

Analyse modale pour les coques minces en révolution

Marie Beaudouin

sous la direction de Monique Dauge et Erwan Faou

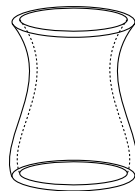
Soutenance de thèse

29/11/2010



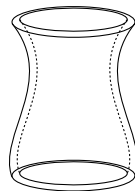
Position du problème

- coque mince = surface épaissie



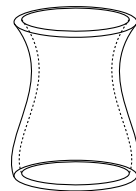
Position du problème

- coque mince = surface épaissie
- matériau élastique homogène isotrope



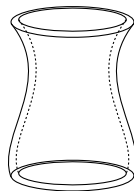
Position du problème

- coque mince = surface épaissie
- matériau élastique homogène isotrope
- coque axisymétrique encastrée



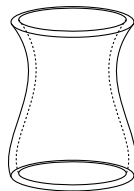
Position du problème

- coque mince = surface épaissie
- matériau élastique homogène isotrope
- coque axisymétrique encastrée
- problème d'élasticité linéaire :
déplacement de la coque soumise à des forces volumiques



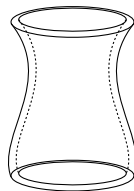
Position du problème

- coque mince = surface épaissie
- matériau élastique homogène isotrope
- coque axisymétrique encastrée
- problème d'élasticité linéaire :
déplacement de la coque soumise à des forces volumiques
- comparaison des éléments propres après transformation de Fourier angulaire :



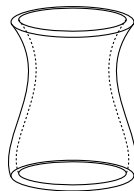
Position du problème

- coque mince = surface épaissie
- matériau élastique homogène isotrope
- coque axisymétrique encastrée
- problème d'élasticité linéaire :
déplacement de la coque soumise à des forces volumiques
- comparaison des éléments propres après transformation de Fourier angulaire :
 - d'un modèle 2D lorsque l'épaisseur tend vers zéro



Position du problème

- coque mince = surface épaissie
- matériau élastique homogène isotrope
- coque axisymétrique encastrée
- problème d'élasticité linéaire :
déplacement de la coque soumise à des forces volumiques
- comparaison des éléments propres après transformation de Fourier angulaire :
 - d'un modèle 2D lorsque l'épaisseur tend vers zéro
 - d'un modèle limite 1D



Références

- Références :

Références

- Références :



Sanchez-Hubert J., Sanchez-Palencia E.

Coques élastiques minces. Propriétés asymptotiques

Recherches en mathématiques appliquées, Masson, 1997

Références

- Références :



Sanchez-Hubert J., Sanchez-Palencia E.

Coques élastiques minces. Propriétés asymptotiques

Recherches en mathématiques appliquées, Masson, 1997



Artioli E., Beirão Da Veiga L., Hakula H., Lovadina C.

Free vibrations for some Koiter shells of revolution.

Appl. Math. Lett., 2008 (21), 12, 1245–1248

Références

- Références :



Sanchez-Hubert J., Sanchez-Palencia E.

Coques élastiques minces. Propriétés asymptotiques

Recherches en mathématiques appliquées, Masson, 1997



Artioli E., Beirão Da Veiga L., Hakula H., Lovadina C.

Free vibrations for some Koiter shells of revolution.

Appl. Math. Lett., 2008 (21), 12, 1245–1248



Dauge M., Faou E.

Koiter estimate revisited

Math. Models Methods Appl. Sci., 20, No 1, 2010, 1-42

Plan

- 1 **Système de Lamé**
- 2 **La membrane**
- 3 **Le cylindre : membrane**
- 4 **Le cylindre : Koiter**
- 5 **Les couches limites**
- 6 **Numérique : Lamé**

Plan

- 1 **Système de Lamé**
- 2 La membrane
- 3 Le cylindre : membrane
- 4 Le cylindre : Koiter
- 5 Les couches limites
- 6 Numérique : Lamé

Coque axisymétrique

On considère une coque axisymétrique de demi-épaisseur ε :

$$X : (\varphi, z) \in [0, 2\pi] \times I \rightarrow (f(z) \cos \varphi, f(z) \sin \varphi, z)$$

Coordonnées normales :

$$X_\varphi = \begin{pmatrix} -f(z) \cos \varphi \\ f(z) \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad X_z = \begin{pmatrix} f'(z) \cos \varphi \\ f'(z) \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad N = \frac{X_\varphi \wedge X_z}{\|X_\varphi \wedge X_z\|}$$

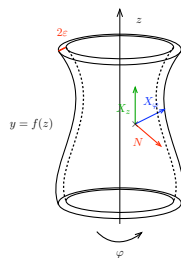
Coque axisymétrique

Ω^ε est défini par :

$$(\varphi, z, x_3) \in I \times [0, 2\pi] \times [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow X(\varphi, z) + x_3 N(z, \varphi)$$

On décompose le déplacement $\mathbf{u} = (u^z, u^\varphi, u^3)$ selon les vecteurs de base :

X_z, X_φ, N



Coque axisymétrique

Système de Lamé

Lamé 3D

Trouver $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mathbf{u} \in V = \{\mathbf{u} \in H^1(\Omega^\varepsilon)^3, \mathbf{u}|_{z=\pm 1} = 0\}$ tels que :

$$\forall \mathbf{v} \in V, \int_{\Omega^\varepsilon} A^{ijkl} e_{ij}(\mathbf{u}) e_{kl}(\mathbf{v}) dV = \lambda \int_{\Omega^\varepsilon} u_i v^i dV$$

avec la [matrice de rigidité](#)

$$A^{ijkl} = \frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)} (2a^{jj} a^{kl} + (1-2\nu)(a^{ik} a^{jl} + a^{il} a^{kj}))$$

où (a^{jj}) est l'inverse du [tenseur métrique](#)

E est le module de Young et ν le coefficient de Poisson

Système de Lamé

Lamé 3D

et le tenseur de déformation :

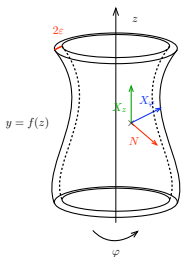
$$e_{ij}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla_i u_j + \nabla_j u_i)$$

La *dérivée covariante* est définie par : $\nabla_i u_j = \partial_i u_j - \Gamma_{ij}^k u_k$

avec les *symboles de Christoffel* :

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} a^{kl} (\partial_i a_{jl} + \partial_j a_{il} - \partial_l a_{ij})$$

Transformation de Fourier angulaire



Coque axisymétrique



On effectue une transformée de Fourier en la fréquence angulaire k : $\partial_\varphi = ik$.

On travaille alors dans le domaine méridien.

► Diminution de la dimension du problème

Opérateur de Koiter

Développement asymptotique en ε

► opérateur de Koiter 1D :

$$a_{K(\varepsilon)}[k] := a_m[k](\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \varepsilon^2 a_b[k](\mathbf{u}, \mathbf{v})$$

où :

- $a_m[k]$ est l'opérateur de membrane sur $H_0^1 \times H_0^1 \times L^2(I)$

Opérateur de Koiter

Développement asymptotique en ε

► opérateur de Koiter 1D :

$$a_{K(\varepsilon)}[k] := a_m[k](\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \varepsilon^2 a_b[k](\mathbf{u}, \mathbf{v})$$

où :

- $a_m[k]$ est l'opérateur de membrane sur $H_0^1 \times H_0^1 \times L^2(I)$
- $a_b[k]$ est l'opérateur de flexion sur $H_0^1 \times H_0^1 \times H_0^2(I)$

Ecriture matricielle

$$\forall u, v \in H_0^1 \times H_0^1 \times L^2(I),$$

$$a_m[k](u, v) = \int_I \mathbf{M}[k] u v \, dl$$

$$\forall u, v \in H_0^1 \times H_0^1 \times H_0^2(I)$$

$$a_b[k](u, v) = \int_I \mathbf{B}[k] u v \, dl$$

$$a_{\mathbf{K}(\varepsilon)}[k](u, v) = \int_I (\mathbf{M}[k] + \varepsilon^2 \mathbf{B}[k]) u v \, dl = \int_I \mathbf{K}(\varepsilon)[k] u v \, dl$$

Plan

1 Système de Lamé

2 La membrane

3 Le cylindre : membrane

4 Le cylindre : Koiter

5 Les couches limites

6 Numérique : Lamé

La membrane

Les ordres des opérateurs de la membrane et la flexion sont :

$$\mathbf{M}[k] : \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B}[k] : \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Spectre essentiel :

$$\sigma_{\text{ess}}(\mathbf{M}[k]) = \left\{ \frac{E}{(1 + f'(z)^2)f(z)^2}, z \in I \right\}$$

$$\sigma_{\text{ess}}(\mathbf{M}) = \begin{cases} [0, b] & \text{si } f''(z) \geq 0 \\ [a, b] & \text{si } f''(z) < 0 \end{cases} \quad a > 0$$



Développement pour k grand

On décompose $\mathbf{M}[k]$ selon les puissances de k :

$$\mathbf{M}[k] = k^2 \mathbf{M}_0 + k \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2$$

Démarche constructive : on cherche un développement en série formelle

$$\mathbf{u}[k] = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{k^n} \mathbf{u}_n \quad \text{et} \quad \Lambda[k] = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{k^n} \Lambda_n$$

Théorème de réduction formelle

Le système 3×3

$$\mathbf{M}[k]\mathbf{u}[k] = \Lambda[k]\mathbf{A}\mathbf{u}[k]$$

où \mathbf{A} est une matrice de masse issue de la géométrie peut se réduire à un problème scalaire grâce à des opérateurs de reconstruction :

$$\mathbf{V}[k] = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{k^n} \mathbf{V}_n, \quad \mathbf{V}_0 = (0, 0, \text{Id})^T.$$

Théorème de réduction formelle

Théorème

Il existe des opérateurs $\mathbf{V}[k] : C^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R})^3$

et $\mathbf{L}[k] : C^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R})$ tels que :

$$\mathbf{M}[k]\mathbf{u}[k] = \mathbf{\Lambda}[k]\mathbf{A}\mathbf{u}[k]$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{u}[k] = \mathbf{V}[k]\zeta[k] \\ \mathbf{L}[k]\zeta[k] = \mathbf{\Lambda}[k]\zeta[k] \end{cases}$$

et l'opérateur $\mathbf{L}[k]$ s'écrit sous la forme :

$$\mathbf{L}[k] = \mathbf{L}_0(z) + \frac{1}{k}\mathbf{L}_1(z, \partial_z) + \frac{1}{k^2}\mathbf{L}_2(z, \partial_z) + \frac{1}{k^3}\mathbf{L}_3(z, \partial_z) + \frac{1}{k^4}\mathbf{L}_4(z, \partial_z) + \dots$$



Expression des opérateurs

Théorème

$$L_0(z) = \frac{E f''(z)^2}{(1+f'(z)^2)^3}$$

$$L_1(z, \partial_z) = 0$$

$$L_2(z, \partial_z) = L_{2,2}(z)\partial_z^2 + L_{2,1}(z)\partial_z + L_{2,0}(z)$$

$$L_3(z, \partial_z) = L_{3,0}(z)$$

$$L_4(z, \partial_z) = L_{4,4}(z)\partial_z^4 + \sum_{j=0}^3 L_{4,j}(z)\partial_z^j$$

Plan

- 1 Système de Lamé
- 2 La membrane
- 3 Le cylindre : membrane**
- 4 Le cylindre : Koiter
- 5 Les couches limites
- 6 Numérique : Lamé

La membrane

La matrice de la membrane périodisée pour le cylindre de rayon R s'écrit :

$$\mathbf{M}[k] = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{pmatrix} -\partial_z^2 + \frac{1-\nu}{2R^2} k^2 & -\frac{1+\nu}{2R^2} ik\partial_z & -\frac{\nu}{R} \partial_z \\ -\frac{1+\nu}{2R^2} ik\partial_z & \frac{1}{R^4} k^2 - \frac{1-\nu}{2R^2} \partial_z^2 & -\frac{ik}{R^3} \\ \frac{\nu}{R} \partial_z & \frac{ik}{R^3} & \frac{1}{R^2} \end{pmatrix}$$

$$f'(z) = f''(z) = 0 \Rightarrow \mathbf{L}[k] = \frac{1}{k^4} ER^2 \partial_z^4 + \dots$$

La membrane

Théorème

Pour tout couple (λ, w) solution du problème

$$ER^2 \partial_z^4 w = \lambda w \quad w(\pm 1) = \partial_z w(\pm 1) = 0, \quad (3.1)$$

il existe des séries formelles

$$\Lambda[k] = \frac{\lambda}{k^4} + \sum_{n \geq 6} \frac{1}{k^n} \Lambda_n \quad \text{et} \quad \zeta[k] = w + \sum_{n \geq 2} \frac{1}{k^n} \zeta_n \quad (3.2)$$

telles que

$$\begin{cases} L[k] \zeta[k] - \Lambda[k] \zeta[k] = 0 \\ V_\alpha[k] \zeta[k] = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_0, \quad \alpha = z, \varphi \end{cases} \quad (3.3)$$

Développement pour k grand

Les premières composantes du développement de \mathbf{u} sont :

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u^z \\ u^\varphi \\ u^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \zeta_0 \end{pmatrix} + \frac{1}{k} \begin{pmatrix} 0 \\ iR\zeta_0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{k^2} \begin{pmatrix} -R\partial_z \zeta_0 \\ 0 \\ \zeta_2 \end{pmatrix} + \dots$$



Quasimode

Théorème

Soit $\Lambda[k]$ et $\zeta[k]$ comme dans le théorème précédent.

Alors pour tout $N \geq 0$ avec

$$\Lambda^{[M]}[k] = \frac{\lambda}{k^4} + \sum_{n \geq 6}^N \frac{1}{k^n} \Lambda_n, \quad \text{et} \quad \mathbf{u}^{[M]}[k] = \sum_{n=0}^N \frac{1}{k^n} \mathbf{u}_n$$

$(\Lambda^{[M]}(k), \mathbf{u}^{[M]}(k))$ est un *quasimode* de l'opérateur de membrane $\mathbf{M}[k]$:

Il existe une constante C telle que pour tout k :

$$\|(\mathbf{M}[k] - \lambda^{[M]}[k]\mathbf{A})\mathbf{u}^{[M]}[k]\|_{(L^2)^3} \leq Ck^{-N+1} \|\mathbf{u}^{[M]}[k]\|_{(L^2)^3}$$

Quasimode

On note $(\mu_j)_{j \geq 1}$ les valeurs propres de l'opérateur \mathbb{L}_4 muni des conditions de Dirichlet sur I et on pose :

$$\Lambda_j^{[N]}[k] = \frac{1}{k^4} \mu_j + \frac{1}{k^5} \Lambda_{5,j} + \dots + \frac{1}{k^N} \Lambda_{N,j}.$$

Théorème

Il existe $C_{j,N} \in \mathbb{R}^+$ telle que pour tout k :

$$d(\Lambda_j^{[N]}[k], \sigma(\mathbf{M}[k])) \leq C_{j,N} k^{-N+1}$$

Il y a alors du vrai spectre autour du quasimode que l'on a exhibé.

Estimation de la plus petite valeur propre

On a l'estimation d'énergie suivante pour la membrane :

Proposition

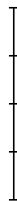
$$a_m[k](\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq \frac{C}{k^4} \|\mathbf{u}\|_{H^1 \times H^1 \times L^2(I)}^2$$

La membrane : numérique

Le domaine est le segment $[-1, 1]$ que l'on découpe en segments réguliers.

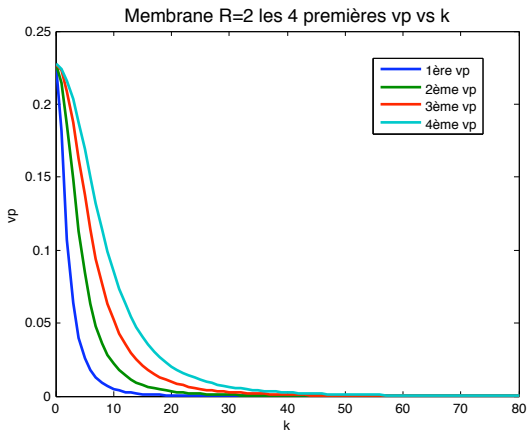
On utilise MELINA pour calculer les valeurs propres :

On implémente la formulation variationnelle $a_m[k](u, v)$ et les conditions aux bords : $u^z = u^\varphi = 0$.



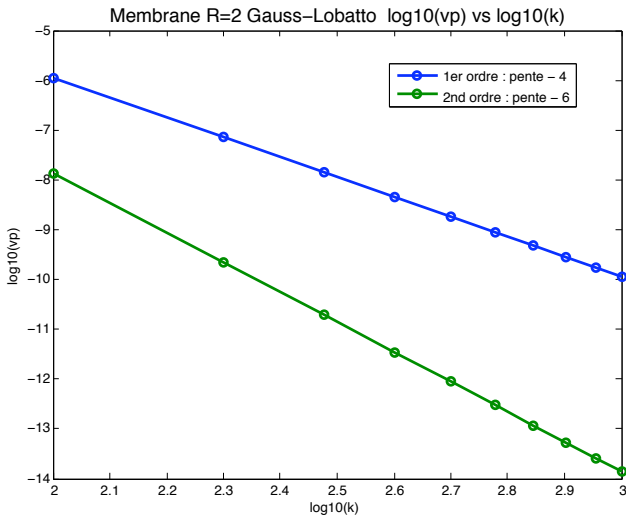
La membrane : numérique

On regarde le comportement des 4 plus petites valeurs propres pour k de 0 à 100



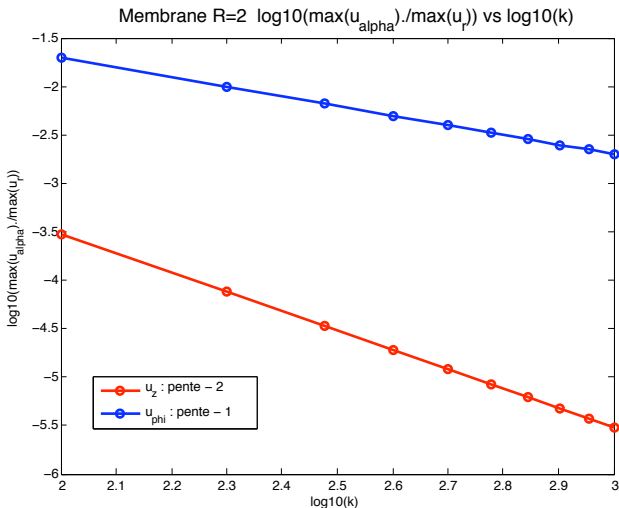
La membrane

k grand



La membrane

k grand



Plan

- 1 Système de Lamé
- 2 La membrane
- 3 Le cylindre : membrane
- 4 Le cylindre : Koiter**
- 5 Les couches limites
- 6 Numérique : Lamé

Développement pour k grand

L'opérateur de flexion

La matrice de l'opérateur de flexion pour le cylindre s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4\left(\frac{k^2}{3R^6} - \frac{1-\nu}{6R^4}\partial_z^2\right) & \frac{2ik}{3R^3}\partial_z^2 - \frac{2ik^3}{3R^5} - \frac{2ik}{3R^5} \\ 0 & -\left(\frac{2ik}{3R^3}\partial_z^2 - \frac{2ik^3}{3R^5} - \frac{2ik}{3R^5}\right) & \frac{1}{3}\partial_z^4 - \frac{2k^2}{3R^2}\partial_z^2 + \frac{k^4}{3R^4} \\ & & + \frac{2k^2}{3R^4} + \frac{1}{3R^4} - \frac{2\nu}{3R^2}\partial_z^2 \end{pmatrix}$$

Développement pour k grand

L'opérateur de flexion

Lorsque k est grand, le terme dominant est de l'opérateur de flexion est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4\left(\frac{k^2}{3R^6} - \frac{1-\nu}{6R^4} \partial_z^2\right) & \frac{2ik}{3R^3} \partial_z^2 - \frac{2ik^3}{3R^5} - \frac{2ik}{3R^5} \\ 0 & -\left(\frac{2ik}{3R^3} \partial_z^2 - \frac{2ik^3}{3R^5} - \frac{2ik}{3R^5}\right) & \frac{1}{3} \partial_z^4 - \frac{2k^2}{3R^2} \partial_z^2 + \frac{k^4}{3R^4} \\ & & + \frac{2k^2}{3R^4} + \frac{1}{3R^4} - \frac{2\nu}{3R^2} \partial_z^2 \end{pmatrix}$$

et la plus petite valeur propre de la membrane se comporte en $\frac{1}{k^4}$.

Développement pour k grand

L'opérateur de flexion

On peut s'attendre à ce que la plus petite valeur propre de l'opérateur de Koiter soit de la forme :

$$\frac{\lambda}{k^4} + c\varepsilon^2 k^4$$

minimum comme fonction de k ?

$$\Rightarrow k = C\varepsilon^{-1/4}$$

► développement asymptotique pour ε grand de :

$$\mathcal{K}[\varepsilon] := \mathbf{K}(\varepsilon)[C\varepsilon^{-1/4}]$$

Théorème de réduction formelle

Théorème

Il existe des opérateurs $\mathcal{V}[\varepsilon] : C^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R})^3$

et $\mathcal{L}[\varepsilon] : C^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R})$ tels que :

$$\mathcal{K}[\varepsilon]\mathbf{u}[\varepsilon] = \Lambda[\varepsilon]\mathbf{u}[\varepsilon]$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{u}[\varepsilon] = \mathcal{V}[\varepsilon]\zeta[\varepsilon] \\ \mathcal{L}[\varepsilon]\zeta[\varepsilon] = \Lambda[\varepsilon]\zeta[\varepsilon] \end{cases}$$

et l'opérateur $\mathcal{L}[\varepsilon]$ s'écrit sous la forme :

$$\mathcal{L}[\varepsilon] = \varepsilon^{1/2}\mathcal{L}_2(z, \partial_z) + \varepsilon^{3/4}\mathcal{L}_3(z, \partial_z) + \varepsilon\mathcal{L}_4(z, \partial_z) + \dots$$

Théorème de réduction formelle

Théorème

$$\mathcal{L}_2(z, \partial_z) = 0$$

$$\mathcal{L}_3(z, \partial_z) = 0$$

$$\mathcal{L}_4(z, \partial_z) = \frac{E}{1-\nu^2} \frac{C^4}{3R^4} + \frac{ER^2}{C^4} \partial_z^4$$

Résolution du problème scalaire

Théorème

Pour tout couple (λ, w) solution du problème

$$\left(\frac{E}{1-\nu^2} \frac{C^4}{3R^4} + \frac{ER^2}{C^4} \partial_z^4 \right) w = \lambda w, \quad w(\pm 1) = \partial_z w(\pm 1) = 0,$$

il existe des séries formelles

$$\Lambda[\varepsilon] = \lambda \varepsilon + \sum_{n \geq 6} \varepsilon^{n/4} \Lambda_n \quad \text{et} \quad \zeta[\varepsilon] = w + \sum_{n \geq 2} \varepsilon^{n/4} \zeta_n \in C^\infty([-1, 1])$$

telles que

$$\begin{cases} \mathcal{L}[\varepsilon] \zeta[\varepsilon] - \Lambda[\varepsilon] \zeta[\varepsilon] = 0 \\ \mathcal{V}_\alpha[\varepsilon] \zeta[\varepsilon] = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_0, \quad \alpha = z, \varphi \end{cases} \quad (4.1)$$

Résolution du problème scalaire

Les premières composantes du développement de \mathbf{u} sont :

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \zeta_0 \end{pmatrix} + \varepsilon^{1/4} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{iR}{C} \zeta_0 \\ 0 \end{pmatrix} + \varepsilon^{1/2} \begin{pmatrix} -\frac{R}{C^2} \partial_z \zeta_0 \\ 0 \\ \zeta_2 \end{pmatrix} \\ + \varepsilon^{3/4} \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{i\nu R^3}{C^3} \partial_z^2 \zeta_0 + \frac{iR}{C} \zeta_2 \\ \zeta_3 \end{pmatrix} + \dots$$



Estimation de la plus petite valeur propre

On a l'estimation d'énergie suivante pour l'opérateur de Koiter :

Proposition

$$a_{\mathcal{K}[\varepsilon]}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq c \varepsilon \|\mathbf{u}\|_{H^1 \times H^1 \times H^2(I)}^2$$

Plan

- 1 Système de Lamé
- 2 La membrane
- 3 Le cylindre : membrane
- 4 Le cylindre : Koiter
- 5 Les couches limites**
- 6 Numérique : Lamé

Les couches limites

Les conditions au bord ne sont pas satisfaites dans l'algorithme précédent puisque l'espace variationnel est $H_0^1 \times H_0^1 \times H_0^2$.

$$-\frac{i\nu R^3}{C^3} \partial_z^2 \zeta_0|_{\pm 1} + \frac{iR}{C} \zeta_2|_{\pm 1} = 0, \quad \text{et} \quad \zeta_2|_{\pm 1} = 0$$



Zoom sur chacun des bords :

$$z^\pm = 1 - \pm z,$$

Les couches limites

On regarde les plus grands ordres de dérivation en z de la flexion et de la membrane dans la composante (3,3).



Les couches limites

On regarde les plus grands ordres de dérivation en z de la flexion et de la membrane dans la composante (3,3).

On veut harmoniser :

$$1 \quad \text{et} \quad \varepsilon^2 \partial_z^4$$

Changement d'échelle :

$$Z^\pm = \varepsilon^{-1/2} z^\pm$$

$$\mathbf{u}(z^+) = \mathbf{U}^+(Z^+), \quad \mathbf{u}(z^-) = \mathbf{U}^-(Z^-).$$

Les couches limites

On cherche à construire $\mathbf{x}[\varepsilon] \in H_0^1 \times H_0^1 \times H_0^2([-1, 1])$ de la forme :

$$\mathbf{x}[\varepsilon](z) = \mathbf{u}[\varepsilon](z) + \chi(z^+) \mathbf{u}^+[\varepsilon](Z^+) + \chi(z^-) \mathbf{u}^-[\varepsilon](Z^-)$$

avec

$$\mathbf{u}^\pm[\varepsilon] = \sum_{n \geq 0} \mathbf{u}_n^\pm[\varepsilon] \varepsilon^{-n/4}, \quad \mathbf{u}_n^\pm \text{ exponentiellement décroissant}$$

et

$$\mathcal{K}[\varepsilon] \mathbf{x}[\varepsilon] = \Lambda[\varepsilon] \mathbf{A} \mathbf{x}[\varepsilon]$$

Les couches limites

$$\mathcal{K}^\pm[\varepsilon](Z^\pm, \partial_{Z^\pm}) = \mathcal{K}[\varepsilon](z, \partial_z).$$

$$\mathbf{u}^\pm = \mathbf{D}_\varepsilon \mathbf{U}^\pm \quad \text{avec} \quad \mathbf{D}_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon^{-1/4} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-1/4} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon^{1/4} \end{pmatrix}$$

et on résout le système :

$$\mathcal{R}^\pm[\varepsilon] \mathbf{u}^\pm = \Lambda[\varepsilon] \mathbf{D}_\varepsilon^{-2} \mathbf{A} \mathbf{u}^\pm$$

avec

$$\mathcal{R}^\pm[\varepsilon] = \mathbf{D}_\varepsilon^{-1} \mathcal{K}^\pm[\varepsilon] \mathbf{D}_\varepsilon^{-1}.$$

Les couches limites

Proposition

Pour $c_3, c_n \in \mathbb{R}$ et $\mathfrak{G}^+ = (\mathfrak{G}_{z^+}^+, \mathfrak{G}_\varphi^+, \mathfrak{G}_3^+) \in C^\infty(\mathbb{R}^+)^3$ exponentiellement décroissant, il existe une unique fonction $\mathbf{u}^+ \in C^\infty([0, +\infty[)^3$ exponentiellement décroissante solution du système :

$$\begin{cases} \mathfrak{K}_0^+ \mathbf{u}^+ = \mathfrak{G}^+ \text{ sur } [0, +\infty[\\ \mathbf{u}_3^+(0) = c_3 \quad \partial_{z^+} \mathbf{u}_3^+(0) = c_n \end{cases}$$

Les couches limites

Trouver $(\zeta[\varepsilon], \mathbf{u}^\pm[\varepsilon])$ tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}[\varepsilon]\zeta[\varepsilon] - \Lambda[\varepsilon]\zeta[\varepsilon] = 0 \quad \text{pour } z \in [-1, 1] \\ \mathfrak{K}^\pm[\varepsilon]\mathbf{u}^\pm[\varepsilon] - \Lambda[\varepsilon]\mathbf{A}\mathbf{D}_\varepsilon^{-2}\mathbf{u}^\pm[\varepsilon] = 0 \quad \text{pour } Z^\pm \in \mathbb{R}^+ \\ \mathcal{V}[\varepsilon]\zeta[\varepsilon]|_{z=\pm 1} + \mathbf{D}_\varepsilon^{-1}\mathbf{u}^\pm[\varepsilon]|_{Z^\pm=0} = 0 \\ \partial_z \mathcal{V}_3[\varepsilon]\zeta[\varepsilon]|_{z=\pm 1} - \pm \partial_{Z^\pm} \mathbf{D}_\varepsilon^{-1}\mathbf{u}_3^\pm[\varepsilon]|_{Z^\pm=0} = 0 \end{array} \right. \quad (5.1)$$

Les couches limites

Théorème

Pour tout couple (λ, w) solution du problème

$$\left(\frac{E}{1-\nu^2} \frac{C^4}{3R^4} + \frac{ER^2}{C^4} \partial_z^4 \right) w = \lambda w, \quad w(\pm 1) = \partial_z w(\pm 1) = 0,$$

il existe des séries formelles

$$\Lambda[\varepsilon] = \lambda \varepsilon + \sum_{n \geq 6} \varepsilon^{n/4} \Lambda_n \quad \text{et} \quad \zeta[\varepsilon] = w + \sum_{n \geq 2} \varepsilon^{n/4} \zeta_n \in C^\infty([-1, 1])$$

et $u^\pm[\varepsilon] \in C^\infty(\mathbb{R}^+)^3$ exponentiellement décroissante
solutions de (5.1).

Quasimodes

Théorème

Soit $(\Lambda[\varepsilon], \zeta[\varepsilon], \mathbf{u}^\pm[\varepsilon])$ du théorème précédent.

Alors pour tout $N \geq 0$, si l'on pose :

$$\Lambda^{[N]}[\varepsilon] = \sum_{n=0}^N \Lambda_n \varepsilon^{n/4}$$

la paire $(\Lambda^{[N]}[\varepsilon], \bar{\mathbf{x}}^{[N]}[\varepsilon])$ est un quasimode de $\mathcal{K}[\varepsilon]$.

Il existe une constante $\gamma \in \mathbb{R}^+$ indépendante de ε telle que :

$$\|(\mathcal{K}[\varepsilon] - \Lambda^{[N]}[\varepsilon] \mathbf{A}) \mathbf{x}^{[N]}[\varepsilon]\|_{(L^2)^3} \leq \gamma \varepsilon^{(N-1)/4} \|\mathbf{x}^{[N]}[\varepsilon]\|_{(L^2)^3}.$$

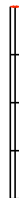
Plan

- 1 Système de Lamé
- 2 La membrane
- 3 Le cylindre : membrane
- 4 Le cylindre : Koiter
- 5 Les couches limites
- 6 Numérique : Lamé**

Expériences numériques

Le système de Lamé

Le domaine est le rectangle $2\varepsilon \times l$ que l'on découpe en rectangles. On utilise MELINA pour calculer les valeurs propres. On implémente la formulation variationnelle de Lamé et les conditions aux bords : $u^z = u^\varphi = u^3 = 0$.

 2ε


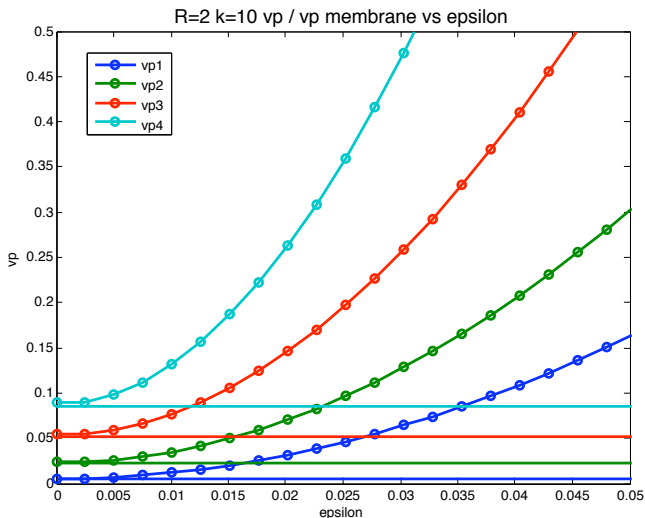
Expériences numériques

Le système de Lamé

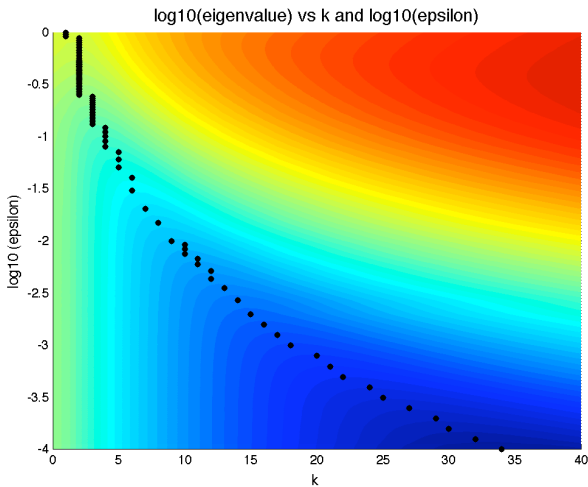
On observe la convergence des valeurs propres du système de Lamé vers celles de la membrane lorsque la demi-épaisseur ε de la coque tend vers zéro et ce pour tous les k .

Expériences numériques

Le système de Lamé



Lamé



Expériences numériques

Le système de Lamé

Pour ε fixé, on regarde la fréquence angulaire k atteignant le minimum de la valeur propre λ :

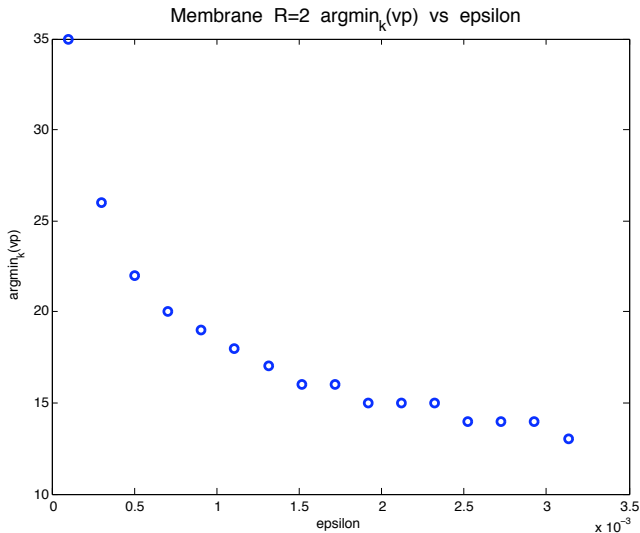
Expériences numériques

Le système de Lamé

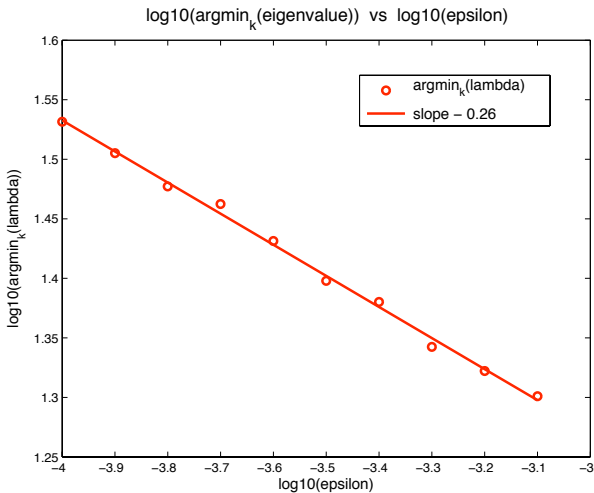
Pour ε fixé, on regarde la fréquence angulaire k atteignant le minimum de la valeur propre λ :

on trouve que ces k se comportent en $\varepsilon^{-1/4}$.

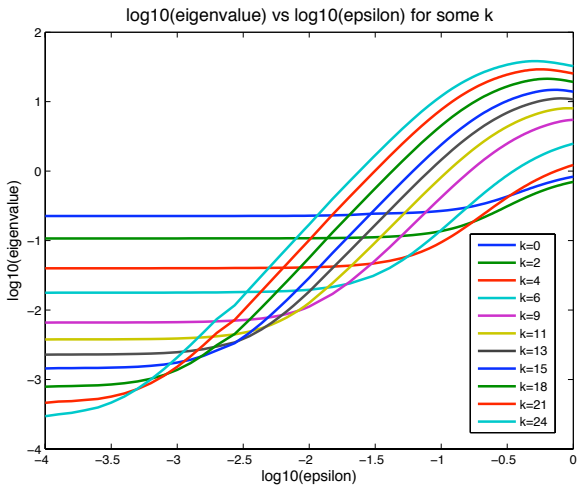
Minimum à ε fixé



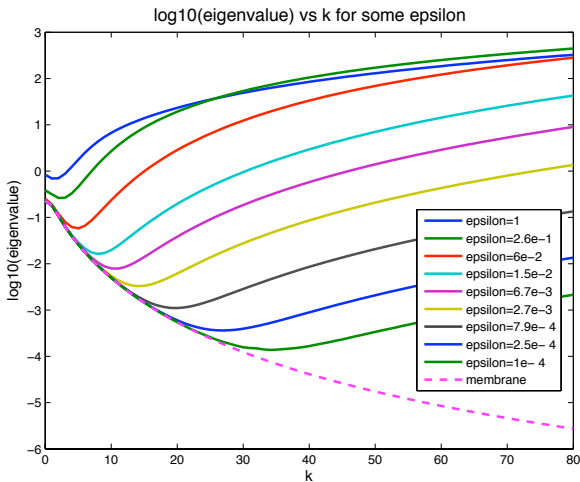
Minimum à ε fixé



Lamé



Lamé



Conclusion

Dépendance en k du minimum à ε fixé :

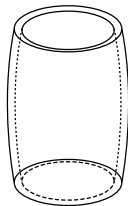
Conclusion

Dépendance en k du minimum à ε fixé :

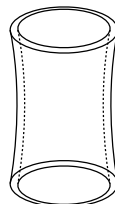
▷ nouvelle occurrence de la **sensitivité** des valeurs propres.

Perspectives

- Autres types de coques : elliptique (tonneau), hyperbolique (caténoïde).



Tonneau



Caténoïde



Fin

Merci de votre attention