



HAL
open science

Modélisation tridimensionnelle de systèmes électromagnétiques comportant des régions filaires et des régions minces : application en CEM 50 Hz à des dispositifs EDF

Ali Abakar

► **To cite this version:**

Ali Abakar. Modélisation tridimensionnelle de systèmes électromagnétiques comportant des régions filaires et des régions minces : application en CEM 50 Hz à des dispositifs EDF. Sciences de l'ingénieur [physics]. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG, 2001. Français. NNT: . tel-00549658

HAL Id: tel-00549658

<https://theses.hal.science/tel-00549658>

Submitted on 22 Dec 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Table des matières

Liste des figures	7
Liste des tableaux	9
Remerciements	11
Introduction Générale	13
I Modélisation des régions minces et filaires : état de l'art	17
Chapitre I Rappel sur les formulations 3D existantes	19
I.1 Introduction	19
I.2 Equations de Maxwell	19
I.2.1 Conditions aux limites temporelles et spatiales	20
I.2.2 Conditions de continuité entre des milieux différents	20
I.2.3 Conditions de Jauge	21
I.3 Méthode des éléments finis	21
I.4 Formulations magnétodynamiques	22
I.5 Formulations de type électrique	23
I.5.1 Formulation en champ électrique E	23
I.5.2 Formulation en AV (éléments nodaux)	24
I.6 Formulations de type magnétique	25
I.6.1 Formulation en champ magnétique H	25
I.6.2 Formulation en potentiel $T-\Phi$	25
I.6.3 Formulation en potentiel scalaire magnétique	26
I.7 Formulation pour régions filaires	27
I.8 Conclusion	27
II Contribution à la modélisation des régions minces et filaires : Développements	29
Chapitre II Formulation volumique scalaire	31
II.1 Introduction	31
II.2 Formulation t_0 -circuit	31
II.2.1 Couplage entre les formulations en potentiel réduit et en potentiel total	32
II.2.2 Forme discrète	33
II.2.3 Relation courant tension	34
II.3 Couplage circuit	37
II.4 Limites de la méthode sur un cas test	39

II.4.1	Problème des deux spires	40
II.5	Conclusion	42
Chapitre III	Modélisation des régions filaires	43
III.1	Introduction	43
III.2	Formulation \mathbf{h}_j -circuit	43
III.2.1	Couplage entre les formulations en potentiel réduit et en potentiel total	44
III.2.2	Forme discrète	46
III.2.3	Relation courant tension	47
III.2.4	Prise en compte de l'effet de peau	48
III.3	Application de la méthode à un problème filaire	49
III.3.1	Discussion	50
III.3.2	Extraction des inductances	51
III.3.3	Notion d'inductance et d'inductance partielle	55
III.4	Mise en œuvre de régions filaires dans un circuit	57
III.4.1	Cas de validation : boucle inductrice cable induit	57
III.5	Conclusion	59
III.6	Cas des régions filaires ferromagnétiques	59
III.7	Conclusion	60
Chapitre IV	Prise en compte des régions minces	63
IV.1	Première méthode : prise en compte des régions minces	63
IV.1.1	Etat de l'art	64
IV.1.2	Région mince modélisée en potentiel scalaire magnétique total	65
IV.1.3	Région mince modélisée en potentiel scalaire magnétique réduit	65
IV.1.4	Remarques	69
IV.1.5	Validation sur un cas test	69
IV.2	Deuxième méthode : formulation du problème fil-plaque dans un circuit	71
IV.2.1	La plaque mince vue comme un composant de circuit électrique	72
IV.2.2	Equation de circuit pour le composant plaque 2 bornes	73
IV.2.3	Calcul électrocinétique	73
IV.2.4	Relation courant-tension	74
IV.2.5	Modèle fil-plaque dans l'air	77
IV.2.6	Etapas de la résolution	79
IV.2.7	Validation de la méthode	79
IV.2.8	Comparaison des résultats obtenus avec la formulation volumique T- Ω	83
IV.2.9	Conclusion	84
IV.2.10	Plaque trouée	87
IV.3	Conclusion et perspectives	88

Chapitre V	Généralisation des régions minces : Coques composites	91
V.1	Introduction	91
V.2	Blindage contre les champs magnétiques BF	91
V.3	Rappel du modèle de la «coque» de Guérin	92
V.4	Cas particuliers de 2 plaques minces	93
V.5	Expérimentations pour une «coque composite» avec 2 plaques	95
V.6	Association de plusieurs plaques minces	97
V.7	Conclusion	97
III	Applications industrielles	99
Chapitre VI	Etude du poste «Folies» et du câble «Bonna»	101
VI.1	Etude de l'environnement CEM 50Hz du poste «Folies»	101
VI.1.1	But de l'étude	101
VI.1.2	Présentation	102
VI.1.3	Phénomène physique	102
VI.1.4	Modélisation	103
VI.1.5	Résultats	103
VI.1.6	Conclusion	105
VI.2	Etude des pertes dans la gaine de câbles sous-terrain «Bonna»	106
VI.2.1	Présentation	106
VI.2.2	Phénomènes physiques	106
VI.2.3	Modélisation	107
VI.2.4	Résultats	107
VI.2.5	Conclusion	107
Conclusion Générale		111
Bibliographie		113
Annexe A	Calcul de la résistance de la plaque	119
A.1	Equations	119
A.1.1	Conditions aux limites	119
Annexe B	Composite à 3 plaques	121
Annexe C	Principe de la méthode PEEC	123
C.1	Notion d'inductance partielle	123
C.2	Mutuelle partielle entre deux conducteurs filiformes	124
C.2.1	Application numérique	125

Liste des figures

1.1	Interface entre les deux milieux Ω_1, Ω_2 .	20
1.2	Problème magnétodynamique.	22
2.1	Dispositif à modéliser.	32
2.2	Fil avec une tension imposée à ses bornes.	34
2.3	Domaine de t_0 .	36
2.4	Schéma du cas test présenté.	40
2.5	Comparaison des résultats pour $ I_0 = 500A$.	41
3.1	Frontière «réduit-total».	45
3.2	Fil avec une tension imposée à ses bornes.	48
3.3	Comparaison des résultats pour $ I_0 = 500A$.	50
3.4	Courant dans la boucle induite en fonction du rayon du fil pour $d=1m$.	51
3.5	Position du fil par rapport au maillage.	52
3.6	Matrice du système.	55
3.7	Segment [AB] conducteur filaire.	56
3.8	Boucle en court circuit.	56
3.9	Circuit électrique équivalent.	56
3.10	Géométrie du cas test.	57
3.11	Schéma du circuit associé sans extraction d'inductance.	57
3.12	Comparaison des résultats pour un courant inducteur $ I =10A$.	58
3.13	Circuit avec extraction d'inductance.	58
3.14	Cas test treillis.	59
3.15	Courant induit dans la boucle en fonction de la fréquence pour $ I =500A$.	61
3.16	Champ magnétique H sur une ligne calculée en 2D et en 3D à 50Hz.	61
4.1	Dispositif à modéliser.	63
4.2	Notations utilisées pour décrire le modèle de type coque.	64
4.3	Géométrie en 2D axisymétrique.	70
4.4	Champ magnétique calculé en 2D et en 3D pour une plaque en Aluminium.	71
4.5	Isovaleurs du courant sur la plaque.	72
4.6	Modèle de la plaque à 2 bornes.	72
4.7	Conducteur massif.	73
4.8	Plaque mince.	74
4.9	Modèle de la jonction fil-plaque.	77
4.10	Les différentes étapes de la résolution pour un problème avec fil et plaque.	79
4.11	Maillage de la géométrie pour la résolution en T- Ω .	80
4.12	Cas test1 : Inducteur source parallèle à la plaque.	81
4.13	Cas test2 : Inducteur perpendiculaire à la plaque.	81
4.14	Cas test3 : le fil de rebouclage est dans le plan de la plaque.	82
4.15	Précalcul électrocinétique.	82
4.16	Résistance de la plaque en fonction de l'épaisseur des bornes.	83

4.17	Circuit électrique du couplage fil-plaque.	85
4.18	Isovaleurs de courant et flèches indiquant les courants surfaciques.	85
4.19	Schéma de principe.	87
4.20	Courant électrocinétique dans la plaque.	87
5.1	Plaque d'épaisseur finie.	92
5.2	Association de deux plaques.	94
5.3	Modèle 2D axisymétrique du dispositif composite à 2 plaques.	95
5.4	Module du champ magnétique sur une ligne d'exploitation en 3D et en 2D « Aluminium et Fer-silicium ». Le plan d'exploitation se trouve à 2m60 de la source.	96
5.5	Module du champ magnétique sur une ligne en 3D et en 2D «Fer-silicium et Aluminium». Le plan d'exploitation se trouve à 2m60 de la source. . . .	96
5.6	Module du champ magnétique sur une ligne en 3D et en 2D « Aluminium et Fer-silicium ». Le plan d'exploitation se trouve à 3m de la source.	97
5.7	Dispositif composite à n plaques.	98
6.1	Cas de référence : Poste Folies.	101
6.2	Géométrie du dispositif.	102
6.3	Modèle de la boucle.	103
6.4	Effet de la boucle sur les lignes de champ.	104
6.5	Comparaison des résultats (mesure et simulation) en terme de champ ma- gnétique.	104
6.6	Exemple type de tuyau.	106
6.7	Géométrie du dispositif.	107
6.8	Schéma du circuit correspondant à une boucle.	108
6.9	Schéma du circuit correspondant au treillis.	109
6.10	Géométrie du tuyau.	109
6.11	Pertes dans les 6 tiges du treillis en fonction des subdivisions de chaque tige : câbles à mi-distance du tuyau.	110
1.1	Composant plaque 2 bornes.	119
2.1	Dispositif composites à 3 plaques minces.	121
3.1	Boucle rectangulaire filiforme.	123
3.2	Mutuelle partielle entre deux fils.	124

Liste des tableaux

1	Recommandations des limites d'exposition du public aux champs électrique et magnétique pour la fréquence 50Hz.	13
I.1	Formulations magnétodynamiques tridimensionnelles.	27
IV.1	Comparaison des résultats en 2D et en 3D pour une plaque en FeSi.	70
IV.2	Comparaison des résultats en 2D et en 3D pour une plaque en Alu.	70
IV.3	Cas de validation.	80
IV.4	Comparaison de maillage.	83
IV.5	Comparaison des résultats cas test1 : plaque parallèle à l'inducteur source.	84
IV.6	Comparaison des résultats inducteur source perpendiculaire à la plaque.	84
IV.7	Comparaison des résultats inducteur source dans le plan de la plaque.	84
IV.8	Comparaison des résultats.	88
VI.1	Efficacité du blindage en fonction de la position de la boucle passive et du courant dans la boucle	103
VI.2	Compaison des courants mesurés et calculés pour une position de la boucle passive correspondant au fonctionnement normal du dispositif.	105
VI.3	Pertes Joules dans le treillis.	107

Remerciements

Je tiens tout particulièrement à remercier Monsieur Jean-Louis Coulomb, Professeur de l'Institut National Polytechnique de Grenoble pour avoir guidé mes premiers pas dans la recherche et pour avoir co-encadré ce travail de thèse. Jean-Louis, autant par sa grande compétence dans le domaine de la modélisation et sa rigueur que par sa gentillesse et sa simplicité m'a beaucoup appris pendant ces quatre années, qu'il trouve ici l'expression de ma profonde reconnaissance et de mon amitié.

Mes remerciements à Monsieur Gérard Meunier Directeur de Recherche CNRS non seulement par ce qu'il a co-encadré ce travail, mais aussi pour ses conseils et pour m'avoir fait profiter de sa grande compétence dans le domaine des formulations. Gérard a été présent tout au long de cette thèse pour son aide scientifique et technique mais aussi pour son soutien moral.

J'exprime également ma reconnaissance et ma sincère amitié envers François-Xavier Zgainski Ingénieur chercheur à EDF pour avoir proposé un sujet si intéressant et avoir efficacement suivi ce travail ainsi que pour son soutien et sa disponibilité du début à la fin de ce travail. Les discussions intéressantes que nous avons eues tant sur le plan scientifique que privé ainsi que les conseils amicaux qu'il m'a prodigués m'ont été d'une grande aide.

Qu'il me soit permis de remercier Madame Françoise Rioux Directeur de Recherche CNRS et Monsieur Javad Fouladgar professeur à l'université de Nantes pour avoir accepté de juger ce travail en tant que rapporteurs, pour les discussions intéressantes et aussi pour avoir honoré le jury de leur présence.

Mes sincères remerciements vont à Christophe Guérin Ingénieur de Recherche à CEDRAT pour son aide efficace dans la programmation et pour les réponses concernant les nombreuses questions sur Flux3D ainsi que pour sa participation à ce jury de thèse. Je remercie également Monsieur Christophe Andrieu Ingénieur de Recherche à Schneider Electric pour sa participation à ce jury de thèse.

Un grand merci au texan du groupe M15, j'ai nommé Vincent Delafosse pour les différentes discussions et surtout pour sa relecture du manuscrit. Je n'oublie pas les articles et autres notes. Merci encore Vincent.

A Patrice Labie pour son aide dans la programmation et pour les bons moments passés au «café» en discutant Jazz. Qu'il trouve ici l'expression de ma sincère amitié. Eh Patrice, je n'aurais pas du parier sur l'altitude du Moucherotte!

A Patrick Eustache pour les grandes discussions dans la salle HP sur tous les sujets possibles et imaginables. Les relations avec toi ont toujours été agréables et enrichissantes, je te remercie pour tout.

Cette thèse a été effectuée dans le cadre d'une Convention Industrielle de Formation par la Recherche (CIFRE) entre EDF R&D, service ERMEL département Machine Electrique et le Laboratoire d'Electrotechnique de Grenoble. Je remercie les deux partenaires en particulier Monsieur Pierre Thomas chef du groupe «Modèles numériques pour l'électrotechnique» et Monsieur Yves Denayrolles chef du groupe «Génératrices et qualification des machines» pour m'avoir respectivement accueilli dans leur groupe et pour la confiance qu'ils m'ont accordé.

Je ne peux malheureusement détailler la liste de toutes les personnes avec qui j'ai eu le plaisir de discuter et d'échanger des idées et des points de vue tout au long de ces trois années passées au LEG. Merci à Etiennette Callegher, Patrick Guillot, Florence François, Monique Boizard, Delphine Riu, Afef Slama, Claire Divoux, Singva Ma, Alita Dewi, Fleur Janet, Christophe Cartier-Millon alias CCM, Yves Maréchal, Eric Atienza, Benoît Froidurot, Vincent Leconte, Gérald Claeys, Kerim Mekki, Yann Le Floch, Laouamri Khaled, Orphée Cugat, Frédéric Lepoitevin, Jean-Michel Guichon, Damien De Benedittis. Jean Daniel Arnould (JD).

Merci également à tous mes collègues du département ME pour m'avoir accueilli. En particulier la dream team des soirées : Olivier Moreau, François Duffeau, Hervé Debruyne, Richard Dorr, Eilin Guillot, Chantal Corenwinder. Merci aussi à Jean-Pierre Ducreux pour les discussions très intéressantes et pour sa disponibilité.

Mes remerciements vont aussi à toute ma famille pour avoir cru en moi même dans les situations les plus difficiles. Et enfin un grand Merci à Mackalay pour son soutien permanent.

Introduction Générale

La modélisation des phénomènes électromagnétiques se développe actuellement pour la qualification des matériels électriques. Elle permet aussi bien de réduire le nombre d'essais à effectuer sur le matériel que de mettre celui-ci en conformité par rapport aux normes relatives aux champs électromagnétiques.

Plusieurs tentatives ont été effectuées pour harmoniser la normalisation Européenne relative aux basses fréquences. En effet, en novembre 1984, la commission Européenne a chargé pour la première fois le Comité Européen de Normalisation pour l'Electrotechnique (CENELEC) ^[8] de mettre en place des normes CEM harmonisées au niveau européen. Puis en 1989, elle a promulgué la directive «89/336/CEE» concernant le rapprochement des législations des différents états membres relatives à la compatibilité électromagnétique. Cette directive a été transposée en droit français en 1992 (puis modifiée en 1995) ^[9] et depuis le 1er janvier 1996, elle est obligatoire. D'autres organismes sont également mandatés pour la mise en place de ces normes comme le CEI (Comité Electrotechnique International) ^[10] ou encore ICNIRP (Commission Internationale de Radioprotection sur les Rayonnements Non Ionisants). Dans un rapport rendu public ^[55], l'Académie Nationale des Sciences des Etats-Unis a conclu que «l'ensemble des éléments dont on dispose actuellement ne montrent pas que l'exposition résidentielle aux champs électrique et magnétique de fréquence industrielle présente un danger pour la santé de l'homme ». En revanche, les effets biologiques dus aux courants induits sont bien connus. Ce sont des effets réversibles de stimulation des cellules nerveuses et cardiaques. Pour éviter ces effets, l'Organisation mondiale de la Santé ^[12] a proposé dès 1989 une valeur limite de courant induit dans le corps humain de $10mA/m^2$. En s'inspirant de cette proposition et d'une recommandation similaire de l'ICNIRP^[20], la commission Européenne a récemment adopté (juin 1999) une recommandation du conseil relative à la limitation de l'exposition du public aux champs électromagnétiques basse fréquence (tableau ci-dessous). La normalisation en matière de

	Champ électrique	Champ magnétique
Exposition résidentielle (24h/24)	5kV/m	100 μ T
Exposition professionnelle (8h/j)	10kV/m	500 μ T

TAB. 1 – Recommandations des limites d'exposition du public aux champs électrique et magnétique pour la fréquence 50Hz.

mesure et dans le domaine des produits est en retard par rapport aux besoins actuels. En effet, les protocoles et appareils de mesure ne sont pas encore normalisés. Les calculs et les modèles précis restent encore à définir et normaliser.

D'autre part, les postes sources situés dans les grandes villes (à Paris par exemple) sont équipés de bancs de réactances qui limitent la puissance de court circuit en cas de défaut sur un départ. En régime de fonctionnement normal, le champ magnétique à 50Hz émis par les réactances peut atteindre un niveau inacceptable (en particulier pour les écrans d'ordinateurs dans les locaux mitoyens).

La nécessité de maîtriser et d'abaisser le niveau de champ magnétique rayonné par les appareils en milieu urbain (transformateurs, postes EDF...) est devenu indispensable. Deux voies sont possibles : la mise en œuvre des dispositifs de protection et la proposition de nouvelles conceptions. Afin d'évaluer des solutions à un coût raisonnable et de manière efficace, la simulation semble être une bonne approche. Dans la littérature scientifique, plusieurs méthodes sont proposées pour la résolution des équations de Maxwell : l'analyse par schémas équivalents [2], la méthode des éléments finis [1,3,32], la méthode des intégrales de frontière [54,57], le couplage éléments finis et intégrales de frontière ou encore le couplage éléments finis et équations de circuit [35,40,45].

Dans le cadre de cette thèse, nous avons choisi l'approche éléments finis couplée aux équations de circuit dans l'environnement FLUX3D développé par le LEG et CEDRAT et utilisé par EDF depuis 1990.

Une des difficultés rencontrées dans l'analyse numérique des équations de Maxwell est due au fait que les dispositifs étudiés présentent des particularités géométriques (régions minces ou filaires). Les dispositifs filaires qui peuvent être concernés sont nombreux. Dans le domaine de la CEM basse fréquence, on peut citer par exemple les boucles passives de compensation qui sont utilisées pour le blindage et pour lesquelles il faut calculer le courant induit maximal ainsi que l'efficacité de blindage. Il y a également les treillis utilisés pour la tenue mécanique des câbles souterrains très haute tension dont il est important de connaître l'échauffement. Plus généralement tout conducteur dont le rayon est petit par rapport aux autres dimensions en présence d'un champ magnétique basse fréquence entre dans le cadre de cette étude. Pour ce qui est de la mise en conformité du matériel aux normes CEM européennes, plusieurs études et simulations 2D et 3D ont été menées en particulier par le groupe Modèles Numériques pour l'Electrotechnique de la division R&D d'EDF [19,59]. Dans ce cas, la modélisation de tels dispositifs nécessite un maillage important (surtout dans le cas où il y a un effet de peau) ce qui implique un espace mémoire important. D'autre part, le rapport entre la taille du plus grand élément volumique et le plus petit élément du maillage peut être important. Pour résoudre le problème des régions minces, les éléments spéciaux de type «coques» ont été utilisés en magnétostatique et en magnétodynamique [22,37,48,56,61]. L'idée de base est de tenir compte des phénomènes à l'intérieur de la région mince sans mailler celle-ci en volume (une plaque mince sera représentée par une région surfacique tout en restant dans un domaine 3D). Notre but étant de déterminer le courant induit dans des dispositifs filaires ainsi que les grandeurs physiques dans l'air environnant, nous avons eu recours à des formulations utilisant le potentiel scalaire magnétique réduit comme inconnue principale et une équation supplémentaire reliant cette inconnue au courant. Ce choix nous semble judicieux car il présente un avantage certain au niveau coût et au niveau précision. L'évaluation du courant comme quantité globale a fait l'objet de plusieurs travaux tant en 2D qu'en 3D, le choix d'une formulation avec couplage «équation de champ - équation de circuit» a fait ses preuves [23,35,40,45].

Le travail que nous présentons repose sur la mise en œuvre de formulations pour modéliser les régions filaires ainsi que les régions minces et filaires dans un circuit en régime de fonctionnement permanent et à la fréquence industrielle.

Le chapitre I est consacré à un rappel des formulations 3D existantes et de l'état de l'art en modélisation. Après avoir présenté les principales formulations magnétodynamiques

en 3D, nous discutons de celle qui nous semble la plus adaptée pour la résolution des problèmes liés aux conducteurs filaires.

Nous nous intéressons au chapitre II à la formulation en potentiel scalaire magnétique réduit couplée aux équations de circuit.

Dans le chapitre III, nous présentons les différents développements réalisés pour la modélisation des régions filaires. Nous discutons également du problème de singularité lié au faible rayon du conducteur filaire. Nous terminons par la présentation d'un cas de validation, les résultats numériques obtenus sont comparés aux résultats analytiques.

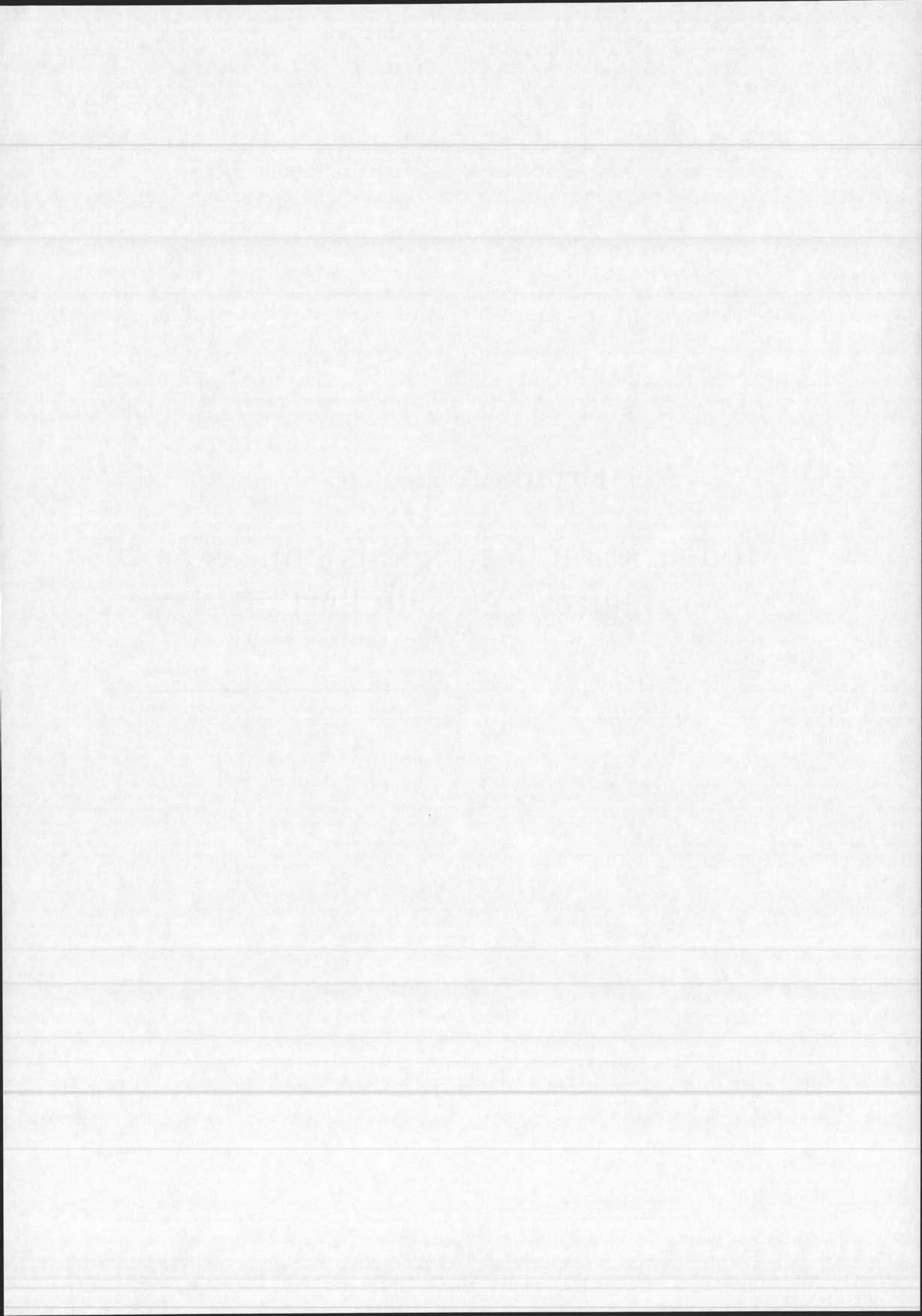
Le chapitre IV traite de l'interaction entre les régions filaires et les régions minces ainsi que des dispositifs minces et filaires dans un circuit. Nous concluons cette partie par un cas de validation dont le résultat est comparé au résultat en 2D axisymétrique. Pour modéliser des dispositifs constitués de fils et de plaques minces dans un circuit en régime stationnaire, nous avons mis en œuvre un modèle de composant électrique de type «plaque à 2 bornes». Un cas de validation est présenté, le résultat obtenu est comparé avec une formulation 3D volumique.

Dans le chapitre V, nous proposons une formulation pour modéliser un assemblage de plusieurs plaques minces «coques composites» à partir de la formulation «coque» standard.

Dans la dernière partie, deux applications EDF sont traitées. La première consiste à la modélisation du dispositif de blindage mis en place dans le poste source situé à Paris ; ce dispositif est constitué d'une plaque mince et d'une boucle de compensation. La deuxième consiste à modéliser les pertes dans un dispositif en treillis ferromagnétique en présence d'un câble de distribution haute tension.

Première partie

Modélisation des régions minces et filaires : état de l'art



Chapitre I

Rappel sur les formulations 3D existantes

I.1 Introduction

Les applications que nous envisageons de modéliser se placent dans le cadre de la magnétodynamique basse fréquence (fréquence industrielle 50Hz) en régime quasi stationnaire. Il s'agit des dispositifs constitués d'inducteurs filaires, des régions conductrices ou magnétiques minces (blindage par exemple) ainsi que des régions filaires dans lesquelles il y a des courants induits. Les régions magnétiques non conductrices ainsi que l'association de ces différents dispositifs sont aussi concernés.

Dans ce cas, les équations de Maxwell sont résolues en régime linéaire harmonique et toutes les grandeurs varient de manière sinusoïdale dans le temps. Afin de les exploiter pour modéliser un dispositif, ces équations doivent être remaniées (et recombinaées) de façon à obtenir une formulation du problème bien posée. On entend par formulation le choix des variables inconnues et leur mise en équation. Les formulations permettant de résoudre ces équations sont généralement basées soit sur le potentiel vecteur magnétique, soit sur le potentiel scalaire magnétique soit sur les champs eux mêmes.

Dans cette partie, nous présentons les principales formulations magnétodynamiques existantes ainsi que leurs limites de validité. Nous nous efforcerons également de voir dans quels cas elles pourraient s'appliquer aux régions minces et filaires.

I.2 Equations de Maxwell

Les champs électromagnétiques sont régis par le système d'équations de Maxwell [7] donnant les relations locales entre le champ magnétique $\mathbf{H}(A/m)$, l'induction magnétique $\mathbf{B}(T)$, le champ électrique $\mathbf{E}(V/m)$ et l'induction électrique $\mathbf{D}(C/m^2)$ sous l'hypothèse de l'électrotechnique (courants de déplacement négligés car propagation négligeable vue la période des phénomènes).

$$\text{rot}\mathbf{H} = \mathbf{J} \qquad \text{Loi d'Ampère} \qquad (\text{I.1})$$

$$\text{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \qquad \text{Loi de Faraday} \qquad (\text{I.2})$$

$$\text{div}\mathbf{D} = \rho \qquad \text{Loi de Gauss} \qquad (\text{I.3})$$

$$\text{div}\mathbf{B} = 0 \qquad \text{Conservation du flux} \qquad (\text{I.4})$$

Il faut rajouter à ces équations les lois constitutives des matériaux :

$$\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E} \qquad (\text{I.5})$$

où \mathbf{J} est la densité de courant (A/m^2) et σ représente la conductivité électrique ($\Omega.m$)⁻¹ la loi :

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} \quad (\text{I.6})$$

avec éventuellement $\mu = \mu(\mathbf{H})$ pour des matériaux non linéaires où μ est la perméabilité magnétique (H/m).

Ces différents champs peuvent eux-mêmes s'écrire en fonction de potentiels vecteurs électrique \mathbf{T} ou magnétique \mathbf{A} ; et potentiels scalaires électrique V et magnétique ϕ .

$$\mathbf{J} = \text{rot}\mathbf{T} \quad (\text{I.7})$$

$$\mathbf{B} = \text{rot}\mathbf{A} \quad (\text{I.8})$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{T} - \text{grad}\phi \quad (\text{I.9})$$

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad}V \quad (\text{I.10})$$

Ainsi, pour un problème donné, plusieurs combinaisons sont envisageables (il existe à priori un grand nombre de formulations possibles). Pour assurer l'unicité de la solution du système (I.1 ... I.6), il est nécessaire d'ajouter trois types de conditions : les conditions aux limites, les conditions de continuité ainsi que les jauges.

I.2.1 Conditions aux limites temporelles et spatiales

Pour les conditions aux limites temporelles, on prend en général \mathbf{H} égal à zéro à l'instant initial et \mathbf{B} s'en déduit naturellement. Les conditions aux limites spatiales s'énoncent de façon générale pour un domaine Ω de frontière Γ avec \mathbf{n} un vecteur normal (unitaire) à Γ pour la variable u .

- condition de Neumann $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0$
- condition de Dirichlet $u \cdot \mathbf{n} = 0$

I.2.2 Conditions de continuité entre des milieux différents

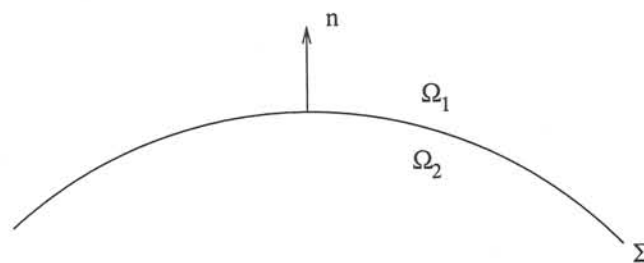


FIG. 1.1 – Interface entre les deux milieux Ω_1, Ω_2 .

Soient Ω_1 et Ω_2 deux milieux de conductivité et de permittivité différentes. Au passage

entre ces deux milieux (Fig.1.1), on a les relations ci-dessous :

$$\mathbf{n} \wedge (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{J}_s \quad (\text{I.11})$$

$$\mathbf{n} \wedge (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = 0 \quad (\text{I.12})$$

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = 0 \quad (\text{I.13})$$

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) = \rho_s \quad (\text{I.14})$$

où \mathbf{J}_s et ρ_s représentent respectivement les densités de courant et de charge concentrées sur la surface Σ .

Les relations (I.11) et (I.12) entraînent la continuité de la composante tangentielle de \mathbf{E} et de la composante normale de \mathbf{B} à la traversée de l'interface. Si \mathbf{J}_s et ρ_s sont différents de zéro, les relations (I.11) et (I.14) entraînent la discontinuité de la composante tangentielle de \mathbf{H} et de la composante normale de \mathbf{D} . Les composantes tangentielles de \mathbf{B} et de \mathbf{D} et les composantes normales de \mathbf{H} et de \mathbf{E} qui n'apparaissent pas ci-dessus sont discontinues.

Nous ne considérons que le cas où \mathbf{J}_s et ρ_s sont nuls c'est à dire que la conductivité est finie et que la fréquence d'excitation est de l'ordre de 50Hz. Dans ce cas, la composante tangentielle de \mathbf{H} et la composante normale de \mathbf{D} sont continues à la traversée de l'interface.

I.2.3 Conditions de Jauge

Dans les équations de Maxwell, les champs s'expriment soit à un gradient près (champ rotationnel), soit au rotationnel près (champ à divergence) ce qui justifie l'utilisation des jauges dans certaines formulations pour assurer l'unicité de la solution. Soient \mathbf{U} , \mathbf{W} deux champs de vecteurs, les conditions de jauge s'écrivent de façon générale par :

$$\operatorname{div} \mathbf{U} = 0 \quad \text{Jauge de Coulomb} \quad (\text{I.15})$$

$$\operatorname{div} \mathbf{U} + K \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad \text{Jauge de Lorentz} \quad (\text{I.16})$$

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{W} = 0 \quad \text{Jauge adaptée pour les éléments d'arêtes} \quad (\text{I.17})$$

Par exemple, lorsqu'on utilise une formulation en potentiel vecteur magnétique, la solution est obtenue à un gradient près. La jauge de Coulomb s'écrit donc : $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$

I.3 Méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis a largement été présentée dans la littérature scientifique [1,3,4]. Elle consiste en une double discrétisation : une discrétisation spatiale (maillage du domaine) et une discrétisation des champs. La discrétisation spatiale permet de définir les fonctions de base (scalaires ou vectorielles) donnant naissance aux sous-espaces d'approximation des espaces continus (espaces dans lesquels se trouvent les champs). On rencontre classiquement trois grandes familles d'éléments finis :

- les éléments nodaux (degrés de liberté associés aux nœuds des éléments) ;
- les éléments d'arêtes (degré de liberté associés aux arêtes des éléments) ;

- les éléments de facettes (degré de liberté associés aux facettes des éléments).

Dans le domaine de l'électromagnétisme, pour les champs de vecteurs comme le champ magnétique \mathbf{H} ou le champ électrique \mathbf{E} dont les composantes tangentielles sont continues au travers de deux éléments voisins, les éléments d'arêtes qui conservent la composante tangentielle entre deux éléments voisins sont particulièrement adaptés.

Pour les champs de vecteurs comme l'induction magnétique \mathbf{B} ou la densité de courant électrique \mathbf{J} dont les composantes normales sont continues au travers de deux éléments voisins, les éléments de facettes sont adaptés.

Pour les champs scalaires comme le potentiel scalaire magnétique ϕ où le potentiel scalaire électrique V qui sont tous deux continus au travers des deux éléments voisins les éléments nodaux sont adaptés.

Les équations de Maxwell et les conditions limites peuvent se mettre sous la forme :

$$\begin{cases} Lu = f \text{ dans } \Omega \\ Bu = g \text{ dans } \Gamma \end{cases}$$

Où L, B sont des opérateurs différentiels, u le vecteur inconnu, f et g représentent les sources.

Lorsque les dimensions géométriques des dispositifs volumiques sont petites (petites épaisseur pour les plaques), le modèle «coque» est utilisé. La formulation issue de ce modèle permet de prendre en compte les phénomènes ainsi que la particularité géométrique, sans mailler le dispositif en volume.

I.4 Formulations magnétodynamiques

Un problème magnétodynamique type est composé des parties suivantes (voir figure 1.2) :

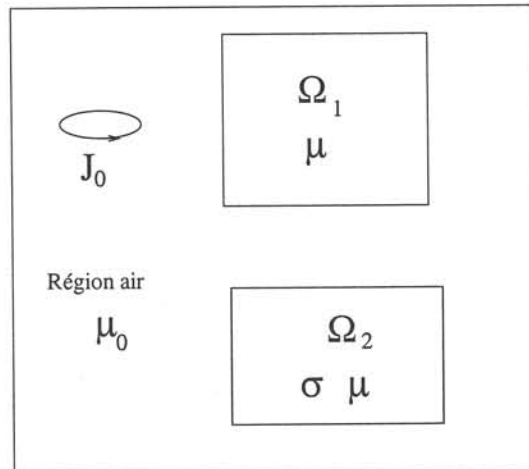


FIG. 1.2 – Problème magnétodynamique.

- des bobines inductrices filaires dans lesquelles circulent des courants sinusoïdaux ;

- des conducteurs dans lesquels se développent des courants induits ;
- des régions constituées de matériaux ferromagnétiques ;
- une région d'air englobante.

Pour résoudre ce type de problème, il existe deux grandes familles de formulations :

- les formulations de type électriques ;
- les formulations de type magnétiques.

Les formulations de type électriques assurent fortement la continuité de la composante tangentielle de \mathbf{E} entre deux milieux alors que les formulations de type magnétique, assurent fortement la continuité de la composante tangentielle de \mathbf{H} . Pour chaque formulation, nous présentons, lorsque c'est possible, les cas particuliers des régions minces et filaires. Le choix d'une formulation nécessite de bien poser le problème. En électrotechnique pour les problèmes avec courant de Foucault, il est nécessaire de calculer l'épaisseur de peau $\delta = \sqrt{\frac{2}{\sigma\omega\mu}}$ dans le cas d'un matériau linéaire. Lorsque cette épaisseur de peau est grande devant l'épaisseur du dispositif, on peut considérer que le courant est uniformément réparti dans le dispositif.

Dans notre cas, à savoir pour la modélisation de fils fins et de plaques minces, la détermination du courant comme quantité globale des dispositifs étudiés, entraîne le choix de formulations qui peuvent être couplées aux équations de circuit. Pour les régions surfaciques, les formulations sont obtenues à partir des formulations volumiques sous certaines hypothèses (suivant que l'effet de peau est très prononcé ou non).

Nous présentons ici les formulations existantes pour les régions volumiques, les régions minces et les régions filaires. Nous divisons en deux grandes familles les formulations 3D existantes.

I.5 Formulations de type électrique

Les principales formulations de type électrique sont les formulations en champ \mathbf{E} , en potentiel \mathbf{A} , \mathbf{AV} .

I.5.1 Formulation en champ électrique \mathbf{E}

Cette formulation est obtenue en dérivant par rapport au temps l'équation de Maxwell-Ampère et en faisant l'hypothèse que la perméabilité μ est invariante par rapport au temps (cas des matériaux linéaires) ^[27]. la formulation s'écrit :

$$\operatorname{rot}\left(\frac{1}{\mu}\operatorname{rot}\mathbf{E}\right) + \sigma\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} = 0 \quad (\text{I.18})$$

Elle nécessite l'utilisation des éléments d'arêtes pour prendre en compte les conditions limites (de façon naturelle) et les discontinuités sur les composantes normales aux interfaces des champs de vecteur.

Formulation pour régions minces

Des formulations ont été présentées par plusieurs auteurs [24,65]. Dans [65] les auteurs utilisent un élément coque sans saut de potentiel en champ électrique \mathbf{E} , cette formulation n'est pas utilisable dans le cas où l'épaisseur de peau est très petite devant l'épaisseur de la région à modéliser. La méthode présentée dans [24] permet de traiter les régions minces conductrices pour une épaisseur quelconque. Elle est basée sur une méthode couplant les éléments finis aux intégrales de frontière; elle présente cependant l'inconvénient de ne pas être applicable aux régions minces ferromagnétiques. D'autres formulations existent en haute fréquence [30], elles sont en général basées sur une approximation du terme de surface dans la formulation en champ électrique \mathbf{E} standard par le calcul analytique d'un problème monodimensionnel (plaque d'épaisseur infinie).

Formulation pour régions filaires

Pour les régions filaires, les seuls travaux qui existent à notre connaissance en magnéto-dynamique sont issus du domaine de la haute fréquence [21,30]. Le modèle filaire présenté dans le rapport de l'INRIA est basé sur une méthode FDTD (finite difference time domain method). Les auteurs se basent sur une approximation quasi-statique du champ électrique au voisinage du fil pour obtenir une relation entre les variations du champ électrique autour du fil et le courant dans le fil. Cette relation fait apparaître un terme d'inductance du fil.

I.5.2 Formulation en AV (éléments nodaux)

Cette formulation est très générale [33,60]. Cependant en 3D elle maximise le nombre d'inconnues du système discret à résoudre et des problèmes d'imprécision numériques sur les arêtes air/fer en présence des régions ferromagnétiques subsistent. L'unicité du potentiel vecteur \mathbf{A} doit être assurée par l'utilisation d'une jauge. En AV la jauge de Coulomb semble être la plus efficace [32]. Elle est introduite par pénalité en ajoutant le terme $-\text{grad}(\mu \text{div} \mathbf{A})$. Le système à résoudre est le suivant :

$$\text{rot}\left(\frac{1}{\mu} \text{rot} \mathbf{A}\right) - \text{grad}(\mu \text{div} \mathbf{A}) + \sigma \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \text{grad} V\right) = 0 \quad (\text{I.19})$$

$$\text{div} \sigma \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \text{grad} V\right) = 0 \quad (\text{I.20})$$

Formulation pour régions minces

Plusieurs variantes de la formulation AV permettant de traiter les régions minces sont proposées dans la littérature. La formulation AV surfacique présentée dans [37,56] est obtenue à partir de la formulation volumique en considérant les paramètres physiques invariables dans l'épaisseur. Cette formulation est utilisable lorsqu'il n'y a pas d'effet de peau ou lorsque l'épaisseur de peau est supérieure à l'épaisseur de la région à modéliser.

Une formulation AV pour régions surfaciques est également proposée par Igarashi [48]. Elle est basée sur les impédances de surface et est utilisable dans le cas où l'épaisseur de

peau est très petite devant l'épaisseur de la plaque. L'inconvénient de cette formulation est qu'elle devient assez vite coûteuse lorsque l'on a des dispositifs avec une grande région volumique constituée d'air (modélisée en potentiel vecteur magnétique \mathbf{A}).

Formulation pour régions filaires

Pour les éléments filaires, la formulation AV linéique a été proposée par Guérin [37]. Elle a permis de modéliser un problème de mise à la terre [58]. Elle est obtenue à partir de l'expression en volumique (avec l'hypothèse que la densité de courant est constante dans l'épaisseur) discrétisée suivant la méthode de Galerkin. Cette formulation n'est pas utilisable pour des problèmes où l'épaisseur de peau est très petite.

Une alternative est également proposée par Dreher [35]. Elle consiste à utiliser des éléments linéiques et un couplage circuit pour les conducteurs filaires; la région voisine est modélisée en potentiel vecteur magnétique \mathbf{A} . L'étude a été faite en 2D.

I.6 Formulations de type magnétique

La relation vérifiée par le champ magnétique \mathbf{H} est obtenue en combinant les équations de Maxwell. Elle donne lieu à plusieurs formulations de type magnétique dont les deux principales sont : la formulation en \mathbf{H} et la formulation en $\mathbf{T} - \phi$.

I.6.1 Formulation en champ magnétique \mathbf{H}

Cette méthode a été étudiée par Bossavit et Vérité [26] puis a fait l'objet d'un code éléments finis au sein d'EDF pour l'étude des courants de Foucault dans les dispositifs [3]. C'est le code «Trifou» [39]. Il s'agit de résoudre :

$$\operatorname{rot}\left(\frac{1}{\sigma}\operatorname{rot}\mathbf{H}\right) + \frac{\partial\mu\mathbf{H}}{\partial t} = 0 \quad (\text{I.21})$$

Elle est généralement associée :

- à la formulation en potentiel scalaire magnétique ϕ dans l'air [52,69]; dans ce cas les auteurs prennent en compte des régions multiples connexes en utilisant les coupures.
- ou à une formulation par la méthode intégrale de frontière

Cette formulation est compatible avec un couplage circuit pour prendre en compte l'inconnue globale qui est le courant [41].

I.6.2 Formulation en potentiel $\mathbf{T}-\Phi$

En éléments nodaux, cette formulation est la duale de la formulation $\mathbf{A} - V$. En effet, lorsqu'il n'y a pas d'accumulation de charge, l'équation de continuité s'écrit $\operatorname{div}\mathbf{J} = 0$ et permet de définir le potentiel \mathbf{T} tel que $\mathbf{J} = \operatorname{rot}\mathbf{T}$. Comme pour la formulation en $\mathbf{A} - V$ l'unicité de la solution nécessite l'introduction d'une Jauge. Ce qui donne l'expression

ci-dessous :

$$\operatorname{rot}\left(\frac{1}{\sigma}\operatorname{rot}\mathbf{T}\right) - \operatorname{grad}\left(\frac{1}{\sigma}\operatorname{div}\mathbf{T}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\mu(\mathbf{T} - \operatorname{grad}\phi) = 0 \quad (\text{I.22})$$

$$\operatorname{div}\mu(\mathbf{T} - \operatorname{grad}\phi) = 0 \quad (\text{I.23})$$

Formulation pour régions minces

Des formulations ont été présentées par Rodger ^[61,63]. La formulation scalaire en \mathbf{T} - ϕ qui utilise des éléments coques à saut de potentiel est obtenue par l'approximation de la densité surfacique de courant qui est :

$$\mathbf{K} = \frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{grad}T \wedge \mathbf{n}) \quad (\text{I.24})$$

Elle présente l'inconvénient de ne pas prendre en compte les sauts de perméabilité.

Cas des régions filaires

Dans le cas des régions filaires, on exprime le champ magnétique dans l'air par :

$$\mathbf{H} = \mathbf{t}_0 I - \operatorname{grad}\phi \quad (\text{I.25})$$

Le courant I étant inconnu, il est nécessaire d'introduire une équation supplémentaire liant celui ci avec les autres inconnues ^[40].

I.6.3 Formulation en potentiel scalaire magnétique

La formulation potentiel scalaire magnétique présente un meilleur coût comparé au potentiel vecteur, une inconnue par noeud dans les régions non conductrices en formulation nodale. Ceci est très intéressant surtout lorsque les régions non conductrices sont plus importantes. L'étude de plusieurs aspects de cette formulation (imprécisions, limites) a fait l'objet de la thèse de H.T. Luong ^[45] et auparavant de celle de C. Guérin ^[37] pour la modélisation des régions minces. Une autre forme de la formulation scalaire magnétique repose sur la condition impédance de surface (IBC). Elle est utilisée pour modéliser le champ magnétique au voisinage des régions conductrices et magnétiques de façon précise. Cette méthode a fait l'objet de plusieurs travaux ^[29,37,48,50]. Igarashi et Honma ^[48] proposent une méthode IBC pour les régions minces. Cette méthode est une généralisation des méthodes classiques qui consistaient en une approximation 1D ^[49], elle propose une approximation 2D avec 2 termes d'impédance. Cette formulation présente l'avantage d'être valide même lorsque l'épaisseur de peau est voisine de l'épaisseur de la plaque. Elle a cependant pour inconvénients de ne pas traiter les régions non simplement connexes et est source d'imprécisions sur les arêtes et les coins. Cette formulation, testée en 2D et 2D axisymétrique et donne de bons résultats pour des régions linéaires. Des améliorations ont été également proposées par plusieurs auteurs pour traiter des singularités liées aux coins ^[50,51]

I.7 Formulation pour régions filaires

D'autres approches ont été proposées pour modéliser les régions filaires. Ces méthodes sont appliquées aux dispositifs filaires de mise à la terre.

Dans [70] les auteurs résolvent l'équation de Laplace en potentiel scalaire électrique. L'idée consiste à décomposer le potentiel scalaire suivant $v = v_s(r, \theta) + v_z(z)$ et écrire la conductivité (qui est scalaire) sous forme de tenseur. Ce qui permet d'obtenir un modèle du conducteur filaire avec une matrice d'impédance. Cette formulation a permis d'obtenir de bons résultats, elle présente l'avantage d'être rapide et simple à mettre en œuvre. Elle présente l'inconvénient de ne pas être directement adaptable en magnétodynamique.

La théorie des lignes couplée à la méthode des différences finies [28] est également utilisée. Elle fonctionne en magnétodynamique et permet de modéliser des foudroiement de structures filaires en transitoire. Dans le cadre de cette thèse, nous n'avons pas orienté notre travail dans ce sens.

Formulation	Exemple d'utilisation	Inconvénients
E arête	dispositifs en haute fréquence	temps de résolution important
AV	formulation assez générale lorsque l'on utilise A dans les régions isolantes	méthode coûteuse, imprécisions
H arête	assez générale possibilité de couplage circuit	peu adapté aux régions minces assez difficile à mettre en œuvre
T- ϕ	Efficace pour des régions massives avec courant de Foucault	problème de connexité conditions limites
ϕ_r	peu coûteux, adapté au couplage circuit prise en compte des régions minces quelle que soit l'épaisseur de peau	problème de connexité peu adapté aux régions massives

TAB. I.1 – Formulations magnétodynamiques tridimensionnelles.

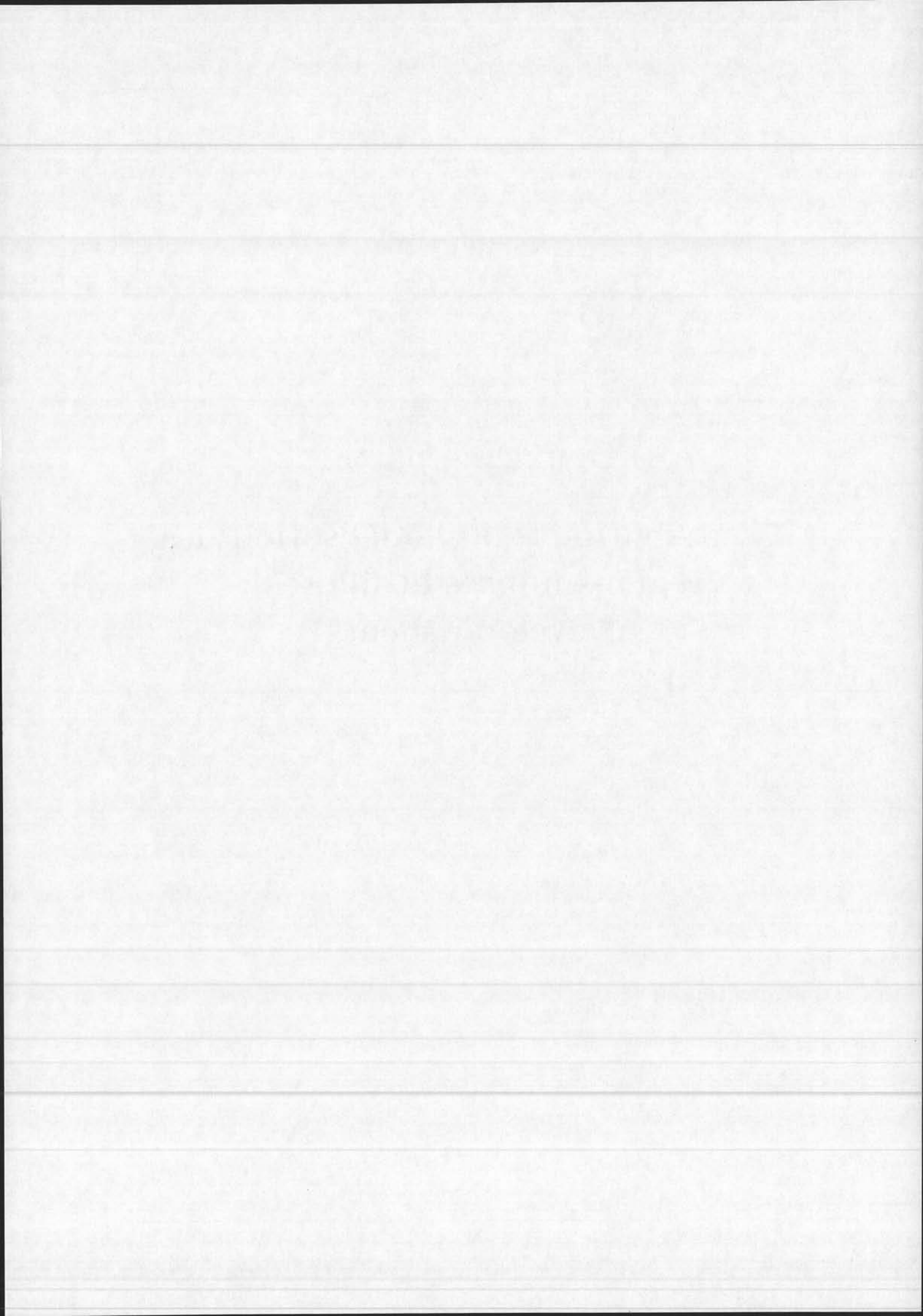
Le tableau (Tab.I.1) présente un récapitulatif des formulations magnétodynamiques existantes.

I.8 Conclusion

L'objectif est de proposer une formulation souple et peu coûteuse qui répond aux besoins à savoir modéliser des régions filaires en présence de régions minces, des régions filaires et des régions minces dans un circuit. Notre choix se porte sur la formulation en potentiel scalaire magnétique réduit avec couplage circuit. Cette formulation nous semble plus adaptée car, dans le cadre des éléments finis nodaux, elle ne nécessite qu'une inconnue par noeud. D'autre part, l'étude bibliographique a montré que cette formulation s'adapte bien au couplage avec les équations de circuit.

Deuxième partie

Contribution à la modélisation des régions minces et filaires : Développements



Chapitre II

Formulation volumique scalaire

II.1 Introduction

La formulation présentée ici permet de modéliser les régions filaires dans un champ magnétique en basse fréquence. Elle est issue des formulations de Meunier [44], de Luong [45] ainsi que de la note de principe de FLUX3D [38]. Nous rappelons ici cette formulation car elle permet de bien comprendre la base de notre travail. Ce chapitre s'organise de la façon suivante : nous présentons d'abord la formulation en potentiel scalaire réduit puis la relation courant tension nécessaire au couplage circuit et enfin un cas test.

II.2 Formulation t_0 -circuit

Un inducteur dans le sens de Flux3D est une entité à laquelle est associée une ou plusieurs bobines dans laquelle le courant est connu -inducteur courant- ou le courant est inconnu -inducteur circuit-.

On notera dans la suite :

- n_i : nombre total d'inducteurs ($n_i = n_{ic} + n_{nc}$) ;
- n_{ic} : nombre d'inducteurs circuit ;
- n_{nc} : nombre d'inducteurs non circuit ;
- t_{0k} : champ pour un courant de 1A dû à l'inducteur k.

Dans le domaine en potentiel réduit Fig.2.1 :

$$\mathbf{H} = \mathbf{T}_0 - \text{grad}\phi_r \quad (\text{II.1})$$

où ϕ_r désigne le potentiel scalaire magnétique réduit.

$$\mathbf{T}_0 = \sum_{k=1}^{n_{ic}} t_{0k} \cdot I_k + \mathbf{T}_{01} \quad (\text{II.2})$$

représente le potentiel vecteur électrique dû aux inducteurs. Avec :

- \mathbf{T}_{01} dû aux inducteurs non circuit
- t_{0k} étant le champ créé par un courant de 1A. Ce champ peut être exprimé en fonction du courant total (qui est une inconnue du problème). I_k est le courant total dans l'inducteur k.

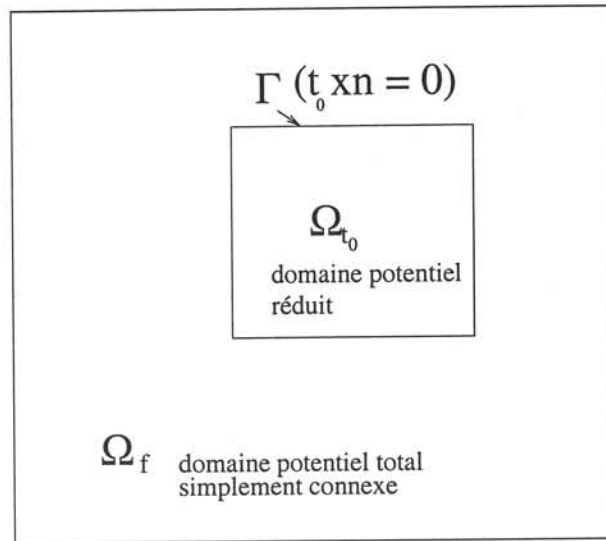


FIG. 2.1 – Dispositif à modéliser.

Dans les régions ferromagnétiques, on a :

$$\mathbf{H} = -\text{grad}\phi \quad (\text{II.3})$$

où ϕ désigne le potentiel scalaire magnétique total.

II.2.1 Couplage entre les formulations en potentiel réduit et en potentiel total

Soit Γ la frontière entre la région en potentiel réduit et celle en potentiel total (Fig.2.1). La composante tangentielle du champ H_t doit être conservée au passage sur Γ . Cette condition se traduit par :

$$\begin{cases} \mathbf{T}_0 \wedge \mathbf{n} = 0 \\ \phi_r = \phi \end{cases}$$

La condition ci-dessus nécessite une approximation de \mathbf{T}_0 par éléments d'arêtes. Pour obtenir ce potentiel vecteur électrique, il faut résoudre par éléments finis les équations :

$$\text{roth}\mathbf{t}_{0kw} = \mathbf{J} + \text{roth}\mathbf{h}_{jw} \quad (\text{II.4})$$

où

- \mathbf{t}_{0kw} est l'approximation éléments finis d'arêtes de \mathbf{t}_{0k} ;
- \mathbf{J} est la densité de courant due aux sources maillées ;
- \mathbf{h}_{jw} est l'approximation éléments finis d'arêtes du champ dû à un courant de 1A (calculé par Biot et Savart) dans tous les inducteurs.

Dans la suite, nous ne mettrons pas les indices supplémentaires w pour alléger les notations.

Dans le domaine potentiel réduit (Ω_{t0}) :

$$\mathbf{H} = \sum_{k=1}^{n_i} \mathbf{t}_{0k} I_k - \text{grad} \phi_r \quad (\text{II.5})$$

dans ce cas, la dérivée partielle du champ magnétique par rapport au courant s'écrit :

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial I_k} = \mathbf{t}_{0k} \quad (\text{II.6})$$

Dans la région potentiel total (Ω_f) :

$$\mathbf{H} = -\text{grad} \phi \quad (\text{II.7})$$

dans ce cas, la dérivée partielle du champ magnétique par rapport au courant est :

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial I_k} = 0 \quad (\text{II.8})$$

II.2.2 Forme discrète

La forme intégrale correspondant à l'équation

$$\text{div} \mathbf{B} = 0$$

s'écrit sur le domaine Ω_{t0} (domaine en potentiel réduit) :

$$\int_{\Omega_{t0}} \alpha_i \text{div} \mathbf{B} d\Omega = - \int_{\Omega_{t0}} \text{grad} \alpha_i \cdot \mathbf{B} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \alpha_i \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} d\Gamma = 0$$

Γ_t est la frontière du domaine, les α_i sont les fonctions de pondération scalaires (méthode de Galerkin). Dans le cas général l'intégrale sur Γ_t est le terme de couplage, en particulier dans le cas où l'on est en présence de régions minces.

Pour cette partie, on ne prendra pas en compte ce terme dans un premier temps, car on suppose les régions filaires seules et sans interactions avec l'extérieur. On a donc en remplaçant $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ et \mathbf{H} par l'expression correspondante :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{t0}} \alpha_i \text{div} \mathbf{B} d\Omega &= - \int_{\Omega_{t0}} \text{grad} \alpha_i \cdot \mathbf{B} d\Omega \\ &= - \int_{\Omega_{t0}} \text{grad} \alpha_i \cdot \mu \sum_{l=1}^{n_{ic}} \mathbf{t}_{0l} I_l d\Omega - \int_{\Omega_{t0}} \text{grad} \alpha_i \cdot \mu \mathbf{T}_{01} d\Omega \\ &\quad + \int_{\Omega_{t0}} \text{grad} \alpha_i \cdot \mu \text{grad} \phi_r d\Omega \\ &= 0 \end{aligned}$$

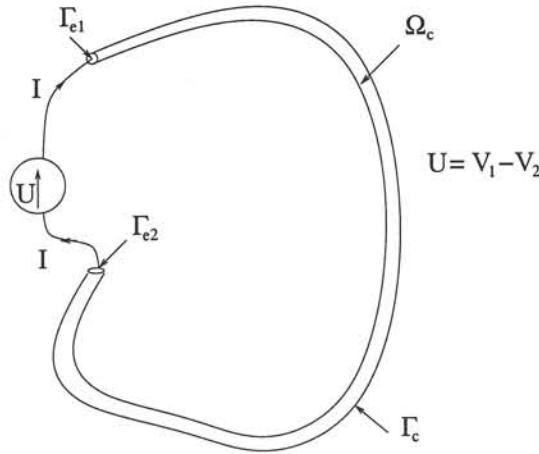


FIG. 2.2 – Fil avec une tension imposée à ses bornes.

D'où :

$$\int_{\Omega} \text{grad} \alpha_i \cdot \mu \text{grad} \phi_r d\Omega - \int_{\Omega_{t0}} \text{grad} \alpha_i \cdot \mu \sum_{l=1}^{n_{ic}} \mathbf{t}_{0l} I_l d\Omega - \int_{\Omega_{t0}} \text{grad} \alpha_i \cdot \mu \mathbf{T}_{01} d\Omega = 0 \quad (\text{II.9})$$

II.2.2.1 Dans la région Ω_f

Dans la région Ω_f , nous utilisons la formulation en potentiel scalaire magnétique total [68].

Lorsqu'il n'y a pas de source de courant dans une région, l'équation de Maxwell-Ampère s'écrit :

$$\text{rot} \mathbf{H} = 0 \Rightarrow \mathbf{H} = -\text{grad} \phi \quad (\text{II.10})$$

On dit alors que le champ magnétique dérive d'un potentiel ϕ qui est le potentiel scalaire magnétique total. La forme discrète est obtenue par application de la méthode de Galerkin à l'équation :

$$\text{div}(\mu \text{grad} \phi) = 0 \quad (\text{II.11})$$

Aux interfaces, entre deux milieux de perméabilités différentes, la continuité de la composante tangentielle du champ magnétique est assurée par la continuité du potentiel scalaire. Il faut cependant imposer la continuité de la composante normale de l'induction.

II.2.3 Relation courant tension

Soit un conducteur isolé (voir Fig.2.2) aux bornes duquel on impose une tension V sinusoïdale de pulsation w . Soit Γ_{e1}, Γ_{e2} des équipotentielles scalaires (v_1, v_2), Ω_c représente la région du conducteur et Γ_c sa frontière. On considère qu'aucun courant ne sort du conducteur sauf par les extrémités. La conductivité σ est connue.

En électrocinétique ($\text{rot} \mathbf{E} = 0$), si le conducteur est alimenté par un courant continu

d'intensité $I_0 = 1A$, la tension aux bornes du conducteur s'écrit ^[44] :

$$u_0 = R_0 = \int_{\Omega_c} \rho \cdot \mathbf{j}_0^2 d\Omega$$

où :

- Ω_c représente le volume du conducteur ;
- R_0 est la résistance statique du conducteur ;
- \mathbf{j}_0 est la densité de courant qui s'établirait en continu dans le conducteur pour une intensité globale égale à $I_0 = 1A$ ($\mathbf{j}_0 = -\sigma \text{grad}v$).

En dynamique, si v est le potentiel scalaire électrique en un point du conducteur Ω_c et \mathbf{j}_0 tel que défini précédemment, montrons que :

$$\int_{\Omega_c} \mathbf{j}_0 \text{grad}v d\Omega = -U \quad (\text{II.12})$$

avec U la tension appliquée au conducteur. En effet, $\text{div}(\mathbf{j}_0 v) = \mathbf{j}_0 \cdot \text{grad}v + v \text{div}\mathbf{j}_0$ et $\text{div}\mathbf{j}_0 = 0$ (équation de continuité). Ce qui implique :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_c} \mathbf{j}_0 \cdot \text{grad}v d\Omega &= \int_{\Omega_c} \text{div}(\mathbf{j}_0 \cdot v) \\ &= \int_{\Gamma_c + \Gamma_{e1} + \Gamma_{e2}} \mathbf{j}_0 \cdot \mathbf{n} v d\Gamma \quad \text{or } \mathbf{j}_0 \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_c \\ &= \int_{\Gamma_{e1}} \mathbf{j}_0 \cdot \mathbf{n} v_1 d\Gamma + \int_{\Gamma_{e2}} \mathbf{j}_0 \cdot \mathbf{n} v_2 d\Gamma \\ &= -I_0 v_1 + I_0 v_2 \\ &= v_2 - v_1 \\ &= -U \end{aligned}$$

Or, en tout point du conducteur on a : $\text{grad}v = -(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t})$ et la loi d'Ohm $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$. En combinant ces relations et en multipliant par \mathbf{j}_0 , on a :

$$\mathbf{j}_0 \cdot \text{grad}v = -\mathbf{j}_0 \cdot (\rho \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t})$$

d'où :

$$U = \int_{\Omega_c} \mathbf{j}_0 \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega_c} \rho \mathbf{j}_0 \cdot \mathbf{j} d\Omega \quad (\text{II.13})$$

En magnétodynamique et en utilisant le formalisme complexe, la relation (II.13) s'écrit :

$$U = j\omega \int_{\Omega_c} \mathbf{j}_0 \cdot \mathbf{A} d\Omega + \int_{\Omega_c} \rho \mathbf{j}_0 \cdot \mathbf{j} d\Omega \quad (\text{II.14})$$

Ce qui donne une première relation entre la tension aux bornes du conducteur et la densité de courant dans le conducteur. On remarquera que les domaines d'intégration sont limités

à la région du conducteur Ω_c .

Pour rendre cette relation facilement utilisable dans la formulation, nous allons la transformer de manière à obtenir une relation exprimée en fonction des inconnues du problème (potentiel scalaire magnétique et courant total). La densité de courant continu \mathbf{j}_0 vérifie l'équation de continuité ; ce qui montre l'existence d'un potentiel vecteur électrique \mathbf{t}_0 :

$$\text{div} \mathbf{j}_0 = 0 \Rightarrow \exists \mathbf{t}_0 : \mathbf{j}_0 = \text{rott}_0$$

Le premier terme de la relation (II.14) s'exprime alors en fonction du potentiel vecteur électrique (\mathbf{t}_0), de l'induction magnétique et d'un terme d'intégrale surfacique à l'aide de l'équation ci-dessous :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_c} \mathbf{j}_0 \cdot \mathbf{A} d\Omega &= \int_{\Omega_c} \text{rott}_0 \cdot \mathbf{A} d\Omega \\ &= \int_{\Omega_c} \mathbf{t}_0 \cdot \mathbf{B} d\Omega + \int_{\Gamma_c} (\mathbf{A} \wedge \mathbf{t}_0) \cdot \mathbf{n} d\Omega \end{aligned}$$

puisque :

$$\text{div}(\mathbf{A} \wedge \mathbf{t}_0) = \mathbf{t}_0 \cdot \text{rot} \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \text{rott}_0$$

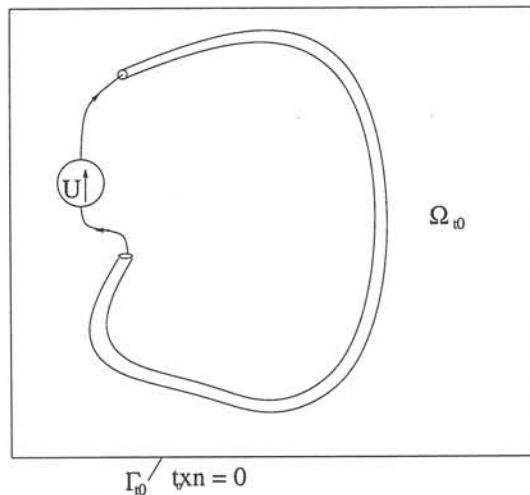


FIG. 2.3 – Domaine de \mathbf{t}_0 .

Afin d'éliminer le terme d'intégrale surfacique, on limite le domaine de \mathbf{t}_0 à une boîte (Fig.2.3) englobant le conducteur tel que : $\mathbf{t}_0 \wedge \mathbf{n} = 0$ (aucun courant ne sort de la boîte). Il y a autant de \mathbf{t}_0 donc de domaines de \mathbf{t}_0 qu'il y a de conducteurs filaires distincts.

Avec \mathbf{t}_0 ainsi défini, on intègre dans la région Ω_{t_0} :

$$\int_{\Omega_{t_0}} \mathbf{t}_0 \cdot \mathbf{B} d\Omega = \int_{\Omega_{t_0}} \mathbf{j}_0 \cdot \mathbf{A} d\Omega - \int_{\Gamma_{t_0}} (\mathbf{A} \wedge \mathbf{t}_0) \cdot \mathbf{n} d\Omega \quad (\text{II.15})$$

Le deuxième terme de l'équation (II.15) est nul du fait que $\mathbf{t}_0 \wedge \mathbf{n} = 0$ sur Γ_{t_0} . On a alors :

$$\int_{\Omega_{t_0}} \mathbf{j}_0 \cdot \mathbf{A} d\Omega = \int_{\Omega_{t_0}} \mathbf{t}_0 \cdot \mathbf{B} d\Omega \quad (\text{II.16})$$

Or la densité de courant \mathbf{j}_0 est nulle en dehors de la région du conducteur (qui est incluse dans la boîte Ω_{t_0}), ce qui permet de conclure que :

$$\int_{\Omega_c} \mathbf{j}_0 \cdot \mathbf{A} d\Omega = \int_{\Omega_{t_0}} \mathbf{j}_0 \cdot \mathbf{A} d\Omega = \int_{\Omega_{t_0}} \mathbf{t}_0 \cdot \mathbf{B} d\Omega \quad (\text{II.17})$$

En remplaçant dans II.14 le premier terme de la relation par son équivalent exprimé en fonction du potentiel vecteur électrique dans (II.17), on a :

$$\boxed{U = \int_{\Omega_c} \rho \mathbf{j}_0 \cdot \mathbf{j} d\Omega + j\omega \int_{\Omega_{t_0}} \mathbf{t}_0 \cdot \mathbf{B} d\Omega} \quad (\text{II.18})$$

Dans cette relation, le premier terme est exprimé en fonction de la densité de courant et est intégré dans la région du conducteur tandis que le second terme résulte d'une intégration dans le domaine Ω_{t_0} . Pour obtenir l'équation finale reliant le courant total dans le conducteur en fonction de la tension à ses bornes, considérons le premier terme de l'expression ci-dessus. Il s'exprime par :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_c} \rho \mathbf{j}_0 \cdot \mathbf{j} d\Omega &= \int_{\Omega_c} -\text{grad} v_0 \cdot \mathbf{j} d\Omega \\ &= - \int_{\Omega_c} \text{div}(v_0 \mathbf{j}_0) d\Gamma && \text{théorème de la divergence} \\ &= - \int_{\Gamma_{e1} + \Gamma_{e2}} v_0 \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} d\Gamma \\ &= u_0 I = R_0 I \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\boxed{U = R_0 I + j\omega \int_{\Omega_{t_0}} \mathbf{t}_0 \cdot \mathbf{B} d\Omega} \quad (\text{II.19})$$

R_0 est la résistance électrocinétique du conducteur calculé analytiquement ^[5,6] ou numériquement ^[1]. La relation courant-tension ainsi obtenue s'exprime uniquement en fonction des inconnues du problème (potentiel scalaire magnétique et courant total), la résistance R_0 et le potentiel \mathbf{t}_0 sont connus. Le terme intégral correspond au flux total embrassé par le conducteur. Le fait d'utiliser une «boîte» pour le calcul de \mathbf{t}_0 permet de limiter le domaine de calcul de ce dernier et évite un calcul dans l'espace tout entier.

II.3 Couplage circuit

Pour le couplage équation de champ équation de circuit, plusieurs méthodes existent dans la littérature à savoir :

- méthode des courants de maille ^[43] utilisée dans FLUX2D ;

- méthode des potentiels électriques nodaux ^[35] ;
- méthode des potentiels nodaux intégrés ^[45] qui est utilisée dans FLUX3D.

Dans le cadre de cette thèse, nous utiliserons la méthode des potentiels nodaux intégrés qui a fait l'objet de plusieurs travaux et développements au Laboratoire d'Electrotechnique de Grenoble ^[34-36,45]. Les variables utilisées sont dans ce cas les potentiels électriques intégrés dans le temps aux nœuds du circuit :

$$\psi = \int_0^t V d\tau \quad (II.20)$$

Le flux au travers du conducteur k s'écrit :

$$\begin{aligned} \Phi_k &= \int_{\Omega_{t0}} \mathbf{t}_{0k} \cdot \mathbf{B} d\Omega \\ &= \int_{\Omega_{t0}} \mathbf{t}_{0k} \cdot \mu \sum_{l=1}^{n_{ic}} \mathbf{t}_{0l} I_l d\Omega - \int_{\Omega_{t0}} \mathbf{t}_{0k} \cdot \mu \text{grad} \phi_r d\Omega + \int_{\Omega_{t0}} \mathbf{t}_{0k} \cdot \mu \mathbf{T}_{01} d\Omega \end{aligned}$$

Le troisième terme est connu au moment de la résolution et passe du côté des termes connus dans l'équation matricielle finale à résoudre. L'équation de circuit s'écrit en harmonique (avec le formalisme complexe) ^[44] pour un conducteur k :

$$\psi_1 - \psi_2 = \frac{R_k}{j\omega} I_k + \int_{\Omega_{t0}} \mathbf{t}_{0k} \cdot \mu \sum_{l=1}^{n_{ic}} \mathbf{t}_{0l} I_l d\Omega - \int_{\Omega_{t0}} \mathbf{t}_{0k} \cdot \mu \text{grad} \phi_r d\Omega + \int_{\Omega_{t0}} \mathbf{t}_{0k} \cdot \mu \mathbf{T}_{01} d\Omega \quad (II.21)$$

On a alors à partir de (II.9) et (II.21) et en appliquant la méthode de Newton-Raphson :

$$\begin{bmatrix} A & B & 0 & 0 \\ B^T & R+C & D & -D \\ 0 & D & 0 & 0 \\ 0 & -D & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\phi \\ \Delta I \\ \Delta\psi_1 \\ \Delta\psi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K \\ L \\ G \\ -G \end{bmatrix}$$

avec :

$$\begin{aligned}
 A_{ij} &= - \int_{\Omega_{t_0}} \text{grad}\alpha_i \cdot \mu \text{grad}\alpha_j d\Omega \quad 1 \leq i, j \leq n; \\
 B_{ik} &= \int_{\Omega_{t_0}} \text{grad}\alpha_i \cdot \mu \mathbf{t}_{0k} d\Omega \quad 1 \leq i \leq n \quad 1 \leq k \leq n_{ic}; \\
 C_{lk} &= - \int_{\Omega_{t_0}} \mathbf{t}_{0l} \cdot \mu \mathbf{t}_{0k} d\Omega \quad 1 \leq l, k \leq n_{ic}; \\
 R_{kk} &= - \frac{R_k}{j\omega} \quad 1 \leq k \leq n_{ic}; \\
 K_i &= \int_{\Omega_{t_0}} \text{grad}\alpha_i \cdot \mu \mathbf{T}_{01} d\Omega \quad 1 \leq i \leq n; \\
 L_k &= - \int_{\Omega_{t_0}} \mathbf{t}_{0k} \cdot \mu \mathbf{T}_{01} d\Omega + \frac{U_i}{j\omega} \quad 1 \leq k \leq n_{ic}; \\
 G &= 0; \\
 D &= 1.
 \end{aligned}$$

II.4 Limites de la méthode sur un cas test

Pour montrer les limites de la méthode, nous considérons le dispositif à deux spires présenté à la figure (2.4) il ne comporte pas de région ferromagnétique. Il permet de montrer la validité et les limites de la formulation développée (dans le cas où il n'y a pas d'effet de peau). Tout le domaine peut être modélisé en potentiel scalaire magnétique réduit.

Dans cet exemple, le domaine de \mathbf{t}_0 est réduit à une boîte englobant les deux spires. La relation de circuit s'écrit pour la spire induite (celle du dessus)

$$U = R_2 I_2 + L_2 \frac{dI_2}{dt} + M \frac{dI_1}{dt} = 0$$

où :

- R_2, L_2 désignent respectivement : la résistance et l'inductance de la spire 2 (spire induite) ;
- M désigne l'inductance mutuelle de 1 par rapport à 2 ;
- I_1 est le courant qui circule dans la boucle 1 sinusoïdal ($I_1 = I_0 \sin(\omega t)$) et I_2 le courant dans la boucle 2.

En régime permanent et avec le formalisme complexe, la solution est de la forme :

$$I_2 = A e^{j\omega t} + B e^{-j\omega t}$$

D'autre part $\cos \omega t = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}$ on en déduit alors la valeur de I_2 :

$$I_2 = M I_0 \omega \left(\frac{R_2 \cos \omega t + L_2 \omega \sin \omega t}{R_2^2 + (L_2 \omega)^2} \right)$$

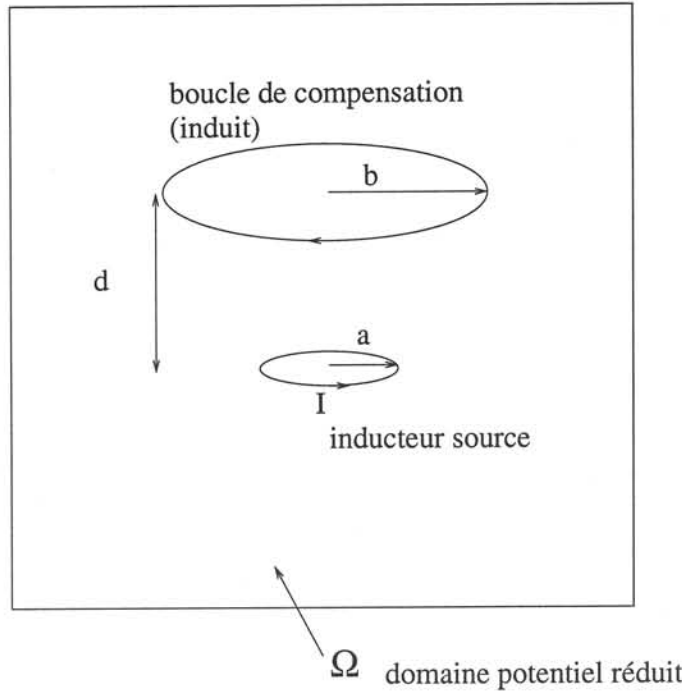


FIG. 2.4 – Schéma du cas test présenté.

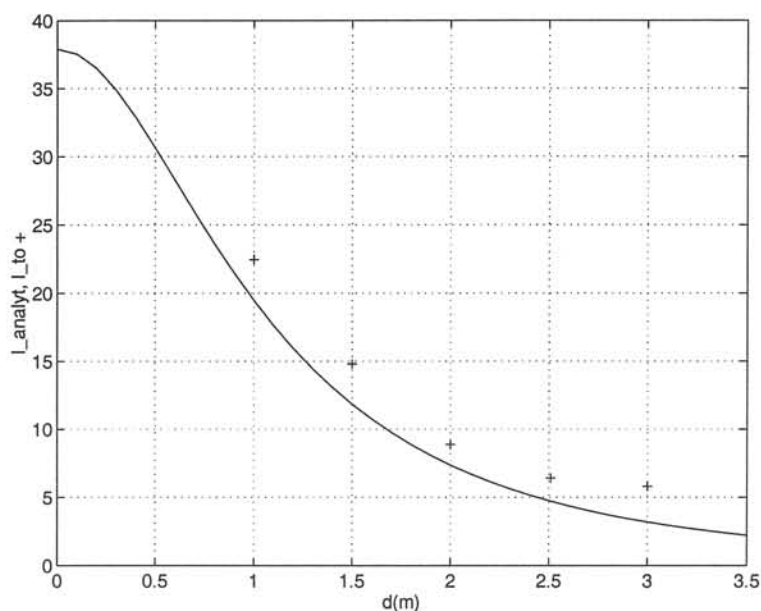
avec :

$$\begin{aligned}
 R_2 &= \rho \frac{2\pi b}{\pi r^2} \\
 L_2 &= \mu_0 b \left(\ln\left(\frac{8b}{r}\right) - 2 \right) + \frac{\mu_0}{8\pi} 2\pi b \\
 M &= \mu_0 \sqrt{b} a \left(\left(\frac{2}{k} - k\right) K(k) - \frac{2}{k} E(k) \right) \\
 k^2 &= \frac{4ab}{d^2 + (a + b)^2}
 \end{aligned}$$

La mutuelle M est calculée en considérant les inducteurs filaires (rayon r de la section petite devant le rayon des spires) [5]. E(k) et K(k) représentent respectivement les intégrales elliptiques de première et de deuxième espèce.

II.4.1 Problème des deux spires

Les dimensions des spires inductrices et induites sont inspirées d'un problème réel (cas test «Folies» présenté dans la partie validation du chapitre 7). La boucle inductrice est une spire de 80.5cm de rayon et la boucle induite est de 157cm de rayon ; ces deux spires sont distantes de 251cm. Les deux boucles sont des conducteurs filaires de 0.5cm de rayon. La courbe Fig.2.5 présente les résultats de simulation 3D ainsi que les résultats analytiques pour différentes positions de la boucle induite. Cette boucle induite a une

FIG. 2.5 – Comparaison des résultats pour $|I_0| = 500A$.

résistance $R = 2.64 \cdot 10^{-4} \Omega$.

On constate que le résultat final est meilleur lorsque le calcul du flux est plus précis. En fait, la configuration pour laquelle le calcul de t_0 (approximé par éléments finis) est plus précis. L'erreur relative observée entre le résultat analytique et les résultats numériques est due essentiellement au calcul des termes d'inductance. L'erreur augmente avec la distance car lorsque la boucle induite s'éloigne de l'inducteur, l'ordre de grandeur de la mutuelle entre les deux boucles devient négligeable par rapport aux termes d'inductance propre. En fait l'erreur due au calcul des termes de mutuelle par éléments finis est plus faible que celle commise sur le calcul de l'inductance propre car la mutuelle ne dépend pas du rayon des fils.

Les difficultés rencontrées à savoir les problèmes d'imprécision dans les cas où le fil est très fin et dans le cas où l'induit s'éloigne de l'inducteur source sont dues au calcul de t_0 . Ce calcul revient à approximer une fonction en Dirac car

$$\text{rot } \mathbf{t}_0 = \mathbf{j}$$

sur le fil et

$$\text{rot } \mathbf{t}_0 = 0$$

partout ailleurs. Ceci est difficile et nécessite :

- un maillage très fin au voisinage du fil surtout lorsque ce dernier est fin ;
- des éléments du second ordre.

Elle entraîne également un temps de résolution important et un espace mémoire important. Pour résoudre ce problème d'imprécision et rendre cette méthode applicable aux structures filaires, une solution pourrait être de raffiner le maillage au voisinage du fil et

de faire passer le maillage par le fil.

Cette solution est assez satisfaisante mais reste imprécise, du fait des limitations du maillage (qui reste important bien que la région du calcul de t_0 soit limitée).

II.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté la formulation en potentiel scalaire réduit $t_0 - \phi$ ainsi qu'un cas de validation. Les difficultés rencontrées nous amènent à adapter cette formulation pour résoudre de façon plus précise les problèmes liés aux dispositifs filaires ; c'est l'objet du chapitre suivant.

Chapitre III

Modélisation des régions filaires

III.1 Introduction

La formulation présentée ici est une adaptation de la formulation $t_0 - \phi$ pour améliorer la précision de la modélisation des régions filaires dans un champ magnétique en basse fréquence. Elle est issue des formulations de Rodger ^[60] et de Meunier ^[44]. Elle permet également la prise en compte des régions ferromagnétiques (couplage entre les potentiels scalaires magnétiques réduit et total).

Dans ce chapitre, nous développons la formulation adéquate sous sa forme la plus générale. Une application sur un cas filaire avec résultat analytique est ensuite présentée. Après une analyse des résultats obtenus ainsi que des difficultés rencontrées, nous présentons les solutions adaptées qui permettront de surmonter ces difficultés. Nous distinguons les cas : des régions filaires conductrices, des régions filaires ferromagnétiques avec ou sans effet de peau. Dans le cas des régions ferromagnétiques, nous effectuons une comparaison avec un modèle résolu en 2D axisymétrique.

III.2 Formulation h_j -circuit

La formulation en potentiel réduit consiste à décomposer le champ magnétique en un champ dû aux courants sources \mathbf{H}_j calculés par Biot et Savart (dans l'espace vide) et un champ exprimant les réactions des parties ferromagnétiques au champ source exprimé par $-\text{grad}\phi_r$.

On appelle «inducteur circuit» les inducteurs (conducteurs filaires) dans lesquels le courant n'est pas connu par opposition aux inducteurs non circuit.

On notera dans la suite de ce document :

- n_i : nombre total d'inducteurs ($n_i = n_{ic} + n_{nc}$);
- n_{ic} : nombre d'inducteurs circuit;
- n_{nc} : nombre d'inducteurs non circuit;
- \mathbf{H}_{js} : champ surfacique (sur Γ) dû aux courants;
- \mathbf{h}_{jk} : champ pour un courant de 1A dû à l'inducteur k ; la composante tangentielle de ce champ est continue sur la frontière «réduit-total»;
- $\text{grad}_s \delta\phi_k = (\mathbf{h}_{jk})_s$ sur Γ .

Dans le domaine en potentiel réduit, le champ magnétique est obtenu par la relation ci-dessous :

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_j - \text{grad}\phi_r$$

ϕ_r désigne le potentiel scalaire magnétique réduit. \mathbf{H}_j représente le champ magnétique créé par les courants sources calculés par la loi de Biot-Savart. Dans le cas des conducteurs filaires, ce champ peut être exprimé en fonction du courant total (qui est une inconnue du problème).

$$\mathbf{H}_j = \mathbf{h}_j \cdot I_j$$

\mathbf{h}_j est le champ créé par un courant de 1A (calculé analytiquement par la formule de Biot Savart dans tout le domaine) et I_j le courant total dans l'inducteur j .

Dans les régions ferromagnétiques, on a :

$$\mathbf{H} = -\text{grad}\phi$$

ϕ désigne le potentiel scalaire magnétique total.

En ce qui concerne le potentiel sur la frontière, on pose :

$$\phi_r = \phi + \Delta\phi$$

où $\Delta\phi$ désigne le saut de potentiel calculé de façon à assurer la continuité de la composante tangentielle de \mathbf{H} sur la frontière «réduit-total» (Γ).

En introduisant ce saut de potentiel, les expressions de la formulation en potentiel réduit et en potentiel total s'expriment en fonction de la même inconnue ϕ .

III.2.1 Couplage entre les formulations en potentiel réduit et en potentiel total

H_t est conservée au passage Ω_a / Ω_f que l'on note Γ . Sur (Γ), le champ tangent s'écrit d'une part :

$$\begin{aligned} (\mathbf{H}_s)_{tan} &= -(\text{grad}_s \phi) \\ &= -(\text{grad}_s \phi_r) - \text{grad}(\Delta\phi) \end{aligned}$$

et d'autre part :

$$(\mathbf{H}_s)_{tan} = (\mathbf{H}_{js})_{tan} - (\text{grad}_s \phi_r)$$

d'où par continuité :

$$\mathbf{H}_{js} = \text{grad}(\Delta\phi)$$

En fait, ce terme désigne la contribution de tous les inducteurs au saut de potentiel.

On note $\delta\phi_k$ la contribution de l'inducteur k lorsque celui-ci est parcouru par un courant unitaire.

Le calcul de $\Delta\phi$ sur (Γ) peut se faire soit par l'intégrale ci-dessous A et B étant 2 points d'une ligne sur (Γ) :

$$\Delta\phi = \int_A^B \mathbf{H}_j \cdot d\mathbf{l}$$

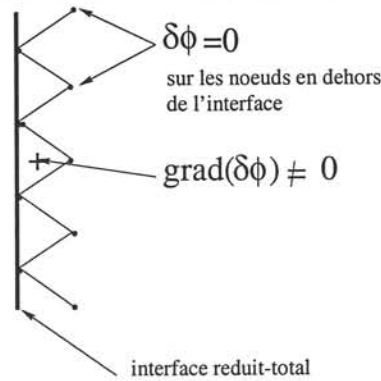


FIG. 3.1 – Frontière «réduit-total».

En fait pour rendre unique les valeurs de $\Delta\phi$, on fixe un point de référence pour lequel $\Delta\phi = 0$. Ce qui donne pour tout point M sur (Γ) :

$$\Delta\phi(M) = \int_0^M \mathbf{H}_{jt} d\mathbf{l} + \Delta\phi(0)$$

La ligne d'intégration est en réalité un arbre¹ des arêtes du maillage qui appartient à cet interface^[?], boss1, luong soit en minimisant l'expression (pour un courant de 1A dans les inducteurs) :

$$\int_{\Gamma} (\text{grad}_s \delta\phi - \mathbf{h}_j)^2 d\Gamma$$

La solution retenue dans FLUX3D est celle obtenue par minimisation de l'intégrale. Cette résolution permet de connaître $\delta\phi_k$. Dans la suite, $\delta\phi_k$ est supposé connue. D'autre part, on remarque que $\Delta\phi = 0$ pour tout point en dehors de l'interface «réduit-total» (puisque le potentiel scalaire est continu partout en dehors de la frontière) et, sur cette interface,

$$\begin{aligned} \text{grad } \Delta\phi &= \mathbf{H}_{js} \\ &= \sum_{k=1}^{n_i} \mathbf{h}_{jk} \cdot I_k \\ &= \sum_{k=1}^{n_i} \text{grad}(\delta\phi_k) \cdot I_k \end{aligned}$$

où $\text{grad}(\delta\phi_k)$ est la contribution de chaque inducteur (parcouru par un courant unitaire) au saut de potentiel sur la frontière «réduit-total». Il est non nul pour les éléments touchant la frontière.

¹l'arbre est l'ensemble des arêtes du sous-maillage M de Γ_{12} qui permettent de parcourir tous les noeuds de Γ_{12} sans refermer de boucle.

Dans le domaine potentiel réduit (Ω_a) :

$$\mathbf{H} = \sum_{k=1}^{n_i} (\mathbf{h}_{jk} - \text{grad}\delta\phi_k) I_k - \text{grad}\phi \quad (\text{III.1})$$

dans ce cas,

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial I_k} = (\mathbf{h}_{jk} - \text{grad}\delta\phi_k) \quad (\text{III.2})$$

Dans la région potentiel total (Ω_f) :

$$\mathbf{H} = -\text{grad}\phi \quad (\text{III.3})$$

dans ce cas :

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial I_k} = 0 \quad (\text{III.4})$$

L'expression du champ magnétique dans les différentes régions permet d'écrire la forme discrète des formulations en potentiel réduit et total.

III.2.2 Forme discrète

Dans cette partie, nous présentons la forme discrète de ces formulations dans le cadre des éléments finis nodaux.

III.2.2.1 Dans la région potentiel réduit (Ω_a)

Le champ \mathbf{H}_j dû aux inducteurs et le terme $\text{grad}\Delta\phi$ se décomposent en deux parties :

- \mathbf{H}_{jc} des inducteurs «circuit» ainsi que les différents $\text{grad}\delta\phi_k$ correspondant à chaque inducteur «circuit» que l'on regroupe dans le terme

$$\mathbf{H}_{jc} = \sum_{k=1}^{n_{ic}} (\mathbf{h}_{jk} - \text{grad}\delta\phi_k) I_k;$$

- \mathbf{H}_{jnc} des inducteurs «non-circuit» et $\text{grad}\Delta\phi_{nc}$ que l'on regroupe dans le terme \mathbf{H}_{jnc} avec :

$$\mathbf{H}_{jnc} = \sum_{l=1}^{n_{nc}} (\mathbf{h}_{jl} - \text{grad}\delta\phi_l) I_l;$$

Les termes correspondant aux inducteurs « non-circuit» passent dans le deuxième membre de l'égalité matricielle.

La forme intégrale correspondant à l'équation

$$\text{div}\mathbf{B} = 0$$

s'écrit sur le domaine Ω_a (domaine en potentiel réduit) :

$$\int_{\Omega_a} \alpha_i \text{div}\mathbf{B} d\Omega = - \int_{\Omega_a} \text{grad}\alpha_i \cdot \mathbf{B} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \alpha_i \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} d\Gamma = 0$$

Γ_t est la frontière du domaine, les α_i sont les fonctions de pondération scalaires (méthode de Galerkin). Lorsqu'il n'y a pas de couplage avec d'autres formulations (en particulier en absence de régions ferromagnétiques) le terme intégré sur cette frontière est nul car on considère le champ nul à l'infini. Sinon dans le cas général ce terme représente le couplage, en particulier lorsqu'il y a présence de régions minces.

Pour cette partie, on ne prendra pas en compte ce terme dans un premier temps, car on suppose les régions filaires dans un domaine extérieur modélisé en potentiel réduit. On a donc en remplaçant $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ et \mathbf{H} par l'expression correspondante :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_a} \alpha_i \operatorname{div} \mathbf{B} d\Omega &= - \int_{\Omega_a} \operatorname{grad} \alpha_i \cdot \mathbf{B} d\Omega \\ &= - \int_{\Omega_a} \operatorname{grad} \alpha_i \cdot \mu \sum_{l=1}^{n_{ic}} (\mathbf{h}_{jl} - \operatorname{grad} \delta \phi_l) I_l d\Omega - \int_{\Omega_a} \operatorname{grad} \alpha_i \cdot \mu \mathbf{H}_{jnc} d\Omega \\ &\quad + \int_{\Omega_a} \operatorname{grad} \alpha_i \cdot \mu \operatorname{grad} \phi d\Omega \\ &= 0 \end{aligned}$$

D'où :

$$\int_{\Omega_a} \operatorname{grad} \alpha_i \cdot \mu \operatorname{grad} \phi d\Omega - \int_{\Omega_a} \operatorname{grad} \alpha_i \cdot \mu \sum_{l=1}^{n_{ic}} (\mathbf{h}_{jl} - \operatorname{grad} \delta \phi_l) I_l d\Omega - \int_{\Omega_a} \operatorname{grad} \alpha_i \cdot \mu \mathbf{H}_{jnc} d\Omega = 0 \quad (\text{III.5})$$

III.2.2.2 Dans la région Ω_f

Dans la région Ω_f , nous utilisons la formulation en potentiel scalaire magnétique total [68].

Lorsqu'il n'y a pas de source de courant dans une région, l'équation de Maxwell-Ampère s'écrit :

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0 \Rightarrow \mathbf{H} = -\operatorname{grad} \phi \quad (\text{III.6})$$

On dit alors que le champ magnétique dérive d'un potentiel ϕ qui est le potentiel scalaire magnétique total. La forme discrète est obtenue par application de la méthode de Galerkin à l'équation :

$$\operatorname{div}(\mu \operatorname{grad} \phi) = 0 \quad (\text{III.7})$$

Aux interfaces, entre deux milieux de perméabilités différentes, la continuité de la composante tangentielle du champ magnétique est assurée par la continuité du potentiel scalaire. Il faut cependant imposer la continuité de la composante normale de l'induction.

III.2.3 Relation courant tension

La relation courant tension s'écrit comme précédemment avec $\mathbf{t}_0 = \mathbf{h}_j - \operatorname{grad} \delta \phi$:

$$U = RI + jw \int_{\Omega_a} (\mathbf{h}_{jk} - \operatorname{grad} \delta \phi_k) \cdot \mathbf{B} d\Omega \quad (\text{III.8})$$

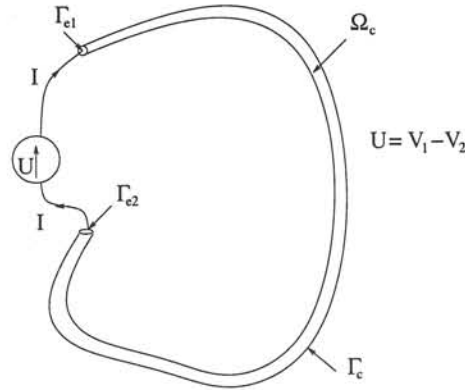


FIG. 3.2 – Fil avec une tension imposée à ses bornes.

III.2.4 Prise en compte de l'effet de peau

Quand il y a effet de peau, on peut considérer que tout se passe comme si la section du conducteur était limitée à l'épaisseur δ . Ceci est une bonne approximation quand on ne s'intéresse pas au détail de la répartition des courants induits dans le fil, mais aux pertes (puissance totale dissipée) [3]. En considérant que le courant total se répartit uniformément sur l'épaisseur δ , on se ramène au cas précédent sans effet de peau, avec $R_0 = \rho \frac{l}{2\pi r \delta}$. En introduisant les indices k qui correspondent aux inducteurs circuit k , l'intégrale correspondant au flux s'écrit :

$$\begin{aligned} \Phi_k &= \int_{\Omega_a} (\mathbf{h}_{jk} - \text{grad} \delta \phi_k) \cdot \mathbf{B} d\Omega \\ &= \int_{\Omega_a} (\mathbf{h}_{jk} - \text{grad} \delta \phi_k) \cdot \mu \sum_{l=1}^{n_{ic}} (\mathbf{h}_{jl} - \text{grad} \delta \phi_l) I_l d\Omega \\ &\quad - \int_{\Omega_a} (\mathbf{h}_{jk} - \text{grad} \delta \phi_k) \cdot \mu \text{grad} \delta \phi d\Omega + \int_{\Omega_a} (\mathbf{h}_{jk} - \text{grad} \delta \phi_k) \cdot \mu \mathbf{H}_{jnc} d\Omega \end{aligned}$$

Le troisième terme est connu au moment de la résolution et passe du côté des termes connus dans l'équation matricielle finale à résoudre. L'équation de circuit s'écrit en harmonique (avec le formalisme complexe) :

$$\begin{aligned} \frac{U_k}{j\omega} &= \frac{R_k}{j\omega} I_k + \int_{\Omega_a} \mu (\mathbf{h}_{jk} - \text{grad} \delta \phi_k) \sum_{l=1}^{n_{ic}} (\mathbf{h}_{jl} - \text{grad} \delta \phi_l) I_l d\Omega \\ &\quad - \int_{\Omega_a} (\mathbf{h}_{jk} - \text{grad} \delta \phi_k) \cdot \mu \text{grad} \delta \phi d\Omega + \int_{\Omega_a} (\mathbf{h}_{jk} - \text{grad} \delta \phi_k) \cdot \mu \mathbf{H}_{jnc} d\Omega \end{aligned}$$

$\Psi_1 = \int_0^t V_1 dt$ est le potentiel nodal intégré dans le temps. On a alors à partir de (III.5) et de l'équation de circuit ci-dessus et en appliquant la méthode de Newton-Raphson la

relation matricielle (relative à la matrice élémentaire) ci-dessous :

$$\begin{bmatrix} A & B & 0 & 0 \\ B^T & R+C & D & -D \\ 0 & D & 0 & 0 \\ 0 & -D & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\phi \\ \Delta I \\ \Delta\Psi_1 \\ \Delta\Psi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K \\ L \\ G \\ -G \end{bmatrix}$$

$$A_{ij} = - \int_{\Omega_a} \text{grad}\alpha_i \cdot \mu \text{grad}\alpha_j d\Omega \quad 1 \leq i, j \leq n;$$

$$B_{ik} = \int_{\Omega_a} \text{grad}\alpha_i \cdot \mu (\mathbf{h}_{jk} - \text{grad}\delta\phi_k) d\Omega \quad 1 \leq i \leq n \quad 1 \leq k \leq n_{ic};$$

$$C_{lk} = - \int_{\Omega_a} (\mathbf{h}_{jl} - \text{grad}\delta\phi_l) \cdot \mu (\mathbf{h}_{jk} - \text{grad}\delta\phi_k) d\Omega \quad 1 \leq l, k \leq n_{ic};$$

$$R_{kk} = - \frac{R_k}{j\omega} \quad 1 \leq k \leq n_{ic};$$

$$K_i = \int_{\Omega_a} \mu \text{grad}\alpha_i \mathbf{H}_{jnc} d\Omega \quad 1 \leq i \leq n;$$

$$L_k = - \int_{\Omega_a} (\mathbf{h}_{jk} - \text{grad}\delta\phi_k) \cdot \mu \mathbf{H}_{jnc} d\Omega + \frac{U_i}{j\omega} \quad 1 \leq k \leq n_{ic};$$

$$D = 1;$$

$$G = 0.$$

III.3 Application de la méthode à un problème filaire

Pour notre application au problème filaire, nous avons programmé la formulation en potentiel réduit sans le couplage réduit-total (qui n'était pas nécessaire pour ce cas). Nous reprenons le cas test des deux spires du chapitre précédent. Contrairement au cas de la formulation en «réduit-total», tout le domaine est modélisé en potentiel scalaire magnétique réduit. L'objectif consiste à calculer le courant dans la boucle passive plongée dans un champ magnétique H dû à une boucle dans laquelle passe un courant I . La formulation à valider est celle présentée précédemment sans le couplage «réduit-total». La courbe Fig.3.3 présente les résultats de simulation 3D ainsi que les résultats analytiques pour différentes positions de la boucle induite. Les deux boucles sont des conducteurs filaires ayant une section de 0.5cm de rayon; elles sont distantes de $d = 251\text{cm}$ et le rayon de la boucle inductrice est $R_1 = 80.5\text{cm}$ tandis que celle de la boucle induite est $R_2 = 157\text{cm}$. On constate une nette amélioration de la précision des résultats. Ceci provient du fait que la relation de Biot et Savart associée au centrage du maillage prends en compte le rayon du conducteur filaire.

Cependant, lorsque le rayon du fil tend vers zero, l'inductance propre du fil tend vers l'infini ce qui entraine de grosses difficultés numériques.

L'étude du courant dans la boucle induite pour une configuration donnée (boucle induite à 1m de la boucle inductrice) montre que les résultats obtenus restent assez sensibles

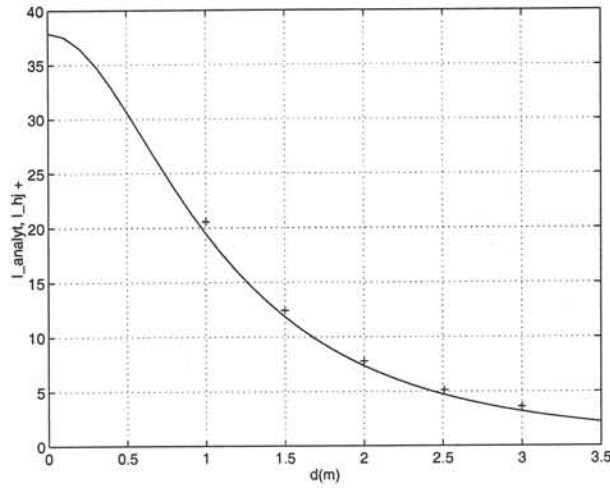


FIG. 3.3 – Comparaison des résultats pour $|I_0| = 500A$.

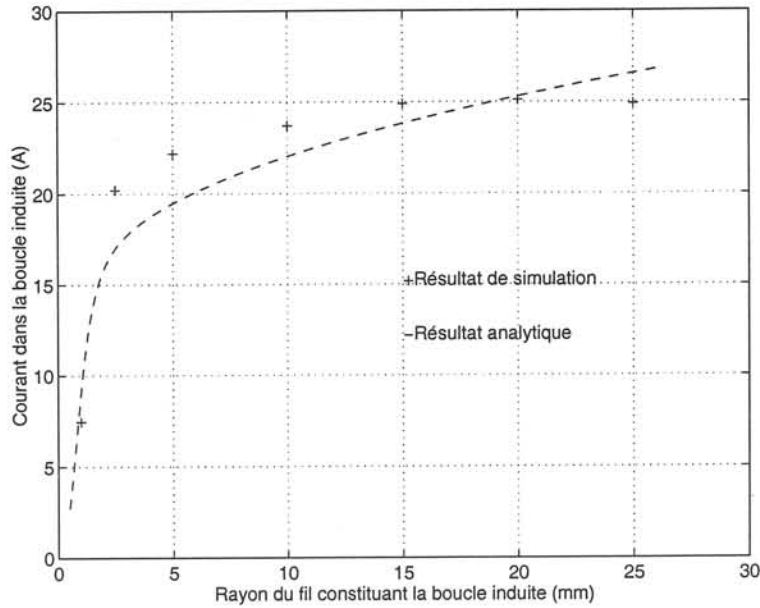
aux variations de la section du fil. La figure (3.4) montre l'écart entre le résultat analytique et la simulation en fonction du rayon du conducteur filaire. La conclusion qui en sort est que le rayon du fil a une influence sur le résultat en terme de courant induit dans le conducteur.

III.3.1 Discussion

Dans ce paragraphe, on discute des difficultés rencontrées pour la modélisation des régions filaires avec la formulation développée. Dans l'expression de la matrice du système à résoudre, l'intégrale :

$$C_{lk} = - \int_{\Omega_a} (\mathbf{h}_{jl} - \text{grad}\delta\phi_l) \cdot \mu(\mathbf{h}_{jk} - \text{grad}\delta\phi_k) d\Omega \tag{III.9}$$

est constitué de termes (produits de champ magnétique) calculés par la formule de Biot-Savart. Pour un rayon du fil tendant vers zero, le champ magnétique (calculé par Biot et Savart) varie très fortement. Un maillage très fin mais brutal au voisinage du conducteur filaire ne résoudra pas le problème, tandis qu'un maillage de densité moyenne mais réparti de façon symétrique donnera de meilleurs résultats. En effet, lorsque le maillage respecte la position du fil, c'est à dire lorsque les arêtes des éléments passent par le fil (comme sur la Fig.3.5.), le calcul se fait correctement pour le terme M_{lk} dans le cas de fils suffisamment éloignés. Car dans ce cas, le terme \mathbf{h}_{jl} de l'inducteur lointain varie peu et peut être considéré comme constant. M_{lk} est donc l'intégrale d'une fonction impaire dans laquelle les termes positifs et négatifs se compensent. Ceci se voit très bien en prenant par exemple un seul point de Gauss par élément sur la figure (3.5). Cependant, il reste toujours une imprécision liée à la méthode d'intégration utilisée dans FLUX3D qui est la méthode de Gauss. En effet, c'est une méthode d'intégration polynômiale or les fonctions à intégrer (en particulier $\mathbf{h}_{jk}\mu_0.\mathbf{h}_{jk}$) n'ont pas du tout l'allure d'un polynôme et sont donc plus


 FIG. 3.4 – Courant dans la boucle induite en fonction du rayon du fil pour $d=1m$.

délicates à approximer.

Les difficultés rencontrées (problème d'imprécision en particulier lorsque les phénomènes inductifs dans le dispositif à étudier sont prédominant devant l'aspect résistif) sont donc dues au calcul des intégrales L_k et M_{lk} correspondants aux termes d'inductance propre des fils et mutuelle entre ces fils voir Fig.3.5. La même figure représente l'allure du champ magnétique \mathbf{h}_j dans la section du conducteur ainsi que le produit $\mathbf{h}_j \cdot \mathbf{h}_j$ (terme sensible) dans un cas simple en 2D.

III.3.2 Extraction des inductances

Pour un conducteur considéré tout seul dans le vide Ω , parcouru par un courant I , sous une différence de potentiel U , on a la relation ci-dessous :

$$U = RI + j\omega \int_{\Omega} \mathbf{h}_j \cdot \mathbf{B} d\Omega$$

Or le dispositif est seul dans le vide d'où : $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} = \mu_0 \mathbf{h}_j I$ donc :

$$\begin{aligned} U &= RI + j\omega I \int_{\Omega} \mathbf{h}_j \cdot \mu_0 \mathbf{h}_j d\Omega \\ &= RI + j\omega IL \end{aligned}$$

L'inductance propre s'écrit :

$$L = \int_{\Omega} \mathbf{h}_j \cdot \mu_0 \mathbf{h}_j d\Omega$$

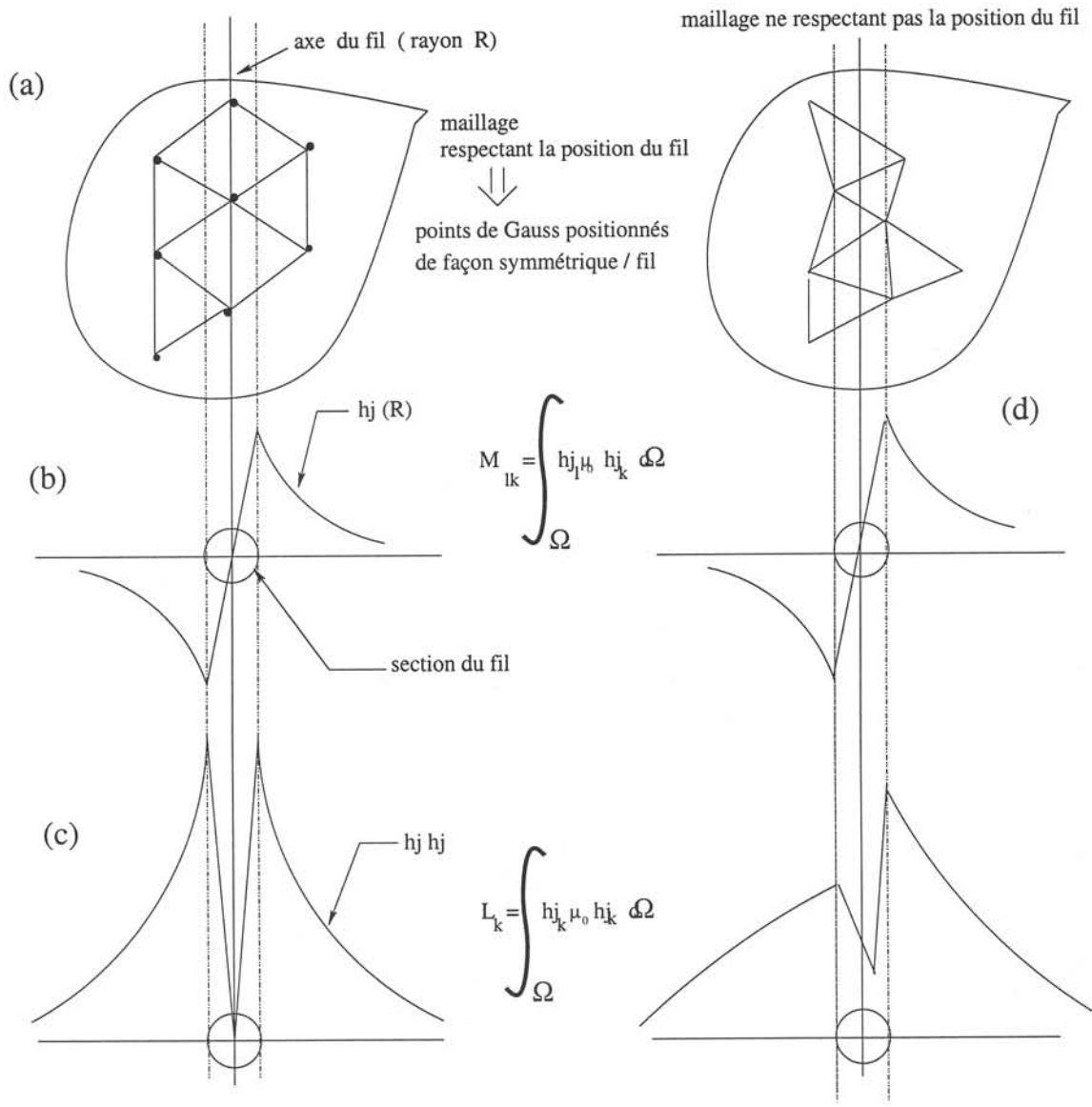


FIG. 3.5 – Position du fil par rapport au maillage.

D'autre part, soit un inducteur k dans un domaine (une boîte) telle que :

$$(\mathbf{h}_{jk} - \text{grad}\delta\phi_k) \wedge \mathbf{n} = 0$$

sur la frontière de la boîte et telle qu'à l'intérieur de cette boîte on a :

$$\mu = \mu_0.$$

A l'extérieur de la boîte, on peut avoir des régions ferromagnétiques qui seront alors modélisées en potentiel total.

Le flux total embrassé par la spire est l'intégrale de $\mathbf{h}_{jk} \cdot \mathbf{B}$ sur tout le domaine si celui-ci est entièrement modélisé en potentiel réduit. Sinon ce flux est l'intégrale de $(\mathbf{h}_{jk} - \text{grad}\delta\phi_k) \cdot \mathbf{B}$ sur le domaine limité à la boîte que nous avons appelé dans le chapitre précédent domaine de \mathbf{t}_0 .

Soit Ω_a le domaine tout entier et Ω_{t_0} le domaine limité à la boîte. Pour la spire k , le flux propre se calcule de deux façon :

$$\Phi_k = \int_{\Omega_a} \mathbf{h}_{jk} \cdot \mu_0 \mathbf{H}_j d\Omega$$

ou encore :

$$\Phi_k = \int_{\Omega_{t_0}} (\mathbf{h}_{jk} - \text{grad}\delta\phi_k) \cdot \mu_0 \mathbf{H}_j d\Omega$$

Or ce flux propre vaut :

$$\Phi_k = LI$$

Donc l'inductance propre de la spire k s'exprime dans la boîte par :

$$L = \int_{\Omega_{t_0}} (\mathbf{h}_{jk} - \text{grad}\delta\phi_k) \cdot \mu_0 \mathbf{h}_{jk} d\Omega$$

Ce résultat est très intéressant dans le cas où $\mu = \mu_0$ dans la boîte (ce qui est notre cas) car le terme ci-dessous :

$$(\mathbf{h}_{jk} - \text{grad}\delta\phi_k) \cdot \mu_0 \mathbf{h}_{jk}$$

apparaît clairement dans la formulation éléments finis. Il s'agit du terme C_{kk} de la matrice qui s'écrit :

$$\begin{aligned} C_{kk} &= \int_{\Omega_a} (\mathbf{h}_{jk} - \text{grad}\delta\phi_k) \cdot \mu_0 (\mathbf{h}_{jk} - \text{grad}\delta\phi_k) d\Omega \\ &= \int_{\Omega_a} \mathbf{h}_{jk} \cdot \mu_0 (\mathbf{h}_{jk} - \text{grad}\delta\phi_k) d\Omega + \int_{\Omega_a} [-\text{grad}\delta\phi_k \cdot \mu_0 (\mathbf{h}_{jk} - \text{grad}\delta\phi_k)] d\Omega \\ &= L_k - \int_{\Omega_a} [\text{grad}\delta\phi_k \cdot \mu_0 (\mathbf{h}_{jk} - \text{grad}\delta\phi_k)] d\Omega \end{aligned}$$

L_k désigne l'inductance propre dans le vide de l'inducteur k .

La deuxième intégrale est limitée à la région où $\text{grad}\delta\phi_k$ n'est pas nul c'est à dire sur les éléments qui touchent la surface (Γ).

Remarque : Dans le cas où tout le problème est modélisé en potentiel réduit avec de l'air partout, les termes en $\text{grad}\delta\phi_l$ sont nuls et on a alors :

$$C_{kk} = L_k$$

D'autre part, dans les régions où μ est constante scalaire, les termes

$$B_{il} = - \int_{\Omega_a} \text{grad}\alpha_i \cdot \mu(\mathbf{h}_{j1} - \text{grad}\delta\phi_l) d\Omega$$

peuvent également se calculer par :

$$B_{il} = - \int_{\Gamma} \alpha_i \mu \mathbf{h}_{j1} \cdot \mathbf{n} d\Gamma + \int_{\Omega_a} \text{grad}\alpha_i \cdot \mu \text{grad}\delta\phi_l d\Omega$$

En effet :

$$\begin{aligned} B_{il} &= - \int_{\Omega_a} \text{grad}\alpha_i \cdot \mu(\mathbf{h}_{jk} - \text{grad}\delta\phi_k) d\Omega \\ &= - \int_{\Omega_a} \text{grad}\alpha_i \cdot \mu \mathbf{h}_{j1} d\Omega + \int_{\Omega_a} \text{grad}\alpha_i \cdot \mu \text{grad}\delta\phi_l d\Omega \end{aligned}$$

Par ailleurs comme μ est constante scalaire :

$$\text{div}(\mu \alpha_i \mathbf{h}_{j1}) = \mathbf{h}_{j1} \cdot \text{grad}(\mu \alpha_i) + \mu \alpha_i \text{div} \mathbf{h}_{j1} \quad (\text{III.10})$$

Le troisième terme de l'équation ci-dessus est nul. En intégrant cette égalité sur le domaine Ω et par application du théorème de la divergence, on a :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_a} \text{div}(\mu \alpha_i \mathbf{h}_{j1}) d\Omega &= \int_{\Omega_a} \mathbf{h}_{j1} \cdot \text{grad}(\mu \alpha_i) d\Omega \\ &= \int_{\Gamma} \alpha_i \mu \mathbf{h}_{j1} \cdot \mathbf{n} d\Gamma \end{aligned}$$

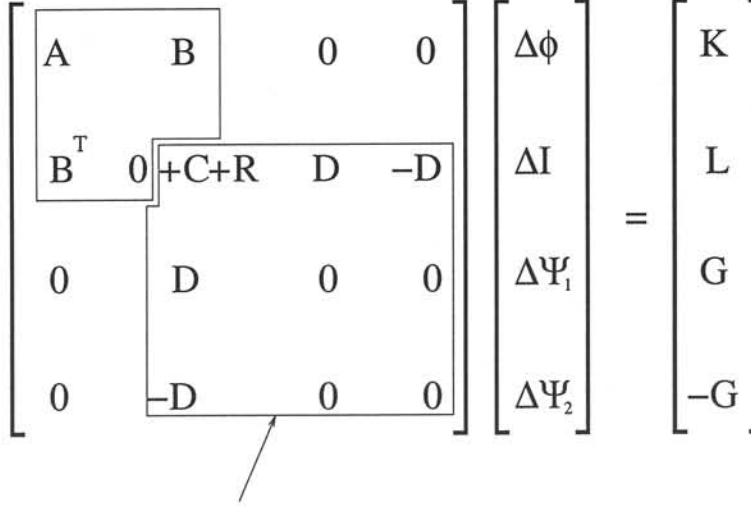
Le système à résoudre s'écrit alors : l'inductance propre dans le vide ainsi extraite et calculée par ailleurs est prise en compte dans la description du circuit.

Dans des cas simples concernant des boucles à section circulaire on dispose d'expressions analytiques des inductances propres fournissant une bonne approximation [5]. Par exemple, l'inductance propre d'une boucle de rayon b et de section r est calculée par :

$$L = \mu_0 b \left(\ln\left(\frac{8b}{r}\right) - 2 \right).$$

Lorsque l'on ne dispose pas d'expressions analytiques (par exemple pour un segment de

$$\begin{bmatrix}
 \boxed{A} & \boxed{B} & 0 & 0 \\
 \boxed{B^T} & 0 & \boxed{+C+R} & \boxed{D} & \boxed{-D} \\
 0 & \boxed{D} & 0 & 0 \\
 0 & \boxed{-D} & 0 & 0
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 \Delta\phi \\
 \Delta I \\
 \Delta\Psi_1 \\
 \Delta\Psi_2
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 K \\
 L \\
 G \\
 -G
 \end{bmatrix}$$



 termes de circuit

FIG. 3.6 – Matrice du système.

conducteur), le calcul de l'inductance propre partielle pourra se faire par la méthode PEEC dont le principe est présenté en annexe [64,67].

III.3.3 Notion d'inductance et d'inductance partielle

On définit l'inductance (ou coefficient d'inductance) d'un conducteur, le coefficient de proportionnalité entre le courant et le flux d'induction dans un circuit fermé. Ce coefficient dépend uniquement de la géométrie du dispositif considéré.

La notion d'inductance partielle est apparue en 1972, date de la première publication de Ruehli [66], elle consiste à modéliser par un schéma électrique une portion de conducteur. Chaque portion de conducteur est constitué d'une résistance, d'une inductance et de mutuelles avec les autres parties de la géométrie. Cette notion d'inductance partielle est valable dans le cadre de l'approximation quasi-stationnaire et pour des matériaux linéaires. Elle a fait l'objet de plusieurs travaux [31, 47, 64, 67].

La méthode PEEC (Partial Element Equivalent Circuit) est une méthode de modélisation d'interconnexions sous forme de schéma électrique équivalent. Elle permet dans le cadre du régime quasi-stationnaire (en supposant que le courant est uniformément réparti sur une coupe transversale du conducteur) d'extraire les composants électriques équivalents à chaque segment conducteur.

- R_k : résistance de la boucle ;
- L : inductance propre de la boucle (dans le vide) ;
- M : mutuelle entre la boucle et les autres éléments présents dans le domaine (ce terme est calculé par la méthode des éléments finis).

De manière analogue, nous définissons le flux «partiel» pour un segment conducteur

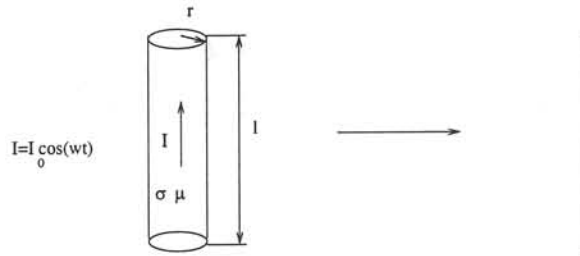


FIG. 3.7 – Segment [AB] conducteur filaire.

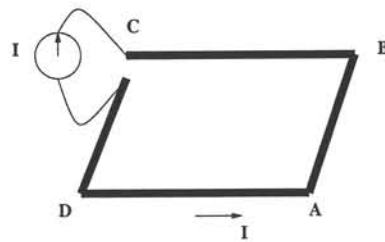


FIG. 3.8 – Boucle en court circuit.

filare seul (Fig.3.7) par :

$$\Phi_{AB}^p = \int_{\Omega} (\mathbf{h}_{j_{AB}} - \text{grad}\delta\phi) \cdot \mathbf{B} d\Omega \tag{III.11}$$

En effet, le flux calculé dans la partie précédente est une intégrale volumique ; elle tient compte du champ créé par le conducteur filaire dans tout le domaine. Le terme Φ_{AB}^p contient la contribution de l'inductance propre partielle et des mutuelles partielles. L'équation de circuit relatif au segment [AB] s'écrit alors :

$$V_B - V_A = RI + \frac{d\Phi_{AB}^p}{dt} \tag{III.12}$$

R étant la résistance du segment [AB] et I le courant qui le traverse.

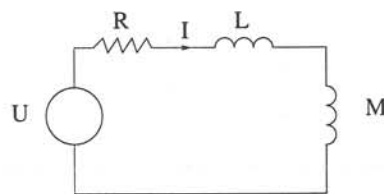


FIG. 3.9 – Circuit électrique équivalent.

III.4 Mise en œuvre de régions filaires dans un circuit

L'objet de cette partie est d'appliquer la méthode proposée pour modéliser les conducteurs filaires.

III.4.1 Cas de validation : boucle inductrice cable induit

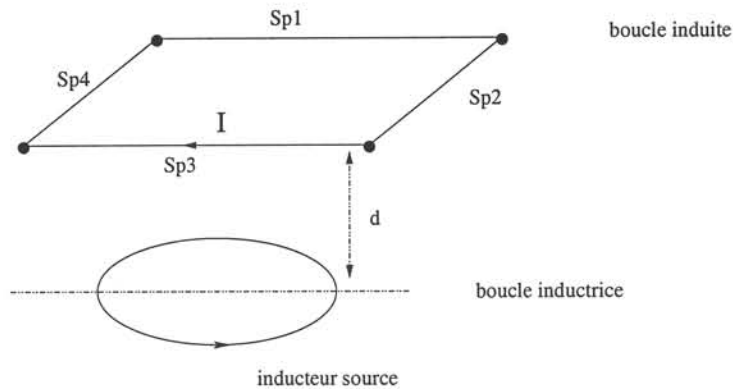


FIG. 3.10 – Géométrie du cas test.

Le cas test Fig.3.10 est une boucle inductrice dans laquelle on impose un courant $I=10A$ et une boucle rectangulaire induite située à une distance d (dans l'axe de la première boucle) dans laquelle se développe un courant I . Le but est de déterminer le courant dans la boucle induite.

Dans un premier temps, la boucle induite est modélisée par un inducteur filaire unique rectangulaire puis ensuite par quatre segments de conducteurs filaires. Chaque portion de conducteur est un composant R,L . L'inductance propre partielle de chaque portion de conducteur est calculée par la méthode PEEC et la résistance par les formules classiques. Pour ce cas test, la boucle est constituée de 4 segments de conducteurs filaires de longueur

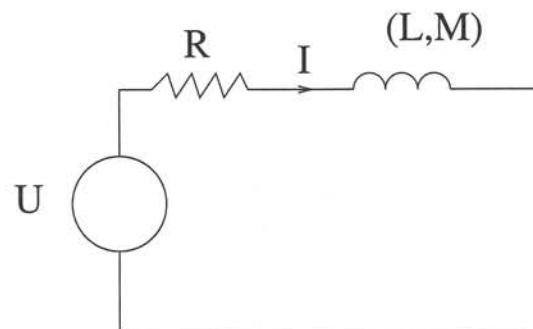


FIG. 3.11 – Schéma du circuit associé sans extraction d'inductance.

80mm et de section circulaire de rayon $r = 0.5mm$ chacun. Le maillage respecte la position

de la boucle induite. On a alors pour chaque segment l'inductance propre partielle

$$L = 7.759^{-8} H.$$

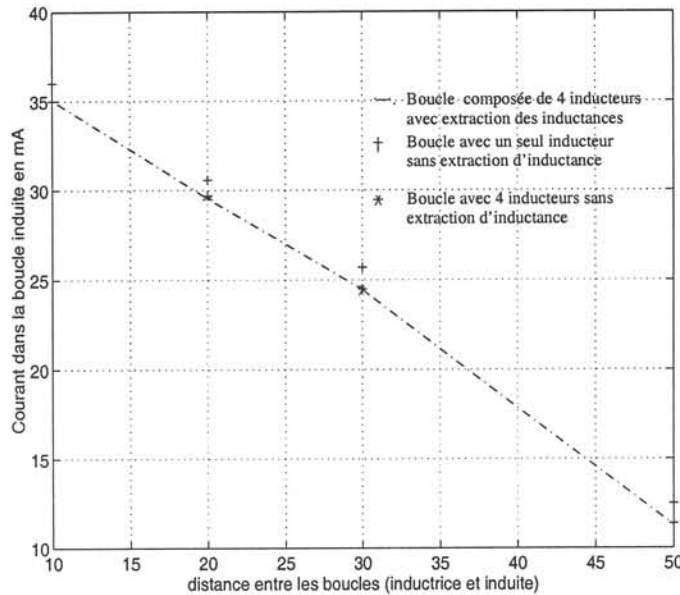


FIG. 3.12 – Comparaison des résultats pour un courant inducteur $|I|=10A$.

On obtient les résultats Fig.3.12. Pour une résolution en considérant la boucle induite comme une spire unique (associée à un inducteur) sans extraire l'inductance, on obtient un résultat moins précis. La même résolution effectuée en considérant celle-ci comme une spire (associée à un inducteur) avec extraction d'inductance donne un résultat identique à une simulation effectuée en considérant la boucle comme 4 spires (associées à 4 inducteurs) et en extrayant les inductances propres partielles. Ce qui montre que notre processus de modélisation fonctionne.

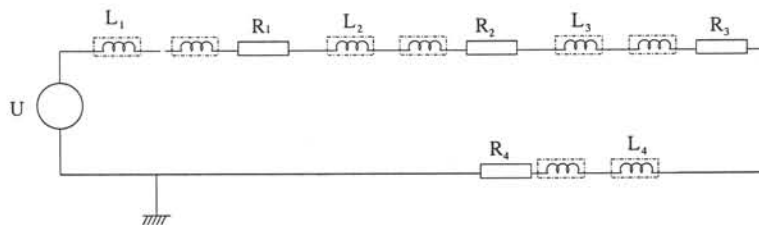


FIG. 3.13 – Circuit avec extraction d'inductance.

III.5 Conclusion

Les résultats obtenus confirment l'étude précédente; lorsque le maillage respecte la position de l'inducteur couplé circuit, les résultats sont meilleurs.

Le cas test de la boucle rectangulaire est traité de trois façons différentes :

1. boucle rectangulaire considérée comme un inducteur unique;
2. boucle rectangulaire composée de 4 inducteurs;
3. boucle composée de 4 inducteurs avec en outre extraction de l'inductance propre partielle.

Dans les trois cas, le maillage respecte la position des fils. Ce cas de validation permet de montrer que le traitement des jonctions fil-fil peut être effectué directement avec la formulation mise en œuvre. On pourra également dans des cas simples comme pour la

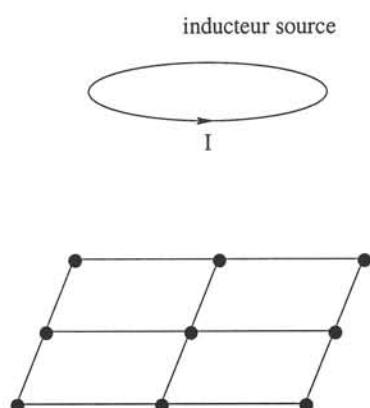


FIG. 3.14 – Cas test treillis.

figure (3.14) extraire les termes d'inductance propre voire les termes d'inductance propre et de mutuelle dans le cas où l'on est pas en présence de région ferromagnétique, ce qui revient à faire une résolution complètement analytique que l'on peut obtenir également par d'autres méthodes ^[46] (la méthode PEEC par exemple). L'intérêt de notre méthode est qu'elle permet de prendre en compte la présence de pièces magnétiques.

Dans le cas de régions filaires qui sont à la fois conductrices et magnétiques, la formulation reste valide. Cependant, le résultat est meilleur avec la procédure sans extraction d'inductance car il n'y a pas de méthode de calcul analytique d'inductance propre pour des matériaux ferromagnétiques. Dans ce cas, le calcul de l'inductance propre (si besoin est) pourra être fait par la méthode des éléments finis.

III.6 Cas des régions filaires ferromagnétiques

Pour traiter le cas des régions filaires ferromagnétiques, nous prenons comme hypothèse que les régions sont linéaires (avec conductivité et perméabilité constantes). Les régions filaires ferromagnétiques sont alors modélisées en potentiel réduit. En effet, X. Brunotte a

démontré [22] en magnétostatique que les potentiels scalaires total et réduit sont constants suivant l'épaisseur de la région mince lorsque sa perméabilité est élevée et son épaisseur faible.

Dans le cadre de la magnétodynamique en potentiel scalaire magnétique réduit, lorsque ces régions sont également conductrices ($\sigma \neq 0$), nous effectuons un couplage de la formulation en potentiel réduit avec les équations de circuit.

Le potentiel réduit conduit à un terme source $\int_{\Omega} \text{grad} \alpha_i \cdot \mu \mathbf{H}_j d\Omega$. Dans le cas des régions volumiques, ce terme est ramené aux frontières, sous la forme ci-dessous :

$$\int_{\Gamma} \alpha_i (\mu - \mu_0) \mathbf{H}_j d\Gamma.$$

Dans notre cas une frontière air-fil qui est filaire, on se ramène à l'expression volumique et on intègre alors :

$$\int_{reg-lin} \text{grad}_s \alpha_i \cdot (\mu - \mu_0) \mathbf{H}_j (section) dl$$

Il n'est pas nécessaire de mailler très finement le voisinage du fil. Par contre, un maillage symétrique avec le conducteur passant par une ligne du maillage donne de meilleurs résultats.

Cas de validation

Le cas de validation utilisé ici est celui présenté au Chapitre précédent, mais cette fois, la boucle induite est une boucle en FeSi dont la section fait 1cm de diamètre ($\sigma = 2.2 \cdot 10^6 (\Omega m)^{-1}$ et $\mu_r = 20000$). Pour la résolution en 3D, le maillage est centré par rapport à la spire induite et celle-ci est représentée par une région linéique en potentiel réduit couplée circuit. Le résultat de la résolution est comparé au résultat obtenu en 2D axisymétrique avec FLUX2D. La figure (3.15) montre la variation du courant dans la boucle induite par rapport à la fréquence. Dans le cas de la formulation 3D avec couplage circuit, la résistance de la boucle est calculée par $R = \rho \frac{l}{2\pi\delta r}$ avec δ l'épaisseur de peau du FeSi. Les résultats obtenus en 2D et en 3D sont identiques. On remarque qu'en statique, l'effet de perturbation introduite par la région filaire est très faible tant en 2D qu'en 3D Fig.(refbcc1).

III.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous nous sommes focalisés sur la modélisation des dispositifs filaires en 3D. En l'absence de toute région ferromagnétique, on se ramène à la méthode PEEC. Par contre, s'il y a des parties ferromagnétiques alors la méthode PEEC seule ne fonctionne pas car il faut prendre en compte la réaction de ces parties ce qui est fait par éléments finis.

Dans le cadre de la méthode des éléments finis, nous avons mis en évidence les difficultés rencontrées lorsque les fils sont très fins. Pour résoudre ce problème d'imprécision, nous avons 3 méthodes possibles :

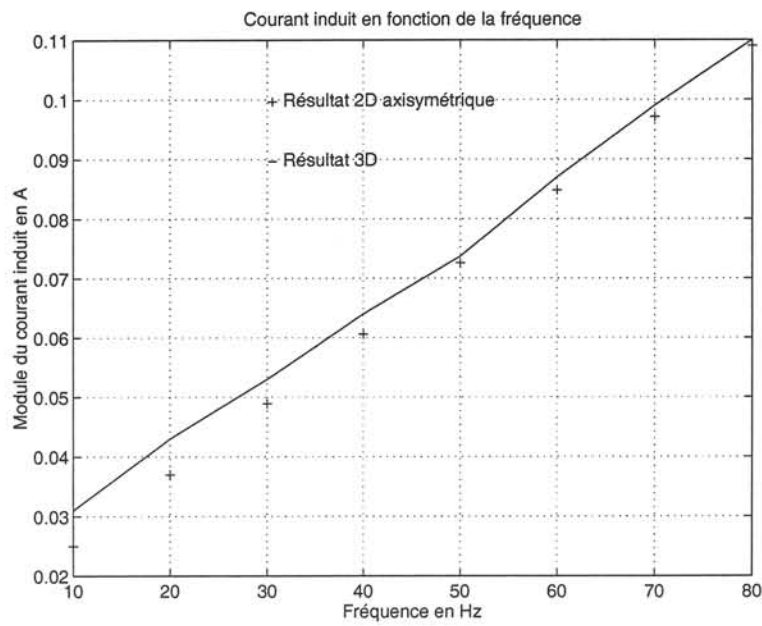


FIG. 3.15 – Courant induit dans la boucle en fonction de la fréquence pour $|I|=500\text{A}$.

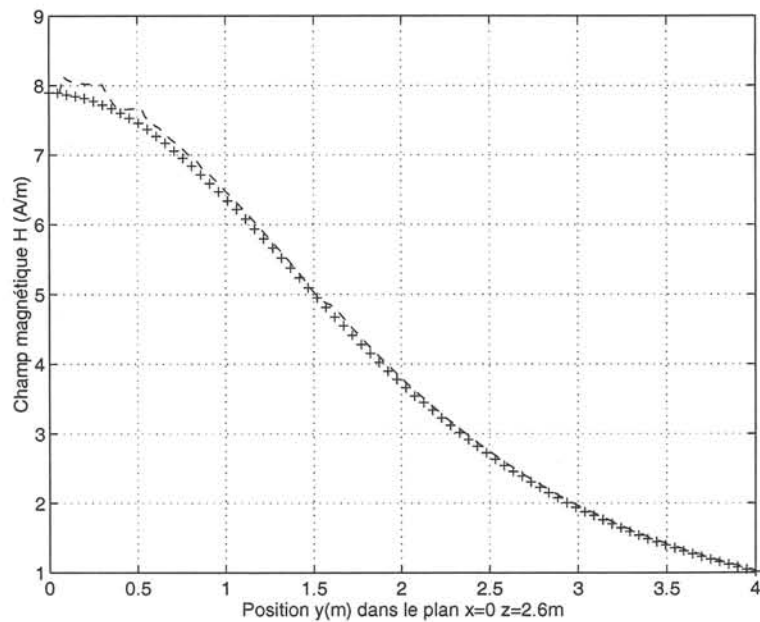


FIG. 3.16 – Champ magnétique H sur une ligne calculée en 2D et en 3D à 50Hz.

- Utiliser la méthode des éléments finis décrite précédemment avec des inducteurs filaires non maillés et qui respectent cependant le maillage éléments finis (Fig.3.5).
- Extraire les termes d'inductance propre de la formulation éléments finis et calculer celle ci par une méthode plus adaptée (analytique ou PEEC) et ensuite l'inclure dans l'équation de circuit. Comme pour le cas précédent, le maillage doit respecter la position des fils dans l'espace.
- Extraire les termes d'inductance propre et mutuelle, les calculer séparément et ensuite les inclure dans l'équation de circuit. Cette méthode ne nécessite pas que le maillage respecte la position du fil.

La première méthode est la plus facile à mettre en œuvre.

La deuxième nécessite le calcul séparé d'une inductance propre par conducteur; cette formulation permet de résoudre la plupart des problèmes d'imprécision observés.

La troisième méthode nécessite quant à elle le calcul de toutes les inductances propres et mutuelles. Cette méthode pourra être appliquée dans des configurations pour lesquelles le couplage mutuel est très important. Elle est cependant coûteuse (il faut calculer $\frac{n(n+1)}{2}$ termes d'inductance propre et mutuelle pour n conducteurs).

Chapitre IV

Prise en compte des régions minces

Introduction

Dans le but d'étudier les effets de la présence de régions filaires dans un dispositif constitué de régions minces, nous présentons dans ce chapitre deux méthodes.

Pour la première méthode, le modèle physique est constitué d'une source de champ (un inducteur), d'une région mince (plaque de blindage par exemple) et d'une région filaire qui est couplée à un circuit. Nous présentons dans ce cas la prise en compte des régions minces en interaction avec les régions filaires.

Pour la deuxième méthode, le modèle physique est différent dans la mesure où la région mince et la région filaire sont en contact. La formulation pour résoudre un tel dispositif est présentée, elle est basée sur une approche circuit. Nous introduisons un composant électrique de type «plaque à 2 bornes». Cette formulation est ensuite validée par deux cas tests (plaque mince dont les deux bornes sont reliées par un fil mince; plaque trouée en présence d'un champ magnétique basse fréquence).

IV.1 Première méthode : prise en compte des régions minces

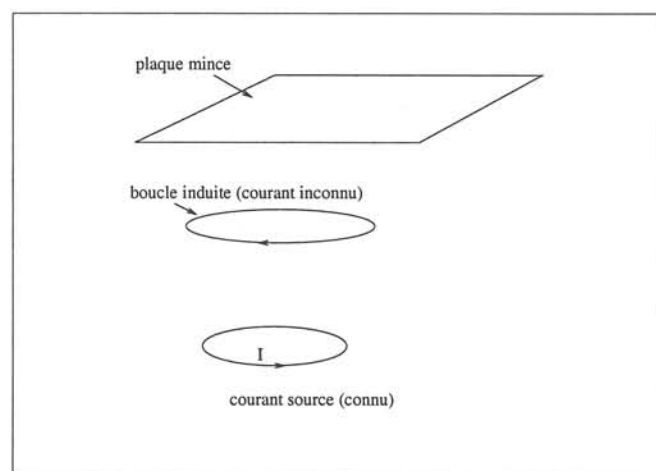


FIG. 4.1 – Dispositif à modéliser.

La figure (Fig.4.1) montre le dispositif que l'on se propose de modéliser. Il comprend

des régions minces et des régions filaires sièges de courants induits provoqués par un inducteur à courant imposé.

Dans cette partie, nous présentons la prise en compte des régions minces dans la formulation proposée; ceci permettra de résoudre des problèmes constitués de fil fins et de plaques minces en interaction (dispositifs de blindage avec plaques minces et boucle de compensation par exemple).

IV.1.1 Etat de l'art

La figure (Fig.4.2) présente le modèle d'une région mince. Pour les régions minces de

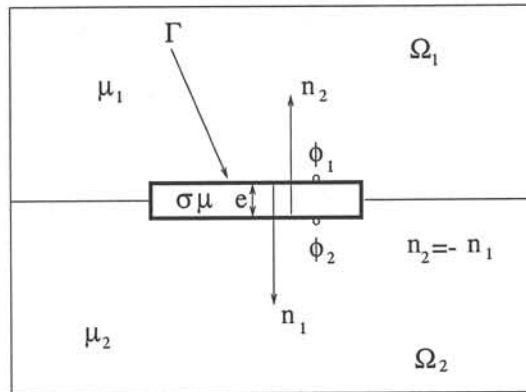


FIG. 4.2 – Notations utilisées pour décrire le modèle de type coque.

type «coque», nous utilisons les formulations développées par Guérin [37] et que nous rappellerons en V.3.. La formulation pour élément coque généralisé (quelle que soit l'épaisseur de peau et avec les notations de la figure 4.2) en potentiel réduit s'écrit «côté 1» [37] :

$$\int_{\Omega_1} \text{grad} \alpha_i \cdot \mu_1 \text{grad} \phi_1 d\Omega + \frac{1}{j\omega} \int_{\Gamma} \alpha \text{grad}_s \alpha_i \cdot \text{grad}_s \phi_1 d\Gamma - \frac{1}{j\omega} \int_{\Gamma} \beta \text{grad}_s \alpha_i \cdot \text{grad}_s \phi_2 d\Gamma$$

$$= \int_{\Gamma} \alpha_i \mu_1 \mathbf{H}_J \cdot \mathbf{n}_1 d\Gamma + \frac{1}{j\omega} \int_{\Gamma} (\alpha - \beta) \text{grad}_s \alpha_i \cdot \mathbf{H}_J d\Gamma$$

avec :

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\sigma \omega \mu}}$$

$$a = \frac{1+j}{\delta}$$

$$\alpha = \frac{a}{\sigma \tanh ae}$$

$$\beta = \frac{a}{\sigma \sinh ae}$$

Les paramètres physiques de la plaque sont :

- δ : épaisseur de peau de la plaque ;
- σ : conductivité de la plaque ;
- μ : perméabilité de la plaque ;
- e : épaisseur de la plaque ;
- ω : pulsation ($\omega = 2\pi f$).

La relation «côté 2» de la coque s'obtient en permutant les indices 1 et 2 dans l'équation ci-dessus ainsi qu'en respectant le changement de signe du terme du gradient surfacique de la fonction de forme sur les 2 côtés de la coque. En potentiel total, il suffit de mettre à zéro le terme \mathbf{H}_J champ source dû aux inducteurs que l'on peut décomposer comme précédemment.

Pour modéliser dans un même problème les régions filaires et les régions minces, deux méthodes peuvent être utilisées. Soit la région mince est incluse dans un domaine modélisé en potentiel scalaire magnétique total tandis que la région filaire est modélisée par la formulation présentée au chapitre précédent (potentiel scalaire magnétique réduit couplé circuit). Soit la région mince et la région filaire sont dans un domaine en potentiel réduit.

IV.1.2 Région mince modélisée en potentiel scalaire magnétique total

Dans ce cas, le couplage s'effectue très bien grâce au calcul préalable des termes $\delta\phi_k$ par inducteur. Il faut prendre en compte la contribution de la région mince au terme du flux total à travers la région filaire dans l'équation de circuit.

Pour le calcul du champ magnétique \mathbf{H} en exploitation, il est utile de stocker les valeurs nodales des \mathbf{h}_{jk} dans tout le domaine réduit et les valeurs de $\delta\phi_k$ sur la frontière Γ .

IV.1.3 Région mince modélisée en potentiel scalaire magnétique réduit

Dans le cas où l'on n'est pas en présence de région ferromagnétique, le saut de potentiel n'est plus nécessaire. Une formulation en potentiel scalaire magnétique réduit avec couplage circuit suffit. Cependant, il faut tenir compte de la présence des régions minces (modélisées par éléments coques à saut de potentiel) pour le calcul du flux dans l'équation de circuit.

Dans notre cas, les régions 1 et 2 sont modélisées en potentiel réduit ; on note alors

$$\Omega_a = \Omega_1 \cup \Omega_2$$

et $\mu_1 = \mu_2 = \mu_a$. En séparant les inducteurs «circuit» des inducteurs «non-circuit» on a :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} \text{grad}\alpha_i \cdot \mu_a \text{grad}\phi_1 d\Omega + \frac{1}{j\omega} \int_{\Gamma} \alpha \text{grad}_s \alpha_i \cdot \text{grad}_s \phi_1 d\Gamma - \frac{1}{j\omega} \int_{\Gamma} \beta \text{grad}_s \alpha_i \cdot \text{grad}_s \phi_2 d\Gamma \\ - \sum_{l=1}^{n_{ic}} I_l \left(\int_{\Gamma} \alpha_i \mu_a \mathbf{h}_{jl} \cdot \mathbf{n}_1 d\Gamma + \frac{1}{j\omega} \int_{\Gamma} (\alpha - \beta) \text{grad}_s \alpha_i \cdot \mathbf{h}_{j1} d\Gamma \right) = \\ \int_{\Gamma} \alpha_i \mu_a \mathbf{H}_{Jnc} \cdot \mathbf{n}_1 d\Gamma + \frac{1}{j\omega} \int_{\Gamma} (\alpha - \beta) \text{grad}_s \alpha_i \mathbf{H}_{Jnc} d\Gamma. \end{aligned}$$

Le terme correspondant au gradient surfacique de la fonction de forme du «côté 2» est du signe opposé de celui «côté 1» à cause de l'orientation des normales.

côté 2

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_2} \text{grad}\alpha_i \cdot \mu_a \text{grad}\phi_2 d\Omega + \frac{1}{j\omega} \int_{\Gamma} \alpha \text{grad}_s \alpha_i \cdot \text{grad}_s \phi_2 d\Gamma - \frac{1}{j\omega} \int_{\Gamma} \beta \text{grad}_s \alpha_i \cdot \text{grad}_s \phi_1 d\Gamma \\ - \sum_{l=1}^{n_{ic}} I_l \left(\int_{\Gamma} \alpha_i \mu_a \mathbf{h}_{jl} \cdot \mathbf{n}_2 d\Gamma - \frac{1}{j\omega} \int_{\Gamma} (\alpha - \beta) \text{grad}_s \alpha_i \cdot \mathbf{h}_{jl} d\Gamma \right) = \\ \int_{\Gamma} \alpha_i \mu_a \mathbf{H}_{Jnc} \cdot \mathbf{n}_2 d\Gamma - \frac{1}{j\omega} \int_{\Gamma} (\alpha - \beta) \text{grad}_s \alpha_i \cdot \mathbf{H}_{Jnc} d\Gamma. \end{aligned}$$

Le flux correspondant à l'inducteur circuit k dans une région Ω comprenant une plaque (Ω_p) est :

$$\begin{aligned} \Phi_k &= \int_{\Omega_a + \Omega_p} \mathbf{h}_{jk} \cdot \mathbf{B} d\Omega \\ &= \int_{\Omega_a} \mathbf{h}_{jk} \cdot \mu_a \left(\sum_{l=1}^{n_{ic}} \mathbf{h}_{jl} I_l - \text{grad}\phi \right) d\Omega + \int_{\Omega_p} \mathbf{h}_{jk} \cdot \mu_p \mathbf{H}_s d\Omega. \end{aligned}$$

L'intégrale dans Ω_p est la contribution de la plaque au terme du flux. \mathbf{H}_s représente le champ tangentiel (surfacique) de la plaque calculé par :

$$\mathbf{H}_s = \frac{1}{\sinh ae} \left(\mathbf{H}_{1s} \sinh\left(\frac{ae}{2} + az\right) + \mathbf{H}_{2s} \sinh\left(\frac{ae}{2} - az\right) \right). \quad (\text{IV.1})$$

1. \mathbf{H}_{1s} champ surfacique de la plaque «côté 1»,

$$\mathbf{H}_{1s} = \mathbf{H}_{js} - \text{grad}\phi_1 \quad (\text{IV.2a})$$

$$= \sum_{l=1}^{n_{ic}} \mathbf{h}_{jl} I_l + \mathbf{H}_{jnc} - \text{grad}\phi_1 \quad (\text{IV.2b})$$

2. \mathbf{H}_{2s} champ surfacique de la plaque «côté 2»,

$$\mathbf{H}_{2s} = \mathbf{H}_{js} - \text{grad}\phi_2 \quad (\text{IV.3a})$$

$$= \sum_{l=1}^{n_{ic}} \mathbf{h}_{jl} I_l + \mathbf{H}_{jnc} - \text{grad}\phi_2 \quad (\text{IV.3b})$$

En remplaçant \mathbf{H}_{1s} et \mathbf{H}_{2s} par leurs expressions respectives dans \mathbf{H}_s , on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_s = \frac{1}{\sinh ae} \left(-\text{grad}\phi_1 \sinh\left(\frac{ae}{2} + az\right) - \text{grad}\phi_2 \sinh\left(\frac{ae}{2} - az\right) + \right. \\ \left. \sum_{l=1}^{n_{ic}} \mathbf{h}_{jl} I_l e^{az} \sinh\left(\frac{ae}{2}\right) + \mathbf{H}_{jnc} e^{az} \sinh\left(\frac{ae}{2}\right) \right). \end{aligned}$$

L'intégrale représentant la contribution de la plaque au flux (deuxième terme dans l'ex-

pression du flux présenté ci-dessus) s'écrit :

$$\begin{aligned}
 \bullet \int_{\Omega_p} \mathbf{h}_{jk} \cdot \mu_p \mathbf{H}_s d\Omega &= - \int_{\Omega_p} \left(\frac{1}{\sinh ae} \right) \text{grad} \phi_1 \sinh \left(\frac{ae}{2} + az \right) \cdot \mu_p \mathbf{h}_{jk} d\Omega \\
 &- \int_{\Omega_p} \left(\frac{1}{\sinh ae} \right) \text{grad} \phi_2 \sinh \left(\frac{ae}{2} - az \right) \mu_p \mathbf{h}_{jk} d\Omega \\
 &+ \sum_{l=1}^{n_{ic}} I_l \int_{\Omega_p} \left(\frac{1}{2 \cosh \frac{ae}{2}} \right) \mathbf{h}_{jl} \mu_p \mathbf{h}_{jk} e^{az} d\Omega \\
 &+ \int_{\Omega_p} \left(\frac{1}{2 \cosh \frac{ae}{2}} \right) \mathbf{H}_{jnc} \mu_p \mathbf{h}_{jk} e^{az} d\Omega.
 \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega_p} \mathbf{h}_{jl} \cdot \mu_p \mathbf{h}_{jk} e^{az} d\Omega &= \int_{\Gamma} \mathbf{h}_{jl} \cdot \mu_p \mathbf{h}_{jk} \left(\int_{-\frac{\epsilon}{2}}^{\frac{\epsilon}{2}} e^{az} dz \right) d\Gamma \\
 &= \int_{\Gamma} \frac{1}{a} \sinh \left(\frac{ae}{2} \right) \mathbf{h}_{jl} \mu_p \mathbf{h}_{jk} d\Gamma.
 \end{aligned}$$

Et de la même façon :

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega_p} \mathbf{h}_{jk} \cdot \mu_p \text{grad} \phi_1 \sinh \left(\frac{ae}{2} + az \right) d\Omega &= \int_{\Gamma} \mathbf{h}_{jk} \cdot \mu_p \text{grad} \phi_1 \left(\int_{-\frac{\epsilon}{2}}^{\frac{\epsilon}{2}} \sinh \left(\frac{ae}{2} + az \right) dz \right) d\Gamma \\
 &= - \int_{\Gamma} \mathbf{h}_{jk} \cdot \mu_p \text{grad} \phi_1 \frac{1}{a} (1 - \cosh(ae)) d\Gamma.
 \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega_p} \mathbf{h}_{jk} \cdot \mu_p \text{grad} \phi_2 \sinh \left(\frac{ae}{2} - az \right) d\Omega &= \int_{\Gamma} \mathbf{h}_{jk} \cdot \mu_p \text{grad} \phi_2 \left(\int_{-\frac{\epsilon}{2}}^{\frac{\epsilon}{2}} \sinh \left(\frac{ae}{2} - az \right) dz \right) d\Gamma \\
 &= \int_{\Gamma} \mathbf{h}_{jk} \cdot \mu_p \text{grad} \phi_2 \frac{1}{a} (1 - \cosh(ae)) d\Gamma
 \end{aligned}$$

Par ailleurs :

$$a = \frac{1+j}{\delta_p} \Rightarrow a^2 = jw\mu_p\sigma$$

donc :

$$\frac{\mu_p}{a} = \frac{a}{jw\sigma}$$

Et par conséquent :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\sinh ae} \frac{\mu_p}{a} (1 - \cosh(ae)) &= \frac{\mu_p}{a} \left(\frac{1}{\sinh ae} - \frac{1}{\tanh ae} \right) \\
 &= \frac{1}{jw} \left(\frac{a}{\sigma \sinh ae} - \frac{a}{\sigma \tanh ae} \right) \\
 &= \frac{1}{jw} (\beta - \alpha).
 \end{aligned}$$

On en déduit donc l'expression du flux :

$$\begin{aligned} \Phi_k &= \sum_{l=1}^{n_{ic}} I_l \left(\int_{\Omega_a} \mathbf{h}_{jk} \cdot \mu_a \mathbf{h}_{jl} d\Omega + \int_{\Gamma} \frac{1}{2a} \tanh\left(\frac{ae}{2}\right) \mathbf{h}_{jk} \cdot \mu_p \mathbf{h}_{jl} d\Gamma \right) - \int_{\Omega_a} \mathbf{h}_{jk} \cdot \mu_a \text{grad}\phi d\Omega \\ &+ \frac{1}{jw} \int_{\Gamma} (\beta - \alpha) \mathbf{h}_{jk} \cdot \text{grad}\phi_1 d\Gamma - \frac{1}{jw} \int_{\Gamma} (\beta - \alpha) \mathbf{h}_{jk} \cdot \text{grad}\phi_2 d\Gamma + \int_{\Gamma} \frac{1}{2a} \tanh\left(\frac{ae}{2}\right) \mathbf{h}_{jk} \cdot \mu_p \mathbf{H}_{jnc} d\Gamma \end{aligned}$$

Le deuxième terme de l'expression du flux peut être ramené en surface des deux côtés de la plaque.

En effet, nous avons démontré précédemment que pour μ_a constante scalaire, l'intégrale volumique :

$$\int_{\Omega_a} \mathbf{h}_{jk} \cdot \mu_a \text{grad}\phi d\Omega$$

se ramène en surface.

En se ramenant des deux côtés de la coque, on a :

$$\int_{\Omega_a} \mathbf{h}_{jk} \cdot \mu_a \text{grad}\phi d\Omega = \int_{\Gamma_1} \alpha_i \mu_a \mathbf{h}_{jk} \cdot \mathbf{n}_1 d\Gamma + \int_{\Gamma_2} \alpha_i \mu_a \mathbf{h}_{jk} \cdot \mathbf{n}_2 d\Gamma$$

L'équation de circuit s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \frac{U_k}{jw} &= \frac{R_k}{jw} I_k + \sum_{l=1}^{n_{ic}} I_l \left(\int_{\Omega_a} \mathbf{h}_{jk} \cdot \mu_a \mathbf{h}_{jl} d\Omega + \int_{\Gamma} \frac{1}{2a} \tanh\left(\frac{ae}{2}\right) \mathbf{h}_{jk} \cdot \mu_p \mathbf{h}_{jl} d\Gamma \right) \\ &- \int_{\Gamma} \alpha_i \mu_a \mathbf{h}_{jk} \cdot \mathbf{n}_1 d\Gamma - \frac{1}{jw} \int_{\Gamma} (\alpha - \beta) \mathbf{h}_{jk} \cdot \text{grad}\phi_1 d\Gamma - \int_{\Gamma} \alpha_i \mu_a \mathbf{h}_{jk} \cdot \mathbf{n}_2 d\Gamma \\ &+ \frac{1}{jw} \int_{\Gamma} (\alpha - \beta) \mathbf{h}_{jk} \cdot \text{grad}\phi_2 d\Gamma + \int_{\Gamma} \frac{1}{2a} \tanh\left(\frac{ae}{2}\right) \mathbf{h}_{jk} \cdot \mu_p \mathbf{H}_{jnc} d\Gamma \end{aligned}$$

Les équations «côté 1», «côté 2» et celle de circuit donnent le système d'équation matriciel ci-dessous :

$$\begin{bmatrix} A & B & C \\ B & A & D \\ C^T & D^T & R + E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K \\ L \\ M \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 A_{ij} &= - \int_{\Omega_a} \text{grad} \alpha_i \cdot \mu_a \text{grad} \alpha_j d\Omega - \frac{1}{j\omega} \int_{\Gamma} \alpha \text{grad}_s \alpha_i \cdot \text{grad}_s \alpha_j d\Gamma \quad 1 \leq i, j \leq n; \\
 B_{ij} &= \frac{1}{j\omega} \int_{\Gamma} \beta \text{grad}_s \alpha_i \cdot \text{grad}_s \alpha_j d\Gamma \quad 1 \leq i, j \leq n; \\
 C_{il} &= \int_{\Gamma} \alpha_i \mu_a \mathbf{h}_{jl} \cdot \mathbf{n}_1 d\Gamma + \frac{1}{j\omega} \int_{\Gamma} (\alpha - \beta) \mathbf{h}_{jk} \cdot \text{grad}_s \alpha_i d\Gamma \quad 1 \leq i \leq n \quad 1 \leq l \leq n_{ic}; \\
 D_{il} &= C_{il}; \\
 E_{kl} &= - \int_{\Omega_a} \mathbf{h}_{jk} \cdot \mu_a \mathbf{h}_{jl} d\Omega - \int_{\Gamma} \frac{1}{2a} \tanh\left(\frac{ae}{2}\right) \mathbf{h}_{jk} \mu_p \mathbf{h}_{jl} d\Gamma \quad 1 \leq k, l \leq n_{ic}; \\
 R_{kk} &= - \frac{R_k}{j\omega} \quad 1 \leq k \leq n_{ic}; \\
 K_i &= - \int_{\Gamma} \alpha_i \mu_a \mathbf{H}_{jnc} \cdot \mathbf{n}_1 d\Gamma - \frac{1}{j\omega} \int_{\Gamma} (\alpha - \beta) \mathbf{H}_{jnc} \cdot \text{grad}_s \alpha_i d\Gamma \quad 1 \leq i \leq n; \\
 L_i &= K_i; \\
 M_k &= \int_{\Gamma} \frac{1}{2a} \tanh\left(\frac{ae}{2}\right) \mathbf{h}_{jk} \mu_p \mathbf{H}_{jnc} d\Gamma \quad 1 \leq k \leq n_{ic};
 \end{aligned}$$

IV.1.4 Remarques

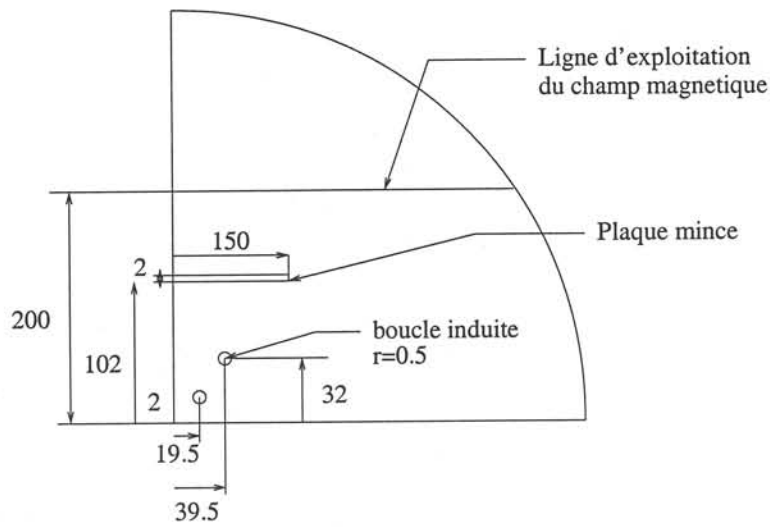
La matrice du système global reste symétrique. La principale difficulté rencontrée ici est de prendre en compte l'interaction de la région mince avec la région filaire. Cette interaction apparait dans l'équation de circuit par un terme de contribution au flux.

IV.1.5 Validation sur un cas test

La figure (Fig.4.3) présente le cas test de validation traité. Il s'agit d'un dispositif constitué d'une spire circulaire parcourue par un courant de 100A, d'une autre spire induite placée au dessus ainsi que d'une plaque mince Fig.4.3. Le but est de déterminer le courant dans la spire induite ainsi que le champ magnétique sur un plan de coupe. Ce type de dispositif est utilisé dans le cadre du blindage contre les champs électromagnétiques en basse fréquence.

La boucle induite est un conducteur filaire dont la section est de 1mm de diamètre. Deux simulations sont effectués. Premièrement, la boucle induite et la plaque de blindage sont en aluminium et deuxièmement, la boucle induite est en aluminium ($\rho = 3.03 \cdot 10^{-8}$) et la plaque en Fer-silicium ($\sigma = 2.2 \cdot 10^6 \mu_r = 20000$).

Les résultats obtenus en 2D axi sont en accord à ceux obtenus en 3D. La courbe en 3D est plus perturbée que celle en 2D, ceci est liée à la méthode du potentiel réduit car le champ magnétique dans le vide est obtenu par la différence du champ source (Biot et Savart) avec le gradient du potentiel scalaire magnétique réduit. Nous avons utilisé ici des éléments d'ordre 1. L'utilisation d'éléments finis d'ordre supérieur pourrait améliorer le résultat. On observe une erreur de l'ordre de 7% sur le courant qui pourrait provenir



Les dimensions sont en mm.

FIG. 4.3 – Géométrie en 2D axisymétrique.

	Calcul en 2D axi	Calcul en 3D
$I_{boucle}(mA)$	56	52.5
Pertes plaque (W)	$1.2 \cdot 10^{-5}$	$1.1 \cdot 10^{-5}$
$H_{maxi}(A/m)$	2.5	$1.1 \cdot 10^{-5}$

TAB. IV.1 – Comparaison des résultats en 2D et en 3D pour une plaque en FeSi.

	Calcul en 2D axi	Calcul en 3D
$I_{boucle}(mA)$	54	50
Pertes (J)	$3 \cdot 10^{-4}$	$3.1 \cdot 10^{-4}$
$H_{maxi}(A/m)$	4.2	4.5

TAB. IV.2 – Comparaison des résultats en 2D et en 3D pour une plaque en Alu.

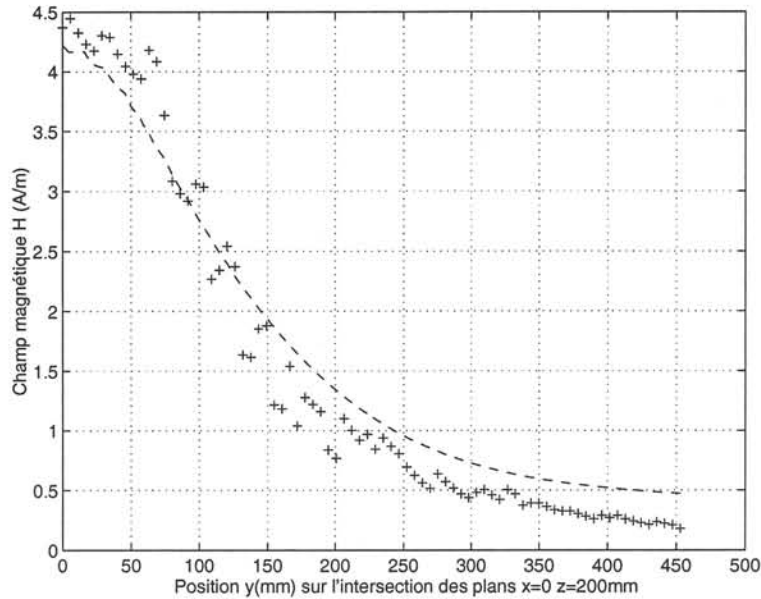


FIG. 4.4 – Champ magnétique calculé en 2D et en 3D pour une plaque en Aluminium.

du terme résistif du couplage circuit. Le champ magnétique calculé sur une ligne d'exploitation pour les deux configurations (plaque en aluminium et plaque en fer-silicium) montre que la boucle filaire associée à une plaque en FeSi réduit beaucoup plus le champ magnétique maximal sur le plan d'observation (on a un rapport d'environ 2). Ceci est conforme aux études précédentes [73-75] et aux travaux qui ont conclu que les matériaux ferromagnétiques étaient mieux adaptés au blindage contre les champs magnétiques en basse fréquence.

IV.2 Deuxième méthode : formulation du problème fil-plaque dans un circuit

Nous retrouvons ici la même problématique que pour le cas du fil seul. Il s'agit :

- d'éviter un maillage volumique de la plaque car son épaisseur est faible devant les autres dimensions du dispositif étudié ;
- de prendre en compte l'interaction fil-plaque et déterminer le courant induit dans le dispositif.

Pour la modélisation de la plaque seule, plusieurs travaux ont été réalisés, autant pour les plaques conductrices que magnétiques [37]. Dans la partie précédente concernant la modélisation des régions filaires, nous nous sommes orientés vers une solution associant la méthode des éléments finis et la théorie des circuits. Nous continuerons dans la même voie pour modéliser des systèmes fils-plaques où les fils et les plaques sont en contact.

Dans cette partie, nous présentons la formulation dans sa forme discrète.

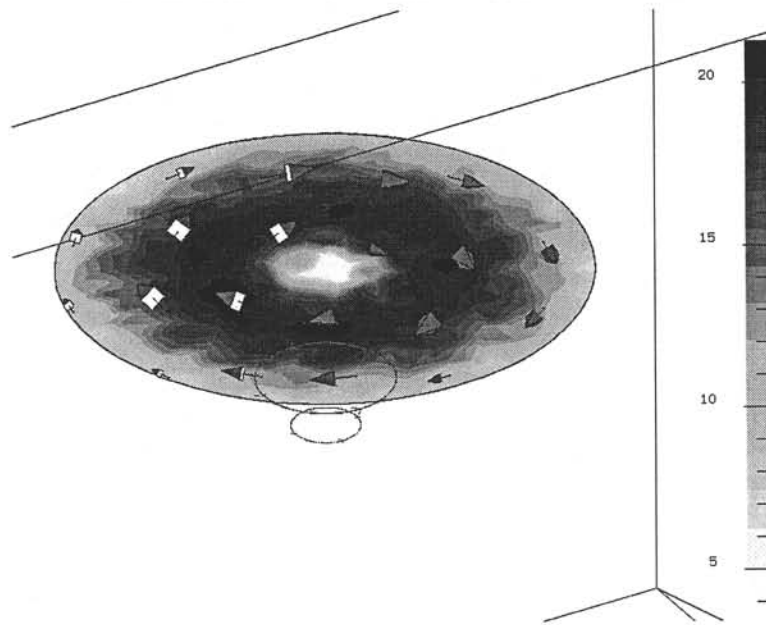


FIG. 4.5 – Isovaleurs du courant sur la plaque.

IV.2.1 La plaque mince vue comme un composant de circuit électrique

Dans ce modèle, la plaque est considérée comme un composant (inducteur massif particulier) qui est le siège de courants induits lorsqu'elle est soumise à un champ électromagnétique.

Ce composant est représenté par une résistance et une inductance en série dans un modèle

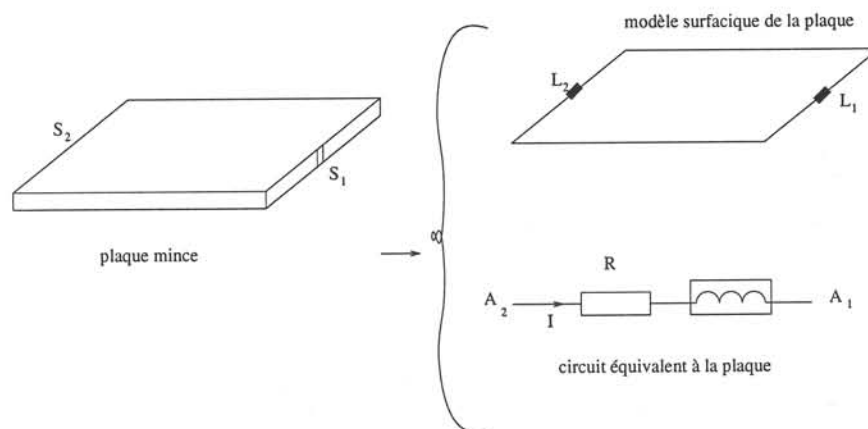


FIG. 4.6 – Modèle de la plaque à 2 bornes.

de circuit équivalent à la plaque (Fig.4.6). La plaque est le siège de courant de conduction ; elle peut éventuellement présenter un effet de peau pour certains matériaux et certaines fréquences de courant électrique. Dans la suite de ce document, on appelle ce composant

«plaque 2 bornes».

IV.2.2 Equation de circuit pour le composant plaque 2 bornes

Pour une plaque simple à 2 bornes (1 entrée et 1 sortie), l'équation de circuit devrait être une relation liant le courant total à la tension aux bornes de la plaque.

Cette relation doit être exprimée en fonction du potentiel scalaire magnétique. Il a

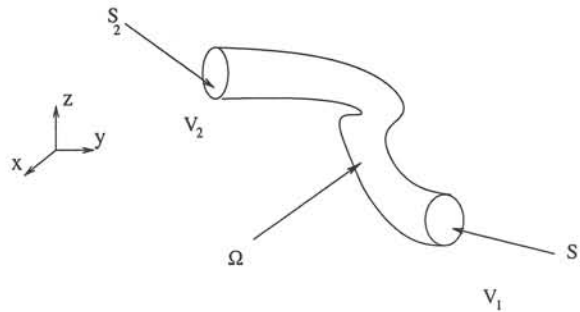


FIG. 4.7 – Conducteur massif.

été démontré dans [40] que pour les conducteurs massifs (comme présenté sur la Fig.4.7), soumis à un champ électromagnétique et dans lesquels il y a des courants induits, nous avons la relation donnant la différence de potentiel aux bornes du conducteur :

$$U = V_2 - V_1 = - \int_{\Omega} \mathbf{j}_0 \cdot \text{grad}v d\Omega \quad (\text{IV.4})$$

où v est le potentiel scalaire électrique et \mathbf{j}_0 est la densité de courant électrocinétique dans la plaque pour un courant total de 1A et Ω le volume du conducteur.

Nous transposons cette relation au cas d'une plaque mince (voir Fig.4.8) ce qui permet par la suite d'écrire la relation courant tension.

IV.2.3 Calcul électrocinétique

Pour obtenir la relation courant tension pour la plaque mince, il est nécessaire de déterminer tout d'abord la répartition du courant électrocinétique \mathbf{J}_0 tel que :

$$\mathbf{J}_0 = -\sigma \text{grad}v \quad (\text{IV.5})$$

où le potentiel scalaire électrique v est solution de l'équation

$$\text{div}(\sigma \text{grad}v) = 0 \quad (\text{IV.6})$$

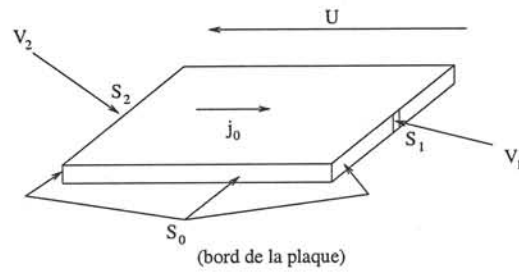


FIG. 4.8 – Plaque mince.

Avec les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial n} &= 0 && \text{Sur } S_0 \\ V_1 &= 1 && \text{Sur } S_1 (l_1) \\ V_2 &= 0 && \text{Sur } S_2 (l_2) \end{aligned}$$

La résolution de l'équation Eq.IV.6 en tenant compte des conditions aux limites ci-dessus donne :

- v ;
- \mathbf{J}_0 la densité de courant total ;
- et \mathbf{j}_0 (densité de courant correspondant à un courant total de 1A obtenu par normalisation de \mathbf{J}_0).

IV.2.4 Relation courant-tension

En utilisant le formalisme magnétodynamique, le champ électrique dans la plaque est donné par :

$$\mathbf{E} = -\text{grad}v - j\omega \mathbf{A} \Rightarrow \text{grad}v = -\mathbf{E} - j\omega \mathbf{A} \quad (\text{IV.7})$$

où \mathbf{E} est le champ électrique, \mathbf{A} le potentiel vecteur magnétique, et v le potentiel scalaire électrique. Et le champ magnétique \mathbf{H}_{pl} dans la région plaque (Ω_p) est la somme des champs dus aux courants de conduction et courants induits :

$$\mathbf{H}_{pl} = \mathbf{h}_j^{pl} I + \mathbf{H}_s \quad (\text{IV.8})$$

où :

$$\text{roth}_j^{pl} = \mathbf{j}_0 \quad (\text{IV.9})$$

\mathbf{h}_j^{pl} est le champ unitaire créé un courant continu de 1A dans la plaque calculé en utilisant la loi de Biot et Savart dans toute la région potentiel scalaire réduit pour chaque région surfacique plaque, \mathbf{j}_0 la densité de courant unitaire de conduction calculée précédemment. \mathbf{H}_s est le champ magnétique dans la plaque dû aux courants de Foucault. L'équation de Maxwell-Ampère permet d'écrire (pour la plaque) :

$$\text{rot}\mathbf{H}_{pl} = \mathbf{J} \Rightarrow \rho(\mathbf{j}_0 I + \text{rot}\mathbf{H}_s) = \mathbf{E} \quad (\text{IV.10})$$

La relation (IV.7) s'écrit alors :

$$\text{grad}v = -\rho(\mathbf{j}_0 I + \text{rot}\mathbf{H}_s) - j\omega \mathbf{A} \quad (\text{IV.11})$$

En remplaçant IV.11 dans la relation (IV.4), la différence de potentiel $U = V_2 - V_1$ s'exprime alors par :

$$\begin{aligned} U &= \int_{\Omega_p} \rho \mathbf{j}_0^2 I d\Omega + \int_{\Omega_p} \rho \mathbf{j}_0 \cdot \text{rot}\mathbf{H}_s d\Omega \\ &+ j\omega \int_{\Omega_p} \mathbf{j}_0 \cdot \mathbf{A} d\Omega \end{aligned} \quad (\text{IV.12})$$

grâce à la relation ci-dessous :

$$\begin{aligned} \text{div}(v \text{rot}\mathbf{H}_s) &= \text{grad}v \cdot \text{rot}\mathbf{H}_s + v \text{div}(\text{rot}\mathbf{H}_s) \\ &= \text{grad}v \cdot \text{rot}\mathbf{H}_s \end{aligned}$$

Le second terme de l'équation (IV.12) s'écrit :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_p} \rho \mathbf{j}_0 \cdot \text{rot}\mathbf{H}_s d\Omega &= - \int_{\Omega_p} \text{grad}v \cdot \text{rot}\mathbf{H}_s d\Omega \\ &= - \int_{\Omega_p} \text{div}(v \text{rot}\mathbf{H}_s) d\Omega \end{aligned}$$

Le théorème d'Ostogradski donne :

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega_p} \text{div}(v \text{rot}\mathbf{H}_s) d\Omega &= \iint_{S_p} v \text{rot}\mathbf{H}_s n ds \\ &= \iint_{S_p} v j_n ds \end{aligned}$$

où j_n est la composante normale du courant par rapport aux sections délimitant les bords de la plaque. Le troisième terme de l'équation (IV.12) est :

$$j\omega \int_{\Omega_p} \mathbf{j}_0 \cdot \mathbf{A} d\Omega = j\omega \int_{\Omega_p} \text{rot}\mathbf{h}_j^{pl} \cdot \mathbf{A} d\Omega \quad (\text{IV.13})$$

où :

$$\text{roth} \mathbf{h}_j^{pl} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{h}_j^{pl} \cdot \text{rot} \mathbf{A} + \text{div}(\mathbf{A} \wedge \mathbf{h}_j^{pl})$$

$\Omega = \Omega_p \cup \Omega_a$ En intégrant sur Ω (constitué de la plaque et de la région potentiel réduit) où Γ désigne le bord du domaine Ω , on a :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_p} \mathbf{j}_0 \cdot \mathbf{A} d\Omega &= \int_{\Omega_p} \mathbf{j}_0 \cdot \mathbf{A} d\Omega + \int_{\Omega_a} \mathbf{j}_0 \cdot \mathbf{A} d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \mathbf{h}_j^{pl} \cdot \mathbf{B} d\Omega + \oint_{\Gamma} (\mathbf{A} \wedge \mathbf{h}_j^{pl}) \cdot \mathbf{n} dS \\ &= \int_{\Omega} \mathbf{h}_j^{pl} \cdot \mathbf{B} d\Omega \end{aligned}$$

Les termes intégrés sur la frontière (Γ) sont nuls dans le cas d'une frontière infinie et d'une frontière à champ tangent. Lorsqu'il y a une autre région voisine modélisée en potentiel scalaire total un saut de potentiel doit être introduit pour corriger le champ magnétique \mathbf{h}_j^{pl} dans le but d'assurer la continuité de la composante tangentielle du champ \mathbf{H} sur l'interface entre ces deux régions.

L'équation de circuit pour la plaque s'écrit alors :

$$\begin{aligned} U &= \int_{\Omega_p} \rho \mathbf{j}_0^2 I d\Omega + j\omega \int_{\Omega} \mathbf{h}_j^{pl} \cdot \mathbf{B} d\Omega \\ &= R_0 I + j\omega \int_{\Omega} \mathbf{h}_j^{pl} \cdot \mathbf{B} d\Omega \end{aligned}$$

R_0 est la résistance de la plaque parcourue par un courant continu et $\Omega = \Omega_p \cup \Omega_a$ désigne le domaine constitué par la plaque et l'air environnant.

Dans l'équation de circuit ci-dessus, la résistance R_0 est corrigée par un terme provenant du calcul du flux. En effet, le flux qui s'exprime $\Phi = \int_{\Omega} \mathbf{h}_j^{pl} \cdot \mathbf{B} d\Omega$ peut se décomposer comme ci-dessous :

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_{\Omega_a + \Omega_p} \mathbf{h}_j^{pl} \cdot \mathbf{B} d\Omega \\ &= \int_{\Omega_a} \mathbf{h}_j^{pl} \cdot \mu_0 (\mathbf{h}_j^{pl} I - \text{grad} \phi) d\Omega + \int_{\Omega_p} \mathbf{h}_j^{pl} \cdot \mu_p \mathbf{H}_s d\Omega \end{aligned}$$

Un calcul analogue aux précédents (effectués pour la prise en compte des régions minces) donne :

$$\begin{aligned} \Phi &= I \left(\int_{\Omega_a} \mathbf{h}_j^{pl} \cdot \mu_0 \mathbf{h}_j^{pl} d\Omega + \int_{\Gamma} \frac{1}{2a} \tanh\left(\frac{ae}{2}\right) \mathbf{h}_j^{pl} \cdot \mu_p \mathbf{h}_j^{pl} d\Gamma \right) - \int_{\Omega_a} \mathbf{h}_j^{pl} \cdot \mu_0 \text{grad} \phi d\Omega \\ &+ \frac{1}{j\omega} \int_{\Gamma} (\beta - \alpha) \mathbf{h}_j^{pl} \cdot \text{grad} \phi_1 d\Gamma - \frac{1}{j\omega} \int_{\Gamma} (\beta - \alpha) \mathbf{h}_j^{pl} \cdot \text{grad} \phi_2 d\Gamma + \int_{\Gamma} \frac{1}{2a} \tanh\left(\frac{ae}{2}\right) \mathbf{h}_j^{pl} \cdot \mu_p \mathbf{H}_{jnc} d\Gamma \end{aligned}$$

L'équation de circuit (relation courant-tension) pour la plaque à deux bornes s'écrit de

façon développée :

$$\begin{aligned}
 U = R_0 I + j\omega I & \left(\int_{\Omega_a} \mathbf{h}_j^{Pl} \cdot \mu_a \mathbf{h}_j^{Pl} d\Omega + \int_{\Gamma} \frac{1}{2a} \tanh\left(\frac{ae}{2}\right) \mathbf{h}_j^{Pl} \cdot \mu_p \mathbf{h}_j^{Pl} d\Gamma \right) \\
 & - \int_{\Gamma} (\alpha - \beta) \mathbf{h}_j^{Pl} \cdot \text{grad}\phi_1 d\Gamma + \int_{\Gamma} (\alpha - \beta) \mathbf{h}_j^{Pl} \cdot \text{grad}\phi_2 d\Gamma \\
 & + j\omega \int_{\Gamma} \frac{1}{2a} \tanh\left(\frac{ae}{2}\right) \mathbf{h}_j^{Pl} \cdot \mu_p \mathbf{H}_{jnc} d\Gamma.
 \end{aligned}$$

Le terme permettant de corriger la résistance électrocinétique est la partie réelle de :

$$j\omega \left(\int_{\Gamma} \frac{1}{2a} \tanh\left(\frac{ae}{2}\right) \mathbf{h}_j^{Pl} \cdot \mu_p \mathbf{h}_j^{Pl} d\Gamma \right).$$

IV.2.5 Modèle fil-plaque dans l'air

Dans le cas d'un circuit électrique constitué de fils et de plaques dans un domaine modélisé en potentiel réduit, le champ dans le domaine potentiel réduit et le courant dans le circuit sont calculés simultanément [14,40,45] par la formulation ci-dessous.

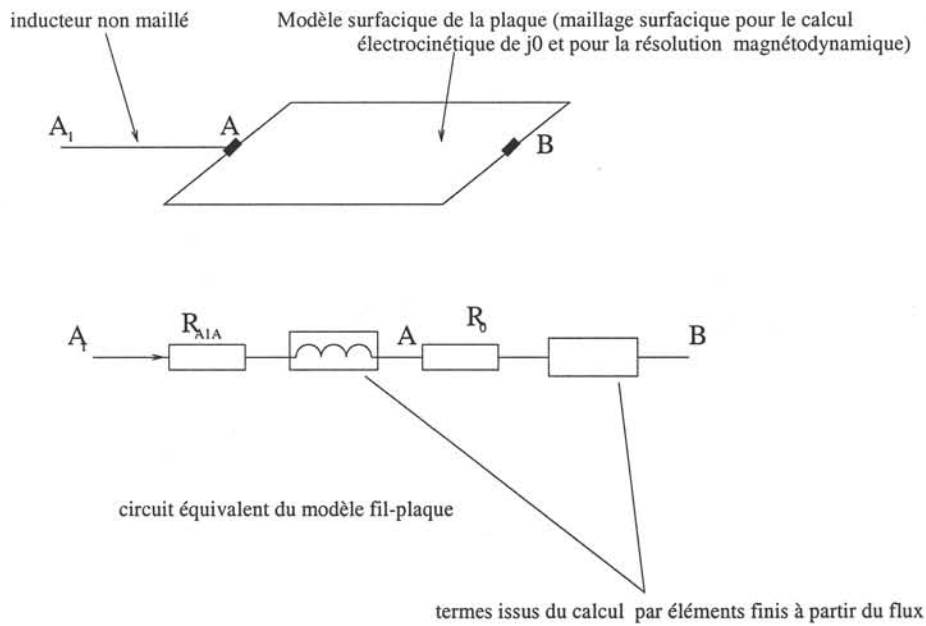


FIG. 4.9 – Modèle de la jonction fil-plaque.

$$\mathbf{H} = \sum_{k=1}^{n_i} \mathbf{h}_{jk} \cdot I_k - \text{grad}\phi_r; \quad (\text{IV.14})$$

$$U = (R_{A_1A} + R_0)I + j\omega \left(\int_{\Omega_{\text{reduit}}} \mathbf{h}_j \cdot \mathbf{B} d\Omega \right). \quad (\text{IV.15})$$

Avec : $\mathbf{h}_j = \mathbf{h}_j^w + \mathbf{h}_j^{pl}$, R_{A_1A} est la résistance du fil et R_0 est la résistance de la plaque; n_i est le nombre d'inducteurs. Le système d'équation ci-dessus a la même forme que le système d'équations pour les dispositifs de type filaires seuls ^[13,14]. Ce système est constitué par $n_{ic} = 2$ inducteurs circuits (le fil et la plaque).

On note :

1. $\mathbf{h}_{j1} = h_j^w$

2. $\mathbf{h}_{j2} = h_j^{pl}$

En appliquant de la même façon la méthode Galerkinge aux équations ci-dessus on obtient un système matriciel semblable à celui obtenu pour les dispositifs filaires.

IV.2.6 Etapes de la résolution

La résolution d'un problème constitué de dispositifs avec une plaque à 2 bornes s'effectue en plusieurs étapes suivant le schéma ci-dessous. Pour cette résolution, le maillage respecte la position de l'inducteur filaire.

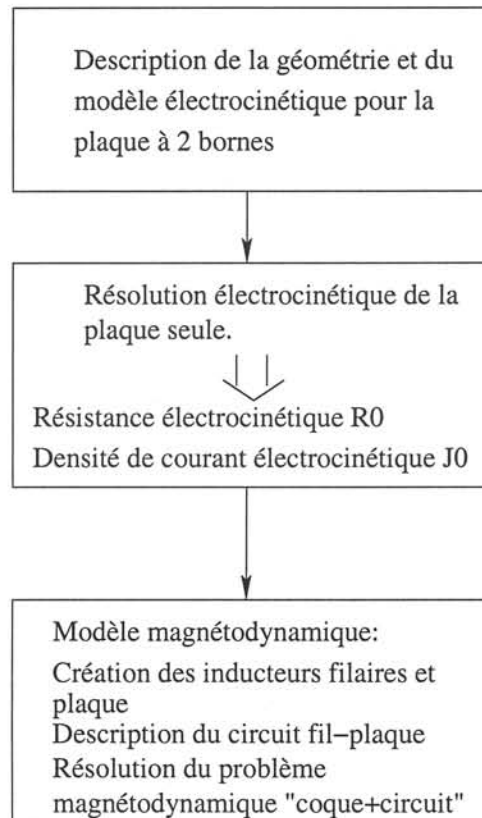


FIG. 4.10 – Les différentes étapes de la résolution pour un problème avec fil et plaque.

IV.2.7 Validation de la méthode

Cette validation a pour but de montrer que la formulation développée et mise en œuvre donne des résultats en accord avec les méthodes volumiques. Pour cela, nous effectuons des comparaisons avec la formulation $T - \Omega$ pour plusieurs configurations de dispositifs.

Les cas tests étudiés sont choisis de façon à privilégier les courants induits, soit dans le fil, soit dans la plaque. Dans un premier temps (pour les cas tests de 1 à 3) on choisit de prendre le fil et la plaque en aluminium à 50Hz de manière à ne pas avoir d'effet de peau.

Cas test	Motivations
Cas test1	Configuration entrainant la creation de courants induits dans le fil
Cas test2	Configuration entrainant la creation de courants induits dans la plaque
Cas test3	Configuration entrainant des courants induits dans le fil et la plaque

TAB. IV.3 – Cas de validation.

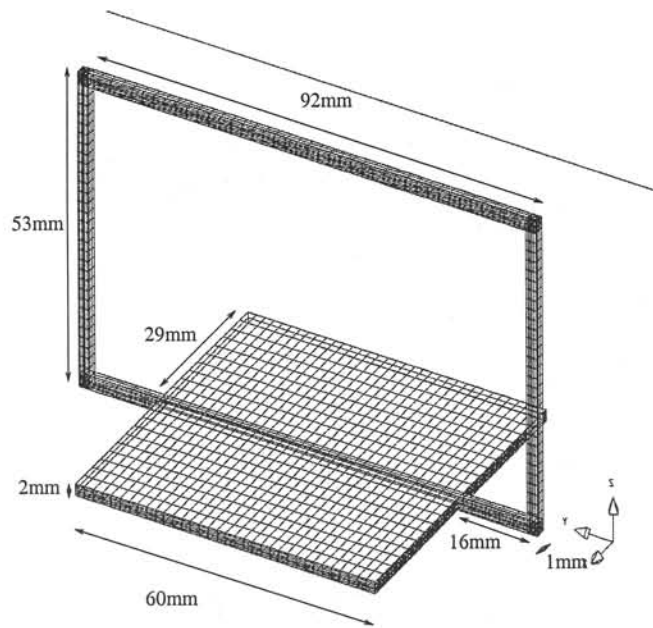


FIG. 4.11 – Maillage de la géométrie pour la résolution en T-Ω.

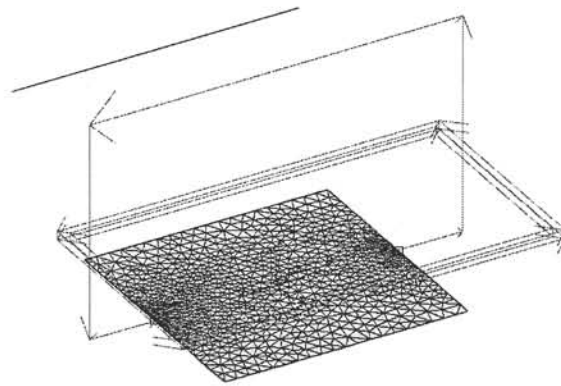


FIG. 4.12 – Cas test1 : Inducteur source parallèle à la plaque.

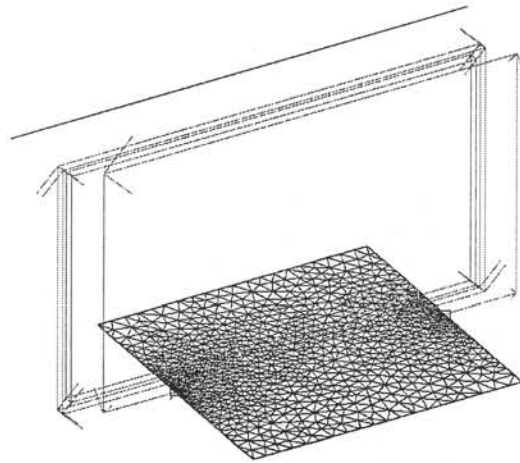


FIG. 4.13 – Cas test2 : Inducteur perpendiculaire à la plaque.

Présentation des cas tests

Les cas tests utilisés pour tester la validité de la méthode sont des dispositifs constitués d'un inducteur parcouru par un courant de 10A situé au voisinage d'une plaque mince dont les deux extrémités sont reliées par un conducteur filaire. Pour le premier cas test, l'inducteur source est parallèle à la plaque et le conducteur filaire est dans le plan perpendiculaire à la plaque Fig.(4.12). Dans ce cas, les courants induits se trouvent essentiellement dans la plaque.

Le deuxième cas test privilégie les courants induits dans le conducteur filaire. L'inducteur source est parallèle au plan du conducteur filaire et le conducteur filaire est perpendiculaire à la plaque Fig.(4.13).

Pour le troisième cas test, l'inducteur source, le fil et la plaque sont dans le même plan. Les courants induits sont répartis dans le fil et la plaque Fig.(4.14).

La plaque est un carré de 60mm de côté et 2mm d'épaisseur, ses bornes sont centrées et font 1mm de largeur. Le fil a une section de $2mm^2$. Cette plaque mince est en aluminium,

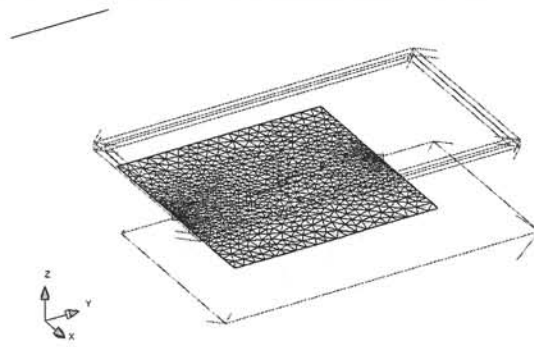


FIG. 4.14 – Cas test3 : le fil de rebouclage est dans le plan de la plaque.

et ses deux bornes sont reliées par un conducteur filaire également en aluminium

$$\rho = 3.3 \cdot 10^{-8} \Omega.m$$

A la fréquence 50Hz, l'épaisseur de peau de l'aluminium $\delta_{Al} = 12.9mm$ est très grande devant l'épaisseur de la plaque. L'expression analytique de la résistance est présentée en annexe.

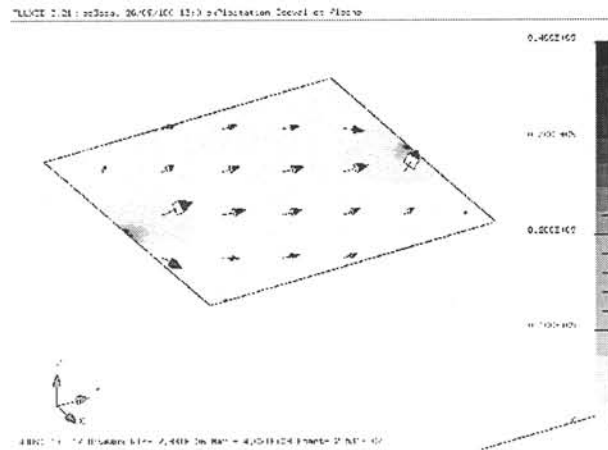


FIG. 4.15 – Précalcul électrocinétique.

La résistance de la plaque calculée par la formule analytique (voir annexe) est :

$$R_{pl} = 5.06 \cdot 10^{-4} \Omega.$$

Celle approximée par éléments finis est obtenue en calculant le courant total dans la plaque puis en appliquant la relation :

$$R_0 = \frac{V_1 - V_0}{I} \tag{IV.16}$$

$V_1 = 1$, $V_0 = 0$ et le courant est I (obtenu par intégration de la densité de courant sur

	Nombre d'éléments volumiques
T- Ω	584081
Fil-Plaque	75150

TAB. IV.4 – Comparaison de maillage.

la ligne passant par l'axe de la plaque). Cette valeur $R_{pl0} = 4.9 \cdot 10^{-4} \Omega$ est légèrement inférieure à celle calculée analytiquement qui est $R_{pl} = 5.06 \cdot 10^{-4} \Omega$. Sur la figure(4.16) on

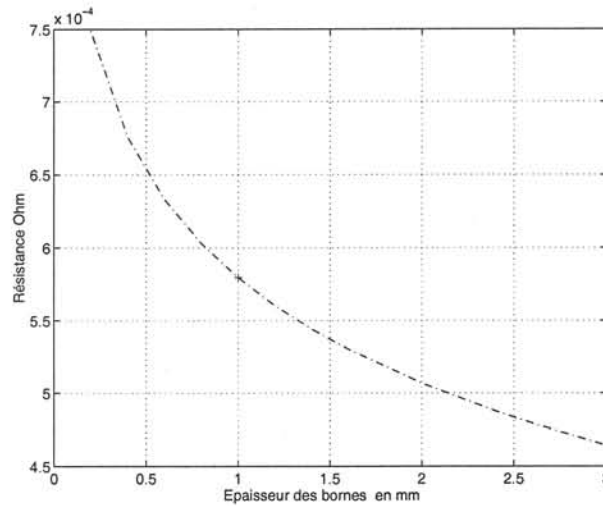


FIG. 4.16 – Résistance de la plaque en fonction de l'épaisseur des bornes.

a la variation de la résistance de la plaque en fonction de la largeur ϵ des bornes pour une plaque d'épaisseur 2mm. Dans notre cas, $\epsilon =$ rayon du fil. La résistance du fil est : $R_{fil} = 3.76 \cdot 10^{-3} \Omega$ Cette résistance reste alors très inférieure à celle du fil. Cependant, il faudrait être conscient que :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} R_{plaque} = +\infty$$

Dans ce cas un calcul très précis de la résistance de la plaque est nécessaire.

IV.2.8 Comparaison des résultats obtenus avec la formulation volumique T- Ω

Pour le modèle en T- Ω , les différentes simulations ont montré que le résultat est très sensible au maillage ; il est donc important de mailler finement la géométrie du dispositif à modéliser. D'autre part, pour éviter le problème de connexité dû à l'utilisation du potentiel scalaire [45,52,60], le «trou» entre le fil et la plaque est rempli par un matériau de faible conductivité ; un rapport de 10^{-4} entre les deux conductivités est utilisé dans notre cas. Les pertes joules dans la formulation T- Ω sont calculées par :

$$P = \frac{1}{2} \int_{\Omega} J * E^* d\Omega$$

et dans la formulation fil-plaque par :

$$P = R_{fil}I_{fil}^2 + S \frac{1}{2\sigma} \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} \|J\|^2 dz$$

	Courant dans le circuit	Pertes Joules dans le dispositif
T-Ω	4.2mA	4.8 10 ⁻³ J
Fil-Plaque	3.628 mA	4.410 ⁻³ J

TAB. IV.5 – Comparaison des résultats cas test1 : plaque parallèle à l’inducteur source.

	Courant dans le circuit	Pertes Joules dans le dispositif
T-Ω	46.58mA	1.17 10 ⁻³ J
Fil-Plaque	44.8 mA	1.5 10 ⁻³ J

TAB. IV.6 – Comparaison des résultats inducteur source perpendiculaire à la plaque.

	Courant dans le circuit	Pertes Joules dans le dispositif
T-Ω	21.72mA	2.6.10 ⁻³ J
Fil-Plaque	20.2 mA	2.8 10 ⁻³ J

TAB. IV.7 – Comparaison des résultats inducteur source dans le plan de la plaque.

Dans l’expression de l’équation du circuit du dispositif fil-plaque, la relation courant tension s’écrit :

$$U = R_{fil}I + jw \int_{\Omega} (\mathbf{h}_j - \text{grad}\delta\phi) \cdot \mathbf{B}d\Omega. \tag{IV.17}$$

La résistance de la plaque est petite devant celle du fil, ce qui réduit les imprécisions sur l’effet résistif (en comparaison à l’effet inductif). Une erreur (même de 40% sur la résistance de la plaque) n’a qu’une influence négligeable sur le résultat final. Cette méthode parait plus adaptée à un fonctionnement en très basse fréquence (jusqu’à quelques centaines de Hertz) qu’à haute fréquence. En effet, en haute fréquence les termes inductifs deviennent prépondérants et le précalcul électrocinétique doit être le plus précis possible.

A titre indicatif les isovaleurs pour le cas test2 sont représentées sur la figure (4.18).

IV.2.9 Conclusion

Pour les configurations de ce problème qui ont été étudiées, les résultats obtenus sont assez proches pour les champs. Concernant le courant induit dans le dispositif, les résultats

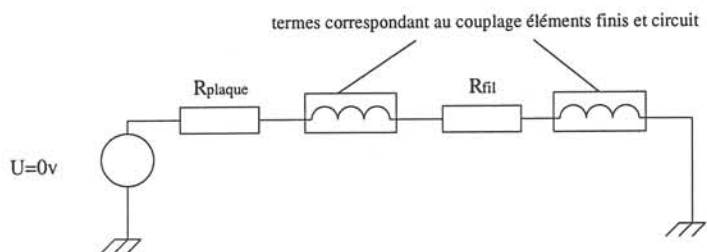


FIG. 4.17 – Circuit électrique du couplage fil-plaque.

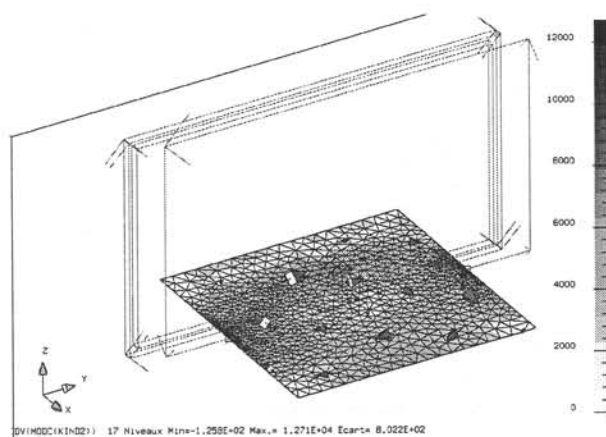


FIG. 4.18 – Isovaleurs de courant et flèches indiquant les courants surfaciques.

obtenus dépendent de la configuration ; ils sont cependant également proches de la solution volumique en $T-\Omega$.

L'influence des phénomènes liés au contact n'a pas été abordée dans le cadre de cette thèse ; il serait intéressant de mener une étude concernant cet aspect et en particulier d'étudier l'importance que pourrait avoir la résistance de contact. Il est également légitime de se poser la question de la généralisation de la méthode à une plaque avec plusieurs entrées et sorties.

IV.2.10 Plaque trouée

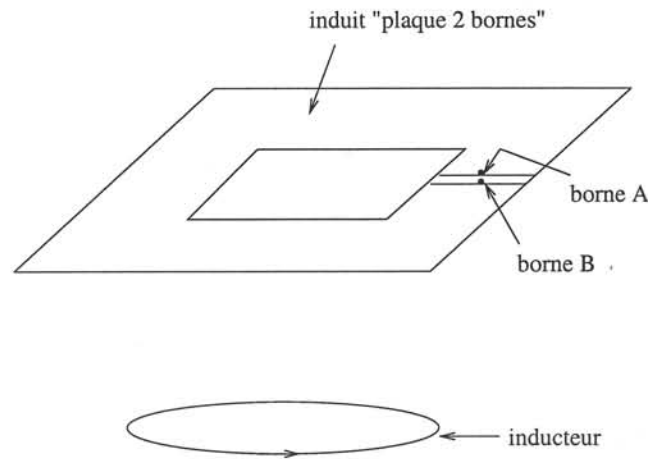


FIG. 4.19 – Schéma de principe.

Ce deuxième cas test consiste à modéliser une plaque mince trouée placée dans un champ électromagnétique (dans laquelle apparaît des courants induits). La plaque est un carré de 60mm de côté, 2mm d'épaisseur et le «trou» est aussi un carré de 20mm de côté. Pour ces simulations, nous avons utilisé une plaque en Fer-silicium et un inducteur source parcouru par un courant de 10A à la fréquence 50Hz .

La difficulté pour modéliser ce dispositif par les formulations classiques vient du fait que la plaque est très mince (problèmes liés au maillage). Les formulations scalaires de type «coque» [37] se heurtent au problème de connexité (présenté dans [3,26]).

Pour nous affranchir de ces différentes difficultés, nous utilisons le composant de type plaque 2 bornes où les deux bornes sont reliées entre elles (le couplage circuit résout le problème de connexité). La figure ci-dessous représente la répartition de courant électrocinétique. La résistance de la plaque est obtenue par calcul éléments finis elle est de

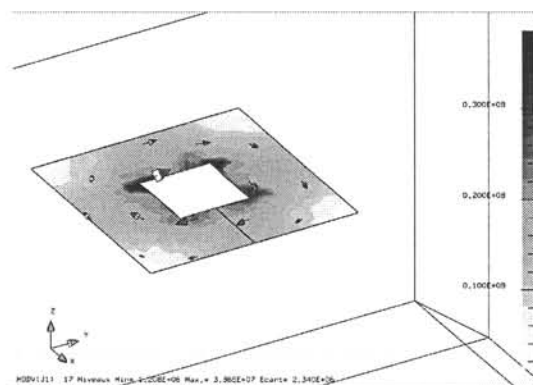


FIG. 4.20 – Courant électrocinétique dans la plaque.

$$R = 7.10^{-4}\Omega.$$

	Courant dans le circuit
T- Ω	25.1mA
Fil-Plaque	29.5 mA

TAB. IV.8 – Comparaison des résultats.

On observe une différence au niveau du courant dans le dispositif de l'ordre de 15% par rapport à la formulation volumique $\mathbf{T} - \Omega$ dans laquelle le «trou» est bouché par un matériau de faible conductivité. Ce résultat montre que l'utilisation d'un composant «plaque 2 bornes» en court-circuit peut poser des problèmes notamment en ce qui concerne les termes de flux dans l'équation de circuit. La conclusion que nous pouvons tirer de cette étude est que : par rapport à la formulation en $\mathbf{T} - \Omega$, les résultats obtenus sont en accord. La méthode que nous proposons présente l'avantage d'être moins coûteuse (maillage surfacique seulement) et que le courant total est obtenu directement car c'est une inconnue du problème. L'inconvénient de notre méthode dans son état actuel est qu'elle nécessite un pré calcul électrocinétique.

IV.3 Conclusion et perspectives

Nous avons mis en œuvre un modèle permettant d'étudier des dispositifs constitués de régions filaires et de régions minces (reliées entre elles ou non) placées dans un champ électromagnétique. Ce modèle est basé sur une approche circuit (couplage éléments finis équations de circuit). Il est valable uniquement en régime permanent et pour les basses fréquences. Lorsque les régions minces et filaires ne sont pas en contact, leur interaction est prise en compte par l'ajout de la contribution de la région mince au flux embrassé par la région filaire. Lorsque ces régions sont dans un même circuit, nous avons mis en œuvre un composant électrique de type «plaque à 2 bornes». Ce composant est maillé (maillage surfacique) et est modélisé par des éléments à saut de potentiel ^[37]. D'autre part, il nécessite un précalcul électrocinétique qui permet de déterminer la répartition de la densité de courant pour un courant continu de 1A traversant la plaque. Le circuit électrique final est constitué des résistances du fil et de la plaque ainsi que de l'inductance propre du fil si celle-ci est extraite. Les autres termes (en particuliers les mutuelles) sont calculés par éléments finis.

Notre apport par rapport à une méthode volumique classique est l'utilisation de maillage surfacique pour la plaque et du modèle filaire couplé circuit. Les résultats obtenus pour les différents cas tests effectués montrent que la méthode est satisfaisante. Cependant, dans le cas de la plaque trouée, l'utilisation du composant «plaque à 2 bornes» en court circuit semble imprécise (en comparaison avec la formulation volumique $\mathbf{T} - \Omega$). Il faudrait mener des études complémentaires concernant le comportement en court-circuit de ce composant.

Cette méthode pourra être utilisée pour modéliser un poste complet de réactances bandes proposées dans les postes Parisiens par EDF R&D en prenant en compte à la fois

les réactances bandes, les circuits magnétiques, les boucles de compensation et les bornes d'amenées de courant. Les résultats attendus sont :

- le champ rayonné au voisinage du poste ;
- les pertes dans les enroulements ;
- les forces de Laplace sur les barres.

Chapitre V

Généralisation des régions minces : Coques composites

V.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous rappelons brièvement la formulation pour éléments «coques» présentée par Guérin [37]. Puis nous proposons une méthode permettant la généralisation pour des dispositifs complexes constitués de plusieurs plaques minces empilées. Cette méthode présente un intérêt dans le cadre de l'optimisation du blindage électromagnétique. Un cas test est ensuite présenté et le résultat est comparé à celui d'une simulation en 2D axisymétrique.

V.2 Blindage contre les champs magnétiques BF

Un champ électromagnétique alternatif qui frappe une paroi conductrice de longueur infinie induira un courant dans cette paroi qui à son tour produira une onde réfléchie de sens opposé. L'amplitude de l'onde réfléchie détermine les pertes par réflexion de la paroi. Les parois de blindage ayant une conductivité finie, une partie de ce courant pénètre dans la paroi et une fraction de celle-ci apparaît de l'autre côté de la paroi où elle produit son propre champ. L'efficacité du blindage est donnée par le logarithme du rapport du champ incident au champ transmis.

Le blindage ordinaire a un effet limité contre les champs magnétiques à basse fréquence, car il fonctionne plus par réflexion que par absorption du champ. Un blindage aux basses fréquences n'est performant qu'avec des matériaux à fortes pertes d'absorption comme l'acier, le MUMETAL ou le permalloy. Ces matériaux deviennent de moins en moins perméables lorsque la fréquence augmente (donc de moins en moins efficaces pour le blindage) alors que les matériaux conducteurs tels que le cuivre ou l'aluminium deviennent de plus en plus efficaces jusqu'à la fréquence d'environ 100Khz.

Cependant, une analyse plus fine des phénomènes physiques observés lors d'un blindage électromagnétique [18] montre que :

- les matériaux très conducteurs (aluminium par exemple) augmentent la composante tangentielle de l'induction et diminuent la composante normale ;
- les matériaux fortement magnétiques sont adaptés à l'atténuation d'un champ tangent.

Ce qui justifie le choix judicieux de matériaux en fonction de la source de perturbations.

Pour bénéficier des propriétés magnétiques et conductrices dans le cadre de blindage, des associations de différents matériaux ont été effectuées et testées.

V.3 Rappel du modèle de la «coque» de Guérin

Considérons la plaque Fig.5.1 d'épaisseur e soumise à deux champs sinusoïdaux uniformes \mathbf{H}_1 et \mathbf{H}_2 tangents à la plaque. On note \mathbf{H}_s le champ magnétique surfacique dans le plan xy . Le champ magnétique dans la plaque est obtenu à partir du problème monodimensionnel [37] :

$$\mathbf{H}_s(z) = \frac{1}{\sinh(ae)} \left[\mathbf{H}_{1s} \sinh\left(\frac{ae}{2} + az\right) + \mathbf{H}_{2s} \sinh\left(\frac{ae}{2} - az\right) \right]. \quad (V.1)$$

avec :

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\sigma\omega\mu}}$$

et

$$a = \frac{1+j}{\delta}$$

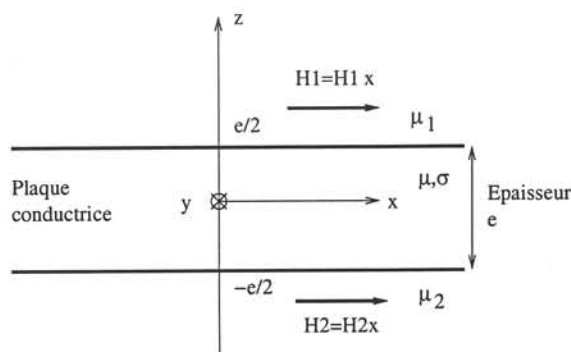


FIG. 5.1 – Plaque d'épaisseur finie.

La densité volumique de courant possède seulement une composante tangentielle et s'écrit alors :

$$\mathbf{J} = \text{rot}\mathbf{H} = -\mathbf{n}_1 \wedge \frac{\partial \mathbf{H}_s(z)}{\partial z} \quad (V.2)$$

Le champ électrique \mathbf{E} sur la surface de la plaque du «côté 1» :

$$\mathbf{E}_1 = \frac{\mathbf{J}(\frac{e}{2})}{\sigma} = \frac{a}{\sigma} \mathbf{n}_1 \wedge \left(\frac{1}{\sinh(ae)} \mathbf{H}_{2s} - \frac{1}{\text{th}(ae)} \mathbf{H}_{1s} \right) \quad (V.3)$$

et du «côté 2» :

$$\mathbf{E}_2 = \frac{\mathbf{J}(\frac{-e}{2})}{\sigma} = \frac{a}{\sigma} \mathbf{n}_1 \wedge \left(\frac{1}{\sinh(ae)} \mathbf{H}_{1s} - \frac{1}{\text{th}(ae)} \mathbf{H}_{2s} \right) \quad (V.4)$$

De ces deux relations, on a le système matriciel ci dessous :

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix}$$

avec :

$$\alpha = \frac{a}{\sigma th(ae)}$$

et

$$\beta = \frac{a}{\sigma sh(ae)}$$

qui sont homogènes à une impédance.

Les fonctions tests (méthode de Galerkin) sont notés W_i, W_j pour éviter toute confusion avec les termes α, β . La forme discrète de la formulation «coque généralisée» s'écrit alors du côté 1 :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} \mu_1 \text{grad} W_i \text{grad} \phi_1 d\Omega + \frac{1}{j\omega} \int_{\Gamma} \alpha \text{grad}_s W_i \text{grad}_s \phi_1 d\Gamma - \frac{1}{j\omega} \int_{\Gamma} \beta \text{grad}_s W_i \text{grad}_s \phi_2 d\Gamma \\ = \underbrace{\int_{\Gamma} W_i \mu_1 \mathbf{H}_J \cdot \mathbf{n}_1 d\Gamma + \frac{1}{j\omega} \int_{\Gamma} (\alpha - \beta) \text{grad}_s W_i \mathbf{H}_J d\Gamma}_{K_1} \end{aligned}$$

La relation équivalente «du côté 2» s'obtient en permutant les indices des potentiels scalaires magnétiques 1 et 2. La matrice du système correspondant (qui sera intégré en surface) s'écrit :

$$\begin{bmatrix} L & -N \\ -N & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix}$$

$$L = \frac{1}{j\omega} \int_{\Gamma} \alpha \text{grad}_s W_i \text{grad}_s W_j d\Gamma;$$

$$N = \frac{1}{j\omega} \int_{\Gamma} \beta \text{grad}_s W_i \text{grad}_s W_j d\Gamma.$$

Les termes K_1 et K_2 sont des termes sources correspondant aux champs extérieurs.

V.4 Cas particuliers de 2 plaques minces

Considérons un assemblage de deux plaques minces Fig.5.2. Les composantes tangentes des champs électrique et magnétique à l'interface de deux plaques sont continues. Ceci permet d'assurer que le potentiel scalaire entre les deux plaques est le même et vaut ϕ_2 . La relation matricielle précédente liant le champ électrique et magnétique (dans le cas d'une plaque simple) montre dans ce cas que le champ «inter-plaque» est une combinaison des potentiels linéaire des potentiels extérieurs. On a alors pour ce type de dispositifs trois

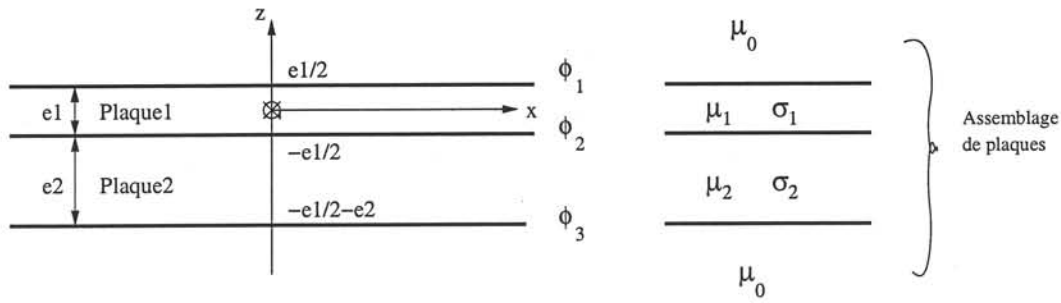


FIG. 5.2 – Association de deux plaques.

inconnues qui sont les potentiels ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 . Les relations entre ces potentiels s'écrivent sous la forme d'un système de trois équations à trois inconnues :

$$\begin{bmatrix} L_1 & -N_1 & 0 \\ -N_1 & L_1 + L_2 & -N_2 \\ 0 & -N_2 & L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix}$$

L'inconnue, ϕ_2 s'exprime comme une combinaison affine de ϕ_1 et ϕ_3 :

$$\phi_2 = \frac{P_2 + N_1\phi_1 + N_2\phi_3}{L_1 + L_2} \tag{V.5}$$

En remplaçant dans le système ci-dessus, il en résulte :

$$\begin{cases} L_1\phi_1 - N_1 \frac{(P_2 + N_1\phi_1 + N_2\phi_3)}{L_1 + L_2} = P_1 \\ -N_2 \frac{(P_2 + N_1\phi_1 + N_2\phi_3)}{L_1 + L_2} + L_2\phi_3 = P_3 \end{cases}$$

Avec :

$$L_1(\alpha_1), N_1(\beta_1), L_2(\alpha_2), N_2(\beta_2), P_1(\alpha_1, \beta_1), P_2(\alpha_2, \beta_2), P_3(\alpha_3, \beta_3).$$

D'où le système matriciel équivalent de la plaque composite (équivalente aux deux plaques minces) :

$$\begin{bmatrix} L_1 - \frac{N_1^2}{L_1 + L_2} & -\frac{N_1 N_2}{L_1 + L_2} \\ -\frac{N_1 N_2}{L_1 + L_2} & L_2 - \frac{N_2^2}{L_1 + L_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 + \frac{N_1 P_2}{L_1 + L_2} \\ P_3 + \frac{N_2 P_2}{L_1 + L_2} \end{bmatrix}$$

avec :

$$\alpha_1 = \frac{a_1}{\sigma_1 th(a_1 e_1)}$$

et

$$\beta_1 = \frac{a_1}{\sigma_1 sh(a_1 e_1)}$$

α_2, β_2 s'expriment de la même manière. Les termes sources P_1, P_2, P_3 dépendent de $\alpha_{1,2}, \beta_{1,2}, \mu_{1,2}$

Ce système résultant permet d'obtenir directement la forme discrète du modèle équivalent. Nous avons implanté ce modèle dans FLUX3D et des expérimentations ont été effectuées [15].

V.5 Expérimentations pour une «coque composite» avec 2 plaques

Pour tester la formulation présentée ci-dessus, nous traitons un cas test en 2D axisymétrique et en 3D. Ce cas test est constitué d'une plaque mince en Al et FeSi placée dans un champ magnétique généré par un inducteur parcouru par un courant de 500A en module (Fig.5.3).

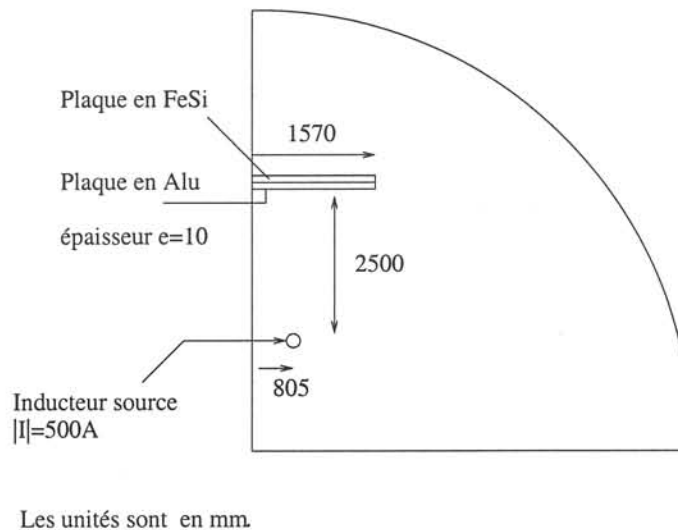


FIG. 5.3 – Modèle 2D axisymétrique du dispositif composite à 2 plaques.

On note «FeSi-Aluminium» une plaque composite constituée d'une plaque en FeSi puis d'une plaque en Aluminium. La plaque en FeSi est celle qui est la plus proche de la source.

On note «Aluminium-FeSi» une plaque composite constituée d'une plaque en Aluminium puis d'une plaque en FeSi. La plaque en Aluminium est celle qui est la plus proche de la source.

Les résultats obtenus en 2D axisymétrique et en 3D sont identiques. A titre d'illustration, les figures Fig.(5.4) et Fig.(5.5) représentent le champ magnétique sur une ligne d'exploitation située à $z = 2m6$ de la source de champ dans le cas d'une association de plaque «FeSi-Aluminium» et «Aluminium-FeSi». On voit bien que le dispositif constitué par l'association «Alu-FeSi» est beaucoup plus performant.

En effet, la plaque en aluminium est très conductrice (forte conductivité) elle est donc le siège de courants induits s'opposant au champ généré par l'inducteur source (loi de Lenz) et de ce fait, elle joue un rôle de répulsion des champs magnétique. En revanche, la plaque

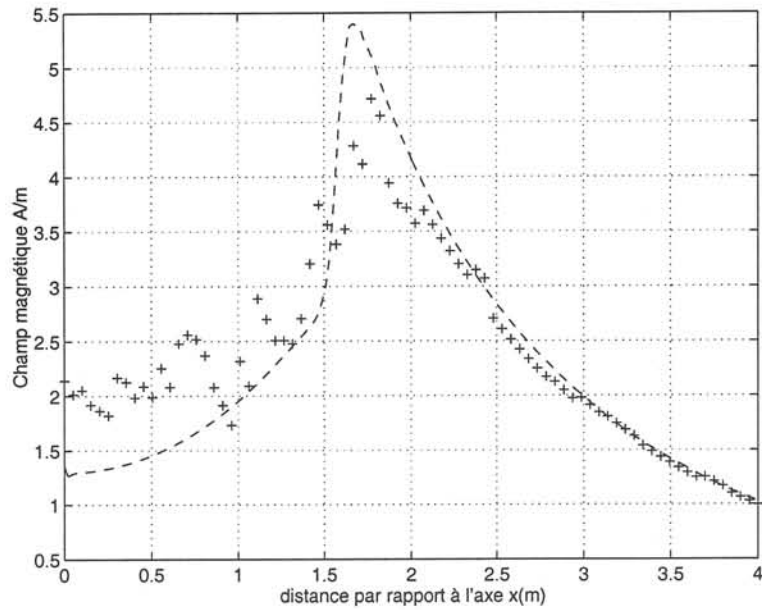


FIG. 5.4 – Module du champ magnétique sur une ligne d’exploitation en 3D et en 2D « Aluminium et Fer-silicium ». Le plan d’exploitation se trouve à 2m60 de la source.

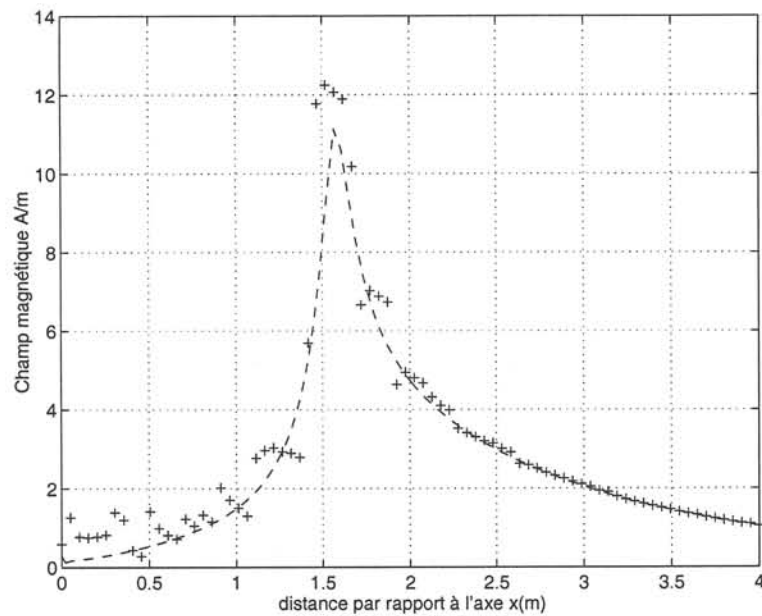


FIG. 5.5 – Module du champ magnétique sur une ligne en 3D et en 2D « Fer-silicium et Aluminium ». Le plan d’exploitation se trouve à 2m60 de la source.

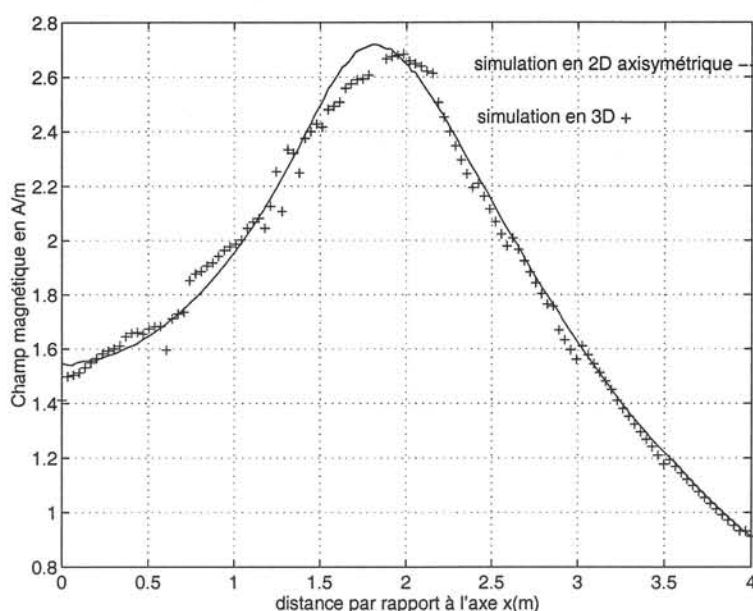


FIG. 5.6 – Module du champ magnétique sur une ligne en 3D et en 2D « Aluminium et Fer-silicium ». Le plan d'exploitation se trouve à 3m de la source.

en Fer-Silicium se comporte en basse fréquence comme un aspirateur de champ autant pour les champs tangents ou les champs normaux. Ceci explique la meilleure performance du dispositif «Aluminium-FeSi» dans le cas de cette validation.

En fait, le dispositif «FeSi-Aluminium» se comporte comme s'il n'y avait qu'une plaque en Fer-silicium toute seule car au passage de la plaque le champ magnétique ressort tangent, il n'est donc pas atténué par la plaque en Alu.

V.6 Association de plusieurs plaques minces

Plus généralement, le même raisonnement donne en appliquant le principe de la dichotomie pour un dispositif de n plaques Fig.(5.7) un système équivalent à la coque composite. A notre connaissance, il n'y a pas de relation simple entre les termes de la matrice de la coque composite équivalente à n plaques. Cependant, la procédure de construction de cette matrice connaissant celle pour $n-1$ plaques est simple. Le lecteur intéressé pourra trouver le modèle «composite» équivalent à 3 plaques en annexe.

V.7 Conclusion

Nous avons présenté une approche permettant de modéliser des régions minces «composites» constituées de plusieurs couches en magnétodynamique. Cette approche a été validée par comparaison à un cas bidimensionnel. Une application possible pourrait être l'étude fine de dispositifs feuilletés. Cependant, il est nécessaire d'étudier les limites d'une

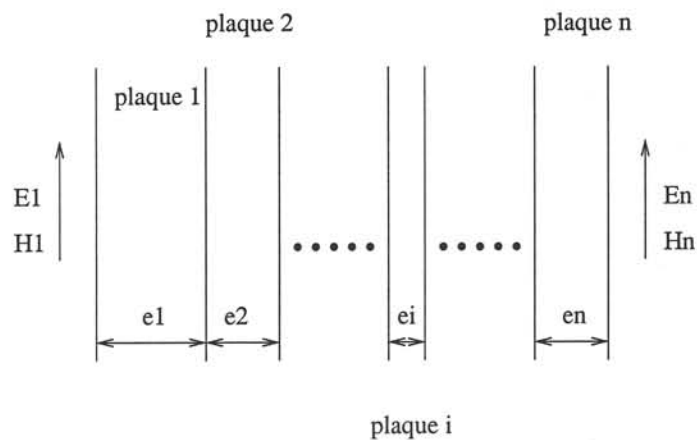
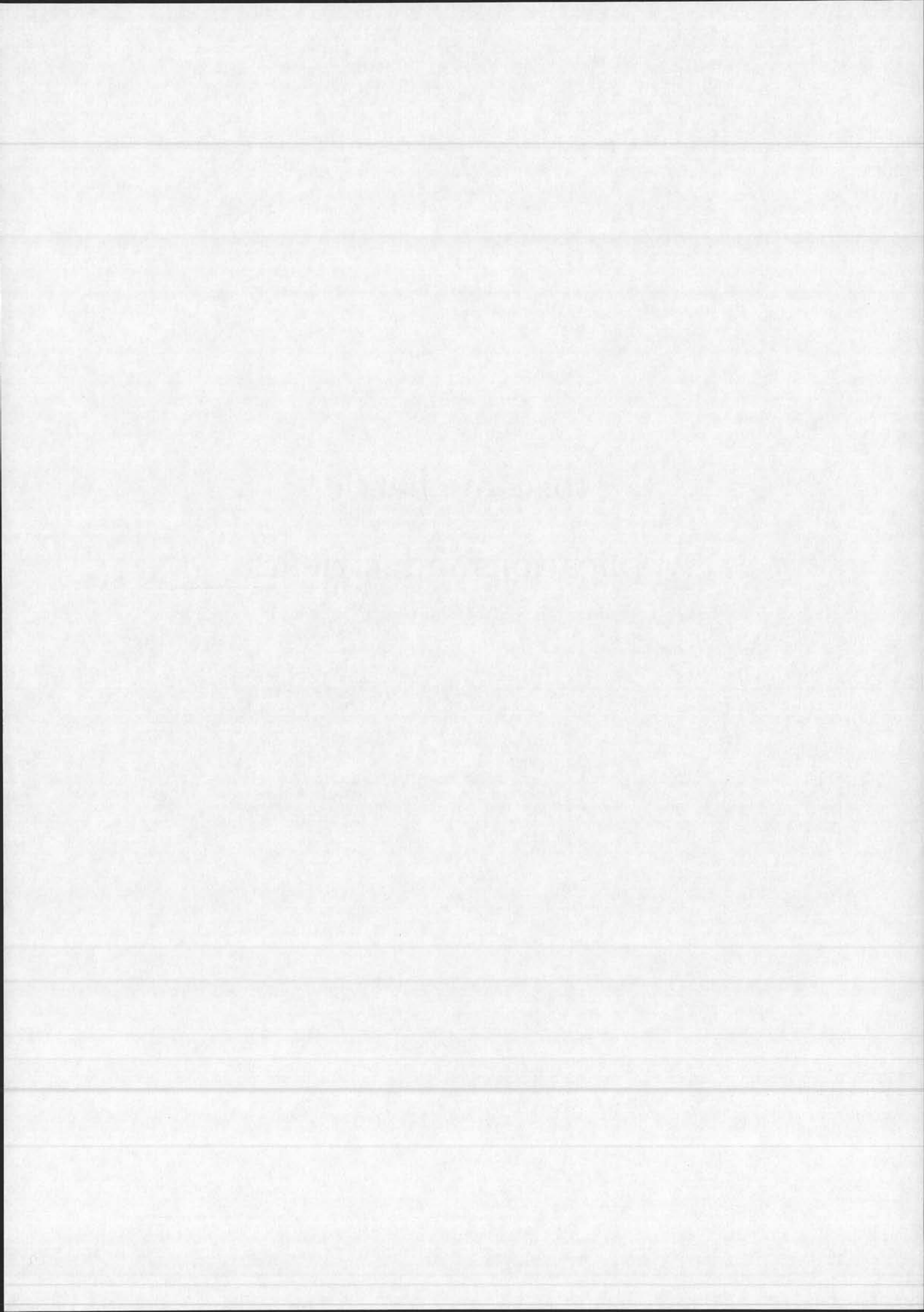


FIG. 5.7 – Dispositif composite à n plaques.

telle approche en particulier le nombre maximal de plaques que l'on peut associer pour que la formulation soit encore valide. Une des perspectives de cette partie pourrait être la recherche par la simulation de la plaque composite optimale permettant d'atténuer efficacement à la fois le champ normal et le champ tangent. Pour les perspectives, il sera intéressant d'étudier la prise en compte des régions filaires en présence des régions minces composites, D'autre part, dans le cas des matériaux non linéaires, il n'y a pas de modèle de «coque» il faut donc mailler es régions en volume. Il y a également des recherches à faire concernant la modélisation des régions minces en transitoire pour pouvoir modéliser les ph'énomènes de court-circuit.

Troisième partie
Applications industrielles



Chapitre VI

Etude du poste «Folies» et du câble «Bonna»

Introduction

Dans les chapitres précédents, nous avons développé des outils et des méthodes pour modéliser des phénomènes électromagnétiques mettant en jeu des dispositifs minces et filaires. Nous avons validé ces développements avec des exemples simples, et dans ce chapitre, nous appliquons l'outil développé à des cas industriels.

Dans ce chapitre, nous présentons deux applications industrielles en cours d'étude à la division R&D d'EDF : l'étude de l'environnement CEM 50Hz d'un poste source parisien, et l'étude des pertes dans la gaine d'un câble sous-terrain.

VI.1 Etude de l'environnement CEM 50Hz du poste «Folies»

VI.1.1 But de l'étude

Le poste source «Folies» situé rue Bergère dans le 9ème arrondissement de Paris est équipé de bancs de réactances qui limitent la puissance de court-circuit en cas de défaut sur un départ. Les réactances sont bobinées dans l'air et en série avec le secondaire des transformateurs HTBT.

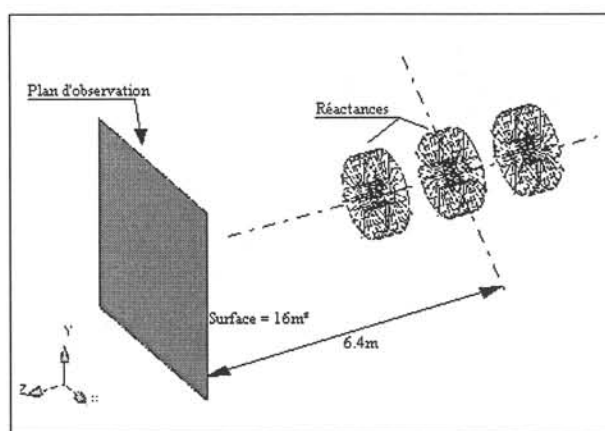


FIG. 6.1 – Cas de référence : Poste Folies.

Le champ magnétique 50Hz émis en régime nominal peut perturber les écrans d'ordinateurs situés dans les locaux mitoyens au poste. Afin de limiter le champ magnétique

rayonné, une boucle de compensation et une plaque de blindage ont été installées sur le site. Le but de cette étude est de calculer le champ magnétique rayonné sur le plan d'observation (Fig.6.1), en prenant en compte la boucle de compensation et le blindage (Fig.6.2).

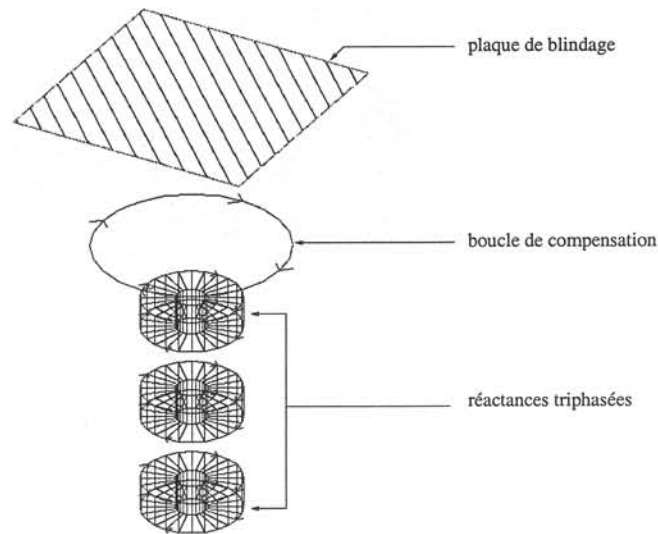


FIG. 6.2 – Géométrie du dispositif.

Dans cette étude, nous négligeons l'influence du transformateur, ainsi que les barres d'alimentation sur le champ rayonné.

VI.1.2 Présentation

Les données du problème sont les suivantes :

- Les 3 réactances sont alimentées par un courant de 500A crête équilibré
- La fréquence de fonctionnement est de 50Hz ;
- La plaque mince est une plaque en FeSi (dans la partie linéaire de la courbe B(H) on a : $\mu_r = 20000$; $\sigma = 2.2e^6(\Omega.m)^{-1}$);
- A la fréquence d'étude, l'épaisseur de peau $\delta_{FeSi} = 0.339mm$ est très petite devant l'épaisseur de la plaque $e = 3.5mm$;
- La boucle de compensation est en aluminium ($\mu_r = 1$; $\sigma = 3.03e^7(\Omega.m)^{-1}$) dont l'épaisseur de peau est $\delta_{Alu} = 12.9mm$ et le rayon de la section est $r = 9.25mm$.

VI.1.3 Phénomène physique

La géométrie à étudier est celle de la Fig.6.2. Le champ magnétique dû aux trois réactances est atténué par les actions combinées de la boucle de compensation (loi de Lenz) et de la plaque mince (phénomène de réflexion et d'absorption). Des courants induits apparaissent donc dans la boucle et dans la plaque. Nous nous proposons d'évaluer leur effet sur le champ magnétique.

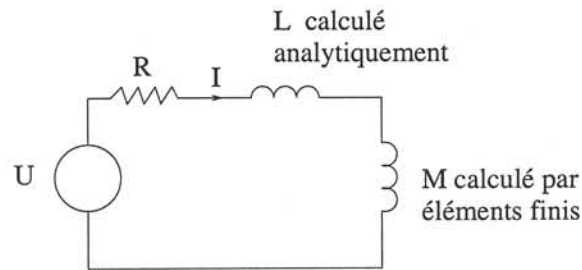


FIG. 6.3 – Modèle de la boucle.

VI.1.4 Modélisation

La boucle est modélisée par le schéma Fig.6.3 la résistance de la boucle calculée par $R = \rho \frac{l}{S}$ est :

$$R = 3.768e^{-4}\Omega.$$

L'inductance propre de cette boucle est calculée analytiquement tandis que les termes de mutuelles entre les réactances et la plaque sont calculés par la méthode des éléments finis ; on a

$$L = 10.28\mu H.$$

Le conducteur étant en court-circuit, la tension à ses bornes est nulle $U = 0$. La plaque est maillée en surface et la boucle induite filaire n'est pas maillée.

VI.1.5 Résultats

Dans cette partie, nous présentons des résultats de simulation donnant l'efficacité du blindage pour plusieurs positions de la boucle de compensation. Pour ces résultats, il n'y a pas de comparaison expérimentales. Ces différentes simulations ont été réalisées pour montrer qu'il existe une position de la boucle pour laquelle le blindage est meilleur. Nous présentons également une comparaison de quelques valeurs du champ magnétique ainsi que du courant dans la boucle de compensation avec des mesures expérimentales.

L'efficacité du blindage est donnée par la relation (Eq.VI.1). Elle permet de quantifier l'effet du blindage.

$$S_{dB} = 20 \text{Log} \left(\frac{H_0}{H_M} \right) \quad (\text{VI.1})$$

H_M et H_0 sont les modules des amplitudes maximales du champ magnétique sur le plan d'observation avec et sans le blindage.

x (m)	3.5	8	15	50	80	120
I (A)	2635	2540	2437	2625	2544	2540
S(dB)	15.5	17.3	18.83	18.9	17.3	15.1

TAB. VI.1 – Efficacité du blindage en fonction de la position de la boucle passive et du courant dans la boucle

x représente la distance entre la plaque de blindage et la boucle passive en cm. Les

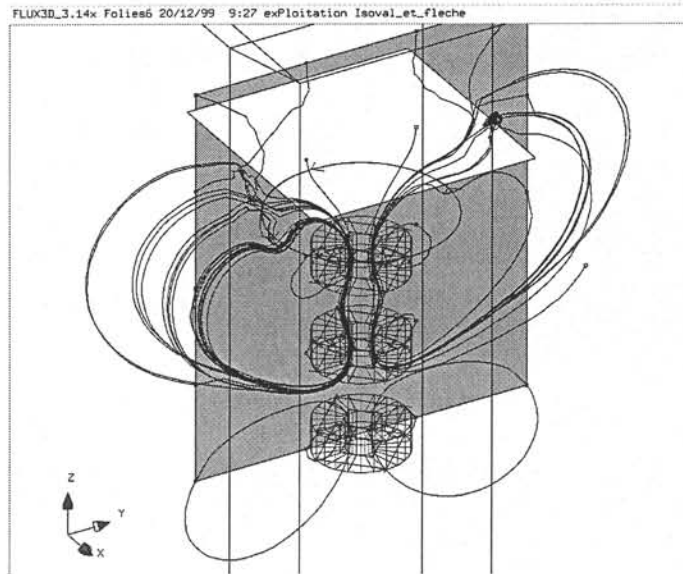


FIG. 6.4 – Effet de la boucle sur les lignes de champ.

lignes de champ observées (Fig.6.4) montrent l'influence de la boucle sur le champ magnétique. Les résultats de simulation sont comparés aux résultats de mesure réalisés sur le site. Les mesures effectués en différents points $x(m)$ sur le plan d'observation situé à 6m40 de la réactance centrale Fig.(6.1) la hauteur de 175cm (environ).

Une bonne concordance est obtenue entre les mesures et la simulation. Les valeurs me-

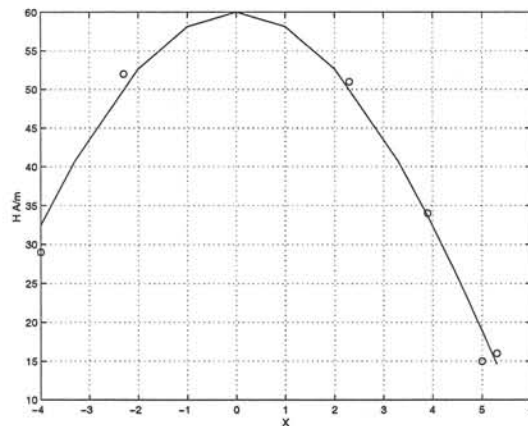


FIG. 6.5 – Comparaison des résultats (mesure et simulation) en terme de champ magnétique.

surées sont représentées avec un "o" sur la figure.

	Mesure	Calcul	Erreur %
I (A)	2484	2508	0.9

TAB. VI.2 – Comparaison des courants mesurés et calculés pour une position de la boucle passive correspondant au fonctionnement normal du dispositif.

VI.1.6 Conclusion

Les résultats obtenus sont très satisfaisants. La boucle de compensation introduite a permis d'abaisser nettement le champ rayonné. La conception du dispositif peut être améliorée en redimensionnant la boucle et en recherchant la position optimale de celle-ci entre la source et la plaque de blindage. Ce problème d'optimisation peut présenter un intérêt réel pour des dispositifs où le champ rayonné est très important. Ceci permettra de réduire considérablement les coûts en terme d'essai, de prototypage et de qualification de ces boucles de compensation. Cependant, les contraintes de ce problème d'optimisation sont aussi d'ordre thermique, le courant dans la boucle ne doit pas dépasser un certain seuil.

VI.2 Etude des pertes dans la gaine de câbles souterrain «Bonna»

But de l'étude

Le but de cette étude est de déterminer les pertes par courants induits dans un tuyau en béton armé contenant une ligne triphasée très haute tension. Pour résoudre ce problème, nous utilisons le modèle filaire ferromagnétique avec couplage circuit développé au cours de cette thèse.

VI.2.1 Présentation

Les tuyaux Bonna (du nom du fabricant) servent à la construction de micro tunnels voir Fig.6.6. Ce sont des éléments cylindriques préfabriqués en béton armé qui sont enfoncés dans le tunnel après son forage. Les liaisons 225kV qui y sont posées sont placées dans des fourreaux, l'espace compris entre les fourreaux et le micro tunnel (voir Fig.6.6) est ensuite comblé par un coulis.

Le treillis ferromagnétique est construit à l'aide de tiges métallique de rayon 2.5mm pour la boucle radiale et de rayon 3mm pour la boucle axiale soudée entre eux. Pour ces simulations, le fer à béton ($\sigma = 7.24 \cdot 10^6$ et $\mu_r = 1000$) est considéré linéaire ce qui se justifie par le faible niveau de champ magnétique rayonné

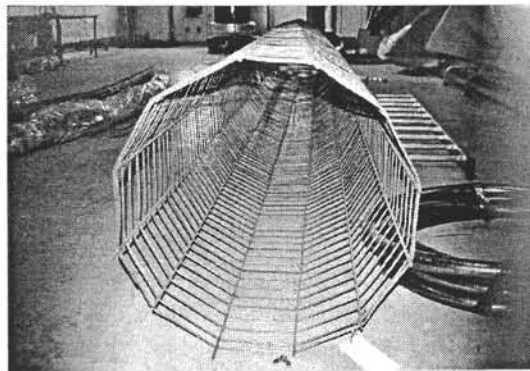


FIG. 6.6 – Exemple type de tuyau.

Dans notre étude, nous nous limiterons à l'étude d'un cylindre d'environ un mètre de longueur (soit 20 motifs). Le résultat obtenu permettra d'évaluer le niveau des pertes Joules dans le tuyau pour différentes positions (d) du câble Fig.6.7.

VI.2.2 Phénomènes physiques

En régime nominal, la valeur efficace du courant circulant dans le câble inducteur vaut 1000A. Les câbles disposés à l'intérieur du tunnel rayonnent un champ variable à la fréquence du réseau (50Hz). Ce champ est source de courants induits et donc de pertes par effet Joule dans le tuyau en treillis. Il est clair que plus le courant dans le câble est grand, plus le champ rayonné et les courants induits dans le treillis sont grands.

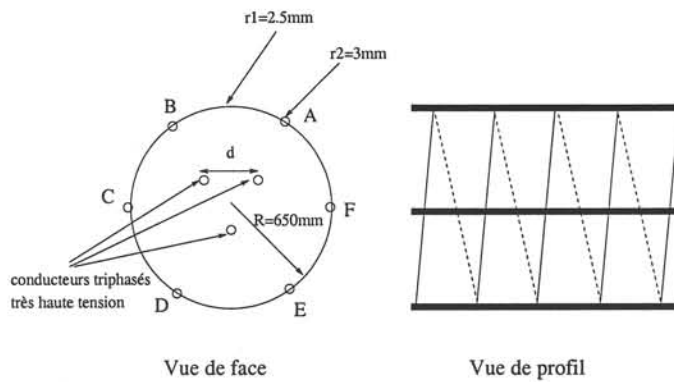


FIG. 6.7 – Géométrie du dispositif.

VI.2.3 Modélisation

Le treillis est constitué de six tiges cylindriques reliées entre elles par des boucles constituées d'anneaux (Fig.6.8). Chaque segment conducteur est modélisé par une résistance et un terme correspondant à l'inductance propre et aux mutuelles (calculées par éléments finis). Le schéma équivalent du treillis est présenté Fig.(6.9). La résistance de chaque segment horizontal constituant les 6 tiges est de $R_1 = 0.6e^{-3}\Omega$ tandis que celle de chaque segment de l'anneau est $R_2 = 1.57 \cdot 10^{-3}\Omega$. Le modèle circuit de la Fig.(6.9) permet de déduire les pertes dans le treillis par la somme des pertes dans chaque segment. Pour cette étude, le maillage surfacique utilisé au niveau du treillis est représenté Fig.6.10

VI.2.4 Résultats

La Figure Fig.(6.11) montre les pertes Joules dans les tiges du treillis. Ces pertes joules sont calculées en utilisant la relation classique $P = RI^2$ à chaque segment conducteur.

Cette étude montre que plus les câbles sont jointifs et moins il y a des pertes par effet

	Câbles en trèfle jointif	Câbles à mi-distance	Câbles à 5cm du tuyau
Pertes Joules (W)	0.13	12.8	19.9

TAB. VI.3 – Pertes Joules dans le treillis.

Joule dans le treillis. Ces pertes restent cependant peu élevées.

VI.2.5 Conclusion

La modélisation du treillis a été effectuée en utilisant pour le conducteur filaire ferromagnétique le potentiel scalaire réduit couplé circuit. Pour ce cas, le maillage respecte la position du fil (maillage symétrique comme expliqué au chapitre 4). Les résultats obtenus montrent que plus les inducteurs sont jointifs plus les pertes dans le treillis sont faibles. Les limites de cette méthode proviennent du calcul du champ \mathbf{h}_j par la formule de Biot

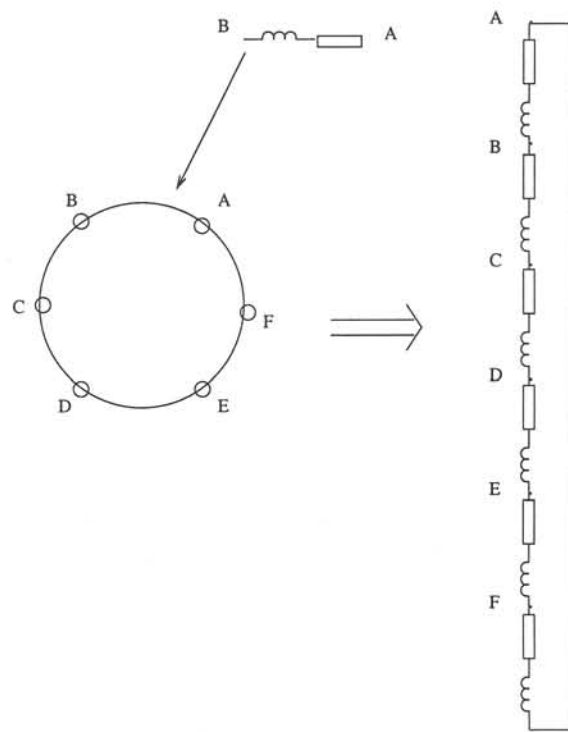


FIG. 6.8 – Schéma du circuit correspondant à une boucle.

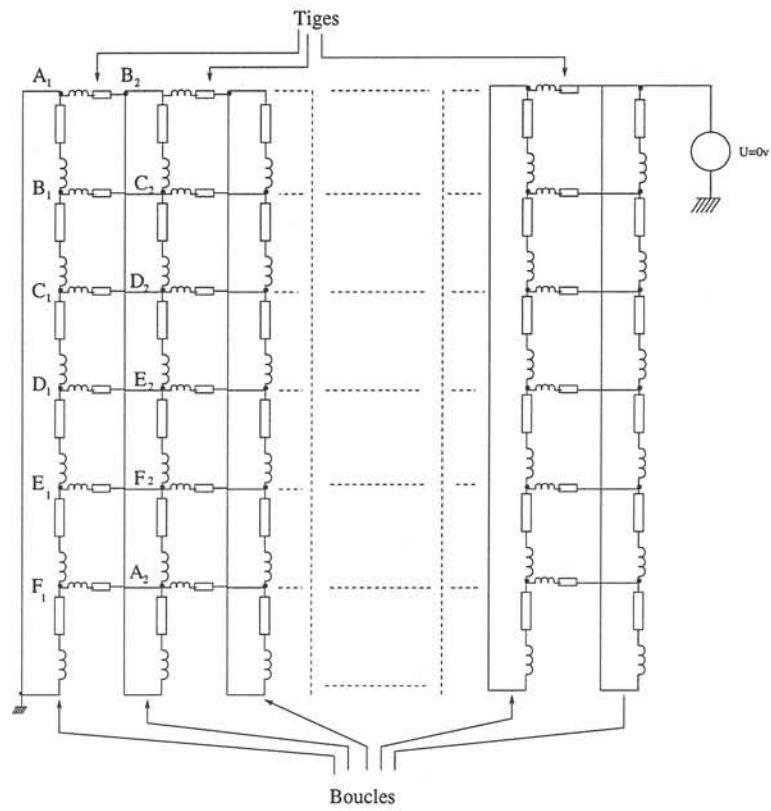


FIG. 6.9 – Schéma du circuit correspondant au treillis.

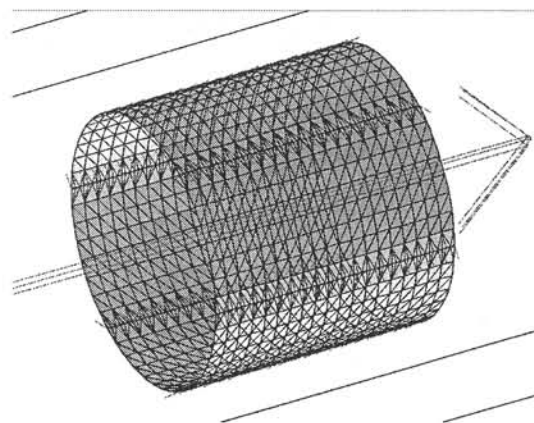


FIG. 6.10 – Géométrie du tuyau.

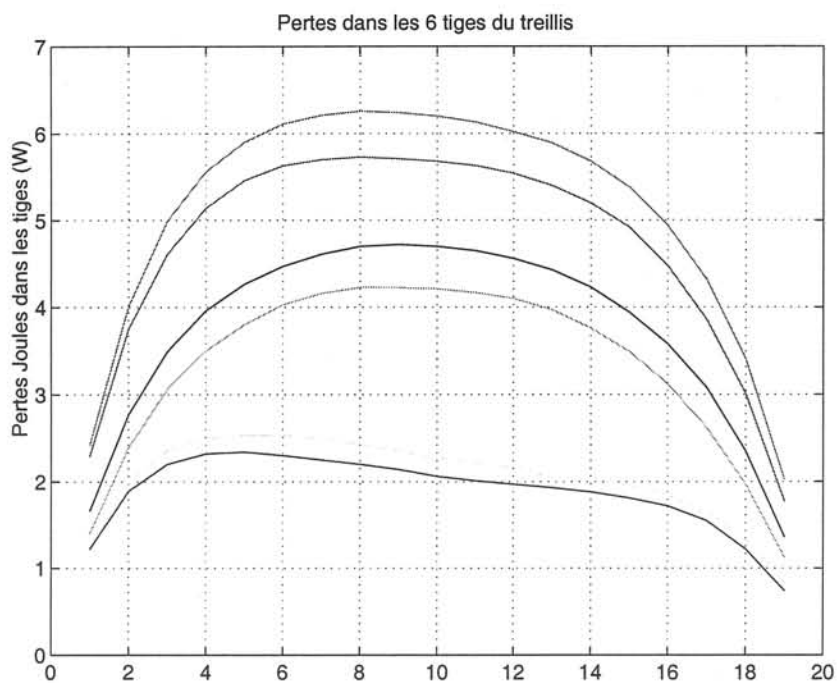


FIG. 6.11 – Pertes dans les 6 tiges du treillis en fonction des subdivisions de chaque tige : câbles à mi-distance du tuyau.

et Savart qui la rende très coûteuse dans le cas des dispositifs filaires complexes. Des mesures de pertes sont actuellement en cours et vont être confrontées à la simulation mise en œuvre ici.

Conclusion Générale

Dans le cadre de cette thèse, nous avons développé et mis en œuvre des modèles permettant de simuler des régions filaires en présence de régions minces dans un champ électromagnétique en basse fréquence par la méthode des éléments finis.

Nous nous sommes placés dans le cadre de la magnétodynamique tridimensionnelle, ce qui permet de traiter une gamme étendue de problèmes rencontrés en électrotechnique et intéressants directement EDF. Pour la modélisation des dispositifs filaires, nous avons établi une formulation éléments finis nodaux en potentiel scalaire couplée aux équations de circuit dans FLUX3D. Les difficultés liées à la faible épaisseur des conducteurs filaires (problème de singularité dû au champ magnétique) ont nécessité l'extraction des termes correspondant à l'inductance propre des fils. Ces termes sont calculés par des méthodes plus adaptées (calcul analytique, PEEC). L'effet de peau est pris en compte par modification de la résistance de la région filaire.

Dans le cas des régions filaires ferromagnétiques, la méthode reste applicable pour des matériaux linéaires. Dans ce cas, le conducteur filaire est décrit comme une région linéique modélisée en potentiel réduit et en même temps comme un inducteur circuit (bobine non maillée couplée à un circuit électrique) dont la résistance est calculée analytiquement. La résolution se fait alors sans extraction d'inductance et en s'assurant que le maillage de ces régions filaires est centré par rapport à la position des fils.

Lorsque ces régions filaires sont en présence des régions minces, les courants induits dans les régions filaires est modifié car le flux total embrassé par le conducteur filaire est lui-même modifié du fait de la présence de la région mince. Dans notre modèle, cette modification est prise en compte par un calcul adéquat de cette contribution au terme du flux.

Dans le cas de la modélisation des régions minces et filaires dans un circuit dont la source est soit un champ extérieur, soit une source de tension ou de courant, nous avons choisi une approche plus globale. La région mince est considérée comme un composant (dans cette thèse nous nous sommes limités au cas particulier d'un composant à 2 bornes). Les résultats obtenus sont satisfaisants. Ces formulations ont été validées séparément par une confrontation des résultats obtenus avec des résultats analytiques ou avec des résultats issus d'une simulation en 2D axisymétrique obtenus à l'aide du logiciel FLUX2D.

Deux applications industrielles ont été traitées. Le problème du poste «Folies» qui est un problème de CEM illustre bien un exemple de modélisation de dispositif filaire en interaction avec une région mince. Le câble «Bonna» montre un exemple de dispositifs filaires. Les méthodes développées présentent les avantages suivants : facilité de mise en œuvre, courant total dans le dispositif obtenu directement, faibles besoins en place mémoire pour les dispositifs à modéliser. L'inconvénient principal est que pour les régions filaires ferromagnétiques, le fait de ne pas extraire les inductances propres peut s'avérer coûteux en temps de calcul du fait du calcul du champ par la formule de Biot et Savart.

Différentes perspectives ressortent de ce travail : la singularité liée à la zone de contact «fil-plaque» pourra être traitée de façon plus précise par exemple en utilisant un modèle circuit de la plaque obtenu par les approches de type PEEC. La prise en compte des

dispositifs filaires en présence de régions minces composites est également à envisager ; elle pourra être développée de manière analogue à celle des régions minces classiques par le calcul de la contribution de la «coque composite» aux termes de flux embrassé par la région filaire, ainsi que la prise en compte des non-linéarités des matériaux en particulier dans le cadre du blindage en basse fréquence. Il sera également intéressant de voir dans quelle mesure le modèle de composant «plaque à 2 bornes» pourra être généralisé à une plaque à 3 bornes (voire plus) en écrivant la relation courant tension d'une plaque à plusieurs bornes et en associant celle-ci aux lois de Kirschoff. Ce modèle pourra servir à la modélisation de couvercles de boîtiers électroniques. Des améliorations sont également à faire du point de vue informatique notamment en ce qui concerne l'automatisation des différentes étapes conduisant à la modélisation d'un dispositif fil-plaque. Il

Pour ce qui est des applications potentielles de cette thèse, on pense notamment aux nouvelles conceptions de dispositifs de blindage permettant de réduire les champs magnétiques tangents et normaux en utilisant des plaques composites.

Bibliographie

- [1] J.L. Coulomb, J.C. Sabonnadière, *Eléments finis et CAO en électrotechnique*, Hermes publishing 1985
- [2] M. Jufer, *Traité d'Electricité de l'EPFL.*, vol. IX, Transducteurs électromécaniques Presses Polytechniques Romandes, 1985
- [3] A. Bossavit, *Electromagnétisme en vue de la modélisation* livre Springer-Verlag 1993
- [4] G. Dhatt & G. Touzot *Une présentation de la méthode des éléments finis* Maloine, 1981.
- [5] S. Ramo, J.R. Whinnery, T.V. Duzer, *Fields and waves in communication electronics* John Wiley & Sons, Inc.
- [6] G.W. Carter, *The Electromagnetic field in its engineering aspects* LONGMAN London and New York
- [7] R. Feynman, Leighton, Sands *Les cours de physique de Feynman, Electromagnétisme I*, Addison-Wesley Publishing 1964, version française InterEditions 1979
- [8] Site internet du Comité Européen de Normalisation pour l'Electrotechnique, <http://www.cenelec.org>
- [9] Site internet de l'AFNOR, <http://normesenligne.afnor.fr>
- [10] Site internet du Comité Electrotechnique International, <http://www.iec.ch>
- [11] Contribution d'EDF à la mise en place des normes, <http://norm.edf.fr>
- [12] Projet CEM de l'Organisation mondiale de la santé, <http://www.who.ch/emf/>
- [13] A. Abakar, G. Meunier, J.L. Coulomb and F.X. Zgainski "3D modeling of thin wire interacting with thin plates. Extracting the singularity due to the wire" à paraître dans *European Journal of Applied Physics*
- [14] A. Abakar, G. Meunier, J.L. Coulomb and F.X. Zgainski "3D modeling of shielding structures made with conductors and thin plate" *IEEE Trans. magnetics* vol 36 N.4 july 2000 pp.790-793
- [15] F.X. Zgainski, V. Delafosse, A. Abakar, "Modeling of 3D plane composite shield with the FE method : application of an EMC industrial problem" *Proceeding of the 9th Biennial IEEE conference CEFC-2000 Milwaukee*
- [16] A. Abakar, J.L. Coulomb, G. Meunier, F.X. Zgainski, C.Guérin "3D Modeling of thin wire and thin plate junction" *Proceeding of the 9th Biennial IEEE conference CEFC-2000 Milwaukee*
- [17] P.R. Bannister, "New theoretical expressions for predicting shielding effectiveness for the plane shield case" *IEEE Trans. on electromagnetic compatibility* vol. EMC-10, pp 2-7,Mar 1968,

- [18] S. Blanchard, Atténuation du champ magnétique 50Hz par blindage composite "Rapport de stage de fin d'études ENSIEG-INPG" juin 199
- [19] J.M. Bailly, L. Popiel, "Etude de l'atténuation du champ magnétique 50Hz émis par le poste RATP «Laborde»" *Note Interne EDF* HM25/98/087/A
- [20] Bailey,WH. "recommandation for limiting public exposure to 4Hz-1kHz electric and magnetic fields need for peer review [letter] *Health Phys* 1999; 77(1) pp.97-99
- [21] F. Collino et F. Millot. " *Fils et méthodes d'éléments finis pour les équations de Maxwell. Le modèle de Holland revisité*" Rapport de recherche INRIA Aout 1998 ;
- [22] X. Brunotte, " *Modélisation de l'infini et prise en compte de régions magnétiques minces. Application à la modélisation des aimantations de navires*" Thèse de Doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble, Décembre 1991
- [23] S. Bouissou, " *Comparaison des formulations en potentiel, pour la résolution numérique en 3D des équations magnétiques couplées aux équations de circuit électrique*" Thèse de Doctorat, de l'université Paris 6, 1997.
- [24] Chemkha H, F. Rioux-Damidau, "A fast and accurate method for eddy current computation in thin conducting shell" *IEEE Trans. Mag* vol.33 N.2, Mar 1997, pp.1342-1345
- [25] B. Bandelier, F. Rioux-Damidau, "Modélisation 3D de la magnétodynamique à l'aide d'une approximation nodale en champ magnétique par le code CELFI" Textes des communications SEE-CLUB 11 journées d'études pp.137, le 20-21 Mars 1991
- [26] A. Bossavit, J.C. Vérité "The Trifou code : solving the 3D Eddy-Currents problem by using h as state variable" *IEEE Trans. Mag.* vol.19 N.6, pp.2465-70, 1983
- [27] A. Bossavit, "le calcul des courants de Foucault en dimension 3 avec le champ électrique comme inconnue" *Rev. Phys. Appl.* 1990 26 pp 189-197
- [28] C.A.F. Sartori, J.R. Cardoso, A.Orlandi, "Transient induced voltage computation in a high building struck by lightning" *IEEE Trans. Mag.* vol.34 N.5, pp.2815-18, sept.1998
- [29] N. Aymard, " *Etude des phénomènes magnétodynamiques pour l'optimisation de structures 3D de chauffage par induction à partir du code Trifou et d'essai sur prototypes*", Thèse de Doctorat, Université de Nantes, 1997.
- [30] F. Bocquet, " *Analyse des interactions onde-structure en compatibilité électromagnétique. Prise en compte des fils et des plaques en domaine ouvert dans une modélisation tridimensionnelle par éléments finis.*" Thèse de Doctorat, Université Paris XI, 1998
- [31] E. Clavel, " *Vers un outil de conception de câblage : le logiciel Inca*" Thèse de Doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1996

-
- [32] J.L. Coulomb, "*Analyse tridimensionnelle des champs électriques et magnétiques par la méthode des éléments finis*" Thèse de Doctorat d'état 1981.
- [33] C.J. Carpenter, "Comparison of alternative formulations of 3-dimensional magnetic field and Eddy current problems at power frequencies *IEE Proceedings*, vol.124, pt. A, N 11, pp. 1026-1034, 1977
- [34] V. Leconte, "*Modélisation des dispositifs électromécaniques*", Thèse de Doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble, 2000.
- [35] T. Dreher, "*Couplage de la méthode des éléments finis tridimensionnels avec une méthode d'analyse du circuit électrique : application à la modélisation des machines tournantes*", Thèse de Doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1994.
- [36] C. Golovanov, "*Développement de formulations éléments finis 3D en potentiel vecteur magnétique application à la simulation des dispositifs électromagnétiques en mouvement*", Thèse de Doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1997.
- [37] C. Guérin, "*Détermination des pertes par courant de Foucault dans les cuves de transformateurs. Modélisation des régions minces et prise en compte de la saturation de matériaux magnétiques en régime harmonique.*" Thèse de Doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1994
- [38] F-X. Zgainski, X. Brunotte et C. Guerin, "Note de principe de Flux3d version 3.1 " *Document interne EDF R&D CEDRAT*
- [39] J.Y Bidan, C. Chavant, G. Nicolas " TRIFOU mode d'emploi " *Document interne EDF R&D*
- [40] G. Meunier et al, "Computation of coupled problem of 3D eddy current and electrical circuit by using T_0 - T - ϕ formulation" *IEEE Trans. mag.* vol 34, n.5 sept 1998
- [41] P. Dular, C. Geuzaine, W. Legros "A natural method for coupling magneto-dynamic H-formulations ans circuit equations" *IEEE Trans. mag.* vol 35, n.3 May 1999
- [42] I.D. Mayergoyz, G. Bedrosian "*On calculation of 3-D eddy currents in conducting and magnetic shells*" *IEEE Trans. Mag.* vol.31 No3, May 1995
- [43] P. Lombard, G. Meunier, "A general purpose method for electric and magnetic combined problems for 2D axisymmetric and transient systems" *IEEE Trans. mag.* vol 29, n.2 pp.1737-1740, sept 1993
- [44] G. Meunier, "Relation courant tension en formulation $t_0 - \phi$ *Document interne du LEG-INPG 2000*
- [45] H. T. Luong, "*Amélioration de la formulation en potentiel scalaire magnétique et généralisation au couplage entre équations de champ et de circuit électrique*", Thèse de Doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1997.
-

- [46] M. Kamon, L.M. Silveira C. Smithhisler J. White *FastHenry USER'S GUIDE* Research Laboratory of Electronics Department of Electrical Engineering and Computer Science Massachusetts Institute of Technology Cambridge, MA 02139 U.S.A. 11 November 1996
- [47] M. Kamon, *Fast Parasitic Extraction and Simulation of Three-dimensional Interconnect via Quasistatic Analysis* Massachusetts Institute of Technology, PhD Thesis, February 1998
- [48] H. Igarashi, A. Kost, T. Homma, "Impedance boundary condition for vector potentials on thin layers and its application to integral equations" *Eur. Phys. J. AP 1*, 103-109 (1998)
- [49] E. M Deeley, J. Xiang "Improved surface impedance methods for 2D and 3D problems", *IEEE Trans. magn.* vol.24 N.1, jan. 1988
- [50] E. M Deeley "Improved impedance boundary condition for finite element by cross-coupling at corners", *IEEE Trans. magn.* vol.30 N.5, september 1994
- [51] Y.G. Park, T.K. Chung, H.K. Jung, C.Y. Hahn, "Three dimensional eddy current computation using the surface impedance method considering geometric singularity", *IEEE Trans. magn.* vol.31 N.3, pp.1400-1403, May 1995
- [52] L. Kettunen, K. Forsman and A. Bossavit "Formulation of the eddy current problem in multiply connected regions in terms of h" *In. J. for Num. meth. in Engrn.* vol. 41, pp. 935-954
- [53] P.R. Kotiuga "An algorithm to make cuts for magnetic scalar potential in tetrahedral meshes"
- [54] L. Krähenbuhl, "La méthode des équations intégrales de frontière pour la résolution des problèmes de potentiel en électrotechnique, et sa formulation axisymétrique" Thèse de doctorat Ecole Centrale de Lyon, 1983
- [55] National Research Council (U.S.) *Committee on the possible effects of electromagnetic fields on biologic systems*, editor. *Possible health effects of exposure to residential electric and magnetic fields*. Washington, DC National Academy Press, 1997
- [56] T. Nakata, N. Takahashi, K. Fujiwara, Y. Shiraki, "3D magnetic field eddy current analysis using special elements" *IEEE Trans. Magn.*, vol. 26, n° 5 sept. 1990 pp. 2379-2381
- [57] J.C. Nedelec, *Notions sur les techniques d'éléments finis* Ellipses, 1991
- [58] B. Nekhoul, "Caractérisation numérique de l'environnement électromagnétique des postes aériens haute tension" Thèse de Doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1994
- [59] L. Popiel, *Calcul des boucles de compensation de champs magnétiques pour le poste Baudry* Note Interne EDF HM25/97/058B
- [60] D. Rodger, J.F. Eastham, "Multiply connected regions in the A- Ψ three dimensional eddy-current formulation" *IEE Proceedings*, vol.134, pt. A, N 1, Jan. 1987

-
- [61] D. Rodger, N. Atkinson, "Finite element method for 3D eddy current flow in thin conducting sheets" *IEE Proceedings*, vol.135, pt. A, N 6, Jan. 1988
- [62] P.J. Leonard, D. Rodger, "Modelling voltage forced coils using the reduced scalar potential method" *IEEE Trans. Mag.*, vol.28, N 2, March 1992
- [63] D. Rodger, P.J. Leonard, H.C. Lai, "Interfacing the general 3D A- Ψ method with a thin sheet conductor model" *IEEE Trans. Mag.*, vol.28, N 2, March 1992
- [64] J.L.Schanen, "Intégration de la compatibilité électromagnétique dans la conception de convertisseurs en Electronique de puissance." Thèse de Doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1994
- [65] Z. Ren, A. Razek, "A coupled electromagnetic mechanical model for thin conductive plate deflection analysis", *IEEE Trans. Mag.* vol 26 No5 1990, pp 1650-1652
- [66] A.E. Ruehli, "Inductance calculations in a complex integrated circuit environment" *IBM journal on R&D*, september 1972
- [67] A.E. Ruehli, N. Rover, P.A. Brennan, "Three dimensional inductance computations with partial element equivalent circuits" *IBM journal on R&D*, vol.23,n° 6, november1979
- [68] J. Simkin, C.W. Trowbridge, "On the use of the total scalar potential in the numerical solution of field problems in electromagnetics" *Int. J. Num. Meth. Engng*, vol. 14, 1979, pp 423-440
- [69] J.C. Vérité, "Calculation of Multivalued potentials in exterior regions" *IEEE Trans. Mag.* vol. 23 No3, may 1987 pp 1881-1887
- [70] V. C. Silva, N. M. Abe, A. Passaro, J.R. Cardoso "A new line-element Approach Applied to 3D FEA of grounding systems" *Proceeding of IGTE 1996, Gratz, Austria*
- [71] F.X. Zgainski, A. Abakar, "Introduction dans FLUX3D version recherche des éléments filaires; application aux boucles de compensation" *Note Interne EDF HM18/99/014*
- [72] S. A. Schelkunoff, "Electromagnetic waves", Princeton, NJ : Van Nostrand, 1943, pp 223-225, 303-306
- [73] Richard B. Schultz, V. C. Plantz, D.R. Brush, "Shielding theory and practice" *IEEE Trans. on electromagnetic compatibility* vol. 30, N.3, Aug. 1988, pp 187-201
- [74] J.R. Moser, "Low-Frequency Low-Impedance Electromagnetic Shielding" *IEEE Trans. on electromagnetic compatibility* vol. 30, N.3, Aug. 1988, pp 202-210
- [75] R. G. Olsen, P. Moreno, "Some Observations about shielding extremely low-frequency magnetic fields by finite width shields" *IEEE Trans. on electromagnetic compatibility* vol. 38, N.3, Aug. 1996, pp 460-468
-

Annexe A

Calcul de la résistance de la plaque

Dans le cas particulier d'une plaque simple rectangulaire de dimensions $2a$ par $2b$, d'épaisseur h et de conductivité σ ou le courant I est amené par deux conducteurs d'épaisseur 2ϵ Fig.A. La formule usuelle donnant la résistance électrique sous la forme $R = \frac{\rho L}{S}$ donnerait ici $R = \frac{2a}{\sigma h 2b}$, mais cette formule suppose que la densité de courant est constante dans toute la plaque et partout dirigée dans le sens de la longueur. Cette hypothèse n'est pas vraiment vérifiée dans le cas présent.

A.1 Equations

Les équations qui régissent la distribution de E et J sont :

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = 0 \quad (\text{A.1})$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0 \quad (\text{A.2})$$

L'équation A1.2 entraîne $\mathbf{E} = -\operatorname{grad} V$. Lorsque la conductivité électrique de la plaque est constante, l'équation du problème devient une équation de Laplace homogène avec V comme inconnue.

A.1.1 Conditions aux limites

1. CL1 : Limite $y=0$ cette limite correspond à un axe de symétrie sur lequel la densité de courant est dirigée suivant Ox donc $J_y=0$ ce qui V donne $\frac{\partial V}{\partial y} = 0$

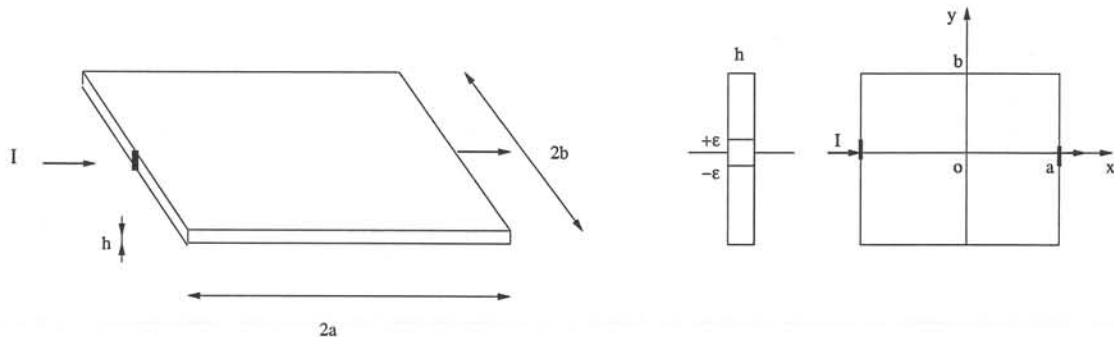


FIG. 1.1 – Composant plaque 2 bornes.

2. CL2 : Limite $y=b$ cette limite correspond à un bord sur lequel la densité de courant est dirigée suivant Ox donc $J_y=0$ ce qui V donne $\frac{\partial V}{\partial y} = 0$
3. CL3 : Limite $x=0$ cette limite correspond à un axe de symétrie sur lequel la densité de courant est dirigée suivant Ox donc $J_y=0$ ce qui V donne $\frac{\partial V}{\partial y} = 0$ ou encore $V=0$
4. CL4 : Limite $x=a$ Il s'agit d'une limite sur laquelle le courant I sort. On va supposer que le courant sort sur une largeur 2ϵ sur l'épaisseur de la plaque. La densité de courant J_x constante et uniforme sur le rectangle $(-\epsilon, +\epsilon)*h$ est égale à $J_x = \frac{I}{h2\epsilon}$. On a donc :

$$J_x = \begin{cases} 0 & \text{si } \epsilon < y \leq b \\ \frac{I}{h2\epsilon} & \text{si } 0 \leq y \leq \epsilon \end{cases}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = f(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } \epsilon < y \leq b \\ -\frac{I}{\sigma h2\epsilon} & \text{si } 0 \leq y \leq \epsilon \end{cases}$$

Le problème ainsi défini est un problème elliptique avec des conditions de Dirichlet, de Neumann homogène et de Neumann non homogène. Il est bien posé et possède une solution unique.

L'équation $\Delta V = 0$ est résolue par séparation de variables. Le problème est linéaire et les bords du domaine sont parallèles aux axes des coordonnées. La famille de fonction vérifiant l'équation est de la forme :

$$V(x, y) = X(x)Y(y)$$

La solution qui nous intéresse est celle vérifiant les conditions aux limites CL1, CL2, CL3, CL4. Elle s'exprime par :

$$V(x, y) = \frac{-1}{\sigma h2b} \left[x + 2b \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \lambda_k \epsilon \sinh \lambda_k x \cos \lambda_k y}{\lambda_k \epsilon \cosh \lambda_k a \lambda_k b} \right] \quad (\text{A.3})$$

où $\lambda_k = \frac{k\pi}{b}$

La résistance de la plaque est : $R = 2 \frac{[V(0,0) - V(a,0)]}{I}$ ce qui donne :

$$R = \frac{a}{\sigma hb} \left[1 + \frac{2b^2}{\pi^2 a \epsilon} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sin \lambda_k \epsilon \tanh \lambda_k a \right] \quad (\text{A.4})$$

Annexe B

Composite à 3 plaques

Soit le dispositif composite de la figure (). Le système d'équation correspondant à la

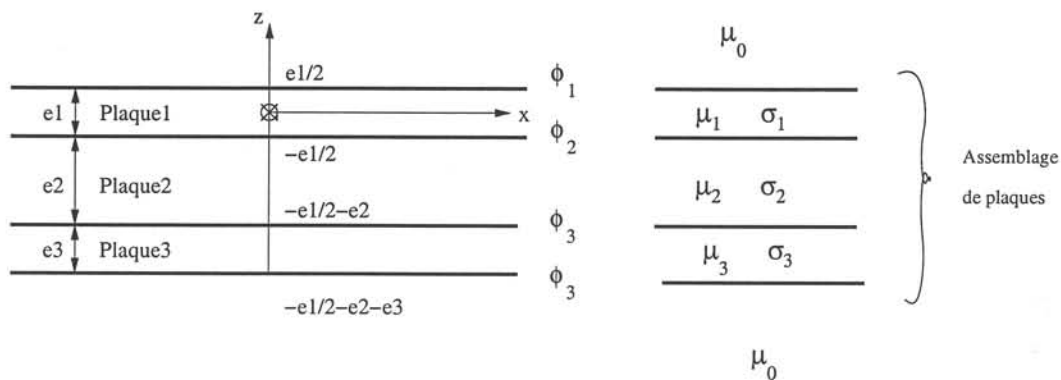


FIG. 2.1 – Dispositif composites à 3 plaques minces.

formulation s'écrit :

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K \\ L \end{bmatrix}$$

Les coefficients de la matrice sont :

$$\begin{aligned} A_{11} &= \frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2} (\alpha_1^2 + \alpha_1 \alpha_2 - \beta_1^2 - \frac{\beta_1^2 \beta_2^2}{(\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_2 + \alpha_3) - \beta_2^2}) \\ A_{12} &= \frac{\beta_1 \beta_2 \beta_3}{(\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_2 + \alpha_3) - \beta_2^2} \\ A_{12} &= A_{21} \\ A_{22} &= \alpha_3 - \frac{\beta_3^2 (\alpha_1 + \alpha_2)}{(\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_2 + \alpha_3) - \beta_2^2} \end{aligned}$$

Et les termes du second membre s'expriment par :

$$\begin{aligned} K &= K_1 + \frac{K_2}{\alpha_1 + \alpha_2} (\beta_1 - \frac{\beta_1 \beta_2^2}{(\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_2 + \alpha_3) - \beta_2^2}) - \frac{\beta_1 \beta_2}{(\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_2 + \alpha_3) - \beta_2^2} \\ L &= K_3 + \frac{\beta_3 (K_3 (\alpha_1 + \alpha_2) + \beta_2 K_2)}{(\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_2 + \alpha_3) - \beta_2^2} \end{aligned}$$

Avec K_1, K_2, K_3 représentant les termes source. Ces termes s'expriment en fonction du champ extérieur \mathbf{H}_j et des paramètres physiques de chaque plaque comme dans le cas de la formulation présentée.

Annexe C

Principe de la méthode PEEC

C.1 Notion d'inductance partielle

Soit une boucle rectangulaire filiforme parcourue par un courant I , les dimensions de la boucle sont supposées négligeables devant la longueur d'onde des phénomènes ce qui permet d'affirmer que le courant est constant le long de la boucle (pas de retard). L'inductance de la boucle Fig.3.1 est définie à partir du flux de l'induction magnétique à

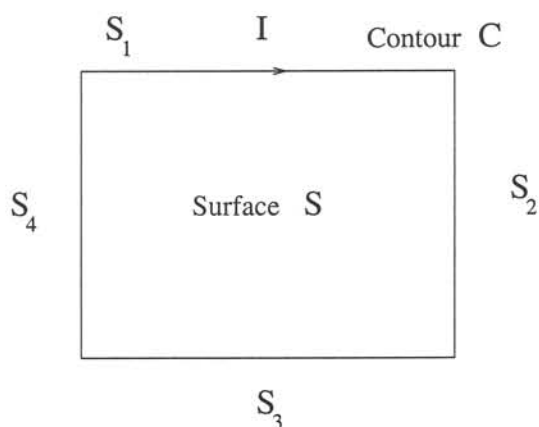


FIG. 3.1 – Boucle rectangulaire filiforme.

travers la surface fermée S par la relation ci-dessous :

$$L_{boucle} = \frac{1}{I} \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (\text{C.1})$$

D'après le théorème de Stokes, on a :

$$L_{boucle} = \frac{1}{I} \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \quad (\text{C.2})$$

Par conséquent, lorsque l'on sait calculer le potentiel vecteur magnétique l'inductance propre s'obtient facilement par la relation (C.2). La notion d'inductance implique un circuit fermé, cependant la circulation du potentiel vecteur le long de la boucle fermée peut être décomposé sur chacun des quatre segments ^[64]. Ainsi, on a :

$$L_{boucle} = \frac{1}{I} \left(\int_{S_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} + \int_{S_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} + \int_{S_3} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} + \int_{S_4} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \right) \quad (\text{C.3})$$

De plus, le potentiel vecteur peut être considéré comme la somme de la contribution de chaque segment :

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_{S_1} + \mathbf{A}_{S_2} + \mathbf{A}_{S_3} + \mathbf{A}_{S_4} \quad (\text{C.4})$$

d'où :

$$L_{\text{boucle}} = \frac{1}{I} \sum_{n=1}^4 \sum_{m=1}^4 \int_{S_n} \mathbf{A}_{S_m} \cdot d\mathbf{l} \quad (\text{C.5})$$

L'inductance partielle d'un segment est alors définie par :

$$L_{\text{segment}_n} = \frac{1}{I} \int_{S_n} \mathbf{A}_{S_n} \cdot d\mathbf{l} \quad (\text{C.6})$$

De même, la mutuelle partielle entre les segments n et m est définie par :

$$M_{\text{segment}_{mn}} = \frac{1}{I} \int_{S_n} \mathbf{A}_{S_m} \cdot d\mathbf{l} \quad (\text{C.7})$$

Et l'inductance de la boucle s'exprime par la relation ci-dessous :

$$L_{\text{boucle}} = \frac{1}{I} \sum_{n=1}^4 \sum_{m=1}^4 M_{\text{segment}_{mn}} \quad (\text{C.8})$$

C.2 Mutuelle partielle entre deux conducteurs filiformes

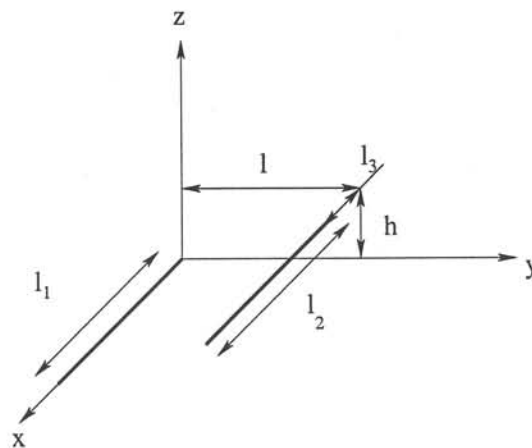


FIG. 3.2 – Mutuelle partielle entre deux fils.

Soient deux conducteurs filaires S_1, S_2 disposés comme sur la figure Fig.(3.2). En l'absence de toute région ferromagnétique, le potentiel vecteur magnétique peut être calculé en tout point de ces conducteurs filaires (à l'aide de la formule intégrale ^[1]).

La mutuelle partielle entre ces deux conducteurs est alors donné par :

$$M_{S_{12}} = \frac{\mu_0}{4\pi} (f(l_3 - l_1, l, h) - f(l_3 + l_2 - l_1, l, h) + f(l_3 + l_2, l, h) - f(l_3, l, h)) \quad (C.9)$$

avec :

$$f(x, l, h) = x \ln \left(x + \sqrt{x^2 + l^2 + h^2} \right) - \sqrt{x^2 + l^2 + h^2} \quad (C.10)$$

En faisant tendre l_3, l, h vers 0 et l_1 vers l_2 , on constate que l'intégrale diverge. L'inductance propre partielle d'un fil infiniment fin est infini. Des auteurs ^[31,64,66] ont défini l'inductance partielle comme étant la mutuelle partielle avec le pourtour interne.

C.2.1 Application numérique

L'inductance partielle d'un conducteur cylindrique de longueur 10cm et de diamètre 1cm vaut : $L = 54.8nH$

