Systèmes lagrangiens et fonction β de Mather

Daniel Massart

Systèmes lagrangiens et fonction β de Mather

Daniel Massart

26 janvier 2011

Remerciements et autres effusions

Albert Fathi m'a pris comme disciple en 1992, je me demande encore pourquoi. En 1997 il a bâti en pierre de taille une théorie sur laquelle j'ai pu sculpter quelques gargouilles. En 2007 il m'a invité à bord du projet ANR KAM faible. Après quelques années dans le métier, je commence à mesurer la chance que j'ai eue en ces trois occasions, et l'ampleur de ma dette envers Albert.

L'ombre portée de John Mather s'étend si loin que j'ai bien du mal à écrire un article dont le titre ne contienne pas son nom. Il m'a fait, comme Gabriel Paternain, un grand honneur en acceptant d'écrire un rapport sur ce mémoire.

Patrick Bernard a passé des heures que j'imagine pénibles sur certains de mes articles, à en extirper impitoyablement erreurs et imprécision, me sauvant ainsi à plusieurs reprises de l'embarras éternel. De cela, et de s'être porté caution pour cette habilitation, je lui sais un gré infini.

Ivan Babenko, en plus d'être la vie et l'âme du séminaire Darboux, est la raison pour laquelle je ne me suis jamais découragé des mathématiques. Je le remercie, ainsi que Marie-Claude Arnaud et Philippe Thieullen, d'avoir bien voulu faire partie du jury.

La liste des mathématiciens que j'admire, et qui ont été bons pour moi au delà de mes mérites, ne serait pas complète si elle ne mentionnait Pierre Arnoux et Victor Bangert.

Un des bénéfices annexes des mathématiques est qu'elles m'ont permis de me lier d'amitié avec, par ordre approximativement chronologique, Frédéric Faure, Laurent Massoulié, le regretté Vincent Dumas, Jean-Marc Schlenker, Ian Schindler, Philippe Narbel, T.R. Ramadas, Athoumane Niang, Mubariz Garaev. Tous ont contribué à ce travail à un moment ou un autre, en me remontant le Q.I., ou le moral.

Quoiqu'ils ne soient plus là pour me lire, je tiens à citer

- Mr Yves Tanguy (1940-2007), instituteur à Locmaria-Plouzané, Finistère (plus largement connu comme sonneur de bombarde). Il avait prédit que je serais mathématicien ou poète. Puisse-t-il y avoir encore des maîtres comme lui.
- mon père, Georges Massart (1939-2010). Il aurait aimé voir avancer ma carrière académique. Ce texte lui est dédié.

Enfin je n'oublie pas Jasmine, Etienne, et Emilie, qui me supportent tous les jours.

Table des matières

Chapitre 1

Introduction aux problèmes étudiés

Avertissement : ce texte vise à présenter les résultats de [Mt03], [Mt07], [BaM08], [Mt09], [Mta], [MS], [Mt10], [BeM], et [Mtb]. Il ne constitue pas une introduction au sujet, ce pour quoi on consultera avec davantage de profit les références [Ba88], [MrF91], [F], et [Mr09].

La bibliographie recense en premier lieu les articles de ou cosignés par l'auteur, classés par ordre chronologique, et ensuite les articles cités en référence, classés par ordre alphabétique sur le premier auteur.

1.1 Lagrangiens de Tonelli

Les travaux exposés ici traitent de dynamique des systèmes lagrangiens. Un tel système est un modèle de situation régie par un principe d'économie, ou principe de moindre action. L'exemple canonique, et origine de la théorie, est fourni par la mécanique céleste, où le principe de moindre action fut énoncé par Maupertuis, et formalisé ensuite par Lagrange. Un autre exemple, dont l'importance fut remarquée par Boltzmann (entre autres), est celui d'un récipient contenant un gaz parfait. Enfin les exemples abondent dans les activités humaines, où l'on cherche à minimiser un certain coût, exprimé en temps, en argent, ou en calories.

Formellement, on considère une variété différentiable M, appelée espace de configurations, et une fonction L sur le fibré tangent de M, appelée lagrangien. Traditionnellement le fibré tangent à M est appelé espace des phases. Dans le cas de la mécanique céleste, ou du gaz de Boltzmann, le lagrangien est la différence entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle. Nous serons souvent amenés à étudier le cas d'un système soumis à une perturbation extérieure périodique, telle que le passage d'une comète dans le système solaire. Le lagrangien est alors une fonction sur $TM \times \mathbb{T}$, où $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Lorsque le lagrangien ne dépend pas du temps, il est dit autonome, et on omet le facteur $\mathbb{T}$. L'évolution du système est alors gouvernée par l'équation d'Euler-Lagrange, qui s'exprime en cordonnées locales (x, v) sur TM, t étant le temps, par

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial v}(x, v, t) = \frac{\partial L}{\partial x}(x, v, t). \tag{1.1}$$

Une découverte importante de Lagrange est que les projections dans $M \times \mathbb{T}$ des trajectoires (qui, elles, vivent dans $TM \times \mathbb{T}$) sont caractérisées par le fait de minimiser localement, à extrémités fixées, l'intégrale du lagrangien, aussi appelée intégrale d'action. Une courbe dans $M \times \mathbb{T}$ qui minimise localement, à extrémités fixées, l'intégrale d'action, est appelée extrémale. Une extrémale C^1 est donc la projection dans $M \times \mathbb{T}$ d'une trajectoire de l'équation d'Euler-Lagrange. Nous nous plaçons en général du point de vue des sytèmes dynamiques, où l'on étudie le comportement asymptotique des orbites. Pour cela il est commode de pouvoir garantir l'existence de solutions définies pour tous temps. Notons qu'en mécanique céleste, les solutions n'ont aucune raison d'être définies pour tous temps, puisque les planètes peuvent entrer en collision. Sacrifiant le réalisme à la simplicité, nous ferons désormais les hypothèses suivantes, introduites par Mather ([Mr91]) :

- (H1) M est compacte, connexe, sans bord
- (H2) L est de classe C^2
- (H3) stricte convexité : la dérivée seconde $\partial^2 L/\partial v^2(x, v, t)$ est définie positive pour tout élément (x, v) de TM et tout $t \in \mathbb{T}$
- (H4) surlinéarité : pour tous x dans M et t dans $\mathbb{T}$, $L(x, v, t)/\|v\|$ tend vers l'infini lorsque $\|v\|$ tend vers l'infini, pour une métrique riemannienne (quelconque, M étant compacte) sur M
- (H5) complétude : le flot Φ_t sur $TM \times \mathbb{T}$ défini par l'équation d'Euler-Lagrange est complet, i.e. ses solutions maximales sont définies sur $\mathbb{R}$.

Un lagrangien satisfaisant ces hypothèses est dit de Tonelli.

Un dynamicien cherchera dès lors à construire des orbites satisfaisant certaines propriétés globales, la plus simple étant d'être périodique avec une classe d'homotopie prescrite. Ce problème particulier est relativement facile et n'est mentionné qu'à titre d'illustration. En revanche, la question suivante, posée par Arnold dans [A64], a inspiré les travaux fondateurs de Mather :

Question 1.1 *Est-il vrai que pour un lagrangien autonome générique il existe une orbite dense dans presque tout niveau d'énergie ?*

Dans le cas d'un lagrangien périodique on peut se poser une question analogue :

Question 1.2 *Est-il vrai que pour un lagrangien générique il existe une orbite qui tend vers l'infini ?*

Les hypothèses de convexité et surlinéarité (H3 et H4) nous invitent à employer des méthodes variationnelles. La question est alors de trouver le bon espace dans lequel on cherche des extrema. Pour trouver des orbites périodiques d'homotopie prescrite, on cherchera naturellement à minimiser l'intégrale d'action sur l'espace des courbes C^1 dans la classe d'homotopie prescrite. Afin d'appliquer les méthodes variationnelles à des problèmes plus généraux, Mather a proposé dans [Mr91] la construction suivante.

1.2 Théorie de Mather

Notons $\mathcal{M}_{inv}$ l'espace des mesures boréliennes de probabilité Φ_t-invariantes, à support compact dans $TM \times \mathbb{T}$. Mather a montré que la fonction suivante, appelée action du lagrangien sur les mesures,

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{M}_{inv} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \mu & \longmapsto & \int_{TM\times\mathbb{T}} L d\mu \end{array}$$

est bien définie et admet un minimum. Une mesure réalisant le minimum sera dite L-minimisante.

Lorsque $M = \mathbb{T}$, par le Théorème du Graphe de Mather, ([Mr91]) une mesure invariante admet un nombre de rotation au même titre qu'une mesure invariante d'un homéomorphisme du cercle.

Pour des systèmes ayant plus de degrés de liberté (c'est à dire que la dimension de M est > 1), Mather a généralisé cette observation dans [Mr91] comme suit. Remarquons tout d'abord que si ω est une 1-forme fermée sur M et $\mu \in \mathcal{M}_{inv}$ alors l'intégrale $\int_{TM\times\mathbb{T}} \omega d\mu$ est bien définie, et ne dépend que de la classe de cohomologie de ω. Par dualité cela munit μ d'une classe d'homologie $[\mu]$. La classe $[\mu]$ est l'unique $h \in H_1(M, \mathbb{R})$ tel que

$$\langle h, [\omega] \rangle = \int_{TM\times\mathbb{T}} \omega d\mu$$

pour toute 1-forme fermée ω sur M. Il est prouvé dans [Mr91] que pour aucun $h \in H_1(M, \mathbb{R})$, l'ensemble

$$\mathcal{M}_{h,inv} := \{\mu \in \mathcal{M}_{inv} \colon [\mu] = h\}$$

n'est vide. A nouveau l'action du lagrangien sur ce sous-ensemble de mesures admet un minimum. La fonction qui à h associe le minimum en question est appelée la fonction β du système :

$$\begin{array}{rcl} \beta \colon H_1(M, \mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ h & \longmapsto & \min\left\{ \int_{TM\times\mathbb{T}} L d\mu \colon \mu \in \mathcal{M}_{h,inv} \right\}. \end{array}$$

Une mesure μ telle que $[\mu] = h$ et $\int L d\mu = \beta(h)$ est dite (L, h)-minimisante.

On peut faire une construction analogue en cohomologie : si ω est une 1-forme fermée sur M, alors $L-\omega$ est un lagrangien satisfaisant les hypothèses (H1-5), et de plus le flot d'Euler-Lagrange de $L-\omega$ est le même que celui de L. Le minimum sur $\mathcal{M}_{inv}$ de $\int (L-\omega)d\mu$ ne dépend en fait que de la classe de cohomologie de ω, et définit une fonction sur $H^1(M,\mathbb{R})$, dont l'opposé est appelé fonction α du système :

$$\begin{array}{rcl} \alpha\colon H^1(M,\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ c & \longmapsto & -\min\left\{\int_{TM\times\mathbb{T}}(L-\omega)d\mu\colon \mu\in\mathcal{M}_{inv},\ [\omega]=c\right\}. \end{array}$$

Une mesure $(L-\omega)$-minimisante est aussi dite (L,ω)-minimisante, ou (L,c)-minimisante si c est la classe de cohomologie de ω.

Mather a démontré que α and β sont convexes, surlinéaires, et duales de Fenchel, à savoir

$$\begin{aligned} \forall h\in H_1(M,\mathbb{R}),\ \beta(h) &= \sup_{c\in H^1(M,\mathbb{R})}\left(\langle c,h\rangle-\alpha(c)\right) \\ \forall c\in H^1(M,\mathbb{R}),\ \alpha(c) &= \sup_{h\in H_1(M,\mathbb{R})}\left(\langle c,h\rangle-\beta(h)\right). \end{aligned}$$

En particulier $\min\alpha=-\beta(0)$. Les principaux signes distinctifs d'une fonction convexe sont sa différentiabilité et sa stricte (ou non) convexité. Dans le cas des fonctions α et β, ils sont associés à des propriétés dynamiques intéressantes, comme nous le verrons au paragraphe suivant.

Un cas particulier digne d'intérêt est celui où le lagrangien est l'énergie cinétique associée à une métrique riemannienne ou finslerienne sur M. La symétrie et l'homogénéité du lagrangien se reflètent alors dans la fonction β, qui est, dans ce cas, le demi-carré d'une norme, appelée norme stable par Federer (cf. [GLP81]).

1.3 Conjectures de Mather et Mañé

La stratégie de Mather pour attaquer la question 1.2, aboutie en petites dimensions, et encore conjecturale en grandes, consiste, sans entrer dans les détails, à construire une sorte d'échelle infinie dont les barreaux sont des supports de mesures minimisantes. Les classes d'homologie de ces mesures minimisantes tendent vers l'infini, et l'orbite diffusante visite tour à tour des voisinages de chacun des barreaux. Pour mener à bien cette construction, il importe que

– les mesures minimisantes ne soient pas trop nombreuses

– leurs supports ne soient pas trop gros.

Par exemple, quand $M=\mathbb{T}$, un tore invariant suffit à bloquer la diffusion puisqu'il sépare l'espace des phases en deux composantes connexes. Dans [Mn95, Mn96, Mn97], Mañé a proposé une série de conjectures allant dans ce sens, pour des lagrangiens génériques. Précisons d'abord ce que Mañé entend par générique. Notons que si L est un lagrangien de Tonelli sur M, et f est une fonction (traditionnellement appelée potentiel) C^2 sur $M \times \mathbb{T}$, alors $L+f$ est encore un lagrangien de Tonelli sur M. On dit alors qu'une propriété vaut pour un lagrangien C^k-générique si, quel que soit un lagrangien de Tonelli L de classe C^k, il existe une partie résiduelle $\mathcal{O}(L)$ de $C^k(M \times \mathbb{T})$ telle que pour tout $f \in \mathcal{O}(L)$, la propriété vaut pour $L + f$.

Conjecture 1.3 ([Mn97]) *Pour un lagrangien générique, il existe une unique mesure minimisante, et cette mesure est portée par une orbite périodique, ou un point fixe du flot d'Euler-Lagrange.*

Il existe une version faible de cette conjecture, où on s'autorise à perturber le lagrangien par une 1-forme fermée en plus du potentiel :

Conjecture 1.4 ([Mn96]) *Pour un lagrangien générique L, il existe un ouvert dense U de $H^1(M, \mathbb{R})$ tel que pour tout $c \in U$, il existe une unique mesure (L, c)-minimisante, et cette mesure est portée par une orbite périodique, ou un point fixe du flot d'Euler-Lagrange.*

A défaut d'obtenir des orbites périodiques, on peut espérer des mesures minimisantes ergodiques :

Question 1.5 ([Mn95]) *Pour un lagrangien générique L, toute mesure minimisante est-elle ergodique ?*

Enfin on peut supposer que la coexistence de deux mesures minimisantes cohomologues est un phénomène exceptionnel (voir [BC08] pour la meilleure réponse à ce jour) :

Question 1.6 ([Mn95]) *Est-il vrai que pour un lagrangien générique L, pour toute classe d'homologie h, il existe une unique mesure (L, h)-minimisante ?*

1.4 Différentiabilité de β

Dans [Mr90] et [Ba94] un lien est mis en évidence entre petitesse des supports de mesures minimisantes et différentiabilité de la fonction β. Le prototype de tous les théorèmes à ce sujet est

Théorème 1.7 ([Mr90], [Ba94]) *Si $M = \mathbb{T}$ alors β est différentiable en toute classe d'homologie irrationnelle. Elle est différentiable en une classe d'homologie rationnelle h si et seulement $\mathbb{T}$ est entièrement rempli d'orbites périodiques d'homologie h.*

Puisque $H_1(\mathbb{T}, \mathbb{R}) = \mathbb{R}$, le mot rationnelle se passe d'explication. Pour d'autres espaces de configurations il nous faut un peu de vocabulaire. Le quotient de $H_1(M, \mathbb{Z})$ par sa torsion se plonge en un réseau Γ dans $H_1(M, \mathbb{R})$. Une classe

$h \in H_1(M, \mathbb{R})$ est dite entière si elle se trouve dans Γ, et rationnelle si $nh \in \Gamma$ pour un entier non nul n. Un sous espace vectoriel de $H_1(M, \mathbb{R})$ est dit entier s'il est engendré par des classes entières.

Une fonction convexe admet un cône tangent en tout point. On dit qu'elle admet un sommet en x si son cône tangent en x ne contient aucune droite. Le théorème 1.7 suggère alors la question suivante :

Question 1.8 *Est-il vrai que les sommets de β ne se présentent qu'en des classes rationnelles ?*

On aimerait donner un sens quantitatif à l'irrationnalité d'une classe d'homologie. Le quotient $H_1(M, \mathbb{R})/\Gamma$ est un tore $\mathbb{T}^b$, où b est le premier nombre de Betti de M. Pour h dans $H_1(M, \mathbb{R})$, l'image de $\mathbb{Z}h$ dans $\mathbb{T}^b$ est un sous-groupe de $\mathbb{T}^b$, donc son adhérence $\mathcal{T}(h)$ est une réunion finie de tores de même dimension. Cette dimension est appelée irrationalité de h, et notée $I_{\mathbb{Z}}(h)$. Elle vaut zéro si h est rationnelle. Nous dirons qu'une classe h est complètement irrationnelle si son irrationalité est maximale, égale à b. Notons que les irrationalités de h et nh sont égales, pour $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, puisque le quotient de $\mathcal{T}(h)$ par $\mathcal{T}(nh)$ est un groupe fini.

Pour les lagrangiens autonome la notion d'irrationalité pertinente est légèrement différente. Soit $I_{\mathbb{R}}(h)$ la dimension de l'adhérence dans $\mathbb{T}^b$ de $\mathbb{R}h$ au lieu de $\mathbb{Z}h$. Sur la relation entre les deux notions d'irrationalité, voir l'appendice A.1 de [Mt09]. Notons que la fonction $I_{\mathbb{R}}(h)$ est zero-homogène, i.e. $I_{\mathbb{R}}(th) = I_{\mathbb{R}}(h)$ pour tous $h \in H_1(M, \mathbb{R})$ et $t \neq 0$.

On dit que β est différentiable dans k directions en h si le cône tangent à β en h contient un espace affine de dimension k. La question naturelle, que nous appellerons dans la suite le problème de différentiabilité, est alors

Question 1.9 *La fonction β est-elle toujours différentiable dans k directions en une classe d'homologie k-irrationnelle ?*

Mather conjecture que la réponse est oui pour les lagrangiens C^∞. La réponse est oui pour tous les lagrangiens C^2 quand $M = \mathbb{T}$ d'après le Théorème 1.7.

1.4.1 Intégrabilité

A l'origine du problème de différentiabilité se trouve la question suivante : la non-différentiabilité de β ne se produit-elle que lorsque les supports de mesures minimisantes sont petits ? A l'opposé, on peut s'interroger sur le rapport entre grosseur des supports et différentiabilité de β. Plus précisement

Question 1.10 *Si la fonction β d'un lagrangien est C^1, le lagrangien est-il intégrable ?*

Cette question est posée, dans le cadre des normes stables des métriques de Finsler sur les tores, par Burago et Ivanov (cf. [BI94]).

1.5 Stricte convexité de β et ergodicité des mesures minimisantes

Tout d'abord un peu de vocabulaire : on appelle sous espace d'appui au graphe de β, un sous espace affine de $H_1(M,\mathbb{R})\times\mathbb{R}$ qui rencontre le graphe de β, sans rencontrer l'épigraphe ouvert $\{(h,y) \in H_1(M,\mathbb{R})\times\mathbb{R}\colon y > \beta(h)\}$. On appelle face de β l'intersection du graphe de β avec un sous espace d'appui. Une face est convexe. On dit que β est strictement convexe en h si la seule face de β contenant h est $\{h\}$.

Il est facile de voir que si β possède une face non triviale, alors il existe une mesure minimisante non ergodique (combinaison convexe de mesures minimisantes pour des points extrémaux de la face). Inversement, si β est strictement convexe en une classe d'homologie h, alors il existe une mesure minimisante ergodique d'homologie h. En effet toutes les composantes ergodiques d'une mesure h-minimisante quelconque ont pour homologie h, sans quoi il existerait une face de β joignant les homologies des composantes.

Ceci acquis, la réponse à la question 1.5 est contenue dans l'article [Ba90], qui reprend une construction d'Hedlund ([H39]) : il existe une métrique riemannienne sur le tore $\mathbb{T}^3$, dont la boule unité de la norme stable est un octaèdre. En particulier chaque niveau d'énergie non nul contient les supports d'exactement six mesures minimisantes ergodiques. On voit aisément que cette situation persiste sous une perturbation du lagrangien par un potentiel, ce qui répond à 1.5.

On peut alors se demander si une telle construction se généralise. Babenko et Balacheff ont montré ([BB06]) que sur toute variété de dimension ≥ 3, il existe une métrique dont la boule unité de la norme stable est un polyèdre, et de plus on dispose d'un choix assez large de polyèdres.

La situation est un peu plus compliquée en dimension deux. En effet, Bangert a observé que la boule unité de la norme stable d'une métrique sur $\mathbb{T}^2$ est toujours strictement convexe. Toutefois, si on considère des lagrangiens plus généraux que les métriques, on dispose d'un degré supplémentaire de liberté puisque la fonction β n'est en général pas homogène. Dans [CL99] Carneiro et Lopez ont mis en évidence un phénomène spécifiquement lagrangien : dans leur exemple, la fonction β possède une face de la forme $[-h,h]$. Encore une fois cette situation est stable par perturbation.

Les surfaces autres que le tore présentent des traits spécifiques, que nous détaillons au chapitre suivant.

1.6 Théorie d'Aubry-Mather en codimension un

La théorie de Mather des lagrangiens de Tonelli (que nous appellerons théorie de dimension un dans cette section, par opposition à la théorie de codimension un) est une généralisation de la théorie d'Aubry-Mather des twists maps de l'anneau, où les solutions sont fonctions d'une variable, vue comme le temps, à valeurs dans l'espace de phase. La théorie d'Aubry-Mather en codimension un est une généralisation différente (et légèrement plus ancienne puisque fondée sur [Mo86] et [Ba87]) : les solutions sont des fonctions à valeurs réelles, et c'est la variable qui vit dans une variété de dimension quelconque, en l'occurrence $\mathbb{R}^n$. Comme en théorie de dimension un, les solutions sont caractérisées par le fait de minimiser localement l'intégrale d'une fonction coût, appelée lagrangien.

Moser a mis en évidence l'existence de solutions dont le graphe reste à distance finie d'un hyperplan de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Cet hyperplan joue alors le rôle du nombre de rotation dans le cas des twist maps, ou de la classe d'homologie d'une mesure minimisante en théorie de dimension un. On peut alors définir la fonction β du système : c'est la fonction qui à un hyperplan non vertical de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ associe l'action moyenne minimale d'une solution dont le graphe est à distance finie de l'hyperplan en question. Par dualité convexe on définit également la fonction α.

Senn ([S91]) a observé que, comme dans le cas des twist maps, ou d'un lagrangien périodique en temps sur le cercle, ou d'un lagrangien autonome sur le tore de dimension deux, la fonction β d'un système lagrangien de codimension un est strictement convexe. Autrement dit α est C^1. Cela peut s'interpréter de la façon suivante : dans tous les cas sus-cités, les solutions tiennent suffisamment de place dans l'espace de configuration pour que deux d'entre elles, de classes d'homologie différentes, soient obligées de se couper.

La différentiabilité de β en codimension un est étudiée dans deux articles qui mériteraient d'être mieux connus, [S95] et [Be09]. En particulier la réponse à la question 1.9 est positive. Puisque une telle information est la première étape vers la résolution de la conjecture 1.4, on est alors tenté de résoudre ladite conjecture dans le cadre de la théorie d'Aubry-Mather en codimension un. Encore faut-il arriver à formuler la conjecture dans ce cadre. Il n'y a pas de dynamique en théorie d'Aubry-Mather de codimension un, donc la notion de mesure invariante n'a pas de sens. Dans [BeM], à la suite de [Be09], lui-même inspiré par [BB07], nous utilisons la notion de courant induit par une solution. Les problèmes s'énoncent comme suit.

Question 1.11 *Est-il vrai que pour un lagrangien L satisfaisant les hypothèses de [Mo86], générique en topologie C^∞,*

- *pour toute classe d'homologie ρ, les solutions (L, ρ)-minimisantes induisent le même courant*
- *pour toute classe de cohomologie c, les solutions (L, c)-minimisantes induisent le même courant*
- *il existe un ouvert dense U de $\mathbb{R}^n$, tel que pour tout $c \in U$, vu comme une classe de cohomologie, $\alpha'(c) \in \mathbb{Q}^n$?*

Le premier (resp. deuxième, resp. troisième) point est une version de codimension un de la question 1.6 (resp. 1.5, resp. 1.4).

Chapitre 2

Résultats de non-stricte convexité

Dans [Mt97] nous avons abordé le cas des normes stables des surfaces orientables. Un trait remarquable de ces dernières est que leur homologie de dimension 1 est munie d'une structure symplectique canonique : la surface étant orientée, on peut définir l'intersection algébrique de deux courbes paramétrées en position générale. Cette intersection ne dépend que des classes d'homologie des courbes. L'application $\mathrm{Int}(.,.)$ ainsi définie sur $H_1(M,\mathbb{R}) \times H_1(M,\mathbb{R})$ est bilinéaire, antisymétrique, et non-dégénérée.

Une conséquence du Graph Theorem de Mather ([Mr91]) est que si deux classes d'homologie h_1, h_2 sont dans une face de β, alors $\mathrm{Int}(h_1, h_2) = 0$. En d'autres termes, les faces de la boule unité de la norme stable sont contenues dans des sous-espaces isotropes de $H_1(M,\mathbb{R})$. Ces derniers étant de dimension au plus la moitié de celle de $H_1(M,\mathbb{R})$, soit le genre de M, la boule unité ne peut être un polyèdre. Ce fait avait déjà été observé par M.J. Carneiro dans [C95].

Notre contribution à ce sujet a consisté à montrer que la boule unité n'est jamais strictement convexe dès que le genre de M est > 1, et plus précisément, pour toute classe d'homologie 1-irrationnelle h, il existe une face de la boule unité, de dimension $\mathrm{genre}(M) - 1$, contenant h ([Mt97], théorème 7). En particulier la combinatoire des faces de la boule unité est nécessairement très compliquée.

Dans [BaM08], en collaboration avec Florent Balacheff, nous avons étudié la norme stable des surfaces non-orientables. Un trait qui différencie ces dernières des orientables, et qui les rapproche des variétés de dimension plus grande, est qu'on peut y tracer des courbes fermées disjointes dont les classes d'homologie engendrent $H_1(M,\mathbb{R})$.

Il est donc naturel que si M est une surface non-orientable, il existe une métrique sur M dont la boule unité de la norme stable est un polyèdre :

Théorème 2.1 *([BaM08], théorème 1.3) Soit M une surface non-orientable fermée. Alors dans toute classe conforme il existe une métrique dont la boule unité de la norme stable est un polyèdre.*

Cependant, contrairement à ce qui se passe en dimension plus grande, le nombre de sommets possible d'un tel polyèdre est borné par $4b_1(M) - 2$, où $b_1(M) = \dim H_1(M, \mathbb{R})$. Cela tient au fait qu'on ne peut tracer sur M plus de $2b_1(M) - 1$ courbes fermées disjointes dont les classes d'homologie sont deux à deux non proportionnelles.

Par ailleurs la norme stable d'une surfaces non-orientable M munie d'une métrique g n'est jamais strictement convexe dès que $b_1(M) \geq 2$. Dans l'énoncé ci-dessous, E désigne la partie entière.

Théorème 2.2 *([BaM08], théorème 1.1) Soit M une surface fermée non-orientable munie d'une métrique riemannienne ou finslerienne. Alors toute courbe fermée minimisante est une composante connexe du support d'une mesure minimisante ayant au moins $E((b_1(M) + 1)/2) - 1$ composantes ergodiques portées par des courbes fermées.*

Cela s'explique par les considérations suivantes. Soient

– p: $M_o \longrightarrow M$ le revêtement d'orientation de M
– I l'involution canonique de M_o induite par p
– g_o la métrique p^*g sur M_o
– E_1 le sous espace de $H_1(M_o, \mathbb{R})$ formé des points fixes de I_*.

Alors $H_1(M, \mathbb{R})$ s'identifie avec E_1, qui est un sous-espace lagrangien de $H_1(M_o, \mathbb{R})$. La boule unité de la norme stable de (M, g) s'identifie avec l'intersection de E_1 avec la boule unité de la norme stable de (M_o, g_o).

Dans [Mta], nous avons généralisé le théorème 7 de [Mt97] au cas de lagrangiens quelconques. Il ne s'agit pas de généraliser pour le plaisir, ce résultat est nécessaire à la preuve du théorème 1.3 de [Mta], lui-même utilisé dans la preuve de la conjecture de Mañé (voir Annexe C), ainsi que dans [MS]. Dans le cas d'une métrique, le lagrangien est homogène, toute l'information sur la fonction β est contenue dans la boule unité. En particulier les faces de β sont contenues dans des ensembles de niveaux de β. Dans le cas général, le théorème est un peu plus compliqué à énoncer.

Définition 2.3 *Soit M une variété fermée et soit L un lagrangien de Tonelli sur $TM \times \mathbb{T}$. Pour $h \in H_1(M, \mathbb{R}) \setminus \{0\}$, nous définissons la face radiale maximale de β contenant h, notée R_h, comme étant le plus grand sous-ensemble de la demi-droite $\{th \colon t \in [0, +\infty[\}$ contenant h (pas nécessairement dans son intérieur relatif) en restriction auquel β est affine.*

La possibilité de faces radiales est la différence la plus flagrante entre les fonctions β des métriques riemanniennes ou finsleriennes ([Mt97], [BaM08]) et celles des lagrangians généraux. Un exemple de face radiale est exhibé dans [CL99]. Nous définissons l'ensemble de Mather $\tilde{\mathcal{M}}(R_h)$ comme la réunion de tous les supports de mesures th-minimisantes, pour $th \in R_h$.

On note $V(R_h)$ le sous-espace vectoriel engendré, dans $H_1(M,\mathbb{R})$ par les classes d'homologies de toutes les composantes ergodiques de mesures th-minimisantes, pour $th \in R_h$ (ce sont les mesures dont le support est contenu dans $\tilde{\mathcal{M}}(R_h)$). Si V est un sous-espace vectoriel de $H_1(M,\mathbb{R})$, M étant une surface orientée, on note $V^{\perp}$ l'orthogonal de V pour la forme symplectique sur $H_1(M,\mathbb{R})$ induite par l'intersection algébrique des courbes.

Enfin, on dit qu'une classe de cohomologie est non-singulière si son ensemble d'Aubry (voir le sous-chapitre 3.1 pour la définition de l'ensemble d'Aubry) ne contient aucun point fixe du flot d'Euler-Lagrange. Si h est une classe d'homologie, la transformée de Legendre $\mathcal{L}(h)$ est une face de la fonction α, elle a donc un ensemble d'Aubry (voir le sous-chapitre 3.2 pour le rapport entre ensembles d'Aubry et faces de α). On dit qu'une classe d'homologie est non-singulière si l'ensemble d'Aubry de sa transformée de Legendre ne contient aucun point fixe du flot d'Euler-Lagrange. La raison de ces précautions pour éviter les points fixes est que nos démonstrations reposent sur le fait que, en dimension deux, les courbes fermées sont localement séparantes.

Théorème 2.4 (([Mta], théorème C.4)) *Soient*

- M *une surface fermée, orientée*
- L *un lagrangien de Tonelli sur* M
- h_0 *un élément 1-irrationnel, non-singulier de* $H_1(M,\mathbb{R})$
- $V_0 := V(R_{h_0})$
- $h \in V_0^{\perp}$.

Alors il existe $t(h_0,h) \in \mathbb{R}$ *et* $s(h_0,h) > 0$ *tels que le segment* $[h_0, t(h_0,h)h_0 + s(h_0,h)h]$ *est contenu dans une face de* β.

La démonstration de ce théorème repose sur les lemmes et propositions suivants. Rappelons que si h est une classe d'homologie,

$$\mathcal{L}(h) = \left\{c \in H^1(M,\mathbb{R})\colon \alpha(c) + \beta(h) = \langle c,h\rangle\right\}$$

est le sous-différentiel à β en h, et $\mathcal{L}(h)$ est une face de α.

Lemme 2.5 ([Mta], lemme 2.3) *Soient*

- M *une surface fermée, orientée*
- L *un lagrangien de Tonelli autonome sur* M
- γ_0 *une extrémale fermée minimisante de* L*, telle que* γ_0 *n'est pas un point fixe*
- h_0 *la classe d'homologie de la mesure minimisante portée par* $(\gamma_0,\dot{\gamma}_0)$
- c *une classe de cohomologie dans* $\mathcal{L}(h_0)$.

Alors il existe un voisinage V_0 de $(\gamma_0, \dot\gamma_0)$ dans TM telle que pour toute extrémale γ telle que $(\gamma, \dot\gamma) \subset \tilde{\mathcal{A}}(c)$, si $(\gamma, \dot\gamma)$ entre dans (resp. sort de) V_0 alors γ est

- *ou bien une extrémale fermée homotope à γ_0*
- *ou bien positivement (resp. negativement) asymptote à une extrémale fermée homotope à γ_0.*

Rappelons que l'intérieur relatif d'un convexe d'un espace de Banach est son intérieur dans le sous-espace affine qu'il engendre. Il est démontré dans [Mt97], voir aussi [Mta], que si deux faces F_1, F_2 contiennent un point donné x dans leurs intérieurs relatifs, alors il existe une face contenant F_1 et F_2, et contenant x dans son intérieur relatif. Il y a par conséquent un sens à parler de la plus grande face contenant un point donné dans son intérieur.

Lemme 2.6 ([Mta], lemme C.4) *Soit F une face de β. Supposons que F contienne une classe d'homologie 1-irrationnelle h_0 dans son intérieur relatif. Alors pour tout $h \in F$, pour toute mesure h-minimisante μ, le support de μ consiste en orbites périodiques, et/ou points fixes.*

Le lemma 2.6 est conséquence de la

Proposition 2.7 ([CMP04], Proposition 2.1) *Soit M une surface fermée, pas nécessairement orientable, et soit L un lagrangien de Tonelli sur M. Si h est une classe d'homologie 1-irrationnelle et μ est une mesure h-minimiante, alors le support de μ consiste en orbites périodiques, ou (non exclusif) points fixes.*

Cette proposition a une histoire un peu compliquée : elle m'a été expliquée par A. Fathi, qui en attribuait l'argument à Haefliger. Rassuré par cette auguste caution, j'en ai écrit dans [Mt97] une vague esquisse de preuve. Les auteurs de [CMP04], ennemis de l'à-peu-près, ont rédigé une preuve complète. Ignorant ce fait, j'ai écrit avec F. Balacheff une autre preuve complète dans [BaM08].

2.1 Un problème de comptage

Soit (M, g) une surface fermée munie d'une métrique riemannienne ou finslerienne. Nous appellerons

- $\mathcal{S}(g)$ l'ensemble des longueurs de géodésiques fermées qui sont dans le support d'une mesure h-minimisante, h étant une classe d'homologie 1-irrationnelle, comptées avec multiplicités, c'est à dire que si deux géodésiques non homologues ont même longueur, celle-ci est comptée deux fois
- $N(T)$ le nombre d'éléments de $\mathcal{S}(g)$ qui sont $\leq T$.

Le problème qui nous intéresse ici est de trouver des estimations asymptotiques de $N(T)$. Voyons quelques exemples pour commencer.

2.1.1 Tores

Supposons que $M = \mathbb{T}^2$. Si h est une classe d'homologie entière non nulle et μ une mesure h-minimisante, alors μ est portée par des géodésiques fermées d'après la proposition 2.7. De plus ces géodésiques fermées sont deux à deux disjointes en vertu du Graph Theorem de Mather, et non séparantes puisque $h \neq 0$. Cela implique qu'elles sont deux à deux homotopes. Puisqu'elles minimisent la longueur dans leur classe d'homologie, elles ont toutes même longueur. Ainsi, à toute classe d'homologie entière on peut associer un élément de $\mathcal{S}(g)$. Réciproquement tout élément de de $\mathcal{S}(g)$ est la norme stable d'une classe d'homologie entière. Donc $N(T)$ est égal au nombre $N_1(T)$ de classes d'homologie entières dont la norme stable est $\leq T$. Par un théorème classique de Minkowski,

$$\lim_{T\to\infty} \frac{N_1(T)}{T^2} = \mathcal{V}(g)$$

où $\mathcal{V}(g)$ désigne le volume de la boule unité de la norme stable, calculé au moyen de la forme volume sur $H_1(M, \mathbb{R})$ pour laquelle le réseau Γ est de déterminant 1. On est alors tenté de conjecturer que pour une surface de premier nombre de Betti b, on a

$$\lim_{T\to\infty} \frac{N_1(T)}{T^b} = \mathcal{V}(g).$$

2.1.2 Surfaces non-orientables

Le présent paragraphe a pour objet de refroidir notre enthousiasme. Commençons par observer que si M n'est pas le tore, et si γ est une géodésique fermée minimisant la longueur dans sa classe d'homologie h, alors la boule unité de la norme stable possède un sommet en $h/\|h\|$ (voir [Mt97], théorème 8). D'après le théorème 2.1, si M n'est pas orientable, il existe une métrique g sur M dont la boule unité de la norme stable est un polyèdre. En particulier elle a un nombre fini de sommets, donc $\mathcal{S}(g)$ est fini. Nous fermerons désormais les yeux sur ce navrant état de fait, et supposerons M orientable. Rappelons (voir [Mt97]) que dans ce cas, si M est de genre strictement plus grand que 1, la boule unité de la norme stable a toujours une infinité de sommets.

2.1.3 Girafes

Supposons que M est de genre k, et possède k géodésiques fermées séparantes $\delta_1, \ldots, \delta_k$, ayant la propriété suivante : chaque δ_i possède un voisinage tubulaire V_i à bord lisse, tel que tout arc C^1 qui traverse V_i d'un bord à l'autre est au moins aussi long que n'importe lequel des deux bords. Remarquons que les métriques ayant cette propriété, ou girafes, forment une partie d'intérieur non vide, et d'adhérence non compacte, de l'espace des métriques sur

M. Alors aucune géodésique minimisante ne traverse un des V_i. En effet, si une géodésique γ traverse V_i, en remplaçant les arcs de γ qui sont contenus dans V_i par des segments du bord de V_i, on obtient un cycle rectifiable, homologue à γ, et plus court. Les δ_i découpent M en k tores privés d'un disque $T_1, \ldots, T_k$. On a alors

- $H_1(M, \mathbb{R}) = \oplus_{i=1}^{k} H_1(T_i, \mathbb{R})$
- $H_1(T_i, \mathbb{R})$ est un sous-espace symplectique de dimension deux de $H_1(M, \mathbb{R})$, pour tout i, et pour la forme symplectique induite en homologie par l'intersection algébrique des courbes
- la boule unité $\mathcal{B}$ de la norme stable de M est l'enveloppe convexe des boules unités $\mathcal{B}_i$ des normes stables des T_i, munis de la métrique induite par celle de M (en particulier, les seuls sommets de $\mathcal{B}$ sont ceux des $\mathcal{B}_i$)
- $N(T) \approx \sum_{i=1}^{k} \mathcal{V}_i T^2$, où $\mathcal{V}_i$ désigne le volume de $\mathcal{B}_i$, calculé au moyen de la forme symplectique d'intersection.

2.1.4 Fraises

Dans ce paragraphe on aborde le cas général. Nous quittons ici la terre ferme pour nous lancer dans la spéculation. Supposons pour simplifier que M est de genre deux. Soit γ_0 une géodésique fermée minimisant la longueur dans sa classe d'homologie, et soit h_0 la classe d'homologie $[\gamma_0] / l_g(\gamma_0)$, où l_g désigne la longueur pour la métrique g. Ainsi h_0 est un sommet de la boule unité de la norme stable. Alors ([Mt97], théorème 7, voir aussi [BaM08], théorème 6.1) pour toute classe d'homologie h_1 telle que $\mathrm{Int}(h_0, h_1) = 0$, Int désignant la forme symplectique d'intersection, il existe $s = s(h_1, h_0)$ tel que le segment de droite joignant h_0 à $(h_0 + sh_1) / \|h_0 + sh_1\|$ est contenu dans le bord de la boule unité de la norme stable. Nous appelons fraise (au sens vestimentaire et non maraîcher) de h_0 la partie suivante de la boule unité :

$$\mathcal{F}(h_0) := \{h_1 \in H_1(M, \mathbb{R}) \colon \forall t \in [0,1]\,,\ \|th_0 + (1-t)h_1\| = 1\}\,.$$

Nous dirons que deux fraises sont équivalentes si leurs bords coïncident. Par exemple dans le cas où (M, g) est une girafe de genre deux, il y a deux classes d'équivalences de fraises, correspondant aux intersections de la sphère unité avec les sous-espaces symplectiques $H_1(T_i, \mathbb{R})$. Dans le cas d'une surface de genre k quelconque, on associe une fraise à toute classe d'homologie entière possédant un cycle minimisant à $k-1$ composantes connexes. Ainsi une girafe de genre k possède exactement k classes d'équivalences de fraises, correspondant aux intersections de la sphère unité avec les sous-espaces symplectiques $H_1(T_i, \mathbb{R})$.

En général on peut montrer que $\mathcal{F}(h_0)$ est homéomorphe, de façon bilipschitzienne, à un disque. Il y a donc un sens à intégrer la forme symplectique d'intersection sur une fraise. On peut montrer que deux fraises équivalentes ont la même aire symplectique. Appelons $\mathcal{F}(g)$ la somme, dans $]0, +\infty]$, des aires symplectiques de toutes les classes d'équivalence de fraises.

Ne risquant rien d'autre que le ridicule, nous proposons la

Conjecture 2.8 *Pour toute surface riemannienne ou finslerienne* (M, g)*, on a*

$$\lim_{T \to \infty} \frac{N_1(T)}{T^2} = \mathcal{F}(g).$$

Naturellement cet énoncé n'a d'intérêt que si $\mathcal{F}(g) < \infty$, ce que nous nous gardons bien de conjecturer.

Chapitre 3

Différentiabilité de β et ensembles d'Aubry

3.1 Sous-solutions de l'équation d'Hamilton-Jacobi

Commençons par quelques rudiments de théorie KAM faible de Fathi (voir [F] pour plus de détails). Adoptons, pour le moment, le point de vue hamiltonien. Le hamiltonien H associé à L est

$$\begin{array}{rcl} H\colon T^*M\times\mathbb{T} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,p,t) & \longmapsto & \sup_{v\in T_xM}\langle p,v\rangle - L(x,v,t). \end{array}$$

La convexité et la surlinéarité de L garantissent que H est bien défini, strictement convexe dans les fibres de T^*M, et surlinéaire. La transformée de Legendre

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{L}\colon TM\times\mathbb{T} & \longrightarrow & T^*M\times\mathbb{T} \\ (x,v,t) & \longmapsto & (x,\frac{\partial L}{\partial v}(x,v,t),t) \end{array}$$

est un difféomorphisme C^1 qui conjugue le flot d'Euler-Lagrange de L avec le flot hamiltonien de H. Une méthode classique pour trouver des ensembles invariants non triviaux du flot consiste à résoudre l'équation de Hamilton-Jacobi

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)+H(x,d_xu,t)=\text{constante} \tag{3.1}$$

où l'inconnue u est une fonction C^1 de $M\times\mathbb{T}$ vers $\mathbb{R}$. Faute de solutions, en général, on cherche des sous-solutions, i.e. des fonctions $u\in C^1(M\times\mathbb{T},\mathbb{R})$ telles que

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)+H(x,d_xu,t)\leq\text{constante}. \tag{3.2}$$

Soit

$$I:=\left\{c\in\mathbb{R}\colon \exists u\in C^1(M\times\mathbb{T},\mathbb{R}),\ \forall x\in M,\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)+H(x,d_xu,t)\leq c\right\}.$$

L'ensemble I est non-vide puisque n'importe quelle fonction est sous-solution pour un c assez grand. D'autre part toute sous-solution pour c est sous-solution pour $c' \geq c$, donc I est un intervalle infini à droite. Par compacité de M, convexité et surlinéarité de H, H est borné inférieurement, ce qui, dans le cas où H est autonome, entraîne que I est borné inférieurement. Dans le cas non-autonome, c'est un lemme dû à Albert Fathi (voir [Mt07]). Appelons valeur critique, et notons α_H, la borne inférieure. Observons tout d'abord que la notation α_H n'est pas fortuite : en effet, Fathi a montré que $\alpha_H = \alpha(0)$ où $\alpha(0)$ désigne la valeur en la classe de cohomologie nulle de la fonction α du système.

La question est alors de savoir si I est fermé. La réponse est apportée par le théorème suivant, dû à Fathi et Siconolfi dans le cas autonome et à l'auteur dans le cas périodique.

Théorème 3.1 ([FS04], [Mt07]) *Il existe $u \in C^1(M \times \mathbb{T}, \mathbb{R})$ telle que*

$$\forall x \in M,\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + H(x, d_x u, t) \leq \alpha_H.$$

On appelle sous-solution critique une telle fonction u. Notons qu'il existe nécessairement une partie $\mathcal{E}_u$ de $M \times \mathbb{T}$ où l'égalité est réalisée dans l'inégalité de Hamilton-Jacobi, sans quoi on contredirait la minimalité de α_H. Ceci nous amène à la définition suivante :

Définition 3.2 (Fathi) *On appelle ensemble d'Aubry de H, et on note $\mathcal{A}(H)$, l'intersection sur toutes les sous-solutions critiques u des $\mathcal{E}_u$.*

Voici pourquoi il valait la peine de s'intéresser aux sous-solutions, et de définir l'ensemble d'Aubry :

Proposition 3.3 (Fathi) *(1) L'ensemble $\mathcal{A}(H)$ est non vide et fermé.*
(2) Quelles que soient u_1 et u_2 deux sous-solutions critiques, et quel que soit $(x,t) \in \mathcal{A}(H)$, on a

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial u_2}{\partial t}(x,t), \text{ et } d_x u_1 = d_x u_2.$$

(3) La partie

$$\{(x, d_x u, t)\colon (x,t) \in \mathcal{A}(H),\ u \text{ sous-solution critique } \}$$

de $T^*M \times \mathbb{T}$ est invariante par le flot hamiltonien.

Dans la suite on appellera ensemble d'Aubry du lagrangien L associé à H par dualité de Fenchel, et on notera $\tilde{\mathcal{A}}(L)$, l'image de

$$\{(x, d_x u, t)\colon (x,t) \in \mathcal{A}(H),\ u \text{ sous-solution critique } \}$$

dans $TM \times \mathbb{T}$ par la transformée de Legendre.

En fait le théorème 3.1 dit un peu plus : il affirme l'existence de sous-solutions strictes, c'est à dire que l'inégalité de Hamilton-Jacobi est stricte hors de l'ensemble d'Aubry. Une conséquence intéressante pour nous est la

Proposition 3.4 *Il existe une fonction $W \in C^2(M \times \mathbb{T}, \mathbb{R})$, telle que $W \geq 0$, $W^{-1}(0) = \mathcal{A}(H)$, et l'ensemble d'Aubry $\mathcal{A}(H+W)$ est égal à $\mathcal{A}(H)$.*

Cette proposition a un sens puisque $H+W$ est le hamiltonien associé au lagrangien de Tonelli $L-W$. Voyons tout d'abord comment déduire la proposition 3.4 du théorème 3.1. Soit u une sous-solution stricte C^1, et soit W une fonction C^2 telle que

$$\forall x, t, \ \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + H(x, d_x u, t) + W(x,t) \leq \alpha_H.$$

Alors u est sous-solution pour le hamiltonien de Tonelli $H+W$, donc $\alpha_{H+W} \leq \alpha_H$. D'autre part toute sous-solution pour $H+W$ est évidemment sous-solution pour H, donc $\alpha_{H+W} \geq \alpha_H$. Par conséquent $\alpha_{H+W} = \alpha_H$, et $\mathcal{A}(H+W) \supset \mathcal{A}(H)$. Mais puisque u est stricte en dehors de $\mathcal{A}(H)$, on a $\mathcal{A}(H+W) \subset \mathcal{A}(H)$, ce qui démontre la proposition.

Dans [Mt07] on fait le chemin inverse : on démontre d'abord la proposition 3.4, à l'aide de la définition lagrangienne de l'ensemble d'Aubry, et ensuite on en déduit le théorème 3.1.

Rappelons que si ω est une 1-forme fermée sur M, alors $L-\omega$ est un lagrangien de Tonelli, dont le flot d'Euler-Lagrange est le même que celui de celui de L. De plus il est élémentaire de vérifier que l'ensemble d'Aubry de $L-\omega$ ne dépend que de la classe de cohomologie c de ω. Si H_ω désigne le hamiltonien associé à $L-\omega$, on a $\alpha_{H_\omega} = \alpha(c)$. On est alors amené à se demander comment varie l'ensemble d'Aubry en fonction de c.

3.2 Faces de α

Voici le rapport entre la discussion précédente et la différentiabilité de β. L'idée de base nous a été inspirée par la lecture de [Mr93]. Observons que par dualité convexe, il est équivalent d'étudier la différentiabilité de β et la stricte convexité de α. Les propositions suivantes relient les faces de α avec les variations de l'ensemble d'Aubry vu comme fonction de la classe de cohomologie. La notion d'intérieur relatif d'une face joue un rôle central.

Proposition 3.5 ([Mt03], [Mt09]) *Soient*

- *M une variété fermée*
- *L un lagrangien de Tonelli sur $TM \times \mathbb{T}$*
- *F une face de α.*

Si $(c_0, \alpha(c_0))$ est un point de l'intérieur relatif de F, et si $(c, \alpha(c))$ est un point quelconque de F, alors l'ensemble d'Aubry de c contient celui de c_0. En particulier l'ensemble d'Aubry, vu comme fonction de la classe de cohomologie, est constant dans l'intérieur relatif de F.

Nous appellerons désormais ensemble d'Aubry d'une face F de α l'ensemble d'Aubry commun à tous les points de l'intérieur relatif de F. La proposition 3.5 admet une réciproque partielle :

Proposition 3.6 ([Mt03]) *Soient*

- *M une variété fermée*
- *L un lagrangien de Tonelli sur $TM \times \mathbb{T}$*
- *c et c' deux classes de cohomologie dont les ensembles d'Aubry se rencontrent.*

Alors il existe une face de α contenant $(c, \alpha(c))$ et $(c', \alpha(c'))$.

Des propositions 3.4 et 3.6 nous pouvons déduire le

Lemme 3.7 *Soient*

- *M une variété fermée*
- *L un lagrangien de Tonelli sur $TM \times \mathbb{T}$*
- *ω une 1-forme fermée sur $M \times \mathbb{T}$ dont le support ne rencontre pas l'ensemble d'Aubry de L*
- *(c, τ) la classe de cohomologie de ω dans $H^1(M, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$.*

Alors il existe $\epsilon > 0$, tel que l'ensemble d'Aubry de $L \pm \epsilon\omega$ est égal à celui de L, et α est affine en restriction au segment $[-\epsilon c, \epsilon c]$.

Ce lemme peut se reformuler de façon plus conceptuelle.

Définition 3.8 *Soit E_0 l'ensemble des $(c, \tau) \in H^1(M \times \mathbb{T}, \mathbb{R}) = H^1(M, \mathbb{R}) \times H^1(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ tels qu'il existe une 1-forme fermée lisse ω sur $M \times \mathbb{T}$ avec $[\omega] = (c, \tau)$ et $supp(\omega) \cap \tilde{\mathcal{A}}_0 = \emptyset$.*

Définition 3.9 *Soit G_0 l'ensemble des $(c, \tau) \in H^1(M \times \mathbb{T}, \mathbb{R}) = H^1(M, \mathbb{R}) \times H^1(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ tels qu'il existe une 1-forme fermée continue ω sur $M \times \mathbb{T}$ avec $[\omega] = (c, \tau)$ et*

$$\omega((x, t), (v, \tau)) = 0 \; \forall (x, t) \in \mathcal{A}_0 \subset M \times \mathbb{T}, \; \forall (v, \tau) \in T_{(x,t)} M \times \mathbb{T}.$$

Définition 3.10 *Soit V_0 le sous-espace vectoriel sous-jacent à l'espace affine engendré par la plus grande face (qui existe d'après [Mt97]) de α contenant zero dans son intérieur.*

On a alors le théorème suivant, démontré dans [Mt03] pour le cas autonome, et dans [Mt07] pour le cas périodique.

Théorème 3.11 *Soient*

- *M une variété fermée*
- *L un lagrangien de Tonelli sur $TM \times \mathbb{T}$.*

On a les inclusions suivantes : $E_0 \subset V_0 \subset G_0$.

L'égalité $E_0 = V_0$ entraîne une réponse affirmative au problème de différentiabilité. En effet E_0 est un sous-espace entier (c'est à dire un sous-espace engendré par des classes entières) de $H^1(M, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$, puisque E_0 s'identifie à la cohomologie d'un ouvert de M, laquelle est engendrée par des classes entières par le théorème des coefficients universels. D'autre part, on a la

Proposition 3.12 ([Mt09], proposition 20) *Soit L un lagrangien de Tonelli sur une variété fermée M. Supposons que pour toute classe de cohomologie $c \in H^1(M,\mathbb{R})$, c, $\tilde{V}_c$ est un sous-espace entier de $H^1(M \times \mathbb{T}^1, \mathbb{R})$. Soit h une classe d'homologie k-irrationnelle. Alors β est différentiable en h en au moins k directions.*

Désormais le but du jeu sera donc pour nous de trouver des conditions suffisantes à l'égalité $E_0 = V_0$. Notons que ce ne saurait être le cas général, puisqu'un contre-exemple est construit dans [BIK97]. Comme souvent dans ce sujet, les problèmes se posent lorsque l'ensemble d'Aubry est de grande dimension de Hausdorff, et de forme compliquée (par opposition à rectifiable).

3.3 Application jacobienne

Notre outil pour chercher des cas d'égalité $E_0 = V_0$, est l'application, dite jacobienne, introduite dans [Mt09], et définie comme suit. Soit ω une 1-forme fermée sur $M \times \mathbb{T}$ telle que l'ensemble d'Aubry de $L - \omega$ est égal à celui $\mathcal{A}(L)$ de L. Appelons $p\colon \overline{M} \times \mathbb{R} \longrightarrow M \times \mathbb{T}$ le revêtement abélien de $M \times \mathbb{T}$, c'est à dire le plus petit revêtement dans lequel le rappel de toute 1-forme fermée sur $M \times \mathbb{T}$ est exact. Soient

- $F\colon \overline{M} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une primitive du rappel de ω à $\overline{M} \times \mathbb{R}$
- x_0 un point quelconque de $\mathcal{A}(L)$
- u_0 et u_1 des sous-solutions de l'équation de Hamilton-Jacobi associées à L et $L - \omega$, respectivement.

On définit alors l'application jacobienne associée à ω par

$$\begin{array}{rcl} \phi_\omega\colon \overline{M} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (F + u_1 \circ p - u_0 \circ p)(x,t) - (F + u_1 \circ p - u_0 \circ p)(x_0, 0). \end{array} .$$

Une propriété importante, pour nous, de cette application, est donnée par la

Proposition 3.13 ([Mt09], Proposition 6) *L'application ϕ_ω satisfait une condition de Hőlder d'ordre deux sur $p^{-1}(\mathcal{A}_0)$.*

3.4 Sommets de β

Un cas particulier du problème de différentiabilité, est la question suivante, déjà citée dans l'introduction : *est-il vrai que les sommets de β ne se présentent qu'en des classes rationnelles ?* Le théorème 1 de [Mt03] entraîne une réponse affirmative quand la dimension de M est deux, mais on peut dire un peu plus par une méthode spécifique :

Théorème 3.14 ([Mt09], théorème 3) *Si la fonction β d'un lagrangian L sur une variété M a un sommet en une classe d'homologie h, et p est l'irrationalité de h, alors $2p < \dim M$.*

L'idée de la démonstration est la suivante. Supposons, sans perte de généralité, que la transformée de Legendre $\mathcal{L}(h)$ de h est la plus grande face de α contenant zéro dans son intérieur. Si on a un sommet de β en h, alors on peut trouver une base $c_1, \ldots c_b$ de $H^1(M, \mathbb{R})$, formée de classes de cohomologie entières, et des $\epsilon_1, \ldots \epsilon_b > 0$ tels que $\epsilon_1 c_1, \ldots \epsilon_b c_b \in \mathcal{L}(h)$. Pour chaque $i = 1, \ldots b$ on choisit une 1-forme fermée ω_i représentant $\epsilon_i c_i$, et on forme l'application

$$\begin{array}{rcl} \Phi\colon \overline{M} & \longrightarrow & \mathbb{R}^b \\ x & \longmapsto & (\phi_{\omega_i})_{i=1,\ldots b} \end{array}$$

où ϕ_{ω_i} est l'application jacobienne associée à ω_i comme au paragraphe précédent. Puisque les 1-formes fermées $\epsilon_i^{-1}\omega_i$, $i = 1, \ldots b$, sont entières, cette application passe au quotient en une application Φ de M dans un tore $\mathbb{T}^b$. Si $\gamma\colon \mathbb{R} \longrightarrow TM \times \mathbb{T}$ est une orbite du flot d'Euler-Lagrange de L, contenue dans l'ensemble d'Aubry $\mathcal{A}(L)$, alors $\gamma(\mathbb{Z}) \subset M \times \{0\} \subset M \times \mathbb{T}$, et en identifiant $M \times \{0\}$ à M, on peut parler de $\Phi(\gamma(\mathbb{Z}))$. Alors $\Phi(\gamma(\mathbb{Z}))$ est dense dans un sous-tore de $\mathbb{T}^b$, dont la dimension est égale à l'irrationnalité de h. Puisque Φ est 2-hőlderienne le long de $\mathcal{A}(L)$, on conclut par le lemme de Ferry que $2p < \dim M$.

Comme les précédents, ce théorème admet un analogue dans le cas autonome. Observons que pour un lagrangien autonome, d'après [C95], β est toujours différentiable dans la direction radiale, c'est à dire que, pour $h \in H_1(M, \mathbb{R}) \setminus \{0\}$ donné, la fonction

$$\begin{array}{rcl}]0, +\infty[& \longrightarrow &]0, +\infty[\\ t & \mapsto & \beta(th) \end{array}$$

est C^1. Donc la fonction β d'un lagrangien autonome ne peut avoir de sommets qu'en zéro. Le minimum de différentiabilité possible dans le cas autonome est donc atteint quand β n'est dérivable en une classe $h \neq 0$ que dans la direction radiale, auquel cas le cône tangent à β en h ne contient aucun plan. Notre résultat, qui améliore le théorème 1 de [BIK97], est le

Théorème 3.15 *Si la fonction β d'un lagrangien autonome L sur une variété fermée M n'est différentiable en $h \neq 0$ que dans la direction radiale, alors $2I_{\mathbb{R}}(h) - 1 < \dim M$. En particulier, si la dimension de M est trois, alors $I_{\mathbb{R}}(h) \leq 1$.*

Ce théorème est démontré dans [Mt09] sous l'hypothèse qu'il n'y a pas de points fixes dans l'ensemble d'Aubry. Cette hypothèse est superflue ; une preuve est donnée en annexe A.

3.5 Questions

3.5.1 Flots d'Anosov

Que peut-on dire si le flot d'Euler Lagrange est d'Anosov ?

3.5.2 Petites dimensions, généricité

On constate une analogie formelle entre le problème de différentiabilité et le problème de la dimension de Hausdorff de l'ensemble d'Aubry quotient. Ce dernier problème étant résolu en petites dimensions dans [FFR09] (à la suite de [Mr02] qui résout le problème de sa totale discontinuité), et dans [BC08], pour un lagrangien générique en toutes dimensions, on aimerait un résultat analogue pour le problème de différentiabilité.

3.5.3 Adhérence de courbes sur les tores

En voulant généraliser les théorèmes 3.14 et 3.15, on peut chercher à affaiblir l'hypothèse de non-différentiabilité : par exemple dans le cas périodique en temps, au lieu de supposer que β a un sommet en h, on suppose seulement que le cône tangent à β en h ne contient aucun plan. L'image par Φ d'une orbite contenue dans l'ensemble d'Aubry est alors contenue, non plus dans une droite de $\mathbb{T}^b$, mais dans un plan. On est donc amené à considérer la question suivante : soit γ une courbe de $\mathbb{R}^n$, tracée sur un sous-espace totalement irrationnel de $\mathbb{R}^n$ (c'est à dire un sous-espace ne contenant aucun point à coordonnées entières, si ce n'est l'origine), et admettant une direction asymptotique (le quotient $\gamma(t)/t$ tend vers une limite non nulle quand t tend vers l'infini). Que peut-on dire sur la dimension de Hausdorff de l'image de γ dans $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$? Sauf dans le cas facile où γ est à distance bornée d'une droite de $\mathbb{R}^n$ (voir annexe B), cette question demeure mystérieuse.

Chapitre 4

Ensembles d'Aubry et de Mather pour un lagrangien autonome en dimension deux

Si on dispose d'une réponse affirmative au problème de différentiabilité, et si on veut connaître le cône tangent à β en une classe d'homologie h, il reste à obtenir suffisament d'information sur l'ensemble d'Aubry pour pouvoir déterminer E_0. Rappelons que si h est une classe d'homologie, $\mathcal{L}(h) = \left\{c \in H^1(M, \mathbb{R})\colon \alpha(c) + \beta(h) = \langle c, h\rangle\right\}$ est le sous-différentiel à β en h, et $\mathcal{L}(h)$ est une face de α. On note $\mathcal{AL}(h)$ l'ensemble d'Aubry commun à tous les points de l'intérieur relatif de $\mathcal{L}(h)$. De même on note $\mathcal{ML}(h)$ l'ensemble de Mather commun à tous les points de l'intérieur relatif de $\mathcal{L}(h)$, c'est à dire la réunion de tous les supports de mesures c-minimisantes, pour c dans l'intérieur relatif de $\mathcal{L}(h)$. En général $\mathcal{ML}(h) \subset \mathcal{AL}(h)$, et $\mathcal{ML}(h) \setminus \mathcal{AL}(h)$ est fait d'orbites homoclines à $\mathcal{ML}(h)$. Notre théorème suivant permet d'exclure les homoclines dans certains cas particuliers.

On dit qu'une classe d'homologie h est singulière si $\mathcal{ML}(h)$ contient un point fixe du flot d'Euler-Lagrange. Naturellement cela n'a de sens que pour un lagrangien autonome. Notre résultat s'appuie fortement sur le fait que les courbes fermées sont localement séparantes en dimension deux, c'est pourquoi il nous faut en exclure les classes singulières.

Théorème 4.1 *Soient*

- *M une surface fermée*
- *L un lagrangien de Tonelli autonome sur M*
- *h une classe d'homologie 1-irrationnelle, non singulière.*

Alors $\mathcal{AL}(h) = \mathcal{ML}(h)$, et $\mathcal{AL}(h)$ est une réunion d'orbites périodiques.

Ce résultat possède un analogue dans le cas des lagrangiens périodiques sur le cercle, énoncé dans [Mr93], p. 1376, et démontré dans [Mr09], section 3. Soit L un lagrangien de Tonelli sur $T\mathbb{T} \times \mathbb{T}$, et soit h une classe d'homologie rationnelle de $\mathbb{T}$. Alors $\mathcal{L}(h)$ est un intervalle $[c^-, c^+]$, et pour tout c dans l'intérieur relatif de $[c^-, c^+]$ (à savoir $]c^-, c^+[$ si $c^+ \neq c^-$, et $\{c^+\}$ si $c^+ = c^-$), on a $\mathcal{A}(c) = \mathcal{M}(c)$, et $\mathcal{A}(c)$ est une réunion d'orbites périodiques.

Outre le fait, énoncé par Poincaré, que les orbites périodiques sont la brèche par laquelle nous pouvons espérer investir la forteresse des systèmes dynamiques, nous avons des raisons précises pour chercher des orbites périodiques minimisantes, à savoir :

– les conjectures de Mañé
– les résultats de [A03] et [AIPS05]
– le résultat de [Be07], qui affirme l'existence de sous-solutions de l'équation de Hamilton-Jacobi aussi régulières que le Lagrangien, pourvu que l'ensemble d'Aubry consiste en une réunion finie d'orbites périodiques hyperboliques.

Pour les deux derniers points il est essentiel que l'ensemble d'Aubry ne contienne que des orbites périodiques, auquel cas il est égal à l'ensemble de Mather.

Une première observation est qu'en dimension deux il est relativement facile de trouver des orbites périodiques minimisantes : la proposition 2.7 nous assure que si h est une classe d'homologie 1-irrationnelle, toute mesure h-minimisante est portée par des orbites périodiques ou points fixes. Cela ne suffit pas à garantir que $\mathcal{ML}(h)$ soit formé d'orbites périodiques. En effet, si $c \in \mathcal{L}(h)$, on pourrait a priori imaginer qu'il existe dans $\mathcal{L}(c)$ une classe d'homologie h' k-irrationnelle avec $k > 1$, et une mesure h'-minimisante qui ne soit pas portée par des orbites périodiques. En ce cas h et h' sont contenues dans $\mathcal{L}(c)$ qui est une face de β. Cela nous oblige à analyser avec précision les faces de β, et justifie le temps passé à démontrer le théorème 2.4.

Définition 4.2 *Si L est un lagrangien de Tonelli (autonome ou périodique) sur une variété fermée M, et si F est une face de α, on pose*

$$\mathcal{F}(F) := \bigcap_{c \in F} \mathcal{L}(c).$$

Si h est une classe d'homologie de M, $\mathcal{L}(h)$ est une face de α, on note $\mathcal{FL}(h) := \mathcal{F}(\mathcal{L}(h))$ pour éviter la surcharge. Alors $\mathcal{FL}(h)$ est une face de β ([Mta], lemme A.1). Il est clair que h appartient à $\mathcal{FL}(h)$, mais pas forcément à son intérieur relatif. Si on pouvait montrer que h est contenu dans l'intérieur relatif de $\mathcal{FL}(h)$, par le lemme 2.6 on obtiendrait que $\mathcal{ML}(h)$ est formé d'orbites périodiques. Dans le cas d'un lagrangien périodique sur le cercle, la fonction β est strictement convexe, donc $\mathcal{FL}(h) = \{h\}$. Pour un lagrangien autonome, la situation est compliquée par la possibilité de faces radiales.

Soit h une classe d'homologie 1-irrationnelle. Rappelons que R_h est la plus grande face radiale de β contenant h (pas nécessairement dans son intérieur). Alors pour tout t tel que $th \in R_h$, th est aussi 1-irrationnelle. S'il est faux en général que h soit contenue dans l'intérieur relatif de $\mathcal{FL}(h)$, le lemme suivant est suffisant pour nos projets :

Lemme 4.3 ([Mta], lemme 3.1) *Soit L un lagrangien autonome sur une surface fermée M. Soit h une classe d'homologie 1-irrationnelle, non singulière. Alors l'intérieur relatif de R_h est contenu dans l'intérieur relatif de $\mathcal{FL}(h)$.*

Nous savons à présent que $\mathcal{ML}(h)$ est formé d'orbites périodiques, pour peu que h soit 1-irrationnelle et non singulière. Il reste à prouver que $\mathcal{AL}(h) = \mathcal{ML}(h)$. L'idée est la suivante. Soit γ une orbite périodique minimisante. Supposons pour simplifier que M est orientable, γ est non-séparante, et l'ensemble d'Aubry ne contient pas d'orbites périodiques qui s'accumulent sur γ. Soient

- $h := [\gamma]$
- h_0 une classe d'homologie dont l'intersection algébrique avec h vaut un
- $h_n^{\pm} := nh \pm h_0$, pour tout entier $n > 0$
- des mesures $h_n^{\pm}$-minimisantes $\mu_n^{\pm}$
- des classes de cohomologie $c_n^{\pm}$ telles que $\mu_n^{\pm}$ soit $c_n^{\pm}$-minimisante pour tout n
- des valeurs d'adhérence $c^{\pm}$ des suites $c_n^{\pm}$.

Alors en passant à la limite dans l'inégalité de Fenchel on voit que $c^{\pm} \in \mathcal{L}(h)$. D'autre part, en vertu de la semi-continuité de l'ensemble d'Aubry, valable en dimension deux d'après [Be], toute valeur d'adhérence, au sens de la topologie de Hausdorff, des suites des supports des mesures $\mu_n^{\pm}$ est contenue dans $\mathcal{A}(c^{\pm})$. On en déduit que les ensembles d'Aubry $\mathcal{A}(c^{\pm})$ contiennent des orbites homoclines à γ de tous les côtés, et dans tous les sens. Puisque $\mathcal{AL}(h)$ est contenu à la fois dans $\mathcal{A}(c^{+})$ et $\mathcal{A}(c^{-})$, et vérifie le Graph Theorem de Mather, cela exclut que $\mathcal{AL}(h)$ contienne des orbites homoclines à γ. L'ensemble d'Aubry étant constitué de l'ensemble de Mather et d'orbites homoclines à ce dernier, on obtient ainsi que γ est isolée dans $\mathcal{AL}(h)$. Plus généralement, on a la

Proposition 4.4 ([Mta], Corollaire 2.5) *Soit c dans $H^1(M, \mathbb{R})$ telle que l'ensemble de Mather $\tilde{\mathcal{M}}(c)$ consiste en orbites périodiques qui ne sont pas des points fixes, $\gamma_i, i \in I$. Soit h un barycentre à coefficients strictement positifs des classes d'homologie des $\gamma_i, i \in I$. Alors*

$$\mathcal{AL}(h) = \mathcal{ML}(h) = \mathcal{M}(c).$$

Ceci achève la démonstration du théorème 4.1.

4.1 Question

Les exemples exposés dans [Mta] montrent que l'hypothèse de non-singularité est nécessaire au théorème 4.1. Plus précisément, elle est nécessaire à la partie de l'énoncé qui concerne l'ensemble d'Aubry : on peut construire des lagrangiens dont l'ensemble d'Aubry contient des orbites homoclines, dont on ne peut se débarasser en déplaçant la classe de cohomologie à l'intérieur d'une face. Toutefois on peut se demander si l'hypothèse de non-singularité est nécessaire à la partie de l'énoncé qui concerne l'ensemble de Mather : serait-il possible de construire un lagrangien sur un tore de dimension deux, dont l'ensemble de Mather contiendrait un point fixe et une lamination sans feuille fermée, tel que la fonction β serait différentiable en zéro ?

4.2 Conséquence du théorème 4.1 sur la différentiabilité de β

Dans le cadre de la théorie d'Aubry-Mather de codimension un, Senn a obtenu la superbe formule suivante :

Théorème 4.5 ([S95]) *Soient*
- *L un lagrangien satisfaisant les hypothèses de Moser ([Mo86])*
- *$h \in \mathbb{R}^n$, on voit alors $(h, 1)$ comme une classe d'homologie de dimension n sur le tore $\mathbb{T}^{n+1}$*
- *$\mathcal{V}(h, 1) := Vect\{c_1 - c_2 \colon c_1, c_2 \in \mathcal{L}(h, 1)\}$*
- *$rat(h, 1) := Vect(h, 1)^{\perp} \bigcap \mathbb{Z}^{n+1}$, autrement dit, $rat(h, 1)$ est la partie entière de l'orthogonal euclidien de $(h, 1)$, on le voit comme une partie de la cohomologie de dimension n du tore $\mathbb{T}^{n+1}$.*

Alors
$$\mathcal{V}(h, 1) = rat(h, 1),$$
à moins que les solutions minimisantes d'homologie $(h, 1)$ ne feuillettent $\mathbb{T}^{n+1}$, auquel cas $\mathcal{V}(h, 1) = \{0\}$ (i.e. β est différentiable en $(h, 1)$).

En d'autres termes on a la dichotomie suivante : ou bien les solutions minimisantes feuillettent, auquel cas β est différentiable indépendamment de la rationalité de h, ou bien elles ne feuillettent pas, auquel cas la différentiabilité de β est entièrement déterminée par la rationalité de h.

Dans le cadre de dimension un, on aimerait bien exprimer la différentiabilité de β sous une forme aussi compacte. Il n'y a aucun espoir d'étendre telle qu'elle la formule de Senn : si M est une surface de genre > 1, munie d'un lagrangien de Tonelli L, et si h est une classe d'homologie rationnelle de M, la différentiabilité de β en h ne dépend pas seulement de la rationalité de h, mais aussi du lagrangien L, via le nombre de composantes connexes des mesures (L, h)-minimisantes. Dans [MS] nous obtenons la formule suivante :

Théorème 4.6 *Soient*
- *M une surface fermée*
- *L un lagrangien de Tonelli autonome sur M*
- *h_0 une classe d'homologie 1-irrationelle, non singulière de M*

- $(\gamma_i, \dot\gamma_i)_{i\in I}$ *les orbites périodiques contenues dans les supports des mesures* (L, th)*-minimisantes, pour tout* th *in* R_{h_0}
- c_0 *une classe de cohomologie contenue dans l'intérieur relatif de* $\mathcal{L}(h_0)$
- $\mathcal{V}(h_0)$ *le sous-espace de* $H^1(M, \mathbb{R})$ *engendré par les différences* $c_1 - c_2$*, où* $c_1, c_2 \in \partial\beta(h_0)$

Alors on a :

- *ou bien*
$$\mathcal{V}(h_0) = \partial\alpha(c_0)^\perp = \bigcap_{i\in J} h_i^\perp$$
où l'orthogonalité s'entend au sens de la dualité entre $H_1(M, \mathbb{R})$ *et* $H^1(M, \mathbb{R})$
- *ou bien* $M = \mathbb{T}^2$ *et les courbes fermées* γ_i*,* $i \in I$*, feuillettent* M *; dans ce cas* $\mathcal{V}(h_0) = \{0\}$*.*

4.3 Perspective : orbites homoclines

Supposons donné un lagrangien autonome sur une surface fermée. Nous venons de voir que si une classe de cohomologie se trouve dans l'intérieur relatif d'une face rationnelle de α, alors son ensemble d'Aubry consiste en orbites périodiques. Réciproquement, si l'ensemble d'Aubry d'une classe de cohomologie c consiste en orbites périodiques, alors il est facile de voir que c se trouve dans l'intérieur relatif d'une face de α. Maintenant, considérons une face rationnelle quelconque de α. Sur son bord se trouvent des points extrémaux. L'ensemble d'Aubry d'un tel point extrémal ne peut être entièrement constitué d'orbites périodiques, d'après les considérations ci-dessus. Par conséquent, il contient des orbites homoclines aux orbites périodiques qui forment l'ensemble d'Aubry de l'intérieur de la face. Nous avons ainsi une méthode nouvelle pour trouver des orbites homoclines, qui de surcroît sont contenues dans des ensembles d'Aubry.

Chapitre 5

Intégrabilité

Dans [MS] nous abordons, en collaboration avec A. Sorrentino, la question 1.10. Notre réponse, partielle, met en jeu la notion de C^0-intégrabilité.

Définition 5.1 ([Ar08]) *Un hamiltonian de Tonelli $H : T^*M \longrightarrow \mathbb{R}$ est dit C^0-integrable, s'il existe un feuilletage de T^*M dont les feuilles sont des graphes lagrangiens, invariant, lipschitziens, et dans chaque classe de cohomologie se trouve une feuille.*

Notre résultat principal est le

Théorème 5.2 ([MS], théorème 1) *Soit L: $T\mathbb{T}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ un lagrangien de Tonelli autonome sur le tore de dimension deux. Alors la fonction β est C^1 si et seulement si le système est C^0-intégrable.*

Observons que le tore est la seule surface qui admette un lagrangien C^0-intégrable ([MS], Proposition 4). D'autre part si M est la sphère de dimension deux, le plan projectif réel, ou la bouteille de Klein, la fonction β est C^1 quel que soit le lagrangien (trivialement pour les deux premières, d'après [C95] pour la dernière). Si M n'est ni la sphère de dimension deux, le plan projectif réel, la bouteille de Klein, ou le tore de dimension deux, la fonction β n'est jamais C^1 quel que soit le lagrangien. C'est une conséquence de la proposition suivante, qui généralise un résultat de Bangert pour les flots géodésiques sur le tore de dimension deux, et de Mather pour les twist maps.

Proposition 5.3 ([MS], proposition 1) *Soit L un lagrangien de Tonelli sur une surface fermée M et soit $h \in H_1(M,\mathbb{R})$ une classe d'homologie 1-irrationnelle non singulière. Alors , β est différentiable en h si et seulement si $\mathcal{M}(R_h) = M$. En ce cas, $\mathcal{M}(R_h) = M$ est feuilleté par des extrémales fermées.*

Pour démontrer le théorème 5.2 on utilise alors la densité des classes rationnelles et la semi-continuité de l'ensemble d'Aubry en dimension deux (conséquence de [FFR09] et [Be]). On obtient que pour toute classe de cohomologie c, l'ensemble d'Aubry de c est $\mathbb{T}^2$ tout entier. Un tel ensemble d'Aubry est un graphe lipschtzien au dessus de la section nulle de $T\mathbb{T}^2$, dont la classe de cohomologie est c.

En fait on peu dire un peu plus : si un des graphes ci-dessus est feuilleté par orbites périodiques, alors ces orbites périodiques ont toutes même période. Cela revient à exclure les faces radiales de β. C'est le sens de la

Proposition 5.4 ([MS], proposition 3) *Soit L un lagrangien de Tonelli autonome sur le tore de dimension deux dont la fonction β est différentiable en tout point de $H_1(\mathbb{T}^2, \mathbb{R})$. Alors quel que soit $h \in H_1(\mathbb{T}^2, \mathbb{R}) \setminus \{0\}$, on a $R_h = \{h\}$. En particulier, β_L est strictement convexe.*

5.1 Questions

Le théorème 5.2 réduit la question 1.10 à celle-ci, posée dans [Ar08] :

Question 5.5 *Pour un lagrangien de Tonelli, la C^0-intégrabilité entraîne-t-elle la C^1-intégrabilité ?*

Un résultat récent de Sorrentino ([S]) affirme que dans le cas d'un hamiltonien de Tonelli, pourvu qu'on puisse trouver suffisement d'intégrales premières C^1, il n'est pas nécessaire de vérifier que celles-ci sont en involution. Il s'agit donc de voir si les graphes lipschitz trouvés plus haut sont C^1. Pour cela un outil précieux est le théorème 2 de [Ar08], qui affirme que si le temps un du flot restreint à l'un de ces graphes lipschitz est conjugué, de façon bilipschitzienne, à une rotation, alors le graphe en question est C^1. La question 1.10 se ramène donc essentiellement à

Question 5.6 *Si la fonction β d'un lagrangien de Tonelli sur le tore de dimension deux est C^1, l'ensemble de Mather est-il égal à $\mathbb{T}^2$ tout entier quel que soit la classe de cohomologie ?*

Chapitre 6

Conjecture de Mañé

6.1 Conjecture forte et conjecture faible

Dans l'introduction nous affirmons que la conjecture 1.3 contient la conjecture 1.4. En effet 1.4 admet une classe plus large de perturbation, puisqu'en plus d'un potentiel elle autorise à rajouter une 1-forme fermée au lagrangien. Toutefois la présence d'un ouvert dense dans l'énoncé empêche 1.4 d'être conséquence immédiate de 1.3. Dans [Mt10] nons démontrons notre affirmation, à l'aide des résultats de [CI99] et [Be]. Pour ce faire on commence par montrer que la conjecture 1.3 est équivalente à un énoncé a priori plus fort, où l'ensemble de Mather est remplacé par l'ensemble d'Aubry, et où on demande que l'orbite périodique soit hyperbolique :

Conjecture 6.1 *Soient*
- *M une variété fermée*
- *L un lagrangien de Tonelli autonome sur TM*
- *$\mathcal{O}(L)$ l'ensemble des f dans $C^\infty(M)$ telles que l'ensemble d'Aubry de $L + f$ consiste en une unique orbite périodique hyperbolique.*

Alors l'ensemble $\mathcal{O}(L)$ est résiduel dans $C^\infty(M)$.

Ensuite on démontre que la conjecture 6.1 contient celle-ci, qui contient clairement 1.4 :

Conjecture 6.2 *Si L est un lagrangien de Tonelli autonome sur une variété M, il existe une partie résiduelle $\mathcal{O}_4(L)$ de $C^\infty(M)$, telle que pour toute f dans $\mathcal{O}_2(L)$, il existe un ouvert dense $U(L, f)$ de $H^1(M,\mathbb{R})$ tel que, pour tout c dans $U(L, f)$, l'ensemble d'Aubry de $(L+f, c)$ consiste en une unique orbite périodique hyperbolique.*

La conjecture 1.3 peut être vue comme une version du Closing Lemma adaptée à la théorie d'Aubry-Mather. Ceci suggère qu'elle est vraie en topologie C^2 et fausse en topologie C^k, pour $k \geq 3$. Rappelons que la topologie C^2 sur le hamiltonien correspond à la topologie C^1 sur le champ de vecteurs.

Le cas C^2 fait l'objet d'un travail en cours de Figalli et Rifford. Toutes mes tentatives pour construire un contre-exemple en topologie C^4 ont échoué lamentablement. Je n'ai pu en sauver que l'observation suivante. Supposons que par chance, étant donné un lagrangien L, on dispose d'une suite d'orbites périodiques γ_n qui approche l'ensemble de Mather. Alors la première idée qui vient à l'esprit est de rajouter à γ_n un potentiel f_n qui s'annule sur γ_n, strictement positif partout ailleurs. Si on peut trouver f_n assez grande pour que γ_n soit $L + f_n$-minimisante, mais que néanmoins la norme C^4 de f_n tende vers zéro, on a démontré la partie "densité" de la conjecture. Dans [Mt10] on montre que cette approche naïve ne fonctionne pas. Plus précisement, on donne un exemple d'un lagrangien L sur le tore de dimension deux, telle que pour toute orbite périodique γ de L, et toute fonction f C^4, si γ est $L+f$-minimisante, alors la norme C^4 de f est bornée inférieurement par une constante ne dépendant que de L.

6.2 Transformées de Legendre de classes d'homologie rationnelles

Puisque la classe d'homologie d'une mesure portée par une orbite périodique d'un lagrangien périodique est rationnelle, un premier pas vers la conjecture 6.2 consiste à décrire l'ensemble des classes de cohomologie qui sont sous-dérivées de β en une classe d'homologie rationnelle.

Théorème 6.3 ([Mt03]) *Soient*

- *M une variété fermée de dimension deux*
- *L un lagrangien de Tonelli autonome sur TM.*

Alors l'ensemble des classes de cohomologie c qui sont sous-dérivées de β en une classe d'homologie rationnelle est dense dans $H^1(M, \mathbb{R})$.

Ce théorème se déduit, par les théorèmes 1.1 et 1.2 de [FFR09], de la

Proposition 6.4 ([Mtb]) *Soient*

- *M une variété fermée*
- *L un lagrangien de Tonelli sur $TM \times \mathbb{T}$*
- *U un ouvert de $H^1(M, \mathbb{R})$, tel que pour tout c dans U, $E_c = V_c$ et l'ensemble d'Aubry quotient A_c est de mesure de Hausdorff unidimensionnelle zero.*

Alors la transformée de Legendre $\mathcal{L}(U)$ contient une classe d'homologie rationnelle.

6.3 Réponse à la question 1.4 en deux degrés de liberté

Connaissant le théorème 6.3, on en sait assez pour résoudre le problème 1.4 dans le cas d'un lagrangien autonome en deux degrés de liberté. Pour mon embarras éternel, dans [Mt03] je prétend avoir résolu le problème 1.4 dans ce cas particulier. La preuve est au mieux une esquisse, et elle utilise le résultat de [Mta] comme s'il allait de soi. Dans [Mtb] on démontre un énoncé un peu plus fort :

Théorème 6.5 *Soient*

- *M une variété fermée de dimension deux*
- *L un lagrangien de Tonelli autonome sur TM.*

Alors il existe une partie résiduelle $\mathcal{O}(L)$ de $C^\infty(M)$, telle que pour tout $f \in \mathcal{O}(L)$, il existe un ouvert dense $U(L,f)$ de $H^1(M,\mathbb{R})$, tel que pour tout $c \in U(L,f)$, l'ensemble d'Aubry $\mathcal{A}(L+f,c)$ consiste en exactement une orbite périodique hyperbolique.

Un résultat analogue est démontré pour les lagrangiens périodiques sur le cercle dans [O09]. La différence avec [Mt03] est que l'énoncé concerne les ensembles d'Aubry plutôt que de Mather. L'énoncé sur les ensembles d'Aubry semble plus utile au vu des résultats de[A03], [AIPS05], et [Be07].

Voici les grandes lignes de la preuve : Par [Mn96], si h est une classe d'homologie fixée, pour un lagrangien générique il existe une unique mesure h-minimisante. L'ensemble des classes d'homologie rationnelles étant dénombrable, pour un lagrangien générique, pour toute classe d'homologie rationnelle h, il existe une unique mesure h-minimisante. En vertu de la proposition 2.7, cette mesure est portée par une réunion finie d'orbites périodiques. D'après [CI99] on peut supposer que ces orbites périodiques sont hyperboliques. L'ensemble U des classes de cohomologie dont l'ensemble d'Aubry consiste en une orbite périodique hyperbolique est ouvert à cause de l'hyperbolicité et de la semi-continuité de l'ensemble d'Aubry en dimension deux. Pour montrer que U est dense, il suffit de montrer qu'il est dense dans les transformées de Legendre de classes rationnelles, en vertu du théorème 6.3. Prenons une classe de cohomologie c qui est sous-dérivée de β en une classe rationnelle h. L'unique mesure h-minimisante est portée par une réunion finie d'orbites périodiques hyperboliques $\gamma_1, \dots \gamma_k$. Soit h_1 la classe d'homologie de la mesure de probabilité équirépartie sur γ_1. Alors c est sous-dérivée de β en h_1, donc c est approchée par des classes de cohomologie situées dans l'intérieur relatif de $\mathcal{L}(h_1)$. Il reste à déterminer l'ensemble d'Aubry $\mathcal{AL}(h_1)$. Si h_1 est singulière, quitte à rajouter un potentiel arbitrairement petit pour exclure les orbites homoclines, on montre que $\mathcal{AL}(h_1)$ se réduit à un point fixe hyperbolique. Si h_1 n'est pas singulière, on utilise le théorème 4.1 : $\mathcal{AL}(h_1)$ est égal à l'ensemble de Mather de $R(h_1)$, la plus grande face radiale de β

contenant h_1. Si $R(h_1) = \{h_1\}$, alors $\mathcal{AL}(h_1)$ ne contient que γ_1, et la preuve est terminée. Si en revanche h_1 fait partie d'une face radiale non triviale, il faut utiliser un argument d'approximation ([Mta], lemme C.3). On montre ainsi la densité de U, et le théorème.

6.4 Application

Rappelons qu'en vertu du Théorème 1 de [Be07], lorsque l'ensemble d'Aubry est une réunion finie d'orbites périodiques hyperboliques, il existe une sous-solution de l'équation de Hamilton-Jacobi qui est aussi régulière que le hamiltonien. Par conséquent

Corollaire 6.6 *Soient*

– *M une variété fermée de dimension deux*

– *L un lagrangien de Tonelli autonome C^k sur TM, avec $2 \leq k \leq \infty$.*

Alors il existe une partie résiduelle $\mathcal{O}(L)$ de $C^\infty(M)$, telle que pour tout $f \in \mathcal{O}(L)$, il existe un ouvert dense $U(L, f)$ de $H^1(M, \mathbb{R})$, tel que pour tout $c \in U(L, f)$, il existe une sous-solution C^k de l'équation de Hamilton-Jacobi associée à $(L + f, c)$.

6.4.1 Question : mesure de l'ouvert dense

Un résultat récent de Fathi ([F09]) affirme que, pour un lagrangien autonome sur une surface, il ne peut y avoir de sous-solution lisse de l'équation de Hamilton-Jacobi que si l'ensemble d'Aubry est un tore quasi périodique ou une réunion d'orbites périodiques. Un ouvert dense est donc le mieux que l'on puisse espérer en général dans le corollaire ci-dessus. Il reste à déterminer si l'ouvert dense en question peut être de mesure pleine. Le théorème KAM exclut que ce soit le cas général. A l'opposé, McShane et Rivin ([MR95]) affirment que c'est le cas lorsque le lagrangien est une métrique de courbure constante négative sur un tore de dimension deux épointé. Comme pour le problème de différentiabilité, on peut se poser deux questions :

– si le flot d'Euler-Lagrange est d'Anosov, l'ouvert dense est-il de mesure pleine ?

– pour un lagrangien générique, l'ouvert dense est-il de mesure pleine ?

Chapitre 7

Conjectures de Mañé en codimension un

En théorie de codimension un, le lagrangien est une fonction satisfaisant aux hypothèses suivantes, introduites par Moser dans [Mo86] :

- (H1) : $L \in C^{l,\gamma}(\mathbb{R}^{2n+1})$, $l \geq 2$, $\gamma > 0$.
- (H2) : L est 1-périodique en $x_1, \ldots, x_n, u$.
- (H3) : il existe $\delta > 0$ tel que

$$\delta I \leq \frac{\partial^2 L}{\partial p_i \partial p_j} \leq \frac{1}{\delta} I$$

  où I est la matrice identité de taille n.
- (H4) : il existe $C > 0$ tel que

$$\left| \frac{\partial^2 L}{\partial p \partial x} \right| + \left| \frac{\partial^2 L}{\partial p \partial u} \right| \leq C(1 + |p|)$$

$$\left| \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial x} \right| + \left| \frac{\partial^2 L}{\partial u \partial x} \right| + \left| \frac{\partial^2 L}{\partial u \partial u} \right| \leq C(1 + |p|^2).$$

L'exemple le plus simple est de la forme

$$L(x, u, \nabla u) = \frac{1}{2} |\nabla u(x)|^2 + f(x, u)$$

où $f \in C^{l,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})$ est $\mathbb{Z}^{n+1}$-périodique.

Les objets que nous recherchons sont des fonctions u de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ qui minimisent localement l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}^n} L(x, u, \nabla(u)) dx \tag{7.1}$$

Moser a démontré l'existence de solutions vérifiant une propriété supplémentaire : leurs graphes se projettent injectivement dans le tore $\mathbb{R}^{n+1}/\mathbb{Z}^{n+1}$. Les graphes de ces solutions restent à distance finie d'un hyperplan non vertical de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$; Moser a, de plus, démontré que pour tout hyperplan non vertical ρ de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, il existe une solution $u \in C^{l,\gamma}(\mathbb{R}^n)$ dont le graphe reste à distance finie de ρ. On dit alors que ρ est la pente moyenne de u. Par commodité on identifiera ρ avec l'unique vecteur orthogonal à ρ, dont la $n+1$-ième coordonnée vaut un. On définit l'action moyenne d'une telle solution par la formule

$$\lim_{R \to \infty} \frac{1}{|B(0,R)|} \int_{B(0,R)} L(x,u,\nabla u)dx$$

où $B(0,R)$ est la boule euclidienne de rayon R, centrée en l'origine, et $|B(0,R)|$ est son volume euclidien. De plus la limite ci-dessus ne dépend que de L et de ρ, on la notera donc $\beta_L(\rho)$. La fonction $\rho \longmapsto \beta_L(\rho)$ est surlinéaire et strictement convexe ([S91]).

Soient maintenant

– une solution de Moser u, de pente moyenne ρ
– un vecteur $p = (p_1, \ldots p_n) \in \mathbb{R}^n$,
– une n-forme différentielle lisse ω sur $\mathbb{T}^{n+1}$.

On note $\omega(x,u) \cdot (p,1)$ l'évaluation de la n-forme ω sur le n-vecteur (en colonnes)

$$\begin{matrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p_1 & p_2 & \ldots & p_n \end{matrix}$$

et il est démontré dans [Be09] que la limite suivante existe :

$$T_u(\omega) := \lim_{R \to \infty} \frac{1}{|B(0,R)|} \int_{B(0,R)} \omega(x,u(x)) \cdot (\nabla u(x), 1)dx, \tag{7.2}$$

elle définit alors un n-courant T_u, de surcroît T_u est fermé et d'homologie $(\rho, 1)$. Les courants ainsi définis jouent, en théorie de codimension un, le rôle des mesures minimisantes de la théorie de Mather. Ils permettent d'énoncer les conjectures de Mather en codimension un, sous la forme des questions 1.11.

Dans [BeM] nous répondons par l'affirmative aux questions 1.11. Il est piquant de constater que les conjectures de Mañé se prêtent aussi bien au cadre de codimension un ; une explication possible est que Mañé fondait son intuition sur le cas des twists maps, qui à certains égards est plus proche de la codimension un que de la dimension un. Notons enfin que nous ne disons rien de la conjecture 1.3, toujours ouverte même dans le cas des twist maps, du moins en topologie C^∞ (voir [FR] pour des cas de moindre régularité).

Annexe A

Preuve du théorème 3.15

In [Mt09], we proved the following

Théorème A.1 *If the β function of an autonomous Lagrangian on a manifold M is not differentiable in any direction other than radial at h, and the energy level that contains the supports of the (L, h)-minimizing measures is supercritical, then $2I_{\mathbb{R}}(h) - 1 < \dim M$. In particular, if the dimension of M is three, then $I_{\mathbb{R}}(h) \leq 1$.*

It turns out that the supercriticality hypothesis is not necessary, as we now prove :

Théorème A.2 *If the β function of an autonomous Lagrangian on a manifold M is not differentiable in any direction other than radial at h, then $2I_{\mathbb{R}}(h) - 1 < \dim M$. In particular, if the dimension of M is three, then $I_{\mathbb{R}}(h) \leq 1$.*

Let $h_0 \in H_1(M, \mathbb{R})$ be such that the tangent cone to β at h_0 contains no plane. Let $c \in H^1(M, \mathbb{R})$ be such that $\langle c, h_0 \rangle = \alpha(c) + \beta(h_0)$, that is, c defines a supporting hyperplane to β at h_0. Modifying L by a closed one-form if $c \neq 0$, we may assume $c = 0$. Then V_0 has codimension one or zero. We now show that the second case only happens when $h_0 = 0$. For convenience we also assume that $\alpha(0) = 0$.

Lemme A.3 *We have $\langle V_0, h_0 \rangle = 0$. Therefore, if $h_0 \neq 0$, then V_0 has codimension one and V_0 is the orthogonal of h_0.*

Proof. Since $0 \in H^1(M, \mathbb{R})$ is a subderivative to β at h_0, and L is autonomous, by [C95] the support of any h_0-minimizing measure is contained in the energy level $0 = \alpha(0)$. Since any $c \in F_0$ is also a subderivative to β at h_0, the support of any h-minimizing measure is contained in the energy level $\alpha(c)$ so we have

$$0 = \alpha(c) \ \forall c \in F_0.$$

In other words, the faces of α are contained in the level sets of α for an autonomous Lagrangian. Besides, since c and 0 are subderivatives to β at h_0, we have

$$\begin{aligned}\langle c, h_0\rangle &= \alpha(c)+\beta(h_0)=\beta(h_0)\\ \langle 0, h_0\rangle &= \alpha(0)+\beta(h_0)=\beta(h_0)\end{aligned}$$

whence

$$\langle c, h_0\rangle = \langle 0, h_0\rangle = 0 \ \forall c \in F_0.$$

□

Since $I_{\mathbb{R}}(0)=0$, there is nothing to prove in the case $h_0 = 0$, hence by the lemma above we may assume $h_0 \neq 0$ and V_0 has codimension one.

It would help if we had an ergodic h_0-minimizing measure. Such a measure need not exist because $(h_0, \beta(h_0))$ may not be an extremal point of the epigraph of β, that is, h_0 may lie in the relative interior of a face of β. Such a face must be radial, i.e. contained in $\{th_0 \colon t \in [0, +\infty[\}$, for β is not differentiable at h_0 in any direction but the radial one. Then the radial face of β containing h_0 has at least one non-zero extremal point th_0 with $t \in]0, +\infty[$. Furthermore if the tangent cone to β at h_0 is contains no plane, then neither does the tangent cone to β at th_0 (see [Mta], Lemma 17). Since $I_{\mathbb{R}}(th_0) = I_{\mathbb{R}}(h_0)$, we may, for the purpose of proving Theorem 5, assume that h_0 itself is an extremal point of β. Then by [Mn92] there exists an ergodic h_0-minimizing measure μ.

Now we proceed with the proof of Theorem 5. Let $c_1, \dots c_{b-1}$ be a basis of V_0 and let $\omega_1, \dots \omega_{b-1}$ be smooth closed one-forms on M such that $[\omega_i] = c_i, i = 1 \dots k$. Consider the functions

$$\begin{aligned}u_{1,i}(x) &:= h(L-\omega_i)\,(x_0, x)\\ u_0(x) &:= h(L)\,(x_0, x)\,.\end{aligned}$$

for $1, \dots b-1$, and replace each one-form ω_i by

$$\omega_i' := \omega_i + du_{1,i} - du_0.$$

This is an almost everywhere defined, integrable and bounded one-form, and it vanishes identically on $\tilde{\mathcal{A}}_0$.

Complete $c_1, \dots c_{b-1}$ to a basis $c_1, \dots c_b$ of $H^1(M, \mathbb{R})$. Take ω_b to be any smooth one-form with cohomology c_b. Pick $a_1, \dots a_b$ an integer basis of $H^1(M, \mathbb{R})$. Let $(\nu_{ij})_{i,j=1,\dots b}$ be the matrix whose i-th line consists of the coordinates of a_i in the basis $c_1, \dots c_b$, so $a_i = \sum_{j=1}^{b} \nu_{ij} c_j$. Set, for $j = 1, \dots b$,

$$\eta_i := \sum_{j=1}^{b} \nu_{ij} \omega_j'.$$

This is an almost everywhere defined, integrable and bounded one-form with cohomology a_i.

Now let $(\lambda_{ij})_{i,j=1,\dots b}$ be the inverse matrix of $(\nu_{ij})_{i,j=1,\dots b}$, so

$$c_i = \sum_{j=1}^{b} \lambda_{ij} a_j.$$

Let Λ be the matrix $(\lambda_{ij})_{i=1,\dots b-1, j=1,\dots b}$, that is, we just delete the last line of $(\lambda_{ij})_{i,j=1,\dots b}$.

Endow $H_1(M,\mathbb{R})$ with the dual basis to $a_1, \dots a_b$ and $\mathbb{R}^{b-1}$ with its canonical basis. Consider the linear map from $H_1(M,\mathbb{R})$ to $\mathbb{R}^{b-1}$ whose matrix with respect to said basis is Λ. We again call this linear map Λ for simplicity. So if $h \in H_1(M,\mathbb{R})$, we have

$$\begin{aligned} \Lambda(h) &= \left(\sum_{j=1}^{b} \lambda_{ij} \langle a_j, h \rangle \right)_{i=1,\dots b-1} \\ &= \left(\langle c_i, h \rangle \right)_{i=1,\dots b-1}. \end{aligned}$$

Thus the kernel of Λ is the straight line generated by h_0.

Consider the map

$$\begin{aligned} \Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_b)\colon M &\longrightarrow \mathbb{T}^b \\ x &\longmapsto \left(\int_{x_0}^{x} \eta_i \right)_{i=1,\dots b} \mod \mathbb{Z}^b. \end{aligned}$$

The map Φ is Lipschitz. We assume, without loss of generality, that

$$\langle a_1, h_0 \rangle \neq 0.$$

Pick an orbit $\gamma\colon \mathbb{R} \longrightarrow M$ contained in the support $\mathrm{supp}\mu$ of μ. We have

$$d\Phi(\dot\gamma(t)) = (\eta_i(\dot\gamma(t)))_{i=1,\dots b} \text{ so } \Lambda\left(d\Phi(\dot\gamma(t))\right) = \left(\omega'_i(\dot\gamma(t))\right)_{i=1,\dots b} = 0.$$

and $\Phi(\gamma(\mathbb{R}))$ is a connected subset of a straight line of direction h_0 in $\mathbb{T}^b$. Note that $\Lambda \circ \Phi$ is the map

$$\begin{aligned} \overline{M} &\longrightarrow \mathbb{R}^{b-1} \\ x &\longmapsto \left(\int_{x_0}^{x} \omega'_i \right)_{i=1,\dots b}, \end{aligned}$$

so by Proposition 3.13 $\Lambda \circ \Phi$ is 2-Hölder on K_i.

We claim that for μ-almost every orbit γ the closure of $\Phi(\gamma(\mathbb{R}))$ in $\mathbb{T}^b$ is a subtorus of dimension $I_{\mathbb{R}}(h_0)$. It is sufficient to prove that the image of μ-almost every orbit is a whole line directed by h_0. This follows from

$$\frac{1}{t}\left(\int_0^t \eta_b(\dot\gamma(t)) \right) \longrightarrow \langle a_1, h_0 \rangle \neq 0 \tag{A.1}$$

when $t \to \pm\infty$, by the Birkhoff Ergodic Theorem. Let U be the set

$$\{(x,v) \in TM \colon \eta_b(x,v) > \frac{1}{2}\langle a_1, h_0 \rangle \}$$

then U is open in TM and by Equation A.1, we have $\mu(U) > \frac{1}{2}$.

On the other hand U does not meet the zero section of TM, so we know from Mather's Graph Theorem that the intersection with U of the support of μ is a Lipschitz lamination whose leaves are the orbits. In other words, one can cover $\mathrm{supp}\mu \cap U$ with finitely many charts (U_i, f_i) such that :

- the U_i are open sets of M that cover $\mathrm{supp}\mu \cap U$
- each f_i is a bi-Lipschitz homeomorphism from $]-1,1[^n$ to U_i.
- The horizontal lines $\{y\}\times]-1,1[$ are mapped into pieces of leaf.
- The image $\Phi(U_i)$ is contained in a small disk in $\mathbb{T}^b$.

As a consequence, we can lift Φ_{U_i} to an $\mathbb{R}^b$-valued map. Let us denote by K_i the set of points y in $]-1,1[^{n-1}$ such that $f_i(y,0)$ belongs to the support of μ, so $f_i^{-1}(\mathrm{supp}\mu) = K_i\times]-1,1[$. Let us define a map $\Psi_i : K_i \to \mathbb{R}^{b-1}$ by the expression

$$\Psi_i(y) = \Lambda \circ \Phi \circ f_i(y,0).$$

Since f_i is Lipschitz, Ψ_i is 2-Hölder on K_i.

The push-forward of μ by Φ is a measure on a torus of dimension $I_{\mathbb{R}}(h_0)$, invariant by an irrational flow. Irrational flows on tori are uniquely ergodic so $\Phi_*\mu$ is a multiple of the Lebesgue measure.

Therefore the images $\Phi(\mathrm{supp}\mu \cap U_i)$ cover a set of positive Lebesgue measure of a torus of dimension $I_{\mathbb{R}}(h_0)$. Hence there exists i such that $\Phi(\mathrm{supp}\mu \cap U_i)$ contains a set of positive Lebesgue measure of a vector space of dimension $I_{\mathbb{R}}(h_0)$. Thus $\Psi_i(K_i)$ contains a set of positive Lebesgue measure of a vector space of dimension $I_{\mathbb{R}}(h_0) - 1$. Since Ψ_i is 2-Hölder on K_i, and K_i is a subset of $\mathbb{R}^{\dim M - 1}$, Ferry's Lemma implies $1/2(\dim M - 1) > I_{\mathbb{R}}(h_0) - 1$, that is, $\dim M > 2I_{\mathbb{R}}(h_0) - 1$. $\square$

Annexe B

Adhérence de courbes sur les tores

Dans cette annexe nous donnons les maigres éléments dont nous disposons concernant la question 3.5.3. Soient

- P un plan totalement irrationnel de $\mathbb{R}^3$ (i.e. $P \cap \mathbb{Z}^3 = \{0\}$)
- γ une courbe continue à valeurs dans P (sur laquelle les hypothèses seront précisées plus tard ; en général on aimerait que la courbe ait une classe d'homologie, ou direction, asymptotique, i.e. que $t^{-1}\gamma(t)$ ait une limite non nulle).

On se pose la question suivante : *quelle est l'adhérence de γ dans $\mathbb{T}^3 = \mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$?* On cherche une condition suffisante pour que ladite adhérence soit de dimension de Hausdorff au moins deux. Soient

- $l \in \left(\mathbb{R}^3\right)^*$ telle que $P = \ker l$
- $D_0 = [0,1]^3$ le cube unité de $\mathbb{R}^3$
- $A := \overline{\gamma(\mathbb{R}) + \mathbb{Z}^3}$
- $A_0 := A \cap D_0$
- Leb la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

Remarquons que

- A est une réunion dénombrable de translatés de A_0
- A_0 est compact
- $\mathrm{Leb}\,(l(A_0)) > 1$ implique $\dim A_0 \geq 2$.

La dernière assertion est conséquence du fait que A_0 est localement homéomorphe au produit cartésien de $l(A_0)$ par un intervalle. Soit pour tout $n \in \mathbb{Z}$ $Z_n = (x_n, y_n, z_n) \in \mathbb{Z}^3$ tel que $(D_0 - Z_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est la suite des domaines fondamentaux traversés par $\gamma(t)$ pour $t \in \mathbb{R}$. Le lemme qui suit nous ramène à un problème de dynamique symbolique, lequel, à défaut d'être plus facile, a au moins l'avantage de se prêter à des simulations en Maple (dont l'auteur tient des images à la disposition du lecteur curieux).

Lemme B.1 *On a*

$$l(A_0) = \overline{l(Z_n)_{n\in\mathbb{Z}}}.$$

Preuve : pour tout $n \in \mathbb{Z}$ il existe $t_n \in \mathbb{R}$ tel que $\gamma(t_n) \in D_0 - Z_n$. Alors $\gamma(t_n) + Z_n \in D_0 \cap A = A_0$, donc $l\left(\gamma(t_n) + Z_n\right) = l\left(Z_n\right) \in l(A_0)$. Puisque A_0 est compact on en déduit

$$l(A_0) \supset \overline{l(Z_n)_{n\in\mathbb{Z}}}.$$

Réciproquement, soit $X \in \overset{\circ}{D}_0 \cap A$. Par définition de A il existe une suite $\gamma(t_k) + M_k$ de $\gamma(\mathbb{R}) + \mathbb{Z}^3$ telle que

$$\lim_{k\to\infty} \left(\gamma(t_k) + M_k\right) = X.$$

Puisque X se trouve dans l'intérieur de D_0, pour k assez grand on a $\gamma(t_k) + M_k \in D_0$, en particulier il existe $n(k)$ tel que $M_k = Z_{n(k)}$. On a alors $l\left(\gamma(t_k) + M_k\right) = l(Z_{n(k)}$ donc $l(X) = \lim l\left(\gamma(t_k) + M_k\right)$, d'où

$$l\left(\overset{\circ}{D}_0 \cap A\right) \subset \overline{l(Z_n)_{n\in\mathbb{Z}}}$$

puis

$$l(A_0) \subset \overline{l(Z_n)_{n\in\mathbb{Z}}}.$$

ce qui conclut la preuve du lemme. □

Sans perte de généralité on peut supposer que $l(x, y, z) = z - \alpha x - \beta y$ avec $1, \alpha, \beta$ rationnellement indépendants. Notons que

$$\mathrm{Leb}\left(\overline{l(Z_n)}_{n\in\mathbb{Z}}\right) > 0 \Longleftrightarrow \mathrm{Leb}\left(\overline{(\alpha x_n + \beta y_n \bmod 1)}_{n\in\mathbb{Z}}\right) > 0.$$

et de plus, étant donnée une suite (x_n, y_n) dans $\mathbb{Z}^2$, telle que $(x_{n+1}, y_{n+1}) = (x_n, y_n) \pm (1, 0)$ ou $(0, 1)$, il existe une suite entière z_n telle que (x_n, y_n, z_n) est la suite des domaines fondamentaux traversés par une courbe continue contenue dans P.

Désormais nous nous intéresserons donc à la répartition modulo un de suites $\alpha x_n + \beta y_n$, avec $(x_{n+1}, y_{n+1}) = (x_n, y_n) \pm (1, 0)$ ou $(0, 1)$. Observons qu'une telle suite n'est pas forcément dense modulo un. En effet, supposons que $0 < \alpha < \beta < 0.1$ et soit $A := \min\{\alpha, \beta - \alpha\}$. Prenons $(x_0, y_0) = (0, 0)$ et $(x_{n+1}, y_{n+1}) = (x_n, y_n) + (0, 1)$ jusqu'au moment où on arrive dans $]-\beta, 0[$. Alors, si on est tombé dans $]-\beta, -\alpha[$, on prend $(x_{n+1}, y_{n+1}) = (x_n, y_n) + (1, 0)$, qui tombe dans $]-\beta + \alpha, 0[$. Ensuite on prend $(x_{n+2}, y_{n+2}) = (x_{n+1}, y_{n+1}) + (0, 1)$ et on arrive dans $]\alpha, \beta[$. Alors on joue $(x_{n+3}, y_{n+3}) = (x_{n+2}, y_{n+2}) + (0, 1)$ et enfin $(x_{n+4}, y_{n+4}) = (x_{n+3}, y_{n+3}) - (1, 0)$ pour remettre à zéro le compteur des x_n.

Si on contraire on est tombé dans $]-\alpha, 0[$, on joue $(x_{n+1}, y_{n+1}) = (x_n, y_n) + (0, 1)$, qui arrive dans $]\beta - \alpha, \beta[$. La suite $\alpha x_n + \beta y_n$ modulo un ainsi construite évite l'intervalle $]0, A[$ et vérifie $x_n = 0$ ou 1, en particulier x_n / y_n tend vers zéro.

B.1 Suites aléatoires

La difficulté à construire des suites dont l'adhérence serait de dimension de Hausdorff < 1 s'explique peut-être par le fait qu'un tel phénomène, si jamais il se produit, est rare, comme le montre le lemme suivant. Dans ce paragraphe on s'intéresse à des suites aléatoires au sens de la mesure de probabilité invariante par le décalage, et par l'échange de α et β. Notons que par la loi des grands nombres une suite générique compte statistiquement autant de α que de β. En modifiant la mesure on peut obtenir toutes les fréquences possibles d'apparition de α, c'est à dire toutes les classes d'homologie possibles pour la courbe γ de la question originelle.

Lemme B.2 *Presque toute suite est dense dans le cercle.*

Il suffit pour démontrer le lemme, de montrer qu'une suite aléatoire contient des répétitions arbitrairement longues de α, puisque la suite $(n\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ est dense dans le cercle.

Soit $n \in \mathbb{N}$. L'ensemble E_n des suites ayant n α consécutifs est invariant par le décalage. Celui-ci étant ergodique, E_n est de mesure nulle ou pleine. Mais il ne peut être de mesure nulle, puisque il contient l'ensemble des suites qui commencent par n α consécutifs, et ce dernier est de mesure $2^{-n} > 0$. $\square$

On peut se poser une question plus fine : *une suite aléatoire est-elle équirépartie ?* Il paraît utile, au premier abord, de disposer d'une orbite générique explicite du décalage. On propose le candidat suivant : on numérote les suites finies de α et β (les mots finis sur l'alphabet à deux lettres), et on les met bout à bout, dans l'ordre croissant de leurs numéros. L'orbite de cette suite par le décalage est clairement dense, mais est-elle équirépartie ? Quelles sont la ou les mesures de comptage définies sur le cercle par cette suite ? Y en a-t-il d'autres que celle de Lebesgue ?

Il est clair qu'une suite qui contient des répétitions arbitrairement longues d'un même motif est dense dans le cercle. Pour éviter cet inconvénient, il m'a été suggéré par B. Rittaud de considérer une suite invariante par substitution, par exemple la substitution de Fibonacci $(0 \mapsto 1, 1 \mapsto 01)$. On est donc amené à adopter un autre point de vue sur la question : on fixe maintenant la suite de 0 et de 1, et on fait varier les nombres α et β. Il serait intéressant de relier les propriétés de la suite à des propriétés arithmétiques (par exemple, diophantines) de α et β. Expérimentalement on constate que pour $(\alpha, \beta) =$

$$(\sqrt{2}, \sqrt{3}), (\pi, \pi^2), (\pi, \sqrt{2}), (\pi, \pi^3), (\pi^3, \pi), (\pi, e), (e, \pi), \left(\sqrt{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right),$$

la suite est dense dans le cercle ; en revanche pour

$$(\alpha, \beta) = \left(2\frac{2-\sqrt{3}}{1+\sqrt{5}}, \sqrt{3}\right), \left(2\frac{2-\sqrt{2}}{1+\sqrt{5}}, \sqrt{2}\right)$$

elle évite un intervalle. L'auteur ne connaît à ce jour pas de démonstration rigoureuse de ces faits.

B.2 Cas où la courbe est à distance bornée d'une droite

Supposons donnés

- un vecteur v totalement irrationnel de $\mathbb{R}^n$
- une courbe continue $\gamma\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ telle que $\forall t \in \mathbb{R},\ \gamma(t).v = 0$
- une droite D de $\mathbb{R}^n$ et $R > 0$ tels que $\forall t \in \mathbb{R},\ \exists x \in D, \|x - \gamma(t)\| \leq R$, et $\forall x \in D,\ \exists t \in \mathbb{R}, \|x - \gamma(t)\| \leq R$.

Notons A l'adhérence de $\gamma(\mathbb{R}) + \mathbb{Z}^n$ dans $\mathbb{R}^n$.

Proposition B.3 *La dimension de Hausdorff de A est au moins deux.*

Preuve. Notons qu'on peut supposer $\forall x \in D,\ x.v = 0$. En effet, soient $x \in D$, et $t \in \mathbb{R}$ tels que $\|x - \gamma(t)\| \leq R$. Alors $|x.v| = |(x - \gamma(t)).v| \leq \|v\|R$, dons $x \mapsto x.v$ est borné sur D. Comme D est une droite, $x \mapsto x.v$ est constant sur D. Quitte à changer R, on peut translater D pour que $x \mapsto x.v$ soit identiquement nulle sur D. Notons

- V_C le voisinage tubulaire de rayon C de D, de sorte que $\gamma(\mathbb{R}) \subset V_R$
- $D_0(C)$ la boule fermée de centre l'origine et de rayon C
- $E := \{z \in \mathbb{Z}^n\colon D + z \subset V_R\}$.

Alors $\forall z \in E$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\gamma(t) + z \in V_{2R}$. Puisque v est totalement irrationnel, $E.v$ est dense dans un intervalle I. Soit $\theta \in I$. Il existe une suite $z_n \in E$ telle que $v.z_n \longrightarrow \theta$. Puisque $z_n \in E$ pour tout n, il existe une suite $x_n \in D$ telle que $x_n + z_n \in B_0(R)$. Donc il existe une suite $t_n \in \mathbb{R}$ telle que $\gamma(t_n) + z_n \in B_0(2R)$, donc $v.z_n \in v.(A \cap B_0(2R))$. Puisque $A \cap B_0(2R)$ est compact, cela implique $\theta \in v.(A \cap B_0(2R))$, donc $I \subset v.A$. Comme $x \mapsto x.v$ est Lipschitz, et constante sur chaque translaté de γ, cela entraîne que A est de dimension de Hausdorff au moins deux. □

B.3 Quasi-cristaux

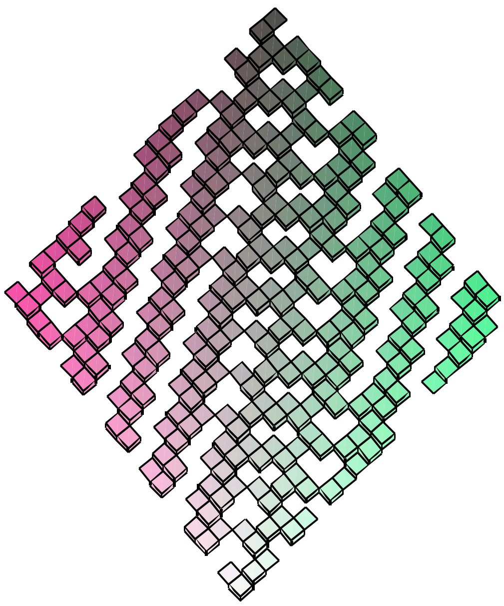
Pour les besoins de la cause on appelera quasi-cristal associé à P, l'ensemble suivant :

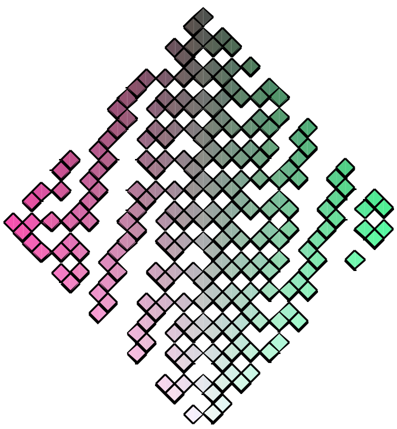
$$\mathcal{QC}(P) := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3\colon z < \alpha x + \beta y < z + 1\right\}.$$

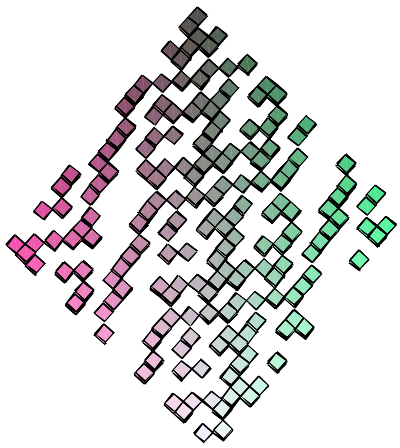
On dit que deux points (x, y, z) et (x', y', z') de $\mathcal{QC}(P)$ sont voisins si $|x - x'| + |y - y'| + |z - z'| = 1$. On appelle hauteur d'un point (x, y, z) de $\mathcal{QC}(P)$ la différence $\alpha x + \beta y - z$. On appelle chaîne dans $\mathcal{QC}(P)$ une suite (x_n, y_n, z_n) dans $\mathcal{QC}(P)$, telle que (x_n, y_n, z_n) est voisin de $(x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1})$ pour tout n. On dit qu'une chaîne infinie (x_n, y_n, z_n) admet une direction asymptotique si $n^{-1}(x_n, y_n, z_n)$ admet une limite non nulle. On dit qu'une partie de $\mathcal{QC}(P)$ est connexe si deux points quelconques sont joints par une chaîne finie. Le lemme B.1 suggère donc la question :

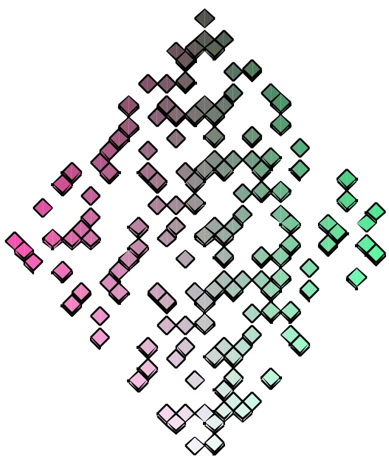
Question B.4 *Etant donnée une chaîne infinie (x_n, y_n, z_n), admettant une direction asymptotique, la suite des hauteurs de (x_n, y_n, z_n) est-elle de mesure positive ? dense dans un intervalle ?*

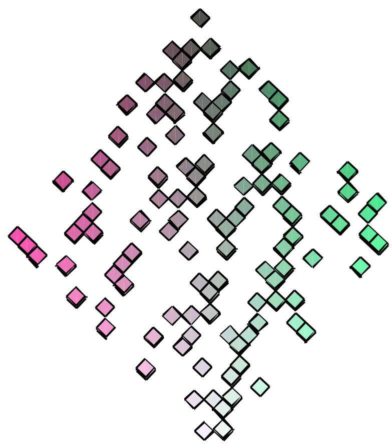
On peut être tenté de prendre le problème à l'envers : si K est une partie de $[0, 1]$, on appelle $\mathcal{QC}(P, K)$ l'ensemble des points de $\mathcal{QC}(P)$ dont la hauteur n'est pas dans K. On se demande alors s'il existe une taille critique pour K au delà de laquelle les composantes connexes de $\mathcal{QC}(P, K)$ ne peuvent contenir de chaîne infinie admettant une direction asymptotique. Naturellement on peut prendre pour K un intervalle suffisement grand ; la question devient intéressante si on suppose que les composantes connexes de K sont petites (par exemple, plus petites que $|\alpha - \beta|$). En fait, au vu de simulations, on a même envie de demander s'il existe une taille critique pour K au delà de laquelle les composantes connexes de $\mathcal{QC}(P, K)$ sont finies. Dans les figures qui suivent, on prend d'abord pour K la plus grande composante connexe du complémentaire de l'ensemble de Cantor triadique, puis les trois plus grandes, puis les sept, quinze, et trente-et-une plus grandes.











Bibliographie

[Mt96] D. Massart *Normes stables des surfaces*
thèse de doctorat, Ecole Normale Supérieure de Lyon, 1996

[Mt97a] D. Massart *Normes stables des surfaces*
C.R.A.S. Série 1 **324** (1997), no. 2, 221-224

[Mt97] D. Massart *Stable norms of surfaces : local structure of the unit ball at rational directions*
Geom. Funct. Anal. **7** (1997), no. 6, 996–1010.

[Mt03] D. Massart *On Aubry sets and Mather's action functional*
Israël Journal of Mathematics **134** (2003), 157-171.

[Mt07] D. Massart *Subsolutions of time-periodic Hamilton-Jacobi equations*
Ergodic Theory and Dynamical Systems **27** (2007), no. 4, 1253-1265.

[BaM08] F. Balacheff, D. Massart *Stable norms of non-orientable surfaces*
Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **58** (2008), no. 4, 1337–1369.

[Mt09] D. Massart *Vertices of Mather's beta function, II*
Ergodic Theory and Dynamical Systems **29** (2009), no. 4, 1289-1307

[Mt10] D. Massart *Two remarks about Mañé's conjecture*
Regular and Chaotic Dynamics, 2010, **15**, No. 6, pp. 646-651.

[Mta] D. Massart *Aubry sets vs Mather sets in two degrees of freedom*
preprint arXiv :0803.2647 [math.DS]
à paraître dans Calculus of Variations and Partial Differential Equations

[MS] D. Massart, A. Sorrentino *Differentiability of Mather's average action and integrability on closed surfaces*
preprint arXiv :0907.2055 [math.DS]

[BeM] U. Bessi, D. Massart *Mañé's conjectures in codimension one*
preprint arXiv :1009.5474v1 [math.AP]

[Mtb] D. Massart *Generic Aubry sets in two degrees of freedom*
travail en cours

Articles cités en référence

[A03] N. Anantharaman *Counting geodesics which are optimal in homology* Ergodic Theory Dynam. Systems 23 (2003), no. 2, 353–388.

[AIPS05] N. Anantharaman ; R. Iturriaga ; P. Padilla ; H. Sánchez-Morgado *Physical solutions of the Hamilton-Jacobi equation* Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B 5 (2005), no. 3, 513–528.

[Ar08] M. C. Arnaud. *Fibrés de Green et régularité des graphes C^0-Lagrangiens invariants par un flot de Tonelli* Ann. Henri Poincaré, 9 (5) : 881–926, 2008.

[A64] V. I. Arnol'd *Instability of dynamical systems with many degrees of freedom* Dokl. Akad. Nauk SSSR 156 1964 9–12.

[AB06] F. Auer, V. Bangert *Differentiability of the stable norm in codimension one* Amer. J. Math. 128 (2006), no. 1, 215–238.

[BB06] I. K. Babenko, F. Balacheff *Sur la forme de la boule unité de la norme stable unidimensionnelle* Manuscripta Math. 119 (2006), no. 3, 347–358.

[Ba87] V. Bangert *A uniqueness theorem for $\mathbb{Z}^n$-periodic variational problems*, Comment. Math. Helv., 62 (1987), 511-531.

[Ba88] V. Bangert, *Mather sets for twist maps and geodesics on tori* Dynamics reported, Vol. 1, 1–56, Dynam. Report. Ser. Dynam. Systems Appl., 1, Wiley, Chichester, 1988.

[Ba89] V. Bangert *On minimal laminations of the torus*, Ann. Inst. Henri Poincaré 6 (1989), no 2, 95–138.

[Ba90] V. Bangert *Minimal geodesics* Ergodic Theory Dynam. Systems 10 (1990), no. 2, 263–286.

[Ba94] V. Bangert *Geodesic rays, Busemann functions and monotone twist maps* Calc. Var. Partial Differential Equations 2 (1994), no. 1, 49–63.

[Be02] P. Bernard *Connecting orbits of time dependent Lagrangian systems* Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 52 (2002), no. 5, 1533–1568.

[Be07] P. Bernard *Smooth critical sub-solutions of the Hamilton-Jacobi equation* Math. Res. Lett. 14 (2007), no. 3, 503–511.

[Be08] P. Bernard *The dynamics of pseudographs in convex Hamiltonian systems* J. Amer. Math. Soc. 21 (2008), no. 3, 615–669.

[Be] Patrick Bernard *On the Conley Decomposition of Mather sets* to appear, Revista Iberoamericana de Matemáticas

[BB07] P. Bernard, B. Buffoni *Optimal mass transportation and Mather theory* J. Eur. Math. Soc. 9 (2007), 85-121.

[BC08] P. Bernard, G. Contreras *A generic property of families of Lagrangian systems* Ann. of Math. (2) 167 (2008), no. 3, 1099–1108.

[Be09] U. Bessi *Aubry sets and the differentiability of the minimal average action in codimension one* ESAIM Control Optim. Calc. Var. **15** (2009), no. 1, 1–48.

[BI94] D. Burago, S. Ivanov *Riemannian tori without conjugate points are flat* Geom. Funct. Anal. 4 (1994), no. 3, 259–269.

[BIK97] D. Burago, S. Ivanov, B. Kleiner *On the structure of the stable norm of periodic metrics* Math. Res. Lett. 4 (1997), no. 6, 791–808.

[C95] M. J. D. Carneiro. *On minimizing measures of the action of autonomous Lagrangians* Nonlinearity 89 (1995), 1077–1085.

[CL99] M.J. Carneiro, A. Lopes *On the minimal action function of autonomous Lagrangians associated to magnetic fields* Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 16 (1999), no. 6, 667–690.

[CI99] G. Contreras, R. Iturriaga *Convex Hamiltonians without conjugate points* Ergodic Theory Dynam. Systems 19 (1999), no. 4, 901–952.

[CMP04] G. Contreras, L. Macarini, G. Paternain, *Periodic orbits for exact magnetic flows on surfaces* Int. Math. Res. Not. 2004, no. 8, 361–387.

[F] A. Fathi *Weak KAM theorem in Lagrangian dynamics* to appear, Cambridge University Press.

[F09] A. Fathi. *Denjoy-Schwartz and Hamilton-Jacobi* RIMS meeting : Viscosity solutions of differential equations and related topics, Kyoto University, 2008.

[FFR09] A. Fathi, A. Figalli, L. Rifford *On the Hausdorff Dimension of the Mather Quotient* Comm. Pure Appl. Math. 62 (2009), no. 4, 445–500.

[FS04] A. Fathi, A. Siconolfi *Existence of C^1 critical subsolutions of the Hamilton-Jacobi equation* Invent. Math. 155 (2004), no. 2, 363–388.

[F75] S.Ferry, *When ϵ-boundaries are manifolds* Fund. Math. 90 (1975/76), no. 3, 199–210.

[FR] A. Figalli, L. Rifford, *Closing Aubry sets* preprint

[GLP81] M. Gromov *Structures métriques pour les variétés riemanniennes* Edited by J. Lafontaine and P. Pansu. Textes Mathématiques [Mathematical Texts], 1. CEDIC, Paris, 1981.

[H39] G. Hedlund, *Geodesics on a two-dimensional Riemannian manifold with periodic coefficients* Ann. of Math. (2) 33 (1932), no. 4, 719–739

[Mn92] R. Mañé *On the minimizing measures of Lagrangian dynamical systems* Nonlinearity 5 (1992), no. 3, 623–638.

[Mn95] R. Mañé *Ergodic variational methods : new techniques and new problems* Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Zűrich, 1994), 1216–1220, Birkhấuser, Basel, 1995.

[Mn96] R. Mañé *Generic properties and problems of minimizing measures of Lagrangian systems* Nonlinearity **9** (1996), no. 2, 273–310.

[Mn97] R. Mañé *Lagrangian flows : the dynamics of globally minimizing orbits* Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.) 28 (1997), no. 2, 141–153.

[Mr90] J. N. Mather *Differentiability of the minimal average action as a function of the rotation number* Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.) 21 (1990), no. 1, 59–70.

[MrF91] J. N. Mather, G. Forni *Action minimizing orbits in Hamiltonian systems* Transition to chaos in classical and quantum mechanics (Montecatini Terme, 1991), 92–186, Lecture Notes in Math., 1589, Springer, Berlin, 1994.

[Mr91] J. N. Mather *Action minimizing invariant measures for positive definite Lagrangian systems* Math. Z. **207**, 169-207 (1991).

[Mr93] J. N. Mather *Variational construction of connecting orbits* Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 43 (1993), no. 5, 1349–1386.

[Mr02] J. N. Mather *A property of compact, connected, laminated subsets of manifolds* Ergodic Theory Dynam. Systems 22 (2002), no. 5, 1507–1520.

[Mr09] J. N. Mather *Order structure on action-minimizing orbits* Snowbird proceedings

[MR95] G. McShane, I. Rivin *A norm on homology of surfaces and counting simple geodesics* Internat. Math. Res. Notices 1995, no. 2, 61–69

[Mo86] J. Moser *Minimal solutions of a variational problem on a torus* Ann. Inst. Henri Poincaré **3** (1986), 229–272

[O05] O. Osuna, *Vertices of Mather's beta function* Ergodic Theory Dynam. Systems 25 (2005), no. 3, 949–955.

[O09] O. Osuna *The Aubry set for periodic Lagrangians on the circle* Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.) 40 (2009), no. 2, 247-252.

[S91] W. Senn *Strikte Konvexitắt fűr Variationsprobleme auf dem n-dimensionalen Torus* Manuscripta Math. 71 (1991), no. 1, 45–65.

[S95] W. Senn *Differentiability properties of the minimal average action* Calc. Var. Partial Differential Equations 3 (1995), no. 3, 343–384.

[S] A. Sorrentino *On the integrability of Tonelli Hamiltonians* preprint