

Étude mathématique et numérique de cristaux photoniques fortement contrastés

Christophe Bourel

13 décembre 2010

IMATH, Toulon

Plan de l'exposé

- 1 **Métamateriaux en optique**
- 2 **Homogénéisation des équations de Maxwell**
- 3 **Nano-tubes métalliques**
- 4 **Inclusions diélectriques, magnétisme artificiel**
- 5 **Analyse numérique**
- 6 **Perspectives**
- 7 **Annexe : Cas aléatoire**

Plan de l'exposé

- 1 **Métamateriaux en optique**
- 2 Homogénéisation des équations de Maxwell
- 3 Nano-tubes métalliques
- 4 Inclusions diélectriques, magnétisme artificiel
- 5 Analyse numérique
- 6 Perspectives
- 7 Annexe : Cas aléatoire

Paramètres en électromagnétisme

Le comportement des matériaux est décrit par deux paramètres :

la permittivité : $\epsilon_r = \epsilon_r(\omega)$, la perméabilité $\mu_r = \mu_r(\omega)$.

Domaine de l'optique :

fréquence entre 375 et 750 THz (longueur d'onde entre 400 et 800 nm).

$$\mu_r(\omega) \simeq 1 \quad , \quad \epsilon_r(\omega) = \epsilon' + i\epsilon''$$

- Métal : $\epsilon' \in \mathbb{R}$, $\epsilon'' > 0$ ($\epsilon'' \gg 1$)
- Diélectriques : $\epsilon' > 0$ ($\epsilon'' = 0$ si diélectrique sans pertes)

Paramètres en électromagnétisme

Le comportement des matériaux est décrit par deux paramètres :

la permittivité : $\epsilon_r = \epsilon_r(\omega)$, la perméabilité $\mu_r = \mu_r(\omega)$.

Domaine de l'optique :

fréquence entre 375 et 750 THz (longueur d'onde entre 400 et 800 nm).

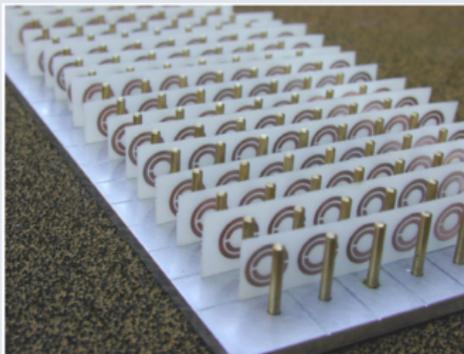
$$\mu_r(\omega) \simeq 1 , \quad \epsilon_r(\omega) = \epsilon' + i\epsilon''$$

- Métal : $\epsilon' \in \mathbb{R}$, $\epsilon'' > 0$ ($\epsilon'' \gg 1$)
- Diélectriques : $\epsilon' > 0$ ($\epsilon'' = 0$ si diélectrique sans pertes)

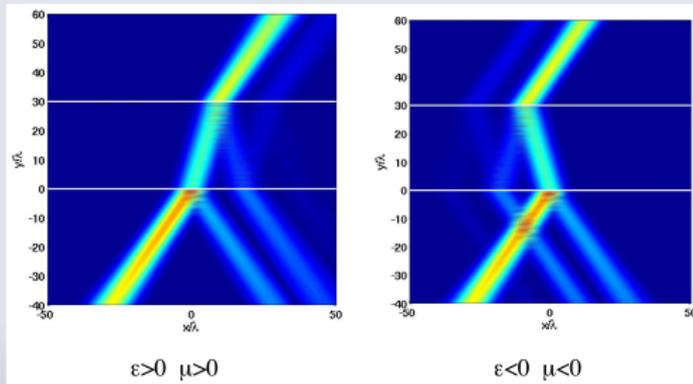
Objectif : construire des structures composites artificielles composées de métaux ($\epsilon'' \gg 1$) ou de diélectrique ($\epsilon' \gg 1$) tel que :

- $\epsilon^{\text{eff}}(\omega) < 0$ pour certaines fréquences
- $\mu^{\text{eff}}(\omega) < 0$ (activité magnétique)
- **Les deux simultanément** (indice de réfraction négatif)

Milieux à indice négatif



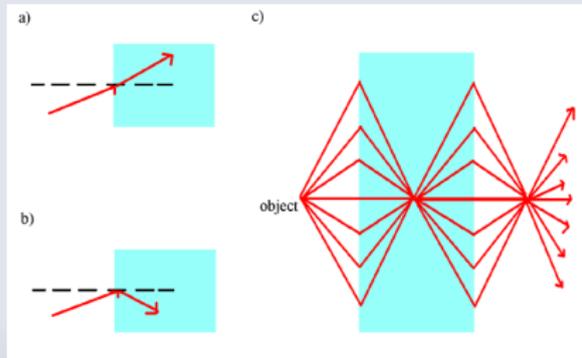
Métamatériau permettant
d'obtenir ϵ et μ négatifs
(micro-onde)



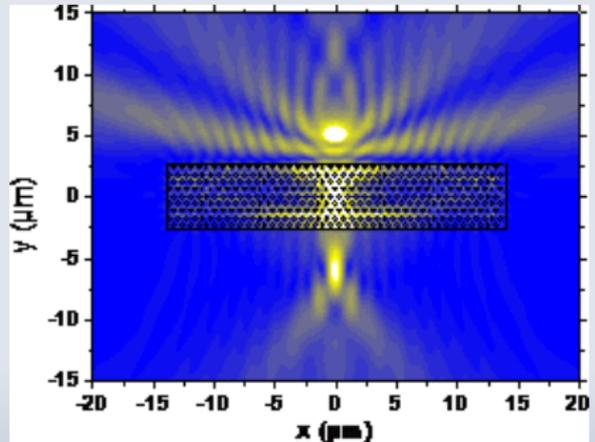
Réfraction négative

[1] S. O'Brien and J.B. Pendry, *Magnetic activity at infrared frequencies in structured metallic photonic crystals*, J. Phys. Condens. Mat. , **14**, 2002, 25, 6383-6394.

Application 1 : lentille plane Veselago



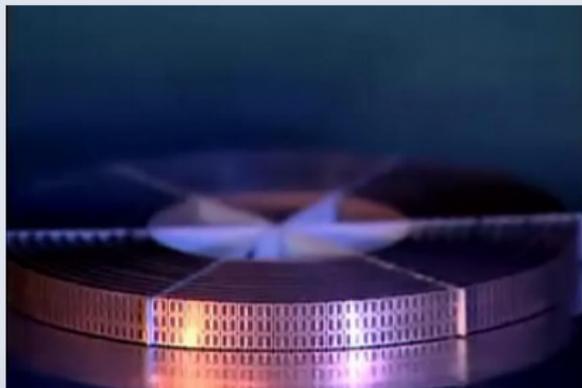
Fonctionnement théorique de la lentille plane



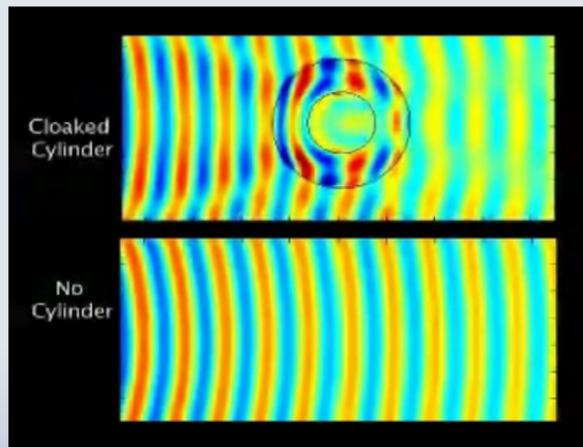
Simulation numérique de lentille plane

[2] Viktor G Veselago, *The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of ϵ and μ* , Soviet Physics Uspekhi, **10**, 1968, 4, 509.

Dispositif d'invisibilité



Métamatériau permettant l'invisibilité (micro ondes)



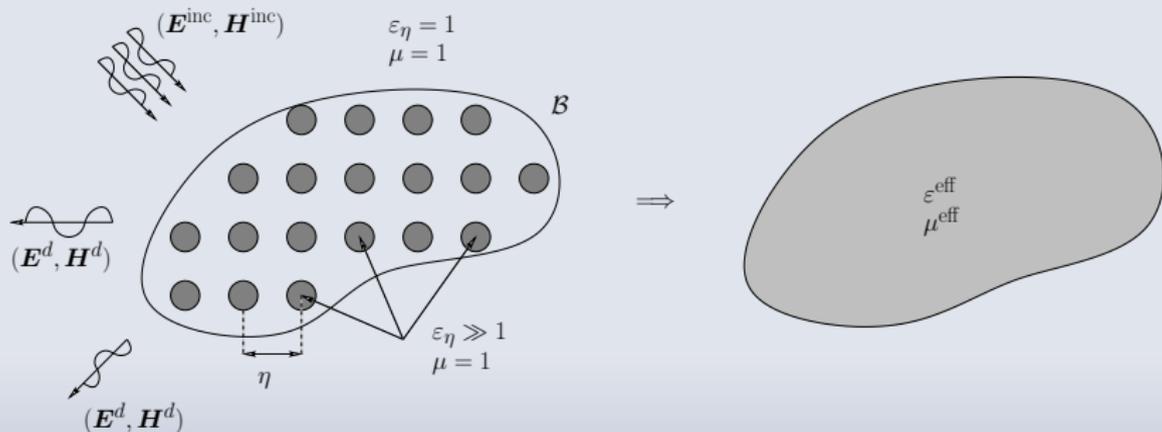
test du dispositif d'invisibilité

D. Schurig, J. J. Mock, B. J. Justice, S. A. Cummer, J. B. Pendry, A. F. Starr and D. R. Smith ", Metamaterial Electromagnetic Cloak at Microwave Frequencies, Science, **314**, 2006, 5801 , 977-980.

Plan de l'exposé

- 1 Métamateriaux en optique
- 2 Homogénéisation des équations de Maxwell**
- 3 Nano-tubes métalliques
- 4 Inclusions diélectriques, magnétisme artificiel
- 5 Analyse numérique
- 6 Perspectives
- 7 Annexe : Cas aléatoire

Homogénéisation



- Le petit paramètre η (souvent la période) caractérise la structure (en pratique $\eta \sim \frac{\text{longueur d'onde}}{10}$).
- La permittivité ϵ_η sera **très grande** sur la partie inclusion donc, dans le cas de métaux : le taux de remplissage devra être infinitésimal (dissipation finie).

Système de Maxwell

Le champ total $(\mathbf{E}_\eta, \mathbf{H}_\eta)$ vérifie dans \mathbb{R}^3

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{E}_\eta = i\omega\mu_0 \mathbf{H}_\eta \\ \operatorname{rot} \mathbf{H}_\eta = -i\omega\varepsilon_0 \varepsilon_\eta(x) \mathbf{E}_\eta \end{cases}$$

+ conditions d'onde sortante de Silver-Müller $|\mathbf{x}| \rightarrow +\infty$:

$$(\mathbf{E}_\eta^d, \mathbf{H}_\eta^d) = O\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|}\right), \quad \omega\varepsilon_0 \left(\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} \wedge \mathbf{E}_\eta^d\right) - k_0 \mathbf{H}_\eta^d = o\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|}\right).$$

$(\mathbf{E}_\eta^d, \mathbf{H}_\eta^d) = (\mathbf{E}_\eta - \mathbf{E}^i, \mathbf{H}_\eta - \mathbf{H}^i)$ est le champs diffracté.

Objectif : Passer à la limite $\eta \rightarrow 0$

Nécessite la prise en compte des oscillations rapides des champs \mathbf{E}_η et \mathbf{H}_η

Convergence double-échelle

Définition

$u_\eta \in L^2(\Omega)$ converge double échelle vers $u_0 \in L^2(\Omega \times Y)$
si $\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega; C_\#^\infty(Y))$

$$\int_{\Omega} u_\eta(x) \varphi\left(x, \frac{x}{\eta}\right) dx \rightarrow \iint_{\Omega \times Y} u_0(x, y) \varphi(x, y) dx dy .$$

On note $u_\eta \rightharpoonup u_0$.

Cela revient à identifier le terme d'ordre zéro dans le développement :

$$u_\eta(x) = u_0\left(x, \frac{x}{\eta}\right) + \eta u_1\left(x, \frac{x}{\eta}\right) + \dots$$

Convergence double-échelle

Définition

$u_\eta \in L^2(\Omega)$ converge double échelle vers $u_0 \in L^2(\Omega \times Y)$
si $\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega; C_\#^\infty(Y))$

$$\int_{\Omega} u_\eta(x) \varphi\left(x, \frac{x}{\eta}\right) dx \rightarrow \iint_{\Omega \times Y} u_0(x, y) \varphi(x, y) dx dy .$$

On note $u_\eta \rightharpoonup u_0$.

Cela revient à identifier le terme d'ordre zéro dans le développement :

$$u_\eta(x) = u_0\left(x, \frac{x}{\eta}\right) + \eta u_1\left(x, \frac{x}{\eta}\right) + \dots$$

Propriété

- $\|u_\eta\|_{L^2(\Omega)} \leq C \Rightarrow \exists u_0$ tel que $u_\eta \rightharpoonup u_0$ (à une sous suite près).
- Si $u_\eta \rightharpoonup u_0$ alors

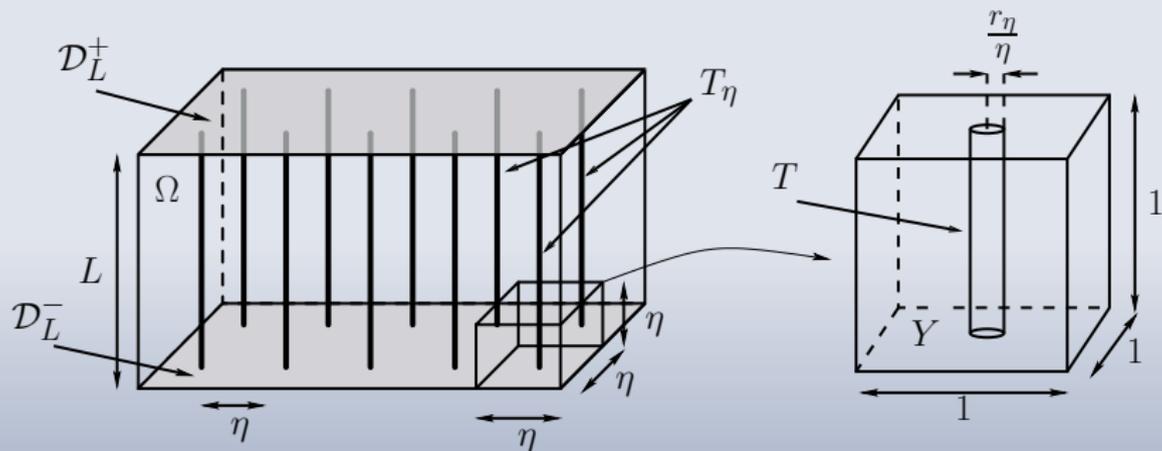
$$u_0(x, y) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^3} v_k(x) e^{2i\pi k \cdot y} \Leftrightarrow u_\eta(x) e^{-2i\pi \frac{k \cdot x}{\eta}} \rightharpoonup v_k(x) .$$

Plan de l'exposé

- 1 Métamatériaux en optique
- 2 Homogénéisation des équations de Maxwell
- 3 Nano-tubes métalliques**
- 4 Inclusions diélectriques, magnétisme artificiel
- 5 Analyse numérique
- 6 Perspectives
- 7 Annexe : Cas aléatoire

Première étape :

Homogénéisation d'un réseau périodique de fibres métalliques fines.



$\Omega := \omega \times (-L/2, L/2)$, $r_\eta \ll \eta$ fibres très fines.

Première étape :

Problème pré-homogénéisé

Le champs électromagnétique total $(\mathbf{E}_\eta, \mathbf{H}_\eta)$ vérifie les équations de Maxwell

$$\begin{cases} \mathbf{rot} \mathbf{E}_\eta = i\omega\mu_0 \mathbf{H}_\eta, & (1) \\ \mathbf{rot} \mathbf{H}_\eta = -i\omega\varepsilon_0 \varepsilon_\eta(\mathbf{x}) \mathbf{E}_\eta & (2) \\ (\mathbf{E}_\eta - \mathbf{E}^i, \mathbf{H}_\eta - \mathbf{H}^i) \text{ vérifie Silver-Müller} \end{cases}$$

avec $\varepsilon_\eta(\mathbf{x}) := \begin{cases} 1 & \text{dans } \mathbb{R}^3 \setminus T_\eta \\ 1 + i\sigma_\eta & \text{dans } T_\eta \end{cases}$

Champ renormalisé sur T_η : $\mathbf{J}_\eta := \sigma_\eta \mathbf{E}_\eta \mathbf{1}_{T_\eta}$

L'équation (2) devient :

$$\mathbf{rot} \mathbf{H}_\eta = -i\omega\varepsilon_0(\mathbf{E}_\eta + i\mathbf{J}_\eta)$$

Première étape :

Choix des échelles

On définit

- θ_η le volume des fibres :

$$\theta_\eta := \frac{\pi r_\eta^2}{\eta^2} \rightarrow 0$$

- $\gamma > 0$ la capacité limite des fibres par unité de volume :

$$\frac{1}{\eta^2 \log r_\eta} \rightarrow \gamma$$

- $\sigma_\eta \rightarrow \infty$ la conductivité de fibres
- $\kappa \in [0, +\infty]$ la conductivité moyenne de la structure par unité de volume.

$$\kappa := \lim_{\eta \rightarrow 0} \kappa_\eta \quad , \quad \kappa_\eta := \sigma_\eta \theta_\eta .$$

Première étape :

Problème limite

On établit que $(\mathbf{E}_\eta, \mathbf{H}_\eta, \mathbf{J}_\eta) \rightharpoonup (\mathbf{E}, \mathbf{H}, j\mathbf{e}_3)$

En passant à la limite dans le système de Maxwell on a

$$\begin{cases} \mathbf{rot} \mathbf{E} = i\omega\mu_0 \mathbf{H} \\ \mathbf{rot} \mathbf{H} = -i\omega\varepsilon_0 (\mathbf{E} + ij\mathbf{e}_3 1_\Omega) \end{cases} \quad \text{dans } \mathbb{R}^3$$

Le système est fermé avec le problème unidimensionnel suivant

$$\frac{\partial^2 j}{\partial x_3^2} + \left(k_0^2 + \frac{2i\pi\gamma}{\kappa} \right) j = 2i\pi\gamma E_3 \quad \text{dans } \Omega, \quad \frac{\partial j}{\partial x_3} = 0 \quad \text{sur } \mathcal{D}_L^\pm$$

Remarque

- *Le problème limite est non-local.*
- *Lorsque $L \rightarrow \infty$ le problème devient local (en polarisation $E||$).*

Seconde étape :

Homogénéisation réitérée

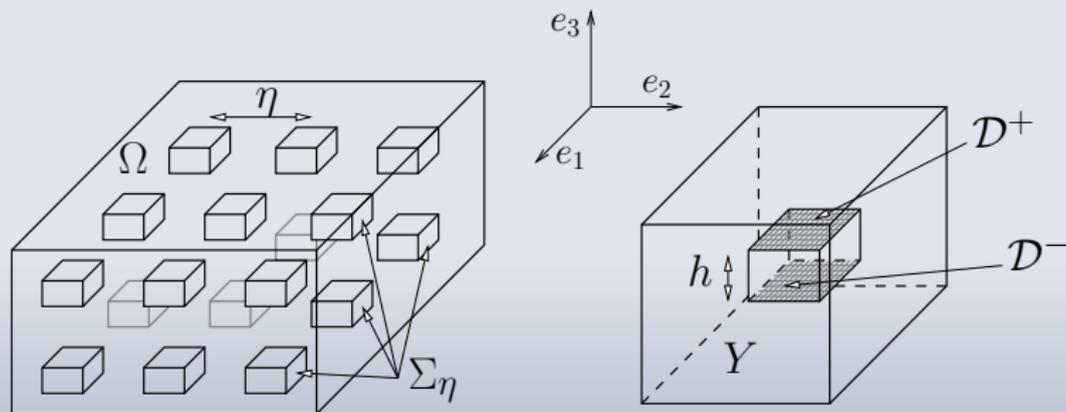


FIGURE: La seconde structure diffractante et la cellule unité.

Seconde étape :

Problème pré-homogénéisé

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{rot} \mathbf{E}_\eta = i\omega\mu_0 \mathbf{H}_\eta & \text{dans } \mathbb{R}^3 \\ \mathbf{rot} \mathbf{H}_\eta = -i\omega\varepsilon_0(\mathbf{E}_\eta + i \mathbf{1}_{\Sigma_\eta} j_\eta \mathbf{e}_3) & \text{dans } \mathbb{R}^3 \\ \frac{\partial^2 j_\eta}{\partial x_3^2} + \left(k_0^2 + \frac{2i\pi\gamma}{\kappa} \right) j_\eta = 2i\pi\gamma \mathbf{E}_\eta \cdot \mathbf{e}_3 & \text{dans } \Sigma_\eta \\ \frac{\partial j_\eta}{\partial x_3} = 0 & \text{dans } D_\eta^\pm \\ (\mathbf{E}_\eta - \mathbf{E}^i, \mathbf{H}_\eta - \mathbf{H}^i) \text{ vérifie Silver-Müller} & \end{array} \right.$$

Seconde étape :

Problème pré-homogénéisé

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{rot} \mathbf{E}_\eta = i\omega\mu_0 \mathbf{H}_\eta & \text{dans } \mathbb{R}^3 \\ \operatorname{rot} \mathbf{H}_\eta = -i\omega\varepsilon_0 (\mathbf{E}_\eta + i \mathbf{1}_{\Sigma_\eta} j_\eta \mathbf{e}_3) & \text{dans } \mathbb{R}^3 \\ \frac{\partial^2 j_\eta}{\partial x_3^2} + \left(k_0^2 + \frac{2i\pi\gamma}{\kappa} \right) j_\eta = 2i\pi\gamma \mathbf{E}_\eta \cdot \mathbf{e}_3 & \text{dans } \Sigma_\eta \\ \frac{\partial j_\eta}{\partial x_3} = 0 & \text{dans } D_\eta^\pm \\ (\mathbf{E}_\eta - \mathbf{E}^i, \mathbf{H}_\eta - \mathbf{H}^i) \text{ vérifie Silver-Müller} & \end{array} \right.$$

Hypothèse : $\int_{B_R} |\mathbf{E}_\eta|^2 + |\mathbf{H}_\eta|^2 < C \quad (\Rightarrow \int_{\Sigma_\eta} |j_\eta|^2 < C)$

Il existe \mathbf{E}_0 , \mathbf{H}_0 et j_0 tels que

$$\mathbf{E}_\eta \rightharpoonup \mathbf{E}_0 \quad , \quad \mathbf{H}_\eta \rightharpoonup \mathbf{H}_0 \quad , \quad j_\eta \rightharpoonup j_0$$

Seconde étape :

Problème sur la cellule unité

En passant à la limite double échelle on obtient

$$\operatorname{div}_y \mathbf{H}_0 = \operatorname{rot}_y \mathbf{H}_0 = 0 \quad \text{dans } Y$$

$$\operatorname{rot}_y \mathbf{E}_0 = 0 \quad \text{dans } Y$$

$$\operatorname{div}_y (\mathbf{E}_0 + j_0 \mathbf{1}_\Sigma) = 0 \quad \text{dans } Y$$

Grace à :

- condition de Neuman sur ∂D_η^\pm
- l'équation de propagation, intégrée entre $y_3 = -\frac{h}{2}$ et $y_3 = \frac{h}{2}$

on obtient : $j_0(x, y) = j_0(x, y_1, y_2)$ dans Σ et

$$j_0(x, y_1, y_2) = \frac{2i\pi\gamma}{k_0^2 + \frac{2i\pi\gamma}{\kappa}} \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{E}_0(x, y_1, y_2, y_3) \cdot \mathbf{e}_3 dy_3$$

Seconde étape :

Problème sur la cellule unité

En passant à la limite double échelle on obtient

$$\operatorname{div}_y \mathbf{H}_0 = \operatorname{rot}_y \mathbf{H}_0 = 0 \quad \text{dans } Y$$

$$\operatorname{rot}_y \mathbf{E}_0 = 0 \quad \text{dans } Y$$

$$\operatorname{div}_y (\mathbf{E}_0 + j_0 \mathbf{1}_\Sigma) = 0 \quad \text{dans } Y$$

Grace à :

- condition de Neuman sur ∂D_η^\pm
- l'équation de propagation, intégrée entre $y_3 = -\frac{h}{2}$ et $y_3 = \frac{h}{2}$

on obtient : $j_0(x, y) = j_0(x, y_1, y_2)$ dans Σ et

$$j_0(x, y_1, y_2) = \frac{2i\pi\gamma}{k_0^2 + \frac{2i\pi\gamma}{\kappa}} \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{E}_0(x, y_1, y_2, y_3) \cdot \mathbf{e}_3 dy_3$$

- $\mathbf{H}_0(x, y) = \mathbf{H}(x)$ (\mathbf{H} limite faible de \mathbf{H}_η).

Seconde étape :

Problème sur la cellule unité

En passant à la limite double échelle on obtient

$$\operatorname{div}_y \mathbf{H}_0 = \operatorname{rot}_y \mathbf{H}_0 = 0 \quad \text{dans } Y$$

$$\operatorname{rot}_y \mathbf{E}_0 = 0 \quad \text{dans } Y$$

$$\operatorname{div}_y (\mathbf{E}_0 + j_0 \mathbf{1}_\Sigma) = 0 \quad \text{dans } Y$$

Grace à :

- condition de Neuman sur $\partial \mathcal{D}_\eta^\pm$
- l'équation de propagation, intégrée entre $y_3 = -\frac{h}{2}$ et $y_3 = \frac{h}{2}$

on obtient : $j_0(x, y) = j_0(x, y_1, y_2)$ dans Σ et

$$j_0(x, y_1, y_2) = \frac{2i\pi\gamma}{k_0^2 + \frac{2i\pi\gamma}{\kappa}} \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{E}_0(x, y_1, y_2, y_3) \cdot \mathbf{e}_3 \, dy_3$$

- $\mathbf{H}_0(x, y) = \mathbf{H}(x)$ (\mathbf{H} limite faible de \mathbf{H}_η).
- Il existe potentiel scalaire périodique $\Phi(x, \cdot)$ tel que :

$$\mathbf{E}_0(x, y) = E(x) + \nabla_y \Phi(x, y) .$$

Seconde étape :

Micro-résonateur

Φ vérifie le problème électrostatique suivant

$$-\Delta_y \Phi = -i j_0 (\delta_{D^+} - \delta_{D^-}) \quad , \quad j_0 = \frac{2i\pi\gamma}{k_0^2 + \frac{2i\pi\gamma}{\kappa}} (E_3 + [\Phi]_h),$$

où $[\Phi]_h(x, y_1, y_2) := \frac{1}{h} \left(\Phi(x, y_1, y_2, \frac{h}{2}) - \Phi(x, y_1, y_2, -\frac{h}{2}) \right)$.

On introduit l'opérateur B_h défini par

$$\begin{aligned} B_h : L^2(D) &\rightarrow L^2(D) \\ w &\rightarrow [\varphi_w]_h(y_1, y_2) \end{aligned}$$

où φ_w est l'unique solution Y -périodique de

$$-\Delta \varphi_w = w (\delta_{D^+} - \delta_{D^-})$$

On déduit $B_h(j_0) - \left(\frac{k_0^2}{2\pi\gamma} + \frac{i}{\kappa} \right) j_0 = -i E_3(x)$.

Seconde étape :

Problème spectral

On a

- B_h est un opérateur positif compact auto-adjoint
- $\nu_0 > \nu_1 \geq \nu_2 \cdots \geq \nu_n \geq \cdots \rightarrow 0$ les valeurs propres de B_h et $\{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$ une base orthogonale de $L^2(D)$ associée

On décompose j_0 dans cette base donc $j_0 := \sum_n c_n \varphi_n$

$$j_0(x, y_1, y_2) = i E_3(x) \sum_n \frac{\int_D \varphi_n}{\frac{k_0^2}{2\pi\gamma} - \nu_n + \frac{i}{\kappa}} \varphi_n$$

La limite faible de j_η est donnée par la relation

$$j(x) := h \int_D j_0(x, y_1, y_2) dy_1 dy_2$$

Seconde étape :

Problème limite

Le problème limite prend la forme

$$\begin{cases} \mathbf{rot} E = i\omega\mu_0 H \\ \mathbf{rot} H = -i\omega\varepsilon_0 \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{eff}}(\omega) E . \end{cases}$$

Le tenseur diagonal $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{eff}}(\omega)$ est donné par

$$\varepsilon_{11}^{\text{eff}}(\omega) = \varepsilon_{22}^{\text{eff}}(\omega) = 1 \quad , \quad \varepsilon_{33}^{\text{eff}}(\omega) = 1 - h\Lambda(\omega, \gamma, \kappa) .$$

avec

$$\Lambda(\omega, \gamma, \kappa) = \sum_n \frac{(\int_D \varphi_n)^2}{\frac{k_0^2}{2\pi\gamma} - \nu_n + \frac{i}{\kappa}} \quad , \quad \omega := \frac{k_0}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$$

Seconde étape :

Problème limite

Le problème limite prend la forme

$$\begin{cases} \mathbf{rot} E = i\omega\mu_0 H \\ \mathbf{rot} H = -i\omega\varepsilon_0 \varepsilon^{\text{eff}}(\omega) E . \end{cases}$$

Le tenseur diagonal $\varepsilon^{\text{eff}}(\omega)$ est donné par

$$\varepsilon_{11}^{\text{eff}}(\omega) = \varepsilon_{22}^{\text{eff}}(\omega) = 1 \quad , \quad \varepsilon_{33}^{\text{eff}}(\omega) = 1 - h\Lambda(\omega, \gamma, \kappa) .$$

avec

$$\Lambda(\omega, \gamma, \kappa) = \sum_n \frac{(\int_D \varphi_n)^2}{\frac{k_0^2}{2\pi\gamma} - \nu_n + \frac{i}{\kappa}} \quad , \quad \omega := \frac{k_0}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$$

Conséquence :

- Si $\kappa \gg 1$: $\varepsilon_{33}^{\text{eff}}$ devient réel avec

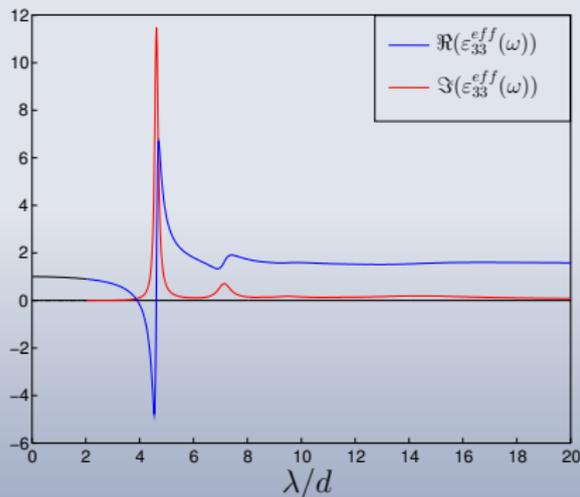
$$\varepsilon_{33}^{\text{eff}}(\omega) \sim \pm\infty \quad \text{quand} \quad \omega \sim \omega_n := \sqrt{\frac{2\pi\gamma\nu_n}{\varepsilon_0\mu_0}}$$

- “Fréquences de résonances” ω_n explicites et “réglables” en fonction de la capacité γ

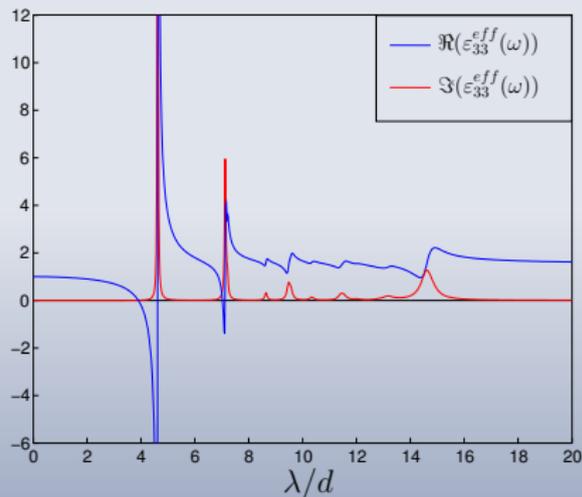
Seconde étape :

Représentations graphiques

$$\mathcal{D} = [-0.25, 0.25]^2, h = 0.5 \text{ and } \gamma = 1.$$



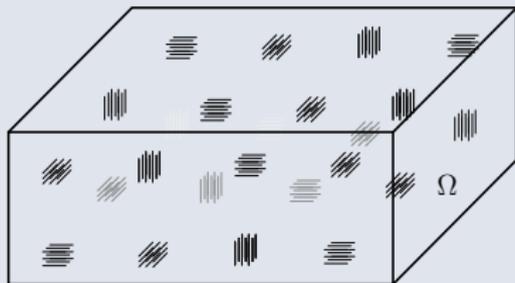
Permittivité effective pour $\kappa = 100$



Permittivité effective pour $\kappa = 1000$

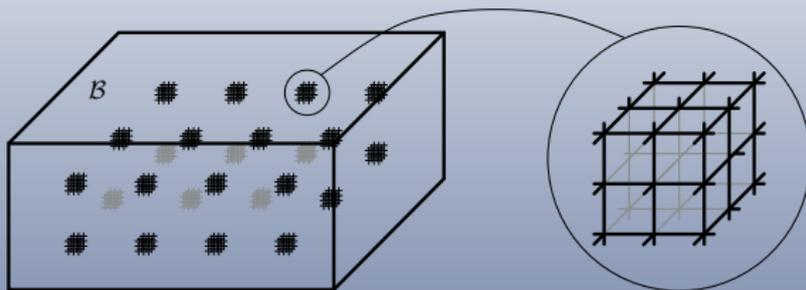
Variante avec trois directions

Variante 1 :



Directions des paquets de fibres alternées

Variante 2 :



Fibres initiales croisées

Tenseurs réalisables

Dans chacune des deux variantes :

$$\varepsilon^{\text{eff}}(\omega) = \begin{pmatrix} 1 - h^1 \Lambda^1(\omega, \kappa^1, \gamma^1) & 0 & 0 \\ 0 & 1 - h^2 \Lambda^2(\omega, \kappa^2, \gamma^2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 - h^3 \Lambda^3(\omega, \kappa^3, \gamma^3) \end{pmatrix}$$

Les paramètres κ^i, γ^i, h^i sont entièrement découplés.

Conséquence :

$$\forall \omega, \quad \bigcup_{\kappa^i, \gamma^i, h^i > 0} \left(\mathfrak{R}(\varepsilon_{11}^{\text{eff}}(\omega)), \mathfrak{R}(\varepsilon_{22}^{\text{eff}}(\omega)), \mathfrak{R}(\varepsilon_{33}^{\text{eff}}(\omega)) \right) = \mathbb{R}^3 .$$

Tenseurs réalisables

Dans chacune des deux variantes :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{eff}}(\omega) = \begin{pmatrix} 1 - h^1 \Lambda^1(\omega, \kappa^1, \gamma^1) & 0 & 0 \\ 0 & 1 - h^2 \Lambda^2(\omega, \kappa^2, \gamma^2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 - h^3 \Lambda^3(\omega, \kappa^3, \gamma^3) \end{pmatrix}$$

Les paramètres κ^i, γ^i, h^i sont entièrement découplés.

Conséquence :

$$\forall \omega, \quad \bigcup_{\kappa^i, \gamma^i, h^i > 0} \left(\Re(\boldsymbol{\varepsilon}_{11}^{\text{eff}}(\omega)), \Re(\boldsymbol{\varepsilon}_{22}^{\text{eff}}(\omega)), \Re(\boldsymbol{\varepsilon}_{33}^{\text{eff}}(\omega)) \right) = \mathbb{R}^3 .$$

Théorème

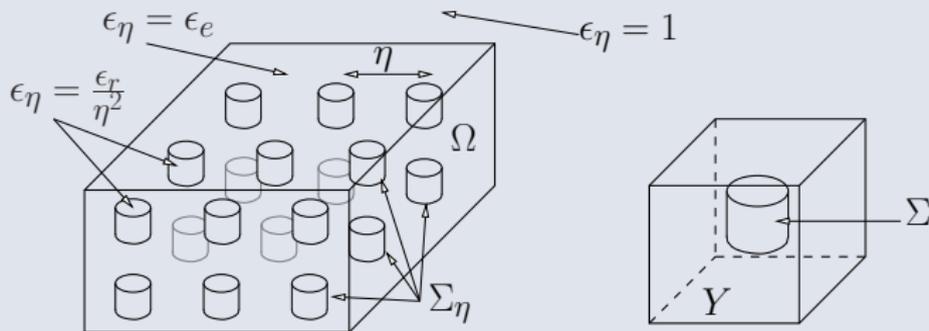
$\forall h > 0, \forall M$ matrice symétrique (réelle), il existe une structure telle que

$$\boldsymbol{\mu}^{\text{eff}} = 1 \quad , \quad \Re(\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{eff}}(\omega)) = M \quad , \quad \left| \Im(\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{eff}}(\omega)) \right| < h .$$

Plan de l'exposé

- 1 Métamateriaux en optique
- 2 Homogénéisation des équations de Maxwell
- 3 Nano-tubes métalliques
- 4 Inclusions diélectriques, magnétisme artificiel**
- 5 Analyse numérique
- 6 Perspectives
- 7 Annexe : Cas aléatoire

Description de la structure



Permittivité relative :

$$\epsilon_\eta(x) = \frac{\epsilon_r}{\eta^2} \mathbf{1}_{\Sigma_\eta}(x) + \epsilon_e \mathbf{1}_{\Omega \setminus \Sigma_\eta}(x) + \mathbf{1}_{\mathbb{R}^3 \setminus \Omega}(x)$$

Hypothèse

- $Y \setminus \Sigma$ simplement connexe
- $\Im(\epsilon_r) > 0$

Pourquoi $\frac{\epsilon_r}{\eta^2}$?

vitesse de propagation dans $T_\eta \simeq \frac{\eta}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0 \epsilon_r}}$

Problème pré-homogénéisé

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{rot} \mathbf{E}_\eta = i\omega\mu_0 \mathbf{H}_\eta \\ \mathbf{rot} \mathbf{H}_\eta = -i\omega\varepsilon_0 \varepsilon_\eta(\mathbf{x}) \mathbf{E}_\eta \\ (\mathbf{E}_\eta - \mathbf{E}^{\text{inc}}, \mathbf{H}_\eta - \mathbf{H}^{\text{inc}}) \text{ vérifie la Silver-Müller} \end{array} \right.$$

Problème pré-homogénéisé

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot } \mathbf{E}_\eta = i\omega\mu_0 \mathbf{H}_\eta \\ \text{rot } \mathbf{H}_\eta = -i\omega\varepsilon_0 \varepsilon_\eta(\mathbf{x}) \mathbf{E}_\eta \\ (\mathbf{E}_\eta - \mathbf{E}^{\text{inc}}, \mathbf{H}_\eta - \mathbf{H}^{\text{inc}}) \text{ vérifie la Silver-Müller} \end{array} \right.$$

Remarque

Pas d'espoir d'obtenir une activité magnétique (i.e. $\boldsymbol{\mu}^{\text{eff}} \neq 0$) en considérant le champ "moyen" $\tilde{\mathbf{H}} = \lim \mathbf{H}_\eta$ au sens faible.

En effet, la première équation entraîne :

$$(\mathbf{E}_\eta, \mathbf{H}_\eta) \rightarrow (\tilde{\mathbf{E}}, \tilde{\mathbf{H}}) \Rightarrow \text{rot } \tilde{\mathbf{E}} = i\omega\mu_0 \tilde{\mathbf{H}} .$$

Nécessité d'une autre notion de champ magnétique effectif.

Hypothèse et estimation à priori

Hypothèse à priori :

$$\int_{B_R} |\mathbf{E}_\eta|^2 + |\mathbf{H}_\eta|^2 < C . \quad (*)$$

Convergence du champ dans $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega$

Grâce à :

- l'hypothèse (*)
- Hypoéllipticité de l'équation $\Delta \mathbf{u} + k_0^2 \mathbf{u} = 0$
- Équations intégrales de Stratton-Chu (équivalentes à (C.O.S))

Lemme

Il existe \mathbf{E}^{ext} , \mathbf{H}^{ext} solutions dans $L^2_{loc}(\mathbb{R}^3 \setminus \Omega)$ de $\Delta \mathbf{u} + k_0^2 \mathbf{u} = 0$ vérifiant Silver-Müller et tels que

$$\mathbf{E}_\eta \rightarrow \mathbf{E}^{ext} \quad , \quad \mathbf{H}_\eta \rightarrow \mathbf{H}^{ext} \quad \text{dans } L^2_{loc}(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega})$$

+ CV uniforme sur tout compact de $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$

Convergence du champ dans Ω (dans $B_R \supset \Omega$)

- D'après (*), il existe \mathbf{E}_0 et \mathbf{H}_0 tels que

$$\mathbf{E}_\eta \rightharpoonup \mathbf{E}_0 \quad , \quad \mathbf{H}_\eta \rightharpoonup \mathbf{H}_0 \quad \text{dans } B_R .$$

- $\mathfrak{F}(\varepsilon_r) > 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{B_R} \eta |\varepsilon_\eta| |\mathbf{E}_\eta|^2 < C$

d'où $\exists \mathbf{J}_0$ tel que $\text{supp} \mathbf{J}_0(x, \cdot) \subset \Sigma$

$$\eta \varepsilon_\eta \mathbf{E}_\eta \rightharpoonup \mathbf{J}_0 .$$

Convergence du champ dans Ω (dans $B_R \supset \Omega$)

- D'après (*), il existe \mathbf{E}_0 et \mathbf{H}_0 tels que

$$\mathbf{E}_\eta \rightharpoonup \mathbf{E}_0 \quad , \quad \mathbf{H}_\eta \rightharpoonup \mathbf{H}_0 \quad \text{dans } B_R .$$

- $\mathfrak{F}(\varepsilon_r) > 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{B_R} \eta |\varepsilon_\eta| |\mathbf{E}_\eta|^2 < C$

d'où $\exists \mathbf{J}_0$ tel que $\text{supp} \mathbf{J}_0(x, \cdot) \subset \Sigma$

$$\eta \varepsilon_\eta \mathbf{E}_\eta \rightharpoonup \mathbf{J}_0 .$$

Il vient deux système d'EDP dans Y indépendant pour :

- $\mathbf{E}_0(x, \cdot)$ champ électrique microscopique
- $(\mathbf{H}_0(x, \cdot), \mathbf{J}_0(x, \cdot))$ champs magnétique et de déplacement microscopiques

Champ électrique microscopique

\mathbf{E}_0 vérifie pour tout $x \in \Omega$

$$\mathbf{rot}_y \mathbf{E}_0 = 0 \quad \text{dans } Y, \quad \mathbf{div}_y \mathbf{E}_0 = 0 \quad \text{dans } Y \setminus \overline{\Sigma}, \quad \mathbf{E}_0 = 0 \quad \text{dans } \Sigma$$

En particulier $\exists \chi \in W_{\#}^{1,2}(Y)$ tel que $\mathbf{E}_0 = \mathbf{E} + \nabla_y \chi$.

Champ électrique microscopique

\mathbf{E}_0 vérifie pour tout $x \in \Omega$

$$\mathbf{rot}_y \mathbf{E}_0 = 0 \quad \text{dans } Y, \quad \mathbf{div}_y \mathbf{E}_0 = 0 \quad \text{dans } Y \setminus \bar{\Sigma}, \quad \mathbf{E}_0 = 0 \quad \text{dans } \Sigma$$

En particulier $\exists \chi \in W_{\#}^{1,2}(Y)$ tel que $\mathbf{E}_0 = \mathbf{E} + \nabla_y \chi$.

On obtient alors $\mathbf{E}_0(x, y) = \sum_{i=1}^3 E_i(x) \mathbf{E}^i(y)$ avec

$$\mathbf{E}^i = \mathbf{e}_i + \nabla_y \chi_i, \quad \Delta \chi_i = 0 \quad \text{dans } Y \setminus \bar{\Sigma} \quad \chi_i = -y_i \quad \text{dans } \Sigma .$$

Pour $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Omega$ on a $\mathbf{E}_0(x, y) = \mathbf{E}(x)$.

Champ électrique microscopique

\mathbf{E}_0 vérifie pour tout $x \in \Omega$

$$\mathbf{rot}_y \mathbf{E}_0 = 0 \quad \text{dans } Y, \quad \mathbf{div}_y \mathbf{E}_0 = 0 \quad \text{dans } Y \setminus \bar{\Sigma}, \quad \mathbf{E}_0 = 0 \quad \text{dans } \Sigma$$

En particulier $\exists \chi \in W_{\#}^{1,2}(Y)$ tel que $\mathbf{E}_0 = \mathbf{E} + \nabla_y \chi$.

On obtient alors $\mathbf{E}_0(x, y) = \sum_{i=1}^3 E_i(x) \mathbf{E}^i(y)$ avec

$$\mathbf{E}^i = \mathbf{e}_i + \nabla_y \chi_i, \quad \Delta \chi_i = 0 \quad \text{dans } Y \setminus \bar{\Sigma} \quad \chi_i = -y_i \quad \text{dans } \Sigma .$$

Pour $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Omega$ on a $\mathbf{E}_0(x, y) = \mathbf{E}(x)$.

Tenseur de permittivité effectif :

$$(\varepsilon^{\text{eff}})_{ij} = \varepsilon_e \int_Y \mathbf{E}^i \cdot \mathbf{E}^j dy = \varepsilon_e \int_{Y \setminus \Sigma} (\mathbf{e}_i + \nabla_y \chi_i) \cdot (\mathbf{e}_j + \nabla_y \chi_j) dy$$

En particulier ε^{eff} est réel symétrique positif indépendant de la fréquence.

Champ magnétique microscopique

On montre facilement que $(\mathbf{H}_0(x, \cdot), \mathbf{J}_0(x, \cdot))$ vérifie

$$(**) \quad \begin{cases} \operatorname{div}_Y \mathbf{H}_0 = 0 & \text{dans } Y, & J_0 = 0 & \text{dans } Y \setminus \bar{\Sigma} \\ \operatorname{rot}_Y \mathbf{H}_0 = -i\omega \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{J}_0 & \text{dans } Y, & \operatorname{rot}_Y \mathbf{J}_0 = i\omega \mu_0 \mathbf{H}_0 & \text{dans } \Sigma \end{cases}$$

Quelles sont les solutions de ()?**

- On peut éliminer \mathbf{J}_0 et remarquer que $\mathbf{H}_0 \in W_{\#}^{1,2}(Y)$ et $\operatorname{rot}_Y \mathbf{H}_0 = 0$ dans $Y \setminus \bar{\Sigma}$.
- Via une formulation variationnelle adéquate, on trouve un espace des solutions de **dimension 3**.
- Le choix de solutions indépendantes $\mathbf{H}^1, \mathbf{H}^2, \mathbf{H}^3$ va être essentiel.

Moyennisation géométrique

Soit $\mathbf{u} \in L^2_{\#}(Y; \mathbb{C}^3)$ tel que $\mathbf{rot} \mathbf{u} = 0$ dans $Y \setminus \Sigma$.

“Champ de circulation moyen” $\oint \mathbf{u} \in \mathbb{C}^3$:

(i) Il existe $\psi \in W^1_{\#}(Y \setminus \Sigma)$ (unique à une constante près) tel que

$$\mathbf{u} = \nabla \psi + \oint \mathbf{u} \quad \text{dans } Y \setminus \Sigma .$$

(ii) $\forall \mathbf{f} \in L^2_{\#}(Y)$ tel que $\operatorname{div} \mathbf{f} = 0$ et $\mathbf{f} = 0$ dans Σ

$$\int \mathbf{u} \cdot \mathbf{f} \, dy = \oint \mathbf{u} \, dy \cdot \int \mathbf{f} \, dy .$$

(iii) Si \mathbf{u} est régulier et $\mathbf{k} \in \{1, 2, 3\}$, alors

$$\left(\oint \mathbf{u} \right) \cdot \mathbf{e}_k = \int_0^1 \mathbf{u}(\gamma(s)) \gamma'(s) \, ds ,$$

pour tout $\gamma \in C^1([0, 1]; Y \setminus \Sigma)$ tel que $\gamma^k(1) - \gamma^k(0) = \mathbf{e}_k$.

Formulation variationnelle

Définition

Espace de Hilbert :

$$X_0 := \{ \mathbf{v} \in W_{\#}^{1,2}(Y) : \mathbf{rot} \mathbf{v} = 0 \text{ dans } Y \setminus \Sigma, \oint \mathbf{v} = 0 \}$$

Forme sesquilinéaire : $b_0(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Sigma} \mathbf{rot} \mathbf{u} \cdot \mathbf{rot} \bar{\mathbf{v}} + \int_Y \operatorname{div} \mathbf{u} \operatorname{div} \bar{\mathbf{v}}$

Alors \mathbf{H}_0 se décompose : $\mathbf{H}_0(x, \cdot) = \mathbf{z}(x) + \mathbf{u}(x, \cdot)$ où $\oint \mathbf{H}_0(x, \cdot) = \mathbf{z}(x)$ et $\mathbf{u} \in X_0$ solution de

$$(\mathcal{P}_z) \quad b_0(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - \varepsilon_r k_0^2 \int_Y \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{v}} = \varepsilon_r k_0^2 \int_Y \mathbf{z} \cdot \bar{\mathbf{v}}, \quad \forall \mathbf{v} \in X_0.$$

Proposition

- $\forall \mathbf{z}$, (\mathcal{P}_z) admet une solution unique $\mathbf{u}_z(y)$
- Espace de solutions de dimension trois engendré par

$$\mathbf{u}^i = \mathbf{u}_{e_i}, \quad i \in \{1, 2, 3\}.$$

Champ magnétique macroscopique

Finalement :

- $\mathbf{H}^i(y) = \mathbf{e}_i + \mathbf{u}^i(y)$
- $\oint \mathbf{H}^i = \mathbf{e}_i$ pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$
- Pour $x \in \Omega$, on a la décomposition

$$\mathbf{H}_0(x, y) = \sum_{i=1}^3 H_i(x) \mathbf{H}^i(y)$$

- Le champ macroscopique intérieur \mathbf{H}^{int} est donné par

$$\mathbf{H}^{\text{int}}(x) = (H_i(x))_{i=1}^3 = \oint \mathbf{H}_0(x, \cdot)$$

Tenseur de perméabilité :

$$(\boldsymbol{\mu}^{\text{eff}})_{kl} := \mathbf{e}_k \cdot \int_Y \mathbf{H}^l(y) dy .$$

Champs macroscopiques :

$$\mathbf{E} := \mathbf{E}^{\text{ext}} 1_{\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}} + \mathbf{E}^{\text{int}} 1_{\Omega} \quad \text{et} \quad \mathbf{H} := \mathbf{H}^{\text{ext}} 1_{\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}} + \mathbf{H}^{\text{int}} 1_{\Omega}$$

\mathbf{H}^{int} a-t-il vraiment une signification physique ?

Tenseur de perméabilité :

$$(\boldsymbol{\mu}^{\text{eff}})_{kl} := \mathbf{e}_k \cdot \int_Y \mathbf{H}'(y) dy .$$

Champs macroscopiques :

$$\mathbf{E} := \mathbf{E}^{\text{ext}} 1_{\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}} + \mathbf{E}^{\text{int}} 1_{\Omega} \quad \text{et} \quad \mathbf{H} := \mathbf{H}^{\text{ext}} 1_{\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}} + \mathbf{H}^{\text{int}} 1_{\Omega}$$

\mathbf{H}^{int} a-t-il vraiment une signification physique ?

$$\begin{array}{lll} \mathbf{n} \wedge \mathbf{E}^{\text{ext}} = \mathbf{n} \wedge \mathbf{E}^{\text{int}} & \mathbf{n} \wedge \mathbf{H}^{\text{ext}} = \mathbf{n} \wedge \mathbf{H}^{\text{int}} & \partial\Omega \\ \mathbf{E}^{\text{ext}} \cdot \mathbf{n} = \epsilon^{\text{eff}} \mathbf{E}^{\text{int}} \cdot \mathbf{n} & \mathbf{H}^{\text{ext}} \cdot \mathbf{n} = \boldsymbol{\mu}^{\text{eff}} \mathbf{H}^{\text{int}} \cdot \mathbf{n} & \partial\Omega \end{array}$$

+ $(\mathbf{E} - \mathbf{E}^{\text{inc}}, \mathbf{H} - \mathbf{H}^{\text{inc}})$ vérifie Silver-Müller

Tenseur de perméabilité :

$$(\boldsymbol{\mu}^{\text{eff}})_{kl} := \mathbf{e}_k \cdot \int_Y \mathbf{H}^l(y) dy .$$

Champs macroscopiques :

$$\mathbf{E} := \mathbf{E}^{\text{ext}} 1_{\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}} + \mathbf{E}^{\text{int}} 1_{\Omega} \quad \text{et} \quad \mathbf{H} := \mathbf{H}^{\text{ext}} 1_{\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}} + \mathbf{H}^{\text{int}} 1_{\Omega}$$

\mathbf{H}^{int} a-t-il vraiment une signification physique ?

$$\begin{array}{lll} \mathbf{n} \wedge \mathbf{E}^{\text{ext}} = \mathbf{n} \wedge \mathbf{E}^{\text{int}} & \mathbf{n} \wedge \mathbf{H}^{\text{ext}} = \mathbf{n} \wedge \mathbf{H}^{\text{int}} & \partial\Omega \\ \mathbf{E}^{\text{ext}} \cdot \mathbf{n} = \epsilon^{\text{eff}} \mathbf{E}^{\text{int}} \cdot \mathbf{n} & \mathbf{H}^{\text{ext}} \cdot \mathbf{n} = \boldsymbol{\mu}^{\text{eff}} \mathbf{H}^{\text{int}} \cdot \mathbf{n} & \partial\Omega \end{array}$$

+ $(\mathbf{E} - \mathbf{E}^{\text{inc}}, \mathbf{H} - \mathbf{H}^{\text{inc}})$ vérifie Silver-Müller

Résultat d'homogénéisation

Système homogénéisé :

$$\begin{cases} \mathbf{rot} \mathbf{E} = i\omega\mu_0 \boldsymbol{\mu}^{\text{eff}}(x, \omega) \mathbf{H} \\ \mathbf{rot} \mathbf{H} = -i\omega\epsilon_0 \boldsymbol{\epsilon}^{\text{eff}}(x) \mathbf{E} \end{cases}$$

- Le système précédent admet une solution unique (\mathbf{E}, \mathbf{H}) car $\Im(\boldsymbol{\mu}^{\text{eff}}) > 0$.
- **Convergence forte double échelle**

$$\int_{B_R} \left| \mathbf{E}_\eta(x) - \mathbf{E}_0\left(x, \frac{x}{\eta}\right) \right|^2 dx \rightarrow 0, \quad \int_{B_R} \left| \mathbf{H}_\eta(x) - \mathbf{H}_0\left(x, \frac{x}{\eta}\right) \right|^2 dx \rightarrow 0$$

Problème spectral

Comment varie $\mu^{\text{eff}}(\omega)$ en fonction de la fréquence ?

Rappelons que : $(\mu^{\text{eff}})_{kl} = \int_Y \mathbf{H}^k \cdot \mathbf{e}_l = \delta_{kl} + \int_Y \mathbf{u}^k \cdot \mathbf{e}_l$

avec $\mathbf{u}^k \in X_0$ solution de

$$(\mathcal{P}_z) \quad b_0(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}) - \varepsilon_r k_0^2 \int_Y \mathbf{u}^k \cdot \bar{\mathbf{v}} = \varepsilon_r k_0^2 \int_Y \mathbf{e}_k \cdot \bar{\mathbf{v}} \quad , \quad \forall \mathbf{v} \in X_0 .$$

$X_0 := \left\{ \mathbf{v} \in W_{\#}^{1,2}(Y) : \mathbf{rot} \mathbf{v} = 0 \text{ dans } Y \setminus \Sigma , \oint \mathbf{v} = 0 \right\}$ muni du produit scalaire $b_0(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \int_Y (\mathbf{rot} \mathbf{u} \cdot \mathbf{rot} \bar{\mathbf{v}} + \text{div} \mathbf{u} \text{div} \bar{\mathbf{v}}) dy$.

Problème spectral :

$$b_0(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \lambda \int_Y \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in X_0 \cap L^2(Y; \mathbb{R}^3) .$$

Problème spectral

Lemme

- b_0 est une forme hermitienne sur X_0 et $\mathbf{v} \rightarrow \sqrt{b_0(\mathbf{v}, \mathbf{v})}$ définit une norme équivalente à la norme dans $W_{\#}^{1,2}(Y; \mathbb{C}^3)$.
- L'opérateur $B_0 : X_0 \rightarrow X_0$ associée à b_0 est à résolvant compact dans $L^2(Y)$.
- Il existe \mathbf{w}_n une base orthonormale de $L^2(Y)$ associée à $\{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$ ($\lambda_n \rightarrow +\infty$)

$$b_0(\mathbf{w}_n, \mathbf{v}) = \lambda_n \int_Y \mathbf{w}_n \cdot \mathbf{v} .$$

Problème spectral

Lemme

- b_0 est une forme hermitienne sur X_0 et $\mathbf{v} \rightarrow \sqrt{b_0(\mathbf{v}, \mathbf{v})}$ définit une norme équivalente à la norme dans $W_{\#}^{1,2}(Y; \mathbb{C}^3)$.
- L'opérateur $B_0 : X_0 \rightarrow X_0$ associée à b_0 est à résolvant compact dans $L^2(Y)$.
- Il existe \mathbf{w}_n une base orthonormale de $L^2(Y)$ associée à $\{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$ ($\lambda_n \rightarrow +\infty$)

$$b_0(\mathbf{w}_n, \mathbf{v}) = \lambda_n \int_Y \mathbf{w}_n \cdot \mathbf{v} .$$

En diagonalisant (\mathcal{P}_z) , il vient

$$\mathbf{u}^k = \sum_n \frac{\varepsilon_r k_0^2}{\lambda_n - \varepsilon_r k_0^2} \left(\int_Y (\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{w}_n) dy \right) \mathbf{w}_n .$$

Problème limite

Finalement

$$\boldsymbol{\mu}_{kl}^{\text{eff}} = \delta_{kl} + \int_Y \mathbf{u}^k \cdot \mathbf{e}_l ,$$

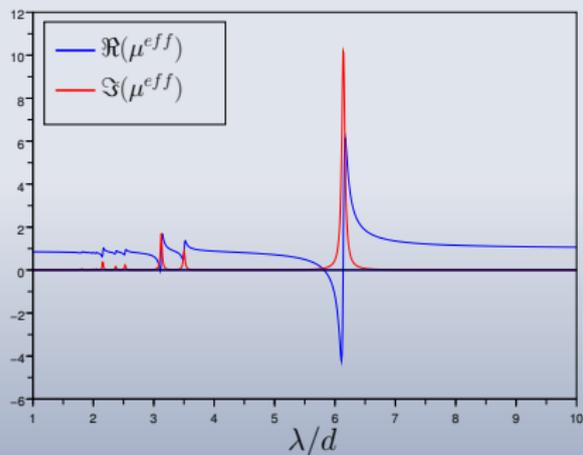
Perméabilité effective

$$\boldsymbol{\mu}_{kl}^{\text{eff}}(x, \omega) = \begin{cases} \delta_{kl} + \sum_n \frac{\varepsilon_r k_0^2}{\lambda_n - \varepsilon_r k_0^2} \left(\int_Y \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{w}_n \right) \left(\int_Y \mathbf{e}_l \cdot \mathbf{w}_n \right) & \Omega \\ \delta_{kl} & \mathbb{R}^3 \setminus \Omega \end{cases}$$

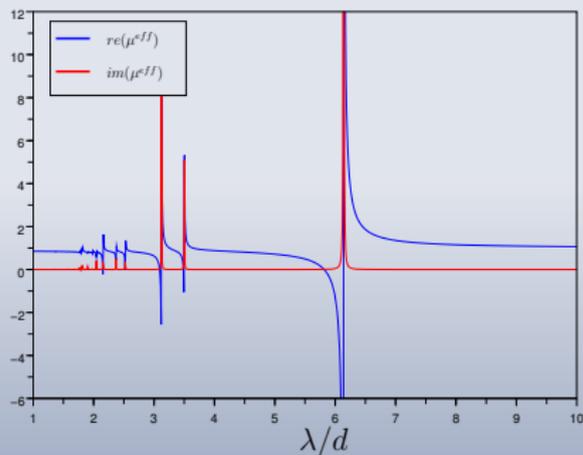
$$(k_0 = \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \omega)$$

Simulations numériques

Parties réelle et imaginaire de μ en fonction de la longueur d'onde λ/d dans le cas où Σ est un cube de côté 0,5 :



$$\varepsilon_r = 100 + 5i$$



$$\varepsilon_r = 100 + i$$

Autre formulation du problème spectral

$$\int_{\Sigma} \mathbf{rot} \mathbf{u} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{v} + \int_Y \operatorname{div} \mathbf{u} \operatorname{div} \mathbf{v} = \lambda \int_Y \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in X_0 .$$

- Nouvelle inconnue : $\mathbf{f} := \mathbf{rot} \mathbf{u}|_{\Sigma}$
- Nouvel espace : $Z_0 := \left\{ \mathbf{f} \in L^2(\Sigma) : \operatorname{div} \mathbf{f} = 0, \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\Sigma \right\}$.

Autre formulation du problème spectral

$$\int_{\Sigma} \mathbf{rot} \mathbf{u} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{v} + \int_Y \operatorname{div} \mathbf{u} \operatorname{div} \mathbf{v} = \lambda \int_Y \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in X_0 .$$

- Nouvelle inconnue : $\mathbf{f} := \mathbf{rot} \mathbf{u}|_{\Sigma}$
- Nouvel espace : $Z_0 := \left\{ \mathbf{f} \in L^2(\Sigma) : \operatorname{div} \mathbf{f} = 0, \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\Sigma \right\}$.

Définition

$$\mathbf{A} := P_0(K + \Gamma)$$

$$K : \mathbf{f} \in Z_0 \rightarrow \psi|_{\Sigma} \in L^2(\Sigma; \mathbb{R}^3) \quad \text{où} \quad \begin{cases} -\Delta \psi = \mathbf{f} \mathbf{1}_{\Sigma} & \text{dans } Y \\ \psi|_{Y\#} = 0 & \int_Y \psi = 0 \end{cases}$$

$$\Gamma : Z_0 \rightarrow L^2(\Sigma; \mathbb{R}^3) \quad / \quad (\Gamma \mathbf{f})(y) = \frac{1}{4} \left(\int_{\Sigma} \mathbf{y} \wedge \mathbf{f}(y) dy \right) \wedge \mathbf{y}.$$

P_0 projection orthogonale de $L^2(\Sigma; \mathbb{R}^3) \rightarrow Z_0$

Autre formulation du problème spectral

Théorème

(\mathbf{u}, λ) tel que $\int \mathbf{u} \neq 0$ et

$$b_0(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \lambda \int_Y \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in X_0$$

\Leftrightarrow

$$(\alpha, \mathbf{g}) := \left(\frac{1}{\lambda}, \mathbf{rot} \mathbf{u}|_{\Sigma} \right) \text{ satisfait } \mathbf{A} \mathbf{g} = \alpha \mathbf{g} .$$

$$\boldsymbol{\mu}_{kl}^{\text{eff}}(x, \omega) = \begin{cases} \delta_{kl} + \frac{1}{4} \sum_n \frac{\varepsilon_r k_0^2}{1 - \varepsilon_r \alpha_n k_0^2} \left[\int_{\Sigma} \mathbf{y} \wedge \mathbf{g}_n \cdot \mathbf{e}_i \right] \left[\int_{\Sigma} \mathbf{y} \wedge \mathbf{g}_n \cdot \mathbf{e}_j \right], & \Omega \\ \delta_{kl} & \mathbb{R}^3 \setminus \Omega \end{cases}$$

Plan de l'exposé

- 1 Métamatériaux en optique
- 2 Homogénéisation des équations de Maxwell
- 3 Nano-tubes métalliques
- 4 Inclusions diélectriques, magnétisme artificiel
- 5 Analyse numérique**
- 6 Perspectives
- 7 Annexe : Cas aléatoire

Analyse numérique du problème spectral

Objectif : Approcher (α_n, \mathbf{g}_n) les valeurs et vecteurs propres de \mathbf{A} .

On utilise la méthode de Galerkin : on cherche un espace Z_h de dimension fini approchant $Z_0 := \{\mathbf{f} \in L^2(\Sigma, \mathbb{R}^3) / \operatorname{div} \mathbf{f} = 0, \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ } \partial\Sigma\}$

Plus précisément il faut :

- Z_h "approche" Z_0 i.e. $\forall \mathbf{f} \in Z_0, \exists \mathbf{f}_h \in Z_h$ tq. $\|\mathbf{f} - \mathbf{f}_h\|_{L^2(\Sigma)} \rightarrow 0$,
- $\{\psi_h^a : a \in \mathcal{A}_{h,0}\}$ une base de Z_h

Analyse numérique du problème spectral

Objectif : Approcher (α_n, \mathbf{g}_n) les valeurs et vecteurs propres de \mathbf{A} .

On utilise la méthode de Galerkin : on cherche un espace Z_h de dimension fini approchant $Z_0 := \{ \mathbf{f} \in L^2(\Sigma, \mathbb{R}^3) / \operatorname{div} \mathbf{f} = 0, \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\Sigma \}$

Plus précisément il faut :

- Z_h "approche" Z_0 i.e. $\forall \mathbf{f} \in Z_0, \exists \mathbf{f}_h \in Z_h$ tq. $\| \mathbf{f} - \mathbf{f}_h \|_{L^2(\Sigma)} \rightarrow 0$,
- $\{ \psi_h^a : a \in \mathcal{A}_{h,0} \}$ une base de Z_h

On introduit la matrice donnée par

$$(\mathbf{M}_h)_{ab} := \langle \mathbf{A} \psi_h^a, \psi_h^b \rangle, \quad \forall (a, b) \in \mathcal{A}_{h,0}.$$

Théorème

À l'aide des valeurs et vecteurs propres de \mathbf{M}_h , on construit une suite de tenseur μ_h telle que

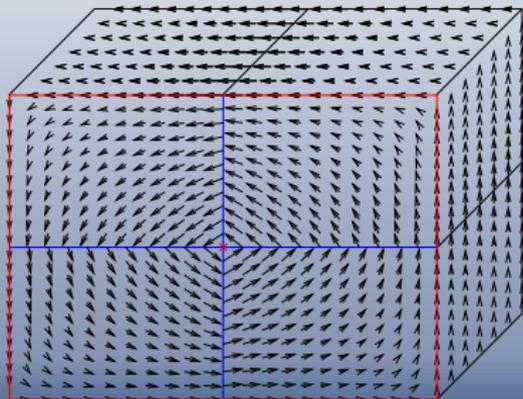
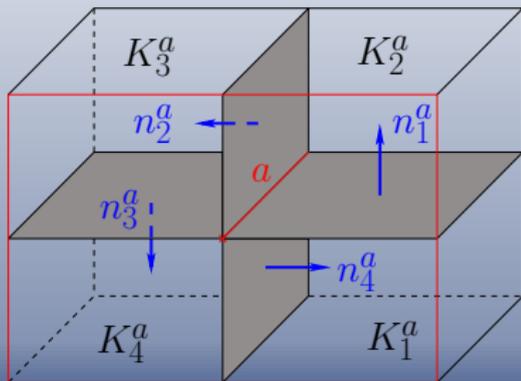
$$\lim_{h \rightarrow 0} \mu_h = \mu^{\text{eff}}.$$

Discrétisation

Pour tout $a \in \mathcal{A}$ on pose

- K_i^a les 4 pavés contenant a .
- n_i^a la normale aux faces communes à K_i^a et K_{i+1}^a .

$$\psi^a(x) := \frac{1}{|K|} \sum_{i=1}^4 \left[\left((x - x^a) \cdot n_i^a + h_i^a \right) n_i^a - \left((x - x^a) \cdot n_{i-1}^a + h_{i-1}^a \right) n_{i-1}^a \right] \mathbf{1}_{K_i^a}(x)$$



Approximation numérique

On note

$$Z_h := \text{vect}\{\psi^a : a \in \mathcal{A}\} .$$

Lemme

On a bien

- $\text{div } \psi^a = 0 \quad \forall a \in \mathcal{A}$
- $\psi^a \cdot \mathbf{n} = 0$ sur $\partial\Sigma \quad \forall a \in \mathcal{A}$
- Z_h est "dense" dans Z_0 .

Difficultés

- Nécessité de se limiter à $\mathcal{A}_0 \subsetneq \mathcal{A}$, car $\{\psi^a, a \in \mathcal{A}\}$ n'est pas libre.
- Le calcul de $(\mathbf{M}_h)_{ab} := \langle \mathbf{A}\psi_h^a, \psi_h^b \rangle$ fait intervenir un noyau de Green périodique dont il faut extraire les singularités.

Noyau de Green périodique

L'opérateur $K : Z_0 \rightarrow L^2(\Sigma)$ s'écrit $K \mathbf{f}(x) = \int_Y \Phi(x, y) \mathbf{f}(y) dy$ avec

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{4\pi} \sum_{i,j,k=-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{erfc}\left(\frac{\|x-y+(i,j,k)\|}{2\sqrt{\beta}}\right)}{\|x-y+(i,j,k)\|} - \beta$$
$$+ 8 \sum_{i,j,k=0}^{+\infty} \gamma_{ijk} \frac{e^{-4\beta\pi^2\|(i,j,k)\|^2}}{4\pi^2\|(i,j,k)\|^2} \cos(2i\pi(x_1 - y_1)) \cos(2j\pi(x_2 - y_2)) \cos(2k\pi(x_3 - y_3))$$

où γ_{ijk} défini $\forall (i, j, k) \in (\mathbb{N} \setminus \{0\})^3$ par :

$$\gamma_{000} = 0, \quad \gamma_{i00} = \gamma_{0j0} = \gamma_{00k} = \frac{1}{4},$$
$$\gamma_{ij0} = \gamma_{i0k} = \gamma_{0jk} = \frac{1}{2}, \quad \gamma_{ijk} = 1.$$

Terme singulier lorsque $i = j = k = 0$: $\xi(x, y) = \frac{1}{4\pi} \frac{\operatorname{erfc}\left(\frac{\|x-y\|}{2\sqrt{\beta}}\right)}{\|x-y\|}.$

Plan de l'exposé

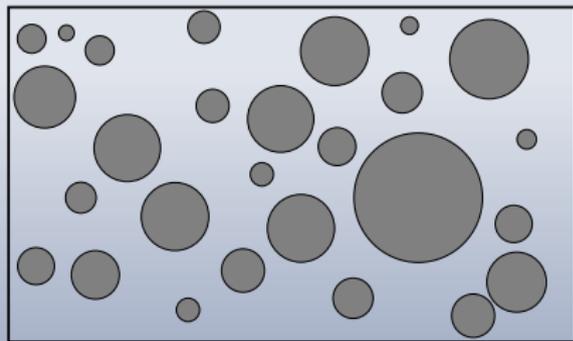
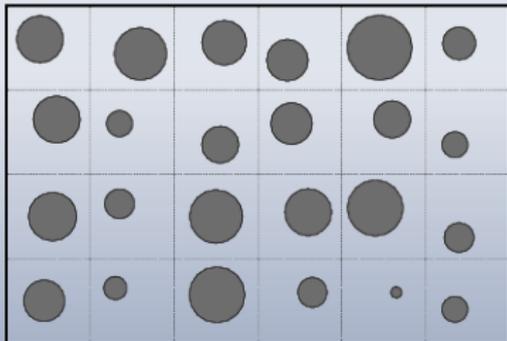
- 1 Métamatériaux en optique
- 2 Homogénéisation des équations de Maxwell
- 3 Nano-tubes métalliques
- 4 Inclusions diélectriques, magnétisme artificiel
- 5 Analyse numérique
- 6 Perspectives**
- 7 Annexe : Cas aléatoire

Perspectives

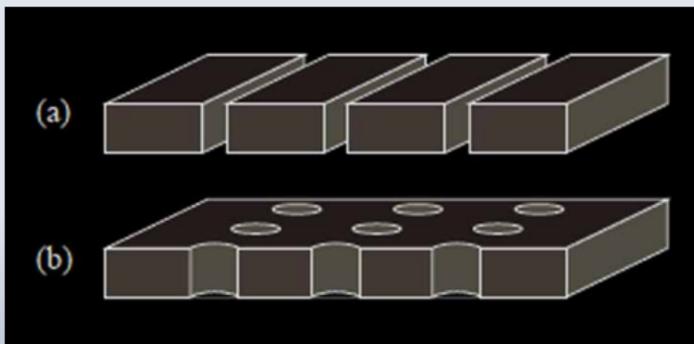
- Comparer numériquement la structure réelle et le milieu homogénéisé
- Structure diélectrique 3D aléatoire

Perspectives

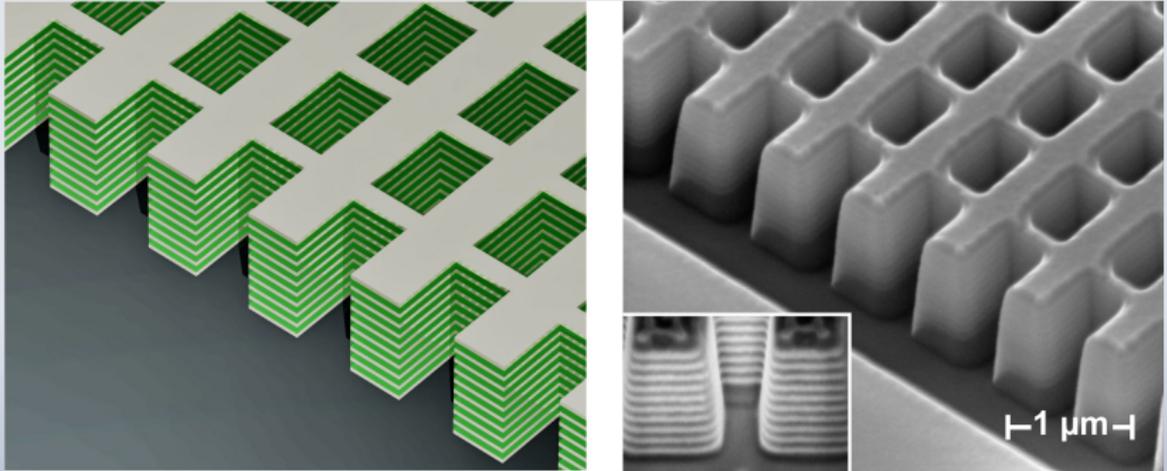
- Comparer numériquement la structure réelle et le milieu homogénéisé
- Structure diélectrique 3D aléatoire
- Structure plus générales



Tamis à photons



Fishnet structure



Structure en filet (Fishnet structure) permettant d'obtenir ("expérimentalement") une permittivité et une perméabilité simultanément négatives.

Conclusion

Nano-tubes métalliques très conducteurs (3D) :

- Homogénéisation réitérée
- **Permittivité effective de grand module (positif ou non)** autour de fréquences de résonances
- Tous les tenseurs de permittivité réels symétriques sont atteignables

Conclusion

Nano-tubes métalliques très conducteurs (3D) :

- Homogénéisation réitérée
- **Permittivité effective de grand module (positif ou non)** autour de fréquences de résonances
- Tous les tenseurs de permittivité réels symétriques sont atteignables

Structure fortement diélectrique (3D) :

- Moyennisation géométrique adéquate pour le champ magnétique microscopique
- Activité magnétique artificielle \Rightarrow **perméabilité effective négative**

Conclusion

Nano-tubes métalliques très conducteurs (3D) :

- Homogénéisation réitérée
- **Permittivité effective de grand module (positif ou non)** autour de fréquences de résonances
- Tous les tenseurs de permittivité réels symétriques sont atteignables

Structure fortement diélectrique (3D) :

- Moyennisation géométrique adéquate pour le champ magnétique microscopique
- Activité magnétique artificielle \Rightarrow **perméabilité effective négative**

Structure diélectrique aléatoire (2D) :

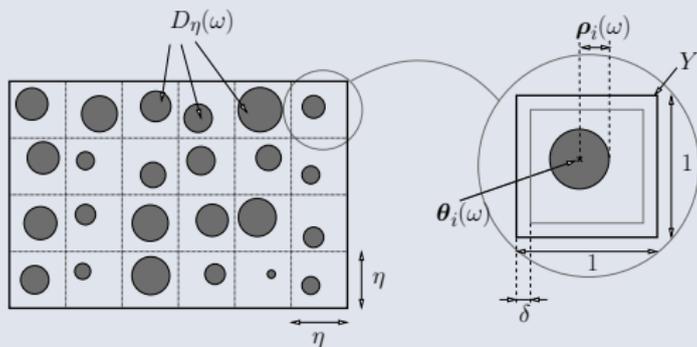
- Problème décrit par un système dynamique ergodique
- Condition sur la distribution des rayons, permittivités pour permettre l'analyse limite
- Problème limite déterministe avec une **perméabilité effective négative**

Dans tous les cas on étudie numériquement les tenseurs effectifs.

Plan de l'exposé

- 1 Métamateriaux en optique
- 2 Homogénéisation des équations de Maxwell
- 3 Nano-tubes métalliques
- 4 Inclusions diélectriques, magnétisme artificiel
- 5 Analyse numérique
- 6 Perspectives
- 7 Annexe : Cas aléatoire**

Description de la structure



On introduit le paramètre $\omega \in \Omega$ qui désigne l'événement aléatoire.

$$\mathcal{D}_\eta = \bigcup_{i \in J_\eta} \mathcal{D}_\eta^i(\omega) \quad , \quad \mathcal{D}_\eta^i := \eta[i - \mathbf{y}(\omega) + B(\theta_i(\omega), \rho_i(\omega))]$$

avec $J_\eta := \{i \in \mathbb{Z}^2 : \eta(i - \mathbf{y}(\omega) + Y) \subset \Omega\}$

Permittivité relative :

$$\varepsilon_\eta(x, \omega) := \mathbf{1}_{\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{D}_\eta}(x) + \sum_{i \in J_\eta} \frac{\varepsilon_i(\omega)}{\eta^2} \mathbf{1}_{\mathcal{D}_\eta^i}(x) .$$

Problème pré-homogénéisé

On se place en polarisation $\mathbf{H}||$: i.e. $\mathbf{H}_\eta(x, \omega) = u_\eta(x_1, x_2, \omega)\mathbf{e}_3$

Le système de Maxwell devient :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\mathbf{a}_\eta \nabla u_\eta(x, \omega)) + k_0^2 u_\eta(x, \omega) = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^2 \\ (u_\eta - u^{\text{inc}}) \text{ vérifie les conditions d'onde sortantes de Sommerfeld} \end{cases}$$

avec $\mathbf{a}_\eta := \frac{1}{\varepsilon_\eta}$.

Méthode homogénéisation stochastique :

- système dynamique ergodique
- convergence double-échelle stochastique

Résultat d'homogénéisation

- **Tenseur de perméabilité dépendant de la fréquence :**

$$\boldsymbol{\mu}^{\text{eff}}(k_0) = 1 + \sum_n \mathbb{E} \left[\frac{\varepsilon \rho^4 k_0^2}{\lambda_n - \varepsilon \rho^2 k_0^2} \right] \left(\int_Y \varphi_n \right)^2$$

- **Tenseur de permittivité (réel positif) :** $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{eff}} = \mathbb{E} \left[\frac{1}{A(\rho)} \right]$ où, pour θ, \mathbf{e} quelconque (\mathbf{e} vecteur unitaire)

$$A(\rho) = \inf_w \left\{ \int_{Y \setminus B(\theta, \rho)} |\mathbf{e} + \nabla w|^2 : w \text{ } Y\text{-périodique} \right\}$$

(problème de Neuman en domaine perforé)

Résultat d'homogénéisation

- **Tenseur de perméabilité dépendant de la fréquence :**

$$\boldsymbol{\mu}^{\text{eff}}(k_0) = 1 + \sum_n \mathbb{E} \left[\frac{\varepsilon \rho^4 k_0^2}{\lambda_n - \varepsilon \rho^2 k_0^2} \right] \left(\int_Y \varphi_n \right)^2$$

- **Tenseur de permittivité (réel positif) :** $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{eff}} = \mathbb{E} \left[\frac{1}{A(\rho)} \right]$ où, pour θ, \mathbf{e} quelconque (\mathbf{e} vecteur unitaire)

$$A(\rho) = \inf_w \left\{ \int_{Y \setminus B(\theta, \rho)} |\mathbf{e} + \nabla w|^2 : w \text{ } Y\text{-périodique} \right\}$$

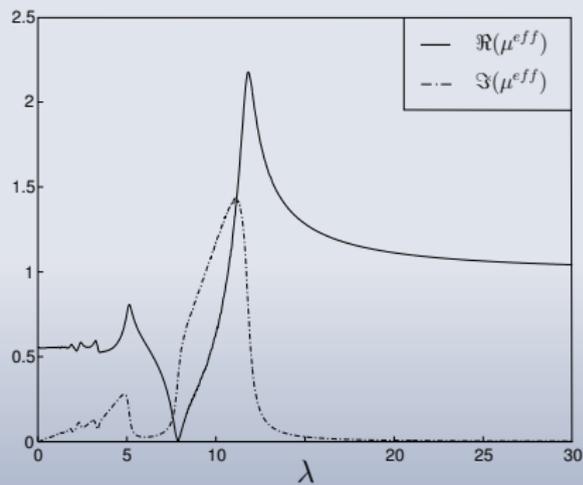
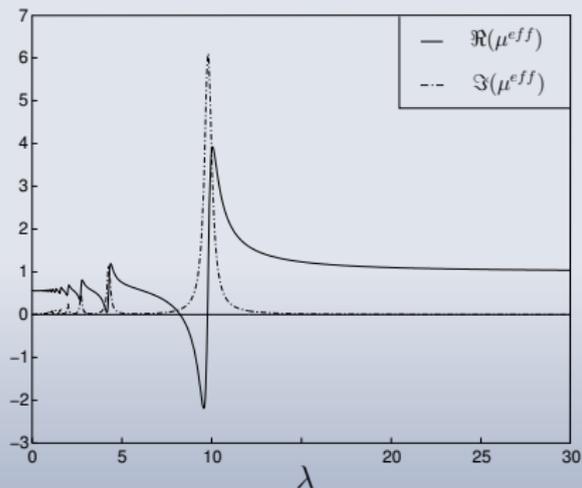
(problème de Neuman en domaine perforé)

Problème limite

$$\begin{cases} \operatorname{div} \left(\frac{1}{\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{eff}}(x)} \nabla u(x) \right) + k_0^2 \boldsymbol{\mu}^{\text{eff}}(x, k_0) u(x) = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^2 \\ (u - u^{\text{inc}}) \text{ vérifie les Silver-Müller} \end{cases}$$

Le système limite est déterministe

Simulations numériques



Domaine de validité

L'analyse asymptotique nécessite deux hypothèses :

- $\Im(\varepsilon) > 0$ presque sûrement

- Il existe $h > 0$ tel que
$$\mathbb{E} \left[\left| \frac{\varepsilon \rho}{\text{dist}(\varepsilon \rho^2 k_0^2, \sigma_0)} \right|^{2+h} \right] < \infty. \quad (*)$$

Alors on a convergence forte double-échelle stochastique.

Domaine de validité

L'analyse asymptotique nécessite deux hypothèses :

- $\Im(\varepsilon) > 0$ presque sûrement

- Il existe $h > 0$ tel que
$$\mathbb{E} \left[\left| \frac{\varepsilon \rho}{\text{dist}(\varepsilon \rho^2 k_0^2, \sigma_0)} \right|^{2+h} \right] < \infty. \quad (*)$$

Alors on a convergence forte double-échelle stochastique.

Question : Que se passe-t-il si la loi de permittivité $\varepsilon(\omega)$ est distribuée sur l'axe des réels ?

Domaine de validité

L'analyse asymptotique nécessite deux hypothèses :

- $\Im(\varepsilon) > 0$ presque sûrement

- Il existe $h > 0$ tel que
$$\mathbb{E} \left[\left| \frac{\varepsilon \rho}{\text{dist}(\varepsilon \rho^2 k_0^2, \sigma_0)} \right|^{2+h} \right] < \infty. \quad (*)$$

Alors on a convergence forte double-échelle stochastique.

Question : Que se passe-t-il si la loi de permittivité $\varepsilon(\omega)$ est distribuée sur l'axe des réels ?

- Structure de géométrie non-aléatoire : $\theta = \theta_0$ et $\rho = \rho_0$
- Distribution de $\varepsilon(\omega)$ de densité $g(a)$ sur l'axe réel ($\varepsilon = a + i0$).

Loi : $p_0(\theta, \rho, a + ib) = \delta(\theta - \theta_0, \rho - \rho_0) \otimes g(a) da \otimes \delta(b) \quad (\varepsilon = a + ib) .$

Limite de dissipation

Approchée par une suite de lois avec dissipation :

$$p_h := \delta(\theta - \theta_0, \rho - \rho_0) \otimes g(a) da \otimes \frac{1}{h} \zeta\left(\frac{b}{h}\right)$$

avec ζ une probabilité sur $]0, 1[$ compatible avec (*). Pour tout $h > 0$, on applique le résultat d'homogénéisation

$$\mu_h^{\text{eff}} := 1 + \sum_n I_{h,n} \left(\int_{B_1} \varphi_n \right)^2,$$

où

$$I_{h,n} := \int \frac{k_0^2 \varepsilon \rho^4}{\lambda_n - \rho^2 \varepsilon k_0^2} p_h(d\theta d\rho d\varepsilon)$$

Conclusion

Proposition

$$\mu_h^{\text{eff}} \rightarrow \mu_0^{\text{eff}} := 1 + \sum_n I_n(k_0) \left(\int_{B_1} \varphi_n \right)^2$$

avec

$$\Re(I_n(k_0)) = \text{VP} \left(\int \frac{ak_0^2 \rho_0^4}{\lambda_n - ak_0^2 \rho_0^2} g(a) da \right)$$

$$\Im(I_n(k_0)) = \frac{\pi \lambda_n}{k_0^2} g\left(\frac{\lambda_n}{k_0^2 \rho_0^2}\right) > 0 \quad \text{si } \text{supp}(g) \ni \left\{ \frac{\lambda_n}{k_0^2 \rho_0^2} \right\}$$

Conclusion :

- L'absorption limite produit un milieu effectif **dissipatif**
- **Pas d'homogénéisation directe** pour des diélectriques dont la permittivité est distribuée selon une loi proche des résonances.