Mathématiques financières en marché incomplet.

Laurence Carassus

UNIVERSITE PARIS 7-PARIS DIDEROT

Habilitation à diriger des Recherches en Sciences — Spécialité Mathématiques
(Arrêté du 30 Mars 1992)

Laurence Carassus

Mathématiques Financières en Marché Incomplet

Rapporteurs :		Jury :
Pr Freddy Delbaen	soutenue le	Pr Rama Cont
Pr Damien Lamberton	13 décembre 2010	Pr Bernard Cornet
Pr Huyên Pham		Pr Elyès Jouini
		Pr Youri Kabanov
		Pr Damien Lamberton
		Pr Gilles Pagès
		Pr Huyên Pham

Remerciements

Ces remerciements seront brefs, mais ma reconnaissance pour tous ceux qui m'ont amenée jusqu'ici, elle, ne l'est en rien.

Tout d'abord, je remercie chaleureusement Freddy Delbaen, Damien Lamberton et Huyên Pham de m'avoir fait l'honneur d'être mes rapporteurs, ainsi que Rama Cont, Bernard Cornet, Elyès Jouini, Youri Kabanov et Gilles Pagès, celui de participer à ce jury.

Je voudrais aussi remercier tous mes co-auteurs avec qui j'ai eu la chance de pouvoir collaborer ces dernières années, avec une pensée toute particulière pour Emmanuel Temam et, bien sûr, Miklós Rásonyi.

Un grand merci à tous mes collègues auprès de qui j'ai eu plaisir à travailler toutes ces années, que ce soit au CREST, à Paris 1, Paris 9, Paris 7, chez Deloitte ou Veolia.

Enfin, cette thèse d'HDR n'existerait pas sans l'aide de Jacques Duflos de Saint Amand et de ma famille, qui se sont gentiment occupés de mes petits Jean et Adrien cet été, pendant que je la rédigeais.

Table des matières

Introduction **i**

I Arbitrage en marché incomplet **1**

1 Introduction **3**

2 Marché stationnaire **7**

2.1 Cas déterministe . . . 7

2.2 Cas aléatoire . . . 9

3 Marché discret avec contraintes convexes **11**

II Evaluation et couverture en marché incomplet **13**

4 Introduction **15**

5 Calcul effectif du prix de sur-réplication **19**

5.1 Formules fermées pour le prix de sur-réplication et les stratégies associées . 19

5.2 Calcul effectif du prix de sur-réplication lorsque l'accroissement du processus de prix est borné . . . 21

6 Evaluation et couverture No Good Deal **23**

6.1 Ratio de Sharpe, Good Deal et évaluation . . . 24

6.2 Couverture . . . 28

6.3 Résultats numériques . . . 30

III Convergence des stratégies optimales et des prix d'utilité **37**

7 Introduction **39**

8 Modèles en temps discret **43**
8.1 Description du marché 43
8.2 Description des préférences et problèmes d'optimisation 44
8.3 Convergence des stratégies optimales et des prix d'utilité : cas $dom(U_n) = \mathbb{R}$ 45
8.3.1 Hypothèses 46
8.3.2 Problèmes d'optimisation et convergence des solutions optimales . . 47
8.3.3 Applications à la convergence des prix d'utilité 48
8.3.4 Contre-exemples 49
8.3.5 Programmation dynamique 51
8.4 Convergence du prix d'indifférence vers le prix de sur-réplication : cas $dom(U_n) = \mathbb{R}^+$ 53
8.5 Convergence du prix d'indifférence vers le prix de sur-réplication : cas $dom(U_n) = \mathbb{R}$ 55
8.5.1 Hypothèse et résultats 55
8.5.2 Programmation dynamique 57

9 Convergence du prix d'indifférence vers le prix de sur-réplication : cas continu **59**
9.1 Hypothèses 59
9.2 Prix d'indifférence 61
9.3 Exemples 62

Introduction

Dans un contexte post-crise, la gestion des risques ainsi que la prise en compte des incomplétudes de marché prend tout son sens. Il devient nécessaire de considérer des règles alternatives d'évaluation et de mieux prendre en compte le comportement des agents économiques vis à vis du risque. Mes travaux s'inscrivent dans cette perspective et contribuent à l'étude des marchés incomplets. J'ai choisi de les regrouper en trois parties. La première traite de la caractérisation de l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage et de ses implications en termes d'évaluation. La seconde explore deux pistes possibles pour l'évaluation et la couverture d'actifs dérivés en marché incomplet : la sur-réplication et l'exploitation de la condition de No Good Deal. Enfin, la troisième partie s'intéresse aux comportements limites ainsi qu'à la stabilité des choix optimaux des agents par rapport à des perturbations de leur évaluation du risque. Dans ce contexte, nous nous intéressons aussi à d'autres règles d'évaluation : les prix d'utilités.
La première partie a donné lieu à un preprint et deux publications en collaboration avec E. Jouini ainsi qu'une publication avec H. Pham et N. Touzi.

1 "Coûts de transaction, contraintes de vente à découvert et taxes : une approche unifiée" avec E. Jouini, Working Papers du CREST 9758, 1997

2 "Investment and arbitrage opportunities with short-sales constraints" avec E. Jouini, dans *Mathematical Finance*, vol 8/3, july 1998 pp169-178.

3 "A discrete stochastic model for investment with an application to the transaction costs case" avec E. Jouini, dans *Journal of Mathematical Economics*, (33)1 2000 pp. 57-80.

4 "No arbitrage in discrete time under portfolio constraints" avec avec H. Pham et N. Touzi, dans *Mathematical Finance*, vol 11/3, p 315-329, 2001.

Suivant l'idée développée dans l'article [1], tout actif peut être défini par les flux qu'il génère. Ainsi, on peut représenter une action par ses dates possibles d'achat et de vente ainsi que son prix aux dites dates. Cette formalisation permet de prendre en compte beaucoup d'imperfections de marché (coûts de transaction, coûts de vente à découvert, taxes,...). Dans les articles [2] et [3], nous étudions un modèle d'investissement vérifiant une hypothèse dite de *stationnarité*. Celle-ci implique, donc un modèle à horizon infini,

que tout flux d'investissement puisse être initié à toute date et dans tout état du monde, dans les mêmes conditions. Dans [2], nous nous plaçons dans un cadre déterministe, nous modélisons nos investissements par des mesures de Radon : elles nous permettent de traiter à la fois le cas des temps discret et continu. Nous démontrons alors différents résultats sur l'absence d'arbitrage et, en particulier, sur l'existence d'un taux interne de rendement pour un projet d'investissement. Dans [3], nous nous plaçons dans un modèle stochastique discret en date et fini en états de la nature et démontrons un résultat d'absence d'arbitrage. Puis, nous l'appliquons au cas d'un marché financier avec coûts de transaction. Nous obtenons alors des résultats plus forts que ceux déjà existants dans la littérature, en particulier en termes d'évaluation.
Dans [4], nous donnons une caractérisation de l'absence d'opportunité d'arbitrage dans un marché en temps discret, avec état de la nature quelconque, lorsque les stratégies d'échange sont contraintes à appartenir à un ensemble convexe, modélisant ainsi, en particulier, les marchés incomplets et les marchés avec contraintes de ventes à découvert. Puis, nous traitons de la representation duale du coût de sur-replication pour un actif contingent positif.

La seconde partie regroupe les résultats obtenus sur le calcul *explicite* des prix d'actifs dérivés et des couvertures associées en marché incomplet. Elle a donné lieu à un proceeding avec E. Gobet et E. Temam, un preprint avec T. Vargoliu et un preprint avec E. Temam (article soumis) :

5 "A class of financial products and models where super-replication prices are explicit" avec E. Gobet et E. Temam, dans "International Symposium, on Stochastic Processes and Mathematical Finance" at Ritsumeikan University, Kusatsu, Japan, March 2006

6 "Super-replication price for asset prices having bounded increments in discrete time", avec T. Vargiolu 2010, http ://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00511665/fr/

7 "Pricing and Hedging Basis Risk under No Good Deal Assumption" avec E. Temam 2010, http ://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00498479/fr/ (soumis).

En marché incomplet, la réplication n'étant pas toujours possible, la couverture parfaite du risque passe par la sur-réplication. Dans [5], nous proposons une formule fermée permettant de calculer le prix de sur-réplication et la stratégie de couverture de tout type d'option, pour quasiment toute dynamique de sous-jacent en temps discret. Cette formule met en lumière l'importance de la distribution conditionnelle de l'accroissement du cours du sous-jacent. Lorsque cette distribution est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^+$, nous calculons le prix de sur-réplication de plusieurs types d'options européennes ou américaines ; nous montrons qu'il est trop élevé pour être pratiquement utilisable. Dans [6], nous étudions le cas où cette distribution est à support borné. Nous montrons que le prix de sur-réplication des options (européennes et américaines) de paiements convexes est leur prix de réplication dans un modèle de Cox-Ross-Rubinstein dont les paramètres sont les bornes du support de cette distribution. Une des conclusions de [5] et [6] est que la notion de sur-réplication aboutit à un prix beaucoup trop élevé pour beaucoup de modèles financiers. Plusieurs solutions alternatives de prix sont possibles. Dans l'article [7], nous étudions le *"No Good Deal (NGD) pricing"* pour évaluer le risque de base. L'idée est d'exclure des stratégies admissibles les "Good Deal", c'est-à-dire les portefeuilles ayant un ratio de Sharpe trop élevé. Nous clarifions tout d'abord la notion de ratio de Sharpe pour des stratégies dynamiques et calculons une borne inférieure et une borne supérieure pour le prix NGD associé. Nous prouvons alors que le prix calculé précédemment par Cochrane-Saá-Requejo (2001) est en fait plus petit que le prix NGD. Nous remarquons aussi que la notion de prix NGD n'implique pas de stratégie de couverture, contrairement au prix de sur-réplication. Dans ce contexte, il est nécessaire d'imposer un critère de couverture. Nous traitons du critère minimum variance et obtenons une formule fermée pour les stratégies de couverture et l'erreur de couverture associée. Puis, nous proposons diverses illustrations numériques montrant l'efficacité du prix NGD et de sa couverture (en termes de probabilité de sur-réplication, perte moyenne attendue et VaR).

Enfin, la dernière partie traite du *comportement asymptotique* d'une famille d'agents par rapport à des perturbations de leur évaluation du risque, celle-ci étant modélisée par des fonctions d'utilité de type von Neumann-Morgenstern (1944). Ces travaux ont donné lieu à quatre publications en collaboration avec M. Ràsonyi :

8 "Optimal strategies and utility-based prices converge when agents' preferences do" avec M. Rasonyi dans Mathematics of Operations Research, vol 32, 102-117, 2007

9 "Convergence of utility indifference prices to the superreplication price" avec M. Rasonyi dans Mathematical Methods of Operations Research, vol 64, 145-154, 2006

10 "Convergence of utility indifference prices to the superreplication price : the whole real line case" avec M. Rasonyi dans Acta Applicandae Mathematicae, vol 96, 119-135, 2007

11 "Risk-averse asymptotics for reservation prices" avec M. Rasonyi à paraître dans Annals of Finance, actuellement en ligne sur le site de la revue :
http ://www.springerlink.com/content/94j6ll406614n4x6/fulltext.pdf

Les articles [8], [9] et [10] traitent des modèles financiers en temps discret avec processus de prix bornés et l'article [11] de modèles en temps continu avec processus de prix localement bornés.

Dans l'article [8], nous supposons que les préférences sont modélisées par des fonctions d'utilité définies sur $\mathbb{R}$. En supposant que les processus de prix satisfont l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage dite "uniforme forte" (voir Hypothèse 8.4) et que les fonc-

tions d'utilités satisfont la condition d'élasticité asymptotique uniforme *, nous montrons la convergence des stratégies optimales ainsi que des prix d'utilité (prix de Davis (97) et prix de Hodges-Neuberger (89)). Sous des hypothèses supplémentaires, nous estimons les vitesses de convergence. Nous donnons également des contre-exemples montrant le caractère nécessaire de nos hypothèses.
Dans l'article [10], toujours avec des fonctions d'utilité définies sur $\mathbb{R}$ et sous l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage "uniforme forte", nous montrons la convergence du prix d'indifférence vers le prix de sur-réplication lorsque l'aversion pour le risque tend vers l'infini. Nous montrons également qu'il existe un point d'accumulation à la suite des stratégies optimales, qui est une stratégie de sur-réplication.
Dans l'article [9], nous supposons maintenant que les préférences sont modélisées par des fonctions d'utilité définies sur $\mathbb{R}_+$ et nous montrons le même résultat de convergence sur les prix d'indifférence mais sous l'hypothèse de non arbitrage "uniforme" (voir Hypothèse 8.3).
Enfin dans l'article [11], nous considérons des fonctions d'utilité définies sur $\mathbb{R}$ et un marché semi-martingale. En faisant une hypothèse d'élasticité asymptotique raisonnable (voir Schachermayer (2001)) uniforme* et une hypothèse de compacité sur les mesures risque neutre, nous montrons la convergence du prix d'indifférence vers le prix de sur-réplication lorsque l'aversion pour le risque tend vers l'infini.

La suite du document est organisé comme suit. Chaque chapitre contient une introduction où nous procédons à une rapide revue de la littérature afin de mettre en perspective nos travaux avec l'existant. Nous décrivons alors plus en détails les résulats obtenus.
Notons que nous avons choisi de mettre l'accent sur les résultats obtenus dans les articles [7] et [8]. L'article [8] contient, à notre sens, beaucoup de matériel relatif à la stabilité des choix optimaux et des prix d'utilité des agents lorsque leur évaluation du risque est perturbée. L'article [7], quant à lui, explore une méthodologie d'évaluation alternative, relative au No Good Deal, et propose plusieurs résultats intéressants (toujours à notre sens) tant du point de vu théorique que numérique.

Je termine cette introduction par une rapide revue des travaux ne figurant pas dans mon HDR :

12 "Portfolio optimization for nonconvex criteria functions" avec H. Pham dans RIMS Kôkyûroku series, ed. Shigeyoshi Ogawa, 2009.1 N1620 p81

13 "Pilier 2 Bâle II, les fonds propres économiques : surmonter les difficultés méthodologiques"

*. Le terme uniforme signifie ici que les constantes apparaissant dans la condition d'élasticité asymptotique sont les mêmes pour toutes les fonctions d'utilité.

avec M. Guidoux, M. Gourand et D.D. Barkat, dans Lettre des Services Financiers, juin 2007

14 “The concept of no-arbitrage on financial markets : the case of the discrete finite time”, chapitre pour Oiko NOMIA, avec C. Napp, 2000

15 “Valuation of financial assets using the no-arbitrage assumption : the case of the discrete finite time”, chapitre pour Oiko NOMIA, avec C. Napp, 2000.

Actuellement, je travaille sur deux articles traitant, dans le cadre de modèles en temps discret, du problème de maximisation d'espérance d'utilité, pour des fonctions d'utilités non concaves. Le premier étudie des fonctions d'utilités générales dans un espace probabilisé classique, tandis que le second s'intéresse à des fonctions d'utilités plus particulières, mais avec des distorsions sur les probabilités (problème de finance comportementale).

16 “Non concave utility maximization in discrete-time”, avec M. Rásonyi.

17 “Optimal investment problems for a behavioral investor in multiperiod incomplete market models”, avec M. Rasonyi.

Je ne peux faire un résumé de mes travaux sans parler de mes activités d'enseignement et dans le secteur privé. Je conclurai donc cette introduction par un très bref aperçu sur ces deux thèmes. Notez que le caractère bref de ce résumé n'est en adéquation ni avec le temps et l'énergie que j'ai pu déployé sur ces sujets, ni avec l'intérêt que j'y porte. J'ai eu ces dernières années l'occasion d'enseigner des matières variées (mathématiques financières, probabilités, mathématiques générales, statistiques, informatique,...), à différents niveaux (du L1 au M2), à différents publics (filières mathématiques, MASS, Économie, Gestion) et dans plusieurs établissements (universités Paris 7, Paris 9, Paris 1 et ENSAE). J'ai ainsi pu acquérir une expérience certaine dans ce domaine. Ces différents enseignements ont d'ailleurs donné lieu à un livre de mathématiques financières, actuellement en préparation et co-écrit avec G. Pagès, un support de cours de probabilité que j'ai pour projet de transformer en livre et un support de cours Power-Point sur les risques.
Enfin, je conclue par mon expérience dans le secteur privé. Après une année de formation au master 229 de Dauphine consacrée à l'audit et aux normes IFRS et un stage chez Mazars, j'ai travaillé deux ans au sein de Risk Services, Deloitte Conseil. Je suis intervenue dans le cadre d'audit de grandes banques, en particulier sur la revue des modèles de valorisation et celle des réserves. Dans le domaine de l'énergie, j'ai également travaillé sur la revue des principes comptables IAS 39 et des méthodologies de valorisation d'instruments dérivés sur matières premières. Je me suis aussi occupée de recrutement et de la relation avec les écoles/universités. Depuis septembre 2008, j'ai commencé une activité de conseil dans la société QuERi (Quant, Evaluation and Risk) in Finance et je travaille, auprès d'une grande entreprise de la place, à améliorer la valorisation de leurs instruments financiers et à les accompagner d'un point de vue méthodologique dans leur choix de modèles.

Cette expérience dans le secteur privé a profondément changé ma vision de la finance. J'ai depuis modifié non seulement ma méthode, mais encore le contenu de mon enseignement. J'ai également pu avoir connaissance de nouvelles problématiques très intéressantes et qui ont inspirées de nouvelles recherches (article [7] ainsi qu'un projet de recherche sur l'efficacité du Cash Flow Hedge *). Dans l'avenir, je vais donc continuer à travailler dans ces directions, à la frontière entre les mathématiques, l'économie et la gestion.

∗. Il s'agit de montrer que les incertitudes que l'on peut avoir sur la mesure de la juste valeur d'un actif peu liquide sont suffisantes pour faire "sauter" le test d'efficacité.

Liste des travaux de Laurence CARASSUS

Les publications présentées pour l'HDR sont soulignées.

Articles publiés ou à paraître

1. «Risk-averse asymptotics for reservation prices», avec M. Rasonyi à paraitre dans Annals of Finance, actuellement en ligne sur le site de la revue http://www.springerlink.com/content/94j6ll406614n4x6/fulltext.pdf

2. «Convergence of utility indifference prices to the superreplication price : the whole real line case», avec M. Rasonyi dans *Acta Applicandae Mathematicae*, vol 96, 119-135, 2007

3. «Optimal strategies and utility-based prices converge when agents' preferences do» avec M. Rasonyi dans *Mathematics of Operations Research*, vol 32, 102-117, 2007

4. «Convergence of utility indifference prices to the superreplication price», avec M. Rasonyi dans *Mathematical Methods of Operations Research*, vol 64, 145-154, 2006

5. «No arbitrage in discrete time under portfolio constraints », avec H. Pham et N. Touzi dans *Mathematical Finance*, *vol 11*/3, p 315-329, 2001

6. «A discrete stochastic model for investment with an application to the transaction costs case », avec E. Jouini dans *Journal of Mathematical Economics*, (33) 1 2000, p57-80

7. «Investment and arbitrage opportunity with short-sales constraints », avec E. Jouini, dans *Mathematical Finance*, vol. 8/3, July 1998

Proceedings

8. «Portfolio optimization for piecewise criteria functions», avec H. Pham, dans *RIMS Kôkyûroku series, ed. Shigeyoshi Ogawa*, 2009.1 N° 1620 p81

9. «Pilier 2 Bâle II, les fonds propres économiques : surmonter les difficultés méthodologiques» avec M. Guidoux, M. Gourand et D.D. Barkat, dans *Lettre des Services Financiers, juin 2007*

10. « A class of financial products and models where super-replication prices are explicit», avec E. Gobet et E. Temam, dans *International Symposium on Stochastic Processes and Mathematical Finance* at Ritsumeikan University, Kusatsu, Japan, March 2006

Prépublications

11. «Pricing and Hedging Basis Risk under No Good Deal Assumption », avec E. Temam, 2010 (soumis), http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00498479/fr/

12. «Super-replication price for asset prices having bounded increments in discrete time», avec T. Vargiolu, 2010, http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00511665/fr/

13. « The concept of no-arbitrage on financial markets : the case of the discrete finite time », chapitre de Oiko NOMIA, en collaboration avec C. Napp, 2000

14. « Valuation of financial assets using the no-arbitrage assumption : the case of the discrete finite time », chapitre de Oiko NOMIA, en collaboration avec C. Napp, 2000

15. « Coûts de transaction, contraintes de vente à découvert et taxes : une approche unifiée », avec E. Jouini, Working Papers du CREST 9758, 1997

Articles en cours

16. « Non concave utility maximization in discrete-time», avec M. Rasonyi

17. «Optimal investment problems for a behavioral investor in multiperiod incomplete market models», avec M. Rasonyi.

Livre en cours

18. «Modèles de marchés financiers en temps discret : cours et exercices corrigés », avec G. Pagès, chez Vuibert.

Rapports diplômants

19. « Norme IFRS2 et évaluation des stock options» Mémoire de Master Audit, 2006

20. «Contribution à l'Etude Mathématique de l'Arbitrage et des Imperfections de Marché», Thèse de l'Université Paris 1, 1997

21. « Evaluation en présence de coûts de transactions » Mémoire de DEA MASE/ Société Générale Division Option, Options Actions et Indices, 1993

22. « Théorème des deux et quatre carrés » Mémoire de Master MMFAI, 1992

Première partie

Arbitrage en marché incomplet

Chapitre 1

Introduction

Dans cette première partie, nous étudions la caractérisation de l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage et ses implications en termes d'évaluation. Ceci a donné lieu à un preprint et deux publications en collaboration avec E. Jouini et une publication avec H. Pham et N. Touzi.

1 "Coûts de transaction, contraintes de vente à découvert et taxes : une approche unifiée" avec E. Jouini, Working Papers du CREST 9758, 1997

2 "Investment and arbitrage opportunities with short-sales constraints" avec E. Jouini, dans *Mathematical Finance*, vol 8/3, july 1998 pp169-178.

3 "A discrete stochastic model for investment with an application to the transaction costs case" avec E. Jouini, dans *Journal of Mathematical Economics*, (33)1 (2000) pp. 57-80.

4 "No arbitrage in discrete time under portfolio constraints" avec H. Pham et N. Touzi, dans *Mathematical Finance*, vol 11/3, p 315-329, 2001.

Avant de préciser les résultats obtenus, nous rappelons ce qu'est l'absence d'opportunité d'arbitrage et présentons un rapide récapitulatif de l'historique du théorème fondamental de l'évaluation par arbitrage.
L'absence d'opportunité d'arbitrage provient de l'auto-régulation du marché et traduit l'idée qu'il est impossible de gagner de l'argent de façon sûre. En effet, dans un marché organisé, si une telle possibilité existait, elle serait repérée et exploitée par les agents économiques, et ainsi disparaîtrait. Plus précisément, nous appellerons arbitrage, la possibilité de construire un portefeuille auto-financé, qui génère un flux toujours positif ou nul, et strictement positif avec probabilité strictement positive. L'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage est également à la base de la théorie de l'évaluation. Cette théorie fut initiée par les célèbres contributions de Black-Scholes (1973) et de Merton (1973). Plus

tard, les articles de Harrison-Kreps (1979), Harrison-Pliska (1979), et Kreps (1981) ont formalisé la théorie de l'évaluation par arbitrage.

Le théorème fondamental de l'évaluation par arbitrage établit qu'il existe une mesure de probabilité, équivalente à la probabilité historique, sous laquelle le processus de prix actualisé par l'actif sans risque est une martingale. Cette probabilité est appelée probabilité risque neutre ou probabilité martingale. Ce résultat d'existence est démontré dans le cadre des marchés dits parfaits, par ailleurs l'unicité d'une telle probabilité équivalente n'est assurée que s'ils sont complets.

Intuitivement, le théorème peut être interprété en disant que "si on ne peut pas gagner en pariant sur un processus, alors celui-ci doit être une martingale". Ainsi, on montre la réciproque du résultat classique : "on ne peut gagner en pariant sur une martingale". Qui plus est, le théorème fondamental de l'évaluation par arbitrage permet d'utiliser toutes les techniques mathématiques associées à la théorie des martingales. En particulier, le problème de l'évaluation du prix d'un bien contingent se réduit à calculer l'espérance de son paiement actualisé sous une mesure risque neutre.

La preuve du théorème fondamental de l'évaluation par arbitrage lorsque l'ensemble des dates est discret et fini et l'ensemble des états du monde quelconque est du à Dalang-Morton-Willinger (1990) (voir ausssi Schachermayer (1992), Kabanov-Kramkov (1995) et Kabanov-Stricker (2001) pour des preuves plus élémentaires). Les auteurs ne font aucune hypothèse sur le processus de prix des actifs et considère la condition de non-arbitrage. En effet, le théorème fondamental démontré initialement par Harrison-Kreps (1979) considère des processus de prix dans L^2 et celui de Kreps (1981) considère la notion de "free lunch". Un "free lunch" est une limite d'arbitrage, c'est-à-dire que l'on peut trouver une suite de portefeuilles telle que, à la limite, le flux généré soit positif ou nul, et strictement positif avec probabilité strictement positive. Dans le cas d'un ensemble discret mais infini de dates, le théorème fondamental de l'évaluation par arbitrage a été prouvé par Schachermayer (1994). Delbaen (1992) a étudié le cas de processus de prix borné et continu lorsque l'ensemble des dates est continu. Dans les deux cas, les théorèmes obtenus s'énonçent en utilisant le concept de "no free lunch with bounded risk". Un "free lunch with bounded risk" impose qu'il existe une borne absolue aux pertes éventuelles qui apparaissent lors du "free lunch". En temps continu, Delbaen-Schachermayer (1994) ont résolu le problème dans le cas où le processus de prix est une semi-martingale réelle et bornée. Ils prouvent qu'il existe une mesure risque neutre si et seulement si le processus de prix de l'actif risqué satisfait la condition de "no free lunch with vanishing risk" (NFLVR). La condition de NFLVR est la suivante : il ne doit pas exister de suite de paiements terminaux formés grâce à des intégrales stochastiques admissibles, dont la partie négative tend vers zéro uniformément et qui converge presque sûrement vers une fonction positive ou nulle et strictement positive avec probabilité strictement positive.

Finalement, Delbaen-Schachermayer (1996) ont étendu le théorème fondamental de l'évaluation par arbitrage à des processus de prix représentés par des semi-martingales à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et pas nécessairement bornées. Ils obtiennent que la condition (NFLVR) est équivalente à l'existence d'une mesure de probabilité équivalente à la probabilité historique et rendant le processus de prix de l'actif risqué actualisé sigma-martingale.

Nous terminons cette introduction par une brève description des résultats obtenus.
Le fil directeur du chapitre 2, basé sur les articles [2] et [3], est que tout actif peut être représenté par les flux qu'il génère. Ainsi, au lieu de parler d'une action, on peut considérer ses dates possibles d'achat et de vente, et son prix aux dites dates. Cette formalisation permet de prendre en compte divers types d'imperfections de marché comme les coûts de transaction, les coûts de vente à découvert, et même les taxes (voir article[1]). Dans ce chapitre, nous étudions un modèle d'investissement vérifiant une hypothèse de stationnarité. Celle-ci implique que tout flux d'investissement puisse être initié à toute date et dans tout état du monde, dans les mêmes conditions. Le modèle associé est alors nécessairement à horizon infini. Dans une première section (basée sur [2]), nous nous plaçons dans un cadre déterministe, et nous traitons à la fois le cas des dates discrètes et continues, grâce à l'utilisation de mesures de Radon. Nous démontrons alors un résultat d'absence d'arbitrage. Dans la deuxième section (basée sur [3]), nous étudions le cas d'un modèle stochastique en temps et état du monde discret. Dans un premier temps, nous démontrons un résultat d'absence d'arbitrage. Puis, nous l'appliquons au cas d'un marché financier avec coûts de transaction. Nous obtenons alors des résultats plus précis que ceux déjà existants dans la littérature, en particulier en termes d'évaluation.
Enfin dans le chapitre 3 (basé sur [4]), nous donnons une caractérisation de l'absence d'opportunité d'arbitrage dans un marché en temps discret et avec état de la nature quelconque lorsque les stratégies d'échange sont contraintes à appartenir à un ensemble convexe. Puis nous traitons de la representation duale du coût de sur-replication (voir chapitre 5 pour plus de détails) pour un actif contingent positif.

Chapitre 2

Marché stationnaire

2.1 Cas déterministe

Cette première section est basée sur l'article "Investment and arbitrage opportunities with short-sales constraints", co-écrit avec E. Jouini, dans *Mathematical Finance*, vol 8/3, juillet 1998 pp169-178. Nous étudions un modèle d'investissement, où les projets d'investissement (ou investissements) sont entièrement décrits par leurs paiements ou flux. Nous supposons que le modèle est stationnaire, c'est-à-dire que les projets sont disponibles à toutes dates, aux mêmes conditions, ou encore que, à chaque date, il se crée des investissements ayant le même profil. Mathématiquement, cela se traduit de la façon suivante : si la fonction représentant l'investissement appartient à l'ensemble des investissements disponibles, alors toutes les translations réelles positives de cette fonction appartiennent aussi à cet ensemble. L'horizon du modèle est alors nécessairement infini. Tout d'abord, nous définissons les différentes notions de non-arbitrage dans ce modèle. En effet, en horizon infini, il est généralement nécessaire de considérer une condition plus forte de non arbitrage, ou encore une définition plus faible d'arbitrage : le "free lunch" ou le "free lunch with bounded risk".
Sous une première hypothèse technique, nous démontrons que les notions de non-arbitrage, de "non free lunch" et de "non free lunch with bounded risk" sont équivalentes. Puis, au prix d'une deuxième condition technique, nous montrons que l'absence d'arbitrage est équivalente à l'existence d'un taux d'actualisation qui rend la valeur présente de tous les projets négative, s'il y a contraintes de vente à découvert et nulle sinon.
Rappelons que la valeur présente est une estimation objective de la valeur aujourd'hui d'une séquence de flux versés dans le futur. Dans le cas de paiements discrets, un projet d'investissement de longueur n est représenté par la suite $F = (F_0, ..., F_n)$, la valeur présente est donc égale à $\sum_{t=0}^{n} \frac{F_t}{(1+r)^t}$, où r est le taux d'actualisation. Dans le cas de

paiements continus, un projet d'investissement de longueur n est représenté par une fonction f à support dans $[0, n]$ et sa valeur présente est donc égale à $\int_0^n f(t)e^{-rt}dt$, soit donc la transformée de Laplace de f en r. Dans un modèle avec contraintes de vente à découvert, l'absence d'opportunités d'arbitrage est équivalente à l'existence d'une structure par terme de taux d'intérêt D_t, telle que la valeur nette de l'investissement actualisée par cette structure par terme soit négative ou nulle. Mathématiquement, cela s'écrit dans le cas discret comme $\sum_{t=0}^n F_t D_t \leq 0$ ou $\int_0^n F_t D_t dt \leq 0$ dans le cas continu. Le théorème que nous obtenons montre que si on suppose le modèle stationnaire, il existe une structure par terme plate de la courbe des taux. Cela signifie qu'il existe un taux r tel que, pour tout t, $D_t = e^{-rt}$. Remarquons que, dans un marché avec un seul investissement et sans contraintes de vente à découvert, l'absence d'opportunités d'arbitrage est équivalente à l'existence d'un taux de rendement interne, i.e. un taux (réel) qui annule la valeur présente nette actualisée. L'application de notre théorème montre que la stationnarité donne une jolie caractérisation de l'existence d'un taux de rendement interne, celle-ci n'étant pas toujours assurée dans le cas général.

Le théorème montré est valable pour une infinité de projets dont les flux sont discrets ou continus. Ainsi, ce théorème généralise une partie des résultats de Cantor-Lippman (1983,1995) et d'Adler-Gale (1997), qui travaillait dans un cadre discret avec un nombre fini de projets d'investissement. Notre approche est totalement différente, car en temps continu, les méthodes de Cantor et Lippman ou d'Adler et Gale ne s'adaptent pas. Dans notre modélisation, les investissements et les stratégies sont représentés par des mesures de Radon. Elles ont l'avantage de pouvoir représenter les paiements discrets aussi bien que continus. Chaque investissement a un support fini. Afin qu'un investisseur ne puisse pas reporter sa dette à l'infini, les stratégies ont aussi un support fini.

Nous allons rapidement décrire la preuve proposée qui est basée sur des techniques d'analyse fonctionnelle. Notons $\mathcal{C}(K)$ l'espace des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ à support inclus dans le compact K muni de la topologie de la convergence uniforme. Nous noterons $\mathcal{C}$ la limite inductive des $\mathcal{C}(K)$, l'espace $\mathcal{C}$ est l'espace des fonctions continues à support compact. Nous chercherons à ramener les problèmes ayant lieu dans l'espace des mesures de Radon $\mathcal{M}$ à l'espace $\mathcal{C}$. Pour ce faire nous remarquons que le produit de convolution d'une mesure de Radon à support compact (qui représente nos investissements) par un élément de $\mathcal{C}$ est encore un élément de $\mathcal{C}$. Dans un premier temps, nous définissons précisément l'ensemble des mesures de Radon et la topologie que nous lui associons : la topologie vague. Puis, nous démontrons que les différentes notions d'arbitrage sont équivalentes. Pour cela, nous montrons que l'ensemble des paiements est fermé pour la topologie vague. Ici, l'utilisation de la convolution avec une fonction de $\mathcal{C}$ nous permet de nous restreindre à une classe particulière de stratégies : les stratégies modélisées par des mesures de Radon ayant une densité. Nous démontrons alors que l'ensemble des paiements associés à ces stratégies

particulières est localement compact et fermé pour la topologie de la convergence uniforme, grâce au théorème d'Ascoli et aux propriétés des cônes à semelle compacte. Puis en utilisant des suites régularisantes, nous démontrons que l'ensemble tout entier des paiements est fermé pour la topologie vague. Ensuite, nous exprimons la condition de non-arbitrage sous forme géométrique, afin d'utiliser un théorème de séparation sur les cônes. En fait, par convolution avec une fonction de $\mathcal{C}$, nous transformons nos projets d'investissements, qui sont des mesures de Radon à support compact, en des fonctions de $\mathcal{C}$, ce qui nous permet, une fois encore, de travailler dans $\mathcal{C}$. Remarquons que l'absence d'opportunités d'arbitrage doit être vérifiée pour chaque horizon et pour chaque sous-ensemble fini d'investissements. Rappelons également que l'ensemble des mesures de Radon $\mathcal{M}$ est le dual de $\mathcal{C}$ muni de la topologie limite inductive. Les séparateurs que nous obtenons sont donc des mesures de Radon dépendant de l'horizon d'investissement et du sous-ensemble fini d'investissements. Nous prouvons que l'ensemble de ces séparateurs est vaguement relativement compact, et ainsi nous trouvons un séparateur indépendant de l'horizon. Enfin, en utilisant les propriétés de la transformée de Laplace, nous trouvons que l'opposé de l'abscisse de convergence de ce séparateur est le taux d'actualisation cherché (grâce à un résultat de compacité pour se débarrasser de la dépendance aux sous-ensembles finis d'investissements).
Nous considérons également des cas particuliers de projet d'investissement. Ainsi, s'il n'y a qu'un seul investissement ou dans le cas discret, nous montrons que seule une des deux hypothèses techniques est nécessaire (différente suivant le cas considéré). Enfin, nous étudions le cas de stratégies dont le support n'est pas fini, et nous montrons que l'hypothèse d'absence d'arbitrage garde un sens, et que l'on a les mêmes résultats que précédemment, si les stratégies ont de bonnes propriétés de croissance.

2.2 Cas aléatoire

Cette section est basée sur l'article "A discrete stochastic model for investment with an application to the transaction costs case", co-écrit avec E. Jouini, dans *Journal of Mathematical Economics*, (33)1 (2000) pp. 57-80. Nous étudions un modèle stochastique, discret en dates, fini en états de la nature et présentant la propriété de stationnarité. Maintenant, celle-ci impose que les investissements puissent être débutés à toutes dates et dans tous états du monde, dans les mêmes conditions. Nous supposons que notre modèle contient un taux d'intérêt r_p permettant de placer de l'argent. Nous établissons un théorème caractérisant l'absence d'arbitrage. Pour le démontrer, nous considérons successivement deux conditions différentes d'absence d'arbitrage. La première condition n'a pas vraiment de sens économique, mais elle permet d'obtenir le théorème cherché. Cette condition implique d'utiliser à la place des investissements, qui ne sont pas forcément indépendants

du chemin suivi, des transformées qui, elles, le seront. Pour prouver notre théorème, nous utilisons une version adaptée du lemme de Farkas. Puis, par compacité, nous trouvons un séparateur indépendant de l'horizon. Grâce à notre condition d'absence d'arbitrage qui permet d'utiliser des instruments indépendants du chemin suivi, le séparateur est aussi indépendant du chemin suivi. Nous pouvons alors utiliser deux fois le théorème de Schauder-Tychonoff, afin d'obtenir un séparateur de forme particulière.
Finalement, nous trouvons que cette condition d'absence d'arbitrage implique l'existence d'un taux d'intérêt supérieur ou égal à r_p, et d'une probabilité particulière, rendant la somme actualisée des espérances des flux négative, s'il y a des contraintes de vente à découvert, et égale à zéro sinon.
La seconde condition d'absence d'arbitrage est la condition classique de non existence d'une stratégie menant à un paiement positif et non nul. Pour pouvoir démontrer le théorème précédent sous cette condition de non-arbitrage, nous devons rajouter une hypothèse technique afin que le séparateur demeure indépendant du chemin suivi.
Dans un deuxième temps, nous étudions un modèle incluant un actif sous-jacent dont le prix évolue selon un processus binomial et une famille d'options écrites sur cet actif. Rappelons qu'une option d'achat est le droit d'acheter à une date fixée au départ, la date d'exercice, l'actif sous-jacent pour un prix convenu au départ, le prix d'exercice. Nous supposons qu'il y a des coûts de transaction proportionnels à l'achat et à la vente. Nous montrons tout d'abord que le modèle est stationnaire et qu'il vérifie l'hypothèse technique faite précédemment.
Puis, *nous montrons qu'à l'équilibre, le prix calculé par la formule de Cox-Ross-Rubinstein (1979) est toujours compris entre le prix de vente de l'option et son prix d'achat. A fortiori, s'il n'y a pas de coûts de transaction sur l'option, son prix sera le prix calculé par la formule de Cox-Ross-Rubinstein.*
Ce résultat précise les résultats déjà obtenus dans le cas de coûts de transaction. En effet dans Jouini-Kallal (1995 a), il est démontré que le prix de l'option n'est plus unique mais appartient à un intervalle de prix. Sa borne inférieure (resp. supérieure) est obtenue comme étant le minimum (resp. maximum) sur toutes les probabilités martingales équivalentes de l'espérance des valeurs futures de l'option. De plus, les bornes de tout sous-intervalle correspondent aussi à une fourchette de prix vente-achat compatible avec l'hypothèse de non-arbitrage. Bien sûr, le prix calculé par la formule de Cox-Ross-Rubinstein appartient a priori à l'intervalle maximal, mais il n'a aucune raison d'appartenir à tout sous-intervalle de celui-ci. *Nous prouvons ici que, en horizon a priori infini, les seuls intervalles prix de vente-prix d'achat, observables à l'équilibre, sont ceux contenant le prix calculé par la formule de Cox-Ross-Rubinstein. Dans le cas où les coûts de transaction (à l'achat et à la vente) sur l'option sont constants, nous trouvons des bornes explicites sur le prix de l'option.*

Chapitre 3

Marché discret avec contraintes convexes

Ce paragraphe est issu de l'article "No arbitrage in discrete time under portfolio constraints", co-écrit avec H. Pham et N. Touzi dans Mathematical Finance, vol 11/3, p 315-329, 2001.

Notre objectif est la généralisation du théorème de Dalang-Morton-Willinger (1990) lorsqu'il y a des contraintes convexes sur les stratégies de portefeuille. Nous supposons qu'il y a d actifs risqués dont le processus de prix, de dimension d, actualisé par l'actif sans risque est noté S. Soient C^+ et C^- deux ensembles convexes contenant zéro et tels que le cône engendré par C^+ (resp. C^-) soit fermé. Comme dans Karatzas-Kou (1996), les proportions de la richesse totale investie en chaque actif risqué sont contraintes : elles forment un vecteur de $\mathbb{R}^d$ appartenant à C^+ ou C^- selon le signe de la richesse à l'instant considéré. Donnons quelques exemples : tout d'abord ce modèle contient bien sûr le cas non contraint si l'on considère $C^+ = C^- = \mathbb{R}$. Cette formalisation permet aussi de prendre en compte les contraintes de vente à découvert en choisissant $C^+ = -C^- = \mathbb{R}^+$. En considérant $C^+ = -C^- = \{\pi \in \mathbb{R}^d \ : \ \pi_i = 0, i = n+1, ..., d\}$, on représente un marché incomplet classique (c'est-à-dire que tous les actifs ne sont pas négociables). Dans notre modélisation, l'absence d'arbitrage impose que partant d'une dotation initiale $x \in \mathbb{R}$ et suivant une stratégie d'échange admissible (adaptée et appartenant à C^+ ou C^- selon le signe de la richesse à la date considérée), on ne puisse obtenir une richesse supérieure ou égale à x presque sûrement et strictement supérieure à x avec probabilité non nulle.

Nous montrons qu'il n'y a pas d'opportunités d'arbitrage si et seulement si il existe un couple de probabilité équivalente (Q^+, Q^-) (avec densité essentiellement bornée) tel que $E^{Q^+}\left[diag(S_t)^{-1}(S_{t+1} - S_t)|\mathcal{F}_t\right] \in \hat{C}^+$ et $E^{Q^-}\left[diag(S_t)^{-1}(S_{t+1} - S_t)|\mathcal{F}_t\right] \in -\hat{C}^-$, où $\hat{C} = \{x \in \mathbb{R}^d : <x, y> \leq 0 \text{ pour tout } y \in C\}$ et $diag(S_t)$ est la matrice diagonale dont le i^{ieme} terme diagonal est S_t^i.

Ce résultat est établi sous une contrainte de non dégénérescence du type de celle utilisée par Pham-Touzi (1999) (plus précisément $D_t = C^+ \cup (-C^-)$, où D_t est explicité dans la définition 8.1). Nous généralisons ici leur résultat puisque leur ensemble de contraintes doit être aussi conique. Pour démontrer la première implication de notre théorème, nous exprimons la condition de non-arbitrage localement. Nous devons alors "séparer" deux ensembles, qui ne sont pas forcément fermés, de l'orthant positif. Pour résoudre le problème, nous considérons leurs adhérences et montrons qu'elles sont encore d'intersections vides avec l'orthant positif. Nous utilisons alors un théorème dû à Yan (1980). Pour l'implication inverse, nous construisons une probabilité équivalente à la probabilité historique et qui rend sur-martingale le processus de richesse.
Enfin dans le dernier chapitre, nous nous intéressons au prix de sur-réplication d'un actif contingent positif ou nul et d'espérance finie. Ce prix est le montant minimum à investir à la date initiale pour pouvoir dominer l'actif (voir la partie suivante pour plus de détails sur le prix de sur-réplication). Dans cette partie, nous supposons que $C := C^+ = -C^-$. Nous relions notre résultat sur l'absence d'opportunité d'arbitrage au théorème de Föllmer-Kramkov (1997), qui permet d'obtenir une représentation duale du prix de sur-réplication en utilisant l'ensemble de probabilités équivalentes mis à jour par les conditions de non-arbitrage.

Deuxième partie

Evaluation et couverture en marché incomplet

Chapitre 4

Introduction

L'objectif de cette partie est de calculer explicitement les prix d'actifs contingents ainsi que les couvertures associées en marché incomplet. Il a donné lieu à un proceeding avec E. Gobet et E. Temam, un preprint avec T. Vargoliu et un preprint avec E. Temam :

5 "A class of financial products and models where super-replication prices are explicit" avec E. Gobet et E. Temam, dans "International Symposium, on Stochastic Processes and Mathematical Finance" at Ritsumeikan University, Kusatsu, Japan, March 2006

6 "Super-replication price for asset prices having bounded increments in discrete time" avec T. Vargiolu 2010, http ://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00511665/fr/

7 "Pricing and Hedging Basis Risk under No Good Deal Assumption" avec E. Temam 2010, http ://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00498479/fr/(soumis).

En marché incomplet, la réplication n'étant pas toujours possible, la couverture parfaite du risque passe par la sur-réplication (recherche d'une stratégie dont les versements sont toujours supérieurs à ceux du bien à couvrir) et la notion naturelle de prix est alors le montant minimum permettant d'initier une telle stratégie. Cette notion a été introduite dans le cadre de modèles binomiaux avec coûts de transaction par Bensaid-Lesne-Pagès-Scheinkman (1992). Puis, elle a été étudiée dans un cadre $\mathcal{L}^2$ pour des coûts de transaction ou des contraintes de vente à découvert par Jouini-Kallal (1995a, 1995b) et dans un modèle de diffusion incomplet par El Karoui-Quenez (1995) (voir aussi Kramkov (1996) et Föllmer-Kabanov (1998)) Le cas des modèles avec contraintes convexes a été traité, en autres, par Cvitanić-Karatzas (1993), Karatzas-Kou (1996), Broadie-Cvitanić-Soner (1998) et dans un cadre très général par Föllmer-Kramkov (1997). Ces papiers proposent une caractérisation dite duale du prix de sur-réplication. Dans le cas d'une option européenne, il est égal au supremum sur un certain ensemble de probabilité de l'espérance du paiement actualisé de l'option (ou d'une modification de ce paiement). Cet ensemble de probabilité est caractérisé par la condition d'absence d'arbitrage et dans le cas le plus simple de marché incomplet, il s'agit de l'ensemble des probabilités risque neutre. Malheureusement, cette caractérisation duale ne permet que très rarement le calcul explicite du prix de sur-réplication. Citons cependant Cvitanić-Shreve-Soner (1995), Cvitanić-Pham-Touzi (1999a, 1999b) et Patry (2001) où il est démontré, dans différents contextes, que le prix de sur-réplication d'une option d'achat européenne est égal au prix initial du sous-jacent sur lequel elle est écrite. La stratégie de sur-réplication associée est alors la stratégie "Buy and Hold". L'objectif du chapitre 5 (voir les articles [5] et [6]) est de calculer de manière effective le prix de sur-réplication et la stratégie de couverture associée dans des modèles en temps discret. Dans une première section (voir article [5]), nous proposons une formule fermée permettant de calculer le prix de sur-réplication et la stratégie de couverture de tout type d'option, pour toute dynamique de sous-jacent (sous une condition de non dégénérescence) en temps discret. La formule est issue d'un algorithme de programmation dynamique et met en évidence l'importance de la distribution conditionnelle de l'accroissement du cours du sous-jacent. Lorsque cette distribution est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^+$, nous calculons le prix de sur-replication de plusieurs types options européennes ou américaines (en particulier asiatiques, barrières ou lookback) ; nous montrons qu'il est trop élevé pour être pratiquement utilisable.

Dans une deuxième section (voir article [6]), nous étudions le cas où le support de la distribution conditionnelle de l'accroissement du cours du sous-jacent est borné. Nous montrons que le prix de sur-réplication des options (européennes et américaines) de paiements convexes est leur prix de réplication dans un modèle de Cox-Ross-Rubinstein dont les paramètres sont les bornes du support de la distribution conditionnelle.

Un des conclusions de [5] et [6] est que la notion de sur-réplication, économiquement pleine de sens, aboutit à un prix beaucoup trop élevé pour beaucoup de modèles financiers. Plusieurs solutions alternatives de prix sont possibles. Nous verrons dans la partie III, la notion de prix d'utilité, qui propose de prendre en compte les préférences des agents (de type Von Neuman-Morgenstern (1944)). Une autre méthode, introduite par Cochrane-Saá-Requejo (2001) est le "No Good Deal (NGD) pricing". L'idée est d'exclure des stratégies admissibles les "Good Deal" c'est-à-dire les portefeuilles ayant un ratio de Sharpe trop élevé [1]. En effet, comme pour les opportunités d'arbitrage, "les bonnes affaires" disparaissent rapidement car les investisseurs les exploitent immédiatement. Un prix NGD est donc un prix pour lequel non seulement les opportunités d'arbitrage mais encore les "Good Deal" ont été exclus. La question est alors de savoir comment définir le ratio de Sharpe d'un processus. La définition pour un bien est clair : il mesure l'écart de son rendement espéré par rapport à celui d'un placement sans risque (autrement dit la prime de risque), divisé

1. Une valeur limite de 2 est utilisée par Cochrane-Saá-Requejo (2001).

par la volatilité de ce bien. C'est un indicateur de la rentabilité (marginale) obtenue par unité de risque. En revanche, pour une stratégie dynamique, il existe plusieurs définitions possibles : globale (voir Klöppel-Schweizer (2007)) ou instantannée (voir Cochrane-Saá-Requejo (2001) ou Björk-Slinko (2006)) et selon la définition choisie, on n'aboutit pas a priori à la même notion de prix NGD.

Dans le chapitre 6 (voir article [7]), nous nous intéressons à un cas particulier d'incomplétude : le risque de base. Notre marché est constitué de deux actifs risqués : l'un est échangeable (S) et a un risque couvrable et l'autre ne l'est pas (V) et son risque est donc non couvrable ; de plus ces deux actifs sont supposés corrélés. L'objectif est d'évaluer et de couvrir une option écrite sur V grâce aux actifs échangeables *i.e.* S et l'actif sans risque. Tout d'abord, nous clarifions la notion de ratio de Sharpe et de prix NGD pour des stratégies dynamiques et calculons une borne inférieure et une borne supérieure pour ce prix. Nous prouvons alors que le prix calculé précédemment par Cochrane-Saá-Requejo (2001) ou Björk-Slinko (2006) est en fait plus petit que le prix NGD.

Nous remarquons aussi que la notion de prix NGD n'implique pas de stratégie de couverture, contrairement au prix de sur-réplication. Dans ce contexte, il est nécessaire d'imposer un critère de couverture. Nous traiterons du critère minimum variance, introduit par Föllmer-Sonderman (86) dans le contexte martingale, et qui consiste à minimiser la variance, sous la probabilité historique, de l'erreur de réplication. Il s'agit d'un problème minimisation quadratique et l'idée naturelle, suivie par Duffie-Richardson (91) et plus tard par Schweizer (92), est d'utiliser l'orthogonalité et de dire qu'une stratégie (en actifs échangeables) est solution si son erreur de réplication (*i.e.* la différence entre le paiement de l'option et la valeur terminale de cette stratégie) est orthogonale à la valeur terminale de toutes les stratégies (toujours en actifs échangeables). Ceci conduit à une EDP qui n'est pas simple à résoudre explicitement. L'autre idée naturelle est de projeter l'option sur l'ensemble des paiements générés par toutes les stratégies en actifs échangeables. Mais ces actifs n'étant pas martingales sous la probabilité historique, ce n'est pas techniquement aisé. Gouriéroux-Laurent-Pham (98) utilise le changement de numéraire et transforme le problème afin d'obtenir des martingales (locales) et de pouvoir projeter via le théorème de Galtchouk-Kunita-Watanabe (voir par exemple Jacod (79)). Ils resolvent ainsi le problème de minimum variance dans un cadre général. Dans notre contexte plus simple, nous suivons la même idée mais au lieu d'introduire la mesure dite de variance optimale, nous montrons directement que la martingalité des actifs risqués implique une forme particulière pour le numéraire. Nous obtenons une formule fermée pour les stratégies de couverture et l'erreur de couverture associée. Cette erreur peut être divisée en deux parties. La première est due au fait que la richesse initiale n'est pas égale au prix minimum variance. La seconde tend vers zéro lorsque les deux actifs sont parfaitement corrélés et est la variance de l'erreur liée au risque non couvrable.

Enfin, nous proposons diverses illustrations numériques montrant l'efficacité du prix NGD et de sa couverture selon le critère minimum variance. Nous calculons et comparons les différents prix NGD : le prix de Cochrane-Saá-Requejo (2001) et nos bornes inférieure et supérieure. Nous analysons également le sens de variation des prix NGD et leurs convergences. Dans un second temps, nous calculons nos stratégies minimum variance et les comparons à d'autres stratégies de couverture de type “buy and hold” ou Black Scholes. La comparaison est faite à l'aune de trois mesures de risque : probabilité de sur-réplication, perte moyenne anticipée et VaR. Nous constatons que notre stratégie conduit à de meilleurs résultats.

Chapitre 5

Calcul effectif du prix de sur-réplication

5.1 Formules fermées pour le prix de sur-réplication et les stratégies associées

Ce paragraphe est issu de l'article "A class of financial products and models where super-replication prices are explicit", co-écrit avec E. Gobet et E. Temam et paru dans "International Symposium on Stochastic Processes and Mathematical Finance" at Ritsumeikan University, Kusatsu, Japan, March 2006.

Nous considérons un modèle financier en temps discret. Ce type de modèle est déjà génériquement incomplet, mais nous supposons, de plus, que les stratégies sont contraintes à appartenir à un cône convexe fermé K, afin de prendre en compte les contraintes de vente à découvert ou le cas d'actifs non échangeables.

Dans un premier temps, nous démontrons le théorème de représentation duale du prix de sur-réplication pour des options américaines. Ce résultat est bien connu pour les options européennes (voir par exemple Föllmer-Kramkov (1997) ou Pham (2000)). Schäl (1999) a étudié le cas des options américaines mais dans un contexte $\mathcal{L}^2$ et sans contraintes sur la stratégie. Notons que notre preuve est différente de la sienne car elle est basée sur le théorème établie pour les options européennes.

Notre résultat principal est d'obtenir une caractérisation implémentable du prix de sur-réplication et de la stratégie de couverture associée, ceci pour n'importe quels actifs dérivés. Il s'agit en fait de calculer des sortes d'enveloppes concaves. Les coefficients de la fonction affine apparaissant dans cette enveloppe donnent la stratégie de couverture.

Notons S le processus de prix actualisés des d actifs risqués. Nous supposons une condition de non dégénérescence classique sur S (plus précisément $D_t = K$ où D_t est explicité dans la définition 8.1). Considérons un dérivé américain $H = (h_t(S_0, \ldots, S_t))_t$ où h_t est une fonction mesurable de $(\mathbb{R}^d)^{t+1}$ dans $[0, \infty)^d$. Soit, pour tout $t = 0, \ldots, T-1$,

$$\begin{aligned} \Gamma_T^a h(s_0, \ldots, s_T) &= h_T(s_0, \ldots, s_T) \\ \Gamma_t^a h(s_0, \ldots, s_t) &= h_t(s_0, \ldots, s_t) \vee \operatorname{ess} \inf_{(\alpha,\beta) \in I_{\Gamma_{t+1}^a h(s_0,\ldots,s_t)}} \{\alpha + \beta^* s_t\}, \end{aligned} \tag{5.1}$$

et pour u de $(\mathbb{R}^d)^{t+2}$ dans $\mathbb{R}$, $I_u(s_0, \ldots, s_t)$ est définie par

$$\begin{aligned} I_u(s_0, \ldots, s_t) &= \\ &= \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times K \mid \ P\left(\alpha + \beta^* S_{t+1} \geq u(s_0, \ldots, s_t, S_{t+1}) \mid S_0 = s_0, \ldots, S_t = s_t\right) = 1\}. \end{aligned} \tag{5.2}$$

L'essentiel infimum dans (5.1) est relié à la loi du vecteur $(S_0, \ldots, S_t)$. Alors sous l'hypothèse de non arbitrage et en supposant que le supremum, sous toutes les probabilités risque neutre et tous les temps d'arrêt τ, des espérances de H_τ est fini, la valeur de la stratégie de couverture optimale est donnée par $\Gamma_t^a h(S_0, \ldots, S_t)$ et le prix de sur-réplication par la valeur initiale de cette stratégie, *i.e.*

$$p^a(H) = \Gamma_0^a h(S_0).$$

La stratégie optimale en actifs risqués est donnée par le β optimal dans (5.1) (les infimum sont en effet atteints). La preuve utilise à la fois la formulation duale et la formulation primale du prix de sur-réplication. Le résultat pour les options européennes est similaire en définissant un opérateur $\Gamma^e h$ par

$$\begin{aligned} \Gamma_T^e h(s_0, \ldots, s_T) &= h(s_0, \ldots, s_T) \\ \Gamma_t^e h(s_0, \ldots, s_t) &= \operatorname{ess} \inf_{(\alpha,\beta) \in I_{\Gamma_{t+1}^e h(s_0,\ldots,s_t)}} \{\alpha + \beta^* s_t\}. \end{aligned}$$

Il apparaît clairement au vu de (5.1) et (5.2) que le calcul explicite des prix et des stratégies de sur-réplication dépend essentiellement du support de la loi conditionnelle des actifs risqués sous-jacents.

Dans beaucoup de modèles financiers en temps continu, observés à des dates discrètes (EDS browniennes, modèle de Merton avec sauts poissonniens, modèles à volatilité stochastique), la loi conditionnelle des actifs risqués sous-jacents est équivalente à la mesure de Lebesgue sur $]0, \infty[^d$: pour déterminer les opérateurs Γ_t^a, il suffit alors de déterminer les enveloppes concaves à des ensembles de mesure nulle par rapport à la mesure de Lebesgue sur $]0, \infty[^d$ près. Pour les fonctions usuelles de paiement (souvent linéaires par morceaux), ces enveloppes sont très simples à calculer, permettant ainsi de mettre à jour le prix de sur-réplication et la stratégie de couverture associée. Nous les calculons pour les options européennes, asiatiques, barrières, call sur maximum et look back : quelques exemples sont

	Paiement	Prix Européen	Prix Américain
Call	$(S_T - K)_+$	S_0	S_0
Put	$(K - S_T)_+$	K	K
Call asiatique (Prix d'exercice fixe)	$\left(\sum_{i=1}^{T} a_i S_i - K\right)_+$ $0 \leq a_i$	$S_0 \left(\sum_{i=1}^{T} a_i\right)$	$\left(\sum_{i=2}^{T-1} \frac{1}{i} + \frac{2}{T}\right) S_0$ $(a_i = 1/T)$
Put asiatique (Prix d'exercice flottant)	$\left(S_T - \sum_{i=1}^{T} a_i S_i\right)_+$ $0 \leq a_i \leq 1$	$S_0(1 - a_T)$	$S_0(1 - a_T)$
Call Lookback partiel	$(S_T - \lambda \min(S_1, \ldots, S_T))_+$ $\lambda \in [0,1]$	S_0	S_0
Call sur maximum	$(\max(S_1, \ldots, S_T) - K)_+$	$T\ S_0$	$T\ S_0$
Call barrière Up and Out	$\prod \mathbb{1}_{S_i < U} (S_T - K)_+$ $(K < U, S_0 < U)$	$S_0(1 - K/U)$	$S_0(1 - K/U)$
Put barrière Up and In	$\mathbb{1}_{\exists i / S_i > U} (K - S_T)_+$ $(S_0 < U)$	$S_0 K/U$	$S_0 K/U$

TABLE 5.1 – Prix de sur-réplication de quelques options

fournis dans le tableau ci-dessus pour $K = \mathbb{R}^d$. Il parait clair au vu des prix du tableau 5.1 que le prix de sur-réplication n'est pas un concept raisonnable dans ce type de marché financier. Nous étudions dans le chapitre 6 la notion de prix No Good Deal et dans la partie III la notion de prix d'utilité. Dans la section suivante, nous examinons un autre type de marché financier : ceux pour lesquels la distribution conditionnelle de l'accroissement du cours du sous-jacent est à support borné.

5.2 Calcul effectif du prix de sur-réplication lorsque l'accroissement du processus de prix est borné

Ce paragraphe est issu de l'article “Super-replication price for asset prices having bounded increments in discrete time”, avec T. Vargiolu. Le cadre d'étude est le même que dans le paragraphe précédent mais avec un seul actif risqué et $K = \mathbb{R}$. Maintenant, au lieu d'étudier des modèles financiers dont la distribution conditionnelle de l'accroissement du cours du sous-jacent est équivalente à la mesure de Lebesgue, nous supposons qu'elle est à support borné (hypothèse 5.1).

Deux principaux types de processus de prix satisfont à cette hypothèse. Tout d'abord, les modèles, où conditionnellement à $\mathcal{F}_t$, la distribution de $\frac{S_{t+1}}{S_t}$ est discrete et finie : prototypiquement des modèles d'arbres. La deuxième famille de modèles est celle dont la distribution conditionnelle de $\frac{S_{t+1}}{S_t}$ est équivalente à la mesure de Lebesgue sur un compact $[d_t, u_t]$. Toutes les combinaisons de ces deux types de modèles sont, bien sûr, prises en compte.

Hypothèse 5.1 *Pour tout $t \in \{0, 1, \ldots, T-1\}$, il existe des réels distincts u_{t+1} et d_{t+1} tels que $d_{t+1} \leq 1 \leq u_{t+1}$ et le support de $\frac{St+1}{S_t}$ est inclus dans $[d_{t+1}, u_{t+1}]$.*

Notons que la condition de non arbitrage implique que $d_{t+1} \leq 1 \leq u_{t+1}$. Nous montrons que sous l'hypothèse 5.1, il est seulement nécessaire de sur-répliquer une fonction convexe au borne du support de la distribution conditionnelle. Ainsi, pour toute fonction convexe u de $\mathbb{R}^{t+2}$ dans $\mathbb{R}$,

$$I_u(s_0, \ldots, s_t) = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha + \beta s_t x \geq u(s_0, \ldots, s_t, s_t x) \text{ pour } x \in \{d_{t+1}, u_{t+1}\}\}.$$

Nous en déduisons alors que pour tout actif américain $H = (h_t(S_0, \ldots, S_t))_t$ où h_t est une fonction mesurable de $\mathbb{R}^{t+1}$ dans $[0, \infty)$, l'opérateur $\Gamma_t^a h$ est donné par

$$\begin{aligned}
\Gamma_T^a h(s_0, \ldots, s_T) &= h_T(s_0, \ldots, s_T) \\
\Gamma_t^a h(s_0, \ldots, s_t) &= h_t(s_0, \ldots, s_t) \vee \left(\pi_{t+1}\Gamma_{t+1}^a h(s_0, \ldots, s_t, s_t u_{t+1}) + (1-\pi_{t+1})\Gamma_{t+1}^a h(s_0, \ldots, s_t, s_t d_{t+1})\right),
\end{aligned}$$

pour $t \in \{0, 1, \ldots, T-1\}$ et avec $\pi_{t+1} = \frac{1-d_{t+1}}{u_{t+1}-d_{t+1}}$.
Le prix de sur-replication de $H = (h_t(S_0, \ldots, S_t))_t$ est donc le prix de réplication de $H^{ccr} = (h_t(S_0^{ccr}, \ldots, S_t^{ccr}))_t$ dans le modèle Cox-Ross-Rubinstein définit ci-dessous :

$$\begin{aligned}
S_0^{ccr} &= S_0, \\
S_{t+1}^{ccr} &= S_t^{ccr} U_{t+1}^{ccr}, \quad \text{pour } t \in \{0, \ldots T-1\},
\end{aligned}$$

où les fonctions de projection sont $U_t^{ccr} : \Omega^{ccr} := \prod_{t=1}^{T} \{u_t, d_t\} \longrightarrow \{u_t, d_t\}$ et

$$P^{ccr}(\omega) = \prod_{t=1}^{T} \left(\mathbb{1}_{\omega_t = u_t}\pi_t + \mathbb{1}_{\omega_t = d_t}(1-\pi_t)\right).$$

Chapitre 6

Evaluation et couverture No Good Deal

Ce chapitre est issu de l'article "Pricing and Hedging Basis Risk under No Good Deal Assumption", co-écrit avec E. Temam, 2010 et actuellement soumis pour publication. Nous y proposons de nouveaux éléments pour l'évaluation et la couverture du risque de base. Nous considérons le problème d'un agent recevant (ou payant) un dérivé écrit sur un actif risqué V qu'il est coûteux, voir impossible d'échanger. Par exemple, pour des raisons de liquidité, un investisseur peut choisir de vendre une option sur action et de se couvrir via l'indice dont elle fait partie ou encore sur le marché des matières premières, couvrir une position en Fioul Oil Straight Run 0,5% grâce à du Fioul Oil 1%. Dans tous ces cas, on considère un actif S plus liquide et très corrélé à V, et on se couvre uniquement en S et dans l'actif sans risque. Soit $(W_t)_{0\leq t\leq T}$ et $(W_t^*)_{0\leq t\leq T}$ deux mouvements browniens réels indépendants, définis sur l'espace de probabilité complet $(\Omega, \mathcal{F}, P)$:

$$\begin{aligned} dS_t^0 &= S_t^0 r dt \\ dS_t &= S_t(\mu_S dt + \sigma_S dW_t) \\ dV_t &= V_t(\mu_V dt + \sigma_V(\rho dW_t + \sqrt{1-\rho^2} dW_t^*)) \end{aligned}$$

Nous noterons $h_S = \frac{\mu_S - r}{\sigma_S}$ et $h_V = \frac{\mu_V - r}{\sigma_V}$ les ratios de Sharpe des deux actifs risqués. Pour ce type d'incomplétude, l'ensemble $\mathcal{M}^e(P)$ des mesures risque neutre sont les probabilités rendant le processus S, actualisé au taux sans risque, martingale (attention la filtration considérée est celle constituée de l'information sur les deux actifs risqués S et V, *i.e* $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t, 0 \leq t \leq T\}$ la P-augmentation de la filtration générée par (W, W^*).). Soit

$\lambda \in L^2_{loc}((W, W^*))$ [1], on définit Z_T^λ et Y_T^λ par

$$
\begin{aligned}
Z_T^\lambda &= \exp\left(-h_S W_T - \frac{1}{2}h_S^2 T + \int_0^T \lambda_s dW_s^\star - \frac{1}{2}\int_0^T \lambda_s^2 ds\right) & (6.1)\\
&= Z_T^0 Y_T^\lambda & (6.2)
\end{aligned}
$$

Dans le cadre du NGD, afin de pouvoir définir les ratios de Sharpe, nous considérerons l'espace $\mathcal{M}^2(P) := L^2(P) \cap \mathcal{M}^e(P)$ et montrons que :

Lemme 6.1 *Soit Λ l'ensemble des $\lambda \in L^2_{loc}((W, W^*))$ tels que Z_T^λ soit une martingale de carré intégrable. L'espace $\mathcal{M}^2(P)$ est donné explicitement par*

$$
\mathcal{M}^2(P) = \left\{Q \mid \exists \lambda \in \Lambda \ s.t. \ \frac{dQ}{dP} = Z_T^\lambda\right\}
$$

et est non vide.

Dans la suite, nous noterons Q^λ la probabilité de densité Z_T^λ.

6.1 Ratio de Sharpe, Good Deal et évaluation

Nous introduisons maintenant les notions de ratio de Sharpe. Le ratio de Sharpe instantané, définit par Björk-Slinko (06) ou Bayraktar-Young (08), du processus X est donné par

$$
SR^1(X_t) = \frac{\frac{1}{dt}\mathbb{E}\left(\frac{dX_t}{X_t}/\mathcal{F}_t\right) - r}{\frac{1}{dt}\sqrt{\mathrm{Var}\left(\frac{dX_t}{X_t}/\mathcal{F}_t\right)}} \tag{6.3}
$$

Il s'agit a priori d'un processus stochastique mais si l'on considère que X_t est la valeur à la date t d'une stratégie auto-financée en S et S^0, on voit facilement que $SR^1(X_t) = h_S$. Ainsi, dans le cas d'une stratégie en actifs échangeables seulement, le processus se réduit à un chiffre : la prime de risque sur le risque couvrable W.
La seconde définition possible, le ratio de Sharpe global, est proposée par Klöppel-Schweizer (07) et dépend d'une mesure risque neutre $Q \in \mathcal{M}^2(P)$.

$$
SR^2(X, Q) = \frac{\mathbb{E}(X) - \mathbb{E}^Q(X)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}} \tag{6.4}
$$

1. i.e. λ est progressivement mesurable par rapport à $\mathbb{F}$ et tel que $\int_0^t \lambda_s^2 ds < \infty$

Klöppel-Schweizer (2007) montrent qu'il y a équivalence entre une borne sur le ratio de Sharpe définit globalement et une borne sur la variance de la densité des mesures risque neutre. Soit $Q \in \mathcal{M}^2(P)$ et $x \in \mathbb{R}$ alors

$$\sup_X SR^2(X, Q) = \sqrt{\operatorname{Var} Z_T}.$$

Il est donc clair que les deux définitions du ratio de Sharpe n'apportent pas la même information. Or le prix NGD est défini comme étant le supremum de l'espérance du paiement actualisé de l'option sur l'ensemble des probabilités risque neutre mais en excluant les good deals, c'est à dire en bornant le ratio de Sharpe. Cochrane-Saá-Requejo (01) définissent leur prix NGD en imposant une borne sur $\frac{1}{dt}\mathbb{E}\left[\left(\frac{dZ_t^\lambda}{Z_t^\lambda}\right)^2\right]$, ce qui est équivalent à borner $(\lambda_t)_t$. Björk-Slinko (06) définissent également leur prix NGD en bornant $(\lambda_t)_t$. Alors comment relie-t-on ces définitions avec la notion de borne sur SR^1 ou SR^2 ? L'argument de Björk-Slinko (06) (voir aussi Hansen-Jagannathan (91)) est que $|SR^1(X_t)| = |h_S| \leq |(-h_S,\, \lambda_t)|_{\mathbb{R}^2}$ et d'imposer alors une borne sur $|(-h_S, \lambda_t)|_{\mathbb{R}^2}$ au lieu du ratio de Sharpe $|SR^1(X_t)| = |h_S|$. C'est bien évidemment correct mathématiquement mais à notre sens cela ne traduit pas la notion de NGD : naturellement seule une borne sur la prime de risque couvrable apparaît. Y a-t-il une équivalence entre une borne sur SR^2 et $(\lambda_t)_t$? La encore la réponse est non, sauf si $(\lambda_t)_t$ était un processus constant. En effet, remarquons que

$$\operatorname{Var}(Z_T^\lambda) \quad = \quad e^{h_S^2 T}\mathbb{E}^{\tilde{Q}}\left(e^{\int_0^T \lambda_s^2 ds}\right) - 1,$$

avec $d\tilde{Q}/dP = \exp\left(-2h_S W_t - 2h_S^2 t + 2\int_0^t \lambda_s dW_s^\star - 2\int_0^t \lambda_s^2 ds\right)$. Dans le cas général où $(\lambda_t)_t$ est progressivement mesurable, on peut seulement montrer qu'une borne sur λ_t implique une borne sur SR^2 mais la réciproque est fausse. Ainsi, le prix proposé par Cochrane-Saá-Requejo (01) ou Björk-Slinko (06) (en bornant λ) est donc a priori plus petit que celui obtenu en bornant SR^2 et, à notre avis, pas directement relié au principe de NGD.

Nous choisissons de définir le ratio de Sharpe via SR^2. X est un (β, Q)-Good deal pour $\beta > 0$ et $Q \in \mathcal{M}^2(P)$, si $SR^2(X, Q) > \beta$. Sous de l'hypothèse d'AOA [2], le No Good Deal est alors équivalent à

$$\mathcal{M}^{2,\beta}(P) := \left\{Q \in \mathcal{M}^2(P) \quad : \quad \|Z_T\|_{L^2(P)} \leq \sqrt{1+\beta^2}\right\} \neq \emptyset.$$

Contrairement à Cochrane-Saá-Requejo (2001) ou Björk-Slinko (2006), qui ne justifient pas le choix de leur règle d'évaluation, nous introduisons ensuite notre prix NGD en utilisant

2. Notons qu'il peut y avoir des opportunités d'arbitrage qui ne sont pas des Good Deal.

une mesure de risque cohérente u (voir Klöppel-Schweizer (07) ou Cherny (08)) définie par $u(X) = \inf_{Q\in\mathcal{M}^{2,\beta}(P)} \mathbb{E}^Q\left[\frac{X}{S_T^0}\right]$. Alors de façon similaire au prix de sur-réplication,

$$p_0(H) \;=\; \inf\left\{m \;\in\; \mathbb{R} \;\mid\; \exists\Phi \text{ s.t. } u\left(m + \int_0^T \Phi_t^0 dS_T^0 + \int_0^T \Phi_t^1 dS_t - H\right) \;\geq\; 0\right\}. \quad (6.5)$$

On montre alors que

$$p_0(H) = \sup_{Q\in\mathcal{M}^{2,\beta}(P)} \mathbb{E}^Q\left[\frac{H}{S_T^0}\right]. \quad (6.6)$$

Rappelons que la définition de Cochrane-Saá-Requejo (2001) ou Björk-Slinko (2006) est

$$\tilde{p}_0(H) \;=\; \sup_{\lambda\in L^2_{loc}((W,W^*)),\; s.t.\; \lambda\in[-\lambda^{max},\lambda^{max}]} \mathbb{E}\left[Z_T^\lambda \frac{H}{S_T^0}\right], \quad (6.7)$$

avec $\lambda^{max} = \sqrt{\frac{1}{T}\ln(1+\beta^2) - h_S^2}$.
La résolution du problème 6.6 est bien plus complexe que celle de 6.7. Nous proposons une borne supérieure (p_0^{UB}) et une borne inférieure (p_0^{LB}) pour $p_0(H)$ (simplement noté p_0 dès à présent). p_0^{UB} est obtenu en supprimant l'hypothèse de positivité et en relaxant la condition de martingalité sur les mesures martingales. Pour p_0^{LB}, nous supposons que la prime de risque λ du risque non couvrable W^* est indépendante de W. Ceci nous permet de calculer explicitement le problème d'optimisation (6.6) lorsque l'on relaxe l'hypothèse de stricte positivité sur les mesures martingales. Puis, pour obtenir une mesure qui est bien équivalente à la mesure historique, nous ajoutons une solution de (6.7). Nous montrons alors que le prix de Cochrane-Saá-Requejo (2001) ou Björk-Slinko (2006) $\tilde{p}_0$ est toujours inférieur à notre borne inférieure voir même strictement inférieur [3].

Théorème 6.2 *Supposons que* $\frac{1}{T}\ln(1+\beta^2) \geq h_S^2$, $H = (V_T - K)_+$ *et qu'il y a NGD. Soit* $\bar{\beta} = \sqrt{(1+\beta^2)e^{-h_S^2 T} - 1}$, *on alors l'encadrement suivant*

$$p_0^{LB} = \varepsilon\tilde{p}_0 + (1-\varepsilon)e^{-rT}\mathbb{E}(Z_T^0 Y^{down} H) \leq p_0 \leq p_0^{UB} = e^{-rT}\mathbb{E}(Z^{UB} H),$$

où $\varepsilon \in (0,1)$ *et* Y^{down} *est défini dans* (6.16) *et* (6.17) *et*

$$Z^{UB} \;=\; Z_T^0 + e^{h_S^2 T/2}\bar{\beta}\frac{H - \mathbb{E}\left(H \mid \mathcal{F}_T^W\right)}{\sqrt{\mathbb{E}\left[H^2 - \mathbb{E}\left(H \mid \mathcal{F}_T^W\right)^2\right]}}, \quad (6.8)$$

3. Ces calculs sont proposés pour une option d'achat mais pourrait être menés à bien pour tout bien H dont le prix se calcule par une formule fermée dans le modèle de Black et Scholes.

où $\mathcal{F}^W$ est la P-augmentation de la filtration générée par W. Le prix de Cochrane-Saá-Requejo (2001) ou Björk-Slinko (2006) se calcule explicitement

$$\tilde{p}_0 = e^{-rT} BS(V_0, T, K, \mu_V - \sigma_V \rho h_S + \sigma_V \lambda^{max} \sqrt{1-\rho^2}, \sigma_V), \tag{6.9}$$

voir (6.11) *pour la définition de BS. Enfin, les différents prix NGD se comparent ainsi*

$$p_0^{UB} \geq p_0 \geq p_0^{LB} \geq \tilde{p}_0, \tag{6.10}$$

et dans certains cas (voir section 6.3) $p_0 \geq p_0^{LB} > \tilde{p}_0$.

Soit Y défini par $Y_t = Y_0 \exp\left(\left(\eta - \frac{\varphi^2}{2}\right) t + \varphi W_t\right)$ alors

$$\begin{aligned} BS(Y_t, T-t, K, \eta, \varphi) &= \mathbb{E}[(Y_T - K)_+ \mid \mathcal{F}_t], \\ &= Y_t e^{\eta(T-t)} \mathcal{N}(d_1) - K\mathcal{N}(d_0), \text{ où} \qquad (6.11) \\ d_1 = d_1(Y_t, T-t, K, \eta, \varphi) &= \frac{\ln\left(\frac{Y_t}{K}\right) + \left(\eta + \frac{\varphi^2}{2}\right)(T-t)}{\varphi\sqrt{T-t}} \qquad (6.12) \\ d_0 = d_0(Y_t, T-t, K, \eta, \varphi) &= d_1 - \varphi\sqrt{T-t} \\ \mathcal{N}(d) &= \int_{-\infty}^{d} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx \end{aligned}$$

Le calcul de $\tilde{p}_0$ est basé sur la croissance de la formule de BS en le drift et sur un théorème de comparaison de solution d'EDS. Soit

$$p_0^{UB} = \sup_{\substack{Z,\ \mathbb{E}Z^2 \leq 1+\beta^2 \\ \mathbb{E}\left(Z \mid \mathcal{F}_T^W\right) = Z_T^0}} \mathbb{E}\left[Z \frac{H}{S_T^0}\right] \tag{6.13}$$

Intuitivement, il s'agit bien d'une borne supérieure, car on enlève l'hypothèse de positivité et on relaxe celle de martingalité sur Z (on suppose que S/S^0 est martingale au vu l'information sur le risque couvrable uniquement). La preuve qu'il s'agisse d'une borne supérieure et son calcul explicite (6.8) utilise essentiellement l'inégalité de Cauchy-Schwartz. Pour la borne inférieure, la définition est plus délicate. Supposons que λ est indépendante de W. Alors on montre que

$$\mathbb{E}^{Q^\lambda}\left[\frac{H}{S_T^0}\right] = e^{-rT} \mathbb{E}^{Q^{Z^0}}\left[Y_T^\lambda \psi(W_T^*)\right], \tag{6.14}$$

où $dQ^{Z^0}/dP = (Z_T^0)^2/\mathbb{E}(Z_T^0)^2 = (Z_T^0)^2 e^{-h_S^2 T}$, Y_T^λ est définit en (6.2) et

$$\psi(x) = BS\left(V_0 e^{\sigma_V \sqrt{1-\rho^2} x}, T, K, \mu_V - \sigma_V \rho h_S - (1-\rho^2)\frac{\sigma_V^2}{2}, \sigma_V \rho\right).$$

Pour définir la borne inférieure, on relaxe alors la positivité de la densité de mesure martingale $Z_T^\lambda = Z_T^0 Y$ (voir (6.1))

$$p_0^{down} = \sup_{\substack{Y \geq 0,\ \mathbb{E}^{Q^{Z^0}} Y = 1 \\ \mathbb{E}^{Q^{Z^0}} Y^2 \leq 1 + \bar{\beta}^2}} e^{-rT} \mathbb{E}^{Q^{Z^0}} \left[Y \psi(W_T^*) \right]. \tag{6.15}$$

La solution de ce problème est donnée par

$$\text{Si } 1 - \bar{\beta} \frac{\mathbb{E}^{Q^{Z^0}} (\psi(W_T^*))}{\sqrt{\mathrm{Var}^{Q^{Z^0}} \psi(W_T^*)}} \geq 0 \quad \text{alors} \quad Y^{down} = 1 + \bar{\beta} \frac{\psi(W_T^*) - \mathbb{E}^{Q^{Z^0}} (\psi(W_T^*))}{\sqrt{\mathrm{Var}^{Q^{Z^0}} \psi(W_T^*)}}, \tag{6.16}$$

$$\text{si } 1 - \bar{\beta} \frac{\mathbb{E}^{Q^{Z^0}} (\psi(W_T^*))}{\sqrt{\mathrm{Var}^{Q^{Z^0}} \psi(W_T^*)}} < 0 \quad \text{alors} \quad Y^{down} = \frac{(\psi(W_T^*) - \alpha)_+}{\mathbb{E}^{Q^{Z^0}} \left(\psi(W_T^*) - \alpha \right)_+}, \tag{6.17}$$

où l'on montre qu'il existe un nombre positif α tel que $\frac{\mathbb{E}^{Q^{Z^0}} \left(\psi(W_T^*) - \alpha\right)_+^2}{\left(\mathbb{E}^{Q^{Z^0}} \left(\psi(W_T^*) - \alpha\right)_+\right)^2} = 1 + \bar{\beta}^2$.

Comme $\varepsilon Y_T^{\lambda^{max}} + (1 - \varepsilon) Y^{down}$ satisfait les conditions du problème 6.6, nous obtenons bien une borne inférieure. Nous verrons dans la partie numérique que cette borne peut être sensiblement supérieure au prix $\tilde{p}_0$ de Cochrane-Saá-Requejo (2001) ou Björk-Slinko (2006).

6.2 Couverture

Contrairement au prix de sur-réplication, il n'y a pas de stratégie naturelle associée au prix NGD. Nous avons choisi de minimiser le carré de l'erreur de réplication sous la probabilité historique.

$$v_\alpha(H) \quad := \quad \inf_{(\Phi^0, \Phi^1)} \mathbb{E} \left[H - (\Phi_T^0 S_T^0 + \Phi_T^1 S_T) \right]^2. \tag{6.18}$$

Nous suivons l'approche de Gouriéroux-Laurent-Pham (98). Nous faisons un changement de numéraire U et transformons le problème afin que $\frac{S^0}{U}$ et $\frac{S}{U}$ soient des Q^U martingales locales et ainsi de pouvoir projeter $\frac{H}{U_T}$ sur $\frac{S^0}{U}$ et $\frac{S}{U}$ via le théorème de Galtchouk-Kunita-Watanabe (voir par exemple Jacod (79)). Q^U est définie par $dQ^U/dP = U_T^2/\mathbb{E}(U_T^2)$. La seule originalité de la preuve est, au lieu d'introduire la mesure dite de variance optimale, de montrer directement que la martingalité des actifs risqués implique une forme particulière pour U. Nous présentons ici le résultat obtenu pour l'option d'achat :

Théorème 6.3 *Soit $H = (V_T - K)_+$, la solution du problème 6.18 est donnée par*

$$\Phi_t^{0,H} = \frac{U_t}{S_t^0}\left[\frac{\sigma_S + h_S}{\sigma_S}\left(X_0 + \int_0^t \left(h_S K_l + \rho\frac{L_l}{U_l}\right) dW_l^U\right) - \frac{1}{\sigma_S}\left(h_S K_t + \rho\frac{L_t}{U_t}\right)\right],$$

et

$$\Phi_t^{1,H} = \frac{U_t}{\sigma_S S_t}\left[\left(h_S K_t + \rho\frac{L_t}{U_t}\right) - h_S\left(X_0 + \int_0^t \left(h_S K_l + \rho\frac{L_l}{U_l}\right) dW_l^U\right)\right].$$

Le minimum est égal à

$$v_\alpha(H) = e^{(2r-h_S^2)T}\Bigg[\left(e^{-rT}BS(V_0, T, K, \mu_V - \sigma_V h_S\rho, \sigma_V) - X_0\right)^2 + (1-\rho^2)\mathbb{E}^{Q^U}\left(\int_0^T \left(\frac{L_t}{U_t}\right)^2 dt\right)\Bigg], \quad (6.19)$$

où

$$\begin{aligned} U_t &= e^{-h_S W_t + (r - 3/2 h_S^2)t} \\ K_t &= \frac{e^{-r(T-t)}}{U_t} BS(V_t, T-t, K, \mu_V - \sigma_V h_S \rho, \sigma_V) \\ L_t &= \sigma_V e^{-r(T-t)+(\mu_V - \sigma_V h_S\rho)(T-t)} V_t \mathcal{N}(d_1(V_t, T-t, K, \mu_V - \sigma_V h_S\rho, \sigma_V)), \end{aligned}$$

et BS et d_1 sont définis par (6.11) et (6.12). *$W_t^U = W_t + 2h_S t$ et $W_t^{*,U} = W_t^*$ sont des mouvements brownians sous Q^U.*

Remarque 6.4 *$K_t U_t = e^{-r(T-t)} BS(V_t, T-t, K, \mu_V - \sigma_V h_S\rho, \sigma_V)$ est le prix Black-Scholes d'une option d'achat sur V si la mesure risque neutre est Q^0 (probabilité de densité Z_T^0). Ceci peut se produire dans deux cas. Tout d'abord, on peut choisir d'évaluer sous la mesure de variance minimale. Le deuxième cas est celui où V est échangeable et $e^{-rt}V_t$ est une Q^0 martingale ($\mu_V - \sigma_V h_S\rho = r$). Dans ce cas, le processus L_t représente le "Delta" de cette option.*

La mise initiale optimale pour minimiser le risque quadratique est $p_0^0 = e^{-rT}BS(V_0, T, K, \mu_V - \sigma_V h_S\rho, \sigma_V)$, le prix minimum variance. Notons que comme nous partons du prix NGD p_0, l'erreur quadratique est supérieure à celle obtenue en partant de p_0^0. Nous avons un terme supplémentaire égal à $e^{(2r-h_S^2)T}(p_{opt} - p_0)^2$. Le deuxième terme de notre erreur tend vers zéro lorsque les deux actifs sont parfaitement corrélées et est la variance de l'erreur liée au risque non couvrable.

6.3 Résultats numériques

Nous souhaitons maintenant évaluer numériquement l'efficience du prix NGD et de sa stratégie de couverture minimum variance. Nous considérons un actif non échangeable, plus risqué mais assurant une plus grande rentabilité que l'actif échangeable. Nous sommes

μ_V	σ_V	V_0	μ_S	σ_S	S_0	r	T
0.04	0.32	15	0.0272	0.256	100	2%	0.25

TABLE 6.1 – *Choix des paramètres du modèle*

typiquement dans le cas d'un indice. Tout d'abord, nous calculons les différents prix NGD : $\tilde{p}_0$, p_0^{LB} et p_0^{UB}, notés respectivement "NGD-CSR", "NGD-LB" et "NGD-UB" sur les graphiques. Nous les comparons à des prix de type Black-Scholes : le prix minimum variance p_0^0 (noté "MV-Price"), le prix Black-Scholes si V avait été échangeable ("V-BS Price") ainsi que le prix obtenu si on utilise au lieu de V l'évolution de S (i.e. le rendement μ_S et la volatilité σ_S) partant de V_0 ("S-BS Price") [4]. Nous étudions la variation de ces différents prix en fonction des deux paramètres : la corrélation ρ entre les actifs et le niveau maximum de ratio de Sharpe autorisé, β. Nous nous placerons dans différentes situations selon que l'option soit dans, à ou en dehors de la monnaie. Le cas économique prototypique est $\rho = 0,8$, $\beta = 2$ et $K = 15$.

On observe tout d'abord que les prix NGD sont considérablement plus petits que la valeur initiale de l'actif risqué non échangeable (le prix de sur-réplication si on dispose d'une unité de V à la date initiale). Dans notre cas prototypique, notre borne inférieure est au dessus "NGD-CSR" de 8.4%. L'écart peut même aller jusqu'à 25% dans d'autres configurations de marché. Nous voyons donc que le prix Cochrane-Saá-Requejo (2001) ou Björk-Slinko (2006) sous estime considérablement le "véritable" prix NGD.

Sur les graphiques, nous notons que les prix NGD (i) diminuent lorsque la corrélation augmente, ce qui est satisfaisant économiquement [5], (ii) convergent vers "MV-Price" lorsque la corrélation tend vers 1 [6].

Nous constatons également que les prix NGD (i) croissent lorsque β augmente [7], (ii) convergent vers "MV-Price" lorsque β tend vers sa valeur limite $\sqrt{e^{h_S^2 T} - 1}$ (= 0.014 dans notre contexte)[6].

Enfin notons, que "V-BS Price" est proche de "MV-Price" mais ceci n'est pas vrai en général (si $\sigma_S = 0.02$ et $\rho = 0.8$, "MV-Price"= 0.08 tandis que "V-BS Price"= 0.48). De

4. Cela revient à calculer le prix de l'option de paiement $\left(\frac{V_0}{S_0} S_T - K\right)_+$.
5. Ce résultat est clair théoriquement pour "NGD-CSR", mais pas pour "NGD-LB" et 'NGD-UB".
6. Ce résultat se montre également théoriquement.
7. Ce résultat est clair théoriquement pour "NGD-CSR" et "NGD-UB", mais pas pour "NGD-LB"

même“S-BS Price” est très faible : cela provient de notre choix de volatilité pour V qui est bien supérieure à celle de S. Dans notre exemple, “S-BS Price” sous-estime clairement le prix de l'option.

Nous passons maintenant à l'évaluation de notre stratégie de couverture. Rappelons que la notion de NGD n'implique pas de stratégie de couverture particulière, il est donc important de la comparer à d'autres stratégies. En notant X la richesse, nous définissons les stratégies suivantes :

- Buy and Hold en liquidité (“BaHCash”) : $X_T^{BaHCash} = X_0 e^{rT}$.
- Buy and Hold en S (“BaHS”) : $X_T^{BaHS} = X_0 S_T / S_0$.
- Black Scholes (“BS”) : en partant de “S-BS” à $t = 0$, on peut répliquer via une stratégie de type Black Scholes $\left(\frac{V_0}{S_0} S_T - K\right)_+$, le reste est placer en sans risque. Ainsi, $X_T^{BS} = \left(\frac{V_0}{S_0} S_T - K\right)_+ + (X_0 - S\text{-}BS_0)e^{rT}$.
- No-Good-Deal (“NGD”) : en partant de X_0, on suit la stratégie obtenue dans le théorème 6.3.

Nous choisirons X_0 égal successivement à “MV Price”, “NGD-CSR” et “(NGD-UB+NGD-LB)/2” (ou plus simplement “NGD”). L'erreur de couverture est mesurée selon trois mesures de risque. Nous utilisons tout d'abord la notion de probabilité de sur-réplication, $P[X_T^{Strat} \geq (V_T - K)_+]$. C'est évidemment une mesure importante économiquement, cependant, notons que même si la probabilité est proche de 1, la perte peut être énorme. En outre, d'un point de vue numérique, l'estimateur habituel d'une probabilité est très instable car il intègre une fonction de type “ un ou rien” : deux trajectoires proches peuvent donc conduire à des résultats sensiblement différents. Notre deuxième mesure de risque est la perte moyenne espérée, $\mathbb{E}[\big((V_T - K)_+ - X_T^{Strat}\big)_+]$. Elle permet d'évaluer la taille de la perte mais ne dit pas combien de fois cette perte apparaît. Les deux précédentes mesures de risque sont très fortement dépendantes du niveau choisi pour la richesse initiale (“ Effet prix”). Comme “NGD” peut être cinq fois plus élevé que “MV-Price”, nous nous attendons à ce que la probabilité de sur-réplication et les pertes moyennes attendues soient meilleures en partant de “NGD” que de “MV-Price”. Pour pallier cet inconvénient, nous introduisons une troisième mesure de risque la Value at Risk de la perte à 99 %, soit la valeur de v telle que

$$P[X_T^{Strat} - (V_T - K)_+ \geq -v] = 99\%.$$

Afin d'interpréter nos résultats numériques notons que les meilleurs situations sont caractérisées par une probabilité de sur-réplication proche de 1, de petites pertes espérées et une VaR faible. Remarquons tout d'abord que notre stratégie offre de meilleurs résultats

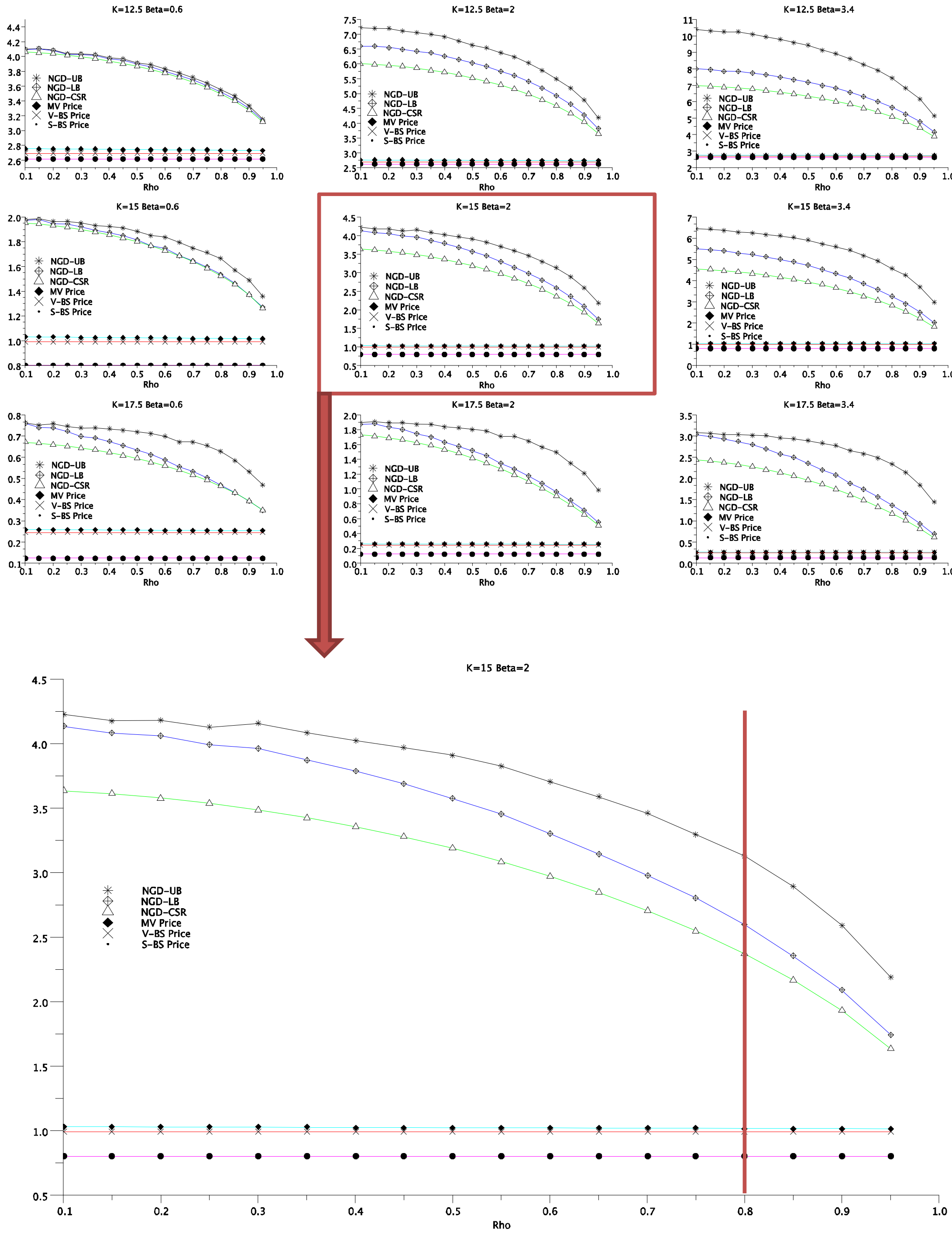

FIGURE 6.1 – *Evolution du prix en fonction de ρ pour différentes valeurs de β et K.*

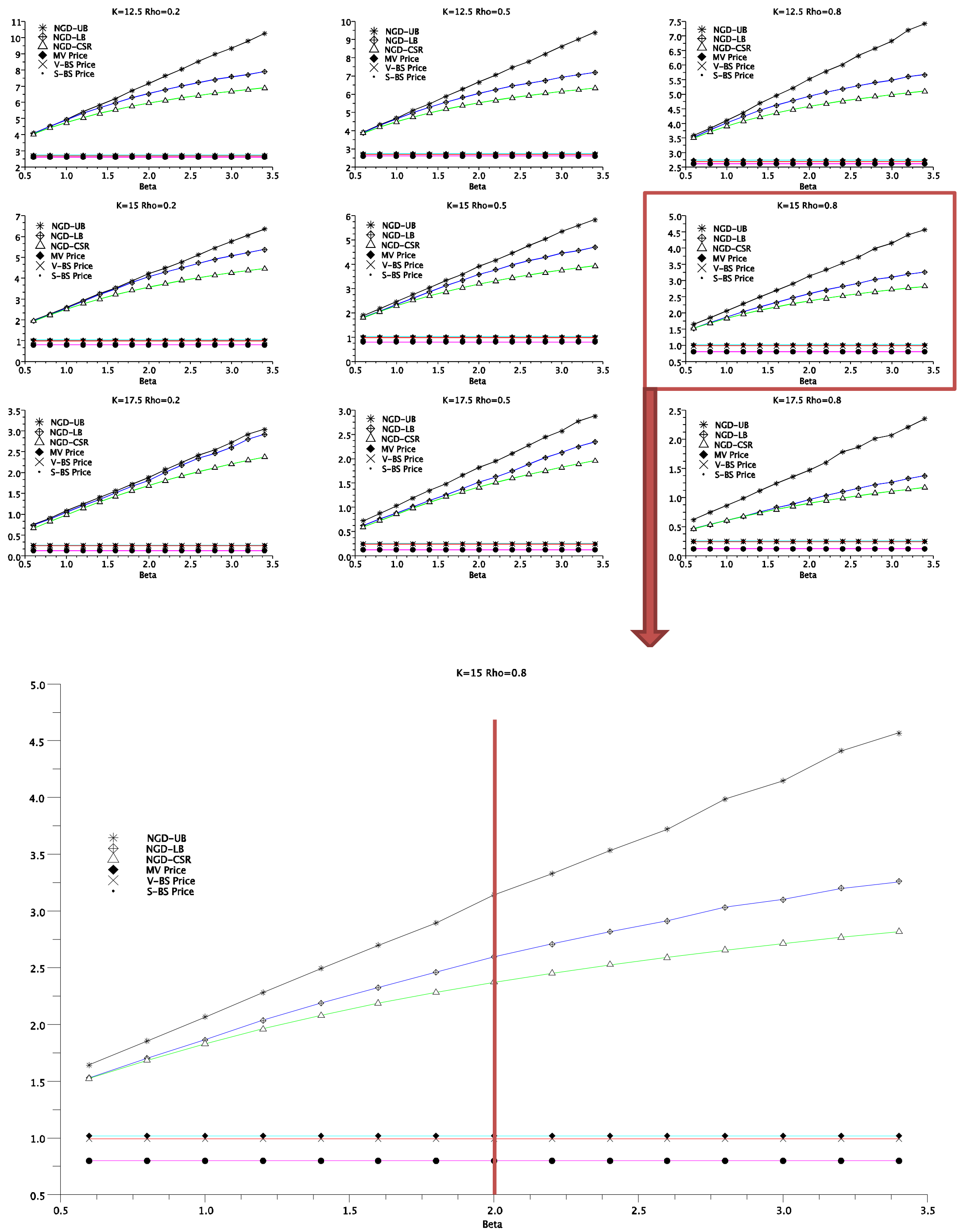

FIGURE 6.2 – *Evolution du prix en fonction de β pour différentes valeurs de β et K.*

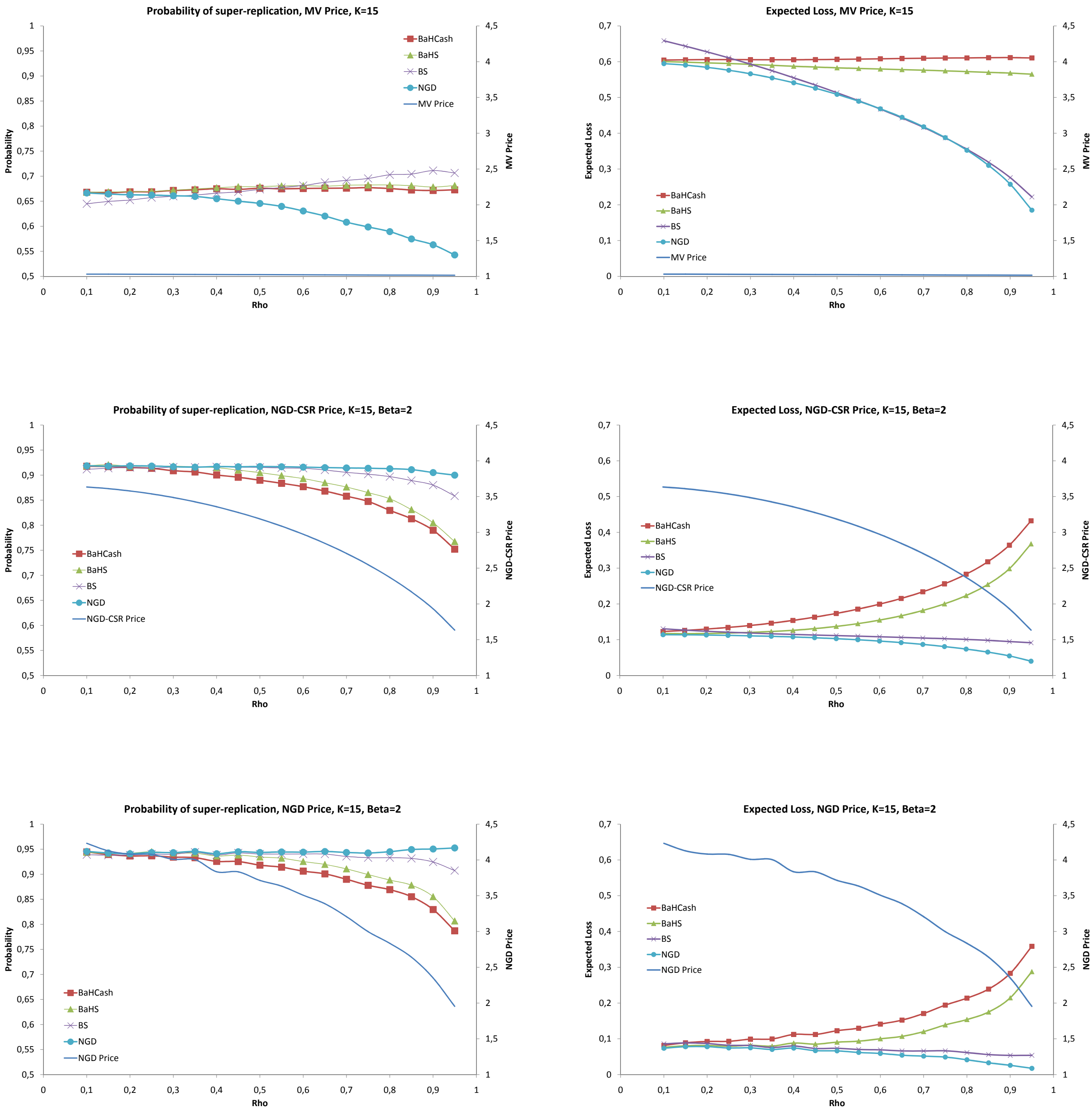

Figure 6.3 – *Comparaison des probabilités de sur-replication ainsi que des pertes attendues pour différentes stratégies partant de "MV-Price", "NGD-CSR" et de la moyenne entre "NGD-LB" et "NGD-UB".*

en particulier quand la corrélation est importante : partant de “NGD-CSR” ou de “NGD” la probabilité de sur-réplication est proche de 1 et la perte attendue ainsi que la VaR sont faibles.
Nous pouvons classer nos stratégies en deux catégories : la première contient les stratégies naïves (“ BaHCash” et “ BaHS”) et la seconde les stratégies plus élaborées : la stratégie minimum variance“NGD”et la stratégie Black-Scholes “BS ”. Nous voyons sur les figures 6.3 et 6.4 que chaque catégorie a un comportement similaire.
Ensuite, comme prévu, les résultats obtenus à partir des prix initiaux “‘NGD-CSR” et “NGD” sont très semblables : seul le niveau varie. Pour une corrélation de 0.8, le ratio “NGD” par “NGD-CSR” est égal à 1.2 et en moyenne (sur les stratégies) la probabilité de sur-réplication augmente de 4%, la perte attendue diminue 35% et la VaR de 19% si l’on part de “NGD” au lieu de “NGD-CSR”.
Concernant la dépendance en ρ, il semble graphiquement que lorsque ρ est faible, les stratégies aient toutes le même comportement. Ce n’est cependant pas vrai pour un autre choix de paramètres.
Pour la première catégorie de stratégies (“BaHCash” et “BaHS”), on observe (voir figures 6.3 et 6.4) que la probabilité de sur-replication diminue et la perte attendue et la VaR augmentent lorsque ρ augmente. Cela s’explique par le fait que, pour ces stratégies, la corrélation apparaît uniquement dans la richesse initiale, et que les prix “NGD-CSR”, “NGD” et “MV” décroissent avec l’augmentation de la corrélation.
Contrairement aux stratégies buy and hold, “NGD” et “BS” approchent (*ps* pour “BS” et L^2 pour les “NGD”) le paiement de l’option. Lorsque ρ augmente, les actifs risqués S et V deviennent de plus en plus semblables en termes de risque, il est donc naturel que le risque de perte découlant de la couverture d’une option écrite sur V avec une stratégie en S diminue. Ainsi, on devrait observer une augmentation de la probabilité de sur-réplication et une diminution de la perte attendue ainsi que de la Var.
Sur les figures 6.3 et 6.4, on l’observe bien pour la perte attendue ainsi que le Var. En revanche pour la probabilité de sur-réplication partant de “MV”, ce n’est clairement pas le cas. Il s’agit là d’un problème numérique car la perte est de type Dirac en zéro (on minimise la variance de la perte) et donc l’estimation numérique de la probabilité de sur-réplication associée doit être d’environ 1/2 (et la perte attendue autour de 0).
Enfin, nous concluons en remarquant que nos deux approches sophistiquées “NGD” et “BS” permettent de surmonter le fait que lorsque ρ augmente le prix diminue : même si nous commençons avec moins d’argent, nous arrivons à avoir une meilleure couverture du risque.

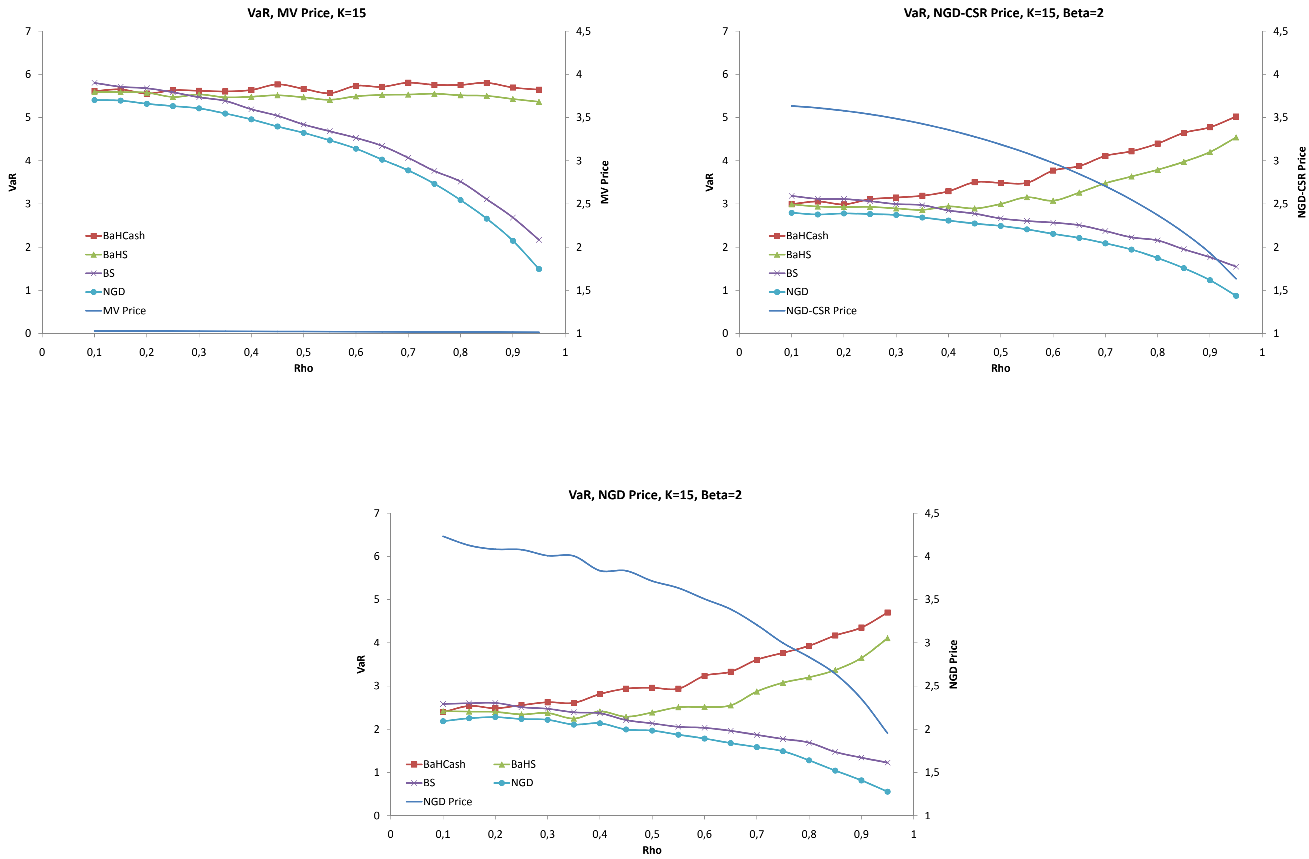

FIGURE 6.4 – *Comparaison de la VaR pour différentes stratégies partant de "MV-Price", "NGD-CSR" et de la moyenne entre "NGD-LB" et "NGD-UB".*

Troisième partie

Convergence des stratégies optimales et des prix d'utilité

Chapitre 7

Introduction

L'objectif des différents travaux de cette partie est d'étudier le comportement limite d'une famille d'agents en fonction de leur aversion pour le risque. Ces travaux ont donné lieu à quatre publications en collaboration avec Miklós Ràsonyi :

8 "Optimal strategies and utility-based prices converge when agents' preferences do" avec M. Rasonyi dans Mathematics of Operations Research, vol 32, 102-117, 2007

9 "Convergence of utility indifference prices to the superreplication price" avec M. Rasonyi dans Mathematical Methods of Operations Research, vol 64, 145-154, 2006

10 "Convergence of utility indifference prices to the superreplication price : the whole real line case" avec M. Rasonyi dans Acta Applicandae Mathematicae, vol 96, 119-135, 2007

11 "Risk-averse asymptotics for reservation prices" avec M. Rasonyi à paraître dans Annals of Finance, actuellement en ligne sur le site de la revue :
http ://www.springerlink.com/content/94j6ll406614n4x6/fulltext.pdf

Les articles [8], [9] et [10] traitent des modèles financiers en temps discret avec processus de prix bornés et l'article [11] de modèles en temps continu avec processus de prix localement bornés. Avant de présenter les résultats obtenus plus en détails, nous proposons une rapide revue de la littérature sur le sujet.

Considérons des agents dont les préférences sont modélisées par des fonctions d'utilité de type von Neumann-Morgenstern (1944) (voir par exemple Duffie (1988) pour une présentation pédagogique de ce concept) $U_n,\ n \in \mathbb{N}$ convergeant vers une fonction d'utilité U_∞. Chaque agent peut se poser le problème de la maximisation de l'utilité de sa richesse terminale. Les stratégies optimales associées convergent-elles vers celle de l'utilité limite ? Qu'en est-il des différents prix d'utilité associés ? En marché incomplet, il n'y a plus unicité du prix et le choix de la règle d'évaluation est crucial. Après avoir étudié dans les parties précédentes le prix de sur-réplication et le prix no good deal, nous considérerons maintenant les prix d'utilité : le prix de Davis (voir Davis (1997)) et le prix d'indifference ou de réservation (voir Hodges-Neuberger (1989)). Le premier consiste à calculer l'espérance du bien contingent sous une probabilité risque neutre particulière, choisie selon un argument de taux marginal de substitution. Le prix d'indifference, pour le vendeur d'un bien contingent, est le montant minimum qu'il doit ajouter à sa richesse initiale, pour que son utilité espérée en livrant le bien contingent soit supérieure ou égale à celle qu'il obtiendrait en partant de sa richesse initiale et en traitant avec les actifs de base uniquement.

Jouini-Napp (2004) étudient le cas d'un marché brownien complet avec des fonctions d'utilité définies sur $\mathbb{R}^+$ et prouvent que les stratégies optimales convergent bien ($p.s$ et L^P). Pour cela, ils supposent que les fonctions d'utilité sont toutes majorées par une même fonction puissance ($k_1 + k_2x^\delta$ avec $\delta < 1$). Citons également les travaux suivants portant sur des fonctions d'utilité particulières : Grasselli (2003) sur les fonctions HARA en marché complet et Nutz (2010) pour les fonctions puissances dans le cadre général d'un marché semi-martingale continu.

Dans l'article [8], nous étudions une autre classe de modèles : les modèles en temps discret avec un horizon fini et des préférences modélisées par des fonctions d'utilité définies sur $\mathbb{R}$. De tels modèles sont génériquement incomplets contrairement au cas étudié par Jouini-Napp (2004). Sous l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage dite uniforme forte (voir Hypothèse 8.4), d'élasticité asymptotique uniforme sur les fonctions d'utilité en $+\infty$ (voir Kramkov-Schachermayer (1999) et remarque 8.9) et en considérant un processus de prix borné, nous montrons la convergence des stratégies optimales ainsi que des prix d'utilité. Sous des hypothèses supplémentaires, nous pouvons estimer la vitesse de convergence. Nous donnons également des contre-exemples montrant la nécessité de nos hypothèses.

Nous continuous notre revue de la littérature sur le thème plus spécifique de la convergence du prix d'indifférence vers le prix de sur-réplication lorsque l'aversion pour le risque tend vers l'infini. Rappelons que le prix de sur-réplication est le coût minimal permettant de couvrir complètement un actif contingent (voir chapitre 4). Cette question a été beaucoup étudiée (et résolue) pour des agents ayant une aversion absolue pour le risque constante (fonction d'utilité exponentielle). Dans Rouge-El Karoui (2000), le résultat est démontré dans le cadre Brownien et dans Delbaen et all. (2002) dans le cadre semi-martingale. Notons également qu'un cas de fonction d'utilité non exponentielle mais très spécifique a été traité dans Bouchard (2000).

Dans l'article [9], nous montrons la convergence pour des modèles en temps discret avec un horizon fini et des préférences modélisées par des fonctions d'utilité définies sur $\mathbb{R}_+$ sous l'hypothèse de non arbitrage uniforme (voir Hypothèse 8.3). Nous n'avons pas be-

soin de l'hypothèse habituelle d'élasticité asymptotique en $+\infty$ car la preuve n'utilise pas l'existence d'une stratégie optimale mais seulement le caractère fini de la fonction valeur. Dans l'article [10], nous considérons des fonctions d'utilité définies sur $\mathbb{R}$ et montrons la convergence sous l'hypothèse de non arbitrage uniforme fort (nous montrons cette fois que les stratégies optimales existent pour n assez grand, toujours sans l'hypothèse d'élasticité asymptotique, mais en utilisant la convergence de l'aversion pour le risque vers l'∞).
Enfin dans l'article [11], nous considérons des fonctions d'utilité définies sur $\mathbb{R}$ et un marché semi-martingale. En faisant une hypothèse d'élasticité asymptotique raisonnable uniforme (voir Schachermayer (2001) et Hypothèse 9.2) sur les fonctions d'utilité et une hypothèse de compacité sur les mesures martingales, nous montrons le résultat de convergence.

Chapitre 8

Modèles en temps discret

8.1 Description du marché

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{0 \le t \le T}, P)$ un espace probabilisé filtré [1] en temps discret avec un horizon de temps fini $T \in \mathbb{N}$. Soit $\{S_t,\ 0 \le t \le T\}$ le processus de prix actualisé (par un numéraire) de d actifs risqués. Nous noterons $\Delta S_t := S_t - S_{t-1}$, $\bar{\mathbb{N}} := \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, L^∞ (L^∞_+) l'ensemble des variables aléatoires bornées (et positive ou nulle) sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, muni de la norme sup $\|\cdot\|_\infty$ et Ξ_t l'ensemble des variables aléatoires $\mathcal{F}_t$-mesurables, d-dimensionnelles.
L'ensemble Φ des stratégies est constitué de processus prévisibles $\phi = \{\phi_t,\ 1 \le t \le T\}$ (*i.e.* ϕ_t est $\mathcal{F}_{t-1}$-mesurable). ϕ_t^i représente le nombre d'actif i détenu en portefeuille à la date t. Les stratégies sont supposées auto-financées, ainsi la valeur du portefeuille $\phi \in \Phi$ à t en partant d'une richesse initiale z est donné par

$$V_t^{z,\phi} := z + \sum_{j=1}^{t} \langle \phi_j, \Delta S_j \rangle,$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire de $\mathbb{R}^d$. L'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage (voir chapitre 1) s'écrit alors :

$$AOA:\ \forall \phi \in \Phi\ (V_T^{0,\phi} \ge 0 \text{ p.s.} \Rightarrow V_T^{0,\phi} = 0 \text{ p.s.}).$$

Dans notre contexte, nous allons avoir besoin de renforcer l'hypothèse d'AOA, aussi nous commençons par la reformuler (voir proposition 8.2 ci-dessous). Pour cela, nous introduisons formellement, l'ensemble D_t, que nous avons déjà utilisé dans les parties précédentes :

Définition 8.1 *$D_t(\omega)$ est le plus petit hyperplan affine contenant le support de la distribution conditionnelle (régulière) de ΔS_t sachant $\mathcal{F}_{t-1}$.*

1. $\mathcal{F}_0$ est la famille des ensembles de mesure nulle.

Si $D_t = \mathbb{R}^d$ alors, intuitivement, il ne devrait pas y avoir d'actifs redondants. Sinon on peut remplacer $\phi_t \in \Xi_{t-1}$ par sa projection orthogonale sur D_t, notée $\hat{\phi}_t$, sans changer la valeur du portefeuille car, $\langle \phi_t, \Delta S_t \rangle = \langle \hat{\phi}_t, \Delta S_t \rangle$ p.s. Soit

$$\tilde{\Xi}_t := \{\xi \in \Xi_t : \ \xi \in D_{t+1} \text{ p.s.}, \ |\xi| = 1 \text{ sur } \{D_{t+1} \neq \{0\}\}\}.$$

Nous rappelons une caractérisation de l'absence d'opportunité d'arbitrage (voir Rásonyi-Stettner (2005) et aussi théorème 3 de Jacod-Shiryaev (1998), remarque 3.5 de Schäl (2000), remarque 4.2 de Korn-Schäl (1999))

Proposition 8.2 *Il y a AOA si et seulement si il existe des variables aléatoires $\mathcal{F}_t$-mesurables et strictement positives $\kappa_t, \beta_t, \ 0 \leq t \leq T-1$ telles que*

$$\operatorname{ess.}\inf_{\xi \in \tilde{\Xi}_t} P(\langle \xi, \Delta S_{t+1} \rangle < -\beta_t | \mathcal{F}_t) > \kappa_t \ \textit{p.s. sur} \ \{D_{t+1} \neq \{0\}\}. \tag{8.1}$$

Nous allons utiliser deux types de restriction de l'AOA : c'est grâce à elles que nous pourrons obtenir des bornes sur les stratégies. Selon que les préférences des agents soient définies sur $(0, \infty)$ ou $\mathbb{R}$, les hypothèses 8.3 ou 8.4 seront utilisées. L'hypothèse 8.3 est en fait, équivalente à la condition "uniform no-arbitrage" introduite dans Schäl (2000) (hypothèse 4.3) et Korn-Schäl (1999). Nous verrons dans l'exemple 8.20 que si cette hypothèse n'est pas satisfaite alors le maximum de l'espérance d'utilité peut être ∞.

Hypothèse 8.3 *Il existe une constante $\beta > 0$ telle que $0 \leq t \leq T-1$*

$$\operatorname{ess.}\inf_{\xi \in \tilde{\Xi}_t} P(\langle \xi, \Delta S_{t+1} \rangle < -\beta | \mathcal{F}_t) > 0 \ \textit{p.s. sur} \ \{D_{t+1} \neq \{0\}\}.$$

Lorsque les préférences des agents sont définies sur $\mathbb{R}$, nous aurons besoin d'une hypothèse encore plus forte : en plus de β_t, κ_t doit aussi être constant.

Hypothèse 8.4 *Il existe des constantes $\beta, \kappa > 0$ telles que*

$$\operatorname{ess.}\inf_{\xi \in \tilde{\Xi}_t} P(\langle \xi, \Delta S_{t+1} \rangle < -\beta | \mathcal{F}_t) > \kappa \ \textit{p.s. sur} \ \{D_{t+1} \neq \{0\}\}.$$

8.2 Description des préférences et problèmes d'optimisation

Les préférences des agents sont décrites par des fonctions concaves, strictement croissantes définies selon les cas sur $(0, \infty)$ ou $\mathbb{R}$. La concavité de U_n est reliée à l'aversion au risque de l'agent n. Arrow (1964) et Pratt (1965) introduisent une mesure de l'aversion au risque dite absolue via des fonctions r_n définies par $r_n(x) := -\frac{U_n''(x)}{U_n'(x)}$. Pratt (1965) montre qu'un investisseur n a une aversion au risque absolue supérieure à celle de l'investisseur m (*i.e*

$r_n(x) > r_m(x)$ pour tout x) si et seulement si n est globalement plus averse au risque que m, dans le sens où l'équivalent certain de chaque risque (le montant de numéraire pour lequel il échangerait son risque) est plus petit pour n que pour m.
Soit $G \in L^\infty_+$, où G représente le paiement à la date T d'un actif dérivé écrit sur S. Nous rappelons la définition du prix de sur-réplication, i.e. la richesse initiale qui permet de se couvrir sans risque (voir chapitre 5) dans notre contexte :

$$\pi(G) := \inf\{z \in \mathbb{R} :\ \exists \psi \in \Phi,\ \ V_T^{z,\psi} \geq G\ p.s.\}. \tag{8.2}$$

Soit

$$u_n(G,z) := \sup_{\psi \in \Phi(U_n,G,z)} EU_n(V_T^{z,\psi} - G). \tag{8.3}$$

Nous utiliserons également la notation $u_n(z)$ au lieu de $u_n(G,z)$. La quantité $u_n(z)$ représente le supremum de l'utilité espérée en partant d'une richesse initiale z et en livrant G à la date terminale. Selon que la fonction d'utilité ait pour support $(0,\infty)$ ou $\mathbb{R}$, $\Phi(U_n,G,z)$ ne sera pas défini de la même façon. Ainsi, si U_n est définie sur $\mathbb{R}$ alors $\Phi(U_n,G,z) = \{\psi \in \Phi \mid EU_n(V_T^{z,\psi} - G) \text{ existe}\}$ et si U_n est définie sur $(0,\infty)$ alors $\Phi(U_n,G,z) = \{\psi \in \Phi : V_T^{z,\psi} \geq G \text{ p.s.}\}$ pour $z \geq \pi(G)$. Notons que dans ce dernier cas, $EU_n(V_T^{z,\psi} - G)$ existe en supposant seulement que S est borné et que l'hypothèse 8.3 est satisfaite.
Nous introduisons maintenant le prix d'indifférence du à Hodges-Neuberger (1989). C'est le montant minimum à payer au vendeur de G pour qu'il est une utilité supérieure à vendre G plutôt qu'à ne rien faire.

Définition 8.5 *Soit $G \in L^\infty_+$ et $x \in \mathbb{R}$, le prix d'indifférence $p_n(G,x)$ est défini par*

$$p_n(G,x) = \inf\{z \in \mathbb{R} : u_n(G, x+z) \geq u_n(0,x)\},\ \ n \in \bar{\mathbb{N}}.$$

On voit facilement que $p_n(G,x)$ est un prix de non arbitrage dans le sens où vendre G à ce prix ne crée pas une opportunité d'arbitrage sur le marché.

8.3 Convergence des stratégies optimales et des prix d'utilité : cas $dom(U_n) = \mathbb{R}$

Cette section est issue de l'article “Optimal strategies and utility-based prices converge when agents' preferences do” avec M. Rasonyi dans Mathematics of Operations Research, vol 32, 102-117, 2007. Nous traitons le problème de maximisation de l'espérance d'utilité en utilisant le principe de la programmation dynamique, à l'instar de Rásonyi-Stettner (2005). Il s'agit d'un approche naturelle dans le cadre discret et cela permet, qui plus est, d'obtenir des bornes sur les stratégies.

8.3.1 Hypothèses

Nous considérons une suite d'agents dont les préférences convergent vers une préférence limite.

Hypothèse 8.6 *Supposons que $U_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ n \in \bar{\mathbb{N}}$ soit une suite de fonctions concaves, strictement croissantes et continûment derivables telles que pour $x \in \mathbb{R}$*

$$U_n(x) \to U_\infty(x), \quad n \to \infty.$$

Dans cette section, nous faisons une hypothèse simplificatrice appelée (R) dans la suite : $D_t = \mathbb{R}^d$ *p.s* pour tout $1 \leq t \leq T$.

Remarque 8.7 *Comme nous l'avons vu, (R) revient à supposer qu'il n'y a pas d'actifs conditionnellement redondants. Nous pouvons obtenir des résultats similaires sans (R) : il suffit de projeter les stratégies optimales sur les ensembles D_t et nous montrons alors que ces projections convergent vers la projection de la stratégie optimale pour la préférence limite. Il va sans dire que les preuves deviennent alors peu lisibles.*

Nous allons maintenant introduire une hypothèse d'élasticité uniforme asymptotique en $+\infty$. Cette hypothèse (sans l'uniformité) a été introduite par Kramkov-Schachermayer (1999).

Hypothèse 8.8 *Supposons qu'il existe $0 < \gamma < 1,\ \tilde{x} \geq 0$ tels que pour tout $\lambda \geq 1,\ y \geq \tilde{x}$ et tout $n \in \bar{\mathbb{N}}$*

$$U_n(\lambda y) \leq \lambda^\gamma U_n(y). \tag{8.4}$$

Remarque 8.9 *Supposons qu'il n'y est qu'une seule fonction d'utilité U telle que*

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{xU'(x)}{U(x)} < 1 \ \textit{et} \ \liminf_{x\to-\infty} \frac{xU'(x)}{U(x)} > 1. \tag{8.5}$$

La première des deux conditions de (8.5) *a été introduite par Kramkov-Schachermayer (1999) et la seconde par Schachermayer (2001). Elles sont devenues standards dans la littérature sur la maximisation d'espérance d'utilité. Une fonction U satisfaisant à* (8.5) *a une élasticité asymptotique dite raisonnable. Kramkov-Schachermayer (1999) montre que la condition* (8.4) *est équivalente à la première des deux conditions de* (8.5)*. La condition* (8.4) *est donc une hypothèse d'élasticité asymptotique uniforme en n.*
Contrairement au cas continue (voir Schachermayer (2001) et Biagini-Frittelli (2004)), l'hypothèse (8.4) *est suffisante pour garantir l'existence d'une solution optimale en temps discret ; elle est également nécessaire (voir Rásonyi-Stettner (2005)). Tous les résultats de cette section restent valables sous la seconde des hypothèses de* (8.5) *(voir Schachermayer (2001) et Rásonyi-Stettner (2005)).*

Nous nous proposons aussi d'estimer le taux de convergence, dans ce cas il est nécessaire de renforcer l'hypothèse 8.6.

Hypothèse 8.10 *Les fonctions* $U_n,\ n \in \bar{\mathbb{N}}$ *sont concaves, strictement croissantes et deux fois continûment differentiables. Pour tout* $N > 0$*, la dérivée seconde satisfait*

$$\ell(N) \leq |U_n''(x)| \leq L(N),\ x \in [-N, N],\ n \in \bar{\mathbb{N}},$$

avec les constantes $\ell(N),\ L(N) > 0$ *et il existe une suite de nombre réels* $g(n) \to 0,\ n \to \infty$ *tels que*

$$|U_n(0) - U_\infty(0)| + \sup_{x\in[-N,N]} |U_n'(x) - U_\infty'(x)| \leq C(N)g(n),\ n \in \mathbb{N}, \tag{8.6}$$

où $C(N)$ *sont des constantes.*

Remarque 8.11 *La condition sur* U_n'' *est une sorte de propriété de "concavité uniforme stricte". Sous l'hypothèse 8.10, l'inégalité*

$$|U_n(x) - U_\infty(x)| \leq |U_n(0) - U_\infty(0)| + \int_0^x |U_n'(y) - U_\infty'(y)|dy \tag{8.7}$$

montre que U_n *tend vers* U_∞ *uniformément sur les compacts avec une vitesse* $O(g(n))$*. Réciproquement cette dernière convergence n'implique pas nécessairement que* (8.6) *soit vraie.*

Exemple 8.12 *Un exemple typique de telles fonctions d'utilité est* $U_n(x) = 1 - e^{-\alpha_n x},\ x \in \mathbb{R},\ 0 < \alpha_n,\ n \in \bar{\mathbb{N}}$ *avec* $\alpha_n \to \alpha_\infty$ *à la vitesse* $O(g(n))$*.*

8.3.2 Problèmes d'optimisation et convergence des solutions optimales

Rappelons que dans cette sous-section $\Phi(U_n, G, z)$ est l'ensemble des strategies $\psi \in \Phi$ telles que $EU_n(V_T^{z,\psi} - G)$ existent. Nous présentons maintenant les résultats obtenus.

Théorème 8.13 *Supposons* S *borné et que les hypothèses 8.4, 8.6 et 8.8 sont satisfaites. Alors il existe des strategies optimales* $\psi_{n,t}^*(z),\ 1 \leq t \leq T,\ n \in \bar{\mathbb{N}}$*, uniques presque sûrement et telles que*

$$u_n(z) = EU_n(V_T^{z,\psi_n^*(z)} - G).$$

Pour tout $1 \leq t \leq T$*, presque sûrement*

$$\lim_{n\to\infty} \psi_{n,t}^*(z) = \psi_{\infty,t}^*(z).$$

De plus, $\lim_{n\to\infty} u_n(z) = u_\infty(z)$ *uniformément sur les compacts.*

La notation $\psi_n^*(G,z)$ sera aussi utilisée dans les sections suivantes.

Théorème 8.14 *Supposons que S borné et les hypothèses 8.4, 8.10 et 8.8 sont satisfaites. Pour tout $N \geq 0$ il existe des constantes $J_t(N)$ et $J(N)$ telles que, pour tout $1 \leq t \leq T$,*

$$\begin{aligned}\sup_{z\in[-N,N]} |\psi_{n,t}^*(z) - \psi_{\infty,t}^*(z)| &\leq J_t(N)g(n), \\ \sup_{z\in[-N,N]} |u_n(z) - u_\infty(z)| &\leq J(N)g(n).\end{aligned}$$

Remarque 8.15 *Considérons maintenant des fonctions d'utilité aléatoires $\mathcal{U}_n(x,\omega)$. Ici, nous étudions le cas où $\mathcal{U}_n(x,\omega) = U_n(x - G(\omega))$. Cependant les résultats du théorème 8.13 (resp. 8.14) peuvent être étendues à des fonctions d'utilité aléatoires générales si nous supposons un analogue presque sûr de l'hypothèse 8.6 (resp. 8.10) et l'hypothèse supplémentaire :*

$$\forall x \quad \text{ess.}\sup_{\Omega\times\mathbb{N}} |\mathcal{U}_n(x,\omega)| < \infty \qquad et \qquad \text{ess.}\inf_{\Omega\times\mathbb{N}} |\mathcal{U}_n'(0,\omega)| > 0.$$

8.3.3 Applications à la convergence des prix d'utilité

Davis (1997) a proposé d'évaluer une bien G par un argument de type "taux marginal de substitution" (voir aussi Bingham-Kiesel (1998) p229) en utilisant la mesure

$$\frac{dQ(z)}{dP} = \frac{U'(V_T^{z,\psi^*(0,z)})}{EU'(V_T^{z,\psi^*(0,z)})},$$

où U est une fonction d'utilité satisfaisant les bonnes hypothèses et $\psi^*(0,z)$ est la stratégie optimale partant de z et sans livrer le bien, i.e. $u(0,z) = \sup_{\psi\in\Phi(U,0,z)} EU(V_T^{z,\psi}) = EU(V_T^{z,\psi^*(0,z)})$. Sous de bonnes hypothèses (voir Rásonyi-Stettner (2005)), $Q(z)$ est une mesure risque neutre et le prix de Davis peut être défini par

$$q(G,z) = E^{Q(z)}(G)$$

et est donc un prix compatible avec l'absence d'arbitrage.
Le théorème 8.13 nous permet d'établir la continuité du prix de Davis par rapport à des variations des préférences des agents.

Théorème 8.16 *Sous les hypothèses du théorème 8.13, les densités*

$$\frac{dQ_n(z)}{dP} = \frac{U_n'(V_T^{z,\psi_n^*(0,z)})}{EU_n'(V_T^{z,\psi_n^*(0,z)})},$$

définissent des mesures risque neutres pour S et $Q_n(z) \to Q_\infty(z)$ pour la norme de la variation totale. Ainsi,

$$\lim_{n\to\infty} q_n(G,z) = q_\infty(G,z), \tag{8.8}$$

pour tout bien $G \in L^\infty_+$.
De plus sous les hypothèses du théorème 8.14, pour tout $N \geq 0$ il existe des constantes $A(N)$ telles que

$$\sup_{z\in[-N,N]} |q_n(G,z) - q_\infty(G,z)| \leq A(N)g(n).$$

Nous passons maintenant au résultat sur la convergence des prix d'indifférence.

Théorème 8.17 *Sous les hypothèses du théorème 8.13,*

$$\lim_{n\to\infty} p_n(G,x) = p_\infty(G,x).$$

8.3.4 Contre-exemples

L'objectif de ce paragraphe est de montrer les pathologies pouvant se produire si une de nos hypothèses n'est pas satisfaite. Dans les exemples ci-dessous $G = 0$ et donc

$$u_n(x) := \sup_{\psi\in\Phi(U,0,x)} EU_n(V_T^\psi).$$

Exemple 8.18 : S non borné *Nous montrons que si S n'est pas borné alors les strategies optimales peuvent ne pas converger même si toutes les autres hypothèses sont satisfaites. Pour tout $n \in \bar{\mathbb{N}}$, soit*

$$U_n(x) = \begin{cases} 1-(1-x)^{2+1/n}, & x \leq 0, \\ (4+2/n)\sqrt{x+1} - 4 - 2/n, & x > 0. \end{cases}$$

avec la convention $1/\infty = 0$. Les hypothèses 8.6 et 8.8 sont alors satisfaites. Soient

$$\alpha_1 := \sum_{k=2}^\infty \frac{1}{k^3 \log^2 k}, \quad \alpha_2 := \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2}.$$

Supposons $T = 1$ et soit ΔS_1 défini par

$$P(\Delta S_1 = -k) = \frac{1}{2\alpha_1 k^3 \log^2 k},\ k \geq 2; \quad P(\Delta S_1 = \delta k) = \frac{1}{2\alpha_2 k^2},\ k \geq 1,$$

où $\delta > 0$ sera choisi plus tard. On peut montrer que l'hypothèse 8.4 est satisfaite et que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\psi \neq 0$, $EU_n(\psi\Delta S_1) = -\infty$. Ainsi $\psi_n^* = 0$ est optimale. D'autre part

$$EU_\infty(\Delta S_1) = \frac{1}{2} - \sum_{k=2}^\infty \frac{(k+1)^2}{2\alpha_1 k^3 \log^2 k} + 2\sum_{k=1}^\infty \frac{\sqrt{\delta k+1}}{\alpha_2 k^2} - 2,$$

est fini et pour tout δ suffisamment grand, strictement supérieur à $0 = U_\infty(0)$. Ainsi ψ_∞^* (qui existe, voir Rásonyi and Stettner (2005)) ne peut être égale à 0.

Exemple 8.19 : S non borné *Nous montrons maintenant que si S n'est pas borné, les fonctions valeurs u_n peuvent converger vers ∞ au lieu de u_∞. Supposons $T = 1$, $S_0 := 0$ et*

$$P(\Delta S_1 = k^4 - 1) = \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}, \quad k \geq 4, \quad \text{et} \quad P(\Delta S_1 = -1) = 1/2.$$

Soit

$$U_n(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{n}, & x < 0 \\ \frac{1}{n}\sqrt{x+1}, & 0 \leq x \leq n^4 - 1, \\ n, & x > n^4 - 1. \end{cases}$$

Cette suite converge simplement vers

$$U_\infty(x) = \begin{cases} x, & x < 0, \\ 0, & x \geq 0. \end{cases}$$

Pour $x \geq 0$, $u_\infty(x) = 0$ mais comme

$$u_n(x) \quad \geq \quad EU_n(\Delta S_1) \geq -\frac{1}{2} + \frac{1}{2n} + \sqrt{n},$$

on voit que $u_n(x) \to \infty > u_\infty(x)$. Or on peut montrer que U_n satisfait les hypothèses 8.8 et 8.6.

Exemple 8.20 : Hypothèse 8.4 non satisfaite *Nous montrons que si l'hypothèse 8.4 n'est pas satisfaite, la fonction valeur $u(x)$ peut être infinie même si S est borné. Supposons que $T = 2$, $\Omega = (\mathbb{N} \setminus \{0\}) \times \{0, 1\}$ et $P(\{(n, i)\}) = 1/2^{n+1}$, $n \geq 1$, $i = 1, 2$. De plus, $\mathcal{F}_1 = \{A \times \{0, 1\} : \ A \in \mathcal{P}(\mathbb{N} \setminus \{0\})\}$ et $\mathcal{F}_2 = \mathcal{P}(\Omega)$. Supposons que $S_0 = S_1 = 1$ et*

$$\Delta S_2(n, 0) = -1/2^{2n}, \quad \Delta S_2(n, 1) = 1.$$

On définit une fonction d'utilité U par

$$U(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 1, & x < 0, \\ \sqrt{x+1}, & x \geq 0. \end{cases}$$

Soit $\psi(n, 0) = \psi(n, 1) := 2^{2n} - 1$, $n \geq 1$, alors

$$u(0) \quad \geq \quad EU(\psi \Delta S_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}[2^{n-1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2^{2n+2}}] = \infty.$$

Dans cet exemple, on peut choisir $\kappa_1 = 1/2$ constant, mais β_1 ne peut être choisi constant, ainsi l'hypothèse 8.4 n'est pas satisfaite. Une construction similaire permet d'obtenir un cas où β_1 est constant et κ_1 ne l'est pas.

8.3.5 Programmation dynamique

A présent, nous présentons notre démarche pour arriver aux résultats énoncés précédemment. Nous travaillons sur le problème primal, en utilisant la programmation dynamique et nous montrons l'existence de stratégies optimales ainsi que de bornes pour celles-ci. L'approche duale (voir Kramkov-Schachermayer (1999) et Schachermayer (2001)) permet elle aussi d'obtenir des bornes mais elles dépendent des mesures risque neutre et sont donc plus difficiles à traiter (nous verrons dans [11] la nécessité d'utiliser une hypothèse de compacité 9.4).
Tout d'abord, le théorème 8.23 ci-dessous est vrai sous des hypothèses sur $(U_n)_{n\in\bar{\mathbb{N}}}$ plus faibles que l'hypothèse 8.6. Plus précisément,

Hypothèse 8.21 *Les fonctions $U_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \bar{\mathbb{N}}$ sont concaves, croissantes et continûment differentiables,*

$$\sup_{n\in\bar{\mathbb{N}}} |U_n(x)| < \infty,\ \forall x \in \mathbb{R}\ \textit{et}\ \inf_{n\in\bar{\mathbb{N}}} U_n'(0) > 0.$$

Dans la suite, l'hypothèse d'élasticité asymptotique (Hypothèse 8.8) est fondamentale. Elle admet une reformulation ayant l'avantage d'être préservée par la programmation dynamique. Soit $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Condition 8.22 *Il existe $C_1, C_2 > 0$ tels que*

$$\begin{aligned} V(\lambda x) &\leq \lambda^\gamma V(x + C_1) + C_2\lambda^\gamma, \\ V(\lambda x) &\leq \lambda V(x + C_1) + C_2\lambda^\gamma, \end{aligned}$$

$\forall x \in \mathbb{R}$ *et* $\lambda \geq 1$ [2].

Alors si $U_{n,T}(x, \omega) := U_n(x - G(\omega))$, sous les hypothèses 8.8 et 8.21, $U_{n,T}$ satisfait la condition 8.22 presque sûrement avec des constantes C_1, C_2 indépendantes de n. Ceci nous permet d'initier la procédure de programmation dynamique. Pour passer d'une date à la précédente, on utilise le théorème suivant :

Théorème 8.23 *Supposons S borné et que les hypothèses 8.4, 8.8 et 8.21 sont satisfaites. Pour tout $n \in \bar{\mathbb{N}}$, nous introduisons les fonctions aléatoires :*

$$\begin{aligned} U_{n,T}(x) &:= U_n(x - G), \\ U_{n,s}(x) &:= \operatorname{ess.}\sup_{\xi\in\Xi_s} E(U_{n,s+1}(x + \langle \xi, \Delta S_{s+1}\rangle)|\mathcal{F}_s), \quad 0 \leq s \leq T-1. \end{aligned}$$

2. La première inégalité sera utilisée lorsque la quantité $V(\lambda x)$ est positive et la seconde lorsqu' elle est négative.

Pour tout $n \in \bar{\mathbb{N}}$, $0 \leq s \leq T$, $U_{n,s}$ *sont bien définies et satisfont pour tout* $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} U_{n,s}(x) &< \infty \ p.s. \\ EU_{n,s}(x) &> -\infty. \end{aligned}$$

Les fonctions $U_{n,s}$ *sont concaves, croissantes et continûment differentiables presque sûrement et satisfont la condition 8.22 avec des constantes uniformes en* n.
Pour tout $n \in \bar{\mathbb{N}}$, $0 \leq s \leq T-1$ *et* $x \in \mathbb{R}$, *il existe* $\tilde{\xi}_{n,s+1}(x) \in \Xi_s$ *tel que*

$$U_{n,s}(x) = E(U_{n,s+1}(x + \langle \tilde{\xi}_{n,s+1}(x), \Delta S_{s+1} \rangle) | \mathcal{F}_s). \tag{8.9}$$

Pour tout $0 \leq s \leq T-1$, *il existe des fonctions croissantes* M_s, Z_s *et* $H_s : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *telles que pour tout* $n \in \bar{\mathbb{N}}$, $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} |\tilde{\xi}_{n,s+1}(x)| &\leq Z_{s+1}(|x|), && (8.10) \\ U_n(x - M_{s+1}(|x|)) &\leq U_{n,s+1}(x) \leq U_n(x + M_{s+1}(|x|)), && (8.11) \\ U'_{n,s}(x) &= E(U'_{n,s+1}(x + \langle \tilde{\xi}_{n,s+1}(x), \Delta S_{s+1} \rangle) | \mathcal{F}_s), && (8.12) \\ U'_n(H_{s+1}(|x|)) &\leq U'_{n,s+1}(x) \leq U'_n(-H_{s+1}(|x|)). && (8.13) \end{aligned}$$

Pour tout $n \in \bar{\mathbb{N}}$, $z \in \mathbb{R}$ *les problèmes de maximisation d'utilité*

$$EU_n(V_T^{z,\psi} - G) \to \max., \ \ \psi \in \Phi(U_n, G, z),$$

admettent une solution optimale $\psi_n^*(z)$ *donnée par*

$$\psi_{n,1}^*(z) := \tilde{\xi}_{n,1}(z), \quad \psi_{n,t+1}^*(z) := \tilde{\xi}_{n,t+1}(z + \sum_{k=1}^{t} \langle \psi_{n,k}^*(z), \Delta S_k \rangle). \tag{8.14}$$

Il existe une fonction non décroissante $\Upsilon_t : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *telle que pour tout* $n \in \bar{\mathbb{N}}$, $z \in \mathbb{R}$

$$|\psi_{n,t}^*(z)| \leq \Upsilon_t(|z|). \tag{8.15}$$

et les fonctions valeurs des problèmes d'optimisations sont finies, i.e. pour tout $z \in \mathbb{R}$

$$u_n(z) = U_{n,0}(z) < \infty. \tag{8.16}$$

La preuve se fait par récurrence arrière et utilise des estimations fines des différentes valeurs ainsi que des stratégies.
Pour montrer l'unicité des stratégies optimales, il faut supposer en plus que les U_n sont strictement concaves.

On montre alors la convergence de $U_{n,t}$ vers $U_{\infty,t}$ uniformément sur les compacts [3], presque sûrement, pour tout $0 \leq t \leq T$ et donc en particulier de $u_n(z) = U_{n,0}(z)$ vers $u_\infty(z) = U_{\infty,0}(z)$. Pour cela, nous utilisons, entre autres choses, les arguments du lemme 2 et du théorème 1 de Kabanov-Stricker (2001). Pour obtenir les résultats sur les vitesses de convergence, nous procédons aussi par récurrence en montrant

Lemme 8.24 *Supposons S borné et que les hypothèses 8.4, 8.8 et 8.10 sont satisfaites. Soit $\tilde{\xi}_{n,s}(x),\ n \in \bar{\mathbb{N}},\ 1 \leq s \leq T$ définit comme dans le théorème 8.23. Alors pour tout $N \geq 0$, presque sûrement,*

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in[-N,N]} |U'_{n,s}(x) - U'_{\infty,s}(x)| &\leq C_s(N)g(n),\ n \in \mathbb{N}, \\
\ell_s(N) \leq |U''_{n,s}(x)| &\leq L_s(N),\ x \in [-N,N],\ n \in \bar{\mathbb{N}}, \\
\sup_{x\in[-N,N]} |\tilde{\xi}_{n,s}(x) - \tilde{\xi}_{\infty,s}(x)| &\leq K_s(N)g(n),\ n \in \mathbb{N}, \\
\sup_{x\in[-N,N]} |U_{n,s}(x) - U_{\infty,s}(x)| &\leq B_s(N)g(n),\ n \in \mathbb{N},
\end{aligned}$$

avec les constantes appropriés $\ell_s(N),\ L_s(N),\ C_s(N), K_s(N), B_s(N) > 0$ et pour tout $0 \leq s \leq T$.

Soit $f_{n,t}(x,\xi) := E(U'_{n,t}(x + \xi\Delta S_t)\Delta S_t|\mathcal{F}_{t-1}),\ x,\xi \in \mathbb{R},\ n \in \bar{\mathbb{N}}$, la preuve de ce lemme nécessite de montrer que l'on peut travailler sur des versions continûment differentiables de $f_{n,t}$, $U_{n,t-1}$ et $\tilde{\xi}_{n,t}(x)$ et utilise le théorème des fonctions implicites pour prouver que pour tout $n \in \bar{\mathbb{N}}$

$$\begin{aligned}
\tilde{\xi}'_{n,t}(x) &= -\frac{\partial_1 f_{n,t}(x, \tilde{\xi}_{n,t}(x))}{\partial_2 f_{n,t}(x, \tilde{\xi}_{n,t}(x))},\ \text{avec} \\
\partial_1 f_{n,t}(x,\xi) &= E(U''_{n,t}(x + \xi\Delta S_t)\Delta S_t|\mathcal{F}_{t-1}), \\
\partial_2 f_{n,t}(x,\xi) &= E(U''_{n,t}(x + \xi\Delta S_t)(\Delta S_t)^2|\mathcal{F}_{t-1}), \\
U''_{n,t-1}(x) &= E(U''_{n,t}(x + \tilde{\xi}_{n,t}(x)\Delta S_t)(1 + \tilde{\xi}'_{n,t}(x)\Delta S_t)|\mathcal{F}_{t-1}).
\end{aligned}$$

8.4 Convergence du prix d'indifférence vers le prix de sur-réplication : cas $dom(U_n) = \mathbb{R}^+$

Cette section est basée sur "Convergence of utility indifference prices to the superreplication price" avec M. Rasonyi dans Mathematical Methods of Operations Research, vol 64, 145-154, 2006.

3. Notons qu'il suffit d'établir des convergences simples car par monotonicité et concavité des $U_{n,t}$, cela implique l'uniforme convergence sur les compacts (voir Rockafellar (1970)).

On suppose maintenant que les préférences des agents sont décrites par des fonctions d'utilité définies sur $\mathbb{R}^+$. L'objectif est d'étudier la convergence du prix d'indifférence lorsque l'aversion pour le risque tend vers l'infini. Nous considérons donc l'hypothèse suivante.

Hypothèse 8.25 *Supposons que $U_n : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ est une suite de fonctions concaves, strictement croissantes et deux fois continûment derivable telles que*

$$\forall x \in (0, \infty) \quad r_n(x) := -\frac{U_n''(x)}{U_n'(x)} \to \infty, \; n \to \infty.$$

Nous prolongeons par continuité chaque U_n à $[0, \infty)$ ($U_n(0)$ peut être égal à $-\infty$).
Un exemple typique est $U_n(x) = -e^{-\gamma_n x}$, $x > 0$ où $0 < \gamma_n$ et $\gamma_n \to \infty$ ($r_n(x) = \gamma_n$). Un autre exemple est une suite de fonctions d'utilité dont les dérivés sont données par $U_n'(x) = e^{-\gamma_n x^2}$, $x > 0$ où $0 < \gamma_n$ et $\gamma_n \to \infty$.
Nous rappelons que dans cette section, pour $z \geq \pi(G)$, $\Phi(U_n, G, z) = \{\psi \in \Phi : V_T^{z,\psi} \geq G \text{ p.s.}\}$. Notons que si on prolonge U_n sur la demi-droite négative par $-\infty$, on peut se passer de cette condition d'admissibilité sur les stratégies et travailler avec une richesse initiale arbitraire.

Théorème 8.26 *Supposons que $x \in (0, \infty)$, que S est borné et que les hypothèses 8.3 et 8.25 sont satisfaites. Alors les prix d'indifférence $p_n(G, x)$ sont bien définis et convergent vers $\pi(G)$ (voir (8.2)) lorsque $n \to \infty$.*

Pour montrer ce résultat, on prouve que, sous nos hypothèses, la richesse associée à tout portefeuille admissible est bornée uniformément (la borne ne dépend pas de la stratégie). Cela nous permet, en particulier, de montrer que le problème de maximization d'espérance d'utilité est bien posé. Quitte à prendre une transformation linéaire (et préservant la notion de prix d'indifférence) de nos fonctions d'utilité, nous nous ramenons au cas où $U_n(x) = 0$ et $U_n'(x) = 1$. On montre alors que U_n tend vers U_∞ avec

$$U_\infty(y) := -\infty, \; 0 < y < x, \quad U_\infty(y) := 0, \; y \geq x.$$

Si on pouvait appliquer les résultats de la section précédente alors comme on a la convergence des prix d'indifférence, on aurait bien montré notre résultat. Ce n'est malheureusement pas possible car U_∞ n'est pas régulière. Nous utilisons alors la fermeture en probabilité de l'ensemble $C = \{V_T^{y,\psi} : \psi \in \Phi\} - L_+^0$ (voir Kabanov-Stricker (2001)) et la propriété de bornitude uniforme des richesses pour montrer que $u_n(G, y) \to -\infty$ pour $\pi(G) < y < \pi(G) + x$, i.e. $x + G \notin C$. Alors, si il existe $x > \eta > 0$ et une sous-suite n_k telles que $p_{n_k}(G, x) \leq \pi(G) - \eta$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, d'après la définition 8.5, $u_{n_k}(G, x + \pi(G) - \eta) \geq u_{n_k}(0, x)$. Le membre de gauche tend vers $-\infty$, ce qui contredit le fait que $\liminf_{n\to\infty} u_n(0, x) \geq \liminf_{n\to\infty} U_n(x) = 0$. Comme $p_n(G, x) \leq \pi(G)$, on en déduit le résultat souhaité.

Il est possible d'étendre le théorème 8.26 à des processus de prix non bornés et de relaxer l'hypothèse 8.3. Pour cela, considérons l'ensemble $\mathcal{W}$ des variables aléatoires avec des moments de tout ordre finis. Si on suppose l'hypothèse 8.25 et que $\Delta S_t \in \mathcal{W}$, $1/\beta_{t-1} \in \mathcal{W}$, $1 \le t \le T$, (avec β_t satisfaisant (8.1) dans la proposition 8.2), alors $p_n(G,x)$ tend vers $\pi(G)$.

8.5 Convergence du prix d'indifférence vers le prix de sur-réplication : cas $dom(U_n) = \mathbb{R}$

Cette section est issue de "'Convergence of utility indifference prices to the superreplication price : the whole real line case" avec M. Rasonyi dans Acta Applicandae Mathematicae, vol 96, 119-135, 2007. Nous nous intéressons maintenant aux fonctions définies sur $\mathbb{R}$. Comme d'habitude, le problème est plus difficile à traiter dans ce cas que dans celui de l'axe positif. De plus, une autre question se pose : est-ce que les stratégies optimales convergent vers une stratégie de sur-réplication ? Rappelons que cette question ne se posait pas dans le cas $\mathrm{dom}(U_n) = (0, \infty)$ car toutes les stratégies optimales étaient des stratégies de sur-réplication. Ce n'est plus le cas à présent, car l'ensemble des stratégies admissibles $\Phi(U_n, G, z)$ est défini comme l'ensemble des strategies $\psi \in \Phi$ telles que $EU_n(V_T^{z,\psi} - G)$ existe. On sait que la réponse à cette question est négative en général, voir section 2 de Cheridito-Summer (2006). Nous allons montrer que, cependant, il existe un point d'accumulation pour la suite de stratégies optimales qui est une stratégie de sur-réplication.

8.5.1 Hypothèse et résultats

Hypothèse 8.27 *Soient $U_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ une suite de fonctions concaves, strictement croissantes et deux fois continûment dérivables telles que*

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad r_n(x) := -\frac{U_n''(x)}{U_n'(x)} \to \infty, \ n \to \infty.$$

Dans le théorème suivant, nous montrons que, en raison de la convergence particulière de U_n en $n \to \infty$, on peut construire les stratégies optimales $\psi_n^*(z)$ pour le problème (8.3), pour n assez grand, sans l'hypothèse habituelle d'élasticité asymptotique (voir remarque 8.9).

Théorème 8.28 *Supposons S borné et que les hypothèses 8.4 et 8.27 sont satisfaites. Alors il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que le problème de maximisation d'utilité* (8.3) *admette une solution optimale $\psi_n^*(z)$, pour tout $n \ge N_0$ et $z \in \mathbb{R}$.*

Maintenant, nous nous intéressons à la convergence des prix d'indifférence.

Théorème 8.29 *Supposons S borné et que les hypothèses 8.4 et 8.27 sont satisfaites. Alors pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, les prix d'indifférence $p_n(G, x_0)$ sont bien définis (pour $n \geq N_0$) et convergent vers $\pi(G)$ lorsque $n \to \infty$.*

Comme indiqué précédemment, nous allons étudier la convergence des stratégies optimales solutions de (8.3) pour une richesse initiale $z \geq \pi(G)$. Grandits-Summer (2006) démontrent, pour un espace d'états Ω fini, que les stratégies optimales convergent vers une stratégie de sur-réplication si

$$\lim_n \inf_{x \in \mathbb{R}} r_n(x) = +\infty. \tag{8.17}$$

Mais Cheridito-Summer (2005) montrent que cette convergence n'est pas vraie pour des espaces Ω quelconques. Lorsque $T = 1$, ils montrent cependant que la distance entre les stratégies de sur-réplication dites équilibrées et les stratégies optimales convergent vers 0 sous l'hypothèse (8.17).

Sous l'hypothèse 8.27, plus faible, nous montrons dans un modèle multi-périodique et pour un espace Ω quelconque qu'il existe un point d'accumulation pour la suite des stratégies optimales qui est une stratégie de sur-réplication.

Nous commençons par définir la notion de point d'accumulation pour les stratégies optimales. En effet, une suite de variables aléatoires uniformément bornées n'admet pas nécessairement une sous-suite convergente p.s. mais elle admet toujours une sous suite aléatoire qui converge p.s. (voir lemme 2 de Kabanov-Stricker (2001)), d'où le point (i) dans la définition 8.30. La deuxième condition (*ii*) indique que l'on doit prendre en compte le passé, i.e. choisir la sous-suite à $t+1$ de telle sorte qu'elle soit une sous-suite de celle de la date t.

Définition 8.30 *Une stratégie $\zeta = \{\zeta_t,\ 1 \leq t \leq T\} \in \Phi$ est une point d'accumulation pour $\phi_n = \{\phi_{n,t},\ 1 \leq t \leq T\} \in \Phi$ si elle peut être obtenue récursivement de la façon suite : pour tout $1 \leq t \leq T$ il existe des variables aléatoires $\sigma_{k,t}$ à valeur de $\mathbb{N}$ telles que*
(i) $\sigma_{k,t},\ k \in \mathbb{N}$ sont $\mathcal{F}_{t-1}$-mesurables et $\sigma_{k,t} < \sigma_{k+1,t}$ p.s. ;
(ii) $(\sigma_{k,t+1})_{k \geq 0}$ est une sous-suite de $(\sigma_{k,t})_{k \geq 0}$ presque sûrement pour tout $1 \leq t \leq T-1$;
(iii) $\zeta_t = \lim_{k \to \infty} \phi_{\sigma_{k,t},t}$ presque sûrement, pour tout $1 \leq t \leq T$.

Théorème 8.31 *Supposons S borné et que les hypothèses 8.4 et 8.27 sont satisfaites. Soit $z \geq \pi(G)$. La suite des strategies optimales $(\psi_n^*(z))_{n \geq N_0} = (\{\psi_{n,t}^*(z),\ 1 \leq t \leq T\})_{n \geq N_0}$ définies dans le théorème 8.28 admet un point d'accumulation $\zeta(z) = \{\zeta_t(z),\ 1 \leq t \leq T\}$, qui est une stratégie de sur-réplication.*

Ce résultat a une interprétation économique claire : si l'aversion au risque de U_n tend vers l'infini, on peut alors asymptotiquement sur-couvrir le bien contingent en utilisant une sous-suite convenablement choisie de la suite des stratégies optimales.

Remarque 8.32 *Encore une fois, nous travaillons sur le problème primal. Nous verrons dans le chapitre suivant que l'on peut montrer le théorème 8.29 via des techniques de dualité. Cependant ce type de technique ne permet pas simplement d'obtenir la bornitude uniforme de stratégies, ce qui est crucial pour le théorème 8.31.*

8.5.2 Programmation dynamique

La démarche utilisée pour arriver à nos résultats est similaire à celle employée dans la sous-section 8.3.5. Mais, puisque nous n'utilisons pas l'hypothèse d'élasticité asymptotique (voir remarque 8.9), les estimations doivent être menées différemment, en se basant sur l'hypothèse de convergence de l'aversion pour le risque. Soit, pour tout $0 \leq t \leq T-1$,

$$\begin{aligned} \pi_T(G) &:= G, \\ \pi_t(G) &:= \operatorname{ess.inf}\{X : \sigma(X) \subset \mathcal{F}_t, \exists \phi \in \Xi_t \text{ t.q.} \\ &\qquad X + \langle \phi, \Delta S_{t+1} \rangle \geq \pi_{t+1}(G) \text{ p.s.}\}. \end{aligned}$$

Alors on montre facilement que $\pi_0(G) = \pi(G)$. Puis on prouve un théorème similaire au théorème 8.23, dont on reprend les notations. Ainsi en supposant que S est borné et que les hypothèses 8.4, 8.27 sont satisfaites et que $U_n(0) = 0$, $U_n'(0) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on montre qu'il existe des constantes N_s, $0 \leq s \leq T$ telles que pour tout $n \geq N_s$ les fonctions $U_{n,s}$ sont bien finies. On montre aussi l'existence et la bornitude de la solution optimale [4] (i.e. (8.9), (8.10), (8.11) (8.12), (8.14), (8.15)) et la finitude des fonctions valeurs ((8.16)). Pour l'existence du point d'accumulation, on montre tout d'abord que

$$P(z + \sum_{t=1}^{T} \psi^*_{n_k,t}(z)\Delta S_t \leq G - 1/k) \leq \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}. \tag{8.18}$$

Puis grâce à (8.15) pour $t = 1$, on trouve qu'il existe une sous-suite $(\sigma_{k,1})_{k\geq 0}$ de n_k et une constante $\zeta_1(z)$ telles que, $\psi^*_{\sigma_{k,1},1}(z) \to \zeta_1(z)$. Alors (8.15) pour $t = 2$ et le lemme 2 de Kabanov-Stricker (2001) montrent qu'il existe une sous-suite aléatoire $\mathcal{F}_1$-mesurable $(\sigma_{k,2})_{k\geq 0}$ de $(\sigma_{k,1})_{k\geq 0}$ et une variable aléatoire $\mathcal{F}_1$-mesurable $\zeta_2(z)$ telles que $\psi^*_{\sigma_{k,2},2}(z) \to \zeta_2(z)$ *p.s.* On continue la procédure et on montre l'existence d'une sous-suite aléatoire $(\sigma_{k,t})_k$ satisfaisant (i) et (ii) dans la définition 8.30 et celle d'une variable aléatoire $\mathcal{F}_{t-1}$-mesurable $\zeta_t(z)$ satisfaisant (iii) : $(\zeta_t(z))_{1\leq t\leq T}$ est alors un point d'accumulation de la suite $((\psi^*_{n,t}(z))_{1\leq t\leq T})_{n\geq N_0}$. Grâce à (8.18), on montre que $(\zeta_t(z))_{1\leq t\leq T}$ est une stratégie de sur-réplication pour G. Enfin on démontre la convergence des prix d'indifférence grâce au fait que $\sup_{\omega\in\Omega} U_{n,s}(x) \to 0$ sur $\{x \geq \pi_s(G)\}$ et que $U_{n,s}(\pi_s(G) - \varepsilon) \to -\infty$ p.s.

4. Les estimations, basées sur l'hypothèse 8.27, nous permettent de montrer qu'une stratégie, pour être optimale, doit être bornée. Puis on utilise un argument de compacité pour montrer qu'une stratégie optimale existe.

Chapitre 9

Convergence du prix d'indifférence vers le prix de sur-réplication : cas continu

Ce chapitre est basé sur l'article “Risk-averse asymptotics for reservation prices”, co-écrit avec M. Rasonyi et à paraître dans Annals of Finance (actuellement en ligne sur le site de la revue). Les actifs risqués actualisés sont modélisés par une semi-martingale adaptée $S_t, t \in [0,T]$ de dimension d définie sur un espace probabilisé et filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}, P)$, où T représente l'horizon de temps. S est supposé localement borné.
Nous faisons l'hypothèse classique d'absence d'opportunité d'arbitrage, qui peut se formuler comme suit (voir Delbaen-Schachermayer (94))

Hypothèse 9.1 *Supposons S localement borné et*

$$\mathcal{M} = \{Q,\ Q \sim P \ t.q\ S \ \textit{est une Q-martingale locale}\} \neq \emptyset. \tag{9.1}$$

Soit U_n, $n \in \mathbb{N}$ une suite de fonctions d'utilité définit sur $\mathbb{R}$. Nous supposons qu'elle satisfait l'hypothèse 8.27. Nous introduisons les conjuguées de Fenchel V_n de U_n :

$$V_n(y) := \sup_{x\in\mathbb{R}}\{U_n(x) - xy\}, \quad y \in (0,\infty). \tag{9.2}$$

Il est clair que les V_n sont des fonctions convexes et finies.

9.1 Hypothèses

Nous allons maintenant énoncer une condition élasticité asymptotique raisonnable qui, dans notre contexte, sera de plus uniforme.

Hypothèse 9.2 *Pour tout $[\lambda_0, \lambda_1] \subset (0, \infty)$ il existe des constantes strictement positives C_1, C_2, C_3 telles que pour tout n et $y > 0$, on ait*

$$V_n(\lambda y) \leq C_1 V_n(y) + C_2 y + C_3, \tag{9.3}$$

pour tout $\lambda \in [\lambda_0, \lambda_1]$.

Remarque 9.3 *Si on considère une seule fonction d'utilité U (V étant sa conjuguée) alors Fittelli-Gianin (2004) montre que la condition* (9.3) *est équivalente à la condition d'élasticité asymptotique raisonnable (voir remarque 8.9). Ainsi, l'hypothèse 9.2 peut être considérée comme une condition d'élasticité asymptotique raisonnable uniforme en n (formulée sur le dual).*

Nous faisons à présent une hypothèse qui permet de montrer que l'ensemble $\mathcal{M}_v$ des probabilités Q de $\mathcal{M}$ telles que la suite $V_n(dQ/dP)$ est uniformément intégrable (par rapport à P) est dense dans $\mathcal{M}$ pour la topologie de la variation totale (voir aussi proposition 6 de Biagini-Frittelli (04) et la proposition 2.1.20 de Kabanov-Safarian (01)).

Hypothèse 9.4 *$\mathcal{M}_v$ est non vide et on notera Q_0 un de ces éléments.*

Remarque 9.5 *Nous verrons plus loin des exemples où cette hypothèse est satisfaite. Dans la remarque 9.10, nous proposerons également une hypothèse alternative à 9.4.*
L'hypothèse 9.4 requiert une sorte de compacité. Des conditions similaires ont déjà été utilisées dans la littérature sur la stabilité des stratégies optimales par rapport à des perturbations sur les fonctions d'utilité, voir Larsen (2009) et Kardaras-Žitković (2010). Dans les deux articles, une suite U_n de fonctions d'utilité convergent vers une fonction limite U et la convergence des stratégies optimales et les fonctions valeurs associées sont étudiées dans un cadre de marché semi-martingale, continu et incomplet.
Dans Larsen (2009), la suite U_n est supposée majorée par une fonction $\overline{U}$ dont la fonction conjuguée $\overline{V}$ est telle que $\overline{V}(Z)$ est intégrable avec $Z = dQ_0/dP$ et Q_0 est la mesure martingale minimale. La convergence des stratégies optimales est montrée en probabilité.
Dans Kardaras-Žitković (2010), les auteurs étudient un marché où certains actifs ne sont pas échangeables (ce qui correspond à avoir une richesse initiale aléatoire) et font une analyse en sensibilité par rapport à des perturbations sur les fonctions d'utilité mais aussi sur le modèle (via une suite de probabilité P_n). Sous l'hypothèse de convergence simple des U_n et en variation totale des P_n, ils étudient, en particulier, la convergence en probabilité des stratégies optimales. Ils ont besoin d'une hypothèse d'uniforme intégrabilité. Dans le cas où les actifs sont tous échangeables, elle suppose qu'il existe une probabilité martingale Q telle $\left(\frac{dP_n}{dP} V_n^+ \left(y \frac{dQ}{dP_n}\right)\right)_n$ est uniformément intégrable pour tout $y > 0$. Sous l'hypothèse

d'élasticité asymptotique raisonnable, il suffit en fait que la condition soit satisfaite pour $y = 1$*. Leur hypothèse est donc similaire à la notre (*$P_n = P$ *dans notre contexte).*
Notons, cependant, que dans les deux papiers cités, les U_n *sont définies seulement sur l'axe positif.*

9.2 Prix d'indifférence

Nous définissons à présent l'ensemble des stratégies admissibles (voir remarque 9.6 ci-dessous) :

$$\mathcal{A} := \{\phi \text{ prévisible et } S\text{-intégrable t.q. } \exists w > 0, V_t^{0,\phi} \geq -w \; \forall t \in [0,T]\},$$

où $V_t^{x,\phi} := x + \int_0^T \phi_t dS_t$ est la richesse associée à la stratégie ϕ si l'on part de x.
Soit G une variable aléatoire, positive, bornée et $\mathcal{F}_T$-mesurable représentant le paiement d'un bien contingent en T. On définit le même problème d'optimisation que précédemment mais on prend maintenant le supremum sur $\mathcal{A}$. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$u_n(x, G) := \sup_{\phi \in \mathcal{A}} EU_n(V_T^{x,\phi} - G). \tag{9.4}$$

Ce supremum est bien défini (les stratégies admissibles sont bornées inférieurement) mais peut valoir $+\infty$.

Remarque 9.6 *Notons que cette classe de stratégies admissibles ne contient pas les stratégies optimales et qu'il est nécessaire de prendre un classe élargie (voir Schachermayer (2001)) pour les obtenir. Toutefois, la fonction valeur* $u_n(x, G)$ *est la même que l'on prenne le supremum sur notre ensemble ou l'ensemble élargi. Ainsi le prix d'indifférence étant défini à partir des quantités* $u_n(x, G)$*, il n'est pas nécessaire, dans notre contexte, de se placer sur la classe élargie (qui est un peu plus complexe à définir).*

Nous supposons enfin qu'il existe une richesse initiale x_0 pour laquelle les investisseurs ont (asymptotiquement) une préférence et un taux de croissance commun.

Hypothèse 9.7 *Il existe* $x_0, \beta \in \mathbb{R}$ *et* $\alpha \in (0, \infty)$ *tels que* $U_n'(x_0) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \alpha$ *et* $U_n(x_0) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \beta$*.*

Théorème 9.8 *Supposons que les hypothèse 8.27, 9.2, 9.1, 9.4 et 9.7 sont satisfaites. Alors les quantités* $u_n(x_0, G), n \in \mathbb{N}$ *sont bien finies et les prix d'indifférence associés* $p_n(x_0, G)$ *convergent vers* $\pi(G)$ *lorsque* $n \to \infty$*.*

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, on peut obtenir un théorème similaire sans l'hypothèse 9.7 mais en imposant l'hypothèse d'élasticité 9.2 et celle de compacité 9.4 à une famille de fonctions d'utilité normalisées $\tilde{U}_n(x) := \frac{U_n(x)-U_n(x_0)}{U_n'(x_0)}$ et à leur transformé de Fenchel $\tilde{V}_n$, plutôt qu'à U_n et V_n.

Théorème 9.9 *Supposons que les hypothèse 8.27 et 9.1, ainsi que 9.2 et 9.4 pour $\tilde{V}_n$, sont satisfaites. Alors les quantités $u_n(x_0, G), n \in \mathbb{N}$ sont bien finies et les prix d'indifférence associés $p_n(x_0, G)$ convergent vers $\pi(G)$ lorsque $n \to \infty$.*

Les hypothèses du théorème 9.9 peuvent être plus faciles à vérifier dans la pratique : c'est le cas des exemples ci-dessous.

Remarque 9.10 *Supposons maintenant que les $U_n, n \in \mathbb{N}$ satisfont l'hypothèse 8.27 ainsi que*

Hypothèse 9.11 *Il existe $Q_0 \in \mathcal{M}$ telle que dQ_0/dP et dP/dQ_0 sont bornés.*

On peut alors montrer que l'hypothèse 9.11 est plus forte que l'hypothèse 9.4 pour $\tilde{V}_n$ et permet donc de la supprimer. En effet le corollaire 1.2 de Kabanov-Stricker (2001) montre directement que les probabilités $Q_0 \in \mathcal{M}$ vérifiant 9.11 sont denses dans $\mathcal{M}$.
On peut construire facilement des modèles qui satisfont l'hypothèse 9.11 : considérons une semi-martingale S_t localement bornée, $t \in [0, T]$ définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}, P)$ et telle que $\mathcal{M} = \{Q_0\}$ (par exemple le marché complet de Black-Scholes). Supposons que la probabilité historique P est telle que $P \sim Q_0$ avec dP/dQ_0 et dQ_0/dP bornés (par exemple $P = Q_0$). Alors le processus de prix (actualisé) S défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}, P)$ satisfait l'hypothèse 9.11. Notons qu'économiquement, ce type de marché n'a pas beaucoup de sens et que dans la plupart des modèles en temps continu, l'hypothèse 9.11 n'est pas satisfaite. En temps discret cependant, c'est une hypothèse qui est vérifiée sous des conditions raisonnables (voir Rásonyi-Stettner (2005) ou Rokhlin (2008)).

9.3 Exemples

Nous proposons dans cette section deux exemples (d'autres sont proposés dans le papier [11]).

Exemple 9.12 *Nous vérifions tout d'abord que le cas de la fonction d'utilité exponentielle, qui a déjà été traitée dans la littérature, est bien inclus dans notre cadre. Soit*

$$U_n(x) = \frac{1 - \exp\{-\alpha_n x\}}{\alpha_n},$$

avec $\alpha_n > 0$ *convergeant vers* ∞ *avec* $n \to \infty$. *Si le modèle satisfait 9.1 et qu'il existe* $Q_0 \in \mathcal{M}$ *telle que*

$$E\frac{dQ_0}{dP}\ln\frac{dQ_0}{dP} < \infty \tag{9.5}$$

alors $p_n(0, G) \to \pi(G)$, $n \to \infty$. *En fait, on peut montrer que la convergence est vraie pour tout* $x_0 \in \mathbb{R}$ *(par le théorème 9.9).*

Exemple 9.13 *L'exemple suivant n'a pas été traité, à notre connaissance, par la littérature, en temps continu*

$$U_n(x) := -\frac{1}{\alpha_n}[(x+1)^{-\alpha_n} - 1]1_{\{x>0\}} - \frac{1}{\alpha_n + 2}[(1-x)^{\alpha_n+2} - 1]1_{\{x\leq 0\}}$$

avec $\alpha_n > 0$, *tendant vers* ∞ *avec* $n \to \infty$. *On montre que les* U_n *sont des fonctions d'utilité satisfaisant l'hypothèse 8.27 et que si le marché satisfait à 9.1 et qu'il existe* $Q_0 \in \mathcal{M}$ *tel que*

$$E\frac{dQ_0}{dP}^{1+\varepsilon} < \infty \tag{9.6}$$

pour un certain $\varepsilon > 0$ *alors* $p_n(0, G) \to \pi(G)$, $n \to \infty$.

Bibliographie

[1] I. Adler and D. Gale. Arbitrage and growth rate for riskless investments in a stationary economy. *Mathematical Finance*, 2 :73–81, 1997.

[2] K. Arrow. *Essays in the Theory of Risk-Bearing.* North-Holland, Amsterdam, 1965.

[3] E. Bayraktar and V. Young. Pricing options in incomplete equity markets via the instantaneous sharpe ratio. *Annals of Finance*, 4(4) :399–429, 2008.

[4] B. Bensaid, J. Lesne, H. Pages, and J. Scheinkman. Derivative asset pricing with transaction costs. *Math. Finance*, 2 :63–86, 1992.

[5] S. Biagini and M. Frittelli. On the super-replication price of unbounded claims. *Annals of Applied Probability*, 14 :1970–1991, 2004.

[6] N. H. Bingham and R. Kiesel. *Risk-neutral valuation.* Springer-Verlag, 1998.

[7] T. Björk and I. Slinko. Towards a general theory of good-deal bounds. *Review of Finance*, 10(2) :221–260, 06 2006.

[8] F. Black and M. Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81 :637–659, 1973.

[9] B. Bouchard. *Stochastic control and applications in finance.* PhD thesis, Université Paris 9, 2000.

[10] M. Broadie, J. Cvitanic, and M. Soner. Optimal replication of contingent claims under portfolio constraints. *Rev. of Financial Studies*, 11 :59–79, 1992.

[11] D.G. Cantor and S.A. Lippman. Investment selection with imperfect capital markets. *Econometrica*, 51 :1121–1144, 1983.

[12] D.G. Cantor and S.A. Lippman. Optimal investment selection with a multitude of projects. *Econometrica*, 63(5) :1231–1241, 1995.

[13] P. Cheridito and C. Summer. Utility-maximizing strategies under incresing risk aversion. *Finance Stoch.*, 10(1) :147–158, 2005.

[14] A. S. Cherny. Pricing with coherent risk. *Theory of Probability and its Applications*, 52(3) :389–415, 2008.

[15] J.H. Cochrane and J. Saa-Requejo. Beyond arbitrage : Good-deal asset price bounds in incomplete markets. *Journal of Political Economy*, 108(1) :79–119, 2001.

[16] J.C. Cox, S.A Ross, and M. Rubinstein. Option pricing : a simplified approach. *Journal of Financial Economics*, 7 :229–264, 1979.

[17] J. Cvitanić and I. Karatzas. Hedging contingent claims with constrained portfolios. *Ann. Appl. Probab.*, 3 :652–681, 1993.

[18] J. Cvitanić, H. Pham, and N. Touzi. A closed formula for the problem of super-replication under transaction costs. *Finance Stoch.*, 3 :35–54, 1999.

[19] J. Cvitanić, H. Pham, and N. Touzi. Super-replication in stochastic volatility models under portfolio constraints. *J. Appl. Probab.*, 36 :523–545, 1999.

[20] J. Cvitanić, S. Shreve, and H. Soner. There is no nontrivial hedging portfolio for option pricing with transaction costs. *Ann. Appl. Probab.*, 5 :327–355, 1995.

[21] R.C. Dalang, A. Morton, and W. Willinger. Equivalent martingale measures and no-arbitrage in stochastic securities market models. *Stochastics Stochastics Rep.*, 29(2) :185–201, 1990.

[22] M. H. A. Davis. *Option pricing in incomplete markets.* In Dempster, M. A. H. and Pliska, S. R., editors, *Mathematics of derivative securities.* Cambridge University Press, 1997.

[23] F. Delbaen. Representing martingale measures when asset prices are continuous and bounded. *Mathematical Finance*, 2 :107–130, 1992.

[24] F. Delbaen, P. Grandits, T. Rheinländer, D. Samperi, M. Schweizer, and C. Stricker. Exponential hedging and entropic penalties. *Math. Finance*, 12 :99–123, 2002.

[25] F. Delbaen and W. Schachermayer. Arbitrage and free lunch with bounded risk for unbounded continuous processes. *Mathematical Finance*, 4 :343–348, 1994.

[26] F. Delbaen and W. Schachermayer. A general version of the fundamental theorem of asset pricing. *Math. Ann.*, 300(3) :463–520, 1994.

[27] F. Delbaen and W. Schachermayer. Attainable claims with pth moments. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 32(6) :743–763, 1996.

[28] D. Duffie. *Security markets.* Academic Press, 1988.

[29] D. Duffie and H.R. Richardson. Mean variance hedging in continuous time. *TheAnnals of Applied Probability*, 1(1) :1–15, 1991.

[30] N. El Karoui and M.C. Quenez. Dynamic programming and pricing of contingent claims in an incomplete market. *SIAM J. Control Optim.*, 33 :29–66, 1995.

[31] H. Föllmer and Y.M. Kabanov. Optional decomposition and lagrange multipliers. *Finance Stoch.*, 2 :69–81, 1997.

[32] H. Föllmer and Y.M. Kabanov. Optional decomposition and lagrange multipliers. *Finance Stoch.*, 2 :69–81, 1998.

[33] H. Föllmer and D. Kramkov. Optional decompositions under constraints. *Probab. Theory Related Fields*, 109 :1–25, 1997.

[34] H. Föllmer and A. Schied. *Stochastic finance.* Walter de Gruyter & Co., Berlin, 2004.

[35] H. Föllmer and D. Sondermann. Hedging of nonredundant contingent claims. In *Contributions to mathematical economics*, pages 205–223. North-Holland, Amsterdam, 1986.

[36] M. Frittelli and E.R. Gianin. Equivalent formulations of reasonable asymptotic elasticity. In *Technical Report no. 12, Dept. "Matematica per le Decisioni"*, page 10. University of Florence, http ://newrobin.mat.unimi.it/users/frittelli/publications.html, 2004.

[37] C. Gourieroux, J.P. Laurent, and H. Pham. Mean-variance hedging and numéraire. *Math. Finance*, 8(3) :179–200, 1998.

[38] P. Grandits and C. Summer. Risk averse asymptotics and the optional decomposition. *Teor. Veroyatnost. i Primenen.*, 51(2) :409–418, 2006.

[39] M. Grasselli. A stability result for the hara class with stochastic interest rates. *Insurance. Math. Econom.*, 33(3) :611–627, 2003.

[40] L.P. Hansen and R. Jagannathan. Implications of security market data for models of dynamic economies. *Journal of Political Economy*, 99 :225–262, 1991.

[41] M.J. Harrison and D.M. Kreps. Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets. *Journal of Economic Theory*, 20 :381–408, 1979.

[42] M.J. Harrison and S.R. Pliska. Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading. *Stochastic Process and their Applications*, 11 :215–260, 1981.

[43] R. Hodges and K. Neuberger. Optimal replication of contingent claims under transaction costs. *Rev. Futures Mkts.*, 8 :222–239, 1989.

[44] J. Jacod. *Calcul stochastique et problèmes de martingales*, volume 714 of *Lecture Notes in Mathematics.* Springer, Berlin, 1979.

[45] J. Jacod and A. N. Shiryaev. Local martingales and the fundamental asset pricing theorems in the discrete-time case. *Finance Stoch.*, 2 :259–273, 1998.

[46] E. Jouini and H. Kallal. Arbitrage in securities markets with short-sales constraints. *Math. Finance*, 5 :197–232, 1995.

[47] E. Jouini and H. Kallal. Martingales and arbitage in securities markets with transaction costs. *J. Econ. Theory*, 66 :178–197, 1995.

[48] E. Jouini and H. Kallal. Efficient trading strategies in the presence of market frictions. *Review of Financial Studies*, 14 :343–369, 2001.

[49] E. Jouini and C. Napp. Convergence of utility functions and convergence of optimal strategies. *Finance Stoch.*, 8 :133–144, 2004.

[50] Y. Kabanov and D.O. Kramkov. Nonarbitrage and equivalent martingale measures : a new proof of the harrison-pliska theorem. *Theory Probability Application*, 39 :523–527, 1995.

[51] Y. M. Kabanov and Ch. Stricker. A teachers' note on no-arbitrage criteria. In *Séminaire de Probabilités, ed. Azéma, J., Émery, M. and Yor, M., XXXV*, pages 149–152. Springer, New York, 2001.

[52] Y.M. Kabanov and M. Safarian. *Markets with transaction costs. Mathematical theory.* Springer-Verlag, Berlin,, 2009.

[53] I. Karatzas and S. Kou. On the pricing of contingent claims under constraints. *Ann. Appl. Probab.*, 6 :321–369, 1996.

[54] I. Karatzas and S. E. Shreve. *Brownian motion and stochastic calculus*, volume 113 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1991.

[55] C. Kardaras and G. Žitković. Stability of the utility maximization problem with random endowment in incomplete markets. *Forthcoming in Mathematical Finance*, 2010.

[56] S. Klöppel and M. Schweizer. Dynamic utility-based good deal bounds. *Statistics and Decisions*, 25(4) :285–309, 2007.

[57] R. Korn and M. Schäl. On value preserving and growth optimal portfolios. *Math. Methods Oper. Res.*, 50 :189–218, 1999.

[58] D. O. Kramkov and W. Schachermayer. The asymptotic elasticity of utility functions and optimal investment in incomplete markets. *Ann. Appl. Probab.*, 9 :904–950, 1999.

[59] D.O. Kramkov. Optional decomposition of supermartingales and hedging contingent claims in incomplete security markets. *Probab. Theory Related Fields*, 105 :459–479, 1996.

[60] D.M. Kreps. Arbitrage and equilibrium in economies with infinitely many commodities. *Journal of Mathematical Economics*, 8 :15–35, 1981.

[61] K. Larsen. Continuity of utility-maximization with respect to preferences. *Mathematical Finance*, 19 :237–250, 2009.

[62] K. Larsen and G. Žitković. Stability of utility-maximization in incomplete markets. *Stochastic Process. Appl.*, 117 :1642–1662, 2006.

[63] D. G. Luenberger. A primal-dual algorithm for the computation of optimal control. In *Computing Methods in Optimization Problems, 2 (Proc. Conf., San Remo, 1968)*, pages 222–233 (loose errata). Academic Press, New York, 1969.

[64] R. Merton. Option pricing when underlying stock returns are discontinuous. *Journal of Financial Economics*, 3 :125–144, 1976.

[65] R.C. Merton. Theory of rational option pricing. *Bell J. Econom. Manag. Sci.*, 4 :141–183, 1973.

[66] M. Musiela and M. Rutkowski. *Martingale methods in financial modeling*, volume 36 of *Stochastic Modelling and Applied Probability.* Springer, Berlin, 2007.

[67] M. Nutz. Risk aversion asymptotics for power utility maximization. *Working Paper ETH Zurich*, 2010.

[68] C. Patry. *Couverture apporchée optimale des options europénnes.* PhD thesis, Université Paris 9, 2001.

[69] H. Pham. Dynamic L^p-hedging in discrete time under cone constraints. *SIAM J. Control Optimization*, 38 :665–682, 2000.

[70] H. Pham and Touzi N. The fundamental theorem of asset pricing with cone constraints. *J. Math. Econom.*, 31 :265–279, 1999.

[71] J. Pratt. Risk aversion in the small and in the large. *Econometrica*, 32 :122–136, 1964.

[72] P. Protter. *Stochastic integration and differential equations*, volume 21 of *Applications of Mathematics (New York).* Springer-Verlag, Berlin, 1990. A new approach.

[73] M. Rásonyi and L. Stettner. On the utility maximization problem in discrete-time financial market models. *Ann. Appl. Probab.*, 15 :1367–1395, 2005.

[74] D. Revuz and M. Yor. *Continuous martingales and Brownian motion*, volume 293 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences].* Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1994.

[75] R. T. Rockafellar. *Convex analysis.* Princeton University Press., 1970.

[76] D.B. Rokhlin. Lower bounds of martingale measure densities in the Dalang-Morton-Willinger theorem. *ArXiv e-prints*, April 2008.

[77] R. Rouge and N. El Karoui. Pricing via utility maximization and entropy. *Math. Finance*, 10 :259–276, 2000.

[78] W. Schachermayer. A hilbert proof of the fundamental theorem of asset pricing in finite discrete time. *Insurance, Mathematics and Economics*, 11 :249–257, 1992.

[79] W. Schachermayer. Martingale measures for discrete-time processes with infinite horizon. *Mathematical Finance*, 4 :25–56, 1994.

[80] W. Schachermayer. Optimal investment in incomplete markets when wealth may become negative. *Ann. Appl. Probab.*, 11 :694–734, 2001.

[81] M. Schäl. Martingale measures and hedging for discrete-time financial markets. *Math. Oper. Res.*, 24 :509–528, 1999.

[82] M. Schäl. Portfolio optimization and martingale measures. *Math. Finance*, 10 :289–303, 2000.

[83] M. Schweizer. Mean-variance hedging for general claims. *The Annals of Applied Probability*, 2(1) :171–179, 1992.

[84] J. von Neumann and O. Morgenstern. *Theory of Games and Economic Behavior.* Princeton University Press, 1944.

[85] J.A. Yan. Caractérisation d'une classe d'ensembles convexes de l^1 ou h^1. In *Séminaire de Probabilités, XIV, Lect. Notes Mathematics*, pages 220–222. Springer, 1980.

[86] E. Zeidler. *Nonlinear functional analysis and its applications.* Springer, 1986.