



HAL
open science

Phénomène d'explosion et existence globale pour quelques problèmes paraboliques sous les conditions au bord dynamiques

Jean-François Rault

► **To cite this version:**

Jean-François Rault. Phénomène d'explosion et existence globale pour quelques problèmes paraboliques sous les conditions au bord dynamiques. Mathématiques [math]. Université du Littoral Côte d'Opale, 2010. Français. NNT: . tel-00554915v2

HAL Id: tel-00554915

<https://theses.hal.science/tel-00554915v2>

Submitted on 2 Feb 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Université du Littoral Côte d'Opale
École Doctorale Sciences Pour l'Ingénieur n°72

Thèse en vue de l'obtention du grade de
Docteur de l'Université du Littoral Côte d'Opale
Discipline : Mathématiques

Directeur de thèse : Joachim von Below

PHÉNOMÈNE D'EXPLOSION ET EXISTENCE
GLOBALE POUR QUELQUES PROBLÈMES
PARABOLIQUES SOUS LES CONDITIONS AU
BORD DYNAMIQUES.

Jean-François Rault
jfrault@lmpa.univ-littoral.fr

Cette thèse a été soutenue le vendredi 10 décembre 2010, à Calais.
Le jury était constitué de

M. Alain Miranville	Université de Poitiers	Rapporteur
M. Rein van der Hout	VU University Amsterdam	Rapporteur
M. Félix Ali Mehmeti	Université de Valenciennes et du Hainaut Cambrésis	Président du jury
M. Joachim von Below	Université du Littoral Côte d'Opale	Directeur de thèse
Mme Mabel Cuesta	Université du Littoral Côte d'Opale	Examinateur
M. Wolfgang Reichel	Karlsruhe Institute of Technology	Examinateur

La soutenance de cette thèse a reçu l'accord de la Commission des Thèses de Mathématiques des Universités de Lille I, Valenciennes, Artois et Littoral le jeudi 17 juin 2010.

Remerciements

Je remercie chaleureusement Joachim von Below d'avoir accepté d'encadrer ce travail de thèse, pour ses précieux conseils, ainsi que pour son optimisme et ses encouragements.

Je remercie les rapporteurs de cette thèse Alain Miranville et Rein van der Hout pour la rapidité avec laquelle ils ont lu mon mémoire et pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail. Je remercie également les membres du jury qui ont accepté de juger ce travail : Félix Ali Mehmeti, Mabel Cuesta et Wolfgang Reichel.

Merci à tous les membres du Laboratoire de Mathématiques Pures et Appliquées Joseph Liouville de Calais pour leur accueil.

Et finalement, merci à tous mes proches pour leur soutien tout au long de ces trois années.

Table des matières

Remerciements	3
Table des matières	5
Liste des figures	9
Notations	11
Introduction	15
1 L'équation de Burgers : ordre de croissance et points d'explosion	21
1.1 Introduction	21
1.2 Ordre de croissance	22
1.2.1 Propriétés qualitatives	23
1.2.2 Vitesse d'explosion	25
1.3 Points d'explosion	30
1.3.1 Transmission du profil initial	30
1.3.2 Localisation des points d'explosion	34
1.4 Profils à deux bosses	40
1.4.1 Sur-solutions théoriques	40
1.4.2 Exemples numériques	42
2 Une bifurcation pour l'équation de Burgers paramétrée	45
2.1 Étude des équilibres	46
2.1.1 Cas $\lambda > 0$	46
2.1.2 Cas $\lambda < 0$	48
2.1.3 Cas $\lambda = 0$	48
2.2 Solutions positives	48
2.2.1 Cas $\lambda > 0$	48
2.2.2 Cas $\lambda \leq 0$	55

2.3	Solutions non-signées	58
2.3.1	Symétrie des trajectoires	58
2.3.2	Cas $\lambda > 0$	59
2.3.3	Cas $\lambda \leq 0$	62
2.4	Cas $p = 1$	63
2.4.1	Cas $\lambda = 1$	64
2.4.2	Cas $\lambda < 1$	65
2.4.3	Cas $\lambda > 1$	68
2.5	Solutions non bornées	70
2.5.1	Conditions au bord de Dirichlet	70
2.5.2	Conditions au bord de Neumann	73
2.6	Bifurcation	75
2.6.1	$p > 3$	75
2.6.2	$p = 3$	76
2.6.3	$1 < p < 3$	76
2.6.4	$p = 1$	77
2.6.5	$\lambda > 1$	78
2.6.6	$\lambda = 1$	78
2.6.7	$0 < \lambda < 1$	78
2.6.8	$\lambda \leq 0$	79
2.6.9	Remarque	80
2.7	Équation non stationnaire	80
2.7.1	Conditions au bord de Dirichlet	81
2.7.2	Conditions au bord dynamiques	81
2.7.3	Conditions au bord de Neumann	84
2.7.4	Remarques	84
3	L'équation de Burgers paramétrée dans des domaines non-bornés	89
3.1	Explosion en temps fini	89
3.2	Solutions globales	97
3.3	Solutions de similarité	101
4	Le phénomène de Fujita dans des domaines extérieurs sous conditions au bord dynamiques	107
4.1	Historique	108
4.2	Préliminaires	110
4.2.1	Définition	110
4.2.2	Existence des solutions	110
4.2.3	Cas d'explosion	112
4.3	Solutions globales	113

4.3.1	Cas $N \geq 3$	113
4.3.2	Cas des dimensions inférieures	117
4.3.3	Remarques	120
4.4	Existence globale pour d'autres types d'ensembles	122
4.5	Autres opérateurs de dérivation	125
4.5.1	Cas d'explosion pour les milieux poreux	125
4.5.2	Opérateur elliptique de second ordre	126
4.6	Les conditions au bord de Robin	130
4.6.1	Cas d'explosion	130
4.6.2	Cas d'existence globale	131

Annexes

A	Principes de comparaison et du maximum	135
B	Algorithmes	138
	Conclusion et perspectives	143
	Références	147

Table des figures

1	Abscisses des équilibres.	18
1.1	Donnée initiale φ et bifurcation des maxima locaux	43
1.2	Changement du profil et suivi des extrema locaux pour $c = 10.7$	43
1.3	Conservation du profil et suivi des extrema locaux pour $c = 6$	44
2.1	Vélocités du Système (32) avec $\lambda > 0$	49
2.2	Les trajectoires coupent la courbe $\{v = u^{p-1}\}$	51
2.3	Plan des phases du Système (32) dans $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ avec $\lambda > 0$. . .	52
2.4	Tourbillon.	54
2.5	Vélocités du Système (32) avec $\lambda \leq 0$	55
2.6	Plan des phases du Système (32) dans $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ avec $\lambda \leq 0$. . .	57
2.7	Plan des phases complet du Système (32) pour $p \geq 3$ et $\lambda > 0$.	59
2.8	Plan des phases complet du Système (32) et $\lambda \leq 0$	62
2.9	Vélocités du Système (45).	64
2.10	Plan des phases du Système (45).	65
2.11	Vélocités du Système (44) avec $\lambda < 1$	66
2.12	Plan des phases du Système (44) avec $\lambda < 1$	67
2.13	Vélocités du Système (44) avec $\lambda > 1$	68
2.14	Plan des phases du Système (44) avec $\lambda > 1$	69
2.15	Bifurcation en fonction de λ	77
2.16	Bifurcation en fonction de p	80
2.17	Trajectoires du Système (32) et conditions de Robin.	85
2.18	Plans des phases du Système (32) pour différents paramètres. .	87
3.1	Solution du Système (72) au voisinage de $(0, 0)$	105
4.1	Situation typique de l'exemple 4.3.8.	121
4.2	Cas où la symétrie produit un ensemble non-connexe.	122

Notations

Tout au long de cette thèse, nous utiliserons les notations et les définitions courantes suivantes :

- \mathbb{R}^N , avec $N \in \mathbb{N}^*$, désignera l'espace vectoriel euclidien de dimension N sur \mathbb{R} . Un élément (x_1, \dots, x_N) de \mathbb{R}^N sera noté simplement x . Pour le cas de la dimension $N = 1$, on simplifiera \mathbb{R}^1 en \mathbb{R} . Cet espace sera muni de la norme euclidienne définie par

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_2 : \mathbb{R}^N &\longrightarrow [0, \infty) \\ (x_1, \dots, x_N) &\longmapsto \sqrt{\sum_{k=1}^N x_k^2}. \end{aligned}$$

En dimension $N = 1$, $\|x\|_2$ coïncide avec $|x|$, la valeur absolue de x . On désignera le produit scalaire standard de \mathbb{R}^N par

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^N x_i y_i.$$

Les ouverts de \mathbb{R}^N seront définis par la topologie induite par la norme euclidienne $\|\cdot\|_2$.

- Ω désignera un domaine de \mathbb{R}^N , c'est-à-dire un ouvert connexe de \mathbb{R}^N . On notera $\bar{\Omega}$ l'adhérence de Ω , Ω^c désignera le complémentaire de Ω , et le bord sera noté $\partial\Omega$. Sauf mention contraire, on supposera que le bord de Ω sera de classe \mathcal{C}^2 . Sur ce bord, on définira un champ de vecteur extérieur, normal et unitaire : la normale extérieure. On la notera $\nu : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$.
- $\mathcal{C}^k(A, B)$, avec $k \in \mathbb{N}$, désignera les fonctions définies sur un ouvert A de \mathbb{R}^N , à valeurs dans un ensemble B de \mathbb{R}^L , k -fois dérivables et dont les dérivées jusqu'à l'ordre k sont continues. L'ensemble $\mathcal{C}^0(A, B)$ sera

aussi noté $\mathcal{C}(A, B)$. Lorsque $B = \mathbb{R}$, on simplifiera $\mathcal{C}^k(A, B)$ en $\mathcal{C}^k(A)$.

- $\mathcal{C}_0^k(A, B)$, avec $k \in \mathbb{N}$, désignera les fonctions $\mathcal{C}^k(A, B)$ s'annulant sur le bord de A .
- Pour un ouvert A de \mathbb{R}^N , B un ouvert de \mathbb{R}^M et un ensemble C de \mathbb{R}^L , $\mathcal{C}^{k,l}(A \times B, C)$, avec $k \in \mathbb{N}$ et $l \in \mathbb{N}$, désignera les fonctions définies sur $A \times B$ à valeurs dans C qui sont de classe \mathcal{C}^k par rapport à la variable située dans A , de classe \mathcal{C}^l par rapport à la variable située dans B .
- Pour une fonction $f \in \mathcal{C}^{k,l}(A \times B, C)$, avec x la variable dans $A \subseteq \mathbb{R}^N$ et y la variable dans $B \subseteq \mathbb{R}^M$, on notera $\partial_{x_i} f$ la dérivée de f par rapport à la $i^{\text{ème}}$ coordonnée de x , et $\partial_{y_j} f$ la dérivée de f par rapport à la $j^{\text{ème}}$ coordonnée de y , pour tout $1 \leq i \leq N$ et tout $1 \leq j \leq M$. Lorsque la variable x possède une seule coordonnée, on notera simplement $\partial_x f$.
- En cas de dérivées successives, on rassemblera les dérivées d'une même variable de la sorte :

$$\partial_{x_i}(\partial_{x_j} f) = \partial_{x_i x_j} f \text{ et } \partial_{x_i}(\partial_{x_i} f) = \partial_{x_i}^2 f.$$

Si nécessaire, on notera $\partial_{x_i}(\partial_{x_i}^n f) = \partial_{x_i}^{n+1} f$. Par contre, on ne regroupera pas les dérivées par rapport à deux variables différentes.

- Pour les opérateurs usuels, nous utiliserons les notations suivantes : pour f une fonction de classe \mathcal{C}^2 , on désignera le gradient de f par

$$\nabla f = (\partial_{x_1} f, \partial_{x_2} f, \dots, \partial_{x_N} f),$$

la dérivée normale de f (dérivée de f suivant la direction de la normale ν du domaine dans lequel on considère f) par

$$\partial_\nu f = \nabla f \cdot \nu,$$

la matrice hessienne de f par

$$H^2 f = \left(\partial_{x_i x_j} f \right)_{1 \leq i, j \leq N},$$

le Laplacien de f par

$$\Delta f = \sum_{i=1}^N \partial_{x_i}^2 f = \text{tr } H^2 f.$$

- Lorsqu'il n'y aura aucune ambiguïté, c'est-à-dire dans le cas d'une seule variable unidimensionnelle, on utilisera $f, f', f'', f^{(3)}, \dots$ pour désigner les dérivées successives de f .
- On définira la norme sup d'une fonction f définie sur $A \subseteq \mathbb{R}^N$ par

$$\|f\|_{\infty} = \sup_A |f|.$$

- On appellera norme $L^p(A)$ d'une fonction f définie sur un ouvert A de \mathbb{R}^N la quantité

$$\|f\|_p = \left(\int_A |f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Pour le cas spécial $f \equiv 1$ dans A , on notera $|A| = \int_A 1 dx$ lorsque cette quantité est un nombre fini.

Tout au long de ce mémoire, nous utiliserons les notions de sur-solution et de sous-solution propres aux méthodes de comparaisons employées, voir Annexe A. Pour une équation d'évolution $\partial_t u = F(x, t, u, \nabla u, \Delta u)$ dans un domaine Ω de \mathbb{R}^N sous des conditions au bord $\mathcal{B}(u) = 0$ sur $\partial\Omega$ et avec une condition initiale φ définie sur $\bar{\Omega}$, on dira que :

- une fonction v est une sur-solution si elle vérifie

$$\begin{cases} \partial_t v \geq F(x, t, v, \nabla v, \Delta v) & \text{dans } \Omega \text{ pour } t > 0, \\ \mathcal{B}(v) \geq 0 & \text{sur } \partial\Omega \text{ pour } t > 0, \\ v(\cdot, 0) \geq \varphi & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

- une fonction w est une sous solution si elle vérifie

$$\begin{cases} \partial_t w \leq F(x, t, w, \nabla w, \Delta w) & \text{dans } \Omega \text{ pour } t > 0, \\ \mathcal{B}(w) \leq 0 & \text{sur } \partial\Omega \text{ pour } t > 0, \\ w(\cdot, 0) \leq \varphi & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

D'autres notations spécifiques seront utilisées ponctuellement. On les définira au moment de leur utilisation.

Introduction

Les Équations aux Dérivées Partielles sont omniprésentes dans les sciences, puisqu'elles apparaissent aussi bien en chimie, en biologie, en dynamique des structures, en mécanique des fluides que dans les théories de la gravitation ou de l'électromagnétisme. Elles sont primordiales dans des domaines tels que la simulation aéronautique, la synthèse d'images, ou la prévision météorologique. Les équations les plus importantes de la relativité générale et de la mécanique quantique sont également des Équations aux Dérivées Partielles. De nombreux problèmes célèbres modélisés par des Équations aux Dérivées Partielles sont toujours ouverts depuis des décennies, telles les Équations de Navier-Stokes en mécanique des fluides qui sont l'un des sept Problèmes du Prix du Millénaire instaurés en 2000 par l'institut de mathématiques de Clay. Dans ce mémoire, nous considérons des équations de réaction-diffusion modélisant l'évolution des concentrations d'une ou plusieurs substances spatialement distribuées et soumises à deux processus : un processus de réactions locales, dans lequel les différentes substances se transforment, et un processus de diffusion qui provoque une répartition de ces substances dans l'espace. La chimie, la biologie, la physique, la géologie ou encore l'écologie sont des domaines où de telles équations apparaissent. Les conditions dynamiques sur le bord d'un domaine mettent la dérivée temporelle en relation avec le potentiel et la dérivée normale extérieure spatiale de celui-ci. Elles s'appliquent dans beaucoup de modélisations avec les Équations aux Dérivées Partielles paraboliques, notamment dans la théorie du contrôle et la chimie. Dans le cas de la diffusion de la chaleur, les conditions au bord dynamiques modélisent l'apport de chaleur dû à la conductivité de la (très fine) paroi du milieu dans lequel on observe le flot de chaleur. Dans le cas des réactions chimiques, ces conditions dynamiques signifient que les espèces de la réaction ont besoin d'énergie pour quitter le milieu où a lieu la réaction chimique, rendant difficile l'échappement des espèces.

Tout d'abord, au chapitre 1, nous considérons l'équation de Burgers unidimensionnelle dans un intervalle réel $(-a, a)$ avec $a > 0$, sous les conditions

au bord dynamiques et avec valeurs initiales. Le problème considéré est le suivant :

$$\begin{cases} \partial_t u = \partial_x^2 u - u \partial_x u + u^p & \text{dans } [-a, a] \text{ pour } t > 0, \\ \sigma \partial_t u + \partial_\nu u = 0 & \text{sur } \{-a, a\} \text{ pour } t > 0, \\ u(\cdot, 0) = \varphi \in \mathcal{C}([-a, a]) & . \end{cases} \quad (\text{B})$$

La résolution d'un tel problème consiste à trouver une fonction u à deux variables, une variable d'espace $x \in [-a, a]$ et une variable de temps $t \in [0, \infty)$, dépendant des choix de σ , p et φ , telle que u vérifie chacune des équations du Problème (B), et

$$u \in \mathcal{C}([-a, a] \times [0, T)) \cap \mathcal{C}^{2,1}([-a, a] \times (0, T)),$$

où $T \in (0, \infty]$ désigne le temps d'existence maximale de la fonction u , dépendant lui aussi des paramètres σ , p et φ . L'existence locale et l'unicité de telles solutions est déjà établie. Pour cela, on se réfère aux résultats de J. von Below [6] et [7] concernant les espaces ramifiés, qui nous donnent, en particulier, des résultats d'existence pour les problèmes unidimensionnels. La théorie classique des équations paraboliques fournit également des résultats d'existence et d'unicité pour les solutions régulières des problèmes considérés dans ce mémoire, notamment grâce aux résultats de Ladyženskaya, Solonnikov & Uraltseva [26], de Weissler [52], et plus particulièrement les résultats concernant les conditions au bord dynamiques $\sigma \partial_t u + \partial_\nu u = 0$ de Escher [16] et de Hintermann [23]. Dans le premier chapitre, nous nous intéressons aux propriétés des solutions positives du problème de Burgers (B). D'après les résultats de von Below & Mailly [11], nous savons que les solutions positives du Problème (B) existent globalement lorsque $1 < p \leq 2$ tandis qu'elles explosent en temps fini pour $p > 2$. Dans ce chapitre, nous améliorons un résultat de von Below & Mailly [11] sur l'ordre de croissance des solutions lorsqu'on approche le temps d'explosion : pour $p > 2$ on montre que cet ordre de croissance est d'au moins $-1/(p-1)$. On montre aussi qu'il est d'au plus $-1/(p-1)$ lorsque p satisfait à

$$p > \frac{4}{3} + \frac{2\sqrt{7}}{3} \cos \left(\frac{1}{3} \arccos \left(\frac{107\sqrt{7}}{392} \right) \right).$$

Ou de manière équivalente, lorsque $p > 3$ et

$$p(p-1)(p-3) > \frac{1}{4}.$$

Numériquement, cela nous donne $p > 3,04030220028546361784388944339\dots$ alors que la précédente restriction était $p > 3 + 1/3$. Bien que nous ne

réussissons pas à passer outre, cette restriction est d'ordre purement technique. Ensuite, nous étudions le profil et l'ensemble des points d'explosion des solutions positives du Problème (B). Pour cela, on impose des conditions spécifiques sur la donnée initiale (profil d'une bosse et anti-symétrie) qui se transmettent à la solution qui aura elle aussi l'allure d'une bosse. Et grâce à ce profil particulier, nous pourrions en déduire que l'ensemble des points d'explosion de la solution consiste en un singleton. Au travers d'exemples numériques, nous montrons que si la donnée initiale n'a plus une allure aussi élémentaire, le profil (et par conséquent l'ensemble des points d'explosion) de la solution se révèle être difficile à déterminer. On considère une classe de données initiales ayant la forme de deux bosses, et selon la profondeur du creux (valeur du minimum local situé entre les deux maxima locaux), on observe soit la persistance du profil deux bosses tout au long de l'intervalle d'existence de la solution (lorsque la différence entre le minimum local et les maxima locaux est relativement grande), soit le profil de la solution est modifié après un certain temps (pour une faible différence entre le minimum local et les maxima locaux, le profil deux bosses devient un profil une bosse). Les résultats de ce chapitre sont regroupés dans un article écrit en collaboration avec J. von Below et G. Mailly, soumis à publication [12].

Ensuite, dans le second chapitre, on s'intéresse à une équation de Burgers paramétrée stationnaire. On cherche à prouver l'existence de solutions régulières (de classe \mathcal{C}^2) de l'équation stationnaire unidimensionnelle

$$u'' - uu' + u|u|^{p-1} - \lambda u = 0,$$

avec des conditions au bord de Dirichlet ou de Neumann. Pour le cas stationnaire, les conditions dynamiques $\sigma \partial_t u + \partial_\nu u = 0$ sont équivalentes aux conditions de Neumann $\partial_\nu u = 0$. L'introduction du paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$ nous permet d'obtenir des solutions sous conditions de Neumann, que nous n'avons pas dans le cas purement de Burgers ($\lambda = 0$). Contrairement au premier chapitre, on s'intéresse aussi aux solutions changeant de signe, justifiant l'écriture de la puissance $p^{\text{ième}}$ sous la forme $u|u|^{p-1}$. On raisonne à l'aide d'une analyse du plan des phases du système de premier ordre

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ uv - u|u|^{p-1} + \lambda u \end{pmatrix}.$$

Nous démontrons une bifurcation de ce plan des phases en fonction de la valeur du paramètre λ . La nature, ainsi que le nombre, des équilibres du système précédent sont modifiés : lorsque le paramètre λ est strictement positif, nous avons trois équilibres $(\lambda^{\frac{1}{p-1}}, 0)$ et $(-\lambda^{\frac{1}{p-1}}, 0)$, respectivement

répulsif et attractif, et le point-selle $(0, 0)$. Lorsque λ tend vers 0, puis lorsque $\lambda < 0$, les trois équilibres se recollent en un seul équilibre : le point $(0, 0)$ qui est alors un centre, voir Figure 1. Ensuite, nous comparons ces solutions

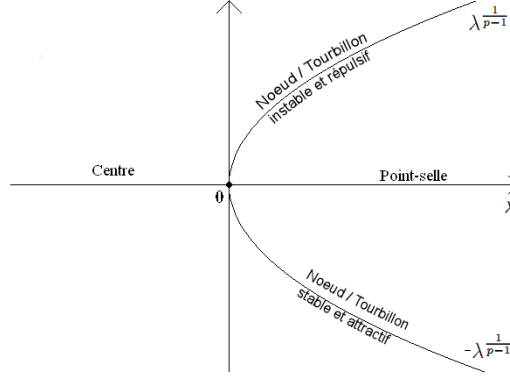


FIG. 1 – Abscisses des équilibres.

stationnaires avec les solutions non-stationnaires du problème

$$\begin{cases} \partial_t u = \partial_x^2 u - u \partial_x u + u^p - \lambda u & \text{dans } [-a, a] \text{ pour } t > 0, \\ \sigma \partial_t u + \partial_\nu u = 0 & \text{sur } \{-a, a\} \text{ pour } t > 0, \\ u(\cdot, 0) = \varphi \in \mathcal{C}([-a, a]), \end{cases} \quad (B_\lambda)$$

afin d'en déduire l'existence de solutions globales. Et réciproquement, on utilise les résultats de von Below & Mailly [11] sur l'explosion des solutions du Problème (B_λ) pour en déduire la non-existence de solutions pour l'équation $u'' - uu' + u|u|^{p-1} - \lambda u = 0$.

Au chapitre 3, nous continuons l'étude de l'équation de Burgers paramétrée. Cette fois nous nous plaçons dans un domaine D non borné de \mathbb{R} , typiquement, D désigne $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$ ou \mathbb{R} , et nous considérons le problème non-stationnaire

$$\begin{cases} \partial_t u = \partial_x^2 u - u \partial_x u + u^p - \lambda u & \text{dans } \overline{D} \text{ pour } t > 0, \\ \mathcal{B}(u) = 0 & \text{sur } \partial D \text{ pour } t > 0, \\ u(\cdot, 0) = \varphi \in \mathcal{C}(\overline{D}), \end{cases}$$

où $\mathcal{B}(u) = 0$ désigne différentes conditions au bord : selon les cas considérés, il s'agit des conditions de Dirichlet, de Neumann, de Robin, des conditions non-linéaires ou des conditions dynamiques. En utilisant des normes L^1 à poids, nous démontrons l'explosion en temps fini des solutions selon les valeurs des paramètres p , λ et φ . Pour les différentes conditions au bord évoquées, on

prouve des résultats de type Fujita concernant l'explosion en temps fini de toutes les solutions positives, par exemple avec $\lambda < 0$ et $p \geq 2$ pour les conditions au bord de Neumann ou avec $\lambda \geq 0$ et $p \geq 2$ pour des conditions au bord non-linéaires (incluant les conditions de Robin). Le cas limite $\lambda = 0$ est plus délicat pour le cas des conditions de Neumann puisque pour $2 \leq p \leq 3$ toutes les solutions positives explosent en temps fini, tandis que pour $p > 3$, il devient nécessaire d'imposer des conditions sur la taille de la donnée initiale afin d'assurer l'explosion des solutions. Pour d'autres valeurs des paramètres p , λ et φ , notamment lorsque $\lambda > 0$ ou lorsque $1 < p \leq 2$ pour les conditions au bord dynamiques avec $\sigma > 0$, nous montrons l'existence de solutions globales par une technique de comparaison et à l'aide de sur-solutions explicites et localement bornées. La non-symétrie des solutions, due au terme uu' , nous oblige à considérer séparément les cas où le domaine non borné est $(-\infty, 0)$ ou $(0, \infty)$. On explore aussi l'existence de solutions de similarité de la forme $u(x, t) = v(x + ct)$. Malheureusement, ce type de solutions n'apparaît que dans les cas où nous connaissons déjà une sur-solution explicite.

Les principaux résultats de ces deux chapitres sur l'équation de Burgers paramétrée sont regroupés dans un article soumis à publication [40].

Au chapitre 4, on s'intéresse à un problème de réaction-diffusion sans convection sous les conditions au bord dynamiques :

$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta u + u^p & \text{dans } \bar{\Omega} \text{ pour } t > 0, \\ \sigma \partial_t u + \partial_\nu u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \text{ pour } t > 0, \\ u(\cdot, 0) = \varphi \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}) & , \\ u \geq 0 & \text{dans } \bar{\Omega} \text{ pour } t > 0, \end{cases} \quad (F)$$

où Ω désigne un domaine extérieur de \mathbb{R}^N . On démontre que le phénomène de Fujita, découvert par Hiroshi Fujita [19] en 1966, puis étudié par Bandle & Levine [4] pour les conditions de Dirichlet en 1989, est encore vérifié pour les conditions au bord dynamiques. C'est à dire que l'on montre que toutes les solutions positives non-triviales du Problème (F) explosent en temps fini dès que $1 < p < 1 + 2/N$, tandis que pour $p > 1 + 2/N$, le Problème (F) admet des solutions positives non-triviales lorsque la donnée initiale φ est suffisamment petite. On raisonne à l'aide de méthodes de comparaisons : en comparant les solutions du Problème (F) avec les solutions du problème sous conditions de Dirichlet (voir Bandle & Levine [4]), on démontre le cas d'explosion ($1 < p < 1 + 2/N$). Le cas d'existence globale découle de la comparaison entre les solutions du Problème (F) et les solutions du problème sous conditions au bord de Neumann (voir les résultats de Levine & Zhang

[29]). Ainsi, on généralise le résultat concernant les domaines extérieurs ayant un complémentaire étoilé établi par Bandle - von Below & Reichel [2] aux domaines extérieurs quelconques. À l'instar de Bandle & Levine dans [3], on généralise nos résultats en remplaçant le Laplacien par un opérateur elliptique de second ordre plus général : on résout complètement le cas d'explosion, tandis que le cas d'existence globale est soumis à une restriction concernant la géométrie du domaine Ω . Et pour terminer, en adoptant les mêmes techniques de comparaison, nous démontrons que le phénomène de Fujita est aussi vérifié lorsqu'on remplace les conditions au bord dynamiques par les conditions au bord de Robin s'écrivant $\partial_\nu u + \alpha u = 0$ sur le bord du domaine $\partial\Omega$ pour tout $t > 0$ et avec $\alpha \geq 0$. Les principaux résultats concernant le problème sous conditions au bord dynamiques font l'objet d'un article publié dans *Asymptotic Analysis* [39]. Ceux concernant les conditions au bord de Robin sont regroupés dans un article soumis à publication [41].

Enfin, nous rappelons en annexes les théorèmes de comparaison et les principes du maximum issus de [8] que nous utilisons tout au long de ce mémoire. Les annexes contiennent aussi les algorithmes utilisés pour réaliser les simulations du Chapitre 1 sur les solutions de l'équation de Burgers ayant l'allure de deux bosses.

Chapitre 1

L'équation de Burgers : ordre de croissance et points d'explosion

1.1 Introduction

Dans ce chapitre nous traitons le cas d'un problème parabolique unidimensionnel à valeur initiale composé de l'équation de Burgers dans un domaine réel borné Ω , sous les conditions au bord dynamiques dissipatives $\mathcal{B}_\sigma(u) = 0$ mettant en relation la dérivée temporelle et la dérivée normale au moyen d'un coefficient σ positif.

$$\begin{cases} \partial_t u = \partial_x^2 u - u \partial_x u + u^p & \text{dans } \overline{\Omega} \text{ pour } t > 0, \\ \mathcal{B}_\sigma(u) = \sigma \partial_t u + \partial_\nu u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \text{ pour } t > 0, \\ u(\cdot, 0) = \varphi \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}). \end{cases} \quad (1)$$

Par commodité, on centre l'intervalle en zéro : $\Omega = (-a, a)$, avec $a > 0$. On étudie le cas des puissances p sur-linéaires : $p \in (1, \infty)$. Dans un premier temps, nous améliorons un résultat de [11] sur l'ordre de croissance des solutions en fonction de la puissance p : pour tout $p > 2$ nous montrons que l'ordre de croissance de la norme L^∞ de la solution est au moins de $\frac{-1}{p-1}$, et si

$$p > \frac{4}{3} + \frac{2\sqrt{7}}{3} \cos\left(\frac{1}{3} \arccos\left(\frac{107\sqrt{7}}{392}\right)\right),$$

on montre qu'il est au plus de $\frac{-1}{p-1}$. Par la suite, nous étudions l'ensemble des points d'explosion et l'allure des solutions du Problème (1). Lorsque la donnée initiale a la forme d'une bosse, nous démontrons que la solution préserve ce

profil tout au long de son intervalle d'existence maximale, et que l'ensemble de ces points d'explosion est un singleton. Nous terminons ce chapitre en donnant des exemples numériques de solutions ayant un profil initial à deux bosses et préservant ce profil jusqu'à l'explosion, ainsi que des solutions où ce profil est modifié. On démontre également l'existence de sur-solutions ayant un profil à deux bosses restant identique depuis la donnée initiale jusqu'à leur explosion.

Pour cela, supposons que le coefficient σ soit constant

$$\sigma \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

et que la condition au bord soit dissipative

$$\sigma > 0. \tag{3}$$

Pour la donnée initiale, nous supposons

$$\varphi \geq 0, \varphi \neq 0, \varphi \in \mathcal{C}([-a, a]). \tag{4}$$

D'après les résultats de [11], ces hypothèses nous assurent que les solutions du Problème (1) explosent en temps fini dès que $p > 2$ et que $\varphi > 0$ sur $\bar{\Omega}$, tandis que pour $1 < p \leq 2$ les solutions de (1) existent globalement. Pour notre étude, nous avons besoin d'hypothèses supplémentaires sur la donnée initiale :

$$\varphi \in \mathcal{C}^2([-a, a]), \quad \varphi'' - \varphi\varphi' + \varphi^p \geq 0 \text{ dans } [-a, a]. \tag{5}$$

On note $T = T(\sigma, \varphi)$ le temps d'explosion de la solution du Problème (1) avec la donnée initiale φ et avec le coefficient σ dans la condition au bord. On appelle u_σ l'unique solution de ce problème dans la classe $\mathcal{C}^{2,1}(\bar{\Omega} \times [0, T(\sigma, \varphi)))$. Précisons que d'après le principe de comparaison de von Below et De Coster [8], on a bien l'unicité des solutions dans la classe des fonctions $\mathcal{C}^{2,1}$, ainsi que la positivité des solutions pour le Problème (1).

1.2 Ordre de croissance

Dans cette partie nous démontrons un lemme sur les propriétés qualitatives des solutions du Problème (1), puis nous donnons un encadrement de l'ordre de croissance des solutions du Problème (1).

1.2.1 Propriétés qualitatives

Lemme 1.2.1 *Supposons que la condition (4) soit satisfaite. La solution u_σ du Problème (1) vérifie*

$$u_\sigma > 0 \text{ dans } \bar{\Omega} \times (0, T(\sigma, \varphi)).$$

De plus, si le coefficient σ vérifie les hypothèses (2) et (3), que φ vérifie la condition (5), alors on a

$$\partial_t u_\sigma > 0 \text{ dans } \bar{\Omega} \times (0, T(\sigma, \varphi)),$$

plus précisément, pour tout $\xi \in (0, T(\sigma, \varphi))$, il existe $c > 0$ tel que

$$\partial_t u_\sigma(\cdot, \xi) \geq c \text{ dans } \bar{\Omega}.$$

Et pour tout $\xi \in (0, T(\sigma, \varphi))$, il existe $d > 0$ tel que

$$u_\sigma > d \text{ dans } \bar{\Omega} \times (\xi, T(\sigma, \varphi)).$$

Preuve : Ces résultats découlent du principe de comparaison de [8] (Corollaire A.3) et du principe du maximum fort de [8] (Théorème A.4). On se donne $0 < \tau < T(\sigma, \varphi)$ et on démontre chacune des assertions dans $\bar{\Omega} \times (0, \tau]$. Pour cela, on décompose la preuve en trois étapes.

1^{ière} étape : Par définition de u_σ et d'après l'hypothèse (4), on a

$$\begin{cases} \partial_t u_\sigma - F(x, t, u_\sigma, \partial_x u_\sigma, H^2 u_\sigma) & \geq 0 & \text{dans } \bar{\Omega} \times (0, \tau], \\ \mathcal{B}_\sigma(u) & \geq 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (0, \tau], \\ u(\cdot, 0) & \geq 0 & \text{dans } \bar{\Omega}, \end{cases}$$

avec $F(x, t, a, b, C) = C - u_\sigma(x, t)b + u_\sigma^{p-1}(x, t)a$. La fonction F est croissante par rapport à la variable C , vérifie $F(x, t, 0, 0, 0) = 0$, et puisque u_σ est borné sur le compact $\bar{\Omega} \times [0, \tau]$, on a

$$a_1 \geq a_2 \Rightarrow F(x, t, a_1, b, C) - F(x, t, a_2, b, C) \leq L(a_1 - a_2),$$

avec $L = \sup\{u_\sigma(x, t)^{p-1} / (x, t) \in \bar{\Omega} \times [0, \tau]\}$. La condition de Lipschitz unilatérale (97) est vérifiée, et on peut appliquer le Corollaire A.3. On obtient

$$u_\sigma \geq 0 \text{ dans } \bar{\Omega} \times (0, \tau].$$

Ensuite, grâce au signe de u_σ , les équations du Problème (1) donnent

$$\begin{cases} \partial_t u_\sigma \geq D[u] & \text{dans } \bar{\Omega} \times (0, \tau], \\ \mathcal{B}_\sigma(u) \geq 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (0, \tau], \\ u(\cdot, 0) \geq 0 & \text{dans } \bar{\Omega}, \end{cases}$$

où $D[u] = \partial_x^2 u + g(x, t, u, \partial_x u)$, avec $g(x, t, a, b) = -u_\sigma(x, t)b$. Comme précédemment, u_σ est borné sur $\bar{\Omega} \times [0, \tau]$, et la fonction g vérifie

$$g(\cdot, \cdot, \cdot, b) \geq -\kappa|b|, \text{ avec } \kappa = \sup_{\bar{\Omega} \times [0, \tau]} u_\sigma > 0. \quad (6)$$

On peut appliquer le Théorème A.4, qui donne

$$\min_{\bar{\Omega} \times [0, \tau]} u_\sigma = \min_{\bar{\Omega}} \varphi = m \geq 0,$$

et si ce minimum est atteint en $(x, t) \in \bar{\Omega} \times (0, \tau]$, on a $u \equiv m$ dans $\bar{\Omega} \times [0, \tau]$. L'équation de Burgers du Problème (1) implique $m = 0$, et en particulier, on obtient $\varphi \equiv 0$ qui contredit l'hypothèse (4). Par conséquent, on peut en déduire $u_\sigma > m \geq 0$ dans $\bar{\Omega} \times (0, \tau]$.

2^{ième} étape : Avec les hypothèses supplémentaires (2), (3) et (5), et d'après des résultats de régularité classiques issus de [26], on a $u_\sigma \in \mathcal{C}^{2,2}(\bar{\Omega} \times [0, \tau])$. On choisit $\alpha > 0$ tel que

$$pu_\sigma^{p-1} - \partial_x u_\sigma + \alpha \geq 0 \text{ dans } \bar{\Omega} \times [0, \tau].$$

La fonction $y = e^{\alpha t} \partial_t u_\sigma \in \mathcal{C}^{2,1}(\bar{\Omega} \times [0, \tau])$ vérifie

$$\begin{cases} \partial_t y = \partial_x^2 y - u_\sigma \partial_x y + (pu_\sigma^{p-1} - \partial_x u_\sigma + \alpha)y & \text{dans } \bar{\Omega} \times (0, \tau], \\ \sigma \partial_t y + \partial_\nu y - \sigma \alpha y = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (0, \tau], \\ y(\cdot, 0) \geq 0 & \text{dans } \bar{\Omega}, \end{cases}$$

d'après les hypothèses supplémentaires sur σ et φ . On peut alors appliquer le Corollaire A.3 avec $F(x, t, a, b, C) = C - u_\sigma(x, t)b + (pu_\sigma^{p-1} - \partial_x u_\sigma + \alpha)a$. On obtient alors $y \geq 0$ dans $\bar{\Omega} \times [0, \tau]$. Ensuite, par définition de α , et grâce au signe de y , on a

$$\begin{cases} \partial_t y \geq \partial_x^2 y - u_\sigma \partial_x y & \text{dans } \bar{\Omega} \times (0, \tau], \\ \sigma \partial_t y + \partial_\nu y \geq 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (0, \tau], \\ y(\cdot, 0) \geq 0 & \text{dans } \bar{\Omega}. \end{cases}$$

Avec $D[u] = \partial_x^2 u + g(x, t, u, \partial_x u)$ et la fonction $g(x, t, a, b) = -u_\sigma(x, t)b$ vérifiant l'équation (6), on peut appliquer le Théorème A.4. On obtient alors

$$\min_{\bar{\Omega} \times [0, \tau]} y = \min_{\bar{\Omega}} y(\cdot, 0) = m' \geq 0,$$

et si ce minimum est atteint en $(x, t) \in \bar{\Omega} \times (0, \tau]$, $y \equiv m'$ dans $\bar{\Omega} \times [0, \tau]$. Par l'absurde, supposons que le minimum vaut 0 et est atteint dans $\bar{\Omega} \times (0, \tau]$. Dans ce cas, on $y \equiv 0$ dans $\bar{\Omega} \times [0, \tau]$, et aussi $\partial_t u_\sigma \equiv 0$ dans $\bar{\Omega} \times [0, \tau]$.

Cette dernière égalité implique $u_\sigma(\cdot, t) = \varphi$ dans $\bar{\Omega}$ pour tout $t \in [0, \tau]$. En particulier u_σ atteint son minimum sur $\bar{\Omega} \times \{\tau\}$, ce qui est exclu par la première étape. Finalement, $y > 0$ dans $\bar{\Omega} \times [0, \tau]$ et on en déduit que $\partial_t u_\sigma > 0$ dans $\bar{\Omega} \times [0, \tau]$ et que pour tout $\xi \in [0, \tau]$, il existe $c > 0$ tel que $\min\{\partial_t u_\sigma(\cdot, \xi)/x \in \bar{\Omega}\} > 0$.

3^{ème} étape : D'après la première étape, on sait que pour tout $0 < \xi < \tau$

$$\min_{\bar{\Omega}} u_\sigma(\cdot, \xi) = d > 0,$$

puis la seconde étape nous donne $\partial_t u_\sigma \geq 0$ dans $\bar{\Omega} \times [0, \tau]$. D'où $u_\sigma(x, t) > d$ pour tout $(x, t) \in \bar{\Omega} \times [\xi, \tau]$. ■

Remarque 1.2.2 *Ce lemme nous permet de relaxer les hypothèses invoquées dans [11] pour assurer l'explosion des solutions du Problème (1). En effet, von Below et Mailly démontrent qu'une solution du Problème (1) explose en temps fini dès que la donnée initiale φ vérifie $\varphi > 0$ dans $\bar{\Omega}$. Le Lemme 1.2.1 nous montre que si la donnée initiale φ vérifie simplement $\varphi \geq 0$ dans $\bar{\Omega}$, alors pour $\xi \in (0, T(\sigma, \varphi))$ on a $u_\sigma(\cdot, \xi) > 0$ dans $\bar{\Omega}$. Grâce à l'unicité des solutions, la solution du Problème (1) avec la donnée initiale $u_\sigma(\cdot, \xi)$ est la fonction v_σ donnée par $v_\sigma(x, t) = u_\sigma(x, t + \xi)$ pour tout $x \in \bar{\Omega}$ et tout $t \in [0, T(\sigma, \varphi) - \xi]$. D'après von Below et Mailly, la solution v_σ explose en temps fini. Par conséquent, la solution u_σ explose en temps fini aussi.*

1.2.2 Vitesse d'explosion

Nous allons démontrer deux inégalités afin de borner la norme $\|u_\sigma(\cdot, t)\|_\infty$ avec une hyperbole de la forme $(T - t)^{-1/(p-1)}$. Concernant la minoration de l'ordre de croissance, on démontre un résultat générique.

Théorème 1.2.3 *Supposons que les hypothèses (2) - (3) - (4) et (5) soient vérifiées. La solution u_σ du Problème (1) vérifie :*

$$\|u_\sigma(\cdot, t)\|_\infty \geq \left(\frac{1}{p-1}\right)^{\frac{1}{p-1}} \left(T(\sigma, \varphi) - t\right)^{\frac{-1}{p-1}} \quad \text{pour tout } t \in [0, T(\sigma, \varphi)].$$

Preuve : On définit $g(t) := \|u_\sigma(\cdot, t)\|_\infty$ pour tout $t \in [0, T(\sigma, \varphi)]$. Les hypothèses énoncées nous donnent $\partial_t u_\sigma \geq 0$ sur $\bar{\Omega} \times [0, T(\sigma, \varphi)]$ d'après le Lemme 1.2.1. Par conséquent, la fonction g est croissante sur $[0, T(\sigma, \varphi)]$, et donc g est presque partout dérivable sur $[0, T(\sigma, \varphi)]$. Ensuite, considérons

$t \in [0, T(\sigma, \varphi))$ tel que g soit dérivable en t . Soient $0 < h < t$, x et x_h tels que :

$$\|u_\sigma(\cdot, t)\|_\infty = u_\sigma(x, t) \quad \text{et} \quad \|u_\sigma(\cdot, t-h)\|_\infty = u_\sigma(x_h, t-h).$$

D'après le Lemme 1.2.1, on a $\partial_\nu u_\sigma = -\sigma \partial_t u_\sigma < 0$ sur le bord $\partial\Omega$, ce qui nous assure que le maximum de $u_\sigma(\cdot, t)$ est atteint à l'intérieur de Ω pour tout $t > 0$. Par définition de g , de x et de x_h , on a

$$g(t) - g(t-h) = u_\sigma(x, t) - u_\sigma(x_h, t-h) \leq u_\sigma(x, t) - u_\sigma(x, t-h).$$

Grâce à la régularité de u_σ , il existe $\theta \in (0, 1)$ tel que

$$u_\sigma(x, t) = u_\sigma(x, t-h) + h \partial_t u_\sigma(x, t-\theta h),$$

d'où

$$\frac{g(t) - g(t-h)}{h} \leq \partial_t u_\sigma(x, t-\theta h). \quad (7)$$

Lorsque h tend vers 0, on obtient

$$g'(t) \leq \partial_t u_\sigma(x, t).$$

Par définition de u_σ , on a

$$\begin{aligned} g'(t) &\leq \partial_x^2 u_\sigma(x, t) - u_\sigma(x, t) \partial_x u_\sigma(x, t) + u_\sigma(x, t)^p \\ &\leq u_\sigma(x, t)^p = g(t)^p, \end{aligned} \quad (8)$$

car x est un maximum de $u_\sigma(\cdot, t)$. Notons également que la fonction g est lipschitzienne sur $[0, \tau]$ pour tout $0 < \tau < T(\sigma, \varphi)$. En effet, g étant croissante et continue (car u est régulière), l'équation (7) implique

$$|g(t) - g(t-h)| = g(t) - g(t-h) \leq h \sup_{\bar{\Omega} \times [0, \tau]} |\partial_t u_\sigma|.$$

En intégrant entre $t > 0$ et $t < \tau < T(\sigma, \varphi)$, l'équation (8) nous donne

$$g(t)^{1-p} - g(\tau)^{1-p} \leq (p-1)(\tau-t).$$

Lorsque τ tend vers $T(\sigma, \varphi)$, on a $g(\tau) \rightarrow \infty$. D'où $g(t)^{1-p} \leq (p-1)(T-t)$. ■

Le théorème suivant sur la majoration de l'ordre de croissance est une extension du résultat donné par J. von Below et G. Pincet-Mailly dans [11] qui permet d'améliorer la restriction sur l'exposant p .

Théorème 1.2.4 *Supposons que les conditions (2) - (3) - (4) et (5) soient vérifiées et soit*

$$p > \frac{4}{3} + \frac{2\sqrt{7}}{3} \cos \left(\frac{1}{3} \arccos \left(\frac{107\sqrt{7}}{392} \right) \right). \quad (9)$$

Alors, il existe une constante positive C telle que

$$\| u_\sigma(\cdot, t) \|_\infty \leq \frac{C}{(T(\sigma, \varphi) - t)^{\frac{1}{p-1}}} \quad \text{pour tout } t \in [0, T(\sigma, \varphi)).$$

Preuve : La preuve est similaire à celle du résultat de [11]. Les modifications permettant d'améliorer le résultat apparaissent en fin de preuve. Choisissons $\xi \in (0, T(\sigma, \varphi))$ et $\alpha > 1$ tel que $p(p-1)(p-3) = \frac{\alpha}{4}$. Ce dernier point est possible puisque la condition (9) sur p signifie $p > 3$ et

$$p(p-1)(p-3) > \frac{1}{4}.$$

Notre but est de montrer, par une méthode de comparaison, qu'il existe deux réels $\delta > 0$ et $M = M_\alpha > 1$ tels que

$$\partial_t u_\sigma \geq \delta e^{-Mt} (u_\sigma^p + u_\sigma^3) \quad \text{dans } \bar{\Omega} \times [\xi, T(\sigma, \varphi)). \quad (10)$$

Pour cela on pose $d(t) = \exp(-Mt)$ avec $M = \frac{1}{6}(\alpha-1)^{\frac{-2}{p-3}}$ et $k(u) = u^p + u^3$, puis on définit

$$J(x, t) = \partial_t u_\sigma(x, t) - \delta d(t)k(u_\sigma)(x, t)$$

pour tout $(x, t) \in \bar{\Omega} \times [\xi, T(\sigma, \varphi))$ et avec $\delta > 0$. Grâce aux hypothèses (2) - (3) - (4) et (5), on peut utiliser le Lemme 1.2.1 qui nous donne

$$\partial_t u_\sigma(\cdot, \xi) \geq c > 0 \quad \text{dans } \bar{\Omega}.$$

Comme la fonction $u_\sigma(\cdot, \xi)$ est continue sur le compact $\bar{\Omega}$, il existe $\beta > 0$ tel que $u_\sigma(\cdot, \xi) \leq \beta$ sur $\bar{\Omega}$. Ainsi si l'on choisit $\delta > 0$ suffisamment petit tel que $c \geq \delta d(\xi)k(\beta)$, on obtient

$$J(\cdot, \xi) \geq 0 \quad \text{dans } \bar{\Omega}. \quad (11)$$

Ensuite, de manière analogue au Lemme 1.2.1, les résultats de régularité issus de [26] nous donnent $u_\sigma \in \mathcal{C}^{2,2}(\bar{\Omega} \times [0, T(\sigma, \varphi)))$, en particulier $J \in \mathcal{C}^{2,1}(\bar{\Omega} \times [\xi, T(\sigma, \varphi)))$. Par définition de u_σ , sur le bord latéral $\partial\Omega \times [\xi, T(\sigma, \varphi))$, J vérifie la condition au bord dynamique

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_\sigma(J) &= \mathcal{B}_\sigma(\partial_t u_\sigma) - \delta d(t)k'(u_\sigma)\mathcal{B}_\sigma(u_\sigma) - \sigma \delta d'(t)k(u_\sigma) \\ &= \partial_t \mathcal{B}_\sigma(u_\sigma) - \delta d(t)k'(u_\sigma)\mathcal{B}_\sigma(u_\sigma) + \sigma \delta M d(t)k(u_\sigma) \\ &= \sigma \delta M d(t)k(u_\sigma) \geq 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Ensuite, dans $\bar{\Omega} \times [\xi, T(\sigma, \varphi))$, la fonctionnelle J satisfait à l'équation suivante

$$\partial_t J - \partial_x^2 J + u_\sigma \partial_x J - (pu_\sigma^{p-1} - \partial_x u_\sigma)J = \delta dH(u_\sigma, \partial_x u_\sigma), \quad (13)$$

où

$$H(u, v) := pu^{p-1}k(u) - k'(u)u^p + k''(u)v^2 + Mk(u) - k(u)v.$$

Dans le but d'utiliser le Corollaire A.3, nous allons montrer que $H(u, v) \geq 0$. Pour cela, nous montrons que

$$v(u^p + u^3) \leq M(u^p + u^3) + (p-3)u^{p+2} + (p(p-1)u^{p-2} + 6u)v^2. \quad (14)$$

Lorsque $v \leq M$, l'équation (14) est clairement vérifiée. Maintenant, supposons que $M < v$. Si l'on a aussi $u^2 \leq 6v$, alors $u^3v \leq 6uv^2$ et $u^pv \leq p(p-1)u^{p-2}v^2$ grâce à $p > 3$. L'équation (14) est aussi vérifiée dans ce cas. Finalement, si $u^2 > 6v$, on a $u > \sqrt{6M} = (\alpha-1)^{\frac{-1}{p-3}}$, et par définition de M , on a

$$u^p + u^3 \leq \alpha u^p.$$

On a alors la suite d'inégalités suivante

$$v(u^p + u^3) \leq \alpha u^p v \leq 2\sqrt{p(p-1)(p-3)}u^2v \cdot u^{p-2}$$

par définition de p et de α . Ensuite, comme $(\sqrt{p-3}u^2 - \sqrt{p(p-1)}v)^2 \geq 0$, on a

$$2\sqrt{p(p-1)(p-3)}u^2v \leq (p-3)u^4 + p(p-1)v^2.$$

Par conséquent, on obtient

$$v(u^p + u^3) \leq (p-3)u^{p+2} + p(p-1)u^{p-2}v^2,$$

et l'équation (14) est vérifiée dans ce dernier cas. Ainsi, en regroupant les équations (11) - (12) - (13) et avec $\delta dH(u_\sigma, \partial_x u_\sigma) \geq 0$, on remarque que, pour tout $\tau \in [\xi, T(\sigma, \varphi))$ la fonctionnelle J vérifie

$$\begin{cases} \partial_t J - \partial_x^2 J + u_\sigma \partial_x J - (pu_\sigma^{p-1} - \partial_x u_\sigma)J \geq 0 & \text{dans } \bar{\Omega} \times [\xi, \tau] \\ \mathcal{B}_\sigma(J) \geq 0 & \text{sur } \partial\Omega \times [\xi, \tau], \\ J(\cdot, \xi) \geq 0 & \text{dans } \bar{\Omega}. \end{cases}$$

On peut alors appliquer le Corollaire A.3 avec $F(x, t, a, b, C) = C - u_\sigma(x, t)b + (pu_\sigma^{p-1} - \partial_x u_\sigma)a$, qui nous donne $J \geq 0$ dans $\bar{\Omega} \times [\xi, \tau]$ pour tout $\tau \in [\xi, T(\sigma, \varphi))$. Cela démontre l'équation (10), en particulier

$$\partial_t u_\sigma \geq \delta e^{-MT(\sigma, \varphi)} u_\sigma^p \text{ dans } \bar{\Omega} \times [\xi, T(\sigma, \varphi)).$$

Pour en conclure sur l'ordre de croissance, il suffit d'intégrer cette équation entre $t \in [\xi, T(\sigma, \varphi))$ et $s \in (t, T(\sigma, \varphi))$. Pour tout $x \in \bar{\Omega}$, on a

$$\int_t^s \frac{\partial_t u_\sigma(x, \theta)}{u_\sigma^p(x, \theta)} d\theta = \int_{u_\sigma(x, t)}^{u_\sigma(x, s)} \frac{1}{\eta^p} d\eta,$$

d'où

$$\frac{u_\sigma^{1-p}(x, s) - u_\sigma^{1-p}(x, t)}{1-p} \geq \delta e^{-MT(\sigma, \varphi)}(s-t).$$

Puisque $\frac{u_\sigma^{1-p}(x, s)(x, t)}{1-p} \leq 0$, on en déduit $u_\sigma^{1-p}(x, t) \geq (p-1)\delta e^{-MT(\sigma, \varphi)}(s-t)$, et en faisant tendre s vers $T(\sigma, \varphi)$, on obtient

$$u_\sigma^{1-p}(x, t) \geq (p-1)\delta e^{-MT(\sigma, \varphi)}(T(\sigma, \varphi) - t).$$

Ensuite, comme u_σ est bornée sur $\bar{\Omega} \times [0, \xi]$, il suffit de choisir une constante $C > 0$ telle que

$$C \geq T(\sigma, \varphi)^{\frac{1}{p-1}} \sup_{\bar{\Omega} \times [0, \xi]} u_\sigma,$$

et telle que

$$C \geq \left((p-1)\delta e^{-MT(\sigma, \varphi)} \right)^{\frac{1}{p-1}}.$$

On peut alors en conclure que

$$u(x, t) \leq C \left(T(\sigma, \varphi) - t \right)^{\frac{1}{p-1}}$$

pour tout $x \in \bar{\Omega}$ et tout $t \in [0, T(\sigma, \varphi))$. ■

Remarque 1.2.5 *Il apparaît clairement que l'ordre de croissance mis en évidence dans les résultats précédents est optimal pour les exposants $p > p^*$, où p^* est la borne de l'équation (9). Concernant les exposants $p \in (2, p^*]$, la minoration de l'ordre de croissance est optimale. En effet, considérons la solution z du Problème (1) avec $\sigma \equiv 0$ et où la donnée initiale $\varphi \equiv c > 0$ est constante. Par unicité des solutions, z est également la solution du problème de Cauchy suivant*

$$\begin{cases} z' &= z^p, \\ z(0) &= c, \end{cases}$$

donnée par la formule

$$z(t) = \left((p-1)(t_0 - t) \right)^{\frac{-1}{p-1}} \text{ pour tout } t \in [0, t_0),$$

où $t_0 = (p-1)^{-1}c^{\frac{-1}{p-1}}$. Dans ce cas, la solution z possède exactement l'ordre croissance $-1/p-1$, et la borne du Théorème 1.2.3 de minoration est atteinte. Cet exemple est également le seul cas connu à vérifier la borne du Théorème 1.2.4 de majoration lorsque $1 < p < p^*$.

1.3 Points d'explosion

Soit $p > 2$ et supposons que les conditions (2) à (5) soient vérifiées. En adaptant les techniques de Friedman & McLeod issues de [17] et de [18], nous allons procéder comme dans [10] pour montrer que l'ensemble des points d'explosion du Problème (1) est un singleton lorsque la donnée initiale est une fonction sous forme d'une bosse, c'est-à-dire que pour un certain $x_0 \in (-a, a)$

$$\begin{cases} \varphi'(x) > 0 & \text{dans } [-a, x_0), \\ \varphi'(x) < 0 & \text{dans } (x_0, a]. \end{cases} \quad (15)$$

Nous ajoutons une condition d'antisymétrie pour la donnée initiale

$$\varphi(x) \geq \varphi(-x) \text{ dans } [0, a]. \quad (16)$$

Nous allons montrer que ces deux caractères de la donnée initiale φ se transmettent à la solution u du Problème (1).

1.3.1 Transmission du profil initial

Lemme 1.3.1 *Supposons que les conditions (2) à (5) soient satisfaites. Si l'hypothèse (15) est vérifiée, il existe une fonction continue $x = s(t)$ telle que pour tout $t \in [0, T)$*

$$\begin{cases} \partial_x u(x, t) > 0 & \text{si } -a \leq x < s(t), \\ \partial_x u(x, t) < 0 & \text{si } s(t) < x \leq a. \end{cases}$$

Preuve : Dans un premier temps, rappelons que d'après le Lemme 1.2.1, on a $\partial_t u > 0$ sur $\bar{\Omega} \times [0, T)$. La condition au bord $\mathcal{B}_\sigma(u) = 0$ avec $\sigma > 0$ donne $\partial_\nu u < 0$ sur $\partial\Omega \times (0, T)$, c'est-à-dire :

$$\partial_x u > 0 \text{ sur } \{-a\} \times (0, T) \text{ et } \partial_x u < 0 \text{ sur } \{a\} \times (0, T). \quad (17)$$

De plus, la condition (15) sur la donnée initiale permet d'ajouter

$$\partial_x u > 0 \text{ sur } [-a, x_0) \times \{0\} \text{ et } \partial_x u < 0 \text{ sur } (x_0, a] \times \{0\}.$$

Ces remarques sur le signe de $\partial_x u$ nous permettent de prouver le lemme en suivant un argument de Friedman et McLeod, voir le Lemme 5.2 dans [18]. Grâce à la continuité de la solution u , on obtient l'existence de deux ouverts relatifs de $\bar{\Omega} \times [0, T)$ A_+ et A_- tels que :

1. $A_+ \subseteq \{\partial_x u > 0\}$,
2. $A_- \subseteq \{\partial_x u < 0\}$,
3. A_+ et A_- sont connexes,
4. le bord parabolique $(\bar{\Omega} \times \{0\} \cup \partial\Omega \times (0, T))$ de $\bar{\Omega} \times [0, T)$ est inclus dans $\partial A_+ \cup \partial A_- \cup \{x_0\}$,
5. A_+ et A_- sont choisis maximaux pour les quatre conditions précédentes. C'est-à-dire que s'il existe un couple d'ensembles (B_+, B_-) vérifiant les quatre conditions précédentes, et tel que $A_+ \subseteq B_+$ et $A_- \subseteq B_-$, alors on a $A_+ = B_+$ et $A_- = B_-$.

Nous allons montrer que $A_- = \{\partial_x u < 0\}$, puis que $A_+ = \{\partial_x u > 0\}$. Rappelons que la fonction u est de classe $\mathcal{C}^{3,1}(\bar{\Omega} \times [0, T))$ d'après les résultats de régularité issus de [26], et donc $y := \partial_x u$ appartient à $\mathcal{C}^{2,1}(\bar{\Omega} \times [0, T))$, et vérifie :

$$\begin{cases} \partial_t y = \partial_x^2 y - y^2 - u \partial_x y + p u^{p-1} y & \text{dans } \bar{\Omega} \times [0, T), \\ \mathcal{B}_\sigma(y) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times [0, T), \\ y(\cdot, 0) = \varphi' & \text{dans } \bar{\Omega}. \end{cases}$$

Soit $0 < \tau < T$ et notons

$$\Omega_\tau := \bar{\Omega} \times [0, \tau).$$

Soit Q^- une composante connexe de $\{\partial_x u < 0\} \cap \Omega_\tau$. Nous allons montrer que le bord ∂Q^- intersecte le bord parabolique de Ω_τ en au moins un point différent de $\{x_0\}$. Raisonnons par l'absurde, et supposons que

$$\partial Q^- \cap \left(\bar{\Omega} \times \{0\} \cup \partial\Omega \times [0, \tau) \right) \subseteq \{x_0\}.$$

Dans ce cas, nous avons $y \equiv 0$ sur $\partial Q^- \cap \Omega_\tau$. Par définition de Q^- , on obtient :

$$\begin{cases} \partial_t y \leq \partial_x^2 y - u \partial_x y & \text{dans } Q^-, \\ y \leq 0 & \text{sur } \partial Q^-. \end{cases}$$

Comme y atteint son maximum 0 sur ∂Q^- , le principe du maximum fort de [8] implique que $y \equiv 0$ dans Q^- , ce qui contredit la définition de Q^- . Par définition, il est clair que $Q^- \cap A_- \neq \emptyset$, et par maximalité de A_- , on a $A_- \cup Q^- = A_-$, c'est-à-dire $Q^- \subseteq A_-$. Ceci démontre que $\{\partial_x u < 0\} = A_-$. De manière analogue, soit Q^+ une composante connexe de $\{\partial_x u > 0\} \cap \Omega_\tau$, et supposons par l'absurde que

$$\partial Q^+ \cap \left(\bar{\Omega} \times \{0\} \cup \partial\Omega \times [0, \tau) \right) \subseteq \{x_0\}.$$

Dans ce cas, nous avons $y \equiv 0$ sur $\partial Q^+ \cap \Omega_\tau$. Ceci nous assure que l'ensemble $P^+ := Q^+ \setminus \{pu^{p-1} - y < 0\}$ est d'intérieur non-vide. Par définition, on obtient :

$$\begin{cases} \partial_t y \geq \partial_x^2 y - u \partial_x y + y(pu^{p-1} - y) \geq \partial_x^2 y - u \partial_x y & \text{dans } P^+, \\ y \geq 0 & \text{sur } \partial P^+. \end{cases}$$

Comme y atteint son minimum 0 sur $\partial Q^+ \subseteq \partial P^+$, le principe du minimum fort de [8] implique que $y \equiv 0$ dans P^+ , ce qui contredit la définition de P^+ . Comme précédemment, la maximalité de A_+ permet de prouver que $\{\partial_x u > 0\} = A_+$. Grâce à l'utilisation de Ω_τ , et grâce à la connexité de $\{\partial_x u > 0\}$ et $\{\partial_x u < 0\}$, on est assuré que pour tout $0 < t < T$, pour tout $(x^+, t) \in \{\partial_x u > 0\}$ et pour tout $(x^-, t) \in \{\partial_x u < 0\}$, on a $x^+ < x^-$. Nous avons aussi $x^+ < x_n < x^-$, pour tout $(x_n, t) \in \{\partial_x u = 0\}$. En effet, supposons qu'il existe $x_1 < x_2 < x_3$ et $s \in (0, T)$ tels que (x_1, s) et (x_3, s) soient dans $\{\partial_x u > 0\}$, et que $(x_2, s) \in \{\partial_x u = 0\}$. D'après les propriétés de $\{\partial_x u > 0\}$, il est possible de prendre un carré $[x_1, x_3] \times [r, s] \subseteq \{\partial_x u > 0\}$, et quitte à prendre $|s - r|$ petit, et quitte à choisir x_1 et x_3 proches de x_2 , on peut supposer que $pu^{p-1} - y \geq 0$. On obtient alors

$$\begin{cases} \partial_t y \geq \partial_x^2 y - u \partial_x y & \text{dans } [x_1, x_3] \times [r, s], \\ y \geq 0 & \text{sur } \partial[x_1, x_3] \times [r, s] \cup [x_1, x_3] \times \{r\}. \end{cases}$$

Comme $y = \partial_x u$ atteint son minimum en (x_2, s) , le principe du maximum fort A.4 implique que $y \equiv 0$ dans $[x_1, x_3] \times [r, s]$, ce qui contredit la définition de (x_1, s) . De manière analogue, il est impossible d'avoir $x_1 < x_2 < x_3$ et $s \in (0, T)$ tels que (x_1, s) et (x_3, s) soient dans $\{\partial_x u < 0\}$, et que $(x_2, s) \in \{\partial_x u = 0\}$. On termine la preuve en affirmant qu'il n'existe pas de points (x_1, s) et (x_2, s) dans $\bar{\Omega} \times [0, T)$ tels que $\partial_x u(\cdot, t) = 0$ dans $[x_1, x_2]$. En effet, grâce à l'analyticité de la fonction $(\mathbb{R}^+ \ni z \mapsto z^p \in \mathbb{R}^+)$, la fonction $u(\cdot, t)$ est analytique, et donc $\partial_x u(\cdot, t) = 0$ dans $[x_1, x_2]$ impliquerait $\partial_x u(\cdot, t) = 0$ dans $\bar{\Omega}$, en particulier $\partial_x u(\cdot, t) = 0$ sur $\partial\Omega$ qui contredirait la condition (17). Ainsi, pour tout $t \in (0, T)$, l'ensemble

$$s(t) = \left(\bar{\Omega} \times \{t\} \right) \cap \partial A_+$$

est un singleton. Grâce à la continuité de $\partial_x u$, $s(t)$ est la courbe continue recherchée. ■

Contrairement au nombre de bosses de la donnée initiale qui se transmet sans autre condition, l'antisymétrie s'obtient en utilisant le précédent résultat sur le profil à une bosse.

Théorème 1.3.2 *Supposons que les conditions du Théorème 1.3.1 soient remplies. Si la donnée initiale φ vérifie l'antisymétrie (16), alors la solution u du Problème (1) vérifie la même antisymétrie :*

$$u(x, t) \geq u(-x, t) \text{ pour tout } (x, t) \in [0, a] \times [0, T].$$

Preuve : Posons $v(x, t) := u(-x, t)$ dans $[0, a] \times [0, T]$ et soit y la fonction définie par $y(x, t) := u(x, t) - v(x, t)$. Alors $y \in \mathcal{C}([0, a] \times [0, T]) \cap \mathcal{C}^{2,1}([0, a] \times (0, T))$ est une solution du problème

$$\begin{cases} \partial_t y = \partial_x^2 y + v \partial_x y + \delta y - (u + v) \partial_x u & \text{dans } [0, a] \times (0, T), \\ \mathcal{B}_\sigma(y) = 0 & \text{sur } \{a\} \times (0, T), \\ y(x, 0) \geq 0 & \text{dans } [0, a], \\ y = 0 & \text{sur } \{0\} \times (0, T), \end{cases}$$

avec $\delta(x, t) = \frac{u^p(x, t) - u^p(-x, t)}{u(x, t) - u(-x, t)}$. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe un point $(\hat{x}, \hat{t}) \in [0, a] \times (0, T)$ avec

$$y(\hat{x}, \hat{t}) < 0. \quad (18)$$

Par conséquent, $y(\cdot, \hat{t})$ atteint un minimum négatif, c'est-à-dire qu'il existe un point $(\tilde{x}, \tilde{t}) \in [0, a] \times (0, T)$ tel que

$$\begin{cases} u(\tilde{x}, \tilde{t}) < v(\tilde{x}, \tilde{t}), \\ \partial_x u(\tilde{x}, \tilde{t}) = \partial_x v(\tilde{x}, \tilde{t}). \end{cases} \quad (19)$$

Supposons d'abord que $\tilde{x} > s(\tilde{t})$. Ainsi le Lemme 1.3.1 donne $\partial_x u(\tilde{x}, \tilde{t}) < 0$. Soit V un voisinage maximal de (\tilde{x}, \tilde{t}) dans lequel $\partial_x u < 0$. Ainsi, dans V

$$\partial_t y - \partial_x^2 y - v \partial_x y - \delta y \geq 0,$$

et le principe de comparaison A.1 donne $y \geq 0$, une contradiction avec (19). Maintenant, si $\tilde{x} = s(\tilde{t})$, comme $s(\tilde{t})$ est le maximum de $u(\cdot, \tilde{t})$, nous avons

$$y(\tilde{x}, \tilde{t}) = u(\tilde{x}, \tilde{t}) - u(-\tilde{x}, \tilde{t}) \geq 0,$$

qui contredit (19). Finalement supposons que $0 \leq \tilde{x} < s(\tilde{t})$, alors $\partial_x u(\tilde{x}, \tilde{t}) > 0$. Puis comme $-s(\tilde{t}) < -\tilde{x} \leq 0 < s(\tilde{t})$, on a $-\partial_x v(\tilde{x}, \tilde{t}) = \partial_x u(-\tilde{x}, \tilde{t}) > 0$, grâce au Lemme 1.3.1. On en conclut que

$$\partial_x y(\tilde{x}, \tilde{t}) = \partial_x u(\tilde{x}, \tilde{t}) + \partial_x u(-\tilde{x}, \tilde{t}) > 0,$$

une contradiction avec (19). ■

Ces deux résultats nous permettent de déduire le corollaire suivant :

Corollaire 1.3.3 *Sous les hypothèses du Théorème 1.3.2, $s(t) \geq 0$ et*

$$\partial_x u(x, t) > 0 \text{ dans } [-a, 0) \times (0, T).$$

1.3.2 Localisation des points d'explosion

Introduisons les deux points suivants :

Définition 1.3.4

$$s^- = \liminf_{t \rightarrow T} s(t) \quad \text{et} \quad s^+ = \limsup_{t \rightarrow T} s(t).$$

À l'aide des théorèmes suivants, nous allons prouver que l'explosion peut uniquement avoir lieu dans $[s^-, s^+]$.

Théorème 1.3.5 *Sous les hypothèses (2) à (5), (15) et (16), l'intervalle $[-a, s^-)$ ne contient aucun point d'explosion.*

Preuve : D'après le Corollaire 1.3.3, $s^- \geq 0$. Soit $\beta \in [-a, s^-)$ et choisissons $T_0 < T$ suffisamment proche de T tel que $s(t) > \beta$ pour $T_0 \leq t < T$. Nous allons démontrer l'inégalité différentielle

$$\frac{\partial_x u}{u^{p-1}} \geq \varepsilon(x - \beta)^n,$$

pour un certain $\varepsilon > 0$. Cela nous permettra de démontrer par l'absurde qu'il ne peut y avoir de points d'explosion dans l'intervalle $[-a, \beta)$. Définissons

$$R = [-a, \beta] \times (T_0, T),$$

et

$$J = \partial_x u - \varepsilon dk,$$

où

$$\begin{aligned} d(x) &= (x - \beta)^n, \quad n \in \mathbb{N}^* \text{ pair}, \\ k(u) &= u^q, \quad q = p - 1, \end{aligned} \tag{20}$$

et $\varepsilon > 0$ suffisamment petit tel que

$$J \geq 0 \text{ dans } [-a, \beta] \times \{T_0\}, \tag{21}$$

et tel que dans R

$$(p-q)u^{p-1} + \frac{n(n-1)}{(x-\beta)^2} + \frac{n}{|x-\beta|} u \geq \varepsilon u^{q-1} [(x-\beta)^n u + 2nq|x-\beta|^{n-1}]. \tag{22}$$

La condition (21) est facilement réalisable sur le compact $[-a, \beta] \times \{T_0\}$ grâce à $\partial_x u > 0$, d'après le Lemme 1.3.1, et grâce à la régularité de u . Tandis que la condition (22) est une conséquence découlant des hypothèses sur p, q et

n . De plus $J(\beta, \cdot) \geq 0$ dans $[T_0, T)$ d'après le Lemme 1.3.1 et parce que $d(\beta) = 0$. Puis, comme σ est constant sur $\{-a\}$ d'après (2), J vérifie une certaine condition dynamique au bord sur $\{-a\} \times (T_0, T)$, à savoir :

$$\mathcal{B}_\sigma(J) = \mathcal{B}_\sigma(\partial_x u) - \varepsilon dk'(u)\mathcal{B}_\sigma(u) - \varepsilon d'k(u) = -\varepsilon(-a - \beta)^{n-1}u^q(-a, t),$$

car $\mathcal{B}_\sigma(\partial_x u) = \partial_x \mathcal{B}_\sigma(u) = 0$. Le terme de droite est positif car $n - 1$ est impair d'après (20) et car $u \geq 0$ (voir Lemme 1.2.1). Notons $f(u) := u^p$, et la fonction H définie par

$$\begin{aligned} H(u) &:= f'(u)k(u) - f(u)k'(u) - \varepsilon (dk^2(u) - 2d'k(u)k'(u)) \\ &\quad - \frac{d'}{d}k(u)u + \frac{d''}{d}k(u) + k''(u)(\partial_x u)^2 + \frac{1}{\varepsilon d}(\partial_x u)^2. \end{aligned}$$

D'après la condition (22), on a $H(u) \geq k''(u)(\partial_x u)^2 + \frac{1}{\varepsilon d}(\partial_x u)^2$, et ce dernier terme est positif car $k''(u) \geq 0$ dans R , grâce à $u \geq C > 0$ (voir Lemme 1.2.1). Notons que ce dernier argument nous assure la bonne définition de H en supprimant les éventuelles divisions par zéro dans k'' lorsque $q < 2$. Comme Ω est un intervalle réel, les résultats de régularité intérieure de [26] impliquent que $u \in \mathcal{C}^{3,2}([-a, \beta] \times [T_0, T))$. Ainsi, J appartient à $\mathcal{C}^{2,2}([-a, \beta] \times [T_0, T))$, et d'après les conditions (21) et (22), J est une solution du problème

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t J - \partial_x^2 J + u \partial_x J + K(u)J = \varepsilon d H(u) \geq 0 & \text{dans } [-a, \beta] \times (T_0, T), \\ \mathcal{B}_\sigma(J) \geq 0 & \text{sur } \{-a\} \times (T_0, T) \\ J(\cdot, T_0) \geq 0 & \text{dans } [-a, \beta], \\ J \geq 0 & \text{sur } \{\beta\} \times (T_0, T), \end{array} \right.$$

où $K(u) = J - f'(u) + 2\varepsilon dk(u) - 2\varepsilon d'k'(u)$. Le principe de comparaison A.1 permet d'obtenir $J \geq 0$ dans $[-a, \beta] \times [T_0, T)$, soit en d'autres termes

$$\frac{\partial_x u}{k(u)} \geq \varepsilon d.$$

L'intégration de cette inégalité différentielle entre x et y , choisis tels que $-a \leq x < y < \beta$, conduit à

$$u^{1-q}(x, t) - u^{1-q}(y, t) \geq \varepsilon \frac{q-1}{n+1} [(y-\beta)^{n+1} - (x-\beta)^{n+1}] := c_0 > 0,$$

en raison de la parité de $n+1$ et de l'ordre de x , y et β . Par l'absurde, si $x \in [-a, \beta)$ est un point d'explosion, alors, comme $1-q < 0$, en choisissant t_1 suffisamment proche de T , on obtient $u^{1-q}(x, t_1) < c_0$, ce qui donne $u^{1-q}(y, t_1) < 0$, une contradiction avec la positivité de u dans $\bar{\Omega} \times (0, T)$. ■

Théorème 1.3.6 *Sous les hypothèses (2) à (5), (15) et (16), aucun point de $(s^+, a]$ n'est un point d'explosion.*

Preuve : Le mode de raisonnement est analogue à celui utilisé dans la preuve du théorème 1.3.5. Supposons que $s^+ < a$ et soit $\gamma \in (s^+, a]$. Choisissons $T_0 < T$ assez proche de T tel que $s(t) < \gamma$ pour $T_0 \leq t < T$. Définissons $R = [\gamma, a] \times (T_0, T)$ et

$$J = \partial_x u + \varepsilon dk,$$

avec

$$d(x) = e^{\frac{1}{\gamma-x}},$$

$$k(u) = u^q, \quad 2 < q < p,$$

et $\varepsilon > 0$ suffisamment petit tel que

$$J \leq 0 \text{ dans } [\gamma, a] \times \{T_0\}. \quad (23)$$

Cette condition est due au Lemme 1.3.1, de manière similaire à la déduction de la condition (21). Notons $f(u) := u^p$, et la fonction H définie par

$$\begin{aligned} H(u) &:= f'(u)k(u) - f(u)k'(u) + \varepsilon dk^2(u) - 2\varepsilon d'k(u)k'(u) - \frac{d'}{d}k(u)u \\ &\quad + \frac{d''}{d}k(u) + (\partial_x u)^2 k''(u) \\ &= (p-q)u^{p+q-1} + \frac{u^{q+1}}{(\gamma-x)^2} + \left(\frac{1}{(\gamma-x)^4} - \frac{2}{(\gamma-x)^3} \right) u^q \\ &\quad + \varepsilon e^{\frac{-1}{\gamma-x}} \left(\frac{2qu^{2q-1}}{(\gamma-x)^2} + u^{2q} \right) + q(q-1)(\partial_x u)^2 u^{q-2}. \end{aligned}$$

H est clairement positive car $p > q > 2$, $\gamma - x < 0$ et car $u \geq 0$ d'après le principe de comparaison A.1. De plus, comme σ est constant sur $\{a\}$ d'après (2), J vérifie une certaine condition dynamique au bord sur $\{a\} \times (T_0, T)$, à savoir :

$$\mathcal{B}_\sigma(J) = \mathcal{B}_\sigma(\partial_x u) + \varepsilon dk'(u)\mathcal{B}_\sigma(u) + \varepsilon d'k(u) = \frac{-\varepsilon}{(\gamma-a)^2} e^{\frac{1}{\gamma-a}} u^q(a, t)$$

car $\mathcal{B}_\sigma(\partial_x u) = \partial_x \mathcal{B}_\sigma(u) = 0$. Ainsi, de manière analogue à la preuve du théorème 1.3.5, on en conclut que $J \in \mathcal{C}^{2,2}([\gamma, a] \times [T_0, T])$ est une solution du problème

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t J - \partial_x^2 J + u \partial_x J + K(u)J = -\varepsilon dH(u) \leq 0 & \text{dans } (\gamma, a] \times (T_0, T), \\ \mathcal{B}_\sigma(J) \leq 0 & \text{sur } \{a\} \times (T_0, T), \\ J(\cdot, T_0) \leq 0 & \text{sur } [\gamma, a], \\ J(\gamma, \cdot) \leq 0 & \text{sur } (T_0, T), \end{array} \right.$$

où $K(u) = J - f'(u) - 2\varepsilon dk(u) + 2\varepsilon d'k'(u)$. D'après le principe de comparaison A.1, on obtient $J \leq 0$ dans $[\gamma, a] \times [T_0, T)$, soit

$$\frac{\partial_x u}{k(u)} \leq -\varepsilon d.$$

En procédant comme dans la preuve du théorème 1.3.5, on arrive à

$$u^{1-q}(y, t) - u^{1-q}(x, t) \geq \varepsilon(q-1) \int_x^y e^{\frac{1}{\gamma-z}} dz > 0,$$

pour $\gamma < x < y \leq a$, parce que $e^{\frac{1}{\gamma-z}} > 0$. Puis, par l'absurde, si $y \in (\gamma, a]$ est un point d'explosion, alors pour t assez proche de T on a $u^{1-q}(x, t) < 0$, une contradiction avec la positivité de u dans $\bar{\Omega} \times (0, T)$. Remarquons que si $s^+ = a$, alors, il est clair que $(s^+, a] = \emptyset$ ne peut contenir de point d'explosion. ■

Nous allons finalement montrer que $s^- = s^+$, réduisant ainsi l'ensemble des points d'explosion à un point unique.

Théorème 1.3.7 *Sous les hypothèses (2) à (5), (15) et (16), l'ensemble des points d'explosion du Problème (1) est un singleton.*

Preuve : Sachant que l'explosion ne peut avoir lieu que dans $[s^-, s^+]$, nous allons démontrer par l'absurde que $s^- = s^+$. Supposons donc que $s^- < s^+$, et définissons :

$$y_1 = s^- - \varepsilon,$$

avec

$$0 < \varepsilon < \frac{s^+ - s^-}{2}. \quad (24)$$

Comme $y_1 < s^-$, il est clair que y_1 n'est pas un point d'explosion de la solution u du Problème (1), et donc il existe une constante $C_0 > 0$ telle que

$$u(y_1, t) \leq C_0 \text{ dans } [0, T). \quad (25)$$

Ensuite, comme u explose dans $[s^-, s^+]$, en au moins un point z_1 , il est clair que pour τ_1 assez proche de T on ait $u(z_1, t) > C_0$ pour tout $\tau_1 < t < T$. Puis d'après le lemme 1.3.1, pour tout $0 < t < T$, on a

$$u(z_1, t) \leq \max_{\bar{\Omega}} u(\cdot, t) = u(s(t), t).$$

Ainsi, il existe τ vérifiant $0 < \tau < T$, avec $T - \tau$ suffisamment petit tel que pour $y_2 = s(\tau)$ on ait

$$u(y_2, \tau) > C_0. \quad (26)$$

De plus, d'après la définition 1.3.4 de s^+ , quitte à augmenter τ , on impose $y_2 = s(\tau) > s^+ - \varepsilon$. Avec les conditions (25) et (26), puis avec $\partial_t u \geq 0$ (Lemme 1.2.1), on obtient

$$u(y_1, t) < u(y_2, t) \text{ pour } \tau \leq t < T.$$

Posons $\alpha = \frac{y_1 + y_2}{2}$. Comme, pour $x \in [y_1, \alpha]$, on a

$$y_1 \leq x \leq \alpha \leq 2\alpha - x \leq y_2 = s(\tau),$$

et comme $\partial_x u(\cdot, \tau) > 0$ sur $[y_1, y_2] \subseteq [-a, s(\tau)]$, le Lemme 1.3.1 implique

$$u(x, \tau) < u(2\alpha - x, \tau) \text{ pour } x \in [y_1, \alpha]. \quad (27)$$

Définissons $v(x, t) = u(2\alpha - x, t)$ dans $[y_1, \alpha] \times [\tau, T)$. Alors, la fonction w définie par

$$w(x, t) := v(x, t) - u(x, t)$$

est de classe $\mathcal{C}^{2,1}([y_1, \alpha] \times [\tau, T))$ et, d'après les conditions ci-haut, est solution du problème suivant

$$\begin{cases} \partial_t w = \partial_x^2 w + v \partial_x w + \delta w + (u + v) \partial_x u & \text{dans } (y_1, \alpha) \times (\tau, T), \\ w(\cdot, \tau) \geq 0 & \text{dans } [y_1, \alpha], \\ w > 0 & \text{sur } \{y_1\} \times (\tau, T), \\ w = 0 & \text{sur } \{\alpha\} \times (\tau, T), \end{cases}$$

où

$$\delta(x, t) := \frac{v^p(x, t) - u^p(x, t)}{v(x, t) - u(x, t)}.$$

Par l'absurde, nous allons montrer que $w \geq 0$ dans $(y_1, \alpha) \times (\tau, T)$. Supposons qu'il existe un point $(\hat{x}, \hat{t}) \in (y_1, \alpha) \times (\tau, T)$ vérifiant

$$w(\hat{x}, \hat{t}) < 0. \quad (28)$$

Alors, $w(\cdot, \hat{t})$ atteint un minimum négatif, c'est-à-dire qu'il existe un point $(\tilde{x}, \tilde{t}) \in (y_1, \alpha) \times (\tau, T)$ pour lequel on a :

$$\begin{cases} v(\tilde{x}, \tilde{t}) < u(\tilde{x}, \tilde{t}), \\ \partial_x v(\tilde{x}, \tilde{t}) = \partial_x u(\tilde{x}, \tilde{t}). \end{cases} \quad (29)$$

Si $\alpha > \tilde{x} > s(\tilde{t})$, alors $\partial_x u(\tilde{x}, \tilde{t}) < 0$. Puis comme $2\alpha - \tilde{x} > \alpha > \tilde{x} > s(\tilde{t})$, on a aussi $\partial_x u(2\alpha - \tilde{x}, \tilde{t}) < 0$, d'après le Lemme 1.3.1. Ainsi

$$\partial_x w = -\partial_x u(2\alpha - \tilde{x}, \tilde{t}) - \partial_x u(\tilde{x}, \tilde{t}) > 0,$$

une contradiction avec (29). Maintenant, si $\alpha > \tilde{x} = s(\tilde{t})$, alors $\partial_x u(\tilde{x}, \tilde{t}) = 0$ car $s(\tilde{t})$ est l'unique zéro de $\partial_x u(\cdot, \tilde{t})$, d'après le Lemme 1.3.1. D'après l'assertion (29), on a

$$\partial_x u(\tilde{x}, \tilde{t}) = \partial_x u(2\alpha - \tilde{x}, \tilde{t}) = 0.$$

Or $\alpha > \tilde{x}$ implique $2\alpha - \tilde{x} \neq \tilde{x}$, ce qui contredit l'unicité du zéro de $\partial_x u(\cdot, \tilde{t})$. Enfin, supposons que $y_1 \leq \tilde{x} < s(\tilde{t})$, alors le Lemme 1.3.1 donne $\partial_x u(\tilde{x}, \tilde{t}) > 0$. Soit V un voisinage maximal de (\tilde{x}, \tilde{t}) dans lequel $\partial_x u > 0$. Dans V , on obtient

$$\partial_t w - \partial_x^2 w - v \partial_x w - \delta w = (u + v) \partial_x u \geq 0.$$

Le principe de comparaison (Théorème A.1) implique $w \geq 0$ dans V , une contradiction avec (29). Comme les assertions (28) et (29) se révèlent fausses, nous avons $w \geq 0$ dans $(y_1, \alpha) \times (\tau, T)$, soit en d'autres termes

$$u(x, t) \leq u(2\alpha - x, t) \text{ pour } x \in [y_1, \alpha] \times [\tau, T).$$

S'il existe \bar{t} avec $\alpha > s(\bar{t})$, alors $2\alpha - s(\bar{t}) > \alpha$, et la précédente inégalité donne $u(s(\bar{t}), \bar{t}) \leq u(2\alpha - s(\bar{t}), \bar{t})$. Or, d'après le Lemme 1.3.1, $s(\bar{t})$ est l'unique maximum de la fonction $u(\cdot, \bar{t})$, c'est-à-dire $u(s(\bar{t}), \bar{t}) > u(2\alpha - s(\bar{t}), \bar{t})$. Cette contradiction prouve que $\alpha \leq s(t)$ pour tout $t \in [\tau, T)$. Ainsi, par définition 1.3.4 de s^- , on a

$$s^- = \liminf_{t \rightarrow T} s(t) \geq \alpha = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Puis, avec les définitions de y_1 et y_2 , on obtient $s^- > \frac{s^- + s^+}{2} - \varepsilon$. Et finalement, la condition (24) sur ε donne

$$s^- > \frac{s^- + s^+}{2} - \frac{s^+ - s^-}{2} = s^-.$$

Cette contradiction montre qu'il est impossible de réaliser la condition (24), c'est-à-dire $s^+ = s^-$. ■

Remarque 1.3.8 Grâce au Corollaire 1.3.3, nous savons que l'unique point d'explosion de la solution u se situe dans $[0, a]$.

1.4 Profils à deux bosses

Lorsque la donnée initiale a le profil de deux bosses ou plus, nous ne savons pas démontrer si le profil est conservé tout au long de l'intervalle d'existence de la solution ou s'il est modifié. Néanmoins, dans le cas d'un profil à deux bosses, nous sommes capables de donner une sur-solution qui conserve ce profil.

1.4.1 Sur-solutions théoriques

Lemme 1.4.1 *Il existe une sur-solution du Problème (1) dont le profil à deux bosses est conservé à l'identique tout au long de son intervalle d'existence lorsque le coefficient $\sigma \geq 0$.*

Preuve : On considère la solution v du problème stationnaire

$$\begin{cases} v'' - vv' + v^p - \lambda v = 0 & \text{dans } [-b, b], \\ v' = 0 & \text{sur } \{-b, b\}, \end{cases}$$

avec $p > 2$ et $\lambda \in [0, \frac{1}{3(p-1)}]$ tels que l'équilibre $(\lambda^{\frac{1}{p-1}}, 0)$ soit un tourbillon pour le Système (32) et où $b > 0$ est une longueur d'intervalle tel que la solution existe (voir Chapitre 2). On choisit v telle que son profil ait la forme de deux bosses, ce qui est possible grâce à la nature de l'équilibre $(\lambda^{\frac{1}{p-1}}, 0)$ dans le plan des phases du Système (32). On suppose aussi sans restriction que, pour tout $x \in [-b, b]$, on ait

$$\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{\frac{1}{p-1}} \leq v(x) \leq \left(\frac{3}{2}\lambda\right)^{\frac{1}{p-1}},$$

et

$$-\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{\frac{1}{p-1}} \leq v'(x) \leq \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{\frac{1}{p-1}}. \quad (30)$$

On se donne $T \in (0, \frac{1}{2})$ et l'on pose $u(x, t) = v(x) \left(T - t\right)^{\frac{-1}{p-1}}$ pour tout $(x, t) \in [-b, b] \times [0, T)$. On obtient alors

$$\begin{aligned} \partial_t u &= \partial_x^2 u + u \partial_x u - u^p \\ &= \frac{v}{p-1} (T-t)^{\frac{-p}{p-1}} - v'' (T-t)^{\frac{-1}{p-1}} + vv' (T-t)^{\frac{-2}{p-1}} - v^p (T-t)^{\frac{-p}{p-1}} \\ &\geq (-v'' + vv') (T-t)^{\frac{-1}{p-1}} + vv' \left\{ (T-t)^{\frac{-2}{p-1}} - (T-t)^{\frac{-1}{p-1}} \right\} \\ &\quad + (T-t)^{\frac{-p}{p-1}} \left[\frac{v}{p-1} - v^p \right]. \end{aligned}$$

Par définition de T , on minore le terme entre accolades par $\frac{1}{2}(T-t)^{\frac{2}{p-1}}$. Par l'hypothèse (30), on peut minorer vv' par $-v\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{\frac{1}{p-1}}$. Par définition de v , on utilise l'égalité $-v'' + vv' = v^p - \lambda v$ et on obtient

$$\begin{aligned} \partial_t u & - \partial_x^2 u + u \partial_x u - u^p \\ & \geq (v^p - \lambda v)(T-t)^{\frac{-1}{p-1}} - \frac{v}{2} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{\frac{1}{p-1}} (T-t)^{\frac{-2}{p-1}} + (T-t)^{\frac{-p}{p-1}} \left[\frac{v}{p-1} - v^p \right] \\ & \geq v^p \left[(T-t)^{\frac{-1}{p-1}} - (T-t)^{\frac{-p}{p-1}} \right] \\ & \quad + v \left\{ \frac{1}{p-1} (T-t)^{\frac{-p}{p-1}} - \lambda (T-t)^{\frac{-1}{p-1}} - \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{\frac{1}{p-1}} (T-t)^{\frac{-2}{p-1}} \right\}. \end{aligned}$$

Quitte à rétrécir T , on peut supposer que le terme entre accolades est minoré par $\frac{1}{2(p-1)}(T-t)^{\frac{-p}{p-1}}$ grâce à $p > 2$. Par hypothèses sur v et λ , on obtient

$$\begin{aligned} \partial_t u & - \partial_x^2 u + u \partial_x u - u^p \\ & \geq v^p \left[(T-t)^{\frac{-1}{p-1}} - (T-t)^{\frac{-p}{p-1}} \right] + v \frac{1}{2(p-1)} (T-t)^{\frac{-p}{p-1}} \\ & \geq -v^p (T-t)^{\frac{-p}{p-1}} + v \frac{1}{2(p-1)} (T-t)^{\frac{-p}{p-1}} \\ & \geq v (T-t)^{\frac{-p}{p-1}} \left[\frac{1}{2(p-1)} - v^{p-1} \right] \geq 0. \end{aligned}$$

De plus, concernant la condition au bord, on a

$$\begin{aligned} \sigma \partial_t u(\pm b, t) + \partial_\nu u(\pm b, t) & = \frac{\sigma v(\pm b)}{p-1} (T-t)^{\frac{-p}{p-1}} \pm (T-t)^{\frac{-p}{p-1}} \partial_\nu v(\pm b) \\ & = \frac{\sigma v(\pm b)}{p-1} (T-t)^{\frac{-p}{p-1}} \geq 0, \end{aligned}$$

car $v' = 0$ sur $\{-b, b\}$ et parce que σ et v sont positifs. Ainsi, la fonction u est une sur-solution du Problème (1) dans $[-b, b] \times [0, T)$ lorsque le coefficient $\sigma \geq 0$ et que la donnée initiale φ vérifie

$$\varphi \leq v(x) T^{\frac{-1}{p-1}} \text{ dans } [-b, b].$$

■

Remarque 1.4.2 *L'existence d'une sur-solution à deux bosses \bar{u} n'est pas suffisante pour établir l'existence d'une solution ayant la forme de deux bosses. Pour s'assurer du profil de deux bosses, il faudrait obtenir une sous-solution*

\underline{u} ayant deux maxima locaux supérieurs ou égaux au minimum local de la sur-solution, et situés de part et d'autre de ce dernier : ces conditions permettraient de coïncider la solution entre les fonctions \bar{u} et \underline{u} , forçant ainsi le profil à deux bosses. Malheureusement, comme la sur-solution \bar{u} du Lemme 1.4.1 explose sur tout l'intervalle $[-b, b]$, l'éventuelle sous-solution \underline{u} devrait exploser en même temps, disons en $T > 0$. Par conséquent, la solution u obtenue vérifierait $\underline{u} \leq u \leq \bar{u}$ dans $[-b, b] \times [0, T)$, en particulier, pour tout $t > 0$, $u(\cdot, t)$ aurait deux maxima locaux $s_1(t) < s_2(t)$, et exploserait en (au moins) deux points. La minoration de l'ordre de croissance (voir Théorème 1.2.3) entraînerait

$$u(s_1(t), t) \geq \left((p-1)(T-t) \right)^{\frac{-1}{p-1}} \quad \text{et} \quad u(s_2(t), t) \geq \left((p-1)(T-t) \right)^{\frac{-1}{p-1}}$$

pour tout $0 < t < T$. Or $u \leq \bar{u}$ et les hypothèses sur le choix de λ impliqueraient

$$u(s_1(t), t) < \left((p-1)(T-t) \right)^{\frac{-1}{p-1}} \quad \text{pour tout } 0 < t < T.$$

La contradiction entre les deux dernières équations montre qu'il n'est pas possible de trouver une sous-solution adéquate.

1.4.2 Exemples numériques

À l'aide d'une méthode consistante aux différences finies (voir Annexe B), nous exhibons numériquement une classe de données initiales ayant la forme de deux bosses dont le profil est conservé ou modifié selon la valeur du creux situé entre les deux bosses. En effet, considérons une donnée initiale de la forme suivante

$$\varphi(x) = \begin{cases} 5 + 6f(x) & \text{pour } x \in [0, \frac{2}{5}] \\ 11 - 10000(11-c)(x - \frac{2}{5})^2(x - \frac{3}{5})^2 & \text{pour } x \in [\frac{2}{5}, \frac{3}{5}] \\ 5 + 6f(1-x) & \text{pour } x \in [\frac{3}{5}, 1] \end{cases}$$

avec $f(x) = 5x - \frac{25}{4}x^2$ et $c \in \mathbb{R}$. Le paramètre c donne simplement la hauteur du minimum local (le creux) situé entre les deux maxima locaux (les bosses), voir Figure 1.1 pour le cas $c = 8$. La partie droite de la Figure 1.1 montre l'abscisse des maxima avant l'explosion de la solution. Lorsque le minimum a une valeur proche de celle des maxima, nous observons une modification du profil (voir Figure 1.2), tandis que si les extrema ont des valeurs suffisamment séparées, on observe une conservation du profil à deux bosses (voir Figure 1.3).

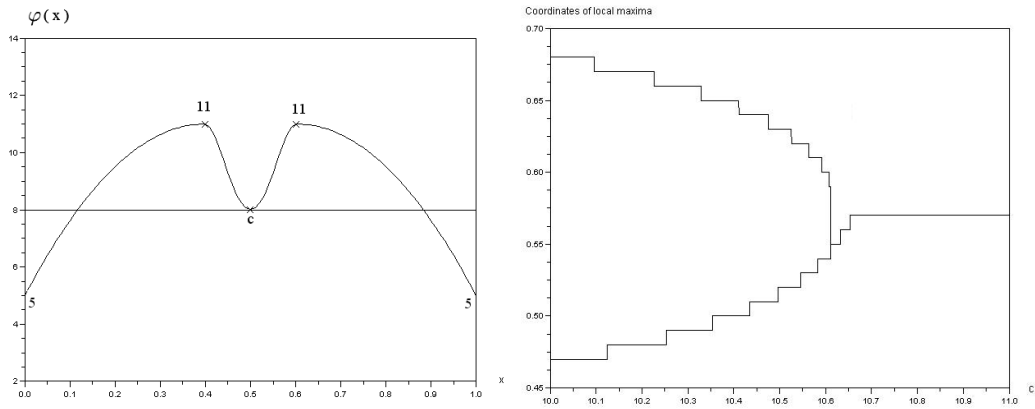


FIG. 1.1 – Donnée initiale φ et bifurcation des maxima locaux

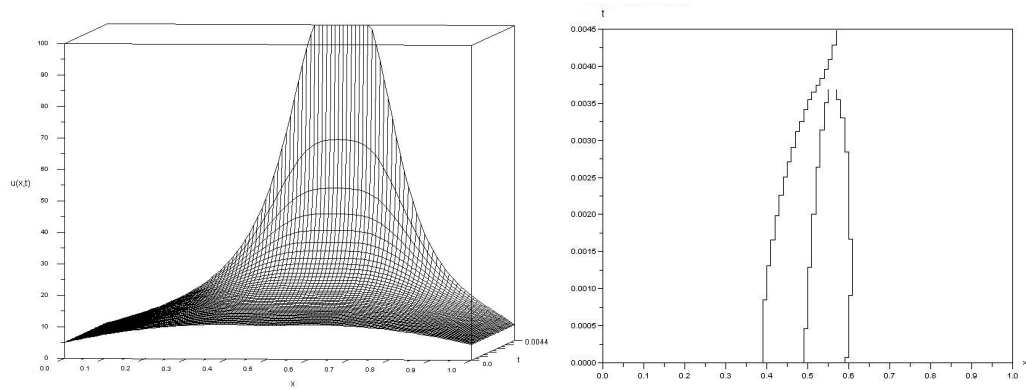


FIG. 1.2 – Changement du profil et suivi des extrema locaux pour $c = 10.7$

Ce chapitre provient d'un travail commun avec J. von Below et G. Mailly, soumis à publication [12].

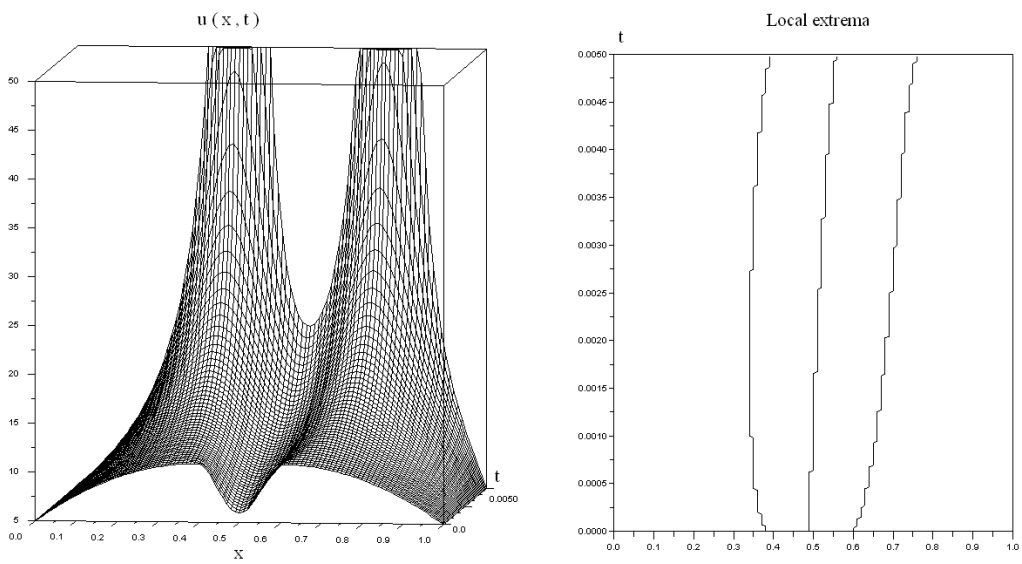


FIG. 1.3 – Conservation du profil et suivi des extrema locaux pour $c = 6$

Chapitre 2

Une bifurcation pour l'équation de Burgers paramétrée

Dans ce chapitre, on s'intéresse aux solutions stationnaires d'une équation de Burgers généralisée. Nous introduisons un paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$ dans l'équation stationnaire de Burgers de la manière suivante :

$$u'' - uu' + u|u|^{p-1} - \lambda u = 0 \quad \text{dans } [-a, a], \quad (31)$$

et on prouve, par des arguments de plan des phases, l'existence de solutions stationnaires de cette équation sous des conditions au bord de Dirichlet ou de Neumann. L'ajout de ce paramètre permet, sauf si $\lambda \leq 0$, d'avoir un équilibre différent de l'origine pour le système

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ uv - u|u|^{p-1} + \lambda u \end{pmatrix}. \quad (32)$$

Cela nous permet d'obtenir des solutions positives de l'équation (31) sous conditions au bord de Neumann lorsque $\lambda > 0$, alors que pour $\lambda \leq 0$, ce type de solutions n'existe pas. Dans les trois premières sections, on étudie le cas d'un exposant p sur-linéaire :

$$p > 1.$$

Nous étudions le cas limite $p = 1$ dans une section séparée. Ensuite, nous discutons de l'existence des solutions stationnaires non-bornées de l'équation (31) sur $(-a, a)$: à savoir des solutions vérifiant une condition de Dirichlet ou de Neumann en $-a$, et explosant en a . Puis, en faisant varier les paramètres λ et p du Système (32), nous étudions les différents phénomènes de bifurcation qui se produisent lorsque λ parcourt \mathbb{R} et lorsque p tend vers 1. Nous terminons ce chapitre en utilisant les solutions stationnaires pour montrer l'existence de sur-solutions, puis de solutions de l'équation de Burgers

non-stationnaire

$$\partial_t u = \partial_x^2 u - u \partial_x u + u|u|^{p-1} - \lambda u \quad \text{dans } [-a, a] \times [0, \infty), \quad (33)$$

sous les conditions au bord de Neumann, de Dirichlet et pour les conditions dynamiques. Tout au long de chapitre, nous utilisons le théorème de linéarisation d'Hartman-Grobman. Pour cela, on se réfère au livre d'Herbert Amann [1]. Cette référence nous est également utile pour justifier l'existence, l'unicité et la régularité des solutions de classe \mathcal{C}^1 du Système (32), puis des solutions de classe \mathcal{C}^2 de l'équation (31).

2.1 Étude des équilibres

On cherche à déterminer les équilibres du Système (32), ainsi que leur nature :

$$\begin{cases} u' = 0 \\ v' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 0 \\ u(v - |u|^{p-1} + \lambda) = 0 \end{cases},$$

ce qui nous donne au plus trois équilibres : $(0, 0)$, $(\lambda^{\frac{1}{p-1}}, 0)$ et $(-\lambda^{\frac{1}{p-1}}, 0)$, le second et le troisième étant bien définis pour tout $p \in (1, \infty)$ lorsque $\lambda > 0$. Afin de déterminer la nature de ces équilibres, considérons le système linéarisé en $(0, 0)$

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad \text{où } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda & 0 \end{pmatrix}, \quad (34)$$

puis, lorsqu'il existe, en $(\lambda^{\frac{1}{p-1}}, 0)$

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad \text{où } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda(1-p) & \lambda^{\frac{1}{p-1}} \end{pmatrix}. \quad (35)$$

Le cas du troisième équilibre, $(-\lambda^{\frac{1}{p-1}}, 0)$, sera discuté à la section 2.3.1 en raisonnant par symétrie.

2.1.1 Cas $\lambda > 0$

Comme le spectre de la matrice A ne contient que deux valeurs propres réelles, l'une strictement négative, l'autre strictement positive,

$$\sigma(A) = \left\{ -\sqrt{\lambda}, \sqrt{\lambda} \right\},$$

l'équilibre $(0, 0)$ est un point-selle pour le Système (34), et d'après le théorème de linéarisation d'Hartman-Grobman, $(0, 0)$ est un point-selle pour le Système (32).

Concernant la matrice B , il nous faut distinguer plusieurs sous-cas pour calculer son le spectre. Tout d'abord, lorsque

$$1 - 4(p-1)\lambda^{\frac{p-3}{p-1}} < 0, \quad (36)$$

on obtient

$$\sigma(B) = \left\{ \frac{\lambda^{\frac{1}{p-1}}}{2} \left(1 - i\sqrt{4(p-1)\lambda^{\frac{p-3}{p-1}} - 1} \right), \frac{\lambda^{\frac{1}{p-1}}}{2} \left(1 + i\sqrt{4(p-1)\lambda^{\frac{p-3}{p-1}} - 1} \right) \right\}.$$

L'équilibre $(0, 0)$ est un tourbillon instable et répulsif pour le Système (35), et d'après le théorème de linéarisation d'Hartman-Grobman, $(\lambda^{\frac{1}{p-1}}, 0)$ est un tourbillon instable et répulsif pour le Système (32). Ensuite, lorsque

$$1 - 4(p-1)\lambda^{\frac{p-3}{p-1}} = 0,$$

on obtient

$$\sigma(B) = \left\{ \frac{\lambda^{\frac{1}{p-1}}}{2} \right\},$$

et la matrice B n'est pas diagonalisable. L'équilibre $(0, 0)$ est un nœud (à une tangente) instable et répulsif pour le Système (35) et, comme précédemment, on en déduit que $(\lambda^{\frac{1}{p-1}}, 0)$ est un nœud (à une tangente) instable et répulsif pour le Système (32). Finalement, lorsque

$$1 - 4(p-1)\lambda^{\frac{p-3}{p-1}} > 0,$$

on obtient

$$\sigma(B) = \left\{ \frac{\lambda^{\frac{1}{p-1}}}{2} \left(1 - \sqrt{1 - 4(p-1)\lambda^{\frac{p-3}{p-1}}} \right), \frac{\lambda^{\frac{1}{p-1}}}{2} \left(1 + \sqrt{1 - 4(p-1)\lambda^{\frac{p-3}{p-1}}} \right) \right\}.$$

Comme le déterminant et la trace de la matrice B sont strictement positifs,

$$\det B = \lambda(p-1), \text{ et } \operatorname{tr} B = \lambda^{\frac{1}{p-1}},$$

les deux valeurs propres de B sont strictement positives et on en déduit que l'équilibre $(0, 0)$ est un nœud (à deux tangentes) instable et répulsif pour le Système (35). Comme pour les autres cas, on en conclut que $(\lambda^{\frac{1}{p-1}}, 0)$ est un nœud (à deux tangentes) instable et répulsif pour le Système (32).

2.1.2 Cas $\lambda < 0$

Cette fois, le spectre de la matrice A ne contient que deux valeurs propres purement imaginaires,

$$\sigma(A) = \left\{ -i\sqrt{-\lambda}, i\sqrt{-\lambda} \right\}.$$

L'équilibre $(0, 0)$ est un centre pour le Système (34), mais la linéarisation ne permet pas de donner la nature de l'équilibre $(0, 0)$ du Système (32). L'allure des trajectoires sera étudiée dans la Section 2.3.3. Ce système n'admet pas d'autre équilibre dans le cas $\lambda < 0$.

2.1.3 Cas $\lambda = 0$

Cette fois, le spectre de la matrice A ne contient que la valeur propre nulle,

$$\sigma(A) = \{0\}.$$

Comme précédemment, la linéarisation ne permet pas de connaître la nature de l'équilibre $(0, 0)$ pour le Système (32). On prouvera dans la Section 2.3.3 que $(0, 0)$ est un centre pour le Système (32). De plus, $(0, 0)$ est le seul équilibre de ce système.

2.2 Solutions positives

On cherche à déterminer l'existence de solutions positives de l'équation (31) sous conditions au bord de Dirichlet ou de Neumann. Pour cela, on étudie les trajectoires du Système (32) dans le demi-plan $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$. Nous considérons deux cas dépendants du signe du paramètre λ .

2.2.1 Cas $\lambda > 0$

Dans un premier temps, nous traçons les vecteurs correspondant aux vitesses (u', v') des trajectoires du Système (32). On obtient la Figure 2.1.

Ensuite, on exprime l'ordonnée v en fonction de l'abscisse u , $v = f(u)$ avec f une fonction inconnue, mais dont nous pouvons étudier les variations et la

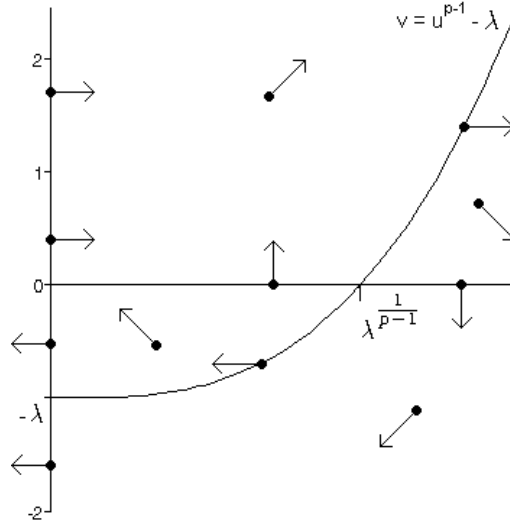


FIG. 2.1 – Vélocities du Système (32) avec $\lambda > 0$.

convexité à l'aide des équations du Système (32). On a

$$\frac{dv}{du} = \frac{uv + \lambda u - u^p}{v} = \frac{u}{v} (v - u^{p-1} + \lambda). \quad (37)$$

Puis

$$\frac{d^2v}{du^2} = \frac{d}{du} \left(\frac{dv}{du} \right) = 1 + \frac{1}{v^2} \left[(\lambda - pu^{p-1})v - u(\lambda - u^{p-1}) \frac{dv}{du} \right]. \quad (38)$$

Une étude de signe classique nous donne $\frac{d^2v}{du^2} < 0$ dans le secteur

$$\{u \geq 0\} \cap \{v > 0\} \cap \{v < u^{p-1} - \lambda\},$$

puis $\frac{d^2v}{du^2} > 0$ dans le secteur

$$\{u \geq 0\} \cap \{v < 0\} \cap \{v < u^{p-1} - \lambda\}.$$

Ceci prouve que les trajectoires du Système (32) sont bornées dans le cadran $\{u \geq 0\} \cap \{v < u^{p-1} - \lambda\}$. En effet, toute trajectoire initiée dans ce cadran a pour support une courbe dont les variations et la convexité sont gouvernées par les équations ci-dessus : un simple tracé de cette courbe montre que la trajectoire atteint le bord de ce cadran en temps fini. Concernant la partie restante du demi-plan, la situation est plus complexe. En effet, le long de l'axe $\{u = 0\}$, on a

$$\left. \frac{d^2v}{du^2} \right|_{u=0} = 1 + \frac{\lambda}{v},$$

et le long de la courbe $\{v = u^{p-1} - \lambda\}$

$$\left. \frac{d^2v}{du^2} \right|_{v=u^{p-1}-\lambda} = (1-p) \frac{u^{p-1}}{v},$$

ce qui prouve un changement de convexité dans le secteur

$$\{u \geq 0\} \cap \{v > u^{p-1} - \lambda\}.$$

À cause de ce changement de signe, il nous faut un argument supplémentaire pour montrer qu'une trajectoire du Système (32), initiée dans le cadran $\{u \geq 0\} \cap \{v > u^{p-1} - \lambda\}$ coupe la courbe $\{v = u^{p-1} - \lambda\}$ en temps fini, et reste ainsi bornée. Pour cela, il suffit de considérer le cas

$$p \geq 3. \tag{39}$$

Soit $v_0 > 0$, et considérons la trajectoire (u, v) , solution du Système (32) initiée en $(0, v_0)$. Tant que la trajectoire (u, v) se situe dans le secteur $\{u \geq 0\} \cap \{v > 0\} \cap \{v > u^{p-1} - \lambda\}$, on a

$$\frac{dv}{du} = u + \frac{\lambda u}{v} - \frac{u^p}{v} \leq u + \frac{\lambda u}{v},$$

puis comme $\frac{dv}{du} \geq 0$, on effectue la majoration suivante :

$$\frac{dv}{du} \leq u \left(1 + \frac{\lambda}{v_0}\right).$$

Par intégration, on en déduit

$$v = f(u) \leq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\lambda}{v_0}\right) u^2 + c,$$

où c est un réel que l'on choisit de manière optimale avec $c = v(0) = v_0$. Lorsque $p > 3$, on est assuré que les courbes $v = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\lambda}{v_0}\right) u^2 + v_0$ et $v = u^{p-1} - \lambda$ se coupent. Lorsque $p = 3$, il suffit de choisir v_0 suffisamment grand tel que

$$\frac{1}{2} \left(1 + \frac{\lambda}{v_0}\right) < 1,$$

pour que les courbes $v = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\lambda}{v_0}\right) u^2 + v_0$ et $v = u^{p-1} - \lambda$ se coupent . Voir la Figure 2.2. Par conséquent, sous l'hypothèse (39), la trajectoire du Système (32) initiée en $(0, v_0)$ coupe la courbe $v = u^{p-1} - \lambda$, entre dans le

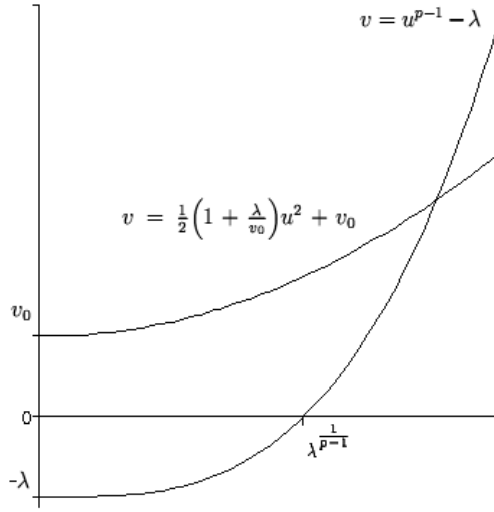


FIG. 2.2 – Les trajectoires coupent la courbe $\{v = u^{p-1}\}$.

secteur $\{u \geq 0\} \cap \{v < u^{p-1} - \lambda\}$ et reste bornée.

Pour compléter l'étude de ce plan des phases, il nous reste à prouver qu'il existe des trajectoires initiées sur l'axe $\{u = 0\}$ et qui l'atteignent à nouveau en temps fini. Cela peut s'obtenir en trois étapes. Premièrement, en utilisant ce qui est fait précédemment, nous savons qu'il existe une trajectoire (u, v) du Système (32) initiée en $(0, v_0)$ coupant la courbe $v = u^{p-1} - \lambda$, puis grâce à l'étude des variations et de la convexité de v en fonction de u dans le cadran $\{u \geq 0\} \cap \{v < u^{p-1} - \lambda\}$, cette trajectoire (u, v) coupe l'axe $\{v = 0\}$ en un point $(u_1, 0)$, où $u_1 > 0$. Deuxièmement, on considère une trajectoire du système rétrograde

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v \\ -uv + u^p - \lambda u \end{pmatrix}, \quad (40)$$

initiée en $(0, z_0)$, avec $z_0 < -\lambda$. Les trajectoires du Système (40) ont le même support que les trajectoires du Système (32), mais parcouru dans le sens inverse. Les informations sur les variations et la convexité sont identiques pour les trajectoires des deux Systèmes (32) et (40). On en déduit que la trajectoire du Système (40) initiée en $(0, z_0)$ coupe l'axe $\{v = 0\}$ en un point $(w_1, 0)$. Les informations sur les vitesses (37) de ces trajectoires nous donnent

$$\lambda^{\frac{1}{p-1}} < w_1.$$

En inversant le sens de la paramétrisation, on obtient une trajectoire (w, z) du

Système (32) initiée en $(w_1, 0)$ atteignant l'axe $\{u = 0\}$ en $(0, z_0)$. Troisièmement, on considère $u_2 > \max\{u_1, w_1\}$ et la trajectoire maximale (α, β) passant par le point $(u_2, 0)$. Par unicité des solutions du Système (32), ces trois trajectoires ne peuvent pas se chevaucher. Ainsi, la trajectoire maximale (α, β) coupe deux fois l'axe $\{u = 0\}$: la première fois en un point $(0, \beta_1)$ avec $\beta_1 > v_0$, et la seconde fois en un point $(0, \beta_2)$ avec $\beta_2 < z_0$, voir Figure 2.3. On en déduit le résultat suivant :

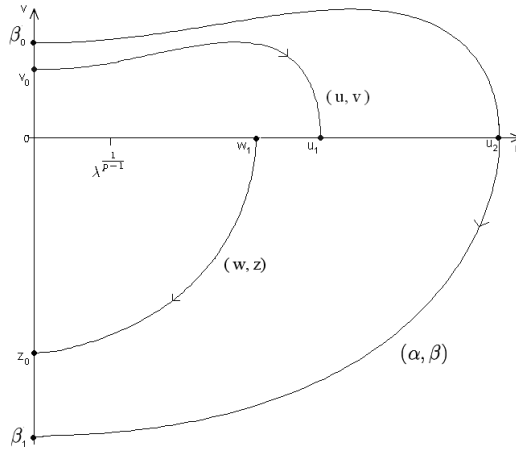


FIG. 2.3 – Plan des phases du Système (32) dans $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ avec $\lambda > 0$.

Théorème 2.2.1 *Supposons que l'hypothèse (39) soit vérifiée :*

$$p \geq 3.$$

Pour tout $\lambda > 0$, pour certains $a > 0$, et pour chacune des conditions au bord suivantes

1. $u(-a) = u(a) = 0$ (conditions au bord de Dirichlet homogènes),
2. $u'(-a) = u'(a) = 0$ (conditions au bord de Neumann),
3. $u(-a) = u'(a) = 0$ (conditions au bord mixtes),
4. $u'(-a) = u(a) = 0$ (conditions au bord mixtes),

il existe une unique solution positive u de l'équation (31)

$$u'' - uu' + u|u|^{p-1} - \lambda u = 0 \quad \text{dans } [-a, a].$$

Preuve : Pour une solution u de (31), on pose $v = u'$. Chercher une solution (u, v) du Système (32) est équivalent à chercher une solution u de l'équation (31). En utilisant ce qui précède, on obtient une solution u de

l'équation (31) sous les conditions de Dirichlet (type 1) en considérant la trajectoire (α, β) entre les points $(0, \beta_0)$ et $(0, \beta_1)$ mise en évidence par la Figure 3. Pour les conditions mixtes (type 3), on considère la trajectoire (u, v) entre les points $(0, v_0)$ et $(u_1, 0)$, tandis que la trajectoire (w, z) entre les points $(w_1, 0)$ et $(0, z_0)$ nous donne une solution de (32) sous les conditions mixtes (type 4). Pour le cas des conditions de Neumann (type 2), il nous faut considérer une trajectoire (η, γ) du Système (32) initiée en $(\eta_0, 0)$ avec $0 < \eta_0 < \lambda^{\frac{1}{p-1}}$. Les informations obtenues sur la vélocité (37) et la convexité (38) de cette trajectoire, ainsi que l'unicité des solutions (ie : la trajectoire (η, γ) ne peut couper la trajectoire (α, β)), nous assure que la trajectoire (η, γ) coupe l'axe $\{v = 0\}$ en temps fini en un point $\lambda^{\frac{1}{p-1}} < \eta_1$. Quitte à effectuer un changement de variable affine, on a pour un certain $a > 0$

$$\eta'(-a) = \gamma(-a) = 0 \text{ et } \eta'(a) = \gamma(a) = 0.$$

La fonction $\eta : [-a, a] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ convient pour répondre à l'énoncé. ■

Si $p < 3$, on n'est plus assuré de l'existence des solutions sous conditions de Dirichlet. En effet, si on considère une trajectoire initiée sur l'axe $\{u = 0\}$, on ne peut pas déterminer la convexité de la trajectoire, ni utiliser la méthode précédente pour borner la trajectoire. Et même, pour $1 < p < 3$, il existe des solutions non bornées, voir Section 2.5. Cependant, nous ne perdons aucune information concernant les trajectoires situées dans le cadran $\{v < 0\}$ du plan des phases et on a le résultat suivant :

Théorème 2.2.2 *Pour tout $\lambda > 0$ et certains $a > 0$, il existe une unique solution positive u de l'équation (31)*

$$u'' - uu' + u|u|^{p-1} - \lambda u = 0 \quad \text{dans } [-a, a],$$

vérifiant les conditions au bord mixtes $u'(-a) = u(a) = 0$.

Preuve : De manière analogue à la preuve du théorème précédent, la trajectoire (w, z) entre $(w_1, 0)$ et $(0, z_0)$ convient, voir Figure 2.3. ■

Par contre, sous l'hypothèse supplémentaire

$$\lambda < \left(4(p-1)\right)^{\frac{p-1}{3-p}}, \quad (41)$$

on obtient le résultat suivant :

Théorème 2.2.3 *Supposons que $\lambda > 0$ et $p > 1$ soient tels que l'hypothèse (41) soit vérifiée. Pour certains $a > 0$, il existe une unique solution positive u de l'équation (31)*

$$u'' - uu' + u|u|^{p-1} - \lambda u = 0 \quad \text{dans } [-a, a],$$

vérifiant les conditions au bord de Neumann $u'(-a) = u'(a) = 0$.

Preuve : L'hypothèse (41) nous assure que l'équilibre $(\lambda^{\frac{1}{p-1}}, 0)$ est un tourbillon instable et répulsif, voir Section 2.1. Localement, le plan des phases du Système (32) correspond à la Figure 2.4. La trajectoire (u, v) du Système

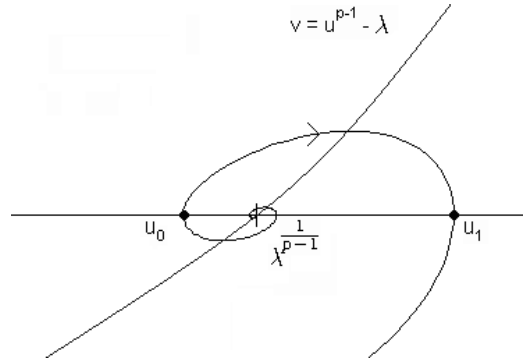


FIG. 2.4 – Tourbillon.

(32), considérée entre $(u_0, 0)$ et $(u_1, 0)$, nous permet d'obtenir la solution cherchée. ■

Concernant le cas des intervalles de longueur infinie, on a, pour tout $p > 1$, le résultat suivant :

Théorème 2.2.4 *Pour tout $\lambda > 0$, et pour chacune des conditions au bord suivantes*

1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} u'(x) = u'(0) = 0$ (conditions au bord de Neumann),
2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) = u(0) = 0$ (conditions au bord mixtes),

il existe une solution positive u de l'équation (31)

$$u'' - uu' + u|u|^{p-1} - \lambda u = 0$$

dans $(-\infty, 0]$. Et dans les deux cas nous avons $\lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) = \lambda^{\frac{1}{p-1}}$

Preuve : Il suffit de considérer une trajectoire (u, v) du Système (32) vérifiant

$$u(0) > \lambda^{\frac{1}{p-1}} \text{ et } u'(0) = 0.$$

Puisque l'équilibre $(\lambda^{\frac{1}{p-1}}, 0)$ est instable et répulsif, si on choisit $|u(0) - \lambda^{\frac{1}{p-1}}|$ suffisamment proche de zéro, alors on est assuré que la trajectoire (u, v) existe dans $(-\infty, 0]$ et que $(u(x), v(x))$ tende vers l'équilibre $(\lambda^{\frac{1}{p-1}}, 0)$ lorsque $x \rightarrow -\infty$. La trajectoire (u, v) , considérée entre les points $(\lambda^{\frac{1}{p-1}}, 0)$ et $(u(0), 0)$ permet de répondre au premier cas énoncé. Pour le second cas, il faut considérer la trajectoire (u, v) dans l'intervalle $(-\infty, a]$ avec $a > 0$ tel que $u(a) = 0$. Ce dernier point est possible d'après ce qui a été fait dans les preuves des théorèmes (2.2.1) et (2.2.2) pour prouver l'existence des solutions sous conditions au bord mixtes. Un changement de variable affine permet de nous ramener à l'intervalle $(-\infty, 0]$ et de prouver le second cas énoncé. ■

2.2.2 Cas $\lambda \leq 0$

On procède comme dans le cas $\lambda > 0$ pour l'étude des trajectoires (u, v) en posant $v = f(u)$. Concernant les vitesses, on obtient la Figure 2.5.

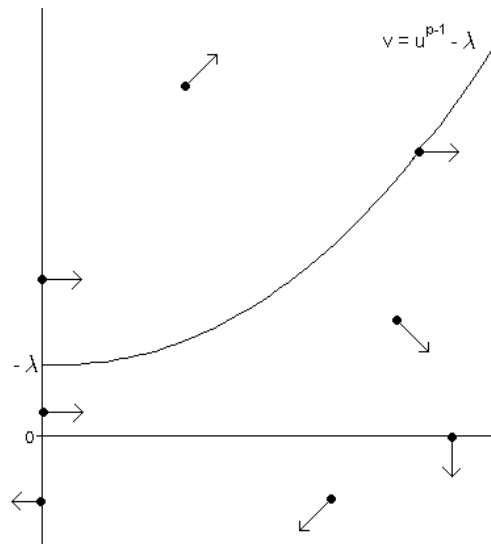


FIG. 2.5 – Vitesses du Système (32) avec $\lambda \leq 0$.

Pour ce qui est de la convexité, on a

$$\frac{d^2v}{du^2} \geq 0 \text{ dans } \{v < 0\},$$

et

$$\frac{d^2v}{du^2} \leq 0 \text{ dans } \{v > 0\} \cap \{v < u^{p-1} - \lambda\}.$$

Comme précédemment, il est difficile d'évaluer le signe de $\frac{d^2v}{du^2}$ dans le cadran

$$\{v > u^{p-1} - \lambda\}.$$

Cependant, nous pouvons assurer le caractère borné des trajectoires dans les cas décrits ci-après. On considère une trajectoire (u_r, v_r) du système rétrograde (40) initiée sur la courbe $v = u^{p-1} - \lambda$, disons en $(u_0, u_0^{p-1} - \lambda)$. Dans le cadran $\{v > u^{p-1} - \lambda\}$, grâce à $\lambda \leq 0$ et comme une trajectoire de (40) est une trajectoire de (32) parcourue dans le sens inverse, on a

$$0 < \frac{dv}{du} \leq u.$$

Cela nous permet d'obtenir $v \geq \frac{1}{2}u^2 + c$, où c est une constante choisie optimalement :

$$c = -\lambda + u_0^{p-1} \left(1 - \frac{1}{2}u_0^{3-p}\right).$$

Si u_0 est choisi de la manière suivante

$$\begin{cases} u_0 \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{p-3}} & \text{si } p > 3, \\ u_0 > 0 & \text{si } p = 3, \\ u_0 \leq 2^{\frac{1}{3-p}} & \text{si } p < 3, \end{cases} \quad (42)$$

on est assuré que $c > -\lambda$. Ainsi, la courbe $v = \frac{1}{2}u^2 + c$ coupe l'axe $\{u = 0\}$ au dessus de $-\lambda$, ce qui prouve que la trajectoire (u_r, v_r) coupe l'axe $\{u = 0\}$ au dessus de c , et de $-\lambda$. Par conséquent, lorsqu'on revient au Système (32), on obtient des trajectoires initiées sur l'axe $\{u = 0\}$ qui coupent la courbe $v = u^{p-1} - \lambda$ en temps fini. Il suffit que l'initialisation $(0, v_0)$ vérifie

$$-\lambda < v_0 < c_{\max},$$

où c_{\max} est la plus grande constante possible en fonction des cas (42). Ensuite, les vitesses et la convexité des trajectoires dans les autres cadrans nous assurent le caractère borné de la trajectoire. Notons qu'il existe des trajectoires

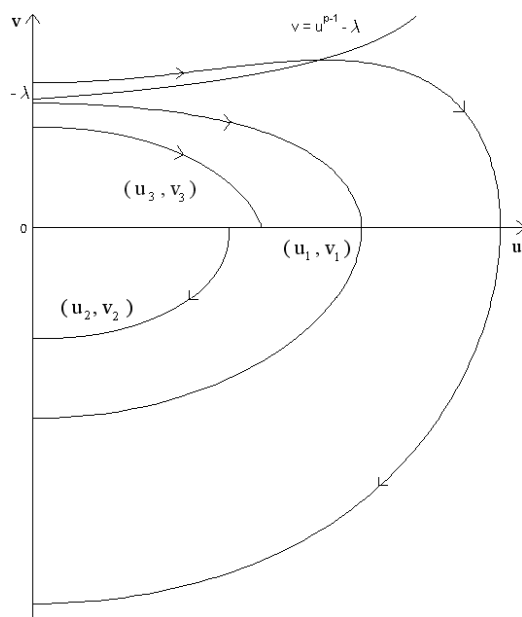


FIG. 2.6 – Plan des phases du Système (32) dans $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ avec $\lambda \leq 0$.

non bornées lorsque $p < 3$ (voir Section 2.5), alors que c'est impossible pour $p \geq 3$. Ces informations suffisent pour tracer le plan des phases du système (32), voir Figure 2.6.

Nous pouvons énoncer les résultats suivants :

Théorème 2.2.5 *Pour tout $\lambda \leq 0$, pour certains $a > 0$, et pour chacune des conditions au bord suivantes*

1. $u(-a) = u(a) = 0$ (conditions de Dirichlet homogènes),
2. $u'(-a) = u(a) = 0$ (conditions mixtes),
3. $u(-a) = u'(a) = 0$ (conditions mixtes),

il existe une unique solution positive u de l'équation (31)

$$u'' - uu' + u|u|^{p-1} - \lambda u = 0 \quad \text{dans } [-a, a].$$

Preuve : On raisonne avec une trajectoire (u, v) du Système (32). En argumentant de manière analogue au Théorème 2.2.1 à l'aide du plan des phases (voir Figure 2.6), on justifie le premier cas à l'aide de la trajectoire (u_1, v_1) initiée en $(0, v_1(0))$ avec $v_1(0) < c_{max}$, le second cas avec la trajectoire (u_2, v_2) , puis le troisième cas avec la trajectoire (u_3, v_3) . ■

Par contre, il est impossible d'avoir une solution positive vérifiant les conditions au bord de Neumann. En effet, si une trajectoire est initiée sur l'axe $\{v = 0\}$, l'étude des vitesses montre que la trajectoire se situe dans le demi-plan $\{v < 0\}$ et ne revient pas sur l'axe $\{v = 0\}$, sauf après un passage dans le cadran $\{u < 0\}$. D'où le résultat suivant :

Théorème 2.2.6 *Pour tout $\lambda \leq 0$ et pour tout $a > 0$, il n'existe pas de solution positive de l'équation (31)*

$$u'' - uu' + u|u|^{p-1} - \lambda u = 0 \quad \text{dans } [-a, a]$$

sous les conditions au bord de Neumann.

2.3 Solutions non-signées

L'objectif de cette section est d'obtenir les solutions que nous n'avons pas pu trouver dans le cas des solutions positives. On s'intéresse aux solutions de l'équation (31), sous conditions au bord de Dirichlet ou de Neumann, qui changent de signe. Nous allons raisonner avec un argument de symétrie pour compléter le plan des phases du Système (32) dans \mathbb{R}^2 tout entier.

2.3.1 Symétrie des trajectoires

On considère une trajectoire (u, v) , solution du Système (32) dans $[-a, a]$ avec $a > 0$ et située dans le demi plan $\mathbb{R}^- \times \mathbb{R}$. On pose :

$$\begin{cases} w(x) &= -u(-x) \\ z(x) &= v(-x) \end{cases} \quad \text{pour tout } x \in [-a, a].$$

Suivant les règles de dérivation des fonctions composées, on obtient

$$\begin{cases} w'(x) &= u'(-x) \\ z'(x) &= -v'(-x) \end{cases} \quad \text{pour tout } x \in [-a, a],$$

puis en utilisant les équations du Système (32) :

$$\begin{cases} w'(x) &= v(-x) \\ z'(x) &= -(u(-x)v(-x) - u(-x)|u(-x)|^{p-1} + \lambda u(-x)) \end{cases} .$$

En écrivant ces dernières équations uniquement avec w et z , on a :

$$\begin{cases} w'(x) &= z(x) \\ z'(x) &= w(x)z(x) - w(x)|w(x)|^{p-1} + \lambda w(x) \end{cases} .$$

Ainsi, la trajectoire (w, z) est une solution du Système (32) dans $[-a, a]$, située dans le demi-plan $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$. Connaissant l'allure d'une telle trajectoire, on en déduit, par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées, l'allure de la trajectoire (u, v) .

2.3.2 Cas $\lambda > 0$

D'après ce que nous avons obtenu à la section 2.2.1 et par symétrie, on trace le plan des phases du Système (32) et on obtient la Figure 2.7. On en déduit

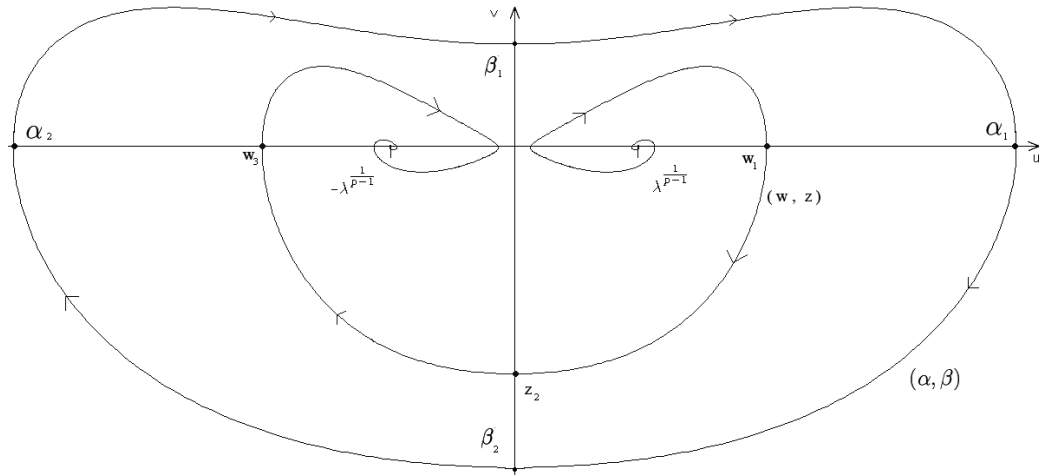


FIG. 2.7 – Plan des phases complet du Système (32) pour $p \geq 3$ et $\lambda > 0$.

le théorème suivant :

Théorème 2.3.1 *Supposons que l'hypothèse (39) soit vérifiée :*

$$p \geq 3.$$

Pour tout $\lambda > 0$, pour certains $a > 0$, et pour chacune des conditions suivantes

1. $u(-a) = u(a) = 0$ (conditions de Dirichlet homogènes) et u est positive,
2. $u'(-a) = u'(a) = 0$ (conditions de Neumann) et u change de signe,
3. $u(-a) = u'(a) = 0$ (conditions mixtes) et u est positive,
4. $u'(-a) = u(a) = 0$ (conditions mixtes) et u est positive,

il existe une unique solution de l'équation (31)

$$u'' - uu' + u|u|^{p-1} - \lambda u = 0 \quad \text{dans } [-a, a].$$

Preuve : Avec la Figure 2.7, il suffit de considérer la trajectoire (α, β) avec les initialisations et les terminaisons respectives :

1. $\alpha(-a) = 0, \beta(-a) = \beta_1$ et $\alpha(a) = 0, \beta(a) = \beta_2$,
2. $\alpha(-a) = \alpha_1, \beta(-a) = 0$ et $\alpha(a) = \alpha_2, \beta(a) = 0$,

3. $\alpha(-a) = 0, \beta(-a) = \beta_1$ et $\alpha(a) = \alpha_1, \beta(a) = 0$,
4. $\alpha(-a) = \alpha_1, \beta(-a) = 0$ et $\alpha(a) = 0, \beta(a) = \beta_2$.

■

On peut remarquer que si l'équilibre $(\lambda^{\frac{1}{p-1}}, 0)$ est un tourbillon, on peut obtenir une solution positive de l'équation (31) sous conditions au bord de Neumann en raisonnant comme au théorème 2.2.3. Concernant les domaines non bornés, on a le résultat suivant :

Théorème 2.3.2 *Supposons que l'hypothèse (39) soit vérifiée :*

$$p \geq 3.$$

Pour tout $\lambda > 0$ et pour chacune des conditions suivantes

1. *u est définie sur \mathbb{R} , est périodique et change de signe,*
2. *u est définie sur \mathbb{R} , change de signe et $\lim_{x \rightarrow -\infty} u'(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} u'(x) = 0$ (conditions de Neumann),*
3. *u est définie et positive sur $(-\infty, 0]$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} u'(x) = u'(0) = 0$ (conditions de Neumann),*
4. *u est définie sur $[0, \infty)$, change de signe et $u'(0) = \lim_{x \rightarrow \infty} u'(x) = 0$ (conditions de Neumann),*
5. *u est définie et positive sur $(-\infty, 0]$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} u'(x) = 0 = u(0)$ (conditions mixtes),*
6. *u est définie et négative sur $[0, \infty)$ et $u(0) = \lim_{x \rightarrow \infty} u'(x) = 0$ (conditions mixtes),*

il existe une solution de l'équation (31)

$$u'' - uu' + u|u|^{p-1} - \lambda u = 0.$$

Preuve : Avec la Figure 2.7, il suffit de considérer les trajectoires avec les initialisations et les terminaisons respectives :

1. la trajectoire (α, β) en tant que solution maximale définie par périodicité sur \mathbb{R} ,
2. la trajectoire (w, z) avec $w(-\infty) = \lambda^{\frac{1}{p-1}}$, $z(-\infty) = 0$ et $w(\infty) = -\lambda^{\frac{1}{p-1}}$, $z(\infty) = 0$,
3. la trajectoire (w, z) avec $w(-\infty) = \lambda^{\frac{1}{p-1}}$, $z(-\infty) = 0$ et $w(0) = w_1$, $z(-\infty) = 0$,

4. la trajectoire (w, z) avec $w(0) = w_1$, $z(0) = 0$ et $w(\infty) = -\lambda^{\frac{1}{p-1}}$, $z(\infty) = 0$,
5. la trajectoire (w, z) avec $w(-\infty) = \lambda^{\frac{1}{p-1}}$, $z(-\infty) = 0$ et $w(0) = 0$, $z(0) = z_2$,
6. la trajectoire (w, z) avec $w(0) = 0$, $z(0) = z_2$ et $w(\infty) = -\lambda^{\frac{1}{p-1}}$, $z(\infty) = 0$.

■

Lorsqu'on n'impose aucune restriction sur le nombre $p \in (1, \infty)$, on perd une partie des informations concernant les trajectoires situées dans $\{v > 0\}$. On peut toutefois énoncer les résultats suivants :

Théorème 2.3.3 *Pour tout $\lambda > 0$, pour certains $a > 0$ et pour chacune des conditions suivantes*

1. $u'(-a) = u'(a) = 0$ (conditions de Neumann) et u change de signe,
2. $u(-a) = u(a) = 0$ (conditions mixtes) et u est négative,
3. $u'(-a) = u(a) = 0$ (conditions mixtes) et u est positive,

il existe une unique solution de l'équation (31)

$$u'' - uu' + u|u|^{p-1} - \lambda u = 0 \quad \text{dans } [-a, a].$$

Preuve : Avec la Figure 2.7, il suffit de considérer la trajectoire (α, β) avec les initialisations et les terminaisons respectives :

1. $\alpha(-a) = \alpha_1$, $\beta(-a) = 0$ et $\alpha(a) = \alpha_2$, $\beta(a) = 0$,
2. $\alpha(-a) = 0$, $\beta(-a) = \beta_2$ et $\alpha(a) = \alpha_2$, $\beta(a) = 0$,
3. $\alpha(-a) = \alpha_1$, $\beta(-a) = 0$ et $\alpha(a) = 0$, $\beta(a) = \beta_2$.

■

Pour les intervalles de longueur infinie, on a :

Théorème 2.3.4 *Pour tout $\lambda > 0$ et pour chacune des conditions suivantes*

1. u est définie sur \mathbb{R} , u change de signe et $\lim_{x \rightarrow -\infty} u'(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} u'(x) = 0$ (conditions de Neumann),
2. u est définie et positive sur $(-\infty, 0]$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} u'(x) = u'(0) = 0$ (conditions de Neumann),
3. u est définie sur $[0, \infty)$, u change de signe et $u'(0) = \lim_{x \rightarrow \infty} u'(x) = 0$ (conditions de Neumann),

4. u est définie et positive sur $(-\infty, 0]$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} u'(x) = 0 = u(0)$ (conditions mixtes),
5. u est définie et négative sur $[0, \infty)$ et $u(0) = \lim_{x \rightarrow \infty} u'(x) = 0$ (conditions mixtes),

il existe une solution de l'équation (31)

$$u'' - uu' + u|u|^{p-1} - \lambda u = 0.$$

Preuve : Avec la Figure 2.7, il suffit de considérer la trajectoire (w, z) avec les initialisations et les terminaisons respectives :

1. $w(-\infty) = \lambda^{\frac{1}{p-1}}$, $z(-\infty) = 0$ et $w(\infty) = -\lambda^{\frac{1}{p-1}}$, $z(\infty) = 0$,
2. $w(-\infty) = \lambda^{\frac{1}{p-1}}$, $z(-\infty) = 0$ et $w(0) = w_1$, $z(0) = 0$,
3. $w(0) = w_1$, $z(0) = 0$ et $w(\infty) = -\lambda^{\frac{1}{p-1}}$, $z(\infty) = 0$,
4. $w(-\infty) = \lambda^{\frac{1}{p-1}}$, $z(-\infty) = 0$ et $w(0) = 0$, $z(0) = z_2$,
5. $w(0) = 0$, $z(0) = z_2$ et $w(\infty) = -\lambda^{\frac{1}{p-1}}$, $z(\infty) = 0$.

■

2.3.3 Cas $\lambda \leq 0$

D'après ce que nous avons obtenu à la section 2.2.2 et par symétrie, on trace le plan des phases du Système (32), et on obtient la Figure 2.8 : l'équilibre $(0, 0)$ est alors un centre pour le Système (32).

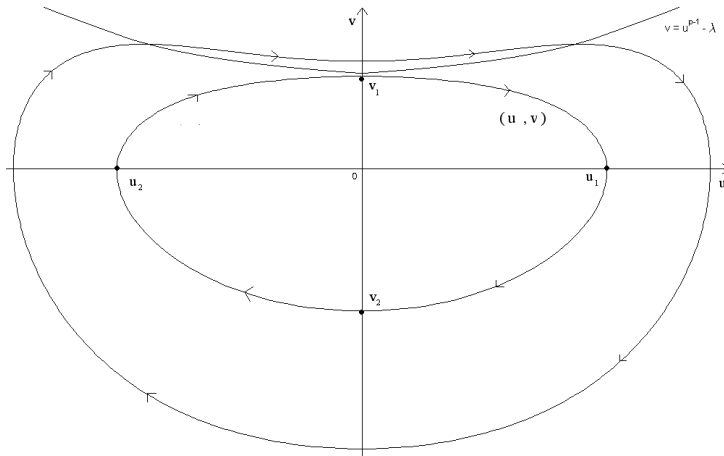


FIG. 2.8 – Plan des phases complet du Système (32) et $\lambda \leq 0$.

On en déduit les résultats suivants :

Théorème 2.3.5 *Pour tout $\lambda \leq 0$, pour certains $a > 0$ et pour chacune des conditions suivantes*

1. $u(-a) = u(a) = 0$ (conditions de Dirichlet homogènes) et u positive,
2. $u'(-a) = u'(a) = 0$ (conditions de Neumann) et u change de signe,
3. $u(-a) = u'(a) = 0$ (conditions mixtes) et u positive,
4. $u'(-a) = u(a) = 0$ (conditions mixtes) et u positive,
5. u se prolonge sur \mathbb{R} , est périodique de période $2a$, et change de signe,

il existe une unique solution de l'équation (31)

$$u'' - uu' + u|u|^{p-1} - \lambda u = 0 \quad \text{dans } [-a, a].$$

Preuve : A l'aide de la Figure 2.8, il suffit de considérer la trajectoire (u, v) avec les initialisations et les terminaisons respectives :

1. $u(-a) = 0, v(-a) = v_1$ et $u(a) = 0, v(a) = v_2$,
2. $u(-a) = u_1, v(-a) = 0$ et $u(a) = u_2, v(a) = 0$,
3. $u(-a) = 0, v(-a) = v_1$ et $u(a) = u_1, v(a) = 0$,
4. $u(-a) = u_1, v(-a) = 0$ et $u(a) = 0, v(a) = v_2$,
5. $u(-a) = 0, v(-a) = v_1$ et $u(a) = 0, v(a) = v_1$, avec prolongement par périodicité.

■

2.4 Cas $p = 1$

Dans cette partie, on étudie le cas limite lorsque l'exposant p vaut 1. L'équation (31) s'écrit alors

$$u'' - uu' + (1 - \lambda)u = 0 \quad \text{dans } [-a, a]. \quad (43)$$

Comme dans les premières sections, on considère le système du premier ordre suivant

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ u(v + \lambda - 1) \end{pmatrix}. \quad (44)$$

Ce système admet un unique équilibre $(0, 0)$ lorsque $\lambda \neq 1$, tandis que pour $\lambda = 1$, l'axe $\{v = 0\}$ est un continu d'équilibres. Nous allons donc étudier séparément les cas $\lambda = 1$ et $\lambda \neq 1$.

2.4.1 Cas $\lambda = 1$

On considère le système suivant

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ uv \end{pmatrix}. \quad (45)$$

On commence par tracer les vélocités de ce système, ce qui nous donne la Figure 2.9.

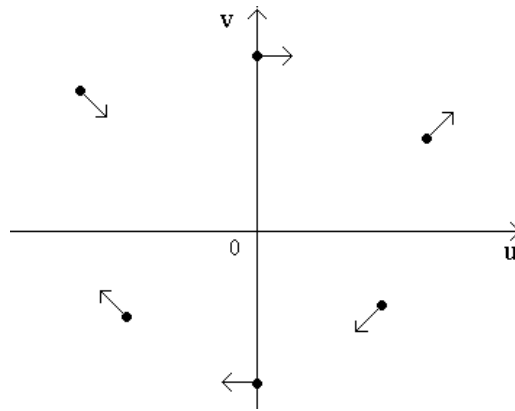


FIG. 2.9 – Vélocités du Système (45).

En exprimant l'ordonnée v en fonction de l'abscisse u , on calcule les variations de v en fonction de u à l'aide des équations du Système (34)

$$\frac{dv}{du} = u,$$

ce qui nous permet de déduire que

$$v = \frac{1}{2}u^2 + c,$$

où c est une constante que l'on détermine à l'aide des conditions initiales de la trajectoire. On peut ainsi tracer le plan des phases du Système (45), et on obtient la Figure 2.10.

À cause du continu d'équilibres $\{v = 0\}$, les trajectoires ne coupent pas l'axe des abscisses, et ne l'atteignent pas en temps fini. Les trajectoires situées dans le cadran $\{v < 0\}$ sont bornées et existent sur \mathbb{R} avec $v(-\infty) = v(\infty) = 0$, tandis que celles situées dans le cadran $\{v > 0\}$ ne sont pas bornées avec trois

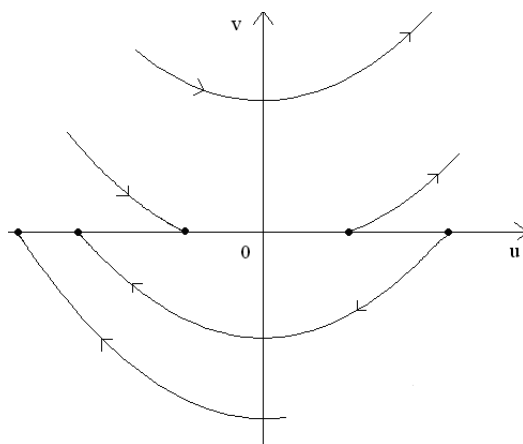


FIG. 2.10 – Plan des phases du Système (45).

cas possibles : soit la trajectoire explose aux deux extrémités de son intervalle d'existence, soit la trajectoire (u, v) existe sur $(-a, \infty)$, $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, avec explosion en $-a$ et $v(\infty) = 0$, soit la trajectoire (u, v) existe sur $(-\infty, a)$, $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, avec $v(-\infty) = 0$ et explosion en a . D'où les résultats suivants :

Théorème 2.4.1 *Pour chacune des conditions suivantes,*

1. u est définie sur \mathbb{R} avec $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u'(x) = 0$ (conditions de Neumann), et u change de signe,
2. u est définie dans $(-\infty, 0]$ avec $\lim_{x \rightarrow -\infty} u'(x) = 0$ et $u(0) = 0$ (conditions mixtes), et u est positive,
3. u est définie dans $[0, \infty)$ avec $u(0) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow \infty} u'(x) = 0$ (conditions mixtes), et u est négative,

il existe une solution u de l'équation (43) avec $\lambda = 1$

$$u'' - uu' + (1 - \lambda)u = 0.$$

2.4.2 Cas $\lambda < 1$

On considère le Système (44). L'équilibre $(0, 0)$ n'est pas hyperbolique, et il nous faut raisonner en calculant les vitesses, ce qui nous donne la Figure 2.11.

On remarquera que la droite $v = 1 - \lambda$ est le support de la trajectoire

$$\begin{cases} u(x) &= (1 - \lambda)x \\ v(x) &= 1 - \lambda \end{cases} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

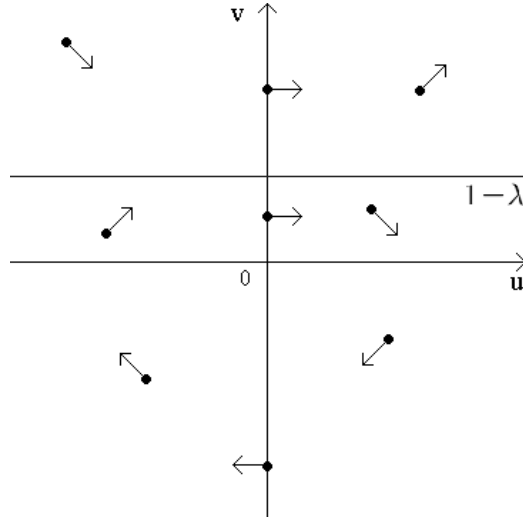


FIG. 2.11 – Vélocities du Système (44) avec $\lambda < 1$.

Par conséquent, la droite $v = 1 - \lambda$ partage le plan des phases en deux demi-plans dans lesquels les trajectoires ont des allures différentes. Dans le cadran $\{v > 1 - \lambda\}$, les vélocités nous permettent directement de donner l'allure des trajectoires : elles sont non-bornées, traversent l'axe des ordonnées et sont symétriques (voir section 2.3.1). Dans le cadran $\{0 < v < 1 - \lambda\}$, la symétrie, les vélocités, ainsi que l'impossibilité de traverser la droite $v = 1 - \lambda$, nous donnent directement l'allure des trajectoires. Tandis que dans le dernier cadran $\{v < 0\}$, nous avons besoin de calculer la convexité des trajectoires. Comme précédemment, on obtient des équations du Système (44) :

$$\frac{dv}{du} = u + \frac{u}{v}(\lambda - 1),$$

et

$$\frac{d^2v}{du^2} = 1 + \frac{\lambda - 1}{v^2} \left(v - u \frac{dv}{du} \right).$$

Dans le quart de plan $\{u < 0, v < 0\}$, on a $\frac{dv}{du} < 0$ et $\frac{d^2v}{du^2} > 1$. On peut tracer les trajectoires dans $\{u < 0, v < 0\}$, puis par symétrie, on complète le plan des phases (Figure 2.12).

Comme précédemment, l'étude de ce plan des phases nous permet de déduire le théorème suivant

Théorème 2.4.2 *Pour tout $\lambda < 1$, pour certains $a > 0$ et pour chacune des conditions suivantes*

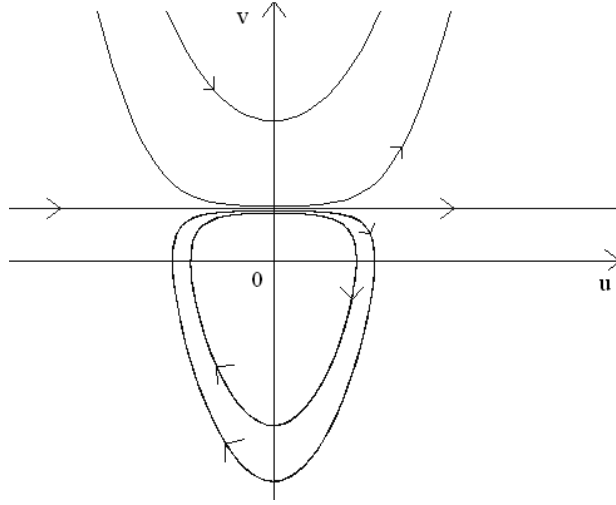


FIG. 2.12 – Plan des phases du Système (44) avec $\lambda < 1$.

1. u est périodique dans \mathbb{R} et change de signe.
2. u est définie dans $[-a, a]$ avec $u(-a) = u(a) = 0$ (conditions de Dirichlet) et u est positive,
3. u est définie dans $[-a, a]$ avec $u'(-a) = u'(a) = 0$ (conditions de Neumann) et u change de signe,
4. u est définie dans $[-a, a]$ avec $u'(-a) = 0$ et $u(a) = 0$ (conditions mixtes) et u est positive,
5. u est définie dans $[-a, a]$ avec $u(-a) = 0$ et $u'(a) = 0$ (conditions mixtes) et u est positive,
6. u est définie dans $(-a, a)$, pour $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, avec explosion en $-a$ et en a , et u change de signe,
7. u est définie dans $(-a, 0]$, pour $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, avec explosion en $-a$ et $u(0) = 0$, et u est négative,
8. u est définie dans $[0, a)$, pour $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, avec $u(0) = 0$ et explosion en a , et u est positive,
9. u est définie dans $[0, \infty)$ avec $u(0) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow \infty} u(x) = \infty$, et u est positive,
10. u est définie dans $(-\infty, 0]$ avec $u(0) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) = -\infty$, et u est négative,
11. u est définie dans \mathbb{R} avec $\lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow \infty} u(x) = \infty$, et u change de signe,

il existe une solution u de l'équation (43)

$$u'' - uu' + (1 - \lambda)u = 0.$$

Preuve : Les cinq premiers cas découlent des trajectoires situées dans le cadran $\{v < 1 - \lambda\}$, tandis que les trois cas suivants proviennent des trajectoires situées dans le cadran $\{v > 1 - \lambda\}$. Les trois derniers sont dus à la solution explicite $u(x) = (1 - \lambda)x$. ■

2.4.3 Cas $\lambda > 1$

De manière analogue au cas précédent, on étudie les vitesses du Système (44). On obtient la Figure 2.13.

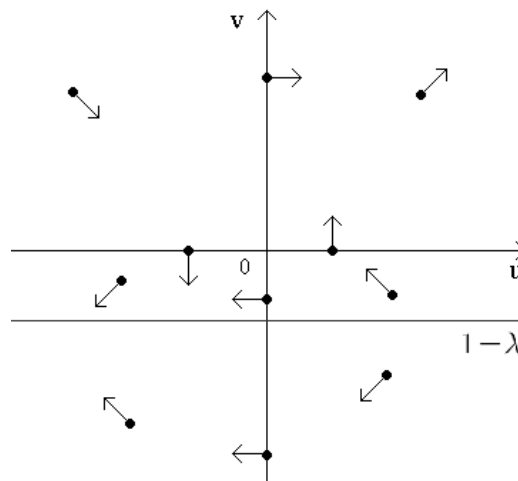


FIG. 2.13 – Vitesses du Système (44) avec $\lambda > 1$.

La droite $v = 1 - \lambda$ est le support de la trajectoire

$$\begin{cases} u(x) = (1 - \lambda)x \\ v(x) = 1 - \lambda \end{cases} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R},$$

et partage le plan en deux parties. En considérant le passé et le futur des trajectoires initiées à certains points remarquables (symbolisés par un \bullet sur la Figure 2.14), on trace le plan des phases du Système (44) à l'aide des vitesses (Figure 2.14).

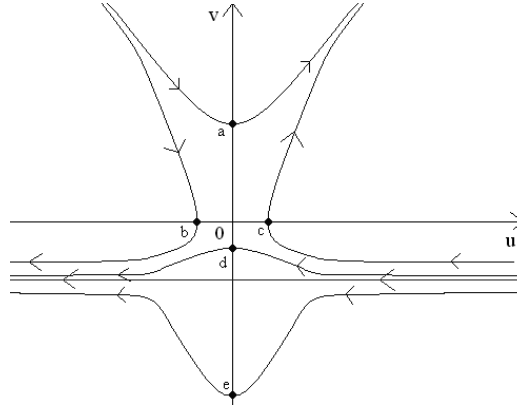


FIG. 2.14 – Plan des phases du Système (44) avec $\lambda > 1$.

Dans ce cas, les trajectoires du Système (44) sont non bornées et nous n'obtenons pas de solution bornée de l'équation (43) avec $\lambda > 1$ sous conditions au bord de Neumann, Dirichlet ou mixtes. Seul le résultat suivant est vérifié :

Théorème 2.4.3 *Pour tout $\lambda > 1$, pour certains $a > 0$ et pour chacune des conditions suivantes*

1. *u est définie dans $(-a, a)$, pour $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, avec explosion en $-a$ et en a , u change de signe,*
2. *u est définie dans $(-a, 0]$, pour $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, avec explosion en $-a$ et $u(0) = 0$, u peut être choisie positive ou négative,*
3. *u est définie dans $[0, a)$, pour $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, avec $u(0) = 0$ et explosion en a , u peut être choisie positive ou négative,*
4. *u est définie dans $(-a, 0]$, pour $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, avec explosion en $-a$ et $u'(0) = 0$, u peut être choisie positive ou négative,*
5. *u est définie dans $[0, a)$, pour $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, avec $u'(0) = 0$ et explosion en a , u peut être choisie positive ou négative,*

il existe une solution u de l'équation (43)

$$u'' - uu' + (1 - \lambda)u = 0.$$

Preuve : Avec la Figure 2.14, pour chacun des cas, on considère la trajectoire du plan des phases du Système (44)

1. passant par le point $(0, a)$ définie sur son intervalle d'existence maximum.
2. terminée en $(0, a)$ pour la négative, ou en $(0, d)$ pour la positive.

3. initiée en $(0, d)$ pour la négative, ou en $(0, a)$ pour la positive.
4. terminée en $(b, 0)$ pour la négative, ou en $(c, 0)$ pour la positive.
5. initiée en $(b, 0)$ pour la négative, ou en $(c, 0)$ pour la positive.

■

2.5 Solutions non bornées

Dans les sections précédentes, nous avons montré que, pour $p \geq 3$, les solutions du système (32) sont toutes bornées, tandis que lorsque $p = 1$, il existe des solutions non bornées du système (32). Dans cette section, nous allons montrer que pour $1 < p < 3$, il existe des solutions non bornées du système (32), quelque soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

2.5.1 Conditions au bord de Dirichlet

Pour cela, on considère une trajectoire (u, v) , définie dans $[0, a)$ avec $a > 0$, et initiée en $(0, v_0)$, avec

$$v_0 > 2 \max\{-\lambda, 0\} + 2 \cdot (8)^{\frac{p-1}{3-p}}. \quad (46)$$

Nous allons montrer que sous cette hypothèse, la trajectoire (u, v) reste au dessus de la courbe $\left\{v = 2u^{p-1} + 2 \max\{-\lambda, 0\}\right\}$, ce qui, ajouté au signe de la vitesse, implique que la trajectoire (u, v) est non bornée. Raisonnons par l'absurde, et supposons qu'il existe $0 < x_* < a$ tel que $u(x_*) = u_1 > 0$ et $v(x_*) = v_1 > 0$ vérifient

$$v_1 = 2u_1^{p-1} + 2 \max\{-\lambda, 0\}, \quad (47)$$

et que pour tout $0 \leq x < x_*$ on ait

$$v(x) > 2u(x)^{p-1} + 2 \max\{-\lambda, 0\}.$$

Ainsi, dans $[0, x_*)$, on a

$$\frac{\lambda - u^{p-1}}{v} > -\frac{1}{2}. \quad (48)$$

D'autre part, le calcul de la vitesse (37) nous donne

$$\frac{dv}{du} = u + u \frac{\lambda - u^{p-1}}{v},$$

et grâce à la condition (48), on obtient

$$\frac{dv}{du} \geq \frac{1}{2}u \geq 0. \quad (49)$$

D'où $v(u) \geq \frac{u^2}{4} + v_0$. Par conséquent, en u_1 , on a :

$$v_1 = v(u_1) \geq \frac{u_1^2}{4} + v_0,$$

et par définition (47) de u_1 , on a

$$2u_1^{p-1} + 2 \max\{-\lambda, 0\} \geq \frac{u_1^2}{4} + v_0.$$

Par hypothèse (46) sur v_0 , on obtient

$$-2 \cdot (8)^{\frac{p-1}{3-p}} > \frac{u_1^2}{4} - 2u_1^{p-1}. \quad (50)$$

Cependant, en étudiant les cas $u_1 < 8^{\frac{1}{3-p}}$ et $u_1 > 8^{\frac{1}{3-p}}$, on remarque que

$$\frac{u_1^2}{4} - 2u_1^{p-1} = \frac{u_1^{p-1}}{4} (u_1^{3-p} - 8) \geq -2 \cdot (8)^{\frac{p-1}{3-p}}. \quad (51)$$

Les équations (50) et (51) sont en contradiction. Il est donc impossible que la trajectoire (u, v) coupe la courbe $\left\{ v = 2u^{p-1} + 2 \max\{-\lambda, 0\} \right\}$. De plus, on sait que $\frac{dv}{du} \geq 0$ dans le secteur $\left\{ v \geq 2u^{p-1} + 2 \max\{-\lambda, 0\} \right\}$, d'après (49). On en déduit que la trajectoire (u, v) n'est pas bornée. Concernant l'équation de Burgers paramétrée, on obtient le théorème suivant :

Théorème 2.5.1 *Soit $p \in (2, 3)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour certains $a > 0$, il existe des solutions positives non bornées de l'équation*

$$u'' - uu' + u|u|^{p-1} - \lambda u = 0 \text{ dans } [-a, a)$$

vérifiant

$$u(-a) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow a} u(x) = \infty.$$

Preuve : L'existence de la solution est claire d'après ce qui précède l'énoncé du théorème. Seule la longueur de l'intervalle d'existence reste à démontrer. Supposons par l'absurde qu'il existe une solution positive de

$$u'' - uu' + u|u|^{p-1} - \lambda u = 0 \text{ dans } [0, \infty).$$

Choisissons $b > 0$ tel que $u > (2|\lambda|)^{\frac{1}{p-1}}$ sur $[b, \infty)$. En posant $w(x, t) = u(x + t)$ pour $(x, t) \in [b, b + 1] \times [0, \infty)$, on a : $\partial_t w(x, t) = u'(x + t) > 0$ puisque, dans le plan des phases, la trajectoire (u, v) se situe dans le cadran $\{v \geq 0\}$. De plus, pour tout $(x, t) \in [b, b + 1] \times [0, \infty)$, on a

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_x^2 u(x + t) - u(x + t)\partial_x u(x + t) + u(x + t)^p - \lambda u(x + t) \\ &= \partial_x^2 w(x, t) - w(x, t)\partial_x w(x, t) + w^p(x, t) - \lambda w(x, t), \end{aligned}$$

puis par définition de b et u , on a $w^p(x, t) - \lambda w(x, t) \geq \frac{1}{2}w^p$ dans $[b, b + 1] \times [0, \infty)$. De plus, sur le bord, on a

$$\begin{cases} \partial_t w(b, t) + \partial_\nu w(b, t) = u'(b + t) - u'(b + t) & = 0, \\ \partial_t w(b + 1, t) + \partial_\nu w(b + 1, t) = u'(b + t + 1) + u'(b + t + 1) & > 0. \end{cases}$$

D'où

$$\begin{cases} \partial_t w \geq \partial_x^2 w - w\partial_x w + \frac{1}{2}w^p & \text{dans } [b, b + 1] \text{ pour } t > 0, \\ \partial_t w + \partial_\nu w \geq 0 & \text{sur } \{b, b + 1\} \text{ pour } t > 0, \\ w(\cdot, 0) = u & \text{dans } [b, b + 1]. \end{cases}$$

Ce qui signifie que w est une sur-solution globale du Problème

$$\begin{cases} \partial_t y = \partial_x^2 y - y\partial_x y + \frac{1}{2}y^p & \text{dans } [b, b + 1] \text{ pour } t > 0, \\ \partial_t y + \partial_\nu y = 0 & \text{sur } \{b, b + 1\} \text{ pour } t > 0, \\ y(\cdot, 0) = u & \text{dans } [b, b + 1]. \end{cases}$$

Or, d'après [11], la solution de ce problème explose en temps fini car $p > 2$ et $u > 0$ dans le compact $[b, b + 1]$. Par conséquent, la solution u ne peut exister que sur un intervalle de longueur finie. ■

Lorsque $1 < p \leq 2$, on n'a plus l'argument nécessaire pour s'assurer que la longueur de l'intervalle d'existence de la solution est finie. On peut tout de même énoncer le résultat suivant :

Théorème 2.5.2 *Soit $p \in (1, 2]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour certains $a \in (0, \infty]$, il existe des solutions positives non bornées de l'équation*

$$u'' - uu' + u|u|^{p-1} - \lambda u = 0 \text{ dans } [0, a)$$

vérifiant

$$u(0) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow a} u(x) = \infty.$$

2.5.2 Conditions au bord de Neumann

En ajoutant des conditions sur la taille du paramètre λ , on obtient aussi des solutions non-bornées avec une condition de Neumann sur le bord. Comme pour le cas des conditions de Dirichlet, on considère une trajectoire (u, v) définie dans $[0, a)$, $a > 0$ et initiée en $(u_0, 0)$, avec

$$\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^{\frac{1}{p-1}} > u_0, \quad (52)$$

où $\alpha > 1$. Nous allons montrer qu'il est possible de poser des hypothèses sur λ de manière à s'assurer que la trajectoire (u, v) reste au dessus de la courbe $\{v = \alpha u^{p-1} - \lambda\}$. Dans un premier temps, on sait que la trajectoire est initiée au dessus de la courbe $\{v = \alpha u^{p-1} - \lambda\}$ d'après l'hypothèse (52) sur u_0 . Supposons qu'il existe $x_* \in (0, a)$ tel que $u(x_*) = u_1$ et $v_1 = v(x_*)$ vérifient

$$v_1 = \alpha u_1^{p-1} - \lambda, \quad (53)$$

et que pour tout $0 < x < x_*$

$$v(x_*) > \alpha u(x_*)^{p-1} - \lambda.$$

Ainsi, dans $[0, x_*)$, on a

$$\frac{\lambda - u^{p-1}}{v} \geq \frac{-1}{\alpha}. \quad (54)$$

Le calcul de la vélocité (37) nous donne

$$\frac{dv}{du} = u + u \frac{\lambda - u^{p-1}}{v},$$

et grâce à la condition (54), on obtient

$$\frac{dv}{du} \geq \frac{\alpha - 1}{\alpha} u \geq 0. \quad (55)$$

En intégrant cette inégalité entre u_0 et u_1 , on obtient

$$v(u_1) \geq \frac{\alpha - 1}{2\alpha} (u_1^2 - u_0^2),$$

et par définition de u_1 et v_1 , on a

$$\alpha u_1^{p-1} - \lambda \geq \frac{\alpha - 1}{2\alpha} (u_1^2 - u_0^2),$$

ou encore

$$u_1^{p-1} \left(1 - \frac{\alpha - 1}{2\alpha^2} u_1^{3-p}\right) \geq \frac{1}{\alpha} \left(\lambda - u_0 \frac{\alpha - 1}{2\alpha}\right). \quad (56)$$

Le membre de gauche est strictement négatif si

$$u_1 > \left(\frac{2\alpha^2}{\alpha - 1} \right)^{\frac{1}{3-p}}.$$

Puisqu'on contrôle u_1 à l'aide de l'inégalité $u_0 < u_1$, il suffit de poser

$$u_0 = \left(\frac{2\alpha^2}{\alpha - 1} \right)^{\frac{1}{3-p}}.$$

Ensuite, le membre de droite de l'équation (56) est positif si

$$\lambda \geq \frac{\alpha - 1}{2\alpha} \left(\frac{2\alpha^2}{\alpha - 1} \right)^{\frac{1}{3-p}}.$$

Par conséquent, si $\lambda > 0$ est tel qu'il existe $\alpha > 1$ vérifiant l'équation précédente, alors la trajectoire (u, v) ne peut pas atteindre la courbe $\{v = \alpha u^{p-1} - \lambda\}$. Et donc, cette trajectoire (u, v) reste au dessus de la courbe $\{v = \alpha u^{p-1} - \lambda\}$. Comme dans cette partie du plan, l'équation (55) nous donne

$$\frac{dv}{du} \geq 0,$$

la trajectoire (u, v) est non bornée. Concernant l'équation de Burgers paramétrée, on obtient le résultat suivant :

Théorème 2.5.3 *Soit $p \in (1, 3)$ et $\lambda > 0$. Supposons qu'il existe $\alpha > 1$ tel que*

$$\lambda \geq \max \left\{ \alpha \left(\frac{2\alpha^2}{\alpha - 1} \right)^{\frac{p-1}{3-p}}, \frac{\alpha - 1}{2\alpha} \left(\frac{2\alpha^2}{\alpha - 1} \right)^{\frac{1}{3-p}} \right\}.$$

Alors, pour certains $a \in (0, \infty]$, il existe des solutions positives non bornées de l'équation

$$u'' - uu' + u|u|^{p-1} - \lambda u = 0 \text{ dans } [0, a)$$

vérifiant

$$u'(0) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow a} u(x) = \infty.$$

Remarque 2.5.4 *De la même manière que pour le cas des solutions de Dirichlet, en notant que la trajectoire (u, v) se situe dans le cadran $\{v \geq 0\}$ et en comparant la fonction $u(x + t + t_0)$, pour $t_0 > 0$ suffisamment grand, avec les solutions étudiées dans [11], on prouve que la solution du Théorème 2.5.3 existe sur $[0, a)$ avec $0 < a < \infty$ dès que $p \in (2, 3)$.*

A cause des trajectoires non bornées mises en évidence ci-dessus, et en raison du non chevauchement des trajectoires, on remarque que toute trajectoire initiée en $(0, v_0)$ avec $v_0 > 0$ est également non bornée lorsque les hypothèses du Théorème 2.5.3 sont vérifiées. On en déduit le résultat suivant :

Théorème 2.5.5 *Soit $p \in (1, 3)$ et $\lambda > 0$. S'il existe $\alpha > 1$ tel que*

$$\lambda \geq \max \left\{ \alpha \left(\frac{2\alpha^2}{\alpha - 1} \right)^{\frac{p-1}{3-p}}, \frac{\alpha - 1}{2\alpha} \left(\frac{2\alpha^2}{\alpha - 1} \right)^{\frac{1}{3-p}} \right\},$$

alors, pour tout $a > 0$, il n'existe pas de solution positive de l'équation

$$u'' - uu' + u|u|^{p-1} - \lambda u = 0 \text{ dans } [-a, a]$$

sous les conditions au bord de Dirichlet

$$u(-a) = 0 \text{ et } u(a) = 0,$$

ni lorsque les conditions de Dirichlet sont remplacées par les conditions au bord mixtes

$$u(-a) = 0 \text{ et } u'(a) = 0,$$

2.6 Bifurcation

Dans un premier temps, on fixe l'exposant p dans les équations du Système (32), et on fait varier le paramètre λ .

2.6.1 $p > 3$

D'après les résultats de la Section 2.1, lorsque

$$\lambda > \left(\frac{1}{4(p-1)} \right)^{\frac{p-1}{p-3}},$$

le Système (32) possède trois équilibres : l'équilibre $(0, 0)$ qui est un point selle, $(\lambda^{\frac{1}{p-1}}, 0)$ qui est un tourbillon instable et répulsif, et $(-\lambda^{\frac{1}{p-1}}, 0)$ qui est un tourbillon stable et attractif. Quand λ décroît et atteint la valeur

$$\lambda = \left(\frac{1}{4(p-1)} \right)^{\frac{p-1}{p-3}},$$

les équilibres $(\lambda^{\frac{1}{p-1}}, 0)$ et $(-\lambda^{\frac{1}{p-1}}, 0)$ sont des nœuds dégénérés (à une tangente), respectivement, instable et répulsif, et stable et attractif. L'équilibre $(0, 0)$ reste un point selle. Ensuite, pour

$$0 < \lambda < \left(\frac{1}{4(p-1)} \right)^{\frac{p-1}{p-3}},$$

les équilibres $(\lambda^{\frac{1}{p-1}}, 0)$ et $(-\lambda^{\frac{1}{p-1}}, 0)$ sont des nœuds non-dégénérés (à deux tangentes), respectivement, instable et répulsif, et stable et attractif. $(0, 0)$ est encore un point selle. Finalement, lorsque λ prend des valeurs négatives

$$\lambda \leq 0,$$

seul l'équilibre $(0, 0)$ persiste (pour $\lambda = 0$, les trois équilibres coïncident) et est un centre pour le Système (32), d'après le paragraphe 2.3.3.

2.6.2 $p = 3$

Dans ce cas, l'équation (36) est vérifiée pour tout $\lambda > 0$. Le Système (32) possède trois équilibres tant que $\lambda > 0$. On a le point selle $(0, 0)$, le tourbillon instable et répulsif $(\lambda^{\frac{1}{p-1}}, 0)$, et le tourbillon stable et attractif $(-\lambda^{\frac{1}{p-1}}, 0)$. Lorsque λ atteint la valeur critique 0, les trois équilibres coïncident en un centre. Et lorsque $\lambda < 0$, seul le centre $(0, 0)$ persiste.

2.6.3 $1 < p < 3$

Analoguement au cas 2.6.1, lorsque

$$\lambda > \left(\frac{1}{4(p-1)} \right)^{\frac{p-1}{p-3}},$$

le Système (32) possède trois équilibres : l'équilibre $(0, 0)$ qui est un point selle, $(\lambda^{\frac{1}{p-1}}, 0)$ qui est un nœud non-dégénéré (à deux tangentes) instable et répulsif, et $(-\lambda^{\frac{1}{p-1}}, 0)$ qui est un nœud non-dégénéré stable et attractif. Quand λ décroît et atteint la valeur

$$\lambda = \left(\frac{1}{4(p-1)} \right)^{\frac{p-1}{p-3}},$$

les équilibres $(\lambda^{\frac{1}{p-1}}, 0)$ et $(-\lambda^{\frac{1}{p-1}}, 0)$ sont des nœuds dégénérés (à une tangente), respectivement, instable et répulsif, et stable et attractif. Tandis que $(0, 0)$ reste un point selle. Ensuite, pour

$$0 < \lambda < \left(\frac{1}{4(p-1)} \right)^{\frac{p-1}{p-3}},$$

l'équilibre $(\lambda^{\frac{1}{p-1}}, 0)$ est un tourbillon instable et répulsif, tandis que $(-\lambda^{\frac{1}{p-1}}, 0)$ est un tourbillon stable et attractif. $(0, 0)$ est encore un point selle. Finalement, lorsque λ prend des valeurs négatives

$$\lambda \leq 0,$$

seul l'équilibre $(0, 0)$ persiste (pour $\lambda = 0$, les trois équilibres coïncident) et est un centre pour le Système (32), d'après le paragraphe 2.3.3.

2.6.4 $p = 1$

D'après la Section 2.4, lorsque $\lambda > 1$, le Système (32) admet un unique équilibre $(0, 0)$ qui est un point-selle. Ensuite, lorsque λ atteint la valeur limite 1, le Système (32) admet un continu d'équilibres : l'axe des abscisses. Et pour $\lambda < 1$, le Système (32) admet de nouveau l'unique équilibre $(0, 0)$, qui est un centre.

On peut résumer ce phénomène de bifurcation à l'aide du schéma Fig. 2.15.

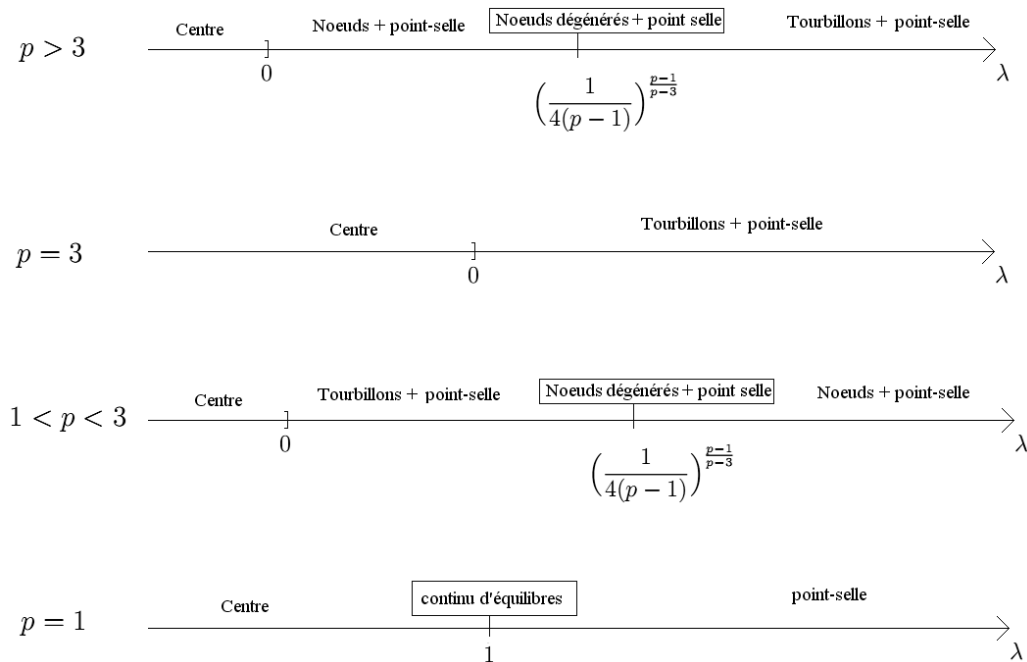


FIG. 2.15 – Bifurcation en fonction de λ .

Maintenant, on fixe le paramètre λ dans les équations du Système (32), et on fait varier l'exposant p .

2.6.5 $\lambda > 1$

À l'aide de la Section 2.1, on extrait une valeur critique $1 < p_0 < 3$ vérifiant

$$1 = 4(p_0 - 1)\lambda^{\frac{p_0-3}{p_0-1}}.$$

On obtient que, pour $p > p_0$, le Système (32) possède trois équilibres : le point-selle $(0, 0)$, le tourbillon instable et répulsif $(\lambda^{\frac{1}{p-1}}, 0)$ et le tourbillon stable et attractif $(-\lambda^{\frac{1}{p-1}}, 0)$. Pour $p = p_0$, les tourbillons deviennent des nœuds dégénérés (à une tangente), et $(0, 0)$ reste un point selle. Ensuite, pour $1 < p < p_0$, on a toujours le point-selle $(0, 0)$, mais cette fois, les équilibres $(\lambda^{\frac{1}{p-1}}, 0)$ et $(-\lambda^{\frac{1}{p-1}}, 0)$ sont des nœuds non-dégénérés (à deux tangentes) respectivement instable et répulsif, et stable et attractif. Finalement lorsque p atteint la valeur limite 1, $(0, 0)$ est un point-selle et est l'unique équilibre du Système (32).

2.6.6 $\lambda = 1$

Dans ce cas, l'équation (36) se simplifie en

$$1 - 4(p - 1) < 0.$$

Pour $p > 1 + \frac{1}{4}$, le Système (32) possède trois équilibres : le point-selle $(0, 0)$, le tourbillon instable et répulsif $(\lambda^{\frac{1}{p-1}}, 0)$ et le tourbillon stable et attractif $(-\lambda^{\frac{1}{p-1}}, 0)$. Quand p atteint la valeur critique $1 + \frac{1}{4}$, les tourbillons sont remplacés par des nœuds dégénérés et $(0, 0)$ reste un point selle. Ensuite, pour $1 < p < 1 + \frac{1}{4}$, on obtient deux nœuds non-dégénérés et $(0, 0)$ est encore un point selle. Et lorsque p atteint la valeur limite 1, le Système (32) admet un continu d'équilibres.

2.6.7 $0 < \lambda < 1$

Dans ce cas, l'équation (36) est plus complexe à vérifier. On considère la formulation $f(p) > 0$, où f est la fonction définie sur $(1, \infty)$ par

$$f(p) = \ln(4(p - 1)) + \frac{p - 3}{p - 1} \ln(\lambda).$$

Comme $0 < \lambda < 1$, la fonction f admet un minimum en $1 - 2 \ln(\lambda)$. Il faut donc distinguer trois cas en fonction du signe de $f(1 - 2 \ln(\lambda))$.

$$* f(1 - 2 \ln \lambda) > 0$$

On a alors $f(p) > 0$ pour tout $p \in (1, \infty)$, et d'après l'équation (36), le Système (32) possède trois équilibres : le point-selle $(0, 0)$, le tourbillon instable et répulsif $(\lambda^{\frac{1}{p-1}}, 0)$ et le tourbillon stable et attractif $(-\lambda^{\frac{1}{p-1}}, 0)$, pour tout $p \in (1, \infty)$. Lorsque p atteint la valeur limite 1, seul l'équilibre $(0, 0)$ persiste, et c'est alors un centre.

$$* f(1 - 2 \ln \lambda) = 0$$

Cette fois $f(p) > 0$ pour $p \in (1, 1 - 2 \ln(\lambda)) \cup (1 - 2 \ln(\lambda), \infty)$. L'équation (36) entraîne que pour $p > 1 - 2 \ln(\lambda)$, le Système (32) possède trois équilibres : le point-selle $(0, 0)$, le tourbillon instable et répulsif $(\lambda^{\frac{1}{p-1}}, 0)$ et le tourbillon stable et attractif $(-\lambda^{\frac{1}{p-1}}, 0)$. Lorsque p atteint la valeur critique $1 - 2 \ln(\lambda)$, les tourbillons deviennent des nœuds dégénérés (à une tangente), et $(0, 0)$ reste un point selle. Puis lorsque $1 < p < 1 - 2 \ln(\lambda)$, on a de nouveau les deux tourbillons et le point-selle. Finalement, lorsque p atteint la valeur limite 1, seul l'équilibre $(0, 0)$ persiste, et c'est alors un centre.

$$* f(1 - 2 \ln \lambda) < 0$$

Il existe deux valeurs critiques $p_1(\lambda) < 1 - 2 \ln(\lambda) < p_2(\lambda)$ où la fonction f change de signe. Pour $p > p_2(\lambda)$, on a $f(p) > 0$, ce qui donne, avec l'équation (36), trois équilibres pour le Système (32) : le point-selle $(0, 0)$, le tourbillon instable et répulsif $(\lambda^{\frac{1}{p-1}}, 0)$ et le tourbillon stable et attractif $(-\lambda^{\frac{1}{p-1}}, 0)$. Lorsque p décroît et atteint la valeur critique $p_2(\lambda)$, les tourbillons deviennent des nœuds dégénérés. Ensuite, lorsque $p_1(\lambda) < p < p_2(\lambda)$, les nœuds sont, cette fois, non-dégénérés, et $(0, 0)$ est toujours un point-selle. Quand p atteint la seconde valeur critique $p_1(\lambda)$, les nœuds $(\pm \lambda^{\frac{1}{p-1}}, 0)$ sont de nouveau dégénérés. Puis pour $1 < p < p_1(\lambda)$, les équilibres $(\pm \lambda^{\frac{1}{p-1}}, 0)$ sont des tourbillons et l'équilibre $(0, 0)$ continue d'être un point-selle. Finalement, lorsque p atteint la limite 1, seul l'équilibre $(0, 0)$ persiste, et c'est alors un centre.

2.6.8 $\lambda \leq 0$

Dans ce cas, le Système (32) ne possède qu'un seul équilibre : le point $(0, 0)$. Quelque soit la valeur de $p \in [1, \infty)$, $(0, 0)$ est un centre.

On peut résumer ce phénomène de bifurcation à l'aide du schéma Fig. 2.16.

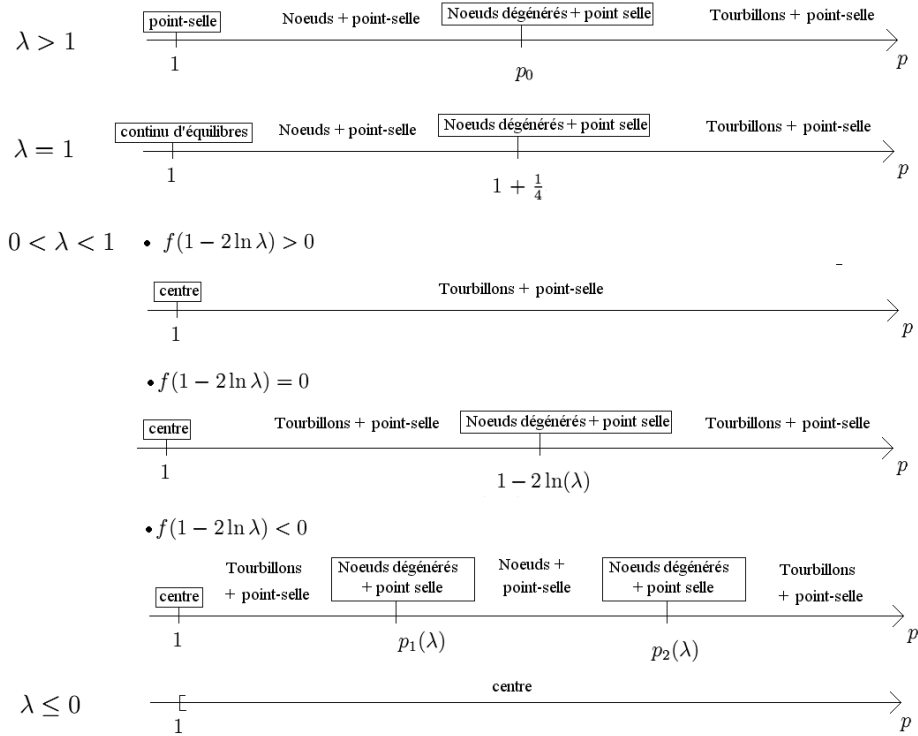


FIG. 2.16 – Bifurcation en fonction de p .

2.6.9 Remarque

Bien que nous ne l'ayons pas précisé à chaque fois, le caractère stable et attractif (resp. instable et répulsif) de l'équilibre $(-\lambda^{\frac{1}{p-1}}, 0)$ (resp. $(\lambda^{\frac{1}{p-1}}, 0)$) ne change jamais. Seule la configuration (tourbillon, nœud dégénéré, nœud non-dégénéré) de ces équilibres est modifiée.

2.7 Équation non stationnaire

D'après les calculs sur les vitesses (37) et la convexité (38) des trajectoires du Système (32), nous exhibons des sur-solutions positives de l'équation (33). Puis grâce au principe de sur-solutions [8] de von Below et De Coster, nous en déduisons l'existence de solutions positives de l'équation (33) sous des conditions au bord de Dirichlet, de Neumann et dynamiques. Lorsque ce ne sera pas possible, nous donnerons un résultat sur l'explosion en temps fini des solutions positives en effectuant des comparaisons avec les résultats [11] de von Below et Pincet-Mailly.

2.7.1 Conditions au bord de Dirichlet

On considère le problème parabolique non linéaire à valeurs initiales sous conditions au bord de Dirichlet suivant :

$$\begin{cases} \partial_t u = \partial_x^2 u - u \partial_x u + u^p - \lambda u & \text{dans } [-a, a] \text{ pour } t > 0, \\ u = 0 & \text{sur } \{-a, a\} \text{ pour } t > 0, \\ u(\cdot, 0) = \varphi & \text{dans } [-a, a], \end{cases} \quad (57)$$

où $a > 0$, $p > 1$, et où φ est une fonction continue dans $[-a, a]$, positive, non-nulle et vérifiant $\varphi(-a) = \varphi(a) = 0$. À l'aide des Théorèmes 2.2.1 et 2.2.2, on obtient :

Théorème 2.7.1 *Pour certains $a > 0$, il existe une solution positive et globale*

$$u \in \mathcal{C}([-a, a] \times [0, \infty)) \cap \mathcal{C}^{2,1}([-a, a] \times (0, \infty))$$

du Problème (57) lorsque la donnée initiale $\varphi \in \mathcal{C}_0([-a, a])$ est suffisamment petite.

Preuve : Lorsque $p \geq 3$ et $\lambda > 0$, on considère $\alpha \in \mathcal{C}^2([-a, a])$ une solution de l'équation (31) sous condition de Dirichlet donnée par le Théorème 2.2.1. Supposons que $\varphi \leq \alpha$ dans $[-a, a]$. On a alors

$$\begin{cases} \partial_t \alpha = 0 = \partial_x^2 \alpha - \alpha \partial_x \alpha + \alpha^p - \lambda \alpha & \text{dans } [-a, a] \text{ pour } t > 0, \\ \alpha = 0 & \text{sur } \{-a, a\} \text{ pour } t > 0, \\ \alpha(\cdot, 0) \geq \varphi & \text{dans } [-a, a]. \end{cases}$$

Nous obtenons ainsi une sous-solution, la constante 0, et une sur-solution, la fonction α , du Problème (57). D'après le principe de sur-solutions et de sous-solutions de [8], on obtient la solution u cherchée. Pour $p < 3$ et $\lambda > 0$, il suffit de choisir une solution positive du Théorème 2.2.2 comme sur-solution. Lorsque $\lambda \leq 0$, une solution positive de Dirichlet du Théorème 2.2.5 convient comme sur-solution. ■

2.7.2 Conditions au bord dynamiques

On considère le problème parabolique non linéaire à valeurs initiales sous conditions au bord dynamiques suivant :

$$\begin{cases} \partial_t u = \partial_x^2 u - u \partial_x u + u^p - \lambda u & \text{dans } [-a, a] \text{ pour } t > 0, \\ \sigma(x, t) \partial_t u + \partial_\nu u = 0 & \text{sur } \{-a, a\} \text{ pour } t > 0, \\ u(\cdot, 0) = \varphi & \text{dans } [-a, a], \end{cases} \quad (58)$$

où $a > 0$, $p > 1$, $\sigma \in \mathcal{C}^1(\{-a, a\} \times \mathbb{R}^+)$ est positif, et où φ est une fonction continue dans $[-a, a]$, positive et non-nulle. À l'aide des Théorèmes 2.2.1 et 2.2.2, on obtient :

Théorème 2.7.2 *Supposons que $\lambda > 0$. Il existe une solution positive et globale*

$$u \in \mathcal{C}([-a, a] \times [0, \infty)) \cap \mathcal{C}^{2,1}([-a, a] \times (0, \infty))$$

du Problème (58)

– pour tout $a > 0$ lorsque la donnée initiale $\varphi \in \mathcal{C}([-a, a])$ vérifie

$$0 \leq \varphi \leq \lambda^{\frac{1}{p-1}}.$$

– pour certains $a > 0$ lorsque $\varphi \in \mathcal{C}([-a, a])$ et que $\varphi - \lambda^{\frac{1}{p-1}}$ change de signe et est suffisamment petit.

– pour aucun $a > 0$ lorsque la donnée initiale $\varphi \in \mathcal{C}([-a, a])$ vérifie

$$\varphi > \lambda^{\frac{1}{p-1}}.$$

Preuve : Pour le premier cas, il suffit de remarquer que la fonction constante $\lambda^{\frac{1}{p-1}}$ est une sur-solution du Problème (58) lorsque $0 \leq \varphi \leq \lambda^{\frac{1}{p-1}}$. Pour le second cas, on considère deux sous-cas. Lorsque $p \geq 3$, on considère une solution positive de l'équation (31) sous condition de Neumann donnée par le Théorème 2.2.1. Lorsque $1 < p < 3$, on considère le passé d'une trajectoire du Système (32) initiée en $(\alpha_0, 0)$ avec $0 < \alpha_0 < \lambda^{\frac{1}{p-1}}$. Quitte à ne considérer qu'une partie la trajectoire maximale, on obtient une trajectoire (α, β) définie sur $[-b, 0]$, avec $b > 0$, situé dans le cadran $\{v < 0\}$. Un tel choix est possible d'après les calculs de vitesses, voir équation (37) et Figure 2.1. Par construction, on a $\alpha'(-b) = \beta(-b) < 0$, qui donne $\partial_\nu \alpha(-b) > 0$. En translatant pour nous ramener à un intervalle centré en zéro $(-a, a)$, on obtient une sur-solution du Problème (58) lorsque la donnée initiale φ vérifie $\varphi \leq \alpha$ dans $[-a, a]$. Pour le troisième cas, on considère $c > 0$ tel que

$$\varphi > c > \lambda^{\frac{1}{p-1}} \text{ dans } [-a, a]$$

et on considère v la solution du problème

$$\begin{cases} \partial_t v = \partial_x^2 v - v \partial_x v + v^p - \lambda v & \text{dans } [-a, a] \text{ pour } t > 0, \\ \sigma(x, t) \partial_t v + \partial_\nu v = 0 & \text{sur } \{-a, a\} \text{ pour } t > 0, \\ v(\cdot, 0) = c & \text{dans } [-a, a]. \end{cases}$$

D'après le principe de comparaison de [8] et par hypothèse sur c , on a

$$v \leq u \text{ pour tout } x \in [-a, a] \text{ et tout } t > 0. \quad (59)$$

De plus, comme

$$\partial_x^2 c - c\partial_x c + c^p - \lambda c = c^p - \lambda c > 0,$$

on est assuré que $v > c$ pour tout $x \in [-a, a]$ et tout $t > 0$ d'après le Lemme 1.2.1. En particulier, il existe $d > 0$ tel que

$$v^p - \lambda v \geq dv^p \text{ pour tout } x \in [-a, a] \text{ et tout } t > 0.$$

Ainsi, la fonction v vérifie

$$\begin{cases} \partial_t v \geq \partial_x^2 v - v\partial_x v + dv^p & \text{dans } [-a, a] \text{ pour } t > 0, \\ \sigma(x, t)\partial_t v + \partial_\nu v = 0 & \text{sur } \{-a, a\} \text{ pour } t > 0, \\ v(\cdot, 0) = c & \text{dans } [-a, a]. \end{cases}$$

D'après les résultats d'explosion de [11], la solution v explose en temps fini. D'après l'équation (59), la solution u du Problème (58) explose en temps fini. ■

Lorsque $\lambda \leq 0$, les valeurs des vitesses nous montrent que toute trajectoire, en dehors de $(0, 0)$, initiée dans $\{u \geq 0, v \leq 0\}$ ne peut arriver dans le cadran $\{u \geq 0, v \geq 0\}$ qu'après un passage dans le demi-plan $\{u < 0\}$. C'est pourquoi nous ne pouvons pas obtenir de solution globale de (58) avec la méthode précédente. Par contre, on a le résultat suivant sur l'explosion en temps fini :

Théorème 2.7.3 *Supposons que $\lambda \leq 0$, $\sigma > 0$ est constant et $p > 2$. Pour tout $a > 0$, la solution positive du Problème (58) explose en temps fini lorsque la donnée initiale $\varphi \in \mathcal{C}([-a, a])$ vérifie*

$$\forall x \in [-a, a], \varphi(x) > 0. \quad (60)$$

Preuve : Soit u l'unique solution positive du Problème (58) dans $\mathcal{C}([-a, a] \times [0, T]) \cap \mathcal{C}^{2,1}([-a, a] \times (0, T))$, où $T \in (0, \infty]$ est son temps d'existence maximale. Comme $u > 0$ et $\lambda \leq 0$, u vérifie

$$\begin{cases} \partial_t u \geq \partial_x^2 u - u\partial_x u + u^p & \text{dans } [-a, a] \text{ pour } t > 0, \\ \sigma\partial_t u + \partial_\nu u \geq 0 & \text{sur } \{-a, a\} \text{ pour } t > 0, \\ u(\cdot, 0) \geq \varphi & \text{dans } [-a, a]. \end{cases}$$

D'après le principe de comparaison de [8], on a $u(x, t) \geq v(x, t)$ dans $[-a, a] \times [0, T)$, où v est la solution de

$$\begin{cases} \partial_t v = \partial_x^2 v - v\partial_x v + v^p & \text{dans } [-a, a] \text{ pour } t > 0, \\ \sigma(x, t)\partial_t v + \partial_\nu v = 0 & \text{sur } \{-a, a\} \text{ pour } t > 0, \\ v(\cdot, 0) = \varphi & \text{dans } [-a, a]. \end{cases}$$

D'après les résultats de [11], la fonction v explose en temps fini dès que $p > 2$, que $\sigma > 0$ est constant, et que φ vérifie (60). ■

Remarque 2.7.4 Notons que, dans le théorème précédent, si σ n'est pas constant, mais qu'il est uniformément majoré par une constante $c > 0$, alors on obtient aussi l'explosion si φ vérifie l'hypothèse supplémentaire

$$\varphi \in \mathcal{C}^2([-a, a]), \text{ et } \partial_x^2 \varphi - \varphi \partial_x \varphi + \varphi^p \geq 0.$$

Voir notamment le Lemme 2.1 de [10].

2.7.3 Conditions au bord de Neumann

Comme les conditions de Neumann correspondent aux conditions dynamiques avec le choix $\sigma(x, t) \equiv 0$, on déduit les résultats suivants à l'aide du précédent paragraphe :

Théorème 2.7.5 Supposons que $\lambda > 0$. Pour certains $a > 0$, il existe une solution positive et globale

$$u \in \mathcal{C}([-a, a] \times [0, \infty)) \cap \mathcal{C}^{2,1}([-a, a] \times (0, \infty))$$

du problème

$$\begin{cases} \partial_t u = \partial_x^2 u - u \partial_x u + u^p - \lambda u & \text{dans } [-a, a] \text{ pour } t > 0, \\ \partial_\nu u = 0 & \text{sur } \{-a, a\} \text{ pour } t > 0, \\ u(\cdot, 0) = \varphi & \text{dans } [-a, a], \end{cases} \quad (61)$$

lorsque la donnée initiale $\varphi \in \mathcal{C}([-a, a])$ est suffisamment petite.

Théorème 2.7.6 Supposons que $\lambda \leq 0$, et $p > 2$. Pour tout $a > 0$, la solution positive du Problème (61) explose en temps fini lorsque la donnée initiale $\varphi \in \mathcal{C}([-a, a])$ vérifie (60) et

$$\varphi \in \mathcal{C}^2([-a, a]), \text{ et } \partial_x^2 \varphi - \varphi \partial_x \varphi + \varphi^p \geq 0.$$

2.7.4 Remarques

Il est intéressant de noter le fait suivant dans le cas particulier $\lambda = 0$. Considérons le problème parabolique formé de l'équation de Burgers

$$\partial_t u = \partial_x^2 u - u \partial_x u + u^p \text{ dans } [-a, a],$$

avec une donnée initiale

$$u(\cdot, 0) \geq 0 \text{ dans } [-a, a],$$

et avec différents choix de conditions au bord. On a vu, voir Paragraphe 1.2.1 et [11], que dans le cas des conditions au bord dynamiques dissipatives ($\sigma \partial_t u + \partial_\nu u = 0$, avec $\sigma > 0$), toutes les solutions explosent en temps fini pour $p > 2$ et $\varphi \neq 0$ dans $[-a, a]$. Tandis que lorsqu'on impose les conditions au bord de Dirichlet ($u = 0$), il existe des solutions stationnaires (donc globales) u vérifiant $u > 0$ dans $(-a, a)$. On connaissait déjà l'effet de retardement de l'explosion pour les conditions au bord dynamiques par rapport aux conditions de Neumann (voir notamment [10]), ici, on a un effet d'accélération de l'explosion pour les conditions au bord dynamiques par rapport aux conditions de Dirichlet.

On peut également remarquer qu'il est possible de construire des solutions stationnaires de l'équation de Burgers

$$u'' - uu' + u^p - \lambda u = 0 \text{ dans } [-a, a],$$

sous les conditions de Robin $\partial_\nu u + \alpha u = 0$ sur $\{\pm a\}$. Il suffit pour cela de tracer les droites $v = \alpha u$ et $v = -\alpha u$ dans le plan des phases et de considérer la partie trajectoire (w, z) initiée au point d'intersection de (w, z) et $\{v = \alpha u\}$ et terminée à l'intersection de (β, γ) et de $\{v = -\alpha u\}$, voir Figure 2.17.

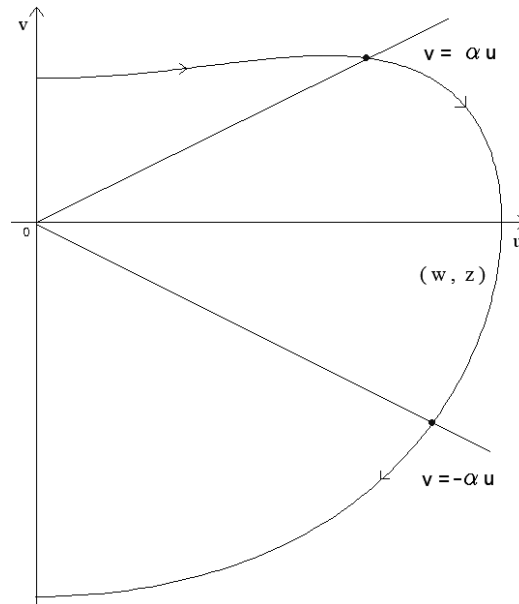


FIG. 2.17 – Trajectoires du Système (32) et conditions de Robin.

En recentrant l'intervalle de définition de (w, z) de telle sorte que l'on ait

$\{z(-a) = \alpha w(-a)\}$ et $\{z(-a) = -\alpha w(-a)\}$, on obtient

$$\partial_\nu w(-a) = -w'(-a) = -z(-a) = -\alpha w(-a),$$

et

$$\partial_\nu w(a) = w'(a) = z(a) = -\alpha w(a).$$

D'où $\partial_\nu w + \alpha w = 0$ sur $\{\pm a\}$.

Les principaux résultats de ce chapitre font l'objet d'un article soumis à publication [40].

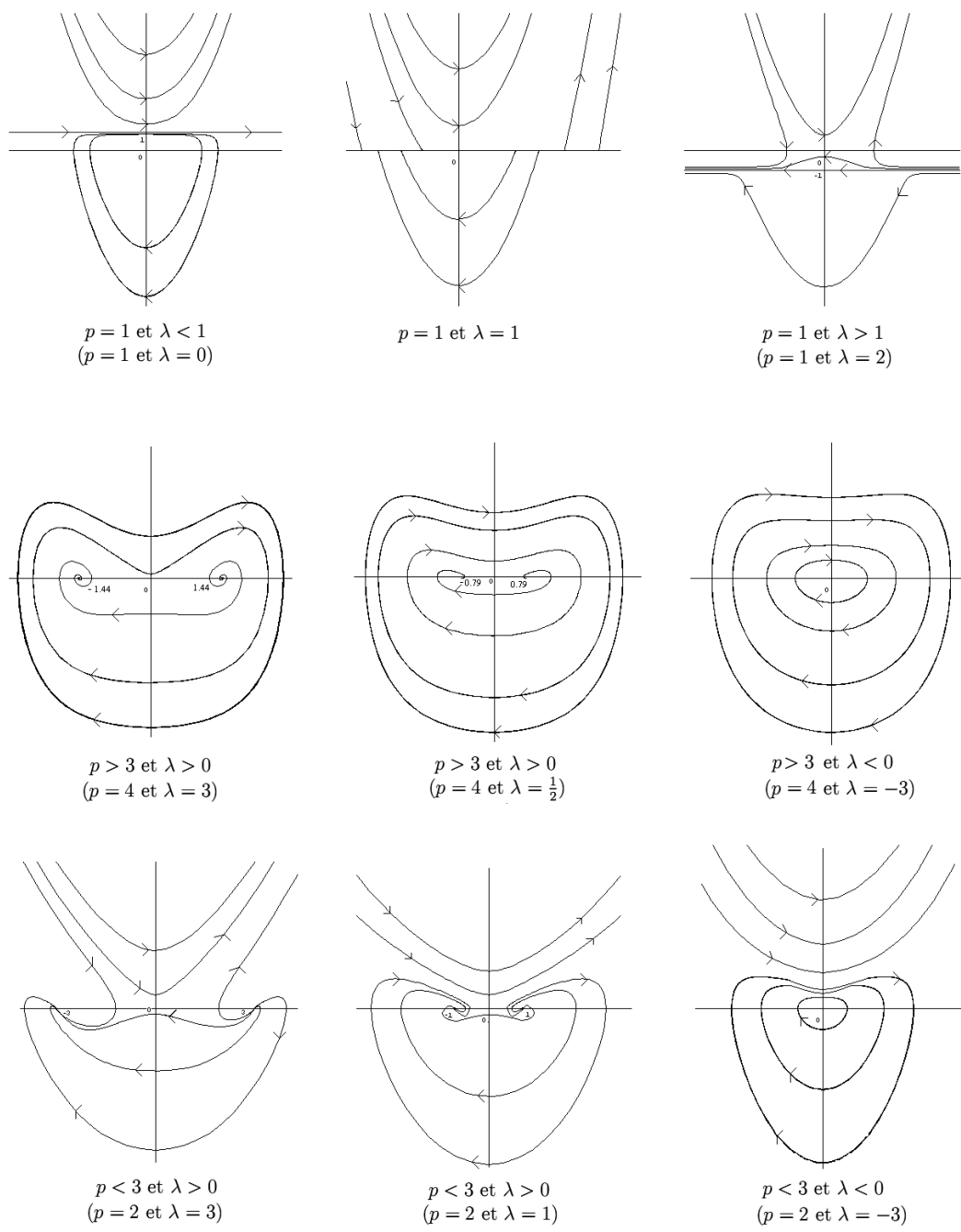


FIG. 2.18 – Plans des phases du Système (32) pour différents paramètres.

Chapitre 3

L'équation de Burgers paramétrée dans des domaines non-bornés

Dans ce chapitre, on considère le problème parabolique suivant

$$\begin{cases} \partial_t u = \partial_x^2 u - u \partial_x u + u^p - \lambda u & \text{dans } \overline{\Omega} \text{ pour } t > 0, \\ \mathcal{B}(u) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \text{ pour } t > 0, \\ u(\cdot, 0) = \varphi & \text{dans } \overline{\Omega}, \end{cases} \quad (62)$$

dans un domaine non borné $\Omega \subseteq \mathbb{R}$, avec $p > 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$, où $\mathcal{B}(u) = 0$ désigne différentes conditions sur le bord du domaine, et avec $\varphi \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ bornée. Typiquement, Ω désignera $(0, \infty)$, $(-\infty, 0)$ ou \mathbb{R} . Dans le cas $\Omega = \mathbb{R}$, on n'impose pas de conditions au bord. On prouvera des résultats sur l'explosion en temps fini et sur l'existence globale des solutions positives non triviales. On montrera l'existence de solutions de similarité.

3.1 Explosion en temps fini

Lorsque $\lambda \leq 0$, en considérant des normes $L^1(\Omega)$ à poids, nous étudions l'explosion en temps fini des solutions de l'équation (62) sous des conditions au bord de Neumann, de Robin et sous des conditions au bord non-linéaires. Pour cela, il nous faut considérer des solutions satisfaisant à des conditions sur leur comportement lorsque $|x| \rightarrow \infty$.

Définition 3.1.1 *On dira que u est une solution du problème (62) si u vérifie les équations du problème au sens des solutions régulières et si pour tout $t > 0$*

et pour tout $\alpha > 0$, on a

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x, t)e^{-\alpha x} = 0 \text{ et } \lim_{|x| \rightarrow \infty} |\partial_x u(x, t)|e^{-\alpha x} = 0.$$

Lorsque $\Omega = (0, \infty)$, on a les résultats suivants :

Théorème 3.1.2 *Si $\lambda < 0$ et $p \geq 2$, le problème (62) n'admet aucune solution positive non-triviale globale et lorsque $\mathcal{B}(u) = 0$ désigne les conditions au bord de Neumann.*

Preuve : Soit u une solution du problème (62). Introduisons la fonctionnelle N_α définie sur \mathbb{R}^+ par

$$N_\alpha(t) = \int_0^\infty u(x, t)e^{-\alpha x} dx.$$

1^{ière} étape : S'il existe $\alpha > 0$ tel que N_α explose en temps fini, alors la solution u explose en temps fini. En effet supposons que u existe globalement et que N_α explose en temps fini, disons en $\tau > 0$. Pour tout $0 < t < \tau$, on a

$$N_\alpha(t) = \int_0^\infty u(x, t)e^{-\frac{\alpha}{2}x}e^{-\frac{\alpha}{2}x} dx \leq b(t) \cdot \int_0^\infty e^{-\frac{\alpha}{2}x} dx,$$

où

$$b(t) = \sup_{x \in \bar{\Omega}} u(x, t)e^{-\frac{\alpha}{2}x}.$$

Par définition de u , on a $b(t) \leq \infty$ pour tout $t > 0$, en particulier il existe $C > 0$ tel que $b(t) \leq C$ pour tout $0 < t < \tau$. D'où

$$N_\alpha(t) \leq C \int_0^\infty e^{-\frac{\alpha}{2}x} dx \leq \infty$$

pour tout $0 < t < \tau$. Ce qui contredit $N_\alpha(t) \rightarrow \infty$ lorsque $t \rightarrow \tau$.

2^{ième} étape : On peut supposer sans restriction que pour tout $\tau > 0$, il existe $c > 0$ tel que $u(0, t) > c$ pour tout $t > \tau$. En effet, on compare u avec la solution v du problème

$$\begin{cases} \partial_t v = \partial_x^2 v - v \partial_x v + v^p - \lambda v & \text{dans } [0, 1] \text{ pour } t > 0, \\ \mathcal{B}(v) = 0 & \text{sur } \{0\} \text{ pour } t > 0, \\ v = 0 & \text{sur } \{1\} \text{ pour } t > 0, \\ v(\cdot, 0) = \varphi_1 & \text{dans } [0, 1], \end{cases}$$

où $\varphi_1 \in \mathcal{C}^2([0, 1])$ avec $\partial_x^2 \varphi_1 - \varphi_1 \partial_x \varphi_1 + \varphi_1^p - \lambda \varphi_1 \geq 0$ dans $[0, 1]$, $0 \leq \varphi_1 \leq \varphi$ dans $[0, 1]$ et $\varphi_1(1) = 0$. D'après les théorèmes de comparaison et le principe

du maximum (voir [8] et [10]), on obtient $v(\cdot, t) \leq u(\cdot, t)$ et $\partial_t v \geq 0$ dans $[0, 1]$ pour $t \geq 0$, puis pour tout $\tau > 0$, il existe $c > 0$ tel que $v(\cdot, t) \geq 0$ dans $[0, 1]$ pour tout $\tau < t$. En particulier, on obtient $u(0, t) > c$ pour tout $t > \tau$.
3^{ième} étape : Il existe $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que $N'_\alpha \geq \beta N_\alpha^p$. Il suffit de calculer la dérivée de N_α en fonction de t . On obtient :

$$\begin{aligned} N'_\alpha(t) &= \int_0^\infty \partial_t u(x, t) e^{-\alpha x} dx. \\ &= \int_0^\infty \partial_x^2 (u(x, t)) e^{-\alpha x} dx - \int_0^\infty u \partial_x (u(x, t)) e^{-\alpha x} dx \\ &\quad + \int_0^\infty u^p(x, t) e^{-\alpha x} dx - \lambda \int_0^\infty u(x, t) e^{-\alpha x} dx. \end{aligned}$$

En intégrant par parties les termes faisant intervenir des dérivées partielles de u , et par définition de u , on a :

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \partial_x^2 (u(x, t)) e^{-\alpha x} dx &= \left[\partial_x (u(x, t)) e^{-\alpha x} \right]_0^\infty + \alpha \int_0^\infty \partial_x (u(x, t)) e^{-\alpha x} dx \\ &= -\partial_x u(0, t) + \alpha \int_0^\infty \partial_x (u(x, t)) e^{-\alpha x} dx \\ &= \partial_\nu u(0, t) + \alpha \int_0^\infty \partial_x (u(x, t)) e^{-\alpha x} dx \\ &= \partial_\nu u(0, t) + \alpha \left[u(x, t) e^{-\alpha x} \right]_0^\infty + \alpha^2 \int_0^\infty u(x, t) e^{-\alpha x} dx \\ &= \partial_\nu u(0, t) - \alpha u(0, t) + \alpha^2 \int_0^\infty u(x, t) e^{-\alpha x} dx, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \int_0^\infty u \partial_x (u(x, t)) e^{-\alpha x} dx &= \int_0^\infty \partial_x \left(\frac{u^2(x, t)}{2} \right) e^{-\alpha x} dx \\ &= \left[\frac{u^2(x, t)}{2} e^{-\alpha x} \right]_0^\infty + \frac{\alpha}{2} \int_0^\infty u^2(x, t) e^{-\alpha x} dx \\ &= -\frac{u^2(0, t)}{2} + \frac{\alpha}{2} \int_0^\infty u^2(x, t) e^{-\alpha x} dx. \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient :

$$\begin{aligned} N'_\alpha(t) &= \int_0^\infty u(x, t) e^{-\alpha x} \left(\alpha^2 - \frac{\alpha}{2} u(x, t) - \lambda + u^{p-1}(x, t) \right) dx \\ &\quad + \partial_\nu u(0, t) - \alpha u(0, t) + \frac{1}{2} u^2(0, t). \end{aligned} \tag{63}$$

Grâce à la condition sur le bord, on a $\partial_\nu u(0, t) = 0$, et on obtient

$$\begin{aligned} N'_\alpha(t) &= \int_0^\infty u(x, t) e^{-\alpha x} \left(\alpha^2 - \frac{\alpha}{2} u(x, t) - \lambda + u^{p-1}(x, t) \right) dx \\ &\quad + u(0, t) \left(\frac{1}{2} u(0, t) - \alpha \right). \end{aligned}$$

Quitte à ne considérer la solution u qu'à partir d'un certain temps $\tau > 0$, on peut supposer que

$$c := \min_{t \geq 0} u(0, t) > 0.$$

Il suffit de choisir $\alpha > 0$ suffisamment petit et on obtient :

$$N'_\alpha(t) \geq \int_0^\infty u(x, t) e^{-\alpha x} \left(\alpha^2 - \frac{\alpha}{2} u(x, t) - \lambda + u^{p-1}(x, t) \right) dx.$$

Quitte à rétrécir α , on choisit $\alpha \leq 2|\lambda|$ et $\alpha \leq 1$, ce qui donne la minoration suivante :

$$N'_\alpha(t) \geq \int_0^\infty u(x, t) e^{-\alpha x} \left(-\frac{\alpha}{2} u(x, t) - \lambda + u^{p-1}(x, t) \right) dx.$$

Lorsque $u(x, t) \leq 1$, on a $-\frac{\alpha}{2} u(x, t) - \lambda \geq 0$, tandis que pour $u(x, t) \geq 1$, comme $p \geq 2$ on a $-\frac{\alpha}{2} u(x, t) + u^{p-1}(x, t) \geq \frac{u^{p-1}(x, t)}{2}$. Ainsi, on obtient :

$$N'_\alpha(t) \geq \frac{1}{2} \int_0^\infty u^p(x, t) e^{-\alpha x} dx.$$

Puis par l'inégalité de Hölder,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty u(x, t) e^{-\alpha x} dx &= \int_0^\infty u(x, t) e^{-\frac{\alpha}{p} x} e^{-\alpha \frac{p-1}{p} x} dx \\ &\leq \left(\int_0^\infty u^p(x, t) e^{-\alpha x} dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^\infty e^{-\alpha x} dx \right)^{\frac{p-1}{p}}, \end{aligned}$$

on a $N'_\alpha(t) \geq \beta N_\alpha^p(t)$ pour $\beta = \frac{1}{2} \left(\int_0^\infty e^{-\alpha x} dx \right)^{1-p}$.

4^{ième} étape : L'inégalité différentielle $N'_\alpha \geq \beta N_\alpha^p$ implique l'explosion en temps fini de N_α . En effet, en intégrant cette inégalité entre 0 et $t > 0$, on a

$$\frac{1}{1-p} \left(N_\alpha^{1-p}(t) - N_\alpha^{1-p}(0) \right) = \int_{N_\alpha(0)}^{N_\alpha(t)} s^{-p} ds = \int_0^t \frac{N'_\alpha(t)}{N_\alpha^p(t)} dt \geq \beta t.$$

Et ainsi :

$$N_\alpha(t) \geq \left(N_\alpha^{1-p}(0) - (p-1)\beta t \right)^{\frac{-1}{p-1}}.$$

Comme $\frac{-1}{p-1} < 0$, le terme de droite explose en $t = \frac{N_\alpha^{1-p}(0)}{(p-1)\beta} > 0$. ■

Il est possible d'adapter cette preuve pour les solutions satisfaisant à des conditions au bord non-linéaires ou des conditions au bord de Robin. On a le résultat suivant :

Théorème 3.1.3 *Soit $\lambda < 0$ et $p \geq 2$. Si la condition au bord $\mathcal{B}(u) = 0$ est de la forme*

$$\partial_\nu u = g(u)$$

où la fonction g est telle qu'il existe $\delta > 0$ et $\epsilon \leq \frac{1}{2}$ vérifiant

$$g(\eta) \geq \delta\eta - \epsilon\eta^2,$$

alors le problème (62) n'admet aucune solution positive non-triviale globale.

Preuve : La preuve est analogue à la précédente. Il suffit de choisir $\alpha > 0$ tel que $\alpha \leq \delta$ et dans l'équation (63), on utilise la minoration suivante

$$\begin{aligned} \partial_\nu u(0, t) - \alpha u(0, t) + \frac{1}{2}u^2(0, t) &= g(u) - \alpha u(0, t) + \frac{1}{2}u^2(0, t) \\ &\geq \delta u(0, t) - \epsilon u(0, t)^2 - \alpha u(0, t) + \frac{1}{2}u^2(0, t) \\ &\geq (\delta - \alpha)u(0, t) + \left(\frac{1}{2} - \epsilon\right)u(0, t)^2, \end{aligned}$$

cette dernière quantité étant positive par choix de α et par hypothèse sur ϵ . ■

Lorsque $\lambda = 0$, nous ne pouvons plus choisir α aussi librement que dans les preuves précédentes. Néanmoins, en imposant des conditions sur l'exposant p ou sur la taille de la donnée initiale, on obtient les résultats d'explosion suivants :

Théorème 3.1.4 *Supposons que $\lambda = 0$ et que $2 \leq p \leq 3$. Si la condition au bord $\mathcal{B}(u) = 0$ désigne les conditions au bord de Neumann, alors le problème (62) n'admet aucune solution positive non-triviale globale.*

Preuve : On reprend la preuve du théorème (3.1.2), et avec les conditions au bord de Neumann et $\lambda = 0$, l'équation (63) devient

$$\begin{aligned} N'_\alpha(t) = \int_0^\infty u(x, t)e^{-\alpha x} \left(\alpha^2 - \frac{\alpha}{2}u(x, t) + u^{p-1}(x, t) \right) dx \\ + \frac{1}{2}u^2(0, t) - \alpha u(0, t). \end{aligned}$$

Soit $\beta \in (0, 1)$, et introduisons-le dans l'équation précédente :

$$N'_\alpha(t) = \int_0^\infty u(x, t) e^{-\alpha x} \left(\alpha^2 - \frac{\alpha}{2} u(x, t) + \beta u^{p-1}(x, t) \right) dx \\ + \frac{1}{2} u^2(0, t) - \alpha u(0, t) + (1 - \beta) \int_0^\infty u^p(x, t) e^{-\alpha x} dx.$$

Lorsque $u \leq 2\alpha$, on a $\alpha^2 - \frac{\alpha}{2}u \geq 0$, tandis que pour $u > 2\alpha$, on a

$$-\frac{\alpha}{2}u + \beta u^{p-1} = u \left(-\frac{\alpha}{2} + \beta u^{p-2} \right) \geq u \left(-\frac{\alpha}{2} + \beta (2\alpha)^{p-2} \right).$$

Cette quantité est positive si

$$\beta \alpha^{p-3} \geq 2^{1-p}. \quad (64)$$

Pour $2 \leq p \leq 3$, il suffit de choisir α suffisamment proche de 0 et $0 < \beta < 1$ en fonction de p . On obtient alors

$$N'_\alpha(t) = \frac{1}{2} u^2(0, t) - \alpha u(0, t) + (1 - \beta) \int_0^\infty u^p(x, t) e^{-\alpha x} dx.$$

Comme pour la preuve du théorème (3.1.2), on suppose sans restriction que $u(0, t) > c > 0$ pour tout $t > 0$, et pour $\alpha \leq \frac{c}{2}$, on a $\frac{1}{2}u^2(0, t) - \alpha u(0, t) \geq 0$, d'où

$$N'_\alpha(t) = (1 - \beta) \int_0^\infty u^p(x, t) e^{-\alpha x} dx.$$

Grâce à l'inégalité de Hölder, on obtient $N'_\alpha \geq \delta N_\alpha^p$ avec $\delta = \delta(\beta, \alpha, p) > 0$, qui assure l'explosion de N_α en temps fini. ■

Théorème 3.1.5 *Supposons que $\lambda = 0$. Si $p > 3$ et si la condition au bord $\mathcal{B}(u) = 0$ désigne les conditions au bord de Neumann, et que $\varphi(0) > 2^{\frac{1-p}{p-3}}$, alors le problème (62) n'admet aucune solution positive non-triviale globale.*

Preuve : On reprend la preuve précédente, et on considère l'équation (64). Pour $p > 3$, on a

$$\beta \alpha^{p-3} \geq 2^{1-p} \Leftrightarrow \alpha \geq 2^{\frac{1-p}{p-3}} \beta^{\frac{-1}{p-3}}.$$

Avec cette condition sur α , on a

$$N'_\alpha(t) = \frac{1}{2} u^2(0, t) - \alpha u(0, t) + (1 - \beta) \int_0^\infty u^p(x, t) e^{-\alpha x} dx.$$

Si l'on suppose $\varphi(0) > 2^{\frac{1-p}{p-3}}$, on peut sans restriction supposer que pour tout $t > 0$, $u(0, t) > 2^{\frac{1-p}{p-3}}$. En choisissant $0 < \beta < 1$ proche de 1, et $\alpha = 2^{\frac{1-p}{p-3}}\beta^{\frac{-1}{p-3}}$, on a $\frac{1}{2}u^2(0, t) - \alpha u(0, t) \geq 0$. On obtient alors

$$N'_\alpha(t) \geq (1 - \beta) \int_0^\infty u^p(x, t) e^{-\alpha x} dx,$$

puis on en déduit $N'_\alpha \geq \delta N_\alpha^p$ avec $\delta = \delta(\beta, \alpha, p) > 0$ et l'explosion de N_α en temps fini. ■

Théorème 3.1.6 *Supposons que $\lambda = 0$ et que $p > 3$. Si la condition au bord $\mathcal{B}(u) = 0$ désigne les conditions au bord de Neumann, et que*

$$\int_0^\infty \varphi(x) e^{-x} dx > \frac{1}{2}, \quad (65)$$

alors le problème (62) n'admet aucune solution positive non-triviale globale.

Preuve : On reprend la preuve du théorème (3.1.2). Avec les conditions au bord de Neumann, $\lambda = 0$, on introduit un paramètre $0 < \delta < 1$ dans l'équation (63) qui devient :

$$\begin{aligned} N'_\alpha(t) &= \int_0^\infty u(x, t) e^{-\alpha x} \left(\delta \alpha^2 - \frac{\alpha}{2} u(x, t) + \beta u^{p-1}(x, t) \right) dx \\ &\quad + \frac{1}{2} u^2(0, t) - \alpha u(0, t) + (1 - \delta) \alpha^2 N_\alpha(t) + (1 - \beta) N_\alpha^p(t), \end{aligned}$$

avec $0 < \beta < 1$ et $\alpha > 0$. On minore le terme $\frac{1}{2}u^2(0, t) - \alpha u(0, t)$ par $\frac{-\alpha^2}{2}$. En considérant les cas $u \geq 2\alpha\delta$ et $u \leq 2\alpha\delta$, on se restreint au cas

$$\alpha = 2^{\frac{1-p}{p-3}} \beta^{\frac{-1}{p-3}} \delta^{\frac{2-p}{p-3}},$$

et on obtient $\delta \alpha^2 - \frac{\alpha}{2} u + \beta u^{p-1} \geq 0$ et

$$N'_\alpha(t) \geq (1 - \beta) N_\alpha^p(t) + (1 - \delta) \alpha^2 N_\alpha(t) - \frac{\alpha^2}{2}. \quad (66)$$

Dans un premier temps, on minore le terme N_α^p par zéro et on obtient

$$N'_\alpha(t) \geq (1 - \delta) \alpha^2 N_\alpha(t) - \frac{\alpha^2}{2}.$$

On en déduit

$$N_\alpha(t) \geq \frac{1}{2(1-\delta)} + Ae^{(1-\delta)\alpha^2 t} \text{ avec } A \in \mathbb{R}.$$

En particulier, on a $N_\alpha(0) \geq \frac{1}{2}(1-\delta)^{-1} + A$. En choisissant δ proche de 0 et β proche de 1, l'hypothèse (65) nous donne $N_\alpha(0) > \frac{1}{2}(1-\delta)^{-1}$. On doit donc choisir $A > 0$ et on obtient

$$(1-\delta)\alpha^2 N_\alpha(t) - \frac{\alpha^2}{2} \geq 0 \text{ pour tout } t > 0.$$

Ainsi, on minore la partie affine de l'équation (66) par zéro et l'on a

$$N'_\alpha(t) \geq (1-\beta)N_\alpha^p(t).$$

On conclut sur l'explosion de N_α comme dans les théorèmes précédents. ■

Remarque 3.1.7 Sur la taille des bornes imposées à la condition initiale. Dans les deux précédents théorèmes, nous imposons des hypothèses sur la taille de la donnée initiale. Pour le premier résultat, on suppose

$$\varphi(0) > 2^{\frac{1-p}{p-3}}.$$

Cette borne est petite : on a $2^{\frac{1-p}{p-3}} \rightarrow 0$ quand $p \rightarrow 3$ et $2^{\frac{1-p}{p-3}} < \frac{1}{2}$. Dans le second théorème, la borne de l'hypothèse (65) ne dépend pas de p , mais permet de choisir, par exemple, toutes les fonctions φ minorées par $1/2$.

Maintenant, si on considère le cas $\Omega = (-\infty, 0)$, on obtient des résultats d'explosion du même type que les précédents en modifiant le poids dans la fonctionnelle N_α concernant les solutions de (62) sous des conditions au bord non-linéaires.

Théorème 3.1.8 Supposons que $\lambda \leq 0$ et que $p \geq 2$. Si la condition au bord $\mathcal{B}(u) = 0$ est de la forme

$$\partial_\nu u = g(u),$$

où la fonction g est telle qu'il existe deux constantes $c > 0$ et $d > 0$ avec

$$g(\eta) \geq c\eta^2 + d\eta,$$

alors le problème (62) n'admet aucune solution positive non-triviale globale.

Preuve : L'idée est la même que pour le cas $\Omega = (0, \infty)$. On considère une norme L^1 avec un nouveau poids :

$$N(t) = \int_{-\infty}^0 u(x, t) e^{\alpha x} dx, \text{ avec } \alpha > 0$$

Comme précédemment, on calcule N' , et en utilisant les équations du problème (62), on obtient par intégration par parties :

$$\begin{aligned} N'(t) &= \int_{-\infty}^0 \partial_t u e^{\alpha x} dx \\ &\geq \int_{-\infty}^0 \partial_x^2 u e^{\alpha x} dx - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 \partial_x (u^2) e^{\alpha x} dx + \int_{-\infty}^0 u^p e^{\alpha x} dx \\ &\geq \partial_x u(0, t) - \alpha u(0, t) - \frac{\alpha}{2} u^2(0, t) + \int_{-\infty}^0 (\alpha^2 u + \alpha u^2 + u^p) e^{\alpha x} dx. \end{aligned}$$

Comme $\partial_\nu u(0, t) = \partial_x u(0, t)$, il suffit de choisir $\alpha = \min\{2c, d\}$. On obtient alors

$$\begin{aligned} N'(t) &\geq \int_{-\infty}^0 (\alpha^2 u(x, t) + \alpha u^2(x, t) + u^p(x, t)) e^{\alpha x} dx \\ &\geq \int_{-\infty}^0 u^p(x, t) e^{\alpha x} dx. \end{aligned}$$

Comme précédemment, on en déduit l'explosion en temps fini de N et de u . ■

3.2 Solutions globales

Afin de prouver l'existence globale des solutions, nous utilisons le procédé décrit dans le chapitre 4 et nous exhibons des sur-solutions globales. Lorsque $\lambda > 0$, on obtient le résultat suivant à l'aide de l'équilibre $(\lambda^{\frac{1}{p-1}}, 0)$ du Système (32).

Théorème 3.2.1 *Soient $p \in (1, \infty)$, $\lambda > 0$ et $\varphi \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$. Le problème*

$$\begin{cases} \partial_t u = \partial_x^2 u - u \partial_x u + u^p - \lambda u & \text{dans } \overline{\Omega} \text{ pour } t > 0, \\ \mathcal{B}(u) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \text{ pour } t > 0, \\ u(\cdot, 0) = \varphi & \text{dans } \overline{\Omega}, \end{cases} \quad (67)$$

admet une solution positive globale lorsque la donnée initiale vérifie

$$\varphi \leq \lambda^{\frac{1}{p-1}} \text{ dans } \overline{\Omega},$$

et lorsque $\mathcal{B}(u) = 0$ désigne une condition au bord de Dirichlet, de Neumann, ou une condition dynamique avec $\sigma \geq 0$.

Preuve : Il suffit de considérer la fonction constante $v(x, t) = \lambda^{\frac{1}{p-1}}$. L'équation de Burgers est satisfaite. Puis, par hypothèse sur la donnée initiale φ , on a $\varphi \leq v(\cdot, 0)$ dans $\overline{\Omega}$. Sur le bord $\partial\Omega$, la fonction v vérifie les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} v &\geq 0 && \text{(Dirichlet).} \\ \partial_\nu v &= 0 && \text{(Neumann).} \\ \sigma \partial_t v + \partial_\nu v &= 0 && \text{(Dynamique).} \end{aligned}$$

La fonction v est une sur-solution convenant au Problème (67) sous les trois types de conditions au bord citées. ■

Lorsque $\lambda \leq 0$, il nous faut imposer quelques restrictions, et nous obtenons les résultats d'existence globale suivants :

Théorème 3.2.2 *Supposons que $\Omega = (0, \infty)$. Soient $p \in (1, 2]$, $\lambda \leq 0$ et $\varphi \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$. Le problème*

$$\begin{cases} \partial_t u = \partial_x^2 u - u \partial_x u + u^p - \lambda u & \text{dans } \overline{\Omega} \text{ pour } t > 0, \\ \mathcal{B}(u) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \text{ pour } t > 0, \\ u(\cdot, 0) = \varphi & \text{dans } \overline{\Omega}, \end{cases} \quad (68)$$

admet une solution positive globale lorsque la donnée initiale est bornée et lorsque $\mathcal{B}(u) = 0$ désigne une condition au bord de Dirichlet ou une condition dynamique avec $\sigma > 0$ constant.

Preuve : On considère la fonction $v(x, t) = Ae^{\alpha x + (t+t_0)^2}$ définie dans $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$. Le calcul des dérivées partielles nous donne

$$\begin{aligned} \partial_t v(x, t) &= 2(t + t_0)v. \\ \partial_x v(x, t) &= \alpha v. \\ \partial_x^2 v(x, t) &= \alpha^2 v. \end{aligned}$$

En choisissant $t_0 \geq \frac{1}{2}(\alpha^2 - \lambda)$, on obtient

$$\begin{aligned} \partial_t v - \partial_x^2 v + v \partial_x v - v^p + \lambda v &= v \left(2(t + t_0) - \alpha^2 + \alpha v - v^{p-1} + \lambda \right) \\ &\geq v^2 \left(\alpha - v^{p-2} \right). \end{aligned}$$

Puisque $p \leq 2$, et comme $\alpha x + (t + t_0)^2 \geq 0$ dans $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, le terme v^{p-2} est borné par A^{p-2} , il suffit de choisir $\alpha \geq A^{p-2}$ et l'on a

$$\partial_t v - \partial_x^2 v + v \partial_x v - v^p + \lambda v \geq 0.$$

Le cas de la condition de Dirichlet sur le bord $\partial\Omega$ est trivial car $v \geq 0$. Pour le cas des conditions dynamiques, on a

$$\sigma \partial_t v + \partial_\nu v = v \left(2\sigma(t + t_0) - \alpha \right).$$

Cette quantité est positive si on choisit $t_0 \geq \frac{\alpha}{2\sigma}$. Concernant la donnée initiale, il suffit de prendre $A \geq \|\varphi\|_\infty$. La fonction v est ainsi une sur-solution convenant au Problème (68) sous les deux types de conditions au bord citées. ■

Remarque 3.2.3 Sur le coefficient σ .

Lors de la preuve du théorème, quitte à augmenter A et t_0 , on peut supposer que $1 \geq A^{p-2}$ et choisir $\alpha = 1$. On peut alors considérer le cas d'un coefficient σ vérifiant

$$\sigma(x, t) \geq \frac{1}{2t + t_1} \text{ sur } \partial\Omega \times (0, \infty),$$

pour tout $t_1 > 0$. Si $p < 2$, on peut rétrécir A^{p-2} et α autant que l'on souhaite et ainsi considérer des coefficients σ vérifiant

$$\sigma(x, t) \geq \frac{d}{t + t_1} \text{ sur } \partial\Omega \times (0, \infty),$$

pour tout $d > 0$ et $t_1 > 0$. D'une manière plus générale, on peut considérer une autre sur-solution : la fonction w définie par $w(x, t) = e^{ax + (t+t_0)^n}$ sur $[0, \infty)^2$ avec $n \in \mathbb{N}$, $a > 0$ et $t_0 > 0$, ce qui nous autorise à considérer de plus petits coefficients σ :

$$\sigma(x, t) \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} t^{-n+1}.$$

Lorsque $p = 2$, le terme v^{p-2} vaut 1 même si on n'impose pas $(x, t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$. Cette remarque nous permet de déduire le résultat suivant :

Théorème 3.2.4 Supposons que $\Omega = (-\infty, 0)$ ou $\Omega = \mathbb{R}$. Soient $p = 2$, $\lambda \leq 0$ et $\varphi \in \mathcal{C}(\bar{\Omega})$. Le problème

$$\begin{cases} \partial_t u = \partial_x^2 u - u \partial_x u + u^p - \lambda u & \text{dans } \bar{\Omega} \text{ pour } t > 0, \\ \mathcal{B}(u) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \text{ pour } t > 0, \\ u(\cdot, 0) = \varphi & \text{dans } \bar{\Omega}, \end{cases} \quad (69)$$

admet une solution positive globale s'il existe $C > 0$ et $a > 0$ tels que la donnée initiale φ vérifie

$$0 \leq \varphi(x) \leq Ce^{ax} \text{ dans } \overline{\Omega}$$

et lorsque $\mathcal{B}(u) = 0$ désigne une condition au bord de Dirichlet, de Neumann ou une condition dynamique avec $\sigma > 0$.

Preuve : Comme précédemment, on considère la fonction

$$v(x, t) = Ae^{\alpha x + (t+t_0)^2}$$

définie dans $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^+$. En choisissant correctement les constantes A et α , on a

$$\begin{cases} \partial_t v - \partial_x^2 v + v \partial_x v - v^p + \lambda v \geq 0 & \text{dans } \overline{\Omega} \times [0, \infty). \\ v(\cdot, 0) \geq \varphi & \text{dans } \overline{\Omega}. \end{cases}$$

La condition de Dirichlet est encore trivialement satisfaite. Par contre, cette fois, on a $\partial_\nu v = \partial_x v = \alpha v > 0$ sur le bord $\partial\Omega$. Cette remarque nous permet de considérer le cas des conditions de Neumann et des conditions dynamiques avec $\sigma \geq 0$. La fonction v est ainsi une sur-solution convenant au Problème (69) sous les trois types de conditions au bord citées. ■

Lorsque $\lambda = 0$, $\Omega = (-\infty, 0)$ et $p > 3$, la fonction de Green de l'équation de la chaleur est une sur-solution pour notre problème.

Théorème 3.2.5 *Supposons que $\Omega = (-\infty, 0)$. Soient $p > 3$, et $\varphi \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$. Le problème*

$$\begin{cases} \partial_t u = \partial_x^2 u - u \partial_x u + u^p & \text{dans } \overline{\Omega} \text{ pour } t > 0, \\ \mathcal{B}(u) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \text{ pour } t > 0, \\ u(\cdot, 0) = \varphi & \text{dans } \overline{\Omega}, \end{cases} \quad (70)$$

admet une solution positive globale lorsque la donnée initiale est suffisamment petite et lorsque $\mathcal{B}(u) = 0$ désigne une condition au bord de Dirichlet, de Neumann ou une condition dynamique avec $\sigma > 0$.

Preuve : On considère la fonction $v(x, t) = A(t+1)^{-\gamma} e^{\frac{-(x+y)^2}{4t+4}}$ définie dans $\mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^+$ avec $A > 0$, $y < 0$ et $\gamma = \frac{1}{p-1}$. En calculant les dérivées partielles, on obtient

$$\partial_t v - \partial_x^2 v + v \partial_x v - v^p + \lambda v = \frac{v}{2(t+1)} \left(-2\gamma + 1 - (x+y)v - v^{p-1} \right).$$

Par définition de γ et comme $p > 3$, on a $-2\gamma + 1 > 0$. Puis comme $v^{p-1} \leq A^{p-1}$, on choisit A suffisamment petit tel que $1 - 2\gamma - A^{p-1} > 0$. Finalement, pour tout $x \in \bar{\Omega}$ et $y < 0$, on a $-(x + y) > 0$. On en conclut que

$$\partial_t v - \partial_x^2 v + v \partial_x v - v^p \geq 0 \text{ dans } \bar{\Omega} \times [0, \infty).$$

La condition de Dirichlet est satisfaite car $v \geq 0$ sur $\partial\Omega$. Pour le cas des conditions dynamiques avec $\sigma \geq 0$ ou de Neumann ($\sigma \equiv 0$), on a

$$\sigma \partial_t v + \partial_\nu v \geq \frac{v}{2(t+1)} \left(-2\sigma\gamma - y \right) \text{ sur } \partial\Omega \times [0, \infty).$$

Il suffit de choisir $y = -2\sigma\gamma$ pour avoir $\sigma \partial_t v + \partial_\nu v \geq 0$. Ainsi, v est une sur-solution convenant au Problème (70) sous les trois types de conditions au bord citées dès que la donnée initiale vérifie $\varphi \leq v(\cdot, 0)$ dans $\bar{\Omega}$. ■

3.3 Solutions de similarité

Pour la recherche de solutions globales, nous allons étudier le cas des solutions de similarité dans cette section. Bien qu'elles ne nous permettent pas d'obtenir de nouveaux cas d'existence globale, leur intérêt n'est pas négligeable. On cherche des solutions du Problème (62) s'écrivant sous la forme $u(x, t) = \varphi(x + ct)$ où $c \in \mathbb{R}^*$ et $\varphi \in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega})$ vérifie

$$\varphi'' - (\varphi + c)\varphi' + \varphi^p - \lambda\varphi = 0 \text{ dans } \bar{\Omega}, \quad (71)$$

et $\varphi \geq 0$ dans $\bar{\Omega}$. La donnée initiale correspondante sera φ , et le coefficient c sera choisi pour satisfaire à la condition au bord.

Lemme 3.3.1 *Supposons que $\mathcal{B}(u) = 0$ désigne les conditions au bord dynamiques $\sigma \partial_t u + \partial_\nu u = 0$ avec $\sigma > 0$ constant.*

- Si $\Omega = (-\infty, 0)$, alors la seule vitesse de propagation admissible est donnée par $c = \frac{-1}{\sigma}$.
- Si $\Omega = (0, \infty)$, alors la seule vitesse de propagation admissible est donnée par $c = \frac{1}{\sigma}$.

Preuve : Dans le cas $\Omega = (-\infty, 0)$, la condition au bord, en 0, s'écrit de cette manière :

$$\sigma \partial_t \varphi(0 + ct) + \partial_\nu \varphi(0 + ct) = (\sigma c + 1) \partial_x \varphi(ct) \text{ pour tout } t > 0,$$

car dans ce cas $\nu(0) = 1$ et $\partial_x \varphi = \partial_\nu \varphi$. Le choix de $c = -\frac{1}{\sigma}$ est ainsi forcé. Dans le cas $\Omega = (0, \infty)$, nous avons cette fois $\nu(0) = -1$ et $\partial_x \varphi = -\partial_\nu \varphi$, d'où

$$\sigma \partial_t \varphi(0 + ct) + \partial_\nu \varphi(0 + ct) = (\sigma c - 1) \partial_x \varphi(ct) \text{ pour tout } t > 0,$$

qui nous oblige à choisir $c = \frac{1}{\sigma}$. ■

Remarque 3.3.2 *Pour le cas des conditions au bord de Dirichlet, on ne peut obtenir qu'une sur-solution, tandis que pour les solutions sous conditions au bord de Neumann, il nous faut connaître le signe de $\partial_x \varphi$ dans $\bar{\Omega}$ pour savoir si l'on est en présence d'une sous-solution ou d'une sur-solution.*

Remarque 3.3.3 *Il est clair que si φ est définie sur $(0, \infty)$, il faut que $c > 0$ pour que la solution de similarité $u(t, x) = \varphi(x + ct)$ soit bien définie. Tandis que si φ est définie sur $(-\infty, 0)$, il nous faut $c < 0$.*

Pour la recherche des solutions de l'équation (71), nous étudions le système

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ (u + c)v - u|u|^{p-1} + \lambda u \end{pmatrix}. \quad (72)$$

Comme au chapitre précédent, nous raisonnons à l'aide d'argument de plan des phases. L'étude de la vélocité et de la convexité du support des trajectoires montrent, de manière analogue au cas du Système (32), que l'existence de solution positives sur un intervalle non-borné dépend des équilibres de (72) situés dans le demi plan $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$. Lorsque $\lambda \leq 0$, le point $(0, 0)$ est l'unique équilibre. On utilise le théorème d'Hartman-Grobman sur la linéarisation. La linéarisation en $(0, 0)$ du Système (72) nous donne

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \text{ où } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda & c \end{pmatrix}.$$

Pour $\lambda = 0$, l'équilibre n'est pas hyperbolique et nous ne pouvons pas conclure en utilisant la méthode de linéarisation. Par contre, lorsque $\lambda < 0$, $(0, 0)$ est hyperbolique. On a $\text{tr}(A) = c$ et $\det(A) = -\lambda$. Lorsque $c^2 + 4\lambda < 0$, l'équilibre est un tourbillon. Il nous faut éviter ce cas afin de s'assurer de la positivité des solutions. On se restreint au cas $c^2 + 4\lambda \geq 0$. On calcule les valeurs propres de A et les vecteurs propres associés afin d'utiliser les directions asymptotiques de l'équilibre linéarisé, qui sont localement identiques à

celles de l'équilibre du Système (72). Premièrement, si $c^2 + 4\lambda > 0$, alors la matrice A a deux valeurs propres

$$x_+ = \frac{c + \sqrt{c^2 + 4}}{2} \quad \text{et} \quad x_- = \frac{c - \sqrt{c^2 + 4}}{2},$$

dont les vecteurs propres associés sont respectivement

$$V_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ x_+ \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V_- = \begin{pmatrix} 1 \\ x_- \end{pmatrix}.$$

Si $c > 0$, on a $x_+ > 0$ et $x_- > 0$. De plus, $(0, 0)$ est un nœud instable et répulsif. Les solutions (u, v) que nous obtenons par image des directions asymptotiques sont définies sur $(-\infty, 0)$. Ce n'est pas compatible avec $c > 0$ et nous ne pouvons pas construire de solution de similarité dans ce cas. Si $c < 0$, on a $x_+ < 0$ et $x_- < 0$. De plus, $(0, 0)$ est un nœud stable et attractif. Les solutions (u, v) que nous obtenons par image des directions asymptotiques sont définies sur $(0, \infty)$. Ce n'est pas compatible avec $c < 0$ et nous ne pouvons pas construire de solution de similarité dans ce cas non plus. Il nous reste le cas $c^2 + 4\lambda = 0$, où la matrice A a une seule valeur propre : $x_0 = \frac{c}{2}$. L'équilibre $(0, 0)$ est stable et attractif si $c < 0$, tandis qu'il est instable et répulsif si $c > 0$. Encore une fois, on a une incompatibilité entre le domaine de définition du front φ et le signe de la vitesse de propagation. En conclusion, nous avons ce résultat.

Lemme 3.3.4 *Lorsque $\lambda < 0$, il n'existe pas de solution de similarité solvant le Problème (62) lorsque la condition au bord $\mathcal{B}(u) = 0$ désigne les conditions au bord de Neumann, de Dirichlet ou les conditions au bord dynamiques.*

Lorsque $\lambda > 0$, pour tout $c \in \mathbb{R}$, on considère $u(x, t) = \varphi(x + ct)$ où $\varphi \equiv \lambda^{\frac{1}{p-1}}$ et l'on a le résultat suivant :

Lemme 3.3.5 *Lorsque $\lambda > 0$, il existe des solutions de similarité, avec une vitesse de propagation quelconque, solvant le Problème (62) lorsque la condition au bord $\mathcal{B}(u) = 0$ désigne les conditions au bord de Neumann ou les conditions au bord dynamiques.*

En posant quelques restrictions sur la vitesse de propagation, il est possible de prouver l'existence de solutions de similarité non constantes.

Lemme 3.3.6 *Pour tout $\lambda > 0$ et tout $\sigma > 0$, il existe des solutions de similarité non constantes du Problème (62)*

- dans $\Omega = (0, \infty)$ avec une vitesse de propagation égale à $\frac{1}{\sigma}$ et qui tendent vers 0 lorsque $x \rightarrow \infty$ et $t \rightarrow \infty$,
- dans $\Omega = (-\infty, 0)$ avec une vitesse de propagation égale à $\frac{-1}{\sigma}$ et qui tendent vers 0 lorsque $x \rightarrow -\infty$ et $t \rightarrow \infty$,

lorsque la condition au bord $\mathcal{B}(u) = 0$ désigne les conditions au bord dynamiques $\sigma \partial_t u + \partial_\nu u = 0$.

Preuve : Comme pour le cas précédent $\lambda < 0$, on considère le Système (72), puis sa linéarisation autour de l'équilibre $(0, 0)$, à savoir :

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \text{ où } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda & c \end{pmatrix}.$$

Pour tout $c \neq 0$, et tout $\lambda > 0$, le système linéarisé possède deux valeurs propres distinctes et de signe opposé

$$x_+ = \frac{c + \sqrt{c^2 + 4}}{2} \text{ et } x_- = \frac{c - \sqrt{c^2 + 4}}{2},$$

dont les vecteurs propres associés sont respectivement

$$V_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ x_+ \end{pmatrix} \text{ et } V_- = \begin{pmatrix} 1 \\ x_- \end{pmatrix}.$$

L'équilibre $(0, 0)$ est alors un point-selle pour le système linéarisé et pour le Système (72). Lorsque $c > 0$, on a $x_- < 0$, on considère la direction asymptotique donnée par le vecteur V_- , et d'après le théorème de linéarisation d'Hartman-Grobman, on obtient une solution positive (u, v) de (72) définie sur $[0, \infty)$ avec $u(\infty) = v(\infty) = 0$ et initiée dans un voisinage de $(0, 0)$. Lorsque $c < 0$, on a $x_+ > 0$. Comme précédemment, on considère la direction asymptotique donnée par le vecteur V_+ , et on obtient une solution positive (u, v) de (72) définie sur $(-\infty, 0]$ avec $u(-\infty) = v(-\infty) = 0$ et initiée dans un voisinage de $(0, 0)$. Ainsi, lorsque $c > 0$, on obtient une solution de similarité de l'équation (71) dans $[0, \infty)$, et si on spécifie $c = \frac{1}{\sigma}$ on obtient le premier point du lemme. De même avec $c < 0$, on obtient le second point en spécifiant $c = \frac{-1}{\sigma}$. Voir Figure 3.1. ■

Ces solutions de similarité sont des sur-solutions lorsqu'on considère d'autres conditions au bord.

Corollaire 3.3.7 *Pour tout $\lambda > 0$, il existe des solutions globales non constantes du Problème (62)*

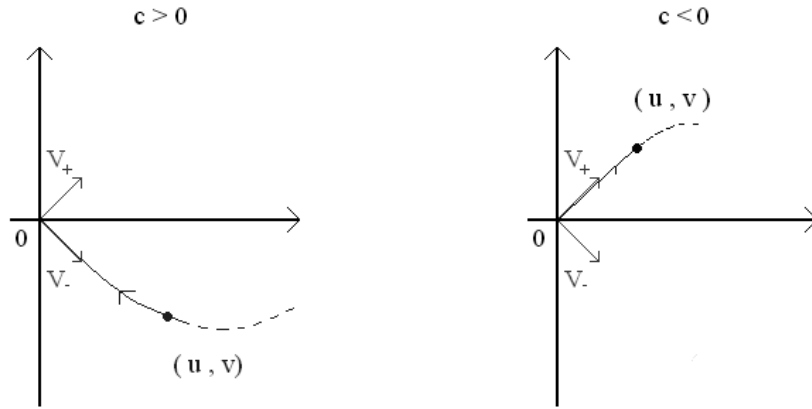


FIG. 3.1 – Solution du Système (72) au voisinage de $(0, 0)$.

- dans $\Omega = (0, \infty)$ qui tendent vers 0 lorsque $x \rightarrow \infty$ et $t \rightarrow \infty$,
 - dans $\Omega = (-\infty, 0)$ qui tendent vers 0 lorsque $x \rightarrow -\infty$ et $t \rightarrow \infty$,
- lorsque la condition au bord $\mathcal{B}(u) = 0$ désigne les conditions au bord de Dirichlet ou de Neumann.

Preuve : Pour le premier cas, il suffit de considérer la solution de similarité $\varphi(x + ct)$ définie sur $\Omega = (0, \infty)$ et mise en évidence par le lemme précédent. Puisque $\varphi > 0$ sur Ω , on a clairement une sur-solution pour les conditions de Dirichlet. Pour les conditions de Neumann, il suffit de considérer la trajectoire (u, v) de la preuve précédente uniquement lorsqu'elle se situe dans le cadran $\{v < 0\}$. Dans ce cas, on a $\partial_\nu \varphi(0 + ct) = -\partial_x \varphi(0 + ct) > 0$ pour tout $t > 0$. Pour le second cas, on raisonne analoguement avec la solution de similarité $\varphi(x + ct)$ définie sur $\Omega = (-\infty, 0)$, mise en évidence par le lemme précédent et restreinte au cadran $\{v > 0\}$ car dans ce cas $\partial_\nu \varphi(0 + ct) = \partial_x \varphi(0 + ct) > 0$. ■

En étudiant le plan des phases du Système (72) autour de l'équilibre $(\lambda^{\frac{1}{p-1}}, 0)$, on obtient des solutions de similarité pour les conditions au bord dynamiques.

Lemme 3.3.8 Soient $\lambda > 0$ et $\sigma > 0$. Si $\sigma > \lambda^{\frac{-1}{p-1}}$, et si la condition au bord $\mathcal{B}(u) = 0$ désigne les conditions au bord dynamiques $\sigma \partial_t u + \partial_\nu u = 0$, il existe des solutions de similarité non constantes du Problème (62) dans $\Omega = (-\infty, 0)$ qui tendent vers $\lambda^{\frac{1}{p-1}}$ lorsque $x \rightarrow -\infty$ et $t \rightarrow \infty$.

Preuve : On considère la linéarisation du Système (72) autour de l'équilibre $(\lambda^{\frac{1}{p-1}}, 0)$, qui nous donne le système

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \text{ où } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda(1-p) & \lambda^{\frac{1}{p-1}} + c \end{pmatrix}.$$

On a $\det(B) = (p-1)\lambda > 0$ et $\text{tr}(B) = \lambda^{\frac{1}{p-1}} + c$. Ainsi, l'équilibre $(0, 0)$ est un nœud ou un tourbillon instable et répulsif lorsque $\lambda^{\frac{1}{p-1}} + c > 0$ pour le système linéarisé, de même que $(\lambda^{\frac{1}{p-1}}, 0)$ pour le Système (72). En considérant une trajectoire (u, v) de (72) définie sur $(-\infty, 0]$ et initiée suffisamment proche de l'équilibre $(\lambda^{\frac{1}{p-1}}, 0)$, on obtient une fonction φ définie sur $(-\infty, 0)$ qui tend vers $\lambda^{\frac{1}{p-1}}$ lorsque $x \rightarrow -\infty$. En posant $w(x, t) = \varphi(x - \frac{1}{\sigma}t)$, on a une solution de similarité du Problème (62) définie sur $\Omega = (-\infty, 0)$ pour $t > 0$ sous les conditions au bord dynamiques $\sigma\partial_t u + \partial_\nu u = 0$ lorsque $-\frac{1}{\sigma} + \lambda^{\frac{1}{p-1}} > 0$. ■

Remarque 3.3.9 *Cette construction ne peut pas être effectuée lorsque $\Omega = (0, \infty)$. En effet, dans ce cas, une solution de similarité sous la condition dynamique $\sigma\partial_t u + \partial_\nu u = 0$ s'écrit $u(x, t) = \varphi(x + \frac{1}{\sigma}t)$ et afin de définir u sur Ω pour tout $t > 0$, il faut que φ soit définie sur $(0, \infty)$. Cela s'obtient lorsque l'équilibre $(\lambda^{\frac{1}{p-1}}, 0)$ est stable, ce qui n'a lieu que pour $\lambda^{\frac{1}{p-1}} + \frac{1}{\sigma} \leq 0$. Ce qui contredit $\sigma > 0$ et $\lambda > 0$.*

Les principaux résultats de ce chapitre font l'objet d'un article soumis à publication [40].

Chapitre 4

Le phénomène de Fujita dans des domaines extérieurs sous conditions au bord dynamiques

Ce chapitre traite du problème parabolique de réaction diffusion non linéaire suivant

$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta u + u^p & \text{dans } \overline{\Omega} \times (0, \infty), \\ \mathcal{B}_\sigma(u) := \sigma \partial_t u + \partial_\nu u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (0, \infty), \\ u(\cdot, 0) = \varphi & \text{dans } \overline{\Omega}, \\ u \geq 0 & \text{dans } \overline{\Omega} \times (0, \infty), \end{cases} \quad (73)$$

dans un domaine extérieur Ω de \mathbb{R}^N . C'est-à-dire, pour $N \geq 2$, un ouvert connexe Ω de \mathbb{R}^N tel que $\overline{\Omega}^c$ soit un domaine borné non vide, et lorsque $N = 1$, Ω est le complémentaire d'un intervalle compact. Après un retour sur l'historique du phénomène de Fujita et un rappel du cas d'explosion où l'exposant $p \in (1, 1 + \frac{2}{N}]$, nous consacrons l'essentiel du chapitre à prouver l'existence de solutions globales positives non-triviales du Problème (73) pour des exposants $p > 1 + \frac{2}{N}$.

Pendant tout le chapitre, nous supposons que la condition au bord est dissipative

$$\sigma \geq 0 \text{ sur } \partial\Omega \times (0, \infty), \quad (74)$$

et afin d'avoir des solutions régulières

$$\sigma \in \mathcal{C}^1(\partial\Omega \times (0, \infty)). \quad (75)$$

Nous avons aussi besoin des hypothèses suivantes sur la donnée initiale qui devra être continue, non-triviale, bornée, positive et s'annuler à l'infini :

$$\varphi \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}), \quad 0 < \|\varphi\|_\infty < \infty, \quad \varphi \geq 0, \quad \lim_{\|x\|_2 \rightarrow \infty} \varphi(x) = 0. \quad (76)$$

Par la suite, toute solution est supposée être positive et non-triviale, c'est-à-dire à valeurs dans $[0, \infty)$ et différente de la constante nulle.

4.1 Historique

Cette partie, non exhaustive, présente quelques résultats marquants sur le phénomène de Fujita.

En 1966, Hiroshi Fujita étudie le problème suivant

$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta u + u^p & \text{dans } \mathbb{R}^N \times (0, \infty), \\ u(\cdot, 0) = \varphi & \text{dans } \mathbb{R}^N, \\ u \geq 0 & \text{dans } \mathbb{R}^N \times (0, \infty), \end{cases} \quad (\text{F})$$

où la donnée initiale φ est une fonction positive de classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^N)$ ayant ses dérivées d'ordre 0, 1 et 2 bornées sur \mathbb{R}^N . Dans [19], Fujita cherche des fonctions continues u sur $\mathbb{R}^N \times [0, T)$, avec $T \in (0, \infty]$, vérifiant les conditions du Problème (F) et satisfaisant à la condition suivante sur l'ordre de croissance

$$\exists M > 0, \exists 0 < \beta < 2 : \forall (x, t) \in \mathbb{R}^N \times [0, T) \quad |u(x, t)| \leq M \exp(|x|^\beta),$$

nécessaire à l'unicité de la solution u , voir notamment [20]. Il prouve l'existence d'une dichotomie sur la question de la globalité des solutions du Problème (F) : lorsque l'exposant p de la partie non-linéaire vérifie $p < 1 + \frac{2}{N}$, aucune solution positive non-triviale de ce problème ne peut être globale (ce cas s'appelle le "cas d'explosion"), alors que pour $p > 1 + \frac{2}{N}$, il existe des solutions positives non-triviales globales si l'on considère de petites données initiales φ . En 1973 Kantaro Hayakawa [22], puis en 1981 Fred B. Weissler [52] complètent l'étude de Fujita en démontrant que l'exposant critique $p = 1 + \frac{2}{N}$ appartient au cas d'explosion.

En 1989, Catherine Bandle et Howard A. Levine étudient les solutions classiques du problème avec les conditions au bord de Dirichlet suivant

$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta u + u^p & \text{dans } \bar{\Omega} \times (0, \infty), \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (0, \infty), \\ u(\cdot, 0) = \varphi & \text{dans } \bar{\Omega}, \\ u \geq 0 & \text{dans } \bar{\Omega} \times (0, \infty), \end{cases} \quad (\text{D})$$

et qui vérifient la condition suivante sur l'ordre de croissance

$$\forall k > 0, |u(x, t)|e^{-k|x|} \rightarrow 0 \text{ et } |\nabla u(x, t)|e^{-k|x|} \rightarrow 0 \text{ quand } |x| \rightarrow 0,$$

lorsque Ω est un domaine extérieur de \mathbb{R}^N . Dans [3] et [4], ils ont montré que le phénomène découvert par Fujita est encore vérifié avec le même exposant critique $p = 1 + \frac{2}{N}$ pour le Problème (D). En 1996, Ryuichi Suzuki [46] prouve que l'exposant critique appartient au cas d'explosion lorsque $N \geq 3$.

En 1997, Kiyoshi Mochizuki et Ryuichi Suzuki généralisent les résultats de Fujita et de Bandle-Levine en étudiant les solutions faibles des Problèmes (F) et (D). Leur concept de solutions faibles correspond à des fonctions continues bornées qui vérifient les équations des Problème (F) ou (D) au sens des distributions, avec l'espace test $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^N)$ ou $\mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$. Dans [33], Mochizuki et Suzuki démontrent que le phénomène de Fujita s'étend à ces solutions faibles avec le même exposant critique $p = 1 + \frac{2}{N}$, qui appartient au cas d'explosion lorsque $N \geq 3$.

En 2000, Howard A. Levine et Qi S. Zhang s'intéressent au problème avec les conditions au bord de Neumann suivant

$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta u + u^p & \text{dans } \overline{\Omega} \times (0, \infty), \\ \partial_\nu u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (0, \infty), \\ u(\cdot, 0) = \varphi & \text{dans } \overline{\Omega}, \\ u \geq 0 & \text{dans } \overline{\Omega} \times (0, \infty), \end{cases} \quad (\text{N})$$

où φ est une fonction de classe $\mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ et où Ω est un domaine extérieur de \mathbb{R}^N . Dans [29], ils s'intéressent aux solutions faibles, au sens des distributions avec l'espace test $\mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ et qui ne sont soumises à aucune restriction sur l'ordre de croissance, et montrent que le phénomène de Fujita s'applique aux solutions du Problème (N), et que l'exposant critique $p = 1 + \frac{2}{N}$ appartient au cas d'explosion dès que $N \geq 3$.

En 2006, Catherine Bandle, Joachim von Below et Wolfgang Reichel remplacent les conditions au bord de Dirichlet par les conditions au bord dynamiques et étudient le problème (73). Dans [2], ils démontrent, dans le cas où le coefficient σ est une constante de $(0, \infty)$, que toute solution explose en temps fini lorsque $p < 1 + \frac{2}{N}$ et pour $p \leq 1 + \frac{2}{N}$ si $N \geq 3$. Lorsque $p > 1 + \frac{2}{N}$ et $\sigma > 0$ est constant, ils construisent, pour une donnée initiale suffisamment petite, une (sur-)solution régulière du Problème (73) lorsque le complémentaire de Ω est étoilé par rapport à l'origine avec $\min\{|x \cdot \nu(x)| / x \in \partial\Omega\} > \sigma N$.

4.2 Préliminaires

Dans un premier temps, nous définissons le type de solutions que nous utiliserons dans la suite de ce chapitre.

4.2.1 Définition

On appellera “solution positive du Problème (73)” une fonction $u : (x, t) \mapsto u(x, t)$ définie dans $\bar{\Omega} \times [0, T)$ à valeurs dans \mathbb{R}^+ , de classe \mathcal{C}^2 en la variable x et de classe \mathcal{C}^1 en la variable t , vérifiant

$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta u + u^p & \text{dans } \bar{\Omega} \times (0, T), \\ \sigma \partial_t u + \partial_\nu u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (0, T), \\ u(\cdot, 0) = \varphi & \text{dans } \bar{\Omega}, \\ u \geq 0 & \text{dans } \bar{\Omega} \times (0, T), \end{cases}$$

où φ est une fonction donnée dans $\mathcal{C}(\bar{\Omega})$. Le temps $T \in (0, \infty]$ désigne le temps d’existence maximale de la solution u . Lorsque $T = \infty$, on dira que la solution est globale. D’après [4], si $T < \infty$, la solution u explose en temps fini, c’est-à-dire :

$$\limsup_{t \nearrow T} \sup_{x \in \bar{\Omega}} u(x, t) = \infty.$$

Remarquons que lorsque la donnée initiale φ est de classe $\mathcal{C}^2(\bar{\Omega})$, la solution u est dans $\mathcal{C}^{2,1}(\bar{\Omega} \times [0, T))$, tandis que si φ est seulement continue sur $\bar{\Omega}$, on aura $u \in \mathcal{C}(\bar{\Omega} \times [0, T)) \cap \mathcal{C}^{2,1}(\bar{\Omega} \times (0, T))$.

4.2.2 Existence des solutions

Nous rappelons une procédure habituelle qui nous permet de construire, dans un domaine extérieur, des solutions, au sens 4.2.1, du Problème (73) pour des données initiales φ uniformément bornées. Soit $B(0, R)$ la boule centrée à l’origine et de rayon $R > 0$ telle que $\bar{\Omega}^c \subset B(0, R)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous définissons $B_n := B(0, R + n)$ et le domaine tronqué $\Omega_n := \Omega \cap B_n$. Le bord Ω_n se décompose en deux ensembles disjoints, relativement ouverts dans $\partial\Omega_n$:

$$\partial\Omega_n = \partial\Omega \dot{\cup} \partial B_n.$$

Définissons aussi une suite croissante de données initiales $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telle que

$$\begin{aligned} 0 \leq \varphi_n \leq \varphi & \quad \text{dans} & \quad \bar{\Omega}_n, \\ \varphi_{n-1} \leq \varphi_n & \quad \text{dans} & \quad \bar{\Omega}_{n-1}, \\ \varphi_n \equiv 0 & \quad \text{sur} & \quad \partial B_n, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi_n - \varphi\|_\infty = 0 & \quad \text{sur tout compact de} & \quad \bar{\Omega}, \end{aligned} \tag{77}$$

que l'on nommera les troncatures de φ . On supposera, sans restriction, que la troncature préserve les relations d'ordre, c'est-à-dire que si l'on a deux fonctions φ et ψ uniformément bornées avec $\varphi \leq \psi$ dans $\overline{\Omega}$, alors on a $\varphi_n \leq \psi_n$ dans $\overline{\Omega}_n$. Ensuite, considérons le problème suivant sous des conditions au bord mixtes

$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta u + u^p & \text{dans } \overline{\Omega}_n \times (0, \infty), \\ \sigma \partial_t u + \partial_\nu u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (0, \infty), \\ u = 0 & \text{sur } \partial B_n \times (0, \infty), \\ u(\cdot, 0) = \varphi_n & \text{dans } \overline{\Omega}_n, \\ u \geq 0 & \text{dans } \overline{\Omega}_n \times (0, \infty). \end{cases} \quad (\text{P}(n))$$

Appelons z la solution maximale du problème de Cauchy

$$\begin{cases} z' = z^p, \\ z(0) = \|\varphi\|_\infty, \end{cases}$$

de temps d'existence maximale $t_0 = \frac{1}{(p-1)\|\varphi\|_\infty^{p-1}}$. D'après les résultats de [10], nous savons que pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, le Problème (P(n)) admet une solution $u_n \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}_n \times [0, T_n]) \cap \mathcal{C}^{2,1}(\overline{\Omega}_n \times (0, T_n))$, où T_n est le temps d'existence maximale de u_n . De plus, d'après le principe de comparaison de [8], on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$0 \leq u_n(x, t) \leq u_{n+1}(x, t) \leq z(t) \quad \text{pour tout } (x, t) \in \overline{\Omega} \times [0, t_0],$$

ce qui donne $t_0 \leq T_n$. Par conséquent, nous obtenons une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de fonctions dans $\mathcal{C}(\overline{\Omega}_n \times [0, t_0]) \cap \mathcal{C}^{2,1}(\overline{\Omega}_n \times (0, t_0))$. Des arguments standards basés sur des estimations à priori pour l'équation de la chaleur (voir Refs. [2] et [26]) impliquent que $u_n \rightarrow u \in \mathcal{C}_{loc}(\overline{\Omega} \times [0, t_0]) \cap \mathcal{C}_{loc}^{2,1}(\overline{\Omega} \times (0, t_0))$ quand $n \rightarrow \infty$, où u est une solution positive dans $\overline{\Omega} \times [0, t_0]$ du Problème (73). De plus, comme les fonctions u_n s'annulent sur le bord ∂B_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la solution u s'annule à l'infini :

$$\lim_{\|x\|_2 \rightarrow \infty} u(x, t) = 0 \quad \forall t \in [0, T].$$

Remarquons que t_0 n'est qu'une borne inférieure pour le temps d'existence maximale de chaque solution u_n et u . Il est possible que les temps T_n et T soient infinis. En effet, les résultats sur l'explosion en temps fini des solutions des problèmes sous les conditions au bord dynamiques issus de [11] ne peuvent pas être appliqués au cas des conditions mixtes des problèmes (P(n)) car leurs solutions u_n s'annulent sur une partie du bord $\partial\Omega_n$. C'est pourquoi on choisit d'imposer une condition homogène de Dirichlet sur le bord artificiel ∂B_n . D'ailleurs, nous verrons dans la section 4.3 comment obtenir $T_n = \infty$.

4.2.3 Cas d'explosion

Nous rappelons un résultat sur l'explosion de toutes les solutions de (73) dans le cas sous-critique. Il s'agit d'une généralisation du résultat de Bandle, von Below et Reichel [2], énoncé ici avec des hypothèses plus générales sur le coefficient σ .

Théorème 4.2.1 *Sous les hypothèses (74)-(75) et (76), toutes les solutions positives du Problème (73) explosent en temps fini lorsque $p \in (1, 1 + \frac{2}{N})$. Si $N \geq 3$, l'énoncé reste vrai pour $p = 1 + \frac{2}{N}$.*

Preuve : On considère u une solution de (73) avec une donnée initiale φ satisfaisant à (76). Soit ψ une fonction vérifiant (76) et telle que $\psi \leq \varphi$ dans $\overline{\Omega}$ et avec

$$\psi = 0 \text{ sur } \partial\Omega .$$

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite des solutions des problèmes tronqués (P(n)) avec la suite $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ des troncatures de φ . Introduisons une autre suite $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ correspondant aux troncatures de ψ et avec $\psi_n \leq \varphi_n$ dans $\overline{\Omega}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, considérons la solution positive v_n du problème

$$\begin{cases} \partial_t v_n = \Delta v_n + v_n^p & \text{dans } \overline{\Omega}_n \times (0, S_n), \\ v_n = 0 & \text{sur } (\partial\Omega \cup \partial B_n) \times (0, S_n), \\ v_n(\cdot, 0) = \psi_n & \text{dans } \overline{\Omega}_n, \\ v_n \geq 0 & \text{dans } \overline{\Omega}_n \times (0, S_n), \end{cases}$$

ainsi que v la solution du problème de Dirichlet suivant

$$\begin{cases} \partial_t v = \Delta v + v^p & \text{dans } \overline{\Omega} \times (0, S), \\ v = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (0, S), \\ v(\cdot, 0) = \psi & \text{dans } \overline{\Omega}, \\ v \geq 0 & \text{dans } \overline{\Omega} \times (0, S), \end{cases}$$

obtenue par la méthode décrite dans la section 4.2.2. D'après le principe de comparaison de [8], on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$0 \leq v_n \leq u_n \text{ dans } \overline{\Omega}_n \times [0, \tau) ,$$

pour tout $0 < \tau < \min\{S_n, T_n\}$. D'où $T_n \leq S_n$. De même, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$0 \leq u_n \leq u \text{ dans } \overline{\Omega}_n \times [0, \tau) ,$$

pour tout $0 < \tau < \min\{T_n, T\}$. D'où $T \leq T_n$. Ainsi on a $T \leq S_n$, et si la solution u est globale, on a $T = \infty$, puis $S_n = \infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Par construction la solution v serait globale. Or, d'après [4] (et [3] pour la dimension 1), la solution v n'est jamais globale pour notre choix de l'exposant p . Par conséquent, la solution u explose en temps fini. ■

Notons que la preuve n'utilise pas directement les hypothèses (74)-(75) sur le coefficient σ , cependant elles sont nécessaires pour obtenir des solutions régulières et positives.

4.3 Solutions globales

Tout au long de cette section, nous considérons des exposants p sur-critiques, c'est-à-dire :

$$p > 1 + \frac{2}{N}.$$

Notre technique consistera à construire une fonction bornée w qui majorera chacune des solutions u_n de (P(n)) dans $\bar{\Omega}_n \times [0, T_n)$. Ceci nous donnera une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de solutions globales dans $\mathcal{C}(\bar{\Omega}_n \times [0, \infty)) \cap \mathcal{C}^{2,1}(\bar{\Omega}_n \times (0, \infty))$. Ainsi, la solution u de (73) sera aussi globale.

4.3.1 Cas $N \geq 3$

Dans cette partie, nous allons prouver l'existence de solutions globales en comparant la solution du Problème (73) avec la solution du problème sous la condition au bord de Neumann suivant

$$\begin{cases} \partial_t w = \Delta w + w^p & \text{dans } \bar{\Omega} \times (0, \infty), \\ \partial_\nu w = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (0, \infty), \\ w(\cdot, 0) = \psi & \text{dans } \bar{\Omega}, \\ w \geq 0 & \text{dans } \bar{\Omega} \times (0, \infty), \end{cases} \quad (78)$$

où ψ est une donnée initiale de classe $\mathcal{C}^2(\bar{\Omega})$ vérifiant (76). D'après Levine et Zhang [29], il est connu que ce Problème (78) admette des solutions pour $p > 1 + \frac{2}{N}$ et pour des données initiales ψ suffisamment petites. Levine et Zhang précisent que ψ doit vérifier $\psi(x) \leq b(1 + \|x\|_2^2)^{-N-\delta}$ pour un $\delta > 0$ quelconque et une constante $b > 0$ dépendante de δ . Nous montrons que la solution du Problème (78) de Neumann majore la solution du Problème (73) sous conditions dynamiques lorsque les données initiales sont bien ordonnées et lorsque pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\Delta \psi_n + \psi_n^p \geq 0 \text{ dans } \bar{\Omega}_n, \quad (79)$$

où $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est la suite des données initiales tronquées définie en (77). Nous choisissons une "petite" donnée initiale particulière ψ vérifiant cette équation (79). Par exemple, si l'on suppose que $0 \in B(0, r) \subset \bar{\Omega}^c \subset B(0, R)$, et pour

une constante $d > 0$ proche de 0, on peut choisir la fonction suivante :

$$\psi(x) = \begin{cases} d \exp\left(\frac{r^2}{\|x\|_2^2 - R^2}\right) & \text{dans } B(0, R) \\ 0 & \text{dans } B(0, R)^c \end{cases}.$$

Trivialement ψ coïncide avec chacune de ses troncatures ψ_n , et puisque $\psi \geq 0$ et $\Delta\psi \geq 0$ dans $B(0, r)^c$, les équations (79) sont vérifiées dans chaque domaine tronqué Ω_n .

Tout d'abord, nous avons besoin d'un lemme préliminaire dû à von Below et Pincet-Mailly, voir [10].

Lemme 4.3.1 *Soit une fonction ψ vérifiant (76) et (79). La suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ des solutions des problèmes sous conditions de Neumann*

$$\begin{cases} \partial_t w_n = \Delta w_n + w_n^p & \text{dans } \bar{\Omega}_n \times (0, T_{w_n}), \\ \partial_\nu w_n = 0 & \text{sur } \partial\Omega_n \times (0, T_{w_n}), \\ w_n = 0 & \text{sur } \partial B_n \times (0, T_{w_n}), \\ w_n(\cdot, 0) = \psi_n & \text{dans } \bar{\Omega}_n, \\ w_n \geq 0 & \text{dans } \bar{\Omega}_n \times (0, T_{w_n}), \end{cases}$$

associées aux troncatures de ψ vérifie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\partial_t w_n \geq 0 \text{ dans } \bar{\Omega} \times (0, T_{w_n}),$$

où T_{w_n} est le temps d'existence maximale de w_n .

Preuve : Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\tau \in (0, T_{w_n})$, la fonction w_n vérifie

$$\begin{cases} \partial_t w_n = \Delta w_n + w_n^p & \text{dans } \bar{\Omega}_n \times (0, \tau), \\ \partial_\nu w_n = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (0, \tau), \\ w_n = 0 & \text{sur } \partial B_n \times (0, \tau), \\ w_n(\cdot, 0) = \psi_n & \text{dans } \bar{\Omega}_n, \\ w_n \geq 0 & \text{dans } \bar{\Omega}_n \times (0, \tau), \end{cases}$$

dans le domaine borné $\bar{\Omega}_n$. D'après (76) et le principe du maximum fort de [8], on obtient

$$w_n > 0 \text{ dans } (\Omega_n \cup \partial\Omega) \times (0, \tau).$$

Ensuite, d'après les résultats de régularités issus de [26], les solutions w_n sont de classe $\mathcal{C}^{2,2}(\bar{\Omega}_n \times (0, \tau))$, et pour $y_n = \partial_t w_n \in \mathcal{C}^{2,1}(\bar{\Omega}_n \times (0, \tau))$, on a

$$\begin{cases} \partial_t y_n = \Delta y_n + p w_n^{p-1} y_n & \text{dans } \bar{\Omega}_n \times (0, \tau), \\ \partial_\nu y_n = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (0, \tau), \\ y_n = 0 & \text{sur } \partial B_n \times (0, \tau), \end{cases}$$

et avec (79), on a $y_n(\cdot, 0) \geq 0$. Avec le principe de comparaison de [8], on en conclut que $y_n \geq 0$ dans $\overline{\Omega}_n \times (0, \tau)$. Ceci étant vrai pour τ quelconque dans $(0, T_{w_n})$, on en déduit $y_n \geq 0$ dans $\overline{\Omega}_n \times (0, T_{w_n})$. ■

Lemme 4.3.2 *Soient un coefficient σ vérifiant (74) et (75), deux fonctions φ et ψ vérifiant (76), et $\psi \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ satisfaisant à (79). Si*

$$\varphi \leq \psi \text{ dans } \overline{\Omega}, \quad (80)$$

alors le Problème (73) avec la donnée initiale φ admet une solution u vérifiant

$$u \leq w \text{ dans } \overline{\Omega} \times (0, T_w),$$

et

$$0 < T_w \leq T \leq \infty,$$

où w est la solution du Problème (78) avec la donnée initiale ψ et de temps d'existence maximale T_w

Preuve : Considérons la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ des solutions des problèmes tronqués (P(n)) associée à la suite $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ des troncatures de φ , et la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ des solutions des problèmes sous conditions de Neumann

$$\begin{cases} \partial_t w_n = \Delta w_n + w_n^p & \text{dans } \overline{\Omega}_n \times (0, T_{w_n}), \\ \partial_\nu w_n = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (0, T_{w_n}), \\ w_n = 0 & \text{sur } \partial B_n \times (0, T_{w_n}), \\ w_n(\cdot, 0) = \psi_n & \text{dans } \overline{\Omega}_n, \\ w_n \geq 0 & \text{dans } \overline{\Omega}_n \times (0, T_{w_n}), \end{cases} \quad (\text{Neu}(n))$$

avec $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ les troncatures de ψ . Soit $n \in \mathbb{N}^*$ donné. Dans un premier temps, on montre que $w_n \leq w$ dans $\overline{\Omega}_n \times (0, T_w)$. Comme $\psi_n \leq \psi$, et comme w est une solution positive de (78), la fonction w vérifie

$$\begin{cases} \partial_t w \geq \Delta w + w^p & \text{dans } \overline{\Omega}_n \times (0, T_w), \\ \partial_\nu w \geq 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (0, T_w), \\ w \geq 0 & \text{sur } \partial B_n \times (0, T_w), \\ w(\cdot, 0) \geq \psi_n & \text{dans } \overline{\Omega}_n, \\ w \geq 0 & \text{dans } \overline{\Omega}_n \times (0, T_w). \end{cases}$$

Comme w_n est solution du Problème de Neumann (Neu(n)), le principe de comparaison de [8] donne

$$w_n \leq w \text{ dans } \overline{\Omega}_n \times (0, \tau), \quad (81)$$

pour tout $0 < \tau < \min\{ T_{w_n}, T_w \}$. On en déduit $T_w \leq T_{w_n}$. Ensuite, comme le lemme précédent assure que $\partial_t w_n \geq 0$, on obtient avec (74) :

$$\sigma \partial_t w_n + \partial_\nu w_n \geq 0 \text{ sur } \partial\Omega \times (0, T_{w_n}).$$

Puis comme w_n est solution de (Neu(n)), et grâce à (80), w_n vérifie

$$\begin{cases} \partial_t w_n \geq \Delta w_n + w_n^p & \text{dans } \bar{\Omega}_n \times (0, T_{w_n}), \\ \sigma \partial_t w_n + \partial_\nu w_n \geq 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (0, T_{w_n}), \\ w_n \geq 0 & \text{sur } \partial B_n \times (0, T_{w_n}), \\ w_n(\cdot, 0) \geq \varphi_n & \text{dans } \bar{\Omega}_n, \\ w_n \geq 0 & \text{dans } \bar{\Omega}_n \times (0, T_{w_n}). \end{cases}$$

D'autre part, on a par définition de u_n :

$$\begin{cases} \partial_t u_n = \Delta u_n + u_n^p & \text{dans } \bar{\Omega}_n \times (0, T_n), \\ \sigma \partial_t u_n + \partial_\nu u_n = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (0, T_n), \\ u_n = 0 & \text{sur } \partial B_n \times (0, T_n), \\ u_n(\cdot, 0) = \varphi_n & \text{dans } \bar{\Omega}_n, \\ u_n \geq 0 & \text{dans } \bar{\Omega}_n \times (0, T_n). \end{cases}$$

Le principe de comparaison de [8] implique

$$u_n \leq w_n \text{ dans } \bar{\Omega}_n \times (0, \tau), \quad (82)$$

pour tout $0 < \tau < \min\{ T_n, T_{w_n} \}$, puis $T_{w_n} \leq T_n$. Des équations (81) et (82), on obtient $T_w \leq T_n$ et $u_n \leq w$ dans $\bar{\Omega}_n \times (0, T_w)$. Ainsi la solution u du Problème (73) obtenue comme la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par le procédé décrit en 4.2.2 vérifie $u \leq w$ dans $\bar{\Omega} \times (0, T_w)$ et $T_w \leq T$. ■

Maintenant, il suffit de choisir une donnée initiale ψ_* vérifiant la condition (79) et suffisamment petite pour que le Problème (78) admette une solution globale.

Théorème 4.3.3 *Sous les conditions (74), (75) et (76), le Problème (73) admet des solutions globales lorsque la donnée initiale est suffisamment petite.*

Preuve : Une donnée initiale φ vérifiant (76) et $\varphi \leq \psi_*$ dans $\bar{\Omega}$, où ψ_* est la fonction décrite avant l'énoncé permet de conclure en utilisant le Lemme 4.3.2 . ■

Remarque 4.3.4 *Il est intéressant de noter que seule la dissipativité et la régularité du coefficient σ sont nécessaires comme hypothèses. On ne se pose aucune contrainte sur le coefficient σ (σ borné, σ indépendant du temps t). De plus la condition (79) sur la donnée initiale du Problème de Neumann ne concerne pas les données initiales φ de notre Problème (73).*

4.3.2 Cas des dimensions inférieures

En dimension 1 et 2, on ne peut plus utiliser le résultat [29] de Levine et Zhang. En effet, pour démontrer la globalité des solutions du Problème (78), ils utilisent les fonctions de Green de l'équation de la chaleur sous conditions au bord de Neumann, en particulier une majoration de ces fonctions par des gaussiennes qui est valide uniquement en dimension $N \geq 3$. Nous devons procéder différemment, et pour cela, nous avons besoin d'une hypothèse supplémentaire sur le coefficient σ . On suppose qu'il existe une constante $\zeta > 0$ telle que

$$\forall (x, t) \in \partial\Omega \times [0, \infty) : \sigma(x, t) \leq \zeta . \quad (83)$$

Nous commençons par traiter le cas de la dimension 2. À notre connaissance, le seul résultat sur la globalité des solutions en dimension 2 est le résultat de Bandle-von Below-Reichel pour les domaines étoilés, que nous énonçons ici avec des hypothèses plus générales. Notons que ce résultat est vrai en dimension $N \in \mathbb{N}^*$ quelconque.

Lemme 4.3.5 ([2], Lemme 28) *Soient φ une fonction vérifiant (76) et Ω un domaine extérieur de \mathbb{R}^2 tel que son complémentaire Ω^c soit étoilé par rapport à un point ω_* . Soit un coefficient σ vérifiant les hypothèses (74), (75) et (83). Si la borne ζ vérifie*

$$\min_{y \in \partial\Omega} |(y - \omega_*) \cdot \nu(y)| \geq 2\zeta ,$$

alors, le Problème (73) admet des solutions globales lorsque φ est suffisamment petite. De plus, certaines de ces solutions u vérifient

$$\forall t > 0 \quad \lim_{\|x\|_2 \rightarrow \infty} u(x, t) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \|u(\cdot, t)\|_\infty = 0 .$$

On en déduit un corollaire portant sur un problème avec conditions au bord mixtes, dont la preuve s'inspire du Lemme 28 de [2].

Corollaire 4.3.6 *Soient φ une fonction vérifiant (76), Ω un domaine extérieur de \mathbb{R}^2 et un coefficient $\sigma > 0$ vérifiant les hypothèses (74), (75) et (83). Pour tout $y \in \partial\Omega$, il existe \mathcal{N}_y un ouvert relatif de $\partial\Omega$ tel que le problème sous les conditions au bord mixtes suivant*

$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta u + u^p & \text{dans } \overline{\Omega} \times (0, \infty), \\ \sigma \partial_t u + \partial_\nu u = 0 & \text{sur } \mathcal{N}_y \times (0, \infty), \\ u = 0 & \text{sur } (\partial\Omega \setminus \mathcal{N}_y) \times (0, \infty), \\ u(\cdot, 0) = \varphi & \text{dans } \overline{\Omega} , \\ u \geq 0 & \text{dans } \overline{\Omega} \times (0, \infty), \end{cases} \quad (84)$$

admette des solutions globales lorsque φ est suffisamment petite. De plus, certaines de ces solutions u vérifient

$$\forall t > 0 \quad \lim_{\|x\|_2 \rightarrow \infty} u(x, t) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \|u(\cdot, t)\|_\infty = 0 .$$

Preuve : Soit $y \in \partial\Omega$. Il existe un vecteur $\mu \in \mathbb{R}^2$, dépendant du choix de y , tel que le produit scalaire entre le vecteur $y + \mu$ et la normale extérieure en y vérifie

$$(y + \mu) \cdot \nu(y) < -2\zeta .$$

Comme l'application $(\partial\Omega \ni z \mapsto (z + \mu) \cdot \nu(z) \in \mathbb{R})$ est continue, il existe un voisinage ouvert $\mathcal{N}_y \subseteq \partial\Omega$ de y tel que

$$(z + \mu) \cdot \nu(z) < -2\zeta \quad \forall z \in \mathcal{N}_y . \quad (85)$$

Considérons la fonction U définie sur $\bar{\Omega} \times [0, \infty)$ par

$$U(x, t) = A(t+1)^{-\gamma} \exp \frac{-\|x + \mu\|_2^2}{4(t+1)},$$

avec $A = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{p-1}\right)^{\frac{1}{p-1}}$ et $\gamma = \frac{1}{p-1}$. À l'aide du principe de comparaison de [8], nous allons montrer que U est une sur-solution du Problème (84) lorsque $\varphi \leq U(\cdot, 0)$ dans $\bar{\Omega}$. Tout d'abord, il est clair que $U \geq 0$, que $U \in \mathcal{C}^{2,1}(\bar{\Omega} \times [0, \infty))$ et que U vérifie :

$$\begin{aligned} \partial_t U(x, t) &= \left(\frac{-\gamma}{t+1} + \frac{\|x + \mu\|_2^2}{4(t+1)^2} \right) U(x, t), \\ \Delta U(x, t) &= \left(\frac{-N}{2(t+1)} + \frac{\|x + \mu\|_2^2}{4(t+1)^2} \right) U(x, t), \\ \partial_\nu U(x, t) &= \left(\frac{-(x + \mu) \cdot \nu(x)}{2(t+1)} \right) U(x, t). \end{aligned}$$

Nous avons

$$\partial_t U(x, t) - \Delta U(x, t) = \left(\frac{-\gamma}{t+1} + \frac{1}{(t+1)} \right) U(x, t) = \left(\frac{-\gamma + 1}{(t+1)} \right) U(x, t) .$$

Par définition des constantes A et γ , nous avons

$$\begin{aligned} \frac{-\gamma + 1}{(t+1)} &\geq A^{p-1} (t+1)^{\gamma(p-1)} \\ &\geq A^{p-1} (t+1)^{\gamma(p-1)} \exp \left((p-1) \frac{-\|x + \mu\|_2^2}{4(t+1)} \right), \end{aligned}$$

et nous en déduisons

$$\partial_t U - \Delta U - U^p \geq 0 \text{ dans } \bar{\Omega} \times [0, \infty) .$$

Ensuite, sur le bord $\partial\Omega$, on a

$$\sigma \partial_t U + \partial_\nu U = \left(\frac{-2\sigma\gamma - (x + \mu) \cdot \nu(x)}{2(t+1)} + \frac{\sigma \|x + \mu\|_2^2}{4(t+1)^2} \right) U.$$

En ignorant le terme positif $\frac{\sigma \|x + \mu\|_2^2}{4(t+1)^2}$, puis comme $p > 1 + \frac{2}{N} = 2$ donne $\gamma < 1$, et en utilisant l'hypothèse (83), on obtient la minoration suivante :

$$\sigma \partial_t U + \partial_\nu U \geq \left(\frac{-2\varsigma - (x + \mu) \cdot \nu(x)}{2(t+1)} \right) U.$$

Grâce à (85), on obtient $\sigma \partial_t U + \partial_\nu U \geq 0$ sur $\mathcal{N}_y \times [0, \infty)$. Finalement, sous la condition $\varphi \leq U(\cdot, 0)$ dans $\bar{\Omega}$, nous obtenons

$$\begin{cases} \partial_t U \geq \Delta U + U^p & \text{dans } \bar{\Omega} \times (0, \infty), \\ \sigma \partial_t U + \partial_\nu U \geq 0 & \text{sur } \mathcal{N}_y \times (0, \infty), \\ U \geq 0 & \text{sur } (\partial\Omega \setminus \mathcal{N}_y) \times (0, \infty), \\ U(\cdot, 0) \geq \varphi & \text{dans } \bar{\Omega}, \\ U \geq 0 & \text{dans } \bar{\Omega} \times (0, \infty). \end{cases}$$

En procédant avec les suites des troncatures de manière analogue à la preuve du Lemme 4.3.2, le principe de comparaison de [8] nous donne

$$0 \leq u \leq U \text{ dans } \bar{\Omega} \times [0, \infty) ,$$

où u désigne une solution du Problème (84). Cette dernière inégalité nous donne l'existence globale ainsi que les limites quand $\|x\|_2$ et t tendent vers l'infini. ■

Pour le cas de la dimension 1, nous allons utiliser le fait que Ω n'est pas connexe pour donner une réponse complète. Écrivons $\Omega = \mathbb{R} \setminus [a, b]$, avec $a < b$ deux réels. Définissons la fonction V de $\Omega \times [0, \infty)$ par

$$V(x, t) = \begin{cases} A(t+1)^{-\gamma} \exp \frac{-\|x+\mu_1\|_2^2}{4(t+1)} & \text{si } x \leq a, \\ A(t+1)^{-\gamma} \exp \frac{-\|x+\mu_2\|_2^2}{4(t+1)} & \text{si } x \geq b, \end{cases}$$

avec $A = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p-1} \right)^{\frac{1}{p-1}}$, $\gamma = \frac{1}{p-1}$ et où μ_1 et μ_2 sont des réels tels que

$$-(a + \mu_1) - \varsigma \geq 0 ,$$

et

$$(b + \mu_2) - \varsigma \geq 0 .$$

En remarquant que $\nu(a) = 1$ et que $\nu(b) = -1$, l'hypothèse (83) nous donne

$$\sigma \partial_t V + \partial_\nu V \geq 0 \text{ sur } (\{a\} \cup \{b\}) \times [0, \infty) .$$

En procédant comme dans la preuve du Corollaire 4.3.6, nous obtenons le résultat suivant :

Théorème 4.3.7 *Sous les hypothèses (74), (75), (76), (83), $N = 1$ et $p > 3$, le Problème (73) admet des solutions globales lorsque les données initiales sont suffisamment petites. De plus, certaines de ces solutions u vérifient*

$$\forall t > 0 \quad \lim_{\|x\|_2 \rightarrow \infty} u(x, t) = 0 \text{ et } \lim_{t \rightarrow \infty} \|u(\cdot, t)\|_\infty = 0 .$$

4.3.3 Remarques

Suite au Corollaire 4.3.6, l'idée de répondre au cas général en utilisant une copie de la méthode de la dimension 1 semblerait intéressante. En effet, le bord $\partial\Omega$ est un fermé de \mathbb{R}^N , compact car $\overline{\Omega}^c$ est borné. On pourrait donc recouvrir ce bord par un nombre fini d'ouverts \mathcal{N}_y tels que les problèmes sous conditions au bord mixtes

$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta u + u^p & \text{dans } \overline{\Omega} \times (0, \infty), \\ \sigma \partial_t u + \partial_\nu u = 0 & \text{sur } \mathcal{N}_y \times (0, \infty), \\ u = 0 & \text{sur } (\partial\Omega \setminus \mathcal{N}_y) \times (0, \infty), \\ u(\cdot, 0) = \varphi & \text{dans } \overline{\Omega}, \\ u \geq 0 & \text{dans } \overline{\Omega} \times (0, \infty), \end{cases}$$

admettent des solutions globales. Puis on utiliserait ces solutions globales pour créer un majorant des solutions du Problème (73), soit en prenant le minimum des solutions, soit le maximum des solutions, soit en prenant une combinaison linéaire de ces solutions à l'aide d'un partition de l'unité adéquate. Cependant, une telle méthode ne peut pas aboutir. Une application d'un tel procédé dans un domaine de borné de \mathbb{R}^N , comme dans l'exemple suivant, le démontre bien :

Exemple 4.3.8 Application dans $] -1, 1[$.

On considère le domaine $] -1, 1[\subseteq \mathbb{R}$ et $p > 3$. D'après von Below et Pincet-Mailly [11], l'unique solution du problème

$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta u + u^p & \text{dans } [-1, 1] \times (0, T_u), \\ \sigma \partial_t u + \partial_\nu u = 0 & \text{sur } (\{-1\} \cup \{1\}) \times (0, T_u), \\ u(\cdot, 0) = \varphi & \text{dans } [-1, 1], \\ u \geq 0 & \text{dans } [-1, 1] \times (0, T_u), \end{cases}$$

explose en un temps fini T_u dès que la donnée initiale $\varphi \in L^2([-1, 1])$ est positive et non-nulle. D'autre part, en procédant comme dans le Corollaire 4.3.6, on montre l'existence des fonctions u_{-1} et u_1 , solutions globales positives respectives des problèmes

$$\begin{cases} \partial_t u_{-1} = \Delta u_{-1} + u_{-1}^p & \text{dans } [-1, 1] \times (0, \infty), \\ \sigma \partial_t u_{-1} + \partial_\nu u_{-1} = 0 & \text{sur } \{-1\} \times (0, \infty), \\ u_{-1} = 0 & \text{sur } \{1\} \times (0, \infty), \\ u_{-1}(\cdot, 0) = \varphi_{-1} & \text{dans } [-1, 1], \\ u_{-1} \geq 0 & \text{dans } [-1, 1] \times (0, \infty), \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \partial_t u_1 = \Delta u_1 + u_1^p & \text{dans } [-1, 1] \times (0, \infty), \\ \sigma \partial_t u_1 + \partial_\nu u_1 = 0 & \text{sur } \{1\} \times (0, \infty), \\ u_1 = 0 & \text{sur } \{-1\} \times (0, \infty), \\ u_1(\cdot, 0) = \varphi_1 & \text{dans } [-1, 1], \\ u_1 \geq 0 & \text{dans } [-1, 1] \times (0, \infty), \end{cases}$$

où φ_{-1} et φ_1 sont deux fonctions continues sur $[-1, 1]$ s'annulant sur le bord $\{-1\} \cup \{1\}$, suffisamment petites pour assurer la globalité des solutions et non-nulles. S'il était possible de comparer la solution u avec u_{-1} et avec u_1 par l'un des procédés évoqués précédemment ($V = \min\{u_{-1}, u_1\}$, $V = \max\{u_{-1}, u_1\}$, ou une combinaison linéaire V de u_{-1} et u_1), alors $u \leq V$ dans $[-1, 1] \times (0, T_u)$ contredirait l'explosion en temps fini de u .

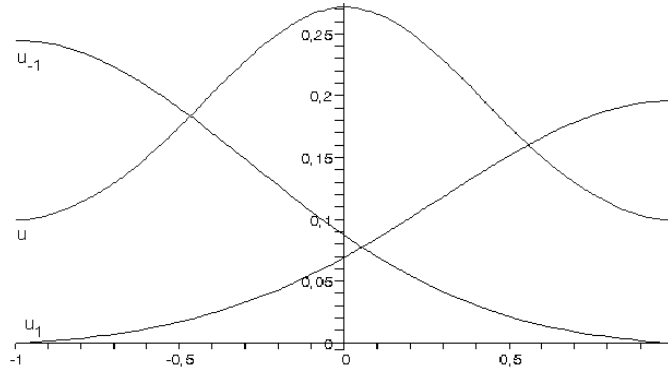


FIG. 4.1 – Situation typique de l'exemple 4.3.8.

Pour le cas de la dimension 2, utiliser la symétrie de $\overline{\Omega}^c$ semblait être pertinent. Cela consiste à considérer un domaine extérieur de \mathbb{R}^2 , de complémentaire Ω^c étoilé de manière à entrer dans le cadre du Lemme 4.3.5, puis de passer à un nouveau domaine extérieur (non-étoilé) Ω_1 dont le complémentaire

correspond à la réunion non-disjointe de Ω^c et du symétrique de Ω^c par rapport à un axe (D_1) . Puis par répétition, on obtient un domaine Ω_n en considérant le domaine dont le complémentaire est la réunion non-disjointe de Ω_n^c et de son symétrique par rapport à un axe (D_n) . Cette méthode ne peut fonctionner car rien ne nous assure que l'ensemble obtenu après plusieurs itérations soit encore un domaine.

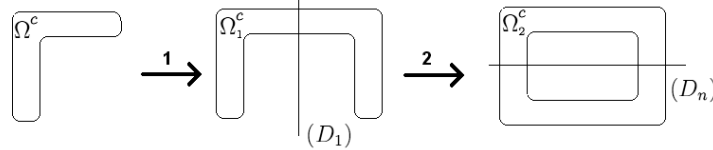


FIG. 4.2 – Cas où la symétrie produit un ensemble non-connexe.

4.4 Existence globale pour d'autres types d'ensembles

Dans cette section, nous donnons quelques résultats d'existence globale, qui découlent des résultats de ce chapitre, pour le problème

$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta u + u^p & \text{dans } \bar{\Omega} \times (0, \infty), \\ \sigma \partial_t u + \partial_\nu u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (0, \infty), \\ u(\cdot, 0) = \varphi & \text{dans } \bar{\Omega}, \\ u \geq 0 & \text{dans } \bar{\Omega} \times (0, \infty), \end{cases} \quad (86)$$

où φ satisfait à (76), σ vérifie (74), (75), éventuellement (83) et où Ω n'est plus un domaine extérieur de \mathbb{R}^N . On montrera que pour la généralisation des domaines extérieurs (au sens de l'équation (87)), l'exposant critique est encore $1 + 2/N$. Pour les domaines cylindriques ($\Omega = U \times \mathbb{R}^j$ avec U un domaine extérieur de \mathbb{R}^{N-j}), on montrera l'existence de solutions globales pour des exposants $p > \min\{1 + 2/(N - j), 1 + 2/j\}$, c'est-à-dire que l'exposant critique inférieur à $\min\{1 + 2/(N - j), 1 + 2/j\}$.

Le premier type d'ensembles qui nous intéresse est celui où Ω est un ouvert de \mathbb{R}^N dont le complémentaire Ω^c n'est pas simplement connexe. L'exemple typique est le cas où $\Omega^c = \{x \in \mathbb{R}^N / r \leq \|x\|_2 \leq R\}$ avec $0 < r < R$. Dans ce cas, l'ouvert Ω se décompose ainsi

$$\Omega = \bigcup_{i=0}^l \Omega_i, \quad (87)$$

où $l \in \mathbb{N}^*$ est donné, Ω_0 est un domaine extérieur de \mathbb{R}^N et où Ω_i est un domaine borné de \mathbb{R}^N , pour tout $1 \leq i \leq N$. Dans ce cas, la donnée initiale $\varphi \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ correspond à la donnée de $l+1$ fonction $\varphi_i \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}_i)$ pour $1 \leq i \leq N$, et la solution u du Problème (86) correspond à $l+1$ solutions u_i des problèmes

$$\begin{cases} \partial_t u_i = \Delta u_i + u_i^p & \text{dans } \overline{\Omega}_i \times (0, \infty), \\ \sigma \partial_t u_i + \partial_\nu u_i = 0 & \text{sur } \partial\Omega_i \times (0, \infty), \\ u_i(\cdot, 0) = \varphi_i & \text{dans } \overline{\Omega}_i, \\ u_i \geq 0 & \text{dans } \overline{\Omega}_i \times (0, \infty), \end{cases}$$

pour $1 \leq i \leq N$. D'après les résultats de [11], dès que φ_i n'est pas la constante nulle, les solutions u_i explosent en temps fini, pour tout $1 \leq i \leq N$. On en déduit le résultat suivant :

Corollaire 4.4.1 *Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^N se décomposant de la manière (87). Supposons que le coefficient σ vérifie les hypothèses (74) et (75).*

- *Si $p < 1 + \frac{2}{N}$ et $p \leq 1 + \frac{2}{N}$ pour $N \geq 3$, toute solution du Problème (86) explose en temps fini dès que $\varphi \not\equiv 0$.*
- *Si $p > 1 + \frac{2}{N}$, $N \neq 2$ et si σ vérifie (83) lorsque $N = 1$, le Problème (86) admet des solutions globales pour des données initiales φ suffisamment petites vérifiant (76) et $\varphi \equiv 0$ dans chaque composante bornée de Ω .*
- *Si $p > 1 + \frac{2}{N}$ et $N = 2$, l'énoncé est encore vrai si le coefficient σ vérifie l'hypothèse supplémentaire (83) et si $\overline{\Omega}_0^c$ est étoilé par rapport à un point v_* avec $\min_{z \in \partial\Omega_0} |(z - v_*) \cdot \nu(z)| \geq 2\zeta$.*

L'autre type d'ensembles qui nous intéresse est celui où Ω est un domaine de \mathbb{R}^N dont le complémentaire Ω^c est un cylindre. En clair, on se donne un entier j avec $1 \leq j < N$, U un domaine extérieur de \mathbb{R}^{N-j} et considère $\Omega = U \times \mathbb{R}^j$. Notons (x, y) un élément de \mathbb{R}^N avec $x \in \mathbb{R}^{N-j}$ et $y \in \mathbb{R}^j$. On a $\partial\Omega = \partial U \times \mathbb{R}^j$ et la normale extérieure de $\partial\Omega$, notée ν , s'écrit

$$\nu(x, y) = (n(x), \underbrace{0, \dots, 0}_{j \text{ fois}}), \forall (x, y) \in \partial\Omega,$$

où $n(x)$ désigne la normale extérieure de ∂U en x . Cette remarque nous permet de construire des solutions dépendant uniquement de x (ou de y) à partir des solutions évoquées tout au long de ce chapitre.

Lemme 4.4.2 *Solutions indépendantes de y .*

Soit $\Omega = U \times \mathbb{R}^j$ un domaine cylindrique de \mathbb{R}^N . Soit σ un coefficient vérifiant les hypothèses (74) et (75).

- Si $p > 1 + \frac{2}{N-j}$ et $j \neq N - 2$, le Problème (86) admet des solutions globales pour des données initiales suffisamment petite. De plus, si les données initiales vérifient (76) et sont indépendantes de y , alors il existe des solutions globales indépendantes de y .
- Si $p > 1 + \frac{2}{N-j}$ et $j = N - 2$, l'énoncé est vrai si le coefficient σ vérifie l'hypothèse supplémentaire (83) et si U est étoilé par rapport à un point v_* avec $\min_{z \in \partial U} |(z - v_*) \cdot \nu(z)| \geq 2\zeta$.
- Si $p < 1 + \frac{2}{N-j}$ et $p \leq 1 + \frac{2}{N-j}$ pour $j \leq N - 3$, toute solution indépendante de y explose en temps fini.

Preuve : Les cas d'existence globale découlent directement de la remarque sur la normale extérieure de ∂U et des résultats d'existence globale pour les domaines extérieurs de \mathbb{R}^{N-j} : il suffit de poser $u_N(x, y, t) = u_{N-j}(x, t)$ pour tout $(x, y) \in \bar{\Omega}$ et $t > 0$, où u_{N-j} est une solution de (73) dans le domaine extérieur $U \subseteq \mathbb{R}^{N-j}$. La fonction u_N est ainsi une solution de (86) dans $\bar{\Omega}$. Le cas d'explosion s'obtient par restriction : une solution u_N de (86) dans $\bar{\Omega}$ indépendante de y devient une solution de (73) dans U en fixant y . On conclut avec les résultats d'explosion pour les domaines extérieurs de \mathbb{R}^{N-j} . ■

Malgré ce que semble indiquer le lemme précédent, l'exposant $p = 1 + \frac{2}{N-j}$ n'est pas l'exposant critique. En effet, dans le cas d'un coefficient constant $\sigma = 0$, on obtient le résultat suivant.

Lemme 4.4.3 Solutions indépendantes de x .

Soit $\Omega = U \times \mathbb{R}^j$ un domaine cylindrique de \mathbb{R}^N .

- Si $p > 1 + \frac{2}{j}$, le Problème (86) admet des solutions globales pour des données initiales suffisamment petites. De plus, si les données initiales sont indépendantes de x , alors il existe des solutions globales indépendantes de x .
- Si $p \leq 1 + \frac{2}{j}$, toute solution indépendante de x du Problème (86) explose en temps fini.

Preuve : On procède comme au lemme précédent. Pour le cas d'existence globale, on pose $u_N(x, y, t) = u_j(y, t)$ pour tout $(x, y) \in \bar{\Omega}$ et $t > 0$, où u_j est une solution du Problème (F) dans $\mathbb{R}^l \times [0, \infty)$. Comme u_N ne dépend pas de x , la remarque sur la normale extérieure de ∂U nous assure $\partial_\nu u_N(x, y, t) = 0$ pour tout $(x, y, t) \in \partial\Omega \times (0, \infty)$. Pour l'explosion en temps fini, les résultats sur les solutions du Problème (F) dans \mathbb{R}^l donnent le résultat en raisonnant par restriction. ■

4.5 Autres opérateurs de dérivation

4.5.1 Cas d'explosion pour les milieux poreux

On considère l'équation d'un milieu poreux sous conditions au bord dynamiques et à valeur initiale :

$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta(u^m) + u^p & \text{dans } \overline{\Omega} \times (0, \infty), \\ \sigma \partial_t u + \partial_\nu u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (0, \infty), \\ u(\cdot, 0) = \varphi & \text{dans } \overline{\Omega}, \\ u \geq 0 & \text{dans } \overline{\Omega} \times (0, \infty), \end{cases} \quad (88)$$

où Ω désigne un domaine extérieur de \mathbb{R}^N avec $N \geq 2$, où $m > 1$ et $p > 1$ sont deux réels, et où φ et σ satisfont aux hypothèses (74), (75) et (76). En procédant de manière analogue au Lemme 4.2.1 par comparaison avec une solution de Dirichlet adéquate, on obtient le résultat suivant :

Théorème 4.5.1 *Supposons que le coefficient de la condition dynamique σ vérifie les hypothèses (74) et (75), et que la donnée initiale φ satisfait à la condition (76). Le Problème (88) n'admet aucune solution globale positive non-triviale lorsque*

$$m < p < m + \frac{2}{N}.$$

Dans le cas où la dimension $N \geq 3$, aucune solution positive n'est globale si

$$m < p \leq m + \frac{2}{N}.$$

Preuve : Comme dans la preuve du Lemme 4.2.1, on suppose par l'absurde qu'il existe une solution globale positive non triviale v du Problème (88). En utilisant le procédé de troncature décrit dans la Section 4.2.2, on construit une solution globale positive non triviale u du problème de Dirichlet

$$\begin{cases} \partial_t u_D = \Delta(u_D^m) + u_D^p & \text{dans } \overline{\Omega} \times (0, \infty), \\ u_D = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (0, \infty), \\ u_D(\cdot, 0) = \varphi_D & \text{dans } \overline{\Omega}, \\ u_D \geq 0 & \text{dans } \overline{\Omega} \times (0, \infty), \end{cases}$$

où $\varphi_D \in \mathcal{C}_0(\overline{\Omega})$ avec $0 \leq \varphi_D \leq \varphi$ dans $\overline{\Omega}$ et non identiquement nulle, et vérifiant $u_D \leq v$ dans $\overline{\Omega} \times [0, \infty)$. Or, d'après les résultats de Mochizuki et Suzuki [33], la solution u_D explose en temps fini, relativement à la norme L^∞ . Par conséquent, la solution v du Problème (88) ne peut être globale et doit exploser en temps fini. ■

Remarque 4.5.2 *D'après les résultats d'explosion de Mochizuki et Mukai [32] concernant les problèmes de diffusion rapide sous conditions au bord de Dirichlet, le résultat précédent reste vrai lorsque*

$$\max\{0, 1 - \frac{2}{N}\} < m < 1.$$

4.5.2 Opérateur elliptique de second ordre

En nous basant sur les résultats de Bandle et Levine [3] dans le cas des conditions au bord de Dirichlet, nous tentons de généraliser les résultats du phénomène de Fujita sous conditions au bord dynamiques dans les domaines extérieurs en remplaçant l'opérateur de Laplace par un opérateur elliptique de second ordre L défini comme suit

$$L = \sum_{i,j=1}^N \partial_{x_i} \left(a_{ij}(x) \partial_{x_j} \right) + \sum_{i=1}^N b_i(x) \partial_{x_i},$$

où les coefficients a_{ij} et b_i sont de classe $\mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$. On définit pour tout $x \in \overline{\Omega}$:

$$\rho(x) = \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) \frac{x_i x_j}{\|x\|_2^2},$$

$$l(x) = \sum_{i,j=1}^N \left(\partial_{x_j} a_{ij}(x) - b_i(x) \right) x_i,$$

et

$$\gamma_0 = \frac{1}{2} \inf_{\overline{\Omega}} \left(l + \sum_{i=1}^N a_{ii} \right).$$

Notons $r = \|x\|_2$, et soient deux réels $s > 0$ et $q > 0$. On considère une partie non-linéaire plus générale et le problème suivant :

$$\begin{cases} \partial_t u = Lu + t^q r^s u^p & \text{dans } \overline{\Omega} \times (0, \infty), \\ \sigma \partial_t u + \partial_\nu u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (0, \infty), \\ u(\cdot, 0) = \varphi & \text{dans } \overline{\Omega}, \\ u \geq 0 & \text{dans } \overline{\Omega} \times (0, \infty), \end{cases} \quad (89)$$

où Ω est un domaine extérieur de \mathbb{R}^N , $p > 1$, σ vérifie les hypothèses (74) et (75), et avec φ satisfaisant à la condition (76). De manière analogue au Lemme 4.2.1, nous prouvons l'explosion de toute solution positive non-triviale du Problème (89) pour tout

$$1 < p < 1 + \frac{2 + 2q + s}{N},$$

tandis que nous démontrons l'existence de solutions positives globales pour

$$p > 1 + \frac{2 + 2q + s}{2\gamma_0},$$

si $\gamma_0 > 0$ et Ω^c est étoilé avec une géométrie particulière.

Théorème 4.5.3 *Supposons que le coefficient de la condition dynamique σ vérifie les hypothèses (74) et (75), que la donnée initiale φ satisfasse à la condition (76). Supposons que*

$$\sum_{i=1}^N \partial_{x_i} b_i(x) \leq 0 \text{ dans } \bar{\Omega},$$

et que

$$\rho(x) \leq \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^N a_{ii}(x) + l(x) \right) \text{ dans } \bar{\Omega} \text{ si } N \geq 2$$

où

$$\left(\frac{2 + 2q + s}{p - 1} - 2 \right) a_{11} + l > 0 \text{ dans } \bar{\Omega} \text{ si } N = 1.$$

Alors le Problème (89) n'admet aucune solution globale positive non triviale lorsque

$$1 < p < 1 + \frac{2 + 2q + s}{N}.$$

Preuve : La preuve est analogue à celle du Lemme 4.2.1. Cette fois, on compare notre solution avec une solution adéquate u_D du problème

$$\begin{cases} \partial_t u_D = Lu_D + t^q r^s u_D^p & \text{dans } \bar{\Omega} \times (0, \infty), \\ u_D = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (0, \infty), \\ u_D(\cdot, 0) = \varphi_D & \text{dans } \bar{\Omega}, \\ u_D \geq 0 & \text{dans } \bar{\Omega} \times (0, \infty), \end{cases}$$

où $\varphi_D \in \mathcal{C}_0(\bar{\Omega})$ avec $0 \leq \varphi_D \leq \varphi$ dans $\bar{\Omega}$ et non identiquement nulle. Les hypothèses du théorème sont utilisées par Bandle et Levine dans [3] afin d'assurer l'explosion en temps fini de la solution u_D . ■

Théorème 4.5.4 *Supposons que le coefficient de la condition dynamique σ vérifie les hypothèses (74) et (75), que la donnée initiale φ satisfasse à la condition (76). Supposons que*

$$\rho(x) \leq 1 \text{ dans } \bar{\Omega},$$

que

$$\gamma_0 > 0,$$

et que Ω^c soit étoilé par rapport à l'origine avec

$$\min_{\partial\Omega} |x \cdot \nu(x)| \geq 2\gamma_0\sigma. \quad (90)$$

Alors le Problème (89) admet des solutions globales positives non triviales si la donnée initiale est suffisamment petite lorsque

$$p > 1 + \frac{2 + 2q + s}{2\gamma_0} \text{ et } N \geq 2.$$

Preuve : Notre technique de preuve est analogue à la méthode développée dans la Section 4.3. Grâce au procédé de troncature décrit dans la Section 4.2.2, il nous suffit de trouver une fonction U définie sur $\bar{\Omega} \times [0, \infty)$ qui n'explose pas et qui vérifie

$$\begin{cases} \partial_t U \geq LU + t^q r^s U^p & \text{dans } \bar{\Omega} \times (0, \infty), \\ \sigma \partial_t U + \partial_\nu U \geq 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (0, \infty), \\ U(\cdot, 0) \geq \varphi & \text{dans } \bar{\Omega}, \\ U \geq 0 & \text{dans } \bar{\Omega} \times (0, \infty). \end{cases}$$

Pour cela, on considère la fonction $U : \bar{\Omega} \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ définie par

$$U(x, t) = A(t+1)^{-\mu} \exp\left(-\frac{\|x\|_2^2}{4(t+1)}\right),$$

avec $\mu = \frac{2+2q+s}{2(p-1)}$ et $A > 0$ que l'on déterminera plus tard. Sur le bord $\partial\Omega$, nous avons

$$\sigma \partial_t U + \partial_\nu U \geq \frac{1}{2(t+1)} \left(-2\sigma\mu - x \cdot \nu(x)\right) U \geq 0.$$

Cette quantité est bien positive par définition de μ , par hypothèses sur p et grâce à la condition (90) sur la géométrie du domaine Ω . De plus, dans $\bar{\Omega}$, un calcul direct nous donne

$$\partial_t U - LU = \left((1-\rho)\frac{r^2}{4(t+1)^2} + \left(-\mu + \frac{l + \sum_{i=1}^N a_{ii}}{2}\right)(t+1)^{-1}\right) U.$$

Puisqu'on a supposé $\rho \leq 1$ et par définition de γ_0 , on effectue la minoration suivante

$$\partial_t U - LU \geq \frac{U}{t+1} \left(-\mu + \gamma_0\right).$$

D'autre part, on remarque que

$$\left(\frac{2s}{p-1}\right)^{\frac{s}{2}} e^{\frac{-s}{2}} (t+1)^{\frac{s}{2}} \geq r^s \exp\left(-\frac{r^2(p-1)}{4(t+1)}\right), \quad (91)$$

et on effectue la majoration suivante

$$A^{p-1} \left(\frac{2s}{p-1}\right)^{\frac{s}{2}} e^{\frac{-s}{2}} (t+1)^{\frac{s}{2}+q-\mu(p-1)} U \geq t^q r^s U^{p-1}.$$

Et par définition de μ , on a $\frac{s}{2} + q - \mu(p-1) = -1$. Par conséquent, pour obtenir

$$\partial_t U - LU \geq t^q r^s U^p,$$

il suffit de s'assurer

$$-\mu + \gamma_0 \geq A^{p-1} \left(\frac{2s}{p-1}\right)^{\frac{s}{2}} e^{\frac{-s}{2}}.$$

Par définition de μ et de $p > 1 + \frac{2+2q+s}{2\gamma_0}$, le membre de gauche est strictement positif, et l'inégalité est vérifiée si on choisit A suffisamment petit. Par conséquent, un tel A permet d'avoir

$$\partial_t U \geq LU + t^q r^s U^p \text{ dans } \bar{\Omega}.$$

Pour conclure, il suffit de considérer des données initiales $\varphi \leq U(\cdot, 0)$ dans $\bar{\Omega}$ pour que la fonction U soit bien la sur-solution cherchée. ■

Dans le cas de la dimension $N = 1$, on utilise le fait que Ω n'est pas connexe. Écrivons $\Omega = \mathbb{R} \setminus [a, b]$ avec $a < b$ deux réels. On étudie séparément les deux sous-domaines $(-\infty, a)$ et (b, ∞) de Ω . Dans le domaine (b, ∞) , nous utilisons la sur-solution U précédente modulo une translation, à savoir $U(x+\alpha, t)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$-(b+\alpha) \geq \sigma.$$

Cette condition signifie que l'hypothèse

$$\min_{\partial\Omega} |x \cdot \nu(x)| \geq 2\gamma_0 \sigma$$

est vérifiée pour le domaine (b, ∞) . En supposant que le coefficient σ est borné sur $\partial\Omega \times [0, \infty)$, on est assuré de réaliser cette condition. La translation n'affecte la majoration (91) que d'un facteur réel positif, et la suite des calculs reste similaire à la preuve précédente. On obtient le résultat suivant :

Théorème 4.5.5 *Supposons que le coefficient de la condition dynamique σ vérifie les hypothèses (74), (75) et soit borné sur $\partial\Omega \times [0, \infty)$, que la donnée initiale φ satisfasse à la condition (76). Supposons que*

$$\rho(x) \leq 1 \text{ dans } \bar{\Omega},$$

et que

$$\gamma_0 > 0.$$

Alors le Problème (89) admet des solutions globales positives non triviales si la donnée initiale est suffisamment petite lorsque

$$p > \frac{2 + 2q + s}{2\gamma_0} \text{ et } N = 1.$$

4.6 Les conditions au bord de Robin

Suite à l'écriture des précédentes sections de ce chapitre, il s'est avéré que les techniques utilisées pour les conditions dynamiques pouvaient être appliquées à la condition au bord de Robin. On peut alors répondre à la question posée par Levine & Zhang dans [29], à savoir que le phénomène de Fujita est encore vérifié pour le problème parabolique suivant

$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta u + u^p & \text{dans } \bar{\Omega} \times (0, \infty), \\ \partial_\nu u + \alpha u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (0, \infty), \\ u(\cdot, 0) = \varphi & \text{dans } \bar{\Omega}, \\ u \geq 0 & \text{dans } \bar{\Omega} \times (0, \infty), \end{cases} \quad (92)$$

où Ω est un domaine extérieur de \mathbb{R}^N , $p > 1$ un nombre réel, φ est une fonction continue, positive et non nulle dans $\bar{\Omega}$, et où α est une fonction positive

$$\alpha \geq 0 \text{ sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}^+. \quad (93)$$

On suppose que le coefficient α est suffisamment régulier afin de considérer des solutions classiques au sens de la section 4.2.1 :

$$\alpha \in \mathcal{C}^1(\partial\Omega \times \mathbb{R}^+). \quad (94)$$

4.6.1 Cas d'explosion

Par comparaison, on démontre l'explosion de toutes les solutions positives non triviales du Problème (92) lorsque l'exposant p de la partie non linéaire vérifie les contraintes du théorème suivant :

Théorème 4.6.1 *Supposons que les hypothèses (76), (93) et (94) soient vérifiées. Toutes les solutions positives non triviales du Problème (92) explosent en temps fini lorsque*

$$\begin{aligned} 1 < p < 1 + \frac{2}{N} & \quad \text{si } N < 3, \\ 1 < p \leq 1 + \frac{2}{N} & \quad \text{si } N \geq 3. \end{aligned}$$

Preuve : De manière analogue au Lemme 4.2.1, on raisonne par l'absurde. On suppose qu'il existe une donnée initiale φ vérifiant (76) et telle que la solution u_φ du Problème de Robin (92) avec la donnée initiale φ existe globalement. À l'aide du procédé de troncature décrit en 4.2.2, on construit une solution non triviale, globale et positive v du problème de Dirichlet

$$\begin{cases} \partial_t v = \Delta v + v^p & \text{dans } \overline{\Omega} \times (0, \infty), \\ v = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (0, \infty), \\ v(\cdot, 0) = \psi & \text{dans } \overline{\Omega}, \\ v \geq 0 & \text{dans } \overline{\Omega} \times (0, \infty), \end{cases}$$

où $\psi \in \mathcal{C}_0(\overline{\Omega})$ vérifie la condition (76) et $\psi \leq \varphi$ dans $\overline{\Omega}$. D'après les résultats de Bandle & Levine [4] (et [3] pour la dimension 1), la solution v n'est jamais globale pour notre choix de l'exposant p . Par conséquent, la solution u_φ explose en temps fini. ■

4.6.2 Cas d'existence globale

Cette fois, nous considérons le cas des exposants p supérieurs à l'exposant critique :

$$p > 1 + \frac{2}{N}.$$

Comme précédemment, on raisonne par comparaison. En utilisant deux sur-solutions différentes, nous obtenons deux résultats d'existence globale en posant différentes conditions sur le coefficient α ou sur la dimension N . Dans un premier temps, supposons qu'il existe $c > 0$ tel que

$$\alpha \geq c \text{ sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}^+. \tag{95}$$

On obtient alors :

Théorème 4.6.2 *Supposons que les hypothèses (76), (94) et (95) soient vérifiées et que*

$$p > 1 + \frac{2}{N}.$$

Le Problème (92) admet des solutions globales positives non-triviales lorsque la donnée initiale est suffisamment petite.

Preuve : De manière analogue au Théorème 4.5.4, on utilise la fonction $U : \bar{\Omega} \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ définie par

$$U(x, t) = A(t + t_0)^{-\mu} \exp\left(-\frac{\|x\|_2^2}{4(t + t_0)}\right),$$

où $\mu = \frac{1}{p-1}$, $t_0 > 0$ et où $A > 0$ est choisi suffisamment petit tel que

$$\partial_t U \geq \Delta U + U^p \text{ dans } \bar{\Omega} \times (0, \infty).$$

Sur le bord $\partial\Omega$ du domaine, grâce à l'hypothèse (95), on obtient

$$\begin{aligned} \partial_\nu U(x, t) + \alpha U(x, t) &\geq \left(\frac{-x \cdot \nu(x)}{2(t + t_0)} + \alpha(x, t)\right) U(x, t) \\ &\geq \left(\frac{-x \cdot \nu(x)}{2(t + t_0)} + c\right) U(x, t) \end{aligned}$$

Puisque le bord $\partial\Omega$ est compact, la quantité $-x \cdot \nu(x)$ est bornée indépendamment de $x \in \partial\Omega$. En choisissant t_0 suffisamment grand, on obtient $\frac{-x \cdot \nu(x)}{2(t+t_0)} + c \geq 0$, puis

$$\partial_\nu U + \alpha U \geq 0 \text{ sur } \partial\Omega \times (0, \infty).$$

Ainsi, il suffit de choisir une donnée initiale $\varphi \leq U(\cdot, 0)$ dans $\bar{\Omega}$ pour prouver l'énoncé. ■

Remarque 4.6.3 *Lors de la précédente preuve, on remarque que l'hypothèse (95) peut être relaxée en*

$$\alpha(x, t) \geq \frac{x \cdot \nu(x)}{2(t + t_0)} \text{ pour tout } (x, t) \in \partial\Omega \times (0, \infty).$$

Cette écriture nécessite de connaître la géométrie du domaine Ω si l'on veut donner une borne optimale pour le coefficient α , mais dans le cas où le domaine Ω est à une forme simple, par exemple si

$$\Omega = \{\|x\|_2 > R\},$$

on a alors pour tout $x \in \partial\Omega$:

$$x \cdot \nu(x) = -R.$$

Dans ce cas, il suffit que le coefficient α vérifie

$$\alpha(x, t) \geq \frac{-R}{2(t + t_0)} \text{ pour tout } (x, t) \in \partial\Omega \times (0, \infty). \quad (96)$$

Dans le cas de la dimension $N = 1$, par symétrie et par translation, on peut supposer que $\Omega = (1, \infty)$. Ainsi, on obtient le résultat suivant :

Théorème 4.6.4 *Supposons que les hypothèses (76), (93) et (94) soient vérifiées et que*

$$N = 1 \quad \text{et} \quad p > 3.$$

Le Problème (92) admet des solutions globales positives non-triviales lorsque la donnée initiale est suffisamment petite.

Preuve : La preuve est analogue à celle du Théorème 4.6.2. Quitte à translater et en raisonnant par symétrie, on suppose que $\Omega = (1, \infty)$. En utilisant la formulation (96) de la Remarque 4.6.3, on obtient pour tout $x \in \partial\Omega$ et tout $t > 0$:

$$\begin{aligned} \partial_\nu U(x, t) + \alpha U(x, t) &\geq \left(\frac{-x \cdot \nu(x)}{2(t + t_0)} + \alpha(x, t) \right) U(x, t) \\ &\geq \left(\frac{1}{2(t + t_0)} + \alpha(x, t) \right) U(x, t) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

puisque l'on suppose $\alpha \geq 0$. On conclut en choisissant une donnée initiale $\varphi \leq U(\cdot, 0)$ dans $\bar{\Omega}$. ■

Maintenant, on se passe de la condition (95) sur le coefficient α , mais on se restreint au cas de la dimension $N \geq 3$. On obtient :

Théorème 4.6.5 *Supposons que $N \geq 3$ et que les hypothèses (76), (93) et (94) soient vérifiées et que*

$$p > 1 + \frac{2}{N}.$$

Le Problème (92) admet des solutions globales positives non-triviales lorsque la donnée initiale est suffisamment petite.

Preuve : On considère la solution v positive et non triviale du problème de Neumann

$$\begin{cases} \partial_t v = \Delta v + v^p & \text{dans } \bar{\Omega} \times (0, \infty), \\ \partial_\nu v = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (0, \infty), \\ v(\cdot, 0) = \varphi & \text{dans } \bar{\Omega}, \\ v \geq 0 & \text{dans } \bar{\Omega} \times (0, \infty), \end{cases}$$

où la donnée initiale $\varphi \in \mathcal{C}(\bar{\Omega})$ est choisie suffisamment petite telle que la solution v soit globale, ce qui est possible d'après Levine & Zhang [29]. Pour tout $\alpha \geq 0$ sur $\partial\Omega \times (0, \infty)$, on obtient

$$\partial_\nu v + \alpha v \geq 0 \text{ sur } \partial\Omega \times (0, \infty).$$

À l'aide du procédé de troncature décrit en 4.2.2, on construit une solution positive non triviale et globale du Problème (92). ■

Les principaux résultats de ce chapitre font l'objet de deux articles : l'un publié dans *Asymptotic Analysis* [39] et le second soumis à publication [41].

Annexe A

Principes de comparaison et du maximum

Nous rappelons quelques résultats qualitatifs (principe de comparaison, principe du maximum, positivité et unicité des solutions) que nous utilisons tout au long de cette thèse. Ces résultats sont issus de [8] et concernent des problèmes paraboliques sous des conditions au bord mixtes dans des domaines bornés.

On considère Ω un domaine borné de \mathbb{R}^N , dont le bord $\partial\Omega$ se décompose en deux parties disjointes

$$\partial\Omega = \partial_1\Omega \dot{\cup} \partial_2\Omega ,$$

où $\partial_2\Omega$ est une partie relativement ouverte dans $\partial\Omega$. Les cas $\partial_2\Omega = \partial\Omega$ et $\partial_2\Omega = \emptyset$ ne sont pas exclus. Pour $\tau > 0$ on définit

$$\overline{\mathcal{Q}}_\tau := \overline{\Omega} \times [0, \tau],$$

puis l'intérieur parabolique

$$\mathcal{Q}_\tau := (\Omega \cup \partial_2\Omega) \times]0, \tau],$$

et le bord parabolique

$$q_\tau := \overline{\mathcal{Q}}_\tau \setminus \mathcal{Q}_\tau.$$

Soit une fonction

$$F \in \mathcal{C}^1(\mathcal{Q}_\tau \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{N^2})$$

croissante par rapport à la variable dans \mathbb{R}^{N^2} . La relation d'ordre de \mathbb{R}^{N^2} considérée ici, $A \leq B$, entre deux matrices carrées de taille N signifie que

$B - A$ est semi-définie positive. On supposera que la fonction F vérifie la condition de Lipschitz unilatérale suivante :

$$w \geq u \Rightarrow F(x, t, w, p, q) - F(x, t, u, p, q) \leq L(w - u) \quad (97)$$

dans $\mathcal{Q}_\tau \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{N^2}$, où $L > 0$ est une constante ne dépendant que de la fonction F . On considère l'équation parabolique dans \mathcal{Q}_τ

$$\partial_t u = F(x, t, u, \nabla u, H^2 u),$$

où $H^2 u$ désigne la matrice hessienne de u . Sur $\partial_1 \Omega$, on impose une condition inhomogène de Dirichlet, tandis que sur $\partial_2 \Omega$, on impose la condition dynamique $\mathcal{B}_\sigma(u) = 0$, avec

$$\mathcal{B}_\sigma(u) = \sigma(x, t) \partial_t u + \partial_\nu u - \rho(x, t) u,$$

où $\sigma \geq 0$ sur $\partial_2 \Omega \times (0, \tau]$. Nous avons les résultats suivants :

Théorème A.1 Principe de comparaison.

Soient u et v deux fonctions dans $\mathcal{C}(\overline{\mathcal{Q}}_\tau) \cap \mathcal{C}^{2,1}(\mathcal{Q}_\tau)$ satisfaisant

$$\begin{cases} \partial_t u - F(x, t, u, \nabla u, H^2 u) \leq \partial_t v - F(x, t, v, \nabla v, H^2 v) & \text{dans } \mathcal{Q}_\tau, \\ \mathcal{B}_\sigma(u) \leq \mathcal{B}_\sigma(v) & \text{sur } \partial_2 \Omega \times]0, \tau]. \end{cases}$$

Alors $u \leq v$ sur q_τ implique $u \leq v$ dans \mathcal{Q}_τ .

Corollaire A.2 Unicité.

Le problème parabolique à valeur initiale

$$\begin{cases} \partial_t u = F(x, t, u, \nabla u, H^2 u) & \text{dans } \mathcal{Q}_\tau, \\ \mathcal{B}_\sigma(u) = 0 & \text{sur } \partial_2 \Omega \times]0, \tau], \\ u|_{q_\tau} = \psi \in \mathcal{C}(q_\tau), \end{cases}$$

admet au plus une seule solution u dans $\mathcal{C}(\overline{\mathcal{Q}}_\tau) \cap \mathcal{C}^{2,1}(\mathcal{Q}_\tau)$.

Corollaire A.3 Positivité.

Si l'on suppose en plus que $F(\cdot, \cdot, 0, 0, 0) \geq 0$, une solution $u \in \mathcal{C}(\overline{\mathcal{Q}}_\tau) \cap \mathcal{C}^{2,1}(\mathcal{Q}_\tau)$ de

$$\begin{cases} \partial_t u - F(x, t, u, \nabla u, H^2 u) \geq 0 & \text{dans } \mathcal{Q}_\tau, \\ \mathcal{B}_\sigma(u) \geq 0 & \text{sur } \partial_2 \Omega \times]0, \tau], \\ u \geq 0 & \text{sur } q_\tau, \end{cases}$$

est positive dans \mathcal{Q}_τ .

Pour la suite, on pose

$$D[u] = \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x, t, u, \nabla u) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + g(x, t, u, \nabla u),$$

où les coefficients a_{ij} vérifient, pour μ_1 et μ_2 deux constantes positives,

$$0 \leq \mu_1 \sum_{i=1}^N \xi_i^2 \leq \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot) \xi_i \xi_j \leq \mu_2 \sum_{i=1}^N \xi_i^2,$$

pour tout vecteur ξ de \mathbb{R}^N .

Théorème A.4 Principe du maximum \langle minimum \rangle fort.

Supposons qu'il existe $C > 0$ tel que dans $\mathcal{Q}_\tau \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ on ait

$$g(\cdot, \cdot, \cdot, p) \leq C|p| \quad \langle g(\cdot, \cdot, \cdot, p) \geq -C|p| \rangle.$$

Soit une fonction $u \in \mathcal{C}(\overline{\mathcal{Q}_\tau}) \cap \mathcal{C}^{2,1}(\mathcal{Q}_\tau)$ vérifiant

$$\begin{cases} \partial_t u \leq D[u] & \langle \partial_t u \geq D[u] \rangle & \text{dans } \Omega \times]0, \tau], \\ \mathcal{B}_\sigma(u) \leq 0 & \langle \mathcal{B}_\sigma(u) \geq 0 \rangle & \text{sur } \partial_2 \Omega \times]0, \tau]. \end{cases}$$

Alors

$$\max_{q_\tau} u = \max_{\overline{\mathcal{Q}_\tau}} u \quad \langle \min_{q_\tau} u = \min_{\overline{\mathcal{Q}_\tau}} u \rangle,$$

et si u atteint son maximum M \langle son minimum m \rangle en un point $(x_0, t_0) \in \mathcal{Q}_\tau$, alors $u = M$ $\langle u = m \rangle$ sur $\overline{\mathcal{Q}_{t_0}}$.

Annexe B

Algorithmes

Dans cette ultime partie, nous donnons les algorithmes utilisés pour réaliser les simulations du chapitre 1 concernant l'équation de Burgers.

B.1 Trace.sce

```
// Discrétisation
// pas d'espace
k=1/100;
x=linspace(0,1,1/k+1);
// pas de temps
h=k^2/4;

// Données du problème
// coefficient dynamique
s=100;
// donnée initiale
deff(' [y] = f(x)', 'y = -6.25*x^2+5*x');
// exposant de la partie non-linéaire
p=3;

// Stockage de la solution approchée
u=zeros(x);
v=zeros(x);

// Initialisation
// bosse en 0.4
for i=1:40,
    u(i)=6*f((i-1)*k)+5;
end,
```

```

// creux en 0.5
c=input(" Jusque où faites-vous descendre le creux ?
(entre 5 et 11)");
for i=41:60,
u(i)=11-10000*(11-c)*(((i-1)*k-0.4)*((i-1)*k-0.6))^2;
end,
// bosse en 0.6
for i=61:1/k+1,
u(i)=6*f(1-(i-1)*k)+5;
end,

// Calcul de u(.,t) à chaque pas de temps
j=0;
while j>-1,

//Détection des bosses
M=0;
nb=1;
z=zeros(x);
zz=zeros(x);

// repérage du maximum
for i=1:1/k,
if u(i)<u(i+1) then z(i)=1; end,
if u(i)>M then M=u(i); end,
end,
z(1/k+1)=z(1/k);

// repérage des extrema locaux et du nombre de bosses
for i=1:1/k,
if z(i)<z(i+1) then nb=nb+1; end,
if z(i)>z(i+1) then zz(i)=j*h; end,
if z(i)<z(i+1) then zz(i)=j*h; end,
end,

// Affichage en 2D de la solution approchée au temps j*h

xbasc(0);
xset('window',0);
plot2d(x,u,rect=[0,0,1,120]),
xtitle(['Solution u: vue en zéro',string(j)]);

```

```

xbasc(1);
xset('window',1);
plot2d(x,u),
xtitle(['Solution u: vue globale',string(j),
        'Maximum',string(M)]);

xbasc(2);
xset('window',2);
plot2d(x,z,rect=[0,0,1,2]),
xtitle(['Monotonie de la solution u',string(j),
        'nombre de bosses',string(nb)]);

xset('window',3);
plot(x,zz,'o.');//plot2d(x,zz,style=0),
xtitle(['Suivi des extrema',string(j)]);

// Incrémentation temporelle
j=j+1;
// Calcul de la solution approchée au temps suivant
v(1)=u(1)+(h/(s*k))*(u(2)-u(1));
for i=2:1/k,
    v(i)=u(i)+(h/k^2)*(u(i+1)-2*u(i)+u(i-1))
        -(h/k)*u(i)*(u(i+1)-u(i))+h*(u(i)^p);
end;
v(1/k+1)=u(1/k+1)-(h/(s*k))*(u(1/k+1)-u(1/k));
u=v;

end;

```

B.2 Trace2.sce

```

// Discrétisation
// pas d'espace
k=1/100;
x=linspace(0,1,1/k+1);
// pas de temps
h=k^2/4;

// Données du problème

```

```

// coefficient dynamique
s=100;
// donnée initiale
deff(' [y] = f(x)', 'y =-6.25*x^2+5*x');
// exposant de la partie non-linéaire
p=3;

// Stockage des maxima locaux
max1=zeros(10001,1);
max2=zeros(10001,1);

for g=1:10001,

// Stockage de la solution approchée
u=zeros(x);
v=zeros(x);

// Initialisation
c=10+(g-1)/10000;
// bosse en 0.4
for i=1:40,
u(i)=6*f((i-1)*k)+5;
end,
// creux en 0.5
for i=41:60,
u(i)=11-10000*(11-c)*(((i-1)*k-0.4)*((i-1)*k-0.6))^2;
end,
// bosse en 0.6
for i=61:1/k+1,
u(i)=6*f(1-(i-1)*k)+5;
end,

//détection du maximum d'itérations avec Trace.sce .
//      c =      10      10.2      10.4      10.6      10.8      11
// nbIt =      185      183      182      181      179      176

// MaxIt = nb d'itération pour avoir u(.,t) avec 0.98 T < t <T
if c<=11 then MaxIt=176; end, // t > 0.983 T
if c<=10.8 then MaxIt=179; end, // t > 0.988 T
if c<=10.6 then MaxIt=181; end, // t > 0.994 T
if c<=10.4 then MaxIt=182; end, // t > 0.994 T

```



```

    if c<=10.2 then MaxIt=183; end, // t > 0.989 T

//Calcul de u(., 0.98T)
j=0;
while j<MaxIt,
    v(1)=u(1)+ (h/(s*k))*(u(2)-u(1));
    for i=2:1/k,
        v(i)=u(i)+(h/k^2)*(u(i+1)-2*u(i)+u(i-1))
            -(h/k)*u(i)*(u(i+1)-u(i))+h*(u(i)^p);
    end,
    v(1/k+1)=u(1/k+1)-(h/(s*k))*(u(1/k+1)-u(1/k));
    u=v;
    j=j+1;
end,

//Détection du nombre de bosses
z=zeros(x);
for i=1:1/k,
    if u(i)<u(i+1) then z(i)=1; end,
end,
z(1/k+1)=z(1/k);
quelmax=1;
for i=1:1/k,
    if z(i)<z(i+1) then quelmax=2; end,
    if quelmax==1 then
        if z(i)>z(i+1) then max1(g)=(i-1)*k; end,
        else
            if z(i)>z(i+1) then max2(g)=(i-1)*k; end,
        end,
    end,
end,
if max2(g)==0 then max2(g)=max1(g); end
end,
y=linspace(10,11,10001);
plot(y,max1)
plot(y,max2)

```

Les simulations ont été réalisées à l'aide du logiciel libre Scilab. La version utilisée est scilab-3.1.1.

Conclusion et perspectives

Au premier chapitre, nous avons introduit l'équation de Burgers. Nous avons étudié la vitesse d'explosion des solutions de cette équation à travers l'ordre de croissance de la norme infinie de ces solutions. Nous obtenons un résultat optimal lorsque la réaction est suffisamment forte. Pour le cas des réactions "faibles" (notamment pour $2 < p \leq 3$), nos techniques de comparaison se révèlent insuffisantes. Le problème de l'ordre de croissance semble être régi de manière différente. En effet, d'autres techniques, telles les techniques de renormalisation de Hu [24] et Quittner & Souplet [38] basées sur des théorèmes de type Liouville (voir [36] et [37]), ne sont pas adaptées à cette équation de Burgers où la convection est trop forte. Elles sont davantage destinées à des équations du type $\partial_t u = \Delta u - (\nabla u^q) + u^p$ ou $\partial_t u = \Delta u - (\nabla u)^r + u^p$ où l'exposant du terme de convection est petit (notamment $q < (p+1)/2$ ou $r < 2p/(p+1)$ et $p < 3$ dans [14]). On se tourne vers la recherche de solutions, ou de sous-solutions, ayant un ordre de croissance différent. Concernant l'allure des solutions, lorsque la donnée initiale a la forme deux bosses ou plus, un résultat (ou exemple) théorique semble possible grâce à l'utilisation d'une énergie cinétique autour du minimum local. Cependant, comme on peut le voir dans la dernière section du chapitre 1, la modification ou la persistance du profil initial est très sensible par rapport au choix de la donnée initiale : cela nous indique qu'il faudra se donner des hypothèses très précises sur cette donnée initiale.

Les solutions stationnaires de l'équation de Burgers paramétrée sont étudiées dans le second chapitre. Puisque seules les solutions sous conditions au bord de Dirichlet étaient possibles pour l'équation de Burgers, nous avons introduit un paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$ dans cette équation. On a finalement pu obtenir des solutions sous conditions au bord de Neumann pour certaines valeurs du paramètre λ . On a même observé une bifurcation dans le plan des phases associé à cette équation de Burgers paramétrée : selon les valeurs du paramètre λ , le nombre et la nature des équilibres changent, modifiant l'existence des solutions. À l'aide du principe de comparaison de von Below & De Coster [8],

on utilise les solutions stationnaires pour en déduire l'existence de solutions globales de l'équation non-stationnaire. Concernant les longueurs d'intervalle pour lesquelles il existe des solutions de l'équation de Burgers, une étude sur le paramétrage des trajectoires dans le plan des phases de l'équation stationnaire nous permettrait d'expliciter ces longueurs acceptables. Aussi, pour étudier les cas où les techniques de linéarisation ne fonctionnent pas, en particulier le cas de l'équation de Burgers avec $\lambda = 0$, utiliser des méthodes variationnelles devrait nous permettre de résoudre l'équation (quitte à considérer des solutions faibles). Notons qu'au chapitre 1, on utilise une solution de l'équation de Burgers paramétrée avec les conditions au bord de Neumann afin de donner une sur-solution explicite ayant la forme de deux bosses tout au long de son intervalle d'existence.

Pour le troisième chapitre, on continue de s'intéresser à l'équation de Burgers paramétrée, mais cette fois on recherche des solutions non-stationnaires dans des domaines non-bornés de \mathbb{R} , typiquement dans \mathbb{R} , $(-\infty, 0)$ et $(0, \infty)$. Au départ, on espérait trouver un phénomène du type Fujita en trois phases (existence globale - explosion - existence globale) au lieu de deux phases (explosion - existence globale). En réalité, le phénomène est plus complexe à cause de la structure de l'équation : la présence d'un terme de convection non-linéaire détruit toute symétrie et les sur-solutions "classiques" utilisées dans les méthodes de comparaison ne fonctionnent que dans des cas isolés. De plus, le cas le plus intéressant, celui où le paramètre λ s'annule et où l'on a l'équation de Burgers, se situe à la limite des deux phénomènes opposés (explosion contre existence globale). Cependant, à l'aide des normes L^1 à poids, on donne des critères portant sur la donnée initiale et sur le type de conditions au bord garantissant l'explosion des solutions en temps fini. Du côté de l'existence globale, on sait que ni les solutions de similarité, ni les fronts de propagation n'apporteront de meilleure réponse que celle obtenue par comparaison avec les solutions stationnaires.

Le phénomène de Fujita dans les domaines extérieurs est étudié au chapitre 4. Le problème considéré est différent de ceux qu'on a étudiés dans les précédents chapitres : on s'intéresse à une équation de réaction-diffusion non-linéaire sans convection. Dans un premier temps, par l'utilisation des principes de comparaison, on répond par l'affirmative à la question posée par Bandle, von Below & Reichel dans [2], à savoir que le phénomène de Fujita, bien connu dans \mathbb{R}^N ou dans des domaines extérieurs avec des conditions au bord de Dirichlet, est encore vérifié pour les conditions au bord dynamiques. La réponse donnée est complète pour toutes les dimensions différentes de 2. D'ailleurs, ce cas est spécial puisque, même dans le cas des conditions de

Dirichlet, la question de situer l'exposant critique dans le cas d'explosion (comme c'est le cas pour toute autre dimension, ou pour le cas de \mathbb{R}^N) est encore ouverte. De même, les méthodes utilisées pour les conditions dynamiques sont appliquées au cas du problème sous les conditions au bord de Robin. On répond positivement à la question de Levine & Zhang [29] : le phénomène de Fujita est aussi vérifié pour les conditions au bord de Robin. À l'instar des travaux de Bandle & Levine [3], il est possible de considérer un opérateur elliptique de second ordre plus général que le Laplacien et de donner une réponse complète pour le phénomène de Fujita sous les conditions de Robin. D'autres généralisations du phénomène de Fujita, telles une version inhomogène de l'équation de réaction diffusion ($\partial_t u - \Delta u - u^p = w(x, t)$ comme dans les travaux de Bandle - Levine & Zhang [5]) ou l'ajout d'un terme de potentiel ($\partial_t u = \Delta u - Vu + au^p$, voir les résultats de Pinsky [35]), déjà connus pour le problème dans \mathbb{R}^N , sont encore ouverts pour les domaines extérieurs avec des conditions au bord dynamiques.

Bibliographie

- [1] H. AMANN : *Ordinary differential equations*. Walter de Gruyter, Berlin, 1990.
- [2] C. BANDLE, J. von BELOW et W. REICHEL : Parabolic problems with dynamical boundary conditions : eigenvalue expansions and blow up. *Rend. Lincei Math. Appl.*, 17:35–67, 2006.
- [3] C. BANDLE et H.A. LEVINE : Fujita type results for convective-like reaction diffusion equations in exterior domains. *ZAMP*, 40:665–676, 1989.
- [4] C. BANDLE et H.A. LEVINE : On the existence and the nonexistence of global solutions of reaction-diffusion equations in sectorial domains. *Trans. Am. Math. Soc.*, 316:595–622, 1989.
- [5] C. BANDLE, H.A. LEVINE et Q.S ZHANG : Critical Exponents of Fujita Type for Inhomogeneous Parabolic Equations and Systems. *J. of Math. Anal. and Appl.*, 251:624–648, 2000.
- [6] J. von BELOW : An existence result for semilinear parabolic network equations with dynamical node conditions. *C. Bandle, J. Bemelmans, M. Chipot, M. Grüter et J. Saint Jean Paulin (eds.), Progress in partial differential equations : elliptic and parabolic problems, Pitman Research Notes in Math. Ser. Longman Harlow Essex*, 266:274–283, 1992.
- [7] J. von BELOW : *Parabolic network equations*. Tübingen, 2nd édition, 1994.
- [8] J. von BELOW et C. DE COSTER : A Qualitative Theory for Parabolic Problems under Dynamical Boundary Conditions. *Journal of Inequalities and Applications*, 5:467–486, 2000.
- [9] J. von BELOW et S. NICAISE : Dynamical interface transition in ramified media with diffusion. *Comm. Partial Differential Equations*, 21:255–279, 1996.
- [10] J. von BELOW et G. PINCET-MAILLY : Blow Up for Reaction Diffusion Equations Under Dynamical Boundary Conditions. *Communications in Partial Differential Equations*, 28:223–247, 2003.

- [11] J. von BELOW et G. PINCET-MAILLY : Blow Up for some nonlinear parabolic problems with convection under dynamical boundary conditions. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, Supplement Volume 2007:1031–1041, 2007.
- [12] J. von BELOW, G. PINCET-MAILLY et J-F. RAULT : Growth order and blow up points for the parabolic Burgers' equation under dynamical boundary conditions. Rapport technique, LMPA Joseph Liouville (ULCO), avril 2010 (soumis).
- [13] H. BERESTYCKI, F. HAMEL et L. ROQUES : Analysis of the periodically fragmented environment model : II - Biological invasions and pulsating travelling fronts. *J. Math. Pures Appl.*, 84:1101–1146, 2005.
- [14] M. CHLEBÍK, M. FILA et P. QUITTNER : Blow up of positive solutions of a semilinear parabolic equation with a gradient term. *Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. A Math. Anal.*, 10:525–537, 2003.
- [15] A. CONSTANTIN et J. ESCHER : Global existence for fully parabolic boundary value problems. *Nonlinear Differential Equations Applications*, 13:91–118, 2006.
- [16] J. ESCHER : Quasilinear parabolic systems with dynamical boundary conditions. *Communications in Partial Differential Equations*, 18:1309–1364, 1993.
- [17] A. FRIEDMAN et A. LACEY : Blow up of solutions of semilinear parabolic equations. *J. Math. Anal. Appl.*, 132:171–186, 1988.
- [18] A. FRIEDMAN et B. MCLEOD : Blow up of positive solutions of semilinear heat equations. *Indiana Univ. Math. J.*, 132:425–447, 1985.
- [19] H. FUJITA : On the blowing up of solutions of the Cauchy problem for $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$. *Journal of the Faculty of Science of the University of Tokyo*, 13:109–124, 1966.
- [20] H. FUJITA : On some nonexistence and nonuniqueness theorems for nonlinear parabolic equations. *Proc. Symp. Pure Math. XVII Am. Math. Soc.*, 18:105–113, 1970.
- [21] D. GILBARG et N.S. TRUDINGER : *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Springer, 1998.
- [22] K. HAYAKAWA : On nonexistence of global solutions of some semilinear parabolic differential equations. *Japan Academy Proceedings*, 49:503–505, 1973.
- [23] T. HINTERMANN : Evolution equations with dynamic boundary conditions. *Proc. Royal Soc. Edinburgh*, 113A:43–60, 1989.

- [24] B. HU : Remarks on the blowup estimate for solutions of the heat equation with a nonlinear boundary condition. *Differential Integral Equations*, 9:891–901, 1996.
- [25] O. KAVIAN : *Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques*. Springer-Verlag, 1993.
- [26] O.A. LADYŽENSKAYA, V.A. SOLONNIKOV et N.N. URALTSEVA : Linear and quasilinear equations of parabolic type. *Trans. of Math. Monographs*, 23, 1968.
- [27] A. LE POURHIET : *Résolution Numérique des Equations aux Dérivées Partielles : une première approche*. Cepadues-Editions, 1988.
- [28] R. LEIS : *Initial Boundary Value Problem in Mathematical Physics*. John Wiley & Sons and B.G. Teubner, 1986.
- [29] H.A. LEVINE et Q.S. ZHANG : The critical Fujita number for a semilinear heat equation in exterior domains with homogeneous Neumann boundary values. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, 130 A:591–602, 2000.
- [30] H. LI, Z. WU, J YIN et J. ZHAO : *Nonlinear Diffusion Equations*. World Scientific, 2001.
- [31] H. MATANO : Nonincrease of the lap-number of a solution for a one-dimensional semilinear parabolic equation. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sec. IA*, 29:401–441, 1982.
- [32] K. MOCHIZUKI et K. MUKAI : Existence and nonexistence theorems for solutions of global solutions to fast diffusions with source. *Methods and Applications of Analysis*, 2:92–102, 1995.
- [33] K. MOCHIZUKI et R. SUZUKI : Critical exponent and critical blow up for quasilinear parabolic equations. *Israel J. Math*, 98:141–156, 1997.
- [34] Y. PINCHOVER et J. RUBINSTEIN : *An Introduction to Partial Differential Equations*. Cambridge University Press, 2005.
- [35] R. PINSKY : The Fujita exponent for semilinear heat equations with quadratically decaying potential or in an exterior domain. *Journal of Differential Equations*, 246(6):2561–2576, 2009.
- [36] P. POLÁČIK, P. QUITTNER et P. SOUPLET : Singularity and decay estimates in superlinear problems via Liouville-type theorems. Part I : elliptic equations and systems. *Duke Math. J.*, 139(3):555–579, 2007.
- [37] P. POLÁČIK, P. QUITTNER et P. SOUPLET : Singularity and decay estimates in superlinear problems via Liouville-type theorems. Part II : parabolic equations. *Indiana Univ. Math. J.*, 56:879–908, 2007.

- [38] P. QUITTNER et P. SOUPLET : *Superlinear parabolic problems : blow-up, global existence and steady states*. Birkhäuser Advanced Texts, 2007.
- [39] J-F. RAULT : The Fujita phenomenon in exterior domains under dynamical boundary conditions. *Asymptotic Analysis*, 66(1):1–8, 2010.
- [40] J-F. RAULT : A Bifurcation for a Generalized Burgers' Equation in Dimension One. Rapport technique, LMPA Joseph Liouville (ULCO), août 2010 (soumis).
- [41] J-F. RAULT : The Fujita phenomenon in exterior domains under the Robin boundary conditions. Rapport technique, LMPA Joseph Liouville (ULCO), mai 2010 (soumis).
- [42] D.F. RIAL et J.D. ROSSI : Blow-up results and localization of blow-up points in a N-dimensional smooth domain. *Duke Math. J.*, 88:391–405, 1997.
- [43] D.H. SATTINGER : Monotone Methods in Elliptic and Parabolic boundary Value Problems. *Indiana Univ. Math. J.*, 21(11):979–1000, 1972.
- [44] J. SMOLLER : *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations*. Springer-Verlag, 2nd édition, 1994.
- [45] P. SOUPLET et F.B. WEISSLER : Self-Similar Subsolutions and Blowup for Nonlinear Parabolic Equations. *J. Math. Anal. Appl.*, 212:60–74, 1997.
- [46] R. SUZUKI : Critical blow-up for quasilinear parabolic equations in exterior domains. *Tokyo Journal of Mathematics*, 19:397–409, 1996.
- [47] M.E. TAYLOR : *Partial Differential Equations*, volume I Basic Theory. Springer, 1996.
- [48] M.E. TAYLOR : *Partial Differential Equations*, volume II Qualitative studies of linear equations. Springer, 1996.
- [49] M.E. TAYLOR : *Partial Differential Equations*, volume III Nonlinear Equations. Springer, 1996.
- [50] R. TEMAM : *Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics*, volume 68 de *Applied Mathematical Sciences*. Springer, 2nd édition, 1997.
- [51] W. WALTER : *Differential and integral inequalities*. Springer Verlag, Berlin, 1970.
- [52] F.B. WEISSLER : Existence and nonexistence of global solutions for a semilinear heat equation. *Israel Journal of Mathematics*, 38:29–40, 1981.

Phénomène d'explosion et existence globale pour quelques problèmes paraboliques sous les conditions au bord dynamiques.

Résumé :

Cette thèse porte sur l'étude de plusieurs problèmes paraboliques sous les conditions au bord dynamiques. On considère dans un premier une équation dite « de Burger » dans un domaine borné réel. On étudie les propriétés des solutions de cette équation lorsqu'on impose des conditions dynamiques sur le bord et lorsque la donnée initiale est positive. En s'inscrivant dans la lignée des résultats de J. von Below et G. Mailly, et en utilisant les méthodes de comparaison de J. von Below et C. De Coster, on s'intéresse à l'ordre de croissance et au point d'explosion des solutions régulières. Le profil de la solution est étudié en détails, et on donne des exemples numériques démontrant la nécessité de nos hypothèses de travail. Dans un second temps, on étudiera les solutions stationnaires de l'équation de Burger, dans laquelle on ajoute un paramètre λ . A l'aide d'une méthode de plan des phases, on démontre l'existence de solutions stationnaires sous différentes conditions au bord, à savoir les conditions au bord de Dirichlet et de Neumann (coïncidant avec les dynamiques pour ce cas stationnaire). Nous observons qu'en faisant varier le paramètre λ , on provoque une bifurcation dans le plan des phases, ce qui se traduit de profonds changements dans les résultats d'existence des solutions stationnaires de l'équation de Burger paramétrée sous les diverses conditions au bord considérées. Par le biais d'une technique basée sur l'étude de norme L^1 adéquates, nous démontrons des résultats d'explosion pour les solutions non-stationnaires de l'équation de Burger paramétrée lorsque l'on se place dans un domaine réel non-borné. Par comparaison, on en déduira des résultats de non-existence pour les solutions stationnaires. On clôt la thèse en étudiant le phénomène de Fujita. A l'aide des méthodes de comparaison de J. von Below et C. De Coster, on montre que ce phénomène de Fujita, dont la véracité est connue dans le cas des conditions de Dirichlet et de Neumann, reste vrai sous les conditions au bord dynamiques. En adaptant la technique développée, on prouvera que ce phénomène de Fujita est également vérifié pour les conditions au bord de Robin.

Mots-clés : Problème parabolique - explosion - conditions au bord dynamiques - existence globale.