Sur la relaxation avec contraintes de type déterminant en calcul des variations

Jean-Philippe Mandallena

UNIVERSITÉ DE NÎMES

Document de synthèse - Habilitation à Diriger des Recherches

Soutenue le 2 juin 2009 devant le jury composé de MM. :

Claude Le Bris
Hervé Le Dret
Jacques Marignan
Gérard Michaille
Lionel Thibault

et après les rapports de MM. :

Bernard Dacorogna
Claude Le Bris
Hervé Le Dret

Résumé

Les travaux présentés dans ce mémoire concernent principalement le calcul des variations vectoriel lorsque l'intégrande (qui est une fonction matricielle) peut prendre la valeur $+\infty$. Le cas modèle motivant ces travaux (et très important en hyperélasticité) est celui où l'intégrande n'est finie que sur les matrices de déterminant strictement positif.

SUR LA RELAXATION AVEC CONTRAINTES DE TYPE DÉTERMINANT EN CALCUL DES VARIATIONS

JEAN-PHILIPPE MANDALLENA

Table des matières

Date. Avril 2008.

1. Introduction

Une modélisation mathématique réaliste de l'hyperélasticité doit prendre en compte les deux contraintes suivantes : "la non interpénétrabilité de la matière" et "la nécessité d'une énergie infinie pour compresser un volume de matière en un point". Ainsi la densité d'énergie $W : \mathbb{M}^{3\times 3} \to [0, +\infty]$ associée à un matériau hyperélastique doit vérifier les deux conditions suivantes :

(1) $W(F) = +\infty$ si et seulement si $\mathrm{det}F \leq 0$;

(2) $W(F) \to +\infty$ lorsque $\mathrm{det}F \to 0$,

où $\mathbb{M}^{3\times 3}$ est l'espace des matrices carrées d'ordre 3 et $\mathrm{det}F$ est le déterminant de F. En 1977, Ball a mis au point une théorie de la semi-continuité inférieure compatible avec (1) et (2) (voir le théorème 3.3, voir aussi [17]). Sa théorie repose sur le concept de fonction polyconvexe, i.e., $W(F) = g(\mathrm{det}F)$ avec $g : \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ convexe. Cependant, les densités d'énergies de l'hyperélasticité ne sont pas nécessairement polyconvexes. A l'échelle macroscopique, elles sont quasiconvexes, i.e., pour chaque $F \in \mathbb{M}^{3\times 3}$ et chaque domaine borné $D \subset \mathbb{R}^3$, $W(F) \leq |D|^{-1} \int_D W(F + \nabla\varphi(x))dx$ pour tout $\varphi \in W_0^{1,\infty}(D; \mathbb{R}^3)$ (où $|D|$ désigne la mesure de Lebesgue de D). Cela signifie que "si on déforme affinement le bord d'un matériau hyperélastique, alors à l'échelle macroscopique tout le matériau se déforme affinement". Le concept de fonction quasiconvexe a été introduit par Morrey en 1952 (voir [55]). La polyconvexité implique la quasiconvexité, mais la réciproque est fausse. De plus, à l'échelle microscopique, on a besoin de considérer des densités d'énergies non quasiconvexes (donc non polyconvexes). Il apparait donc que, du point de vue de l'hyperélasticité, la théorie de Ball est incomplète (voir §3.2).

Les pages qui suivent décrivent principalement les travaux que nous menons depuis plusieurs années en collaboration avec Omar Anza Hafsa. Tout au long de ces années, l'objectif de nos recherches a été d'essayer d'inclure (1) et (2) dans des modèles mathématiques de l'hyperélasticité. Ayant à l'esprit cette problématique, nous avons travaillé dans le domaine du calcul des variations (qui est un bon cadre mathématique pour étudier l'hyperélasticité) en nous concentrant sur des problèmes de relaxation, de réduction de dimension et d'homogénéisation (pour plus de détails voir nos travaux [49, 50, 3, 8, 4, 9, 51, 14, 11, 10, 13, 12]).

Ici, on explique comment aller plus loin que le théorème de relaxation de Dacorogna. Le résultat de Dacorogna (voir le théorème 3.6) est applicable lorsque W satisfait (9), i.e., $W(F) \leq c(1 + |F|^p)$ pour tout $F \in \mathbb{M}^{3\times 3}$ avec $c > 0$, ce qui est incompatible avec (1) et (2). On montre comment étendre ce théorème au cas où W est compatible avec (2) et (7), i.e., $W(F) = +\infty$ si et seulement si $\mathrm{det}F = 0$, (voir le théorème 4.1 et le corollaire 4.13, voir aussi [11, 12]). On s'attaque au problème du passage 3D-2D en présence des contraintes (1) et (2) (voir le théorème 5.1, voir aussi [13]) dépassant ainsi le théorème de réduction de dimension de Le Dret-Raoult (voir le théorème 3.8) valable lorsque W satisfait (9). On traite aussi le passage 3D-2D dans le cas (plus simple) où W vérifie (2) et (7) (voir le théorème 5.2, voir aussi [10]). On dégage également la structure (dans le cas non convexe et normalement décomposable) de la permutation de l'infimum et de l'intégrale (utile dans le passage 3D-2D) (voir le théorème 6.1, voir aussi [8]) qu'on utilise pour étudier la relaxation des fonctionnelles intégrales par rapport à une mesure de Radon positive (voir le théorème 6.25, voir aussi [49, 50, 9, 51]) posant ainsi les bases d'une approche géométrique de la relaxation dans le cas non convexe.

Avant de présenter plus en détail ces travaux de recherches (voir §4-6) et afin de mieux comprendre le contexte dans lequel nous travaillons, voici une vue (très simplifiée) de l'hyperélasticité (voir §2) et du calcul des variations (voir §3). (Pour une étude plus approfondie de l'hyperélasticité et du calcul des variations, nous renvoyons respectivement aux livres [54, 57, 29, 30, 31, 5, 20] et [56, 37, 27, 41, 58, 36, 28, 42, 16, 35, 39, 40].)

2. L'hyperélasticité

Un matériau est un ensemble de points matériels (qui sont en fait de "petits volumes macroscopiques"). Au "repos" le matériau est modélisé par un ouvert borné $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ que l'on appelle configuration de référence. Lorsque l'on applique des forces sur le matériau il se déforme jusqu'à atteindre une position d'équilibre que l'on appelle configuration déformée. Cette configuration est caractérisée par une application $\phi : \Omega \to \mathbb{R}^3$ (suffisamment différentiable et inversible avec $\det\nabla\phi > 0$) que l'on appelle déformation. Le matériau déformé est ainsi modélisé par l'ouvert borné $\phi(\Omega) \subset \mathbb{R}^3$. Cette déformation va créer des "tensions" entre les différents points matériels constituant le matériau. On les modélise par le tenseur des contraintes de Cauchy

$$\sigma_\phi : \phi(\Omega) \to \mathbb{M}^{3\times 3}.$$

Puisqu'un point matériel est un "petit volume macroscopique" on le représente par un "volume infinitésimal" $V \subset \Omega$. Sous l'action des forces, il se déforme en $\phi(V) \subset \phi(\Omega)$. Si ν_ϕ est la normale unitaire sortante à la surface fermée $\partial\phi(V)$ alors la force appliquée en $b \in \partial\phi(V)$ par le reste du matériau est donnée par $\sigma_\phi(b)\nu_\phi(b)db$ (db étant l'élément d'aire sur la configuration déformée). Notons $f : \Omega \to \mathbb{R}^3$ la densité de forces appliquées par unité de volume (responsable de la déformation du matériau s'exprimant donc naturellement dans la configuration de référence). Alors, en $x \in V$ la force est égale à $f(x)dx$. Dans la configuration déformée, elle est donnée en $y := \phi(x) \in \phi(V)$ par $f(\phi^{-1}(y))[\det\nabla\phi(\phi^{-1}(y))]^{-1}dy$. Appliquant le principe fondamental de la statique à $\phi(V)$, i.e., "$\phi(V)$ est en équilibre si et seulement si la somme de toutes les forces extérieures appliquées sur $\phi(V)$ est nulle", on déduit que :

$$\underbrace{\int_{\partial\phi(V)} \sigma_\phi(b)\nu_\phi(b)db}_{\substack{\text{somme des forces}\\ \text{appliquées sur } \partial\phi(V)\\ \text{par le reste du matériau}}} + \underbrace{\int_{\phi(V)} f(\phi^{-1}(y))[\det\nabla\phi(\phi^{-1}(y))]^{-1}dy}_{\substack{\text{somme des forces appliquées sur } \phi(V)\\ \text{par l'extérieur}}} = 0. \tag{3}$$

Utilisant la formule de Nanson, i.e.,

$$\nu_\phi(b)db = \det\nabla\phi(a)[\nabla\phi(a)]^{-T}\nu(a)da$$

où ν est la normale unitaire sortante à la surface fermée ∂V (et da est l'élément d'aire sur la configuration de référence), la formule de changement de variable et le théorème de la divergence, on voit que :

- $\displaystyle\int_{\partial\phi(V)} \sigma_\phi(b)\nu_\phi(b)db = \int_{\partial V} T_\phi(a)\nu(a)da = \int_V \mathrm{div}T_\phi(x)dx$;
- $\displaystyle\int_{\phi(V)} f(\phi^{-1}(y))[\det\nabla\phi(\phi^{-1}(y))]^{-1}dy = \int_V f(x)dx,$

où $T_\phi : \Omega \to \mathbb{M}^{3\times 3}$ est le (premier) tenseur de Piola-Kirchoff, i.e.,

$$T_\phi(x) := \det\nabla\phi(x)\sigma_\phi(\phi(x))[\nabla\phi(x)]^{-T}.$$

L'équation (3) se récrit alors comme suit :

$$\int_V \big(\mathrm{div}T_\phi(x) + f(x)\big)dx = 0.$$

Supposant que sur le bord $\partial\Omega$ du matériau la déformation est fixée à ϕ_0 et rappelant que V est un “volume infinitesimal”, on conclut que la déformation ϕ (caractérisant une position d'équilibre du matériau lorsqu'il est soumis aux efforts extérieurs f) est solution du système d'Equation aux Dérivées Partielles suivant :

$$\left\{\begin{array}{ll} \mathrm{div}T_\phi(x) = -f(x) & \text{dans } \Omega \\ \phi = \phi_0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{array}\right. \tag{4}$$

L'application $\phi \mapsto T_\phi$ est la loi de comportement du matériau (elle caractérise sa “réaction” lorsqu'il est soumis à des “efforts”). On conçoit bien que sans informations supplémentaires sur $\phi \mapsto T_\phi$ il sera difficile de résoudre (4).

Plaçons nous dans le cadre de l'hyperélasticité. On dit qu'un matériau est élastique (et homogène) s'il existe $\hat{T} : \mathbb{M}^{3\times 3}_+ \to \mathbb{M}^{3\times 3}$ tel que :

$$T_\phi(x) = \hat{T}(\nabla\phi(x))$$

pour toute déformation $\phi : \Omega \to \mathbb{R}^3$ avec $\mathbb{M}^{3\times 3}_+ := \{F \in \mathbb{M}^{3\times 3} : \det F > 0\}$. (Un matériau élastique est dit non homogène lorsque $\hat{T}$ dépend de x.) Le matériau est dit hyperélastique si de plus il existe une fonction matricielle $W : \mathbb{M}^{3\times 3}_+ \to [0, +\infty[$ vérifiant (2), i.e., $W(F) \to +\infty$ lorsque $\det F \to 0^+$ (comme W est définie sur $\mathbb{M}^{3\times 3}_+$ on peut dire qu'elle satisfait (1)) telle que :

$$\hat{T}(F) = \mathrm{DW}(F)$$

pour tout $F \in \mathbb{M}^{3\times 3}_+$, où $\mathrm{D}W : \mathbb{M}^{3\times 3}_+ \to \mathbb{M}^{3\times 3}$ est la dérivée de W, i.e., $(\mathrm{D}W)_{ij} = \partial_{ij}W$ pour tous $i, j = 1, 2, 3$. La fonction W est appelée la densité d'énergie associée au matériau hyperélastique. Pour un tel matériau le système d'EDP (4) est équivalent à :

$$\left\{\begin{array}{ll} \mathrm{div}\mathrm{D}W(\nabla\phi(x)) = -f(x) & \text{dans } \Omega \\ \phi = \phi_0 & \text{sur } \partial\Omega \end{array}\right.$$

qui est (au moins formellement) l'équation d'Euler-Lagrange correspondant au problème de minimisation suivant :

$$\inf\left\{E(\phi) = \int_\Omega W(\nabla\phi(x))dx - \int_\Omega \langle f(x), \phi(x)\rangle dx : \phi = \phi_0 \text{ sur } \partial\Omega\right\}, \tag{5}$$

où $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est le produit scalaire dans $\mathbb{R}^3$. Nous voyons donc qu'une façon d'aborder l'hyperélasticité est d'étudier des problèmes de minimisation du type (5). Pour cela, un bon cadre de travail est le calcul des variations (voir §3).

3. Le calcul des variations

3.1. **Généralités.**

Soit $\mathbb{M}^{m\times N}$ l'espace des matrices à m lignes et N colonnes avec $N, m \geq 1$. De façon générale le calcul des variations vise à minimiser des fonctionnelles intégrales du type :

$$E(\phi) = \int_\Omega L(x, \phi(x), \nabla\phi(x))dx,$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est un ouvert borné et $L : \Omega\times\mathbb{R}^N\times\mathbb{M}^{m\times N} \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ est l'intégrande, lorsque $\phi : \Omega \to \mathbb{R}^m$ satisfait une condition au bord du type $\phi = \phi_0$ sur $\partial\Omega$ et décrit un espace de Banach X (réflexif) sur lequel E et la condition au bord ont un sens. Pour traiter ce type de problème de minimisation on utilise la méthode directe du calcul des variations qui consiste à vérifier les trois points suivants :

- $\mathcal{A} := \{\phi \in X : \phi = \phi_0 \text{ sur } \partial\Omega\}$ est non vide et E est minorée sur $\mathcal{A}$, assurant ainsi que $-\infty < \alpha := \inf\{E(\phi) : \phi \in \mathcal{A}\} < +\infty$;
- il existe une suite $\{\bar\phi_n\}_{n\geq 1}$ minimisante pour E dans $\mathcal{A}$, i.e., $\{\bar\phi_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{A}$ et $\lim_{n\to+\infty} E(\bar\phi_n) = \alpha$, telle que, à une sous-suite près, $\bar\phi_n \rightharpoonup \bar\phi$ avec $\bar\phi \in \mathcal{A}$ et $\bar\phi = \phi_0$ sur $\partial\Omega$ (où désigne "$\rightharpoonup$" la convergence faible dans X) ;
- E est séquentiellement faiblement semi-continue inférieurement (sfsci) dans X, i.e., $E(\phi) \leq \liminf_{n\to+\infty} E(\phi_n)$ pour tout $\phi_n \rightharpoonup \phi$ dans X.

On a alors $\bar\phi \in \mathcal{A}$ et $E(\bar\phi) \leq \lim_{n\to+\infty} E(\bar\phi_n) = \alpha$, i.e., $\bar\phi$ est un minimiseur de E sur $\mathcal{A}$.

Ici, $X = W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ avec $p > 1$ et $L(x, s, F) = W(F) - \langle f(x), s\rangle$ où $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est le produit scalaire de $\mathbb{R}^N$, $f \in L^q(\Omega;\mathbb{R}^m)$ avec $1/p+1/q = 1$ et $W : \mathbb{M}^{m\times N} \to [0, +\infty]$ est Borel mesurable et coercive, i.e., il existe $C > 0$ tel que $W(F) \geq C|F|^p$ pour chaque $F \in \mathbb{M}^{m\times N}$. Avec ce cadre de travail, les deux premiers points se vérifient assez facilement. Le point difficile à vérifier est le troisième, i.e., montrer que $E : W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ définie par $E := I - J$, avec $I : W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m) \to [0, +\infty]$ et $J : W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}$ données respectivement par :

$$I(\phi) := \int_\Omega W(\nabla\phi(x))dx \text{ et } J(\phi) := \int_\Omega \langle f(x), \phi(x)\rangle dx, \tag{6}$$

est sfsci dans $W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$. Comme J est (une forme) linéaire et fortement continue dans $W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ tout revient à étudier la semi-continuité inférieure faible de I. En présence des conditions (1) et (2) (et sans hypothèse de polyconvexité) ce problème de semi-continuité inférieure n'est pas encore résolu (voir [18, 19]). Dans [11, 12] nous avons abordé cette question sous l'angle de la relaxation en mettant au point un théorème général utilisable lorsque W satisfait (2) et

(7) $W(F) = +\infty$ si et seulement si $\det F = 0$.

(Noter que la condition (7) est "moins mécanique" que (1) car bien qu'elle interdise "la compression d'un volume de matière en un point", elle n'empêche pas "l'interpénétration de la matière".) Dans [10] nous avons donné une définition variationnelle de l'énergie de membrane non linéaire en présence des conditions (7) et (2). Utilisant la même méthode et les travaux de Ben Belgacem (voir [22, 23, 24]), dans [13] nous avons traité le passage 3D-2D sous les contraintes plus réalistes (1) et (2).

Avant de décrire ces résultats (voir §4 pour [11, 12] et voir §5 pour [10, 13]) voici une vue succincte de quelques thèmes (quasiconvexité et semi-continuité inférieure, relaxation, réduction de dimension) du calcul des variations qui permettront de mieux comprendre la suite.

3.2. **Quasiconvexité et semi-continuité inférieure.**

Comme dit plus haut, le concept de quasiconvexité a été introduit par Morrey en 1952 (voir [55]).

Définition 3.1. On dit que W est quasiconvexe si

$$W(F) \leq \int_Y W(F + \nabla\varphi(x))dx$$

pour tout $F \in \mathbb{M}^{m\times N}$ et tout $\varphi \in W_0^{1,\infty}(Y;\mathbb{R}^m)$ avec $Y :=]0,1[^N$.

Malgré les apparences, la définition 3.1 est indépendante de Y (voir [21, Proposition 2.3]). La quasiconvexité n'est pas identique à la convexité. Plus précisément, si W est convexe, i.e.,

$$W(tF + (1-t)F') \leq tW(F) + (1-t)W(F') \tag{8}$$

pour tous $F, F' \in \mathbb{M}^{m\times N}$ et tout $t \in [0,1]$, alors W est quasiconvexe. La réciproque est vraie dans le cas scalaire, i.e., $m = 1$ ou $N = 1$, mais fausse dans le cas vectoriel, i.e., $m > 1$ et $N > 1$, (par exemple, si $m = N > 1$, l'application $F \mapsto |\mathrm{det}F|$ est quasiconvexe mais n'est pas convexe). La quasiconvexité est aussi reliée à d'autres notions de convexité : la polyconvexité et la rang-1 convexité. On dit que W est polyconvexe si $W(F) = g(\mathrm{T}(F))$ où g est une certaine fonction convexe et $\mathrm{T}(F)$ est le vecteur formé par toutes les matrices des “sous-déterminants” de F. Par exemple, si $m = N = 3$, W est polyconvexe si et seulement si il existe une fonction convexe $g : \mathbb{M}^{3\times 3} \times \mathbb{M}^{3\times 3} \times \mathbb{R} \to [0,+\infty]$ telle que $W(F) = g(F, \mathrm{cof}F, \mathrm{det}F)$ pour tout $F \in \mathbb{M}^{3\times 3}$ où $\mathrm{cof}F$ est la matrice des cofacteurs de F. La polyconvexité implique la quasiconvexité mais la réciproque est fausse (voir [2, 64]). On dit que W est rang-1 convexe si (8) a lieu pour tout $t \in [0,1]$ et tous $F, F' \in \mathbb{M}^{m\times N}$ avec $\mathrm{rang}(F - F') \leq 1$. Si W est quasiconvexe et continue alors W est rang-1 convexe. Cette implication est fausse si W est seulement Borel mesurable (voir [21, Example 3.5]). Si $m \geq 3$ et $N \geq 2$, la rang-1 convexité n'implique pas la quasiconvexité (voir [61]). Le cas $m = 2$ et $N \geq 2$ est encore ouvert.

A cause du résultat suivant (voir [21, Corollary 3.2]) la quasiconvexité est un concept central du calcul des variations.

Théorème 3.2. *Si I est sfsci dans $W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ alors W est quasiconvexe.*

Un problème (ouvert) important est de savoir si la quasiconvexité est aussi une condition suffisante pour que I soit sfsci dans $W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$. Du point de vue de l'hyperélasticité, la question (ouverte) est de savoir s'il existe une réciproque du théorème 3.2 qui est compatible avec (1) et (2).

En 1984, Ball et Murat ont démontré le théorème suivant (voir [21, Theorem 4.5(i)] voir aussi [17]).

Théorème 3.3. *Soit $W : \mathbb{M}^{N\times N} \to [0,+\infty]$ définie par $W(F) := |F|^p + h(\mathrm{det}F)$ avec $h : \mathbb{R} \to [0,+\infty]$ et $p \geq N$. Si h est sci et convexe (ce qui implique que W est polyconvexe) alors I est sfsci dans $W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$.*

Le théorème 3.3 est compatible avec (1) et (2) (par exemple, on peut l'utiliser avec $h : \mathbb{R} \to [0,+\infty]$ donnée par $h(t) = 1/t$ si $t > 0$ et $h(t) = +\infty$ si $t \leq 0$). Cependant, il n'est pas complétement satisfaisant puisqu'il fait appel à la polyconvexité qui n'est pas équivalente à la quasiconvexité.

En 1984, Acerbi et Fusco ont prouvé le théorème suivant (voir [1, Theorem II.4], voir aussi Marcellini [52, 53]).

Théorème 3.4. *Si W est continue, quasiconvexe et satisfait la “condition de croissance d'ordre p” suivante :*

(9) $W(F) \leq c(1 + |F|^p)$ *pour tout* $F \in \mathbb{M}^{m\times N}$ *avec* $c > 0$,

alors I est sfsci dans $W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$.

Ce théorème ne fait pas intervenir la polyconvexité mais n'est pas applicable en hyperélasticité. En effet, il est clair que (9) est incompatible avec (1) et (2). A notre connaissance, du point de vue de l'hyperélasticité, le théorème 3.4 n'a pas encore été dépassé.

3.3. **Relaxation.**

Lorsque I n'est pas sfsci dans $W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ (ou bien si on ne sait pas démontrer que I est sfsci dans $W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$) on ne peut pas, à l'aide de la méthode directe du calcul des variations, résoudre le problème de minimisation suivant :

$$\inf\Big\{E(\phi)=I(\phi)-J(\phi):\phi\in\mathcal{A}\Big\}=:\alpha \tag{10}$$

où $\mathcal{A}:=\{\phi\in W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m):\phi=\phi_0 \text{ sur } \partial\Omega\}$ avec $\phi_0\in W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ et I, J sont définies en (6). On considère alors le problème suivant :

$$\inf\Big\{\overline{E}(\phi):\phi\in\mathcal{A}\Big\}=:\overline{\alpha} \tag{11}$$

avec $\overline{E}:W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ définie par :

$$\overline{E}(\phi):=\inf\left\{\liminf_{n\to+\infty}E(\phi_n):\mathcal{A}\ni\phi_n\rightharpoonup\phi\right\}. \tag{12}$$

En fait, $\overline{E}$ est la régularisée sci par rapport à la convergence faible de $W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ de la fonctionnelle valant E sur $\mathcal{A}$ et $+\infty$ sinon, et donc $\overline{E}$ est sfsci dans $W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$. Ainsi (11) peut être traité par la méthode directe du calcul des variations. Le passage de (10) à (11) est appelé relaxation. Son intérêt vient des trois propriétés suivantes :

- $\alpha=\overline{\alpha}$;
- si $\phi_n\rightharpoonup\bar{\phi}$ dans $W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ avec $\{\phi_n\}_{n\geq1}$ une suite minimisante pour E dans $\mathcal{A}$ alors $\bar{\phi}$ est un minimiseur de $\overline{E}$ dans $\mathcal{A}$;
- si $\bar{\phi}$ est un minimiseur de $\overline{E}$ dans $\mathcal{A}$ alors il existe une suite minimisante $\{\phi_n\}_{n\geq1}$ pour E dans $\mathcal{A}$ telle que $\phi_n\rightharpoonup\bar{\phi}$ dans $W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$.

Usuellement, (11) est appelé le problème relaxé de (10) et les solutions de (11) sont dites solutions généralisées de (10). L'inconvénient de la relaxation est que l'expression dans (12) de la nouvelle fonctionnelle à minimiser $\overline{E}$ n'est pas une formule explicite. On est ainsi amené à étudier l'existence d'une représentation (plus explicite) pour $\overline{E}$.

Pour simplifier, dans ce qui suit on supposera qu'il n'y a pas de condition au bord, i.e., $\mathcal{A}=W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$. Rappelant que J est linéaire et fortement continue dans $W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$, il est facile de voir que $\overline{E}=\overline{I}-J$ avec $\overline{I}:W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)\to[0,+\infty]$ donnée par :

$$\overline{I}(\phi):=\inf\left\{\liminf_{n\to+\infty}I(\phi_n):W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)\ni\phi_n\rightharpoonup\phi\right\}. \tag{13}$$

Du point de vue de l'hyperélasticité, le fait que la fonctionnelle I n'est pas sfsci dans $W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ signifie que la densité d'énergie W caractérise le comportement du matériau à l'échelle microscopique. Le passage de I à $\overline{I}$ s'interprète donc comme un passage "micro-macro". Comme la fonctionnelle $\overline{I}$ est censée représenter le comportement macroscopique du matériau, il est naturel de se demander si elle possède une représentation intégrale du type :

$$\overline{I}(\phi) = \int_\Omega \overline{W}(\nabla\phi(x))dx \text{ pour tout } \phi \in W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m) \tag{14}$$

avec $\overline{W} : \mathbb{M}^{m\times N} \to [0,+\infty]$ (qui sera nécessairement quasiconvexe d'après le théorème 3.2). Un bon candidat pour $\overline{W}$ est l'enveloppe quasiconvexe de W.

Définition 3.5. L'enveloppe quasiconvexe de W est l'unique fonction (lorsqu'elle existe) $\mathcal{Q}W : \mathbb{M}^{m\times N} \to [0,+\infty]$ telle que :

- $\mathcal{Q}W$ est Borel mesurable et $\mathcal{Q}W \le W$;
- pour tout $g : \mathbb{M}^{m\times N} \to [0,+\infty]$, si g est Borel mesurable, quasiconvexe et $g \le W$ alors $g \le \mathcal{Q}W$.

Usuellement, on dit que $\mathcal{Q}W$ est la plus grande fonction quasiconvexe qui est inférieure à W.

Posons $\mathrm{Aff}_0(Y;\mathbb{R}^m) := \{\varphi \in \mathrm{Aff}(Y;\mathbb{R}^m) : \varphi = 0 \text{ sur } \partial Y\}$ (avec $\mathrm{Aff}(Y;\mathbb{R}^m)$ désignant l'ensemble des fonctions continues et affines par morceaux de Y dans $\mathbb{R}^m$, i.e., $\varphi \in \mathrm{Aff}(Y;\mathbb{R}^m)$ si et seulement si φ est continue et il existe une famille finie $\{V_i\}_{i\in I}$ de sous-ensembles ouverts et disjoints de Y telle que $|Y \setminus \cup_{i\in I} V_i| = 0$, $|\partial V_i| = 0$ et $\nabla\varphi(x) = \xi_i$ dans V_i pour tout $i \in I$ avec $\xi_i \in \mathbb{M}^{m\times N}$) et définissons $\mathcal{Z}W : \mathbb{M}^{m\times N} \to [0,+\infty]$ par :

$$\mathcal{Z}W(F) := \inf\left\{\int_Y W(F + \nabla\varphi(x))dx : \varphi \in \mathrm{Aff}_0(Y;\mathbb{R}^m)\right\}. \tag{15}$$

En 1982, Dacorogna a démontré le théorème suivant (voir [34, Theorem 5] voir aussi [1, Statement III.7]).

Théorème 3.6. *Si W est continue et satisfait* (9) *alors* (14) *a lieu avec* $\overline{W} = \mathcal{Q}W = \mathcal{Z}W$.

Un problème (ouvert) important (du point de vue de l'hyperélasticité) est de savoir si on a (14) avec $\overline{W} = \mathcal{Q}W = \mathcal{Z}W$ lorsque W satisfait (1) et (2). Dans [12] nous avons montré que (14) a lieu avec $\overline{W} = \mathcal{Q}W = \mathcal{Z}W$ lorsque W satisfait (7) et (2) (voir §4).

3.4. **Réduction de dimension (passage 3D-2D).**

Considérons un matériau occupant dans une configuration de référence l'ouvert $\Sigma_\varepsilon := \Sigma\times]-\frac{\varepsilon}{2},\frac{\varepsilon}{2}[\subset \mathbb{R}^3$ où $\Sigma \subset \mathbb{R}^2$ est un ouvert borné et $\varepsilon > 0$ est “très petit” (cela signifie que le matériau (tridimensionnel) a une très petite épaisseur, il est “presque” bidimensionnel). Le passage 3D-2D consiste à trouver une modélisation bidimensionnelle du matériau considéré. Dans notre cas, il s'agit de montrer que $I_\varepsilon : W^{1,p}(\Sigma_\varepsilon;\mathbb{R}^3) \to [0,+\infty]$ définie par :

$$I_\varepsilon(\phi) := \frac{1}{\varepsilon}\int_{\Sigma_\varepsilon} W(\nabla\phi(x,x_3))dxdx_3 \tag{16}$$

(où $W : \mathbb{M}^{3\times 3} \to [0,+\infty]$ est la densité d'énergie du matériau tridimensionnel représenté par Σ_ε et (x,x_3) avec $x \in \Sigma$ et $x_3 \in]-\frac{\varepsilon}{2},\frac{\varepsilon}{2}[$ désigne un point de Σ_ε) “converge variationnellement” lorsque $\varepsilon \to 0$ (voir la définition 3.7) vers $I_{\mathrm{mem}} : W^{1,p}(\Sigma;\mathbb{R}^3) \to [0,+\infty]$ donnée par :

$$I_{\mathrm{mem}}(\psi) := \int_\Sigma W_{\mathrm{mem}}(\nabla\psi(x))dx \tag{17}$$

avec $W_{\rm mem}:\mathbb{M}^{3\times 2}\to[0,+\infty]$ (qui sera la densité d'énergie du matériau bidimensionnel représenté par Σ), et de donner une formule (qui dépendra de W) pour $W_{\rm mem}$. Usuellement, $I_{\rm mem}$ est appelée l'énergie de membrane non linéaire associée au matériau bidimensionnel modélisé par Σ.

La limite de I_ε lorsque $\varepsilon\to 0$ est calculée au sens de la $\Gamma(\pi)$-convergence (une variante de la Γ-convergence de De Giorgi (voir [32, 33], voir aussi la définition 5.3) développée par Anzellotti, Baldo et Percivale (voir [15])). Soit $\pi=\{\pi_\varepsilon\}_\varepsilon$ une famille d'applications $\pi_\varepsilon: W^{1,p}(\Sigma_\varepsilon;\mathbb{R}^3)\to W^{1,p}(\Sigma;\mathbb{R}^3)$ définie par :

$$\pi_\varepsilon(\phi):=\frac{1}{\varepsilon}\int_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\varepsilon}{2}}\phi(\cdot,x_3)dx_3.$$

Définition 3.7. On dit que I_ε $\Gamma(\pi)$-converge vers $I_{\rm mem}$ et on écrit

$$I_{\rm mem}=\Gamma(\pi)\text{-}\lim_{\varepsilon\to 0}I_\varepsilon$$

si les deux assertions suivantes sont satisfaites :

- pour tout $\psi\in W^{1,p}(\Sigma;\mathbb{R}^3)$ et tout $\{\phi_\varepsilon\}_\varepsilon\subset W^{1,p}(\Sigma_\varepsilon;\mathbb{R}^3)$,
  si $\pi_\varepsilon(\phi_\varepsilon)\rightharpoonup\psi$ dans $W^{1,p}(\Sigma;\mathbb{R}^3)$ alors $I_{\rm mem}(\psi)\le\liminf\limits_{\varepsilon\to 0}I_\varepsilon(\phi_\varepsilon)$;
- pour tout $\psi\in W^{1,p}(\Sigma;\mathbb{R}^3)$, il existe $\{\phi_\varepsilon\}_\varepsilon\subset W^{1,p}(\Sigma_\varepsilon;\mathbb{R}^3)$ tel que :
  $\pi_\varepsilon(\phi_\varepsilon)\rightharpoonup\psi$ dans $W^{1,p}(\Sigma;\mathbb{R}^3)$ et $I_{\rm mem}(\psi)\ge\limsup\limits_{\varepsilon\to 0}I_\varepsilon(\phi_\varepsilon)$.

A notre connaissance, la $\Gamma(\pi)$-convergence de (16) vers (17) a été étudiée pour la première fois par Percivale en 1991 (voir [59, §3]). Dans son travail, il a essayé de prendre en compte les conditions (1) et (2). Mais, comme ses résultats contenaient quelques erreurs, il ne les a pas publiés. Malgré tout, Percivale a introduit la "bonne" formule pour $W_{\rm mem}$, i.e., $W_{\rm mem}=\mathcal{Q}W_0$ (l'enveloppe quasiconvexe de W_0) avec $W_0:\mathbb{M}^{3\times 2}\to[0,+\infty]$ donnée par :

$$W_0(\xi):=\inf\Big\{W(\xi\mid\zeta):\zeta\in\mathbb{R}^3\Big\}\tag{18}$$

avec $(\xi\mid\zeta)$ désignant la matrice de $\mathbb{M}^{3\times 3}$ correspondant à $(\xi,\zeta)\in\mathbb{M}^{3\times 2}\times\mathbb{R}^3$.

En 1993, indépendamment de Percivale, Le Dret et Raoult ont démontré le théorème suivant (voir [47] et [48, Theorem 2]).

Théorème 3.8. *Si W est continue et satisfait* (9) *alors* $I_{\rm mem}=\Gamma(\pi)\text{-}\lim_{\varepsilon\to 0}I_\varepsilon$ *avec* $W_{\rm mem}=\mathcal{Q}W_0$.

Bien que ce théorème ne soit pas compatible avec les contraintes de l'hyperélasticité (1) et (2), il établit un cadre mathématique convenable pour étudier la réduction de dimension d'un point de vue variationnel (ce théorème est en fait le point de départ de beaucoup de travaux sur le sujet).

Après Percivale, en 1996, Ben Belgacem a aussi considéré les conditions (1) et (2). Dans [23, Theorem 1], il annonçait avoir réussi à traiter la $\Gamma(\pi)$-convergence de (16) vers (17) en présence de (1) et (2). Dans [24], qui est l'article correspondant à la note [23], l'énoncé [23, Theorem 1] n'est pas complétement démontré (cependant, une preuve plus détaillée, mais pas entièrement complète, peut être trouvée dans sa thèse [22]). De plus, pour Ben Belgacem, $W_{\rm mem}=\mathcal{QR}W_0$ (l'enveloppe quasiconvexe de l'enveloppe rang-1 convexe de W_0). En fait, comme nous l'avons montré dans [11, 10] on a $\mathcal{QR}W_0=\mathcal{Q}W_0$ (voir la remarque 5.5). Néanmoins, les travaux de Ben Belgacem apportent des avancées substantielles. En particulier, ils mettent en lumière l'importance des théorèmes d'approximation pour des fonctions de Sobolev par des immersions lisses dans l'étude du passage 3D-2D en présence de (1) et (2).

Dans [10] nous avons donné une définition variationnelle de l'énergie de membrane non linéaire en présence de (7) et (2) (voir le théorème 5.1). Utilisant la même méthode et quelques résultats de Ben Belgacem, dans [13] nous avons traité le passage 3D-2D sous les contraintes (1) et (2) (voir le théorème 5.2).

4. Vers des théorèmes de relaxation en hyperélasticité

4.1. Théorèmes généraux.

Dans [11, 12] nous avons mis au point le théorème de représentation intégrale suivant pour $\overline{I}$ définie en (13). Ce théorème contient et dépasse le théorème 3.6. En particulier, il est compatible avec (7) et (2) (voir §4.3).

Théorème 4.1. *Si $\mathcal{Z}W$ définie en* (15) *satisfait la "condition de croissance d'ordre p" suivante* :

(19) $\mathcal{Z}W(F) \le c(1+|F|^p)$ *pour tout* $F \in \mathbb{M}^{m\times N}$ *avec* $c > 0$,

alors (14) *a lieu avec* $\overline{W} = \mathcal{Q}W = \mathcal{Z}W$.

Schéma de démonstration. Soit $\mathcal{Z}I : W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m) \to [0,+\infty]$ définie par :

$$\mathcal{Z}I(\phi) := \int_\Omega \mathcal{Z}W(\nabla\phi(x))dx,$$

et soient $\overline{I}_{\mathrm{aff}}, \overline{\mathcal{Z}I}_{\mathrm{aff}}, \overline{\mathcal{Z}I} : W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m) \to [0,+\infty]$ données par :

- $\overline{I}_{\mathrm{aff}}(\phi) := \inf\left\{\liminf\limits_{n\to+\infty} I(\phi_n) : \mathrm{Aff}(\Omega;\mathbb{R}^m) \ni \phi_n \rightharpoonup \phi\right\}$;
- $\overline{\mathcal{Z}I}_{\mathrm{aff}}(\phi) := \inf\left\{\liminf\limits_{n\to+\infty} \mathcal{Z}I(\phi_n) : \mathrm{Aff}(\Omega;\mathbb{R}^m) \ni \phi_n \rightharpoonup \phi\right\}$;
- $\overline{\mathcal{Z}I}(\phi) := \inf\left\{\liminf\limits_{n\to+\infty} \mathcal{Z}I(\phi_n) : W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m) \ni \phi_n \rightharpoonup \phi\right\}$.

Le lemme suivant est valable sans l'hypothèse (19).

Lemme 4.2. $\overline{I}_{\mathrm{aff}} = \overline{\mathcal{Z}I}_{\mathrm{aff}}$.

(Pour prouver ce lemme on utilise un théorème de recouvrement de Vitali, voir [12, Proposition 1.10].) Comme $\mathcal{Z}W$ satisfait (19) et $\mathrm{Aff}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ est fortement dense dans $W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ on a $\overline{\mathcal{Z}I}_{\mathrm{aff}} = \overline{\mathcal{Z}I}$. Donc $\overline{I}_{\mathrm{aff}} = \overline{\mathcal{Z}I}$ par le lemme 4.2. De plus, $\overline{I} \le \overline{I}_{\mathrm{aff}}$ et $\overline{\mathcal{Z}I} \le \overline{I}$, d'où $\overline{I} = \overline{I}_{\mathrm{aff}} = \overline{\mathcal{Z}I}$. D'autre part, Fonseca a démontré la proposition suivante (voir [38]).

Proposition 4.3. *$\mathcal{Z}W$ satisfait les quatre propriétés qui suivent.*

(a) *Pour tout ouvert borné $D \subset \mathbb{R}^N$ avec $|\partial D| = 0$ et tout $F \in \mathbb{M}^{m\times N}$,*

$$\mathcal{Z}W(F) = \inf\left\{\frac{1}{|D|}\int_D W(F+\nabla\varphi(x))dx : \varphi \in \mathrm{Aff}_0(D;\mathbb{R}^m)\right\}.$$

(Ainsi $\mathcal{Z}W(F) \le \frac{1}{|D|}\int_D W(F+\nabla\varphi(x))dx$ pour tout $\varphi \in \mathrm{Aff}_0(D;\mathbb{R}^m)$.)

(b) *Si $\mathcal{Z}W$ est finie alors $\mathcal{Z}W$ est rang-1 convexe.*

(c) *Si $\mathcal{Z}W$ est finie alors $\mathcal{Z}W$ est continue.*

(d) *Pour tout ouvert borné $D \subset \mathbb{R}^N$ avec $|\partial D| = 0$, tout $F \in \mathbb{M}^{m\times N}$ et tout $\varphi \in \mathrm{Aff}_0(D;\mathbb{R}^m)$, $\mathcal{Z}W(F) \le \frac{1}{|D|}\int_D \mathcal{Z}W(F+\nabla\varphi(x))dx$.*

Ici on utilise seulement la proposition 4.3(c), i.e., ZW est continue puisque $\mathcal{Z}W$ satisfait (19). En fait, on peut montrer le lemme suivant (voir [12, Proposition 1.9]).

Lemme 4.4. *Si $\mathcal{Z}W$ satisfait* (19) *alors $\mathcal{Z}W$ est continue et $\mathcal{Q}W = \mathcal{Z}W$.*

Ainsi, $\mathcal{Z}W$ est continue, quasiconvexe et satisfait (19), donc $\overline{\mathcal{Z}I} = \mathcal{Z}I$ par le théorème 3.4, et le théorème 4.1 suit. □

Remarque 4.5. En analysant le schéma de démonstration ci-dessus, on voit que l'on a en fait démontré le résultat suivant.

Théorème 4.1-bis. *Si $\mathcal{Z}W$ satisfait* (19) *alors $\overline{I}(\phi) = \overline{I}_{\mathrm{aff}}(\phi) = \int_\Omega \overline{W}(\nabla\phi(x))dx$ pour tout $\phi \in W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ avec $\overline{W} = \mathcal{Q}W = \mathcal{Z}W$.*

Question 4.6. *Soit $\overline{I}_{\mathrm{diff}} : W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m) \to [0,+\infty]$ définie par :*

$$\overline{I}_{\mathrm{diff}}(\phi) := \inf\left\{\liminf_{n\to+\infty} I(\phi_n) : C^1(\overline{\Omega};\mathbb{R}^m) \ni \phi_n \rightharpoonup \phi\right\} \tag{20}$$

avec $C^1(\overline{\Omega};\mathbb{R}^m) := \left\{\phi_{|_{\overline{\Omega}}} : \phi \in C^1(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^m)\right\}$ où $C^1(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^m)$ désigne l'espace des fonctions C^1-différentiables de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}^m$. Lorsque W satisfait (9) *on a :*

$$\overline{I}(\phi) = \overline{I}_{\mathrm{aff}}(\phi) = \overline{I}_{\mathrm{diff}}(\phi) = \int_\Omega \overline{W}(\nabla\phi(x))dx \text{ pour tout } \phi \in W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m) \tag{21}$$
$$\text{avec } \overline{W} = \mathcal{Q}W = \mathcal{Z}W.$$

A-t-on encore (21) *si $\mathcal{Z}W$ vérifie* (19) *?* (*Pour le cas $m = 3$ et $N = 2$ voir la remarque* 5.24.)

Un résultat analogue au théorème 4.1 a été prouvé par Ben Belgacem (voir [24, Theorem 3.1]). Soit la suite $\{\mathcal{R}_iW\}_{i\geq 0}$ définie par $\mathcal{R}_0W := W$ et pour tout $i \geq 1$ et tout $F \in \mathbb{M}^{m\times N}$,

$$\mathcal{R}_{i+1}W(F) := \inf_{\substack{a\in\mathbb{R}^N\\ b\in\mathbb{R}^m\\ t\in[0,1]}} \big\{(1-t)\mathcal{R}_iW(F - ta\otimes b) + t\mathcal{R}_iW(F + (1-t)a\otimes b)\big\}.$$

D'après Kohn et Strang, $\mathcal{R}_{i+1}W \leq \mathcal{R}_iW$ pour tout $i \geq 0$ et $\mathcal{R}W = \inf_{i\geq 0}\mathcal{R}_iW$ (voir [46]) où $\mathcal{R}W$ désigne l'enveloppe rang-1 convexe de W, i.e., la plus grande fonction rang-1 convexe qui est inférieure à W. Le théorème de Ben Belgacem s'énonce comme suit.

Théorème 4.7. *Supposons que* :

- $\mathbb{O}_W := \mathrm{int}\{F \in \mathbb{M}^{m\times N} : \mathcal{Z}\mathcal{R}_iW(F) \leq \mathcal{R}_{i+1}W(F)$ *pour tout* $i \geq 0\}$ *est dense dans* $\mathbb{M}^{m\times N}$;
- *pour tout $i \geq 1$, tout $F \in \mathbb{M}^{m\times N}$ et tout $\{F_n\}_n \subset \mathbb{O}_W$,*
$$\text{si } F_n \to F \text{ alors } \mathcal{R}_iW(F) \geq \limsup_{n\to+\infty} \mathcal{R}_iW(F_n) \ ;$$

(22) • $\mathcal{R}W(F) \leq c(1 + |F|^p)$ *pour tout* $F \in \mathbb{M}^{m\times N}$ *avec* $c > 0$.

Alors (14) *a lieu avec $\overline{W} = \mathcal{Q}\mathcal{R}W$.*

Le théorème 4.7 est aussi compatible avec (7) et (2) (voir [24] et [22, Chapitre 1]). Ben Belgacem est le premier a avoir mis au point un théorème de représentation intégrale pour $\overline{I}$ qui contient et dépasse le théorème 3.6. (En fait, la première tentative de dépassement du théorème 3.6 est due à Percivale (voir [59, §2])). De manière générale, comme la rang-1 convexité et la quasiconvexité ne coïncident pas, les théorèmes 4.1 et 4.7 ne sont pas identiques. Cependant, on a la proposition "mixte" suivante (voir [11, Proposition 3]).

Proposition 4.8. *Si* $\mathcal{R}W$ *satisfait* (22) *et si* $\mathcal{Z}W$ *est finie alors* (14) *a lieu avec* $\overline{W} = \mathcal{Q}W$.

Démonstration. Comme $\mathcal{Z}W$ est finie, de la proposition 4.3(b) on déduit que $\mathcal{Z}W$ est rang-1 convexe, donc $\mathcal{Z}W \leq \mathcal{R}W$. Ainsi $\mathcal{Z}W$ satisfait (19) puisque $\mathcal{R}W$ satisfait (22) et la proposition 4.8 suit par le théorème 4.1. □

Question 4.9. *Peut-on combiner les théorèmes* 4.1 *et* 4.7 *pour avoir un théorème "optimal" plus "puissant" que les théorèmes* 4.1 *et* 4.7 *pris séparément ?*

Voici deux exemples qui montrent que le théorème 4.1 peut être appliqué à des W qui ne satisfont pas (9) (voir §4.2 et §4.3).

4.2. **Contrainte produit vectoriel non nul.**
On suppose que $W : \mathbb{M}^{3\times 2} \to [0, +\infty]$ satisfait la condition suivante :

$$\begin{aligned}(23)\quad &\text{il existe } \alpha, \beta > 0 \text{ tels que pour tout } F = (F_1 \mid F_2) \in \mathbb{M}^{3\times 2} \text{ avec } F_i \in \mathbb{M}^{3\times 1},\\ &\text{si } |F_1 \wedge F_2| \geq \alpha \text{ alors } W(F) \leq \beta(1 + |F|^p),\end{aligned}$$

avec $F_1 \wedge F_2$ désigne le produit vectoriel de F_1 par F_2. (Par exemple, on peut prendre W donnée par $W(F) := |F|^p + h(|F_1 \wedge F_2|)$ avec $h : [0, +\infty[\to [0, +\infty]$ une fonction Borel mesurable satisfaisant la propriété suivante :

$$(24)\quad \text{pour tout } \delta > 0 \text{ il existe } r_\delta > 0 \text{ tel que } h(t) \leq r_\delta \text{ pour tout } t \geq \delta$$

(par exemple, $h(0) = +\infty$ et $h(t) = \frac{1}{t^\alpha}$ si $t > 0$ avec $\alpha > 0$). Il est clair que W ainsi définie ne satisfait pas (9).) Nous avons montré le résultat suivant (voir [11, Theorem 1], voir aussi [12, Proposition 1.7]).

Théorème 4.10. *Si* W *vérifie* (23) *alors* $\mathcal{Z}W$ *satisfait* (19).

Schéma de démonstration. Utilisant la proposition 4.3(a) avec $D \subset \mathbb{R}^2$ et $\varphi \in \mathrm{Aff}_0(D; \mathbb{R}^3)$ bien choisis, on montre d'abord que si W vérifie (23) alors $\mathcal{Z}W$ satisfait la condition suivante :

$$\begin{aligned}(25)\quad &\text{il existe } \gamma > 0 \text{ tel que pour tout } F = (F_1 \mid F_2) \in \mathbb{M}^{3\times 2},\\ &\text{si } \min\{|F_1 + F_2|, |F_1 - F_2|\} \geq \alpha \text{ alors } \mathcal{Z}W(F) \leq \gamma(1 + |F|^p)\end{aligned}$$

avec $\alpha > 0$ donné par (23) (voir [12, Lemma 4.1]). On prouve ensuite, en utilisant la proposition 4.3(d) avec $D \subset \mathbb{R}^2$ et $\varphi \in \mathrm{Aff}_0(D; \mathbb{R}^3)$ bien choisis, que si $\mathcal{Z}W$ vérifie (25) alors $\mathcal{Z}W$ satisfait (19) (voir [12, §4.2-Proof of Proposition 1.7]). □

Le corollaire suivant est une conséquence immédiate des théorèmes 4.10 et 4.1.

Corollaire 4.11. *Si* W *satisfait* (23) *alors* (14) *a lieu avec* $\overline{W} = \mathcal{Q}W = \mathcal{Z}W$.

4.3. **Contrainte déterminant non nul.**
On suppose que $W : \mathbb{M}^{3\times 3} \to [0, +\infty]$ satisfait les deux conditions suivantes :

$$\begin{aligned}(26)\quad &\text{pour tout } \delta > 0 \text{ il existe } c_\delta > 0 \text{ tel que pour tout } F \in \mathbb{M}^{3\times 3},\\ &\text{si } |\mathrm{det} F| \geq \delta \text{ alors } W(F) \leq c_\delta(1 + |F|^p)\ ;\end{aligned}$$

$$(27)\quad W(PFQ) = W(F) \text{ pour tout } F \in \mathbb{M}^{3\times 3} \text{ et tout } P, Q \in \mathbb{SO}(3)$$

avec $\mathbb{SO}(3) := \{Q \in \mathbb{M}^{3\times 3} : Q^{\mathrm{T}}Q = QQ^{\mathrm{T}} = I_3 \text{ et } \det Q = 1\}$, où I_3 désigne la matrice identitée de $\mathbb{M}^{3\times 3}$ et Q^{T} est la matrice transposée de Q. (Par exemple, on peut prendre W donnée par $W(F) := |F|^p + h(|\det F|)$ avec $h : [0, +\infty[\to [0, +\infty]$ vérifiant (24). Noter que W ainsi d 'efinie ne satisfait pas (9) et est compatible avec (7) et (2).) Nous avons montré le résultat que voici (voir [12, Proposition 1.8]).

Théorème 4.12. *Si W vérifie* (26) *et* (27) *alors $\mathcal{Z}W$ satisfait* (19).

Schéma de démonstration. Utilisant successivement la proposition 4.3(a) et la proposition 4.3(d) avec $D \subset \mathbb{R}^3$ et $\varphi \in \mathrm{Aff}_0(D; \mathbb{R}^3)$ bien choisis, on montre que si W vérifie (26) alors $\mathcal{Z}W$ est finie (voir [12, Lemma 4.2]). De la proposition 4.3(c) on déduit que $\mathcal{Z}W$ est continue. Il suit que :

(28) $\mathcal{Z}W(F) \le c'$ pour tout $F \in \mathbb{M}^{3\times 3}$ tel que $|F|^2 \le 3$ avec $c' > 0$.

De plus (par (26) avec $\delta = 1$) il est clair que :

(29) $\mathcal{Z}W(F) \le c_1(1 + |F|^p)$ pour tout $F \in \mathbb{M}^{3\times 3}$ tel que $|\det F| \ge 1$ avec $c_1 > 0$.

Utilisant à nouveau la proposition 4.3(a) (avec $D \subset \mathbb{R}^3$ et $\varphi \in \mathrm{Aff}_0(D; \mathbb{R}^3)$ bien choisis) et la rang-1 convexité de $\mathcal{Z}W$ ($\mathcal{Z}W$ est rang-1 convexe par la proposition 4.3(b) puisque $\mathcal{Z}W$ est finie), on prouve que sous (26) on a :

(30) $\mathcal{Z}W(F) \le c''(1 + |F|^p)$ pour tout $F \in \mathbb{M}^{3\times 3}$ tels que F est diagonale,
$|\det F| \le 1$ et $|F|^2 \ge 3$ avec $c'' > 0$

(voir [12, §4.3-Claim 1 et Claim 2]). Combinant (28), (29) et (30), on voit que l'on a démontré que si W vérifie (26) alors $\mathcal{Z}W$ satisfait la condition suivante :

(31) il existe $c > 0$ tel que pour tout $F \in \mathbb{M}^{3\times 3}$,
si F est diagonale alors $\mathcal{Z}W(F) \le c(1 + |F|^p)$

(voir [12, Lemma 4.3]). D'autre part, $\mathcal{Z}W(PFQ) = \mathcal{Z}W(F)$ pour tout $F \in \mathbb{M}^{3\times 3}$ et tous $P, Q \in \mathbb{SO}(3)$ puisque W vérifie (27) (voir [12, Lemma 4.4]) et, lorsque F est inversible, $F = PQ^T\hat{F}Q$ avec $P, Q \in \mathbb{SO}(3)$ et $\hat{F}$ diagonale, donc pour toute matrice inversible F il existe une matrice diagonale $\hat{F}$ telle que $\mathcal{Z}W(F) = \mathcal{Z}W(\hat{F})$. Notant que $|F| = |\hat{F}|$ et utilisant (31) on déduit que pour toute matrice inversible F, $\mathcal{Z}W(F) \le c(1 + |F|^p)$. Comme $\mathcal{Z}W$ est continue et l'ensemble des matrices inversibles est dense dans $\mathbb{M}^{3\times 3}$, il suit que $\mathcal{Z}W$ satisfait (19) (voir [12, §4.3-Proof of Proposition 1.8]). □

Le corollaire suivant est une conséquence immédiate des théorèmes 4.12 et 4.1.

Corollaire 4.13. *Si W satisfait* (26) *et* (27) *alors* (14) *a lieu avec $\overline{W} = \mathcal{Q}W = \mathcal{Z}W$.*

Question 4.14. *A-t-on encore le théorème* 4.12 *si W vérifie seulement* (26) *? Peut-on remplacer* (26) *par la condition "moins forte" suivante* :

- *il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que pour tout $F \in \mathbb{M}^{3\times 3}$,*
  si $|\det F| \ge \alpha$ alors $W(F) \le \beta(1 + |F|^p)$?

Question 4.15. *Peut-on généraliser les théorèmes* 4.10 *et* 4.12 *comme suit. Etant donné $s \in \{1, \cdots, N\}$, si W vérifie la condition suivante* :

- *il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que pour tout $F \in \mathbb{M}^{m\times N}$,*
  si $|\mathrm{adj}_s F| \ge \alpha$ alors $W(F) \le \beta(1 + |F|^p)$,

alors $\mathcal{Z}W$ *satisfait* (19) *? (Si* $m = 3$ *et* $N = 2$, $\mathrm{adj}_2 F = F_1 \wedge F_2$; *si* $m = N = 3$, $\mathrm{adj}_3 F = \det F$, *voir* [35, §5.4 p. 249] *pour la définition précise de* $\mathrm{adj}_s F$.)

Etant donné $n \geq 1$ quelconque, on définit $W_n : \mathbb{M}^{3\times 3} \to [0, +\infty]$ par :

$$W_n(F) := \begin{cases} W(F) & \text{si } \det F > 0 \\ h_n(F) & \text{si } \det F \leq 0, \end{cases}$$

où $h_n : \mathbb{M}^{3\times 3} \to [0, +\infty]$ est Borel mesurable, vérifie $h_n(F) \leq c_n(1+|F|^p)$ pour tout $F \in \mathbb{M}^{3\times 3}$ avec $c_n > 0$ et, pour chaque $F \in \mathbb{M}^{3\times 3}$ tel que $\det F \leq 0$, $\{h_n(F)\}_{n\geq 1}$ est croissante avec $\sup_{n\geq 1} h_n(F) = +\infty$ (la suite $\{W_n\}_{n\geq 1}$ est donc croissante et, lorsque W satisfait (1), $\sup_{n\geq 1} W_n = W$).

Question 4.16. *Peut-on choisir* $\{h_n\}_{n\geq 1}$ *de manière à avoir le résultat qui suit. Si* W *satisfait* (1), (27) *et la condition suivante* :

(32) *pour tout* $\delta > 0$ *il existe* $c_\delta > 0$ *tel que pour tout* $F \in \mathbb{M}^{3\times 3}$,
si $\det F \geq \delta$ *alors* $W(F) \leq c_\delta(1 + |F|^p)$,

alors (14) *a lieu avec* $\overline{W} = \sup_{n\geq 1} \mathcal{Q}W_n = \sup_{n\geq 1} \mathcal{Z}W_n$ *?*

Remarque 4.17. Si W satisfait (1), (27) et (32), on a :

$$\int_\Omega \sup_{n\geq 1} \mathcal{Q}W_n(\nabla\phi(x))dx = \int_\Omega \sup_{n\geq 1} \mathcal{Z}W_n(\nabla\phi(x))dx \leq \overline{I}(\phi) \tag{33}$$

pour tout $\phi \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^3)$.

En effet, définissons $I_n : W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^3) \to [0, +\infty]$ par :

$$I_n(\phi) := \int_\Omega W_n(\nabla\phi(x))dx$$

et notons $\overline{I}_n$ la régularisée sci de I_n par rapport à la topologie faible de $W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^3)$. Comme W vérifie (1), il est clair que $\sup_{n\geq 1} \overline{I}_n \leq \overline{I}$. De plus, chaque W_n vérifie (26) et (27) puisque W satisfait (32) et (27), donc, par le corollaire 4.13, $\overline{I}_n(\phi) = \int_\Omega \mathcal{Z}W_n(\nabla\phi(x))dx = \int_\Omega \mathcal{Q}W_n(\nabla\phi(x))dx$ pour tout $n \geq 1$ et tout $\phi \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^3)$, et (33) suit.

5. Sur l'énergie de membrane non linéaire

5.1. **Généralités.**
Dans [10, 13] nous avons montré les deux théorèmes suivants (voir [10, Corollary 2.16] et [13, Corollary 2.9]).

Théorème 5.1. *Si* W *est continue et satisfait* (7), (26) *et*

$$W(\xi \mid \zeta) = W(\xi \mid -\zeta) \text{ pour tout } \xi \in \mathbb{M}^{3\times 2} \text{ et tout } \zeta \in \mathbb{R}^3, \tag{34}$$

alors $I_{\rm mem} = \Gamma(\pi)\text{-}\lim_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon$ *avec* $W_{\rm mem} = \mathcal{Q}W_0 = \mathcal{Z}W_0$.

(Les fonctionnelles $I_\varepsilon : W^{1,p}(\Sigma_\varepsilon; \mathbb{R}^3) \to [0, +\infty]$ et $I_{\rm mem} : W^{1,p}(\Sigma; \mathbb{R}^3) \to [0, +\infty]$, avec $\Sigma_\varepsilon := \Sigma \times] - \frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}[\subset \mathbb{R}^3$ où $\Sigma \subset \mathbb{R}^2$ est un ouvert borné et $\varepsilon > 0$, sont respectivement définies en (16) et (17). La fonction $W_0 : \mathbb{M}^{3\times 2} \to [0, +\infty]$ est donnée par (18).)

Théorème 5.2. *Si* W *est continue et vérifie* (1) *et* (32) *alors* $I_{\rm mem} = \Gamma(\pi)\text{-}\lim_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon$ *avec* $W_{\rm mem} = \mathcal{Q}W_0 = \mathcal{Z}W_0$.

Ces théorèmes étendent le théorème 3.8. Ils sont plus réalistes du point de vue de l'hyperélasticité (le théorème 5.1 (resp. 5.2) est compatible avec (7) (resp. (1)) et (2)).

L'objectif de ce qui suit est d'esquisser les preuves des théorèmes 5.1 et 5.2 (voir §5.1.1-5.1.3 pour la structure générale et §5.2 et §5.3 pour plus de détails). Les démonstrations des théorèmes 5.1 et 5.2 ont la même structure que l'on peut décomposer en trois points (voir §5.1.1-5.1.3).

5.1.1. *Préliminaires.*

Pour chaque $\varepsilon > 0$, on considère $\mathcal{I}_\varepsilon : W^{1,p}(\Sigma;\mathbb{R}^3) \to [0,+\infty]$ définie par :

$$\mathcal{I}_\varepsilon(\psi) := \inf\big\{I_\varepsilon(\phi) : \pi_\varepsilon(\phi) = \psi\big\}.$$

Définition 5.3. On dit que $\mathcal{I}_\varepsilon$ Γ-converge vers $I_{\rm mem}$ et on écrit

$$I_{\rm mem} = \Gamma\text{-}\lim_{\varepsilon\to 0} \mathcal{I}_\varepsilon$$

si

$$\Gamma\text{-}\liminf_{\varepsilon\to 0} \mathcal{I}_\varepsilon = \Gamma\text{-}\limsup_{\varepsilon\to 0} \mathcal{I}_\varepsilon = I_{\rm mem}$$

avec $\Gamma\text{-}\liminf\limits_{\varepsilon\to 0} \mathcal{I}_\varepsilon, \Gamma\text{-}\limsup\limits_{\varepsilon\to 0} \mathcal{I}_\varepsilon : W^{1,p}(\Sigma;\mathbb{R}^3) \to [0,+\infty]$ définies par :

$$\left(\Gamma\text{-}\liminf_{\varepsilon\to 0} \mathcal{I}_\varepsilon\right)(\psi) := \inf\left\{\liminf_{\varepsilon\to 0} \mathcal{I}_\varepsilon(\psi_\varepsilon) : W^{1,p}(\Sigma;\mathbb{R}^3) \ni \psi_\varepsilon \rightharpoonup \psi\right\};$$
$$\left(\Gamma\text{-}\limsup_{\varepsilon\to 0} \mathcal{I}_\varepsilon\right)(\psi) := \inf\left\{\limsup_{\varepsilon\to 0} \mathcal{I}_\varepsilon(\psi_\varepsilon) : W^{1,p}(\Sigma;\mathbb{R}^3) \ni \psi_\varepsilon \rightharpoonup \psi\right\}.$$

La définition 5.3 est équivalente à la définition 3.7 où "$\psi_\varepsilon \rightharpoonup \psi$" est substitué par "$\pi_\varepsilon(\phi_\varepsilon) \rightharpoonup \psi$". Il est alors facile de voir que :

$$I_{\rm mem} = \Gamma(\pi)\text{-}\lim_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon \text{ si et seulement si } I_{\rm mem} = \Gamma\text{-}\lim_{\varepsilon\to 0} \mathcal{I}_\varepsilon. \tag{35}$$

Tout revient donc à "calculer" la Γ-limite de $\mathcal{I}_\varepsilon$ lorsque $\varepsilon \to 0$. Pour cela, on étudie d'abord la Γ-convergence de $\mathcal{I}_\varepsilon$ lorsque $\varepsilon \to 0$ (voir §5.1.2) et on établit ensuite une représentation intégrale de la Γ-limite (voir §5.1.3). (Cette procédure générale a été initiée dans [6, 7] (voir aussi [15]). Un procédé similaire est utilisée pour la relaxation des intégrales géométriques (voir [49, 50, 8, 9, 51] et §6.2).)

On prouve le lemme (simple) suivant (voir [10, Lemma 2.6] et [13, Lemma 2.4]). (Rappelons que W est supposée coercive.)

Lemme 5.4. *Si W est continue et vérifie* (7) *et* (26) *ou* (1) *et* (32) *alors W_0 satisfait les propriétés suivantes* :

- W_0 *est continue* (*et coercive*) ;

(36) • $W_0(\xi_1 \mid \xi_2) = +\infty$ *si et seulement si* $\xi_1 \wedge \xi_2 = 0$;

(37) • *pour tout $\delta > 0$ il existe $c_\delta > 0$ tel que pour tout $\xi = (\xi_1 \mid \xi_2) \in \mathbb{M}^{3\times 2}$, si $|\xi_1 \wedge \xi_2| \geq \delta$ alors $W_0(\xi) \leq c_\delta(1+|\xi|^p)$.*

Plus précisément, W_0 est continue (*et coercive*) *dès que W est continue* (*et coercive*), (36) *a lieu dès que W vérifie* (7) *ou* (1) *et* (37) *a lieu dès que W vérifie* (26) *ou* (32).

Remarque 5.5. Pour Ben Belgacem $W_{\rm mem} = \mathcal{QR}W_0$ (voir [22, 23, 24] et §3.4). En fait, lorsque W satisfait (32), on a $\mathcal{QR}W_0 = \mathcal{Q}W_0 = \mathcal{Z}W_0$. En effet, du lemme 5.4 on voit que W_0 satisfait (37) donc (23). Par le théorème 4.10 il suit que $\mathcal{Z}W_0$ vérifie (19). Du lemme 4.4 on déduit que $\mathcal{Z}W_0$ est continue et $\mathcal{Q}W_0 = \mathcal{Z}W_0$. Ainsi $\mathcal{Q}W_0$ est continue et quasiconvexe donc rang-1 convexe, d'où $\mathcal{Q}W_0 \leq \mathcal{R}W_0$ et par conséquent $\mathcal{Q}W_0 \leq \mathcal{QR}W_0$. D'autre part, $\mathcal{QR}W_0 \leq \mathcal{Q}W_0$ puisque $\mathcal{R}W_0 \leq W_0$, ce qui donne le résultat.

On définit $\mathcal{I} : W^{1,p}(\Sigma;\mathbb{R}^3) \to [0,+\infty]$ par :

$$\mathcal{I}(\psi) := \int_\Sigma W_0(\nabla\psi(x))dx,$$

et on considère $\overline{\mathcal{I}}, \overline{\mathcal{I}}_{\rm aff}, \overline{\mathcal{I}}_{{\rm diff}_*} : W^{1,p}(\Sigma;\mathbb{R}^3) \to [0,+\infty]$ données par :

- $\overline{\mathcal{I}}(\psi) := \inf\left\{\liminf\limits_{n\to+\infty}\mathcal{I}(\psi_n) : W^{1,p}(\Sigma;\mathbb{R}^3) \ni \psi_n \rightharpoonup \psi\right\}$;
- $\overline{\mathcal{I}}_{\rm aff}(\psi) := \inf\left\{\liminf\limits_{n\to+\infty}\mathcal{I}(\psi_n) : {\rm Aff}(\Sigma;\mathbb{R}^3) \ni \psi_n \rightharpoonup \psi\right\}$;
- $\overline{\mathcal{I}}_{{\rm diff}_*}(\psi) := \inf\left\{\liminf\limits_{n\to+\infty}\mathcal{I}(\psi_n) : C^1_*(\overline{\Sigma};\mathbb{R}^3) \ni \psi_n \rightharpoonup \psi\right\}$

avec $C^1_*(\overline{\Sigma};\mathbb{R}^3) := \left\{\psi \in C^1(\overline{\Sigma};\mathbb{R}^3) : \partial_1\psi(x)\wedge\partial_2\psi(x) \neq 0 \text{ pour tout } x \in \overline{\Sigma}\right\}$ où $\partial_1\psi(x)$ (resp. $\partial_2\psi(x)$) désigne la dérivée partielle de ψ en $x = (x_1, x_2)$ par rapport à x_1 (resp. x_2). (En fait, $C^1_*(\overline{\Sigma};\mathbb{R}^3)$ est l'ensemble des C^1-immersions de $\overline{\Sigma}$ dans $\mathbb{R}^3$.)

Remarque 5.6. Lorsque W_0 vérifie (36) on a :

- $\overline{\mathcal{I}}_{\rm aff}(\psi) := \inf\left\{\liminf\limits_{n\to+\infty}\mathcal{I}(\psi_n) : {\rm Aff}_*(\Sigma;\mathbb{R}^3) \ni \psi_n \rightharpoonup \psi\right\}$

avec ${\rm Aff}_*(\Sigma;\mathbb{R}^3) := \left\{\psi \in {\rm Aff}(\Sigma;\mathbb{R}^3) : \partial_1\psi(x)\wedge\partial_2\psi(x) \neq 0 \text{ p.p. dans } \overline{\Sigma}\right\}$.

5.1.2. *Existence de la Γ-limite de $\mathcal{I}_\varepsilon$.*

On démontre les trois propositions suivantes.

Proposition 5.7. $\Gamma\text{-}\liminf\limits_{\varepsilon\to0}\mathcal{I}_\varepsilon \geq \overline{\mathcal{I}}$.

Proposition 5.8. *Si W est continue et satisfait* (7), (26) *et* (34) *alors*

$$\Gamma\text{-}\limsup_{\varepsilon\to0}\mathcal{I}_\varepsilon \leq \overline{\mathcal{I}}_{\rm aff}.$$

Proposition 5.9. *Si W est continue et satisfait* (1) *et* (32) *alors*

$$\Gamma\text{-}\limsup_{\varepsilon\to0}\mathcal{I}_\varepsilon \leq \overline{\mathcal{I}}_{{\rm diff}_*}.$$

La proposition 5.7 se démontre assez facilement (voir [10, §4.1] ou [13, §4.1]). Les propositions 5.8 et 5.9 sont plus difficiles à prouver (voir [10, §4.2] et [13, §4.2]). (Pour plus de précisions sur les démonstrations des propositions 5.8 et 5.9 voir §5.2 et §5.3.) Il suit que :

Proposition 5.10. $\Gamma\text{-}\lim_{\varepsilon\to0}\mathcal{I}_\varepsilon = \overline{\mathcal{I}}$ *dans les deux cas suivants* :

(a) *W est continue, satisfait* (7), (26) *et* (34) *et* $\overline{\mathcal{I}} = \overline{\mathcal{I}}_{\rm aff}$;
(b) *W est continue, satisfait* (1) *et* (32) *et* $\overline{\mathcal{I}} = \overline{\mathcal{I}}_{{\rm diff}_*}$.

5.1.3. *Représentation intégrale de la* Γ*-limite de* $\mathcal{I}_\varepsilon$*.*

D'après les théorèmes 4.1 et 4.10, si W_0 satisfait (37) (donc (23)) alors $\overline{\mathcal{I}} = I_{\rm mem}$ avec $W_{\rm mem} = \mathcal{Q}W_0 = \mathcal{Z}W_0$.

Donc, prenant en compte (35) et la proposition 5.10(a), le théorème 5.1 est démontré si on prouve que $\overline{\mathcal{I}} = \overline{\mathcal{I}}_{\rm aff}$ ce qui est vraie grâce au théorème 4.1-bis.

De même, prenant en compte (35) et la proposition 5.10(b), le théorème 5.2 est démontré si on prouve que :

$$\overline{\mathcal{I}} = \overline{\mathcal{I}}_{{\rm diff}_*}. \tag{38}$$

Cette dernière égalité est plus difficile à démontrer (voir le théorème 5.20). Sa preuve utilise deux théorèmes d'approximation par Ben Belgacem-Bennequin (voir le théorème 5.16) et Gromov-Eliashberg (voir le théorème 5.18-bis) ainsi que deux lemmes de Ben Belgacem (voir les lemmes 5.21 et 5.23). (Pour plus de précisions sur la démonstration de (38) voir §5.3.3.)

5.2. **Contrainte déterminant non nul.**

Dans ce paragraphe on démontre la proposition 5.8.

5.2.1. *Préliminaires.*

Etant donné $\psi \in {\rm Aff}_*(\Sigma;\mathbb{R}^3)$, il existe une famille finie $\{V_i\}_{i\in I}$ de sous-ensembles ouverts et disjoints de Σ telle que $|\Sigma \setminus \cup_{i\in I} V_i| = 0$, $|\partial V_i| = 0$ et $\nabla\psi(x) = \xi_i$ dans V_i pour tout $i \in I$ avec $\xi_i = (\xi_{i,1} \mid \xi_{i,2}) \in \mathbb{M}^{3\times 2}$ et $\xi_{i,1}\wedge\xi_{i,2} \neq 0$. Pour chaque $i \in I$ et chaque $j \geq 1$, on définit $U^-_{i,j}, U^+_{i,j} \subset \mathbb{R}^3$ par :

$$U^-_{i,j} := \left\{\zeta \in \mathbb{R}^3 : \det(\xi_i \mid \zeta) \leq -\frac{1}{j}\right\} \text{ et } U^+_{i,j} := \left\{\zeta \in \mathbb{R}^3 : \det(\xi_i \mid \zeta) \geq \frac{1}{j}\right\}.$$

Il est facile de voir que :

$$U^-_{i,j} \text{ et } U^+_{i,j} \text{ sont non vides et convexes ;} \tag{39}$$

$$U^-_{i,j} \cup U^+_{i,j} = \left\{\zeta \in \mathbb{R}^3 : |\det(\xi \mid \zeta)| \geq \frac{1}{j}\right\} ; \tag{40}$$

$$U^-_{i,1} \subset U^-_{i,2} \subset U^-_{i,3} \subset \cdots \subset \mathop{\cup}_{j\geq 1} U^-_{i,j} = \big\{\zeta \in \mathbb{R}^3 : \det(\xi \mid \zeta) < 0\big\} ; \tag{41}$$

$$U^+_{i,1} \subset U^+_{i,2} \subset U^+_{i,3} \subset \cdots \subset \mathop{\cup}_{j\geq 1} U^+_{i,j} = \big\{\zeta \in \mathbb{R}^3 : \det(\xi \mid \zeta) > 0\big\}. \tag{42}$$

De plus, utilisant (40), (41) et (42), on peut prouver que :

$$\begin{aligned} &\text{il existe } j_\psi \geq 1 \text{ et } I^-, I^+ \subset I \text{ tels que } I^- \cup I^+ = I, I^- \cap I^+ = \emptyset \\ &\text{et } \Big(\mathop{\cap}_{i\in I^-} U^-_{i,j}\Big) \cap \Big(\mathop{\cap}_{i\in I^+} U^+_{i,j}\Big) \neq \emptyset \text{ pour tout } j \geq j_\psi \end{aligned} \tag{43}$$

(voir [10, Lemma 3.2]). On pose $V = \cup_{i\in I} V_i$ et, pour chaque $j \geq j_\psi$, on définit $\Gamma^j_\psi : \overline{\Sigma} \rightrightarrows \mathbb{R}^3$ par :

$$\Gamma^j_\psi(x) := \begin{cases} U^-_{i,j} & \text{si } x \in V_i \text{ avec } i \in I^- \\ U^+_{i,j} & \text{si } x \in V_i \text{ avec } i \in I^+ \\ \Big(\mathop{\cap}_{i\in I^-} U^-_{i,j}\Big) \cap \Big(\mathop{\cap}_{i\in I^+} U^+_{i,j}\Big) & \text{si } x \in \overline{\Sigma} \setminus V. \end{cases}$$

Le lemme suivant est une conséquence du corollaire 6.7. (Dans ce qui suit, étant donné $\Gamma:\overline{\Sigma}\rightrightarrows\mathbb{R}^3$, on pose $C(\overline{\Sigma};\Gamma):=\big\{\varphi\in C(\overline{\Sigma};\mathbb{R}^3):\varphi(x)\in\Gamma(x)\text{ p.p. dans }\overline{\Sigma}\big\}$ avec $C(\overline{\Sigma};\mathbb{R}^3)$ désignant l'espace des fonctions continues de $\overline{\Sigma}$ dans $\mathbb{R}^3$.)

Lemme 5.11. *Soient $\psi\in\mathrm{Aff}_*(\Sigma;\mathbb{R}^3)$ et $j\geq j_\psi$. Si W est continue et satisfait* (26) *alors*

$$\inf_{\varphi\in C(\overline{\Sigma};\Gamma^j_\psi)}\int_\Sigma W(\nabla\psi(x)\mid\varphi(x))dx=\int_\Sigma\inf_{\zeta\in\Gamma^j_\psi(x)}W(\nabla\psi(x)\mid\zeta)dx. \tag{44}$$

Démonstration. (On utilise la notation $\mathrm{Det}(\xi\mid\zeta)=|\det(\xi\mid\zeta)|$.) Puisque W est continue, (70) a lieu avec $f(x,\zeta)=W(\nabla\psi(x)\mid\zeta)$. Prenant en compte (39) et (43), on voit que Γ^j_ψ est une multifonction sci à valeurs convexes fermées non vides et par conséquent (71) a lieu avec $\Gamma=\Gamma^j_\psi$. Etant donnés $\varphi,\hat{\varphi}\in C(\overline{\Sigma};\Gamma^j_\psi)$, il est clair que $\mathrm{Det}(\nabla\psi(x)\mid\alpha\varphi(x)+(1-\alpha)\hat{\varphi}(x))\geq\frac{1}{j}$ pour tout $\alpha\in[0,1]$ et presque tout $x\in\Sigma$. De (26) on déduit qu'il existe $c>0$ (dépendant seulement de j,ψ,φ et $\hat{\varphi}$) tel que $W(\nabla\psi(x)\mid\alpha\varphi(x)+(1-\alpha)\hat{\varphi}(x))\leq c$ pour tout $\alpha\in[0,1]$ et presque tout $x\in\Sigma$. Ainsi (72) a lieu avec $f(x,\zeta)=W(\nabla\psi(x)\mid\zeta)$ et $\Gamma=\Gamma^j_\psi$. On applique le corollaire 6.7 et on obtient (44). □

Remarque 5.12. On peut donner une preuve "plus simple" du lemme 5.11 sans utiliser le corollaire 6.7 (voir [10, Lemma 3.3]).

Pour chaque $j\geq j_\psi$, on définit $\hat{\Gamma}^j_\psi:\overline{\Sigma}\rightrightarrows\mathbb{R}^3$ (la multifonction "symétrisée" de Γ^j_ψ) par :

$$\hat{\Gamma}^j_\psi(x):=\begin{cases}U^-_{i,j}\cup U^+_{i,j} & \text{si } x\in V_i\\ \Gamma^j_\psi(x) & \text{si } x\in\overline{\Sigma}\setminus V.\end{cases}$$

(Noter que $\hat{\Gamma}^j_\psi$ n'est pas à valeurs convexes. C'est pour cela qu'on n'utilise pas cette multifonction dans le lemme 5.11 et qu'on aura besoin de l'hypothèse de "symétrie"(34).) Le théorème suivant donne une représentation "non intégrale" de $\mathcal{I}$ sur $\mathrm{Aff}_*(\Sigma;\mathbb{R}^3)$ (voir [10, Theorem 3.4]).

Théorème 5.13. *Si W est continue et vérifie* (7), (26) *et* (34) *et si $\psi\in\mathrm{Aff}_*(\Sigma;\mathbb{R}^3)$ alors*

$$\mathcal{I}(\psi)=\inf_{j\geq j_\psi}\inf_{\varphi\in C(\overline{\Sigma};\hat{\Gamma}^j_\psi)}\int_\Sigma W(\nabla\psi(x)\mid\varphi(x))dx.$$

Démonstration. Il suffit de prouver que :

$$\mathcal{I}(\psi)\geq\inf_{j\geq j_\psi}\inf_{\varphi\in C(\overline{\Sigma};\hat{\Gamma}^j_\psi)}\int_\Sigma W(\nabla\psi(x)\mid\varphi(x))dx. \tag{45}$$

Par (34) on a :

$$\inf_{\zeta\in\Gamma^j_\psi(x)}W(\nabla\psi(x)\mid\zeta)=\inf_{\zeta\in\hat{\Gamma}^j_\psi(x)}W(\nabla\psi(x)\mid\zeta) \tag{46}$$

pour tout $j\geq j_\psi$ and tout $x\in\Sigma$. Utilisant (46), le lemme 5.11 et le fait que $\Gamma^j_\psi\subset\hat{\Gamma}^j_\psi$, on obtient :

$$\inf_{j\geq j_\psi}\int_\Sigma\inf_{\zeta\in\hat{\Gamma}^j_\psi(x)}W(\nabla\psi(x)\mid\zeta)dx\geq\inf_{j\geq j_\psi}\inf_{\varphi\in C(\overline{\Sigma};\hat{\Gamma}^j_\psi)}\int_\Sigma W(\nabla\psi(x)\mid\varphi(x))dx. \tag{47}$$

D'autre part, on a :

- $\inf_{\zeta\in\hat{\Gamma}^{j_\psi}_\psi(\cdot)} W(\nabla\psi(\cdot)\mid\zeta)\in L^1(\Sigma)$ par (26) ;
- $\left\{\inf_{\zeta\in\hat{\Gamma}^{j}_\psi(\cdot)} W(\nabla\psi(\cdot)\mid\zeta)\right\}_{j\geq j_\psi}$ est une suite décroissante par (41) et (42) ;
- (48) $\inf_{j\geq j_\psi}\inf_{\zeta\in\hat{\Gamma}^{j}_\psi(\cdot)} W(\nabla\psi(\cdot)\mid\zeta)=\inf_{\zeta\in\underset{j\geq j_\psi}{\cup}\hat{\Gamma}^{j}_\psi(\cdot)} W(\nabla\psi(\cdot)\mid\zeta)=W_0(\nabla\psi(\cdot))$

  grâce à (7) et au fait que $\underset{j\geq j_\psi}{\cup}\hat{\Gamma}^{j}_\psi(\cdot)=\big\{\zeta\in\mathbb{R}^3:\det(\nabla\psi(\cdot)\mid\zeta)\neq 0\big\}$,

et (45) suit de (47) et (48) en utilisant le théorème de la convergence monotone. □

5.2.2. *Démonstration de la proposition* 5.8.

(On utilise les notations $\mathrm{Det}(\xi\mid\zeta)=|\det(\xi\mid\zeta)|$ et $\mathcal{F}=\mathrm{Aff}_*(\Sigma;\mathbb{R}^3)$. On peut travailler avec $\mathrm{Aff}_*(\Sigma;\mathbb{R}^3)$ au lieu de $\mathrm{Aff}(\Sigma;\mathbb{R}^3)$ grâce à la remarque 5.6.) Il suffit de prouver que :

$$\limsup_{\varepsilon\to 0}\mathcal{I}_\varepsilon(\psi)\leq\mathcal{I}(\psi)\tag{49}$$

pour tout $\psi\in\mathcal{F}$ (puisque $\Gamma\text{-}\limsup_{\varepsilon\to0}\mathcal{I}_\varepsilon$ est sfsci dans $W^{1,p}(\Sigma;\mathbb{R}^3)$). Etant donné $\psi\in\mathcal{F}$, considérons $j\geq j_\psi$ (avec j_ψ donné par (43)) et $n\geq 1$. Utilisant le théorème 5.13 on obtient l'existence de $\varphi\in C(\overline{\Sigma};\hat{\Gamma}^j_\psi)$ tel que :

$$\int_\Sigma W(\nabla\psi(x)\mid\varphi(x))dx\leq\mathcal{I}(\psi)+\frac{1}{n}.\tag{50}$$

Soit $\{\varphi_k\}_{k\geq1}\subset C^\infty(\overline{\Sigma};\mathbb{R}^3)$ tel que :

$$\varphi_k\to\varphi\text{ uniformément.}\tag{51}$$

On affirme que :

$$\mathrm{Det}(\nabla\psi(x)\mid\varphi_k(x))\geq\frac{1}{2j}\text{ pour tout }x\in V\text{ et tout }k\geq k_\psi\text{ avec }k_\psi\geq 1\ ;\tag{52}$$

$$\lim_{k\to+\infty}\int_\Sigma W(\nabla\psi(x)\mid\varphi_k(x))dx=\int_\Sigma W(\nabla\psi(x)\mid\varphi(x))dx.\tag{53}$$

En effet, posant $\mu_\psi:=\sup_{x\in V}|\partial_1\psi(x)\wedge\partial_2\psi(x)|=\max_{i\in I}|\xi_{i,1}\wedge\xi_{i,2}|$ ($\mu_\psi>0$) et utilisant (51), on déduit qu'il existe $k_\psi\geq1$ tel que :

$$\sup_{x\in\overline{\Sigma}}|\varphi_k(x)-\varphi(x)|<\frac{1}{2j\mu_\psi}\tag{54}$$

pour tout $k\geq k_\psi$. Soient $x\in V$ et $k\geq k_\psi$. Comme $\varphi\in C(\overline{\Sigma};\hat{\Gamma}^j_\psi)$ on a :

$$\mathrm{Det}(\nabla\psi(x)\mid\varphi_k(x))\geq\frac{1}{j}-\mathrm{Det}(\nabla\psi(x)\mid\varphi_k(x)-\varphi(x)).\tag{55}$$

Remarquant que $\mathrm{Det}(\nabla\psi(x)\mid\varphi_k(x)-\varphi(x))\leq|\partial_1\psi(x)\wedge\partial_2\psi(x)||\varphi_k(x)-\varphi(x)|$, de (54) et (55) on déduit que $\mathrm{Det}(\nabla\psi(x)\mid\varphi_k(x))\geq\frac{1}{2j}$ et (52) est prouvée. Combinant (52) et (26) on voit que $\sup_{k\geq k_\psi}W(\nabla\psi(\cdot)\mid\varphi_k(\cdot))\in L^1(\Sigma)$. Comme W est continue on a $\lim_{k\to+\infty}W(\nabla\psi(x)\mid\varphi_k(x))=W(\nabla\psi(x)\mid\varphi(x))$ pour tout $x\in V$ et (53) suit par le théorème de la convergence dominée.

Considérons $k\geq k_\psi$ et définissons la fonction continue $\theta:]-\frac12,\frac12[\to\mathbb{R}$ par $\theta(x_3):=\min_{i\in I}\inf_{x\in\overline{V}_i}\mathrm{Det}(\xi_i+x_3\nabla\varphi_k(x)\mid\varphi_k(x))$. Par (52) on a $\theta(0)\geq\frac{1}{2j}$ et par conséquent il existe $\eta_\psi \in]0, \frac{1}{2}[$ tel que $\theta(x_3) \geq \frac{1}{4j}$ pour tout $x_3 \in]-\eta_\psi, \eta_\psi[$. Soit $\phi_k : \Sigma_1 \to \mathbb{R}$ donnée par $\phi_k(x, x_3) := \psi(x) + x_3\varphi_k(x)$. Il suit que :

$$\text{(56)} \qquad \mathrm{Det}(\nabla\phi_k(x, \varepsilon x_3)) \geq \frac{1}{4j} \text{ pour tout } \varepsilon \in]0, \eta_\psi[\text{ et tout } (x, x_3) \in V\times]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[.$$

De la même façon que dans la preuve de (53), combinant (56) et (26) et utilisant la continuité de W, on obtient :

$$\text{(57)} \qquad \lim_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon(\phi_k) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Sigma_1} W(\nabla\phi_k(x, \varepsilon x_3))dxdx_3 = \int_\Sigma W(\nabla\psi(x) \mid \varphi_k(x))dx.$$

Puisque $\pi_\varepsilon(\phi_k) = \psi$ on a $\mathcal{I}_\varepsilon(\psi) \leq I_\varepsilon(\phi_k)$ pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $k \geq k_\psi$. Utilisant (57), (53) et (50), on déduit que $\limsup_{\varepsilon\to 0} \mathcal{I}_\varepsilon(\psi) \leq \mathcal{I}(\psi) + \frac{1}{n}$, et (49) suit en faisant $n \to +\infty$. □

5.3. **Contrainte déterminant strictement positif.**

Dans ce paragraphe on démontre la proposition 5.9 et on esquisse la preuve de l'égalité (38). (En fait, les démonstrations des propositions 5.8 et 5.9 ont la même structure.)

5.3.1. *Préliminaires.*

Etant donnés $\psi \in C^1_*(\overline{\Sigma}; \mathbb{R}^3)$ et $j \geq 1$, on définit $\Lambda^j_\psi : \overline{\Sigma} \rightrightarrows \mathbb{R}^3$ par :

$$\Lambda^j_\psi(x) := \left\{\zeta \in \mathbb{R}^3 : \det(\nabla\psi(x) \mid \zeta) \geq \frac{1}{j}\right\}.$$

Il est facile de voir que Λ^j_ψ est une multifonction sci à valeurs convexes fermées non vides et que :

$$\text{(58)} \quad \Lambda^1_\psi(x) \subset \Lambda^2_\psi(x) \subset \Lambda^3_\psi(x) \subset \cdots \subset \bigcup_{j\geq 1} \Lambda^j_\psi(x) = \left\{\zeta \in \mathbb{R}^3 : \det(\nabla\psi(x) \mid \zeta) > 0\right\}$$

(voir [13, Lemma 3.1]). (Ici, on ne peut pas prendre ψ dans $\mathrm{Aff}_*(\Sigma; \mathbb{R}^3)$. En effet, on serait amené à considérer seulement $U^+_{i,j}$ ce qui ne permettrait pas de reproduire la démarche développée dans §5.2.1.) Le lemme suivant est une conséquence du corollaire 6.7. (Il se prouve de la même façon que le lemme 5.11.)

Lemme 5.14. *Soient $\psi \in C^1_*(\overline{\Sigma}; \mathbb{R}^3)$ et $j \geq 1$. Si W est continue et satisfait* (32) *alors*

$$\text{(59)} \qquad \inf_{\varphi\in C(\overline{\Sigma};\Lambda^j_\psi)} \int_\Sigma W(\nabla\psi(x) \mid \varphi(x))dx = \int_\Sigma \inf_{\zeta\in\Lambda^j_\psi(x)} W(\nabla\psi(x) \mid \zeta)dx.$$

Démonstration. On récrit la preuve du lemme 5.14 en prenant $\Gamma^j_\psi = \Lambda^j_\psi$ (Λ^j_ψ est une multifonction sci à valeurs convexes fermées non vides), $\mathrm{Det}(\xi \mid \zeta) = \det(\xi \mid \zeta)$ et en utilisant (32) à la place de (26). On peut ainsi appliquer le corollaire 6.7 avec $f(x, \zeta) = W(\nabla\psi(x) \mid \zeta)$ et $\Gamma = \Lambda^j_\psi$ et on obtient (59). □

Le théorème suivant donne une représentation “non intégrale” de $\mathcal{I}$ sur $C^1_*(\overline{\Sigma}; \mathbb{R}^3)$ (voir [13, Theorem 3.4]). (Il se démontre de la même façon que le théorème 5.13.)

Théorème 5.15. *Si W est continue et vérifie* (1) *et* (32) *et si $\psi \in C^1_*(\overline{\Sigma}; \mathbb{R}^3)$ alors*

$$\mathcal{I}(\psi) = \inf_{j\geq 1} \inf_{\varphi\in C(\overline{\Sigma};\Lambda^j_\psi)} \int_\Sigma W(\nabla\psi(x) \mid \varphi(x))dx.$$

Démonstration. On récrit la preuve du théorème 5.13 en prenant $j_\psi = 1$, $\Gamma^j_\psi = \hat{\Gamma}^j_\psi = \Lambda^j_\psi$ (donc $\cup_{j\geq j_\psi}\hat{\Gamma}^j_\psi(\cdot) = \cup_{j\geq j_\psi}\Lambda^j_\psi(\cdot) = \{\zeta \in \mathbb{R}^3 : \det(\nabla\psi(\cdot) \mid \zeta) > 0\}$ dans (48)) et en utilisant le lemme 5.14 à la place du lemme 5.11, (32) à la place de (26), (58) à la place de (41)-(42) et (1) à la place de (7). □

5.3.2. *Démonstration de la proposition* 5.9.

On récrit la preuve de la proposition 5.8 en prenant $\mathrm{Det}(\xi \mid \zeta) = \det(\xi \mid \zeta)$, $\mathcal{F} = C^1_*(\overline{\Sigma};\mathbb{R}^3)$, $j_\psi = 1$, $\hat{\Gamma}^j_\psi = \Lambda^j_\psi$, $V = V_i = \overline{\Sigma}$ et en utilisant (32) à la place de (26). □

5.3.3. *Sur la démonstration de l'égalité* (38).

On pose :

$$\mathrm{Aff}_{\mathrm{li}}(\Sigma;\mathbb{R}^3) := \Big\{\psi \in \mathrm{Aff}(\Sigma;\mathbb{R}^3) : \psi \text{ est localement injective}\Big\}.$$

Pour la preuve de l'égalité (38) (voir le théorème 5.20) on aura besoin des deux théorèmes suivants (voir les théorèmes 5.16 et 5.17, voir aussi [13, Appendix A]).

Théorème 5.16. *Pour chaque $\psi \in \mathrm{Aff}_{\mathrm{li}}(\Sigma;\mathbb{R}^3)$ il existe $\{\psi_n\}_{n\geq 1} \subset C^1_*(\overline{\Sigma};\mathbb{R}^3)$ tel que :*

(60) $\psi_n \to \psi$ *dans* $W^{1,p}(\Sigma;\mathbb{R}^3)$;

(61) $|\partial_1\psi_n(x) \wedge \partial_2\psi_n(x)| \geq \delta$ *pour tout* $x \in \overline{\Sigma}$ *et tout* $n \geq 1$ *avec* $\delta > 0$.

Ce théorème est dû à Ben Belgacem et Bennequin (voir [22, Lemma 8 p. 114], voir aussi [62, Proposition C.0.4 p. 127] et [63, Lemma 1.3]).

Théorème 5.17. $\mathrm{Aff}_{\mathrm{li}}(\Sigma;\mathbb{R}^3)$ *est fortement dense dans* $W^{1,p}(\Sigma;\mathbb{R}^3)$.

Démonstration. D'après Gromov et Eliashberg (voir [43, Theorem 1.3.4B], voir aussi [44, Theorem B_1' p. 20]) on a :

Théorème 5.18. *Soient $m > N \geq 1$ et M une variété compacte de dimension N qui peut être immergée dans $\mathbb{R}^m$. Alors, pour chaque fonction C^1-differentiable ψ de M dans $\mathbb{R}^m$ il existe une suite $\{\psi_n\}_n$ de C^1-immersions de M dans $\mathbb{R}^m$ telle que $\psi_n \to \psi$ dans $W^{1,p}(M;\mathbb{R}^m)$.*

Dans notre contexte ($m = 3, N = 2$ et $M = \overline{\Sigma}$) on a :

Théorème 5.18-bis. *Pour chaque $\psi \in C^1(\overline{\Sigma};\mathbb{R}^3)$ il existe $\{\psi_n\}_{n\geq 1} \subset C^1_*(\overline{\Sigma};\mathbb{R}^3)$ tel que $\psi_n \to \psi$ dans $W^{1,p}(\Sigma;\mathbb{R}^3)$.*

De plus (voir [62, Proposition 3.1.7 p. 100]) on a :

Proposition 5.19. *Pour chaque $\psi \in C^1_*(\overline{\Sigma};\mathbb{R}^3)$ il existe $\{\psi_n\}_{n\geq 1} \subset \mathrm{Aff}_{\mathrm{li}}(\Sigma;\mathbb{R}^3)$ tel que $\psi_n \to \psi$ dans $W^{1,p}(\Sigma;\mathbb{R}^3)$.*

On obtient le théorème 5.17 en utilisant le fait que $C^1(\overline{\Sigma};\mathbb{R}^3)$ est fortement dense dans $W^{1,p}(\Sigma;\mathbb{R}^3)$ et en combinant le théorème 5.18-bis et la proposition 5.19. □

On termine la démonstration du théorème 5.2 (voir §5.1.3) en utilisant le théorème suivant (voir [13, Theorem 2.6]).

Théorème 5.20. *Si W_0 est continue* (*voir le lemme* 5.4) *et satisfait* (37) *alors* (38) *a lieu, i.e.,* $\overline{\mathcal{I}} = \overline{\mathcal{I}}_{\mathrm{diff}_*}$.

Schéma de démonstration. Soient $\overline{\mathcal{I}}_{\mathrm{aff_{li}}}, \overline{\mathcal{RI}}_{\mathrm{aff_{li}}}, \overline{\mathcal{RI}} : W^{1,p}(\Sigma;\mathbb{R}^3) \to [0,+\infty]$ définies par :

- $\overline{\mathcal{I}}_{\mathrm{aff_{li}}}(\psi) := \inf\left\{\liminf\limits_{n\to+\infty}\int_\Sigma W_0(\nabla\psi_n(x))dx : \mathrm{Aff_{li}}(\Sigma;\mathbb{R}^3) \ni \psi_n \rightharpoonup \psi\right\}$;
- $\overline{\mathcal{RI}}_{\mathrm{aff_{li}}}(\psi) := \inf\left\{\liminf\limits_{n\to+\infty}\int_\Sigma \mathcal{R}W_0(\nabla\psi_n(x))dx : \mathrm{Aff_{li}}(\Sigma;\mathbb{R}^3) \ni \psi_n \rightharpoonup \psi\right\}$;
- $\overline{\mathcal{RI}}(\psi) := \inf\left\{\liminf\limits_{n\to+\infty}\int_\Sigma \mathcal{R}W_0(\nabla\psi_n(x))dx : W^{1,p}(\Sigma;\mathbb{R}^3) \ni \psi_n \rightharpoonup \psi\right\}$,

où $\mathcal{R}W_0$ désigne la rang-1 convexifié de W_0 (la plus grande fonction rang-1 convexe qui est inférieure à W_0). Il est clair que $\overline{\mathcal{RI}}_{\mathrm{aff_{li}}} \le \overline{\mathcal{I}}_{\mathrm{aff_{li}}}$. De plus, d'après Ben Belgacem (voir [22]) on a :

Lemme 5.21. *$\overline{\mathcal{I}}_{\mathrm{aff_{li}}}(\psi) \le \int_\Sigma \mathcal{R}W_0(\nabla\psi(x))dx$ pour tout $\psi \in \mathrm{Aff_{li}}(\Sigma;\mathbb{R}^3)$.*

(Pour une preuve voir [13, Appendix B].) Donc $\overline{\mathcal{I}}_{\mathrm{aff_{li}}} \le \overline{\mathcal{RI}}_{\mathrm{aff_{li}}}$, d'où $\overline{\mathcal{I}}_{\mathrm{aff_{li}}} = \overline{\mathcal{RI}}_{\mathrm{aff_{li}}}$. D'autre part, $\overline{\mathcal{I}} \le \overline{\mathcal{I}}_{\mathrm{diff}_*}$ et $\overline{\mathcal{RI}} \le \overline{\mathcal{I}}$. Donc, pour avoir (38) il suffit de prouver les deux inégalités suivantes :

$$\overline{\mathcal{I}}_{\mathrm{diff}_*} \le \overline{\mathcal{I}}_{\mathrm{aff_{li}}} \ ; \tag{62}$$

$$\overline{\mathcal{RI}}_{\mathrm{aff_{li}}} \le \overline{\mathcal{RI}}. \tag{63}$$

Remarque 5.22. On aura ainsi prouvé que $\overline{\mathcal{I}} = \overline{\mathcal{I}}_{\mathrm{aff_{li}}} = \overline{\mathcal{I}}_{\mathrm{diff}_*}$.

Preuve de (62). Il suffit de prouver que :

$$\overline{\mathcal{I}}_{\mathrm{diff}_*}(\psi) \le \int_\Sigma W_0(\nabla\psi(x))dx \tag{64}$$

pour tout $\psi \in \mathrm{Aff_{li}}(\Sigma;\mathbb{R}^3)$. Soit $\psi \in \mathrm{Aff_{li}}(\Sigma;\mathbb{R}^3)$. Par le théorème 5.16 il existe $\{\psi_n\}_{n\ge1} \subset C^1_*(\overline{\Sigma};\mathbb{R}^3)$ tel que (60) et (61) sont satisfaites et $\nabla\psi_n(x) \to \nabla\psi(x)$ p.p. dans Σ. Comme W_0 est continue on a :

$$\lim_{n\to+\infty} W_0\big(\nabla\psi_n(x)\big) = W_0\big(\nabla\psi(x)\big) \text{ p.p. dans } \Sigma.$$

Utilisant (37) et (61) on déduit qu'il existe $c > 0$ tel que pour chaque $n \ge 1$ et chaque ensemble mesurable $A \subset \Sigma$,

$$\int_A W_0\big(\nabla\psi_n(x)\big)dx \le c\Big(|A| + \int_A |\nabla\psi_n(x) - \nabla\psi(x)|^p dx + \int_A |\nabla\psi(x)|^p dx\Big).$$

Or $\nabla v_n \to \nabla v$ dans $L^p(\Sigma;\mathbb{M}^{3\times2})$ par (60), donc $\{W_0(\nabla\psi_n(\cdot))\}_{n\ge1}$ est uniformément absolument intégrable. Utilisant le théorème de Vitali on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_\Sigma W_0(\nabla\psi_n(x))dx = \int_\Sigma W_0(\nabla\psi(x))dx,$$

et (64) suit.

Preuve de (63). Il suffit de prouver que :

$$\overline{\mathcal{RI}}_{\mathrm{aff_{li}}}(\psi) \le \int_\Sigma \mathcal{R}W_0(\nabla\psi(x))dx \tag{65}$$

pour tout $\psi \in W^{1,p}(\Sigma;\mathbb{R}^3)$. Soit $\psi \in W^{1,p}(\Sigma;\mathbb{R}^3)$. Par le théorème 5.17 il existe $\{\psi_n\}_{n\ge1} \subset \mathrm{Aff_{li}}(\Sigma;\mathbb{R}^3)$ tel que $\nabla\psi_n \to \nabla\psi$ dans $L^p(\Sigma;\mathbb{R}^3)$ et $\nabla\psi_n(x) \to \nabla\psi(x)$ p.p. dans Σ. Or, on a le lemme suivant.

Lemme 5.23. *Si W_0 satisfait* (37) *alors* :

- $\mathcal{R}W_0(\xi) \leq c(1+|\xi|^p)$ *pour tout* $\xi \in \mathbb{M}^{3\times 2}$ *avec* $c>0$;
- $\mathcal{R}W_0$ *est continue.*

(Ce lemme est dû à Ben Belgacem, voir [22, Proposition 7 p. 32 and Lemma 8 p. 34], voir aussi [24, §5.1], [62, Proposition 3.4.4 p. 112] et [63, Lemma 6.5].) D'où, utilisant le théorème de Vitali, on déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_\Sigma \mathcal{R}W_0(\nabla\psi_n(x))dx = \int_\Sigma \mathcal{R}W_0(\nabla\psi(x))dx,$$

et (65) suit. □

Remarque 5.24. Les théorèmes 4.1-bis, 4.10 et 5.20 (avec la remarque 5.22) montrent que si W_0 est continue et vérifie (37) alors $\overline{\mathcal{I}}(\psi) = \overline{\mathcal{I}}_{\rm aff}(\psi) = \overline{\mathcal{I}}_{\rm aff_{li}}(\psi) = \overline{\mathcal{I}}_{\rm diff_*}(\psi) = \int_\Sigma \mathcal{Q}W_0(\nabla\psi(x))dx$ pour tout $\psi \in W^{1,p}(\Sigma;\mathbb{R}^3)$.

Question 5.25. *Peut-on établir un théorème général englobant les théorèmes* 3.8, 5.1 *et* 5.2 *?*

6. Vers une approche géométrique de la relaxation

6.1. Permutation de l'infimum et de l'intégrale.

Dans [8] nous avons étudié la permutation de l'infimum et de l'intégrale sous la forme générale suivante. Soient X un espace métrique localement compact qui est σ-compact, Y un espace de Banach réel séparable, μ une mesure de Radon positive sur X et $f : X\times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ une intégrande de Carathéodory, i.e., $f(x,\zeta)$ est mesurable en x et continue en ζ. Pour $\mathcal{H} \subset L^p_\mu(X;Y)$, on cherche sous quelles conditions il existe une multifonction mesurable $\Gamma : X \rightrightarrows Y$ telle que :

$$\inf_{\varphi\in\mathcal{H}}\int_X f(x,\varphi(x))d\mu(x) = \int_X \inf_{\zeta\in\Gamma(x)} f(x,\zeta)\ d\mu(x). \tag{66}$$

Posons $D(f) := \{\varphi : X \to Y : \varphi \text{ est mesurable et } f(\cdot,\varphi(\cdot)) \in L^1_\mu(X)\}$. Nous avons montré le théorème suivant (voir [8, Theorem 1.1]).

Théorème 6.1. *Supposons que* :

- $\mathcal{H}$ *est normalement décomposable, i.e., pour tous* $\varphi,\hat\varphi \in \mathcal{H}$*, et tous* $K,V \subset X$ *avec* K *compact,* V *ouvert et* $K \subset V$*, il existe une fonction continue* $\theta : X \to [0,1]$ *telle que* $\theta = 0$ *dans* $X\setminus V$, $\theta = 1$ *dans* K *et* $\theta\varphi+(1-\theta)\hat\varphi \in \mathcal{H}$;

(67) • *il existe* $\hat\varphi \in \mathcal{H}\cap D(f)$ *tel que* $\hat f_\varphi \in L^1_{{\rm loc},\mu}(X)$ *pour tout* $\varphi \in \mathcal{H}$ *avec*

$$\hat f_\varphi : X \to \overline{\mathbb{R}} \text{ définie par } \hat f_\varphi(x) = \max_{\alpha\in[0,1]} f\left(x, \alpha\varphi(x)+(1-\alpha)\hat\varphi(x)\right).$$

Alors (66) *a lieu avec* Γ *donné par le* μ*-essentiel supremum de* $\mathcal{H}$*, i.e., la plus petite de toutes les multifonctions mesurables à valeurs fermées* $\Lambda : X \rightrightarrows Y$ *telle que pour tout* $\varphi \in \mathcal{H}$*,* $\varphi(x) \in \Lambda(x)$ μ*-p.p. dans* X.

Remarque 6.2. Le théorème 6.1 contient le théorème de permutation "convexe" de Bouchitté-Valadier (voir [26, Theorem 1]) dans le cas des intégrandes de Carathéodory (voir [8, §5.1]). Bouchitté et Valadier ont prouvé leur théorème de façon directe sans faire de lien avec les théorèmes de permutation "non convexe et non normalement décomposable" de Rockafellar (voir [60, Theorem 3A]) et Hiai-Umegaki (voir [45, Theorem 2.2], voir aussi le théorème 6.6). (En fait, le théorème de Rockafellar implique le théorème de Hiai-Umegaki, mais il n'y avait pas de lien entre le théorème de Hiai-Umegaki et celui de Bouchitté-Valadier.) Dans [8], nous avons démontré le théorème 6.1 (et donc celui de Bouchitté-Valadier) à partir des théorèmes de permutation et de décomposabilité (voir [45, Theorem 3.1], voir aussi le théorème 6.5) de Hiai-Umegaki. Dans notre contexte, on a donc les implications suivantes :

$$\text{théorème R.} \Rightarrow \text{théorème H.-U.} \Rightarrow \text{théorème 6.1} \Rightarrow \text{théorème B.-V.}$$

(voir [8, §2]).

Remarque 6.3. Les espaces $L^p_\mu(X;Y)$, $C(X;Y)$ (espace des fonctions continues de X dans Y), $C_c(X;Y)$ (espace des fonctions continues à support compact de X dans Y), $C^k(X;Y)$ (espace des fonctions C^k-differentiables de X dans Y) et $C^k_c(X;Y)$ (espace des fonctions C^k-differentiables à support compact de X dans Y) sont normalement décomposables. Plus généralement, si $\Gamma : X \rightrightarrows Y$ est une multifonction à valeurs convexes et si $\mathcal{E}$ est un ensemble normalement décomposable de fonctions mesurables de X dans Y, alors $\{\varphi \in \mathcal{E} : \varphi(x) \in \Gamma(x)\ \mu\text{-p.p. dans } X\}$ est normalement décomposable. D'autre part, étant donné un ensemble $\mathcal{U}$ de fonctions mesurables de X dans $[0,1]$, on dit qu'un ensemble $\mathcal{H}$ de fonctions mesurables de X dans Y est $\mathcal{U}$-décomposable si $\theta\varphi + (1-\theta)\hat{\varphi} \in \mathcal{H}$ pour tous $\varphi, \hat{\varphi} \in \mathcal{H}$ et tout $\theta \in \mathcal{U}$. Les ensembles $\mathcal{U}$-décomposables avec $\mathcal{U}$ contenant $C_c(X;[0,1])$ ou $C^k_c(X;[0,1])$ sont normalement décomposables (voir [8, Proposition 3.1(1)]).

Remarque 6.4. On peut représenter le μ-essentiel supremum $\Gamma : X \rightrightarrows Y$ d'un ensemble $\mathcal{H}$ de fonctions mesurables de X dans Y comme suit (voir [26, §2.2]).

- Si $\mathcal{H} \subset L^p_\mu(X;Y)$ alors il existe un ensemble dénombrable $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$ tel que $\Gamma(x) = \mathrm{adh}\{\varphi(x) : \varphi \in \mathcal{D}\}$ μ-p.p. dans X, où adh désigne l'adhérence dans Y.
- Si $\mathcal{H} \subset C_c(X;Y)$ alors $\Gamma(x) = \mathrm{adh}\{\varphi(x) : \varphi \in \mathcal{H}\}$ μ-p.p. dans X.

Schéma de démonstration du théorème 6.1. Soient $\Gamma : X \rightrightarrows Y$ le μ-essentiel supremum de $\mathcal{H}$ et $\mathrm{adh}_p(\mathcal{H})$ l'adhérence de $\mathcal{H}$ dans $L^p_\mu(X;Y)$. On montre d'abord que sous (67), on a :

$$\inf_{\varphi \in \mathcal{H}} \int_X f(x,\varphi(x))d\mu(x) = \inf_{\varphi \in \mathrm{adh}_p(\mathcal{H})} \int_X f(x,\varphi(x))d\mu(x) \tag{68}$$

(voir [8, Proposition 4.2]). On prouve ensuite que puisque $\mathcal{H}$ est normalement décomposable, $\mathrm{adh}_p(\mathcal{H})$ est $\mathcal{X}(\Omega)$-décomposable, i.e., $\theta\varphi + (1-\theta)\hat{\varphi} \in \mathrm{adh}_p(\mathcal{H})$ pour tous $\varphi, \hat{\varphi} \in \mathrm{adh}_p(\mathcal{H})$ et tout $\theta \in \mathcal{X}(\Omega) := \{1_E : E \subset X,\ E \text{ mesurable}\}$ avec 1_E désignant la fonction caractéristique de E (voir [8, Proposition 4.1(1)]). On considére alors les deux théorèmes suivants démontrés par Hiai et Umegaki (voir [45, Theorem 3.1 et Theorem 2.2]).

Théorème 6.5. *Un ensemble fermé non vide $\mathcal{L} \subset L^p_\mu(X;Y)$ est $\mathcal{X}(\Omega)$-decomposable si seulement si il existe une multifonction mesurable à valeurs fermées non vides $\Lambda : X \rightrightarrows Y$ telle que $\mathcal{L} = L^p_\mu(X;\Lambda) := \big\{\varphi \in L^p_\mu(X;Y) : \varphi(x) \in \Lambda(x)\ \mu\text{-p.p. dans } X\big\}$.*

Théorème 6.6. *Si $\Lambda : X \rightrightarrows Y$ est une multifonction mesurable à valeurs fermées non vides alors*

$$\inf_{\varphi \in L^p_\mu(X;\Lambda)} \int_X f(x,\varphi(x))d\mu(x) = \int_X \inf_{\zeta \in \Lambda(x)} f(x,\zeta)d\mu(x). \tag{69}$$

Du théorème 6.5 on déduit que $\mathrm{adh}_p(\mathcal{H}) = L^p_\mu(X;\Lambda)$ avec $\Lambda : X \rightrightarrows Y$ une multifonction mesurable à valeurs fermées non vides. Comme $\Gamma(x) = \mathrm{adh}\{\varphi(x) : \varphi \in \mathcal{D}\}$ μ-p.p. dans X avec $\mathcal{D}$ un sous-ensemble dénombrable de $\mathcal{H}$ (voir la remarque 6.4) et $\mathcal{H} \subset \mathrm{adh}_p(\mathcal{H})$, on a $\Gamma(x) \subset \Lambda(x)$ μ-p.p. dans X, donc $L^p_\mu(X;\Gamma) \subset \mathrm{adh}_p(\mathcal{H})$. D'autre part, si $\varphi \in \mathrm{adh}_p(\mathcal{H})$ alors il existe $\{\varphi_n\}_n \subset \mathcal{H}$ tel que $\varphi_n(x) \to \varphi(x)$ μ-p.p. dans X. Or $\varphi_n(x) \in \Gamma(x)$ μ-p.p. dans X pour tout $n \geq 1$ (par définition du μ-essentiel du supremum), donc $\varphi(x) \in \Gamma(x)$ μ-p.p. dans X puisque Γ est à valeurs fermées, d'où $\mathrm{adh}_p(\mathcal{H}) \subset L^p_\mu(X;\Gamma)$. Il suit que $\mathrm{adh}_p(\mathcal{H}) = L^p_\mu(X;\Lambda) = L^p_\mu(X;\Gamma)$. Ainsi, utilisant le théorème 6.6, on a (69) avec $L^p_\mu(X;\Lambda) = \mathrm{adh}_p(\mathcal{H})$ et $\Lambda = \Gamma$ que l'on combine avec (68) pour obtenir (66). □

A partir du théorème 6.1, on peut produire d'autres théorèmes de permutation (voir les corollaires 6.8 et 6.7, voir aussi [8, Corollary 5.4 et Corollary 5.2]) utilisables dans les applications. (Le corollaire suivant est utilisé dans les démonstrations des lemmes 5.11 et 5.14, voir §5.2.1 et §5.3.1.)

Corollaire 6.7. *Soient $\Sigma \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné. Supposons que* :

(70) $f : \overline{\Sigma} \times \mathbb{R}^m \to [0,+\infty]$ *est une intégrande de Carathéodory* ;

(71) $\Gamma : \overline{\Sigma} \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ *est une multifonction sci à valeurs convexes fermées non vides* ;

(72) $\displaystyle\int_\Sigma \max_{\alpha\in[0,1]} f(x, \alpha\varphi(x) + (1-\alpha)\hat{\varphi}(x))dx < +\infty$ *pour tout* $\varphi, \hat{\varphi} \in C(\overline{\Sigma};\Gamma)$

(*avec* $C(\overline{\Sigma};\Gamma) := \left\{\varphi \in C(\overline{\Sigma};\mathbb{R}^m) : \varphi(x) \in \Gamma(x) \text{ p.p. dans } \overline{\Sigma}\right\}$ *où* $C(\overline{\Sigma};\mathbb{R}^m)$ *désigne l'espace des fonctions continues de* $\overline{\Sigma}$ *dans* $\mathbb{R}^m$). *Alors* :

$$\inf_{\varphi\in C(\overline{\Sigma};\Gamma)} \int_\Omega f(x,\varphi(x))dx = \int_\Sigma \inf_{\zeta\in\Gamma(x)} f(x,\zeta)dx.$$

(Le corollaire suivant est utilisé dans la démonstration de la proposition 6.16, voir §6.2.2.)

Corollaire 6.8. *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné, μ une mesure de Radon positive sur $\mathbb{R}^N$, $\mathcal{H} \subset L^p_\mu(\Omega;\mathbb{M}^{m\times N})$ un ensemble normalement décomposable* (*avec $\mathbb{M}^{m\times N}$ désignant l'espace des matrices à m lignes et N colonnes*), *$\Gamma : \Omega \rightrightarrows \mathbb{M}^{m\times N}$ le μ-essentiel supremum de $\mathcal{H}$ et $W : \Omega \times \mathbb{M}^{m\times N} \to [0,+\infty]$ une intégrande de Carathéodory satisfaisant la "condition de croissance d'ordre p" suivante* :

(73) $W(x,F) \leq c(1+|F|^p)$ *pour tout* $x \in \Omega$ *et tout* $F \in \mathbb{M}^{m\times N}$ *avec* $c > 0$.

Alors :

$$\inf_{\Phi\in\mathcal{H}} \int_\Omega W(x,\Phi(x))d\mu(x) = \int_\Omega \inf_{F\in\Gamma(x)} W(x,F)d\mu(x).$$

6.2. **Relaxation des intégrales géométriques.**

Notons $\mathcal{O}(\Omega)$ la classe des ouverts de Ω (avec Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$). Soient μ une mesure de Radon positive sur $\mathbb{R}^N$, $W : \Omega \times \mathbb{M}^{m\times N} \to [0,+\infty]$ une intégrande de Carathéodory (supposée coercive) et $J : C^1(\overline{\Omega};\mathbb{R}^m) \times \mathcal{O}(\Omega) \to [0,+\infty]$ définie par :

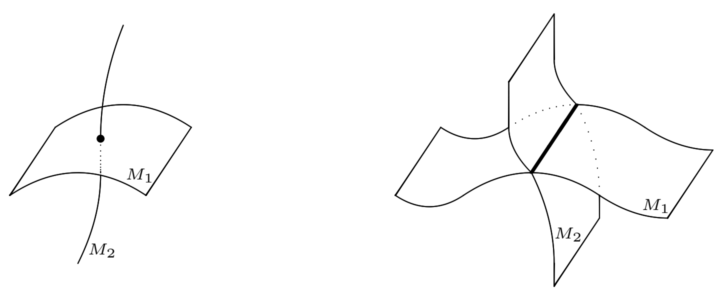
$$J(\phi, A) := \int_A W(x, \nabla\phi(x))d\mu(x).$$

On peut interpréter $J(\cdot,\Omega)$ comme la fonctionnelle énergie associée à un matériau hyperélastique ayant une géométrie particulière sur laquelle on veut mettre l'accent (dimensions faibles, jonctions, etc.). Par exemple, si le matériau est constitué par l'assemblage de deux structures minces “transverses” (voir la figure 6.9), on peut prendre :

$$\mu = \underbrace{\mathcal{H}^{k_1}\lfloor_{M_1} + \mathcal{H}^{k_2}\lfloor_{M_2}}_{\text{faibles dimensions}} + \underbrace{\mathcal{H}^{k_{12}}\lfloor_{M_1\cap M_2}}_{\text{jonction}}$$

avec $M_1, M_2 \subset \Omega$ deux sous-variétés transversales de $\mathbb{R}^N$ de dimensions respectives k_1 et k_2 avec $k_1, k_2 \in \{1, \cdots, N-1\}$ ($M_1 \cap M_2$ est alors une sous-variété de $\mathbb{R}^N$ de dimension $k_{12} := k_1 + k_2 - N$) et $\mathcal{H}^k$ (avec $k = k_1, k_2$ ou k_{12}) désignant la mesure de Hausdorff de dimension k sur $\mathbb{R}^N$.

Figure 6.9. Structures minces “transverses” dans $\mathbb{R}^3$ représentées par deux sous-variétés transversales M_1 et M_2 de $\mathbb{R}^3$.



En accord avec la théorie de l'hyperélasticité (voir §2), on peut dire que les positions d'équilibre d'une telle structure sont obtenues en minimisant $J(\cdot,\Omega)$ (sous certaines contraintes). Afin de traiter ce problème variationnel par la méthode directe du calcul des variations (voir §3.3), on est amené à considérer la relaxée de J, i.e., $\overline{J} : W^{1,p}_\mu(\Omega;\mathbb{R}^m) \times \mathcal{O}(\Omega) \to [0,+\infty]$ définie par :

$$\overline{J}(\phi, A) := \inf\left\{\liminf_{n\to+\infty} J(\phi_n, A) : C^1(\overline{\Omega};\mathbb{R}^m) \ni \phi_n \rightharpoonup \phi\right\},$$

où “$\rightharpoonup$” désigne la convergence faible dans le μ-espace de Sobolev $W^{1,p}_\mu(\Omega;\mathbb{R}^m)$ (voir la définition 6.13). (Lorsque μ est la mesure de Lebesgue, on a $\overline{J}(\cdot,\Omega) = \overline{I}_{\rm diff}$ avec $\overline{I}_{\rm diff}$ définie en (20).) La fonctionnelle $\overline{J}(\cdot,\Omega)$ n'a plus une formule explicite, ce qui nous conduit à étudier l'existence d'une représentation (plus explicite) pour $\overline{J}(\cdot,\Omega)$. Du point de vue de l'hyperélasticité, il est naturel de chercher un représentation intégrale du type :

$$\overline{J}(\phi, A) = \int_A \overline{W}(x, \nabla_\mu\phi(x))d\mu(x) \text{ pour tout } (\phi, A) \in W^{1,p}_\mu(\Omega;\mathbb{R}^m) \times \mathcal{O}(\Omega) \tag{74}$$

avec $\overline{W} : \mathbb{T}^m_\mu(\Omega\cap\mathrm{supp}(\mu)) \to [0,+\infty]$ (supp(μ) désigne le support de la mesure μ) où $\mathbb{T}^m_\mu(\Omega\cap\mathrm{supp}(\mu)) := \amalg_{x\in\Omega\cap\mathrm{supp}(\mu)} T^m_\mu(x)$ et $\nabla_\mu\phi(x) \in T^m_\mu(x)$ μ-p.p. dans Ω ($\mathbb{T}^m_\mu(\Omega\cap\mathrm{supp}(\mu))$ est appelé le fibré tangent d'ordre m de μ sur $\Omega\cap\mathrm{supp}(\mu)$, $T^m_\mu(x)$ l'espace tangent d'ordre m à μ au point x et $\nabla_\mu\phi(x)$ le μ-gradient de ϕ au point x, voir les définitions 6.11 et 6.14).

Ce problème de représentation intégrale a été étudié pour la première fois par Bouchitté, Buttazzo et Seppecher (voir [25]) lorsque W est convexe par rapport à la deuxième variable (voir le théorème 6.17 et la remarque 6.18) en utilisant la dualité au sens de l'analyse convexe. L'objectif de ce qui suit (voir §6.2.1-6.2.4) est de présenter la méthode que nous avons mise au point dans [50, 8, 51] (voir aussi [9]) pour traiter le cas (plus difficile et plus intéressant du point du vue de l'hyperélasticité) où W n'est pas nécessairement convexe par rapport à la deuxième variable (voir les théorèmes 6.25 et 6.25-bis).

Soit $\mathcal{J} : C^1(\overline{\Omega};\mathbb{R}^m)\times\mathcal{O}(\Omega)\to[0,+\infty]$ définie par :

$$\mathcal{J}(\phi,A) := \inf\Big\{J(\varphi,A) : C^1(\overline{\Omega};\mathbb{R}^m)\ni\varphi=\phi \text{ dans } A\cap\mathrm{supp}(\mu)\Big\}.$$

(Lorsque μ est la mesure de Lebesgue, on a $\mathcal{J}=J$.) Il est facile de voir que :

$$\overline{J}(\phi,A) = \inf\left\{\liminf_{n\to+\infty}\mathcal{J}(\phi_n,A) : C^1(\overline{\Omega};\mathbb{R}^m)\ni\phi_n\rightharpoonup\phi\right\} \tag{75}$$

pour tout $(\phi,A)\in W^{1,p}_\mu(\Omega;\mathbb{R}^m)\times\mathcal{O}(\Omega)$ (voir [51, Lemma 1]).

Remarque 6.10. Etant donné $A\in\mathcal{O}(\Omega)$, il est clair que $\mathcal{J}(\phi,A)=\mathcal{J}(\hat{\phi},A)$ dès que $\phi=\hat{\phi}$ dans $\Omega\cap\mathrm{supp}(\mu)$ avec $\phi,\hat{\phi}\in C^1(\overline{\Omega};\mathbb{R}^m)$, ce qui signifie que $\mathcal{J}(\cdot,A)$ est compatible avec l'égalité μ-p.p. dans Ω. On peut ainsi considérer la fonctionnelle $\hat{\mathcal{J}}(\cdot,A) : W^{1,p}_\mu(\Omega;\mathbb{R}^m)\to[0,+\infty]$ définie par :

$$\hat{\mathcal{J}}(\phi,A) := \begin{cases}\mathcal{J}(\phi,A) & \text{si } \phi\in C^1(\overline{\Omega};\mathbb{R}^m)\\ +\infty & \text{sinon,}\end{cases}$$

et voir qu'en fait $\overline{J}(\cdot,A)$ est la régularisée sci de $\hat{\mathcal{J}}(\cdot,A)$ par rapport à la convergence faible de $W^{1,p}_\mu(\Omega;\mathbb{R}^m)$.

Pour expliciter l'égalité (74), on établit d'abord une représentation intégrale pour $\mathcal{J}$ (voir §6.2.2) et on l'exploite ensuite pour représenter $\overline{J}$ (voir §6.2.3-6.2.4). Auparavant, précisons les notions d'espace tangent, de gradient et d'espace de Sobolev par rapport à une mesure de Radon positive. Ces concepts ont été introduits dans [25] (voir aussi [65, 66]). Cependant, pour étudier l'existence d'une représentation intégrale pour $\overline{J}$ sans hypothèse de convexité, nous avons développé une approche non convexe de ces notions (voir §6.2.1, voir aussi [8, §7] et [51, §2].)

6.2.1. *Notions préliminaires.*

Soit $H_0 := \{\varphi\in C^1(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^m) : \varphi=0 \text{ dans } \mathrm{supp}(\mu)\}$ et soit $\mathcal{H}_0$ le sous-espace vectoriel de $C(\mathbb{R}^N;\mathbb{M}^{m\times N})$ définie par :

$$\mathcal{H}_0 := \Big\{\Phi\in C(\mathbb{R}^N;\mathbb{M}^{m\times N}) : \Phi=\nabla\varphi \text{ dans } \mathrm{supp}(\mu) \text{ avec } \varphi\in H_0\Big\}.$$

Définition 6.11. Soit $x\in\mathbb{R}^N$.

- On appelle espace normal d'ordre m à μ au point x le sous-espace vectoriel $N^m_\mu(x)$ de $\mathbb{M}^{m\times N}$ définie par $N^m_\mu(x) := \big\{\Phi(x) : \Phi\in\mathcal{H}_0\big\}$.
- Le supplémentaire orthogonal $T^m_\mu(x)$ de $N^m_\mu(x)$ dans $\mathbb{M}^{m\times N}$ est appelé espace tangent à μ au point x.
- Pour $S\subset\mathrm{supp}(\mu)$, on pose $\mathbb{T}^m_\mu(S) := \amalg_{x\in S}T^m_\mu(x)$ que l'on appelle fibré tangent d'ordre m de μ sur S. (Si $S=\mathrm{supp}(\mu)$, on note simplement $\mathbb{T}^m_\mu$ et on dit fibré tangent d'ordre m de μ.)

Remarque 6.12. Si $\mathrm{supp}(\mu)$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^N$ alors chaque vecteur ligne de la matrice $F\in T^m_\mu(x)$ avec $x\in\mathrm{supp}(\mu)$ est tangent à $\mathrm{supp}(\mu)$ au point x. Donc, dans ce cas particulier, $T^1_\mu(x)$ est l'espace tangent à $\mathrm{supp}(\mu)$ au point x et $\mathbb{T}^1_\mu$ est le fibré tangent de $\mathrm{supp}(\mu)$ (au sens de la géométrie différentielle).

Pour chaque $x \in \mathbb{R}^N$, on note $P_\mu(x) : \mathbb{M}^{m\times N} \to T^m_\mu(x)$ la projection orthogonale sur $T^m_\mu(x)$ et pour chaque $\phi \in C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^m)$, on définit $\nabla_\mu \phi : \Omega \to \mathbb{M}^{m\times N}$ par :

$$\nabla_\mu \phi(x) := P_\mu(x)(\nabla\phi(x)) = \underset{F\in T^m_\mu(x)}{\operatorname{argmin}} |\nabla\phi(x) - F|\,. \tag{76}$$

(La multifonction à valeurs fermées $N^m_\mu : \Omega \rightrightarrows \mathbb{M}^{m\times N}$ étant mesurable, on déduit que $T^m_\mu : \Omega \rightrightarrows \mathbb{M}^{m\times N}$ l'est aussi, et par conséquent $\nabla_\mu\phi$ est mesurable. De plus, $|P_\mu(x)(F)| \le |F|$ pour tout $x \in \Omega$ et tout $F \in \mathbb{M}^{m\times N}$, donc $\nabla_\mu\phi \in L^p_\mu(\Omega; \mathbb{M}^{m\times N})$ pour tout $\phi \in C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^m)$. D'autre part, pour tous $\phi, \hat\phi \in C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^m)$, si $\phi = \hat\phi$ dans $\Omega \cap \operatorname{supp}(\mu)$ alors $\nabla_\mu\phi = \nabla_\mu\hat\phi$ dans $\Omega \cap \operatorname{supp}(\mu)$, ce qui signifie que $\nabla_\mu\phi$ est compatible avec l'égalité μ-p.p. dans Ω. On peut ainsi énoncer la définition suivante.)

Définition 6.13. Le μ-espace de Sobolev $W^{1,p}_\mu(\Omega; \mathbb{R}^m)$ est le complété de $C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^m)$ par rapport à la norme suivante :

$$\|\phi\|_{W^{1,p}_\mu(\Omega;\mathbb{R}^m)} := \|\phi\|_{L^p_\mu(\Omega;\mathbb{R}^m)} + \|\nabla_\mu\phi\|_{L^p_\mu(\Omega;\mathbb{M}^{m\times N})}.$$

Comme $\|\nabla_\mu\phi\|_{L^p_\mu(\Omega;\mathbb{M}^{m\times N})} \le \|\phi\|_{W^{1,p}_\mu(\Omega;\mathbb{R}^m)}$ pour tout $\phi \in C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^m)$, l'application linéaire définie sur $C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^m)$ par $\phi \mapsto \nabla_\mu\phi$ admet un unique prolongement à $W^{1,p}_\mu(\Omega; \mathbb{R}^m)$ que l'on note encore $\nabla_\mu\phi$, i.e.,

$$\begin{aligned} &\nabla_\mu\phi = \|\cdot\|_{L^p_\mu(\Omega;\mathbb{M}^{m\times N})}\text{-}\lim_{n\to+\infty} \nabla_\mu\phi_n \\ &\text{avec } \{\phi_n\}_n \subset C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^m) \text{ tel que } \phi = \|\cdot\|_{W^{1,p}_\mu(\Omega;\mathbb{R}^m)}\text{-}\lim_{n\to+\infty} \phi_n. \end{aligned} \tag{77}$$

Définition 6.14. $\nabla_\mu\phi$ définie par (76) si $\phi \in C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^m)$ et par le prolongement (77) si $\phi \in W^{1,p}_\mu(\Omega; \mathbb{R}^m) \setminus C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^m)$ est appelé le μ-gradient de ϕ.

Remarque 6.15. Lorsque μ est la mesure de Lebesgue, on retrouve les espaces de Sobolev classiques $W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$. Si $\mu = \mathcal{H}^k\lfloor_M$, où $M \subset \Omega$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^N$ de dimension $k \in \{1, \cdots, N-1\}$, on obtient les espaces de Sobolev $W^{1,p}(M; \mathbb{R}^m)$ sur la variété M.

6.2.2. *Représentation intégrale de $\mathcal{J}$.*

Nous avons montré la proposition suivante (voir [8, Theorem 7.1], voir aussi [51, Proposition 4]).

Proposition 6.16. *Si W est une intégrande de Carathéodory vérifiant* (73) *alors*

$$\mathcal{J}(\phi, A) = \int_A \inf_{F\in N^m_\mu(x)} W(x, \nabla_\mu\phi(x) + F)d\mu(x) \tag{78}$$

pour tout $(\phi, A) \in C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^m) \times \mathcal{O}(\Omega)$.

Démonstration. Soit $(\phi, A) \in C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^m) \times \mathcal{O}(\Omega)$. (Pour avoir (78) on permute d'abord l'infimum et l'intégrale, voir (79), et ensuite on fait apparaître le μ-gradient de ϕ, voir (80).) Posons $H_\phi(A) := \{\varphi \in C^1(\overline{A}; \mathbb{R}^m) : \varphi = \phi \text{ dans } A \cap \operatorname{supp}(\mu)\}$ et considérons $\mathcal{H}_\phi(A)$ le sous-ensemble de $C(\overline{A}; \mathbb{M}^{m\times N})$ définie par :

$$\mathcal{H}_\phi(A) := \Big\{\Phi \in C(\overline{A}; \mathbb{M}^{m\times N}) : \Phi = \nabla\varphi \text{ dans } A \cap \operatorname{supp}(\mu) \text{ avec } \varphi \in H_\phi(A)\Big\}.$$

Il est facile de vérifier que $\mathcal{H}_\phi(A)$ est $C(\overline{A}; [0, 1])$-décomposable, donc normalement décomposable (voir la remarque 6.3, pour la définition de “normalement décomposable" voir l'énoncé du théorème 6.1). Remarquant que :

$$\mathcal{J}(\phi, A) = \inf_{\Phi\in\mathcal{H}_\phi(A)} \int_A W(x, \Phi(x))d\mu(x)$$

et utilisant le corollaire 6.8 (avec $\Omega = A$ et $\mathcal{H} = \mathcal{H}_\phi(A)$) on déduit que :

$$\mathcal{J}(\phi, A) = \int_A \inf_{F\in\Gamma_\phi(x)} W(x, F)d\mu(x), \tag{79}$$

où $\Gamma_\phi : A \rightrightarrows \mathbb{M}^{m\times N}$ est le μ-essentiel supremum de $\mathcal{H}_\phi(A)$. De plus, on a :

$$\big\{\Phi(x) : \Phi \in \mathcal{H}_\phi(A)\big\} = N^m_\mu(x) + \big\{\nabla_\mu\phi(x)\big\} \text{ pour tout } x \in A \cap \mathrm{supp}(\mu).$$

(En effet, soit $x \in A\cap \mathrm{supp}(\mu)$. Si $\Phi \in \mathcal{H}_\phi(A)$ alors $\Phi(x) = (\nabla\varphi(x) - \nabla_\mu\varphi(x)) + \nabla_\mu\phi(x) \subset N^m_\mu(x) + \{\nabla_\mu\phi(x)\}$ avec $\varphi \in H_\phi(A)$ puisque $\nabla_\mu\varphi(x) = \nabla_\mu\phi(x)$, donc $\{\Phi(x) : \Phi \in \mathcal{H}_\phi(A)\} \subset N^m_\mu(x) + \{\nabla_\mu\phi(x)\}$. Si $\xi = F + \nabla_\mu\phi(x)$ avec $F \in N^m_\mu(x)$ alors $P_\mu(x)(\xi - \nabla\phi(x)) = 0$, donc $\xi - \nabla\phi(x) \in N^m_\mu(x)$, d'où il existe $\hat\varphi \in H_0$ tel que $\nabla\hat\varphi(x) = \xi - \nabla\phi(x)$. Ainsi $\nabla\varphi(x) = \xi$ avec $\varphi := \hat\varphi_{|\overline{A}} + \phi \in H_\phi(A)$. Il suit que $N^m_\mu(x) + \{\nabla_\mu\phi(x)\} \subset \{\Phi(x) : \Phi \in \mathcal{H}_\phi(A)\}$.) Or $\Gamma_\phi(x) = \mathrm{adh}\{\Phi(x) : \Phi \in \mathcal{H}_\phi(A)\}$ μ-p.p. dans A (adh désigne l'adhérence dans $\mathbb{M}^{m\times N}$) car $\mathcal{H}_\phi(A) \subset C(\overline{A}; \mathbb{M}^{m\times N})$ (voir la remarque 6.4), donc :

$$\Gamma_\phi(x) = N^m_\mu(x) + \big\{\nabla_\mu\phi(x)\big\} \ \mu\text{-p.p. dans } A, \tag{80}$$

et on obtient (78) en combinant (79) et (80). □

6.2.3. *Représentation intégrale de $\overline{J}$ (cas convexe).*

Soit $W_\mu : \mathbb{T}^m_\mu(\Omega\cap \mathrm{supp}(\mu)) \to [0, +\infty]$ définie par :

$$W_\mu(x, \xi) := \inf_{F\in N_\mu(x)} W(x, \xi + F). \tag{81}$$

Nous avons prouvé le théorème suivant (voir [8, Theorem 7.2]).

Théorème 6.17. *Si W est une intégrande de Carathéodory vérifiant* (73) *et si W_μ est convexe par rapport à la deuxième variable alors* (74) *a lieu avec $\overline{W} = W_\mu$.*

Démonstration. Fixons $A \in \mathcal{O}(\Omega)$ et définissons $\hat{\mathcal{J}}(\cdot, A) : W^{1,p}_\mu(\Omega; \mathbb{R}^m) \to [0, +\infty]$ par :

$$\hat{\mathcal{J}}(\phi, A) := \int_A W_\mu(x, \nabla_\mu\phi(x))d\mu(x).$$

Puisque W est une intégrande de Carathéodory (coercive) satisfaisant (73), W_μ vérifie les mêmes propriétés. Utilisant le théorème de Vitali, on déduit que $\hat{\mathcal{J}}(\cdot, A)$ est fortement continue dans $W^{1,p}_\mu(\Omega; \mathbb{R}^m)$. Comme W_μ est convexe, il suit que $\hat{\mathcal{J}}(\cdot, A)$ sfsci dans $W^{1,p}_\mu(\Omega; \mathbb{R}^m)$. D'où $\hat{\mathcal{J}}(\cdot, A) \le \overline{J}(\cdot, A)$. D'autre part, utilisant la proposition 6.16 et (75), on voit que $\hat{\mathcal{J}}(\cdot, A) \ge \overline{J}(\cdot, A)$, ce qui donne le résultat. □

Remarque 6.18. Le théorème 6.17 étend "légèrement" le théorème de Bouchitté, Buttazzo et Seppecher (dans lequel W est supposée convexe par rapport à la deuxième variable, voir [25, Theorem 3.1]). En effet, il est facile de voir que le théorème 6.17 s'applique à des W non convexe de la forme :

$$W(x, F) = W_1\big(P_\mu(x)(F)\big) + W_2\big(F - P_\mu(x)(F)\big),$$

où $W_1 : \mathbb{M}^{m\times N} \to [0, +\infty]$ est convexe, $W_2 : \mathbb{M}^{m\times N} \to [0, +\infty]$ est non convexe et, pour $i \in \{1, 2\}$, W_i est continue (coercive) et $W_i(F) \le c_i(1 + |F|^p)$ pour tout $F \in \mathbb{M}^{m\times N}$ avec $c_i > 0$.

6.2.4. *Représentation intégrale de* $\overline{J}$ (*cas non convexe*).

Voici le résultat le plus général que nous avons réussi à prouver sans hypothèse de convexité (voir [51, Proposition 5]).

Proposition 6.19. (*Notons* $\mathcal{B}(\Omega)$ *la classe des Boréliens de* Ω.) *Etant donné* $\phi \in W^{1,p}_\mu(\Omega;\mathbb{R}^m)$, *si* W *est une intégrande de Carathéodory satisfaisant* (73) *alors la fonction d'ensemble* $\mathfrak{J}_\phi : \mathcal{B}(\Omega) \to [0,+\infty]$ *définie par :*

$$\mathfrak{J}_\phi(E) := \inf\left\{\overline{J}(\phi, A) : \mathcal{O}(\Omega) \ni A \supset E\right\}$$

est une mesure finie positive et régulière absolument continue par rapport à μ.

(Noter que $\mathfrak{J}_\phi(A) = \overline{J}(\phi, A)$ dès que $A \in \mathcal{O}(\Omega)$.) Le corollaire suivant est une conséquence immédiate de la proposition 6.19.

Corollaire 6.20. *Si* W *est une intégrande de Carathéodory satisfaisant* (73) *alors*

$$(82)\quad \overline{J}(\phi, A) = \int_A \lim_{\rho\to 0} \frac{\overline{J}(\phi, B_\rho(x))}{\mu(B_\rho(x))} d\mu(x) \text{ pour tout } (\phi, A) \in W^{1,p}_\mu(\Omega;\mathbb{R}^m) \times \mathcal{O}(\Omega)$$

(*avec* $B_\rho(x)$ *désignant la boule de centre* x *et de rayon* ρ).

On peut affiner la représentation intégrale donnée par le corollaire 6.20 dans le cas où μ est superficielle dans Ω (voir les définitions 6.21 et 6.24 et le théorème 6.25). Soit S_μ l'ensemble des $x \in \mathrm{supp}(\mu)$ pour lesquels il existe $\rho > 0$ et $k \in \{1, \cdots, N-1\}$ tels que :

- $B_\rho(x) \cap \mathrm{supp}(\mu)$ est C^1-difféomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^k$;
- $\mu\lfloor_{B_\rho(x)} = \mathcal{H}^k\lfloor_{B_\rho(x)\cap\mathrm{supp}(\mu)}$.

Définition 6.21. On dit que μ est superficielle dans Ω si $\mu(\Omega \setminus S_\mu) = 0$. (Si $\mu(\mathbb{R}^N \setminus S_\mu) = 0$ on dit simplement μ est superficielle.)

Remarque 6.22. Soit M une sous-variété de $\mathbb{R}^N$ (avec ou sans bord) de dimension $k \in \{1, \cdots, N-1\}$. Alors, ∂M (le bord de M) est une sous-variété sans bord de dimension $k-1$. Pour $\mu = \mathcal{H}^k\lfloor_M$ on a $S_\mu = M \setminus \partial M$ avec $\mu(\partial M) = 0$. Donc $\mu = \mathcal{H}^k\lfloor_M$ est superficielle.

Remarque 6.23. Pour $i \in \{1,2\}$, on pose $\mu_i := \mathcal{H}^{k_i}\lfloor_{M_i}$ avec M_i une sous-variété de $\mathbb{R}^N$ (avec ou sans bord) de dimension $k_i \in \{1, \cdots, N-1\}$. Si $\mu = \mu_1 + \mu_2$ et si M_1 et M_2 sont transversales ($M_1 \cap M_2$ est alors une sous-variété de $\mathbb{R}^N$ de dimension $k_{12} := k_1 + k_2 - N$), on a $S_\mu = (M_1 \cup M_2) \setminus ((M_1 \cap M_2) \cup \partial M_1 \cup \partial M_2)$ avec $\mu(\partial M_i \setminus (M_1 \cap M_2)) = 0$ pour $i \in \{1,2\}$ et $\mu(M_1 \cap M_2) = 0$ car $k_{12} < \min\{k_1, k_2\}$. Donc $\mu = \mu_1 + \mu_2$ est superficielle. (Si $\mu = \mu_1 + \mu_2 + \mu_{12}$ avec $\mu_{12} := \mathcal{H}^{k_{12}}\lfloor_{M_1\cap M_2}$ alors μ n'est pas superficielle puisque $\mu(M_1 \cap M_2) > 0$.)

Pour chaque $x \in S_\mu$, on pose $\mu_x := \mathcal{H}^k\lfloor_{T^1_\mu(x)}$ avec $k \in \{1, \cdots, N-1\}$ l'entier correspondant à x.

Définition 6.24. La fonction $\mathcal{Q}_\mu W : \mathbb{T}^m_\mu(\Omega \cap S_\mu) \to [0,+\infty]$ donnée par :

$$\mathcal{Q}_\mu W(x,\xi) := \inf\left\{\frac{1}{\mu_x(D)}\int_D W_\mu(x, \xi + \nabla_{\mu_x}\varphi(y))d\mu_x(y) : \varphi \in C^1_{\mathrm{c}}(D;\mathbb{R}^m)\right\},$$

où $D \subset \mathbb{R}^N$ est un ouvert borné tel que $D \cap T^1_\mu(x) \neq 0$ et W_μ est définie en (81), est appelée la μ-quasiconvexification de W.

(Si W est une intégrande de Carathéodory satisfaisant (73), on peut montrer que l'infimum ci-dessus est indépendant du choix de D, voir [51, §4-Proof of theorem 1]. Si μ est la mesure de Lebesgue, on retrouve la notion classique de quasiconvexification.) Nous avons montré le théorème suivant (voir [51, Theorem 2]).

Théorème 6.25. *Si μ est superficielle dans Ω et si W est une intégrande de Carathéodory satisfaisant* (73) *alors* (74) *a lieu avec $\overline{W} = \mathcal{Q}_\mu W$.*

Schéma de démonstration. On obtient d'abord (82) en utilisant le corollaire 6.20. On prouve ensuite la proposition suivante (voir [51, Theorem 1]).

Proposition 6.26. *Si $\phi \in W^{1,p}_\mu(\Omega;\mathbb{R}^m)$ et $x \in S_\mu$ alors*

$$\overline{J}(\phi, B_\rho(x)) = \int_{B_\rho(x)} \mathcal{Q}_\mu W(y, \nabla_\mu \phi(y)) d\mu(y)$$

pour tout $\rho \in]0, \bar\rho]$ avec $\bar\rho > 0$ assez petit.

Pour démontrer cette proposition, on se ramène par "difféomorphisme" au théorème de relaxation de Dacorogna (avec W dépendant de x) (voir le théorème 3.6) en tenant compte de (75) et de la proposition 6.16 (voir [51, Lemmas 4-6]), faisant ainsi apparaître la formule de μ-quasiconvexification de W (voir [51, §4-Proof of Theorem 1]). Il suit alors que :

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{\overline{J}(\phi, B_\rho(x))}{\mu(B_\rho(x))} = \mathcal{Q}_\mu W(x, \nabla_\mu \phi(x)) \ \mu\text{-p.p. dans } \Omega \cap S_\mu$$

pour tout $\phi \in W^{1,p}_\mu(\Omega;\mathbb{R}^m)$. Comme μ est superficielle dans Ω, on peut remplacer "μ-p.p. dans $\Omega \cap S_\mu$" par "μ-p.p. dans $\Omega \cap \mathrm{supp}(\mu)$", et on obtient le résultat. □

Remarque 6.27. Dans le théorème 6.25, si $m = N = 3$, $\Omega = \Sigma\times]0, 1[$ avec $\Sigma \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert borné et $\mu = \mathcal{H}^2\lfloor_{\Sigma\times\{0\}}$ (et W qui ne dépend pas de x), on a $\mathcal{Q}_\mu W = \mathcal{Q}W_0$ avec $W_0 : \mathbb{M}^{3\times 2} \to [0, +\infty]$ définie en (18). On obtient ainsi un théorème analogue au théorème de réduction de dimension de Le Dret-Raoult (voir le théorème 3.8).

Question 6.28. *Peut-on étendre le théoreme* 6.25 *au cas où W* (*ne dépendant pas de x pour simplifier*) *est compatible avec* (1) *et* (2) *ou* (7) *et* (2) *?*

Remarque 6.29. En analysant le schéma de démonstration du théorème 6.25, on voit qu'en fait on a démontré le théorème suivant.

Théorème 6.25-bis. *Si W est une intégrande de Carathéodory satisfaisant* (73) *alors*

$$\overline{J}(\phi, A) = \int_{A\cap S_\mu} \mathcal{Q}_\mu W(x, \nabla_\mu \phi(x)) d\mu(x) + \int_{A\setminus S_\mu} \lim_{\rho\to 0} \frac{\overline{J}(\phi, B_\rho(x))}{\mu(B_\rho(x))} d\mu(x) \tag{83}$$

pour tout $(\phi, A) \in W^{1,p}_\mu(\Omega;\mathbb{R}^m) \times \mathcal{O}(\Omega)$.

Les deux corollaires suivants se déduisent facilement du théorème 6.25 (et des remarques 6.22 et 6.23).

Corollaire 6.30. *Si $\mu = \mathcal{H}^k\lfloor_M$ avec $M \subset \Omega$ une sous-variété de $\mathbb{R}^N$* (*avec ou sans bord*) *de dimension $k \in \{1, \cdots, N-1\}$ et si W est une intégrande de Carathéodory satisfaisant* (73) *alors*

$$\overline{J}(\phi, \Omega) = \int_M \mathcal{Q}_\mu W(x, \nabla_\mu \phi(x)) d\mathcal{H}^k(x) \ \textit{pour tout } \phi \in W^{1,p}_\mu(\Omega;\mathbb{R}^m).$$

Corollaire 6.31. *Soit $\mu = \sum_{i=1}^{2} \mu_i$ avec $\mu_i = \mathcal{H}^{k_i}\lfloor_{M_i}$, où $M_i \subset \Omega$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^N$ (avec ou sans bord) de dimension $k_i \in \{1, \cdots, N-1\}$. Si M_1 et M_2 sont transversales et si W est une intégrande de Carathéodory satisfaisant* (73) *alors*

$$\overline{J}(\phi, \Omega) = \sum_{i=1}^{2} \int_{M_i} \mathcal{Q}_{\mu_i} W(x, \nabla_{\mu_i}\phi(x)) d\mathcal{H}^{k_i}(x) \text{ pour tout } \phi \in W^{1,p}_{\mu}(\Omega; \mathbb{R}^m).$$

Question 6.32. *Peut-on identifier l'intégrande du second terme du membre de droite dans* (83) *lorsque $\mu = \mathcal{H}^{k_1}\lfloor_{M_1} + \mathcal{H}^{k_2}\lfloor_{M_2} + \mathcal{H}^{k_{12}}\lfloor_{M_1 \cap M_2}$ avec $M_1, M_2 \subset \Omega$ deux sous-variétés transversales de $\mathbb{R}^N$ de dimensions respectives k_1 et k_2 ($k_{12} := k_1 + k_2 - N$ étant la dimension de la sous-variété $M_1 \cap M_2$) ?*

Références

[1] E. Acerbi, N. Fusco, Semicontinuity problems in the calculus of variations, Arch. Rational Mech. Anal. 86 (1984) 125-145.

[2] J.-J. Alibert, B. Dacorogna, An example of a quasiconvex function that is not polyconvex in two dimensions, Arch. Rational Mech. Anal. 117 (1992) 155-166.

[3] F. Alvarez, J.-P. Mandallena, Homogenization of multiparameter integrals, Nonlinear Anal. 50 (2002) 839-870.

[4] F. Alvarez, J.-P. Mandallena, Multiparameter homogenization by localization and blow-up, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 134 (2004) 801-814.

[5] S. Antman, Nonlinear problem of elasticity, springer-Verlag, Second Edition, 2005.

[6] O. Anza Hafsa, Régularisation de certains problèmes variationnels non convexes issus de l'élasticité non linéaire, Thèse de Doctorat, Université Montpellier II, 2002.

[7] O. Anza Hafsa, Variational formulations on thin elastic plates with constraints, J. Convex Anal. 12 (2005) 365-382.

[8] O. Anza Hafsa, J.-P. Mandallena, Interchange of infimum and integral, Calc. Var. Partial Differential Equations 18 (2003) 433-449.

[9] O. Anza Hafsa, J.-P. Mandallena, Relaxation of second order geometric integrals and non-local effects, J. Nonllinear Convex Anal. 5 (2004) 295-306.

[10] O. Anza Hafsa, J.-P. Mandallena, The nonlinear membrane energy: variational derivation under the constraint "det$\nabla u \neq 0$", J. Math. Pures Appl. 86 (2006) 100-115.

[11] O. Anza Hafsa, J.-P. Mandallena, Relaxation of variational problems in two-dimensional nonlinear elasticity, Ann. Mat. Pura Appl. 186 (2007) 187-198.

[12] O. Anza Hafsa, J.-P. Mandallena, Relaxation theorems in nonlinear elasticity, Ann. Inst. Poincaré Anal. Non Linéaire 25 (2008) 135-148.

[13] O. Anza Hafsa, J.-P. Mandallena, The nonlinear membrane energy: variational derivation under the constraint "det$\nabla u > 0$", Bull. Sci. Math. 132 (2008) 272-291.

[14] O. Anza Hafsa, J.-P. Mandallena, G. Michaille, Homogenization of periodic nonconvex integral functionals in terms of Young measures, ESAIM: Control Optim. Calc. Var. 12 (2006) 35-51.

[15] G. Anzellotti, S. Baldo, D. Percivale, Dimension reduction in variational problems, asymptotic development in Γ-convergence and thin elastic structures in elasticity, Asymptot. Anal. 9 (1994) 61-100.

[16] H. Attouch, G. Buttazzo, G. Michaille, Variational analysis in Sobolev and BV-spaces. Applications to PDEs and optimization, MPS-SIAM Series on Optimization, 2006.

[17] J. M. Ball, Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity, Arch. Rat. Mech. Anal. 63 (1977) 337-403.

[18] J. M. Ball, The calculus of variations and materials science, Quart. Appl. Math. 56 (1996) 719-740.

[19] J. M. Ball, Some open problems in elasticity, Geometry, mechanics, and dynamics, 3-59, Springer, 2002.

[20] J. M. Ball, R. D. James, From microscales to macroscales in materials, livre en préparation.

[21] J. M. Ball, F. Murat, $W^{1,p}$-quasiconvexity and variational problems for multiple integrals, J. Funct. Anal. 58 (1984) 225-253.

[22] H. Ben Belgacem, Modélisation de structures minces en élasticité non linéaire, Thèse de Doctorat, Université Pierre et Marie Curie, 1996.
[23] H. Ben Belgacem, Une méthode de Γ-convergence pour un modèle de membrane non linéaire, C. R. Acad. Sci. Paris Série I 323 (1996) 845-849.
[24] H. Ben Belgacem, Relaxation of singular functionals defined on Sobolev spaces, ESAIM Control Optim. Calc. Var. 5 (2000) 71-85.
[25] G. Bouchitté, G. Buttazzo, P. Seppecher, Energies with respect to a measure and applications to low dimensional structures, Calc. Var. Partial Differential Equations 5 (1997) 37-54.
[26] G. Bouchitté, M. Valadier, Integral representation of convex functionals on a space of measures, J. Funct. Anal. 80 (1988) 398-420.
[27] G. Buttazzo, Semicontinuity, relaxation and integral representation in the calculus of variations, Pitman Research Notes in Mathematics,1989.
[28] L. Carbone, R. De Arcangelis, Unbounded functionals in the calculus of variations. Representation, relaxation and homogenization, Chapman & Hall/CRC, 2001.
[29] P. G. Ciarlet, Mathematical elasticity. Vol I: three-dimensional elasticity, North-Holland 1988.
[30] P. G. Ciarlet, Mathematical elasticity. Vol II: theory of plates, North-Holland, 1997.
[31] P. G. Ciarlet, Mathematical elasticity. Vol III: theory of shells, North-Holland, 2000.
[32] E. De Giorgi, Sulla convergenza di alcune successioni di integrali del tipo dell'area, Rend. Mat. Appl. 8 (1975) 277-294.
[33] E. De Giorgi, T. Franzoni, Su un tipo di convergenza variationale, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Mat. 58 (1975) 842-850.
[34] B. Dacorogna, Quasiconvexity and relaxation of nonconvex problems in the Calculus of Variations, J. Funct. Anal. 46 (1982) 102-118.
[35] B. Dacorogna, Direct methods in the calculus of variations, Springer-Verlag, Second Edition, 2007.
[36] G. Dal Maso, An introduction to Γ-convergence, Birkhaüser, 1993.
[37] I. Ekeland, R. Temam, Analyse convexe et problèmes variationnels, Dunod, 1974.
[38] I. Fonseca, The lower quasiconvex envelope of the stored energy function for an elastic crystal, J. Math. Pures et Appl. 67 (1988) 175-195.
[39] I. Fonseca, G. Leoni, Modern methods in the calculus of variations: L^p spaces, Springer-Verlag, 2007.
[40] I. Fonseca, G. Leoni, Modern methods in the calculus of variations: Sobolev spaces, Springer-verlag, à paraître.
[41] M. Giaquinta, G. Modica, J. Souček, Cartesian currents in the calculus of variations. Vol I, II, Springer-Verlag,1998.
[42] E. Giusti, Direct methods in the calculus of variations, World Scientific, 2003.
[43] M. L. Gromov, JA. M. Eliashberg, Construction of nonsingular isoperimetric films, Trudy Mat. Inst. Steklov 116 (1971) 18-33. Translated in Proc. Steklov Inst. Math. 116 (1971) 13-28.
[44] M. L. Gromov, Partial differential relations, Springer-Verlag, Berlin, 1986.
[45] F. Hiai and H. Umegaki, Integrals, conditional expectations, and martingales of multivalued functions, J. Multivariate Anal. 7 (1977) 149-182.
[46] R. Kohn, G. Strang, Optimal design and relaxation of variational problems II, Comm. Pure Appl. Math. 39 (1986) 139-182.
[47] H. Le Dret, A. Raoult, Le modèle de membrane non linéaire comme limite variationnelle de l'élasticité non linéaire tridimensionnelle C. R. Acad. Sci. Paris Série I 317 (1993) 221-226.
[48] H. Le Dret, A. Raoult, The nonlinear membrane model as variational limit of nonlinear three-dimensional elasticity, J. Math. Pures Appl. 74 (1995) 549-578.
[49] J.-P. Mandallena, Contributions à une approche générale de la régularisation variationnelle de fonctionnelles intégrales, Thèse de Doctorat, Université Montpellier II, 1999.
[50] J.-P. Mandallena, On the relaxation of nonconvex superficial integral functionals, J. Math. Pures Appl. 79 (2000) 1011-1028.
[51] J.-P. Mandallena, Quasiconvexification of geometric integrals, Ann. Mat. Pura Appl. 184 (2005) 473-493.
[52] P. Marcellini, Approximation of quasiconvex functions and lower semicontinuity of multiple integrals, Manuscripta Math. 51 (1985) 1-28.
[53] P. Marcellini, On the definition and the lower semicontinuity of certain quasiconvex integrals, Ann. Inst. Poincaré Anal. Non Linéaire 3 (1986) 391-409.
[54] J. E. Marsden, T. J. R. Hughes, Mathematical foundations of elasticity, Prentice-Hall, 1983.

[55] C. B. Morrey, Quasiconvexity and the lower semicontinuity of multiple integrals, Pac. J. Math. 2 (1952) 25-53.
[56] C. B. Morrey, Multiple integrals in the calculus of variations, Springer-Verlag, 1966.
[57] R. W. Ogden, Non-linear elastic deformations, Ellis Horwood, 1984.
[58] P. Pedregal, Parametrized measures and variational principles, Birkhaüser, 1991.
[59] D. Percivale, The variational method for tensile structures, preprint n^{0}16 (1991) Dipartimento di Matematica Politecnico di Torino.
[60] R.T. Rockafellar, Integral functionals, normal integrands and measurable selections, Lecture Notes in Math. 543 (1976) 157-207.
[61] V. Šveràk, Rank-one convexity does not imply quasiconvexity, Proc. Royal Soc. Edinburgh 120A (1992) 185-189.
[62] K. Trabelsi, Sur la modélisation des plaques minces en élasticité non linéaire, Thèse de Doctorat, Université Pierre et Marie Curie, 2004.
[63] K. Trabelsi, Modeling of a membrane plate model for incompressible materials via Gamma-convergence, Anal. Appl.(Singap.) 4 (2006) 31-60.
[64] K. Zhang, A construction of quasiconvex functions with linear growth at infinity, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. 19 (1992) 313-326.
[65] V. V. Zhikov, Connectedness and homogenization. Examples of fractal conductivity, Mat. Sb. 187 (1996) 3-40. Translation in Sb. Math. 187 (1996) 1109–1147.
[66] V. V. Zhikov, On an extension of the method of two-scale convergence and its applications, Mat. Sb. 191 (2000) 31-72. Translation in Sb. Math. 191 (2000) 973–1014.

Liste des travaux

- [49] Contributions à une approche générale de la régularisation variationnelle de fonctionnelles intégrales, Thèse de Doctorat, Université Montpellier II, 1999.
- [50] On the relaxation of nonconvex superficial integral functionals, J. Math. Pures Appl. 79 (2000) 1011-1028.
- [3] Avec F. Alvarez, Homogenization of multiparameter integrals, Nonlinear Anal. 50 (2002) 839-870.
- [8] Avec O. Anza Hafsa, Interchange of infimum and integral, Calc. Var. Partial Differential Equations 18 (2003) 433-449.
- [4] Avec F. Alvarez, Multiparameter homogenization by localization and blow-up, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 134 (2004) 801-814.
- [9] Avec O. Anza Hafsa, Relaxation of second order geometric integrals and non-local effects, J. Nonllinear Convex Anal. 5 (2004) 295-306.
- [51] Quasiconvexification of geometric integrals, Ann. Mat. Pura Appl. 184 (2005) 473-493.
- [14] Avec O. Anza Hafsa et G. Michaille, Homogenization of periodic nonconvex integral functionals in terms of Young measures, ESAIM: Control Optim. Calc. Var. 12 (2006) 35-51.
- [10] Avec O. Anza Hafsa, The nonlinear membrane energy: variational derivation under the constraint “$\det\nabla u \neq 0$”, J. Math. Pures Appl. 86 (2006) 100-115.
- [11] Avec O. Anza Hafsa, Relaxation of variational problems in two-dimensional nonlinear elasticity, Ann. Mat. Pura Appl. 186 (2007) 187-198.
- [12] Avec O. Anza Hafsa, Relaxation theorems in nonlinear elasticity, Ann. Inst. Poincaré Anal. Non Linéaire 25 (2008) 135-148.
- [13] Avec O. Anza Hafsa, The nonlinear membrane energy: variational derivation under the constraint “$\det\nabla u > 0$”, Bull. Sci. Math. 132 (2008) 272-291.

Commentaires. La thèse [49] contient l'article [50] ainsi qu'une partie de l'article [3]. Les travaux présentés dans ce mémoire sont tirés des articles [8, 51, 10, 11, 12, 13].

UNIVERSITE DE NIMES, Site des Carmes, Place Gabriel Péri, 30021 Nîmes, France.
E-mail address: `jean-philippe.mandallena@unimes.fr`