



**HAL**  
open science

# Caractérisation multibande de galaxies par hiérarchie de modèles et arbres de composantes connexes

Benjamin Perret

► **To cite this version:**

Benjamin Perret. Caractérisation multibande de galaxies par hiérarchie de modèles et arbres de composantes connexes. Traitement du signal et de l'image [eess.SP]. Université de Strasbourg, 2010. Français. NNT: . tel-00559584

**HAL Id: tel-00559584**

**<https://theses.hal.science/tel-00559584>**

Submitted on 25 Jan 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

École Doctorale Mathématiques, Sciences de  
l'Information et de l'Ingénieur

---

UdS — INSA — ENGEES

# THÈSE

présentée pour obtenir le grade de

Docteur de l'Université de Strasbourg

Discipline : sciences

Spécialité : image, sciences et technologies de l'information

par

**Benjamin Perret**

## Caractérisation multibande de galaxies par hiérarchie de modèles et arbres de composantes connexes

Soutenue publiquement le 17 novembre 2010

### Membres du jury

Co-Directeur de thèse : **M. Christophe Collet**  
Professeur à l'Université de Strasbourg

Co-Directeur de thèse : **M. Éric Slezak**  
Astronome à l'Observatoire de la Côte d'Azur

Président et rapporteur : **M. Jean Serra**  
Professeur émérite, Paris Est, Directeur de Recherche à l'École des Mines

Rapporteur : **M. Xavier Descombes**  
Directeur de Recherche à l'INRIA Sophia-Antipolis

Examinateur : **M. Emmanuel Bertin**  
Astronome à l'Institut d'Astrophysique de Paris

Examinateur : **M. Sébastien Lefèvre**  
Professeur à l'Université de Bretagne-Sud

Examinateur : **M. Vincent Mazet**  
Maitre de Conférences à l'Université de Strasbourg



# Remerciements

“

**Je sers la science et c'est ma joie.**

”

**Basile Landouye, *Léonard***

Lectrices et lecteurs, avant d'aborder la lecture de ce mémoire, il est impératif que vous sachiez la vérité sur la première, et j'espère, seule erreur qui entache ces pages : la couverture de cet ouvrage pêche par omission ! Des personnes, qui pour leur contribution à ce projet, pour l'aide qu'elles m'ont apportée à la rédaction de ce mémoire, ou plus simplement pour leur support dans la vie de tous les jours, méritent, elles aussi, la reconnaissance de tous.

Je souhaite en premier lieu remercier M. Christophe Collet et M. Eric Slezak, mes deux directeurs de thèses, sans qui rien n'aurait pu se faire. En plus d'avoir monté le sujet de recherche passionnant, objet de cet ouvrage, ils ont su, tout au long de ces trois années, m'offrir un cadre de travail idéal, me guider et me conseiller avec justesse et pertinence, tout en m'offrant la liberté et la confiance qui ont permis à mes modestes facultés de chercheur de s'épanouir.

Derrière ces deux excellents directeurs, se cachent mes deux encadrants : M. Sébastien Lefèvre et M<sup>r</sup>. Vincent Mazet que je remercie profondément. Sébastien a joué un rôle fondamental dans mon parcours en me proposant, dès mon année de Maîtrise, un premier sujet d'initiation à la recherche portant sur l'imagerie astronomique ; il m'a également initié aux plaisirs secrets de la morphologie mathématique et au goût de la collaboration scientifique !

Vincent m'aura quant à lui enseigné nombre de choses importantes pour la survie en milieu hostile comme l'art de l'espace au féminin, ou bien à faire la différence entre un trait d'union (-), un tiret demi-cadratin (—), un tiret cadratin (—) ou un signe moins (−) (en plus de deux ou trois notions concernant l'inférence bayésienne, les méthodes d'estimation ou encore quelques conseils et solutions pour résoudre les problèmes auxquels j'ai été confronté. . .).

Je remercie également M. Jean Serra et M. Xavier Descombes qui ont accepté la tâche fastidieuse de rapporter cette thèse et dont les précieux commentaires m'ont permis d'améliorer la qualité de ce document, et m'ont ouvert de nouvelles pistes de réflexion.

J'exprime mes remerciements à M. Emmanuel Bertin et Mme Valérie de Lapparent qui m'ont offert un prime accès la base EFIGI, fruit de leur travail, ainsi que des discussions enrichissantes et constructives sur mes résultats.

Comme a dit le sage : « La science, ce sont d'abord des hommes et des femmes qui cherchent... », mais surtout qui échangent : pour toutes les discussions que nous avons eues, les sérieuses, les détendues, je remercie les membres du laboratoire, et plus particulièrement l'équipe MIV, et encore plus particulièrement l'équipe des jeunes chercheurs : Benoît, Étienne, François, Matthieu, Nicolas, Sylvain, Stan, Vincent, Yann, des (ex-)doctorants : Abdel, Alban, Alice, Akram, Benoît, Erchan, Fatma, Felix, Giorgios, Jonathan, Julien, Steven, Slim, Swati et de l'inclassable Christiane (euh Christine).

Je remercie aussi l'équipe du département informatique qui m'a permis de réaliser mes activités d'enseignements dans les meilleures conditions.

Je tiens également à adresser mes remerciements à M. François Bonnarel et Mme Mireille Louys qui m'ont accueilli à l'observatoire de Strasbourg lors de mes premiers stages d'étude, et qui ont eu la patience de répondre à mes questions sur les différents aspects de l'imagerie astronomique.

En dehors des relations professionnelles, il y a bien entendu un groupe d'amis solide que je remercie chaleureusement : Aurélie<sup>2</sup>, Caro, Christelle, Clo, Piou, Sylvain, Franck, Manu, Momo, Vinc<sup>2</sup>, toujours prêts à partager une petite mousse et d'autres choses que l'honnêteté et la décence m'interdisent de préciser davantage !

Je tiens également à remercier ma famille pour le soutien inconditionnel qu'ils m'ont toujours apporté et qui m'a permis de réaliser mes études et cette thèse dans les meilleures conditions possibles.

P.-S. Je remercie aussi tous ceux que j'ai oubliés et qui ne m'en tiendront pas rigueur. Tant pis pour les autres !

P.-P.-S. Je te remercie d'avance lecteur, pour ne pas me signaler que « cout » ou « chaîne » prennent un accent circonflexe, la réforme de l'orthographe de 1990 et l'Académie Française sont de mon côté !

# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>I</b>
<b>Liste des figures</b>	<b>VII</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>XI</b>
<b>Liste des algorithmes</b>	<b>XIII</b>
<b>Introduction</b>	<b>XV</b>
Bibliographie . . . . .	XVII
<b>1 Imagerie astronomique et morphologie des galaxies</b>	<b>1</b>
1.1 Introduction . . . . .	2
1.2 Imagerie astronomique . . . . .	3
1.2.1 Composants du processus d'acquisition . . . . .	3
1.2.2 Imagerie monobande, multibande . . . . .	9
1.2.3 Nouvelles générations d'observations . . . . .	10
1.2.4 Masse de données et observatoire virtuel . . . . .	13
1.3 Galaxies et classification morphologique . . . . .	14
1.3.1 Description générale . . . . .	14
1.3.2 Classification morphologique . . . . .	15
1.3.3 Structures des galaxies . . . . .	21
1.4 Caractérisation morphologique automatique . . . . .	27
1.4.1 Mesures empiriques . . . . .	27
1.4.2 Méthodes par décomposition linéaire . . . . .	29
1.4.3 Décomposition en structures . . . . .	31
1.5 Approche retenue, conclusion . . . . .	33
Bibliographie . . . . .	35
<b>I Modèles</b>	<b>41</b>
<b>2 Modélisation paramétrique des galaxies</b>	<b>43</b>
2.1 Introduction . . . . .	47
2.2 Modèles paramétriques . . . . .	49
2.2.1 Modèle observationnel . . . . .	49
2.2.2 Bulbe, disque, barre stellaire, anneau, halo . . . . .	51
2.2.3 Bras spiraux . . . . .	56
2.2.4 Disque vu par la tranche . . . . .	59
2.2.5 Barre de poussières . . . . .	61
2.2.6 Combinaisons des structures . . . . .	62
2.3 Formulation bayésienne du modèle . . . . .	67
2.3.1 Masquage adaptatif . . . . .	67

2.3.2	Formulation bayésienne . . . . .	68
2.3.3	Choix de l'estimateur . . . . .	70
2.4	Estimation du modèle . . . . .	70
2.4.1	Échantillonneur de Gibbs et de Metropolis–Hastings . . . . .	70
2.4.2	Calcul de l'estimateur . . . . .	74
2.4.3	Recuit simulé à températures multiples . . . . .	75
2.4.4	Hierarchie de modèles . . . . .	76
2.4.5	Procédures d'initialisation . . . . .	77
2.5	Résultats . . . . .	82
2.5.1	Comparaison avec un autre algorithme de décomposition . . . . .	82
2.5.2	Images simulées . . . . .	82
2.5.3	Images réelles . . . . .	84
2.5.4	Apports du multibande . . . . .	87
2.5.5	Temps de calcul . . . . .	87
2.6	Contributions du chapitre . . . . .	88
	Bibliographie . . . . .	89
<b>3</b>	<b>Approches morphologiques</b> . . . . .	<b>93</b>
3.1	Introduction . . . . .	97
3.2	Rappels mathématiques et théorie des connexions . . . . .	101
3.2.1	Pré-requis et notations . . . . .	101
3.2.2	Morphologie mathématique et connexion . . . . .	104
3.3	Arbres des composantes connexes . . . . .	108
3.3.1	Définition . . . . .	108
3.3.2	Schéma d'utilisation et impact du type d'ordre vectoriel . . . . .	109
3.4	Hyper-connexions et arbre des composantes hyper-connexes . . . . .	112
3.4.1	Théorie des hyper-connexions . . . . .	112
3.4.2	Vers une nouvelle axiomatique . . . . .	118
3.4.3	Arbre des composantes hyper-connexes . . . . .	122
3.4.4	Expérimentation avec l'arbre des composantes h-connexes floues . . . . .	124
3.5	Applications en imagerie astronomique multibande . . . . .	125
3.5.1	Choix d'une relation d'ordre . . . . .	126
3.5.2	Séparation de sources . . . . .	128
3.5.3	Extraction des bras spiraux . . . . .	128
3.5.4	Détection des zones H II . . . . .	130
3.6	Contributions du chapitre . . . . .	130
	Bibliographie . . . . .	131
<b>II</b>	<b>Applications</b> . . . . .	<b>137</b>
<b>4</b>	<b>Mise en œuvre</b> . . . . .	<b>139</b>
4.1	Introduction . . . . .	139
4.2	Processus global . . . . .	140
4.2.1	Les données : base CFGI . . . . .	140
4.2.2	Choix du modèle . . . . .	142

4.3	Étude de cas . . . . .	145
4.4	Étude statistique . . . . .	160
4.4.1	Correspondance entre attribut quantitatif et qualitatif . . . . .	160
4.4.2	Flux du bulbe sur flux total . . . . .	161
4.4.3	Inclinaison . . . . .	163
4.4.4	Taille de la barre stellaire . . . . .	165
4.4.5	Ouverture des bras spiraux . . . . .	165
4.4.6	Importance des bras spiraux . . . . .	167
4.4.7	Sens de rotation des bras spiraux . . . . .	169
4.5	Conclusion . . . . .	169
	Bibliographie . . . . .	171
<b>Conclusion générale et perspectives</b>		<b>173</b>
	Publications de l'auteur . . . . .	176
<b>A Algorithmes de Monte Carlo par chaines de Markov</b>		<b>179</b>
A.1	Intérêt . . . . .	180
A.2	Chaines de Markov . . . . .	181
A.3	Algorithmes de Monte Carlo par chaines de Markov . . . . .	183
A.3.1	Algorithme de Metropolis–Hastings . . . . .	183
A.3.2	Échantillonneur de Gibbs . . . . .	184
A.3.3	Période de transition et convergence . . . . .	185
A.4	Amélioration des performances . . . . .	186
A.4.1	Traitement des variables corrélées dans l'échantillonneur de Gibbs . . . . .	187
A.4.2	Parcours des sites de l'échantillonneur de Gibbs . . . . .	187
A.4.3	Variations autour de l'algorithme de Metropolis–Hastings . . . . .	188
A.4.4	Modification de la loi cible : recuit simulé . . . . .	189
	Bibliographie . . . . .	189
<b>B Algorithmes d'initialisation</b>		<b>191</b>
B.1	Moments du second ordre . . . . .	191
B.2	Initialisation de la barre stellaire . . . . .	193
B.3	Initialisation des bras spiraux . . . . .	193
B.4	Initialisation des anneaux . . . . .	194
B.5	Détection de la barre de poussières . . . . .	195
	Bibliographie . . . . .	198
<b>C Transformation log–polaire</b>		<b>199</b>
C.1	Transformation continue . . . . .	200
C.2	Transformation discrète . . . . .	200
	Bibliographie . . . . .	201
<b>D Arbre des composantes h-connexes floues</b>		<b>203</b>
D.1	Hyper-connexion floue . . . . .	204
D.2	Images en niveaux de gris . . . . .	207
D.3	Images multibandes . . . . .	209
D.4	Binarisation d'images de documents . . . . .	210



D.4.1	Méthode . . . . .	210
D.4.2	Résultats . . . . .	211
	Bibliographie . . . . .	213

# Liste des figures

1.1	Schéma de fonctionnement d'un télescope de type Ritchey–Chrétien. . . . .	4
1.2	Optique active du VLT et miroir primaire composite du télescope Keck. . . . .	5
1.3	Efficacité quantique et composition de la caméra MegaCam. . . . .	6
1.4	Opacité approximative de l'atmosphère au niveau de l'océan. . . . .	7
1.5	Efficacité des filtres du système photométrique <i>ugriz</i> du SDSS. . . . .	9
1.6	Galaxie PGC 3584 (SDSS). . . . .	10
1.7	Galaxie PGC 3584 (composition colorée). . . . .	10
1.8	Principe de fonctionnement de l'optique adaptative. . . . .	11
1.9	Observation d'Uranus sans et avec optique adaptative. . . . .	11
1.10	Principe de fonctionnement de l'interférométrie optique. . . . .	12
1.11	Spectrographe intégral de champ MUSE. . . . .	13
1.12	Galaxie du sombrero en optique et en infrarouge. . . . .	16
1.13	Séquence de Hubble. . . . .	16
1.14	Galaxies elliptiques PGC 2522, PGC 3976 et PGC 41171. . . . .	17
1.15	Galaxies spirales : PGC 9822 vue de face et PGC 6671 vue par la tranche. . . . .	19
1.16	Galaxies spirales barrées : PGC 2182 et PGC 26357. . . . .	19
1.17	Galaxies à anneau : PGC 32995 et PGC 33404. . . . .	19
1.18	Galaxies lenticulaires : PGC 2076, PGC 3833 et PGC 23024. . . . .	20
1.19	Galaxies irrégulières : PGC 4647 et PGC 7998. . . . .	20
1.20	Galaxies particulières : NGC 3808 a et b, NGC 1316 et anneau de Hoag. . . . .	20
1.21	Décalage angulaire du grand-axe des isophotes avec le rayon. . . . .	23
1.22	Forme des isophotes pour des galaxies <i>boxy</i> et <i>disky</i> . . . . .	23
1.23	Ondes de densité formant les bras spiraux à partir des orbites non alignées. . . . .	24
1.24	Galaxie PGC 40153 dans l'ultraviolet proche et dans l'infrarouge proche. . . . .	25
1.25	La galaxie NGC 6782 possède les trois types d'anneaux. . . . .	26
1.26	Galaxie spirale vue par la tranche avec une barre de poussières. . . . .	26
1.27	Coefficient de Gini. . . . .	28
1.28	Base de shapelets polaires. . . . .	29
1.29	Base obtenue par analyse en composantes principales. . . . .	30
1.30	Base d'anneaux. . . . .	30
1.31	Ajustement monodimensionnel d'un modèle bulbe–disque sur la galaxie PGC 2527. . . . .	31
1.32	Décomposition bidimensionnelle de la galaxie PGC 2527 selon un modèle bulbe–disque. . . . .	32
1.33	Ajustement de profils sur la galaxie NGC 3184 par Galfit. . . . .	33
2.1	Schéma de vectorisation des images. . . . .	49
2.2	Ellipses généralisées. . . . .	52
2.3	La loi de Sérsic pour différents indices de Sérsic $n$ . . . . .	53
2.4	Exemple de simulations obtenues avec le modèle ellipsoïdal. . . . .	55
2.5	Une spirale logarithmique et ses paramètres fondamentaux. . . . .	57

2.6	Définition de la fonction de distance $d_s$ .	58
2.7	Les trois étapes de la simulation de la structure spirale.	59
2.8	Modèle en $\text{sech}^2$ pour un disque vu par la tranche.	60
2.9	Modèle de barre de poussières.	62
2.10	Simulation d'une galaxie à deux composantes ellipsoïdales.	63
2.11	Simulation d'une galaxie spirale barrée avec anneau interne.	64
2.12	Simulation d'une galaxie spirale vue par la tranche.	64
2.13	Exemple de surface d'erreur obtenue par variation des paramètres de concentration et de rayon caractéristique de la fonction de Sérsic.	72
2.14	Hierarchie de modèles.	78
2.15	Résultat de la méthode sur une image cinq bandes simulée d'une galaxie spirale barrée.	83
2.16	Valeurs des estimations par rapport à la vérité terrain pour la figure 2.15	83
2.17	Application de la méthode à une observation cinq bandes de la galaxie spirale barrée PGC 35538.	85
2.18	Résultat avec et sans la technique de masquage adaptatif pour la galaxie PGC 35538.	85
2.19	Application de la méthode à une observation cinq bandes de la galaxie spirale PGC 218 vue par la tranche.	86
2.20	Coupe de profil des observations et des estimations pour les galaxies PGC 35538 et PGC 218.	86
2.21	Galaxie PGC 10065 : comparaison entre traitements monobande et bibande.	87
3.1	Exemple de décomposition en arbre de composantes connexes d'un signal à une dimension.	98
3.2	Exemple de décomposition en arbre de composantes connexes d'un signal bruité à une dimension.	99
3.3	Diagramme de Hasse du treillis complet des parties d'un ensemble.	105
3.4	Système d'ouvertures par connexité.	107
3.5	Exemple de connexion sur l'espace discret $\{0, 1\} \times \{0, 1\}$ correspondant à un 4-voisinage.	108
3.6	Diagramme de Hasse des composantes connexes des seuillages d'une image bivaluée suivant un ordre partiel et un ordre total.	109
3.7	Schéma d'utilisation de l'arbre des composantes connexes.	110
3.8	Illustration du critère de chevauchement $\bowtie_p$	116
3.9	Exemple de décomposition de la courbe $f$ selon la h-connexion plate.	117
3.10	Exemple de h-reconstruction avec la h-connexion plate.	117
3.11	Illustration du critère de chevauchement $\bowtie_m$	119
3.12	Exemple de décomposition de la fonction $f$ avec la h-connexion des fonctions monomodales.	119
3.13	L'opérateur de h-reconstruction avec la h-connexion des fonctions monomodales.	119
3.14	Propriétés de l'ordre $\preceq$ et des opérateurs associés.	123
3.15	Arbre des composantes h-connexes avec la h-connexion des fonctions monomodales.	124
3.16	Topologie d'une galaxie composée d'un disque, d'un bulbe, d'une barre et de bras spiraux.	125

3.17 Répartition de l'utilisation des composantes du vecteur pour déterminer $\leq_{A_o}$ .	127
3.18 Séparation de sources avec l'arbre des composantes h-connexes monomodales multibande. . . . .	129
3.19 Connexion ensembliste $\mathcal{C}_h$ . . . . .	130
3.20 Extraction de la structure spirale pour les galaxies PGC 2182 et PGC 24348.	131
3.21 Détection des zones H II sur les galaxies PGC 2600, PGC 3377 et PGC 35538.	132
4.1 Arbre de décisions permettant la navigation dans la hiérarchie de modèles. . .	143
4.2 Répartition des gains obtenus par le modèle bulbe–halo par rapport au modèle bulbe seul. . . . .	144
4.3 Galaxie elliptique géante (cD) PGC 21542. . . . .	145
4.4 Décomposition de la galaxie elliptique géante (cD) PGC 21542. . . . .	146
4.5 Profils de décomposition de la galaxie elliptique géante (cD) PGC 21542. . . .	147
4.6 Galaxie lenticulaire barrée PGC 3833. . . . .	148
4.7 Décomposition de la galaxie lenticulaire barrée PGC 3833. . . . .	149
4.8 Profils de décomposition de la galaxie lenticulaire barrée 3833. . . . .	150
4.9 Galaxie spirale PGC 23443 de type Sbc. . . . .	151
4.10 Décomposition de la galaxie spirale PGC 23443 de type Sbc. . . . .	152
4.11 Profils de décomposition de la galaxie spirale PGC 23443 de type bc. . . . .	153
4.12 Galaxie spirale barrée PGC 3584 de type SBab. . . . .	154
4.13 Décomposition de la galaxie spirale barrée PGC 3584 de type SBab. . . . .	155
4.14 Profils de décomposition de la galaxie spirale barrée PGC 3584 de type SBab.	156
4.15 Galaxie spirale vue par la tranche PGC 218. . . . .	157
4.16 Décomposition de la galaxie spirale vue par la tranche PGC 218. . . . .	158
4.17 Profils de décomposition de la galaxie spirale vue par la tranche PGC 218. . .	159
4.18 Répartition des galaxies de l'ensemble des résultats par type de Hubble. . . .	160
4.19 Comparaison des résultats d'estimation avec la vérité terrain CFIGI pour l'attribut flux du bulbe sur flux total. . . . .	162
4.20 Distribution des distances $\delta$ pour l'attribut flux du bulbe sur flux total. . . .	162
4.21 Comparaison des résultats d'estimation avec la vérité terrain CFIGI pour l'attribut inclinaison. . . . .	164
4.22 Distribution des distances $\delta$ pour l'attribut inclinaison. . . . .	164
4.23 Comparaison des résultats d'estimation avec la vérité terrain CFIGI pour l'attribut taille de la barre stellaire. . . . .	166
4.24 Distribution des distances $\delta$ pour l'attribut taille de la barre stellaire. . . . .	166
4.25 Comparaison des résultats d'estimation avec la vérité terrain CFIGI pour l'attribut ouverture des bras spiraux. . . . .	168
4.26 Distribution des distances $\delta$ pour l'attribut ouverture des bras spiraux. . . . .	168
4.27 Comparaison des résultats d'estimation avec la vérité terrain CFIGI pour l'attribut importance des bras spiraux. . . . .	170
4.28 Distribution des distances $\delta$ pour l'attribut importance des bras spiraux. . . .	170
4.29 Comparaison des résultats d'estimation avec la vérité terrain CFIGI pour l'attribut sens de rotation. . . . .	171
A.1 Simulation de la loi normale avec trois algorithmes de Metropolis–Hastings à marche aléatoire. . . . .	184

---

A.2	Simulation de la loi normale $\mathcal{N}(0; 1)$ avec l'algorithme de Metropolis–Hastings à marche aléatoire. . . . .	186
A.3	Effet de la corrélation de deux variables sur l'échantillonneur de Gibbs. . . . .	187
B.1	Estimation des paramètres de l'ellipse à partir des moments du second ordre sur les galaxies PGC 1805 et PGC 2182. . . . .	192
B.2	Détection de la barre stellaire sur la galaxie PGC 2035. . . . .	194
B.3	Analyse par transformée de Fourier de la galaxie PGC 2182. . . . .	195
B.4	Recherche des anneaux de la galaxie PGC 7889. . . . .	196
B.5	Mesure d'asymétrie du bulbe pour la galaxie PGC 6671 . . . . .	197
B.6	Recherche d'anomalies de décroissance de la luminosité selon l'axe de hauteur. . . . .	197
C.1	Exemple de grille polaire. . . . .	199
C.2	Grilles rectangulaires cartésienne et log–polaire. . . . .	200
C.3	Transformée log–polaire et transformée inverse de l'image Lenna. . . . .	202
D.1	Mesure de connexion $c_f$ . . . . .	204
D.2	L'arbre des composantes h-connexes flous en fonction de $\tau$ . . . . .	206
D.3	Segmentation avec l'arbre des composantes h-connexes flous. . . . .	207
D.4	Nombres de nœuds et de composantes h-connexes flous en fonction de $\tau$ . . . . .	208
D.5	Filtres connexes sur l'image du caméraman. . . . .	208
D.6	Suppression des petites structures d'une galaxie avec un filtre d'aire. . . . .	209
D.7	Suppression du fond sur des images de documents. . . . .	212
D.8	Binarisation d'images de documents avec l'approche proposée. . . . .	212

# Liste des tableaux

1.1	Système photométrique du SDSS. . . . .	8
1.2	Classification de Hubble révisée. . . . .	22
2.3	Rapport du rayon optique sur le rayon caractéristique $R_{\odot}^p/R$ en fonction de l'indice de Sérsic $n$ et de la quantité de flux $p$ . . . . .	55
2.4	Contraintes spécifiques à chaque structure astrophysique représentée par le modèle ellipsoïdal. . . . .	56
2.5	Résumé des différentes structures. . . . .	65
2.6	Résumé des variables. . . . .	66
2.8	Résumé des variables par structure avec : le facteur de température, la méthode d'initialisation et l'algorithme d'estimation associés. . . . .	80
2.9	Comparaison entre notre méthode et Galfit sur la décomposition bulbe–disque. . . . .	82
2.10	Temps et nombre d'itérations approximatifs nécessaires à l'estimation de différents modèles. . . . .	88
D.1	Résultats de binarisation sur la base d'évaluation DIBCO 2009 . . . . .	213



# Liste des Algorithmes

2.1	Échantillonneur de Gibbs implémenté. . . . .	71
A.1	Algorithme de Metropolis–Hastings. . . . .	183
A.2	Échantillonneur de Gibbs. . . . .	185
A.3	Algorithme du snooker. . . . .	189
D.1	Procédure transformant le Max-Tree en arbre des composantes h-connexes floues.	205
D.2	Procédure annexe de l’algorithme de transformation du Max-Tree en arbre des composantes h-connexes floues. . . . .	206





# Introduction

DÈS LEUR DÉCOUVERTE, les galaxies ont été classées dans un système comprenant trois morphologies principales : galaxies elliptiques, galaxies spirales et galaxies irrégulières. Si les classifications de Hubble et de de Vaucouleurs sont les plus complètes, elles restent toutes les deux basées sur l'apparence de la galaxie dans le domaine visible du spectre électromagnétique. Or les processus physiques à l'œuvre dans une galaxie font que son aspect peut changer selon la longueur d'onde de par les énergies produites et la suite d'absorptions/ré-émissions que subissent les photons lorsqu'ils interagissent avec le milieu galactique. Son aspect peut également évoluer au cours du temps et se traduire aussi par des propriétés dynamiques variables. Pour toutes ces raisons, auxquelles s'ajoutent les biais observationnels divers et variés, la forme d'une galaxie (sa morphologie spatiale et spectrale) est donc une notion complexe directement liée à son histoire : on peut alors envisager de comprendre comment ces objets se forment puis évoluent pour peu qu'on puisse les caractériser précisément à l'aide d'une modélisation paramétrique quantifiable.

Ce travail de recherche consiste à étudier la représentation multibande des galaxies sous forme d'une composition de structures astrophysiques (bulbe, disque, ...) combinée à un modèle observationnel destiné à s'affranchir des effets perturbateurs de l'atmosphère terrestre et des sources de bruits. La description spectro-morphologique obtenue doit permettre d'appréhender les diverses caractéristiques spatiales (extension, aplatissement, rapport bulbe/disque, présence d'une barre stellaire, d'une structure spirale plus ou moins développée, de zones d'absorption, ...) et d'en évaluer simultanément les comportements spectraux sur une bande étendue de fréquences. Cette approche, bénéficiant d'une caractérisation plus complète que les études précédentes, pourra alors servir de base au développement de nouveaux schémas de classification spectro-morphologique des galaxies.

La méthodologie retenue pour ce projet cherche à tirer le meilleur parti des techniques de modélisation paramétrique et non paramétrique. D'un côté, les méthodes de modélisation paramétrique fournissent une description de haut niveau sémantique de l'objet, donnant accès à une interprétation aisée des résultats en termes astronomiques. D'un autre côté, les techniques de modélisation non paramétrique basées sur la morphologie mathématique offrent un outil puissant permettant de gérer avec précision et robustesse les étapes de pré- et post-traitements ainsi que la mise en place de filtres adaptatifs intégrés au modèle paramétrique.

L'essentiel de la caractérisation spectro-morphologique de la galaxie est réalisé par inversion d'un modèle paramétrique. Le modèle direct que nous avons développé consiste en une extension au cadre multispectral des modèles préexistants (bulbe-disque) et en l'ajout de nouvelles structures (barre stellaire, bras spiraux, barre de poussière, anneau stellaire interne et externe). Dans ce modèle, l'ensemble des paramètres sont dits de « haut niveau sémantique » et peuvent recevoir une interprétation directe de l'astronome en termes physiques ou observationnels.

Le modèle retenu innove par l'ajout d'un filtre paramétrique sur les observations ayant pour but de masquer de manière adaptative les zones de formation stellaire, qui sont peuplées de jeunes et massives étoiles brillant fortement dans des longueurs d'ondes courtes, et

qui sont susceptibles de perturber l'estimation des paramètres du modèle. Néanmoins leur positionnement est un marqueur important de la structure spirale. Afin de conserver cette information tout en ne fournissant pas de modèle paramétrique explicite pour ces zones, nous avons imaginé une procédure de masquage adaptatif permettant de conserver l'information de position tout en masquant ces zones. Ce filtre diffère d'un simple pré-traitement car ses paramètres sont estimés simultanément avec les autres paramètres du modèle.

L'inversion du modèle est réalisée dans un cadre bayésien, permettant de tenir compte au mieux des incertitudes et de fournir une solution régularisée au problème. Le calcul de l'estimateur retenu, le Maximum a Posteriori (MAP), est un problème complexe car le paysage énergétique de l'espace des solutions est peuplé de nombreux maxima locaux fortement prononcés et parfois très éloignés de la solution attendue. Afin de fournir une solution robuste, les algorithmes d'estimation adoptés sont basés sur des techniques de Monte Carlo par chaînes de Markov (échantillonneur de Gibbs et de Metropolis–Hastings).

Afin de garantir des performances optimales (les algorithmes stochastiques étant généralement chronophages) et en évitant tout recours aux méthodes supervisées, des méthodes à échelle et direction adaptatives permettent aux algorithmes de s'adapter de manière automatique à chaque observation. De plus, nous avons mis au point une nouvelle approche de recuit simulé utilisant plusieurs températures différentes afin de répartir l'effort de simulation de manière optimale. Finalement, les décompositions sont réalisées selon une *hiérarchie de modèles* allant de la description des structures dominantes (bulbe et disque) aux composantes les plus fines (bras spiraux, anneaux, ...) : l'estimation d'un modèle grossier sert alors à initialiser l'estimation du modèle plus complexe. Cette approche offre un gain de rapidité d'exécution et de robustesse. Les méthodes proposées ont été validées par deux articles de conférences [5,6], un chapitre de livre [1] et un article de journal [7] (soumis).

Dans un deuxième temps, l'analyse non paramétrique des images par le biais de méthodes morphologiques permet le développement d'algorithmes efficaces pour les pré-traitements des images : séparation des sources, extraction de structures comme les bras spiraux, détection des zones de formation stellaire.

L'ensemble de ces algorithmes s'appuie sur des techniques d'analyse sous forme de représentations hiérarchiques de l'image dites d'analyse en *arbre de composantes connexes*. Les précédentes définitions de l'arbre de composantes connexes reposaient sur la notion de zones plates qui est mal adaptée à l'imagerie astronomique du fait du nombre élevé de niveaux de quantification (représentation à virgule flottante), du faible rapport signal-sur-bruit (à l'exception de quelques zones très localisées) et de l'aspect diffus des sources. Afin de s'adapter à ce type de données, la définition des arbres de composantes connexes est étendue aux zones non plates par le biais de la théorie des hyperconnexions. Celles-ci sont une généralisation des connexions ensemblistes aux treillis complets, ce qui inclut les images à niveaux de gris et les images multivariées. Les travaux menés ici donnent non seulement une définition de la notion d'arbre de composantes hyperconnexes et des conditions nécessaires à sa réalisation, mais font également évoluer la théorie des hyperconnexions en proposant une nouvelle base axiomatique d'où découlent de nouvelles propriétés.

Les arbres de composantes hyperconnexes pour une hyperconnexion particulière (dite floue) et leur utilisation dans un cadre multivalué sont étudiés. L'impact du choix des propriétés de l'ordre vectoriel utilisé pour construire l'arbre est notamment exploré en détail. La nouvelle définition de l'arbre de composantes hyperconnexes permet le développement d'al-

algorithmes efficaces et robustes pour le traitement et l'analyse d'images en général, et pour l'imagerie astronomique multivariée en particulier. Les méthodes proposées ont été validées par deux articles de conférences [2, 3] et un article de journal [4] (en révision).

Les méthodes développées sont appliquées à un jeu de données réelles de plusieurs milliers d'images préparées lors du projet FIGI (Extraction de Formes Idéalisées de Galaxies en Imagerie) de l'Institut d'Astrophysique de Paris. La comparaison des résultats obtenus avec les annotations des experts permet de valider le bon comportement de nos algorithmes et leur applicabilité à grande échelle. De plus, l'utilisation d'un modèle défini par des critères physiques a facilité la mise en place d'interactions avec les experts de la communauté astronomique qui ont permis de résoudre efficacement les différents problèmes rencontrés.

Ce manuscrit est organisé en quatre chapitres. Le premier chapitre (page 1) a pour but de donner au lecteur les éléments clefs pour la compréhension de la problématique traitée. Cette présentation commence par une introduction à l'imagerie astronomique permettant de comprendre les processus physiques mis en jeu pendant l'acquisition des données. Nous passons ensuite en revue les principales caractéristiques des galaxies et de leur morphologie et nous établissons un état de l'art des méthodes de caractérisation existantes. Enfin, ce chapitre se conclut par une description de la méthodologie adoptée.

Le deuxième chapitre (page 43) est consacré à l'approche par modélisation paramétrique. Il commence par une description détaillée des modèles développés et l'algorithme d'optimisation est ensuite présenté. Ces développements sont alors validés sur quelques cas réels et simulés afin de valider notre approche.

Le troisième chapitre (page 93) présente les méthodes d'analyse par morphologie mathématique et arbre de composantes connexes. La première partie du chapitre est consacrée au développement théorique des hyper-connexions, des arbres de composantes hyper-connexes et de leur application aux images multivariées. La deuxième partie concerne l'utilisation des méthodes développées pour l'imagerie astronomique et présente en particulier trois algorithmes pour la résolution des pré-traitements nécessaires au projet : la séparation de sources, la détection des zones de formation stellaire et l'extraction des bras spiraux.

Le quatrième chapitre (page 139) propose une évaluation des méthodes développées. Celle-ci est réalisée en deux étapes. Dans un premier temps, on procède à une étude détaillée de quelques cas représentatifs. Puis, les résultats obtenus sur une base d'images conséquente sont comparés à une vérité terrain fournie par des experts. Des solutions élaborées en collaboration avec les experts sont proposées pour chacune des difficultés observées dans ce chapitre.

Enfin, ce travail s'achève par une conclusion générale (page 173) qui dresse un récapitulatif des contributions de cette thèse et présente un ensemble de perspectives.

## Bibliographie

- [1] C. COLLET, B. PERRET et V. MAZET : *Multivariate Image Processing : Panoramic Integral-Field Spectrograph : Ultraspectral Data to Understand the History of the Universe*, chapitre 14, pages 437–450. ISBN-13 : 978-1848211391. John Wiley and Sons, décembre 2009.

- 
- [2] B. PERRET, S. LEFÈVRE, C. COLLET et E. SLEZAK : Connected Component Trees for Multivariate Image Processing and Applications in Astronomy. *Dans IAPR, International Conference on Pattern Recognition*, août 2010.
  - [3] B. PERRET, S. LEFÈVRE, C. COLLET et E. SLEZAK : From Hyperconnections to Hypercomponent Tree : Application to Document Image Binarization. *Dans Workshop on Applications of Digital Geometry and Mathematical Morphology*, pages 62–66, Istanbul, août 2010.
  - [4] B. PERRET, S. LEFÈVRE, C. COLLET et E. SLEZAK : Hyperconnections and Hierarchical Representations for Grayscale and Multiband Image Processing. *IEEE Transactions on Image Processing, en révision*, 2010.
  - [5] B. PERRET, V. MAZET, C. COLLET et E. SLEZAK : Décomposition d’images multispectrales de galaxies au moyen d’algorithmes de Monte Carlo par chaines de Markov. *Dans 22e Colloque GRETSI*, septembre 2009.
  - [6] B. PERRET, V. MAZET, C. COLLET et E. SLEZAK : Galaxy Decomposition in Multispectral Images Using Markov Chain Monte Carlo Algorithms. *Dans Arnt-Børre SALBERG, Jon Yngve HARDEBERG et Robert JENSSEN, éditeurs : Scandinavian Conference on Image Analysis*, volume 5575 de *Lecture Notes in Computer Sciences*, pages 209–218. Springer, 2009.
  - [7] B. PERRET, V. MAZET, C. COLLET et E. SLEZAK : Hierarchical Multispectral Galaxy Decomposition using a MCMC Algorithm with Multiple Temperature Simulated Annealing. *accepté, Pattern Recognition*, 2011.

# Imagerie astronomique et morphologie des galaxies

---

“

Partager la nuit entre une jolie femme et un beau ciel, et le jour, le passer à rapprocher ses observations et ses calculs, me parait être le bonheur sur Terre.

”

Napoléon I<sup>er</sup>, 1796, par Denis Guedj dans *Le mètre du monde*

## Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>1.2</b>	<b>Imagerie astronomique</b>	<b>3</b>
1.2.1	Composants du processus d'acquisition	3
1.2.1.1	Télescope	4
1.2.1.2	Caméra CCD	5
1.2.1.3	Atmosphère	7
1.2.1.4	Filtres optiques	8
1.2.2	Imagerie monobande, multibande	9
1.2.3	Nouvelles générations d'observations	10
1.2.3.1	Optique adaptative	10
1.2.3.2	Interférométrie optique	12
1.2.3.3	Spectrographe intégral de champ	12
1.2.4	Masse de données et observatoire virtuel	13
<b>1.3</b>	<b>Galaxies et classification morphologique</b>	<b>14</b>
1.3.1	Description générale	14
1.3.2	Classification morphologique	15
1.3.2.1	Galaxies elliptiques	17
1.3.2.2	Galaxies spirales	17
1.3.2.3	Galaxies lenticulaires	18
1.3.2.4	Galaxies irrégulières	18
1.3.2.5	Galaxies particulières	18
1.3.2.6	Séquence de Hubble révisée	21

---

1.3.3	Structures des galaxies . . . . .	21
1.3.3.1	Le bulbe . . . . .	21
1.3.3.2	Le disque . . . . .	23
1.3.3.3	Les bras spiraux . . . . .	24
1.3.3.4	La barre stellaire . . . . .	25
1.3.3.5	Les anneaux . . . . .	25
1.3.3.6	La barre de poussières . . . . .	26
<b>1.4</b>	<b>Caractérisation morphologique automatique . . . . .</b>	<b>27</b>
1.4.1	Mesures empiriques . . . . .	27
1.4.2	Méthodes par décomposition linéaire . . . . .	29
1.4.3	Décomposition en structures . . . . .	31
<b>1.5</b>	<b>Approche retenue, conclusion . . . . .</b>	<b>33</b>
	<b>Bibliographie . . . . .</b>	<b>35</b>

---

## 1.1 Introduction

**B**IEN QUE l’astronomie soit une science d’observation des plus anciennes, la plupart de ses branches sont en fait relativement récentes. En effet, exceptée l’astronomie optique — l’observation de l’Univers en lumière visible — tous les autres moyens d’observation (radio-astronomie, astronomie infrarouge, en ultraviolet, des rayons X et des rayons gamma) sont liés à des possibilités technologiques ouvertes dans la seconde moitié du  $xx^e$  siècle. Ces progrès récents, qui ont élargi la gamme de longueurs d’onde accessibles aux observations, conjugués avec le développement des grands télescopes, terrestres et orbitaux, l’amélioration de la sensibilité des capteurs, de la capacité multiplex<sup>1</sup> des instruments et du champ couvert, ont permis de renouveler en profondeur notre perception des différents objets et des processus de l’astrophysique en général et de la cosmologie en particulier. À mesure que notre compréhension augmente, de nouvelles questions se trouvent toutefois posées.

Une des questions centrales de la cosmologie concerne la compréhension des grandes structures de l’Univers et notamment des processus de formation et d’évolution des galaxies. Ces dernières, qui sont composées d’étoiles, de gaz, de poussières et pour la plus grande partie de leur masse, d’un halo de matière noire qui échappe encore à la détection, évoluent depuis leur apparition estimée à environ 1 milliard d’années après le Big-Bang. On a par ailleurs constaté que leur distribution spatiale les organisait en un réseau de filaments interconnectés, définissant une toile cosmique de superamas à l’intersection desquels des amas plus ou moins riches croissent par accrétion de structures plus petites. Au hasard de leurs rencontres sous l’action de la gravité, les galaxies interagissent donc entre elles et avec le milieu ambiant. Comprendre l’évolution des galaxies passe donc d’une part par la connaissance des mécanismes de leur évolution séculaire (passive) et d’autre part par l’étude de leurs caractéristiques en fonction de celles de leur environnement et des perturbations qu’il peut induire.

Les galaxies de l’Univers proche nous apparaissent généralement bien structurées avec des symétries fortes et des structures internes régulières et bien définies. Mais, en regardant

---

1. Possibilité d’observer plusieurs objets célestes simultanément.

à fort décalage spectral (plus loin et donc dans le passé<sup>2</sup>), on remarque que les galaxies étaient alors en moyenne plus petites avec une apparence plus irrégulière qu'aujourd'hui. Si cela conforte le modèle général de croissance hiérarchique des structures par agrégations successives d'entités plus petites, on est encore loin de pouvoir expliquer comment la diversité morphologique des galaxies en est issue.

Constatée dès les premiers relevés, la multitude de formes des galaxies a mené rapidement à la création de plusieurs schémas de classification morphologique dont les plus connus sont les schémas historiques de Hubble et de de Vaucouleurs. L'ensemble de ces schémas est néanmoins uniquement basé sur des clichés photographiques en niveaux de gris couvrant l'intégralité du domaine visible (avec des problèmes de saturation, de sensibilité et de résolution). En revanche, de nos jours, de nombreuses données multibandes faisant intervenir d'autres parties du spectre électromagnétique sont disponibles. Il paraît donc souhaitable de chercher à enrichir les classifications existantes en prenant en compte cette nouvelle information. Or, la première étape de la construction d'une telle classification est l'établissement d'une description morphologique multibande des galaxies, objectif qui est l'objet central de cette thèse.

Le but de ce chapitre est d'explicitier la méthodologie choisie pour arriver à cette fin. Nous commençons par donner les bases de l'imagerie astronomique (section 1.2), puis nous présentons les éléments clés concernant la morphologie des galaxies (section 1.3) et enfin, nous dressons un état de l'art des méthodes existantes pour réaliser leur caractérisation morphologique (section 1.4). Les processus physiques en jeu lors d'une observation, la description des galaxies et la revue des méthodes de caractérisation existantes permettent alors de justifier la stratégie adoptée pour résoudre le problème de la caractérisation morphologique multibande des galaxies (section 1.5).

## 1.2 Imagerie astronomique

Cette section vise à présenter les différentes étapes, les processus et les caractéristiques des détecteurs mis en jeu pour l'acquisition d'images astronomiques pour des longueurs d'onde allant de l'ultraviolet proche à l'infrarouge proche, et correspondant au domaine où la description morphologique des galaxies est bien établie. La principale référence bibliographique de ce chapitre est le livre *Electronic Imaging in Astronomy* de McLean [44].

### 1.2.1 Composants du processus d'acquisition

On décrit ici les principaux éléments de la chaîne d'acquisition dans le but de comprendre les processus physiques à l'œuvre durant la création des images que nous allons traiter. Les quatre éléments principaux que nous décrivons sont : le télescope, le dispositif de capture (caméra CCD), le système de filtres et l'atmosphère. Ce dernier élément, qui a la particularité d'être un élément naturel, joue néanmoins un rôle prépondérant dans la qualité des observations.

---

2. Le décalage spectral est le résultat de l'expansion cosmologique et permet de mesurer la distance d'un objet.



### 1.2.1.1 Télescope

Aujourd'hui la totalité des observations professionnelles sont réalisées avec des télescopes, les lunettes astronomiques ayant été abandonnées, entre autres raisons, à cause des aberrations chromatiques et de la perte de luminosité qu'elles induisent. Les grands télescopes sont généralement composés (hors systèmes optiques propres au dispositif d'acquisition) de deux ou trois miroirs : un miroir primaire concave collecte un maximum de photons, un miroir secondaire, concave ou convexe, focalise le flux, un troisième miroir plan optionnel redirige les rayons vers l'instrument avec, si besoin, son train de miroirs. La figure 1.1 représente le schéma de fonctionnement d'un télescope de type Ritchey–Chrétien, modèle de nombreuses installations mondiales : les télescopes de l'observatoire Keck, le Very Large Telescope (VLT) au Chili, le télescope spatial Hubble, ...

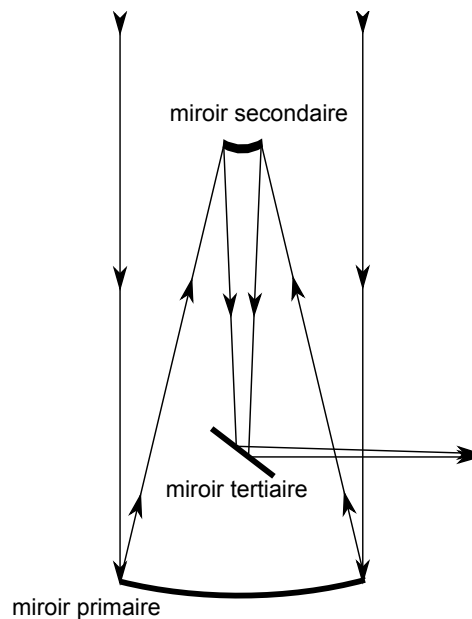


FIGURE 1.1 – Schéma de fonctionnement d'un télescope de type Ritchey–Chrétien.

L'élément principal du télescope est son miroir primaire dont le diamètre  $D$  conditionne sa capacité de collecte (nombre de photons reçus) et sa résolution (taille du plus petit détail discernable). La capacité de collecte est directement proportionnelle à la surface du miroir primaire : plus celle-ci est grande plus le temps de pose nécessaire pour réaliser une même observation est court. On peut remarquer sur la figure 1.1 que la surface collectrice est réduite par la présence des miroirs secondaires et tertiaires, mais cette réduction est négligeable.

Le pouvoir de résolution  $T_\lambda$  à longueur d'onde  $\lambda$  pour un objet à une distance  $d$  est, quant à lui, déterminé par :

$$T_\lambda = \tan\left(\frac{\theta_\lambda}{3600}\right) d \quad (1.1)$$

avec  $\theta_\lambda$  la limite de diffraction à la longueur d'onde  $\lambda$  :

$$\theta_\lambda \approx 1,2 \frac{\lambda}{D} \quad (1.2)$$

L'augmentation de la taille du miroir primaire permet donc d'améliorer simultanément la capacité de collecte et le pouvoir de résolution. Cette croissance est malheureusement limitée par la difficulté à obtenir des miroirs de grande taille sans défaut et de poids raisonnable (le miroir se déforme sous l'action de la gravité).

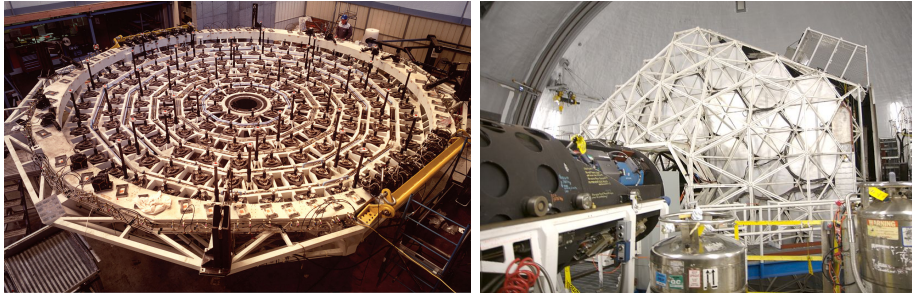


FIGURE 1.2 – Gauche : système d'optique active d'un des grands télescopes du VLT (source : European Southern Observatory). Droite : miroir primaire du télescope Keck vu de derrière et sa structure en nid d'abeilles (source : Keck Observatory).

Outre les méthodes de fabrication et les nouveaux matériaux visant à réduire le poids du miroir primaire, plusieurs techniques ont été imaginées pour permettre la construction de télescopes toujours plus grands :

- les systèmes d'optique active (à ne pas confondre avec l'optique adaptative présentée dans la section 1.2.3.1) qui équipent, entre autres, les télescopes du VLT permettent de compenser la déformation des miroirs avec un ensemble de vérins disposés sous chaque miroir primaire très mince (175 mm pour un diamètre de 8,20 m) (figure 1.2 à gauche) ;
- la décomposition du miroir primaire en une série de segments de plus petites dimensions comme sur le télescope Keck dont le miroir primaire est composé de 36 sections hexagonales (figure 1.2 à droite) ;
- les techniques d'interférométrie optique (section 1.2.3.2) permettent de combiner la lumière reçue par plusieurs télescopes afin d'obtenir un télescope fictif dont le pouvoir de résolution est équivalent à la distance séparant les télescopes, la capacité de collecte restant similaire à celle du télescope original.

### 1.2.1.2 Caméra CCD

Les caméras CCD (*Charge-Coupled Device*), apparues pendant les années 70, ont rapidement supplanté les anciens moyens d'acquisition (plaques photographiques, tubes photomultiplicateurs). Elles bénéficient en effet de nombreux avantages : grande sensibilité sur une partie étendue du spectre électromagnétique et particulièrement dans le domaine visible, réponse linéaire à l'illumination, taille réduite, coût modeste et faible consommation électrique.

Un capteur CCD est composé d'une matrice de photosites, chacun correspondant à un pixel de l'image. Chaque photosite est lui-même composé d'un substrat semi-conducteur qui produit des paires électron-trou par effet photo-électrique et d'un puits de potentiel qui stocke les électrons produits. Le capteur réalise donc directement une quantification spatiale par une intégration du flux sur la surface du pixel. Il est alors important de connaître le facteur, exprimé en seconde d'arc (*arcsecond*), liant la taille d'un pixel à la surface qu'il représente sur la voûte céleste.

L'efficacité quantique de l'effet photo-électrique (le pourcentage de photons convertis en paires électron-trou par rapport au nombre total de photons frappant le détecteur) à une longueur d'onde donnée est déterminante pour les performances du capteur (figure 1.3 à gauche) ; plus cette efficacité est élevée plus les observations réalisées pourront être profondes avec un temps de pose limité. L'efficacité quantique des capteurs modernes atteint 90% sur un domaine plus ou moins grand de longueurs d'onde ; à titre de comparaison l'efficacité quantique d'une plaque photographique est d'environ 5% dans le domaine visible.

La profondeur du puits de potentiel correspond au nombre d'électrons stockables par photosite. Lorsqu'un puits de potentiel est plein (l'ordre de grandeur étant de  $10^6$  électrons), le pixel est saturé. Suivant le type de capteur CCD, les nouveaux électrons arrivant peuvent soit déborder sur les pixels adjacents (créant un effet dit de *blooming*), soit être drainés hors du capteur.

Les caméras CCD modernes sont généralement une mosaïque de capteurs CCD. La caméra MegaCam du télescope Canada-France-Hawaï (CFHT) est ainsi composée de 36 capteurs CCD pour un total de 360 millions de pixels (figure 1.3 à droite).

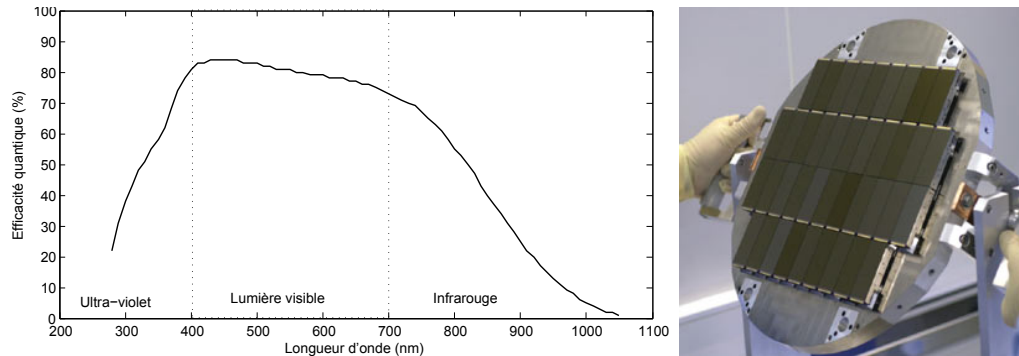


FIGURE 1.3 – Gauche : efficacité quantique de la caméra MegaCam en fonction de la longueur d'onde. Droite : mosaïque de capteurs CCD de la caméra MegaCam (source Canada-France-Hawaï Télescope).

Les différentes sources de bruit sur les caméras CCD sont :

- le bruit de comptage : la transformation d'un photon par effet photo-électrique étant un évènement discret, il est soumis à une statistique de Poisson ;
- le bruit thermique : l'émission thermique du capteur nécessite un mécanisme de refroidissement (refroidissement par azote liquide par exemple) sans lequel les photosites sont saturés en quelques secondes à température ambiante ;
- le bruit de transfert : la lecture d'un capteur CCD est réalisée de manière séquentielle, les charges accumulées dans les puits de potentiel étant transférées de sites en sites jusqu'au point de lecture. Ce transfert, même si il est très efficace (les meilleurs capteurs atteignent 99,999 95 % d'efficacité), n'est pas parfait et introduit un faible bruit avec une corrélation spatiale ;
- le bruit de lecture : la lecture du nombre d'électrons contenus dans le puits de potentiel implique une phase d'amplification et de conversion analogique/numérique source d'erreurs.

De plus, au sein d'un même capteur, les photosites ont des sensibilités différentes et il peut arriver que certains photosites soient endommagés (par exemple par des rayons cosmiques)

produisant des *pixels morts* sur l'observation.

### 1.2.1.3 Atmosphère

Malgré sa densité relativement faible, l'atmosphère terrestre est un obstacle important à la réalisation des observations astronomiques. Elle se manifeste par plusieurs aspects différents :

- une absorption plus ou moins forte de la lumière selon la longueur d'onde considérée, l'altitude du point d'observation (hauteur de la masse d'air traversée) et des facteurs météorologiques (principalement l'humidité). Cette absorption chromatique modifie donc la couleur apparente de l'objet. De plus, seules certaines plages du spectre électromagnétique sont observables depuis la Terre (figure 1.4) : la fenêtre optique (qui inclut l'ultraviolet proche et l'infrarouge proche), la fenêtre infrarouge autour de 10 micromètres, et la fenêtre radio. Les autres parties du spectre doivent être observées depuis la haute atmosphère (avec des ballons) ou de l'espace (avec des satellites) ;
- la réfraction atmosphérique ;
- un effet dispersif ;
- une émission de type corps noir et des raies d'émission correspondant à ses composants chimiques : bandes moléculaires associées à la vapeur d'eau et raies fines associées aux éléments comme l'oxygène et l'azote ;
- un phénomène de diffusion dû aux turbulences atmosphériques.

On peut également noter que l'atmosphère offre une protection contre les rayons cosmiques.

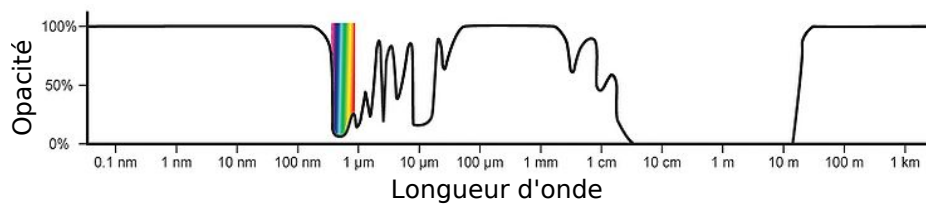


FIGURE 1.4 – Opacité approximative de l'atmosphère au niveau de l'océan.

Alors que les phénomènes d'absorption et d'émission peuvent être corrigés a posteriori (l'absorption est compensée par un facteur multiplicatif qui peut être obtenu par comparaison à des étalons de luminosité, et l'émission peut être soustraite), le phénomène de diffusion est plus problématique. Il résulte des mouvements rapides des différentes poches d'air ayant des indices de réfraction légèrement différents et que traverse le front d'onde lorsqu'il atteint la Terre. L'effet de flou obtenu, le *seeing*, empêche en pratique d'atteindre la limite du pouvoir de résolution du télescope.

Comme le *seeing* dépend des conditions météorologiques, il diffère pour chaque observation. On peut néanmoins généralement faire l'approximation qu'il est constant spatialement pour une observation donnée. Il s'apparente alors à une convolution par la fonction d'étalement du point (*Point Spread Function* ou PSF). La PSF étant souvent proche d'une gaussienne, elle est fréquemment décrite par sa largeur à mi-hauteur (*Full Width at Half Maximum* ou FWHM), mais cette mesure ne permet pas de caractériser l'asymétrie, et l'approximation gaussienne est souvent trop grossière pour réaliser une déconvolution précise.

Un moyen de s'affranchir de l'atmosphère est d'utiliser un télescope spatial comme le *Hubble Space Telescope* (HST) ; l'observation peut alors être réalisée à tout moment sur

l'ensemble du spectre électromagnétique accessible aux instruments embarqués et l'absence de turbulence permet d'atteindre le pouvoir de résolution nominal du télescope. Néanmoins cette solution est extrêmement couteuse (prix de la mise en orbite et de l'entretien). La majorité des télescopes existants et les projets à venir sont terrestres, d'autant que le diamètre d'un miroir spatial est limité par les capacités d'emport, de déploiement et de résistance aux vibrations du décollage. Les télescopes terrestres sont alors construits sur des sites en altitude pour réduire la hauteur d'atmosphère, dans des régions sèches (vapeur d'eau réduite pour faciliter l'accès au domaine infrarouge), dans des endroits où les couches de l'atmosphère sont peu perturbées (afin de réduire le seeing) et où les nuages sont peu fréquents ou confinés par inversion de température.

Le développement récent de l'optique adaptative (section 1.2.3.1) pour les télescopes terrestres permet de réduire fortement le seeing et les télescopes équipés approchent maintenant les capacités des télescopes spatiaux tout en offrant une plus grande surface collectrice.

#### 1.2.1.4 Filtres optiques

Le rôle des filtres optiques est de sélectionner une zone particulière du spectre électromagnétique, l'intérêt étant de pouvoir isoler la signature propre à un phénomène particulier selon la plage de longueurs d'onde considérée : par exemple, les jeunes étoiles massives (ayant une température de surface supérieure à 30 000 kelvin) émettent l'essentiel de leur énergie en ultraviolet alors que les petits grains solides du milieu interstellaire rayonnent l'énergie qu'ils reçoivent en infrarouge (température comprise entre 10 et 100 kelvin) ; de même pour les raies de recombinaison de l'hydrogène atomique avec une longueur d'onde qui dépend du décalage spectral de l'objet. On peut alors réaliser une observation unique dans la bande de fréquences la plus pertinente ou plusieurs observations du même champ avec des filtres différents menant à l'astronomie multibande. Pour peu que l'ensemble des filtres utilisés couvrent une part notable du spectre et qu'ils soient utilisés par une communauté large ou un relevé majeur, cet ensemble de filtres définit alors un *système photométrique* (par exemple système BVR Johnson ou *ugriz* du *Sloan Digitalized Sky Survey* (SDSS)) dont la caractérisation précise est nécessaire à l'interprétation de l'observation.

Les qualités d'un filtre sont déterminées par sa capacité à être le plus transparent possible dans la bande de fréquences souhaitée tout en étant le plus opaque possible sur les autres fréquences. Un filtre est souvent caractérisé par la longueur d'onde centrale de sa bande d'observation, ainsi la table 1.1 montre les longueurs d'ondes centrales du système photométrique *ugriz* [22]. Néanmoins cette caractérisation reste très sommaire et une description plus complète est fournie par la courbe de réponse complète donnant l'efficacité du filtre en fonction de la longueur d'onde (figure 1.5).

Filtre	<i>u</i>	<i>g</i>	<i>r</i>	<i>i</i>	<i>z</i>
Longueur d'onde centrale	355,1 nm	468,6 nm	616,5 nm	748,1 nm	893,1 nm

TABLE 1.1 – Système photométrique du SDSS.

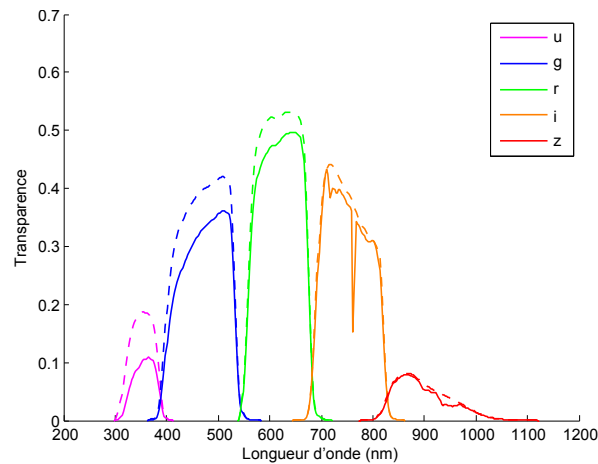


FIGURE 1.5 – Efficacité des filtres du système photométrique *ugriz* du SDSS. Pour chaque filtre on donne l'efficacité du filtre (courbe tiretée) et l'efficacité du filtre avec prise en compte de l'atmosphère (point d'observation situé à l'observatoire d'Apache Point au Nouveau-Mexique).

### 1.2.2 Imagerie monobande, multibande

Afin de corriger les défauts liés aux composants du système d'acquisition, la réalisation d'une observation nécessite en fait l'obtention de plusieurs images :

- l'image brute : c'est l'image non corrigée de l'objet ou du champ que l'on cherche à obtenir ;
- le champ noir : cette image est obtenue avec l'obturateur du télescope fermé et une durée de pose équivalente à celle utilisée pour obtenir l'image brute. Le champ noir contient le flux thermique de la caméra (le courant d'obscurité) et les éventuelles sources parasites ;
- le champ plat : il est obtenu en observant une source lumineuse éclairant de manière uniforme le détecteur et permet de mesurer les différences de sensibilité du capteur sur toute sa surface et ainsi quantifier le biais multiplicatif en chaque pixel ;
- l'image de biais : obtenue en réalisant une acquisition avec un temps de pose nul (lecture immédiate du capteur), tout capteur fermé, permet de mesurer le biais additif en chaque pixel.

L'image finale est obtenue par combinaison des différentes acquisitions :

$$\text{Observation} = \frac{\text{Image brute} - \text{Champ noir}}{\text{Champ plat} - \text{Image de biais}} \quad (1.3)$$

Lorsqu'une observation est réalisée en utilisant un filtre unique, on obtient une image monobande. Si plusieurs images du même champ sont obtenues avec des filtres différents, on parle alors d'images multibandes (figure 1.6, dans la suite du document les images monobandes sont données en inverse vidéo). L'acquisition d'images multibandes peut être réalisée simultanément au cours d'une même observation ou bien pendant des observations différentes. Dans le premier cas, la caméra CCD utilisée est formée d'une mosaïque de capteurs et des capteurs différents sont utilisés pour l'obtention de chaque bande. À partir de trois bandes d'une image multibande, on peut construire une image en fausses couleurs en affectant chaque

bande à un canal rouge–vert–bleu (figure 1.7). Sauf mention contraire, dans la suite de ce document, les images astronomiques colorées sont obtenues par composition des trois bandes internes *gri* du SDSS.

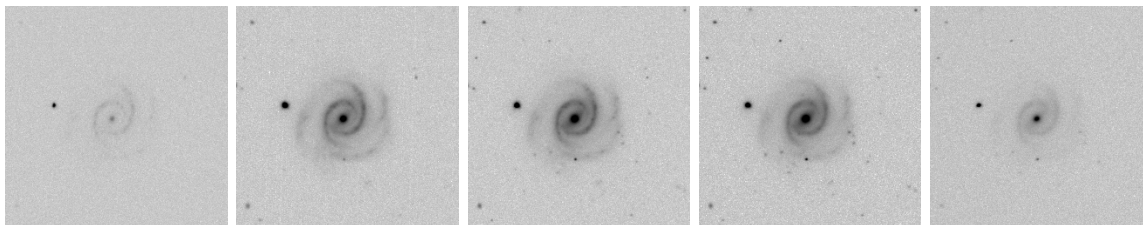


FIGURE 1.6 – Galaxie PGC 3584 (*Principal Galaxy Catalog*), dans les cinq bandes du système *ugriz* du SDSS.



FIGURE 1.7 – Composition colorée de la galaxie PGC 3584 basée sur les trois bandes centrales du SDSS *gri*.

### 1.2.3 Nouvelles générations d’observations

Ces dernières années ont vu l’apparition de nouvelles méthodes d’acquisition permettant de repousser les limites des instruments actuels. Cette section présente brièvement trois techniques représentatives des observations actuelles et à venir.

#### 1.2.3.1 Optique adaptative

L’optique adaptative a pour but de corriger le seeing induit par l’atmosphère. L’idée générale de la méthode consiste à introduire un miroir déformable entre le télescope et le dispositif d’acquisition afin de corriger en temps réel la déformation du front d’onde. Néanmoins, la fréquence élevée des perturbations atmosphériques (environ 46 Hz) pose des contraintes techniques fortes : l’ensemble du dispositif, de la mesure de la déformation du front-d’onde à la

modification de la forme du miroir, doit opérer beaucoup plus rapidement que la fréquence des perturbations.

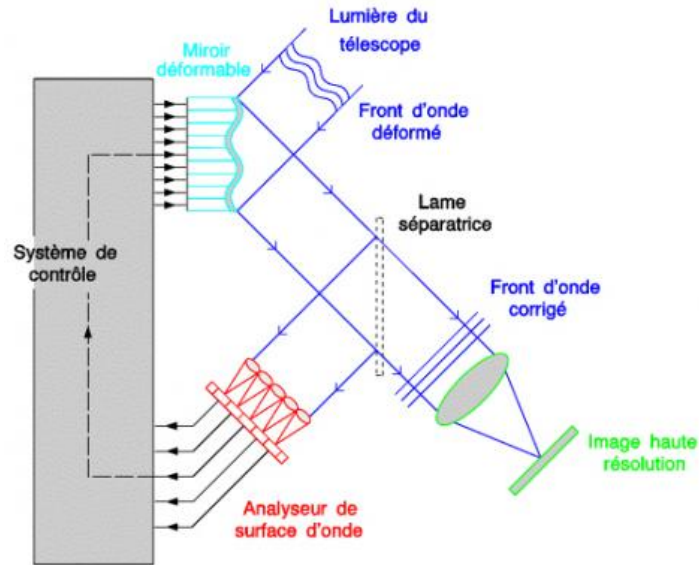


FIGURE 1.8 – Principe de fonctionnement de l’optique adaptative (source : LESIA. Observatoire de Paris, CNRS, INSU).

Dans un système typique d’optique adaptative (figure 1.8), le flux collecté par le télescope est d’abord envoyé sur le miroir déformable. Puis, une partie du flux est dirigée vers l’analyseur de surface d’onde avec une lame séparatrice. Ce dernier analyse alors l’apparence d’une source ponctuelle et calcule les corrections à appliquer au front d’ondes pour compenser la diffusion observée. Les corrections sont transmises au miroir déformable par le système de contrôle. La source ponctuelle utilisée par l’analyseur de surface d’onde est généralement une source artificielle, créée par un laser dont la longueur d’onde est sélectionnée pour ioniser la haute atmosphère, afin de toujours pouvoir avoir une source ponctuelle d’intensité suffisante dans le champ d’observation. La figure 1.9 montre une comparaison entre deux images de la planète Uranus obtenues avec et sans optique adaptative.

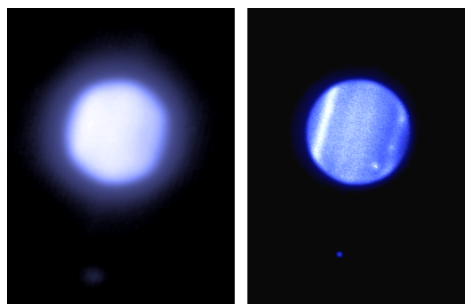


FIGURE 1.9 – Observation d’Uranus sans (à gauche) et avec (à droite) optique adaptative (source : Isaac Newton Group of Telescopes).



De nos jours, les systèmes d'optique adaptative sont disponibles sur de nombreux grands télescopes comme le VLT, les télescopes Keck, le CFHT, ... Le concept de base est décliné en différents systèmes : MOAO (Multi-Object Adaptive Optic), MCAO (Multi-Conjugate Adaptive Optic), GLAO (Ground-Layer Adaptive Optic), ...

### 1.2.3.2 Interférométrie optique

Le principe de l'interférométrie est d'exploiter au maximum les informations contenues dans le front d'ondes lumineux en faisant interférer les fronts d'ondes reçus par des télescopes plus ou moins distants. Cette technique est utilisée depuis des dizaines d'années sur les télescopes radio mais sa mise en pratique sur des télescopes optiques est beaucoup plus complexe du fait des longueurs d'ondes beaucoup plus courtes mises en jeu. L'interférométrie optique permet théoriquement d'obtenir un télescope dont le pouvoir de résolution sur la ligne de base est équivalent à la distance qui sépare les télescopes du dispositif.

Un interféromètre optique (figure 1.10) est constitué de plusieurs télescopes éloignés généralement de quelques dizaines à quelques centaines de mètres. Une installation souterraine permet ensuite de faire converger les différents faisceaux tout en les synchronisant au moyen de lignes de retard. Pour que l'interférence se produise, les faisceaux doivent être synchronisés avec une précision d'environ  $1 \mu\text{m}$ .

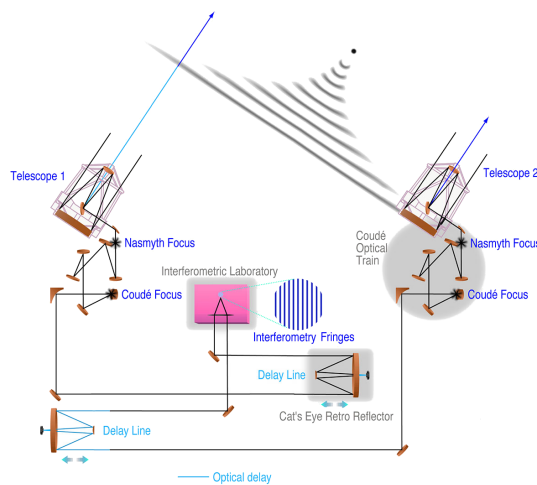


FIGURE 1.10 – Principe de fonctionnement de l'interférométrie optique. (source : European Southern Observatory).

Le VLT peut notamment faire fonctionner trois de ses quatre télescopes de 8 m de diamètre en mode interféromètre, permettant ainsi d'obtenir un pouvoir de résolution allant jusqu'à un diamètre équivalent de 200 m mais ayant une surface collectrice de 8 m de diamètre.

### 1.2.3.3 Spectrographe intégral de champ

Les images multibandes permettent d'obtenir une vue enrichie d'un objet par rapport à une simple observation monobande, mais les informations qu'elles contiennent restent limitées

par le faible nombre de bandes considérées et leur largeur importante qui ne permet pas de distinguer les différentes raies d'absorption et d'émission. Par ailleurs, un spectre donne une information détaillée sur les longueurs d'onde d'émission et d'absorption d'un objet mais n'est pas spatialement résolu, ou couvre une région trop petite de l'objet à étudier. Le but d'un spectrographe intégral de champ est de réaliser la fusion de ces deux modes d'observation (imagerie et spectrographie) afin d'obtenir des images hyperspectrales (ou cube), c'est à dire des images spatialement et spectralement résolues. Ce type d'observation, qui trouve des applications dans tous les domaines de l'astronomie, de l'observation planétaire à la cosmologie, permet, par exemple, d'accéder à de nouvelles informations comme la répartition spatiale et les champs de vitesses des nuages de gaz au sein des galaxies.

La construction d'un spectrographe intégral de champ requiert des optiques de grande précision capables de découper le flux reçu par le télescope en de nombreuses tranches qui sont ensuite envoyées séparément dans un spectrographe. Le cube doit alors être reconstitué sur la base des informations dispersées sur l'ensemble du système. À partir de 2012, l'instrument MUSE (*Multi Unit Spectroscopic Explorer*, figure 1.11), faisant partie de la nouvelle génération de spectrographes intégral de champ, sera installé au VLT et permettra d'acquérir des images hyperspectrales sur un champ de  $1 \times 1$  arcmin<sup>2</sup> avec une résolution spatiale de 300 pixels de côté et une résolution spectrale de 4000 pixels couvrant toutes les longueurs d'onde visibles. Le traitement des données produites par cet instrument pose de nombreux défis liés à la complexité des processus mis en jeu dans l'observation et dans le dispositif d'acquisition, ainsi qu'à la masse de données que représente un cube (environ 4 millions de pixels).

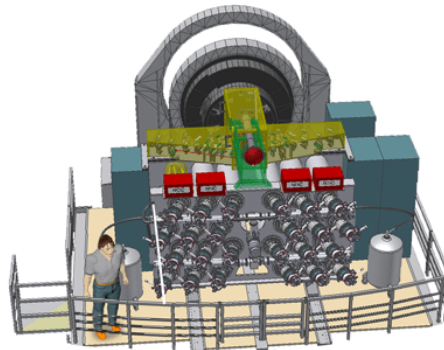


FIGURE 1.11 – L'instrument MUSE est un spectrographe intégral de champ qui équipera le VLT à partir de 2012 (source : Centre de Recherche Astronomique de Lyon).

#### 1.2.4 Masse de données et observatoire virtuel

Un point sensible de la recherche en astronomie porte actuellement sur la gestion de l'avalanche de données acquises : à titre d'exemple, le catalogue USNO (*United States Naval Observatory*) répertorie à lui seul plus d'un milliard d'objets célestes et le relevé SDSS couvre plus de 350 millions d'objets sur cinq bandes et plus de 1,5 million de spectres. De plus, les nouvelles méthodes d'acquisition comme la spectrographie intégrale de champ promettent d'accroître sensiblement encore la masse de données accessibles.

La nécessité de disposer de moyens de gestion et d'exploitation efficaces pour ces données a donné naissance au début des années 2000 à la notion d'*Observatoire Virtuel* (OV). Son but est de fournir des protocoles et des outils standardisés afin que tout un chacun puisse librement accéder aux données existantes et mettre à disposition de l'ensemble de la communauté ses propres données.

L'OV se manifeste actuellement comme un ensemble de programmes nationaux ou internationaux comme l'Astrophysical Virtual Observatory en Europe, AstroGrid, le projet e-Science britannique ou le National Virtual Observatory aux Etats-Unis. L'accès aux services de l'OV peut se faire de manière standardisée avec des logiciels comme Aladin, véritable portail vers les plus grands catalogues d'objets à travers le meta-catalogue VizieR (compilation de plus de 8000 catalogues) ou Simbad, vers les principales bases d'images et vers des outils de traitement de données distribués.

### 1.3 Galaxies et classification morphologique

Cette section commence par une brève description des galaxies et de leur composition. On présente ensuite le schéma de classification morphologique le plus utilisé : la séquence de Hubble révisée, puis nous détaillons les différentes structures morphologiques à la base de ce schéma. L'ensemble des descriptions morphologiques données ci-dessous porte sur la morphologie observable dans le domaine visible et proche du visible du spectre électromagnétique, celle-ci pouvant être complètement différente dans les longueurs d'ondes courtes (rayons X et gamma) et étendues (radio) compte-tenu des sources émettrices ou des processus physiques en jeu.

#### 1.3.1 Description générale

Une galaxie est un système complexe lié par la gravitation, composé de matière baryonique (protons, neutrons et électrons) sous forme d'étoiles et d'un milieu interstellaire fait de gaz et de poussières ainsi que d'une grande quantité de matière noire de nature inconnue. Cette dernière est insensible à la force électromagnétique et elle ne se manifeste donc ni par émission ni par absorption de photons mais par ses seuls effets gravitationnels.

Les galaxies ont des tailles extrêmement variées : les galaxies dites *naines*, tardivement mises en évidence, contiennent seulement quelques millions d'étoiles pour un diamètre de quelques milliers d'années lumière alors que les galaxies les plus grandes peuvent regrouper jusqu'à plusieurs milliers de milliards d'étoiles pour un diamètre de plusieurs centaines de milliers d'années lumière.

Les galaxies étant des objets tridimensionnels étendus, on s'intéresse à la brillance de leur image en projection sur la sphère céleste et à leur luminosité totale (flux). Cette luminosité est exprimée sur une échelle logarithmique en magnitude (mag) et la brillance de surface en magnitude par seconde d'arc carrée ( $\text{mag.arcsec}^{-2}$ ). Sur une image, l'intensité apparente du flux lumineux est observée suivant une échelle linéaire exprimée dans une unité arbitraire nommée ADU (*Analog-to-digital unit*), la valeur d'une ADU dans le système international étant dépendante du périphérique d'acquisition. Le flux par seconde et seconde d'arc carrée en échelle linéaire  $F$  est liée à la magnitude  $m$  par la relation suivante :

$$m = -2,5 \log \left( \frac{F}{F_0} \right) \quad (1.4)$$

où  $F_0$  représente un flux de référence propre à chaque observation qui est celui du ciel nocturne à la longueur d'onde de l'observation. Obtenir la luminosité absolue d'un objet à partir de son flux apparent est un problème délicat car il faut tenir compte de l'opacité de l'intégralité de la chaîne optique, de la distance de l'objet et de corrections liées aux effets de projection (pour compenser l'opacité de certaines structures lorsque l'inclinaison est forte).

La métallicité d'une galaxie qui mesure le pourcentage d'atomes plus lourds que l'hélium par rapport à la composition du Soleil est un marqueur important de son évolution. En effet, la proportion de ces éléments au commencement de l'univers est bien connue (elle est pratiquement nulle) ; toute évolution de ces proportions, et donc de la métallicité, implique des mécanismes capables de réaliser des réactions nucléaires de fusion ou de capture de neutrons et de diffuser leurs résultats à travers le milieu interstellaire : les étoiles massives avec leur durée de vie courte sont un acteur essentiel de cet enrichissement. La métallicité aide donc à déterminer l'histoire de la galaxie en retraçant l'histoire de la formation stellaire.

Les étoiles sont les principales sources de rayonnement dans le domaine de fréquence qui nous intéresse ici. La distribution spectrale de leur énergie suit la loi théorique du rayonnement d'un corps noir avec un pic d'émission déterminé par la température de la photosphère propre à chacune de ces étoiles. On distingue deux types de population d'étoiles selon qu'elles sont ou non issues d'un milieu préalablement enrichi par des générations antérieures d'étoiles :

- les étoiles de *Population I* sont riches en métaux et en général jeunes. Le Soleil fait partie de cette catégorie. Leur âge varie de 0 à 10 milliards d'années. Leur couleur dominante est le bleu pour les étoiles de masse supérieure à 5 masses solaires ; on observe également des étoiles dites de *Population I extrême* très jeunes et très massives qui émettent principalement dans le domaine ultraviolet ;
- les étoiles de *Population II* sont plus vieilles et donc pauvres en métaux. Leur âge varie entre 11 et 13,5 milliards d'années. Il ne subsiste de cette population que les étoiles de faible masse avec une température de surface relativement faible et donc une luminosité maximale dans la partie rouge du spectre électromagnétique.

Le milieu interstellaire est, quant à lui, composé de gaz en grande majorité (environ 99 % de la masse) et de poussières (1 %) en équilibre thermodynamique avec le milieu ambiant. Le gaz, principalement issu de la nucléosynthèse primordiale, est composé d'environ 89 % d'hydrogène (moléculaire ou ionisé), 9 % d'hélium et 2 % d'éléments plus lourds (métaux et traces de molécules). Les poussières sont constituées de grains extrêmement petits (de 0,1 à 1  $\mu\text{m}$ ) de graphite, de silicates, de carbonates, ... Elles absorbent de manière très efficace la lumière dans les longueurs d'onde supérieures à l'infrarouge et réémettent l'énergie absorbée dans l'infrarouge (figure 1.12). Une accumulation suffisante de poussières le long de la ligne de visée rend celle-ci opaque dans le domaine visible.

### 1.3.2 Classification morphologique

Les galaxies se distinguent les unes des autres, entre autres, par des morphologies variées qui ont donné naissance au premier système de classification construit par Hubble en 1926 [30] en examinant des clichés photographiques. Ce système en forme de diapason (figure 1.13) comporte cinq classes principales : les elliptiques, les spirales barrées et non barrées, les lenticulaires (ajoutées en 1936) et les irrégulières. La classe elliptique est subdivisée en sous-classes selon l'élongation apparente de l'objet et les classes spirales et spirales barrées sont subdivisées en fonction de l'importance de la région centrale et du déploiement plus ou moins

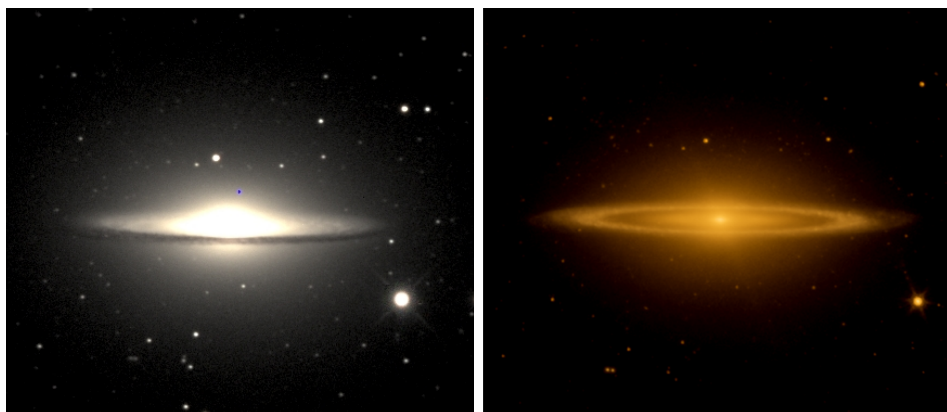


FIGURE 1.12 – Galaxie du sombrero en optique à gauche (source : Calvin Observatory) et en infrarouge à droite (source : télescope Spitzer). L’accumulation de poussières dans le plan galactique apparaît comme une bande sombre coupant la galaxie en deux dans le domaine optique mais devient une source lumineuse importante dans le domaine infrarouge.

grand de la structure spirale. Hubble pensait alors que les galaxies évoluaient de gauche à droite dans son schéma ; il en subsiste que les galaxies elliptiques sont toujours dites *précoces* (*early type*) et les galaxies spirales *tardives* (*late type*). Le schéma original présente certaines faiblesses liées au caractère non objectif de certaines classes et à l’hypothèse erronée qui a justifié sa représentation.

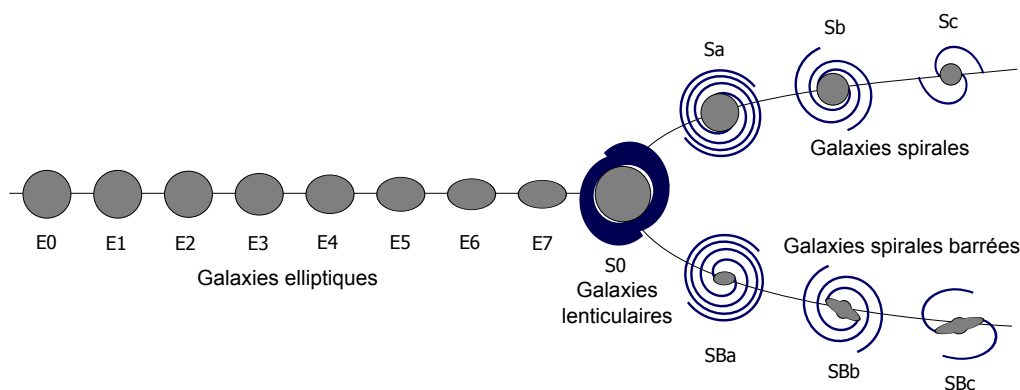


FIGURE 1.13 – Séquence de Hubble.

Or, la pertinence de toute classification se mesure à sa capacité de résumer l’information ou de servir de guide à la compréhension : les différentes classes doivent être corrélées avec un maximum de caractéristiques physiques et, si possible, organisées de manière continue afin d’en faciliter l’interprétation, en termes de processus évolutifs ici. Ainsi, pour aller dans ce sens, plusieurs autres schémas de classification ont été proposés afin de refléter les découvertes : meilleures prises en compte du détail des structures observées par de Vaucouleurs [18, 19], prise en compte continue de la concentration de lumière par Morgan [45, 46], ajout de classes selon la luminosité pour réduire la variance intra-classe par Van

den Berg [60, 61] (schéma connu sous le nom DDO : *David Dunlap Observatory*).

Le schéma faisant actuellement consensus, et que nous utiliserons par la suite, est l'évolution du schéma de Hubble connue sous le nom de séquence de Hubble révisée ou *Revised Hubble Sequence* (RHS). Nous commençons par décrire les types principaux de la séquence de Hubble révisée puis nous donnons une description détaillée du schéma avec les sous-types. Pour un paysage plus complet des systèmes de classification morphologique, le lecteur pourra se référer au livre *Galaxy Morphology and Classification* de Van den Bergh [62].

### 1.3.2.1 Galaxies elliptiques

Les galaxies elliptiques sont des objets d'apparence extrêmement régulières de forme ellipsoïdale (figure 1.14). Leur luminosité est fortement concentrée au centre et on n'y distingue aucune structure interne.

Dans le schéma de Hubble, les galaxies elliptiques sont classées par rapport à leur élongation apparente de E0 (circulaire) à E7 (fortement allongée), l'indice d'élongation étant égal à dix fois l'aplatissement  $(a - b)/a$  avec  $a$  la longueur du grand axe et  $b$  la longueur du petit axe. Aucune galaxie elliptique d'indice d'élongation supérieur à 7 n'ayant été observée, il semble qu'il soit physiquement impossible qu'elles existent. La question de savoir s'il s'agit d'ellipsoïdes de révolution ou d'objets tri-axiaux reste ouverte.

Les galaxies elliptiques sont aujourd'hui divisées en trois groupes (figure 1.14) : les elliptiques compactes qui sont de dimensions réduites mais de métallicité élevée, les « normales » (on dit simplement elliptiques) et les elliptiques géantes avec des ailes très étendues dites cD qui sont le résultat d'une série de fusions propres aux cœur des amas de galaxies très riches.

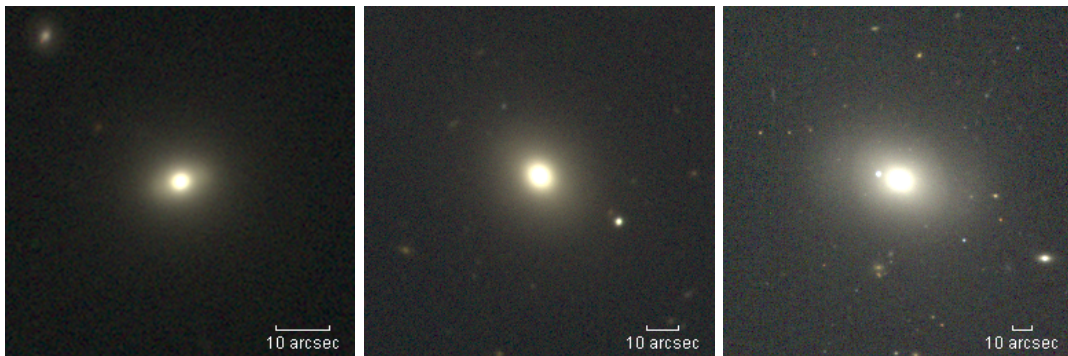


FIGURE 1.14 – Galaxies elliptiques (de gauche à droite) : PGC 2522 compacte, PGC 3976 normale et PGC 41171 géante.

### 1.3.2.2 Galaxies spirales

Les galaxies spirales ont deux composantes principales : un bulbe central qui s'apparente à une petite galaxie elliptique et un disque étendu contenant les bras spiraux. Elles possèdent une symétrie centrale qui peut être perturbée par la présence de galaxies voisines. Alors que le bulbe a une structure tridimensionnelle, le disque est quasiment plan : l'apparence de la galaxie change donc fortement selon le point de vue (figure 1.15).

Le disque de la galaxie spirale contient les bras spiraux, une quantité plus ou moins importante de poussières et parfois une barre stellaire et des anneaux. Généralement, la spirale est formée de deux ou quatre bras symétriques, les nombres impairs se manifestant plutôt dans les galaxies en interaction. La barre stellaire est une structure rectangulaire plus ou moins longue qui coupe la galaxie en deux (figure 1.16). Suivant le rayon de l'anneau, on parle d'anneau interne ou externe (figure 1.17). La poussière peut se présenter de manière diffuse ou sous forme de grumeaux plus ou moins denses. Il arrive que la structure spirale présente un aspect granuleux et ne soit pas décomposable en bras spiraux : on parle alors de galaxie flocculante.

Les galaxies spirales sont divisées en sous-classes en fonction de la présence d'une barre ou non, de l'importance de leur bulbe et de l'ouverture de leurs bras (ces deux dernières propriétés sont fortement corrélées : les bras sont généralement d'autant plus resserrés que le bulbe est important).

### 1.3.2.3 Galaxies lenticulaires

Comme les galaxies spirales, les deux composantes principales d'une galaxie lenticulaire sont son bulbe et son disque. Mais contrairement aux galaxies spirales, le disque des galaxies lenticulaires ne contient pas de bras spiraux et leur bulbe est également généralement plus important. Néanmoins, le disque des galaxies lenticulaires peut contenir une barre stellaire, des anneaux et une quantité plus ou moins importante de poussières.

On distingue trois sous-classes de galaxies lenticulaires (figure 1.18) : précoces, intermédiaires et tardives. Les précoces ne contiennent pas de structure interne ni de poussière, les intermédiaires peuvent contenir un peu de poussière et des structures internes peu développées, les tardives contiennent de la poussière et des structures internes assez développées.

### 1.3.2.4 Galaxies irrégulières

Par définition, les galaxies irrégulières sont de formes variées et ne possèdent pas de symétrie (figure 1.19). Elles ne peuvent pas être décomposées en bulbe et disque mais certaines semblent contenir des structures assimilables à une barre stellaire ou à des embryons de bras spiraux. Les galaxies irrégulières sont généralement assez petites et peu brillantes.

Les galaxies irrégulières sont divisées en deux sous-classes : celles de type magellanique et les autres. Les galaxies irrégulières magellaniques ressemblent au nuage de Magellan, c'est-à-dire à des galaxies spirales sans bulbe, avec un disque très ténu et dont les bras sont extrêmement fragmentés.

### 1.3.2.5 Galaxies particulières

Les galaxies particulières ne forment pas une classe à proprement parler, mais elles désignent les galaxies présentant des caractéristiques inhabituelles (figure 1.20). Ce sont généralement des galaxies en interaction ou ayant interagi récemment, les forces de marées gravitationnelles affectant alors, en premier lieu, la structure spirale. Les phénomènes les plus observés sont : l'étirement et la déformation d'un ou plusieurs bras spiraux, la formation d'un anneau dominant, la présence inhabituelle de poussières, un gauchissement ou une asymétrie du disque.

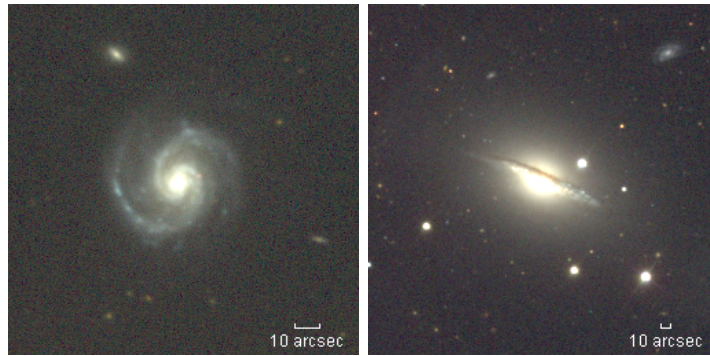


FIGURE 1.15 – Galaxies spirales (de gauche à droite) : PGC 9822 vue de face et PGC 6671 vue par la tranche.

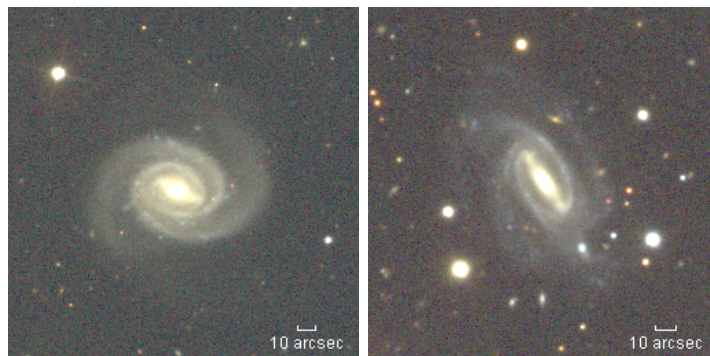


FIGURE 1.16 – Galaxies spirales barrées (de gauche à droite) : PGC 2182 avec une barre relativement courte et PGC 26357 avec une barre très développée.

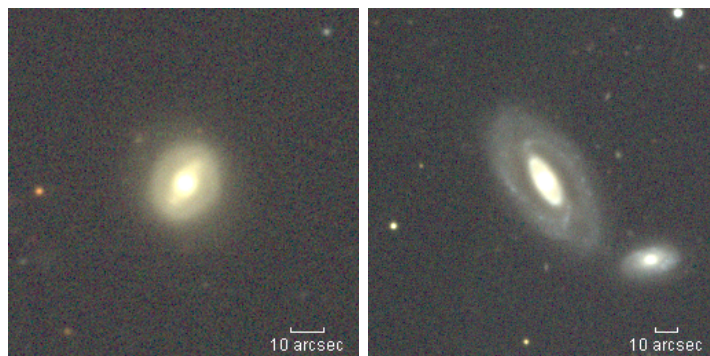


FIGURE 1.17 – Galaxies à anneau (de gauche à droite) : PGC 32995 avec anneau interne et PGC 33404 avec anneau externe .



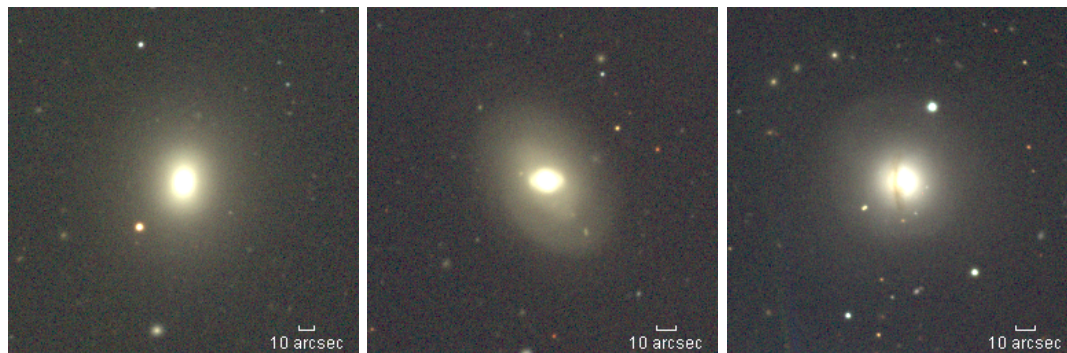


FIGURE 1.18 – Galaxies lenticulaires (de gauche à droite) : PGC 2076 précoce, PGC 3833 intermédiaire (barrée) et PGC 23024 tardive.

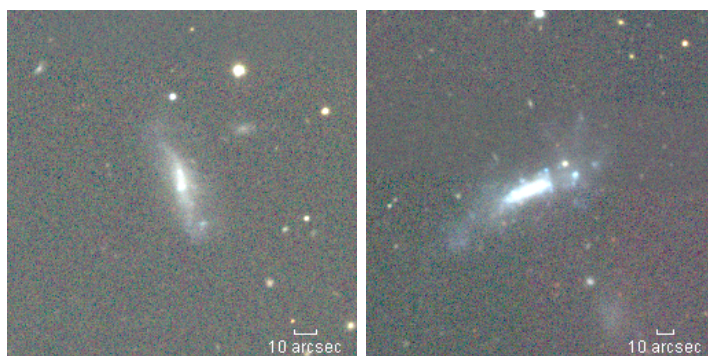


FIGURE 1.19 – Galaxies irrégulières (de gauche à droite) : PGC 4647 et PGC 7998.

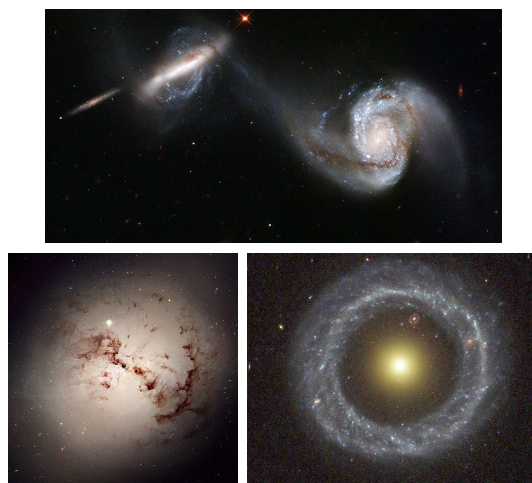


FIGURE 1.20 – Galaxies particulières. Ligne du haut : Galaxies spirales NGC 3808 a et b (*New Galaxy Catalog*) en interaction. Ligne du bas : à gauche, galaxie elliptique NGC 1316 avec une présence anormale de poussières, à droite anneau de Hoag. Source : Hubble Space Telescope.

### 1.3.2.6 Séquence de Hubble révisée

La séquence de Hubble révisée, imaginée par de Vaucouleurs [18] reprend quatre classes principales de Hubble — elliptique, lenticulaire, spirale, irrégulière — qui sont alors divisées en familles, variétés et stades. Un objet appartenant à une classe donnée peut alors appartenir à une famille, une variété et un stade particuliers de cette classe. La table 1.2 récapitule les différents types, les familles, variétés et stades qui s’y rattachent ainsi que le nom, le numéro (T), le nom du type et le code associés. Les stades donnés en fin de tableau sont communs à toutes les classes. Le codage permet de décrire un objet de façon complète (par rapport à cette notation) avec un nombre réduit de caractères. Par exemple RSXR5P désigne une galaxie avec un pseudo anneau externe (R.....), de la classe spirale (.S....) dont on n’est pas sûr de la présence d’une barre stellaire (.X...) mais possédant un anneau interne (...R..) arrivée au stade c (....5.) et possédant une particularité (.....P).

### 1.3.3 Structures des galaxies

Nous avons vu que la classification morphologique des galaxies selon la séquence de Hubble révisée repose sur la présence, l’absence et les caractéristiques d’un certain nombre de structures galactiques. Ces structures, qui apparaissent dans les images optiques, se distinguent par des compositions (types d’étoiles, gaz et poussières) et des cinématiques différentes. Les deux principales structures, dont l’importance relative varie d’un objet à l’autre (pouvant aller jusqu’à l’absence d’une des deux), sont le bulbe et le disque. Les autres structures remarquables sont toutes des structures internes au disque galactique : les bras spiraux, la barre stellaire, les anneaux (interne et externe) et la barre de poussières. La suite de cette section est dédiée à la description de chacune de ces structures.

#### 1.3.3.1 Le bulbe

Le bulbe galactique est une concentration très resserrée d’étoiles de Population II, donc plutôt rouge. Son aspect est très homogène : il ne présente en première approximation aucune structure interne particulière quelle que soit la longueur d’onde étudiée. Il contient très peu de gaz et de poussières et il ne s’y produit, de ce fait, plus de formation d’étoiles. Les étoiles qui le composent ont des orbites principalement aléatoires (la distribution des vitesses est anisotrope), ce qui rend la forme tridimensionnelle de l’objet difficile à connaître. Néanmoins la forme projetée est assez simple : ses isophotes (lignes d’égale brillance) sont elliptiques.

Les ellipses correspondant aux isophotes ne sont pas nécessairement homothétiques et peuvent présenter des variations d’élongation ou d’orientation, on parle alors de *twist* des isophotes (voir figure 1.21).

De plus les isophotes peuvent présenter une déformation vers une forme de rectangle (*boxy*) ou d’étoile à quatre branches (*disky*) (voir figure 1.22).

Le bulbe peut également posséder une source ponctuelle extrêmement brillante en son centre dont la luminosité peut dominer l’ensemble de la galaxie : on parle alors de noyau actif. Le noyau actif est associé à l’accrétion de matière sur le trou noir super-massif qui serait présent au centre des galaxies massives et est un phénomène relativement rare dans l’univers proche.

Les études photométriques ont permis de déterminer que la décroissance centre–bord de luminosité du bulbe (sans noyau actif) peut être généralement bien décrite par une loi

Classes	Familles	Variétés	Stade	T	Type	Code
Elliptique		Compacte	Elliptique Intermédiaire	-6	cE	cE...
				-5	E0	.E.0.
				-5	E0-1	.E.0+
				-4	E+	.E+..
Lenticulaire	Non barrée Barrée Mixte	Anneau interne Forme en S Mixte			S0	.L
					SA0	.LA
					SA0	.LB
					SAB0	.LX
					S(r)0	.L.R
					S(s)0	.L.S
					S(rs)0	.L.T
					S0 <sup>-</sup>	.L.R
					S0 <sup>°</sup>	.L.S
					S0 <sup>+</sup>	.L.T
Spirale	Non barrée Barrée Mixte	Anneau interne Forme en S Mixte			SA	.SA
					SB	.SB
					SAB	.SX
					S(r)	.S.R
					S(s)	.S.S
					S(rs)	.S.T
				0/a	S0/a	.S..0
				a	Sa	.S..1
				ab	Sab	.S..2
				b	Sb	.S..3
				bc	Sbc	.S..4
				c	Sc	.S..5
				cd	Scd	.S..6
				d	Sd	.S..7
dm	Sdm	.S..8				
m	Sm	.S..9				
Irrégulière	Non barrée Barrée Mixte	Forme en S	Non magélanique magélanique		IA	.IA
					IB	.IB
					IAB	.IX
					I(s)	.I.S
				90	I0	.I.0
				10	Im	.I..9
	11	cI	cI			
Particulière Particularité			Particularité	99	Pec pec	.P .....P
Toutes			Incertain		:	....*
			Douteux		?	....?
			<i>spindle</i>		sp	...../
			Anneau externe		(R)	R.....
			Pseudo-anneau		(R')	P.....

TABLE 1.2 – Classification de Hubble révisée.

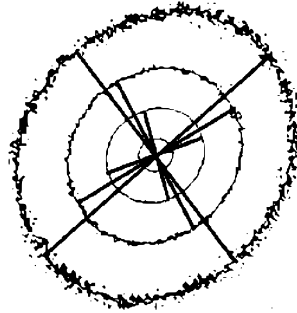


FIGURE 1.21 – Décalage angulaire du grand-axe des isophotes avec le rayon (*twist*) (source : [39]).

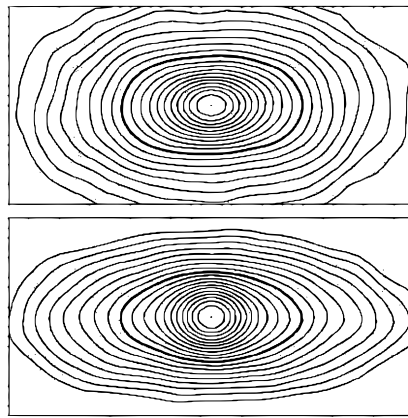


FIGURE 1.22 – Forme des isophotes pour des galaxies *boxy* en haut et *disky* en bas (source : [39]).

simple à deux paramètres (un paramètre d'échelle et une paramètre de brillance) dite de de Vaucouleurs [18] ou sa généralisation à trois paramètres (un paramètre de concentration supplémentaire) dite loi de Sérsic [58].

### 1.3.3.2 Le disque

Le disque galactique est une concentration d'étoiles de forme circulaire et de faible épaisseur : le rapport d'échelle entre le rayon et la hauteur est typiquement de 1/100 si bien que, en première approximation, on peut le considérer comme un objet bidimensionnel. Il est composé d'étoiles de Populations I et II, de poussières et de gaz. Les orbites des étoiles du disque sont faiblement elliptiques, confinées dans le plan du disque et ont toutes le même sens de rotation sauf exceptions (étoiles capturées par une galaxie satellite par exemple).

L'aspect du disque peut énormément varier d'une galaxie à l'autre du fait des structures internes qu'il possède : principalement une structure spirale, une barre stellaire, des anneaux et des nuages de gaz et poussières. Malgré cette variabilité apparente on peut tout de même considérer que le disque est en fait une structure homogène sur laquelle se superposent d'autres structures plus complexes. Dans la suite de ce document le mot disque fera uniquement référence à la composante homogène.

La décroissance centre–bord de luminosité du disque est bien décrite par une loi simple à deux paramètres (un paramètre d’échelle et un paramètre de brillance) dite loi exponentielle [21].

### 1.3.3.3 Les bras spiraux

D’après le modèle majoritairement accepté, les bras spiraux qui apparaissent dans les galaxies spirales sont la matérialisation d’ondes de densité [40]. Les étoiles ayant des vitesses angulaires relativement voisines quelle que soit leur orbite (mis à part dans la région centrale) dans un référentiel tournant à la vitesse moyenne, il en résulte que l’augmentation progressive de l’angle de position des orbites stellaires en fonction du rayon conduit à l’apparition de ces ondes de densité (figure 1.23). Les ondes de densité ainsi formées évoluent lentement par rapport à la vitesse de rotation des étoiles qui les composent. On peut comparer ce phénomène à un embouteillage : au niveau d’un embouteillage, la densité de véhicules augmente fortement, les véhicules traversent l’embouteillage puis reprennent une allure normale ; l’embouteillage lui ne bouge presque pas.

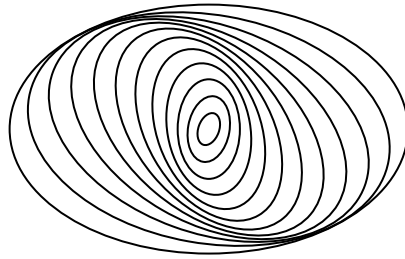


FIGURE 1.23 – Schéma expliquant l’origine des ondes de densité formant les bras spiraux à partir des orbites non alignées.

La structure spirale est généralement composée de deux bras symétriques principaux. Néanmoins, leur structure détaillée est souvent complexe, faisant intervenir de nombreux petits bras pouvant prendre naissance au niveau du bulbe ou bien sous forme de ramifications.

Ces régions de sur-densité favorisent l’interaction entre les nuages de gaz présents dans la galaxie qui, déstabilisés, s’effondrent pour produire une nouvelle génération d’étoiles. Ces nouvelles étoiles apparaissent en groupe formant ce que l’on nomme des pouponnières d’étoiles ou *zones H II* car les nuages d’hydrogène aux alentours sont ionisés par le rayonnement intense des plus massives de ces jeunes étoiles. L’efficacité des réactions thermonucléaires se déroulant dans ces étoiles massives les fait briller fortement et elles sont ainsi une des principales matérialisation des bras spiraux. Les jeunes étoiles les plus massives, assez chaudes pour briller dans l’ultraviolet (Population I extrême), ont une durée de vie très courte de l’ordre d’une dizaine de millions d’années qui ne leur permet pas de traverser le bras avant de finir leur vie. Ces jeunes étoiles qui apparaissent comme des zones d’émission ultraviolette sont donc principalement concentrées le long des bras spiraux (de telles jeunes étoiles peuvent également se former en dehors des bras spiraux mais le phénomène est moins fréquent).

Par ailleurs, les bras spiraux sont également riches en poussières qui forment une structure assez homogène. Or les poussières sont opaques au rayonnement visible et ultraviolet : l’énergie absorbée sur ces longueurs d’onde est ré-émise dans l’infrarouge lointain. Les composantes observées, et donc l’apparence des bras spiraux, varient alors fortement selon la

longueur d'onde utilisée, d'un aspect diffus et continu dans l'infrarouge à une apparence fragmentée avec des pics de luminosité dans l'ultraviolet (figure 1.24).

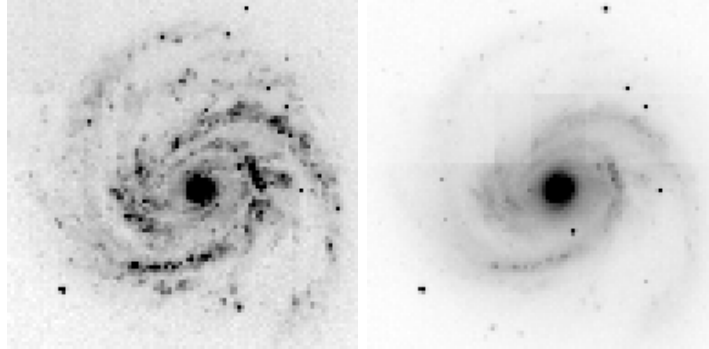


FIGURE 1.24 – Galaxie PGC 40153 dans l'ultraviolet proche (bande  $u$  du SDSS) et dans l'infrarouge proche (bande  $z$  du SDSS).

#### 1.3.3.4 La barre stellaire

La barre stellaire est une structure apparaissant de façon plus ou moins prononcée dans environ 75 % des galaxies spirales [39]. Elle apparaît comme une structure allongée d'étoiles de Population II, traversant la galaxie en son centre. Du fait de son caractère instable, on suppose que c'est une structure transitoire périodique de l'évolution des galaxies spirales [20].

Sa structure est très proche d'un bulbe galactique de forte elongation et ayant un caractère boxy très prononcé. Néanmoins, contrairement au bulbe, la barre stellaire présente une limite franche qui se caractérise par une décroissance brutale de sa luminosité et s'apparente ainsi à un bulbe tronqué. On appelle généralement le rayon de troncature *cut off radius*.

Les barres stellaires peuvent avoir un profil lumineux quasiment plat jusqu'à leur rayon de coupure [51] ou en cloche (barre de Freeman [21]).

#### 1.3.3.5 Les anneaux

Le schéma de rotation expliquant les ondes de densité au sein du disque (figure 1.23) fait apparaître des rayons particuliers appelés résonances de Lindblad [54,55] au niveau desquels la vitesse de rotation des étoiles est un multiple entier de la vitesse de rotation de l'onde de densité. Ces résonances, propices à la formation d'anneaux, se comptent au nombre de trois : résonance interne responsable de l'anneau nucléaire, résonance ultra-harmonique interne pour l'anneau interne et résonance externe pour l'anneau externe (figure 1.25). L'anneau interne est fréquemment associé à la présence d'une barre stellaire [48], l'anneau nucléaire est, quant à lui, rarement observable.

Les anneaux ont une composition similaire à celle du disque : des étoiles de Population I et II, de la poussière et du gaz. La forme des anneaux peut dévier plus ou moins fortement d'une ellipse en fonction de la forme de la barre stellaire. Il arrive également que les bras spiraux se referment sur eux-mêmes pour former une structure de pseudo-anneau externe.

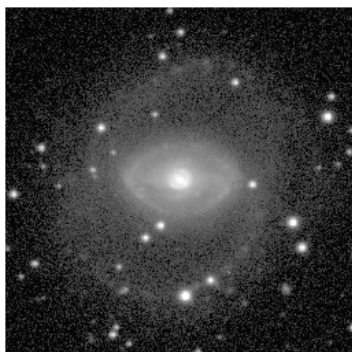


FIGURE 1.25 – La galaxie NGC 6782 possède les trois types d’anneaux : un anneau externe peu brillant, un anneau interne avec une forme assez pincée et un anneau nucléaire de rayon très court. L’image n’est pas donnée en inverse vidéo pour faciliter l’observation de l’anneau nucléaire.

### 1.3.3.6 La barre de poussières

Ce que nous appelons ici la « barre de poussières » est une structure particulière qui ne se manifeste que lorsqu’une galaxie à disque est vue par la tranche (ou presque). Dans ce cas, l’accumulation de poussières dans le plan du disque galactique rend la ligne de visée presque complètement opaque dans le domaine optique : le disque et le bulbe apparaissent comme divisés en deux par une barre sombre.

L’échelle de hauteur de la poussière dans le disque est inférieure à celle des étoiles mais son échelle de largeur semble plus grande [64] : ainsi une fraction du disque peut toujours être vue de part et d’autre de la barre de poussières. Lorsque la galaxie n’est pas vue parfaitement par la tranche, la barre de poussières n’est plus parfaitement centrée et apparaît comme un arc de cercle puisqu’elle suit le bord du disque galactique (figure 1.26).

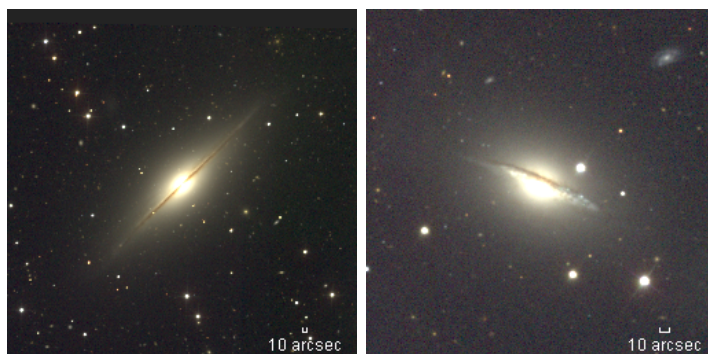


FIGURE 1.26 – Galaxie spirale vue par la tranche avec une barre de poussières. À gauche, la galaxie PGC 218 est parfaitement vue par la tranche et la barre de poussières coupe l’objet de façon symétrique. À droite, la galaxie PGC 6671 n’est pas vue parfaitement par la tranche et la barre de poussières apparaît décalée vers le haut et ressemble à un arc de cercle.

Les auteurs de [38] ont montré que la décroissance de l’absorption provoquée par la barre de poussières semble décroître de manière exponentielle depuis le centre de la galaxie.

## 1.4 Caractérisation morphologique automatique

Le principe premier de la caractérisation morphologique est de procéder à une réduction de la dimensionnalité, cette réduction devant être la plus grande possible tout en conservant un maximum d'information utile. Il existe principalement trois approches pour obtenir une caractérisation morphologique automatique des galaxies : la définition de mesures empiriques, la décomposition linéaire dans une base adaptée et la décomposition en structures (ou ajustement de profils).

Dans une optique de classification, la caractérisation obtenue, pouvant utiliser une combinaison des approches évoquées, peut alors être injectée dans un classifieur. La majorité des classifieurs existants ont été testés par la communauté astronomique : machine à vecteurs de support [31, 32, 59], réseaux de neurones multi-couches [4, 5, 16], modèle de mélanges gaussiens [33, 34], classification naïve bayésienne [6], arbre de décision [6], ... Ces méthodes sont aujourd'hui capables d'atteindre un taux de réussite équivalent au taux d'accord entre experts pour les classes principales de la classification de Hubble [4].

L'ensemble des techniques de caractérisation morphologique nécessite de travailler sur des images exemptes de sources parasites et il convient donc de « nettoyer » les images avant de pouvoir réaliser des mesures précises. La technique de nettoyage la plus populaire aujourd'hui consiste à utiliser le logiciel SExtractor [9] pour repérer les diverses sources de l'image puis à les masquer.

Nous passons maintenant en revue les trois approches de caractérisation morphologique existantes.

### 1.4.1 Mesures empiriques

Nous présentons ici les mesures empiriques les plus populaires. La plupart cherche à quantifier un des éléments fondamentaux de la séquence de Hubble (comme la concentration de la lumière au sein de l'objet ou son asymétrie) : elles donnent des mesures objectives mais difficilement interprétables en termes astrophysiques. On peut néanmoins montrer qu'elles sont généralement fortement corrélés avec la classification de Hubble.

**Coefficient de Gini** Le coefficient de Gini a été imaginé en 1921 [25] pour mesurer les inégalités de revenus au sein d'une population. Son utilisation en astronomie pour caractériser la concentration de lumière dans les galaxies à fort décalage spectral a été proposée par Abraham [1]. Ce coefficient possède effectivement l'avantage de mesurer une inégalité de répartition en l'absence de toute hypothèse préalable (concentration en un point unique, symétrie, ...). La concentration est fortement corrélée avec la classification de Hubble car elle peut être interprétée comme une mesure du rapport d'importance entre le bulbe et le disque.

La mesure de Gini est basée sur la courbe de Lorenz [41] qui représente la quantité cumulée de ressources par rapport au pourcentage de population qui la possède (figure 1.27). Dans un cas parfaitement égalitaire,  $x\%$  de la population possède  $x\%$  des ressources et la courbe de Lorenz se confond avec la diagonale. Gini a proposé d'exprimer la distance par rapport à l'égalité parfaite en comparant l'aire entre la courbe et la diagonale notée  $A$  à l'aire sous la courbe  $B$ ; le coefficient de Gini vaut alors  $A/(A + B)$ . Le coefficient de Gini peut être



transposé directement pour mesurer la concentration de lumière en remplaçant la population par l'ensemble des pixels et les ressources par la luminosité.

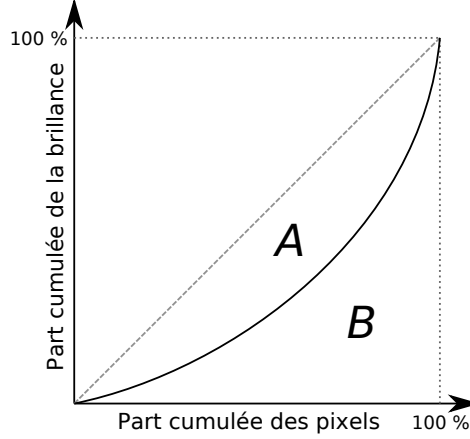


FIGURE 1.27 – Coefficient de Gini.

**Indice de concentration** L'indice de concentration [14] est un autre moyen de mesurer la concentration en faisant cette fois l'hypothèse d'une structure centrée. Son principe consiste à mesurer le rapport entre deux rayons contenant chacun un certain pourcentage du flux total de l'objet. En notant  $r_x\%$  le rayon contenant  $x\%$  du flux de l'objet, l'indice de concentration  $C$  est défini par :

$$C = 5 \log \left( \frac{r_{80\%}}{r_{20\%}} \right). \quad (1.5)$$

Notons que certains auteurs utilisent des rayons différents mais le principe reste identique.

**Indice d'asymétrie** L'indice d'asymétrie [14, 65] consiste à quantifier la différence avec l'image après une rotation de  $180^\circ$  ; c'est un bon indicateur de l'état perturbé ou non d'une galaxie. En notant  $I$  l'image originale,  $I_r$  l'image tournée de  $180^\circ$  et  $I(p)$  la valeur de  $I$  au pixel  $p$ , l'indice d'asymétrie  $A$  est défini par :

$$A = \frac{\sum_p |I(p) - I_r(p)|}{\sum_p |I(p)|} \quad (1.6)$$

Des définitions plus récentes de la symétrie existent [27], mais leur utilisation reste marginale.

**Indice de clumpiness** Le *clumpiness* [14] mesure la quantité de structures de hautes fréquences spatiales dans l'image et permet ainsi de quantifier la présence de jeunes étoiles massives propres aux galaxies spirales. Elle est évaluée en mesurant la différence entre l'image et l'image filtrée par un filtre passe-bas (convolution avec un noyau gaussien). En notant  $I_f$  l'image filtrée, le *clumpiness*  $S$  est :

$$S = \frac{\sum_p |I(p) - I_f(p)|}{\sum_p |I(p)|} \quad (1.7)$$

### 1.4.2 Méthodes par décomposition linéaire

Il existe principalement trois approches pour la décomposition linéaire d'images de galaxies, chacune utilisant une base différente : base des shapelets, base obtenue par analyse en composantes principales et base d'anneaux.

**Base de shapelets** La base de shapelets, aussi connue sous le nom de fonctions de Gauss-Hermite, a été introduite en astronomie par [8,52]. Dans sa version polaire (figure 1.28), cette base est en effet particulièrement adaptée pour décrire les objets astronomiques. Elle a été utilisée pour résoudre des problèmes tels que : la mesure des lentilles gravitationnelles [53], la simulation de galaxies [43], ou la classification automatique des galaxies dans un cadre monobande [33] et multibande [34,63]. Notons que dans le cas multibande, la stratégie adoptée consistait simplement à appliquer la décomposition bande par bande et gérer la fusion de l'information spectrale a posteriori.

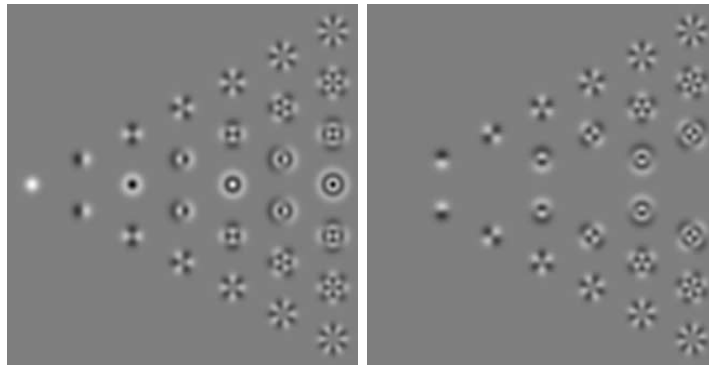


FIGURE 1.28 – Premiers composants de la base de shapelets polaires, partie réelle et imaginaire (source : [42]).

Dans un but de classification, la décomposition en shapelets présente deux faiblesses principales : la base est définie à un facteur d'échelle près qui requiert un ajustement empirique pour chaque objet, et la description d'un objet nécessite au moins une centaine de coefficients par bande (91 coefficients par bande dans [33,34]). Ce dernier point est particulièrement critique dans un but exploratoire, car le grand nombre de coefficients impliqués requiert l'usage d'une deuxième phase de réduction dimensionnelle, par analyse en composantes principales sur les coefficients de shapelets, compliquant fortement l'interprétation des classes obtenues.

**Base obtenue par analyse en composantes principales** La décomposition directe d'images de galaxies dans une base obtenue par analyse en composantes principales a été testée par [3,4]. La base construite par analyse en composantes principales permet de capturer les principaux facteurs de variations entre les images d'une base de référence sur un minimum de vecteurs (figure 1.29). Or, les principales différences concernent généralement des aspects peu intéressants comme un changement d'échelle ou d'orientation : cette technique nécessite donc une normalisation préalable des images afin de réduire au maximum les facteurs de variation non pertinents.

L'approche par analyse en composantes principales permet une représentation plus économique que la base de shapelets (de 10 à 50 facteurs sont nécessaires) mais est sensible aux

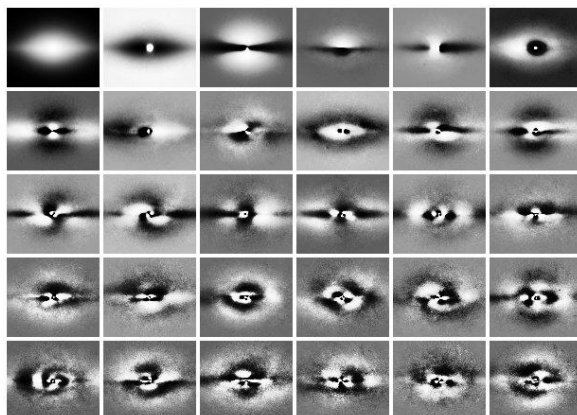


FIGURE 1.29 – Base obtenue par analyse en composantes principales (source : [3]).

contaminations (étoiles, autres galaxies, ...) et ne permet pas de reconstruire les structures fines comme les bras spiraux.

**Base d’anneaux** La décomposition en base d’anneaux consiste à représenter l’image sous forme d’anneaux concentriques multipolaires (figure 1.30). Les coefficients obtenus par décomposition dans cette base sont adaptés pour repérer et caractériser les structures internes du disque : barre stellaire, spirale, anneaux stellaires. La décomposition peut être effectuée directement sur l’observation [47] ou bien sur une image de résidu après ajustement d’un profil bulbe–disque [3] (voir section 1.4.3).

Il semble qu’environ cinquante vecteurs de base soient nécessaires afin de réaliser les décompositions (10 rayons et 5 modulations polaires différents). Tout comme pour la base de shapelets, la décomposition en anneaux nécessite l’ajustement empirique d’un facteur d’échelle. L’auteur de [3] a également proposé une méthode permettant de corriger les effets du seeing lors de la décomposition en anneaux. Notons finalement que la décomposition en anneaux est similaire à une analyse de Fourier réalisée dans l’espace log–polaire (annexe C).

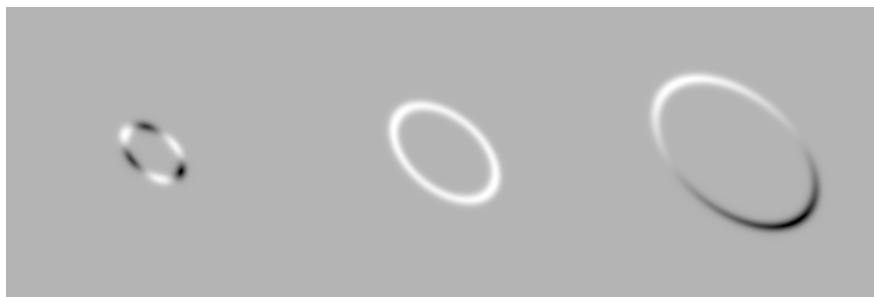


FIGURE 1.30 – Exemples de vecteurs de la base d’anneaux pour une galaxie légèrement inclinée (source : [3]). Le premier anneau est tripolaire, le deuxième uniforme et le troisième monopolaire.

### 1.4.3 Décomposition en structures

La décomposition en structures consiste à définir des fonctions paramétriques modélisant les différentes structures astrophysiques de la galaxie. Le modèle le plus simple et le plus utilisé ne considère que deux fonctions représentant les deux structures principales des galaxies : le bulbe et le disque.

Ce type d'approche présente l'avantage de donner accès à des paramètres dont l'interprétation physique est directe ou, du moins, beaucoup plus aisée qu'avec les approches vues précédemment. De plus, l'ajustement de profil permet de prendre en compte le seeing en modélisant son effet à travers la PSF : on accède ainsi aux paramètres réels de l'objet sans avoir à effectuer directement une déconvolution de l'image.

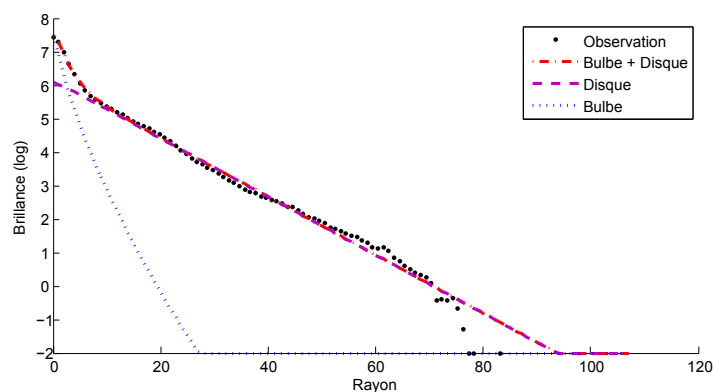


FIGURE 1.31 – Ajustement monodimensionnel d'un modèle bulbe–disque sur la galaxie PGC 2527. Le profil monodimensionnel de l'observation a été obtenu en calculant la moyenne sur des anneaux concentriques. Le rayon et la brillance sont donnés dans des unités arbitraires.

Les premières décompositions bulbe–disque étaient réalisées sur des profils à une dimension [10, 11, 35, 37] chaque structure ayant un profil de brillance distinct : exponentiel pour le disque, de de Vaucouleurs [18] pour le bulbe (figure 1.31). Mais cette approche soulève plusieurs difficultés. La première est d'obtenir un profil monodimensionnel lorsque les isophotes de l'objet ne sont pas parfaitement régulières. Une solution est d'utiliser une simple coupe, mais son choix est alors arbitraire, et seule une petite partie de l'information est utilisée avec pour résultat un mauvais rapport signal-sur-bruit. On peut également calculer une moyenne sur des anneaux concentriques mais la mauvaise définition des anneaux par rapport à la forme réelle de la galaxie et la non prise en compte des structures internes peuvent mener à un profil où la distinction entre le disque et le bulbe n'est pas évidente. La technique d'intégration le long d'anneaux présente tout de même l'avantage de fournir un profil avec un rapport signal-sur-bruit amélioré.

L'augmentation de la puissance des ordinateurs a permis de remplacer les méthodes monodimensionnelles par des décompositions bidimensionnelles réalisées directement sur l'observation [7, 12, 15, 17, 36, 49, 56, 57]. Les profils de brillance du disque et du bulbe sont alors complétés par un descripteur de forme, généralement une ellipse, permettant de simuler une image bidimensionnelle (figure 1.32). Cette approche permet une meilleure prise en compte de l'information spatiale et permet de lever certaines dégénérescences.

La tendance actuelle vise à la complexification des modèles : ajout d'une barre stel-

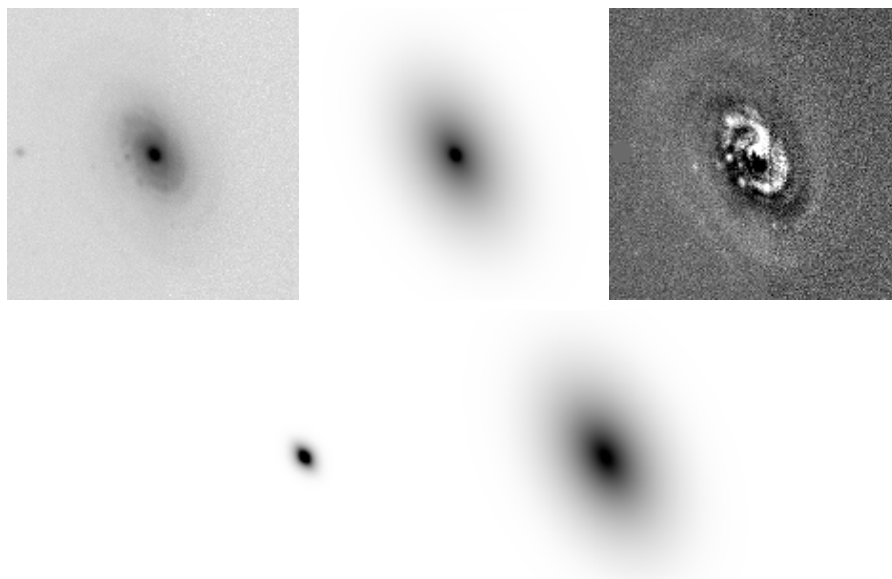


FIGURE 1.32 – Décomposition bidimensionnelle de la galaxie PGC 2527 (bande  $g$  du SDSS) selon un modèle bulbe–disque. La première ligne représente : l’observation, la simulation obtenue après ajustement, le résidu (différence entre l’observation et la simulation). La deuxième ligne représente : le bulbe estimé et le disque estimé.

laire [17], de bras spiraux [50], gestion de formes plus complexes [50] allant jusqu’à la composition arbitraire de structures [50]. Cette complexification exacerbe une difficulté fondamentale de ce type d’approche qui est la conception d’un algorithme automatique pour réaliser les ajustements de profils.

Il n’existe en effet pour le moment que trois algorithmes disponibles publiquement pour réaliser des ajustements de profils : Gim2D [57], Budda [17] et Galfit [49, 50].

**Gim2D** Gim2D (*Galaxy Image 2D*) a été le premier logiciel de décomposition en structures disponible publiquement. Il réalise une décomposition bulbe–disque de manière entièrement automatique grâce à un algorithme stochastique de type recuit simulé. Son créateur l’a développé afin de fournir un outil pour la caractérisation automatique des galaxies faiblement résolues dans les images profondes du télescope Hubble. Il est capable d’ajuster simultanément plusieurs frames (observations prises à des moments différents dans une même bande) mais pas des images multibandes.

Gim2D a servi à l’élaboration de nombreux travaux dans la communauté astronomique, en particulier la décomposition de 10 000 galaxies du *Millennium Galaxy Catalogue* [2, 13]

**Galfit** Galfit est apparu peu de temps après Gim2D, introduisant la possibilité d’ajuster des profils composés d’un nombre quelconque de structures. Une nouvelle version parue en 2010 permet maintenant de modéliser les bras spiraux, les anneaux stellaires et les formes non symétriques (figure 1.33). Galfit repose sur un algorithme déterministe de type Levenberg–Marquardt et requiert une initialisation manuelle et assez fine des paramètres (pour une décomposition détaillée, les décomposition bulbe–disque étant assez robustes aux paramètres

initiaux). Galfit ne peut traiter que des images monobandes. Notons également que les techniques de déformation introduites pour ajuster les structures spirales et les galaxies irrégulières rendent l'interprétation des résultats, en termes astrophysiques, plus complexes, car les déformations et les interactions qu'elles introduisent avec les paramètres habituels sont encore mal comprises.

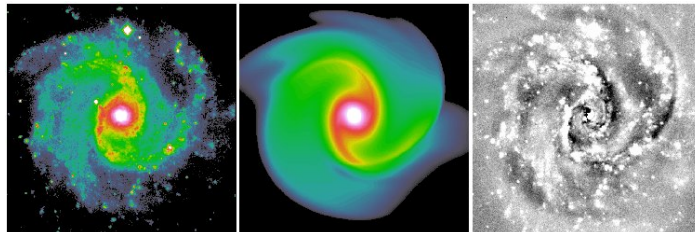


FIGURE 1.33 – Ajustement de profils sur la galaxie NGC 3184 par Galfit. De gauche à droite : observation, simulation obtenue après ajustement des profils, résidu. Les deux premières images sont en fausses couleurs.

Notons l'existence d'une étude systématique comparant les performances de Galfit et Gim2D pour la décomposition à une seule composante [28, 29], et la mise au point de l'algorithme GALAPAGOS [26] permettant d'automatiser l'utilisation de Galfit pour les ajustements à une composante. Bien que Galfit ait été conçu pour réaliser des décompositions détaillées de manière supervisée, l'algorithme GALAPAGOS allié à la robustesse et la vitesse de Galfit semble en faire un candidat de choix pour la décomposition automatique de grands groupes de galaxies selon un modèle simple [26].

**Budda** Budda (*BULge/Disk Decomposition Analysis*) permet d'effectuer des décompositions de type bulbe–disque–barre stellaire et est capable de gérer les disques doubles, et les galaxies vues par la tranche. Il repose sur un algorithme d'optimisation déterministe de type simplexe multidimensionnel requérant une initialisation manuelle des paramètres.

Budda a, entre autres, été utilisé pour décomposer 1000 galaxies du SDSS [24] et pour l'étude des galaxies barrées et à noyau actif [23]

## 1.5 Approche retenue, conclusion

Pour conclure ce chapitre, nous allons maintenant rappeler et préciser l'intérêt et les objectifs de ce travail et donner la méthodologie retenue pour y parvenir. L'intérêt premier de cette thèse concerne la nécessité pour la communauté astronomique de disposer d'un outil fiable de classement multibande de galaxies utilisable sur les grands relevés actuels ou à venir. Il ne s'agit alors pas tant d'étudier très en détail les quelques milliers de galaxies proches très résolues que de passer en revue les dizaines de millions d'autres moins résolues.

La mise en place de tels classements passe par la mise au point d'algorithmes capables de réaliser une caractérisation morphologique des galaxies sur plusieurs bandes spectrales. Cette caractérisation sera validée, dans cette thèse, sur des galaxies bien résolues de l'Univers proche pour lesquelles une « vérité terrain » est disponible. Nous avons choisi d'adopter l'approche par décomposition en structures physiques (comprenant l'ensemble des structures évoquées

en section 1.3.3) pour réaliser cette caractérisation morphologique multibande. Ce choix est motivé par les raisons suivantes :

- la décomposition en structures physiques permet d’obtenir des paramètres ayant une signification physique directe, facilitant la définition des contraintes et l’interprétation des résultats, contrairement aux autres approches. L’information sur chacune des structures est notamment très importante pour étudier les propriétés physiques des galaxies et leur évolution ;
- ce type d’approche permet une prise en compte globale et directe des différentes bandes disponibles par l’utilisation d’un modèle multibande. Cette nouveauté est un élément nécessaire à l’identification des différentes structures et permet une exploitation plus complète des informations contenues dans les grands relevés existant et à venir ;
- cette approche permet également la prise en compte directe du processus de formation des images et notamment du seeing. En effet, en l’intégrant dans la modélisation, nous pouvons obtenir directement les caractéristiques des structures indépendamment de la PSF. De plus, cela ouvre la possibilité de traiter des galaxies faiblement résolues ;
- la pertinence de la modélisation bulbe–disque a déjà été largement éprouvée par la communauté scientifique astronomique, ce qui offre une base solide à ce travail ;
- l’ensemble des structures évoquées est suffisant pour une caractérisation globale des galaxies de l’univers proche et des galaxies peu résolues à plus fort décalage spectral.

Néanmoins, nous avons également vu que les approches par décomposition possèdent actuellement plusieurs limitations :

- les travaux similaires se limitent au cas monobande ;
- l’ensemble des structures observées dans les galaxies ne sont pas modélisées ou font appel à des modèles trop complexes. Par exemple, les modèles existants pour les bras spiraux ne sont pas satisfaisants car ils font intervenir des paramètres de déformation dont les effets sont difficilement interprétables ;
- l’ajustement automatique de modèles complexes est un problème d’optimisation ardu pour lesquels les algorithmes stochastiques sont actuellement les seuls à pouvoir fournir des solutions automatiques ;
- l’ajustement doit être réalisé sur des images débarrassées de toutes sources parasites.

Afin de résoudre l’ensemble des limitations de l’approche actuelle, les développements méthodologiques de ce document sont divisés en deux grandes parties :

1. dans un premier temps (chapitre 2), les techniques de décomposition en structures sont étendues aux images multibandes, des modèles paramétriques sont proposés afin de fournir une description la plus complète possible des structures morphologiques observables et, finalement, un algorithme d’optimisation robuste basé sur des techniques de Monte Carlo par chaînes de Markov est proposé ;
2. dans un deuxième temps (chapitre 4), nous proposons une extension des méthodes d’analyse par morphologie mathématique (notamment utilisées dans le logiciel Sextractor [9] pour la séparation de sources) aux images multibandes. Les méthodes développées permettent d’effectuer un pré-traitement ou un filtrage des images (suppression des sources parasites ou détection des zones H II).

Finalement, la méthode développée est évaluée sur une base conséquente d’images et les résultats obtenus sont comparés à une vérité terrain fournie par les experts (chapitre 4.5).

## Bibliographie

- [1] R. G. ABRAHAM, F. VALDES, H. K. C. YEE et S. VAN DEN BERGH : The Morphologies of Distant Galaxies. 1 : an Automated Classification System. *Astrophysical Journal*, 432:75–90, septembre 1994.
- [2] P. D. ALLEN, S. P. DRIVER, A. W. GRAHAM, E. CAMERON, J. LISKE et R. DE PROPRIIS : The Millennium Galaxy Catalogue : Bulge-Disk Decomposition of 10095 Nearby Galaxies. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 371:2–18, septembre 2006.
- [3] A. BAILLARD : *Détermination automatique des paramètres morphologiques des galaxies*. Thèse de doctorat, École Nationale Supérieure des Télécommunications, 2008.
- [4] A. BAILLARD, E. BERTIN, Y. MELLIER, H. J. MCCracken, T. GÉRAUD, R. PELLÓ, F. LEBORGNE et P. FOUQUÉ : Project EFIGI : Automatic Classification of Galaxies. Dans C. GABRIEL, C. ARVISET, D. PONZ et S. ENRIQUE, éditeurs : *Astronomical Data Analysis Software and Systems XV*, volume 351 de *Astronomical Society of the Pacific Conference Series*, 2006.
- [5] D. BAZELL : Feature Relevance in Morphological Galaxy Classification. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 316:519–528, août 2000.
- [6] D. BAZELL et D. W. AHA : Ensembles of Classifiers for Morphological Galaxy Classification. *Astrophysical Journal*, 548:219–223, février 2001.
- [7] A. J. BENSON, C. S. FRENK et R. M. SHARPLES : The Luminosity Functions and Stellar Masses of Galactic Disks and Spheroids. *Astrophysical Journal*, 574:104–113, juillet 2002.
- [8] G. M. BERNSTEIN et M. JARVIS : Shapes and Shears, Stars and Smears : Optimal Measurements for Weak Lensing. *Astronomical Journal*, 123:583–618, février 2002.
- [9] E. BERTIN et S. ARNOUITS : SExtractor : Software for Source Extraction. *Astronomy and Astrophysics, Supplement*, 117:393–404, juin 1996.
- [10] T. BOROSON : The Distribution of Luminosity in Spiral Galaxies. *Astrophysical Journal, Supplement*, 46:177–209, juin 1981.
- [11] D. BURSTEIN : Structure and Origin of S0 Galaxies. III - The Luminosity Distribution Perpendicular to the Plane of the Disks in S0's. *Astrophysical Journal*, 234:829–836, décembre 1979.
- [12] Y. I. BYUN et K. C. FREEMAN : Two-dimensional Decomposition of Bulge and Disk. *Astrophysical Journal*, 448:563–574, août 1995.
- [13] E. CAMERON, S. P. DRIVER, A. W. GRAHAM et J. LISKE : The Millennium Galaxy Catalogue : Exploring the Color-Concentration Bimodality via Bulge-Disk Decomposition. *Astrophysical Journal*, 699:105–117, juillet 2009.
- [14] Ch J. CONSELICE : The Relationship between Stellar Light Distributions of Galaxies and Their Formation Histories. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 147(1):1–28, 2003.
- [15] R. S. DE JONG : Near-Infrared and Optical Broadband Surface Photometry of 86 Face-On Disk Dominated Galaxies. II. A Two-dimensional Method to Determine Bulge and Disk Parameters. *Astronomy and Astrophysics, Supplement*, 118:557–573, septembre 1996.



- [16] J. DE LA CALLEJA et O. FUENTES : Machine Learning and Image Analysis for Morphological Galaxy Classification. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 349:87–93, mars 2004.
- [17] R. E. DE SOUZA, D. A. GADOTTI et S. DOS ANJOS : BUDDA : A New Two-dimensional Bulge/Disk Decomposition Code for Detailed Structural Analysis of Galaxies. *Astrophysical Journal, Supplement*, 153:411–427, août 2004.
- [18] G. DE VAUCOULEURS : Classification and Morphology of External Galaxies. *Handbuch der Physik*, 53:275–310, 1959.
- [19] G. DE VAUCOULEURS : Revised Classification of 1500 Bright Galaxies. *Astrophysical Journal, Supplement*, 8:31–97, avril 1963.
- [20] B. G. ELMEGREEN : *Bars, Spiral Structure, and Secular Evolution in Disk Galaxies*, pages 163–173. Island Universes - Structure and Evolution of Disk Galaxies, 2007.
- [21] K. C. FREEMAN : On the Disks of Spiral and so Galaxies. *Astrophysical Journal*, 160:811–830, juin 1970.
- [22] M. FUKUGITA, T. ICHIKAWA, J. E. GUNN, M. DOI, K. SHIMASAKU et D. P. SCHNEIDER : The Sloan Digital Sky Survey Photometric System. *Astronomical Journal*, 111:1748–1756, avril 1996.
- [23] D. A. GADOTTI : Image Decomposition of Barred Galaxies and AGN Hosts. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 384:420–439, février 2008.
- [24] D. A. GADOTTI : Structural Properties of Pseudo-Bulges, Classical Bulges and Elliptical Galaxies : a Sloan Digital Sky Survey Perspective. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 393:1531–1552, mars 2009.
- [25] Corrado GINI : Measurement of Inequality of Incomes. *The Economic Journal*, 31(121): 124–126, 1921.
- [26] M. E. GRAY, C. WOLF, M. BARDEN, C. Y. PENG, B. HÄUSSLER, E. F. BELL, D. H. MCINTOSH, Y. GUO, J. A. R. CALDWELL, D. BACON, M. BALOGH, F. D. BARAZZA, A. BÖHM, C. HEYMANS, K. JAHNKE, S. JOGEE, E. VAN KAMPEN, K. LANE, K. MEISENHEIMER, S. F. SÁNCHEZ, A. TAYLOR, L. WISOTZKI, X. ZHENG, D. A. GREEN, R. J. BESWICK, D. J. SAIKIA, R. GILMOUR, B. D. JOHNSON et C. PAPOVICH : STAGES : the Space Telescope A901/2 Galaxy Evolution Survey. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 393:1275–1301, mars 2009.
- [27] Q. GUO, F. GUO et J. SHAO : Irregular Shape Symmetry Analysis : Theory and Application to Quantitative Galaxy Classification. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Disponible en ligne, 2010.
- [28] B. HÄUSSLER, M. BARDEN et D. H. MCINTOSH : Image Simulations and Galaxy Fitting in GEMS and STAGES : GALFIT VS GIM2D. Dans C. A. L. BAILER-JONES, éditeur : *American Institute of Physics Conference Series*, volume 1082 de *American Institute of Physics Conference Series*, pages 137–143, décembre 2008.
- [29] B. HÄUSSLER, D. H. MCINTOSH, M. BARDEN, E. F. BELL, H.-W. RIX, A. BORCH, S. V. W. BECKWITH, J. A. R. CALDWELL, C. HEYMANS, K. JAHNKE, S. JOGEE, S. E. KOPOSOV, K. MEISENHEIMER, S. F. SÁNCHEZ, R. S. SOMERVILLE, L. WISOTZKI et C. WOLF : GEMS : Galaxy Fitting Catalogs and Testing Parametric Galaxy Fitting

- Codes : GALFIT and GIM2D. *Astrophysical Journal, Supplement*, 172:615–633, octobre 2007.
- [30] E. P. HUBBLE : Extragalactic Nebulae. *Astrophysical Journal*, 64:321–369, décembre 1926.
- [31] M. HUERTAS-COMPANY, D. ROUAN, L. TASCA, G. SOUCAIL et O. LE FÈVRE : A Robust Morphological Classification of High-Redshift Galaxies Using Support Vector Machines on Seeing Limited Images. I. Method Description. *Astronomy and Astrophysics*, 478:971–980, février 2008.
- [32] M. HUERTAS-COMPANY, L. TASCA, D. ROUAN, D. PELAT, J. P. KNEIB, O. LE FÈVRE, P. CAPAK, J. KARTALTEPE, A. KOEKEMOER, H. J. MCCrackEN, M. SALVATO, D. B. SANDERS et C. WILLOTT : A Robust Morphological Classification of High-Redshift Galaxies Using Support Vector Machines on Seeing Limited Images. II. Quantifying Morphological k-Correction in the COSMOS Field at  $1 < z < 2$  : Ks Band vs. I Band. *Astronomy and Astrophysics*, 497:743–753, avril 2009.
- [33] B. C. KELLY et T. A. MCKAY : Morphological Classification of Galaxies by Shapelet Decomposition in the Sloan Digital Sky Survey. *Astronomical Journal*, 127:625–645, février 2004.
- [34] B. C. KELLY et T. A. MCKAY : Morphological Classification of Galaxies by Shapelet Decomposition in the Sloan Digital Sky Survey. II. Multiwavelength Classification. *Astronomical Journal*, 129:1287–1310, mars 2005.
- [35] S. M. KENT : CCD Surface Photometry of Field Galaxies. II - Bulge/Disk Decompositions. *Astrophysical Journal, Supplement*, 59:115–159, octobre 1985.
- [36] H. G. KHOSROSHAHI, Y. WADADEKAR et A. KEMBHAVI : Correlations among Global Photometric Properties of Disk Galaxies. *Astrophysical Journal*, 533:162–171, avril 2000.
- [37] J. KORMENDY : Brightness Distributions in Compact and Normal Galaxies. III - Decomposition of Observed Profiles into Spheroid and Disk Components. *Astrophysical Journal*, 217:406–419, octobre 1977.
- [38] N. D. KYLAFIS, A. MISIRIOTIS, J. PAPAMASTORAKIS et E. M. XILOURIS : Modelling the Dust Content of Spiral Galaxies. *Astrophysics and Space Science*, 276:531–538, mars 2001.
- [39] Sébastien LAUGER : *Spectro-morphologie des galaxies, Etude quantitative et multi-longueur d'onde de la morphologie des galaxies*. Thèse de doctorat, Université de Provence, 2004.
- [40] C. C. LIN et F. H. SHU : On the Spiral Structure of Disk Galaxies. *Astrophysical Journal*, 140:646–655, août 1964.
- [41] M. O. LORENZ : Methods of Measuring the Concentration of Wealth. *Publications of the American Statistical Association*, 9(70):209–219, 1905.
- [42] R. MASSEY et A. REFREGIER : Polar Shapelets. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 363:197–210, octobre 2005.
- [43] R. MASSEY, A. REFREGIER, C. J. CONSELICE, J. DAVID et J. BACON : Image Simulation with Shapelets. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 348:214–226, février 2004.

- [44] Ian S. MCLEAN : *Electronic Imaging in Astronomy*. Wiley/Praxis, 2nd édition, 2008.
- [45] W. W. MORGAN : A Preliminary Classification of the Forms of Galaxies According to Their Stellar Population. *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, 70:364–391, août 1958.
- [46] W. W. MORGAN : Preliminary Classification of the Forms of Galaxies According to Their Stellar Population. II. *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, 71:394–411, octobre 1959.
- [47] S. C. ODEWAHN, S. H. COHEN, R. A. WINDHORST et N. S. PHILIP : Automated Galaxy Morphology : A Fourier Approach. *Astrophysical Journal*, 568:539–557, avril 2002.
- [48] P. A. PATSIS, C. SKOKOS et E. ATHANASSOULA : On the 3D Dynamics and Morphology of Inner Rings. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 346:1031–1040, décembre 2003.
- [49] C. Y. PENG, L. C. HO, C. D. IMPEY et H.-W. RIX : Detailed Structural Decomposition of Galaxy Images. *Astronomical Journal*, 124:266–293, juillet 2002.
- [50] C. Y. PENG, L. C. HO, C. D. IMPEY et H.-W. RIX : Detailed Decomposition of Galaxy Images. II. Beyond Axisymmetric Models. *Astronomical Journal*, 139:2097–2129, juin 2010.
- [51] M. PRIETO, S. T. GOTTESMAN, J.-A. L. AGUERRI et A.-M. VARELA : Structural Components of NGC 5850. *Astronomical Journal*, 114:1413–1426, octobre 1997.
- [52] A. REFREGIER : Shapelets - I. A Method for Image Analysis. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 338:35–47, janvier 2003.
- [53] A. REFREGIER et D. BACON : Shapelets - II. A Method for Weak Lensing Measurements. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 338:48–56, janvier 2003.
- [54] R. A. SCHOMMER, N. CALDWELL, A. S. WILSON, J. A. BALDWIN, M. M. PHILLIPS, T. B. WILLIAMS et A. J. TURTLE : Ionized Gas and Radio Emission in the Barred Seyfert Galaxy NGC 5728. *Astrophysical Journal*, 324:154–171, janvier 1988.
- [55] M. P. SCHWARZ : The Origin of Inner Rings in Barred Spiral Galaxies. *Proceedings of the Astronomical Society of Australia*, 5:464–467, 1984.
- [56] M. A. SHAW et G. GILMORE : The Luminosity Distributions of Edge-On Spiral Galaxies. I - A Two-dimensional Model and its Application to NGC 891 and 4565. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 237:903–927, avril 1989.
- [57] L. SIMARD, C. N. A. WILLMER, N. P. VOGT, V. L. SARAJEDINI, A. C. PHILLIPS, B. J. WEINER, D. C. KOO, M. IM, G. D. ILLINGWORTH et S. M. FABER : The DEEP Groth Strip Survey. II. Hubble Space Telescope Structural Parameters of Galaxies in the Groth Strip. *Astrophysical Journal, Supplement*, 142:1–33, septembre 2002.
- [58] J. L. SÉRSIC : *Atlas de galaxias australes*. Cordoba, Argentina : Observatorio Astronómico, 1968.
- [59] P. TSALMANTZA, M. KONTIZAS, C. A. L. BAILER-JONES, B. ROCCA-VOLMERANGE, R. KORAKITIS, E. KONTIZAS, E. LIVANOU, A. DAPERGOLAS, I. BELLAS-VELIDIS, A. VALLENARI et M. FIOC : Towards a Library of Synthetic Galaxy Spectra and Preliminary Results of Classification and Parametrization of Unresolved Galaxies for Gaia. *Astronomy and Astrophysics*, 470:761–770, août 2007.

- 
- [60] S. VAN DEN BERGH : A Catalogue of Dwarf Galaxies. *Publications of the David Dunlap Observatory*, 2:147–150, 1959.
- [61] S. VAN DEN BERGH : Luminosity Classifications of Dwarf Galaxies. *Astronomical Journal*, 71:922–926, novembre 1966.
- [62] S. VAN DEN BERGH : *Galaxy Morphology and Classification*. Cambridge University Press, UK, 1998.
- [63] D. B. WIJESINGHE, A. M. HOPKINS, B. C. KELLY, N. WELIKALA et A. J. CONNOLLY : Morphological Classification of Galaxies and its Relation to Physical Properties. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 404:2077–2086, juin 2010.
- [64] E. M. XILOURIS, Y. I. BYUN, N. D. KYLAFIS, E. V. PALEOLOGOU et J. PAPAMASTORAKIS : Are Spiral Galaxies Optically Thin or Thick? *Astronomy and Astrophysics*, 344:868–878, avril 1999.
- [65] M. YAGI, Y. NAKAMURA, M. DOI, K. SHIMASAKU et S. OKAMURA : Morphological Classification of Nearby Galaxies Based on Asymmetry and Luminosity Concentration. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 368:211–220, mai 2006.



Première partie

Modèles



# Modélisation paramétrique des galaxies

“

**Idéal : modèle qu'on se compose, en vue de l'admirer et de l'imiter. L'idéal est toujours nettoyé d'un peu de réalité qui ferait tache.**

”

Alain

## Sommaire

<b>2.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>47</b>
<b>2.2</b>	<b>Modèles paramétriques</b>	<b>49</b>
2.2.1	Modèle observationnel	49
2.2.1.1	Principe de modélisation et contraintes	50
2.2.2	Bulbe, disque, barre stellaire, anneau, halo	51
2.2.2.1	Descripteur de forme	51
2.2.2.2	Descripteur de brillance	52
2.2.2.3	Combinaison des descripteurs	53
2.2.2.4	Contraintes	54
2.2.3	Bras spiraux	56
2.2.3.1	Descripteur de forme	57
2.2.3.2	Descripteur de brillance	58
2.2.3.3	Contraintes	59
2.2.4	Disque vu par la tranche	59
2.2.4.1	Descripteur de forme	60
2.2.4.2	Descripteur de brillance	60
2.2.4.3	Contraintes	61
2.2.5	Barre de poussières	61
2.2.5.1	Descripteur de brillance	61
2.2.5.2	Contraintes	61
2.2.6	Combinaisons des structures	62
<b>2.3</b>	<b>Formulation bayésienne du modèle</b>	<b>67</b>
2.3.1	Masquage adaptatif	67



---

2.3.2	Formulation bayésienne . . . . .	68
2.3.2.1	Distribution des paramètres de brillance . . . . .	68
2.3.2.2	Intégration d'un paramètre de brillance . . . . .	70
2.3.3	Choix de l'estimateur . . . . .	70
<b>2.4</b>	<b>Estimation du modèle . . . . .</b>	<b>70</b>
2.4.1	Échantillonneur de Gibbs et de Metropolis–Hastings . . . . .	70
2.4.1.1	Échantillonneur de Gibbs . . . . .	71
2.4.1.2	Algorithme de Metropolis–Hastings . . . . .	71
2.4.1.3	Critère de convergence . . . . .	73
2.4.2	Calcul de l'estimateur . . . . .	74
2.4.3	Recuit simulé à températures multiples . . . . .	75
2.4.4	Hierarchie de modèles . . . . .	76
2.4.5	Procédures d'initialisation . . . . .	77
2.4.5.1	Bulbe et disque . . . . .	77
2.4.5.2	Barre stellaire . . . . .	79
2.4.5.3	Bras spiraux . . . . .	79
2.4.5.4	Anneaux . . . . .	79
2.4.5.5	Barre poussière, halo et disque vu par la tranche . . . . .	79
<b>2.5</b>	<b>Résultats . . . . .</b>	<b>82</b>
2.5.1	Comparaison avec un autre algorithme de décomposition . . . . .	82
2.5.2	Images simulées . . . . .	82
2.5.3	Images réelles . . . . .	84
2.5.4	Apports du multibande . . . . .	87
2.5.5	Temps de calcul . . . . .	87
<b>2.6</b>	<b>Contributions du chapitre . . . . .</b>	<b>88</b>
	<b>Bibliographie . . . . .</b>	<b>89</b>

---

## Notations

### Acronymes

Notation	Signification
MCMC	Monte Carlo par chaînes de Markov
EQM	Erreur quadratique moyenne
EQMN	Erreur quadratique moyenne normalisée
EQN	Erreur quadratique normalisée
OBM	Estimateur de la variance ( <i>Overlapped Batch Means</i> )
PSF	Fonction d'étalement du point ( <i>Point Spread Function</i> )
PSNR	Peak Signal to Noise Ratio

### Symboles

Notation	Signification
$\mathbf{Y}$	Observation
$N$	Nombre de pixels observés
$B$	Nombre de bandes
$b$	Indice de bande $b \in \{1, \dots, B\}$
$\mathbf{f}$	Structure brillante
$\mathbf{o}$	Structure occlusive
$\mathbf{F}$	Combinaison des structures brillantes et occlusives
$\phi$	Paramètres du modèle
$\mathbf{e}$	Bruit d'observation
$\Sigma$	Matrice de variance-covariance du bruit
$\mathbf{H}$	Matrice de convolution
$\mathbf{A}(\cdot, \cdot, M)$	Fonction de masquage
$\mathfrak{B}$	Bulbe
$\mathfrak{D}$	Disque
$\mathfrak{D}t$	Disque vu par la tranche
$\mathfrak{H}$	Halo
$\mathfrak{B}a$	Barre stellaire
$\mathfrak{B}p$	Barre de poussières
$\mathfrak{R}i$	Anneau interne
$\mathfrak{R}e$	Anneau externe
$\mathfrak{s}$	Bras spiraux

## Notations mathématiques

Notation	Signification
$\sim$	Distribué selon
$\propto$	Relation de proportionnalité
$M^T$	Transposée de $M$
$\det$	Déterminant de la matrice
$\text{diag}(a_1, \dots, a_n)$	Matrice diagonale de valeurs $a_1, \dots, a_n$
$\mathbf{I}_N$	Matrice identité de dimension $N$
$E \setminus F$	Ensemble $E$ privé des éléments de l'ensemble $F$
$\langle \cdot \rangle$	Moyenne
$\text{erf}$	Fonction d'erreur de Gauss
$\gamma(a, x)$	Fonction gamma incomplète
$\Gamma(a)$	Fonction gamma
$\beta(x, y)$	Fonction beta
$\text{sech}(x)$	Fonction sécante hyperbolique
$\mathcal{N}(a, b)$	Loi normale de moyenne $a$ et de variance $b$
$\mathcal{N}^+(a, b)$	Loi normale à support positif de paramètres $a, b$
$\mathbb{R}$	Ensemble des nombres réels
$\mathbb{Z}$	Ensemble des entiers relatifs

## 2.1 Introduction

L'ACCROISSEMENT des performances des ordinateurs a permis l'évolution progressive des modèles bas niveau en traitement d'images (modèle niveau pixel) vers des modèles de haut niveau qui modélisent des objets représentés par un ensemble de pixels avec un nombre réduit de paramètres auxquels sont attachées des informations de haut niveau sémantique. Ces modèles ont été popularisés avec l'émergence des méthodes d'analyse par processus ponctuels marqués [32] dans lesquels l'image est décrite par un ensemble d'objets (les points) localisés selon une certaine distribution (le processus) et auxquels sont attachés un ensemble de paramètres (les marques). Des applications variées ont été développées : reconstruction de bâtiments dans des images denses de télédétection [29], reconstruction de l'arbre vasculaire en imagerie médicale [47], comptage automatique de flamants roses [12] ou encore détection, comptage et mesure de la hauteur du couvert forestier [39]. Nous restreignons pour le moment notre problème à l'analyse de galaxies isolées, l'aspect processus n'est donc pas présent, mais la méthode de modélisation de l'objet est similaire.

Néanmoins, ces approches conduisent à des problèmes d'optimisation complexes avec des variables hétérogènes et sont généralement mal posés au sens d'Hadamard (car l'unicité de la solution n'est pas garantie et le bruit produit des instabilités autour des solutions possibles). Une solution est alors de régulariser le problème dans un cadre bayésien en introduisant des a priori [8, 33], ou bien de passer par une fonction d'énergie régularisée [39]. Les méthodes d'optimisation de Monte Carlo par Chaines de Markov (MCMC) ont montré leur capacité à fournir des solutions robustes et précises de façon automatique dans ce contexte difficile [20, 41].

Ce chapitre présente, d'une part, la modélisation paramétrique adoptée pour décrire les observations de galaxies et, d'autre part, la méthode d'inversion du modèle retenue. L'algorithme d'estimation repose sur l'introduction d'échantillonneurs de Metropolis–Hastings au sein d'un échantillonneur de Gibbs. De plus, l'utilisation de méthodes adaptatives permet la détermination automatique des échelles et des directions optimales pour l'exploration de l'espace des solutions [2, 20, 21].

Certains éléments du modèle paramétrique sont en partie repris de la littérature existante alors que d'autres sont entièrement nouveaux. Le modèle ellipsoïdal (section 2.2.2) représentant le bulbe, la disque et la barre stellaire, ainsi que le modèle pour le disque vu par la tranche (section 2.2.4) et le modèle pour la barre de poussières (section 2.2.5) existaient pour le cas monobande et sont étendus au cas multibande. Le modèle ellipsoïdal est également modifié pour pouvoir modéliser les structures en anneau. Le modèle pour la barre de poussières est également assoupli afin de mieux s'adapter aux données.

Le modèle de spirale, quant à lui, est nouveau. Contrairement aux modélisations paramétriques habituelles, celui-ci n'est pas entièrement constructif (dans le sens où il permet d'obtenir une simulation) : il est composé d'un modèle paramétrique traditionnel et d'un filtre paramétrique dont le rôle est de modifier les observations afin d'en supprimer certains aspects que nous ne souhaitons pas modéliser et qui pourraient perturber le processus d'estimation. Cette approche ne peut être réduite à un pré-traitement car les paramètres du filtre sont estimés conjointement avec les autres paramètres du modèle. De plus, même si le filtre consiste à masquer certaines parties de l'image, cette approche permet de naturellement conserver, au sein du processus, l'information concernant la position des zones masquées.

Les méthodes d'optimisation ont fait l'objet d'un effort particulier afin de réduire le nombre d'itérations nécessaires à la convergence des algorithmes, permettant d'obtenir une solution après quelques centaines d'itérations là où plusieurs milliers sont généralement requises.

La première technique mise en place consiste à améliorer l'intégration du recuit simulé au sein de l'échantillonneur de Gibbs [20, 26, 41]. Au lieu d'utiliser une seule température s'appliquant à l'ensemble des probabilités a posteriori conditionnelles, la méthode développée assigne une température différente à chaque bloc de l'échantillonneur, ce qui permet de concentrer l'effort sur les paramètres les plus complexes.

La deuxième technique mise en place consiste à procéder à une décomposition itérative du problème d'optimisation basée sur une hiérarchie de modèles. La hiérarchie est composée de modèles de complexité croissante et les estimations d'un modèle servent à l'initialisation du modèle de complexité supérieure. De cette manière, le nombre d'itérations nécessaires au temps de chauffe des algorithmes MCMC<sup>1</sup> et, finalement, l'estimation de toute la hiérarchie de modèles nécessite moins de temps que l'estimation du modèle le plus complexe pris séparément.

Le bon comportement de la méthode est montré sur des images simulées et des cas réels. Les images simulées, qui sont produites par application directe de notre modèle, permettent de valider le bon fonctionnement de l'algorithme d'estimation et d'évaluer sa précision grâce à l'existence d'une vérité terrain. Les tests sur images réelles multibandes permettent, quant à eux, de valider la pertinence du modèle et son applicabilité.

---

1. Itérations non représentatives de la distribution stationnaire de la chaîne sur une courte période (*burn-in*).

## 2.2 Modèles paramétriques

Cette section présente le modèle d'observation et les modèles paramétriques des principales structures pouvant composer une galaxie. Toutes les structures sont présentées de manière indépendante et les différentes combinaisons possibles de structures permettront de générer autant de modèles que nécessaire pour rendre compte de la variété observée dans les galaxies régulières des séquences de Hubble et de de Vaucouleurs.

### 2.2.1 Modèle observationnel

Le rôle du modèle observationnel est de réaliser une reproduction fidèle du processus d'acquisition des observations. En considérant le processus de formation des images astronomiques et la description des galaxies vus au chapitre 1 et en négligeant l'effet des poussières dispersées de façon irrégulière dans le disque galactique, une observation de galaxie est composée de la somme des brillances de ses différentes structures affectée par des perturbations (dus aux turbulences de l'atmosphère et aux imperfections des systèmes optiques du télescope) et dégradée par du bruit.

Afin de faciliter les notations, nous considérons que l'espace tridimensionnel des images (deux dimensions spatiales, une dimension spectrale) est vectorisé suivant les colonnes puis les lignes et finalement les bandes (figure 2.1).

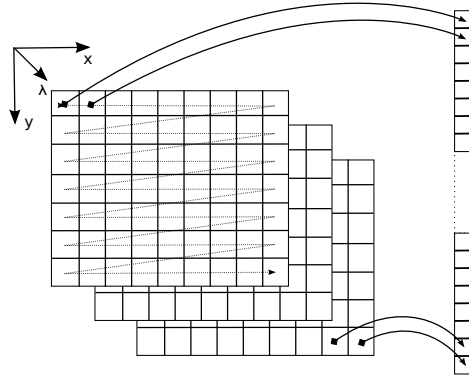


FIGURE 2.1 – Schéma de vectorisation des images, dans l'ordre suivant : colonnes, lignes et bandes.

On note  $N$  le nombre de pixels observés,  $B$  le nombre de bandes.

Les différentes structures ayant une contribution positive au flux du modèle sont représentées par les fonctions vectorielles  $\mathbf{f}_i$ . Les paramètres des fonctions  $\mathbf{f}_i$  sont notés  $\phi_{\mathbf{f}_i}$  et prennent leurs valeurs dans  $E_{\mathbf{f}_i}$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_i : E_{\mathbf{f}_i} &\mapsto \mathbb{R}^N \\ \phi_{\mathbf{f}_i} &\rightarrow \mathbf{f}_i(\phi_{\mathbf{f}_i}) \end{aligned} \quad (2.1)$$

On introduit également la possibilité d'avoir une structure occlusive dont l'opacité est exprimée comme un facteur d'absorption compris entre 0 et 1. La structure occlusive est

notée  $\mathbf{o}$ , ses paramètres  $\phi_{\mathbf{o}}$  prennent leur valeurs dans  $E_{\mathbf{o}}$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{o} : E_{\mathbf{o}} &\mapsto [0,1]^N \\ \phi_{\mathbf{o}} &\rightarrow \mathbf{o}(\phi_{\mathbf{o}}) \end{aligned} \quad (2.2)$$

On note le vecteur des valeurs dans les  $B$  bandes de la fonction  $\mathbf{f}_i$  (respectivement  $\mathbf{o}$ ) au point  $x,y$  en coordonnées cartésiennes  $\mathbf{f}_i(\phi_{\mathbf{f}_i}, x, y)$  (respectivement  $\mathbf{o}(\phi_{\mathbf{o}}, x, y)$ ) et  $\mathbf{f}_i(\phi_{\mathbf{f}_i}, r, \theta)$  (respectivement  $\mathbf{o}(\phi_{\mathbf{o}}, r, \theta)$ ) en coordonnées polaires  $r, \theta$ .

On fait l'hypothèse que les perturbations atmosphériques et les perturbations dues aux optiques sont spatialement stationnaires : elles peuvent être modélisées par une convolution. En écriture matricielle, cette convolution s'écrit sous la forme d'une matrice de Toeplitz  $\mathbf{H}_b$  correspondant à la matrice de convolution par la PSF dans la  $b^e$  bande ; on obtient la matrice de convolution globale  $\mathbf{H}$  de dimension  $N \times N$ , qui est de Toeplitz par bloc, par combinaison des matrices  $\mathbf{H}_b$  :

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{H}_B \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Notons que cette représentation donne la possibilité d'introduire une PSF spatiale et spectrale stationnaire qui peut se justifier dans le cas de l'imagerie hyperspectrale (par exemple en spectrographie intégrale de champ). Mais, dans notre contexte (analyse d'images multibandes), introduire un étalement spectral est injustifié car les différentes images correspondent à des observations faites à des moments parfois différents avec des capteurs hétérogènes.

Le modèle final est composé de la somme des différentes fonctions élémentaires brillantes, pondérées par la fonction occlusive et convoluées par la PSF auxquelles s'ajoute un bruit additif. On pose :

$$\mathbf{F}(\phi) = (\mathbf{I}_N - \text{diag}(\mathbf{o}(\phi_{\mathbf{o}}))) \sum_i \mathbf{f}_i(\phi_{\mathbf{f}_i}) \quad (2.4)$$

avec  $\text{diag}(\mathbf{o}(\phi_{\mathbf{o}}))$  la matrice diagonale ayant les valeurs de  $\mathbf{o}(\phi_{\mathbf{o}})$ . On note  $\mathbf{Y}$  les observations et  $\mathbf{e}$  une réalisation du bruit ; le modèle observationnel s'écrit finalement :

$$\mathbf{Y} = \mathbf{HF}(\phi) + \mathbf{e}. \quad (2.5)$$

Le noyau de convolution  $\mathbf{H}$  peut être estimé avec précision par des méthodes déterministes (en observant des sources ponctuelles) : il est donc considéré comme connu. Le bruit  $\mathbf{e}$  qui est une composition de différentes sources (section 1.2.1.2) est approximé par un bruit blanc gaussien multidimensionnel non corrélé de moyenne nulle  $\mathbf{e} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma})$ . Sa matrice de variance-covariance  $\mathbf{\Sigma}$  peut également être estimée avec précision par des méthodes déterministes [4], elle est donc supposée connue. Finalement, l'ensemble des paramètres du modèle  $\phi$  regroupe les paramètres des fonctions élémentaires  $\phi_{\mathbf{f}_i}$ .

### 2.2.1.1 Principe de modélisation et contraintes

Les fonctions paramétriques  $\mathbf{f}_i$  et  $\mathbf{o}$  représentant les structures sont décrites dans la suite du chapitre. Chaque fonction est composée de deux descripteurs :

- un descripteur de forme fournit l'information spatiale : il décrit la forme générale de la structure en définissant ses isophotes (courbes d'égales brillance) ;

– un descripteur de brillance décrit la variation de brillance des isophotes.

Les contraintes adoptées pour le modèle sont d'origine astronomique ou proviennent d'observations empiriques. Elles ont pour but d'assurer la signification astrophysique des structures paramétriques en évitant les dégénérescences.

L'hypothèse principale affirme que les paramètres de forme sont constants sur l'ensemble du spectre observé. Cette contrainte forte est motivée par le fait que, dans l'intervalle de longueurs d'ondes considéré (de l'ultraviolet proche à l'infrarouge proche), le flux des structures représentées provient d'un mélange d'étoiles, de poussières et de gaz qui ne dépend pas de la bande observée. Cette contrainte permet d'introduire une régularisation spectrale forte qui assure la cohérence inter-bandes du modèle et réduit significativement le nombre de paramètres du modèle. Inversement, les paramètres du descripteur de brillance dépendent de la bande considérée.

On présente d'abord une fonction permettant de modéliser le bulbe, le disque, la barre, les anneaux internes et externes et le halo. On décrit ensuite les fonctions modélisant le disque vu par la tranche, les bras spiraux et la barre de poussières. Enfin, les différentes combinaisons de structures possibles et les contraintes les liant sont données.

## 2.2.2 Bulbe, disque, barre stellaire, anneau, halo

La modélisation du bulbe, du disque et, dans une moindre mesure, de la barre stellaire dans des images monobandes, au moyen d'un modèle sphéroïdal, est bien établie dans la littérature [10, 35, 43], et nous présentons ici ce modèle ainsi que son extension aux images multibandes et aux structures en anneaux et au halo. Le descripteur de forme est une ellipse généralisée (ou super-ellipse). Le descripteur de brillance est la fonction de Sérsic [45] qui décrit la décroissance de brillance des isophotes du centre à l'extérieur de l'objet.

### 2.2.2.1 Descripteur de forme

Comparée à une ellipse classique, l'ellipse généralisée intègre un paramètre introduisant une déformation régulière faisant tendre l'ellipse vers un rectangle ou une étoile à quatre branches. Cette souplesse supplémentaire permet de tenir compte de la forme particulière des isophotes de certaines galaxies et est nécessaire à la modélisation de la barre stellaire.

La longueur de l'axe majeur d'une ellipse généralisée passant par le point  $(x,y) \in \mathbb{R}^2$  est donnée par :

$$r(x,y) = \left( |(x - c_x) \cos \alpha - (y - c_y) \sin \alpha|^{c+2} + |e((x - c_x) \sin \alpha + (y - c_y) \cos \alpha)|^{c+2} \right)^{\frac{1}{c+2}} \quad (2.6)$$

avec  $(c_x, c_y)$  le centre de l'ellipse,  $e$  son élongation,  $\alpha$  son angle de position (angle entre l'axe des abscisses et l'axe majeur) et finalement  $c$  le paramètre qui contrôle la déformation de l'ellipse. Pour  $c = 0$  on retrouve une ellipse classique, si  $c < 0$  l'ellipse est dite *disky* et tend vers une forme étoilée et si  $c > 0$  l'ellipse est dite *boxy* et tend vers un rectangle (figure 2.2), permettant ainsi de reproduire le phénomène de déformation des isophotes présents dans certaines galaxies elliptiques (section 1.3.3.1 page 21). L'élongation  $e$  correspond au rapport de



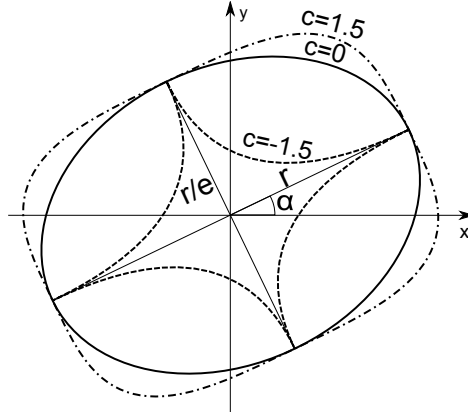


FIGURE 2.2 – Trois ellipses généralisées d’angle de position  $\alpha$ , d’axe majeur  $r$  et d’axe mineur  $r/e$  identiques mais avec des paramètres de déformation  $c$  différents : la valeur de  $c$  est indiquée à côté de chaque ellipse.

la longueur de l’axe majeur sur celle de l’axe mineur<sup>2</sup>, cette quantité mesurant l’aplatissement de l’ellipse. Si  $e = 1$  et  $c = 0$ , l’ellipse est un cercle, lorsque  $e$  tend vers  $+\infty$  l’ellipse devient dégénérée et tend vers une droite.

L’inclinaison du disque galactique correspond à l’angle formé entre l’axe de rotation du disque et la ligne de visée de l’observateur. Si on considère que l’ellipse est le résultat de la projection orthogonale d’un cercle sur un plan, ce qui est approximativement le cas du disque galactique, on appelle inclinaison (noté *inc*) l’angle formé entre le plan de projection et le plan qui contient le cercle. L’inclinaison vaut alors :

$$\text{inc} = \arccos(1/e) \quad (2.7)$$

Notons que le possible *twist* des isophotes du bulbe (section 1.3.3.1 page 21) n’est pas pris en compte par ce descripteur mais ce phénomène reste marginal et négligeable.

### 2.2.2.2 Descripteur de brillance

La loi de Sérsic [45] utilisée pour décrire l’évolution de la brillance des isophotes est une généralisation de la loi exponentielle (décrivant la brillance du disque) et de la loi de de Vaucouleurs [11] (décrivant la brillance du bulbe). Sa flexibilité lui permet de varier continument d’une courbe presque plate à une fonction extrêmement piquée au centre (figure 2.3). La brillance au rayon  $r$  le long de l’axe majeur est donnée par :

$$I(r) = I \exp \left( -k_n \left( \left( \frac{r}{R} \right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right) \right) \quad (2.8)$$

avec  $R$  le rayon effectif (ou caractéristique),  $n$  l’indice de Sérsic (ou indice de concentration) et  $I$  la brillance au rayon effectif.  $k_n$  est une fonction auxiliaire telle que  $\Gamma(2n) = 2\gamma(2n, k_n)$

2. On trouve d’autres définitions de l’élongation dans la littérature qui sont équivalentes à une transformation près, par exemple  $1/e$  ou  $1 - 1/e$ .

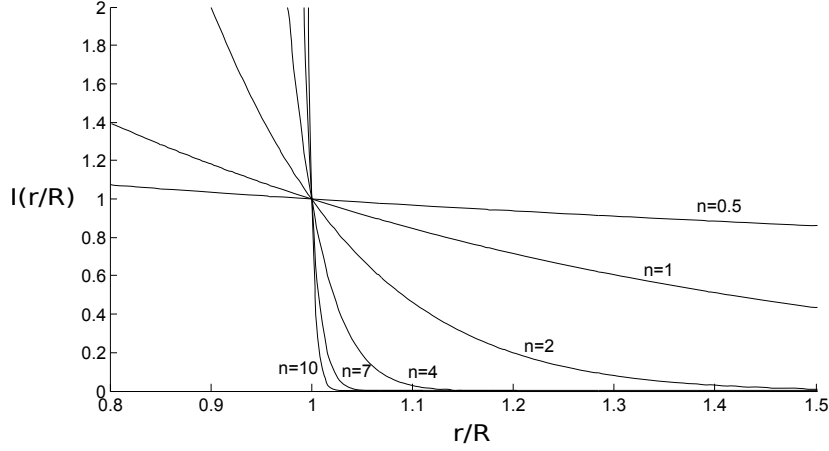


FIGURE 2.3 – La loi de Sérsic pour différents indices de Sérsic  $n$ . Pour  $n = 0,5$ , on obtient une gaussienne,  $n = 1$  produit une exponentielle et  $n = 4$  correspond à la loi de de Vaucouleurs.

permettant d'assurer que le rayon effectif contient la moitié du flux total de l'objet.  $\Gamma$  et  $\gamma$  sont respectivement la fonction gamma et la fonction gamma incomplète :

$$\Gamma(a) = \lim_{x \rightarrow \infty} \gamma(a, x) \quad (2.9)$$

$$\gamma(a, x) = \int_0^x \exp(-t) t^{a-1} dt \quad (2.10)$$

La fonction  $k_n$  peut être approximée avec une très bonne précision (erreur inférieure à  $10^{-4}$  pour  $0.36 \leq n \leq 8$ ) par le développement asymptotique suivant [7] :

$$k_n = 2n - \frac{1}{3} + \frac{4}{405n} + \frac{46}{25515n^2} \quad (2.11)$$

L'intégrale de la fonction de Sérsic jusqu'au rayon donné  $\kappa$  est donnée par [23] :

$$L(\kappa) = IR^2 n \frac{\exp(k_n)}{k_n^{2n}} \gamma(2n, \kappa) \quad (2.12)$$

d'où l'aire totale sous la courbe :

$$\lim_{\kappa \rightarrow \infty} L(\kappa) = IR^2 n \frac{\exp(k_n)}{k_n^{2n}} \Gamma(2n) \quad (2.13)$$

### 2.2.2.3 Combinaison des descripteurs

La combinaison des deux descripteurs permet d'obtenir une description bidimensionnelle de la structure. La brillance au pixel  $(x, y)$  sur  $B$  bandes spectrales est égale à :

$$\mathbf{f}(\boldsymbol{\phi}_{\mathbf{f}}, x, y) = (f_1(\boldsymbol{\phi}_{\mathbf{f}}, x, y), \dots, f_B(\boldsymbol{\phi}_{\mathbf{f}}, x, y)) \quad (2.14)$$

avec  $f_b(\boldsymbol{\phi}_{\mathbf{f}}, x, y)$  la brillance dans la bande  $b$  :

$$f_b(\boldsymbol{\phi}_{\mathbf{f}}, x, y) = \begin{cases} I_b \exp\left(-k_{n_b} \left(\left(\frac{|r(x, y) - R_0|}{R_b}\right)^{\frac{1}{n_b}} - 1\right)\right) & \text{si } r(x, y) \leq R_{max} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.15)$$

avec  $R_{max}$  le rayon de coupure à partir duquel la brillance est nulle.  $R_0$  permet d'introduire un déplacement du centre vers les rayons externes et ainsi d'obtenir un anneau.  $r(x,y)$  est défini dans l'équation (2.6).

Dans un espace discrétisé, la valeur du pixel correspond à l'intégrale du flux sur ce pixel. Afin de réduire la complexité algorithmique, cette valeur est approximée par la valeur centrale du pixel. Cependant, comme la fonction de Sérsic a une dynamique très importante pour les petites valeurs de  $r(x,y)$  et que l'erreur d'approximation peut devenir forte au centre, on procède alors à une intégration numérique par sur-échantillonnage à proximité du centre de l'objet.

Lorsque  $R_{max} = \infty$  le modèle s'étend à l'infini, mais la brillance devient rapidement négligeable avec l'éloignement au centre. La notion de rayon optique formalise ce concept : on note  $R_{\odot}^p$  le rayon contenant  $p\%$  du flux total de l'objet. Les valeurs de  $p = 80\%$  ou  $p = 90\%$  sont généralement utilisées comme limite physique de l'objet par les astronomes (notons également que le rayon effectif vaut  $R = R_{\odot}^{50}$ ). Si  $R_0 = 0$ , on montre que  $R_{\odot}^p$  vérifie  $\Gamma(2n) = \gamma(2n, R_{\odot}^p)/p$  à partir de l'équation (2.12). La prise en compte de la non linéarité de l'évolution des rayons optiques par rapport au paramètre de concentration est importante pour la définition des contraintes et des a priori. La table 2.3 donne quelques valeurs de  $R_{\odot}^p/R$  pour différents indices de Sérsic  $n$  et différentes valeurs de  $p$  (les rayons optiques sont précalculés pour limiter le recours aux algorithmes d'approximation numérique).

Le flux total de la structure peut également être calculé avec la formule suivante [35] correspondant à l'intégration de l'équation (2.13) sur la surface de l'ellipse généralisée (en supposant  $R_{max} = \infty$  et  $R_0 = 0$ ) :

$$L_{tot} = \frac{2\pi R^2 I \exp(k_n) n \Gamma(2n)}{k_n^{2n} D(c)} \quad (2.16)$$

avec  $D(c)$  un terme correctif qui compense la déformation de l'ellipse généralisée :

$$D(c) = \frac{\pi c}{4\beta \left( \frac{1}{2+c}, 1 + \frac{1}{2+c} \right)} \quad \text{et} \quad \beta(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \quad (2.17)$$

La figure 2.4 représente trois exemples d'images obtenues avec le modèle présenté dans cette section. Le premier cas est une structure modérément allongée sans déformation. La deuxième image montre l'utilisation du rayon de coupure  $R_{max}$  et du paramètre de déformation  $c$  pour obtenir une structure en forme de barre stellaire. Le troisième cas utilise le paramètre  $R_0$  pour simuler une structure en forme d'anneau.

#### 2.2.2.4 Contraintes

On contraint la différence relative entre les rayons caractéristiques  $R_b$  et  $R_{b'}$  de deux bandes  $b$  et  $b'$  à être inférieure ou égale à 10% :

$$\max \left( \frac{|R_b - R_{b'}|}{\max(R_b, R_{b'})} \right) \leq 0,1. \quad (2.18)$$

De manière équivalente, la différence maximale entre les indices de concentration ( $n_b$  et  $n_{b'}$ ) est fixée à 1 :  $\max(|n_b - n_{b'}|) \leq 1$ . Finalement, la brillance est positive.

$n \backslash p$	10%	20%	30%	40%	50%	60%	70%	80%	90%
0,5	0,152	0,322	0,515	0,737	1,0	1,322	1,737	2,322	3,322
1,0	0,317	0,491	0,654	0,820	1,0	1,205	1,453	1,784	2,318
1,5	0,412	0,574	0,716	0,855	1,0	1,161	1,352	1,600	1,990
2,0	0,475	0,625	0,753	0,875	1,0	1,137	1,297	1,502	1,819
2,5	0,521	0,661	0,778	0,888	1,0	1,121	1,261	1,439	1,711
3,0	0,556	0,688	0,797	0,898	1,0	1,110	1,236	1,394	1,636
3,5	0,584	0,710	0,811	0,905	1,0	1,101	1,216	1,361	1,579
4,0	0,607	0,727	0,823	0,912	1,0	1,094	1,201	1,334	1,535
4,5	0,627	0,742	0,833	0,917	1,0	1,088	1,188	1,313	1,499
5,0	0,643	0,754	0,841	0,921	1,0	1,083	1,178	1,295	1,469
5,5	0,658	0,765	0,848	0,925	1,0	1,079	1,169	1,280	1,444
6,0	0,671	0,774	0,855	0,928	1,0	1,076	1,161	1,266	1,422
6,5	0,682	0,782	0,860	0,931	1,0	1,073	1,154	1,255	1,404
7,0	0,693	0,790	0,865	0,933	1,0	1,070	1,148	1,245	1,387
7,5	0,702	0,796	0,870	0,935	1,0	1,067	1,143	1,236	1,372
8,0	0,711	0,803	0,874	0,937	1,0	1,065	1,138	1,228	1,359
8,5	0,719	0,808	0,877	0,939	1,0	1,063	1,134	1,220	1,347
9,0	0,726	0,813	0,881	0,941	1,0	1,061	1,130	1,213	1,336
9,5	0,732	0,818	0,884	0,943	1,0	1,060	1,126	1,207	1,326
10	0,739	0,822	0,887	0,944	1,0	1,058	1,123	1,202	1,317

TABLE 2.3 – Rapport du rayon optique sur le rayon caractéristique  $R_{\odot}^p/R$  en fonction de l'indice de Sérsic  $n$  et de la quantité de flux  $p$ . Il est important de prendre en compte la relation non linéaire qui lie le rayon effectif au rayon optique en fonction de l'indice de concentration pour la formulation des contraintes.



FIGURE 2.4 – Exemple de simulations obtenues avec le modèle ellipsoïdal.

La table 2.4 présente les contraintes spécifiques à chaque structure astrophysique représentable par le modèle ellipsoïdal. Comme les anneaux stellaires sont situés dans le plan du disque galactique, ces trois structures utilisent le même descripteur de forme. Par exemple, dans le cas d'une galaxie à disque avec anneau interne et externe, une seule ellipse généralisée sera partagée par les trois structures comme descripteur de forme.

	Bulbe	Disque et Halo	Barre stellaire	Anneau (interne et externe)
Indice de Sérsic	$1,5 \leq n_b \leq 8$	$n_b = 1$	$0,5 \leq n_b \leq 1$	
Élongation	$1 \leq e \leq 3,3$	$1 \leq e \leq 10$	$2 \leq e \leq 8$	$e = 1$
Déformation	$c = 0$		$0,5 \leq c \leq 2$	$c = 0$
Rayon de coupure	$R_{max} = \infty$		$5 \leq R_{max} \leq 100$	$R_{max} = \infty$
Rayon effectif	$R_{\odot, \mathfrak{B}}^{70} / e_{\mathfrak{B}} \leq R_{\odot, \mathfrak{D}}^{30} / e_{\mathfrak{D}}$		$0 \leq R_b \leq 25$	
Décalage de rayon	$R_0 = 0$			$5 \leq R_0 \leq 50$

TABLE 2.4 – Contraintes spécifiques à chaque structure astrophysique représentée par le modèle ellipsoïdal à la longueur d'onde donnée  $b$ .  $R_b$ ,  $R_{max}$  et  $R_0$  sont donnés en arcseconde.

### 2.2.3 Bras spiraux

Malgré l'importance des bras spiraux dans la classification de Hubble et ses dérivées, il existe peu de modélisations paramétriques. Dans [31], les auteurs proposent un modèle intuitif basé sur une modulation périodique de l'intensité du disque ; néanmoins, son manque de souplesse dû au couplage très fort avec le disque n'en fait pas un bon candidat (le modèle a été imaginé uniquement pour produire des simulations). Les auteurs de [24] ont, quant à eux, proposé un modèle basé sur l'utilisation de coordonnées curvilignes le long desquelles la dérivée est constante. Les paramètres de ce modèle sont difficilement interprétables en termes physiques et l'applicabilité du modèle aux cas réels n'a pas été montrée. Finalement, dans [34], les auteurs ont récemment proposé une technique de rotation de coordonnées pour transformer une structure ellipsoïdale en une spirale.

Nous décrivons ici notre propre modèle paramétrique pour les bras spiraux. Leur structure peut être très complexe, mais on peut généralement isoler deux bras principaux symétriques. En fait, notre modèle a pour but de décrire les composantes continues et régulières des deux bras symétriques afin de pouvoir capturer deux éléments essentiels de la classification de Hubble : l'angle d'ouverture et l'importance des bras. L'aspect discontinu des bras dû aux régions HII, que l'on peut observer dans les longueurs d'onde courtes, est uniquement un marqueur de la position de la spirale et n'est pas modélisé. À la place, un modèle original en deux parties est proposé : le modèle paramétrique modélise la composante continue alors qu'une technique de filtrage adaptatif masque les zones HII se trouvant sur le modèle continu. Le modèle paramétrique est décrit ci-après alors que la technique de masquage est présentée dans la section 2.3.1.

## 2.2.3.1 Descripteur de forme

Le descripteur de forme se base sur une spirale logarithmique qui semble être le modèle de forme le plus adapté [3].

L'ensemble des points appartenant aux deux spirales logarithmiques modélisant les deux bras symétriques est donné par :

$$E_s = \left\{ (r, \rho) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \mid r = R_0 \exp(|o_s| \theta), \rho = o_s \theta + \alpha + k\pi, \theta \in \mathbb{R}^+, k \in \{0, 1\} \right\} \quad (2.19)$$

avec  $o_s$  l'angle d'ouverture signé (le signe codant le sens de rotation de la spirale),  $R_0$  le rayon de départ et  $\alpha$  l'angle de position (figure 2.5).

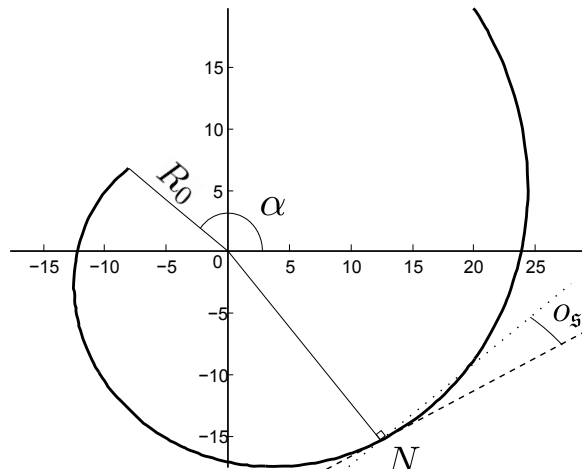


FIGURE 2.5 – Une spirale logarithmique et ses paramètres fondamentaux. Pour tous les points  $N$  de la spirale, l'angle d'ouverture  $o_s$  est l'angle constant formé par la perpendiculaire en  $N$  à la ligne reliant  $N$  au centre de la spirale (ligne pointillée) et la tangente (ligne en tirets) à la spirale en  $N$ .

Pour reproduire les conditions d'observations, la spirale doit être projetée sur le plan d'observation. Comme les paramètres de cette projection sont entièrement déterminés par la forme du disque stellaire (qui est supposé circulaire et infiniment fin), la forme de la spirale est liée aux paramètres du descripteur de forme du disque : le centre  $(c_x, c_y)$ , l'angle de position  $\alpha$  et l'élongation  $e$ . La projection est composée d'une translation par le vecteur  $(-c_x, -c_y)$ , d'une rotation de  $-\alpha$  autour de l'axe  $z$ , d'une rotation de  $\arccos \frac{1}{e}$  autour de l'axe  $z$  et d'une projection orthogonale sur le plan  $xy$ .

Une pseudo fonction de distance permet ensuite de définir la forme des isophotes. Cette fonction intègre le fait que la brillance de la spirale diminue avec l'éloignement du centre de la structure et avec l'éloignement de la crête de la spirale. On définit la distance à un point  $M(r, \theta)$  du plan (en coordonnées polaires) en deux parties :

$$d_s(r, \theta) = d_{s,1}(r, \theta) + d_{s,2}(r, \theta) \quad (2.20)$$

où  $d_{s,2}(r, \theta)$  est la distance euclidienne du point  $M$  au plus proche point appartenant à la spirale  $P = (r', \theta')$ , et  $d_{s,1}(r, \theta)$  est fonction de la distance euclidienne entre ce plus proche

point  $P$  et le centre  $O = (0,0)$  de la galaxie dans le plan galactique (figure 2.6) :

$$d_{s,1}(r,\theta) = \exp\left(\left(\frac{-\|\vec{OP}\|}{R_s}\right)^{\frac{1}{n_s}}\right) \quad (2.21)$$

$$d_{s,2}(r,\theta) = \|\vec{PM}\| \quad (2.22)$$

avec  $R_s$  un paramètre d'échelle,  $n_s$  un paramètre de concentration et

$$P = \arg \min_{P \in E_s} \|\vec{PM}\| \quad (2.23)$$

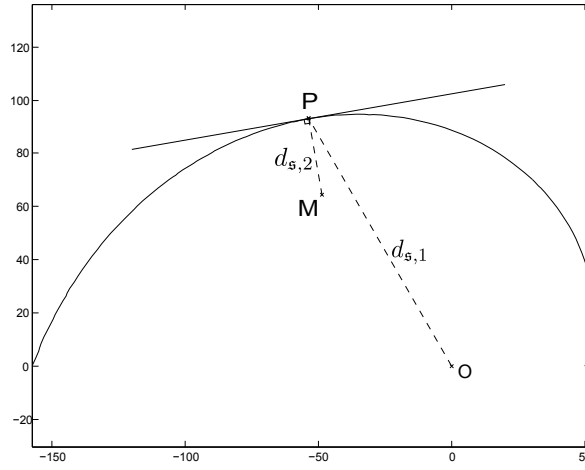


FIGURE 2.6 – Définition de la fonction de distance  $d_s = d_{s,1} + d_{s,2}$  entre le point  $M$  et le centre de la spirale  $O$ .  $P$  est le plus proche point de  $M$  appartenant à la crête de la spirale.

Il n'existe pas de formulation analytique de la solution de l'équation (2.23). Néanmoins, sur la crête de la spirale, la valeur de  $d_{s,2}$  est nulle et la valeur de  $d_{s,1}$  y est triviale. On peut donc calculer directement  $d_s$  sur les points de la spirale  $E_s$ . De plus, comme  $d_{s,2}$  est la distance euclidienne de l'ensemble  $E_s$  au reste des points,  $d_s$  peut être calculée sur tout l'espace au moyen d'une transformée de distance de l'ensemble  $E_s$  valué par la distance  $d_s$ . La distance  $d_{s,2}$  est mesurée dans le plan galactique, la distance équivalente dans le plan de projection n'est donc en général plus euclidienne. On peut néanmoins approximer cette distance au moyen d'une transformée de distance utilisant un masque de distance correspondant à la distance euclidienne projetée sur le plan d'observation. Cette méthode est valide car le cercle unité de la distance projetée est une ellipse qui est convexe [46]. Les trois étapes nécessaires à la simulation de la spirale sont illustrées dans la figure 2.7.

### 2.2.3.2 Descripteur de brillance

Le descripteur de brillance utilisé pour la spirale est à nouveau la fonction de Sérsic. La brillance de la spirale au point  $(r,\theta)$  est donnée par :

$$\mathbf{f}(\phi_{\mathbf{f}}, r, \theta) = (f_1(\phi_{\mathbf{f}}, r, \theta), \dots, f_B(\phi_{\mathbf{f}}, r, \theta)) \quad (2.24)$$

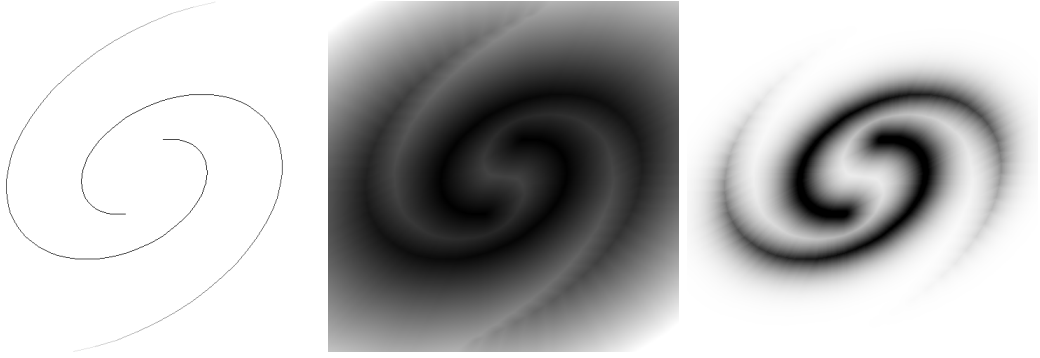


FIGURE 2.7 – Les trois étapes de la simulation de la structure spirale. À gauche : la crête de la spirale est tracée en tenant compte de la projection déterminée par la forme du disque. Les valeurs affectées aux pixels de la crête sont les valeurs de  $d_{s,1}$  (plus un pixel est brillant plus sa distance est grande, on suppose le fond à une distance infinie). Au centre : la transformée de distance est calculée en utilisant un masque représentant la distance euclidienne du plan galactique projeté dans le plan d’observation. À droite : le descripteur de brillance est appliqué à la carte de distance.

avec  $f_b$  la brillance dans la bande  $b$  définie par :

$$f_b(\phi_f, r, \theta) = I_b \exp \left( -k_{n_b} \left( \left( \frac{d_s(r, \theta)}{R_b} \right)^{\frac{1}{n_b}} - 1 \right) \right) \quad (2.25)$$

### 2.2.3.3 Contraintes

La contrainte la plus forte sur les bras spiraux concerne les galaxies barrées : les bras spiraux démarrent à la fin de la barre stellaire, ou plus formellement, la différence entre l’angle de position de la barre stellaire et des bras spiraux doit être inférieure à 0,3 rad et la différence entre le rayon de coupure de la barre stellaire et le rayon de démarrage des bras doit être inférieure à 4 arcsec. Ces valeurs ont été déterminées de manière empirique à partir des observations et de simulations.

Afin d’éviter que la spirale ne dégénère en un anneau, la valeur absolue de l’angle d’ouverture est contrainte à être supérieure à 0,1 rad.

### 2.2.4 Disque vu par la tranche

Une galaxie à disque observée avec une inclinaison (équation (2.7)) de  $\pi/2$  est dite vue par la tranche. Le modèle ellipsoïdal n’est alors plus adapté pour représenter le disque et un modèle dit en  $\text{sech}^2$  (sécante hyperbolique) est préférable [48].

La séparation du modèle en deux descripteurs — de forme et de brillance — est différente de celle proposée pour les structures précédentes car les descripteurs ne sont pas isotropes et se séparent en deux directions privilégiées : le long du plan galactique et perpendiculairement à celui-ci.



### 2.2.4.1 Descripteur de forme

Le descripteur de forme permet de reproduire les effets de projection : translation et rotation. Contrairement au descripteur de l'ellipse généralisée, celui-ci est composé de deux parties permettant de séparer la composante planaire  $r_p$  donnant la distance sur l'axe du plan galactique et la composante verticale  $r_z$  donnant la hauteur par rapport au plan galactique.

$$r_z(x,y) = |(x - c_x) \cos \alpha - (y - c_y) \sin \alpha| \quad (2.26)$$

$$r_p(x,y) = |(x - c_x) \sin \alpha + (y - c_y) \cos \alpha| \quad (2.27)$$

avec  $(c_x, c_y)$  le centre de la structure et  $\alpha$  son angle de position.

### 2.2.4.2 Descripteur de brillance

Le descripteur de brillance dépend de la direction considérée : une fonction exponentielle le long du plan galactique et une composante en  $\text{sech}^2$  le long de la composante en hauteur [48]. La brillance du disque au point  $(x,y)$  est alors donnée par :

$$\mathbf{f}(\boldsymbol{\phi}_f, x, y) = (f_1(\boldsymbol{\phi}_f, x, y), \dots, f_B(\boldsymbol{\phi}_f, x, y)) \quad (2.28)$$

avec  $f_b$  la brillance dans la bande  $b$  définie par :

$$f_b(\boldsymbol{\phi}_f, x, y) = I_b \exp\left(\frac{r_p(x,y)}{R_p}\right) \text{sech}^2\left(\frac{r_z(x,y)}{R_z}\right) \quad (2.29)$$

et  $I_b$  la brillance au centre,  $R_p$  un paramètre d'échelle le long du plan galactique,  $R_z$  un paramètre d'échelle de hauteur et  $\text{sech}$  définie par :

$$\text{sech}(x) = \frac{2}{\exp(x) + \exp(-x)} \quad (2.30)$$

La figure 2.8 montre un exemple de simulation obtenue avec ce modèle.



FIGURE 2.8 – Modèle en  $\text{sech}^2$  pour un disque vu par la tranche.

### 2.2.4.3 Contraintes

Les contraintes portant sur le disque vu par la tranche visent à assurer une apparence fine en limitant l'échelle de hauteur :  $0 < R_z \leq 0,5 \text{ arcsec}$ , alors que l'échelle longitudinale est plus lâche :  $10 \leq R_p \leq 50 \text{ arcsec}$ . La brillance  $I_b$  est positive.

Finalement, lorsque le disque vu par la tranche est utilisé, on le contraint, avec le bulbe et le halo, à avoir le même angle de position.

### 2.2.5 Barre de poussières

Dans une galaxie vue par la tranche, les poussières accumulées sur le plan du disque peuvent absorber une grande quantité du flux émis en lumière visible. Selon la quantité de poussières et l'inclinaison de la galaxie, on peut voir, de manière plus ou moins prononcée, une barre sombre séparant la galaxie en deux. Les auteurs de [27] ont proposé un modèle proche du modèle de disque vu par la tranche permettant de rendre compte de cette structure occlusive lorsque celle-ci est suffisamment régulière. Le modèle présenté ici diffère de celui proposé dans [27], car il intègre en plus deux paramètres de concentration — longitudinale et en hauteur —, ainsi qu'un paramètre de décalage vertical permettant de mieux rendre compte des observations avec une inclinaison intermédiaire (si la galaxie n'est pas vue parfaitement par la tranche).

Le descripteur de forme est identique à celui utilisé pour le disque vu par la tranche.

#### 2.2.5.1 Descripteur de brillance

Ici le descripteur de brillance fournit un coefficient d'absorption compris entre 0 (aucune absorption) et 1 (tout le flux est absorbé). La décroissance du coefficient d'absorption depuis le centre est exponentielle dans les deux directions, mais peut avoir des échelles et des concentrations différentes. Le coefficient d'absorption au point  $(x,y)$  est donné par :

$$o(\phi_{\mathbf{o}}, x, y) = (o_1(\phi_{\mathbf{o}}, x, y), \dots, o_B(\phi_{\mathbf{o}}, x, y)) \quad (2.31)$$

avec  $o_b$  le coefficient d'absorption dans la bande  $b$  défini par :

$$o_b(\phi_{\mathbf{o}}, x, y) = C_b \exp \left( - \left( \frac{r_p(x, y)}{R_p} \right)^{\frac{1}{n_p}} - \left( \frac{|r_z(x, y) - T_z|}{R_z} \right)^{\frac{1}{n_z}} \right) \quad (2.32)$$

et  $C_b$  le coefficient d'absorption au centre,  $R_p$  et  $n_p$  des paramètres d'échelle et de concentration le long du plan galactique,  $R_z$  et  $n_z$  des paramètres d'échelle et de concentration en hauteur et  $T_z$  le décalage vertical. Le décalage  $T_z$  permet au modèle de tolérer une inclinaison de la galaxie légèrement différente de  $\pi/2$ , ce qui provoque une asymétrie.

La figure 2.9 montre un exemple de simulation obtenue avec ce modèle.

#### 2.2.5.2 Contraintes

Les contraintes portant sur la barre de poussières visent, comme pour le disque vu par la tranche, à assurer une apparence fine en limitant l'échelle de hauteur à  $0 < R_z \leq 1 \text{ arcsec}$ , alors que l'échelle longitudinale est plus lâche :  $10 \leq R_p \leq 50 \text{ arcsec}$ . Les concentrations longitudinale  $n_p$  et en hauteur  $n_z$  sont toutes deux comprises entre 0,5 et 1. Le décalage de



FIGURE 2.9 – Modèle de barre de poussières. La simulation représente l’occlusion due à une barre de poussières sur un fond uniforme.

hauteur est limité à plus ou moins 5 arcsec :  $-5 \leq T_z \leq 5$ . Les coefficients d’extinction  $C_b$  sont compris entre 0 et 1.

Finalement, lorsque la barre de poussières est utilisée, on contraint le disque vu par la tranche, le bulbe, la barre de poussières et le halo à avoir le même angle de position.

### 2.2.6 Combinaisons des structures

Les modèles de structures présentés peuvent être combinés de différentes manières pour obtenir toute la gamme d’objets réguliers de la classification de Hubble. On distingue trois cas :

- les galaxies elliptiques dont le modèle comporte une composante ellipsoïdale principale et si nécessaire une seconde composante ellipsoïdale pour tenir compte d’un halo étendu (figure 2.10). Ces deux composantes forment le bulbe au sens astrophysique du terme ;
- les galaxies non elliptiques avec une élongation modérée qui ont au moins deux composantes ellipsoïdales — le bulbe et le disque — et peuvent avoir également : une barre stellaire, des bras spiraux, un anneau interne et un anneau externe (figure 2.11) ;
- les galaxies non elliptiques avec une élongation forte qui ont au moins une composante ellipsoïdale (le bulbe) et un disque vu par la tranche, auxquels peuvent s’ajouter : une composante ellipsoïdale formant un halo (extension du bulbe) et une barre de poussières (figure 2.12).

L’ensemble des structures définies, les équations et les paramètres qui s’y rattachent sont résumés dans les tables 2.5 et 2.6.

Le nombre total de paramètres dans le modèle dépend des structures utilisées. Ainsi, le modèle ellipsoïdal possède  $7 + 3B$  paramètres : le descripteur de forme de l’ellipse généralisée possède 5 paramètres, la fonction de Sérsic 3 paramètres et enfin 2 paramètres viennent de la combinaison des descripteurs. On obtient donc  $5 + 3B$  paramètres pour le bulbe ( $R_{max}$  et  $R_0$  sont constants),  $4 + 2B$  paramètres pour le disque et le halo ( $R_{max}$ ,  $R_0$  et  $n_b$  sont constants),  $6 + 3B$  paramètres pour la barre stellaire ( $R_0$  est constant),  $3B$  pour chaque anneau (les paramètres de forme sont partagés avec le disque, on ne peut pas avoir d’anneau sans disque).

La structure spirale possède  $5 + 3B$  paramètres : 5 paramètres pour le descripteur de forme et  $3B$  pour le descripteur de brillance (les paramètres provenant du disque utilisés

pour déterminer les paramètres de projection ne sont pas comptés).

Le disque vu par la tranche possède  $5 + B$  paramètres : le centre, l'angle de position, l'échelle longitudinale et en hauteur et la brillance dans chaque bande.

La barre de poussières possède  $8 + B$  paramètres : le centre, l'angle de position, l'échelle et la concentration longitudinale et en hauteur, le décalage de hauteur et le coefficient d'extinction dans chaque bande.

Finalement, comme on suppose le centre identique pour chaque structure, on obtient pour une galaxie spirale barrée avec anneau interne et externe (le cas le plus complexe) :  $11 + 17B$  paramètres (soit 86 paramètres pour  $B = 5$ ).

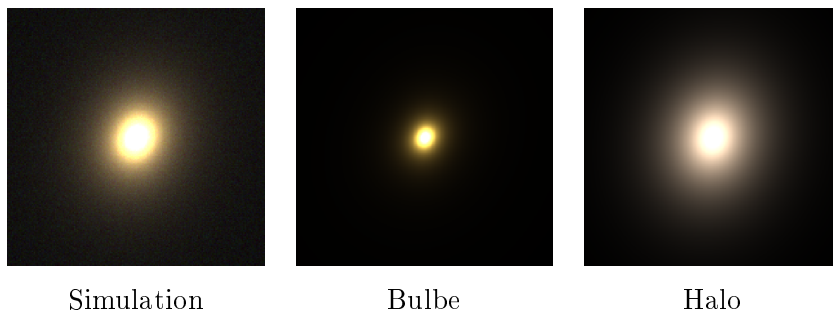


FIGURE 2.10 – Simulation d'une galaxie à deux composantes ellipsoïdales qui correspond à une galaxie elliptique géante de type cD.

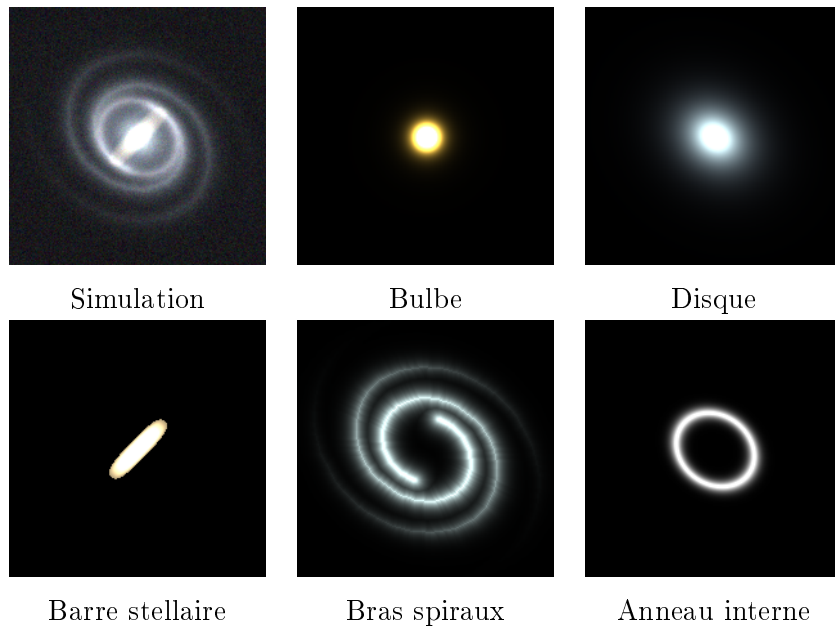


FIGURE 2.11 – Simulation d’une galaxie à cinq composantes : quatre composantes ellipsoïdales dont une utilisant le rayon de coupure pour simuler une barre stellaire et une utilisant le décalage de rayon pour obtenir un anneau, et une composante spirale. La galaxie simulée pourrait correspondre à une galaxie de type SBbR.

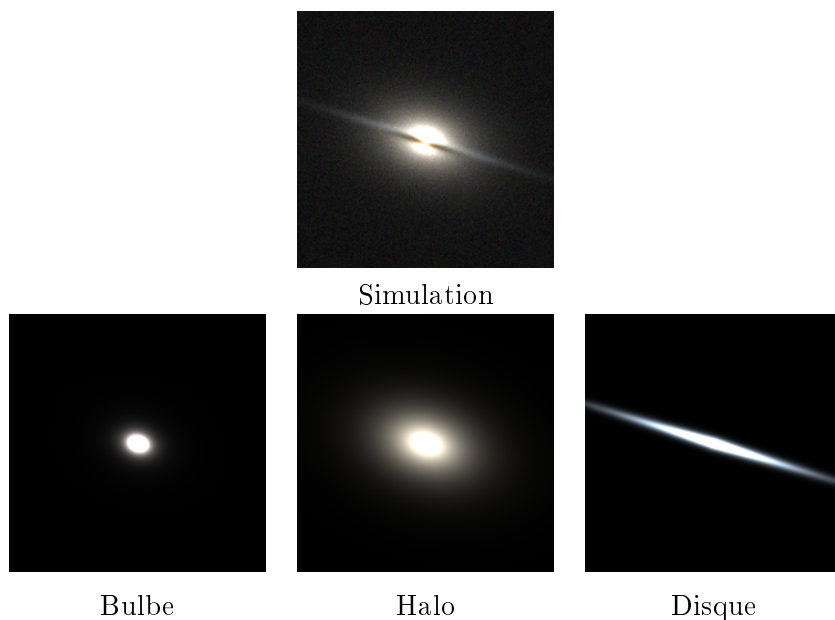


FIGURE 2.12 – Simulation d’une galaxie à quatre composantes : deux composantes ellipsoïdales, une composante de type disque vu par la tranche et une barre de poussières (non représentée). La galaxie simulée pourrait correspondre à une galaxie de type Sa.


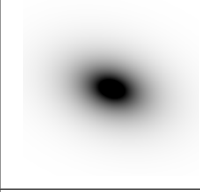

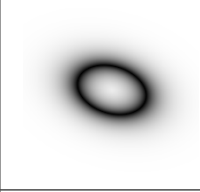

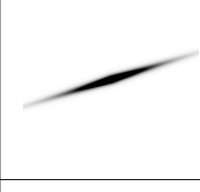
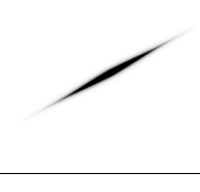
Structure	Symbole	Exemple de Simulation	Variabes associées	Nombre de paramètres
Bulbe	$\mathfrak{B}$		Équation 2.14 p. 53 – <b>Forme</b> Éq 2.6 p.51 : $c_x, c_y, \alpha, e, c$ – <b>Brillance</b> Éq 2.8 p.52 : $I_b, R_b, n_b$	$5 + 3B$
Disque et Halo	$\mathfrak{D}$ $\mathfrak{H}$		Équation 2.14 p. 53 – <b>Forme</b> Éq 2.6 p.51 : $c_x, c_y, \alpha, e$ – <b>Brillance</b> Éq 2.8 p.52 : $I_b, R_b$	$4 + 3B$
Barre stellaire	$\mathfrak{B}\alpha$		Équation 2.14 p. 53 : $R_{max}$ – <b>Forme</b> Éq 2.6 p.51 : $c_x, c_y, \alpha, e, c$ – <b>Brillance</b> Éq 2.8 p.52 : $I_b, R_b, n_b$	$6 + 3B$
Anneaux interne et externe	$\mathfrak{R}i$ $\mathfrak{R}e$		Équation 2.14 p. 53 : $R_0$ – <b>Forme</b> Éq 2.6 p.51 : $c_x, c_y, \alpha, e$ – <b>Brillance</b> Éq 2.8 p.52 : $I_b, R_b, n_b$	$3B$
Bras spiraux	$\mathfrak{s}$		Équation 2.24 p. 58 – <b>Forme</b> Éq 2.20 p. 57 : $R_0, \alpha, o_s, R_s, n_s$ – <b>Brillance</b> Éq 2.8 p.52 : $I_b, R_b, n_b$	$5 + 3B$
Disque vu par la tranche	$\mathfrak{D}t$		Équation 2.28 p. 60 – <b>Forme</b> Éq 2.26 et 2.27 p. 60 : $c_x, c_y, \alpha$ – <b>Brillance</b> Éq 2.29 p. 60 : $I_b, R_z, R_p$	$5 + B$
barre de poussières	$\mathfrak{B}p$		Équation 2.31 p. 61 : $T_z$ – <b>Forme</b> Éq 2.26 et 2.27 p. 60 : $c_x, c_y, \alpha$ – <b>Absorption</b> Éq 2.32 p. 61 : $C_b, R_z, n_z, R_p, n_p$	$8 + B$

TABLE 2.5 – Résumé des différentes structures.

Variable	Description	Équations	Structures
$(c_x, c_y)$	Centre	– Éq 2.6 p. 51 – Éq 2.27 p. 60	Toutes
$\alpha$	Angle de position	– Éq 2.6 p. 51 – Éq 2.20 p. 57 – Éq 2.27 p. 60	Toutes
$e$	Élongation	– Éq 2.6 p. 51	$\mathcal{B}$ $\mathcal{D}$ $\mathcal{H}$ $\mathcal{B}a$ $\mathcal{R}i$ $\mathcal{R}e$ $s$
$c$	Déformation	– Éq 2.6 p. 51	$\mathcal{B}$ $\mathcal{B}a$
$I_b$	Brillance dans la bande $b$	– Éq 2.8 p. 52 – Éq 2.29 p. 60	$\mathcal{B}$ $\mathcal{D}$ $\mathcal{D}t$ $\mathcal{H}$ $\mathcal{B}a$ $\mathcal{R}i$ $\mathcal{R}e$ $s$
$R_b$	Rayon caractéristique dans la bande $b$	– Éq 2.8 p. 52	$\mathcal{B}$ $\mathcal{D}$ $\mathcal{H}$ $\mathcal{B}a$ $\mathcal{R}i$ $\mathcal{R}e$ $s$
$n_b$	Indice de Sérsic dans la bande $b$	– Éq 2.8 p. 52	$\mathcal{B}$ $\mathcal{H}$ $\mathcal{B}a$ $\mathcal{R}i$ $\mathcal{R}e$ $s$
$R_{max}$	Rayon de coupure	– Éq 2.14 p. 53	$\mathcal{B}a$
$R_0$	Rayon de départ	– Éq 2.14 p. 53 – Éq 2.20 p. 57	$\mathcal{R}i$ $\mathcal{R}e$ $s$
$o_s$	Angle d'ouverture	– Éq 2.20 p. 57	$s$
$R_s$	Facteur d'échelle radiale	– Éq 2.20 p. 57	$s$
$n_s$	Facteur de concentration radiale	– Éq 2.20 p. 57	$s$
$R_z$	Facteur d'échelle en hauteur	– Éq 2.29 p. 60 – Éq 2.32 p. 61	$\mathcal{D}t$ $\mathcal{B}p$
$n_z$	Facteur de concentration en hauteur	– Éq 2.32 p. 61	$\mathcal{B}p$
$R_p$	Facteur d'échelle dans le plan galactique	– Éq 2.29 p. 60 – Éq 2.32 p. 61	$\mathcal{D}t$ $\mathcal{B}p$
$n_p$	Facteur de concentration dans le plan galactique	– Éq 2.32 p. 61	$\mathcal{B}p$
$T_z$	Translation en hauteur	– Éq 2.31 p. 61	$\mathcal{B}p$
$C_b$	Facteur d'absorption dans la bande $b$	– Éq 2.32 p. 61	$\mathcal{B}p$

TABLE 2.6 – Résumé des variables.

## 2.3 Formulation bayésienne du modèle

Cette table donne les notations utilisées dans les deux sections suivantes.

Notation	Signification
$\Phi$	Chaîne de Markov
$d$	Dimension d'un bloc dans l'échantillonneur de Gibbs
$q$	Loi candidate pour l'algorithme de Metropolis–Hastings
$\sigma$	Écart type de la loi candidate
$A$	Taux d'acceptation de l'algorithme de Metropolis–Hastings
$\alpha$	Paramètre de mélange pour la loi candidate inversible
$U$	Fonction d'énergie
$\lambda$	Facteur de décroissance géométrique de la température
$p$	Longueur du palier de température constante
$T_i^j$	Température du bloc $j$ au palier $i$
$\beta_j$	Facteur déterminant la température initiale du bloc $j$

Cette section présente la formulation retenue pour réaliser l'inversion du modèle. Dans un premier temps, le modèle observationnel est adapté afin de tenir compte des aspects non simulables de la structure spirale par l'intégration d'un filtre paramétrique sur les observations. Puis, le problème d'inversion est placé dans un cadre bayésien qui permet l'intégration d'a priori et une prise en compte rigoureuse des incertitudes liées au bruit. On étudie ensuite les propriétés de la densité de probabilité a posteriori des paramètres conditionnellement aux observations et on définit l'estimateur choisi.

### 2.3.1 Masquage adaptatif

On a vu précédemment que le modèle paramétrique pour les bras spiraux ne modélise que leur aspect continu. Mais, dans les longueurs d'ondes courtes, cet aspect continu peut être dominé (en terme de flux) par des régions H II plus ou moins compactes et plus ou moins dispersées. Comme ni la forme, ni le profil de brillance des régions H II ne contiennent d'information intéressante pour la classification des galaxies, le développement d'un modèle complexe pour les régions H II est délaissé au profit d'une technique de masquage adaptatif. Ainsi, l'estimation des paramètres de brillance de la spirale n'est pas biaisée par la brillance des zones H II et l'information concernant leur distribution spatiale n'est pas perdue.

La décision de masquer une région H II particulière est fonction des paramètres du modèle continu et d'une carte  $M$  contenant l'ensemble des régions H II détectées. Dans ce schéma une composante de  $M$  est masquée uniquement si elle se trouve sur la structure spirale. Formellement, une composante de  $M$  représentant une zone H II est masquée si la distance  $d_{s,2}$  de son centre à la crête de la spirale est inférieure à 3 arcsec. La carte  $M$  est, pour le moment, supposée connue; un algorithme permettant de l'obtenir est proposé dans le chapitre 4.



Le filtre défini par cette opération de masquage est noté  $\mathbf{A}(\cdot, \cdot, M)$ . Dans cette approche, les observations  $\mathbf{Y}$  sont modifiées par le filtre  $\mathbf{A}(\cdot, \cdot, M)$  en fonction des paramètres  $\boldsymbol{\phi}$ , menant aux nouvelles données  $\mathbf{A}(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\phi}, M)$ . L'équation du modèle (2.5) devient :

$$\mathbf{A}(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\phi}, M) = \mathbf{H}\mathbf{F}(\boldsymbol{\phi}) + \mathbf{e} \quad (2.33)$$

### 2.3.2 Formulation bayésienne

La nature mal posée du problème a été établie pour le modèle incluant uniquement deux structures ellipsoïdales de types bulbe et disque dans des images monobandes en montrant que plusieurs solutions peuvent exister [1, 22, 35]. Une approche bayésienne a été adoptée afin de régulariser le problème tout en prenant en compte les incertitudes de manière rigoureuse [33]. En effet, la règle de Bayes permet de formuler la densité de probabilité des paramètres cherchés en fonction des observations tout en intégrant une régularisation sous la forme d'un a priori sur les paramètres. On l'exprime généralement comme :

$$P(\boldsymbol{\phi} | \mathbf{Y}) = \frac{P(\mathbf{Y} | \boldsymbol{\phi}) P(\boldsymbol{\phi})}{P(\mathbf{Y})}, \quad (2.34)$$

la probabilité a posteriori  $P(\boldsymbol{\phi} | \mathbf{Y})$  est égale à la vraisemblance  $P(\mathbf{Y} | \boldsymbol{\phi})$  multipliée par l'a priori sur  $\boldsymbol{\phi}$   $P(\boldsymbol{\phi})$  et normalisée par le facteur  $P(\mathbf{Y})$ . Le facteur de normalisation  $P(\mathbf{Y})$  n'est généralement pas calculable mais peut souvent être négligé car il est constant à  $\mathbf{Y}$  donné.

Pour appliquer le théorème de Bayes, on écrit l'équation (2.33) :

$$\mathbf{e} = \mathbf{A}(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\phi}, M) - \mathbf{H}\mathbf{F}(\boldsymbol{\phi}) \quad (2.35)$$

ce qui donne l'expression de la densité de probabilité a posteriori suivante sous l'hypothèse d'un bruit gaussien de moyenne nulle et de matrice de variance-covariance  $\boldsymbol{\Sigma}$  :

$$P(\boldsymbol{\phi} | \mathbf{Y}) \propto \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}} \det(\boldsymbol{\Sigma})^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2} (\mathbf{A}(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\phi}, M) - \mathbf{H}\mathbf{F}(\boldsymbol{\phi}))^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{A}(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\phi}, M) - \mathbf{H}\mathbf{F}(\boldsymbol{\phi}))\right). \quad (2.36)$$

Les a priori assignés à chaque paramètre sont déterminés par l'ensemble des contraintes qui s'y réfèrent. De par la définition de  $\mathbf{A}(\cdot, \cdot, M)$ , la dimension des observations peut changer en fonction des paramètres  $\boldsymbol{\phi}$  menant au problème original d'estimation de paramètres à partir d'une observation dont la dimension peut varier.

#### 2.3.2.1 Distribution des paramètres de brillance

Chaque structure  $\mathbf{f}$  (à l'exception de la barre de poussières) possède un facteur de brillance  $I_b$  pour chaque bande  $b$ . La probabilité conditionnelle a posteriori des facteurs de brillances  $I_b$  de ces structures se réduit à une gaussienne tronquée à support positif qui peut être simulée efficacement par un algorithme d'acceptation-rejet [30].

En effet, en posant :

$$\mathbf{f}' = \mathbf{f}/I_b \quad (2.37)$$

$$\mathbf{z} = \mathbf{A}(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\phi}, M) - \mathbf{H}(\mathbf{I}_N - \text{diag}(\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\theta}_o))) \mathbf{F}_{\setminus\{\mathbf{f}\}}(\boldsymbol{\phi}) \quad (2.38)$$

et

$$\mathbf{g} = \mathbf{H} (\mathbf{I}_N - \text{diag}(\boldsymbol{\alpha}(\theta_{\mathbf{o}}))) \mathbf{f}'(\boldsymbol{\phi}) \quad (2.39)$$

où  $\mathbf{F}_{\setminus\{\mathbf{f}\}}$  représente la somme des brillances de toutes les structures exceptée  $\mathbf{f}$ , la loi sur  $I_b$  s'écrit :

$$\begin{aligned} & P(I_b | \mathbf{Y}, \boldsymbol{\phi}_{\setminus I_b}) \\ & \propto P(\mathbf{Y} | \boldsymbol{\phi}) P(I_b) \\ & \propto \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}} \det(\boldsymbol{\Sigma})^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2} (\mathbf{z} - I_b \mathbf{g})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{z} - I_b \mathbf{g})\right) \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(I_b) \\ & \propto \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}} \det(\boldsymbol{\Sigma})^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2} (\mathbf{z}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{z} + I_b (-\mathbf{z}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{g} - \mathbf{g}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{z}) + I_b^2 \mathbf{g}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{g})\right) \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(I_b) \\ & \propto \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}} \det(\boldsymbol{\Sigma})^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2} (I_b^2 A + I_b B + C)\right) \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(I_b) \end{aligned} \quad (2.40)$$

avec

$$A = \mathbf{g}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{g}, \quad B = -\mathbf{z}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{g} - \mathbf{g}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{z}, \quad \text{et} \quad C = \mathbf{z}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{z} \quad (2.41)$$

or :

$$\begin{aligned} I_b^2 A + I_b B + C &= I_b^2 A - 2 \left(-\frac{1}{2} \frac{B}{A}\right) I_b A + \left(-\frac{1}{2} \frac{B}{A}\right)^2 A + C - \left(-\frac{1}{2} \frac{B}{A}\right)^2 A \\ &= A \left[ I_b - \left(-\frac{1}{2} \frac{B}{A}\right) \right]^2 + C - \left(-\frac{1}{2} \frac{B}{A}\right)^2 A \end{aligned} \quad (2.42)$$

Posons  $\mu = -\frac{1}{2} \frac{B}{A}$  et  $\varepsilon = C - \mu^2 A$ , (2.40) devient :

$$\begin{aligned} P(I_b | \mathbf{Y}, \boldsymbol{\phi}_{\setminus I_b}) &\propto \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}} \det(\boldsymbol{\Sigma})^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2} (A(I_b - \mu)^2 + \varepsilon)\right) \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(I_b) \\ &\propto \left( \frac{D}{(2\pi)^{\frac{N}{2}} \det(\boldsymbol{\Sigma})^{\frac{1}{2}}} \right) \frac{1}{D} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{I_b - \mu}{1/\sqrt{A}}\right)^2\right) \exp(\varepsilon) \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(I_b) \end{aligned} \quad (2.43)$$

avec

$$D = \sqrt{\frac{\pi}{2A}} \left( 1 + \text{erf} \left( \sqrt{\frac{A}{2}} \mu \right) \right) \quad (2.44)$$

où erf est la fonction d'erreur de Gauss. On reconnait l'expression d'une loi gaussienne tronquée à support positif  $\mathcal{N}^+(\mu, 1/A)$  de paramètres  $\mu$  et  $1/A$  :

$$\begin{aligned} P(I_b | \mathbf{Y}, \boldsymbol{\phi}_{\setminus I_b}) &\propto \frac{1}{D} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{I_b - \mu}{1/\sqrt{A}}\right)^2\right) \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(I_b) \\ &\sim \mathcal{N}^+(\mu, 1/A) \end{aligned} \quad (2.45)$$

### 2.3.2.2 Intégration d'un paramètre de brillance

L'expression précédente permet d'intégrer analytiquement un facteur de brillance de la densité de probabilité a posteriori. On obtient :

$$\begin{aligned}
P(\boldsymbol{\phi}_{\setminus I_b} | \mathbf{Y}) &\propto \int_0^\infty P(I_b, \boldsymbol{\phi}_{\setminus I_b} | \mathbf{Y}) dI_b \\
&\propto \int_0^\infty P(I_b | \mathbf{Y}, \boldsymbol{\phi}_{\setminus I_b}) P(\boldsymbol{\phi}_{\setminus I_b}) dI_b \\
&\propto \int_0^\infty \left( \frac{D}{(2\pi)^{\frac{N}{2}} \det(\boldsymbol{\Sigma})^{\frac{1}{2}}} \right) \exp(\varepsilon) \frac{1}{D} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{I_b - \mu}{1/\sqrt{A}}\right)^2\right) \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(I_b) P(\boldsymbol{\phi}_{\setminus I_b}) dI_b \\
&\propto \left( \frac{D}{(2\pi)^{\frac{N}{2}} \det(\boldsymbol{\Sigma})^{\frac{1}{2}}} \right) \exp(\varepsilon) P(\boldsymbol{\phi}_{\setminus I_b}) \int_0^\infty \frac{1}{D} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{I_b - \mu}{1/\sqrt{A}}\right)^2\right) \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(I_b) dI_b \\
&\propto \left( \frac{D}{(2\pi)^{\frac{N}{2}} \det(\boldsymbol{\Sigma})^{\frac{1}{2}}} \right) \exp(\varepsilon) P(\boldsymbol{\phi}_{\setminus I_b}) \tag{2.46}
\end{aligned}$$

Malheureusement, l'intégration analytique simultanée de plusieurs facteurs de brillance complique fortement les calculs. Une stratégie permettant d'intégrer de manière sélective le facteur de brillance le plus adéquat est présentée dans la section 2.4.1.

### 2.3.3 Choix de l'estimateur

Du fait de sa grande dimensionnalité, il est extrêmement difficile de caractériser analytiquement et de manière précise la densité de probabilité a posteriori : l'estimateur retenu est donc simplement le maximum a posteriori (MAP) [44].

## 2.4 Estimation du modèle

Afin de fournir une méthode robuste d'estimation des paramètres du modèle, nous avons choisi de développer des algorithmes de type MCMC combinés à du recuit simulé. Nous décrivons d'abord l'implémentation retenue pour les algorithmes de Gibbs et de Metropolis–Hastings et les méthodes de calcul de l'estimateur. Nous présentons, ensuite, deux nouvelles techniques permettant d'améliorer les performances des algorithmes d'estimation. La première amélioration consiste en un nouveau schéma de recuit simulé qui affecte une température différente à chaque bloc de l'échantillonneur de Gibbs. Ce nouveau schéma est utilisé conjointement avec une méthode permettant de déterminer automatiquement la température initiale de chaque bloc. La deuxième amélioration est une méthode de décomposition séquentielle basée sur une hiérarchie de modèles qui permet de fortement réduire le nombre d'itérations requises et qui apporte un gain de robustesse.

### 2.4.1 Échantillonneur de Gibbs et de Metropolis–Hastings

Cette section présente les algorithmes de simulation implémentés. Une présentation détaillée de la théorie des chaînes de Markov et des méthodes stochastiques associées est donnée dans l'annexe A.

### 2.4.1.1 Échantillonneur de Gibbs

L'algorithme principal est un échantillonneur de Gibbs [19,20,41] qui permet d'échantillonner une loi de grande dimension en simulant séparément chaque variable selon sa densité de probabilité conditionnellement aux autres variables. Les variables adoptées ne sont pas nécessairement scalaires et peuvent regrouper un vecteur de paramètres : on parle de *bloc*. Les différentes étapes de l'échantillonneur de Gibbs sont résumées dans l'algorithme 2.1.

Pour améliorer les performances de l'algorithme, les blocs sont définis de manière à grouper les paramètres fortement corrélés [41]. Ainsi, les paramètres de forme, qui sont faiblement corrélés, sont échantillonnés indépendamment. Les paramètres de la fonction de Sérsic ( $R_b$ ,  $n_b$  et  $I_b$ ) sont fortement corrélés (figure 2.13) et, de ce fait, sont échantillonnés conjointement. Comme seul un paramètre de brillance peut être intégré, on propose d'en intégrer un différent à chaque étape de l'algorithme grâce à la décomposition de la densité de probabilité a posteriori suivante :

$$P(R_b, n_b, I_b \mid \phi_{\setminus\{R_b, n_b, I_b\}}, \mathbf{Y}) = P(R_b, n_b \mid \phi_{\setminus\{R_b, n_b, I_b\}}, \mathbf{Y}) P(I_b \mid \phi_{\setminus\{I_b\}}, \mathbf{Y}) \quad (2.47)$$

D'après [13], la densité de probabilité  $P(R_b, n_b, I_b \mid \phi_{\setminus\{R_b, n_b, I_b\}}, \mathbf{Y})$  peut être échantillonnée en deux étapes : premièrement  $(R_b, n_b)$  est échantillonné suivant  $P(R_b, n_b \mid \phi_{\setminus\{R_b, n_b, I_b\}}, \mathbf{Y})$  (la densité de probabilité a posteriori où  $I_b$  a été intégré), puis  $I_b$  est échantillonné suivant  $P(I_b \mid \phi_{\setminus\{I_b\}}, \mathbf{Y})$ .

---

#### Algorithme 2.1: Échantillonneur de Gibbs implémenté.

---

**Entrée** : échantillon initial  $\phi$   
**Sortie** : chaîne de Markov de distribution  $P(\phi \mid \mathbf{Y})$

- 1 **répéter**
- 2   échantillonner  $(c_x, c_y) \sim P(c_x, c_y \mid \mathbf{Y}, \phi_{\setminus\{c_x, c_y\}})$ ;
- 3   **pour toute structure brillante  $\mathbf{f}$  du modèle faire**
- 4     **pour tout bloc de paramètres  $\varphi$  de  $\mathbf{f}$  indépendant de la bande faire**
- 5       échantillonner  $\varphi \sim P(\varphi \mid \mathbf{Y}, \phi_{\setminus\{\varphi\}})$ ;
- 6     **pour toute bande  $b$  faire**
- 7       **pour tout bloc de paramètres  $\varphi_b$  de  $\mathbf{f}$  dépendant de la bande  $b$  faire**
- 8          échantillonner  $\varphi_b \sim P(\varphi_b \mid \mathbf{Y}, \phi_{\setminus\{\varphi_b, I_b\}})$ ;
- 9          échantillonner  $I_b \sim P(I_b \mid \phi_{\setminus\{I_b\}}, \mathbf{Y})$
- 10    **pour tout bloc de paramètres  $\varphi$  de la structure occlusive  $\mathbf{o}$  faire**
- 11     échantillonner  $\varphi \sim P(\varphi \mid \mathbf{Y}, \phi_{\setminus\{\varphi\}})$ ;
- 12 **jusqu'à ce que le critère de convergence soit satisfait (section 2.4.1.3);**

---

### 2.4.1.2 Algorithme de Metropolis–Hastings

Excepté pour les paramètres de facteur de brillance, les lois conditionnelles a posteriori ne se réduisent pas à des lois connues et directement échantillonnables. La solution adoptée est d'effectuer des étapes de Metropolis–Hastings au sein de l'échantillonneur de Gibbs [20]. On peut montrer que ce type d'algorithme (Metropolis–Hastings dans Gibbs) est équivalent

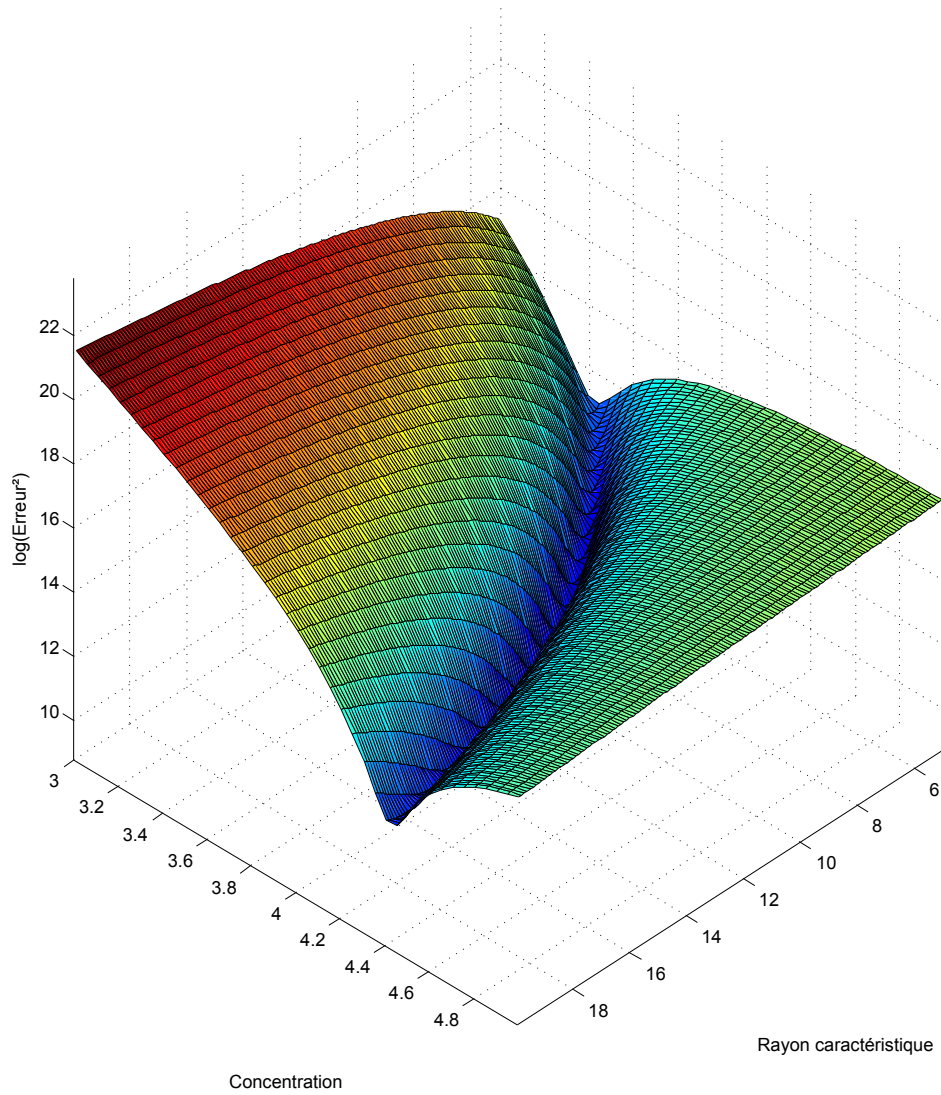


FIGURE 2.13 – Surface d’erreur obtenue par variation des paramètres de concentration et de rayon caractéristique de la fonction de Sérsic. L’erreur représentée correspond au logarithme du terme interne  $\frac{1}{2}(\mathbf{A}(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\phi}, M) - \mathbf{HF}(\boldsymbol{\phi}))^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{A}(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\phi}, M) - \mathbf{HF}(\boldsymbol{\phi}))$  de la fonction de vraisemblance (équation (2.36)). On constate une très forte corrélation entre  $n$  et  $R$ , la profondeur de la zone de minima est très atténuée par l’échelle logarithmique. La mesure de cette corrélation permet de déterminer une matrice de variance–covariance pour les algorithmes de Metropolis–Hastings à marche aléatoire.

à un algorithme de Metropolis–Hastings complexe et préserve ainsi toutes les garanties de convergences associées [6].

L’allure des lois cibles étant mal connue, la version dite à marche aléatoire de l’algorithme de Metropolis–Hastings est utilisée [20, 41]. Pour cela il est nécessaire d’introduire une loi candidate  $q$ , généralement définie par  $q(\cdot | X) = X + q'(\cdot)$  où  $q'$  est une distribution qui ne dépend pas de  $X$  et qui est de moyenne nulle. Cette approche permet de générer, à chaque étape, un déplacement aléatoire depuis la position actuelle. Le choix d’une loi candidate adéquate est crucial pour maximiser l’efficacité de l’algorithme, et la littérature suggère que, pour des variables de faibles dimensions, le taux d’acceptation des échantillons générés par la loi candidate doit avoisiner 50 % [18].

Dans le cas d’un bloc scalaire, une loi candidate peut être déterminée de manière automatique en utilisant une distribution gaussienne  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$  en conjonction avec une technique d’échelle adaptative [21] : on appelle cet algorithme *Metropolis–Hastings à marche aléatoire adaptative gaussienne*. Cette approche consiste à ajuster l’écart-type  $\sigma$  afin d’atteindre le taux d’acceptation optimal : si le taux d’acceptation est trop élevé, l’écart-type est augmenté et inversement. En pratique, le paramètre d’échelle est adapté toutes les cinq itérations (cette durée est appelée temps d’adaptation) avec la formule suivante [21] :

$$\log(\sigma_{i+1}) = \log(\sigma_i) + \frac{\log(A_i) - \log(1 - A_i) - \log(A) + \log(1 - A)}{d} \quad (2.48)$$

où  $\sigma_i$  et  $\sigma_{i+1}$  sont respectivement l’ancien et le nouvel écart-type,  $A = 0,5$  est le taux d’acceptation visé,  $A_i$  est le taux d’acceptation mesuré au cours des 20 dernières itérations et  $d$  est la dimension de la loi simulée. Les propriétés de convergence de l’algorithme peuvent être compromises par le temps d’adaptation constant [2] : ce problème est étudié dans la section 2.4.2.

Pour certaines variables, comme l’angle d’ouverture des bras spiraux, il peut être utile de proposer un déplacement aléatoire inversant le signe du paramètre. Une loi candidate en deux parties permet de proposer cette inversion :  $q(\cdot | X) = \alpha \mathcal{N}(X, \sigma^2) + (1 - \alpha) \mathcal{N}(-X, \sigma^2)$ , avec  $\mathcal{N}(X, \sigma^2)$  la distribution gaussienne de moyenne  $X$  et d’écart-type  $\sigma$ , et  $\alpha$  un paramètre de mélange compris entre 0 et 1. Le paramètre  $\sigma$  peut être déterminé de manière adaptative comme vu précédemment. On appellera ce type d’algorithme : *Metropolis–Hastings à marche aléatoire adaptative inversible gaussienne*.

Dans le cas d’un bloc vectoriel, un algorithme à direction adaptative appelé algorithme du Snooker [20] (voir annexe A) est utilisé. La version de l’algorithme implémentée utilise un ensemble de dix échantillons pour déterminer les directions privilégiées. Les dix premiers échantillons sont générés en utilisant la version classique de l’algorithme de Metropolis–Hastings à marche aléatoire avec une loi gaussienne multidimensionnelle comme loi candidate.

L’algorithme utilisé pour simuler chaque variable ainsi que les paramètres afférents sont donnés dans la table 2.8 page 80. Dans le cas des blocs vectoriels échantillonnés par un algorithme de Metropolis–Hastings à marche aléatoire, la matrice de variance–covariance de la loi candidate a été déterminée par l’observation de comportements généraux dans les lois a posteriori de ces blocs (figure 2.13).

### 2.4.1.3 Critère de convergence

De nombreux critères ont été proposés pour évaluer la convergence des algorithmes MCMC (voir entre autres [5, 15]) et la plupart nécessitent la génération de plusieurs chaînes, ce qui

est une solution trop couteuse en temps de calcul pour l'application visée.

Une solution originale s'inspirant de [14] et [25] et consistant à évaluer la convergence de la moyenne de la chaîne en construisant un intervalle de confiance valide asymptotiquement est proposé. La grande dimensionnalité de la chaîne rend néanmoins la construction d'un intervalle de confiance complexe et nous avons choisi de n'étudier que l'évolution de l'erreur quadratique moyenne normalisée (EQMN) définie par :

$$\text{EQMN}(\phi) = \frac{1}{N} (\mathbf{A}(\mathbf{Y}, \phi, M) - \mathbf{HF}(\phi))^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{A}(\mathbf{Y}, \phi, M) - \mathbf{HF}(\phi)) \quad (2.49)$$

On pose  $\{E_1, \dots, E_n\}$  l'ensemble des EQMN calculées à chaque itération et  $\hat{\rho}_i^2$  la variance estimée des échantillons  $\{E_{i-S+1}, \dots, E_i\}$ , où  $S$  est la taille de la fenêtre d'estimation. Le critère de convergence est alors satisfait si l'inégalité suivante est satisfaite [25] :

$$t \frac{\hat{\rho}_n}{\sqrt{S}} < \varepsilon \quad (2.50)$$

avec  $t$  le quantile de Student et  $\varepsilon$  la demi-largeur de l'intervalle de confiance souhaité. Les valeurs adoptées pour notre application sont  $t = 90\%$ ,  $\varepsilon = 0,05$  et  $S = 25$ .

#### 2.4.2 Calcul de l'estimateur

Une fois le critère de convergence satisfait, toutes les techniques adaptatives sont désactivées et l'algorithme produit un nombre fixé d'itérations ( $I = 50$ ). Ce nombre a été déterminé empiriquement pour permettre une estimation assez précise de la variance tout en limitant l'effort de calcul. Cette façon de procéder est le plus simple moyen de garantir que la distribution stationnaire de la chaîne n'est pas compromise par les techniques adaptatives [2, 42].

Soit  $\Phi = \{\phi_0, \dots, \phi_I\}$  l'ensemble des  $I$  derniers échantillons. L'estimation du MAP se traduit par la recherche de l'échantillon ayant la probabilité a posteriori la plus grande :

$$\hat{\Phi}_{MAP} = \arg \max_{\phi \in \Phi} P(\phi | \mathbf{Y}) \quad (2.51)$$

L'estimateur OBM (*Overlapped Batch Means*), qui est plus robuste que l'estimateur classique lorsque la corrélation entre les échantillons est élevée [16], est utilisé pour estimer la variance. L'estimateur OBM est donné par :

$$\hat{V}_{OBM}^2 = \frac{bI}{(I-b)(I-b+1)} \sum_{i=b}^I (\langle \Phi \rangle_i - \langle \Phi \rangle)^2 \quad (2.52)$$

où  $\langle \Phi \rangle$  est la moyenne des  $\phi_i$  et  $\langle \Phi \rangle_i$  est la moyenne partielle obtenue sur  $b$  échantillons dans une fenêtre glissante :

$$\langle \Phi \rangle_i = \frac{1}{b} \sum_{j=i-b+1}^i \phi_j \quad (2.53)$$

où  $b = \lfloor \sqrt{I} \rfloor$  est la taille de la fenêtre d'estimation [16].

### 2.4.3 Recuit simulé à températures multiples

Un nouveau schéma de recuit simulé est utilisé pour accélérer l'exploration de l'espace des solutions. L'idée de combiner le recuit simulé et les algorithmes MCMC pour les problèmes d'optimisation a été introduite par [26] : son principe est de modifier la loi cible afin d'augmenter la probabilité de sauts entre les maxima locaux et ainsi augmenter les chances de trouver le maximum global. Généralement, la densité de probabilité modifiée est de la forme  $P(\boldsymbol{\phi}|\mathbf{Y})^{\frac{1}{T}}$  et le paramètre de température  $T$  évolue suivant un schéma de décroissance logarithmique pour assurer la convergence de l'algorithme [19]. Cette approche présente certains inconvénients. Premièrement, le schéma de décroissance logarithmique requiert un nombre très important d'itérations et, en pratique, d'autres schémas de décroissance doivent être utilisés. Deuxièmement, la même température est appliquée à toute la distribution. Cette manière de procéder apporte un bénéfice limité lorsque les densités a posteriori conditionnelles de quelques paramètres (comme le centre de la galaxie ou l'angle de position des structures) ne présentent qu'un seul maximum bien défini et ne requièrent donc pas une température élevée alors que d'autres (comme celles des paramètres de Sérsic) peuvent présenter plusieurs maxima locaux fortement prononcés et requièrent une température élevée.

C'est pourquoi, dans le schéma proposé, chaque bloc de l'échantillonneur de Gibbs possède sa propre température. La température d'un bloc reflétant la complexité de la densité de probabilité a posteriori conditionnelle du bloc. De cette manière, la densité de probabilité est lissée de manière différente dans chaque dimension, permettant d'obtenir une densité globalement homogène dans toutes les directions.

Néanmoins, la chaîne de Markov ainsi produite n'est plus homogène, et afin d'en estimer correctement la variance, il convient de geler la température de tous les blocs à  $T = 1$  pendant la génération des échantillons finaux.

Le schéma de décroissance de température adopté est une décroissance géométrique par paliers [28] adaptée aux problèmes d'optimisation complexes. La température est ajustée toutes les  $p$  itérations (durée du palier) et peut soit décroître, soit rester identique en fonction de l'évolution de l'énergie du système entre le palier précédent et le palier courant. Si l'énergie décroît, la température n'est pas modifiée. Au contraire, si l'énergie croît, la température est diminuée selon un facteur géométrique. Soit  $\boldsymbol{\phi}^j \subset \boldsymbol{\phi}$  un bloc de l'échantillonneur de Gibbs et  $\lambda^j$  le facteur de décroissance du bloc  $j$ .  $T_i^j$  est la température du bloc  $j$  au palier  $i$ , la fonction d'énergie est définie par  $U(\boldsymbol{\phi}) = -\log P(\boldsymbol{\phi} | \mathbf{Y})$  et l'énergie moyenne  $\langle U \rangle$  au palier  $i$  par :

$$\langle U \rangle_i = \frac{1}{p} \sum_{k=i}^{i+p} U(\boldsymbol{\phi}_k) \quad (2.54)$$

L'évolution de la température est donnée par :

$$T_{i+2}^j = \begin{cases} T_{i+1}^j & \text{si } \langle U \rangle_{i+1} \leq \langle U \rangle_i \\ \lambda^j T_{i+1}^j & \text{si } \langle U \rangle_{i+1} > \langle U \rangle_i \end{cases} \quad (2.55)$$

Les valeurs  $p^j = 5$  et  $\lambda^j = 0,85$  sont utilisées pour tous les blocs.

La température initiale  $T_0^j$  est toujours un point crucial dans les techniques de recuit simulé. Une température trop faible rend le recuit simulé inutile alors qu'une température trop élevée conduit à un nombre d'itérations inutilement élevé et fait perdre les avantages



d'une initialisation intelligente des paramètres. La méthode proposée pour déterminer automatiquement la température initiale repose sur trois observations :

- dans un contexte de bruit gaussien, une augmentation de la température est équivalente à une augmentation de la variance du bruit : la température est donc inversement proportionnelle à la variance du bruit, ce qui permet de normaliser le bruit dans chaque image ;
- chaque bloc de l'échantillonneur de Gibbs n'affecte pas le même nombre de données (certaines variables comme les paramètres de Sérsic n'affectent les pixels que dans une bande alors que les paramètres de forme ont une influence sur l'ensemble des pixels). Comme tous les paramètres sont optimisés de manière globale, ils sont tous liés plus ou moins directement et l'observation précédente n'est vraie qu'en première approximation. Néanmoins, on peut supposer que plus le nombre de données affectées par un paramètre est élevé, plus son optimisation sera difficile et on peut donc définir la température initiale comme étant proportionnelle au nombre de pixels affectés par le bloc ;
- finalement, on fait l'hypothèse optimiste que l'on peut avoir une certaine confiance dans la valeur initiale des paramètres. Si les valeurs initiales sont bonnes en termes d'EQMN, alors la température initiale ne doit pas être trop élevée, car on est sûrement proche du maximum global. Si les valeurs initiales sont mauvaises, une température initiale plus élevée doit être utilisée.

Ces observations suggèrent la formule suivante pour déterminer la température initiale :

$$T_0^j = \beta^j \frac{\sqrt{EQN^j(\phi_0)}}{\text{moy}(\text{diag}(\Sigma^j))} \quad (2.56)$$

où  $EQN^j$  est l'erreur quadratique normalisée des pixels affectés par le bloc  $j$  et  $\beta^j$  est un facteur d'échelle du bloc  $j$ . Le terme  $EQN^j(\phi_0)$  incorpore l'information concernant la qualité de l'initialisation  $\phi_0$  et le nombre de pixels affectés. Le terme  $\text{moy}(\text{diag}(\Sigma^j))$  réalise la normalisation du bruit.  $\Sigma^j$  est la sous-matrice de  $\Sigma$  qui concerne les pixels affectés par le bloc  $j$ . Le facteur  $\beta^j$  est déterminé empiriquement, il reflète la complexité intrinsèque liée au bloc et ne dépend pas de l'observation. Les valeurs adoptées sont données dans la table 2.8.

#### 2.4.4 Hiérarchie de modèles

La section précédente a introduit l'idée qu'une bonne initialisation des paramètres est importante pour limiter la température initiale et ainsi réduire le temps de convergence de l'algorithme. Cependant, la détermination de paramètres initiaux à partir des observations n'est généralement pas évidente. Les propriétés de la structure dominante, comme sa forme et son extension, peuvent être mesurées aisément, par exemple en calculant les moments du second degré de l'image, mais les paramètres des autres structures sont plus difficiles à obtenir. Pour résoudre ce problème, nous proposons de procéder par une décomposition en plusieurs étapes basées sur une hiérarchie de modèles. Le principe est d'utiliser les résultats d'une décomposition grossière pour initialiser les paramètres d'une décomposition fine incorporant plus de structures. La hiérarchie est donc définie par l'importance relative des structures en termes de flux, les modèles devenant de plus en plus complexes avec des structures de plus en plus fines le long de la hiérarchie. Par exemple, il est connu que les bras spiraux ont une influence relativement faible sur les paramètres du bulbe et du disque [31] alors que la présence d'une barre stellaire peut avoir un impact important sur les paramètres du bulbe [17] : on

choisit donc d'introduire la barre avant les bras spiraux. Il se peut néanmoins que, pour une galaxie particulière, l'ordre d'ajout des structures ne soit pas idéal.

Notre hiérarchie comporte six modèles (figure 2.14) :

1. un modèle comportant un bulbe et si besoin un halo,
2. un modèle comportant un bulbe et un disque,
3. un modèle comportant un bulbe, un disque et une barre stellaire,
4. un modèle comportant un bulbe, un disque, une barre stellaire et une combinaison des structures suivantes : anneau interne, anneau externe,
5. un modèle comportant un bulbe, un disque et une combinaison des structures suivantes : anneau interne, anneau externe, bras spiraux,
6. un modèle comportant un bulbe, un disque vu par la tranche, un halo, une barre de poussières.

Cette stratégie a montré que l'effort de simulation pour estimer toute la hiérarchie de modèles menant au modèle le plus fin est moindre que pour estimer les paramètres du modèle le plus fin sans bénéficier d'une bonne initialisation. Cet effet s'explique de plusieurs façons :

- un modèle grossier nécessite moins de blocs dans l'échantillonneur de Gibbs, l'effort de simulation est donc moindre, ainsi que le temps de calcul ;
- les structures d'un modèle fin qui étaient déjà présentes dans le modèle plus grossier peuvent être initialisées avec précision permettant ainsi de réduire la température initiale et le nombre d'itérations avant convergence ;
- les nouvelles structures introduites dans le modèle plus fin sont initialisées avec l'aide des estimations du modèle grossier.

### 2.4.5 Procédures d'initialisation

Cette section décrit l'utilisation des procédures utilisées pour initialiser les paramètres du premier modèle et des structures introduites dans les modèles plus fins. Les procédures en elles-mêmes sont détaillées en annexe. La complexité du problème exclut presque partout l'utilisation de valeurs constantes ou aléatoires et chaque structure dispose d'un algorithme spécifique pour fournir une première estimation de ses paramètres. L'ensemble des algorithmes d'initialisation est décrit en détail dans l'annexe B. La méthode d'initialisation et l'algorithme d'estimation utilisés pour chaque variable sont résumés dans la table 2.8.

#### 2.4.5.1 Bulbe et disque

Les paramètres de forme du bulbe et du disque correspondent aux moments du second degré de l'image (section B.1) qui fournissent une initialisation du centre, de l'élongation, de l'angle de position et du rayon effectif. Le rayon effectif du disque est initialisé par le rayon effectif mesuré et le rayon effectif du bulbe est fixé à la moitié de cette valeur. L'indice de Sérsic du bulbe est toujours initialisé à 4 (loi de de Vaucouleurs). Les facteurs de brillance sont déterminés de manière à ce que le flux total de l'objet soit divisé en deux entre le disque et le bulbe.

Comme la répartition du flux entre le disque et le bulbe, c'est-à-dire les paramètres de Sérsic, peut prendre une large gamme de valeurs et qu'une initialisation déterministe est difficile, le modèle bulbe/disque est d'abord estimé à partir d'un profil intégré monodimensionnel

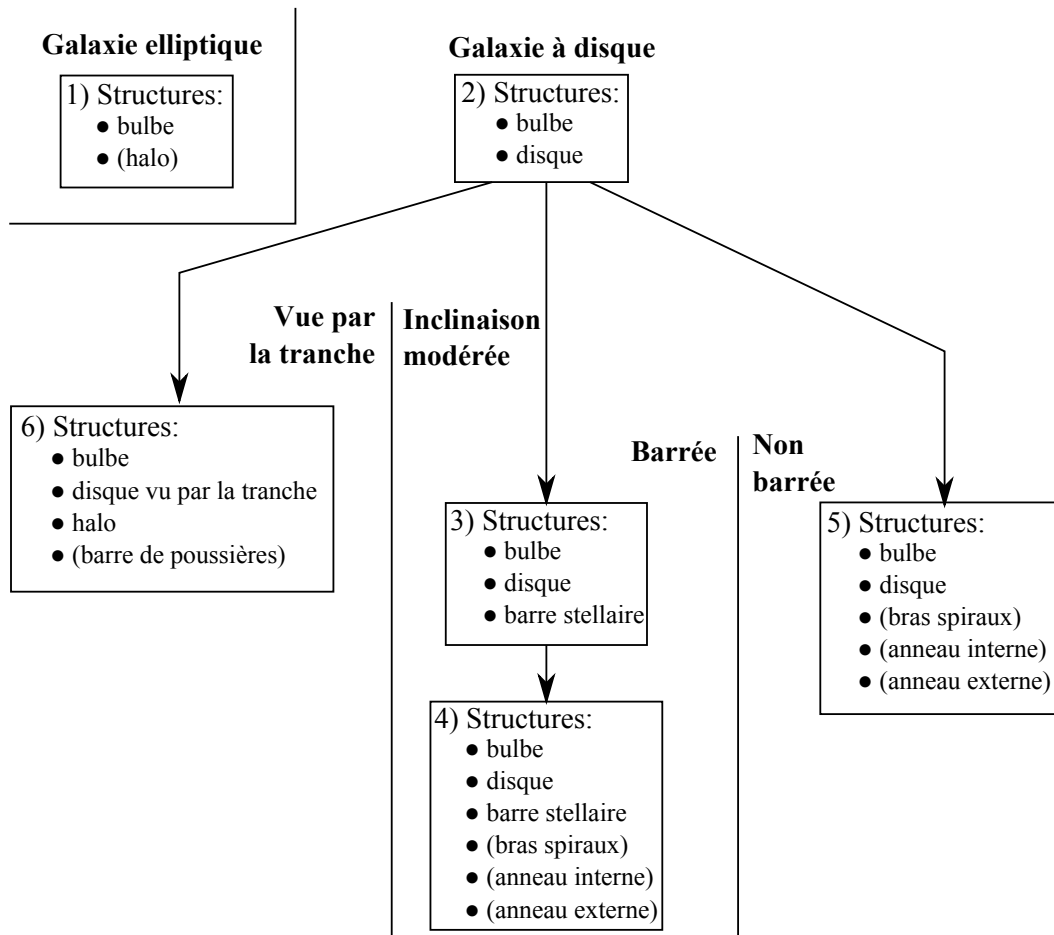


FIGURE 2.14 – Hiérarchie de modèles : plus on descend dans la hiérarchie, plus les modèles sont complexes (ils comportent davantage de structures). Pour estimer les paramètres d'un modèle particulier, on estime toute la branche menant à ce modèle en initialisant l'estimation d'un modèle par les résultats d'estimation du modèle précédent. Le premier modèle de la hiérarchie ainsi que les structures introduites dans les modèles plus fins sont initialisés par des procédures déterministes. Pour chaque modèle, les structures optionnelles sont indiquées entre parenthèses.

(profil calculé en prenant la moyenne des pixels le long d’anneaux concentriques ayant les paramètres estimés par la méthode des moments du second degré). Cette approche permet d’effectuer un nombre d’itérations important en un laps de temps réduit et ainsi d’explorer en profondeur l’espace des solutions correspondant aux différentes répartitions du bulbe et du disque.

#### 2.4.5.2 Barre stellaire

Les paramètres de la barre stellaire sont estimés par une procédure (section B.2) dérivée de la méthode proposée par [40] pour les galaxies vues de face. Cette méthode fournit une estimation de l’angle de position et du rayon de coupure. Le rayon effectif est initialisé à la même valeur que le rayon de coupure et la brillance à un tiers de la brillance du bulbe. L’indice de concentration est initialisé à la valeur intermédiaire de  $n = 0,75$  entre une barre dite plate ( $n = 0,5$ ) et une barre de Freeman ( $n = 1$ ).

Il peut arriver que la procédure d’estimation échoue. Dans ce cas, l’angle de position est défini égal à celui du bulbe et le rayon de coupure est initialisé à 10 arcsec (valeur faible correspondant à une petite barre difficilement visible).

#### 2.4.5.3 Bras spiraux

Les paramètres des bras spiraux sont estimés par une analyse de Fourier de la structure dans un espace log–polaire (section B.3). Cette méthode permet d’estimer l’angle d’ouverture et le rayon de départ (si la barre est présente le rayon de départ est initialisé par son rayon de coupure qui est une mesure plus robuste). L’initialisation des paramètres restants est donnée dans la table 2.8.

#### 2.4.5.4 Anneaux

Les paramètres initiaux des anneaux sont identifiés dans l’espace log–polaire déprojeté (section B.4). Cet algorithme fournit une valeur pour le rayon  $R_0$  des anneaux et une estimation de leur largeur servant à initialiser leur rayon effectif. La brillance des anneaux est fixée à un quart de la brillance du disque.

Si la procédure d’estimation automatique échoue, le rayon de l’anneau interne est fixé à 12 arcsec, le rayon de l’anneau externe à 20 arcsec et leur rayon effectif à 2 arcsec. Si une barre stellaire est présente, le rayon de l’anneau interne est donné par le rayon de coupure de la barre qui est une mesure plus robuste.

#### 2.4.5.5 Barre poussière, halo et disque vu par la tranche

Tous les paramètres de la barre de poussières, du halo et du disque vu par la tranche sont initialisés à partir des paramètres estimés des autres structures ou par des constantes avec les valeurs données dans la table 2.8.

TABLE 2.8: Résumé des variables par structure avec  $\beta$  : le facteur de température  $\beta$ , la méthode d'initialisation et l'algorithme d'estimation associés (voir section 2.4.1). L'acronyme MA (respectivement MAI) fait référence à l'algorithme de Metropolis–Hastings à marche aléatoire (respectivement marche aléatoire inversible) avec une loi candidate gaussienne (respectivement un mélange de deux gaussiennes de moyennes opposées) dont l'écart-type ou la matrice de variance-covariance (respectivement l'écart-type et le paramètre de mélange  $\alpha$ ) sont donnés après le nom de l'algorithme. L'acronyme DA fait référence à l'algorithme à direction adaptative du Snooker, la matrice donnée correspond à la matrice de variance-covariance de l'algorithme à marche aléatoire utilisé pour générer les premiers échantillons.

Structure	Paramètre	$\beta$	Initialisation	Algorithme d'estimation
toutes les structures	$c_x, c_y$	0.01	Barycentre	marche aléatoire $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\mathfrak{B}$	$e$	20	Moment du 2 <sup>d</sup> degré	MA 0,2
	$\alpha$	20	Moment du 2 <sup>d</sup> degré	MA 0,2
	$c$	5	0	MA 0,05
	$I_b$	NA	1/2 du flux total	simulation directe
	$R_b$	20	Moment du 2 <sup>d</sup> degré	DA $\begin{pmatrix} 0,16 & -0,02 \\ -0,02 & 0,01 \end{pmatrix}$
	$n_b$		4	
$\mathfrak{D}$	$e$	20	Moment du 2 <sup>d</sup> degré	MA 0,2
	$\alpha$	20	Moment du 2 <sup>d</sup> degré	MA 0,2
	$I_b$	NA	1/2 du flux total	simulation directe
	$R_b$	20	Moment du 2 <sup>d</sup> degré	MA 1
$\mathfrak{Ba}$	$e$	20	3	MA 0,2
	$\alpha$	20	section B.2	MA 0,2
	$c$	20	1	MA 0,05
	$R_{max}$	20	section B.2	MA 1
	$I_b$	NA	1/3 du flux du bulbe	simulation directe
	$R_b$	20	section B.2	MA 1
	$n_b$	20	0,75	MA 0,1
$\mathfrak{Bi}$	$I$	NA	1/4 du flux du disque	simulation directe
	$R_0$	20	section B.4	MA 1
	$R_b$	20	section B.4	MA 1
	$n_b$	20	0,5	MA 0,1

Suite du tableau sur la page suivante...

TABLE 2.8 – suite de la page précédente

Structure	Paramètre	$\beta$	Initialisation	Algorithme d'estimation
$\mathfrak{R}e$	$I$	NA	1/4 du flux du disque	simulation directe
	$R_0$	20	section B.4	MA 1
	$R_b$	20	section B.4	MA 1
	$n_b$	20	0,5	MA 0,1
$\mathfrak{s}$	$R_0$	30	10 ou $R_{max}$ de la barre stellaire	MA 1
	$\alpha$	60	section B.3	MA 0,1
	$o_s$	40	section B.3	MAI 0,1, 0,15
	$R_s$	40	$R$ du disque	MA 1,0
	$n_s$	40	1	MA 0,1
	$I_b$	NA	1/4 du flux du disque	simulation directe
	$R_b$	10	section B.2	MA 1
$n_b$	10	0,75	MA 0,1	
$\mathfrak{h}$	$e$	10	2	MA 0,2
	$\alpha$	20	$\alpha$ du disque	MA 0,2
	$I_b$	NA	1/2 du flux du disque	simulation directe
	$R_b$	5	25	MA 1
$\mathfrak{D}t$	$\alpha$	10	$\alpha$ du disque	MA 0,2
	$I_b$	NA	1/2 du flux du disque	simulation directe
	$R_z$	10	1	MA 1
	$R_p$	10	40	MA 1
$\mathfrak{B}p$	$C_b$	1	0,9	MA 0,05
	$R_z$	10	0,2	MA 0,1
	$n_z$	10	1	MA 0,1
	$R_p$	10	40	MA 1
	$n_p$	10	1	MA 0,1
	$T_z$	30	0	MAI 0,5, 0,15

## 2.5 Résultats

Cette section présente quelques résultats obtenus sur des images simulées et réelles ainsi qu’une comparaison avec une autre méthode existante. Les résultats exhaustifs sont décrits dans le chapitre 4.5.

### 2.5.1 Comparaison avec un autre algorithme de décomposition

Plusieurs algorithmes de décomposition monobande sont accessibles (Gim2D [43], Galfit [35], Budda [10], ...). Afin de vérifier la cohérence des résultats obtenus avec ceux obtenus par un algorithme éprouvé, nous avons choisi de réaliser une comparaison avec le logiciel Galfit [35]. La comparaison porte sur la décomposition bulbe–disque d’images monobandes de galaxies, le modèle utilisé par Galfit et le nôtre étant alors identiques. Galfit est basé sur un algorithme d’optimisation déterministe et requiert une initialisation manuelle des paramètres avec une certaine précision. Les tests ont porté sur la décomposition de cinq galaxies et les deux méthodes ont donné des résultats très proches (table 2.9).

Objet	EQMN		$M_{\mathcal{D}}$		$M_{\mathcal{B}}$	
	M	G	M	G	M	G
2182	2,53	2,69	12,6	12,55	15,65	15,35
2600	122,64	122,82	11,69	11,60	15,17	15,20
3563	8,48	9,65	13,13	13,13	12,24	12,24
3584	7,25	7,27	12,18	12,18	14,73	14,74
5055	1,56	1,59	14,92	14,95	13,24	13,24

TABLE 2.9 – Comparaison entre notre méthode (M) et Galfit (G) sur la décomposition bulbe–disque de cinq images monobandes de galaxies. Chaque ligne correspond à une galaxie, les colonnes sont de gauche à droite : le numéro PGC de la galaxie, l’erreur quadratique moyenne normalisée EQMN, la magnitude du disque  $M_{\mathcal{D}}$  et la magnitude du bulbe  $M_{\mathcal{B}}$ .

### 2.5.2 Images simulées

L’application de la méthode de décomposition à des images simulées permet de mesurer quantitativement la qualité des estimations par rapport à une vérité terrain.

La figure 2.15 montre un exemple de galaxie spirale barrée simulée sur cinq bandes. On définit le PSNR (*Peak Signal to Noise Ratio*) par :

$$\text{PSNR}(\mathbf{Y}) = 10 \log_{10}(\max(\mathbf{Y})^2 / \sigma^2) \quad (2.57)$$

avec  $\sigma$  l’écart-type du bruit. Le PSNR dans la simulation vaut alors respectivement pour chaque bande : 37,7 dB, 53,5 dB, 55,6 dB, 54,5 dB et 45,3 dB, ce qui correspond à des valeurs typiques en imagerie astronomique extragalactique.

La trace d’une structure ellipsoïdale apparaît dans le résidu et correspond à la plus importante erreur d’estimation. L’analyse détaillée des paramètres estimés montre un léger écart entre l’estimation du descripteur de forme de la barre stellaire et la vérité terrain. Cette imprécision peut provenir de la difficulté à optimiser conjointement le paramètre de coupure de la barre stellaire et le paramètre de rayon de départ des bras stellaires qui sont corrélés.

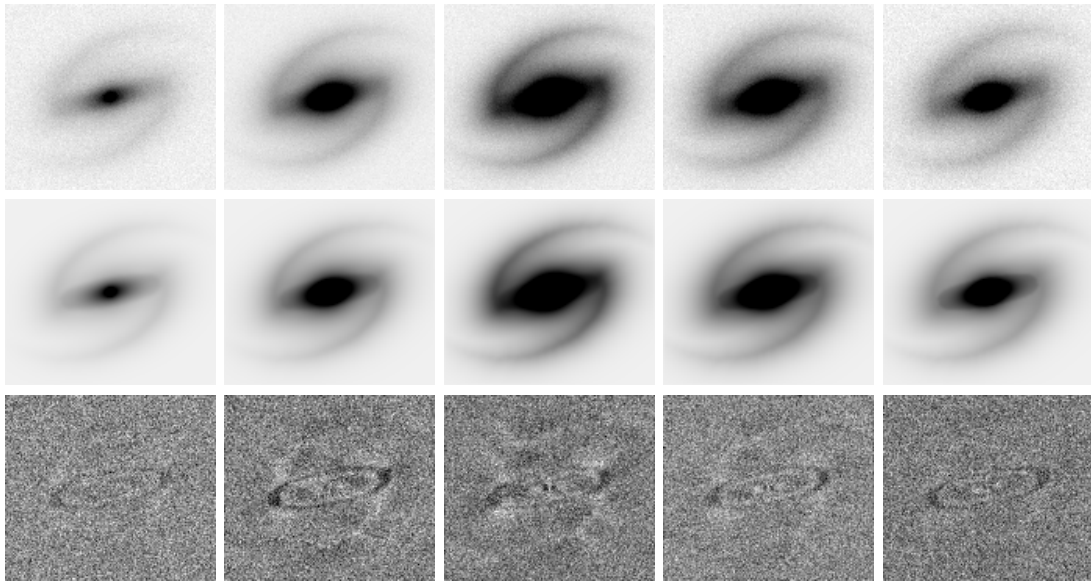


FIGURE 2.15 – Résultat de la méthode sur une image cinq bandes simulée d'une galaxie spirale barrée. La première ligne correspond aux cinq bandes de la simulation, la deuxième aux estimations et la dernière aux images de résidu. La dynamique utilisée pour l'affichage des simulations et des estimations est identique, mais les résidus ont été corrigés de manière indépendante pour accentuer les structures faibles (la dynamique des résidus est inférieure à 2% de la dynamique des simulations).

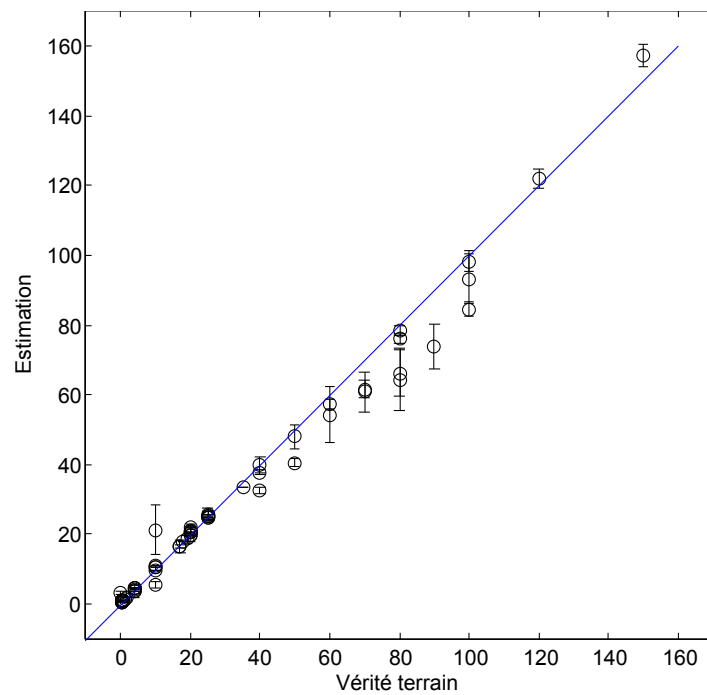


FIGURE 2.16 – Valeurs des estimations par rapport à la vérité terrain pour la figure 2.15



Néanmoins, le maximum local trouvé est très proche du maximum global, aussi bien en terme de probabilité que de distance. L'erreur quadratique moyenne normalisée de la solution trouvée vaut 1,099 et l'erreur absolue maximale par pixel, normalisée par la puissance du bruit, est respectivement pour chaque bande de 1,13, 2,6, 3,1, 2,5 et 1,6.

Le graphique de la figure 2.16 représente les valeurs des paramètres estimés par rapport à la vérité terrain. Les barres d'erreurs correspondent à trois fois l'écart-type estimé sur le paramètre. L'axe des abscisses représente la valeur de la vérité terrain et l'axe des ordonnées représente les estimés. Si l'estimation était parfaite, tous les points se trouveraient sur la diagonale. Lorsqu'un point se situe sous la diagonale, cela signifie que le paramètre est sous-estimé et vice versa. La plupart des paramètres sont très proches de la diagonale, témoignant d'une bonne estimation mais les erreurs sont souvent sous-estimées.

Des tests sur plusieurs galaxies simulées ont montré que les paramètres de forme tels que l'élongation, l'angle de position ou le centre sont estimés avec une très bonne précision (erreur relative inférieure à 0,1%), mais les estimations des paramètres de la fonction de Sérsic sont moins bonnes. Ces imprécisions proviennent majoritairement de l'extension très limitée du bulbe et de la barre stellaire (l'essentiel du flux est porté par seulement quelques pixels). Dans ce cas, des paramètres bien qu'assez différents peuvent mener à de très faibles différences de vraisemblance.

### 2.5.3 Images réelles

Cette section présente des tests réalisés sur deux images cinq bandes extraites du SDSS (section 1.2.1.4) d'environ 200 pixels de côté.

**Galaxie PGC 35538** L'objet PGC 35538 (figure 2.17) est une galaxie spirale barrée de brillance moyenne vue presque de face. Elle possède un bulbe peu étendu et une barre stellaire confinée dans ses régions internes. Ses bras spiraux sont assez resserrés et assez mal définis mais leur position est marquée par de nombreuses régions H II. L'estimation obtenue est bonne : le bulbe, le disque et la barre stellaire semblent très bien estimés, et la solution trouvée pour les bras spiraux est raisonnable malgré la difficulté à extraire visuellement deux bras symétriques de l'observation. La carte des régions H II sélectionnées par l'algorithme (figure 2.18) confirme la qualité de l'estimation et le rôle prépondérant joué par la technique de masquage dans un tel cas où les bras sont mieux définis par les régions H II que par leur contrepartie continue.

**Galaxie PGC 218** L'objet PGC 218 (figure 2.19) est une galaxie spirale vue par la tranche. Elle possède un bulbe très étendu et une barre de poussières coupe nettement l'objet en deux. L'estimation obtenue est bonne, le bulbe et le halo reproduisent bien la structure astrophysique étendue dans les trois dimensions alors que le disque vu par la tranche est confiné en hauteur. La barre de poussières est correctement modélisée malgré une légère asymétrie présente dans l'observation.

La figure 2.20 représente les profils de brillance des deux galaxies précédentes et de leurs estimations. Il apparaît que, malgré la complexité des différentes fonctions, un ajustement correct peut être réalisé automatiquement.

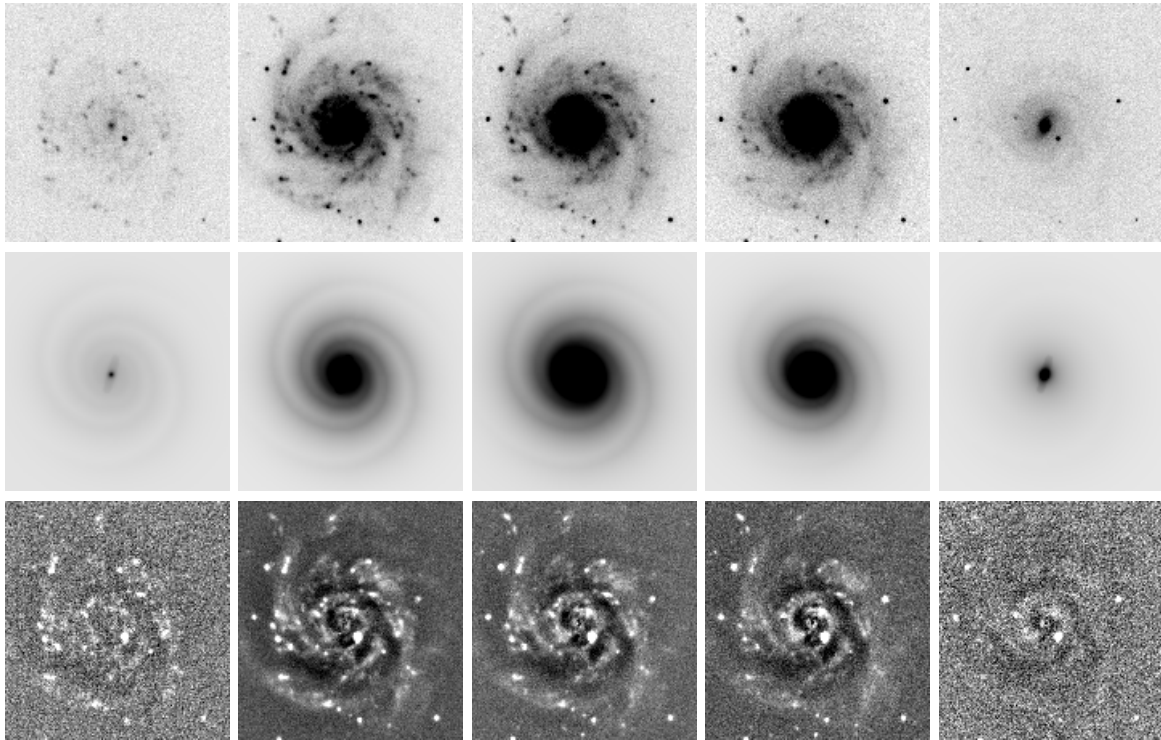


FIGURE 2.17 – Application de la méthode à une observation cinq bandes de la galaxie spirale barrée PGC 35538. La première ligne montre les cinq bandes de l’observation, la deuxième ligne l’estimation et la troisième le résidu. Les observations et les simulations sont affichées avec la même dynamique de pixels. La dynamique des résidus est ajustée image par image afin d’accentuer les détails.

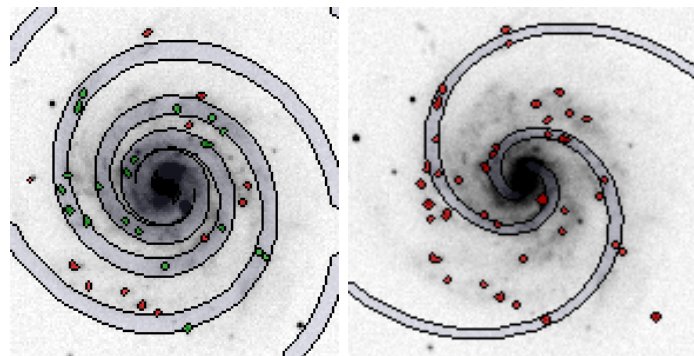


FIGURE 2.18 – De gauche à droite : résultat avec et sans la technique de masquage adaptatif pour la galaxie PGC 35538 (figure 2.17). Les zones rouges et vertes correspondent aux régions H II présentes sur la carte. Les zones vertes ont été masquées par l’algorithme adaptatif contrairement aux zones rouges qui sont localisées trop loin de la crête de la spirale (zone en gris bleu). On voit que sans l’aide du masquage adaptatif (à droite) l’estimation est moins bonne, la structure spirale ne passe pas par la majorité des zones H II.

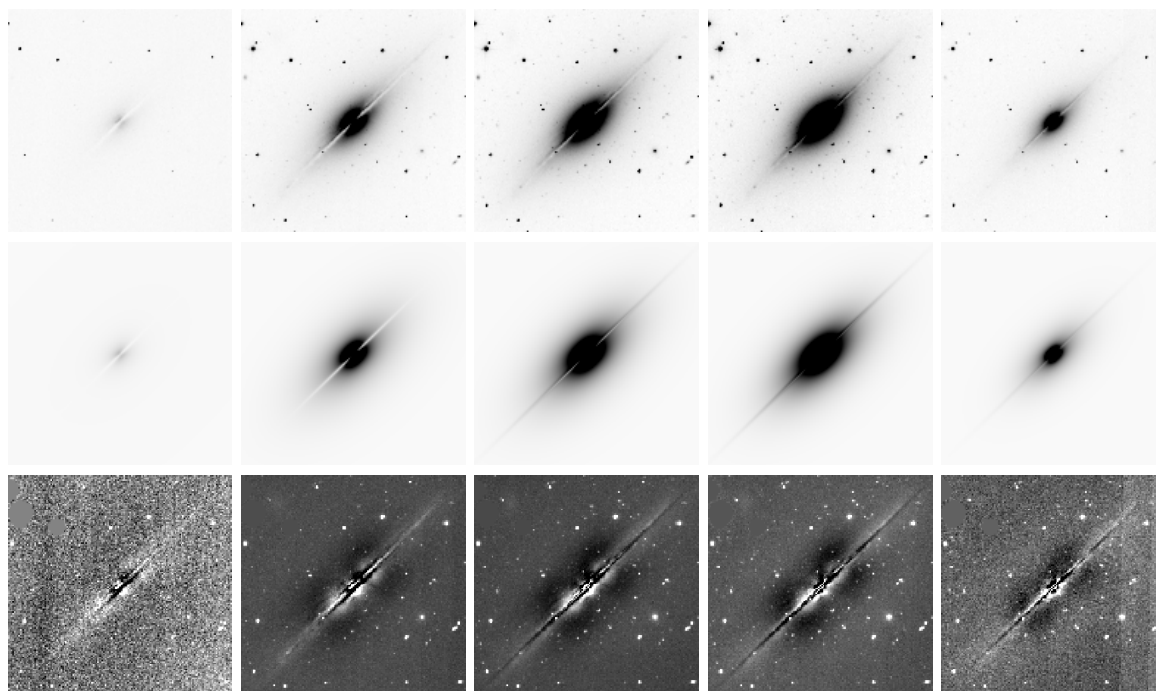


FIGURE 2.19 – Application de la méthode à une observation cinq bandes de la galaxie spirale PGC 218 vue par la tranche. La première ligne montre les cinq bandes de l'observation, la deuxième ligne l'estimation et la troisième le résidu. Les observations et les simulations sont affichées avec la même dynamique de pixels. La dynamique des résidus est ajustée image par image afin d'accentuer les détails.

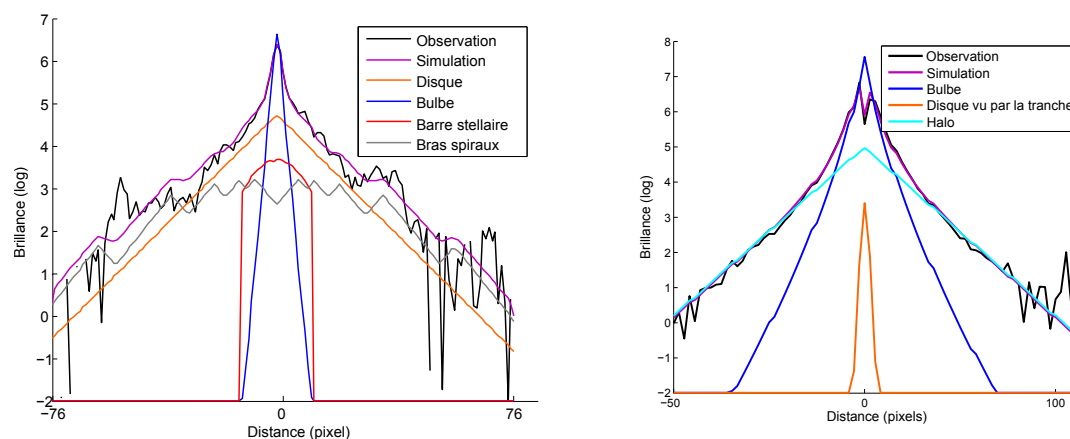


FIGURE 2.20 – Coupe de profil des observations et des estimations pour les galaxies PGC 35538 (figure 2.17) et PGC 218 (figure 2.19) dans la bande  $g$ . La coupe de PGC 35538 passe par l'axe majeur de la barre stellaire alors que la coupe de PGC 218 est perpendiculaire au plan du disque. Les différentes courbes représentées sont : l'observation en noir, l'estimation en violet et les différentes structures présentes dans la simulation (sans PSF) : le disque en orange, le bulbe en bleu, la barre stellaire en rouge, les bras spiraux en gris et le halo en cyan. L'intensité des pixels est donnée en échelle logarithmique.

### 2.5.4 Apports du multibande

L'approche multibande offre plusieurs avantages. Premièrement, elle permet d'accroître la robustesse du processus en mutualisant l'information disponible sur l'ensemble des bandes grâce aux contraintes inter-bandes. Ce premier aspect est particulièrement intéressant lorsque certaines bandes ont un rapport signal-sur-bruit nettement meilleur que d'autres, comme c'est le cas en imagerie astronomique. De plus l'approche multibande assure la cohérence des mesures entre les bandes : elle permet d'obtenir une vue homogène de l'objet sur l'ensemble des bandes considérées. Finalement, le multibande apporte une plus grande robustesse aux objets parasites.

Par exemple, dans le cas de la galaxie spirale PGC 10065 (figure 2.21), lorsque la bande  $g$  est traitée seule, la détection est perturbée par une étoile très brillante au premier plan qui se trouve en haut de la galaxie (effet de projection). Lorsque l'on introduit une deuxième bande dans le processus (bandes  $g$  et  $i$ ), l'algorithme estime correctement la galaxie.

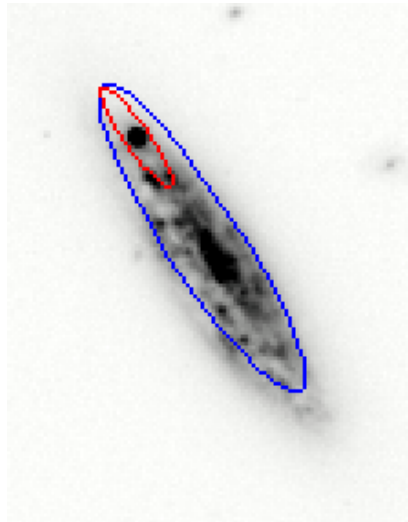


FIGURE 2.21 – Galaxie PGC 10065 : un traitement monobande (bande  $g$ ) de cette image donne un résultat incorrect (ellipse rouge), l'ajout d'une seconde bande (bande  $i$ ) permet à l'algorithme d'obtenir une bonne estimation (ellipse bleue).

### 2.5.5 Temps de calcul

Les tests ont été réalisés sur un processeur Intel Core 2 (2,66 GHz) avec un code écrit en Java. Le temps d'estimation dépend essentiellement de la complexité du modèle final : de cinq minutes pour le modèle bulbe disque à deux heures pour un modèle de galaxie spirale barrée avec anneau. L'estimation totale d'un modèle (en parcourant la hiérarchie) peut donc nécessiter jusqu'à 2h30. Les temps approximatifs moyen et le nombre d'itérations nécessaires à l'estimation de certaines compositions de structures sont indiqués dans la table 2.10. L'essentiel du temps de calcul est consacré au calcul de la vraisemblance qui requière l'évaluation de nombreuses fonctions coûteuses en chaque pixel (puissance, exponentielle, fonction trigonométrique, ...), une étape de convolution et une transformée de distance (pour la spirale).

Structures utilisées	Temps	Itérations
$\mathcal{B} \mathcal{D}$	5 min	100
$\mathcal{B} \mathcal{D} \mathcal{B}a$	10 min	150
$\mathcal{B} \mathcal{D} \mathcal{B}a \text{ s } \mathcal{R}i$	1 à 2 h	400
$\mathcal{B} \mathcal{D}t \mathcal{H} \mathcal{B}p$	1 h	250

TABLE 2.10 – Temps et nombre d’itérations approximatifs nécessaires à l’estimation de différents modèles.

Par ailleurs, on montre également que le nombre d’itérations nécessaires pour obtenir une estimation correcte est faible pour ce type d’application. Les tests menés sans la hiérarchie de modèle ont montré que, pour compenser une initialisation de faible qualité, il est nécessaire d’ajouter un millier d’itérations au temps de chauffe menant à un temps d’estimation largement plus important.

## 2.6 Contributions du chapitre

Ce chapitre a présenté un ensemble de modèles paramétriques pour les structures principales d’une galaxie ainsi qu’un algorithme d’estimation automatique basé sur les méthodes de Monte Carlo par Chaines de Markov. La méthode, qui a été évaluée sur des images simulées et réelles, s’avère être robuste et précise.

La première contribution de ce chapitre porte sur la définition d’un modèle multibande de galaxies qui a consisté en une extension d’anciens modèles au cas multibande mais également à la création de modèles entièrement nouveaux. Ainsi, le modèle de bras spiraux introduit la possibilité de compléter un modèle paramétrique traditionnel par un filtre paramétrique sur les observations. Les paramètres du filtre sont alors estimés comme faisant partie intégrante du modèle et, contrairement à un simple pré-traitement, cette approche permet de conserver naturellement l’information sur les zones filtrées, comme la localisation des zones H II.

La deuxième contribution porte sur la création d’une nouvelle stratégie de recuit simulé permettant l’utilisation de températures multiples au sein d’un échantillonneur de Gibbs. Ce schéma est particulièrement adapté aux problèmes d’optimisation incluant des variables de natures variées (longueur, brillance, angle, concentration, . . .) et permet de mieux distribuer l’effort de simulation en se concentrant sur les paramètres pour lesquels la fonction d’énergie est la plus complexe. Cette approche est complétée par une heuristique permettant de déterminer une température initiale pour chaque paramètre.

Enfin, la définition d’une hiérarchie de modèles permet la mise en place d’une stratégie d’initialisation globale, chaque modèle tirant parti de l’initialisation fournie par le modèle de complexité inférieure. Cette méthode permet de réduire le temps d’estimation tout en offrant une robustesse accrue, comme le montreront les résultats sur une base d’images consécutive au chapitre 4.5.

Le travail présenté dans ce chapitre a été validé par deux conférences [36,37], un chapitre de livre [9] et un article de journal [38].

## Bibliographie

- [1] P. D. ALLEN, S. P. DRIVER, A. W. GRAHAM, E. CAMERON, J. LISKE et R. DE PROPRIS : The Millennium Galaxy Catalogue : Bulge-Disk Decomposition of 10095 Nearby Galaxies. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 371:2–18, septembre 2006.
- [2] C. ANDRIEU et J. THOMS : A Tutorial on Adaptive MCMC. *Statistics and Computing*, 18(4):343–373, 2008.
- [3] E. ATHANASSOULA : The Spiral Structure of Galaxies. *Physics Reports* , 114:319–403, 1984.
- [4] E. BERTIN et S. ARNOUITS : SExtractor : Software for Source Extraction. *Astronomy and Astrophysics, Supplement*, 117:393–404, juin 1996.
- [5] S.P. BROOKS et G.O. ROBERTS : Assessing Convergence of Markov Chain Monte Carlo Algorithms. *Statistics and Computing*, 8:319–335, 1997.
- [6] S. CHIB et E. GREENBERG : Understanding the Metropolis-Hastings Algorithm. *The American Statistician*, 49(4):327–335, 1995.
- [7] L. CIOTTI et G. BERTIN : Analytical Properties of the  $R^{1/m}$  Law. *Astronomy and Astrophysics*, 352:447–451, décembre 1999.
- [8] C. COLLET, J. CHANUSSOT et K. CHEHDI, éditeurs. *Multivariate Image Processing*. John Wiley and Sons, décembre 2009.
- [9] C. COLLET, B. PERRET et V. MAZET : *Multivariate Image Processing : Panoramic Integral-Field Spectrograph : Ultraspectral Data to Understand the History of the Universe*, chapitre 14, pages 437–450. ISBN-13 : 978-1848211391. John Wiley and Sons, décembre 2009.
- [10] R. E. DE SOUZA, D. A. GADOTTI et S. DOS ANJOS : BUDDA : A New Two-dimensional Bulge/Disk Decomposition Code for Detailed Structural Analysis of Galaxies. *Astrophysical Journal, Supplement*, 153:411–427, août 2004.
- [11] G. DE VAUCOULEURS : Classification and Morphology of External Galaxies. *Handbuch der Physik*, 53:275–310, 1959.
- [12] S. DESCAMPS, X. DESCOMBES, A. BÉCHET et J. ZERUBIA : Automatic Flamingo Detection Using a Multiple Birth And Death Process. *Dans Proc. IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*, pages 1113–1116, Las Vegas, USA, mars 2008.
- [13] L. DEVROYE : *Non-Uniform Random Variate Generation*. Springer-Verlag, New York, 1986.
- [14] J.M. FLEGAL : *Monte Carlo Standard Errors in Markov Chain Monte Carlo*. Thèse de doctorat, University of Minnesota, 2008.
- [15] J.M. FLEGAL, M. HARAN et G.L JONES : Markov Chain Monte Carlo : Can We Trust the Third Significant Figure? *Statistical Science*, 23(2):250–260, 2009.
- [16] J.M. FLEGAL et G.L JONES : Batch Means and Spectral Variance Estimators in Markov Chain Monte Carlo. *Annals of Statistics*, to appear, 2009.
- [17] D. A. GADOTTI : Image Decomposition of Barred Galaxies and AGN Hosts. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 384:420–439, février 2008.

- [18] A. GELMAN, G.O. ROBERTS et W.R. GILKS : Efficient Metropolis Jumping Rules. *Dans Bayesian Statistics*, volume 5, pages 599–607. Oxford University Press, 1996.
- [19] S. GEMAN et D. GEMAN : Stochastic Relaxation, Gibbs Distributions and the Bayesian Restoration of Images. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 6(6):721–741, novembre 1984.
- [20] W.R. GILKS, S. RICHARDSON et D.J. SPIEGELHALTER, éditeurs. *Markov Chain Monte Carlo In Practice*. Chapman & Hall/CRC, Washington, D.C., 1996.
- [21] W.R. GILKS, G.O. ROBERTS et S.K. SAHU : Adaptive Markov Chain Monte Carlo through Regeneration. *Journal of the American Statistical Association*, 93(443):1045–1054, septembre 1998.
- [22] A. W. GRAHAM : An Investigation into the Prominence of Spiral Galaxy Bulges. *Astronomical Journal*, 121:820–840, février 2001.
- [23] A. W. GRAHAM et S. P. DRIVER : A Concise Reference to (Projected) Sérsic  $R^{1/n}$  Quantities, Including Concentration, Profile Slopes, Petrosian Indices, and Kron Magnitudes. *Publications of the Astronomical Society of Australia*, 22:118–127, 2005.
- [24] J. HE et X. YANG : Distributions of Constant Directional Derivatives and a Model of Spiral Patterns. *Astrophysics and Space Science*, 302:7–15, avril 2006.
- [25] G.L. JONES, M. HARAN, B.S. CAFFO et R. NEATH : Fixed-Width Output Analysis for Markov Chain Monte Carlo. *Journal of the American Statistical Association*, 101:1537–1547, 2006.
- [26] S. KIRKPATRICK, C. D. GELATT et M. P. VECCHI : Optimization by Simulated Annealing. *Science*, 220(4598):671–680, mai 1983.
- [27] N. D. KYLAFIS, A. MISIRIOTIS, J. PAPAMASTORAKIS et E. M. XILOURIS : Modelling the Dust Content of Spiral Galaxies. *Astrophysics and Space Science*, 276:531–538, mars 2001.
- [28] C. LACOSTE, X. DESCOMBES, J. ZERUBIA et N. BAGHDADI : Hydrographic Network Extraction from Radar Satellite Images using a Hierarchical Model within a Stochastic Geometry Framework. Rapport de recherche 5697, INRIA, France, septembre 2005.
- [29] F. LAFARGE, X. DESCOMBES, J. ZERUBIA et M. PIERROT-DESEILLIGNY : Structural Approach for Building Reconstruction from a Single DSM. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 32(1):135–147, 2010.
- [30] V. MAZET, D. BRIE et J. IDIER : Simulation of Positive Normal Variables Using Several Proposal Distributions. *Statistical Signal Processing, 2005 IEEE/SSP 13th Workshop*, pages 37–42, juillet 2005.
- [31] A. MISIRIOTIS, N. D. KYLAFIS, J. PAPAMASTORAKIS et E. M. XILOURIS : Is the Exponential Distribution a Good approximation of Dusty Galactic Disks? *Astronomy and Astrophysics*, 353:117–123, janvier 2000.
- [32] J. MØLLER et R. P. WAAGEPETERSEN : *Statistical Inference and Simulation for Spatial Point Process*. Chapman & Hall/CRC, 2004.
- [33] A. MOHAMMAD-DJAFARI, éditeur. *Inverse Problems in Imaging and Vision*. John Wiley and Sons, 2010.

- [34] C. Y. PENG, L. C. HO, C. D. IMPEY et H.-W. RIX : Detailed Decomposition of Galaxy Images. II. Beyond Axisymmetric Models. *Astronomical Journal*, 139:2097–2129, juin 2010.
- [35] C. Y. PENG, L. C. HO, C. D. IMPEY et H.W. RIX : Detailed Structural Decomposition of Galaxy Images. *Astronomical Journal*, 124:266–293, juillet 2002.
- [36] B. PERRET, V. MAZET, C. COLLET et E. SLEZAK : Décomposition d’images multispectrales de galaxies au moyen d’algorithmes de Monte Carlo par chaînes de Markov. *Dans 22e Colloque GRETSI*, september 2009.
- [37] B. PERRET, V. MAZET, C. COLLET et E. SLEZAK : Galaxy Decomposition in Multispectral Images Using Markov Chain Monte Carlo Algorithms. *Dans Arnt-Børre SALBERG, Jon Yngve HARDEBERG et Robert JENSSEN, éditeurs : Scandinavian Conference on Image Analysis*, volume 5575 de *LNCS*, pages 209–218. Springer, 2009.
- [38] B. PERRET, V. MAZET, C. COLLET et E. SLEZAK : Hierarchical Multispectral Galaxy Decomposition using a MCMC Algorithm with Multiple Temperature Simulated Annealing. *accepté, Pattern Recognition*, 2010.
- [39] G. PERRIN, X. DESCOMBES et J. ZERUBIA : A Non-Bayesian Model for Tree Crown Extraction using Marked Point Processes. Rapport de recherche 5846, INRIA, France, février 2006.
- [40] M. W. REGAN et D. M. ELMEGREEN : K-Band Observations of Barred Spiral Galaxies. *Astronomical Journal*, 114:965–975, septembre 1997.
- [41] C.P. ROBERT et G. CASELLA : *Monte Carlo Statistical Methods*. Springer-Verlag, second édition, 2004.
- [42] G.O. ROBERTS et J.S. ROSENTHAL : Coupling and Ergodicity of Adaptive MCMC. Rapport technique, Department of Mathematics and Statistics, Lancaster University, mars 2007.
- [43] L. SIMARD, C. N. A. WILLMER, N. P. VOGT, V. L. SARAJEDINI, A. C. PHILLIPS, B. J. WEINER, D. C. KOO, M. IM, G. D. ILLINGWORTH et S. M. FABER : The DEEP Groth Strip Survey. II. Hubble Space Telescope Structural Parameters of Galaxies in the Groth Strip. *Astrophysical Journal, Supplement*, 142:1–33, septembre 2002.
- [44] H. W. SORENSON : *Parameter Estimation : Principles and Problems*. M. Dekker, 1980.
- [45] J. L. SÉRSIC : *Atlas de galaxies australes*. Cordoba, Argentina : Observatorio Astronómico, 1968.
- [46] R. STRAND : *Distance Functions and Image Processing on Point-Lattices : with focus on the 3D face- and body-centered cubic grids*. Thèse de doctorat, Uppsala University, Centre for Image Analysis, 2008.
- [47] K. SUN, N. SANG et T. ZHANG : Marked Point Process for Vascular Tree Extraction on Angiogram. *Dans LNCS : Energy Minimization Methods in Computer Vision and Pattern Recognition*, pages 467–478, Berlin, 2007.
- [48] P. C. VAN DER KRUIT et L. SEARLE : Surface Photometry of Edge-On Spiral Galaxies. I - A Model for the Three-Dimensional Distribution of Light in Galactic Disks. *Astronomy and Astrophysics*, 95:105–115, février 1981.





# Approches morphologiques

---

“

Le dessin n'est pas la forme, il est la manière  
de voir la forme.

”

Edgar Degas

## Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>97</b>
<b>3.2</b>	<b>Rappels mathématiques et théorie des connexions</b>	<b>101</b>
3.2.1	Pré-requis et notations	101
3.2.1.1	Relation	101
3.2.1.2	Treillis	101
3.2.1.3	Images	103
3.2.1.4	Graphes	104
3.2.2	Morphologie mathématique et connexion	104
3.2.2.1	Bases de la morphologie mathématique	105
3.2.2.2	Connexions ensemblistes	105
3.2.2.3	Connexions sur les treillis	106
<b>3.3</b>	<b>Arbres des composantes connexes</b>	<b>108</b>
3.3.1	Définition	108
3.3.2	Schéma d'utilisation et impact du type d'ordre vectoriel	109
3.3.2.1	Filtrage et reconstruction	109
3.3.2.2	Influence du type d'ordre vectoriel	111
<b>3.4</b>	<b>Hyper-connexions et arbre des composantes hyper-connexes</b>	<b>112</b>
3.4.1	Théorie des hyper-connexions	112
3.4.1.1	Opérateurs hyper-connexes et ouvertures hyper-connexes	112
3.4.1.2	Z-opérateurs	113
3.4.1.3	Hyper-reconstruction	113
3.4.1.4	Opérateurs hyper-connexes	114
3.4.1.5	Opérateur chapeau	114
3.4.1.6	Nouvelles propriétés	114
3.4.1.7	Exemples	115
3.4.2	Vers une nouvelle axiomatique	118

3.4.3	Arbre des composantes hyper-connexes . . . . .	122
3.4.4	Expérimentation avec l'arbre des composantes h-connexes floues . . . . .	124
<b>3.5</b>	<b>Applications en imagerie astronomique multibande . . . . .</b>	<b>125</b>
3.5.1	Choix d'une relation d'ordre . . . . .	126
3.5.2	Séparation de sources . . . . .	128
3.5.3	Extraction des bras spiraux . . . . .	128
3.5.4	Détection des zones H II . . . . .	130
<b>3.6</b>	<b>Contributions du chapitre . . . . .</b>	<b>130</b>
	<b>Bibliographie . . . . .</b>	<b>131</b>

---

## Notations

### Notations mathématiques

Notation	Signification
$\emptyset$	Ensemble vide
$\mathbb{N}$	Ensemble des entiers naturels
$\mathbb{N}^*$	Ensemble des entiers naturels privé de 0 : $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$
$\mathbb{Z}$	Ensemble des entiers relatifs
$\overline{\mathbb{Z}}$	Ensemble des entiers relatifs étendus : $\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} \cup \{-\infty, +\infty\}$
$\mathbb{R}$	Ensemble des réels
$\overline{\mathbb{R}}$	Ensemble des réels étendus : $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$
$E^F$	Ensemble des applications de $F$ dans $E$
$\vee$	Disjonction logique OU ou opérateur supremum d'un treillis
$\wedge$	Conjonction logique ET ou opérateur infimum d'un treillis
$\bigvee$	Supremum d'un ensemble
$\bigwedge$	Infimum d'un ensemble
$\subset$	Relation d'inclusion stricte sur les ensembles ( $\subset \Leftrightarrow \subsetneq$ )
$\subseteq$	Relation d'inclusion sur les ensembles ( $A \subseteq B \Leftrightarrow (A \subset B) \vee (A = B)$ )
$\mathcal{P}(E)$	Famille des parties de $E$ : $\mathcal{P}(E) = \{A \subseteq E\}$
$\mathcal{S}(E)$	Famille des singletons de $E$ : $\mathcal{S}(E) = \{\{a\} \mid a \in E\}$
$\mathcal{D}$	Domaine d'une fonction
$\mathcal{T}$	Espace de valeurs d'une fonction
$\mathcal{I}$	Espace des images : $\mathcal{I} = \mathcal{T}^{\mathcal{D}}$ avec $\mathcal{T}$ un treillis complet
$\delta_x^t$	Impulsion de support $x$ et de hauteur $t$
$\text{supp}(f)$	Support de l'image $f$
$\bar{f}^t$	Seuillage de l'image $f$ au niveau $t$ : $\bar{f}^t = \{x \in \mathcal{D} \mid f(x) \geq t\}$
$t^+$	Dans un arbre, ensemble des fils du nœud $t$
$t_-$	Dans un arbre, père du nœud $t$
$h(t)$	Hauteur du nœud $t$
$\leq_m$	Ordre vectoriel partiel marginal
$\leq_L$	Ordre vectoriel total lexicographique
$\leq_A$	Ordre vectoriel total pour l'astronomie
$\leq_{A_o}$	Ordre vectoriel pondéré total pour l'astronomie
$\leq_{A_p}$	Pré-ordre vectoriel pondéré total pour l'astronomie
$E_n(v)$	Énergie pondérée du vecteur $v$

Par abus de notation, on écrira «  $\forall x, y \in E$  » à la place de «  $\forall (x, y) \in E \times E$  » ou «  $\forall (x, y) \in E^2$  », sauf dans les cas particuliers où l'on souhaite souligner le fait que  $(x, y)$  forment un couple.

### Notations de morphologie mathématique

Notation	Signification
$\mathcal{L}$	Un treillis
$\mathcal{S}$	Famille sup-génératrice
$s$	Un sup-générateur
$\mathcal{C}$	Une connexion
$\mathcal{C}^+$	Une hyper-connexion
$\mathcal{C}_a$	Ensemble des composantes connexes de $a$ relativement à $\mathcal{C}$
$\bowtie$	Critère de chevauchement
$\gamma_s^*(a)$	Opérateur h-connexe de $a$ marqué par $s$
$\gamma_s(a)$	Ouverture h-connexe de $a$ marqué par $s$
$\overset{a}{\sim}$	Relation d'équivalence sur les sup-générateurs par rapport à $a$
$\overset{a*}{\sim}$	Relation d'équivalence alternative sur les sup-générateurs par rapport à $a$
$\zeta_s(a)$	Z-opérateur de $a$ marqué par $s$ et défini par rapport à $\overset{a}{\sim}$
$\zeta_s^*(a)$	Z-opérateur de $a$ marqué par $s$ et défini par rapport à $\overset{a*}{\sim}$
$[a]_m$	H-reconstruction de $a$ marquée par $m$
$[a]_m^\zeta$	H-reconstruction de $a$ marquée par $m$ basée sur $\zeta_s(a)$
$[a]_m^{\zeta^*}$	H-reconstruction de $a$ marquée par $m$ basée sur $\zeta_s^*(a)$
$\Xi_m(a)$	Opérateur chapeau de $a$ marqué par $m$
$\Xi_m^\zeta(a)$	Opérateur chapeau de $a$ marqué par $m$ basée sur $\zeta_s(a)$
$\preceq$	Relation d'ordre partiel sur les z-zones

## 3.1 Introduction

LA DÉTECTION et la caractérisation d'objets constituent une problématique centrale de l'imagerie astronomique. La modélisation paramétrique proposée dans le chapitre précédent permet une caractérisation détaillée et précise mais repose sur des pré-traitements, des méthodes d'initialisation et des filtres adaptatifs. Les méthodes d'analyse par morphologie mathématique, notamment les méthodes d'analyse par arbres de composantes connexes et les notions de connexions afférentes, offrent une solution privilégiée pour ce type de tâches. Néanmoins, les théories actuelles souffrent d'une sensibilité assez forte au bruit et d'une difficulté à prendre en compte l'information multibande.

Ce chapitre propose, dans un premier temps, une revue des méthodes actuelles d'analyse par arbre de composantes connexes et leur extension au cas multibande. Nous développons ensuite un nouveau modèle basé sur des connexions évoluées appelées hyper-connexions (h-connexions) et permettant la définition d'une représentation hiérarchique généralisée. Cette nouvelle représentation, plus robuste et efficace que les arbres de composantes connexes, est alors exploitée pour résoudre les tâches complémentaires aux techniques de modélisation paramétrique définies dans le chapitre précédent.

**Connexions et arbres de composantes connexes.** La connexion dans les images est une information de bas niveau de première importance. Elle permet le regroupement des pixels en composantes connexes qui servent alors de support à un raisonnement de plus haut niveau sémantique. La notion de connexion pour des ensembles quelconques a été proposée à la fin des années 80 par Serra [45] afin de disposer d'une théorie algébrique capable d'unifier les différentes approches qui existaient alors (principalement la connexion au sens topologique et la connexion dans les graphes). Cette formalisation a eu un impact fort sur la morphologie mathématique et a permis l'émergence des opérateurs connexes, pour les images binaires [19] et les images en niveaux de gris [42, 43, 48], qui ont la propriété de n'agir que par conservation ou suppression de zones connexes préservant ainsi les frontières des objets.

Les opérateurs connexes basés sur les connexions ensemblistes ont obtenu de nombreux succès en analyse et traitement d'images : filtrage [8, 10, 43], segmentation, détection [3, 12, 13, 21, 25, 47] ou encore séparation de sources [4]. Toutes ces applications reposent sur les connexions ensemblistes, et leur extension aux images en niveaux de gris est basée sur la décomposition des images par seuillages successifs (découpage en zones plates). Cette décomposition présente l'avantage d'être représentable par une structure d'arbre [42] (figure 3.1) connue sous les noms de : arbre de composantes connexes [26], Max-Tree [42], dendrone [9, 17] ou encore arbre de confinement [23].

Néanmoins, cette approche par zones plates présente des inconvénients liés à la sensibilité de la décomposition au bruit (figure 3.2) et aux limites des connexions ensemblistes.

Des développements récents ont cherché à améliorer cette situation en proposant la notion de connexion de seconde génération [29, 31, 39, 52], mais celle-ci reste limitée aux ensembles. Il existe donc un besoin croissant d'une théorie plus générale des connexions, applicable directement aux fonctions ; cette théorie peut alors servir à la définition des arbres de composantes connexes sans avoir recours à une technique de seuillage.

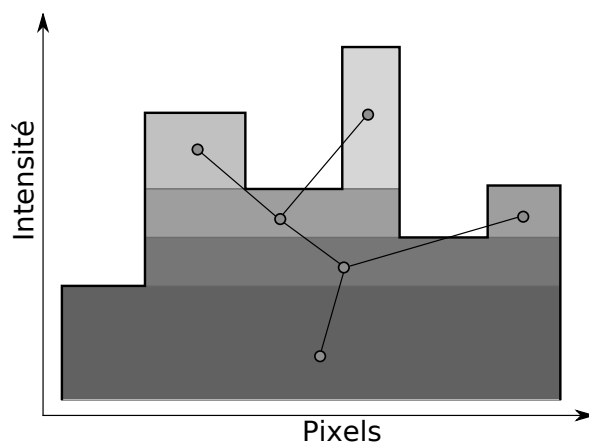


FIGURE 3.1 – Exemple de décomposition en arbre de composantes connexes d'un signal à une dimension. Le signal est seuillé en utilisant des seuils de valeurs croissantes. Les composantes connexes au sens du voisinage forment les nœuds de l'arbre. Lorsqu'une composante connexe n'évolue pas entre deux valeurs de seuils successives, on fusionne leurs nœuds respectifs afin d'alléger la structure.

**Connexions évoluées et représentations hiérarchiques.** Près de 10 ans après sa première proposition, Serra a publié une généralisation des connexions [46], cette fois basée sur la théorie des treillis complets et dont une variante appelée h-connexion a obtenu un écho important ces dernières années [6, 7, 27, 28, 30, 55, 56]. Cette théorie offre la possibilité de remplacer l'approche par zones plates par une méthode plus robuste, capable de réduire les effets du bruit et de fournir une représentation plus compacte des images. Néanmoins cette théorie est encore jeune et le peu de résultats théoriques existants la rend difficile à manipuler.

Dans ce chapitre, nous étudions dans un premier temps l'utilisation des arbres de composantes connexes pour le traitement d'images multibandes. L'arbre est défini dans le cas général des treillis de fonctions et un cadre général d'utilisation est proposé. La nécessité de définir un ordre total ou un pré-ordre total, pour les données multibandes, est examinée ainsi que les conséquences du choix effectué.

Nous nous intéressons ensuite à la théorie des h-connexions pour laquelle nous proposons un développement théorique basé sur une nouvelle axiomatique, ainsi qu'un moyen de générer une représentation en arbre de composantes h-connexes. Dans son état actuel, la théorie des h-connexions est basée sur trois axiomes :

1. le plus petit élément est h-connexe ;
2. les sup-générateurs sont h-connexes ;
3. le supremum d'éléments h-connexes se *chevauchant* selon un critère donné est connexe.

Les axiomes 1 et 2, qui établissent que les éléments *minimaux* sont connexes, sont bien admis mais l'axiome 3 reposant sur le critère de chevauchement est moins bien établi. Intuitivement, cet axiome formalise la notion de chevauchement, mais sa formulation est si peu contraignante qu'aucune propriété n'en découle. En fait, avec cette axiomatique, la décomposition d'une image en composantes h-connexes peut générer des composantes h-connexes « inutiles » car entièrement recouvertes par d'autres composantes h-connexes. Ceci a pour conséquence que la suppression de certaines composantes de l'image peut conduire à un résultat identique à

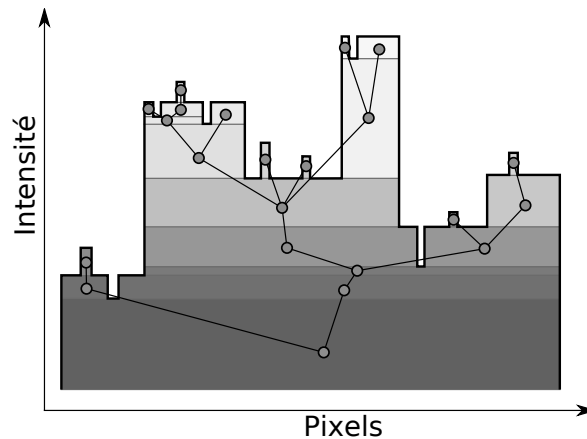


FIGURE 3.2 – Exemple de décomposition en arbre de composantes connexes d’un signal bruité à une dimension. Le bruit positif provoque la création de nouveaux nœuds, le bruit négatif scinde les nœuds. Les effets du bruit positif peuvent être facilement réduits a posteriori en filtrant l’arbre selon la taille des composantes. Il est par contre beaucoup plus difficile de traiter les effets du bruit négatif. Notons que la situation serait inversée si l’arbre était construit dans « l’autre sens » (on parle alors de Min-Tree).

l’originale (proposition 1 page 114). Le corollaire de cette observation est que les composantes h-connexes que l’on a voulu supprimer sont réapparues dans le résultat.

On voit donc la difficulté pour la théorie actuelle d’assurer la cohérence des opérateurs h-connexes et, afin de résoudre ce problème, nous proposons une nouvelle axiomatique pour les h-connexions. Les propriétés supplémentaires que nous ajoutons formalisent l’idée qu’une décomposition en composantes h-connexes doit être nécessaire et suffisante, dans le sens où la décomposition doit permettre de retrouver l’élément décomposé par supremum (suffisance) et que tous les éléments de la décomposition y sont nécessaires (un sous-ensemble strict de la décomposition ne permet pas de reconstruire l’élément décomposé). Puisque la suffisance est déjà assurée par les axiomes 1 et 2, nous proposons un ensemble de trois axiomes équivalents formulant la contrainte de nécessité sous différents points de vues.

Dans un second temps, la construction de représentations hiérarchiques similaires aux arbres de composantes connexes, mais basées sur les h-connexions, permet la définition des arbres de composantes h-connexes. Cette construction fait intervenir la notion de z-zones définie par Braga-Neto [6] qui permettent de regrouper les impulsions de l’espace en classes d’équivalence et peuvent, sous certaines conditions, être représentées par un arbre. L’arbre obtenu est utilisé de manière équivalente à l’arbre de composantes connexes tout en ayant des nœuds non plats, introduisant ainsi une robustesse au bruit et aux objets à faible contraste. Cette approche est évaluée sur une h-connexion dite floue pour des tâches classiques en traitement d’images monobandes et multibandes : filtrage, segmentation et binarisation.

**Applications en imagerie astronomique multibande** Finalement, trois applications nécessaires à la résolution de la problématique astronomique traitée dans cette thèse et tirant avantageusement parti des développements présentés dans ce chapitre sont développées : séparation de sources, extraction des bras spiraux et détections des zones H II. La topologie



théorique d'une galaxie est d'abord analysée afin de déterminer la meilleure stratégie à adopter pour chacune des tâches, puis nous proposons plusieurs ordres vectoriels adaptés à l'astronomie multibande pour permettre la construction de l'arbre des composantes h-connexes. Enfin, les trois applications sont détaillées avec des exemples de résultats obtenus.

## 3.2 Rappels mathématiques et théorie des connexions

Cette section donne les pré-requis mathématiques et une courte introduction à la morphologie mathématique.

### 3.2.1 Pré-requis et notations

On donne ici les éléments nécessaires à une bonne compréhension de la suite du manuscrit concernant la théorie des relations, l'algèbre des treillis et la théorie des graphes.

#### 3.2.1.1 Relation

Soit  $E$  un ensemble, et  $\mathcal{R} \subseteq E \times E$  une relation binaire sur  $E$ . On note de manière équivalente  $(x,y) \in \mathcal{R}$  et  $x\mathcal{R}y$ . Les propriétés usuelles que peuvent posséder les relations sont :

1. réflexivité,  $\forall x \in E, x\mathcal{R}x$
2. symétrie,  $\forall x,y \in E, x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$
3. anti-symétrie,  $\forall x,y \in E, (x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x) \Rightarrow x = y$
4. transitivité,  $\forall x,y,z \in E, (x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z$
5. totalité,  $\forall x,y \in E, (x\mathcal{R}y \vee y\mathcal{R}x)$

**Définition 1.** Une relation binaire  $\mathcal{R}$  sur  $E$  est une relation d'équivalence si et seulement si elle est réflexive, symétrique et transitive.

#### Relations d'ordre

**Définition 2.** Une relation binaire  $\mathcal{R}$  sur  $E$  est un pré-ordre si et seulement si elle est réflexive et transitive. Si en plus la relation est totale on dit que c'est un pré-ordre total.

**Définition 3.** Une relation binaire  $\mathcal{R}$  sur  $E$  est une relation d'ordre si et seulement si elle est réflexive, anti-symétrique et transitive. Si en plus la relation est totale on dit que l'ordre est total ; dans le cas contraire on parle d'ordre partiel.

**Définition 4.** Une relation d'ordre  $\leq$  sur un ensemble  $E$  muni d'une loi de composition interne  $*$  est dite compatible avec la loi  $*$  si et seulement si :  $\forall x,y,z \in E, x \leq y \Rightarrow (x * z \leq y * z) \wedge (z * x \leq z * y)$ .

Si  $*$  représente l'addition dans un groupe additif, on parle d'ordre invariant par translation.

La compatibilité est une propriété intéressante car elle permet d'assurer des invariances de comportement par translation ou par changement d'échelle.

#### 3.2.1.2 Treillis

La théorie des treillis traite des ensembles partiellement ordonnés, la structure de treillis complet étant aujourd'hui reconnue comme étant le support élémentaire de la morphologie mathématique. Cette section présente les définitions fondamentales et les propriétés qui seront utiles par la suite ; le lecteur pourra trouver une présentation détaillée de la théorie des treillis dans [16].

**Définition algébrique** Un treillis  $(E, \vee, \wedge)$  est la donnée d'un ensemble  $E$  non vide muni de deux lois internes  $\vee$  et  $\wedge$  qui sont idempotentes, associatives, commutatives et vérifient la propriété d'absorption ( $\forall a, b \in E, a \vee (a \wedge b) = a$  et inversement  $a \wedge (a \vee b) = a$ ).

Le treillis  $(E, \vee, \wedge)$  définit de manière unique une relation d'ordre (éventuellement partiel)  $\leq$  sur  $E$  de la manière suivante :  $\forall a, b \in E, a \leq b \Leftrightarrow a \vee b = b$ . En revanche, la donnée d'une seule relation d'ordre ne suffit pas pour générer un treillis.

**Propriétés** Soit un treillis  $(E, \vee, \wedge, \leq)$ . Soit  $A = \{a_i\}_{i \in I} \subseteq E$  une famille d'éléments de  $E$ , on pose  $\bigvee_{i \in I} a_i$  ou plus simplement  $\bigvee A$  la borne supérieure des éléments de  $A$  et  $\bigwedge_{i \in I} a_i$  ou plus simplement  $\bigwedge A$  la borne inférieure des éléments de  $A$ .

**Définition 5.** Lorsque la relation d'ordre  $\leq$  est totale, on dit que  $(E, \leq)$  est une chaîne.

**Définition 6.** Un treillis est dit complet si toute partie  $M$  de  $E$  possède une borne supérieure notée  $\bigvee M$  et une borne inférieure notée  $\bigwedge M$ .

Étant donné un treillis complet  $(E, \leq)$ , on note  $\top$  sa borne supérieure ( $\top = \bigvee E$ ) et  $\perp$  sa borne inférieure ( $\perp = \bigwedge E$ ). On les appelle *éléments universels*.

**Définition 7.** Si  $(E, \vee, \wedge, \leq)$  est un treillis complet, alors son treillis dual  $(E, \wedge, \vee, \geq)$  est également un treillis complet. Le dual du treillis complet  $E$  est noté  $E^*$ .

Par la suite, on ne considèrera que des treillis complets et la mention « complet » sera implicite. La définition d'un ensemble  $\mathcal{L}$  muni d'une structure de treillis sous-entend également la définition d'une relation d'ordre  $\leq_{\mathcal{L}}$  sur  $\mathcal{L}$  et des deux opérations internes  $\bigvee_{\mathcal{L}}$  et  $\bigwedge_{\mathcal{L}}$ , que l'on note simplement  $\leq, \vee$  et  $\wedge$  si aucune confusion n'est possible.

L'opération de dualité est trivialement involutive ( $E^{**} = E$ ) et permet de définir la complémentarité dans les images.

**Atomes et famille sup-génératrice** Ce paragraphe présente les notions de familles sup-génératrices, d'atomes et les notions dérivées. Pour des discussions approfondies de ces notions, le lecteur pourra se référer à [14, 18]. Dans la suite,  $\mathcal{L}$  est un treillis.

**Définition 8.** Un atome de  $\mathcal{L}$  est un élément  $x$  de  $\mathcal{L}$  différent de  $\perp$  tel que :  $\forall a \in \mathcal{L}, a \leq x \Rightarrow (x = a) \vee (a = \perp)$ .

**Définition 9.** Une famille  $S$  de  $\mathcal{L}$  est appelée famille sup-génératrice de  $\mathcal{L}$  si tout élément de  $\mathcal{L}$  peut s'exprimer comme étant le supremum d'éléments de  $S$  :  $\forall x \in \mathcal{L}, \exists A \subseteq S, x = \bigvee A$ .

**Définition 10.** Le treillis  $\mathcal{L}$  est dit atomique s'il possède une famille sup-génératrice composée d'atomes.

## Exemples

**La droite achevée des réels ou des entiers relatifs :**  $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$  et  $\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} \cup \{-\infty, +\infty\}$  avec la relation d'ordre usuelle  $\leq$  forment des chaînes de plus petit élément  $\perp = -\infty$  et de plus grand élément  $\top = +\infty$ . L'opérateur interne  $\bigvee$  correspond au maximum au sens habituel, et l'opérateur  $\bigwedge$  au minimum au sens habituel.  $\overline{\mathbb{Z}}$  est sup-généré par  $\mathbb{Z}$  et  $\overline{\mathbb{R}}$  est sup-généré par  $\mathbb{R}$ .

**Treillis des ensembles :** la famille  $\mathcal{P}(E)$  des parties d'un ensemble  $E$  avec l'ordre partiel correspondant à la relation d'inclusion  $\subseteq$  est un treillis complet de plus petit élément  $\emptyset$  et de plus grand élément  $E$ . L'opérateur interne  $\vee$  correspond à l'union ensembliste  $\cup$ , et l'opérateur  $\wedge$  à l'intersection ensembliste  $\cap$ . Ce treillis est atomique et sup-généré par les singletons de  $\mathcal{P}(E)$ , qui sont ses atomes.

**Treillis des fonctions :** la famille des applications  $\mathcal{L}^E$  d'un ensemble  $E$  non vide dans un treillis complet  $(\mathcal{L}, \vee, \wedge, \leq)$  est un treillis complet où la relation d'ordre partiel  $\leq_{\mathcal{L}^E}$  correspond à la comparaison point à point :  $\forall f, g \in \mathcal{L}^E, f \leq_{\mathcal{L}^E} g \Leftrightarrow (\forall x \in E, f(x) \leq g(x))$ . Le plus petit (respectivement le plus grand) élément est alors la fonction constante renvoyant le plus petit  $\perp$  (respectivement le plus grand  $\top$ ) élément de  $\mathcal{L}$ . L'opérateur interne  $\vee_{\mathcal{L}^E}$  correspond au maximum point à point  $\forall f, g \in \mathcal{L}^E, \forall x \in E, (f \vee_{\mathcal{L}^E} g)(x) = (f(x) \vee g(x))$ , et l'opérateur  $\wedge_{\mathcal{L}^E}$  au minimum point à point  $\forall f, g \in \mathcal{L}^E, \forall x \in E, (f \wedge_{\mathcal{L}^E} g)(x) = (f(x) \wedge g(x))$ . Le treillis des fonctions est sup-généré par l'ensemble  $\mathcal{S} = \{\delta_{x,t} \mid x \in E, t \in F\}$  des impulsions, avec

$$\forall y \in E, \delta_{x,t}(y) = \begin{cases} t & \text{si } x = y \\ \perp & \text{sinon} \end{cases} . \quad (3.1)$$

En revanche,  $\mathcal{L}^E$  n'est pas atomique.

### 3.2.1.3 Images

Afin de développer une théorie applicable dans une large variété de cas, nous utiliserons ici une définition de l'image plus large que celle vue dans le chapitre précédent. Une image  $f : \mathcal{D} \mapsto \mathcal{T}$  est modélisée comme étant une application d'un domaine noté  $\mathcal{D}$  dans un espace de valeurs noté  $\mathcal{T}$ .

On requiert que  $\mathcal{D}$  soit un ensemble non vide muni d'une structure de groupe abélien par rapport à l'opération notée  $+$  qui permet de définir la notion de translation. On considère en général  $\mathcal{D} \subseteq \overline{\mathbb{R}}^n$  (espace euclidien) ou  $\mathcal{D} \subseteq \overline{\mathbb{Z}}^n$  (espace discret) avec  $n \in \mathbb{N}^*$  désignant le nombre de dimensions spatiales.

On requiert également que  $\mathcal{T}$  soit muni d'une structure de treillis complet par rapport à la relation d'ordre  $\leq_{\mathcal{T}}$ . L'ensemble des applications  $\mathcal{T}^{\mathcal{D}}$  forme donc un treillis complet. On considère en général  $\mathcal{T} \subseteq \overline{\mathbb{R}}^B$  ou bien  $\mathcal{T} \subseteq \overline{\mathbb{Z}}^B$  avec  $B \in \mathbb{N}^*$  désignant le nombre de bandes spectrales. Si  $B = 1$  on utilise les termes images en niveaux de gris ou monobandes ou monospectrales, dans le cas contraire, on parle d'images multibandes ou multispectrales ou multivariées.

**Définition 11.** *Étant donnée une image  $f \in \mathcal{T}^{\mathcal{D}}$ , on appelle support de  $f$ , noté  $\text{supp}(f)$ , l'ensemble des éléments du domaine pour lesquels l'image est strictement supérieure à  $\perp$  :  $\text{supp}(f) = \{x \in \mathcal{D} \mid f(x) > \perp\}$ .*

**Définition 12.** *Étant donnée une image  $f \in \mathcal{T}^{\mathcal{D}}$  et  $t \in \mathcal{T}$ , on désigne par  $\bar{f}^t : \mathcal{T}^{\mathcal{D}} \mapsto \mathcal{D}$  l'ensemble seuillé d'une fonction défini par  $\bar{f}^t = \{x \in \mathcal{D} \mid f(x) \geq t\}$ .*

**Définition 13.** *Étant donnée une image  $f \in \mathcal{T}^{\mathcal{D}}$ , on désigne par  $f^* \in \mathcal{T}^{*\mathcal{D}}$  son complémentaire.  $f^*$  a partout la même valeur que  $f$  mais les relations d'ordre et les opérations inf et sup sont inversées pour elle.*

Remarquons que si  $\mathcal{T} = \overline{\mathbb{R}}^B$  ou  $\mathcal{T} = \overline{\mathbb{Z}}^B$ , on définit généralement le complémentaire par  $f^* = -f$  où «  $-$  » désigne la soustraction point par point. Cette définition est bien compatible avec la précédente car elle revient bien à inverser la relation d'ordre ainsi que les opérations inf et sup.

### 3.2.1.4 Graphes

On définit maintenant la notion de graphe et on pose le vocabulaire afférent. Soit  $G = (\mathcal{E}, \mathcal{F})$ , avec  $\mathcal{E}$  un ensemble quelconque non vide et  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{E}^2$ ; alors  $G$  est un graphe orienté, les éléments de  $\mathcal{E}$  sont les nœuds du graphe et les éléments de  $\mathcal{F}$  les arêtes.

**Définition 14.** Deux nœuds  $a, b \in \mathcal{E}$ ,  $a \neq b$  sont dit adjacents si  $(a, b) \in \mathcal{F}$  ou  $(b, a) \in \mathcal{F}$ .

**Définition 15.** On appelle les antécédents de  $b \in \mathcal{E}$  l'ensemble :  $\{a \in \mathcal{E} \mid (a, b) \in \mathcal{F}\}$ .

**Définition 16.** On appelle les descendants de  $a \in \mathcal{E}$  l'ensemble :  $\{b \in \mathcal{E} \mid (a, b) \in \mathcal{F}\}$ .

**Définition 17.** Soit  $a, b \in \mathcal{E}$ , on appelle chemin ou arc de  $a$  à  $b$  un ensemble d'arêtes  $\{f_1, \dots, f_n\} \subseteq \mathcal{F}$  tel que  $f_i = (x_{i-1}, x_i)$ ,  $x_0 = a$  et  $x_n = b$ .

**Définition 18.** Un chemin d'un nœud à lui même est appelé un cycle.

**Définition 19.** Un graphe  $G$  est dit connexe si  $\forall a, b \in \mathcal{E}$ ,  $a \neq b$ , il existe un chemin de  $a$  à  $b$  ou de  $b$  à  $a$ .

**Définition 20.** Un graphe ne contenant pas de cycle est appelé une forêt.

**Définition 21.** Une forêt connexe est appelée un arbre.

Dans un arbre, les descendants d'un nœud sont appelés ses fils, chaque nœud possède un unique ascendant appelé son père (sauf la racine de l'arbre). Un nœud qui ne possède pas de descendant est appelé une feuille. Soit  $t$  un nœud de  $G$ , on note  $t^+$  l'ensemble de ses fils et  $t_-$  son père.

**Diagramme de Hasse** La relation d'ordre sur un treillis fini  $\mathcal{L}$  peut être représentée par un graphe  $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$  appelé diagramme de Hasse et défini par :

$$\mathcal{F} = \{(x, y) \in \mathcal{L}^2 \mid x \neq y, x \leq y, (\forall z \in \mathcal{L}, x \leq z < y \Rightarrow x = z)\} \quad (3.2)$$

La figure 3.3 représente un exemple de diagramme de Hasse pour le treillis des ensembles.

### 3.2.2 Morphologie mathématique et connexion

On définit ici la notion d'opérateurs morphologiques et leurs propriétés fondamentales puis la théorie de connexion menant au principe d'opérateurs morphologiques connexes.

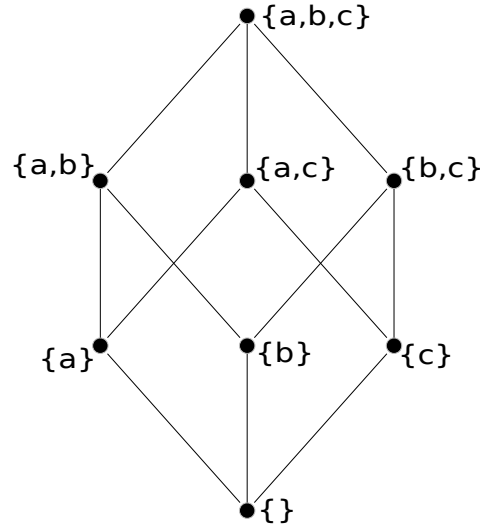


FIGURE 3.3 – Diagramme de Hasse du treillis complet des parties de l'ensemble  $\{a,b,c\}$  avec la relation d'ordre correspondant à la relation d'inclusion.

### 3.2.2.1 Bases de la morphologie mathématique

Le versant déterministe de la morphologie mathématique traite des applications entre treillis complets. Cette section donne les bases nécessaires à la suite du chapitre ; le lecteur pourra se référer aux livres [20, 40, 49] pour une présentation plus complète. Soient  $\mathcal{L}_1$  et  $\mathcal{L}_2$  des treillis complets et  $\psi \in \mathcal{L}_2^{\mathcal{L}_1}$ . Les propriétés fondamentales que peut vérifier  $\psi$  sont :

- la croissance :  $\forall x \in \mathcal{L}_1, \forall y \in \mathcal{L}_1, x \leq y \Rightarrow \psi(x) \leq \psi(y)$  ;
- la décroissance :  $\forall x \in \mathcal{L}_1, \forall y \in \mathcal{L}_1, x \leq y \Rightarrow \psi(y) \leq \psi(x)$ .

Si  $\psi \in \mathcal{L}_1^{\mathcal{L}_1}$  est une application d'un treillis complet dans lui-même, on parle alors d'opérateur morphologique sur  $\mathcal{L}_1$  et on définit en plus les propriétés suivantes :

- l'idempotence :  $\forall x \in \mathcal{L}_1, \psi(\psi(x)) = \psi(x)$  ;
- l'extensivité :  $\forall x \in \mathcal{L}_1, x \leq \psi(x)$  ;
- l'anti-extensivité :  $\forall x \in \mathcal{L}_1, \psi(x) \leq x$ .

**Définition 22.** *Un opérateur morphologique croissant et idempotent est appelé un filtre morphologique.*

**Définition 23.** *Un filtre morphologique extensif est appelé une ouverture.*

**Définition 24.** *Un filtre morphologique anti-extensif est appelé une fermeture.*

### 3.2.2.2 Connexions ensemblistes

Nous donnons ici le strict nécessaire à une bonne compréhension de la suite du manuscrit ; le lecteur pourra trouver une présentation plus complète des connexions ensemblistes dans [38, 45].

Soit  $E$  un ensemble quelconque non vide ; on appelle les éléments de cet ensemble des points. On note  $\mathcal{P}(E)$  la famille des parties de  $E$  et  $\mathcal{S}(E)$  la famille des singletons de  $E$ .

Soit  $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(E)$ ,  $\mathcal{C}$  définit une connexion sur  $\mathcal{P}(E)$  si et seulement si :

1.  $\emptyset \in \mathcal{C}$ , l'ensemble vide est connexe.
2.  $\mathcal{S}(E) \subseteq \mathcal{C}$ , les points sont connexes.
3.  $\forall B \subseteq \mathcal{C}, \bigcap B \neq \emptyset \Rightarrow \bigcup B \in \mathcal{C}$ , l'union d'éléments connexes s'intersectant est connexe.

Les éléments de  $\mathcal{C}$  sont dits connexes.

**Composantes connexes** Soit  $\mathcal{C}$  une connexion sur  $\mathcal{P}(E)$  et  $X \subseteq E, X \neq \emptyset$ .

**Définition 25.** Une composante connexe de  $X$  est un sous-ensemble connexe de  $X$  de taille maximale.

Formellement,  $D \subseteq X$  est une composante connexe de  $X$  si et seulement si :

1.  $D \in \mathcal{C}$
2.  $\forall F \in \mathcal{C}, D \subseteq F \subseteq X \Rightarrow D = F$

On note  $\mathcal{C}_X$  l'ensemble des composantes connexes de  $X$  relativement à la connexion  $\mathcal{C}$ .

**Opérateur morphologique connexe** La notion d'opérateur connexe est devenue très populaire (voir par exemple [44] et les références incluses) ; leur principe est de respecter la propriété « ne crée pas de frontière » au sens d'une certaine connexion donnée. Cette propriété peut-être formalisée dans le cas des connexions ensemblistes par : « *un opérateur est connexe si chacune des zones plates de l'image originale est incluse dans une zone plate du résultat* » [11] ou par toute autre formulation équivalente (par exemple [50]).

**Système d'ouvertures** Soit une connexion  $\mathcal{C}$  sur  $\mathcal{P}(E)$ , le système d'ouvertures par connexité  $\{\gamma_x(A) \in E^E \mid x \in E, A \in \mathcal{P}(E)\}$  est défini de manière unique par :

$$\gamma_x(A) = \bigcup \{C \in \mathcal{C} \mid x \in C, C \subseteq A\} \quad (3.3)$$

Ce système est formé d'ouvertures dites connexes ponctuelles et on appelle l'élément  $\gamma_x(A)$  la composante connexe de  $A$  marquée par  $x$  (figure 3.4).

Inversement, à partir du système d'ouverture  $\{\gamma_x(A) \in E^E \mid x \in E, A \in \mathcal{P}(E)\}$  tel que :

- $\forall x \in E, \gamma_x(\{x\}) = \{x\}$
- $\forall x, y \in E, \forall A \in \mathcal{P}(E), \gamma_x(A) \cap \gamma_y(A) \neq \emptyset \Rightarrow \gamma_x(A) = \gamma_y(A)$
- $\forall x \in E, \forall A \in \mathcal{P}(E), x \notin A \Rightarrow \gamma_x(A) = \emptyset$

on engendre une unique connexion définie par les invariants des ouvertures  $\gamma$ .

**Exemple** On se place dans l'espace discret  $D \subseteq \mathbb{Z}^2$ . La connexion  $\mathcal{C}_4 \subseteq \mathcal{P}(D)$  correspondant à la connexion par arc avec un 4-voisinage est composée de l'ensemble des parties de  $D$  qui sont 4-connexes :  $\mathcal{C}_4 = \{C \in \mathcal{P}(D) \mid D \text{ est 4-connexe}\}$  (figure 3.5). On définit de manière analogue  $\mathcal{C}_8$ , la connexion avec un 8-voisinage.

### 3.2.2.3 Connexions sur les treillis

Serra a proposé [46] d'étendre la notion de connexion ensembliste aux treillis quelconques, permettant ainsi de définir de nouvelles connexions pour des objets plus complexes comme les images en niveaux de gris ou multispectrales, tout en incluant les connexions ensemblistes. Soit  $\mathcal{L}$  un treillis complet possédant une famille sup-génératrice  $\mathcal{S}$ .

Soit  $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{L}, \mathcal{C}$  définit une connexion sur  $\mathcal{L}$  si et seulement si [46] :

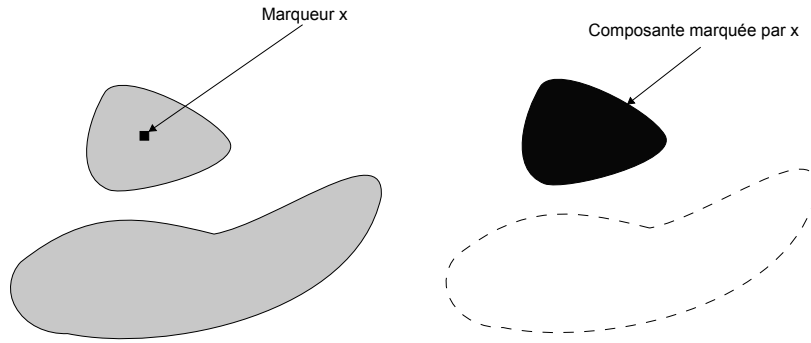


FIGURE 3.4 – Le système d’ouvertures par connexité permet d’extraire les composantes connexes. Ici, on considère la connexion par arc sur les graphes (définition 17); l’ouverture  $\gamma_x(A)$  marquée par  $x$  de l’ensemble  $A$  représenté en gris permet d’extraire la composante connexe de  $A$  contenant  $x$ .

1.  $\perp \in \mathcal{C}$ , le plus petit élément est connexe.
2.  $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{C}$ , les sup-générateurs sont connexes.
3.  $\forall C \subseteq \mathcal{C}, \bigwedge C \neq \perp \Rightarrow \bigvee C \in \mathcal{C}$ , le supremum d’éléments connexes s’intersectant est connexe.

**Système d’ouvertures** Soit une connexion  $\mathcal{C}$  sur  $\mathcal{L}$ , on définit de manière unique le système d’ouvertures par connexité  $\{\gamma_x(a) \in \mathcal{L}^{\mathcal{L}} \mid x \in \mathcal{S}, a \in \mathcal{L}\}$  par :

$$\gamma_x(a) = \bigvee \{c \in \mathcal{C} \mid x \leq c \leq a\}. \quad (3.4)$$

On appelle alors  $\gamma_x(a)$  la composante connexe de  $a$  marquée par  $x$ .

Inversement, on peut définir les connexions à partir des systèmes d’ouvertures [46] et montrer qu’il existe une correspondance un-à-un unique entre les deux.

**Limites** Malheureusement, les connexions sur les treillis sont trop restrictives pour obtenir des composantes connexes s’intersectant. Ce problème déjà identifié a amené la notion d’*hyper-connexion* (h-connexion) qui nous paraît plus adaptée.



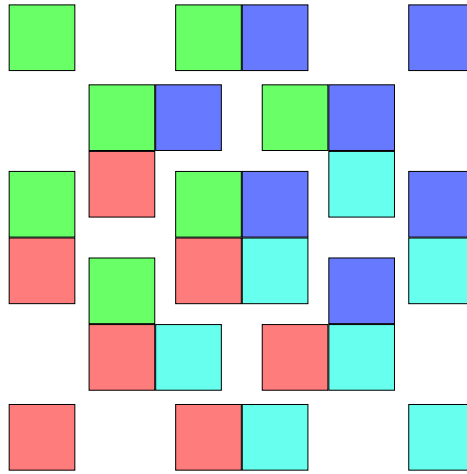


FIGURE 3.5 – Exemple de connexion sur l'espace discret  $\{0,1\} \times \{0,1\}$  correspondant à un 4-voisinage. L'ensemble des éléments de la connexion  $\mathcal{C}_4$  sur cet espace est représenté : on retrouve les singletons dans les coins et l'espace complet au centre. La connexion  $\mathcal{C}_8$  serait dans ce cas particulier égale à l'ensemble des parties de l'espace. Notons que l'étude de cet éclatement de la cellule centrale relève de la théorie des complexes simpliciaux.

### 3.3 Arbres des composantes connexes

L'arbre des composantes connexes permet la représentation hiérarchique d'une image basée sur une connexion ensembliste sous-jacente. Cette représentation est commode pour des tâches variées en analyse et traitement d'images, notamment pour la définition d'opérateurs et filtres connexes. Cette section présente la définition de l'arbre des composantes connexes formulée dans la théorie des treillis et définit un cadre général d'utilisation. Les possibilités d'utilisation de l'arbre des composantes connexes sur des images multibandes sont étudiées en fonction des propriétés de l'ordre vectoriel sous-jacent utilisé.

#### 3.3.1 Définition

L'arbre des composantes connexes d'une image  $f \in \mathcal{T}^{\mathcal{D}}$  discrète peut être défini comme le diagramme de Hasse de l'ensemble des composantes connexes ensemblistes des seuillages de  $f$  à tous les niveaux possibles. Soit  $\mathcal{C}$  une connexion ensembliste sur  $\mathcal{P}(\mathcal{D})$ , on pose :

$$\mathcal{E} = \left\{ C \in \mathcal{C}_{\bar{f}^t} \mid t \in \mathcal{T} \right\} \quad (3.5)$$

où  $\mathcal{C}_{\bar{f}^t}$  désigne l'ensemble des composantes connexes du seuillage de  $f$  au niveau  $t$  ( $\bar{f}^t$ , définition 12 page 103). L'arbre des composantes connexes est alors le diagramme de Hasse  $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$  de  $\mathcal{E}$  par rapport à l'ordre défini par la relation d'inclusion.

Dans le cas général, l'ordre  $\leq$  sur  $\mathcal{T}$  est partiel et le diagramme de Hasse contient des cycles [32]. La figure 3.6 (ligne du haut) montre un exemple basé sur l'ordre marginal partiel  $\leq_m : v, v' \in \overline{\mathbb{R}}^B, v \leq_m v' \Leftrightarrow v_i \leq v'_i, i = 1, \dots, B$ ; dans ce cas, les seuillages obtenus à différents niveaux se recouvrent partiellement créant un cycle dans le graphe.

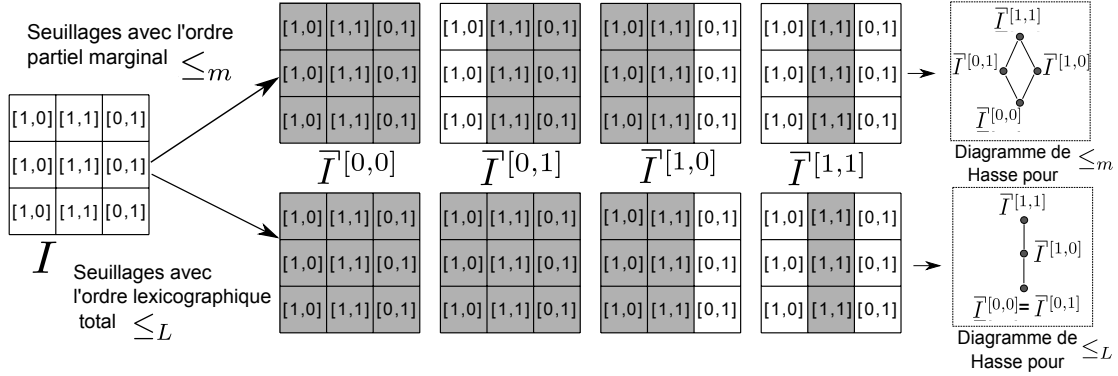


FIGURE 3.6 – Diagramme de Hasse des composantes connexes des seuillages d’une image bivaluée suivant un ordre partiel (ordre marginal  $\leq_m$  sur la ligne du haut) et un ordre total (ordre lexicographique  $\leq_L$  sur la ligne du bas). On a de gauche à droite : l’image bivaluée, ses différents seuillages (en gris) aux niveaux  $[0,0]$ ,  $[0,1]$ ,  $[1,0]$  et  $[1,1]$ , et les diagrammes de Hasse.

L’utilisation d’un ordre total ou d’un pré-ordre total sur  $\mathcal{T}$  permet d’assurer que le diagramme de Hasse ne contient pas de cycle (figure 3.6, ligne du bas). Comme  $\mathcal{E}$  contient l’élément maximal  $\mathcal{D} = \bar{f}^\perp$ , le graphe est connexe et peut être considéré comme un arbre de racine  $\mathcal{D}$  : c’est l’arbre des composantes connexes. Par la suite, on ne considèrera donc que les (pré-)ordre totaux.

Le graphe  $G = (\mathcal{E}, \mathcal{F})$  est valué par la fonction  $h : \mathcal{E} \mapsto \mathcal{P}(\overline{\mathbb{R}}^B)$  qui associe à chaque nœud le ou les niveaux de seuillage maximaux contenant ce nœud :

$$\forall e \in \mathcal{E}, h(e) = \max \left\{ t \in \overline{\mathbb{R}}^B \mid e \subseteq \mathcal{C}_{\bar{f}^t} \right\}. \quad (3.6)$$

Pour un nœud  $e$ ,  $h(e)$  est appelé niveau(x) ou hauteur(s) de  $e$ .

L’arbre des composantes connexes peut être construit efficacement au moyen de l’algorithme Max-Tree [42] ou de la méthode proposée dans [26] basée sur la technique *trouver et unir* (*Union-Find*). L’étude [3] a montré que l’algorithme Max-Tree est préférable pour les images avec un nombre réduit de niveaux de quantification (images à 256 niveaux de gris) alors que l’approche *trouver et unir* est préférable pour les images à valeurs flottantes. Par abus de langage, l’arbre des composantes connexes est souvent appelé Max-Tree en référence à l’algorithme de construction.

### 3.3.2 Schéma d’utilisation et impact du type d’ordre vectoriel

Nous présentons maintenant les différentes étapes d’utilisation de l’arbre des composantes connexes dans un contexte multibande et l’influence du type d’ordre vectoriel choisi.

#### 3.3.2.1 Filtrage et reconstruction

Le filtrage se base sur le calcul d’attributs adaptés pour chaque nœud de l’arbre. Les attributs utilisés sont variés, quantitatifs ou qualitatifs ; on peut notamment citer : l’aire,

le volume, le périmètre, la complexité, la compacité, le contraste, les moments (centrés, de Hu, etc.), l'entropie, ... L'idée générale est ensuite de filtrer les nœuds de l'arbre en fonction de la valeur de leurs attributs. Différentes méthodes de filtrage ont été imaginées permettant des effets plus ou moins forts suivant le but recherché et la nature des attributs considérés. Les attributs présentant une propriété de monotonie, c'est-à-dire variant de manière monotone avec la profondeur dans l'arbre, sont particulièrement intéressants pour la définition de filtres. Le filtrage par attributs vectoriels a été étudié dans [51] et la sélection automatique des paramètres de filtrage à partir d'une base d'apprentissage dans [25].

On définit généralement un prédicat  $q$  sur  $\mathcal{E}$  basé sur les attributs et désignant les nœuds à conserver et ceux à supprimer. La fonction de filtrage  $P_q$  réalise l'élagage de l'arbre basé sur  $q$  :  $P_q(\mathcal{E}, \mathcal{F}) = (\mathcal{E}', \mathcal{F}')$ . Le prédicat est généralement défini comme un seuil sur la valeur des attributs. Cette approche basée sur un critère purement local a l'avantage de mener naturellement à des opérateurs idempotents, mais des stratégies plus complexes ont été imaginées [42] :

- directe : un nœud est supprimé s'il ne vérifie pas le prédicat ;
- min : un nœud est préservé si lui et tous ses ancêtres vérifient le prédicat ;
- max : un nœud est supprimé si lui et tous ses descendants violent le prédicat ;
- optimisé : une fonction d'énergie auxiliaire permet de définir, pour chaque branche, le niveau à partir duquel tous les nœuds sont supprimés ; l'algorithme de Viterbi [53] permet de minimiser facilement cette énergie.

Notons qu'il est toujours possible de construire un opérateur idempotent :  $P_q^\infty$  qui correspond à l'opérateur  $P_q$  appliqué jusqu'à convergence (assurée par le caractère décroissant de  $P_q$  et la taille finie de  $\mathcal{E}$ ).

Le processus peut finalement être complété par une reconstruction  $R_{(\mathcal{E}', \mathcal{F}')}$  de l'arbre qui correspond à la transformation inverse de l'arbre en une image :

$$\forall x \in \mathcal{D}, R_{(\mathcal{E}', \mathcal{F}')} (x) = \bigvee_{e \in \mathcal{E}'} r(e, x) \quad (3.7)$$

où  $r : \mathcal{E}' \times \mathcal{D} \mapsto \overline{\mathbb{R}}^{n'}$  est une valeur calculée à partir de  $e$  et  $x$ . Le schéma global est résumé dans la figure 3.7.

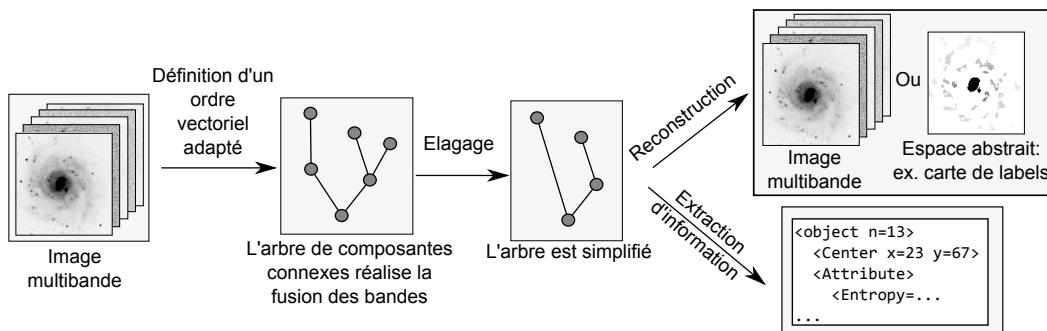


FIGURE 3.7 – Schéma d'utilisation de l'arbre des composantes connexes.

Remarquons finalement qu'il est possible de procéder à un tel filtrage sur le complémentaire  $f^*$  de  $f$  et ainsi travailler sur un arbre *inversé* appelé *Min-Tree*. Les phases de filtrage sur l'image d'origine  $f$  et sur son complémentaire  $f^*$  peuvent également être alternées afin de traiter alternativement le fond et le premier plan de l'image.

### 3.3.2.2 Influence du type d'ordre vectoriel

Dans le cas d'un ordre total, pour chaque nœud, la fonction de valuation  $h$  retourne un singleton dont la valeur peut être utilisée directement dans la phase de reconstruction, permettant de créer des opérateurs morphologiques connexes. En fait, ce cas est quasiment équivalent à traiter une image monobande mais l'information portée par les différentes bandes peut servir de support à la définition d'attributs plus pertinents.

Si l'ordre utilisé est un pré-ordre total, la fonction de valuation  $h$  retourne, pour chaque nœud, un ensemble de niveaux  $\{t_i\}$  tel que  $\forall i, j, i \neq j$  alors  $t_i \leq t_j$  et  $t_j \leq t_i$  mais  $t_i \neq t_j$ .  $h$  ne peut plus être utilisé directement dans la phase de reconstruction. Notons que les auteurs de [24] ont proposé d'utiliser une nouvelle valeur calculée à partir de l'ensemble  $\{t_i\}$ , par exemple la moyenne ou la médiane. Mais la moyenne peut introduire de nouvelles valeurs dans le résultat, ce qui est généralement vu comme un inconvénient pour un opérateur morphologique, particulièrement dans le cas multibande où les nouvelles valeurs créent un problème de fausses couleurs. La médiane nécessite, quant à elle, la définition d'un nouvel ordre total sur les données.

Si l'étape de reconstruction n'est pas nécessaire ou si celle-ci ne produit pas une image dans l'espace original des valeurs de pixels, et si le calcul des attributs ne requiert pas un niveau unique par nœud, alors un pré-ordre peut être utilisé sans difficulté. Les problèmes de détection ou de segmentation sont, par exemple, adaptés à ce type d'ordre.

### 3.4 Hyper-connexions et arbre des composantes hyper-connexes

Cette section présente la théorie des h-connexions qui permet de dépasser les limites des connexions sur les treillis. Une évolution de cette théorie est proposée, et son utilisation pour la définition d'arbres de composantes hyper-connexes est étudiée. En effet, l'utilisation des h-connexions pour définir des représentations hiérarchiques du type arbres de composantes connexes permet d'obtenir une représentation moins sensible au bruit et plus condensée.

#### 3.4.1 Théorie des hyper-connexions

La théorie des h-connexions a été proposée [46] afin de généraliser les connexions ensemblistes aux treillis de manière plus souple que l'extension directe fournie par la connexion sur les treillis (section 3.2.2.3).

Soit un treillis  $\mathcal{L}$  muni de la famille sup-génératrice  $\mathcal{S}$ . Une h-connexion  $\mathcal{C}^+$  sur  $\mathcal{L}$  est un sous-ensemble de  $\mathcal{L}$  qui vérifie les conditions suivantes :

1.  $\perp \in \mathcal{C}^+$  : le plus petit élément est h-connexe ;
2.  $\forall s \in \mathcal{S}, s \in \mathcal{C}^+$  : les sup-générateurs (ou points) sont h-connexes ;
3.  $\forall A \subseteq \mathcal{C}^+, \bowtie A \Rightarrow \bigvee A \in \mathcal{C}^+$ , le supremum d'éléments h-connexes se chevauchant est h-connexe.

où  $\bowtie$  est un prédicat sur  $\mathcal{P}(\mathcal{L})$  appelé critère de chevauchement qui doit être décroissant :  $\forall A \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{L}), \forall B \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{L}), A \subseteq B, \bowtie A \Rightarrow \bowtie B$ . Une famille d'éléments non chevauchante ne peut pas le devenir par adjonction de nouveaux éléments. La connexion ensembliste (respectivement la connexion sur les treillis) est une h-connexion sur  $\mathcal{P}(E)$  (respectivement sur  $\mathcal{L}$ ) avec le prédicat de chevauchement défini par  $\forall A \subseteq \mathcal{C}, \bowtie A \Leftrightarrow \bigcap A \neq \emptyset$  (respectivement  $\forall A \subseteq \mathcal{C}, \bowtie A \Leftrightarrow \bigwedge A \neq \perp$ ).

##### 3.4.1.1 Opérateurs hyper-connexes et ouvertures hyper-connexes

Les opérateurs h-connexes [55] sont des applications de  $\mathcal{L}$  dans  $\mathcal{P}(\mathcal{L})$  qui extraient les composantes h-connexes d'un élément marqué par un sup-générateur. Soit  $s \in \mathcal{S}$  un sup-générateur, on définit l'opérateur h-connexe par :

$$\forall a \in \mathcal{L}, \gamma_s^*(a) = \{h \in \mathcal{C}^+ \mid s \leq h \leq a, \forall g \in \mathcal{C}^+, h \leq g \leq a \Rightarrow g = h\} \quad (3.8)$$

Les composantes h-connexes d'un individu marqué par un sup-générateur sont les éléments h-connexes maximaux plus petits que l'individu et plus grands que le marqueur. L'ensemble des composantes h-connexes de  $a \in \mathcal{L}$  est :

$$\gamma^*(a) = \{h \in \gamma_s^*(a) \mid s \in \mathcal{S}\} \quad (3.9)$$

L'ouverture h-connexe de  $a$  marquée par  $s$  est le supremum des composantes h-connexes de  $a$  marquées par  $s$  :

$$\forall a \in \mathcal{L}, \gamma_s(a) = \bigvee \gamma_s^*(a) \quad (3.10)$$

Contrairement aux ouvertures connexes des connexions ensemblistes, le résultat d'une ouverture h-connexe n'est généralement pas h-connexe. On peut montrer que l'ouvert  $\gamma_s(a)$  est h-connexe ( $\gamma_s(a) \in \mathcal{C}^+$ ) si et seulement si l'opérateur h-connexe  $\gamma_s^*(a)$  contient un unique élément ( $\text{card } \gamma_s^*(a) = 1$  où  $\text{card } \gamma_s^*(a)$  est le cardinal de l'ensemble  $\gamma_s^*(a)$ ).

Les deux propriétés fondamentales des ouvertures h-connexes sont [6] :

1.  $a = \bigvee \gamma^*(a)$  : le supremum des composantes h-connexes d'un élément est égal à ce même élément ;
2.  $\forall b, c \in \gamma^*(a), b \neq c \Rightarrow b \not\bowtie c$  : deux composantes h-connexes distinctes ne se chevauchent pas.

### 3.4.1.2 Z-opérateurs

Dans [6], les auteurs proposent la notion de *z-opérateurs* qui permet de regrouper différentes parties d'un élément en fonction des composantes h-connexes qui leurs sont associées. Soit  $a \in \mathcal{L}$ , on définit la relation d'équivalence  $\overset{a}{\sim}$  sur  $\mathcal{S}$  par :

$$\forall b, c \in \mathcal{S}, \quad b \overset{a}{\sim} c \Leftrightarrow \gamma_b(a) = \gamma_c(a) \quad (3.11)$$

Le résultat d'un z-opérateur est alors le supremum d'une classe d'équivalence de  $\overset{a}{\sim}$  appelé *z-zone* :

$$\forall s \in \mathcal{S}, \quad \zeta_s(a) = \bigvee \{b \in \mathcal{S} \mid b \overset{a}{\sim} s\} \quad (3.12)$$

On note l'ensemble des z-zones de  $a$  :

$$\zeta(a) = \{\zeta_s(a) \mid \forall s \in \mathcal{S}\} \quad (3.13)$$

Les auteurs de [6] ont choisi de baser les z-opérateurs sur les ouvertures h-connexes mais on peut également les définir en terme d'opérateurs h-connexes. Soit  $\overset{a^*}{\sim}$  la relation d'équivalence définie par :

$$\forall b, c \in \mathcal{S}, \quad b \overset{a^*}{\sim} c \Leftrightarrow \gamma_b^*(a) = \gamma_c^*(a) \quad (3.14)$$

Le z-opérateur alternatif est défini comme le supremum de la classe d'équivalence de  $\overset{a^*}{\sim}$  :

$$\forall s \in \mathcal{S}, \quad \zeta_s^*(a) = \bigvee \{b \in \mathcal{S} \mid b \overset{a^*}{\sim} s\} \quad (3.15)$$

En général, comme les composantes h-connexes s'intersectent,  $\zeta_s(a) \neq \zeta_s^*(a)$ . Soit l'ensemble  $E = \{a, b, c\}$  et la h-connexion définie par  $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{ab\}, \{bc\}, \{ac\}\}$  sur  $\mathcal{P}(E)$  avec le critère de chevauchement « toujours faux » (deux éléments ne se chevauchent jamais, ce critère est valide car trivialement décroissant). Les composantes h-connexes de  $E$  sont  $\{\{ab\}, \{bc\}, \{ac\}\}$ . Or, nous avons  $\gamma_a(E) = \gamma_b(E) = \gamma_c(E) = E$  et  $\zeta_a(E) = \zeta_b(E) = \zeta_c(E) = E$  mais,  $\gamma_a^*(E) = \{\{ab\}, \{ac\}\}$ ,  $\gamma_b^*(E) = \{\{ab\}, \{bc\}\}$  et  $\gamma_c^*(E) = \{\{ac\}, \{bc\}\}$  et donc  $\zeta_a^*(E) = \{a\} \neq \zeta_a(E)$ . Nous montrons dans la section 3.4.2, que sous certaines conditions, on a  $\forall a \in \mathcal{L}, \forall s \in \mathcal{S}, \zeta_s(a) = \zeta_s^*(a)$ .

### 3.4.1.3 Hyper-reconstruction

Étant donné un marqueur  $m \in \mathcal{L}$ , l'hyper-reconstruction (h-reconstruction) de  $a \in \mathcal{L}$  marquée par  $m$  est définie par [6] :

$$[a]_m = \bigvee_{s \in \mathcal{S}, s \leq m} \gamma_s(a) \quad (3.16)$$

Nous proposons également une définition alternative de la h-reconstruction, plus flexible (figure 3.10) et basée sur les z-opérateurs :

$$[a]_m^\zeta = \bigvee_{s \in \mathcal{S}, s \leq m} \zeta_s(a) \quad (3.17)$$

qui peut être modulée par la version alternative des z-opérateurs :

$$[a]_m^{\zeta^*} = \bigvee_{s \in \mathcal{S}, s \leq m} \zeta_s^*(a) \quad (3.18)$$

#### 3.4.1.4 Opérateurs hyper-connexes

On propose d'étendre la notion d'opérateurs connexes aux h-connexions par la définition suivante : un opérateur est h-connexe si toute ouverture par h-connexité du résultat produit soit un résultat nul ( $\perp$ ) soit une composante pré-existante dans l'image originale. Soit  $\psi$  un opérateur morphologique sur  $\mathcal{L}$ ,  $\psi$  est dit h-connexe par rapport à la h-connexion  $\mathcal{C}^+$  si :

$$\forall a \in \mathcal{L}, \gamma^*(\psi(a)) \subseteq \gamma^*(a) \quad (3.19)$$

L'image d'origine  $a$  contient donc plus de composantes h-connexes que l'image résultat  $\psi(a)$ . On propose également une définition plus souple basée sur les z-opérateurs. On dit qu'un opérateur  $\psi$  est faiblement h-connexe si :

$$\forall a \in \mathcal{L}, \zeta(\psi(a)) \subseteq \zeta(a) \quad (3.20)$$

ou de manière alternative :

$$\forall a \in \mathcal{L}, \zeta^*(\psi(a)) \subseteq \zeta^*(a) \quad (3.21)$$

#### 3.4.1.5 Opérateur chapeau

Dans le cas où  $\mathcal{L}$  est muni d'une structure de groupe additif  $(\mathcal{L}, +)$  et que l'opération symétrique  $-$  est un opérateur interne, on peut étendre la notion d'opérateur chapeau (*Top-Hat* [50]) dans ce formalisme au moyen de l'hyper-reconstruction. Soient  $a, m \in \mathcal{L}$  :

$$\Xi_m(a) = a - [a]_m \quad (3.22)$$

ou de manière alternative

$$\Xi_m^\zeta(a) = a - [a]_m^\zeta \quad (3.23)$$

#### 3.4.1.6 Nouvelles propriétés

Nous formulons ici deux propriétés des h-connexions, la première déjà connue sous une autre formulation et la deuxième nouvelle, qui seront utiles pour les propositions suivantes. Soit  $a \in \mathcal{L}$  :

**Proposition 1.**  $\forall \{h_i\} \subseteq \gamma^*(a), \{h_i\} \subseteq \gamma^*(\bigvee \{h_i\})$

Cette première propriété correspond à une reformulation d'une propriété énoncée par Braga-Neto et Goutsias ([6] page 26 2<sup>e</sup> colonne). Étant donnée une famille de composantes h-connexes, les composantes h-connexes du supremum de cette famille constituent un sur-ensemble de cette famille ; ces deux familles ne sont généralement pas égales. Prenons par exemple la h-connexion donnée dans la section 3.4.1.2 : les composantes h-connexes de l'élément  $\{abc\}$  sont  $\{\{ab\}, \{bc\}, \{ac\}\}$ . Considérons maintenant la sous-famille  $\{\{ab\}, \{bc\}\}$  ; le supremum de cette famille est égal à  $\{abc\}$  et les composantes h-connexes de  $\{abc\}$  sont un sur-ensemble strict de la sous-famille.

*Démonstration.* Soit  $a \in \mathcal{L}$ ,  $\{h_i\} \subseteq \gamma^*(a)$  et  $b = \bigvee \{h_i\}$ , pour tout  $i$ , on a  $h_i \leq b$  et  $b \leq a$ . Supposons qu'il existe  $h \in \mathcal{C}^+$  tel que  $h_i \leq h \leq b \leq a$ . Mais par définition de  $\gamma^*(a)$  et comme  $h_i$  appartient à  $\gamma^*(a)$ , on a  $h_i = h$  montrant que  $h_i \in \gamma^*(b)$ . Et donc on a  $\{h_i\} \subseteq \gamma^*(\bigvee \{h_i\})$ .  $\square$

**Proposition 2.**  $\forall s \in \mathcal{S}, \forall h' \in \gamma^*(a),$  si  $s \leq h'$  et  $\gamma_s(a) = h \in \mathcal{C}^+$  alors  $h = h'$ .

Si l'ouvert h-connexe de  $a$  marqué par le sup-générateur  $s$  est h-connexe alors c'est l'unique h-composante de  $a$  au dessus de  $s$ .

*Démonstration.* Soit  $s \in \mathcal{S}, h \in \mathcal{C}^+$  tel que  $\gamma_s(a) = h$  et  $h' \in \gamma^*(a)$  tel que  $s \leq h'$ . On a  $h' \leq \bigvee \{g \in \gamma^*(a) \mid s \leq g\} = h$ , donc  $s \leq h' \leq h \leq a$  et par définition des composantes h-connexes  $h = h'$ .  $\square$

### 3.4.1.7 Exemples

**Hyper-connexion triviale** La notion d'h-connexion ainsi posée est extrêmement vaste car le critère de chevauchement est très peu contraint. On peut donc construire des hyper-connexions de manière quasi arbitraire : soit  $\mathcal{L}$  un treillis muni de la famille sup-génératrice  $\mathcal{S}$ , soit  $A \subseteq \mathcal{L}$  tel que  $\mathcal{S} \subseteq A$  et  $\perp \in A$ , soit  $\bowtie$  le critère de chevauchement « jamais satisfait » (c'est-à-dire  $\forall X \subseteq \mathcal{L}, \bowtie(X) = \text{faux}$ ), alors  $(A, \bowtie)$  est une h-connexion de  $\mathcal{L}$ . Bien entendu, les h-connexions générées avec un critère de chevauchement dégénéré n'ont pas d'intérêt.

**Zones plates** Nous proposons ici une définition de la h-connexion par zones plates sur les images. Soit l'espace des images  $\mathcal{T}^{\mathcal{D}}$ , soit  $\mathcal{C}_o$  une connexion ensembliste primaire sur  $\mathcal{P}(\mathcal{D})$  (par exemple  $\mathcal{C}_4$  ou  $\mathcal{C}_8$ ), on définit l'ensemble des fonctions plates :

$$\mathcal{C}_p^+ = \{f_{C,t} \in \mathcal{T}^{\mathcal{D}} \mid C \in \mathcal{C}_o, t \in \mathcal{T}\} \quad (3.24)$$

avec  $\forall x \in \mathcal{D}, f_{C,t}(x) = t$  si  $x \in C, \perp$  sinon, et le critère de chevauchement  $\bowtie_p$  défini par :

$$\forall \{g_{i \in I}\} \subseteq \mathcal{C}_p^+, \bowtie_p(\{g_i\}) = \begin{cases} \text{vrai} & \text{si } U \neq \emptyset \text{ et } \forall i, j \in I, \forall x \in U, g_i(x) = g_j(x) \\ \text{faux} & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.25)$$

avec

$$U = \bigcap_{i \in I} \text{supp}(g_i) \quad (3.26)$$

Des zones plates se chevauchent si leurs supports s'intersectent et si elles ont même valeur sur cette intersection. Notons que ce critère est trivialement décroissant car composé de la conjonction de deux critères décroissants (l'intersection et l'égalité). La figure 3.8 illustre trois exemples de fonctions qui se chevauchent et qui ne se chevauchent pas selon le critère  $\bowtie_p$ . Contrairement à la définition usuelle des zones plates (plus grande composante connexe ensembliste pour laquelle l'image a un niveau constant), les zones plates h-connexes peuvent s'étendre « sous » des zones plates h-connexes de plus hauts niveaux. Plusieurs zones plates selon la définition traditionnelle peuvent donc être groupées en une unique zone plate h-connexe.

**Proposition 3.** Le couple  $(\mathcal{C}_p^+, \bowtie_p)$  est une h-connexion de  $\mathcal{T}^{\mathcal{D}}$  (voir figure 3.9).



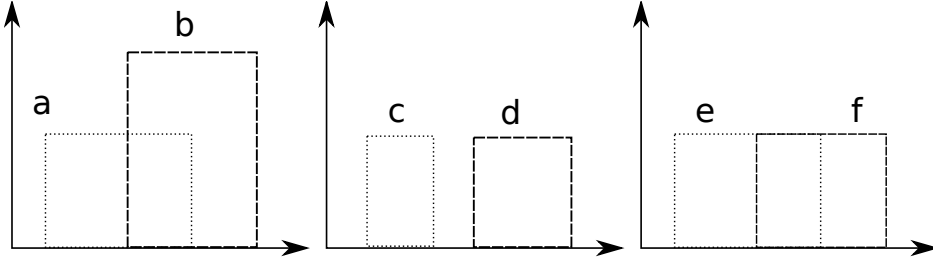


FIGURE 3.8 – Illustration du critère de chevauchement  $\bowtie_p$ . Les fonctions a et b ne se chevauchent pas car elles n'ont pas la même valeur sur l'intersection de leurs supports. Les fonctions c et d ne se chevauchent pas car leurs supports ne s'intersectent pas. Les fonctions e et f se chevauchent car l'intersection de leurs supports est non nulle et elles ont même valeur sur cette intersection.

*Démonstration.* Il faut montrer que  $(\mathcal{C}_p^+, \bowtie_p)$  vérifie les 3 propriétés des h-connexions.

1) Par définition des connexions ensemblistes,  $\emptyset \in \mathcal{C}_o$ ,  $\forall t \in \mathcal{T}$ ,  $f_{\emptyset,t} = \perp \in \mathcal{C}_p^+$ .

2) Par définition des connexions ensemblistes, les singletons de  $\mathcal{D}$  appartiennent à  $\mathcal{C}_o$ , or,  $\forall x \in \mathcal{D}$ ,  $\forall t \in \mathcal{T}$ , les  $f_{\{x\},t} = \delta_{x,t} \in \mathcal{C}_p^+$  sont les impulsions de  $\mathcal{T}^{\mathcal{D}}$  qui forment une famille sup-génératrice  $\mathcal{S}$  de  $\mathcal{T}^{\mathcal{D}}$ .

3) Soit  $\{a_{i \in I}\}$  une famille d'éléments de  $\mathcal{C}_p^+$ , posons  $U = \bigcap_{i \in I} \text{supp}(a_i)$ , supposons que  $U \neq \emptyset$  et  $\forall i, j \in I$ ,  $\forall x \in U$ ,  $a_i(x) = a_j(x)$  alors nous devons montrer que  $\bigvee a_i \in \mathcal{C}_p^+$ . D'après la propriété 3) des connexions ensemblistes, si  $U \neq \emptyset$  alors  $\bigcup_{i \in I} \text{supp}(a_i) = R \in \mathcal{C}_o$ , en outre il vient directement de la définition de  $\mathcal{C}_p^+$  et de la condition  $\forall i, j \in I$ ,  $\forall x \in U$ ,  $a_i(x) = a_j(x)$  que tous les  $a_i$  prennent la même valeur  $t$  sur leur support, par conséquent,  $\bigvee a_i = f_{R,t} \in \mathcal{C}_p^+$ .  $\square$

La h-connexion des fonctions plates est illustrée dans les figures 3.9 et 3.10.

**Fonctions monomodales** Dans [46], l'auteur propose une h-connexion correspondant aux fonctions possédant un unique maximum local ; cette connexion est utilisée pour définir sans ambiguïté la ligne de partage des eaux. Dans [6], cet exemple est repris de manière légèrement modifiée, et finalement cette même h-connexion est utilisée dans [27] afin de définir une mesure de connexité sur les ensembles flous. On définit maintenant la h-connexion des fonctions monomodales.

Soit l'espace des fonctions  $\mathcal{T}^{\mathcal{D}}$  avec la famille sup-génératrice  $\mathcal{S}$  des impulsions et  $\mathcal{C}_o$  une connexion ensembliste primaire sur  $\mathcal{P}(\mathcal{D})$ . On définit ensuite l'ensemble  $\mathcal{C}_m^+$  des fonctions monomodales :

$$\mathcal{C}_m^+ = \left\{ f \in \mathcal{T}^{\mathcal{D}} \mid \forall t \in \mathcal{T}, \bar{f}^t \in \mathcal{C}_o \right\}. \quad (3.27)$$

Puis, le but du critère de chevauchement  $\bowtie_m$  est de vérifier que le supremum d'une famille de fonctions monomodales est également monomodal. Il est défini de la manière suivante :

$$\forall \{f_i \in I\} \subseteq \mathcal{C}_m^+, \quad \bowtie_m(\{f_i\}) = \begin{cases} \text{vrai} & \text{si } \bigcap_{i \in I} \{\bar{f}_i^t \mid \bar{f}_i^t \neq \emptyset\} \neq \emptyset, \forall t \in \mathcal{T} \\ \text{faux} & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.28)$$

Les éléments de  $\{f_i\}$  se chevauchent si pour tous les niveaux  $t$ , l'intersection de l'ensemble des fonctions atteignant ce niveau ( $\bar{f}_i^t \neq \emptyset$ ) est non nulle.

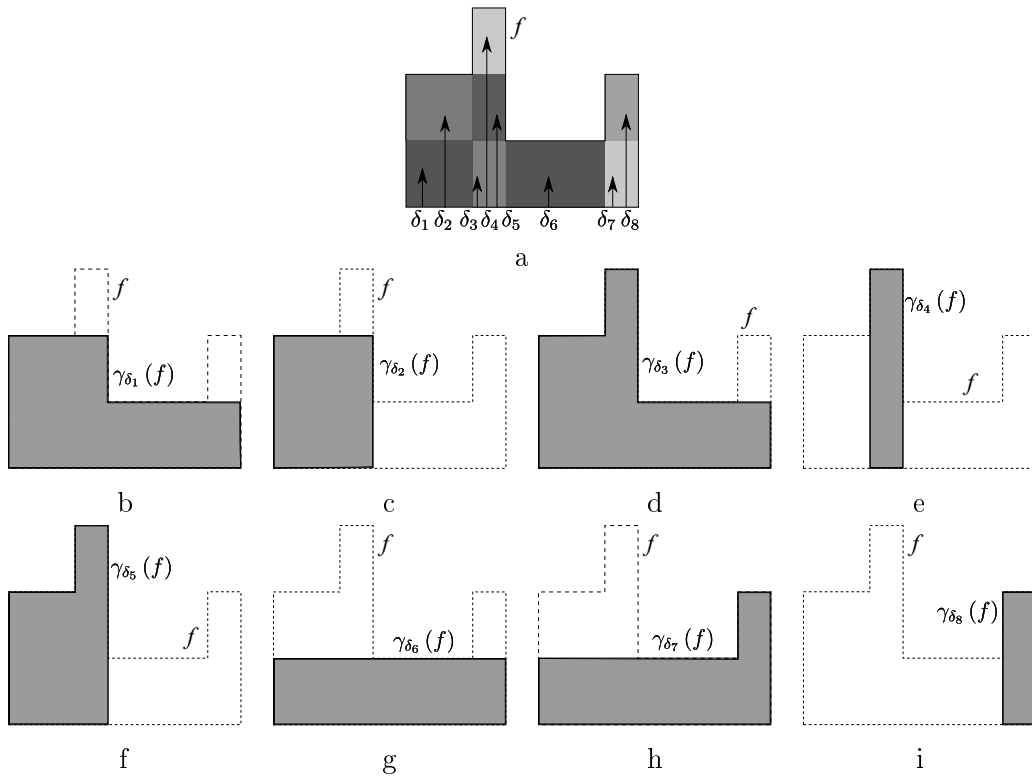


FIGURE 3.9 – Exemple de décomposition de la courbe  $f$  selon la h-connexion plate. La figure a) montre la courbe  $f$ , 8 impulsions  $\delta_1, \dots, \delta_8$  représentatives des 8 classes d'équivalence sur la famille sup-génératrice des impulsions selon la relation  $\sim$ . Dans l'image a), chaque zone de  $f$  marquée par une des impulsions  $\delta_i$ , correspond à une des classes d'équivalence et au résultat du z-opérateur  $\zeta_{\delta_i}(f)$  associé. Les figures b) à i) montrent les résultats des ouvertures h-connexes des  $\delta_i$ . On remarque que les figures c), e), g) et i) représentent les composantes h-connexes de  $f$  alors que les résultats des ouvertures par  $\delta_1, \delta_3, \delta_5$  et  $\delta_7$  représentés dans les figures b), d), f) et h) ne sont pas h-connexes.

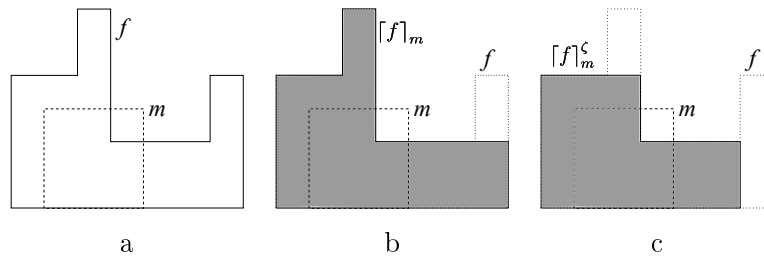


FIGURE 3.10 – Exemple de h-reconstruction avec la h-connexion plate. La figure a) montre la fonction  $f$  et le marqueur  $m$ . La figure b) présente le résultat de la h-reconstruction  $[f]_m$  de  $f$  par  $m$  proposée dans [6]. La figure c) présente le résultat de la h-reconstruction  $[f]_m^\zeta$  de  $f$  par  $m$  selon notre définition.

Le couple  $(\mathcal{C}_m^+, \bowtie_m)$  définit la h-connexion des fonctions possédant un unique maximum (voir les figures 3.12 et 3.13). On remarque immédiatement que  $\perp$  et les impulsions appartiennent à  $\mathcal{C}_m^+$ . De plus, en vertu du troisième axiome des connexions ensemblistes, le supremum de fonctions h-connexes se chevauchant selon  $\bowtie_m$  est également connexe à tous les niveaux et appartient donc à  $\mathcal{C}_m^+$ . La figure 3.11 illustre trois exemples de fonctions qui se chevauchent et qui ne se chevauchent pas selon le critère  $\bowtie_m$ .

Après cette présentation de la théorie actuelle des h-connexions, nous présentons ses inconvénients et en proposons une nouvelle formulation. Dans la suite, nous supposons l'existence d'un treillis complet  $\mathcal{L}$  muni de la famille sup-génératrice  $\mathcal{S}$  et de la h-connexion  $\mathcal{C}^+$ . On suppose en outre que le nombre de composantes h-connexes de tous les éléments de  $\mathcal{L}$  est fini (cette condition est vérifiée dans le treillis des images discrètes à support fini).

### 3.4.2 Vers une nouvelle axiomatique

Malgré les nombreux travaux menés récemment sur la théorie et les applications des h-connexions [6,27,28,30,55,56], celle-ci n'est toujours pas satisfaisante : les succès obtenus sont toujours basés sur une h-connexion particulière et très peu de propriétés générales ont pu être établies. Ce manque de résultats théoriques est imputable à l'axiomatique très peu contraignante de la théorie actuelle et en particulier au troisième axiome (le critère de chevauchement). D'un côté cet axiome formalise la notion intuitive de chevauchement mais, d'un autre côté, cette définition est si vaste qu'en pratique il n'apporte presque aucune information (considérons par exemple le critère de chevauchement « toujours faux »). On peut également observer que dans toutes les h-connexions utilisées en pratique [6,27,28,30,46] le critère de chevauchement est défini par une tautologie pour correspondre à l'ensemble des éléments h-connexes. Par exemple, à la place du critère toujours faux, on peut définir la tautologie suivante, décroissante et valide pour toute h-connexion  $\mathcal{C}^+$  de  $\mathcal{L}$  :  $\forall A \subseteq \mathcal{C}^+, \bowtie A \Leftrightarrow (\forall B \subseteq A, \bigvee B \in \mathcal{C}^+)$ .

Afin de contraindre la définition des h-connexions, nous proposons d'introduire la propriété fondamentale qu'une décomposition en composantes h-connexes doit être nécessaire et suffisante. Dans la théorie actuelle, la décomposition est suffisante dans le sens où les composantes h-connexes permettent de reconstruire intégralement un élément. Mais, en général, cette décomposition n'est pas nécessaire car un sous-ensemble strict des composantes h-connexes d'un élément peut être suffisant pour reconstruire l'élément.

Posons les définitions des propriétés suivantes,  $\forall a \in \mathcal{L}$  :

- P-1 –  $\forall h' \in \gamma^*(a), \bigvee \{h \in \gamma^*(a) \mid h \neq h'\} < \bigvee \gamma^*(a)$  : toutes les composantes h-connexes d'un élément sont nécessaires pour reconstruire cet élément.
- P-2 –  $\forall \{h_i\} \subseteq \gamma^*(a), \forall h \in \gamma^*(a), h \leq \bigvee \{h_i\} \Rightarrow h \in \{h_i\}$  : une composante h-connexe d'un élément ne peut pas être couverte par d'autres composantes h-connexes de cet élément.
- P-3 –  $\forall h \in \gamma^*(a), \exists s \in \mathcal{S}, \gamma_s^*(a) = \{h\}$  : chaque composante h-connexe d'un élément peut être obtenue par une ouverture h-connexe.

On peut alors prouver la proposition suivante qui est un de nos résultats principaux :

**Proposition 4.** *Les propriétés P-1, P-2 et P-3 sont équivalentes. Par la suite on dira qu'une h-connexion est accessible si elle vérifie ces propriétés.*

*Démonstration.* Montrons d'abord que P-2  $\Rightarrow$  P-1. Soit  $\{h_i\} \subseteq \gamma^*(a)$ , et supposons que  $\exists h' \in \{h_i\}$  tel que  $\bigvee \{h \in \gamma^*(a) \mid h \neq h'\} = \bigvee \gamma^*(a)$ . Alors, posons  $F = \bigvee \{h \in \gamma^*(a) \mid h \neq h'\}$ , on a  $h' \leq \bigvee \gamma^*(a) = \bigvee F$  ce qui contredit P-2 comme  $h' \notin F$ .

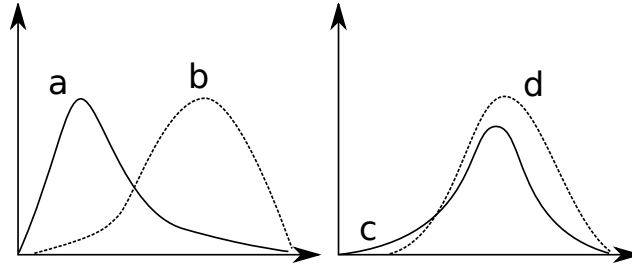


FIGURE 3.11 – Illustration du critère de chevauchement  $\bowtie_m$ . Les fonctions a et b ne se chevauchent pas car leurs seuillages respectifs jusqu'à leurs hauteurs maximales ne s'intersectent pas. Les fonctions c et d se chevauchent car l'intersection de leurs seuillages non nuls n'est jamais nulle.

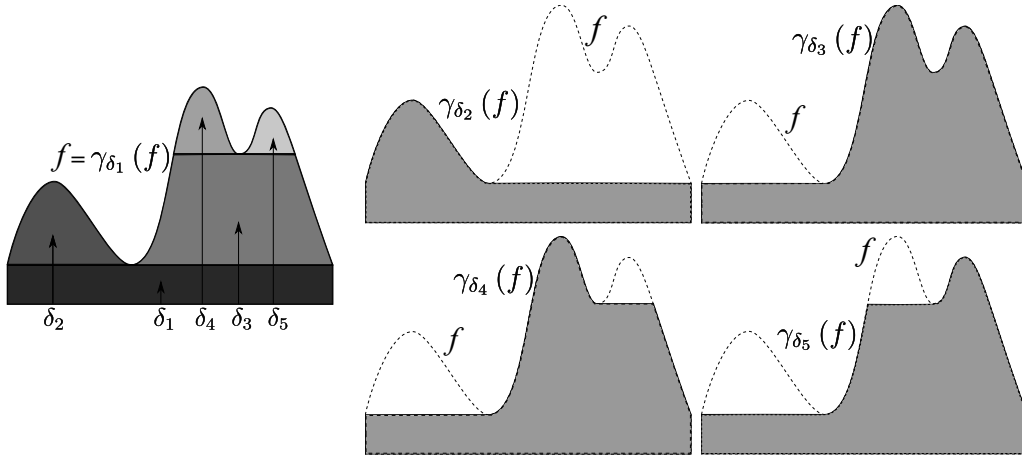


FIGURE 3.12 – Exemple de décomposition de la fonction  $f$  avec la h-connexion des fonctions monomodales. À gauche : la fonction  $f$ , cinq impulsions  $\delta_1, \dots, \delta_5$  représentatives des cinq classes d'équivalence de la fonction  $\zeta_{\delta_i}(f)$ . Les différents niveaux de gris représentent les résultats des z-opérateurs  $\zeta_{\delta_i}(f)$ . Le sup-générateur  $\delta_1$  est associé à l'ensemble des composantes h-connexes de  $f$  et donc  $\gamma_{\delta_1}(f) = f$ . À droite : résultats des ouvertures h-connexes de  $\delta_2, \dots, \delta_5$ . On remarque que  $\gamma_{\delta_2}(f)$ ,  $\gamma_{\delta_4}(f)$  et  $\gamma_{\delta_5}(f)$  sont des composantes h-connexes de  $f$  alors que  $\gamma_{\delta_1}(f)$  et  $\gamma_{\delta_3}(f)$  ne sont pas h-connexes.

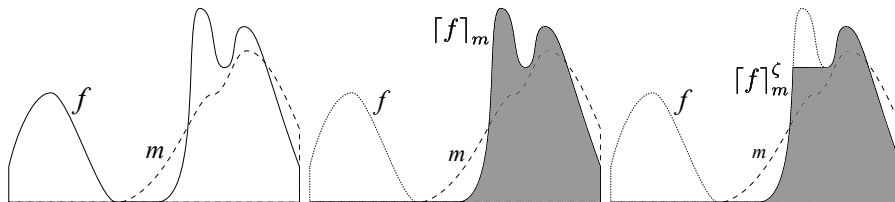


FIGURE 3.13 – L'opérateur de h-reconstruction avec la h-connexion des fonctions monomodales. De gauche à droite : la fonction  $f$  et le marqueur  $m$ , la h-reconstruction  $[f]_m$  et son alternative  $[f]_m^\zeta$ . La h-reconstruction avec la définition alternative  $[f]_m^\zeta$  permet d'obtenir une granularité plus fine et ainsi d'être plus sélectif qu'avec la définition traditionnelle  $[f]_m$ .

Montrons ensuite que P-1 $\Rightarrow$ P-2 : soit  $\{h_i\} \subset \gamma^*(a)$  et supposons qu'il existe  $h \in \gamma^*(a)$  tel que  $h \notin \{h_i\}$  et  $h \leq \bigvee \{h_i\}$ . Soit  $b = \bigvee \{h_i\} = \bigvee (\{h_i\} \cup \{h\})$ , on a d'après la proposition 1 que  $h \in \gamma^*(b)$  et que  $\{h_i\} \subseteq \gamma^*(b)$ . Mais alors,  $\bigvee \{h' \in \gamma^*(b) \mid h' \neq h\} = \bigvee \{h_i\} = b$  ce qui contredit P-1.

Montrons maintenant que P-3 $\Rightarrow$ P-2 : soit  $\{h_i\} \subseteq \gamma^*(a)$  et  $h \in \gamma^*(a)$ . Supposons que  $h \leq \bigvee \{h_i\}$  alors, par P-3, il existe  $s \in \mathcal{S}$  tel que  $\gamma_s(a) = h$  et  $s \leq h \leq \bigvee \{h_i\}$ . Par hypothèse  $\mathcal{L}$  est fortement co-premier ou  $\gamma^*(a)$  est fini, donc il existe  $j$  tel que  $s \leq h_j$  et d'après la proposition 2 on a que  $h = h_j$  et donc  $h$  appartient à  $\{h_i\}$ .

Finalement montrons que P-1 $\Rightarrow$ P-3 : soit  $h \in \gamma^*(a)$ , P-1 implique que  $\bigvee B < a$  avec  $B = \{h' \in \gamma^*(a) \mid h' \neq h\}$ . Considérons maintenant la plus petite famille  $\{s_i\} \subseteq \mathcal{S}$  telle que  $\bigvee (B \cup \{s_i\}) = a$ , soit  $s$  un élément de  $\{s_i\}$ , on a alors  $h' \in B$ ,  $s \not\leq h'$  et  $s \leq h$  donc  $\gamma_s(a) = h$ .  $\square$

P-1 et P-2 sont deux formulations directes de la condition de nécessité, la première étant exprimée d'un point de vue global, la seconde d'un point de vue local. La propriété P-3 montre que cette condition mène naturellement à la notion de groupe de sup-générateurs donnant accès à une unique composante h-connexe par une ouverture h-connexe.

Nous donnons maintenant deux exemples d'h-connexions accessibles.

**Proposition 5.** *La h-connexion  $(\mathcal{C}_p^+, \bowtie_p)$  par zones plates est accessible.*

*Démonstration.* Montrons que  $\mathcal{C}_p^+$  vérifie la propriété P-3. Soit  $a \in \mathcal{T}^{\mathcal{D}}$ , soit  $h \in \gamma^*(a)$ , soit  $x \in \mathcal{D}$  tel que  $h(x) = a(x)$ . Soit l'impulsion  $\delta_{x,h(x)}$ , montrons que  $\gamma_{\delta_{x,h(x)}}^*(a) = \{h\}$ .

L'inclusion  $\{h\} \subseteq \gamma_{\delta_{x,h(x)}}^*(a)$  est directe car  $\delta_{x,h(x)} \leq h$  et  $h \in \gamma^*(a)$ .

Montrons maintenant l'inclusion inverse  $\gamma_{\delta_{x,h(x)}}^*(a) \subseteq \{h\}$ . Soit  $h' \in \gamma_{\delta_{x,h(x)}}^*(a)$ . Commentons par montrer que  $\bowtie_p(\{h, h'\})$  est vrai. Posons  $U = \text{supp}(h) \cap \text{supp}(h')$ , on a  $x \in U \neq \emptyset$ . De plus on a  $h(x) = a(x) = h'(x)$  (car  $\delta_{x,h(x)}(x) = a(x) \leq h'(x) \leq a(x)$ ). Or, comme  $h, h' \in \mathcal{C}_p^+$ ,  $h$  et  $h'$  sont plates sur leur support respectif et donc  $\forall y \in U$ ,  $h(y) = h'(y)$ . Donc  $\bowtie_p(\{h, h'\})$  est vrai. Par conséquent,  $\bigvee \{h, h'\} \in \mathcal{C}_p^+$ , or  $h, h' \leq a$  donc  $\bigvee \{h, h'\} \leq a$ . Or comme  $h$  et  $h'$  sont des composantes h-connexes de  $a$ , on a soit  $h = h'$  ou bien  $h$  et  $h'$  ne sont pas comparables. Supposons que  $h$  et  $h'$  ne soient pas comparables, alors  $h < \bigvee \{h, h'\}$ ,  $h' < \bigvee \{h, h'\}$ , or comme  $\bigvee \{h, h'\} \leq a$ ,  $h$  et  $h'$  ne peuvent pas être des composantes h-connexes de  $a$ . On a donc  $h = h'$  et  $\gamma_{\delta_{x,h(x)}}^*(a) \subseteq \{h\}$ .

On a donc la double inclusion et  $\gamma_{\delta_{x,h(x)}}^*(a) = \{h\}$ . On peut donc obtenir toute composante h-connexe de  $a$  par une ouverture h-connexe. La h-connexion  $\mathcal{C}_p^+$  vérifie la propriété P-3 et est donc accessible.  $\square$

**Proposition 6.** *La h-connexion  $(\mathcal{C}_m^+, \bowtie_m)$  des fonctions monomodales est accessible.*

*Démonstration.* Montrons que  $\mathcal{C}_m^+$  vérifie la propriété P-3. Soit  $a \in \mathcal{T}^{\mathcal{D}}$ , soit  $h \in \gamma^*(a)$ , soit  $x \in \mathcal{D}$  tel que  $h(x) = \max_{y \in \mathcal{D}} h(y)$  ( $h(x)$  fait donc partie du maximum de  $h$ ). Soit l'impulsion  $\delta_{x,h(x)}$ , montrons que  $\gamma_{\delta_{x,h(x)}}^*(a) = \{h\}$ .

L'inclusion  $\{h\} \subseteq \gamma_{\delta_{x,h(x)}}^*(a)$  est directe car  $\delta_{x,h(x)} \leq h$  et  $h \in \gamma^*(a)$ .

Montrons maintenant l'inclusion inverse  $\gamma_{\delta_{x,h(x)}}^*(a) \subseteq \{h\}$ . Soit  $h' \in \gamma_{\delta_{x,h(x)}}^*(a)$ . Commentons par montrer que  $\bowtie_m(\{h, h'\})$  est vrai. Soit  $t \in \mathcal{T}$ , on a : si  $t \leq h(x)$  alors  $\bar{h}^t \neq \emptyset$  et  $\bar{h}'^t \neq \emptyset$  (car  $\delta_{x,h(x)} \leq h'$ ), sinon si  $t > h(x)$  alors  $\bar{h}^t = \emptyset$  ( $h(x)$  est la hauteur maximale de

$h$ ). Or  $\forall t \in \mathcal{T}, t \leq h(x)$ , on a  $x \in \bar{h}^t \cap \bar{h}'^t \neq \emptyset$ . Donc  $\bowtie_m(\{h, h'\})$  est vrai. Par conséquent,  $\bigvee \{h, h'\} \in \mathcal{C}_m^+$ , or  $h, h' \leq a$ , donc  $\bigvee \{h, h'\} \leq a$ . Or comme  $h$  et  $h'$  sont des composantes h-connexes de  $a$ , on a soit  $h = h'$  ou bien  $h$  et  $h'$  ne sont pas comparables. Supposons que  $h$  et  $h'$  ne soient pas comparables, alors  $h < \bigvee \{h, h'\}$ ,  $h' < \bigvee \{h, h'\}$ , or comme  $\bigvee \{h, h'\} \leq a$ ,  $h$  et  $h'$  ne peuvent pas être des composantes h-connexes de  $a$ . On a donc  $h = h'$  et  $\gamma_{\delta_{x, h(x)}}^*(a) \subseteq \{h\}$ .

On a donc la double inclusion et  $\gamma_{\delta_{x, h(x)}}^*(a) = \{h\}$ . On peut donc obtenir toute composante h-connexe de  $a$  par une ouverture h-connexe. La h-connexion  $\mathcal{C}_m^+$  vérifie la propriété P-3 et est donc accessible.  $\square$

Les h-connexions accessibles bénéficient des propriétés suivantes :

**Proposition 7.** *Si  $\mathcal{C}^+$  est accessible, étant donnée une famille de composantes h-connexes, cette famille et la famille des composantes h-connexes de son supremum sont égales :  $\forall \{h_i\} \subseteq \gamma^*(a), \{h_i\} = \gamma^*(\bigvee \{h_i\})$*

*Démonstration.* La proposition 1 montre la première inclusion :  $\{h_i\} \subseteq \gamma^*(\bigvee \{h_i\})$ . La seconde inclusion  $\gamma^*(\bigvee \{h_i\}) \subseteq \{h_i\}$  est donnée directement par P-2 : soit  $h \in \gamma^*(\bigvee \{h_i\})$  tel que  $h \leq \bigvee \{h_i\}$ , P-2 implique que  $h$  appartient à  $\{h_i\}$ . Finalement la double inclusion montre que  $\{h_i\} = \gamma^*(\bigvee \{h_i\})$ .  $\square$

Comparée à la proposition 1, cette version est plus forte et assure qu'en sélectionnant une famille de composantes h-connexes (correspondant par exemple à un critère donné), sa reconstruction par l'opération de supremum n'introduira pas de nouvelle composante h-connexe.

Les h-connexions accessibles simplifient l'usage des z-opérateurs :

**Proposition 8.** *Si  $\mathcal{C}^+$  est accessible, alors les relations  $\overset{a}{\sim}$  et  $\overset{a^*}{\sim}$  sont équivalentes :  $\forall s_1, s_2 \in \mathcal{S}, (s_1 \overset{a}{\sim} s_2) \Leftrightarrow (s_1 \overset{a^*}{\sim} s_2)$ .*

*Démonstration.* Montrons d'abord que  $\forall s_1, s_2 \in \mathcal{S}, s_1 \overset{a^*}{\sim} s_2 \Rightarrow s_1 \overset{a}{\sim} s_2$ , ce qui ne nécessite pas la propriété d'accessibilité. On a :

$$\begin{aligned} s_1 \overset{a^*}{\sim} s_2 &\Leftrightarrow \gamma_{s_1}^*(a) = \gamma_{s_2}^*(a) \\ &\Rightarrow \bigvee \gamma_{s_1}^*(a) = \bigvee \gamma_{s_2}^*(a) \\ &\Leftrightarrow \gamma_{s_1}(a) = \gamma_{s_2}(a) \\ &\Leftrightarrow s_1 \overset{a}{\sim} s_2 \end{aligned}$$

L'implication inverse est donnée par : supposons que  $s_1 \overset{a}{\sim} s_2$ , ce qui équivaut à  $\gamma_{s_1}(a) = \gamma_{s_2}(a)$ . Soit  $h \in \gamma_{s_1}^*(a)$ , on a  $h \leq \gamma_{s_1}(a) = \bigvee \gamma_{s_1}^*(a) = \bigvee \gamma_{s_2}^*(a)$ . Alors, P-2 implique que  $h \in \gamma_{s_2}^*(a)$  et donc  $\gamma_{s_1}^*(a) \subseteq \gamma_{s_2}^*(a)$ . Le même argument permet de prouver que  $\gamma_{s_2}^*(a) \subseteq \gamma_{s_1}^*(a)$  montrant que  $\gamma_{s_2}^*(a) = \gamma_{s_1}^*(a)$  ce qui est équivalent à  $s_1 \overset{a^*}{\sim} s_2$ .  $\square$

Pour une h-connexion accessible, les deux relations d'équivalence  $\overset{a}{\sim}$  et  $\overset{a^*}{\sim}$  sont donc équivalentes, ce qui évite d'avoir à choisir entre les deux définitions possibles des z-opérateurs.

### 3.4.3 Arbre des composantes hyper-connexes

Dans cette section, nous montrons que la décomposition en composantes h-connexes peut mener à une représentation hiérarchique d'un élément d'un treillis de fonctions (images). On se place dans le cadre des h-connexions accessibles au sens de la proposition 4, la définition des z-zones ne dépend donc pas du choix de la relation d'équivalence utilisée (proposition 8). Les composantes h-connexes d'une fonction ne sont, par définition, pas comparables et la définition de l'arbre des composantes connexes doit donc être revue. Dans [5,6], les auteurs proposent une définition de l'arbre des composantes en niveaux de gris (*grayscale component tree*), nous proposons, quant à nous, une définition générale basée sur les z-zones. La stratégie adoptée est d'équiper les z-zones avec une relation d'ordre partiel particulière  $\preceq$  et de prouver que le diagramme de Hasse des z-zones par rapport à cet ordre est un arbre.

Soit  $\mathcal{I} = \mathcal{L}^E$  le treillis des images avec  $\mathcal{L}$  un treillis et  $E$  un domaine. Soit la relation  $\preceq$  sur  $\mathcal{I}$  :

$$\forall x, y \in \mathcal{I}, \quad x \preceq y \Leftrightarrow (\text{supp}(x) \subseteq \text{supp}(y)) \wedge (y_{/\text{supp}(x)} \leq x) \quad (3.29)$$

où  $y_{/\text{supp}(x)}$  est la fonction  $y$  restreinte sur  $\text{supp}(x)$  :

$$\forall p \in E, \quad y_{/\text{supp}(x)}(p) = \begin{cases} y(p) & \text{si } p \in \text{supp}(x) \\ \perp & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.30)$$

**Proposition 9.**  $\preceq$  est un ordre partiel sur  $\mathcal{I}$ .

*Démonstration.* On doit montrer que  $\preceq$  est une relation réflexive, anti-symétrique et transitive sur  $\mathcal{I}$ .

La réflexivité est triviale :  $\forall x \in \mathcal{I}, \text{supp}(x) \subseteq \text{supp}(x)$  et  $x_{/\text{supp}(x)} = x$  et donc  $x \preceq x$ .

Montrons maintenant l'anti-symétrie. Soit  $x, y$  deux éléments de  $\mathcal{I}$  tels que  $x \preceq y$  et  $y \preceq x$ . On a  $\text{supp}(x) \subseteq \text{supp}(y)$  et  $\text{supp}(y) \subseteq \text{supp}(x)$  et donc  $\text{supp}(y) = \text{supp}(x)$ . Donc comme les deux fonctions ont le même support :  $x_{/\text{supp}(y)} = x$  et  $y_{/\text{supp}(x)} = y$ . Donc  $x \leq y$  et  $y \leq x$  implique  $x = y$  et donc  $\preceq$  est anti-symétrique.

Enfin, la transitivité : soit  $x, y$  et  $z$  trois éléments de  $\mathcal{I}$  tels que  $x \preceq y$  et  $y \preceq z$ . Comme  $\text{supp}(x) \subseteq \text{supp}(y)$  et  $\text{supp}(y) \subseteq \text{supp}(z)$ , on a  $\text{supp}(x) \subseteq \text{supp}(z)$ . Et comme  $z_{/\text{supp}(y)} \leq y$  et  $\text{supp}(x) \subseteq \text{supp}(y)$  alors  $z_{/\text{supp}(x)} \leq y_{/\text{supp}(x)}$ , finalement  $z_{/\text{supp}(z)} \leq x$  et donc  $x \preceq z$ .  $\square$

Avec cet ordre partiel, une fonction  $x$  est inférieure à une fonction  $y$  si le support de  $x$  est inclus dans le support de  $y$  et que la valeur de  $x$  est plus élevée que celle de  $y$  sur le support de  $x$  (figure 3.14). La paire  $(\mathcal{I}, \preceq)$  est un treillis avec l'opérateur d'infimum  $\wedge_{\preceq}$  et de supremum  $\vee_{\preceq}$ , définis pour tout  $x, y \in \mathcal{I}$  par :

$$\forall p \in E, (x \wedge_{\preceq} y)(p) = \begin{cases} x(p) \vee_{\mathcal{L}} y(p) & \text{si } p \in \text{supp}(x) \cap \text{supp}(y) \\ \perp & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.31)$$

$$\forall p \in E, (x \vee_{\preceq} y)(p) = \begin{cases} x(p) \wedge_{\mathcal{L}} y(p) & \text{si } p \in \text{supp}(x) \cap \text{supp}(y) \\ x(p) & \text{si } p \in \text{supp}(x) \text{ et } p \notin \text{supp}(y) \\ y(p) & \text{si } p \in \text{supp}(y) \text{ et } p \notin \text{supp}(x) \\ \perp & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.32)$$

La figure 3.14 montre les propriétés de base de  $\preceq$  et des opérateurs associés.

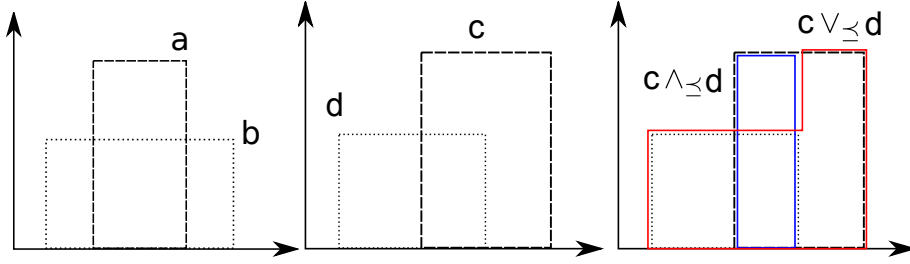


FIGURE 3.14 – Gauche : deux fonctions  $a$  et  $b$  telles que  $a \preceq b$ . Milieu : deux fonctions  $c$  et  $d$  qui ne sont pas comparables par rapport à  $\preceq$ . Droite : l'infimum  $c \wedge_{\preceq} d$  (en bleu) et le supremum  $c \vee_{\preceq} d$  (en rouge) des fonctions  $c$  et  $d$  de l'image du milieu.

Alors, une représentation sous forme de graphe de l'image est obtenue en considérant le diagramme de Hasse  $(\mathcal{E}_a, \mathcal{F}_a)$  de ses z-zones par rapport à l'ordre partiel  $\preceq$ .

$$\mathcal{E}_a = \zeta(a) \cup \{\perp\} \quad (3.33)$$

$$\mathcal{F}_a = \{(x, y) \in \mathcal{E}_a^2 \mid x \prec y, (\forall z \in \mathcal{E}_a, x \preceq z \prec y \Rightarrow x = z)\} \quad (3.34)$$

où  $\prec$  signifie *strictement inférieur à* :  $z \prec y \Leftrightarrow (z \preceq y) \wedge (z \neq y)$ . La propriété P-3 garantit qu'il existe une correspondance entre les nœuds du graphe et les composantes h-connexes de l'image. Nous donnons maintenant une condition suffisante (mais pas nécessaire) pour garantir l'absence de cycle dans le graphe et ainsi obtenir un arbre de racine  $\perp$ . Le plus petit élément  $\perp$  est uniquement ajouté pour assurer la connexité du graphe, par conséquent il sera omis s'il n'est pas nécessaire.

**Proposition 10.** *Si les éléments de  $\mathcal{E}_a$  sont tous disjoints ou comparables (c'est-à-dire que  $\forall x, y \in \mathcal{E}_a, x \wedge_{\preceq} y \neq \perp \Rightarrow (x \preceq y) \vee (y \preceq x)$ ), alors le graphe  $(\mathcal{E}_a, \mathcal{F}_a)$  est acyclique.*

*Démonstration.* On montre que pour tout  $x \neq \perp$  dans  $\mathcal{E}_a$  il existe au plus un  $y$  dans  $\mathcal{E}_a$  tel que  $(x, y)$  soit dans  $\mathcal{F}_a$  (si  $x = \perp$ ,  $x$  est le plus petit élément et il ne peut pas exister de  $y \in \mathcal{E}_a$  tel que  $(x, y)$  soit dans  $\mathcal{F}_a$ ). Supposons qu'il existe  $y$  et  $y'$  dans  $\mathcal{E}_a$ ,  $y \neq y'$  tel que  $(x, y) \in \mathcal{F}_a$  et  $(x, y') \in \mathcal{F}_a$ . On a  $x \preceq y$  et  $x \preceq y'$ , donc  $\text{supp}(x) \subseteq \text{supp}(y)$  et  $\text{supp}(x) \subseteq \text{supp}(y')$ , alors  $\text{supp}(y) \cap \text{supp}(y') \supseteq \text{supp}(x) \neq \emptyset$  et donc  $y \wedge_{\preceq} y' \neq \perp$ . Par hypothèse, comme  $y$  et  $y'$  ne sont pas disjoints ils sont comparables :  $y \preceq y'$  ou  $y' \preceq y$ . Premier cas : supposons que  $y \preceq y'$ , alors  $(x, y')$  ne peut pas être dans  $\mathcal{F}_a$  car on a  $x \preceq y \preceq y'$ . Le deuxième cas est similaire, ce qui contredit l'hypothèse. Comme chaque nœud de  $\mathcal{E}_a$  ne peut avoir qu'un seul antécédent, le graphe est acyclique (les autres cycles sont impossibles de par la définition du diagramme de Hasse).  $\square$

La seule obligation pour assurer que les z-zones d'une image puissent être représentées par un arbre selon l'ordre  $\preceq$  est de vérifier que  $\mathcal{C}^+$  remplit la proposition 10. La figure 3.15 montre un exemple d'arbre des composantes h-connexes avec la h-connexion des fonctions monomodales. Avec cette h-connexion particulière, le résultat obtenu est équivalent à celui obtenu dans [5, 6] avec l'arbre des composantes en niveaux de gris.

L'arbre des composantes h-connexes peut alors être utilisé dans le même cadre que l'arbre des composantes connexes (section 3.3.2).



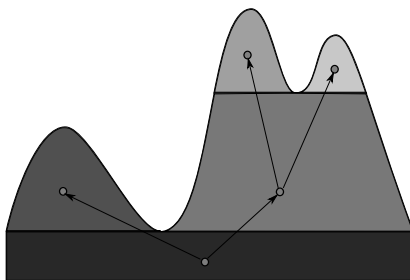


FIGURE 3.15 – Arbre des composantes h-connexes avec la h-connexion des fonctions monomodales ( $\perp$  n'est pas représenté car il n'est pas nécessaire pour la connexité du graphe).

#### 3.4.4 Expérimentation avec l'arbre des composantes h-connexes floues

L'annexe D propose une application de l'arbre des composantes h-connexes avec une h-connexion plus complexe basée sur une mesure de connexion floue [41]. On montre alors comment utiliser la h-connexion floue pour produire l'arbre des composantes h-connexes associé. Puis, les capacités de l'arbre sont démontrées sur des opérations de filtrage usuelles. La définition de la h-connexion floue est également adaptée pour traiter des images multibandes. Finalement, une application à la binarisation d'images de document est proposée.

### 3.5 Applications en imagerie astronomique multibande

Notre objectif premier justifiant l'utilisation des arbres de composantes h-connexes est la recherche des zones H II pour lesquelles un traitement spécifique est nécessaire pour assurer le bon déroulement du processus d'estimation.

D'un point de vue topologique, une galaxie peut être décrite comme une composante dont la luminosité décroît continument depuis son centre vers l'extérieur. Dans le cas des galaxies elliptiques ou lenticulaires, aucun élément ne vient perturber cette décroissance (hormis le bruit). Dans le cas des galaxies spirales, les bras ne vont pas perturber cette décroissance, ils formeront simplement une spirale sur laquelle la décroissance lumineuse sera moins rapide (figure 3.16). En revanche, les zones de formation d'étoiles sont censées provoquer un relief de faible extension. On voit donc la possibilité d'extraire les zones de formation avec un opérateur chapeau en utilisant la h-connexion des fonctions monomodales ou la h-connexion floue.

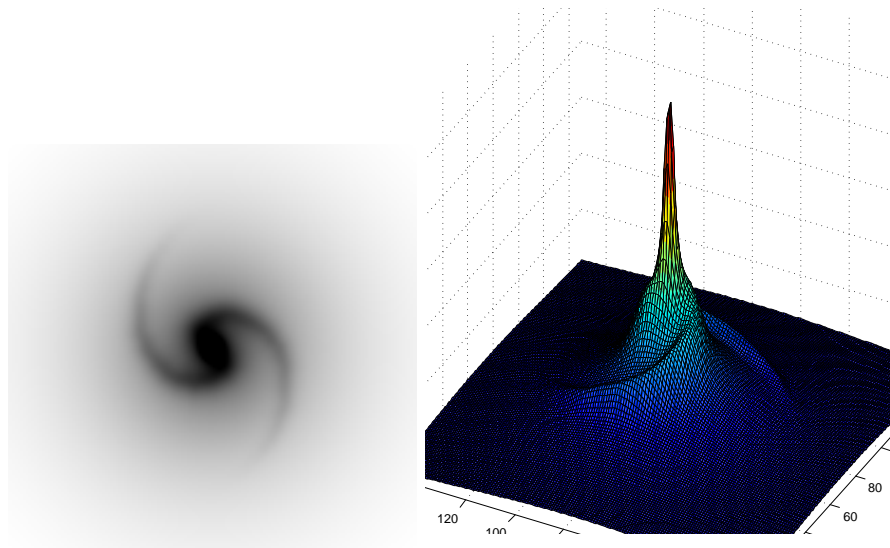


FIGURE 3.16 – La topologie d'une galaxie composée d'un disque, d'un bulbe, d'une barre et de bras spiraux correspond à une unique composante dont la luminosité décroît continument depuis le centre. En identifiant les éléments créant des maxima locaux on pourra détecter les zones de formation stellaire. A gauche : une image simulée d'une galaxie composée d'un bulbe, d'un disque et de bras spiraux ; à droite : la même galaxie.

Il est également intéressant de pouvoir extraire les bras spiraux dans leur intégralité pour au moins deux raisons : faciliter l'initialisation des paramètres de forme du bulbe et du disque (réduire les perturbations dues aux bras spiraux) et offrir un support pour l'initialisation des paramètres des bras spiraux (voir table 2.5 page 65 pour un rappel des paramètres associés à chaque structure). Malheureusement, l'approche précédente ne permet pas d'extraire la structure complète des bras spiraux. Ceci est dû au fait que la connexion utilisée pour la définition des fonctions h-connexes est une connexion ensembliste traditionnelle (4 ou 8-voisinage) qui permet à la fonction de suivre l'enroulement des bras en deux dimensions. Afin de briser cette connexion, nous proposons d'utiliser la même technique en ne considérant connexes que

les fonctions monodimensionnelles radiales par rapport au centre de la galaxie. En d'autres termes, la connexion primaire est faite le long de l'axe  $r$  en coordonnées polaires  $(r, \theta)$  dont l'origine se trouve au centre de la galaxie. L'utilité de la représentation polaire [54] dans le cadre de la morphologie est discutée dans [22]. Les aspects pratiques liés à la transformation associée (passage d'une représentation en coordonnées cartésiennes à la représentation log-polaire) sont décrits dans l'annexe C.

En outre, l'arbre des composantes h-connexes permet d'effectuer une étape préliminaire de séparation de sources afin de supprimer les objets ne faisant pas partie de la galaxie à analyser (étoiles, autres galaxies, artefacts).

Dans la suite du chapitre, on se place dans le cadre des images discrètes  $\mathcal{D} \subset \mathbb{Z}^2$  à support fini et à valeurs vectorielles réelles  $\mathcal{T} = \overline{\mathbb{R}}^B$  avec  $B$  le nombre de bandes. Soit  $f : \mathbb{Z}^2 \mapsto \overline{\mathbb{R}}^B$  une image.

### 3.5.1 Choix d'une relation d'ordre

L'utilisation des arbres de composantes h-connexes impose la définition d'un ordre total ou d'un pré-ordre total sur la valeur des pixels. La plupart des applications requérant le choix d'un ordre vectoriel portent sur le problème spécifique des images couleurs, le traitement se faisant alors généralement dans des espaces teinte-brillance-saturation qui ont des spécificités fortes. Dans notre cas, bien que traitant également d'images couleurs au sens large, l'approche est différente et se trouve simplifiée par la nature du problème. En effet, à ce stade, l'information de couleur est négligeable par rapport à la notion de flux : nous recherchons des objets qui peuvent ressortir aussi bien dans les longueurs d'ondes courtes (émission directe) ou plus longues (absorption, ré-émission). Nous proposons donc d'utiliser un ordre total, composé en premier lieu d'un ordre réduit [1] consistant à comparer l'énergie des vecteurs, puis en cas d'égalité d'une comparaison lexicographique des bandes ordonnées du meilleur au plus mauvais seeing (section 1.2.1.3 page 7). Cet ordre est une généralisation d'un ordre proposé dans [36, 37] pour l'analyse morphologique de signaux complexes :

$$\forall v, v' \in \mathbb{R}^B, v \leq_A v' \Leftrightarrow [\|v\|, v_1, \dots, v_B] \leq_L [\|v'\|, v'_1, \dots, v'_B] \quad (3.35)$$

Notons que sur 60 images 5 bandes réelles de galaxies de types morphologiques variés, impliquant plus de 10 millions de comparaisons vectorielles, environ 90 000 ont impliqué d'autres éléments que les termes d'énergie dans la comparaison, soit moins de 1 % des cas (les cas des vecteurs égaux ne sont pas comptés). Notons que pour éviter toute erreur liée aux approximations numériques, les valeurs flottantes sont comparées de manière robuste avec une tolérance de  $10^5$  *ulps* (deux valeurs sont égales si le nombre de valeurs représentables entre ces deux nombres est inférieur à  $10^5$  dans la représentation choisie, ici *IEEE 754 double precision* [15]).

Afin d'être moins sensible à la première composante du vecteur et de prendre en compte les rapports signal-sur-bruit des bandes, on introduit des techniques de pondération par le bruit et de troncature. On définit l'énergie normalisée par :

$$E_n(v) = \left\| \frac{v_1}{k\sigma_1}, \dots, \frac{v_n}{k\sigma_B} \right\| \quad (3.36)$$

avec  $\sigma_i$  l'écart-type du bruit dans la bande  $i$  et  $k$  un facteur de confiance. On peut définir le facteur  $k$  comme le risque jugé acceptable de considérer par erreur une valeur significative

comme du bruit ; dans le cas gaussien on prendra typiquement  $k$  compris entre 1 et 3. La comparaison des composantes des vecteurs est également pondérée par l'intensité du bruit dans la bande concernée, et les résultats sont tronqués. On obtient alors le pré-ordre :

$$\forall v, v' \in \mathbb{R}^B, v \leq_{Ap} v' \Leftrightarrow \left[ \lfloor E_n(v) \rfloor, \left\lfloor \frac{v_1}{k\sigma_1} \right\rfloor, \dots, \left\lfloor \frac{v_B}{k\sigma_B} \right\rfloor \right] \leq_L \left[ \lfloor E_n(v') \rfloor, \left\lfloor \frac{v'_1}{k\sigma_1} \right\rfloor, \dots, \left\lfloor \frac{v'_B}{k\sigma_B} \right\rfloor \right] \quad (3.37)$$

où  $\lfloor \cdot \rfloor$  désigne la partie entière.

Afin d'obtenir un ordre total  $\leq_{Ao}$ , on peut étendre  $\leq_{Ap}$  avec une comparaison lexicographique des bandes non pondérées et non tronquées :

$$v \leq_{Ao} v' \Leftrightarrow \left[ \lfloor E_n(v) \rfloor, \left\lfloor \frac{v_1}{k\sigma_1} \right\rfloor, \dots, \left\lfloor \frac{v_B}{k\sigma_B} \right\rfloor, v_1, \dots, v_B \right] \leq_L \left[ \lfloor E_n(v') \rfloor, \left\lfloor \frac{v'_1}{k\sigma_1} \right\rfloor, \dots, \left\lfloor \frac{v'_B}{k\sigma_B} \right\rfloor, v'_1, \dots, v'_B \right] \quad (3.38)$$

Avec cet ordre, la comparaison de deux vecteurs de dimension  $B$  implique au maximum  $2B+1$  comparaisons de nombres réels. Nous avons réalisé des érosions et des dilations structurales sur 60 images astronomiques 5 bandes en précision flottante afin de déterminer comment sont utilisées les composantes de  $\leq_{Ao}$  en pratique. La figure 3.17 montre que, pour environ 21,5 millions de comparaisons vectorielles, environ 50 % ont été ordonnées en utilisant uniquement la première composante  $\lfloor E_n(v) \rfloor$  (à comparer avec les 99 % obtenues sans pondération et sans troncature), puis l'importance des composantes diminue régulièrement. On peut remarquer qu'en pratique il n'y a que très rarement plus de  $B+2$  comparaisons impliquées. Notons également qu'avec le pré-ordre  $\leq_{Ap}$ , on a obtenu environ 5 % de vecteurs  $v_1$  et  $v_2$  tels que :  $v_1 \leq v_2$  et  $v_2 \leq v_1$  mais  $v_1 \neq v_2$ , ce qui n'est pas négligeable, d'où l'intérêt de l'ordre total  $\leq_{Ao}$  pour réaliser une reconstruction.

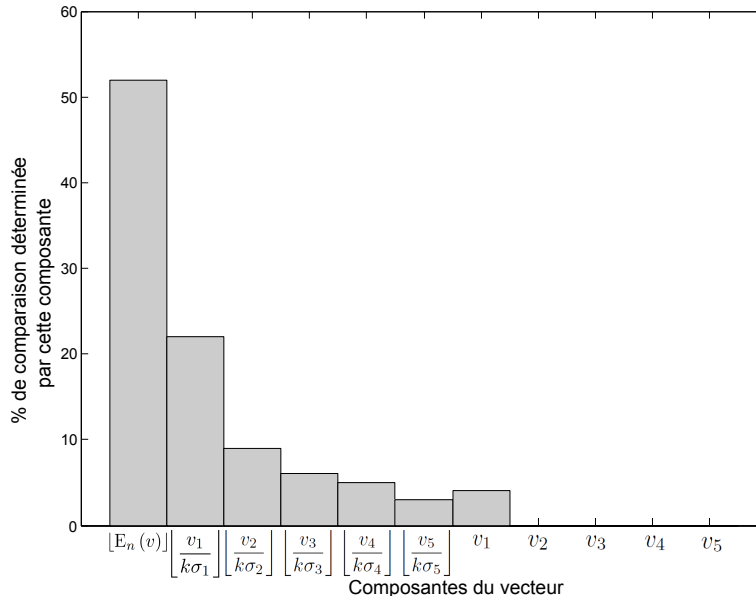


FIGURE 3.17 – Répartition de l'utilisation des composantes du vecteur pour déterminer  $\leq_{Ao}$ .

Pour les trois applications suivantes : séparation de sources, extraction des bras spiraux et détection des zones HII, nous utiliserons la  $h$ -connexion des fonctions monomodales. La relation d'ordre utilisée sera précisée pour chaque application parmi les relations  $\leq_{A_o}$  et  $\leq_{A_p}$ .

### 3.5.2 Séparation de sources

Il arrive fréquemment, suite aux effets de projection, que différents objets astronomiques s'intersectent sur l'observation. Il n'est néanmoins pas toujours facile de décider, sur la base d'une simple image, si les objets sont réellement différents ou si les deux objets sont liés. Afin de résoudre ce problème, nous nous inspirons des solutions proposées pour le projet COSMOS [2] et dans SExtractor [4]. Dans ces deux approches similaires, l'image est préalablement fortement sous-quantifiée (passage de valeurs flottantes à 32 niveaux de gris), puis une analyse utilisant l'arbre des composantes connexes de cette image quantifiée est réalisée. En partant des feuilles de l'arbre jusqu'à la racine, pour chaque nœud, la décision de conserver un de ses fils comme objet indépendant est prise si :

1. le volume représenté par ce fils est supérieur à une certaine fraction  $\delta_c$  du volume représenté par le nœud,
2. au moins 2 fils vérifient la condition précédente.

Le choix du seuil est crucial pour assurer le bon fonctionnement de la procédure ; néanmoins, la conception même de la procédure permet d'affirmer que ce seuil sera indépendant de l'échelle de représentation et de l'échelle de flux.

Dans le cas monobande, le volume d'un nœud est défini comme la somme des brillances des pixels du nœud retranchée du niveau du nœud  $h$  (ou de son ancêtre selon les définitions). Dans le cas multibande, ce type de définition peut aboutir à des valeurs négatives du volume dont l'interprétation serait délicate. Nous proposons donc une définition du volume multispectral basée sur la notion d'énergie. Cette définition requiert que chaque nœud possède un niveau unique (la fonction de valuation  $h$  retourne un singleton) et donc que l'arbre soit basé sur un ordre total. Soit  $t$  un nœud du graphe, nous définissons le volume associé :

$$V(t) = \begin{cases} \sqrt{\sum_{x \in t} (f(x) - h(t^-))^T (f(x) - h(t^-))} & \text{si } t \text{ n'est pas la racine} \\ \sqrt{\sum_{x \in t} f(x)^2} & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.39)$$

L'arbre des composantes  $h$ -connexes est calculé en utilisant l'ordre vectoriel  $\leq_{A_o}$  et  $\delta_c$  est fixé à 0,04. Les objets identifiés comme n'appartenant pas à la galaxie sont masqués pour le reste du processus. La figure 3.18 montre les résultats obtenus pour les galaxies PGC 282 et PGC 24531. On peut voir que les objets intersectant les galaxies sont bien séparés mais l'évaluation de leur frontière n'est pas toujours idéale.

### 3.5.3 Extraction des bras spiraux

L'extraction efficace et robuste des bras spiraux est une étape importante de la procédure d'initialisation de la spirale décrite dans l'annexe B.3. Si l'on considère une connexion 2D, le bulbe, le disque et les bras spiraux forment une composante possédant un unique maximum (figure 3.16). Afin de pouvoir extraire les bras (et par différence la composante correspondant

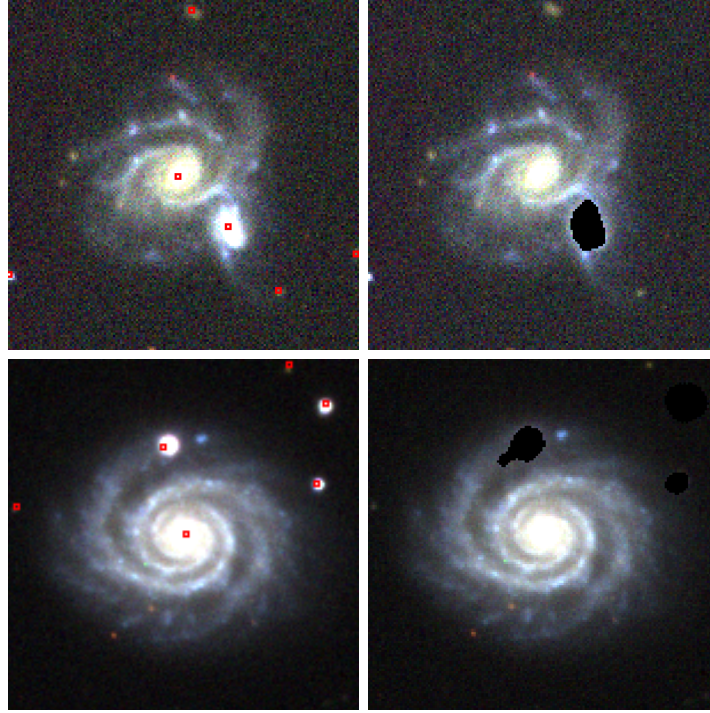


FIGURE 3.18 – Séparation de sources avec l'arbre des composantes h-connexes monomodales multibande pour les galaxies PGC 282 (ligne du haut) et PGC 24531 (ligne du bas). La colonne de gauche montre chaque galaxie et les sources identifiées marquées d'un carré rouge. La colonne de droite montre un agrandissement de la partie considérée comme étant la galaxie avec les autres sources masquées.

au disque, au bulbe et à la barre stellaire), on doit briser cette connexion, par exemple, en considérant une connexion radiale depuis le centre de la galaxie, ce qui peut être réalisé dans une représentation log-polaire de l'image (annexe C). Dans cette représentation, les directions radiales de l'espace cartésien deviennent des droites horizontales (figure 3.20). Formellement, la connexion ensembliste  $\mathcal{C}_h$  des segments horizontaux de  $\mathbb{Z}^2$  est définie par :

$$\mathcal{C}_h = \{ \{(x_i, y), \dots, (x_j, y)\} \mid y, x_i, x_j \in \mathbb{Z}, x_i < x_j \} \cup \mathcal{S}(\mathbb{Z}^2) \cup \{\emptyset\} \quad (3.40)$$

La connexion  $\mathcal{C}_h$  est équivalente à la connexion par graphe représentée par la figure 3.19.

On considère la h-connexion des fonctions monomodales selon  $\mathcal{C}_h$ . Les bras spiraux peuvent alors être extraits par l'opérateur chapeau h-connexe  $\Xi_m^{\mathcal{C}_h}(f)$  (section 3.4.1.5). Le marqueur  $m$ , qui localise le bulbe, est une bande verticale le long du bord gauche de l'image (rayon court) dont la largeur  $R$  correspond à la largeur du bulbe estimé :

$$m(r, \theta) = \begin{cases} f(r, \theta) & \text{si } r < R \\ \perp & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.41)$$

La figure 3.20 présente les résultats de la procédure d'extraction de la structure spirale sur les galaxies PGC 2182 et PGC 24348. Dans les deux cas, la structure spirale est bien reconnue ; néanmoins, cette procédure récupère également le bruit de fond et le départ des bras peut être légèrement perdu.

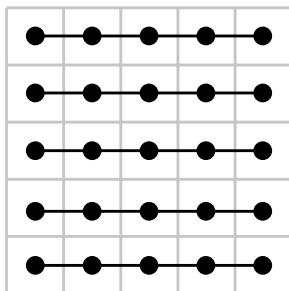


FIGURE 3.19 – La connexion ensembliste  $\mathcal{C}_h$  des segments horizontaux de  $\mathbb{Z}^2$  est équivalente à une connexion par graphe où chaque nœud est uniquement relié à ses voisins de gauche et de droite.

### 3.5.4 Détection des zones H II

L'obtention d'une carte des régions H II est une étape essentielle du processus d'estimation des galaxies spirales (section 2.3.1). L'arbre des composantes h-connexes permet d'accéder aux maxima locaux d'une observation qui sont composés de différentes structures : zones de formation stellaire, objets étrangers à la galaxie (étoiles, autres galaxies) non identifiés lors de la phase de séparation de structures (flux insuffisant), bruits, . . . Nous avons identifié trois attributs permettant une séparation efficace des zones de formation stellaire :

- critère sur l'énergie : l'énergie par unité de surface doit être significativement supérieure à celle du bruit (trois fois plus grande que l'énergie correspondant à l'écart-type du bruit) ;
- critère sur la taille : la zone doit mesurer au moins  $0,25 \text{ arcsec}^2$  soit environ 3 pixels sur les images du SDSS utilisées dans ce document ;
- critère de couleur : les zones H II sont plus lumineuses dans les longueurs d'onde courtes, ce que l'on peut traduire par une contrainte de positivité sur la différence entre les bandes  $g$  et  $i$ .

La figure 3.21 présente les résultats de détection des zones H II sur les galaxies PGC 2600, PGC 3377 et PGC 35538. Comme on s'y attend, la plupart des zones H II détectées se situent sur les bras spiraux. Notons l'intérêt du support des images multibandes qui permet l'utilisation d'un critère de couleur sans lequel il n'aurait pas été possible de faire la différence entre les zones H II et les autres sources de forme similaire.

## 3.6 Contributions du chapitre

Dans ce chapitre, nous avons proposé plusieurs évolutions des méthodes de modélisation basées sur les connexions. Dans un premier temps, les méthodes existantes de décomposition en arbres de composantes connexes ont été étendues au cas multibande. Leur utilisation dans ce cadre particulier et les conséquences liées au type d'ordre vectoriel sous-jacent ont été étudiées.

Dans un deuxième temps, nous avons proposé une évolution de la théorie des h-connexions introduisant le désir d'obtenir des décompositions nécessaires et suffisantes pour caractériser une image. Cette évolution a permis d'établir de nouvelles propriétés et d'éclaircir la zoologie des opérateurs h-connexes. Cette théorie est ensuite utilisée pour construire des représenta-

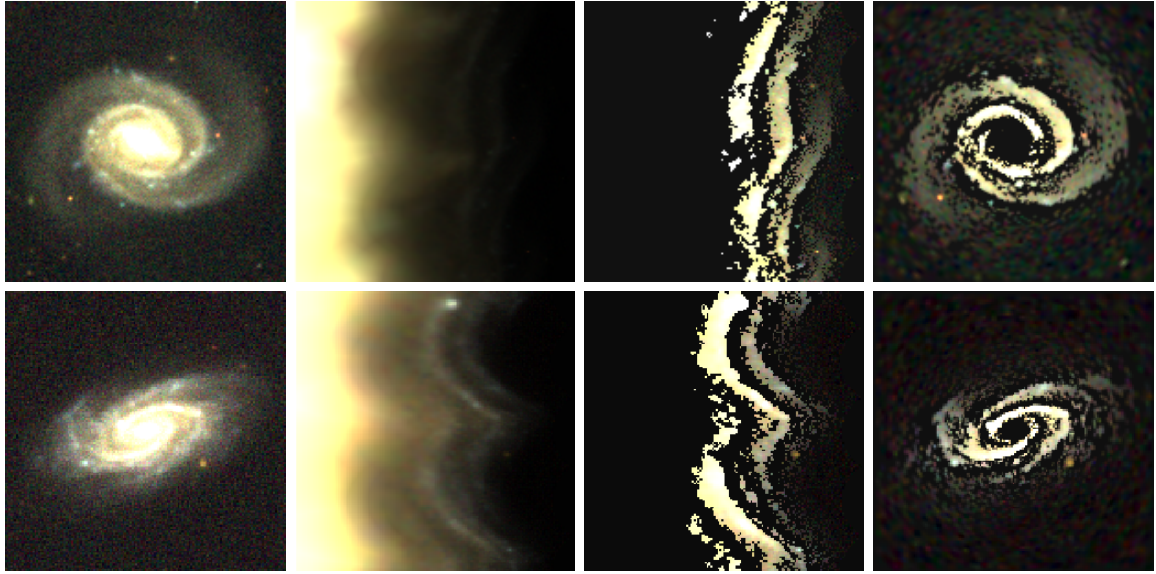


FIGURE 3.20 – Extraction de la structure spirale pour les galaxies PGC 2182 (1<sup>er</sup> ligne) et PGC 24348 (2<sup>e</sup> ligne). De gauche à droite : observation, représentation log-polaire, résultat de l’opérateur chapeau dans l’espace log-polaire, résultat dans l’espace cartésien.

tions hiérarchiques basées sur la décomposition en composantes h-connexes. Cette approche permet de dépasser certaines limites des arbres de composantes connexes en favorisant l’existence de nœuds non plats au sein de l’arbre : la robustesse au bruit est ainsi accrue et le nombre de nœuds est significativement réduit. Les propriétés et les capacités de ce nouvel arbre des composantes h-connexes ont été évaluées avec une h-connexion floue sur des tâches de filtrage et de binarisation, montrant la pertinence de l’approche.

Finalement, ces développements ont permis la mise en œuvre de trois applications complémentaires aux techniques de modélisation paramétrique vues dans le chapitre précédent : séparation de sources, extraction des bras spiraux et détection des régions H II. Ces applications tirent pleinement parti des avantages apportés par le support du cadre multibande et par la robustesse au bruit : elles fournissent des solutions dont la fiabilité au sein du processus de traitement complet (combinant approches paramétriques et morphologiques) est validée dans le chapitre suivant.

Le travail présenté dans ce chapitre a été validé par deux conférences [33,34] et un article de journal [35] (en révision).

## Bibliographie

- [1] E. APTOULA et S. LEFÈVRE : A Comparative Study on Multivariate Mathematical Morphology. *Pattern Recognition*, 40(11):2914–2929, 2007.
- [2] S. M. BEARD, H. T. MACGILLIVRAY et P. F. THANISCH : The Cosmos System for Crowded-Field Analysis of Digitized Photographic Plate Scans. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 247:311–321, novembre 1990.



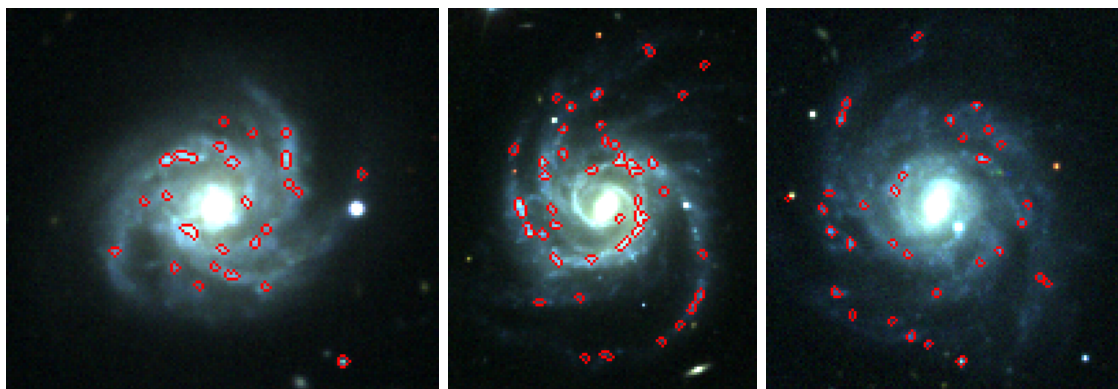


FIGURE 3.21 – Détection des zones H II sur les galaxies (de gauche à droite) PGC 2600, PGC 3377 et PGC 35538. Les frontières des zones H II identifiées sont représentées en rouge.

- [3] Ch. BERGER, T. GERAUD, R. LEVILLAIN, N. WIDYNSKI, A. BAILLARD et E. BERTIN : Effective Component Tree Computation with Application to Pattern Recognition in Astronomical Imaging. *Dans IEEE International Conference on Image Processing*, volume 4, pages 41–44, 2007.
- [4] E. BERTIN et S. ARNOUITS : SExtractor : Software for Source Extraction. *Astronomy and Astrophysics, Supplement*, 117:393–404, juin 1996.
- [5] U. BRAGA-NETO et J. GOUTSIAS : A Multiscale Approach to Connectivity. *Computer Vision and Image Understanding*, 89(1):70–107, 2003.
- [6] U. BRAGA-NETO et J. GOUTSIAS : A Theoretical Tour of Connectivity in Image Processing and Analysis. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 19(1):5–31, 2003.
- [7] U. BRAGA-NETO et J. GOUTSIAS : Grayscale Level Connectivity : Theory and Applications. *IEEE Transactions on Image Processing*, 13:1567–1580, 2004.
- [8] E.J. BREEN et R. JONES : Attribute Openings, Thinnings, and Granulometries. *Computer Vision and Image Understanding*, 64(3):377–389, 1996.
- [9] L.J. CHEN, M.W. BERRY et W.W. HARGROVE : Using Dendronal Signatures for Feature Extraction and Retrieval. *International Journal of Imaging Systems and Technology*, 11(4):243–253, 2001.
- [10] F. CHENG et A.N. VENETSANOPOULOS : An Adaptive Morphological Filter for Image Processing. *IEEE Transactions on Image Processing*, 1(4):533–539, 1992.
- [11] J. CRESPO et V. MAOJO : The Strong Property of Morphological Connected Alternated Filters. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 32(3):251–263, 2008.
- [12] P. DOKLADAL, I. BLOCH, M. COUPRIE, D. RUIJTERS, R. URTASUN et L. GARNERO : Topologically Controlled Segmentation of 3D Magnetic Resonance Images of the Head by Using Morphological Operators. *Pattern Recognition*, 36(10):2463–2478, octobre 2003.
- [13] D. GATICA PEREZ, C. GU, M.T. SUN et S. RUIZ CORREA : Extensive Partition Operators, Gray-Level Connected Operators, and Region Merging/Classification Segmentation Algorithms : Theoretical Links. *IEEE Transactions on Image Processing*, 10(9):1332–1345, 2001.

- [14] G. GIERZ, K. H. HOFMANN, K. KEIMEL, J. D. LAWSON, M. MISLOVE et D. S. SCOTT : *A Compendium of Continuous Lattices*. Springer, 1980.
- [15] D. GOLDBERG : What Every Computer Scientist Should Know about Floating-Point Arithmetic. *ACM Computing Surveys*, 23(1):5–48, 1991.
- [16] G. GRÄTZER : *General Lattice Theory*. Birkhauser, 2007.
- [17] P. GUILLATAUD : *Contribution à l'analyse dendronique des images*. Thèse de doctorat, Université de Bordeaux I, 1992.
- [18] H.J.A.M. HEIJMANS : *Morphological Image Operators*. Academic Press, Boston, US, 1994.
- [19] H.J.A.M. HEIJMANS : Connected Morphological Operators for Binary Images. *Computer Vision and Image Understanding*, 73(1):99–120, 1999.
- [20] H.J.A.M. HEIJMANS et J.B.T.M. ROERDINK : *Mathematical Morphology and its Applications to Image and Signal Processing*. Kluwer, mai 1998.
- [21] R. JONES : Connected Filtering and Segmentation Using Component Trees. *Computer Vision and Image Understanding*, 75(3):215–228, 1999.
- [22] M.A. LUENGO-OROZ et J. ANGULO : Cyclic Mathematical Morphology in Polar-Logarithmic Representation. *IEEE Transactions on Image Processing*, 18(5):1090–1096, mai 2009.
- [23] J. MATTES et J. DEMONGEOT : Efficient Algorithms to Implement the Confinement Tree. *Dans International Conference on Discrete Geometry for Computer Imagery*, pages 392–405, London, UK, 2000.
- [24] B. NAEGEL et N. PASSAT : Component-Trees and Multi-value Images : A Comparative Study. *Dans M.H.F. WILKINSON et J.B.T.M. ROERDINK, éditeurs : ISMM, volume 5720 de Lecture Notes in Computer Science*, pages 261–271. Springer, 2009.
- [25] B. NAEGEL, N. PASSAT, N. BOCH et M. KOCHER : Segmentation Using Vector-Attribute Filters : Methodology and Application to Dermatological Imaging. *Dans G.J.F. BANNON, J. BARRERA et U.M. BRAGA-NETO, éditeurs : International Symposium on Mathematical Morphology*, volume 1, pages 239–250, Rio de Janeiro, Brazil, 2007. INPE.
- [26] L. NAJMAN et M. COUPRIE : Building the Component Tree in Quasi-Linear Time. *IEEE Transactions on Image Processing*, 15(11):3531–3539, 2006.
- [27] O. NEMPONT, J. ATIF, E. ANGELINI et I. BLOCH : A New Fuzzy Connectivity Measure for Fuzzy Sets. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 34(2):107–136, 2009.
- [28] G.K. OUZOUNIS : *Generalized Connected Morphological Operators for Robust Shape Extraction*. Thèse de doctorat, University of Groningen, 2009.
- [29] G.K. OUZOUNIS et M.H.F. WILKINSON : Mask-Based Second-Generation Connectivity and Attribute Filters. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 29(6):990–1004, 2007.
- [30] G.K. OUZOUNIS et M.H.F. WILKINSON : Hyperconnected Attribute Filters Based on k-Flat Zones. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, disponible en ligne, 2010.
- [31] G.K. OUZOUNIS et M.H.F. WILKINSON : Partition-Induced Connections and Operators for Pattern Analysis. *Pattern Recognition*, 43(10):3193–3207, 2010.

- [32] N. PASSAT et B. NAEGEL : An Extension of Component-Trees to Partial Orders. *Dans International Conference on Image Processing*, pages 3981–3984. IEEE Signal Processing Society, 2009.
- [33] B. PERRET, S. LEFÈVRE, C. COLLET et E. SLEZAK : Connected Component Trees for Multivariate Image Processing and Applications in Astronomy. *Dans IAPR, International Conference on Pattern Recognition*, août 2010.
- [34] B. PERRET, S. LEFÈVRE, C. COLLET et E. SLEZAK : From Hyperconnections to Hypercomponent Tree : Application to Document Image Binarization. *Dans Workshop on Applications of Digital Geometry and Mathematical Morphology*, pages 62–66, Istanbul, août 2010.
- [35] B. PERRET, S. LEFÈVRE, C. COLLET et E. SLEZAK : Hyperconnections and Hierarchical Representations for Grayscale and Multiband Image Processing. *IEEE Transactions on Image Processing, en révision*, 2010.
- [36] J.-F. RIVEST : Morphological Operators on Complex Signals. *Signal Processing*, 84(1):133–139, 2004.
- [37] J.-F. RIVEST : Granulometries and Pattern Spectra for Radar Signals. *Signal Processing*, 86(5):1094–1103, 2006.
- [38] C. RONSE : Set-Theoretical Algebraic Approaches to Connectivity in Continuous or Digital Spaces. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 8(1):41–58, 1998.
- [39] C. RONSE : Partial Partitions, Partial Connections and Connective Segmentation. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 32(2):97–125, 2008.
- [40] C. RONSE et J. SERRA : Fondements algébriques de la morphologie. *Dans L. NAJMAN et H. TALBOT, éditeurs : Morphologie mathématique 1 : approches déterministes*, pages 49–96. Lavoisier, 2008.
- [41] A. ROSENFELD : Fuzzy Digital Topology. *Information and Control*, 40(1):76–87, 1979.
- [42] P. SALEMBIER, A. OLIVERAS et L. GARRIDO : Anti-Extensive Connected Operators for Image and Sequence Processing. *IEEE Transactions on Image Processing*, 7(4):555–570, 1998.
- [43] P. SALEMBIER et J. SERRA : Flat Zones Filtering, Connected Operators, and Filters by Reconstruction. *IEEE Transactions on Image Processing*, 4(8):1153–1160, 1995.
- [44] P. SALEMBIER et M.H.F. WILKINSON : Connected Operators. *IEEE Signal Processing Magazine*, 26(6):136–157, 2009.
- [45] J. SERRA : *Image Analysis and Mathematical Morphology. II : Theoretical Advances*. Academic Press, London, UK, 1988.
- [46] J. SERRA : Connectivity on Complete Lattices. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 9(3):231–251, 1998.
- [47] J. SERRA : A Lattice Approach to Image Segmentation. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 24(1):83–130, 2006.
- [48] J. SERRA et P. SALEMBIER : Connected Operators and Pyramids. *Dans Edward R. DOUGHERTY, Paul D. GADER et Jean C. SERRA, éditeurs : Image Algebra and Morphological Image Processing IV*, volume 2030, pages 65–76. SPIE, 1993.

- 
- [49] P. SOILLE : *Morphological Image Analysis : Principles and Applications*. Springer-Verlag, 2<sup>d</sup>édition, 2003.
- [50] P. SOILLE : *Morphological Image Analysis : Principles and Applications*. Springer-Verlag New York, Secaucus, NJ, USA, 2003.
- [51] E.R. URBACH, N. BOERSMA et M.H.F. WILKINSON : Vector-Attribute Filters. *Dans* C. RONSE, L. NAJMAN et Decencière E., éditeurs : *Mathematical Morphology : 40 Years On*, volume 30 de *Computational Imaging and Vision*, pages 95–104. Springer, Netherlands, 2005.
- [52] E.R. URBACH, J.B.T.M. ROERDINK et M.H.F. WILKINSON : Connected Shape-Size Pattern Spectra for Rotation and Scale-Invariant Classification of Gray-Scale Images. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 29(2):272–285, 2007.
- [53] A. VITERBI : Error Bounds for Convolutional Codes and an Asymptotically Optimum Decoding Algorithm. *IEEE Transactions on Information Theory*, 13(2):260–269, janvier 2003.
- [54] C. F. R. WEIMAN et G. CHAIKIN : Logarithmic Spiral Grids for Image Processing and Display. *Computer Graphics and Image Processing*, 11(3):197–226, 1979.
- [55] M.H.F. WILKINSON : An Axiomatic Approach to Hyperconnectivity. *Dans* M.H.F. WILKINSON et J.B.T.M. ROERDINK, éditeurs : *ISMM*, volume 5720 de *Lecture Notes in Computer Science*, pages 35–46. Springer, 2009.
- [56] M.H.F. WILKINSON : Hyperconnectivity, Attribute-Space Connectivity and Path Openings : Theoretical Relationships. *Dans* M.H.F. WILKINSON et J.B.T.M. ROERDINK, éditeurs : *ISMM*, volume 5720 de *Lecture Notes in Computer Science*, pages 47–58. Springer, 2009.



Deuxième partie

Applications



# Mise en œuvre

“

L'esprit n'use de sa faculté créatrice que quand  
l'expérience lui en impose la nécessité.

”

Henri Poincaré

## Sommaire

<b>4.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>139</b>
<b>4.2</b>	<b>Processus global</b>	<b>140</b>
4.2.1	Les données : base CFIGI	140
4.2.2	Choix du modèle	142
<b>4.3</b>	<b>Étude de cas</b>	<b>145</b>
<b>4.4</b>	<b>Étude statistique</b>	<b>160</b>
4.4.1	Correspondance entre attribut quantitatif et qualitatif	160
4.4.2	Flux du bulbe sur flux total	161
4.4.3	Inclinaison	163
4.4.4	Taille de la barre stellaire	165
4.4.5	Ouverture des bras spiraux	165
4.4.6	Importance des bras spiraux	167
4.4.7	Sens de rotation des bras spiraux	169
<b>4.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>169</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>171</b>

## 4.1 Introduction

CE CHAPITRE présente les résultats d'application de la méthode proposée à un jeu conséquent d'images multibandes de galaxies. Les tests réalisés s'appuient sur la base CFIGI [1] (Catalogue EFIGI) du projet EFIGI (Extraction de Formes Idéalisées des Galaxies en Imagerie) [2] qui est composée d'un ensemble homogène d'environ 4500 images multibandes de galaxies annotées par des experts. L'ensemble des commentaires, des propositions et des conclusions présentées dans ce chapitre sont le fruit d'analyses menées conjointement avec



des astronomes experts du domaine : E. Slezak de l'Observatoire de la Côte d'Azur (OCA), E. Bertin et V. De Lapparent de l'Institut d'Astrophysique de Paris (IAP).

La première section vise à présenter la base CFIGI ainsi que la méthodologie choisie pour procéder à son traitement automatique. Nous spécifions notamment la stratégie retenue pour procéder à un parcours semi-automatique de la hiérarchie de modèles.

Puis la section 4.3 présente la première étape de l'évaluation qui porte sur l'analyse détaillée de quelques cas représentatifs. Cette première étape permet de donner une idée des possibilités de décomposition offerte par l'algorithme et de ses limites.

Enfin, dans la section 4.4, nous procédons à une analyse statistique sur environ 1 500 décompositions. Cette analyse est obtenue par comparaison des paramètres extraits des décompositions avec les annotations des experts et permet de valider le comportement global de la méthode.

## 4.2 Processus global

Cette section décrit, dans un premier temps, les données qui ont servi pour réaliser les expérimentations, puis, dans un deuxième temps, le schéma complet pour leur traitement automatique.

### 4.2.1 Les données : base CFIGI

L'ensemble des tests effectués ont été réalisés sur des images multibandes extraites de la base CFIGI créée à l'IAP lors de l'ANR EFIGI (années 2004 à 2007). CFIGI a été réalisé dans le but de fournir une base de référence pour la caractérisation et la classification morphologique des galaxies dans l'Univers proche. Les galaxies présentes dans CFIGI correspondent à un sous-ensemble du catalogue PGC [6] sélectionné en fonction de la taille apparente des galaxies (résolution suffisante pour une caractérisation morphologique), de leur brillance (rapport signal-sur-bruit suffisant) et de l'existence préalable d'une classification fiable selon le type de Hubble révisé. Elle constitue donc un outil privilégié pour la validation de nos algorithmes.

Les images des galaxies ont été obtenues à partir du SDSS et concernent donc les cinq bandes du système *ugriz* (section 1.2.1.4 page 8). Pour chaque galaxie, une mosaïque d'images du SDSS a été réalisée afin d'obtenir une image contenant toute la galaxie. Puis chaque image a été redimensionnée avec une interpolation de type Lanczos 3 afin d'obtenir une image de  $256 \times 256$  pixels de côté tel que le grand axe de l'isophote correspondant à une brillance de  $25 \text{ mag.arcsec}^{-2}$  (équation (1.4) page 14) mesure 128 pixels. La PSF dans chaque bande est également estimée pour chaque galaxie ; notons qu'en raison du redimensionnement, les PSFs sont extrêmement variables d'une image à l'autre.

L'ensemble des images a été annoté par deux experts (V. de Lapparent et E. Bertin) selon seize attributs morphologiques sur la base de compositions couleurs des observations obtenues avec les bandes *gri*. Chaque attribut possède une valeur centrale et un intervalle de confiance dans lequel l'expert estime que la « vraie » valeur a 70 % de chance de se trouver. Finalement, à l'exception du premier attribut, la valeur centrale d'un attribut et les bornes de son intervalle de confiance sont quantifiées sur cinq valeurs entières arbitraires auxquelles sont attachées des descriptions qualitatives.

Les dix-sept attributs de la base CFIGI sont :

1. type de Hubble révisé : valeur comprise entre 0 et 17, correspond pour les valeurs inférieures à 16 et à une translation de 6 près, à la colonne **T** de la table 1.2 page 22 ;
2. contamination : importance de la contamination lumineuse par des sources parasites, de « aucune contamination » (0) à « la galaxie est dominée par un contaminant très brillant » (4) ;
3. multiplicité : nombre de galaxies avec une brillance significative voisines de la galaxie principale, de « aucune » (0) à « quatre et plus » (4) ;
4. inclinaison : inclinaison du disque pour les galaxies à disque (équation (2.7) page 52) ou élongation pour les elliptiques (section 1.3.2.1), de « vue de face ou élongation très faible » (0) à « vue de profil ou élongation très forte » (4) ;
5. rapport bulbe sur total : contribution du flux du bulbe par rapport au flux total de la galaxie, de « la galaxie n'a pas de bulbe » (0) à « l'absence d'autre structure » (4) ;
6. force des bras spiraux : rapport du flux des bras par rapport au flux total de la galaxie : de « l'absence de bras » (0) aux « bras les plus forts de la base » (4) ;
7. ouverture des bras : angle moyen d'ouverture des bras (uniquement défini si la force des bras est différente de 0), de « bras très ouverts » (0) à « bras très resserrés » (4) ;
8. rotation : sens de rotation des bras (uniquement défini si la force des bras est différente de 0) : « d'une rotation en sens horaire certaine » (0) à « une rotation en sens anti-horaire certaine » (4) ;
9. poussière visible : quantité de poussière visible par rapport à la surface de la galaxie : de « l'absence de » (0) à « la plus forte quantité de poussière observée dans la base » (4) ;
10. dispersion des poussières : aspect de la poussière dans la galaxie (uniquement défini si l'attribut « poussière visible » est différent de 0), d'une « bande fine aux bords nets » (0) à « une apparence extrêmement granuleuse » (4) ;
11. floculance : mesure l'aspect floculant d'une galaxie principalement dû aux régions H II dispersées : « d'aucune floculance visible » (0) à « une structure spirale complètement dominée par la floculance » (4) ;
12. points chauds : mesure la contribution de sources quasi ponctuelles très brillantes, « d'aucun point chaud » (0) à « la majeure partie du flux de la galaxie correspond à des points chauds » (4) ;
13. barre stellaire : mesure la présence d'une barre stellaire selon sa taille, « d'aucune barre stellaire visible » (0) à « la présence d'une barre stellaire s'étend sur plus de la moitié de l'isophote à  $25 \text{ mag. arcsec}^{-2}$  » (4) ;
14. anneau interne : contribution de l'anneau interne en terme de flux, « d'aucun anneau interne » (0) au « plus fort anneau interne observé dans la base » (4) ;
15. anneau externe : contribution de l'anneau externe en terme de flux, « d'aucun anneau externe » (0) au « plus fort anneau externe observé dans la base » (4) ;
16. forme en huit : présence d'un pseudo anneau externe dû au repliement des bras spiraux, « d'aucun pseudo anneau observable » (0) à « un pseudo anneau dominant en terme de flux » (4) ;
17. perturbation : mesure les distorsions observables sur la galaxie, « d'aucune déformation » (0) à « une forme extrêmement perturbée » (4).

La base CFIGI est maintenant dans sa version 1.5. Cependant, les tests présentés dans ce chapitre portent sur la version 1.4 de la base CFIGI qui était disponible au début de cette thèse. Par souci d’homogénéité, les analyses ont été réalisées avec les données de la version 1.4.

La base CFIGI contient un certain nombre de galaxies irrégulières, perturbées ou fortement contaminées par des sources parasites. Comme les modèles développés permettent uniquement de décrire les galaxies régulières, l’ensemble sur lequel nous travaillons par la suite a été sélectionné par les critères suivants : type de Hubble compris entre 0 et 15, perturbation inférieure ou égale à 1, contamination inférieure ou égale à 2 et multiplicité inférieure ou égale à 1.

### 4.2.2 Choix du modèle

Le problème de l’orientation dans la hiérarchie de modèles est résolu de manière semi-supervisée en utilisant les annotations de la base CFIGI. La figure 4.1 présente l’arbre de décisions et les attributs utilisés qui sont :

- le type de Hubble pour réaliser la séparation entre galaxies à disque ou non et pour décider de l’utilisation de la structure spirale : le type de Hubble précis n’est donc pas nécessaire ;
- la présence d’une barre stellaire ;
- la présence d’un anneau interne ;
- la présence d’un anneau externe.

Le choix entre le modèle « vue de face » ou « vue de profil » pour les galaxies à disque est réalisé d’après l’inclinaison mesurée lors de l’estimation du premier modèle bulbe–disque. La présence d’une barre de poussières ne pouvant pas être dérivée des attributs CFIGI, une procédure dédiée a été imaginée (section B.5 page 195). Finalement, l’utilisation de la structure de halo pour les galaxies elliptiques est déterminée a posteriori : les deux modèles sont estimés (avec bulbe seul et avec bulbe et halo) et le modèle à deux composantes est conservé s’il apporte un gain suffisant en terme d’EQMN (voir section 4.2.2).

Même si cette procédure n’est pas automatique, la participation de l’expert se réduit à cinq questions à réponse binaire, ce qui représente une charge de travail bien moins élevée qu’avec les logiciels de décomposition existants (qui nécessitent une initialisation manuelle des paramètres). Notons également que l’utilisation d’un arbre de décisions du même type avait été proposée dans [5] pour offrir un cadre objectif de classification des galaxies à l’expert (le parcours dans l’arbre n’étant pas automatisé).

Nous avons en outre testé plusieurs méthodes dans l’optique d’obtenir une navigation complètement automatique à travers la hiérarchie de modèles. Les prises de décision à chaque embranchement de la hiérarchie sont alors basées sur les paramètres du modèle estimé précédemment ou sur le résultat d’une procédure complémentaire. Nous avons ainsi développé les méthodes suivantes pour le remplacement des décisions supervisées :

- le choix entre galaxie à disque ou sans disque est réalisé par comparaison des EQMNs obtenus avec un modèle bulbe seul et avec un modèle bulbe–disque. Si cette différence est suffisante, on considère que l’utilisation d’une structure de type disque est motivée et que l’on peut considérer la présence ou non d’autres structures internes. Sinon, on considère que la galaxie ne comporte qu’une unique composante de type bulbe (elle est donc de type elliptique). Notons que l’inverse n’est généralement pas vrai car la

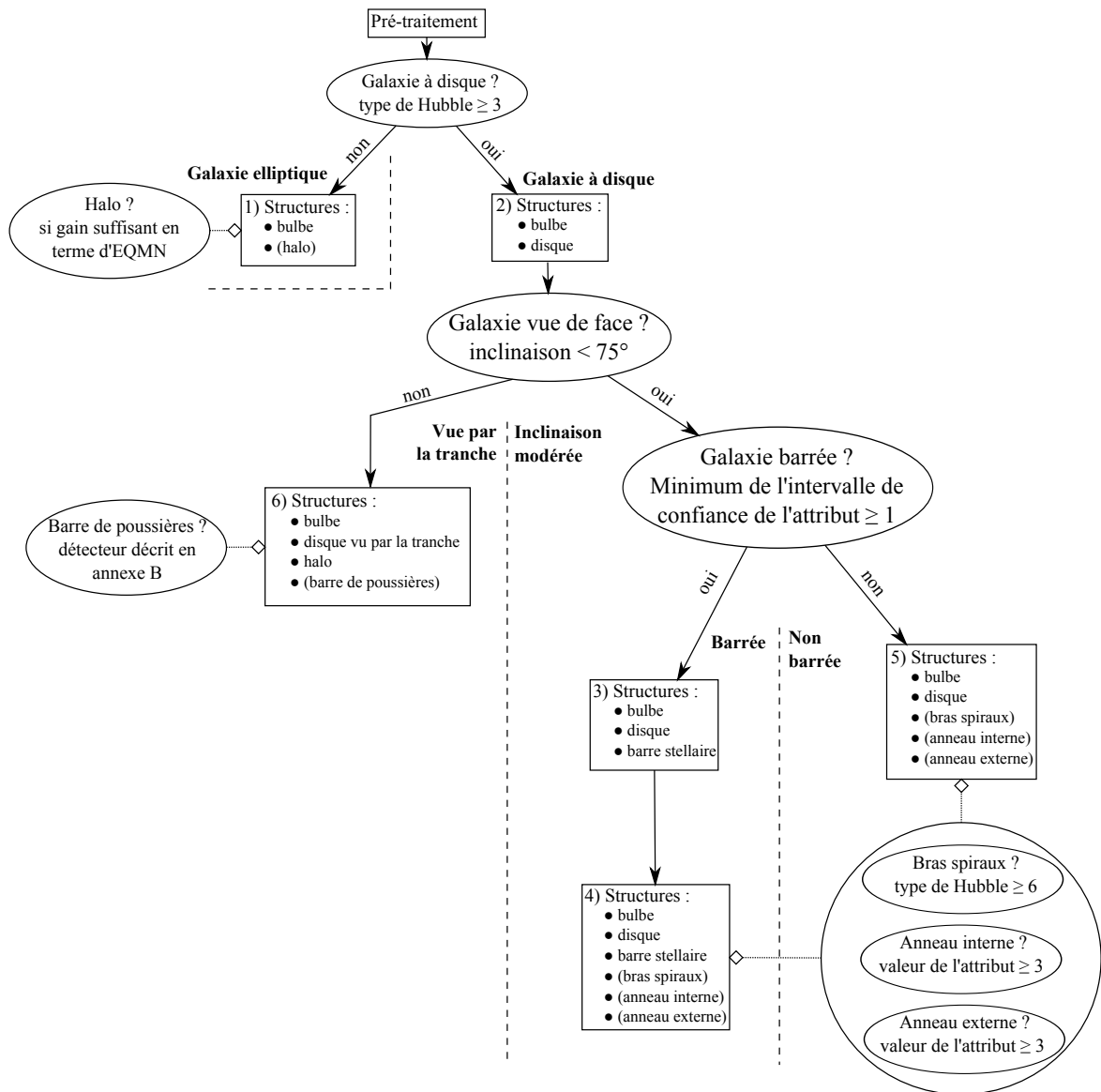


FIGURE 4.1 – Arbre de décisions permettant la navigation dans la hiérarchie de modèles.

- modélisation d'une galaxie elliptique peut nécessiter l'utilisation d'une structure de type halo associée à la composante halo étendue ;
- la procédure d'initialisation de la barre stellaire (annexe B) agit comme un détecteur : l'initialisation des paramètres n'étant possible qu'en cas de détection positive ;
  - de même, la procédure d'initialisation des anneaux fonctionne comme un détecteur (annexe B) ;
  - l'utilisation d'un détecteur de ligne par transformée de Hough dans l'espace log-polaire cylindrique pour la détection des bras spiraux a également été expérimentée.

Néanmoins, ces procédures utilisées telles quelles sont peu robustes lorsque le rapport signal-sur-bruit est bas. L'automatisation complète du parcours de la hiérarchie n'est donc pour le moment pas assez fiable pour être utilisée. Nous réfléchissons cependant à l'améliorer par l'utilisation de détecteurs plus robustes et par l'intégration d'un maximum de leviers de décision (analyse des résidus, des couleurs, ...).

**Décision a posteriori pour les galaxies sans disque.** Le modèle à une seule composante bulbe laisse parfois des résidus importants pour les galaxies elliptiques. Cette situation peut être améliorée par l'ajout d'une structure de type « halo » au modèle qui est associée a posteriori à la structure bulbe pour former la composante astrophysique bulbe. Une possibilité serait de systématiquement utiliser cette composante halo, néanmoins cela nous éloigne de l'usage qui est de décrire les galaxies elliptiques avec une seule structure : nous avons donc cherché à quantifier l'apport de la deuxième composante pour déterminer les conditions dans lesquelles son ajout est justifié.

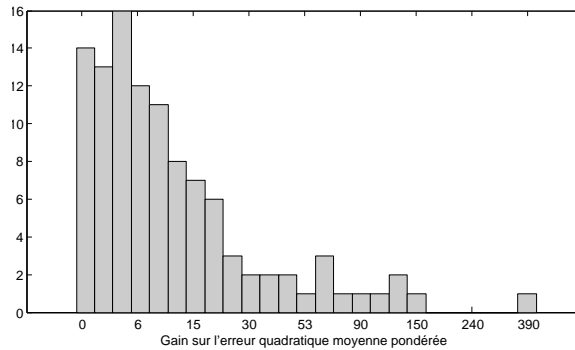


FIGURE 4.2 – Répartition des gains obtenus par le modèle bulbe-halo par rapport au modèle bulbe seul sur les 113 galaxies elliptiques de l'échantillon. L'axe des abscisses est en échelle logarithmique.

Pour cela, nous avons décomposé les 113 galaxies elliptiques de l'échantillon suivant les deux modèles (bulbe seul et bulbe-halo). La figure 4.2 présente l'histogramme des gains obtenus et montre qu'une bonne séparation entre la population principale et la queue de la distribution est obtenue pour un gain de 20 sur l'EQMN.

Cette coupe à 20 permet de conserver 24 galaxies pour lesquelles la décomposition bulbe-halo semble significativement améliorer le résultat. Notons que, selon le catalogue Hyper-Leda [7], 9 de ces 24 galaxies ont des noyaux actifs (contre 2 dans les 89 galaxies avec un gain inférieur à 20). Ce gain semble donc être un marqueur intéressant pour la recherche

« d'anomalies ». Cette procédure reste néanmoins sommaire et sa pertinence en terme astrophysique devra être validée par une étude détaillée des décompositions bulbe–halo comparées aux décompositions à une seule structure.

### 4.3 Étude de cas

Cette section présente l'étude détaillée de cinq cas représentatifs des objets de la séquence de Hubble : une galaxie elliptique, une galaxie lenticulaire, deux galaxies spirales à différentes positions de la séquence de Hubble et une galaxie vue par la tranche.

**PGC 21542 (figures 4.3, 4.4 et 4.5)** est une galaxie elliptique géante (cD) légèrement allongée. Elle ne présente aucune perturbation, aucune structure interne et aucune trace de poussières apparentes. Il y a par contre un nombre assez important d'objets de fond la contaminant. Les résultats de l'algorithme montrent que la galaxie est bien décrite par une structure centrale compacte de type bulbe et une structure très étendue de type halo avec une EQMN  $\approx 29,6$  ; l'utilisation d'une seule structure de type bulbe produit une EQMN beaucoup plus forte d'environ 541. Les deux composantes sont assez rouges en accord avec leur composition attendue (étoiles de Population II). Le résidu fait apparaître un léger excès de flux dans le modèle au niveau du centre, compensé par un manque formant un anneau proche du centre, cet écart est attribuable à un bruit de modélisation dû à l'imperfection de la loi de Sérsic et à la connaissance imparfaite de la PSF. Notons également que les contaminants sont bien gérés et ne perturbent pas l'estimation.



FIGURE 4.3 – Galaxie elliptique géante (cD) PGC 21542.

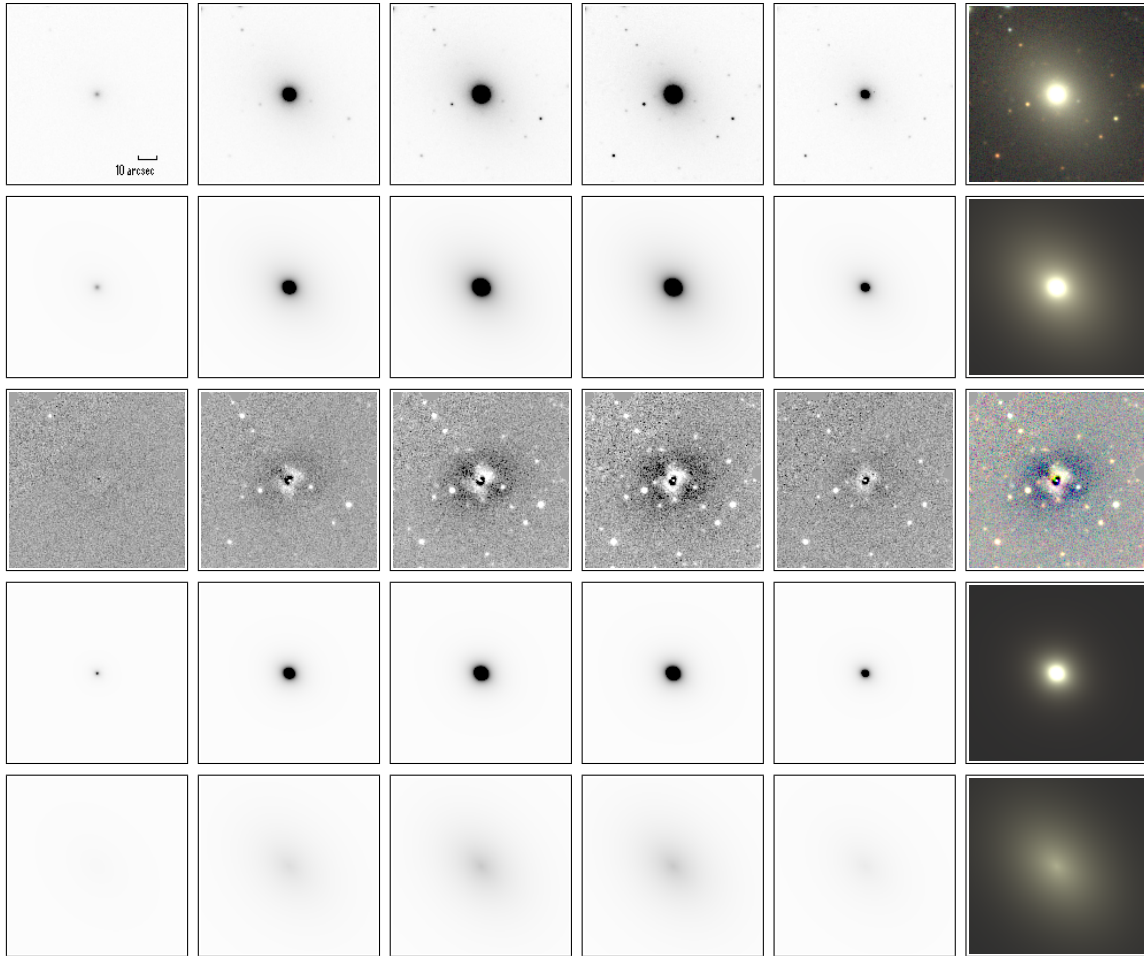


FIGURE 4.4 – Décomposition de la galaxie elliptique géante (cD) PGC 21542. Les colonnes représentent de gauche à droite : les cinq bandes *ugriz* et une composition couleur des bandes *gri*. Les lignes sont, de haut en bas : l'observation, l'estimation obtenue (avec PSF), le résidu, puis les structures estimées (sans PSF) : le bulbe et le halo. Toutes les images, exceptés les résidus, sont affichées avec la même dynamique.

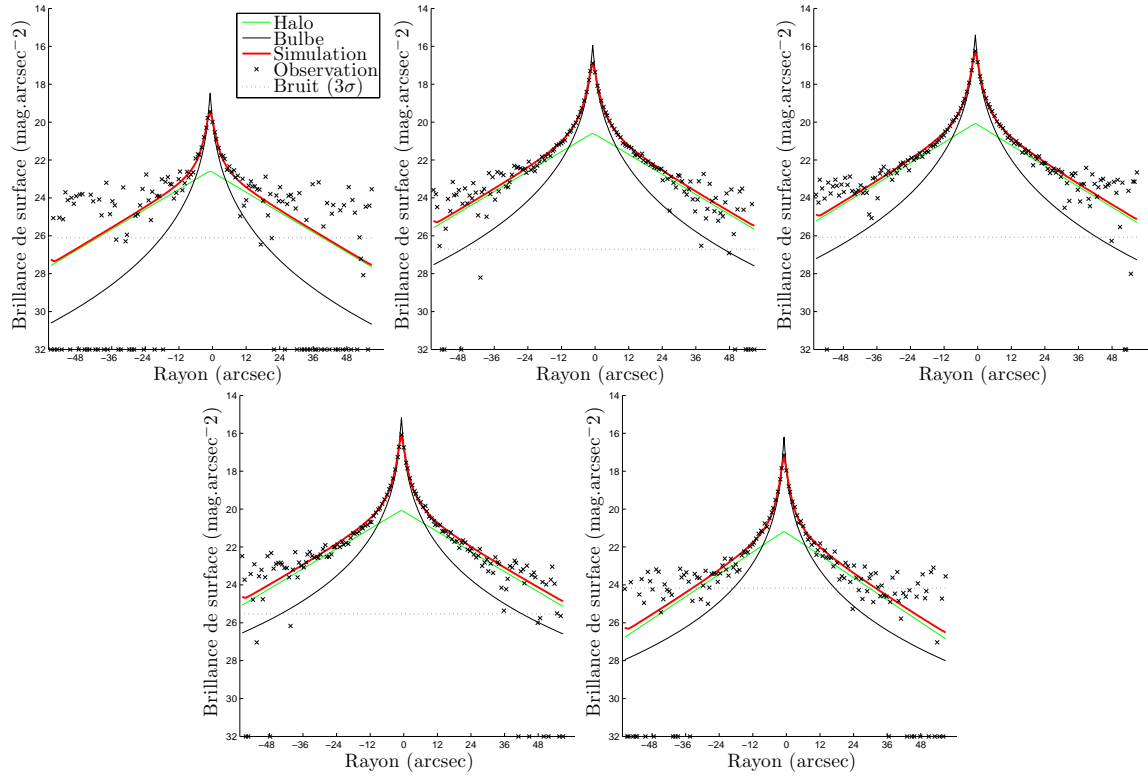


FIGURE 4.5 – Profils de décomposition de la galaxie elliptique géante (cD) PGC 21542 dans les cinq bandes *ugriz*. Le profil correspond au grand-axe de la galaxie et s'étend d'un bord à l'autre de l'image. L'observation correspond aux croix noires. La courbe représentant la simulation est donnée avec PSF alors que les courbes des composantes individuelles sont sans PSF. La ligne horizontale à  $3\sigma$  représente un fond uniforme de brillance surfacique égale à trois fois l'écart-type du bruit estimé. La limite de la transformation logarithmique est fixée à  $32 \text{ mag.arcsec}^{-2}$  (expliquant la présence de nombreux points de l'observation sur l'axe des abscisses).



**PGC 3833** (figures 4.6, 4.4 et 4.8) est classée comme galaxie lenticulaire barrée avec un doute sur la présence d'un anneau interne. Elle apparaît légèrement inclinée, sa barre est peu étendue et elle n'est quasiment pas contaminée par des sources externes. Les différentes composantes ont pu être relativement bien ajustées malgré une imperfection au niveau de la taille et de la luminosité de la barre stellaire ( $EQMN \approx 29,4$ ). Nous avons pu observer que ce défaut de modélisation de la barre est courant mais ne représente que peu de flux en pratique. L'analyse du résidu montre par contre que le possible anneau interne serait en fait des embryons de bras spiraux. La composition couleur du résidu permet également de voir que l'erreur d'estimation au centre varie d'une bande à l'autre (couleurs fortement prononcées de manière localisée) suggérant un recalage imparfait des bandes (le centre n'est pas identique sur l'ensemble des bandes) ou une PSF imparfaitement estimée. La couleur homogène plutôt rouge des différentes composantes est en accord avec la composition attendue des structures (étoiles de Population II).



FIGURE 4.6 – Galaxie lenticulaire barrée PGC 3833.

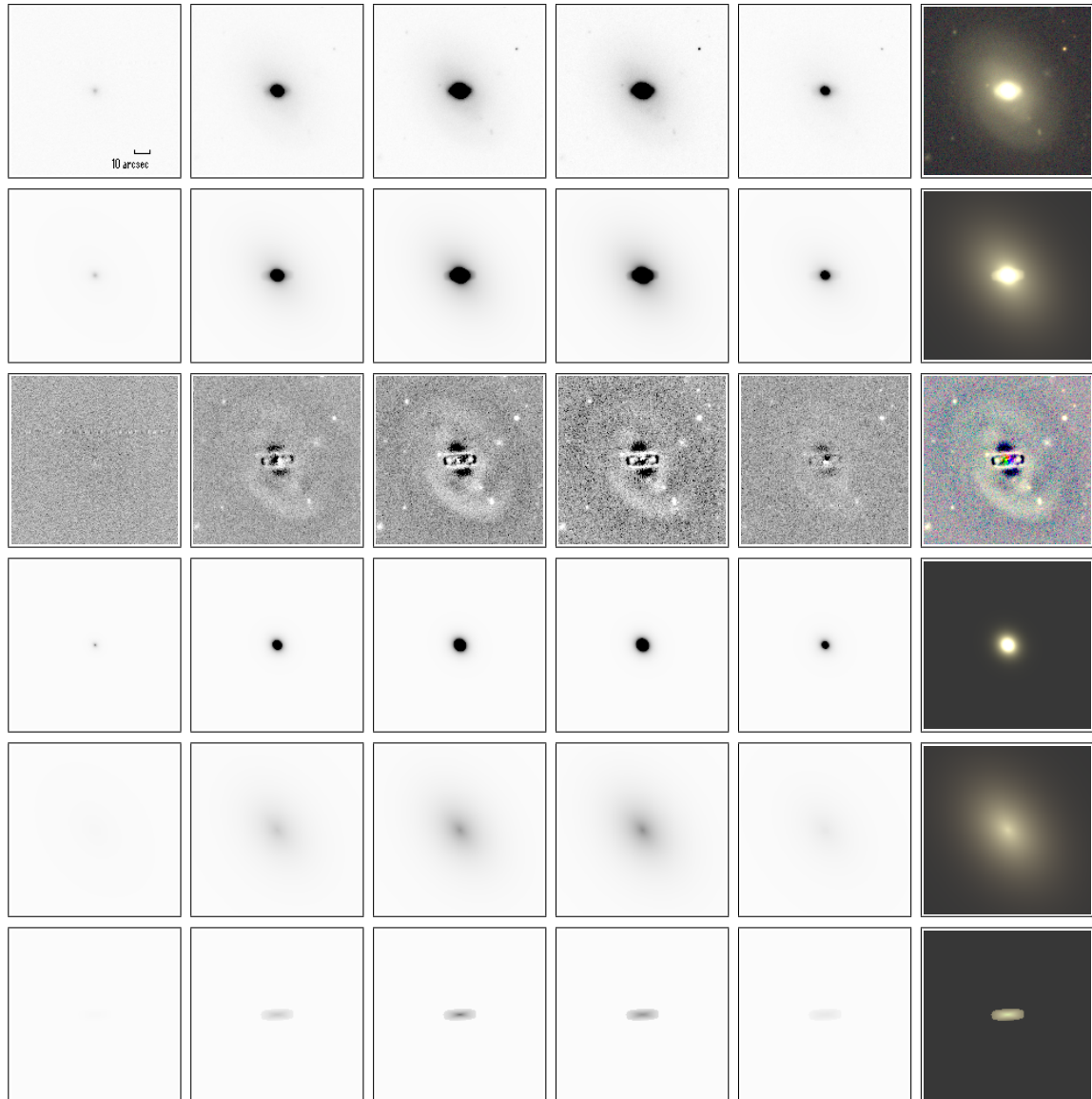


FIGURE 4.7 – Décomposition de la galaxie lenticulaire barrée PGC 3833. Les colonnes représentent de gauche à droite : les cinq bandes *ugriz* et une composition couleur des bandes *gri*. Les lignes sont, de haut en bas : l'observation, l'estimation obtenue (avec PSF), le résidu, puis les structures estimées (sans PSF) : le bulbe, le disque et la barre stellaire. Toutes les images, exceptés les résidus, sont affichées avec la même dynamique.

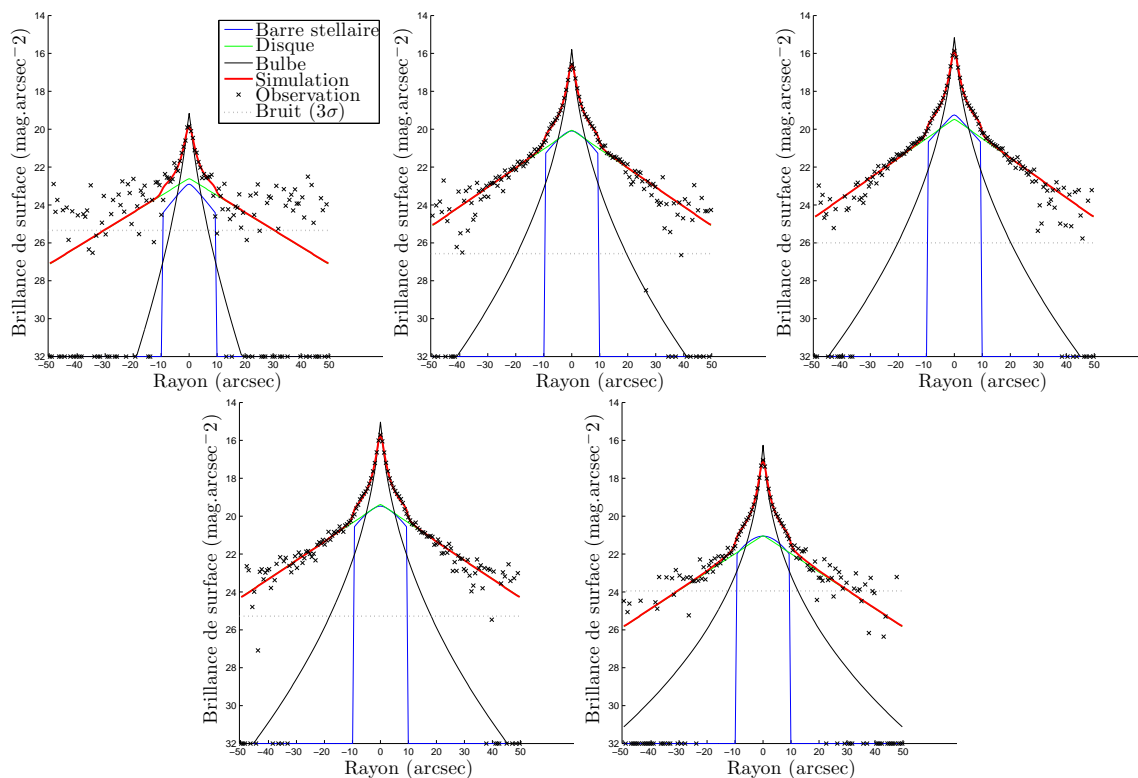


FIGURE 4.8 – Profils de décomposition de la galaxie lenticulaire barrée 3833 dans les cinq bandes *ugriz*. Le profil correspond au grand-axe de la galaxie et s’étend d’un bord à l’autre de l’image. L’observation correspond aux croix noires. La courbe représentant la simulation est donnée avec PSF alors que les courbes des composantes individuelles sont sans PSF. La ligne horizontale à  $3\sigma$  représente un fond uniforme de brillance surfacique égale à trois fois l’écart-type du bruit estimé. La limite de la transformation logarithmique est fixée à  $32 \text{ mag.arcsec}^{-2}$  (expliquant la présence de nombreux points de l’observation sur l’axe des abscisses).

**PGC 23443** (figures 4.9, 4.10 et 4.11) est une galaxie spirale de type Sbc. Elle est relativement inclinée et peu brillante. Son bulbe est de petite taille. La partie extérieure de son disque et ses bras spiraux sont à peine discernables. L'estimation est bonne malgré l'EQMN assez élevée ( $\approx 37,53$ ), celle-ci provenant en majeure partie des deux sources non masquées dans le coin supérieur droit et sur le bord inférieur droit (voir résidu). De plus, les couleurs des différentes composantes sont cohérentes : plutôt rouge pour le bulbe, neutre (blanc) pour le disque et bleu pour les bras spiraux. On peut remarquer, sur les profils, que le bulbe repasse au-dessus du disque à partir d'un certain rayon ; ce comportement anormal n'est pas significatif car il se produit au delà des rayons optiques des deux structures ( $R_{\odot, \mathfrak{B}}^{80} \approx 8$  arcsec et  $R_{\odot, \mathfrak{D}}^{80} \approx 25$  arcsec).



FIGURE 4.9 – Galaxie spirale PGC 23443 de type Sbc.

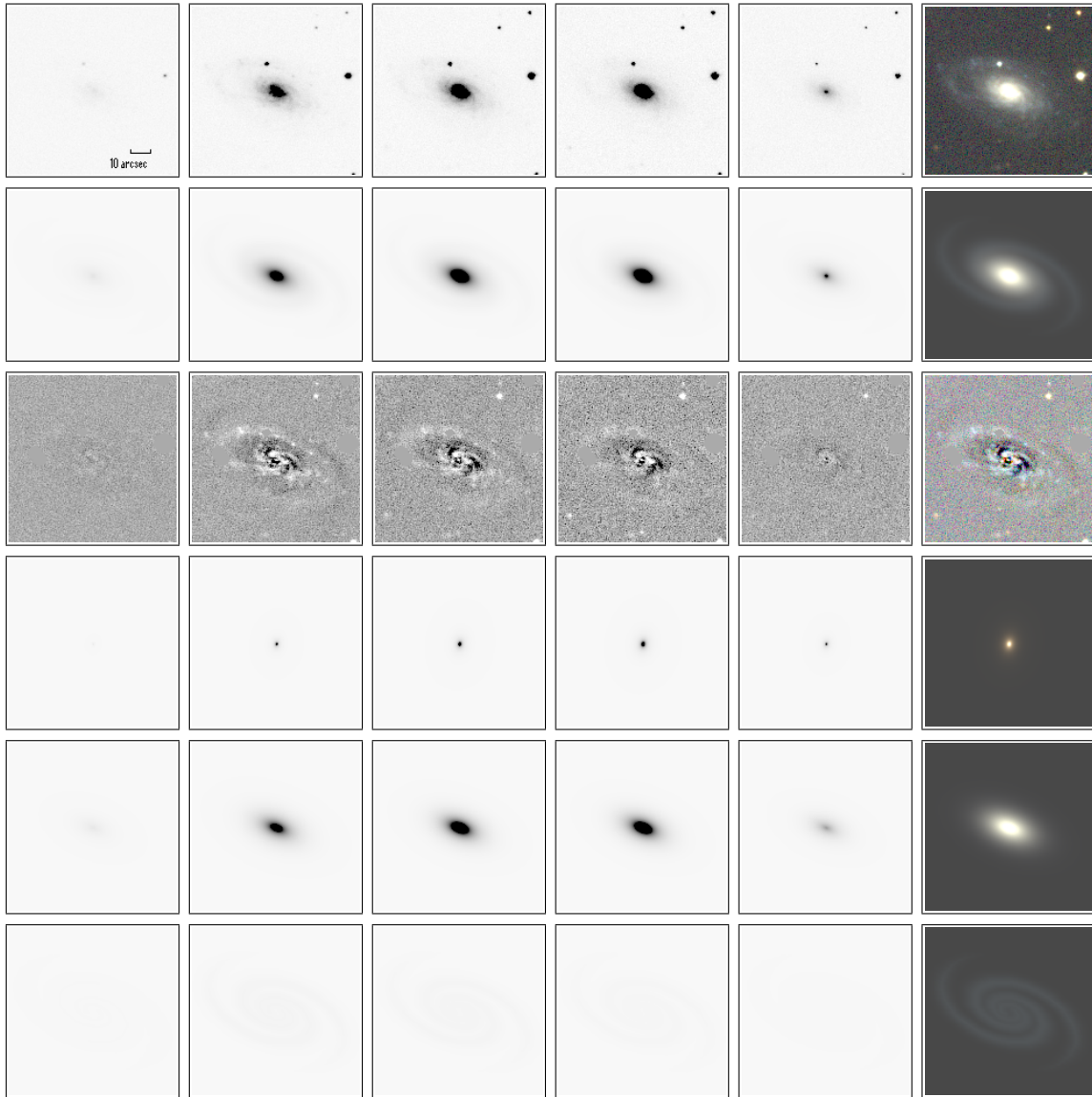


FIGURE 4.10 – Décomposition de la galaxie spirale PGC 23443 de type Sbc. Les colonnes représentent de gauche à droite : les cinq bandes *ugriz* et une composition couleur des bandes *gri*. Les lignes sont, de haut en bas : l'observation, l'estimation obtenue (avec PSF), le résidu, puis les structures estimées (sans PSF) : le bulbe, le disque et les bras spiraux. Toutes les images, exceptés les résidus, sont affichées avec la même dynamique.

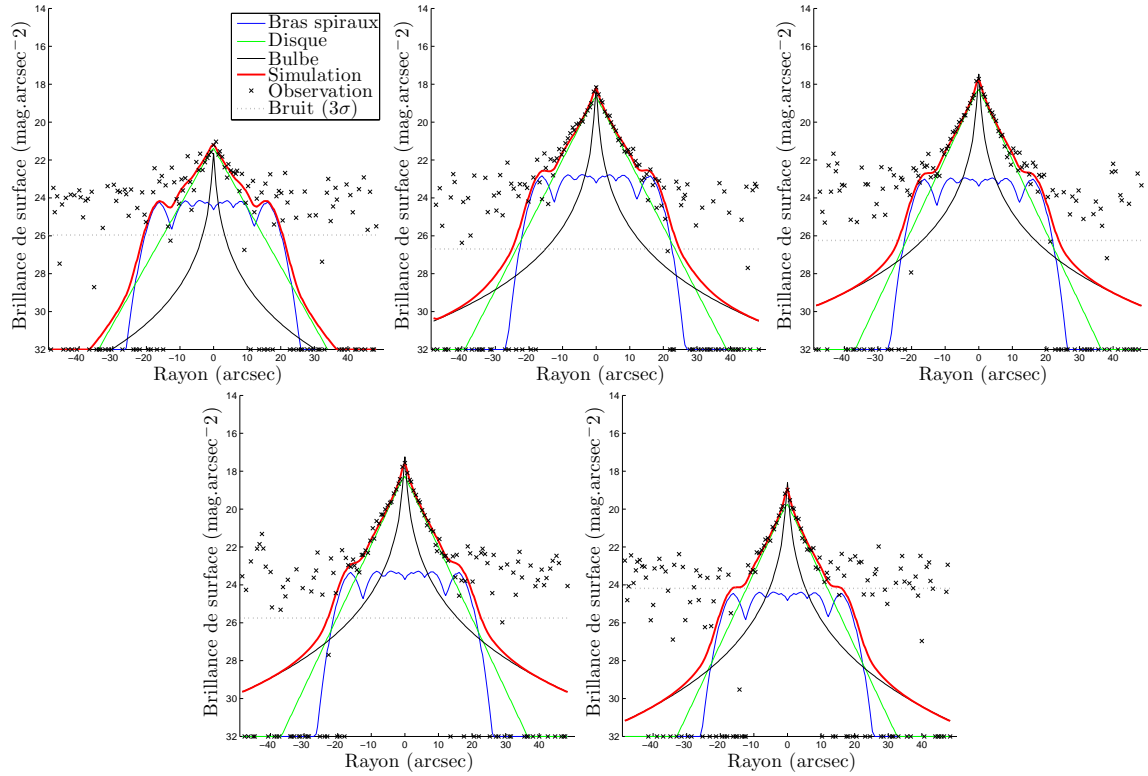


FIGURE 4.11 – Profils de décomposition de la galaxie spirale PGC 23443 de type bc dans les cinq bandes *ugriz*. Le profil correspond au grand-axe de la galaxie et s'étend d'un bord à l'autre de l'image. L'observation correspond aux croix noires. La courbe représentant la simulation est donnée avec PSF alors que les courbes des composantes individuelles sont sans PSF. La ligne horizontale à  $3\sigma$  représente un fond uniforme de brillance surfacique égale à trois fois l'écart-type du bruit estimé. La limite de la transformation logarithmique est fixée à  $32 \text{ mag.arcsec}^{-2}$  (expliquant la présence de nombreux points de l'observation sur l'axe des abscisses).

**PGC 3584 (figures 4.12, 4.13 et 4.14)** est une galaxie spirale barrée de type SBab. Elle est vue presque de face et est peu contaminée. Elle possède un bulbe relativement gros et des bras spiraux très brillants assez resserrés. L'estimation a correctement capturé le bulbe, le disque, la barre stellaire et la partie interne des bras spiraux (la plus brillante). La partie externe des bras n'a pas été correctement estimée pour plusieurs raisons : elle s'écarte significativement du modèle en spirale logarithmique (l'angle d'ouverture augmente significativement), la brillance des bras semble marquée par une décroissance brutale non reproductible par notre modèle de bras au delà de laquelle leur brillance devient négligeable. L'évolution des couleurs entre la barre stellaire (plutôt rouge) et les bras spiraux (plutôt bleus) est particulièrement marquée et permet de clairement séparer ces deux structures.



FIGURE 4.12 – Galaxie spirale barrée PGC 3584 de type SBab.

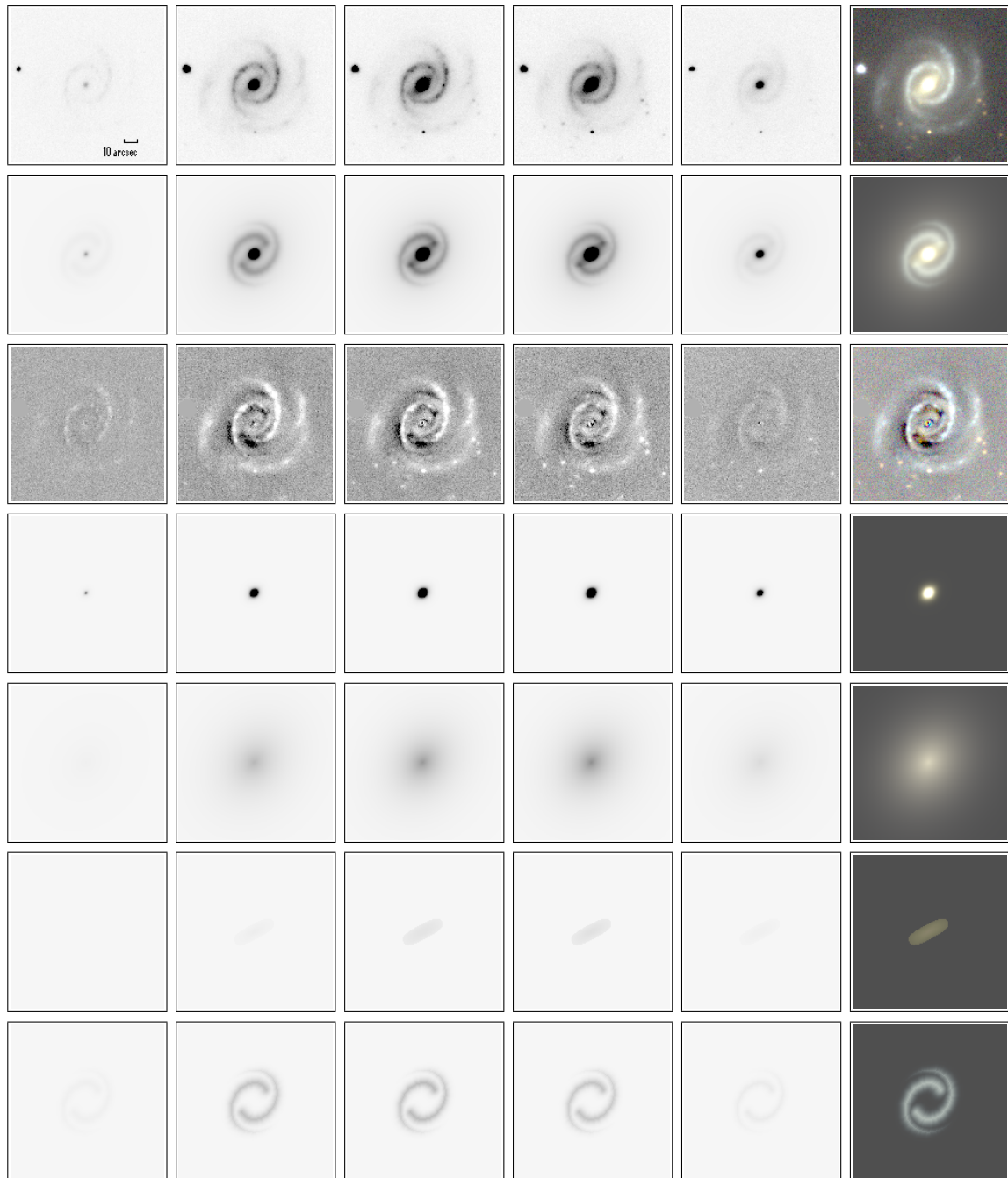


FIGURE 4.13 – Décomposition de la galaxie spirale barrée PGC 3584 de type SBab. Les colonnes représentent de gauche à droite : les cinq bandes *ugriz* et une composition couleur des bandes *gri*. Les lignes sont, de haut en bas : l'observation, l'estimation obtenue (avec PSF), le résidu, puis les structures estimées (sans PSF) : le bulbe, le disque, la barre stellaire et les bras spiraux. Toutes les images, exceptés les résidus, sont affichées avec la même dynamique.



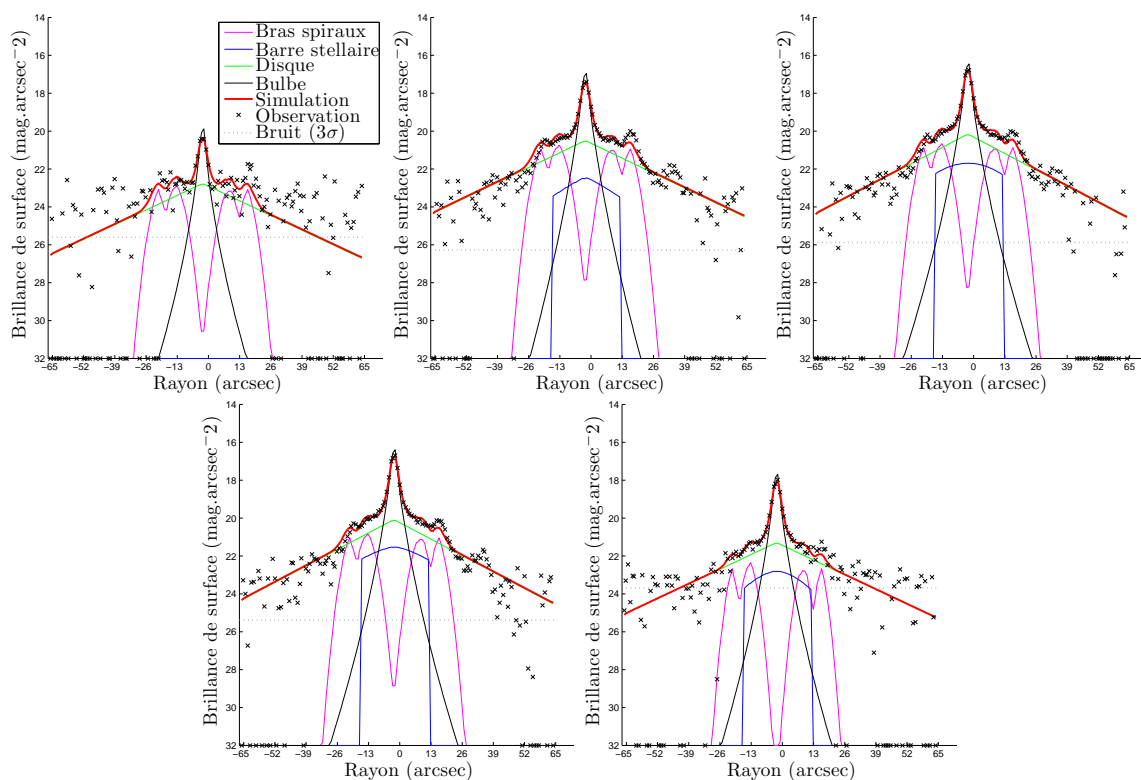


FIGURE 4.14 – Profils de décomposition de la galaxie spirale barrée PGC 3584 de type SBab dans les cinq bandes *ugriz*. Le profil correspond au grand-axe de la barre stellaire et s'étend d'un bord à l'autre de l'image. L'observation correspond aux croix noires. La courbe représentant la simulation est donnée avec PSF alors que les courbes des composantes individuelles sont sans PSF. La ligne horizontale à  $3\sigma$  représente un fond uniforme de brillance surfacique égale à trois fois l'écart-type du bruit estimé. La limite de la transformation logarithmique est fixée à  $32 \text{ mag.arcsec}^{-2}$  (expliquant la présence de nombreux points de l'observation sur l'axe des abscisses).

**PGC 218** (figures 4.15, 4.16 et 4.17) est une galaxie spirale de type S0/a vue par la tranche (son type morphologique est tout de même assez incertain et plusieurs sources lui associent des types allant jusqu'à Sab). Son champ est fortement contaminé par de nombreuses petites galaxies d'arrière plan. Elle possède un bulbe de grande dimension et une barre de poussières divise nettement la galaxie en deux parties presque égales. On observe également un léger gauchissement des extrémités du disque et la légère inclinaison par rapport à une vue parfaitement de profil permet de discerner une deuxième barre de poussières correspondant à l'arrière du disque. La modélisation semble visuellement correcte bien que le résidu reste assez important (le modèle de galaxies vues par la tranche étant moins éprouvé). Les couleurs des différentes composantes sont par contre sujettes à caution et doivent être validées en accord avec les corrections à appliquer dues à la forte inclinaison de la galaxie.



FIGURE 4.15 – Galaxie spirale vue par la tranche PGC 218 de type S0/a.

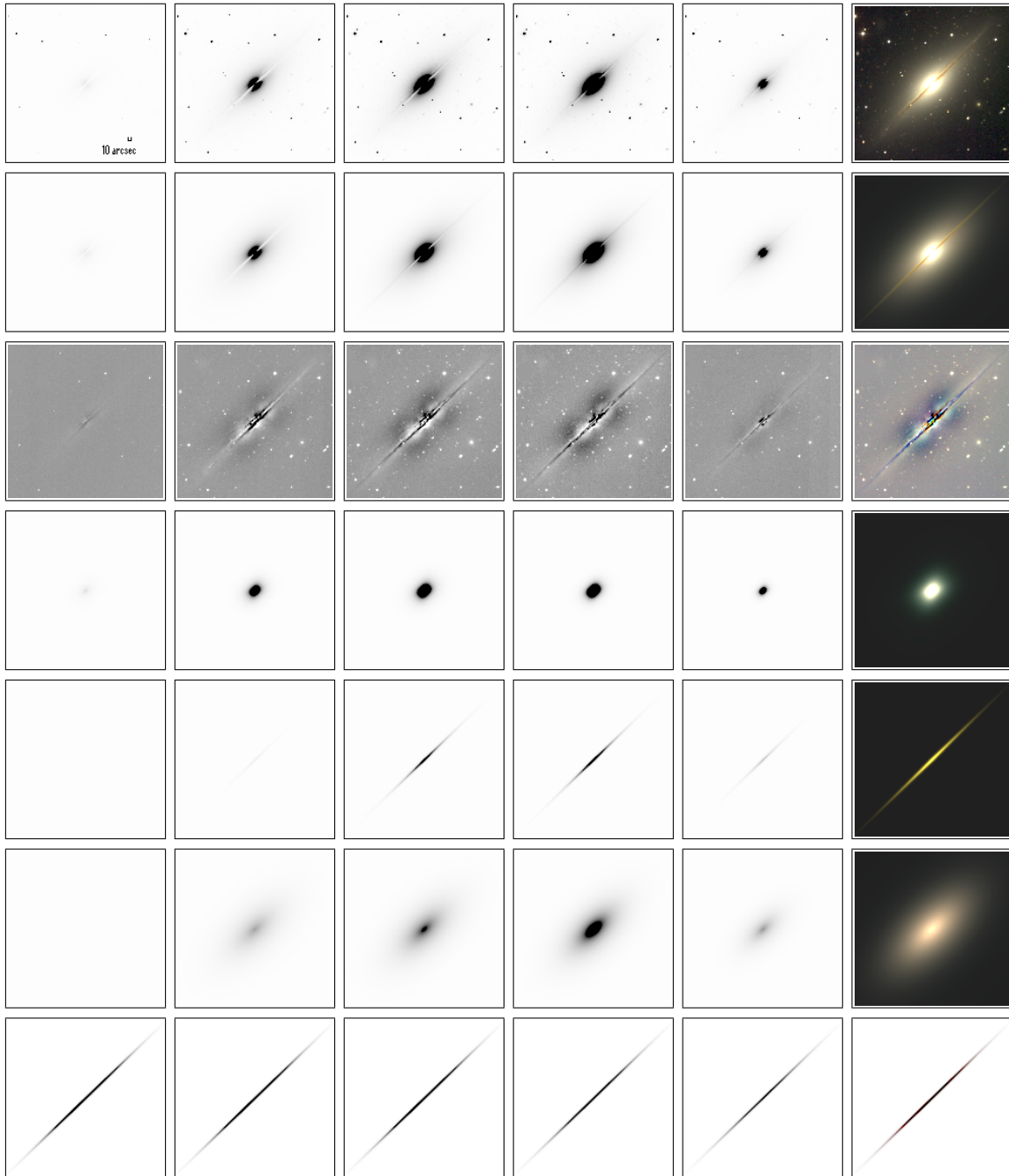


FIGURE 4.16 – Décomposition de la galaxie spirale vue par la tranche PGC 218. Les colonnes représentent de gauche à droite : les cinq bandes *ugriz* et une composition couleur des bandes *griz*. Les lignes sont, de haut en bas : l’observation, l’estimation obtenue (avec PSF), le résidu, puis les structures estimées (sans PSF) : le bulbe, le disque, le halo et la barre de poussières. Toutes les images, exceptés les résidus et la barre de poussières, sont affichées avec la même dynamique. La barre de poussières est représentée par l’absorption qu’elle produirait sur un fond de brillance uniforme.

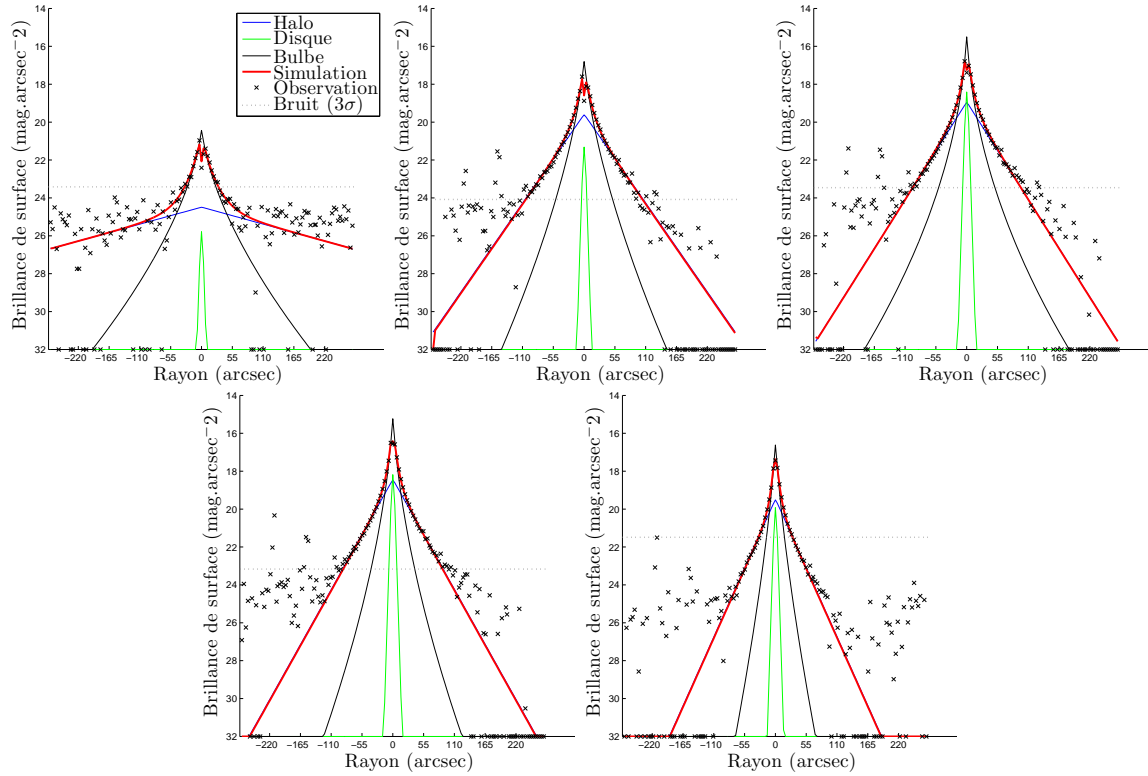


FIGURE 4.17 – Profils de décomposition de la galaxie spirale vue par la tranche PGC 218 dans les cinq bandes *ugriz*. Le profil correspond au petit-axe de la galaxie et s'étend d'un bord à l'autre de l'image. L'observation correspond aux croix noires. La courbe représentant la simulation est donnée avec PSF alors que les courbes des composantes individuelles sont sans PSF. La ligne horizontale à  $3\sigma$  représente un fond uniforme de brillance surfacique égale à trois fois l'écart-type du bruit estimé. La limite de la transformation logarithmique est fixée à  $32 \text{ mag.arcsec}^{-2}$  (expliquant la présence de nombreux points de l'observation sur l'axe des abscisses).

## 4.4 Étude statistique

Afin de valider la pertinence et d'identifier les faiblesses des résultats obtenus, nous avons comparé les caractéristiques fondamentales (évaluables numériquement sur les estimations), aux annotations des experts de la base CFIGI. La base de résultats est composée des estimations de 1484 galaxies sélectionnées selon les critères décrits en section 4.2.1 ; le nombre d'objets par type de Hubble n'est donc pas homogène (figure 4.18).

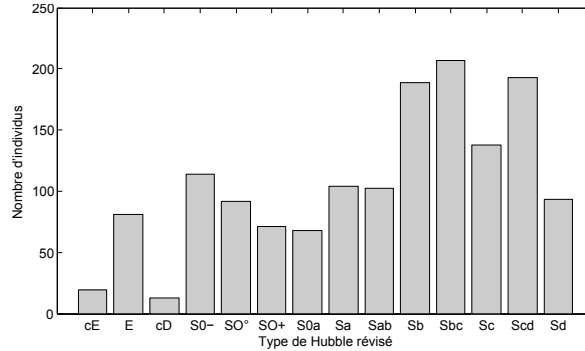


FIGURE 4.18 – Répartition des galaxies de l'ensemble des résultats par type de Hubble.

La comparaison porte sur six attributs de la base : flux du bulbe sur flux total, inclinaison, taille de la barre stellaire, ouverture des bras spiraux, importance des bras spiraux et sens de rotation. Malheureusement, les réglages adoptés pour décider de l'introduction des anneaux internes se sont révélés être trop restrictifs pour que la comparaison des attributs impliqués soit significative. Un prochain traitement des données devra permettre l'utilisation plus fréquentes des anneaux en prenant comme critère que l'attribut CFIGI doit être supérieur ou égal à 1 (au lieu de 3 ici, figure 4.1).

### 4.4.1 Correspondance entre attribut quantitatif et qualitatif

Les attributs de la base CFIGI étant des descriptions globales et qualitatives, il est nécessaire, d'une part, de déterminer la combinaison de paramètres de notre modèle qui reflète au mieux ce qu'a mesuré l'expert et, d'autre part, de trouver une quantification permettant la mise en relation entre mesure quantitative et attribut qualitatif.

Les algorithmes classiques de quantification comme celui de Lloyd–Max [3] ne sont pas adaptés ici car ils ne permettent pas de tenir compte de la connaissance a priori sur la distribution des valeurs quantifiées. Nous proposons ici notre propre définition du quantificateur optimal.

Posons  $F = \{f_1, \dots, f_n\}$  l'espace des valeurs quantifiées, un quantificateur est une application  $Q : \mathbb{R} \mapsto F$  définie par une série d'intervalles  $[t_i; t_{i+1}] \subset \mathbb{R}$  pour  $i = 1, \dots, n - 2$  par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, Q(x) = \begin{cases} f_1 & \text{si } x < t_1 \\ f_i & \text{si } t_{i-1} \leq x < t_i, i = 2, \dots, n - 1 \\ f_n & \text{si } t_{n-1} \leq x \end{cases} \quad (4.1)$$

Soient  $\kappa_j^-$  et  $\kappa_j^+$  les valeurs discrètes correspondant aux bornes inférieure et supérieure

de l'intervalle de confiance fixé par les expert pour l'objet  $j$ . L'algorithme développé dans cette thèse produit une valeur estimée continue  $\psi_j$  à quantifier. On définit la fonction de cout  $\mathcal{L} : F \times F \times F \mapsto \{0,1\}$  telle que :

$$\forall q_1, q_2, q_3 \in F, \mathcal{L}(q_1, q_2, q_3) = \begin{cases} 0 & \text{si } q_1 \leq q_2 \leq q_3 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.2)$$

On définit alors le quantificateur optimal  $Q_o$  par :

$$Q_o = \arg \min_Q \sum_j \mathcal{L}(\kappa_j^-, Q(\psi_j), \kappa_j^+) \quad (4.3)$$

À partir du quantificateur optimal  $Q_o$ , nous proposons la fonction de différence  $\delta : F \times \mathbb{R} \times F \mapsto \mathbb{R}$  qui permet de caractériser a posteriori l'erreur de quantification de manière plus précise que  $\mathcal{L}$  :

$$\forall q_1, q_2 \in F, \forall x \in \mathbb{R}, \delta(q_1, x, q_2) = \arg \min_{y \in \mathbb{R}} \mathcal{L}(q_1, Q_o(x+y), q_2) \quad (4.4)$$

$\delta$  mesure donc la modification minimale à appliquer à une estimation pour que sa valeur quantifiée soit comprise dans l'intervalle de confiance fourni par l'expert.

Le quantificateur  $Q_o$  sera utilisé dans le reste de ce chapitre pour faire la mise en correspondance des attributs CFIGI avec les valeurs estimés.

#### 4.4.2 Flux du bulbe sur flux total

Le rapport flux du bulbe sur flux total est un des éléments fondamentaux de la classification de Hubble. Il offre l'avantage d'être aisément calculable depuis une estimation en évaluant le flux des structures correspondant à la composante astrophysique bulbe (bulbe seul ou bulbe plus halo pour certaines galaxies elliptiques, voir page 144). Les résultats obtenus montrent un taux d'accord de 85,1 % avec la base CFIGI (figure 4.19).

Le calcul du quantificateur optimal  $Q_o$  pour cet attribut a permis d'établir la correspondance suivante entre la mesure qualitative de l'expert et la mesure quantitative  $b/t$  de l'algorithme :

- pas de bulbe :  $b/t < 3 \times 10^{-8}$  ;
- bulbe très faible :  $3 \times 10^{-8} \leq b/t < 0,05$  ;
- bulbe moyen :  $0,05 \leq b/t < 0,27$  ;
- bulbe fort :  $0,27 \leq b/t < 1$  ;
- bulbe seul :  $1 \leq b/t$ .

La distribution des distances  $\delta$  permet de quantifier de manière globale l'importance des erreurs et le biais. On obtient une moyenne de  $-8 \times 10^{-3}$ , une médiane de 0 et un écart-type de  $7,2 \times 10^{-2}$ , montrant que le biais est quasiment nul pour une variance très faible.

Si l'on s'intéresse uniquement aux mesures en désaccord avec les données CFIGI (figure 4.20), on constate que les erreurs les plus importantes concernent une sur-évaluation du bulbe (valeurs négatives de  $\delta$ , individus sous la ligne de quantification dans la figure 4.19). En fait, la quasi-totalité des sur-évaluations importantes du bulbe concerne des galaxies vues par la tranche. Il semble en effet que l'expert compense la très faible brillance du disque en prenant en compte les effets de l'inclinaison, ce qui n'est pas réalisé dans notre procédure (en pratique cette correction est complexe car dépendante de certaines propriétés encore mal

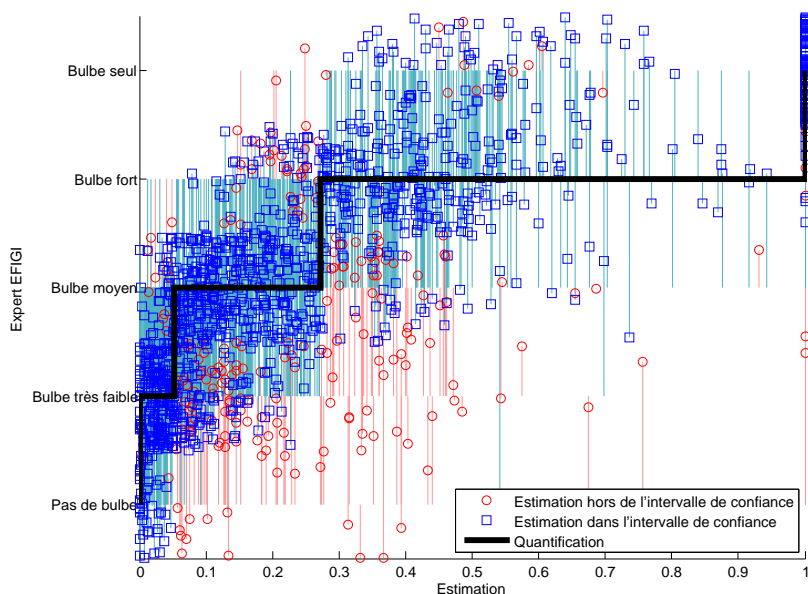


FIGURE 4.19 – Comparaison des résultats d’estimation avec la vérité terrain CFIGI pour l’attribut flux du bulbe sur flux total. Chaque point représente une galaxie, son abscisse est le résultat de l’estimation et son ordonnée correspond à la valeur CFIGI affectée par une dispersion aléatoire pour faciliter la visualisation. Les barres d’erreurs pour chaque point correspondent à l’intervalle de confiance associé à cette galaxie. La courbe en escalier noire représente les différents paliers du quantificateur optimal  $Q_o$ . Les points bleus sont les galaxies pour lesquelles la valeur quantifiée de l’estimation est comprise dans l’intervalle de confiance CFIGI, les rouges sont en dehors.

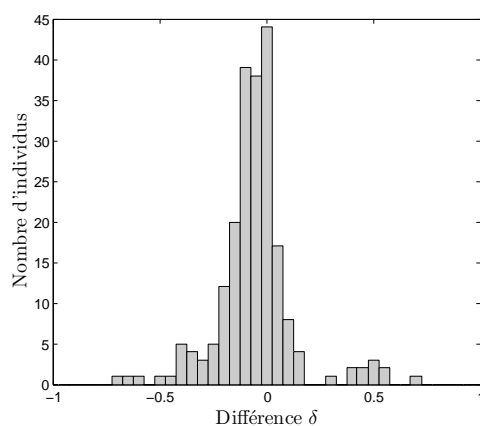


FIGURE 4.20 – Distribution des distances  $\delta$  pour les galaxies dont la valeur quantifiée par  $Q_o$  de l’attribut flux du bulbe sur flux total est en dehors de l’intervalle de confiance CFIGI (points rouges de la figure 4.19).

comprises du disque galactique et constitue un sujet de recherche à part entière [4]). Les erreurs fortes positives (sous-évaluation du disque) concernent principalement des galaxies de type  $S0^-$  donc a priori lenticulaires mais étiquetées comme ne possédant pas de disque dans la base CFIGI.

### 4.4.3 Inclinaison

La correspondance avec l'attribut d'inclinaison est réalisée différemment selon que l'on considère une galaxie elliptique, spirale ou lenticulaire. Dans une galaxie elliptique, l'inclinaison correspond à l'élongation apparente du bulbe donnée par le paramètre  $e_{\mathfrak{B}}$  (table 2.6 page 66). Pour une galaxie spirale, on considère l'élongation apparente du disque  $e_{\mathfrak{D}}$  qui est liée à l'angle entre la ligne de visée et le plan galactique. Dans le cas des galaxies lenticulaires, il semble que l'expert considère parfois  $e_{\mathfrak{B}}$ , parfois  $e_{\mathfrak{D}}$  selon l'importance relative des deux composantes. Nous avons choisi empiriquement d'utiliser  $e_{\mathfrak{B}}$  si le flux du bulbe représente plus de 70 % du flux total, sinon  $e_{\mathfrak{D}}$  sert de base à la mesure. L'inclinaison mesurée est alors égale à  $i = 1 - 1/e$ .

Cette définition permet d'obtenir un taux d'accord avec les experts EFIGI de 89,2 % (figure 4.21). Les différents paliers du quantificateur optimal sont :

- vue de face ou très faible élongation :  $i < 0,13$  (inclinaison  $\lesssim 30^\circ$ );
- légèrement allongée :  $0,13 \leq i < 0,36$  (inclinaison  $\lesssim 50^\circ$ );
- modérément allongée :  $0,36 \leq i < 0,65$  (inclinaison  $\lesssim 70^\circ$ );
- fortement allongée :  $0,65 \leq i < 0,84$  (inclinaison  $\lesssim 80^\circ$ );
- vue de profil ou très forte élongation :  $0,84 \leq i$ .

La moyenne des distances  $\delta$  à l'intervalle de confiance EFIGI est égale à 0,07, la médiane vaut 0,06 et l'écart-type est de 0,057. Cela montre que l'estimation est globalement peu biaisée avec une dispersion faible.

La figure 4.22 qui représente la distribution des distances pour les individus en désaccord avec la base CFIGI montre un nombre légèrement plus élevé de sur-évaluations de l'inclinaison (valeurs négatives de  $\delta$ ) que de sous-évaluation. Le plus souvent les différences d'estimation les plus importantes concernent les galaxies lenticulaires et, dans une moindre mesure, les galaxies spirales tardives, pour lesquelles le disque stellaire est faiblement brillant. Les erreurs de sur-évaluations les plus importantes sont généralement liées à la présence d'une barre stellaire imposante qui a tendance à capturer la structure de disque (dans la modélisation).

Nous avons introduit une procédure de détection précoce pour éviter ce dernier cas de figure : lors de l'introduction de la barre stellaire dans la hiérarchie de modèles, si l'élongation  $e_{\mathfrak{D}}$  du disque est supérieure à 1,5 (inclinaison supérieure à  $70^\circ$ ), alors cette valeur est jugée anormale et liée à une barre stellaire dominante et l'élongation est ramenée à 1. L'angle de position du disque est par ailleurs utilisé pour initialiser celui de la barre stellaire. Cette approche a permis de limiter le nombre de galaxies concernées, mais certaines galaxies avec une barre stellaire large et légèrement diffuse posent toujours problème : dans ce cas le disque est utilisé en complément de la barre stellaire pour modéliser cette extension inusitée et diffuse.



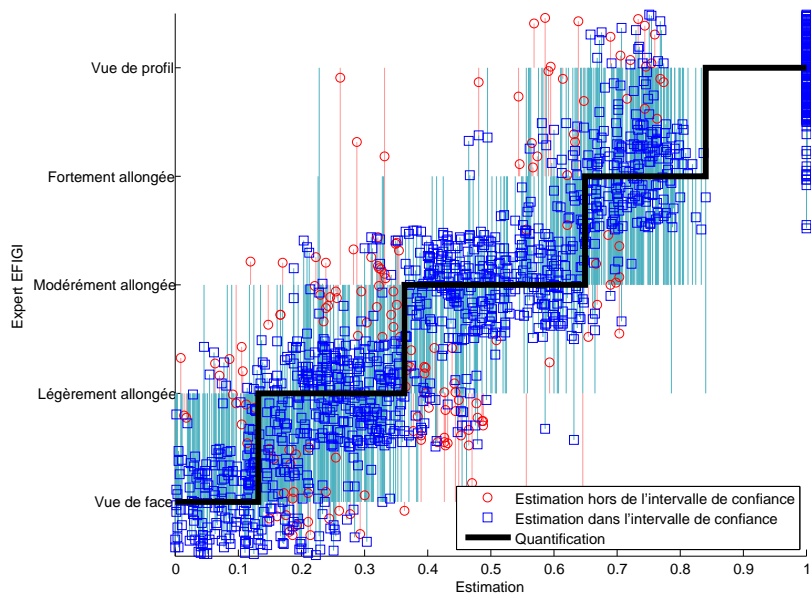


FIGURE 4.21 – Comparaison des résultats d'estimation avec la vérité terrain CFFIGI pour l'attribut inclinaison. Voir la légende de la figure 4.19.

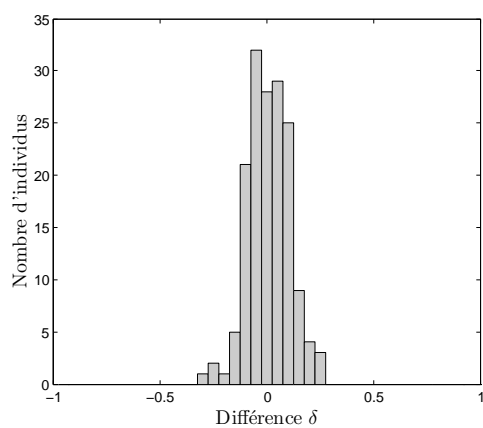


FIGURE 4.22 – Distribution des distances  $\delta$  pour les galaxies dont la valeur quantifiée par  $Q_o$  de l'attribut inclinaison est en dehors de l'intervalle de confiance CFFIGI (points rouges de la figure 4.21).

#### 4.4.4 Taille de la barre stellaire

L'attribut « barre stellaire » de la base CFIGI mesure la taille du grand axe de la barre stellaire à l'isophote de brillance  $25 \text{ mag.arcsec}^{-2}$ . La taille de cette isophote étant normalisée dans les images de la base, nous pouvons simplement mettre l'attribut en correspondance avec la taille estimée de la barre stellaire. Pour la majorité des estimations le rayon de coupure  $R_{max}$  décrit bien cette taille ; néanmoins, pour les barres plutôt diffuses (avec une concentration  $n$  proche de 1, le rayon optique englobant 80 % du flux total  $R_{\odot, \mathfrak{B}a}^{80}$  est plus pertinent : nous définissons donc la taille de la barre comme le minimum entre ces deux valeurs  $r_{\mathfrak{B}a} = \min(R_{max}, R_{\odot, \mathfrak{B}a}^{80})$ .

Cette définition donne un taux d'accord avec les experts EFIGI de 83,3 % (figure 4.23, les galaxies non barrées ne sont pas incluses dans l'échantillon). Les différents paliers du quantificateur optimal sont :

- barre courte :  $r_{\mathfrak{B}a} < 10$  ;
- barre petite :  $10 \leq r_{\mathfrak{B}a} < 20,5$  ;
- barre longue :  $20,5 \leq r_{\mathfrak{B}a} < 48$  ;
- barre très longue :  $48 \leq r_{\mathfrak{B}a}$ .

La moyenne des distances  $\delta$  à l'intervalle de confiance EFIGI est égale à 0,314, la médiane vaut 0 et l'écart-type est de 3,7. Le biais est donc faible mais les erreurs peuvent être importantes.

La figure 4.24 qui représente la distribution des distances pour les individus en désaccord avec la base CFIGI confirme l'analyse précédente. Les sources de sous-évaluations sont principalement liées aux cas où la barre stellaire a capturé la composante disque. On constate visuellement que de nombreux cas marqués comme sous-évalués paraissent visuellement corrects, ce qui suggère un problème d'harmonisation sur cet attribut dans la base CFIGI (ce problème nous a été confirmé par les experts EFIGI ; il est corrigé dans la version 1.5 de la base). Les cas plus rares de sur-évaluation concernent principalement des galaxies spirales avec des bras spiraux très resserrés ou un anneau interne : la structure de la barre a alors tendance à s'étendre pour capturer le retour des bras ou le début de l'anneau interne.

Notons qu'une meilleure prise en compte des anneaux, en particulier internes, permettra certainement d'améliorer sensiblement ces résultats.

#### 4.4.5 Ouverture des bras spiraux

L'ouverture des bras correspond directement à la valeur absolue de l'angle d'ouverture  $o_s$ . On obtient un taux d'accord de 81,8 % (figure 4.25, seules les galaxies spirales sont incluses dans l'échantillon). Les différents paliers du quantificateur optimal sont :

- très resserrés :  $|o_s| < 8,6^\circ$  ;
- resserrés :  $8,6^\circ \leq |o_s| < 11,5^\circ$  ;
- modérément ouverts :  $11,5^\circ \leq |o_s| < 31,4^\circ$  ;
- ouverts :  $31,4^\circ \leq |o_s| < 54^\circ$  ;
- très ouverts :  $54^\circ \leq |o_s|$ .

La moyenne des distances  $\delta$  à l'intervalle de confiance EFIGI est égale à  $-0,5^\circ$ , la médiane vaut  $0^\circ$  et l'écart-type est de  $6,32^\circ$ . Commençons par préciser que l'angle d'ouverture est un élément particulièrement difficile à estimer pour l'expert humain, ce qui se traduit par des intervalles de confiances étendus (figure 4.25).

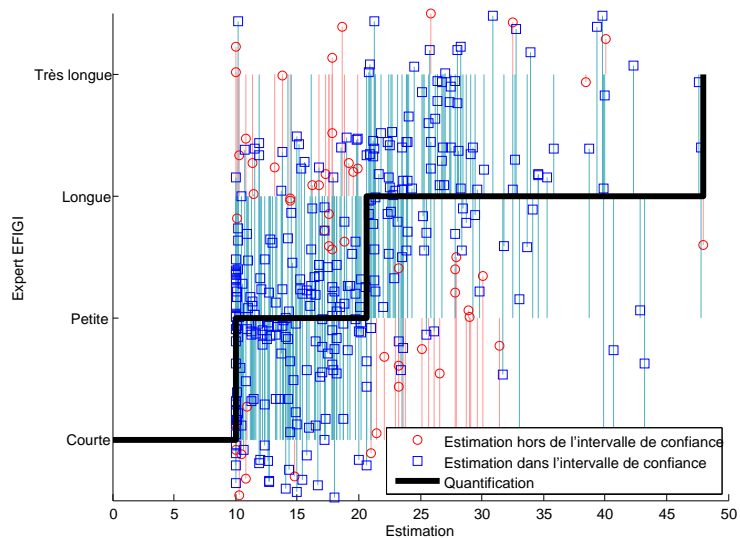


FIGURE 4.23 – Comparaison des résultats d'estimation avec la vérité terrain CFIGI pour l'attribut taille de la barre stellaire. Voir la légende de la figure 4.19.

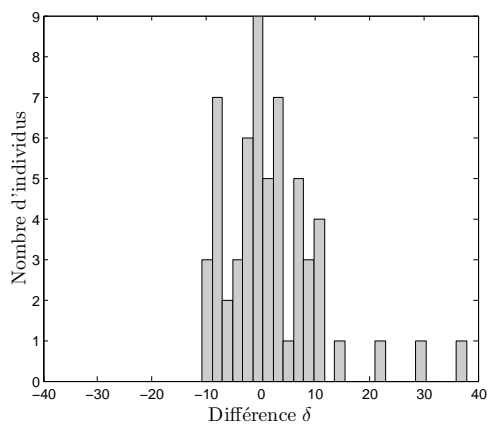


FIGURE 4.24 – Distribution des distances  $\delta$  pour les galaxies dont la valeur quantifiée par  $Q_o$  de l'attribut taille de la barre stellaire est en dehors de l'intervalle de confiance CFIGI (points rouges de la figure 4.23).

La figure 4.26, qui représente la distribution des distances pour les individus en désaccord avec la base CFIGI, montre que les erreurs les plus importantes concernent une sur-évaluation de l'angle d'ouverture : il s'agit généralement d'erreurs manifestes d'estimation. Nous avons pu identifier différentes causes à l'origine de ces erreurs :

- une erreur sur l'estimation de la barre stellaire ou du disque survenue à l'étape précédente de la hiérarchie de modèles qui peut être résolue par une détection précoce (voir section 4.4.3) ;
- la prise en compte trop stricte des anneaux dans notre schéma de décomposition (un anneau n'est inclus que si l'expert a estimé sa force de présence à au moins 3 sur une échelle de 0 à 4) ;
- des hypothèses de modélisation trop contraignantes : le nombre fixe de bras (2) et leur caractère symétrique ;
- la présence de contaminants résiduels (étoiles, galaxies voisines, ...).

Nous pouvons donc espérer améliorer cette situation avec les améliorations déjà proposées pour les deux premiers points. Le troisième point peut être amélioré en relâchant la contrainte de symétrie sur les bras. L'introduction de plus de bras risque par contre de produire de nouveaux phénomènes imprévus et ne sera envisagée que si la solution précédente n'est pas suffisante.

Lorsque l'angle d'ouverture est sous-estimé il s'agit principalement d'un problème de modélisation. La régularité de l'angle d'ouverture (et donc la validité de l'hypothèse de la spirale logarithmique) diminue en effet avec la distance au centre (du fait de la diminution de la force de gravité et de l'influence grandissante des perturbations extérieures). Or la brillance des bras diminuant également avec la distance, l'ajustement favorise les parties internes des bras resserrées et négligent les parties externes plus ouvertes alors que l'expert semble fournir une évaluation de l'angle d'ouverture moyen. Une solution serait alors d'introduire une possibilité d'évolution (par exemple linéaire) de l'angle d'ouverture avec la distance. Néanmoins, il n'est pas garanti qu'une modulation simple (de type linéaire) soit satisfaisante pour prendre en compte le phénomène.

#### 4.4.6 Importance des bras spiraux

L'importance des bras spiraux est mesurée comme le rapport du flux des bras spiraux additionné du flux des zones H II localisées sur ceux-ci sur le flux total de la galaxie. On note ce rapport  $s/t$ . On obtient un taux d'accord de 69 % (figure 4.27, seules les galaxies spirales sont incluses dans l'échantillon). Les différents paliers du quantificateur optimal sont :

- pas de bras/très faibles :  $s/t < 9 \times 10^{-3}$  ;
- faibles :  $9 \times 10^{-3} \leq s/t < 0,12$  ;
- moyens :  $0,12 \leq s/t < 0,41$  ;
- importants :  $0,41 \leq s/t < 0,5$  ;
- les plus importants :  $0,5 \leq s/t$ .

La moyenne des distances  $\delta$  à l'intervalle de confiance EFIGI est égale à  $1,7 \times 10^{-2}$ , la médiane vaut 0 et l'écart-type est de  $9 \times 10^{-2}$ . Les erreurs, bien que généralement faibles et centrées, peuvent être assez importantes.

La figure 4.28 qui représente la distribution des distances pour les individus en désaccord avec la base CFIGI montre que les erreurs les plus importantes concernent une sous-évaluation de l'importance des bras spiraux. Cette sous-estimation est généralement provoquée par la

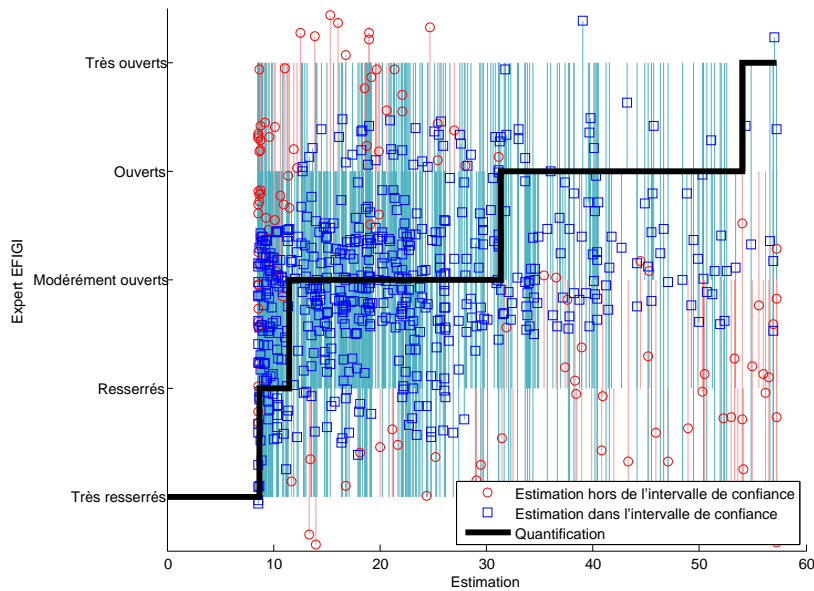


FIGURE 4.25 – Comparaison des résultats d’estimation avec la vérité terrain CFIGI pour l’attribut ouverture des bras spiraux. Voir la légende de la figure 4.19.

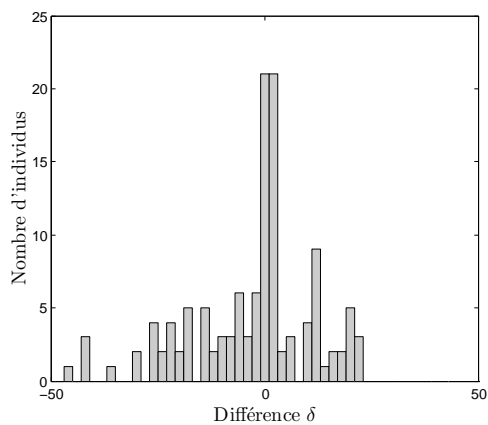


FIGURE 4.26 – Distribution des distances  $\delta$  pour les galaxies dont la valeur quantifiée par  $Q_o$  de l’attribut ouverture des bras spiraux est en dehors de l’intervalle de confiance CFIGI (points rouges de la figure 4.25).

présence de plus de deux bras spiraux ou la non prise en compte des parties externes des bras, certes peu brillantes mais étendues et avec donc une contribution notable. Comme pour l'ouverture des bras spiraux, la relaxation du critère de symétrie pourrait améliorer cette situation en permettant la modélisation des parties externes des bras.

Les cas de bras sur-évalués ne semble généralement pas anormaux. Il est néanmoins possible que notre modèle permette un étalement trop important des bras, ces derniers entrant alors en « compétition » avec le disque.

#### 4.4.7 Sens de rotation des bras spiraux

Le sens de rotation est donné par le signe de l'angle d'ouverture  $\alpha_s$ . La réponse donnée par notre méthode est donc binaire ; il n'est donc pas possible de reproduire les différents degrés de confiance présents dans l'attribut CFIGI et le recours à un quantificateur est inutile. On obtient un taux d'accord de 83,4% (figure 4.29, seules les galaxies spirales sont incluses dans l'échantillon).

Parmi la centaine d'objets dont le sens de rotation est mal estimé, environ une vingtaine correspondent à des erreurs d'estimation manifestes (les trois quarts sont d'ailleurs associés à une mauvaise estimation de la barre stellaire ou du disque). L'inversion du sens de rotation pour les 80 objets restants semble justifié numériquement par différents phénomènes :

- asymétrie des bras spiraux ;
- plus de deux bras spiraux présents ;
- présence d'anneaux non pris en compte ;
- présence de contaminants non masqués.

Dans les deux premiers cas, il apparait qu'une spirale de sens inversée et d'angle d'ouverture réduit permet de recouvrir une partie plus importante des bras. Le dernier cas peut attirer la structure spirale vers la source parasite lorsque les bras spiraux sont peu brillants.

Les solutions possibles d'amélioration, outre celles déjà évoquées pour améliorer la qualité d'estimation de la barre stellaire et des anneaux, sont, comme pour l'attribut « ouverture des bras spiraux », d'introduire la possibilité de bras asymétriques et d'avoir plus de deux bras dans le modèle.

## 4.5 Conclusion

L'évaluation de cas réels et les comparaisons statistiques avec les annotations des experts ont permis de valider le comportement de notre méthode à grande échelle. Nous avons pu obtenir des accords bons ou satisfaisants pour l'ensemble des caractéristiques considérées.

Cette étude et l'analyse critique réalisée avec les experts ont permis de cerner les principales limites de l'algorithme concernant un nombre significatif d'objets, puis de déterminer un certain nombre de modifications à même de résoudre la plus grande partie des problèmes rencontrés. Voici un résumé des modifications suggérées :

- prise en compte plus large des anneaux, notamment internes, en abaissant le seuil de leur introduction dans la hiérarchie de modèles ;
- filtrage plus fort des contaminants, les réglages actuels minimisant le nombre de faux positifs, il serait préférable de minimiser le nombre de faux négatifs ;
- assouplissement de la contrainte de symétrie sur les bras spiraux ;

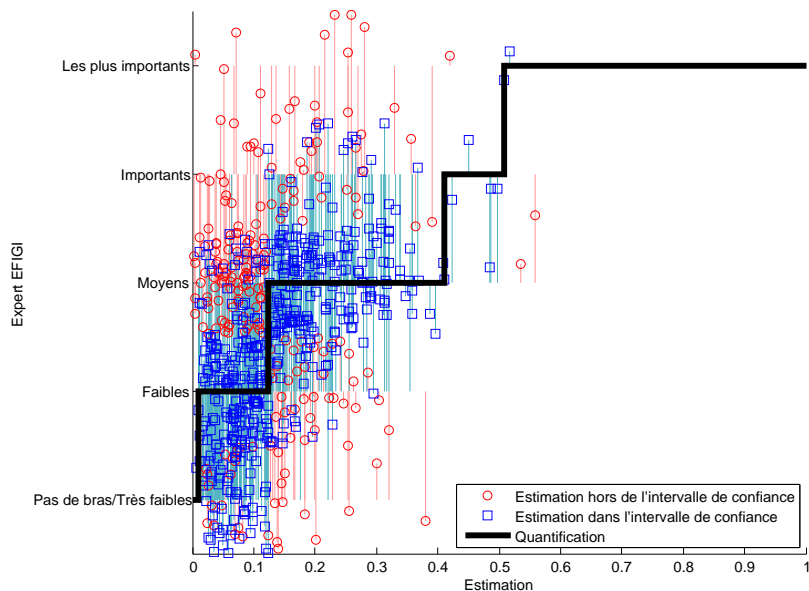


FIGURE 4.27 – Comparaison des résultats d'estimation avec la vérité terrain CFFIGI pour l'attribut importance des bras spiraux. Voir la légende de la figure 4.19.

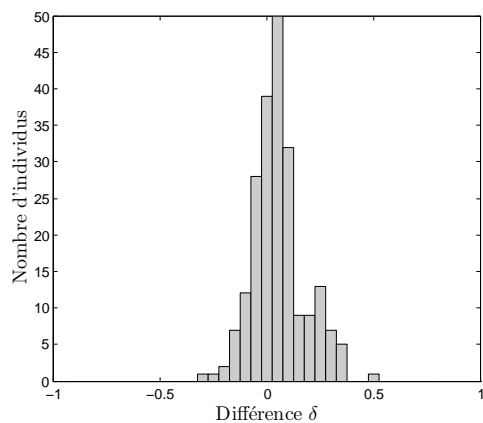


FIGURE 4.28 – Distribution des distances  $\delta$  pour les galaxies dont la valeur quantifiée par  $Q_o$  de l'attribut importance des bras spiraux est en dehors de l'intervalle de confiance CFFIGI (points rouges de la figure 4.27).

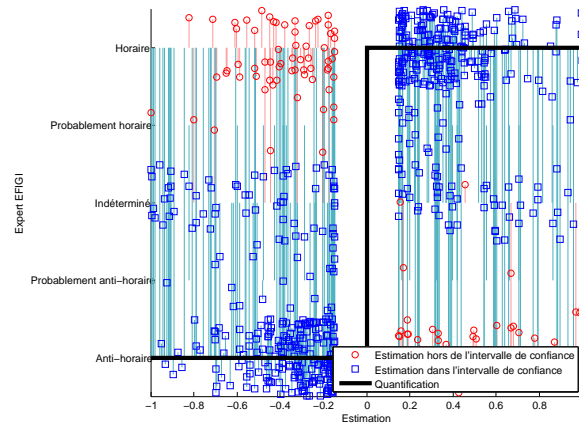


FIGURE 4.29 – Comparaison des résultats d’estimation avec la vérité terrain CFIGI pour l’attribut sens de rotation. Voir la légende de la figure 4.19.

- assouplissement de l’hypothèse d’une spirale logarithmique en permettant une évolution de l’angle d’ouverture des bras avec la distance au centre ;
- possibilité d’avoir plus de deux bras spiraux.

Notons que l’ensemble de ces modifications sont des évolutions superficielles de la méthode, preuve d’une conception souple et évolutive de l’algorithme. L’algorithme incluant les modifications proposées sera achevé prochainement (avant la fin de l’année 2010) et permettra de procéder à une analyse astrophysique des paramètres obtenus avec une grande confiance.

## Bibliographie

- [1] A. BAILLARD : *Détermination automatique des paramètres morphologiques des galaxies*. Thèse de doctorat, École Nationale Supérieure des Télécommunications, 2008.
- [2] A. BAILLARD, E. BERTIN, Y. MELLIER, H. J. MCCracken, T. GÉRAUD, R. PELLÓ, F. LEBORGNE et P. FOUQUÉ : Project EFIGI : Automatic Classification of Galaxies. Dans C. GABRIEL, C. ARVISET, D. PONZ et S. ENRIQUE, éditeurs : *Astronomical Data Analysis Software and Systems XV*, volume 351 de *Astronomical Society of the Pacific Conference Series*, 2006.
- [3] S. LLOYD : Least Squares Quantization in PCM. *IEEE Transactions on Information Theory*, 28(2):129–137, mars 1982.
- [4] A. H. MALLER, A. A. BERLIND, M. R. BLANTON et D. W. HOGG : The Intrinsic Properties of SDSS Galaxies. *Astrophysical Journal*, 691:394–406, janvier 2009.
- [5] B. NEICHEL, F. HAMMER, M. PUECH, H. FLORES, M. LEHNERT, A. RAWAT, Y. YANG, R. DELGADO, P. AMRAM, C. BALKOWSKI, C. CESARSKY, H. DANNERBAUER, I. FUENTES-CARRERA, B. GUIDERDONI, A. KEMBHAVI, Y. C. LIANG, N. NESVADBA, G. ÖSTLIN, L. POZZETTI, C. D. RAVIKUMAR, S. DI SEREGO ALIGHIERI, D. VERGANI, J. VERNET et H. WOZNIK : IMAGES. II. A Surprisingly Low Fraction of Undisturbed Rotating Spiral Disks at  $z \sim 0.6$  The Morpho-Kinematical Relation 6 Gyr ago. *Astronomy and Astrophysics*, 484:159–172, juin 2008.



- 
- [6] G. PATUREL, P. FOUQUE, L. BOTTINELLI et L. GOUGUENHEIM : An Extragalactic Database. I - The Catalogue of Principal Galaxies. *Astronomy and Astrophysics, Supplement*, 80:299–315, novembre 1989.
- [7] G. PATUREL, C. PETIT, P. PRUGNIEL, G. THEUREAU, J. ROUSSEAU, M. BROUTY, P. DUBOIS et L. CAMBRÉSY : HYPERLEDA. I. Identification and designation of galaxies. *Astronomy and Astrophysics*, 412:45–55, décembre 2003.

# Conclusion générale et perspectives

LES TRAVAUX MENÉS PENDANT CETTE THÈSE avaient pour but la mise au point d'une méthode de caractérisation morphologique multibande des galaxies. Contrairement aux approches existantes basées sur des mesures empiriques, notre approche devait reposer sur des caractérisations possédant une interprétation astrophysique claire et éprouvée. Nous avons répondu à cette problématique en deux temps. D'une part, la mise au point d'une hiérarchie de modèles paramétriques, associées à des algorithmes d'optimisation stochastiques, fournit une description de haut niveau sémantique des galaxies. Les modèles développés donnent accès aux caractéristiques morphologiques de la galaxie sur une bande étendue de fréquences en réalisant une décomposition en composantes astrophysiques. D'autre part, les développements concernant la théorie des arbres de composantes connexes ont permis la mise au point d'algorithmes multibandes, efficaces et robustes pour la réalisation des pré-traitements nécessaires à la mise en œuvre de la décomposition en structures. Les performances obtenues par la combinaison de ces deux aspects ont alors été évaluées sur une base conséquente d'images. Les résultats ont été discutés de manière approfondie avec les astronomes et nous avons ainsi pu montrer la pertinence et la robustesse de la méthode. De plus, la nature des modèles, aisément interprétable en termes physiques, a grandement facilité l'échange avec les astronomes permettant ainsi de déterminer les principaux axes d'amélioration à envisager.

Dans cette conclusion, nous revenons sur chaque étape de cette thèse en rappelant, pour chacune d'elle, les contributions majeures et en proposant un ensemble de perspectives.

Dans un **premier temps**, les recherches concernant les méthodes de modélisation ont permis d'explorer l'utilisation des modèles paramétriques complexes basés sur une interprétation physique pour l'analyse d'images. Nous avons imaginé une stratégie capable d'adapter les modèles existants aux données multibandes, permettant ainsi d'obtenir une description plus complète et plus robuste des objets étudiés. Nous avons ensuite expérimenté l'utilisation d'un modèle semi-simulable où une fonction paramétrique non constructive permet de simplifier la modélisation en modifiant l'observation de manière contrôlée. Les paramètres de cette fonction sont estimés comme n'importe quel autre paramètre du modèle. Par ailleurs, la difficulté liée à l'optimisation de tels modèles (comprenant des variables de nature hétérogène) nous a mené à développer et améliorer les méthodes d'optimisation stochastique existantes. Ainsi, nous avons imaginé une procédure d'optimisation basée sur une hiérarchie de modèles qui permet de réduire le temps de convergence des algorithmes tout en étant plus robuste. Cette procédure de décomposition est couplée à une nouvelle façon de mettre en œuvre des méthodes de recuit simulé au sein d'un échantillonneur de Gibbs. Cette nouvelle approche, qui consiste à utiliser des températures différentes pour les sites de l'échantillonneur, permet de mieux répartir l'effort de simulation en fonction de la nature et de la complexité des variables associées. L'ensemble de ces développements a abouti à une procédure de décomposition entièrement automatique, capable de s'adapter à chaque observation.

Une des **perspectives** à ces développements porte sur une étude détaillée des modèles paramétriques semi-simulables. Cette approche permet en effet de remplacer avantageusement certains pré-traitements par des filtres robustes dont les paramètres sont estimés conjointement avec ceux du modèle, laissant présager un gain de robustesse pour de nombreuses

applications. La fonction paramétrique utilisée dans cette thèse pour modifier l'observation étant assez simple, il serait intéressant d'étudier plus en avant le comportement des algorithmes avec des filtres plus complexes sur des données variées.

L'utilisation d'une hiérarchie de modèles pour réaliser les décompositions ouvre également la voie à de nouveaux développements. Il serait notamment intéressant de tester le couplage d'une telle approche avec des méthodes de décomposition en échelle spatiale. Une telle combinaison serait certainement profitable dans des domaines comme la télédétection, qui bénéficie depuis quelques années des méthodes de modélisation par processus ponctuels marqués (similaire à notre approche) et pour laquelle de nombreuses données multi-résolutions sont disponibles.

Dans un **deuxième temps**, les approches par arbre de composantes connexes ont permis la mise au point d'algorithmes robustes et adaptés aux données multibandes pour les prétraitements des images à travers la définition des arbres de composantes h-connexes. Pour cela, nous avons amélioré la théorie existante relative aux h-connexions, en proposant une nouvelle axiomatique qui a permis la définition de nouvelles propriétés simplifiant leur usage. Nous avons ensuite proposé une nouvelle définition des arbres de composantes connexes basée sur la théorie des h-connexions. Cette nouvelle version, appelée arbre des composantes h-connexes, fournit une représentation plus compacte et plus robuste que le traditionnel arbre de composantes connexes. Nous avons également étudié l'usage des arbres dans le contexte de l'imagerie multibande, permettant ainsi de déterminer quelles sont les propriétés souhaitables de l'ordre vectoriel à utiliser en fonction de l'application visée. Ces développements ont abouti à la conception de trois algorithmes nécessaires à notre projet : un algorithme de séparation de sources, un algorithme de détection des zones H II et un algorithme d'extraction des bras spiraux.

Les **perspectives** théoriques de cette partie du travail portent essentiellement sur les développements liés à la théorie des h-connexions et des arbres de composantes h-connexes. La théorie des h-connexions est en effet relativement récente et de nombreux travaux restent à réaliser pour fournir une meilleure compréhension des opérateurs h-connexes et de la zoologie des h-connexions. Une meilleure compréhension de cette dernière permettrait d'ailleurs peut-être la découverte d'algorithmes génériques pour la construction des arbres de composantes h-connexes associés à certaines classes de h-connexions.

Les perspectives pratiques sont nombreuses en traitement et analyse d'images. L'ensemble des solutions actuelles reposant sur des traitements morphologiques et en particulier par arbre de composantes connexes peuvent en effet bénéficier des nouvelles méthodes développées. À titre d'exemple, nous avons montré comment ces méthodes peuvent résoudre avec succès le problème de binarisation de documents (Annexe D.4).

**Enfin**, l'application de nos méthodes à environ 1500 images de la base FIGI et la comparaison des résultats obtenus avec les annotations des experts ont permis de valider leur robustesse et leur applicabilité à plus grande échelle. Les discussions approfondies que nous avons eues avec les astronomes nous ont convaincu de la pertinence de l'approche choisie, la proximité du modèle paramétrique avec le modèle physique permettant un dialogue et une rétro-action aisée entre les deux communautés.

De nombreuses **perspectives** existent d'un point de vue astronomique. L'ensemble des résultats obtenus et des analyses effectuées va permettre la mise au point d'un outil de trai-

tement qui sera mis à la disposition de la communauté astronomique. Les résultats obtenus sur la base FIGI devront être étudiés en détail et conduiront peut-être à la découverte de nouvelles modalités dans la répartition des galaxies : c'est-à-dire une nouvelle classification spectro-morphologique. Il faudra alors pouvoir étudier le comportement de l'approche sur des galaxies peu résolues et à très faible rapport signal-sur-bruit, afin de pouvoir traiter le très grand nombre de galaxies de fond présentes dans les grands relevés astronomiques. Finalement, l'automatisation complète de la procédure d'exploration de la hiérarchie de modèles, pour laquelle nous avons déjà proposé un certain nombre de pistes, sera nécessaire à la mise en œuvre complètement automatisée de la méthode.

## Publications de l'auteur

### Chapitre de livre

C. COLLET, B. PERRET ET V. MAZET. *Multivariate Image Processing : Panoramic Integral-Field Spectrograph : Ultraspectral Data to Understand the History of the Universe*, chapitre 14, pages 437–450. ISBN-13 : 978-1848211391. John Wiley and Sons, décembre 2009.

### Reuves internationales à comité de lecture

B. PERRET, V. MAZET, C. COLLET ET E. SLEZAK. Hierarchical Multispectral Galaxy Decomposition using a MCMC Algorithm with Multiple Temperature Simulated Annealing. *Pattern Recognition*, accepté pour publication, 2011.

B. PERRET, S. LEFÈVRE ET C. COLLET. A robust hit-or-miss transform for template matching applied to very noisy astronomical images. *Pattern Recognition*, 42(11) :2470–2480, novembre 2009.

### Communications internationales à comité de lecture

E. FERRIÈRE, P.-A. DUC S. MEI, B. VOLLMER, B. PERRET, C. COLLET, W. VAN DRIEL, F. BONNAREL, M. LOUYS ET S. SABATINI. Detection techniques of low surface brightness dwarf galaxies in the Virgo cluster using NGVS data. Dans *A Universe of dwarf galaxies*, juin 2010.

B. PERRET, S. LEFÈVRE, C. COLLET ET E. SLEZAK. From hyperconnections to hypercomponent tree : Application to document image binarization. Dans *Workshop on Applications of Digital Geometry and Mathematical Morphology*, pages 62–66, Istanbul, aout 2010.

B. PERRET, S. LEFÈVRE, C. COLLET ET E. SLEZAK. Connected component trees for multivariate image processing and applications in astronomy. Dans *IAPR, International Conference on Pattern Recognition*, pages 4089–4092, aout 2010.

B. PERRET, V. MAZET, C. COLLET ET E. SLEZAK. Galaxy decomposition in multispectral images using Markov chain Monte Carlo algorithms. In Arnt-Børre Salberg, Jon Yngve Hardeberg et Robert Jenssen, éditeurs, *Scandinavian Conference on Image Analysis*, volume 5575 de *Lecture Notes in Computer Science*, pages 209–218. Springer, 2009.

B. PERRET, S. LEFÈVRE, C. COLLET ET B. VOLLMER. Astronomical object detection with a robust hit-or-miss transform. Dans *16th European Signal Processing Conference, EUSIPCO'08*, Lausanne, Suisse, aout 2008.

M. LOUYS, B. PERRET, B. VOLLMER, F. BONNAREL, S. LEFÈVRE ET C. COLLET. LSB Galaxies Detection Using Markovian Segmentation on Astronomical Images. Dans R. W. Argyle, P. S. Bunclark, & J. R. Lewis, éditeurs, *Astronomical Data Analysis Software and Systems XVII*, volume 394 of *Astronomical Society of the Pacific Conference Series*, pages 125–128, aout 2008.

**Communications nationales à comité de lecture**

B. PERRET, V. MAZET, C. COLLET ET E. SLEZAK. Décomposition d'images multispectrales de galaxies au moyen d'algorithmes de Monte Carlo par chaînes de Markov. Dans *22e Colloque GRETSI*, septembre 2009.

**Manuscrits soumis ou en révision :**

B. PERRET, S. LEFÈVRE, C. COLLET ET E. SLEZAK. Hyperconnections and hierarchical representations for grayscale and multiband image processing. *IEEE Transaction on Image Processing*, en révision depuis le 11 septembre 2010.

B. VOLLMER, B. PERRET, C. COLLET, W. VAN DRIEL, F. BONNAREL, M. LOUYS ET S. SABATINI. Simultaneous multi-band detection of low surface brightness galaxies down to s/n 1.5 with markovian modelling. *Astronomy & Astrophysics*, en révision depuis le 4 juin 2010.



# Algorithmes de Monte Carlo par chaînes de Markov

---

“

Concevons qu'on ait dressé un million de singes à frapper au hasard sur les touches d'une machine à écrire et que, sous la surveillance de contremaîtres illettrés, ces singes dactylographes travaillent avec ardeur dix heures par jour avec un million de machines à écrire de types variés. Les contremaîtres illettrés rassembleraient les feuilles noircies et les relieraient en volumes. Et au bout d'un an, ces volumes se trouveraient renfermer la copie exacte des livres de toute nature et de toutes langues conservés dans les plus riches bibliothèques du monde. Telle est la probabilité pour qu'il se produise pendant un instant très court, dans un espace de quelque étendue, un écart notable de ce que la mécanique statistique considère comme le phénomène le plus probable.

”

Émile Borel, *Mécanique Statistique et Irréversibilité*

## Sommaire

---

<b>A.1</b>	<b>Intérêt</b> . . . . .	<b>180</b>
<b>A.2</b>	<b>Chaînes de Markov</b> . . . . .	<b>181</b>
<b>A.3</b>	<b>Algorithmes de Monte Carlo par chaînes de Markov</b> . . . . .	<b>183</b>
	A.3.1 Algorithme de Metropolis–Hastings . . . . .	183
	A.3.2 Échantillonneur de Gibbs . . . . .	184
	A.3.3 Période de transition et convergence . . . . .	185
<b>A.4</b>	<b>Amélioration des performances</b> . . . . .	<b>186</b>
	A.4.1 Traitement des variables corrélées dans l'échantillonneur de Gibbs . . . . .	187
	A.4.2 Parcours des sites de l'échantillonneur de Gibbs . . . . .	187



A.4.3	Variations autour de l'algorithme de Metropolis–Hastings . . . . .	188
A.4.3.1	Approches utilisant des connaissances de la loi cible . . . . .	188
A.4.3.2	Méthodes adaptatives . . . . .	188
A.4.3.3	Algorithme du snooker . . . . .	189
A.4.4	Modification de la loi cible : recuit simulé . . . . .	189
	<b>Bibliographie</b> . . . . .	<b>189</b>

CETTE ANNEXE a pour but de présenter les bases des méthodes de Monte Carlo par chaînes de Markov (MCMC). Nous commençons par résumer leur intérêt et les raisons justifiant leur utilisation (section A.1). Nous précisons ensuite la notion de chaînes de Markov et les caractéristiques fondamentales qui s'y rattachent (section A.2). Puis, nous formulons les principaux algorithmes MCMC dans un cadre général et nous discutons des méthodes permettant d'améliorer leurs performances (section A.3). Les informations de ce chapitre proviennent essentiellement des trois livres : *Méthodes de Monte Carlo par chaînes de Markov* de Robert [11], *Markov Chain Monte Carlo in Practice* de Gilks et al. [5] et *Markov Chains and Stochastic Stability* de Meyn et Tweedie [9].

## A.1 Intérêt

Le but des algorithmes MCMC est de proposer des méthodes génériques pour simuler des lois de probabilité quelconques, en particulier lorsque la densité de probabilité ne peut pas être évaluée globalement en un temps raisonnable. Cette simulation est réalisée par la construction d'une chaîne de Markov  $(\phi^n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$  dont la loi stationnaire (la densité de probabilité associée aux éléments de la chaîne) est la densité de probabilité cible  $\pi$ .

Ces méthodes ont été popularisées par le fait que deux grandes classes de problèmes peuvent être résolues par la simulation d'une densité de probabilité associée :

- le calcul des intégrales de grandes dimensions ;
- l'optimisation et plus généralement le calcul des estimateurs formulés dans un cadre bayésien.

Nous présentons maintenant plus en détail les deux classes de problèmes évoqués, en précisant comment un algorithme d'échantillonnage peut y apporter une solution générique.

**Intégration numérique** De nombreux problèmes aboutissent à l'évaluation d'intégrales de grandes dimensions pour lesquelles les algorithmes déterministes sont inefficaces. Considérons en effet le problème générique de calcul de l'intégrale de la fonction  $f$  sur la variable aléatoire  $\phi$  définie sur le domaine  $E$  et de densité de probabilité  $\pi$  :

$$\mathbb{E}_\pi [f(\phi)] = \int_E f(\phi)\pi(\phi)d\phi. \quad (\text{A.1})$$

On peut estimer cette intégrale à partir d'un nombre fini d'échantillons  $(\phi^i)_{i \in I}$  distribués selon  $\pi$  par :

$$\hat{\mathbb{E}}_\pi [f(\phi)] = \frac{1}{\text{card}(I)} \sum_{i \in I} f(\phi^i) \quad (\text{A.2})$$

qui converge presque sûrement d'après la loi forte des grands nombres. Le problème de l'intégration numérique peut donc être résolu par une méthode de simulation générique.

**Optimisation** La formulation de nombreux problèmes amène à devoir maximiser une densité de probabilité  $\pi(\phi)$ , ou de manière équivalente à minimiser une énergie ; cette densité étant généralement évaluable localement à un facteur de normalisation près. Lorsque la densité  $\pi$  est de grande dimension et comporte de nombreux maxima locaux, les algorithmes déterministes deviennent généralement inefficaces et le recours aux méthodes de Monte Carlo est inévitable.

Une solution est alors de générer des échantillons  $(\phi^i)$  distribués selon  $\pi$ , afin d'en étudier la répartition empirique. Par exemple, un estimateur du maximum est simplement donné par l'échantillon de probabilité maximum. Cette approche permet également d'accéder à des estimateurs plus complexes comme la moyenne, la variance et les moments d'ordres supérieurs.

## A.2 Chaines de Markov

Cette section a pour but de présenter les éléments clefs de la théorie des chaines de Markov. Les propriétés données permettent de définir la notion de distribution stationnaire pour une chaîne et de convergence asymptotique vers cette distribution.

Soit  $(E, \xi)$  un espace mesurable, une *chaîne de Markov* est une suite de variables aléatoires  $(\phi^i)$ ,  $i \in \mathbb{N}$  sur l'ensemble  $E$ , telle que pour tout  $t \in \mathbb{N}^*$ , la probabilité conditionnelle du  $t^e$  échantillon ne dépend que la valeur du  $(t-1)^e$  échantillon :  $P(\phi^t | \phi^0, \dots, \phi^{t-1}) = P(\phi^t | \phi^{t-1})$ , on parle de processus sans mémoire.

Nous présentons maintenant les propriétés fondamentales des chaines de Markov qui permettent d'établir les critères de convergence des algorithmes.

**Homogénéité** Une chaîne de Markov est dite *homogène* si les lois conditionnelles de tous ses éléments (hormis le premier) sont identiques :  $\forall t \in \mathbb{N}^*, \forall (x^0, \dots, x^{t-2}, y) \in E, \forall A \in \xi$  :

$$P(\phi^t \in A | \phi^0 = x^0, \dots, \phi^{t-2} = x^{t-2}, \phi^{t-1} = y) = P(\phi^1 \in A | \phi^0 = y) \quad (\text{A.3})$$

Une chaîne de Markov homogène est complètement décrite par deux éléments :

- la densité de probabilité initiale  $P(\phi^0)$  ;
- le noyau de transition qui décrit la probabilité de passer d'un état à un autre (identique sur toute la chaîne d'après la propriété d'homogénéité) :  $\forall x \in E, \forall A \in \xi, K(x, A) = P(\phi^1 \in A | \phi^0 = x)$ .

Cette définition permet d'obtenir par récurrence le noyau de  $l$  transitions noté  $K^l$  :

$$K^l(x, A) = \int_E K^{l-1}(y, A) K(x, dy) \quad (\text{A.4})$$

avec  $K^1 = K$ .

**Invariance** L'*invariance* ou *stationnarité* caractérise une propriété de stabilité importante établissant que la loi marginale de  $\phi_n$  ne dépend pas de  $n$ . Formellement,  $\pi$  est invariante ou stationnaire pour la chaîne de noyau  $K$  si :

$$\forall A \in \xi, \pi(A) = \int_E K(y, A) \pi(dy) \quad (\text{A.5})$$

On a alors  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\phi^n \sim \pi$ . Cette propriété n'est généralement pas évidente à démontrer, mais peut être remplacée par la condition suffisante dite de *réversibilité* du noyau.  $K$  est  $\pi$ -réversible si :

$$\forall A, B \in \xi, \int_B K(x, A) \pi(dx) = \int_A K(x, B) \pi(dx). \quad (\text{A.6})$$

C'est-à-dire, si la probabilité d'aller de  $A$  en  $B$  est égale à la probabilité d'aller de  $B$  en  $A$ .

**Irréductibilité** Une chaîne est dite  $\pi$ -irréductible selon la mesure de probabilité  $\pi$ , si l'on peut passer de tout état à tout autre état de probabilité non nulle par un nombre fini d'applications du noyau de transition. Plus formellement, la chaîne est  $\pi$ -irréductible si :

$$\forall x \in E, \forall A \in \xi, \pi(A) > 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}^*, K^n(x, A) > 0. \quad (\text{A.7})$$

**Apériodicité** La *périodicité* mesure une forme de déterminisme dans le parcours des états de la chaîne. Formellement, on définit la période  $d(x)$  d'un état  $x \in E$  par :

$$d(x) = \text{pgcd} \{m \in \mathbb{N}^* | P(\phi^m = x | \phi^0 = x) > 0\}. \quad (\text{A.8})$$

où pgcd désigne le plus grand commun diviseur. Si  $d = 1$ , l'état  $x$  est dit *apériodique*. Si tous les états sont apériodiques, la chaîne est dite apériodique.

**Récurrence au sens de Harris** Une chaîne  $\pi$ -irréductible est *récurrente au sens de Harris* (ou *Harris récurrente*) si :

$$\forall A \in \xi, \pi(A) > 0, \forall x \in A, P\left(\sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{I}_A(x) = \infty\right) = 1 \quad (\text{A.9})$$

avec  $\mathbb{I}$  la fonction indicatrice. Une telle chaîne passe presque sûrement une infinité de fois par chacun de ses états.

**Ergodicité** La propriété d'*ergodicité* permet la définition de la convergence asymptotique de la distribution des échantillons d'une chaîne vers sa loi stationnaire. Une chaîne est dite ergodique si elle est invariante, irréductible, apériodique et Harris récurrente. L'ergodicité permet plus précisément d'établir l'indépendance aux conditions initiales ( $P(\phi^0)$ ).

**Convergence vers une loi stationnaire** Afin de mesurer la convergence de la distribution empirique des échantillons d'une chaîne vers sa distribution stationnaire, on définit la *norme de la variation totale* entre deux lois de probabilité  $\pi_1$  et  $\pi_2$  par :

$$\|\pi_2 - \pi_1\|_{\text{VT}} = \sup_{A \in \xi} (|\pi_2(A) - \pi_1(A)|) \quad (\text{A.10})$$

On peut alors établir pour toute chaîne ergodique de loi stationnaire  $\pi$  que :

$$\forall \phi^0 \in E, \lim_{l \rightarrow \infty} \left\| K^l(\cdot | \phi^0) - \pi(\cdot) \right\|_{\text{VT}} = 0 \quad (\text{A.11})$$

La distribution des échantillons tend donc vers  $\pi$  en norme de la variation totale quel que soit l'état de départ.

La suite de cette annexe est dédiée à l'étude des principaux algorithmes construisant de telles chaînes de Markov ergodiques suivant une loi stationnaire quelconque (appelée loi cible).

## A.3 Algorithmes de Monte Carlo par chaînes de Markov

Nous présentons maintenant les deux algorithmes principaux des méthodes MCMC : l'algorithme de Metropolis–Hastings et l'échantillonneur de Gibbs.

### A.3.1 Algorithme de Metropolis–Hastings

L'algorithme de Metropolis–Hastings [7,8] fait partie des procédures de simulation fonctionnant par acceptation–rejet. Il permet de générer une suite d'échantillons  $(\phi^i)$ ,  $i \in \mathbb{N}$  suivant une densité de probabilité  $\pi$  connue à un facteur près. Son principe est de proposer un échantillon suivant une loi dite candidate ou instrumentale  $q$  et de l'accepter aléatoirement en fonction du rapport de vraisemblance du nouvel échantillon au précédent. On peut montrer que la suite générée  $(\phi^t)$  correspond à une chaîne de Markov de loi stationnaire  $\pi$ . Le lecteur pourra se référer à [3] pour un exposé détaillé sur l'algorithme de Metropolis–Hastings et la preuve de sa convergence.

L'algorithme A.1 présente l'échantillonneur de Metropolis–Hastings. C'est un algorithme itératif : il produit à chaque itération un nouvel échantillon qui dépend de l'échantillon précédent et peut lui être égal (donc les échantillons générés ne sont pas indépendants et identiquement distribués). Le problème de détection de la convergence est traité en section A.3.3.

---

**Algorithme A.1:** Algorithme de Metropolis–Hastings.

---

**Entrée** : échantillon initial  $\phi^0$   
**Sortie** : chaîne de Markov de distribution  $\pi$

```

1  $i = 0$ ;
2 répéter
3   Générer  $y \sim q(y|\phi^i)$ ;
4   Générer  $u \sim \mathcal{U}(0,1)$ ;
5    $p = \min\left(1, \frac{\pi(y)}{\pi(\phi^i)} \frac{q(\phi^i|y)}{q(y|\phi^i)}\right)$ ;
6   si  $u \leq p$  alors
7      $\phi^{i+1} = y$ ;
8   sinon
9      $\phi^{i+1} = \phi^i$ ;
10   $i = i + 1$ ;
11 jusqu'à ce que le critère de convergence soit satisfait;
```

---

L'efficacité de l'algorithme, c'est-à-dire sa capacité de produire rapidement une chaîne dont la distribution est proche de la loi cible, dépend fortement du choix de la loi candidate  $q$ . Idéalement,  $q$  doit être aussi proche de  $\pi$  que possible, mais, en pratique, il est généralement très difficile de trouver une telle loi qui soit à la fois facilement simulable et connue analytiquement (ou symétrique  $q(y^t|\phi^t) = q(\phi^t|y^t)$ ) pour pouvoir calculer le rapport de vraisemblance.

On constate également que les lois  $\pi$  et  $q$  ne nécessitent pas d'être normalisées (d'intégrale 1) car on ne considère que des rapports de probabilité.

Lorsque la densité  $q$  ne dépend pas de l'échantillon précédent ( $q(y|x^t) = q(y)$ ), l'algorithme est dit *indépendant*. Dans le cas contraire, l'algorithme est dit à *marche aléatoire*. On

considère alors généralement une loi candidate  $q$  qui propose un déplacement aléatoire depuis l'échantillon précédent. Il se pose alors le problème de déterminer les déplacements aléatoires permettant de se déplacer de manière rapide sur le support de  $\pi$ .

L'efficacité de l'algorithme et de la loi candidate peut être évaluée relativement efficacement en mesurant son taux d'acceptation; c'est-à-dire le rapport du nombre de nouveaux échantillons acceptés ( $\phi^{t+1} \neq \phi^t$ ) par rapport au nombre d'échantillons proposés (nombre d'itérations). Dans le cas d'une marche aléatoire, on comprend aisément qu'un taux d'acceptation trop faible n'est pas souhaitable car la chaîne va stagner longtemps sur les mêmes valeurs. Un taux d'acceptation élevé n'est également pas souhaitable car il signifie que le rapport de vraisemblance entre les itérations varie peu et donc que l'on ne se déplace pas assez vite. On considère généralement que le taux d'acceptation doit être d'environ 0,5 pour des variables de dimension 1 ou 2 et de 0,25 pour des dimensions plus élevées [4]. La figure A.1 montre sur un cas d'école le comportement de l'algorithme avec différentes lois candidates plus ou moins adaptées.

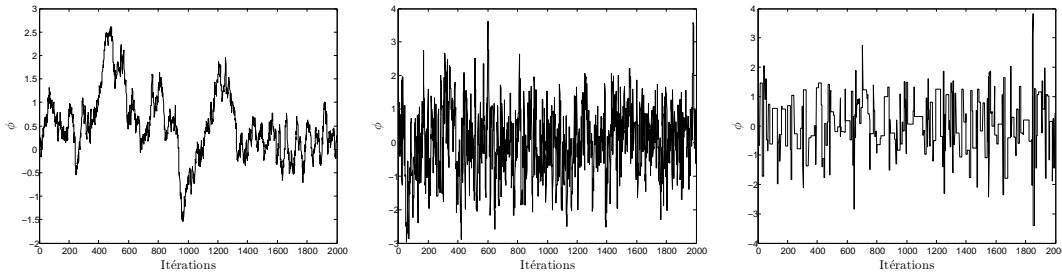


FIGURE A.1 – Simulation de la loi normale  $\mathcal{N}(0;1)$  avec trois algorithmes de Metropolis–Hastings à marche aléatoire de lois candidates  $\mathcal{N}(0;0,1)$  (taux d'acceptation : 0,96),  $\mathcal{N}(0;1)$  (taux d'acceptation : 0,65) et  $\mathcal{N}(0;10)$  (taux d'acceptation : 0,12).

L'algorithme de Metropolis–Hastings peut théoriquement simuler n'importe quelle loi de probabilité, quelles que soient ses propriétés et ses dimensions. Néanmoins, dans la pratique, pour que le taux d'acceptation de l'algorithme soit raisonnable, son utilisation est restreinte aux lois de faible dimension ou pour lesquelles une loi candidate fournissant une bonne approximation de la loi  $\pi$  existe. Dans le cas contraire, l'échantillonneur de Gibbs permet de réduire la dimension d'une loi à simuler en décomposant le problème.

### A.3.2 Échantillonneur de Gibbs

L'échantillonneur de Gibbs permet de réduire le problème de la simulation de grande dimension  $\pi$  à un problème de simulations de plusieurs lois de dimensions inférieures. Dans la suite on cherche à simuler  $\phi$  selon  $\pi$ . On pose  $(\phi_1, \dots, \phi_l) = \phi$  une décomposition formant une partition du vecteur  $\phi$ ; les éléments de la partition, appelés sites ou blocs, peuvent être des scalaires ou des vecteurs. L'échantillonneur de Gibbs consiste à générer une suite d'échantillons  $\{\phi_1^t, \dots, \phi_l^t\}$ ,  $t \in \mathbb{N}$  selon les densités conditionnelles  $\pi_1, \dots, \pi_l$ . Les échantillons produits correspondent alors à une chaîne de Markov de loi stationnaire  $\pi$ .

Posons  $\phi_{-i}^t = \{\phi_1^{t+1}, \dots, \phi_{i-1}^{t+1}, \phi_{i+1}^t, \dots, \phi_l^t\}$ , l'échantillonneur de Gibbs est donné dans l'algorithme A.2.

On constate que, contrairement à l'algorithme de Metropolis–Hastings, l'échantillonneur

**Algorithme A.2:** Échantillonneur de Gibbs.

---

**Entrée** : échantillon initial  $\{\phi_1^0, \dots, \phi_l^0\}$   
**Sortie** : chaîne de Markov de distribution  $\pi$

- 1  $i = 0$ ;
- 2 **répéter**
- 3     **pour** *tout*  $j$  de 1 à  $l$  **faire**
- 4         Générer  $\phi_j^{i+1} \sim \pi_j(\phi_j | \phi_{-j}^i)$ ;
- 5      $i = i + 1$ ;
- 6 **jusqu'à** ce que le critère de convergence soit satisfait;

---

de Gibbs accepte tous les échantillons produits. En fait, l'échantillonneur de Gibbs peut être vu comme un cas particulier de l'algorithme de Metropolis–Hastings [3]. La mise à jour du site  $\phi_i$  est en effet équivalente à utiliser l'algorithme de Metropolis–Hastings avec la loi candidate  $q_i(y_i | \phi_{-i}^t, \phi_i^t) = \pi(y_i | \phi_{-i}^t)$  ce qui conduit à un taux d'acceptation de 1.

Finalement, l'échantillonneur de Gibbs et l'algorithme de Metropolis–Hastings peuvent être utilisés conjointement : l'échantillonneur de Gibbs permet de décomposer le problème et l'algorithme de Metropolis–Hastings réalise la simulation effective des lois de dimensions réduites (lorsqu'aucun algorithme direct n'existe).

**A.3.3 Période de transition et convergence**

Nous avons vu que la vitesse de convergence de l'algorithme de Metropolis–Hastings dépend de la loi candidate choisie. Un autre facteur est la qualité de l'initialisation  $\phi^0$ . Dans le cas général, il est difficile de le déterminer et  $\phi^0$  peut se trouver dans une zone de probabilité très faible. L'algorithme est alors dans une phase dite de *transition* ou de *chauffe* (*burn-in*) (figure A.2). Les échantillons produits pendant la phase de transition sont théoriquement distribués selon  $\pi$  pour une chaîne infinie, mais apparaissent comme des anomalies statistiques pour des chaînes de dimensions finies généralement assez courtes : il convient donc de ne pas les prendre en compte.

Déterminer la convergence, c'est-à-dire le nombre d'itérations après lequel la distribution des échantillons est suffisamment proche de la distribution cible, est un problème encore ouvert : il est actuellement impossible de s'assurer de la convergence d'un algorithme MCMC.

En pratique, la méthode la plus simple est de réaliser un diagnostic manuel en analysant visuellement l'évolution de la chaîne et de son histogramme : lorsqu'ils semblent se stabiliser on suppose que la convergence est atteinte.

Néanmoins, de nombreuses méthodes plus ou moins formelles ont été développées pour évaluer cette convergence. Toutes les méthodes développées cherchent à quantifier une stabilité dans la distribution des échantillons produits : lorsque la distribution n'évolue plus ou très peu on considère que la chaîne a convergé. Bien entendu, cette approche n'apporte aucune garantie : par exemple un algorithme de Metropolis–Hastings à marche aléatoire peut avoir une probabilité de saut vers une zone de haute probabilité tellement faible que les chances que celui-ci se produise en un temps fini sont presque sûrement nulles, donnant ainsi une fausse impression de convergence.

Néanmoins de nombreuses méthodes automatiques ont également été imaginées (voir par

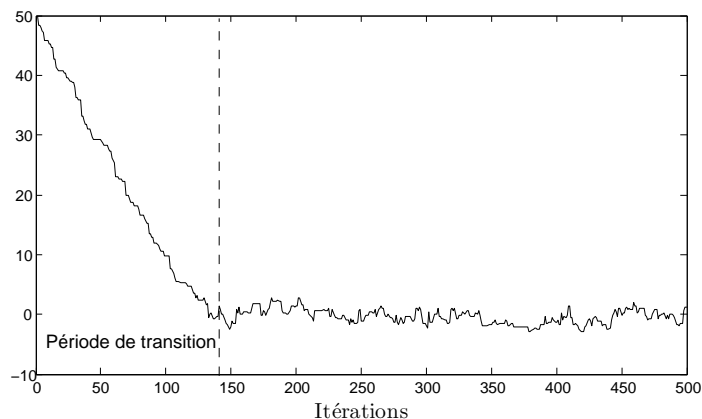


FIGURE A.2 – Simulation de la loi normale  $\mathcal{N}(0; 1)$  avec l’algorithme de Metropolis–Hastings à marche aléatoire de loi candidate  $\mathcal{N}(0; 0,1)$  et  $\phi^0 = 50$ .

exemple l’étude [2]) :

- on peut procéder à la comparaison de plusieurs chaînes partant de valeurs initiales différentes, permettant ainsi de limiter les risques liés à une initialisation arbitraire. Néanmoins, le fait de savoir s’il est préférable d’utiliser plusieurs chaînes de longueurs moyennes ou une seule chaîne très longue fait débat. Cette méthode est limitée par la capacité matérielle à produire de nombreux échantillons en un temps raisonnable ;
- l’identification des *temps de régénération*, qui sont des moments particuliers à partir desquels la chaîne se reproduit de manière indépendante et identique, peut également être utilisée. Cette identification est triviale dans les problèmes à états discrets mais délicate dans les espaces plus généraux ;
- enfin, l’observation d’une chaîne auxiliaire construite à partir de la chaîne principale (par exemple la moyenne cumulée des échantillons) peut apporter une solution satisfaisante pour un coût modeste.

Cette difficulté de détection témoigne de la différence entre la preuve théorique d’une convergence en temps infini et les contraintes pratiques.

## A.4 Amélioration des performances

Les méthodes exposées précédemment possèdent des garanties de convergence mais celles-ci requièrent théoriquement un temps de calcul infini. Dans la pratique, le nombre d’itérations que nous pouvons effectuer avant d’obtenir un résultat acceptable doit rester raisonnable. C’est pourquoi il convient d’avoir des méthodes qui permettent d’ajuster au mieux les algorithmes généraux pour obtenir le meilleur compromis entre la précision obtenue sur les estimations et le nombre d’itérations nécessaires pour obtenir ce résultat.

Le premier point permettant de minimiser le nombre d’itérations nécessaires est de réduire le temps de transition en fournissant une initialisation de qualité et est donc hautement dépendant de chaque problème (voir annexe B).

Le deuxième levier consiste à maximiser la vitesse d’exploration du support de la loi cible, problème pour lequel nous présentons plusieurs solutions génériques.

### A.4.1 Traitement des variables corrélées dans l'échantillonneur de Gibbs

L'échantillonnage des variables corrélées doit faire l'objet d'un soin particulier. Un échantillonnage indépendant peut en effet mener à une exploration très lente de la loi cible (figure A.3). La méthode idéale pour régler ce problème est de le traiter en amont en changeant la paramétrisation du modèle de manière à faire disparaître les corrélations. Néanmoins cette approche est souvent délicate à mettre en œuvre car les lois cibles sont généralement complexes.

Une autre méthode plus générique et plus automatique pour traiter le problème des variables corrélées est de les échantillonner simultanément, en les groupant au sein d'un même bloc de l'échantillonneur de Gibbs. L'algorithme de Metropolis–Hastings à marche aléatoire avec une loi candidate normale multivariée peut alors tenir compte de la corrélation des variables à travers sa matrice de variance–covariance. Cette méthode permet de réaliser de plus grands sauts sur le support de  $\pi$  et d'accroître ainsi la vitesse d'exploration de la chaîne (figure A.3.) Malheureusement cette solution fait resurgir le problème de l'échantillonnage de lois multivariées de grandes dimensions lorsque le nombre de variables corrélées devient trop important.

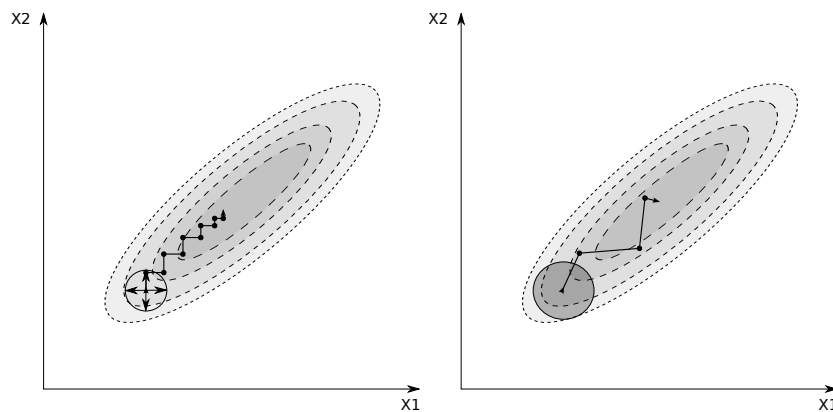


FIGURE A.3 – Illustration des algorithmes de Gibbs et de Metropolis–Hastings pour l'échantillonnage d'une densité de probabilité bivariable  $\pi(X_1, X_2)$  présentant une forte corrélation entre ses variables. Les ellipses centrales représentent les isocontours de  $\pi$ , plus l'intensité est sombre plus la densité de probabilité est élevée. L'image de gauche donne un exemple d'exécution de l'algorithme de Gibbs utilisé conjointement avec l'algorithme de Metropolis–Hastings à marche aléatoire sur chaque variable. On constate que du fait de la corrélation entre les variables, chaque étape de Metropolis–Hastings ne peut produire qu'un saut de faible amplitude impliquant une exploration lente de  $\pi$ . L'image de droite est un exemple d'exécution où les deux variables sont échantillonnées conjointement, la possibilité de se déplacer dans tout le plan permet une exploration plus efficace de l'espace, même si le noyau de marche aléatoire n'est pas précisément adapté à  $\pi$ .

### A.4.2 Parcours des sites de l'échantillonneur de Gibbs

L'ordre et la fréquence d'échantillonnage des sites n'est pas nécessairement fixe au sein de l'échantillonneur de Gibbs [5]. On peut en effet actualiser les sites dans un ordre aléatoire



et actualiser certains sites plus fréquemment que d'autres. Dans l'absolu, on peut même n'actualiser qu'un seul site choisi aléatoirement par itération, la seule condition pour assurer la convergence de l'algorithme étant que, lorsque le nombre d'itération tend vers l'infini, le nombre d'actualisations de chaque site tende également vers l'infini. Le fait de balayer les sites avec un ordre aléatoire permet généralement d'accélérer la vitesse d'exploration de la loi cible. Si malgré les efforts fournis, certaines variables continuent d'avoir une évolution lente, on peut finalement décider de les échantillonner plus fréquemment que les autres.

### A.4.3 Variations autour de l'algorithme de Metropolis–Hastings

L'utilisation de l'algorithme de Metropolis–Hastings est toujours délicate car elle nécessite le choix d'une loi candidate qui, si elle est mal adaptée, peut réduire les performances de manière importante. Deux approches sont possibles pour rendre l'algorithme de Metropolis–Hastings plus efficace : adapter l'algorithme directement en fonction des propriétés de la densité à échantillonner, ou alors utiliser l'information produite au cours des itérations précédentes de l'algorithme (on parle alors de méthodes adaptatives). La première approche est clairement plus efficace mais elle suppose que les propriétés nécessaires à l'algorithme sont effectivement accessibles en un temps raisonnable.

#### A.4.3.1 Approches utilisant des connaissances de la loi cible

La méthode d'échantillonnage par tranche [10] (*slice sampling*) propose d'introduire des variables auxiliaires dont la distribution ne modifie pas la loi cible. Étant donné l'échantillon  $\phi^t$  à l'itération  $t$ , elle consiste à simuler une variable  $u \sim \mathcal{U}_{[0; \pi(\phi^t)]}$ , puis de simuler  $\phi_{t+1}$  selon  $\mathcal{U}_A$  avec  $A = \{x | \pi(x) \geq u\}$ . Tout le problème consiste à déterminer  $A$ . Si  $\pi$  est évaluable en temps raisonnable, plusieurs méthodes d'approximation peuvent être imaginées.

Il existe également des algorithmes dits hamiltoniens qui permettent de se déplacer très rapidement sur les lignes d'isoénergie de la loi cible. Ces méthodes nécessitent que la matrice jacobienne et la matrice hessienne (pour certaines méthodes) de la loi cible soient calculables.

#### A.4.3.2 Méthodes adaptatives

Les algorithmes de Metropolis–Hastings adaptatifs utilisent l'information contenue dans les échantillons déjà générés pour fournir une rétroaction sur la loi candidate. La chaîne n'est alors plus homogène et il est important de s'assurer que l'algorithme ne modifie pas sa stationnarité.

Les méthodes adaptatives les plus simples permettent d'ajuster la variance de la marche aléatoire dans un cas scalaire. L'idée retenue est de considérer qu'un pas de marche aléatoire trop petit (respectivement trop grand) va entraîner un taux d'acceptation élevé (respectivement faible). La variance est alors ajustée en fonction du taux d'acceptation observé pour maintenir celui-ci aussi proche que possible d'un taux optimal. Notons qu'une fois encore l'homogénéité de la chaîne est perdue et un certain nombre de précautions sont nécessaires pour garantir la stationnarité et la convergence de la chaîne (voir par exemple [1]).

Dans le cas multivarié, on peut se référer à une classe d'algorithmes à direction adaptative [6] qui utilisent un ensemble de points générés pendant les itérations précédentes pour obtenir une direction d'échantillonnage. Un exemple concret d'une telle approche est donné par l'algorithme du *snooker*.

### A.4.3.3 Algorithme du snooker

L'algorithme du snooker [6], en référence au jeu de billard, est un cas particulier du contexte général des algorithmes de Metropolis–Hastings à direction adaptative.

A chaque itération  $t$  sont stockés  $n$  points (dans un espace de dimension  $d$ )  $\{\phi^{t,1}, \dots, \phi^{t,n}\}$  correspondant à des échantillons simulés précédemment. A chaque itération un point  $\phi^{t,c}$  de l'ensemble est choisi aléatoirement et est mis à jour. Pour cela, on sélectionne un deuxième point  $\phi^{t,l}$  qui permet de calculer un vecteur de direction  $e_t = \phi^{t,l} - \phi^{t,c}$ . On effectue alors l'échantillonnage suivant la ligne passant par  $\phi^{t,l}$  et de direction  $e_t$ . La valeur générée correspond à un scalaire  $r$  distribué selon  $f(r) \sim \pi(\phi^{t,c} + re_t)|1 - r|^{d-1}$ . Le terme correctif  $|1 - r|^{d-1}$  vient du Jacobien et apparait car la direction choisie pour le renouvellement de  $\phi^{t,c}$  dépend elle même de  $\phi^{t,c}$ . Les différentes étapes sont résumées dans l'algorithme A.3.

---

**Algorithme A.3:** Algorithme du snooker.

---

**Entrée** : échantillons initiaux  $\{\phi^{0,1}, \dots, \phi^{0,n}\}$   
**Sortie** : chaîne de Markov de distribution  $\pi$

- 1  $i = 0$ ;
- 2 **répéter**
- 3    Choisir un point  $\phi^{i,c} \in \{\phi^{i,1}, \dots, \phi^{i,n}\}$ ;
- 4    Choisir un point  $\phi^{i,l} \in \{\phi^{i,1}, \dots, \phi^{i,n}\}$ , tel que  $\phi^{i,l} \neq \phi^{i,c}$ ;
- 5    Calculer le vecteur  $e_i = \phi^{i,l} - \phi^{i,c}$ ;
- 6    Échantillonner  $r_i$  selon la loi  $f(r)$ ;
- 7    Poser  $\phi^{i+1,c} \leftarrow \phi^{i,c} + r_i e_i$ ;
- 8    Poser  $\phi^{i+1,j} \leftarrow \phi^{i,j}, \forall j \neq c$ ;
- 9     $i = i + 1$ ;
- 10 **jusqu'à** ce que le critère de convergence soit satisfait;

---

L'échantillonnage de  $r$  peut être réalisé au moyen d'un algorithme de Metropolis–Hastings.

### A.4.4 Modification de la loi cible : recuit simulé

La méthode du recuit simulé se place dans la catégorie des méthodes d'optimisation car son but n'est pas d'échantillonner la loi cible mais d'en trouver le maximum. Lorsque la loi à simuler est multimodale, le temps nécessaire au passage d'un mode à l'autre peut être prohibitif. Une solution consiste alors à transformer la loi de manière à rendre son exploration plus facile. La méthode du recuit simulé consiste à introduire un paramètre de température  $T$  et de simuler la loi  $\pi^{\frac{1}{T}}$ . Cette transformation a pour effet de faire tendre la loi vers une loi uniforme lorsque la température tend vers l'infini. La stratégie consiste alors à partir d'une température initialement élevée et de l'abaisser au fil des itérations. Le choix de la bonne température initiale  $T_0$  et d'un bon schéma de décroissance de la température est un problème complexe.

## Bibliographie

- [1] Ch. ANDRIEU et J. THOMS : A Tutorial on Adaptive MCMC. *Statistics and Computing*, 18:343–373, 2008.

- 
- [2] S.P. BROOKS et G.O. ROBERTS : Assessing Convergence of Markov Chain Monte Carlo Algorithms. *Statistics and Computing*, 8:319–335, 1997.
  - [3] S. CHIB et E. GREENBERG : Understanding the Metropolis-Hastings Algorithm. *The American Statistician*, 49(4):327–335, 1995.
  - [4] A. GELMAN, G.O. ROBERTS et W.R. GILKS : Efficient Metropolis Jumping Rules. *Dans Bayesian Statistics*, volume 5, pages 599–607. Oxford University Press, 1996.
  - [5] W.R. GILKS, S. RICHARDSON et D.J. SPIEGELHALTER, éditeurs. *Markov Chain Monte Carlo in Practice : Interdisciplinary Statistics*. Chapman and Hall/CRC, décembre 1995.
  - [6] W.R. GILKS, G.O. ROBERTS et E.I. GEORGE : Adaptive Direction Sampling. *The Statistician, Special Issue : Conference on Practical Bayesian Statistics*, 43:179–189, 1994.
  - [7] W.K. HASTINGS : Monte Carlo Sampling Methods Using Markov Chains and Their Applications. *Biometrika*, 57(1):97–109, 1970.
  - [8] N. METROPOLIS, A.W. ROSENBLUTH, M.N. ROSENBLUTH, A.H. TELLER et E. TELLER : Equation of State Calculations by Fast Computing Machines. *The Journal of Chemical Physics*, 21(6):1087–1092, 1953.
  - [9] S.P. MEYN et R.L. TWEEDIE : *Markov Chains and Stochastic Stability*. Communications and Control Engineering Series. Springer-Verlag, London, 1993.
  - [10] R.M. NEAL : Slice Sampling. *Annals of Statistics*, 31:705–767, 2003.
  - [11] C. ROBERT : *Méthodes de Monte Carlo par chaînes de Markov*. Économica, 1996.

# Algorithmes d'initialisation

“

À bon départ, œuvre à moitié faite.

”

Anonyme

## Sommaire

<b>B.1 Moments du second ordre</b>	<b>191</b>
<b>B.2 Initialisation de la barre stellaire</b>	<b>193</b>
<b>B.3 Initialisation des bras spiraux</b>	<b>193</b>
<b>B.4 Initialisation des anneaux</b>	<b>194</b>
<b>B.5 Détection de la barre de poussières</b>	<b>195</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>198</b>

L'ENSEMBLE DES MÉTHODES proposées dans cette annexe fonctionne sur des images monobandes. Si l'image à traiter est multibande, on la réduit en calculant la moyenne des bandes pondérées par l'intensité du bruit.

## B.1 Moments du second ordre

Les paramètres de forme liés à l'ellipse peuvent être estimés de manière déterministe en calculant les moments du second ordre de l'image. Cette procédure est assez sensible et la présence d'asymétries dans l'image peut perturber la mesure. C'est pourquoi, il convient de masquer préalablement les sources parasites sur l'image (section 3.5.2).

Soient  $I$  une image,  $\mathcal{D}$  son domaine de définition et  $i \in \mathcal{D}$  un pixel de coordonnées en  $(x_i, y_i)$ . Le moment d'ordre 0 correspond à la somme des intensités de l'image.

$$V = \sum_{i \in \mathcal{D}} I(i) \tag{B.1}$$

On définit les moments d'ordre 1  $\bar{x}$  et  $\bar{y}$  par :

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i \in \mathcal{D}} x_i I(i)}{V} \tag{B.2}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i \in \mathcal{D}} y_i I(i)}{V} \quad (\text{B.3})$$

On définit les moments d'ordre 2  $\overline{x^2}$ ,  $\overline{y^2}$  et  $\overline{xy}$  par :

$$\overline{x^2} = \frac{\sum_{i \in \mathcal{D}} x_i^2 I(i)}{V} - \bar{x}^2 \quad (\text{B.4})$$

$$\overline{y^2} = \frac{\sum_{i \in \mathcal{D}} y_i^2 I(i)}{V} - \bar{y}^2 \quad (\text{B.5})$$

$$\overline{xy} = \frac{\sum_{i \in \mathcal{D}} x_i y_i I(i)}{V} - \bar{x} \bar{y} \quad (\text{B.6})$$

On obtient alors les relations suivantes<sup>1</sup> entre les moments d'ordre 2 et les paramètres de l'ellipse (angle de position  $\theta$ , grand axe  $A$ , petit axe  $B$ ) :

$$\tan(2\theta) = 2 \frac{\overline{xy}}{\overline{x^2} - \overline{y^2}} \quad (\text{B.7})$$

$$A^2 = \frac{\overline{x^2} + \overline{y^2}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\overline{x^2} - \overline{y^2}}{2}\right)^2 + \overline{xy}^2} \quad (\text{B.8})$$

$$B^2 = \frac{\overline{x^2} + \overline{y^2}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\overline{x^2} - \overline{y^2}}{2}\right)^2 + \overline{xy}^2} \quad (\text{B.9})$$

La figure B.1 donne un exemple du résultat obtenu sur les galaxies PGC 1805 et PGC 2182.

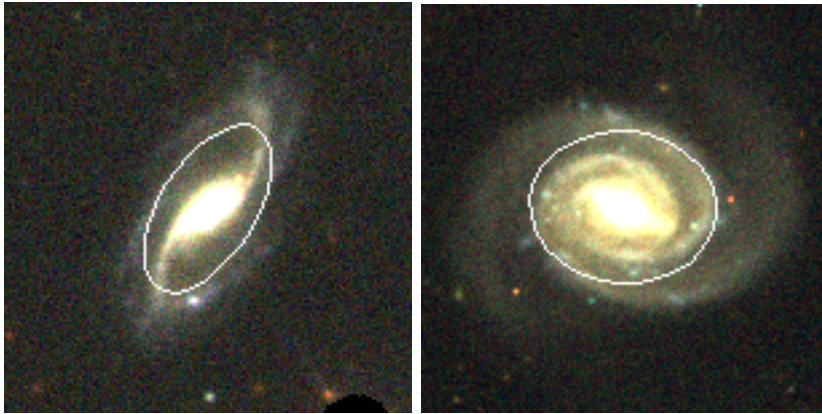


FIGURE B.1 – Estimation des paramètres de l'ellipse à partir des moments du second ordre sur les galaxies PGC 1805 et PGC 2182.

1. Voir documentation SExtractor <http://astromatic.iap.fr/software/sextractor/>

## B.2 Initialisation de la barre stellaire

La méthode utilisée pour déterminer les paramètres initiaux de la barre stellaire se base sur l'analyse de l'évolution de l'élongation et de l'angle de position des isophotes de l'image [4] : la barre stellaire doit se manifester par un pic dans l'évolution des élongations et une relative stabilité dans l'évolution des angles de position.

La méthode s'applique sur l'image déprojetée de la galaxie : de cette manière, le disque a par définition une élongation nulle mais le bulbe, pour lequel la déprojection n'a pas de signification physique, peut souffrir d'une élongation artificielle. La méthode consiste alors à rechercher une zone présentant une élongation supérieure à 1,3 (seuil empirique en dessous duquel il devient difficile de différencier l'ellipse d'un cercle) couplée à une faible variation d'angle de position (maximum 0,26 rad). Lorsqu'un tel intervalle est trouvé, on considère que son milieu correspond au rayon de coupure de la barre stellaire et l'angle de position moyen à l'angle de position de la barre stellaire. La figure B.2 montre un exemple de détection sur la galaxie PGC 2035.

Les isophotes sont modélisés par des ellipses qui sont estimées en calculant les moments du second ordre sur des seuillages successifs de l'image. Afin de compenser l'élongation artificielle du bulbe, les rayons très petits ne sont pas considérés. Notons que cette procédure peut échouer à détecter la barre stellaire si aucun intervalle correspondant aux critères n'est trouvé.

## B.3 Initialisation des bras spiraux

L'estimation déterministe des paramètres initiaux des bras spiraux est réalisée au moyen d'une analyse de Fourier de l'image des bras obtenue par l'analyse en arbre de composantes h-connexes (section 3.5.3 page 128) dans l'espace log-polaire déprojeté. La méthode se base sur l'hypothèse que les bras spiraux forment une spirale logarithmique dans le plan galactique et doivent donc apparaître comme des lignes dans l'espace log-polaire déprojeté [2, 3, 6]. Notons que cette méthode est proche de la recherche d'harmoniques dans la décomposition sur une base d'anneaux [1, 5].

L'équation d'une spirale logarithmique à  $m$ -bras en coordonnées polaires est donnée par :

$$r = R_0 e^{-\frac{m}{p}\theta + \theta_0 + \frac{2\pi k}{m}}, \quad k = 0..m - 1 \quad (\text{B.10})$$

avec  $R_0$  le rayon à l'origine,  $\theta_0$  l'angle de position et  $p$  est lié à l'angle d'ouverture  $\alpha_s$  par la relation  $\tan \alpha_s = -\frac{m}{p}$ . La transformée de Fourier  $I'$  d'une image  $I$  dans l'espace log-polaire est donnée par :

$$I'(a,b) = \int_r \int_\theta I(r,\theta) e^{-i(ar+b\theta)} d\theta dr \quad (\text{B.11})$$

L'analyse par transformée de Fourier dans l'espace log-polaire permet de retrouver le nombre de bras  $m$  (fréquence angulaire correspondant à  $b$ ), l'angle d'ouverture  $\alpha_s$  (fréquence spatiale correspondant à  $a$ ) et l'angle de position  $\theta_0$  (phase) en recherchant le maximum de magnitude du spectre (figure B.3). Dans le cas où l'inclinaison n'est pas nulle, il est nécessaire de déprojeter la spirale. La figure B.3 présente un exemple sur la galaxie PGC 2183 ; les paramètres de déprojection sont déterminés à partir des paramètres du disque estimés dans le modèle précédent de la hiérarchie de modèles.

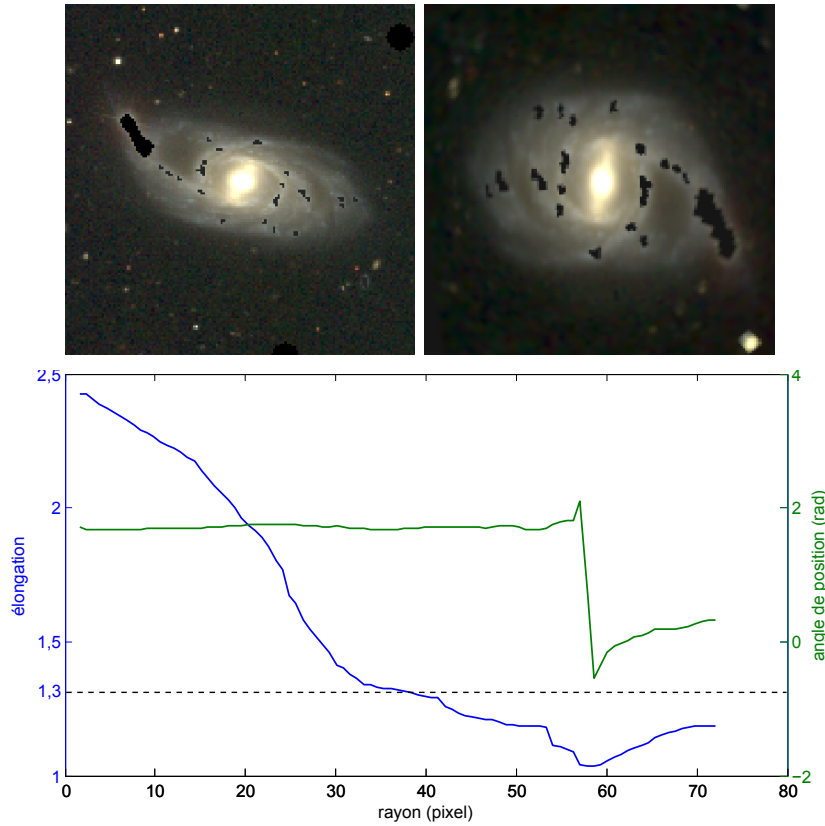


FIGURE B.2 – Première ligne : galaxie PGC 2035 (les objets parasites et les zones H II sont masqués) et galaxie PGC 2035 déprojetée. Deuxième ligne : évolution de l'élongation et de l'angle de position des isophotes. La barre stellaire se manifeste sur le graphique par une élongation élevée associé à un angle de position stable.

## B.4 Initialisation des anneaux

Les anneaux internes et externes sont détectés avec la même procédure que la section B.3. Son principe est de rechercher une bande de brillance significative dans l'espace log-polaire déprojeté. Dans cet espace, un anneau doit en effet apparaître comme une bande verticale.

Premièrement, le rapport signal-sur-bruit est amélioré en calculant la médiane le long de l'axe vertical. Puis, lorsque la valeur médiane est inférieure à trois fois l'écart-type du bruit, on la considère comme étant nulle. On obtient ainsi un signal à une dimension dans lequel les anneaux se manifestent par un intervalle sur lequel l'intensité est positive.

Les deux anneaux sont donc identifiés comme étant les deux intervalles de plus fortes intensités. On peut alors calculer leur rayon (milieu de l'intervalle) et leur largeur (largeur de l'intervalle).

Si aucun intervalle d'intensité positive n'est détecté (ou un seul dans le cas où l'on recherche deux anneaux), la procédure échoue et il faut alors recourir à une initialisation par défaut.

La figure B.4 montre un exemple de recherche d'anneaux sur la galaxie PGC 7889. La courbe obtenue par intégration le long de l'axe vertical permet de clairement détecter les

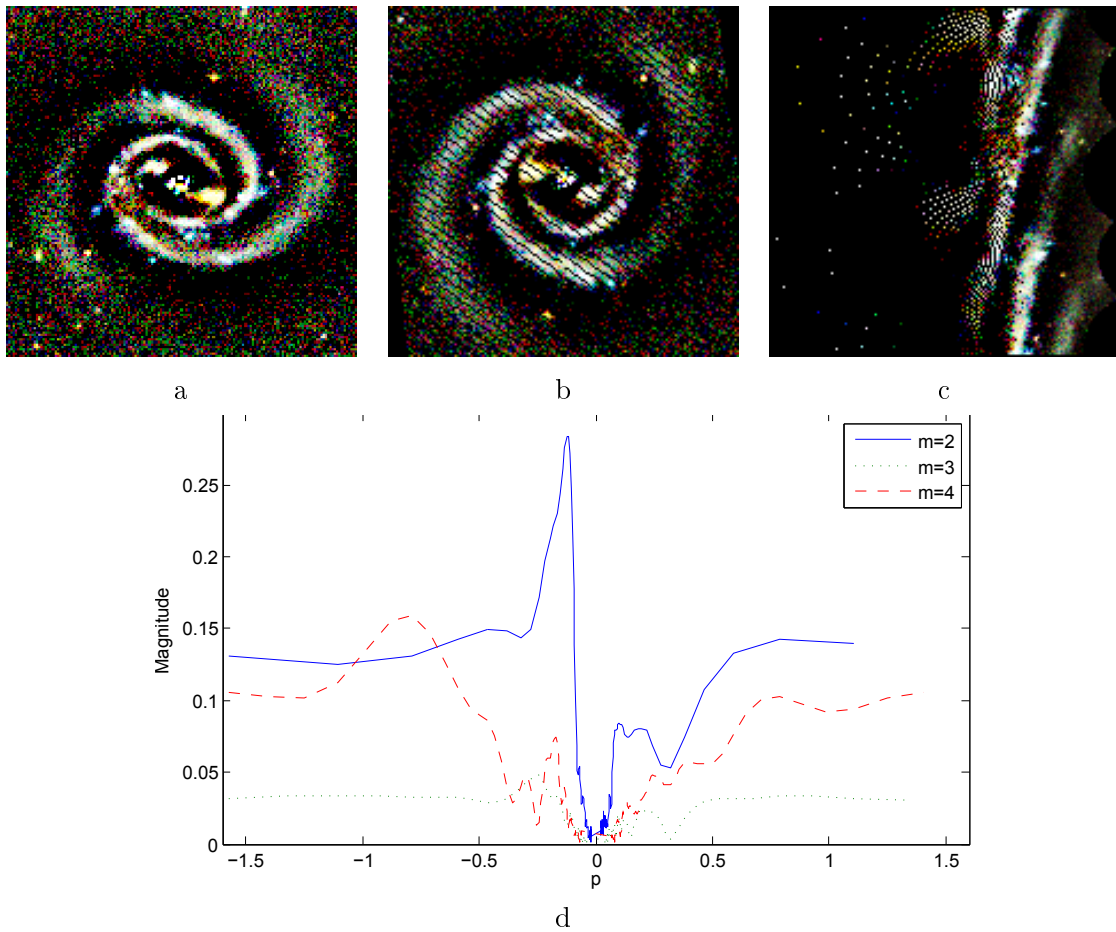


FIGURE B.3 – Analyse par transformée de Fourier de la galaxie PGC 2182. Image a : bras extraits. Image b : déprojection de l’image a. Image c : transformée de l’image b dans l’espace log-polaire. Image d : spectre de la transformée de Fourier selon des fréquence angulaires  $m = \{2,3,4\}$ . On retrouve le pic d’intensité pour une fréquence angulaire de 2 correspondant au nombre de bras, à une fréquence spatiale d’environ  $-0,2$  correspondant à l’angle d’ouverture.

anneaux internes et externes. Le premier anneau a un rayon estimé d’environ 10 pixels pour une largeur de 5 pixels ; le second anneau a un rayon estimé de 50 pixels pour une largeur de 8 pixels.

## B.5 Détection de la barre de poussières

La technique utilisée pour rechercher une barre de poussières consiste à détecter une séparation du bulbe en deux composantes. Cela suppose donc que la galaxie est vue suffisamment de profil pour que la barre de poussières soit suffisamment proche de la partie la plus brillante du bulbe et suffisamment dense pour modifier sensiblement la brillance apparente du bulbe. Notons que si ces deux conditions ne sont pas remplies, alors la barre de poussières est généralement négligeable.

Le détecteur mis en place repose sur deux principes complémentaires :



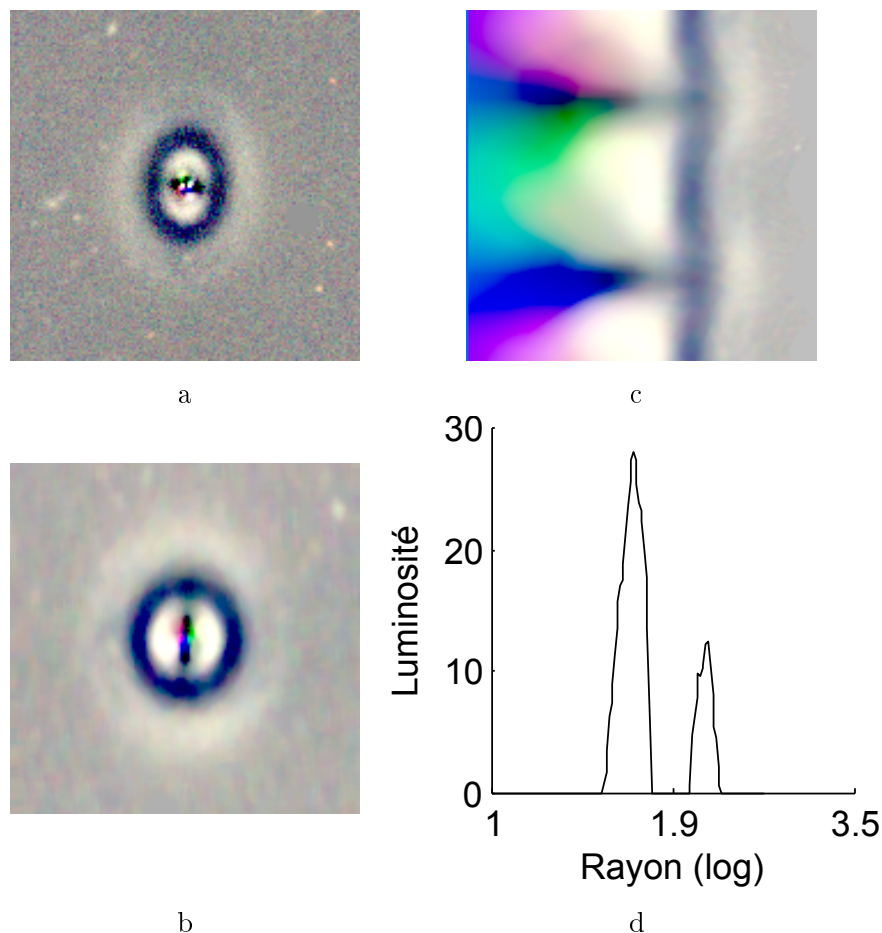


FIGURE B.4 – Recherche des anneaux internes et externes de la galaxie PGC 7889. Image a : résidu de PGC 7889 après un ajustement bulbe–disque. Image b : déprojection de l’image a. Image c : image b dans l’espace log–polaire. Image d : résultat de la procédure d’intégration le long de l’axe vertical sur l’image c.

- la recherche d’une asymétrie du bulbe par rapport au plan galactique ;
- la recherche d’une anomalie dans la décroissance de luminosité du bulbe.

**Asymétrie du bulbe** La mesure d’asymétrie du bulbe permet de détecter la barre de poussières dans une galaxie qui n’est pas vue parfaitement de profil. Son principe est de comparer le flux moyen contenu dans deux quadrants symétriques disposés de part et d’autre du disque galactique (figure B.5). Le rayon interne du quadrant est défini à 0,5 arcsec et son rayon externe est égal au rayon optique du bulbe. Lorsque la différence relative de flux entre les deux quadrants est supérieure à 10 %, on considère que l’asymétrie est anormale et qu’elle est signe de la présence d’une barre de poussières.

**Anomalie de décroissance de la luminosité** Une anomalie de décroissance de luminosité est détectée en étudiant la dérivée d’un profil selon l’axe de hauteur de la galaxie. Le profil est calculé par intégration dans une zone rectangulaire, orientée selon l’axe du plan galactique

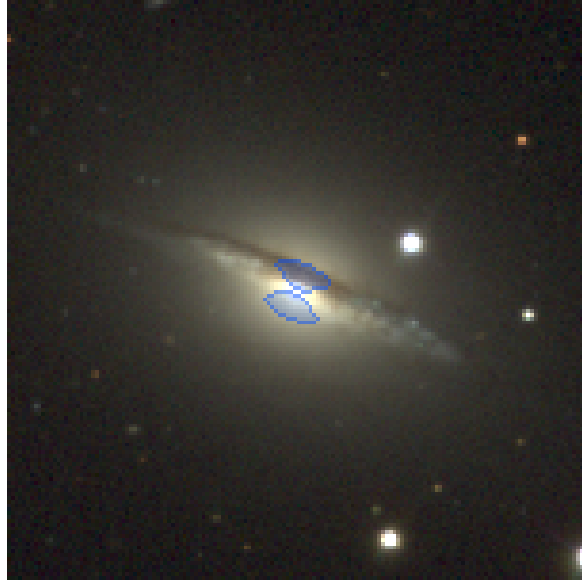


FIGURE B.5 – Mesure d’asymétrie du bulbe pour la galaxie PGC 6671. La figure représente la galaxie et les zones pour lesquelles le flux moyen est calculé.

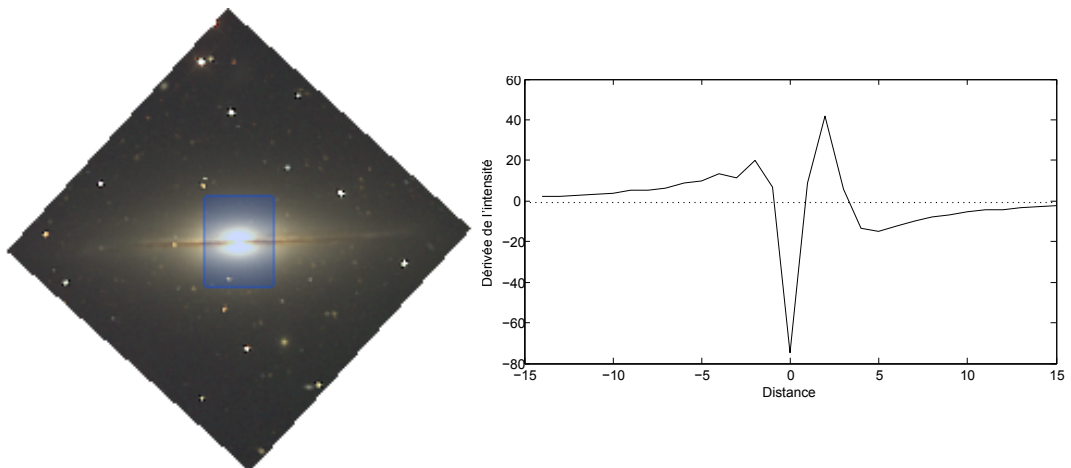


FIGURE B.6 – Recherche d’anomalies de décroissance de la luminosité selon l’axe de hauteur. À gauche : galaxie PGC 218 et la zone d’intégration en bleu. À droite : dérivée du profil obtenu par intégration. La barre de poussière crée un net décrochage dans la dérivée au niveau du centre de la galaxie.

(figure B.6). Les dimensions de la zone d'intégration sont de 40 arcsec selon le plan galactique et 60 arcsec sur l'axe de hauteur.

En l'absence de barre de poussières, la dérivée ne change qu'une seule fois de signe lorsque la luminosité commence à diminuer. Lorsqu'une barre de poussières est présente, la luminosité présente plus de variations et donc plus de changements de signe (figure B.6).

## Bibliographie

- [1] Anthony BAILLARD : *Détermination automatique des paramètres morphologiques des galaxies*. Thèse de doctorat, École Nationale Supérieure des Télécommunications, 2008.
- [2] C. GARCIA-GOMEZ et E. ATHANASSOULA : Analysis of the Distribution of HII Regions in External Galaxies. I - Position and Inclination Angles. *Astronomy and Astrophysics, Supplement*, 89:159–184, juillet 1991.
- [3] C. GARCIA GOMEZ et E. ATHANASSOULA : Analysis of the Distribution of HII Regions in External Galaxies. II - Analysis of the Spiral Structure. *Astronomy and Astrophysics, Supplement*, 100:431–464, août 1993.
- [4] I. MARINOVA et S. JOGEE : Characterizing Bars at  $z \sim 0$  in the Optical and NIR : Implications for the Evolution of Barred Disks with Redshift. *Astrophysical Journal*, 659:1176–1197, avril 2007.
- [5] S. C. ODEWAHN, S. H. COHEN, R. A. WINDHORST et N. S. PHILIP : Automated Galaxy Morphology : A Fourier Approach. *Astrophysical Journal*, 568:539–557, avril 2002.
- [6] I. PUERARI et H. A. DOTTORI : Fourier Analysis of Structure in Spiral Galaxies. *Astronomy and Astrophysics, Supplement*, 93:469–493, juin 1992.

# Transformation log–polaire

---

“

**Your eyes can deceive you. Don't trust them.**

”

**Obi-Wan Kenobi, *Star Wars Episode IV : A New Hope*.**

LES OPÉRATIONS d'extraction des bras spiraux et de récupération de la composante centrale nécessitent le passage en coordonnées polaires (section 3.5). L'utilisation d'opérateurs morphologiques en coordonnées polaires a été étudiée de manière théorique dans [1, 3]. Néanmoins, l'implémentation directe de ces travaux est difficilement réalisable en raison du cout de calcul qu'elle engendre. Nous avons donc opté pour une approche similaire à [2] consistant d'abord à réaliser une transformation de l'image depuis le plan cartésien vers des coordonnées log–polaires  $r\theta$ , puis à appliquer les opérateurs sur cette image et finalement effectuer la transformation inverse. Cette approche a l'avantage d'être aisément implémentable, mais a l'inconvénient de générer des déformations dues aux différences entre les grilles de discrétisation des deux espaces (figure C.1), même si l'utilisation du système log–polaire permet d'obtenir des déformations moindres qu'avec le système polaire classique.

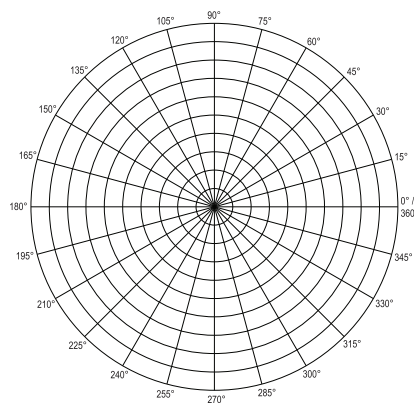


FIGURE C.1 – Exemple de grille polaire.

## C.1 Transformation continue

Dans le cas continu, la transformation est facilement exprimable. Soit  $(c_x, c_y)$  les coordonnées de l'origine du repère log-polaire. Soit  $(x, y)$  un point du plan cartésien, ses coordonnées  $(r, \theta)$  dans l'espace log-polaire sont alors données par :

$$r = \begin{cases} 0 & \text{si } x = c_x \text{ et } y = c_y \\ \log \left( \sqrt{(x - c_x)^2 + (y - c_y)^2} \right) & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{C.1})$$

$$\theta = \begin{cases} \arctan \left( \frac{y}{x} \right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{C.2})$$

On obtient directement la transformation inverse : étant donné un point  $(r, \theta)$  dans l'espace log-polaire, ses coordonnées  $(x, y)$  dans le plan cartésien sont :

$$(x, y) = (\exp r \cos \theta + c_x, \exp r \sin \theta + c_y) \quad (\text{C.3})$$

## C.2 Transformation discrète

Dans le cas d'images discrètes, il est nécessaire de prendre certaines précautions sur la discrétisation pour obtenir des résultats corrects. Concrètement, nous souhaitons définir deux transformations permettant de passer d'une grille rectangulaire correspondant à des coordonnées cartésiennes à une grille rectangulaire correspondant à des coordonnées log-polaires.

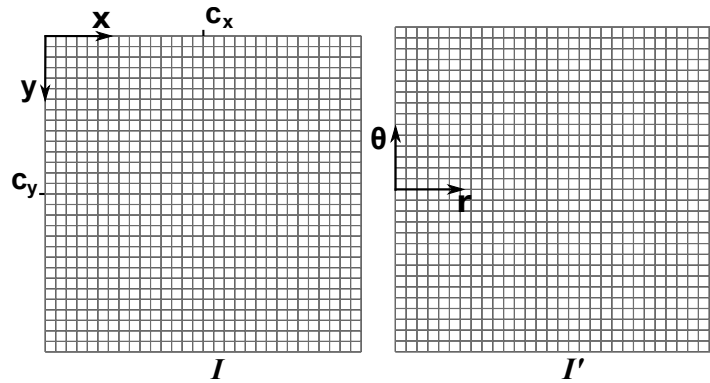


FIGURE C.2 – Les transformations permettent de passer d'une grille rectangulaire correspondant à des coordonnées cartésiennes à une grille rectangulaire correspondant à des coordonnées log-polaires.

**Transformation cartésien vers log-polaire** Soit une image  $I$  de taille  $N \times M$  dans l'espace cartésien, on souhaite définir l'image  $I'$  de taille  $K \times L$  correspondant à l'image  $I$  dans l'espace log-polaire. Pour tout point  $(r, \theta)$  de  $I'$  on peut poser :

$$I'(r, \theta) = \begin{cases} I(X, Y) & \text{si } r \neq 0 \\ I(c_x, c_y) & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{C.4})$$

avec

$$X = \exp(r \cdot r_{inc}) \cos\left(\left(y - \frac{L}{2}\right) \cdot \theta_{inc}\right) + c_x \quad (\text{C.5})$$

$$Y = \exp(x \cdot r_{inc}) \sin\left(\left(y - \frac{L}{2}\right) \cdot \theta_{inc}\right) + c_y \quad (\text{C.6})$$

On obtient directement la résolution angulaire naturelle d'un pixel :  $\theta_{inc} = \frac{2\pi}{L}$ . On peut fixer la résolution  $r_{inc}$  sur l'axe  $x$  en remarquant la limite naturelle :

$$e^{K \cdot r_{inc}} \leq d_{max} \quad (\text{C.7})$$

avec  $d_{max}$  la distance maximum au centre dans l'image  $I$ . Les coordonnées obtenues par cette formule sont généralement non entières, nous procédons donc à une interpolation bicubique (figure C.3).

**Transformation log-polaire vers cartésien** Soit une image  $I'$  de taille  $K \times L$  dans l'espace log-polaire, soit  $\theta_{inc}$  sa résolution angulaire et  $r_{inc}$  sa résolution en  $x$ . Soit  $I$  de taille  $N \times M$  l'image correspondant à  $I'$  dans l'espace cartésien. L'inversion de la transformation précédente donne pour chaque point  $(x,y)$  de  $I$  :

$$I'(x,y) = \begin{cases} I\left(\frac{\log(\sqrt{(x-c_x)^2+(y-c_y)^2})}{r_{inc}}, \frac{\Theta(x-c_x, y-c_y)}{\theta_{inc}} + \frac{L}{2}\right) & \text{si } x \neq c_x \text{ et } y \neq c_y \\ I'(0, L/2) & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{C.8})$$

avec

$$\Theta(x,y) = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x} & \text{si } x > 0 \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi & \text{si } x < 0 \text{ et } y \geq 0 \\ \arctan \frac{y}{x} - \pi & \text{si } x < 0 \text{ et } y < 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x = 0 \text{ et } y < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } x = 0 \text{ et } y > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{C.9})$$

Comme précédemment, les coordonnées obtenues par cette formule sont généralement non entières, nous procédons donc à une interpolation bicubique (figure C.3).

## Bibliographie

- [1] H. J. A. M. HEIMANS et C. RONSE : The Algebraic Basis of Mathematical Morphology. I. Dilations and Erosions. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, 50(3):245–295, 1990.
- [2] M.A. LUENGO-OROZ et J. ANGULO : Cyclic Mathematical Morphology in Polar-Logarithmic Representation. *IEEE Transactions on Image Processing*, 18(5):1090–1096, mai 2009.
- [3] J. B. T. M. ROERDINK : Group morphology. *Pattern Recognition*, 33(6):877–895, mai 2000.



FIGURE C.3 – À gauche : image de Lenna. Au milieu : transformation log-polaire dans une image de même dimension centrée sur son œil droit. À droite : transformation inverse ; on constate un léger flou qui s'accroît avec la distance au centre du repère log-polaire. Les bords de l'image souffrent également de l'interpolation avec les parties non définies de l'image du milieu.

# Arbre des composantes h-connexes floues

---

“

MARTY MCFLY : Hé, attendez un peu, Doc. Est-ce que j'ai bien entendu ? Vous dites que vous avez fabriqué une machine à voyager dans le temps... à partir d'une DeLorean ?  
EMMETT BROWN : Faut voir grand dans la vie !  
Quitte à voyager à travers le temps au volant d'une voiture, autant en choisir une qui ait de la gueule !

”

*Retour vers le futur.*

## Sommaire

---

<b>D.1</b>	<b>Hyper-connexion floue</b>	<b>204</b>
<b>D.2</b>	<b>Images en niveaux de gris</b>	<b>207</b>
<b>D.3</b>	<b>Images multibandes</b>	<b>209</b>
<b>D.4</b>	<b>Binarisation d'images de documents</b>	<b>210</b>
D.4.1	Méthode	210
D.4.2	Résultats	211
	<b>Bibliographie</b>	<b>213</b>

---

Nous appliquons l'approche théorique décrite dans la section 3.4 à une h-connexion *floue* récemment proposée dans [5]. La h-connexion utilisée est basée sur une extension de la mesure de connexion floue [10].

Cette section montre comment utiliser la h-connexion floue pour produire l'arbre des composantes h-connexes associé, les capacités de l'arbre sont démontrées sur des opérations de filtrage usuelles. La définition de la h-connexion floue est également adaptée pour traiter des images multibandes. Finalement, une application à la binarisation d'images de document est proposée.



## D.1 Hyper-connexion floue

Soit le treillis des images  $\mathcal{I}$  d'un domaine discret  $\mathcal{D}$  vers l'intervalle  $[0,1]$  (qui forme une chaîne complète). On suppose que  $\mathcal{P}(\mathcal{D})$  est équipé d'une connexion ensembliste primaire  $\mathcal{C}$ . La mesure de connexion  $c_f$  sur l'image  $f \in \mathcal{I}$  est définie pour tout  $x, y \in \mathcal{D}$  par (définition adaptée de [5]) :

$$c_f(x, y) = \max_{M \in P_{x, y}} \min_{p \in M} f(p) \quad (\text{D.1})$$

avec  $P_{x, y} = \{M \in \mathcal{C} \mid x \in M, y \in M\}$  la famille de tous les ensembles connexes (appartenant à  $\mathcal{C}$ ) et contenant  $x$  et  $y$ .  $P_{x, y}$  est une généralisation de la notion de chemin dans la connexion par graphe. Si  $P_{x, y}$  est vide, on pose  $c_f(x, y) = 0$  signifiant que  $x$  et  $y$  ne sont pas connexes. Le calcul de  $c_f(x, y)$  consiste donc à chercher le chemin de  $x$  à  $y$  nécessitant de descendre le moins bas possible et à prendre cette hauteur minimale atteinte.

La h-connexion floue  $\mathcal{C}_{f, \tau}^+$  de niveau  $\tau \in [0,1]$  est définie par (définition adaptée de [5]) :

$$\mathcal{C}_{f, \tau}^+ = \{f \in \mathcal{I} \mid \forall x, y \in \mathcal{D}, 1 - \min(f(x), f(y)) + c_f(x, y) \geq \tau\} \quad (\text{D.2})$$

Les points discriminants, pour déterminer si une fonction est ou non h-connexe, sont ses maxima locaux ( $M \in \mathcal{D}$  est un maximum local de  $f$  si il existe un niveau  $t \in [0,1]$  tel que  $M \subseteq \bar{f}^t$ ,  $M \in \mathcal{C}$  et  $\forall p \in M, f(p) = t$ ). L'ensemble  $\mathcal{C}_{f, \tau}^+$  est donc composé des fonctions pour lesquelles le passage d'un maximum local au maximum global ne nécessite pas de descendre de plus de  $1 - \tau$ . Cette propriété est illustrée dans la figure D.1. Au vu des arguments donnés dans la section 3.4.2, le critère de chevauchement n'est pas précisé.

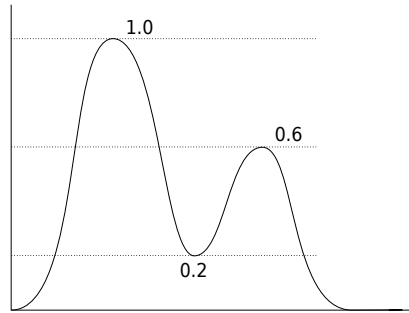


FIGURE D.1 – Cette fonction possède deux maxima locaux aux niveaux 1,0 et 0,6. La mesure de connexion  $c_f$  entre les deux maxima est égale à 0,2. Le passage du maximum local de hauteur 0,6 au maximum global de hauteur 1,0 nécessite donc de descendre de  $0,6 - 0,2 = 0,4$  : donc cette fonction appartient à  $\mathcal{C}_{f, \tau}^+$  pour tout  $\tau \leq 1,0 - 0,4 = 0,6$ .

L'ensemble  $\mathcal{C}_{f, \tau}^+$  est une h-connexion (proposition 9 de [5]), il contient les impulsions et la fonction nulle ; de plus cette h-connexion est accessible au sens de la proposition 4 (chaque composante h-connexe floue peut être obtenue par une ouverture marquée par son maximum global (P-3) [5]). La proposition 17 de [5] établit que les composantes h-connexes floues d'une image sont isomorphes à des sous-arbres de l'arbre des composantes connexes [4, 11] et les auteurs proposent un algorithme permettant d'extraire chaque composante h-connexe floue de l'arbre des composantes connexes : la h-connexion  $\mathcal{C}_{f, \tau}^+$  remplit les conditions de la proposition 10. Néanmoins l'approche proposée par [5] ne permet que d'extraire les composantes

h-connexes floues d'une image une à une et n'offre pas une vue globale hiérarchisée de ces composantes. La méthode que nous avons proposée permet, quant à elle, de définir l'arbre des composantes h-connexes floues qui représente l'ensemble des composantes h-connexes d'une image. Les algorithmes D.1 et D.2 permettent de transformer simplement et rapidement un

---

**Algorithme D.1:** Procédure transformant le Max-Tree en arbre des composantes h-connexes floues de  $\mathcal{C}_{f,\tau}^+$ .

---

**Entrée :** L'image  $im$ , le Max-Tree, et le paramètre  $\tau$   
**Sortie :** L'arbre des composantes h-connexes de  $im$  par rapport à  $\mathcal{C}_{f,\tau}^+$

```

1  pour tous les nœuds  $n$  de la racine aux feuilles faire
   |   /* Simplification de l'arbre                                     */
2  |   tant que  $n$  a exactement un fils faire
3  |   |   nœud  $c = n.enfant(1)$ ;
4  |   |    $n.niveau = c.niveau$ ;
5  |   |   supprimer le nœud  $c$ ;
6  |   si ( $n$  n'est pas la racine ET  $n.pere.niveau \geq n.niveauMax$ ) alors
   |   |   /* Le maximum local est trop petit par rapport à  $\tau$           */
7  |   |   supprimer la branche de  $n$ ;
8  |   sinon
9  |   |    $n.niveau = \min(n.niveau + 1 - \tau, n.niveauMax)$ ;
   |   /* Mise à jour des nœuds                                       */
10 pour tous les nœuds  $n$  de la racine aux feuilles faire
11 |   tant que  $n$  a exactement un fils faire
12 |   |   nœud  $c = n.enfant(1)$ ;
13 |   |    $n.niveau = c.niveau$ ;
14 |   |   supprimer le nœud  $c$ ;
15 |   corrigerListeDePoints( $im, n$ );

```

---

Max-Tree en arbre des composantes h-connexes floues. Le pseudo-code suppose que chaque nœud est muni de deux attributs, son niveau et son niveauMax (plus haut niveau atteint dans sa branche), et d'une fonction  $enfant(n)$  qui retourne son  $n^e$  enfant. La procédure *supprimer* supprime le nœud indiqué et transfère tous ses fils à son père, alors que la procédure *supprimer la branche* supprime le nœud donné ainsi que tous ses enfants jusqu'aux feuilles.

Le premier algorithme procède en deux étapes. La première boucle réalise trois actions : elle supprime les nœuds inutiles qui ne sont ni des maxima locaux ni des zones contenant un point col (*saddle point*), elle supprime les maxima locaux absorbés par le paramètre  $\tau$  et finalement elle met à jour le niveau des nœuds restants. La deuxième boucle supprime les nœuds inutiles (selon le même critère que la première boucle) qui ont pu apparaître lors de suppressions de la première boucle et corrige la liste de points associés à chaque nœud. A la fin de l'algorithme les attributs des nœuds peuvent être calculés en accord avec  $\mathcal{C}_{f,\tau}^+$ .

Le second algorithme corrige la liste de points associée à chaque nœud en fonction de son nouveau niveau. Une structure de pile (avec les opérations habituelles : empiler et dépiler) permet d'explorer la branche jusqu'au niveau nécessaire.

---

**Algorithme D.2:** Procédure `corrigerListeDePoints` : met à jour la liste de points associée à un nœud en accord avec son nouveau niveau.

---

**Entrée :** L'image  $im$ , le nœud  $n$

```

1 Pile  $s$ ;
2 pour tous les fils  $c$  de  $n$  faire
3    $s.empiler(c)$ ;
4 tant que  $s$  n'est pas vide faire
5   nœud  $c = s.depiler()$ ;
6   pour tous les points  $p$  du nœud  $c$  faire
7     si  $im(p) \geq n.niveau$  alors
8        $\lfloor$  donner le point  $p$  au nœud  $n$ ;
9   si  $n.niveau \leq c.niveau$  alors
10    pour tous les enfants  $cc$  du nœud  $c$  faire
11       $\lfloor$   $s.empiler(cc)$ ;

```

---

La construction du Max-Tree d'une image d'un million de pixels en précision flottante prend 14 secondes avec l'algorithme de Najman et Couprie [4] avec 481 384 nœuds dans le résultat. La transformation du Max-Tree en arbre des composantes h-connexes floues prend 5 secondes avec 3 113 nœuds dans le résultat (code Java exécuté sur un processeur Intel cadencé à 2,66 GHz).

De par la manière de créer l'arbre, on remarque que tout filtrage réalisé sur la base d'un critère croissant [12] suivi d'une reconstruction produit un opérateur morphologique idempotent, croissant et anti-extensif : c'est-à-dire une ouverture.

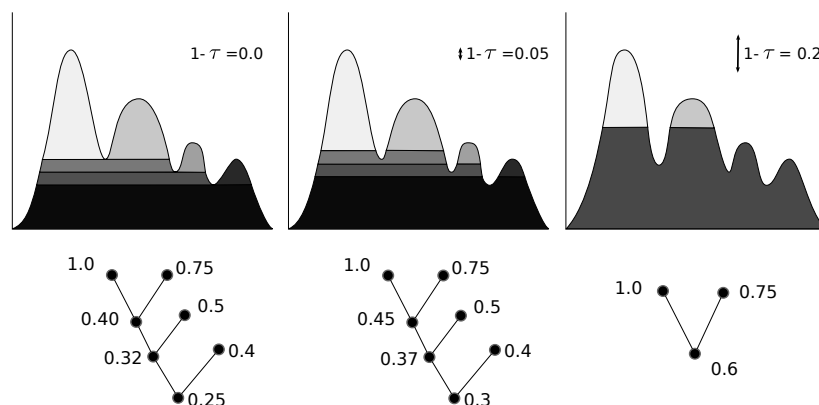


FIGURE D.2 – L'arbre des composantes h-connexes floues en fonction de  $\tau$ . Pour chaque valeur de  $\tau$ , la première ligne montre une représentation du signal et de ses z-zones. La deuxième ligne montre l'arbre des composantes h-connexes avec le niveau de chaque nœud. Le cas de gauche est équivalent au Max-Tree où tous les nœuds ayant un unique fils ont été supprimés.

## D.2 Images en niveaux de gris

Les premiers tests effectués concernent la complexité de l'arbre obtenu. La figure D.2 présente l'évolution de l'arbre de composantes h-connexes en fonction de  $\tau$ . Pour  $\tau = 1$ , l'arbre correspond à l'arbre des composantes h-connexes de la h-connexion des fonctions monomodales ou au Max-Tree où tous les nœuds ayant un unique fils ont été supprimés. On peut remarquer que dans une image réelle, cette procédure ne modifie généralement que très légèrement l'arbre car le bruit génère un nombre important de nœuds parasites. Lorsque  $\tau$  diminue, tel qu'illustré dans la deuxième image, les niveaux associés aux nœuds augmentent de la même valeur. Dans la troisième image,  $\tau$  devient suffisamment grand pour absorber deux des maxima locaux.

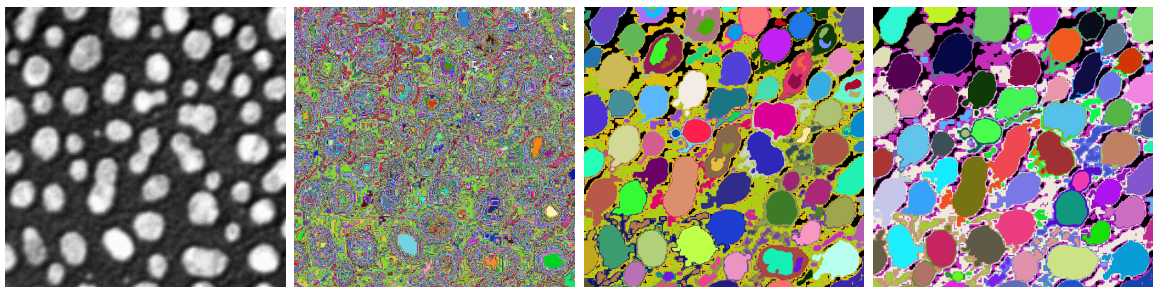


FIGURE D.3 – De gauche à droite : image originale et carte de labels obtenus avec  $\tau = 1.0$ , 0.9, et 0.8.

La figure D.3 illustre l'effet de  $\tau$  sur une image simple. La connexion primaire  $\mathcal{C}$  utilisée dans cet exemple correspond au 4-voisinage. Les autres images sont générées en affectant une couleur aléatoire à chaque nœud de l'arbre, la valeur en chaque pixel est la couleur du nœud auquel il appartient. Pour  $\tau = 1$ , il y a 4019 nœuds dans l'arbre et 3290 composantes h-connexes dans l'image. Lorsque  $\tau$  vaut 0,9 (respectivement 0,8), le nombre de nœuds descend à 127 (respectivement 97) et le nombre de composantes h-connexes à 85 (respectivement 66). Pour  $\tau = 0,8$ , chaque forme de l'image est identifiée par une unique composante h-connexe (une feuille dans l'arbre).

Le nombre de nœuds et de composantes h-connexes dans la décomposition en fonction de  $\tau$  est comparé au nombre de nœuds et de feuilles dans le Max-Tree en figure D.4. Le nombre de nœuds décroît très rapidement lorsque  $\tau$  diminue, puis un large palier associé à la valeur optimale de  $\tau$  précède la chute à la valeur 1 lorsque  $\tau$  vaut 0. Cette large période de stabilité suggère que le paramètre  $\tau$  est robuste sur un large intervalle de valeurs et peut être défini assez grossièrement.

La figure D.5 présente une comparaison avec d'autres filtres connexes sur l'image traditionnelle du cameraman. Le test inclut trois filtres d'aire : le premier basé sur l'arbre de composantes h-connexes floues, le deuxième avec les k-zones [6, 8], le troisième avec le Max-Tree et finalement un filtre d'ouverture dynamique [3, 12]. Les résultats montrent que notre approche et les k-zones préservent mieux les textures : seules les zones clairement séparées sont supprimées par ces filtres, les zones faiblement connexes comme les bâtiments du second plan sont considérées comme des objets connexes, tout comme l'herbe au premier plan. Les contours du cameraman sont également parfaitement préservés. Par contre, l'espace entre les pieds gauches du trépied est incorrectement assimilé à une zone déconnectée du fond et est

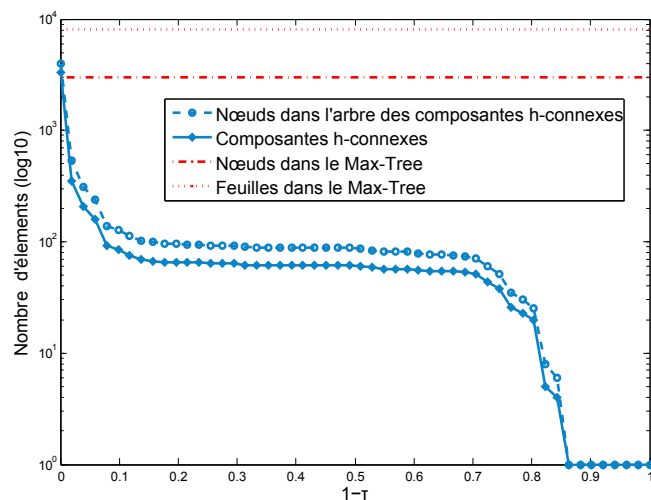


FIGURE D.4 – Nombres de nœuds et de composantes h-connexes floues en fonction de  $\tau$  comparés au nombre de nœuds et de feuilles dans le Max-Tree pour l'image D.3. L'axe des ordonnées est en échelle logarithmique.



FIGURE D.5 – Filtres connexes sur l'image du caméraman. La première ligne montre le résultat du filtrage et la deuxième ligne la différence avec l'image originale (avec contraste amélioré). De gauche à droite : filtre d'aire (1000 pixels) basé sur l'arbre des composantes h-connexes floues  $\mathcal{C}_{f,0,8}^+$ , filtre d'aire (1000 pixels) basé sur la technique de reconstruction par les k-zones [6, 8] ( $k= 0,2$ ), filtre d'aire (1000 pixels) avec le Max-Tree [11] et ouverture dynamique [3]. Les résultats montrent que notre approche et les k-zones préservent mieux les textures. La méthode proposée se concentre seulement sur les zones clairement isolées avec un contraste suffisant. Les détails internes des objets, des textures et des zones faiblement connexes sont préservés.

supprimé : cet effet provient du contraste important entre le fond et le trépied qui ne peut pas être absorbé par  $\tau$  ni par les k-zones. Cette difficulté pourrait être surmontée en remplaçant la connexion primaire triviale  $\mathcal{C}$  par une connexion de seconde génération [7].

On peut noter la forte proximité entre les résultats obtenus avec notre méthode et ceux obtenus par la méthode des k-zones également basée sur une h-connexion. Bien que les h-connexions utilisées soient en effet définies de manières complètement différentes, il semble que l'algorithmique qui en découle soit très similaire laissant présager des liens encore cachés entre les deux définitions.

### D.3 Images multibandes

Cette section décrit l'adaptation de la h-connexion floue aux images multibandes. On suppose maintenant que le domaine de valeurs des images est l'intervalle  $[0,1]^B$  avec  $B \geq 1$  le nombre de bandes. Le paramètre  $\tau$  est alors un vecteur de  $[0,1]^B$  et l'espace doit être muni d'un ordre total vectoriel. En théorie, n'importe quel ordre vectoriel total peut être utilisé [1] mais l'algorithme D.1 suppose que l'ordre utilisé soit compatible avec l'addition (invariant par translation) :  $\forall x,y,z \in [0,1]^B, x \leq y \Leftrightarrow x + z \leq y + z$ .



FIGURE D.6 – Suppression des petites structures d'une galaxie avec un filtre d'aire. Gauche : observation de la galaxie PGC 35538 en cinq bandes de l'ultraviolet proche aux infrarouges proches (composition couleur basée sur trois bandes). La première ligne montre le résultat du filtre d'aire en utilisant de gauche à droite : l'arbre de composantes h-connexes (30 pixels), le Max-Tree (30 pixels), le Max-Tree (10 pixels). La deuxième ligne montre la différence entre la première ligne et l'observation. Toutes les images sont affichées avec un contraste modifié. Les résultats montrent que l'approche proposée convient au traitement d'images multibandes et permet une meilleure préservation des caractéristiques morphologiques de l'objet (forme des bras, pic central).

La figure D.6 montre un exemple de filtre connexe sur une image à cinq bandes spectrales extraite du SDSS. L'exemple montre la capacité de l'arbre de composantes h-connexes floues

à traiter de petites zones tout en préservant le reste de l'image.

Les valeurs de l'image sont d'abord projetées dans l'intervalle  $[0,1]^5$  en utilisant une fonction sigmoïde. Cette transformation a l'avantage de réduire l'importance du bruit de fond et des structures très brillantes alors que les structures de moyenne brillance sont accentuées (mais elle a tendance à produire des erreurs numériques liées aux erreurs d'approximation). Le paramètre  $\tau$  peut être déterminé automatiquement en fonction de l'écart-type du bruit dans l'image. L'ordre vectoriel choisi est l'ordre lexicographique qui est compatible avec l'addition. Les bandes sont ordonnées par valeur décroissante de rapport signal-sur-bruit. En fixant  $\tau$  égal à trois fois l'écart-type du bruit, le nombre de nœuds (respectivement de feuilles) dans l'arbre des composantes h-connexes par rapport au Max-Tree est réduit de 65 085 à 496 (respectivement de 6 430 à 249).

Le test porte sur un filtre d'aire vectoriel (30 pixels) en utilisant l'arbre des composantes h-connexes floues et l'arbre des composantes connexes (section 3.4.3). Le test basé sur l'arbre des composantes connexes est réalisé deux fois : en utilisant le même seuil que celui considéré pour la h-connexion, puis en utilisant une plus petite limite (10 pixels) car les nœuds ont tendance à être plus petits dans l'arbre de composantes connexes.

L'expérience montre que l'approche proposée est très précise pour extraire les petites structures d'un objet plus grand avec un contraste suffisant. Le fond de l'image n'est pratiquement pas affecté, et surtout la morphologie de la galaxie, critère principal des schémas de classification galactique, n'est pas altérée (le pic central est préservé et les détails morphologiques des bras ne sont pas détériorés), contrairement à l'approche basée sur le Max-Tree.

## D.4 Binarisation d'images de documents

Afin d'évaluer quantitativement les capacités de l'arbre des composantes h-connexes, nous avons choisi de développer une application pour la binarisation d'images de documents. La binarisation est une étape importante de la numérisation des documents anciens qui nécessite des méthodes robustes, capables de traiter des documents calligraphiés ou imprimés avec des différences de contraste et d'échelle importantes et des dégradations de natures variées (bavures, taches d'encre, traces diverses, ...).

### D.4.1 Méthode

Nous proposons ici une nouvelle méthode de binarisation basée sur une étape de suppression du fond réalisée avec l'arbre de composantes h-connexes floues. La méthode complète procède en trois étapes :

1. les valeurs des pixels sont transformées linéairement dans l'intervalle  $[0,1]$  et le fond est extrait avec l'arbre des composantes h-connexes ;
2. un seuillage adaptatif est réalisé ;
3. un post-traitement supprime les artéfacts restants.

Le fond est identifié par analyse de l'évolution de l'aire des nœuds de l'arbre par rapport à leur niveau. L'idée générale de la méthode est que, dans les éléments de premier plan, la courbe aire–niveau respecte deux critères : un critère global sur la pente de la courbe et un critère local sur sa dérivée. Notons que le fait de baser nos considérations sur la pente et la dérivée permet d'obtenir une indépendance par rapport à l'échelle de taille et de brillance.

Formellement, étant donné le nœud  $L$  de l'arbre, nous recherchons le plus grand ensemble de nœuds  $\{N_0, \dots, N_m\}$  de niveaux respectifs  $T_i$  et  $A_i$ , tel que  $L = N_0$ , et que  $\forall i = 1, \dots, m$ ,  $N_i$  est le père de  $N_{i-1}$  et :

$$\forall i = 1, \dots, m : \left( A_i < c_3 \right) \vee \left( \frac{A_i - A_0}{T_i - T_0} < c_1 \right) \quad (\text{D.3})$$

$$\forall i = 1, \dots, m : \left( A_i < c_3 \right) \vee \left( \frac{A_i - A_{i-1}}{T_i - T_{i-1}} < c_2 \right) \quad (\text{D.4})$$

où  $c_1$ ,  $c_2$  et  $c_3$  sont trois paramètres permettant respectivement de contraindre la pente globale, contraindre la dérivée et négliger les nœuds trop petits pour lesquels le bruit sur la courbe peut être important. Finalement,  $N_m$  est considéré comme le premier nœud au dessus du fond sur la branche de  $L$ . La dernière contrainte que nous posons permet de négliger les éléments avec un très faible contraste : si la différence entre le niveau  $L$  et le niveau de  $N_m$  est plus petit que  $c_4$ , alors la totalité de la branche est considérée comme appartenant au fond. Dans le cas contraire, le fond local est obtenu par reconstruction de l'arbre dans lequel la branche de  $N_m$  a été supprimée. Finalement, le fond global est défini comme l'infimum des fonds locaux.

Les seuils  $c_1$  et  $c_2$  peuvent supporter de larges variations d'échelle en supposant que le contraste soit suffisant.  $c_3$  et  $c_4$  sont des valeurs absolues qui caractérisent un contraste minimum et une taille minimale en dessous desquels on considère qu'une branche n'est pas significative. Les valeurs des différents seuils ont été déterminées empiriquement par analyse de courbes aire-niveau d'éléments appartenant au fond et à l'avant-plan. Par la suite, nous utilisons les valeurs :  $c_1 = -8 \times 10^4$ ,  $c_2 = -2 \times 10^6$ ,  $c_3 = 2 \times 10^3$ ,  $c_4 = 0,1$  et le paramètre  $\tau$  de la h-connexion floue égal à  $10/255$ .

### D.4.2 Résultats

La figure D.7 montre trois exemples de filtrage du fond réalisés sur des images de documents manuscrits et imprimés extraites de la base de test DIBCO 2009 [2]. La première image de document manuscrit est sévèrement détériorée par des taches de café. La deuxième image de document manuscrit est affectée par de larges variations dans le niveau de fond et dans le contraste du texte. Finalement, la dernière image représente un document imprimé avec de larges variations dans l'échelle de taille du texte. On peut observer que, dans les trois cas, le fond est bien identifié et supprimé.

L'étape de binarisation repose sur un seuillage adaptatif inspiré de la méthode 26 du challenge DIBCO 2009 [2]. Dans un premier temps, le contraste est amélioré par une coupe d'histogramme (2 % des pixels les plus brillants sont saturés). Puis, les frontières de l'image sont détectées avec un simple opérateur de Sobel couplé à un seuillage de Otsu. La valeur de seuillage local est alors estimée selon les valeurs des pixels des frontières détectées dans une fenêtre de  $32 \times 32$  pixels : si la fenêtre contient moins de 10 pixels de contour, le seuil est égal à la moyenne des pixels, sinon on utilise le premier quartile. Finalement, le résultat est amélioré par suppression des petits artéfacts et bouchage des trous avec une fermeture binaire par reconstruction suivie d'une ouverture binaire par reconstruction avec un élément structurant circulaire de 5 pixels de diamètre. La figure D.8 montre les résultats du processus de binarisation sur deux images de la base d'évaluation DIBCO 2009 [2].



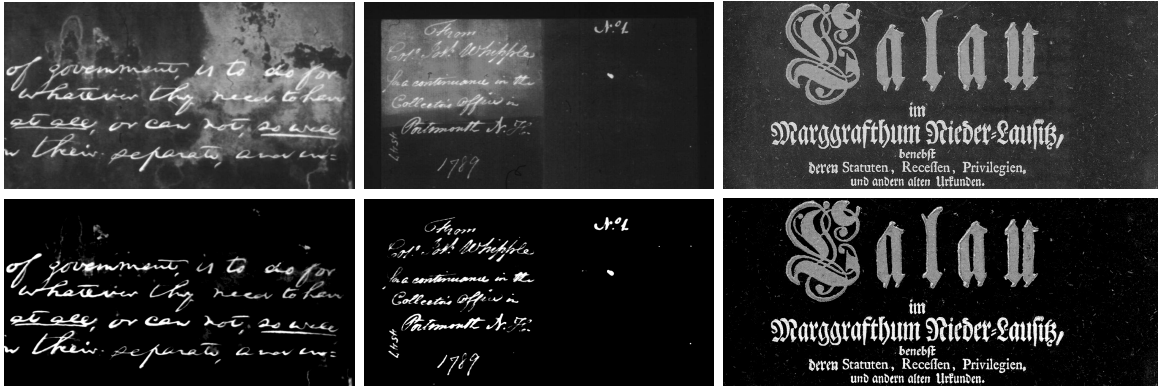


FIGURE D.7 – Suppression du fond sur des images de documents avec l’arbre des composantes h-connexes floues : image du document (en haut), et résultat après suppression du fond (en bas).

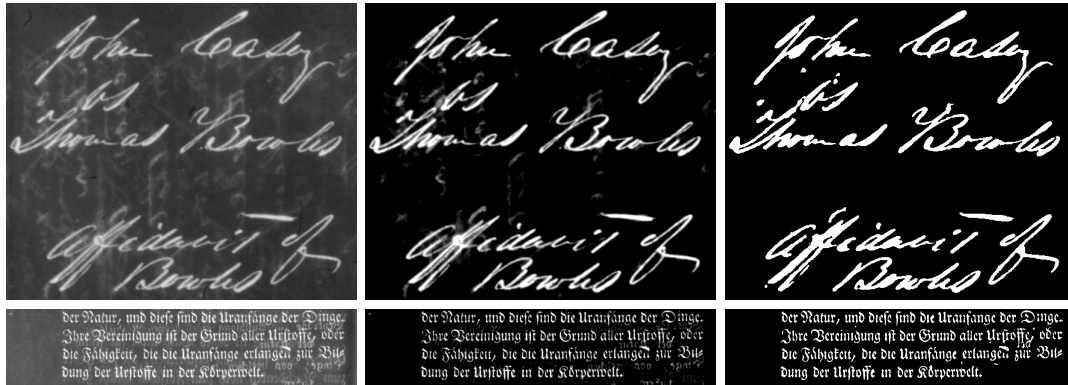


FIGURE D.8 – Binarisation d’images de documents avec l’approche proposée. Chaque ligne représente le traitement d’une image de la base d’évaluation DIBCO 2009 [2]. De gauche à droite : l’image originale, l’image après suppression du fond et le résultat de binarisation.

Nous avons mesuré les performances de notre méthode sur l’ensemble de la base d’évaluation DIBCO 2009. Cette dernière est composée de cinq images de documents calligraphiés et cinq images de documents imprimés représentatives des principales difficultés apparaissant dans les problèmes de binarisation de documents. Les images couleurs ont été transformées en images à niveau de gris en calculant la moyenne des canaux RGB. Les performances de la méthode ont été évaluées en termes de F-Mesure et de PSNR (*Peak Signal to Noise Ratio*) qui sont mises en avant pour le concours DIBCO 2009 (parmi quatre).

$$\text{F-Mesure} = \frac{2 \times \text{Précision} \times \text{Rappel}}{\text{Précision} + \text{Rappel}} \quad (\text{D.5})$$

$$\text{Précision} = \frac{\text{TP}}{\text{TP} + \text{FN}}, \quad \text{Rappel} = \frac{\text{TP}}{\text{TP} + \text{FP}} \quad (\text{D.6})$$

$$\text{PSNR} = 10 \log_{10} \left( \frac{\text{TN} + \text{TP} + \text{FN} + \text{FP}}{\text{FN} + \text{FP}} \right) \quad (\text{D.7})$$

où TP, TN, FP et FN sont respectivement le nombre de vrais positifs, de vrais négatifs, de faux positifs et de faux négatifs. La formule du PSNR suppose que la différence entre les pixels blancs et noirs soit égale à 1. Les deux mesures doivent être maximisées. Les résultats obtenus sont résumés dans le tableau D.1. L'approche proposée obtient des résultats meilleurs que ceux présentés lors du concours DIBCO avec  $\tau = 10/255$  : elle bat le vainqueur du concours par rapport à la F-Mesure et se place seconde par rapport au PSNR (il y avait 43 participants au concours). De plus, nous pouvons remarquer que l'étape de binarisation pourrait être largement améliorée par l'usage d'un détecteur de frontières plus précis et plus robuste. La

Méthode	F-Mesure	PSNR
Gagnant du concours	91,24	18,66
Seconde place	90,06	18,23
Troisième place	89,34	17,79
Approche proposée ( $\tau = 0$ )	91,25	18,23
Approche proposée ( $\tau = 10/255$ )	91,26	18,30
Approche proposée ( $\tau = 20/255$ )	87,85	17,11

TABLE D.1 – Résultats sur la base d'évaluation DIBCO 2009. Notre méthode avec  $\tau = 10/255$  se place première pour la F-Mesure et seconde pour le PSNR.

méthode a également obtenu de bons résultats au concours H-DIBCO 2010 (*Handwritten Document Image Binarization Contest*) tenu pendant la conférence ICFHR (*International Conference on Frontiers in Handwriting Recognition*) en novembre 2010 en se plaçant 4<sup>e</sup> parmi 17 candidats [9].

## Bibliographie

- [1] E. APTOULA et S. LEFÈVRE : A Comparative Study on Multivariate Mathematical Morphology. *Pattern Recognition*, 40(11):2914–2929, 2007.
- [2] B. GATOS, K. NTIROGIANNI et I. PRATIKAKIS : ICDAR 2009 Document Image Binarization Contest (DIBCO). Dans *International Conference on Document Analysis and Recognition*, pages 1375–1382, 2009.
- [3] M. GRIMAUD : New Measure of Contrast : the Dynamics. Dans P.D. GADER, E.R. DOUGHERTY et J.C. SERRA, éditeurs : *Image Algebra and Morphological Image Processing III*, pages 292–305. SPIE, 1992.
- [4] L. NAJMAN et M. COUPRIE : Building the Component Tree in Quasi-Linear Time. *IEEE Transactions on Image Processing*, 15(11):3531–3539, 2006.
- [5] O. NEMPONT, J. ATIF, E. ANGELINI et I. BLOCH : A New Fuzzy Connectivity Measure for Fuzzy Sets. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 34(2):107–136, 2009.
- [6] G.K. OUZOUNIS : *Generalized Connected Morphological Operators for Robust Shape Extraction*. Thèse de doctorat, University of Groningen, 2009.
- [7] G.K. OUZOUNIS et M.H.F. WILKINSON : Mask-Based Second-Generation Connectivity and Attribute Filters. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 29(6):990–1004, 2007.

- 
- [8] G.K. OUZOUNIS et M.H.F. WILKINSON : Hyperconnected Attribute Filters Based on k-Flat Zones. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, disponible en ligne, 2010.
  - [9] I. PRATIKAKIS, B. GATOS et K. NTIROGIANNI : H-DIBCO 2010 - Handwritten Document Image Binarization Competition. *Dans International Conference on Frontiers in Handwriting Recognition*, 2010.
  - [10] A. ROSENFELD : Fuzzy Digital Topology. *Information and Control*, 40(1):76–87, 1979.
  - [11] P. SALEMBIER, A. OLIVERAS et L. GARRIDO : Anti-Extensive Connected Operators for Image and Sequence Processing. *IEEE Transactions on Image Processing*, 7(4):555–570, 1998.
  - [12] P. SALEMBIER et M.H.F. WILKINSON : Connected Operators. *IEEE Signal Processing Magazine*, 26(6):136–157, 2009.



**Résumé :**

Cette thèse propose une méthode de caractérisation morphologique multibande des galaxies. Ces dernières ont commencé à évoluer et à interagir très tôt dans l'histoire de l'Univers : leurs formes dans les différentes parties du spectre électromagnétique représentent donc un traceur important de cette histoire. Ce travail propose une **organisation hiérarchique de modèles**, allant de la description des structures dominantes (bulbe et disque) aux composantes les plus fines (bras spiraux, anneaux, ...). Elle permet d'aboutir à une description des galaxies de haut niveau sémantique, chaque modèle réalisant une décomposition multibande de l'image en composantes astrophysiques interprétables par les astronomes. Les modélisations proposées innoveront par l'intégration d'un filtre adaptatif appliqué sur les observations, dont les paramètres sont estimés conjointement avec ceux des composantes de la galaxie.

L'**estimation** des paramètres des modèles est effectuée dans un contexte bayésien et résolue à l'aide d'algorithmes d'optimisation stochastique (algorithmes de Monte Carlo par chaînes de Markov). La rapidité des algorithmes est améliorée grâce à des techniques d'échelles et de directions adaptatives, ainsi qu'à une version multi-températures du recuit simulé.

En outre, les développements concernant la théorie des **arbres de composantes connexes** permettent la mise au point d'algorithmes non paramétriques multibandes, efficaces et robustes pour la réalisation des pré-traitements nécessaires à la mise en œuvre de la décomposition en structures. Cela a notamment abouti à des avancées dans la théorie des hyperconnexions et des représentations sous forme d'arbres de composantes hyperconnexes.

Les performances des méthodes proposées ont été évaluées sur un ensemble conséquent d'environ 1 500 galaxies et discutées avec les astronomes : elles montrent clairement la pertinence et la robustesse de la méthode. Ces résultats ouvrent la voie à de nouvelles classifications prenant en compte la signature multibande des galaxies spatialement résolues.

**Mots-clefs :** modélisation paramétrique, MCMC, arbres de composantes connexes, connexions, morphologie mathématique, décomposition hiérarchique de galaxies, image multibande, astronomie.

**Abstract :**

This thesis proposes a morphological and multiband characterization method for galaxies. Galaxies started to evolve and interact since the very beginning of the Universe and they now present a large variety of appearance. Their shapes in the different spectral bands are thus an important clue to understand the history of the Universe. This work develops a high semantic level galactic characterization based on decompositions into astrophysical structures which can be easily interpreted by the astronomers. The decomposition scheme is based on a hierarchy of models going from the description of dominant structures (bulge and disc) to the finest components (spiral arms, rings, ...). The proposed models are completed by an adaptive filter on the observation whose parameters are estimated jointly with those of the galactic structures.

The estimation of the model parameters are performed in a Bayesian context by using stochastic algorithms (Markov Chain Monte Carlo algorithms). The speed of the algorithms is increased by the use of adaptive scales and directions methods, as well as a multi-temperature simulated annealing.

Moreover, theoretical developments of the theory of connected component trees enable the conception of robust and efficient non-parametric multiband algorithms for the mandatory pre-processing of the images. Advances on the theory of hyper-connections and associated hyper-connected components trees were developed for this purpose.

The performance of the proposed approach has been validated on about 1 500 multiband images of galaxies. The results show that it is both efficient and robust. This new characterization method can now be used as a basis to discover a new spectro-morphological galaxy classification scheme.

**Keywords :** parametric model, MCMC, connected component tree, connections, mathematical morphology, multiband galaxy decomposition, astronomy.