



**HAL**  
open science

## Problèmes inverses et simulations numériques en viscoélasticité 3D.

Maya de Buhan

► **To cite this version:**

Maya de Buhan. Problèmes inverses et simulations numériques en viscoélasticité 3D.. Mathématiques [math]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2010. Français. NNT: . tel-00552111

**HAL Id: tel-00552111**

**<https://theses.hal.science/tel-00552111>**

Submitted on 5 Jan 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Problèmes inverses et simulations numériques en viscoélasticité 3D.

## THÈSE DE DOCTORAT

présentée et soutenue publiquement le 22 novembre 2010

pour l'obtention des grades de

Docteur de l'Université Pierre et Marie Curie

Spécialité Mathématiques Appliquées

et

Doctor en Ciencias de la Ingeniería de la Universidad de Chile

Mención en Modelación Matemática

par

Maya DE BUHAN

### Composition du jury

*Rapporteurs :* Habib AMMARI  
Masahiro YAMAMOTO

*Examineurs :* Pascal FREY                      Directeur de thèse  
Axel OSSES                                    Directeur de thèse  
Frédéric HECHT  
Manuel DEL PINO  
Patrick LE TALLEC  
Enrique ZUAZUA



# Table des matières

<b>Introduction générale</b>	<b>5</b>
1 Un problème inverse en viscoélasticité linéaire . . . . .	6
1.1 Stabilité höldérienne avec mesure interne . . . . .	7
1.2 Stabilité logarithmique avec mesure frontière . . . . .	9
1.3 Résolution numérique du problème inverse . . . . .	11
1.4 Application en imagerie cérébrale . . . . .	12
2 Simulation numérique en viscoélasticité non linéaire . . . . .	12
2.1 Résolution numérique d'un modèle de viscoélasticité non linéaire	14
2.2 Application en biomécanique cérébrale . . . . .	15
2.3 Modèle couplé viscoélastique/viscoplastique . . . . .	16
<b>I Un problème inverse en viscoélasticité linéaire</b>	<b>17</b>
<b>Introduction</b>	<b>19</b>
<b>1 Une inégalité de Carleman pour l'opérateur de la viscoélasticité</b>	<b>25</b>
1.1 Enoncé du Théorème 1.1 . . . . .	26
1.2 Preuve du Théorème 1.1 . . . . .	26
1.3 Remarque sur la Condition 1 . . . . .	35
<b>2 Prolongement unique pour l'opérateur de la viscoélasticité</b>	<b>39</b>
2.1 Enoncé du Théorème 2.1 . . . . .	39
2.2 Preuve du Théorème 2.1 . . . . .	40
<b>3 Stabilité de la récupération d'un coefficient viscoélastique</b>	<b>59</b>
3.1 Un résultat de stabilité hölderienne avec observation interne . . . . .	60
3.2 Un résultat de stabilité logarithmique avec observation frontière . . . . .	61
3.3 Preuves des Théorèmes 3.1 et 3.3 . . . . .	61

<b>4</b>	<b>Résolution numérique d'un problème inverse en viscoélasticité</b>	<b>71</b>
4.1	Méthodes de résolution . . . . .	72
4.1.1	Résolution du problème direct . . . . .	72
4.1.2	Résolution du problème inverse . . . . .	73
4.1.3	Méthode de régularisation . . . . .	75
4.2	Etude de l'erreur . . . . .	77
4.2.1	Estimation <i>a priori</i> . . . . .	77
4.2.2	Données numériques . . . . .	79
4.2.3	Changer le nombre de vecteurs dans la base . . . . .	79
4.2.4	Changer la zone d'observation . . . . .	80
4.2.5	Changer le temps d'observation . . . . .	81
4.2.6	Changer l'erreur dans les données . . . . .	81
4.3	Application en imagerie médicale . . . . .	83
4.3.1	Motivation . . . . .	83
4.3.2	Données numériques . . . . .	83
4.3.3	Adaptation de maillage et de base . . . . .	84
4.3.4	Les résultats . . . . .	86
4.4	Perpectives . . . . .	87
4.4.1	Récupération de plusieurs coefficients simultanément . . . . .	87
4.4.2	Recupération en trois dimensions . . . . .	87
<b>II</b>	<b>Simulation numérique en viscoélasticité nonlinéaire</b>	<b>89</b>
	<b>Introduction</b>	<b>91</b>
<b>5</b>	<b>Résolution numérique d'un modèle de viscoélasticité non linéaire</b>	<b>95</b>
5.1	Discrétisation des équations . . . . .	96
5.1.1	Discrétisation en espace . . . . .	96
5.1.2	Discrétisation en temps . . . . .	97
5.2	Méthodes de résolution . . . . .	98
5.2.1	Calcul de la variable viscoélastique . . . . .	98
5.2.2	Résolution du problème élastique . . . . .	99
5.2.3	L'algorithme . . . . .	101
5.2.4	Quelques remarques sur l'implémentation . . . . .	102
5.3	Validation et exemple . . . . .	105
5.3.1	Validation . . . . .	105
5.3.2	Exemple . . . . .	107

<b>6</b>	<b>Un exemple d'application en biomécanique cérébrale</b>	<b>111</b>
6.1	Motivations . . . . .	111
6.2	Etat de l'art des modèles . . . . .	112
6.3	Efficacité de la formulation généralisée . . . . .	112
6.3.1	Expérience de compression par Miller . . . . .	113
6.3.2	Expérience de compression et de relaxation par Libertiaux . . . . .	113
6.3.3	Expérience de cisaillement par Ning . . . . .	116
6.4	Description du modèle géométrique . . . . .	117
6.5	Calcul de la déformation du cerveau . . . . .	119
<b>7</b>	<b>Un modèle viscoélastique/viscoplastique en grandes déformations</b>	<b>121</b>
7.1	Exemples linéaires unidimensionnels . . . . .	121
7.1.1	Le modèle viscoélastique de Maxwell . . . . .	121
7.1.2	Le modèle élastique/viscoplastique de Perzyna . . . . .	123
7.2	Le modèle viscoélastique/viscoplastique non linéaire 3D . . . . .	125
7.2.1	Cinématique . . . . .	126
7.2.2	Les équations d'équilibre en grandes déformations . . . . .	127
7.2.3	Loi de comportement . . . . .	128
7.2.4	Les équations du modèle . . . . .	132
7.3	Résolution numérique du problème couplé . . . . .	133
	<b>Annexes</b>	<b>135</b>
	<b>A Preuve de la Proposition 1.2</b>	<b>137</b>
	<b>B Compléments sur la transformée de Fourier-Bros-Iagolnitzer</b>	<b>143</b>
	<b>C Contrôlabilité approchée du système de Lamé</b>	<b>145</b>
	<b>Table des figures</b>	<b>149</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>153</b>
	<b>Résumé/Abstract</b>	<b>159</b>



# Introduction générale

Dans cette thèse, nous abordons plusieurs problèmes mathématiques et numériques relatifs aux équations de la viscoélasticité. Avant de détailler ces travaux, précisons ce que recouvre la notion de viscoélasticité.

## Qu'est ce qu'un matériau viscoélastique ?

Un matériau est dit *élastique* s'il se déforme instantanément lorsqu'il est soumis à une contrainte et retourne tout aussi vite à son état d'origine lorsque celle-ci est retirée. Pour un matériau *viscoélastique*, la relation entre la contrainte et la déformation dépend du temps. Ainsi, dans les matériaux viscoélastiques, on observe les phénomènes suivants :

1. Si la contrainte est maintenue constante, la déformation augmente avec le temps : c'est le phénomène de *fluage*.
2. Si la déformation est maintenue constante, la contrainte diminue avec le temps : c'est le phénomène de *relaxation*.
3. Si un chargement cyclique est appliqué, on observe un phénomène d'*hystérésis* (avec un retard de phase), menant à une dissipation de l'énergie mécanique.

Notons que, selon la relation entre le taux de déformation et la contrainte à l'intérieur d'un matériau, la viscosité peut être *linéaire* ou *non linéaire*. La théorie de la viscoélasticité linéaire est en général valide uniquement pour de petites déformations (dont l'amplitude est inférieure à  $10^{-2}$  en pratique).

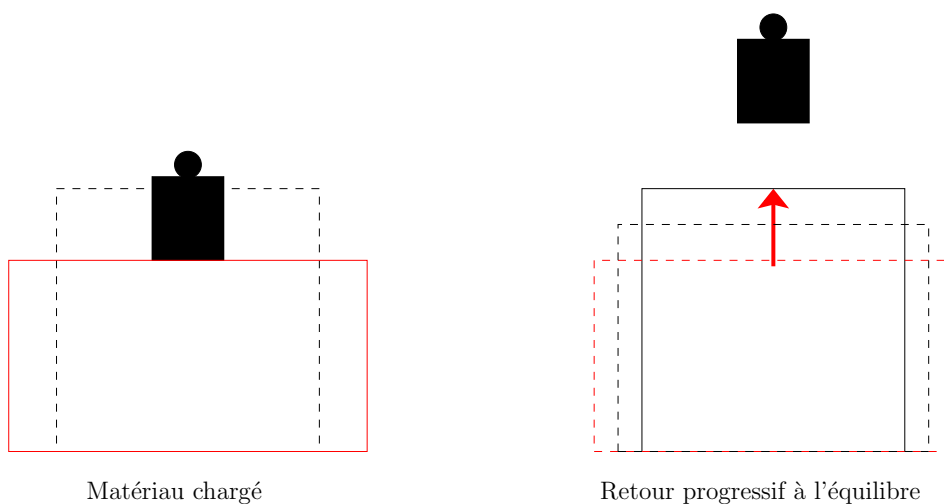


FIG. 1 – Comportement d'un matériau viscoélastique soumis à une contrainte constante.



Tous les matériaux présentent un certain degré de réponse viscoélastique. Dans les métaux usuels à température ambiante, ce comportement peut être négligé et les matériaux considérés comme élastiques. Par contre, les polymères et les tissus humains, ainsi que les métaux à haute température, exhibent des effets visqueux conséquents qui doivent être pris en compte dans les applications. Au 19<sup>ème</sup> siècle, des physiciens tels que Maxwell, Boltzmann et Kelvin ont étudié le phénomène de fluage des métaux et caoutchoucs. La viscoélasticité en tant que telle n'a été étudiée qu'à partir de la fin du 20<sup>ème</sup> siècle lorsque des polymères synthétiques ont commencé à être utilisés dans l'industrie.

## Les apports de la thèse

Ce mémoire de thèse comprend deux parties. Dans la première partie, nous nous intéressons au système de la viscoélasticité linéaire. Pour ce système, le problème direct a été largement étudié (modélisation, Lakes [52], analyse mathématique, Bellout et Nečas [6], analyse numérique, Shaw *et al.* [81]) et peut à présent être considéré comme résolu. Dans cette thèse, nous regardons le problème inverse et plus particulièrement le problème de la récupération des coefficients viscoélastiques. Nous traitons les aspects théoriques (unicité et stabilité de la récupération), ainsi que numériques (méthodes de résolution). Dans la deuxième partie, nous passons au système de la viscoélasticité non linéaire. Pour ce modèle, peu de travaux existent, ne serait-ce qu'au sujet du problème direct. Nous présentons des méthodes numériques pour le résoudre et l'implémentation de ces dernières en trois dimensions. Une application biomédicale est ensuite envisagée et décrite. Finalement, nous abordons des questions de modélisation en établissant un modèle couplé viscoélastique/viscoplastique.

Dans la suite de cette introduction, nous présentons un résumé des résultats obtenus dans la thèse. Ces résultats sont volontairement simplifiés pour n'en garder que le principe et l'idée donnée des démonstrations n'est que formelle. Pour l'énoncé rigoureux des résultats, les hypothèses exactes de validité et les détails des démonstrations, le lecteur se rapportera aux chapitres correspondants. De même, on trouvera en introduction de chaque chapitre les références vers les travaux existants sur les thèmes abordés. Le but de ces introductions est de mettre en perspective les résultats de la thèse.

## 1 Un problème inverse en viscoélasticité linéaire

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^3$ , de frontière  $\partial\Omega$  supposée suffisamment régulière. Pour toute fonction  $u : \Omega \times (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$ , nous introduisons l'opérateur hyperbolique intégral-différentiel  $\mathcal{P}$  défini de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}u(x, t) &= \partial_t^2 u(x, t) - \nabla \cdot (\mu(x)(\nabla u(x, t) + \nabla u(x, t)^t) + \lambda(x)(\nabla \cdot u)(x, t)I) \\ &+ \int_0^t \nabla \cdot (\tilde{\mu}(x, s)(\nabla u(x, t-s) + \nabla u(x, t-s)^t) + \tilde{\lambda}(x, s)(\nabla \cdot u)(x, t-s)I) ds, \end{aligned} \quad (1)$$

où  $\lambda$  et  $\mu$  sont appelés les coefficients de Lamé, tandis que  $\tilde{\lambda}$  et  $\tilde{\mu}$  sont des coefficients de viscosité.

Le système de la viscoélasticité linéaire que nous considérons est alors le suivant :

$$\begin{cases} \mathcal{P}u(x, t) = f(x, t), & \forall (x, t) \in \Omega \times (0, +\infty), \\ u(x, 0) = \bar{u}_0(x), & \forall x \in \Omega, \\ \partial_t u(x, 0) = \bar{u}_1(x), & \forall x \in \Omega, \\ u(x, t) = 0, & \forall (x, t) \in \partial\Omega \times (0, +\infty). \end{cases} \quad (2)$$

Ce système modélise la dynamique en trois dimensions d'un matériau viscoélastique soumis à un chargement extérieur  $f$ . Le vecteur  $u$  est ici le déplacement mesuré par rapport à la configuration de référence  $\Omega$ . Le vecteur  $\bar{u}_0$  est le déplacement initial et  $\bar{u}_1$  est la vitesse initiale.

Dans toute la première partie de la thèse, nous nous intéressons à la récupération d'un des coefficients de l'opérateur  $\mathcal{P}$ . Plus précisément, nous faisons l'hypothèse que le coefficient  $\tilde{\mu}$  peut se décomposer sous la forme

$$\tilde{\mu}(x, t) = p(x)h(t), \quad \forall (x, t) \in \Omega \times (0, +\infty). \quad (3)$$

Cette hypothèse est satisfaite, en pratique, pour la plupart des matériaux viscoélastiques. Nous regardons alors le problème inverse de récupération de la dépendance spatiale  $p$  à partir de mesures de la solution  $u$ . Les problèmes inverses sont généralement mal posés. Aussi, les questions qui se posent naturellement sont celles de l'unicité et de la stabilité de la récupération. Dans le Chapitre 3, nous démontrons deux résultats de stabilité, l'un relatif à des mesures dans un ouvert  $\omega$  de  $\Omega$  et l'autre à des mesures sur une partie  $\Gamma$  de la frontière  $\partial\Omega$ . Les deux premiers chapitres sont, quant à eux, dédiés à la démonstration des outils qui nous seront nécessaires dans les preuves des résultats de stabilité : une inégalité de Carleman pour l'opérateur  $\mathcal{P}$  au Chapitre 1 et un résultat de prolongement unique pour le système (1)-(2) au Chapitre 2. Le Chapitre 4 revient sur le problème inverse avec mesure interne et propose des méthodes numériques pour le résoudre. Les résultats démontrés sont précisés dans les sections suivantes. Par souci de clarté, les hypothèses techniques sont volontairement omises ou simplifiées.

## 1.1 Stabilité höldérienne avec mesure interne

Le premier résultat que nous démontrons est un résultat de stabilité höldérienne pour le problème inverse de récupération du coefficient  $p(x)$ , pour tout  $x \in \Omega$ , à partir de mesures de la solution :

$$u(x, t), \quad \forall (x, t) \in \omega \times (0, T),$$

où  $\omega$  est une partie de  $\Omega$  et  $T$  un temps strictement positif. Supposons que nous avons deux coefficients  $p$  et  $\bar{p}$  et introduisons  $u$  (respectivement  $\bar{u}$ ) la solution du système (1)-(3), associée au coefficient  $p$  (respectivement  $\bar{p}$ ). Le résultat s'énonce ainsi :

**Théorème 0.1** (Théorème 3.1 du Chapitre 3). *Il existe  $\kappa \in (0, 1)$  tel que l'estimation suivante soit vraie :*

$$\|p - \bar{p}\|_{H^2(\Omega)} \leq C \|u - \bar{u}\|_{H^2(\omega \times (0, T))}^\kappa.$$

La constante  $C$  qui apparaît ici est positive et dépend du coefficient inconnu  $p$  mais au travers d'une certaine norme que l'on suppose bornée *a priori*. De ce résultat, nous déduisons alors immédiatement l'unicité de la récupération. En effet, nous avons l'implication :

$$u(x, t) = \bar{u}(x, t), \quad \forall (x, t) \in \omega \times (0, T) \implies p(x) = \bar{p}(x), \quad \forall x \in \Omega.$$

Ces résultats sont valides sous trois sortes d'hypothèses :

1. *Hypothèse sur la zone d'observation*

L'ouvert  $\omega$  doit au moins contenir un voisinage du bord de  $\Omega$  et le temps d'observation  $T$  doit être suffisamment grand. Ceci garantit que toute l'information, portée par les ondes qui se propagent dans le matériau, peut être captée dans la zone  $\omega$  pendant la période d'observation  $(0, T)$ .

2. *Hypothèses sur les coefficients*

- Les coefficients  $\lambda, \mu, \tilde{\lambda}, \tilde{\mu}$  doivent être suffisamment réguliers en temps et en espace afin que la solution  $u$  soit suffisamment régulière.
- Les coefficients  $p$  et  $\bar{p}$  sont supposés connus dans  $\omega$ . Autrement dit, la récupération n'a en fait pas lieu dans tout  $\Omega$  mais seulement dans  $\Omega \setminus \omega$ . Cette hypothèse est sans doute la plus restrictive en pratique car il faut alors pouvoir mesurer expérimentalement le coefficient dans un voisinage du bord.
- Les coefficients  $\mu$  et  $\lambda + 2\mu$  satisfont une condition de type pseudo-convexité (voir Condition 1).

3. *Hypothèse sur la donnée initiale*

La vitesse initiale  $\bar{u}_1$  peut être quelconque (ou supposée nulle par linéarité du problème), mais le déplacement initial  $\bar{u}_0$  doit vérifier une hypothèse technique. En particulier, il doit être non nul. Les observations doivent donc être faites dans la phase de relaxation du matériau, qui aura été préalablement écarté de sa position d'équilibre.

La preuve de ce résultat repose sur la combinaison d'une inégalité de Carleman [12] et de la méthode de Bukhgeim et Klivanov [11], que nous allons décrire à présent :

### Une inégalité de Carleman pour l'opérateur $\mathcal{P}$

Une inégalité de Carleman est une inégalité d'énergie pondérée. Elle permet d'estimer l'énergie initiale d'un système en observant son énergie localement, sous réserve de connaître la source d'énergie. Il s'agit donc d'une relation de la forme :

**Théorème 0.2** (Théorème 1.1 du Chapitre 1).

$$\text{POIDS} \times \text{ÉNERGIE INITIALE} \leq \text{OBSERVATIONS INTERNES} + \text{SOURCE.}$$

Il existe de nombreuses inégalités de Carleman pour des opérateurs de tous types (elliptique, hyperbolique et parabolique). Cependant aucune inégalité n'existait dans la littérature pour l'opérateur intégro-différentiel  $\mathcal{P}$  en dimension trois. Pour démontrer l'inégalité du Théorème 0.2, nous introduisons plusieurs changements de variables afin de ramener le problème (1)-(2) à une équation d'onde scalaire pour laquelle le résultat est déjà connu. Ceci se fait en quatre étapes.

1. La première particularité du problème (1)-(2) est qu'il s'agit d'un système. La méthode consiste à découpler le système en équations scalaires, satisfaites par  $u$  et par les ondes transversale  $\nabla \cdot u$  et longitudinale  $\nabla \wedge u$ , comme dans Imanuvilov et Yamamoto [42]. La difficulté que nous rencontrons alors est que la trace des fonctions  $\nabla \cdot u$  et  $\nabla \wedge u$  sur  $\partial\Omega$  n'est plus correctement définie. Nous sommes donc obligés de travailler loin du bord et c'est pour cela que nous devons supposer le coefficient  $p$  connu dans un voisinage de la frontière.
2. La deuxième difficulté tient à la présence du terme intégral. Nous utilisons alors un changement de variable, initialement présenté dans Cavaterra *et al.* [13], et qui

permet d'absorber le terme intégral. La nouvelle variable vérifie ainsi une équation d'onde scalaire.

3. Malgré tout, l'équation reste non réversible, puisqu'elle modélise un phénomène de dissipation d'énergie. Ceci empêche donc d'étendre la solution à  $t < 0$  afin de travailler sur un intervalle  $(-T, T)$  comme cela est classiquement fait. Nous avons donc recours à une inégalité de Carleman ponctuelle de Klivanov et Timonov [49] pour une équation hyperbolique scalaire. Cette inégalité n'est pas valable dans tout le cylindre  $\Omega \times (0, T)$  mais seulement entre des lignes de niveaux d'un hyperboloïde. Une attention toute particulière doit être portée aux domaines dans lesquels nous travaillons. Dans le corps du manuscrit, de nombreuses figures accompagnent les démonstrations pour faciliter leur compréhension.
4. Une fois le résultat démontré pour la nouvelle variable, il faut revenir à la solution initiale  $u$  par une série d'inégalités en utilisant la régularité des coefficients et le Lemme 1.4 qui permet de majorer les termes intégraux.

### Méthode de Bukhgeim et Klivanov

La méthode de Bukhgeim et Klivanov est une méthode remarquable pour dériver des estimations de stabilité à partir d'inégalités de Carleman. Le principe est simple. Nous introduisons  $\hat{p} = p - \bar{p}$  et nous écrivons l'équation satisfaite par  $\hat{w} = \partial_t^2(u - \bar{u})$  :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{P}\hat{w} = - \int_0^t h(s) \nabla \cdot (\hat{p}(\nabla \bar{w}(t-s) + \nabla \bar{w}(t-s)^t)) ds & \text{dans } \Omega \times (0, +\infty), \\ \quad - h' \nabla \cdot (\hat{p}(\nabla \bar{u}_0 + \nabla \bar{u}_0^t)), & \\ \hat{w}(0) = 0, & \text{dans } \Omega, \\ \partial_t \hat{w}(0) = -h(0) \nabla \cdot (\hat{p}(\nabla \bar{u}_0 + \nabla \bar{u}_0^t)), & \text{dans } \Omega, \\ \hat{w} = 0, & \text{sur } \partial\Omega \times (0, +\infty). \end{array} \right.$$

Nous remarquons que le coefficient  $\hat{p}$  apparaît à la fois dans la donnée initiale (dont dépend l'énergie initiale) et dans la source de l'équation. Il suffit alors d'appliquer l'inégalité de Carleman démontrée précédemment à la nouvelle fonction  $\hat{w}$  pour obtenir

$$\text{POIDS} \times \text{TERME EN } \hat{p} \leq \text{OBSERVATIONS INTERNES} + \text{TERME EN } \hat{p},$$

et nous pouvons absorber le dernier terme du membre de droite dans le membre de gauche grâce aux poids. Nous obtenons ainsi le résultat du Théorème 0.1 souhaité, puisque les observations internes correspondent ici à la norme de  $\hat{w}$  dans le domaine d'observation  $\omega \times (0, T)$ .

## 1.2 Stabilité logarithmique avec mesure frontière

Le deuxième résultat de stabilité que nous démontrons est relatif au problème inverse suivant :

*Connaissant  $(\lambda, \mu, \tilde{\lambda}, h, \bar{u}_0, \bar{u}_1, f)$ , retrouver  $p(x)$ , pour tout  $x \in \Omega$ , à partir de mesures de*

$$\nabla u(x, t) \cdot n(x), \quad \forall (x, t) \in \Gamma \times (0, T),$$

*où  $\Gamma$  est une partie de  $\partial\Omega$  de normal extérieure  $n$  et  $T > 0$ .*

Le théorème que nous démontrons est le suivant :

**Théorème 0.3** (Théorème 3.3 du Chapitre 3). *Il existe  $\kappa \in (0, 1)$  tel que l'estimation suivante soit vraie :*

$$\|p - \bar{p}\|_{H^2(\Omega)} \leq C \left[ \log \left( 2 + \frac{C}{\sum_{1 \leq |\alpha| \leq 2} \|\partial_x^\alpha (u - \bar{u})\|_{L^2(\Gamma \times (0, T))}^2} \right) \right]^{-\kappa}.$$

Les hypothèses concernant la régularité des coefficients ainsi que celles portant sur les données initiales sont les mêmes que pour le résultat du Théorème 0.1. Cette fois encore, le temps d'observation doit être suffisamment grand. Par contre, la zone d'observation  $\Gamma$  peut être choisie arbitrairement petite. En ce sens, le résultat du Théorème (0.3) est plus fort, même si la stabilité n'est ici que logarithmique. À nouveau, il y a unicité dans la récupération, à savoir :

$$\partial_x^\alpha u(x, t) = \partial_x^\alpha \bar{u}(x, t), \quad \forall (x, t) \in \Gamma \times (0, T), \quad |\alpha| = 1, 2 \quad \implies \quad p(x) = \bar{p}(x), \quad \forall x \in \Omega.$$

La démonstration de ce résultat utilise l'estimation de stabilité avec observations internes du Théorème 0.1 et un résultat de prolongement unique dont nous présentons une ébauche dans ce qui suit. La conclusion est alors immédiate.

### Stabilité dans le prolongement unique pour l'opérateur $\mathcal{P}$

Nous démontrons un résultat de stabilité associé à un prolongement unique pour l'opérateur  $\mathcal{P}$ . Le résultat en question stipule que, si la source de l'équation est nulle dans le voisinage  $\omega$  de  $\partial\Omega$  et si la solution et ses dérivées s'annulent sur une partie  $\Gamma$  de  $\partial\Omega$ , alors la solution s'annule dans un ouvert inclus dans  $\omega$ . La partie de la frontière considérée peut être aussi petite que l'on veut. Nous appliquons ce résultat à la fonction  $\hat{u} = u - \bar{u}$  dont l'équation est bien à source nulle dans  $\omega$  puisque l'on a supposé  $p = \bar{p}$  dans  $\omega$ . Le résultat énonce qu'il y a stabilité pour ce prolongement unique, ce qui s'écrit sous la forme :

**Théorème 0.4** (Théorème 2.1 du Chapitre 2).

$$\text{OBSERVATIONS INTERNES DANS } \omega \leq \text{OBSERVATIONS FRONTIÈRES SUR } \Gamma.$$

La principale difficulté vient du fait que les coefficients de l'opérateur  $\mathcal{P}$  dépendent du temps, donc les méthodes classiques ne s'appliquent plus. La démonstration du Théorème 0.4 se fait alors en quatre étapes :

1. Nous introduisons une nouvelle transformation inspirée de la transformée de Fourier-Bros-Iagolnitzer (FBI) [8] mais qui est capable de traiter le terme intégral. Cette nouvelle transformation conserve en effet les propriétés de la FBI classique mais permet en plus de transformer la convolution de deux fonctions en la convolution de l'une par la transformée de l'autre.
2. La nouvelle transformation permet de changer localement le système hyperbolique (1)-(2) en un système elliptique intégral-différentiel, comme dans Bellassoued [3].
3. Il nous faut alors démontrer une inégalité de Carleman pour le système elliptique intégral-différentiel résultant. Cela est fait en utilisant les mêmes techniques que pour démontrer l'inégalité de Carleman pour le système hyperbolique, c'est-à-dire que l'on se ramène à une équation elliptique scalaire pour laquelle les résultats sont connus, Imanuvilov et Puel [40], Lebeau et Robbiano [57].

4. Grâce à l'inégalité de Carleman, nous démontrons des résultats d'interpolation en suivant la méthode de Robbiano [79]. Le premier résultat d'interpolation démontré relie la valeur de la solution sur  $\Gamma \subset \partial\Omega$  à celle dans une boule proche de  $\Gamma$ . Le deuxième permet de passer de cette boule proche de  $\Gamma$  à n'importe quelle boule incluse dans  $\omega$ . En sommant ces inégalités pour des boules formant un recouvrement de n'importe quel ouvert de  $\omega$ , nous obtenons le résultat voulu.

Les différents résultats démontrés dans la première partie sont illustrés sur la Figure 2.

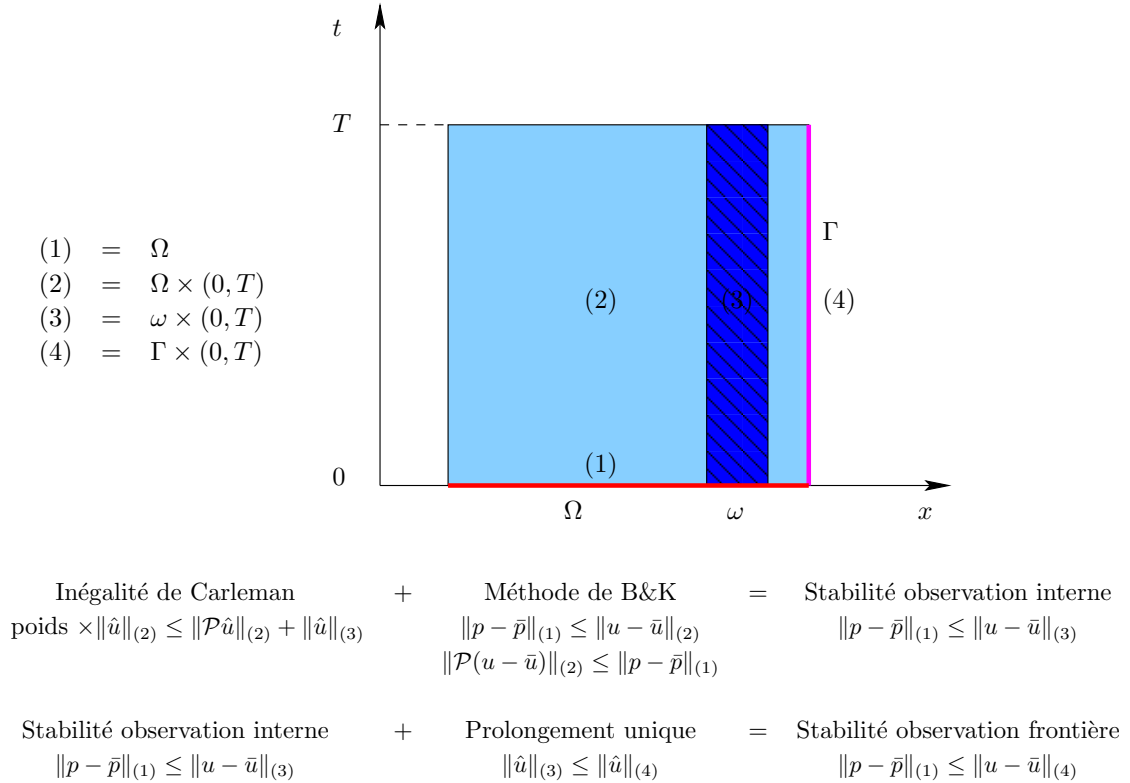


FIG. 2 – Schéma illustrant formellement les résultats démontrés dans la première partie.

### 1.3 Résolution numérique du problème inverse

Maintenant que nous connaissons les conditions pour que le problème inverse de récupération du coefficient  $p$  soit stable, il est légitime de s'intéresser à la récupération effective de ce coefficient. Dans le Chapitre 4, nous regardons le problème inverse avec observations internes. Afin de le résoudre, nous proposons de minimiser la fonctionnelle suivante :

$$J(p) = \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\omega} (|u(p) - u_{obs}|^2 + |\nabla(u(p) - u_{obs})|^2) dx dt,$$

où  $u_{obs}$  est la solution observée. Cette solution est en principe différente de la solution exacte du fait des erreurs commises lors des mesures expérimentales. Elle ne correspond, d'ailleurs, souvent pas à une solution du problème (1)-(2). La fonctionnelle  $J$  est non quadratique puisque la solution  $u$  du problème (1)-(2) dépend non linéairement du coefficient

$p$ . La minimisation est réalisée par un algorithme BFGS [69], bien adapté à ce type de problème non linéaire. Le calcul du gradient de  $J$  - direction de descente de l'algorithme BFGS - nécessite l'introduction du problème adjoint de (2). Afin de régulariser la méthode, nous choisissons de chercher le coefficient inconnu  $p$  dans un espace de dimension fini  $P_K \subset P$ , où  $K$  est la dimension. Nous réalisons ainsi une régularisation par discrétisation (Kirsch [48]). Plusieurs espaces  $P_K$  sont possibles. Un choix judicieux est de considérer l'espace engendré par les  $K$  premières fonctions propres  $\varphi_i$  du Laplacien défini sur  $\Omega$ , à savoir

$$P_K = \left\{ p \in P, p = \bar{p}|_{\partial\Omega} + \sum_{i=1}^K p_i \varphi_i \right\},$$

où  $\bar{p}|_{\partial\Omega}$  est un relèvement de la trace sur  $\partial\Omega$  de la valeur exacte de  $p$  (qui est connu puisque l'on a supposé le coefficient  $\bar{p}$  connu dans un voisinage  $\omega$  du bord). Afin de résoudre le problème de manière plus précise, nous proposons une méthode adaptée. Après avoir calculé une première solution  $p_0$  sur le maillage initial, nous utilisons cette dernière pour adapter la base. Cette dernière est alors composée des solutions du problème aux valeurs propres suivant :

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (a(x)\nabla\varphi_i(x)) = \sigma_i\varphi_i(x), & \forall x \in \Omega, \\ \varphi_i(x) = 0, & \forall x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

avec

$$a(x) = \frac{1}{\nabla p_0(x)}.$$

Ces fonctions sont ainsi localisées là où les variations du coefficient sont les plus importantes. Cette idée, combinée à une adaptation de maillage classique, permet d'améliorer la précision du résultat en diminuant l'erreur numérique. Le coefficient inconnu peut ainsi être récupéré avec succès en chaque nœud du domaine discretisé. Dans les essais que nous avons menés, la solution observée est obtenue en calculant la solution exacte du problème direct et en lui ajoutant une erreur relative uniforme de 2%. Le problème direct est résolu en utilisant des éléments finis de Lagrange  $\mathbb{P}_2$  en espace et un schéma centré implicite en temps.

## 1.4 Application en imagerie cérébrale

Nous présentons enfin une application potentielle de cette méthode à la détection des tumeurs cérébrales. En effet, le comportement mécanique du cerveau humain, comme celui de nombreux tissus vivants mous, est viscoélastique. Une tumeur peut alors se caractériser par un coefficient de viscosité différent de celui du tissu sain. En retrouvant la cartographie du coefficient correspondant, nous pourrions donc localiser la tumeur. Un exemple de résultat est présenté sur la Figure 3.

## 2 Simulation numérique en viscoélasticité non linéaire

Dans la deuxième partie de la thèse, nous nous intéressons à un modèle plus complexe de viscoélasticité non linéaire, inspiré du modèle de Simo [82]. Nous considérons donc un matériau qui, dans sa configuration au repos, occupe le domaine  $\Omega$ , ouvert borné et connexe de  $\mathbb{R}^3$ . Supposons que la frontière  $\Gamma$  de  $\Omega$  est lipschitzienne, ainsi la normal

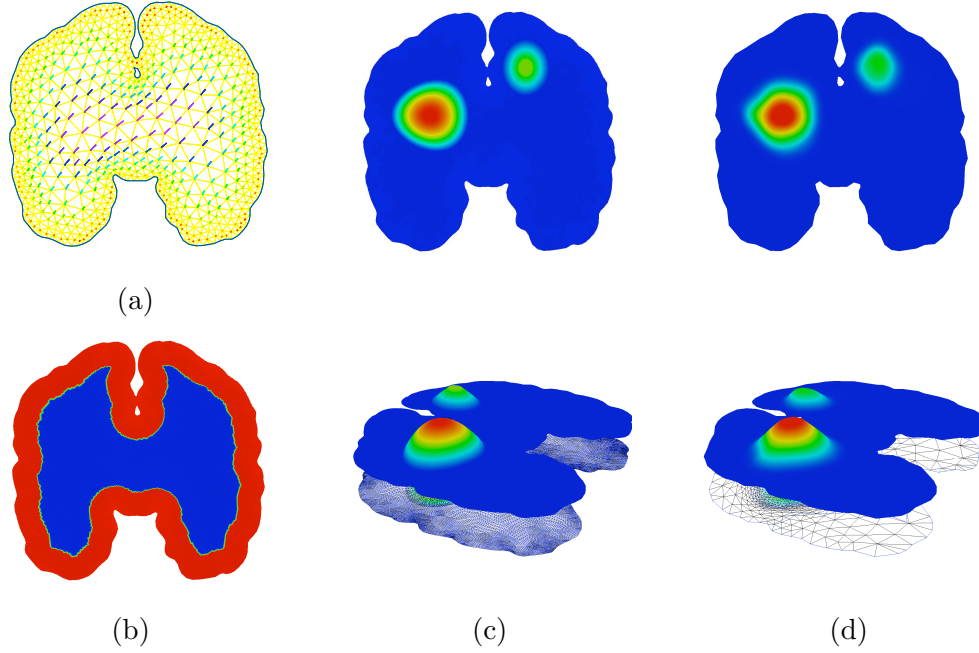


FIG. 3 – (a) Donnée initiale  $\bar{u}_0$ . (b) Zone d'observation  $\omega$ . (c) Coefficient exact. (d) Coefficient récupéré.

unitaire sortante  $n$  est bien définie en tout point de  $\Gamma$ . Supposons également que cette frontière se décompose en  $\Gamma = \bar{\Gamma}_0 \cup \bar{\Gamma}_1$  avec  $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$ . Le problème que nous considérons est le suivant :

Trouver le vecteur déplacement  $u$  solution de :

$$\begin{cases} -\nabla \cdot T = f, & \text{dans } \Omega, \\ u = u_0, & \text{sur } \Gamma_0, \\ T \cdot n = g, & \text{sur } \Gamma_1. \end{cases} \quad (\text{EDP})$$

où le vecteur  $f$  (resp.  $g$ ) représente les forces volumiques (resp. surfaciques), exprimées

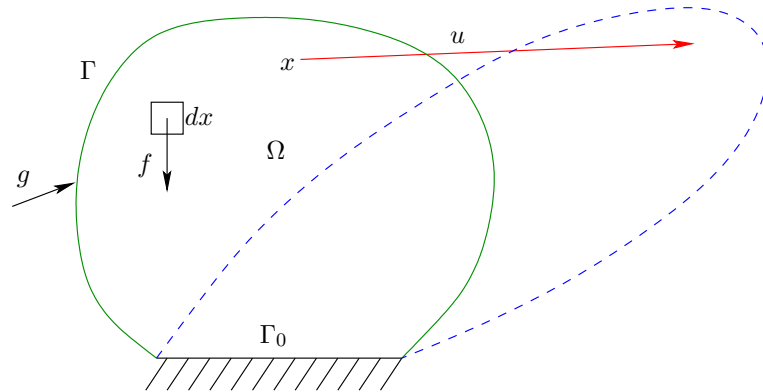


FIG. 4 – Déformation du domaine  $\Omega$ .



dans la configuration de référence, et  $T$  est le premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff qui dépend de  $u$ . La relation entre  $T$  et  $u$  est appelée loi de comportement du matériau et s'exprime au travers du gradient de déformation  $F = Id + \nabla u$  par :

$$T = \frac{dW}{dF} - pF^{-t}, \quad (4)$$

où  $W$  est l'énergie interne du système. Dans le modèle viscoélastique que l'on considère,  $W$  peut s'exprimer en fonction du tenseur de Cauchy-Green  $C$ , défini par :

$$C = F^t F = Id + \nabla u + \nabla u^t + \nabla u^t \cdot \nabla u,$$

et en fonctions de tenseurs  $G_i$ , pour  $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$  où  $m \in \mathbb{N}^*$ , qui sont des variables internes utilisées pour mesurer la déformation d'amortisseurs visqueux inclus dans le matériau. L'évolution de ces variables internes est alors décrite par l'ensemble d'équations suivant :

$$\begin{cases} \nu_i \dot{G}_i^{-1} = \frac{\partial W}{\partial G_i} + q_i G_i^{-1}, & \text{dans } \Omega, \\ G_i(0) = Id, & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad \forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket \quad (\text{EDO})$$

avec  $\nu_i$ , pour  $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ , les coefficients de viscosité. Les pressions  $p$  et  $q_i$ , pour  $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$  qui apparaissent dans les équations (4) et (EDO) sont les multiplicateurs de Lagrange associés aux contraintes d'incompressibilité :

$$\det(F) = \det(G_i) = 1, \quad \forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket. \quad (5)$$

Le problème mis sous forme variationnelle est alors le suivant :

*Chercher  $(u - u_0) \in \mathcal{V}$ ,  $p \in \mathcal{P}$ ,  $G_i \in \mathcal{H}$  et  $q_i \in \mathcal{Q}$ ,  $\forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ , tels que :*

$$\begin{cases} \int_{\Omega} F \left( 2 \frac{\partial W}{\partial C} (C, G_1, \dots, G_m) - p C^{-1} \right) : \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f \cdot v \, dx + \int_{\Gamma_1} g \cdot v \, d\gamma, & \forall v \in \mathcal{V}, \\ \int_{\Omega} \hat{p} (\det(F) - 1) \, dx = 0, & \forall \hat{p} \in \mathcal{P}, \\ \int_{\Omega} \left( - \frac{\partial W}{\partial G_i} (C, G_1, \dots, G_m) + \nu_i \dot{G}_i^{-1} - q_i G_i^{-1} \right) : H \, dx = 0, & \forall H \in \mathcal{H}, \\ \int_{\Omega} \hat{q} (\det(G_i) - 1) \, dx = 0, & \forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket, \quad \forall \hat{q} \in \mathcal{Q}. \end{cases}$$

où  $\mathcal{V}$ ,  $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{Q}$  sont des espaces fonctionnels convenables.

Ainsi, le problème associe une équation aux dérivées partielles (EDP) non linéaire, des conditions d'incompressibilité (5) et  $m$  équations aux dérivées ordinaires (EDO) décrivant l'évolution des variables internes.

## 2.1 Résolution numérique d'un modèle de viscoélasticité non linéaire

Dans le Chapitre 5, en nous appuyant sur les travaux de Le Tallec [55], nous expliquons les principales étapes de discrétisation du modèle viscoélastique introduit et nous présentons les techniques de résolution qui ont été effectivement implémentées en trois dimensions, dans un code en langage C. La discrétisation en espace met en œuvre des

éléments finis de Lagrange  $\mathbb{P}_0$  pour les pressions et les variables internes, et  $\mathbb{P}_2$  pour le déplacement. Le maillage du domaine de calcul est tétraédrique conforme. La discrétisation en temps est réalisée par un schéma d'Euler implicite. Les EDO caractérisant l'évolution des variables internes, une fois discrétisées, peuvent être mises sous la forme d'un problème de minimisation sous contrainte. Par une astuce utilisant le caractère symétrique des variables internes et les propriétés d'incompressibilité, le problème se ramène ensuite à un problème de minimisation, sans contrainte cette fois-ci. Nous le résolvons alors par une méthode de Newton. L'EDP non linéaire, quant à elle, se met sous la forme d'un système discret non linéaire. Celui-ci est également linéarisé par une méthode de Newton. Afin d'initialiser convenablement l'algorithme de Newton pour assurer sa convergence, il est nécessaire d'appliquer le chargement extérieur au matériau par incrément. Le système linéaire résultant est typique des problèmes mixtes et est résolu par une technique de Lagrangien augmenté, Fortin et Glowinski [25], utilisant un gradient conjugué préconditionné. Compte-tenu de la complexité des algorithmes utilisés et de la taille des maillage que nous considérons, une attention particulière est portée à chaque étape pour être la plus efficace en terme de mémoire et de temps de calcul. Nous présentons ensuite le calcul d'une solution analytique pour le modèle considéré dans le cas simple d'une compression unidimensionnelle. Les résultats numériques sont ainsi confrontés à cette solution analytique pour validation. Nous présentons enfin un exemple d'application sur une pièce mécanique à géométrie complexe que nous soumettons à une grande déformation.

## 2.2 Application en biomécanique cérébrale

Le Chapitre 6 revient sur l'application biomédicale envisagée. Il s'agit de la simulation numérique des déformations des structures cérébrales. Nous exposons en détail les motivations de cette étude. Ensuite, nous présentons les étapes d'obtention du maillage de calcul, en trois dimensions, à partir de la segmentation d'images obtenues par résonance magnétique. Nous confrontons les résultats numériques obtenus par le code de calcul à des expériences menées par Miller [67] sur des cerveaux de porcs. Ceci permet de valider le choix du modèle retenu. En particulier, nous identifions ainsi la valeur des coefficients de notre modèle. Un exemple de simulation numérique (voir Figure 5) est présenté pour conclure et souligner l'efficacité de notre approche.

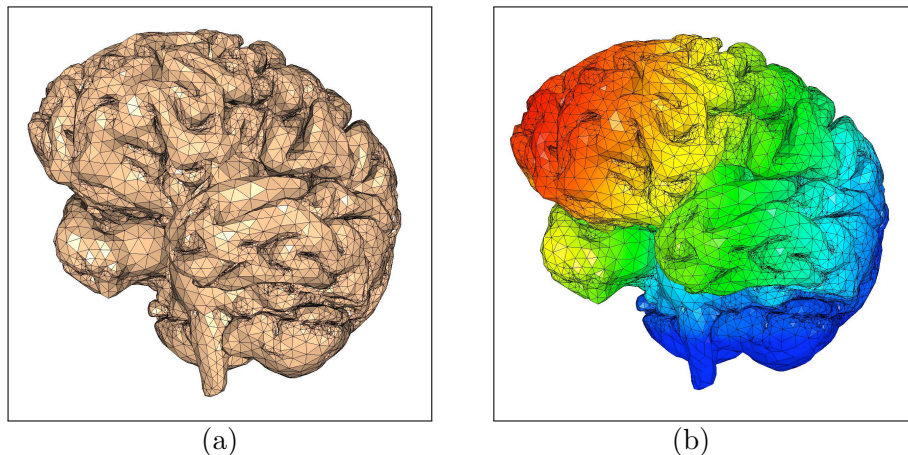


FIG. 5 – (a) Maillage. (b) Champ de déformations du cerveau soumis à la gravité.

### 2.3 Modèle couplé viscoélastique/viscoplastique

Dans le Chapitre 7, nous nous intéressons au couplage du modèle introduit précédemment avec un modèle de viscoplasticité en grandes déformations (voir Figure 6). Nous commençons par éclairer les notions en présentant deux modèles linéaires unidimensionnels : le modèle viscoélastique de Maxwell [64] et le modèle élastique-viscoplastique de Perzyna [76]. Puis, nous nous attachons à dériver le modèle viscoélastique/viscoplastique en satisfaisant successivement les grands principes de la mécanique :

1. Tout d'abord, le Principe des Travaux Virtuels, Ciarlet [14], permet d'établir les équations d'équilibre en grandes déformations. Celles-ci sont posées sur la configuration de référence  $\Omega$ .
2. Ensuite, la loi de comportement du matériau découle de l'application du principe de la dissipation d'énergie de Clausius-Duhem, Truesdell [87].
3. Dans le cas d'un processus non plastique, nous pouvons exprimer la dissipation d'énergie engendrée par la présence des amortisseurs visqueux. Ceci conduit aux équations du système (EDO).
4. Enfin, l'évolution de la variable plastique est régie par le Principe du Travail Plastique Maximal (énoncé par Hill [34]).

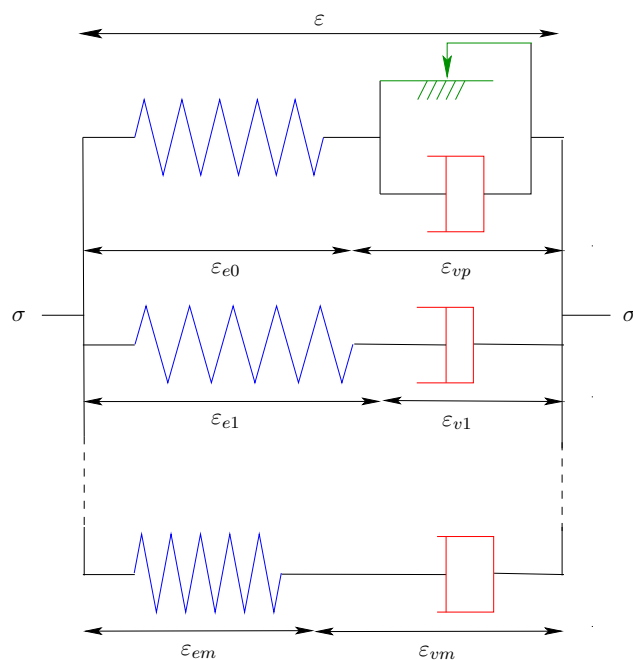


FIG. 6 – Schéma rhéologique du modèle viscoélastique/viscoplastique linéaire unidimensionnel avec  $\sigma$  la contrainte et  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon_e$ ,  $\varepsilon_v$  et  $\varepsilon_{vp}$  les déformations totale, élastique, visqueuse et viscoplastique, respectivement.

Première partie

**Un problème inverse en  
viscoélasticité linéaire**



# Introduction

Dans l'ensemble de cette première partie, nous nous intéressons au problème de la viscoélasticité linéaire, avec pour objectif final l'étude du problème inverse de détermination d'un coefficient viscoélastique. Introduisons le système de la viscoélasticité, muni de conditions initiales et de conditions aux bords adéquates. Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^3$ , de frontière  $\partial\Omega$  supposée suffisamment régulière (a priori  $C^{1,1}$  suffit pour notre problème). Le système est le suivant :

$$\begin{cases} \mathcal{P}u(x, t) = f(x, t), & \forall (x, t) \in \Omega \times (0, +\infty), \\ u(x, 0) = \bar{u}_0(x), & \forall x \in \Omega, \\ \partial_t u(x, 0) = \bar{u}_1(x), & \forall x \in \Omega, \\ u(x, t) = 0, & \forall (x, t) \in \partial\Omega \times (0, +\infty), \end{cases} \quad (1)$$

où  $\mathcal{P}$  est l'opérateur hyperbolique intégro-différentiel défini de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}u(x, t) &= \partial_t^2 u(x, t) - \nabla \cdot (\mu(x)(\nabla u(x, t) + \nabla u(x, t)^t) + \lambda(x)(\nabla \cdot u)(x, t)I) \\ &+ \int_0^t \nabla \cdot (\tilde{\mu}(x, s)(\nabla u(x, t-s) + \nabla u(x, t-s)^t) + \tilde{\lambda}(x, s)(\nabla \cdot u)(x, t-s)I) ds. \end{aligned} \quad (2)$$

Ce système modélise la dynamique, en trois dimensions, d'un matériau viscoélastique soumis à un chargement extérieur représenté par  $f$ . Le vecteur  $u$  est ici le déplacement mesuré par rapport à la configuration de référence  $\Omega$ . Le vecteur  $\bar{u}_0$  est le déplacement initial tandis que  $\bar{u}_1$  est la vitesse initiale. Les coefficients  $\lambda$  et  $\mu$  sont appelés les coefficients de Lamé et caractérisent la réponse élastique du matériau tandis que  $\tilde{\lambda}$  et  $\tilde{\mu}$  sont les coefficients de viscosité. Le caractère bien posé du problème direct (1)-(2) est assuré par la proposition suivante :

**Proposition 0.5** (Théorème 4.2 par Bellout et Nečas [6]). *Sous certaines hypothèses de régularité portant sur les coefficients  $(\lambda, \mu, \tilde{\lambda}, \tilde{\mu})$ , supposées satisfaites ici, si  $\bar{u}_0 \in H_0^1(\Omega)^3$ ,  $\bar{u}_1 \in L^2(\Omega)^3$  et  $f \in L^\infty(0, +\infty; L^2(\Omega)^3) \cap L^2(0, +\infty; L^2(\Omega)^3)$ , alors il existe une unique solution faible*

$$u \in L^\infty(0, +\infty; H_0^1(\Omega)^3) \cap W^{1,\infty}(0, +\infty; L^2(\Omega)^3) \cap W^{2,\infty}(0, +\infty; H^{-1}(\Omega)^3),$$

au problème (1)-(2).

La première partie de ce manuscrit est composée de quatre chapitres dont un bref résumé est donné ci-dessous.

## Chapitre 1

Le Chapitre 1 est consacré à la démonstration d'une inégalité de Carleman pour l'opérateur  $\mathcal{P}$ . C'est une inégalité d'énergie pondérée. Elle permet d'estimer la norme de la solution d'une équation aux dérivées partielles par la norme de l'opérateur appliquée à la solution et par une norme locale de la solution (dans un domaine d'observation restreint). Cette inégalité de Carleman est un outil puissant qui nous sera utile au Chapitre 3 pour dériver les estimations de stabilité dans l'étude du problème inverse. Pour démontrer cette inégalité, nous introduisons plusieurs changements de variables afin de ramener le problème (1)-(2) à une équation d'onde scalaire pour laquelle le résultat est déjà connu.

## Chapitre 2

Dans ce chapitre, nous démontrons un résultat de stabilité associé au prolongement unique pour l'opérateur  $\mathcal{P}$ . Le résultat de prolongement unique stipule qu'en l'absence de source, si la solution  $u$  est nulle sur une partie de  $\partial\Omega$  alors elle est nulle dans un ouvert proche de  $\partial\Omega$ . La principale difficulté vient du fait que les coefficients de l'opérateur  $\mathcal{P}$  dépendent du temps, donc les méthodes classiques ne s'appliquent plus. Nous introduisons une transformation qui permet de changer localement le problème en un système elliptique pour lequel les résultats sont connus.

## Chapitre 3

Un problème inverse s'énonce de la manière suivante : si je peux mesurer la solution d'une équation, suis-je capable d'en retrouver les caractéristiques ? Nous nous intéressons dans ce chapitre à la récupération d'un des coefficients viscoélastiques. Plus précisément, nous faisons l'hypothèse que le coefficient  $\tilde{\mu}$  peut se décomposer sous la forme

$$\tilde{\mu}(x, t) = p(x)h(t), \quad \forall (x, t) \in \Omega \times (0, +\infty), \quad (3)$$

et nous regardons le problème de récupération de la dépendance spatiale  $p$  à partir de mesures du déplacement  $u$  du matériau. Les questions à se poser sont alors celles de l'unicité et de la stabilité de la récupération. Nous démontrons un résultat de stabilité höldérienne relative à une unique mesure interne. La preuve de ce résultat repose sur la méthode de Bukhgeim et Klivanov [11] et sur l'inégalité de Carleman démontrée au Chapitre 1. En utilisant alors le résultat de prolongement unique du Chapitre 2, nous prouvons ensuite un résultat de stabilité logarithmique relative à une unique mesure sur une partie arbitrairement petite de la frontière.

## Chapitre 4

Le Chapitre 4 est quant à lui dédié à la résolution numérique du problème inverse de récupération du coefficient  $p$  en deux dimensions d'espace. Pour résoudre ce problème inverse, nous proposons de minimiser une fonctionnelle non quadratique. Afin de régulariser la méthode (voir Kirsch [48]), nous introduisons une base spectrale que nous adaptons en fréquence à la solution. Nous montrons que cette idée, combinée à une adaptation de maillage classique, permet d'améliorer la précision du résultat en diminuant l'erreur numérique. Le coefficient inconnu peut ainsi être récupéré avec succès en chaque nœud du domaine discretisé. Nous présentons enfin une application possible de cette méthode à la détection des tumeurs cérébrales.

## Notations

Introduisons maintenant quelques notations qui seront utiles dans plusieurs chapitres de cette première partie. Nous définissons tout d'abord la fonction poids de Carleman :

**Définition 0.0.1** (Fonction poids de Carleman). *Pour  $x_0 \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$  et  $\beta > 0$ , nous définissons une fonction  $\varphi$  de la manière suivante :*

$$\varphi(x, t) = |x - x_0|^2 - \beta t^2, \quad \forall (x, t) \in \Omega \times (0, +\infty). \quad (4)$$

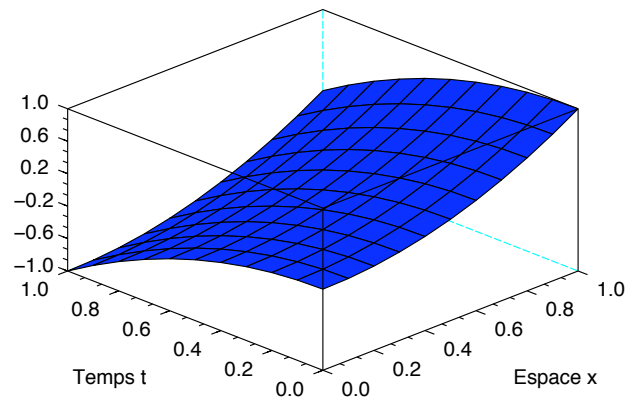


FIG. 1 – Fonction poids de Carleman  $\varphi(x, t)$  pour  $x_0 = 0$  et  $\beta = 1$ .

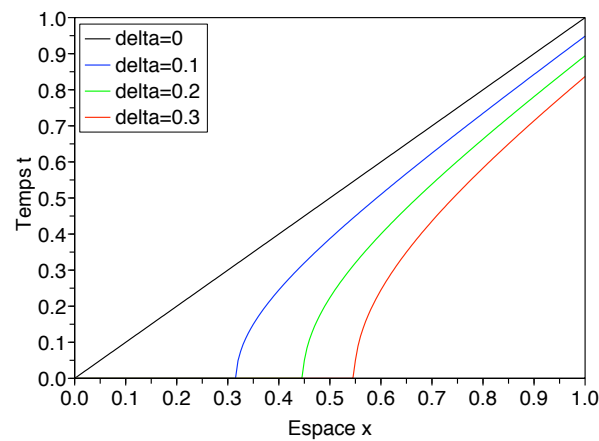


FIG. 2 – Isovaleurs de la fonction poids de Carleman  $\varphi(x, t) = \delta$  pour  $x_0 = 0$  et  $\beta = 1$ .

Cette fonction est illustrée sur les Figures 1 et 2, dans le cas particulier de  $x_0 = 0$  et  $\beta = 1$ . Nous introduisons ensuite :



1. **Distances** (Figure 3)

Pour  $x_0 \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$ , on pose

$$d_0 = \inf_{x \in \Omega} |x - x_0| \quad \text{et} \quad d = \sup_{x \in \Omega} |x - x_0|.$$

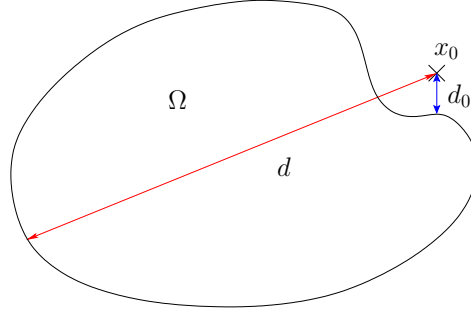


FIG. 3 – Définitions des distances  $d_0$  et  $d$ .

2. **Domaines** (Figure 4)

Pour  $\varepsilon > 0$  et  $\delta > 0$ , on note

$$\begin{aligned} \Omega(\varepsilon) &= \{x \in \Omega, \text{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}, & \Omega(0) &= \Omega, \\ Q(\varepsilon, \delta) &= \{(x, t) \in \Omega(\varepsilon) \times (0, +\infty), \varphi(x, t) > \delta\}, & Q(0, 0) &= Q. \end{aligned}$$

Nous remarquons que  $Q \subset \Omega \times (0, T)$  dès que  $T > \frac{d}{\sqrt{\beta}}$ .

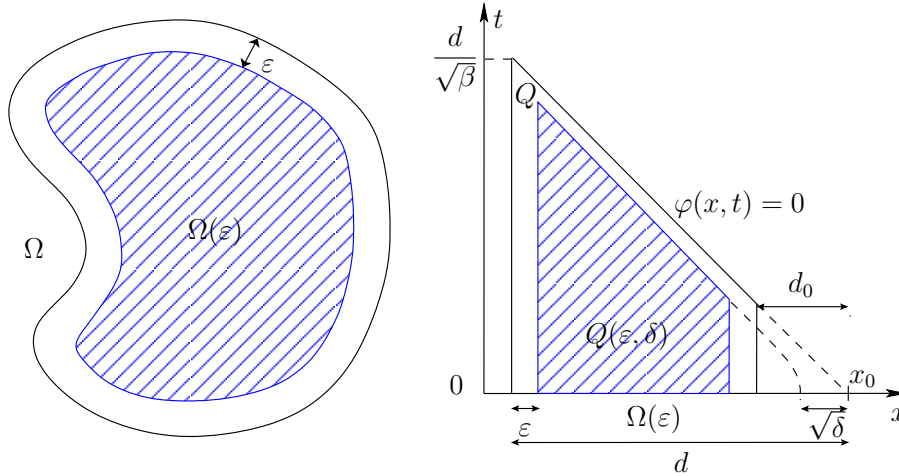


FIG. 4 – Définition des espaces  $\Omega(\varepsilon)$  et  $Q(\varepsilon, \delta)$ .

3. **Normes**

Pour  $Q \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ ,  $\sigma > 0$  et  $k \in \mathbb{N}$ , nous introduisons les normes pondérées suivantes :

$$\begin{aligned} \|\star\|_{H^{k,\sigma}(Q)}^2 &= \sum_{|\alpha| \leq k} \sigma^{2(k-|\alpha|)} \|\partial_{x,t}^\alpha \star\|_{L^2(Q)}^2, \\ \|\star\|_{H_x^{k,\sigma}(Q)}^2 &= \sum_{|\alpha| \leq k} \sigma^{2(k-|\alpha|)} \|\partial_x^\alpha \star\|_{L^2(Q)}^2. \end{aligned}$$

En particulier, nous utiliserons :

$$\|\star\|_{H^{1,\sigma}(Q)}^2 = \|\nabla_{x,t}\star\|_{L^2(Q)}^2 + \sigma^2\|\star\|_{L^2(Q)}^2,$$

où  $\nabla_{x,t} = (\nabla, \partial_t)$  désigne l'opérateur des dérivées premières en espace et en temps. On remarque que pour  $u \in H^{k,\sigma}(\Omega)$ , on a l'équivalence des normes suivantes :

$$\|ue^{\sigma\varphi}\|_{H^{k,\sigma}(Q)}^2 = \sum_{|\alpha|\leq k} \sigma^{2(k-|\alpha|)} \|\partial_{x,t}^\alpha (ue^{\sigma\varphi})\|_{L^2(Q)}^2 \sim \sum_{|\alpha|\leq k} \sigma^{2(k-|\alpha|)} \|(\partial_{x,t}^\alpha u) e^{\sigma\varphi}\|_{L^2(Q)}^2.$$

4. Dans tous les chapitres,  $C$  et  $C_i$ , pour  $1 \leq i \leq 6$  seront des **constantes** réelles positives génériques.

Nous définissons finalement la condition suivante, portant sur une fonction scalaire  $q$  :

**Condition 1.** *La fonction scalaire  $q$  satisfait les deux propriétés suivantes :*

1. *il existe  $K > 0$  tel que  $\forall x \in \bar{\Omega}$ ,  $q(x) \geq K$ ,*
2. *il existe  $x_0 \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$  tel que  $\forall x \in \bar{\Omega}$ ,  $\frac{1}{2}q(x) - \nabla q(x) \cdot (x - x_0) \geq 0$ .*

Armés de ces définitions, nous sommes maintenant en mesure d'énoncer et de démontrer les résultats des chapitres suivants.



# Chapitre 1

## Une inégalité de Carleman pour l'opérateur de la viscoélasticité

Une inégalité de Carleman est une inégalité d'énergie, pondérée par des poids exponentiels. Plus précisément, elle donne une majoration de l'énergie globale du système par la source et par une certaine énergie localisée. La première inégalité de Carleman a été démontrée en 1939 par le mathématicien qui lui a donné son nom, T. Carleman [12]. Dans ce travail séminal, elle permettait de démontrer un résultat d'unicité pour une équation aux dérivées partielles elliptiques en deux dimensions. Depuis, la théorie des inégalités de Carleman a été largement étudiée et généralisée à de larges classes d'opérateurs différentiels (hyperbolique, elliptique et parabolique) en dimension quelconque. Elles sont aujourd'hui principalement utilisées pour dériver des estimations de stabilité dans l'étude de problèmes inverses. Pour un traitement général des inégalités de Carleman, le lecteur pourra se reporter à :

- Hörmander [36] dans le cas où le symbole de l'opérateur est isotrope et les fonctions considérées sont à support compact (inégalités de Carleman locales),
- Isakov [43] pour des fonctions toujours à support compact mais pour des opérateurs différentiels dont le symbole est non isotrope,
- Tataru [86], Imanuvilov et Yamamoto [41], Fursikov et Imanuvilov [29] dans le cas de fonctions qui ne sont pas à support compact (inégalités de Carleman globales),
- Klivanov et Timonov [49], Lavrent'ev, Romanov et Shishat'skii [54] pour des inégalités de Carleman ponctuelles.

Ces inégalités restent valables, sans aucune modification, si on ajoute des termes d'ordre inférieur à l'opérateur considéré. Par contre, la présence d'un terme intégral-différentiel ajoute une difficulté en modifiant la structure même de l'équation. Par exemple, dans le cas hyperbolique, l'équation n'est alors plus réversible, du fait de la dissipation d'énergie liée au phénomène visqueux. En pratique, cela empêche d'étendre la solution pour  $t < 0$  afin de travailler sur un intervalle  $(-T, T)$  comme cela est classiquement fait. Il faut alors avoir recours à une inégalité de Carleman ponctuelle. Cette inégalité n'est pas valable dans tout le domaine cylindrique  $\Omega \times (0, T)$  mais seulement dans des domaines bornés par les lignes de la fonction poids de Carleman. En 2006, Cavaterra, Lorenzi et Yamamoto [13] modifient ainsi une inégalité de Carleman ponctuelle de Klivanov et Timonov [49] pour une équation hyperbolique scalaire et y intègrent, grâce à un changement de variable, un terme intégral-différentiel.

Contrairement au cas scalaire, la littérature concernant les systèmes d'équations est peu fournie. En effet, on ne dispose pas de techniques générales autres que celle de multiplier le

système par la matrice des cofacteurs et d'utiliser une inégalité de Carleman scalaire pour le déterminant, Isakov [43]. Mais cette méthode élève la multiplicité des caractéristiques, ce qui rend les démonstrations difficiles. Dans le cas du système de Lamé - opérateur  $\mathcal{P}$  sans le terme intégral, on a cependant quelques résultats. En 2004, Eller *et al.* [23] prouvent une inégalité de Carleman pour des fonctions à support compact. La preuve est basée sur la décomposition de la solution  $u$  en une onde transversale  $\nabla \cdot u$  et une onde longitudinale  $\nabla \wedge u$  vérifiant chacune une équation d'onde scalaire à laquelle on peut alors appliquer les résultats connus, Tataru [86]. En 2008, Imanuvilov et Yamamoto [41] étendent ce résultat à des fonctions sans support compact. La difficulté vient du fait que la trace des fonctions  $\nabla \wedge u$  et  $\nabla \cdot u$  n'est pas définie sur  $\partial\Omega$  et qu'il faut donc travailler dans un ouvert loin du bord.

Dans ce chapitre, nous démontrons une inégalité de Carleman pour l'opérateur de la viscoélasticité 3D - opérateur  $\mathcal{P}$  complet - en combinant les techniques précédemment citées. Les résultats de ce chapitre ont été publiés dans [19].

## 1.1 Enoncé du Théorème 1.1

**Théorème 1.1** (Inégalité de Carleman). *Soit  $\mathcal{P}$  l'opérateur défini en (2). On suppose que :*

$$(H1) \quad (\lambda, \mu) \in C^2(\overline{\Omega})^2 \text{ et } (\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}) \in C^2(\overline{\Omega \times (0, +\infty)})^2,$$

$$(H2) \quad \mu \text{ et } \lambda + 2\mu \text{ satisfont la condition 1 avec un même } x_0.$$

Alors, il existe  $\beta_0 > 0$  et  $\sigma_0 > 0$  tels que, pour tout  $\beta \leq \beta_0$ , pour tout  $\sigma \geq \sigma_0$ , pour  $\varepsilon > 0$ , pour  $0 < \delta < d_0^2$  et pour tout  $u \in H^2(Q)^3$  satisfaisant  $u(x, 0) = 0$  ou  $\partial_t u(x, 0) = 0$ ,  $\forall x \in \Omega$ , l'inégalité suivante soit vérifiée :

$$\frac{1}{\sigma} \|ue^{\sigma\varphi}\|_{H_x^{2,\sigma}(Q(\varepsilon,\delta))}^2 \leq C \left( \|(\mathcal{P}u)e^{\sigma\varphi}\|_{L^2(Q)}^2 + \|\nabla(\mathcal{P}u)e^{\sigma\varphi}\|_{L^2(Q)}^2 + e^{C\sigma} \|u\|_{H^2(Q(\varepsilon,\delta) \setminus Q(2\varepsilon,\delta))}^2 + \sigma^3 e^{2\sigma\delta} \|u\|_{H^2(Q)}^2 \right),$$

où  $\varphi$  est définie par (4) et  $C > 0$  dépend de la norme  $C^2(\overline{\Omega \times (0, +\infty)})$  du coefficient  $\tilde{\mu}$  mais est indépendante de  $\sigma$ .

Le dernier terme de cette inégalité n'est pas classique puisqu'il est global mais il disparaîtra, le moment venu, grâce à un choix adéquat de  $\sigma$ . Nous aurons alors que si  $\mathcal{P}u = 0$  dans  $Q$  et  $u = 0$  dans  $Q(\varepsilon, \delta) \setminus Q(2\varepsilon, \delta)$  alors  $u = 0$  dans  $Q(\varepsilon, \delta)$ . C'est un résultat de prolongement unique pour l'opérateur  $\mathcal{P}$ .

## 1.2 Preuve du Théorème 1.1

Cette partie est consacrée à la démonstration de l'inégalité de Carleman du Théorème 1.1. La preuve consiste à découpler le système d'équations initial en écrivant les équations satisfaites par  $u$ ,  $\nabla \wedge u$  et  $\nabla \cdot u$ . Ensuite, l'idée est d'introduire un changement de variable pour réduire le problème à une équation hyperbolique scalaire pour laquelle l'inégalité de Carleman est connue (Corollaire 1.3). Finalement, on revient à la variable initiale  $u$  par une série d'inégalités en supposant la régularité des coefficients et en utilisant un lemme

fondamental (Lemme 1.4).

Soit  $u$  la solution du système :

$$\begin{cases} \mathcal{P}u(x, t) = F(x, t), & \forall (x, t) \in \Omega \times (0, +\infty), \\ u(x, 0) = 0 \quad \text{or} \quad \partial_t u(x, 0) = 0, & \forall x \in \Omega, \\ u(x, t) = 0, & \forall (x, t) \in \partial\Omega \times (0, +\infty), \end{cases} \quad (1.1)$$

On suppose que les hypothèses (H1) et (H2) sont satisfaites. Nous allons tout d'abord découpler les équations pour obtenir des équations couplées à l'ordre un uniquement.

### Découpler le système d'équations

Pour ce faire, on repart de l'équation (1.1) que l'on réécrit sous la forme développée :

$$\begin{aligned} & \partial_t^2 u(x, t) - \mu(x)\Delta u(x, t) - (\mu + \lambda)(x)\nabla(\nabla \cdot u)(x, t) - (\nabla \cdot u)(x, t)\nabla\lambda(x) \\ & - (\nabla u(x, t) + \nabla u(x, t)^t) \cdot \nabla\mu(x) + \int_0^t \tilde{\mu}(x, t-s)\Delta u(x, s)ds \\ & + \int_0^t (\tilde{\mu} + \tilde{\lambda})(x, t-s)\nabla(\nabla \cdot u)(x, s)ds + \int_0^t (\nabla \cdot u)(x, s)\nabla\tilde{\lambda}(x, t-s)ds \\ & + \int_0^t (\nabla u(x, s) + \nabla u(x, s)^t) \cdot \nabla\tilde{\mu}(x, t-s)ds = F(x, t), \quad \forall (x, t) \in \Omega \times (0, +\infty). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Remarquez le changement de variable dans la convolution du terme intégral. On prend la divergence de (1.2) :

$$\begin{aligned} & \partial_t^2(\nabla \cdot u)(x, t) - (\lambda + 2\mu)(x)\Delta(\nabla \cdot u)(x, t) + \int_0^t (\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu})(x, t-s)\Delta(\nabla \cdot u)(x, s)ds \\ & = (\nabla \cdot F)(x, t) + 2\nabla(\lambda + 2\mu)(x) \wedge \nabla(\nabla \cdot u)(x, t) + 2\nabla\mu(x) \cdot (\nabla \wedge (\nabla \wedge u))(x, t) \\ & + (\nabla \cdot u)(x, t)\Delta\lambda(x) + (\nabla u(x, t) + \nabla u(x, t)^t) : \nabla^2\mu(x) \\ & - \int_0^t 2\nabla(\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu})(x, t-s)^\perp \cdot \nabla(\nabla \cdot u)(x, s)ds - \int_0^t 2\nabla\tilde{\mu}(x, t-s) \cdot (\nabla \wedge (\nabla \wedge u))(x, s)ds \\ & - \int_0^t (\nabla \cdot u)(x, s)\Delta\tilde{\lambda}(x, t-s)ds - \int_0^t (\nabla u(x, s) + \nabla u(x, s)^t) : \nabla^2\tilde{\mu}(x, t-s)ds. \end{aligned}$$

On prend alors le rotationnel de (1.2) :

$$\begin{aligned} & \partial_t^2(\nabla \wedge u)(x, t) - \mu(x)\Delta(\nabla \wedge u)(x, t) + \int_0^t \tilde{\mu}(x, t-s)\Delta(\nabla \wedge u)(x, s)ds \\ & = (\nabla \wedge F)(x, t) + 2\nabla\mu(x) \wedge \nabla(\nabla \cdot u)(x, t) + \nabla\mu(x) \wedge (\nabla \wedge (\nabla \wedge u))(x, t) \\ & + \nabla\mu(x) \cdot \nabla(\nabla \wedge u)(x, t) + (\nabla u(x, t) + \nabla u(x, t)^t) \wedge \nabla^2\mu(x) \\ & - \int_0^t 2\nabla\tilde{\mu}(x, t-s) \wedge \nabla(\nabla \cdot u)(x, s)ds - \int_0^t \nabla\tilde{\mu}(x, t-s) \wedge (\nabla \wedge (\nabla \wedge u))(x, s)ds \\ & - \int_0^t \nabla\tilde{\mu}(x, t-s) \cdot \nabla(\nabla \wedge u)(x, s)ds - \int_0^t (\nabla u(x, s) + \nabla u(x, s)^t) \wedge (\nabla^2\tilde{\mu}(x, t-s))ds \end{aligned}$$

On introduit les vecteurs  $u_1 = u$ ,  $u_3 = \nabla \wedge u$  et le scalaire  $u_2 = \nabla \cdot u$  qui satisfont alors

le système de sept équations suivant :

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u_i(x, t) - q_i(x) \Delta u_i(x, t) + \int_0^t \tilde{q}_i(x, t-s) \Delta u_i(x, s) ds &= F_i(x, t) + A_i(u_1, u_2, u_3)(x, t), \\ \forall i \in \{1, 2, 3\}, \quad \forall (x, t) \in \Omega \times (0, +\infty), \end{aligned} \quad (1.3)$$

où on a posé :

$$\begin{aligned} q_1 = q_2 = \mu, \quad q_3 = \lambda + 2\mu, \quad \tilde{q}_1 = \tilde{q}_2 = \tilde{\mu}, \quad \tilde{q}_3 = \tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}, \\ F_1 = F, \quad F_2 = \nabla \wedge F, \quad \text{et} \quad F_3 = \nabla \cdot F. \end{aligned}$$

Ici, les termes de couplage  $A_i$  sont des opérateurs intégro-différentiels du premier ordre en  $x$  and  $t$  dont tous les coefficients sont bornés dans  $\Omega \times (0, +\infty)$ , d'après l'hypothèse (H1). Les sept équations résultantes sont couplées uniquement à l'ordre un, donc on peut leur appliquer individuellement les résultats connus pour les équations scalaires. Cependant, le problème maintenant est que les traces des fonctions  $\nabla \cdot u$  et  $\nabla \wedge u$  sur  $\partial\Omega$  ne sont plus bien définies. Nous avons besoin de changer l'équation hyperbolique intégro-différentielle (1.3) en une équation hyperbolique afin de lui appliquer les résultats classiques.

### Utiliser un changement de variable

Nous introduisons le changement de variable suivant :

$$\tilde{u}_i(x, t) = q_i(x) u_i(x, t) - \int_0^t \tilde{q}_i(x, t-s) u_i(x, s) ds, \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}, \quad \forall (x, t) \in \Omega \times (0, +\infty). \quad (1.4)$$

On a alors, pour tout  $i \in \{1, 2, 3\}$  et pour tout  $(x, t) \in \Omega \times (0, +\infty)$ ,

$$\partial_t^2 \tilde{u}_i(x, t) = q_i(x) \partial_t^2 u_i(x, t) - \int_0^t \partial_t^2 \tilde{q}_i(x, t-s) u_i(x, s) ds + \partial_t \tilde{q}_i(x, 0) u_i(x, t) + \tilde{q}_i(x, 0) \partial_t u_i(x, t),$$

et

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{u}_i(x, t) &= q_i(x) \Delta u_i(x, t) - \int_0^t \tilde{q}_i(x, t-s) \Delta u_i(x, s) ds + 2\nabla q_i(x) \cdot \nabla u_i(x, t) \\ &\quad + \Delta q_i(x) u_i(x, t) - 2 \int_0^t \nabla \tilde{q}_i(x, t-s) \cdot \nabla u_i(x, s) ds - \int_0^t \Delta \tilde{q}_i(x, t-s) u_i(x, s) ds. \end{aligned}$$

Donc, pour tout  $i \in \{1, 2, 3\}$  et pour tout  $(x, t) \in \Omega \times (0, +\infty)$ , la fonction  $\tilde{u}_i$  satisfait un système hyperbolique de la forme :

$$\partial_t^2 \tilde{u}_i(x, t) - q_i(x) \Delta \tilde{u}_i(x, t) = q_i(x) (F_i(x, t) + A_i(u_1, u_2, u_3)(x, t)) + L_i(u_i)(x, t),$$

où  $L_i$  est un opérateur intégro-différentiel du premier ordre donc tous les coefficients sont bornés dans  $\Omega \times (0, +\infty)$ . Nous allons maintenant utiliser une inégalité de Carleman pour une équation hyperbolique scalaire comme celle satisfaite par  $\tilde{u}_i$ .

### Utiliser une inégalité de Carleman pour une équation hyperbolique scalaire

Les équations que l'on obtient sont valides dans  $(0, +\infty)$  mais, à cause de la présence des termes intégraux, on ne peut pas étendre leurs solutions à  $(-\infty, 0)$ . Ceci explique pourquoi on ne va pas utiliser une inégalité de Carleman globale classiquement rencontrée dans la littérature mais l'inégalité de Carleman ponctuelle suivante :

**Proposition 1.2** (Théorème 2.2.4 par Klivanov et Timonov [49]). *Soit  $q \in C^2(\overline{\Omega})$  satisfaisant la Condition 1 et  $\varphi$  définie par (4). Alors, il existe  $\beta_0 > 0$  et  $\sigma_0 > 0$  tels que, pour tout  $\beta \leq \beta_0$ , pour tout  $\sigma \geq \sigma_0$ , pour tout  $\delta > 0$  et pour tout  $u \in H^2(Q(0, \delta))$ , on ait :*

$$\begin{aligned} & (\sigma |\nabla_{x,t} u(x, t)|^2 + \sigma^3 |u(x, t)|^2) e^{2\sigma\varphi(x,t)} + \nabla \cdot U(x, t) + \partial_t V(x, t) \\ & \leq C |\partial_t^2 u(x, t) - q(x)\Delta u(x, t)|^2 e^{2\sigma\varphi(x,t)}, \quad \forall (x, t) \in Q(0, \delta). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Ici,  $(U, V)$  est une fonction à valeurs vectorielles qui satisfait

$$|U(x, t)| + |V(x, t)| \leq C (\sigma |\nabla_{x,t} u(x, t)|^2 + \sigma^3 |u(x, t)|^2) e^{2\sigma\varphi(x,t)}, \quad \forall (x, t) \in Q(0, \delta).$$

De plus,  $V(x, 0) = 0$ ,  $\forall x \in \Omega$ , si  $u(x, 0) = 0$  ou  $\partial_t u(x, 0) = 0$ ,  $\forall x \in \Omega$ .

De cette proposition dont on peut trouver la démonstration en Annexe A, on déduit le corollaire suivant :

**Corollaire 1.3.** *Soit  $q \in C^2(\overline{\Omega})$  satisfaisant la Condition 1 et  $\varphi$  définie par (4). Alors, il existe  $\beta_0 > 0$  et  $\sigma_0 > 0$  tels que, pour tout  $\beta \leq \beta_0$ , pour tout  $\sigma \geq \sigma_0$ , pour tout  $\delta > 0$  et pour tout  $u \in H^2(Q(0, \delta))$  satisfaisant  $u(x, 0) = 0$  ou  $\partial_t u(x, 0) = 0$ ,  $\forall x \in \Omega$ , on ait*

$$\sigma \|ue^{\sigma\varphi}\|_{H^{1,\sigma}(Q(0,\delta))}^2 \leq C \left( \|(\partial_t^2 u - q\Delta u)e^{\sigma\varphi}\|_{L^2(Q(0,\delta))}^2 + \sigma \|ue^{\sigma\varphi}\|_{H^{1,\sigma}(\partial Q(0,\delta) \setminus (\Omega \times \{0\}))}^2 \right). \quad (1.6)$$

*Démonstration.* Il suffit d'intégrer (1.5) sur  $Q(0, \delta)$  :

$$\begin{aligned} & \int_{Q(0,\delta)} (\sigma |\nabla_{x,t} u(x, t)|^2 + \sigma^3 |u(x, t)|^2) e^{2\sigma\varphi(x,t)} dx dt \\ & \leq - \int_{Q(0,\delta)} \left( \nabla \cdot U(x, t) - \partial_t V(x, t) + C |\partial_t^2 u(x, t) - \mu(x)\delta u(x, t)|^2 e^{2\sigma\varphi(x,t)} \right) dx dt. \end{aligned}$$

On introduit

$$\forall t \geq 0, \quad \Omega_t(\varepsilon, \delta) = Q(\varepsilon, \delta) \cap (\Omega \times \{t\})$$

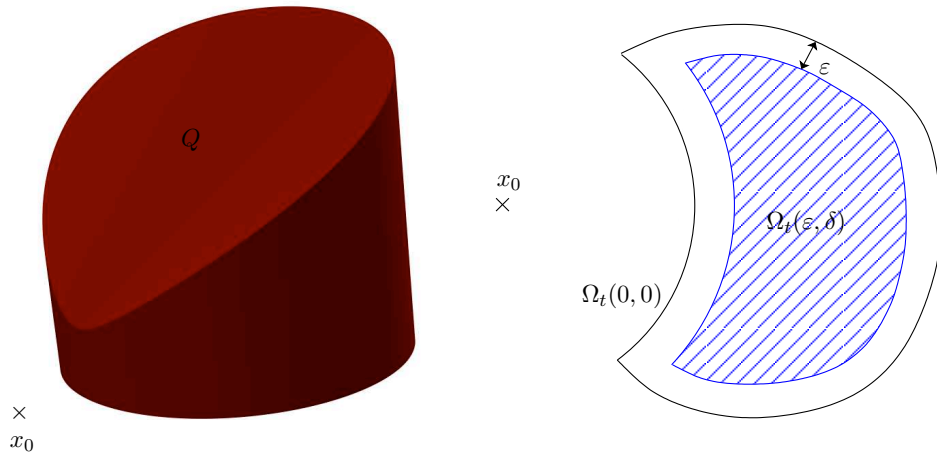
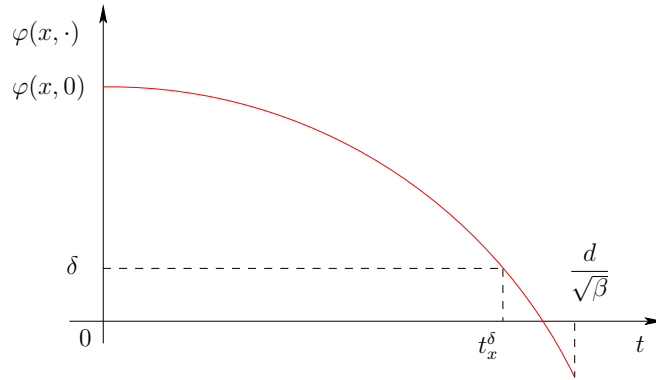


FIG. 1.1 – Définition de l'ouvert  $\Omega_t(\varepsilon, \delta)$ .



FIG. 1.2 – Définition du temps  $t_x^\delta$ .

$$\forall x \in \Omega, \quad t_x^\delta = \begin{cases} \sqrt{\frac{|x - x_0|^2 - \delta}{\beta}} & \text{si } \delta < |x - x_0|^2, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ces deux notations sont illustrées sur les Figures 1.2 et 1.1. On remarque alors que

$$\begin{aligned} \int_{Q(0,\delta)} \nabla \cdot U(x,t) dx dt &= \int_0^{+\infty} \int_{\Omega_t(0,\delta)} \nabla \cdot U(x,t) dx dt = \int_0^{+\infty} \int_{\partial\Omega_t(0,\delta)} U(x,t) \cdot n dx dt \\ &= \int_{\partial Q(0,\delta) \setminus (\Omega \times \{0\})} U(x,t) \cdot n dx dt \end{aligned}$$

et que

$$\begin{aligned} \int_{Q(0,\delta)} \partial_t V(x,t) dx dt &= \int_{\Omega} \int_0^{t_x^\delta} \partial_t V(x,t) dt dx = \int_{\Omega} (V(x,t_x^\delta) - V(x,0)) dx \\ &= \int_{\partial Q(0,\delta) \setminus (\Omega \times \{0\})} V(x,t) dx dt. \end{aligned}$$

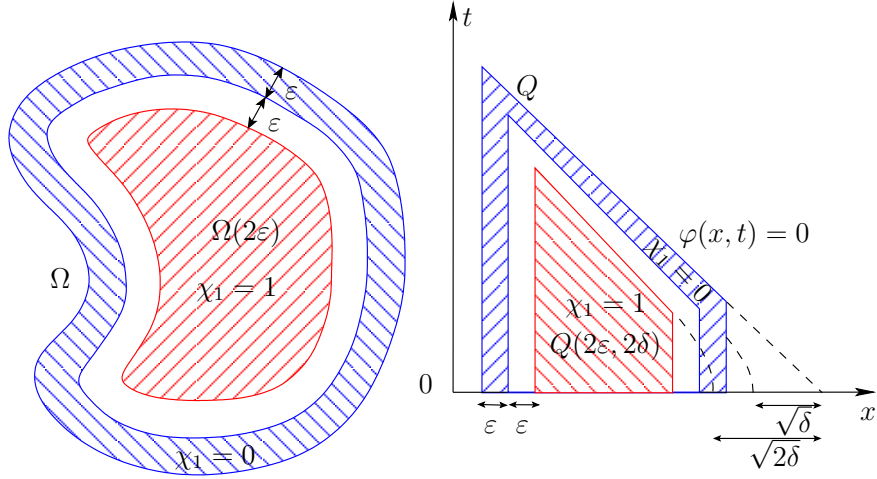
Ainsi,

$$\begin{aligned} - \int_{Q(0,\delta)} \nabla \cdot U(x,t) dx dt - \int_{Q(0,\delta)} \partial_t V(x,t) dx dt &\leq \int_{\partial Q(0,\delta) \setminus (\Omega \times \{0\})} (|U(x,t)| + |V(x,t)|) dx dt \\ &\leq C \int_{\partial Q(0,\delta) \setminus (\Omega \times \{0\})} (\sigma |\nabla_{x,t} u(x,t)|^2 + \sigma^3 |u(x,t)|^2) e^{2\sigma\varphi(x,t)} dx dt. \end{aligned}$$

Ceci démontre le résultat recherché. C'est le résultat sous cette forme que l'on va utiliser dans la suite de la démonstration du Théorème 1.1.  $\square$

Comme on l'a souligné en introduction, la trace des fonctions  $u_i$  n'est plus connue sur  $\partial\Omega$ . Pour s'affranchir du terme de bord, on va donc appliquer l'inégalité de Carleman du Corollaire 1.3 dans un domaine intérieur. Soient  $\varepsilon > 0$  et  $\delta > 0$ . Nous introduisons la fonction plateau  $\chi_1$  qui satisfait  $0 \leq \chi_1 \leq 1$  et qui est telle que

$$\chi_1(x,t) = \begin{cases} 1, & \text{if } (x,t) \in Q(2\varepsilon, 2\delta), \\ 0, & \text{if } (x,t) \in Q \setminus Q(\varepsilon, \delta). \end{cases} \quad (1.7)$$

FIG. 1.3 – Définition de la fonction plateau  $\chi_1$ .

Cette fonction est représentée sur la Figure 1.3. On pose alors

$$u_i^*(x, t) = \chi_1(x, t) \tilde{u}_i(x, t), \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}, \quad \forall (x, t) \in \Omega \times (0, +\infty).$$

Ainsi,  $u_i^*$  satisfait l'équation

$$\begin{aligned} & \partial_t^2 u_i^*(x, t) - q_i(x) \Delta u_i^*(x, t) \\ &= \chi_1(x, t) (\partial_t^2 \tilde{u}_i(x, t) - \mu(x) \Delta \tilde{u}_i(x, t)) + 2\partial_t \chi_1(x, t) \partial_t \tilde{u}_i(x, t) \\ & \quad + \tilde{u}_i(x, t) (\partial_t^2 \chi_1(x, t) - \mu(x) \Delta \chi_1(x, t)) - 2\mu(x) \nabla \chi_1(x, t) \cdot \nabla \tilde{u}_i(x, t) \\ &= \chi_1(x, t) (q_i(x) (F_i(x, t) + A_i(u_1, u_2, u_3)(x, t)) + L_i(u_i)(x, t)) + \tilde{L}_i(\tilde{u}_i)(x, t), \end{aligned}$$

où  $\tilde{L}_i$  est un opérateur intégro-différentiel du premier ordre dont tous les coefficients sont bornés dans  $\Omega \times (0, +\infty)$ .

Puisque l'on a supposé que  $u(x, 0) = 0$  ou  $\partial_t u(x, 0) = 0, \forall x \in \Omega$ , et que, selon (H2), le coefficient  $q_i$  satisfait la Condition 1, on peut appliquer le Corollaire 1.3 à  $u_i^*$ , *i.e.* il existe  $\beta > 0$  suffisamment petit tel que, pour  $\sigma > 0$  suffisamment grand, on ait

$$\sigma \|u_i^* e^{\sigma\varphi}\|_{H^{1,\sigma}(Q(\varepsilon,\delta))}^2 \leq C \|(\partial_t^2 u_i^* - q_i \Delta u_i^*) e^{\sigma\varphi}\|_{L^2(Q(\varepsilon,\delta))}^2, \quad (1.8)$$

sans terme de bord car  $u_i^*$  est nulle dans  $Q \setminus \overline{Q(\varepsilon, \delta)}$ .

### Revenir à la variable initiale $u$

On va maintenant chercher à majorer (resp. minorer) le membre de droite (resp. de gauche) de l'inégalité (1.8) pour revenir à la variable initiale  $u$ .

### Majoration du membre de droite

On a besoin du lemme fondamental suivant :

**Lemme 1.4** (Lemme 3.1.1 par Klibanov et Timonov [49]). *Soit  $\varphi$  définie en (4). Il existe  $C > 0$  tel que, pour tout  $\sigma > 0$  et pour tout  $u \in L^2(Q)$ ,*

$$\int_Q \left( \int_0^t |u(x, s)| ds \right)^2 e^{2\sigma\varphi(x, t)} dx dt \leq \frac{C}{\sigma} \int_Q |u(x, t)|^2 e^{2\sigma\varphi(x, t)} dx dt.$$

*Démonstration.* En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on peut écrire :

$$\int_Q \left( \int_0^t |u(x, s)| ds \right)^2 e^{2\sigma\varphi(x, t)} dx dt \leq \int_Q \left( \int_0^t |u(x, s)|^2 ds \right) t e^{2\sigma\varphi(x, t)} dx dt.$$

On remarque alors que :

$$t e^{2\sigma\varphi(x, t)} = -\frac{1}{4\beta\sigma} \partial_t (e^{2\sigma\varphi(x, t)}), \quad \forall (x, t) \in Q,$$

d'où,

$$\int_Q \left( \int_0^t |u(x, s)| ds \right)^2 e^{2\sigma\varphi(x, t)} dx dt \leq \int_\Omega \int_0^{t_x^0} -\frac{1}{4\beta\sigma} \left( \int_0^t |u(x, s)|^2 ds \right) \partial_t (e^{2\sigma\varphi(x, t)}) dt dx.$$

On intègre alors par parties pour obtenir :

$$\begin{aligned} & \int_Q \left( \int_0^t |u(x, s)| ds \right)^2 e^{2\sigma\varphi(x, t)} dx dt \\ & \leq \frac{1}{4\beta\sigma} \int_\Omega \left[ \int_0^{t_x^0} |u(x, t)|^2 e^{2\sigma\varphi(x, t)} dt dx - e^{2\sigma\varphi(x, t_x^0)} \left( \int_0^{t_x^0} |u(x, s)|^2 ds \right) dx \right] \\ & \leq \frac{1}{4\beta\sigma} \int_Q |u(x, t)|^2 e^{2\sigma\varphi(x, t)} dx dt, \end{aligned}$$

qui est le résultat voulu pour  $C = \frac{1}{4\beta}$ . □

On prend alors en compte le fait que

- tous les coefficients  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\tilde{\lambda}$ ,  $\tilde{\mu}$  et  $\chi$  sont bornés dans  $Q$  d'après (H1),
- tous les opérateurs  $A_i$ ,  $L_i$  et  $\tilde{L}_i$  sont d'ordre inférieur ou égal à un,
- le Lemme 1.4 s'applique,

pour majorer le membre de droite de (1.8) de la façon suivante :

$$\begin{aligned} & \|(\partial_t^2 u_i^* - q_i \Delta u_i^*) e^{\sigma\varphi}\|_{L^2(Q(\varepsilon, \delta))}^2 \\ & = \left\| \left( \chi (\mu (F_i + A_i(u_1, u_2, u_3)) + L_i(u_i)) + \tilde{L}_i(\tilde{u}_i) \right) e^{\sigma\varphi} \right\|_{L^2(Q(\varepsilon, \delta))}^2 \\ & \leq C \|F_i e^{\sigma\varphi}\|_{L^2(Q)}^2 + C \sum_{1 \leq j \leq 3} \|u_j e^{\sigma\varphi}\|_{H^{1, \sigma}(Q(\varepsilon, \delta))}^2. \end{aligned}$$

Alors,

$$\sigma \|u_i^* e^{\sigma\varphi}\|_{H^{1, \sigma}(Q(\varepsilon, \delta))}^2 \leq C \left( \|F_i e^{\sigma\varphi}\|_{L^2(Q)}^2 + \sum_{1 \leq j \leq 3} \|u_j e^{\sigma\varphi}\|_{H^{1, \sigma}(Q(\varepsilon, \delta))}^2 \right). \quad (1.9)$$

**Minoration du membre de gauche**

On utilise de nouveau le changement de variables (1.4) mis sous la forme :

$$u_i(x, t) = \frac{1}{q_i(x)} \tilde{u}_i(x, t) + \int_0^t \frac{\tilde{q}_i(x, t-s)}{q_i(x)} u_i(x, s) ds, \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}, \quad \forall (x, t) \in \Omega \times (0, +\infty).$$

Alors, on peut écrire, en prenant en compte (H2) et grâce au Lemme 1.4,  $\forall i \in \{1, 2, 3\}$  :

$$\begin{aligned} & \int_{Q(\varepsilon, \delta)} |u_i(x, t)|^2 e^{2\sigma\varphi(x, t)} dx dt \\ & \leq C \int_{Q(\varepsilon, \delta)} |\tilde{u}_i(x, t)|^2 e^{2\sigma\varphi(x, t)} dx dt + \frac{C}{\sigma} \int_{Q(\varepsilon, \delta)} |u_i(x, t)|^2 e^{2\sigma\varphi(x, t)} dx dt. \end{aligned}$$

Pour  $\sigma$  suffisamment grand, on obtient

$$\int_{Q(\varepsilon, \delta)} |u_i(x, t)|^2 e^{2\sigma\varphi(x, t)} dx dt \leq C \int_{Q(\varepsilon, \delta)} |\tilde{u}_i(x, t)|^2 e^{2\sigma\varphi(x, t)} dx dt.$$

De la même manière,

$$\int_{Q(\varepsilon, \delta)} |\nabla_{x, t} u_i(x, t)|^2 e^{2\sigma\varphi(x, t)} dx dt \leq C \int_{Q(\varepsilon, \delta)} (|\tilde{u}_i(x, t)|^2 + |\nabla_{x, t} \tilde{u}_i(x, t)|^2) e^{2\sigma\varphi(x, t)} dx dt$$

ce qui permet d'écrire,  $\forall i \in \{1, 2, 3\}$  :

$$\|u_i e^{\sigma\varphi}\|_{H^{1, \sigma}(Q(\varepsilon, \delta))}^2 \leq C \|\tilde{u}_i e^{\sigma\varphi}\|_{H^{1, \sigma}(Q(\varepsilon, \delta))}^2. \quad (1.10)$$

Par ailleurs,  $\chi_1 = 1$  sur  $Q(2\varepsilon, 2\delta)$ , donc on a  $\tilde{u}_i = u_i^*$ . Par conséquent,  $\forall i \in \{1, 2, 3\}$ , on a

$$\|\tilde{u}_i e^{\sigma\varphi}\|_{H^{1, \sigma}(Q(\varepsilon, \delta))}^2 = \|u_i^* e^{\sigma\varphi}\|_{H^{1, \sigma}(Q(2\varepsilon, 2\delta))}^2 + \|\tilde{u}_i e^{\sigma\varphi}\|_{H^{1, \sigma}(Q(\varepsilon, \delta) \setminus Q(2\varepsilon, 2\delta))}^2. \quad (1.11)$$

Finalement, en utilisant (1.12), (1.10) et (1.13) et de nouveau le Lemme 1.4, on obtient

$$\begin{aligned} & \sum_{1 \leq i \leq 3} \sigma \|u_i e^{\sigma\varphi}\|_{H^{1, \sigma}(Q(\varepsilon, \delta))}^2 \\ & \leq C \sum_{1 \leq i \leq 3} \left( \|F_i e^{\sigma\varphi}\|_{L^2(Q)}^2 + \|u_i e^{\sigma\varphi}\|_{H^{1, \sigma}(Q(\varepsilon, \delta))}^2 + \sigma \|u_i e^{\sigma\varphi}\|_{H^{1, \sigma}(Q(\varepsilon, \delta) \setminus Q(2\varepsilon, 2\delta))}^2 \right) \\ & \leq C \sum_{1 \leq i \leq 3} \left( \|F_i e^{\sigma\varphi}\|_{L^2(Q)}^2 + \sigma \|u_i e^{\sigma\varphi}\|_{H^{1, \sigma}(Q(\varepsilon, \delta) \setminus Q(2\varepsilon, 2\delta))}^2 \right), \end{aligned}$$

car grâce aux poids de Carleman, on absorbe le deuxième terme du membre de droite dans le membre de gauche. Pour conclure, on a encore besoin du lemme suivant.

**Lemme 1.5.** *Soit  $\varphi$  définie par (4). Il existe  $C > 0$  et  $\sigma_0 > 0$  tels que, pour tout  $\sigma \geq \sigma_0$  et pour tout  $u \in H^2(Q)$ , on ait*

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sigma} \|u e^{\sigma\varphi}\|_{H_x^{2, \sigma}(Q(2\varepsilon, 2\delta))}^2 \\ & \leq C \left( \sigma \|u e^{\sigma\varphi}\|_{H_x^{1, \sigma}(Q(\varepsilon, \delta))}^2 + \|\nabla(\nabla \cdot u) e^{\sigma\varphi}\|_{L^2(Q(\varepsilon, \delta))}^2 + \|\nabla(\nabla \wedge u) e^{\sigma\varphi}\|_{L^2(Q(\varepsilon, \delta))}^2 \right). \end{aligned}$$

*Démonstration.* On calcule tout d'abord, pour tout  $(x, t) \in Q$ ,

$$\nabla \left( \chi_1(x, t) u(x, t) e^{\sigma\varphi(x, t)} \right) = (\chi_1(x, t) \nabla u(x, t) + (\chi_1(x, t) \sigma \nabla \varphi(x, t) + \nabla \chi_1(x, t)) u(x, t)) e^{\sigma\varphi(x, t)},$$

où  $\chi_1$  est définie en (1.7). On en déduit que, pour tout  $(x, t) \in Q$ ,

$$\begin{aligned} \Delta \left( \chi_1(x, t) u(x, t) e^{\sigma\varphi(x, t)} \right) &= \nabla \cdot \nabla \left( \chi_1(x, t) u(x, t) e^{\sigma\varphi(x, t)} \right) \\ &= \chi_1(x, t) \Delta u(x, t) e^{\sigma\varphi(x, t)} + 2(\sigma \chi_1(x, t) \nabla \varphi(x, t) + \nabla \chi_1(x, t)) \cdot \nabla u(x, t) e^{\sigma\varphi(x, t)} \\ &\quad + (\sigma^2 \chi_1(x, t) |\nabla \varphi(x, t)|^2 + \sigma \chi_1(x, t) \Delta \varphi(x, t) + \sigma \nabla \varphi(x, t) \cdot \nabla \chi_1(x, t) + \Delta \chi_1(x, t)) u(x, t) e^{\sigma\varphi(x, t)}. \end{aligned}$$

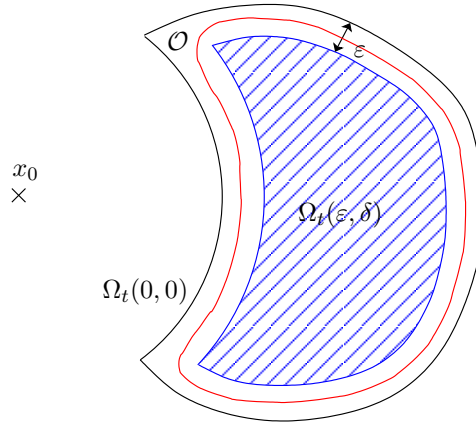


FIG. 1.4 – Définition de l'ouvert régulier  $\mathcal{O}$ .

Pour tout  $t \geq 0$ , on peut trouver un ouvert  $\mathcal{O}$  de frontière régulière (au moins  $C^{1,1}$ ) tel que  $\Omega_t(\varepsilon, \delta) \subset \mathcal{O} \subset \Omega_t(0, 0)$ . Puisque, toujours pour  $t$  fixé, la fonction  $\chi_1(\cdot, t) u(\cdot, t) e^{\sigma\varphi(\cdot, t)}$  est dans  $H^2(\mathcal{O}) \cap H_0^1(\mathcal{O})$ , on peut écrire le résultat classique de continuité pour le problème de Poisson :

$$\|\chi_1(\cdot, t) u(\cdot, t) e^{\sigma\varphi(\cdot, t)}\|_{H^2(\mathcal{O})} \leq C \|\Delta(\chi_1(\cdot, t) u(\cdot, t) e^{\sigma\varphi(\cdot, t)})\|_{L^2(\mathcal{O})},$$

qui implique, en intégrant sur  $t \in (0, +\infty)$ , en remarquant que  $\chi_1 = 0$  dans  $\mathcal{O} \setminus \Omega_t(\varepsilon, \delta)$  et en utilisant la norme pondérée, que

$$\begin{aligned} \|\chi_1 u e^{\sigma\varphi}\|_{H_x^{2,\sigma}(Q(\varepsilon, \delta))}^2 &\leq \|u e^{\sigma\varphi}\|_{L^2(0, +\infty; H^2(\Omega_t(\varepsilon, \delta)))}^2 + \sigma^2 \|\nabla(u e^{\sigma\varphi})\|_{L^2(Q(\varepsilon, \delta))}^2 + \sigma^4 \|u e^{\sigma\varphi}\|_{L^2(Q(\varepsilon, \delta))}^2 \\ &\leq C \left( \|e^{\sigma\varphi} \Delta u\|_{L^2(Q(\varepsilon, \delta))}^2 + \sigma^2 \|e^{\sigma\varphi} \nabla u\|_{L^2(Q(\varepsilon, \delta))}^2 + \sigma^4 \|u e^{\sigma\varphi}\|_{L^2(Q(\varepsilon, \delta))}^2 \right). \end{aligned}$$

On utilise alors la formule classique

$$\Delta u = \nabla(\nabla \cdot u) - \nabla \wedge (\nabla \wedge u),$$

et le fait que  $\chi_1 = 1$  dans  $Q(2\varepsilon, 2\delta)$  pour écrire :

$$\begin{aligned} \|u e^{\sigma\varphi}\|_{H_x^{2,\sigma}(Q(2\varepsilon, 2\delta))}^2 &\leq \|\chi_1 u e^{\sigma\varphi}\|_{H_x^{2,\sigma}(Q(\varepsilon, \delta))}^2 \\ &\leq C \left( \|e^{\sigma\varphi} \nabla(\nabla \cdot u)\|_{L^2(Q(\varepsilon, \delta))}^2 + \|e^{\sigma\varphi} \nabla(\nabla \wedge u)\|_{L^2(Q(\varepsilon, \delta))}^2 + \sigma^2 \|u e^{\sigma\varphi}\|_{H_x^{1,\sigma}(Q(\varepsilon, \delta))}^2 \right), \end{aligned}$$

dont on déduit le résultat.  $\square$

En utilisant le Lemme 1.5, on peut donc écrire :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\sigma} \|ue^{\sigma\varphi}\|_{H_x^{2,\sigma}(Q(2\varepsilon,2\delta))}^2 \\
& \leq C \left( \sigma \|u_1 e^{\sigma\varphi}\|_{H_x^{1,\sigma}(Q(\varepsilon,\delta))}^2 + \|\nabla u_2 e^{\sigma\varphi}\|_{L^2(Q(\varepsilon,\delta))}^2 + \|\nabla u_3 e^{\sigma\varphi}\|_{L^2(Q(\varepsilon,\delta))}^2 \right) \\
& \leq C \sum_{1 \leq i \leq 3} \sigma \|u_i e^{\sigma\varphi}\|_{H^{1,\sigma}(Q(\varepsilon,\delta))}^2 \\
& \leq C \sum_{1 \leq i \leq 3} \left( \|F_i e^{\sigma\varphi}\|_{L^2(Q)}^2 + \sigma \|u_i e^{\sigma\varphi}\|_{H^{1,\sigma}(Q(\varepsilon,\delta) \setminus Q(2\varepsilon,2\delta))}^2 \right),
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\sigma} \|ue^{\sigma\varphi}\|_{H_x^{2,\sigma}(Q(\varepsilon,\delta))}^2 = \frac{1}{\sigma} \|ue^{\sigma\varphi}\|_{H_x^{2,\sigma}(Q(2\varepsilon,2\delta))}^2 + \frac{1}{\sigma} \|ue^{\sigma\varphi}\|_{H_x^{2,\sigma}(Q(\varepsilon,\delta) \setminus Q(2\varepsilon,2\delta))}^2 \\
& \leq C \sum_{1 \leq i \leq 3} \left( \|F_i e^{\sigma\varphi}\|_{L^2(Q)}^2 + \sigma \|u_i e^{\sigma\varphi}\|_{H^{1,\sigma}(Q(\varepsilon,\delta) \setminus Q(2\varepsilon,2\delta))}^2 \right).
\end{aligned}$$

On remarque alors que

$$\begin{aligned}
& \sum_{1 \leq i \leq 3} \sigma \|u_i e^{\sigma\varphi}\|_{H^{1,\sigma}(Q(\varepsilon,\delta) \setminus Q(2\varepsilon,2\delta))}^2 \\
& = \sum_{1 \leq i \leq 3} \left( \sigma \|u_i e^{\sigma\varphi}\|_{H^{1,\sigma}(Q(\varepsilon,\delta) \setminus Q(2\varepsilon,\delta))}^2 + \sigma \|u_i e^{\sigma\varphi}\|_{H^{1,\sigma}(Q(\varepsilon,\delta) \setminus Q(\varepsilon,2\delta))}^2 \right) \\
& \leq C \left( e^{C\sigma} \|u\|_{H^2(Q(\varepsilon,\delta) \setminus Q(2\varepsilon,\delta))}^2 + \sigma^3 e^{2\sigma\delta} \|u\|_{H^2(Q)}^2 \right),
\end{aligned}$$

puisque

$$\varphi(x, t) \leq \delta, \quad \forall (x, t) \in Q(\varepsilon, \delta) \setminus Q(\varepsilon, 2\delta).$$

Donc

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\sigma} \|ue^{\sigma\varphi}\|_{H_x^{2,\sigma}(Q(\varepsilon,\delta))}^2 \\
& \leq C \left( \|F e^{\sigma\varphi}\|_{L^2(Q)}^2 + \|(\nabla F) e^{\sigma\varphi}\|_{L^2(Q)}^2 + e^{C\sigma} \|u\|_{H^2(Q(\varepsilon,\delta) \setminus Q(2\varepsilon,\delta))}^2 + \sigma^3 e^{2\sigma\delta} \|u\|_{H^2(Q)}^2 \right),
\end{aligned}$$

et ceci conclut la démonstration du Théorème 1.1.

Nous venons donc de démontrer une inégalité de Carleman pour le système de la viscoélasticité linéaire en trois dimensions. Cette inégalité sera utilisée au Chapitre 3 pour dériver des estimations de stabilité pour le problème inverse de récupération des coefficients viscoélastiques. Mais avant cela, intéressons nous à la Condition 1 et à son lien avec l'hypothèse de pseudo-convexité de la fonction poids de Carleman.

### 1.3 Remarque sur la Condition 1

Les inégalités de Carleman pour les équations hyperboliques sont généralement valides sous l'hypothèse de pseudo-convexité de la fonction poids  $\Phi$  définie par :

$$\Phi(x, t) = e^{\sigma\varphi(x,t)},$$

où  $\varphi$  est donnée par (4). Le résultat du Théorème 1.1 suppose uniquement que la Condition 1 est remplie. Dans cette section, nous regardons le lien entre la Condition 1 et l'hypothèse de pseudo-convexité généralement supposée.

### Convexité au sens de Hörmander

Nous rappelons tout d'abord la définition de la pseudo-convexité au sens de Hörmander [36]. Pour cela, nous introduisons les notations suivantes :

$$\xi = (\xi_0, \xi') = (\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}^4 \quad \text{et} \quad z = (t, x) = (t, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^4,$$

et nous définissons l'opérateur :

$$P(\xi, z) = \xi_0^2 - q(x)|\xi'|^2,$$

qui est associé à l'opérateur hyperbolique :

$$\partial_t^2 - q(x)\Delta.$$

On définit également le crochet de Poisson :

$$\{P, Q\}(\xi, z) = \sum_{i=0}^3 \left( \frac{\partial P}{\partial \xi_i} \frac{\partial Q}{\partial z_i} - \frac{\partial P}{\partial z_i} \frac{\partial Q}{\partial \xi_i} \right).$$

Pour démontrer la pseudo-convexité de  $\Phi$ , il suffit de montrer que les deux relations suivantes sont satisfaites :

$$\{P, \{P, \Phi\}\}(\xi, z) > 0 \quad \text{sur} \quad \{(\xi, z) \text{ tels que } \xi \neq 0, P(\xi, z) = \{P, \Phi\}(\xi, z) = 0\} \quad (1.12)$$

$$\{\{P, \Phi\}, P(\nabla\Phi, z)\}(\xi, z) > 0 \quad \text{sur} \quad \{(\xi, z) \text{ tels que } P(\nabla\Phi, z) = 0\} \quad (1.13)$$

#### Relation (1.12)

On a :

$$P(\xi, z) = \xi_0^2 - q(x)|\xi'|^2 = 0 \quad \iff \quad \xi_0^2 = q(x)|\xi'|^2 \neq 0,$$

et :

$$\{P, \Phi\}(\xi, z) = -4\sigma e^{\sigma\varphi} (\xi_0\beta t + q(x)\xi' \cdot (x - x_0)) = 0 \quad \iff \quad \xi_0\beta t + q(x)\xi' \cdot (x - x_0) = 0.$$

Donc, tous calculs faits, on montre l'équivalence :

$$(1.12) \quad \iff \quad \xi_0^2(q(x) - \frac{1}{2}\nabla q(x) \cdot (x - x_0) - \beta) - (\xi' \cdot \nabla q(x))\xi_0\beta t > 0.$$

#### Relation (1.13)

On a :

$$P(\nabla\Phi, z) = 0 \quad \iff \quad \beta^2 t^2 = q(x)|x - x_0|^2.$$

Tous calculs faits, on obtient :

$$(1.13) \quad \iff \quad q(x) + \frac{1}{2}\nabla q(x) \cdot (x - x_0) - \beta > 0.$$

### Conditions suffisantes de pseudo-convexité

Dans certains articles, Imanuvilov et Yamamoto [42], Bellassoued *et al* [4], les auteurs supposent que :

$$\forall x \in \bar{\Omega}, \quad q(x) > \theta_1 \quad \text{et} \quad -1 + \theta_0 < \frac{\nabla q(x) \cdot (x - x_0)}{2q(x)} < 1 - \theta_0,$$

Cette condition implique à la fois la Condition 1 et la pseudo-convexité de la fonction de poids au sens de Hörmander. Cette pseudo-convexité est nécessaire pour appliquer l'inégalité de Carleman globale initialement démontrée par Isakov [43].

### Comparaison avec la Condition 1

Nous remarquons que la Condition 1 implique la relation (1.13) mais pas la relation (1.12). Donc la fonction poids de Carleman  $\Phi$  que l'on considère dans ce chapitre n'est pas pseudo-convexe au sens de Hörmander. La Condition 1, bien que plus faible, est néanmoins suffisante pour obtenir le Théorème 1.1. Elle provient de la Proposition 1.2 dont la démonstration est rappelée en Annexe A.





## Chapitre 2

# Stabilité dans le prolongement unique pour l'opérateur de la viscoélasticité

Le résultat de prolongement unique, Tataru [85], qui nous intéresse dans ce chapitre relie la valeur de la solution d'une équation aux dérivées partielles sur une partie  $\Gamma$  du bord du domaine  $\Omega$  à sa valeur dans un ouvert intérieur au domaine. Ce résultat a été démontré pour une équation hyperbolique scalaire par Robbiano [78] et pour le système de Lamé, c'est-à-dire pour l'opérateur  $\mathcal{P}$  introduit en introduction mais sans le terme intégral-différentiel, par Eller et al. [23] et Lada et Sidz [51].

Dans [3], Bellassoued prouve un résultat de stabilité associé au prolongement unique pour le système de Lamé. Il applique une méthode initialement introduite par Robbiano [79] qui utilise la transformation de Fourier-Bros-Iagolnitzer (FBI) [8] pour changer le problème près de la frontière en un problème pour lequel des estimateurs elliptiques peuvent être appliqués. Dans ce chapitre, nous montrons un résultat similaire pour l'opérateur  $\mathcal{P}$  complet en adaptant ces techniques. En particulier, nous proposons une nouvelle transformation, inspirée de la transformation FBI mais qui est capable de traiter le terme de convolution supplémentaire de l'opérateur  $\mathcal{P}$ . Les résultats de ce chapitre ont été publiés dans [20].

### 2.1 Enoncé du Théorème 2.1

Le résultat que nous démontrons est le suivant :

**Théorème 2.1** (Stabilité du prolongement unique). *Soit  $u$  le vecteur solution de*

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{P}u(x, t) = R(x, t), & \forall (x, t) \in \Omega \times (0, +\infty), \\ u(x, 0) = 0, & \forall x \in \Omega, \\ \partial_t u(x, 0) = 0, & \forall x \in \Omega, \\ u(x, t) = 0, & \forall (x, t) \in \partial\Omega \times (0, +\infty). \end{array} \right.$$

où  $\mathcal{P}$  est l'opérateur hyperbolique intégral-différentiel défini en (2). On suppose que

(H1)  $(\lambda, \mu) \in C^2(\overline{\Omega})^2$  et  $(\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}) \in C^2(\overline{\Omega \times (0, +\infty)})^2$  sont tels que la solution  $u \in W^{4, \infty}(\Omega \times (0, +\infty))^3$ ,

(H6)  $R(x, t) = 0, \forall (x, t) \in \omega \times (0, +\infty)$  où  $\omega$  est un voisinage de  $\partial\Omega$ .

Alors, pour  $\Gamma \subset \partial\Omega$  arbitrairement petit, pour tout  $\rho > 0$  et pour  $\varepsilon > 0$  tel que  $\Omega \setminus \Omega(4\varepsilon) \subset \omega$ , il existe un temps  $T_0 > 0$  tel que, pour tout  $T \geq T_0$ , l'estimation suivante soit vraie :

$$\|u\|_{H^2(\Omega(2\varepsilon) \setminus \Omega(\varepsilon) \times (0, \frac{T}{2} - \rho))}^2 \leq C \left[ \log \left( 2 + \frac{C}{\sum_{1 \leq |\alpha| \leq 2} \|\partial_x^\alpha u\|_{L^2(\Gamma \times (0, 3T))}^2} \right) \right]^{-1}$$

où  $C > 0$  dépend de la norme  $C^2(\bar{Q})$  du coefficient  $\tilde{\mu}$  et de la norme  $W^{4,\infty}(\Omega \times (0, T))^3$  de  $u$ .

## 2.2 Preuve du Théorème 2.1

Dans cette section, nous démontrons le résultat de prolongement unique du Théorème 2.1. La preuve consiste à transformer le système hyperbolique intégro-différentiel (1)-(2) en un système elliptique grâce à une transformation de type FBI. Ensuite, nous montrons une inégalité de Carleman (Théorème 2.3) pour l'opérateur elliptique intégro-différentiel résultant, en utilisant les mêmes techniques que celles proposées au Chapitre 1 pour démontrer le Théorème 1.1. Puis, on utilise cette inégalité de Carleman pour obtenir des inégalités d'interpolation qui relient la valeur de la solution dans un domaine intérieur proche de la frontière à sa valeur sur la frontière. Finalement, on revient à la solution du problème initial par une série d'inégalités.

Soit  $u$  la solution de

$$\mathcal{P}u(x, t) = R(x, t), \quad \forall (x, t) \in \Omega \times (0, +\infty), \quad (2.1)$$

avec des conditions initiales et des conditions de bord nulles et supposons que les hypothèses (H1) et (H6) sont vérifiées.

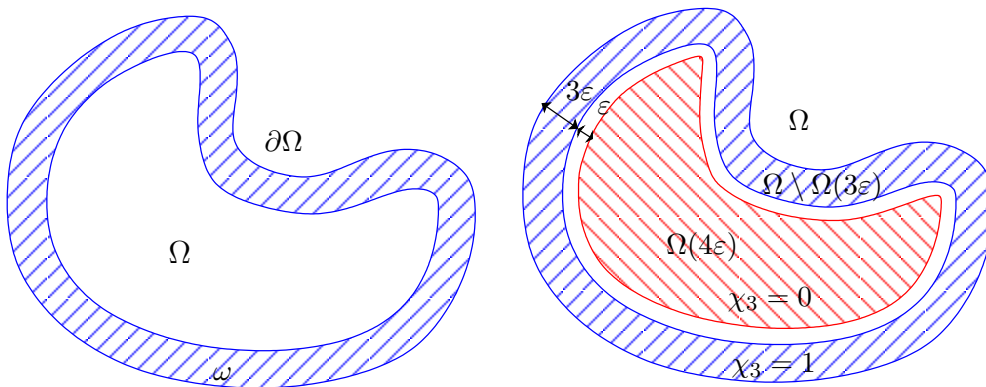


FIG. 2.1 – Définition du voisinage  $\omega$  de  $\partial\Omega$  et de la fonction plateau  $\chi_3$ .

### Transformer le système hyperbolique en un système elliptique

Choisissons  $\varepsilon > 0$  tel que  $\Omega \setminus \Omega(4\varepsilon) \subset \omega$ . On introduit la fonction plateau  $\chi_3 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$  qui satisfait  $0 \leq \chi_3 \leq 1$  et est telle que

$$\chi_3(x) = \begin{cases} 0, & \text{if } x \in \Omega(4\varepsilon), \\ 1, & \text{if } x \in \Omega \setminus \overline{\Omega(3\varepsilon)}. \end{cases}$$

Cette fonction est illustrée sur la Figure 2.1. On pose alors

$$u^*(x, t) = \chi_3(x) u(x, t), \quad \forall (x, t) \in \Omega \times (0, +\infty).$$

Ainsi, la nouvelle variable  $u^*$  satisfait l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}u^*(x, t) &= \chi_3(x) \mathcal{P}u(x, t) + [\mathcal{P}, \chi_3]u(x, t) \\ \implies \partial_t^2 u^*(x, t) - \mathcal{L}(x)u^*(x, t) + \int_0^t \tilde{\mathcal{L}}(x, s)u^*(x, t-s)ds &= [\mathcal{P}(x, t), \chi_3]u(x, t), \end{aligned} \quad (2.2)$$

puisque, d'après (H6),  $R(x, t)$  est égal à zéro dans  $\omega$ . Nous avons introduit les opérateurs suivants :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x)\star &= \nabla \cdot (\mu(x)(\nabla \star + \nabla \star^t) + \lambda(x)(\nabla \cdot \star)I), \\ \tilde{\mathcal{L}}(x, t)\star &= \nabla \cdot (p(x)h(t)(\nabla \star + \nabla \star^t) + \tilde{\lambda}(x, t)(\nabla \cdot \star)I). \end{aligned}$$

On définit une transformation particulière, qui est fortement inspirée de la transformation de Fourier-Bros-Iagolnitzer [8] (voir l'Annexe B pour plus de détails) :

**Définition 2.2.1.** Soit  $T > 1$  et  $0 < \eta < \frac{1}{6}$ . On introduit  $\tilde{Q} = \Omega \times (-\frac{T}{2}, \frac{5T}{2}) \times (-3\eta, 3\eta)$ .

Alors,  $\forall (x, t, r) \in \tilde{Q}$ , on définit

$$(\mathcal{F}_\gamma u^*)(x, t, r) = \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\gamma}{2}(t+ir-y)^2} \theta(t-y) u^*(x, y) dy,$$

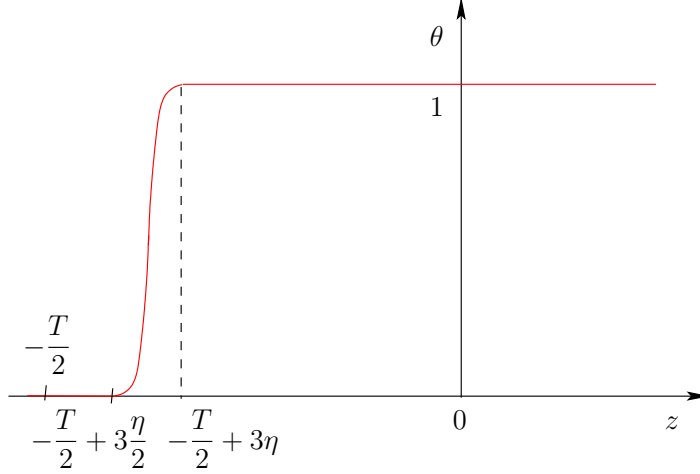
où  $\theta \in C^\infty(\mathbb{R})$ ,  $0 \leq \theta \leq 1$ ,

$$\theta(z) = \begin{cases} 1, & \text{if } z > -\frac{T}{2} + 3\eta, \\ 0, & \text{if } z < -\frac{T}{2} + \frac{3\eta}{2}. \end{cases}$$

Le graphe de cette fonction est illustrée sur la Figure 2.2.

Grâce à cette transformation, nous allons convertir localement le système hyperbolique (2.2) en un système elliptique. Tout d'abord, on remarque que, pour tout  $(x, t, r) \in \tilde{Q}$ ,

$$\begin{aligned} \partial_r(\mathcal{F}_\gamma u^*)(x, t, r) &= \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi}} \int_0^{+\infty} -i\gamma(t+ir-y)e^{-\frac{\gamma}{2}(t+ir-y)^2} \theta(t-y) u^*(x, y) dy \\ &= \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi}} \int_0^{+\infty} -i\partial_y(e^{-\frac{\gamma}{2}(t+ir-y)^2}) \theta(t-y) u^*(x, y) dy \\ &= \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi}} \int_0^{+\infty} i e^{-\frac{\gamma}{2}(t+ir-y)^2} \partial_y(\theta(t-y) u^*(x, y)) dy. \end{aligned}$$

FIG. 2.2 – Définition de la fonction plateau  $\theta$ .

Les termes de bord de l'intégration par parties disparaissent car  $u^*(x, 0) = 0$  et on a  $e^{-\frac{\gamma}{2}(t+ir-y)^2} \rightarrow 0$  si  $y \rightarrow \infty$ . De plus,  $\theta(t-y) = 0$  si  $y \geq T$ . Alors,

$$\begin{aligned} \partial_r^2 (\mathcal{F}_\gamma u^*)(x, t, r) &= -\sqrt{\frac{\gamma}{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\gamma}{2}(t+ir-y)^2} \partial_y^2 (\theta(t-y)u^*(x, y)) dy \\ &= -(\mathcal{F}_\gamma(\partial_y^2 u^*))(x, t, r) - F_\gamma(x, t, r), \quad \forall (x, t, r) \in \tilde{Q}, \end{aligned}$$

où

$$F_\gamma(x, t, r) = \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\gamma}{2}(t+ir-y)^2} (\theta''(t-y)u^*(x, y) - 2\theta'(t-y)\partial_y u^*(x, y)) dy.$$

De la même manière, on peut écrire

$$\partial_t^2 (\mathcal{F}_\gamma u^*)(x, t, r) = (\mathcal{F}_\gamma(\partial_t^2 u^*))(x, t, r), \quad \forall (x, t, r) \in \tilde{Q},$$

et il est facile de voir que

$$\mathcal{L}(x)(\mathcal{F}_\gamma u^*)(x, t, r) = (\mathcal{F}_\gamma(\mathcal{L}(x)u^*))(x, t, r), \quad \forall (x, t, r) \in \tilde{Q}.$$

On doit maintenant regarder l'effet de cette transformation sur le terme intégral

$$\begin{aligned} &\mathcal{F}_\gamma \left( \int_0^y \tilde{\mathcal{L}}(x, s)u^*(x, y-s)ds \right) (x, t, r) \\ &= \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\gamma}{2}(t+ir-y)^2} \theta(t-y) \int_0^y \tilde{\mathcal{L}}(x, s)u^*(x, y-s)ds dy \\ &= \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi}} \int_0^{+\infty} \tilde{\mathcal{L}}(x, s) \int_s^{+\infty} e^{-\frac{\gamma}{2}(t+ir-y)^2} \theta(t-y)u^*(x, y-s)dy ds \\ &= \int_0^{+\infty} \tilde{\mathcal{L}}(x, s) \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\gamma}{2}(t-s+ir-z)^2} \theta(t-s-z)u^*(x, z)dz ds \\ &= \int_0^{+\infty} \tilde{\mathcal{L}}(x, s)(\mathcal{F}_\gamma u^*)(x, t-s, r)ds = \int_{-T/2}^t \tilde{\mathcal{L}}(x, t-s)(\mathcal{F}_\gamma u^*)(x, s, r)ds. \end{aligned}$$

Le principal avantage de cette transformation par rapport à la transformation FBI est qu'elle transforme le produit de convolution de deux fonctions en la convolution de la première fonction par la transformée de la deuxième. La fonction  $u_\gamma = \mathcal{F}_\gamma u^*$ , fonction de trois variables  $(x, t, r)$ , satisfait alors le système elliptique intégro-différentiel suivant, pour tout  $(x, t, r) \in \tilde{Q}$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}u_\gamma(x, t, r) &= -2\partial_r^2 u_\gamma(x, t, r) - \partial_t^2 u_\gamma(x, t, r) - \mathcal{L}(x)u_\gamma(x, t, r) \\ &+ \int_{-T/2}^t \tilde{\mathcal{L}}(x, t-s)u_\gamma(x, s, r)ds = 2F_\gamma(x, t, s) + G_\gamma(x, t, s), \end{aligned} \quad (2.3)$$

où

$$G_\gamma(x, t, r) = \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\gamma}{2}(t+ir-y)^2} \theta(t-y)[\mathcal{P}(x, t), \chi_3] \hat{u}(x, y) dy,$$

avec les conditions aux bords

$$\begin{cases} u_\gamma(x, t, r) = 0, & \forall (x, t, r) \in \partial\Omega \times \left(-\frac{T}{2}, \frac{5T}{2}\right) \times (-3\eta, 3\eta), \\ u_\gamma(x, t, r) = 0, & \forall (x, t, r) \in \Omega \times \left\{-\frac{T}{2}\right\} \times (-3\eta, 3\eta). \end{cases}$$

On remarque que

$$G_\gamma(x, t, r) = 0, \quad \forall x \in \Omega \setminus \overline{\Omega(3\varepsilon)}, \quad (2.4)$$

car  $[\mathcal{P}(x, t), \chi_3]$  ne fait intervenir que les dérivées de  $\chi_3$  et que son support est inclus dans  $\overline{\Omega(3\varepsilon)} \setminus \Omega(4\varepsilon)$ . On a également

$$\|F_\gamma\|_{H^1(\tilde{Q})} \leq C e^{-m\gamma T} \|u^*\|_{H^2(\Omega \times (0, 3T))} \quad (2.5)$$

ainsi que

$$\|u_\gamma\|_{H^2(\tilde{Q})} \leq C e^{C\gamma} \|u^*\|_{H^2(\Omega \times (0, 3T))}, \quad (2.6)$$

où  $C$  dépend de  $\eta, T, \Omega$  mais pas de  $\gamma$  et où  $m$  est indépendant de  $T$ . En effet,

$$\begin{aligned} \|F_\gamma\|_{L^2(\tilde{Q})}^2 &= \\ &\frac{\gamma}{2\pi} \int_{\tilde{Q}} \left| \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\gamma}{2}(t+ir-y)^2} (\theta''(t-y)u^*(x, y) - 2\theta'(t-y)\partial_y u^*(x, y)) dy \right|^2 dr dt dx. \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} &\left| \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\gamma}{2}(t+ir-y)^2} (\theta''(t-y)u^*(x, y) - 2\theta'(t-y)\partial_y u^*(x, y)) dy \right|^2 \\ &\leq \left( \int_{y \geq 0, -T/2+3\eta/2 \leq t-y \leq -T/2+3\eta} |e^{-\frac{\gamma}{2}(t+ir-y)^2}|^2 dy \right) \\ &\quad \times \left( \int_0^{t+T/2} |\theta''(t-y)u^*(x, y) - 2\theta'(t-y)\partial_y u^*(x, y)|^2 dy \right) \\ &\leq \left( \int_{y \geq 0, -T/2+3\eta/2 \leq t-y \leq -T/2+3\eta} e^{-\gamma((t-y)^2 - r^2)} dy \right) C \|u^*(x, \cdot)\|_{H^1(0, 3T)}^2 \\ &\leq C e^{-m\gamma T} \|u^*(x, \cdot)\|_{H^1(0, 3T)}^2, \quad \forall (x, t, r) \in \tilde{Q}. \end{aligned}$$

En effet,  $(t - y)^2 \geq (-\frac{T}{2} + 3\eta)^2$  et  $r^2 \leq 9\eta^2$  donc  $(t - y)^2 - r^2 \geq \frac{T}{4}(T - 6\eta)$ . Ainsi, si on suppose  $T > 1$ , puisque  $\eta < 1/6$ , alors il existe  $m > 0$  indépendant de  $T$  tel que  $(t - y)^2 - r^2 \geq mT$ . Et on peut faire le même travail pour les dérivées de  $F_\gamma$ . De la même façon, on a

$$\|u_\gamma\|_{L^2(\tilde{Q})}^2 = \int_{\Omega} \int_{-T/2}^{5T/2} \int_{-3\eta}^{3\eta} \left| \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\gamma}{2}(t+ir-y)^2} \theta(t-y) u^*(x, y) dy \right|^2 dr dt dx,$$

avec, pour tout  $(x, t, r) \in \tilde{Q}$ ,

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\gamma}{2}(t+ir-y)^2} \theta(t-y) u^*(x, y) dy \right|^2 \\ & \leq \left( \int_0^{t+T/2} |e^{-\frac{\gamma}{2}(t+ir-y)^2}|^2 dy \right) \left( \int_0^{t+T/2} |\theta(t-y) u^*(x, y)|^2 dy \right) \\ & \leq \left( \int_0^{3T} e^{-\gamma((t-y)^2 - r^2)} dy \right) C \|u^*(x, \cdot)\|_{L^2(0, 3T)}^2 \leq C e^{C\gamma} \|u^*(x, \cdot)\|_{L^2(0, 3T)}^2. \end{aligned}$$

Et on utilise le même raisonnement pour les dérivées de  $u_\gamma$  pour obtenir le résultat voulu.

## Prouver une inégalité de Carleman

Nous démontrons une inégalité de Carleman pour le système elliptique intégro-différentiel (2.3), en appliquant les mêmes méthodes que celles utilisées dans le cas hyperbolique (Chapitre 1). C'est-à-dire que l'on combine le découplage des équations proposés par Imanuvilov et Yamamoto [42] avec le changement de variables de Lorenzi *et al.* [61], et qu'on utilise une inégalité de Carleman classique pour une équation elliptique scalaire (Lemme 2). La différence est que maintenant on a trois variables  $(x, t, r)$ , donc la fonction de poids doit être modifiée. Introduisons tout d'abord quelques notations :

### – Domaines

Pour  $T > 0$  et  $\eta > 0$ , on note

$$\begin{aligned} \tilde{Q} &= \Omega \times \left(-\frac{T}{2}, \frac{5T}{2}\right) \times (-3\eta, 3\eta), \\ \tilde{\Sigma} &= \partial\Omega \times \left(-\frac{T}{2}, \frac{5T}{2}\right) \times (-3\eta, 3\eta). \end{aligned}$$

### – Normes

$$\|\star\|_{H^{k, \sigma}(\tilde{Q})}^2 = \sum_{|\alpha| \leq k} \sigma^{2(k-|\alpha|)} \|\partial^\alpha \star\|_{L^2(\tilde{Q})}^2, \quad \|\star\|_{H^{k, \sigma}(\tilde{\Sigma})}^2 = \sum_{|\alpha| \leq k} \sigma^{2(k-|\alpha|)} \|\partial^\alpha \star\|_{L^2(\tilde{\Sigma})}^2.$$

**Définition 2.2.2** (Fonction poids de Carleman). *Soit  $x_0 \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$  et  $\xi > 0$ . On introduit la fonction  $\psi$  de la manière suivante :*

$$\psi(x, t, r) = |x - x_0|^2 + \left(t + \frac{T}{2}\right)^2 + r^2, \quad \forall (x, t, r) \in \tilde{Q},$$

et on pose

$$\varphi(x, t, r) = e^{-\xi\psi(x, t, r)}, \quad \forall (x, t, r) \in \tilde{Q}. \quad (2.7)$$

On doit maintenant vérifier que, pour cette nouvelle fonction poids, on a un résultat similaire à celui du Lemme 1.4 obtenu au Chapitre 1. Ce résultat est donné par le lemme suivant qui va nous permettre de borner les termes intégraux dans la preuve de l'inégalité de Carleman.

**Lemme 2.2.** *Soit  $\varphi$  définie par (2.7),  $\sigma > 0$  et  $u \in L^2(\tilde{Q})$ . Alors, il existe une constante  $C > 0$ , indépendante de  $\sigma$ , telle que*

$$\int_{\tilde{Q}} \left( \int_{-T/2}^t |u(x, s, r)| ds \right)^2 e^{2\sigma\varphi(x, t, r)} dx dt dr \leq \frac{C}{\sigma} \int_{\tilde{Q}} |u(x, t, r)|^2 e^{2\sigma\varphi(x, t)} dx dt dr.$$

*Démonstration.* En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{Q}} \left( \int_{-T/2}^t |u(x, s, r)| ds \right)^2 e^{2\sigma\varphi(x, t, r)} dx dt dr \\ \leq \int_{\tilde{Q}} \left( \int_{-T/2}^t |u(x, s, r)|^2 ds \right) \left( t + \frac{T}{2} \right) e^{2\sigma\varphi(x, t, r)} dx dt dr. \end{aligned}$$

On remarque alors que, pour tout  $(x, t, r) \in \tilde{Q}$ ,

$$\left( t + \frac{T}{2} \right) e^{2\sigma\varphi(x, t, r)} \leq -\frac{e^{\xi\psi(x, t, r)}}{4\xi\sigma} \partial_t \left( e^{2\sigma\varphi(x, t, r)} \right) \leq -\frac{C}{\sigma} \partial_t \left( e^{2\sigma\varphi(x, t, r)} \right).$$

Donc,

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{Q}} \left( \int_{-T/2}^t |u(x, s, r)| ds \right)^2 e^{2\sigma\varphi(x, t, r)} dx dt dr \\ \leq \int_{\Omega} \int_{-3\eta}^{3\eta} \int_{-T/2}^{5T/2} -\frac{C}{\sigma} \left( \int_{-T/2}^t |u(x, s, r)|^2 ds \right) \partial_t \left( e^{2\sigma\varphi(x, t, r)} \right) dt dx dr \\ \leq \frac{C}{\sigma} \int_{\Omega} \int_{-3\eta}^{3\eta} \left[ \int_{-T/2}^{5T/2} |u(x, t, r)|^2 e^{2\sigma\varphi(x, t, r)} dt dx dr \right. \\ \left. - e^{2\sigma\varphi(x, 5T/2, r)} \left( \int_{-T/2}^{5T/2} |u(x, s, r)|^2 ds \right) dx dr \right]. \end{aligned}$$

Ainsi, on déduit le résultat recherché.  $\square$

On est maintenant prêt à énoncer l'inégalité de Carleman pour l'opérateur  $\mathcal{Q}$  :

**Théorème 2.3** (Inégalité de Carleman). *Soit  $\mathcal{Q}$  l'opérateur défini en (2.3). Soit  $K$  un ensemble compact dans  $\bar{\Omega} \times (-\frac{T}{2}, \frac{5T}{2}) \times (-3\eta, 3\eta)$ . On suppose que*

(H1)  $(\lambda, \mu) \in C^2(\bar{\Omega})^2$  and  $(\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}) \in C^2(\bar{\Omega} \times (0, +\infty))^2$ .

Alors, il existe  $\xi_0 > 0$  tel que, pour tout  $\xi \geq \xi_0$ , il existe  $\sigma_0 > 0$  tel que, pour tout  $\sigma \geq \sigma_0$  et pour tout  $u \in C_0^\infty(K)^3$ , on ait l'estimation suivante :

$$\frac{1}{\sigma} \|ue^{\sigma\varphi}\|_{H^{2,\sigma}(\tilde{Q})}^2 \leq C \left( \|(\mathcal{Q}u)e^{\sigma\varphi}\|_{H^1(\tilde{Q})}^2 + \|ue^{\sigma\varphi}\|_{H^{2,\sigma}(\tilde{\Sigma})}^2 \right),$$

où  $\varphi$  est définie par (2.7), et où la constante  $C > 0$  dépend de la norme  $C^2(\bar{Q})$  du coefficient  $\tilde{\mu}$  mais est indépendante de  $\sigma$ .



*Démonstration.* Soit  $K$  un ensemble compact dans  $\bar{\Omega} \times (-\frac{T}{2}, \frac{5T}{2}) \times (-3\eta, 3\eta)$ , soit  $u \in C_0^\infty(K)^3$  la solution de :

$$\mathcal{Q}u(x, t, r) = S(x, t, r), \quad \forall (x, t, r) \in \tilde{Q}, \quad (2.8)$$

et supposons que (H1) est vraie. On doit tout d'abord découpler les équations du système. Pour cela, on prend la divergence et le rotationnel de (2.8) et on introduit le scalaire  $v = \nabla \cdot u$  et le vecteur  $w = \nabla \wedge u$ . On obtient le système de sept équations - seulement couplées à l'ordre un - suivant :

$$\begin{aligned} & -2\partial_r^2 u(x, t, r) - \partial_t^2 u(x, t, r) - \mu(x)\Delta u(x, t, r) + \int_{-T/2}^t \tilde{\mu}(x, t-s)\Delta u(x, s, r)ds \\ & = S(x, t, r) + A_1(u, v)(x, t, r), \quad \forall (x, t, r) \in \tilde{Q}, \\ & -2\partial_r^2 v(x, t, r) - \partial_t^2 v(x, t, r) - (\lambda + 2\mu)(x)\Delta v(x, t, r) \\ & + \int_{-T/2}^t (\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu})(x, t-s)\Delta v(x, s, r)ds \\ & = (\nabla \cdot S)(x, t, r) + A_2(u, v, w)(x, t, r), \quad \forall (x, t, r) \in \tilde{Q}, \\ & -2\partial_r^2 w(x, t, r) - \partial_t^2 w(x, t, r) - \mu(x)\Delta w(x, t, r) + \int_{-T/2}^t \tilde{\mu}(x, t-s)\Delta w(x, s, r)ds \\ & = (\nabla \wedge S)(x, t, r) + A_3(u, v, w)(x, t, r), \quad \forall (x, t, r) \in \tilde{Q}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

où  $A_1$ ,  $A_2$  et  $A_3$  sont des opérateurs intégrro-différentiels d'ordre un. On ne va traiter que la première équation de (2.9), les autres se traitant de la même manière. On introduit le changement de variable suivant :

$$\tilde{u}(x, t, r) = \mu(x)u(x, t, r) - \int_{-T/2}^t \tilde{\mu}(x, t-s, r)u(x, s, r)ds, \quad \forall (x, t, r) \in \tilde{Q}.$$

Ainsi,  $\tilde{u}$  satisfait l'équation elliptique suivante

$$\begin{aligned} & -2\partial_r^2 \tilde{u}(x, t, r) - \partial_t^2 \tilde{u}(x, t, r) - \mu(x)\Delta \tilde{u}(x, t, r) \\ & = \mu(x)(S(x, t, r) + A_1(u, v)(x, t, r)) + L_1(u)(x, t, r), \end{aligned}$$

où  $L_1$  est un opérateur intégrro-différentiel du premier ordre dont tous les coefficients sont bornés dans  $\Omega \times (0, +\infty)$ . On a maintenant besoin d'une inégalité de Carleman pour une équation elliptique scalaire. Elle est donnée par le lemme suivant :

**Proposition 2.4** (Imanuvilov et Puel [40], Lebeau et Robbiano [57]). *Soit  $Q$  un domaine ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,  $K$  un ensemble compact dans  $\bar{Q}$  et  $\psi$  une fonction  $C^\infty(Q)$  satisfaisant  $\nabla\psi(x) \neq 0, \forall x \in K$ . Posons*

$$\varphi(x) = e^{-\xi\psi(x)}, \quad \forall x \in Q,$$

où  $\xi > 0$  est suffisamment grand. On considère l'opérateur scalaire elliptique du deuxième ordre

$$\mathcal{R}(x)\star = a(x) : \nabla^2 \star + b(x) \cdot \nabla \star + c\star, \quad \forall x \in Q,$$

où tous les coefficients sont  $C^2(\bar{Q})$ . Alors, il existe  $\sigma_0 > 0$  et  $C > 0$  tels que, pour tout  $\sigma \geq \sigma_0$  et pour tout  $u \in C_0^\infty(K)$ , les inégalités de Carleman suivantes soient vérifiées :

$$\frac{C}{\sigma} \|ue^{\sigma\varphi}\|_{H^{2,\sigma}(Q)}^2 \leq \|(\mathcal{R}u)e^{\sigma\varphi}\|_{L^2(Q)}^2 + \|ue^{\sigma\varphi}\|_{H^{2,\sigma}(\partial Q)}^2,$$

$$C\sigma \|ue^{\sigma\varphi}\|_{H^{1,\sigma}(Q)}^2 \leq \|(\mathcal{R}u)e^{\sigma\varphi}\|_{L^2(Q)}^2 + \sigma \|ue^{\sigma\varphi}\|_{H^{1,\sigma}(\partial Q)}^2.$$

Puisque la fonction poids de Carleman  $\varphi$  définie en (2.7) satisfait les hypothèses du Lemme 2.4, on peut en appliquer la première inégalité à  $\tilde{u}$  :

$$\frac{1}{\sigma} \|\tilde{u}e^{\sigma\varphi}\|_{H^{2,\sigma}(\tilde{Q})}^2 \leq C \left( \|(-2\partial_r^2 \tilde{u} - \partial_t^2 \tilde{u} - \mu\Delta \tilde{u})e^{\sigma\varphi}\|_{L^2(\tilde{Q})}^2 + \|\tilde{u}e^{\sigma\varphi}\|_{H^{2,\sigma}(\tilde{\Sigma})}^2 \right).$$

On prend en compte le fait que les coefficients  $\lambda, \tilde{\lambda}, \mu, \tilde{\mu}$  sont bornés dans  $Q$ , que le Lemme 2.2 s'applique et que tous les termes des opérateurs  $A_1$  et  $L_1$  sont d'ordre inférieur ou égal à un. Alors, on obtient

$$\frac{1}{\sigma} \|\tilde{u}e^{\sigma\varphi}\|_{H^{2,\sigma}(\tilde{Q})}^2 \leq C \left( \|Se^{\sigma\varphi}\|_{L^2(\tilde{Q})}^2 + \|ue^{\sigma\varphi}\|_{H^{1,\sigma}(\tilde{Q})}^2 + \|ve^{\sigma\varphi}\|_{H^{1,\sigma}(\tilde{Q})}^2 + \|ue^{\sigma\varphi}\|_{H^{2,\sigma}(\tilde{\Sigma})}^2 \right).$$

On utilise à nouveau le changement de variable

$$u(x, t, r) = \frac{1}{\mu(x)} \tilde{u}(x, t, r) + \int_{-T/2}^t \frac{\tilde{\mu}(x, t-s)}{\mu(x)} u(x, s, r) ds, \quad \forall (x, t, r) \in \tilde{Q}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} & \int_{\tilde{Q}} |u(x, t, r)|^2 e^{2\sigma\varphi(x,t,r)} dx dt dr \\ & \leq C \int_{\tilde{Q}} |\tilde{u}(x, t, r)|^2 e^{2\sigma\varphi(x,t,r)} dx dt dr + \frac{C}{\sigma} \int_{\tilde{Q}} |u(x, t, r)|^2 e^{2\sigma\varphi(x,t,r)} dx dt dr. \end{aligned}$$

Pour  $\sigma$  suffisamment grand, le deuxième terme de cette inégalité est absorbé. On fait le même raisonnement pour les dérivées de  $u$ , ce qui conduit à écrire

$$\frac{1}{\sigma} \|ue^{\sigma\varphi}\|_{H^{2,\sigma}(\tilde{Q})}^2 \leq C \frac{1}{\sigma} \|\tilde{u}e^{\sigma\varphi}\|_{H^{2,\sigma}(\tilde{Q})}^2.$$

Finalement,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sigma} \|ue^{\sigma\varphi}\|_{H^{2,\sigma}(\tilde{Q})}^2 \\ & \leq C \left( \|Se^{\sigma\varphi}\|_{L^2(\tilde{Q})}^2 + \|ue^{\sigma\varphi}\|_{H^{1,\sigma}(\tilde{Q})}^2 + \|ve^{\sigma\varphi}\|_{H^{1,\sigma}(\tilde{Q})}^2 + \|ue^{\sigma\varphi}\|_{H^{2,\sigma}(\tilde{\Sigma})}^2 \right). \end{aligned}$$

Grâce aux poids de Carleman, on absorbe le deuxième terme du membre de droite dans le membre de gauche. On fait le même travail pour  $v$  et  $w$  mais en utilisant cette fois-ci la deuxième inégalité de Carleman du Lemme 2.4 afin d'obtenir

$$\begin{aligned} & \sigma \|ve^{\sigma\varphi}\|_{H^{1,\sigma}(\tilde{Q})}^2 \\ & \leq C \left( \|(\nabla \cdot S)e^{\sigma\varphi}\|_{L^2(\tilde{Q})}^2 + \|ue^{\sigma\varphi}\|_{H^{1,\sigma}(\tilde{Q})}^2 + \|we^{\sigma\varphi}\|_{H^{1,\sigma}(\tilde{Q})}^2 + \sigma \|ve^{\sigma\varphi}\|_{H^{1,\sigma}(\tilde{\Sigma})}^2 \right) \\ & \sigma \|we^{\sigma\varphi}\|_{H^{1,\sigma}(\tilde{Q})}^2 \\ & \leq C \left( \|(\nabla \wedge S)e^{\sigma\varphi}\|_{L^2(\tilde{Q})}^2 + \|ue^{\sigma\varphi}\|_{H^{1,\sigma}(\tilde{Q})}^2 + \|ve^{\sigma\varphi}\|_{H^{1,\sigma}(\tilde{Q})}^2 + \sigma \|we^{\sigma\varphi}\|_{H^{1,\sigma}(\tilde{\Sigma})}^2 \right). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} & \sigma \|ve^{\sigma\varphi}\|_{H^{1,\sigma}(\tilde{Q})}^2 \\ & \leq C \left( \|(\nabla S)e^{\sigma\varphi}\|_{L^2(\tilde{Q})}^2 + \|ue^{\sigma\varphi}\|_{H^{1,\sigma}(\tilde{Q})}^2 + \|we^{\sigma\varphi}\|_{H^{1,\sigma}(\tilde{\Sigma})}^2 + \sigma \|ve^{\sigma\varphi}\|_{H^{1,\sigma}(\tilde{\Sigma})}^2 \right). \end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sigma} \|ue^{\sigma\varphi}\|_{H^{2,\sigma}(\tilde{Q})}^2 \\ & \leq C \left( \|Que^{\sigma\varphi}\|_{L^2(\tilde{Q})}^2 + \frac{1}{\sigma} \|(\nabla Qu)e^{\sigma\varphi}\|_{L^2(\tilde{Q})}^2 + \frac{1}{\sigma} \|ue^{\sigma\varphi}\|_{H^{1,\sigma}(\tilde{Q})}^2 + \|ue^{\sigma\varphi}\|_{H^{2,\sigma}(\tilde{\Sigma})}^2 \right). \end{aligned}$$

Et grâce aux poids de Carleman, on absorbe le troisième terme du membre de droite dans le membre de gauche pour obtenir le résultat :

$$\frac{1}{\sigma} \|ue^{\sigma\varphi}\|_{H^{2,\sigma}(\tilde{Q})}^2 \leq C \left( \|Que^{\sigma\varphi}\|_{H^1(\tilde{Q})}^2 + \|ue^{\sigma\varphi}\|_{H^{2,\sigma}(\tilde{\Sigma})}^2 \right)$$

et ceci conclut la démonstration du Théorème 2.3.  $\square$

### Obtenir des estimations locales

Nous allons maintenant appliquer l'inégalité de Carleman démontrée au Théorème 2.3 à la fonction  $u_\gamma$ . Afin de garantir que son support est bien dans un compact de  $\bar{\Omega} \times (-\frac{T}{2}, \frac{5T}{2}) \times (-3\eta, 3\eta)$ , on va la multiplier d'abord par une fonction plateau. Un bon choix de cette fonction plateau conduit à deux estimations locales. Ce travail est inspiré de celui de Bellassoued [3] qui utilise lui-même quelques résultats de Robbiano [79] mais en remarquant ici que l'on a une variable supplémentaire.

#### Première estimation

Soit  $\Gamma \subset \partial\Omega$  arbitrairement petit. On commence par estimer  $u_\gamma$  dans une boule proche de  $\Gamma$ . Choisissons  $0 < \eta < \varepsilon$  et  $x^{(0)} \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$  tels que

$$\overline{B(x^{(0)}, \eta)} \cap \bar{\Omega} = \emptyset, \quad B(x^{(0)}, 2\eta) \cap \Omega \neq \emptyset, \quad B(x^{(0)}, 4\eta) \cap \partial\Omega \subset \Gamma.$$

Cette construction est illustrée sur la Figure 2.3. On définit alors

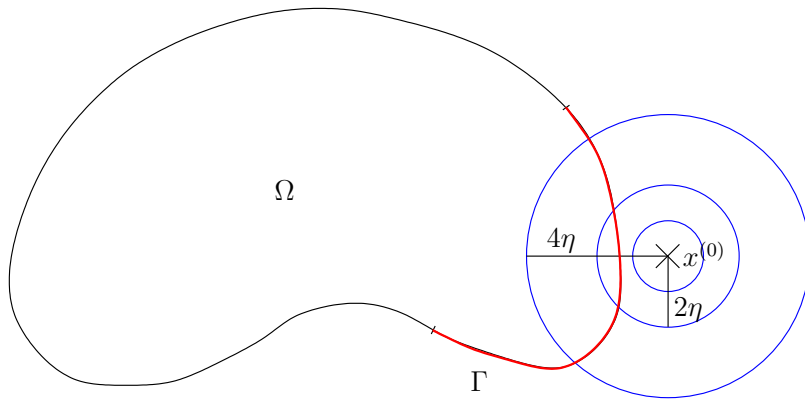


FIG. 2.3 – Définition de  $x^{(0)}$  et  $\eta$ .

$$\psi^{(0)}(x, t, r) = |x - x^{(0)}|^2 + \frac{\eta^2}{T^2} \left(t + \frac{T}{2}\right)^2 + r^2, \quad \forall (x, t, r) \in \tilde{Q},$$

et on pose

$$\varphi^{(0)}(x, t, r) = e^{-\frac{\xi}{\eta^2} \psi^{(0)}(x, t, r)}, \quad \forall (x, t, r) \in \tilde{Q}.$$

On introduit la fonction plateau  $\chi_4 \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  telle que

$$\chi_4(z) = \begin{cases} 0, & \text{si } z < \frac{1}{2}, z > 8, \\ 1, & \text{si } \frac{3}{4} < z < 7, \end{cases}$$

et on pose

$$u_\gamma^*(x, t, r) = \chi_4 \left( \frac{\psi^{(0)}}{\eta^2} \right) u_\gamma(x, t, r), \quad \forall (x, t, r) \in \tilde{Q}.$$

La fonction plateau  $\chi_4$  est tracée sur la Figure 2.4.

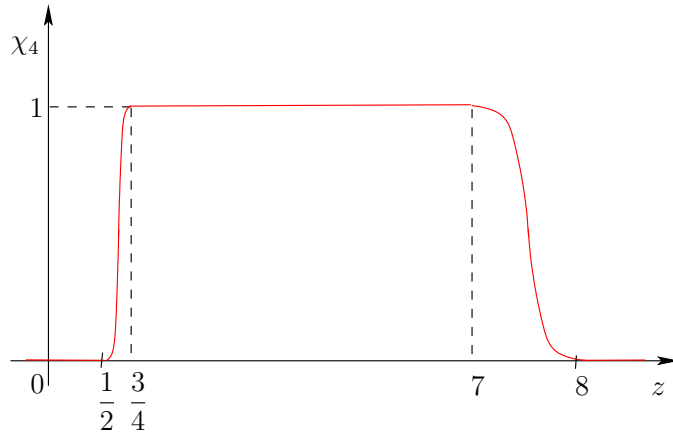


FIG. 2.4 – Définition de  $\chi_4$ .

Ici,  $u_\gamma^*$  est à support compact dans  $\bar{\Omega} \times (-\frac{T}{2}, \frac{5T}{2}) \times (-3\eta, 3\eta)$  puisque

$$\psi^{(0)}(x, t, \pm 3\eta) > 10\eta^2 \quad \Longrightarrow \quad u_\gamma^*(x, t, r) = 0 \quad \text{si } |r| \geq 3\eta,$$

$$\psi^{(0)}(x, \frac{5T}{2}, r) > 10\eta^2 \quad \Longrightarrow \quad u_\gamma^*(x, t, r) = 0 \quad \text{si } t \geq \frac{5T}{2},$$

et

$$u_\gamma(x, t, r) = 0 \quad \text{si } t < -\frac{T}{2} + \frac{3\eta}{2}.$$

Par conséquent, on peut lui appliquer l'inégalité de Carleman du Théorème 2.3 :

$$\frac{1}{\sigma} \|u_\gamma^* e^{\sigma\varphi^{(0)}}\|_{H^{2,\sigma}(\tilde{Q})}^2 \leq C \left( \|(\mathcal{Q}u_\gamma^*) e^{\sigma\varphi^{(0)}}\|_{H^1(\tilde{Q})}^2 + \|u_\gamma^* e^{\sigma\varphi^{(0)}}\|_{H^{2,\sigma}(\tilde{\Sigma})}^2 \right).$$

La dernière norme est en fait dans  $\tilde{\Gamma} = \Gamma \times (-\frac{T}{2}, \frac{5T}{2}) \times (-3\eta, 3\eta) \subset \tilde{\Sigma}$ . En effet, on a supposé que  $B(x^{(0)}, 4\eta) \cap \partial\Omega \subset \Gamma$ , donc, si  $x \in \partial\Omega \setminus \Gamma$ , alors  $u_\gamma^*(x, t, r) = 0$ . De plus,

$\forall(x, t, r) \in \tilde{Q}$ ,

$$\begin{aligned} & \mathcal{Q}u_\gamma^*(x, t, r) \\ &= \chi_4 \left( \frac{\psi^{(0)}}{\eta^2} \right) \mathcal{Q}u_\gamma(x, t, r) + \left[ \mathcal{Q}, \chi_4 \left( \frac{\psi^{(0)}}{\eta^2} \right) \right] u_\gamma(x, t, r) \\ &= \chi_4 \left( \frac{\psi^{(0)}}{\eta^2} \right) (F_\gamma(x, t, r) + G_\gamma(x, t, r)) + \left[ \mathcal{Q}, \chi_4 \left( \frac{\psi^{(0)}}{\eta^2} \right) \right] u_\gamma(x, t, r) \\ &= \chi_4 \left( \frac{\psi^{(0)}}{\eta^2} \right) F_\gamma(x, t, r) + \left[ \mathcal{Q}, \chi_4 \left( \frac{\psi^{(0)}}{\eta^2} \right) \right] u_\gamma(x, t, r), \end{aligned}$$

puisqu'on a vu en (2.4) que  $G_\gamma(x, t, r) = 0$ ,  $\forall x \in \Omega \setminus \overline{\Omega(3\varepsilon)}$ . Et ici,  $\chi_4 \left( \frac{\psi^{(0)}}{\eta^2} \right)$  est non nul si  $|x - x^{(0)}|^2 \leq 8\eta^2$ , ainsi, en particulier si  $|x - x^{(0)}| \leq 3\eta < 3\varepsilon$ . On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sigma} \|u_\gamma^* e^{\sigma\varphi^{(0)}}\|_{H^{2,\sigma}(\tilde{Q})}^2 \leq C \left( \|(\mathcal{Q}u_\gamma^*) e^{\sigma\varphi^{(0)}}\|_{H^1(\tilde{Q})}^2 + \|u_\gamma^* e^{\sigma\varphi^{(0)}}\|_{H^{2,\sigma}(\tilde{\Gamma})}^2 \right) \\ & \implies \frac{1}{\sigma} e^{2\sigma e^{-6\varepsilon}} \|u_\gamma\|_{H^{2,\sigma}(\{\eta^2 \leq \psi^{(0)} \leq 6\eta^2\} \cap \tilde{Q})}^2 \\ & \leq C \left( \sigma^2 e^{2\sigma e^{-7\varepsilon}} \|u_\gamma\|_{H^2(\tilde{Q})}^2 + \sigma^2 e^{2\sigma e^{-\frac{\xi}{2}}} \|F_\gamma\|_{H^1(\tilde{Q})}^2 + \sigma^4 e^{2\sigma e^{-\frac{\xi}{2}}} \|u_\gamma\|_{H^2(\tilde{\Gamma})}^2 \right), \end{aligned}$$

On choisit alors  $\rho$  et  $x^{(1)}$  tels que

$$\text{dist}(x^{(1)}, \partial\Omega) \geq 4\rho, \quad \tilde{B}_1 = B(x^{(1)}, \rho) \times \left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right) \times (-\rho, \rho) \subset \{\eta^2 \leq \psi^{(0)} \leq 6\eta^2\}.$$

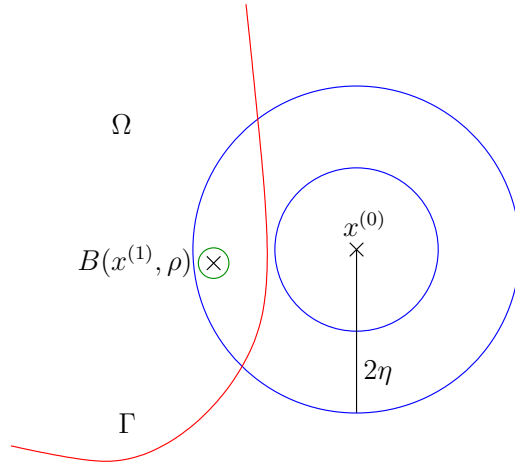


FIG. 2.5 – Définition de  $x^{(1)}$  et de  $\rho$ .

Ce choix, illustré sur la Figure 2.5, est valide puisque, dans  $\tilde{B}_1$ , on a

$$\psi^{(0)}(x, t, r) \leq |x - x^{(1)}|^2 + |x^{(1)} - x^{(0)}|^2 + \frac{\eta^2}{T^2} \left(t + \frac{T}{2}\right)^2 + r^2 \leq \rho^2 + |x^{(1)} - x^{(0)}|^2 + \eta^2 + \rho^2$$



On définit

$$\psi^{(j)}(x, t, r) = |x - x^{(j)}|^2 + \frac{\rho^2}{T^2} \left(t + \frac{T}{2}\right)^2 + r^2, \quad \forall (x, t, r) \in \tilde{Q},$$

et

$$\varphi^{(j)}(x, t, r) = e^{-\frac{\xi}{\rho^2} \psi^{(j)}(x, t, r)}, \quad \forall (x, t, r) \in \tilde{Q}.$$

On définit la nouvelle variable

$$u_\gamma^*(x, t, r) = \chi_4 \left( \frac{\psi^{(j)}}{\rho^2} \right) u_\gamma(x, t, r), \quad \forall (x, t, r) \in \tilde{Q},$$

à laquelle on applique le Théorème 2.3, sans terme de bord puisque le support de  $u_\gamma^*$  est un domaine intérieur :

$$\frac{1}{\sigma} \|u_\gamma^* e^{\sigma \varphi^{(j)}}\|_{H^{2,\sigma}(\tilde{Q})}^2 \leq C \|(\mathcal{Q}u_\gamma^*) e^{\sigma \varphi^{(j)}}\|_{H^1(\tilde{Q})}^2.$$

De plus,  $\forall (x, t, r) \in \tilde{Q}$ ,

$$\mathcal{Q}u_\gamma^*(x, t, r) = \chi_4 \left( \frac{\psi^{(j)}}{\rho^2} \right) F_\gamma(x, t, r) + \left[ \mathcal{Q}, \chi_4 \left( \frac{\psi^{(j)}}{\rho^2} \right) \right] u_\gamma(x, t, r).$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned} & \frac{C}{\sigma} e^{2\sigma e^{-6\xi}} \|u_\gamma\|_{H^{2,\sigma}(\{\rho^2 \leq \psi^{(j)} \leq 6\rho^2\} \cap \tilde{Q})}^2 \\ & \leq \sigma^2 e^{2\sigma e^{-\frac{\xi}{2}}} \|u_\gamma\|_{H^2(\psi^{(j)} \leq \rho^2)}^2 + \sigma^2 e^{2\sigma e^{-7\xi}} \|u_\gamma\|_{H^2(\psi^{(j)} \leq 8\rho^2)}^2 + \sigma^2 e^{2\sigma e^{-\frac{\xi}{2}}} \|F_\gamma\|_{H^1(\tilde{Q})}^2, \end{aligned}$$

et, si on choisit  $\sigma$  grand, on peut écrire :

$$\begin{aligned} & e^{2\sigma e^{-6\xi}} \|u_\gamma\|_{H^{2,\sigma}(\{\psi^{(j)} \leq 6\rho^2\} \cap \tilde{Q})}^2 \\ & \leq C e^{2\sigma e^{-\frac{\xi}{3}}} \|u_\gamma\|_{H^2(\psi^{(j)} \leq \rho^2)}^2 + C e^{2\sigma e^{-\frac{13\xi}{2}}} \|u_\gamma\|_{H^2(\psi^{(j)} \leq 8\rho^2)}^2 + C e^{2\sigma e^{-\frac{\xi}{3}}} \|F_\gamma\|_{H^1(\tilde{Q})}^2. \end{aligned}$$

Ceci permet de conclure

$$\|u_\gamma\|_{H^2(\tilde{B}_{j+1})}^2 \leq C e^{C_3 \sigma} \left( \|u_\gamma\|_{H^2(\tilde{B}_j)}^2 + \|F_\gamma\|_{H^1(\tilde{Q})}^2 \right) + C e^{-C_4 \sigma} \|u_\gamma\|_{H^2(\tilde{Q})}^2,$$

puisque  $\tilde{B}_{j+1} \subset \{\psi^{(j)} \leq 6\rho^2\}$  and  $\{\psi^{(j)} \leq \rho^2\} \subset \tilde{B}_j$ . On minimise cette expression par rapport à  $\sigma$  (Lemme 2.5) pour obtenir, avec  $\nu_1 = \frac{C_4}{C_3 + C_4}$  :

$$\|u_\gamma\|_{H^2(\tilde{B}_{j+1})} \leq C \left( \|u_\gamma\|_{H^2(\tilde{Q})} \right)^{1-\nu_1} \left( \|F_\gamma\|_{H^1(\tilde{Q})} + \|u_\gamma\|_{H^2(\tilde{B}_j)} \right)^{\nu_1}$$

On utilise le résultat de récurrence du lemme suivant :

**Lemme 2.6** (Lemme 4 de Lebeau et Robbiano [57]). *Soit  $\alpha_j > 0$  satisfaisant, pour tout  $j \geq 0$ ,*

$$\alpha_j \leq B^{1-\nu} (\alpha_{j-1} + A)^\nu \quad \text{and} \quad \alpha_j \leq B$$

*où  $A > 0$ ,  $B > 0$  et  $\nu \in ]0, 1[$ . Alors, pour tout  $\mu \in ]0, \nu^N[$ , on a :*

$$\alpha_N \leq 2^{\frac{1}{1-\nu}} B^{1-\mu} (\alpha_0 + A)^\mu.$$

*Démonstration.* Si  $B \leq \alpha_0 + A$  alors le résultat est immédiat. Si  $\alpha_0 + A \leq B$ , en particulier  $A \leq B$ , donc on a

$$\frac{\alpha_j}{B} \leq \left( \frac{\alpha_{j-1} + A}{B} \right)^\nu,$$

et

$$\frac{A}{B} \leq \left( \frac{A}{B} \right)^\nu \leq \left( \frac{\alpha_{j-1} + A}{B} \right)^\nu.$$

De ces deux relations, on déduit que

$$\frac{\alpha_j + A}{2^{\frac{1}{1-\nu}} B} \leq \left( \frac{\alpha_{j-1} + A}{2^{\frac{1}{1-\nu}} B} \right)^\nu.$$

Ceci implique que

$$\alpha_N \leq 2^{\frac{1}{1-\nu}} B^{1-\nu N} (\alpha_0 + A)^{\nu N}.$$

Comme  $\alpha_0 + A \leq B$ , on obtient le résultat voulu pour tout  $\mu \leq \nu^N$ .  $\square$

Ici,

$$\alpha_j = \|u_\gamma\|_{H^2(\tilde{B}_{j+1})}, \quad A = \|F_\gamma\|_{H^1(\tilde{Q})}, \quad B = \|u_\gamma\|_{H^2(\tilde{Q})}^2.$$

On obtient donc

$$\|u_\gamma\|_{H^2(\tilde{B}_n)} \leq C \left( \|u_\gamma\|_{H^2(\tilde{Q})} \right)^{1-\nu} \left( \|F_\gamma\|_{H^1(\tilde{Q})} + \|u_\gamma\|_{H^2(\tilde{B}_1)} \right)^\nu.$$

On applique l'inégalité de Young pour obtenir

$$\|u_\gamma\|_{H^2(\tilde{B}_n)} \leq \epsilon^q \|u_\gamma\|_{H^2(\tilde{Q})} + \epsilon^{-q'} \left( \|F_\gamma\|_{H^1(\tilde{Q})} + \|u_\gamma\|_{H^2(\tilde{B}_1)} \right),$$

où  $q = \frac{1}{1-\nu}$  and  $q' = \frac{1}{\nu}$ . On utilise les estimations (2.5) et (2.6) sur  $F_\gamma$  and  $u_\gamma$  pour écrire :

$$\|u_\gamma\|_{H^2(\tilde{B}_n)} \leq \epsilon^q e^{M\gamma} \|u^*\|_{H^2(\Omega \times (0,3T))} + \epsilon^{-q'} \left( e^{-m\gamma T} \|u^*\|_{H^2(\Omega \times (0,3T))} + \|u_\gamma\|_{H^2(\tilde{B}_1)} \right).$$

On choisit alors  $\epsilon = e^{-2M\gamma/q}$ , de telle façon que

$$\begin{aligned} \|u_\gamma\|_{H^2(\tilde{B}_n)} &\leq e^{-M\gamma} \|u^*\|_{H^2(\Omega \times (0,3T))} \\ &\quad + e^{-(mT - 2M\frac{q'}{q})\gamma} \|u^*\|_{H^2(\Omega \times (0,3T))} + e^{2M\gamma\frac{q'}{q}} \|u_\gamma\|_{H^2(\tilde{B}_1)}. \end{aligned}$$

Si on fixe  $T > T_n$  avec

$$mT_n - 2M\frac{q'}{q} = M,$$

on obtient, avec  $\kappa = 2M\gamma\frac{q'}{q}$ ,

$$\|u_\gamma\|_{H^2(\tilde{B}_n)} \leq e^{-M\gamma} \|u^*\|_{H^2(\Omega \times (0,3T))} + e^{\kappa\gamma} \|u_\gamma\|_{H^2(\tilde{B}_1)}.$$

On peut faire le même travail sur la première estimation (2.12), celle établie dans  $\tilde{B}_1$ . On applique l'inégalité de Young et les estimations sur (2.5) et (2.6) pour avoir

$$\|u_\gamma\|_{H^2(\tilde{B}_1)} \leq \epsilon^{q_0} e^{M\gamma} \|u^*\|_{H^2(\Omega \times (0,3T))} + \epsilon^{-q'_0} \left( e^{-m\gamma T} \|u^*\|_{H^2(\Omega \times (0,3T))} + \|u_\gamma\|_{H^2(\tilde{\Gamma})} \right).$$



où  $q_0 = \frac{1}{1 - \nu_0}$  and  $q'_0 = \frac{1}{\nu_0}$ . On choisit alors  $\epsilon = e^{-(2M+\kappa)\gamma/q_0}$ , de telle façon que

$$\begin{aligned} \|u_\gamma\|_{H^2(\tilde{B}_1)} &\leq e^{-(M+\kappa)\gamma} \|u^*\|_{H^2(\Omega \times (0, 3T))} \\ &\quad + e^{-(mT - (2M+\kappa)\frac{q'_0}{q_0})\gamma} \|u^*\|_{H^2(\Omega \times (0, 3T))} + e^{(2M+\kappa)\gamma\frac{q'_0}{q_0}} \|u_\gamma\|_{H^2(\tilde{\Gamma})}. \end{aligned}$$

Si on fixe  $T > T_0$  avec

$$mT_0 - (2M + \kappa)\frac{q'_0}{q_0} = M + \kappa,$$

on obtient

$$\|u_\gamma\|_{H^2(\tilde{B}_1)} \leq e^{-(M+\kappa)\gamma} \|u^*\|_{H^2(\Omega \times (0, 3T))} + e^{C\gamma} \|u_\gamma\|_{H^2(\tilde{\Gamma})}.$$

Et on rassemble les deux estimations en une :

$$\|u_\gamma\|_{H^2(\tilde{B}_n)} \leq e^{-M\gamma} \|u^*\|_{H^2(\Omega \times (0, 3T))} + e^{C\gamma} \|u^*\|_{H^2(\Gamma \times (0, 3T))}^2.$$

Finalement, on prend  $T > \max_n T_n$  et on somme les inégalités pour obtenir

$$\|u_\gamma\|_{H^2(\Omega(\epsilon) \setminus \Omega(2\epsilon) \times (-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}) \times (-\rho, \rho))} \leq e^{-C\gamma} \|u^*\|_{H^2(\Omega \times (0, 3T))}^2 + e^{C\gamma} \|u^*\|_{H^2(\Gamma \times (0, 3T))}^2.$$

On va maintenant revenir à la variable  $u$  dans les estimations.

### Revenir à la variable $u$

On introduit la nouvelle variable

$$\begin{aligned} w_\gamma(x, t) &= u_\gamma(x, t, r = 0) = \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{\gamma}{2}(t-y)^2} \theta(t-y) u^*(x, y) dy \\ &= (K_\gamma * u^*)(x, t), \quad \forall (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}, \end{aligned}$$

avec

$$K_\gamma(t) = \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi}} e^{-\frac{\gamma}{2}t^2} \theta(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

On constate que  $w_\gamma$  converge vers  $u^*$  lorsque  $\gamma$  tend vers l'infini. On a

$$\begin{aligned} \|w_\gamma\|_{H^2(\Omega(\epsilon) \setminus \Omega(2\epsilon) \times (0, \frac{T}{2} - \rho))}^2 &\leq C \|u_\gamma\|_{H^2(\Omega(\epsilon) \setminus \Omega(2\epsilon) \times (-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}) \times (-\rho, \rho))}^2 \\ &\leq e^{-C\gamma} \|u^*\|_{H^2(\Omega \times (0, 3T))}^2 + e^{C\gamma} \|u^*\|_{H^2(\Gamma \times (0, 3T))}^2. \end{aligned}$$

En effet, la formule de Cauchy donne, pour  $0 < d < \rho$ ,

$$w_\gamma(x, a) = \frac{1}{2i\pi} \int_{|w-a|=d} \frac{w_\gamma(x, w)}{w-a} dw,$$

ce qui implique, en utilisant des coordonnées polaires, que

$$|w_\gamma(x, a)|^2 \leq C \int_0^{2\pi} |w_\gamma(x, a + de^{i\theta})|^2 d\theta.$$

On intègre alors, pour  $0 < d < \rho$ , en

$$|w_\gamma(x, a)|^2 \leq \frac{C}{\rho} \int_0^\rho \int_0^{2\pi} |w_\gamma(x, a + de^{i\theta})|^2 d\theta d\rho,$$

que l'on peut réécrire

$$\begin{aligned} |w_\gamma(x, a)|^2 &\leq C \int_{-\rho}^{\rho} \int_{|t-a|\leq\rho} |w_\gamma(x, t + ir)|^2 dt dr \\ &= C \int_{-\rho}^{\rho} \int_{|t-a|\leq\rho} |u_\gamma(x, t, r)|^2 dt dr, \end{aligned}$$

d'après la définition de  $w_\gamma$ . Alors, on intègre cette formule pour  $x \in \Omega(\varepsilon) \setminus \Omega(2\varepsilon)$  :

$$\begin{aligned} \|w_\gamma(\cdot, a)\|_{L^2(\Omega(\varepsilon)\setminus\Omega(2\varepsilon))}^2 &\leq C \int_{-\rho}^{\rho} \int_{|t-a|\leq\rho} \|u_\gamma(\cdot, t, r)\|_{L^2(\Omega(\varepsilon, 2\varepsilon))}^2 dt dr \\ &\leq C \|u_\gamma\|_{L^2(\Omega(\varepsilon, 2\varepsilon)\times(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})\times(-\rho, \rho))}^2. \end{aligned}$$

Puis, on l'intègre pour  $a \in (0, \frac{T}{2} - \rho)$  :

$$\|w_\gamma\|_{L^2(\Omega(\varepsilon)\setminus\Omega(2\varepsilon)\times(0, \frac{T}{2}-\rho))}^2 \leq C \|u_\gamma\|_{L^2(\Omega(\varepsilon, 2\varepsilon)\times(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})\times(-\rho, \rho))}^2$$

et on fait la même chose pour les dérivées de  $w_\gamma$ . On peut maintenant revenir à  $u^*$  (puis à  $u$ ) en utilisant la transformée de Fourier classique (notée ici par le symbole d'un grand chapeau) car on remarque que

$$w_\gamma(x, t) = (K_\gamma * u^*)(x, t) \implies \widehat{w}_\gamma(x, \tau) = \widehat{K}_\gamma(\tau) \widehat{u}^*(x, \tau),$$

où

$$\begin{aligned} \widehat{K}_\gamma(\tau) &= \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\tau t} e^{-\frac{\gamma}{2}t^2} \theta(t) dt \\ &= \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\tau t} e^{-\frac{\gamma}{2}t^2} dt + \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\tau t} e^{-\frac{\gamma}{2}t^2} (\theta(t) - 1) dt. \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\tau t} e^{-\frac{\gamma}{2}t^2} dt &= \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\sqrt{\frac{\gamma}{2}}t + \sqrt{\frac{1}{2\gamma}}i\tau)^2} e^{-\frac{\tau^2}{2\gamma}} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\tau^2}{2\gamma}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz = e^{-\frac{\tau^2}{2\gamma}}. \end{aligned}$$

D'où

$$\widehat{K}_\gamma(\tau) = e^{-\frac{\tau^2}{2\gamma}} + \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\frac{T}{2}+3\eta} e^{-i\tau t} e^{-\frac{\gamma}{2}t^2} (\theta(t) - 1) dt.$$

Donc, on a

$$\begin{aligned} |(1 - \widehat{K}_\gamma)(\tau)| &\leq \left| 1 - e^{-\frac{\tau^2}{2\gamma}} \right| + \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\frac{T}{2}+3\eta} |e^{-i\tau t} e^{-\frac{\gamma}{2}t^2}| |\theta(t) - 1| dt \\ &\leq \frac{\tau^2}{2\gamma} + \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\frac{T}{2}+3\eta} e^{-\frac{\gamma}{2}t^2} dt, \end{aligned}$$

où on a utilisé pour le premier terme le fait que la fonction  $\frac{1 - e^{-t^2}}{t^2}$  est bornée dans  $\mathbb{R}$ . On gagne un ordre de convergence puisque l'on a  $\frac{1}{\gamma}$  et non plus  $\frac{1}{\sqrt{\gamma}}$  comme dans Bellassoued *et*

al. [4]. Alors, on peut introduire dans le second terme le changement de variable  $z = e^{-\frac{\gamma}{2}t^2}$ , c'est-à-dire que  $t = \sqrt{-\frac{2}{\gamma}\ln(z)}$ , et  $dz = -\gamma t e^{-\frac{\gamma}{2}t^2} dt$ , et donc on obtient

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\frac{T}{2}+3\eta} e^{-\frac{\gamma}{2}t^2} dt &\leq \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{e^{-\frac{\gamma}{2}(-\frac{T}{2}+3\eta)^2}} \frac{dz}{\sqrt{-\ln(z)}} \\ &\leq \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{e^{-\frac{\gamma}{2}(-\frac{T}{2}+3\eta)^2}}{\sqrt{\frac{\gamma}{2}(-\frac{T}{2}+3\eta)^2}} \leq \frac{C}{\gamma}. \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned} \|u^* - w_\gamma\|_{L^2(\Omega(\varepsilon)\setminus\Omega(2\varepsilon)\times(0,\frac{T}{2}-\rho))}^2 &\leq \|u^* - w_\gamma\|_{L^2(\Omega\times\mathbb{R})}^2 = \|\widehat{u^* - w_\gamma}\|_{L^2(\Omega\times\mathbb{R})}^2 \\ &\leq \int_{\Omega} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\tau^2 + C}{\gamma} \right|^2 |\widehat{u^*}(x, \tau)|^2 d\tau \\ &\leq \frac{C}{\gamma^2} \int_{\Omega} \int_{-\infty}^{+\infty} (|\widehat{u^*}(x, \tau)|^2 + |\partial_t^2 \widehat{u^*}(x, \tau)|^2) d\tau \leq \frac{C}{\gamma^2} \|\widehat{u^*}\|_{H^2(\Omega\times\mathbb{R})}^2. \end{aligned}$$

Finalement, si on suppose que  $u^*$  est prolongée par zéro en dehors de  $(0, 3T)$ , on a

$$\|u^* - w_\gamma\|_{L^2(\Omega(\varepsilon)\setminus\Omega(2\varepsilon)\times(0,\frac{T}{2}-\rho))} \leq \frac{C}{\gamma} \|u^*\|_{H^2(\Omega\times(0,3T))}.$$

D'où,

$$\begin{aligned} \|u^*\|_{H^2(\Omega(\varepsilon)\setminus\Omega(2\varepsilon)\times(0,\frac{T}{2}-\rho))} &\leq C \left( \|u^* - w_\gamma\|_{H^2(\Omega(\varepsilon)\setminus\Omega(2\varepsilon)\times(0,\frac{T}{2}-\rho))} + \|w_\gamma\|_{H^2(\Omega(\varepsilon)\setminus\Omega(2\varepsilon)\times(0,\frac{T}{2}-\rho))} \right) \\ &\leq \frac{C}{\gamma} \|u^*\|_{H^4(\Omega\times(0,3T))} + C \|w_\gamma\|_{H^2(\Omega(\varepsilon)\setminus\Omega(2\varepsilon)\times(0,\frac{T}{2}-\rho))}. \end{aligned}$$

En revenant à  $u$  et en prenant en compte le fait que  $u^*(x, t) = \chi_3(x)u(x, t)$ , de telle sorte que  $u = u^*$  in  $\Omega(\varepsilon) \setminus \Omega(2\varepsilon)$ , on a

$$\|u\|_{H^2(\Omega(\varepsilon)\setminus\Omega(2\varepsilon)\times(0,\frac{T}{2}-\rho))} \leq \frac{C}{\gamma} \|u\|_{H^4(\Omega\times(0,3T))} + e^{C\gamma} \|u\|_{H^2(\Gamma\times(0,3T))}.$$

On utilise le fait que  $\|u\|_{H^4(\Omega\times(0,3T))}$  est borné et que

$$\|u\|_{H^2(\Gamma\times(0,3T))}^2 = \sum_{|\alpha|=1}^2 \|\partial_x^\alpha u\|_{L^2(\Gamma\times(0,3T))}^2,$$

puisque  $\hat{u}$  et ses dérivées s'annulent sur  $\Gamma$ , pour écrire

$$\|u\|_{H^2(\Omega(\varepsilon)\setminus\Omega(2\varepsilon)\times(0,\frac{T}{2}-\rho))}^2 \leq \frac{C_5}{\gamma^2} + e^{C_6\gamma} \sum_{|\alpha|=1}^2 \|\partial_x^\alpha u\|_{L^2(\Gamma\times(0,3T))}^2.$$

Alors, on choisit  $\gamma$  de telle façon que le premier terme domine le second. On peut par exemple choisir :

$$\gamma = \frac{1}{2C_6} \log \left( 2 + \frac{C_5}{\sum_{|\alpha|=1}^2 \|\partial_x^\alpha u\|_{L^2(\Gamma\times(0,3T))}^2} \right).$$

Ceci termine la preuve du Théorème 2.1 et conclut ce chapitre.

Maintenant que nous avons à notre disposition deux outils fondamentaux relatifs au système de la viscoélasticité linéaire en trois dimensions, à savoir une inégalité de Carleman et un résultat de stabilité associé au prolongement unique, nous sommes en mesure de démontrer des résultats de stabilité pour le problème inverse de récupération des coefficients viscoélastiques. C'est l'objet du chapitre suivant.



## Chapitre 3

# Unicité et stabilité de la récupération d'un coefficient viscoélastique

Les problèmes inverses s'intéressent à la récupération des coefficients, de la source ou des conditions initiales d'une équation aux dérivées partielles à partir de mesures de la solution. Les problèmes inverses sont mal posés selon le sens classique, Hadamard [32], Lavrent'ev [53]. Les estimations de stabilité jouent donc un rôle important dans la théorie. En 1981, Bukhgeim et Klivanov [10,11] ont développé une méthode remarquable basée sur les inégalités de Carleman [12] pour démontrer l'unicité et la stabilité dans la récupération.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la récupération d'un coefficient du système de la viscoélasticité introduit en (1). Avant cela, nous faisons l'hypothèse que le coefficient  $\tilde{\mu}$  peut se décomposer sous la forme

$$\tilde{\mu}(x, t) = p(x)h(t), \quad \forall (x, t) \in \Omega \times (0, +\infty). \quad (3.1)$$

Plusieurs auteurs ont adressé le problème de récupération des coefficients du système de la viscoélasticité. Ainsi, certains (voir Janno [45,46], Wolfersdorf [90], Grasseli [30,31], Lorenzi [57,60,62]) récupèrent la dépendance temporelle  $h$  du coefficient  $\tilde{\mu}$  en réduisant le problème à une équation intégrale de Volterra non linéaire par une méthode de Fourier. Pour ce qui est de la récupération de la dépendance spatiale  $p$  du coefficient  $\tilde{\mu}$ , une méthode consiste à utiliser les inégalités de Carleman. Ainsi, en 2007, Lorenzi, Messina et Romanov [61] cherchent à résoudre le problème de récupération du coefficient  $p$  pour le système de la viscoélasticité. Pour cela, ils font l'hypothèse que les coefficients de l'équation sont indépendants d'une des variables d'espace, ce qui leur permet de ramener le problème à celui d'une équation scalaire et d'appliquer les résultats démontrés dans Cavaterra, Lorenzi et Yamamoto [13]. Ils réussissent ainsi à récupérer le coefficient à partir de trois mesures internes.

Les deux problèmes inverses que nous regardons dans ce chapitre se formulent ainsi :

*Connaissant  $(\lambda, \mu, \tilde{\lambda}, h, \bar{u}_0, \bar{u}_1, f)$ , retrouver  $p(x)$ , pour tout  $x \in \Omega$ , à partir de mesures de*

$$u(x, t), \quad \forall (x, t) \in \omega \times (0, T),$$

*où  $\omega$  est une partie de  $\Omega$  et  $T > 0$ , ou à partir de mesures de*

$$\nabla u(x, t) \cdot n(x), \quad \forall (x, t) \in \Gamma \times (0, T),$$

*où  $\Gamma$  est une partie de  $\partial\Omega$  de normal extérieur unitaire  $n$  et  $T > 0$ .*

En utilisant la méthode de Bukhgeim et Klibanov et l'inégalité de Carleman du Théorème 1.1, nous démontrons tout d'abord un résultat de stabilité höldérienne pour le problème de récupération du coefficient  $p$  du système (1)-(3.1) à partir d'une unique mesure interne. Ensuite, grâce au résultat de prolongement unique du Théorème 2.1, nous étendons ce résultat à une estimation de stabilité logarithmique pour le problème associé à une unique mesure frontière. Bien que cette estimation soit plus faible, le résultat est puissant car il est relatif à une unique mesure sur une partie arbitrairement petite du bord. Un résultat similaire a été prouvé dans Bellassoued [3] pour l'équation des ondes, Bellassoued et Yamamoto [5] en acoustique et dans Bellassoued, Imanuvilov et Yamamoto [4] pour le système de Lamé - opérateur  $\mathcal{P}$  sans le terme intégral. Les résultats de ce chapitre ont été publiés dans [19] et [20] respectivement.

### 3.1 Un résultat de stabilité hölderienne avec observation interne

Voici donc le premier résultat que nous démontrons :

**Théorème 3.1** (Stabilité höldérienne). *Soit  $u$  (respectivement  $\bar{u}$ ) la solution du système (1)-(3.1), associée au coefficient  $p$  (respectivement  $\bar{p}$ ). On suppose que*

(H1)  $(\lambda, \mu) \in C^2(\bar{\Omega})^2$  et  $(\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}) \in C^2(\bar{\Omega} \times (0, +\infty))^2$  sont tels que les solutions  $u$  et  $\bar{u} \in W^{8,\infty}(\Omega \times (0, +\infty))^3$ ,

(H2)  $\mu$  et  $\lambda + 2\mu$  satisfont la Condition 1 avec un même  $x_0$ ,

(H3)  $p = \bar{p}$  est connu dans un voisinage  $\omega$  de  $\partial\Omega$ ,

(H4)  $h(0) \neq 0$ ,  $h'(0) = 0$ ,

(H5) il existe  $M > 0$  telle que,  $\forall x \in \bar{\Omega} \setminus \omega$ ,  $|(\nabla \bar{u}_0 + \nabla \bar{u}_0^t)(x) \cdot (x - x_0)| \geq M$ .

Alors, il existe  $\kappa \in (0, 1)$  et  $T_0 > 0$  tels que, pour tout  $T > T_0$  l'estimation suivante soit vraie :

$$\|p - \bar{p}\|_{H^2(\Omega)} \leq C \|u - \bar{u}\|_{H^2(\omega \times (0, T))}^\kappa,$$

où  $C > 0$  dépend de la norme  $C^2(\bar{\Omega})$  de  $p$  et  $\bar{p}$  et de la norme  $W^{8,\infty}(\Omega \times (0, T))^3$  de  $u$  et  $\bar{u}$ .

Nous remarquons alors que s'il existe des constantes  $m_1$  et  $m_2$  telles que pour tout  $p$  admissible, on ait  $\|p\|_{C^2(\bar{\Omega})} \leq m_1$  et  $\|u\|_{W^{8,\infty}(\Omega \times (0, T))} \leq m_2$ , alors la constante  $C$  qui apparaît dans le Théorème 3.1 est uniforme en  $p$  et le résultat est alors global. Du Théorème 3.1, on déduit immédiatement le Corollaire 3.2.

**Corollaire 3.2** (Unicité). *Sous les hypothèses du Théorème 3.1, on a*

$$\begin{aligned} u(x, t) = \bar{u}(x, t), \quad \forall (x, t) \in \omega \times (0, T), \quad |\alpha| = 1, 2 \\ \implies p(x) = \bar{p}(x), \quad \forall x \in \Omega. \end{aligned}$$

Un exemple de donnée initiale  $\bar{u}_0$  satisfaisant (H5) correspond au choix  $\bar{u}_0 \in H_0^1(\Omega)^3$  telle que  $\bar{u}_0(x) = x$ ,  $\forall x \in \bar{\Omega} \setminus \omega$ . D'où,

$$|(\nabla \bar{u}_0 + \nabla \bar{u}_0^t)(x) \cdot (x - x_0)| = |x - x_0| \geq d_0 > 0, \quad \forall x \in \bar{\Omega} \setminus \omega.$$

L'hypothèse (H3) bien que restrictive est admissible si l'on envisage que des mesures expérimentales près du bord sont possibles. L'hypothèse (H4) est quant à elle vérifiée en pratique.

## 3.2 Un résultat de stabilité logarithmique avec observation frontière

Nous énonçons ici le deuxième résultat de stabilité :

**Théorème 3.3** (Stabilité logarithmique). *Soit  $u$  (respectivement  $\bar{u}$ ) la solution du système (1)-(3.1), associée au coefficient  $p$  (respectivement  $\bar{p}$ ). On suppose que*

(H1)  $(\lambda, \mu) \in C^2(\bar{\Omega})^2$  et  $(\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}) \in C^2(\bar{\Omega} \times (0, +\infty))^2$  sont tels que les solutions  $u$  et  $\bar{u} \in W^{8,\infty}(\Omega \times (0, +\infty))^3$ ,

(H2)  $\mu$  et  $\lambda + 2\mu$  satisfont la Condition 1 avec un même  $x_0$ ,

(H3)  $p = \bar{p}$  est connu dans un voisinage  $\omega$  de  $\partial\Omega$ ,

(H4)  $h(0) \neq 0$ ,  $h'(0) = 0$ ,

(H5) il existe  $M > 0$  telle que,  $\forall x \in \bar{\Omega} \setminus \omega$ ,  $|(\nabla \bar{u}_0 + \nabla \bar{u}_0^t)(x) \cdot (x - x_0)| \geq M$ .

Alors, pour  $\Gamma \subset \partial\Omega$  arbitrairement petit, il existe  $\kappa \in (0, 1)$  et  $T_0 > 0$  tels que, pour tout  $T > T_0$  l'estimation suivante soit vraie :

$$\|p - \bar{p}\|_{H^2(\Omega)} \leq C \left[ \log \left( 2 + \frac{C}{\sum_{1 \leq |\alpha| \leq 2} \|\partial_x^\alpha (u - \bar{u})\|_{L^2(\Gamma \times (0, T))}^2} \right) \right]^{-\kappa}$$

où  $C > 0$  dépend de la norme  $C^2(\bar{\Omega})$  de  $p$  et  $\bar{p}$  et de la norme  $W^{8,\infty}(\Omega \times (0, T))^3$  de  $u$  et  $\bar{u}$ .

Du Théorème 3.3, on déduit immédiatement le Corollaire 3.4.

**Corollaire 3.4** (Unicité). *Sous les hypothèses du Théorème 3.3, on a*

$$\begin{aligned} \partial_x^\alpha u(x, t) &= \partial_x^\alpha \bar{u}(x, t), & \forall (x, t) \in \Gamma \times (0, T), & \quad |\alpha| = 1, 2 \\ \implies p(x) &= \bar{p}(x), & \forall x \in \Omega. \end{aligned}$$

## 3.3 Preuves des Théorèmes 3.1 et 3.3

Cette section est consacrée à la preuve du résultat de stabilité du Théorème 3.3. L'idée de la preuve est la suivante. Tout d'abord, on ramène le coefficient inconnu  $p$  dans le terme source en écrivant l'équation satisfaite par  $\hat{v} = \partial_t(u - \bar{u})$ . Ensuite, on utilise la méthode de Bukhgeim et Klibanov, *i.e.* on dérive l'équation précédente pour amener le coefficient dans la condition initiale, puis on applique l'inégalité de Carleman démontrée au Chapitre 1 (Théorème 1.1) à la nouvelle variable  $\partial_t \hat{v}$  afin de borner l'énergie initiale du système. Grâce à une autre inégalité de Carleman pour un opérateur du premier ordre (Lemme 3.6), on revient au coefficient  $p$  dans l'estimation. Ainsi, on obtient le résultat du Théorème 3.1 relatif à des observations sur un voisinage de la frontière de  $\Omega$ . Finalement, on combine ce résultat avec la relation de prolongement unique du Théorème 2.1 pour conclure.

Soit  $u$  (respectivement  $\bar{u}$ ) la solution du système (1)-(3.1), associée au coefficient  $p$  (respectivement  $\bar{p}$ ). On suppose que les hypothèses (H1)-(H5) sont satisfaites. Par linéarité et sans perte de généralité, on peut supposer que  $\bar{u}_1 = 0$ .



### Amener le coefficient $p$ dans le terme source

On suppose  $(\bar{p}, \bar{u})$  connus et on introduit  $\hat{p} = p - \bar{p}$  et  $\hat{u} = u - \bar{u}$  qui satisfont l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}\hat{u}(x, t) &= \partial_t^2 \hat{u}(x, t) - \nabla \cdot (\mu(x)(\nabla \hat{u}(x, t) + \nabla \hat{u}(x, t)^t) + \lambda(x)(\nabla \cdot \hat{u})(x, t)I) \\ &+ \int_0^t \nabla \cdot \left( h(s)p(x)(\nabla \hat{u}(x, t-s) + \nabla \hat{u}(x, t-s)^t) + \tilde{\lambda}(x, s)(\nabla \cdot \hat{u})(x, t-s)I \right) ds \\ &= - \int_0^t h(s) \nabla \cdot (\hat{p}(x)(\nabla \bar{u}(x, t-s) + \nabla \bar{u}(x, t-s)^t)) ds, \quad \forall (x, t) \in \Omega \times (0, +\infty), \end{aligned}$$

avec des conditions initiales et des conditions de bord nulles. On remarque que le coefficient  $\hat{p}$  que l'on souhaite récupérer apparaît dans le terme source. Le problème est que ce terme source s'annule au temps initial  $t = 0$ , donc il ne satisfait pas les hypothèses de la méthode de Bukhgeim et Klibanov [11]. Pour remédier à ce problème, on dérive l'équation en temps et on pose :

$$\hat{v}(x, t) = \partial_t \hat{u}(x, t), \quad \forall (x, t) \in \Omega \times (0, +\infty).$$

Alors,  $\hat{v}$  satisfait l'équation

$$\begin{aligned} \mathcal{P}\hat{v}(x, t) &= - \int_0^t h(s) \nabla \cdot (\hat{p}(x)(\nabla \bar{v}(x, t-s) + \nabla \bar{v}(x, t-s)^t)) ds \\ &- h(t) \nabla \cdot (\hat{p}(x)(\nabla \bar{u}_0(x) + \nabla \bar{u}_0(x)^t)), \quad \forall (x, t) \in \Omega \times (0, +\infty), \end{aligned} \quad (3.2)$$

avec des conditions initiales et des conditions de bord nulles. Par conséquent, le coefficient inconnu est toujours présent dans le terme source mais ce dernier ne s'annule plus au temps initial.

### Appliquer la méthode de Bukhgeim et Klibanov

On dérive (3.2) et on pose

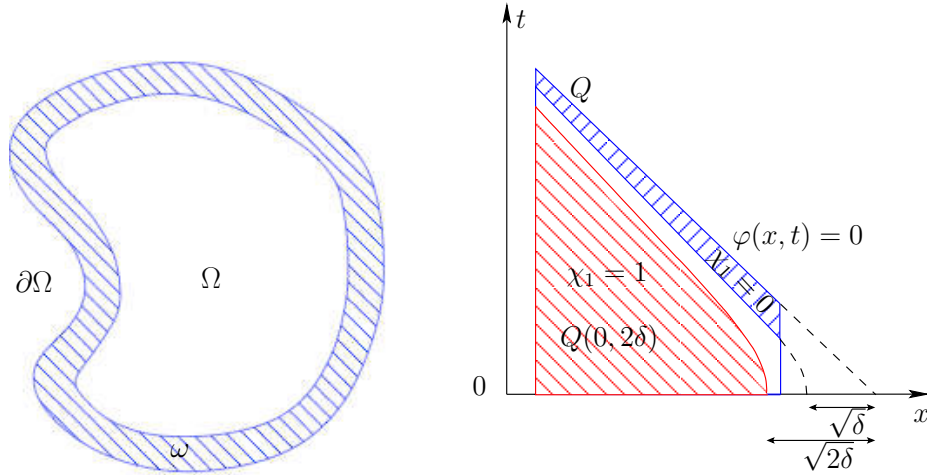
$$\hat{w}(x, t) = \partial_t \hat{v}(x, t) = \partial_t^2 \hat{u}(x, t), \quad \forall (x, t) \in \Omega \times (0, +\infty),$$

qui satisfait alors

$$\begin{aligned} \mathcal{P}\hat{w}(x, t) &= - \int_0^t h(s) \nabla \cdot (\hat{p}(x)(\nabla \bar{w}(x, t-s) + \nabla \bar{w}(x, t-s)^t)) ds \\ &- h'(t) \nabla \cdot (\hat{p}(x)(\nabla \bar{u}_0(x) + \nabla \bar{u}_0(x)^t)), \quad \forall (x, t) \in \Omega \times (0, +\infty), \end{aligned} \quad (3.3)$$

avec les conditions initiales et de bord suivantes :

$$\begin{cases} \hat{w}(x, 0) = 0, & \forall x \in \Omega, \\ \partial_t \hat{w}(x, 0) = -h(0) \nabla \cdot (\hat{p}(x)(\nabla \bar{u}_0(x) + \nabla \bar{u}_0(x)^t)), & \forall x \in \Omega, \\ \hat{w}(x, t) = 0, & \forall (x, t) \in \partial\Omega \times (0, +\infty). \end{cases} \quad (3.4)$$

FIG. 3.1 – Définition du voisinage  $\omega$  de  $\partial\Omega$  et de la fonction plateau  $\chi_2$ .

### Majorer l'énergie initiale

Ainsi, le coefficient  $\hat{p}$  que l'on veut récupérer apparaît maintenant dans la condition initiale du problème. On va donc commencer par établir une inégalité majorant l'énergie initiale du système. On introduit pour cela  $\varepsilon > 0$ ,  $\delta > 0$ . On doit s'assurer que la fonction que l'on considère est à support compact dans  $[0, T)$ . Donc on définit la fonction plateau  $\chi_2 \in C^\infty(\mathbb{R})$  par  $0 \leq \chi_2 \leq 1$  et

$$\chi_2(x, t) = \begin{cases} 1, & \text{si } (x, t) \in Q(0, 2\delta), \\ 0, & \text{si } (x, t) \in Q \setminus Q(0, \delta), \end{cases}$$

et on pose

$$w^*(x, t) = \chi_2(x, t)\hat{w}(x, t), \quad \forall (x, t) \in \Omega \times (0, +\infty).$$

Cette fonction plateau est tracée sur la Figure 3.1. Comme  $w^*$  est nulle à l'extérieur de  $Q(0, \delta)$ , c'est-à-dire pour

$$t \geq t_x^\delta = \sqrt{\frac{|x - x_0|^2 - \delta}{\beta}}$$

qui est bien défini pour tout  $x \in \Omega$  puisqu'on a supposé  $\delta < d_0^2$ , on peut écrire :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega(\varepsilon)} |\partial_t w^*(x, 0)|^2 e^{2\sigma\varphi(x, 0)} dx &= - \int_{\Omega(\varepsilon)} \int_0^{t_x^\delta} \partial_t \left( |\partial_t w^*(x, t)|^2 e^{2\sigma\varphi(x, t)} \right) dx dt \\ &= \int_{Q(\varepsilon, \delta)} \left( 4\beta t \sigma |\partial_t w^*(x, t)|^2 e^{2\sigma\varphi(x, t)} - 2\partial_t w^*(x, t) \cdot \partial_t^2 w^*(x, t) e^{2\sigma\varphi(x, t)} \right) dx dt. \end{aligned}$$

De plus, on a

$$\partial_t w^*(x, t) = \chi_1(x, t) \partial_t \hat{w}(x, t) + \partial_t \chi_1(x, t) \hat{w}(x, t), \quad \forall (x, t) \in \Omega \times (0, +\infty),$$

$$\partial_t^2 w^*(x, t) = \chi_1(x, t) \partial_t^2 \hat{w}(x, t) + 2\partial_t \chi_1(x, t) \partial_t \hat{w}(x, t) + \partial_t^2 \chi_1(x, t) \hat{w}(x, t).$$

Donc, on obtient

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega(\varepsilon)} |\partial_t w^*(x, 0)|^2 e^{2\sigma\varphi(x,0)} dx \\ & \leq C \left( \int_{Q(\varepsilon,\delta)} (\sigma|\hat{w}(x, t)|^2 + \sigma|\partial_t \hat{w}(x, t)|^2 + |\partial_t^2 \hat{w}(x, t)|^2) e^{2\sigma\varphi(x,t)} dx dt \right). \end{aligned}$$

On fait le même travail pour les dérivées en  $x$  pour  $|\alpha| \leq 2$  et on obtient ainsi :

$$\begin{aligned} & \sum_{|\alpha| \leq 2} \sigma^{2(1-|\alpha|)} \int_{\Omega(\varepsilon)} |\partial_x^\alpha (\partial_t \hat{w})(x, 0)|^2 e^{2\sigma\varphi(x,0)} dx \\ & \leq \frac{C}{\sigma} \left( \|\hat{w} e^{\sigma\varphi}\|_{H_x^{2,\sigma}(Q(\varepsilon,\delta))}^2 + \|(\partial_t \hat{w}) e^{\sigma\varphi}\|_{H_x^{2,\sigma}(Q(\varepsilon,\delta))}^2 + \|(\partial_t^2 \hat{w}) e^{\sigma\varphi}\|_{H_x^{2,\sigma}(Q(\varepsilon,\delta))}^2 \right). \end{aligned}$$

On constate que l'on doit appliquer l'inégalité de Carleman du Théorème 1.1 à  $\hat{w}$ , pour laquelle on a déjà écrit les équations en (3.3).

### Appliquer l'inégalité de Carleman

Avec  $\varphi$  définie en (4), on obtient, pour  $\sigma$  suffisamment grand et pour  $\varepsilon > 0$  et  $\delta > 0$  l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sigma} \|\hat{w} e^{\sigma\varphi}\|_{H_x^{2,\sigma}(Q(\varepsilon,\delta))}^2 \leq C \left( e^{C\sigma} \|\hat{w}\|_{H^2(Q(\varepsilon,\delta) \setminus Q(2\varepsilon,\delta))}^2 + \sigma^3 e^{2\sigma(d_0^2-l)} \|\hat{w}\|_{H^2(Q)}^2 \right. \\ & + \left. \int_Q \left| \int_0^t h(s) \nabla \cdot (\hat{p}(x) (\nabla \bar{w}(x, t-s) + \nabla \bar{w}(x, t-s)^t)) ds \right|^2 e^{2\sigma\varphi(x,t)} dx dt \right. \\ & + \left. \int_Q \left| \int_0^t h(s) \nabla (\nabla \cdot (\hat{p}(x) (\nabla \bar{w}(x, t-s) + \nabla \bar{w}(x, t-s)^t))) ds \right|^2 e^{2\sigma\varphi(x,t)} dx dt \right. \\ & + \left. \|h' \nabla \cdot (\hat{p}(\nabla \bar{u}_0 + \nabla \bar{u}_0^t)) e^{\sigma\varphi}\|_{L^2(Q)}^2 + \|h' \nabla (\nabla \cdot (\hat{p}(\nabla \bar{u}_0 + \nabla \bar{u}_0^t))) e^{\sigma\varphi}\|_{L^2(Q)}^2 \right). \end{aligned} \quad (3.5)$$

On a maintenant besoin du Lemme 1.4 démontré au Chapitre 1 et dont on rappelle l'énoncé ici.

**Lemme 3.5** (Lemme 3.1.1 par Klivanov et Timonov [49]). *Soit  $\varphi$  définie en (4). Il existe  $C > 0$  tel que, pour tout  $\sigma > 0$  et pour tout  $u \in L^2(Q)$ ,*

$$\int_Q \left( \int_0^t |u(x, s)| ds \right)^2 e^{2\sigma\varphi(x,t)} dx dt \leq \frac{C}{\sigma} \int_Q |u(x, t)|^2 e^{2\sigma\varphi(x,t)} dx dt.$$

On utilise le résultat du Lemme 3.5 et le fait que  $h$  est borné dans  $\mathbb{R}$  (hypothèse H1) pour écrire :

$$\begin{aligned} & \frac{C}{\sigma} \|\hat{w} e^{\sigma\varphi}\|_{H_x^{2,\sigma}(Q(\varepsilon,\delta))}^2 \leq e^{C\sigma} \|\hat{w}\|_{H^2(Q(\varepsilon,\delta) \setminus Q(2\varepsilon,\delta))}^2 + \sigma^3 e^{2\sigma(d_0^2-l)} \|\hat{w}\|_{H^2(Q)}^2 \\ & + \|\nabla \cdot (\hat{p}(\nabla \bar{u}_0 + \nabla \bar{u}_0^t)) e^{\sigma\varphi}\|_{L^2(Q)}^2 + \|\nabla (\nabla \cdot (\hat{p}(\nabla \bar{u}_0 + \nabla \bar{u}_0^t))) e^{\sigma\varphi}\|_{L^2(Q)}^2. \end{aligned}$$

Donc, en prenant en compte le fait que  $\bar{u}_0 \in W^{8,\infty}(Q)$  (H1), on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{C}{\sigma} \|(\partial_t^2 \hat{u}) e^{\sigma\varphi}\|_{H_x^{2,\sigma}(Q(\varepsilon,\delta))}^2 \leq \sum_{|\alpha| \leq 2} \|(\partial_x^\alpha \hat{p}) e^{\sigma\varphi}\|_{L^2(Q)}^2 \\ & + e^{C\sigma} \|\partial_t^2 \hat{u}\|_{H^2(Q(\varepsilon,\delta) \setminus Q(2\varepsilon,\delta))}^2 + \sigma^3 e^{2\sigma(d_0^2-l)} \|\partial_t^2 \hat{u}\|_{H^2(Q)}^2. \end{aligned}$$

De la même façon, on obtient, pour  $i = 3, 4$ ,

$$\begin{aligned} \frac{C}{\sigma} \|(\partial_t^i \hat{u})e^{\sigma\varphi}\|_{H_x^{2,\sigma}(Q(\varepsilon,\delta))}^2 &\leq \sum_{|\alpha|\leq 2} \|(\partial_x^\alpha \hat{p})e^{\sigma\varphi}\|_{L^2(Q)}^2 \\ &+ e^{C\sigma} \|\partial_t^i \hat{u}\|_{H^2(Q(\varepsilon,\delta)\setminus Q(2\varepsilon,\delta))}^2 + \sigma^3 e^{2\sigma(d_0^2-l)} \|\partial_t^i \hat{u}\|_{H^2(Q)}^2. \end{aligned}$$

On vérifie que les fonctions  $\partial_t^3 \hat{u}$  et  $\partial_t^4 \hat{u}$  ont une de leurs conditions initiales nulle. Ceci est vrai car on a supposé que  $h'(0) = 0$  en (H4). Finalement, on écrit

$$\begin{aligned} &\sum_{|\alpha|\leq 2} \sigma^{2(1-|\alpha|)} \int_{\Omega(\varepsilon)} |\partial_x^\alpha (\partial_t w^*)(x, 0)|^2 e^{2\sigma\varphi(x,0)} dx \\ &\leq C \left( \sum_{|\alpha|\leq 2} \|(\partial_x^\alpha \hat{p})e^{\sigma\varphi}\|_{L^2(Q)}^2 + e^{C\sigma} \|\hat{u}\|_{H^6(Q(\varepsilon,\delta)\setminus Q(2\varepsilon,\delta))}^2 + \sigma^3 e^{2\sigma(d_0^2-l)} \|\hat{u}\|_{H^6(Q)}^2 \right). \end{aligned}$$

On doit maintenant revenir au coefficient dans le membre de gauche.

### Retour au coefficient dans l'estimation

Pour cela, on a besoin d'une inégalité de Carleman pour un opérateur du premier ordre. Elle est donnée par la proposition suivante :

**Proposition 3.6** (Lemme 3.2 par Imanuvilov et Yamamoto [42]). *On considère l'opérateur différentiel du premier ordre suivant :*

$$\mathcal{R}(x)\star = a(x) \cdot \nabla \star + a_0(x)\star, \quad \forall x \in \Omega,$$

avec

$$\begin{aligned} a_0 \in C^0(\overline{\Omega}), \quad \|a_0\|_{C^2(\overline{\Omega})} \leq M_1 \quad \text{and} \quad a \in C^1(\overline{\Omega})^n, \quad \|a\|_{C^2(\overline{\Omega})} \leq M_2, \\ \exists x_0, \quad |a(x) \cdot (x - x_0)| \geq M_3 > 0, \quad \varphi_0(x) = |x - x_0|^2, \quad \forall x \in \overline{\Omega}. \end{aligned}$$

Alors, il existe  $\sigma_0 > 0$  et  $C > 0$  tels que, pour tout  $\sigma \geq \sigma_0$  et pour tout  $q \in C_0^2(\Omega)$ ,

$$\sigma^2 \sum_{|\alpha|\leq 2} \int_{\Omega} |\partial_x^\alpha q(x)|^2 e^{2\sigma\varphi_0(x)} dx \leq C \sum_{|\alpha|\leq 2} \int_{\Omega} |\partial_x^\alpha (\mathcal{R}(x)q(x))|^2 e^{2\sigma\varphi_0(x)} dx.$$

*Démonstration.* Soit  $q \in C_0^2(\Omega)$ . On introduit  $f$  défini par

$$\mathcal{R}(x)q(x) = a(x) \cdot \nabla q(x) + a_0(x)q(x) = f(x), \quad \forall x \in \Omega,$$

On multiplie les deux membres de cette égalité par  $q(x)e^{2\sigma\varphi_0(x)}$  et on intègre sur  $\Omega$  pour obtenir

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f(x)q(x)e^{2\sigma\varphi_0(x)} dx &= \int_{\Omega} (a(x) \cdot \nabla q(x)) q(x)e^{2\sigma\varphi_0(x)} dx + \int_{\Omega} a_0(x)q(x)^2 e^{2\sigma\varphi_0(x)} dx \\ &= - \int_{\Omega} \nabla \cdot (a(x)q(x)e^{2\sigma\varphi_0(x)}) q(x) dx + \int_{\Omega} a_0(x)q(x)^2 e^{2\sigma\varphi_0(x)} dx \\ &= - \int_{\Omega} (\nabla \cdot a(x)) q(x)^2 e^{2\sigma\varphi_0(x)} dx - \int_{\Omega} (a(x) \cdot \nabla q(x)) q(x)e^{2\sigma\varphi_0(x)} dx \\ &\quad - \int_{\Omega} 4\sigma (a(x) \cdot (x - x_0)) q(x)^2 e^{2\sigma\varphi_0(x)} dx + \int_{\Omega} a_0(x)q(x)^2 e^{2\sigma\varphi_0(x)} dx \end{aligned}$$

Or par hypothèse, on a  $|a(x) \cdot (x - x_0)| \geq M_3 > 0$  et on utilise, pour le deuxième terme, le fait que

$$a(x) \cdot \nabla q(x) = f(x) - a_0(x)q(x).$$

Ainsi, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \sigma \int_{\Omega} q(x)^2 e^{2\sigma\varphi_0(x)} dx &\leq C \int_{\Omega} 4\sigma |a(x) \cdot (x - x_0)| q(x)^2 e^{2\sigma\varphi_0(x)} dx \\ &\leq C \int_{\Omega} |f(x)| |q(x)| e^{2\sigma\varphi_0(x)} dx + C \int_{\Omega} q(x)^2 e^{2\sigma\varphi_0(x)} dx \\ &\leq \frac{C}{\sigma} \int_{\Omega} (f(x))^2 e^{2\sigma\varphi_0(x)} dx + \epsilon \sigma \int_{\Omega} q(x)^2 e^{2\sigma\varphi_0(x)} dx + C \int_{\Omega} q(x)^2 e^{2\sigma\varphi_0(x)} dx \end{aligned}$$

En choisissant  $\sigma$  grand et  $\epsilon$  petit, on obtient

$$\sigma^2 \int_{\Omega} q(x)^2 e^{2\sigma\varphi_0(x)} dx \leq C \int_{\Omega} (f(x))^2 e^{2\sigma\varphi_0(x)} dx \quad (3.6)$$

On applique alors le résultat (3.6) au vecteur gradient de  $q$  qui s'annule bien sur  $\partial\Omega$  et vérifie

$$\mathcal{R}(x)\nabla q(x) = \nabla f(x) - \nabla a(x) \cdot \nabla q(x) - \nabla a_0(x)q(x), \quad \forall x \in \Omega,$$

donc

$$\begin{aligned} \sigma^2 \int_{\Omega} |\nabla q(x)|^2 e^{2\sigma\varphi_0(x)} dx &\leq C \int_{\Omega} |\nabla f(x)|^2 e^{2\sigma\varphi_0(x)} dx + C \int_{\Omega} (q(x)^2 + |\nabla q(x)|^2) e^{2\sigma\varphi_0(x)} dx \\ &\leq C \int_{\Omega} (f(x)^2 + |\nabla f(x)|^2) e^{2\sigma\varphi_0(x)} dx. \end{aligned}$$

en prenant  $\sigma$  suffisamment grand pour absorber le dernier terme du membre de droite dans le membre de gauche. On refait le même raisonnement avec les dérivées secondes de  $q$  qui s'annulent également sur  $\partial\Omega$  et on obtient ainsi le résultat du Lemme 3.6.  $\square$

Puisque le coefficient  $\hat{p}$  satisfait le système du premier ordre suivant :

$$h(0)\nabla \cdot (\hat{p}(x)(\nabla \bar{u}_0(x) + \nabla \bar{u}_0(x)^t)) = -\partial_t w^*(x, 0),$$

on peut appliquer le Lemme 3.6 à chaque équation de ce système avec

$$\begin{aligned} q(x) &= \hat{p}(x), & \mathcal{R}(x)q(x) &= -\partial_t w^*(x, 0), & \varphi_0(x) &= \varphi(x, 0), \\ a_0(x) &= h(0)\nabla \cdot (\nabla \bar{u}_0(x) + \nabla \bar{u}_0(x)^t), & a(x) &= h(0)(\nabla \bar{u}_0(x) + \nabla \bar{u}_0(x)^t), \end{aligned}$$

qui satisfait (H5) et on obtient alors

$$\sum_{|\alpha| \leq 2} \int_{\Omega(\varepsilon)} |\partial_x^\alpha \hat{p}(x)|^2 e^{2\sigma\varphi(x,0)} dx \leq C \sum_{|\alpha| \leq 2} \sigma^{2(1-|\alpha|)} \int_{\Omega(\varepsilon)} |\partial_x^\alpha (\partial_t w^*)(x, 0)|^2 e^{2\sigma\varphi(x,0)} dx.$$

On a supposé en (H3) que l'on connaissait  $p$  dans un voisinage  $\omega$  de la frontière  $\partial\Omega$ , *i.e.*  $\hat{p} = 0$  dans  $\omega$  et donc on peut supposer que  $\varepsilon$  est suffisamment petit pour que  $\Omega \setminus \Omega(\varepsilon) \subset \omega$ . Ceci permet d'intégrer sur  $\Omega$  dans le membre de gauche. Alors, on a :

$$\begin{aligned} &\sum_{|\alpha| \leq 2} \int_{\Omega} |\partial_x^\alpha \hat{p}(x)|^2 e^{2\sigma\varphi(x,0)} dx \\ &\leq C \left( \sum_{|\alpha| \leq 2} \|(\partial_x^\alpha \hat{p})e^{\sigma\varphi}\|_{L^2(Q)}^2 + e^{C\sigma} \|\hat{u}\|_{H^6(Q(\varepsilon, \delta) \setminus Q(2\varepsilon, \delta))}^2 + \sigma^3 e^{2\sigma(d_0^2 - l)} \|\hat{u}\|_{H^6(Q)}^2 \right). \end{aligned} \quad (3.7)$$

On peut absorber le premier terme du membre de droite de (3.7) dans le membre de gauche, grâce aux poids de Carleman. En effet,

$$\sum_{|\alpha| \leq 2} \|(\partial_x^\alpha \hat{p})e^{\sigma\varphi}\|_{L^2(Q)}^2 = \sum_{|\alpha| \leq 2} \int_{\Omega} |\partial_x^\alpha \hat{p}(x)|^2 e^{2\sigma\varphi(x,0)} \left( \int_0^T e^{2\sigma(\varphi(x,t) - \varphi(x,0))} dt \right) dx,$$

avec,  $\forall x \in \Omega$  :

$$\int_0^T e^{2\sigma(\varphi(x,t) - \varphi(x,0))} dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-2\sigma\beta t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{2\sigma\beta}} \int_0^{+\infty} e^{-z^2} dz = \frac{C}{\sqrt{\sigma}}.$$

Alors,

$$\sum_{|\alpha| \leq 2} \|(\partial_x^\alpha \hat{p})e^{\sigma\varphi}\|_{L^2(Q)}^2 \leq \frac{C}{\sqrt{\sigma}} \sum_{|\alpha| \leq 2} \int_{\Omega} |\partial_x^\alpha \hat{p}(x)|^2 e^{2\sigma\varphi(x,0)} dx.$$

Finalement, on obtient

$$\begin{aligned} e^{2\sigma d_0^2} \|\hat{p}\|_{H^2(\Omega)}^2 &\leq \sum_{|\alpha| \leq 2} \int_{\Omega} |\partial_x^\alpha \hat{p}(x)|^2 e^{2\sigma\varphi(x,0)} dx \\ &\leq C \left( e^{C\sigma} \|\hat{u}\|_{H^6(Q(\varepsilon,\delta) \setminus Q(2\varepsilon,\delta))}^2 + \sigma^3 e^{2\sigma(d_0^2 - l)} \|\hat{u}\|_{H^6(Q)}^2 \right), \end{aligned}$$

et donc, on conclut que

$$\|\hat{p}\|_{H^2(\Omega)}^2 \leq C \left( e^{C\sigma} \|\hat{u}\|_{H^6(Q(\varepsilon,\delta) \setminus Q(2\varepsilon,\delta))}^2 + e^{-\sigma l} \right),$$

puisque  $\sup_{\sigma} (\sigma^3 e^{-\sigma l}) < +\infty$  et puisqu'on a supposé que  $\hat{u}$  est dans  $W^{8,\infty}(Q)$  in (H1). Afin d'avoir

$$e^{C\sigma} \|\hat{u}\|_{H^6(Q(\varepsilon,\delta) \setminus Q(2\varepsilon,\delta))}^2 = e^{-\sigma l},$$

on propose de poser

$$\sigma = -\frac{1}{l+C} \log \left( \|\hat{u}\|_{H^6(Q(\varepsilon,\delta) \setminus Q(2\varepsilon,\delta))}^2 \right). \quad (3.8)$$

On a alors  $\sigma > 0$  si on suppose que  $\|\hat{u}\|_{H^6(Q(\varepsilon,\delta) \setminus Q(2\varepsilon,\delta))}^2 < 1$ . Donc, le membre de droite de l'équation peut être écrit de la manière suivante :

$$e^{C\sigma} \|\hat{u}\|_{H^6(Q(\varepsilon,\delta) \setminus Q(2\varepsilon,\delta))}^2 + e^{-\sigma l} = 2 \left( \|\hat{u}\|_{H^6(Q(\varepsilon,\delta) \setminus Q(2\varepsilon,\delta))}^2 \right)^{\frac{l}{l+C}}.$$

On utilise le résultat d'interpolation suivant :

**Lemme 3.7** (Proposition 4 p. 133 de Dautray et Lions [17]). *Soit  $m \in \mathbb{N}^*$  et  $Q \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert vérifiant la propriété d'extension d'ordre  $m$ . Alors, il existe une constante  $C > 0$  telle que, pour tout  $r$  satisfaisant  $0 \leq r \leq m$  et pour tout  $u \in H^m(Q)$ , on ait*

$$\|u\|_{H^r(Q)} \leq C \|u\|_{L^2(Q)}^{1-\frac{r}{m}} \|u\|_{H^m(Q)}^{\frac{r}{m}} \quad (3.9)$$

*Démonstration.* On va démontrer ce lemme grâce à un raisonnement par récurrence.

- (i) On commence par remarquer que le résultat (3.9) est évident si  $r = 0$  ou si  $r = m$ . En particulier, il est évident si  $m = 1$ .

- (ii) Montrons que le résultat est vrai pour  $m = 2$ . Si  $Q$  est un ouvert possédant la propriété d'extension d'ordre 2, alors il existe un opérateur d'extension  $P$  tel que

$$\begin{cases} P \in \mathcal{L}(H^2(Q); H^2(\mathbb{R}^n)), \\ Pv = v \quad \text{dans } Q, \quad \forall v \in H^2(Q), \\ Pv = 0 \quad \text{en dehors d'un ensemble compact contenant } \overline{Q} \text{ dans son intérieur.} \end{cases}$$

Ainsi, il est suffisant d'établir le résultat (3.9) pour  $Q = \mathbb{R}^n$  et, par densité de  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  dans  $H^2(\mathbb{R}^n)$ , il est suffisant de le montrer pour  $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ . Par la transformée de Fourier  $u \rightarrow \hat{u}$ , le résultat se déduit de l'inégalité de Cauchy-Schwarz suivante :

$$\left( \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^2 |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \right) \leq C \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^4 |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2}.$$

En effet, on a alors

$$\left( \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x)|^2 dx \right) \leq C \left( \int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\partial^2 u(x)|^2 dx \right)^{1/2},$$

qui donne le résultat voulu.

- (iii) Supposons que le résultat (3.9) est vrai pour  $2 \leq m \leq m_0$ . On va montrer qu'il est alors vrai pour  $m = m_0 + 1$ . Soit  $u \in H^{m_0+1}(Q)$  et  $r_0$  tel que  $1 \leq r_0 \leq m_0$ . Puisque  $\nabla u \in H^{m_0}(Q)$ , on peut lui appliquer l'hypothèse de récurrence avec  $r = r_0 - 1$  :

$$\|\nabla u\|_{H^{r_0-1}(Q)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(Q)}^{1-\frac{r_0-1}{m_0}} \|\nabla u\|_{H^{m_0}(Q)}^{\frac{r_0-1}{m_0}}.$$

On peut également appliquer l'hypothèse de récurrence à  $u \in H^{r_0}(Q)$  pour  $r = 1$ .

$$\|\nabla u\|_{L^2(Q)} \leq C \|u\|_{H^1(Q)} \leq C \|u\|_{L^2(Q)}^{1-\frac{1}{r_0}} \|u\|_{H^{r_0}(Q)}^{\frac{1}{r_0}},$$

d'où on déduit que

$$\|u\|_{H^{r_0}(Q)} \leq C \left( \|u\|_{L^2(Q)}^{1-\frac{1}{r_0}} \|u\|_{H^{r_0}(Q)}^{\frac{1}{r_0}} \right)^{1-\frac{r_0-1}{m_0}} \|u\|_{H^{m_0+1}(Q)}^{\frac{r_0-1}{m_0}},$$

donc

$$\|u\|_{H^{r_0}(Q)} \leq C \|u\|_{L^2(Q)}^{1-\frac{r_0}{m_0+1}} \|u\|_{H^{m_0+1}(Q)}^{\frac{r_0}{m_0+1}},$$

qui est le résultat (3.9) pour  $m = m_0 + 1$ . □

On applique le Lemme 3.7 à la deuxième dérivée de  $\hat{u} \in H^8(Q)$  avec  $m = 6$  et  $r = 2$  afin d'écrire :

$$\|\hat{u}\|_{H^6(Q)} \leq C \|\hat{u}\|_{H^2(Q)}^{1/3} \|\hat{u}\|_{H^8(Q)}^{2/3}.$$

D'où,

$$\|\hat{p}\|_{H^2(\Omega)} \leq C \left( \|\hat{u}\|_{H^2(Q(\varepsilon, \delta) \setminus Q(2\varepsilon, \delta))}^{1/3} \right)^{\frac{l}{l+C}}. \quad (3.10)$$

Donc on obtient le premier résultat de stabilité du Théorème 3.1, stabilité de type Hölder, avec observations dans  $Q(\varepsilon, \delta) \setminus Q(2\varepsilon, \delta) \subset \omega \times (0, T)$ , pour  $T$  grand.

### Utiliser le résultat de continuation unique

On peut maintenant appliquer le Théorème 2.1 à  $\hat{u}$ . On fixe  $\Gamma \subset \partial\Omega$  arbitrairement petit et on choisit  $\varepsilon$  tel que  $\Omega \setminus \Omega(4\varepsilon) \subset \omega$ . On vérifie que l'hypothèse (H6) est satisfaite, i.e. que

$$R(x, t) = - \int_0^t h(s) \nabla \cdot (\hat{p}(x) (\nabla \bar{u}(x, t-s) + \nabla \bar{u}(x, t-s)^t)) ds$$

s'annule dans  $\omega$  et on choisit  $\rho < \delta$ . On en déduit que, si  $T$  est suffisamment grand afin que  $Q(\varepsilon, \delta) \setminus Q(2\varepsilon, \delta)$  soit inclus dans  $\Omega(2\varepsilon) \setminus \Omega(\varepsilon) \times (0, \frac{T}{2} - \rho)$ , on a

$$\|\hat{u}\|_{H^2(Q(\varepsilon, \delta) \setminus Q(2\varepsilon, \delta))}^2 \leq C \left[ \log \left( 2 + \frac{C}{\sum_{|\alpha|=1}^2 \|\partial_x^\alpha \hat{u}\|_{L^2(\Gamma \times (0, 6T))}^2} \right) \right]^{-1}.$$

Donc,

$$\|\hat{p}\|_{H^2(\Omega)} \leq C \left[ \log \left( 2 + \frac{C}{\sum_{|\alpha|=1}^2 \|\partial_x^\alpha \hat{u}\|_{L^2(\Gamma \times (0, 6T))}^2} \right) \right]^{-\frac{l}{6(l+C)}}.$$

On pose  $\kappa = \frac{l}{6(l+C)} \in (0, 1)$  et on change  $6T$  en  $T$ . Ceci termine la démonstration du Théorème 3.3.

Nous venons ainsi de démontrer les conditions nécessaires pour que le problème inverse de récupération de la dépendance spatiale  $p$  du coefficient viscoélastique  $\tilde{\mu}$  soit stable. Il est alors légitime de s'intéresser à la récupération effective de ce coefficient. C'est le but du chapitre suivant.





## Chapitre 4

# Résolution numérique d'un problème inverse en viscoélasticité

Ce chapitre est consacré à la récupération numérique d'un coefficient du système de la viscoélasticité introduit en (1)-(2) et que nous rappelons ci-dessous :

$$\begin{cases} \mathcal{P}u(x, t) = f(x, t), & \forall (x, t) \in \Omega \times (0, +\infty), \\ u(x, 0) = \bar{u}_0(x), & \forall x \in \Omega, \\ \partial_t u(x, 0) = \bar{u}_1(x), & \forall x \in \Omega, \\ u(x, t) = 0, & \forall (x, t) \in \partial\Omega \times (0, +\infty), \end{cases}$$

où  $\mathcal{P}$  est l'opérateur hyperbolique intégro-différentiel défini de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}u(x, t) &= \partial_t^2 u(x, t) - \nabla \cdot (\mu(x)(\nabla u(x, t) + \nabla u(x, t)^t) + \lambda(x)(\nabla \cdot u)(x, t)I) \\ &+ \int_0^t \nabla \cdot (\tilde{\mu}(x, s)(\nabla u(x, t-s) + \nabla u(x, t-s)^t) + \tilde{\lambda}(x, s)(\nabla \cdot u)(x, t-s)I) ds. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Plus précisément, nous faisons l'hypothèse que le coefficient  $\tilde{\mu}$  de (4.1) peut se décomposer sous la forme

$$\tilde{\mu}(x, t) = p(x)h(t), \quad \forall (x, t) \in \Omega \times (0, +\infty),$$

et nous choisissons de prendre classiquement  $h(t) = e^{-t/\tau}$  où  $\tau$  est un temps caractérisant le retour à l'équilibre du matériau. Le problème inverse que nous regardons est alors le suivant :

*Connaissant  $(\lambda, \mu, \tilde{\lambda}, \tau, \bar{u}_0, \bar{u}_1, f)$ , retrouver  $p(x)$ , pour tout  $x \in \Omega$ , à partir de mesures de*

$$u(x, t), \quad \forall (x, t) \in \omega \times (0, T),$$

où  $\omega$  est une partie de  $\Omega$  et  $T > 0$ .

De nombreux ouvrages présentent les méthodes numériques utilisées pour résoudre les problèmes inverses, citons Kirsch [48], Endl [24], Kern [47]. En général, elles reposent sur la minimisation d'une fonctionnelle d'erreur. Dans ce chapitre, nous proposons une fonctionnelle non quadratique pour notre problème et présentons les étapes de résolution du problème de minimisation. La résolution numérique proposée permet de récupérer les valeurs du coefficient inconnu en chaque nœud du maillage. L'originalité du travail tient

dans l'introduction d'une méthode d'adaptation de base spectrale qui permet d'améliorer la précision des résultats. Une application possible de la résolution de ce problème inverse à la localisation de tumeurs cérébrales est envisagée dans la dernière section. Les travaux de ce chapitre ont été partiellement annoncés dans [20].

## 4.1 Méthodes de résolution

### 4.1.1 Résolution du problème direct

Pour résoudre le problème direct, nous discrétisons les équations en espace par des éléments finis de Lagrange  $\mathbb{P}_2$ . En temps, nous utilisons un  $\theta$ -schéma avec  $\theta = 0.5$ , c'est-à-dire que nous considérons un schéma centré implicite. Pour ce qui est du terme intégral, nous le discrétisons par la formule des trapèzes. Le schéma numérique à résoudre est donc le suivant :

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , connaissant  $u_h^k$ , pour tout  $0 \leq k \leq n$ , trouver  $u_h^{n+1} \in V_h$  satisfaisant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \frac{u_h^{n+1} - 2u_h^n + u_h^{n-1}}{\Delta t^2} \cdot v_h \, dx \\ + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\mu(\nabla u_h^{n+1} + (\nabla u_h^{n+1})^t) + \lambda(\nabla \cdot u_h^{n+1})I) : \nabla v_h \, dx \\ + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\mu(\nabla u_h^{n-1} + (\nabla u_h^{n-1})^t) + \lambda(\nabla \cdot u_h^{n-1})I) : \nabla v_h \, dx \\ - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} (\tilde{\mu}^{n-k}(\nabla u_h^{k+1} + (\nabla u_h^{k+1})^t) + \tilde{\lambda}^{n-k}(\nabla \cdot u_h^{k+1})I) : \nabla v_h \, dx \\ - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} (\tilde{\mu}^{n+1-k}(\nabla u_h^k + (\nabla u_h^k)^t) + \tilde{\lambda}^{n+1-k}(\nabla \cdot u_h^k)I) : \nabla v_h \, dx \\ = \int_{\Omega} f \cdot v_h, \quad \forall v_h \in V_h, \\ u_h^0 = \Pi_h \bar{u}_0, \\ \frac{u_h^1 - u_h^0}{\Delta t} = \Pi_h \bar{u}_1, \end{array} \right.$$

où  $\Pi_h$  est la projection sur  $V_h = \{v_h \in C^0(\Omega), \forall K \in \mathcal{T}_h, v_h|_K \in \mathbb{P}_2, v_h = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$ .

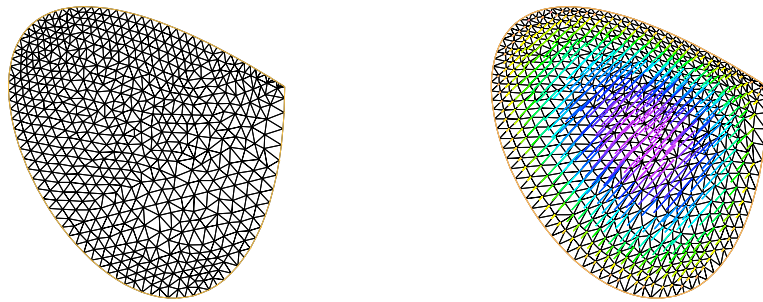


FIG. 4.1 – Maillage de calcul (à gauche). Données initiale  $\bar{u}_0$  (à droite).

### 4.1.2 Résolution du problème inverse

Soit  $u_{obs}$  le déplacement que l'on observe, celui mesuré expérimentalement dans la zone d'observation  $\omega \times (0, T)$ . Nous cherchons le minimiseur de la fonctionnelle non quadratique suivante :

$$J(p) = \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\omega} (|u - u_{obs}|^2 + |\nabla(u - u_{obs})|^2) dx dt,$$

avec  $u = \mathcal{M}(p)$ ,  $\mathcal{M}$  étant l'opérateur non linéaire, de l'espace des paramètres  $P$  dans l'espace des solutions  $U$ , associé au système (1)-(2). En pratique, les données ne sont jamais connues exactement mais seulement à une erreur près. D'ailleurs, en général,  $u_{obs} \notin \mathcal{M}(P)$ , donc il n'existe pas de  $p \in P$  qui annule  $J$ . Nous résolvons ce problème de minimisation par un algorithme de Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS) [69].

#### Algorithme de Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno

C'est une méthode permettant de résoudre un problème d'optimisation non linéaire sans contraintes. La méthode BFGS est dérivée de la descente de gradient. L'idée principale de cette méthode est d'éviter de construire explicitement la hessienne de  $J$  et de construire, à la place, une approximation de l'inverse de la dérivée seconde de  $J$ , en analysant les différents gradients successifs. À partir d'une valeur initiale  $p_0$  et d'une matrice hessienne approchée  $H_0$ , les itérations suivantes sont répétées jusqu'à ce que  $p$  converge vers la solution.

1. Trouver la direction  $d_k$  en résolvant  $H_k d_k = -\nabla J(p_k)$ .
2. Effectuer une recherche linéaire pour trouver le pas optimal  $\alpha_k$  dans la direction trouvée et ensuite mettre à jour

$$p_{k+1} = p_k + \alpha_k d_k.$$

3. Poser  $y_k = \nabla J(p_{k+1}) - \nabla J(p_k)$ .
4. Actualiser

$$H_{k+1} = H_k + \frac{y_k y_k^t}{y_k^t d_k} - \frac{H_k d_k d_k^t H_k}{d_k^t H_k d_k}.$$

La convergence peut être testée en calculant la norme du gradient,  $|\nabla J(p_k)|$ . En pratique,  $H_0 = Id$  et la première itération sera alors équivalente à la méthode de descente du gradient, mais les autres itérations le raffineront de plus en plus grâce à l'approximation  $H$  de la hessienne.

#### Calcul du gradient

Nous présentons ici les étapes d'obtention du gradient de la fonctionnelle  $J$ . Nous devons d'abord calculer :

$$\begin{aligned} \nabla J(p, \delta p) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} (J(p + \varepsilon \delta p) - J(p)) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\omega} (|\mathcal{M}(p + \varepsilon \delta p) - u_{obs}|^2 - |\mathcal{M}(p) - u_{obs}|^2) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\omega} (|\nabla(\mathcal{M}(p + \varepsilon \delta p) - u_{obs})|^2 - |\nabla(\mathcal{M}(p) - u_{obs})|^2) \right). \end{aligned}$$

Or, nous avons :

$$\mathcal{M}(p + \varepsilon \delta p) = \mathcal{M}(p) + \varepsilon M_p \delta p + o(\varepsilon^2),$$

où  $M_p$  est l'opérateur linéarisé de  $\mathcal{M}$  autour de  $p$ , i.e.  $M_p \delta p = \delta u$  satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{P} \delta u(x, t) = - \int_0^t \nabla \cdot (\delta p(x) h(t-s) (\nabla u(x, s) + \nabla u(x, s)^t)) ds, \\ \delta u(x, 0) = 0, \\ \partial_t \delta u(x, 0) = 0, \\ \delta u(x, t) = 0, \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \forall x \in \Omega, \\ \forall x \in \Omega, \\ \forall (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T). \end{array}$$

Donc,

$$\begin{aligned} \nabla J(p, \delta p) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\omega} (|\varepsilon M_p \delta p|^2 + 2\varepsilon M_p \delta p \cdot (\mathcal{M}(p) - u_{obs}) + o(\varepsilon^2)) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\omega} (|\varepsilon \nabla(M_p \delta p)|^2 + 2\varepsilon \nabla(M_p \delta p) : \nabla(\mathcal{M}(p) - u_{obs}) + o(\varepsilon^2)) \right) \\ &= \int_0^T \int_{\omega} M_p \delta p \cdot ((u - u_{obs}) - \Delta(u - u_{obs})). \end{aligned}$$

Nous introduisons alors l'opérateur  $\mathcal{P}^*$ , adjoint de (4.1), obtenu par intégration par parties à partir de la définition :

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} u \cdot \mathcal{P}^* u^* &= \int_0^T \int_{\Omega} \mathcal{P} u \cdot u^* \\ &= \int_0^T \int_{\Omega} (\partial_t^2 u - \nabla \cdot (\mu(\nabla u + \nabla u^t) + \lambda(\nabla \cdot u)I)) \cdot u^* \\ &\quad + \int_0^T \int_{\Omega} \left( \int_0^t \nabla \cdot (ph(t-s)(\nabla u(s) + \nabla u(s)^t) + \tilde{\lambda}(t-s)(\nabla \cdot u)(s)I) ds \right) \cdot u^* \\ &= \int_0^T \int_{\Omega} u \cdot (\partial_t^2 u^* - \nabla \cdot (\mu(\nabla u^* + \nabla u^{*t}) + \lambda(\nabla \cdot u^*)I)) \\ &\quad + \int_0^T \int_{\Omega} u \cdot \left( \int_t^T \nabla \cdot (ph(s-t)(\nabla u^*(s) + \nabla u^*(s)^t) + \tilde{\lambda}(s-t)(\nabla \cdot u^*)(s)I) ds \right). \end{aligned}$$

Donc par identification, nous avons :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^* u^*(x, t) &= \partial_t^2 u^*(x, t) - \nabla \cdot (\mu(x)(\nabla u^*(x, t) + \nabla u^*(x, t)^t) + \lambda(x)(\nabla \cdot u^*(x, t))I) \\ &\quad + \int_t^T \nabla \cdot (p(x)h(s-t)(\nabla u^*(x, s) + \nabla u^*(x, s)^t) + \tilde{\lambda}(x, s-t)(\nabla \cdot u^*)(x, s)I) ds, \end{aligned}$$

muni de conditions finales et de condition de bord nulles. Nous définissons alors  $\delta u^*$ , la solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{P}^* \delta u^*(x, t) = \begin{cases} (u - u_{obs}) - \Delta(u - u_{obs})(x, t), & \forall x \in \omega, \\ 0, & \forall x \in (\Omega \setminus \omega), \end{cases} \\ \delta u^*(x, T) = 0, \\ \partial_t \delta u^*(x, T) = 0, \\ \delta u^*(x, t) = 0, \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \forall x \in \Omega, \\ \forall x \in \Omega, \\ \forall (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T). \end{array}$$

Ceci nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \nabla J(p, \delta p) &= \int_0^T \int_{\Omega} \delta u(x, t) \cdot \mathcal{P}^* \delta u^*(x, t) dx dt = \int_0^T \int_{\Omega} \mathcal{P} \delta u(x, t) \cdot \delta u^*(x, t) dx dt \\ &= \int_0^T \int_{\Omega} \left( - \int_0^t \nabla \cdot (\delta p(x) h(s) (\nabla u(x, t-s) + \nabla u(x, t-s)^t)) ds \right) \cdot \delta u^*(x, t) dx dt \\ &= \int_{\Omega} \delta p(x) \left( \int_0^T \int_0^t h(t-s) (\nabla u(x, s) + \nabla u(x, s)^t) : \nabla \delta u^*(x, t) ds dt \right) dx. \end{aligned}$$

Nous mettons donc en évidence l'opérateur  $M_p^*$  adjoint de  $M_p$  :

$$(M_p^* \delta u^*)(x) = \int_0^T \int_0^t \frac{1}{2} h(t-s) (\nabla u(x, s) + \nabla u(x, s)^t) ds : (\nabla \delta u^*(x, t) + \nabla \delta u^*(x, t)^t) dt,$$

qui, à l'inverse de  $M_p$ , va de l'espace des solutions  $U$  dans l'espace des paramètres  $P$ .

### 4.1.3 Méthode de régularisation

Nous savons déjà que les problèmes inverses sont généralement mal posés. En particulier, si le problème souffre d'un manque de stabilité, alors sa solution numérique sera pratiquement impossible à calculer. En effet, les mesures sont toujours bruitées et si le problème est instable, de petites erreurs dans les données donneront de grandes erreurs dans la solution. Au Chapitre 3, nous avons vu que le problème que nous considérons ici est stable, si les données sont mesurées en norme  $H^2(\omega \times (0, T))$ . En pratique, il est difficile de mesurer et de reconstruire numériquement une norme  $H^2$  en temps et en espace. C'est ce qui nous pousse à considérer la fonctionnelle  $J$ , à savoir une norme  $L^2(0, T; H^1(\omega))$ . La contrepartie est que l'on ne peut alors pas garantir la stabilité du problème. Il faut alors avoir recours à des méthodes de régularisation. Régulariser un problème mal posé, c'est le remplacer par un autre problème, bien posé cette fois, de sorte que l'erreur commise soit compensée par le gain de stabilité. Voyons cela en détails.

Nous posons  $p^*$  le coefficient numérique et  $\bar{p}$  le coefficient exact, et nous supposons que  $p^*$  est proche de  $\bar{p}$ . Nous pouvons écrire :

$$\|p^* - \bar{p}\|_P = \|M_{\bar{p}}^{-1}(M_{\bar{p}} p^* - \bar{u})\|_P \leq \|M_{\bar{p}}^{-1}\| \|M_{\bar{p}} p^* - \bar{u}\|_U.$$

Si  $M_{\bar{p}}$ , linéaire de  $P$  (espace de dimension infinie) dans  $U$ , est compact pour les normes associées  $\|\cdot\|_P$  et  $\|\cdot\|_U$ , alors son inverse  $M_{\bar{p}}^{-1}$  n'est pas borné. Donc, même si nous trouvons un  $p^*$  tel que  $M_{\bar{p}} p^*$  soit proche de  $\bar{u}$ , nous ne pouvons pas garantir que  $p^*$  sera proche de  $\bar{p}$  :

$$M_{\bar{p}} p^* \approx \bar{u} \not\Rightarrow p^* \approx \bar{p}.$$

Plusieurs méthodes de régularisation existent, Kirsch [48], Engl *et al.* [24]. La plus connue est la régularisation de Tikhonov [88] qui consiste à ajouter à la fonctionnelle  $J$  un terme régularisant de la forme :

$$\frac{\alpha}{2} \|p - p_e\|^2,$$

où  $p_e$  est la valeur estimée *a priori* du coefficient inconnu  $p$  et  $\alpha$  est un poids positif. Ce problème est alors bien posé et converge vers le problème initial si  $\alpha$  tend vers zéro. La difficulté consiste alors à estimer  $p_e$  et à choisir le  $\alpha$  réalisant un bon compromis entre stabilité et précision. Mais ici, nous optons pour une régularisation dite par discrétisation

qui consiste à chercher le paramètre inconnu dans un sous-espace de dimension finie. Nous introduisons ainsi l'opérateur

$$R_K = \Pi_K M_{\bar{p}}^{-1},$$

où  $\Pi_K$  est la projection de  $P$  sur un sous-espace de dimension finie  $P_K$ . Cet opérateur  $R_K$  est borné dans  $U$  et vérifie

$$R_K \longrightarrow M_{\bar{p}}^{-1}, \quad \text{si } K \rightarrow +\infty.$$

Nous allons donc chercher  $p^* \in P_K$ .

Nous choisissons de considérer l'espace  $P_K$  des  $K$  premières fonctions propres du Laplacien calculées sur le maillage, c'est-à-dire que nous posons :

$$P_K = \left\{ p \in P, p = \bar{p}|_{\partial\Omega} + \sum_{i=1}^K p_i \varphi_i \right\},$$

où les fonctions  $\varphi_i$  vérifient le problème aux valeurs propres suivant :

$$\begin{cases} -\Delta \varphi_i(x) = \sigma_i \varphi_i(x), & \forall x \in \Omega, \\ \varphi_i(x) = 0, & \forall x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Rappelons que les  $(\varphi_i)_{i \in \mathbb{N}}$  forment une base hilbertienne de  $L^2(\Omega)$ , tandis que les  $\left(\frac{\varphi_i}{\sqrt{\sigma_i}}\right)_{i \in \mathbb{N}}$  forment une base hilbertienne de  $H_0^1(\Omega)$ .

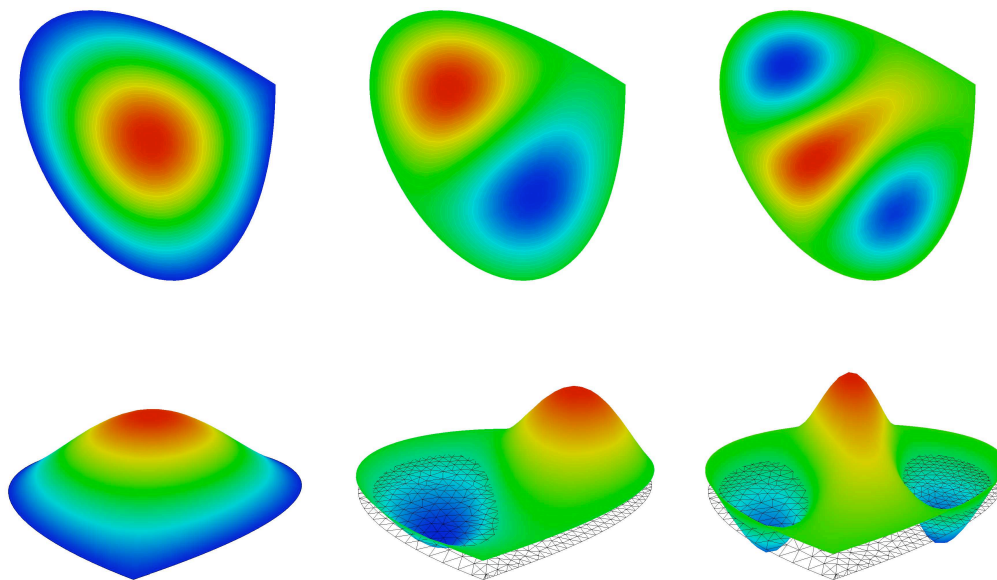


FIG. 4.2 – Fonctions de base n°1, n°2 et n°4.

Par ailleurs, le coefficient  $\bar{p}|_{\partial\Omega}$  est un relèvement de la trace sur  $\partial\Omega$  de la valeur exacte de  $p$  (qui est connue puisque nous avons supposé le coefficient  $\bar{p}$  connu dans un voisinage

$\omega$  du bord), c'est -à-dire qu'il vérifie l'équation :

$$\begin{cases} -\Delta \bar{p}|_{\partial\Omega}(x) = 0, & \forall x \in \Omega, \\ \bar{p}|_{\partial\Omega}(x) = \bar{p}, & \forall x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

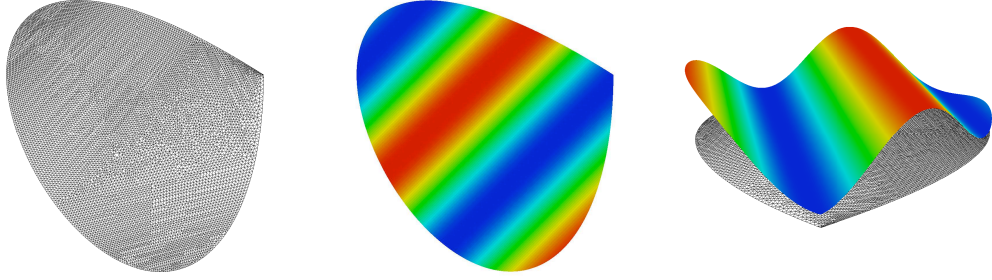


FIG. 4.3 – Maillage (à gauche). Coefficient exact  $\bar{p}$  (au centre et à droite).

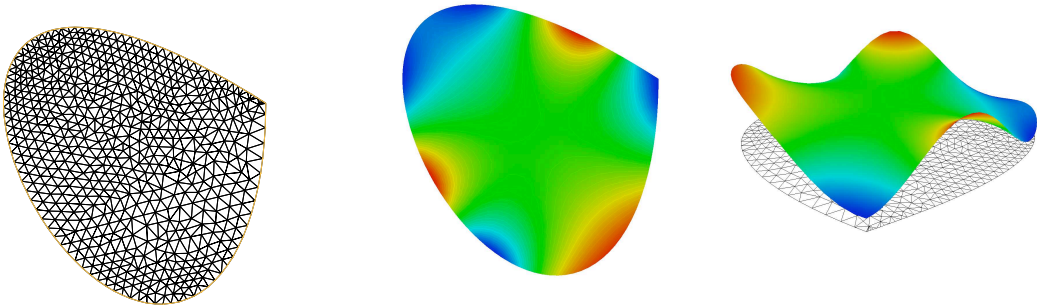


FIG. 4.4 – Maillage (à gauche). Relèvement  $\bar{p}|_{\partial\Omega}$  (au centre et à droite).

Remarquons qu'un autre choix possible pour l'espace  $P_K$  est l'espace des éléments finis  $\mathbb{P}_1$  sur un maillage donné à  $K$  noeuds. Cependant, pour mailler correctement le domaine, le nombre de degrés de liberté  $K$  nécessaire est généralement bien supérieur à celui utilisé pour la base modale. Le problème inverse a alors beaucoup d'inconnues et est plus difficile à résoudre.

Les méthodes présentées dans cette section ont été mises en œuvre en deux dimensions grâce au logiciel de calcul par éléments finis FreeFem++ [33]. La visualisation des résultats est fournie par le logiciel Medit [27]. Dans la section suivante, nous essayons de quantifier l'erreur, commise en introduisant la régularisation, en fonction de l'erreur dans les données.

## 4.2 Etude de l'erreur

### 4.2.1 Estimation *a priori*

Nous cherchons donc  $p^* \in P_K$ . Nous pouvons écrire :

$$\|p^* - \bar{p}\|_P \leq \|p^* - \Pi_K \bar{p}\|_P + \|\Pi_K \bar{p} - \bar{p}\|_P,$$



où  $\|\Pi_K \bar{p} - \bar{p}\|_P$  est l'erreur d'interpolation de  $\bar{p}$  dans  $P_K$ , qui décroît lorsque  $K$  augmente, tandis que :

$$\|p^* - \Pi_K \bar{p}\|_P \leq \|R_K(M_{\bar{p}} p^* - \bar{u})\|_P \leq \|R_K\| \|M_{\bar{p}} p^* - \bar{u}\|_U,$$

avec :

$$\|M_{\bar{p}} p^* - \bar{u}\|_U \leq \|M_{\bar{p}} p^* - u_{obs}\|_U + \|u_{obs} - \bar{u}\|_U.$$

Dans cette dernière inégalité,  $\|u_{obs} - u\|_U$  est l'erreur dans les données expérimentales et est inférieure à  $\delta$  supposé connu. Quant au premier terme, il peut être vu comme

$$\|M_{\bar{p}} p^* - u_{obs}\|_U = J(p^*) = \inf_{p \in P_K} J(p) + e_{h,\Delta t} + \varepsilon,$$

où  $e_{h,\Delta t}$  est l'erreur de discrétisation de  $J$  qui décroît en fonction des pas d'espace  $h$  et de temps  $\Delta t$  et  $\varepsilon$  est l'erreur de la minimisation par l'algorithme BFGS supposée connue et fixe. Il reste donc finalement à majorer :

$$\inf_{p \in P_K} J(p) = \inf_{p \in P_K} \|M_{\bar{p}} p - u_{obs}\|_U \leq \inf_{p \in P_K} \|M_{\bar{p}} p - \bar{u}\|_U + \|\bar{u} - u_{obs}\|_U \leq \|M_{\bar{p}}\| \inf_{p \in P_K} \|p - \bar{p}\|_P + \delta,$$

et le premier terme de cette dernière inégalité est égal à l'erreur de projection de  $P$  dans  $P_K$ . Estimons maintenant cette erreur. Pour cela, on introduit :

$$H^s \cap H_0^1 = \mathcal{D}((-\Delta)^s),$$

avec comme norme associée :

$$\|p\|_{s,-\Delta}^2 = \sum_{i \in \mathbb{N}} \sigma_i^s |p_i|^2.$$

En particulier,

$$\|p\|_{0,-\Delta} = (p, p)_{L^2(\Omega)} \quad \text{et} \quad \|p\|_{1,-\Delta} = (\nabla p, \nabla p)_{L^2(\Omega)}.$$

On a le résultat suivant, pour  $q \leq s$  et en supposant que les valeurs propres  $\sigma_i$  sont ordonnées par ordre croissant :

$$\begin{aligned} \|p - \Pi_K p\|_{q,-\Delta}^2 &= \sum_{i=K+1}^{+\infty} \sigma_i^q |p_i|^2 \\ &\leq \sup_{K+1 \leq i} (\sigma_i^{q-s}) \sum_{i=K+1}^{+\infty} \sigma_i^s |p_i|^2 \\ \|p - \Pi_K p\|_{q,-\Delta}^2 &\leq \frac{1}{\sigma_K^{s-q}} \|p\|_{s,-\Delta}^2. \end{aligned}$$

On utilise alors la formule asymptotique de Weyl [91] qui stipule, pour le Laplacien avec conditions de Dirichlet, que le nombre  $\mathcal{N}(\sigma)$  de valeurs propres inférieures à  $\sigma$  est donné par :

$$\mathcal{N}(\sigma) \sim C(d) \text{Mes}(\Omega) \sigma^{d/2}, \quad \text{si } \sigma \rightarrow +\infty,$$

où  $C(d)$  est une constante qui dépend de la dimension  $d$  du problème. Ainsi, pour notre problème en dimension deux, nous avons :

$$K \sim \frac{\text{Aire}(\Omega)}{4\pi} \sigma_K, \quad \text{si } K \rightarrow +\infty.$$

### 4.2.2 Données numériques

Considérons maintenant les valeurs numériques des coefficients suivantes :

- $\mu(x) = \lambda(x) = 3$ ,  $\tilde{\lambda}(x, t) = h(t) = e^{-t/\tau}$  avec  $\tau = 1$ ,
- $\bar{p}(x) = \cos(x + y) + 1.5$  comme sur la Figure 4.3,
- $f(x, t) = 0$ ,  $\bar{u}_1(x) = 0$  et  $\bar{u}_0$  est la solution du problème stationnaire associé à (1), à savoir :

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\mu(x)(\nabla \bar{u}_0(x) + \nabla \bar{u}_0(x)^t) + \lambda(x)(\nabla \cdot \bar{u}_0)(x)I) = 1, & \forall x \in \Omega, \\ u_0(x) = 0, & \forall x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Dans les expériences réelles, il n'est pas possible d'assurer que la donnée initiale  $\bar{u}_0$  satisfait l'hypothèse (H5) du Théorème 3.1. En pratique, la récupération est menée avec  $\bar{u}_0 \neq 0$ . On suppose de plus que  $\bar{p}$  est connu sur la frontière de  $\Omega$ . Cette hypothèse, moins restrictive que l'hypothèse (H3) du Théorème 3.1, est physiquement acceptable car des mesures expérimentales du coefficient au niveau de la frontière semblent envisageables.

Nous allons maintenant mener une étude numérique en changeant un à un les paramètres pour comprendre leur influence sur les termes d'erreur. Les coefficients de référence sont les suivants :  $K = 10$ ,  $\omega = \Omega$ ,  $T = 50$  et  $\delta = 0$ .

### 4.2.3 Changer le nombre de vecteurs dans la base

Tout d'abord, nous faisons varier le nombre de fonctions de base et donc la dimension de l'espace  $P_K$ . La Figure 4.5 présente trois résultats de récupération du coefficient  $\bar{p}$  pour trois valeurs de  $K$ .

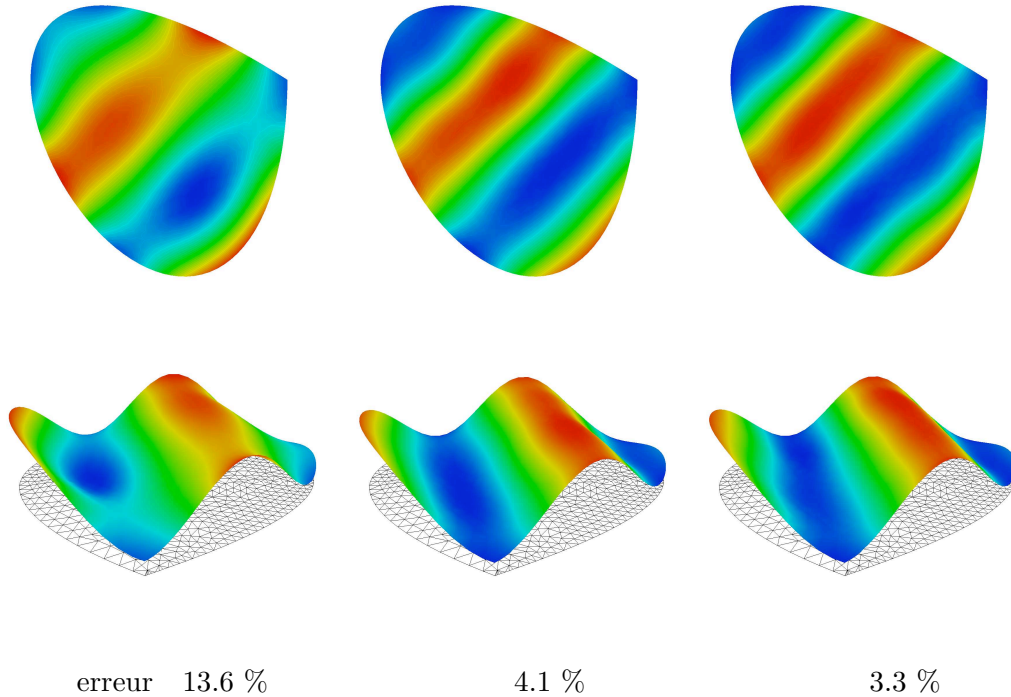


FIG. 4.5 – Coefficient récupéré pour  $K = 4$ ,  $K = 10$  et  $K = 16$ .

Le Tableau 4.1 compare l'erreur de projection de  $\bar{p}$  sur l'espace  $P_K$  à l'erreur numérique de la méthode de récupération (en norme  $L^2$ ). Comme attendu, lorsque  $K$  augmente, l'erreur diminue. Nous soulignons cependant que plus  $K$  est grand, plus le nombre de degrés de liberté à récupérer est important, rendant alors la récupération plus longue. Par ailleurs, si  $K$  est trop grand, le problème pourrait alors être de nouveau mal posé.

$K$	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
$\Pi_K \bar{p} - \bar{p}$	18.2	13.5	11.6	3.9	2.9	2.9	2.7	2.1	1.7	1.6
$p^* - \bar{p}$	18.5	13.6	12.1	4.7	4.1	3.4	3.4	3.3	3.5	3.8

TAB. 4.1 – Erreur relative en norme  $L^2$  en fonction du nombre  $K$  de fonctions dans la base.

#### 4.2.4 Changer la zone d'observation

Nous avons vu, dans les hypothèses du Théorème 3.1, qu'il y avait stabilité dans la récupération du coefficient si la zone d'observation est "suffisamment grande". En particulier, cette hypothèse est satisfaite si la zone d'observation  $\omega$  contient un voisinage du bord de  $\Omega$ . En effet, dans ce cas, toutes les ondes qui propagent l'information arrivent à un moment ou à un autre dans la zone d'observation. Nous nous intéressons ici à la récupération du coefficient  $\bar{p}$  pour différentes zones d'observation. La Figure 4.6 présente les résultats.

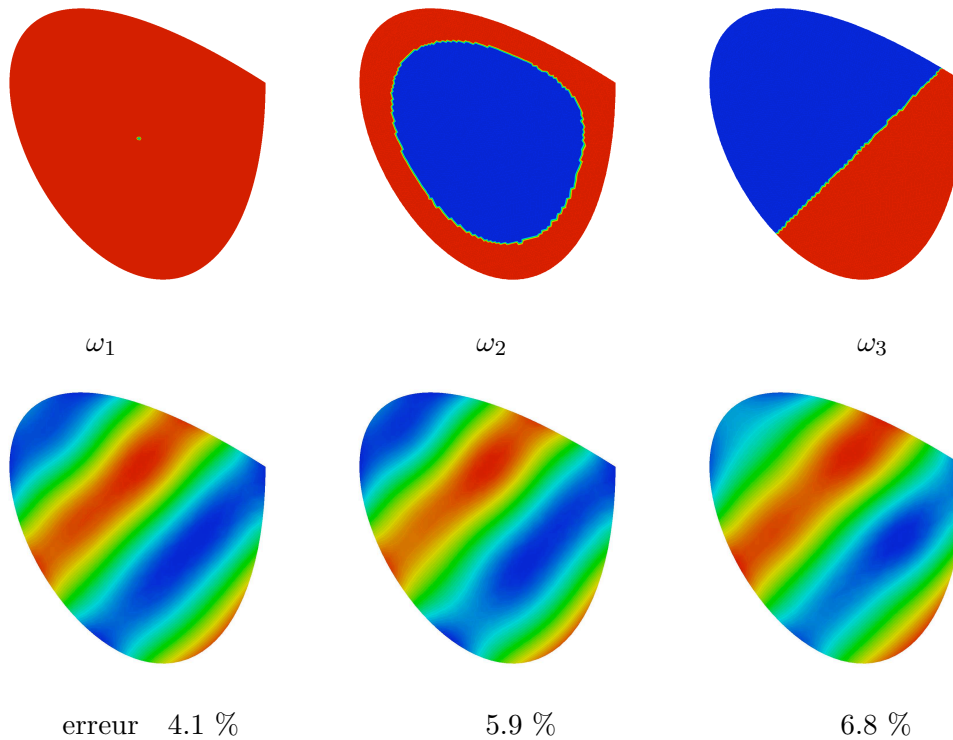


FIG. 4.6 – Différentes zones d'observation  $\omega$  (en haut) et les solutions  $p^*$  correspondantes (en bas).

Nous constatons que, dans les trois cas, la récupération est possible, même lorsque l'on n'observe que sur la moitié du domaine, région qui ne satisfait pourtant pas la condition du Théorème 3.1. En fait, la géométrie considérée est telle que toutes les ondes atteignent la zone d'observation, ou de manière directe ou après réflexion sur le bord du domaine. La Figure 4.7 montre un exemple de domaine  $\Omega$  pour lequel une partie de l'information peut être perdue si l'on choisit mal la zone d'observation  $\omega$ .

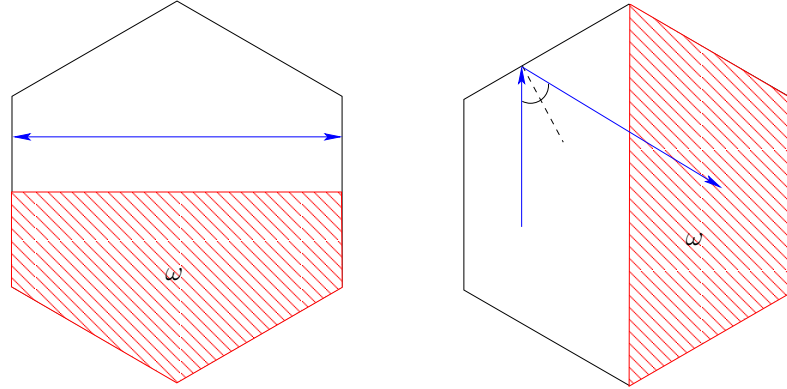


FIG. 4.7 – Choix de la zone d'observation  $\omega$ . À gauche, certaines ondes sont perdues. À droite, toutes les ondes sont capturées.

#### 4.2.5 Changer le temps d'observation

Le résultat du Théorème 3.1 stipule que la récupération du coefficient est stable et unique si le temps d'observation est "suffisamment grand". Plus précisément, nous devons avoir  $T \geq T_0 = \frac{d}{\sqrt{\beta}}$  où  $d$  est la taille du domaine et  $\beta$  est une constante suffisamment petite qui dépend des coefficients de l'équation. En fait,  $\sqrt{\beta}$  peut être vu comme la vitesse de l'onde la plus lente. L'observation doit donc se faire pendant un temps suffisant pour que l'information transportée par cette onde ait le temps d'atteindre la zone d'observation  $\omega$ . Nous nous intéressons ici à la récupération du coefficient  $\bar{p}$  pour différents temps d'observation. La Figure 4.8 et le Tableau 4.2 présentent les résultats.

$T$	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
$p^* - \bar{p}$ pour $\omega_1$	10.5	4.0	3.8	3.5	3.4	3.5	3.6	3.8	4.0	4.1
$p^* - \bar{p}$ pour $\omega_2$	36.6	20.0	13.5	14.5	5.8	6.0	5.1	5.4	5.8	5.9
$p^* - \bar{p}$ pour $\omega_3$	36.6	22.9	16.4	13.3	9.6	9.0	7.6	7.0	7.0	6.8

TAB. 4.2 – Erreur relative en norme  $L^2$  en fonction du temps  $T$  et de la région  $\omega$ .

#### 4.2.6 Changer l'erreur dans les données

Les mesures expérimentales ne sont jamais exactes. Une erreur relative de  $\delta\%$  correspondant à l'erreur de mesure expérimentale est donc ajoutée à la solution calculée, c'est-à-dire que le déplacement observé expérimentalement  $u_{obs}$  est obtenu par la formule

$$u_{obs}(x, t) = (1 + r(x, t) \delta) \bar{u}(x, t), \quad \forall (x, t) \in \omega \times (0, T),$$

où  $r$  est une variable entre  $-1$  et  $1$ , choisie de manière aléatoire selon une loi de distribution uniforme, et ce à chaque point de discrétisation spatio-temporelle du domaine  $\omega \times (0, T)$ . La Figure 4.9 présente les résultats de la récupération pour trois valeurs de  $\delta$ .

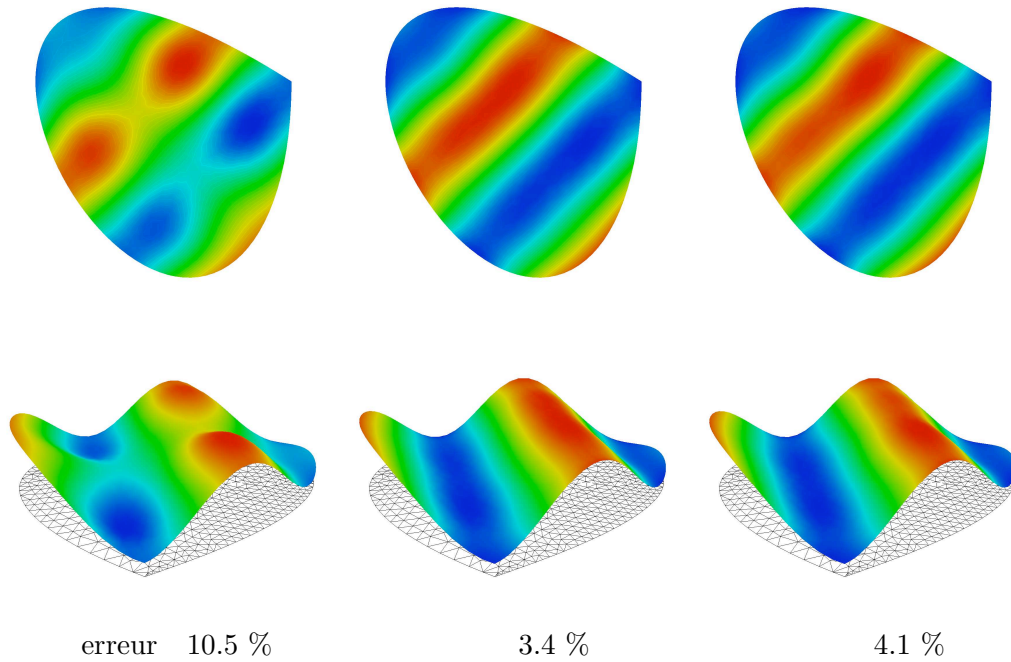


FIG. 4.8 – Coefficient récupéré pour  $T = 5$ ,  $T = 25$  et  $T = 50$ .

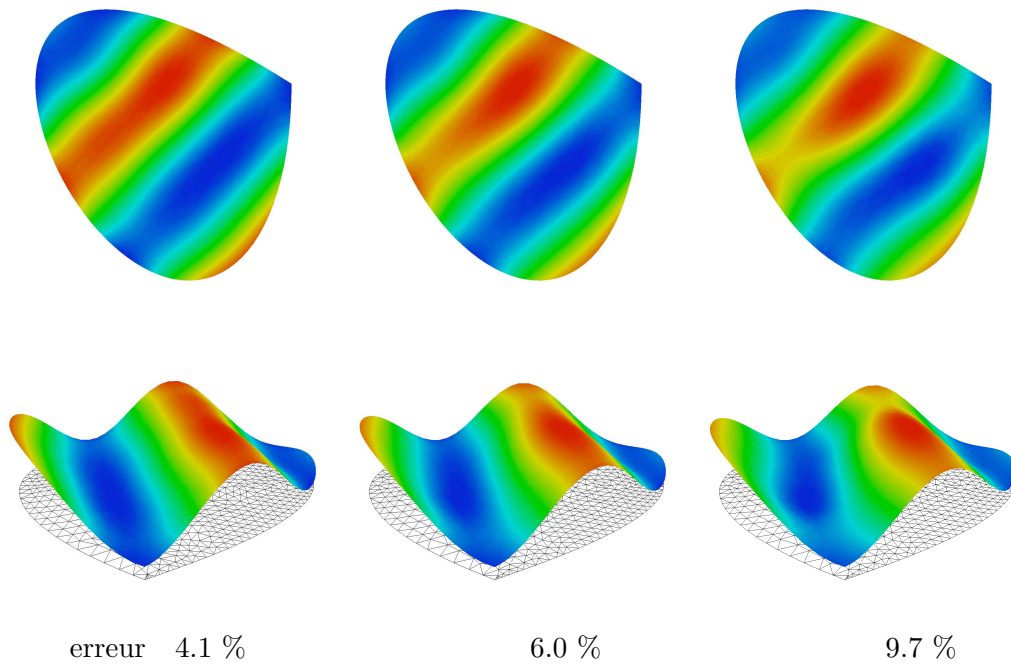


FIG. 4.9 – Coefficient récupéré pour  $\delta = 0$ ,  $\delta = 10\%$  et  $\delta = 20\%$ .

## 4.3 Application en imagerie médicale

### 4.3.1 Motivation

Dans cette section, nous présentons l'application biomédicale qui a motivée l'étude de ce chapitre. Dans le contexte de la neurochirurgie, le diagnostic préopératoire est actuellement posé sur des images obtenues par résonance magnétique (voir Figure 4.10). Cette technique d'imagerie non invasive mesure la quantité d'eau présente dans les organes et fournit ainsi une cartographie de la densité protonique des tissus. Si cette technique est très efficace dans la détection des tumeurs cérébrales, elle peut néanmoins être améliorée. En effet, depuis quelques années, la recherche en imagerie médicale se tourne vers des méthodes dites d'élastographie, Ammari et al. [1], Sinkus *et al.* [83]. Ces dernières reposent sur le principe que la grandeur pertinente pour détecter et classifier les tumeurs ne serait pas leur concentration en eau mais leur dureté. Cette méthode s'attache donc à fournir des cartographies des coefficients élastiques de l'organe. Généralement, l'hypothèse est faite que le comportement de l'organe considéré est élastique linéaire. Or, il est largement admis que les tissus mous, comme le cerveau, ont en réalité un comportement viscoélastique et que la composante visqueuse ne peut être négligée. La méthode proposée dans ce chapitre cherche ainsi à récupérer, non plus seulement les coefficients élastiques mais également les coefficients viscoélastiques. Nous présentons maintenant un exemple concret de récupération.

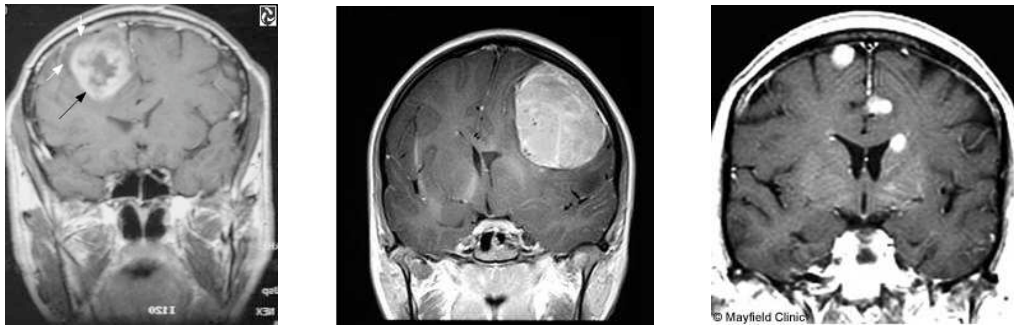


FIG. 4.10 – Grande variété de cas pathologiques.

### 4.3.2 Données numériques

L'objectif de cette section est d'illustrer l'efficacité de la méthode numérique proposée pour détecter la présence d'une singularité. Nous ne discutons pas ici de la validité des coefficients biophysiques et des conditions d'expérience. Cet exemple peut ainsi être considéré comme un exemple académique. Nous considérons donc toujours le système (1)-(2), en deux dimensions d'espace et pour les valeurs suivantes des coefficients :

- $\mu(x) = \lambda(x) = 1200$ ,  $\tilde{\lambda}(x, t) = 400 h(t)$  et  $h(t) = e^{-t/\tau}$  avec  $\tau = 1$ ,
- $\bar{p}(x) = \begin{cases} 400, & \text{dans le tissu sain,} \\ > 400, & \text{dans la tumeur (cf. Figure 4.11),} \end{cases}$
- $f(x, t) = 0$ ,  $\bar{u}_1(x) = 0$  et  $\bar{u}_0$  est la solution du problème stationnaire associé à (1) pour une force égale 20 au second membre.

Notons que la position des tumeurs est inconnue. La récupération du coefficient a lieu en tout point du maillage. Le temps d'observation est choisi égal à  $T = 50$  tandis que la

zone d'observation  $\omega$  est celle présentée sur la Figure 4.12. Une erreur relative uniforme de  $\delta = 2\%$  correspondant à l'erreur expérimentale est ajoutée à la solution calculée. Nous résolvons le problème par la méthode présentée en Section 4.1.

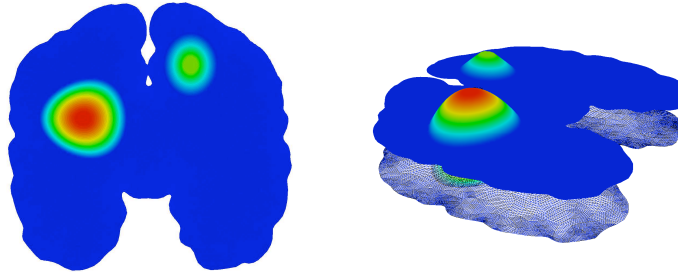


FIG. 4.11 – Coefficient à récupérer  $\bar{p}$ , vue du dessus (à gauche), vue 3D (à droite).

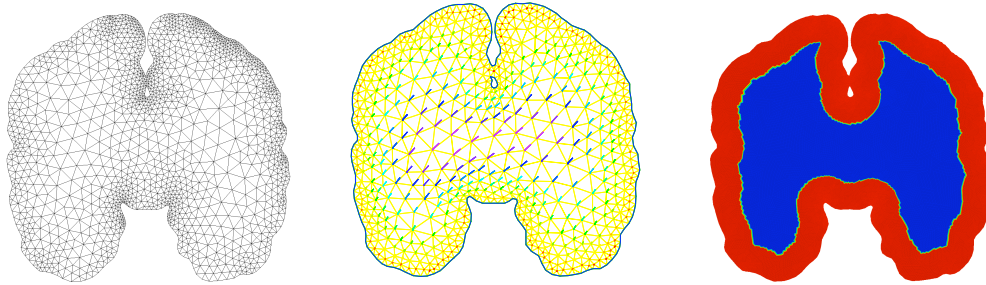


FIG. 4.12 – Maillage de calcul de  $u$  (à gauche). Déplacement initial  $\bar{u}_0$  (au centre). Zone d'observation  $\omega$  en rouge (à droite).

### 4.3.3 Adaptation de maillage et de base

Nous avons choisi de chercher le coefficient inconnu  $p^*$  dans l'espace  $P_K$  des  $K$  premières fonctions propres du maillage. Pour le nouveau domaine  $\Omega$  considéré, ces fonctions sont illustrées sur la Figure 4.13. Le choix du nombre  $K$  est un problème délicat. En effet, s'il est trop grand, la résolution sera coûteuse et le problème risque d'être mal posé. Mais s'il est trop petit, on ne sera pas en mesure de représenter correctement  $\bar{p}$ . Par exemple, on ne pourra pas détecter la présence d'une tumeur de taille caractéristique inférieure à la plus petite longueur d'onde considérée, à savoir :

$$\frac{2\pi}{\sqrt{\sigma_K}}.$$

Or, les cas pathologiques rencontrés sont très divers, comme le montrent les IRM de la Figure 4.10. Pour choisir  $K$ , il faut donc avoir une connaissance *a priori* de la taille des éléments que l'on souhaite pouvoir distinguer.

Afin de résoudre le problème de manière précise, nous proposons maintenant une méthode de résolution itérative. Tout d'abord, on calcule une première solution  $p_0^*$  sur le maillage initial et dans la base des vecteurs propres du Laplacien. Ensuite, on utilise cette

dernière pour raffiner le maillage et surtout pour adapter la base. L'adaptation de maillage est réalisée à partir de la hessienne de  $p_0^*$  reconstruite numériquement. Le maillage initial (638 nœuds) et le maillage adapté (643 nœuds) sont montrés sur la Figure 4.15.

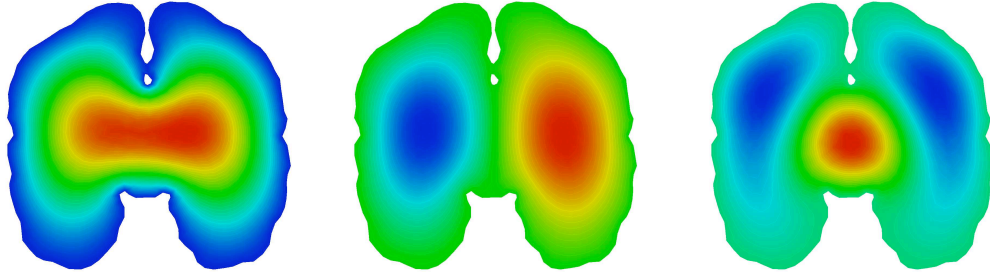


FIG. 4.13 – Fonctions de la base initiale n°1, n°2 et n°5.

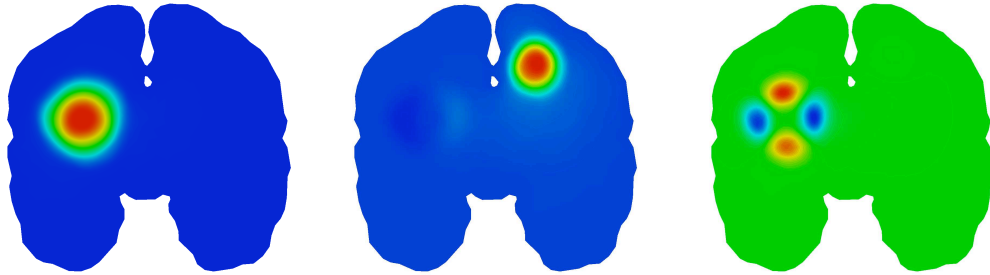


FIG. 4.14 – Fonctions de la base adaptée n°1, n°2 et n°5.

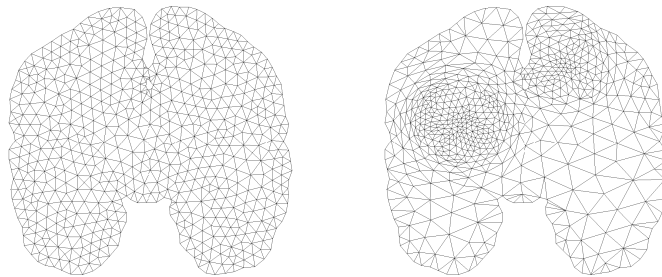


FIG. 4.15 – Maillage initial (à gauche). Maillage adapté après deux itérations (à droite).

Pour ce qui est de la nouvelle base, nous considérons les vecteurs propres du nouveau problème suivant :

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (a(x)\nabla\varphi_i(x)) = \sigma_i\varphi_i(x), & \forall x \in \Omega, \\ \varphi_i(x) = 0, & \forall x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

où

$$a(x) = \frac{1}{\nabla p_0^*(x)}.$$



Ces fonctions sont illustrées sur la Figure 4.14. Nous constatons qu'elles sont localisées dans les zones où le coefficient  $\bar{p}$  varie. Ainsi, en utilisant l'information fournie par le premier calcul de  $p_0^*$ , nous trouvons une nouvelle base, mieux à même de représenter le coefficient recherché. Et le processus peut être itéré plusieurs fois.

#### 4.3.4 Les résultats

Nous appliquons les méthodes exposées à la section précédente à la récupération du coefficient  $\bar{p}$  de la Figure 4.16.

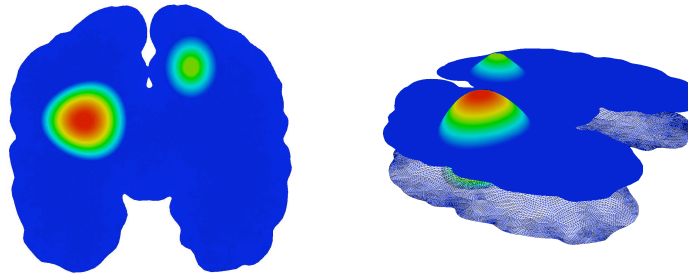


FIG. 4.16 – Coefficient exact  $\bar{p}$  à récupérer.

Sur la Figure 4.17, nous montrons les résultats numériques obtenus à différentes itérations du processus.

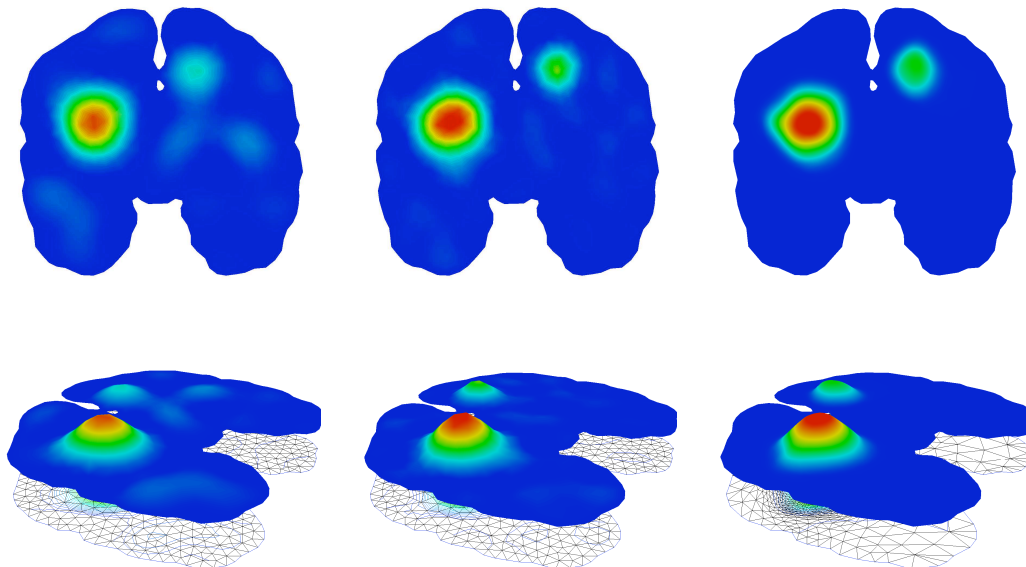


FIG. 4.17 – Coefficient récupéré  $p^*$  : (à gauche) à l'itération 0 avec  $K_0 = 50$ , (au centre) à l'itération 0 avec  $K_0 = 100$ , (à droite) à l'itération 2 avec  $K_0 = K_1 = K_2 = 50$ .

Sur la Figure 4.18, nous traçons l'erreur relative entre  $p^*$  et  $\bar{p}$  en norme  $L^2$  en fonction du nombre  $K$  de fonctions propres dans la base et pour différentes itérations dans le

processus itératif. Nous constatons que l'adaptation proposée permet systématiquement de réduire l'erreur numérique. Le coût de calcul est nécessairement plus grand puisque l'on recommence la résolution. Néanmoins, la résolution de chaque itération sera bien moins coûteuse que le calcul initial - même si on maintient la taille du maillage et celle de la base des vecteurs propres constantes - car elle sont initialisées avec  $p_0^*$ .

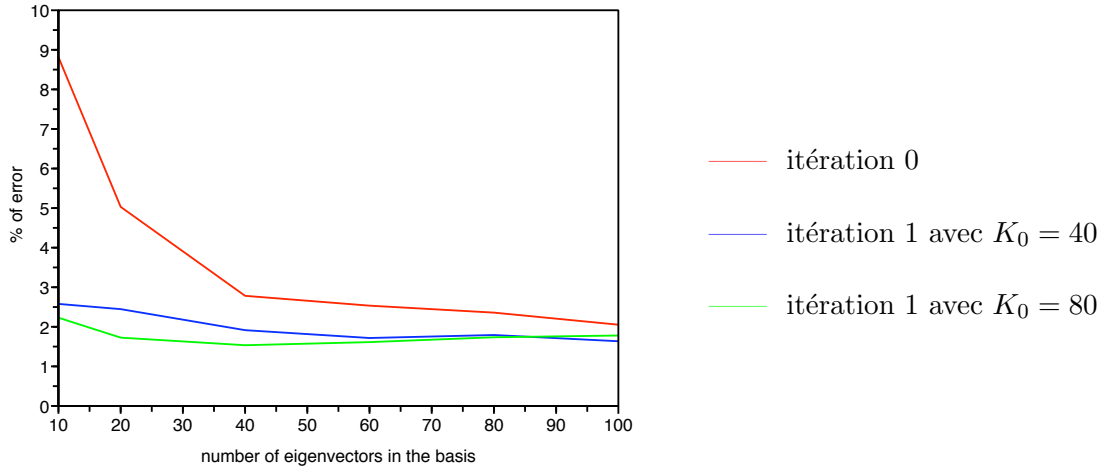


FIG. 4.18 – Erreur relative entre  $p^*$  et  $\bar{p}$  en norme  $L^2$  en fonction de  $K$ .

## 4.4 Perspectives

Dans cette partie, nous présentons deux extensions possibles des méthodes présentées. Celles-ci font l'objet de travaux en cours.

### 4.4.1 Récupération de plusieurs coefficients simultanément

Soulignons que nous n'avons cherché pour le moment à récupérer que le coefficient  $\bar{p}$ , en supposant que tous les autres coefficients étaient connus. En effet, le but de cet exemple était d'illustrer le résultat de stabilité théorique pour la récupération de la partie spatiale d'un seul coefficient viscoélastique à partir d'une seule mesure. Pour récupérer simultanément tous les coefficients, il y a plusieurs méthodes, Pagnacco *et al.* [74]. Une méthode consiste à ajouter dans la fonctionnelle à minimiser plus de paramètres. Malheureusement, ceci pourrait rendre le problème instable dans le cas d'une observation unique. Nous aurions alors besoin de plusieurs mesures indépendantes. Une autre méthode consiste à utiliser un processus itératif en fixant tous les coefficients sauf un à chaque étape. Dans les deux cas, il faudrait partir dans un voisinage de la solution et jouer avec les niveaux de bruit  $\delta$ .

### 4.4.2 Recupération en trois dimensions

Dans cette dernière section, nous présentons un exemple en trois dimensions. Il consiste en la récupération du coefficient  $\bar{p}$  supposé constant par morceaux. Nous devons donc récupérer les deux valeurs du coefficient  $\bar{p}$ , dans le tissu sain d'une part et au sein d'une tumeur d'autre part. La position de la tumeur est ici, contrairement aux exemples montrés dans

les autres sections, connue *a priori*. A noter toutefois que, cette fois-ci, aucune information sur la valeur du coefficient  $\bar{p}$  sur la frontière n'est fournie. Les autres coefficients utilisés pour le cas test sont les mêmes que ceux utilisés dans les exemples en deux dimensions. La Figure 4.19 présente les maillages surfacique et volumique (14780 tétraèdres) du domaine de calcul de dimensions  $150 \times 150 \times 150 \text{ mm}$ . Le Tableau 4.3 présente les valeurs des coefficients exacts et récupérés. La récupération est excellente.

	Tissus sains	Tissus cancéreux
Coefficients exacts	400	600
Coefficients récupérés	400,000	600,002

TAB. 4.3 – Coefficients utilisés pour l'exemple numérique en trois dimensions.

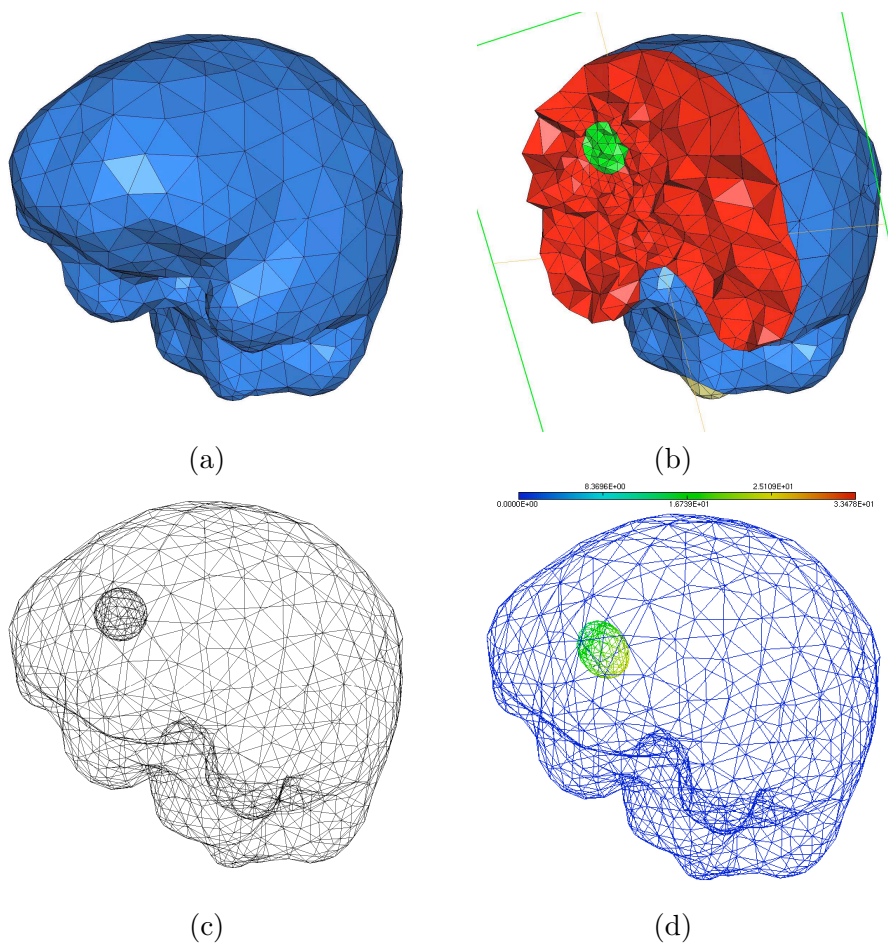


FIG. 4.19 – (a) Domaine de calcul. (b) Coupe dans le maillage volumique au niveau de la tumeur. (c) Maillage surfacique. (d) Déplacement initial.

Ce chapitre clôt la première partie de ce manuscrit qui était consacrée aux problèmes inverses associés au système de la viscoélasticité linéaire. Nous allons maintenant regarder un modèle plus compliqué, celui de la viscoélasticité non linéaire et nous intéresser principalement à sa résolution numérique en trois dimensions.

## Deuxième partie

# Simulation numérique en viscoélasticité nonlinéaire



# Introduction

Dans toute cette deuxième partie, nous nous intéressons à un modèle de viscoélasticité non linéaire. Nous considérons donc un matériau qui, dans sa configuration au repos, occupe le domaine  $\Omega$ , ouvert borné et connexe de  $\mathbb{R}^3$ . Supposons que la frontière  $\Gamma$  de  $\Omega$  est lipschitzienne, ainsi la normale unitaire sortante  $n$  est bien définie en tout point de  $\Gamma$ . Supposons également que cette frontière se décompose en  $\Gamma = \bar{\Gamma}_0 \cup \bar{\Gamma}_1$  avec  $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$ . Le problème que nous considérons est le suivant :

*Trouver le vecteur déplacement  $u$  solution de :*

$$\begin{cases} -\nabla \cdot T = f, & \text{dans } \Omega, \\ u = u_0, & \text{sur } \Gamma_0, \\ T \cdot n = g, & \text{sur } \Gamma_1, \end{cases} \quad (\text{EDP})$$

où le vecteur  $f$  (resp.  $g$ ) représente les forces volumiques (resp. surfaciques), exprimées dans la configuration de référence, et  $T$  est le premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff qui dépend de  $u$ . La relation entre  $T$  et  $u$  est appelée loi de comportement du matériau et s'exprime au travers du gradient de déformation  $F = Id + \nabla u$  par :

$$T = \frac{dW}{dF} - pF^{-t}, \quad (1)$$

où  $W$  est l'énergie interne du système. Dans le modèle viscoélastique que nous considérons, l'énergie interne  $W$  du système peut s'exprimer en fonction du tenseur de Cauchy-Green  $C$  défini par :

$$C = F^t F = Id + \nabla u + \nabla u^t + \nabla u^t \cdot \nabla u,$$

et en fonctions de tenseurs  $G_i$ , pour  $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$  où  $m \in \mathbb{N}^*$ , qui sont des variables internes utilisées pour mesurer la déformation d'amortisseurs visqueux inclus dans le matériau. L'évolution de ces variables internes est alors décrite par l'ensemble d'équations suivant :

$$\begin{cases} \nu_i \dot{G}_i^{-1} = \frac{\partial W}{\partial G_i} + q_i G_i^{-1}, & \text{dans } \Omega, \\ G_i(0) = Id, & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad \forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket, \quad (\text{EDO})$$

avec  $\nu_i$ , pour  $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ , les coefficients de viscosité. Les pressions  $p$  et  $q_i$ , pour  $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ , qui apparaissent dans les équations (1) et (EDO) sont les multiplicateurs de Lagrange associés aux contraintes d'incompressibilité :

$$\det(F) = \det(G_i) = 1, \quad \forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket. \quad (2)$$

Le problème mis sous forme variationnelle est alors le suivant :

Chercher  $(u - u_0) \in \mathcal{V}$ ,  $p \in \mathcal{P}$ ,  $G_i \in \mathcal{H}$  et  $q_i \in \mathcal{Q}$ ,  $\forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ , tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} F \left( 2 \frac{\partial W}{\partial C} (C, G_1, \dots, G_m) - p C^{-1} \right) : \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f \cdot v \, dx + \int_{\Gamma_1} g \cdot v \, d\gamma, \quad \forall v \in \mathcal{V}, \\ \int_{\Omega} \hat{p} (\det(F) - 1) \, dx = 0, \quad \forall \hat{p} \in \mathcal{P}, \\ \int_{\Omega} \left( - \frac{\partial W}{\partial G_i} (C, G_1, \dots, G_m) + \nu_i \dot{G}_i^{-1} - q_i G_i^{-1} \right) : H \, dx = 0, \quad \forall H \in \mathcal{H}, \\ \int_{\Omega} \hat{q} (\det(G_i) - 1) \, dx = 0, \quad \forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket, \quad \forall \hat{q} \in \mathcal{Q}, \end{array} \right.$$

où  $\mathcal{V}$ ,  $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{Q}$  sont des espaces fonctionnels convenables.

Ainsi, le problème associe une équation aux dérivées partielles (EDP) non linéaire, des conditions d'incompressibilité (2) et  $m$  équations aux dérivées ordinaires (EDO) décrivant l'évolution des variables internes. Bien que le modèle considéré soit stationnaire (puisque nous avons négligé le terme d'accélération), il dépend néanmoins du temps au travers des variables internes. On parle alors d'équilibre quasi-statique : l'évolution des variables internes est telle que le système est en permanence proche de l'équilibre.

## Chapitre 5

Dans ce chapitre, nous expliquons les principales étapes de discrétisation du modèle que nous venons d'introduire ci-dessus et nous présentons les techniques de résolution qui ont été effectivement implémentées. La discrétisation en espace met en œuvre des éléments finis de Lagrange  $\mathbb{P}_0/\mathbb{P}_2$ , tandis que la discrétisation en temps est réalisée par un schéma d'Euler implicite. Le système non linéaire est naturellement linéarisé par une méthode de Newton et le système linéaire résultant est résolu par une technique de Lagrangien augmenté, utilisant un gradient conjugué préconditionné. Nous présentons également le calcul d'une solution analytique pour le modèle considéré dans le cas simple d'une compression unidimensionnelle. Les résultats numériques sont ainsi confrontés à cette solution analytique pour validation. Nous présentons un exemple d'application sur une pièce mécanique à géométrie complexe.

## Chapitre 6

Ce chapitre revient sur l'application biomédicale évoquée au Chapitre 4. Il s'agit de la simulation numérique des déformations des structures cérébrales. Nous présentons les étapes d'obtention du maillage de calcul à partir de la segmentation d'image obtenues par résonance magnétique. Nous confrontons les résultats numériques à des expériences de compression simple sur des cerveaux de porcs. En particulier, nous identifions ainsi la valeur des coefficients de notre modèle. Plusieurs exemples de simulations numériques sont présentés, pour conclure et souligner l'efficacité de notre approche.

## Chapitre 7

Le dernier chapitre de cette deuxième partie s'intéresse au couplage du modèle introduit précédemment avec un modèle de viscoplasticité. Nous commençons par éclairer les notions en présentant deux modèles linéaires unidimensionnels : le modèle de Maxwell et celui de Perzyna. Puis, nous nous attachons à dériver le modèle viscoélastique/viscoplastique en

satisfaisant les grands principes de la mécanique : principe des travaux virtuels, principe de la dissipation d'énergie de Clausius-Duheim et principe de la dissipation plastique maximale.





## Chapitre 5

# Résolution numérique d'un modèle de viscoélasticité non linéaire

Nous revenons sur le modèle de viscoélasticité non linéaire présenté en introduction de cette deuxième partie et dont nous rappelons la formulation variationnelle ici :

Chercher  $(u - u_0) \in \mathcal{V}$ ,  $p \in \mathcal{P}$ ,  $G_i \in \mathcal{H}$  et  $q_i \in \mathcal{Q}$ , pour  $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ , tels que :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \int_{\Omega} F \left( 2 \frac{\partial W}{\partial C} (C, G_1, \dots, G_m) - p C^{-1} \right) : \nabla v \, dx \\ \qquad \qquad \qquad = \int_{\Omega} f \cdot v \, dx + \int_{\Gamma_1} g \cdot v \, d\gamma, & \forall v \in \mathcal{V}, \\ \int_{\Omega} \hat{p} (\det(F) - 1) \, dx = 0, & \forall \hat{p} \in \mathcal{P}, \\ \int_{\Omega} \left( -\frac{\partial W}{\partial G_i} (C, G_1, \dots, G_m) + \nu_i \dot{G}_i^{-1} - q_i G_i^{-1} \right) : H \, dx = 0, & \forall H \in \mathcal{H}, \\ \int_{\Omega} \hat{q} (\det(G_i) - 1) \, dx = 0, & \forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket, \quad \forall \hat{q} \in \mathcal{Q}, \end{array} \right. \quad (5.1)$$

où  $F = Id + \nabla u$  et  $C = FF^t$ .

Nous faisons le choix d'une énergie élastique qui dépend des variables viscoélastiques sous la forme :

$$W(C, G_1, \dots, G_m) = W_0(C) + \sum_{i=1}^m W_i(C : G_i).$$

Dans ce chapitre, nous décrivons la discrétisation du modèle (5.1) et l'implémentation en trois dimensions telle qu'elle a été menée. Pour cela, nous nous appuyons sur l'analyse mathématique approfondie développée par Le Tallec *et al.* [55, 56] du modèle à une seule variable interne introduit par Simo [82] et Lubliner [63]. L'objectif est d'obtenir les résultats numériques les plus précis possibles. Dans ce but, nous résolvons le problème sur des triangulations spécialement adaptées à la complexité de la géométrie du domaine de calcul considéré. Les résultats numériques seront analysés pour valider notre modèle sur des cas tests, dans le cas d'une géométrie simple pour laquelle une solution pseudo-analytique peut être calculée.

Nous tenons à souligner que le modèle (5.1) est légèrement différent du modèle étudié dans Le Tallec *et al.* [56], puisqu'il contient des variables internes supplémentaires. En

d'autres termes, si le modèle présenté dans [56] est une version non linéaire du modèle de Maxwell, par analogie, le modèle que l'on considère ici peut être vu comme une version non linéaire du modèle de Maxwell généralisé (voir figure 5.1). En ce sens, il est proche du modèle de Holzapfel [35], initialement introduit pour modéliser les ligaments. Cette formulation, bien que plus complexe, est cependant requise pour l'application envisagée et qui sera explicitée au Chapitre 6. Son atout principal est sa capacité à rendre compte de comportements complexes, comprenant de nombreux temps de dissipation par exemple et qui ne pourraient pas être modélisés par le modèle classique. Les résultats de ce chapitre seront publiés dans [18].

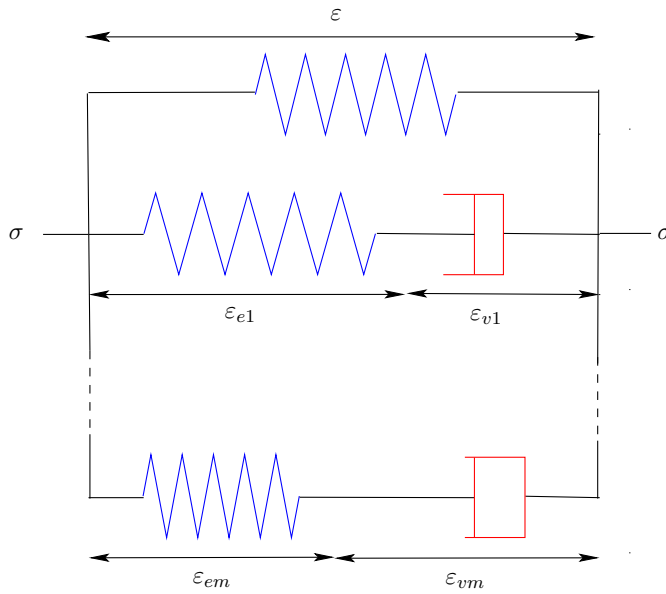


FIG. 5.1 – *Modèle de Maxwell généralisé.*

## 5.1 Discrétisation des équations

### 5.1.1 Discrétisation en espace

Nous considérons une triangulation conforme et régulière  $\mathcal{T}_h$  du domaine  $\Omega$ . Pour cela, nous supposons que  $\Omega$  est un domaine polygonal de  $\mathbb{R}^3$  qui peut être décomposé en un nombre fini  $N_h$  de tétraèdres  $K$  tels que :

1.  $\bar{\Omega} = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} K$ ,
2. le diamètre de chaque  $K$  est borné par  $h$ ,
3. chaque  $K$  contient une boule de rayon  $\alpha h$ ,  $\alpha$  donné une fois pour toutes et indépendamment de  $h$ ,
4. l'intersection de deux éléments distincts  $K$  est soit réduite à  $\emptyset$ , soit égale à un sommet, à une arête ou à une face.

L'approximation par éléments finis du problème initial est simplement obtenue en remplaçant les espaces fonctionnels  $\mathcal{V}$ ,  $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{Q}$  par des sous-espaces de dimensions finies

$\mathcal{V}_h$ ,  $\mathcal{P}_h$ ,  $\mathcal{H}_h$  et  $\mathcal{Q}_h$ . Ces espaces ne peuvent pas être choisis de manière quelconque. En particulier,  $\mathcal{P}_h$  ne peut pas être trop grand par rapport à  $\mathcal{V}_h$  comme le stipule le Théorème de Babuška-Brezzi [2] valable pour le système linéarisé. Nous choisissons :

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_h &= \{v_h : \bar{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^3, v_h|_K \in \mathbb{P}_2, \forall K \in \mathcal{T}_h, v_h = 0 \text{ sur } \Gamma_0\}, \\ \mathcal{P}_h &= \mathcal{Q}_h = \{p_h : \bar{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}, p_h|_K \in \mathbb{P}_0, \forall K \in \mathcal{T}_h\}, \\ \mathcal{H}_h &= \{H_h : \bar{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^5, H_h|_K \in \mathbb{P}_0, \forall K \in \mathcal{T}_h\}.\end{aligned}$$

Le problème devient alors :

Chercher  $(u_h - u_0) \in \mathcal{V}_h$ ,  $p_h \in \mathcal{P}_h$ ,  $G_{ih} \in \mathcal{H}_h$  et  $q_{ih} \in \mathcal{Q}_h$ ,  $\forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ , tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} F_h \left( 2 \frac{\partial W}{\partial C} (C_h, G_{1h}, \dots, G_{mh}) - p_h C_h^{-1} \right) : \nabla v_h \, dx \\ \qquad = \int_{\Omega} f \cdot v_h \, dx + \int_{\Gamma_1} g \cdot v_h \, d\gamma, \qquad \forall v_h \in \mathcal{V}_h, \\ \int_{\Omega} \hat{p}_h (\det(F_h) - 1) \, dx = 0, \qquad \forall \hat{p}_h \in \mathcal{P}_h, \\ \int_{\Omega} \left( -\frac{\partial W_i}{\partial y} (C_h : G_{ih}) C_h + \nu_i \dot{G}_{ih}^{-1} - q_{ih} G_{ih}^{-1} \right) : H_h \, dx = 0, \qquad \forall H_h \in \mathcal{H}_h, \\ \int_{\Omega} \hat{q}_h (\det(G_{ih}) - 1) \, dx = 0, \qquad \forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket, \quad \forall \hat{q}_h \in \mathcal{Q}_h. \end{array} \right.$$

Comme  $\mathcal{H}_h$  et  $\mathcal{Q}_h$  sont des espaces de fonctions constantes par morceaux, les dernières équations se simplifient en :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nu_i \dot{G}_{ih}^{-1} = \frac{\partial W_i}{\partial y} (C_h : G_{ih}) C_h + q_{ih} G_{ih}^{-1}, & \text{dans chaque } K \in \mathcal{T}_h, \\ \det G_{ih} = 1, & \text{dans chaque } K \in \mathcal{T}_h. \end{array} \right.$$

### 5.1.2 Discrétisation en temps

Le problème obtenu est un problème d'évolution en temps. Nous le discrétisons par un schéma d'Euler implicite. Ce schéma est inconditionnellement stable, ce qui est essentiel compte-tenu des échelles en temps de différents ordres de grandeur intervenant en viscoplasticité. Soit  $\Delta t$  le pas de discrétisation en temps. Le schéma d'Euler implicite conduit à la suite de problèmes suivante :

Chercher  $(u_h^{n+1} - u_0) \in \mathcal{V}_h$ ,  $p_h^{n+1} \in \mathcal{P}_h$ ,  $G_{ih}^{n+1} \in \mathcal{H}_h$  et  $q_{ih}^{n+1} \in \mathcal{Q}_h$ ,  $\forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ , tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} F_h^{n+1} \left( 2 \frac{\partial W}{\partial C} (C_h^{n+1}, G_{1h}^{n+1}, \dots, G_{mh}^{n+1}) - p_h^{n+1} (C_h^{n+1})^{-1} \right) : \nabla v_h \, dx \\ \qquad = \int_{\Omega} f \cdot v_h \, dx + \int_{\Gamma_1} g \cdot v_h \, d\gamma, \qquad \forall v_h \in \mathcal{V}_h, \\ \int_{\Omega} \hat{p}_h (\det(F_h^{n+1}) - 1) \, dx = 0, \qquad \forall \hat{p}_h \in \mathcal{P}_h, \\ \nu_i \frac{(G_{ih}^{n+1})^{-1} - (G_{ih}^n)^{-1}}{\Delta t} - \frac{\partial W_i}{\partial y} (C_h^{n+1} : G_{ih}^{n+1}) C_h^{n+1} - q_{ih}^{n+1} (G_{ih}^{n+1})^{-1} = 0, \qquad \text{dans } K, \\ \det(G_{ih}^{n+1}) = 1, \qquad \forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket, \quad \text{dans } K. \end{array} \right.$$

## 5.2 Méthodes de résolution

Nous présentons dans cette section les méthodes numériques de résolution du problème discrétisé. Les variables viscoélastiques peuvent facilement être éliminées, réduisant le problème d'évolution à la résolution d'une suite de problèmes d'élasticité standards.

### 5.2.1 Calcul de la variable viscoélastique

A chaque pas de temps, on peut calculer chacune des variables  $G_{ih}^{m+1}$ ,  $\forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ , indépendamment en résolvant son équation d'évolution. Pour cela, on commence par remarquer que, pour chaque pas de temps  $n \in \mathbb{N}$ , le problème peut se mettre sous la forme d'un problème de minimisation :

$$G_{ih}^{m+1} = \arg \min_{H \in \mathcal{U}} \left( W_i(C_h^{m+1} : H) + \frac{\nu_i}{\Delta t} (G_{ih}^m)^{-1} : H \right), \quad \forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket,$$

où  $\mathcal{U} = \{H \in (\mathbb{M}^3)_{sym}, \det H = 1\}$ . On considère alors  $G_i$  comme une fonction de  $\mathbb{R}^5 \rightarrow \mathcal{U}$  de la forme :

$$\begin{aligned} G_i(Z) = & Z_1(e_1 \otimes e_1) + Z_4(e_2 \otimes e_2) + Z_2(e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1) \\ & + Z_3(e_1 \otimes e_3 + e_3 \otimes e_1) + Z_5(e_2 \otimes e_3 + e_3 \otimes e_2) \\ & + \frac{1 + Z_1 Z_5^2 + Z_4 Z_3^2 - 2Z_2 Z_3 Z_5}{Z_1 Z_4 - Z_2^2} (e_3 \otimes e_3), \end{aligned}$$

où  $\otimes$  désigne le produit tensoriel et on définit  $Y_i \in \mathbb{R}^5$  telle que  $G_i(Y_i) = G_{ih}^{m+1}$ , pour  $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ . Ainsi, le problème de minimisation devient :

$$Y_i = \arg \min_{Z \in \mathbb{R}^5} \left( W_i(C_h^{m+1} : G_i(Z)) + \frac{\nu_i}{\Delta t} (G_{ih}^m)^{-1} : G_i(Z) \right),$$

ou de manière équivalente :

$$\mathcal{F}_i(Y_i, C_h^{m+1}) = 0, \quad \forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket, \quad (5.2)$$

où la fonction  $\mathcal{F}_i$  est définie, pour tout  $(Z, C) \in \mathbb{R}^5 \times \mathcal{U}$  par :

$$\mathcal{F}_i(Z, C) = \left( \frac{\partial W_i}{\partial y} (C : G_i(Z)) C + \frac{\nu_i}{\Delta t} (G_{ih}^m)^{-1} \right) : \frac{\partial G_i}{\partial Z} (Z).$$

Ensuite, nous remarquons que l'équation non linéaire (5.2) définit une fonction implicite  $Y_i = \mathcal{Y}_i(C_h^{m+1})$  qui peut être facilement calculée par une méthode de Newton classique sur  $\mathbb{R}^5$ . La méthode de Newton remplace l'équation non linéaire  $\mathcal{F}_i(Y_i, C) = 0$  par son développement au premier ordre autour du point  $Y^k$  :

$$\mathcal{F}_i(Y_i^k, C) + \frac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial Z} (Y_i^k, C) (Y_i^{k+1} - Y_i^k) = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Le système linéaire qui en résulte peut être résolu, conduisant à la solution approchée  $Y_i^{k+1}$  qui peut alors être utilisée comme valeur de départ pour un autre pas dans le processus itératif. A chaque itération, l'opérateur linéaire que l'on doit inverser est donné par :

$$\begin{aligned} K_i = \frac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial Z} (Z, C) = & \frac{\partial^2 W_i}{\partial y^2} (C : G_i(Z)) (C : \frac{\partial G_i}{\partial Z} (Z)) \otimes (C : \frac{\partial G_i}{\partial Z} (Z)) \\ & + \left( \frac{\partial W_i}{\partial y} (C : G_i(Z)) C + \frac{\nu_i}{\Delta t} (G_{ih}^m)^{-1} \right) : \frac{\partial^2 G_i}{\partial Z^2} (Z). \end{aligned}$$

### 5.2.2 Résolution du problème élastique

#### Mise sous forme d'un système non linéaire

En utilisant alors le fait que  $G_{ih}^{n+1} = G_i(\mathcal{Y}_i(C_h^{n+1})) = \mathcal{G}_i(C_h^{n+1})$ ,  $\forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ , on peut éliminer la variable viscoélastique dans le problème original (5.1) qui se ramène donc à :

Chercher  $u_h^{n+1} \in \mathcal{V}_h + u_0$  et  $p_h^{n+1} \in \mathcal{P}_h$  tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} 2F_h^{n+1} \frac{\partial W}{\partial C}(C_h^{n+1}, \mathcal{G}_1(C_h^{n+1}), \dots, \mathcal{G}_m(C_h^{n+1})) : \nabla v_h \, dx \\ - \int_{\Omega} p_h^{n+1} \frac{\partial \det}{\partial F}(F_h^{n+1}) : \nabla v_h \, dx = \int_{\Omega} f \cdot v_h \, dx + \int_{\Gamma_1} g \cdot v_h \, d\gamma, \quad \forall v_h \in \mathcal{V}_h, \\ \int_{\Omega} \hat{p}_h (\det(F_h^{n+1}) - 1) \, dx = 0, \quad \forall \hat{p}_h \in \mathcal{P}_h, \end{array} \right.$$

où on rappelle que  $C_h^{n+1} = (F_h^{n+1})^t F_h^{n+1}$  et  $F_h^{n+1} = Id + \nabla u_h^{n+1}$ .

On rencontre alors le problème de la résolution numérique de problèmes variationnels non linéaires d'un nombre fini d'inconnues. Ces problèmes se mettent sous la forme d'un système de  $N + M$  équations non linéaires à  $N + M$  inconnues. Ces systèmes sont de grandes tailles mais creux et faciles à linéariser. Ils peuvent facilement être résolus par des méthodes de type Newton. Choisissons une base  $(\phi_j)_{j=1 \dots N}$  de  $\mathcal{V}_h$  et une base  $(\psi_j)_{j=1 \dots M}$  de  $\mathcal{P}_h$ . Le choix le plus naturel est évidemment de prendre pour ces fonctions de base les fonctions chapeaux associées aux degrés de liberté de  $\mathcal{V}_h$  et  $\mathcal{P}_h$ . Si on développe le problème dans cette base, notre problème d'éléments finis prend, à chaque pas de temps  $n$ , la forme d'un système algébrique :

Trouver  $(U_h^{n+1}, P_h^{n+1}) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$  tels que :

$$\mathcal{L}(U_h^{n+1}, P_h^{n+1}) = 0, \quad \text{dans } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M,$$

avec les notations, pour tout  $(U, P) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_j(U, P) &= \int_{\Omega} 2F \frac{\partial W}{\partial C}(C, \mathcal{G}_1(C), \dots, \mathcal{G}_m(C)) : \nabla \phi_j \, dx \\ &\quad - \int_{\Omega} p F^{-t} : \nabla \phi_j \, dx - \int_{\Omega} f \cdot \phi_j \, dx - \int_{\Gamma_1} g \cdot \phi_j \, d\gamma, \quad \forall j \in \llbracket 1, N \rrbracket, \\ \mathcal{L}_{j+N}(U, P) &= - \int_{\Omega} \psi_j (\det(F) - 1) \, dx, \quad \forall j \in \llbracket 1, M \rrbracket, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} u_h^{n+1}(x) &= u_0(x) + \sum_{j=1}^N U_j \phi_j(x), & U_h^{n+1} &= (U_j)_{j=1 \dots N}, \\ p_h^{n+1}(x) &= \sum_{j=1}^M P_j \psi_j(x) \quad \text{et} & P_h^{n+1} &= (P_j)_{j=1 \dots M}. \end{aligned}$$

### Linéarisation du système par une méthode de Newton

La méthode de Newton remplace l'équation non linéaire  $\mathcal{L}(U, P) = 0$  par son développement au premier ordre autour du point  $(U_k, P_k)$  :

$$\mathcal{L}(U_k, P_k) + \frac{D\mathcal{L}}{D(U, P)}(U_k, P_k)((U_{k+1}, P_{k+1}) - (U_k, P_k)) = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Il faut donc calculer le gradient  $\frac{D\mathcal{L}}{D(U, P)}$  qui est défini, pour tout  $(U, P, V, Q) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$  par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_j}{\partial U}(U, P)V &= \int_{\Omega} \left( 4 \frac{d}{dC} \left( \frac{\partial W}{\partial C}(C, \mathcal{G}_1(C), \dots, \mathcal{G}_m(C)) \right) : F^t \nabla v \right) : F^t \nabla \phi_j dx \\ &\quad + \int_{\Omega} 2 \frac{\partial W}{\partial C}(C, \mathcal{G}_1(C), \dots, \mathcal{G}_m(C)) : \nabla v^t \nabla \phi_j dx \\ &\quad - \int_{\Omega} p \left( \frac{\partial(F^{-t})}{\partial F} : \nabla v \right) : \nabla \phi_j dx, \quad \forall j \in \llbracket 1, N \rrbracket, \\ \frac{\partial \mathcal{L}_{j+N}}{\partial U}(U, P)V &= - \int_{\Omega} \psi_j F^{-t} : \nabla v dx, \quad \forall j \in \llbracket 1, M \rrbracket, \\ \frac{\partial \mathcal{L}_j}{\partial P}(U, P)Q &= - \int_{\Omega} q F^{-t} : \nabla \phi_j dx, \quad \forall j \in \llbracket 1, N \rrbracket, \\ \frac{\partial \mathcal{L}_{j+N}}{\partial P}(U, P)Q &= 0, \quad \forall j \in \llbracket 1, M \rrbracket. \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} V &= (V_j)_{j=1 \dots N}, & v(x) &= \sum_{j=1}^N V_j \phi_j(x), \\ Q &= (Q_j)_{j=1 \dots M} \quad \text{et} & q(x) &= \sum_{j=1}^M Q_j \psi_j(x). \end{aligned}$$

On doit donc calculer la différentielle  $\frac{d}{dC} \left( \frac{\partial W}{\partial C}(C, \mathcal{G}_1(C), \dots, \mathcal{G}_m(C)) \right)$ , ce qui implique de connaître les dérivées  $\frac{\partial \mathcal{G}_i}{\partial C}$ ,  $\forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ . Celles-ci sont obtenues grâce au théorème des fonctions implicites qui stipule que :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_i(Y_i, C_h^{n+1}) = 0 &\iff Y_i = \mathcal{Y}_i(C_h^{n+1}) \quad \text{et} \\ \frac{\partial \mathcal{Y}_i}{\partial C}(C_h^{n+1}) &= - \left( \frac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial Z}(\mathcal{Y}_i(C_h^{n+1}), C_h^{n+1}) \right)^{-1} \cdot \left( \frac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial C}(\mathcal{Y}_i(C_h^{n+1}), C_h^{n+1}) \right)^t. \end{aligned}$$

Tous calculs faits, on trouve :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dC} \left( \frac{\partial W}{\partial C}(C, \mathcal{G}_1(C), \dots, \mathcal{G}_m(C)) \right) &= \frac{\partial^2 W_0}{\partial C^2}(C, G_{0h}^{n+1}) \\ &\quad + \sum_{i=1}^m \left( \frac{\partial^2 W_i}{\partial y^2}(C : \mathcal{G}_i(C))(\mathcal{G}_i(C) \otimes \mathcal{G}_i(C)) - B_i \cdot K_i^{-1} \cdot B_i^t \right), \end{aligned}$$

avec, pour  $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$  :

$$\begin{aligned} B_i &= \frac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial C}(\mathcal{Y}_i(C), C) \\ &= \frac{\partial^2 W_i}{\partial y^2}(C : \mathcal{G}_i(C)) \mathcal{G}_i(C) \otimes (C : \frac{\partial \mathcal{G}_i}{\partial Z}(\mathcal{Y}_i(C))) + \frac{\partial W_i}{\partial y}(C : \mathcal{G}_i(C)) \frac{\partial \mathcal{G}_i}{\partial Z}(\mathcal{Y}_i(C)). \end{aligned}$$

La méthode de Newton a de bonnes propriétés de convergence. Malheureusement, elle ne converge pas si elle est mal initialisée, c'est-à-dire si la solution initiale est trop loin de la solution finale. Pour remédier à cette dernière difficulté, la stratégie d'initialisation classiquement utilisée est celle du chargement incrémental, Oden [71].

### Méthode du chargement incrémental

Dans cette méthode, le chargement agissant sur le corps est considéré comme appliqué par petits incréments. La position d'équilibre est alors calculée à la fin de chaque incrément de chargement en utilisant la position à l'incrément précédent comme solution initiale. Cette stratégie calcule donc le chemin de solutions entre la configuration initiale et la position d'équilibre final.

### Résolution du système linéaire par un Lagrangien augmenté

La matrice tangente du système linéaire que nous devons résoudre à chaque itération de la méthode de Newton est de la forme suivante :

$$M_k = \frac{D\mathcal{L}}{D(U, P)}(U_k, P_k) = \begin{pmatrix} A & B \\ B^t & 0 \end{pmatrix}.$$

Un tel système peut être résolu par une méthode de Lagrangien augmenté, Fortin et Glowinski [25]. C'est un processus itératif qui, à chaque itération, remplace le système linéaire initial :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta U \\ \Delta P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_U \\ R_P \end{pmatrix},$$

par un autre système linéaire plus simple à résoudre. Pour cela, on choisit un réel  $r$  grand et on résout le système suivant :

$$(A + rB^tB) \Delta U = R_U - B^t(\Delta P - rR_P). \quad (5.3)$$

Puis, tant que  $(B\Delta U - R_P)$  n'est pas assez petit, on incrémente :

$$\Delta P := \Delta P + r(B\Delta U - R_P).$$

Finalement, le système linéaire (5.3) est quant à lui résolu à chaque itération du Lagrangien augmenté par un Gradient Conjugué préconditionné.

### 5.2.3 L'algorithme

On initialise  $U$  à zéro et  $P$  à la pression hydrostatique au repos. On pose  $\lambda = 0$  et on se donne un incrément de chargement  $\Delta\lambda$ . Ensuite, on augmente la valeur de  $\lambda$  de  $\Delta\lambda$  jusqu'à atteindre la valeur  $\lambda = 1$ . Pour chaque valeur de  $\lambda$ , on calcule la solution  $(U, P)$  par un algorithme de Newton, à savoir :



## 1. Initialisation

On part avec  $(U_0, P_0)$  égale à la solution obtenue à l'incrément de chargement précédent et on calcule le résidu :

$$R_0 = \mathcal{L}(U_0, P_0).$$

## 2. Boucle itérative

Ensuite, pour chaque  $k \geq 0$ , connaissant  $U_k, P_k$  et  $R_k$ , on calcule  $U_{k+1}, P_{k+1}$  et  $R_{k+1}$  :

(a) en calculant la matrice tangente

$$M_k = \frac{D\mathcal{L}}{D(U, P)}(U_k, P_k),$$

(b) en résolvant le système linéaire

$$M_k(\Delta U, \Delta P) = -R_k,$$

par une boucle itérative de Lagrangien augmenté,

(c) en actualisant les variables :

$$(U_{k+1}, P_{k+1}) = (U_k, P_k) + (\Delta U, \Delta P),$$

(d) en résolvant les problèmes de minimisation sur les variables visqueuses par des boucles de Newton afin de connaître  $\mathcal{G}_i(C_{k+1})$ , pour  $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ ,

(e) en calculant le nouveau résidu :

$$R_{k+1} = \mathcal{L}(U_{k+1}, P_{k+1}).$$

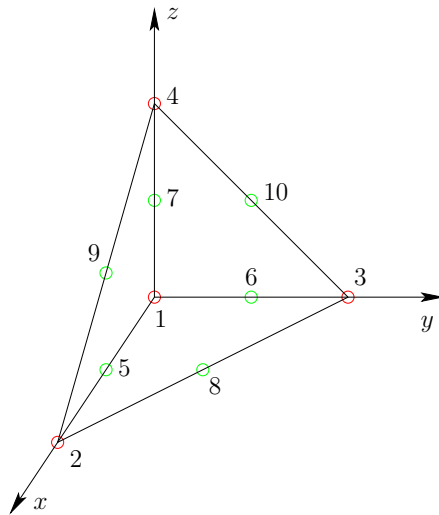
### 5.2.4 Quelques remarques sur l'implémentation

Les méthodes proposées dans la section précédente ont été implémentées en trois dimensions dans un code de calcul en langage C (environ 10000 lignes). Nous n'avons eu recours à aucune librairie d'éléments finis ou de méthodes numériques extérieure. Cette démarche intentionnelle, tout comme le refus d'utiliser un logiciel industriel, est motivée par la volonté de garder la plus grande flexibilité possible, au niveau du modèle comme des méthodes de résolution. Nous souhaitons rester maîtres de toutes les composantes de notre code de calcul. Le travail de programmation n'en a donc été que plus conséquent. Nous tenons à attirer ici l'attention du lecteur sur deux points en particulier.

#### Recherche des arrêtes et fonctions de forme $\mathbb{P}_2$

La condition de stabilité du schéma numérique utilisé impose de travailler avec des éléments finis  $\mathbb{P}_2$  pour le déplacement. Ces éléments utilisent comme degrés de liberté les sommets du maillage ainsi que les milieux des arrêtes. La Figure 5.2 rappelle les fonctions de forme en  $\mathbb{P}_2$  sur l'élément de référence. Il a donc été nécessaire de récupérer les milieux des arrêtes et de les numéroter. Cette recherche se fait grâce à une liste chaînée (voir Figure 5.3). Plus précisément, on balaie les éléments du maillage et pour chacun, on considère ses sommets deux à deux. On récupère les numéros globaux de ces sommets et on note

$Nmin$  le plus petit des deux et  $Nmax$  le plus grand. On va ensuite dans le tableau à la ligne  $Nmin$ . Si la ligne est vide, on a trouvé une arête encore non répertoriée. On note alors le numéro  $Nmax$  dans la colonne  $Nmax$  et on note dans la colonne  $Nnew$  le numéro du nouveau point créé (dernier numéro libre d'un compteur à incrémenter). Si la ligne est déjà remplie, on vérifie que le  $Nmax$  de cette ligne n'est pas identique (auquel cas l'arête a déjà été répertoriée). Sinon, on regarde la case  $Next$  qui pointe vers une autre ligne du tableau et on recommence le même travail pour cette nouvelle ligne.



$$\begin{aligned} \varphi_1 &= (1 - x - y - z)(1 - 2x - 2y - 2z) \\ \varphi_2 &= x(2x - 1) \\ \varphi_3 &= y(2y - 1) \\ \varphi_4 &= z(2z - 1) \\ \varphi_5 &= 4x(1 - x - y - z) \\ \varphi_6 &= 4y(1 - x - y - z) \\ \varphi_7 &= 4z(1 - x - y - z) \\ \varphi_8 &= 4xy \\ \varphi_9 &= 4xz \\ \varphi_{10} &= 4yz \end{aligned}$$

FIG. 5.2 – Fonctions de forme  $\mathbb{P}_2$  sur le tétraèdre de référence.

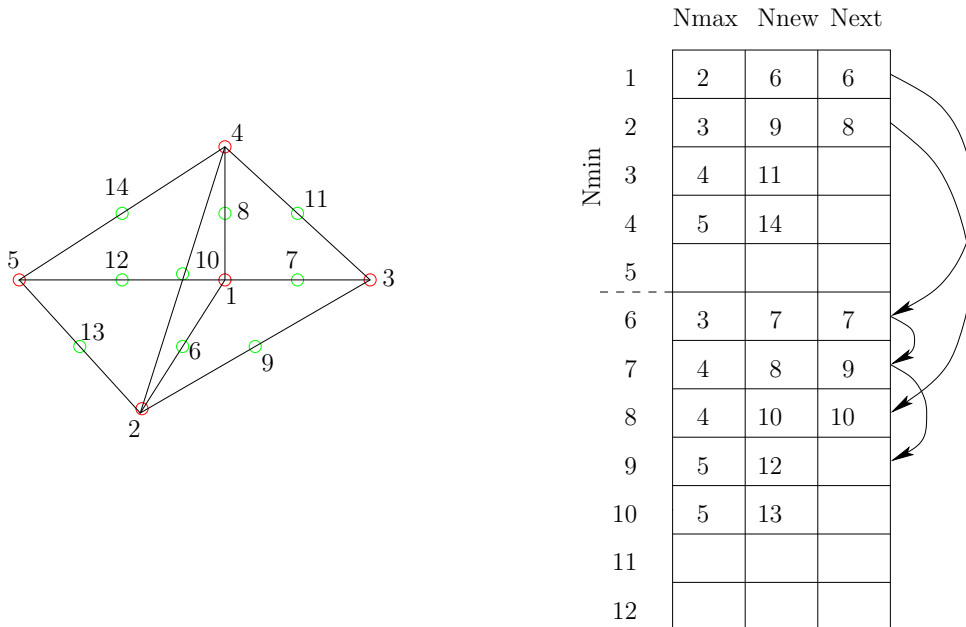


FIG. 5.3 – Recherche et numérotation des points milieux d'arêtes.

### Matrice creuse et dimensionnement a priori de l'espace mémoire

La matrice tangente  $M_k$  du système linéaire à résoudre est extrêmement grande, compte-tenu des maillages de calcul envisagés. Il est donc impensable de la stocker sous sa forme pleine. Heureusement cette matrice est creuse et on peut donc utiliser le format de stockage sparse résumé sur la Figure 5.4 et dont nous détaillons les objets ici. Soit  $n$  le nombre de lignes de la matrice à représenter et  $m$  le nombre d'éléments non nuls dans cette matrice. On construit le vecteur *Ligne* de taille  $n + 1$  et les vecteurs *Colonne* et *Valeurs* de taille  $m + 1$ . Pour  $i$  de 1 à  $n + 1$ , *Ligne*[ $i$ ] contient le numéro de la case du vecteur *Valeurs* à partir de laquelle sont stockées les éléments non nuls de la ligne  $i$  de la matrice. *Ligne*[ $n + 1$ ] pointe vers la dernière case du vecteur *Valeurs*. Ainsi, pour  $j$  de *Ligne*[ $i$ ] à *Ligne*[ $i + 1$ ] - 1, *Valeurs*[ $j$ ] correspond à une valeur non nulle sur la ligne  $i$  et *Colonne*[ $j$ ] indique le numéro de la colonne correspondante.

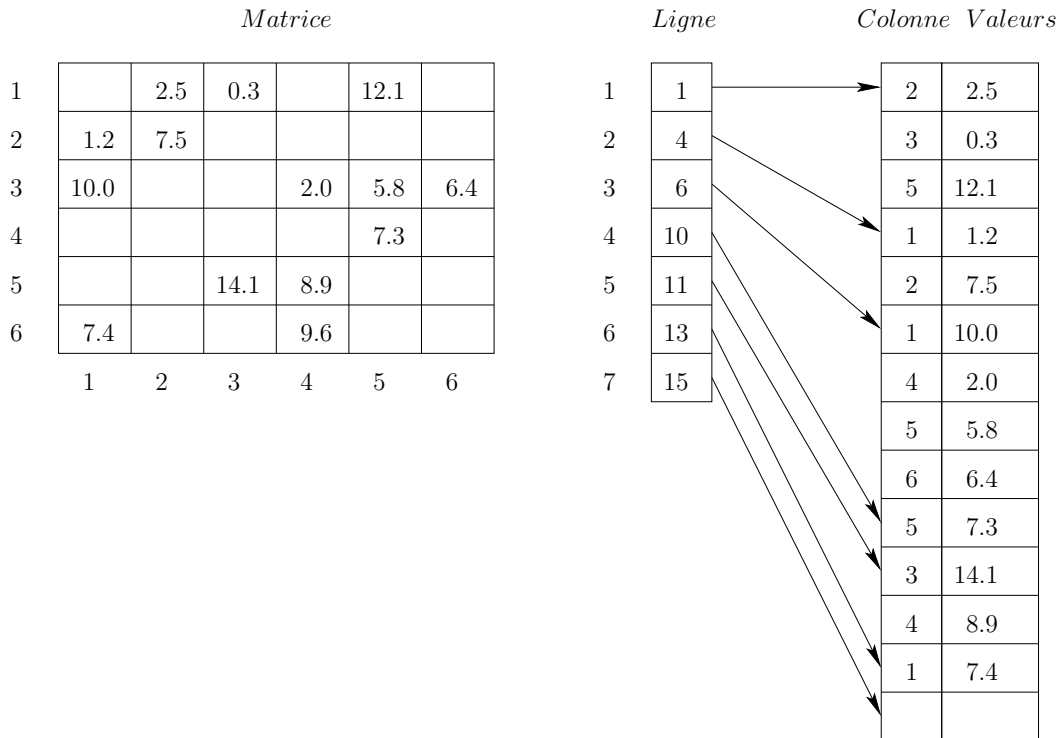


FIG. 5.4 – Format de stockage d'une matrice creuse.

Avant tout calcul, il est nécessaire de dimensionner a priori ces vecteurs. Ceci est fait de la manière suivante. On balaie dans une boucle les éléments du maillage. Dans chaque éléments, chacun des 30 degrés de liberté (4 sommets et 6 milieux d'arête dans chaque direction en 3D) interagit avec les 29 autres degrés de liberté. Donc les cases correspondantes dans la matrice à assembler seront non vides. Puisque cette matrice est symétrique (l'interaction du degré de liberté  $i$  avec  $j$  est égale à celle de  $j$  avec  $i$ ), on ne stocke que la partie triangulaire supérieure, c'est à dire que l'on réserve une case dans la ligne  $i$  (numéro global du degré de liberté) pour la colonne  $j$  que si  $i$  est plus petit que  $j$ .

## 5.3 Validation et exemple

### 5.3.1 Validation

Le but de cette section est d'évaluer les méthodes numériques employées en mesurant l'écart entre la solution approchée obtenue par la simulation numérique et une solution pseudo-analytique (la solution exacte en espace mais approchée en temps par un schéma de différences finies). Pour ce faire, nous considérons le cas le plus simple pour lequel une telle solution analytique peut être calculée : la compression d'un cube, avec condition de glissement aux extrémités. En effet, dans ce cas, la géométrie ne joue aucun rôle.

Nous décrivons maintenant le calcul de cette solution sur le cube de référence. Soit  $H$  la hauteur initiale de l'échantillon et  $h$  sa hauteur suite à son allongement vertical selon l'axe  $Z$ . Nous introduisons le rapport :

$$\alpha = \frac{h}{H}.$$

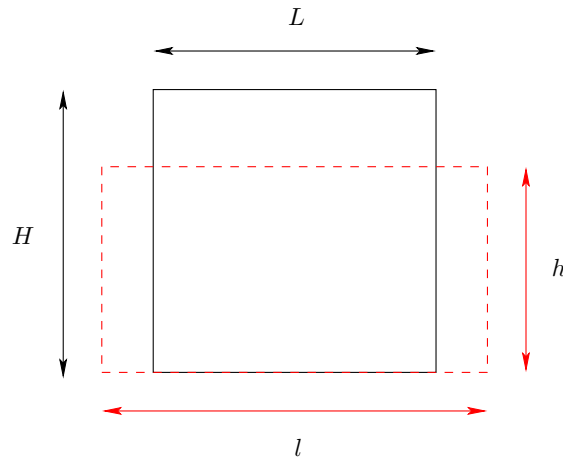


FIG. 5.5 – *Expérience de compression simple d'un cube : notations.*

Ainsi, on peut définir la transformation entre la configuration de référence (associées aux variables d'espace  $X, Y, Z$ ) et la configuration déformée (associée aux variables  $x, y, z$ ) par :

$$x = \gamma X, \quad y = \gamma Y, \quad z = \alpha Z,$$

où  $\gamma$  est le coefficient de dilatation horizontal qui est inconnu pour le moment mais est identique en  $X$  et en  $Y$  grâce à la symétrie du problème. Nous pouvons alors calculer le vecteur déplacement  $u$ , le gradient de déformation  $F$  et le tenseur  $C$  respectivement, de la manière suivante :

$$u = \begin{pmatrix} (\gamma - 1)X \\ (\gamma - 1)Y \\ (\alpha - 1)Z \end{pmatrix} \implies F = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \implies C = \begin{pmatrix} \gamma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2 \end{pmatrix},$$

et, grâce à la condition d'incompressibilité  $\det(C) = 1$ , on peut déduire que :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{\alpha}},$$

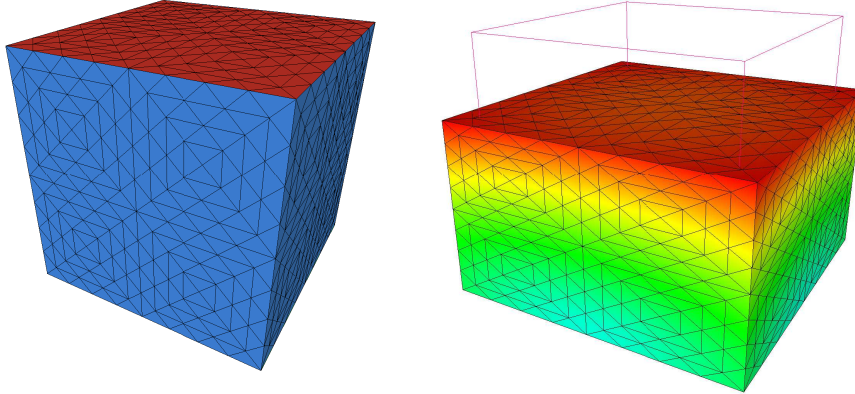


FIG. 5.6 – Configuration au repos, configuration déformée.

ce qui conduit à :

$$C = \begin{pmatrix} 1/\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1/\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2 \end{pmatrix}.$$

La fonction d'énergie choisie est celle d'un matériau de Moonley-Rivlin, à savoir :

$$\begin{aligned} W_0(C) &= \mathcal{C}_{01}(I_1(C) - 3) + \mathcal{C}_{02}(I_2(C) - 3), \\ W_i(y) &= \mathcal{C}_i(y - 3), \quad \forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket. \end{aligned} \quad (5.4)$$

où  $I_1(C) = \text{tr}(C)$  et  $I_2(C) = \frac{1}{2}((\text{tr}(C))^2 - \text{tr}(C^2))$  sont les premier et second invariants de  $C$  et  $\mathcal{C}_{01}$ ,  $\mathcal{C}_{02}$  et  $\mathcal{C}_i$ , pour  $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ , sont des coefficients scalaires. Nous avons besoin de calculer les variables viscoélastiques  $G_i$ , pour  $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ , afin d'évaluer le tenseur des contraintes  $T$ . Chaque variable  $G_i$ , pour  $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$  satisfait une EDO de la forme suivante :

$$\nu_i \dot{G}_i^{-1} - q_i G_i^{-1} = \frac{\partial W_i}{\partial y}(C : G_i) C = \mathcal{C}_i C, \quad \forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket,$$

avec  $G_i(0) = Id$ . Cette équation peut être ici discrétisée en utilisant un schéma de différences finis implicite classique :

$$\nu_i \frac{(G_i^{-1})^{n+1} - (G_i^{-1})^n}{\Delta t} - q_i^{n+1} (G_i^{-1})^{n+1} = \mathcal{C}_i C^{n+1},$$

ce qui conduit à :

$$(G_i^{-1})^{n+1} = \frac{\frac{\nu_i}{\Delta t} (G_i^{-1})^n + \mathcal{C}_i C^{n+1}}{\frac{\nu_i}{\Delta t} + q_i^{n+1}}, \quad \forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket. \quad (5.5)$$

Ici, la variable inconnue  $q_i^{n+1}$  peut être déterminée en utilisant la condition d'incompressibilité  $\det((G_i^{-1})^{n+1}) = 1$  afin d'obtenir :

$$q_i^{n+1} = \left( \frac{\nu_i}{\Delta t} (G_i^{-1})^n + \frac{\mathcal{C}_i}{\alpha} \right)^{2/3} \left( \frac{\nu_i}{\Delta t} (G_i^{-1})^n + \mathcal{C}_i \alpha^2 \right)^{1/3} - \frac{\nu_i}{\Delta t},$$

qui ne dépend que du pas de temps  $n$  (puisque ici  $\alpha$  est constant) et qui peut donc être injectée dans (5.5). Nous pouvons donc maintenant calculer le tenseur des contraintes  $T$  en utilisant (1) :

$$\begin{aligned} T &= 2F \frac{\partial W}{\partial C}(C, G_1, G_2) - pF^{-t} \\ &= 2F \left( C_{01} + C_{02}(\text{tr}(C)I - C) + \sum_{i=1}^m C_i G_i \right) - pF^{-t}. \end{aligned}$$

Ainsi, les composantes principales du tenseur  $T$  peuvent être exprimées en fonction de l'allongement  $\alpha$  comme :

$$\begin{aligned} T_X = T_Y &= \frac{2}{\sqrt{\alpha}} \left( C_{01} + C_{02}(\alpha^2 + \frac{1}{\alpha}) + \sum_{i=1}^m C_i (G_i)_X \right) - \sqrt{\alpha} p, \\ T_Z &= 2\alpha \left( C_{01} + \frac{2}{\alpha} C_{02} + \sum_{i=1}^m C_i (G_i)_Z \right) - \frac{p}{\alpha}. \end{aligned}$$

En remarquant que  $T_X = T_Y = 0$ , puisque le cube n'est soumis à aucun chargement sur ses faces latérales, la pression  $p$  peut être déterminée :

$$p = \frac{2}{\alpha} \left( C_{01} + C_{02}(\alpha^2 + \frac{1}{\alpha}) + \sum_{i=1}^m C_i (G_i)_X \right).$$

Il reste alors à calculer la composante verticale de la contrainte  $T_Z$  de la façon suivante :

$$T_Z = 2(\alpha C_{01} + C_{02}) \left( 1 - \frac{1}{\alpha^3} \right) + 2 \sum_{i=1}^m C_i \alpha \left( (G_i)_Z - \frac{1}{\alpha^3} (G_i)_X \right).$$

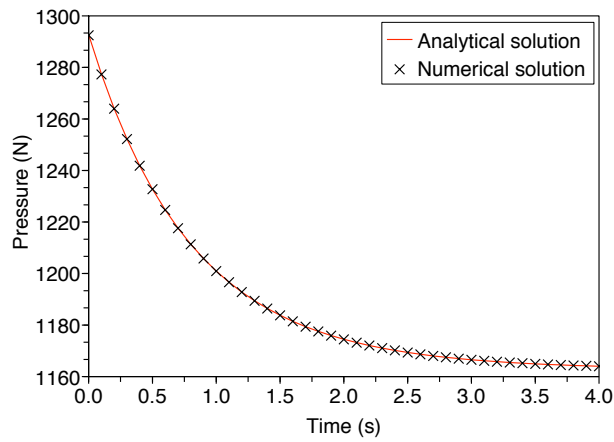
Sous cette forme, la pression et la contrainte verticale sont toutes les deux indépendantes de la variable d'espace (homogènes) mais nécessitent le calcul des variables viscoélastiques  $G_i$ ,  $\forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket$  pour être estimées en temps. Nous présentons maintenant le résultat numérique obtenu pour ce cas test avec  $\alpha = 0.7$ . Le Tableau 5.1 résume les propriétés mécaniques de notre modèle. La Figure 5.7 illustre l'évolution en temps de la pression, de la contrainte verticale et de la seconde variable interne correspondant aux solutions numérique et pseudo-analytique.

m	$C_{01}$	$C_{10}$	$C_1$	$\nu_1$	$C_2$	$\nu_2$
2	21	105	80	21500	150	115

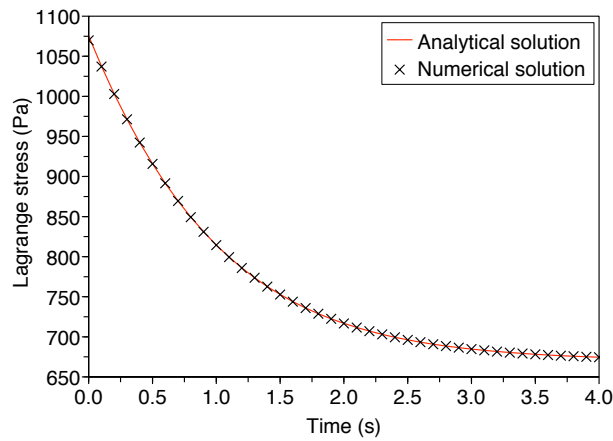
TAB. 5.1 – Propriétés mécaniques utilisées pour le cas test.

### 5.3.2 Exemple

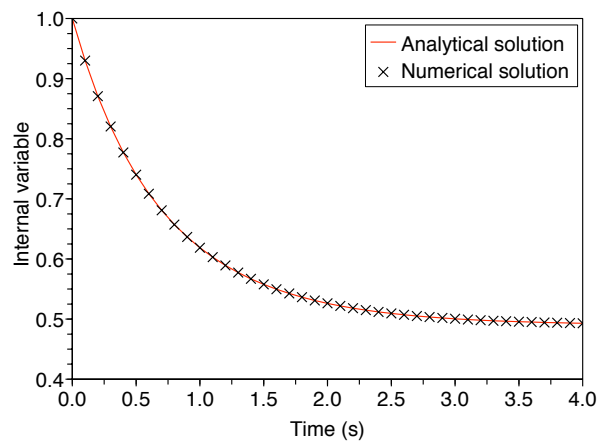
Dans cette section, nous présentons un exemple d'application afin d'illustrer la capacité de notre modèle à traiter la géométrie 3D complexe d'une pièce mécanique. La Figure 5.8 montre l'exemple d'une pièce mécanique correspondant au domaine  $\Omega \subset 20 \times 20 \times 5$  cm, sur lequel on applique une force volumique constante  $f = (50, 50, 50) N \cdot m^{-3}$ , pendant



(a)



(b)



(c)

FIG. 5.7 – Evolution de la pression  $p$  (a), de la contrainte verticale  $T_Z$  (b) et de la composante verticale de la seconde variable interne  $G_2$  (c) en fonction du temps pendant l'essai de compression. Comparaison entre la solution pseudo-analytique (ligne continue) et la solution numérique (croix).

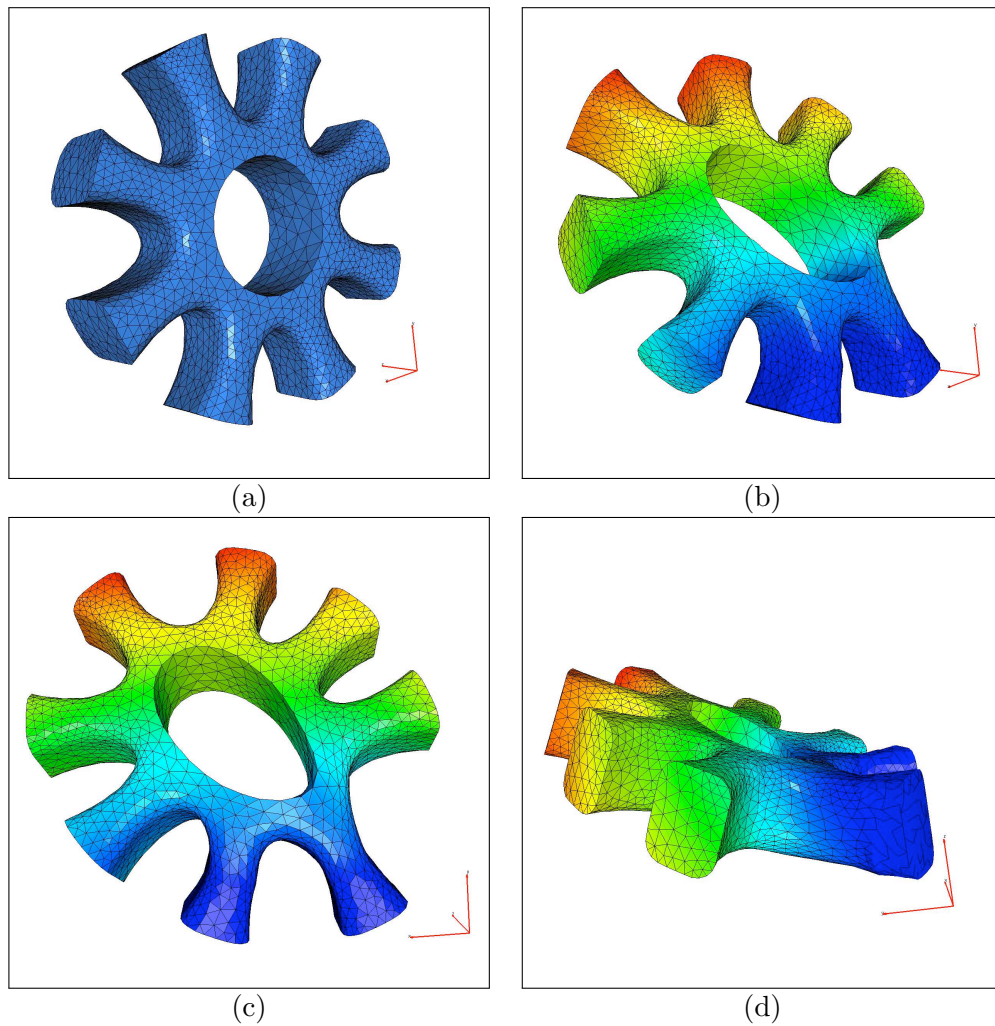


FIG. 5.8 – (a) Maillage, (b,c,d) Déformation de la pièce mécanique observée de différents points de vue.

que l'on maintient fixe deux des branches de la pièce dans le plan  $(O, x, z)$ . La déformation maximale observée, obtenue en utilisant les valeurs des coefficients reportées dans le Tableau 5.1, est d'environ 10 cm. Le maillage de calcul contient 7402 nœuds et 32977 tétraèdres. Le volume initial est de  $8.761 \cdot 10^2 \text{ cm}^3$  et le volume final après déformation vaut  $8.760 \cdot 10^2 \text{ cm}^3$ .

Dans le chapitre qui suit, nous présentons un autre exemple, issu cette fois-ci du domaine biomédical. Nous montrons que notre modèle est à même de représenter le comportement mécanique d'un organe aussi complexe que le cerveau.





# Chapitre 6

## Un exemple d'application en biomécanique cérébrale

Dans ce court chapitre, nous présentons une application biomédicale du modèle développé au Chapitre 5 : la simulation des déformations des structures cérébrales. Dans un contexte clinique, de telles déformations peuvent avoir lieu suite à un changement de position du patient ou durant un traitement neurochirurgical. Une étude séminale, Miller [67], et d'autres plus récentes, Miller et Chinzei [68], Darvisch et Crandall [16], tendent à montrer que l'amplitude de ces déformations est suffisamment importante pour qu'un modèle en grandes déformations soit nécessaire et que le matériau constituant le cerveau est intrinsèquement viscoélastique non linéaire. Les attentes portent sur la capacité d'un tel modèle à prédire les déplacements de l'ordre du centimètre qui apparaissent en chirurgie, Miga *et al.* [66] et à participer ainsi activement à la planification des opérations chirurgicales.

Les résultats numériques, obtenus par le code de calcul que nous avons développé, sont ici confrontés à des résultats expérimentaux afin de valider le modèle sous-jacent et de déterminer au mieux les coefficients biophysiques associés. Nous montrons ainsi que la formulation généralisée de notre modèle (voir Chapitre 5) est bien adaptée pour représenter correctement le comportement des structures cérébrales. Nous montrons également la nécessité de développer des techniques pour traiter efficacement les données géométriques discrètes fournies par les systèmes d'imagerie. Les résultats de ce chapitre seront publiés dans [18].

### 6.1 Motivations

Dans le contexte de la neurochirurgie, il est fréquent que le diagnostic préopératoire soit posé à partir de données obtenues par des méthodes d'imagerie à résonance magnétique (IRM) sur le patient placé dans une certaine position, mais que l'intervention nécessite une disposition autre du patient. Le neurochirurgien, au moment de l'opération, observe alors un déplacement des structures cérébrales de plusieurs millimètres par rapport aux images IRM, ce qui pénalise son repérage. L'idéal serait évidemment de pouvoir réaliser des IRM lors de l'intervention afin d'évaluer à chaque instant la déformation du cerveau. Malheureusement, les techniques d'IRM interventionnelles restent très coûteuses. De plus, cela contraindrait le chirurgien à intervenir dans un espace confiné et proscrierait l'utilisation de tous les outils métalliques classiques de chirurgie. C'est pourquoi nous nous intéressons à l'élaboration de modèles mathématiques et numériques permettant de simuler le

comportement mécanique du cerveau. Ainsi, si des techniques d'imagerie par résonance magnétique seraient toujours nécessaires avant l'opération pour obtenir les informations géométriques nécessaires à la création du modèle personnalisé du patient, nous pourrions ensuite connaître par la simulation le déplacement de la structure cérébrale. Un tel modèle pourrait alors aussi être utilisé dans un système de contrôle de robot chirurgical ou de planification des traitements, ainsi que dans des systèmes d'entraînement des chirurgiens basés sur des techniques de réalité virtuelle (voir Figure 6.1).

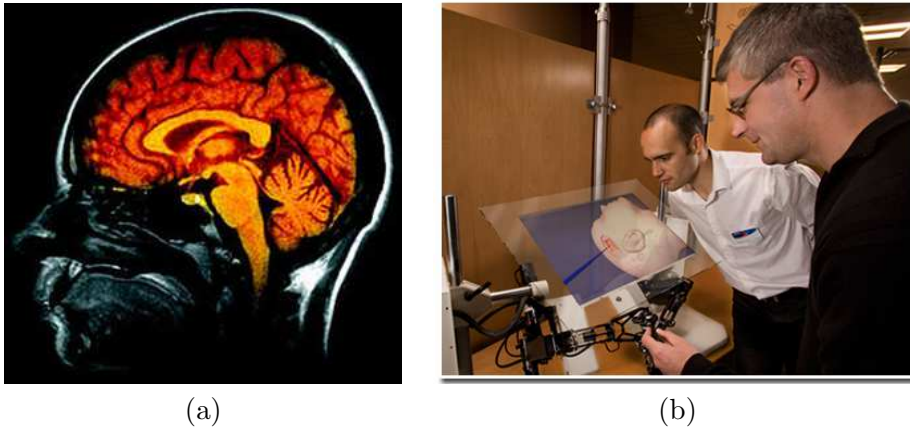


FIG. 6.1 – (a) Un exemple d'IRM. (b) Système d'entraînement de chirurgiens.

## 6.2 Etat de l'art des modèles

L'étude des propriétés mécaniques des tissus vivants est un thème de recherches actives en biomécanique, surtout en ce qui concerne le squelette, les muscles ou encore le cœur. Mais les propriétés des tissus très mous (qui ne portent pas de chargement mécanique), tels que le cerveau, le foie ou les reins n'ont en revanche guère été étudiées à ce jour, à l'exception peut être des ligaments et tendons [44, 75, 77]. Nous nous intéressons ici à la modélisation des structures cérébrales et nous avons rapidement remarqué qu'il n'y a pas de modèle communément accepté. D'un côté, certains auteurs préconisent l'utilisation de modèles élastiques linéaires, suffisamment simples à résoudre pour envisager des simulations en temps réel [9, 89, 92]. D'un autre côté, les modèles viscoélastiques non linéaires sont utilisés chaque fois que l'exigence d'une simulation précise du comportement réaliste prévaut sur le coût de calcul [7, 67, 93]. D'autres modèles ont également été proposés pour des applications particulières (poroélastique [66] ou plastique). Nous invitons le lecteur à se reporter aux bibliographies relativement complètes sur le sujet fournies par Libertiaux [59] ou Hrapko *et al.* [37]. Notre approche est clairement inspirée par la seconde catégorie de modèles non linéaires.

## 6.3 Efficacité de la formulation généralisée

Notre premier objectif est de justifier le choix de notre modèle mécanique ainsi que de récupérer les paramètres biophysiques adéquats. Pour cela, nous confrontons nos résultats numériques à des expériences *in vitro*, réalisées sur des tissus cérébraux de porcs par trois auteurs indépendants. Dans ces tests, la géométrie du domaine ne joue aucun rôle puisque

les échantillons correspondent à des formes simples à symétrie axiale. Afin de reproduire les expériences biophysiques, nous avons besoin d'étendre la fonction d'énergie, initialement introduite en (5.4), de la manière suivante :

$$W_0(C) = \mathcal{C}_{01}(I_1(C) - 3) + \mathcal{C}_{02}(I_2(C) - 3),$$

$$W_i(y) = \mathcal{C}_{i1}(y - 3) + \mathcal{C}_{i2}(y - 3)^2, \quad \forall i \in \llbracket 1, 2 \rrbracket.$$

où  $\mathcal{C}_{01}$ ,  $\mathcal{C}_{02}$ ,  $\mathcal{C}_{i1}$  et  $\mathcal{C}_{i2}$ , pour  $i \in \llbracket 1, 2 \rrbracket$  sont des constantes positives en  $Pa$ .

### 6.3.1 Expérience de compression par Miller

La première expérience est directement inspirée d'un papier de Miller [67]. Elle correspond à des tests de compression sur des échantillons cylindriques (voir Figure 6.2). La Figure 6.3 montre la comparaison entre les solutions expérimentales et numériques, correspondant à plusieurs taux de compression des échantillons. Le Tableau 6.1 précise les coefficients utilisés pour mener ces essais.

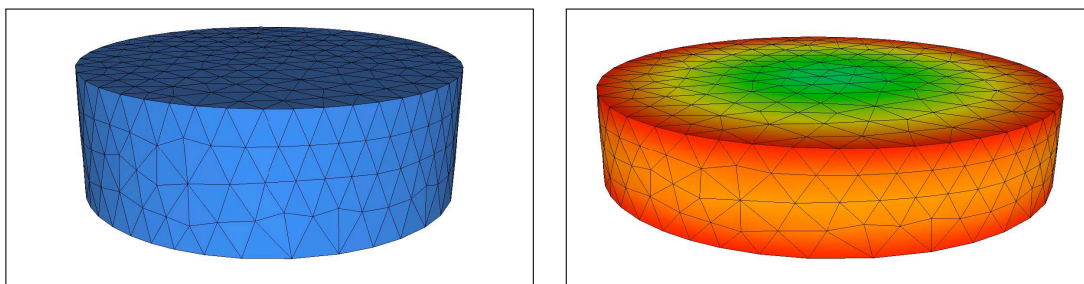


FIG. 6.2 – Echantillon au repos (gauche), échantillon déformé (droite)

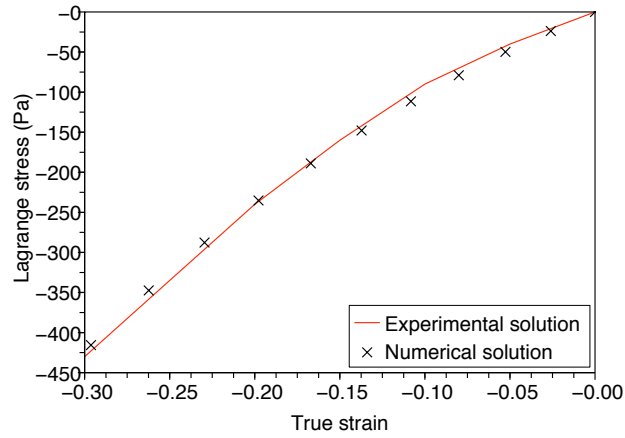
m	$\mathcal{C}_{01}$	$\mathcal{C}_{10}$	$\mathcal{C}_{11}$	$\mathcal{C}_{12}$	$\nu_1$	$\mathcal{C}_{21}$	$\mathcal{C}_{22}$	$\nu_2$
2	0	145	0	1300	35000	150	2000	200

TAB. 6.1 – Propriétés mécaniques utilisées pour le premier test.

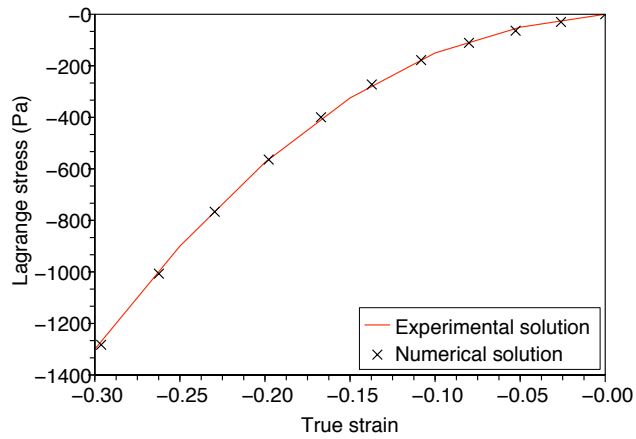
On observe une très bonne corrélation entre les courbes. Remarquons également que la relation contrainte/déformation est non linéaire et qu'elle dépend, de plus, du taux de déformation. Ceci est une indication claire du caractère viscoélastique non linéaire des tissus cérébraux.

### 6.3.2 Expérience de compression et de relaxation par Libertiaux

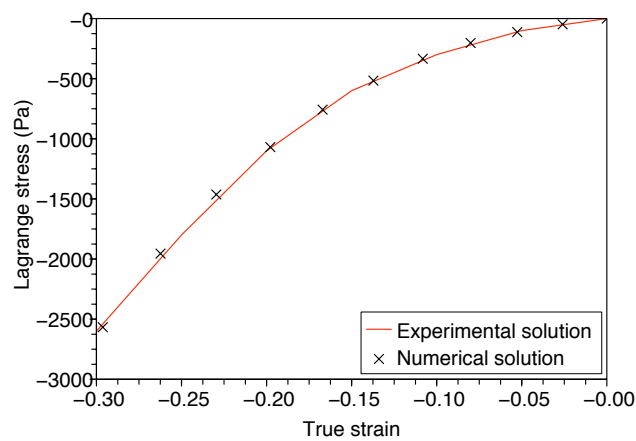
La deuxième expérience a été menée par Libertiaux [59] sur des échantillons cylindriques de hauteur 10 mm et de diamètre 20 mm. Elle consiste en différents tests de compression à différentes vitesses de compression et en des tests de relaxation. Pour l'expérience de relaxation, une première phase de compression est réalisée à un taux de  $0.1 s^{-1}$  jusqu'à atteindre une force de 0.5 N, ensuite la compression est maintenue pendant qu'on observe la relaxation de la contrainte. La Figure 6.4 montre la comparaison entre les solutions expérimentale et numériques. La Tableau 6.2 rapporte les valeurs des coefficients utilisés pour mener ces essais. Cette fois encore, les courbes obtenues coïncident bien.



(a)

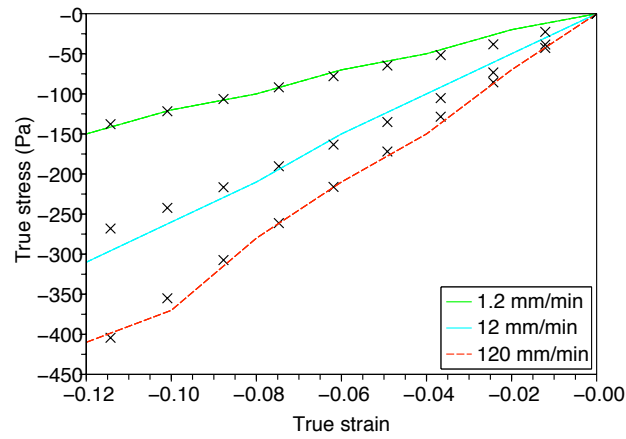


(b)

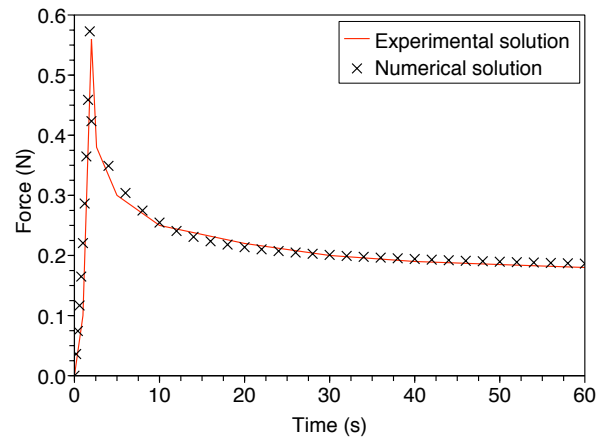


(c)

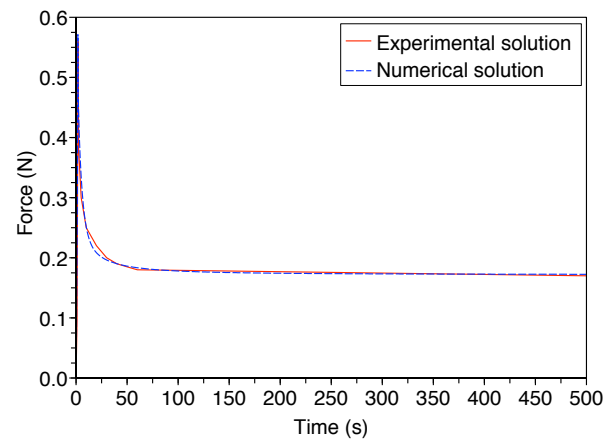
FIG. 6.3 – Evolution de la contrainte pour trois taux de compression : (a)  $6.4 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1}$ , (b)  $6.4 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ , (c)  $6.4 \cdot 10^{-1} \text{ s}^{-1}$ . Comparaison entre la solution expérimentale mesurée par Miller [67] et la solution numérique.



(a)



(b)



(c)

FIG. 6.4 – Comparaison entre les solutions expérimentales mesurées par Libertiaux [59] (lignes) et les solutions numériques (crosses). (a) Relation entre la contrainte réelle  $\alpha T$  et la déformation réelle  $\log(\alpha)$  pour trois vitesses de compression. (b)(c) Evolution de la force vertical en fonction du temps pendant l'essai de relaxation.

m	$C_{01}$	$C_{10}$	$C_{11}$	$C_{12}$	$\nu_1$	$C_{21}$	$C_{22}$	$\nu_2$
2	0	150	0	200	5000	450	400	1500

TAB. 6.2 – Propriétés mécaniques utilisées pour le deuxième test.

### 6.3.3 Expérience de cisaillement par Ning

La troisième expérience est proposée par Ning *et al.* [70]. Des tests de cisaillement sont menés sur des échantillons rectangulaires prélevés sur le tronc cérébral de porcs, afin d'en caractériser les propriétés (voir Figure 6.5). Le Tableau 6.3 fournit les coefficients obtenus par comparaison des solutions expérimentales et numériques. La Figure 6.6 montre l'évolution de la contrainte de cisaillement pour un test correspondant à une déformation de 50% de l'échantillon de taille  $13.41 \times 6.49 \times 1.05 \text{ mm}$ . Cette fois encore, nous constatons que les deux courbes coïncident bien.

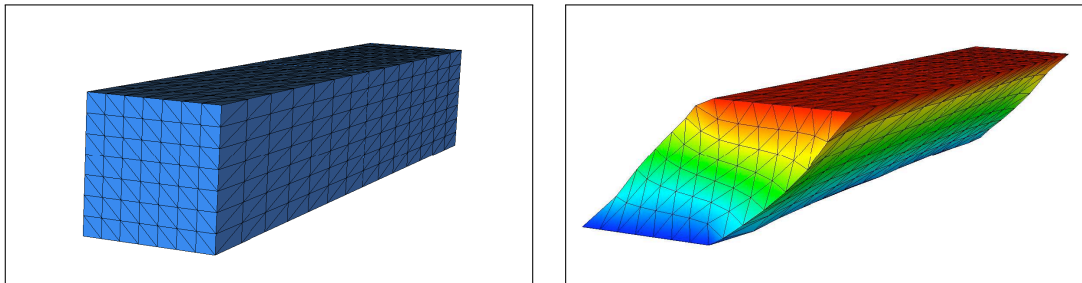
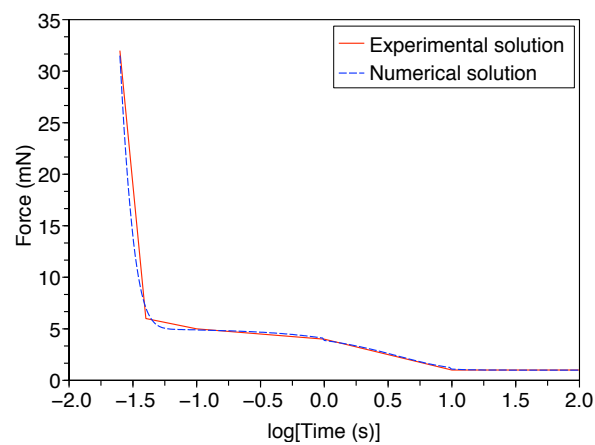


FIG. 6.5 – Echantillon au repos (à gauche). Echantillon déformé (à droite)

m	$C_{01}$	$C_{10}$	$C_{11}$	$C_{12}$	$\nu_1$	$C_{21}$	$C_{22}$	$\nu_2$
2	0	6	30	0	100	200	0	1

TAB. 6.3 – Propriétés mécaniques utilisées pour le troisième test.

FIG. 6.6 – Evolution of de la contrainte de cisaillement en fonction du temps. Comparaison entre la solution expérimentale mesurée par Ning *et al.* [70] et la solution numérique.

Ces résultats montrent clairement que notre modèle généralisé est capable de représenter de manière satisfaisante le comportement mécanique des structures cérébrales sous différents chargements. Pour chaque expérience, nous avons été capables de trouver un ensemble de paramètres adéquat pour simuler les résultats expérimentaux. Nous sommes bien conscients néanmoins que les conditions d'expérience, toujours différentes d'un auteur à l'autre, influent en grande partie sur les coefficients biophysiques recherchés.

## 6.4 Description du modèle géométrique

Les dispositifs d'imagerie sont largement utilisés dans les applications biomédicales. Ils fournissent de grands ensembles de données qui définissent le contour d'organes ou de domaines biophysiques. Cependant, ces derniers ont besoin d'être convertis en triangulations conformes avant d'être utilisés dans des méthodes d'éléments finis pour résoudre des

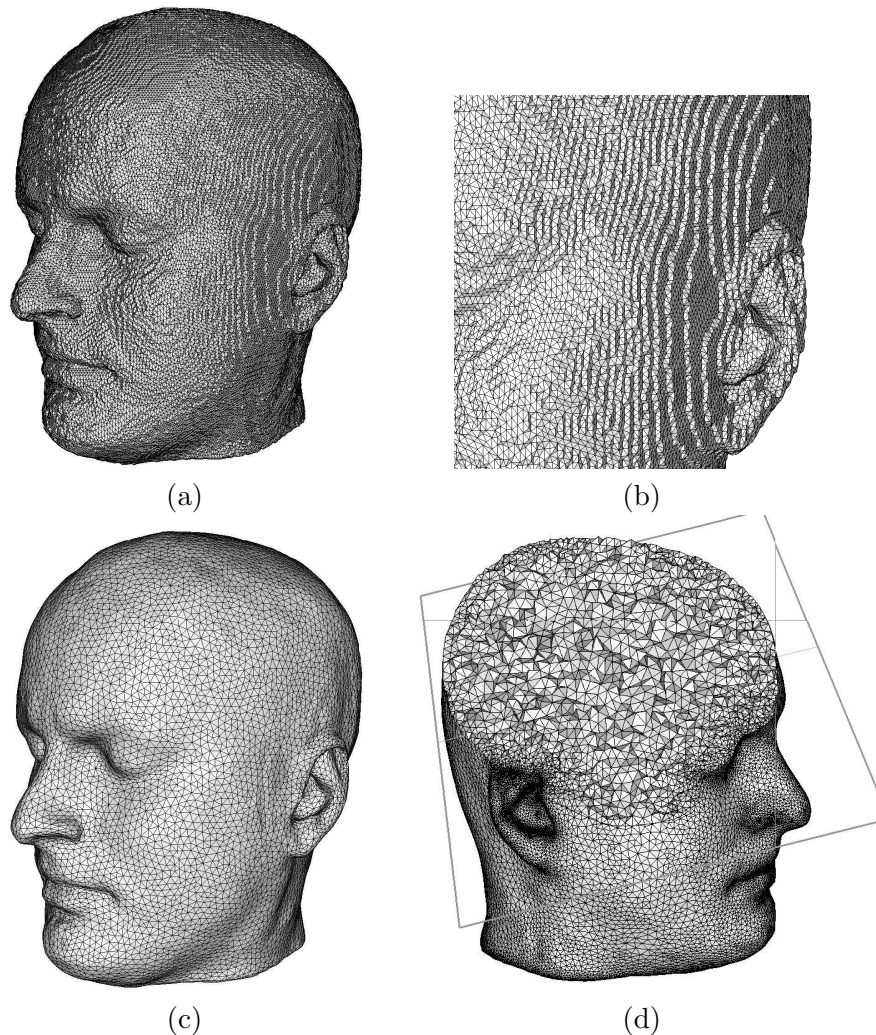


FIG. 6.7 – (a) Triangulation de surface obtenue à partir d'IRM. (b) Zoom sur la triangulation. (c) Triangulation de surface adaptée aux propriétés géométriques. (d) Génération d'une triangulation 3D.



problèmes modélisés par des équations aux dérivées partielles comme celui que nous considérons ici. Cette étape de conversion est importante et souvent sous-estimée. Son but est de construire une triangulation qui représente une approximation affine par morceaux de la frontière du domaine. Cette approximation doit être la plus précise possible mais avec un nombre d'éléments finis le plus petit possible. Bien évidemment, la technique de triangulation dépend de la nature des données disponibles, typiquement une séquence d'images en deux dimensions segmentées ou un nuage de points en trois dimensions. Dans [26],

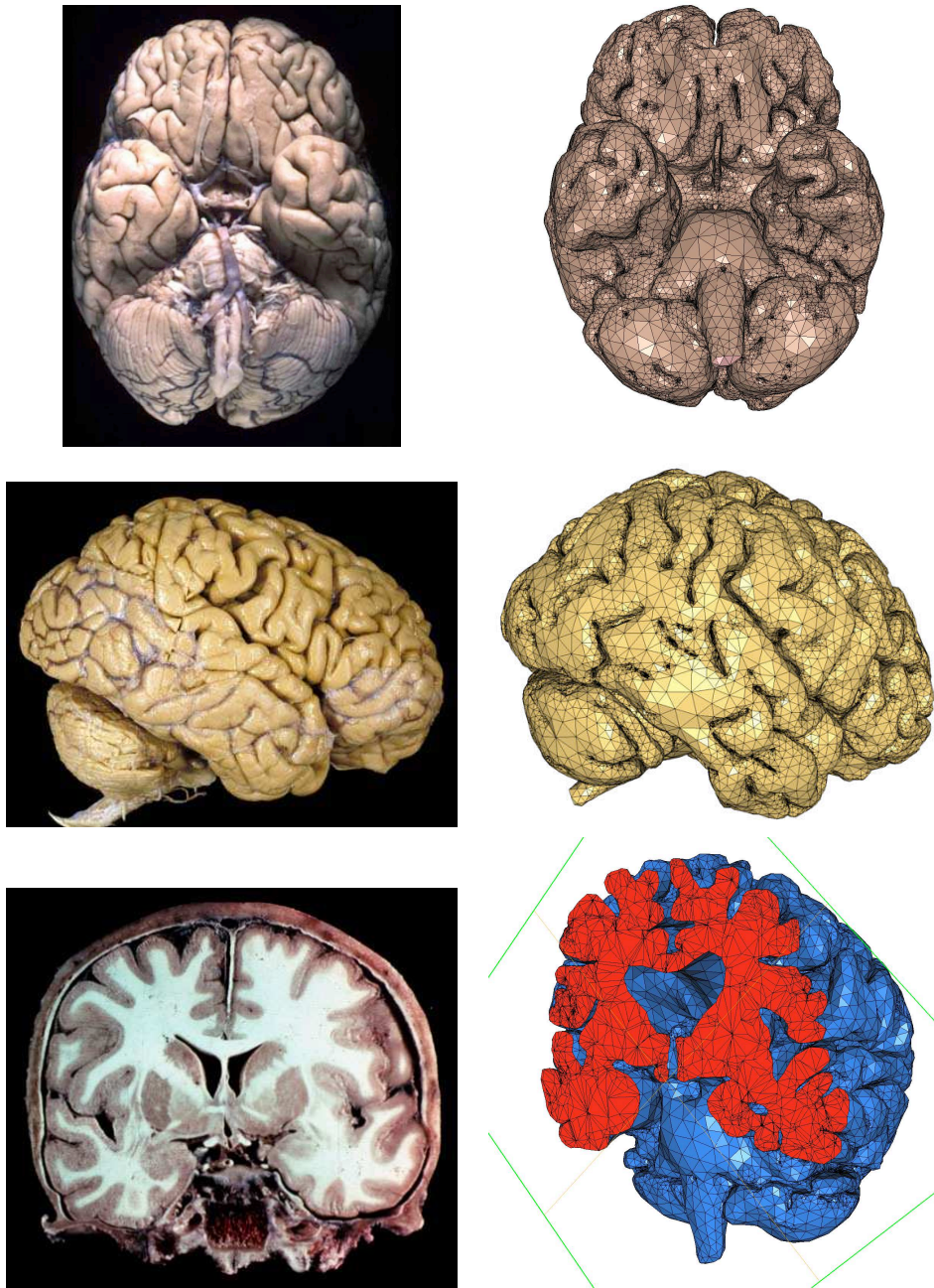


FIG. 6.8 – Photos de cerveaux humains (à gauche). Maillage de calcul sous différents angles (à droite).

Frey explique comment générer une triangulation de surface à partir de plusieurs types de données discrètes.

Nous rappelons maintenant brièvement les étapes de création d'une triangulation du domaine de calcul à partir de la triangulation de surface. Supposons que nous disposons donc d'une triangulation surfacique conforme  $\mathcal{S}_h$  qui fournit une représentation discrète de la géométrie du domaine  $\Omega$ . Tout d'abord, nous analysons  $\mathcal{S}_h$  afin de définir un champ de tenseur métrique  $M(x)$  en chaque noeud du maillage  $\mathcal{S}_h$ . Ce dernier relie la taille locale de n'importe quel simplexe  $K \in \mathcal{S}_h$  à la courbure locale principale et aux directions de courbure de la surface sous-jacente définie par  $\mathcal{S}_h$ . Ce tenseur est un moyen efficace de contrôler la forme, la taille ainsi que l'orientation des éléments du maillage, Frey et Georges [28]. L'étape suivante consiste à générer une triangulation de surface pour laquelle chaque élément a une taille unité, c'est-à-dire un quotient d'excentricité  $\sigma = h/\rho$  (où  $h$  est la longueur de l'arête la plus longue et  $\rho$  est le rayon de la sphère inscrite) contrôlé par le tenseur  $M(x)$ . La Figure 6.7 montre les résultats de la procédure de retriangulation sur le modèle biomédical d'une tête. L'étape final consiste à construire le maillage de calcul en trois dimensions  $\mathcal{T}_h$  du domaine. Pour ce faire, nous utilisons la procédure d'insertion de points de Delaunay décrite par Frey et Georges dans [28] et qui peut également être utilisée pour adapter la triangulation à n'importe quel tenseur de métrique donné par un estimateur d'erreur *a posteriori*.

## 6.5 Calcul de la déformation du cerveau

Pour conclure, nous présentons un résultat en trois dimensions obtenu par notre approche : celui de la simulation des déformations des structures cérébrales soumises à un chargement extérieur, "brain shift" en anglais. Ce phénomène a été largement étudié pour en comprendre son comportement intrinsèque. Pour plus d'information, le lecteur est invité à consulter les parties introductives de plusieurs papiers traitant explicitement de ce sujet, Wittek *et al* [93], Libertiaux [59]. Ici, on cherche à prédire les déplacements subis par le cerveau sous l'effet de la gravité, lorsque le patient change de position entre deux acquisitions d'images. En fait, cette étude ne prétend pas être une simulation réaliste d'une situation clinique. En effet, nous négligeons ici ou du moins sous-évaluons l'importance des conditions aux limites, qui sont soumises à un haut degré d'incertitudes.

Les données géométriques ont été obtenues à partir d'un dispositif d'imagerie par résonance magnétique, comme expliqué au paragraphe précédent. La boîte englobant le domaine est de taille  $150 \times 150 \times 150$  mm. Le maillage contient 62123 noeuds et 225009 tétraèdres. La Figure 6.8 présente des photos d'un cerveau humain et les vues correspondantes de notre maillage de calcul. La Figure 6.9 montre les résultats d'une simulation pour les valeurs des coefficients reportés dans le Tableau 6.1 et pour une force volumique constante  $f = (0, -10, 10) N \cdot m^{-3}$  correspondant à l'application de la gravité lorsque le patient passe d'une position allongée sur le dos à une position assise. Le déplacement maximal observé est ici de 10 mm, et correspond bien au résultat expérimental attendu, obtenu par Miga *et al.* [66]. Le volume initial du cerveau vaut  $1.1706 \cdot 10^3 \text{ cm}^3$  et le volume final après déformation est de  $1.1705 \cdot 10^3 \text{ cm}^3$ , respectant ainsi la contrainte d'incompressibilité.

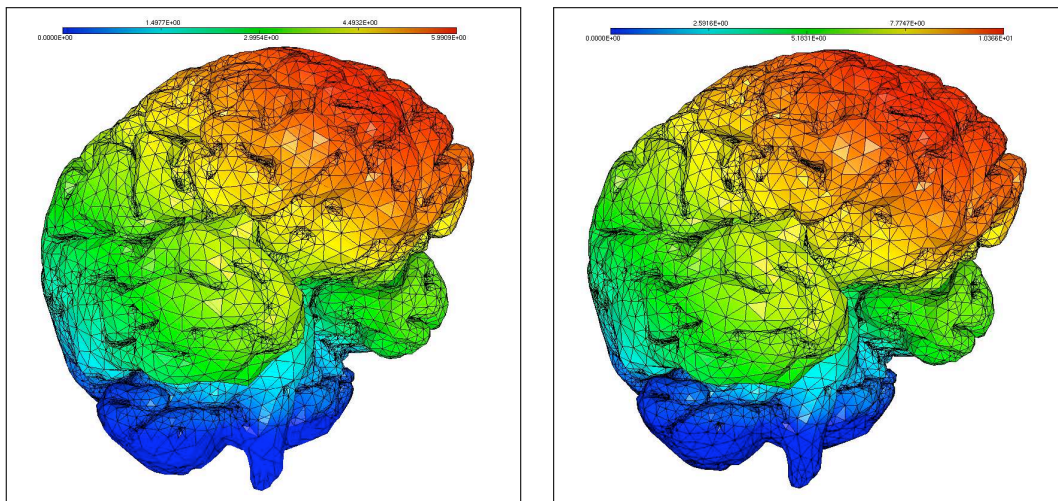


FIG. 6.9 – Champs de déformation du cerveau soumis à la gravité, à  $t = 0$  (à gauche) et à l'état stationnaire (à droite).

Cette étude doit être considérée comme une étape préliminaire de l'étude plus complexe du comportement des structures cérébrales. L'objectif était de montrer la pertinence du modèle viscoélastique non linéaire pour cette application. Pour que cette étude prenne tout son sens, nous espérons des collaborations avec des biomécaniciens qui pourraient être intéressés par les résultats présentés ici.

La tête est l'une des régions du corps blessée le plus fréquemment et malgré l'utilisation croissante des ceintures de sécurité et des casques, les traumatismes crâniens restent une des principales causes de décès lors des accidents de la route. Le but actuel de la recherche en biomécanique est aussi de développer des moyens de simuler ces traumatismes, qui résultent des impacts. Les dommages causés au cerveau suite à ces accidents peuvent être irréversibles, El Sayed *et al.* [22]. Cette irréversibilité serait une manifestation d'un comportement plastique du matériau constituant le cerveau. Après le choc, le cerveau ne reprend pas sa forme initiale mais conserve une certaine déformation plastique. Notre intention est donc de coupler ce modèle avec un modèle viscoplastique, plus à même de représenter le comportement complexe des structures cérébrales. C'est l'objet du chapitre suivant.

# Chapitre 7

## Un modèle viscoélastique/viscoplastique en grandes déformations

Le problème fondamental de la viscoplasticité est la détermination d'une fonction critère limite de plasticité, Hill [34], pour un matériau viscoélastique - ou comment le taux de déformation modifie la fonction critère du matériau. Dans la littérature, Perzyna [76], on introduit communément une distinction entre un matériau élastique/viscoplastique et un matériau viscoélastique/viscoplastique. On qualifie de *viscoélastique/viscoplastique* un matériau montrant des propriétés de viscosité dans les deux domaines élastique et plastique. Le terme *élastique/viscoplastique* est donc réservé à des matériaux présentant des propriétés visqueuses uniquement dans le domaine plastique. La notion de matériau élastique/viscoplastique est évidemment une idéalisation qui simplifie considérablement l'argument, puisque le problème d'évolution de la fonction critère en fonction du taux de déformation ne se pose plus. En nous inspirant des travaux de Le Tallec [55] et Ibrahimbegovic [38,39], nous présentons dans ce chapitre un modèle viscoélastique/viscoplastique non linéaire en trois dimensions. Ce type de modèle est considérablement plus difficile et n'a, à notre connaissance, jamais été étudié en grandes déformations. Les résultats de ce chapitre n'ont pas fait l'objet d'une publication à ce jour.

### 7.1 Exemples linéaires unidimensionnels

#### 7.1.1 Le modèle viscoélastique de Maxwell

Pour mieux comprendre les phénomènes mis en jeu en viscosité, on présente ici un modèle rhéologique simple de viscoélasticité linéaire en une dimension : le modèle de Maxwell [64]. Il s'agit de l'association en parallèle d'un ressort et d'un ensemble ressort/amortisseur visqueux en série (voir Fig. 7.1). Dans le modèle de Maxwell, la déformation totale  $\varepsilon$  se décompose en une partie élastique  $\varepsilon_e$  et une partie visqueuse  $\varepsilon_v$  selon la relation additive :

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_v.$$

Par ailleurs, la contrainte totale comprend une composante à l'équilibre  $\sigma_1$  (dans la branche supérieure) et une composante de non équilibre  $\sigma_2$  (dans la branche inférieure) telles que :

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2.$$

La contrainte dans les ressorts est proportionnelle à leur déformation tandis que la contrainte dans l'amortisseur visqueux est proportionnelle à son taux de déformation. On

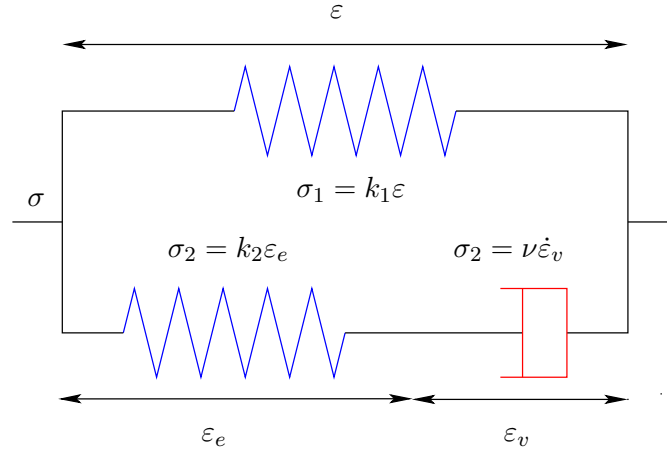


FIG. 7.1 – Le modèle viscoélastique de Maxwell.

en déduit les relations suivantes :

$$\sigma_1 = k_1 \varepsilon \quad \text{et} \quad \sigma_2 = k_2 \varepsilon_e = \nu \dot{\varepsilon}_v,$$

où  $k_1$  et  $k_2$  sont les modules d'élasticité des ressorts tandis que  $\nu$  est le coefficient de viscosité linéaire de l'amortisseur. Afin de généraliser ensuite le modèle ci-dessus au cas tridimensionnel en grandes déformations, il est nécessaire de le réécrire en terme d'énergie libre du système. Les termes d'énergie de déformation sont ici :

$$W_1 = \frac{1}{2} k_1 \varepsilon^2 \quad \text{et} \quad W_2 = \frac{1}{2} k_2 \varepsilon_e^2 = \frac{1}{2} k_2 (\varepsilon - \varepsilon_v)^2.$$

Donc l'énergie totale du système s'écrit :

$$W(\varepsilon, \varepsilon_v) = W_1 + W_2 = \frac{1}{2} k_1 \varepsilon^2 + \frac{1}{2} k_2 (\varepsilon - \varepsilon_v)^2.$$

Remarquons alors qu'en différenciant l'énergie par rapport à la variable de déformation totale  $\varepsilon$ , on retrouve la contrainte totale du système :

$$\sigma = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon} = k_1 \varepsilon + k_2 (\varepsilon - \varepsilon_v).$$

De même, en différenciant l'énergie par rapport à la variable interne  $\varepsilon_v$ , on retrouve son équation d'évolution :

$$\nu \dot{\varepsilon}_v = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_v} = k_2 (\varepsilon - \varepsilon_v).$$

Cette dernière équation peut s'intégrer en :

$$\varepsilon_v(t) = \frac{k_2}{\nu} \int_0^t e^{-k_2(t-s)/\nu} \varepsilon(s) ds,$$

d'où

$$\sigma(t) = (k_1 + k_2) \varepsilon(t) - k_2 \frac{k_2}{\nu} \int_0^t e^{-k_2(t-s)/\nu} \varepsilon(s) ds.$$

Ainsi, la contrainte à l'instant  $t$  ne dépend pas seulement de la déformation à l'instant  $t$  mais aussi de l'historique de la déformation depuis l'instant initial jusqu'à  $t$ . Dans le cas où la contrainte appliquée au système est constante, on obtient l'expression de l'évolution de la déformation totale :

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma}{k_1} \left[ 1 + \left( \frac{k_1}{k_1 + k_2} - 1 \right) e^{-t/\tau} \right],$$

où on a introduit le temps de relaxation du système :

$$\tau = \frac{\nu}{k_2} \left( 1 + \frac{k_1}{k_2} \right).$$

Cette évolution est illustrée sur la Figure 7.1.1.

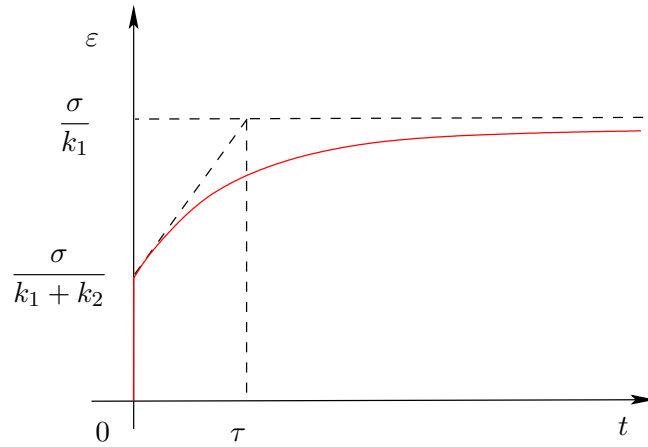


FIG. 7.2 – Résultat d'un essai de relaxation.

Lorsque à  $t = 0$ , on applique le chargement  $\sigma$  constant, la réponse élastique immédiate est telle que  $\varepsilon(0) = \frac{\sigma}{k_1 + k_2}$ . Puis le système se relaxe jusqu'à atteindre en temps infini l'équilibre élastique caractérisé par  $\varepsilon(\infty) = \frac{\sigma}{k_1}$ . Un matériau viscoélastique présente ainsi un phénomène de dissipation d'énergie. On s'attend bien entendu à retrouver un tel comportement dans notre modèle 3D non linéaire.

### 7.1.2 Le modèle élastique/viscoplastique de Perzyna

Pour mieux comprendre les phénomènes mis en jeu en plasticité, on présente ici un modèle rhéologique simple de viscoplasticité linéaire en une dimension d'espace : le modèle de Perzyna [76]. Il s'agit de l'association en série d'un ressort et d'un ensemble patin frottant/amortisseur visqueux en parallèle (voir Fig. 7.3). L'allongement total du système  $\varepsilon$  peut se décomposer en la somme d'une partie élastique  $\varepsilon_e$  et d'une partie viscoplastique  $\varepsilon_{vp}$  :

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_{vp}.$$

La contrainte dans le ressort  $\sigma$  se décompose en la contrainte  $\sigma_1$  dans l'amortisseur visqueux et la contrainte  $\sigma_2$  dans le patin frottant selon :

$$\sigma = k\varepsilon_e = \sigma_1 + \sigma_2 \quad \text{avec} \quad \sigma_1 = \nu \dot{\varepsilon}_{vp} \quad \text{et} \quad |\sigma_2| \leq \sigma_y.$$

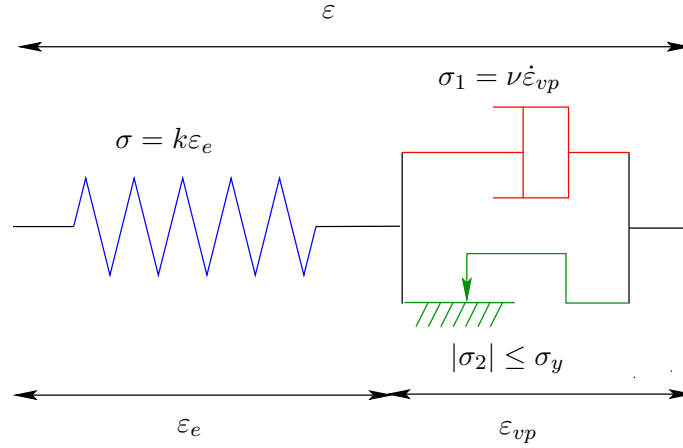


FIG. 7.3 – Le modèle élastique/viscoplastique de Perzyna.

La contrainte  $\sigma_2$  dans le patin frottant ne peut pas dépasser en valeur absolue la résistance au glissement  $\sigma_y$  et elle doit rester fixe égale à la valeur  $\sigma_y$  pendant la phase de glissement plastique. L'équation d'évolution de la déformation viscoplastique  $\varepsilon_{vp}$  peut alors être écrite :

$$\nu \dot{\varepsilon}_{vp} = \begin{cases} 0 & \text{si } |\sigma_2| < \sigma_y, \\ \sigma - \sigma_2 & \text{si } |\sigma_2| = \sigma_y. \end{cases}$$

Il est alors commode de caractériser le domaine admissible par la donnée d'une fonction de charge  $\Phi(\sigma) := |\sigma| - \sigma_y$ , fonction de la contrainte totale  $\sigma$ . Si  $\Phi(\sigma) < 0$ , le processus est élastique mais dès que  $\Phi(\sigma) \geq 0$  le processus devient viscoplastique. Ainsi, on peut réécrire l'équation d'évolution de la variable viscoplastique sous la forme :

$$\nu \dot{\varepsilon}_{vp} = \langle \Phi(\sigma) \rangle \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma}, \quad \text{avec} \quad \langle \Phi \rangle = \begin{cases} 0, & \text{si } \Phi < 0, \\ \Phi, & \text{si } \Phi \geq 0. \end{cases}$$

Afin de pouvoir généraliser ce modèle au cas 3D non linéaire, on introduit l'énergie élastique du système :

$$W(\varepsilon, \varepsilon_{vp}) = \frac{1}{2} k \varepsilon_e^2 = \frac{1}{2} k (\varepsilon - \varepsilon_{vp})^2.$$

On remarque alors que l'effort dans le système s'obtient comme la dérivée de cette énergie par rapport à la déformation totale  $\varepsilon$  :

$$\sigma = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon} = k(\varepsilon - \varepsilon_{vp}).$$

Si on dérive cette relation par rapport au temps, on observe que :

$$\dot{\sigma} = k(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_{vp}) = k\left(\dot{\varepsilon} - \frac{\sigma - \sigma_y}{\nu}\right) \implies \dot{\sigma} + \frac{\sigma}{\nu} = k\left(\dot{\varepsilon} + \frac{\sigma_y}{\nu}\right). \quad (7.1)$$

On réalise alors un essai de relaxation qui consiste à imposer et maintenir une déformation constante  $\varepsilon_0$  qui dépasse la limite d'élasticité  $\frac{\sigma_y}{k}$ . On peut alors intégrer (7.1) et obtenir l'évolution de la contrainte en fonction du temps :

$$\sigma(t) = (k\varepsilon_0 - \sigma_y)e^{-kt/\nu} + \sigma_y.$$

On trace cette courbe sur la Figure 7.4. On remarque alors que la valeur finale de contrainte  $\sigma_\infty$  en viscoplasticité tend vers la valeur seuil  $\sigma_y$ . Sur la Figure 7.5, nous présentons une expérience de charge/décharge d'un échantillon. Après la décharge, il subsiste une déformation résiduelle et irréversible, la déformation viscoplastique.

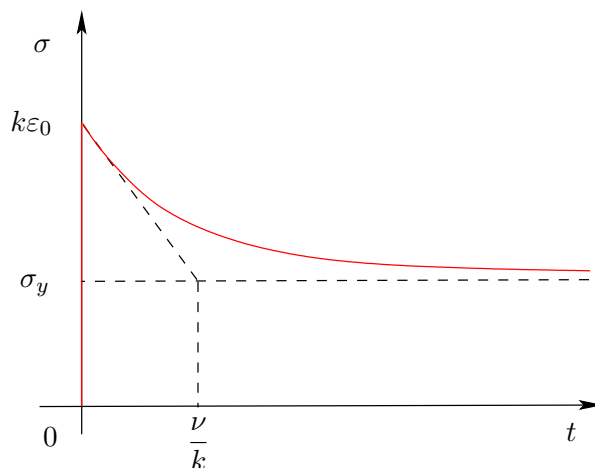


FIG. 7.4 – Résultat d'un essai de relaxation.

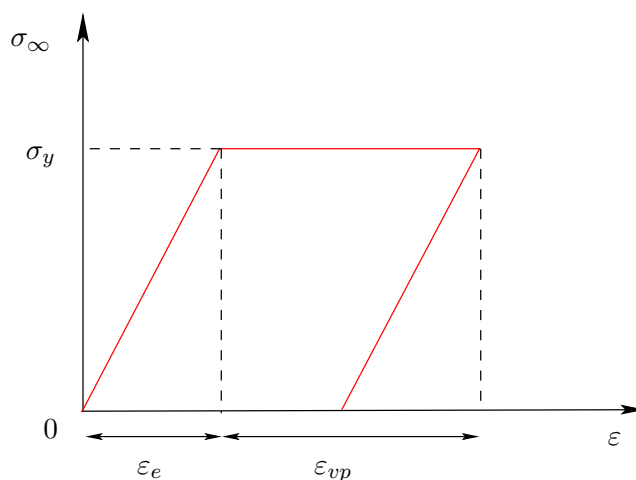


FIG. 7.5 – Expérience de charge/décharge.

## 7.2 Le modèle viscoélastique/viscoplastique non linéaire 3D

Le modèle que l'on introduit dans cette partie généralise à la dimension trois et dans le cas des grandes déformations le modèle rhéologique 1D de la Figure 7.6. Pour dériver les équations d'équilibre, nous utilisons ici le formalisme des grandes déformations proposé par Ciarlet [14].



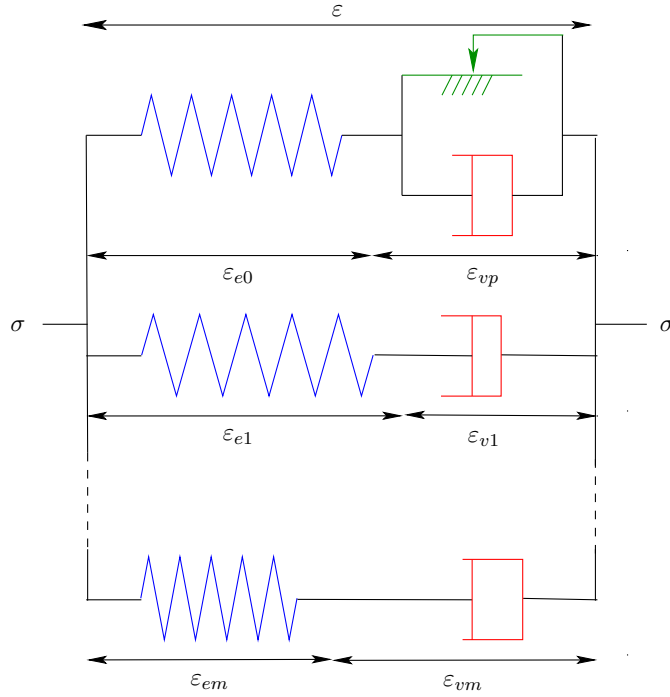


FIG. 7.6 – Modèle viscoélastique/viscoplastique linéaire 1D.

### 7.2.1 Cinématique

Soit  $\Omega$  un ouvert borné connexe de  $\mathbb{R}^3$ . Nous choisissons  $\Omega$  comme configuration de référence, c'est-à-dire qui ne varie pas au cours du temps. Nous supposons que sa frontière  $\Gamma$  est Lipschitz et se décompose en  $\Gamma = \bar{\Gamma}_0 \cup \bar{\Gamma}_1$  avec  $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$ . Il existe en particulier un vecteur normal unitaire  $n$  en tout point de  $\Gamma$ . Soit  $\phi$  une transformation du corps, c'est-à-dire une application injective définie sur la configuration de référence :

$$\phi : \bar{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^3.$$

Le point  $x^\phi = \phi(x)$  correspond à la position occupée dans la configuration déformée par la particule qui était en  $x$  dans la configuration de référence. Le champ de déplacement est alors défini par :

$$u(x) = \phi(x) - x.$$

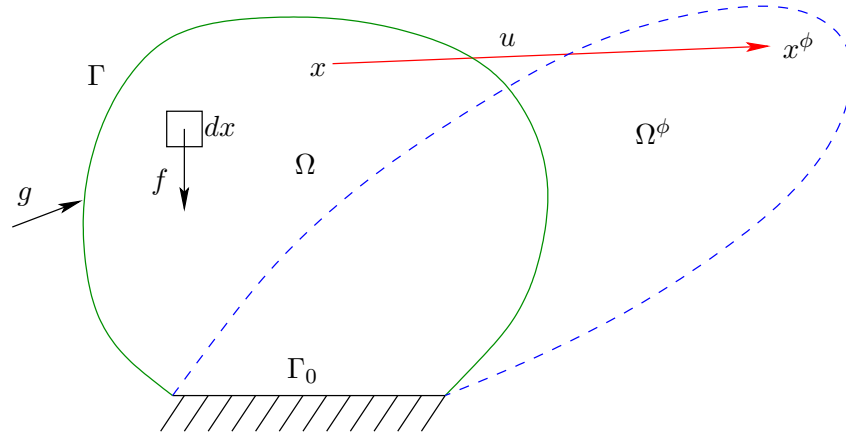
On définit ensuite le gradient de la transformation par :

$$F = \nabla\phi = Id + \nabla u,$$

et le tenseur des déformations de Cauchy-Green à droite :

$$C = F^t F = Id + \nabla u + \nabla u^t + \nabla u^t \cdot \nabla u.$$

Puisque l'on se place dans le cas de grandes déformations, le tenseur  $C$  ne peut pas être linéarisé. Ainsi, on garde le terme non linéaire  $\nabla u \cdot \nabla u$ . Par construction,  $C$  est un tenseur

FIG. 7.7 – Déformation du domaine  $\Omega$ .

symétrique défini positif, ce qui implique qu'il a trois valeurs propres strictement positives  $(\lambda_i^2(C))_{i=1,2,3}$ . On définit alors les invariants de  $C$  comme :

$$\begin{aligned} I_1(C) &= \text{tr } C = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2, \\ I_2(C) &= \frac{1}{2} ((\text{tr}(C))^2 - \text{tr}(C^2)) = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_1^2 \lambda_3^2, \\ I_3(C) &= \det(C) = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2. \end{aligned}$$

### 7.2.2 Les équations d'équilibre en grandes déformations

Les forces agissant sur le corps dans sa configuration actuelle  $\Omega^\phi = \phi(\Omega)$  sont les forces volumiques  $f^\phi$  qui décrivent les actions à distance exercées sur le corps et les forces surfaciques  $g^\phi$  qui décrivent les tractions exercées sur le corps au travers d'une partie  $\Gamma_1$  de  $\Gamma$ . Quand le corps est à l'équilibre, les champs de vecteur  $f^\phi$  et  $g^\phi$  satisfont le théorème suivant, équivalent du Principe des Travaux Virtuels (Ciarlet [14], Salençon [15]) :

**Théorème 7.1.** *Il existe un tenseur symétrique  $T^\phi$  appelé le tenseur des contraintes de Cauchy tel que :*

$$\int_{\Omega^\phi} T^\phi : \frac{\partial v^\phi}{\partial x^\phi} dx^\phi = \int_{\Omega^\phi} f^\phi \cdot v^\phi dx^\phi + \int_{\Gamma_1^\phi} g^\phi \cdot v^\phi d\gamma^\phi,$$

pour toutes les fonctions  $v^\phi : \bar{\Omega}^\phi \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

Malheureusement, si nous supposons que le corps subit de grandes déformations,  $\Omega^\phi$  est inconnu et peut être très différent de la configuration de référence connue  $\Omega$ . Il faut donc exprimer ces équations sur  $\Omega$  en utilisant le changement de variables :

$$x^\phi = x + u(x).$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\Omega^\phi} T^\phi : \frac{\partial v^\phi}{\partial x^\phi} dx^\phi - \int_{\Omega^\phi} f^\phi \cdot v^\phi dx^\phi - \int_{\Gamma_1^\phi} g^\phi \cdot v^\phi d\gamma^\phi \\
&= \int_{\Omega} T^\phi : \frac{\partial v^\phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x^\phi} \left| \frac{dx^\phi}{dx} \right| dx - \int_{\Omega} f^\phi \cdot v^\phi \left| \frac{dx^\phi}{dx} \right| dx - \int_{\Gamma_1} g^\phi \cdot v^\phi \left| \frac{d\gamma^\phi}{d\gamma} \right| d\gamma \\
&= \int_{\Omega} T^\phi \left( \frac{\partial x}{\partial x^\phi} \right)^t \left| \frac{dx^\phi}{dx} \right| : \frac{\partial v^\phi}{\partial x} dx - \int_{\Omega} f^\phi \left| \frac{dx^\phi}{dx} \right| \cdot v^\phi dx - \int_{\Gamma_1} g^\phi \left| \frac{d\gamma^\phi}{d\gamma} \right| \cdot v^\phi d\gamma.
\end{aligned}$$

En posant alors :

$$\begin{cases}
F(x) = \frac{dx^\phi}{dx}(x) \\
T(x) = T^\phi(x^\phi(x)) F(x)^{-t} \det(F(x)) \\
v(x) = v^\phi(x^\phi(x)) \\
f(x) = f^\phi(x^\phi(x)) \det(F(x)) \\
g(x) = g^\phi(x^\phi(x)) \left| \frac{d\gamma^\phi}{d\gamma} \right|
\end{cases},$$

on obtient finalement les équations d'équilibre dans la configuration de référence :

$$\int_{\Omega} T : \frac{\partial v}{\partial x} dx = \int_{\Omega} f \cdot v dx + \int_{\Gamma_1} g \cdot v d\gamma.$$

En intégrant par parties, cette équation peut se mettre sous la forme forte (au sens des distributions) :

$$\begin{cases}
-\nabla \cdot T = f, & \text{dans } \Omega, \\
u = u_0, & \text{sur } \Gamma_0, \\
T \cdot n = g, & \text{sur } \Gamma_1.
\end{cases} \quad (7.2)$$

Le modèle (7.2) n'est pas fermé. Il faut proposer une relation supplémentaire : la loi de comportement.

### 7.2.3 Loi de comportement

La loi de comportement relie le tenseur des contraintes  $T$  aux variables cinématiques et caractérise ainsi les propriétés mécaniques du matériau. Elle est généralement phénoménologique. En nous inspirant du modèle unidimensionnel de la Figure 7.6, nous supposons que la déformation au niveau microscopique peut se décomposer de la manière suivante :

$$\phi = \phi_{e0} \circ \phi_{vp} = \phi_{ei} \circ \phi_{vi}, \quad \forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket,$$

où  $m \in \mathbb{N}^*$ .

Ceci revient à admettre, selon l'hypothèse de Lee [58] et Mandel [64], que le gradient de déformation totale  $F$  peut être décomposé de la manière suivante :

$$F = F_{e0} F_{vp} = F_{ei} F_{vi}, \quad \forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket,$$

où  $F_{e0}$  et  $F_{ei}$ , pour  $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ , sont les déformations à long et courts termes (liées à la dissipation visqueuse) respectivement (voir Figure 7.8). Afin de s'assurer que le modèle est invariant par toute rotation de corps rigide, on choisit comme variables d'état internes :

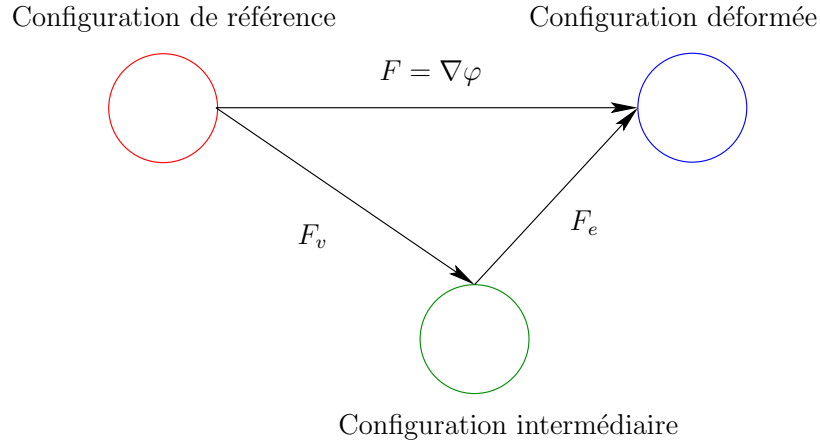


FIG. 7.8 – Décomposition multiplicative du gradient de déformation.

- le tenseur des déformations de Cauchy-Green  $C$  qui mesure la déformation totale du corps,
- l'inverse du tenseur des déformations viscoplastiques  $G_0$  caractérisant les déformations irréversibles :

$$G_0 = C_{vp}^{-1} = (F_{vp}^t F_{vp})^{-1},$$

- les inverses des tenseurs de déformations visqueuses  $G_i$ , pour  $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$  qui mesurent la déformation d'amortisseur visqueux inclus dans le matériau :

$$G_i = C_{vi}^{-1} = (F_{vi}^t F_{vi})^{-1}, \quad \forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket.$$

Si on suppose que le matériau considéré est incompressible dans ses évolutions élastique, viscoélastique et viscoplastique, alors ces variables internes vérifient les conditions d'incompressibilité :

$$\det(C) = \det(G_0) = \det(G_i) = 1, \quad \forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket.$$

La réponse élastique du matériau peut être décrite par une fonction d'énergie de déformation  $\tilde{W}$ . En s'inspirant cette fois encore du modèle unidimensionnel de la figure Fig. 7.6, on propose la fonction d'énergie de déformation définie par :

$$\tilde{W}(C_{e0}, C_{e1}, \dots, C_{em}) = \sum_{i=0}^m \tilde{W}_i(C_{ei}) = \sum_{i=0}^m W_i(C, G_i) = W(C, G_0, G_1, \dots, G_m),$$

qui est exprimée ici en fonction des variables internes retenues, en remarquant que  $C_{ei} = \sqrt{G_i} C \sqrt{G_i}$ , pour  $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ . On obtient alors les équations d'évolution de ces variables internes en appliquant les principes de la thermodynamique, en particulier, l'inégalité de dissipation de Clausius-Duhem, Truesdell [87], qui stipule que l'énergie dissipée au cours de toute évolution mécanique du système doit être positive :

$$0 \leq \mathcal{D} = \frac{1}{2} S : \dot{C} - \frac{d}{dt} W(C, G_0, G_1, \dots, G_m),$$

où  $S$  est le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff défini par  $T = FS$ . Finalement, la dissipation d'énergie s'écrit :

$$0 \leq \mathcal{D} = \left( S - 2 \frac{\partial W}{\partial C} \right) : \frac{1}{2} \dot{C} - \sum_{i=0}^m \frac{\partial W_i}{\partial G_i} : \dot{G}_i,$$

$$0 \leq \mathcal{D} = \mathcal{D}_e + \sum_{i=0}^m \mathcal{D}_i.$$

### Processus viscoélastique

Pour un processus viscoélastique sans changement de la déformation plastique ( $\dot{G}_0 = 0 \implies \mathcal{D}_0 = 0$ ), la dissipation d'énergie pendant une variation  $\dot{G}_i$ , pour  $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ , des amortisseurs visqueux, qui sont indépendants, est régie par :

$$- \sum_{i=1}^m \nu_i \dot{G}_i^{-1} : \dot{G}_i = \mathcal{D} = \left( S - 2 \frac{\partial W}{\partial C} \right) : \frac{1}{2} \dot{C} - \sum_{i=1}^m \frac{\partial W_i}{\partial G_i} : \dot{G}_i,$$

où  $\nu_i$ , pour  $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ , sont les coefficients de viscosité. On en déduit les relations :

$$S = 2 \frac{\partial W}{\partial C} - p C^{-1},$$

$$\nu_i \dot{G}_i^{-1} = \frac{\partial W_i}{\partial G_i} + q_i G_i^{-1}, \quad \forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket. \quad (7.3)$$

où on a introduit les multiplicateurs de Lagrange  $p$  et  $q_i$ , pour  $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ , associés aux contraintes d'incompressibilité :

$$\det(C) = \det(G_i) = 1, \quad \forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket.$$

Ces équations sont les lois de comportement viscoélastiques recherchées. La première équation est une loi de comportement hyperélastique standard reliant le tenseur de Piola-Kirchhoff au tenseur des déformations de Cauchy-Green. Les équations suivantes sont des équations différentielles du premier ordre en temps, introduisant, au travers des variables  $G_i$ , une dépendance en temps dans le modèle. Ce modèle, dans le cas d'un seul amortisseur visqueux ( $i = 1$ ), a été introduit et étudié par Le Tallec *et al.* [55]. La discrétisation et l'implémentation de ce modèle sont décrites au Chapitre 5.

### Processus viscoplastique

Pour un tel processus, nous avons cette fois ci :

$$0 < \mathcal{D}_0 = - \frac{\partial W_0}{\partial G_0} : \dot{G}_0,$$

et nous supposons que les lois de comportement (7.3) restent toujours valables. On définit alors le domaine élastique par une fonction critère  $\Phi$  :

$$\Phi(S_0) < 0,$$

où  $S_0$  est la contrainte dans le patin visqueux. On introduit aussi les allongements élastiques principaux  $\lambda_j^e$ , solutions du problème :

$$(B_e - (\lambda_j^e)^2 Id)m_j = 0 \quad \text{avec} \quad m_j \cdot m_k = \delta_{jk},$$

où  $B_e = F_e F_e^t$  est le tenseur des déformations de Cauchy à gauche. On a alors :

$$0 = F^{-1}(B_e - (\lambda_j^e)^2 Id)F^{-t}F^t m_j = (G_0 - (\lambda_j^e)^2 C^{-1})n_j, \quad (7.4)$$

avec :

$$n_j = F^t m_j \quad \text{et} \quad n_j \cdot C^{-1} n_k = \delta_{jk}.$$

Si on calcule alors la dérivée directionnelle de (7.4) par rapport à  $G_0$ , on obtient :

$$0 = \left( dG_0 - 2\lambda_j^e \frac{\partial \lambda_j^e}{\partial G_0} dG_0 C^{-1} \right) n_j + (G_0 - (\lambda_j^e)^2 C^{-1}) dn_j,$$

ce qui, en prenant le produit scalaire par  $n_j$ , conduit à :

$$\frac{\partial \lambda_j^e}{\partial G_0} = \frac{1}{2\lambda_j^e} n_j \otimes n_j.$$

De même, si on calcule la dérivée directionnelle de (7.4) par rapport à  $C$ , on obtient :

$$0 = -2\lambda_j^e \frac{\partial \lambda_j^e}{\partial C} dC C^{-1} n_j - (\lambda_j^e)^2 \frac{\partial C^{-1}}{\partial C} dC n_j + (G_0 - (\lambda_j^e)^2 C^{-1}) dn_j,$$

ce qui conduit à :

$$\frac{\partial \lambda_j^e}{\partial C} = \frac{\lambda_j^e}{2} C^{-1} n_j \otimes C^{-1} n_j.$$

Donc on peut démontrer le résultat suivant :

$$S_0 = 2 \frac{\partial W_0}{\partial C} = 2 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial W_0}{\partial \lambda_j^e} \frac{\partial \lambda_j^e}{\partial C} = 2C^{-1} \frac{\partial W_0}{\partial G_0} G_0.$$

Finalement, on peut écrire :

$$0 < \mathcal{D}_0 = -S_0 : \frac{1}{2} C \dot{G}_0 G_0^{-1}.$$

Nous appliquons alors le Principe du Travail Plastique Maximal (Hill [34]) qui, à une configuration déformée donnée, choisit la valeur de la contrainte qui va maximiser la dissipation plastique en dehors du domaine élastique. Ce principe peut alors être formulé comme un problème de minimisation sous contrainte :

$$\max_{S_0 \mid \Phi(S_0) \geq 0} \mathcal{D}_0(S_0),$$

que l'on peut réécrire comme

$$\min_{S_0} \mathcal{H}(S_0),$$

en posant :

$$\mathcal{H}(S_0) = -\mathcal{D}_0(S_0) + \mathcal{P}(\Phi(S_0)),$$

où  $\mathcal{P}(\Phi(\cdot))$  est une fonction de pénalisation qui est nulle dans le domaine élastique. En accord avec le modèle classique de viscoplasticité de Perzyna [76], la fonctionnelle de pénalisation est choisie comme :

$$\mathcal{P}(\Phi(\cdot)) = \begin{cases} \frac{1}{2\eta}(\Phi(\cdot))^2, & \text{si } \Phi \geq 0, \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases}$$

où  $\eta$  est le paramètre de viscosité. La dérivée de cette fonction est donc donnée par :

$$\mathcal{P}'(\Phi(\cdot)) = \frac{1}{\eta} \langle \Phi(\cdot) \rangle = \begin{cases} \frac{1}{\eta} \Phi(\cdot), & \text{si } \Phi \geq 0, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le problème de minimisation peut être résolu en :

$$0 = \frac{d\mathcal{H}}{dS_0} = \frac{1}{2} C \dot{G}_0 G_0^{-1} + \frac{1}{\eta} \langle \Phi \rangle \frac{\partial \Phi}{\partial S_0}.$$

On obtient alors l'équation d'évolution de la déformation plastique :

$$\eta \dot{G}_0 = -2 \langle \Phi(S_0) \rangle C^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial S_0} G_0.$$

On souligne que si la fonction critère ne dépend que de la partie déviatorique de  $S_0$  alors la déformation viscoplastique est isochore, c'est-à-dire qu'elle vérifie  $\det(G_0) = 1$  à chaque instant. Nous envisageons d'utiliser comme fonction critère de plasticité (Hill [34]) celle de Von Misses sans écrouissage :

$$\Phi(S_0) = |\text{dev}(S_0)| - \sqrt{\frac{2}{3}} S_y,$$

où  $\text{dev}(S_0) = S_0 - \frac{1}{3} \text{tr}(S_0)$  est la partie déviatorique de  $S_0$  et  $S_y$  est la limite d'élasticité. Un tel modèle a été proposé et étudié par Ibrahimbegovic [38].

#### 7.2.4 Les équations du modèle

En remplaçant  $T$  par son expression, on obtient finalement la formulation variationnelle du problème suivante :

Chercher  $(u - u_0) \in \mathcal{V}$ ,  $p \in \mathcal{P}$ ,  $G_i \in \mathcal{H}$  et  $q_i \in \mathcal{Q}$ , pour  $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ , tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} F \left( 2 \frac{\partial W}{\partial C}(C, G_0, G_1, G_2) - p C^{-1} \right) : \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f \cdot v \, dx + \int_{\Gamma_1} g \cdot v \, d\gamma, \quad \forall v \in \mathcal{V}, \\ \int_{\Omega} \hat{p}(\det(F) - 1) \, dx = 0, \quad \forall \hat{p} \in \mathcal{P}, \\ \int_{\Omega} \left( -\frac{\partial W_i}{\partial G_i}(C, G_i) + \nu_i \dot{G}_i^{-1} - q_i G_i^{-1} \right) : H \, dx = 0, \quad \forall H \in \mathcal{H}, \\ \int_{\Omega} \hat{q}(\det(G_i) - 1) \, dx = 0, \quad \forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket, \quad \forall \hat{q} \in \mathcal{Q}, \\ \int_{\Omega} \left( \eta \dot{G}_0 + 2 \langle \Phi(S_0) \rangle C^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial S_0}(S_0) G_0 \right) : H \, dx = 0, \quad \forall H \in \mathcal{H}, \end{array} \right.$$

où les espaces fonctionnels introduits sont tels que les intégrales soient bien définies. En particulier, si :

$$\mathcal{V} = \{v \in W^{1,s}(\Omega, \mathbb{R}^3), v|_{\Gamma_0} = 0\},$$

on doit alors avoir :

$$\mathcal{P} = L^{s^*}(\Omega, \mathbb{R}), \quad \text{avec} \quad \frac{1}{3s} + \frac{1}{s^*} = 1.$$

Les inconnues sont le champs de déplacement  $u$  dans  $\mathcal{V} + u_0$  (dont découlent  $F$  et  $C$ ), les variables internes  $G_i$ , pour  $i \in \llbracket 0, m \rrbracket$  et les multiplicateurs de Lagrange  $p$  et  $q_i$ , pour  $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ , associés aux contraintes d'incompressibilité, à tout instant  $t$  et en tout point du matériau. Compte-tenu des équations différentielles en temps, cette formulation doit être complétée par des conditions initiales sur les variables internes  $G_i$  :

$$G_i(\cdot, t = 0) = G_i^0, \quad \forall i \in \llbracket 0, m \rrbracket.$$

### 7.3 Résolution numérique du problème couplé

Nous proposons ici des méthodes de résolution du modèle couplé. La discrétisation des équations est menée de la même façon que celle présentée au Chapitre 5. Mais, cette fois-ci, à chaque pas de temps  $n$  et pour chaque itération  $k$  de la boucle principale de Newton, en plus du calcul des variables viscoélastiques  $G_i$ , pour  $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ , nous devons résoudre l'équation d'évolution de la variable viscoplastique. La résolution se fait en deux étapes :

1. Cette première étape est basée sur l'hypothèse qu'il s'agit d'un processus viscoélastique où la valeur de la variable viscoplastique calculée au pas précédent n'évolue pas  $G_{0h}^{n+1} = G_{0h}^n$ . On calcule alors le nouvel état des contraintes  $(S_0^{n+1})_{test}$  et on regarde le signe de la fonction critère de plasticité correspondante  $\Phi(S_0^{n+1})_{test}$ . S'il est négatif, on considère alors que l'état calculé est l'état final à l'itération  $k$ . S'il est positif, il est impossible d'accepter l'état comme plastiquement admissible et on doit passer à la deuxième étape.
2. Dans cette deuxième étape, on cherche la nouvelle valeur de la variable viscoplastique qui donne les contraintes plastiquement admissibles. Pour cela, on doit résoudre l'équation d'évolution de la variable viscoplastique  $G_0$ , en chaque point d'intégration.

$$\eta \dot{G}_{0h} = -2 \langle \Phi(S_0) \rangle C_h^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial S_0}(S_{0h}) G_{0h}.$$

En utilisant l'application exponentielle, on peut résoudre cette EDO sous la forme :

$$G_{0h}(t^{n+1}) = \exp \left[ -2 \int_{t^n}^{t^{n+1}} \langle \Phi(S_0(s)) \rangle C_h^{-1}(s) \frac{\partial \Phi}{\partial S_0}(S_{0h}(s)) ds \right] G_{0h}(t^n).$$

Nous proposons donc le schéma numérique implicite suivant :

$$G_{0h}^{n+1} = \exp \left[ -2 \langle \Phi(S_0^{n+1}) \rangle (C_h^{n+1})^{-1} \text{signe}(S_0^{n+1})_{test} \right] G_{0h}^n,$$

où on a utilisé le fait que  $\frac{\partial \Phi}{\partial S_0}(S_0^{n+1}) = \text{signe}(S_0^{n+1}) = \text{signe}(S_0^{n+1})_{test}$ . Ce schéma peut se mettre sous la forme :

$$\mathcal{F}_0(G_{0h}^{n+1}, C_h^{n+1}) = 0, \quad (7.5)$$



où la fonction  $\mathcal{F}_0$  est définie, pour tout  $(H, C) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}$  par :

$$\mathcal{F}_0(H, C) = H - \exp \left[ -2 \left\langle \left| \operatorname{dev} \left( \frac{\partial W_0}{\partial C} \right) (C, H) \right| - \sqrt{\frac{2}{3}} S_y \right\rangle C^{-1} \operatorname{signe}(S_0^{n+1})_{test} \right] G_{0h}^n.$$

Tout comme pour les variables viscoélastiques, l'équation non linéaire (7.5) définit une fonction implicite  $G_{0h}^{n+1} = \mathcal{G}_0(C_h^{n+1})$  qui peut être facilement résolue par une méthode de Newton. Il faut alors aussi modifier la matrice tangente  $M_k$  du problème élastique principale pour tenir compte de la différentielle  $\frac{\partial \mathcal{G}_0}{\partial C}$ .

Ces méthodes n'ont pas encore fait l'objet d'une implémentation dans le code de calcul. L'objectif sera alors de confronter les résultats numériques obtenus à des résultats expérimentaux, afin d'illustrer l'efficacité du modèle proposé pour représenter le comportement de matériaux viscoplastiques complexes.

# Annexes



# Annexe A

## Preuve de la Proposition 1.2

Dans cette première annexe, nous donnons la démonstration de la Proposition 1.2 qui est une inégalité de Carleman ponctuelle pour un opérateur hyperbolique scalaire. Le résultat est démontré par Klibanov et Timonov dans [49] pour l'opérateur  $\mathcal{P}_0 = a(x)\partial_t^2 - \Delta$  où  $1 \leq a(x) \leq a_1$ , c'est-à-dire que  $q(x) = \frac{1}{a(x)}$ . Nous rappelons ici cette démonstration en la généralisant au cas où  $0 < a_0 \leq a(x) \leq a_1$ .

Introduisons tout d'abord

$$v(x, t) = u(x, t)e^{\sigma\varphi(x, t)}, \quad \forall (x, t) \in \Omega \times (0, +\infty), \quad \forall \sigma > 0,$$

où on rappelle que  $\varphi(x, t) = |x - x_0|^2 - \beta t^2$  avec  $x_0 \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$  et  $\beta > 0$ . On va alors calculer  $\mathcal{P}_0 u(x, t)$  en fonction de  $v(x, t)$ . On commence donc par calculer :

$$\begin{aligned} \partial_t u(x, t) &= (\partial_t v(x, t) + 2\sigma\beta t v(x, t)) e^{-\sigma\varphi(x, t)}, \\ \partial_t^2 u(x, t) &= \left( \partial_t^2 v(x, t) + 4\sigma\beta t \partial_t v(x, t) + 4\sigma^2 v(x, t) \left( \beta^2 t^2 + \frac{\beta}{2\sigma} \right) \right) e^{-\sigma\varphi(x, t)}, \\ \nabla u(x, t) &= (\nabla v(x, t) - 2\sigma v(x, t)(x - x_0)) e^{-\sigma\varphi(x, t)}, \\ \Delta u(x, t) &= \left( \Delta v(x, t) - 4\sigma \nabla v(x, t) \cdot (x - x_0) + 4\sigma^2 v(x, t) \left( |x - x_0|^2 - \frac{3}{\sigma} \right) \right) e^{-\sigma\varphi(x, t)}. \end{aligned}$$

Dans tout ce qui suit,  $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\sigma}\right)$  désigne une fonction  $C^1(\Omega \times (0, +\infty))$  telle que :

$$\left| \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sigma}\right) \right| \leq \frac{C}{\sigma}, \quad \forall \sigma > 1,$$

et la même chose est valable pour sa dérivée première. Donc on a

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}_0 u(x, t))^2 e^{2\sigma\varphi(x, t)} &= (a(x)\partial_t^2 u(x, t) - \Delta u(x, t))^2 e^{2\sigma\varphi(x, t)} \\ &= [a(x)\partial_t^2 v(x, t) - \Delta v(x, t) + 4\sigma a(x)\beta t \partial_t v(x, t) \\ &\quad + 4\sigma \nabla v(x, t) \cdot (x - x_0) - 4\sigma^2 v(x, t) \left( |x - x_0|^2 - a(x)\beta^2 t^2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sigma}\right) \right)]^2. \end{aligned}$$

Si on pose alors :

$$z_1 = a(x)\partial_t^2 v(x, t) - \Delta v(x, t) - 4\sigma^2 v(x, t) \left( |x - x_0|^2 - a(x)\beta^2 t^2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sigma}\right) \right),$$

$$z_2 = 4\sigma a(x)\beta t \partial_t v(x, t),$$

$$z_3 = 4\sigma \nabla v(x, t) \cdot (x - x_0),$$

on a l'estimation suivante

$$(\mathcal{P}_0 u(x, t))^2 e^{2\sigma\varphi(x, t)} \geq z_1^2 + 2z_1 z_2 + 2z_1 z_3.$$

On va estimer séparément chacun des termes de cette inégalité. Par soucis de clarté, nous omettons ici les dépendances en  $(x, t)$  mais n'oublions pas que le coefficient  $a$  dépend de  $x$ .

**Terme  $2z_1 z_2$**

$$\begin{aligned} 2z_1 z_2 &= 8\sigma a\beta t \partial_t v \left( a\partial_t^2 v - \Delta v - 4\sigma^2 v \left( |x - x_0|^2 - a\beta^2 t^2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sigma}\right) \right) \right) \\ &= \partial_t (4\sigma a^2 \beta t (\partial_t v)^2) - 4\sigma a^2 \beta (\partial_t v)^2 - \nabla \cdot (8\sigma a\beta t \partial_t v \nabla v) + 8\sigma \beta t \partial_t v (\nabla a \cdot \nabla v) \\ &\quad + 8\sigma a\beta t (\partial_t \nabla v \cdot \nabla v) + 16\sigma^3 a\beta v^2 \left( |x - x_0|^2 - 3a\beta^2 t^2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sigma}\right) \right) \\ &\quad - \partial_t \left( 16\sigma^3 a\beta v^2 \left( t|x - x_0|^2 - a\beta^2 t^3 + t\mathcal{O}\left(\frac{1}{\sigma}\right) \right) \right) \\ &= \partial_t (4\sigma a^2 \beta t (\partial_t v)^2) - 4\sigma a^2 \beta (\partial_t v)^2 - \nabla \cdot (8\sigma a\beta t \partial_t v \nabla v) + 8\sigma \beta t \partial_t v (\nabla a \cdot \nabla v) \\ &\quad + \partial_t (4\sigma a\beta t |\nabla v|^2) - 4\sigma a\beta |\nabla v|^2 + 16\sigma^3 a\beta v^2 \left( |x - x_0|^2 - 3a\beta^2 t^2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sigma}\right) \right) \\ &\quad - \partial_t \left( 16\sigma^3 a\beta v^2 \left( t|x - x_0|^2 - a\beta^2 t^3 + t\mathcal{O}\left(\frac{1}{\sigma}\right) \right) \right). \end{aligned}$$

On pose alors

$$U_1 = -8\sigma a\beta t \partial_t v \nabla v,$$

$$V_1 = 4\sigma a^2 \beta t (\partial_t v)^2 + 4\sigma a\beta t |\nabla v|^2 + 16\sigma^3 a\beta v^2 \left( t|x - x_0|^2 - a\beta^2 t^3 + t\mathcal{O}\left(\frac{1}{\sigma}\right) \right),$$

pour obtenir

$$\begin{aligned} 2z_1 z_2 &= -4\sigma a\beta (a(\partial_t v)^2 + |\nabla v|^2) + 8\sigma \beta t \partial_t v (\nabla a \cdot \nabla v) + \partial_t V_1 + \nabla \cdot U_1 \\ &\quad + 16\sigma^3 a\beta v^2 \left( |x - x_0|^2 - 3a\beta^2 t^2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sigma}\right) \right). \end{aligned}$$

On a bien

$$|(U_1, V_1)| \leq C\sigma (|\nabla u|^2 + (\partial_t u)^2 + \sigma^2 u^2) e^{2\sigma\varphi}.$$

**Terme  $2z_1z_3$**

$$\begin{aligned}
2z_1z_3 &= 8\sigma\nabla v \cdot (x - x_0) \left( a\partial_t^2 v - \Delta v - 4\sigma^2 v \left( |x - x_0|^2 - a\beta^2 t^2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sigma}\right) \right) \right) \\
&= \partial_t (8\sigma a(\nabla v \cdot (x - x_0))\partial_t v) - 8\sigma a(\partial_t \nabla v \cdot (x - x_0))\partial_t v \\
&\quad - \nabla \cdot (8\sigma(\nabla v \cdot (x - x_0))\nabla v) + 8\sigma\nabla(\nabla v \cdot (x - x_0)) \cdot \nabla v \\
&\quad - \nabla \cdot \left( 16\sigma^3 v^2(x - x_0) \left( |x - x_0|^2 - a\beta^2 t^2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sigma}\right) \right) \right) \\
&\quad + 16\sigma^3 v^2(x - x_0) \cdot (2(x - x_0) - \nabla a\beta^2 t^2) + 48\sigma^3 v^2 \left( |x - x_0|^2 - a\beta^2 t^2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sigma}\right) \right) \\
&= \partial_t (8\sigma a(\nabla v \cdot (x - x_0))\partial_t v) - \nabla \cdot (4\sigma a(x - x_0)(\partial_t v)^2) + 4\sigma(\nabla a \cdot (x - x_0))(\partial_t v)^2 \\
&\quad + 12\sigma a(\partial_t v)^2 - \nabla \cdot (8\sigma(\nabla v \cdot (x - x_0))\nabla v) + 8\sigma|\nabla v|^2 + \nabla \cdot (4\sigma(x - x_0)|\nabla v|^2) \\
&\quad - \nabla \cdot \left( 16\sigma^3 v^2(x - x_0) \left( |x - x_0|^2 - a\beta^2 t^2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sigma}\right) \right) \right) \\
&\quad - 12\sigma|\nabla v|^2 + 16\sigma^3 v^2 \left( 5|x - x_0|^2 - \beta^2 t^2(\nabla a \cdot (x - x_0)) - 3a\beta^2 t^2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sigma}\right) \right).
\end{aligned}$$

On pose alors

$$\begin{aligned}
U_2 &= -4\sigma a(x - x_0)(\partial_t v)^2 - 8\sigma(\nabla v \cdot (x - x_0))\nabla v + 4\sigma(x - x_0)|\nabla v|^2 \\
&\quad - 16\sigma^3 v^2(x - x_0) \left( |x - x_0|^2 - a\beta^2 t^2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sigma}\right) \right), \\
V_2 &= 8\sigma a(\nabla v \cdot (x - x_0))\partial_t v.
\end{aligned}$$

On a bien

$$|(U_2, V_2)| \leq C\sigma(|\nabla u|^2 + (\partial_t u)^2 + \sigma^2 u^2)e^{2\sigma\varphi},$$

et on obtient

$$\begin{aligned}
2z_1z_3 &= 4\sigma(3a + \nabla a \cdot (x - x_0))(\partial_t v)^2 - 4\sigma|\nabla v|^2 + \partial_t V_2 + \nabla \cdot U_2 \\
&\quad + 16\sigma^3 v^2 \left( 5|x - x_0|^2 - \beta^2 t^2(3a + \nabla a \cdot (x - x_0)) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sigma}\right) \right).
\end{aligned}$$

Si on suppose

$$\frac{a(x)}{2} + \nabla a(x) \cdot (x - x_0) \geq 0,$$

alors on a

$$\begin{aligned}
2z_1z_3 &\geq 10\sigma a(\partial_t v)^2 - 4\sigma|\nabla v|^2 + \partial_t V_2 + \nabla \cdot U_2 \\
&\quad + 16\sigma^3 v^2 \left( 5|x - x_0|^2 - \frac{5}{2}a\beta^2 t^2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sigma}\right) \right).
\end{aligned}$$

**Terme  $2z_1z_2 + 2z_1z_3$**

On repart du terme de  $2z_1z_2$  que l'on peut minorer ainsi

$$8\sigma\beta t \partial_t v (\nabla a \cdot \nabla v) \geq -8\sigma\beta|t|\|\partial_t v\|\|a\|_{C^1(\bar{\Omega})}|\nabla v| \geq -4\sigma\sqrt{\frac{\beta}{a_0}}da_1(a(\partial_t v)^2 + |\nabla v|^2),$$

puisque sur  $Q(0, \delta)$ , on  $\beta t^2 < |x - x_0|^2 \leq d^2$ . On pose  $\xi = \sqrt{\frac{\beta}{a_0}} d \|a\|_{C^1(\bar{\Omega})}$ . Donc on a

$$\begin{aligned} 2z_1 z_2 &\geq -4\sigma a (a\beta + \xi) (\partial_t v)^2 - 4\sigma (a\beta + \xi) |\nabla v|^2 + \partial_t V_1 + \nabla \cdot U_1 \\ &\quad + 16\sigma^3 a \beta v^2 \left( |x - x_0|^2 - 3a\beta^2 t^2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sigma}\right) \right), \end{aligned}$$

d'où on déduit que

$$\begin{aligned} 2z_1 z_2 + 2z_1 z_3 &\geq 4\sigma a \left( \frac{5}{2} - a\beta - \xi \right) (\partial_t v)^2 - 4\sigma (1 + a\beta + \xi) |\nabla v|^2 + \partial_t (V_1 + V_2) \\ &\quad + \nabla \cdot (U_1 + U_2) + 16\sigma^3 v^2 \left( (a\beta + 5)|x - x_0|^2 - \left( \frac{5}{2} + 3a\beta \right) a\beta^2 t^2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sigma}\right) \right). \end{aligned}$$

**Terme  $z_1^2$**

$$z_1^2 = \left( a\partial_t^2 v - \Delta v - 4\sigma^2 v \left( |x - x_0|^2 - a\beta^2 t^2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sigma}\right) \right) + \sigma b v \right)^2,$$

où  $b$  est un facteur quelconque pour le moment mais qui sera choisi de manière adéquate pour compenser des termes provenant des autres calculs.

$$\begin{aligned} z_1^2 &\geq 2\sigma b v \left( a\partial_t^2 v - \Delta v - 4\sigma^2 v \left( |x - x_0|^2 - a\beta^2 t^2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sigma}\right) \right) \right) \\ &\geq \partial_t (2\sigma b v a \partial_t v) - 2\sigma b a (\partial_t v)^2 - \nabla \cdot (2\sigma b v \nabla v) + 2\sigma b |\nabla v|^2 \\ &\quad - 8\sigma^3 b v^2 \left( |x - x_0|^2 - a\beta^2 t^2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sigma}\right) \right). \end{aligned}$$

On pose alors

$$U_3 = -2\sigma b v \nabla v \quad \text{et} \quad V_3 = 2\sigma b v a \partial_t v.$$

On a bien

$$|(U_3, V_3)| \leq C\sigma b (|\nabla v|^2 + (\partial_t v)^2 + \sigma^2 v^2) e^{2\sigma\varphi},$$

et on obtient

$$z_1^2 \geq \partial_t V_3 - 2\sigma b a (\partial_t v)^2 + \nabla \cdot U_3 + 2\sigma b |\nabla v|^2 - 8\sigma^3 b v^2 \left( |x - x_0|^2 - a\beta^2 t^2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sigma}\right) \right).$$

**On regroupe tous les termes**

On pose alors

$$U = U_1 + U_2 + U_3 \quad \text{et} \quad V = V_1 + V_2 + V_3.$$

En particulier, on a

$$\begin{aligned} V &= 4\sigma a^2 \beta t (\partial_t v)^2 + 4\sigma a \beta t |\nabla v|^2 + 16\sigma^3 a \beta v^2 \left( t|x - x_0|^2 - a\beta^2 t^3 + t \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sigma}\right) \right) \\ &\quad + 8\sigma a (\nabla v \cdot (x - x_0)) \partial_t v + 2\sigma b v a \partial_t v. \end{aligned}$$

On a bien

$$|(U, V)| \leq C\sigma b(|\nabla u|^2 + (\partial_t u)^2 + \sigma^2 u^2)e^{2\sigma\varphi},$$

et on vérifie que  $V(x, 0) = 0$  si  $u(x, 0) = 0$  ou  $\partial_t u(x, 0) = 0, \forall x \in \Omega$ . Finalement, on obtient

$$\begin{aligned} 2z_1z_2 + 2z_1z_3 + z_1^2 &\geq 4\sigma a \left( \frac{5}{2} - a\beta - \xi - \frac{b}{2} \right) (\partial_t v)^2 + 4\sigma \left( \frac{b}{2} - 1 - a\beta - \xi \right) |\nabla v|^2 \\ &+ \partial_t V + \nabla \cdot U + 16\sigma^3 v^2 \left( (a\beta + 5 - \frac{b}{2})|x - x_0|^2 - \left( \frac{5}{2} + 3a\beta - \frac{b}{2} \right) a\beta^2 t^2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sigma}\right) \right). \end{aligned}$$

On veut que les coefficients multipliant  $(\partial_t v)^2, |\nabla v|^2$  et  $v^2$  soient positifs. On choisit donc  $b = 4$ , on suppose que  $0 \leq \beta \leq 1$  et on utilise le fait que  $a_0 \leq a(x) \leq a_1$ , ce qui conduit à

$$\begin{aligned} 2z_1z_2 + 2z_1z_3 + z_1^2 &\geq 4\sigma a_0 \left( \frac{1}{2} - \sqrt{\beta} \left( a_1 + \frac{d}{\sqrt{a_0}} \|a\|_{C^1(\bar{\Omega})} \right) \right) (\partial_t v)^2 \\ &+ 4\sigma \left( 1 - \sqrt{\beta} \left( a_1 + \frac{d}{\sqrt{a_0}} \|a\|_{C^1(\bar{\Omega})} \right) \right) |\nabla v|^2 + \partial_t V + \nabla \cdot U \\ &+ 16\sigma^3 v^2 \left( 3|x - x_0|^2 - \left( \frac{1}{2} + 3a\beta \right) a_1 \beta^2 t^2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sigma}\right) \right). \end{aligned}$$

Si on suppose alors que

$$\sqrt{\beta} \leq \sqrt{\beta_0} = \min \left[ \frac{1}{4 \left( a_1 + \frac{d}{\sqrt{a_0}} \|a\|_{C^1(\bar{\Omega})} \right)}, \sqrt{\frac{5}{6a_1}} \right] \leq 1,$$

on obtient finalement

$$(\mathcal{P}_0 u(x, t))^2 e^{2\sigma\varphi(x, t)} \geq \sigma a_0 (\partial_t v)^2 + 3\sigma |\nabla v|^2 + 48\delta \sigma^3 v^2 + \partial_t V + \nabla \cdot U,$$

puisque l'on travaille dans  $Q(0, \delta)$  dans lequel

$$3|x - x_0|^2 - \left( \frac{1}{2} + 3a\beta \right) a_1 \beta^2 t^2 \geq 3(|x - x_0|^2 - \beta^2 t^2) \geq 3\delta.$$





# Annexe B

## Compléments sur la transformée de Fourier-Bros-Iagolnitzer

Dans cette seconde annexe, nous revenons sur la transformée de Fourier-Bros-Iagolnitzer (FBI) [8], évoquée au Chapitre 2 et dont nous avons proposé une variante dans notre démonstration du Théorème 2.1. Nous présentons ici la transformée originale et énonçons certaines de ses propriétés élémentaires. Nous présentons les résultats sur  $\mathbb{R}$  mais ils sont également valables sur  $\mathbb{R}^n$ , pour  $n \in \mathbb{N}^*$ . Pour plus de détails, le lecteur pourra se reporter aux ouvrages de Delort [21], Sjöstrand [84], Krantz et Parks [50] et Martinez [65].

### Définition

La transformée FBI est une version non linéaire de la transformée de Fourier. Définissons tout d'abord l'espace de Schwartz  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  des fonctions rapidement décroissantes. C'est l'espace des fonctions  $C^\infty(\mathbb{R})$  telles que la fonction et chacune de ses dérivées s'annulent à l'infini plus vite que tout polynôme. On a  $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$ . Tous les fonctions  $C^\infty(\mathbb{R})$  à support compact sont des fonctions de  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ . Son dual topologique,  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$  est l'espace des distributions tempérées. Toute distribution à support compact est tempérée.

La transformée FBI d'une distribution  $u$  de  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$  est définie, pour tout  $\gamma \geq 0$ , par

$$(\mathcal{F}_\gamma u)(z) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\gamma}{2}(z-y)^2} u(y) dy, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Tout comme pour la transformée de Fourier, les définitions de la transformée FBI peuvent varier d'un ouvrage à l'autre, principalement en ce qui concerne les constantes de normalisation. Sous la forme présentée ici, elle est aussi parfois appelée transformée de Bargman.

### Propriétés

1. Pour tout  $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ ,  $\mathcal{F}_\gamma u$  est une fonction entière en la variable complexe  $z$  et analytique réelle en  $\gamma$ .
2. Si  $u \in L^2(\mathbb{R})$  alors  $\mathcal{F}_\gamma u \in L^2(\mathbb{C})$  et on a :

$$C \|\mathcal{F}_\gamma u\|_{L^2(\mathbb{C})} = \|u\|_{L^2(\mathbb{R})},$$

où  $C$  est une constante de normalisation.

3. Pour tout  $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ , avec  $z = t + ir \in \mathbb{C}$ , on a

$$\partial_t (\mathcal{F}_\gamma u) = i \partial_r (\mathcal{F}_\gamma u).$$

4. Formule d'inversion : Soit  $u \in \mathcal{S}'$ . Pour tout  $t \in \mathbb{R}$  et  $s \in ]0, 1[$ , on définit :

$$u_s(t) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\gamma}{2}} \int_{|\omega|=1} \left( 1 + \frac{i\omega}{\gamma} \partial_z \right) (\mathcal{F}_\gamma u)(t + i r \omega) d\omega d\gamma.$$

Alors,  $u_s$  est une fonction analytique réelle en  $t$  qui converge, au sens des distributions, vers  $u$  quand  $r$  tend vers  $1^-$ .

La transformée FBI est utilisée pour deux applications : tout d'abord, pour prouver le caractère analytique locale d'une distribution (voir Théorème B.1) mais également en tant qu'opérateur de Fourier intégral (dans le domaine complexe) pour réduire micro localement un opérateur différentiel  $\mathcal{P}$  à une forme plus simple, pour plus de détails se reporter à Robbiano et Zuily [80].

**Théorème B.1** (Critère d'analyticité locale, Bros et Iagolnitzer [8]). *Soit  $t_0 \in \mathbb{R}$ . Une distribution  $u$  est localement égale à une fonction analytique réelle en  $t_0$  si et seulement s'il existe des constantes positives  $C$  et  $m$  telles que pour tout  $\gamma > 0$ , pour tout  $t$  proche de  $t_0$  et pour tout  $|r|$  suffisamment grand, la transformée FBI satisfasse l'inégalité :*

$$|(\mathcal{F}_\gamma u)(t + ir)| \leq C e^{-m\gamma}.$$

*Si de plus,  $u$  est dans  $C_0^\infty(\mathbb{R})$  alors elle est analytique réelle dans un voisinage de  $t_0$ .*

Par ailleurs, la transformée FBI permet de démontrer le résultat suivant :

**Théorème B.2** (Théorème de Holmgren [36]). *Soit  $\mathcal{P}$  un opérateur différentiel elliptique défini sur un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}$  et dont les coefficients sont analytiques. Si  $\mathcal{P}u$  est analytique dans  $\Omega$  alors  $u$  l'est aussi.*

## Annexe C

# Contrôlabilité approchée du système de Lamé

Dans cette troisième annexe, nous nous intéressons au problème de contrôlabilité approchée pour le système de Lamé stationnaire. Le contrôle agit sur une partie de la frontière du domaine  $\Omega$  et le champ de déplacement est observé sur une courbe  $S$ , intérieure à  $\Omega$ . Nous suivons la démarche proposée par Osses et Puel pour l'équation de Laplace dans [73] et le système de Stokes dans [72]. Nous énonçons le résultat de contrôlabilité approchée en norme  $L^2$ , valable sous certaines hypothèses géométriques portant sur la courbe  $S$ . Nous construisons un contrôle de norme  $L^2$  minimale par dualité. Pour calculer le contrôle, nous minimisons une fonctionnelle non quadratique.

### Énoncé du problème

Soit  $\Omega$  un ouvert borné connexe de  $\mathbb{R}^2$ , de frontière  $\Gamma = \bar{\Gamma}_0 \cup \bar{\Gamma}_1$  lipschitzienne. Nous considérons le système de l'élasticité linéaire :

*Chercher le déplacement  $u$  solution de :*

$$\begin{cases} -\nabla \cdot \sigma(u) = 0, & \text{dans } \Omega, \\ u = 0, & \text{sur } \Gamma_0, \\ u = v, & \text{sur } \Gamma_1, \end{cases} \quad (\text{C.1})$$

où  $\sigma(u) = \mu(\nabla u + \nabla u^T) + \lambda \nabla \cdot u \text{ Id}$  avec  $\lambda$  et  $\mu$  dans  $\mathbb{R}_*^+$  et où  $v$  est un contrôle de frontière agissant sur  $\Gamma_1$ .

Soit  $S$  une courbe régulière incluse dans  $\Omega$ . Nous nous donnons un déplacement  $u_d$  sur  $S$  et nous cherchons un contrôle  $v$  qui permet d'obtenir un champ de déplacement  $u(v)$  dans  $\Omega$  dont la trace  $u(v)|_S$  sur  $S$  est proche du champ donné  $u_d$ . Ce contrôle n'est pas unique. Pour en caractériser un en particulier, nous imposons une condition supplémentaire qui nous amène à résoudre le problème suivant :

*Connaissant  $u_d \in L^2(S)^2$  et  $\alpha > 0$ , trouver un contrôle  $v \in L^2(\Gamma_1)^2$  solution de :*

$$\min_v \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} v^2 d\gamma, \text{ tel que } \|u(v)|_S - u_d\|_{L^2(S)} \leq \alpha \right\}.$$

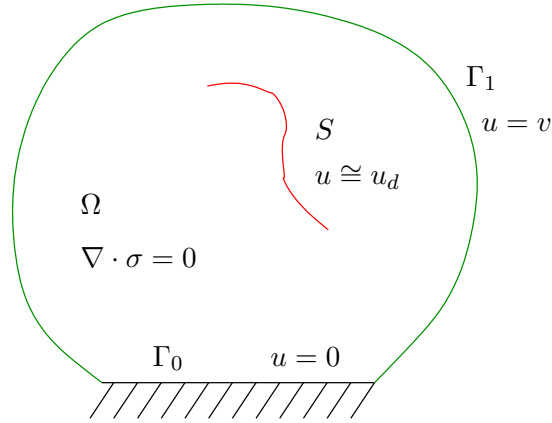


FIG. C.1 – Notations du problème de contrôlabilité approchée.

### Théorème et méthode de dualité

Afin que  $u$  soit suffisamment régulière pour que sa trace sur  $S$  ait un sens,  $S$  et  $\Gamma$  doivent être strictement séparés. On suppose donc :

$$\overline{S} \cup \Gamma = \emptyset. \quad (\text{C.2})$$

Les effets du contrôle  $v$  sur  $\Gamma_1$  doivent atteindre  $S$ . Il faut donc que tous les points de  $S$  puissent être connectés à  $\Gamma_1$  par un arc simple dans  $\Omega$  qui ne croise pas  $\overline{S}$ . Ceci revient à supposer la condition suivante :

$$\forall x \in S, \quad \exists a_x \in C([0, 1, \overline{\Omega}]), \quad \forall t \in ]0, 1[, a_x(t) \in \Omega \setminus \overline{S}, \quad a_x(0) = x, \quad a_x(1) \in S. \quad (\text{C.3})$$

**Théorème C.1.** *Sous les hypothèses (C.2) et (C.3), pour tout  $u_d \in L^2(S)$  et pour tout  $\alpha > 0$ , il existe un unique contrôle  $\hat{v} \in L^2(\Gamma_1)^2$  solution du problème de minimisation :*

$$\min_v \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} v^2 d\gamma, \text{ tel que } \|u(v)|_S - u_d\|_{L^2(S)} \leq \alpha \right\}.$$

De plus, on a la relation d'erreur suivante :

$$\|u(\hat{v})|_S - u_d\|_{L^2(S)} = \min\{\alpha, \|u_d\|_{L^2(S)}\}. \quad (\text{C.4})$$

Nous définissons alors, pour tout  $\varphi_0 \in L^2(S)^2$ , la fonctionnelle suivante :

$$J(\varphi_0) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} |-\sigma(\varphi) \cdot n|^2 d\gamma + \alpha \|\varphi_0\|_{L^2(S)} - \int_S u_d \cdot \varphi_0 d\gamma$$

avec  $\varphi$  l'unique solution du problème dual :

$$\begin{cases} -\nabla \cdot \sigma(\varphi) = \varphi_0 \delta_S, & \text{dans } \Omega, \\ \varphi = 0, & \text{sur } \Gamma, \end{cases} \quad (\text{C.5})$$

où  $\delta_S$  est la distribution de Dirac sur  $S$ .

**Théorème C.2.** *Sous les hypothèses (C.2) et (C.3), pour tout  $u_d \in L^2(S)$  et pour tout  $\alpha > 0$ , le problème de minimisation de  $J$  admet une unique solution  $\hat{\varphi}_0 \in L^2(S)^2$  qui vérifie :*

$$\hat{v} = \sigma(\hat{\varphi}) \cdot n.$$

La démonstration de ces résultats est une simple modification de celle du Théorème 1.2 de [72].

### Résolution et exemple numérique

Les problèmes primal et dual sont résolus par éléments finis  $\mathbb{P}_2$  grâce au logiciel FreeFem++ [33]. La fonctionnelle  $J$  est minimisée par un algorithme BFGS [69]. Une fois  $\hat{\varphi}_0$  obtenue par minimisation de  $J$ , on résout le problème dual (C.5) pour calculer  $\hat{\varphi}$ . On obtient alors  $\hat{v} = \sigma(\hat{\varphi}) \cdot n$  et on peut donc résoudre le problème primal (C.1) avec  $\hat{v}$  comme contrôle. Les détails techniques de l'implémentation (calcul du gradient de  $J$ , mise sous forme matricielle des problèmes) peuvent être trouvés dans Osses et Puel [72], où ils sont exposés dans le cas du problème de Stokes.

Nous proposons ici un exemple de mise en œuvre de ces méthodes. Nous choisissons  $\Omega$  comme le cercle unité centré en  $(0,0)$ . La courbe  $S$  est une ellipse d'équations  $x = 0.1 + 0.16 \cos(t)$  et  $y = 0.2 + 0.1 \sin(t)$ , paramétrées par  $t \in [0, 2\pi]$ . Le déplacement  $u_d$ , donné sur  $S$ , est tel que  $S$  devienne un cercle de rayon 0.1, centré en  $(0,0)$ . On choisit les valeurs  $\mu = \lambda = 10^6 Pa$  des coefficients de Lamé. La Figure C.3 montre les différents résultats obtenus en résolvant le problème. La Figure C.2 présente l'erreur numérique  $\|u_h - u_d\|_{L^2(S)}$ , ainsi que l'erreur théorique prescrite par la formule (C.4), en fonction du paramètre  $\alpha$ .

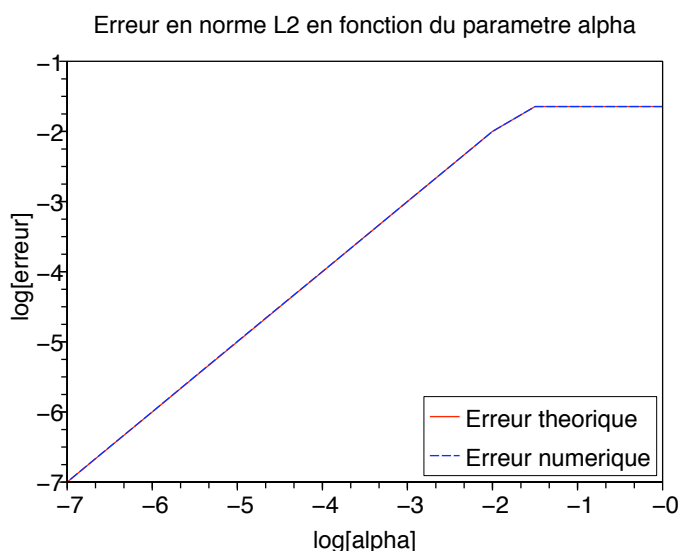


FIG. C.2 – Erreur théorique et numérique en fonction de  $\alpha$  pour le problème de contrôlabilité approchée.

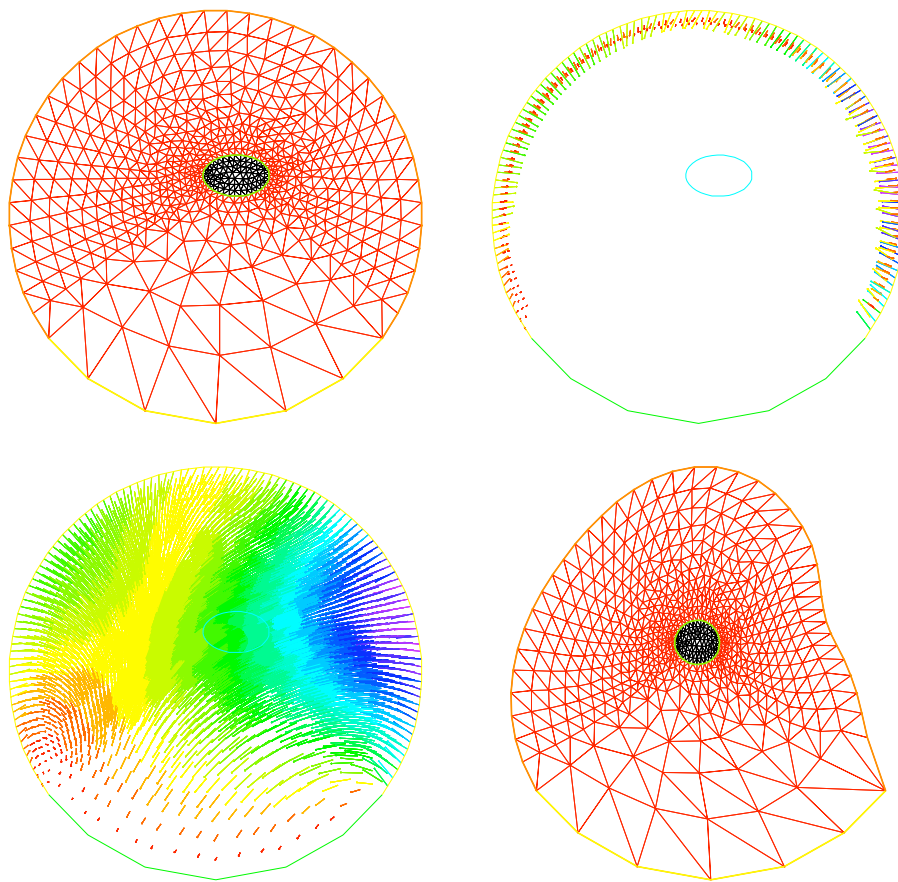


FIG. C.3 – (a) Configuration initiale :  $\Gamma_0$  en orange clair,  $\Gamma_1$  en orange foncé et  $S$  en vert. (b) Contrôle  $\hat{v}$  sur  $\Gamma_1$ . (c) Champ de déplacements  $u$  dans  $\Omega$ . (d) Configuration déformée.

# Table des figures

1	<i>Comportement d'un matériau viscoélastique soumis à une contrainte constante.</i>	5
2	<i>Schéma illustrant formellement les résultats démontrés dans la première partie.</i>	11
3	<i>(a) Donnée initiale <math>\bar{u}_0</math>. (b) Zone d'observation <math>\omega</math>. (c) Coefficient exact. (d) Coefficient récupéré.</i>	13
4	<i>Déformation du domaine <math>\Omega</math>.</i>	13
5	<i>(a) Maillage. (b) Champ de déformations du cerveau soumis à la gravité.</i>	15
6	<i>Schéma rhéologique du modèle viscoélastique/viscoplastique linéaire unidimensionnel avec <math>\sigma</math> la contrainte et <math>\varepsilon</math>, <math>\varepsilon_e</math>, <math>\varepsilon_v</math> et <math>\varepsilon_{vp}</math> les déformations totale, élastique, visqueuse et viscoplastique, respectivement.</i>	16
1	<i>Fonction poids de Carleman <math>\varphi(x, t)</math> pour <math>x_0 = 0</math> et <math>\beta = 1</math>.</i>	21
2	<i>Isovaleurs de la fonction poids de Carleman <math>\varphi(x, t) = \delta</math> pour <math>x_0 = 0</math> et <math>\beta = 1</math>.</i>	21
3	<i>Définitions des distances <math>d_0</math> et <math>d</math>.</i>	22
4	<i>Définition des espaces <math>\Omega(\varepsilon)</math> et <math>Q(\varepsilon, \delta)</math>.</i>	22
1.1	<i>Définition de l'ouvert <math>\Omega_t(\varepsilon, \delta)</math>.</i>	29
1.2	<i>Définition du temps <math>t_x^\delta</math>.</i>	30
1.3	<i>Définition de la fonction plateau <math>\chi_1</math>.</i>	31
1.4	<i>Définition de l'ouvert régulier <math>\mathcal{O}</math>.</i>	34
2.1	<i>Définition du voisinage <math>\omega</math> de <math>\partial\Omega</math> et de la fonction plateau <math>\chi_3</math>.</i>	40
2.2	<i>Définition de la fonction plateau <math>\theta</math>.</i>	42
2.3	<i>Définition de <math>x^{(0)}</math> et <math>\eta</math>.</i>	48
2.4	<i>Définition de <math>\chi_4</math>.</i>	49
2.5	<i>Définition de <math>x^{(1)}</math> et de <math>\rho</math>.</i>	50
2.6	<i>Définition des <math>B(x^{(j)}, \rho)</math>.</i>	51
3.1	<i>Définition du voisinage <math>\omega</math> de <math>\partial\Omega</math> et de la fonction plateau <math>\chi_2</math>.</i>	63
4.1	<i>Maillage de calcul (à gauche). Données initiale <math>\bar{u}_0</math> (à droite).</i>	72
4.2	<i>Fonctions de base <math>n^\circ 1</math>, <math>n^\circ 2</math> et <math>n^\circ 4</math>.</i>	76
4.3	<i>Maillage (à gauche). Coefficient exact <math>\bar{p}</math> (au centre et à droite).</i>	77
4.4	<i>Maillage (à gauche). Relèvement <math>\bar{p} _{\partial\Omega}</math> (au centre et à droite).</i>	77
4.5	<i>Coefficient récupéré pour <math>K = 4</math>, <math>K = 10</math> et <math>K = 16</math>.</i>	79
4.6	<i>Différentes zones d'observation <math>\omega</math> (en haut) et les solutions <math>p^*</math> correspondantes (en bas).</i>	80
4.7	<i>Choix de la zone d'observation <math>\omega</math>. À gauche, certaines ondes sont perdues. À droite, toutes les ondes sont capturées.</i>	81



4.8	Coefficient récupéré pour $T = 5$ , $T = 25$ et $T = 50$ . . . . .	82
4.9	Coefficient récupéré pour $\delta = 0$ , $\delta = 10\%$ et $\delta = 20\%$ . . . . .	82
4.10	Grande variété de cas pathologiques. . . . .	83
4.11	Coefficient à récupérer $\bar{p}$ , vue du dessus (à gauche), vue 3D (à droite). . . . .	84
4.12	Maillage de calcul de $u$ (à gauche). Déplacement initial $\bar{u}_0$ (au centre). Zone d'observation $\omega$ en rouge (à droite). . . . .	84
4.13	Fonctions de la base initiale n°1, n°2 et n°5. . . . .	85
4.14	Fonctions de la base adaptée n°1, n°2 et n°5. . . . .	85
4.15	Maillage initial (à gauche). Maillage adapté après deux itérations (à droite). . . . .	85
4.16	Coefficient exact $\bar{p}$ à récupérer. . . . .	86
4.17	Coefficient récupéré $p^*$ : (à gauche) à l'itération 0 avec $K_0 = 50$ , (au centre) à l'itération 0 avec $K_0 = 100$ , (à droite) à l'itération 2 avec $K_0 = K_1 = K_2 = 50$ . . . . .	86
4.18	Erreur relative entre $p^*$ et $\bar{p}$ en norme $L^2$ en fonction de $K$ . . . . .	87
4.19	(a) Domaine de calcul. (b) Coupe dans le maillage volumique au niveau de la tumeur. (c) Maillage surfacique. (d) Déplacement initial. . . . .	88
5.1	Modèle de Maxwell généralisé. . . . .	96
5.2	Fonctions de forme $\mathbb{P}_2$ sur le tétraèdre de référence. . . . .	103
5.3	Recherche et numérotation des points milieux d'arêtes. . . . .	103
5.4	Format de stockage d'une matrice creuse. . . . .	104
5.5	Expérience de compression simple d'un cube : notations. . . . .	105
5.6	Configuration au repos, configuration déformée. . . . .	106
5.7	Evolution de la pression $p$ (a), de la contrainte verticale $T_Z$ (b) et de la composante verticale de la seconde variable interne $G_2$ (c) en fonction du temps pendant l'essai de compression. Comparaison entre la solution pseudo-analytique (ligne continue) et la solution numérique (croix). . . . .	108
5.8	(a) Maillage, (b,c,d) Déformation de la pièce mécanique observée de différents points de vue. . . . .	109
6.1	(a) Un exemple d'IRM. (b) Système d'entraînement de chirurgiens. . . . .	112
6.2	Echantillon au repos (gauche), échantillon déformé (droite) . . . . .	113
6.3	Evolution de la contrainte pour trois taux de compression : (a) $6.4 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1}$ , (b) $6.4 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ , (c) $6.4 \cdot 10^{-1} \text{ s}^{-1}$ . Comparaison entre la solution expérimentale mesurée par Miller [67] et la solution numérique. . . . .	114
6.4	Comparaison entre les solutions expérimentales mesurées par Libertiaux [59] (lines) et les solutions numériques (crosses). (a) Relation entre la contrainte réelle $\alpha T$ et la déformation réelle $\log(\alpha)$ pour trois vitesses de compression. (b)(c) Evolution de la force vertical en fonction du temps pendant l'essai de relaxation. . . . .	115
6.5	Echantillon au repos (à gauche). Echantillon déformé (à droite) . . . . .	116
6.6	Evolution of de la contrainte de cisaillement en fonction du temps. Comparaison entre la solution expérimentale mesurée par Ning et al. [70] et la solution numérique. . . . .	116
6.7	(a) Triangulation de surface obtenue à partir d'IRM. (b) Zoom sur la triangulation. (c) Triangulation de surface adaptée aux propriétés géométriques. (d) Génération d'une triangulation 3D. . . . .	117

6.8	<i>Photos de cerveaux humains (à gauche). Maillage de calcul sous différents angles (à droite).</i> . . . . .	118
6.9	<i>Champs de déformation du cerveau soumis à la gravité, à <math>t = 0</math> (à gauche) et à l'état stationnaire (à droite).</i> . . . . .	120
7.1	<i>Le modèle viscoélastique de Maxwell.</i> . . . . .	122
7.2	<i>Résultat d'un essai de relaxation.</i> . . . . .	123
7.3	<i>Le modèle élastique/viscoplastique de Perzyna.</i> . . . . .	124
7.4	<i>Résultat d'un essai de relaxation.</i> . . . . .	125
7.5	<i>Expérience de charge/décharge.</i> . . . . .	125
7.6	<i>Modèle viscoélastique/viscoplastique linéaire 1D.</i> . . . . .	126
7.7	<i>Déformation du domaine <math>\Omega</math>.</i> . . . . .	127
7.8	<i>Décomposition multiplicative du gradient de déformation.</i> . . . . .	129
C.1	<i>Notations du problème de contrôlabilité approchée.</i> . . . . .	146
C.2	<i>Erreur théorique et numérique en fonction de <math>\alpha</math> pour le problème de contrôlabilité approchée.</i> . . . . .	147
C.3	<i>(a) Configuration initiale : <math>\Gamma_0</math> en orange clair, <math>\Gamma_1</math> en orange foncé et <math>S</math> en vert. (b) Contrôle <math>\hat{v}</math> sur <math>\Gamma_1</math>. (c) Champ de déplacements <math>u</math> dans <math>\Omega</math>. (d) Configuration déformée.</i> . . . . .	148



# Bibliographie

- [1] H. Ammari, P. Garapon, H. Kang, and H. Lee. A method of biological tissues elasticity reconstruction using magnetic resonance elastography measurements. *Quarterly of Applied Mathematics*, 66 :139–175, 2008.
- [2] I. Babuška. The finite element method with lagrangian multipliers. *Numerische Mathematik*, 20 :3 :179–192, 1973.
- [3] M. Bellassoued. Unicité et contrôle pour le système de Lamé. *ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 6 :561–592, 2001.
- [4] M. Bellassoued, O. Imanuvilov, and M. Yamamoto. Inverse problem of determining the density and the Lamé coefficients by boundary data. *SIAM J. Math. Anal.*, 40 :238–265, 2008.
- [5] M. Bellassoued and M. Yamamoto. Logarithmic stability in determination of a coefficient in an acoustic equation by arbitrary boundary observation. *J. Math. Pures Appl.*, 85 :193–224, 2006.
- [6] H. Bellout and J. Nečas. Existence of global weak solutions for a class of quasilinear hyperbolic integro-differential equations describing visco-elastic materials. *Math. Ann.*, 299 :275–291, 1994.
- [7] D.W.A. Brands, G.W.M. Peters, and P.H.M. Bovendeerd. Design and numerical implementation of a 3-D non-linear viscoelastic constitutive model for brain tissue during impact. *Journal of Biomechanics*, 37 :127–134, 2004.
- [8] J. Bros and D. Iagolnitzer. Causality and local analyticity : general results and some applications to quantum field theory. *Trudy Mat. Inst. Steklov.*, 135 :54–67, 1975.
- [9] M. Bucki, C. Lobos, and Y. Pahan. Bio-mechanical model of the brain for a per-operative image-guided neuronavigator compensating for brain-shift deformations. *Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering*, Supplement 1 :25–26, 2007.
- [10] A.L. Bukhgeim. *Introduction to the Theory of Inverse Problems*. VSP, Utrecht, 2000.
- [11] A.L. Bukhgeim and M.V. Klibanov. Global uniqueness of class of multidimensional inverse problems. *Soviet Math. Dokl.*, 24 :244–247, 1981.
- [12] T. Carleman. Sur un problème d’unicité pour les systèmes d’équations aux dérivées partielles à deux variables indépendantes. *Ark. Mat. Astr. Fys.*, 2B :1–9, 1939.
- [13] C. Cavaterra, A. Lorenzi, and M. Yamamoto. A stability result via Carleman estimates for an inverse source problem related to a hyperbolic integro-differential equation. *Computational and Applied Mathematics*, 25 :229–250, 2006.
- [14] P.-G. Ciarlet. *Mathematical Elasticity*. North-Holland, Amsterdam, New-York, 1988.
- [15] J. Salençon. *Mécanique des milieux continus*. Ellipses Editeur, Paris, 1988.

- [16] K. Darvish and J. Crandall. Nonlinear viscoelastic effects in oscillatory shear deformation of brain tissue. *Medical Engineering & Physics*, 23 :633–645, 2001.
- [17] R. Dautray and J.-L. Lions. *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*, volume 2. Masson, 1987.
- [18] M. de Buhan and P. Frey. A generalized model of nonlinear viscoelasticity : numerical issues and application to the simulation of the brain shift. *à paraître dans IJNME*, 2010.
- [19] M. de Buhan and A. Osses. Un résultat de stabilité pour la récupération d’un paramètre du système de la viscoélasticité 3D. *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* 347 :1373–1378, 2009.
- [20] M. de Buhan and A. Osses. Logarithmic stability in determination of a 3D viscoelastic coefficient and a numerical example. *Inverse Problems*, 26 :095006, 2010.
- [21] J.-M. Delort. F.B.I transformation : Second microlocalization and semilinear caustics. In *Lecture Notes in Mathematics*, volume 1522. Springer Berlin, 1992.
- [22] T. El Sayed, A. Mota, F. Fraternali, and M. Ortiz. A variational constitutive model for soft biological tissues. *Journal of Biomechanics*, 41 :1458–1466, 2008.
- [23] M. Eller, V. Isakov, G. Nakamura, and D. Tataru. Uniqueness and stability in the Cauchy problem for Maxwell and elasticity system. In *Nonlinear Partial Differential Equations and Their Applications*, volume 14, pages 329–349. North-Holland, Amsterdam, 2002.
- [24] H.W. Engl, M. Hanke, and A. Neubauer. *Regularization of Inverse Problems*. Kluwer, Dordrecht, 1996.
- [25] M. Fortin and R. Glowinski. *Méthode de Lagrangien Augmenté*. Dunod-Bordas, Paris, 1982.
- [26] P. Frey. Generation and adaptation of computational surface meshes from discrete anatomical data. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 60 :1049–1074, 2004.
- [27] P. Frey. Medit. <http://www.ann.jussieu.fr/frey/software.html>, version 3.0.
- [28] P. Frey and P.-L. George. *Mesh generation. Application to finite elements*. Wiley, 2008.
- [29] A.V. Fursikov and O.Y. Imanuvilov. *Controllability of Evolution Equations*. Seoul National University, Seoul, 1996.
- [30] M. Grasselli. Determining the relaxation tensor in linear viscoelasticity of integral type. *Japan J. Ind. Appl. Math.*, 11 :131–153, 1994.
- [31] M. Grasselli. On an inverse problem for a linear hyperbolic integrodifferential equation. *Forum Math.*, 6 :83–100, 1994.
- [32] J. Hadamard. Sur les problèmes aux dérivées partielles et leur signification physique. *Princeton University Bulletin*, pages 49–52, 1902.
- [33] F. Hecht. Freefem++. <http://www.freefem.org>, version 2.17-1.
- [34] R. Hill. *The Mathematical Theory of Plasticity*. The Oxford Engineering Science Series, 1950.
- [35] G.A. Holzapfel and T.C. Gasser. A viscoelastic model for fiber-reinforced composites at finite strains : continuum basis, computational aspects and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190 :4379–4403, 2001.

- [36] L. Hörmander. *Linear Partial Differential Operators*. Berlin, 1963.
- [37] M. Hrapko, J.A.W. van Dommelen, G.W.M. Peters, and J.S.H.M. Wismans. The mechanical behaviour of brain tissue : Large strain response and constitutive modelling. *Biorheology*, 43 :633–636, 2006.
- [38] A. Ibrahimbegovic. *Mécanique non linéaire des solides déformables*. Lavoisier, 2006.
- [39] A. Ibrahimbegovic and L. Chorfi. Viscoplasticity model at finite deformations with combined isotropic and kinematic hardening. *Computers and Structures*, 77 :509–525, 2000.
- [40] O. Imanuvilov and J.-P. Puel. Global Carleman estimates for weak solutions of elliptic nonhomogeneous Dirichlet problems. *Int. Math. Res. Not.*, 16 :883–913, 2003.
- [41] O. Imanuvilov and M. Yamamoto. Global uniqueness and stability in determining coefficients of wave equations. *Commun. Partial Diff. Eqns.*, 26 :1409–1425, 2001.
- [42] O. Imanuvilov and M. Yamamoto. Carleman estimates for the three-dimensional nonstationary Lamé system and applications to an inverse problem. *Control Theory of Partial Differential Equations, Lect. Notes Pure Appl. Math.*, 242 :337–374, 2005.
- [43] V. Isakov. *Inverse Problems for Partial Differential Equations*. Berlin, Springer, 1998.
- [44] C.E. Jamison, R.D. Marangoni, and A.A. Glaser. Viscoelastic properties of soft tissue by discrete model characterization. *Journal of Biomechanics*, 1 :33–46, 1968.
- [45] J. Janno. Identification of weakly singular relaxation kernels in three-dimensional viscoelasticity. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 262 :133–159, 2001.
- [46] J. Janno and L. von Wolfersdorf. Inverse problems for identification of memory kernels in viscoelasticity. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 20 :291–314, 1997.
- [47] M. Kern. *Problèmes inverses. Aspects numériques*. Cours de l'école supérieure d'ingénieurs Léonard de Vinci, 2003.
- [48] A. Kirsch. An introduction to the mathematical theory of inverse problems. In *Applied Mathematical Sciences*, volume 120. Springer-Verlag, 1991.
- [49] M.V. Klibanov and A. Timonov. *Carleman Estimates for Coefficient Inverse Problems and Numerical Applications*. VSP, Utrecht, 2004.
- [50] S.G. Krantz and H.R. Parks. *A primer of real analytic functions*. Springer Science and Business, 2002.
- [51] A. Lada and L. Sidz. Approximate boundary controllability for the system of linear elasticity. *Math. Meth. Appl. Sci.*, 27 :2017–2026, 2004.
- [52] R. Lakes. *Viscoelastic solids*. CRC Press, 1998.
- [53] M.M. Lavrent'ev. *Some Ill-Posed Problems of Mathematics Physics*. Berlin, Springer, 1967.
- [54] M.M. Lavrent'ev, V.G. Romanov, and S.P. Shishat'skii. *Ill-posed Problems of Mathematical Physics and Analysis*. American Mathematical Society, Rhode Island, 1986.
- [55] P. Le Tallec. Numerical methods for nonlinear three-dimensional elasticity. In *Handbook of Numerical Analysis*, volume 3, pages 465–624. P. G. Ciarlet and J.L. Lions eds, North-Holland, 1994.
- [56] P. Le Tallec, C. Rahier, and A. Kaiss. Three-dimensional incompressible viscoelasticity in large strains : formulation and numerical approximation. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 109 :233–258, 1993.

- [57] G. Lebeau and L. Robbiano. Contrôle exact de l'équation de la chaleur. *Comm. Partial Differential Equations*, 20 :335–356, 1995.
- [58] E. Lee. Elastic-plastic deformations at finite strains. *J. Applied Mechanics*, 36 :1–6, 1969.
- [59] V. Libertiaux. *Contribution to the study of the mechanical properties of brain tissue : fractional calculus-based model and experimental characterization*. Thèse de Doctorat de l'Université de Liège, 2010.
- [60] A. Lorenzi. A multidimensional identification problem related to a hyperbolic integrodifferential equation. *Z. für Analysis und ihre Anwendungen*, 18 :407–435, 1999.
- [61] A. Lorenzi, F. Messina, and V. G. Romanov. Recovering a Lamé kernel in a viscoelastic system. *Applicable Analysis*, 86 :11 :1375–1395, 2007.
- [62] A. Lorenzi, Z.S. Ulekova, and V.G. Yakhno. An inverse problem in viscoelasticity. *J. Inv. Ill-Posed Problems*, 2 :2 :131–164, 1994.
- [63] J. Lubliner. A model of rubber viscoelasticity. *Mechanics Research Communications*, 12 :93–99, 1985.
- [64] J. Mandel. Equations constitutives et directeurs dans les milieux plastiques et viscoplastiques. *International Journal of Solids and Structures*, 9 :725–740, 1972.
- [65] A. Martinez. *An introduction to semiclassical and microlocal analysis*. Springer Verlag New York, 2002.
- [66] M. I. Miga, K.D. Paulsen, F.E. Kennedy, P.J. Hoopes, A. Hartov, and D.W. Roberts. Modeling surgical loads to account for subsurface tissue deformation during stereotactic surgery. *IEEE SPIE Proceedings of Laser-Tissue Interaction IX, Part B : Soft-tissue Modeling*, 3254 :501–511, 1998.
- [67] K. Miller. Constitutive modelling of brain tissue : experiment and theory. *Journal of Biomechanics*, 30 :1115–1121, 1997.
- [68] K. Miller and K. Chinzei. Mechanical properties of brain tissue in extension. *Journal of Biomechanics*, 35 :483–490, 2002.
- [69] A. Modica. *Nonlinear Programming : Analysis and Methods*. Dover Publishing, 2003.
- [70] X. Ning, Q. Zhu, Y. Lanir, and S.S. Margulies. A transversely isotropic viscoelastic constitutive equation for brainstem undergoing finite deformation. *Journal of Biomechanical Engineering (ASME)*, 128 :925–933, 2006.
- [71] J.T. Oden. *Finite Elements for Nonlinear Continua*. McGraw Hill, 1972.
- [72] A. Osses and J.-P. Puel. Boundary controllability of a stationary Stokes system with convection observed on an interior curve. *Journal on Optimization Theory and its Applications*, 99 :1 :201–234, 1998.
- [73] A. Osses and J.-P. Puel. On the controllability of the Laplace equation observed on an interior curve. *Revista Matemática Computense*, 11 :2 :403–441, 1998.
- [74] E. Pagnacco, A. Moreau, and D. Lemoss. Inverse strategies for the identification of elastic and viscoelastic material parameters using full-field measurements. *Materials Science and Engineering*, 452-453 :737–745, 2007.
- [75] E. Pena, B. Calvo, M.A. Martinez, and M. Doblare. An anisotropic visco-hyperelastic model for ligaments at finite strains : formulation and computational aspects. *International Journal of Solids and Structures*, 44 :760–778, 2007.

- [76] P. Perzyna. Fundamental problems in viscoplasticity. In *Recent Advances in Applied Mechanics*, volume 9, pages 243–377. Academic Press, New York, 1966.
- [77] P.P. Provenzano, R.S. Lakes, D.T. Corr, and R. Vanderby. Application of nonlinear viscoelastic models to describe ligament behaviour. *Biomechanics and Modeling in Mechanobiology*, 1 :45–47, 2002.
- [78] L. Robbiano. Théorème d’unicité adapté au contrôle des solutions des problèmes hyperboliques. *Comm. Partial Differential Equations*, 16 :789–800, 1991.
- [79] L. Robbiano. Fonction de coût et contrôle des solutions des équations hyperboliques. *Asymptot. Anal.*, 10 :95–115, 1995.
- [80] L. Robbiano and C. Zuily. Microlocal analytic smoothing effect for the Schrödinger equation. *Duke mathematical journal*, 100 :93–129, 1999.
- [81] S. Shaw, M.K. Warby, J.R. Whiteman, C. Dawson, and M.F. Wheeler. Numerical techniques for the treatment of quasistatic viscoelastic stress problems in linear isotropic solids. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 118 :211–237, 1994.
- [82] J.C. Simo. On a fully three-dimensional finite-strain viscoelastic damage model : formulation and computational aspects. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 60 :153–173, 1987.
- [83] R. Sinkus, M. Tanter, T. Xydeas, S. Catheline, J. Bercoff, and M. Fink. Viscoelastic shear properties of in vivo breast lesions measured by MR elastography. *Magnetic resonance imaging*, 23 :159–165, 2005.
- [84] J. Sjöstrand. Singularités analytiques microlocales. *Astérisque*, 95 :1–166, 1982.
- [85] D. Tataru. Unique continuation for solutions to PDEs : between Hörmander theorem and Holmgren theorem. *Comm. Partial Differential Equations*, 20 :855–884, 1995.
- [86] D. Tataru. Carleman estimates and unique continuation for solutions to boundary value problems. *J. Math. Pures Appl.*, 75 :367–408, 1996.
- [87] C. Truesdell. The mechanical foundations of elasticity and fluid dynamics. *Journal of Rational Mechanics and Analysis*, 1 :125–300, 1952.
- [88] A. Tychonoff. On the stability of inverse problems. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 39 :5 :195–198, 1943.
- [89] K. Ueno, J. Melvin, L. Li, and J. Lighthall. Development of tissue level brain injury criteria by finite element analysis. *Journal of Neurotrauma*, 12 :695–706, 1995.
- [90] L. von Wolfersdorf. On identification of memory kernels in linear viscoelasticity. *Math. Nachrichten*, 161 :203–217, 1993.
- [91] H. Weyl. Das asymptotische verteilungsgesetz der eigenwerte linearer partieller differentialgleichungen. *Math. Ann.*, 71 :441–479, 1912.
- [92] A. Wittek, T. Hawkins, and K. Miller. On the unimportance of constitutive models in computing brain deformation for image-guided surgery. *Biomech. Model Mechanobiol*, 8 :77–84, 2009.
- [93] A. Wittek, R. Kikinis, S. Warfield, and K. Miller. Brain shift computation using a fully nonlinear biomechanical model. *J. Duncan and G. Gerig Edition*, pages 583–590, 2005.





## Résumé

Dans cette thèse, nous abordons plusieurs problèmes mathématiques et numériques relatifs aux équations de la viscoélasticité en trois dimensions.

Dans la première partie, nous considérons le système linéaire et nous nous intéressons au problème inverse de récupération d'un coefficient viscoélastique. Pour ce système, nous démontrons une inégalité de Carleman (Chapitre 1) et un résultat de stabilité dans le prolongement unique (Chapitre 2). Nous utilisons ensuite ces résultats pour prouver deux inégalités de stabilité pour le problème inverse, l'une relative à une unique mesure interne et l'autre à une unique mesure sur une partie arbitrairement petite de la frontière (Chapitre 3). Finalement, nous proposons une méthode pour résoudre ce problème numériquement et présentons une application en imagerie médicale (Chapitre 4).

Dans la deuxième partie, nous étudions le système de la viscoélasticité non linéaire. Nous présentons des méthodes numériques pour le résoudre et l'implémentation de ces dernières en trois dimensions sur des géométries complexes (Chapitre 5). Une application biomédicale à la simulation des déformations des structures cérébrales est ensuite décrite (Chapitre 6). Enfin, nous abordons une question de modélisation en proposant un modèle couplé viscoélastique/viscoplastique en grandes déformations (Chapitre 7).

**Mots-clés:** viscoélasticité, inégalité de Carleman, problème inverse, imagerie cérébrale, éléments finis, simulation numérique 3D

## Sumario

En esta tesis, abordamos varios problemas matemáticos y numéricos relativos a las ecuaciones de la viscoelasticidad en tres dimensiones.

En la primera parte, consideramos el sistema lineal y nos interesamos al problema inverso de recuperación de un coeficiente viscoelástico. Para este sistema, demostramos una desigualdad de Carleman (Capítulo 1) y un resultado de estabilidad asociado a la continuación única (Capítulo 2). Usamos luego esos resultados para probar dos desigualdades de estabilidad para el problema inverso, una relativa a una única medida interna y la otra a una única medida en una parte arbitrariamente pequeña de la frontera (Capítulo 3). Al final, proponemos un método para resolver este problema numéricamente y presentamos una aplicación en imágenes médicas (Capítulo 4).

En la segunda parte, estudiamos el sistema de la viscoelasticidad no lineal. Presentamos métodos numéricos para resolverlo y describimos la implementación de estos en tres dimensiones sobre geometrías complejas (Capítulo 5). Una aplicación biomédica a la simulación de las deformaciones de las estructuras cerebrales se estudia luego (Capítulo 6). Finalmente, abordamos un tema de modelización proponiendo un modelo acoplado viscoelástico/viscoplastico en grandes deformaciones (Capítulo 7).

**Palabras claves:** viscoelasticidad, desigualdad de Carleman, problema inverso, imágenes cerebrales, elementos finitos, simulación numérica 3D

## Abstract

In this thesis, we considered various mathematical and numerical problems related to the system of viscoelasticity in three dimensions.

In the first part, we focused on the linear system and more specifically on the inverse problem of recovering a viscoelastic coefficient. For this system, we proved a Carleman estimate (Chapter 1) and a stability result in the unique continuation (Chapter 2). We used these results to establish two stability estimates for the inverse problem, the first one related to a unique internal measurement and the second to a unique measurement on an arbitrarily small part of the boundary (Chapter 3). Finally, we proposed a method to solve the problem numerically and presented an application in medical imaging (Chapter 4).

In the second part, we studied a nonlinear viscoelasticity system. We presented numerical methods to solve it and the implementation of these methods in three dimensions (Chapter 5). A biomedical application to the simulation of the brain shift was then considered (Chapter 6). Finally, we looked at some modelling issues by establishing a viscoelastic/viscoplastic model in large strains (Chapter 7).

**Keywords:** viscoelasticity, Carleman estimate, inverse problem, cerebral imaging, finite elements, 3D numerical simulation