental est déduit du lemme 2.26 et de la proposition 2.29. □

Introduisons $(X_h)_{h>0}$ une suite de sous-espaces vectoriels de X de dimension $p_h \in \mathbb{N}$ finie.

Proposition 6.2 *On suppose que la suite d'espaces $(X_h)_h$ vérifie l'hypothèse suivante*

$$\forall x \in X, \quad \lim_{h \rightarrow 0} d(x, X_h) = 0 . \quad (6.5)$$

On définit pour B compact auto-adjoint, l'opérateur B_h donné par

$$B_h := P_h B P_h . \quad (6.6)$$

Alors, la famille $\{B_h - B\}$ est uniformément compacte.

PREUVE.

L'opérateur B étant compact, il suffit de montrer que la famille $\{B_n\}$ est uniformément compacte. Montrons alors que $\cup_h B_h(B_X)$ est relativement compact dans X (B_X est la boule unité de X).

Soit $(x_k)_k \subset \cup_h B_h(B_X)$. On peut supposer, sans perte de généralités, que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $x_k \in B_{h_k}$ où B_{h_k} est une sous-suite de B_h . En effet, si tel n'était pas le cas, alors il existerait $N \in \mathbb{N}$ tel que $x_k \subset \cup_{i=1}^N B_i(B_X)$ pour tout k suffisamment grand. Or, cet ensemble est compact en tant que réunion finie de compacts, ce qui entraînerait le résultat attendu.

Montrons que la suite (x_k) admet une valeur d'adhérence. Par définition, pour tout $k \in \mathbb{N}$ il existe $y_k \in B_X$ tel que

$$x_k = B_{h_k} y_k .$$

On note alors y une limite faible de la suite bornée $(y_k)_k$ (quitte à extraire une sous-suite). Montrons à présent que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|x_k - B y\|_X = 0 .$$

On a par définition de B_h

$$\|x_k - B y\|_X = \|B_{h_k} y_k - B y\|_X = \|P_{h_k} B P_{h_k} y_k - B y\|_X .$$

En introduisant le terme $B P_{h_k} y_k$ dans la norme précédente, on prouve que

$$\|x_k - B y\|_X \leq \|(P_{h_k} - Id) B P_{h_k} y_k\|_X + \|B P_{h_k} y_k - B y\|_X . \quad (6.7)$$

On sait par hypothèse que l'opérateur $P_{h_k} - Id$ converge fortement vers zéro. La démonstration consiste alors à prouver que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|B P_{h_k} y_k - B y\|_X = 0 . \quad (6.8)$$

On a $\|P_{h_k} y_k\| \leq \|y_k\| \leq 1$ puisque $y_k \in B_X$. Ainsi, puisque B est compact, il existe $z \in X$ tel que

$$\|BP_{h_k} y_k - z\| \rightarrow 0 ,$$

au moins à une sous-suite près. En ajoutant à cela que $P_{h_k} y_k \rightharpoonup y$ faiblement dans X , on déduit que $z = By$ et donc (6.8).

L'inégalité (6.7) et la convergence forte (6.8) montrent alors que $\|x_k - By\|_X \rightarrow 0$. Ceci prouve que By est une valeur d'adhérence de la suite $(x_k)_k$ ce qui termine la démonstration. □

Formulation explicite du problème spectral discrétisé.

On note $p_h := \dim(X_h)$ et on fixe $\{\psi_h^k\}_{k=1}^{p_h}$ une base de X_h (à priori non orthonormée). On introduit les matrices symétriques \mathbf{G}_h et \mathbf{D}_h dont les coefficients sont donnés par

$$(\mathbf{G}_h)_{kl} := \langle B\psi_h^k, \psi_h^l \rangle \quad , \quad (\mathbf{D}_h)_{kl} := \langle \psi_h^k, \psi_h^l \rangle \quad \forall (k, l) \in \{1, \dots, p_h\}^2 , \quad (6.9)$$

ainsi que le problème aux valeurs propres suivant

$$\text{trouver } (\lambda, \mathbf{d}) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{p_h} \text{ tel que } \quad \mathbf{G}_h \mathbf{d} = \lambda \mathbf{D}_h \mathbf{d} . \quad (6.10)$$

Lemme 6.3 *Pour tout $h > 0$ et $\mathbf{d} = (d^k)_k \in \mathbb{R}^{p_h}$, posons*

$$v_h := \sum_{k=1}^{p_h} d^k \psi_h^k .$$

Alors, on a l'équivalence suivante

$$(\lambda, \mathbf{d}) \text{ solution de (6.10)} \quad \Leftrightarrow \quad B_h v_h = \lambda v_h .$$

PREUVE. En considérant le produit scalaire par les éléments ψ_h^k formant la base de X_h , l'équation $B_h v_h = \lambda v_h$ est équivalente au système d'équations

$$\sum_{k=1}^{p_h} d^k \langle B_h \psi_h^k, \psi_h^l \rangle = \lambda \sum_{k=1}^{p_h} d^k \langle \psi_h^k, \psi_h^l \rangle \quad , \quad l \in \{1, \dots, p_h\} ,$$

où d^k est la k -ième coordonnée de v_h dans la base $\{\psi_h^k\}$.

D'après la définition (6.9) des matrices \mathbf{G}_h et \mathbf{D}_h , ce système n'est autre que (6.10). □

Remarque 6.4 En associant les résultats donnés dans le théorème 6.1 et la proposition 6.2, on obtiendra l'approximation des spectres des opérateurs \mathbf{Q} et R donnés dans (4.81) et la définition 3.15. En pratique, nous effectuerons une décomposition en éléments finis de leurs domaines qui vérifiera la condition de densité (6.5). De plus, afin de construire explicitement les problèmes aux valeurs propres approchés, donnés dans le lemme 6.3, il sera nécessaire dans chacun des cas, de construire une base de l'espace discrétisé.

On précise que ces deux points (décomposition en éléments finis et construction d'une base) seront délicats dans le cas de l'approximation de l'opérateur \mathbf{A} , en raison de la complexité de son domaine $Z_0 := \{\mathbf{f} \in L^2(\Sigma) , \operatorname{div} \mathbf{f} = 0 , \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\Sigma\}$.

2 Approximation du tenseur $\varepsilon^{\text{eff}}(\omega)$ obtenu dans le chapitre 3

Rappel du tenseur effectif.

On considère $Y := [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^3$ et $\Sigma := \mathcal{D} \times [-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}] \subset Y$ représentant respectivement la cellule de base et une inclusion de la structure (mise à l'échelle dans la cellule unité). On note \mathcal{D}^\pm les deux bases du cylindre Σ . L'opérateur R associe à $w \in L^2(\mathcal{D})$, la fonction $[\phi_w] \in L^2(\mathcal{D})$ où pour tout $\phi \in W^{1,2}(Y)$, $[\phi]_l(y) := \frac{1}{l} \left(\phi(y, -\frac{l}{2}) - \phi(y, \frac{l}{2}) \right)$ et ϕ_w est l'unique élément de $W_{\#}^{1,2}(Y)$ (à une constante près) vérifiant la relation

$$-\Delta \phi_w = w(\delta_{\mathcal{D}^+} - \delta_{\mathcal{D}^-}) \quad \text{dans } Y .$$

D'après le lemme 3.19, l'opérateur R est positif, compact et auto-adjoint. On considère $\lambda^1 > \lambda^2 > \dots > \lambda^n > \dots \geq 0$ les valeurs propres de R et V_{λ^n} le sous-espace propre associé à λ^n $\{n \in \mathbb{N}\}$.

Avec ces notations, le tenseur diagonal ε^{eff} est donné par

$$\varepsilon_{11}^{\text{eff}} = \varepsilon_{22}^{\text{eff}} = 1 \quad \text{et} \quad \varepsilon_{33}^{\text{eff}} = 1 - l \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{\frac{k_0^2}{2\pi\gamma} - \lambda^n + \frac{i}{\kappa}} \|P_{V_{\lambda^n}}\|^2 . \quad (6.11)$$

Les coefficients scalaires γ et κ représentent respectivement la capacité et la conductivité des fibres apparaissant dans le problème initial (cf. (3.7), (3.8)) et k_0 est le nombre ($k_0 = \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0 \omega}$).

Discrétisation du domaine \mathcal{D} . Construisons un espace X_h de dimension finie vérifiant (6.5) (avec $X = L^2(\mathcal{D})$) à l'aide d'une décomposition en éléments finis de $L^2(\mathcal{D})$.

On introduit \mathcal{K}_h une discrétisation du domaine \mathcal{D} formée de rectangles notés D_i pour $i \in \{1, \dots, p_h\}$ de côtés h_k dans la direction e_k . On note $h := \sup\{h_1; h_2\}$.

Pour plus de simplicité, nous choisissons des fonctions élémentaires constantes sur chaque élément de la discrétisation. Ces fonctions, notées u_i pour $i \in \{1, \dots, p_h\}$, sont définies par

$$u_i := \frac{1}{\sqrt{|K_i|}} 1_{D_i} , \quad (6.12)$$

de façon à ce que $\|u_i\|_{L^2(\mathcal{D})} = 1$ pour tout $i \in \{1, \dots, p_h\}$. Pour alléger les notations, nous choisissons de ne pas faire apparaître la dépendance en h sur les fonctions élémentaires u_i et sur les rectangles $D_i \in \mathcal{K}_h$.

On note de plus $\mathcal{E}_h := \{u_i\}_{i=1}^{p_h}$, $X_h := \text{vect}(\mathcal{E}_h)$ et P_h la projection orthogonale de $L^2(\mathcal{D})$ dans X_h .

Lemme 6.5 *Pour tout $u \in L^2(\mathcal{D})$, on a*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - P_h u\|_{L^2(\mathcal{D})} = 0 . \quad (6.13)$$

PREUVE.

La base $\{u_i\}_{i=1}^{p_h}$ étant orthonormée, on a pour tout $u \in L^2(\mathcal{D})$

$$P_h u = \sum_{k=1}^{p_h} \langle u_i, u \rangle u_i = \sum_{i=1}^{p_h} \left(\int_{D_i} u \right) 1_{D_i} .$$

Si $u \in W^{1,2}(\mathcal{D})$, on conclut aisément à l'aide de l'inégalité de Poincaré (2.7) que

$$\|u - P_h u\|_{L^2(\mathcal{D})}^2 = \int_{\mathcal{D}} \left| u - \sum_{i=1}^{p_h} \left(\int_{D_i} u \right) 1_{D_i} \right|^2 \leq Ch^2 \|\nabla u\|_{L^2(\mathcal{D})}^2 .$$

On étend la convergence à tout $L^2(\mathcal{D})$ par densité. □

En accord avec la définition (6.6), on introduit l'opérateur R_h donné par

$$R_h := P_h R P_h ,$$

qui est naturellement positif, compact et auto-adjoint. Notons $\lambda_h^1 > \lambda_h^2 > \dots > \lambda_h^N > 0$ ses valeurs propres et $V_{\lambda_h^k}^h$ le sous-espace propre associé.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $I^n := \{k \in \mathbb{N} , \lambda_h^k \rightarrow \lambda^n\}$ et i_n un entier fixé dans I^n .

On note W_{I^n} l'espace vectoriel donné par

$$W_{I^n} := \bigoplus_{k \in I^n} V_{\lambda_h^k}^h .$$

Remarque 6.6 La définition de l'ensemble d'indices I^n prend du sens en raison du théorème 6.1 (applicable ici) qui prouve que $I^n \neq \emptyset$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que $\cup_n I^n = \mathbb{N}$.

On introduit enfin le scalaire ε_h^p , donné pour tout $p \in \mathbb{N}$, par

$$\varepsilon_h^p := 1 - \sum_{n=1}^p \frac{1}{\frac{k_0^2}{2\pi\gamma} - \lambda_h^{i_n} + \frac{i}{\kappa}} \|P_{W_{I^n}^h}(1)\|_{L^2(\mathcal{D})}^2 . \quad (6.14)$$

Ici $P_{W_{I^n}}$ désigne le projecteur orthogonal sur W_{I^n} .

Théorème 6.7 Avec les notations précédentes, le tenseur ε^{eff} donné en (3.50) vérifie

$$\varepsilon_{11}^{\text{eff}} = \varepsilon_{22}^{\text{eff}} = 1 \quad \text{et} \quad \varepsilon_{33}^{\text{eff}} = \lim_{p \rightarrow +\infty} \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon_h^p . \quad (6.15)$$

PREUVE.

On introduit, pour tout $p \in \mathbb{N}$ le réel ε^p , défini par

$$\varepsilon^p := 1 - \sum_{n=1}^p \frac{1}{\frac{k_0^2}{2\pi\gamma} - \lambda^n + \frac{i}{\kappa}} \|P_{V_{\lambda^n}}(1)\|^2 .$$

Par définition, on a que $\lim_{p \rightarrow \infty} \varepsilon^p = \varepsilon_{33}^{\text{eff}}$. D'autre part, la convergence (6.13) entraîne que la famille d'espaces vectoriels X_h vérifie la condition de densité (6.5). Il en résulte, d'après la proposition 6.2, que $\{B_h - B\}$ est une famille uniformément compacte. Ainsi, le théorème 6.1 nous donne pour tout $n \in \{1, \dots, p\}$ la convergence

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|P_{W_{T^n}^h} w - P_{V_{\lambda^n}} w\|_{L^2(\mathcal{D})} = 0 \quad \forall w \in L^2(\mathcal{D}) .$$

Il suffit alors de prendre $w = 1$ pour conclure que $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon_h^p = \varepsilon^p$ et ainsi terminer la démonstration. □

Le théorème 6.7 et la formule (6.14) nous donnent finalement une procédure d'approximation du tenseur de permittivité effectif. Pour que celle-ci puisse être utilisable en pratique, il est indispensable que les termes de la matrice de terme général

$$(\mathbf{M}_h)_{ij} = \langle Ru_i, u_j \rangle \tag{6.16}$$

puissent être calculés rapidement (cf. lemme 6.3). Nous montrerons dans la section 4 de ce chapitre, qu'il est possible d'exprimer l'opérateur R de manière intégrale en exploitant le noyau de Green de l'opérateur $-\Delta$ avec conditions périodiques. Cette formulation efficace permettra la construction, dans un temps raisonnable, de la matrice \mathbf{M}_h .

3 Approximation du tenseur $\boldsymbol{\mu}^{\text{eff}}(\omega)$ obtenu dans le chapitre 4

Dans cette section, nous allons approcher numériquement le spectre de l'opérateur \mathbf{A} , défini dans (4.81), qui caractérise le tenseur de perméabilité effectif $\boldsymbol{\mu}^{\text{eff}}$.

La section est organisée en trois parties.

Nous commencerons par construire une famille d'espaces vectoriels Z_h voués à approcher Z_0 , le domaine de l'opérateur \mathbf{A} . Chacun de ces espaces Z_h sera engendré par les éléments d'arêtes de Nédélec associés à un maillage en pavé de Σ . Nous donnerons également un moyen de se limiter à une famille formant une *base* de Z_h .

Dans une seconde partie, nous démontrerons que cet espace Z_h vérifie la condition de densité (6.5).

Dans la dernière partie, nous approcherons explicitement la perméabilité $\boldsymbol{\mu}^{\text{eff}}$.

3.1 Éléments d'arêtes de Nédélec

On rappelle que l'espace Z_0 est défini par

$$Z_0 := \{ \mathbf{f} \in L^2(\Sigma) , \operatorname{div} \mathbf{f} = 0 , \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\Sigma \} .$$

À la différence du cas précédent, nous ne pouvons pas utiliser une décomposition de Galerkin simple puisque nous avons besoin de fonctions à divergence nulle. Nous allons utiliser une décomposition en pavés du domaine Σ et considérer les *éléments d'arêtes* associés. Ces fonctions sont à divergence nulle et ont été introduites par Nédélec dans [36]. Pour des raisons de simplicité, nous allons considérer les éléments d'arêtes les moins réguliers possible : c'est-à-dire affines sur chaque pavé de la discrétisation. Leur définition explicite est donnée en (6.17) et nécessite les notations suivantes liées à la discrétisation de Σ .

Maillage de l'inclusion Σ . On discrétise Σ en pavés égaux de côtés h_i dans la direction \mathbf{e}_i ($i \in \{1, 2, 3\}$). On note \mathcal{K} l'ensemble de tous les pavés de cette discrétisation, \mathcal{F} l'ensemble de leurs faces non incluses dans $\partial\Sigma$ et \mathcal{A} l'ensemble des arêtes des pavés de \mathcal{K} non incluses dans $\partial\Sigma$. Ainsi, \mathcal{K} , \mathcal{F} et \mathcal{A} sont des sous-ensembles de $\mathcal{P}(\mathbb{R}^3)$ et nous considérons leurs éléments fermés dans \mathbb{R}^3 .

On introduit $h := \sup_i \{h_i\}$ la taille caractéristique des pavés, $p = p(h)$ le nombre d'arêtes de \mathcal{A} et $|K| := h_1 h_2 h_3$ le volume de chaque pavé de \mathcal{K} .

Définition 6.8 *On adopte les notations suivantes où $a \in \mathcal{A}$ est fixé. On pourra se reporter à la figure 6.1 pour une représentation graphique.*

- $(K_i^a)_{i=1}^4 \in \mathcal{K}$ sont les quatre pavés qui contiennent l'arête a . On note de plus $K_0^a := K_4^a$ et on suppose qu'ils sont disposés autour de l'arête a de façon à ce que pour $i \in \{0, \dots, 3\}$, K_i^a et K_{i+1}^a aient une face en commun.
- $F_i^a \in \mathcal{F}$ est la face commune à K_i^a et K_{i+1}^a pour $i \in \{0, \dots, 3\}$.
- $\mathbf{n}_i^a \in \mathbb{R}^3$ est le vecteur unitaire normal à F_i^a orienté de K_i^a vers K_{i+1}^a pour $i \in \{0, \dots, 3\}$.
- $h_i^a > 0$ est la taille d'un pavé de \mathcal{K} dans la direction \mathbf{n}_i^a .

Définition et propriétés générales des éléments d'arêtes.

Définition 6.9 *Pour tout $a \in \mathcal{A}$ et $\mathbf{x}_a \in a$ fixé, l'élément d'arête ψ^a est défini par*

$$\psi^a(x) = \frac{1}{|K|} \sum_{i=1}^4 \left[\left((\mathbf{x} - \mathbf{x}^a) \cdot \mathbf{n}_i^a + h_i^a \right) \mathbf{n}_i^a - \left((\mathbf{x} - \mathbf{x}^a) \cdot \mathbf{n}_{i-1}^a - h_{i-1}^a \right) \mathbf{n}_{i-1}^a \right] 1_{K_i^a}(x), \quad (6.17)$$

avec les conventions d'écriture $\mathbf{n}_0^a := \mathbf{n}_4^a$ et $h_0^a := h_4^a$.

Il est facile de voir que le champ ψ^a est constant dans la direction de l'arête (dans $\cup_i K_i^a$) et est orthogonal à la direction de a . On le représente dans la figure 6.2.

Remarque 6.10 *Pour tout $a \in \mathcal{A}$, la fonction ψ^a vérifie les propriétés suivantes*

- (i) ψ^a est affine sur tous les pavés de la discrétisation \mathcal{K} .

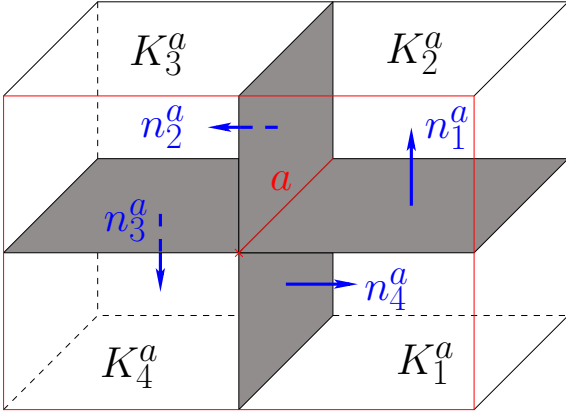


FIGURE 6.1: Convention du sens des normales aux faces des pavés.

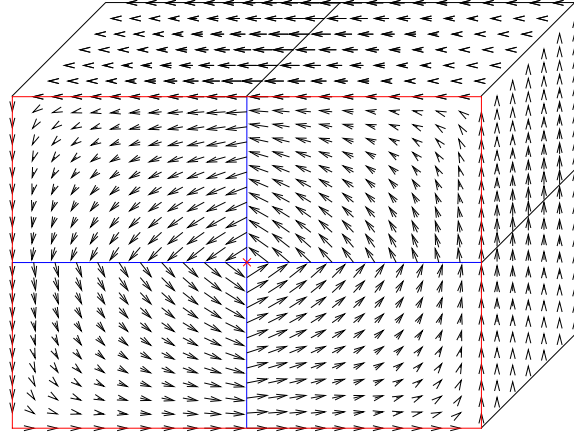


FIGURE 6.2: Représentation graphique d'un élément d'arête ψ^a dans les quatre pavés $\{K_i^a\}_{i=1}^4$.

- (ii) ψ^a a son support dans l'union des quatre éléments de \mathcal{K} contenant l'arête a .
- (iii) Pour tout $a \in \mathcal{A}$, $F \in \mathcal{F}$ et \mathbf{n}_F un vecteur normal à la face F , on a

$$\psi^a \cdot \mathbf{n}_F \mathbf{1}_F \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad a \subset F .$$

- (iv) $\operatorname{div} \psi^a = 0$ dans Y et $\psi^a \cdot \mathbf{n} = 0$ sur $\partial \Sigma$ (i.e. $\psi^a \in Z_0$).
- (v) $\forall i \in \{1, \dots, 4\}$, $\psi^a \cdot \mathbf{n}_i^a = \frac{1}{|F_i^a|}$ dans F_i^a .

On note \mathcal{E}_C la famille donnée pour tout $C \subset \mathcal{A}$ par

$$\mathcal{E}_C := \{\psi^a : a \in C\} . \quad (6.18)$$

Nous sommes alors en mesure de définir le sous-espace vectoriel qui va approcher Z_0 . On le note Z_h et il est défini par

$$Z_h := \operatorname{vect}(\mathcal{E}_A) . \quad (6.19)$$

On note de plus \mathbf{P}_h la projection orthogonale de Z_0 sur Z_h (orthogonale par rapport au produit scalaire de $L^2(\Sigma; \mathbb{R}^3)$).

Lemme 6.11 *On fixe une fonction $\mathbf{f}_h \in Z_h$. Alors, pour tout $K \in \mathcal{K}$ en notant F_i et F_{i+3} les deux faces de K orthogonales à \mathbf{e}_i , on a que \mathbf{f}_h est affine dans K et vérifie*

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \mathbf{f}_h \cdot \mathbf{e}_i = 0 \quad , \quad \forall j \neq i \quad \text{dans } K , \quad (6.20)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \mathbf{f}_h \cdot \mathbf{e}_i = \pm \frac{1}{h_i} \left[\int_{F_{i+3}} \mathbf{f}_h(x) \cdot \mathbf{e}_i d\sigma(x) - \int_{F_i} \mathbf{f}_h(x) \cdot \mathbf{e}_i d\sigma(x) \right] \quad \text{dans } K . \quad (6.21)$$

En particulier, si $\mathbf{f}_h \in Z_h$ vérifie

$$\int_F \mathbf{f}_h \cdot \mathbf{n}_F = 0 \quad , \quad \forall F \in \mathcal{F} \quad , \quad (6.22)$$

où \mathbf{n}_F est un vecteur normal $F \in \mathcal{F}$, alors \mathbf{f}_h est identiquement nul dans Σ .

PREUVE. L'égalité (6.20) est une conséquence immédiate de la définition 6.17 de ψ^a .

L'égalité (6.21) résulte directement du fait que $\mathbf{f}_h \cdot \mathbf{e}_i$ est affine dans K et vaut la constante $\pm \mathbf{f}_h \cdot \mathbf{e}_i$ sur chacune des faces F_i et F_{i+3} .

La dernière propriété est alors une conséquence immédiate de (6.20) et (6.21). □

Base de l'espace d'approximation Z_h .

Comme nous l'avons souligné dans la remarque 6.4, le calcul des valeurs et vecteurs propres des opérateurs discrétisés sera effectué, en pratique, sur les matrices définies dans (6.9) à l'aide d'une base de l'espace Z_h . Le résultat suivant indique que cette base n'est pas triviale.

Proposition 6.12 La famille $\mathcal{E}_{\mathcal{A}} := \{\psi^a : a \in \mathcal{A}\}$ n'est pas libre dans l'espace V_h .

PREUVE.

On considère six arêtes $\{a_k\}_{k=1}^6$ différentes deux à deux et ayant un point en commun. Nous allons montrer que la famille $\mathcal{E}_{\{a_k\}}$ n'est pas libre : c'est-à-dire qu'il existe $(\alpha_k)_{k=1}^6 \in \mathbb{R}^6$ non tous nuls tel que

$$\sum_{k=1}^6 \alpha_k \psi^{a_k} = 0 \quad . \quad (6.23)$$

Grâce au dernier point du lemme 6.11, l'équation précédente est obtenue dès lors que

$$\left(\sum_{k=1}^6 \alpha_k \psi^{a_k}(x) \right) \cdot \mathbf{n}_F = 0 \quad , \quad \forall F \in \mathcal{F}, \quad x \in F \quad . \quad (6.24)$$

La composante normale des éléments d'arêtes ψ^a pour $a \in \mathcal{A}$ est constante sur les faces de \mathcal{F} d'après le point (v) de la remarque 6.10 (constante nulle lorsque $a \not\subset F$). Comme on le fait apparaître dans la figure 6.3, il est possible de choisir le sens de rotation de chacun des champs ψ^{a_k} de sorte que les flux normaux à travers chaque face se compensent deux à deux (on utilise ici à nouveau la propriété (v) de la remarque 6.10). Ainsi, il existe $(\alpha_k)_{k=1}^6 \in \mathbb{R}^6$ vérifiant (6.24) avec pour $k \in \{1, \dots, 6\}$, $\alpha_k = \pm 1$. □

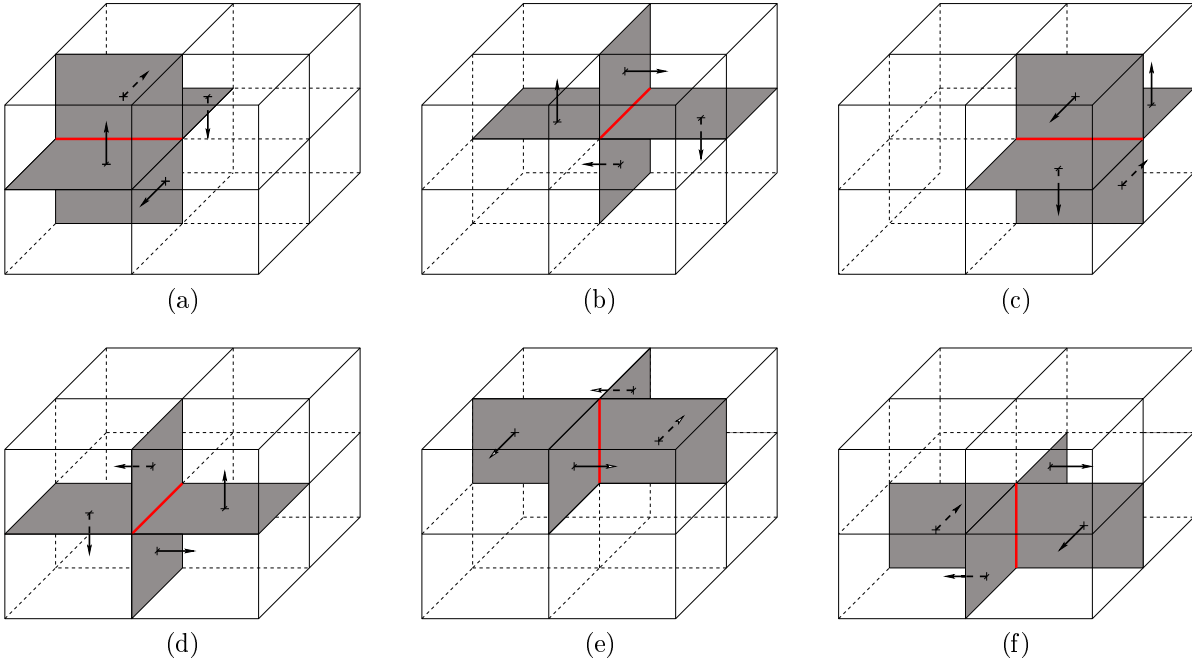


FIGURE 6.3: On s'intéresse aux six fonctions élémentaires $(\psi^{a_k})_{k=1}^6$ pour des arêtes (a_k) ayant un point en commun. Chacun des schémas est associé à une fonction $\alpha_k \psi^{a_k}$ avec $\alpha_k = \pm 1$. On représente en gris les quatre faces $F_i^{a_k}$ où le flux normal de ψ^{a_k} est non nul et on repère par un vecteur le sens de rotation de la fonction $\alpha_k \psi^{a_k}$ que l'on a choisi. Ainsi, parmi les six schémas, chacune des faces apparaît deux fois et les vecteurs associés sont opposés. La somme de ces six fonctions va donc être à flux normal nul sur chacune des faces.

Base de Z_h . En pratique, le calcul des valeurs et vecteurs propres de \mathbf{A}_h passe par la résolution du problème aux valeurs propres (6.10) formulé dans \mathbb{R}^{p_h} . Il est donc crucial de pouvoir construire les matrices \mathbf{G}_h et \mathbf{D}_h (données en 6.9) et donc un sous-ensemble $\mathcal{A}_0 \in \mathcal{A}$ tel que $\mathcal{E}_{\mathcal{A}_0}$ soit une base de Z_h .

D'après les arguments donnés dans la démonstration de la proposition 6.12, il est nécessaire d'éviter le cas où six arêtes ont un point commun. Pour cela, on considère la famille formée des arêtes horizontales $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ avec $\mathcal{A}_i := \{a \in \mathcal{A}, a \parallel e_i\}$. Il s'avère en fait que $\mathcal{E}_{\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2}$ n'est pas une famille génératrice de Z_h . Nous décrivons dans la suite les arêtes de \mathcal{A}_3 qu'il faut ajouter à $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ pour compléter la famille.

On considère pour $a \in \mathcal{A}$, l'ensemble S^a défini par

$$S^a := D(a) \cap \Sigma, \quad (6.25)$$

où $D(a)$ est la droite de \mathbb{R}^3 contenant l'arête a . Ainsi, S^a contient les arêtes de \mathcal{A} "alignées" avec a . Cet ensemble est un segment si Σ est convexe, et peut être une réunion de segments dans le cas contraire (cf figure 6.4).

L'idée, pour construire la famille \mathcal{A}_0 est d'ajouter à $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ une unique arête de \mathcal{A}_3 contenue dans chacune des composantes connexes de S_a pour $a \in \mathcal{A}_3$. On note pour

FIGURE 6.4: Différences entre les arêtes contenues dans \mathcal{A} et \mathcal{A}_0

cela $\mathcal{C}_a(S^a) \subset \mathbb{R}^3$, la composante connexe de S^a contenant a et on considère $U \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^3)$ l'ensemble donné par

$$U := \{\mathcal{C}_a(S^a) \mid a \in \mathcal{A}_3\}. \quad (6.26)$$

En d'autres termes, l'ensemble U est formé des segments parallèles à \mathbf{e}_3 , de longueur maximale dans Σ et contenant au moins une arête de \mathcal{A}_3 . On note n_0 le nombre de ces segments et on fixe $\{a_k, k = 1, \dots, n_0\} \subset \mathcal{A}_3$ tel que

$$U = \{\mathcal{C}_{a_k}(S^{a_k}), k = 1, \dots, n_0\}.$$

De cette façon, chacun des éléments de U est un segment qui contient une unique arête $a_k \in \mathcal{A}_3$.

Définition 6.13 On définit $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$ par

$$\mathcal{A}_0 := \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \left(\bigcup_{k=1}^{n_0} \{a_k\} \right). \quad (6.27)$$

On note que la dépendance de \mathcal{A}_0 en terme du choix des arêtes $a_k \in \mathcal{A}_3$ ne va pas avoir d'influence sur les résultats qui suivent. Dans la pratique, ils seront choisis le plus simplement possible, souvent en contact avec le bord de Σ .

Théorème 6.14 La famille $\mathcal{E}_h = \mathcal{E}_{\mathcal{A}_0} = \{\psi^a \mid a \in \mathcal{A}_0\}$ forme une base de V_h (non-orthogonale).

PREUVE.

Montrons que la famille \mathcal{E}_h est génératrice.

On fixe $b \notin \mathcal{A}_0$ et on doit montrer que $b \in \text{vect}(\mathcal{E}_{\mathcal{A}_0})$. On est assuré, par définition de \mathcal{A}_0 , que $b \in \mathcal{A}_3$ et qu'il existe une unique arête $a \in \mathcal{A}_0 \cap \mathcal{A}_3$ telle que $b \in \mathcal{C}_a(S_a)$. Ainsi, les arêtes a et b sont alignées et l'ensemble $\text{co}(a, b)$ (enveloppe convexe de $a \cup b$) est un segment de direction \mathbf{e}_3 inclus dans Σ . Il est recouvert par les arêtes de \mathcal{A}_3 et il existe donc $n \in \mathbb{N}$ et $(a_k)_{k=1}^n \in \mathcal{A}_3$ tels que

$$\text{co}(a, b) = \bigcup_{k=0}^n a_k.$$

On suppose de plus que

$$a_0 := a, \quad a_n = b \quad \text{et} \quad a_k \cap a_{k+1} \neq \emptyset \quad \forall k \in \{0, \dots, n-1\}.$$

Nous allons terminer la preuve en montrant par récurrence la propriété suivante pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$:

$$\psi^{a_k} \in \text{vect}(\mathcal{E}_{\mathcal{A}_0}). \quad (6.28)$$

On a $a_0 := a \in \mathcal{A}_0$ qui entraîne que la relation (6.28) est vérifiée pour $k = 0$. On suppose à présent qu'elle est vraie pour k fixé dans $\{0, \dots, n-1\}$.

On se trouve ici dans le même cadre que celui de la démonstration de la proposition 6.12. En effet, puisque toutes les arêtes de directions \mathbf{e}_1 et \mathbf{e}_2 sont éléments de \mathcal{A}_0 , on est assuré de l'existence de $(b_l)_{l=1}^4 \in \mathcal{A}_0$ telle que les six arêtes formant l'ensemble $\mathcal{L} := \{a_k, a_{k+1}, b_1, \dots, b_4\}$ soient différentes et partagent un point commun. D'après l'argument présenté dans la figure 6.3, la famille $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ est liée. Plus précisément, on a

$$\text{vect}(\mathcal{E}_{\mathcal{L}}) = \text{vect}(\mathcal{E}_{\{a_k, b_1, \dots, b_4\}}) .$$

Or, on a que $\text{vect}(\mathcal{E}_{\{a_k, b_1, \dots, b_4\}}) \subset \text{vect}(\mathcal{E}_{\mathcal{A}_0})$ (puisque $b_l \in \mathcal{A}_0$ pour tout $l \in \{1, \dots, 4\}$) et $\boldsymbol{\psi}^{a_k} \in \text{vect}(\mathcal{E}_{\mathcal{A}_0})$) et ainsi on déduit $\boldsymbol{\psi}^{a_{k+1}} \in \text{vect}(\mathcal{E}_{\mathcal{A}_0})$.

Montrons que la famille $\mathcal{E}_{\mathcal{A}_0}$ est libre.

Fixons $(\beta_a)_{a \in \mathcal{A}_0} \subset \mathbb{R}$ une famille de réels vérifiant

$$\sum_{a \in \mathcal{A}_0} \beta_a \boldsymbol{\psi}^a = 0 \quad \text{dans } \Sigma \tag{6.29}$$

et montrons que l'on a nécessairement $\beta_a = 0$ pour tout $a \in \mathcal{A}_0$.

Pour faciliter la démonstration, nous nous plaçons dans le cas où le domaine Σ est un cylindre dans la direction \mathbf{e}_3 dont les bases sont notées \mathcal{D}^{\pm} . On suppose de plus que toutes les arêtes de $\mathcal{A}_0 \cap \mathcal{A}^3$ touchent la base \mathcal{D}^- .

On peut voir les arêtes de $\mathcal{A}_0 \setminus \mathcal{A}^3$ comme une multitude de "grilles" disposées les unes au-dessus des autres. Nous allons utiliser un raisonnement itératif pour prouver que les coefficients β_a sont tous nuls. Notre raisonnement va construire une suite d'ensembles $\mathcal{C}_k \subset \mathcal{A}_0$ formés des arêtes de \mathcal{A}_0 pour lesquelles il reste à montrer que les coefficients β_a associés sont nuls. On fait naturellement l'initialisation $\mathcal{C}_0 := \mathcal{A}_0$ et il faut montrer que $\mathcal{C}_k = \emptyset$ pour $k \in \mathbb{N}$ assez grand.

- Lorsque $\mathcal{C}_k \setminus \mathcal{A}_3 \neq \emptyset$, on considère l'ensemble noté \mathcal{G} constitué des arêtes de \mathcal{C}_k formant la grille la plus éloignée de \mathcal{D}^- . Quelque soit $\bar{a} \in \mathcal{G}$ fixé, il existe une face de \mathcal{F} rencontrant \bar{a} qui ne rencontre aucune autre arête de \mathcal{G} (on utilise ici l'hypothèse selon laquelle les arêtes de \mathcal{A}_3 touchent \mathcal{D}^-). Autrement dit, en reprenant les notations données dans la définition 6.8, il existe $i \in \{0, \dots, 3\}$ tel que

$$F_i^{\bar{a}} \cap \bigcup_{a \in \mathcal{G}} a = \bar{a} . \tag{6.30}$$

Cette relation ajoutée au point (iii) de la propriété 6.10 nous permet de dire que

$$\boldsymbol{\psi}^a \cdot \mathbf{n}_i^{\bar{a}} 1_{F_i^{\bar{a}}} \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = \bar{a} .$$

En utilisant cette dernière relation dans l'équation (6.29), nous obtenons finalement

$$0 = \sum_{\bar{a} \in \mathcal{B}_k} \beta_a \boldsymbol{\psi}^a \cdot \mathbf{n}_i^{\bar{a}} 1_{F_i^{\bar{a}}} = \sum_{\bar{a} \in \mathcal{B}_k} \beta_{\bar{a}} \boldsymbol{\psi}^{\bar{a}} \cdot \mathbf{n}_i^{\bar{a}} 1_{F_i^{\bar{a}}} ,$$

ce qui entraîne que $\beta_{\bar{a}} = 0$. Le choix de \bar{a} étant arbitraire dans \mathcal{G} , on a $\beta_a = 0$ pour tout $a \in \mathcal{G}$.

On fixe alors $\mathcal{C}_{k+1} := \mathcal{C}_k \setminus \mathcal{G}$ et on réitère le raisonnement avec $k = k + 1$.

- Si $\mathcal{C}_k \setminus \mathcal{A}^3 = \emptyset$, alors il reste à prouver que $\beta_a = 0$ pour $a \in \mathcal{A}_3$. Ces arêtes forment un réseau de segments verticaux. En remarquant qu'une arête \bar{a} disposée au bord de ce réseau vérifie (6.30) avec $\mathcal{G} = \mathcal{C}_k$ pour un certain $i \in \{0, \dots, 3\}$, on montre, grâce aux mêmes arguments que ceux utilisés dans le cas précédent, que le coefficient $\beta_{\bar{a}} = 0$. On fixe alors $\mathcal{C}_{k+1} := \mathcal{B}_k \setminus \{\bar{a}\}$ et on recommence le raisonnement.
- Si $\mathcal{C}_k = \emptyset$ alors $\beta_a = 0$ pour tout $a \in \mathcal{A}_0$.

Puisque l'ensemble $\mathcal{C}_0 = \mathcal{A}_0$ est fini et que \mathcal{C}_{k+1} est strictement inclus dans \mathcal{C}_k , le procédé itératif se terminera obligatoirement par le cas $\mathcal{C}_k = \emptyset$.

Dans le cas de géométries plus générales du domaine Σ , le même type de démonstration peut être reconduit. L'idée est toujours de raisonner par récurrence sur des arêtes incluses dans une face ne contenant aucune autre arête $a \in \mathcal{A}$ dont le coefficient associé β_a est non nul. □

3.2 Un résultat de densité

Dans cette partie, nous allons montrer que l'espace de dimension finie Z_h défini dans (6.19) satisfait la condition de densité (6.5) (pour $X = Z_0$ et $X_h = Z_h$). Le résultat sera une conséquence immédiate de la proposition 6.15 dont la démonstration constitue le reste de la section.

Proposition 6.15 *Pour tout \mathbf{f} dans $Z_0 \cap W^{1,2}(\Sigma, \mathbb{R}^3)$, il existe $h > 0$ et $\mathbf{f}_h \in Z_h$ tels que :*

$$\|\mathbf{f} - \mathbf{f}_h\|_{L^2(\Sigma)} \leq Ch \|\nabla \mathbf{f}\|_{L^2(\Sigma)} , \quad (6.31)$$

où $C > 0$ est indépendant de h .

PREUVE.

La démonstration de ce résultat va être décomposée en deux étapes.

Nous allons commencer par montrer que pour tout $\mathbf{f} \in Z_0$, il existe une fonction $\mathbf{f}_h \in Z_h$ vérifiant, pour tout $F \in \mathcal{F}$ et \mathbf{n}_F un vecteur normal à F , la relation

$$\int_F \mathbf{f}_h \cdot \mathbf{n}_F = \int_F \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}_F . \quad (6.32)$$

Nous montrerons dans une seconde étape qu'une telle fonction satisfait (6.31) lorsque $\mathbf{f} \in Z_0 \cap W^{1,2}(\Sigma, \mathbb{R}^3)$.

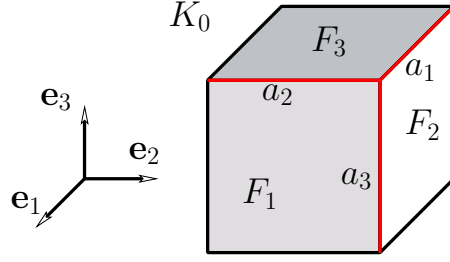


FIGURE 6.5: Disposition des faces dans l'élément K_0 .

Étape 1 :

On numérote les pavés de \mathcal{K} de sorte que pour tout $k \in \{1, \dots, N\}$, on ait

$$K_k \subset \Sigma_k := \Sigma \setminus \bigcup_{l=1}^{k-1} K_l$$

et qu'au moins trois des faces de K_k soient incluses dans $\partial\Sigma_k$. On dira d'un tel pavé qu'il est "dans un coin" de Σ_k . Il est évident que $(\Sigma_k)_k$ forme une suite décroissante d'ensembles telle que $\Sigma_{N+1} = \emptyset$.

Nous allons montrer par récurrence que la proposition suivante est vraie pour tout $k \in \{1, \dots, N\}$.

Il existe une fonction $\mathbf{g}_k \in Z_h$ telle que :

$$\int_F \mathbf{g}^k \cdot \mathbf{n}_F = \int_F \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}_F \quad , \quad \forall F \in \mathcal{F} \quad , \quad F \subset \bigcup_{l=1}^k K_l \quad (6.33)$$

La propriété (6.33) est trivialement vérifiée pour $k = 0$ avec $\mathbf{g}_0 = 0$ puisque l'ensemble des faces autorisées est vide.

Supposons que la propriété (6.33) est vraie au rang k . Il existe donc une fonction $\mathbf{g}_k \in Z_h$ qui vérifie

$$\int_F (\mathbf{f} - \mathbf{g}_k) \cdot \mathbf{n}_F = 0 \quad , \quad \forall F \subset \bigcup_{l=1}^k K_l \quad (6.34)$$

Grâce à notre choix de numérotation, le pavé K_{k+1} est "dans un coin" de Σ_k . On note

$$\mathcal{C} := \{a \subset K_{k+1} \quad , \quad a \not\subset \partial\Sigma_k\} \quad .$$

Puisqu'au moins trois des faces de K_{k+1} sont incluses dans $\partial\Sigma_k$, on a que $n_{\mathcal{C}} := \#\mathcal{C} \leq 3$.

On étudie pour commencer le cas où $n_{\mathcal{C}} = 3$. On note $\{a_j \quad , \quad j = 1, 2, 3\}$ les arêtes de \mathcal{C} et $\{F_p \quad , \quad p = 1, 2, 3\}$ l'ensemble des faces de K_{k+1} non incluses dans $\partial\Sigma_k$. On numérote ces faces de sorte que l'arête a_j soit telle que $a_j = F_p \cap F_q$ pour $\{j, p, q\} = \{1, 2, 3\}$. Ces notations sont reportées sur la figure 6.5.

On se propose de trouver $(\alpha_j)_{j=1}^3 \in \mathbb{R}^n$ tel que pour tout $j \in \{1, \dots, 3\}$ on ait

$$\alpha_1 \int_{F_j} \boldsymbol{\psi}^{a_1} \cdot \mathbf{e}_j + \alpha_2 \int_{F_j} \boldsymbol{\psi}^{a_2} \cdot \mathbf{e}_j + \alpha_3 \int_{F_j} \boldsymbol{\psi}^{a_3} \cdot \mathbf{e}_j = \int_{F_j} (\mathbf{f} - \mathbf{g}_k) \cdot \mathbf{e}_j . \quad (6.35)$$

À l'aide de la convention d'orientation des normales et du point (v) de la remarque 6.10, on a

$$\begin{aligned} \int_{F_2} \boldsymbol{\psi}^{a_1} \cdot \mathbf{e}_2 + \int_{F_3} \boldsymbol{\psi}^{a_1} \cdot \mathbf{e}_3 = 0 , \quad \int_{F_1} \boldsymbol{\psi}^{a_2} \cdot \mathbf{e}_1 + \int_{F_3} \boldsymbol{\psi}^{a_2} \cdot \mathbf{e}_3 = 0 , \\ \int_{F_1} \boldsymbol{\psi}^{a_3} \cdot \mathbf{e}_1 + \int_{F_2} \boldsymbol{\psi}^{a_3} \cdot \mathbf{e}_2 = 0 . \end{aligned} \quad (6.36)$$

En introduisant $s_1 := \int_{F_2} \boldsymbol{\psi}^{a_1} \cdot \mathbf{e}_2$, $s_2 := \int_{F_1} \boldsymbol{\psi}^{a_2} \cdot \mathbf{e}_1$ et $s_3 := \int_{F_1} \boldsymbol{\psi}^{a_3} \cdot \mathbf{e}_1$, on déduit des relations (6.35) et (6.36) que

$$\begin{pmatrix} 0 & s_2 & s_3 \\ s_1 & 0 & -s_3 \\ -s_1 & -s_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_{F_1} \mathbf{f} \cdot \mathbf{e}_1 \\ \int_{F_2} \mathbf{f} \cdot \mathbf{e}_2 \\ \int_{F_3} \mathbf{f} \cdot \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} . \quad (6.37)$$

Il est clair que la matrice précédente n'est pas inversible. En faisant la somme des équations du système (6.37), on montre que l'on a existence de $(\alpha_a)_a$ solution de 6.35 si, et seulement si, la relation de compatibilité suivante est vérifiée

$$\sum_{j=1}^3 \int_{F_j} (\mathbf{f} - \mathbf{g}_k) \cdot \mathbf{e}_j = 0 . \quad (6.38)$$

Or, cette relation est une conséquence de $\operatorname{div}(\mathbf{f} - \mathbf{g}_h) = 0$ qui conduit à

$$0 = \int_{\partial K_{k+1}} (\mathbf{f} - \mathbf{g}_k) \cdot \mathbf{n} = \sum_{j=1}^n \int_{F_j} (\mathbf{f} - \mathbf{g}_k) \cdot \mathbf{e}_j + \int_{\partial K_{k+1} \setminus \cup_j F_j} (\mathbf{f} - \mathbf{g}_k) \cdot (-\mathbf{e}_j) . \quad (6.39)$$

De plus $\partial K_{k+1} \setminus \cup_j F_j$ est formé des faces de K_{k+1} incluses dans $\cup_{l=1}^k K_l$, ce qui permet grâce à la relation (6.34), de prouver (6.38).

L'existence de $(\alpha_a)_a$ solution de (6.35) est ainsi assurée et il en résulte que la fonction \mathbf{g}_{k+1} , donnée par

$$\mathbf{g}_{k+1} = \mathbf{g}_k + \sum_{j=1}^n \alpha_j \boldsymbol{\psi}^{a_j} ,$$

vérifie (6.33).

Lorsque l'entier $n := \#\mathcal{C} \neq 3$, alors :

- soit $n = 1$: il n'y a donc que deux faces de K_{k+1} non-incluses dans $\partial \Sigma_k$. Dans ce cas, les arguments employés dans le cas $n = 3$ sont encore valables ;

- soit $n = 0$: la fonction \mathbf{g}_k satisfait ainsi (6.33) pour tout $F \in \mathcal{F}$, puisque $\partial K_{k+1} \subset \partial \Sigma_k$. Le raisonnement par récurrence s'arrête ici avec l'existence d'une fonction $\mathbf{f}_h := \mathbf{g}_k$ vérifiant (6.32).

Le nombre de pavés dans \mathcal{K} étant fini, on est assuré que le procédé récursif se termine dans le cas $n = 0$. Ceci conclut l'étape 1.

Étape 2 :

Cette étape va consister à démontrer le lemme suivant, dont les relations (6.41) et (6.42) entraînent directement l'inégalité (6.31).

Lemme 6.16 *Pour tout $K \in \mathcal{K}$ on a*

$$\frac{1}{|K|} \left| \int_K (\mathbf{f} - \mathbf{f}_h) \right|^2 \leq Ch^2 \|\nabla \mathbf{f}\|_{L^2(K)}^2 \quad (6.40)$$

$$\|\mathbf{f} - \mathbf{f}_h\|_{L^2(\Sigma)}^2 \leq h^2 C \left(\sum_i \int_{K_i} |\nabla(\mathbf{f} - \mathbf{f}_h)|^2 + \|\nabla \mathbf{f}\|_{L^2(\Sigma)}^2 \right) \quad (6.41)$$

$$\int_K |\nabla(\mathbf{f} - \mathbf{f}_h)|^2 \leq C \|\nabla \mathbf{f}\|_{L^2(K)}^2 \quad (6.42)$$

Preuve de (6.40).

On fixe $K \in \mathcal{K}$ et on considère la fonction $\mathbf{f}_h \in Z_h$ vérifiant la relation (6.32). On introduit pour $k \in \{1, 2, 3\}$, le réel I_h^k défini par

$$I_h^k := \int_K (\mathbf{f} - \mathbf{f}_h) \cdot \mathbf{e}_k .$$

La démonstration consiste à montrer que $|I_h^k| \leq h^2 \sqrt{h} C \|\nabla \mathbf{f}\|$.

En exploitant la relation $\operatorname{div}(\mathbf{f} - \mathbf{f}_h) = 0$ et grâce à une intégration par parties, on déduit de cette définition que

$$I_h^k = \int_{\partial K} (\mathbf{f} - \mathbf{f}_h) \cdot \mathbf{n} x_k d\sigma(\mathbf{x}) ,$$

où \mathbf{n} est la normale sortante à K . On note pour $j \in \{1, 2, 3\}$, F_j et F_{j+3} les deux faces de K orthogonales à \mathbf{e}_j . D'après l'égalité (6.32) et puisque x_k est constant dans chacune des faces F_k et F_{k+3} , il vient

$$I_h^k = \int_{\partial K \setminus \{F_k \cup F_{k+3}\}} (\mathbf{f} - \mathbf{f}_h) \cdot \mathbf{n} x_k d\sigma(\mathbf{x}) . \quad (6.43)$$

D'autre part, il résulte de $\mathbf{f}_h \in Z_h$ et du point (v) de la remarque 6.10 que $\mathbf{f} \cdot \mathbf{n}_F$ est constant sur chaque face $F \in \mathcal{F}$ (\mathbf{n}_F normale à F). On déduit alors de (6.32) que

$$\mathbf{f}_h \cdot \mathbf{n}_F = \int_F \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}_F \quad \forall F \in \mathcal{F} .$$

En conséquence, on a pour tout $j \in \{1, 2, 3\} \setminus \{k\}$ que

$$\begin{aligned} \int_{F_j \cup F_{j+3}} \mathbf{f}_h \cdot \mathbf{n} x_k d\sigma &= \left(\int_{F_j} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \right) \int_{F_j} x_k d\sigma + \left(\int_{F_{j+3}} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \right) \int_{F_{j+3}} x_k d\sigma \\ &= \left(\int_{F_j} x_k \right) \left[\int_{F_j \cup F_{j+3}} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} d\sigma \right] \end{aligned} \quad (6.44)$$

La dernière égalité dans l'équation précédente est déduite du fait que x_k ne dépend pas de x_j ($j \neq k$) entraînant ainsi que $\int_{F_j} x_k d\sigma = \int_{F_{j+3}} x_k d\sigma$.

Les équations (6.43) et (6.44) conduisent à

$$I_h^k = \sum_{i \neq k} \int_{F_j \cup F_{j+3}} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} (x_k - \int_{F_j} x_k) d\sigma .$$

On a la relation $F_{j+3} := F_j \pm h_j \mathbf{e}_j$. D'autre part, la normale \mathbf{n} change de sens entre les faces F_j et F_{j+3} ce qui conduit à prendre $\mathbf{n} = \pm \mathbf{e}_j$ et ainsi obtenir

$$I_h^k = \pm \sum_{j \neq k} \int_{F_j} (\mathbf{f}(x) - \mathbf{f}(x + h_j \mathbf{e}_j)) \cdot \mathbf{e}_j \left(x_k - \int_{F_j} x_k \right) d\sigma(\mathbf{x}) .$$

On utilise l'inégalité triangulaire puis l'inégalité de Cauchy-Schwartz pour obtenir

$$|I_h^k| \leq \sum_{j \neq k} \left\| \mathbf{f}(x) - \mathbf{f}(x \pm h_j \mathbf{e}_j) \right\|_{L^2(F_j)} \left\| x_k - \int_{F_j} x_k \right\|_{L^2(F_j)} . \quad (6.45)$$

On applique l'inégalité de Poincaré au terme $\left\| x_k - \int_{F_j} x_k \right\|_{L^2(F_j)}$ pour avoir

$$\begin{aligned} \int_{F_j} \left| x_k - \int_{F_j} x_k \right|^2 d\sigma &\leq Ch^2 \int_{F_j} |\nabla x_k|^2 \\ &\leq Ch^4 . \end{aligned} \quad (6.46)$$

Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned} \int_{F_j} |\mathbf{f}(x) - \mathbf{f}(x \pm h_j \mathbf{e}_j)|^2 &= \int_{F_j} \left| \int_{x_j}^{x_j \pm h_j} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_j} \right|^2 \\ &\leq h^2 \int_{F_j} \left| \int_{x_j}^{x_j \pm h_j} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_j} \right|^2 \\ &\leq h \int_K |\nabla \mathbf{f}|^2 . \end{aligned} \quad (6.47)$$

En conséquence des équations (6.45), (6.46) et (6.47), on a l'inégalité suivante

$$|I_h^k| \leq h^2 \sqrt{h} C \|\nabla \mathbf{f}\| ,$$

qui termine la démonstration de (6.40).

Preuve de (6.41).

On commence par remarquer que

$$\|\mathbf{f} - \mathbf{f}_h\|_{L^2(\Sigma)}^2 = \sum_i \int_{K_i} |\mathbf{f} - \mathbf{f}_h|^2. \quad (6.48)$$

On fait apparaître le terme $f_{K_i}(\mathbf{f} - \mathbf{f}_h)$ dans l'inégalité précédente pour obtenir

$$\begin{aligned} \|\mathbf{f} - \mathbf{f}_h\|_{L^2(\Sigma)}^2 &\leq 2 \sum_i \int_{K_i} \left| \mathbf{f} - \mathbf{f}_h - \int_{K_i} (\mathbf{f} - \mathbf{f}_h) \right|^2 + \int_{K_i} \left| \int_{K_i} (\mathbf{f} - \mathbf{f}_h) \right|^2 \\ &\leq 2 \sum_i \int_{K_i} \left| \mathbf{f} - \mathbf{f}_h - \int_{K_i} (\mathbf{f} - \mathbf{f}_h) \right|^2 + \frac{1}{|K|} \left| \int_{K_i} (\mathbf{f} - \mathbf{f}_h) \right|^2. \end{aligned} \quad (6.49)$$

On a $(\mathbf{f} - \mathbf{f}_h) \in W^{1,2}(K_i)$. L'inégalité de Pointcaré appliquée au premier terme du membre de droite entraîne alors que pour tout i , on a

$$\int_{K_i} \left| \mathbf{f} - \mathbf{f}_h - \int_{K_i} (\mathbf{f} - \mathbf{f}_h) \right|^2 \leq Ch^2 \int_{K_i} |\nabla(\mathbf{f} - \mathbf{f}_h)|^2. \quad (6.50)$$

L'inégalité (6.41) est alors immédiatement déduite des relations (6.40),(6.49) et (6.50).

Preuve de (6.42).

On commence par décomposer la norme de la matrice $\nabla(\mathbf{f} - \mathbf{g}_h)$ de la façon suivante

$$\int_K |\nabla(\mathbf{f} - \mathbf{f}_h)|^2 = \sum_{i,j=1}^3 \int_K \left[\partial_i(\mathbf{f} \cdot \mathbf{e}_j - \mathbf{f}_h \cdot \mathbf{e}_j) \right]^2.$$

On a, grâce à la relation (6.20), que $\frac{\partial}{\partial x_i} \mathbf{f}_h \cdot \mathbf{e}_j = 0$ pour tout $i \neq j$. Il en résulte

$$\int_K |\nabla(\mathbf{f} - \mathbf{g}_h)|^2 \leq \sum_{i \neq j} \int_K |\partial_i(\mathbf{f} \cdot \mathbf{e}_j)|^2 + 2 \sum_{i=1}^3 \int_K |\partial_i(\mathbf{f} \cdot \mathbf{e}_i)|^2 + 2 \sum_{i=1}^3 \int_K |\partial_i(\mathbf{f}_h \cdot \mathbf{e}_i)|^2.$$

Pour terminer la démonstration de (6.42), il suffit alors de montrer pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$ que

$$\int_K |\partial_i(\mathbf{f}_h \cdot \mathbf{e}_i)|^2 \leq C \int_K |\nabla \mathbf{f}|^2.$$

Or, à l'aide de la relation (6.21), on a

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial}{\partial x_i} \mathbf{f}_h \cdot \mathbf{e}_i \right|^2 &= \frac{1}{h_i^2} \left| \int_{F_i} (\mathbf{f}_h(x \pm h_i \mathbf{e}_i) - \mathbf{f}_h(x)) \cdot \mathbf{e}_i d\sigma(x) \right|^2 \\ &\leq \frac{1}{h_i |K|} \int_{F_i} |\mathbf{f}_h(x \pm h_i \mathbf{e}_i) - \mathbf{f}_h(x)|^2 d\sigma(x) \end{aligned}$$

Il suffit alors d'utiliser la majoration (6.47) pour terminer la démonstration. □

3.3 Approximation du tenseur $\boldsymbol{\mu}^{\text{eff}}$

On rappelle que, grâce à la proposition 4.28, le tenseur de perméabilité effectif obtenu dans le chapitre 4 est donné pour $(k, l) \in \{1, 2, 3\}^2$ par

$$\boldsymbol{\mu}_{kl}^{\text{eff}}(k_0) = \delta_{kl} + \sum_n \frac{\varepsilon_r k_0^2}{1 - \varepsilon_r \alpha^n k_0^2} \left[\int_Y \mathbf{y} \wedge \mathbf{g}^n \cdot \mathbf{e}_k \right] \left[\int_Y \mathbf{y} \wedge \mathbf{g}^n \cdot \mathbf{e}_l \right],$$

où (α^n, \mathbf{g}^n) sont les valeurs et vecteurs propres de l'opérateur \mathbf{A} défini de Z_0 dans Z_0 dans l'équation (4.81).

On considère Z_h le sous-espace vectoriel de Z_0 donné dans (6.19) et $\mathcal{E}_{\mathcal{A}_0} := \{\boldsymbol{\psi}^a, a \in \mathcal{A}_0\}$ une de ses bases. Les fonctions $\boldsymbol{\psi}^a$ sont définies dans (6.17) et l'ensemble \mathcal{A}_0 est décrit dans (6.27).

On note \mathbf{P}_h la projection orthogonale de Z_0 sur Z_h .

En accord avec la définition (6.6), on introduit \mathbf{A}_h l'opérateur donné par

$$\mathbf{A}_h := \mathbf{P}_h \mathbf{A} \mathbf{P}_h,$$

qui est naturellement positif, compact et auto-adjoint. Notons $\alpha_h^1 > \alpha_h^2 > \dots > \alpha_h^{p_h} > 0$ ses valeurs propres et $V_{\alpha_h^n}^h$ le sous-espace propre associé.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $I^n := \{k \in \mathbb{N}, \alpha_h^k \rightarrow \alpha^n\}$ et i_n un entier fixé dans I^n .

On note $W_{I^n}^h$ l'espace vectoriel donné par

$$W_{I^n}^h := \bigoplus_{k \in I^n} V_{\alpha_h^k}^h. \quad (6.51)$$

Remarque 6.17 La définition de l'ensemble d'indices I^n prend du sens en raison du théorème 6.1 (applicable ici) qui prouve que $I^n \neq \emptyset$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que $\cup_n I^n = \mathbb{N}$.

On introduit enfin le tenseur $\boldsymbol{\mu}_h^p$ dont les composantes sont données pour tout $p \in \mathbb{N}$ et $(k, l) \in \{1, 2, 3\}^2$ par

$$(\boldsymbol{\mu}_h^p)_{kl} = \sum_{n=0}^p \frac{\varepsilon_r k_0^2}{1 - \varepsilon_r \alpha_h^{i_n} k_0^2} \langle P_{W_{I^n}^h}(\mathbf{e}_k \wedge \mathbf{y}), P_{W_{I^n}^h}(\mathbf{e}_l \wedge \mathbf{y}) \rangle. \quad (6.52)$$

Ici $P_{W_{I^n}^h}$ désigne le projecteur orthogonal sur $W_{I^n}^h$.

Théorème 6.18 Avec les notations précédentes, on a pour tout $(k, l) \in \{1, 2, 3\}^2$,

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \lim_{h \rightarrow 0} (\boldsymbol{\mu}_h^p)_{kl} = \boldsymbol{\mu}_{kl}^{\text{eff}}. \quad (6.53)$$

PREUVE.

On commence par écrire $\boldsymbol{\mu}^{\text{eff}}$ sous une forme semblable à celle de $\boldsymbol{\mu}_h^p$ en exploitant la multiplicité des valeurs propres de \mathbf{A} . En utilisant la notation $W_{I^n}^h$ donnée dans (6.51), on a

$$(\boldsymbol{\mu}^{\text{eff}})_{kl} = \delta_{kl} + \sum_n \frac{\varepsilon_r k_0^2}{1 - \varepsilon_r \alpha^n k_0^2} \langle P_{W_{I^n}^h}(\mathbf{e}_k \wedge \mathbf{y}), P_{W_{I^n}^h}(\mathbf{e}_l \wedge \mathbf{y}) \rangle.$$

On introduit pour tout $p \in \mathbb{N}$ le tenseur μ^p dont les composantes sont données pour $(k, l) \in \{1, 2, 3\}^2$ par

$$(\mu^p)_{kl} = \delta_{kl} + \sum_{n=1}^p \frac{\varepsilon_r k_0^2}{1 - \varepsilon_r \alpha^n k_0^2} \langle P_{V_{\alpha^n}}(\mathbf{e}_k \wedge \mathbf{y}), P_{V_{\alpha^n}}(\mathbf{e}_l \wedge \mathbf{y}) \rangle .$$

Par définition, on a que $\lim_{p \rightarrow \infty} (\mu^p)_{kl} = (\mu^{\text{eff}})_{kl}$ pour tout $(k, l) \in \{1, 2, 3\}^2$. D'autre part, la convergence (6.31) entraîne que la famille d'espaces vectoriels Z_h vérifie la condition de densité (6.5). Il en résulte, d'après la proposition 6.2, que $\{\mathbf{A}_h - \mathbf{A}\}$ est une famille uniformément compacte. Ainsi, le théorème 6.1 nous donne pour tout $k \in \{1, \dots, p\}$ la convergence

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|P_{W_{I^n}^h} \mathbf{f} - P_{V_{\alpha^n}} \mathbf{f}\|_{L^2(\Sigma; \mathbb{C}^3)} = 0 \quad \forall \mathbf{f} \in Z_0 .$$

On ne peut pas directement choisir $\mathbf{f} = \mathbf{e}_k \wedge \mathbf{y}$, puisque celui-ci n'est pas élément de Z_0 . Cependant, étant quand même à divergence nulle, on conclut par densité, que $\lim_{h \rightarrow 0} (\mu^p)_{kl} = (\mu^{\text{eff}})_{kl}$ pour tout $(k, l) \in \{1, 2, 3\}^2$. □

4 Calcul effectif des opérateurs discrétisés

Les tenseurs effectifs ε^{eff} et μ^{eff} sont maintenant approchés par les suites $(\varepsilon_h^p)_{h,p}$ et $(\mu_h^p)_{h,p}$. Les termes de ces suites sont caractérisés respectivement par les valeurs et vecteurs propres des problèmes spectraux suivant

$$\mathbf{M}_h \mathbf{d}_h = \lambda_h \mathbf{d}_h \quad , \quad \mathbf{G}_h \mathbf{c}_h = \alpha_h \mathbf{D}_h \mathbf{c}_h ,$$

où les matrices \mathbf{G}_h , \mathbf{M}_h et \mathbf{D}_h sont définies par

$$\begin{aligned} (\mathbf{M}_h)_{ij} &:= \langle R u_i, u_j \rangle \quad , \quad \forall (i, j) \in \{1, \dots, p_h\} , \\ (\mathbf{G}_h)_{ab} &:= \langle \mathbf{A} \psi^a, \psi^b \rangle \quad , \quad \forall (a, b) \in \mathcal{A}_0^2 , \\ (\mathbf{D}_h)_{ab} &:= \langle \psi^a, \psi^b \rangle \quad , \quad \forall (a, b) \in \mathcal{A}_0^2 . \end{aligned} \tag{6.54}$$

Rappelons que les familles $\{u_i\}_i$ et $\{\psi^a\}_a$, construites en (6.12) et (6.17), sont respectivement les bases des espaces d'approximations X_h et Z_h mis en œuvre par la méthode de Galerkin décrite dans la section 1 de ce chapitre.

Il reste à décrire précisément le moyen de calculer numériquement ces matrices.

4.1 Noyau de Green périodique.

Pour permettre le calcul numérique des matrices données dans (6.54), nous allons exprimer les opérateurs R et \mathbf{A} sous forme intégrale à l'aide du noyau de Green périodique de l'opérateur $-\Delta$.

On considère donc $\Phi(y, z)$ vérifiant pour tout $y \in Y$

$$\begin{cases} -\Delta_{y'} \Phi(y, y') = \delta_y(y') - 1 & \text{dans } Y \\ \Phi(y, y') & \text{est } Y - \text{périodique} \# \end{cases}$$

où δ_y est la distribution de Dirac au point y . Comme il est montré dans [32], ce noyau peut se mettre sous la forme explicite suivante

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) &= \frac{1}{4\pi} \sum_{i,j,k=-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{erfc}\left(\frac{\|x-y+(i,j,k)\|}{2\sqrt{\beta}}\right)}{\|x-y+(i,j,k)\|} - \beta \\ &+ 8 \sum_{i,j,k=0}^{+\infty} \gamma_{ijk} \frac{e^{-4\beta\pi^2\|(i,j,k)\|^2}}{4\pi^2\|(i,j,k)\|^2} \cos(2i\pi(x_1 - y_1)) \cos(2j\pi(x_2 - y_2)) \cos(2k\pi(x_3 - y_3)) \end{aligned} \quad (6.55)$$

avec γ_{ijk} défini $\forall (i, j, k) \in (\mathbb{N} \setminus \{0\})^3$ par :

$$\begin{aligned} \gamma_{000} &= 0, & \gamma_{i00} &= \gamma_{0j0} = \gamma_{00k} = \frac{1}{4}, \\ \gamma_{ij0} &= \gamma_{i0k} = \gamma_{0jk} = \frac{1}{2}, & \gamma_{ijk} &= 1. \end{aligned}$$

Le paramètre $\beta \in \mathbb{R}^+$ n'influe pas sur le membre de droite de (6.55). Il est fixé dans le but d'optimiser la convergence de la série : on le fixera à la valeur $\beta = 0.072$ comme c'est le cas dans [32].

Calcul effectif de la matrice \mathbf{M}_h .

Rappelons que \mathcal{D} désigne la section horizontale du cylindre Σ qui n'est autre que l'inclusion élémentaire de la structure étudiée dans le chapitre 3. Pour $w \in L^2(\mathcal{D})$, le problème

$$\begin{cases} -\Delta\varphi = w(\delta_{\mathcal{D}^+} - \delta_{\mathcal{D}^-}), \\ \varphi \in W_{\#}^{1,2}(Y), \end{cases}$$

admet une unique solution donnée par

$$\varphi(y) = \int_{\mathcal{D}} w(z') \left[\Phi\left(y; z', -\frac{l}{2}\right) - \Phi\left(y; z', \frac{l}{2}\right) \right] dz'.$$

Ainsi, l'opérateur R donné dans la définition 3.15 se caractérise par

$$Rw(y') = \frac{2}{l} \int_{\mathcal{D}} w(z') \left[\Phi\left(y', \frac{l}{2}; z', -\frac{l}{2}\right) - \Phi\left(y', \frac{l}{2}; z', \frac{l}{2}\right) \right] dz'.$$

Or, puisque $\Phi(y, z)$ ne dépend que de la différence $y - z$, on a

$$Rw(y') = \frac{2}{l} \int_{\mathcal{D}} w(z') \left[\Phi\left(y', l; z', 0\right) - \Phi\left(y', 0; z', 0\right) \right] dz'. \quad (6.56)$$

La matrice d'approximation \mathbf{M}_h (définie dans (6.54)) a donc ses composantes données par

$$(\mathbf{M}_h)_{kp} = \frac{2}{l|D|} \iint_{D_k \times D_p} \left[\Phi\left(y', 0; z', 0\right) - \Phi\left(z', l; z', 0\right) \right] dz' dy'. \quad (6.57)$$

Calcul effectif de la matrice \mathbf{G}_h . À l'aide de la définition de l'opérateur \mathbf{A} donnée dans (4.81), on calcule pour tout couple d'arêtes $(a, b) \in \mathcal{A}_0^2$

$$\mathbf{M}_{ab} = \int_{\Sigma} \mathbf{A} \boldsymbol{\psi}^a \cdot \boldsymbol{\psi}^b = \int_{\Sigma} (\boldsymbol{\Xi} + \boldsymbol{\Gamma}) \boldsymbol{\psi}^a \cdot \boldsymbol{\psi}^b ,$$

où la famille $\{\boldsymbol{\psi}^a : a \in \mathcal{A}_0\}$ forme une base de Z_h , l'espace approchant Z_0 (le domaine de \mathbf{A}). L'opérateur de rang fini $\boldsymbol{\Gamma}$ est connu explicitement (cf. 4.79) et nous allons nous intéresser à l'opérateur $\boldsymbol{\Xi}$, défini dans (4.77). Il est facile de voir que celui-ci peut être exprimé à l'aide du noyau de Green sous la forme

$$\int_{\Sigma} \boldsymbol{\Xi} \boldsymbol{\psi}^a \cdot \boldsymbol{\psi}^b = \int_{\Sigma^2} \Phi(x, y) \boldsymbol{\psi}^a(x) \cdot \boldsymbol{\psi}^b(y) dx dy .$$

Ainsi, par définition des éléments d'arêtes $\boldsymbol{\psi}^a$, $a \in \mathcal{A}_0$ (donnée dans (6.17)) et en considérant les notations données dans la définition (6.8), on déduit

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} \boldsymbol{\Xi} \boldsymbol{\psi}^a \cdot \boldsymbol{\psi}^b &= \frac{1}{|K|^2} \sum_{i,j=1}^4 \int_{K_i^a \times K_j^b} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ &\times \left[\left((\mathbf{x} - \mathbf{x}^a) \cdot \mathbf{n}_i^a + h_i^a \right) \mathbf{n}_i^a - \left((\mathbf{x} - \mathbf{x}^a) \cdot \mathbf{n}_{i-1}^a - h_{i-1}^a \right) \mathbf{n}_{i-1}^a \right] \\ &\cdot \left[\left((\mathbf{y} - \mathbf{x}^b) \cdot \mathbf{n}_j^b + h_j^b \right) \mathbf{n}_j^b - \left((\mathbf{y} - \mathbf{x}^b) \cdot \mathbf{n}_{j-1}^b - h_{j-1}^b \right) \mathbf{n}_{j-1}^b \right] d\mathbf{x} d\mathbf{y} . \end{aligned} \quad (6.58)$$

4.2 Extraction de la singularité du noyau.

En pratique, la série donnée dans (6.55) sera tronquée (seulement une dizaine de termes seront conservés) et les intégrations dans (6.57) et (6.58) seront vues comme des moyennes sur chaque élément de la discrétisation. Ces moyennes sont approchées par la valeur au centre de chaque cellule. Il faut être prudent en raison de la singularité du noyau sur la droite $y = z$ correspondant au terme $(i = j = k = 0)$ dans (6.55). On décompose alors $\Phi = \Phi_r + \Phi_s$ avec

$$\Phi_s(y, z) := \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|y - z|} \operatorname{erfc} \left(\frac{|y - z|}{2\sqrt{\beta}} \right) , \quad \Phi_r = \Phi - \Phi_s .$$

Cas de la matrice \mathbf{M}_h .

En notant y_k le centre de la cellule D^k pour tout $k \in \{1, \dots, p_h\}$, on a

$$\begin{aligned} (\mathbf{M}_h)_{kp} &\simeq \frac{2|D|}{l} \left[\Phi_r(y_k, 0; y_p, 0) - \Phi_r(y_k, l; y_p, 0) \right] \\ &\quad + \frac{2}{l} \int_{D_p} \left[\Phi_s(y_k, 0; z', 0) - \Phi_s(y_k, l; z', 0) \right] dz' , \end{aligned} \quad (6.59)$$

où seule l'intégration sur D_k de Φ_s est approchée.

En pratique, nous allons fixer un petit paramètre δ et nous dirons que deux cellules D^k et D^p sont suffisamment éloignées lorsque $|y_p - y_k| > \delta$. Dans ce cas, nous sommes loin de la singularité de Φ_s et l'intégrale dans (6.59) sera approchée de la même façon que pour la fonction Φ_r . Il reste à calculer l'intégrale dans (6.59) lorsque $|y_p - y_k| \leq \delta$.

À l'aide du changement de variable $u' = z' - y_k$ et après passage en coordonnées polaires, on obtient

$$\begin{aligned} \int_{D_p} \Phi_s(y_k, 0; z', 0) dz' &= \frac{1}{4\pi} \int_{D_p - y_k} \frac{1}{|u'|} \operatorname{erfc}\left(\frac{|u'|}{2\sqrt{\beta}}\right) du' \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{E_{k,p}} \operatorname{erfc}\left(\frac{r}{2\sqrt{\beta}}\right) dr d\theta, \end{aligned} \quad (6.60)$$

avec $E_{k,p} := \{(r, \theta), (r \cos \theta, r \sin \theta) \in D_p - y_k\}$.

Cette intégrale est en fait unidimensionnelle puisque la fonction intégrée ne dépend pas de θ . La description de l'ensemble $E_{k,p}$ suffit donc à terminer le calcul de la matrice \mathbf{M}_h .

Cas de la matrice \mathbf{G}_h . On note \mathbf{x}_i^a le centre de la cellule K_i^a pour tout $a \in \mathcal{A}_0$. On déduit alors de (6.58) que

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} \Xi \psi^a \cdot \psi^b &= \frac{\Phi_r(\mathbf{x}_i^a, \mathbf{x}_j^b)}{4} \sum_{i,j=1}^4 \left(h_i^a \mathbf{n}_i^a + h_{i-1}^a \mathbf{n}_{i-1}^a \right) \cdot \left(h_j^b \mathbf{n}_j^b + h_{j-1}^b \mathbf{n}_{j-1}^b \right) \\ &+ \frac{1}{2|K|} \sum_{i,j=1}^4 \int_{K_j^b} \Phi_s(\mathbf{x}_i^a, \mathbf{y}) \left(h_i^a \mathbf{n}_i^a + h_{i-1}^a \mathbf{n}_{i-1}^a \right) \\ &\cdot \left[\left((\mathbf{y} - \mathbf{x}^b) \cdot \mathbf{n}_j^b + h_j^b \right) \mathbf{n}_j^b - \left((\mathbf{y} - \mathbf{x}^b) \cdot \mathbf{n}_{j-1}^b - h_{j-1}^b \right) \mathbf{n}_{j-1}^b \right] d\mathbf{y}, \end{aligned} \quad (6.61)$$

où seule l'intégration par rapport à \mathbf{x} de Φ_s est approchée.

On introduit comme précédemment, $\delta > 0$ le petit paramètre qui va déterminer si nous sommes proche ou non de la singularité de Φ_s .

Si $|\mathbf{x}_i^a - \mathbf{x}_j^b| > \delta$, alors nous sommes loin de la singularité de Φ_s et l'intégrale dans (6.59) sera approchée de la même façon que pour la fonction Φ_r .

Si $|\mathbf{x}_i^a - \mathbf{x}_j^b| \leq \delta$, on doit calculer l'intégrale dans (6.61) plus précisément. L'idée pour traiter ce calcul est de se ramener à une intégrale de la forme (6.60) ne faisant intervenir que la partie singulière Φ_s . On éliminera ainsi les contributions de $\left((\mathbf{y} - \mathbf{x}^b) \cdot \mathbf{n}_j^b + h_j^b \right)$. Pour tout $(a, b) \in \mathcal{A}_0$ et $(i, j) \in \{1, \dots, 4\}$, on doit savoir calculer l'intégrale triple suivante

$$\int_{K_j^b} \Phi_s(\mathbf{x}_i^a, \mathbf{y}) \left((\mathbf{y} - \mathbf{x}^b) \cdot \mathbf{n}_j^b + h_j^b \right) d\mathbf{y}.$$

Notons $k \in \{1, 2, 3\}$ l'entier vérifiant $\mathbf{n}_j^a = \pm \mathbf{e}_k$. La moyenne par rapport à la variable x_k va être approchée par la valeur au point $\mathbf{x}_j^b \cdot \mathbf{e}_k$ qui est le centre de l'intervalle $[a_j^b, a_j^b + h_j^b]$ dans lequel varie x_k .

Or, en notant $\mathbf{y} = (\mathbf{y}', y_k)$ et $K_j^b = \overline{K}_j^b \times [a_j^b, a_j^b + h_j^b]$ on obtient aisément que

$$\left([(\mathbf{y}', \mathbf{x}_j^b \cdot \mathbf{e}_k) - \mathbf{x}^b] \cdot \mathbf{n}_j^b + h_j^b \right) = \frac{1}{2} h_j^b .$$

En conséquence, on déduit

$$\int_{K_j^b} \Phi_s(\mathbf{x}_i^a, \mathbf{y}) \left((\mathbf{y} - \mathbf{x}^b) \cdot \mathbf{n}_j^b + h_j^b \right) d\mathbf{y} = \frac{(h_j^b)^2}{2} \int_{\overline{K}_j^b} \Phi_s(\mathbf{x}_i^a; \mathbf{y}', \mathbf{x}_j^b \cdot \mathbf{e}_k) d\mathbf{y}' .$$

Cette dernière intégrale *bidimensionnelle* est de même type que (6.59) et sera traitée par passage en polaire de la même façon que dans (6.60).

Conclusions et perspectives

Au cours de cette thèse, nous avons étudié rigoureusement le comportement macroscopique de trois structures composites formées d'inclusions diélectriques ou métalliques. Dans chacun des cas, nous avons identifié et calculé numériquement des tenseurs de permittivité et de perméabilité effectifs dépendant de la fréquence. La partie réelle de leurs valeurs propres peut changer de signe et atteindre des valeurs élevées pour des longueurs d'ondes qui sont grandes devant la taille caractéristique de la structure.

Dans le chapitre 3, nous avons établi mathématiquement la possibilité de réaliser, à partir de nanotubes métalliques, des structures diffractantes dont la réponse effective est caractérisée par un tenseur de permittivité dont les valeurs propres ont une partie réelle arbitrairement grande, positive ou négative suivant la fréquence. Ces structures sont formées de la reproduction périodique de composants, de taille petite devant la longueur d'onde, eux-mêmes constitués de réseaux de nano-fibres métalliques parallèles. Le point essentiel dans l'analyse limite est que le taux de remplissage de ces fibres très conductrices est infinitésimal ("taille capacitaire") de sorte que la dissipation dans le métal reste finie ou négligeable. Dans cette construction, il apparaît deux petits paramètres d'échelle : la distance a entre les fibres de chaque micro-composant et la distance η séparant les différents composants qui est supposée du même ordre que la longueur des fibres. L'intérêt d'avoir choisi $a \ll \eta$ est que les effets de dispersion spatiale, inévitables à l'échelle des paquets de fibres, deviennent négligeables dans le processus d'homogénéisation réitérée.

Il s'agit à notre connaissance, du premier résultat rigoureux permettant d'établir, dans un cadre purement 3D, la réalisabilité de tels tenseurs effectifs pour la permittivité. En particulier, pour une fréquence donnée, la construction que nous proposons permet d'atteindre une très large classe de tenseurs effectifs ; notamment *tous les tenseurs réels symétriques*.

Dans le chapitre 4, nous avons démontré dans un cadre totalement tridimensionnel que des métamatériaux présentant une activité magnétique pouvaient être obtenus à l'aide de structures formées de diélectriques. Plus précisément, nous considérons une structure bornée composée d'inclusions diélectriques de géométrie simple. Ces inclusions sont réparties périodiquement (de période η) et ont un coefficient de permittivité de l'ordre de $1/\eta^2$.

Le milieu homogénéisé est *local* et décrit par des tenseurs de permittivité et perméabilité effectifs. Le tenseur de perméabilité dépend de la fréquence, et la partie réelle de ses valeurs propres change de signe sur certaines bandes de fréquences. Ce phénomène est dû à des résonances internes du champ magnétique qui ont pu être excitées à l'échelle microscopique en raison du fort contraste de permittivité. Celles-ci engendrent une boucle de courant qui induit un moment magnétique microscopique dans chaque période de la

structure. Ces moments s'ajoutent pour produire un moment magnétique macroscopique responsable du magnétisme artificiel du milieu effectif.

Dans le chapitre 5, nous avons étudié une structure formée d'inclusions fortement diélectriques disposées aléatoirement. Nous avons mis en évidence un critère sur la loi de distribution des rayons et des permittivités de ces inclusions qui permet de justifier l'analyse asymptotique. Il en résulte une loi homogénéisée déterministe qui fait intervenir une perméabilité effective donnée explicitement en fonction de la fréquence et de la loi de probabilité de la distribution initiale. Cette étude a été effectuée sous une hypothèse simplificatrice d'invariance dans une direction et de polarisation des champs qui permet de ramener le problème à une équation scalaire en dimension 2. On demande de plus, que l'espérance de la loi de permittivité soit de partie imaginaire non nulle afin de prouver l'unicité du problème limite. En étudiant le comportement de la loi limite lorsque le support de cette distribution devient très proche de l'axe des réels, nous avons mis en évidence une loi limite qui reste dissipative contrairement à ce qui aurait pu être attendu. Cela indique de façon claire qu'une théorie basée sur l'homogénéisation n'est pas applicable dans le cas aléatoire lorsque les inclusions formant la structure sont des diélectriques parfaits (sans dissipation).

Nous avons identifié plusieurs directions de recherche qui seraient en parfaite continuité avec les résultats de la thèse.

- Un premier développement de cette thèse est d'étendre les résultats obtenus dans les chapitres 4 et 5 en considérant une structure à la fois *tridimensionnelle* et formée d'inclusions fortement diélectriques et disposées *aléatoirement*.

Il serait également intéressant et sans doute beaucoup plus difficile de comprendre ce qui se passe dans le cas de structures aléatoires plus générales où la répartition des inclusions ne s'organise plus suivant une grille de périodicité donnée a priori. Le cas envisagé au chapitre 5 n'étant en fait qu'une perturbation aléatoire du cas périodique.

- Un important défi numérique serait de comparer le comportement effectif des milieux obtenus dans les chapitres 3, 4 et 5 avec celui de la structure réelle associée. En particulier cela demande de pouvoir extraire les paramètres effectifs d'une telle structure à partir de la connaissance numérique du champ diffracté (problème inverse).

- Quelques questions théoriques liées à l'homogénéisation restent en suspens, notamment dans des situations où l'analyse double-échelle classique est insuffisante pour identifier les oscillations du champ électromagnétique. Mentionnons deux situations où il ne semble pas possible de se limiter à des fonctions périodiques pour décrire les oscillations du champ électromagnétique (il serait peut être nécessaire d'incorporer des développements de type onde de Bloch dans l'analyse multi-échelle sous une forme qui n'est pas encore très claire).

- *Tamis à photons* : Il s'agit d'un dispositif dans lequel peut avoir lieu un phénomène de transmission extraordinaire. La structure est une plaque métallique très fine dans laquelle sont percés une multitude de trous disposés périodiquement. L'épaisseur de la plaque ainsi que la taille des trous sont inférieurs à la longueur d'onde incidente. T. Ebbesen a montré dans son célèbre article de 1998 [21] que le taux de transmission lumineuse

à travers une telle structure était beaucoup plus élevé que ce que prévoyait la théorie classique pour certaines fréquences. Physiquement, ce phénomène peut s'expliquer par l'excitation de champs localisés sur la surface de la plaque ("plasmons de surfaces") qui résulte de la présence des trous [7].

- *Structure filet ("double Fishnet")* : Celle-ci est constituée de la superposition d'une multitude de couches composites (parallèles) dont chacune est formée de deux plaques métalliques parallèles très proches et percées périodiquement. Comme le montre des études physiques récentes [29, 33] (2007, 2008), l'intérêt de cette structure est de produire, des activités électriques et magnétiques à l'échelle microscopique. Celles-ci interviennent dans certains cas de polarisation et, expérimentalement, semblent donner lieu à une perméabilité et une permittivité pouvant être simultanément négatives. Les milieux gauchers peuvent ainsi être obtenus à l'aide de ce type de composites qui se révèlent être plus simple que les milieux formés de la superposition de deux réseaux distincts (dont chacun est responsable d'un des effets recherchés). Une difficulté mathématique majeure est qu'il n'est pas évident que l'indice de réfraction négatif observé peut être expliqué par une analyse asymptotique de type homogénéisation. Les arguments donnés par les physiciens (obtenus sous des hypothèses très restrictives) portent plutôt sur l'étude des diagrammes de dispersion mais ne mentionnent pas de comportement asymptotique quand la période converge vers zéro. Cependant, il est très intéressant de spéculer sur la possibilité d'un éclaircissement de la physique du problème via une technique d'homogénéisation non classique.

Une première étape à franchir est de comprendre quel est le choix pertinent des différents paramètres et ordres de grandeurs pour lesquels la structure pourra exhiber les effets recherchés. Éventuellement, ces choix peuvent être hiérarchisés en effectuant des homogénéisations réitérées : par exemple, la première structure, constituée d'une unique couche (contenant les deux plaques), deviendrait infiniment mince et conduirait ainsi à des conditions d'interfaces limites. La seconde étape se proposerait d'étudier une superposition de telles interfaces séparées d'une distance asymptotiquement nulle puis d'identifier une éventuelle loi volumique homogénéisée.

De plus, la structure étant invariante dans aucune direction (même si supposée infinie), l'hypothèse de polarisation des champs est difficilement justifiable mathématiquement et il serait préférable d'obtenir un résultat d'homogénéisation tridimensionnel.

Bibliographie

- [1] Grégoire Allaire, *Homogenization and two-scale convergence*, SIAM J. Math. Anal. **23** (1992), no. 6, 1482–1518. MR1185639 (93k :35022)
- [2] P.M. Anselone and T.W. Palmer, *Spectral analysis of collectively compact, strongly convergent operator sequences*, Pacific J. Math. **25** (1968), 423–431.
- [3] A. Ávila, G. Griso, B. Miara, and E. Rohan, *Multiscale modeling of elastic waves : theoretical justification and numerical simulation of band gaps*, Multiscale Model. Simul. **7** (2008), no. 1, 1–21. MR2399535 (2009d :35011)
- [4] Michel Bellieud and Guy Bouchitté, *Homogenization of elliptic problems in a fiber reinforced structure. Nonlocal effects*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **26** (1998), no. 3, 407–436. MR1635769 (99h :35015)
- [5] Alain Bensoussan, Jacques-Louis Lions, and George Papanicolaou, *Asymptotic analysis for periodic structures*, Studies in Mathematics and its Applications, vol. 5, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1978. MR503330 (82h :35001)
- [6] Marcel Berger and Bernard Gostiaux, *Géométrie différentielle*, Librairie Armand Colin, Paris, 1972. Maîtrise de mathématiques, Collection U/Série “Mathématiques”. MR0494180 (58 #13102)
- [7] Nicolas Bonod, Stefan Enoch, Lifeng Li, Popov Evgeny, and Michel Neviere, *Resonant optical transmission through thin metallic films with and without holes*, Opt. Express **11** (2003Mar), no. 5, 482–490.
- [8] G. Bouchitté and D. Felbacq, *Homogenization near resonances and artificial magnetism from dielectrics*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **339** (2004), 377–382.
- [9] G. Bouchitté and B. Schweizer, *Homogenization of Maxwell’s equations in a split ring geometry*, Multiscale Model. Simul. **8** (2010), no. 3, 717–750. MR2609637
- [10] Guy Bouchitté, *Analyse limite de la diffraction d’ondes électromagnétiques par une structure mince*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. II Méc. Phys. Chim. Sci. Univers Sci. Terre **311** (1990), no. 1, 51–56. MR1068995 (91i :78006)
- [11] Guy Bouchitté, Christophe Bourel, and Didier Felbacq, *Homogenization of the 3D Maxwell system near resonances and artificial magnetism*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **347** (2009), no. 9-10, 571–576. MR2576911 (2010m :78014)
- [12] G. Bouchitté and D. Felbacq, *Homogenization of a wire photonic crystal : the case of small volume fraction*, SIAM J. Appl. Math. **66** (2006), no. 6, 2061–2084.
- [13] G. Bouchitté and R. Petit, *On the concepts of a perfectly conducting material and of a perfectly conducting and infinitely thin screen*, Radio Sci. **24** (1989), no. 1, 13–26.
- [14] Evans L. C. and Gariepy R. F., *Measure theory and fine properties of function*, Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, Boca Raton, 1992.
- [15] M. Camar-Eddine and P. Seppecher, *Determination of the closure of the set of elasticity functionals*, Arch. Ration. Mech. Anal. **170** (2003), no. 3, 211–245. MR2020260 (2004i :74053)
- [16] Michel Cessenat, *Mathematical methods in electromagnetism*, Series on Advances in Mathematics for Applied Sciences, vol. 41, World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, NJ, 1996. Linear theory and applications. MR1409140 (97j :78001)
- [17] C. Conca, J. Planchard, and M. Vanninathan, *Fluids and periodic structures*, RAM : Research in Applied Mathematics, vol. 38, John Wiley & Sons Ltd., Chichester, 1995. MR1652238 (99k :73094)

- [18] D. J. Daley and D. Vere-Jones, *An introduction to the theory of point processes. vol. 2*, 2nd ed., Probability and its Applications (New York), Springer. General theory and structure.
- [19] Robert Dautray and Jacques-Louis Lions, *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques.*, Collection du Commissariat à l'Énergie Atomique : Série Scientifique. [Collection of the Atomic Energy Commission : Science Series], Masson, Paris.
- [20] D. Felbacq and G. Bouchitté, *Theory of mesoscopic magnetism in photonic crystals*, Phys. Rev. Lett. **94** (2005), 183902.
- [21] T. W. Ebbesen, H. J. Lezec, H. F. Ghaemi, T. Thio, and P. A. Wolff, *Extraordinary optical transmission through sub-wavelength hole arrays*, Nature **391** (1998), 667–669.
- [22] Nicholas Fang, Hyesog Lee, Cheng Sun, and Xiang Zhang, *Sub-diffraction-limited optical imaging with a silver superlens*, Science **308** (2005), no. 5721, 534–537.
- [23] D. Felbacq and G. Bouchitté, *Left handed media and homogenization of photonic crystals*, Optics letters **30** (2005), 10.
- [24] D. Felbacq, B. Guizal, G. Bouchitté, and C. Bourel, *Resonant homogenization of a dielectric metamaterial*, Microwave and Optical Technology Letter **51** (2009), 2695–2701.
- [25] Bouchitté G. and D. Felbacq, *Homogenization of a set of parallel fibers*, Waves in Random Media **7** (1997), 1–12.
- [26] Anthony Grbic and George V. Eleftheriades, *Overcoming the diffraction limit with a planar left-handed transmission-line lens*, Phys. Rev. Lett. **92** (2004Mar), no. 11, 117403.
- [27] Allan Greenleaf, Yaroslav Kurylev, Matti Lassas, and Gunther Uhlmann, *Cloaking devices, electromagnetic wormholes, and transformation optics*, SIAM Rev. **51** (2009), no. 1, 3–33.
- [28] V. V. Jikov, S. M. Kozlov, and O. A. Oleĭnik, *Homogenization of differential operators and integral functionals*, Springer-Verlag, Berlin, 1994. Translated from the Russian by G. A. Yosifian [G. A. Iosif'yan]. MR1329546 (96h :35003b)
- [29] M. Kafesaki, I. Tsiapa, N. Katsarakis, Th. Koschny, C. M. Soukoulis, and E. N. Economou, *Left-handed metamaterials : The fishnet structure and its variations*, Phys. Rev. B **75** (2007Jun), no. 23, 235114.
- [30] R. V. Kohn and S. P. Shipman, *Magnetism and homogenization of microresonators*, Multiscale Model. Simul. **7** (2008), no. 1, 62–92. MR2399538 (2009d :78025)
- [31] D. W. Lynch and W.R. Hunter, *Handbook of optical constants of solids*, E. D. Palik (Academic Press, Inc.), 1991.
- [32] Simon L. Marshall, *A periodic green function for calculation of coulombic lattice potentials*, J. Phys. : Condens. Matter **12** (2000), 4575–4601.
- [33] A. Mary, Sergio G. Rodrigo, F. J. Garcia-Vidal, and L. Martin-Moreno, *Theory of negative-refractive-index response of double-fishnet structures*, Phys. Rev. Lett. **101** (2008), no. 10, 103902.
- [34] G.W. Milton, *Realizability of metamaterials with prescribed electric permittivity and magnetic permeability tensors*, New J. Phys. **12** (2010), 033035.
- [35] François Murat, *Compacité par compensation*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **5** (1978), no. 3, 489–507. MR506997 (80h :46043a)
- [36] J.-C. Nédélec, *A new family of mixed finite elements in \mathbf{R}^3* , Numer. Math. **50** (1986), no. 1, 57–81. MR864305 (88e :65145)
- [37] Gabriel Nguetseng, *A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization*, SIAM J. Math. Anal. **20** (1989), no. 3, 608–623. MR990867 (90j :35030)
- [38] S. O'Brien and J.B. Pendry, *Magnetic activity at infrared frequencies in structured metallic photonic crystals*, J. Phys. Condens. Mat. **14** (2002), no. 25, 6383–6394.
- [39] ———, *Photonic band-gaps effects and magnetic activity in dielectric composites*, J. Phys. Condens. Matter **14** (2002), no. 15, 4035.

- [40] J. B. Pendry, *Negative refraction makes a perfect lens*, Phys. Rev. Lett. **85** (2000Oct), no. 18, 3966–3969.
- [41] J. B. Pendry, D. Schurig, and D. R. Smith, *Controlling electromagnetic fields*, Science **312** (2006), no. 5781, 1780–1782.
- [42] J.B. Pendry, A.J. Holden, D.J. Robbins, and W.J. Stewart, *Magnetism from conductors and enhanced nonlinear phenomena*, Microwave Theory and Techniques, IEEE Transactions on **47** (1999nov), no. 11, 2075–2084.
- [43] J.B. Pendry, A.J. Holden, W. J. Stewart, and Youngs I., *Extremely low frequency plasmons in metallic mesostructures*, Phys. Rev. Lett. **76** (1996), no. 25, 4773–4776.
- [44] R. Petit, *Onde électromagnétique en radioélectricité et en optique*, Enseignement de la physique, Masson, Paris, 1989.
- [45] Michael Reed and Barry Simon, *Methods of modern mathematical physics. i*, 2nd ed., Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers]. Functional analysis.
- [46] D. Schurig, J. J. Mock, B. J. Justice, S. A. Cummer, J. B. Pendry, A. F. Starr, and D. R. Smith, *Metamaterial electromagnetic cloak at microwave frequencies*, Science **314** (2006), no. 5801, 977–980.
- [47] Laurent Schwartz, *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques*, Enseignement des Sciences, Hermann, Paris, 1961. MR0143360 (26 #919)
- [48] ———, *Théorie des distributions*, Hermann, Paris, 1966. MR0209834 (35 #730)
- [49] J. A. Stratton, *Electromagnetic theory*, McGraw-Hill, New York, 1941.
- [50] L. Tartar, *Compensated compactness and applications to partial differential equations*, Nonlinear analysis and mechanics : Heriot-Watt Symposium, Vol. IV, 1979, pp. 136–212. MR584398 (81m :35014)
- [51] Viktor G Veselago, *The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of ϵ and μ* , Soviet Physics Uspekhi **10** (1968), no. 4, 509.
- [52] Qian Zhao, Lei Kang, Bo Du, HongJie Zhao, Qin Xie, Bo Li, Ji Zhou, LongTu Li, and YongGang Meng, *Isotropic negative permeability composite based on mie resonance of the bst-mgo dielectric medium*, Chinese Science Bulletin **53** (2008), 3272–3276. 10.1007/s11434-008-0475-2.
- [53] V. V. Zhikov and A. L. Piatnitskiĭ, *Homogenization of random singular structures and random measures*, Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat. **70** (2006), no. 1, 23–74 (Russian, with Russian summary). MR2212433 (2006m :35018)

Résumé. Dans cette thèse, on se propose d'étudier rigoureusement le comportement macroscopique de matériaux composites fortement contrastés dans le cadre de l'électromagnétisme. Nous considérons des structures constituées de micro-inclusions réparties périodiquement (ou aléatoirement), au sein desquelles un matériau de très grande permittivité, ou de très grande conductivité, sera disposé. En pratique, une telle structure occupe un domaine borné 3D et est éclairée par une onde incidente monochromatique (de fréquence fixée) venant de l'infini. Notre approche mathématique consiste à passer à la limite dans le système de Maxwell décrivant le problème de diffraction lorsque la distance séparant les inclusions tend vers zéro, et que l'indice électromagnétique des inclusions tend vers l'infini ('fort contraste').

Nous étudions deux types de structures diffractantes 3D qui permettent de réaliser des matériaux de permittivité ou perméabilité négatives. L'étude asymptotique et basée sur la méthode de convergence double-échelle (parfois dans une variante stochastique), et les problèmes sur la cellule de périodicité qui en résultent sont résolus par méthode spectrale. Ceci permet d'obtenir explicitement les tenseurs effectifs en fonction de la fréquence, mettant ainsi en évidence leurs grandes variations autour de fréquences de résonances.

Title : Mathematical and numerical study of highly contrasted photonic crystals.

Abstract. This thesis is to develop the macroscopic behaviour of highly contrasted composite materials in an electromagnetic framework. We consider structures made of periodically (or randomly) distributed micro-inclusions made of high conductivity or high permittivity medium. Actually, such a structure is to be found in a three-dimensional bounded domain which is illuminated by an infinity-coming monochromatic incident wave. Our mathematical approach consists in passing to the limit in the Maxwell system describing the diffraction problem when the distance between inclusions goes to zero while the electromagnetic constant of inclusions goes to infinity ("high contrast").

We are studying two 3D diffracting structures which lead to negative permittivity or permeability materials. The asymptotic study is based on the two-scale convergence method (sometimes in a stochastic way), and the resulting unit cell problems are solved by spectral method. This leads to an explicit formulation of the effective tensor according to the frequency, which highlights their huge variations around the so-called resonant frequencies.

Mots clés : Métamatériaux, cristaux photoniques, homogénéisation, convergence double-échelle, équations de Maxwell, équations aux dérivés partielles.

Institut de mathématiques, Imath, Université du Sud Toulon-Var,
BP 132, 83957 La Garde Cedex (France).
