

## Vortex Électrofaibles

J. Garaud

### Introduction

Abrikosov-Nielsen-Olesen

Vortex supraconducteurs

### Vortex

#### Supraconducteurs

#### Électrofaibles

Théorie de

Weinberg-Salam

Nouvelles solutions

Propriétés physiques

### Analyse de stabilité

Problème de Schrödinger

Analyse qualitative

Résultats quantitatifs

Modes chargés

### Conclusion

# Vortex Supraconducteurs de la Théorie de Weinberg-Salam

Julien Garaud

Laboratoire de Mathématiques et Physique Théorique – CNRS-UMR 6083,  
Université de Tours, FRANCE

Tours, mercredi 29 Septembre 2010

Thèse sous la direction de Pr. M. Volkov

basée d'après J. Garaud and M. S. Volkov



*Stability Analysis of The Twisted Superconducting Semilocal Strings*,  
Nucl. Phys. B **799**, 430 (2008) [arXiv :0712.3589 [hep-th]].



*Superconducting non-Abelian vortices in Weinberg-Salam theory – electroweak thunderbolts*,  
Nucl. Phys. B **826**, 174 (2010) [arXiv :0906.2996 [hep-th]].



*Stability Analysis of Superconducting Electroweak Vortices*, Nucl. Phys. B **839**, 310 (2010) [arXiv :1005.3002 [hep-th]].

# Plan de Thèse

## Vortex Électrofaibles

J. Garaud

### Introduction

Abrikosov-Nielsen-Olesen

Vortex supraconducteurs

### Vortex

### Supraconducteurs

### Électrofaibles

Théorie de

Weinberg-Salam

Nouvelles solutions

Propriétés physiques

### Analyse de stabilité

Problème de Schrödinger

Analyse qualitative

Résultats quantitatifs

Modes chargés

### Conclusion

- 1 Introduction**
  - Abrikosov-Nielsen-Olesen
  - Vortex supraconducteurs
- 2 Vortex Supraconducteurs Électrofaibles**
  - Théorie de Weinberg-Salam
  - Nouvelles solutions
  - Propriétés physiques
- 3 Analyse de stabilité**
  - Problème de Schrödinger
  - Analyse qualitative
  - Résultats quantitatifs
  - Modes chargés
- 4 Conclusion**

# Plan de Thèse

## Vortex Électrofaibles

J. Garaud

### Introduction

Abrikosov-Nielsen-Olesen

Vortex supraconducteurs

### Vortex

### Supraconducteurs

### Électrofaibles

Théorie de

Weinberg-Salam

Nouvelles solutions

Propriétés physiques

### Analyse de stabilité

Problème de Schrödinger

Analyse qualitative

Résultats quantitatifs

Modes chargés

### Conclusion

1

## Introduction

- Abrikosov-Nielsen-Olesen
- Vortex supraconducteurs

2

## Vortex Supraconducteurs Électrofaibles

- Théorie de Weinberg-Salam
- Nouvelles solutions
- Propriétés physiques

3

## Analyse de stabilité

- Problème de Schrödinger
- Analyse qualitative
- Résultats quantitatifs
- Modes chargés

4

## Conclusion

# Vortex Abrikosov-Nielsen-Olesen (ANO)

/Abrikosov '57/ - /Nielsen-Olesen '73/

## Vortex Électrofaibles

J. Garaud

### Introduction

Abrikosov-Nielsen-Olesen

Vortex supraconducteurs

### Vortex

Supraconducteurs

Électrofaibles

Théorie de

Weinberg-Salam

Nouvelles solutions

Propriétés physiques

### Analyse de stabilité

Problème de Schrödinger

Analyse qualitative

Résultats quantitatifs

Modes chargés

### Conclusion

## Le modèle Higgs abélien

( $\equiv$  Ginzburg-Landau)

$$\mathcal{L}_{\text{HA}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \left| \partial_{\mu}\Phi - \frac{i}{2}A_{\mu}\Phi \right|^2 - \frac{\beta}{8}(|\Phi|^2 - 1)^2$$

## Vortex Électrofaibles

J. Garaud

### Introduction

Abrikosov-Nielsen-Olesen

Vortex supraconducteurs

### Vortex

Supraconducteurs

Électrofaibles

Théorie de

Weinberg-Salam

Nouvelles solutions

Propriétés physiques

### Analyse de stabilité

Problème de Schrödinger

Analyse qualitative

Résultats quantitatifs

Modes chargés

### Conclusion

## Le modèle Higgs abélien

( $\equiv$  Ginzburg-Landau)

$$\mathcal{L}_{\text{HA}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \left| \partial_{\mu}\Phi - \frac{i}{2}A_{\mu}\Phi \right|^2 - \frac{\beta}{8}(|\Phi|^2 - 1)^2$$

- $U(1)$  brisée :  $U(1) \rightarrow \mathbb{1}$

$\Rightarrow A_{\mu}$  massif ( $m_V$ )

$$\beta = m_H^2/m_V^2$$

# Vortex Abrikosov-Nielsen-Olesen (ANO)

/Abrikosov '57/ - /Nielsen-Olesen '73/

## Vortex Électrofaibles

J. Garaud

### Introduction

Abrikosov-Nielsen-Olesen

Vortex supraconducteurs

### Vortex

Supraconducteurs

Électrofaibles

Théorie de

Weinberg-Salam

Nouvelles solutions

Propriétés physiques

### Analyse de stabilité

Problème de Schrödinger

Analyse qualitative

Résultats quantitatifs

Modes chargés

### Conclusion

## Le modèle Higgs abélien

( $\equiv$  Ginzburg-Landau)

$$\mathcal{L}_{\text{HA}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \left| \partial_{\mu}\Phi - \frac{i}{2}A_{\mu}\Phi \right|^2 - \frac{\beta}{8}(|\Phi|^2 - 1)^2$$

- $U(1)$  brisée :  $U(1) \rightarrow \mathbb{1}$

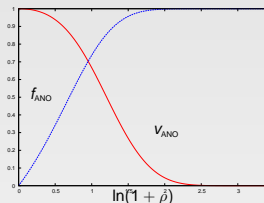
$\Rightarrow A_{\mu}$  massif ( $m_V$ )

$$\beta = m_H^2/m_V^2$$

- statique et symétrie cylindrique

$$A_{\mu}dx^{\mu} = 2(n - v_{\text{ANO}})d\varphi \text{ et}$$

$$\Phi = f_{\text{ANO}}e^{in\varphi}$$



# Vortex Abrikosov-Nielsen-Olesen (ANO)

/Abrikosov '57/ - /Nielsen-Olesen '73/

Vortex Électrofaibles

J. Garaud

Introduction

Abrikosov-Nielsen-Olesen

Vortex supraconducteurs

Vortex

Supraconducteurs

Électrofaibles

Théorie de

Weinberg-Salam

Nouvelles solutions

Propriétés physiques

Analyse de stabilité

Problème de Schrödinger

Analyse qualitative

Résultats quantitatifs

Modes chargés

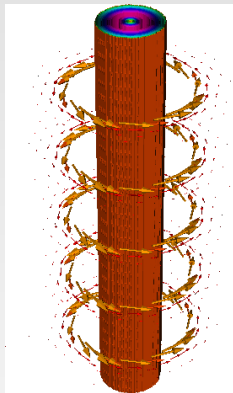
Conclusion

## Le modèle Higgs abélien

( $\equiv$  Ginzburg-Landau)

$$\mathcal{L}_{\text{HA}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \left| \partial_{\mu}\Phi - \frac{i}{2}A_{\mu}\Phi \right|^2 - \frac{\beta}{8}(|\Phi|^2 - 1)^2$$

- $U(1)$  brisée :  $U(1) \rightarrow \mathbb{1}$   
 $\Rightarrow A_{\mu}$  massif ( $m_V$ )  
 $\beta = m_H^2/m_V^2$
- statique et symétrie cylindrique  
 $A_{\mu}dx^{\mu} = 2(n - v_{\text{ANO}})d\varphi$  et  
 $\Phi = f_{\text{ANO}}e^{in\varphi}$
- flux  $\Psi = 2\pi n$  quantifié  
densité linéique d'énergie **finie**





# Vortex Abrikosov-Nielsen-Olesen (ANO)

/Abrikosov '57/ - /Nielsen-Olesen '73/

## Vortex Électrofaibles

J. Garaud

### Introduction

**Abrikosov-Nielsen-Olesen**

Vortex supraconducteurs

### Vortex

**Supraconducteurs**

**Électrofaibles**

Théorie de

Weinberg-Salam

Nouvelles solutions

Propriétés physiques

### Analyse de stabilité

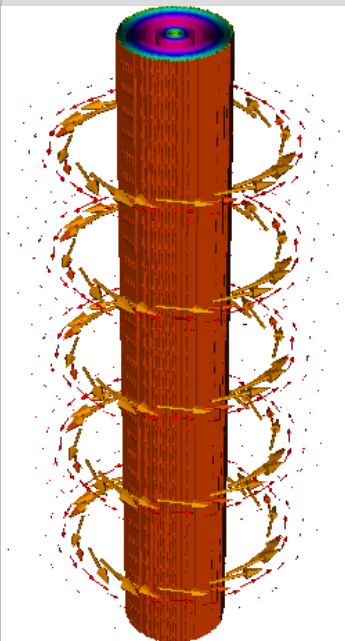
Problème de Schrödinger

Analyse qualitative

Résultats quantitatifs

Modes chargés

### Conclusion



# Vortex Abrikosov-Nielsen-Olesen (ANO)

/Abrikosov '57/ - /Nielsen-Olesen '73/

Vortex Électrofaibles

J. Garaud

Introduction

Abrikosov-Nielsen-Olesen

Vortex supraconducteurs

Vortex

Supraconducteurs

Électrofaibles

Théorie de

Weinberg-Salam

Nouvelles solutions

Propriétés physiques

Analyse de stabilité

Problème de Schrödinger

Analyse qualitative

Résultats quantitatifs

Modes chargés

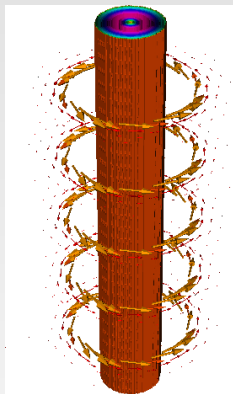
Conclusion

## Le modèle Higgs abélien

( $\equiv$  Ginzburg-Landau)

$$\mathcal{L}_{\text{HA}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \left| \partial_{\mu}\Phi - \frac{i}{2}A_{\mu}\Phi \right|^2 - \frac{\beta}{8}(|\Phi|^2 - 1)^2$$

- $U(1)$  brisée :  $U(1) \rightarrow \mathbb{1}$   
 $\Rightarrow A_{\mu}$  massif ( $m_V$ )  
 $\beta = m_H^2/m_V^2$
- statique et symétrie cylindrique  
 $A_{\mu}dx^{\mu} = 2(n - v_{\text{ANO}})d\varphi$  et  
 $\Phi = f_{\text{ANO}}e^{in\varphi}$
- flux  $\Psi = 2\pi n$  quantifié  
densité linéique d'énergie **finie**
- $n = 1$  stabilité (topologique)
- $n > 1$  (multivortex)  
 $\beta \leq 1$  stable (type I)  
 $\beta > 1$  instable (type II)  
/Bogomolny '76/



## Vortex Électrofaibles

J. Garaud

### Introduction

Abrikosov-Nielsen-Olesen

Vortex supraconducteurs

### Vortex

Supraconducteurs

Électrofaibles

Théorie de

Weinberg-Salam

Nouvelles solutions

Propriétés physiques

### Analyse de stabilité

Problème de Schrödinger

Analyse qualitative

Résultats quantitatifs

Modes chargés

### Conclusion

## Vortex Électrofaibles

J. Garaud

### Introduction

Abrikosov-Nielsen-Olesen

Vortex supraconducteurs

### Vortex

Supraconducteurs

Électrofaibles

Théorie de

Weinberg-Salam

Nouvelles solutions

Propriétés physiques

### Analyse de stabilité

Problème de Schrödinger

Analyse qualitative

Résultats quantitatifs

Modes chargés

### Conclusion

## Le modèle $U(1)_{\phi_1} \times U(1)_{\phi_2}$ de Witten

/ Witten '85 /

$$\mathcal{L}_{\text{Witten}} = \sum_{a=1,2} -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^{(a)} F^{(a)\mu\nu} + \left| \partial_\mu \Phi_a - i g_a A_\mu^{(a)} \Phi_a \right|^2 - V(|\Phi_1|^2, |\Phi_2|^2)$$

avec  $F_{\mu\nu}^{(a)} = \partial_\mu A_\nu^{(a)} - \partial_\nu A_\mu^{(a)}$

## Vortex Électrofaibles

J. Garaud

### Introduction

Abrikosov-Nielsen-Olesen

Vortex supraconducteurs

### Vortex

Supraconducteurs

Électrofaibles

Théorie de

Weinberg-Salam

Nouvelles solutions

Propriétés physiques

### Analyse de stabilité

Problème de Schrödinger

Analyse qualitative

Résultats quantitatifs

Modes chargés

### Conclusion

## Le modèle $U(1)_{\phi_1} \times U(1)_{\phi_2}$ de Witten

/ Witten '85 /

$$\mathcal{L}_{\text{Witten}} = \sum_{a=1,2} -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^{(a)} F^{(a)\mu\nu} + \left| \partial_\mu \Phi_a - i g_a A_\mu^{(a)} \Phi_a \right|^2 - V(|\Phi_1|^2, |\Phi_2|^2)$$

avec  $F_{\mu\nu}^{(a)} = \partial_\mu A_\nu^{(a)} - \partial_\nu A_\mu^{(a)}$

## Brisure partielle de symétrie $U(1)_{\phi_1} \times U(1)_{\phi_2} \rightarrow \mathbb{1} \times U(1)_{\phi_2}$

- vide :  $|\Phi_1| = \eta_1 \neq 0, |\Phi_2| = 0, A_\mu^{(a)} = 0$
- $(A_\mu^{(1)}, \Phi_1)$  : champs du vortex
- $(A_\mu^{(2)}, \Phi_2)$  : champs du condensat

# Vortex supraconducteurs de Witten

2/3 Solutions de type vortex

Vortex Électrofaibles

J. Garaud

Introduction

Abrikosov-Nielsen-Olesen

Vortex supraconducteurs

Vortex

Supraconducteurs

Électrofaibles

Théorie de

Weinberg-Salam

Nouvelles solutions

Propriétés physiques

Analyse de stabilité

Problème de Schrödinger

Analyse qualitative

Résultats quantitatifs

Modes chargés

Conclusion

**Vortex Abrikosov-Nielsen-Olesen plongé ('nu')  $\mathcal{I} = 0$**

- pas de champs du condensat :  $(A_\mu^{(2)}, \Phi_2) = 0$
- stabilité topologique (ne peut pas se 'dérouler')

# Vortex supraconducteurs de Witten

## 2/3 Solutions de type vortex

### Vortex Électrofaibles

J. Garaud

#### Introduction

Abrikosov-Nielsen-Olesen

Vortex supraconducteurs

#### Vortex

Supraconducteurs

Électrofaibles

Théorie de

Weinberg-Salam

Nouvelles solutions

Propriétés physiques

#### Analyse de stabilité

Problème de Schrödinger

Analyse qualitative

Résultats quantitatifs

Modes chargés

#### Conclusion

### Vortex Abrikosov-Nielsen-Olesen plongé ('nu') $\mathcal{I} = 0$

- pas de champs du condensat :  $(A_\mu^{(2)}, \Phi_2) = 0$
- stabilité topologique (ne peut pas se 'dérouler')

### Vortex 'habillé' d'un condensat scalaire $\mathcal{I} = 0$

- ANO ne peut se 'dérouler', mais peut relaxer
- condensat scalaire  $\Phi_2 \neq 0$  avec  $\Phi_2(0) = q$

# Vortex supraconducteurs de Witten

## 2/3 Solutions de type vortex

### Vortex Électrofaibles

J. Garaud

#### Introduction

Abrikosov-Nielsen-Olesen

Vortex supraconducteurs

#### Vortex

Supraconducteurs

Électrofaibles

Théorie de

Weinberg-Salam

Nouvelles solutions

Propriétés physiques

#### Analyse de stabilité

Problème de Schrödinger

Analyse qualitative

Résultats quantitatifs

Modes chargés

#### Conclusion

### Vortex Abrikosov-Nielsen-Olesen plongé ('nu') $\mathcal{I} = 0$

- pas de champs du condensat :  $(A_\mu^{(2)}, \Phi_2) = 0$
- stabilité topologique (ne peut pas se 'dérouler')

### Vortex 'habillé' d'un condensat scalaire $\mathcal{I} = 0$

- ANO ne peut se 'dérouler', mais peut relaxer
- condensat scalaire  $\Phi_2 \neq 0$  avec  $\Phi_2(0) = q$

### Généralisation : Vortex supraconducteurs $\mathcal{I} \neq 0$

- une phase non-triviale de  $\Phi_2$  produit un courant électrique  $\Phi_2 \sim e^{i\sigma z}$
- interaction longue portée par un champ de Biot et Savart  
 $(A_z^{(2)} \neq 0)$   $\lim_{\rho \rightarrow \infty} A_z^{(2)} \sim \ln \rho$

Les deux solutions sans courant appartiennent à la même famille de solutions porteuses de courant



# Vortex supraconducteurs de Witten

3/3

## Vortex Électrofaibles

J. Garaud

### Introduction

Abrikosov-Nielsen-Olesen

Vortex supraconducteurs

### Vortex Supraconducteurs Électrofaibles

Théorie de  
Weinberg-Salam

Nouvelles solutions

Propriétés physiques

### Analyse de stabilité

Problème de Schrödinger

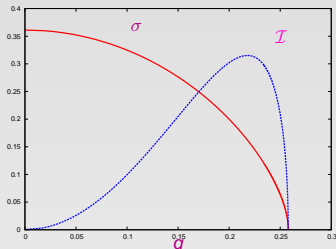
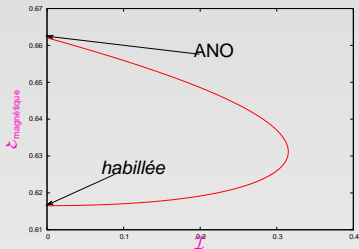
Analyse qualitative

Résultats quantitatifs

Modes chargés

### Conclusion

Les solutions 'nues' et 'habillées' appartiennent à la même *famille* de solutions



## Vortex Électrofaibles

J. Garaud

### Introduction

Abrikosov-Nielsen-Olesen

Vortex supraconducteurs

### Vortex

Supraconducteurs

Électrofaibles

Théorie de

Weinberg-Salam

Nouvelles solutions

Propriétés physiques

### Analyse de stabilité

Problème de Schrödinger

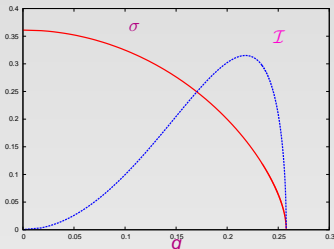
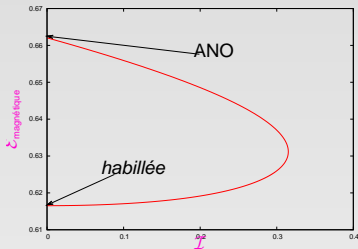
Analyse qualitative

Résultats quantitatifs

Modes chargés

### Conclusion

Les solutions 'nues' et 'habillées' appartiennent à la même famille de solutions



## Destruction du courant (Current quenching)

- Le courant ne peut être arbitrairement grand ( $\exists I_{\text{max}}$ )
- Un condensat important génère un grand courant qui induit un champ magnétique important qui abaisse le courant (Loi de Lenz)

# Vortex supraconducteurs Électrofaibles ?

## Vortex Électrofaibles

J. Garaud

### Introduction

Abrikosov-Nielsen-Olesen

Vortex supraconducteurs

### Vortex

Supraconducteurs

Électrofaibles

Théorie de

Weinberg-Salam

Nouvelles solutions

Propriétés physiques

### Analyse de stabilité

Problème de Schrödinger

Analyse qualitative

Résultats quantitatifs

Modes chargés

### Conclusion

## Motivations

- solutions de Witten largement étudiées dans le contexte cosmologique, en tant que solution de certaines Théories Grandes Unifiées (GUT)
- L'échelle typique du courant des GUT  $\sim 10^{20} \text{ A}$

# Vortex supraconducteurs Électrofaibles ?

## Vortex Électrofaibles

J. Garaud

### Introduction

Abrikosov-Nielsen-Olesen

Vortex supraconducteurs

### Vortex

Supraconducteurs

Électrofaibles

Théorie de

Weinberg-Salam

Nouvelles solutions

Propriétés physiques

### Analyse de stabilité

Problème de Schrödinger

Analyse qualitative

Résultats quantitatifs

Modes chargés

### Conclusion

## Motivations

- solutions de Witten largement étudiées dans le contexte cosmologique, en tant que solution de certaines Théories Grandes Unifiées (GUT)
- L'échelle typique du courant des GUT  $\sim 10^{20} A$
- Mécanisme de Witten existe-t-il pour théories moins *exotiques* ? par exemple la théorie électrofaible ?
- tous les ingrédients sont là dans la théorie électrofaible : ANO plongée (Z-string) et un second scalaire pour générer le courant

# Vortex supraconducteurs Électrofaibles ?

## Vortex Électrofaibles

J. Garaud

### Introduction

Abrikosov-Nielsen-Olesen

Vortex supraconducteurs

### Vortex

Supraconducteurs

Électrofaibles

Théorie de

Weinberg-Salam

Nouvelles solutions

Propriétés physiques

### Analyse de stabilité

Problème de Schrödinger

Analyse qualitative

Résultats quantitatifs

Modes chargés

### Conclusion

## Motivations

- solutions de Witten largement étudiées dans le contexte cosmologique, en tant que solution de certaines Théories Grandes Unifiées (GUT)
- L'échelle typique du courant des GUT  $\sim 10^{20} A$
- Mécanisme de Witten existe-t-il pour théories moins *exotiques* ? par exemple la théorie électrofaible ?
- tous les ingrédients sont là dans la théorie électrofaible : ANO plongée (Z-string) et un second scalaire pour générer le courant

## Malgré de nombreuses tentatives, jamais construits

- certainement à cause de la topologie de la théorie
- Z-string est non-topologique et peut se 'dérouler' vers le vide

# Plan de Thèse

## Vortex Électrofaibles

J. Garaud

### Introduction

Abrikosov-Nielsen-Olesen

Vortex supraconducteurs

### Vortex

### Supraconducteurs Électrofaibles

Théorie de  
Weinberg-Salam

Nouvelles solutions

Propriétés physiques

### Analyse de stabilité

Problème de Schrödinger

Analyse qualitative

Résultats quantitatifs

Modes chargés

### Conclusion

1

## Introduction

- Abrikosov-Nielsen-Olesen
- Vortex supraconducteurs

2

## Vortex Supraconducteurs Électrofaibles

- Théorie de Weinberg-Salam
- Nouvelles solutions
- Propriétés physiques

3

## Analyse de stabilité

- Problème de Schrödinger
- Analyse qualitative
- Résultats quantitatifs
- Modes chargés

4

## Conclusion

# Théorie de Weinberg-Salam (WS)

## Vortex Électrofaibles

J. Garaud

### Introduction

Abrikosov-Nielsen-Olesen

Vortex supraconducteurs

### Vortex

Supraconducteurs

Électrofaibles

### Théorie de

Weinberg-Salam

Nouvelles solutions

Propriétés physiques

### Analyse de stabilité

Problème de Schrödinger

Analyse qualitative

Résultats quantitatifs

Modes chargés

### Conclusion

## Secteur bosonique de Weinberg-Salam

La densité lagrangienne invariante de jauge  $SU(2)_I \times U(1)_Y$

$$\mathcal{L}_{\text{WS}} = -\frac{1}{4g^2} W_{\mu\nu}^a W^{a\mu\nu} - \frac{1}{4g'^2} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} + (D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) - \frac{\beta}{8} (\Phi^\dagger \Phi - 1)^2$$

brisure de la symétrie de jauge :  $SU(2)_I \times U(1)_Y \rightarrow U(1)_{\text{EM}}$   
et  $\beta = m_H^2/m_Z^2$ .

$$W_{\mu\nu}^a = \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a + \epsilon_{abc} W_\mu^b W_\nu^c,$$

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu,$$

$$D_\mu \Phi = \left( \partial_\mu - \frac{i}{2} B_\mu - \frac{i}{2} \tau^a W_\mu^a \right) \Phi$$

$\tau^a$  : matrices de Pauli

Constantes de couplage :  $g \equiv \cos \theta_w$ ,  $g' \equiv \sin \theta_w$

# Théorie de Weinberg-Salam

## Vortex Électrofaibles

J. Garaud

### Introduction

Abrikosov-Nielsen-Olesen

Vortex supraconducteurs

### Vortex

Supraconducteurs

Électrofaibles

### Théorie de

Weinberg-Salam

Nouvelles solutions

Propriétés physiques

### Analyse de stabilité

Problème de Schrödinger

Analyse qualitative

Résultats quantitatifs

Modes chargés

### Conclusion

## Champs électromagnétique et Z

Les champs EM et Z sont définis hors du vide / Nambu '77 /

$$F_{\mu\nu} = \frac{g}{g'} B_{\mu\nu} - \frac{g'}{g} n^a W_{\mu\nu}^a \quad \text{et} \quad Z_{\mu\nu} = B_{\mu\nu} + n^a W_{\mu\nu}^a$$

(isovecteurs unitaires :  $n^a = \Phi^\dagger \tau^a \Phi / |\Phi|^2$ ),



# Théorie de Weinberg-Salam

## Vortex Électrofaibles

J. Garaud

### Introduction

Abrikosov-Nielsen-Olesen

Vortex supraconducteurs

### Vortex

Supraconducteurs

Électrofaibles

### Théorie de

Weinberg-Salam

Nouvelles solutions

Propriétés physiques

### Analyse de stabilité

Problème de Schrödinger

Analyse qualitative

Résultats quantitatifs

Modes chargés

### Conclusion

## Champs électromagnétique et Z

Les champs EM et Z sont définis hors du vide / Nambu '77 /

$$F_{\mu\nu} = \frac{g}{g'} B_{\mu\nu} - \frac{g'}{g} n^a W_{\mu\nu}^a \quad \text{et} \quad Z_{\mu\nu} = B_{\mu\nu} + n^a W_{\mu\nu}^a$$

(isovecteurs unitaires :  $n^a = \Phi^\dagger \tau^a \Phi / |\Phi|^2$ ),

## Équations du mouvement d'Euler-Lagrange

$$\partial^\mu B_{\mu\nu} = g'^2 \frac{i}{2} ((D_\nu \Phi)^\dagger \Phi - \Phi^\dagger D_\nu \Phi) \equiv g'^2 J_\nu^0,$$

$$D^\mu W_{\mu\nu}^a = g^2 \frac{i}{2} ((D_\nu \Phi)^\dagger \tau^a \Phi - \Phi^\dagger \tau^a D_\nu \Phi) \equiv g^2 J_\nu^a,$$

$$D_\mu D^\mu \Phi + \frac{\beta}{4} (\Phi^\dagger \Phi - 1) \Phi = 0$$

# Vortex électrofaibles

## Vortex Électrofaibles

J. Garaud

### Introduction

Abrikosov-Nielsen-Olesen

Vortex supraconducteurs

### Vortex

#### Supraconducteurs Électrofaibles

**Théorie de  
Weinberg-Salam**

Nouvelles solutions

Propriétés physiques

### Analyse de stabilité

Problème de Schrödinger

Analyse qualitative

Résultats quantitatifs

Modes chargés

### Conclusion

- Plongement d'ANO dans  $SU(2)_I \times U(1)_Y$  : Z-strings  
[/Vachaspati '92/](#)

# Vortex électrofaibles

## Vortex Électrofaibles

J. Garaud

### Introduction

Abrikosov-Nielsen-Olesen

Vortex supraconducteurs

### Vortex

#### Supraconducteurs Électrofaibles

Théorie de  
Weinberg-Salam

Nouvelles solutions

Propriétés physiques

### Analyse de stabilité

Problème de Schrödinger

Analyse qualitative

Résultats quantitatifs

Modes chargés

### Conclusion

- Plongement d'ANO dans  $SU(2)_I \times U(1)_Y$  : Z-strings  
/Vachaspati '92/
- Z-strings sont instables pour les valeurs expérimentales  
de  $\beta, \theta_w$  /James et al. '92/ / Goodband-Hindmarsh '95 /
- Instabilité par condensation de bosons W / Olesen '93 /
- Mais Z-string habillée de W n'a jamais été trouvée  
/ Achúcarro et al. '94 /

# Vortex Supraconducteurs

## Vortex Électrofaibles

J. Garaud

/ Garaud-Volkov '10 /

### Introduction

Abrikosov-Nielsen-Olesen

Vortex supraconducteurs

### Vortex

### Supraconducteurs

### Électrofaibles

Théorie de  
Weinberg-Salam

### Nouvelles solutions

Propriétés physiques

### Analyse de stabilité

Problème de Schrödinger

Analyse qualitative

Résultats quantitatifs

Modes chargés

### Conclusion

## Réduction de symétrie

$$K_{(t)} = \frac{\partial}{\partial t}, \quad K_{(z)} = \frac{\partial}{\partial z}, \quad K_{(\varphi)} = \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

3 vecteurs de Killing qui commutent et toutes les symétries sont jaugées  $\Rightarrow$  il existe une jauge où rien ne dépend de  $t$ ,  $\varphi$  et  $z$ .

/ Forgacs-Manton '80 /

# Vortex Supraconducteurs

## Vortex Électrofaibles

J. Garaud

/ Garaud-Volkov '10 /

### Introduction

Abrikosov-Nielsen-Olesen

Vortex supraconducteurs

### Vortex

Supraconducteurs

Électrofaibles

Théorie de  
Weinberg-Salam

Nouvelles solutions

Propriétés physiques

### Analyse de stabilité

Problème de Schrödinger

Analyse qualitative

Résultats quantitatifs

Modes chargés

### Conclusion

## Réduction de symétrie

$$K_{(t)} = \frac{\partial}{\partial t}, \quad K_{(z)} = \frac{\partial}{\partial z}, \quad K_{(\varphi)} = \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

3 vecteurs de Killing qui commutent et toutes les symétries sont jaugées  $\Rightarrow$  il existe une jauge où rien ne dépend de  $t$ ,  $\varphi$  et  $z$ .

/ Forgacs-Manton '80 /

## Solutions stationnaires, axisymétriques

et invariantes sous les boosts de Lorentz dans le plan  $(t, z)$

$$\mathcal{W} = (u + u_1\tau^1 + u_3\tau^3) \sigma_\alpha dx^\alpha - (v + v_1\tau^1 + v_3\tau^3) d\varphi,$$
$$\Phi^{-1} = (f_1, f_2) \quad \text{et} \quad \sigma_\alpha = \sigma(\sinh b, 0, 0, \cosh b)$$

# Vortex Supraconducteurs

Quantité conservées

## Vortex Électrofaibles

J. Garaud

### Introduction

Abrikosov-Nielsen-Olesen

Vortex supraconducteurs

### Vortex

### Supraconducteurs

### Électrofaibles

Théorie de

Weinberg-Salam

### Nouvelles solutions

Propriétés physiques

### Analyse de stabilité

Problème de Schrödinger

Analyse qualitative

Résultats quantitatifs

Modes chargés

### Conclusion

**Cet Ansatz contient les solutions Z-strings**

et reproduit leur analyse perturbative de stabilité ...

# Vortex Supraconducteurs

Quantité conservées

## Vortex Électrofaibles

J. Garaud

### Introduction

Abrikosov-Nielsen-Olesen

Vortex supraconducteurs

### Vortex

#### Supraconducteurs

#### Électrofaibles

Théorie de

Weinberg-Salam

#### Nouvelles solutions

Propriétés physiques

### Analyse de stabilité

Problème de Schrödinger

Analyse qualitative

Résultats quantitatifs

Modes chargés

### Conclusion

## Cet Ansatz contient les solutions Z-strings

et reproduit leur analyse perturbative de stabilité ...

## Charges de Noether

$$E = \int T^0_{\nu} K^{\nu}_{(t)} d^2x ; \quad P = \int T^0_{\nu} K^{\nu}_{(z)} d^2x ; \quad M = \int T^0_{\nu} K^{\nu}_{(\varphi)} d^2x$$

# Vortex Supraconducteurs

Quantité conservées

## Vortex Électrofaibles

J. Garaud

### Introduction

Abrikosov-Nielsen-Olesen

Vortex supraconducteurs

### Vortex

Supraconducteurs

Électrofaibles

Théorie de

Weinberg-Salam

Nouvelles solutions

Propriétés physiques

### Analyse de stabilité

Problème de Schrödinger

Analyse qualitative

Résultats quantitatifs

Modes chargés

### Conclusion

## Cet Ansatz contient les solutions Z-strings

et reproduit leur analyse perturbative de stabilité ...

## Charges de Noether

$$E = \int T^0_{\nu} K^{\nu}_{(t)} d^2x ; \quad P = \int T^0_{\nu} K^{\nu}_{(z)} d^2x ; \quad M = \int T^0_{\nu} K^{\nu}_{(\varphi)} d^2x$$

## Courant

Le courant est défini d'après la loi de Coulomb,

$$\mathcal{I} = -2\pi \int (\rho F_{\rho\alpha})' d\rho = -\frac{2\pi\sigma Q}{gg'} \text{ unités } \mathbf{c}\Phi_0 = 1.8 \times 10^9 \text{ A}$$



# Vortex Supraconducteurs

Quantité conservées

## Vortex Électrofaibles

J. Garaud

### Introduction

Abrikosov-Nielsen-Olesen

Vortex supraconducteurs

### Vortex

Supraconducteurs

Électrofaibles

Théorie de  
Weinberg-Salam

Nouvelles solutions

Propriétés physiques

### Analyse de stabilité

Problème de Schrödinger

Analyse qualitative

Résultats quantitatifs

Modes chargés

### Conclusion

## Cet Ansatz contient les solutions Z-strings

et reproduit leur analyse perturbative de stabilité ...

## Charges de Noether

$$E = \int T^0_{\nu} K^{\nu}_{(t)} d^2x ; \quad P = \int T^0_{\nu} K^{\nu}_{(z)} d^2x ; \quad M = \int T^0_{\nu} K^{\nu}_{(\varphi)} d^2x$$

## Courant

Le courant est défini d'après la loi de Coulomb,

$$\mathcal{I} = -2\pi \int (\rho F_{\rho\alpha})' d\rho = -\frac{2\pi\sigma Q}{gg'} \text{ unités } \mathbf{c}\Phi_0 = 1.8 \times 10^9 \text{ A}$$

## Vortex chargés obtenus par boosts de Lorentz

$l_0 = \mathcal{I} \sinh b$  (charge)  $l_3 = \mathcal{I} \cosh b$  (courant)  
dans le référentiel au repos ( $b = 0$ )  $l_3 \equiv \mathcal{I}$  et  $l_0 = 0$

# Vortex Supraconducteurs

## Équations du mouvement (1/2)

### Vortex Électrofaibles

J. Garaud

#### Introduction

Abrikosov-Nielsen-Olesen

Vortex supraconducteurs

#### Vortex

Supraconducteurs

Électrofaibles

Théorie de

Weinberg-Salam

Nouvelles solutions

Propriétés physiques

#### Analyse de stabilité

Problème de Schrödinger

Analyse qualitative

Résultats quantitatifs

Modes chargés

#### Conclusion

### • Équations du champ de Higgs

$$\frac{1}{\rho} (\rho f_1')' = \left\{ \frac{\sigma^2}{4} [(u + u_3)^2 + u_1^2] + \frac{1}{4\rho^2} [(v + v_3)^2 + v_1^2] \right. \\ \left. + \frac{\beta}{4} (f_1^2 + f_2^2 - 1) \right\} f_1 + \left( \frac{\sigma^2 u u_1}{2} + \frac{v v_1}{2\rho^2} \right) f_2$$

$$\frac{1}{\rho} (\rho f_2')' = \left\{ \frac{\sigma^2}{4} [(u - u_3)^2 + u_1^2] + \frac{1}{4\rho^2} [(v - v_3)^2 + v_1^2] \right. \\ \left. + \frac{\beta}{4} (f_1^2 + f_2^2 - 1) \right\} f_2 + \left( \frac{\sigma^2 u u_1}{2} + \frac{v v_1}{2\rho^2} \right) f_1$$

### • Équations pour U(1)

$$\frac{1}{\rho} (\rho u')' = \frac{g'^2}{2} \{ (u + u_3) f_1^2 + 2u_1 f_1 f_2 + (u - u_3) f_2^2 \}$$
$$\rho \left( \frac{v'}{\rho} \right)' = \frac{g'^2}{2} \{ (v + v_3) f_1^2 + 2v_1 f_1 f_2 + (v - v_3) f_2^2 \}$$

# Vortex Supraconducteurs

## Équations du mouvement (2/2)

### Vortex Électrofaibles

J. Garaud

#### Introduction

Abrikosov-Nielsen-Olesen

Vortex supraconducteurs

#### Vortex

#### Supraconducteurs

#### Électrofaibles

Théorie de

Weinberg-Salam

#### Nouvelles solutions

Propriétés physiques

#### Analyse de stabilité

Problème de Schrödinger

Analyse qualitative

Résultats quantitatifs

Modes chargés

#### Conclusion

### • Équations de Yang-Mills

$$\frac{1}{\rho} (\rho U_1')' = \frac{v_3 u_1 - v_1 u_3}{\rho^2} v_3 + \frac{g^2}{2} [u_1 (f_1^2 + f_2^2) + 2u f_1 f_2]$$

$$\frac{1}{\rho} (\rho U_3')' = \frac{v_1 u_3 - v_3 u_1}{\rho^2} v_1 + \frac{g^2}{2} [(u + u_3) f_1^2 + (u_3 - u) f_2^2]$$

$$\rho \left( \frac{v_1'}{\rho} \right)' = \sigma^2 (v_1 u_3 - v_3 u_1) u_3 + \frac{g^2}{2} [v_1 (f_1^2 + f_2^2) + 2v f_1 f_2]$$

$$\rho \left( \frac{v_3'}{\rho} \right)' = \sigma^2 (v_3 u_1 - v_1 u_3) u_1$$

$$+ \frac{g^2}{2} [(v + v_3) f_1^2 + (v_3 - v) f_2^2]$$

### Soit au total

8 équations différentielles ordinaires, non-linéaires, couplées

# Vortex supraconducteurs

## Description

### Vortex Électrofaibles

J. Garaud

#### Introduction

Abrikosov-Nielsen-Olesen

Vortex supraconducteurs

#### Vortex

#### Supraconducteurs

#### Électrofaibles

Théorie de

Weinberg-Salam

#### Nouvelles solutions

Propriétés physiques

#### Analyse de stabilité

Problème de Schrödinger

Analyse qualitative

Résultats quantitatifs

Modes chargés

#### Conclusion

## Le vortex doit être

une configuration régulière, infiniment longue, vue au loin  
comme un fil électrique

- Asymptotiquement : Biot et Savart

$$A_{\mu}^{\infty} = \frac{1}{gg'} ((c_1 + Q \ln \rho) \sigma_{\alpha} dx^{\alpha} - c_2 d\varphi) \quad \text{et} \quad Z_{\mu}^{\infty} = 0$$

# Vortex supraconducteurs

## Description

### Vortex Électrofaibles

J. Garaud

#### Introduction

Abrikosov-Nielsen-Olesen

Vortex supraconducteurs

#### Vortex

#### Supraconducteurs

#### Électrofaibles

Théorie de

Weinberg-Salam

#### Nouvelles solutions

Propriétés physiques

#### Analyse de stabilité

Problème de Schrödinger

Analyse qualitative

Résultats quantitatifs

Modes chargés

#### Conclusion

## Le vortex doit être

une configuration régulière, infiniment longue, vue au loin comme un fil électrique

- Asymptotiquement : Biot et Savart

$$A_{\mu}^{\infty} = \frac{1}{gg'} ((c_1 + Q \ln \rho) \sigma_{\alpha} dx^{\alpha} - c_2 d\varphi) \quad \text{et} \quad Z_{\mu}^{\infty} = 0$$

- la densité linéique d'énergie est infinie

$$E = \frac{\pi \sigma^2}{gg'} \int^{\infty} \frac{Q^2}{\rho} d\rho + \mathcal{E}_{\text{magnétique}}$$

à cause de l'interaction à longue portée du champ EM.

Alors que  $\mathcal{E}_{\text{magnétique}} < \infty$

# Vortex supraconducteurs

## Conditions aux bords (1/2)

### Vortex Électrofaibles

J. Garaud

#### Introduction

Abrikosov-Nielsen-Olesen

Vortex supraconducteurs

#### Vortex

Supraconducteurs

Électrofaibles

Théorie de

Weinberg-Salam

Nouvelles solutions

Propriétés physiques

#### Analyse de stabilité

Problème de Schrödinger

Analyse qualitative

Résultats quantitatifs

Modes chargés

#### Conclusion

## Conditions aux bords sur l'axe de symétrie $\rho = 0$

Termes bornés des séries de Taylor à  $\rho = 0$ .

$$u = a_1 + \dots$$

$$v = 2n - \nu + a_4 \rho^2 + \dots$$

$$u_1 = a_2 \rho^\nu + \dots$$

$$v_1 = O(\rho^{\nu+2}) + \dots$$

$$u_3 = 1 + \dots$$

$$v_3 = \nu + a_3 \rho^2 + \dots$$

$$f_1 = a_5 \rho^n + \dots$$

$$f_2 = q \rho^{|\nu-n|} + \dots$$

# Vortex supraconducteurs

## Conditions aux bords (2/2)

### Vortex Électrofaibles

J. Garaud

#### Introduction

Abrikosov-Nielsen-Olesen

Vortex supraconducteurs

#### Vortex

#### Supraconducteurs

#### Électrofaibles

Théorie de

Weinberg-Salam

#### Nouvelles solutions

Propriétés physiques

#### Analyse de stabilité

Problème de Schrödinger

Analyse qualitative

Résultats quantitatifs

Modes chargés

#### Conclusion

### Conditions asymptotiques, $\rho = \infty$

Linéarisation autour  $A_\mu^\infty$  lorsque  $\rho = \infty$ .

$$u = c_1 + Q \ln \rho + \frac{c_3 g'^2}{\sqrt{\rho}} e^{-m_Z \rho} + \dots$$

$$v = c_2 + c_4 g'^2 \sqrt{\rho} e^{-m_Z \rho} + \dots$$

$$u_1 + iu_3 = e^{-i\gamma} \left\{ \frac{c_7}{\sqrt{\rho}} e^{-\int m_\sigma d\rho} - i \left[ c_1 + Q \ln \rho - \frac{c_3 g'^2}{\sqrt{\rho}} e^{-m_Z \rho} \right] \right\}$$

$$v_1 + iv_3 = e^{-i\gamma} \left\{ c_8 \sqrt{\rho} e^{-\int m_\sigma d\rho} - i \left[ c_2 - c_4 g'^2 \sqrt{\rho} e^{-m_Z \rho} \right] \right\} + \dots$$

$$f_1 + if_2 = e^{\frac{i}{2}\gamma} \left\{ 1 + \frac{c_5}{\sqrt{\rho}} e^{-m_H \rho} + i \frac{c_6}{\sqrt{\rho}} e^{-\int m_\sigma d\rho} \right\} + \dots$$

# Vortex supraconducteurs

## Conditions aux bords (2/2)

### Vortex Électrofaibles

J. Garaud

#### Introduction

Abrikosov-Nielsen-Olesen

Vortex supraconducteurs

#### Vortex

Supraconducteurs

Électrofaibles

Théorie de

Weinberg-Salam

Nouvelles solutions

Propriétés physiques

#### Analyse de stabilité

Problème de Schrödinger

Analyse qualitative

Résultats quantitatifs

Modes chargés

#### Conclusion

### Conditions asymptotiques, $\rho = \infty$

Linéarisation autour  $A_\mu^\infty$  lorsque  $\rho = \infty$ .

$$u = c_1 + Q \ln \rho + \frac{c_3 g'^2}{\sqrt{\rho}} e^{-m_Z \rho} + \dots$$

$$v = c_2 + c_4 g'^2 \sqrt{\rho} e^{-m_Z \rho} + \dots$$

$$u_1 + iu_3 = e^{-i\gamma} \left\{ \frac{c_7}{\sqrt{\rho}} e^{-\int m_\sigma d\rho} - i \left[ c_1 + Q \ln \rho - \frac{c_3 g'^2}{\sqrt{\rho}} e^{-m_Z \rho} \right] \right\}$$

$$v_1 + iv_3 = e^{-i\gamma} \left\{ c_8 \sqrt{\rho} e^{-\int m_\sigma d\rho} - i \left[ c_2 - c_4 g'^2 \sqrt{\rho} e^{-m_Z \rho} \right] \right\} + \dots$$

$$f_1 + if_2 = e^{\frac{i}{2}\gamma} \left\{ 1 + \frac{c_5}{\sqrt{\rho}} e^{-m_H \rho} + i \frac{c_6}{\sqrt{\rho}} e^{-\int m_\sigma d\rho} \right\} + \dots$$

### Masse effective – Modes hypermassifs

$$m_\sigma = \sqrt{m_W^2 + \sigma^2 (Q \ln \rho + c_1)^2}$$



# Construction numérique

## Multishooting

### Vortex Électrofaibles

J. Garaud

#### Introduction

Abrikosov-Nielsen-Olesen

Vortex supraconducteurs

#### Vortex

#### Supraconducteurs

#### Électrofaibles

Théorie de

Weinberg-Salam

#### Nouvelles solutions

Propriétés physiques

#### Analyse de stabilité

Problème de Schrödinger

Analyse qualitative

Résultats quantitatifs

Modes chargés

#### Conclusion

**Paramètres libres (afin de construire la solution globale)**

$$\sigma + 6 (\text{à } \rho = 0) + 10 (\text{à } \rho = \infty) = 16 + \sigma$$

# Construction numérique

## Multishooting

Vortex Électrofaibles

J. Garaud

Introduction

Abrikosov-Nielsen-Olesen

Vortex supraconducteurs

Vortex

Supraconducteurs

Électrofaibles

Théorie de  
Weinberg-Salam

Nouvelles solutions

Propriétés physiques

Analyse de stabilité

Problème de Schrödinger

Analyse qualitative

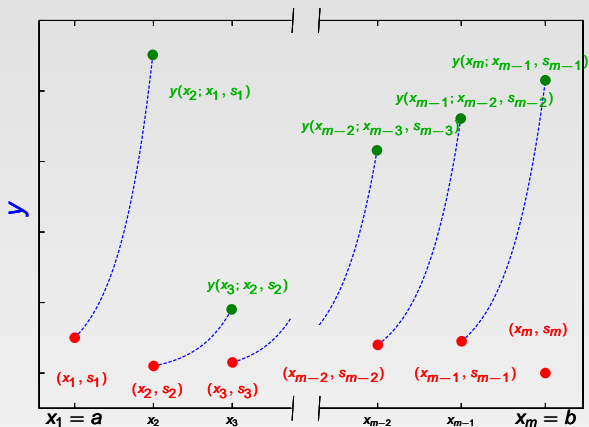
Résultats quantitatifs

Modes chargés

Conclusion

Paramètres libres (afin de construire la solution globale)

$$\sigma + 6 (\text{à } \rho = 0) + 10 (\text{à } \rho = \infty) = 16 + \sigma$$



# Vortex supraconducteurs

## Amplitudes

### Vortex Électrofaibles

J. Garaud

#### Introduction

Abrikosov-Nielsen-Olesen

Vortex supraconducteurs

#### Vortex

#### Supraconducteurs

#### Électrofaibles

Théorie de

Weinberg-Salam

Nouvelles solutions

#### Propriétés physiques

#### Analyse de stabilité

Problème de Schrödinger

Analyse qualitative

Résultats quantitatifs

Modes chargés

#### Conclusion

- famille à **5-paramètres** :  $\mathcal{I}(n, \nu, \sigma, \beta, \theta_w)$ .
- Résolution du problème aux bords par *multishooting*  
(`ode_bv_multishoot` inclus dans O2scl)

# Vortex supraconducteurs

## Amplitudes

### Vortex Électrofaibles

J. Garaud

#### Introduction

Abrikosov-Nielsen-Olesen

Vortex supraconducteurs

#### Vortex

#### Supraconducteurs

#### Électrofaibles

Théorie de  
Weinberg-Salam

Nouvelles solutions

#### Propriétés physiques

#### Analyse de stabilité

Problème de Schrödinger

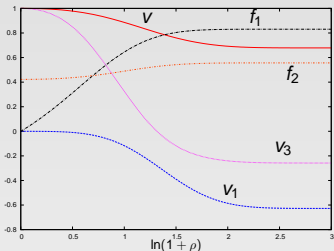
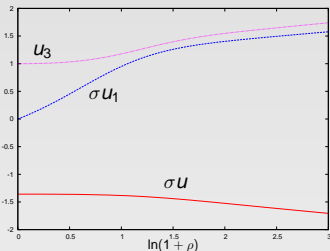
Analyse qualitative

Résultats quantitatifs

Modes chargés

#### Conclusion

- famille à **5-paramètres** :  $\mathcal{I}(n, \nu, \sigma, \beta, \theta_w)$ .
- Résolution du problème aux bords par *multishooting* (`ode_bv_multishoot` inclus dans `O2scl`)



- Les solutions existent pour *presque* toutes les valeurs des constantes de couplage.
- En particulier pour  $\sin^2 \theta_w \simeq 0.23$  et  $1.5 \leq \beta \leq 2.5$ .

# Vortex supraconducteurs

## Courant

### Vortex Électrofaibles

J. Garaud

#### Introduction

Abrikosov-Nielsen-Olesen

Vortex supraconducteurs

#### Vortex Supraconducteurs Électrofaibles

Théorie de  
Weinberg-Salam

Nouvelles solutions

**Propriétés physiques**

#### Analyse de stabilité

Problème de Schrödinger

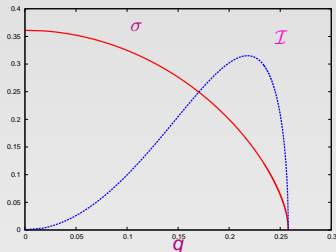
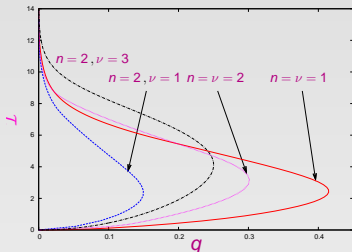
Analyse qualitative

Résultats quantitatifs

Modes chargés

#### Conclusion

- le courant est certainement la quantité la plus importante



# Vortex supraconducteurs

## Courant

### Vortex Électrofaibles

J. Garaud

#### Introduction

Abrikosov-Nielsen-Olesen

Vortex supraconducteurs

#### Vortex

#### Supraconducteurs

#### Électrofaibles

Théorie de  
Weinberg-Salam

Nouvelles solutions

#### Propriétés physiques

#### Analyse de stabilité

Problème de Schrödinger

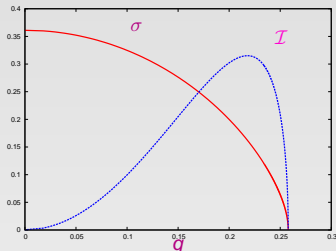
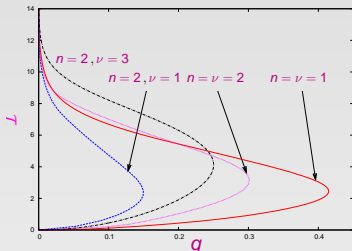
Analyse qualitative

Résultats quantitatifs

Modes chargés

#### Conclusion

- le courant est certainement la quantité la plus importante



- Il ne semble pas y avoir de limite supérieure au courant  
⇒ Pas de 'current quenching'

# Vortex supraconducteurs

Limite de grand courant – Restauration de symétrie

## Vortex Électrofaibles

J. Garaud

### Introduction

Abrikosov-Nielsen-Olesen

Vortex supraconducteurs

### Vortex

### Supraconducteurs

### Électrofaibles

Théorie de

Weinberg-Salam

Nouvelles solutions

### Propriétés physiques

### Analyse de stabilité

Problème de Schrödinger

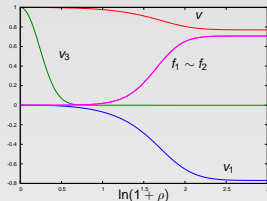
Analyse qualitative

Résultats quantitatifs

Modes chargés

### Conclusion

- Observation : si  $\mathcal{I}$  est grand, le vortex développe une région où  $\Phi = 0$



# Vortex supraconducteurs

Limite de grand courant – Restauration de symétrie

## Vortex Électrofaibles

J. Garaud

### Introduction

Abrikosov-Nielsen-Olesen

Vortex supraconducteurs

### Vortex

### Supraconducteurs

### Électrofaibles

Théorie de

Weinberg-Salam

Nouvelles solutions

### Propriétés physiques

### Analyse de stabilité

Problème de Schrödinger

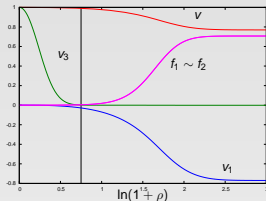
Analyse qualitative

Résultats quantitatifs

Modes chargés

### Conclusion

- Observation : si  $\mathcal{I}$  est grand, le vortex développe une région où  $\Phi = 0$
- On sépare l'espace en deux régions distinctes  $\rho \lesssim x_0/\mathcal{I}$





# Vortex supraconducteurs

Limite de grand courant – Restauration de symétrie

## Vortex Électrofaibles

J. Garaud

### Introduction

Abrikosov-Nielsen-Olesen

Vortex supraconducteurs

### Vortex

Supraconducteurs

Électrofaibles

Théorie de

Weinberg-Salam

Nouvelles solutions

Propriétés physiques

### Analyse de stabilité

Problème de Schrödinger

Analyse qualitative

Résultats quantitatifs

Modes chargés

### Conclusion

- Observation : si  $\mathcal{I}$  est grand, le vortex développe une région où  $\Phi = 0$

- On sépare l'espace en deux régions distinctes  $\rho \lesssim x_0/\mathcal{I}$

- Dans le **coeur** les eqs sont pure Yang-Mills

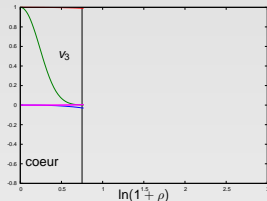
$$\mathcal{L}_{\text{SU}(2)} = \frac{1}{4} W_{\mu\nu}^a W^{a\mu\nu}$$

avec  $\tau^a W_{\mu}^a dx^{\mu} =$

$\tau^1 U_1(\mathcal{I}\rho)\mathcal{I}dz + \tau^3 V_3(\mathcal{I}\rho)d\varphi.$

YM  $\Rightarrow$  invariance conforme

- pas de borne supérieure sur  $\mathcal{I}$



# Vortex supraconducteurs

Limite de grand courant – Restauration de symétrie

## Vortex Électrofaibles

J. Garaud

### Introduction

Abrikosov-Nielsen-Olesen

Vortex supraconducteurs

### Vortex

### Supraconducteurs

### Électrofaibles

Théorie de

Weinberg-Salam

Nouvelles solutions

### Propriétés physiques

### Analyse de stabilité

Problème de Schrödinger

Analyse qualitative

Résultats quantitatifs

Modes chargés

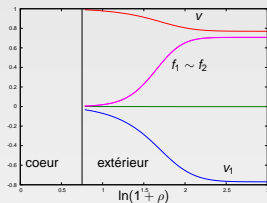
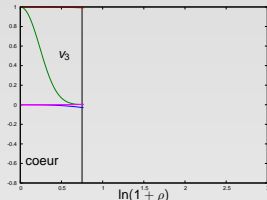
### Conclusion

- Observation : si  $\mathcal{I}$  est grand, le vortex développe une région où  $\Phi = 0$
- On sépare l'espace en deux régions distinctes  $\rho \lesssim x_0/\mathcal{I}$
- Dans le **coeur** les eqs sont pure Yang-Mills

$$\mathcal{L}_{\text{SU}(2)} = \frac{1}{4} W_{\mu\nu}^a W^{a\mu\nu}$$

avec  $\tau^a W_{\mu}^a dx^{\mu} =$   
 $\tau^1 U_1(\mathcal{I}\rho)\mathcal{I}dz + \tau^3 V_3(\mathcal{I}\rho)d\varphi.$   
YM  $\Rightarrow$  invariance conforme

- pas de borne supérieure sur  $\mathcal{I}$
- à l'extérieur, les champs hypermassifs sont éliminés



# Vortex supraconducteurs

## Limite de grand courant – Restauration de symétrie

### Vortex Électrofaibles

J. Garaud

#### Introduction

Abrikosov-Nielsen-Olesen  
Vortex supraconducteurs

#### Vortex

#### Supraconducteurs Électrofaibles

Théorie de  
Weinberg-Salam  
Nouvelles solutions

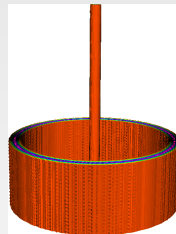
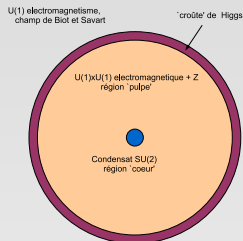
#### Propriétés physiques

#### Analyse de stabilité

Problème de Schrödinger  
Analyse qualitative  
Résultats quantitatifs  
Modes chargés

#### Conclusion

- solution décrite en plusieurs zones



# Vortex supraconducteurs

Limite de grand courant – Restauration de symétrie

## Vortex Électrofaibles

J. Garaud

### Introduction

Abrikosov-Nielsen-Olesen

Vortex supraconducteurs

### Vortex

### Supraconducteurs

### Électrofaibles

Théorie de

Weinberg-Salam

Nouvelles solutions

### Propriétés physiques

### Analyse de stabilité

Problème de Schrödinger

Analyse qualitative

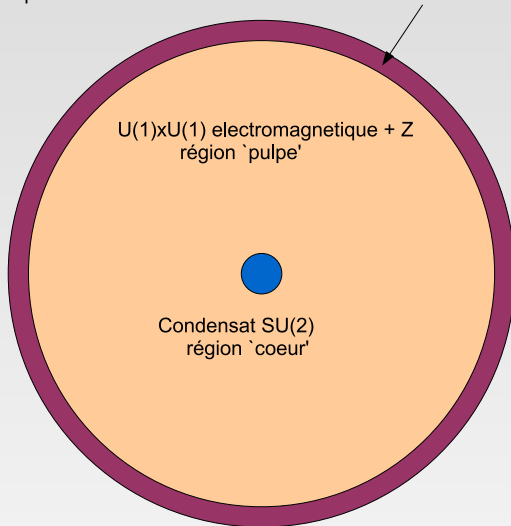
Résultats quantitatifs

Modes chargés

### Conclusion

U(1) electromagnetisme,  
champ de Biot et Savart

'croûte' de Higgs



# Vortex supraconducteurs

Limite de grand courant – Restauration de symétrie

## Vortex Électrofaibles

J. Garaud

### Introduction

Abriksov-Nielsen-Olesen

Vortex supraconducteurs

### Vortex

### Supraconducteurs

### Électrofaibles

Théorie de

Weinberg-Salam

Nouvelles solutions

Propriétés physiques

### Analyse de stabilité

Problème de Schrödinger

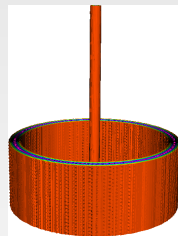
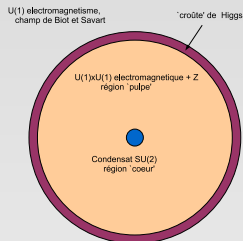
Analyse qualitative

Résultats quantitatifs

Modes chargés

### Conclusion

- solution décrite en plusieurs zones
- Restauration de symétrie : instabilité du vide si  $F_{12}$  grand / Ambjorn-Olesen '89 /
- courant créé par le condensat de W-chargés (coeur  $\sim 1/I$ )
- particules massives confinées (coque  $\sim I$ )
- Biot et Savart (à l'extérieur)



# Vortex supraconducteurs

Limite de grand courant – Restauration de symétrie

## Vortex Électrofaibles

J. Garaud

### Introduction

Abrikosov-Nielsen-Olesen

Vortex supraconducteurs

### Vortex

Supraconducteurs

Électrofaibles

Théorie de  
Weinberg-Salam

Nouvelles solutions

Propriétés physiques

### Analyse de stabilité

Problème de Schrödinger

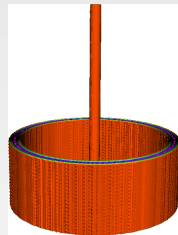
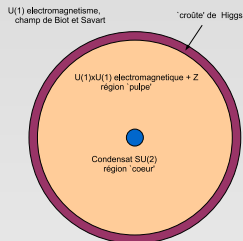
Analyse qualitative

Résultats quantitatifs

Modes chargés

### Conclusion

- solution décrite en plusieurs zones
- Restauration de symétrie : instabilité du vide si  $F_{12}$  grand / Ambjorn-Olesen '89 /
- courant créé par le condensat de W-chargés (coeur  $\sim 1/I$ )
- particules massives confinées (coque  $\sim I$ )
- Biot et Savart (à l'extérieur)
- pas de current quenching probablement car les porteurs de charge sont des vecteurs



# Vortex supraconducteurs

Limite de grand courant – Restauration de symétrie

## Vortex Électrofaibles

J. Garaud

### Introduction

Abrikosov-Nielsen-Olesen

Vortex supraconducteurs

### Vortex

Supraconducteurs

Électrofaibles

Théorie de

Weinberg-Salam

Nouvelles solutions

Propriétés physiques

### Analyse de stabilité

Problème de Schrödinger

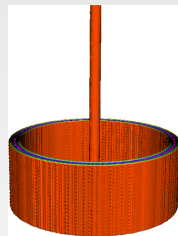
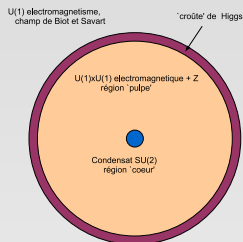
Analyse qualitative

Résultats quantitatifs

Modes chargés

### Conclusion

- solution décrite en plusieurs zones
- Restauration de symétrie : instabilité du vide si  $F_{12}$  grand / Ambjorn-Olesen '89 /
- courant créé par le condensat de W-chargés (coeur  $\sim 1/I$ )
- particules massives confinées (coque  $\sim I$ )
- Biot et Savart (à l'extérieur)
- pas de current quenching probablement car les porteurs de charge sont des vecteurs
- supraconductivité vectorielle pas étudiée ( ? )



# Observations possibles

## Vortex Électrofaibles

J. Garaud

### Introduction

Abriksov-Nielsen-Olesen

Vortex supraconducteurs

### Vortex

#### Supraconducteurs

#### Électrofaibles

Théorie de

Weinberg-Salam

Nouvelles solutions

Propriétés physiques

### Analyse de stabilité

Problème de Schrödinger

Analyse qualitative

Résultats quantitatifs

Modes chargés

### Conclusion

## Restauration de symétrie et condensation

- si  $F_{12}$  est important la symétrie de jauge est restaurée /Ambjorn-Olesen '89/
- condensat W si  $m_W^2 < eF_{12} < m_H^2$
- champs magnétiques suffisamment importants dans des collisions (par ex. LHC) / Ambjorn-Olesen '91 /



# Observations possibles

## Vortex Électrofaibles

J. Garaud

### Introduction

Abrikosov-Nielsen-Olesen

Vortex supraconducteurs

### Vortex

Supraconducteurs

Électrofaibles

Théorie de

Weinberg-Salam

Nouvelles solutions

Propriétés physiques

### Analyse de stabilité

Problème de Schrödinger

Analyse qualitative

Résultats quantitatifs

Modes chargés

### Conclusion

## Restauration de symétrie et condensation

- si  $F_{12}$  est important la symétrie de jauge est restaurée /Ambjorn-Olesen '89/
- condensat W si  $m_W^2 < eF_{12} < m_H^2$
- champs magnétiques suffisamment importants dans des collisions (par ex. LHC) / Ambjorn-Olesen '91 /

## Pour nos vortex supraconducteurs

- structure analogue à Ambjorn et Olesen
- Les solutions devraient être observables quelque part
- Pourquoi pas dans des collisionneurs ? (au LHC par ex.)
- pour savoir, il faudrait étudier en détail le problème

# Observations possibles

## Vortex Électrofaibles

J. Garaud

### Introduction

Abriksov-Nielsen-Olesen

Vortex supraconducteurs

### Vortex

Supraconducteurs

Électrofaibles

Théorie de  
Weinberg-Salam

Nouvelles solutions

Propriétés physiques

### Analyse de stabilité

Problème de Schrödinger

Analyse qualitative

Résultats quantitatifs

Modes chargés

### Conclusion

## Restauration de symétrie et condensation

- si  $F_{12}$  est important la symétrie de jauge est restaurée /Ambjorn-Olesen '89/
- condensat W si  $m_W^2 < eF_{12} < m_H^2$
- champs magnétiques suffisamment importants dans des collisions (par ex. LHC) / Ambjorn-Olesen '91 /

## Pour nos vortex supraconducteurs

- structure analogue à Ambjorn et Olesen
- Les solutions devraient être observables quelque part
- Pourquoi pas dans des collisionneurs ? (au LHC par ex.)
- pour savoir, il faudrait étudier en détail le problème

## Question intéressante, mais

les nouvelles solutions sont-elles stables ?

# Pourquoi rechercher la stabilité ?

## Vortex Électrofaibles

J. Garaud

### Introduction

Abrikosov-Nielsen-Olesen

Vortex supraconducteurs

### Vortex

### Supraconducteurs

### Électrofaibles

Théorie de

Weinberg-Salam

Nouvelles solutions

### Propriétés physiques

### Analyse de stabilité

Problème de Schrödinger

Analyse qualitative

Résultats quantitatifs

Modes chargés

### Conclusion

## Toutes les solutions localisées connues sont instables

- Sphalérons / Klinkhamer-Manton '84 /
- Z-strings / Vachaspati '92 /
- 'Dumbbells' / Nambu '77 /
- Oscillons / Graham '06 /
- ...

# Pourquoi rechercher la stabilité ?

## Vortex Électrofaibles

J. Garaud

### Introduction

Abrikosov-Nielsen-Olesen

Vortex supraconducteurs

### Vortex

Supraconducteurs

Électrofaibles

Théorie de

Weinberg-Salam

Nouvelles solutions

Propriétés physiques

### Analyse de stabilité

Problème de Schrödinger

Analyse qualitative

Résultats quantitatifs

Modes chargés

### Conclusion

## Toutes les solutions localisées connues sont instables

- Sphalérons / Klinkhamer-Manton '84 /
- Z-strings / Vachaspati '92 /
- 'Dumbbells' / Nambu '77 /
- Oscillons / Graham '06 /
- ...

## On recherche des structures *stables*

- des solutions classiquement stables sont très intéressantes
- par ex. candidats potentiels de matière noire

# Plan de Thèse

## Vortex Électrofaibles

J. Garaud

### Introduction

Abrikosov-Nielsen-Olesen

Vortex supraconducteurs

### Vortex

### Supraconducteurs

### Électrofaibles

Théorie de

Weinberg-Salam

Nouvelles solutions

Propriétés physiques

### Analyse de stabilité

Problème de Schrödinger

Analyse qualitative

Résultats quantitatifs

Modes chargés

### Conclusion

1

## Introduction

- Abrikosov-Nielsen-Olesen
- Vortex supraconducteurs

2

## Vortex Supraconducteurs Électrofaibles

- Théorie de Weinberg-Salam
- Nouvelles solutions
- Propriétés physiques

3

## Analyse de stabilité

- Problème de Schrödinger
- Analyse qualitative
- Résultats quantitatifs
- Modes chargés

4

## Conclusion

### Introduction

Abrikosov-Nielsen-Olesen

Vortex supraconducteurs

### Vortex

#### Supraconducteurs

#### Électrofaibles

Théorie de

Weinberg-Salam

Nouvelles solutions

Propriétés physiques

### Analyse de stabilité

#### Problème de Schrödinger

Analyse qualitative

Résultats quantitatifs

Modes chargés

### Conclusion

## Soient les petites fluctuations

$$W_{\mu}^a \rightarrow W_{\mu}^a + \delta W_{\mu}^a, \quad B_{\mu} \rightarrow B_{\mu} + \delta B_{\mu}, \quad \Phi \rightarrow \Phi + \delta\Phi$$

# Linéarisation

## Vortex Électrofaibles

J. Garaud

/ Garaud-Volkov '10 /

### Introduction

Abrikosov-Nielsen-Olesen

Vortex supraconducteurs

### Vortex

#### Supraconducteurs

#### Électrofaibles

Théorie de

Weinberg-Salam

Nouvelles solutions

Propriétés physiques

#### Analyse de stabilité

#### Problème de Schrödinger

Analyse qualitative

Résultats quantitatifs

Modes chargés

#### Conclusion

## Soient les petites fluctuations

$$W_{\mu}^a \rightarrow W_{\mu}^a + \delta W_{\mu}^a, \quad B_{\mu} \rightarrow B_{\mu} + \delta B_{\mu}, \quad \Phi \rightarrow \Phi + \delta\Phi$$

⇒ les équations sont linéarisées par rapport à  $\delta W_{\mu}^a$ ,  $\delta B_{\mu}$ ,  $\delta\Phi$ .

# Linéarisation

## Vortex Électrofaibles

J. Garaud

/ Garaud-Volkov '10 /

### Introduction

Abrikosov-Nielsen-Olesen

Vortex supraconducteurs

### Vortex

Supraconducteurs

Électrofaibles

Théorie de

Weinberg-Salam

Nouvelles solutions

Propriétés physiques

### Analyse de stabilité

Problème de Schrödinger

Analyse qualitative

Résultats quantitatifs

Modes chargés

### Conclusion

## Soient les petites fluctuations

$$W_{\mu}^a \rightarrow W_{\mu}^a + \delta W_{\mu}^a, \quad B_{\mu} \rightarrow B_{\mu} + \delta B_{\mu}, \quad \Phi \rightarrow \Phi + \delta\Phi$$

$\Rightarrow$  les équations sont linéarisées par rapport à  $\delta W_{\mu}^a$ ,  $\delta B_{\mu}$ ,  $\delta\Phi$ .

## Fixation de degrés de liberté résiduels

*'Jauge de fond'*

$$\partial_{\mu}\delta B^{\mu} + \frac{ig'^2}{2} (\delta\Phi^{\dagger}\Phi - \Phi^{\dagger}\delta\Phi) = 0,$$

$$\mathcal{D}_{\mu}\delta W^{a\mu} + \frac{ig^2}{2} (\delta\Phi^{\dagger}\tau^a\Phi - \Phi^{\dagger}\tau^a\delta\Phi) = 0,$$



# Séparation de variables

## Vortex Électrofaibles

J. Garaud

### Introduction

Abrikosov-Nielsen-Olesen  
Vortex supraconducteurs

### Vortex

### Supraconducteurs Électrofaibles

Théorie de  
Weinberg-Salam  
Nouvelles solutions  
Propriétés physiques

### Analyse de stabilité

Problème de Schrödinger  
Analyse qualitative  
Résultats quantitatifs  
Modes chargés

### Conclusion

## Décomposition de Fourier

Chaque fluctuation est décomposée sur les modes de Fourier

$$\sim \cos(\omega t + m\varphi + \kappa z) \quad \text{et} \quad \sim \sin(\omega t + m\varphi + \kappa z)$$

les 40 coeff. de Fourier sont des amplitudes radiales réelles

# Séparation de variables

## Vortex Électrofaibles

J. Garaud

### Introduction

Abrikosov-Nielsen-Olesen  
Vortex supraconducteurs

### Vortex

### Supraconducteurs Électrofaibles

Théorie de  
Weinberg-Salam  
Nouvelles solutions  
Propriétés physiques

### Analyse de stabilité

Problème de Schrödinger  
Analyse qualitative  
Résultats quantitatifs  
Modes chargés

### Conclusion

## Décomposition de Fourier

Chaque fluctuation est décomposée sur les modes de Fourier

$$\sim \cos(\omega t + m\varphi + \kappa z) \quad \text{et} \quad \sim \sin(\omega t + m\varphi + \kappa z)$$

les 40 coeff. de Fourier sont des amplitudes radiales réelles

- instable si  $\omega^2 < 0$

# Problème de Schrödinger

## Vortex Électrofaibles

J. Gaud

### Introduction

Abrikosov-Nielsen-Olesen

Vortex supraconducteurs

### Vortex

#### Supraconducteurs

#### Électrofaibles

Théorie de

Weinberg-Salam

Nouvelles solutions

Propriétés physiques

### Analyse de stabilité

#### Problème de Schrödinger

Analyse qualitative

Résultats quantitatifs

Modes chargés

### Conclusion

## Simplification des équations

- Après fixation de la jauge, le système découple en  $40 \rightarrow 32 + 8$  eqs.
- le système de 8 eqs. est non-physique (jauge pure)

# Problème de Schrödinger

## Vortex Électrofaibles

J. Garaud

### Introduction

Abrikosov-Nielsen-Olesen

Vortex supraconducteurs

### Vortex

#### Supraconducteurs

#### Électrofaibles

Théorie de

Weinberg-Salam

Nouvelles solutions

Propriétés physiques

### Analyse de stabilité

#### Problème de Schrödinger

Analyse qualitative

Résultats quantitatifs

Modes chargés

### Conclusion

## Simplification des équations

- Après fixation de la jauge, le système découple en  $40 \rightarrow 32 + 8$  eqs.
- le système de 8 eqs. est non-physique (jauge pure)
- après réorganisation, le système devient un problème de Schrödinger à **32-canaux**

# Problème de Schrödinger

## Vortex Électrofaibles

J. Garaud

### Introduction

Abrikosov-Nielsen-Olesen

Vortex supraconducteurs

### Vortex

Supraconducteurs

Électrofaibles

Théorie de

Weinberg-Salam

Nouvelles solutions

Propriétés physiques

### Analyse de stabilité

Problème de Schrödinger

Analyse qualitative

Résultats quantitatifs

Modes chargés

### Conclusion

## Simplification des équations

- Après fixation de la jauge, le système découple en  $40 \rightarrow 32 + 8$  eqs.
- le système de 8 eqs. est non-physique (jauge pure)
- après réorganisation, le système devient un problème de Schrödinger à **32-canaux**

## Le problème de Schrödinger

$$\frac{1}{\rho} (\rho \Psi')' - \mathcal{U}(\kappa, m|\rho) \Psi = \Lambda \Psi \quad \text{avec} \quad \Lambda = -\omega^2$$

32 équations linéaires 'vivant' sur le fond décrit par les 8 amplitudes (non-linéaires).

## Cas des vortex non-chargés ( $l_0 = 0$ )

Le système découple en 2 problèmes de Schrödinger (16 + 16) **équivalents**.

# Analyse de stabilité

## Vortex Électrofaibles

J. Garaud

### Introduction

Abrikosov-Nielsen-Olesen

Vortex supraconducteurs

### Vortex

#### Supraconducteurs

#### Électrofaibles

Théorie de

Weinberg-Salam

Nouvelles solutions

Propriétés physiques

### Analyse de stabilité

Problème de Schrödinger

#### Analyse qualitative

Résultats quantitatifs

Modes chargés

### Conclusion

Recherche d'états liés  $\Psi \rightarrow 0$  lorsque  $\rho \rightarrow \infty$

# Analyse de stabilité

## Vortex Électrofaibles

J. Garaud

### Introduction

Abrikosov-Nielsen-Olesen

Vortex supraconducteurs

### Vortex

Supraconducteurs

Électrofaibles

Théorie de

Weinberg-Salam

Nouvelles solutions

Propriétés physiques

### Analyse de stabilité

Problème de Schrödinger

Analyse qualitative

Résultats quantitatifs

Modes chargés

### Conclusion

Recherche d'états liés  $\Psi \rightarrow 0$  lorsque  $\rho \rightarrow \infty$

## Analyse Qualitative/Quantitative

- si  $\omega^2 < 0$  alors la solution est instable. On veut le déterminer pour chaque valeur des paramètres des perturbations  $m, \kappa$  et pour chaque fond  $(\beta, \theta_w, n, \nu, \mathcal{I})$
- Résolution du problème au bord est chronophage.  
Recherche en 2 étapes.
  - 1) recherche qualitative (critère de Jacobi si  $l_0 = 0$ )
  - 2) si un secteur est instable, la solution est construite explicitement

# Analyse de stabilité

## Vortex Électrofaibles

J. Garaud

### Introduction

Abrikosov-Nielsen-Olesen

Vortex supraconducteurs

### Vortex

Supraconducteurs

Électrofaibles

Théorie de

Weinberg-Salam

Nouvelles solutions

Propriétés physiques

### Analyse de stabilité

Problème de Schrödinger

Analyse qualitative

Résultats quantitatifs

Modes chargés

### Conclusion

Recherche d'états liés  $\Psi \rightarrow 0$  lorsque  $\rho \rightarrow \infty$

## Analyse Qualitative/Quantitative

- si  $\omega^2 < 0$  alors la solution est instable. On veut le déterminer pour chaque valeur des paramètres des perturbations  $m, \kappa$  et pour chaque fond  $(\beta, \theta_w, n, \nu, \mathcal{I})$
- Résolution du problème au bord est chronophage. Recherche en 2 étapes.
  - 1) recherche qualitative (critère de Jacobi si  $l_0 = 0$ )
  - 2) si un secteur est instable, la solution est construite explicitement

## Critère de Jacobi

- Change le problème des CB en problème aux CI.
- si la fonction d'onde d'énergie nulle oscille, alors l'état fondamental est négatif ( $\omega$  imaginaire)
- théorème pour 'multi-canaux' / Amann-Quittner '95 /



# Résultats d'après le critère de Jacobi

## Vortex Électrofaibles

J. Garaud

### Introduction

Abrikosov-Nielsen-Olesen

Vortex supraconducteurs

### Vortex

### Supraconducteurs

### Électrofaibles

Théorie de  
Weinberg-Salam

Nouvelles solutions

Propriétés physiques

### Analyse de stabilité

Problème de Schrödinger

### Analyse qualitative

Résultats quantitatifs

Modes chargés

### Conclusion

$$\omega^2 < 0 \quad \forall \mathcal{I} \quad \text{si}$$

•  $m = 0$  (modes axisymétriques)

• et  $|\kappa| < \kappa_{\max}(\mathcal{I})$

$\Rightarrow$  construction explicite pour  $m = 0$  on veut  $\omega^2(\kappa)$

# Relation de dispersion des vortex non chargés ( $l_0 = 0$ )

## Vortex Électrofaibles

J. Garaud

### Introduction

Abrikosov-Nielsen-Olesen  
Vortex supraconducteurs

### Vortex Supraconducteurs Électrofaibles

Théorie de  
Weinberg-Salam  
Nouvelles solutions  
Propriétés physiques

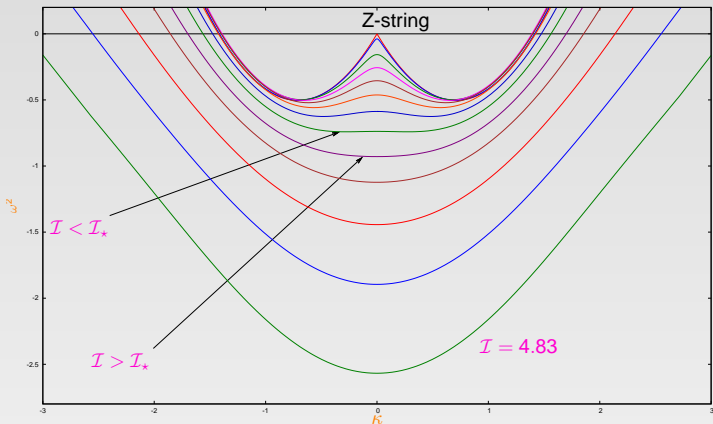
### Analyse de stabilité

Problème de Schrödinger  
Analyse qualitative

### Résultats quantitatifs

Modes chargés

### Conclusion



modes instables si  $|\kappa| < \kappa_{\max}$  donc si  $\lambda > \lambda_{\min} = 2\pi/\kappa_{\max}$

# Relation de dispersion

## Interprétation

### Vortex Électrofaibles

J. Garaud

#### Introduction

Abrikosov-Nielsen-Olesen

Vortex supraconducteurs

#### Vortex

#### Supraconducteurs

#### Électrofaibles

Théorie de

Weinberg-Salam

Nouvelles solutions

Propriétés physiques

#### Analyse de stabilité

Problème de Schrödinger

Analyse qualitative

#### Résultats quantitatifs

Modes chargés

#### Conclusion

**Il existe toujours une valeur maximale  $\kappa_{\max}(\mathcal{I})$**

Les conditions aux bords périodiques telles que  $L < \lambda_{\min}$  suppriment tous les modes instables.

**Le mode homogène  $\omega^2(\kappa = 0)$  est le plus dangereux**

car il est périodique avec n'importe quelle période  
absent si  $\mathcal{I} = 0$  ou si  $\theta_W = \pi/2$  / Garaud-Volkov '08 /

# Relation de dispersion

## Interprétation

### Vortex Électrofaibles

J. Garaud

#### Introduction

Abriksov-Nielsen-Olesen  
Vortex supraconducteurs

#### Vortex

Supraconducteurs  
Électrofaibles

Théorie de  
Weinberg-Salam  
Nouvelles solutions  
Propriétés physiques

#### Analyse de stabilité

Problème de Schrödinger  
Analyse qualitative

#### Résultats quantitatifs

Modes chargés

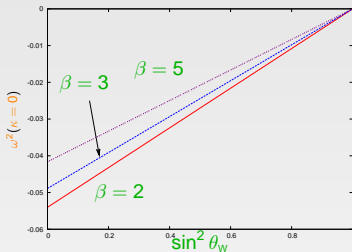
#### Conclusion

**Il existe toujours une valeur maximale  $\kappa_{\max}(\mathcal{I})$**

Les conditions aux bords périodiques telles que  $L < \lambda_{\min}$  suppriment tous les modes instables.

**Le mode homogène  $\omega^2(\kappa = 0)$  est le plus dangereux**

car il est périodique avec n'importe quelle période  
absent si  $\mathcal{I} = 0$  ou si  $\theta_W = \pi/2$  / Garaud-Volkov '08 /



# Relation de dispersion des vortex chargés ( $l_0 \neq 0$ )

## Vortex Électrofaibles

J. Garaud

### Introduction

Abrikosov-Nielsen-Olesen

Vortex supraconducteurs

### Vortex

### Supraconducteurs

### Électrofaibles

Théorie de  
Weinberg-Salam

Nouvelles solutions

Propriétés physiques

### Analyse de stabilité

Problème de Schrödinger

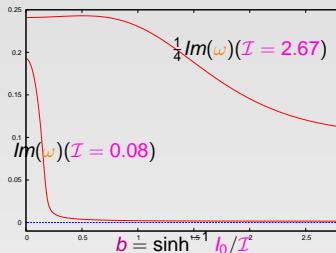
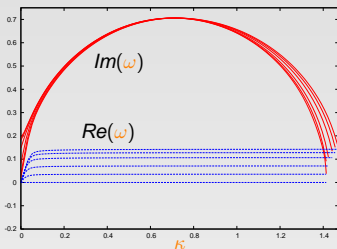
Analyse qualitative

Résultats quantitatifs

### Modes chargés

### Conclusion

Également instable



**Effet de la charge sur les modes propres**

abaisse le taux de croissance du mode homogène

# Plan de Thèse

## Vortex Électrofaibles

J. Garaud

### Introduction

Abrikosov-Nielsen-Olesen

Vortex supraconducteurs

### Vortex

### Supraconducteurs

### Électrofaibles

Théorie de  
Weinberg-Salam

Nouvelles solutions

Propriétés physiques

### Analyse de stabilité

Problème de Schrödinger

Analyse qualitative

Résultats quantitatifs

Modes chargés

### Conclusion

- 1 Introduction**
  - Abrikosov-Nielsen-Olesen
  - Vortex supraconducteurs
- 2 Vortex Supraconducteurs Électrofaibles**
  - Théorie de Weinberg-Salam
  - Nouvelles solutions
  - Propriétés physiques
- 3 Analyse de stabilité**
  - Problème de Schrödinger
  - Analyse qualitative
  - Résultats quantitatifs
  - Modes chargés
- 4 Conclusion**

# Conclusion et Perspectives

## Résumé

### Vortex Électrofaibles

J. Garaud

#### Introduction

Abrikosov-Nielsen-Olesen

Vortex supraconducteurs

#### Vortex

#### Supraconducteurs

#### Électrofaibles

Théorie de

Weinberg-Salam

Nouvelles solutions

Propriétés physiques

#### Analyse de stabilité

Problème de Schrödinger

Analyse qualitative

Résultats quantitatifs

Modes chargés

#### Conclusion

- Généralisation supraconductrice des Z-strings électrofaibles
- condensat de  $W$  au coeur du vortex génère le courant  $\mathcal{I} \sim 10^9 - 10^{10}$  Ampères

# Conclusion et Perspectives

## Résumé

### Vortex Électrofaibles

J. Garaud

#### Introduction

Abrikosov-Nielsen-Olesen

Vortex supraconducteurs

#### Vortex

#### Supraconducteurs

#### Électrofaibles

Théorie de

Weinberg-Salam

Nouvelles solutions

Propriétés physiques

#### Analyse de stabilité

Problème de Schrödinger

Analyse qualitative

Résultats quantitatifs

Modes chargés

#### Conclusion

- Généralisation supraconductrice des Z-strings électrofaibles
- condensat de  $W$  au coeur du vortex génère le courant  $\mathcal{I} \sim 10^9 - 10^{10}$  Ampères
- possibilités observationnelles plausibles, mais pas (encore) étudiées



# Conclusion et Perspectives

## Résumé

### Vortex Électrofaibles

J. Garaud

#### Introduction

Abrikosov-Nielsen-Olesen

Vortex supraconducteurs

#### Vortex

#### Supraconducteurs

#### Électrofaibles

Théorie de

Weinberg-Salam

Nouvelles solutions

Propriétés physiques

#### Analyse de stabilité

Problème de Schrödinger

Analyse qualitative

Résultats quantitatifs

Modes chargés

#### Conclusion

- Généralisation supraconductrice des Z-strings électrofaibles
- condensat de  $W$  au coeur du vortex génère le courant  $\mathcal{I} \sim 10^9 - 10^{10}$  Ampères
- possibilités observationnelles plausibles, mais pas (encore) étudiées
- intervalle fini de modes instables  $\lambda > \lambda_{\min} = 2\pi/\kappa_{\max}$  axisymétriques
- unique mode homogène si  $\mathcal{I} \neq 0$  ou si  $\theta_w < \pi/2$

# Conclusion et Perspectives

## Résumé

### Vortex Électrofaibles

J. Garaud

#### Introduction

Abrikosov-Nielsen-Olesen

Vortex supraconducteurs

#### Vortex

#### Supraconducteurs

#### Électrofaibles

Théorie de  
Weinberg-Salam

Nouvelles solutions

Propriétés physiques

#### Analyse de stabilité

Problème de Schrödinger

Analyse qualitative

Résultats quantitatifs

Modes chargés

#### Conclusion

- Généralisation supraconductrice des Z-strings électrofaibles
- condensat de  $W$  au coeur du vortex génère le courant  $\mathcal{I} \sim 10^9 - 10^{10}$  Ampères
- possibilités observationnelles plausibles, mais pas (encore) étudiées
- intervalle fini de modes instables  $\lambda > \lambda_{\min} = 2\pi/\kappa_{\max}$  axisymétriques
- unique mode homogène si  $\mathcal{I} \neq 0$  ou si  $\theta_w < \pi/2$
- tous les modes non-homogènes sont supprimés par périodisation. Il reste le mode homogène qui est 'l'épaississement uniforme'.

# Conclusion et Perspectives

## Résumé

### Vortex Électrofaibles

J. Garaud

#### Introduction

Abrikosov-Nielsen-Olesen

Vortex supraconducteurs

#### Vortex

#### Supraconducteurs

#### Électrofaibles

Théorie de

Weinberg-Salam

Nouvelles solutions

Propriétés physiques

#### Analyse de stabilité

Problème de Schrödinger

Analyse qualitative

Résultats quantitatifs

Modes chargés

#### Conclusion

- Généralisation supraconductrice des Z-strings électrofaibles
- condensat de  $W$  au coeur du vortex génère le courant  $\mathcal{I} \sim 10^9 - 10^{10}$  Ampères
- possibilités observationnelles plausibles, mais pas (encore) étudiées
- intervalle fini de modes instables  $\lambda > \lambda_{\min} = 2\pi/\kappa_{\max}$  axisymétriques
- unique mode homogène si  $\mathcal{I} \neq 0$  ou si  $\theta_w < \pi/2$
- tous les modes non-homogènes sont supprimés par périodisation. Il reste le mode homogène qui est 'l'épaississement uniforme'.
- la situation est peut être différente pour des vortons à cause d'effets de courbure

# Conclusion et Perspectives

## Résumé

### Vortex Électrofaibles

J. Garaud

#### Introduction

Abrikosov-Nielsen-Olesen

Vortex supraconducteurs

#### Vortex

#### Supraconducteurs

#### Électrofaibles

Théorie de

Weinberg-Salam

Nouvelles solutions

Propriétés physiques

#### Analyse de stabilité

Problème de Schrödinger

Analyse qualitative

Résultats quantitatifs

Modes chargés

#### Conclusion

- Généralisation supraconductrice des Z-strings électrofaibles
- condensat de  $W$  au coeur du vortex génère le courant  $\mathcal{I} \sim 10^9 - 10^{10}$  Ampères
- possibilités observationnelles plausibles, mais pas (encore) étudiées
- intervalle fini de modes instables  $\lambda > \lambda_{\min} = 2\pi/\kappa_{\max}$  axisymétriques
- unique mode homogène si  $\mathcal{I} \neq 0$  ou si  $\theta_w < \pi/2$
- tous les modes non-homogènes sont supprimés par périodisation. Il reste le mode homogène qui est 'l'épaississement uniforme'.
- la situation est peut être différente pour des vortons à cause d'effets de courbure
- possibilité de vortons électrofaibles ?

# Conclusion et Perspectives

## Perspectives – Vortons (1/2)

### Vortex Électrofaibles

J. Garaud

#### Introduction

Abrikosov-Nielsen-Olesen

Vortex supraconducteurs

#### Vortex

#### Supraconducteurs

#### Électrofaibles

Théorie de

Weinberg-Salam

Nouvelles solutions

Propriétés physiques

#### Analyse de stabilité

Problème de Schrödinger

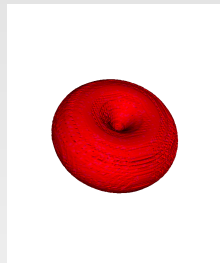
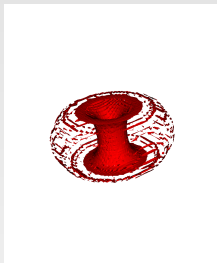
Analyse qualitative

Résultats quantitatifs

Modes chargés

#### Conclusion

- construits dans la limite globale du modèle de Witten /Radu-Volkov '08/ et /Battye-Sutcliffe '09/
- inclure des champs de jauge
- poursuivre dans Weinberg-Salam



# Conclusion et Perspectives

## Perspectives – Vortons (2/2)

### Vortex Électrofaibles

J. Garaud

#### Introduction

Abrikosov-Nielsen-Olesen

Vortex supraconducteurs

#### Vortex

Supraconducteurs

Électrofaibles

Théorie de

Weinberg-Salam

Nouvelles solutions

Propriétés physiques

#### Analyse de stabilité

Problème de Schrödinger

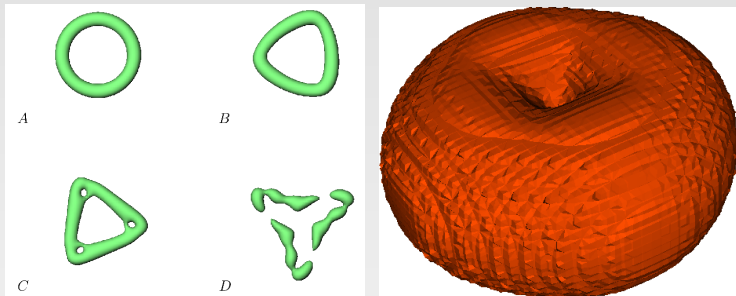
Analyse qualitative

Résultats quantitatifs

Modes chargés

#### Conclusion

- modes périodiques instable  $\Rightarrow$  ‘*pinching instability*’
- résultats préliminaires (simulations 3D) :  
*la ‘pinching instability’ semble effectivement être absente si  $R_{\text{vorton}}$  est petit*



/d'après Battye and Sutcliffe /

# Conclusion et Perspectives

## Perspectives – Vortex Non-Uniformes

### Vortex Électrofaibles

J. Garaud

#### Introduction

Abriksov-Nielsen-Olesen

Vortex supraconducteurs

#### Vortex

#### Supraconducteurs

#### Électrofaibles

Théorie de

Weinberg-Salam

Nouvelles solutions

Propriétés physiques

#### Analyse de stabilité

Problème de Schrödinger

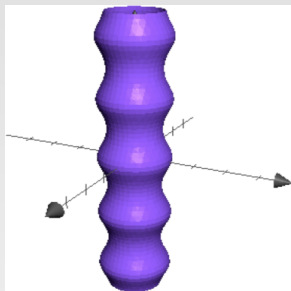
Analyse qualitative

Résultats quantitatifs

Modes chargés

#### Conclusion

- La relation de dispersion possède des modes zéros non homogènes.
- suggère l'existence d'une nouvelle branche de solutions non-uniformes
- par analogie avec *black-strings*, pour lesquelles il existe une branche *black-strings* non-uniforme
- peut-être des solutions analogues existent



## Vortex Électrofaibles

J. Garaud

### Introduction

Abrikosov-Nielsen-Olesen  
Vortex supraconducteurs

### Vortex Supraconducteurs Électrofaibles

Théorie de  
Weinberg-Salam  
Nouvelles solutions  
Propriétés physiques

### Analyse de stabilité

Problème de Schrödinger  
Analyse qualitative  
Résultats quantitatifs  
Modes chargés

### Conclusion

# Merci de votre attention



## Vortex Électrofaibles

J. Garaud

### Introduction

Abrikosov-Nielsen-Olesen

Vortex supraconducteurs

### Vortex

### Supraconducteurs

### Électrofaibles

Théorie de

Weinberg-Salam

Nouvelles solutions

Propriétés physiques

### Analyse de stabilité

Problème de Schrödinger

Analyse qualitative

Résultats quantitatifs

Modes chargés

### Conclusion

# Compléments

## Vortex Électrofaibles

J. Garaud

### Introduction

Abrikosov-Nielsen-Olesen  
Vortex supraconducteurs

### Vortex Supraconducteurs Électrofaibles

Théorie de  
Weinberg-Salam  
Nouvelles solutions  
Propriétés physiques

### Analyse de stabilité

Problème de Schrödinger  
Analyse qualitative  
Résultats quantitatifs  
Modes chargés

### Conclusion

# Critère de Jacobi

# Critère de Jacobi

## Compléments

### Vortex Électrofaibles

J. Garaud

#### Introduction

Abrikosov-Nielsen-Olesen  
Vortex supraconducteurs

#### Vortex

#### Supraconducteurs Électrofaibles

Théorie de  
Weinberg-Salam  
Nouvelles solutions  
Propriétés physiques

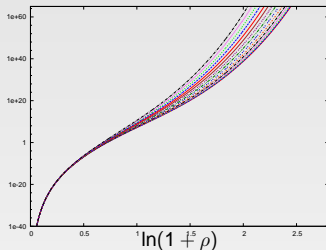
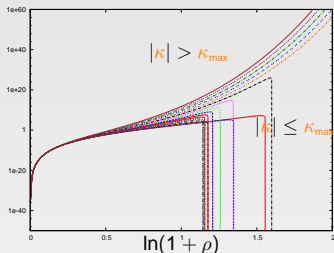
#### Analyse de stabilité

Problème de Schrödinger  
Analyse qualitative  
Résultats quantitatifs  
Modes chargés

#### Conclusion

## Recette

Soient  $\Psi_s(\rho)$  ( $s = 1, \dots, 32$ ) les 32 solutions du problème de Schrödinger, linéairement indépendantes, et régulières sur l'axe de symétrie. Chacune est un vecteur à 32 composantes,  $\Psi_s(\rho) \equiv \Psi_s^l(\rho)$ ,  $l = 1, \dots, 32$ . Soit  $\Delta(\rho)$  le déterminant de la matrice  $\Psi_s^l(\rho)$ . Si il s'annule quelque part, alors le spectre a une partie négative.



$n = \nu = 1$ ,  $\sin^2 \theta_w = 0.23$   $\beta = 2$  /  $m = 0$  (left)  $m = 2$  (right).

## Vortex Électrofaibles

J. Garaud

### Introduction

Abrikosov-Nielsen-Olesen  
Vortex supraconducteurs

### Vortex Supraconducteurs Électrofaibles

Théorie de  
Weinberg-Salam  
Nouvelles solutions  
Propriétés physiques

### Analyse de stabilité

Problème de Schrödinger  
Analyse qualitative  
Résultats quantitatifs  
Modes chargés

### Conclusion

# Construction Numérique

## Vortex Électrofaibles

J. Garaud

### Introduction

Abriksov-Nielsen-Olesen

Vortex supraconducteurs

### Vortex

Supraconducteurs

Électrofaibles

Théorie de

Weinberg-Salam

Nouvelles solutions

Propriétés physiques

### Analyse de stabilité

Problème de Schrödinger

Analyse qualitative

Résultats quantitatifs

Modes chargés

### Conclusion

- Un pb avec conditions aux bords s'écrit

$$y'(x) = f(x, y) \quad \text{avec CB} \quad r(y(a), y(b)) = 0$$

sur un domaine  $[a, b]$  qui est divisé en  $m - 1$  sous-intervalles.

- Il faut donc déterminer le vecteur des paramètres indépendants  $\mathbf{s}_k = y(x_k)$  ( $k = 1, \dots, m$ ) tel que la fonction

$$\mathbf{y} := y(x; \mathbf{x}_k, \mathbf{s}_k), \quad x \in [x_k, x_{k+1}) \quad k = 1, \dots, m - 1$$

soit continue partout ET  $r(y(a), y(b)) = 0$  soit satisfaite

# Construction Numérique – Multishooting

## Compléments (2/4)

### Vortex Électrofaibles

J. Garaud

#### Introduction

Abrikosov-Nielsen-Olesen

Vortex supraconducteurs

#### Vortex

#### Supraconducteurs

#### Électrofaibles

Théorie de

Weinberg-Salam

Nouvelles solutions

Propriétés physiques

#### Analyse de stabilité

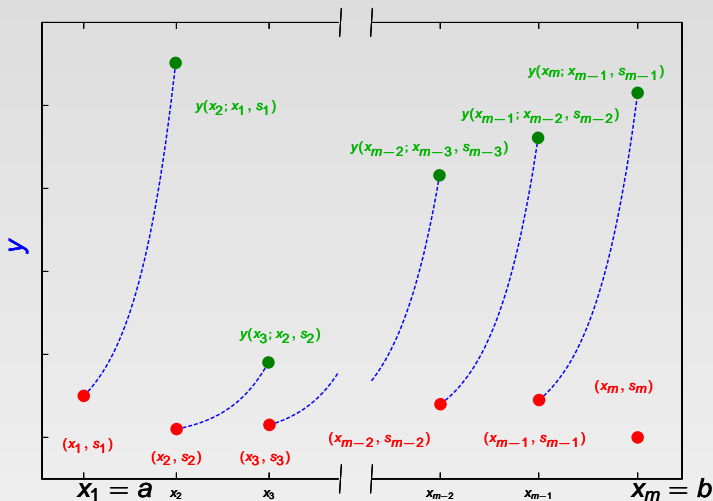
Problème de Schrödinger

Analyse qualitative

Résultats quantitatifs

Modes chargés

#### Conclusion



Au final la fonction doit être continue.

### Vortex Électrofaibles

J. Garaud

#### Introduction

Abrikosov-Nielsen-Olesen

Vortex supraconducteurs

#### Vortex

#### Supraconducteurs

#### Électrofaibles

Théorie de

Weinberg-Salam

Nouvelles solutions

Propriétés physiques

#### Analyse de stabilité

Problème de Schrödinger

Analyse qualitative

Résultats quantitatifs

Modes chargés

#### Conclusion

- Il faut alors résoudre le système linéaire  $\mathbf{F}(\mathbf{s}) = 0$

$$\mathbf{F}(\mathbf{s}) := \begin{bmatrix} F_1(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2) := y(x_2; x_1, \mathbf{s}_1) - \mathbf{s}_2 \\ F_2(\mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3) := y(x_3; x_2, \mathbf{s}_2) - \mathbf{s}_3 \\ \vdots \\ F_{m-1}(\mathbf{s}_{m-1}, \mathbf{s}_m) := y(x_m; x_{m-1}, \mathbf{s}_{m-1}) - \mathbf{s}_m \\ r(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_m) \end{bmatrix}$$

dont la dimension est  $m \times \dim(y)$  en ajustant les  $m$  vecteurs  $\mathbf{s}_k$ .

- implémenté en tant qu'une classe abstraite C++ `ode_bv_multishoot` (à présent incluse dans la librairie de calcul scientifique *O2scl*<sup>1</sup>.)
- intégration avec adaptateur de pas
- résolution du système linéaire multidimensionnel  $\mathbf{F}(\mathbf{s}) = 0$  avec la méthode Hybride de Powell

<sup>1</sup>[http://o2scl.sourceforge.net/o2scl/html/classode\\_\\_bv\\_\\_multishoot.html](http://o2scl.sourceforge.net/o2scl/html/classode__bv__multishoot.html).

### Vortex Électrofaibles

J. Garaud

#### Introduction

Abriksov-Nielsen-Olesen

Vortex supraconducteurs

#### Vortex

#### Supraconducteurs

#### Électrofaibles

Théorie de

Weinberg-Salam

Nouvelles solutions

Propriétés physiques

#### Analyse de stabilité

Problème de Schrödinger

Analyse qualitative

Résultats quantitatifs

Modes chargés

#### Conclusion

## Avantages

- peu sensible au choix initial
- permet d'éviter les singularités numériques
- facilement parallélisable

## Inconvénients

si  $m$  est grand, demande plus d'itération pour résoudre le système linéaire  $\Rightarrow$  plus lent.

## Desingularisation

plutôt que d'intégrer

$$a_5 \rho^n \leftarrow f_1 \quad \text{et} \quad a_5 \rho^{n-1} \leftarrow f_1' \quad \text{on utilise}$$
$$a_5 \leftarrow Y_1 = \frac{f_1}{\rho^n} \quad \text{et} \quad na_5 \leftarrow Y_2 = \frac{f_1'}{\rho^{n-1}},$$

intégration à partir de  $\rho = 0$  car  $Y_1'(0) = Y_2'(0) = 0$ .



## Vortex Électrofaibles

J. Garaud

### Introduction

Abrikosov-Nielsen-Olesen

Vortex supraconducteurs

### Vortex

#### Supraconducteurs

#### Électrofaibles

Théorie de

Weinberg-Salam

Nouvelles solutions

Propriétés physiques

### Analyse de stabilité

Problème de Schrödinger

Analyse qualitative

Résultats quantitatifs

Modes chargés

### Conclusion

# Transition de Phase

# Transition de Phase

## Vortex Électrofaibles

J. Garaud

### Introduction

Abrikosov-Nielsen-Olesen  
Vortex supraconducteurs

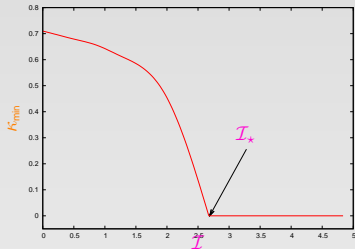
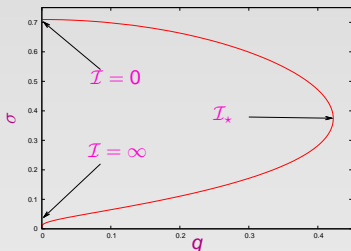
### Vortex Supraconducteurs Électrofaibles

Théorie de  
Weinberg-Salam  
Nouvelles solutions  
Propriétés physiques

### Analyse de stabilité

Problème de Schrödinger  
Analyse qualitative  
Résultats quantitatifs  
Modes chargés

### Conclusion



## indications d'une transition de phase

- Structure à deux branches  $\sigma(q)$
- modification de la forme de la relation de dispersion

# Transition de Phase

## Relation de dispersion

### Vortex Électrofaibles

J. Garaud

#### Introduction

Abrikosov-Nielsen-Olesen

Vortex supraconducteurs

#### Vortex

#### Supraconducteurs

#### Électrofaibles

Théorie de  
Weinberg-Salam

Nouvelles solutions

Propriétés physiques

#### Analyse de stabilité

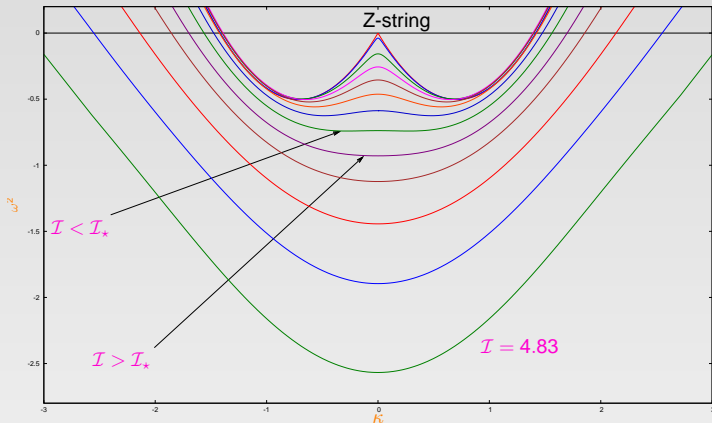
Problème de Schrödinger

Analyse qualitative

Résultats quantitatifs

Modes chargés

#### Conclusion



- $I < I_*$  le mode le plus négatif est  $\omega^2(\kappa = \kappa_{\min})$
- $I > I_*$  le mode le plus négatif est  $\omega^2(\kappa = 0)$

## Vortex Électrofaibles

J. Garaud

### Introduction

Abrikosov-Nielsen-Olesen  
Vortex supraconducteurs

### Vortex Supraconducteurs Électrofaibles

Théorie de  
Weinberg-Salam  
Nouvelles solutions  
Propriétés physiques

### Analyse de stabilité

Problème de Schrödinger  
Analyse qualitative  
Résultats quantitatifs  
Modes chargés

### Conclusion

# Solutions Chirales

# Solutions Chirales

Au niveau linéaire (1/2)

## Vortex Électrofaibles

J. Garaud

### Introduction

Abriksov-Nielsen-Olesen

Vortex supraconducteurs

### Vortex

### Supraconducteurs

### Électrofaibles

Théorie de  
Weinberg-Salam

Nouvelles solutions

Propriétés physiques

### Analyse de stabilité

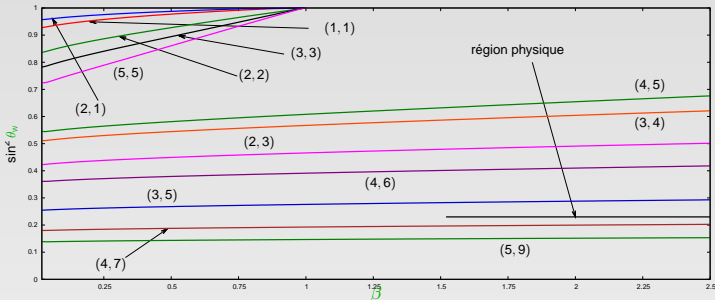
Problème de Schrödinger

Analyse qualitative

Résultats quantitatifs

Modes chargés

### Conclusion



- Les courbes chirales  $(n, 1 \leq \nu < 2n)$  existent pour certaines valeurs particulières des constantes de couplage

# Solutions Chirales

Au niveau non-linéaire (2/2)

## Vortex Électrofaibles

J. Garaud

### Introduction

Abrikosov-Nielsen-Olesen

Vortex supraconducteurs

### Vortex

### Supraconducteurs

### Électrofaibles

Théorie de  
Weinberg-Salam

Nouvelles solutions

Propriétés physiques

### Analyse de stabilité

Problème de Schrödinger

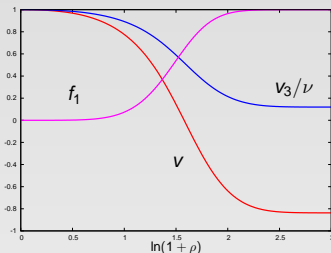
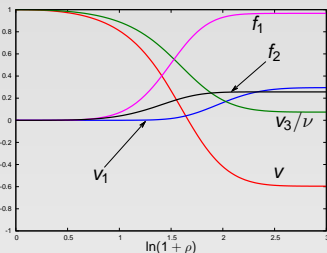
Analyse qualitative

Résultats quantitatifs

Modes chargés

### Conclusion

Solution chirale et Z-string pour  $n = 4$ ,  $\nu = 7$  et  $\sin^2 \theta_W = 0.23$



- Les solutions chirales existent et sont différentes de Z-string
- elles sont *exceptionnelles* et plus énergétiques que Z-string
- ne sont pas *Z-string habillée de W*

## Vortex Électrofaibles

J. Garaud

### Introduction

Abrikosov-Nielsen-Olesen  
Vortex supraconducteurs

### Vortex Supraconducteurs Électrofaibles

Théorie de  
Weinberg-Salam  
Nouvelles solutions  
Propriétés physiques

### Analyse de stabilité

Problème de Schrödinger  
Analyse qualitative  
Résultats quantitatifs  
Modes chargés

### Conclusion

# Modes chargés

# Modes chargés

## Vortex Électrofaibles

J. Garaud

### Introduction

Abrikosov-Nielsen-Olesen

Vortex supraconducteurs

### Vortex

Supraconducteurs

Électrofaibles

Théorie de

Weinberg-Salam

Nouvelles solutions

Propriétés physiques

### Analyse de stabilité

Problème de Schrödinger

Analyse qualitative

Résultats quantitatifs

Modes chargés

### Conclusion

- En réalité le problème chargé peut être obtenu en complexifiant les paramètres d'un des problèmes de Schrödinger non-chargé

**modes périodiques en  $z$  pour  $b \neq 0$**

Il faut que  $\kappa_b = \omega \sinh b + \kappa \cosh b$  soit réel

**Paramètres complexifiés**

$$\omega = \gamma - i\Omega \quad \text{et} \quad \kappa = K + i\omega \tanh(b)$$

**Problème de Schrödinger complexifié**

- complexification  $\Psi \rightarrow \Psi_{\text{Re}} + i\Psi_{\text{Im}}$
- $\Rightarrow$  problème de **Schrödinger à 32-canaux**
- C'est en réalité équivalent à coupler les 2 problèmes de Schrödinger découplés