Généralisation d'un théorème de Brown-Douglas-Fillmore aux opérateurs fermés à domaine dense

Mercier Bm Brigitte

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITE DE NICE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE 3ème CYCLE EN MATHEMATIQUES

par

Brigitte MERCIER

GENERALISATION D'UN THEOREME DE BROWN-DOUGLAS-FILLMORE AUX OPERATEURS FERMES A DOMAINE DENSE

Soutenue le 28 Juin 1984 devant le Jury

MM.	P.	GRISVARD	Président
	M.	ZERNER	
	J.P.	LABROUSSE	Examinateurs
	C.	BARDOS	

Table des matières.

— Avant-propos —

Je tiens à remercier J.P Labrousse qui a dirigé mon travail de recherche, et dont les idées originales exposées dans des préprints de l'Université de Nice ont joué un rôle essentiel.

Je remercie P. Grisvard et M. Zerner qui ont bien voulu participer à mon Jury, après avoir patiemment écouté l'exposé de mon travail.

Merci aussi à C. Bardos.

Chapitre 0

— Introduction : Historique et motivation du problème —

Notations :

Dans tout ce qui suit, H désigne un Hilbert séparable, $\mathcal{B}(H)$ est l'algèbre des opérateurs linéaires continus définis sur tout H, $\mathcal{K}(H)$ est l'idéal des opérateurs compacts de H, $\mathcal{A}(H) = \mathcal{B}(H)/\mathcal{K}(H)$ est l'algèbre de Calkin et π désigne l'application-quotient de $\mathcal{B}(H)$ sur $\mathcal{A}(H)$.

La question est la suivante :

> Soient S et T des opérateurs de $\mathcal{B}(H)$, quand peut-on dire que S est unitairement équivalent à une perturbation compacte de T ?

Weyl et Von Neumann ont répondu à cette question pour des opérateurs autoadjoints.

En 1909, Weyl a montré que si S et K sont autoadjoints et K compact, alors les spectres de S et $S+K$ ont les mêmes "points limite", c'est-à-dire les mêmes points d'accumulation et les mêmes valeurs propres isolées de multiplicité infinie [1].

En 1935, Von Neumann a donné une réciproque étonnante à ce résultat [2] :

Si les spectres de S et T, opérateurs autoadjoints, ont les mêmes "points limite", alors il existe un opérateur compact K tel que S+K et T sont unitairement équivalents.

Ainsi, dans le cas des opérateurs autoadjoints, la question de l'équivalence unitaire est entièrement déterminée par l'ensemble des "points limite" du spectre.

Berg a étendu ce résultat aux opérateurs normaux.

En effet, pour démontrer son résultat, Von Neumann le réduisait d'abord au cas des opérateurs diagonaux (c'est-à-dire possédant une base orthonormée de vecteurs propres) en utilisant le fait, dû à Weyl, que tout opérateur autoadjoint peut être rendu diagonal par perturbation compacte.

C'est ce dernier résultat que Berg a étendu aux normaux [3].

Le reste de la démonstration de Von Neumann peut donc s'appliquer sans changement.

Remarquons que la question de l'équivalence unitaire modulo les compacts est précisément celle de l'équivalence unitaire dans l'algèbre de Calkin $A(H)$.

Quant au spectre relatif à $A(H)$, encore appelé spectre essentiel, il s'agit également d'un invariant unitaire.

D'autre part, on a le théorème suivant :

(voir par exemple la démonstration de Fillmore, Stampfli et Williams [4])

Théorème : Si A est normal, $\sigma(\pi(A))$ est formé des points d'accumulation de $\sigma(A)$ et des valeurs propres isolées de multiplicité infinie.

Ainsi le spectre pour des éléments de $A(H)$ déterminés par des opérateurs normaux est un invariant unitaire "complet".

Le stade suivant de généralisation va porter sur des opérateurs T qui déterminent des éléments normaux de l'algèbre de Calkin c'est-à-dire tels que <u>$T^*T - TT^*$ est compact</u>.

On les appelle essentiellement normaux. Ils peuvent se présenter sous la forme de perturbations compactes de normaux, et à ceux-là les résultats précédents peuvent s'appliquer.

Mais tout opérateur essentiellement normal ne s'écrit pas forcément sous cette forme, comme on le verra avec un exemple.

Tout d'abord, quelques <u>rappels</u> :

Soit T un opérateur linéaire continu de H.

On désigne par $R(T)$ l'image de T, $N(T)$ le noyau de T.

T est Fredholm si par définition $R(T)$ est fermé dans H, $\dim N(T) < +\infty$ et $\dim N(T^*) < +\infty$.

On pose $\operatorname{ind} T = \dim N(T) - \dim N(T^*)$.

$\sigma_e(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}\,;\ T - \lambda I \text{ n'est pas Fredholm}\}$.

$\rho_e(T) = \mathbb{C} \setminus \sigma_e(T)$.

Le théorème suivant est fondamental :

<u>Théorème (Atkinson)</u> : T est Fredholm si et seulement si $\pi(T)$ est inversible dans $A(H)$. (ce qu'on note $\pi(T) \in A(H)^{-1}$).

Il s'ensuit que $\sigma_e(T) = \sigma(\pi(T))$ et que si T est Fredholm et K compact, alors $T+K$ est Fredholm.

De plus, $\operatorname{ind}(T+K) = \operatorname{ind} T$, $\forall K \in \mathcal{K}(H)$, de sorte que $\operatorname{ind} T$ ne dépend que de $\pi(T)$.

On a aussi $\operatorname{ind}(ST) = \operatorname{ind} S + \operatorname{ind} T$

$\operatorname{ind} : \mathcal{A}(H)^{-1} \longrightarrow \mathbb{Z}$ est donc un homomorphisme de groupes.

De plus, ind est continu. L'indice est donc constant sur chaque composante connexe de $\rho_e(T)$.

<u>Exemple 1</u>: $Se_n = e_{n+1}$, où $(e_n)_n$ est une base de H.

S est Fredholm, $SS^* - S^*S \in \mathcal{K}(H)$ et pourtant S ne s'écrit pas comme somme d'un normal et d'un compact car $\operatorname{ind} S = -1$.

Donnons un exemple montrant que le spectre n'est pas un invariant unitaire complet pour des éléments normaux de $\mathcal{A}(H)$.

<u>Exemple 2</u> : $Se_n = e_{n+1}$ $\quad Te_n = e_{n+2}$

$\sigma_e(S) = \sigma_e(T) = \overline{\mathbb{D}}$. S et T sont essentiellement normaux.

Mais $\operatorname{ind} S = -1$, $\operatorname{ind} T = -2$ ce qui interdit que S et T soient unitairement équivalents modulo $\mathcal{K}(H)$.

La question des indices apparaît donc de première importance. De fait, le résultat obtenu en 1973 par Brown, Douglas et Fillmore par le biais de la topologie algébrique est le suivant [5].

<u>Théorème (Brown, Douglas, Fillmore)</u>:
Soient S et T dans $\mathcal{B}(H)$, essentiellement normaux.
S et T sont unitairement équivalents modulo les compacts si et seulement si $\sigma_e(S) = \sigma_e(T) = X$ et $\forall \lambda \notin X$, $\operatorname{ind}(S - \lambda I) = \operatorname{ind}(T - \lambda I)$.

ainsi que les 2 corollaires importants:

<u>Corollaire 1</u> : Si T est essentiellement normal et si $\forall \lambda \in \rho_e(T)$, $\operatorname{ind}(T - \lambda I) = 0$, alors $T = N + K$ où N est normal et K compact.

On désigne par $N(H)$ l'ensemble des normaux.

<u>Corollaire 2</u>: L'ensemble $N(H) + K(H)$ est fermé dans $\mathcal{B}(H)$.

Ce théorème est un résultat important en théorie des opérateurs, mais il l'est d'autant plus qu'il fait le lien entre la <u>théorie des opérateurs</u> et la <u>topologie algébrique</u>.
Il s'agit d'un théorème réputé difficile, dont jusqu'à présent il n'a pas été donné de démonstration directe.
Le théorème de Brown, Douglas et Fillmore est souvent utilisé dans la littérature : voici un exemple qui illustre la puissance de ce résultat.

<u>Exemple</u> : On note $\overline{\mathbb{D}}$ le disque-unité fermé et on définit sur $L^2(\overline{\mathbb{D}})$ l'opérateur $M_z : f \longmapsto u.f$ où $u(z) = z$.
et sur (ℓ_2) l'opérateur $U : e_n \longmapsto e_{n+1}$
$U \oplus M_z$ est essentiellement normal sur $(\ell_2) \oplus L^2(\overline{\mathbb{D}})$.
$\sigma_e(M_z) = \sigma_e(U \oplus M_z) = \overline{\mathbb{D}}$, et $\forall \lambda \notin \overline{\mathbb{D}}$, on a :

$$\mathrm{ind}(M_z - \lambda I) = \mathrm{ind}(U \oplus M_z - \lambda I)$$

D'après le théorème de B.D.F, on déduit que :
$\exists$ V unitaire de $L^2(\overline{\mathbb{D}})$ sur $(\ell_2) \oplus L^2(\overline{\mathbb{D}})$ et K compact de $L^2(\overline{\mathbb{D}})$ tels que : $M_z = V^*(U \oplus M_z)V + K$.

Ce résultat a finalement été montré directement par Deddens et Stampfli dans [6], mais avait fait auparavant l'objet de nombreuses tentatives.

L'idée de B.D.F a été d'associer à chaque sous-ensemble compact X de $\mathbb{C}$, l'ensemble des classes d'équivalence unitaire d'éléments normaux de spectre X, noté Ext(X), et de montrer que <u>Ext(X) se comporte comme une théorie d'homologie.</u>
Résoudre le problème originel revient alors à déterminer Ext(X), ce qui est fait par des techniques de topologie algébrique.
Dans l'article de B.D.F [5], la théorie des opérateurs et la topologie algébrique sont étroitement mêlées.
A.M Davie [7] en a donné une démonstration plus simple, en séparant les 2 théories.

Contenu des chapitres :

- Le chapitre I contient le schéma de la démonstration de A.M Davie [7], dégagée par Pearcy [8], qui utilise une simplification due à Arveson [9].

Le rôle essentiel joué par la topologie algébrique y apparaît clairement.

- Le chapitre II démontre le corollaire 1 de Brown, Douglas et Fillmore dans le cas particulier où $\sigma_e(T)$ est dénombrable et possède un nombre fini de points d'accumulation.

- Le chapitre III étend à l'ensemble $\mathcal{C}(H)$ des opérateurs fermés à domaine dense, la notion d'équivalence modulo les compacts (on note $A \underset{\mathbb{K}}{\sim} B$) et par suite, celle d'opérateurs essentiellement normaux. En particulier si $A \underset{\mathbb{K}}{\sim} B$ et si A est semi-Fredholm, alors B est semi-Fredholm, résultat qui généralise le suivant : si A-B est A-compact, et si A est semi-Fredholm, alors B est semi-Fredholm [10].

En ce qui concerne la conservation des indices, on verra qu'il est nécessaire de renforcer l'hypothèse d'équivalence modulo $K(H)$.

L'ensemble des opérateurs fermés essentiellement normaux conserve certaines propriétés des bornés essentiellement normaux, en particulier la stabilité par les perturbations du type $\lambda I+K$, où $\lambda \in \mathbb{C}$ et K est compact. On donnera plusieurs définitions équivalentes pour les essentiellement normaux, en particulier en introduisant la notion de bissecteur d'un opérateur. [11].

On se ramène ainsi aux opérateurs bornés, ce qui autorise à utiliser le résultat de Brown, Douglas, Fillmore.

– Le chapitre IV généralise aux opérateurs fermés à domaine dense les corollaires 1 et 2 du théorème de B.D.F, résultats qui s'énoncent ainsi :

<u>Théorème 1</u> : Soit T dans $\mathcal{C}(H)$, essentiellement normal et dont tous les indices sur la résolvante de Fredholm sont nuls.

Alors T est $\mathbb{K}$-équivalent à un opérateur normal.

<u>Théorème 2</u> : L'ensemble des opérateurs de $\mathcal{C}(H)$ qui sont $\mathbb{K}$-équivalents à des normaux, et dont tous les indices sur la résolvante de Fredholm sont nuls, est un fermé de $\mathcal{C}(H)$.

Chapitre I

— Equivalence Unitaire modulo les Compacts —

Définition I.1. Soient H_1, H_2 des espaces de Hilbert séparables $T_1 \in \mathcal{B}(H_1)$. $T_2 \in \mathcal{B}(H_2)$.

T_1 et T_2 sont unitairement équivalents modulo les compacts s'il existe W unitaire de H_1 dans H_2 et K compact de H_2 dans H_2 tels que :

$$T_2 = W T_1 W^* + K$$

on note $T_1 \mathcal{R} T_2$.

La proposition suivante est élémentaire :

Proposition I.2 : La relation $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

Définition I.3 : Un opérateur T de $\mathcal{B}(H)$ est essentiellement normal si $T^*T - TT^* \in \mathcal{K}(H)$, c'est-à-dire si $\pi(T)$ est normal dans $\mathcal{A}(H)$. On note : $T \in (EN)(H)$.

Théorème I.4 (Brown, Douglas, Fillmore)

Soit H un espace de Hilbert séparable.

$T_1 \in (EN)(H)$. $T_2 \in (EN)(H)$.

Alors $T_1 \mathcal{R} T_2$ si et seulement si $\sigma_e(T_1) = \sigma_e(T_2) = \Lambda$ et $\text{ind}(T_1 - \lambda I) = \text{ind}(T_2 - \lambda I)$, $\forall \lambda \notin \Lambda$.

<u>Définition I.5</u> : Soit X un compact de $\mathbb{C}$.
$n \in \mathbb{N}^*$. on note $H^{(n)}$ la somme directe de n copies de H. Soit $\mathcal{E}(X)$ l'ensemble des opérateurs linéaires continus T agissant sur $H^{(n)}$ pour un certain n, (on note H_T l'espace sur lequel agit T) tels que $\sigma_e(T) = X$ et $T \in (EN)(H_T)$.

Le résultat suivant est contenu dans I.2.

<u>Proposition I.6</u> : La relation $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{E}(X)$ et partitionne donc $\mathcal{E}(X)$ en classes d'équivalence.

<u>Définition I.7</u> :
on pose $Ext(X) = \mathcal{E}(X)/\mathcal{R}$.

L'idée fondamentale de Brown, Douglas, Fillmore est de munir $Ext(X)$ d'une structure de groupe.

<u>Proposition I.8</u> : Soient H_1, H_2 des Hilberts séparables.
$A_1 \in \mathcal{B}(H_1)$. $A_2 \in \mathcal{B}(H_2)$ alors $\sigma_e(A_1 \oplus A_2) = \sigma_e(A_1) \cup \sigma_e(A_2)$.

La démonstration est immédiate.

Suivant cette proposition, si A et B sont dans $\mathcal{E}(X)$, alors $\sigma_e(A \oplus B) = X$. donc $A \oplus B \in \mathcal{E}(X)$.
Ceci nous permet de définir l'opération d'addition dans $Ext(X)$ par : $[A] + [B] = [A \oplus B]$, $A, B \in \mathcal{E}(X)$.

- Cette addition est bien définie car si $A \mathcal{R} A'$ et $B \mathcal{R} B'$ alors $A \oplus B \ \mathcal{R}\ A' \oplus B'$.
- Cette addition est associative et commutative.
- L'étape suivante est de montrer l'existence de l'élément neutre, noté θ et $\theta = [N]$, où $N \in \mathcal{E}(X)$ et $N^*N = NN^*$.

L'existence de tels N est évidente : on considère N un opérateur diagonal, dont les valeurs propres sont denses dans X.
Θ est bien défini, car si N_1 et N_2 sont normaux, avec $\sigma_e(N_1) = \sigma_e(N_2)$ alors $N_1 \mathcal{R} N_2$ (c'est le théorème de Berg)
La démonstration de l'égalité : $\Theta + [A] = [A]$ est délicate, beaucoup moins toutefois que l'existence des éléments symétriques. dont on va donner un schéma de démonstration.
Nous utiliserons 2 résultats préliminaires, le premier étant un théorème de dilatation de Naimark.

> <u>Théorème I.9</u> : Soit X un espace de Hausdorff compact, et soit $\phi : C(X) \to \mathcal{B}(H)$ une application linéaire positive telle que $\phi(1) = I_H$. Alors il existe un Hilbert $K \supset H$ et une représentation Φ de la C^* algèbre $C(X)$ dans $\mathcal{B}(K)$ telle que :
> $$\phi(f) = P_H \, \Phi(f)|_H \quad , \forall f \in C(X)$$
> où P_H désigne la projection orthogonale de K sur H.

Le second résultat est le suivant :

> <u>Théorème I.10</u> : Soit X un espace métrique compact, et soit $\rho : C(X) \longrightarrow \mathcal{A}(H)$ une application linéaire positive telle que $\rho(1) = 1_{\mathcal{A}(H)}$. Alors il existe une application linéaire positive ψ de $C(X)$ dans $\mathcal{B}(H)$ telle que : $\psi(1) = I_H$ et $\pi \circ \psi = \rho$.

La démonstration du théorème I-10 utilise une succession de lemmes.

Lemme I-11. Soit E l'espace topologique $\{-1,+1\}\times\{-1,+1\}\times\cdots$ et soit $\tau : C(E) \to \mathcal{A}(H)$ une application linéaire positive telle que $\tau(1) = 1_{\mathcal{A}(H)}$. Alors il existe une application linéaire positive $\phi : C(E) \to \mathcal{B}(H)$ telle que :

$$\phi(1) = 1_H \quad \text{et} \quad \pi \circ \phi = \tau .$$

schéma :

$$\begin{tikzcd} C(E) \arrow[rr, "\tau"] \arrow[dr, dashed, "\phi"'] & & \mathcal{A}(H) \\ & \mathcal{B}(H) \arrow[ur, "\pi"'] & \end{tikzcd}$$

démonstration : voir [7].

Lemme I-12. Soit X un espace métrique compact et soit $E = \{-1,+1\}\times\{-1,+1\}\times\cdots$ Alors il existe des applications linéaires positives $\eta : C(X) \to C(E)$ $\quad \eta(1) = 1$ et $\sigma : C(E) \to C(X)$ $\quad \sigma(1) = 1$ telles que $\sigma \circ \eta = 1_{C(X)}$.

schéma :

$$\begin{tikzcd} C(X) \arrow[rr, "\eta"] \arrow[dr, "1"'] & & C(E) \arrow[dl, "\sigma"] \\ & C(X) & \end{tikzcd}$$

démonstration : voir [7]

Le théorème I-10 se visualise ainsi :

$$\begin{tikzcd} C(X) \arrow[rr, "\rho"] \arrow[dr, dashed, "\psi"'] & & \mathcal{A}(H) \\ & \mathcal{B}(H) \arrow[ur, "\pi"'] & \end{tikzcd}$$

Pour établir l'existence de Ψ, on pose $\tau = \rho \circ \sigma$ et le lemme I.11 donne l'existence de ϕ telle que $\pi \circ \phi = \tau$.
on pose $\Psi = \phi \circ \eta$. alors $\pi \circ \Psi = \pi \circ \phi \circ \eta = \tau \circ \eta = \rho \circ \sigma \circ \eta = \rho$ en utilisant le lemme I.12. □

Théorème I.13 : $(Ext(X), +)$ est un groupe abélien.

démonstration : Il reste à voir si A étant dans $\mathcal{T}(X)$, il existe toujours B dans $\mathcal{T}(X)$ tel que : $A \oplus B \ \mathcal{R} \ N$ où $N \in \mathcal{T}(X)$ et $N^*N = NN^*$.

$\pi(A)$ est normal et $\sigma_e(A) = \sigma_{A(H_A)}(\pi(A)) = X$.
Il existe donc un C^* isomorphisme d'algèbre ρ de $C(X)$ sur la C^* sous-algèbre engendrée par $\pi(A)$ et $1 = \pi(I)$ telle que $\rho(u) = \pi(A)$ (où on désigne par $u : z \in X \mapsto z$) et $\rho(1) = 1$.
D'après le théorème I-10 il existe donc une application linéaire positive $\Psi : C(X) \to \mathcal{B}(H_A)$ telle que $\Psi(1) = I$ et $\rho = \pi \circ \Psi$.
Puisque $\rho(u) = \pi(A) = \pi \circ \Psi(u)$, on a :

(1) $\quad \Psi(u) = A + K \quad$, où $K \in \mathcal{K}(H_A)$.

D'autre part, f et g étant dans $C(X)$,

$$\pi(\Psi(fg) - \Psi(f)\Psi(g)) = \rho(fg) - \rho(f)\rho(g) = 0$$

d'où :

(2) $\quad \Psi(fg) - \Psi(f)\Psi(g) \in \mathcal{K}(H_A) \quad , \quad \forall f, g \in C(X).$

On a aussi : $\pi(\psi(f)) = \rho(f) = 0 \iff f = 0$

Il en résulte que :

(3) $$\psi(f) \in \mathcal{K}(H_A) \iff f = 0 .$$

On applique le théorème I.9 à l'application positive ψ

$\psi : C(X) \longrightarrow \mathcal{B}(H_A)$ pour obtenir l'existence d'un espace de Hilbert $\mathcal{K} \supset H_A$ (et qui est séparable, puisque $C(X)$ est séparable) et une représentation Φ de $C(X)$ dans $\mathcal{B}(\mathcal{K})$ telle que : $\forall f \in C(X)$, $\psi(f) = P_{H_A} \Phi(f)|_{H_A}$.

Supposons maintenant que S et T sont dans $\Phi(C(X))$.

$$S = \Phi(f) \qquad T = \Phi(g) \qquad \text{où } f, g \in C(X).$$

Alors en notant $P = P_{H_A}$, on a d'après (2) :

$$(PSTP - PSPTP)|_{H_A} = \psi(fg) - \psi(f)\psi(g) \in \mathcal{K}(H_A).$$

Et puisque P est identiquement nulle sur $\mathcal{K} \ominus H_A$,

$$PSTP - PSPTP \in \mathcal{K}(\mathcal{K})$$

En prenant $S = T^*$, on obtient :

$$PT^*(1-P)TP \in \mathcal{K}(\mathcal{K})$$

D'où on tire que :

$$(1-P)TP \in \mathcal{K}(\mathcal{K}) \quad , \quad \forall T \in \Phi(C(X)).$$

En particulier $(1-P)T^*P \in \mathcal{K}(\mathcal{K})$. D'où : $\forall T \in \Phi(C(X))$

(4) $$PT - TP = PT(1-P) - (1-P)TP \in \mathcal{K}(\mathcal{K}).$$

On écrit ensuite que : $\mathcal{K} = H_A \oplus H_A^{\perp}$, et d'après (4) :

$\forall T \in \Phi(C(X))$,

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix}$$ où T_{12} et T_{21} sont des opérateurs compacts.

En particulier $\Phi(u) = M$ et :

$M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}$. M est normal et d'après ce qui précède, M_{12} et M_{21} sont compacts, $\Psi(u) = PMP = M_{11}$

(1) donne alors : $M_{11} = A + K$, où $K \in \mathcal{K}(H_A)$.

Posons $B' = M_{22}$. alors $A \oplus B' \,\mathcal{R}\, M$.

$\sigma_e(M) \subset \sigma(M) = \sigma(\Phi(u)) \subset \operatorname{Im} u = X$.

$\sigma_e(M) = \sigma_e(A) \cup \sigma_e(B')$.

$\sigma_e(A) = X$.

dont on déduit que $\sigma_e(M) = X$, et ensuite $\sigma_e(B') \subset X$.

Soit B un opérateur de $\mathcal{B}(H)$ tel que : $B \,\mathcal{R}\, B' \oplus N$.

Alors : $N \,\mathcal{R}\, M \oplus N \,\mathcal{R}\, A \oplus B' \oplus N \,\mathcal{R}\, A \oplus B$.

Ceci montre que $[A] + [B] = \Theta$.

$(\operatorname{Ext}(X), +)$ est donc un groupe abélien. $\square$

Il s'agit maintenant d'identifier $\operatorname{Ext}(X)$.

<u>Définition I.14</u> : Soit X un sous-ensemble compact de $\mathbb{C}$.

On appelle premier groupe de cohomotopie, et on note $\pi^1(X)$, le groupe $C(X)^{-1}$ des éléments inversibles de $C(X)$ quotienté par la composante connexe de l'identité, c'est-à-dire par $\{e^f ; f \in C(X)\}$.

La proposition suivante est un résultat topologique.

On considère l'ensemble des composantes connexes bornées de $\mathbb{C} \setminus X$ et on prend un point dans chacune. On obtient Λ, ensemble dénombrable.

Proposition I-15 : Soit Λ l'ensemble défini précédemment.

$$\forall f \in C(X)^{-1}, \quad [f] = \prod_{\substack{i\in I \\ (I \text{ fini})}} [(z-\lambda_i)^{m_i}] \quad \text{où } \lambda_i \in \Lambda, \; m_i \in \mathbb{Z}.$$

De cette proposition découle que si h est un homomorphisme de groupe de $\Pi^1(X)$ dans $\mathbb{Z}$, alors h est entièrement déterminé par l'ensemble dénombrable $(h[z-\lambda])_{\lambda\in\Lambda}$.
On note $G(X) = \mathrm{Hom}(\Pi^1(X), \mathbb{Z})$ le groupe de ces homomorphismes. D'après ce qui précède, $G(X)$ est l'ensemble de toutes les façons d'associer un entier relatif à chaque "trou" de X.

Définition I-16 :

En vertu de la proposition I.15, on peut définir l'application :

$i : \mathrm{Ext}(X) \longrightarrow G(X)$

en posant : $i([A])([z-\lambda_j]) = \mathrm{ind}(A-\lambda_j)$, $\lambda_j \in \Lambda$, $[A] \in \mathrm{Ext}(X)$.

où $\mathrm{ind}(A-\lambda_j)$ est l'indice de Fredholm de $A-\lambda_j$.

On vérifie aisément que i est un homomorphisme de groupes.

Théorème I.17 :

$i : \mathrm{Ext}(X) \longrightarrow G(X)$ est un isomorphisme de groupes.

C'est la partie la plus délicate de la démonstration. Elle est détaillée dans [7] par Davie.

Le théorème de B.D.F est alors montré :

Soient $S, T \in \mathcal{C}(X)$ et $\operatorname{ind}(S-\lambda) = \operatorname{ind}(T-\lambda)$, $\forall \lambda \notin X$.

on désire montrer que $[S] = [T]$.

D'après le théorème I.17, il suffit de vérifier que :

$$i([S]) = i([T])$$

c'est-à-dire $i([S])([z-\lambda_j]) = i([T])([z-\lambda_j])$, $\forall \lambda_j \in \Lambda$.

autrement dit : $\operatorname{ind}(S-\lambda_j) = \operatorname{ind}(T-\lambda_j)$, $\forall \lambda_j \in \Lambda$.

ce qui est vrai. $\square$

Chapitre II.

– Démonstration du théorème de Brown, Douglas, Fillmore dans le cas particulier où $\sigma_e(T)$ est dénombrable et possède un nombre fini de points d'accumulation –

Remarques : 1° La condition des indices est implicite car $\rho_e(T)$ est connexe.

2° $\sigma_e(T)$ étant dénombrable, $\sigma(T)$ est au plus dénombrable : en effet $\rho_e(T) = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$ où C_n désigne les composantes connexes de $\rho_e(T)$. Les C_n sont des ouverts, et sur chaque C_n l'indice est constant. Plus précisément, sur chaque C_n, $\dim N(T-\lambda)$ et $\operatorname{codim} R(T-\lambda)$ sont constantes, sauf en un nombre dénombrable de points $(\mu_{n_j})_j$. (voir par ex. [12]). Soit $(\mu_n)_n = \bigsqcup_n (\mu_{n_j})_j$.
Dans notre cas, $\rho_e(T)$ étant connexe, on a :

$$0 = \dim N(T-\lambda) = \operatorname{codim} R(T-\lambda), \quad \forall \lambda \in \rho_e(T)\setminus\{(\mu_n)_n\}$$

et $\sigma(T) = \sigma_e(T) \sqcup (\sigma(T)\cap\rho_e(T)) = \sigma_e(T) \sqcup \{(\mu_m)_m\}$
ce qui montre que $\sigma(T)$ est dénombrable.

§ 1 – Cas où $\sigma_e(T)$ est fini.

On envisage d'abord le cas simple où $\sigma_e(T)$ est réduit à un point.

Proposition II.1.1 : Soit $T \in \mathcal{B}(H)$, essentiellement normal et tel que $\sigma_e(T) = \{\lambda_1\}$. Alors $T = \lambda_1 I + K$, où $K \in \mathcal{K}(H)$.

démonstration : Faisons $\lambda_1 = 0$ dans un premier temps.

T est un opérateur de Riesz.

D'après la décomposition de West [13], $T = A + K$ où A est quasinilpotent et K est compact.

$\pi(A)$ étant quasinilpotent et normal dans $\mathcal{A}(H)$, est nul.

T est donc compact.

Si $\lambda_1 \neq 0$, $T - \lambda_1 I \in (EN)(H)$ et $\sigma_e(T - \lambda_1 I) = \{0\}$.

$T - \lambda_1 I$ est compact, d'après ce qui précède. □

<u>Remarque</u> : Le résultat de II.1.1 fournit une condition suffisante pour qu'un opérateur de Riesz soit compact.

<u>Proposition II.1.2</u> : Soit $T \in (EN)(H)$, de spectre essentiel fini $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N\}$. Alors il existe une suite $(P_n)_{1 \leq n \leq N}$ de projections orthogonales, mutuellement orthogonales, de somme l'identité de H et telles que $T - \sum_{n=1}^{N} \lambda_n P_n$ est compact.

La démonstration de II.1.2 utilise les lemmes suivants :

<u>Lemme II.1.3</u> : Soit $T \in (EN)(H)$; $\sigma_e(T) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_N\}$ alors $\pi(T) = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n E_n$ où $E_n E_m = \delta_{n,m} E_n$, $E_n^* = E_n$ et $\sum_{n=1}^{N} E_n = \pi(I)$

($\delta_{n,m}$ symbole de Kronecker)

démonstration : on considère les fonctions caractéristiques des λ_i. (supposés tous différents)

$$\tau_i = \begin{cases} 1 & \text{en } \lambda_i \\ 0 & \text{en } \lambda_j, j \neq i \end{cases} \qquad i = 1 \text{ à } N.$$

$\tau_i \in C(\sigma(\pi(T)))$. Considérons ψ l'*-homomorphisme de $C(\sigma(\pi(T)))$ dans $A(H)$ défini par $\psi(1) = \pi(I)$ et $\psi(u) = \pi(T)$ (où $u(z) = z$, $\forall z \in \sigma_e(T)$), d'image la C^*-algèbre engendrée par $\pi(I)$ et $\pi(T)$. [14]

$\tau_i \tau_j = \delta_{ij} \tau_i \qquad \tau_i^* = \tau_i \qquad \sum_{i=1}^{N} \tau_i = 1 \qquad \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \tau_i = u$

on en déduit les mêmes propriétés pour $(E_i)_{1 \leq i \leq N}$. □

Lemme II.1.4 [15], [16]

Soit E un élément idempotent autoadjoint de $A(H)$. Alors il existe une projection orthogonale P de H dans H telle que $\pi(P) = E$.

---

démonstration de II.1.2.

Par récurrence sur N : si $N = 1$, c'est la proposition II.1.1.

si $N \geq 2$. $\pi(T) = \sum_{n=1}^{N+1} \lambda_n E_n$, où $E_n E_m = \delta_{n,m} E_n$, $E_n^* = E_n$ et $\sum_{n=1}^{N+1} E_n = 1$

On pose $E = \sum_{n=1}^{N} E_n$. E est idempotent, autoadjoint.

D'après le lemme II.1.4, il existe P projection orthogonale de H telle que $\pi(P) = E$.

On considère le commutant de E dans $A(H)$, C_1, et l'idéal de C_1 engendré par E, $C_2 = C_1.E$. C_1 et C_2 sont deux C^* sous algèbres de $A(H)$ d'unité respective $\pi(I)$ et E.

Posons $B = \pi(TP) = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n E_n$.

$B \in C_2$, B est normal dans C_2 et $\sigma_{C_2}(B) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$

On montre ensuite que C_2 est à un *isomorphisme près l'algèbre de Calkin de $P(H)$: $C_2 \simeq \mathcal{A}(P(H))$.

Il s'agit d'une succession de lemmes techniques très simples.

Soit $B_2(H) = \{PAP ; A \in B(H)\}$ l'ensemble des compressions de tous les opérateurs de $B(H)$.

Lemme II.1.6 : Il existe un *isomorphisme d'algèbres φ de $B_2(H)/B_2(H) \cap K(H)$ dans $B_2(H) + K(H)/K(H)$.

$$\begin{tikzcd}
B_2(H) \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "P"'] & B_2(H)+K(H) \arrow[r, two heads, "\pi"] & B_2(H)+K(H)/K(H) \\
B_2(H)/B_2(H)\cap K(H) \arrow[urr, "\varphi"'] & &
\end{tikzcd}$$

Lemme II.1.7 : $C_2 = B_2(H) + K(H)/K(H)$.

Lemme II.1.8 : Il existe un *isomorphisme d'algèbres

$$\Phi : B_2(H)/B_2(H) \cap K(H) \longrightarrow B(P(H))/K(P(H))$$

Lemme II.1.9 : $\varphi \circ \Phi^{-1} : B(P(H))/K(P(H)) \longrightarrow C_2$ est un *isomorphisme d'algèbres.

On applique l'hypothèse de récurrence à $B' = \Phi \circ \varphi^{-1}(B)$ et aux $E'_n = \Phi \circ \varphi^{-1}(E_n)$ qui sont des éléments de $\mathcal{A}(P(H))$.

On obtient une suite $(P'_n)_{1 \leq n \leq N}$ de projections orthogonales mutuellement orthogonales, de somme l'identité de $P(H)$ et telle que $\pi(P'_n) = E'_n$.

Si $P_n = P'_n P$ ($n = 1$ à N), on voit que $(P_n)_{1 \leq n \leq N}$ est une suite de projections orthogonales, mutuellement orthogonales, telles que $\pi(P_n) = E_n$. On prend $P_{N+1} = I - \sum_{n=1}^{N} P_n$ □

§ 2 - Cas où $\sigma_e(T)$ est dénombrable et possède un nombre fini de points d'accumulation.

On suppose que tous les éléments de la suite sont distincts.

Proposition II.2.1 : Soit $T \in (EN)(H)$, de spectre essentiel une suite $(\lambda_n)_{n \geq 0}$ admettant pour seul point d'accumulation $\lambda_0 = 0$.

Alors il existe une suite $(P_n)_{n \geq 1}$ de projections orthogonales, mutuellement orthogonales, telles que la série $\sum_{n \geq 1} \lambda_n P_n$ soit uniformément convergente dans $\mathcal{B}(H)$, et $T - \sum_{n \geq 1} \lambda_n P_n$ est compact.

démonstration: Comme dans le cas fini, on démontre les lemmes suivants :

Lemme II.2.2 : Sous les hypothèses précédentes, il existe une suite $(E_n)_{n \geq 1}$ d'éléments de $\mathcal{A}(H)$ tels que :
$E_n E_m = \delta_{n,m} E_n$, $E_n^* = E_n$ et $\pi(T) = \sum_{n \geq 1} \lambda_n E_n$.

démonstration de II.2.2 :

on pose $\mathcal{E}_n = \begin{cases} 1 \text{ en } \lambda_n \\ 0 \text{ en } \lambda_m \neq \lambda_n \end{cases}$ $\quad \mathcal{E}_n \in \mathcal{C}(\sigma(\pi(T)))$, $\forall n \in \mathbb{N}$

et $\mathcal{E}_n \mathcal{E}_m = \delta_{n,m} \mathcal{E}_n$, $\mathcal{E}_n^* = \mathcal{E}_n$. Soit $u : z \mapsto z$.

$\| u - \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \mathcal{E}_n \| = \sup_{k > N} |\lambda_k|$. Comme $\lim_{k \to +\infty} \lambda_k = 0$, on en déduit que $u = \sum_{n \geq 1} \lambda_n \mathcal{E}_n$

On considère ensuite l'$\ast$ homomorphisme $\Psi : C(\sigma(\pi(T))) \to A(H)$ qui à u associe $\pi(T)$ et à 1 associe $\pi(I)$. La suite définie par :

$E_n = \Psi(\mathcal{E}_n)$ convient. □

<u>Lemme II.2.3</u> : $(E_n)_n$ étant une suite d'éléments idempotents, autoadjoints, mutuellement orthogonaux de $A(H)$, il existe une suite $(P_n)_n$ de projections orthogonales, mutuellement orthogonales de $B(H)$ telles que $\pi(P_n) = E_n$.

---

démonstration de II.2.3 : [15] et [16]

on construit la suite $(P_n)_n$ par induction.

D'après II.1.4, il existe P_1 projection orthogonale telle que $\pi(P_1) = E_1$. On obtient le $(n+1)^{\text{ème}}$ terme à partir des n premiers en répétant la même construction que II.1.4 avec pour espace de Hilbert $\operatorname{Ker}(P_1 + P_2 + \cdots + P_n)$. □

<u>Lemme II.2.4</u> : Avec les notations précédentes, la série $\sum_{n \geq 1} \lambda_n P_n$ est uniformément convergente.

démonstration de II.2.4 :

1° on peut supposer $(|\lambda_n|)_{n\geq 1}$ décroissante.

2° $(|\lambda_n|)_{n\geq 1}$ converge vers 0.

3° on vérifie aisément que : $\forall p,q \quad \left\| \sum_{n=p}^{q} \frac{\lambda_n}{|\lambda_n|} P_n \right\| \leq 1$.

1, 2, 3 entraînent la convergence de $\sum_{n\geq 1} \lambda_n P_n$. On pose :

$$V_{p,q} = \sum_{n=p}^{q} \frac{\lambda_n}{|\lambda_n|} P_n. \qquad \text{si } p \leq q. \qquad \| V_{p,q} \| \leq 1$$

En remarquant que :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=p}^{q} \lambda_n P_n &= |\lambda_p| V_{p,p} + |\lambda_{p+1}| \left(V_{p,p+1} - V_{p,p}\right) + \dots + |\lambda_q| \left(V_{p,q} - V_{p,q-1}\right) \\
&= V_{p,p} \left(|\lambda_p| - |\lambda_{p+1}|\right) + V_{p,p+1} \left(|\lambda_{p+1}| - |\lambda_{p+2}|\right) + \dots + V_{p,q-1}\left(|\lambda_{q-1}| - |\lambda_q|\right) \\
&\quad + |\lambda_q| V_{p,q}
\end{aligned}$$

d'où $\left\| \sum_{n=p}^{q} \lambda_n P_n \right\| \leq |\lambda_p|$ ce qui montre que $\left(\sum_{n=1}^{p} \lambda_n P_n\right)_p$ est de Cauchy dans $\mathcal{B}(H)$. □

La proposition II.2.1 est maintenant démontrée : d'après ce qui précède

$$\pi(T) = \sum_{n\geq 1} \lambda_n \pi(P_n) = \pi\left(\sum_{n\geq 1} \lambda_n P_n\right)$$

ainsi $T - \sum_{n\geq 1} \lambda_n P_n$ est compact. □

<u>Remarque</u> : si $\lim_n \lambda_n = \lambda_0 \neq 0$, on obtient :

$$T = \lambda_0 I + \sum_{n\geq 1} (\lambda_n - \lambda_0) P_n + \text{compact}.$$

On peut généraliser ce résultat à N points d'accumulation.

<u>Proposition II.2.5</u> : Soit $T \in (EN)(H)$, dont le spectre essentiel est formé d'une suite possédant N points d'accumulation. $\lambda_0, \dots, \lambda_{N-1}$. Alors $T \in N(H) + \mathcal{K}(H)$.

On remarque au préalable qu'on peut réindicer la suite $(\lambda_n)_n$ pour que $(\lambda_{Np})_p$ converge vers $\lambda_0, \dots, (\lambda_{Np+k})_p$ converge vers λ_k $\dots (\lambda_{Np+(N-1)})_p$ converge vers λ_{N-1}.

<u>démonstration de II.2.5 :</u>

on considère les fonctions caractéristiques τ_k de $(\lambda_{Np+k})_p$ et on pose $E_k = \Psi(\tau_k)$ avec les notations habituelles, $k = 0$ à $N-1$

On a : $\sum_{k=0}^{N-1} E_k = \pi(I)$, $E_k E_{k'} = \delta_{k,k'} E_k$, $E_k^* = E_k$.

On note P_k projections orthogonales telles que $\pi(P_k) = E_k$

$P_k P_{k'} = \delta_{k,k'} P_k$ en imposant $\sum_{n=0}^{N-1} P_n = I$.

$P_k T P_k$ est normal dans $A(H)$, $\sigma_e(P_k T P_k) = \{0\} \cup (\lambda_{Np+k})_p$

si $\lambda_k \neq 0$, on réindice la suite $(\lambda_{Np+k})_p$.

la suite des valeurs de $\sigma_e(P_k T P_k)$ possède pour seul point d'accumulation λ_k. D'après II.2.1, on a :

$$P_k T P_k = \sum_{p \geq 0} (\lambda_{np+k} - \lambda_k) Q_{np+k} + \lambda_k I + K_k$$

où les Q_{np+k} sont des projections orthogonales, mutuellement orthogonales.

$H = P_0(H) \oplus \cdots \oplus P_{N-1}(H)$. Suivant cette décomposition,

$$T = \begin{pmatrix} P_0 T P_0 & \cdots & & P_0 T P_{N-1} \\ P_1 T P_0 & \ddots & & P_1 T P_{N-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ & P_i T P_j & \ddots & \\ P_{N-2} T P_0 & & \ddots & \\ P_{N-1} T P_0 & & & P_{N-1} T P_{N-1} \end{pmatrix}$$

or $\pi(P_i T P_j) = E_i \pi(T) E_j = \Psi(\tau_i u \tau_j) = 0$ si $i \neq j$.

Compte tenu de ceci, $T = \bigoplus_{k=0}^{N-1} P_k T P_k + K$, où $K \in \mathcal{K}(H)$.

or $P_k T P_k = N_k + K_k$ où N_k est normal, K_k compact.

et $T = \bigoplus_{k=0}^{N-1} N_k \bigoplus_{k=0}^{N-1} K_k + K$ appartient à $N(H) + K(H)$. $\square$

Chapitre III

– Notion de $\mathbb{K}$-équivalence dans $\mathcal{C}(H)$ –

§ III-0 – Définitions et rappels.

Soit H un Hilbert sur $\mathbb{C}$. Si A est un opérateur linéaire de H dans H, on note $R(A)$ l'image de A, $N(A)$ le noyau de A, $\mathcal{D}(A)$ son domaine, $\mathcal{G}(A)$ son graphe c'est-à-dire le sous-ensemble

$$\mathcal{G}(A) = \{(x, Ax) ; x \in \mathcal{D}(A)\} \subseteq H \times H.$$

Si $\mathcal{G}(A)$ est fermé, on désigne par $P_{\mathcal{G}(A)}$ la projection orthogonale de $H \times H$ sur $\mathcal{G}(A)$.

Définition III-0-1 : Soient A et B des opérateurs linéaires fermés. on note $g(A, B) = \| P_{\mathcal{G}(A)} - P_{\mathcal{G}(B)} \|$.
On désigne par $\mathcal{C}(H)$ l'ensemble des opérateurs linéaires fermés de domaine dense, muni de la métrique induite par g.

Dans ce qui suit, on rappelle une série de résultats qui se trouvent dans [11] et [17].

Lemme III-0-2 : Si A est fermé, alors $R_A \doteqdot (1 + A^*A)^{-1}$ existe en tant qu'opérateur borné autoadjoint de domaine tout H. L'opérateur AR_A est borné, et $\| R_A \| \leq 1$, $\| AR_A \| \leq 1$.

<u>Lemme III-0-3</u> : Si A est fermé, $AR_A u = R_{A^*} A u \quad , \forall u \in \mathcal{D}(A)$.

$$(AR_A)^* = A^* R_{A^*}.$$

<u>Lemme III-0-4</u> : Si A est fermé, alors :

$$P_{g(A)} = \begin{pmatrix} R_A & A^* R_{A^*} \\ AR_A & 1 - R_{A^*} \end{pmatrix}$$

R_A étant un opérateur positif (c'est-à-dire autoadjoint, de spectre inclus dans $\mathbb{R}^+$), R_A admet une racine carrée $S_A = R_A^{\frac{1}{2}}$.

<u>Lemme III-0-5</u> : $S_A : H \longrightarrow \mathcal{D}(A)$ est surjectif.

On utilisera les égalités suivantes :

$\| AS_A u \|^2 + \| S_A u \|^2 = \| u \|^2 \quad , \quad \forall u \in H$.

$A^* S_{A^*} AS_A = 1 - R_A$.

$S_{A^*} AS_A = AR_A$

$\| AR_A u \|^2 + \| (R_A - \frac{1}{2}) u \|^2 = \frac{1}{4} \| u \|^2 , \ \forall u \in H$.

Ainsi que la majoration suivante :

Si $A, B \in \mathcal{C}(H)$ et $C \in \mathcal{B}(H)$, alors :

$$g(A+C, B+C) \leq \left(\frac{\| C \|}{2} + \sqrt{1 + \frac{\| C \|^2}{4}} \right)^2 g(A, B).$$

<u>Lemme III-0.6</u> : Soient A, B fermés, à domaine dense.

$$P_{g(A)} - P_{g(B)} = U_B \begin{pmatrix} 0 & B^* S_{B^*} S_{A^*} - S_B A^* S_{A^*} \\ B S_B S_A - S_{B^*} A S_A & 0 \end{pmatrix} U_A$$

où $U_T = \begin{pmatrix} S_T & T^* S_{T^*} \\ T S_T & -S_{T^*} \end{pmatrix}$ opérateur unitaire de $H \times H$.

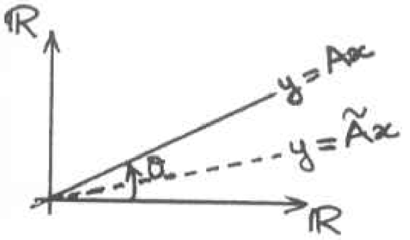
<u>Définition III-0.7</u> : Soient A, B fermés à domaines denses.

$$s^2(A,B) = \|S_A - S_B\|^2 + \|AS_A - BS_B\|^2 + \|S_{A^*} - S_{B^*}\|^2 + \\ + \|A^* S_{A^*} - B^* S_{B^*}\|^2 .$$

s définit une métrique sur l'ensemble des opérateurs fermés à domaine dense et $g(A,B) \leq s(A,B)$.

<u>Définition III-0.8</u> : Soit $A \in \mathcal{C}(H)$. On appelle bisecteur de A l'opérateur borné défini par : $\widetilde{A} = A S_A (1 + S_A)^{-1}$.

<u>Remarque</u> : On justifie aisément l'appellation de "bisecteur" dans le cas où $H \simeq \mathbb{R}$.



$$Ax = \operatorname{tg} \theta . x \quad \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$$

$$S_A x = \left(1 + \operatorname{tg}^2 \theta\right)^{-\frac{1}{2}} x = \cos\theta . x .$$

d'où $\widetilde{A}x = AS_A(1+S_A)^{-1}x = \dfrac{\sin \theta . x}{1 + \cos\theta} = \operatorname{tg} \dfrac{\theta}{2} x .$

Propriétés du bisecteur :

1° $(\tilde{A})^* = \widetilde{A^*}$

2° $R_{\tilde{A}} = \dfrac{1+S_A}{2}$

3° $\tilde{A}R_{\tilde{A}} = \frac{1}{2} AS_A$

4° $\|\tilde{A}\| \leq 1$ et plus précisément :

(i) si A est borné, $\|\tilde{A}\| = \dfrac{\|A\|}{1+\sqrt{1+\|A\|^2}} < 1$.

(ii) si $\|\tilde{A}\| < 1$, alors A est borné et $\|A\| = \dfrac{2\|\tilde{A}\|}{1-\|\tilde{A}\|^2}$

Proposition III-0-9 :

L'application $A \mapsto \tilde{A}$ est un homéomorphisme entre l'ensemble des opérateurs fermés à domaine dense, muni de la topologie induite par δ, et le sous-ensemble $\{A \in \mathcal{B}(H) ; \|A\| \leq 1$ et $N(1-A^*A) = \{0\}\}$ muni de la topologie usuelle.

L'application inverse est donnée par : $A = 2\tilde{A}(1-\tilde{A}^*\tilde{A})^{-1}$.

Définition : Soit A opérateur fermé à domaine dense.

On pose $c(A) = \operatorname*{Inf}_{\substack{u \in \mathcal{D}(A) \cap N(A)^{\perp} \\ \|u\|=1}} \|Au\|$

c(A) est appelé la conorme de A.

Il est bien connu que R(A) est fermé si et seulement si $c(A) > 0$ et que quel que soit $A \in \mathcal{C}(H)$, $c(A) = c(A^*)$.

§ III-1 – Notion de $\mathbb{K}$-équivalence.

Dans ce paragraphe, on désire étendre aux opérateurs fermés à domaine dense dans H, la notion d'équivalence modulo les compacts connue pour les opérateurs bornés de domaine H :

$$A \sim B \iff A-B \in K(H).$$

Définition III-1-1 : Soient A et B des opérateurs fermés à domaine dense : $A \underset{\mathbb{K}}{\sim} B \iff P_{\mathcal{G}(A)} - P_{\mathcal{G}(B)} \in K(H \times H)$.

La relation de $\mathbb{K}$-équivalence ainsi définie pour les opérateurs fermés à domaine dense est une relation d'équivalence. Dans les 2 lemmes suivants, on va voir qu'elle coïncide sur $\mathcal{B}(H)$ avec la relation habituelle.

Lemme III-1-2 : Soient A et B des opérateurs bornés de domaine H tels que $A-B \in K(H)$. Alors $A \underset{\mathbb{K}}{\sim} B$.

démonstration : D'après III-0-6, il est équivalent de montrer que $BS_BS_A - S_{B^*}AS_A$ et $B^*S_{B^*}S_{A^*} - S_B A^*S_{A^*}$ sont compacts dans H. or $BS_BS_A - S_{B^*}AS_A = S_{B^*}(B-A)S_A$ qui est compact et de même $B^*S_{B^*}S_{A^*} - S_B A^*S_{A^*} = S_B(B^*-A^*)S_{A^*}$ est compact. □

Lemme III.1.3 : Soient $A \in \mathcal{C}(H)$, $B \in \mathcal{B}(H)$.
Si $A \underset{K}{\sim} B$, alors $A \in \mathcal{B}(H)$ et $A-B \in K(H)$.

démonstration : supposons $BS_BS_A - S_{B^*}AS_A$ et $B^*S_{B^*}S_{A^*} - S_B A^* S_{A^*}$ compacts dans H, c'est-à-dire $\mathcal{D}(B)$ et $\mathcal{D}(B^*)$ étant égaux à H, $S_{B^*}(B-A)S_A$ et $S_B(B^* - A^*)S_{A^*}$ compacts dans H.
Comme $S_{B^*}^{-1}$ est borné, on en déduit que $(B-A)S_A$ est compact. On va montrer grâce au lemme suivant que $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(B) = H$.

Lemme III.1.4 : Soient $T, A \in \mathcal{C}(H)$ tels que $\mathcal{D}(A) \supset \mathcal{D}(T)$.
A est T-compact si et seulement si AS_T est compact.

démonstration : Rappelons que T et A étant des opérateurs fermés, à domaines denses dans H, on dit que A est T-compact si et seulement si $\mathcal{D}(A) \supset \mathcal{D}(T)$ et si de toute suite $(u_n)_n$ bornée dans $\mathcal{D}(T)$ muni de la norme du graphe, on peut extraire une sous-suite $(u_{n_k})_k$ telle que $(Au_{n_k})_k$ converge.

1° supposons AS_T compact.
Soit $(u_n)_n$ une suite bornée dans $\mathcal{D}(T)$ pour la norme du graphe. S_T étant surjective de H sur $\mathcal{D}(T)$, il existe une suite $(v_n)_n$ telle que $u_n = S_T(v_n)$.
Comme $\|v_n\|^2 = \|S_Tv_n\|^2 + \|TS_Tv_n\|^2 = \|u_n\|^2 + \|Tu_n\|^2$,

la suite $(v_n)_n$ est bornée dans H.

AS_T est compact, il existe donc une sous-suite $(v_{n_k})_k$ telle que $(AS_T v_{n_k})_k$ converge, c'est-à-dire $(Au_{n_k})_k$ converge.

2º réciproquement, supposons que A est T-compact.

Soit $(v_n)_n$ une suite bornée dans H. S_T étant un opérateur borné, $(S_T v_n)_n$ est bornée dans H.

De l'égalité $\|v_n\|^2 = \|S_T v_n\|^2 + \|TS_T v_n\|^2$, on déduit que $(TS_T v_n)_n$ est bornée dans H. Posons $u_n = S_T v_n$.

$(u_n)_n$ est bornée dans $\mathcal{D}(T)$ pour la norme du graphe.

Il existe donc $(u_{n_k})_k$ sous-suite extraite telle que $(Au_{n_k})_k$ converge. Comme $Au_{n_k} = AS_T v_{n_k}$, AS_T est compact. $\square$

$(B-A)S_A$ étant compact, $B-A$ est A-compact. Or le théorème (1.11) de [10] nous dit que si A et T sont fermés, et si A est T-compact, alors A est $(T+A)$-compact.

$B-A$ est donc B-compact ce qui entraîne en particulier que $\mathcal{D}(A) \supset \mathcal{D}(B)$ c'est-à-dire $\mathcal{D}(A) = H$.

A étant fermé, de domaine H, A est borné, S_A^{-1} aussi et ainsi : $B-A$ est compact. $\square$

Lemme III.1.5 : Soient $A, B \in \mathcal{C}(H)$.

$$A \underset{\mathbb{K}}{\sim} B \iff A^* \underset{\mathbb{K}}{\sim} B^*.$$

démonstration : $\forall T \in \mathcal{C}(H)$, $P_{\mathcal{G}(T^*)} = J\left(1 - P_{\mathcal{G}(T)}\right)J^*$ où $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. ainsi $P_{\mathcal{G}(A^*)} - P_{\mathcal{G}(B^*)} = J\left(P_{\mathcal{G}(B)} - P_{\mathcal{G}(A)}\right)J^*$. $\square$

<u>Lemme III.1.6</u>. Soient $A, B \in \mathcal{C}(H)$.

Si $A-B$ est B-compact, alors $A \underset{\mathbb{K}}{\sim} B$.

démonstration : supposons que $(A-B)S_B$ est compact dans H.

$AS_A = S_{A^*}A$ sur $\mathcal{D}(A)$. Comme S_B envoie H sur $\mathcal{D}(B)$ et que $\mathcal{D}(B) = \mathcal{D}(A)$, on a l'égalité suivante :

$$AS_AS_B - S_{A^*}BS_B = S_{A^*}(A-B)S_B$$

$AS_AS_B - S_{A^*}BS_B$ est donc compact.

L'adjoint de $A^*S_{A^*}S_{B^*} - S_AB^*S_{B^*}$ est l'opérateur :

$S_{B^*}AS_A - BS_BS_A = S_{B^*}(A-B)S_A$ puisque S_A envoie H sur $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(B)$.

$A^*S_{A^*}S_{B^*} - S_AB^*S_{B^*}$ est donc compact. □

<u>Remarque</u>: La notion de $\mathbb{K}$-équivalence généralise strictement celle de compacité relative.

En effet, on va voir dans l'exemple qui suit que si $A \underset{\mathbb{K}}{\sim} B$ alors $A-B$ n'est pas forcément B-compact.

<u>Exemple</u>: H désigne un Hilbert séparable, de base $(e_n)_{n\geq 1}$. on définit A opérateur fermé, à domaine dense par :

$$Ae_{2n} = \sqrt{n}\,.\,e_{2n+1}$$

$$Ae_{2n+1} = (n+1)\,e_{2n+2}\,.$$

A^* est donc donné par : $A^* e_{2n} = n e_{2n-1}$

$A^* e_{2n+1} = \sqrt{n}\, e_{2n}$.

R_A donné par : $R_A e_{2n} = \dfrac{1}{n+1} e_{2n}$

$R_A e_{2n+1} = \dfrac{1}{(n+1)^2+1} e_{2n+1}$

est donc compact et de même R_{A^*} qui est donné par :

$$R_{A^*} e_{2n} = \frac{1}{n^2+1} e_{2n}$$

$$R_{A^*} e_{2n+1} = \frac{1}{n+1} e_{2n+1}$$

La différence $R_A - R_{A^*}$ est donc compacte ce qui montre (on le verra au III.2.3) que $AA^* \underset{K}{\sim} A^*A$.

Cependant $AA^* - A^*A$ n'est pas A^*A-compact car sinon AA^* et A^*A auraient le même domaine.

or $\mathcal{D}(AA^*) = \{x = \sum_{n\geq 1} x_n e_n \in H ; |x_2|^2 + |x_3|^2 + \dots + |n^2 x_{2n}|^2 + |n x_{2n+1}|^2 + \dots < \infty\}$

et $\mathcal{D}(A^*A) = \{x = \sum_{n\geq 1} x_n e_n \in H ; |x_1|^2 + |x_2|^2 + |4x_3|^2 + |2x_4|^2 + |9x_5|^2 + |3x_6|^2 + \dots + |n x_{2n}|^2 + |(n+1)^2 x_{2n+1}|^2 + \dots < +\infty\}$

Soit $x = x_n e_n$ où $x_{2n} = \dfrac{1}{n^2}$, $x_{2n+1} = 0$ $(\forall n \geq 1)$

$x \in \mathcal{D}(A^*A)$ et $x \notin \mathcal{D}(AA^*)$.

Remarque : La notion de K-équivalence a sur celle de compacité relative un avantage supplémentaire : elle passe aux adjoints alors qu'il n'est pas vrai que : $(A-B)S_B \in K(H) \Rightarrow (A^* - B^*)S_{B^*} \in K(H)$

Exemple : Prenons $A - B = T$ où $T S_B$ est compact avec B un opérateur diagonal défini sur une base $(e_n)_n$ de H par :

$$B e_{2p} = p^2 e_{2p}$$
$$B e_{2p+1} = (p+1) e_{2p+1}. \qquad (p \geq 1)$$

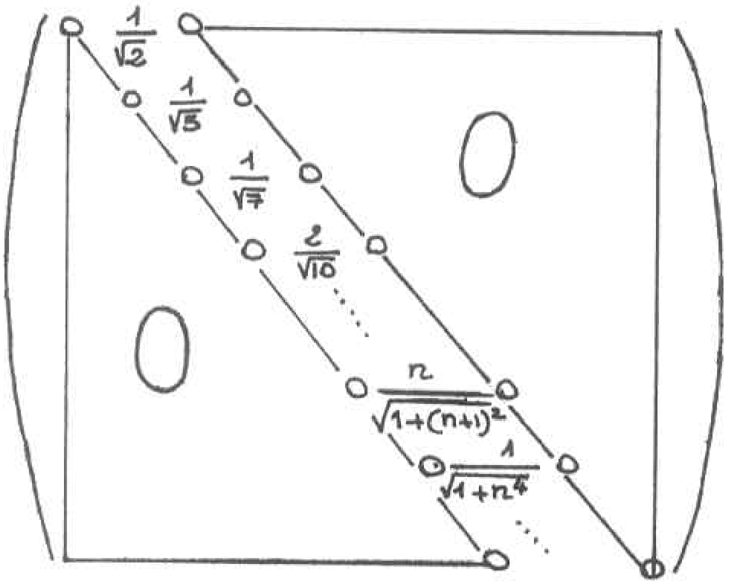
T est un shift pondéré ainsi défini :

$T e_{2p} = p\, e_{2p+1}$

$(p \geq 1)$

$T e_{2p+1} = e_{2p+2}$.

$T^* S_{B^*} =$



$T^* S_{B^*}$ n'est pas compact car un shift pondéré de poids $(\alpha_n)_n$ est compact si et seulement si $\lim_{n \to +\infty} \alpha_n = 0$ [18].

Le théorème qui suit généralise le fait suivant :

Si $A-B$ est compact (ou seulement B-compact) et si A est semi-Fredholm, alors B est semi-Fredholm.

<u>Théorème III-1-7</u> : Soient A et B dans $\mathcal{B}(H)$ tels que $A \underset{K}{\sim} B$.
Si A est semi-Fredholm, alors B est semi-Fredholm.
Si A est Fredholm, alors B est Fredholm.

démonstration:

1° $\underline{\forall u \in N(A)^{\perp}}$, $\| (1 - P_{g(A)}) \{u,0\} \| \geq \dfrac{c(A)}{\sqrt{1+c^2(A)}} \|u\|$ (1.7)

en effet, $1 - P_{g(A)} = \begin{pmatrix} 1 - R_A & A^* R_{A^*} \\ A R_A & R_{A^*} \end{pmatrix}$ d'où :

$(1-P_{g(A)}) \{u,0\} = ((1-R_A)u, AR_A u)$

$\|(1-P_{g(A)}) \{u,0\}\|^2 = \|(1-R_A)u\|^2 + \|AR_A u\|^2$

Comme $A^*AR_A = 1-R_A$, il vient :

$\|(1-P_{g(A)})\{u,0\}\|^2 = \|(1-R_A)u\|^2 + \langle R_A u, (1-R_A)u \rangle$

$= \langle u, (1-R_A)u \rangle = \langle u, A^*AR_A u \rangle = \|AS_A u\|^2$.

or $u \in N(A)^{\perp} \Rightarrow S_A u \in N(A)^{\perp}$. En effet :

$\forall v \in N(A)$, $\langle S_A u, v \rangle = \langle u, S_A v \rangle = \langle u, v \rangle = 0$.

Comme $S_A u \in N(A)^{\perp} \cap \mathcal{D}(A)$ et $\|u\|^2 = \|S_A u\|^2 + \|AS_A u\|^2$

il vient $\|u\|^2 \leq \left(\dfrac{1}{c^2(A)} + 1 \right) \|AS_A u\|^2$ ce qui donne bien l'inégalité voulue.

2° $\underline{\text{Supposons } \dim N(A) < +\infty \text{ et montrons que } \dim N(B) < +\infty}$

(si $\dim N(A) = +\infty$, on raisonne avec A^* et B^*)

Supposons par l'absurde que $\dim N(B) = +\infty$. Alors $N(B) \cap N(A)^{\perp}$ est de dimension infinie.

Soit $(u_n)_n$ une suite orthonormée de $N(B) \cap N(A)^{\perp}$.

$\forall u \in \mathcal{D}(B)$, l'égalité suivante est vérifiée :

$\{0, Bu\} = (P_{g(B)} - P_{g(A)}) \{u, Bu\} + P_{g(A)} \{0, Bu\} - (1-P_{g(A)})\{u,0\}$

Appliquée à la suite $(u_n)_n$, elle donne:

$\{0,0\} = (P_{g(B)} - P_{g(A)}) \{u_n, 0\} - (1 - P_{g(A)}) \{u_n, 0\}$.

$P_{\mathcal{G}(B)} - P_{\mathcal{G}(A)}$ étant un opérateur compact de $H \times H$, il existe une sous-suite encore notée $(u_n)_n$ telle que $(P_{\mathcal{G}(B)} - P_{\mathcal{G}(A)})\{u_n, 0\}$ converge dans $H \times H$. La suite $(1 - P_{\mathcal{G}(A)})\{u_n, 0\}$ étant de Cauchy, en vertu de (1.7) il en est de même de $(u_n)_n$, ce qui est absurde.

3° Montrons que $R(B)$ est fermé dans H.

Comme $\dim (N(B) + N(A))$ est finie, il nous suffit de considérer la restriction de B à $(N(B) + N(A))^{\perp}$.

Soit $(u_n)_n \in (N(B) + N(A))^{\perp} \cap \mathcal{D}(B)$ telle que $(Bu_n)_n$ converge vers un élément f. On va montrer que $(u_n)_n$ est bornée.

Si $(u_n)_n$ n'était pas bornée, il existerait une sous-suite, encore notée $(u_n)_n$ telle que $\|u_n\| \longrightarrow +\infty$.

$$\left\{0, \frac{Bu_n}{\|u_n\|}\right\} = (P_{\mathcal{G}(B)} - P_{\mathcal{G}(A)})\left\{\frac{u_n}{\|u_n\|}, \frac{Bu_n}{\|u_n\|}\right\} + P_{\mathcal{G}(A)}\left\{0, \frac{Bu_n}{\|u_n\|}\right\} + - (1 - P_{\mathcal{G}(A)})\left\{\frac{u_n}{\|u_n\|}, 0\right\}$$

La suite $\left\{\frac{u_n}{\|u_n\|}, \frac{Bu_n}{\|u_n\|}\right\}$ étant bornée, il existe une sous-suite, encore notée $(u_n)_n$, telle que $(P_{\mathcal{G}(B)} - P_{\mathcal{G}(A)})\left\{\frac{u_n}{\|u_n\|}, \frac{Bu_n}{\|u_n\|}\right\}$ converge dans $H \times H$.

D'autre part, $\left\{0, \frac{Bu_n}{\|u_n\|}\right\}$ converge vers $\{0, 0\}$

On en déduit que $(1 - P_{\mathcal{G}(A)})\left\{\frac{u_n}{\|u_n\|}, 0\right\}$ est une suite convergente. L'inégalité (1.7) entraîne la convergence de $\left(\frac{u_n}{\|u_n\|}\right)_n$.

$\frac{u_n}{\|u_n\|} \longrightarrow u$ et $\frac{Bu_n}{\|u_n\|} \longrightarrow 0$. B étant fermé, $u \in \mathcal{D}(B)$ et $Bu = 0$.

Comme $u \in N(B)^{\perp}$, il en résulte que $u = 0$ ce qui est absurde.
La suite $(u_n)_n$ est donc bornée dans H.

$\{0, Bu_n\} = (P_{G(B)} - P_{G(A)})\{u_n, Bu_n\} + P_{G(A)}\{0, Bu_n\} - (1 - P_{G(A)})\{u_n, 0\}$

$\{0, Bu_n\}$ converge vers $\{0, f\}$. On en déduit que $P_{G(A)}\{0, Bu_n\}$ converge vers $P_{G(A)}\{0, f\}$.

D'autre part, il existe une sous-suite, encore notée $(u_n)_n$, telle que $(P_{G(B)} - P_{G(A)})\{u_n, Bu_n\}$ est convergente.

On en déduit encore que $(1 - P_{G(A)})\{u_n, 0\}$ converge et, grâce à (1.7), que u_n converge vers un certain u.

Comme $(Bu_n)_n$ converge vers f et que B est fermé, il en résulte que $u \in \mathcal{D}(B)$ et $Bu = f$. □

L'exemple qui suit montre que si A et B sont des opérateurs de Fredholm $\mathbb{K}$-équivalents, leurs indices ne sont pas nécessairement égaux.

<u>Exemple</u>: Soit A l'opérateur diagonal défini sur une base de H par : $Ae_n = ne_n \quad (n \geq 1)$

A est fermé de domaine dense $\{x = \sum_{n\geq 1} x_n e_n \; ; \sum_{n \geq 1} n^2 |x_n|^2 < +\infty\}$

A est Fredholm et $\operatorname{ind} A = 0$.

Posons $u_0 = \sum_{n \geq 1} n^{-3/2} e_n$. $\quad u_0 \notin \mathcal{D}(A)$.

On pose $B = A$ sur $\mathcal{D}(A)$ et $Bu_0 = 0$.

B est une extension fermée de A, B est Fredholm et $\operatorname{ind} B = +1$.

Bien que $P_{G(A)} - P_{G(B)}$ soit de rang fini, donc compact, les indices de A et B sont différents.

La notion de $\mathbb{K}$-équivalence n'est donc pas assez forte pour entraîner la conservation des indices.

On va donner une condition nécessaire et suffisante pour que, A et B étant 2 opérateurs de Fredholm $\mathbb{K}$-équivalents, leurs indices soient égaux.

On énonce le résultat préparatoire suivant :

> Proposition III.1.8 : Soient A et B dans $\mathcal{C}(H)$ tels que $A \underset{\mathbb{K}}{\sim} B$.
> Alors les opérateurs $1 + A^*B$ et $1 + B^*A$ sont fermés de domaine dense dans H, Fredholm et $(1 + A^*B)^* = 1 + B^*A$.

démonstration : 1º Montrons que $\mathcal{G}(A)^\perp + \mathcal{G}(B)$ est fermé dans $H \times H$ et que $\mathcal{G}(A)^\perp \cap \mathcal{G}(B)$ et $\mathcal{G}(B)^\perp \cap \mathcal{G}(A)$ sont de dimension finie.

$R(1 - P_{\mathcal{G}(A)} + P_{\mathcal{G}(B)}) \subseteq \mathcal{G}(A)^\perp + \mathcal{G}(B)$.

Comme $1 - P_{\mathcal{G}(A)} + P_{\mathcal{G}(B)}$ est Fredholm, son image a une codimension finie, ce qui entraîne que $\mathcal{G}(A)^\perp + \mathcal{G}(B)$ est fermé.

$\mathcal{G}(A) \cap \mathcal{G}(B)^\perp \subseteq N(1 - P_{\mathcal{G}(A)} + P_{\mathcal{G}(B)})$ et de même :

$\mathcal{G}(B) \cap \mathcal{G}(A)^\perp \subseteq N(1 - P_{\mathcal{G}(B)} + P_{\mathcal{G}(A)})$.

Ces 2 inclusions montrent que $\mathcal{G}(A) \cap \mathcal{G}(B)^\perp$ et $\mathcal{G}(B) \cap \mathcal{G}(A)^\perp$ sont de dimension finie.

2º $\dim N(1 + B^*A) < +\infty$ et $R(1 + B^*A)$ est fermé dans H.

$\mathcal{G}(B) + \mathcal{G}(A)^\perp$ étant fermé, $\mathcal{G}(B) + \mathcal{G}(A)^\perp = (\mathcal{G}(B)^\perp \cap \mathcal{G}(A))^\perp$

On vérifie aisément que $\mathcal{G}(B)^\perp \cap \mathcal{G}(A) = \{\{w, Aw\} ; w \in N(1+B^*A)\}$

$\mathcal{G}(B)^\perp \cap \mathcal{G}(A)$ étant de dimension finie, il en est de même de $N(1+B^*A)$.

Montrons que $R(1+B^*A) = N(1+A^*B)^\perp$.

$$f \in N(1+A^*B)^\perp \iff \{f, 0\} \in (\mathcal{G}(A)^\perp \cap \mathcal{G}(B))^\perp$$

$$\iff \begin{cases} f = v + B^* u \\ 0 = Av - u \end{cases} \quad \text{où} \quad \begin{matrix} u \in \mathcal{D}(B^*) \\ v \in \mathcal{D}(A). \end{matrix}$$

$$\iff f = (1+B^*A)v \quad \text{où } v \in \mathcal{D}(B^*A).$$

$R(1+B^*A)$ est donc fermé dans H.

3° $\mathcal{D}(A^*B)$ est dense dans H.

Soit $z \in \mathcal{D}(A^*B)^\perp$. Alors $z \in N(1+A^*B)^\perp = R(1+B^*A)$.

Soit $v_* \in \mathcal{D}(B^*A)$ tel que $z = (1+B^*A)v_*$.

$\forall w \in \mathcal{D}(A^*B)$, $\langle w, (1+B^*A)v_* \rangle = 0$ c'est-à-dire :

$$\langle (1+A^*B)w, v_* \rangle = 0 \quad , \forall w \in \mathcal{D}(A^*B).$$

Ainsi $v_* \in R(1+A^*B)^\perp = N(1+B^*A)$ d'où $z = 0$

4° $(1+A^*B)^* = 1+B^*A$.

L'inclusion $1+B^*A \subseteq (1+A^*B)^*$ est évidente.

Réciproquement, soit $v \in \mathcal{D}((1+A^*B)^*)$.

$\forall u \in \mathcal{D}(1+A^*B)$, $\langle (1+A^*B)u, v \rangle = \langle u, (1+A^*B)^* v \rangle$.

Posons $w = (1+A^*B)^* v$. Alors $w \in N(1+A^*B)^\perp$.

Il existe donc $w_* \in \mathcal{D}(B^*A)$ tel que $w = (1+B^*A)w_*$.

$$\langle u, (1+A^*B)^* v \rangle = \langle u, (1+B^*A) w_* \rangle = \langle (1+A^*B)u, w_* \rangle$$

Il résulte de ceci que : $\langle (1+A^*B)u, v - w_* \rangle = 0$, $\forall u \in \mathcal{D}(A^*B)$

c'est-à-dire $v - w_* \in R(1+A^*B)^\perp = N(1+B^*A)$

ainsi $v \in \mathcal{D}(1+B^*A)$.

5° L'opérateur $1+A^*B$ est fermé.

On remarque que :

$$N(1+A^*B)\times\{0\} = \mathcal{G}(1+A^*B) \cap H\times\{0\}.$$

$$H\times\{0\} + \{0\}\times R(1+A^*B) = \mathcal{G}(1+A^*B) + H\times\{0\}.$$

Rappelons que M étant un sous-espace vectoriel d'un Banach B

M est dit paracomplet si par définition :

(i) M est un Banach.

(ii) L'injection canonique $i : M \hookrightarrow B$ est continue.

Ainsi que le lemme suivant :

> Lemme de Neubauer [19]
>
> Soient M et N des sous-espaces paracomplets de B tels que
>
> $M+N$ et $M\cap N$ sont paracomplets de B.
>
> Alors M et N sont fermés dans B.

En vertu de la proposition 2.1.3 [20], $\mathcal{G}(1+A^*B)$ est un sous-espace paracomplet de $H\times H$.

$N(1+A^*B)\times\{0\}$ et $H\times\{0\} + \{0\}\times R(1+A^*B)$ sont fermés donc paracomplets dans $H\times H$.

D'après le lemme de Neubauer, $\mathcal{G}(1+A^*B)$ est fermé dans $H\times H$ $\square$

Notons que puisque $A^* \underset{\mathbb{K}}{\sim} B^*$, on obtient les mêmes résultats pour les opérateurs $1+AB^*$ et $1+BA^*$.

<u>Remarques :</u>

<u>1° Si A et B sont bornés, de domaine H, et tels que $A-B$ est compact, alors $\operatorname{ind}(1+AB^*)=0$</u>.

En effet, $1+AB^* = 1+BB^* + (A-B)B^*$.

<u>2° Si A et B sont fermés, de domaine dense et tels que $A-B$ est B-compact, alors $\operatorname{ind}(1+AB^*)=0$</u>.

On écrit comme précédemment $1+AB^* = 1+BB^* + (A-B)B^*$.

Cette égalité a un sens sur $\mathcal{D}(AB^*)$ car $\mathcal{D}(A)=\mathcal{D}(B)$.

D'où : $1+AB^* = 1+BB^* + (A-B)s_B\, s_B^{-1} B^*$.

L'opérateur $s_B^{-1}B^*$ est borné car $s_B^{-1} : \mathcal{D}(B) \to H$ et si $u \in \mathcal{D}(AB^*)$ alors $B^*u \in \mathcal{D}(A)=\mathcal{D}(B)$.

<u>3° Si A et B sont fermés à domaine dense, si $A \underset{\mathbb{K}}{\sim} B$ et $g(A,B)<1$, alors $\operatorname{ind}(1+AB^*)=0$</u>.

Montrons que $1+AB^*$ est inversible.

Si $N(1+AB^*)$ contenait un élément $u \neq 0$, $\mathcal{G}(A^*)^{\perp} \cap \mathcal{G}(B^*)$ contiendrait $(u, B^*u) \neq (0,0)$.

Notons $f=(u, B^*u)$. Alors $(P_{\mathcal{G}(A^*)} - P_{\mathcal{G}(B^*)})f = -f$. d'où :

$\|(P_{\mathcal{G}(A^*)} - P_{\mathcal{G}(B^*)})f\| = \|f\|$ ce qui contredit $g(A^*,B^*)<1$.

De même $N(1+AB^*)=\{0\}$.

Dans les 3 cas simples ci-dessus, $\operatorname{ind}(1+AB^*)=0$.

En général, quand A et B sont $\mathbb{K}$-équivalents, cette condition n'est pas vérifiée.

On va montrer que si A et B sont des opérateurs $\mathcal{K}$-équivalents et de Fredholm, alors $\operatorname{ind}(1+AB^*)=0$ équivaut à $\operatorname{ind} A = \operatorname{ind} B$.

> <u>Théorème III.1.9</u> : Si A et B sont fermés à domaine dense, Fredholm, $\mathcal{K}$-équivalents alors :
>
> $\operatorname{ind}(1+AB^*) = 0 \iff \operatorname{ind} A = \operatorname{ind} B$

démonstration : On utilise le lemme ci-dessous.

> <u>Lemme III.1.10</u> : Soient A et B dans $\mathcal{B}(H)$.
>
> $$A \underset{\mathcal{K}}{\sim} B \Rightarrow \lambda A \underset{\mathcal{K}}{\sim} \lambda B \quad , \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

Preuve III.1.10 : montrons que $\lambda A S_{\lambda A} S_{\lambda B} - S_{\bar{\lambda} A^*} \lambda B S_{\lambda B}$ est un opérateur compact de H.

On voit que $S_{A^*} S_{\bar{\lambda} A^*} = S_{\bar{\lambda} A^*} S_{A^*}$.

$S_{A^*} \lambda A S_{\lambda A} = S_{A^*} S_{\bar{\lambda} A^*} \lambda A$ sur $\mathcal{D}(A)$.

d'où : $S_{A^*} \lambda A S_{\lambda A} = S_{\bar{\lambda} A^*} S_{A^*} \lambda A = \lambda S_{\bar{\lambda} A^*} A S_A$ sur $\mathcal{D}(A)$.

et $\lambda A S_{\lambda A} = \lambda S_{A^*}^{-1} S_{\bar{\lambda} A^*} A S_A$ sur H.

On écrit $\lambda A S_{\lambda A} S_{\lambda B} - S_{\bar{\lambda} A^*} \lambda B S_{\lambda B}$ sous la forme suivante :

$\lambda S_{A^*}^{-1} S_{\bar{\lambda} A^*} A S_A S_B S_B^{-1} S_{\lambda B} - \lambda S_{A^*}^{-1} S_{A^*} S_{\bar{\lambda} A^*} B S_B S_B^{-1} S_{\lambda B}$

$= \lambda S_{A^*}^{-1} S_{\bar{\lambda} A^*} (A S_A S_B - S_{A^*} B S_B) S_B^{-1} S_{\lambda B}$.

Les opérateurs $S_{A^*}^{-1} S_{\bar{\lambda} A^*}$ et $S_B^{-1} S_{\lambda B}$ étant bornés de domaine H,

$\lambda A S_{\lambda A} S_{\lambda B} - S_{\bar{\lambda} A^*} \lambda B S_{\lambda B}$ est compact.

De même pour $\bar{\lambda} A^* S_{\bar{\lambda} A^*} S_{\bar{\lambda} B^*} - S_{\lambda A} \lambda^* B^* S_{\bar{\lambda} B^*}$. □

démonstration III-1-9 : ($\Rightarrow$)

$\lambda A \underset{K}{\sim} \lambda B$. L'opérateur $1+|\lambda|^2 AB^*$ est donc Fredholm.

Il en résulte que $1+AB^*$ et AB^* sont homotopiques, c'est-à-dire qu'il existe une application continue F de $[0,1]$ dans l'espace des Fredholms muni de la métrique g, telle que :

$$F(0) = AB^* \quad \text{et} \quad F(1) = 1 + AB^*.$$

D'après le théorème 4.1 de [17], $\operatorname{ind} AB^* = \operatorname{ind}(1+AB^*) = 0$ d'où $\operatorname{ind} A = \operatorname{ind} B$.

($\Leftarrow$) si $\operatorname{ind} A = \operatorname{ind} B$, le raisonnement inverse montre que $\operatorname{ind}(1+AB^*) = 0$. □

§ III-2 — Application de la notion de $\mathbb{K}$-équivalence ; une généralisation aux opérateurs fermés à domaine dense de la relation : $A^*A - AA^* \in \mathcal{K}(H)$

Soit $A \in \mathcal{B}(H)$. A est dit essentiellement normal si par définition :

$$A^*A - AA^* \in \mathcal{K}(H).$$

En vertu du paragraphe 1 de ce chapitre, l'idée la plus naturelle pour généraliser cette notion aux opérateurs fermés à domaine dense est la suivante :

Définition III-2-1 : Soit $A \in \mathcal{C}(H)$. A est essentiellement normal si :

$$A^*A \underset{\mathbb{K}}{\sim} AA^*$$

Exemple : Les opérateurs normaux non bornés sont essentiellement normaux au sens de III-2-1.

Remarque : En vertu des lemmes III-1-2 et III-1-3, les 2 définitions coïncident bien sur $\mathcal{B}(H)$.

On note $(EN)(H)$ l'ensemble des opérateurs de $\mathcal{C}(H)$ essentiellement normaux et $(EN)(H) \cap \mathcal{B}(H)$ son intersection avec les bornés.

Proposition III-2-2 : Soit $A \in \mathcal{C}(H)$.
Si $AA^* - A^*A$ est AA^*-compact, alors $A \in (EN)(H)$.

<u>démonstration</u> : c'est le lemme III-1-6.

On a vu par un contre-exemple que la réciproque est fausse.

La proposition suivante donne plusieurs définitions équivalentes de $(EN)(H)$.

<u>Proposition III-2-3</u> : Soit $A \in \mathcal{C}(H)$. Sont équivalents :

1. $A \in (EN)(H)$.
2. $R_A - R_{A^*} \in K(H)$.
3. $\tilde{A} = AS_A(1+S_A)^{-1} \in (EN)(H) \cap \mathcal{B}(H)$.
4. $\exists (A_n)_n \in (EN)(H) \cap \mathcal{B}(H)$; $g(A_n, A) \to 0$

La démonstration utilise 2 lemmes faciles.

<u>Lemme III-2-4</u> : Soit $T \in \mathcal{B}(H)$

$R_T - R_{T^*} \in K(H) \iff TT^* - T^*T \in K(H)$.

<u>Lemme III-2-5</u> : Soient A et $\mathcal{B}$ bornés définis sur H, positifs.

$A - \mathcal{B} \in K(H) \iff A^{\frac{1}{2}} - \mathcal{B}^{\frac{1}{2}} \in K(H)$

démonstration III-2-3 : 1 $\iff$ 2

$A \in (EN)(H)$ si et seulement si $AA^*S_{AA^*}S_{A^*A} - S_{AA^*}A^*AS_{A^*A} \in K(H)$.

Calculons S_{A^*A} et S_{AA^*} en fonction de R_A et R_{A^*} respectivement.

$1 + (A^*A)^2 = (1+A^*A)^2 - 2\left[(1+A^*A) - 1\right]$ dans $\mathcal{D}((A^*A)^2)$.

L'image de R_{A^*A} étant $\mathcal{D}((A^*A)^2)$, on a :

$1. = (1+A^*A)^2 R_{A^*A} - 2\left[(1+A^*A)-1\right] R_{A^*A}$.

En multipliant par R_A^2 à gauche il vient :

$R_A^2 = (1-2R_A(1-R_A))R_{A^*A}$ dans H.

$R_A(1-R_A) = (AR_A)^* AR_A$ d'où $\|R_A(1-R_A)\| \leq \|AR_A\|^2$

Comme $\|AR_A u\|^2 + \|(R_A-\frac{1}{2})u\|^2 = \frac{1}{4}\|u\|^2$, on en déduit que

$\|AR_A\| \leq \frac{1}{2}$. $1-2R_A(1-R_A)$ admet donc un inverse borné.

$R_{A^*A} = R_A^2(1-2R_A(1-R_A))^{-1}$.

Ainsi : $S_{A^*A} = R_A(1-2R_A(1-R_A))^{-\frac{1}{2}}$

de même : $S_{AA^*} = R_{A^*}(1-2R_{A^*}(1-R_{A^*}))^{-\frac{1}{2}}$.

En remplaçant dans l'expression de $AA^*S_{AA^*}S_{A^*A} - S_{AA^*}A^*A\,S_{A^*A} \in K(H)$.

$(1-2R_{A^*}(1-R_{A^*}))^{-\frac{1}{2}}\ (R_A-R_{A^*})\ (1-2R_A(1-R_A))^{-\frac{1}{2}}$

ce qui montre que : $A \in (EN)(H) \iff R_A - R_{A^*} \in K(H)$.

② ⇒ ③

Supposons $R_A - R_{A^*}$ compact. D'après III-2-4, il est équivalent de montrer que $R_{\tilde{A}} - R_{\tilde{A}^*}$ est compact, c'est-à-dire, puisque $R_{\tilde{A}} = \frac{1+S_A}{2}$, que $S_A - S_{A^*}$ est compact. Or $S_A - S_{A^*}$ est compact, d'après III.2.5.

③ ⇒ ④

Supposons que $\tilde{A} = AS_A(1+S_A)^{-1}$ est dans $(EN)(H)$.

A est donné par $A = 2\tilde{A}(1-\tilde{A}^*\tilde{A})^{-1}$.

Posons $A_n = 2(1-\frac{1}{n})\tilde{A}(1-(1-\frac{1}{n})^2\tilde{A}^*\tilde{A})^{-1}$ $(\forall n \geq 1)$

A_n est borné et $\tilde{A}_n = (1-\frac{1}{n})\tilde{A}$ converge vers $\tilde{A}$ dans $B(H)$.

On en déduit que $\delta(A_n, A) \to 0$ et enfin $g(A_n, A) \to 0$.

D'autre part $S_{A_n} - S_{A_n^*} = 2(R_{\tilde{A}_n} - R_{\tilde{A}_n^*})$ est compact ce qui montre que $(A_n)_n \in (EN)(H) \cap B(H)$.

④ ⇒ ②

Soit $(A_n)_n \in (EN)(H) \cap \mathcal{B}(H)$; $g(A_n, A) \to 0$.

$R_A - R_{A^*} = (R_A - R_{A_n}) + (R_{A_n} - R_{A_n^*}) + (R_{A_n^*} - R_{A^*})$

$R_A - R_{A^*}$ est donc limite uniforme dans $\mathcal{B}(H)$ d'une suite

$R_{A_n} - R_{A_n^*} = K_n$ d'opérateurs compacts. □

<u>Remarques</u> : $(EN)(H)$ conserve certaines propriétés de $(EN)(H) \cap \mathcal{B}(H)$.

Rem. 1 : <u>Si $T \underset{K}{\sim} N$, où N est normal, alors $T \in (EN)(H)$.</u>

En effet, $R_T - R_N$ et $R_{T^*} - R_{N^*}$ sont compacts, et $R_N = R_{N^*}$

$R_T - R_{T^*}$ est donc compact.

Rem. 2 : <u>$(EN)(H)$ est stable par les perturbations du type $\lambda I + K$, où $\lambda \in \mathbb{C}$ et $K \in \mathcal{K}(H)$.</u>

Soit $A \in (EN)(H)$. Il existe une suite $(A_n)_n$ de $(EN)(H) \cap \mathcal{B}(H)$ qui approchent A au sens de g. La majoration suivante montre que $A + \lambda I + K \in (EN)(H)$.

$$g(A_n + \lambda + K, A + \lambda + K) \leq \left(\frac{\|\lambda + K\|}{2} + \sqrt{1 + \frac{\|\lambda + K\|^2}{4}} \right)^2 g(A_n, A)$$

Rem. 3 : <u>$(EN)(H)$ est un sous-ensemble fermé de $\mathcal{C}(H)$.</u>

Soit $(T_n)_n \in (EN)(H)$ telle que $g(T_n, T) \to 0$

$R_T - R_{T_n} = (R_T - R_{T_n}) + (R_{T_n} - R_{T_n^*}) + (R_{T_n^*} - R_{T^*})$

T est donc essentiellement normal.

Rem. 4 : <u>Si $A \in (EN)(H)$, alors $\sigma_e(AA^*) = \sigma_e(A^*A)$.</u>

On utilise le lemme suivant, qui est un résultat plus général.

Lemme III-2-6 : Soient A et B fermés à domaine dense, tels que $A \underset{\mathbb{K}}{\sim} B$ et A est normal.
Alors $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $A-\lambda \underset{\mathbb{K}}{\sim} B-\lambda$

démonstration III-2-6 : A étant normal :

$$(A-\lambda)\, S_{A-\lambda} S_{B-\lambda} - S_{A^*-\bar\lambda}(B-\lambda) S_{B-\lambda} = A S_{A-\lambda} S_{B-\lambda} - S_{A-\lambda} B S_{B-\lambda}$$

$$= A S_A S_A^{-1} S_{A-\lambda} S_B S_B^{-1} S_{B-\lambda} - S_A S_A^{-1} S_{A-\lambda} B S_B S_B^{-1} S_{B-\lambda}$$

$S_A^{-1} S_{A-\lambda}$ et $S_B^{-1} S_{B-\lambda}$ sont bornés de domaine H, et A étant normal, $S_A^{-1} S_{A-\lambda}$ commute avec S_A et AS_A. Il vient donc :

$$A S_{A-\lambda} S_{B-\lambda} - S_{A-\lambda} B S_{B-\lambda} = S_A^{-1} S_{A-\lambda} \left(A S_A S_B - S_A B S_B \right) S_B^{-1} S_{B-\lambda}$$

qui est compact.

Même raisonnement pour $(A^*-\bar\lambda) S_{A^*-\bar\lambda} S_{B^*-\bar\lambda} - S_{A-\lambda}(B^*-\bar\lambda) S_{B^*-\bar\lambda}$. □

Soit $\lambda \in \rho_e(AA^*)$. D'après III.2.6 et III.1.7, $\lambda \in \rho_e(A^*A)$. □

Proposition III. 2.7 :
Soit A essentiellement normal, d'image R(A) fermée dans H.
Alors $N(A) \cap R(A)$ est de dimension finie.

démonstration : Supposons par l'absurde qu'il existe une suite orthonormée $(u_n)_n$ de $N(A) \cap R(A)$.

$A^*AR_A u_n = u_n - R_A u_n$.

$u_n \in \mathcal{D}(A)$ donc $AR_A u_n = R_{A^*} A u_n = 0$.

Il vient $u_n = R_A u_n$, $\forall n$.

$(R_A - R_{A^*}) u_n = (1 - R_{A^*}) u_n = AA^* R_{A^*} u_n = (AS_A)(AS_A)^* u_n$.

Posons $T = (AS_A)(AS_A)^*$. T est d'évidence un opérateur borné défini sur tout H, et on a : $c(T) = \dfrac{c^2(A)}{1 + c^2(A)}$ [17]

$c(T)$ est donc strictement positif.

$R_A - R_{A^*}$ étant compact, il existe une sous-suite, encore notée $(u_n)_n$, telle que $(R_A - R_{A^*}) u_n$ converge dans H.

Comme $(u_n)_n \in R(A) = N(A^*)^\perp = N(T)^\perp$, on en tire que

$\| Tu_n - Tu_m \| \geq c(T) . \| u_n - u_m \|$ ce qui est absurde $\square$

On va donner 2 corollaires de III.2.7, mais d'abord quelques définitions qu'on trouve dans [20].

<u>Définition</u> : Soit $A \in \mathcal{C}(H)$.

On dit que A est quasi-Fredholm de degré d $(d \in \mathbb{N})$ et on note $A \in q\phi(d)$ si :

(a) $d = \operatorname{Inf} \Delta(A) < +\infty$

où $\Delta(A) = \{ n \in \mathbb{N} ; \forall m \in \mathbb{N}, m \geq n \Rightarrow R(A^m) \cap N(A) \supseteq R(A^n) \cap N(A) \}$

(b) $R(A^d) \cap N(A)$ est fermé dans H.

(c) $R(A) + N(A^d)$ est fermé dans H.

On introduit ensuite la notion de points réguliers pour A, notion qu'on retrouve dans [24]

<u>Définition</u> : Soit A un opérateur fermé.

$\lambda_0 \in \mathbb{C}$ est un point régulier pour A si les conditions suivantes sont satisfaites : (a) $R(A-\lambda_0)$ est fermé dans H.

(b) Il existe un voisinage U de λ_0 tel que

$$\forall \lambda \in U, \quad g(N(A-\lambda), N(A-\lambda_0)) < 1.$$

L'ensemble des points réguliers pour A est noté $Reg(A)$.

On rappelle également le résultat suivant ([20], propositions 3.1.2 et 4.1.1)

<u>Proposition</u> : Les assertions suivantes sont équivalentes :

① $A-\lambda_0 \in q\phi(0)$.

② $R(A-\lambda_0)$ est fermé dans H et $N(A-\lambda_0) \subset R((A-\lambda_0)^n)$.

③ $\lambda_0 \in Reg(A)$.

<u>Corollaire III.2.8</u>

$A \in (EN)(H) \Rightarrow Reg(A) \subset \rho_e(A)$.

démonstration :

Soit $\lambda_0 \in Reg(A)$. $A-\lambda_0 \in (EN)(H)$.

D'après III.2.7, $N(A-\lambda_0) \cap R(A-\lambda_0)$ est donc de dimension finie, c'est-à-dire, $A-\lambda_0$ étant régulier, $N(A-\lambda_0)$ est de dimension finie. D'autre part, $\overline{\lambda_0} \in Reg(A^*)$ d'après [20] corollaire 4.1.2, le même raisonnement montre que $N(A^*-\overline{\lambda_0})$ est de dimension finie. $R(A-\lambda_0)$ étant fermé, $\lambda_0 \in \rho_e(A)$. □

Corollaire III.2.9 :

Si A est essentiellement normal et semi-Fredholm, alors A est Fredholm.

démonstration : D'après III.2.7, $\dim N(A) \cap R(A) < +\infty$.

On en déduit que $\dim N(A) \cap R(A^n) < +\infty$, $\forall n \geq 0$.

A étant semi-Fredholm, on vérifie [20] que $A \in q\phi(d)$.

2 cas sont à distinguer :

1) $d = 0$ c'est-à-dire A régulier.

On applique alors le corollaire III.2.8.

2) $d \geq 1$.

On sait, [20] proposition 4.3.1, qu'il existe δ et α des réels positifs tels que :

$\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $0 < |\lambda| < \delta \Rightarrow g(N(A-\lambda), N(A) \cap R(A^d)) < \alpha|\lambda|$.

Dès que $0 < |\lambda| < \min\left(\frac{1}{\alpha}, \delta\right)$, $g(N(A-\lambda), N(A) \cap R(A^d)) < 1$.

$N(A-\lambda)$ est donc de dimension finie.

Par passage à l'adjoint, $N(A^* - \bar{\lambda})$ est de dimension finie.

Si $\lambda \neq 0$ est dans un certain voisinage de 0, $A - \lambda I$ est donc de Fredholm et $\operatorname{ind}(A-\lambda) < +\infty$. Par continuité de l'indice, on en déduit que A est Fredholm. □

Chapitre IV

— Une généralisation du théorème de Brown, Douglas et Fillmore aux opérateurs fermés à domaine dense —

Dans ce chapitre, on se propose de démontrer le résultat suivant :

> **Théorème IV-1** : Soit A un opérateur fermé à domaine dense essentiellement normal tel que $\mathrm{ind}(A-\lambda I)=0$, $\forall \lambda \in \rho_e(A)$. Alors il existe un opérateur normal N tel que : $A \underset{K}{\sim} N$.

On procède en 3 étapes.

Notations : $N(H)+K(H)$ désigne l'ensemble des opérateurs de $\mathcal{B}(H)$ qui s'écrivent comme somme d'un opérateur normal et d'un compact.

$\sigma_p(T)$ désigne l'ensemble des valeurs propres de T.

> **Proposition IV-2** : Soit A un opérateur fermé à domaine dense essentiellement normal et tel que : $\mathrm{ind}(A-\lambda I)=0$, $\forall \lambda \in \rho_e(A)$. Alors $\tilde{A} = AS_A(1+S_A)^{-1} \in N(H)+K(H)$.

démonstration : Montrons que $\mathrm{ind}(\tilde{A}-\lambda I)=0$, $\forall \lambda \in \rho_e(\tilde{A})$.

A étant dans $(EN)(H)$, d'après III.2.3, $\tilde{A}$ est dans $(EN)(H)\cap B(H)$.

Du théorème de Brown, Douglas et Fillmore il découlera que $\tilde{A}$ appartient à $N(H)+K(H)$.

A étant supposé non borné, $\|\tilde{A}\|=1$. Soit $\lambda \in \rho_e(\tilde{A})$

— Si $|\lambda|>1$, alors $\lambda \in \rho(\tilde{A})$ et il en résulte que $\mathrm{ind}(\tilde{A}-\lambda I)=0$

— Si $|\lambda|=1$, comme $N(1-\tilde{A}^*\tilde{A})=\{0\}$, $|\lambda|^2=1 \notin \sigma_p(\tilde{A}^*\tilde{A})$ on en déduit que $\lambda \notin \sigma_p(\tilde{A})$ et $\bar{\lambda} \notin \sigma_p(\tilde{A}^*)$ [21], ce qui montre que $\mathrm{ind}(\tilde{A}-\lambda I)=0$.

— Si $|\lambda|<1$

$A = 2\tilde{A}(1-\tilde{A}^*\tilde{A})^{-1}$. D'où :

$$A - 2\lambda(1-|\lambda|^2)^{-1} = 2(1-|\lambda|^2)^{-1}\left[\tilde{A}-\lambda+\lambda(\tilde{A}^*-\bar{\lambda})\tilde{A}\right](1-\tilde{A}^*\tilde{A})^{-1}$$

Posons $T_\lambda = \tilde{A}-\lambda+\lambda(\tilde{A}^*-\bar{\lambda})\tilde{A}$ et montrons que T_λ est un opérateur de Fredholm. Notons $\pi(I)=1$.

$$\pi(T_\lambda)=\left(\pi(\tilde{A})-\lambda\right)\left[1+\lambda\left(\pi(\tilde{A})-\lambda\right)^{-1}\left(\pi(\tilde{A}^*)-\bar{\lambda}\right)\pi(\tilde{A})\right]$$

$\left(\pi(\tilde{A})-\lambda\right)^{-1}\left(\pi(\tilde{A}^*)-\bar{\lambda}\right)$ est unitaire d'après le lemme suivant :

<u>Lemme IV.3</u> : Soit $\mathcal{A}$ une C^* algèbre.
Si a est un élément normal et inversible de $\mathcal{A}$, alors $a^{-1}a^*$ est unitaire.

$|\lambda|$ étant strictement inférieur à 1, on en déduit que $1+\lambda\left(\pi(\tilde{A})-\lambda\right)^{-1}\left(\pi(\tilde{A}^*)-\bar{\lambda}\right)\pi(\tilde{A})$ est inversible dans $\mathcal{A}(H)$.

D'autre part l'indice de T_λ est nul car $A - 2\lambda(1-|\lambda|^2)^{-1}$ et $(1-\tilde{A}^*\tilde{A})^{-1}$ sont des opérateurs de Fredholm d'indices nuls.

$\tilde{A}-\lambda$ étant Fredholm, il existe $B_\lambda \in \mathcal{B}(H)$ tel que :

$$(\tilde{A}-\lambda) B_\lambda = 1 - K_1 \quad \text{et} \quad B_\lambda(\tilde{A}-\lambda) = 1 - K_2$$ où K_1, K_2 sont des compacts.

$T_\lambda = (\tilde{A}-\lambda)\left[1 + \lambda B_\lambda(\tilde{A}^* - \bar{\lambda})\tilde{A}\right] + K'$ où $K' \in \mathcal{K}(H)$.

D'après IV-3, $\pi(B_\lambda)\pi(\tilde{A}^* - \bar{\lambda})$ est unitaire dans $\mathcal{A}(H)$.

D'autre part d'après [22], la distance à $\mathcal{K}(H)$ est atteinte.

Il en résulte ici que pour un certain K_0 compact :

$$\| B_\lambda(\tilde{A}^* - \bar{\lambda}) - K_0 \| = 1. \qquad (1)$$

d'où : $T_\lambda = (\tilde{A}-\lambda)\left[1 + \lambda(B_\lambda(\tilde{A}^* - \bar{\lambda}) - K_0)\tilde{A}\right] + K''$ où

D'après (1), T_λ est donc à un compact près, le produit par $\tilde{A}-\lambda$ d'un opérateur inversible, d'inverse borné.

Ainsi $\operatorname{ind}(\tilde{A}-\lambda) = 0$.

On a montré que $\operatorname{ind}(\tilde{A}-\lambda I) = 0, \forall \lambda \in \rho_e(\tilde{A})$, ce qui termine la démonstration. $\square$

Dans un 2^e temps, on montre que la partie normale de $\tilde{A}$ peut être choisie sous la forme du bisecteur d'un opérateur normal.

C'est l'objet de la proposition suivante.

<u>Proposition IV-4</u> : Sous les hypothèses de IV-2, il existe un opérateur normal N et un opérateur compact K tels que :

$$\tilde{A} = \tilde{N} + K.$$

démonstration :

On a vu précédemment que $\tilde{A} = N_1 + K_1$ où N_1 est normal et K_1 compact.

D'après un théorème de Stampfli [23], il existe un opérateur compact K_0 tel que $\sigma_e(N_1) = \sigma(N_1 + K_0)$. A cause de la normalité de N_1, on peut montrer que K_0 est en fait diagonal et $K_0 N_1 = N_1 K_0$. L'opérateur $N_1 + K_0$ est donc normal et tel que $\sigma_e(N_1 + K_0) = \sigma(N_1 + K_0)$.

$$\tilde{A} = N_1 + K_1 = N_1 + K_0 + (K_1 - K_0) \quad \text{où} \quad K_1 - K_0 \in \mathcal{K}(H).$$

et $\| N_1 + K_0 \| = \sup\limits_{\lambda \in \sigma_e(\tilde{A})} |\lambda| = \| \pi(\tilde{A}) \| \leq \| \tilde{A} \| \leq 1$.

Dans le cas où A est borné, comme $\|\tilde{A}\| < 1$, on voit que l'opérateur $1 - (N_1 + K_0)^*(N_1 + K_0)$ est en particulier injectif. $N_1 + K_0$ est donc bien dans ce cas le bissecteur d'un opérateur.

Dans le cas qui nous occupe, c'est-à-dire $\|\tilde{A}\| = 1$, on ne peut rien conclure sur le noyau de $1 - (N_1 + K_0)^*(N_1 + K_0)$.

Posons $N_0 = N_1 + K_0$.

On va utiliser le théorème de David Berg ([3]) suivant :

> <u>Théorème</u> : Soit T un opérateur normal, non nécessairement borné, d'un Hilbert séparable H. Alors il existe un opérateur diagonal D tel que : $T - D \in K(H)$.

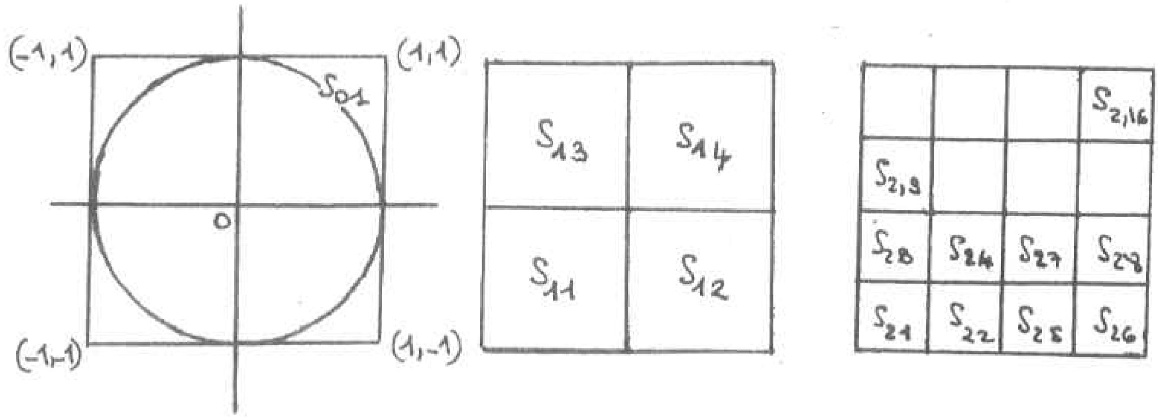
Nous adapterons la démonstration à notre cas et en rappelerons les grandes lignes.

Berg utilise le théorème spectral pour les normaux :

$$N_0 = \int_{\sigma(N)} \lambda \, dE(\lambda).$$

L'idée est de construire les vecteurs propres de l'opérateur diagonal en utilisant de petits morceaux du spectre.

Comme $\|N_0\| \leq 1$, $\sigma(N_0)$ est donc inclus dans le carré S_{01} que l'on partitionne ainsi :



On pose $P_{ij} = E(S_{ij}) = \int_{S_{ij}} dE(\lambda)$.

$H_{ij} = P_{ij}(H)$.

on note que $S_{ij} \cap \sigma(N_0) = \emptyset \Rightarrow H_{ij} = \{0\}$.

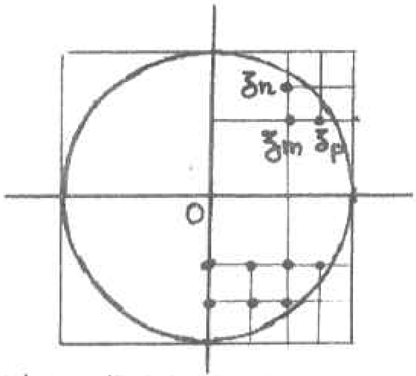
on considère $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots$ base orthonormée de H et on pose $\psi^{(1)} = \omega_1$ et $H_1 = \underset{i,j}{\text{clm}}\, P_{ij}\psi^{(1)}$

on va former une base orthonormée $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$ de H_1, consistant en vecteurs de "support" inclus dans des carrés de plus en plus petits. Le point essentiel de la construction de Berg est que, une fois décrite la projection sur un sous-carré Q de côté 2^{-n}, pour obtenir les projections sur les 4 sous-carrés de Q, de côté $2^{-(n+1)}$, il suffit d'ajouter seulement 3 vecteurs, qui peuvent être choisis à support dans le carré Q.

On obtient pour 1 recouvrement de S_{01} par 2^{2n} sous-carrés de côté 2^{-n}, un ensemble de 3.2^{2n} vecteurs $(\varphi_n)_n$ avec au plus 3 vecteurs dans chaque sous-carré. Ces vecteurs, ajoutés à l'ensemble de 2^{2n} vecteurs associés aux sous-carrés plus grands, forment une base pour les projections sur les sous-carrés de côté $2^{-(n+1)}$ etc. On définit alors D_1 par : $D_1\varphi_n = z_n\varphi_n$ où z_n est le sommet du sous-carré associé à φ_n le plus proche de O. z_n est déterminé sans ambiguité.

C'est la seule modification qu'on apporte à la démonstration de Berg (qui choisit lui, les z_n comme les centres des carrés)

Comme $\sigma(N_0)$ est inclus dans $\overline{D}$ le disque-unité fermé, on n'a à considérer que des φ_m associés à des sous-carrés S_{ij} d'intersection non vide avec $\overline{D}$, et on en déduit que $\|D_1\| = \sup_n |z_n| \leq 1$



$C_1 = N_0 - D_1$ est compact de H_1 dans H en vertu de :

$$\|(N_0 - D_1)|_{H_{n,k}}\| = \sup_{\sigma(N_0|H_{n,k})} |\lambda - z_{nk}|$$

d'où $\|(N_0 - D_1)|_{H_{n,k}}\| \leq \sup_{\lambda \in \overline{S_{n,k}}} |\lambda - z_{nk}| = \sqrt{2} \cdot 2^{-n}$.

donc $\|(N_0 - D_1)\varphi_j\| \leq \sqrt{2} \cdot 2^{-n}$.

on obtiendra : $\forall X$ vecteur unitaire de H_1 :

$$\|(N_0 - D_1)X\| \leq 8 \sum_{n \geq 0} 2^{-n}.$$

Rien d'autre n'est changé dans la suite de la démonstration.

Soit $\psi^{(2)}$ la composante normalisée de ω_2 dans $H_1^{\perp}$.

on pose $H_2 = \underset{i,j}{\mathrm{clm}}\, P_{ij}\psi^{(2)}$. On procède comme ci-dessus pour former une base orthonormée de H_2. Cependant, cette fois, on commence avec $P_{11}\psi^{(2)}$, $P_{12}\psi^{(2)}$, $P_{13}\psi^{(2)}$, $P_{1,4}\psi^{(2)}$, normalisés si nécessaire. Ils sont déjà orthogonaux 2 à 2 et à H_1.

On obtient $N_0|H_2 = D_2 + C_2$ où D_2 est diagonal, et C_2 est compact etc.

En général, on pose $\psi^{(n+1)}$ la composante normalisée de ω_{n+1} dans $\left(\underset{i=1 \text{ à } n}{\mathrm{clm}} H_i\right)^{\perp}$, $H_{n+1} = \underset{i,j}{\mathrm{clm}}\, P_{i,j}\psi^{(n+1)}$ et on procède de même.

On obtient $N_0 = \sum_{n \geq 1} (D_n + C_n) = \sum_{n \geq 1} D_n + \sum_{n \geq 1} C_n$, la série $\sum_{n \geq 1} C_n$ étant normalement convergente.

$D = \sum_{n \geq 1} D_n$ est diagonal, pour la base $(e_n)_n$ obtenue par le recollement de toutes les bases orthonormées des H_n et

$\|D\| = \sup_n |\zeta_n| \leqslant 1$.

Ainsi $N_0 = D + C$, où D est diagonal et C compact,

$\|D\| \leqslant 1$.

$D^* D e_m = |\zeta_n|^2 e_m$.

Posons $M = \mathrm{clm}\,\{e_n ; |\zeta_n| = 1\}$.

Si $M = \{0\}$, alors $\sigma_p(D^*D) \subset [0,1[$ et $N(1 - D^*D)$ est réduit à $\{0\}$. D est donc le bissecteur d'un certain opérateur.

Sinon, H se décompose en : $H = M \oplus M^\perp$.

On pose : $K e_m = -\zeta_n \rho_m e_m$ si $e_m \in M$.

$K e_m = 0$ si $e_m \in M^\perp$.

où $(\rho_m)_m$ est une suite réelle de $]0,1[$, convergeant vers 0.

K est compact par construction.

En réindiçant si nécessaire $(e_n)_n$, on a :

$$D + K = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} \ddots & & 0 \\ & (1-\rho_m)\zeta_n & \\ 0 & & \ddots \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} \ddots & & 0 \\ & \zeta_n & \\ 0 & & \ddots \end{matrix} \end{array}\right)$$

$D+K$ est diagonal et $\|D+K\| = \sup_n \left((1-\rho_m), |\zeta_n| \right) = 1$.

$$(D+K)^*(D+K) = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} \ddots & & 0 \\ & (1-\rho_m)^2 & \\ 0 & & \ddots \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} \ddots & & 0 \\ & |\zeta_n|^2 & \\ 0 & & \ddots \end{matrix} \end{array}\right)$$

$\sigma_p\big((D+K)^*(D+K)\big) \subset [0,1[$. Ainsi $N\big(1-(D+K)^*(D+K)\big)=\{0\}$

$D+K$ est donc le bissecteur d'un opérateur.

$$\tilde{A} = N_0 + (K_1-K_0) = D+C+(K_1-K_0) = D+K + \text{compact}.$$

et $D+K = \tilde{N}$.

Il est ensuite facile de voir que $\tilde{N}$ étant normal, N est normal. □

La 3ᵉ étape consiste à vérifier que sous ces conditions A est $\mathbb{K}$-équivalent à un opérateur normal.

> **Proposition IV.5 :**
> Soient A et B dans $\mathcal{B}(H)$, $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$ étant leurs bissecteurs respectifs. Si $\tilde{A}-\tilde{B} \in K(H)$, alors $A \underset{\mathbb{K}}{\sim} B$.

démonstration :

$$B S_B S_A - S_{B^*} A S_A = \tilde{B}(1+S_B) S_A - S_{B^*}\tilde{A}(1+S_A)$$
$$= (1+S_{B^*})\left[\tilde{B} S_A (1+S_A)^{-1} - (1+S_{B^*})^{-1} S_{B^*}\tilde{A}\right](1+S_A)$$
$$= (1+S_{B^*})\left[\tilde{B}(1-\tilde{A}^*\tilde{A}) - (1-\tilde{B}\tilde{B}^*)\tilde{A}\right](1+S_A)$$
$$= (1+S_{B^*})\left[\tilde{B}-\tilde{A} + \tilde{B}(\tilde{B}^* - \tilde{A}^*)\tilde{A}\right](1+S_A)$$

$\tilde{B}-\tilde{A}$ et $\tilde{B}^*-\tilde{A}^*$ étant compacts, $BS_BS_A - S_{B^*}AS_A$ est compact.

On raisonne de même pour $B^*S_{B^*}S_{A^*} - S_B A^* S_{A^*}$. □

Démonstration du théorème IV.1 :
D'après IV.4, il existe N normal tel que $\tilde{A}-\tilde{N}$ est compact.
En appliquant IV.5, il vient $A \underset{\mathbb{K}}{\sim} N$. □

Dans ce qui suit, on donne un corollaire du théorème IV.1, analogue à celui obtenu par Brown, Douglas, Fillmore dans le cas borné.

<u>Définition IV.6</u> : $A \in \mathcal{C}(H)$ est $\mathbb{K}$-normal si A est $\mathbb{K}$-équivalent à un opérateur normal et si $\operatorname{ind}(A-\lambda)=0, \forall \lambda \in \rho_e(A)$

<u>Remarques</u>: 1° La condition $A \underset{\mathbb{K}}{\sim} N$ où N est normal n'est pas, contrairement au cas borné, suffisante pour entraîner que : $\operatorname{ind}(A-\lambda)=0, \forall \lambda \in \rho_e(A)$.
(On a vu un exemple p. III-10)

2° Si $A \underset{\mathbb{K}}{\sim} N$ où N est normal, alors :
$\operatorname{ind}(A-\lambda I)=0, \forall \lambda \in \rho_e(A) \iff \operatorname{ind}(1+AN^*)=0$.
En effet, supposons que $\operatorname{ind}(1+AN^*)=0$, et soit $\lambda \in \rho_e(A)$.
alors, comme $A-\lambda \underset{\mathbb{K}}{\sim} N-\lambda$, l'opérateur $1+(A-\lambda)(N^*-\bar{\lambda})$ est Fredholm. Désignons par $\mathcal{F}$ l'ensemble des opérateurs de $\mathcal{B}(H)$ qui sont Fredholm. L'application $F: [0,1] \longrightarrow \mathcal{F}$ définie par :
$t \longmapsto F(t) = 1+AN^*-\lambda t N^* - \bar{\lambda} t A + |\lambda|^2 t^2$
est continue, ce qui montre que $1+(A-\lambda)(N^*-\bar{\lambda})$ est homotope à $1+AN^*$, et est donc d'indice nul.
On en déduit que $\operatorname{ind}(A-\lambda) = \operatorname{ind}(N-\lambda) = 0$.

Réciproquement, si $\mathrm{ind}(A-\lambda)=0$, $\forall \lambda \in \rho_e(A)$.

Soit $\lambda \in \rho_e(A)$. $\forall t \in]0,1]$, $\frac{1}{t}(A-\lambda) \underset{K}{\sim} \frac{1}{t}(N-\lambda)$.

dont on déduit que $1+\frac{1}{t^2}(A-\lambda)(N^*-\bar{\lambda})$ est Fredholm.

$t^2+(A-\lambda)(N^*-\bar{\lambda})$ étant Fredholm, $\forall t \in [0,1]$, les opérateurs $(A-\lambda)(N^*-\bar{\lambda})$ et $1+(A-\lambda)(N^*-\bar{\lambda})$ sont homotopes.

L'indice de $1+(A-\lambda)(N^*-\bar{\lambda})$ est donc nul, et on a vu précédemment que $1+AN^*$ est homotope à $1+(A-\lambda)(N^*-\bar{\lambda})$. □

Corollaire IV-7 : L'ensemble des opérateurs K-normaux est fermé dans $\mathcal{C}(H)$.

démonstration: Soit $(T_n)_n$ une suite d'opérateurs K-normaux telle que $g(T_n,T)\to 0$. $(EN)(H)$ étant fermé, $T\in(EN)(H)$.

Soit $\lambda \in \rho_e(T)$. Pour n assez grand, $T_n-\lambda$ est Fredholm et $\mathrm{ind}(T-\lambda)=\mathrm{ind}(T_n-\lambda)=0$. D'après le théorème IV-1, $T \underset{K}{\sim} N$ où N est un opérateur normal. □

Références.

[1] H. Weyl.
"Über beschränkte quadratische Formen deren differenz vollstetig ist", Rend. Circ. Mat. Palermo 27 (1909) p 373-392.

[2] Von neumann.
" Charakterisierung des Spectrums eines Integral operators"
Hermann, Paris, 1935.

[3] I.D Berg
"An extension of the Weyl-Von neumann theorem to normal operators". Transactions of the A.M.S vol.160 (oct. 1971)

[4] Fillmore, Stampfli, Williams.
"On the essential numerical range, the essential spectrum and a problem of Halmos". Acta Sci. Math. (Szeged) 33 (1972) p.179-192.

[5] L. Brown, R.G Douglas, P.A Fillmore.
"Unitary equivalence modulo the compact operators and extensions of C* algebras". Roc. Conf. on operator theory, Lecture notes in math. vol.345, Springer Verlag, New York (1973) p.58 à 127.

[6] Deddens, Stampfli
"On a question of Douglas and Fillmore" Bulletin . Math. Soc. 79 (1973) p327-330.

[7] A.M Davie.

"Classification of essentially normal operators".

Spaces of Analytic functions. Springer Verlag Lecture notes 512 (1976) p.31-55.

[8] Carl M. Pearcy.

Some recent developments in operator theory.

Regional conference series in mathematics. 38-40 (1978-79)

[9] W.B Arveson.

"A note on essentially normal operators".

Spectral theory sympos. Proced. Roy. Irish Acad. Sect. (1974) p.143-146.

[10] T. Kato.

Perturbation theory for linear operators. Springer Verlag.

[11] J.P Labrousse.

Quelques topologies sur des espaces d'opérateurs dans des espaces de Hilbert et leurs applications. Preprint. Faculté des Sciences de Nice.

[12] K.H. Förster, M.A. Kaashoek.

"The asymptotic behaviour of the reduced minimum modulus of a Fredholm operator". Proceedings of the A.M.S (49) 1975, p123-130.

[13] West T.T

"The decomposition of Riesz operators". Proc. London Math. Soc. (3) 16, p737 à 752 (1966).

[14] R.G Douglas

"Banach algebra techniques in operator theory". Academic Press (1972)

[15] J.W Calkin
"Two-sided ideals and congruences in the ring of bounded operators in Hilbert space". Ann. Math. 42 (1941) p 839-873.

[16] P. De La Harpe.
"Initiation à l'algèbre de Calkin". Algèbres d'opérateurs. Lectures Notes in Mathematics. Springer Verlag 725 p.180-219.

[17] Cordes - Labrousse.
"The invariance of the index in the metric space of closed operators". Journal of Mathematics and Mechanics. vol. 12, n°5 Sept. 1963, p 693-720.

[18] P. Halmos.
A Hilbert space problem book. Springer Verlag New York Heidelberg Berlin.

[19] G. Neubauer
Espaces paracomplets. Conférence à Nice, juin 1974.

[20] J.P Labrousse. (Thèse)
"Les opérateurs Quasi-Fredholm, une généralisation des opérateurs semi-Fredholm". Rendiconti del Circolo mat. di Palermo (1980) serie II (XXIV).

[21] F. Riesz, B. Sz. Nagy.
"Über Kontraktionen des Hilbertschen Raumes" Acta Sci. Math. 10, (1943) p 202-205.

[22] R. Holmes, B. Kripke.
"Best approximation by compact operators". Indiana Univ. Math. Journal, vol. 21, n°3 (1971).

[23] J.G. Stampfli.
"Compact perturbations, normal eigenvalues and a problem of Salinas" J. London Math. Soc. (2) (1974) p165-175.

[24] Goldberg.
"Unbounded Linear Operators." Mc Graw - Hill (New York) 1966

RESUME

On étend aux opérateurs fermés à domaine dense dans un Hilbert la notion d'équivalence modulo les compacts, puis celle d'opérateurs essentiellement normaux c'est-à-dire tels que leur commutant est compact.

On présente ensuite une généralisation d'un Théorème de Brown-Douglas-Fillmore 5 qui dit que tout opérateur continu sur un Hilbert séparable, essentiellement normal et dont tous les indices sont nuls sur sa résolvante de Fredholm, s'écrit comme somme d'un opérateur normal et d'un opérateur compact.

MOTS-CLES :

Hilbert séparable - Spectre essentiel - Opérateurs essentiellement normaux.

CLASSIFICATION A.M.S. : 47 A 53
47 B 47