



**HAL**  
open science

# Méthodes non conformes pour des équations aux dérivées partielles avec diffusion

Daniele Antonio Di Pietro

► **To cite this version:**

Daniele Antonio Di Pietro. Méthodes non conformes pour des équations aux dérivées partielles avec diffusion. Mathématiques [math]. Université Paris-Est, 2010. tel-00550230

**HAL Id: tel-00550230**

**<https://theses.hal.science/tel-00550230>**

Submitted on 24 Dec 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université Paris-Est Marne-la-Vallée

# Méthodes non conformes pour des équations aux dérivées partielles avec diffusion

---

Daniele Antonio Di Pietro

Mémoire présenté en vue d'obtenir

l'**Habilitation à Diriger des Recherches**

dans la spécialité

**Mathématiques**

soutenu le 6 décembre 2010 devant le jury composé de

Erik Burman	Université du Sussex	Rapporteur
Vivette Girault	Université Pierre et Marie Curie	Rapporteur
Gianmarco Manzini	Istituto di Matematica Applicata e Tecnologia Informatiche Pavia	Rapporteur
Alexandre Ern	Ecole des Ponts ParisTech	Examineur
Robert Eymard	Université de Paris-Est Marne-la-Vallée	Examineur
Thierry Gallouët	Université de Provence	Examineur
Roland Masson	IFP Energies nouvelles	Examineur

*A μ, n e p*

# Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier Van Bui-Tran et Roland Masson, qui m'ont soutenu et qui ont créé les conditions pour la confection de cet ouvrage.

Une mention et un remerciement spécial à mon très cher et très vénéré maître et ami Alexandre Ern, dont la culture, l'intuition et la rigoureuse méthode offrent une référence constante pour mon travail.

Ce mémoire n'aurait jamais vu le jour sans le précieux soutien de Robert Eymard, dont la vision originale et profonde de l'analyse numérique m'a ouvert de nouveaux et féconds horizons.

Je souhaite remercier chaleureusement Erik Burman, Vivette Girault et Gianmarco Manzini qui ont accepté de rapporter ce mémoire et Thierry Gallouët pour sa présence dans le jury.

Enfin, un grand merci à tous ceux avec qui j'ai eu le privilège et le plaisir de collaborer et, en particulier, à Léo Agélas, Francesco Bassi, Lorenzo Botti, Andrea Crivellini, Jérôme Droniou, Jean-Luc Guermond et Stefano Rebay.



# Avant-propos

Ce mémoire est un exposé synthétique d'une partie des travaux que j'ai accomplis après la fin de ma thèse. Au cours des dernières années, j'ai été amené à m'intéresser à la discrétisation de problèmes provenant de différentes applications en mécanique des fluides. L'élément commun à tous ces problèmes est la présence de termes diffusifs du second ordre. Pour des raisons différentes, j'ai considéré des discrétisations non conformes, c'est-à-dire, basées sur des espaces discrets non contenus dans l'espace continu naturellement associé à la formulation faible du problème. Plus précisément, dans les travaux présentés dans ce mémoire on retrouve essentiellement deux grandes familles de méthodes : les méthodes dites de Galerkin discontinues et les méthodes volumes finis.

Ce document s'organise comme suit. Les Chapitres 1–3 fournissent les renseignements administratifs relatifs au dossier de demande d'habilitation, dont un *curriculum vitae*, une description succincte de l'ensemble de mes travaux et la liste complète des publications. Les Chapitres 4–5 relatent les efforts entrepris au sujet de la discrétisation de problèmes avec diffusion par des méthodes non conformes. Plus précisément, le Chapitre 4 est consacré aux méthodes de Galerkin discontinues, tandis que le Chapitre 5 traite des méthodes volumes finis. Même si l'accent est généralement mis sur les motivations des travaux et sur le développement de la ligne de pensée, des détails sont fournis quand cela s'avère nécessaire pour apporter un complément d'information par rapport aux publications, ou bien pour indiquer des pistes de recherche futures. Le rapport contient aussi une annexe contenant les résumés des thèses actuellement en cours. Dans la dernière partie de ce mémoire on peut trouver le texte intégral des publications.

Pour faciliter la lecture, mes publications sont citées dans le texte avec un numéro progressif, tandis que les articles de la bibliographie générale sont cités avec les initiales des auteurs.



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Curriculum vitæ</b>	<b>1</b>
1.1	Études et formation . . . . .	1
1.2	Expérience professionnelle . . . . .	2
1.3	Thèmes de recherche . . . . .	2
1.4	Responsabilités d'encadrement . . . . .	2
1.5	Projets . . . . .	3
1.6	Activité d'enseignement . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Résumé des travaux</b>	<b>7</b>
2.1	Livres . . . . .	7
2.2	Articles dans des revues à comité de lecture . . . . .	8
2.3	Autres travaux . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Liste des publications</b>	<b>13</b>
3.1	Livres . . . . .	13
3.2	Articles dans des revues à comité de lecture . . . . .	13
3.2.1	Parus ou à paraître . . . . .	13
3.2.2	Soumis . . . . .	14
3.2.3	En préparation . . . . .	14
3.3	Articles dans des actes de conférences à comité de lecture . . . . .	14
3.4	Autres publications . . . . .	15
<b>4</b>	<b>Méthodes de Galerkin discontinues</b>	<b>17</b>
4.1	Introduction . . . . .	17
4.2	Un problème modèle . . . . .	19
4.2.1	Discrétisation . . . . .	20
4.2.2	La méthode SIP . . . . .	22
4.3	Diffusion-advection-réaction dégénérée . . . . .	25
4.3.1	Diffusion hétérogène . . . . .	25
4.3.2	Solutions peu régulières . . . . .	28
4.3.3	Advection, réaction et dégénérescence du coefficient de diffusion . . . . .	29
4.4	Analyse fonctionnelle discrète . . . . .	33
4.4.1	Injections de Sobolev discrètes . . . . .	33
4.4.2	Un résultat de compacité . . . . .	34
4.5	Convergence vers des solutions à régularité minimale . . . . .	35
4.6	Écoulements incompressibles . . . . .	36
4.6.1	Discrétisation en espace . . . . .	37
4.6.2	Marche en temps . . . . .	42

---

4.6.3	Exemples numériques . . . . .	45
<b>5</b>	<b>Méthodes volumes finis</b>	<b>53</b>
5.1	Introduction . . . . .	53
5.2	Flux numériques multi-points . . . . .	58
5.2.1	Un cadre d'analyse abstrait . . . . .	58
5.2.2	La méthode en G . . . . .	60
5.3	Méthodes de volumes finis variationnelles . . . . .	65
5.3.1	Cadre unifié . . . . .	65
5.3.2	Exemples . . . . .	67
5.4	Méthodes de Galerkin centrées aux mailles . . . . .	68
5.4.1	La méthode ccG pour un problème de diffusion hétérogène . . . . .	69
5.4.2	Application au problème de Navier-Stokes incompressible . . . . .	72
5.4.3	Une variation à stencil compact . . . . .	73
5.5	Programmation générative . . . . .	74
<b>A</b>	<b>Résumés des thèses en cours</b>	<b>77</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>81</b>

# Chapitre 1

## Curriculum vitæ

Daniele Antonio Di Pietro  
né le 1<sup>er</sup> janvier 1979 à Messine (Italie)  
nationalité italienne

IFP Energies nouvelles  
1 & 4 avenue Bois Préau  
92852 Rueil-Malmaison Cedex  
01 47 52 52 40  
dipietrd@ifpenergiesnouvelles.fr

### 1.1 Études et formation

- 2006–2007 Chercheur postdoctoral à l'École des Ponts ParisTech (ENPC)
- 2002–2006 Université de Bergame et École Polytechnique Fédérale de Lausanne, thèse sur l'application des méthodes de Galerkin discontinues aux écoulements incompressibles (*Discontinuous Galerkin methods for incompressible flows*), directeur Francesco Bassi
- 1997–2002 Université de Bergame, Ingénieur industriel, mémoire sur le design et la simulation numérique d'un système de refroidissement pour le projet BTeV<sup>1</sup>, (*Raffreddamento di componenti elettronici per mezzo di microcanali : applicazione al rivelatore di particelle per BTeV*<sup>2</sup>) directeur Gianpietro Cossali (moyenne de 110/110 et félicitations du jury<sup>3</sup>)
- 1992–1997 Lycée Filippo Lussana, baccalauréat scientifique (moyenne de 60/60)

---

1. L'expérience conçue dans le projet BTeV se proposait de vérifier la violation CP découverte par James Cronin et Val Fitch pour les quarks *bottom* et *charm*. Le projet a été suspendu en 2005 suite à une réduction budgétaire. Pour plus d'informations, voir <http://www-btev.fnal.gov/>

2. Refroidissement de composants électroniques par micro-échangeurs calorifiques : application au capteur de particules pour l'expérience BTeV

3. Les félicitations du jury sont traditionnellement appelées en Italie *lode* (éloge) ou *bacio accademico* (baiser académique)

## 1.2 Expérience professionnelle

- 2007–présent Ingénieur chercheur à IFP Energies nouvelles, Département de Mathématiques Appliquées
- 2006–2007 Chercheur postdoctoral à l'École des Ponts ParisTech (ENPC), laboratoire CERMICS<sup>4</sup>
- 2005 Assistant doctorant à l'École Polytechnique Fédérale de Lausanne (EPFL), laboratoire CMCS<sup>5</sup>

## 1.3 Thèmes de recherche

- 2007–présent *Écoulements polyphasiques en milieux poreux* : (i) discrétisation des opérateurs de diffusion par méthodes non conformes sur des maillages polyédriques généraux ; (ii) modèle compositionnel thermique ; (iii) adaptation de maillage appliquée aux procédés de récupération d'huile avancés
- 2002–présent *Écoulements monophasiques* : (i) discrétisation en espace des équations de Navier–Stokes à grand nombre de Reynolds ; (ii) discrétisation en temps par des méthodes couplées ou découplées
- 2005–présent *Programmation générative appliquée au calcul scientifique* : (i) application aux méthodes de Galerkin/éléments finis conformes et non-conformes ; (ii) application aux méthodes volumes finis pour des problèmes d'ingénierie pétrolière

## 1.4 Responsabilités d'encadrement

- 2009–présent *Carole Widmer*, doctorante sous la direction de Vivette Girault<sup>6</sup>, *Adaptation de maillage basée sur des estimations a posteriori appliquée à l'injection de CO<sub>2</sub> et aux procédés de récupération d'huile assistée*. Cette thèse est basée à IFP Energies nouvelles, et c'est moi qui en assure l'encadrement quotidien
- 2009–présent *Jean-Marc Gratién*, ingénieur-doctorant sous la direction de Christophe Prud'homme<sup>7</sup>, *Programmation générative pour le prototypage d'applications parallèles performantes pour l'approximation volumes finis de systèmes physiques complexes*. Cette thèse est basée à IFP Energies nouvelles, et c'est moi qui en assure l'encadrement quotidien
- 2009–présent *Soleiman Yousef*, doctorant sous la direction de Vivette Girault, *Adaptation de maillage basée sur des estimations a posteriori appliquée aux procédés de récupération d'huile assistée*. Dans ce cas, il est agréé que le doctorant passe un période de deux ans à l'étranger<sup>8</sup> avec des séjours de deux mois à IFP Energies nouvelles, puis qu'il soit de manière

4. Centre pour l'Enseignement et la Recherche en Mathématiques Industrielles et Calcul Scientifique

5. Chair de Modélisation et de Calcul Scientifique

6. Université Pierre et Marie Curie, Laboratoire Jacques-Louis Lions (Paris)

7. Université Joseph Fourier, Laboratoire Jean-Kuntzmann (Grenoble)

8. Cet accord a été accepté pour que Soleiman puisse honorer les conditions d'une bourse pour compléter les études supérieures en France.

- stable à IFP Energies nouvelles pendant deux ans consécutifs. Dans les deux cas, c'est moi qui en assure l'encadrement quotidien pour le travail sur un code commun
- 2009 *Soleiman Yousef*, stagiaire de fin d'études, *Schémas volumes finis hybrides appliqués à la modélisation des bassins pétroliers*
- 2008–2009 *Lorenzo Botti*, doctorant en visite sous la direction de Francesco Bassi<sup>9</sup>, *Développement et mise en œuvre d'une méthode de Galerkin discontinue pour le problème de Navier–Stokes incompressible instationnaire*. J'ai assuré l'encadrement quotidien de Lorenzo pendant son séjour à IFP Energies nouvelles
- 2008–2009 *Ivan Kapyrin*, post-doc, *Étude numérique et mise en œuvre des méthodes de volumes finis centrés aux mailles dans la plate-forme Arcane*
- 2007 *Sissel Mundal*, doctorante en visite sous la direction de Ivar Aavatsmark<sup>10</sup>, *Évaluation de la méthode MPFA L par le benchmark de FVCA5*. J'ai assuré l'encadrement quotidien de Sissel pendant son séjour à IFP Energies nouvelles.
- 2005 *Nicoletta Franchina*, stagiaire de fin d'études co-encadrée par Francesco Bassi, *Mise en œuvre dans Matlab d'un DSEL pour la discrétisation éléments finis d'équations aux dérivées partielles avec application au problème de Navier–Stokes incompressible*<sup>11</sup>
- 2004 *Pietro Gabbiadini*, stagiaire de fin d'études co-encadré par Alessandro Veneziani<sup>12</sup> en collaboration avec Freni Brembo, *Mise en œuvre d'un code éléments finis pour le prototypage de freines à disque*<sup>13</sup>

## 1.5 Projets

- 2009-présent Co-responsable avec Martin Vohralík d'un projet ERT en collaboration avec le Laboratoire Jacques-Louis Lions (LJLL) de l'Université Pierre et Marie Curie (UPMC), *Récupération d'huile assistée et séquestration géologique du CO<sub>2</sub> : adaptation de maillage, contrôle d'erreur a posteriori et autres techniques avancées*
- 2009-présent Participant au projet ANR VFSitCom, *Volumes Finis en Situations Complexes*<sup>14</sup>
- 2007-présent Participant au projet ANR SHPCO2, *Simulation Haute Performance du Stockage Géologique de CO<sub>2</sub>*<sup>15</sup>

---

9. Université de Bergame

10. Centre for Integrated Petroleum Research, Bergen (Norvège)

11. Implementazione in Matlab di un DSEL per la discretizzazione agli elementi finiti di equazioni alle derivate parziali con applicazione al problema di Navier–Stokes incompressibile

12. Emory University (Atlanta)

13. Implementazione di un codice agli elementi finiti per la prototipazione di dischi freno auto

14. Voir <http://ens.math.univ-montp2.fr/droniou/vfsitcom>

15. Voir <http://wiki.server.ifp.fr/SHPCO2/spip>

## 1.6 Activité d'enseignement

Au fil des années, j'ai eu l'occasion d'enseigner dans différentes institutions européennes. La Table 1.1 contient un résumé complet de ces activités d'enseignement. A présent je suis co-responsable de deux cours. Le cours de *Méthodes de Galerkin discontinues et applications*<sup>16</sup> se propose de fournir une introduction à l'analyse des méthodes de Galerkin discontinues. Ce cours a fourni l'occasion d'écrire avec Alexandre Ern la monographie *Mathematical aspects of discontinuous Galerkin methods* [1], qui apparaîtra dans la collection *Maths & Applications* de Springer-Verlag. Le cours de *Calcul scientifique*<sup>17</sup> est une introduction au calcul scientifique pour les élèves ingénieurs de l'École des Ponts comprenant des notions de discrétisation d'équations aux dérivées partielles et des éléments d'optimisation numérique.

---

16. Université Pierre et Marie Curie (Paris 6), M2 Mathématiques et Applications, option Analyse Numérique & Équations aux Dérivées Partielles. Pour plus d'informations, voir <http://www.ann.jussieu.fr/ANEDP/cours/ern.php>

17. École des Ponts, ParisTech

TABLE 1.1 – Résumé de l'activité d'enseignement

Cours	Années	Institution <sup>a</sup>	Cursus <sup>b</sup>	Type <sup>c</sup>	Niveau	Nr. d'élèves	Durée (h)
Méthodes de Galerkin discontinues et applications	10/11	UPMC	ANEDP	CM	M2	–	12
Calcul scientifique	10/11	ENPC	Génie civil	CM	L1	–	27
Méthodes de Galerkin discontinues et applications	09/10	UPMC	ANEDP	CM	M2	13	12
Calcul scientifique	09/10	ENPC	Génie civil	TD	L1	25	27
Calcul scientifique	07/08	ENPC	Génie civil	CM	L1	25	27
Méthodes de Galerkin discontinues et applications	08/09	UPMC	ANEDP	CM	M2	15	10
Calcul scientifique	07/08	ENPC	Génie civil	CM	L1	25	27
Programmation avancée pour le calcul scientifique	05/06	PoliMI	Génie mathématique	TD	M1–M2	45	45
Analyse numérique	04/05	EPFL	Génie mécanique, civil et informatique	TD	L2	40	15
Analyse numérique	03/04	UniBG	Génie mécanique	TD	L3	80	30
Analyse numérique	03/04	PoliMI	Génie aéronaval	TD	L1	80	30
Thermodynamique	03/04	UniBG	Génie industriel	TD	L2	150	30
Thermodynamique	02/03	UniBG	Génie textile	TD	L2	60	30
Transmission de chaleur	04/05	UniBG	Génie mécanique	Séminaires	M2	15	6
Transmission de chaleur	03/04	UniBG	Génie mécanique	Séminaires	M2	15	6
Transmission de chaleur	02/03	UniBG	Génie mécanique	Séminaires	M2	15	6

a. UPMC : Université Pierre et Marie Curie ; ENPC : École des Ponts ParisTech ; PoliMI : École Polytechnique Milan ; EPFL : École Polytechnique Lausanne ; UniBG : Université de Bergame

b. ANEDP : Analyse Numérique & Équations aux dérivées partielles

c. CM : cours magistral ; TD : travaux dirigés.



## Chapitre 2

# Résumé des travaux

Ce chapitre contient un résumé succinct de l'ensemble des travaux que j'ai réalisés depuis la thèse. Il est organisé en trois sections : dans §2.1 je présente brièvement la monographie [1] ; §2.2 contient un résumé succinct des articles pour revue à comité de lecture présentés dans ce mémoire ; pour conclure, mes autres travaux sont synthétisés dans §2.3.

### 2.1 Livres

Le projet de monographie [1] a été conçu dans le cadre d'un cours de M2 dont je suis co-responsable avec Alexandre Ern à l'Université Pierre et Marie Curie<sup>1</sup>. Son but est de fournir les outils mathématiques de base pour la conception et l'analyse des méthodes de Galerkin discontinues (dG). Contrairement à la récente monographie de Hesthaven et Warburton [HW08], l'ouvrage se concentre spécifiquement sur les aspects théoriques. Le public auquel il s'adresse comprend des étudiants de troisième cycle aussi bien que des chercheurs en mathématiques appliquées. Plus généralement, on suppose que le lecteur soit familier avec les méthodes d'éléments finis (EF) standard, et qu'il ait une connaissance basique des EDPs que l'on rencontre dans l'ingénierie et dans les sciences appliquées.

La monographie est organisée en trois parties correspondantes, respectivement, aux problèmes d'advection-réaction, de diffusion, et aux systèmes d'EDPs. À côté de l'analyse des problèmes modèles, cet ouvrage propose un certain nombre de sujets avancés issus de travaux (très) récentes des auteurs. Pour chaque problème on considère la version stationnaire et on propose au moins une discrétisation en temps pour la version instationnaire. Le lien avec les méthodes VF est particulièrement soigné à la fois dans le cadre des EDPs du premier ordre (stationnaires et instationnaires) et du second ordre. Quelques aspects liés à la mise en œuvre sont aussi traités, bien qu'ils restent à un niveau de détail inférieur par rapport aux sujets théoriques.

Dans ce manuscrit on traite, en particulier, les chapitres 1, 4, 5 et 6.

---

1. Voir Table 1.1.

## 2.2 Articles dans des revues à comité de lecture

Mon activité de recherche porte essentiellement sur le développement et l'analyse de méthodes éléments finis et volumes finis (VF) pour des problèmes issus de la mécanique des fluides. Par la suite je présenterai un résumé des principales contributions en suivant dans la plus part des cas l'ordre chronologique inverse.

**Travaux présentés dans ce mémoire** Dans [16] on étudie la convergence vers des solutions peu régulières de la méthode SWIP de [9] pour un problème de diffusion hétérogène. L'idée est ici d'exploiter les résultats de régularité prouvés par Nicaise et Sändig [NS94] afin d'obtenir une estimation du taux de convergence pour des solutions qui ont la régularité minimale en dimension 2, i.e., qui sont dans  $H^{1+\epsilon}(\Omega)$  avec  $\epsilon > 0$ . Cette analyse complète celle de [9] (qui est valide lorsque la solution exacte est dans  $H^{3/2+\epsilon}(\Omega)$ ). En dimension supérieure, l'analyse de convergence se fait par un argument de compacité inspiré par [7]; voir plus loin dans cette section.

Dans [2] on introduit une méthode de correction de pression pour les équations de Navier–Stokes incompressibles (NSI). La discrétisation en espace est basée sur des éléments discontinus pour la vitesse et continus pour la pression. L'intérêt des méthodes dG appliquées aux écoulements incompressibles est lié aux bonnes propriétés de stabilité et à la précision accrue à grand nombre de Reynolds. Cependant, à cause de l'augmentation du nombre de degrés de libertés, les solveurs monolithiques demandent un effort computationnel souvent trop important dans les applications réelles. L'idée de [2] consiste à réduire le coût de la marche en temps en utilisant une méthode de correction de pression inspirée par [GQ98]. Le choix des espaces garantit la stabilité de la méthode au sens de la condition LBB; l'absence de termes de stabilisation pour la pression réduit ultérieurement le couplage entre l'équation de conservation de la quantité de mouvement et celle de conservation de la masse par rapport, e.g., au schéma de [7]. La méthode est appliquée à des nombreux cas tests classiques, où elle se montre robuste par rapport au nombre de Reynolds. Une variation basée sur une formule BDF2 est aussi proposée. Dans ce cas, les expériences numériques montrent une convergence au second ordre en temps pour la vitesse, tandis que l'ordre de convergence en temps de la pression s'améliore avec le nombre de Reynolds en passant de un à presque deux.

Dans [3, 6, 15] on introduit et analyse une nouvelle famille de méthodes dites *de Galerkin centrées aux mailles* (ccG<sup>2</sup>) qui combinent des idées des méthodes dG et VF. Contrairement aux schémas VF classiques [ABBM94, ABBM96, ABBM98a, ABBM98b, ER94, ER98] et variationnelles [DE06, EGH09], les méthodes ccG se basent sur une formulation discrète qui peut s'étendre au continu. L'idée de base consiste à fixer un degré de liberté par maille et à reconstruire un espace polynômial par morceaux incomplet à partir de ce dernier. Dans le cadre des problèmes linéaires, la vision fonctionnelle permet d'obtenir des estimations d'erreur dans l'esprit du Lemme de Céa; l'élément clé pour estimer le taux de convergence est alors l'étude des propriétés d'approximation de l'espace discret considéré. Les publications [3, 6, 15] montrent l'application des méthodes ccG à des différents problèmes linéaires et non linéaires. Plus précisément, dans [6] on introduit la méthode ccG pour une EDP modèle de diffusion hétérogène et anisotrope et on propose une extension pour les problèmes de diffusion-advection. Dans [3] on propose une variation à stencil compact. Comme pour les méthodes EF, le stencil est strictement lié au support des fonctions de base. L'idée est donc de réduire ce dernier en utilisant une reconstruction de gradient sur

un sous-maillage. Dans [15] on analyse en détail la méthode ccG pour une EDP modèle et on montre l'application au problème de NSI. Dans le premier cas on obtient des estimations du taux de convergence pour des solutions régulières et on prouve la convergence vers les solutions à régularité minimale. Dans le second cas, on montre la convergence de la méthode par un argument de compacité. Un avantage important des méthodes ccG est qu'elles s'appliquent potentiellement à tout problème diffusif pour lequel une discrétisation dG a été envisagée. Cette propriété rend naturelle leur utilisation dans le contexte des plates-formes généralistes comme FreeFEM [DHP03] ou Feel/Life [Pru06].

Dans le travail de thèse de Jean-Marc Gratien, les méthodes ccG ont apporté le cadre mathématique unifié à la base d'un langage embarqué (*Domain-Specific Embedded Language*) en C++ orienté aux EDPs et inspiré par celui de Feel/Life. Ce projet est développé sous la plate-forme propriétaire Arcane dont IFP Energies nouvelles est copropriétaire avec le CEA<sup>3</sup>, et il vise à devenir le cadre commun des applications de calcul scientifique à IFP Energies nouvelles. Le travail s'appuie, en particulier, sur [8] et sur [Pru06], où on introduit un langage embarqué en C++ pour les méthodes d'éléments finis continues et discontinues. L'intérêt des langages orientés à la discrétisation d'EDPs est de fournir une façon expressive et rapide d'écrire des codes numériques. La spécificité de la mise en œuvre proposée dans [8] est liée à l'utilisation de techniques de programmation avancées, qui permettent d'éviter les sur-coûts du paradigme orienté objets classique.

Dans [7] on introduit deux outils d'analyse fonctionnelle discrète pour les espaces polynômiaux par morceaux : les injections de Sobolev et un résultat de compacité pour les suites de fonctions polynômiales par morceaux uniformément bornées dans une norme  $H^1$  discrète opportune. Ces outils sont ensuite appliqués à l'analyse d'une nouvelle méthode dG pour les équations de NSI. Un des intérêts de ce travail reste dans la nouvelle technique de démonstration pour les résultats d'analyse fonctionnelle, qui est basée sur les propriétés de la norme BV. Cette approche évite les hypothèses de régularité elliptique et elle s'applique à des maillages généraux. Dans la nouvelle méthode pour les équations de NSI le couplage vitesse-pression est classiquement stabilisé par la pénalisation des sauts de la pression aux interfaces. Ceci permet d'approcher la pression avec le même degré polynômial que la vitesse. Pour le terme convectif on propose deux formes trilineaires non dissipatives. Le fait que la forme trilineaire ne contribue pas à la diffusion numérique est un ingrédient clé pour prouver l'existence d'une solution discrète par un argument de degré topologique. L'analyse de convergence de la méthode pour les équations de NSI se fait par un argument de compacité inspiré par les techniques de Eymard, Gallouët et Herbin et collaborateurs [EGH00, EHL07] dans le contexte des méthodes VF.

Dans [5] on propose un cadre d'analyse unifié pour les méthodes dG et VF appliquées à un problème modèle de diffusion hétérogène. Le but de ce travail est de préciser les analogies souvent évoquées entre méthodes dG et VF dans le contexte des problèmes elliptiques, et de proposer une approche commune pour l'analyse. Disposer de méthodes robustes par rapport à l'hétérogénéité du tenseur de diffusion est fondamental dans la simulation des écoulements en milieux poreux que l'on retrouve dans la modélisation des gisements de pétrole [21]. Le point de départ du cadre unifié est une forme bilinéaire discrète constituée par un terme consistant et par un terme de pénalisation éventuellement nul. Le terme consistant est exprimé en fonction de deux gradients, dont un fortement convergent pour les suites de fonctions tests régulières et

---

3. Commissariat à l'Énergie Atomique

un faiblement convergent pour les suites fonctions discrètes uniformément bornées en une norme  $H^1$  discrète opportune. L'analyse s'applique aussi bien aux méthodes symétriques et non symétriques. Parmi les exemples de méthodes entrant dans le cadre, on compte celles de [9, 23] aussi bien qu'un grand nombre de méthodes dG. De plus, un nouveau schéma VF est aussi proposé. Ce travail est le prédécesseur de [3, 6, 15], car c'est ici que l'interprétation fonctionnelle des méthodes de VF variationnelles a été introduite.

Comme on a vu, le cadre de [5] s'adresse aux méthodes en formulation variationnelle. Dans [4] on considère une approche différente basée sur la formulation flux, plus classique dans le contexte des VF. Cet article contient, en particulier, la première analyse rigoureuse de la méthode dite *en L* [AEMN08], assez populaire dans l'industrie pétrolière. Plus précisément, la méthode en L est obtenue comme cas particulier de la nouvelle famille de méthodes VF qui est introduite dans l'article. L'idée de base est ici d'exprimer le flux numérique comme une moyenne pondérée des flux obtenus par les constructions en L autour des nœuds d'une face. Selon le choix des poids, on obtient des méthodes avec des caractéristiques très différentes. Dans l'article on propose une formule pour le calcul des poids visant à améliorer la coercivité de la méthode sur des maillages quelconques (qui, comme pour les autres méthodes multi-points, n'est pas toujours garantie). La nouvelle famille de méthodes se montre plus robuste et précise que les méthodes VF multi-points classiques [ABBM94, ABBM96, ABBM98a, ABBM98b, ER94, ER98] tout en gardant un stencil aussi compact. Cette dernière propriété est fondamentale à la fois pour réduire le remplissage de la matrice et les échanges de données dans le cas parallèle. Un autre point important est l'introduction d'une espace test de fonctions localement régulières avec flux diffusifs continus dense dans  $H_0^1(\Omega)$ . Cet espace est aussi utilisé dans l'analyse des méthodes ccG [3, 6, 15].

Dans [9] on analyse un problème d'advection-réaction-diffusion dégénéré, et on propose une famille de méthodes dG robustes par rapport à l'hétérogénéité et à l'anisotropie du tenseur de diffusion. Afin d'obtenir des estimations indépendantes des paramètres du problème on utilise la norme d'énergie naturellement associée à la forme bilinéaire, et on modifie les termes de bord d'une manière correspondante. À ce propos, les ingrédients clé sont des opérateurs de moyenne de trace pondérés par les valeurs de la diffusion et la stabilisation par décentrage en amont du terme d'advection. L'analyse est basée sur une condition de stabilité inf-sup, qui permet d'estimer la dérivée advective en plus de celle diffusives (qui s'annule en cas de dégénérescence de la diffusion). Dans le régime d'advection dominante, on retrouve les estimations d'erreur classiques [JP86]. Parmi les intérêts principaux de ce travail on citera aussi l'analyse rigoureuse du problème continu amenant à des conditions d'interface qui en garantissent la bonne position. Ces dernières sont satisfaites automatiquement par la méthode proposée.

Dans [10] on propose une famille de méthodes de marche en temps monolithiques pour les équations de NSI discrétisées en espace par la méthode de [12, 30]. La discrétisation en temps des équations de NSI est compliquée par l'absence de la dérivée en temps dans l'équation de conservation de la masse, qui se réduit à une contrainte de divergence nulle. Dans cet article, inspiré principalement par les travaux de Cockburn, Shu et collaborateurs [CS91, CHS90, CLS89, CS98b] dans le contexte des écoulements compressibles, on introduit une famille de méthodes de marche en temps basée sur les schémas de Runge–Kutta de type Rosenbrock. L'article contient une validation numérique extensive sur de nombreux cas test classiques.

**Travail de thèse** Pendant ma thèse [30] j'ai proposé et analysé une méthode de Galerkin discontinue pour les équations de NSI. Le principe de la méthode consiste à modifier localement les équations de NSI aux interfaces pour obtenir un flux conservatif à partir de la solution d'un problème de Riemann. La méthode présente un paramètre libre qui correspond physiquement à la vitesse du son.

Une validation numérique de la méthode est présentée dans [12]. L'ordre de convergence et la robustesse par rapport au nombre de Reynolds sont évalués numériquement sur un ensemble de cas test classiques.

La méthode de compressibilité artificielle a été analysée dans [11] pour le problème de Stokes. On montre, en particulier, que le paramètre libre doit être proportionnel au diamètre de la face pour que la méthode converge à l'ordre optimale.

Dans [13] on propose une comparaison de solveurs *level-set* pour le suivi de front dans le contexte des simulations des écoulements à surface libre. Plus précisément, on compare une version dG adaptative avec une méthode d'éléments finis continue avec stabilisation des sauts du gradient. La validation numérique est basée sur un ensemble de cas test avec différentes difficultés (grandes déformations de l'interface, présence d'angles, etc).

Dans [14] on propose des modèles VF réduits pour la simulation de micro-échangeurs calorifiques. Ce travail, issu de mon stage de fin d'études, était motivé par l'application au refroidissement des capteurs de particules de l'expérience BTeV.

## 2.3 Autres travaux

**Travaux en préparation** Dans [17] on vise à étendre l'analyse de la méthode de [2] appliquée au problème de Stokes proposée dans [1, §6.3] au problème de NSI complet. En particulier, on souhaite expliquer l'amélioration de la performance de la méthode de correction de pression à grand nombre de Reynolds.

Le langage embarqué orienté aux méthodes VF développé dans le contexte de la thèse de Jean-Marc Gratien fait l'objet de [18]. Dans ce travail on montre d'autres exemples d'application des méthodes ccG de [3, 6, 15] en rapport, en particulier, avec la mécanique du sol.

Dans [19] on propose des estimateurs *a posteriori* avec borne supérieure garantie pour le problème de Darcy diphasique. Le problème est discrétisé par la méthode classique avec décentrage par phase de [EHM03] couplée avec des flux diffusifs multi-points pour tenir compte de la non-conformité du maillage et de l'anisotropie du tenseur de perméabilité. Les estimateurs sont utilisés à la fois pour guider l'adaptation de maillage et pour définir des critères d'arrêt pour les solveurs linéaires et non linéaires.

**Polycopiés et documentation** La collection [32] contient le matériel du cours de *Programmation Avancée pour le Calcul Scientifique*<sup>4</sup>, dont j'ai été co-responsable avec Luca Formaggia en 2005 à l'École Polytechnique de Milan. Le site web contient les transparents du cours et une série de problèmes pratiques avec solution.

Pendant mon post-doc à l'École des Ponts ParisTech j'ai développé la librairie propriétaire dgC++ (voir [31]). Il s'agit d'une librairie C++ orientée aux méthodes de Galerkin discontinues avec ordre arbitraire sur maillages généraux. Elle a été utilisée dans plusieurs publications [ES08, 1, 7, 9, 25] avec application à des problèmes de

---

4. Programmazione Avanzata per il Calcolo Scientifico

diffusion-advection, aux équations de NSI, et aux lois de conservation hyperboliques (*shallow water equations*).

# Chapitre 3

## Liste des publications

### 3.1 Livres

- [1] D. A. Di Pietro and A. Ern. *Mathematical Aspects of Discontinuous Galerkin Methods*. Maths & Applications. Springer-Verlag, 2010. To appear.

### 3.2 Articles dans des revues à comité de lecture

#### 3.2.1 Parus ou à paraître

- [2] L. Botti and D. A. Di Pietro. A pressure-correction scheme for convection-dominated incompressible flows with discontinuous velocity and continuous pressure. *J. Comput. Phys.*, 230(3) :572–585, 2011. DOI : 10.1016/j.jcp.2010.10.004.
- [3] D. A. Di Pietro. A compact cell-centered Galerkin method with subgrid stabilization. *C. R Acad. Sci. Paris, Ser. I*, December 2010. Published online. DOI : 10.1016/j.crma.2010.11.017.
- [4] L. Agélas, D. A. Di Pietro, and J. Droniou. The G method for heterogeneous anisotropic diffusion on general meshes. *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, 44(4) :597–625, 2010. DOI : 10.1051/m2an/2010021.
- [5] L. Agélas, D. A. Di Pietro, R. Eymard, and R. Masson. An abstract analysis framework for nonconforming approximations of diffusion problems on general meshes. *IJFV*, 7(1) :1–29, 2010.
- [6] D. A. Di Pietro. Cell centered Galerkin methods. *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I*, 348 :31–34, 2010. DOI : 10.1016/j.crma.2009.11.012.
- [7] D. A. Di Pietro and A. Ern. Discrete functional analysis tools for discontinuous Galerkin methods with application to the incompressible Navier–Stokes equations. *Math. Comp.*, 79 :1303–1330, 2010. DOI : 10.1090/S0025-5718-10-02333-1..
- [8] D. A. Di Pietro and A. Veneziani. Expression template implementation of continuous and discontinuous Galerkin methods. *Comp. Vis. in Sci.*, 12 :421–436, 2009. DOI : 10.1007/s00791-008-0117-x.

- [9] D. A. Di Pietro, A. Ern, and J.-L. Guermond. Discontinuous Galerkin methods for anisotropic semi-definite diffusion with advection. *SIAM J. Numer. Anal.*, 46(2) :805–831, 2008. DOI : 10.1137/060676106.
- [10] F. Bassi, A. Crivellini, D. A. Di Pietro, and S. Rebay. An implicit high-order discontinuous Galerkin method for steady and unsteady incompressible flows. *Comp. & Fl.*, 36(10) :1529–1546, 2007. DOI : 10.1016/j.compfluid.2007.03.012.
- [11] D. A. Di Pietro. Analysis of a discontinuous Galerkin approximation of the Stokes problem based on an artificial compressibility flux. *Int. J. Num. Meth. Fluids*, 55(8) :793–813, 2007. DOI : 10.1002/flid.1495.
- [12] F. Bassi, A. Crivellini, D. A. Di Pietro, and S. Rebay. An artificial compressibility flux for the discontinuous Galerkin solution of the incompressible Navier-Stokes equations. *J. Comput. Phys.*, 218(2) :794–815, 2006. DOI : 10.1016/j.jcp.2006.03.006.
- [13] D. A. Di Pietro, S. Lo Forte, and N. Parolini. Mass preserving finite element implementations of the level set method. *App. Num. Math.*, 56 :1179–1195, 2006. DOI : 10.1016/j.apnum.2006.03.003.
- [14] G. E. Cossali, D. A. Di Pietro, and M. Marengo. Comparison of four analytical and numerical models for a microchannel heat sink. *Int. J. Heat and Tech.*, 21(2) :31–42, 2003.

### 3.2.2 Soumis

- [15] D. A. Di Pietro. Cell centered Galerkin methods for diffusive problems. Preprint available at <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00511125/en/>, September 2010. Submitted to M2AN Math. Model. Numer. Anal.
- [16] D. A. Di Pietro and A. Ern. Analysis of a discontinuous Galerkin method for heterogeneous diffusion problems with low-regularity solutions. Preprint available at <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00514387/fr/>, September 2010. Submitted to Numer. Meth. PDEs.

### 3.2.3 En préparation

- [17] L. Botti, D. A. Di Pietro, and A. Ern. A pressure correction method applied to an approximation of the Navier–Stokes equations with discontinuous velocity and continuous pressure. In preparation, 2010.
- [18] D. A. Di Pietro, J.-M. Gratien, and C. Prud’homme. An embedded domain-specific language in C++ for finite volume methods in variational form. In preparation, 2010.
- [19] D. A. Di Pietro, M. Vohralík, and C. Widmer. *A posteriori* error estimates and adaptivity for two-phase flows. In preparation, 2010.

## 3.3 Articles dans des actes de conférences à comité de lecture

- [20] L. Agélas, D. A. Di Pietro, and I. Kapyrin. A comparison of last generation cell centered finite volume methods on challenging three dimensional problems.

- In *Proceedings of the 3rd International Conference on Approximation Methods and numerical Modeling in Environment and Natural Resources*, Pau, France, June 2009.
- [21] L. Agélas, D. A. Di Pietro, R. Eymard, and R. Masson. A general framework for non-conforming approximations of the single phase Darcy equation. In *Proceedings of the 11th European Conference on the Mathematics of Oil Recovery*, Bergen, Norway, September 2008.
- [22] L. Agélas, D. A. Di Pietro, I. Kapyrin, and R. Masson. Generalized L-scheme for the discretization of diffusion fluxes on general meshes. In *Proceedings of the 11th European Conference on the Mathematics of Oil Recovery*, Bergen, Norway, September 2008.
- [23] L. Agélas and D. A. Di Pietro. A symmetric finite volume scheme for anisotropic heterogeneous second-order elliptic problems. In R. Eymard and J.-M. Hérard, editors, *Finite Volumes for Complex Applications V*, pages 705–716. John Wiley & Sons, 2008.
- [24] L. Agélas, D. A. Di Pietro, and R. Masson. A symmetric and coercive finite volume scheme for multiphase porous media flow with applications in the oil industry. In R. Eymard and J.-M. Hérard, editors, *Finite Volumes for Complex Applications V*, pages 35–52. John Wiley & Sons, 2008.
- [25] D. A. Di Pietro and A. Ern. A discontinuous Galerkin flux for anisotropic heterogeneous second-order elliptic problems. In R. Eymard and J.-M. Hérard, editors, *Finite Volumes for Complex Applications V*, pages 777–793. John Wiley & Sons, 2008.
- [26] S. Mundal, D. A. Di Pietro, and I. Aavatsmark. Compact-stencil MPFA method for heterogeneous highly-anisotropic second order elliptic problems. In R. Eymard and J.-M. Hérard, editors, *Finite Volumes for Complex Applications V*, pages 905–918. John Wiley & Sons, 2008.
- [27] F. Bassi, A. Crivellini, D. A. Di Pietro, and S. Rebay. A high-order discontinuous Galerkin solver for 3D aerodynamic turbulent flows. In P. Wesseling, E. Oñate, and J. Périaux, editors, *ECCOMAS CFD 2006 Proceedings (Egmond an Zee, Netherlands)*, September 2006.
- [28] G. E. Cossali, D. A. Di Pietro, and M. Marengo. Analytical and numerical modeling of microchannel heat sinks. In *Proceedings of the First International Conference on Microchannels and Minichannels (Rochester, New York)*, April 2003.
- [29] G. E. Cossali, D. A. Di Pietro, and M. Marengo. Design of a microchannel cooling system for BTeV particle detector. In *Proceedings of the 8th International Workshop on Thermal Investigations of ICs and Systems (Madrid, Spain)*, September 2002.

### 3.4 *Autres publications*

- [30] D. A. Di Pietro. *Discontinuous Galerkin Methods for the Incompressible Navier-Stokes Equations*. PhD thesis, Università degli Studi di Bergamo, January 2006.
- [31] D. A. Di Pietro. dgC++, an object-oriented library for discontinuous Galerkin methods. Reference manual. Further information at <http://cermics.enpc.fr/equipes/mecflu.html>, 2006.

- [32] D. A. Di Pietro and L. Formaggia. Programmazione Avanzata per il Calcolo Scientifico. Available at <http://www2.mate.polimi.it:8080/CN/PACS/lezlab>, 2006.
- [33] D. A. Di Pietro, S. Lo Forte, and N. Parolini. Mass preserving finite element implementations of level set methods. Technical Report 60, MOX, Politecnico di Milano, via Bonardi 9, Milan, Italy, May 2005. Available at <http://mox.polimi.it>.
- [34] D. A. Di Pietro, S. Lo Forte, and N. Parolini. Expression templates implementation of continuous and discontinuous Galerkin methods. Technical Report 57, MOX, Politecnico di Milano, via Bonardi 9, Milan, Italy, April 2005. Available at <http://mox.polimi.it>.

## Chapitre 4

# Méthodes de Galerkin discontinues

Ce chapitre relate les travaux [1, 2, 7, 9–12] concernant les méthodes de Galerkin discontinues et, en marge, les travaux [3, 5, 6], reliant ces dernières avec les méthodes volumes finis pour des problèmes avec diffusion. La structure du chapitre est la suivante : dans §4.1 on trace un bref cadre historique des méthodes dG puis dans §4.2 on présente les idées générales de l’analyse des méthodes dG appliquées à un problème de diffusion pure ; dans §4.3 on résume les résultats de [9] pour un problème de diffusion-advection-réaction dégénéré ; dans §4.5 on introduit les théorèmes d’analyse fonctionnelle discrète prouvés dans [7]. Ces résultats constituent la base de l’analyse de convergence vers des solutions à régularité minimale de [5, 7] présentée dans §4.5. La section 4.6 de ce chapitre présente les travaux sur la discrétisation dG du problème de Navier–Stokes incompressible. Plus précisément, dans §4.6.1 on examine la discrétisation en espace, et on présente à la fois la méthode de compressibilité artificielle de [11, 12] et celle basée sur un terme de convection non dissipatif de [7]. La discrétisation en temps est ensuite considérée dans §4.6.2, où on illustre la méthode monolithique de [10] et le schéma de correction de pression de [2].

### 4.1 Introduction

Les méthodes de Galerkin discontinues (dG) sont connues sous formes différentes depuis la fin des années 70. Cependant, leur diffusion s’est essentiellement accrue à partir de la fin des années 90, comme le montre le nombre de résultats correspondants au mot clé *discontinuous Galerkin* dans la base de données MathSciNet ; voir Figure 4.1. Dans la suite on cherchera à reconstruire l’historique des idées principales pour les Équations aux Dérivées Partielles (EDPs) du premier puis du second ordre.

**EDPs du premier ordre** La méthode dG fut introduite en 1973 par Reed et Hill [RH73], avec application à un modèle stationnaire du transport de neutrons. L’idée de base était d’améliorer les méthodes des Volumes Finis (VF) classiques en utilisant une représentation polynomiale d’ordre élevé dans chaque maille. La première analyse pour les EDPs du premier ordre a été effectuée par Lesaint et Raviart [Les74, Les75, LR74], et ensuite améliorée par Johnson et Pitkäranta en 1986 [JP86]. Ces derniers ont prouvé,

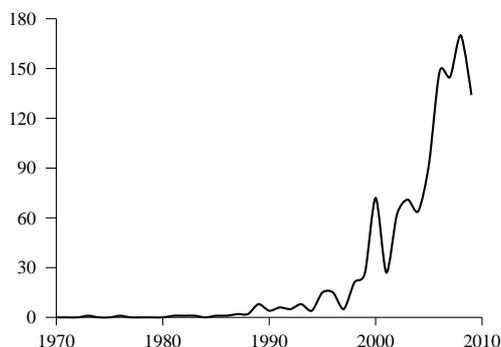


FIGURE 4.1 – Nombre de résultats correspondants au mot clé *discontinuous Galerkin* dans la base MathSciNet par an.

en particulier, que l'ordre de convergence  $(k + \frac{1}{2})$  est atteint en norme  $L^2$  pour une approximation polynômiale de degré  $k$  sous hypothèses de régularité de la solution exacte. Quelques années plus tard, Caussignac et Touzani [CT90a, CT90b] utilisaient une méthode dG pour approcher des équations tridimensionnelles de la couche limite dans le cadre des écoulements incompressibles stationnaires. Presque simultanément, Chavent et Cockburn [CC89] essayaient d'étendre la méthode aux problèmes de transport instationnaires en couplant une discrétisation dG en espace avec la méthode d'Euler explicite pour marcher en temps. L'approximation en espace était limitée au degré 1, et la stabilité obtenue par l'introduction de limiteurs de pente. En effet, on ne prouva de manière rigoureuse que beaucoup plus tard que la restriction du pas de temps pour les approximations d'ordre élevé est très stricte, ce qui rend la méthode d'Euler explicite une option raisonnable uniquement pour les discrétisations en espace de type VF; voir Desprès [Des04b, Des04a] et Merlet et Vovelle [MV07] et aussi [1, Chapitre 3]. La solution à ce problème proposée par Cockburn et Shu [CS91] fut de remplacer la méthode d'Euler explicite par des méthodes de Runge–Kutta offrant de bien meilleures propriétés de stabilité, et d'utiliser une version améliorée des limiteurs de pente assurant la précision formelle souhaitée dans les régions où la solution exacte est régulière. Des extensions importantes furent en outre présentées dans [CHS90, CLS89, CS98b]. Bien que ces méthodes aient connu un succès remarquable notamment dans les applications à la mécanique des fluides, leur analyse est loin d'être accomplie. On renvoie à [1, Chapitre 3] et à Burman, Ern et Fernández [BEF09] pour une discussion plus approfondie.

**EDPs avec diffusion** En ce qui concerne les EDPs avec diffusion, les origines mathématiques des méthodes dG sont à chercher dans les travaux de Nitsche [Nit71, Nit72] sur l'imposition faible des conditions aux limites, et dans ceux de Babuška [Bab73b], Babuška et Zlámal [BZ73], Douglas et Dupont [DJD76], Baker [Bak77], Wheeler [Whe78], et Arnold [Arn82] sur l'imposition faible de conditions de continuité à l'interface. Cependant, ce ne fut pas par cette ligne de pensée que les méthodes dG arrivèrent au grand public. En effet, l'extension à des problèmes comportant des termes de diffusion devint incontournable dans la deuxième moitié des années 90 suite aux avancées de Cockburn, Shu et collaborateurs dans le contexte des lois de conservation. Ce fut, en particulier, dans les travaux de Bassi et Rebay [BR97] et Bassi, Rebay, Mariotti, Pedinotti et Savini [BRM<sup>+</sup>97] que l'on vit pour la première fois une approximation

complètement discontinue du problème de Navier–Stokes compressible. Une année plus tard, Cockburn et Shu [CS98a] introduisaient la méthode *Local Discontinuous Galerkin* (LDG) pour une équation d’advection-diffusion scalaire. Dans les deux cas, le point de départ était la réécriture du terme de diffusion sous la forme d’un système d’EDPs du premier ordre. Il est intéressant de noter que ni dans [BR97, BRM<sup>+</sup>97], ni dans [CS98a] l’on cite Arnold [Arn82], ce qui montre que ses idées n’avaient pas trouvé un terrain fertile au moment de leur sortie. En effet, les avantages d’une discrétisation dG sont plus évidents dans le contexte des lois de conservation non linéaires, car c’est ici qu’on s’attend à avoir des solutions discontinues, qui pourraient être mieux approchées par des espaces discrets moins contraints. La contribution des travaux cités au début de ce paragraphe (et, en particulier, de [Arn82]) devint de plus en plus évidente lorsque l’on avançait dans la compréhension de la méthode de Bassi et Rebay. La première analyse de la méthode de [BRM<sup>+</sup>97] due à Brezzi, Manzini, Marini, Pietra et Russo [BMM<sup>+</sup>00] fut ensuite élaborée et généralisée par Arnold, Brezzi, Cockburn et Marini [ABCM02], qui proposèrent une présentation unifiée des méthodes dG pour les opérateurs de diffusion du second ordre. En 2000, Schwab, Süli et Houston [SSH00] étendirent l’analyse au cas *hp* pour des problèmes comportant aussi un terme d’advection. Un cadre unifié comprenant à la fois les EDPs du premier et du second ordre a été proposé plus récemment par Ern et Guermond [EG06a, EG06b, EG08], où on utilise le formalisme originellement introduit par Friedrichs [Fri58]. Dans tous les cas cités, on considère des problèmes de diffusion homogènes et isotropes. L’extension aux problèmes d’advection-diffusion-réaction hétérogènes, anisotropes et localement dégénérés a été considérée dans [9], où on propose des conditions qui assurent la bonne position du problème continu et on obtient des estimations d’erreurs pour une famille de méthodes dG. Ce travail reprend l’idée des moyennes pondérées par le coefficient de diffusion originellement proposée par Burman et Zunino [BZ06] dans le contexte des méthodes de décomposition de domaines.

A partir du début des années 2000 le nombre d’applications des méthodes dG a connu une véritable explosion. Dans ce chapitre on considérera, en particulier, les travaux de l’auteur dans le contexte de la mécanique des fluides.

## 4.2 Un problème modèle

Dans cette section on utilise le problème de Poisson pour introduire la discrétisation dG des termes de diffusion aussi bien que la notation dont on aura besoin dans le reste du chapitre. Cette introduction permettra aussi de mieux comprendre les résumés des travaux présentés dans les sections suivantes ; pour une discussion plus complète des sujets ici traités voir [1, Chapitre 4]. Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ,  $d \geq 1$ , un ouvert polygonal borné et soit  $f \in L^2(\Omega)$ . On considère le problème suivant :

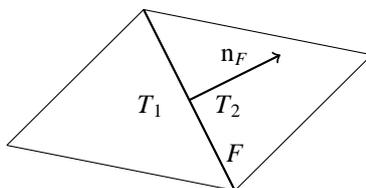
$$-\Delta u = f \quad \text{dans } \Omega, \quad (4.1a)$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \quad (4.1b)$$

La formulation faible de (4.1) consiste à

$$\text{Trouver } u \in V \text{ t.q. } a(u, v) = \int_{\Omega} f v \text{ pour tout } v \in V, \quad (4.2)$$

avec  $a(u, v) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v$  et  $V \stackrel{\text{def}}{=} H_0^1(\Omega)$ .

FIGURE 4.2 – Notation pour une interface  $F \in \mathcal{F}_h^i$ .

### 4.2.1 Discrétisation

La première étape pour discrétiser le problème (4.2) consiste à définir un maillage convenable, c'est-à-dire, une partition  $\mathcal{T}_h = \{T\}$  du domaine  $\Omega$  en *éléments* ou *mailles*. Afin d'étudier la convergence de la méthode de discrétisation par rapport au pas de maillage  $h$ , on doit aussi préciser le concept de *suite admissible de maillages*  $\{\mathcal{T}_h\}_{h \in \mathcal{H}}$ ,  $\mathcal{H}$  étant l'ensemble (dénombrable) des pas de maillages considérés.

**Nécessité de maillages généraux** La définition du maillage doit tenir compte des contraintes liées aux applications cibles et à la méthode sous-jacente. Par exemple, dans les applications IFP Energies nouvelles en modélisation de bassins et de réservoirs pétrolières, on a affaire à des maillages issus de la modélisation géomécanique, qui peuvent présenter des difficultés du point de vue numérique. En particulier, dans le cas des bassins, le maillage intègre les effets des phénomènes de déposition et d'érosion, qui peuvent à leur tour entraîner la présence de mailles de forme complexe et d'interfaces non-coïncidentes. Le plus souvent, on retrouve toute dégénérescence de l'hexahédre et des variétés correspondant aux failles. Afin de limiter le coût des simulations, ces aspects doivent être gérés par la méthode de discrétisation sans remaillage. En ce qui concerne les méthodes dG, la difficulté principale consiste à préciser un ensemble d'hypothèses assez générales dans un cadre plus général par rapport aux méthodes d'éléments finis (EF) classiques. Dans la suite on reprendra les idées de [7] et [1, Chapitre 1]. En particulier, on se concentrera sur la définition et les propriétés des espaces polynômiaux par morceaux qui sont à la base des méthodes dG sur des maillages généraux.

**Quelques notations** Les méthodes dG sont basées sur des espaces discrets discontinus, et des termes de bord apparaissent pour relier la solution discrète dans deux éléments voisins. On introduit donc l'ensemble des *interfaces*  $\mathcal{F}_h^i$ , partagées par deux mailles, et des *faces de bords*  $\mathcal{F}_h^b$ , appartenant à l'intersection d'une maille avec la frontière du domaine,  $\partial\Omega$ . Pour chaque interface  $F$  on choisit une orientation arbitraire mais fixée de la normale  $n_F$ , et on note  $T_1$  et  $T_2$  les éléments tels que  $F \subset \partial T_1 \cap \partial T_2$ . Par convention, la numérotation est telle que  $n_F$  coïncide avec la normale sortante de  $T_1$ ,  $n_{T_1}$ . Pour les faces de bord,  $n_F$  dénote la normale sortante de  $\Omega$ . Il est aussi utile de définir l'ensemble des faces d'un élément  $T$ ,  $\mathcal{F}_T$ , et l'ensemble des éléments partageant une face  $F$ ,  $\mathcal{T}_F$  :

$$\begin{aligned} \forall T \in \mathcal{T}_h, \quad \mathcal{F}_T &\stackrel{\text{def}}{=} \{F \in \mathcal{F}_h \mid F \subset \partial T\}, \\ \forall F \in \mathcal{F}_h, \quad \mathcal{T}_F &\stackrel{\text{def}}{=} \{T \in \mathcal{T}_h \mid F \subset \partial T\}. \end{aligned}$$

Le diamètre d'un élément  $T \in \mathcal{T}_h$  est noté  $h_T$ , celui d'une face  $F \in \mathcal{F}_h$  est noté  $h_F$ . Il est d'usage d'exprimer les termes de bord en fonction d'opérateurs de trace représentant,

respectivement, la moyenne et le saut d'une fonction à travers  $F$ . Soit  $v$  une fonction admettant une trace (éventuellement à deux valeurs) sur  $F \in \mathcal{F}_h^i$ . On pose, pour presque tout  $x \in F$ ,

$$\{v\}_F(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} (v|_{T_1}(x) + v|_{T_2}(x)), \quad \llbracket v \rrbracket_F(x) \stackrel{\text{def}}{=} v|_{T_1}(x) - v|_{T_2}(x). \quad (4.3)$$

Lorsque  $v$  est à valeurs vectoriels, les opérateurs de trace agissent composante par composante. Par simplicité, on écrit simplement  $\{v\}$  et  $\llbracket v \rrbracket$  si la face  $F$  peut se déduire sans ambiguïté du contexte. Afin d'obtenir des notations plus compactes, on peut étendre la définition des opérateurs de trace sur le bord en posant, pour tout  $F \in \mathcal{F}_h^b$  tel que  $F \subset \partial T \cap \partial \Omega$  et presque tout  $x \in F$ ,

$$\{v\}_F(x) = \llbracket v \rrbracket_F(x) \stackrel{\text{def}}{=} v|_T(x).$$

Cette définition n'est cependant pas la seule possible, d'autres pouvant être envisagées afin de prendre en compte les différents types de conditions aux limites.

**Espaces polynômiaux par morceaux** Une définition systématique des espaces polynômiaux par morceaux sur des maillages généraux a été proposée récemment dans [1, §1.2.3]. L'idée de base consiste à abandonner le point de vue classique basé sur l'élément de référence, et de définir les espaces discrets directement dans l'espace physique. Le premier pas consiste en effet à reconnaître que l'espace de base dans chaque maille est celui des polynômes de  $d$  variables de degré total inférieur ou égale à  $k$ ,

$$\mathbb{P}_d^k \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ p : \mathbb{R}^d \ni x \mapsto p(x) \in \mathbb{R} \mid \exists \{\gamma_\alpha\}_{\alpha \in A_d^k} \in \mathbb{R}^{\text{card}(A_d^k)} \text{ s.t. } p(x) = \sum_{\alpha \in A_d^k} \gamma_\alpha x^\alpha \right\},$$

avec la convention que, pour  $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ ,  $x^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{i=1}^d x_i^{\alpha_i}$  et

$$A_d^k \stackrel{\text{def}}{=} \{\alpha \in \mathbb{N}^d \mid |\alpha|_{\ell^1} \leq k\}, \quad |\alpha|_{\ell^1} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^d \alpha_i.$$

On définit l'espace polynômial par morceaux

$$\mathbb{P}_d^k(\mathcal{T}_h) \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in L^2(\Omega) \mid \forall T \in \mathcal{T}_h, v|_T \in \mathbb{P}_d^k(T)\}, \quad (4.4)$$

avec  $k \geq 0$  et  $\mathbb{P}_d^k(T)$  engendré par la restriction à l'élément  $T$  des polynômes appartenant à  $\mathbb{P}_d^k$ . Une conséquence importante de cette remarque est qu'on pourra utiliser ce même espace quelque soit la forme géométrique des mailles  $T \in \mathcal{T}_h$  pourvu que des propriétés d'approximation opportunes soit vérifiées. Une étude approfondie des propriétés de ces espaces en relation avec la régularité du maillage a été effectuée dans [1, Chapitre 1]. En particulier, les propriétés clé des suites de maillages admissibles  $(\mathcal{T}_h)_{h \in \mathcal{H}}$  sont examinées dans [1, §1.4], où on identifie deux paramètres de régularité fondamentaux exprimant, respectivement, la *régularité de forme* et de *contact*. Des théorèmes d'analyse fonctionnelle discrète sur les espaces  $\mathbb{P}_d^k(\mathcal{T}_h)$  ont été prouvés dans [7, §6], et ils seront détaillés dans §4.5.

Les espaces  $\mathbb{P}_d^k(\mathcal{T}_h)$  font partie de la famille plus générale des espaces de Sobolev par morceaux,

$$\begin{aligned} H^m(\mathcal{T}_h) &\stackrel{\text{def}}{=} \{v \in L^2(\Omega) \mid \forall T \in \mathcal{T}_h, v|_T \in H^m(T)\}, \\ W^{m,p}(\mathcal{T}_h) &\stackrel{\text{def}}{=} \{v \in L^p(\Omega) \mid \forall T \in \mathcal{T}_h, v|_T \in W^{m,p}(T)\}, \end{aligned}$$

avec  $m \geq 0$  et  $p \in (1, +\infty)$ . Ces espaces sont utiles pour préciser la régularité dont on a besoin pour étendre les formes bilinéaires discrètes et pour déduire le taux de convergence à partir d'une estimation d'erreur. Une propriété remarquable est que  $\mathbb{P}_d^k(\mathcal{T}_h) \subset H^1(\mathcal{T}_h)$  (voir [1, Lemme 1.22]), ce qui nous amène à définir un opérateur de gradient par morceaux  $\nabla_h : H^1(\mathcal{T}_h) \rightarrow [L^2(\Omega)]^d$  tel que, pour tout  $v \in H^1(\mathcal{T}_h)$ ,

$$\forall T \in \mathcal{T}_h, \quad \nabla_h v|_T \stackrel{\text{def}}{=} \nabla(v|_T).$$

### 4.2.2 La méthode SIP

Afin de dériver une discrétisation mathématiquement satisfaisante de (4.1) basée sur les espaces discrets  $\mathbb{P}_d^k(\mathcal{T}_h)$ , on examine trois propriétés fondamentales pour l'analyse : la *consistance*, la stabilité au sens de la *coercivité* et la *continuité*. Ceci permet, par étapes successives, de montrer le rôle de chaque terme apparaissant dans la forme bilinéaire discrète. Les trois propriétés ci-dessus sont à la base de l'analyse abstraite dans l'esprit du Lemme de Céa de [1, §1.3]. Cette approche, classique en EF, se base sur la possibilité d'étendre les formes bilinéaires discrètes à un espace contenant la solution continue. Dans le cadre des méthodes dG, cette extension s'effectue au prix d'hypothèses de régularité locale additionnelles sur la solution exacte, qui garantissent la bonne définition des termes de bord. Une approche alternative ne demandant pas ces hypothèses de régularité et basée sur les techniques introduites dans [5, 7] est présentée dans §4.5.

**Consistance** Posons, pour  $k \geq 1$ ,

$$V_h \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}_d^k(\mathcal{T}_h). \quad (4.5)$$

Pour commencer, on remplace les gradients globaux dans la forme bilinéaire  $a$  par le gradients par morceaux, ainsi définissant, pour tout  $v_h, w_h \in V_h$ ,

$$a_h^{(0)}(v_h, w_h) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega} \nabla_h v_h \cdot \nabla_h w_h = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \nabla v_h \cdot \nabla w_h.$$

On dira qu'une forme bilinéaire discrète  $a_h$  est consistante si, pour tout  $w_h \in V_h$ ,  $a_h(u, w_h) = \int_{\Omega} f w_h$ . Intégrant par parties dans chaque élément du maillage on obtient

$$a_h^{(0)}(v_h, w_h) = - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T (\Delta v_h) w_h + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial T} (\nabla v_h \cdot \mathbf{n}_T) w_h.$$

Le deuxième terme au second membre peut être reformulé en utilisant les opérateurs de saut et de moyenne aux faces comme suit :

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial T} (\nabla v_h \cdot \mathbf{n}_T) w_h = \sum_{F \in \mathcal{F}_h} \int_F \{ \nabla_h v_h \} \cdot \mathbf{n}_F \llbracket w_h \rrbracket + \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \int_F \llbracket \nabla_h v_h \rrbracket \cdot \mathbf{n}_F \{ w_h \}.$$

On a donc

$$a_h^{(0)}(v_h, w_h) = - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T (\Delta v_h) w_h + \sum_{F \in \mathcal{F}_h} \int_F \{ \nabla_h v_h \} \cdot \mathbf{n}_F \llbracket w_h \rrbracket + \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \int_F \llbracket \nabla_h v_h \rrbracket \cdot \mathbf{n}_F \{ w_h \}. \quad (4.6)$$

Afin d'utiliser la solution exacte  $u$  comme premier argument dans  $a_h^{(0)}$  il suffit d'ajouter une hypothèse de régularité qui garantisse que la composante normale du gradient de  $u$  soit à carré intégrable sur chaque face  $F \in \mathcal{F}_h$ ; voir §4.2.2. Ceci est vrai, par exemple, si  $u \in V_\dagger$  avec

$$V_\dagger \stackrel{\text{def}}{=} H_0^1(\Omega) \cap H^2(\mathcal{T}_h). \quad (4.7)$$

On définit l'espace contenant à la fois la solution continue et son approximation discrète

$$V_{\dagger h} \stackrel{\text{def}}{=} V_\dagger + V_h,$$

et on observe qu'il est possible d'étendre la forme bilinéaire  $a_h^{(0)}$  à  $V_{\dagger h} \times V_{\dagger h}$  (pour l'analyse en norme d'énergie il suffira en effet d'étendre  $a_h^{(0)}$  à  $V_{\dagger h} \times V_h$ ).

*Remarque 4.1* (Solutions à régularité minimale). L'analyse de convergence vers des solutions à régularité minimale ne demande pas d'étendre la forme bilinéaire au continu. Ce cas a été considéré par l'auteur dans [5, 7], où on adapte des techniques originellement développées pour l'analyse des méthodes VF par Eymard, Gallouët et Herbin; voir, p.e., [EGH00, EGH09]. On renvoie à §4.5 pour une discussion plus approfondie.

On peut maintenant poser  $v_h = u$  dans (4.6). En intégrant par parties on trouve, pour tout  $w_h \in V_h$ ,

$$a_h^{(0)}(u, w_h) = \int_{\Omega} f w_h + \sum_{F \in \mathcal{F}_h} \int_F \{\nabla u\} \cdot \mathbf{n}_F \llbracket w_h \rrbracket.$$

Afin d'obtenir une forme bilinéaire consistante, on est donc amené à modifier  $a_h^{(0)}$  comme suit : pour tout  $v, w \in V_{\dagger h}$ ,

$$a_h^{(1)}(v, w) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega} \nabla_h v \cdot \nabla_h w - \sum_{F \in \mathcal{F}_h} \int_F \{\nabla_h v\} \cdot \mathbf{n}_F \llbracket w \rrbracket.$$

*Remarque 4.2* (Le cas  $k = 0$ ). Le raisonnement ci-dessus n'est plus valide lorsque on pose  $V_h = \mathbb{P}_d^0(\mathcal{T}_h)$ . On peut cependant retenir une *consistance asymptotique* pour la forme bilinéaire  $a_h^{\text{sip}}$  définie par (4.10) en ajoutant des restrictions sur les maillages et en choisissant  $\eta$  de manière opportune; voir §4.3.1.

Une ultérieure propriété qui est souhaitable retenir au niveau discret est la symétrie du problème original. En effet, la symétrie peut simplifier la résolution du système linéaire résultant du problème discret et permettre d'obtenir des estimations en norme  $L^2$  par la méthode d'Aubin–Nitsche [Aub87]; voir [1, §4.1.3]. Dans cette optique, on pose, pour tout  $v, w \in V_{\dagger h}$ ,

$$a_h^{\text{cs}}(v, w) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega} \nabla_h v \cdot \nabla_h w - \sum_{F \in \mathcal{F}_h} \int_F (\{\nabla_h v\} \cdot \mathbf{n}_F \llbracket w \rrbracket + \llbracket v \rrbracket \{\nabla_h w\} \cdot \mathbf{n}_F). \quad (4.8)$$

La consistance est retenue puisque la solution exacte est continue à travers les interfaces et elle s'annule sur le bord de  $\Omega$ . Par la suite, on utilisera l'appellation de *terme de consistance* et *terme de symétrie* respectivement pour le premier et le deuxième terme de bord au second membre de l'équation (4.8).

**Coercivité** La coercivité sur  $V_h \times V_h$  est exprimée en fonction de la norme suivante :

$$\|v\|_{\text{dG}}^2 \stackrel{\text{def}}{=} \|\nabla_h v\|_{[L^2(\Omega)]^d}^2 + |v|_J^2, \quad |v|_J^2 \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{F \in \mathcal{F}_h} h_F^{-1} \|\llbracket v \rrbracket\|_{L^2(F)}^2. \quad (4.9)$$

Le signe des termes de consistance et de symétrie dans (4.8) n'étant pas défini, on introduit une dernière modification de  $a_h^{\text{cs}}$  visant à les contrôler. Plus précisément, on pose

$$a_h^{\text{sip}}(v, w) \stackrel{\text{def}}{=} a_h^{\text{cs}}(v, w) + s_h^{\text{sip}}(v, w), \quad (4.10)$$

avec

$$s_h^{\text{sip}}(v, w) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{F \in \mathcal{F}_h} \frac{\eta}{h_F} \int_F \llbracket v \rrbracket \llbracket w \rrbracket, \quad (4.11)$$

et  $\eta > 0$  est un paramètre de réglage à préciser. Grâce à la continuité de la solution exacte à travers les interfaces, ce dernier terme préserve la consistance et la symétrie de  $a_h^{\text{cs}}$ . La forme bilinéaire (4.10) correspond à la méthode SIP de Arnold [Arn82].

**Continuité** L'analyse dans l'esprit du Lemme de Céa demande de prouver la continuité de  $a_h^{\text{sip}}$  dans  $V_{\dagger h} \times V_h$ . A tel propos, il est opportun d'introduire une version augmentée de la norme  $\|\cdot\|_{\text{dG}}$  afin de traiter proprement le terme de consistance,

$$\|v\|_{\text{dG}, \dagger}^2 \stackrel{\text{def}}{=} \|v\|_{\text{dG}}^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T \|\nabla v|_T \cdot \mathbf{n}_T\|_{L^2(\partial T)}^2.$$

Cette norme est uniformément équivalente à la norme  $\|\cdot\|_{\text{dG}}$  sur  $V_h$ ; voir [1, Lemme 4.17]. Les propriétés de la forme bilinéaire finale  $a_h^{\text{sip}}$  sont résumées dans le Lemme suivant

**Lemme 4.3** (Propriétés de la forme bilinéaire  $a_h^{\text{sip}}$ ). *La forme bilinéaire  $a_h^{\text{sip}}$  satisfait les propriétés suivantes :*

(i) *Consistance. Soit  $u \in V$  solution de (4.2) et supposons, de plus, que  $u \in V_{\dagger}$ . On a*

$$\forall v_h \in V_h, \quad a_h^{\text{sip}}(u, v_h) = \int_{\Omega} f v_h.$$

(ii) *Coercivité. Il existe  $\underline{\eta}^{-1}$  et  $C_{\text{sta}} > 0$  indépendants du pas de maillage  $h$  tels que, pour tout  $\eta > \underline{\eta}$ ,*

$$\forall v_h \in V_h, \quad a_h^{\text{sip}}(v_h, v_h) \geq C_{\text{sta}} \|v_h\|_{\text{dG}}^2.$$

(iii) *Continuité. Il existe  $C_{\text{bnd}}$  indépendant du pas de maillage  $h$  tel que*

$$\forall (w, v_h) \in V_{\dagger h} \times V_h, \quad a_h^{\text{sip}}(w, v_h) \leq C_{\text{bnd}} \|w\|_{\text{dG}, \dagger} \|v_h\|_{\text{dG}}.$$

**Convergence** Le problème discret associé à la forme bilinéaire  $a_h^{\text{sip}}$  consiste à

$$\text{Trouver } u_h \in V_h \text{ t.q. } a_h^{\text{sip}}(u_h, v_h) = \int_{\Omega} f v_h \text{ pour tout } v_h \in V_h. \quad (4.12)$$

A partir des propriétés de la forme bilinéaire  $a_h^{\text{sip}}$  énoncées dans le Lemme 4.3 on peut prouver l'estimation d'erreur suivante ; voir [1, §1.3].

1. Pour une estimation de  $\underline{\eta}$  voir [1, Lemme 4.10].

**Théorème 4.4** (Estimation d'erreur). *Soit  $u \in V$  la solution de (4.2) et supposons, de plus, que  $u \in V_{\dagger}$ . On a l'estimation d'erreur suivante :*

$$\|u - u_h\|_{\text{dG}} \leq \left(1 + \frac{C_{\text{bnd}}}{C_{\text{sta}}}\right) \inf_{w_h \in V_h} \|u - w_h\|_{\text{dG}, \dagger}.$$

**Corollaire 4.5** (Estimation du taux de convergence). *Si, en plus,  $u \in H^{k+1}(\mathcal{T}_h)$ , il existe  $C$  indépendant du pas de maillage  $h$  tel que*

$$\|u - u_h\|_{\text{dG}} \leq Ch^k \|u\|_{H^{k+1}(\mathcal{T}_h)}.$$

*Remarque 4.6* (Convergence en normes  $\|\cdot\|_{\text{dG}, \dagger}$  et  $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$ ). Du fait de l'équivalence des normes  $\|\cdot\|_{\text{dG}}$  et  $\|\cdot\|_{\text{dG}, \dagger}$  dans  $V_h$ , on peut également analyser la méthode en utilisant uniquement cette dernière norme. Dans ce cas, on obtient une constante de coercivité plus petite (et, par conséquent, une constante  $C$  plus grande dans le Corollaire 4.5). Une estimation d'erreur en norme  $\|\cdot\|_{\text{dG}, \dagger}$  est cependant nécessaire pour estimer le taux de convergence en norme  $L^2$  ; voir [1, §4.2.1–4.1.3] pour plus de détails.

### 4.3 Diffusion-advection-réaction dégénérée

Le problème modèle (4.1) nous a permis d'illustrer les idées principales de la méthode dG appliquée aux problèmes de diffusion. Dans cette section on examine deux difficultés que l'on retrouve dans les applications IFP Energies nouvelles, et qui ont été traitées par l'auteur dans [9] ; voir aussi [1, §4.3–4.4]. Plus précisément, on considère d'abord un problème de diffusion hétérogène et anisotrope, pour lequel on propose une méthode dG robuste par rapport au coefficient de diffusion puis on étend les outils développés dans ce contexte à un problème d'advection-diffusion-réaction dégénérée.

#### 4.3.1 Diffusion hétérogène

**Le modèle de Darcy monophasique** Le problème (4.1) constitue l'archétype du modèle de Darcy monophasique qui décrit l'écoulement d'un fluide dans un milieu poreux. Dans sa forme plus simple, ce problème s'écrit

$$\sigma + \kappa \nabla u = 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad (4.13a)$$

$$\nabla \cdot \sigma = f \quad \text{dans } \Omega, \quad (4.13b)$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \quad (4.13c)$$

où  $\kappa \in [L^\infty(\Omega)]^{d,d}$  est un champ tensoriel symétrique uniformément défini positif représentant le rapport entre perméabilité et viscosité dynamique,  $\sigma$  représente la *vitesse de Darcy*, et  $u$  la pression. Ce modèle peut s'étendre au cas de multiples phases dans lesquelles différents composants sont présents (un exemple est considéré dans la thèse de Carole Widmer ; voir Annexe A). Dans la pratique, le champ  $\kappa$  est issu de mesurages qui fournissent une valeur moyenne pour une région du sous-sol correspondant à un élément du maillage dit géologique, qui constitue l'horizon du fini dans la modélisation de bassins et de réservoirs pétroliers. Du fait de l'hétérogénéité du sol et du caractère discret des mesurages,  $\kappa$  peut varier de manière importante et présenter des discontinuités très contrastées. Il est donc important de disposer de méthodes de discrétisation de (4.13) qui soient robustes par rapport à l'hétérogénéité du tenseur  $\kappa$ . En outre, les propriétés du sol diffèrent selon la direction (vertical ou horizontal), ce qui nécessite de méthodes robustes par rapport à l'anisotropie de  $\kappa$ .

**Position du problème modèle** Pour fixer les idées, on suppose dorénavant que  $\kappa \in [\mathbb{P}_d^0(\mathcal{T}_h)]^{d,d}$  (l'analyse s'étend sans difficulté au cas où  $\kappa$  est régulier par morceaux sur  $\mathcal{T}_h$ ). Soient  $\underline{\lambda}$  et  $\bar{\lambda}$  des réels positifs tels que, pour presque tout  $x \in \Omega$ , le spectre de  $\kappa$  est compris entre  $\underline{\lambda}$  et  $\bar{\lambda}$ . En éliminant  $\sigma$  du système (4.13), on se ramène au problème suivant

$$-\nabla \cdot (\kappa \nabla u) = f \quad \text{dans } \Omega, \quad (4.14a)$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \quad (4.14b)$$

La formulation faible consiste à

$$\text{Trouver } u \in V \text{ t.q. } a(u, v) = \int_{\Omega} f v \text{ pour tout } v \in V, \quad (4.15)$$

où on a posé  $V \stackrel{\text{def}}{=} H_0^1(\Omega)$  et  $a(u, v) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega} \kappa \nabla u \cdot \nabla v$ . Une manière simple d'étendre la méthode SIP au problème (4.14) consiste à considérer la forme bilinéaire suivante :

$$\begin{aligned} a_h^{(0)}(u_h, v_h) &= \int_{\Omega} \kappa \nabla_h u_h \cdot \nabla_h v_h - \sum_{F \in \mathcal{F}_h} \int_F [\{\kappa \nabla u_h\} \cdot \mathbf{n}_F] \llbracket v_h \rrbracket + \llbracket u_h \rrbracket \{\kappa \nabla v_h\} \cdot \mathbf{n}_F \\ &+ \sum_{F \in \mathcal{F}_h} \frac{\eta}{h_F} \int_F \llbracket u_h \rrbracket \llbracket v_h \rrbracket. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Le problème discret devient donc

$$\text{Trouver } u_h \in V_h \text{ t.q. } a_h^{(0)}(u_h, v_h) = \int_{\Omega} f v_h \text{ pour tout } v_h \in V_h. \quad (4.17)$$

On prouve sans peine l'estimation d'erreur suivante :

**Théorème 4.7** (Estimation d'erreur pour la méthode (4.17)). *Soit  $u \in V$  solution de (4.15) et supposons, de plus, que  $u \in V_{\dagger}$  avec  $V_{\dagger}$  défini par (4.7). Alors, il existe deux constantes  $C_{\text{sta}}$  et  $C_{\text{bnd}}$  indépendantes du pas de maillage  $h$  et du tenseur  $\kappa$  telles que*

$$\|u - u_h\|_{\text{dG}} \leq \left(1 + \frac{\bar{\lambda} C_{\text{bnd}}}{\underline{\lambda} C_{\text{sta}}}\right) \inf_{w_h \in V_h} \|u - w_h\|_{\text{dG}, \dagger}. \quad (4.18)$$

Les constantes  $C_{\text{sta}}$  et  $C_{\text{bnd}}$  sont telles que (i) pour tout  $v_h \in V_h$ ,  $a_h^{(0)}(v_h, v_h) \geq \underline{\lambda} C_{\text{sta}} \|v_h\|_{\text{dG}}^2$  et (ii) pour tout  $w, v_h \in V_{\dagger h} \times V_h$ ,  $a_h^{(0)}(w, v_h) \leq \bar{\lambda} C_{\text{bnd}} \|w\|_{\text{dG}, \dagger} \|v_h\|_{\text{dG}}$ .

Le défaut de l'estimation (4.18) est lié à la présence du rapport  $\bar{\lambda}/\underline{\lambda}$  dans la constante multiplicative au second membre, qui explose si le champ  $\kappa$  est fortement hétérogène.

**Norme d'énergie et moyennes pondérées [9]** Le remède proposé dans [9] est basé sur deux idées fondamentales : l'introduction d'une norme d'énergie incorporant le tenseur  $\kappa$  et l'utilisation de moyennes pondérées dans les termes de consistance et de symétrie. Bien que dans [9] on présente une famille de méthodes, on se concentrera ici par simplicité sur le schéma obtenu à partir de la méthode SIP (4.12). Du fait de l'utilisation de moyennes pondérées, la méthode qui en résulte a été baptisée SWIP (*Symmetric Weighted Interior Penalty*). Pour alléger la notation, on introduit le symbole suivant pour la diffusion en direction normale à une face :

$$\forall F \in \mathcal{F}_h, \forall T \in \mathcal{T}_F, \quad \lambda_{T,F} \stackrel{\text{def}}{=} \kappa|_T \mathbf{n}_F \cdot \mathbf{n}_F. \quad (4.19)$$

La norme d'énergie pour la coercivité est

$$\|v\|_{\text{swip}}^2 \stackrel{\text{def}}{=} \|\kappa^{1/2} \nabla_h v\|_{[L^2(\Omega)]^d}^2 + \sum_{F \in \mathcal{F}_h} \frac{\gamma_{\kappa,F}}{h_F} \|\llbracket v \rrbracket\|_{L^2(F)}^2,$$

où  $\gamma_{\kappa,F}$  est la moyenne harmonique des diffusions normales d'un côté et d'autre de la face  $F$ ,

$$\gamma_{\kappa,F} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 2 \frac{\lambda_{T_1,F} \lambda_{T_2,F}}{\lambda_{T_1,F} + \lambda_{T_2,F}} & \text{si } F \subset \partial T_1 \cap \partial T_2, \\ \lambda_{T,F} & \text{si } F \subset \partial T \cap \partial \Omega. \end{cases}$$

Afin d'obtenir une constante de coercivité indépendante du tenseur  $\kappa$ , on est amené à modifier l'opérateur de moyenne (4.3) en pesant les contributions de chaque côté d'une interface de manière inversement proportionnelle à la valeur de la diffusion en direction normale. Ceci permet de retrouver la moyenne harmonique lorsque on applique l'inégalité de Cauchy–Schwarz pour estimer les termes de consistance et de symétrie. Plus précisément, soit, pour toute  $F \in \mathcal{F}_h^i$  telle que  $F \subset \partial T_1 \cap \partial T_2$ ,

$$\omega_{T_1,F} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\lambda_{T_2,F}}{\lambda_{T_1,F} + \lambda_{T_2,F}}, \quad \omega_{T_2,F} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\lambda_{T_1,F}}{\lambda_{T_1,F} + \lambda_{T_2,F}}.$$

L'opérateur de moyenne pondérée est défini pour toute  $F \in \mathcal{F}_h^i$  et presque tout  $x \in F$  par

$$\{v\}_{\omega,F}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \omega_{T_1,F} v|_{T_1}(x) + \omega_{T_2,F} v|_{T_2}(x).$$

On est maintenant prêt à introduire la forme bilinéaire  $a_h^{\text{swip}} \in \mathcal{L}(V_{\dagger h} \times V_{\dagger h}, \mathbb{R})$  suivante :

$$\begin{aligned} a_h^{\text{swip}}(v, w) &\stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega} \kappa \nabla_h v \cdot \nabla_h w - \sum_{F \in \mathcal{F}_h} \int_F (\{\kappa \nabla_h v\}_{\omega} \cdot \mathbf{n}_F \llbracket w \rrbracket + \{\kappa \nabla_h w\}_{\omega} \cdot \mathbf{n}_F \llbracket v \rrbracket) \\ &\quad + \sum_{F \in \mathcal{F}_h} \frac{\gamma_{\kappa,F}}{h_F} \eta \int_F \llbracket v \rrbracket \llbracket w \rrbracket. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Le coefficient de stabilisation aux interfaces est donné par le produit de la moyenne harmonique  $\gamma_{\kappa,F}$  par un réel positif  $\eta$  dépendant uniquement de la régularité du maillage. La norme naturelle pour exprimer la continuité de  $a_h^{\text{swip}}$  est

$$\|v\|_{\text{swip},\dagger}^2 \stackrel{\text{def}}{=} \|v\|_{\text{swip}}^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T \|\kappa^{1/2} \nabla v \cdot \mathbf{n}_T\|_{L^2(\partial T)}^2.$$

Le problème discret associé s'écrit

$$\text{Trouver } u_h \in V_h \text{ t.q. } a_h^{\text{swip}}(u_h, v_h) = \int_{\Omega} f v_h \text{ pour tout } v_h \in V_h. \quad (4.21)$$

En procédant comme dans §4.2, on prouve l'estimation d'erreur suivante.

**Théorème 4.8** (Estimation d'erreur pour la méthode (4.21)). *Soit  $u \in V$  la solution de (4.15) et supposons, de plus, que  $u \in V_{\dagger}$ . Alors, il existe deux constantes  $C_{\text{sta}}$  et  $C_{\text{bnd}}$  indépendantes du pas de maillage  $h$  et du tenseur  $\kappa$  telles que*

$$\|u - u_h\|_{\text{swip}} \leq \left(1 + \frac{C_{\text{bnd}}}{C_{\text{sta}}}\right) \inf_{w_h \in V_h} \|u - w_h\|_{\text{swip},\dagger}.$$

Les constantes  $C_{\text{sta}}$  et  $C_{\text{bnd}}$  sont telles que (i) pour tout  $v_h \in V_h$ ,  $a_h^{\text{swip}}(v_h, v_h) \geq C_{\text{sta}} \|v_h\|_{\text{swip}}^2$  et (ii) pour tout  $w, v_h \in V_{\dagger h} \times V_h$ ,  $a_h^{\text{swip}}(w, v_h) \leq C_{\text{bnd}} \|w\|_{\text{swip},\dagger} \|v_h\|_{\text{swip}}$ .

**Corollaire 4.9** (Estimation du taux de convergence pour la méthode (4.21)). *Si, en plus,  $u \in H^{k+1}(\mathcal{T}_h)$ , il existe  $C$  indépendant du pas de maillage  $h$  et du tenseur  $\kappa$  tel que*

$$\|u - u_h\|_{\text{swip}} \leq C \bar{\lambda} h^k \|u\|_{H^{k+1}(\mathcal{T}_h)}. \quad (4.22)$$

Grâce à l'utilisation des moyennes pondérées, l'estimation d'erreur dans la norme d'énergie  $\|\cdot\|_{\text{swip}}$  est robuste par rapport à l'hétérogénéité (et à l'anisotropie) du tenseur de diffusion  $\kappa$ , car le rapport  $\bar{\lambda}/\underline{\lambda}$  n'apparaît pas au second membre. La constante multiplicative au second membre de (4.22) reste robuste par rapport à  $\kappa$  car on peut toujours normaliser le problème (4.14) de manière à ce que  $\bar{\lambda} = 1$ .

**Lien avec la méthode VF à deux points** L'utilisation des moyennes pondérées est classique dans le contexte des méthodes VF. On introduit la définition suivante.

**Définition 4.10** (Maillage  $\kappa$ -orthogonal). *Soit, pour tout  $F \in \mathcal{F}_h$ ,  $\bar{x}_F \stackrel{\text{def}}{=} \int_F x / |F|_{d-1}$ . On dit que le maillage  $\mathcal{T}_h$  est  $\kappa$ -orthogonal si, pour tout  $T \in \mathcal{T}_h$ , il existe  $x_T \in T$  tel que, pour tout  $F \subset \partial T$ , le vecteur  $\bar{x}_F - x_T$  est colinéaire à  $\kappa|_T \mathbf{n}_F$ .*

La définition précédente s'étend au cas où  $\kappa$  est variable à l'intérieur des mailles en considérant la moyenne sur la maille. Il est possible d'envisager une modification de la méthode SWIP qui reste asymptotiquement consistante dans le cas  $k = 0$  sur des maillages  $\kappa$ -orthogonaux. Plus précisément, la méthode SWIP coïncide avec la méthode VF à deux points à condition de modifier le terme de pénalisation de (4.20) comme suit

$$s_h^{2\text{pt}}(v, w) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \int_F \frac{\lambda_{T_1, F} \lambda_{T_2, F}}{\lambda_{T_1, F} d_{T_2, F} + \lambda_{T_2, F} d_{T_1, F}} \llbracket v \rrbracket \llbracket w \rrbracket + \sum_{F \in \mathcal{F}_h^b} \int_F \frac{\lambda_{T, F}}{d_{T, F}} v w,$$

ou, pour tout  $F \in \mathcal{F}_h$  et tout  $T \in \mathcal{T}_F$ , on a posé  $d_{T, F} \stackrel{\text{def}}{=} \text{dist}(x_T, F)$ ,  $x_T$  étant le centre de l'élément  $T$ . Tous les autres termes sont nuls pour des fonctions discrètes constantes par morceaux. Il est intéressant de noter que, dans ce cas, la forme bilinéaire  $s_h^{2\text{pt}}$  induit une norme sur  $V_h = \mathbb{P}_d^0(\mathcal{T}_h)$  et non pas uniquement une seminorme. Pour plus de détails sur la notion de consistance faible s'appliquant à la méthode à deux points voir §5.1.

### 4.3.2 Solutions peu régulières

Pour simplifier, on suppose dans cette section que le coefficient de diffusion  $\kappa$  est scalaire et constant par morceaux,

$$\kappa \in \mathbb{P}_d^0(\mathcal{T}_h).$$

Cela est vrai, par exemple, lorsque le coefficient de diffusion est constant par régions dans  $\Omega$  et que le maillage  $\mathcal{T}_h$  suit les frontières des régions. Pour plus de détails sur le cas anisotrope, voir [9]. L'analyse d'erreur de §4.3.1 reste valide lorsque la solution exacte de (4.14) est dans  $H^{3/2+\epsilon}(\mathcal{T}_h)$  avec  $\epsilon > 0$ . Toutefois, cette régularité n'est pas toujours disponible. En effet, d'après Nicaise et Sändig, la solution  $u$  de (4.14) est dans  $u \in W^{2,p}(\Omega)$  avec  $p \in (1, 2]$ . Dans [16] on propose une analyse qui couvre le cas le plus général en  $d = 2$  en fournissant une estimation d'erreur optimale. En effet, d'après les injections de Sobolev, le fait que  $u \in W^{2,p}(\Omega)$  avec  $p \in (1, 2]$  implique

$$u \in H^{1+\alpha}(\Omega) \text{ avec } \alpha > 0, \quad (4.23)$$

ce qui suffit à obtenir une estimation du taux de convergence. Plus précisément, on prouve le résultat suivant.

**Théorème 4.11** (Taux de convergence de la méthode (4.21) pour solutions peu régulières). *Soit  $d = 2$  et  $\eta > \underline{\eta}$  dans l'expression de la forme bilinéaire (4.20) avec  $\underline{\eta}$  dépendant uniquement des paramètres de régularité du maillage. Alors (4.23) est vérifiée et il existe  $C$  indépendant du pas de maillage et de  $\kappa$  tel que*

$$\|u - u_h\|_{\text{swip}} \leq C \|\kappa\|_{L^\infty(\Omega)} h^{1+d(1/2-1/p)} \|u\|_{W^{2,p}(\Omega)}. \quad (4.24)$$

La situation est plus compliquée en  $d = 3$ , car on ne peut pas conclure que  $u \in H^{1+\alpha}(\Omega)$  avec  $\alpha > 0$  lorsque  $p \in (1, 6/5]$ . On peut donc prouver une estimation d'erreur analogue à (4.24) lorsque  $p \in (6/5, 2]$  et faire appel aux techniques de §4.5 pour prouver la convergence de la méthode (4.21) lorsque  $p \in (1, 6/5]$ .

### 4.3.3 Advection, réaction et dégénérescence du coefficient de diffusion

**Position du problème modèle** On peut ultérieurement compliquer le modèle (4.14) en ajoutant des termes d'advection et de réaction. Soit  $\beta \in [W^{1,\infty}(\Omega)]^d$  un champs de vitesse et soit  $\mu \in L^\infty(\Omega)$  le coefficient de réaction. On considère le problème suivant :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (-\kappa \nabla u + \beta u) + \mu u &= f \quad \text{dans } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{aligned}$$

La formulation faible s'écrit

$$\text{Trouver } u \in V \text{ t.q. } a(u, v) = \int_{\Omega} f v \text{ pour tout } v \in V, \quad (4.25)$$

où on a posé encore une fois  $V = H_0^1(\Omega)$  et la forme bilinéaire  $a$  est donnée par

$$a(u, v) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega} \kappa \nabla u \cdot \nabla v - \int_{\Omega} u \beta \cdot \nabla v + \int_{\Omega} \mu u v.$$

Afin d'assurer la bonne position de (4.25), on suppose qu'il existe un réel  $\mu_0 > 0$  tel que

$$\Lambda \stackrel{\text{def}}{=} \mu + \frac{1}{2} \nabla \cdot \beta \geq \mu_0 \text{ p.p. dans } \Omega.$$

L'objectif est maintenant de dériver des estimations d'erreurs qui soient robustes par rapport à l'hétérogénéité et à l'anisotropie du coefficient de diffusion et aussi au nombre de Péclet  $h\beta_c/\lambda$ . Ce dernier point nous permettra, dans la section suivante, de relaxer l'hypothèse de positivité du coefficient de diffusion.

La méthode proposée dans [9] combine une discrétisation du terme de diffusion par la forme bilinéaire  $a_h^{\text{swip}}$  avec une discrétisation du terme advectif décentrée en amont. Soit, pour tout  $(v, w) \in V_{\dagger h} \times V_{\dagger h}$ ,

$$\begin{aligned} a_h^{\text{upw}}(v, w) &= \int_{\Omega} [\mu v w + \nabla_h \cdot (\beta v) w] + \int_{\partial\Omega} (\beta \cdot \mathbf{n})^\ominus v w \\ &\quad - \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \int_F (\beta \cdot \mathbf{n}_F) \llbracket v \rrbracket \{w\} + \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \int_F \frac{|\beta \cdot \mathbf{n}_F|}{2} \llbracket v \rrbracket \llbracket w \rrbracket, \end{aligned} \quad (4.26)$$

où, pour tout réel  $x$ , on a posé  $x^\ominus \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(|x| - x)$ . La forme bilinéaire intégrant à la fois les termes de diffusion et d'advection-réaction est donc

$$a_h^{\text{dar}}(v, w) \stackrel{\text{def}}{=} a_h^{\text{swip}}(v, w) + a_h^{\text{upw}}(v, w).$$

On introduit le temps et la vitesse de référence du problème

$$\tau_c \stackrel{\text{def}}{=} \{\max(\|\mu\|_{L^\infty(\Omega)}, L_\beta)\}^{-1}, \quad \beta_c \stackrel{\text{def}}{=} \|\beta\|_{[L^\infty(\Omega)]^d},$$

où  $L_\beta \stackrel{\text{def}}{=} \max_{1 \leq i, j \leq d} \|\partial_i \beta_j\|_{L^\infty(\Omega)}$  est le module de Lipschitz de  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_d)$ . Afin d'obtenir une estimation d'erreur robuste par rapport aux données  $\kappa, \beta$  et  $\mu$ , on introduit sur  $V_{\dagger h}$  une norme de stabilité et une de continuité. Dans le cadre d'une analyse de convergence basée sur la coercivité<sup>2</sup>, les deux normes sont données par

$$\begin{aligned} \|v\|_{\mathfrak{b}}^2 &\stackrel{\text{def}}{=} \|v\|_{\text{swip}}^2 + |v|_\beta + \tau_c^{-1} \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ \|v\|_{\mathfrak{b}, \dagger}^2 &\stackrel{\text{def}}{=} \|v\|_{\mathfrak{b}}^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \beta_c \|v\|_{L^2(\partial T)}^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T \|\kappa^{1/2} \nabla v \cdot \mathbf{n}_T\|_{L^2(\partial T)}^2. \end{aligned}$$

avec  $|v|_\beta \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{F \in \mathcal{F}_h} \int_F \frac{|\beta \cdot \mathbf{n}_F|}{2} \|v\|^2$ . On a le résultat suivant.

**Théorème 4.12** (Estimation d'erreur en norme  $\|\cdot\|_{\mathfrak{b}}$ ). *Soit  $u \in V$  solution de (4.25) et supposons, de plus, que  $u \in V_{\dagger}$ . Alors, il existe  $C$  indépendant du pas de maillage  $h$  et des données  $\kappa, \beta$ , et  $\mu$  tel que*

$$\|u - u_h\|_{\mathfrak{b}} \leq C \max(1, \tau_c^{-1} \mu_0^{-1}, C_\eta^{-1}) \|u - \pi_h u\|_{\mathfrak{b}, \dagger}, \quad (4.27)$$

$\pi_h$  étant la projection  $L^2$ -orthogonale sur  $V_h$ .

Lorsque on admet la dégénérescence du coefficient de diffusion  $\kappa$ , il est toutefois souhaitable de disposer d'une estimation de la dérivée advective. On modifie alors les normes précédentes comme suit :

$$\begin{aligned} \|v\|_{\text{dar}}^2 &\stackrel{\text{def}}{=} \|v\|_{\mathfrak{b}}^2 + \|v\|_{\beta}^2, \\ \|v\|_{\text{dar}, \dagger}^2 &\stackrel{\text{def}}{=} \|v\|_{\text{dar}}^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \beta_c \left( h_T^{-1} \|v\|_{L^2(T)}^2 + \|v\|_{L^2(\partial T)}^2 + h_T \|\kappa^{1/2} \nabla v \cdot \mathbf{n}_T\|_{L^2(\partial T)}^2 \right), \end{aligned}$$

avec  $\|v\|_{\beta}^2 \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \frac{h_T}{\beta_c} \|\beta \cdot \nabla v\|_{L^2(T)}^2$ . Du fait de la présence de la norme de la dérivée advective dans  $\|\cdot\|_{\text{dar}}$ , il faut exprimer la stabilité en termes d'une condition inf-sup<sup>3</sup>. Pour le problème discret

$$\text{Trouver } u_h \in V_h \text{ t.q. } a_h^{\text{dar}}(u_h, v_h) = \int_{\Omega} f v_h \text{ pour tout } v_h \in V_h, \quad (4.28)$$

on prouve l'estimation d'erreur suivante :

**Lemme 4.13** (Estimation d'erreur pour la méthode (4.28)). *Soit  $u \in V$  solution de (4.28) et supposons, de plus, que  $u \in V_{\dagger}$ . Alors, il existe  $C$  indépendant du pas de maillage  $h$  et des données  $\kappa, \beta$  et  $\mu$  tel que*

$$\|u - u_h\|_{\text{dar}} \leq C \max(1, \tau_c^{-1} \mu_0^{-1}, C_{\text{sta}}^{-1}) \inf_{w_h \in V_h} \|u - w_h\|_{\text{dar}, \dagger},$$

avec  $C_{\text{sta}}$  constante de coercivité de  $a_h^{\text{swip}}$  par rapport à la norme  $\|\cdot\|_{\text{swip}}$ .

2. Voir [1, §4.4.3]. L'analyse de [9, §4.1] est équivalente, mais, du fait de la formulation mixte, on a besoin de prouver une condition inf-sup pour estimer la dérivée diffusive.

3. Voir [9, §4.2] et aussi [1, pag. 143]

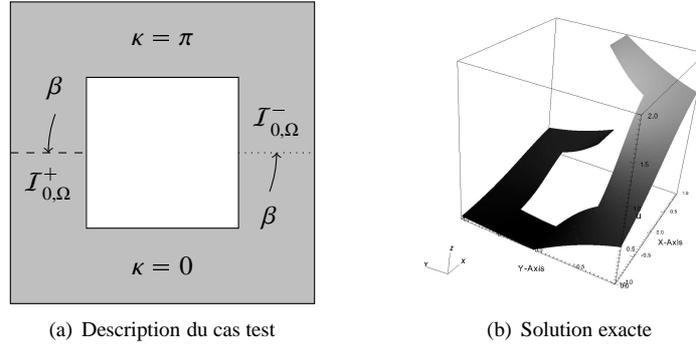


FIGURE 4.3 – Problème de diffusion-advection-réaction dégénéré.

**Corollaire 4.14** (Estimation du taux de convergence pour la méthode (4.28)). *Supposons, de plus, que  $u \in H^{k+1}(\mathcal{T}_h)$ . Alors,*

$$\|u - u_h\|_{\text{dar}} \leq C_u \max(1, \tau_c^{-1} \mu_0^{-1}, C_{\text{sta}}^{-1}) \left( \underline{\lambda}^{1/2} h^k + \beta_c h^{k+1/2} + \tau_c^{-1} h^{k+1} \right). \quad (4.29)$$

On peut simplifier l'estimation (4.29) en négligeant le dernier terme lorsque  $h \leq \beta_c \tau_c$ , c'est-à-dire, le pas de maillage est inférieur à la longueur caractéristique du problème. De plus, en observant que  $h\beta_c/\tau_c$  représente un nombre de Péclet global, et rappelant que

$$\|u - u_h\|_b = \left( \|u - u_h\|_{\text{swip}}^2 + |u - u_h|_\beta^2 + \tau_c^{-1} \|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}$$

on peut conclure, notamment, que (i) dans le régime d'advection dominante, le taux de convergence de  $|u - u_h|_\beta + \tau_c^{-1} \|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}$  est  $h^{k+1/2}$ ; (ii) dans le régime de diffusion dominante, le taux de convergence de  $\|u - u_h\|_{\text{swip}}$  est  $h^k$ . Ces résultats sont cohérents avec les estimations du taux de convergence obtenus pour un problème d'advection pure [1, §2.3.2] et pour un problème de diffusion pure [1, §4.3.3].

**Dégénérescence du coefficient de diffusion** On prouve dans [9] que la méthode ci-dessus s'applique également au cas où la diffusion est localement dégénérée, c'est-à-dire, si  $\underline{\lambda} = 0$ . Les conditions assurant la bonne position du problème continu dans ce cas sont détaillées dans [9, §2]. En particulier, on montre que la continuité de la solution exacte est perdue aux interfaces entre une région diffusif et une purement advective lorsque le champ  $\beta$  est entrant dans la première. Considérons l'exemple de Figure 4.3(a), qui admet une solution exacte en coordonnées cylindriques; voir [9, §6.1] pour plus de détails. Dans ce cas, le domaine est un carré avec un trou au milieu, le coefficient de diffusion s'annule dans la moitié inférieure du domaine, et le champ de vitesse est circulaire. On a donc deux interfaces internes :  $\mathcal{I}_{0,\Omega}^-$ , où le champ de vitesse rentre dans le sous-domaine diffusif, et  $\mathcal{I}_{0,\Omega}^+$ , où le champ de vitesse sort du sous-domaine diffusif. Comme on le montre dans la Figure 4.3(b), la solution exacte est discontinue à travers  $\mathcal{I}_{0,\Omega}^-$ . En ce qui concerne l'analyse, la différence principale par rapport au cas où  $\underline{\lambda} > 0$  est dans la preuve de consistance, où les moyennes pondérées et le décentrage en amont jouent un rôle crucial<sup>4</sup>. Dans la Table 4.1 on montre des résultats de convergence pour la méthode (4.28).

4. Voir [1, Lemma 4.54] pour une discussion à ce sujet. Quand la diffusion est dégénérée il est important de stabiliser l'advection avec un décentrage en amont pour garantir la consistance.

TABLE 4.1 – Convergence de la méthode (4.28).

$h$	$\mathbb{P}_d^1(\mathcal{T}_h)$		$\mathbb{P}_d^2(\mathcal{T}_h)$		$\mathbb{P}_d^3(\mathcal{T}_h)$		$\mathbb{P}_d^4(\mathcal{T}_h)$	
	erreur	ordre	erreur	ordre	erreur	ordre	erreur	ordre
$\ u - u_h\ _b$								
1/2	$3.15e + 0$		$7.27e - 1$		$1.74e - 1$		$3.99e - 2$	
1/4	$1.63e + 0$	0.95	$2.05e - 1$	1.83	$2.69e - 2$	2.70	$3.51e - 3$	3.51
1/8	$8.19e - 1$	0.99	$5.32e - 2$	1.94	$3.59e - 3$	2.91	$2.51e - 4$	3.81
1/16	$4.08e - 1$	1.00	$1.34e - 2$	1.99	$4.54e - 4$	2.98	$1.63e - 5$	3.95
1/32	$2.04e - 1$	1.00	$3.36e - 3$	2.00				
$\ u - u_h\ _\beta$								
1/2	$1.97e - 0$		$4.50e - 1$		$1.13e - 1$		$2.65e - 2$	
1/4	$7.46e - 1$	1.40	$9.87e - 2$	2.18	$1.40e - 2$	3.01	$1.92e - 3$	3.79
1/8	$2.73e - 1$	1.45	$1.90e - 2$	2.38	$1.44e - 3$	3.29	$1.06e - 4$	4.18
1/16	$9.82e - 2$	1.48	$3.44e - 3$	2.46	$1.34e - 4$	3.43	$5.03e - 6$	4.40
1/32	$3.50e - 2$	1.49	$6.08e - 4$	2.50				
$\ u - u_h\ _{L^2(\Omega)}$								
1/2	$2.92e - 1$		$3.30e - 2$		$5.79e - 3$		$1.17e - 3$	
1/4	$7.49e - 2$	1.96	$4.75e - 3$	2.80	$4.62e - 4$	3.65	$5.50e - 5$	4.41
1/8	$1.91e - 2$	1.97	$6.09e - 4$	2.96	$3.26e - 5$	3.83	$2.01e - 6$	4.77
1/16	$4.86e - 3$	1.97	$7.76e - 5$	2.97	$2.10e - 6$	3.96	$6.32e - 8$	4.99
1/32	$1.23e - 3$	1.98	$9.82e - 6$	2.98				

## 4.4 Analyse fonctionnelle discrète

Dans cette section on présente deux résultats d'analyse fonctionnelle discrète dérivés dans [7] : les injections de Sobolev pour les espaces polynômiaux par morceaux et d'un résultat de compacité pour les suites uniformément bornées en norme  $\|\cdot\|_{\text{dG}}$ . Ces résultats forment un outil indispensable pour prouver la convergence des méthodes dG sans hypothèses additionnelles de régularité sur la solution exacte. Les techniques de démonstration ont été inspirées par les travaux de Eymard, Gallouët et Herbin [EGH00, EGH09] dans les contextes des méthodes VF, et ces résultats sont à la base du cadre unifié VF-dG de [5] ; voir §5.3.

Des cas particuliers des injections de Sobolev avaient déjà été considérés par différents auteurs [Arn82, KJ98, LS03, GRW04] en utilisant des techniques basées sur des hypothèses de régularité elliptique ou bien sur des interpolateurs non conformes. Une différence importante est que la preuve fournie dans [7] permet d'obtenir le résultat le plus général tout en réduisant les hypothèses de régularité sur le domaine et sur le maillage. L'autre intérêt majeur de [7] est qu'il contient la première application du paradigme de démonstration par compacité aux méthodes dG.

### 4.4.1 Injections de Sobolev discrètes

Le premier résultat est l'équivalent discret des injections de Sobolev pour les espaces  $\mathbb{P}_d^k(\mathcal{T}_h)$  sur un domaine polygonal borné  $\Omega$ . L'injection de ce type la plus connue est l'inégalité de Poincaré discrète, qui affirme que la norme  $L^2$  est uniformément contrôlée par la norme  $\|\cdot\|_{\text{dG}}$  ; voir, par exemple, [Arn82, Bre03]. Un point important est que, contrairement aux preuves fournies dans [Arn82, Bre03] pour l'inégalité de Poincaré discrète, la démonstration de [7] ne repose pas sur des hypothèses de régularité elliptique ni sur des interpolateurs EF non conformes. Ceci permet, en particulier, de relâcher les hypothèses de régularité du domaine ainsi que de traiter des éléments de forme générale. Afin d'énoncer le théorème, on définit d'abord l'équivalent discret des normes  $W^{1,p}$  : Pour tout  $v \in W^{1,p}(\mathcal{T}_h)$  et tout  $p \geq 1$ ,

$$\|v\|_{\text{dG},p}^p \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T |\nabla v|_{\ell^p}^p + \sum_{F \in \mathcal{F}_h} \frac{1}{h_F^{p-1}} \int_F \llbracket v \rrbracket^p, \quad (4.30)$$

ou  $|\cdot|_{\ell^p}$  dénote la seminorme de l'espace vectoriel  $\ell^p$ .

**Théorème 4.15** (Injections de Sobolev discrètes). *Pour tout  $q$  tel que*

- (i)  $1 \leq q \leq p^* \stackrel{\text{def}}{=} \frac{pd}{d-p}$  si  $1 \leq p < d$  ;
- (ii)  $1 \leq q < +\infty$  si  $d \leq p < +\infty$  ;

*il existe  $\sigma_{q,p}$  indépendant du pas de maillage  $h$  tel que*

$$\forall v_h \in \mathbb{P}_d^k(\mathcal{T}_h), \quad \|v_h\|_{L^q(\Omega)} \leq \sigma_{p,q} \|v_h\|_{\text{dG},p}. \quad (4.31)$$

*La constante  $\sigma_{q,p}$  dépend de  $|\Omega|_d$ ,  $k$ , et des constantes de régularité du maillage.*

L'inégalité de Poincaré discrète est obtenue comme cas particulier pour  $q = p = 2$ . Le cas Hilbertien ( $p = 2$ ) a été aussi traité par Lasis et Süli [LS03] avec des techniques différentes ; voir aussi Karakashian et Jureidini [KJ98] et Girault, Rivière, et Wheeler [GRW04] pour des cas particuliers. Un résultat similaire a été obtenu indépendamment et presque simultanément par Buffa et Ortner [BO09].

### 4.4.2 Un résultat de compacité

Le deuxième théorème d'analyse fonctionnelle de cette section contient un résultat de compacité pour les suites de fonctions discrètes uniformément bornées en norme  $\|\cdot\|_{\text{dG},p}$ . La preuve consiste en une application du critère de compacité de Kolmogorov<sup>5</sup> basée sur des estimations uniformes des translations en espace, sur le Théorème 4.15, et sur un opérateur de gradient qui satisfait une propriété de consistance asymptotique faible. Plus précisément, soit  $\mathcal{H} \subset \mathbb{R}_+^*$  un ensemble dénombrable ayant 0 comme unique point d'accumulation. On considère une suite de maillages admissibles  $(\mathcal{T}_h)_{h \in \mathcal{H}}$  au sens de [1, Définition 1.44].

**Théorème 4.16** (Compacité). *Soit  $k \geq 1$  et soit  $(v_h)_{h \in \mathcal{H}}$  une suite dans  $(\mathbb{P}_d^k(\mathcal{T}_h))_{h \in \mathcal{H}}$  bornée uniformément en norme  $\|\cdot\|_{\text{dG},p}$ ,  $1 \leq p < +\infty$ . Alors, pour tout  $q$  tel que  $1 \leq q < p^*$  si  $1 \leq p \leq d$  ou  $1 \leq q < +\infty$  si  $d \leq p < +\infty$ ,  $(v_h)_{h \in \mathcal{H}}$  est relativement compacte dans  $L^q(\Omega)$  (et aussi dans  $L^q(\mathbb{R}^d)$  en prolongeant les fonctions par 0 dans  $\mathbb{R}^d \setminus \Omega$ ).*

Le résultat de compacité du Théorème 4.16 permet de déduire, à une sous-suite près, l'existence d'une limite  $v \in L^2(\Omega)$  pour toute suite  $(v_h)_{h \in \mathcal{H}}$  bornée en norme  $\|\cdot\|_{\text{dG}}$ . Cependant, la régularité de la limite n'est pas suffisante pour l'application aux problèmes elliptiques du second ordre tel que le problème de Poisson (4.1), où l'espace naturel pour la solution exacte est  $H_0^1(\Omega)$ . La régularité nécessaire peut être cependant prouvée à l'aide d'une suite  $(G_h(v_h))_{h \in \mathcal{H}}$  de gradients discrets faiblement convergents. Le gradient discret s'exprime en fonction des relèvements de trace définis dans [BMM<sup>+</sup>00] : Pour  $l \geq 0$ ,

$$\forall F \in \mathcal{F}_h, \quad r_F^l : L^2(F) \rightarrow [\mathbb{P}_d^k(\mathcal{T}_h)]^d, \quad (4.32)$$

solutions du problème suivant : Pour tout  $\varphi \in L^2(F)$ ,

$$\int_{\Omega} r_F^l(\varphi) \cdot \tau_h = \int_F \varphi \{\tau_h\} \cdot \mathbf{n}_F \quad \forall \tau_h \in [\mathbb{P}_d^l(\mathcal{T}_h)]^d.$$

Soit, pour tout  $v_h \in V_h$ ,

$$G_h^l(v_h) \stackrel{\text{def}}{=} \nabla_h v_h - \mathbf{R}_h^l(v_h), \quad \mathbf{R}_h^l(v_h) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{F \in \mathcal{F}_h} r_F^l(\llbracket v_h \rrbracket). \quad (4.33)$$

La forme bilinéaire  $a_h^{\text{sip}}$  peut être reformulée en utilisant le gradient discret  $G_h^l$ ,  $l \in \{k-1, k\}$ , comme suit :

$$a_h^{\text{sip}}(u_h, v_h) = \int_{\Omega} G_h^l(u_h) \cdot G_h^l(v_h) + \tilde{s}_h(u_h, v_h), \quad (4.34)$$

avec  $\tilde{s}_h(u_h, v_h) = - \int_{\Omega} \mathbf{R}_h(u_h) \cdot \mathbf{R}_h(v_h) + s_h^{\text{sip}}(u_h, v_h)$  ; voir [1, §4.2.3] et aussi [5] pour une généralisation à d'autres méthodes dG. De plus, en utilisant le Théorème 4.16, on prouve sans peine le résultat suivant.

**Lemme 4.17** (Régularité de la limite). *Soit  $(v_h)_{h \in \mathcal{H}}$  une suite dans  $(\mathbb{P}_d^k(\mathcal{T}_h))_{h \in \mathcal{H}}$  bornée uniformément en norme  $\|\cdot\|_{\text{dG}}$ . Alors, il existe  $v \in H_0^1(\Omega)$  tel que, lorsque  $h \rightarrow 0$  et à une sous-suite près,*

$$v_h \rightarrow v \quad \text{fortement dans } L^2(\Omega),$$

5. Voir, par exemple, [Bré83, Theorem IV.25].

et, pour tout  $l \geq 0$ ,

$$G_h^l(v_h) \rightharpoonup \nabla v \text{ faiblement dans } [L^2(\Omega)]^d.$$

En outre, en posant  $v_h = 0$  dans  $\mathbb{R}^d \setminus \Omega$ ,

$$G_h^l(v_h) \rightharpoonup \nabla v \text{ faiblement dans } [L^2(\mathbb{R}^d)]^d.$$

## 4.5 Convergence vers des solutions à régularité minimale

L'analyse de convergence dans l'esprit du Lemme de Céa demande d'étendre la forme bilinéaire discrète à un espace contenant la solution exacte. Dans le cas des méthodes dG, ceci nécessite d'introduire des hypothèses de régularité ultérieures afin d'assurer la bonne définition des termes de bord. Ces hypothèses peuvent ne pas être vérifiées lorsque, par exemple, le domaine présente des angles rentrants ou le tenseur de diffusion est hétérogène. Ce dernier cas est courant dans les applications IFP Energies nouvelles concernant les écoulements souterrains, d'où l'intérêt d'étudier la convergence vers des solutions à régularité minimale.

Dans cette section on examine l'approche proposée par l'auteur dans [5, 7] et basée sur un argument de compacité ne demandant pas d'hypothèses de régularité ultérieure sur la solution exacte. Cette approche, inspirée par les techniques de [EGH09], est particulièrement adaptée aux problèmes non linéaires, comme on le verra dans la section suivante. Les étapes principales de l'analyse sont les suivantes :

- (i) on considère une suite de maillages admissibles au sens de [1, Définition 1.44] et on dérive une estimation *a priori* uniforme en norme  $\|\cdot\|_{\text{dG}}$  pour la suite des solution discrètes ;
- (ii) à l'aide du Théorème 4.16 et du Lemme 4.17 on déduit la convergence forte en norme  $L^2$  d'une sous-suite vers une fonction  $u \in H_0^1(\Omega)$  aussi bien que la convergence faible de  $(G_h^l(u_h))_{h \in \mathcal{H}}$  vers  $\nabla u$  ;
- (iii) on infère la convergence de la méthode (à une sous-suite près) en utilisant comme fonction test la projection d'une fonction régulière appartenant à un sous-espace dense, par exemple  $C_0^\infty(\Omega)$  ;
- (iv) on déduit la convergence forte de la suite des gradients discrets  $(G_h^l(u_h))_{h \in \mathcal{H}}$  vers  $\nabla u$  en utilisant la structure dissipative du problème.

Lorsque la solution exacte est unique, on peut déduire la convergence de toute la suite des solutions discrètes en raisonnant par l'absurde.

À titre d'exemple, considérons le problème (4.1) discrétisé par la méthode SIP. Soit  $(\mathcal{T}_h)_{h \in \mathcal{H}}$  une suite de maillages admissibles et, pour tout  $h \in \mathcal{H}$ , soit  $V_h$  l'espace discret donné par (4.5). En utilisant la coercivité de la forme bilinéaire  $a_h^{\text{sip}}$  dans  $V_h \times V_h$  et l'inégalité de Poincaré discrète on infère que

$$C_{\text{sta}} \|u_h\|_{\text{dG}}^2 \leq a_h^{\text{sip}}(u_h, u_h) = \int_{\Omega} f u_h \leq \sigma_{2,2} \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u_h\|_{\text{dG}},$$

d'où l'estimation *a priori* uniforme

$$\|u_h\|_{\text{dG}} \leq \frac{\sigma_{2,2}}{C_{\text{sta}}} \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

En utilisant les résultats de la section précédente pour la formulation (4.34) de la forme bilinéaire  $a_h^{\text{sip}}$ , on prouve le théorème suivant.

**Théorème 4.18** (Convergence de la méthode (4.12) vers des solutions à régularité minimale). Soit  $(u_h)_{h \in \mathcal{H}}$  la suite de solutions discrète obtenues en résolvant le problème discret (4.12) sur la suite admissible de maillages  $(\mathcal{T}_h)_{h \in \mathcal{H}}$ . Lorsque  $h \rightarrow 0$ ,

$$\begin{aligned} u_h &\rightarrow u && \text{fortement dans } L^2(\Omega), \\ \nabla_h u_h &\rightarrow \nabla u && \text{fortement dans } [L^2(\Omega)]^d, \\ |u_h|_J &\rightarrow 0, \end{aligned}$$

avec  $u$  unique solution de (4.2) et  $|\cdot|_J$  définie par (4.9).

Il est important d'observer que le Théorème 4.18 affirme l'existence d'une solution du problème (4.2) et la convergence de la méthode (4.12) vers cette solution, mais il ne fournit pas une estimation du taux de convergence (qui, d'ailleurs, pourrait ne pas exister dans le cas de solution à régularité minimale).

## 4.6 Écoulements incompressibles

On considère ici les écoulements incompressibles de fluides Newtoniens à densité constante, régis par les équations de Navier–Stokes Incompressibles (NSI). Les équations de Navier–Stokes expriment les principes physiques de conservation de la quantité de mouvement et de la masse. Dans le cas incompressible, la conservation de la masse se réduit à une contrainte de divergence nulle pour la vitesse dont la pression est le multiplicateur de Lagrange. Au niveau discret les difficultés principales sont liées, en particulier, au couplage vitesse–pression et au terme de convection dans la conservation de la quantité de mouvement. Dans le contexte des applications IFP Energies nouvelles, les équations de NSI sont utilisées, entre autres, pour modéliser l'écoulement du pétrole dans les conduites (*pipelines*).

Les travaux de cette section traitent de discrétisations des équations de NSI basées sur des approximations discontinues de la vitesse et de la pression. Dans ce contexte, les méthodes dG ont plusieurs intérêts :

- (i) à grand nombre de Reynolds, on bénéficie des meilleurs propriétés de stabilité par rapport aux discrétisations EF conformes, et d'une précision accrue par rapport aux méthodes VF. C'est essentiellement grâce à ces caractéristiques que les méthodes dG ont reçu une attention croissante à partir des années 90 ;
- (ii) il s'agit de méthodes adaptées à des maillages très généraux. Ceci permet d'une part de gérer de manière naturelle l'adaptivité non conforme en  $h$ , d'autre part de mieux adapter la forme des éléments et le degré de la représentation géométrique aux caractéristiques du problème. Un exemple classique est fourni par les couches limites, souvent discrétisées par des éléments hexahédriques allongés avec approximation géométrique d'ordre élevé ;
- (iii) l'adaptation de l'ordre polynômiale est simplifiée du fait d'utiliser des fonctions discontinues aux interfaces. Ce sujet n'est pas traité dans les travaux de ce chapitre. Pour une introduction et une bibliographie voir, par exemple, Baumann et Oden [BO99], Houston, Schötzau et Wihler [HSW07] ou Lasis et Süli [LS07] ;
- (iv) il est possible d'envisager des couples d'espaces stables avec des propriétés d'approximation optimales [Tos02, GRW04, 2] aussi bien que des formulations stabilisées avec approximations du même ordre pour la pression et la vitesse [CKSS02,

CGS03b, CKS05, 7, 11, 12]. À côté des approximations complètement discontinues on peut aussi considérer des approximation mixtes avec vitesse discontinue et pression continue ; voir, p.e., [2].

Cette section relate les travaux [2, 7, 10–12] et aussi [1, Chapitre 6]. Dans §4.6.1 on traite de la discrétisation en espace en se concentrant d’abord sur le couplage vitesse-pression et ensuite sur la discrétisation du terme convectif. On considère ici des approximation complètement discontinues où chaque composante de la vitesse et la pression sont approchées avec le même ordre polynômial. Dans §4.6.2 on présente des travaux récentes concernant la discrétisation en temps. Plus précisément, on présente une méthode monolithique basée sur des méthodes Runge–Kutta de type Rosenbrock puis une méthode de correction de pression inspirée par [GQ98].

### 4.6.1 Discrétisation en espace

Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ,  $d \in \{2, 3\}$ , un domaine connexe<sup>6</sup>. On considère les équations de NSI stationnaires,

$$-\nu \Delta u_i + \partial_j(u_i u_j) + \partial_i p = f_i \quad \text{dans } \Omega, i \in \{1, \dots, d\}, \quad (4.35a)$$

$$\partial_i u_i = 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad (4.35b)$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \quad (4.35c)$$

$$\langle p \rangle_\Omega = 0, \quad (4.35d)$$

où  $\nu > 0$  dénote la viscosité dynamique et  $f \in [L^2(\Omega)]^d$  la force volumique. Posons

$$U \stackrel{\text{def}}{=} [H_0^1(\Omega)]^d, \quad P \stackrel{\text{def}}{=} L_*(\Omega), \quad X \stackrel{\text{def}}{=} U \times P,$$

où  $L_*(\Omega) \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in L^2(\Omega) \mid \langle v \rangle_\Omega = 0\}$  est l’espace des fonctions à carré intégrable et moyenne nulle sur  $\Omega$ . La formulation faible du système (4.35) s’écrit : Trouver  $(u, p) \in X$  tel que

$$va(u, v) + t(u, u, v) + b(v, p) = \int_\Omega f \cdot v \quad \forall v \in U, \quad (4.36a)$$

$$-b(u, q) = 0 \quad \forall q \in P, \quad (4.36b)$$

avec  $a(u, v) \stackrel{\text{def}}{=} \int_\Omega \nabla u_i \nabla v_i$ ,  $b(v, q) \stackrel{\text{def}}{=} - \int_\Omega q \nabla \cdot v$  et

$$t(w, u, v) \stackrel{\text{def}}{=} \int_\Omega (w \cdot \nabla u_i) v_i. \quad (4.37)$$

Dans [7, 11, 12] on présente des méthodes basées sur des approximation de la vitesse et de la pression avec le même degré polynômial. Pour  $k \geq 1$ , les espaces discrets sont définis par

$$U_h \stackrel{\text{def}}{=} [\mathbb{P}_d^k(\mathcal{T}_h)]^d, \quad P_h \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}_d^k(\mathcal{T}_h)/\mathbb{R}, \quad X_h \stackrel{\text{def}}{=} U_h \times P_h. \quad (4.38)$$

Il est également possible de discrétiser la pression avec des polynômes de degré inférieur d’une unité tout en gardant un taux de convergence optimal. Une méthode avec vitesse discontinue et pression continue est considérée dans §4.6.2 dans le contexte d’un schéma de correction de pression.

<sup>6</sup>. Dans l’analyse de convergence pour les méthodes traitées dans les paragraphes suivantes on a besoin de l’injection de Sobolev pour  $p = 2$  et  $q = 4$ , qui n’est valide que pour  $d \leq 3$  ; voir Théorème 4.15.

**La méthode de compressibilité artificielle de [11, 12]** On rappelle brièvement les idées principales de la méthode présentée dans [12] puis analysée dans [11]. Quand ces travaux ont démarré, l'application des méthodes dG aux problèmes de Stokes et de Oseen en formulation vitesse-pression venait d'être considérée par Toselli [Tos02] et par Cockburn, Kanschat, Schötzau et Schwab [CKSS02, CGS03b]. Comment aborder les équations de NSI restait une question essentiellement ouverte.

Dans le but d'étendre le code compressible développé quelques années auparavant par Bassi et Rebay [BR97, BRM<sup>+</sup>97], dans [12] on explorait l'idée d'obtenir les flux non visqueux par un solveur de Riemann pour les équations de NSI localement modifiées au sens de la compressibilité artificielle. Dans [11] on analyse la méthode avec application au problème de Stokes incompressible

$$-\Delta u_i + \partial_i p = f_i \quad \text{dans } \Omega, i \in \{1, \dots, d\}, \quad (4.39a)$$

$$\partial_i u_i = 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad (4.39b)$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \quad (4.39c)$$

$$\langle p \rangle_\Omega = 0. \quad (4.39d)$$

Les équations de Stokes (4.39) constituent une approximation des équations de NSI modélisant les écoulements dominés par les forces visqueuses. Il est utile d'examiner ce cas de près afin de comprendre les mécanismes du couplage vitesse-pression, qui est géré de manière similaire dans [7, 10–12]. La formulation faible du système (4.39) consiste à

$$\text{Trouver } (u, p) \in X \text{ t.q. } a(u, v) + b(v, p) - b(u, q) = \int_\Omega f \cdot v \text{ pour tout } (v, q) \in X. \quad (4.40)$$

Afin d'assurer la bonne définition de tous les termes dans les formes bilinéaires discrètes lorsqu'on utilise la solution exacte comme premier argument, on est amené comme dans §4.2.2 à formuler des hypothèses de régularité ultérieure. Plus précisément, on pose

$$U_\dagger \stackrel{\text{def}}{=} U \cap [H^2(\mathcal{T}_h)]^d, \quad P_\dagger \stackrel{\text{def}}{=} P \cap H^1(\Omega), \quad X_\dagger \stackrel{\text{def}}{=} U_\dagger \times P_\dagger, \quad (4.41)$$

et on suppose que  $(u, p) \in X_\dagger$ . Ces hypothèses peuvent être relâchées dans le cadre d'une analyse de convergence par compacité; voir [7] et paragraphe suivant. La régularité ultérieure pour la pression se justifie comme suit. Le choix (4.38) ne garantit pas la surjectivité de l'opérateur de divergence discret, ce qui demande de stabiliser le couplage vitesse-pression. L'hypothèse  $p \in H^1(\Omega)$  sert donc à garantir la consistance d'un terme de stabilisation basé sur la pénalisation des sauts de la pression aux interfaces. Les espaces contenant à la fois la solution exacte et son approximation sont définis par

$$U_{\dagger h} \stackrel{\text{def}}{=} U_\dagger + U_h, \quad P_{\dagger h} \stackrel{\text{def}}{=} P_\dagger + P_h, \quad X_{\dagger h} \stackrel{\text{def}}{=} X_\dagger + X_h.$$

La discrétisation du terme de diffusion est basée sur la méthode de [BRM<sup>+</sup>97]. On définit la forme bilinéaire  $a_h \in \mathcal{L}(X_{\dagger h} \times X_{\dagger h}, \mathbb{R})$  suivante :

$$a_h(v, w) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^d \left[ a_h^{\text{cs}}(v_i, w_i) + s_h^{\text{brmps}}(v_i, w_i) \right], \quad (4.42)$$

avec  $a_h^{\text{cs}}$  donnée par (4.8),

$$s_h^{\text{brmps}}(v_i, w_i) \stackrel{\text{def}}{=} \eta \sum_{F \in \mathcal{F}_h} \int_\Omega \mathbf{r}_F(\llbracket v_i \rrbracket) \cdot \mathbf{r}_F(\llbracket w_i \rrbracket),$$

et opérateurs de relèvement définis par (4.32). La forme bilinéaire  $s_h^{\text{brmps}}$  a l'avantage de fournir une borne inférieure calculable pour le paramètre  $\eta$  garantissant la coercivité de  $a_h$ ; voir [1, §5.3.2]. Le couplage vitesse-pression est réalisé par la forme bilinéaire  $b_h \in \mathcal{L}(U_{\dagger h} \times P_{\dagger h}, \mathbb{R})$  définie par

$$b_h(v, q) \stackrel{\text{def}}{=} - \int_{\Omega} q \nabla_h \cdot v + \sum_{F \in \mathcal{F}_h} \int_F \llbracket v \rrbracket \cdot \mathbf{n}_F \{q\} = \int_{\Omega} v \cdot \nabla_h q - \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \int_F \{v\} \cdot \mathbf{n}_F \llbracket q \rrbracket. \quad (4.43)$$

La méthode de compressibilité artificielle fait aussi apparaître des termes de pénalisation des sauts de la composante normale de la vitesse sur les faces du maillage et des sauts de la pression aux interfaces,

$$s_h^{\text{div}}(v, w) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \int_F \frac{c_F}{2} (\llbracket v \rrbracket \cdot \mathbf{n}_F) (\llbracket w \rrbracket \cdot \mathbf{n}_F) \quad (4.44a)$$

$$s_h^{\text{pres}}(q, r) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \int_F \frac{1}{2c_F} \llbracket q \rrbracket \llbracket r \rrbracket, \quad (4.44b)$$

où  $c_F > 0$  est un paramètre libre correspondant à la vitesse du son dans les écoulements compressibles, dont la valeur peut changer sur chaque face. Le problème discret s'écrit

$$\text{Trouver } (u_h, p_h) \in X_h \text{ t.q. } c_h((u_h, p_h), (v_h, q_h)) = \int_{\Omega} f \cdot v_h \text{ pour tout } (v_h, q_h) \in X_h, \quad (4.45)$$

avec

$$c_h((u_h, p_h), (v_h, q_h)) \stackrel{\text{def}}{=} a_h(u_h, v_h) + s_h^{\text{div}}(u_h, v_h) + b_h(v_h, p_h) - b_h(u_h, q_h) + s_h^{\text{pres}}(p_h, q_h).$$

L'analyse de [11] montre que le paramètre  $c_F$  sur une face  $F \in \mathcal{F}_h^i$  doit être de l'ordre de  $h_F^{-1}$  afin de garantir la convergence optimale de la méthode. On définit la norme  $\|\cdot\|_{\text{dG}}$  pour des fonctions vectorielles  $v \in U_{\dagger h}$  comme  $\|v\|_{\text{dG}}^2 \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^d \|v_i\|_{\text{dG}}^2$ . La seminorme associée aux sauts de la pression est donnée par

$$|q|_p^2 \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} h_F \|\llbracket q \rrbracket\|_{L^2(F)}^2.$$

En utilisant le résultat de [Neč62], on prouve le lemme suivant.

**Lemme 4.19** (Stabilité). *Soit, pour tout  $F \in \mathcal{F}_h^i$ ,  $c_F = h_F^{-1}$ . Alors, pour  $\eta$  suffisamment grand,*

(i) *il existe  $\alpha > 0$  indépendant du pas de maillage  $h$  tel que<sup>7</sup>*

$$\forall (v_h, q_h) \in X_h, \quad c_h((v_h, q_h), (v_h, q_h)) \geq \alpha \|v_h\|_{\text{dG}}^2 + |q_h|_p^2;$$

(ii) *il existe  $\beta > 0$  indépendant du pas de maillage  $h$  tel que*

$$\forall q_h \in P_h, \quad \beta \|q_h\|_{L^2(\Omega)} \leq \sup_{w_h \in U_h \setminus \{0\}} \frac{b_h(w_h, q_h)}{\|w_h\|_{\text{dG}}} + |q_h|_p.$$

<sup>7</sup> Ce résultat se base sur la coercivité de la forme bilinéaire  $a_h$  définie par (4.42) en norme  $\|\cdot\|_{\text{dG}}$ , qui demande une estimation de la norme  $L^2$  des opérateurs de relèvement en termes de la seminorme  $|\cdot|_p$  définie par (4.9). Pour tous les détails techniques voir [1, §5.3.2].

Les normes pour l'analyse de convergence sont définies comme suit<sup>8</sup> :

$$\begin{aligned} \|(v, q)\|_{\text{sto}}^2 &\stackrel{\text{def}}{=} \|v\|_{\text{dG}}^2 + \|q\|_{L^2(\Omega)}^2 + |q|_p^2, \\ \|(v, q)\|_{\text{sto}, \dagger}^2 &\stackrel{\text{def}}{=} \|(v, q)\|_{\text{dG}}^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T \|q\|_{L^2(\partial T)}^2 \\ &\quad + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left( h_T^{-2} \|v\|_{[L^2(T)]^d}^2 + h_T^{-1} \|v\|_{[L^2(\partial T)]^d}^2 + h_T \|\partial_j v \mathbf{n}_{T,j}\|_{[L^2(\partial T)]^d}^2 \right). \end{aligned}$$

A l'aide du Lemme 4.19 on prouve classiquement l'estimation d'erreur suivante :

**Théorème 4.20** (Estimation d'erreur pour la méthode (4.45)). *Soit  $(u, p) \in X$  la solution de (4.40), et supposons, de plus, que  $(u, p) \in X_{\dagger}$ . Alors il existe  $C$  indépendant du pas de maillage  $h$  tel que*

$$\|(u - u_h, p - p_h)\|_{\text{sto}} \leq C \inf_{(v_h, q_h) \in X_h} \|(u - v_h, p - q_h)\|_{\text{sto}, \dagger}.$$

**Corollaire 4.21** (Estimation du taux de convergence). *Si, en plus,  $(u, p) \in [H^{k+1}(\mathcal{T}_h)]^d \times H^k(\mathcal{T}_h)$ , il existe  $C$  indépendant du pas de maillage  $h$  tel que*

$$\|(u - u_h, p - p_h)\|_{\text{sto}} \leq Ch^k (\|u\|_{[H^{k+1}(\mathcal{T}_h)]^d} + \|p\|_{H^k(\mathcal{T}_h)}).$$

Si la régularité de Cattabriga [Cat61, AG91] est vérifiée par la solution exacte, on peut aussi estimer le taux de convergence de la vitesse en norme  $L^2$  ; voir [1, §6.1.3].

**Théorème 4.22** (Taux de convergence de la vitesse en norme  $L^2$ ). *Soit  $(u, p) \in X$  la solution de (4.40), et supposons, de plus, que  $(u, p) \in [H^2(\Omega)]^d \times H^1(\Omega)$ . Alors il existe  $C$  indépendant du pas de maillage  $h$  tel que*

$$\|u - u_h\|_{[L^2(\Omega)]^d} \leq Ch^{k+1} (\|u\|_{[H^{k+1}(\mathcal{T}_h)]^d} + \|p\|_{H^k(\mathcal{T}_h)}).$$

**La méthode avec terme de convection non dissipatif de [7]** On examine ici la discrétisation du terme convectif non linéaire. L'analyse de la méthode de compressibilité artificielle de [12] pour les équations de NSI n'est pas aussi naturelle que pour les versions linéarisées (Stokes et Oseen). Dans [7] on propose une classe de méthodes où la discrétisation du terme non linéaire est obtenue suivant un principe différent. Le terme de diffusion et le couplage vitesse-pression sont à nouveau discrétisés par les formes bilinéaires  $a_h$  et  $b_h$  définies, respectivement, par (4.42) et (4.43). La forme trilinéaire  $t_h \in \mathcal{L}(U_h \times U_h \times U_h, \mathbb{R})$  associée au terme de convection satisfait les propriétés suivantes :

(i) *Non dissipativité.* On a

$$\forall v_h \in U_h, \quad t_h(v_h, v_h, v_h) = 0.$$

Cette propriété est utilisée pour obtenir une estimation *a priori* uniforme pour la suite des solutions discrètes en norme  $\|\cdot\|_{\text{sto}}$ . De plus, elle permet de réduire la dissipation numérique sans compromettre la stabilité à grands nombres de Reynolds (voir les expériences numériques de [2]) ;

8. Comme dans le section précédentes, la norme étendue utilisée pour prouver la continuité est marquée par un astérisque.

(ii) *Continuité.* Il existe  $C$  indépendant du pas de maillage  $h$  tel que

$$\forall w_h, u_h, v_h \in U_h, \quad t_h(w_h, u_h, v_h) \leq C \|w_h\|_{\text{dG}} \|u_h\|_{\text{dG}} \|v_h\|_{\text{dG}}.$$

Cette propriété est utilisée pour prouver l'existence d'une solution au problème discret par un argument de degré topologique ; voir Lemme 4.23 ;

(iii) *Consistance asymptotique pour les fonctions test régulières.* Soit  $(v_h)_{h \in \mathcal{H}}$  une suite de  $(U_h)_{h \in \mathcal{H}}$  uniformément bornée en norme  $\|\cdot\|_{\text{dG}}$ , et soit  $v \in [H_0^1(\Omega)]^d$  la limite fournie par le Lemme 4.17. Pour tout  $\Phi \in [C_0^\infty(\Omega)]^d$ , lorsque  $h \rightarrow 0$  et à une sous-suite près,

$$t_h(v_h, v_h, \pi_h \Phi) \rightarrow t^*(v, v, \Phi),$$

$t^*$  étant une forme trilinéaire consistante avec (4.37) et  $\pi_h$  la projection  $L^2$ -orthogonale sur l'espace  $U_h$ . En particulier, dans [1, Chapitre 6] on considère la version de Temam [Tem79] contenant un terme proportionnel à la divergence de la vitesse,

$$t^*(w, u, v) = t^{\text{tem}}(w, u, v) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega} (w \cdot \nabla u_i) v_i - \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla \cdot w)(u \cdot v).$$

On vérifie sans peine que, pour tout  $w \in U$  tel que  $\nabla \cdot w = 0$ , on a  $t_h^{\text{tem}}(w, u, v) = t(w, u, v)$  pour tout  $u, v \in U$ , avec  $t$  donnée par (4.37). Pour un choix alternatif voir [7, §5.1] ;

(iv) *Consistance pour les fonctions test discrètes.* Sous les hypothèses du point précédent, supposons ultérieurement que  $G_h^l(v_h)$ ,  $l \in \{k-1, k\}$  converge fortement vers  $\nabla v$  dans  $[L^2(\Omega)]^{d,d}$ , et soit  $\{w_h\}_{h \in \mathcal{H}}$  une deuxième suite dans  $(U_h)_{h \in \mathcal{H}}$  uniformément bornée en norme  $\|\cdot\|_{\text{dG}}$ . Alors, lorsque  $h \rightarrow 0$  et à une sous-suite près,

$$t_h(v_h, v_h, w_h) \rightarrow t^*(v, v, w),$$

avec  $v, w \in [H_0^1(\Omega)]^d$  issues du Lemme 4.17. Cette propriété ne peut pas, en général, être déduite à partir de la précédente, et elle est utilisée uniquement pour prouver la convergence forte de la suite des pressions discrètes vers la pression exacte dans  $L^2$ .

La forme trilinéaire discrète inspirée par la méthode de Temam s'écrit

$$\begin{aligned} t_h(w_h, u_h, v_h) &\stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega} (w_h \cdot \nabla u_{h,i}) v_{h,i} - \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \int_F \{w_h\} \cdot \mathbf{n}_F \llbracket u_h \rrbracket \cdot \{v_h\} \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla_h \cdot w_h) (u_h \cdot v_h) - \frac{1}{2} \sum_{F \in \mathcal{F}_h} \int_F \llbracket w_h \rrbracket \cdot \mathbf{n}_F \{u_h \cdot v_h\}. \end{aligned} \quad (4.46)$$

Le problème discret revient donc à : Trouver  $(u_h, p_h) \in X_h$  tel que

$$va_h(u_h, v_h) + t_h(u_h, u_h, v_h) + b_h(v_h, p_h) = \int_{\Omega} f \cdot v_h \quad \forall v_h \in U_h, \quad (4.47a)$$

$$-b_h(u_h, q_h) + s_h^{\text{pres}}(p_h, q_h) = 0 \quad \forall q_h \in P_h, \quad (4.47b)$$

Les principaux résultats d'analyse sont résumés ci-dessous.

**Lemme 4.23** (Existence d'une solution discrète). *Il existe au moins un  $(u_h, p_h) \in X_h$  solution de (4.47).*

Le Lemme 4.23 résulte d'un argument de degré topologique, et sa preuve suit de près celle de [EHL07].

**Théorème 4.24** (Convergence de la méthode (4.47)). *Soit  $((u_h, p_h))_{h \in \mathcal{H}}$  la suite des solutions discrètes obtenues en résolvant (4.47) sur la suite de maillages admissibles  $(\mathcal{T}_h)_{h \in \mathcal{H}}$ . Alors, lorsque  $h \rightarrow 0$  et à une sous-suite près,*

$$\begin{aligned} u_h &\rightarrow u, & \text{dans } [L^2(\Omega)]^d, \\ \nabla_h u_h &\rightarrow \nabla u, & \text{dans } [L^2(\Omega)]^{d,d}, \\ |u_h|_J &\rightarrow 0, \\ p_h &\rightarrow p, & \text{dans } L^2(\Omega), \\ |p_h|_p &\rightarrow 0. \end{aligned}$$

Si, de plus,  $(u, p)$  est unique, la convergence s'étend à toute la suite.

#### 4.6.2 Marche en temps

Dans cette section on relate les travaux [2, 10] concernant la discrétisation en temps des équations de NSI instationnaires,

$$\partial_t u - \nu \Delta u_i + \partial_j (u_i u_j) + \partial_i p = f_i \quad \text{dans } \Omega \times (0, t_F), i \in \{1, \dots, d\}, \quad (4.48a)$$

$$\partial_i u_i = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, t_F), \quad (4.48b)$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times (0, t_F), \quad (4.48c)$$

$$u(x, t = 0) = u_0 \quad \text{dans } \Omega \quad (4.48d)$$

$$\langle p \rangle_\Omega = 0 \quad \text{dans } (0, t_F), \quad (4.48e)$$

où encore une fois  $d \in \{2, 3\}$ ,  $\nu > 0$  dénote la viscosité dynamique et  $f \in [L^2(\Omega)]^d$  la force volumique.

**Le schéma monolithique de [10]** Une première famille de schémas de discrétisation en temps couplée avec la discrétisation en espace de [12] a été proposée dans [10]. On considère ici un schéma monolithique où le bilan de la quantité de mouvement et la contrainte de divergence nulle sont résolus en même temps. Comme la dérivée temporelle de la pression n'apparaît pas dans l'équation de conservation de la masse (4.48b), la matrice de masse du système est singulière. Cette difficulté est contournée dans [10] en utilisant des schémas de Runge–Kutta sémi-implicites de type Rosenbrock. La méthode résultante est appliquée dans [10] à une variété de problèmes modèle, et la robustesse par rapport à la convection est montrée en résolvant le problème d'Euler incompressible dans les configurations test de Liu et Shu [LS00] et Bell, Colella et Glaz [BCG89]. Les avantages principaux de cette famille de schémas sont essentiellement liés à la possibilité d'obtenir une discrétisation en temps d'ordre élevé, et aux bonnes propriétés de stabilité des schémas de type Runge–Kutta. Cependant la solution monolithique du système issu de la discrétisation ressent du mauvais conditionnement de ce dernier. Comme remarqué par Hesthaven et Warburton [HW08, §1.1], le développement de solveurs efficaces pour les systèmes discrets issus de l'approche dG est moins avancé que pour d'autres méthodes, ce qui demande d'envisager des schémas de marche en temps plus efficaces.

**Le schéma de correction de pression de [2]** Afin de réduire le coût de la marche en temps, dans [2] on propose un schéma de correction de pression inspiré par [GQ98]. Pour réduire le couplage entre la conservation de la quantité de mouvement et la conservation de la masse, on considère une formulation non stabilisée avec vitesse discontinue et pression continue. L'analyse de la méthode appliquée au problème de Stokes instationnaire est effectuée dans [1, §6.3], et son extension aux équations de Navier–Stokes complètes est en cours [17].

Le principe des méthodes de correction de pression consiste à résoudre les équations de conservation de la quantité de mouvement et de la masse de manière indépendante, et ensuite corriger la vitesse par une projection sur l'espace des fonctions à divergence (discrète) nulle. Cette dernière étape peut être formulée comme un problème de Poisson pour l'incrément de pression avec une condition fictive de Neumann homogène au bord ; voir [2, eq. (8)] et [1, §6.3.2] pour plus de détails. Ce n'est que sur la première approximation de la vitesse que les conditions au bord sont imposées (de manière faible), tandis que la deuxième prend en charge la contrainte d'incompressibilité.

La méthode de correction de pression originale est due à Chorin [Cho68] et Temam [Tem68]. Une forme incrémentale a été ensuite proposée par Goda [God79], et une variante du second ordre par Van Kan [VK86]. Comme remarqué par Karniadakis et Sherwin [KS04], les méthodes de correction de pression montrent un intérêt particulier à grand nombre de Reynolds. Dans ce cas, les solveurs monolytiques sont souvent mis en échec par le mauvais conditionnement du problème discret, et leur applicabilité aux simulations tridimensionnelles à large échelle est limitée. En outre, l'effet de la condition au bord fictive sur la pression diminue à grand nombre de Reynolds ; voir, p.e., [2, Figure 2].

Soit  $\mathcal{T}_h$  un maillage simplicial conforme [1, Définition 1.29] et considérons, par simplicité, une partition de l'intervalle temporel  $(0, t_F)$  en  $N$  pas de temps  $\delta t$ . Pour  $k \geq 1$  on définit les espaces discrets suivants :

$$U_h \stackrel{\text{def}}{=} [\mathbb{P}_d^k(\mathcal{T}_h)]^d, \quad \mathcal{P}_h \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{P}_d^k(\mathcal{T}_h)/\mathbb{R}, \quad \mathcal{X}_h \stackrel{\text{def}}{=} U_h \times \mathcal{P}_h,$$

où  $\mathcal{P}_d^k(\mathcal{T}_h) \stackrel{\text{def}}{=} \{v_h \in C^0(\mathcal{T}_h) \mid v_h|_T \in \mathbb{P}_d^k(T) \forall T \in \mathcal{T}_h\}$  est l'espace des polynômes de degré total inférieur ou égale à  $k$  et globalement continus dans  $\Omega$ . Le terme diffusif est discrétisé à l'aide de la forme bilinéaire  $a_h \in \mathcal{L}(U_\dagger \times U_\dagger, \mathbb{R})$  suivante :

$$a_h(w, v) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^d a_h^{\text{sip}}(w_i, v_i),$$

Pour le couplage vitesse-pression on utilise encore la forme bilinéaire  $b_h$  définie par (4.43), en remarquant que le terme d'interface comportant les sauts du deuxième argument de  $b_h$  est nul car  $\mathcal{P}_h \subset P_\dagger$  (voir (4.41)) et les éléments de  $P_\dagger$  sont continus presque partout aux interfaces<sup>9</sup>. Pour le terme de convection non linéaire, on retiendra la forme trilinéaire  $t_h$  (4.46). La méthode de correction de pression consiste à résoudre successivement les deux problèmes suivants pour  $n \in \{0, \dots, N-1\}$  :

- (i) Trouver  $\tilde{u}_h^{n+1} \in U_h$  tel que, pour tout  $v_h \in U_h$ ,

$$\delta t^{-1}(\tilde{u}_h^{n+1} - u_h^n, v_h)_{L^2(\Omega)} + \nu a_h(\tilde{u}_h^{n+1}, v_h) + t_h(\tilde{u}_h^{n+1}, \tilde{u}_h^{n+1}, v_h) + b_h(v_h, p_h^n) = f_h^{n+1}; \quad (4.49a)$$

9. Voir, p.e., [1, Lemme 4.2].

(ii) Trouver  $u_h^{n+1} \in U_h$  et  $p_h^{n+1} \in \mathcal{P}_h$  tels que

$$\begin{cases} \delta t^{-1}(u_h^{n+1} - \tilde{u}_h^{n+1}, v_h)_{L^2(\Omega)} + b_h(v_h, p_h^{n+1} - p_h^n) = 0 & \forall v_h \in U_h, \\ b_h(u_h^{n+1}, q_h) = 0 & \forall q_h \in \mathcal{P}_h. \end{cases} \quad (4.49b)$$

Le problème (4.49b) peut être classiquement découplé en un problème de Poisson avec conditions de flux nul au bord pour l'incrément de pression  $p_h^{n+1} - p_h^n$  plus une expression explicite pour la vitesse  $u_h^{n+1}$ .

Dans [1, §6.3] on prouve la convergence de l'algorithme appliqué au problème de Stokes instationnaire,

$$\partial_t u - \Delta u_i + \partial_i p = f_i \quad \text{dans } \Omega \times (0, t_F), i \in \{1, \dots, d\}, \quad (4.50a)$$

$$\partial_i u_i = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, t_F), \quad (4.50b)$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times (0, t_F), \quad (4.50c)$$

$$u(x, t = 0) = u_0 \quad \text{dans } \Omega \quad (4.50d)$$

$$\langle p \rangle_\Omega = 0 \quad \text{dans } (0, t_F), \quad (4.50e)$$

Pour une fonction du temps  $f(t)$  on note  $f^n = f(t^n)$  pour tout  $n \in \{0, \dots, N-1\}$ . Pour tout  $n \in \{0, \dots, N-1\}$ , on introduit la projection de Stokes de la solution exacte  $(u^n, p^n)$  obtenue en résolvant le problème suivant : Trouver  $(w_h^n, r_h^n) \in \mathcal{X}_h$  t.q.

$$\begin{aligned} a_h(w_h^n, v_h) + b_h(v_h, r_h^n) &= (-\Delta u^n + \nabla p^n, v_h)_{[L^2(\Omega)]^d} \quad \forall v_h \in U_h, \\ -b_h(w_h^n, q_h) &= 0 \quad \forall q_h \in \mathcal{P}_h. \end{aligned}$$

**Théorème 4.25** (Estimation du taux de convergence pour la vitesse). *Soit  $(u, p)$  la solution de (4.50) et supposons, de plus, qu*

- (i)  $u \in C^2([0, t_F]; [L^2(\Omega)]^d) \cap C^1([0, t_F]; [H^{k+1}(\mathcal{T}_h)]^d)$ ;
- (ii)  $p \in C^2([0, t_F]; L^2(\Omega)) \cap C^1([0, t_F]; H^k(\mathcal{T}_h))$ ;
- (iii) les choix initiaux  $u_h^0, \tilde{u}_h^0$  et  $p_h^0$  sont tels que

$$\|u_h^0 - w_h^0\|_{[L^2(\Omega)]^d} + \|\tilde{u}_h^0 - w_h^0\|_{[L^2(\Omega)]^d} \leq C(h^{k+1} + \delta t), \quad (4.51a)$$

$$\|\tilde{u}_h^0 - w_h^0\|_{\text{dG}} \leq C\delta t^{-1/2}(h^{k+1} + \delta t), \quad (4.51b)$$

$$\|\nabla(p_h^0 - r_h^0)\|_{[L^2(\Omega)]^d} \leq C, \quad (4.51c)$$

où  $C$  dénote une constante indépendante à la fois du pas de maillage  $h$  et du pas de temps  $\delta t$ . Alors, pour  $\delta t < 1$ , il existe  $C_{u,p}$  dépendant de normes bornées de  $u$  et  $p$  mais indépendant à la fois du pas de maillage  $h$  et du pas de temps  $\delta t$  tel que

$$\|u - u_h\|_{C^0([0, t_F]; [L^2(\Omega)]^d)} + \|u - \tilde{u}_h\|_{C^0([0, t_F]; [L^2(\Omega)]^d)} \leq C_{u,p}(h^{k+1} + \delta t), \quad (4.52a)$$

$$\left( \sum_{n=0}^N \delta t \|u^n - \tilde{u}_h^n\|_{\text{dG}}^2 \right)^{1/2} \leq C_{u,p}(h^k + \delta t). \quad (4.52b)$$

**Théorème 4.26** (Estimation du taux de convergence pour la pression). *Admettons les hypothèses du Théorème 4.25, et supposons, de plus que*

- (i)  $u \in C^3([0, t_F]; [L^2(\Omega)]^d) \cap C^2([0, t_F]; [H^{k+1}(\mathcal{T}_h)]^d)$ ;
- (ii)  $p \in C^3([0, t_F]; L^2(\Omega)) \cap C^2([0, t_F]; H^k(\mathcal{T}_h))$ ;

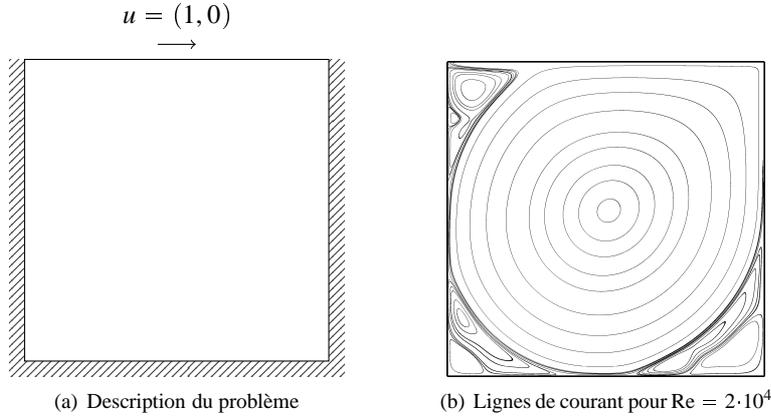


FIGURE 4.4 – Le problème de la cavité entraînée.

(iii) les choix initiaux sont tels que

$$\|\tilde{u}_h^0 - w_h^0\|_{[L^2(\Omega)]^d} + \|u_h^0 - w_h^0\|_{[L^2(\Omega)]^d} \leq C\delta t(h^k + \delta t), \quad (4.53a)$$

$$\|\tilde{u}_h^0 - w_h^0\|_{\text{dG}} \leq C\delta t^{1/2}(h^k + \delta t), \quad (4.53b)$$

$$\|\nabla(p_h^0 - r_h^0)\|_{[L^2(\Omega)]^d} \leq C(h^k + \delta t), \quad (4.53c)$$

où  $C$  dénote une constante indépendante à la fois du pas de maillage  $h$  et du pas de temps  $\delta t$ . Alors, il existe  $C_{u,p}$  dépendant de normes bornées de  $u$  et  $p$  mais indépendant à la fois du pas de maillage  $h$  et du pas de temps  $\delta t$  tel que

$$\|p - p_h\|_{L^2((0,T];L^2(\Omega))} \leq C_{u,p}(h^k + \delta t).$$

### 4.6.3 Exemples numériques

Dans cette section on montre quelques exemples numériques pour les méthodes décrites aux sections précédentes.

**Le problème de la cavité entraînée résolu avec la méthode de [10]** On considère l'application de la méthode de compressibilité artificielle pour les équations de NSI au problème de la cavité entraînée en  $d = 2$ , qui modélise l'écoulement dans une cavité avec paroi supérieure glissante ; voir Figure 4.4. Ce problème est un cas test assez classique en hydrodynamique car, malgré la simplicité du domaine, il présente des configurations compliquées avec des tourbillons d'échelles très contrastées lorsque le nombre de Reynolds augmente. En outre, la pression présente des singularités aux angles supérieures de la cavité, ce qui peut mettre en défaut les méthodes numériques. Dans la Figure 4.5 on montre les résultats obtenus avec la méthode de compressibilité artificielle pour nombres de Reynolds allant de 1000 à 20000, ainsi qu'une comparaison avec des résultats de référence. Ce test permet d'apprécier la stabilité de la méthode dans le cas de convection dominante, ainsi que la bonne précision lorsqu'on utilise un degré polynomial élevé pour les espaces  $U_h$  et  $P_h$ .

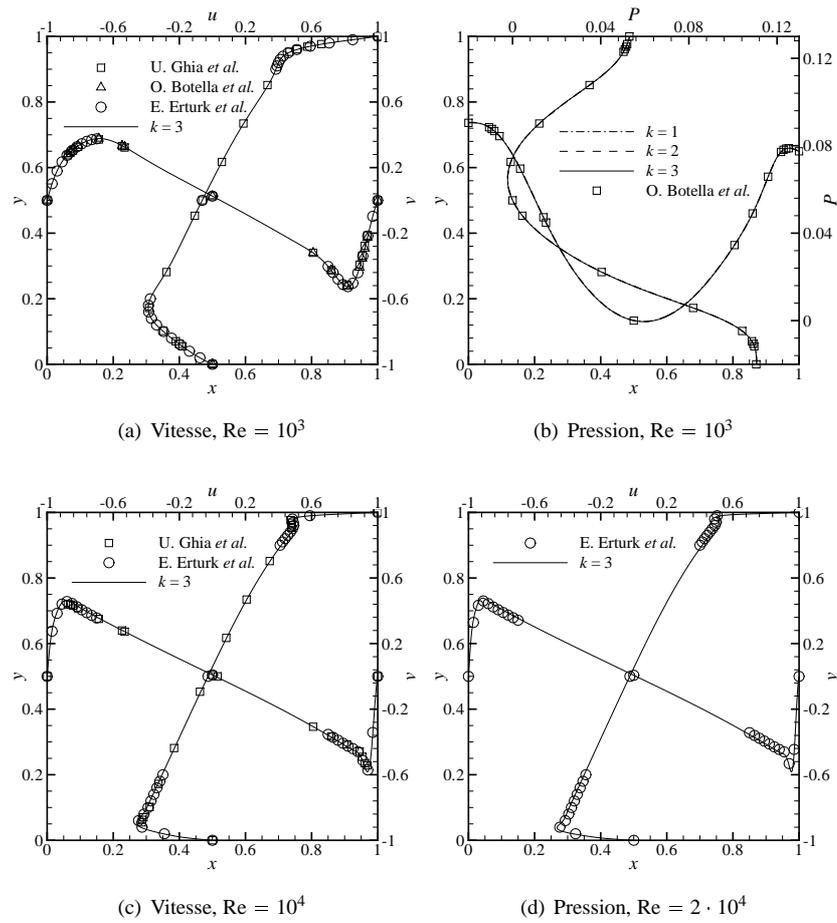


FIGURE 4.5 – Validation des résultats obtenus avec la méthode de compressibilité artificielle de [12] pour le problème de la cavité entraînée (valeurs des composantes de vitesse et pression aux médiatrices du domaine).

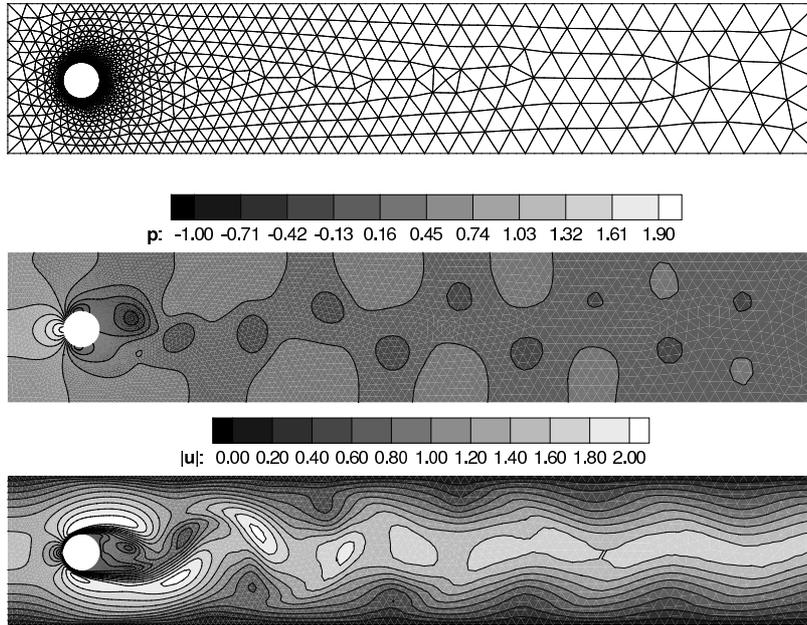


FIGURE 4.6 – Maillage pour le cas test de Schäfer–Turek [Sw96], vitesse et pression pour la méthode de [10] avec  $k = 3$ .

TABLE 4.2 – Validation de résultats pour le cas test de Schäfer–Turek [Sw96] obtenus avec la méthode de [10]. *Notation.*  $C_{L,\max}$  = maximum du coefficient de poussée,  $C_{D,\max}$  = maximum du coefficient de traînée,  $St$  = nombre de Strouhal.

	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	Ref. [Sw96]
$C_{L,\max}$	0.9519	0.9897	0.9907	$1.0000 \pm 0.0100$
$C_{D,\max}$	3.2166	3.2269	3.2274	$3.2300 \pm 0.0100$
$St$	0.2976	0.2976	0.2980	$0.3000 \pm 0.0050$

**Le problème du cylindre de Schäfer–Turek résolu avec la méthode de [12]** La méthode de marche en temps de [10] est ici validée avec le cas test de Schäfer–Turek [Sw96] qui représente l’écoulement laminaire autour d’un cylindre. Le domaine est un rectangle avec un trou circulaire légèrement désaxé par rapport à la médiatrice horizontale. Le nombre de Reynolds est 100, et on impose des conditions de paroi sur les côtés horizontaux, une vitesse d’entrée horizontale sur le côté de gauche, et une pression sur le côté de droite. On renvoie à [Sw96] pour une description précise ainsi que pour une collection complète de résultats numériques. Dans la Figure 4.6 on montre le maillage ainsi que la solution à un instant donné. Dans la Figure 4.7 on montre l’évolution en temps des coefficients de traînée et de poussée estimés avec  $k \in \{1, 2, 3\}$ , et dans la Table 4.2 on montre une comparaison des valeurs maximales  $C_{D,\max}$  et  $C_{L,\max}$  avec les valeurs de référence.

**Le problème de Kovasznay résolu avec la méthode de [1]** On vérifie les propriétés numériques de la méthode de [1] en utilisant la solution analytique calculée par

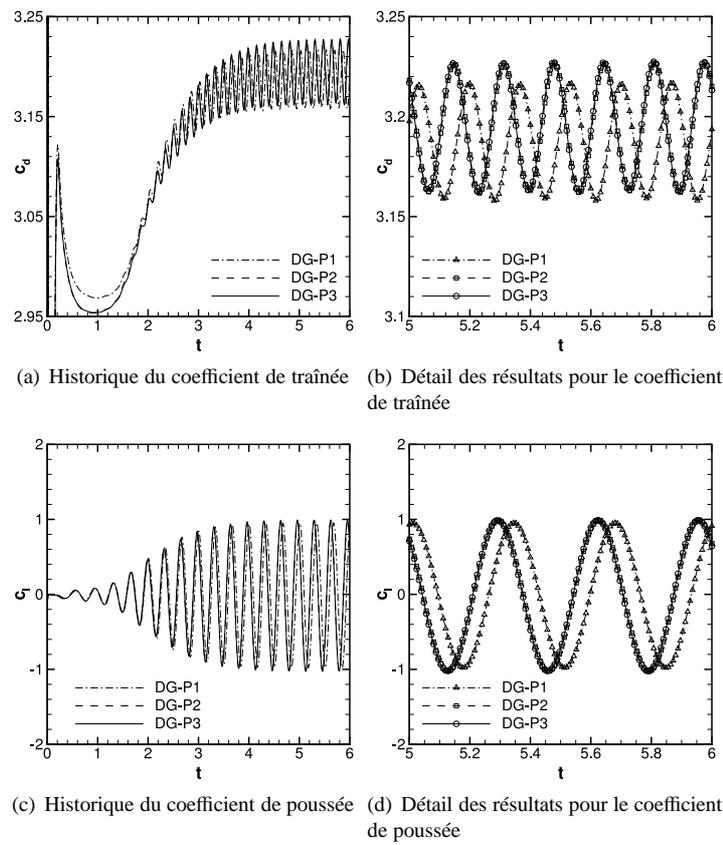


FIGURE 4.7 – Coefficients de poussée et de traînée estimés par la méthode de [10] pour le cas test de [Sw96].

TABLE 4.3 – Convergence de la méthode de [1] pour le problème de Kovasznay. *Notation.*  $e_h = (e_{h,u}, e_{h,p}) \stackrel{\text{def}}{=} (u - u_h, p - p_h)$ .

$h$	$\ e_{h,u}\ _{L^2(\Omega)^d}$	ordre	$\ e_{h,p}\ _{L^2(\Omega)}$	ordre	$\ e_h\ _{\text{sto}}$	ordre
$5.00e-1$	$8.87e-01$	–	$1.62e+00$	–	$1.19e+01$	–
$2.50e-1$	$2.39e-01$	1.89	$6.11e-01$	1.41	$7.26e+00$	0.71
$1.25e-1$	$5.94e-02$	2.01	$2.01e-01$	1.60	$3.68e+00$	0.98
$6.25e-2$	$1.59e-02$	1.90	$7.40e-02$	1.44	$1.85e+00$	0.99
$3.12e-2$	$4.17e-03$	1.93	$3.14e-02$	1.23	$9.25e-01$	1.00

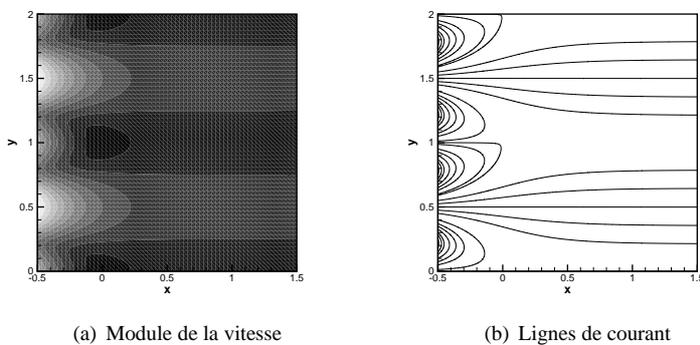


FIGURE 4.8 – Solution du problème de Kovasznay approchée par la méthode de [7] avec  $k = 1$  et  $h = 3.12e - 2$ .

Kovasznay [Kov48] sur le domaine  $\Omega = (-0.5, 1.5) \times (0, 2)$ ,

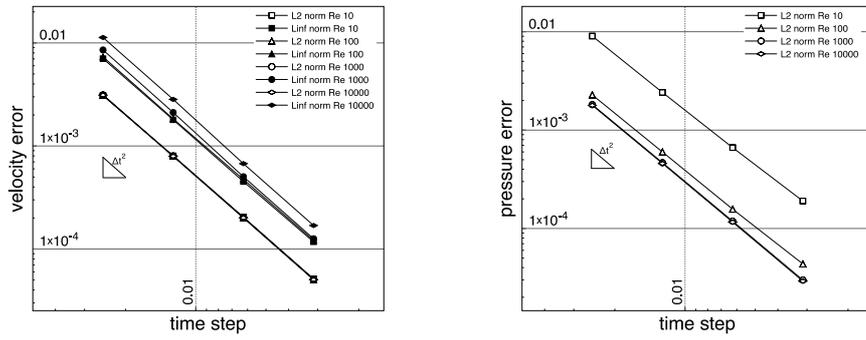
$$u_1 = 1 - e^{-\pi x_2} \cos(2\pi x_2), \quad u_2 = -\frac{1}{2} e^{\pi x_1} \sin(2\pi x_2), \quad p = -\frac{1}{2} e^{\pi x_1} \cos(2\pi x_2) - \bar{p},$$

où  $\bar{p} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{|\Omega|^d} \int_{\Omega} -\frac{1}{2} e^{\pi x_1} \cos(2\pi x_2) \simeq -0.920735694$ ,  $\nu = \frac{1}{3\pi}$  et  $f = 0$ . Dans la Figure 4.8 on montre une solution numérique pour  $k = 1$ , et dans la Table 4.3 on étudie la convergence de la méthode sur une famille de maillages triangulaires uniformément raffinés pour  $k = 1$ .

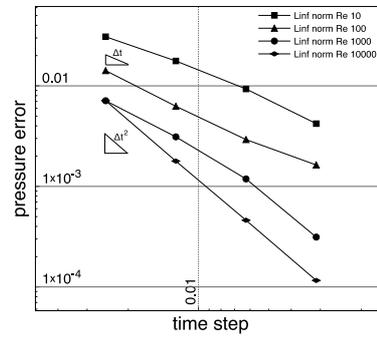
**Le cas test de Couzy résolu avec la méthode de [2]** Afin d'évaluer la précision en temps du schéma de correction de pression introduit dans [2], on utilise le cas test proposé par Couzy [Cou95]. Dans ce cas, le domaine est le cylindre  $\Omega \times (0, 0.75)$ , avec domaine spatial  $\Omega = (0, 1)^2 \setminus (0.4, 0.6)^2$  constitué par un carré avec un trou au milieu. On considère la solution exacte

$$\begin{aligned} u_1 &= -\cos(\pi x/2) \sin(\pi y/2) \sin(\pi t) \\ u_2 &= \sin(\pi x/2) \cos(\pi y/2) \sin(\pi t) \\ p &= -\pi \sin(\pi x/2) \sin(\pi y/2) \sin(\pi t). \end{aligned}$$

Le terme source et la valeur de la vitesse au bord sont déduits à partir des expressions précédentes. Dans la Figure 4.9 on étudie la convergence en temps du schéma.



(a) Erreur en norme  $L^2((0, t_F); [L^2(\Omega)]^d)$  pour la vitesse (b) Erreur en norme  $L^2((0, t_F); L^2(\Omega))$  pour la pression



(c) Erreur en norme  $L^\infty((0, t_F); L^2(\Omega))$  pour la pression

FIGURE 4.9 – Précision en temps du schéma de [2] pour le cas test de Couzy [Cou95].

Afin d'assurer que l'erreur en espace est négligeable par rapport à l'erreur en temps, la discrétisation en espace est basée sur un maillage composé de 24400 éléments quadrilatéraux, et les espaces  $U_h = [\mathbb{P}_d^2(\mathcal{T}_h)]^d$  et  $P_h = \mathcal{P}_d^2(\mathcal{T}_h)/\mathbb{R}$  sont utilisés pour la vitesse et la pression respectivement. Dans ce cas, la méthode d'Euler implicite a été remplacée par une méthode BDF2 dans (4.49a), et (4.49b) a été adaptée selon les indications fournies dans [2].



## Chapitre 5

# Méthodes volumes finis

Ce chapitre relate les travaux [3–6, 23, 24, 26] concernant les méthodes de Volumes Finis (VF) pour des problèmes diffusifs. On se concentrera, en particulier, sur les méthodes avec degrés de liberté centrées aux mailles. La structure est la suivante : dans §5.1 on trace un bilan des méthodes VF utilisés dans les applications IFP Energies nouvelles, et on propose une classification qui fournit le fil conducteur de l'exposition ; dans §5.2 on traite des méthodes VF en formulation flux. Plus précisément, on se concentre sur la famille de méthodes analysées dans [4], qui couvre comme cas particulier le schéma dit *en L* de [AEMN08] ; dans §5.3 on considère une deuxième catégorie de méthodes VF pour EDPs du second ordre inspirées par le problème en formulation faible. Cette section traite, en particulier, de [5], où on propose un cadre d'analyse unifié qui s'applique aussi aux méthodes de Galerkin discontinues ; la section 5.4 est consacrée à une troisième famille de méthodes de bas ordre récemment introduite par l'auteur, les *méthodes de Galerkin centrées aux mailles*. Ces méthodes se basent sur des espaces polynômiaux par morceaux obtenus à l'aide d'une reconstruction inspirée par [AEMN08, EGH09]. Les idées principales sont d'abord introduites en utilisant un problème modèle de diffusion hétérogène. Ensuite, on étudie plus en détail les propriétés de l'espace discret dans le cas homogène puis on discute l'application de la méthode au problème de Navier–Stokes incompressible. Enfin, dans §5.5, on discute brièvement des aspects liés à la mise en œuvre des méthodes de Galerkin centrées aux mailles en relation avec une des thèses en cours.

### 5.1 Introduction

Grâce à leurs propriétés de robustesse et à leur coût de calcul réduit, les méthodes VF sont aujourd'hui utilisées par de nombreux simulateurs industriels en mécanique des fluides. Le principe à la base de ces méthodes dans leur forme originale consiste à intégrer l'EDP à discrétiser sur des *volumes de contrôle*, puis d'appliquer le Théorème de Gauss pour récrire les intégrales de volume comportant la divergence d'un flux comme des intégrales de bord. Les flux exacts à travers les faces du volume de contrôle sont ensuite remplacés par une approximation consistante et conservative (le *flux numérique*). Historiquement, c'est avant tout dans le contexte des lois de conservation hyperboliques que les propriétés de stabilité et de robustesse des méthodes VF ont joué un rôle important pour leur succès. Il existe aujourd'hui une vaste littérature sur le sujet, ainsi que des nombreuses approches pour le calcul des flux numériques ; voir,

p.e., [1, §3.2] pour une introduction.

Dans le cadre des EDPs du second ordre, ces avantages deviennent moins clairs, car les propriétés de consistance et de stabilité des flux numériques ne sont pas évidentes à obtenir sur des maillages quelconques, dont l'importance dans le cadre des applications IFP Energies nouvelles a été discutée dans §4.2.1. On considère, par la suite, le problème modèle (4.14) rappelé ci-dessous :

$$-\nabla \cdot (\kappa \nabla u) = f \quad \text{dans } \Omega, \quad (5.1a)$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \quad (5.1b)$$

où  $\kappa$  est un champs tensoriel symétrique, défini positif et constant par morceaux, et  $f \in L^2(\Omega)$ . En formulation faible, il s'agit de

$$\text{Trouver } u \in V \text{ t.q. } a(u, v) = \int_{\Omega} f v \text{ pour tout } v \in V, \quad (5.2)$$

avec  $V \stackrel{\text{def}}{=} H_0^1(\Omega)$  et  $a(u, v) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega} \kappa \nabla u \cdot \nabla v$ . Le problème (5.1a) constitue l'archétype du modèle de Darcy pour les écoulement en milieux poreux (voir §4.3.1), et il est à la base du schéma universellement utilisé dans l'industrie du pétrole pour le problème de Darcy compositionnel [24]; voir aussi [Mic01, Chapitre 6] et [EHM03]. Idéalement, une discrétisation VF de (5.1) devrait (i) être consistante et stable sur des maillages polyédriques généraux, et se montrer robuste par rapport à l'hétérogénéité et à l'anisotropie du tenseur de diffusion  $\kappa$ ; (ii) donner lieu à des problèmes algébriques bien conditionnés; (iii) avoir un stencil compact à la fois pour réduire l'occupation de mémoire et pour minimiser les échanges dans le cadre des applications parallèles. Ce point est souvent mis en avant dans les applications industrielles, où la robustesse et la vitesse d'exécution sont considérées des impératifs absolus; (iv) dans le cas des plates-formes multi-physique, il est souhaitable que le schéma puisse s'étendre naturellement à d'autres problèmes comportant des termes diffusifs. A ce jour, on n'a que des réponses partielles à ces questions, et il n'existe pas de schéma VF universel. Dans la brève introduction suivante on considère trois familles de schémas VF pour les problèmes diffusifs. Le schéma deux-points est l'ancêtre des méthodes VF, et il satisfait toutes les propriétés énoncées ci-dessus sur les maillages  $\kappa$ -orthogonaux; voir Définition 4.10. Malheureusement, il est pratiquement impossible d'assurer la  $\kappa$ -orthogonalité dans le cadre des applications IFP Energies nouvelles à cause des fortes hétérogénéités du tenseur de diffusion et de l'incorporation des effets d'érosion dans le maillage de calcul; voir §4.2.1. Une extension possible du schéma à deux points à des maillages généraux consiste à utiliser des constructions locales pour le calcul des flux. De ce fait, les schémas qui en résultent sont dits *multi-points*. Le défaut principal des schémas multi-point est le potentiel manque de stabilité sur des maillages généraux et en présence de perméabilité hétérogène. Il est en outre difficile de trouver des critères suffisants de stabilité à la fois calculables et précis. Une possible réponse à ce problème est fournie par les schémas VF variationnels, qui vérifient une propriété de coercivité inconditionnelle. En contrepartie, il n'ont souvent pas un stencil compact, et leur extension à d'autres problèmes comportant un terme de diffusion est moins naturelle que dans le cas des méthodes d'éléments finis (EF). Dans §5.4 on présente un cas particulier de méthodes variationnelles introduites par l'auteur dans [3, 6, 15]. Il s'agit d'une famille de méthodes inspirées par les EF non conformes qui offre des meilleures perspectives en termes d'intégration dans une plate-forme multi-physique.

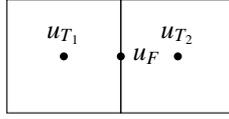


FIGURE 5.1 – Inconnues intervenant dans le calcul du flux en deux points

**La méthode deux-points** Classiquement, l'approximation VF du problème (5.1) est basée sur un flux numérique à *deux points*. Comme on le verra, ce choix n'est consistant que sous l'hypothèse de maillages  $\kappa$ -orthogonaux (voir Définition 4.10), souvent impossible à satisfaire en pratique. Soit  $\mathcal{T}_h$  un maillage du domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  formé d'éléments polygonaux (polyédriques en  $d = 3$ ) et aligné avec les discontinuités du tenseur  $\kappa$ . Intégrant l'équation (5.1a) sur un élément  $T \in \mathcal{T}_h$  on trouve

$$-\sum_{F \subset \partial T} \int_F \kappa \nabla u \cdot \mathbf{n}_{T,F} = \langle f \rangle_T, \quad (5.3)$$

où on a noté  $\mathbf{n}_{T,F}$  la normale à  $F$  sortante de  $T$  et  $\langle f \rangle_T \stackrel{\text{def}}{=} \int_T f / |T|_d$ . Soit

$$\mathbb{T}_h \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R}^{\mathcal{T}_h}$$

l'ensemble des degrés de liberté, que l'on pourra interpréter, selon le besoin, comme des valeurs ponctuelles aux centres des mailles ou bien comme des valeurs moyennes sur les mailles, et soit  $\mathbf{u}_h \in \mathbb{T}_h$  la solution discrète avec  $\mathbf{u}_h = (u_T)_{T \in \mathcal{T}_h}$ . Afin d'obtenir une approximation du flux de  $u$  à travers  $F$ , on introduit les inconnues auxiliaires  $(u_F)_{F \in \mathcal{F}_h} \in \mathbb{R}^{\mathcal{F}_h}$  (voir Figure 5.1), et on pose

$$\forall T \in \mathcal{T}_h, \forall F \in \mathcal{F}_T, \quad \Phi_{T,F}(\mathbf{u}_h) \stackrel{\text{def}}{=} |F|_{d-1} \lambda_{T,F} \frac{u_F - u_T}{d_{T,F}},$$

avec  $\lambda_{T,F}$  donné par (4.19) et

$$\forall T \in \mathcal{T}_h, \forall F \in \mathcal{F}_T, \quad d_{T,F} \stackrel{\text{def}}{=} \text{dist}(x_T, F). \quad (5.4)$$

Dans la formule (5.4) on a noté par  $x_T$  le point de  $T$  qui garantit la condition de  $\kappa$ -orthogonalité. Tout maille  $T \in \mathcal{T}_h$  est supposée étoilée par rapport à son centre  $x_T$ . Les inconnues auxiliaires aux faces de bord sont éliminées en utilisant la condition (5.1b), ainsi obtenant, pour toute  $F \subset \partial T \cap \partial \Omega$ ,

$$\Phi_F(\mathbf{u}_h) \stackrel{\text{def}}{=} \Phi_{T,F}(\mathbf{u}_h) = -\frac{\lambda_{T,F}}{d_{T,F}} u_T. \quad (5.5)$$

Les inconnues aux interfaces sont éliminées en imposant la continuité du flux numérique,

$$\forall F \subset \partial T_1 \cap \partial T_2, \quad |F|_{d-1} \lambda_{T_1,F} \frac{u_F - u_{T_1}}{d_{T_1,F}} + |F|_{d-1} \lambda_{T_2,F} \frac{u_F - u_{T_2}}{d_{T_2,F}} = 0.$$

On en tire facilement

$$\forall F \subset \partial T_1 \cap \partial T_2, \quad u_F = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} u_{T_1} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} u_{T_2},$$

avec  $\alpha_i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\lambda_{T_i,F}}{d_{T_i,F}}$  pour  $i \in \{1, 2\}$ . Le flux numérique pour toute interface  $F \subset \partial T_1 \cap \partial T_2$  est donc<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} \Phi_F(\mathbf{u}_h) &\stackrel{\text{def}}{=} \Phi_{T_1,F}(\mathbf{u}_h) = -\Phi_{T_2,F}(\mathbf{u}_h) \\ &= \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} (u_{T_2} - u_{T_1}) = \frac{\lambda_{T_1,F} \lambda_{T_2,F}}{\lambda_{T_1,F} d_{T_2,F} + \lambda_{T_2,F} d_{T_1,F}} (u_{T_2} - u_{T_1}). \end{aligned} \quad (5.6)$$

Le problème discret s'écrit donc :

$$\text{Trouver } \mathbf{u}_h \in \mathbb{T}_h \text{ tel que, pour tout } T \in \mathcal{T}_h, - \sum_{F \subset \partial T} \Phi_{T,F}(\mathbf{u}_h) = \langle f \rangle_T. \quad (5.7)$$

*Remarque 5.1* (Lien avec la méthode SWIP). La méthode (5.7) est équivalente à la méthode SWIP modifiée comme décrit dans le dernier paragraphe de la §4.3.1 lorsque  $V_h = \mathbb{P}_d^0(\mathcal{T}_h)$ . Pour s'en convaincre, on définit l'opérateur bijectif  $\mathfrak{S}_h : \mathbb{T}_h \rightarrow \mathbb{P}_d^0(\mathcal{T}_h)$  tel que

$$\mathbb{T}_h \ni \mathbf{v}_h \mapsto v_h \in V_h \text{ avec } v_h|_T = v_T \text{ pour tout } T \in \mathcal{T}_h. \quad (5.8)$$

Le problème (5.7) admet alors la forme équivalente

$$\text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tel que } a_h^{2\text{pt}}(u_h, v_h) = \int_{\Omega} f v_h \text{ pour tout } v_h \in V_h,$$

avec

$$a_h^{2\text{pt}}(u_h, v_h) \stackrel{\text{def}}{=} - \sum_{F \in \mathcal{F}_h} \Phi_F(\mathfrak{S}_h^{-1}(u_h)) \llbracket v_h \rrbracket \equiv a_h^{\text{swip}}(u_h, v_h).$$

La convergence de la méthode (5.7) est obtenue comme cas particulier de l'analyse de [4] lorsque on considère des maillages  $\kappa$ -orthogonaux. Cette hypothèse est nécessaire à prouver la consistance du flux numérique au sens de [4, eq. (2.8)]. Pour conclure, il est utile d'observer que la méthode à deux points est inconditionnellement coercive, et elle donne lieu à une matrice M, ce qui garantit un principe du maximum discret.

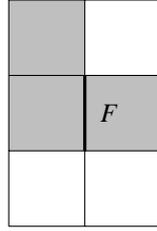
**Flux numériques multi-points** Dans le contexte de la simulation de réservoir, une façon d'étendre les méthodes VF sous la forme (5.7) à des maillages non orthogonaux a été proposée indépendamment par Aavatsmark, Barkve, Bøe et Mannseth [ABBM94, ABBM96, ABBM98a, ABBM98b] et Edwards et Rogers [ER94, ER98]. L'idée de base consiste à remplacer le flux numérique à deux points par une version *multi-points* pouvant dépendre des valeurs de la solution discrète dans d'autres mailles que celles qui partagent la face. Plus précisément, soit  $F \in \mathcal{F}_h$  et soit  $\Phi_F(\mathbf{u}_h)$  le flux à travers  $F$  orienté selon la normale à  $F$ . Pour un ensemble de mailles  $\mathcal{S}_F \subset \mathcal{T}_h$  à préciser selon la méthode (voir Figure 5.2 pour un exemple), on pose

$$\Phi_F(\mathbf{u}_h) = \sum_{T \in \mathcal{S}_F} \tau_T^F u_T, \quad (5.9)$$

avec  $\tau_T^F \in \mathbb{R}$  pour tout  $T \in \mathcal{S}_F$ . En définissant l'orientation des faces comme suit :

$$\forall F \in \mathcal{F}_h, \forall T \in \mathcal{T}_F, \quad \epsilon_{T,F} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{n}_T \cdot \mathbf{n}_F,$$

1. Comme dans le chapitre précédent, on fixe une orientation pour chaque face interne  $F \in \mathcal{F}_h^i$  qui induit une numérotation sur les mailles partageant  $F$  telle que  $F \subset \partial T_1 \cap \partial T_2$  et  $\mathbf{n}_F = \mathbf{n}_{T_1,F}$ .

FIGURE 5.2 – Un exemple d'ensemble  $\mathcal{S}_F$  pour la méthode multi-point de [AEMN08]

la générique méthode multi-points s'écrit

$$\text{Trouver } \mathbf{u}_h \in \mathbb{T}_h \text{ tel que, pour tout } T \in \mathcal{T}_h, - \sum_{F \subset \partial T} \epsilon_{T,F} \Phi_F(\mathbf{u}_h) = \langle f \rangle_T. \quad (5.10)$$

Par la suite, on dira qu'une méthode de la forme (5.10) est exprimée en *formulation flux*. Dans le cas des méthodes multi-points, les coefficients  $\{\tau_T^F\}_{T \in \mathcal{S}_F}$  dans (5.9) sont en général déterminés à l'aide d'une reconstruction locale d'un potentiel<sup>2</sup> affine par morceaux, comme on verra plus en détail dans la section suivante. Si, d'un côté, l'introduction d'un flux multi-points résout le problème de la consistance sur des maillages  $\kappa$ -orthogonaux<sup>3</sup>, elle ne garantit pas la stabilité de la méthode résultante. En outre, les conditions théoriques suffisantes à garantir la stabilité demeurent souvent excessivement restrictives par rapport à ce que l'on observe en pratique. Dans Klausen and Winther [KW06], l'analyse de convergence de la méthode en O de [ABBM96] est basée sur l'équivalence avec un schéma d'EF mixtes, et elle ne s'applique qu'au cas de maillages de quadrilatères en dimension 2. Une analyse générale du schéma dit en O [ABBM96] a été effectuée par Agélas et Masson [AM08a, AM08b], qui proposent des conditions suffisantes pour des maillages polyédriques et des champs de diffusion  $\kappa \in [L^\infty(\Omega)]^{d,d}$ . Plus récemment, le lien entre la méthode en O et une procédure de condensation pour le schéma d'EF mixtes a été étudié par Vohralík et Wohlmuth [VW10]. L'analyse du schéma dit en L de [AEMN08] sur des maillages généraux a été effectuée par l'auteur dans [4, §3.3]; voir §5.2. Dans ce cas, on fournit un critère suffisant calculable pour vérifier la coercivité du schéma pour un couple maillage-tenseur de diffusion donné. Un point important à noter est que le choix du centre de maille peut avoir un impact significatif sur les propriétés des méthodes multi-points, comme on le montre, p.e., dans [VW10]. Pour des problèmes de diffusion pure, le choix du centre de maille devrait être guidé par des considérations sur le stencil de la méthode et sur le conditionnement du système linéaire. Lorsque des termes d'ordre plus bas sont aussi présents, il faut aussi tenir compte des propriétés d'intégration de la quadrature associée au centre de maille. Dans ce cas, le barycentre  $\bar{x}_T = \langle x \rangle_T$  occupe une position privilégiée.

**Méthodes variationnelles** Une possible solution aux problèmes de stabilité des schémas multi-points est fournie par les méthodes de Différences Finies Mimétiques (DFM) [BLS05b, BLS05a, BadVLM10] par les méthodes Volumes Finis Mixtes/Hybrides (VFMH) [DE06, EGH09, DEGH10]. Dans les deux cas, l'idée de base consiste à ajouter des inconnues de faces, ainsi utilisant  $\mathbb{R}^{\mathcal{T}_h} \times \mathbb{R}^{\mathcal{F}_h}$  comme espace des degrés de liberté, et à concevoir la méthode en se basant sur la formulation variationnelle (4.15) plutôt que sur

2. Voir [1, Définition 4.31].

3. Sous hypothèse que la reconstruction sur laquelle est basé le calcul des coefficients de l'expansion linéaire (5.9) soit bien définie.

le bilan (5.3). En ce qui concerne les méthodes VFMH, les inconnues aux faces sont utilisées dans le cadre d'un opérateur de reconstruction de gradient qui est asymptotiquement consistant pour les fonctions régulières et faiblement consistant pour les suites de fonctions discrètes bornées en une norme  $H_0^1(\Omega)$  discrète opportune<sup>4</sup>. L'analyse se fait alors par un argument de compacité similaire à celui décrit dans §4.5 dans le contexte des méthodes dG et inspirée par [EGH09]. La relation entre méthodes de DFM et VFMH a été récemment explorée par Droniou, Eymard, Gallouët et Herbin [DEGH10], qui ont montré l'équivalence algébrique pour des versions généralisées. Toutes ces méthodes sont inconditionnellement coercives, et elles s'appliquent à des couples maillages-tenseur de diffusion assez généraux. Le désavantage principal est lié à l'accroissement du nombre d'inconnues par rapport aux méthodes multi-points<sup>5</sup>. Une modification du schéma VFMH permettant d'éliminer les inconnues aux faces a été récemment proposée par Eymard, Gallouët et Herbin [EGH09]. L'idée principale est d'exprimer la valeur de l'inconnue de face en fonction d'un nombre limité d'inconnues de mailles à l'aide d'une construction locale. La méthode qui en résulte a l'avantage de s'exprimer uniquement en fonction des inconnues de mailles, mais elle présente un stencil élargi. En effet, à cause de la construction locale, l'interaction s'étend entre mailles qui ne sont pas des voisins. L'élargissement du stencil induit à la fois un remplissage plus important des matrices et un échange de données accru dans le cas parallèle. Ce dernier point est particulièrement critique dans les applications industrielles.

## 5.2 Flux numériques multi-points

Bien que les méthodes multi-points soient connues depuis une quinzaine d'année, leur analyse est beaucoup plus récente. On traite ici de [4], où on introduit un cadre d'analyse abstrait pour les méthodes FV en formulation flux et on l'utilise pour prouver la convergence d'une famille de schémas comprenant la méthode dite en L de [AEMN08]. L'ingrédient clé pour l'analyse est un espace de fonctions dense dans  $H_0^1(\Omega)$  et dont les éléments satisfont une condition de raccord des flux diffusifs aux interfaces. Les schémas multi-points ont un intérêt particulier dans la simulation numérique des bassins sédimentaires, car ils permettent de conserver la consistance sur des maillages non  $\kappa$ -orthogonaux tout en gardant un stencil compact.

### 5.2.1 Un cadre d'analyse abstrait

Le premier résultat [4] est une formalisation des outils d'analyse pour les schémas VF en formulation flux donnant lieu à un cadre clair et réutilisable. Une opération similaire a été entreprise dans [5] pour les méthodes en formulation variationnelle ; voir §5.3. Par la suite on suppose, par simplicité, que le tenseur de diffusion  $\kappa$  est constant par morceaux sur  $\mathcal{T}_h$ . La généralisation au cas où  $\kappa$  est régulier par morceaux est immédiate : il suffit, en effet, de le remplacer par sa projection  $L^2$  sur  $\mathbb{P}_d^0(\mathcal{T}_h)$  dans la formulation de la méthode. Au contraire, il n'est pas toujours possible de relâcher

4. Il s'agit pour la précision d'une seminorme  $H^1$ . Puisque, par simplicité, dans la suite on ne considérera que le cas de conditions au bord de Dirichlet homogènes, les deux concepts sont équivalents moyennant une inégalité de Poincaré.

5. Une réduction du nombre d'inconnues dans les systèmes issus de la méthode peut souvent être obtenue par condensation aux faces.

cette hypothèse<sup>6</sup>. Soit  $\mathbb{T}_h \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R}^{\mathcal{T}_h}$ . Pour  $f \in L^2(\Omega)$  on considère le problème (5.10). On rappelle que, pour tout  $F \in \mathcal{F}_h$ ,  $\Phi_F$  est une application affine de  $\mathbb{T}_h$  dans  $\mathbb{R}$  dite *flux numérique*. Une formulation équivalente de (5.10) est la suivante :

$$\text{Trouver } \mathbf{u}_h \in \mathbb{T}_h \text{ tel que } a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \langle f \rangle_T v_T \text{ pour tout } \mathbf{v}_h \in \mathbb{T}_h, \quad (5.11)$$

avec

$$a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) \stackrel{\text{def}}{=} - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{F \in \mathcal{F}_T} \epsilon_{T,F} \Phi_F(\mathbf{u}_h) v_T.$$

Les hypothèses garantissant la convergence de la méthode sont les suivantes :

- (i) *Existence d'un espace test continu dense dans  $H_0^1(\Omega)$* . Un élément clé dans l'argument de densité est la possibilité d'utiliser la projection/interpolation de fonctions régulières (dans un sens à préciser) comme fonctions test dans la méthode discrète ; voir §4.5. Cet espace entre en jeu également dans la consistance asymptotique de la méthode. On suppose, donc, qu'il existe  $\mathcal{D}$  dense dans  $H_0^1(\Omega)$  et tel que

$$\mathcal{D} \subset C^0(\bar{\Omega}) \cap C^2(\mathcal{T}_h),$$

où  $C^2(\mathcal{T}_h) \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in C^2(\bar{T}), \forall T \in \mathcal{T}_h\}$ .

- (ii) *Coercivité*. On définit, pour tout  $\mathbf{v}_h \in \mathbb{T}_h$ ,

$$\gamma_F(\mathbf{v}_h) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \frac{v_{T_1} d_{T_2,F} + v_{T_2} d_{T_1,F}}{d_{T_1,F} + d_{T_2,F}} & \text{si } F \subset \partial T_1 \cap \partial T_2, \\ 0 & \text{si } F \in \partial T \cap \partial \Omega, \end{cases}$$

avec  $d_{T_i,F}$ ,  $i \in \{1, 2\}$ , donnés par (5.4). Au niveau discret, le rôle de la norme  $H_0^1(\Omega)$  est joué par la norme suivante sur  $\mathbb{T}_h$  :

$$\forall \mathbf{v}_h \in \mathbb{T}_h, \quad \|\mathbf{v}_h\|_{\gamma,h}^2 \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{F \in \mathcal{F}_T} \frac{|F|^{d-1}}{d_{T,F}} |\gamma_F(\mathbf{v}_h) - v_T|^2. \quad (5.12)$$

On suppose que la méthode est stable au sens de la coercivité, c'est-à-dire, qu'il existe  $C_{\text{sta}} > 0$  indépendant du pas de maillage  $h$  tel que

$$\forall \mathbf{v}_h \in \mathbb{T}_h, \quad a_h(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) \geq C_{\text{sta}} \|\mathbf{v}_h\|_{\gamma,h}^2.$$

- (iii) *Consistance asymptotique faible*. La dernière condition exprime le fait que le flux numérique  $\Phi_F$  est une approximation du flux à travers  $F$ . Plus précisément, pour tout  $\varphi \in \mathcal{D}$  soit  $\boldsymbol{\varphi}_h \in \mathbb{T}_h$  tel que  $\boldsymbol{\varphi}_h = (\langle \varphi \rangle_T)_{T \in \mathcal{T}_h}$ . La condition de consistance demande que

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{F \in \mathcal{F}_T} \frac{d_{T,F}}{|F|^{d-1}} \left( \Phi_F(\boldsymbol{\varphi}_h) - |F|^{d-1} \langle \kappa \nabla \varphi \rangle_T \cdot \mathbf{n}_F \right)^2 \right\} = 0. \quad (5.13)$$

La condition (5.13) exprime une consistance asymptotique faible car on considère la limite d'une somme. En pratique, le flux numérique vérifie souvent un condition plus forte ; voir [4, eq. (2.9)].

6. Autrement dit, toutes les méthodes n'ont pas les mêmes propriétés d'homogénéisation. Un exemple de méthode pour laquelle on peut prouver la convergence pour  $\kappa \in [L^\infty(\Omega)]^{d,d}$  est la méthode dite en O ; voir [AM08b].

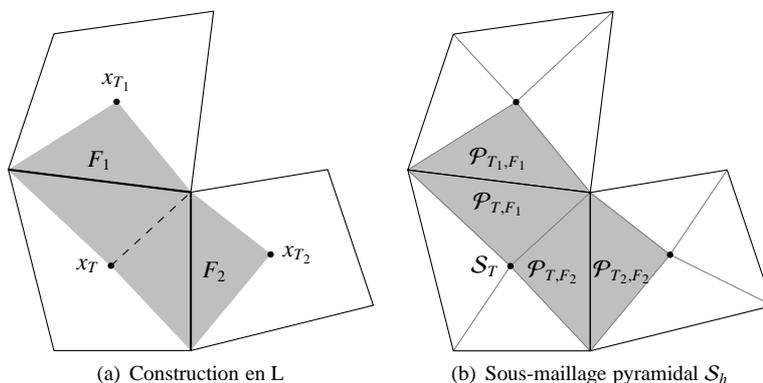


FIGURE 5.3 – Notation pour la construction en L

Sous les trois hypothèses précédentes on prouve le résultat suivant :

**Théorème 5.2** (Convergence pour la méthode (5.11)). *Soit  $(\mathcal{T}_h)_{h \in \mathcal{H}}$  une suite de maillages admissibles au sens de [4, Définition 2.1], et soit  $(\mathbf{u}_h)_{h \in \mathcal{H}}$  la suite obtenue en résolvant le problème (5.11) sur  $(\mathcal{T}_h)_{h \in \mathcal{H}}$ . On définit, pour tout  $h \in \mathcal{H}$ ,  $u_h \in \mathbb{P}_d^0(\mathcal{T}_h)$  tel que  $u_h|_T = u_T$  pour tout  $T \in \mathcal{T}_h$ . Alors, la suite  $(u_h)_{h \in \mathcal{H}}$  converge vers l'unique solution du problème (5.1) dans  $L^2(\Omega)$ .*

Dans [4, §2.3], on identifie, en outre, une reconstruction de gradient fortement convergente vers  $\nabla u$  dans  $[L^2(\Omega)]^d$  sous une ultérieure hypothèse de stabilité du flux numérique.

## 5.2.2 La méthode en G

**La construction en L** La construction dite en L de [AEMN08] est à la base de la méthode en G. Par simplicité, on traite ici uniquement le cas bidimensionnel ; pour le cas général voir [4, §3.1]. On définit préalablement, pour tout  $T \in \mathcal{T}_h$  et toute  $F \in \mathcal{F}_T$ , la pyramide de base  $F$  et sommet  $x_T$  par

$$\mathcal{P}_{T,F} \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in T \mid \exists y \in F \setminus \partial F, \exists \theta \in (0, 1), x = \theta x_T + (1 - \theta)y\}. \quad (5.14)$$

Soient  $F_1, F_2 \in \mathcal{F}_h^i$  deux faces d'une maille  $T \in \mathcal{T}_h$  (dite *maille primaire*) partageant un nœud, et soient  $T_1, T_2 \in \mathcal{T}_h$  les deux mailles telles que  $F_i \subset \partial T_i \cap \partial T$ ,  $i \in \{1, 2\}$ ; voir Figure 5.3(a). L'idée de base est de construire, pour tout  $\mathbf{v}_h \in \mathbb{T}_h$ , une fonction  $\xi_{\mathbf{v}_h}$  affine par morceaux sur les pyramides  $\{\mathcal{P}_{T,F}\}_{F \in \{F_1, F_2\}, T \in \mathcal{T}_F}$  (voir Figure 5.3(b)), telle que : (i)  $\xi_{\mathbf{v}_h}(x_E) = v_E$  pour tout  $E \in \{T, T_1, T_2\}$ ; (ii)  $\xi_{\mathbf{v}_h}$  est continue à travers les faces  $F_1$  et  $F_2$ ; (iii) le flux diffusif de  $\xi_{\mathbf{v}_h}$  est continu à travers les faces  $F_1$  et  $F_2$ , c'est-à-dire, puisque le gradient de  $\xi_{\mathbf{v}_h}$  est constant par morceaux,

$$(\kappa \nabla \xi_{\mathbf{v}_h})|_T \cdot \mathbf{n}_{F_i, T} + (\kappa \nabla \xi_{\mathbf{v}_h})|_{T_i} \cdot \mathbf{n}_{F_i, T_i} = 0, \quad \forall i \in \{1, 2\}.$$

On prouve aisément que la fonction  $\xi_{\mathbf{v}_h}$  ne dépend que des valeurs  $v_T, v_{T_1}$ , et  $v_{T_2}$ . Le gradient de cette fonction dans chaque pyramide  $\mathcal{P}_{T,F_i}$  est utilisé pour la construction du flux numérique à travers  $F_i$  selon la procédure décrite ci-dessous.

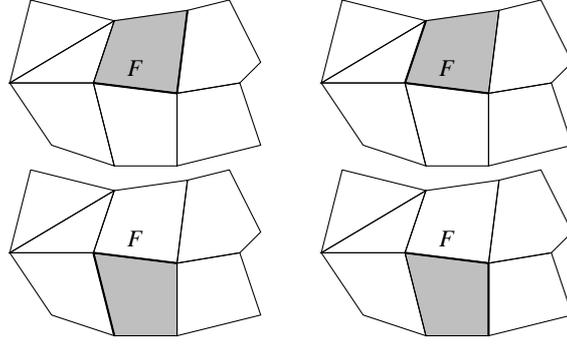


FIGURE 5.4 – L-groupes contenant la face  $F$ . La maille primaire  $T_g$  telle que  $g \subset \mathcal{F}_T$  est en gris.

**L-groupes et flux numérique** On commence par noter que, pour une face  $F_1$  fixée, il existe en générale plusieurs choix pour la face  $F_2$  ainsi que pour la maille primaire  $T$ ; voir Figure 5.4. On est donc amené à introduire l'ensemble  $\mathcal{G}$  des *L-groupes*<sup>7</sup> de  $d$  faces appartenant à une maille donnée et partageant un nœud de cette maille. Plus précisément, soit  $\mathcal{N}_h$  l'ensemble des sommets du maillage, et notons par  $\mathcal{F}_P \subset \mathcal{F}_h$  l'ensemble des faces partageant un nœud  $P \in \mathcal{N}_h$  du maillage. On définit

$$\mathcal{G} \stackrel{\text{def}}{=} \{g \subset \mathcal{F}_T \cap \mathcal{F}_P, T \in \mathcal{T}_h, P \in \mathcal{N}_h \mid \text{card}(g) = d\}.$$

Pour chaque L-groupe  $g \in \mathcal{G}$  on sélectionne une maille  $T_g \in \mathcal{T}_h$  telle que  $g \subset \partial T_g$ <sup>8</sup> qui joue le rôle de la maille primaire, et, pour tout  $\mathbf{v}_h \in \mathbb{T}_h$ , on note  $\xi_{\mathbf{v}_h}^g$  la reconstruction en L associée au L-groupe  $g$ . Les groupes susceptibles de contribuer à la définition du flux numérique à travers une face donnée sont regroupés dans les ensembles

$$\forall F \in \mathcal{F}_h, \quad \mathcal{G}_F \stackrel{\text{def}}{=} \{g \in \mathcal{G} \mid F \in g\}. \quad (5.15)$$

Le principe de la méthode en G consiste à exprimer le flux à travers une face  $F$  comme une moyenne pondérée des contributions des L-groupes de  $\mathcal{G}_F$ . Plus précisément, pour toute  $F \in \mathcal{F}_h$ , soit  $\{\omega_g^F\}_{g \in \mathcal{G}_F}$  un ensemble de poids tels que, pour tout  $F \in \mathcal{F}_h$ ,

$$\begin{aligned} \omega_g^F &\geq 0 & \forall g \in \mathcal{G}_F \\ \sum_{g \in \mathcal{G}_F} \omega_g^F &= 1. \end{aligned} \quad (5.16)$$

On pose alors

$$\Phi_F(\mathbf{u}_h) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{g \in \mathcal{G}_F} \omega_g^F (\kappa \nabla_{\xi_{\mathbf{u}_h}^g})|_{T_g} \cdot \mathbf{n}_F. \quad (5.17)$$

Selon le choix des poids on obtient des méthodes avec des caractéristiques différentes. Dans [4, §3.3–3.4] on propose deux stratégies différentes visant à améliorer, respectivement, les propriétés de monotonicité et de coercivité. La méthode en L de [AEMN08] est obtenue à partir de la construction ci-dessus pour un choix particulier des poids (5.16); voir [4, §3.3].

7. D'où le nom de la méthode

8. Une telle maille peut ne pas être unique car on ne demande pas la convexité des éléments de  $\mathcal{T}_h$

**Résultats principaux** Dans [4] on propose une analyse de la méthode en G sur des maillages généraux en utilisant un argument de compacité. Un important résultat préliminaire est le suivant.

**Théorème 5.3** (Espace test  $\mathcal{Q}_{\mathcal{P}_{\Omega},v}$ ). Soit  $\mathcal{P}_{\Omega} = \{\Omega_i\}_{1 \leq i \leq N_{\Omega}}$  une partition de  $\Omega$  formée d'ouverts polygonaux, et soit  $v \in [\mathbb{P}_d^0(\mathcal{P}_{\Omega})]^{d,d}$  un champs tensoriel symétrique uniformément défini positif. Soit  $\mathcal{Q}_{\mathcal{P}_{\Omega},v}$  l'espace des fonctions  $\varphi : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  telles que :

(i) Régularité locale et globale.  $\varphi$  est continue et localement régulière,

$$\varphi \in C_0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\mathcal{P}_{\Omega}),$$

où  $C^2(\mathcal{P}_{\Omega})$  est l'ensemble des fonctions qui sont  $C^2(\overline{\Omega}_i)$  pour tout  $i \in \{1, \dots, d\}$  ;

(ii) Continuité des dérivées tangentielles. Les dérivées tangentielles de  $\varphi$  sont continue à l'interface entre deux sous-domaines  $\Omega_i, \Omega_j \in \mathcal{P}_{\Omega}$  tels que  $|\partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j|_{d-1} > 0$  ;

(iii) Continuité du flux diffusif. Le flux de  $\nabla\varphi$  est continu entre deux sous-domaines  $\Omega_i, \Omega_j \in \mathcal{P}_{\Omega}$  tels que  $|\partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j|_{d-1} > 0$ ,

$$(v\nabla\varphi)|_{\Omega_i} \cdot \mathbf{n}_i + (v\nabla\varphi)|_{\Omega_j} \cdot \mathbf{n}_j = 0,$$

avec  $\mathbf{n}_i$  et  $\mathbf{n}_j$  normales sortantes de  $\Omega_i$  et  $\Omega_j$  respectivement.

Alors,  $\mathcal{Q}_{\mathcal{P}_{\Omega},v}$  est dense dans  $H_0^1(\Omega)$ .

En effet, lorsque on applique le cadre d'analyse abstrait de §5.2.1 à la méthode en G, il est nécessaire d'utiliser l'espace  $\mathcal{Q}_{\mathcal{T}_{h,\kappa}}$  au points (i) et (iii). Pour un L-groupe  $\mathfrak{g} \in \mathcal{G}$ , la construction en L peut être formulée comme un problème local demandant l'inversion d'une matrice  $\mathbf{A}_{\mathfrak{g}} \in \mathbb{R}^{d,d}$  ; voir [4, Lemme 3.1]. Afin d'assurer qu'un flux numérique puisse être construit pour chaque face, on suppose que

$$\text{Pour toute } F \in \mathcal{F}_h, \text{ il existe au moins un } \mathfrak{g} \in \mathcal{G}_F \text{ tel que } \mathbf{A}_{\mathfrak{g}} \text{ est inversible.} \quad (5.18)$$

Cette condition ne suffit cependant pas à garantir la convergence de la méthode, car les matrices locales pourrait demeurer inversibles, mais avoir un conditionnement qui se dégrade lorsque on raffine le maillage. On ajoute donc l'hypothèse suivante.

**Hypothèse 5.4** (Borne uniforme sur les normes des inverses des matrices locales). On suppose qu'il existe  $\varrho_{(i)}$  indépendant du pas de maillage  $h$  tel que, pour tout  $\mathfrak{g} \in \mathcal{G}_F$ ,

$$\forall h \in \mathcal{H}, \forall F \in \mathcal{F}_h, \quad \sum_{\mathfrak{g} \in \mathcal{G}_F} \omega_{\mathfrak{g}}^F |\mathbf{A}_{\mathfrak{g}}^{-1}|_{\ell^2} \leq \varrho_{(i)}, \quad (5.19)$$

avec poids définis par (5.16).

**Théorème 5.5** (Convergence de la méthode en G). Soit  $(\mathcal{T}_h)_{h \in \mathcal{H}}$  une suite de maillages admissible selon [4, Définitions 2.1 et 3.1] et soit  $(\mathbf{u}_h)_{h \in \mathcal{H}}$  la suite de  $(\mathbb{T}_h)_{h \in \mathcal{H}}$  obtenue en résolvant (5.11) avec  $\Phi_F(\mathbf{u}_h)$  donné par (5.17) sur la suite de maillages  $(\mathcal{T}_h)_{h \in \mathcal{H}}$ . On définit, pour tout  $h \in \mathcal{H}$ ,  $u_h \in \mathbb{P}_d^0(\mathcal{T}_h)$  tel que  $u_h|_T = u_T$  pour tout  $T \in \mathcal{T}_h$ . Alors, la suite  $(u_h)_{h \in \mathcal{H}}$  converge vers l'unique solution du problème (5.1) dans  $L^2(\Omega)$ .

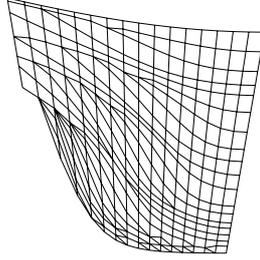


FIGURE 5.5 – Maillage d’un bassin sédimentaire. La figure est adaptée pour en améliorer la lisibilité : le rapport réel entre les dimensions est  $x : y = 10 : 1$ .

**Exemple numérique** On montre un exemple numérique pour illustrer les propriétés de la méthode en G dans le contexte des applications IFP Energies nouvelles en simulation de bassin. Les difficultés principales sont liées à la présence de mailles dégénérées modélisant les phénomènes d’érosion (voir Figure 5.5) et à l’hétérogénéité du tenseur de diffusion  $\kappa$ . La solution exacte est donnée par

$$u = \begin{cases} \sin(\beta\pi x) \sin(\gamma\pi y) & \text{si } x \leq \delta, \\ \sin(\beta\pi\delta) \sin(\gamma\pi y) + \pi\beta \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \cos(\beta\pi\delta) \sin(\gamma\pi y)(x - \delta) & \text{sinon} \end{cases}$$

avec

$$\kappa = \begin{cases} \text{diag}(\alpha_1, \beta_1) & \text{si } x \leq \delta, \\ \text{diag}(\alpha_2, \beta_2) & \text{sinon,} \end{cases}$$

où  $\beta = \frac{1}{1.7}$ ,  $\gamma = 1.9$ ,  $\alpha_1 = 1$ ,  $\beta_1 = 10$ ,  $\alpha_2 = 5$ ,  $\beta_2 = 1$ , and  $\delta = 0.5$ . On considère les indicateurs d’erreurs suivants : (i) l’erreur sur le potentiel défini par

$$e_u^2 \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} |T|_d (u_T - u(x_T))^2;$$

(ii) l’erreur sur les flux défini en accord avec la formule (5.13),

$$e_\Phi^2 \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{F \in \mathcal{F}_T} \frac{d_{T,F}}{|F|_{d-1}} (\Phi_F(\mathbf{u}_h) - |F|_{d-1} \langle \kappa \nabla u \rangle_{T \cdot \mathbf{n}_F})^2;$$

(iii) le nombre d’itération de GMRes avec préconditionneur AMG nécessaires à résoudre le problème discret,  $N_{it}$ ; (iv) le nombre d’entrées non nulles dans la matrice  $N_{nz}$ ; (v) le minimum et le maximum de la solution discrète respectivement définis par

$$u_{T,\min} \stackrel{\text{def}}{=} \min_{T \in \mathcal{T}_h} u_T, \quad u_{T,\max} \stackrel{\text{def}}{=} \max_{T \in \mathcal{T}_h} u_T.$$

Le nombre de degrés de liberté est noté  $N_T \stackrel{\text{def}}{=} \text{card}(\mathcal{T}_h)$ . Dans la Figure 5.6 la méthode en G est comparée avec les méthodes suivantes : (i) la méthode de [EGH09, §2.2] avec inconnues de faces éliminées par la construction en L (qui respecte les hétérogénéités), ici libellée *Success*; (ii) la méthode en O de [ABBM96] modifiée selon [AM08a]; (iii) la méthode en L de [AEMN08]. La méthode en G et *Success* montrent des résultats similaires en termes de potentiel, mais *Success* est plus précis lorsqu’on considère les

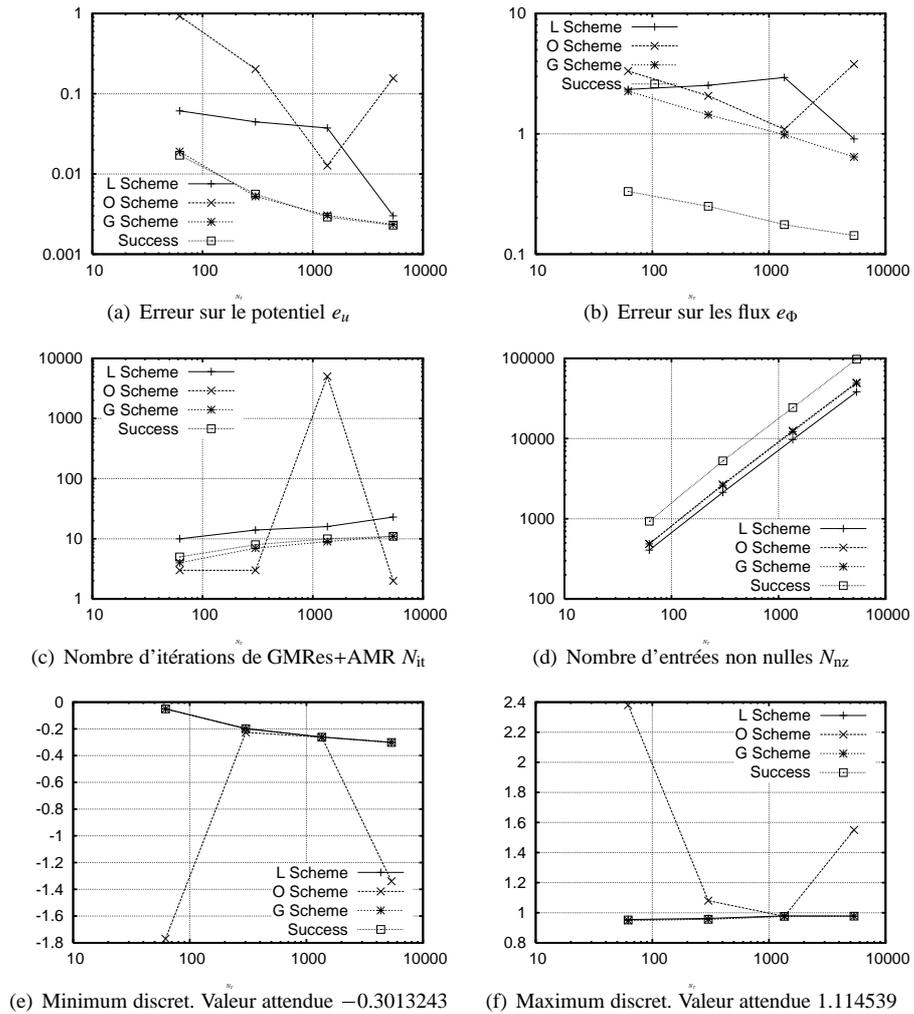


FIGURE 5.6 – Résultats sur une famille de maillages de bassin pétrolières.

flux. Cette précision a un prix, car le stencil élargi de Success implique un remplissage plus important de la matrice associée au problème discret ; voir discussion à la section suivante. La méthode en G montre une précision supérieure aux méthodes (ii) et (iii), qui ont un stencil comparable.

## 5.3 Méthodes de volumes finis variationnelles

Une deuxième classe de méthodes VF avec des meilleures propriétés de stabilité sur des maillages généraux est celle des méthodes variationnelles. Ces méthodes sont inspirées par la formulation faible (5.2), où les opérateurs de gradient continu appliqués à l'inconnue et à la fonction test sont remplacés par des opérateurs discrets avec des propriétés de consistance opportunes. Dans [5] on établit un cadre d'analyse assez général s'appliquant aux méthodes non conformes pour l'approximation de (5.1), et on introduit une nouvelle méthode VF ayant un stencil réduit par rapport à la méthode SUSHI de [EGH09]. Ce travail est le pendant de [4], où on propose un cadre pour les méthodes VF en formulation flux ; voir §5.2.

### 5.3.1 Cadre unifié

**Formulation variationnelle abstraite** Soit  $\mathcal{T}_h$  un maillage du domaine  $\Omega$  appartenant à une suite de maillages admissibles selon [5, Définition 1], et soient  $k_u \geq 0$  et  $0 \leq k_\sigma \leq k_u$  les degrés polynomiaux utilisés, respectivement, dans l'approximation du potentiel et du flux diffusif ; voir [7, Définition 4.31]. Dans le cas des méthodes non conformes, il est nécessaire de définir un opérateur de gradient discret remplaçant l'opérateur continu dans la formulation discrète. Un exemple important de reconstruction de gradient pour les méthodes dG ( $k_u \geq 1$ ) est présenté dans §4.5. Pour les méthodes VF ( $k_u = 0$ ) cette reconstruction de gradient est, en général, constante par morceaux ( $k_\sigma = 0$ ) sur un sous-maillage de  $\mathcal{T}_h$ , que l'on note  $\mathcal{S}_h$ . Pour fixer les idées, on considère ici deux cas :

$$\mathcal{S}_h = \mathcal{T}_h \quad \text{ou} \quad \mathcal{S}_h = \{\mathcal{P}_{T,F}\}_{T \in \mathcal{T}_h, F \in \mathcal{F}_T},$$

avec  $\mathcal{P}_{T,F}$  donné par (5.14)<sup>9</sup> ; voir la Figure 5.3. Les espaces discrets sont alors définis par

$$V_h \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}_d^{k_u}(\mathcal{T}_h), \quad \Sigma_h \stackrel{\text{def}}{=} [\mathbb{P}_d^{k_\sigma}(\mathcal{S}_h)]^d.$$

La forme générale des méthodes variationnelles considérées est la suivante :

$$\text{Trouver } u_h \in V_h \text{ t.q. } a_h(u_h, v_h) = \int_{\Omega} f v_h.$$

La forme bilinéaire  $a_h$  est exprimée en fonction de deux opérateurs de gradient discrets<sup>10</sup>  $G_h : \mathcal{L}(V_h, \Sigma_h)$  et  $\tilde{G}_h : \mathcal{L}(V_h, \Sigma_h)$ , et d'une forme bilinéaire symétrique semi-définie positive  $j_h \in \mathcal{L}(V_h \times V_h, \mathbb{R})$  contenant des éventuels termes de stabilisation,

$$a_h(u_h, v_h) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega} \kappa G_h(u_h) \cdot \tilde{G}_h(v_h) + j_h(u_h, v_h). \quad (5.20)$$

9. Comme dans la section précédente, on suppose que, pour chaque maille  $T \in \mathcal{T}_h$ , il existe un point  $x_T$  par rapport auquel la maille est étoilée.

10. On introduit deux opérateurs de gradient discrets pour inclure dans l'analyse les méthodes non-symétriques. Des méthodes dG non symétriques ont été considérées, par exemple, dans [OBB98, LN04, RWG99, RWG01] ; voir [1, §5.3.1] pour une discussion. Dans le contexte des méthodes VF variationnelles, l'intérêt des formulations non symétriques est essentiellement lié à la réduction du stencil (et, donc, du remplissage de la matrice).

Par simplicité on appelle le premier terme au second membre de (5.20) *terme de consistance* et le deuxième *terme de pénalisation*. L'espace  $V_h$  est équipé avec la norme  $\|\cdot\|_h$ , par rapport à laquelle on exprime la coercivité de  $a_h$ . Afin d'utiliser les résultats de [EGH09, Lemme 5.6] dans le contexte des méthodes VF et de [7, Théorème 6.2] dans le contexte des méthodes de Galerkin discontinues, on introduit une norme  $H_0^1(\Omega)$  discrète sur  $V_h$ . Posons, avec un petit abus de notation,

$$\forall v_h \in \mathbb{P}_d^0(\mathcal{T}_h), \quad \|v_h\|_{\gamma,h} \stackrel{\text{def}}{=} \|\mathfrak{S}_h^{-1}(v_h)\|_{\gamma,h}$$

avec  $\|\cdot\|_{\gamma,h}$  sur  $\mathbb{T}_h$  définie par (5.12) et  $\mathfrak{S}_h$  donné par (5.8). Le rôle de la norme  $H_0^1(\Omega)$  est alors joué par <sup>11</sup>

$$\|v_h\|_{1,2,h} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \|v_h\|_{\gamma,h} & \text{si } v_h \in \mathbb{P}_d^0(\mathcal{T}_h), \\ \|v_h\|_{\text{dG}} & \text{si } v_h \in \mathbb{P}_d^k(\mathcal{T}_h), k \geq 1. \end{cases}$$

La norme  $\|\cdot\|_{1,2,h}$  vérifie une inégalité de Poincaré discrète de la forme <sup>12</sup>

$$\forall v_h \in V_h, \quad \|v_h\|_{L^2(\Omega)} \leq \sigma_2 \|v_h\|_{1,2,h},$$

avec  $\sigma_2$  indépendant du pas de maillage  $h$ . Dans le cadre d'une preuve de convergence par compacité, l'inégalité de Poincaré ci-dessus est utilisée avec la coercivité de  $a_h$  pour prouver une estimation *a priori* uniforme sur la solution discrète ; voir §4.5, point (i). A partir de cette estimation uniforme, des propriétés de convergence sont déduites. A ce propos, il est importante que la norme de coercivité  $\|\cdot\|_h$  contrôle uniformément la norme  $\|\cdot\|_{1,2,h}$  (les deux normes coïncident dans la plus part des cas).

**Convergence** Soit  $(\mathcal{T}_h)_{h \in \mathcal{H}}$  une suite de maillages admissible au sens de [5, Définition 1]. Les hypothèses sous lesquelles on prouve la convergence de la méthode abstraite (5.20) sont les suivantes :

- (i) *Stabilité de  $a_h$* . Comme on a déjà anticipé, on suppose que la forme bilinéaire  $a_h$  est uniformément coercive par rapport à la norme  $\|\cdot\|_h$ . Bien que la coercivité ne soit pas la seule forme de stabilité possible, le cas plus général correspondant à une condition inf-sup <sup>13</sup>, elle paraît la plus naturelle dans le cadre d'un problème de diffusion pure. La stabilité de  $a_h$  joue un rôle crucial dans l'obtention d'une estimation *a priori* uniforme pour la suite des solutions discrètes et dans la preuve de la convergence forte de la suite  $(G_h(u_h))_{h \in \mathcal{H}}$  vers une limite opportune ; voir point (iv). La propriété de coercivité est plus simple à obtenir dans le cadre des méthodes VF variationnelles car la formulation se prête naturellement à fournir des méthodes symétriques.
- (ii) *Stabilité de  $G_h$  et  $\tilde{G}_h$* . Une deuxième hypothèse qui correspond à la continuité du terme de consistance dans (5.20) consiste à supposer que, pour tout  $v_h \in V_h$ ,  $G_h(v_h)$  et  $\tilde{G}_h(v_h)$  soient bornés par  $\|v_h\|_h$ . Cette hypothèse est assez naturelle dans la mesure où  $\|\cdot\|_h$  est l'équivalent discret de la norme  $H_0^1(\Omega)$ .

11. Afin de simplifier l'exposition, on a considérée une norme légèrement différente de [EGH09, eq. (43)] dans le cas  $k = 0$ . Il est cependant simple de vérifier que les deux normes sont uniformément équivalentes, et que le résultat de compacité énoncé dans [EGH09, Lemme 5.6] reste vrai pour des suites bornées en norme  $\|\cdot\|_{\gamma,h}$ . En outre, il n'est pas nécessaire de distinguer les cas  $k = 0$  et  $k \geq 1$  à condition de modifier la norme  $\|\cdot\|_{\text{dG}}$  dans l'esprit du dernier paragraphe de la §4.3.1.

12. Il s'agit d'un cas particulier des injections de Sobolev prouvées dans [EGH09, §5.1] pour le cas  $k = 0$ , et dans [7, Théorème 6.1] et [1, Théorème 5.4] pour le cas  $k \geq 1$ .

13. Voir [1, §1.3] pour plus de détails dans le cadre d'une analyse de convergence dans l'esprit du Lemme de Céa.

- (iii) *Consistance asymptotique de la stabilisation  $j_h$ .* Le terme  $j_h$  regroupe les termes qui sont censés s'annuler à la limite, et son propos n'est que d'assurer la stabilité discrète de  $a_h$ . Soit  $\varphi$  une fonction suffisamment régulière<sup>14</sup>, et notons par  $\varphi_h$  sa projection sur  $V_h$  pour tout  $h \in \mathcal{H}$ . On suppose que  $j_h(\varphi_h, \varphi_h)$  tend vers 0 lorsque  $h \rightarrow 0$ . Il faudra, en outre, supposer que  $j_h$  est uniformément continu dans  $V_h \times V_h$  par rapport à la norme  $\|\cdot\|_h$ .
- (iv) *Consistance asymptotique faible de  $\tilde{G}_h$  et forte de  $G_h$ .* Pour que la forme bilinéaire discrète  $a_h$  constitue une bonne approximation de la forme bilinéaire continue  $a$ , il est nécessaire que  $\tilde{G}_h$  et  $G_h$  approchent l'opérateur de gradient continu dans un sens à préciser. Si on suppose que  $\tilde{G}_h$  est faiblement convergent en  $[L^2(\mathbb{R}^d)]^d$  pour toute suite bornée en norme  $\|\cdot\|_h$ , on peut prouver un résultat de régularité de la limite analogue à celui de [EGH09, Lemme 5.7] et [7, Théorème 6.3]; voir aussi Lemme 4.17. D'autre part, comme la suite des solutions discrètes satisfait une estimation *a priori* uniforme, on peut conclure qu'elle tend vers une limite  $\bar{u} \in H_0^1(\Omega)$ . Cette hypothèse implique aussi que, si on utilise comme fonction test la projection sur  $V_h$  d'une fonction  $\varphi$  suffisamment régulière, l'opérateur  $\tilde{G}_h$  appliqué à cette dernière converge faiblement vers  $\nabla\varphi$  dans  $[L^2(\Omega)]^d$ . Afin de prouver la convergence de  $a_h$  vers  $a$ , il ne reste donc qu'à prouver la convergence forte de la suite  $(G_h(u_h))_{h \in \mathcal{H}}$  vers  $\nabla\bar{u}$ . Une condition suffisante est alors que, pour toute fonction  $\varphi$  suffisamment régulière, la suite  $(G_h(\varphi_h))_{h \in \mathcal{H}}$ <sup>15</sup> converge fortement vers  $\nabla\varphi$  dans  $[L^2(\Omega)]^d$ , comme on le prouve dans [5, Lemme 2.3].

Sous les hypothèses précédentes on prouve les résultats suivants.

**Lemme 5.6** (Convergence faible de  $(G_h(u_h))_{h \in \mathcal{H}}$ ). *Soit  $(u_h)_{h \in \mathcal{H}}$  la suite des solutions discrète obtenues en résolvant le problème (5.20) sur la suite admissible de maillages  $(\mathcal{T}_h)_{h \in \mathcal{H}}$ . Alors, il existe  $\bar{u} \in H_0^1(\Omega)$  tel que, lorsque  $h \rightarrow 0$ , (i) à une sous-suite près  $u_h \rightarrow \bar{u}$  dans  $L^2(\Omega)$  et (ii)  $G_h(u_h) \rightharpoonup \nabla\bar{u}$  faiblement dans  $[L^2(\Omega)]^d$ .*

**Théorème 5.7** (Convergence de (5.20)). *Soit  $(u_h)_{h \in \mathcal{H}}$  la suite de solutions discrètes obtenues en résolvant le problème (5.20) sur la suite admissible de maillages  $(\mathcal{T}_h)_{h \in \mathcal{H}}$ . Lorsque  $h \rightarrow 0$ ,*

$$\begin{aligned} u_h &\rightarrow u && \text{fortement dans } L^2(\Omega), \\ G_h(u_h) &\rightarrow \nabla u && \text{fortement dans } [L^2(\Omega)]^d, \end{aligned}$$

avec  $u$  unique solution de (4.2)

Les rôles de  $G_h$  et  $\tilde{G}_h$  peuvent être échangés tout en obtenant une méthode duale qui est aussi convergente; voir [5, §2.6]. Le désavantage, dans ce cas, est que le gradient discret appliqué à  $u_h$  n'est plus fortement convergent.

### 5.3.2 Exemples

Dans [5] on considère trois classes de méthodes qui rentrent dans le cadre ci-dessus :

- (i) *Méthodes dG avec pondération dépendant du tenseur de diffusion.* Un premier résultat consiste à appliquer le cadre d'analyse à la famille de méthodes dG introduite dans [9]; voir aussi §4.3. L'analyse de convergence vers des solutions à

14. Pour fixer les idées, on peut supposer que  $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ , quoiqu'il soit parfois utile de considérer d'autres espaces test denses dans  $H_0^1(\Omega)$ . Voir §5.2 pour un exemple.

15. On a noté  $\varphi_h$  l'interpolé de  $\varphi$  sur  $V_h$ .

régularité minimale est particulièrement intéressante dans ce cas, car, même pour un domaine régulier, la régularité globale de la solution exacte peut être dégradée par le manque de régularité du coefficient de diffusion.

- (ii) *Méthodes VF hybrides.* Une deuxième famille de méthodes VF auxquels l'analyse s'applique est celle des VF hybrides introduits dans [DE06]. Le principe de ces méthodes est d'ajouter des inconnues tenant lieu de multiplicateurs de Lagrange pour la contrainte de continuité des flux.
- (iii) *Une nouvelle méthode VF non-symétrique.* Le troisième exemple proposé dans [5] est une variation non-symétrique de la méthode SUSHI de [EGH09]. Dans la méthode SUSHI on a que  $G_h = \tilde{G}_h$ , et le schéma résultant est symétrique. Si, d'une part, le fait de préserver la symétrie au niveau discret offre des avantages dans la résolution du système linéaire correspondant à (5.20), d'autre part elle comporte un élargissement du stencil. L'idée principale consiste ici à renoncer à la symétrie en utilisant un gradient  $\tilde{G}_h \neq G_h$  pour la fonction test de manière à réduire le stencil. Une deuxième amélioration par rapport à [EGH09] consiste à remplacer l'interpolateur barycentrique (qui ne respecte pas les hétérogénéités) par un interpolateur basé sur la construction en L de §5.2.2 ; voir [AEMN08, 4] pour plus de détails.

## 5.4 Méthodes de Galerkin centrées aux mailles

La dernière classe de schémas de bas ordre examinée dans ce chapitre est celle des méthodes dites de Galerkin centrées aux mailles (ccG) introduites par l'auteur dans [3, 6, 15]. Ces méthodes utilisent des idées propres des VF pour obtenir des espaces polynômiaux incomplets qui remplacent les espaces (4.4) dans le cadre d'une discrétisation dG.

On a montré dans §4.2.2 qu'il n'est pas possible de garantir la consistance de la méthode SIP sur des maillages généraux en prenant  $V_h = \mathbb{P}_d^0(\mathcal{T}_h)$  dans (4.12)<sup>16</sup>. Dans [6, 15] on montre qu'il est possible d'obtenir des méthodes de type S(W)IP avec une seule inconnue par maille sur des maillages généraux à condition d'utiliser un sous-espace de  $\mathbb{P}_d^1(\mathcal{T}_h)$  obtenu par une reconstruction opportune. La différence principale par rapport aux méthodes VF variationnelles est liée à la possibilité d'étendre la forme bilinéaire à un espace contenant la solution exacte, ce qui permet d'obtenir une estimation d'erreur dans l'esprit du Lemme de Céa. En même temps, il est toujours possible de prouver la convergence vers des solutions à régularité minimale car les résultats d'analyse fonctionnelle discrète de §4.4 s'appliquent *a fortiori*. L'intérêt majeur de cette approche est qu'elle s'étend virtuellement à tout problème pour lequel une méthode dG a été proposée, et elle fournit donc un cadre adapté aux plates-formes généralistes à la FreeFEM++ ou Li fe/Feel.

L'inconvénient principal de la méthode de [6, 15] réside dans le stencil élargi, comparable à celui de [EGH09, §2.2]. L'élargissement du stencil par rapport aux méthodes dG basées sur des espaces discrets conventionnels est lié au support des fonctions de base, qui s'étend sur plusieurs éléments à cause de la reconstruction. Une différente construction permettant de réduire le stencil est proposée dans [3]. Dans ce cas, les

<sup>16</sup> Voir, en particulier, la Remarque 4.2 et le dernier paragraphe de la §4.3.1. Il existe cependant des méthodes dG mixtes qui demeurent consistantes lorsque le potentiel et le flux diffusif sont approchés par des fonctions constantes par morceaux [1, §7.3.5] ; voir aussi [EG06b, §5.3]. Du fait d'être des méthodes mixtes, mêmes dans le cas  $k = 0$  elles ont plus d'inconnues qu'une méthode VF centrée aux mailles, car il n'y a pas de manière efficace d'éliminer les inconnues de flux.

fonctions de base sont affines par morceaux sur le sous-maillage pyramidal de Figure 5.3(b).

### 5.4.1 La méthode ccG pour un problème de diffusion hétérogène

**L'espace ccG** Soit  $\mathbb{T}_h \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R}^{\mathcal{T}_h}$  l'espace algébrique des degrés de liberté. L'idée de base des méthodes ccG consiste à construire un opérateur  $\mathfrak{R}_h^{\text{ccg}} : \mathbb{T}_h \rightarrow \mathbb{P}_d^1(\mathcal{T}_h)$  et à utiliser l'espace polynômial incomplet

$$V_h^{\text{ccg}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathfrak{R}_h^{\text{ccg}}(\mathbb{T}_h) \subset \mathbb{P}_d^1(\mathcal{T}_h) \quad (5.21)$$

dans le cadre d'une méthode dG. L'injectivité de l'opérateur  $\mathfrak{R}_h^{\text{ccg}}$  garantit qu'il existe un bijection entre  $\mathbb{T}_h$  et  $V_h^{\text{ccg}}$ , de façon telle qu'on puisse associer à chaque  $\mathbf{v}_h \in \mathbb{T}_h$  une unique fonction  $\mathfrak{R}_h(\mathbf{v}_h)$  de  $V_h^{\text{ccg}}$  et vice versa. La difficulté principale est d'assurer que l'espace  $V_h^{\text{ccg}}$  ait des propriétés d'approximation suffisantes à garantir la convergence de la méthode. Dans cette section on considère le problème de diffusion hétérogène (5.1) et on examine la méthode proposée dans [6, 15], qui repose sur la construction en L de §5.2.2. Plus précisément, sous l'hypothèse (5.18), pour toute face  $F \in \mathcal{F}_h^i$  soit  $\mathfrak{g}_F \in \mathcal{G}_F$  un L-groupe donnant lieu à une matrice  $\mathbf{A}_{\mathfrak{g}_F}$  inversible et posons, pour tout  $\mathfrak{g} \in \mathcal{G}_F$ ,  $\omega_{\mathfrak{g}}^F = 1$  si  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_F$  et  $\omega_{\mathfrak{g}}^F = 0$  sinon<sup>17</sup>. Soit, pour tout  $\mathbf{v}_h \in \mathbb{T}_h$  et toute  $F \in \mathcal{F}_h^i$ ,  $\xi_{\mathbf{v}_h}^{\mathfrak{g}_F}$  la fonction obtenue par la construction en L sur l'unique groupe  $\mathfrak{g}_F$ . Par brévitité de notation, on définit aussi pour toute  $F \in \mathcal{F}_h^b$  avec  $F \subset \partial T \cap \partial\Omega$  la fonction  $\xi_{\mathbf{v}_h}^{\mathfrak{g}_F}$  telle que  $\xi_{\mathbf{v}_h}^{\mathfrak{g}_F}|_F \equiv 0$  et  $\xi_{\mathbf{v}_h}^{\mathfrak{g}_F}(x_T) = v_T$ . On introduit l'opérateur de reconstruction de trace  $\mathfrak{T}_h : \mathbb{T}_h \mapsto \mathbb{F}_h \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R}^{\mathcal{F}_h}$  qui réalise l'application  $\mathbb{T}_h \ni \mathbf{v}_h \mapsto (\partial_F(\mathbf{v}_h))_{F \in \mathcal{F}_h} \in \mathbb{F}_h$  avec

$$\partial_F(\mathbf{v}_h) \stackrel{\text{def}}{=} \langle \xi_{\mathbf{v}_h}^{\mathfrak{g}_F} \rangle_F = \xi_{\mathbf{v}_h}^{\mathfrak{g}_F}(\bar{x}_F),$$

et  $\bar{x}_F \stackrel{\text{def}}{=} \int_F x / |F|_{d-1}$ . Selon le besoin, on pourra interpréter  $\partial_F$  soit comme une valeur ponctuelle en  $\bar{x}_F$  soit comme une valeur moyenne sur  $F$ , les deux concepts étant équivalents pour les fonctions affines. La reconstruction du gradient dans chaque maille est alors fournie par l'opérateur  $\mathfrak{G}_h : \mathbb{T}_h \rightarrow \Sigma_h \stackrel{\text{def}}{=} [\mathbb{P}_d^0(\mathcal{T}_h)]^d$  inspiré [DE06] qui associe à tout  $\mathbf{v}_h \in \mathbb{T}_h$  la fonction  $\mathfrak{G}_h(\mathbf{v}_h) \in \Sigma_h$  telle que

$$\forall T \in \mathcal{T}_h, \quad \mathfrak{G}_h(\mathbf{v}_h)|_T = \frac{1}{|T|_d} \sum_{F \in \mathcal{F}_T} |F|_{d-1} (\partial_F(\mathbf{v}_h) - v_T) \mathbf{n}_{T,F}. \quad (5.22)$$

La formule (5.22) se justifie sur la base du théorème de Green. L'opérateur  $\mathfrak{R}_h^{\text{ccg}}$  définissant  $V_h^{\text{ccg}}$  est alors celui qui associe à tout  $\mathbf{v}_h \in \mathbb{T}_h$  la fonction  $\mathfrak{R}_h^{\text{ccg}}(\mathbf{v}_h) \in V_h^{\text{ccg}}$  telle que

$$\forall T \in \mathcal{T}_h, \forall x \in T, \quad \mathfrak{R}_h^{\text{ccg}}(\mathbf{v}_h)|_T(x) = v_T + \mathfrak{G}_h(\mathbf{v}_h) \cdot (x - x_T).$$

L'injectivité de  $\mathfrak{R}_h$  suit de l'hypothèse d'inversibilité des matrices  $\{\mathbf{A}_{\mathfrak{g}_F}\}_{F \in \mathcal{F}_h^i}$ . De plus, l'espace  $V_h^{\text{ccg}}$  défini par (5.21) a la propriété d'approximation suivante ; voir [15, §2.3].

**Lemme 5.8** (Approximation de fonctions de  $\mathcal{Q}_{\mathcal{T}_h, \kappa}$  dans  $V_h^{\text{ccg}}$ , cas hétérogène). *Pour tout  $\varphi \in \mathcal{Q}_{\mathcal{T}_h, \kappa}$ , il existe  $C_\varphi$  dépendant de  $\|\varphi\|_{C^2(\mathcal{T}_h)}$ , de  $\varrho_{(i)}$  et des paramètres de régularité du maillage mais indépendant de  $h$  telle que*

$$\|\varphi - \mathfrak{R}_h^{\text{ccg}}(\varphi_h)\|_{\text{swip}, \dagger} \leq C_\varphi h, \quad (5.23)$$

où  $\varphi_h = (\varphi(x_T))_{T \in \mathcal{T}_h} \in \mathbb{T}_h$ .

<sup>17</sup> On définit les poids  $\omega_{\mathfrak{g}}^F$  car l'Hypothèse 5.4 est utilisée dans la suite. Dans le cadre des méthodes ccG, un seul groupe est choisi pour chaque face afin de réduire le support des fonctions de base et, par conséquent, le stencil de la méthode.

**La méthode SWIP-ccG** On considère la discrétisation suivante de (5.1) :

$$\text{Trouver } u_h \in V_h^{\text{ccg}} \text{ t.q. } a_h^{\text{swip}}(u_h, v_h) = \int_{\Omega} f v_h \text{ pour tout } v_h \in V_h^{\text{ccg}}. \quad (5.24)$$

L'estimation d'erreur du Théorème (4.8) reste vraie lorsqu'on remplace l'espace polynomial complet  $V_h$  par  $V_h^{\text{ccg}}$ . En effet, comme  $V_h^{\text{ccg}} \subset \mathbb{P}_d^1(\mathcal{T}_h) \subseteq V_h$ ,  $a_h^{\text{swip}}$  est *a fortiori* consistante, coercive sur  $V_h^{\text{ccg}} \times V_h^{\text{ccg}}$  et continue sur  $V_{\dagger h} \times V_h^{\text{ccg}}$  avec  $V_{\dagger h} \stackrel{\text{def}}{=} H_0^1(\Omega) \cap H^2(\mathcal{T}_h)$ .

**Théorème 5.9** (Estimation d'erreur pour la méthode (5.24)). *Soit  $u \in V$  la solution de (5.1) et supposons, de plus, que  $u \in V_{\dagger}$ . Alors,*

$$\|u - u_h\|_{\text{swip}} \leq \left(1 + \frac{C_{\text{bnd}}}{C_{\text{sta}}}\right) \inf_{w_h \in V_h} \|u - w_h\|_{\text{swip}, \dagger}.$$

Les constantes  $C_{\text{sta}}$  et  $C_{\text{bnd}}$  sont telles que (i) pour tout  $v_h \in V_h$ ,  $a_h^{\text{swip}}(v_h, v_h) \geq C_{\text{sta}} \|v_h\|_{\text{swip}}^2$  et (ii) pour tout  $w, v_h \in V_{\dagger h} \times V_h$ ,  $a_h^{\text{swip}}(w, v_h) \leq C_{\text{bnd}} \|w\|_{\text{swip}, \dagger} \|v_h\|_{\text{swip}}$ .

**Corollaire 5.10** (Taux de convergence, cas hétérogène). *Si, de plus,  $u \in \mathcal{Q}_{\mathcal{T}_h, \kappa}$ ,*

$$\|u - u_h\|_{\text{swip}} \leq \left(1 + \frac{C_{\text{bnd}}}{C_{\text{sta}}}\right) C_u h,$$

$C_u$  étant la constante de l'inégalité (5.23).

Le résultat suivant, prouvé dans [15, §2.4], établit la convergence de la méthode vers des solutions à régularité minimale. La preuve repose sur les propriétés de consistance d'un gradient inspiré par (4.33) mais tenant compte des moyennes pondérées aux interfaces. L'espace  $\mathcal{Q}_{\mathcal{T}_h, \kappa}$  est utilisé comme espace test.

**Théorème 5.11** (Convergence de la méthode (5.24) vers des solutions à régularité minimale). *Soit  $(u_h)_{h \in \mathcal{H}}$  la suite de solutions discrète obtenues en résolvant le problème (5.24) sur la suite admissible de maillages  $(\mathcal{T}_h)_{h \in \mathcal{H}}$ . Lorsque  $h \rightarrow 0$ ,*

$$\begin{aligned} u_h &\rightarrow u && \text{fortement dans } L^2(\Omega), \\ \nabla_h u_h &\rightarrow \nabla u && \text{fortement dans } [L^2(\Omega)]^d, \\ |u_h|_J &\rightarrow 0, \end{aligned}$$

avec  $u$  unique solution de (5.1).

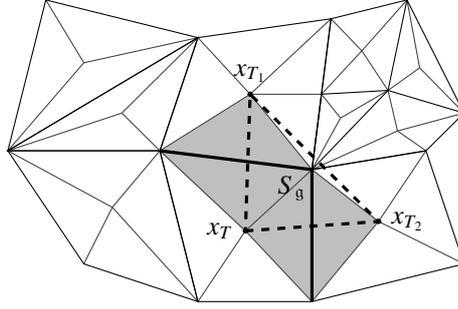
**Le cas homogène** Dans le cas homogène il est possible d'affiner l'estimation du taux de convergence en norme  $L^2$ . Soit  $\mathcal{T}_h$  un maillage appartenant à une suite admissible au sens de [1, Définition 1.44], et définissons le sous-maillage pyramidal  $\mathcal{S}_h$  comme suit (voir Figure 5.7) :

$$\mathcal{S}_h \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathcal{P}_{T,F}\}_{T \in \mathcal{T}_h, F \in \mathcal{F}_T}.$$

On définit l'ensemble  $\mathcal{T}_{\mathfrak{g}}$  des mailles associé à un L-group  $\mathfrak{g}$  comme suit :

$$\forall \mathfrak{g} \in \mathcal{G}, \quad \mathcal{T}_{\mathfrak{g}} \stackrel{\text{def}}{=} \{T \in \mathcal{T}_h \mid \exists F \in \mathfrak{g}, T \in \mathcal{F}_T\}.$$

Les centres des mailles de  $\mathcal{T}_{\mathfrak{g}}$  définissent un simplexe qu'on notera  $S_{\mathfrak{g}}$ ; voir Figure 5.7.

FIGURE 5.7 – Sous-maillage pyramidal  $S_h$ ,  $\mathcal{P}_F$  (en gris) et simplexe  $S_g$ 

Comme dans la section précédente, on choisit pour chaque  $F \in \mathcal{F}_h^i$  un L-groupe  $\mathfrak{g}_F$  tel que la matrice  $\mathbf{A}_{\mathfrak{g}_F}$  est inversible. Sous l'hypothèse (5.25), l'inversibilité de la matrice  $\mathbf{A}_g$  équivaut à la non dégénérescence du simplexe  $S_{\mathfrak{g}_F}$  défini par les centres des mailles de  $\mathcal{T}_{\mathfrak{g}_F}$ . Soit, maintenant,  $\mathcal{P}_F$  la patch gris dans la Figure 5.7. Plus précisément, pour les interfaces  $F \in \mathcal{F}_h^i$ , on pose

$$\mathcal{P}_F \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{F \in \mathfrak{g}, T \in \mathcal{T}_F} \mathcal{P}_{T,F},$$

tandis que pour les faces de bord  $F \in \mathcal{F}_h^b$  avec  $F \subset \partial T \cap \partial\Omega$ , on pose  $\mathcal{P}_F \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{P}_{T,F}$ .

**Hypothèse 5.12** (Propriété d'approximation pour les constructions en L). *On suppose que les constructions en L sont telles que, pour tout  $0 \leq l \leq 1$  avec  $l > d/2 - 1$ , il existe  $C$  indépendant du pas de maillage  $h$  tel que, pour tout  $0 \leq m \leq l + 1$  et tout  $F \in \mathcal{F}_h$*

$$\forall v \in H^{l+1}(\mathcal{P}_F), \quad |v - \xi_{\mathbf{v}_h}^{\mathfrak{g}_F}|_{H^m(\mathcal{P}_F)} \leq Ch_{\mathcal{P}_F}^{l+1-m} |v|_{H^{l+1}(\mathcal{P}_F)},$$

avec  $\mathbf{v}_h = (v(x_T))_{T \in \mathcal{T}_h}$ . De plus, il existe  $\varrho_{(ii)}$  indépendant du pas de maillage  $h$  tel que, pour tout  $F \in \mathcal{F}_h$  et tout  $T \in \mathcal{T}_F$ ,  $h_{\mathcal{P}_F} \leq \varrho_{(ii)} h_T$ .

Une condition suffisante pour que l'Hypothèse 5.12 soit vérifiée est que les  $\{\mathcal{P}_{\mathfrak{g}_F}\}_{h \in \mathcal{H}, F \in \mathcal{F}_h}$  forment une famille *finitely shaped*; voir [1, Lemme 1.47]. Ceci est vrai, par exemple, dans le cas de maillages simpliciaux uniformément raffinés où dans le cas de maillages Cartésien avec raffinement sémiconforme et différence de niveau maximale entre deux mailles voisines fixée. En effet, dans les deux exemples fournis on a une borne uniforme pour la constante du Lemme de Deny-Lions utilisé dans la preuve [EG04, Exemple 1.106], qui s'applique donc à notre cas; pour plus de détails voir la discussion de [15, §2.3]. On a le résultat suivant.

**Lemme 5.13** (Approximation de fonctions de  $H^2(\Omega)$  dans  $V_h^{\text{ccg}}$ , cas homogène). *Sous l'Hypothèse 5.12 et pour  $d < 6$ , il existe  $C$  indépendant du pas de maillage  $h$  tel que*

$$\forall v \in H^2(\Omega), \quad \|v - \mathfrak{R}_h^{\text{ccg}}(\mathbf{v}_h)\|_{\text{dG}} \leq Ch \|v\|_{H^2(\Omega)},$$

avec  $\mathbf{v}_h \stackrel{\text{def}}{=} (v(x_T))_{T \in \mathcal{T}_h} \in \mathbb{T}_h$ .

**Lemme 5.14** (Taux de convergence de la méthode (5.24), cas homogène). *Soit  $u \in H^2(\Omega)$  solution exacte de (5.1) avec  $\kappa = \nu \mathbb{I}_d$  et  $\nu > 0$ , et soit  $u_h \in V_h^{\text{ccg}}$  solution du problème discret (5.23). Alors, il existe  $C$  indépendant du pas de maillage  $h$  tel que*

$$\|u - u_h\|_{\text{dG}} \leq Ch \|u\|_{H^2(\Omega)}.$$

De plus, sous hypothèses de régularité elliptique,

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^2.$$

### 5.4.2 Application au problème de Navier–Stokes incompressible

On examine dans cette section l'application de la méthode ccG aux équations de NSI. Dans ce cas, les termes de diffusion sont homogènes,

$$\kappa = \nu \mathbb{I}_d, \quad (5.25)$$

avec  $\nu$  réel positif. Sous l'hypothèse (5.25), pour tout  $\mathbf{v}_h \in \mathbb{T}_h$  et toute  $F \in \mathcal{F}_h^i$ , la fonction  $\xi_{\mathbf{v}_h}^{\text{qf}}$  obtenue par la reconstruction en L est de classe  $C^1$  sur l'ensemble des pyramides  $\{\mathcal{P}_{T,F}\}_{F \in \mathfrak{q}, T \in \mathcal{T}_F}$ , et elle coïncide avec l'interpolée de Lagrange sur le simplexe formé par les centres des mailles intervenant dans le L-groupe. Cette remarque permet d'obtenir des estimation d'interpolation en utilisant un argument classique basé sur le Lemme de Deny-Lions<sup>18</sup>. A l'aide de ces estimations on étudie l'application de la méthode ccG au problème de Navier-Stokes incompressible.

**Le problème de Navier–Stokes incompressible** On considère les équations de NSI stationnaires (4.35), ici rappelées par commodité :

$$-\nu \Delta u_i + \partial_j(u_i u_j) + \partial_i p = f_i \quad \text{dans } \Omega, \quad i \in \{1, \dots, d\}, \quad (5.26a)$$

$$\partial_i u_i = 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad (5.26b)$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \quad (5.26c)$$

$$\langle p \rangle_\Omega = 0, \quad (5.26d)$$

où  $d \in \{2, 3\}$ ,  $\nu > 0$  dénote la viscosité dynamique et  $f \in [L^2(\Omega)]^d$  la force de volume. Une discrétisation avec une seule inconnue par maille peut être obtenue en choisissant les espaces discrets suivants :

$$U_h^{\text{ccg}} \stackrel{\text{def}}{=} [V_h^{\text{ccg}}]^d, \quad P_h \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}_d^0(\mathcal{T}_h)/\mathbb{R}, \quad X_h^{\text{ccg}} \stackrel{\text{def}}{=} U_h \times P_h.$$

Soient  $a_h$ ,  $b_h$  et  $s_{p,h}$  les formes bilinéaires définies, respectivement, par (4.42), (4.43), (4.44b), et soit  $t_h$  la forme trilinéaire non dissipative définie par (4.46). On considère le problème discret : Trouver  $(u_h, p_h) \in X_h^{\text{ccg}}$  tel que

$$a_h(u_h, v_h) + t_h(u_h, u_h, v_h) + b_h(v_h, p_h) = \int_\Omega f \cdot v_h \quad \forall v_h \in U_h^{\text{ccg}}, \quad (5.27a)$$

$$-b_h(u_h, q_h) + s_{p,h}(p_h, q_h) = 0 \quad \forall q_h \in P_h, \quad (5.27b)$$

Par brévit  de notation on pose

$$c_h((u_h, p_h), (v_h, q_h)) \stackrel{\text{def}}{=} a_h(u_h, v_h) + b_h(v_h, p_h) - b_h(u_h, q_h) + s_{p,h}(p_h, q_h).$$

La méthode (5.27) utilise une seule inconnue par maille pour chaque composante de la vitesse dans l'esprit des méthodes ccG, et la pression est approchée dans l'espace des fonctions constantes par morceaux. Avec ces choix, l'opérateur  $B : \mathcal{L}(U_h^{\text{ccg}}, P_h)$  tel que  $\langle Bv_h, q_h \rangle = b_h(v_h, q_h)$  pour tout  $(v_h, q_h) \in X_h^{\text{ccg}}$  n'est pas surjectif, et il est nécessaire de stabiliser le couplage vitesse-pression par la forme bilinéaire  $s_{p,h}$ . Le résultat suivant est l'exacte pendant du Lemme 4.19.

18. Voir, par exemple, Ern et Guermond [EG04, Lemme B.67].

TABLE 5.1 – Convergence de la méthode (5.27) pour le problème de Kovasznay [Kov48].

card( $\mathcal{T}_h$ )	$\ u - u_h\ _{[L^2(\Omega)]^d}$	ordre	$\ p - p_h\ _{L^2(\Omega)}$	ordre	$\ (u - u_h, p - p_h)\ _{\text{sto}}$	ordre
224	1.5288e-01	–	2.5693e-01	–	4.5730e-01	–
896	4.1691e-02	1.87	1.0847e-01	1.24	2.1185e-01	1.11
3584	1.1115e-02	1.91	4.0251e-02	1.43	2.1185e-01	1.11
14336	2.9261e-03	1.93	1.7487e-02	1.20	1.0319e-01	1.04
57344	7.6622e-04	1.93	8.7005e-03	1.01	2.6540e-02	0.96

**Lemme 5.15** (Stabilité  $H^1$  de la reconstruction en L). *Sous l'Hypothèse 5.4, il existe  $C$  indépendant du pas de maillage  $h$  tel que, pour tout  $v \in H_0^1(\Omega)$ ,*

$$\|\mathfrak{R}_h^{\text{ccg}}(\mathbf{v}_h)\|_{\text{dG}} \leq C \|v\|_{H^1(\Omega)},$$

avec  $\mathbf{v}_h \stackrel{\text{def}}{=} (\langle v \rangle_T)_{T \in \mathcal{T}_h} \in \mathbb{T}_h$ .

**Lemme 5.16** (Stabilité de la méthode (5.27)). *On admet l'Hypothèse (5.12). Soit, pour tout  $F \in \mathcal{F}_h^1$ ,  $c_F = h_F^{-1}$ . Alors, pour  $\eta$  suffisamment grand,*

(i) *il existe  $\alpha > 0$  indépendant du pas de maillage  $h$  tel que*

$$\forall (v_h, q_h) \in X_h, \quad c_h((v_h, q_h), (v_h, q_h)) \geq \alpha \|v_h\|_{\text{dG}}^2 + |q_h|_p^2;$$

(ii) *il existe  $\beta > 0$  indépendant du pas de maillage  $h$  tel que*

$$\forall q_h \in P_h, \quad \beta \|q_h\|_{L^2(\Omega)} \leq \sup_{w_h \in U_h \setminus \{0\}} \frac{b_h(w_h, q_h)}{\|w_h\|_{\text{dG}}} + |q_h|_p.$$

La preuve du Lemme 5.16 suit de près celle de [1, Lemme 6.9] et elle utilise le Lemme 5.15. L'existence d'une solution discrète aussi bien que la convergence de la méthode (5.27) peuvent alors être prouvées comme dans [7] en utilisant le fait que, pour tout  $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ ,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|\mathfrak{R}_h^{\text{ccg}}(\varphi_h) - \varphi\|_{\text{dG}} \rightarrow 0,$$

avec  $\varphi = (\varphi(x_T))_{T \in \mathcal{T}_h}$ ; voir [1, Lemme 5.22]. Les résultats de convergence pour la méthode (5.27) appliquée au problème de Kovasznay [Kov48] sont présentés en Table 5.1. La Figure 5.8 montre une comparaison entre les méthodes (5.27) et (4.47) appliquées au problème de la cavité entraînée; voir §4.6.3.

### 5.4.3 Une variation à stencil compact

Dans [3] on considère un espace alternatif encore une fois basé sur la construction en L. Pour tout  $F \in \mathcal{F}_h$ , soit  $\mathfrak{g}_F$  un L-groupe donnant lieu à une matrice  $\mathbf{A}_{\mathfrak{g}_F}$  inversible. On définit l'opérateur  $\mathfrak{R}_h^{\text{c3g}} : \mathbb{T}_h \rightarrow \mathbb{P}_d^1(\mathcal{S}_h)$  qui associe à tout  $\mathbf{v}_h \in \mathbb{T}_h$  la fonction  $\mathfrak{R}_h^{\text{c3g}}(\mathbf{v}_h) \in \mathbb{P}_d^1(\mathcal{S}_h)$  telle que

$$\forall T \in \mathcal{T}_h, \forall F \in \mathcal{F}_T, \quad \mathfrak{R}_h^{\text{c3g}}(\mathbf{v}_h)|_{\mathcal{P}_{T,F}} = \xi_{\mathbf{v}_h}^{\mathfrak{g}_F}.$$

L'espace discret est alors

$$V_h^{\text{c3g}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathfrak{R}_h^{\text{c3g}}(\mathbb{T}_h).$$

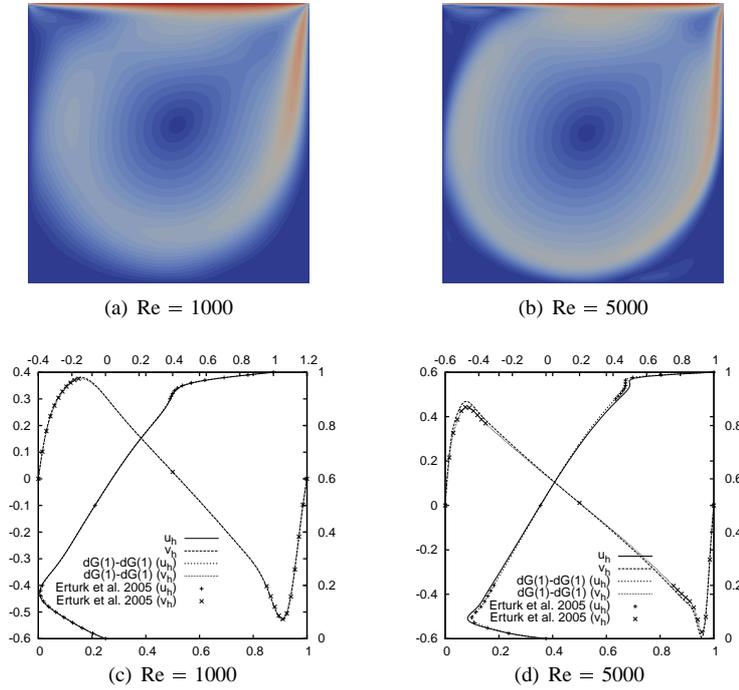


FIGURE 5.8 – Composantes de la vitesse aux médiatrices du domaine. Comparaison avec la méthode (4.47) ( $k = 1$ ) et avec [ECG05].

L'avantage de cet espace est que les fonctions de base ont un support plus compact, ce qui réduit le stencil de la méthode ; voir Figure 5.4.3. En outre, les fonctions de  $V_h^{c3g}$  sont continues aux interfaces de  $\mathcal{T}_h$ , mais discontinues à travers les *sous-faces*, c'est-à-dire les faces latérales des pyramides de  $\mathcal{S}_h$  contenues à l'intérieur des éléments de  $\mathcal{T}_h$ . Dans le cadre de l'imposition faible des conditions de continuité dans l'esprit de [Arn82], il faut donc pénaliser les sauts à travers les sous-faces. Dans [3] on propose une méthode avec stabilisation de sous-face pour le problème de diffusion hétérogène (5.1), on montre ses propriétés de convergence, et on propose une comparaison avec la méthode ccG originale (5.23).

## 5.5 Programmation générative

Un des avantages des méthodes ccG est de fournir un cadre variationnel proche de celui des méthodes dG s'appliquant potentiellement à tout problème pour lequel une discrétisation dG a été envisagée. Dans la thèse de Jean-Marc Gratien (voir §A) on développe un DSEL<sup>19</sup> inspiré par [Pru06, 8] et permettant d'obtenir rapidement des prototypes en utilisant le langage mathématique. La différence principale par rapport aux méthodes d'EF est dans la définition de l'espace discret et des degrés de liberté. Le concept clé dans la mise en œuvre est celui de *combinaison linéaire* (`LinearCombination`). Une combinaison linéaire réalise informatiquement une application linéaire de  $\mathbb{T}_h$  dans l'espace des tenseurs à valeurs réels de rang  $r \in \{0, 1, 2\}$ . Dans le cadre des méthodes

19. *Domain Specific Embedded Language*

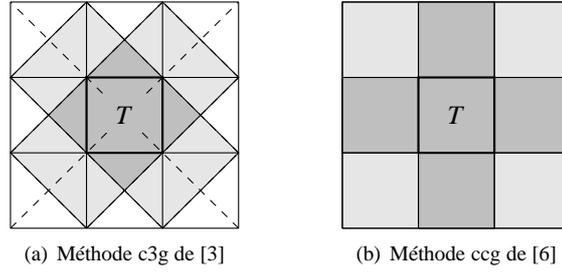


FIGURE 5.9 – Comparaison entre le support minimal (gris foncé) et maximal (gris clair) d'une fonction de base  $\varphi_T$ .

ccG, les termes bilinéaires peuvent être souvent calculés en utilisant un seul nœud de quadrature (coïncidant avec le barycentre de maille ou de face) sans compromettre les propriétés d'approximation du schéma<sup>20</sup>. Prenons, par exemple, le terme

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \nabla u_h \cdot \nabla v_h, \quad (5.28)$$

avec  $u_h, v_h \in V_h^{\text{ccg}}$ . La restriction du gradient des fonctions discrètes à chaque élément est une combinaison linéaire des inconnues de maille à valeurs vectoriels,

$$\nabla u_h = \sum_{T' \in \mathcal{S}} \boldsymbol{\tau}_{T'} u_{T'}, \quad \nabla v_h = \sum_{T'' \in \mathcal{S}} \boldsymbol{\tau}_{T''} v_{T''}, \quad (5.29)$$

où  $\mathcal{S}$  dénote un sous-ensemble opportun de  $\mathcal{T}_h$ . Dans l'assemblage, le terme linéaire (5.28) est associé à la matrice locale

$$\mathbf{A}^T = [a_{T'T''}^T] = [|T|_d \boldsymbol{\tau}_{T'} \cdot \boldsymbol{\tau}_{T''}]$$

c'est-à-dire, au produit interne des combinaisons linéaires exprimant  $\nabla u_h$  et  $\nabla v_h$ . A cause de la dépendance des constructions locales des données du problème<sup>21</sup>, les degrés de liberté intervenant dans les combinaisons linéaires (5.29) sont embarqués dans leur équivalent informatique. Il n'existe donc pas de tableau des degrés de liberté au sens des EF, mais chaque terme connaît sa dépendance des inconnues de  $\mathbb{T}_h$ . Les combinaisons linéaires correspondantes aux fonctions de base évaluées aux centres des mailles et des faces sont précalculées et stockées dans l'équivalent informatique de  $V_h^{\text{ccg}}$ , l'*espace discret* (*DiscreteSpace*). Cette conception informatique est présentée dans le travail [18] en cours de rédaction.

20. Par exemple, tous les termes de la forme bilinéaire  $a_h^{\text{swip}}$  sont calculés de manière exacte en utilisant le barycentre de l'entité sur laquelle on intègre sauf le terme de pénalité. Pour ce dernier, l'approximation est toutefois suffisante à garantir la convergence de la méthode.

21. Par exemple, la construction en L dépend du tenseur  $\kappa$  ainsi que des conditions aux limites.



## Annexe A

# Résumés des thèses en cours

Cet annexe contient les propositions originaires pour les thèses dont je suis actuellement co-responsable.

### Carole Widmer

Le but de cette thèse est l'étude de l'approximation numérique de phénomènes multiphasiques, en particulier l'extraction thermique d'huile ou l'injection de  $\text{CO}_2$ , qui présentent des fronts raides huile/eau, huile/huile ou  $\text{CO}_2$ /eau. La simulation des procédés thermiques pour l'amélioration de la récupération d'huile (SADG, combustion *in situ*, par injection d'air) exige une localisation précise des interfaces entre l'huile rendue mobile par les fluides injectés et l'apport de chaleur et celle qui n'est pas encore entrée en contact avec ces derniers. Les estimations de production et la régulation (monitoring) du site sont fortement influencées par la qualité de l'approximation numérique au voisinage de l'interface. Dans le cas du stockage de  $\text{CO}_2$  dans un réservoir souterrain, les réactions chimiques sont très actives au voisinage du front entre le  $\text{CO}_2$  injecté et l'eau. Une bonne approximation de ce front est donc indispensable pour l'estimation de l'injectivité des puits et de l'intégrité du site. En outre, dans ce cas, il est important de pouvoir certifier la solution numérique pour la gestion des risques. Dans ces deux applications, les fronts se déplacent au fil du temps et leur épaisseur est de plusieurs ordres de grandeur plus faible que le pas de la discrétisation (quelques mètres contre des centaines de mètres). Le coût de calcul ne permettant pas de raffiner uniformément le maillage, il est indispensable d'effectuer les simulations numériques avec des stratégies d'adaptation locale dynamique du maillage. L'adaptation guidée par des estimateurs a posteriori permet, à précision fixée, de réduire jusqu'à 5-10 fois le nombre de mailles nécessaires sur des problèmes modélisant les difficultés réels. Cette thématique est considérée de pointe dans la communauté scientifique étudiant le problème du stockage du  $\text{CO}_2$ . La thèse poursuivra le cadre d'adaptation dynamique de maillage proposé dans [MECH10] en utilisant les techniques d'estimation *a posteriori* les plus avancées appliquées aux schémas volumes finis multi-points. Le travail consistera à étendre à des écoulements multiphasiques et non linéaires les méthodes développées pour la discrétisation d'opérateurs de diffusion hétérogènes et anisotropes sur des maillages généraux. De façon à traiter séparément et plus efficacement les difficultés du système, on évaluera la possibilité de le découpler partiellement dans le schéma d'intégration en temps. Le but final est d'obtenir, sur des problèmes réels, des

gains comparables à ceux observés sur les problèmes modèles en terme de réduction du nombre de mailles nécessaires pour atteindre une précision fixée. Les axes de recherche principaux seront (i) la conception d'estimateurs *a posteriori* adaptés aux problèmes physiques ; (ii) la définition d'une stratégie pour anticiper le déplacement du front et, donc, de la zone à raffiner ; (iii) l'étude de schémas découplés en temps selon les phases ; (iv) l'évaluation du raffinement anisotrope pour réduire le nombre de mailles ; (v) la conception d'estimateurs d'erreur globaux pour qualifier la solution numérique. Les applications visées étant tridimensionnelles, les stratégies développées dans la thèse seront mises en œuvre sous la plate-forme parallèle Arcane. Ceci demandera aussi une étude de stratégies d'équilibrage dynamique de charge qui s'avéreront nécessaires pour optimiser les performances sur architectures parallèles.

## Jean-Marc Gratien

La spécificité des logiciels scientifiques développés par IFP Energies nouvelles tient avant tout à l'originalité des modèles représentant les situations physiques exprimés sous forme de systèmes d'EDPs assortis de lois de fermeture complexes. Le développement de ces logiciels, conçus pour être exécutés sur les super calculateurs parallèles modernes, nécessite de combiner des méthodes volumes finis robustes et efficaces avec des technologies informatiques qui permettent de tirer au mieux parti de ces calculateurs (parallélisme, gestion de la mémoire, réseaux d'interconnexion, etc). Ces technologies de plus en plus sophistiquées ne peuvent plus être maîtrisées dans leur ensemble par les chercheurs métiers chargés d'implémenter des nouveaux modèles. A ce propos, IFP Energies nouvelles a signé un accord de coopération avec le CEA pour développer et utiliser la plateforme Arcane. Ce choix n'est cependant qu'une réponse partielle au problème posé par le développement, la maintenance ou encore la pérennisation des codes de calcul à IFP Energies nouvelles.

Le but de cette thèse est de compléter l'apport de la plateforme Arcane en proposant des nouveaux outils qui (i) permettront de simplifier le passage du modèle physique à sa résolution numérique en s'appuyant à la fois sur des outils informatiques et un cadre mathématique robuste ; (ii) seront intégrés eux-mêmes à la plateforme. Tout d'abord, la programmation générative, l'ingénierie des composants et les langages spécifiques aux domaines d'applications (DSL ou DSEL) sont des technologies clé pour automatiser le développement de programmes. Ces paradigmes permettent d'écrire des codes à la fois lisibles, efficaces et facilement modifiables. Leur application au calcul scientifique était jusqu'à maintenant restreinte aux méthodes de type éléments finis, pour lesquelles un formalisme mathématique unifié existe depuis plus longtemps. L'émergence d'une vision unifiée des méthodes volumes finis et éléments finis [3–6] permet désormais d'éteindre ces technologies aux approches volumes finis.

Cette thèse se propose donc de développer un langage spécifique aux méthodes de discrétisation Volumes Finis permettant le prototypage rapide de codes industriels ou de recherche. Ce langage sera ensuite intégré à la plate-forme Arcane. Les axes de recherche principaux de ce projet sont (i) l'adaptation du cadre mathématique aux applications d'intérêt pour IFP Energies nouvelles ; (ii) le développement d'un langage spécifique permettant de décrire de manière exhaustive ces applications ; (iii) le développement d'un interpréteur sous la plateforme Arcane. Le choix entre DSL et DSEL sera évalué pour assurer l'efficacité des applications générées ; (iv) finalement, la validation des travaux se fera sur des problèmes académiques puis par le prototypage d'une application industrielle dans le cadre de l'axe "CO<sub>2</sub> maîtrisé".

---

## Soleiman Yousef

La simulation des procédés thermiques pour l'amélioration de la récupération d'huile (SADG, *in situ* combustion, par injection d'air) exige une localisation précise des interfaces entre l'huile rendue mobile et celle qui n'est pas encore été mobilisée par l'apport de chaleur extérieur. Les estimations de production et la régulation (monitoring) du site sont fortement influencées par la qualité de l'approximation numérique au voisinage de l'interface. Toutefois, en pratique, il est souvent difficile d'obtenir la précision numérique souhaitée à cause des temps de calcul élevés des simulateurs classiques. Le but de cette thèse est l'étude et la mise en œuvre de techniques de raffinement adaptatif de maillage, qui permettent d'adapter la résolution du maillage aux caractéristiques de la solution. Les sujets abordés au cours de la thèse sont complémentaires par rapport à ceux de la thèse de Mme Carole Widmer démarré en Octobre 2009, et le plan de travail est adapté pour répondre à la fois aux exigences de IFP Energies nouvelles et aux besoins du candidat, M Soleiman Yousef. Ce dernier devant passer deux ans dans son pays natal à partir du mois d'Octobre 2009, le plan s'étale sur quatre ans, dont deux en Syrie (avec possibilité d'un séjour trimestriel par an en France) et deux en France. Le financement IFP est limité aux deux dernières années. Il est prévu pendant la première période essentiellement théorique, (i) d'étendre les estimateurs d'erreur développés dans [19] pour un modèle d'écoulement diphasique au modèle SADG en garantissant la borne supérieure et (ii) d'effectuer une étude théorique exhaustive dans le cadre d'un problème parabolique non-linéaire de type problème de Stefan. En même temps, Carole Widmer développera un simulateur SAGD sur la base d'un prototype AMR existant bidimensionnel. Les estimateurs développés dans le cadre de cette thèse seront ensuite étudiés numériquement par Mme Carole Widmer dans le cadre de la stratégie d'adaptation qu'elle aura entre temps développé. La deuxième période de cette thèse sera consacrée à la mise en œuvre sous la plate-forme Arcane avec les adaptations nécessaires à un simulateur tridimensionnel et parallèle (modification éventuelle des estimateurs pour réduire le coût du post-processing, adaptation des schémas VF aux non conformités et à l'AMR en 3D, équilibrage de charge, etc).



# Bibliographie

- [AB85] D. N. Arnold and F. Brezzi. Mixed and nonconforming finite element methods : implementation, postprocessing and error estimates. *RAIRO Modél. Math. Anal. Numér.*, 19(1) :7–32, 1985.
- [AB08] N. Antonić and K. Burazin. On equivalence of two descriptions of boundary conditions for Friedrichs systems. Croatian Scientific Bibliography, number 368775, 2008.
- [ABBM94] I. Aavatsmark, T. Barkve, Ø. Bøe, and T. Mannseth. Discretization on non-orthogonal, curvilinear grids for multi-phase flow. In *Proc. of the 4th European Conf. on the Mathematics of Oil Recovery*, volume D, Røros, Norway, 1994.
- [ABBM96] I. Aavatsmark, T. Barkve, Ø. Bøe, and T. Mannseth. Discretization on non-orthogonal, quadrilateral grids for inhomogeneous, anisotropic media. *J. Comput. Phys.*, 127 :2–14, 1996.
- [ABBM98a] I. Aavatsmark, T. Barkve, Ø. Bøe, and T. Mannseth. Discretization on unstructured grids for inhomogeneous, anisotropic media, Part I : Derivation of the methods. *SIAM J. Sci. Comput.*, 19(5) :1700–1716, 1998.
- [ABBM98b] I. Aavatsmark, T. Barkve, Ø. Bøe, and T. Mannseth. Discretization on unstructured grids for inhomogeneous, anisotropic media, Part II : Discussion and numerical results. *SIAM J. Sci. Comput.*, 19(5) :1717–1736, 1998.
- [ABC03] Y. Achdou, C. Bernardi, and F. Coquel. A priori and a posteriori analysis of finite volume discretizations of Darcy’s equations. *Numer. Math.*, 96(1) :17–42, 2003.
- [ABCM02] D. N. Arnold, F. Brezzi, B. Cockburn, and L. D. Marini. Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems. *SIAM J. Numer. Anal.*, 39(5) :1749–1779, 2002.
- [AC95] T. Arbogast and Z. Chen. On the implementation of mixed methods as nonconforming methods for second-order elliptic problems. *Math. Comp.*, 64(211) :943–972, 1995.
- [Ada75] R. A. Adams. *Sobolev Spaces*, volume 65 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press, 1975.
- [AEMN08] I. Aavatsmark, G. T. Eigestad, B. T. Mallison, and J. M. Nordbotten. A compact multipoint flux approximation method with improved robustness. *Numer. Methods Partial Differ. Eq.*, 24 :1329–1360, 2008.

- [AG91] C. Amrouche and V. Girault. On the existence and regularity of the solution of Stokes problem in arbitrary dimension. *Proc. Japan. Acad.*, 67 :171–175, 1991.
- [Agm65] S. Agmon. *Lectures on elliptic boundary value problems*. Van Nostrand Mathematical Studies, Princeton, NJ, 1965.
- [Ain07] M. Ainsworth. A posteriori error estimation for discontinuous Galerkin finite element approximation. *SIAM J. Numer. Anal.*, 45(4) :1777–1798, 2007.
- [AM08a] L. Agélas and R. Masson. Convergence of the finite volume MPFA O scheme for heterogeneous anisotropic diffusion problems on general meshes. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 346(17–18) :1007–1012, 2008.
- [AM08b] L. Agélas and R. Masson. Convergence of the finite volume MPFA O scheme for heterogeneous anisotropic diffusion problems on general meshes. Submitted. Preprint available at <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00443881/en/>, May 2008.
- [Amb04] L. Ambrosio. Transport equation and Cauchy problem for  $BV$  vector fields. *Invent. Math.*, 158(2) :227–260, 2004.
- [AO00] M. Ainsworth and J. T. Oden. *A posteriori error estimation in finite element analysis*. Pure and Applied Mathematics (New York). Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], New York, 2000.
- [AR04] R. Abgrall and M. Ricchiuto. Méthodes variationnelles pour les problèmes hyperboliques et paraboliques, application à la mécanique des fluides. Notes from Matmeca course, University of Bordeaux I, 2004.
- [Arn82] D. N. Arnold. An interior penalty finite element method with discontinuous elements. *SIAM J. Numer. Anal.*, 19 :742–760, 1982.
- [AS72] M. Abramowitz and I. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions*. Dover, 9th edition, 1972.
- [Aub87] J.-P. Aubin. *Analyse fonctionnelle appliquée*. Presses Universitaires de France, Paris, 1987.
- [Aub00] J.-P. Aubin. *Applied Functional Analysis*. Pure and Applied Mathematics. Wiley-Interscience, New York, second edition, 2000.
- [BA72] I. Babuška and A. K. Aziz. Survey lectures on the mathematical foundations of the finite element method. In *The mathematical foundations of the finite element method with applications to partial differential equations (Proc. Sympos., Univ. Maryland, Baltimore, Md., 1972)*, pages 1–359. Academic Press, New York, 1972.
- [Bab73a] I. Babuška. The finite element method with lagrangian multipliers. *Numer. Math.*, 20 :179–192, 1973.
- [Bab73b] I. Babuška. The finite element method with penalty. *Math. Comp.*, 27 :221–228, 1973.
- [BadVDM10] L. Beirão da Vega, J. Droniou, and G. Manzini. A unified approach to handle convection term in Finite Volumes and Mimetic Discretization Methods for elliptic problems. *IMA J. Numer. Anal.*, 2010. To appear.

- [BadVLM10] L. Beirão da Vega, K. Lipnikov, and G. Manzini. The Mimetic Finite Difference method for steady stokes problems on polyhedral meshes. *SIAM J. Numer. Anal.*, 2010. To appear.
- [Bak77] G. A. Baker. Finite element methods for elliptic equations using non-conforming elements. *Math. Comp.*, 31(137):45–49, 1977.
- [Bar70] C. Bardos. Problèmes aux limites pour les équations aux dérivées partielles du premier ordre à coefficients réels ; théorèmes d’approximation ; application à l’équation de transport. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 3 :185–233, 1970.
- [Bat67] G. K. Batchelor. *An introduction to fluid dynamics*. Cambridge University Press, 1967.
- [BBF93] C. Baiocchi, F. Brezzi, and L. P. Franca. Virtual bubbles and Galerkin-Least-Squares type methods (GaLS). *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 105 :125–141, 1993.
- [BBG<sup>+</sup>] S. Balay, K. Buschelman, W. D. Gropp, D. Kaushik, M. G. Knepley, L. C. McInnes, B. F. Smith, and H. Zhang. PETSc Web page. <http://www.mcs.anl.gov/petsc>.
- [BCG89] J. B. Bell, P. Colella, and H. M. Glaz. A second-order projection method for the incompressible Navier–Stokes equations. *J. Comput. Phys.*, 85 :257–283, 1989.
- [BD81] I. Babuška and M. R. Dorr. Error estimates for the combined  $h$  and  $p$  versions of the finite element method. *Numer. Math.*, 37(2):257–277, 1981.
- [BDE<sup>+</sup>05] P. Bastian, M. Droske, C. Engwer, R. Klöforn, T. Neubauer, M. Ohlberger, and M. Rumpf. Towards a unified framework for scientific computing. In *Proc. of the 15th international conference on domain decomposition methods*, 2005.
- [BDF94] R. Biswas, K. D. Devine, and J. E. Flaherty. Parallel, adaptive finite element methods for conservation laws. *App. Num. Math.*, 14 :255–283, 1994.
- [BE07] E. Burman and A. Ern. Continuous interior penalty  $hp$ -finite element methods for advection and advection-diffusion equations. *Math. Comp.*, 76(259):1119–1140, 2007.
- [BE08] E. Burman and A. Ern. Discontinuous Galerkin approximation with discrete variational principle for the nonlinear Laplacian. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 346(17–18):1013–1016, 2008.
- [Beb03] M. Bebendorf. A note on the Poincaré inequality for convex domains. *Z. Anal. Anwendungen*, 22(4):751–756, 2003.
- [BEF09] E. Burman, A. Ern, and M. Fernández. Explicit Runge–Kutta schemes and finite elements with symmetric stabilization for first-order PDE systems. HAL Preprint 00380659 2009-409, Université Paris-Est, 2009.
- [BEMS07] E. Burman, A. Ern, I. Mozolevski, and B. Stamm. The symmetric discontinuous Galerkin method does not need stabilization in 1D for polynomial orders  $p \geq 2$ . *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 345(10):599–602, 2007.

- [BF91] F. Brezzi and M. Fortin. *Mixed and hybrid finite element methods*, volume 15 of *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1991.
- [BGC05] R. Bustinza, G. N. Gatica, and B. Cockburn. An a posteriori error estimate for the local discontinuous Galerkin method applied to linear and nonlinear diffusion problems. *J. Sci. Comput.*, 22/23 :147–185, 2005.
- [BHK07] W. Bangerth, R. Hartmann, and G. Kanschat. deal.II — a general-purpose object-oriented finite element library. *ACM Trans. Math. Softw.*, 33(4), 2007.
- [BHL03] R. Becker, P. Hansbo, and M. G. Larson. Energy norm a posteriori error estimation for discontinuous Galerkin methods. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 192(5-6) :723–733, 2003.
- [BHS03] R. Becker, P. Hansbo, and R. Stenberg. A finite element method for domain decomposition with non-matching grids. *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, 37(2) :209–225, 2003.
- [BLS05a] F. Brezzi, K. Lipnikov, and M. Shashkov. Convergence of mimetic finite difference methods for diffusion problems on polyhedral meshes. *SIAM J. Numer. Anal.*, 45 :1872–1896, 2005.
- [BLS05b] F. Brezzi, K. Lipnikov, and V. Simoncini. A family of mimetic finite difference methods on polygonal and polyhedral meshes. *M3AS*, 15 :1533–1553, 2005.
- [BM97] C. Bernardi and Y. Maday. Spectral methods. In *Handbook of numerical analysis, Vol. V*, Handb. Numer. Anal., V, pages 209–485. North-Holland, Amsterdam, 1997.
- [BMM<sup>+</sup>99] F. Brezzi, G. Manzini, L. D. Marini, P. Pietra, and A. Russo. Discontinuous finite elements for diffusion problems. In *Atti del convegno in onore di F. Brioschi (Milano 1997)*, pages 197–217. Istituto Lombardo, Accademia di Scienze e di Lettere, 1999.
- [BMM<sup>+</sup>00] F. Brezzi, G. Manzini, L. D. Marini, P. Pietra, and A. Russo. Discontinuous Galerkin approximations for elliptic problems. *Numer. Methods Partial Differential Equations*, 16(4) :365–378, 2000.
- [BMS04] F. Brezzi, L. D. Marini, and E. Süli. Discontinuous Galerkin methods for first-order hyperbolic problems. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 14(12) :1893–1903, 2004.
- [BO99] C. E. Baumann and J. T. Oden. A discontinuous *hp* finite element method for convection-diffusion problems. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 175(3-4) :311–341, 1999.
- [BO07] S. C. Brenner and L. Owens. A weakly over-penalized non-symmetric interior penalty method. *JNAIAM J. Numer. Anal. Ind. Appl. Math.*, 2(1-2) :35–48, 2007.
- [BO09] A. Buffa and C. Ortner. Compact embeddings of broken Sobolev spaces and applications. *IMA J. Numer. Anal.*, 4(29) :827–855, 2009.
- [Bog80] M. Bogovskii. *Theory of cubature formulas and the application of functional analysis to problems of mathematical physics*, volume 149(1) of *Trudy Sem. S. L. Soboleva*, chapter Solutions of some problems of vector analysis associated with the operators div and grad, pages 5–40. Akad. Nauk SSSR Sibirsk. Otdel. Inst. Mat., Novosibirsk, Russia, 1980.

- [Boy05] F. Boyer. Trace theorems and spatial continuity properties for the solutions of the transport equation. *Differential Integral Equations*, 18(8) :891–934, 2005.
- [BQS10] E. Burman, A. Quarteroni, and B. Stamm. Interior penalty continuous and discontinuous finite element approximations of hyperbolic equations. *J. Sci. Comput.*, 2010. To appear.
- [BR97] F. Bassi and S. Rebay. A high-order accurate discontinuous finite element method for the numerical solution of the compressible Navier-Stokes equations. *J. Comput. Phys.*, 131(2) :267–279, 1997.
- [BR03] P. Bastian and B. Rivière. Superconvergence and  $H(\text{div})$  projection for discontinuous Galerkin methods. *Internat. J. Numer. Methods Fluids*, 42(10) :1043–1057, 2003.
- [Bre74] F. Brezzi. On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from Lagrange multipliers. *RAIRO Anal. Numér.*, pages 129–151, 1974.
- [Bré83] H. Brézis. *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications. [Functional Analysis. Theory and applications]*. Applied Mathematics Series for the Master’s Degree. Masson, Paris, France, 1983.
- [Bre03] S. C. Brenner. Poincaré-Friedrichs inequalities for piecewise  $H^1$  functions. *SIAM J. Numer. Anal.*, 41(1) :306–324, 2003.
- [Bre04] S. C. Brenner. Korn’s inequalities for piecewise  $H^1$  vector fields. *Math. Comp.*, 73(247) :1067–1087 (electronic), 2004.
- [BRM<sup>+</sup>97] F. Bassi, S. Rebay, G. Mariotti, S. Pedinotti, and M. Savini. A high-order accurate discontinuous finite element method for inviscid and viscous turbomachinery flows. In R. Decuyper and G. Dibelius, editors, *Proceedings of the 2<sup>nd</sup> European Conference on Turbomachinery Fluid Dynamics and Thermodynamics*, pages 99–109, 1997.
- [BS09] E. Burman and B. Stamm. Low order discontinuous Galerkin methods for second order elliptic problems. *SIAM J. Numer. Anal.*, 47(1) :508–533, 2008/09.
- [BS07] E. Burman and B. Stamm. Minimal stabilization for discontinuous Galerkin finite element methods for hyperbolic problems. *J. Sci. Comput.*, 33 :183–208, 2007.
- [BS08a] D. Braess and J. Schöberl. Equilibrated residual error estimator for edge elements. *Math. Comp.*, 77(262) :651–672, 2008.
- [BS08b] S. C. Brenner and L. R. Scott. *The mathematical theory of finite element methods*, volume 15 of *Texts in Applied Mathematics*. Springer, New York, third edition, 2008.
- [BSK81] I. Babuška, B. A. Szabo, and I. N. Katz. The  $p$ -version of the finite element method. *SIAM J. Numer. Anal.*, 18(3) :515–545, 1981.
- [But87] J. Butcher. *The numerical analysis of ordinary differential equations : Runge-Kutta and general linear methods*. Wiley, Chichester, 1987.
- [BZ73] I. Babuška and M. Zlámal. Nonconforming elements in the finite element method with penalty. *SIAM J. Numer. Anal.*, 10(5) :863–875, 1973.

- [BZ06] E. Burman and P. Zunino. A domain decomposition method for partial differential equations with non-negative form based on interior penalties. *SIAM J. Numer. Anal.*, 44 :1612–1638, 2006.
- [Cas05] P. Castillo. An a posteriori error estimate for the local discontinuous Galerkin method. *J. Sci. Comput.*, 22/23 :187–204, 2005.
- [Cas10] P. E. Castillo. Stencil reduction algorithms for the local discontinuous Galerkin method. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 81 :1475–1491, 2010.
- [Cat61] L. Cattabriga. Su un problema al contorno relativo al sistema di equazioni di Stokes. *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, 31 :308–340, 1961.
- [CB95] Q. Chen and I. Babuška. Approximate optimal points for polynomial interpolation of real functions in an interval and in a triangle. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 128(3-4) :405–417, 1995.
- [CC89] G. Chavent and B. Cockburn. The local projection  $P^0P^1$ -discontinuous-Galerkin finite element method for scalar conservation laws. *RAIRO Modél. Math. Anal. Numér.*, 23(4) :565–592, 1989.
- [CC04] Zhangxin Chen and Hongsen Chen. Pointwise error estimates of discontinuous Galerkin methods with penalty for second-order elliptic problems. *SIAM J. Numer. Anal.*, 42(3) :1146–1166 (electronic), 2004.
- [CDN08] S. Cochez-Dhondt and S. Nicaise. Equilibrated error estimators for discontinuous Galerkin methods. *Numer. Methods Partial Differential Equations*, 24(5) :1236–1252, 2008.
- [CF00] C. Carstensen and S. A. Funken. Constants in Clément-interpolation error and residual based a posteriori error estimates in finite element methods. *East-West J. Numer. Math.*, 8(3) :153–175, 2000.
- [CGS03a] M. H. Carpenter, D. Gottlieb, and C.-W. Shu. On the conservation and convergence to weak solutions of global schemes. *J. Sci. Comput.*, 18(1) :111–132, 2003.
- [CGS03b] B. Cockburn, Kanschat G., and D. Schötzau. The local discontinuous Galerkin method for the Oseen equations. *Math. Comp.*, 73 :569–593, 2003.
- [Che93] Z. Chen. Analysis of mixed methods using conforming and nonconforming finite element methods. *RAIRO Modél. Math. Anal. Numér.*, 27(1) :9–34, 1993.
- [Cho68] A. J. Chorin. Numerical solution of the Navier–Stokes equations. *Math. Comp.*, 22 :745–762, 1968.
- [Cho69] A. J. Chorin. On the convergence of discrete approximations to the unsteady Navier–Stokes equations. *Math. Comp.*, 23 :341–353, 1969.
- [CHS90] B. Cockburn, S. Hou, and C.-W. Shu. The Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws. IV. The multidimensional case. *Math. Comp.*, 54(190) :545–581, 1990.
- [Cia78] P. G. Ciarlet. *The Finite Element Method for Elliptic Problems*. North Holland, Amsterdam, 1978.
- [Cia02] P. G. Ciarlet. *The finite element method for elliptic problems*, volume 40 of *Classics in Applied Mathematics*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2002. Reprint of the 1978 original [North-Holland, Amsterdam ; MR0520174 (58 #25001)].

- [CKS00] B. Cockburn, G.E. Karniadakis, and C.-W. Shu. *Discontinuous Galerkin Methods - Theory, Computation and Applications*, volume 11 of *Lecture Notes in Computer Science and Engineering*. Springer, 2000.
- [CKS05] B. Cockburn, G. Kanschat, and D. Schötzau. A locally conservative LDG method for the incompressible Navier-Stokes equations. *Math. Comp.*, 74 :1067–1095, 2005.
- [CKS07] B. Cockburn, G. Kanschat, and D. Schötzau. A note on discontinuous Galerkin divergence-free solutions of the Navier-Stokes equations. *J. Sci. Comput.*, 31(1-2) :61–73, 2007.
- [CKSS02] B. Cockburn, G. Kanschat, D. Schötzau, and C. Schwab. Local Discontinuous Galerkin methods for the Stokes system. *SIAM J. Numer. Anal.*, 40(1) :319–343 (electronic), 2002.
- [CLS89] B. Cockburn, S. Lin, and C.-W. Shu. TVB Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws. III. One-dimensional systems. *J. Comput. Phys.*, 84(1) :90–113, 1989.
- [CMR09] A. Cangiani, G. Manzini, and A. Russo. Convergence analysis of a mimetic finite difference method for general second-order problems. *SIAM J. Numer. Anal.*, 47(4) :2612–2637, 2009.
- [Coc97] B. Cockburn. *Advanced numerical approximation of nonlinear hyperbolic equations*, chapter An introduction to the discontinuous Galerkin method for convection-dominated problems, pages 151–269. *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, 1997.
- [Coc99] B. Cockburn. Discontinuous Galerkin methods for convection-dominated problems. In *High-order methods for computational physics*, volume 9 of *Lect. Notes Comput. Sci. Eng.*, pages 69–224. Springer, Berlin, 1999.
- [Col51] J. D. Cole. On a quasi-parabolic equation occurring in aerodynamics. *Quart. Appl. Math.*, 9(3) :225–236, 1951.
- [Cou95] W. Couzy. *Spectral element discretization of the unsteady Navier-Stokes equations and its iterative solutions on parallel computers*. PhD thesis, École Polytechnique Fédérale de Lausanne, 1995.
- [CQ82] C. Canuto and A. Quarteroni. Approximation results for orthogonal polynomials in Sobolev spaces. *Math. Comp.*, 38(157) :67–86, 1982.
- [Cri09] G. Crippa. *The flow associated to weakly differentiable vector fields*, volume 12 of *Tesi. Scuola Normale Superiore di Pisa (Nuova Series) [Theses of Scuola Normale Superiore di Pisa (New Series)]*. Edizioni della Normale, Pisa, 2009.
- [CS89] B. Cockburn and C.-W. Shu. TVB Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws. II. General framework. *Math. Comp.*, 52(186) :411–435, 1989.
- [CS91] B. Cockburn and C.-W. Shu. The Runge-Kutta local projection  $P^1$ -discontinuous-Galerkin finite element method for scalar conservation laws. *RAIRO Modél. Math. Anal. Numér.*, 25(3) :337–361, 1991.
- [CS98a] B. Cockburn and C.-W. Shu. The local discontinuous Galerkin finite element method for convection-diffusion systems. *SIAM J. Numer. Anal.*, 35 :2440–2463, 1998.

- [CS98b] B. Cockburn and C.-W. Shu. The Runge-Kutta discontinuous Galerkin method for conservation laws. V. Multidimensional systems. *J. Comput. Phys.*, 141(2) :199–224, 1998.
- [CS05] B. Cockburn and C.-W. Shu. Foreword [Proceedings of the First International Symposium on DG Methods]. *J. Sci. Comput.*, 22/23 :1–3, 2005. Held in Newport, RI, May 24–26, 1999.
- [CT90a] P. Caussignac and R. Touzani. Solution of three-dimensional boundary layer equations by a discontinuous finite element method. I. Numerical analysis of a linear model problem. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 78(3) :249–271, 1990.
- [CT90b] P. Caussignac and R. Touzani. Solution of three-dimensional boundary layer equations by a discontinuous finite element method. II. Implementation and numerical results. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 79(1) :1–20, 1990.
- [Daw06] C. Dawson. Foreword. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 195(25–28) :3183, 2006.
- [DdCR00] A. V. C. Duarte, E. G. D. do Carmo, and F. A. Rochinha. Consistent discontinuous finite elements in elastodynamics. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 190(1-2) :193–223, 2000.
- [DE06] J. Droniou and R. Eymard. A mixed finite volume scheme for anisotropic diffusion problems on any grid. *Num. Math.*, 105(1) :35–71, 2006.
- [DEGH10] J. Droniou, R. Eymard, T. Gallouët, and R. Herbin. A unified approach to mimetic finite difference, hybrid finite volume and mixed finite volume methods. *M3AS, Math. Models Methods Appl. Sci.*, 20(2) :265–295, 2010.
- [Dei85] K. Deimling. *Nonlinear functional analysis*. Springer-Verlag, Berlin, 1985.
- [Des04a] B. Desprès. Convergence of non-linear finite volume schemes for linear transport. In *Notes from the XIth Jacques-Louis Lions Hispano-French School on Numerical Simulation in Physics and Engineering (Spanish)*, pages 219–239. Grupo Anal. Teor. Numer. Modelos Cienc. Exp. Univ. Cádiz, Cádiz, 2004.
- [Des04b] B. Despres. Lax theorem and finite volume schemes. *Math. Comp.*, 73(247) :1203–1234 (electronic), 2004.
- [DHP03] I. Danaïla, F. Hecht, and O. Pironneau. *Simulation numérique en C++*. Dunod, Paris, 2003. <http://www.freefem.org>.
- [DJD76] J. Douglas Jr. and T. Dupont. *Lecture Notes in Physics*, volume 58, chapter Interior penalty procedures for elliptic and parabolic Galerkin methods. Springer-Verlag, Berlin, 1976.
- [DM99] P. Destuynder and B. Métivet. Explicit error bounds in a conforming finite element method. *Math. Comp.*, 68(228) :1379–1396, 1999.
- [DM01] R. G. Durán and M. A. Muschietti. An explicit right inverse of the divergence operator which is continuous in weighted norms. *Studia Math.*, 148(3) :207–219, 2001.
- [Dry03] M. Dryja. On discontinuous Galerkin methods for elliptic problems with discontinuous coefficients. *Comput. Methods Appl. Math.*, 3(1) :76–85, 2003.

- [DSW04] C. Dawson, S. Sun, and M. F. Wheeler. Compatible algorithms for coupled flow and transport. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 193 :2565–2580, 2004.
- [EAE04] L. El Alaoui and A. Ern. Residual and hierarchical a posteriori error estimates for nonconforming mixed finite element methods. *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, 38(6) :903–929, 2004.
- [ECG05] E. Erturk, T. C. Corke, and C. Gökçöl. Numerical solutions of 2-d steady incompressible driven cavity flow at high reynolds numbers. *Int. J. Num. Meth. Fluids*, 48 :747–774, 2005.
- [EG04] A. Ern and J.-L. Guermond. *Theory and Practice of Finite Elements*, volume 159 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, NY, 2004.
- [EG06a] A. Ern and J.-L. Guermond. Discontinuous Galerkin methods for Friedrichs’ systems. I. General theory. *SIAM J. Numer. Anal.*, 44(2) :753–778, 2006.
- [EG06b] A. Ern and J.-L. Guermond. Discontinuous Galerkin methods for Friedrichs’ systems. II. Second-order elliptic PDEs. *SIAM J. Numer. Anal.*, 44(6) :2363–2388, 2006.
- [EG08] A. Ern and J.-L. Guermond. Discontinuous Galerkin methods for Friedrichs’ systems. III. Multi-field theories with partial coercivity. *SIAM J. Numer. Anal.*, 46(2) :776–804, 2008.
- [EGC07] A. Ern, J.-L. Guermond, and G. Caplain. An intrinsic criterion for the bijectivity of Hilbert operators related to Friedrichs’ systems. *Comm. Partial Differ. Eq.*, 32 :317–341, 2007.
- [EGGH98] R. Eymard, Th. Gallouët, M. Ghilani, and R. Herbin. Error estimates for the approximate solutions of a nonlinear hyperbolic equation given by finite volume schemes. *IMA J. Numer. Anal.*, 18(4) :563–594, 1998.
- [EGH00] R. Eymard, Th. Gallouët, and R. Herbin. *The Finite Volume Method*. Ph. Charlet and J.L. Lions eds, North Holland, 2000.
- [EGH01] R. Eymard, Th. Gallouët, , and R. Herbin. Finite volume approximation of elliptic problems and convergence of an approximate gradient. *Appl. Numer. Math.*, 37 :31–53, 2001.
- [EGH09] R. Eymard, T. Gallouët, and R. Herbin. Discretization of heterogeneous and anisotropic diffusion problems on general nonconforming meshes SUSHI : a scheme using stabilization and hybrid interfaces. *IMA J. Numer. Anal.*, June 2009. to appear. Preprint available at <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00203269/fr>.
- [EGHL07] R. Eymard, Th. Gallouët, R. Herbin, and J.-C. Latché. Analysis tools for finite volume schemes. *Acta Math. Univ. Comenian. (N.S.)*, 76(1) :111–136, 2007.
- [EHL07] R. Eymard, R. Herbin, and J.-C. Latché. Convergence analysis of a colocated finite volume scheme for the incompressible Navier-Stokes equations on general 2D or 3D meshes. *SIAM J. Numer. Anal.*, 45(1) :1–36, 2007.
- [EHM03] R. Eymard, R. Herbin, and A. Michel. Mathematical study of a petroleum-engineering scheme. *M2an Math. Model. Numer. Anal.*, 37 :937–972, 2003.

- [EMS09] A. Ern, I. Mozolevski, and L. Schuh. Accurate velocity reconstruction for Discontinuous Galerkin approximations of two-phase porous media flows. *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I*, 347 :551–554, 2009.
- [EMS10] A. Ern, I. Mozolevski, and L. Schuh. Discontinuous Galerkin approximation of two-phase flows in heterogeneous porous media with discontinuous capillary pressures. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 199(23-24) :1491–1501, 2010.
- [ENV07] A. Ern, S. Nicaise, and M. Vohralík. An accurate  $\mathbf{H}(\text{div})$  flux reconstruction for discontinuous Galerkin approximations of elliptic problems. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 345(12) :709–712, 2007.
- [ER94] M.G. Edwards and C.F. Rogers. A flux continuous scheme for the full tensor pressure equation. In *Proc. of the 4th European Conf. on the Mathematics of Oil Recovery*, volume D, Røros, Norway, 1994.
- [ER98] M.G. Edwards and C.F. Rogers. Finite volume discretization with imposed flux continuity for the general tensor pressure equation. *Comput. Geosci.*, 2 :259–290, 1998.
- [ES08] A. Ern and A. F. Stephansen. A posteriori energy-norm error estimates for advection-diffusion equations approximated by weighted interior penalty methods. *J. Comp. Math.*, 26(4) :488–510, 2008.
- [ESV10] A. Ern, A. F. Stephansen, and M. Vohralík. Guaranteed and robust discontinuous galerkin a posteriori error estimates for convection-diffusion-reaction problems. *J. Comp. Appl. Math.*, 2010. to appear.
- [ESZ09] A. Ern, A. F. Stephansen, and P. Zunino. A discontinuous Galerkin method with weighted averages for advection-diffusion equations with locally small and anisotropic diffusivity. *IMA J. Numer. Anal.*, 29(2) :235–256, 2009.
- [EV09] A. Ern and M. Vohralík. Flux reconstruction and a posteriori error estimation for discontinuous Galerkin methods on general nonmatching grids. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 347 :441–444, 2009.
- [Eva98] L. C. Evans. *Partial differential equations*, volume 19 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.
- [Fri58] K. O. Friedrichs. Symmetric positive linear differential equations. *Comm. Pure and Appl. Math.*, 11 :333–418, 1958.
- [FS91] L. Franca and R. Stenberg. Error analysis of Galerkin least squares methods for the elasticity equations. *SIAM J. Numer. Anal.*, 28(6) :1680–1697, 1991.
- [GD03] A. Granas and J. Dugundji. *Fixed point theory*. Springer-Verlag, New York, 2003.
- [GGS82] U. Ghia, K. N. Ghia, and C. T. Shin. High-Re solutions for incompressible flow using the Navier–Stokes equations and a multigrid method. *J. Comput. Phys.*, 12 :387–411, 1982.
- [GLR03] L. Giraud, J. Langou, and M. Rozloznik. On the loss of orthogonality in the Gram-Schmidt orthogonalization process. Technical report TR/PA/03/25, CERFACS, 2003.

- [God79] K. Goda. A multistep technique with implicit difference schemes for calculation two- or three-dimensional cavity flows. *J. Comp. Phys.*, 30 :76–95, 1979.
- [GQ89] F. Gastaldi and A. Quarteroni. On the coupling of hyperbolic and parabolic systems : Analytical and numerical approach. *Appl. Numer. Math.*, 6 :3–31, 1989.
- [GQ98] J.-L. Guermond and L. Quartapelle. On the approximation of the unsteady Navier–Stokes equations by finite element projection methods. *Numer. Math.*, 80 :207–238, 1998.
- [GR86] V. Girault and P.-A. Raviart. *Finite element methods for Navier-Stokes equations*, volume 5 of *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1986. Theory and algorithms.
- [GR91] E. Godlewski and P.-A. Raviart. *Hyperbolic systems of conservation laws*. Number 3/4 in *Mathématiques & Applications*. Ellipses, Paris, 1991.
- [GR96] E. Godlewski and P.-A. Raviart. *Numerical approximation of systems of conservation laws*, volume 118 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, Inc., 1996.
- [Gri92] P. Grisvard. *Singularities in Boundary Value Problems*. Masson, Paris, 1992.
- [GRW04] V. Girault, B. Rivière, and M. F. Wheeler. A discontinuous Galerkin method with nonoverlapping domain decomposition for the Stokes and Navier-Stokes problems. *Math. Comp.*, 74(249) :53–84 (electronic), 2004.
- [GS97] D. Gottlieb and C.-W. Shu. On the Gibbs phenomenon and its resolution. *SIAM Rev.*, 39(4) :644–668, 1997.
- [GS98] S. Gottlieb and C.-W. Shu. Total variation diminishing Runge-Kutta schemes. *Math. Comp.*, 67(221) :73–85, 1998.
- [GST01] S. Gottlieb, C.-W. Shu, and E. Tadmor. Strong stability-preserving high-order time discretization methods. *SIAM Rev.*, 43(1) :89–112 (electronic), 2001.
- [Gue01] J.-L. Guermond. Subgrid stabilization of Galerkin approximations of linear monotone operators. *IMA J. Numer. Anal.*, 21 :165–197, 2001.
- [Guz06] Johnny Guzmán. Pointwise error estimates for discontinuous Galerkin methods with lifting operators for elliptic problems. *Math. Comp.*, 75(255) :1067–1085 (electronic), 2006.
- [HFH89] T. J. R. Hughes, L. P. Franca, and G. M. Hulbert. A new finite element formulation for computational fluid dynamics : VIII. The Galerkin/Least-Squares method for advection-diffusive equations. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 73 :173–189, 1989.
- [HL08] P. Hansbo and M. G. Larson. Piecewise divergence-free discontinuous Galerkin methods for Stokes flow. *Commun. Numer. Meth. Engng*, 24 :355–366, 2008.
- [HMSW99] P. Houston, J. A. Mackenzie, E. Süli, and G. Warnecke. A posteriori error analysis for numerical approximations of Friedrichs systems. *Numer. Math.*, 82(3) :433–470, 1999.

- [HN03] B. Heinrich and S. Nicaise. The Nitsche mortar finite-element method for transmission problems with singularities. *IMA J. Numer. Anal.*, 23(2) :331–358, 2003.
- [HNW93] E. Hairer, S. P. Nørsett, and G. Wanner. *Solving ordinary differential equations. I*, volume 8 of *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1993. Nonstiff problems.
- [Hop50] E. Hopf. The partial differential equation  $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$ . *Comm. Pure and Appl. Math.*, 3 :201–230, 1950.
- [HOS99] D. J. Hardy, D. I. Okunbor, and R. D. Skeel. Symplectic variable step size integration for n-body problems. *Appl. Numer. Math.*, 29 :19–30, 1999.
- [HP02] B. Heinrich and K. Pietsch. Nitsche type mortaring for some elliptic problem with corner singularities. *Computing*, 68(3) :217–238, 2002.
- [HP05] B. Heinrich and K. Pönitz. Nitsche type mortaring for singularly perturbed reaction-diffusion problems. *Computing*, 75(4) :257–279, 2005.
- [HR90] G. C. Heywood and R. Rannacher. Finite element approximation of the nonstationary Navier–Stokes problem. *SIAM J. Numer. Anal.*, 27 :353–384, 1990.
- [HSW07] P. Houston, D. Schötzau, and T. P. Wihler. Energy norm a posteriori error estimation of *hp*-adaptive discontinuous Galerkin methods for elliptic problems. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 17(1) :33–62, 2007.
- [HW96] E. Hairer and G. Wanner. *Solving ordinary differential equations. II*, volume 14 of *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1996. Stiff and differential-algebraic problems.
- [HW02] J. S. Hesthaven and T. Warburton. Nodal high-order methods on unstructured grids. i : Time-domain solution of maxwell’s equations. *J. Comput. Phys.*, 181(1) :186–221, 2002.
- [HW08] J. S. Hesthaven and T. Warburton. *Nodal discontinuous Galerkin methods*, volume 54 of *Texts in Applied Mathematics*. Springer, New York, 2008. Algorithms, analysis, and applications.
- [Jen04] M. Jensen. *Discontinuous Galerkin Methods for Friedrichs Systems with Irregular Solutions*. PhD thesis, University of Oxford, 2004.
- [JNP84] C. Johnson, U. Nävert, and J. Pitkäranta. Finite element methods for linear hyperbolic equations. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 45 :285–312, 1984.
- [JP86] C. Johnson and J. Pitkäranta. An analysis of the discontinuous Galerkin method for a scalar hyperbolic equation. *Math. Comp.*, 46(173) :1–26, 1986.
- [JS94] G. S. Jiang and C.-W. Shu. On a cell entropy inequality for discontinuous Galerkin methods. *Math. Comp.*, 62(206) :531–538, 1994.
- [Kan07] G. Kanschat. *Discontinuous Galerkin methods for viscous incompressible flow*. Teubner, Wiesbaden, 2007.
- [Kan08] G. Kanschat. Divergence-free discontinuous Galerkin schemes for the Stokes equations and the MAC scheme. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 56 :941–950, 2008.

- [Kel75] R. B. Kellogg. On the Poisson equation with intersecting interfaces. *Applicable Anal.*, 4 :101–129, 1974/75. Collection of articles dedicated to Nikolai Ivanovich Muskhelishvili.
- [KF80] A. N. Kolmogorov and S. V. Fomin. *Elementi di teoria delle funzioni e di analisi funzionale*. Mir, Moscow, fourth edition, 1980.
- [Kim07] K. Y. Kim. A posteriori error estimators for locally conservative methods of nonlinear elliptic problems. *Appl. Numer. Math.*, 57(9) :1065–1080, 2007.
- [KJ98] O. A. Karakashian and W. N. Jureidini. A nonconforming finite element method for the stationary Navier-Stokes equations. *SIAM J. Numer. Anal.*, 35(1) :93–120 (electronic), 1998.
- [KK06] O. A. Karakashian and Th. Katsaounis. Numerical simulation of incompressible fluid flow using locally solenoidal elements. *Comput. Math. Appl.*, 51(9-10) :1551–1570, 2006.
- [Kov48] L. S. G. Kovasznay. Laminar flow behind a two-dimensional grid. *Proc. Camb. Philos. Soc.*, 44 :58–62, 1948.
- [KP03] O. A. Karakashian and F. Pascal. A posteriori error estimates for a discontinuous Galerkin approximation of second-order elliptic problems. *SIAM J. Numer. Anal.*, 41(6) :2374–2399, 2003.
- [KP07] O. A. Karakashian and F. Pascal. Convergence of adaptive discontinuous Galerkin approximations of second-order elliptic problems. *SIAM J. Numer. Anal.*, 45(2) :641–665, 2007.
- [KPSC06] B. Kirk, J. W. Peterson, R. H. Stogner, and G. F. Carey. libmesh : A C++ library for parallel adaptive mesh refinement/coarsening simulation. *Engineering with Computers*, 22(3–4) :237–254, 2006.
- [KS99] G. E. Karniadakis and J. S. Spencer. *Spectral hp Element Methods for CFD*. Numerical Mathematics and Scientific Computation. Oxford University Press, New York, NY, 1999.
- [KS04] G. E. Karniadakis and S. Sherwin. *Spectral/hp Element Methods for Computational Fluid Dynamics*. Oxford University Press, USA, 2004.
- [KW06] R. A. Klausen and R. Winther. Convergence of multi-point flux approximation on quadrilateral grids. *Numer. Math.*, 104 :317–337, 2006.
- [Lad75] P. Ladevèze. *Comparaison de modèles de milieux continus*. Ph.D. thesis, Université Pierre et Marie Curie (Paris 6), 1975.
- [LeF02] P. LeFloch. *Hyperbolic systems of conservation laws : the theory of classical and nonclassical shock waves*. Lectures in Mathematics. ETH Zürich. Birkhäuser, 2002.
- [Les75] P. Lesaint. *Sur la résolution des systèmes hyperboliques du premier ordre par des méthodes d'éléments finis*. PhD thesis, University of Paris VI, 1975.
- [Les74] P. Lesaint. Finite element methods for symmetric hyperbolic equations. *Numer. Math.*, 21 :244–255, 1973/74.
- [LeV02] R. J. LeVeque. *Finite volume methods for hyperbolic problems*. Cambridge Texts in Applied Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

- [LH07] J. Li and Y. He. Superconvergence of discontinuous Galerkin finite element method for the stationary Navier-Stokes equations. *Numer. Methods Partial Differential Equations*, 23(2) :421–436, 2007.
- [LL83] P. Ladevèze and D. Leguillon. Error estimate procedure in the finite element method and applications. *SIAM J. Numer. Anal.*, 20(3) :485–509, 1983.
- [LM54] P. D. Lax and A. N. Milgram. Parabolic equations. In *Contributions to the theory of partial differential equations*, Annals of Mathematics Studies, no. 33, pages 167–190. Princeton University Press, Princeton, N. J., 1954.
- [LN04] M. G. Larson and A. J. Niklasson. Analysis of a nonsymmetric discontinuous Galerkin method for elliptic problems : stability and energy error estimates. *SIAM J. Numer. Anal.*, 42(1) :252–264 (electronic), 2004.
- [LNSO04] A. Lew, P. Neff, D. Sulsky, and M. Ortiz. Optimal BV estimates for a discontinuous Galerkin method for linear elasticity. *AMRX Appl. Math. Res. Express*, 3 :73–106, 2004.
- [LP60] P. D. Lax and R. S. Phillips. Local boundary conditions for dissipative symmetric linear differential operators. *Comm. Pure Appl. Math.*, 13 :427–455, 1960.
- [LR74] P. Lesaint and P.-A. Raviart. On a finite element method for solving the neutron transport equation. In *Mathematical Aspects of Finite Elements in Partial Differential Equations*, pages 89–123. Publication No. 33. Math. Res. Center, Univ. of Wisconsin-Madison, Academic Press, New York, 1974.
- [LRT06] R. Lazarov, S. Repin, and S. Tomar. Functional a posteriori error estimates for discontinuous Galerkin approximations of elliptic problems. Report 2006-40, Ricam, Austria, 2006.
- [LS00] J. G. Liu and C.-W. Shu. A high-order discontinuous Galerkin method for 2D incompressible flows. *J. Comput. Phys.*, 2(160) :577–596, 2000.
- [LS03] A. Lasis and E. Süli. Poincaré-type inequalities for broken Sobolev spaces. Technical Report 03/10, Oxford University Computing Laboratory, Oxford, England, 2003.
- [LS07] A. Lasis and E. Süli.  $hp$ -version discontinuous Galerkin finite element method for semilinear parabolic problems. *SIAM J. Numer. Anal.*, 45(4) :1544–1569, 2007.
- [LT98] D. Levy and E. Tadmor. From semidiscrete to fully discrete : stability of Runge-Kutta schemes by the energy method. *SIAM Rev.*, 40(1) :40–73 (electronic), 1998.
- [LW04] R. Luce and B. I. Wohlmuth. A local a posteriori error estimator based on equilibrated fluxes. *SIAM J. Numer. Anal.*, 42(4) :1394–1414, 2004.
- [LW07] C. Liu and N. J. Walkington. Convergence of numerical approximations of the incompressible Navier-Stokes equations with variable density and viscosity. *SIAM J. Numer. Anal.*, 45(3) :1287–1304 (electronic), 2007.
- [LZ93] Q. Lin and A. Zhou. Convergence of the discontinuous Galerkin method for a scalar hyperbolic equation. *Acta Math. Sci. (English Ed.)*, 13(2) :207–210, 1993.

- [MECH10] M. Mamaghani, G. Enchéry, and C. Chainais-Hillairet. Development of a refinement criterion for adaptive mesh refinement in SAGD simulation. *Comput. Geosci.*, 2010. DOI : 1.1007/s10596-010-9192-4.
- [MFMH08] A. Montlaur, S. Fernandez-Mendez, and A. Huerta. Discontinuous Galerkin methods for the Stokes equations using divergence-free approximations. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 57 :1071–1092, 2008.
- [Mic01] A. Michel. *Convergence des schémas volumes finis pour des problèmes de convection diffusion non linéaires*. Ph.D. thesis, Université de Provence, Aix Marseille I, 2001.
- [MNS02] P. Morin, R. H. Nochetto, and K. G. Siebert. Convergence of adaptive finite element methods. *SIAM Rev.*, 44(4) :631–658 (electronic) (2003), 2002. Revised reprint of “Data oscillation and convergence of adaptive FEM” [*SIAM J. Numer. Anal.* 38 (2000), no. 2, 466–488 (electronic); MR1770058 (2001g :65157)].
- [MS99] P. Monk and E. Süli. The adaptive computation of far-field patterns by a posteriori error estimation of linear functionals. *SIAM J. Numer. Anal.*, 36(1) :251–274, 1999.
- [MSB07] I. Mozolevski, E. Süli, and P. R. Bösing. Discontinuous Galerkin finite element approximation of the two-dimensional Navier-Stokes equations in stream-function formulation. *Comm. Numer. Methods Engrg.*, 23(6) :447–459, 2007.
- [MV07] B. Merlet and J. Vovelle. Error estimate for finite volume scheme. *Numer. Math.*, 106(1) :129–155, 2007.
- [MW01] J. M. Melenk and B. I. Wohlmuth. On residual-based a posteriori error estimation in *hp*-FEM. *Adv. Comput. Math.*, 15(1-4) :311–331 (2002), 2001. A posteriori error estimation and adaptive computational methods.
- [NCD10] S. Nicaise and S. Cochez-Dhont. Adaptive finite element methods for elliptic problems : abstract framework and applications. *m2an*, 2010. to appear.
- [Neč62] J. Nečas. Sur une méthode pour résoudre les équations aux dérivées partielles de type elliptique, voisine de la variationnelle. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, 16 :305–326, 1962.
- [Neč65] J. Nečas. *Equations aux Dérivées Partielles*. Presses de l’Université de Montréal, Montréal, Canada, 1965.
- [Néd80] J.-C. Nédélec. Mixed finite elements in  $\mathbb{R}^3$ . *Numer. Math.*, 35(3) :315–341, 1980.
- [Nit71] J. Nitsche. Über ein Variationsprinzip zur Lösung von Dirichlet-Problemen bei Verwendung von Teilräumen, die keinen Randbedingungen unterworfen sind. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 36 :9–15, 1971. Collection of articles dedicated to Lothar Collatz on his sixtieth birthday.
- [Nit72] J. Nitsche. On Dirichlet problems using subspaces with nearly zero boundary conditions. In *The mathematical foundations of the finite element method with applications to partial differential equations (Proc. Sympos., Univ. Maryland, Baltimore, Md., 1972)*, pages 603–627. Academic Press, New York, 1972.

- [NS94] S. Nicaise and A.-M. Sändig. General interface problems I, II. *Math. Methods Appl. Sci.*, 17(6) :395–429, 1994.
- [OBB98] J. T. Oden, I. Babuška, and C. E. Baumann. A discontinuous  $hp$  finite element method for diffusion problems. *J. Comput. Phys.*, 146(2) :491–519, 1998.
- [ODJ95] E. T. Olsen and J. Douglas Jr. Bounds on spectral condition numbers of matrices arising in the  $p$ -version of the finite element method. *Num. Math.*, 69(3) :333–352, 1995.
- [ØLW08] K. B. Ølgaard, A. Logg, and G. N. Wells. Automated code generation for discontinuous Galerkin methods. *SIAM J. Sci. Comput.*, 31(2) :849–864, 2008.
- [Osh84] S. Osher. Riemann solvers, the entropy condition, and difference approximations. *SIAM J. Numer. Anal.*, 21(2) :217–235, 1984.
- [Pip06] S. Piperno. Symplectic local time-stepping in non-dissipative DGTD methods applied to wave propagation problems. *ESAIM : M2AN*, 40(5) :815–841, 2006.
- [Pru06] C. Prud’homme. A domain specific embedded language in C++ for automatic differentiation, projection, integration and variational formulations. *Scientific Programming*, 14(2) :81–110, 2006.
- [PS47] W. Prager and J. L. Synge. Approximations in elasticity based on the concept of function space. *Quart. Appl. Math.*, 5 :241–269, 1947.
- [PW60] L. E. Payne and H. F. Weinberger. An optimal Poincaré inequality for convex domains. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 5 :286–292, 1960.
- [QSS00] A. Quarteroni, R. Sacco, and F. Saleri. *Numerical Mathematics*. Springer Verlag, Berlin, 2000.
- [QV94] A. Quarteroni and A. Valli. *Numerical Approximation of Partial Differential Equations*, volume 23 of *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1994.
- [Rau85] J. Rauch. Symmetric positive systems with boundary characteristic of constant multiplicity. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 291(1) :167–187, 1985.
- [Rau94] J. Rauch. Boundary value problems with nonuniformly characteristic boundary. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 73(4) :347–353, 1994.
- [RH73] W. H. Reed and T. R. Hill. Triangular mesh methods for the neutron transport equation. Technical Report LA-UR-73-479, Los Alamos Scientific Laboratory, Los Alamos, NM, 1973.
- [Riv08] B. Rivière. *Discontinuous Galerkin methods for solving elliptic and parabolic equations : Theory and implementation*. Frontiers in Mathematics. SIAM, Philadelphia, 2008.
- [RST08] H.-G. Roos, M. Stynes, and L. Tobiska. *Robust numerical methods for singularly perturbed differential equations*, volume 24 of *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2008. Convection-diffusion-reaction and flow problems.
- [RT77] P.-A. Raviart and J.-M. Thomas. A mixed finite element method for 2nd order elliptic problems. In *Mathematical aspects of finite element methods (Proc. Conf., Consiglio Naz. delle Ricerche (C.N.R.), Rome, 1975)*, pages 292–315. Lecture Notes in Math., Vol. 606. Springer, Berlin, 1977.

- [RT91] J. E. Roberts and J.-M. Thomas. Mixed and hybrid methods. In *Handbook of Numerical Analysis, Vol. II*, pages 523–639. North-Holland, Amsterdam, 1991.
- [Rud66] W. Rudin. *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill Book Co., New York, NY, 1966.
- [RW03] B. Rivière and M. F. Wheeler. *A posteriori* error estimates for a discontinuous Galerkin method applied to elliptic problems. *cma*, 46(1) :141–163, 2003.
- [RWG99] B. Rivière, M. F. Wheeler, and V. Girault. Improved energy estimates for interior penalty, constrained and discontinuous Galerkin methods for elliptic problems. I. *Comput. Geosci.*, 8 :337–360, 1999.
- [RWG01] B. Rivière, M. F. Wheeler, and V. Girault. A priori error estimates for finite element methods based on discontinuous approximation spaces for elliptic problems. *SIAM J. Numer. Anal.*, 39(3) :902–931 (electronic), 2001.
- [SB91] B. Szabó and I. Babuška. *Finite element analysis*. A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons Inc., New York, 1991.
- [Sch98] Ch. Schwab. *p- and hp-Finite Element Methods*. Numerical Mathematics and Scientific Computation. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, NY, 1998.
- [Shu87] C.-W. Shu. TVB boundary treatment for numerical solutions of conservation laws. *Math. Comp.*, 49(179) :123–134, 1987.
- [Shu88] C.-W. Shu. Total-variation-diminishing time discretizations. *SIAM J. Sci. Statist. Comput.*, 9(6) :1073–1084, 1988.
- [SO88] C.-W. Shu and S. Osher. Efficient implementation of essentially nonoscillatory shock-capturing schemes. *J. Comput. Phys.*, 77(2) :439–471, 1988.
- [Sol01] V. A. Solonnikov.  $L^p$ -estimates for solutions of the heat equation in a dihedral angle. *Rend. Mat. Appl.*, 21 :1–15, 2001.
- [SR02] R. J. Spiteri and S. J. Ruuth. A new class of optimal high-order strong-stability-preserving time discretization methods. *SIAM J. Numer. Anal.*, 40(2) :469–491 (electronic), 2002.
- [SS99] Ch. Schwab and M. Suri. Mixed *hp* finite element methods for Stokes and non-Newtonian flow. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 175(3-4) :217–241, 1999.
- [SSH00] E. Süli, C. Schwab, and P. Houston. *hp-DGFEM for partial differential equations with nonnegative characteristic form*, volume 11 of *Lecture Notes in Comput. Sci. Engrg.*, pages 221–230. Springer-Verlag, New York, 2000. B. Cockburn, G.E. Karniadakis, and C.-W. Shu, eds.
- [Ste98] R. Stenberg. Mortaring by a method of J.A. Nitsche. In Idelsohn S.R., Oñate E., and Dvorkin E.N., editors, *Computational Mechanics : New trends and applications*, pages 1–6, Barcelona, Spain, 1998. Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería.
- [Ste07] A. F. Stephansen. *Méthodes de Galerkin discontinues et analyse d'erreur a posteriori pour les problèmes de diffusion hétérogène*. Ph.D. thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 2007.

- [Str72] G. Strang. Variational crimes in the finite element method. In A.K. Aziz, editor, *The Mathematical Foundations of the Finite Element Method with Applications to Partial Differential Equations*, New York, NY, 1972. Academic Press.
- [Sw96] M. Schäfer and S. Turek (with support of F. Durst, E. Krause, R. Rannacher). Benchmark computations of laminar flow around a cylinder. In E. H. Hirschel, editor, *Flow Simulation with High-Performance Computers II*, volume 52 of *Notes on Numerical Fluid Mechanics*, pages 547–566. Vieweg, 1996.
- [Tad02] E. Tadmor. From semidiscrete to fully discrete : stability of Runge-Kutta schemes by the energy method. II. *SIAM Proceedings in Applied Mathematics*, 109 :25–49, 2002.
- [tEL06] A. ten Eyck and A. Lew. Discontinuous Galerkin methods for non-linear elasticity. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 67(9) :1204–1243, 2006.
- [Tem68] R. Temam. Une méthode d’approximation de la solution des équations de Navier–Stokes. *Bull. Soc. Math. France*, 98 :115–152, 1968.
- [Tem79] R. Temam. *Navier-Stokes Equations*, volume 2 of *Studies in Mathematics and its Applications*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, revised edition, 1979. Theory and numerical analysis, With an appendix by F. Thomasset.
- [Tho06] V. Thomée. *Galerkin finite element methods for parabolic problems*, volume 25 of *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2006.
- [Tor99] E. F. Toro. *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1999. A practical introduction.
- [Tos02] A. Toselli. *hp*-finite element discontinuous Galerkin approximations for the Stokes problem. *M3AS*, 12(11) :1565–1616, 2002.
- [TWW00] M. A. Taylor, B. A. Wingate, and R. E. Vincent. An algorithm for computing Fekete points in the triangle. *SIAM J. Numer. Anal.*, 38(5) :1707–1720 (electronic), 2000.
- [Ver96] R. Verfürth. *A review of a posteriori error estimation and adaptive mesh-refinement techniques*. Teubner-Wiley, Stuttgart, 1996.
- [VK86] J. Van Kan. A second-order accurate pressure-correction scheme for viscous incompressible flow. *SIAM J. Sci. Stat. Comp.*, 7 :870–891, 1986.
- [Voh05] M. Vohralík. On the discrete Poincaré–Friedrichs inequalities for non-conforming approximations of the Sobolev space  $H^1$ . *Numer. Funct. Anal. Optim.*, 26(7–8) :925–952, 2005.
- [Voh07] M. Vohralík. A posteriori error estimates for lowest-order mixed finite element discretizations of convection-diffusion-reaction equations. *SIAM J. Numer. Anal.*, 45(4) :1570–1599 (electronic), 2007.
- [Voh10] Martin Vohralík. Unified primal formulation-based a priori and a posteriori error analysis of mixed finite element methods. *Math. Comp.*, 2010. to appear.

- [VW10] M. Vohralík and B. Wohlmuth. Mixed finite element methods : implementatio with one unknown per element, local flux expressions, positivity, polygonal meshes, and relations to other methods. Submitted. Preprint available at <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00497394/fr/>, 2010.
- [WH03] T. Warburton and J. S. Hesthaven. On the constants in  $hp$ -finite element trace inverse inequalities. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 192(25) :2765–2773, 2003.
- [Whe73] M. F. Wheeler. A priori  $L_2$  error estimates for Galerkin approximations to parabolic partial differential equations. *SIAM J. Numer. Anal.*, 10 :723–759, 1973.
- [Whe78] M. F. Wheeler. An elliptic collocation-finite element method with interior penalties. *SIAM J. Numer. Anal.*, 15 :152–161, 1978.
- [ZS04] Q. Zhang and C.-W. Shu. Error estimates to smooth solutions of Runge-Kutta discontinuous Galerkin methods for scalar conservation laws. *SIAM J. Numer. Anal.*, 42(2) :641–666 (electronic), 2004.
- [ZS06] Qiang Zhang and Chi-Wang Shu. Error estimates to smooth solutions of Runge-Kutta discontinuous Galerkin method for symmetrizable systems of conservation laws. *SIAM J. Numer. Anal.*, 44(4) :1703–1720 (electronic), 2006.