



**HAL**  
open science

## Contribution à la commande des systèmes complexes

Pierre Riedinger

► **To cite this version:**

Pierre Riedinger. Contribution à la commande des systèmes complexes. Automatique / Robotique. Institut National Polytechnique de Lorraine - INPL, 2010. tel-00536355

**HAL Id: tel-00536355**

**<https://theses.hal.science/tel-00536355>**

Submitted on 16 Nov 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Contribution à la commande des systèmes complexes

## Mémoire

présenté publiquement le 4 juin 2010

pour l'obtention de

**l'Habilitation à Diriger des Recherches  
de l'Institut National Polytechnique de Lorraine**

**Spécialité : Automatique et Traitement du Signal**

par

Pierre Riedinger

### Composition du jury

*Président :* Bernard Davat, Pr. en Electrotechnique, Green, EnseM INPL.

*Rapporteurs :* Bernard Brogliato, DR. INRIA Rhône-Alpes, Grenoble.  
Michel Malabre, DR. CNRS, Directeur Irccyn, Ecole Centrale de Nantes.  
Emmanuel Trélat, Pr. Mathématiques, MAPMO, Université d'Orléans.

*Eraminateurs :* José Claudio Géromel, Pr. à L'Université de Campinas, Brésil.  
Claude Iung, Pr. en Automatique, Cran, EnseM INPL.  
Jamal Daafouz, Pr. en Automatique, Cran, EnseM INPL.



Mis en page avec la classe thloria.

# Table des matières

<b>Chapitre 1 Présentation générale</b>	<b>1</b>
1.1 Curriculum vitae . . . . .	1
1.2 Activités d'enseignement . . . . .	5
1.2.1 Animations pédagogiques et vie de l'école . . . . .	5
1.2.2 Responsabilités et créations de modules d'enseignements . . . . .	7
1.3 Activités de recherche . . . . .	10
1.4 Activités d'encadrement . . . . .	16
1.5 Liste complète des publications . . . . .	18
<b>Chapitre 2 Commande optimale des systèmes hybrides</b>	<b>23</b>
2.1 Formulation du problème de commande optimale . . . . .	23
2.2 Les deux grands principes de la commande optimale . . . . .	25
2.2.1 La programmation dynamique et les équations d'Hamilton Jacobi Bellman (HJB) . . . . .	25
2.2.2 Le principe du minimum de Pontryaguine . . . . .	26
2.3 Les méthodes de résolution . . . . .	28
2.3.1 Les méthodes indirectes . . . . .	28
2.3.2 Les méthodes directes . . . . .	31
2.4 Le cas des systèmes commutés sans contrainte . . . . .	33
2.5 Trajectoires singulières et existence de solutions hybrides. . . . .	35
2.6 Conclusion . . . . .	36
<b>Chapitre 3 Etude des cycles et de leur stabilité</b>	<b>37</b>
3.1 Modèle dynamique . . . . .	38
3.2 Mouvement périodique . . . . .	38
3.3 Calcul des cycles limites . . . . .	39

3.4	Etude de la sensibilité vis-à-vis d'un paramètre : le rôle joué par les instants de commutation . . . . .	42
3.5	Application à une boucle à verrouillage de phase . . . . .	42
3.6	Conclusion . . . . .	44
<b>Chapitre 4 Commande des systèmes affines commutés</b>		<b>45</b>
4.1	Modèle de représentation et points de fonctionnement . . . . .	46
4.2	Commande prédictive neuronale . . . . .	48
4.2.1	Formulation du problème de poursuite . . . . .	48
4.2.2	Optimisation rapide des temps de commutation entre modes via les fonctions de sensibilité . . . . .	49
4.2.3	Construction de la boucle fermée . . . . .	51
4.3	Synthèse de commandes optimales . . . . .	51
4.3.1	Solutions régulières et singulières . . . . .	52
4.3.2	Points de fonctionnement et arcs singuliers . . . . .	53
4.3.3	Synthèse des arcs singuliers . . . . .	53
4.3.4	Synthèse des trajectoires optimales . . . . .	56
4.4	Application aux convertisseurs de puissance . . . . .	60
4.5	Conclusions . . . . .	60
<b>Chapitre 5 Stabilité et observation des systèmes affines commutés</b>		<b>63</b>
5.1	Le principe d'invariance pour la classe des systèmes linéaires commutés à temps continu . . . . .	64
5.2	Problème de commande associé . . . . .	66
5.3	Une caractérisation algébrique des solutions du problème 15 . . . . .	67
5.4	Comportement asymptotique et loi de commutation . . . . .	68
5.5	Synthèse d'observateurs commutés . . . . .	69
5.6	Conclusion . . . . .	72
<b>Chapitre 6 Modélisation et simulation des systèmes complexes</b>		<b>75</b>
6.1	Simulation simplifiée de systèmes complexes : Le cas d'un four verrier	75
<b>Chapitre 7 Conclusions générales et perspectives</b>		<b>79</b>
<b>Bibliographie</b>		<b>87</b>

# Chapitre 1

## Présentation générale

### 1.1 Curriculum vitae

---

**Pierre RIEDINGER**

Né le 3 février 1969.

Marié, deux enfants.

Nationalité française.

---

**Adresse professionnelle**

CRAN CNRS UMR 7039  
ENSEM, 2, avenue de la Forêt de Haye  
54516 Vandoeuvre-Lès-Nancy Cedex  
Tél. : 03 83 59 56 37  
E-mail : pierre.riedinger@ensem.inpl-nancy.fr

**Adresse personnelle**

20, rue Jules Ferry  
54520 Laxou

<b>Formation Diplômes</b>
---------------------------

1996 - 1999 :	Doctorat de l'Institut National Polytechnique de Lorraine Spécialité : Automatique et traitement numérique du signal. Thèse préparée et soutenue au CRAN-CNRS UMR 7039 : « Contribution à la commande optimale des systèmes dynamiques hybrides ».  Prix de Thèse de l'INPL et mention très honorable avec les félicitations du jury.
1992 - 1993	DEA de Mathématiques Appliquées de l'Université Joseph Fourier de Grenoble. Rang 6 <sup>ime</sup> /31. Option : Equations aux Dérivées Partielles (EDP).

<b>Fonctions</b>
------------------

Sept. 2008 à Août 2009	En délégation au CNRS. Lieu d'exercice : CRAN-CNRS UMR 7039.
Depuis Mars 2001	Maître de Conférences à l'INPL - ENSEM. Chercheur au CRAN. Thème : Automatique - Commande et Observation des systèmes. Responsable : Jamal Daafouz. Projet : Systèmes Dynamiques Hybrides et systèmes complexes animé par le professeur G. Mille-rioux.  Titulaire de la prime d'encadrement doctorale depuis octobre 2005.
Sept. 2000 à Fév. 2001	Attaché Temporaire d'Enseignement et de Recherche à l'ESSTIN.
Sept. 1999 à Août 2000	Attaché Temporaire d'Enseignement et de Recherche à la Faculté des Sciences de l'université Henri Poincaré de Nancy.
Sept. 1997 à août 1999	Monitorat du Centre d'Initiation à l'Enseignement Supérieur (CIES) à l'ENSEM.
Sept. 1993 à Août 1995	Enseignant en mathématiques au Lycée A. N'Diaye de Kaolack (Sénégal), en tant que Volontaire du Service National (VSN).

<b>Implication dans la communauté scientifique</b>
--

- Depuis janvier 2009, animation du groupe de travail Systèmes Dynamiques Hybrides (SDH) du GdR-MACS.

- Membre du projet ANR porté par le CRAN : ArHyCo (Architecture Hybride et Contraintes) programmé sur la période 2009-2011.
- Animation et co-porteur de l'action Commande et Stabilité des Systèmes à Commutation dans le cadre du projet CPER MISN 2007-2013 – Thème : Analyse, Optimisation et Contrôle (AOC).
- Membre du réseau d'excellence Européen HYCON (NoE) HYbrid CONtrol timing heterogeneity and complexity of networked embedded systems. : workpackage WP4a Energy Management concernant les convertisseurs de puissance et les systèmes hybrides sur la période 2004-2008. <http://www.isthycon.org/> . Participation à différents workshops et programmes d'échanges avec les laboratoires ETH (Zurich, Suisse), KTH (Stockholm, Suède), LTH (Lund, Suède) et Supelec (Rennes et Paris).
- Depuis 1997, membre du groupe de travail Systèmes Dynamiques Hybrides du GdR-MACS.
- Participation à l'action spécifique AS 192 du RTP 20, CNRS-STIC et GdR MACS : Systèmes Dynamiques Hybrides et Convertisseurs statiques. Responsables : C. Iung (CRAN), M. Fadel (LEEI).

#### Jury de Thèse

- 3 participations en tant qu'examinateur dont 1 à l'extérieur de l'école doctorale locale :
  - Olivier Auchet, Contribution à la modélisation simplifiée des fours verriers, Thèse INPL, Rapporteurs : B. Maschke Université C. Bernard de Lyon et J.C. Batsale ENSAM Bordeaux
  - Diego Patino, "Pilotage des cycles limites dans les systèmes dynamiques hybrides. Application aux alimentations électriques statiques." Rapporteurs : J. Buisson SUPELEC, Rennes et M. Alamir DR CNRS Gipsa-lab
  - E. Mojica-Nava, A polynomial approach for analysis and optimal control of switched nonlinear systems, Ecole Centrale Nantes, Rapporteurs : P. Caines Mc Gill University (Monreal), D. Henrion CR CNRS-LAAS.

#### Comités de lecture

#### Relecteur régulier de plusieurs revues et conférences internationales :

- Revues : Automatica, IEEE Transactions on Automatic Control, International Journal of Control, European Journal of Control, IEEE Transactions in Control System Technology, Nonlinear Analysis : Hybrid Systems, International Journal of Robust and Nonlinear Control, Dynamic Systems and Applications, Journal Européen des Systèmes Automatisés.
- Congrès : European Conference on Control (ECC), IEEE American Control Conference (ACC), IEEE Conference on Decision and Control (CDC), IFAC mondial, Analysis and Design of Hybrid Systems (ADHS), CIFA, JDA.



### Activités administratives et de pilotages

- Responsable des travaux pratiques d'Automatique première année ENSEM de 2002 à 2007.
- Responsable du module électif : Aide à la décision en deuxième année ENSEM depuis 2007.
- Responsable du module Optimisation commun à la troisième année ISA et au master recherche Ingénierie des Systèmes (IS-EEAPR) depuis 2005.
- Membre élu au conseil des études et de la vie universitaire (CEVU) sur la période 2003-2007.
- Membre élu du conseil d'école ENSEM sur la période 2004-2008.
- Membre élu du conseil de laboratoire CRAN sur la période 2004-2008.
- Membre élu de la Commission de Spécialistes 61 section de l'INPL sur la période 2003- 2008.
- Membre élu extérieur de la Commission de Spécialistes 61 section de l'UHP sur la période 2003- 2008.
- Membre du comité de sélection pour une chaire CNRS-UHP (CRAN) en 2009.

### Contrats

Participations à 3 contrats de recherche dans le cadre d'une collaboration «Long Partner» liant le CRAN avec ArcelorMittal,

- contrat 2008 n°2273 : Simulation dynamique des échanges thermiques sur une table de sortie d'un laminoir à chaud.
- contrat 2009 n°3051 : Contrôle des échanges thermiques sur une table de sortie d'un laminoir à chaud.
- contrat 2009 n°3052 : Etude du contrôle de planéité en laminage à froid.

## 1.2 Activités d'enseignement

Mes activités d'enseignement ont débuté au Sénégal en tant que Volontaire du Service National sur la période 1993-1995 où j'ai occupé la fonction de professeur en mathématique au Lycée A. N'Diaye de Kaolack. De 1996 à 1997, j'ai effectué des vacances à l'ENSEM et à l'école des Mines de Nancy en automatique et en analyse numérique. Entre 1997 et 1999, j'ai enseigné à l'ENSEM, dans le cadre d'un monitorat, en automatique et mathématique sous forme de travaux pratiques et dirigés en première et deuxième année. Au cours des deux années suivantes, soit sur la période 1999-2001, en tant qu'ATER à la Faculté des Sciences de l'Université Henri Poincaré (UHP) de Nancy et à l'École Supérieure des Sciences et Technologies de l'Ingénieur de Nancy (ESSTIN), mes enseignements ont concerné des travaux pratiques et dirigés en automatique, en électricité, en informatique et réseaux (Niveau Bac +1 à Bac +5) ainsi que des encadrements de projets (Niveau Bac +5).

Depuis février 2001, j'occupe la fonction de maître de conférences à INPL-ENSEM. L'ENSEM forme des ingénieurs généralistes dans les domaines de la mécanique, du génie électrique et de l'ingénierie des systèmes automatisés. Mes activités d'enseignements portent essentiellement sur les domaines des mathématiques, du traitement du signal et de l'automatique et se répartissent sur les trois années de l'école. Ce service représente un volume horaire annuel de 240 h eq TD et se décline en :

- TD, TP en automatique en première, deuxième et troisième année (tronc commun et filière Ingénierie des Systèmes Automatisés (ISA)).
- TD, TP en traitement du signal en deuxième année (tronc commun).
- TD, TP en mathématique en première, deuxième année (tronc commun).
- Cours d'équations différentielles en première année (tronc commun).
- Cours d'optimisation commun à la troisième année ISA et au master recherche Ingénierie des Systèmes (IS-EEAPR).
- Cours "commande prédictive et adaptative" en troisième année ISA option Contrôle, Pilotage Diagnostic, Sécurité (CPDS).
- Cours électif "phénomènes et processus aléatoires" en deuxième année.
- Cours de mathématique/Informatique avec Matlab destiné aux élèves de 2<sup>ème</sup> année du Cycle Préparatoire Polytechnique (CPP).

### 1.2.1 Animations pédagogiques et vie de l'école

#### Participation à la réforme pédagogique

Sur la période 2001-2003, j'ai pris part à la réflexion et à l'élaboration d'une réforme des enseignements à l'ENSEM. Cette réforme s'est accompagnée d'une refonte des programmes de la filière Ingénierie des Systèmes Automatisés (ISA) sur les trois années d'école. La remise à plat des programmes engagée par notre

équipe, s'est traduite par le renouvellement de cours et de TP, et par la pratique d'un enseignement sous la forme de tutorat dont l'objectif est de favoriser le travail personnel et l'autonomie des élèves.

### Animation pédagogique

De 2002 à 2007, j'ai été responsable de l'organisation et du suivi des TP d'automatique. A ce titre, j'étais chargé de l'édition du polycopié de sujets de TP, de la planification des séances, du recrutement et de la formation des vacataires et de l'évaluation. Je gérais également le budget travaux pratiques de l'automatique à l'ENSEM. N. Brinzei et S. Maza ont repris cette animation en 2007.

### Participation au renouvellement de TP

Le renouvellement des sujets de travaux pratiques d'automatique entrepris en collaboration avec Jamal Daafouz sur la période (2002-2005) ont permis de créer :

- Un TP intitulé « Automatique et logique floue » dont l'objectif est de présenter en première année ENSEM sur un processus réel les notions de base de l'automatique.
- Un TP régulation d'un pont roulant dont l'objectif est de faire la synthèse de notions abordées en première année (Représentation d'état, linéarisation, observation et commande par retour de sortie (2002-03)).
- Un TP petit moteur. Composé d'une maquette et d'une carte d'acquisition permettant l'utilisation de Matlab/Simulink. Ce TP permet de présenter, aux élèves de deuxième année de la filière ISA, les problèmes liés à la conception de correcteur numérique et d'en faire la synthèse via la technique RST (2003-04).
- Un TP Filtre de Kalman (2003-04) aujourd'hui intégré au cours électif « processus aléatoires et filtrage » en deuxième année. De manière progressive, d'abord sur un système linéaire, les élèves comparent les résultats obtenus avec un filtre de Kalman récursif et un filtre asymptotique et voient l'influence des matrices de covariance sur l'estimation. Le filtre de Kalman étendu est alors utilisé sur un processus non linéaire : avec la reconstruction de la position et de la vitesse d'une machine synchrone à partir de la mesure du courant sur ces enroulements.
- En collaboration avec Nicolae Brinzei (2004-05), un TP Supervision des systèmes industriels avec « Intouch » comme logiciel de supervision et un réseau d'automates chargés de contrôler un procédé industriel. Le but est de sensibiliser les élèves aux problèmes liés à la supervision en industrie et de leur montrer quelques outils incontournables dans ce domaine.

### Projets et stages

J'encadre en moyenne 2 projets par an en troisième année ISA et je me charge du suivi de 3 stages de fin d'étude chaque année. Les projets sont d'une durée relativement conséquente (120 h inscrites à l'emploi du temps) et permettent de

traiter complètement un cas d'étude ou lorsqu'un couplage projet-stage intervient en partenariat avec un industriel, de préparer le stage ingénieur.

### **Elaboration et montage d'un projet Région-INPL**

J'ai participé à la création et la mise en place du Projet CIIAO, (Communication, Intelligence, Innovation et Autonomie des Objets) dans le cadre d'une demande de co-financement Région-INPL pour des formations innovantes (2004-2005). Ce projet pluridisciplinaire a pour vocation de former les élèves à la conception et à la réalisation d'objets « intelligents » capables d'interagir avec leur environnement et de prendre des décisions. Parmi les plateformes de développement mises en place, j'ai proposé pour les enseignements d'automatique, une maquette « temps réel », équipée du logiciel Matlab/Simulink et d'outils de prototypage rapide. Cette maquette permet aujourd'hui d'illustrer de manière graduelle une grande partie des notions abordées en automatique par les élèves de l'ENSEM. Cette maquette est également utilisée sur des projets en troisième année pour illustrer des techniques de commandes multi variables non linéaires.

### **1.2.2 Responsabilités et créations de modules d'enseignements**

#### **Module "probabilité-statistique"**

J'ai repris ce cours en 2001 suite au départ du professeur F. Kratz et je l'ai réorganisé. Destiné aux élèves du DESS ISI (Ingénierie Sécurité Industrielle), l'objectif de ce cours était de présenter l'utilité des outils statistiques pour l'ingénierie et la sûreté industrielles et d'amener les étudiants à la pratique des tests statistiques sur le domaine de la maintenance, de la fiabilité et de la prévision des risques.

#### **Cours sur les équations différentielles**

A la demande du professeur J.F. Ganghoffer responsable de l'enseignement des mathématiques à l'ENSEM, j'ai monté en 2002 un cours sur les équations différentielles pour les élèves de première année. Ce cours entre dans le cadre plus général de la modélisation des systèmes dynamiques et a pour objectif d'homogénéiser les connaissances des élèves concernant les principaux résultats utiles à l'analyse et à la résolution de ces équations.

#### **Module "optimisation"**

Avec la mise en place de la réforme LMD en 2004-2005 et la réorganisation du Master Recherche « Ingénierie des Systèmes » (IS-EEAPR) co-habilité INPL-UHP, nous avons fait le constat que de nombreux domaines enseignés dans ce

master (commande, identification, traitement du signal, diagnostic,...) utilisaient des techniques d'optimisation. Pour éviter des redites ou une vision parcellaire de ce domaine aux élèves, j'ai monté un module de 20 h sur l'optimisation. Présenté comme une boîte à outils, l'objectif de ce cours est d'apprendre aux élèves à «utiliser la bonne clé pour ouvrir la bonne serrure». Il s'agit donc d'apprendre à exploiter correctement la nature et la structure d'un problème d'optimisation et de choisir la méthode adaptée pour le résoudre. Ce cours met l'accent de manière didactique sur les idées et techniques employées dans les solveurs modernes. Une plateforme destinée à mettre en oeuvre cet enseignement termine ce cycle avec la résolution de cas d'études balayant un large spectre des problèmes de l'optimisation.

### **Module "commande adaptative et prédictive"**

La possibilité offerte aux élèves de troisième année ISA de choisir un parcours différencié, a nécessité de construire une banque de modules pour chacun des parcours. En 2005, j'ai proposé avec J. Daafouz un module de 20 heures consacré à la commande adaptative et prédictive, destiné à la troisième année ISA parcours CPDS. La commande prédictive s'est imposée dans le domaine de la commande avancée pour piloter une classe de plus en plus large de systèmes dynamiques. Reconnue comme une méthode souple, performante et capable de prendre en compte un grand nombre de contraintes, nous l'enseignons aux élèves désireux d'approfondir leurs connaissances dans ce domaine. Sur la base d'un cours théorique, des exemples de difficulté croissante sont abordés en simulation. Un travail de synthèse d'un pilote automatique pour un Airbus en vol de croisière permet de valider cet enseignement. Un second volet du cours concerne l'adaptation des paramètres du modèle au procédé et sensibilise les étudiants au problème de la robustesse vis-à-vis d'incertitudes paramétriques.

### **Module électif "phénomènes et processus aléatoires"**

Depuis 2007, je suis responsable d'un module électif de 40 heures sur les phénomènes et processus aléatoires destiné à la deuxième année ENSEM. Les méthodes de représentation et d'analyse des processus aléatoires sont aujourd'hui entrées de plein pied dans l'ingénierie des systèmes que ce soit en conception-développement ou en maintenance-diagnostic. Le renouvellement des techniques utilisées que nous connaissons dans le traitement de l'information (téléphonie, internet, imagerie) est largement dû à la prise en considération de ces phénomènes. Avec mes collègues A. Muller (MdC en mathématique) et de R. Ranta (MdC Traitement du signal), nous avons privilégié une méthode d'enseignement favorisant l'acquisition d'une technicité par les élèves en optant pour des cours réduits et des TP longs en simulation sur Matlab permettant la mise en oeuvre de solutions actuelles sur des problèmes concrets (Conception de filtres et d'estimateurs, débruitage de signaux, simulation de chaîne de Markov, ...).

### **Module "Math-Info" pour les CPP**

Ce module est une création à l'INPL et s'adresse aux élèves de deuxième année du Cycle Préparatoire Polytechnique (CPP) de l'INPL. Un cours similaire existait dans les autres INP mais pas à Nancy. Avec Jamal Daafouz, nous avons organisé ce cours en 8 séances de cours/TD et de 2 séances TP. Le but est de montrer aux élèves la résolution sur ordinateur de certains problèmes issus des mathématiques, de la physique,... Le logiciel de base est Matlab et les méthodes de base de l'analyse numérique (interpolation, intégration numérique, résolution d'équations algébriques et résolution numérique d'équations différentielles) sont introduites dans ce cours.

## 1.3 Activités de recherche

J'ai débuté mes travaux de recherche en automatique par une thèse de doctorat au CRAN en 1996 dans un domaine émergent qui n'était alors que très peu formalisé : les systèmes dynamiques hybrides. Ce thème de recherche est né du constat d'insuffisance des modèles dynamiques classiques pour représenter un nombre important de systèmes dynamiques complexes où se mêlent et interagissent des processus à temps continu et événementiels. Avec la description formelle des différents phénomènes et discontinuités que l'on cherche à représenter, le modèle dynamique, qui s'est imposé aujourd'hui auprès de la communauté scientifique, est celui de l'automate hybride [74]. La possibilité de prendre en compte des discontinuités de modèles dynamiques sur occurrences d'événements permet une grande richesse de descriptions et ouvre la voie au pilotage de systèmes complexes dans des domaines d'applications très variés comme par exemples : les convertisseurs de puissance, les réseaux de transport d'énergie, le trafic routier et aérien, la robotique, les systèmes haptiques, l'informatique temps réel, les systèmes embarqués, le cryptage, les chaînes de production, les systèmes biologiques, etc.

L'étude de ces systèmes dynamiques hybrides s'est développée de façon notable ces dernières années avec l'émergence d'équipes américaines, asiatiques et européennes issues des mathématiques appliquées, de l'informatique et du «control engineering». Une série de workshops annuels organisés en Europe et aux Etats Unis depuis 1993, les sessions dédiées aux systèmes hybrides dans les congrès d'automatique (ACC, ECC, CDC, ADHS, IFAC), et des numéros spéciaux de revues internationales témoignent de l'activité de ce domaine où les questions ouvertes et les verrous scientifiques restent nombreux.

Depuis 1996, les équipes françaises qui travaillent dans les mêmes directions se retrouvent en partie au sein du groupe de travail Systèmes Dynamiques Hybrides (SDH) du GdR-MACS du CNRS. <http://www.rennes.supelec.fr/sdh/>. Ce groupe auquel notre équipe participe activement, est notamment à l'origine du congrès international IFAC Conference on Analysis and Design of Hybrid Systems (ADHS) et a publié en 2001 un ouvrage de synthèse sur les SDH [140]. J'ai la charge depuis janvier 2009 de l'animation de ce groupe avec Antoine Girard du laboratoire Jean Kuntzmann de Grenoble.

De manière générale, les travaux développés par notre équipe concernent des outils ou méthodes pour l'analyse et la synthèse de ces systèmes. Les problèmes fondamentaux ont trait à l'étude de la stabilité et de la commande, et se déclinent également en problèmes d'observation et de robustesse.

En particulier, ces travaux ont concerné :

- La commande optimale des systèmes hybrides avec l'établissement de conditions nécessaires d'optimalité et l'étude des solutions singulières.
- Le développement et la synthèse de commandes stabilisantes et robustes pour la sous classe des systèmes commutés linéaires.

- La recherche rapide des cycles limites des systèmes hybrides et de leur stabilité par fonction de sensibilité.
- La synthèse de commandes optimales et prédictives pour la classe des systèmes affines commutés.
- L'étude de stabilité et de l'observation d'une classe de systèmes affines commutés
- La modélisation des systèmes complexes et l'établissement de modèle de commande.

Voici la synthèse des travaux attachés à ces items ainsi que la listes des publications associées :

### Sur la commande optimale des systèmes hybrides

#### *Conditions nécessaires d'optimalité*

Les contributions théoriques de mes travaux de thèse concernent la commande des systèmes hybrides et plus particulièrement la commande optimale avec l'établissement de conditions nécessaires d'optimalité via un principe de minimum. L'application de ces résultats sur des exemples de différentes natures (sauts autonomes et/ou commandés) et pour différents critères (temps optimal ou quadratique), ont permis d'illustrer et de mettre en évidence les difficultés sous-jacentes à la résolution et à la synthèse de commandes optimales. Les principales proviennent des discontinuités de modèle qui induisent des conditions de transversalité à respecter aux instants de commutation. Un résultat majeur est d'avoir montré la nécessité d'utiliser conjointement la programmation dynamique et le principe du minimum de Pontryaguine dans la recherche des lois de commutations optimales. Ces résultats font parti des premiers résultats publiés dans le domaine [100, 106, 110]. Aujourd'hui hormis des cas simples ou académiques, on ne sait pas proposer, dans le cas général, des algorithmes capables d'éviter l'explosion combinatoire qu'engendre la dualité continu-discret dans la recherche de solutions.

#### *Solutions Singulières*

Pour un problème de commande optimale posé dans le cadre d'un SDH, l'existence d'une solution optimale n'est généralement pas garantie même si le système possède des trajectoires et des commandes associées admissibles mais non optimales [102]. Ce point contre intuitif est lié à l'existence d'une singularité dans la résolution des conditions nécessaires de Pontryaguine menant à des solutions au sens de Fillipov non admissibles pour le système hybride. Nous avons montré néanmoins qu'il était possible d'approcher d'aussi près que l'on veut ces solutions non admissibles par des trajectoires hybrides sur un horizon temporel fini. Aujourd'hui, un résultat de densité en temps infini dû à B. Ingalls et al. [62] prouve que c'est également le cas sur un horizon infini.



La présence de ces arcs singuliers pose également des difficultés pour la recherche numérique de solutions. Les méthodes indirectes qui utilisent les conditions nécessaires de Pontryaguine, ne sont pas faites pour et ne peuvent pas numériquement tenir compte de ces arcs singuliers et échouent dans la recherche d'une solution sans traitements particuliers. L'utilisation de méthodes directes de type programmation non linéaire plus souples et plus flexibles mais plus lourdes sont préférables car l'optimisation se fait directement par la minimisation du critère et non sur la satisfaction de conditions nécessaires obtenues indirectement. Des études comparées de méthodes directes de résolution ont permis de souligner ces difficultés en présence de solutions singulières [103].

Références associées : [T1, R4, R5, R10, R11, C8, C9, C12, C17, C18, C19, CN3].

### Sur la classe des systèmes commutés linéaires

Proposer des résultats génériques concernant la stabilité ou la commande dans le cadre général des systèmes hybrides n'est pas envisageable compte tenu de la diversité et de la complexité des dynamiques possibles. Cependant des résultats généraux peuvent être obtenus si on se restreint à certaines classes de systèmes hybrides et en particulier aux systèmes commutés. Ces systèmes sont formés de sous systèmes à temps continu ou à temps discret et d'une loi de commutation décrivant le passage d'un sous système à un autre.

#### *Stabilité et rejet de perturbations.*

Dans ce contexte, l'énoncé de plusieurs résultats concernant l'étude de la stabilité et de lois stabilisantes a été possible. La commande optimale sur critère quadratique est une manière naturelle de concevoir une commande stabilisante : la fonction coût définit une fonction de Lyapunov garantissant la stabilité du système. Le célèbre problème de commande LQ a été étendu au cas des systèmes linéaires commutés en temps continu. Cette extension montre que la détermination de la commande optimale nécessite d'intégrer par morceaux une suite d'équations de Riccati différentielles avec des conditions de recollement respectées aux instants de commutations. Il a été démontré que ces instants de commutation *a priori* inconnus, correspondent aux zéros d'une équation différentielle. Ce résultat a été utilisé sous la forme d'un algorithme pour la recherche de solutions.

En présence de perturbations bornées, une extension robuste de la commande quadratique pour laquelle une borne supérieure sur la fonction coût est garantie, a été proposée et résolue dans le cadre de la théorie des jeux différentiels et étendue au cas des systèmes linéaires commutés.

Pour les systèmes commutés linéaires en temps discret, j'ai participé avec Jamal Daafouz à la synthèse de commande par retour statique de sortie des systèmes commutés, et à l'établissement d'une preuve concernant un principe de séparation garantissant la stabilité par bouclage de sortie pour ces systèmes et ce,

quelle que soit la loi de commutation. La condition suffisante développée présente l'avantage d'être facile à mettre en oeuvre car elle ne nécessite que la résolution d'un ensemble de conditions LMI.

Références associées : [R8, R9, R12, C13, C14, C15, C16, C17].

### **Sur le calcul et la stabilité des cycles limites des systèmes hybrides**

La classe des convertisseurs de puissance est une classe de systèmes technologiques très répandus qui présentent la caractéristique d'être hybrides : ce sont les systèmes électriques qui contiennent des éléments en commutation à base de semi-conducteurs. La plupart de ces dispositifs se caractérisent par des régimes asymptotiques périodiques, quasi périodiques voire chaotiques. La détermination de ces cycles ne peut être obtenue généralement de manière analytique. A des fins d'analyse, il peut être avantageux de les déterminer numériquement sans avoir recourt à une simulation complète, longue et éventuellement instable numériquement. En collaboration avec Damien Flieller, nous nous sommes intéressés à la recherche d'algorithmes permettant de déterminer rapidement ces cycles limites et avons proposé dans le cadre général des systèmes commutés à sauts autonomes et commandés, un algorithme rapide permettant d'établir ces cycles limites ainsi que leur stabilité. Cet algorithme utilise les fonctions de sensibilité dans un contexte discontinu, et sont justifiées via la théorie des distributions.

Ce travail s'est inscrit dans l'action spécifique (AS 192) du RTP 20, CNRS-STIC et du GdR MACS intitulée «Systèmes Dynamiques Hybrides et Convertisseurs statiques» et pilotée par C. Iung (CRAN) et M. Fadel (LEEI) et lancé en 2003. L'objectif de cette action prospective était triple : apporter des solutions ou des pistes de solutions à des problèmes de recherche technologique clairement identifiés, faire émerger des classes de systèmes hybrides sur lesquelles il faut poursuivre une recherche théorique plus approfondie et initier de nouvelles recherches dans le domaine de la commande des systèmes électrotechniques par des approches issues des recherches en automatique sur les SDH.

Références associées : [R7].

### **Sur la commande optimale et prédictive des systèmes affines commutés**

Dans la continuité de cette action spécifique, en 2004, le réseau d'excellence européen HYCON fédère une communauté de spécialistes, chercheurs et utilisateurs qui développent et appliquent la théorie des systèmes hybrides à la conception et au pilotage de systèmes complexes et hétérogènes. Je me suis impliqué sur le Workpackage 4a dont les objectifs ont été de proposer des solutions hybrides et génériques sur la classe des convertisseurs de puissance. Les solutions apportées ont été régulièrement évaluées sur différents benchmarks et confrontées aux résultats des équipes européennes participant à ce réseau.

La thèse de Diego PATINO que j'ai co-encadrée, fait partie de ce travail. Elle aborde la commande de ces dispositifs et propose deux approches l'une à base de commande prédictive et l'autre de commande optimale. Les deux méthodes conduisent à une commande par retour d'état.

L'originalité de la première est d'offrir la possibilité de spécifier un cycle optimal de ralliement au sens défini par un critère. Un algorithme rapide de Gauss-Newton, qui utilise les fonctions de sensibilité, est développé pour déterminer les commandes optimales. Les solutions du problème de poursuite sont alors interpolées via un réseau de neurones qui permet d'assurer une implémentation en temps réel.

La seconde approche basée sur le principe de minimum, permet de faire la synthèse de lois de commande optimale. Pour la classe des systèmes envisagés, les travaux exposés montrent que la synthèse des lois nécessite de faire la recherche d'arcs singuliers. Ce point est une difficulté théorique majeure liée à la structure de ces systèmes. La nature des points de fonctionnement permet d'expliquer la présence de ces trajectoires particulières. Des conditions qui permettent de déterminer algébriquement les arcs singuliers pour des systèmes de dimension faible, sont proposées. Les solutions s'expriment alors comme les racines d'un ensemble de déterminants, satisfaisant une condition nécessaire d'ordre deux. La synthèse sur une région de l'espace est alors obtenue par intégration en temps rétrograde depuis les points singuliers et interpolés par un réseau de neurones. Les deux méthodes ont montré leur efficacité sur des applications de convertisseurs de puissance comme en atteste les résultats obtenus sur maquettes réelles lors de tests de robustesse.

Références associées : [R3, R4, RN1, ER1, C2, C3, C5, C6, C7, CN1, CN2]

### **Sur la stabilité et l'observation des systèmes affines commutés**

Une action en cours, intitulée "Commande et Stabilité des Systèmes à Commutation (SC2)", soutenue localement dans le cadre du plan état-région (CPERMISN 2007-2013 Thème AOC) s'inscrit pleinement dans ce thème de recherche. Ce projet fédère des automaticiens et des mathématiciens issues de trois laboratoires : le CRAN, l'IECN et l'INRIA. Je suis, depuis 2007, responsable de l'animation et co-porteur de ce projet avec Mario Sigalotti de l'institut Elie Cartan de Nancy (IECN).

Des résultats importants concernant la stabilité des systèmes commutés sont en cours de publication. Ils permettent de caractériser algébriquement les lois de commutation ne permettant pas la convergence à l'origine via un principe d'invariance de Lasalle adapté à la classe de systèmes étudiés, et de donner des conditions faibles et très génériques sur les lois de commutation garantissant la stabilité. Cette approche nous a permis de proposer et de prouver la convergence

d'observateurs commutés pour ces systèmes et de l'appliquer en particulier sur un convertisseur multiniveaux.

Parallèlement, les notions de convergence à l'origine sous phénomène zenon ont été approfondies avec différentes notions de "dwell time" pour la classe des systèmes commutés linéaires.

Références associées : [R1, R2, C1, C4, CN1].

### **Vers la commande adaptative robuste et l'estimation paramétrique.**

Parallèlement à l'action SC2 citée ci-dessus, proposer des algorithmes de commande génériques pour cette classe de système est l'une de nos préoccupations. Nous cherchons notamment à améliorer et évaluer la qualité des cycles limites et la robustesse vis-à-vis d'incertitudes paramétriques des lois de commandes optimales et prédictives. Les premiers résultats de faisabilité de ces approches nous permettent d'envisager d'y inclure, dès la phase de synthèse, des aspects concernant la robustesse et l'estimation paramétriques. L'utilisation de schémas adaptatifs est pressentie. Les travaux de thèse de Pascal Haurigné qui viennent de débiter au mois de septembre 2009, portent sur ce sujet.

Les résultats de recherche que nous avons obtenus et les collaborations entreprises avec des équipes de mathématiciens et des partenaires industriels (ArcelorMittal), nous ont permis de faire émerger des problématiques de recherche ouvertes et de monter au niveau national un projet ANR intitulé Arhyco. Ce projet vient de débiter en janvier 2009 et je participe à l'une de ces tâches dont les objectifs s'inscrivent dans la continuité des travaux sur les cycles limites, la stabilité et la commande des systèmes commutés.

### **Sur la modélisation des systèmes complexes**

Le problème de la modélisation de systèmes complexes est également une de nos préoccupations. Disposer de modèles adéquats pour piloter une installation industrielle est nécessaire mais bien sûr, cette modélisation ne peut être dissociée de son objectif (commande, observation, diagnostic). Je participe actuellement à des contrats de recherche liant notre équipe et ArcelorMittal pour développer des outils de contrôle commande sur des chaînes de Laminoir à chaud. La simplification de modèle et les stratégies de commande sont donc discutées pour parvenir à des solutions réalistes et performantes. La thèse d'Olivier Auchet que j'ai co-encadré avec Claude Iung et en partenariat avec Siemens, aborde également cette problématique de la modélisation. Ces travaux ont permis de développer un simulateur simplifié d'un four verrier en vue de l'entraînement d'opérateur. Le choix d'une modélisation de type premier principe et la définition d'un problème simplifié basé sur des schémas conservant l'énergie et les bilans de matières a permis d'obtenir un simulateur de qualité et temps réel comme la comparaison avec les outils existants a pu le démontrer.

Références associées : [R6, C10, C11].

## 1.4 Activités d'encadrement

### Thèse

- Co-direction autorisée par le conseil scientifique de l'INPL de la thèse de Pascal Haurigné (50%) intitulée, « Etude de la robustesse d'un schéma de commande adaptatif générique dédié à une classe de systèmes dynamiques hybrides à comportement cyclique. Application aux convertisseurs de puissance », commencée en septembre 2009.
- Co-direction autorisée par le conseil scientifique de l'INPL de la thèse de Diego Patino (50%) intitulée, « Pilotage des cycles limites dans les systèmes dynamiques hybrides. Application aux alimentations électriques statiques », commencée en octobre 2005 et soutenue en Janvier 2009. Actuellement "Associate Professor" à l'Université des Andes, Colombie. Cette thèse s'accompagne de deux revues internationales (International Journal of Control (IJC), IEEE Transactions on Control Systems Technology (TCST)), de 4 congrès internationaux (American Control Conference (ACC'07), European Control Conference (ECC'09), Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society (IECON'08)) et de 2 congrès nationaux (Conférence Internationale Francophone d'Automatique (CIFA'08), Journées Nationales du GDR MACS (JD-JN-MACS'07)).
- Participation à l'encadrement (50%) de la thèse de Olivier Achet sur la période 2002-2004, « Contribution à la modélisation simplifiée des fours verriers », soutenue en janvier 2005. O. Achet est aujourd'hui ingénieur R&D chez un verrier situé au Luxembourg. Cette thèse a fait l'objet de 3 publications en congrès internationaux (International Symposium on Industrial Electronics (IEEE ISIE'04), International Symposium on Dynamics and Control of Process Systems (IFAC DYCOPS'04), International Congress on Glass ICG'04) et d'une revue internationale (Control Engineering Practice, Elsevier).

### Master II et ex DEA

- Pascal Haurigné : stage Master IS-mention R « Amélioration du contenu harmonique des cycles limites par commande prédictive sur une classe de systèmes dynamiques hybrides. Application aux convertisseurs de puissance. », encadrement à 100%. Mars à septembre 2009.
- Pierre Garnier, stage Master IS-mention R « Optimisation profil refroidissement » : co-encadrement à 50% avec C. Moretto (ARCELOR Mittal). Mars à Septembre 2009.
- Serge Hirwa, stage Master IS-mention R « Identification modèle simplifié » co-encadrement à 50% avec C. Moretto (ARCELOR Mittal). Mars à Septembre 2009.
- Julien Marzat : stage Master IS-mention R, "Développement et intégration d'un algorithme d'estimation du flot optique non déterministe sur une

- architecture parallèle co-encadrement à 50% avec A. Ducrot INRIA Rocquencourt. Mars à Septembre 2008.
- Nicolas Pethe : stage Master IS-mention R «Modélisation et commande d'un système de refroidissement pour bandes d'acier», co-encadrement à 50% avec C. Moretto (ARCELOR Mittal). Mars à Septembre 2008.
  - Maxime Bladier : stage Master IS, «Manipulation optique d'objets virtuels via le réseau» co-encadrement à 50% avec C. Andriot CEA. Mars à Septembre 2008.
  - Christiano Tannure Nemer : stage IS-mention R «Contrôle du déport de bande dans un laminoir à chaud» co-encadrement à 50% avec R. Bonidal (Arcelor Research). Mars à Septembre 2007.
  - Mathieu Very : stage Master IS-mention R «Réalisation d'un produit logiciel industriel : portage d'une application "RTV de téléconduite" sous Unity», co-encadrement à 50% avec J.Y. MONNET (Schneider Electric). Mars à Septembre 2006.
  - François Gomis : stage DEA CSC «Comparaison d'algorithmiques globaux d'optimisation pour la commande optimale des systèmes hybrides», encadrement à 100%. Mars à Septembre 2005.
  - Phuoc Vô : stage DEA CSC «Etude de la stabilité des cycles limites pour les systèmes hybrides», encadrement à 50% avec J. Daafouz. Mars à Septembre 2005.
  - David Delouche : stage DEA CSC Surveillance du Radiotélescope de Nançay : Application au déplacement longitudinal du foyer mobile, co-encadrement à 50% avec F. Kratz et F. Tatat. Mars à Septembre 2005.
  - Omar Cherkaoui : stage DEA CSC «Connexion d'un riser à la tête de puits par contrôle actif : Localisation par capteurs de la position du pied et calcul en temps de la position de la tête du riser», co-encadrement à 50% avec F. Bioley (IFP). Mars à Septembre 2004.
  - Ait Youssef : stage DEA CSC «Synthèse d'une commande LQ pour une classe de systèmes hybrides.» co-encadrement à 50% avec C. Iung de mars 2002 à septembre 2003.
  - Ilyas Meriem : stage DEA CSC «Techniques Algorithmiques de synthèse de commande optimale des systèmes continus et application pour les systèmes commutés», co-encadrement à 50% avec C. Iung. Mars à Septembre 2002.
  - Fernandes Borges : stage DEA CSC, «Etude d'un observateur contrôleur de severe slugging», co-encadrement à 50% avec E. Duret (IFP). Mars à Septembre 2001.

## 1.5 Liste complète des publications

### Récapitulatif des publications :

- 2 chapitres de livres
- 12 revues internationales
- 2 revues nationales
- 21 congrès internationaux
- 5 congrès nationaux
- 1 revues internationales en révisions

### Chapitres de livres

- [L1] R. Husson et al. Automatique - Du cahier des charges à la réalisation de systèmes, 800p, participation à la rédaction des chapitres Commande des systèmes linéaires et des systèmes non linéaires, Méthodes d'optimisation, ISBN 2-7462-0247-6, ISBN10 : 2-10-050397-9, Dunod sept. 2007.
- [L2] Valentin-Roubinet C., P. Riedinger, J. Daafouz, J. Buisson, C. Iung Commande des systèmes dynamiques hybrides. Systèmes Dynamiques Hybrides, 35 p., ISBN 2-7462-0247-6, Hermès Science Europe juin 2001.

### Revue internationale avec comité de lecture

- [R1] P. Riedinger, M. Sigalotti, J. Daafouz, On the characterization of invariants sets of switched linear systems, *Automatica* 46(2010), pp.1047-1052, Elsevier 2010.
- [R2] U. Serres, J-C. Vivalda, P. Riedinger, On the convergence of linear switched systems, accepté provisoirement à *IEEE Transaction in Automatic Control* en janvier 2010.
- [R3] S. Mariéthoz, S. Almer, M. Bâja, A. G. Beccuti, D. Patino, A. Wernrud, J. Buisson, H. Cormerais, T. Geyer, H. Fujioka, U. T. Jonsson, C.-Y. Kao, M. Morari, G. Papafotiou, A. Rantzer, P. Riedinger Comparison of Hybrid Control Techniques for Buck and Boost DC-DC Converters à paraître dans *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 2010.
- [R4] D. Patino, P. Riedinger, C. Iung, Practical optimal state feedback control law for continuous-time switched affine systems with cyclic steady state, *International Journal of Control*, Volume 82, Issue 7 July 2009, pp. 1357 - 1376, Taylor & Francis, 2009.
- [R5] P. Riedinger, Comments on Optimally switched linear systems, *Automatica* 45(2009) pp. 1588-1590, Elsevier 2009.
- [R6] O. Achet, P. Riedinger, O. Malassé, C. Iung, First-Principles Simplified Modelling of Glass Furnaces Combustion Chambers, *Control Engineering Practice* vol. 16, n°12, pp.1443- 1456, Elsevier 2008.

- [R7] D. Flieller, P. Riedinger and J.P. Louis. Computation and stability of limit cycles in hybrid systems", *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications*, vol. 64, no. 2, pp. 352-367, Elsevier 2006.
- [R8] J. Daafouz, P. Riedinger and C. Iung. Discussion on Development and experimental verification of a mobile client centric networked controlled system, *European Journal of Control* (2005) 11 :242-254.
- [R9] J. Daafouz, P. Riedinger and C. Iung Observer-based switched control design with pole placement for discrete-time switched systems, in *International Journal of Hybrid Systems*, vol. 3 n° 2 & 3 :p263-282, 2004.
- [R10] M. Alamir, S.A. Attia, A. Nerode, P. Riedinger, C. Iung & F. Kratz, Discussion on An optimal control approach for hybrid systems, *European Journal of Control*, vol. 9, no. 5, pp. 459-462, 2003.
- [R11] P. Riedinger, C. Iung, F. Kratz An Optimal Control Approach for Hybrid Systems. *European Journal of Control*, vol 9, n°5, pp. 449-458, 2003.
- [R12] J. Daafouz, P. Riedinger, C. Iung, Stability Analysis and Control Synthesis for Switched Systems : A Switched Lyapunov Function Approach, *IEEE Transaction on Automatic Control*, vol. 47(11) pp. 1883-1887, novembre 2002.

#### **Revues nationales avec comité de lecture**

- [RN1] D. Patino, P. Riedinger, C. Iung, "Une approche prédictive pour la commande d'un convertisseur multicellulaire", septembre 2007, e-STA, e-revue <http://www.e-sta.see.asso.fr/>, 2007.
- [RN2] P. Riedinger, C. Zanne, Modélisation Formelle des Systèmes Dynamiques Hybrides. Application à la Machine Synchrone Autopilotee. *REE Revue de l'électricité et de l'électronique* (5)35, pp.78-82, 1998.

#### **Congrès internationaux avec comité de lecture et acte**

- [C1] U. Serres, J-C. Vivalda, P. Riedinger, On a class of switched linear systems, accepté à 8th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems, University of Bologna - Italy, September, 01-03 2010 Nolcos 2010.
- [C2] D. Patino, P. Riedinger, F. Ruiz, A predictive control approach for DC-DC power converters and cyclic switched systems, *IEEE ICIT 2010, International Conference on Industrial technology*, Chili, mars 2010.
- [C3] D. Patino, M. Baja, P. Riedinger, H. Cormerais, and J. Buisson Hybrid control methods for a Single Ended Primary Inductor Converter (SEPIC), in proceeding *European Control Conference*, Budapest Hongrie 2009 .
- [C4] P. Riedinger, M. Sigalotti, J. Daafouz, On the observability of the flying capacitor converter, In proceeding *European Control Conference*, Budapest Hongrie 2009.



- [C5] D. Patino, P. Riedinger, C. Iung Predictive control approach for multicellular converters, 34th Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society (IECON), Orlando : États-Unis d'Amérique, 2008.
- [C6] S. Almer, H. Fujioka, U. Jonsson, C. Kao, D. Patino, P. Riedinger, T. Geyer, G. Beccuti, G. Papafotiou, M. Morari, A. Wernrud, A. Rantzer. Hybrid Control Techniques for Synchronous DC-DC Converters Part I : The Step-Down Topology, In proc. of 26th American Control Conference, ACC'2007, New York City, USA, 2007.
- [C7] M. Bâja, D. Patino, P. Riedinger, H. Cormerais, J. Buisson, Hybrid control of a three-level three-cell dc-dc converter, In proc. of 26th American Control Conference, ACC'2007, New York City, USA, 2007.
- [C8] C. Iung, P. Riedinger, Optimal Control in Hybrid Systems, session plénière, 2nd IFAC Conference on Analysis and Design of Hybrid Systems, ADHS Alghero, Sardinia, Italy - June 7-9, 2006.
- [C9] P. Riedinger, J. Daafouz, C. Iung, About solving hybrid optimal control problems, in proceeding of Imacs'05, 17th IMACS World Congress Scientific Computation, Applied Mathematics and Simulation Paris, 11-15 July 2005.
- [C10] O. Auchtet, P. Riedinger, C. Iung, O. Malassé, Simplified first-principles modeling of glass furnaces for control purpose, IFAC DYCOPS 2004 (7th International Symposium on Dynamics and Control of Process Systems, Boston, US), 5-7 July 2004.
- [C11] O. Auchtet, P. Riedinger, C. Iung, O. Malassé, Glass furnaces simplified modeling for control and real-time simulation, ISIE04 (IEEE International Symposium on Industrial Electronics, 4-7 may, pp. 667-672, 2004, Ajaccio, France).
- [C12] P. Riedinger, J. Daafouz, C. Iung, Suboptimal switched controls in context of singular arcs. In proceeding 42th IEEE Conference on Decision and Control, pp. 6254 - 6259 Vol.6, Hawaii, USA, December, 2003.
- [C13] J. Daafouz, P. Riedinger, C. Iung, Observer-based switched control design for discrete-time switched systems. In proc. IEEE European Control Conference (ECC2003), University of Cambridge, UK. 1-4 september 2003.
- [C14] J. Daafouz, P. Riedinger, C. Iung, Stabilizing switched control design with performances. IFAC Conference on Analysis and Design of Hybrid Systems, ADHS'03, Saint-Malo, France. 16-18 juin 2003.
- [C15] J. Daafouz, P. Riedinger, C. Iung, Disturbance Attenuation Control for a Class of Hybrid Systems, proc. IEEE European Conference on Control (ECC'01), Porto, 2001.
- [C16] J. Daafouz, P. Riedinger, C. Iung, Static Output Feedback Control for Switched systems, proc. IEEE Conference on Decision and Control (CDC'01), Orlando, 2001.
- [C17] P. Riedinger, F. Kratz, C. Iung, C. Zanne, Linear Quadratic Optimization for Hybrid Systems, proc. IEEE Conference on Decision and Control (CDC'99), pp. 3059-3064, Phoenix, Decembre1999.

- [C18] P. Riedinger, C. Iung, Maximum Principle and Optimal control for hybrid systems : an hysteresis example. proc. IEEE System, Man and Cybernetics (SMC'99), pp. I.188-I.193, Tokyo, oct. 1999.
- [C19] P. Riedinger, C. Zanne, F. Kratz, Time Optimal Control of Hybrid Systems, in proceeding of IEEE American Conference on Control (ACC'99), pp. 2466-2470, San Diego, 2-4 juin 1999.
- [C20] P. Riedinger, C. Zanne, F. Kratz, Commande optimale des Systèmes Dynamiques Hybrides : Synthèse d'une loi de commande. proc. 3rd International Conference Industrial Automation, pp. 16.9-16.12, Montreal 7-9 juin 1999.
- [C21] P. Riedinger, C. Zanne, Modélisation Formelle des Systèmes Dynamiques Hybrides. Application à la Machine Synchrone Autopilotée. 3<sup>ime</sup> conférence internationale sur l'automatisation des procédés mixtes (ADPM98), pp. 398-402, Reims, mars 1998.

### Congrès national avec comité de lecture et acte

- [CN1] P. Riedinger, M. Sigalotti, J. Daafouz, Observabilité d'un convertisseur multi-niveaux via le principe d'invariance de Lasalle, 6ième Conférence Internationale Francophone d'Automatique, CIFA'2010, Nancy 2010.
- [CN2] D. Patino, P. Riedinger, C. Iung, Synthèse de commandes optimales pour les systèmes commutés cycliques. Applications aux convertisseurs de puissance. 5ème Conférence Internationale Francophone d'Automatique, CIFA'2008, Bucarest : Roumanie 2008.
- [CN3] D. Patino, P. Riedinger, C. Iung, "Une approche prédictive pour la commande d'un convertisseur multicellulaire", Journées Nationales du GDR MACS, JD-JN-MACS'07, 3, pp. 50-55, 2007.
- [CN4] P. Riedinger, C. Iung, J. Daafouz, Commande optimale des systèmes dynamiques hybrides : théorie et pratique. (CIFA'02) Conférence Internationale Francophone d'Automatique, Nantes, 2002.
- [CN5] P. Riedinger, C. Zanne, F. Kratz, C. Iung, Modélisation et Commande des Systèmes Dynamiques Hybrides. Deux exemples. Colloque de Recherche Doctorale AGIS'97, pp. 93-99. Angers, décembre 1997.

### Mémoire :

- [T1] P. Riedinger, *Contribution à la commande optimale des systèmes dynamiques hybrides*, Doctorat de l'Institut National Polytechnique de Lorraine, décembre 1999. Jury ; Président : C. Iung, Rapporteurs : J.L. Ferrier, M. Morari, Examineurs : A. Henrot, Y. Quenec'hdu, Directeurs : F. Kratz , C. Zanne.

Prix de Thèse de l'INPL et mention très honorable avec les félicitations du jury.

**Travaux en révision ou soumis :**

- [ER1] M. Baja, D. Patino, H. Cormerais, P. Riedinger, J. Buisson, C. Iung, Alternative Control Methods for a Four-level Three-cell DC-DC Converter, en revision à International Journal of Robust and Nonlinear Control.

# Chapitre 2

## Commande optimale des systèmes hybrides

Nos premières contributions à la commande optimale des systèmes hybrides sont d'ordre théorique avec l'établissement de conditions nécessaires d'optimalité à respecter le long des trajectoires du système Hamiltonien [100]. L'application de ces résultats sur des exemples de différentes natures (sauts autonomes [104] et/ou commandés) et pour différents critères (temps optimal [110], quadratique [106]) ont permis d'illustrer et de mettre en évidence les difficultés sous-jacentes à la résolution et à la synthèse de commandes optimales. Ces résultats font partie des premiers publiés dans le monde sur le sujet. Les principales difficultés proviennent des discontinuités de modèle qui induisent des conditions de transversalité à respecter aux instants de commutation. Un résultat majeur est d'avoir montré la nécessité d'utiliser conjointement la programmation dynamique et le principe du minimum de Pontryaguine dans la recherche des lois de commutations optimales [105]. Par la suite, ces travaux se sont poursuivis sur la recherche d'algorithmes adaptés à la résolution numérique sur la classe, plus simple, des systèmes commutés [103]. Malgré cette simplicité apparente, l'existence de solutions optimales est mise en défaut par la présence d'arcs singuliers [102]. Dans ces situations, nous avons montré qu'il était toujours possible de définir des solutions sous-optimales à partir des solutions singulières. Cette approche conduit à une relaxation du problème en considérant non plus les différents modes mais leur enveloppe convexe. Nous reviendrons plus abondamment sur la recherche de ces arcs singuliers dans le chapitre consacré à la commande des systèmes affines commutés.

### 2.1 Formulation du problème de commande optimale

La modélisation que nous utilisons pour représenter un système hybride est la suivante :

Pour un ensemble fini d'états discrets  $Q = \{1, \dots, Q\}$ , on associe une famille d'équations différentielles définies sur un intervalle de temps  $[a, b]$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ,  $b \in$

$\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ ,

$$\dot{x}(t) = f_q(x(t), u(t), t) \quad (2.1)$$

où

- $q \in \underline{Q}$
- l'état continu  $x(\cdot)$  prend ses valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ ,
- la commande continue  $u(\cdot)$  prend ses valeurs dans l'ensemble  $U_q$  inclus dans  $\mathbb{R}^{m_q}$  ( $m_q \in \mathbb{N}$ ).
- le champs  $f_q$  est supposé défini sur  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m_q} \times [a, b]$ ,  $\forall q \in \underline{Q}$

La dynamique discrète est définie par une fonction de transition  $\nu$  de la forme :

$$q(t^+) = \nu(x(t^-), q(t^-), d(t), t) \quad (2.2)$$

avec  $q(\cdot)$  l'état discret ( $q(t) \in \underline{Q}$ ) et  $d(\cdot)$  la commande discrète ( $d : [a, b] \rightarrow \underline{D}$  avec  $\underline{D} = \{1, \dots, D\}$  un ensemble fini).  $\nu$  est une application de  $\mathbb{R}^n \times \underline{Q} \times \underline{D} \times [a, b]$  dans  $\underline{Q}$ .

La variable discrète  $q(\cdot)$  est une fonction du temps constante par morceaux. Les notations  $t^-$  et  $t^+$  dans (2.2) correspondent respectivement aux limites à gauche et à droite de  $t$ .

La valeur de la fonction de transition discrète  $\nu$  dépend de deux sortes de phénomènes discrets qui affectent l'évolution de  $q(\cdot)$  :

- une modification de la commande discrète  $d$
- un événement issu de la partie continue correspondant à la validation d'une condition frontière sur  $(x, t)$  de la forme  $C_{(q,q')}(x(t), t) = 0$  qui modifie l'ensemble des états discrets atteignables.

Il est supposé que  $\forall (q, q') \in \underline{Q}^2$ ,  $C_{(q,q')} : \mathbb{R}^n \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^{r_q}$ , ( $r_q < n$ ). Ces conditions aux frontières peuvent représenter des seuils, des saturations, des hystérésis, des délais entre deux commutations, ... Elles déterminent comment la dynamique continue agit sur la fonction de transition discrète.

Un ensemble de fonctions de saut associées aux transitions d'état discret est également considéré :

$$x(t^+) = \Phi_{(q,q')}(x(t^-), t) \quad (2.3)$$

Avec l'occurrence d'une transition de  $q$  vers  $q'$ , l'état continu est alors réinitialisé de  $x(t^-)$  vers  $x(t^+) \in \mathbb{R}^n$ .

Les équations (2.1)(2.2) et (2.3) permettent de modéliser les différents phénomènes hybrides : sauts sur l'état et discontinuités sur le champs provoqués de manière volontaire ou involontaire. Ces équations définissent un système dynamique au sens de Bellman [21] si nous supposons qu'il n'y a pas de transitions simultanées, ni de phénomène zéno ( i.e. une accumulation d'un nombre infini de commutations en un temps fini). On n'aura aucun mal à les traduire sous la forme d'un automate hybride déterministe [73].

Posons  $[t_0 = a, t_1, \dots, t_i, \dots, t_m = b]$  et  $[q_0, q_1, \dots, q_i, \dots, q_m]$  ( $b$  peut être infini ainsi que  $m$  dans ce cas) les suites respectivement des instants de commutation et des modes associés à la commande  $(u, d)(\cdot)$  sur l'intervalle  $[a, b]$ .

On peut alors définir un critère hybride par :

$$\begin{aligned} J(u, d) &= \int_a^b L_{q(t)}(x(t), u(t), t) dt \\ &= \sum_{i=0}^m \int_{t_i}^{t_{i+1}} L_{q_i}(x(t), u(t), t) dt \end{aligned} \quad (2.4)$$

Une commande optimale  $(u, d)(\cdot)$  est alors une commande qui minimise  $J$  sur l'intervalle  $[a, b]$ .

La formulation du critère que nous venons de donner n'est pas la plus générale mais l'est suffisamment pour pouvoir illustrer les difficultés liées à la résolution d'un problème de commande optimale hybride. Nous aurions pu entre autre ajouter au critère des coûts associés aux transitions d'état discret et des coûts initial et terminal. On peut également à l'instar de l'état  $x$  inclure des sauts sur la variable  $t$ .

Dans cet esprit de simplicité, nous supposons que les conditions suivantes sont satisfaites :

1.  $\forall q, U_q$  est borné,
2.  $\forall q, f_q$  et  $L_q$  sont de classe  $C^1$ ,
3.  $\forall q, q', \Phi_{(q,q')}$  et  $C_{(q,q')}$  sont de classe  $C^1$ .

## 2.2 Les deux grands principes de la commande optimale

Deux grands principes permettent de traiter les problèmes de commande optimales : le principe du minimum de Pontryaguine et le principe de Bellmann. Ce dernier s'applique sur tout système dynamique muni d'un critère additif et conduit à la programmation dynamique sur des équations de récurrence. On l'utilise principalement sur des problèmes formulés en temps discret.

Les méthodes variationnelles s'appliquent lorsqu'il est possible d'évaluer la variation du critère en fonction de la variation de la commande. L'idée de base est de caractériser la commande optimale  $u^*$  par le fait qu'une commande  $u = u^* + \delta u$  doit donner un critère supérieur  $J = J^* + \delta J > J^*$ . En exprimant  $\delta J$  en fonction de  $\delta u$ , on peut espérer trouver des caractérisations de  $u^*$ .

Le théorème de référence est le principe du minimum de Pontryaguine [97], [23]. Il transforme le problème d'optimisation global dans le temps en un problème local.

### 2.2.1 La programmation dynamique et les équations d'Hamilton Jacobi Bellman (HJB)

Les premiers travaux sur la commande optimale qui s'inscrivent dans le cadre général des systèmes hybrides sont dus à Branicky [27]. La formulation que nous

donnons est une adaptation du résultat original au problème que nous venons de décrire.

**Théorème 1 :** Si une trajectoire admissible  $(x, q)(\cdot)$  déterminée par la donnée de la condition initiale  $(x_0, q_0)(\cdot)$ , de la commande  $(u, d)(\cdot)$ , est optimale alors les conditions suivantes sont vérifiées par la fonction coût  $V$  :

(a) pour presque tout  $t \in [a, b]$ ,

$$\frac{\partial V(x(t), q(t), t, b)}{\partial t} = - \inf_u \left\{ L_{q(t)}(x(t), u(t), t) + \left[ \frac{\partial V(x(t), q(t), t, b)}{\partial x} \right]^T f_{q(t)}(x(t), u(t), t) \right\} \quad (2.5)$$

(b) pour presque tout  $t$  et pour tout  $d \in \underline{D}$

$$V(x(t), q(t), t, b) \leq V(x', q', t, b) \quad (2.6)$$

avec

$$\begin{aligned} q' &= \nu(x(t), q(t), d, t) \\ x' &= \Phi_{(q, q')}(x(t), t) \end{aligned}$$

Ces équations reposent sur le principe d'optimalité de Bellman [21] : (2.5) est l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman et (2.6) est une application directe du principe de programmation dynamique. L'exemple d'un système monodimensionnel avec un phénomène d'hystérésis a été résolu numériquement par Branicky [27].

## 2.2.2 Le principe du minimum de Pontryaguine

Le principe du minimum (PM) [97] est un principe qui peut être appliqué sur des problèmes d'optimisation comportant des conditions spécifiques et techniques variées (frontières, temps final libre, contraintes, etc.). Ainsi et suivant les hypothèses de régularité faites sur les données, plusieurs versions du PM peuvent être énoncées. Nous avons volontairement choisi dans notre formulation ((2.1), (2.2), (2.3) et (2.4)) des hypothèses fortes sur la régularité des données afin de ne pas masquer sous une technicité mathématique trop importante les problèmes posés par une formulation hybride. Pour des hypothèses faibles, nous renvoyons aux travaux de Sussmann [130]. D'autres auteurs ont également proposé plus récemment des versions du principe du minimum adaptées aux systèmes hybrides [124, 44].

Considérons pour chaque mode  $q$  la fonction Hamiltonienne :

$$H_q(p, p_0, x, u, t) = p^T f_q(x, u_q, t) + p_0 L_q(x, u_q, t) \quad (2.7)$$

et le système Hamiltonien associé

$$\dot{x} = \frac{\partial H_q}{\partial p} \quad \dot{p} = -\frac{\partial H_q}{\partial x} \quad (2.8)$$

avec  $p_0$  une constante positive ou nulle ( $p_0 \geq 0$ ) et  $p$  la variable adjointe.

**Théorème 2 :** Si  $(u^*, d^*)(\cdot)$  et  $(x^*, q^*)(\cdot)$  sont respectivement une commande optimale admissible et la trajectoire associée pour le problème (2.1), (2.2), (2.3) et (2.4), alors il existe une fonction continue par morceaux  $p^*(\cdot)$  et une constante  $p_0^* \geq 0$ ,  $(p_0^*, p^*(t)) \neq (0, \mathbf{0})$  sur  $[a, b]$ , telles que :

1. le sixtuplet  $(p^*, p_0^*, x^*, q^*, u^*, d^*)(\cdot)$  satisfait le système Hamiltonien associé (2.8) presque partout

2. Pour tout  $t$ ,  $(p^*, p_0^*, x^*, q^*)(t)$  vérifie la condition de minimum :

$$H_{q^*}(p^*, p_0^*, x^*, u^*, t) = \inf_{u \in U_{q^*}} H_{q^*}(p^*, p_0^*, x^*, u, t) \quad (2.9)$$

3. Aux instants de commutation  $t_i$ ,  $i = 0, \dots, m$ , les conditions de transversalité sont satisfaites :

Il existe un vecteur  $\pi_i^*$  tel que

$$p^*(t_i^-) = \left[ \frac{\partial \Phi_{(q_{i-1}, q_i)}^T(x(t_i^-), t_i)}{\partial x} \quad 0 \right] \nabla V_{q_i}(x(t_i^+), t_i) + \frac{\partial C_{(q_{i-1}, q_i)}^T(x(t_i^-), t_i)}{\partial x} \pi_i^* \quad (2.10)$$

$$H^*(t_i^-) = - \left[ \frac{\partial \Phi_{(q_{i-1}, q_i)}^T(x(t_i^-), t_i)}{\partial t} \quad 1 \right] \nabla V_{q_i}(x(t_i^+), t_i) - \frac{\partial C_{(q_{i-1}, q_i)}^T(x(t_i^-), t_i)}{\partial t} \pi_i^* \quad (2.11)$$

$$\text{avec } \nabla V_{q_i}(x(t_i^+), t_i) = [p^{*T}(t_i^+) - H^*(t_i^+)]^T.$$

**Remarque 1** Les notations dans (2.10), (2.11) impliquent :  $\pi_i^* = 0$  si  $t_i$  est un instant de commutation sans condition aux frontières.

**Remarque 2** Les équations (2.10) et (2.11) doivent être adaptées si des contraintes sur l'état  $(x, q)$  à l'instant initial  $t = a$  et final  $t = b$  sont imposées. (voir formulation classique du PM)

Nous avons publié la démonstration de ce théorème dans [105]. La prise en compte et l'intégration des transitions discrètes ont été obtenues de manière récurrente en utilisant le principe de Bellman [21] et les conditions de transversalité associées à un coût et des contraintes terminales.

On peut observer que ces conditions nécessaires expriment des propriétés d'optimalité locale à la solution optimale. Elles ne permettent pas de déterminer la séquence optimale des modes. L'exploration des séquences nécessite une utilisation conjointe de la programmation dynamique sur le graphe de l'automate hybride.

Un exemple complet résolu analytiquement (avec sauts sur la variable d'état et changement de dimension) est présenté dans [105] et permet d'illustrer sur un critère en temps optimal cette version hybride du PM.

Un autre exemple académique où une discontinuité de champs de vecteur intervient le long d'une droite, est également proposé pour illustrer l'article de Sussmann [130] par Piccoli [96]. Dans [104], nous avons déterminé via le PM analytiquement la solution de l'exemple proposé par [27]. Cet exemple nous a permis d'illustrer les difficultés qu'une recherche numérique peut engendrer.



## 2.3 Les méthodes de résolution

Il existe plusieurs façons de résoudre numériquement un problème de commande optimale. La manière la plus directe consiste tout simplement à traiter le problème de commande optimale comme un problème d'optimisation classique. Relativement aisée à mettre en oeuvre par sa très grande souplesse (prise en compte des contraintes en l'espace et en temps aisées), cette façon de procéder comporte néanmoins quelques inconvénients : la lourdeur des calculs due à la dimension du problème, une précision moyenne, la possibilité de terminer sur un minimum local et le renoncement à une approche analytique ou à la synthèse d'un feedback [25].

Les autres méthodes que l'on peut qualifier d'indirectes, utilisent les deux grands principes énoncés précédemment. Elles sont plus difficiles à mettre en oeuvre, plus sensibles mais permettent d'obtenir une plus grande précision voire une commande en boucle fermée [131].

Dans un contexte hybride, la résolution de ces conditions nécessaires est particulièrement difficile et on ne sait pas proposer d'algorithmes généraux capables de terminer. Ces nouvelles versions font intervenir la programmation dynamique pour l'exploration des trajectoires discrètes admissibles et des conditions locales d'optimalité liées à la dynamique continue incluant des conditions de raccordement aux instants de discontinuité. On retrouve alors pleinement les difficultés liées à la résolution des problèmes optimaux discrets et continus mais ces difficultés sont décuplées par l'imbrication des deux problèmes.

Du point de vue numérique, des efforts importants sont faits par la communauté scientifique pour parvenir à une mise en oeuvre pratique. Les résultats pour l'instant se limitent soit à des exemples académiques, soit à des systèmes ayant une complexité issue du couplage continu-discret relativement faible (mode suivant une partition de l'espace d'état ou systèmes commutés sans contrainte).

En dehors d'exemples ayant servi à illustrer les différents principes, les principaux travaux proposés dans la littérature imposent une séquence de commutation avant de faire une recherche exhaustive sur ces séquences. Pour chaque séquence donnée, l'optimisation consiste à déterminer les instants de commutation optimaux et la commande continue.

### 2.3.1 Les méthodes indirectes

#### 2.3.1.1 Par le principe du minimum

La résolution des conditions nécessaires du PM pour un système classique est un problème de valeurs aux frontières (TPBV : Two point boundary values). Les méthodes de tir [95, 131] sont utilisées pour résoudre numériquement ce problème. La procédure consiste à déterminer une valeur initiale sur le système Hamiltonien de sorte que les conditions frontières finales soient satisfaites.

1. On choisit un couple initial  $p_0 = (x, \lambda)(t_0)$  admissible i.e. vérifiant les conditions initiales et de transversalité.

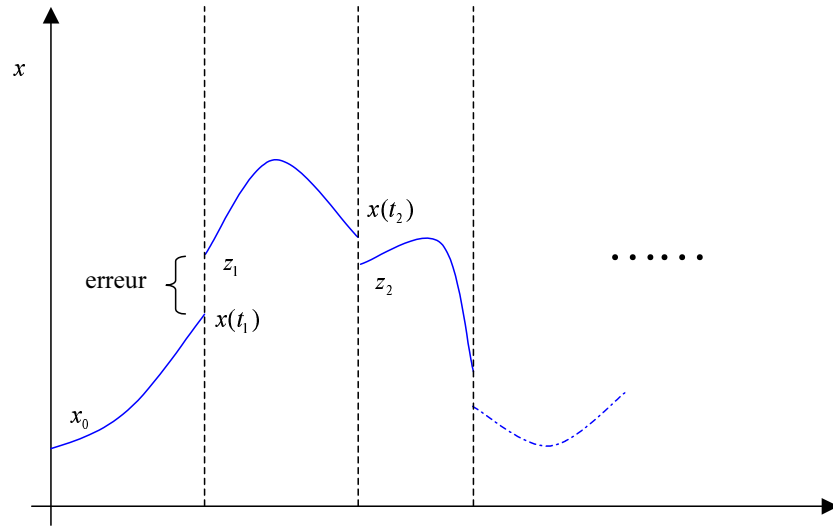


FIGURE 2.1 – Formulation tirs multiples

2. On intègre à l'aide d'un schéma numérique le système Hamiltonien (2.8) avec une commande déterminée à chaque pas par la minimisation de l'Hamiltonien (2.9).
3. On vérifie si les conditions finales et de transversalité (2.10),(2.11) sont satisfaites ou non.
4. Si oui, on arrête sinon on corrige le tir en modifiant  $p_0$  et on recommence.

Le choix du mécanisme de correction s'effectue en observant que l'ensemble des conditions de transversalité à satisfaire aux deux bouts de l'équation différentielle peut s'exprimer comme une contrainte égalité, de type

$$G(p_0, p_{t_f}(p_0)) = 0. \quad (2.12)$$

On utilise alors une méthode de recherche d'un zéro.

Dans la pratique, le choix  $\lambda(t_0)$  n'est pas évident car non physique. De plus, la sensibilité de  $p_{t_f} = (x_{t_f}, \lambda_{t_f})$  par rapport à  $p_0$  est grande (une petite erreur initiale se traduit par une grosse erreur finale). Il est donc préférable d'utiliser une méthode de tirs multiples [25], [95] (Figure 2.1).

L'intégration du système Hamiltonien est mal conditionnée : par exemple dans le cas d'un système linéaire, si le système direct à une valeur propre stable, elle se retrouve dans le système adjoint mais de signe opposé conduisant à une dynamique instable. Pour éviter ce mauvais conditionnement, il peut être préférable de procéder de la manière suivante :

1. On choisit une commande  $u$  et une condition initiale  $x_0$  pour le système direct.
2. On intègre le système direct correspondant à la première équation dans (2.8).

3. On intègre en temps rétrograde le système adjoint (deuxième équation de (2.8)) en partant de la condition de transversalité ad hoc  $\lambda(t_f) = \lambda_0 \frac{\partial \phi}{\partial x}(t_f, x(t_f))$  et en utilisant les valeurs de  $x$  générées au pas précédent.
4. On vérifie si les conditions d'optimalité (2.9) sont satisfaites ou non.
5. Si oui on arrête sinon on corrige la commande à l'aide d'une procédure du gradient sur  $\frac{\partial H}{\partial u}$ ) et on retourne au point 2.

La généralisation au cas des systèmes hybrides est obtenue à la manière d'un problème de tirs multiples : pour une séquence de mode donnée, on intègre les contraintes de transversalité aux instants de commutations dans la contrainte (2.13) :

$$G(p_{t_0}, \dots, p_{t_i^-}, \pi_i, p_{t_i^+}, \dots, p_{t_f}) = 0 \quad (2.13)$$

Le choix des conditions "initiales" concerne à présent chaque couple, en début de séquence,  $p_{t_i^+} = (x_{t_i^+}, \lambda_{t_i^+}, t_i)$  et le multiplicateur de Lagrange  $\pi_i$ . Puis on utilise une recherche exhaustive sur les séquences de commutations utilisant éventuellement la technique de "Branch and Bound" [123].

On peut citer [124] comme auteurs ayant employé cette démarche avec le premier algorithme et [7, 6] pour le second.

### 2.3.1.2 Par le principe de Bellmann

Les équations aux dérivées partielles (2.5) nécessitent l'emploi d'une méthode de discrétisation spatiale et temporelle (différences finies, éléments finis, volumes finis,...). Cette méthode lourde, est particulièrement avantageuse si la minimisation de l'Hamiltonien permet de déterminer  $u = u(x, \lambda, t)$  auquel cas la résolution de l'équation de HJB fournira une commande en boucle fermée.

Résoudre les équations d'HJB (2.5) revient à estimer la fonction coût  $V$  aux points d'intersection de la grille de discrétisation. Hélas, la possible discontinuité de la fonction de coût  $V$  par rapport à  $x$  et  $t$  est un obstacle à la résolution. A cela, il faut bien sûr ajouter la satisfaction de la condition d'optimalité (2.6) dans le cas hybride.

Une littérature abondante sur la résolution des équations d'HJB existe en présence de commutations et de commande impulsionnelle [65], [22]. Une adaptation de ces résultats au cas hybride a été proposée dans [29] et différents algorithmes suggérés. Mais l'examen critique de ces résultats ne laisse pas transparaître une praticabilité évidente due essentiellement à la condition (2.6). Seuls deux des quatre algorithmes proposés sont réellement testés sur l'exemple simple de l'hystérésis et la solution obtenue n'est que partielle comme nous l'avons souligné dans [140].

Pour des systèmes affines par morceaux suivant une partition de l'espace d'état, les auteurs de [71] ont proposé une approche basée sur une relaxation de l'algorithme de programmation dynamique permettant d'obtenir une borne inférieure et supérieure sur la fonction coût. Cette méthode complète les travaux antérieurs [56], [57], [99] et conduit à une commande par retour d'état sous optimale pour un critère quadratique.

Dans un contexte d'une modélisation MLD (Mixed Logical Dynamic), et/ou d'approximations affines par morceaux, la synthèse de régulateur quadratique est également résolue par des algorithmes de programmation MIP (Mise Integer Programming) [1], [2] et [37].

### 2.3.2 Les méthodes directes

Il s'agit ni plus ni moins que de traduire la formulation du problème de commande optimale sous la forme d'un problème d'optimisation non linéaire avec contraintes puis d'utiliser une méthode adéquate de résolution en fonction de la nature des équations obtenues [25], [120], [52].

#### 2.3.2.1 Une formulation naturelle sous la forme d'un algorithme de tirs multiples

Une trajectoire hybride peut être vue comme la succession de  $N$  phases. Une phase est une portion de la trajectoire où le mode reste constant. A l'intérieur d'une phase  $k$ , l'état discret,  $q_k$ , est fixé et la dynamique est déterminée par

$$\dot{x}(t) = f_{q_k}(x(t), u(t), t), \quad t_{I_k} \leq t \leq t_{F_k} \quad (2.14)$$

sous les contraintes

$$g_{L_q} \leq g_q(x, u, t) \leq g_{U_q} \quad (2.15)$$

avec des bornes sur l'état

$$x_{L_q} \leq x(t) \leq x_{U_q} \quad (2.16)$$

et la commande

$$u_{L_q} \leq u(t) \leq u_{U_q} \quad (2.17)$$

Aux instants de commutation, les phases sont liées par les conditions de raccordement de la forme générale :

$$\begin{aligned} \psi_L \leq & \psi(x(t_{I_1}), u(t_{I_1}), t_{I_1}, x(t_{F_1}), u(t_{F_1}), t_{F_1}, \\ & x(t_{I_2}), u(t_{I_2}), t_{I_2}, x(t_{F_2}), u(t_{F_2}), t_{F_2}, \\ & \dots \\ & x(t_{I_N}), u(t_{I_N}), t_{I_N}, x(t_{F_N}), u(t_{F_N}), t_{F_N}) \leq \psi_U \end{aligned} \quad (2.18)$$

On traduira sous 2.18 la contrainte associée à un saut contrôlé,

$$t_{I_{k+1}} = t_{F_k} \quad (2.19)$$

$$x(t_{I_{k+1}}) = x(t_{F_k}) \quad (2.20)$$

un saut sur l'état,

$$x(t_{I_{k+1}}) = \Upsilon(x(t_{F_k}), u(t_{F_k}), t_{F_k}) \quad (2.21)$$

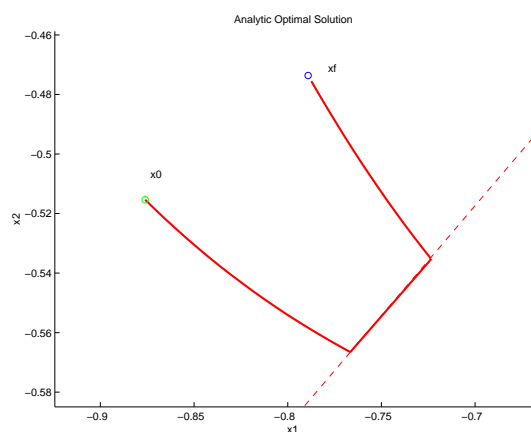


FIGURE 2.2 – Traj. opt. singulière  $J = 0.7869$

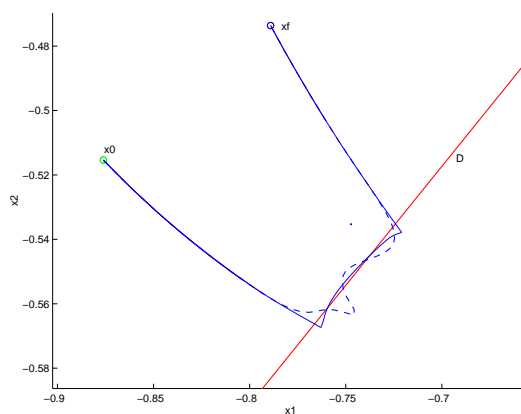


FIGURE 2.3 – Sol. numériques par algo. de tir simple (en pointillés,  $J = 0.7875$ ) et de tirs multiples (plein  $J = 0.7874$ )

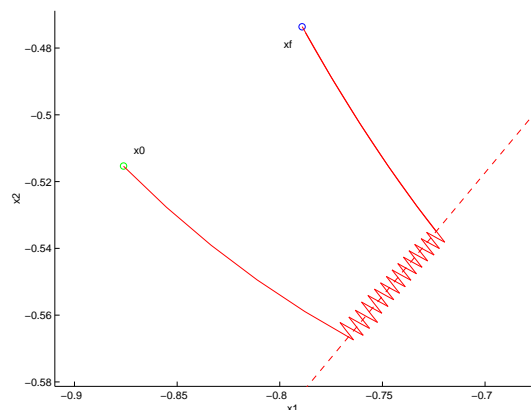


FIGURE 2.4 – Traj. opt. avec contrainte : 32 commutations maximum,  $J = 0.7874$ .

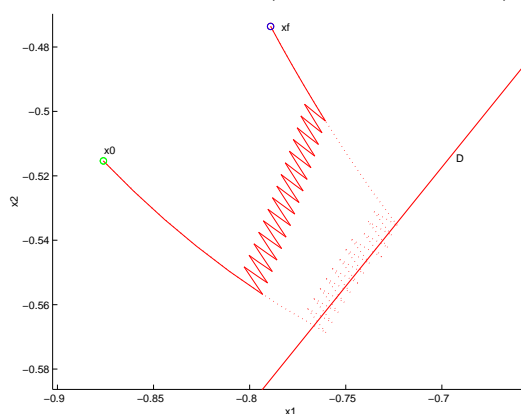


FIGURE 2.5 – Traj. opt. avec temps min. d'activation  $\Delta t = 0.02$ . Pointillés : sans limitation sur le nb de commutations. Sol. opt. obtenue pour 24 com.,  $J = 0.7875$ . Plein : pour exactement 32 com.,  $J = 0.8043$

ou encore un saut autonome,

$$C_{q_k, q_{k+1}}(x(t_{F_k}), t_{F_k}) = 0. \quad (2.22)$$

En résumé, on considère une collection de phases correspondant à une séquence  $q_k$ ,  $k = 1 \dots N$ , un système dynamique contraint dans chaque phase et un ensemble de conditions évaluées à la frontière de chaque phase. Cette formulation du problème apparaît comme une formulation d'un problème de tirs multiples [95] utilisé pour réduire la sensibilité des méthodes de tirs [25], [73].

Dans un problème de tir classique, la méthode de tirs multiples consiste à découper l'intervalle de temps en  $M$  segments plus petit  $[t_m t_{m+1}]$ , d'ajouter a priori une condition initiale de tir  $x_m^0$  sur chaque segment  $m$  et une contrainte de continuité pour forcer la continuité de l'état à la jonction des segments i.e.  $x_m(t_{m+1}) = x_{m+1}^0$ . Comme des variables et des contraintes additionnelles sont ajoutées, la taille du problème augmente mais la robustesse est améliorée [25]. Pour les systèmes hybrides, on parvient naturellement à ce type de formulation.

À présent pour résoudre numériquement ce problème d'optimisation, pour une séquence de mode fixée  $q_k$ ,  $k = 1 \dots N$ , on utilise un algorithme standard de programmation non linéaire. On répète ensuite la procédure d'optimisation avec une autre séquence.

Nous avons proposé cet algorithme et illustré son utilisation dans [103] pour un problème de commande optimale en temps (figures 2.2, 2.3, 2.4 et 2.5). On peut noter que l'algorithme de tirs multiples permet de prendre en compte les discontinuités de champs à droite et à gauche des points de recollement ce qui n'est pas le cas dans une formulation de tir simple qui effectuera un lissage à la discontinuité. La souplesse de la formulation permet entre autres de prendre en considération des contraintes concernant le temps minimum d'activation d'un mode, le nombre de commutations ou encore limiter le nombre total de commutations via les contraintes (2.18). Nous avons ainsi montré que cette approche permettait d'obtenir un résultat alors que le principe du minimum dans cette situation était inopérant en raison de la présence d'un arc singulier dans la solution (voir les figures 2.2, 2.3, 2.4 et 2.5).

## 2.4 Le cas des systèmes commutés sans contrainte

La résolution d'un problème de commande optimale dans le cadre d'un système commuté sans contrainte spatiale ou temporelle, revient à déterminer à la fois une suite optimale comportant les instants de commutation et les modes empruntés et une commande optimale continue associée au mode actif. Ce problème bien que restreint peut être qualifié de difficile.

Dans [137], les auteurs proposent une approche originale : pour une séquence imposée de modes, le problème consistant à déterminer les instants de commutations optimaux est transformé en un problème aux conditions initiales où les instants de commutation sont fixés. L'idée consiste à normaliser la longueur de

l'intervalle de temps séparant deux instants de commutation à l'aide d'un changement de variable et par l'introduction de variables supplémentaires. Les instants de commutations sont alors fixés et les degrés de liberté se reportent sur le choix des conditions initiales pour les variables supplémentaires introduites. Cette technique suppose que le nombre de commutations ainsi que la séquence des modes soient fixés. Les auteurs de cet article proposent alors de faire varier ces paramètres pour établir la meilleure séquence. L'application de ce résultat sur un critère quadratique est exposée dans la suite de cet article.

M. Egerstedt et al. optimisent les instants de commutation pour des systèmes commutés par un algorithme du gradient en considérant les fonctions de sensibilité du critère vis à vis de ces instants [45], [136].

Pour la même problématique dans [106, 110] nous avons développé une méthode basée sur les conditions nécessaires du PM. Nous y faisons l'observation suivante : la dynamique d'un système commuté sans contrainte spatiale ou temporelle peut être décrite par un système continu unique :

$$\dot{x}(t) = \sum_{q=1}^Q \alpha_q(t) f_q(x(t), u(t), t) \in \mathbb{R}^n \quad (2.23)$$

avec  $\alpha_q(t) \in \Delta$  où  $\Delta = \left\{ \alpha_q \in \{0, 1\} \mid \sum_{q=1}^Q \alpha_q = 1 \right\}$ .

En effet, dans cette situation comme la fonction de transition discrète (2.2) se réduit à  $q(t^+) \equiv d(t)$  avec un ensemble de commandes discrètes égal à  $\underline{D} = \underline{Q}$ , on peut parfaitement se ramener à la forme (2.23). A chaque instant, le sous système actif est donc sélectionné via la commande  $\alpha_q$ .

L'application du PM montre alors que la stratégie de commutation doit satisfaire la condition :

A chaque instant  $t$ , le quadruplet  $(p^*, p_0^*, x^*, q^*)(t)$  vérifie la condition de minimum :

$$H_{q^*}(p^*, p_0^*, x^*, u^*, t) = \min_{q \in \underline{Q}} \inf_{u \in U_q} H_q(p^*, p_0^*, x^*, u, t) \quad (2.24)$$

Cette relation signifie que le sous système actif à chaque instant est celui qui possède le plus petit Hamiltonien.

La recherche des instants de commutation est alors déterminée par l'étude des différences  $H_q(p^*, p_0^*, x^*, u^*, t) - H_{q'}(p^*, p_0^*, x^*, u^*, t)$  pour la donnée de l'état  $(x^*, q^*)$  et de la commande optimale  $u^*$  à un instant  $t$ . Il est alors montré que lorsque les champs  $f_q$  sont linéaires, la différence ci-dessus satisfait une équation différentielle dont on connaît la solution. La condition de minimum (2.24) implique qu'une condition de saut du mode  $q$  vers le mode  $q'$  est satisfaite lorsque cette différence s'annule et devient positive.

L'exploitation de ce résultat nous a permis de déterminer la commande optimale pour un critère en temps optimal sur un système commuté linéaire [110]. Il a été également possible d'établir une généralisation de la commande L.Q. à ces systèmes [106] (Figure 2.6). La commande stabilisante est alors déterminée par la résolution d'une séquence d'équations différentielles de Riccati avec, aux

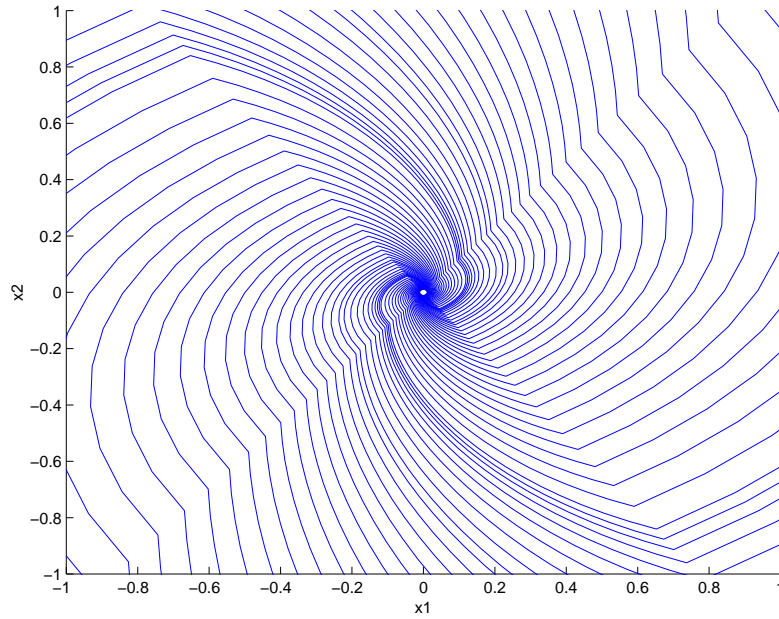


FIGURE 2.6 – Trajectoires optimales pour un système linéaire commuté et un critère quadratique [106]

instants de commutation, l'établissement de conditions de passage à partir des conditions de transversalité. Avec Jamal Daafouz, une extension au problème du rejet de perturbations de type  $H_\infty$  est exposée dans [39]. La solution repose sur l'utilisation de la théorie des jeux différentiels non coopératifs où la fonction coût est  $C^1$  par morceaux.

## 2.5 Trajectoires singulières et existence de solutions hybrides.

L'inspection de la condition de minimum (2.24) révèle une situation particulière qui survient précisément aux instants de commutation.

Lorsqu'il existe un sous ensemble d'indices  $I \subset \underline{Q}$  pour lequel la condition de minimum est vérifiée, il existe une indétermination dans le choix du mode à choisir. Cette situation ne prête pas à conséquence si elle intervient de manière ponctuelle. En revanche, si elle se prolonge sur un intervalle de temps de mesure non nulle, on a à faire à des arcs de solutions particuliers dits singuliers [111, 133, 67, 98].

Nos travaux ont établi que la recherche d'une solution pour ce type de problème nécessite de relaxer le domaine de commande à son enveloppe convexe i.e.

$$co(\Delta) = \{\alpha_q \in [0, 1] \mid \sum_{q=1}^Q \alpha_q = 1\}.$$



Les solutions alors obtenues sont soit purement hybrides, soit incorporent au moins un arc de trajectoire pour lequel la commande à ces valeurs incluses dans  $co(\Delta) \setminus \Delta$  et n'est donc pas admissible.

On montre alors dans [102] que les solutions de ce problème étendu peuvent être approchées d'aussi près que l'on veut, sur horizon fini, par les solutions du problème hybride. Ce point est déterminant pour démontrer la non existence de solution optimale hybride. Il est en effet possible d'exhiber une suite de solutions sous optimales hybrides qui converge vers la solution singulière non admissible pour le système hybride. Un théorème de densité récent étend ce résultat sur horizon infini [63].

L'existence de solutions singulières est loin d'être connue comme nous le faisons remarquer dans [101]. Nous verrons au chapitre consacré à la commande des systèmes commutés affines qu'il est loin d'être un simple cas d'école mais le plus souvent la règle pour ces systèmes.

## 2.6 Conclusion

Le bilan que l'on peut tirer sur la commande optimale des systèmes hybrides pour les dix dernières années est assez contrasté. Malgré l'extension du principe du minimum et des équations Hamilton-Jacobi-Bellmann au cas hybride, les conditions nécessaires énoncées très générales ne permettent pas d'apporter une solution numérique globale.

Devant la complexité et la diversité des phénomènes représentés, le développement de schémas numériques et de méthodes de résolution s'est fait sur des formulations restreintes du problème de commande. Les contributions les plus significatives s'adressent à la classe des systèmes affines par morceaux et à la classe des systèmes commutés sans contrainte. Pour la première, le mode de fonctionnement est attaché à une partition fixe de l'espace d'état et les méthodes privilégiées utilisent la programmation dynamique et les équations de HJB. Pour la seconde, seul des sauts commandés sont pris en compte sans restriction de temps ou de lieu et les méthodes s'apparentent à des méthodes de tirs.

L'intégration de contraintes sur la disponibilité des modes est très largement sous traitée. Ces contraintes engendrent un nombre de chemins discrets admissibles que l'on ne sait pas prévoir a priori en raison de leur dépendance à l'état continu. La nécessité de les explorer conduit à une explosion combinatoire.

Nous pensons cependant que des formulations à base de modèle de complémentarité qui intègrent directement les contraintes de sauts autonomes sous un formalisme unique peut être une voie d'investigation pour étendre les résultats des systèmes commutés à des systèmes de complémentarité commutés.

## Chapitre 3

# Etude des cycles et de leur stabilité

Les systèmes périodiques forment une classe importante de SDH. On peut citer les convertisseurs de puissance, le cycle cardiaque, le moteur à explosion, etc... A des fins d'analyse et de synthèse de commande, il est généralement important de pouvoir prévoir ces cycles et d'en déterminer la stabilité.

Une première approche largement employée par la communauté des électrotechniciens consiste à étudier le modèle moyen ou le modèle d'état moyen [84]. Cette technique a donné des résultats satisfaisants lorsqu'elle peut être appliquée. Elle réduit le problème de commande à la synthèse d'un correcteur pour un système linéaire. Le régime permanent pour le système original est alors un cycle autour d'un point de fonctionnement. Malheureusement, la stabilité de ce cycle ne peut généralement pas être garantie et peut conduire à des comportements chaotiques [64]. Comme la stabilité du cycle dépend de la dynamique rapide et des instants de commutation, l'effet de filtrage dû à la moyennisation ne permet pas la maîtrise du contenu harmonique du signal généré. L'apparition de sous harmoniques de la période de commutation est souvent constatée.

L'étude et la détermination de ces cycles sont donc importantes [13, 35, 113, 138]. La recherche analytique de ces cycles est néanmoins rendue impossible par la complexité de la dynamique. Seule la voie numérique peut être envisagée.

L'approche classique consiste à utiliser les sections de Poincaré. Le problème se réduit à la recherche d'un point fixe pour un système dynamique non linéaire discret [58, 128, 54, 46]. La principale difficulté est alors d'obtenir une récurrence correcte correspondant aux instants d'intersections de la trajectoire avec la section.

Une méthode pratique et rapide pour calculer les cycles limites des SDH a été proposée en collaboration avec Damien Flieller et Jean Paul Louis. Cette collaboration fait suite à une action spécifique (AS 192) du CNRS qui a rassemblé une partie de la communauté des électrotechniciens et automaticiens sur des problèmes liés au pilotage des dispositifs électrotechniques à l'aide de méthodes hybrides.

La formulation d'un algorithme rapide a été possible par le calcul effectif des fonctions de sensibilité dans le cadre général d'un SDH [48]. Ces dérivées intègrent notamment les sauts consécutifs aux discontinuités sur l'état et sur la dynamique

qui sont produits aux instants de commutation. L'intégration et la justification de ces résultats sont obtenues par le calcul des dérivées généralisées via la théorie des distributions. En fin d'exécution, l'algorithme calcule non seulement le cycle mais également la matrice Jacobienne correspondant au système linéarisé échantillonné. La stabilité du cycle est directement déduite des valeurs propres associées. Ce travail peut servir comme point de départ pour des analyses de sensibilité, le calcul des bassins d'attractions et la synthèse de commande. Il est notamment une alternative lorsque les techniques de moyennisation ne s'appliquent pas. L'extension aux calculs de sensibilité vis-à-vis d'un paramètre est déclinée pour cette classe générale de SDH.

Sa mise en oeuvre sur des dispositifs électrotechniques pour lesquels le modèle moyen est inopérant, a permis de prévoir le comportement asymptotique et conduit à la possibilité d'effectuer des réglages de correcteurs par analyse de sensibilité.

Le calcul de ces fonctions de sensibilité pour un SDH a des retombées pratiques concernant l'optimisation de critères et notamment lors de la synthèse de lois de commandes prédictives comme nous l'exposons au chapitre consacré à la commande des systèmes affines commutés.

### 3.1 Modèle dynamique

Partant d'une formulation générale d'un SDH définie par :

- Une collection finie de modes  $Q = \{1, \dots, l\}$
- Un ensemble d'équations différentielles

$$\dot{x}(t) = f_q(x(t), u(t), t) \quad (3.1)$$

où  $q \in Q$ ,  $x(\cdot) \in \mathbb{R}^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ),  $u(\cdot) \in \mathbb{R}^m$  ( $m \in \mathbb{N}$ ), les champs  $f_q$  sont supposés définis et continûment différentiables sur  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$ ,  $\forall q \in Q$ .

- Une fonction de transition discrète  $\sigma$  qui orchestre les sauts autonomes et contrôlés :

$$(q(t^+), x(t^+)) = \sigma(q(t^-), x(t^-), d(t), u(t^-), t) \quad (3.2)$$

où  $d$  prend ses valeurs dans un ensemble fini et joue le rôle d'une commande discrète. Il est supposé que l'automate hybride associé n'est pas zeno. Autrement dit que l'ensemble des temps où  $(q(t^+), x(t^+)) \neq (q(t^-), x(t^-))$  est fini sur tout intervalle de temps fini.

### 3.2 Mouvement périodique

En considérant que la stratégie de commutation conduit à un comportement périodique, chaque période peut être divisée en  $m$  sous intervalles correspondant à l'emploi d'un mode unique. Sur l'intervalle  $i$  de la période  $n$ , le système est décrit (voir figure(3.1)) par

$$\frac{dx}{dt}(t) = f_i(x(t), u(t), t), \quad t_{i-1}^n \leq t \leq t_i^n \quad \text{pour } i = 1, \dots, m \quad (3.3)$$

où l'indice  $i = 1, \dots, m$  fait référence à l'élément  $i$  de la séquence des modes  $s_q = \{s_1, s_2, \dots, s_m\} \in Q^m$ ,  $t_i^n$  est l'instant de commutation  $i$  de la période  $n$  et  $t_m^n = t_0^{n+1}$ .

Nous supposons que la stratégie de commutation est déterminée par la satisfaction d'une contrainte égalité à chaque instant de commutation  $t_i^n$ ,  $i = 0, \dots, m$  :

$$g_i(x(t^-), u(t^-), t^-) = 0 \quad (3.4)$$

qui dépend implicitement du mode courant et du suivant.  $g_i : \mathbb{R}^n \times U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est continûment différentiable. Aux instants de commutation, un saut sur l'état est défini en utilisant une fonction de saut également continûment différentiable  $\gamma_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  telle que :

$$x(t_i^{n+}) = \gamma_i(x(t_i^{n-})). \quad (3.5)$$

Pour une condition initiale donnée, l'intégration de (3.3) sur l'intervalle de temps  $[t_0^n, t_m^n]$  avec des instants de commutation définis par (3.4) et des sauts par (3.5) conduit à une relation discrète liant les états en début de chaque période :

$$x_0^{n+1} = x(t_m^n) = \mathcal{F}(x_0^n, u^n, T^n) \quad (3.6)$$

avec les contraintes associées

$$\mathcal{G}(x_0^n, u^n, T^n) = G(x_0^n, x_1^n, \dots, x_m^n, u^n, T^n) = 0 \quad (3.7)$$

où

- $x_0^n = x(t_0^n)$  est l'état initial en début de période  $n$
- $u^n = u|_{[t_0^n, t_m^n]}$  est l'entrée sur le système
- $T^n = [t_0^n, t_1^n, \dots, t_m^n]^T$  est le vecteur des instants de commutation
- $G = [g_0, g_1, \dots, g_m]^T$  est le vecteur des contraintes de commutation.

Naturellement, une trajectoire périodique implique :  $x_0^{n+1} = x_0^n$ . Généralement il est impossible d'exprimer analytiquement les relations (3.6) et (3.7) et seule une évaluation numérique peut être envisagée. Une méthode de point fixe peut alors être utilisée pour déterminer la solution. Ce choix a deux inconvénients : il peut être extrêmement long et peut nécessiter plusieurs milliers d'itérations. Il nécessite que la relation  $\mathcal{F}$  soit une contraction.

Un gain de temps substantiel peut être obtenu en utilisant un algorithme de Newton à la condition de pouvoir exprimer correctement les sensibilités vis-à-vis des instants de commutation et des conditions initiales.

### 3.3 Calcul des cycles limites

Formellement, la condition initiale  $x_0$  et les instants de commutation  $T$  peuvent être calculés par l'algorithme de Newton suivant :

**Algorithme 1**

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ T \end{pmatrix}_{k+1} = \begin{pmatrix} x_0 \\ T \end{pmatrix}_k - J_k^{-1} \begin{pmatrix} x_m - x_0 \\ \mathcal{G} \end{pmatrix}_k \quad (3.8)$$

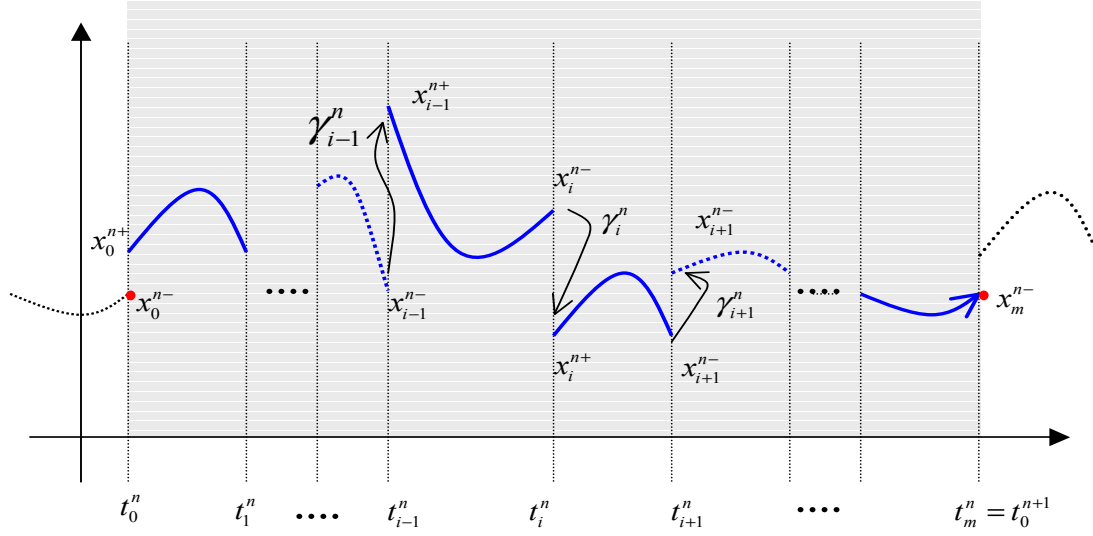


FIGURE 3.1 – The hybrid dynamic of the cycle

avec

$$J_k = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_m}{\partial x_0} - I & \frac{\partial x_m}{\partial T} \\ \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x_0} & \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial T} \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

Cet algorithme termine avec les instants de commutation et la condition initiale mais également avec l'évaluation numérique de la matrice du système échantillonné linéarisé sur le cycle. La stabilité du cycle est donc directement déduite par inspection des valeurs propres de cette matrice Jacobienne.

Un calcul précis des fonctions de sensibilité  $\frac{\partial x_m}{\partial x_0}$ ,  $\frac{\partial x_m}{\partial T}$ ,  $\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x_0}$  and  $\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial T}$  est donc nécessaire. Ce calcul doit intégrer les instants de commutations et de sauts sur l'état. Avec l'occurrence d'une commutation à l'instant  $t_i$ , nous noterons les limites à gauche et à droite d'une fonction  $h$  par  $h_i^- = \lim_{t \uparrow t_i} h(t)$  et  $h_i^+ = \lim_{t \downarrow t_i} h(t)$ . Le calcul de la matrice Jacobienne  $J$  se déduit de la proposition suivante que nous avons démontré dans [48] :

**Proposition 2 1.** *La sensibilité du vecteur d'état  $x_m^-$  à la fin du cycle vis-à-vis de la condition initiale  $x_0^-$  est déterminée par*

$$\frac{\partial x_m^-}{\partial x_0^-} = \Pi(t_m, t_0) \quad (3.10)$$

où pour  $j > i$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,

$$\Pi(t_j, t_i) = \varphi_j(t_j, t_{j-1}) \frac{d\gamma_{j-1}}{dx} \varphi_{j-1}(t_{j-1}, t_{j-2}) \cdots \frac{d\gamma_{i+1}}{dx} \varphi_{i+1}(t_{i+1}, t_i) \frac{d\gamma_i}{dx},$$

$\frac{d\gamma_i}{dx} = \frac{d\gamma_i}{dx} \Big|_{x(t_i^-)}$  et où les matrices de transition  $\varphi_i$  sont définies par,

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\varphi_i(t, t_{i-1}) = \frac{\partial f_i}{\partial x}\varphi_i(t, t_{i-1}) & t_{i-1} \leq t \leq t_i \\ \varphi_i(t_{i-1}, t_{i-1}) = I \end{cases} \quad (3.11)$$

2. La sensibilité du vecteur d'état  $x_m^-$  à la fin du cycle vis-à-vis des instants de commutation  $T$  est déterminée par

$$\frac{\partial x_m^-}{\partial T} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_m^-}{\partial t_0} = -\tilde{\Pi}(t_m, t_0)f_0 \\ \frac{\partial x_m^-}{\partial t_1} = \tilde{\Pi}(t_m, t_1)\Delta P_1 \\ \dots \\ \frac{\partial x_m^-}{\partial t_{m-1}} = \tilde{\Pi}(t_m, t_{m-1})\Delta P_{m-1} \\ \frac{\partial x_m^-}{\partial t_m} = f_m \end{bmatrix}^T \quad (3.12)$$

où  $\Delta P_i = \left(\frac{d\gamma_i}{dx}f_i(x_i^-, u, t_i)\right) - f_{i+1}(x_i^+, u, t_i)$  représente les sauts sur le champ de vecteurs aux instants de commutation  $t_i$ ,  $i = 0, \dots, m$  et où pour  $j > i$ ,

$$\tilde{\Pi}(t_j, t_i) = \frac{\partial x_j^-}{\partial x_i^+} = \varphi_j(t_j, t_{j-1})\frac{d\gamma_{j-1}}{dx}\varphi_{j-1}(t_{j-1}, t_{j-2})\dots\frac{d\gamma_{i+1}}{dx}\varphi_{i+1}(t_{i+1}, t_i) \quad (3.13)$$

3. La sensibilité des  $(m+1)$ - contraintes  $\mathcal{G}$  vis-à-vis de la condition initiale  $x_0^-$  est déterminée par

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x_0^-} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_0}{\partial x_0^-} \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_0^-} = \frac{\partial g_1}{\partial x_1^-} \frac{\partial x_1^-}{\partial x_0^-} = \frac{\partial g_1}{\partial x_1^-} \tilde{\Pi}(t_1, t_0) \\ \dots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_0^-} = \frac{\partial g_m}{\partial x_m^-} \frac{\partial x_m^-}{\partial x_0^-} = \frac{\partial g_m}{\partial x_m^-} \tilde{\Pi}(t_m, t_0) \end{bmatrix}. \quad (3.14)$$

4. La sensibilité des  $(m+1)$ -contraintes  $\mathcal{G}$  vis-à-vis des instants de commutation  $T$  est déterminée par

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial T} = \begin{bmatrix} \frac{dg_0}{dt_0} & \frac{dg_0}{dt_1} & \dots & \frac{dg_0}{dt_m} \\ \frac{dg_1}{dt_0} & \frac{dg_1}{dt_1} & \dots & \frac{dg_1}{dt_0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{dg_m}{dt_0} & \frac{dg_m}{dt_1} & \dots & \frac{dg_m}{dt_m} \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

suivant ces trois distinctions :

$$t_j < t_i, \quad \frac{dg_i}{dt_j} = \frac{\partial g_i}{\partial t_j} + \frac{\partial g_i}{\partial x_i^-} \tilde{\Pi}(t_j, t_i)\Delta P_j + \frac{\partial g_i}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t_j}, \quad (3.16)$$

$$t_j = t_i, \quad \frac{dg_i}{dt_i} = \frac{\partial g_i}{\partial t_i} + \frac{\partial g_i}{\partial x_i^-} f_i(x_i^-, u, t_i) + \frac{\partial g_i}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t_i}, \quad (3.17)$$

$$t_j > t_i, \quad \frac{dg_i}{dt_j} = 0. \quad (3.18)$$

### 3.4 Etude de la sensibilité vis-à-vis d'un paramètre : le rôle joué par les instants de commutation

Le réglage d'un correcteur et l'analyse de sensibilité vis-à-vis d'un paramètre peuvent également être déduits de ces travaux. Supposons que la dynamique du SDH dépende d'un vecteur de paramètres  $\alpha$ . La dynamique est alors déterminée formellement par

$$\frac{\partial x}{\partial t} = f_i(x, t, \alpha) \text{ for } t_{i-1} \leq t \leq t_i \quad (3.19)$$

où les instants de commutation  $t_i$  sont déduits implicitement par l'ensemble de contraintes

$$g_i(x(t(\alpha), \alpha), t, \alpha)|_{t=t_i} = 0. \quad (3.20)$$

Dans cette situation, l'étude de la sensibilité vis-à-vis de ce paramètre peut être obtenue par la proposition suivante :

Posons  $\sigma_x^\alpha = \frac{\partial x}{\partial \alpha}$  la sensibilité de l'état vis-à-vis de  $\alpha$ . Comme précédemment, on supposera que les fonctions  $f_i, g_i, i = 1, \dots, m$  sont suffisamment régulières.

**Proposition 3** *La sensibilité  $\sigma_x^\alpha$  de la trajectoire vis-à-vis du paramètre  $\alpha$  est déterminée en intégrant le système :*

*pour  $t_{i-1} < t < t_i$*

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{\partial f_i(x(t, \alpha), t, \alpha)}{\partial x} \sigma_x^\alpha(t) + \frac{\partial f_i(x(t, \alpha), t, \alpha)}{\partial \alpha} \quad (3.21)$$

*depuis la condition initiale ad-hoc et en prenant en compte les sauts de sensibilité aux instants de commutation  $t_i, i = 0, \dots, m$  déterminés par :*

$$\Delta \frac{\partial \sigma}{\partial t}(t_i) = \frac{dt_i(\alpha)}{d\alpha} (f_i(x(t_i, \alpha), t_i, \alpha) - f_{i+1}(x(t_i, \alpha), t_i, \alpha)) \quad (3.22)$$

*Le terme  $\frac{dt_i(\alpha)}{d\alpha}$  est déduit de la contrainte  $g_i(x(t(\alpha), \alpha), t(\alpha), \alpha)|_{t=t_i} \equiv 0$  par l'expression*

$$\frac{dt_i(\alpha)}{d\alpha} = - \left( \frac{\partial g_i}{\partial t} + \frac{\partial g_i}{\partial x} \frac{\partial f_i}{\partial t} \Big|_{t=t_i} \right)^{-1} \left( \frac{\partial g_i}{\partial x} \sigma_x^\alpha|_{t=t_i^-} + \frac{\partial g_i}{\partial \alpha} \right) \quad (3.23)$$

### 3.5 Application à une boucle à verrouillage de phase

L'application de ces résultats sur le pilotage d'un chauffage à induction via une boucle à verrouillage de phase a servi à illustrer la rapidité de cet algorithme sur une approche de type point fixe (figures 3.2 et 3.3). Ce dispositif bouclé est un bel exemple de SDH d'ordre quatre pour lequel le bouclage de phase réalisé avec un comparateur logique de type XOR conduit à des modes de fonctionnement induisant des sauts sur l'état et des discontinuités de champs [48]. Pour ce

### 3.5. Application à une boucle à verrouillage de phase

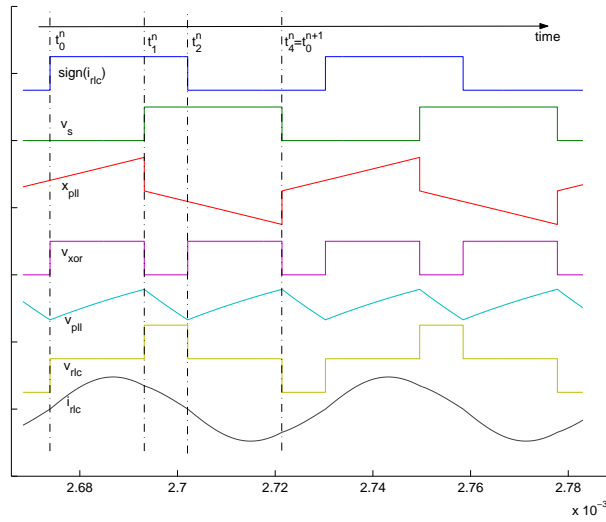


FIGURE 3.2 – Le cycle limite

Le système, les techniques de moyennisation ne peuvent être appliquées pour prévoir le régime permanent et le calcul explicite de ce régime est hors de portée. L'accès rapide au cycle limite via notre algorithme permet alors de régler les paramètres de corrections pour obtenir la dynamique souhaitée.

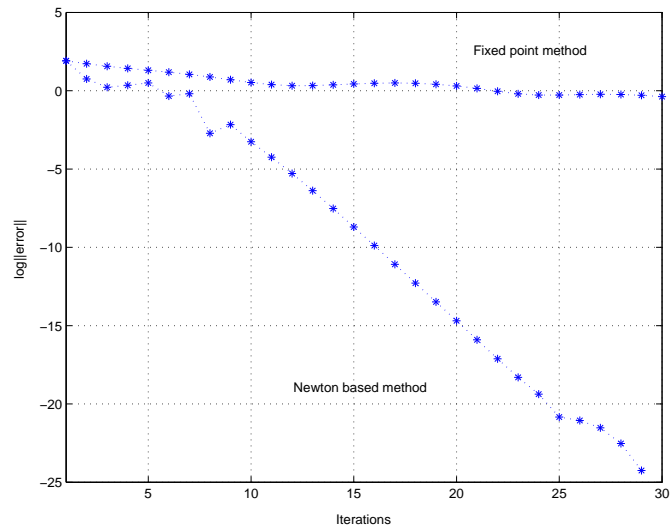


FIGURE 3.3 – Comparaison des vitesses de convergence.  $\text{Log}\|\text{erreur}\|$  en fonction du nombre d'itérations



## 3.6 Conclusion

Nos travaux sur le calcul des cycles limites proposent une méthode pratique permettant d'obtenir rapidement les cycles limites associés à un SDH. Basé sur un algorithme de Newton, cet algorithme nécessite un calcul des fonctions de sensibilité vis-à-vis des instants de commutations et des conditions initiales. Ce calcul a été donné pour des SDH présentant des discontinuités sur les champs de vecteurs et des sauts sur l'état, et, en présence de contraintes algébriques sur les instants de commutation.

A l'instar de tout algorithme de Newton, le schéma converge dans un voisinage de la solution même si le cycle est instable. Comme la matrice Jacobienne du système linéarisé échantillonné est calculée en fin d'exécution, l'analyse de stabilité est directement déduite.

Au delà, le calcul des fonctions de sensibilité est particulièrement utile dans toute démarche visant à améliorer ou analyser les performances d'un SDH [45, 136]. Au chapitre sur la commande des systèmes affines commutés, nous utiliserons ces sensibilités pour la synthèse de correcteurs prédictifs.

## Chapitre 4

# Commande des systèmes affines commutés

On considère la classe des systèmes affines commutés dont le comportement asymptotique issu d'une loi de commande est un cycle. Pour ces systèmes, le problème de régulation s'énonce en valeur moyenne sur une période et nécessite de prendre en compte la forme d'onde du signal régulé [24, 51, 82, 68, 86, 42].

Habituellement, l'analyse de ces systèmes est réalisée grâce à l'utilisation de modèle moyen ou des approximations type "petits signaux" [85, 118]. Les techniques de moyennisation sont commodes à utiliser et sont valides si la moyenne est prise sur un intervalle qui est petit par rapport à la dynamique du système. Un inconvénient réside alors dans le fait qu'elles gommant les hautes fréquences et en particulier l'effet des commutations. La forme d'onde peut alors présenter un contenu harmonique non désirable avec des inter-harmoniques et sous harmoniques de la fréquence de découpage. On peut également citer les méthodes discrètes qui utilisent le modèle échantillonné tangent [135, 75, 61]. Le modèle récurrent est alors difficile à établir car très souvent implicite. De plus, les schémas de commandes utilisant cette technique ne préservent pas les signaux de fortes ondulations entre les instants de commutations [9]. Il existe de nombreux cas où ces techniques classiques sont insuffisantes voire inopérantes [86].

Notons encore que l'implémentation des lois obtenues est réalisée généralement par une Modulation de Largeur d'Impulsion (MLI) qui, bien qu'ayant apporté des résultats satisfaisants concernant le contenu harmonique des signaux, se prive de degrés de liberté et gouverne les commutations d'une manière bien trop rigide.

Une voie qui reçoit un écho très favorable de la communauté des électrotechniciens, est celle qui consiste à commander directement les différents modes avec à la clé la possibilité d'améliorer considérablement les performances dynamiques. Cette voie passe par l'application des techniques hybrides à cette classe de systèmes.

Les algorithmes et les lois de commande par retour d'état que nous avons développés pour piloter ces cycles, sont à base de commande prédictive et de commande optimale. La démarche employée confère aux méthodes un caractère générique qui ne limite pas leur portée aux exemples choisis.

*Par une commande prédictive neuronale* : la synthèse d'une commande prédictive qui permet d'atteindre un cycle optimal périodique, à partir de la référence moyenne sur l'état, est proposée. Le cycle optimal de ralliement est déterminé sur la base d'un critère et offre la possibilité de mieux spécifier le régime permanent souhaité. Il est ensuite utilisé comme référence pour la synthèse d'un problème de poursuite sur horizon glissant. Ce problème est résolu hors ligne à l'aide d'un algorithme de Gauss-Newton qui utilise les fonctions de sensibilité du critère vis-à-vis des instants de commutation. L'implémentation en temps réel est assurée par apprentissage via un réseau de neurones.

*Par une commande optimale* : pour la classe de systèmes considérés, il est montré que la synthèse des trajectoires optimales passe par le calcul d'arcs singuliers [67, 83, 98, 111]. Le calcul de la solution hybride est alors déduit à partir des solutions de Fillipov [38]. Afin d'obtenir ces arcs singuliers, des conditions algébriques sont énoncées pour les systèmes d'ordre faible. Nous proposons un algorithme pour générer les trajectoires optimales dans un secteur donné de l'espace d'état. L'interpolation de l'ensemble des solutions grâce à un réseau de neurones permet d'obtenir une loi de commande par retour d'état facilement implémentable en temps réels.

Les méthodes proposées dans ce chapitre ont été développées dans le cadre de la thèse Diego Patino que j'ai co encadré avec Claude Jung. Notre implication dans le réseau d'excellence Européen Hycon, nous a permis de valider et tester les algorithmes proposés sur différents benchmarks de convertisseurs de puissance.

## 4.1 Modèle de représentation et points de fonctionnement

Le modèle de représentation de cette classe de SDH est le suivant

$$\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t) + B_{\sigma(t)}, \quad \sigma(t) \in \{1, 2, \dots, I\} \quad (4.1)$$

où l'état  $x \in \mathbb{R}^n$ , les matrices  $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et les vecteurs  $B_i \in \mathbb{R}^n$ , pour  $i \in \{1, 2, \dots, I\}$ . Le pilotage de ces systèmes s'effectue via la loi de commutation  $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \{1, 2, \dots, I\}$

Pour des systèmes physiques comportant des interrupteurs considérés comme idéaux, on peut représenter les equations de modèle 4.1 sous la forme plus compacte (voir [31] et [32]) et affine en la commande suivante :

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + g(x(t))u(t) \quad (4.2)$$

où  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $g(x) = [g_1(x), \dots, g_r(x)] \in \mathbb{R}^{n \times r}$ ,  $g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $i = \{1, \dots, r\}$ ,  $u(t) \in U = \{0, 1\}^r$ . Les champs  $f$  et  $g$  sont linéaires en  $x$  et la commande  $u$  est un vecteur de Booléens.

Par la suite, nous utiliserons en fonction de la facilité de manipulation et suivant le contexte l'un ou l'autre de ces deux modèles (4.1), (4.2).

Cette classe de systèmes commutés se caractérise par l'absence d'un point d'équilibre commun. Le problème de commande n'est donc pas de ramener par exemple à l'origine les trajectoires de ces systèmes mais plutôt de maintenir le système autour d'un point de fonctionnement.

Un point de fonctionnement est défini par la valeur moyenne de  $x$  sur un cycle. Pour établir l'ensemble des points de fonctionnement, on peut utiliser le modèle dynamique associé à l'état moyen  $\bar{x}$  où  $\bar{x}(t)$  représente la valeur moyenne de l'état sur une fenêtre glissante et définie par le produit de convolution :

$$\bar{x}(t) = \square_{T_p} * x(t) = \frac{1}{T_p} \int_{t-T_p}^t x(\tau) d\tau \quad (4.3)$$

où  $T_p$  désigne la période du cycle et  $\square_{T_p}$  la fonction fenêtre rectangulaire.

Pour déterminer le modèle dynamique de  $\bar{x}$ , on peut dériver (4.3) par rapport au temps  $t$ . Deux remarques s'imposent :

- ce modèle dépend d'un choix a priori de la commande
- la dynamique de  $\bar{x}$  est généralement inexploitable car fortement non-linéaire sauf dans le cas d'un système linéaire où la commande  $u$  est commutée :  $\dot{x} = Ax + Bu \Rightarrow \dot{\bar{x}} = A\bar{x} + B\bar{u}$ .

Une solution consiste à définir le modèle moyen comme suit :

$$\dot{\tilde{x}}(t) = f(\tilde{x}(t)) + g(\tilde{x}(t))\bar{u}(t), \quad \bar{u} \in co(U) \quad (4.4)$$

où  $co(U)$  est l'enveloppe convexe de  $U$ . Le modèle (4.4) est une approximation de la dynamique de  $\bar{x}$  où  $\bar{u}$  représente la valeur moyenne de  $u$  sur le cycle. Il est en effet prouvé que la valeur de  $\tilde{x}$  tend vers la valeur de  $\bar{x}$  et  $x$  lorsque  $T_p$  est petit par rapport à la dynamique du système [117] ( $\tilde{x} \rightarrow \bar{x}$  et  $x$  si  $T_p \rightarrow 0$ ).

Les points de fonctionnement sont alors définis comme les points d'équilibre du modèle moyen i.e. :

$$X_{ref} = \{x_{ref} \in \mathbb{R}^n : f(x_{ref}) + g(x_{ref})u_{ref} = 0, u_{ref} \in co(U)\} \quad (4.5)$$

En conséquence, il existe des points d'équilibre  $x_{ref}$  dont la commande  $u_{ref} \in co(U) \setminus U$ . Comme aucune commande  $u$  de (4.2) ne permet de maintenir le système sur la référence  $x_{ref}$ , lorsque  $u_{ref} \in co(U) \setminus U$ , le système ne peut être que maintenu dans un voisinage de la référence  $x_{ref}$  avec une commande  $u$  proche en valeur moyenne de  $u_{ref}$ . En vertu des théorèmes de densité en temps infini [63], il est possible d'approcher  $x_{ref}$  d'aussi près que l'on veut avec une commande  $u \in U$ .

L'avantage que procure cette approche pour définir les points de fonctionnement est que celle-ci est indépendante de la loi de commande  $u$  utilisée pour se maintenir autour du cycle contrairement au modèle obtenu en utilisant l'état moyen.

Les objectifs liés à la synthèse d'une commande pour cette classe de système sont doubles : d'une part, il faut définir une stratégie de ralliement vers le point

de fonctionnement (régime transitoire) et d'autre part il faut s'y maintenir dans un voisinage (régime permanent). Pour ce second objectif, il est clair que de nombreux degrés de liberté existent sur la façon d'opérer.

## 4.2 Commande prédictive neuronale

### 4.2.1 Formulation du problème de poursuite

#### 4.2.1.1 Définition du cycle de référence $x^\infty$

Sur la base d'un critère intégral, nous avons proposé d'effectuer hors ligne la recherche d'une trajectoire périodique de référence. L'avantage de la méthode est de pouvoir spécifier et maîtriser le comportement asymptotique autour d'un point de fonctionnement au lieu de le subir a posteriori.

Le cycle de référence correspond à la donnée :

- d'un état initial  $x(0)^\infty$ ,
- d'une séquence de modes  $\Omega^\infty$ , de longueur  $s^\infty$  ( $1 < s^\infty < s_{max}$ ),
- et d'une séquence des temps de commutation  $\mathcal{T}^\infty$ .

Ce cycle est déterminé en minimisant un critère quadratique intégral autour d'une valeur moyenne de référence  $\bar{x}^\infty$  correspondant à un point de fonctionnement :

$$J(\mathcal{T}^\infty, \Omega^\infty, s^\infty) = \min_{\mathcal{T}, \Omega, s} \int_0^{T_p} [x(t) - \bar{x}^\infty]^T \mathcal{Q}[x(t) - \bar{x}^\infty] dt \quad (4.6)$$

où  $T_p$  représente la période du cycle supposée bornée :

$$T_p < T_{p,max}. \quad (4.7)$$

Les contraintes de périodicité :

$$x(0) = x(T_p) \quad (4.8)$$

et de temps minimum entre deux commutations

$$t_i - t_{i-1} \geq \tau_{min}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (4.9)$$

sont adjointes et conduisent à la résolution d'une suite de problèmes d'optimisation non linéaires :

*Pour tous les couples  $s$  et  $\Omega$  fixés, le critère (4.6) est optimisé vis-à-vis des instants de commutation  $\mathcal{T}$ , sous les contraintes (4.7), (4.8), et (4.9).*

Cette suite de problèmes est finie car les contraintes de durée maximum et de temps minimum d'activation impliquent un nombre de séquences possibles finies. D'autres critères peuvent être considérés. Par exemple, pour rechercher un contenu harmonique particulier, un filtre passe bande permettra de pénaliser une bande de fréquence non désirée [127].

### 4.2.1.2 Stratégie de poursuite

Formellement, il s'agit de résoudre un problème d'optimisation de type :

$$\min_{T, \Omega, s} J(T, \Omega, s) = \min_{T, \Omega, s} \sum_{k=1}^s (x_k - x_k^{ref})^T \mathcal{Q} (x_k - x_k^{ref}) \quad (4.10)$$

où la suite  $x_k^{ref}$   $k = 1, \dots, s^\infty$  désigne les valeurs de la cible de référence aux instants de commutation,  $x_k$  les valeurs de la trajectoire de ralliement  $x$  à ces mêmes instants,  $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}^T > 0$  une matrice de poids et  $T$  l'horizon de prédiction.

Deux stratégies ont été appliquées suivant la distance  $d$  à la valeur moyenne du cycle de référence,

$$d(x_0) = (x_0 - \bar{x}^\infty)^T \mathcal{Q} (x_0 - \bar{x}^\infty) \quad (4.11)$$

où  $\bar{x}^\infty$  est la valeur moyenne du cycle.

- Stratégie de ralliement : si  $d > \varepsilon$ , seul l'horizon  $T$  et la longueur de la séquence  $s$  sont fixés. Le problème 4.10 est résolu pour déterminer les temps de commutations  $\mathcal{T}$  et la séquence des modes  $\Omega$  avec  $x_k^{ref} = \bar{x}^\infty$ .
- Stratégie de Poursuite : si  $d < \varepsilon$ , alors la séquence des modes  $\Omega$ , le nombre de modes  $s$  et l'horizon de prédiction sont fixés à leurs valeurs de référence  $\Omega^\infty$ ,  $s^\infty$  et  $t_s^\infty$ . Seule la séquence des temps de commutation  $\mathcal{T}$  est recherchée en résolvant le problème 4.10 avec  $x_k^{ref} = x_k^\infty$ .

La gestion de la transition entre régime transitoire et régime permanent nécessite le recalage de la séquence optimale sur la position courante de l'état. Nous avons choisi d'effectuer ce recalage en sélectionnant parmi les valeurs du cycle aux instants de commutation  $x_k^\infty$ , la valeur la plus proche.

### 4.2.2 Optimisation rapide des temps de commutation entre modes via les fonctions de sensibilité

La stratégie proposée à la section précédente conduit à la résolution d'une suite de problèmes d'optimisation donnés sous une forme quadratique. Pour une séquence fixée  $\Omega$ , il nous faut déterminer la séquence des temps de commutation  $\mathcal{T}$ . Un algorithme de Gauss-Newton a été utilisé pour calculer ces instants de commutations sur horizon fixé. La connaissance de la séquence de commutation permet d'utiliser pour un calcul rapide les fonctions de sensibilité vis-à-vis des instants de commutation.

Le problème peut s'écrire de manière matricielle comme :

$$\min_{\mathcal{T}} J(\mathcal{T}) = \min_{\mathcal{T} \setminus t_s} \Delta X^T \mathbf{Q} \Delta X \quad (4.12)$$

où  $\Delta X$  représente l'écart de la trajectoire à la référence et où  $\mathbf{Q}$  est une matrice block diagonale.

**Proposition 4** *L'itération de l'algorithme de Gauss-Newton est déterminée par*

$$\tau^{h+1} = \tau^h - \mathcal{H}^{-1}(\tau) \frac{\partial J(\tau)}{\partial \tau}, \quad (4.13)$$

où

- $\frac{\partial J(\tau)}{\partial \tau}$  représente la fonction de sensibilité de  $J$  vis-à-vis des instants de commutation définie par

$$\frac{\partial J(\tau)}{\partial \tau} = \mathcal{J}^T(\tau) \mathbf{Q} \Delta X(\tau) \quad (4.14)$$

- $\mathcal{H}(\tau)$  est une approximation de la matrice Hessienne définie par :

$$\mathcal{H}(\tau) = \mathcal{J}^T(\tau) \mathbf{Q} \mathcal{J}(\tau) \quad (4.15)$$

- $\mathcal{J}(\tau)$  est la matrice formée des sensibilité des écarts vis-à-vis des instants de commutation,

$$\mathcal{J}(\tau) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta x(t_1)}{\partial t_1} & \frac{\partial \Delta x(t_1)}{\partial t_2} & \dots & \frac{\partial \Delta x(t_1)}{\partial t_{s-1}} \\ \frac{\partial \Delta x(t_2)}{\partial t_1} & \frac{\partial \Delta x(t_2)}{\partial t_2} & \dots & \frac{\partial \Delta x(t_2)}{\partial t_{s-1}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \Delta x(t_s)}{\partial t_1} & \frac{\partial \Delta x(t_s)}{\partial t_2} & \dots & \frac{\partial \Delta x(t_s)}{\partial t_{s-1}} \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

Le calcul des fonctions de sensibilité de l'écart en l'absence de contraintes de type égalité à ces instants de commutation est plus simple que celui réalisé dans le chapitre consacré aux calculs des cycles limites et se résume à la proposition suivante :

**Proposition 5** *Les fonctions de sensibilité de  $\Delta x(\tau)$  vis-à-vis des temps de commutation sont données par :  $\forall j = 1, \dots, s-1$ , et  $\forall i = 1, \dots, s$*

$$\frac{\partial \Delta x(t_i)}{\partial t_j} = \begin{cases} 0 & \text{si } j > i \\ A_{\sigma_i} \Pi(t_i, 0) x(0) & \text{si } j = i \\ \Pi(t_i, t_j) \Delta P_j \Pi(t_j, 0) x(0) & \text{si } j < i \end{cases} \quad (4.17)$$

où  $\Pi(t_i, t_j)$  est le produit des matrices de transition de  $t = t_j$  à  $t = t_i$  :

$$\Pi(t_i, t_j) = \Phi_i(t_i, t_{i-1}) \Phi_{i-1}(t_{i-1}, t_{i-2}) \dots \Phi_{j+1}(t_{j+1}, t_j) \quad (4.18)$$

$\Delta P_j$  représente le saut sur le champs de vecteurs à l'instant  $t_j$  :

$$\Delta P_j = (A_{\sigma_j} - A_{\sigma_{j+1}}). \quad (4.19)$$

### 4.2.3 Construction de la boucle fermée

Les contraintes de temps réels ne permettent pas d'envisager de résoudre une suite de problème 4.12 à chaque itération de l'algorithme de commande. Notre choix privilégie une résolution hors ligne avec un apprentissage des solutions via un réseau de neurones. D'autres auteurs ont proposé d'utiliser un réseau de neurones pour l'implémentation d'une commande prédictive [114] et notamment pour optimiser la commande de moteurs [36], [5].

Pour une grille de condition initiale  $x_0$ , le problème 4.10 est résolu via l'algorithme de Gauss Newton. La solution, constituée du premier mode à appliquer ainsi que sa durée définissent une relation entrée-sortie de type  $(mode, duree) = F(x_0)$ . L'interpolation de cette relation par un réseau de neurones conduit à une solution facilement implémentable en temps réel.

## 4.3 Synthèse de commandes optimales

Toujours pour la classe des systèmes affines commutés (4.2), nous nous sommes intéressés à la synthèse d'une commande optimale. Moyennant une augmentation de l'espace d'état qui inclut la valeur d'un critère intégral, nous avons considéré un problème de Mayer :

$$\begin{aligned} & \min_{u(\cdot)} x_n(T) \\ \text{t.q. } & \dot{x}(t) = f(x(t)) + g(x(t))u(t) \\ & x(0) = x_0 \quad u(t) \in U = \{0, 1\}^r \end{aligned} \quad (4.20)$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$ .

Le problème de commande consiste à : *déterminer si elle existe, une loi de commande  $u^*(t) \in U$  pour  $t \in [0, T]$  minimisant  $x_n(T)$  pour un état initial  $x_0$  arbitraire.*

Les conditions nécessaires du PM pré-supposent l'existence d'une solution. Ce n'est pas toujours le cas et notamment lorsque l'on considère des systèmes commutés. Pour se placer dans des conditions où l'on peut garantir l'existence d'une solution optimale, on introduit le problème relaxé [105] qui consiste à étendre le domaine de la commande  $U$  à son enveloppe convexe :

$$co(U) = [0 \ 1]^r. \quad (4.21)$$

Supposons que ce problème relaxé admette une solution optimale. Nous pouvons alors faire les observations suivantes : si une solution de type bang-bang (i.e.  $\forall t, u(t) \in \{0, 1\}^r$ ) est obtenue sur le domaine de commande (4.21), cette solution résout aussi le problème original (4.20). Sinon, la commande  $u(\cdot)$  prend des valeurs dans l'enveloppe convexe,  $u(t) \in co(U) \setminus U$ ,  $t \in \mathcal{T}$ , où,  $\mathcal{T}$  est un ensemble de temps de mesure non nulle au sens de Lebesgue. Bien que cette solution  $u$



ne puisse pas s'appliquer au problème initial (4.20), nous pouvons néanmoins l'approcher d'aussi près que nous le voulons par valeur moyenne en commutant suffisamment vite entre les différents modes. Ceci produit un mouvement glissant sur la trajectoire optimale [132]. Une preuve de ce résultat peut être fournie en utilisant un théorème de densité en temps infini [63].

Nous avons donc intérêt à étudier le problème original (4.20) en utilisant l'enveloppe convexe du domaine de commande (4.21). Ceci revient à étudier les solutions au sens de Filipov de (4.20) [38].

### 4.3.1 Solutions régulières et singulières

Considérons à présent les conditions nécessaires données par le principe du minimum. La fonction Hamiltonienne de (4.20) est affine en la commande et définie par :

$$H(x, \lambda, u) = \lambda^T (f(x) + g(x)u) \quad (4.22)$$

Sa minimisation dépend du signe de la fonction de commutation

$$\phi(t) = \lambda^T(t)g(x)$$

suivant la règle de commutation :

$$\text{Pour } i = 1, \dots, r \quad u_i(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } \phi_i(t) > 0 \\ 1 & \text{si } \phi_i(t) < 0 \\ ? & \text{si } \phi_i(t) = 0 \end{cases} \quad (4.23)$$

Deux types de commande apparaissent :

i) Ou bien la commande est complètement déterminée par le signe de  $\phi(t)$  :

$$u_i(t) = \frac{1 - \text{sign}(\phi(t))}{2}$$

et auquel cas la solution est dite régulière.

ii) Ou bien il existe un intervalle de temps  $[a, b]$ ,  $b > a$  tel que la fonction de commutation est identiquement nulle sur cet intervalle, i.e. pour tout  $t \in [a, b]$ ,  $\phi(t) = 0$ . Dans cette situation, le principe du minimum est insuffisant pour déterminer la valeur de la commande  $u$  sur cette intervalle  $[a, b]$ . Cette situation fait référence à ce qui est connu sous le vocable d'arc singulier [111] et elle correspond précisément au cas où  $u(t) \in \text{co}(U) \setminus U$ ,  $t \in [a, b]$ . Une littérature importante existe à ce sujet [111], [67], [98], [83], [26], [34], [112].

### 4.3.2 Points de fonctionnement et arcs singuliers

Pour les systèmes commutés avec un régime permanent cyclique, il y a une bonne raison qui plaide pour la recherche d'arcs singuliers : la nature des points de fonctionnement  $x_{ref}$  du système. Comme nous l'avons mentionné à la section 4.1 de ce chapitre, ces points de fonctionnement sont généralement la valeur moyenne de  $x$  sur le cycle et sont définis comme les points d'équilibre du modèle moyen :

$$X_{ref} = \{x_{ref} \in \mathbb{R}^n : f(x_{ref}) + g(x_{ref})u_{ref} = 0, u_{ref} \in co(U)\}.$$

Comme  $u_{ref} \in co(U)$ , ce modèle est exactement le modèle utilisé dans le problème relaxé ( $\dot{x} = f(x) + g(x)u$ ,  $u(t) \in co(U)$ ). De plus, comme la commande  $u_{ref}$  permettant le maintien sur le point d'équilibre  $x_{ref}$  est généralement telle que  $u_{ref} \in co(U) \setminus U$ , cette commande définit clairement une commande singulière pour le problème de commande optimale. La solution optimale a donc de grande chance de devenir singulière dans un voisinage du point de fonctionnement.

Par clarté, nous ne résumons que le cas mono-dimensionnel ( $r = 1$ ) et renvoyons à nos travaux pour le cas multidimensionnel où  $r > 1$  [93, 89].

### 4.3.3 Synthèse des arcs singuliers

#### 4.3.3.1 Résultats de base et condition nécessaire d'ordre deux

**Définition 6** (*Arc singulier* [67], [98], [83]) *Si  $(x, \lambda, u)$  est une extrémale (solution vérifiant les conditions nécessaires du principe du minimum) telle que*

$$\phi(t) = H_u = \frac{\partial H}{\partial u} \equiv 0 \quad (4.24)$$

*sur un intervalle  $[a, b] \subset T$ ,  $a < b$  alors  $(x, \lambda, u)$  est un arc singulier sur cet intervalle.*

Lorsque l'on a à faire à un arc singulier, la fonction Hamiltonienne est indépendante de la commande  $u$  et la condition de minimum ne permet pas d'établir directement la commande  $u$ . Afin de déterminer sous quelles conditions l'égalité (4.24) peut avoir lieu, on peut procéder par dérivation de  $\phi(t) \equiv 0$  sur  $[a, b]$ ,  $b < a$ . Les dérivées successives sont aussi identiquement nulles sur l'intervalle *i.e.*

$$\frac{d}{dt}\phi(t) = 0, \quad \frac{d^2}{dt^2}\phi(t) = 0, \dots$$

Nous définissons alors les grandeurs suivantes :

**Définition 7** (*Ordre du problème* [111], [83]) *L'ordre du problème est le plus petit entier  $q$  tel que  $u$  apparaît explicitement dans la dérivée  $(2q)$ -ième. Le calcul s'effectue en substituant  $\dot{x}$  et  $\lambda$  par leur expression données par le système Hamiltonien.  $(\phi^{(k)} = \frac{d^k}{dt^k}\phi(t))$  est la dérivée d'ordre  $k$  par rapport au temps  $t$ .*

Dans notre cas, comme le problème est affine en  $u$ , la commande entre linéairement dans l'expression et nous obtiendrons une expression de la forme :

$$\phi^{(2q)} = A(x, \lambda) + B(x, \lambda)u. \quad (4.25)$$

**Définition 8 (Ordre de l'arc [111], [83])** Si  $(x^*, \lambda^*, u^*)$  est une extrémale singulière définie sur  $[a, b] \subset T$  pour (4.20). L'ordre de l'arc  $(x^*, \lambda^*, u^*)$  est le plus petit entier  $p$  tel que

$$(\phi^{(2p)})_u = ((H_u)^{(2p)})_u(x^*, \lambda^*, u^*) \neq 0 \quad (4.26)$$

pour tout  $t \in [a, b]$ . Lorsque  $k = \infty$ , l'ordre de l'arc n'existe pas.

Notons que si  $B(x, \lambda) = 0$ , l'ordre de l'arc  $q$  est différent de l'ordre de problème  $p$ . Il peut donc se présenter des arcs d'ordres différents pour un même ordre de problème. Les auteurs de [111], [83] ont démontré que l'ordre de l'arc et l'ordre du problème sont obtenus à partir des dérivées d'ordre pair de  $\phi$ .

Lorsque l'ordre de l'arc existe, nous pouvons établir les équations suivantes le long d'une extrémale singulière  $(x, \lambda, u)$  :

$$\phi^{(i)} = 0, i = 0, \dots, 2p - 1 \quad (4.27)$$

$$\frac{\partial}{\partial u} \phi^{(i)} = 0, i = 0, \dots, 2p - 1 \quad (4.28)$$

$$\phi^{(2p)} = A(x, \lambda) + B(x, \lambda)u = 0 \quad (4.29)$$

$$\text{avec } B(x, \lambda) \neq 0 \text{ pour tout } t \in [a, b] \quad (4.30)$$

La commande est donc déterminée par l'équation (4.29) et elle est définie de manière unique par :

$$u = -A(x, \lambda)/B(x, \lambda). \quad (4.31)$$

Les dérivées d'ordre supérieur de  $\phi$  permettent d'établir les équations différentielles non linéaires suivies par  $u$  et ses dérivées sur l'intervalle  $[a, b]$ . Mais aucune information supplémentaire pour la détermination des  $x$  et  $\lambda$  candidats ne peut être obtenue.

En revanche, l'ensemble des solutions de (4.27), (4.28) et (4.29) peut être réduit en validant une condition nécessaire d'optimalité d'ordre deux :

**Théorème 9 (Condition de Legendre Clebsh Généralisée [111], [67])** Soit le problème (4.20). Si  $(x^*, \lambda^*, u^*)$  est un arc singulier optimal, alors

1. Si l'ordre du problème est  $q$  sur  $[a, b]$ , alors l'arc vérifie les propriétés suivantes :

$$(-1)^q ((H_u)^{(2q)})_u \geq 0 \quad (4.32)$$

pour tout  $t \in [a, b]$

2. Si l'ordre de l'arc  $p < +\infty$  sur  $[a, b]$ , alors

$$(-1)^p ((H_u)^{(2p)})_u > 0 \quad (4.33)$$

pour tout  $t$  sur  $[a, b]$ .

### 4.3.3.2 Conditions algébriques sur les arcs singuliers (le cas $r = 1$ )

Il n'est pas simple de résoudre les équations non-linéaires fournies par (4.27), (4.28) et (4.29).

Généralement la commande  $u$  ne peut être définie sous la forme d'un feedback  $u(x)$  mais plutôt sous la forme  $u(x, \lambda)$ . Nous avons montré que pour des systèmes d'ordre faible, il est possible de déterminer explicitement les valeurs de  $(x, \lambda, u)$  telles que (4.27), (4.28) et (4.29) soient vérifiées. À partir d'hypothèses concernant l'ordre du problème et la dimension de l'espace d'état, la méthode consiste à établir des conditions algébriques nécessaires fournissant explicitement la commande  $u$  en fonction de  $x$ .

Pour un système affine (4.20) et un ordre de problème égal à  $q$ , les dérivées correspondant aux équations (4.27), (4.28) et (4.29) s'écrivent sous la forme :

$$\begin{aligned} \lambda^T ad_f^k g(x) &= 0, k = 0, \dots, 2q - 1 & (4.34) \\ \lambda^T ad_f^{2q} g(x) + \lambda^T [g, ad_f^{2q-1} g](x) &= 0 \end{aligned}$$

où  $[f, g](x) := g_x(x)f(x) - f_x(x)g(x)$  est le crochet de Lie et  $ad_f^k g(x) = [f(x), ad_f^{k-1} g(x)]$ ,  $ad_f^0 g(x) = g(x)$  le crochet itéré de Lie d'ordre  $k$ .

Dans le cas monovariante, les conditions algébriques nécessaires se résument aux deux propositions suivantes :

**Proposition 10 (Conditions nécessaires algébriques pour les arcs singuliers)** *Supposons que  $p = q$ ,  $n = 2(q + 1)$  et que la condition  $H = 0$  est imposée par le principe du minimum. Si  $f(x)$  est linéairement indépendant de  $ad_f^k g(x)$ ,  $k = 0, \dots, 2q - 1$  le long de l'extrémale  $(x, \lambda, u)$ , alors la commande singulière  $u$  est uniquement déterminée par le retour d'état :*

$$u = - \frac{\det([f(x), g(x), ad_f^1 g(x), \dots, ad_f^{2q-1} g(x), ad_f^{2q} g(x)])}{\det([f(x), g(x), ad_f^1 g(x), \dots, ad_f^{2q-1} g(x), [g, ad_f^{2q-1} g](x)])} \quad (4.35)$$

et  $\lambda$  vérifie :

$$\lambda^T [f(x), g(x), ad_f^1 g(x), \dots, ad_f^{2q-1} g(x)] = 0. \quad (4.36)$$

**Proposition 11 (Conditions nécessaires algébriques pour les arcs singuliers)** *Supposons que  $p = q$  et  $n = 2q + 1$ . La commande singulière  $u$  est uniquement déterminée par le retour d'état :*

$$u = - \frac{\det([g(x), ad_f^1 g(x), \dots, ad_f^{2q-1} g(x), ad_f^{2q} g(x)])}{\det([g(x), ad_f^1 g(x), \dots, ad_f^{2q-1} g(x), [g, ad_f^{2q-1} g](x)])} \quad (4.37)$$

et  $\lambda$  vérifie la relation suivante :

$$\lambda^T [g(x), ad_f^1 g(x), \dots, ad_f^{2q-1} g(x)] = 0. \quad (4.38)$$

Par la propriété d'homogénéité  $\lambda$  est choisie tel que  $\|\lambda\| = 1$

Commentaires concernant l'applicabilité de ces propositions :

- La dimension du problème  $n$  ne peut pas être inférieure à  $2q$  [89]. Cette situation n'a donc pas lieu d'être discutée. Lorsque l'ordre du problème  $q$  vaut 1 ce qui est le cas le plus fréquent, les propositions 10 et 11 s'appliquent pour des problèmes de dimension  $n = 3$  ou 4. Le cas  $n = 2$  est trivialement résolu.
- Dans la proposition 10, la condition additionnelle sur l'Hamiltonien  $H = 0$  correspond à l'utilisation d'un critère en temps libre. Par exemple, une commande en temps optimale ou un critère quadratique en temps infini.
- Dans la pratique lorsque  $n = 2(q+1)$  ou  $n = 2q+1$ , pour assurer l'hypothèse  $p = q$ , il suffit de vérifier que  $p \geq q+1$  est un cas impossible. Une manière de procéder est de montrer que l'espace  $E(x) = \text{span}\{g(x), \text{ad}_f^1 g(x), \dots, \text{ad}_f^{2q+1} g(x)\}$  est de rang complet  $n$ . En effet, si  $p = q + 1$ , d'après la relation (4.27),

$$\lambda^T [g(x), \text{ad}_f^1 g(x), \dots, \text{ad}_f^{2q+1} g(x)] = 0$$

si la dimension de l'espace  $E$  est égale à  $n$  alors une contradiction apparaît, car le vecteur  $\lambda$  devient nul et par conséquent  $p > q$  est impossible.

Nous proposons donc de déterminer les arcs singuliers à l'aide de l'algorithme suivant :

**Proposition 12** (*Algorithme pour l'obtention des arcs singuliers*). *Si les hypothèses des propositions 10 ou 11 sont vérifiées, on obtient les arcs singuliers candidats suivant la démarche :*

1. Déterminer l'ensemble des commandes possibles  $u(x)$  et  $\lambda(x)$  d'après les propositions 10 ou 11
2. Réduire cet ensemble aux solutions  $u(x) \in \text{co}(U)$ .
3. Stocker uniquement les solutions qui satisfont la condition de deuxième ordre du théorème 9.

#### 4.3.4 Synthèse des trajectoires optimales

A partir des arcs singuliers déterminés à la section précédente, nous avons proposé une méthode de synthèse des commandes optimales en temps rétrograde depuis le point de fonctionnement  $x_{ref}$ . Cette méthode évite le traditionnel problème aux deux bouts nécessitant l'utilisation d'algorithmes de tirs.

Nous supposons que l'hypothèse suivante est satisfaite :

**Hypothèse 1** *Toutes les solutions optimales rallient le point de fonctionnement en temps fini ou éventuellement asymptotiquement pour un critère en temps infini.*

C'est évidemment le cas pour un critère en temps optimal ou un critère quadratique en temps infini. Mais l'hypothèse n'est pas vérifiée pour un critère quadratique en temps fini.

Avec cette hypothèse et en exploitant le caractère singulier du point de fonctionnement  $x_{ref}$ , nous avons montré qu'il est possible de déterminer les conditions finales du système grâce à la proposition 12. Le problème de commande optimale est alors transformé en un simple problème de valeur initiale permettant de générer un ensemble dense de trajectoires finissant sur le point d'équilibre  $x_{ref}$ .

Comme nous l'avons mentionné plus haut, le point d'équilibre  $x_{ref}$  fait partie d'un arc singulier car la commande  $u_{ref}$  qui maintient l'état  $x$  sur l'équilibre  $x_{ref}$  ( $f(x_{ref}) + g(x_{ref})u = 0$ ) n'est pas sur un sommet du domaine de commande. Si une trajectoire rallie en temps fini ce point d'équilibre avec une commande régulière ( $u = 0$  ou  $u = 1$ ),  $u$  doit commuter vers  $u_{ref}$  lorsque  $x(t_r) = x_{ref}$  à l'instant  $t_r$  (temps de commutation). A partir de la proposition 12, les valeurs admissibles  $\lambda_{ref}$  pour  $\lambda(t_r)$  peuvent être déduites. Un algorithme de tir n'est donc pas nécessaire puisque les conditions finales sont connues.

Si l'hypothèse 1 est valide et afin de générer les trajectoires, nous pouvons alors faire une intégration en temps rétrograde du système Hamiltonien en prenant pour condition initiale  $(x_{ref}, \lambda_{ref})$  et les valeurs de commande données par  $u = 0$ ,  $u = 1$  ou  $u = u_{ref}$ . Comme tout point singulier est potentiellement un point de bifurcation, il faut envisager comme valeur de commande  $u = 0$ ,  $1$  ou  $u_{ref}$ . Cependant, ce n'est pas la bonne façon de procéder. Il y a au moins deux raisons pour lesquelles cette procédure n'est pas utilisable :

- La détermination des valeurs de la commande singulière passe par l'intégration d'un système différentiel hautement non linéaire (l'équation de  $u'$ ) et mal conditionné.
- Les arcs singuliers peuvent converger asymptotiquement vers le point d'équilibre (Cas d'un critère quadratique en temps infini). Le calcul des arcs en temps rétrograde est donc numériquement infaisable.

En revanche, si l'on dispose d'une solution algébrique des arcs singuliers conduisant au point d'équilibre  $x_{ref}$ , on peut commencer l'intégration en temps rétrograde à partir de points  $x_i$  sur ces arcs menant à  $x_{ref}$ . Le problème d'intégration lié à la partie de segment ( $x_i \rightarrow x_{ref}$ ) et correspondant à une durée de temps infinie est de ce fait, rejeté.

En partant des conditions initiales *ad hoc* pour  $x$  et  $\lambda$  i.e. les valeurs singulières obtenues d'après la proposition 12, on considère deux bifurcations admissibles correspondant aux commandes  $u = 0$  et  $u = 1$ . On détermine ces deux bifurcations par une intégration en temps rétrograde du système Hamiltonien (4.22) tout en respectant la condition de minimum sur l'Hamiltonien.

Avec un choix adéquat de points initiaux sur ces arcs on parvient alors à générer un ensemble dense des trajectoires optimales finissant sur le point de fonctionnement (Voir Fig. 4.1). Il convient néanmoins, et avant de fixer cet ensemble de trajectoires, de lever les éventuels conflits. En effet, il peut advenir que

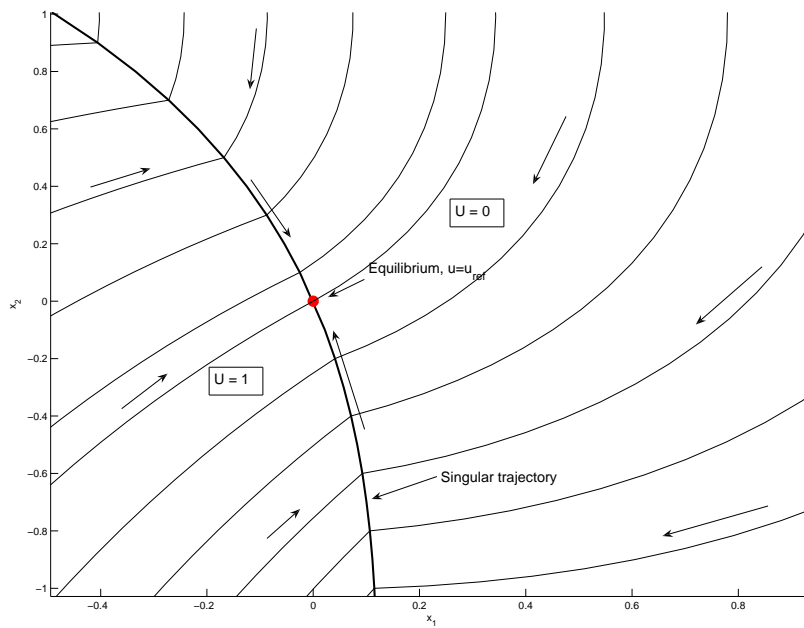


FIGURE 4.1 – Génération de toutes les trajectoires : intégration en temps rétrograde depuis les points sur l'arc singulier

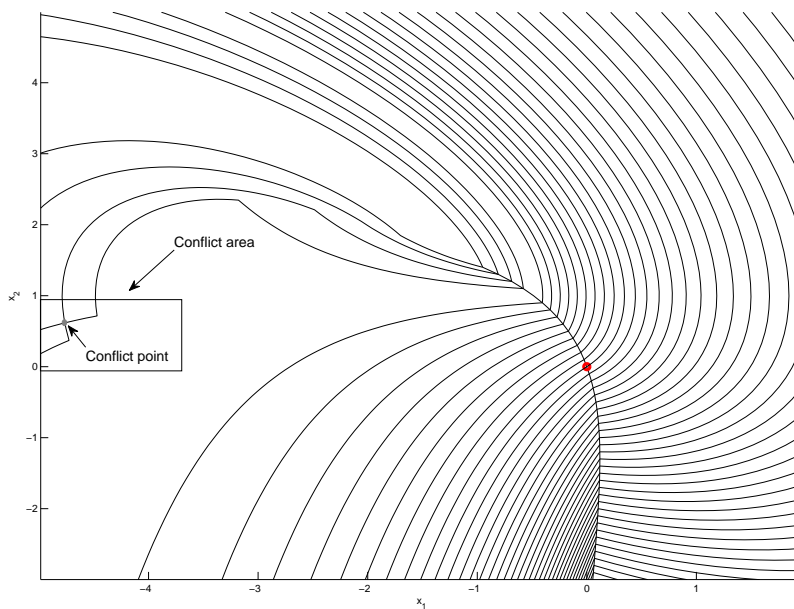


FIGURE 4.2 – Cas de conflits. Le carré montre un conflit possible des trajectoires.

deux trajectoires se croisent dans l'espace d'état avec des commandes distinctes créant un conflit. On lève le conflit en considérant la valeur de la fonction coût. La branche de coût le plus élevé est alors coupée à partir du point de conflit puisqu'il existe une solution moins coûteuse (Voir Fig. 4.2).

**Remarque 3** *Pour la classe des systèmes auxquels nous nous intéressons, les arcs singuliers sont connexes au point d'équilibre et mènent en ce point. En revanche, on ne peut exclure l'existence de trajectoires optimales composées alternativement d'arcs singuliers et réguliers. Ce cas de figure est un problème difficile et les conditions d'union entre les arcs singuliers et les arcs réguliers ne sont pas complètement connues [115], [81]. Nous ne l'avons pas rencontré dans les exemples traités.*

Pour un ensemble suffisamment dense de trajectoires optimales calculées sur un pavé de  $\mathbb{R}^n$ , un réseau de neurones interpole les solutions optimales. La relation entrée-sortie obtenue formée d'un nombre fini de sommes et produits détermine un retour d'état  $u(x)$  dont l'évaluation est simple et conduit à une loi de commande facilement implantable en temps réel. Comme les valeurs de la commande sont discrètes, l'interpolation obtenue sur la commande en utilisant un seuil est de très bonne qualité.

La proposition suivante résume la méthode :

**Proposition 13 (Algorithme pour calculer la loi de commande par retour d'état).** *Il est possible d'établir une commande par retour d'état  $u(x)$  suivant le schéma suivant :*

1. Déterminer l'ensemble des arcs singuliers admissibles suivant la proposition 12.
2. Intégrer en temps rétrograde le système Hamiltonien en vérifiant les conditions nécessaires du principe du minimum. Les intégrations commencent avec une valeur de  $x(t_f)$  et de  $\lambda(t_f)$  sur les arcs singuliers et avec une commande  $u$  à  $u = 0$  ou  $u = 1$ . Pour un pas de discrétisation fixé et suffisamment petit, un ensemble "dense" de trajectoires issues de points  $x_i$ , appartenant à la surface singulière, est généré par une intégration en temps rétrograde. La durée de cette intégration est choisie suffisamment grande pour couvrir la région de l'espace où le système est susceptible d'opérer.
3. Stocker toutes les trajectoires.
4. Lever les conflits éventuels.
5. Interpoler toutes les trajectoires optimales avec l'aide d'un réseau de neurones. Le réseau a comme entrée les valeurs de  $x$  et comme sortie la commande optimale  $u$ .

**Remarque 4** *Le succès de la méthode nécessite :*



- un système d'ordre faible.
- l'unicité des commandes singulières candidates  $u$  et de la variable adjointe  $\lambda$  comme fonction de l'état  $x$ .
- un arc singulier au plus par trajectoire.

## 4.4 Application aux convertisseurs de puissance

Le réseau d'excellence européen HYCON fédère une communauté de spécialistes, chercheurs et utilisateurs qui développent et appliquent la théorie des systèmes hybrides à la conception et au pilotage de systèmes complexes et hétérogènes. Je me suis impliqué sur le Workpackage 4a dont les objectifs ont été de proposer des solutions hybrides et génériques sur la classe des convertisseurs de puissance.

L'ensemble des méthodes proposées dans ce chapitre ont été régulièrement évaluées sur différents benchmarks et confrontées aux résultats des équipes européennes participant à ce réseau. Les exemples de convertisseur concernent des systèmes mono entrée (buck, boost, buck-boost, Sepic) et multi-entrées avec le convertisseur multi-niveau.

On trouvera une synthèse de ces travaux dans la thèse de Diego Patino [89] et dans les articles suivants [8, 90, 19, 20, 93, 91, 92, 77, 94].

A titre d'exemple, la figure 4.3 présente les tests de démarrage et de robustesse sur un convertisseur de type Buck pour la commande prédictive en simulation et sur maquette réelle et pour la commande optimale en simulation uniquement. Le test de la commande optimale sur maquette réelle n'a pas été réalisé pour des raisons de chronologie.

## 4.5 Conclusions

Les travaux réalisés sur la commande des systèmes affines commutés nous ont permis de proposer deux méthodologies de synthèse complémentaires et propres à cette classe de SDH.

L'une est plus particulièrement dédiée au régime permanent avec la possibilité de choisir un cycle de ralliement optimal élaboré selon un critère pouvant inclure des considérations sur le contenu fréquentiel du cycle. Le choix d'une régulation sur un cycle de référence plutôt que sur une valeur moyenne, permet de maîtriser, au lieu de la subir, la dynamique du système autour des points de fonctionnement.

La synthèse de la loi de poursuite est obtenue sur la base d'une commande prédictive et utilise un critère quadratique aux instants de commutation. Pour une séquence donnée, un calcul rapide des instants de commutation est rendu possible par un algorithme de Gauss Newton qui emploie les sensibilités vis-à-vis des instants de commutation.

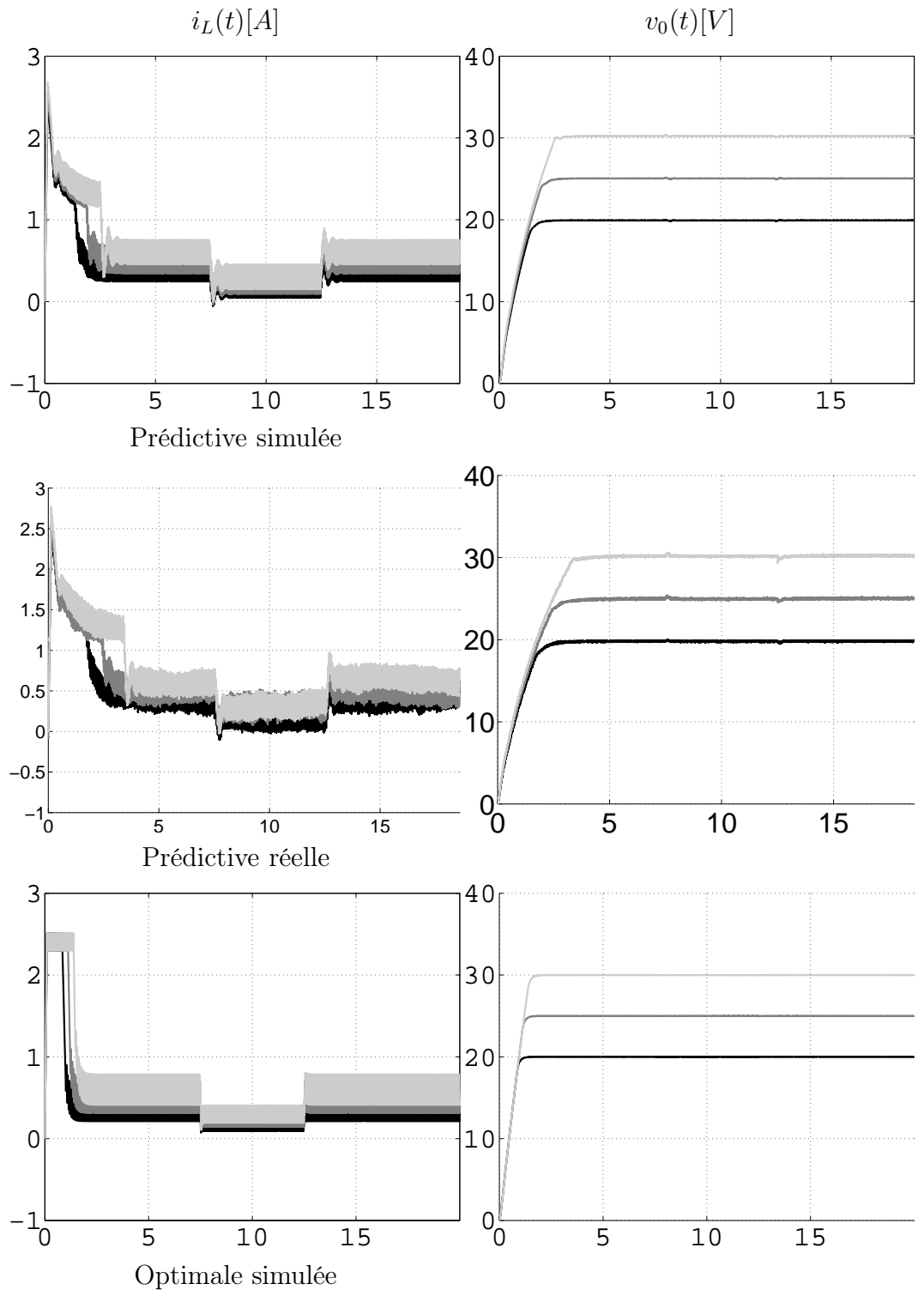


FIGURE 4.3 – Test de démarrage. Comparaison entre 1) Commande Prédictive simulée 2) réelle et 3) commande optimale. La charge varie de  $r_0 = 50\Omega$  à  $r_0 = 100\Omega$  puis de  $r_0 = 100\Omega$  à  $r_0 = 50\Omega$ . Les valeurs de référence sont 20 V (noir), 25 V (gris) et 30 V (gris clair). L'échelle de temps est en  $ms$

La seconde démarche étend à cette classe de système le calcul de lois de commandes optimales. Notre travail montre que les points de fonctionnement conduisent à des solutions optimales incluant des arcs singuliers. Nous avons donné des conditions sur l'ordre du problème et des arcs ainsi que sur la dimension du système permettant de déterminer algébriquement les solutions singulières sous la forme d'un feedback. Les solutions s'expriment alors comme les racines d'un ensemble de déterminants et doivent satisfaire une condition nécessaire d'ordre deux.

La connaissance de ces solutions algébriques permet d'éviter le traditionnel problème aux frontières issu de la résolution des conditions nécessaires du PM et transforme le problème en un simple problème aux conditions initiales. La synthèse des trajectoires optimales sur une région de l'espace est directement obtenue par l'intégration en temps rétrograde du système Hamiltonien depuis les surfaces singulières menant au point de fonctionnement.

L'interpolation par un réseau de neurones des solutions pour les deux méthodes permet de garantir des lois de retour d'état temps réel.

Les deux méthodes ont très largement été illustrées sur un nombre conséquent de convertisseurs de puissance dans le cadre du réseau d'excellence Hycon. Ces lois par retour d'état ont montré de très bonnes qualités de robustesse suite à des tests de variations de charges et de paramètres effectués en simulation et sur maquette.

## Chapitre 5

# Stabilité et observation des systèmes affines commutés

La notion de stabilité est une propriété fondamentale dans l'étude des SDH pour laquelle de très nombreuses contributions ont été proposées. Des résultats importants remontent à l'étude de stabilité de systèmes conduits par des lois de retour d'état discontinues [125, 116]. Comme l'atteste l'état de l'art, l'importance de la discontinuité dans les lois de rétroaction en théorie de la commande a été reconnue depuis la fin des années soixante-dix, voir [129, 14]. Des résultats plus spécifiques aux systèmes commutés et hybrides ont depuis été développés (voir [28, 40] pour les approches à base de fonctions de Lyapunov multiples, [70] pour des résultats basés sur l'algèbre de Lie, [59] pour le rôle des temps d'activation et [126] pour un état de l'art sur les critères de stabilité pour des SDH).

L'un des résultats les plus fondamentaux pour l'analyse et le contrôle des systèmes dynamiques est le principe d'invariance de LaSalle. Dans le cadre des systèmes commutés, des approches récentes (voir [33, 60, 18, 76]) fournissent des contributions intéressantes adaptées à la structure de ces systèmes et conduisant à des résultats extrêmement généraux qui ne nécessitent que des hypothèses faibles sur la classe de systèmes envisagée ([119, 53]).

D'une façon générale, nos travaux se sont focalisés sur une classe particulière de systèmes à commutations : les systèmes linéaires commutés. Cette classe, plus restreinte mais d'une grande importance pratique (on y trouve la plupart des convertisseurs de puissance), nous a permis d'énoncer des résultats plus pointus [107, 109, 108, 121, 122] que ceux proposés dans la littérature.

Nous avons étudié la convergence vers zéro des systèmes linéaires à commutation pour lesquels il existe une fonction de Lyapunov quadratique commune *faiblement* monotone le long de chaque dynamique.

Ce problème ouvert est loin d'être un problème académique déconnecté de toute considération pratique. C'est en effet un problème concret d'observation sur un convertisseur qui nous a conduit à formuler et étudier ce type de problème de stabilité. Nous présentons donc la synthèse d'un observateur commuté à la fin du chapitre. Un autre type d'applications envisageables concerne l'étude et la détermination des cycles limites et de leur loi de commutation associée.

La connaissance algébrique des ensembles invariants et des lois associées via un principe d'invariance de Lasalle est un moyen d'y parvenir.

Deux approches originales se dégagent de ces travaux :

Fondée sur une extension du principe d'invariance de LaSalle au cas des systèmes à commutations [72], un premier résultat permet de caractériser non seulement les ensembles  $\omega$ -limite mais également les lois de commutation associées. Ce travail montre en particulier que le bon cadre d'étude est obtenu en relaxant le problème et en considérant l'enveloppe convexe du domaine de commande [72, 15]. Un théorème de densité en temps infini [63] permet alors par passage à la limite de caractériser les solutions du problème relaxé comme limites de solutions du système commuté.

Ce résultat est particulièrement utile pour établir la convergence d'estimateurs sur des systèmes commutés ayant des modes pour lesquels l'état est partiellement observable. L'application de ce résultat à un convertisseur multi-niveaux a permis d'observer les tensions des capacités à partir de la mesure du courant de charge. Il est le premier résultat connu qui permet de garantir l'observabilité du convertisseur. En outre, les lois de commutations ne permettant pas l'observation sont entièrement connues et caractérisées. La convergence d'une loi de commutation quelconque vers l'une de ces lois entraîne une baisse d'observabilité qui se traduit par une vitesse de convergence dégradée. Deux publications font la synthèse de ces travaux (voir [107, 108, 109]). Les premiers résultats sur la stabilité des systèmes à commutations sont très encourageants et montrent qu'il est possible d'envisager d'implanter des commandes par retour d'état sur ce type de systèmes via l'utilisation d'observateur.

Pour le convertisseur multi-niveaux, l'observabilité n'est garantie que si l'on fait des hypothèses supplémentaires (de type « temps d'activation minimum », par exemple) sur les signaux admissibles. A partir de différentes notions de temps d'activation minimum (dwell-time), d'activation récurrente et permanente, nous avons énoncé des résultats de convergence vers zéro de la trajectoire [121, 122]. Dans le cas où la loi de commande ne satisfait pas l'une des conditions de dwell-time, nous avons étudié l'ensemble  $\omega$ -limite pour lequel nous donnons un certain nombre de propriétés.

## 5.1 Le principe d'invariance pour la classe des systèmes linéaires commutés à temps continu

On considère un système linéaire commuté

$$\dot{x} = A_{\sigma(t)}x, \quad (5.1)$$

où l'état  $x(\cdot)$  prend ses valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ , les matrices  $A_1, \dots, A_I$  sont carrées et la loi de commutation  $\sigma$  appartient à la classe des fonctions  $L^\infty([0, +\infty), \{1, \dots, I\})$ .

Une condition suffisante de stabilité garantissant la stabilité asymptotique globale des systèmes commutés en temps continu (5.1) est reliée à l'existence d'une fonction de Lyapunov commune [41].

Nous avons considéré le cas de fonctions de Lyapunov communes au sens *faible*, qui diffère de la notion standard de fonction de Lyapunov par la négativité non stricte des dérivées le long des trajectoires du système. Nous insistons sur le fait que ce problème n'est pas académique et nous donnons un exemple très concret, en fin de chapitre, sur un convertisseur multi-niveaux. Dans cette configuration, des propriétés de convergence asymptotique globale peuvent néanmoins être garanties en utilisant des hypothèses supplémentaires telles que, par exemple, des hypothèses de "temps d'activation" entre commutations [60, 18, 76, 119, 53].

Notre approche emprunte une autre voie. Sans ces hypothèses supplémentaires sur les lois de commutation, nous avons recherché à caractériser les ensembles invariants associés à ce type de systèmes dynamiques. La seule hypothèse formulée sur la loi de commande  $\sigma$  est la mesurabilité au sens de Lebesgue.

L'objectif était donc de trouver le moyen de caractériser les ensembles  $\omega$ -limite ainsi que leurs commandes associées lorsque seule une fonction de Lyapunov commune *faible* est considérée.

A partir de l'hypothèse d'existence d'une matrice symétrique définie positive  $P$  ( $P > 0, P^T = P$ ) telle que pour tout  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ,

$$\begin{aligned} x^T P x &> 0 \\ x^T (A_i^T P + P A_i) x &\leq 0, \forall i \in \{1, \dots, I\}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

La fonction  $V(x) = x^T P x$  est utilisée comme fonction de Lyapunov commune *faible*.

Nous avons pu alors caractériser le comportement asymptotique par le théorème suivant :

**Théorème 14** Soient  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  et  $\sigma(\cdot)$  une loi de commutation définie sur  $[0, +\infty)$ . Soit  $x$  la solution du système commuté (5.1) correspondant à la loi  $\sigma(\cdot)$  et à la condition initiale  $x_0$ . Alors l'ensemble  $\omega$ -limite  $\Omega(x)$  est contenu dans une ligne de niveau de  $V$  et, pour tout  $y_0 \in \Omega(x)$ , il existe une fonction absolument continue  $y$  qui satisfait le système différentiel suivant

$$\dot{y} = A_\alpha y \quad \text{pour p.t. } t \geq 0 \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned} y(0) &= y_0 \\ y(t) &\in \Omega(x) \quad \text{pour tout } t \geq 0, \end{aligned} \quad (5.4)$$

où la matrice dépendante du temps  $A_\alpha = \sum_{i=1}^I \alpha_i A_i$  correspond à une loi de commande  $\alpha(\cdot)$  prenant ses valeurs dans l'ensemble

$$\Delta = \left\{ \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_I) \in [0, 1]^I \mid \sum_{i=1}^I \alpha_i = 1 \right\}.$$

En particulier,  $\overline{V(y(t))} = 0$  pour tout  $t \geq 0$  le long de la trajectoire.

Ce théorème 14 montre que :

- les éléments de  $\Omega(x)$  sont tous situés sur une ligne de niveau.
- les ensembles  $\omega$ -limites associés à la classe des systèmes linéaires commutés correspondent aux ensembles  $\omega$ -limites construits sur l'enveloppe convexe du domaine de commande et réciproquement en vertu du théorème de densité [62, theorem 1].
- les éléments de  $\Omega(x)$  appartiennent à une ou des solutions au sens de Fillipov stables et incluses dans  $\Omega(x)$ .

## 5.2 Problème de commande associé

Si on définit, pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$  et tout  $i = 1, \dots, N$ ,  $\dot{V}_i(x) = x^T(A_i^T P + PA_i)x \leq 0$  alors pour tout  $v = \sum_{i=1}^I \alpha_i A_i x \in F(x)$ , la dérivé directionnelle de  $V$  dans la direction  $v$  est déterminée par

$$\begin{aligned} \dot{V}(x; v) &= x^T(A_\alpha^T P + PA_\alpha)x \\ &= \sum_{i=1}^I \alpha_i (x^T(A_i^T P + PA_i)x) \\ &= \sum_{i=1}^I \alpha_i \dot{V}_i(x) \leq 0 \end{aligned}$$

et est négative puisque les  $\alpha_i$ 's sont positifs.

On voit donc que les solutions de (5.3) qui évoluent sur une ligne de niveau de  $V$  satisfont le problème de commande suivant :

**Problème 15** *Trouver les commandes  $\alpha^* \in L^\infty([0, +\infty), \Delta)$  et les trajectoires associées  $x$  vérifiant*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_{\alpha^*} x \quad p.p \tag{5.5} \\ \text{sous la contrainte } \sum_{i=1}^I \alpha_i^* \dot{V}_i(x) &= 0. \end{aligned}$$

On peut noter que si  $\alpha^*$  et  $x$  sont une solution du problème 15, alors

$$\alpha^* \in \arg \max_{\alpha \in \Delta} \alpha_i \dot{V}_i(x).$$

Nous avons montré que résoudre le problème 15 est équivalent à résoudre un problème de commande optimale pour lequel la valeur finale est maximisée asymptotiquement au sens de la norme associée à la matrice  $P$ .

L'ensemble des solutions du problème 15 définissent donc des conditions nécessaires mais non suffisantes pour la détermination des invariants associés à (5.1).

En notant par  $\text{Inv}$  l'union de tous les supports des trajectoires  $x$  correspondant aux solutions du problème 15, par  $\Omega_{\text{Inv}}$  l'union de leur ensemble  $\omega$ -limite associé et par  $\Omega$  l'union de tous les ensembles  $\omega$ -limites des trajectoires de (5.1), nous avons classifié ces ensembles par la proposition suivante

**Proposition 16** *Les inclusions suivantes ont lieu :*

$$\Omega_{\text{Inv}} \subset \Omega \subset \text{Inv}. \quad (5.6)$$

*Chaque inclusion peut être stricte.*

La Proposition 16 montre que s'il est possible de caractériser complètement l'ensemble des solutions du Problème 15 alors il est possible de borner inférieurement et supérieurement l'ensemble  $\Omega$  contenant toutes les ensembles  $\omega$ -limites du système linéaire commuté original.

Un autre résultat issu du Problème 15 et de la convergence à l'origine des trajectoires de (5.1) est le suivant :

**Proposition 17** *Soit  $x$  une solution de (5.1) et  $\alpha : [0, +\infty) \rightarrow \Delta$  la fonction continue par morceaux prenant ses valeurs sur les sommets de  $\Delta$  et telle que  $\dot{x} = A_\alpha x$ . S'il existe une suite d'instant  $t_n \rightarrow +\infty$  telle que la suite  $(\alpha(t_n + \cdot))_{n \in \mathbb{N}}$  converge au sens faible dans  $L^\infty([0, +\infty), \Delta)$  vers un  $\alpha_*$  qui ne correspond à aucune solution non nulle du Problème 15, alors  $x(t) \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow +\infty$ .*

La Proposition 17 peut être utile pour garantir la convergence à l'origine des solutions de (5.1) et correspondant à une classe très large de lois de commutation, une fois que les commandes correspondant aux solutions du Problème 15 sont caractérisées.

## 5.3 Une caractérisation algébrique des solutions du problème 15

A la suite des résultats de la section précédente, nous avons proposé un algorithme conduisant à la détermination algébrique des solutions du problème 15. Cet algorithme est fondé sur le constat suivant :

Le long d'une solution  $x$  du Problème 15, il existe un sous ensemble d'indices  $I_0 \subseteq \{1, \dots, I\}$  sur un intervalle de temps  $(a, b)$ ,  $a < b$ , tel que pour tout  $i_0 \in I_0$ ,

$$C_{i_0} x \equiv 0 \quad (5.7)$$

et  $C_j x(t) \neq 0$  si  $j \notin I_0$  où les matrices  $C_i$  sont définies par  $C_i^T C_i = A_i^T P + P A_i$ .

En différentiant (5.7) et remplaçant  $\dot{x}$  par  $\sum_{i \in I_0} \alpha_i A_i x$ , on parvient à l'ensemble de conditions algébriques suivantes :

$$\begin{cases} C_{i_0} x & = 0 \\ C_{i_0} A_{i_1} x & = 0, \quad i_1 \in I_0 \\ \vdots & \\ C_{i_0} A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_{p_{i_0}-1}} x & = 0, \quad (i_1, \dots, i_{p_{i_0}-1}) \in I_0^{p_{i_0}-1} \end{cases} \quad (5.8)$$

et

$$\sum_{i_k \in I_0} \alpha_{i_k} C_{i_0} A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_{p_{i_0}}} x = 0, \quad (i_1, \dots, i_{p_{i_0}}) \in I_0^{p_{i_0}}. \quad (5.9)$$

pour un entier fini  $p_{i_0}$ . Nous donnons alors une procédure pour déterminer  $p_{i_0}$  et l'ensemble des couples  $(x, \alpha)$  satisfaisants ces contraintes algébriques.



## 5.4 Comportement asymptotique et loi de commutation

Un travail effectué en parallèle avec Jean Claude Vivalda et Ulysse Serres participants aux projets  $SC^2$  a été de définir des conditions suffisantes les moins conservatives possibles sur la loi  $t \mapsto \sigma(t)$  pour assurer la convergence à l'origine du système commuté.

Cet objectif nous a conduit à envisager plusieurs notions de temps d'activation minimum qui diffèrent de celle introduite dans [53, 60, 119]. Nous avons aussi considéré des notions d'activation permanente et persistante qui assurent la convergence des solutions vers un ensemble invariant minimal.

Pour le même système (5.1) et la même hypothèse concernant l'existence d'une fonction de Lyapunov faible (5.2), la classe des lois de commutation n'est plus l'ensemble  $L^\infty(\mathbb{R}_+, \{1, \dots, I\})$  mais on suppose qu'il existe une suite  $([a_n, a_{n+1}))_{n \geq 0}$  d'intervalles consécutifs ( $0 = a_0 < a_1 < a_2 < \dots$ ) dont l'union est  $\mathbb{R}_+$  et tels que pour tout entier  $n$ , il existe un indice  $i_n \in \{1, \dots, I\}$  avec  $\sigma(t) = i_n$  si  $t \in [a_n, a_{n+1})$ . On suppose également que la partie antisymétrique des matrices  $A_i$  est nulle i.e. qu'il n'existe pas de mode oscillant pur.

**Hypothèse 2** *On dit que le système (5.1) satisfait l'hypothèse d'intersection nulle si  $\bigcap_{i=1}^I \ker A_i = \{0\}$ .*

Nous avons montré que cette hypothèse 2 est insuffisante pour assurer la convergence à zéro comme le résultat de la section précédente permettait de le supposer.

Pour imposer aux trajectoires de finir sur les noyaux des matrices  $A_i$ , on peut utiliser la notion suivante :

**Hypothèse 3 (Temps d'activation minimum)** *Le mode  $i$  satisfait une condition de temps minimum d'activation s'il existe un nombre positif  $\tau$  et un entier  $p$  tel que de toute séquence de mode de longueur  $p$  extraite de la loi de commutation, il existe un intervalle de temps de longueur supérieur à  $\tau$  sur lequel le mode  $i$  est activé.*

On montre en effet que :

**Proposition 18** *Si la condition de temps d'activation minimum 3 est satisfaite pour le mode  $i$ , alors tout point de l'ensemble  $\omega$ -limite  $\Omega(x_0)$  appartient au noyau de la matrice  $A_i$ .*

d'où l'on déduit directement que :

**Proposition 19** *Si le système (5.1) vérifie l'hypothèse 2 et si la loi de commande satisfait pour tout mode l'hypothèse 3, alors  $x(t)$ , la solution du système (5.1) converge asymptotiquement vers zéro.*

Une autre condition plus forte sur les durées d'activation des modes conduit également à la convergence asymptotique :

**Proposition 20** *Si le système (5.1) vérifie la condition 2 et si les durées séparant deux commutations successives sont bornées inférieurement par un nombre positif  $\tau$  alors  $\Omega(x_0) = \{0\}$  pour tout  $x_0$ .*

Si on suppose à présent que

**Hypothèse 4 (Activation récurrente)** *Le mode  $i$  vérifie une condition d'activation récurrente si la mesure du temps pendant lequel il est activé est infini i.e.  $\lambda(\{t \geq 0 \mid \alpha_i(t) = 1\}) = +\infty$*

alors l'ensemble  $\omega$ -limite ne peut éviter l'ensemble  $M_i = \{x : x^T(A_i^T P + P A_i)x = 0\}$ .

Pour obtenir l'inclusion stricte  $\Omega(x_0) \subset M_i$ , il est alors nécessaire d'ajouter l'hypothèse d'activation persistante suivante :

**Hypothèse 5 (Activation persistante)** *Le mode  $i$  vérifie la condition d'activation persistante si pour toute séquence d'intervalle  $([t_n, t'_n])_{n \in \mathbb{N}}$  telle que*

- $t_n \rightarrow \infty$ ,
- il existe  $\tau > 0$ , tel que  $t'_n - t_n \geq \tau$  pour tout  $n \geq 0$ ,
- la limite du nombre de commutation dans l'intervalle  $[t_n, t'_n] \rightarrow \infty$ ,

nous avons  $\liminf_{n \rightarrow +\infty} \lambda\{t \in [t_n, t'_n] \mid \alpha_i(t) = 1\} > 0$ .

**Proposition 21** *Si les hypothèses 4 et 5 sont vérifiées pour le mode  $i$ , alors  $\Omega(x_0) \subset M_i$ .*

**Proposition 22** *Si les hypothèses de la proposition 21 sont vérifiées et si  $M = \bigcap M_i = \{0\}$  alors  $x(t) \rightarrow 0$ .*

Nous avons montré sur un contre-exemple que l'affaiblissement des hypothèses dans cette dernière proposition 21 par une hypothèse d'activation récurrente Hypothèse 4 seulement ne permettait pas d'assurer la convergence à zéro.

Nous avons été amenés à nous poser la question suivante concernant le convertisseur multi-niveaux présenté à la section suivante : suffit-il de prendre en compte un temps d'activation minimum satisfait par chaque interrupteur pour déduire l'observabilité du système ? La réponse est malheureusement non. Il est en effet possible d'exhiber des signaux qui satisfont la condition d'excitation permanente et de temps d'activation minimum sur chaque interrupteur et qui génèrent des trajectoires ne convergeant pas vers zéro [121, 122].

## 5.5 Synthèse d'observateurs commutés

Nous avons pu montrer dans [107, 108] comment la caractérisation des invariants peut être utile pour l'étude des propriétés d'observabilité d'un système linéaire commuté. En particulier sur l'exemple d'un convertisseur multi-niveaux, la caractérisation de l'invariant associé à l'observateur permet d'expliquer pourquoi la vitesse de convergence de l'observateur se dégrade avec l'augmentation de la fréquence de commutation.

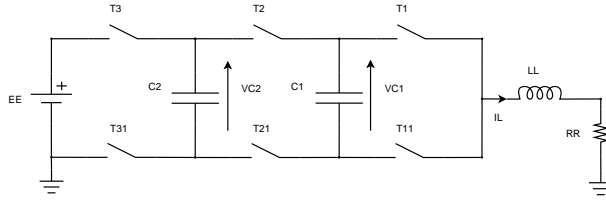


FIGURE 5.1 – Convertisseur multi-niveaux.

Pour cet exemple, les équations d'état sont affines et données par

$$\dot{x}(t) = A_0x(t) + \sum_{i=1}^3 u_i(t)(A_i x(t) + B_i) \quad (5.10)$$

où  $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$  et  $u = (u_1, u_2, u_3) \in \{0, 1\}^3$ . Les matrices  $A_i$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ , sont définies par les expressions :

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{C_1} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{L} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{C_1} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{C_2} \\ -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{C_2} \\ 0 & -\frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix},$$

et les vecteurs  $B_1 = B_2 = 0$ ,  $B_3 = (0, 0, E/L)^T$ . Les états  $x_1$ ,  $x_2$  représentent les tensions aux bornes des capacités et  $x_3$  est le courant de charge. La commande  $u$  correspond aux différentes configurations des interrupteurs. A chacune des  $2^3$  valeurs possibles de  $u$  correspond un mode de (5.10).

L'objectif est de parvenir à l'estimation des tensions aux bornes des capacités à partir de la mesure du courant,  $y = Cx = [0 \ 0 \ 1]x$ . La particularité de ce système est qu'aucun des sous systèmes n'est observable au sens où la matrice d'observabilité associée n'est pas de rang plein. L'observabilité de ce système dépend comme pour tout système non linéaire de la loi de commutation utilisée.

Nous avons cherché à déterminer les lois rendant possible l'observation de l'état. Avec l'hypothèse d'une connaissance de la loi de commutation, le choix d'un observateur commuté de type Luenberger était envisageable :

$$\dot{\hat{x}} = A_0\hat{x} + L_0(y - \hat{y}) + \sum_{i=1}^3 u_i(A_i\hat{x} + B_i + L_i(y - \hat{y})).$$

La dynamique de l'erreur  $e = x - \hat{x}$  est déterminée par

$$\dot{e} = \tilde{A}_0 e + \sum_{i=1}^3 u_i \tilde{A}_i e, \quad (5.11)$$

avec  $\tilde{A}_i = A_i - L_i C$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ .

Pour toute matrice  $P > 0$  permettant de définir une fonction de Lyapunov faible pour le système (5.11), on montre que les solutions du Problème 15 sont contenues dans

$$\text{Inv} = \Omega_{\text{Inv}} = \{e \mid e_3 = 0\}.$$

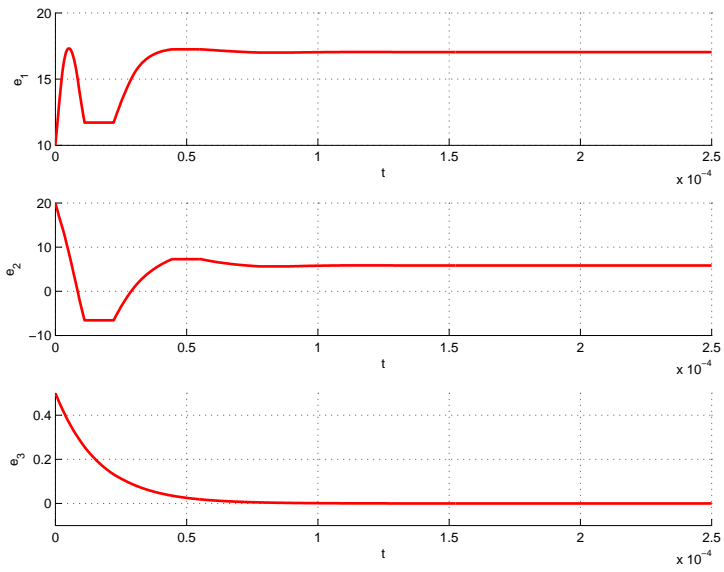


FIGURE 5.2 – Erreurs d'observation

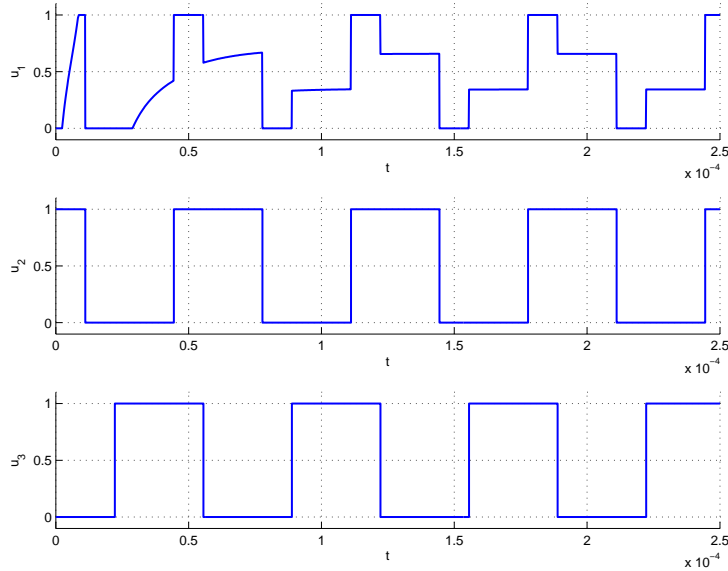


FIGURE 5.3 – Une commande pour laquelle le système n'est pas observable

Et la proposition 16 permet de conclure que  $\Omega = \{e \mid e_3 = 0\}$ . De plus, les lois de commande  $u = u(t) \in [0, 1]^3$  correspondant aux trajectoires du Problème 15 doivent vérifier la relation p.p.

$$(u_3 - u_2)e_2 + (u_2 - u_1)e_1 = 0. \quad (5.12)$$

Cette caractérisation algébrique par les équations 5.12 et la Proposition 17 garantit la convergence à l'origine pour une vaste classe de lois de commande. Sur les figures 5.2 et 5.5, nous avons appliqué une loi vérifiant (5.12). Il peut être observé que lorsque l'erreur  $e_3$  approche 0 (c'est à dire,  $e$  approche Inv) les erreurs d'estimation des tensions restent constantes. Bien que la commande utilisée soit singulière et prenne ses valeurs dans l'ensemble  $\Delta$ , il est possible d'approcher cette trajectoire par une loi de commutation admissible au système original suivant le résultat [62, theorem 1]. On comprend alors mieux la dégradation que l'on pourra observer sur la vitesse de convergence de l'observateur.

Il est intéressant de constater que les points de fonctionnement pour ce convertisseur correspondent à des lois de commandes singulières (voir (5.12)) déterminées par  $u_1 = u_2 = u_3$  et conduisant à l'équilibre  $i = \frac{E}{R}u_3 \neq 0$ . Ces lois rendent le système inobservable. En conséquence, plus la loi de commutation approche finement (i.e. en moyenne sur des fenêtres glissantes de plus en plus courtes) la loi singulière  $u_1 = u_2 = u_3$ , plus la vitesse de convergence de l'observateur se réduit.

Par exemple, si on considère trois lois de commutation périodiques identiques à une échelle de temps près, réalisant  $u_1 = u_2 = u_3$  en moyenne glissante, on peut voir sur la figure 5.4 que la convergence du système (5.11) se dégrade avec l'augmentation de la fréquence de commutation.

Un simple calcul du grammien sur un horizon fini  $T$  montre que l'excitation obtenue est effectivement toujours plus importante pour les basses fréquences.

L'encadrement du grammien par sa plus petite valeur singulière  $\alpha_{f_s}(T)$  et sa plus grande valeur singulière  $\beta_{f_s}(T)$  suivant la relation

$$\alpha_{f_s}(T)Id \leq \int_0^T \phi^T C^T C \phi dt \leq \beta_{f_s}(T)Id$$

où  $\phi$  représente la matrice de transition d'état du système, est représentée sur la figure 5.5 en fonction de  $T$ . On constate que  $\alpha_{f_s}(T)$  décroît avec la fréquence de commutation. La borne supérieure  $\beta_{f_s}(T)$  est en revanche identique et est relative à l'observation du courant.

## 5.6 Conclusion

Ces travaux effectués dans le cadre du projet : systèmes à commutation, commande et stabilité (SC2) et soutenu dans le cadre du CPER (Contrat de Plan Etat Région) ont permis d'initier une collaboration entre plusieurs équipes (CRAN, IECN, LMAM) sur des problèmes amonts liés aux comportements asymptotiques des systèmes commutés.

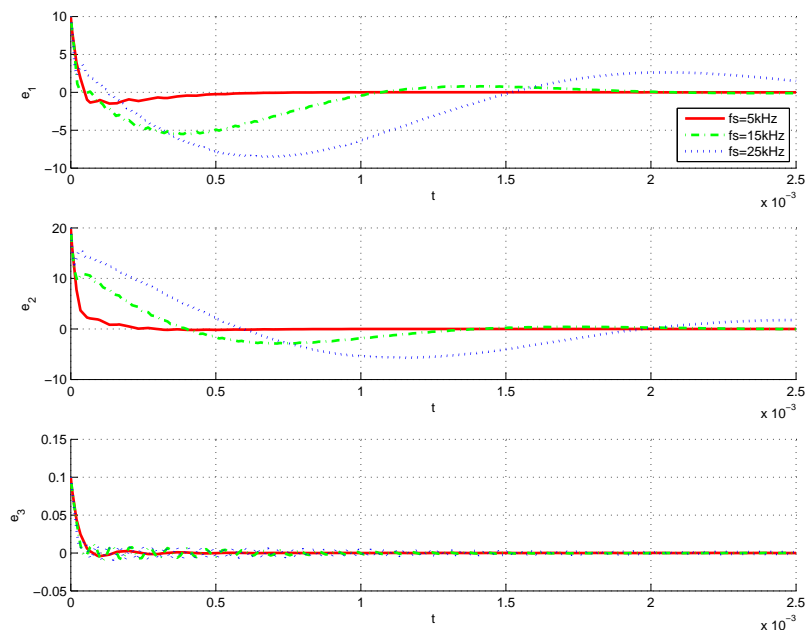


FIGURE 5.4 – Erreurs d’observation en fonction de la fréquence de commutation

Une caractérisation des ensembles invariants associés aux lois de commutation des systèmes linéaires commutés en temps continu a pu être formulé. En particulier, pour un système commuté ayant une fonction de Lyapunov au sens faible commune aux différents modes, une description est donnée des relations entre les ensembles  $\omega$ -limite et les trajectoires évoluant dans l’ensemble invariant et associées à une inclusion différentielle [109].

Nous montrons comment cette description peut être utilisée pour étudier les propriétés de convergence d’observateurs de systèmes commutés pour lesquels aucun des sous systèmes n’est observable. Ce résultat est appliqué sur le cas d’un convertisseur multi-niveaux [107, 108].

L’étude de conditions suffisantes les moins conservatives possibles sur la loi de commutation pour assurer la convergence à l’origine du système commuté a également été une de nos préoccupations. Cet objectif nous a conduit à envisager plusieurs notions de temps d’activation minimum pouvant assurer la convergence des solutions vers l’origine [121, 122].

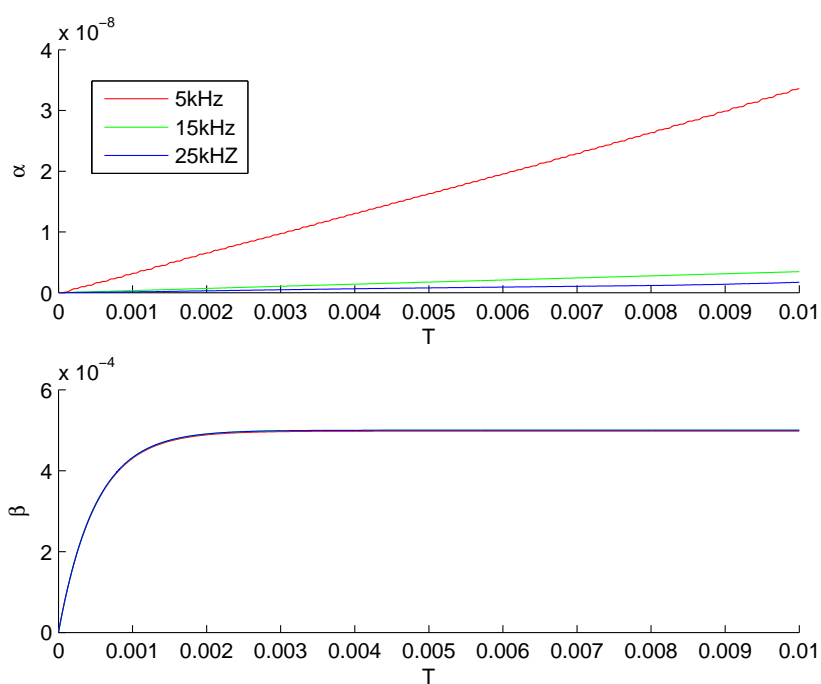


FIGURE 5.5 – Encadrement (SVD) du grammien d’observabilité sur horizon fini

# Chapitre 6

## Modélisation et simulation des systèmes complexes

La modélisation des systèmes complexes est également une de nos préoccupations. Disposer de modèles adéquats pour piloter une installation industrielle est nécessaire mais bien sûr, cette modélisation ne peut être dissociée de son objectif (commande, observation, diagnostic). Je participe actuellement à des contrats de recherche liant notre équipe et ArcelorMittal pour développer des outils de contrôle commande sur des chaînes de Laminoir à chaud. La simplification de modèle et les stratégies de commande sont donc discutées pour parvenir à des solutions réalistes et performantes. La thèse d'Olivier Auchet que j'ai co-encadré avec Claude Iung et en partenariat avec Siemens, aborde également cette problématique de la modélisation. Ces travaux ont permis de développer un simulateur simplifié d'un four verrier en vue de l'entraînement d'opérateur. Le choix d'une modélisation de type premier principe et la définition d'un problème simplifié basé sur des schémas conservant l'énergie et les bilans de matières, ont permis d'obtenir un simulateur de qualité et temps réel comme la comparaison avec les outils existants a pu le démontrer.

### 6.1 Simulation simplifiée de systèmes complexes : Le cas d'un four verrier

Ce travail effectué dans le cadre de la thèse d'Olivier Auchet [16] contribue à la modélisation simplifiée des fours verriers en proposant un modèle à faible charge de calcul présentant des aspects et perspectives d'utilisation originaux. Ce travail constitue la première étape d'un projet de développement des activités de simulation de la division allemande de SIEMENS qui a financé la thèse.

La modélisation des fours est un point très important pour l'industrie du verre, parce que seule la connaissance du processus permet de l'améliorer. Ceci est particulièrement vrai à une époque où les gains en énergie et en propreté sont cruciaux pour la survie de l'industrie. Les ordinateurs permettent l'emploi de modèles fins pouvant déterminer de façon très précise le fonctionnement du





four mais n'étant pas adaptés aux applications où le temps de calcul est limité.

Dans ces cas-là, il est nécessaire de simplifier la représentation des phénomènes physiques pour obtenir des temps de calcul raisonnables. Notre travail a consisté à développer un modèle simplifié pour des fours transversaux et à boucles et à l'implanter dans des applications pour l'industrie. Pour avoir une charge de calcul acceptable, notre modèle est développé à partir d'une géométrie de four simplifiée, qui place nos simulations au niveau des bilans moyens. Ensuite, seuls les principaux phénomènes physiques du four sont modélisés, avec une représentation réduite à une échelle au moins aussi précise que celle du positionnement des capteurs sur le four réel, mais pouvant aussi être raffinée. Le modèle est ainsi constitué du couplage de trois parties : la chambre de combustion, les parois et le bain. Dans chaque domaine, les phénomènes sont décrits par les grands principes de la physique et formulés sous forme d'équations aux dérivées partielles. La résolution des équations est faite par la méthode des volumes finis, et les solveurs des différentes parties sont couplés entre eux suivant un algorithme cyclique et itératif. Des pondérations de réglage permettent de caler le modèle.

Dans l'enceinte de combustion, la combustion turbulente est approchée par un écoulement 1D pour chaque brûleur, depuis la porte d'introduction jusqu'à la porte d'extraction. Le profil de flamme peut-être modélisé empiriquement, et les transferts par convection et radiation avec les parois et la surface du bain sont calculés respectivement par des relations empiriques et la méthode des zones d'Hottel.

Dans les parois, les transferts de chaleur se font par conduction dans l'épaisseur uniquement. Aux interfaces avec l'extérieur, les parois échangent par convection et rayonnement. Le bain est représenté très simplement par une charge mobile selon une seule direction avec transferts de chaleur par diffusion verticale.

Les différents sous-modèles ont fait l'objet de validations. La chambre de combustion (parois+ gaz) a été comparée en régime stationnaire et transitoire, pour deux cas de référence, à un modèle réputé correct développé à l'institut hollandais TNO [17, 43]. Les résultats sont très proches, et les différences viennent du calcul des facteurs de forme volumiques dans les transferts radiatifs. La méthode que nous avons utilisée pour ces facteurs nécessite d'être revue, surtout pour des

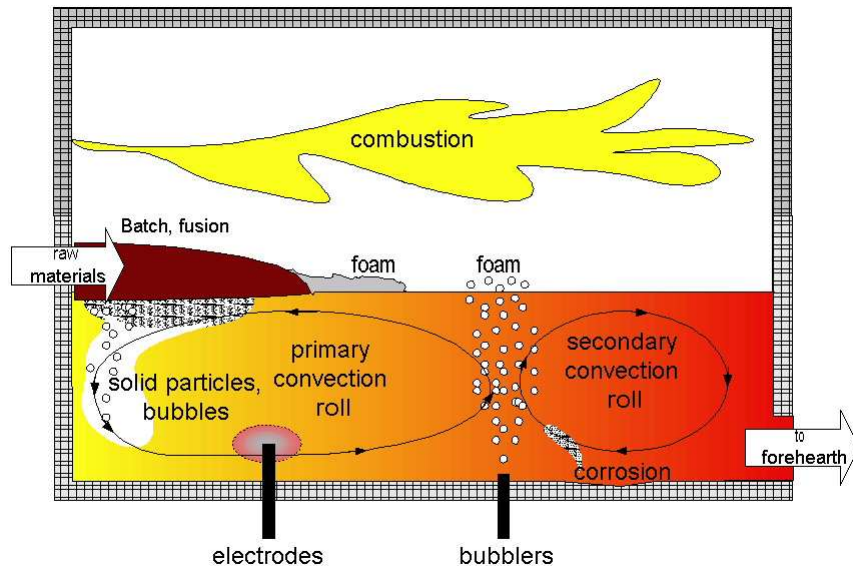


FIGURE 6.1 – Physical phenomenon in a glass melting furnace

coefficients d'absorption du gaz élevés. Le modèle des parois a été validé par rapport à des résultats analytiques. Le modèle de la charge a été validé en vérifiant la cohérence physique des résultats sur de nombreuses études paramétriques publiées dans la littérature. Toutefois, il est nécessaire pour la suite d'améliorer le modèle du bain pour prendre en compte les rouleaux de convection et la diffusion isotrope de chaleur.

Le modèle a été utilisé dans plusieurs applications, dont la principale est un outil informatique de simulation de fours verriers à boucle et transversaux, pour l'industriel SIEMENS. D'autres applications ont suivi, avec un autre outil de simulation interactive pouvant servir comme système d'entraînement d'opérateurs, le contrôle des températures dans un feeder basé sur le modèle de charge mobile développé pour le modèle global du four.

Plusieurs perspectives d'emploi existent pour ce modèle, dont l'entraînement d'opérateurs et les études paramétriques rapides du four. La plus importante est l'utilisation du modèle dans des algorithmes de contrôle du four. Le nombre de mesures de températures utilisé pour piloter un four est faible, et ce sont donc les valeurs moyennes que l'on pilote. Il semble alors qu'un modèle moyen prédictif puisse aider dans les tâches de pilotage, à condition de prendre en compte les incertitudes de modèle par un algorithme robuste. Le succès dépendra du réalisme du modèle que l'on peut optimiser grâce aux paramètres de réglage du profil de flamme.



# Chapitre 7

## Conclusions générales et perspectives

Les contributions que nous avons choisi de présenter dans ce mémoire ont trait en général à la commande, à la stabilité et à l'observation des systèmes dynamiques hybrides. Ce mémoire retrace le cheminement de mes recherches sur les dix dernières années au CRAN au sein du projet systèmes dynamiques hybrides et complexes mais également aux travers de projets et collaborations locales (CPER : projet SC2), nationales (GdR SDH, AS 192, ANR ArHyCo) et européennes (Hycon).

L'extension du principe du minimum et l'établissement de conditions nécessaires pour la résolution d'un problème de commande optimale pour les SDH ont permis de soulever et de mettre en évidence des difficultés liées à la résolution de ce type de problème. Deux freins principaux à la mise en oeuvre d'algorithmes généraux efficaces ont été identifiés et proviennent d'une part, de l'explosion combinatoire engendrée par la dynamique discrète couplée aux dynamiques continues et d'autre part, de l'existence de trajectoires singulières conduisant nécessairement à des solutions sous optimales. Une discussion sur les méthodes de résolution directes et indirectes montre que même dans des situations simplifiées, l'existence de trajectoires singulières pose un réel problème et les algorithmes utilisant le principe du minimum sont inadaptés sans traitement particulier pour gérer ces situations. Nous montrons sur un exemple qu'il peut être préférable d'utiliser des méthodes directes sous une formulation de tirs multiples.

Pour la classe des systèmes affines commutés qui représente une classe de systèmes technologiques très répandus, les points de fonctionnement rendent particulièrement évident le rôle joué par les trajectoires singulières. On constate qu'elles correspondent aux solutions optimales au sens de Fillipov du système commuté. Nous avons proposé une méthode permettant d'effectuer la synthèse de ces trajectoires optimales pour des critères de type temps optimal ou quadratique en temps infini applicable sur des systèmes de dimension faible et en général inférieure ou égale à 3.

Une seconde méthode de synthèse à base de commande prédictive utilise les degrés de liberté sur la commande autour du point de fonctionnement pour poursuivre un cycle particulier défini par un critère. L'algorithmme rapide d'optimisation des solutions tient compte des discontinuités issues des instants de commutations et utilise les fonctions de sensibilité vis à vis de ces instants.

Ces deux méthodes ont montré leur efficacité et leur robustesse sur plusieurs convertisseurs de puissance dans le cadre du réseaux Hycon et ont fait l'objet d'un travail doctoral avec la thèse de Diego Patino.

La généralisation aux SDH du calcul des fonctions de sensibilité lorsque le système hybride est le siège de discontinuités de champs et de saut sur l'état, est un résultat utile qui permet d'utiliser des outils nécessitant une différentiation. Le calcul rapide des cycles limites et l'étude de leur stabilité est une première application possible, l'optimisation est très clairement la cible principale.

L'étude et l'analyse du comportement asymptotique des systèmes linéaires commutés via la formulation d'un principe d'invariance de Lasalle nous amène à un constat similaire à celui fait sur la commande optimale : Le comportement asymptotique est identique à celui que l'on obtient en considérant les solutions de Fillipov du système commuté. Nous avons montré en considérant plusieurs hypothèses sur les lois de commutation que la séparation est opérée si on restreint la loi de commutation en considérant par exemple des hypothèses fortes de temps d'activation minimum sur les modes. Ces résultats d'analyse sont primordiaux dans la compréhension de la complexité de la dynamique issue de la commutation.

La synthèse d'observateurs commutés pour la classe des systèmes linéaires commutés que nous avons proposée, et l'identification algébrique des lois ne permettant pas d'observer le système ont été déduites du principe d'invariance mentionné à l'item précédent. La mise en évidence de la décroissance de la vitesse de convergence de l'erreur d'observation en fonction de la vitesse de commutation est une conséquence de cette caractérisation algébrique.

Les travaux réalisés ont permis de soulever de très nombreux problèmes spécifiques à la classe des systèmes commutés (Robustesse vis à vis d'incertitudes paramétriques, extension au cas discret et échantillonné, synthèse de lois préservant l'observabilité, vitesse de convergence de l'observateur, ...) et de dégager des pistes de recherche concernant leur résolution. Certaines sont à court ou moyen terme et s'inscrivent dans le projet ANR ArHyCo porté par le Cran. D'autres nécessitent des études amonts et doivent être envisagées sur une durée plus longue.

### **Commande optimale, inclusion différentielle et modèle de complémentarité**

Les modèles de complémentarité et les inclusions différentielles sont des formalismes adaptés à une description de modèles dynamiques discontinues [3, 38].

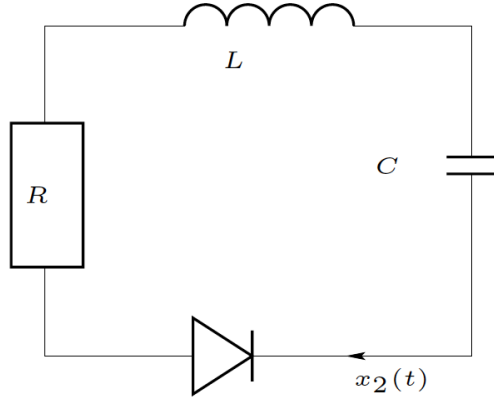


FIGURE 7.1 – Circuit incluant une diode idéale

Par exemple, le circuit représenté sur la figure 7.1 comprenant une diode idéale admet le modèle de complémentarité suivant :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{R}{L}x_2(t) - \frac{1}{LC}x_1(t) - \frac{\lambda(t)}{L} \\ 0 &\leq \lambda(t) \perp -x_2(t) \geq 0 \end{aligned}$$

mais peut également être réécrit sous la forme d'une inclusion différentielle

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) - x_2(t) &= 0 \\ \dot{x}_2(t) + \frac{R}{L}x_2(t) + \frac{1}{LC}x_1(t) &\in \frac{1}{L}\partial\Psi_{\mathbb{R}^+}(-x_2(t)) \end{aligned}$$

où  $\Psi_{\mathbb{R}^+}$  est la fonction indicatrice de l'ensemble  $\mathbb{R}^+$  définie par

$$\Psi_K = \begin{cases} 0 & \text{si } \in K \\ +\infty & \text{si } \notin K \end{cases}$$

et  $\partial\Psi_K(x)$  la sous différentielle au point  $x$ . Ce formalisme permet d'étendre proprement la notion de solution à des systèmes différentiels ayant un second membre discontinu avec notamment la définition de solutions au sens de Fillipov [38].

#### *Prise en compte des sauts autonomes*

Les modèles de complémentarité permettent de représenter sous la forme d'un seul système différentiel muni de conditions de complémentarité, des systèmes

commutés avec sauts autonomes (dispositifs électriques comportant des diodes, modèle de glissement, etc.).

Les résultats concernant la commande optimale des SDH ont largement délaissé le cas des sauts autonomes et les principaux apports privilégient la recherche de séquences de commutation sur des systèmes à sauts contrôlés sans contrainte.

Une voie d'investigation qui permettrait d'étendre les résultats actuels est d'étudier la possibilité de "commuter" des systèmes de complémentarité. La gestion des sauts autonomes serait directement prise en compte par les contraintes de complémentarité et seuls les sauts commandés interviendraient effectivement dans la recherche de la solution optimale. La convexification du problème en considérant l'inclusion différentielle associée est le cadre théorique sur lequel ces travaux pourront être engagés.

### *Synthèse des trajectoires singulières*

L'existence de solutions singulières est une vraie difficulté pour la synthèse de commande optimale sur la classe des systèmes commutés qui est encore mal connue comme nous avons eu l'occasion de le souligner [109]. Dans nos travaux, nous avons privilégié une approche algébrique pour déterminer ces arcs de trajectoires. La recherche d'une solution explicite  $u(x)$  limite en général l'utilisation de ces résultats à des systèmes de dimension inférieure ou égale à trois.

Actuellement la voie numérique classique n'est pas faisable ou très peu fiable. Les raisons proviennent de l'instabilité du problème à résoudre, de son mauvais conditionnement et du "chattering" occasionné par les surfaces de glissement ; la détermination par une méthode numérique des arcs singuliers et des solutions optimales conduit à la résolution d'équations algèbro-différentielles non-linéaires instables et se trouve hors de portée de solveurs standards.

Les solutions singulières sont des solutions de Fillipov du systèmes commutés satisfaisant une contrainte algébrique déterminée par la fonction de commutation  $\phi(t) = 0$ . En fait, il s'agit d'un cas particulier obtenu à partir de la condition de minimum du PM où la commande est déterminée par une relation de type :  $u = \text{sign}(\phi(t))$  où  $\text{sign}(\cdot)$  définie une fonction multivaluée :

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} +1 & \text{si } x > 0 \\ [-1, 1] & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Cette formulation de la commande peut être exprimée sous la forme d'un problème de complémentarité ou d'une inclusion différentielle dans laquelle la partie multivaluée serait représentée sous la forme d'une fonction signe. En considérant, deux variables additionnelles  $s_1$  et  $s_2$ , la formulation du problème de commande optimale initial (en considérant un problème affine en la commande) devient sous la forme d'un problème de complémentarité :

---

Trouver  $\min J$  sous les contraintes :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ \dot{\lambda} &= \left(\frac{df}{dx}\right)^T \lambda + \left(\frac{dg}{dx}\right)^T \lambda u \\ 0 &\leq s_1 \perp (u + 1) \geq 0 \\ 0 &\leq s_2 \perp (1 - u) \geq 0 \\ 0 &= s_1 - s_2 - \phi(x, \lambda) \end{aligned}$$

Une manière plus ou moins satisfaisante de résoudre ce problème est obtenue par une approche directe sous la forme d'un problème de programmation non linéaire en utilisant un terme de pénalisation pour satisfaire les contraintes d'orthogonalités.

Ce formalisme pour la recherche des arcs singuliers laisse envisager à court terme la possibilité d'utiliser des solveurs dédiés [3] (event-driven schemes ou time-stepping schemes) spécifiques à cette classe de problèmes et capables de déterminer les solutions de Fillipov sans chattering. Sur des exemples de faibles dimensions pour lesquels nous savons calculer algébriquement les solutions singulières, l'étude de faisabilité sera facilitée par la comparaison et l'analyse des résultats numériques avec les solutions exactes. Selon la formulation du problème de commande, deux types de problèmes IVP (Initial Value Problem) et BVP (Boundary Value Problem) sont à envisager.

Les conditions d'applicabilité de ces méthodes numériques indirectes à la synthèse de trajectoires optimales supposent que le système Hamiltonien issu du problème de commande est bien posé au sens de l'existence et de l'unicité de la solution. Déterminer les conditions d'applicabilité sur des classes de systèmes est un problème ouvert considéré comme difficile [30, 88].

Néanmoins, cette piste d'investigation semble offrir la possibilité d'une approche numérique viable et proposer une méthodologie dans ce cadre ouvre la voie à plus long terme à la résolution de problème de commande optimale sur une classe de systèmes commutés très générale comportant des saut autonomes et commutés.

### **Commande basée observateur et retour de sortie dynamique**

La contribution sur l'étude de stabilité des systèmes linéaires commutés et en particulier sur l'observabilité des systèmes linéaires commutés montre très clairement à l'instar des systèmes non linéaires que la propriété d'observabilité est liée à la loi de commutation. La caractérisation de ces lois sous la forme d'un invariant établit une relation algébrique liant les valeurs de commandes aux erreurs d'observation.

La synthèse d'une commande basée « observateur » doit donc prendre en compte cette difficulté et maintenir un certain niveau d'excitation du système à piloter



afin de pouvoir estimer correctement l'état. Dans ces conditions, préserver la stabilité d'un bouclage par retour de sortie est d'actualité [12] et n'a pas de réponse à ce jour.

Une voie possible qui permettrait d'atteindre ce résultat à brève échéance peut consister lors de la phase de synthèse des lois de commande à prendre en compte simultanément un critère de performance et un critère d'excitation persistante des différents modes. Ce critère d'excitation persistante pourrait être obtenu en maintenant le grammien d'observabilité défini positif sur un horizon glissant. L'estimation de la vitesse de convergence de l'observateur doit pouvoir également être évaluée en imposant une borne inférieure sur la plus petite des valeurs singulières de grammien d'observabilité. A plus long terme, l'objectif est de pouvoir établir des garanties de stabilité sur les lois obtenues par bouclage de sortie.

### **Robustesse des lois de commande**

La qualité d'une loi de commande est avant tout liée à sa faculté de rejet de perturbations et de robustesse vis à vis d'incertitudes paramétriques ou de modélisation avant toute considération concernant ces performances dynamiques.

La synthèse des lois par retour d'état que nous avons proposée, est fondée sur une connaissance parfaite des modèles sans erreurs. Les tests réalisés en simulation et sur maquette en présence de bruits et/ ou de fortes variations paramétriques montrent de bonnes propriétés de robustesse. L'évaluation théorique de marges de stabilité à définir, n'a cependant pas été faite. La possibilité de garantir des marges serait une valeur ajoutée importante.

L'étude et l'analyse de méthodes permettant la synthèse de commandes robustes incluant des garanties de stabilité [80, 66, 50, 139] est donc envisagée, sur le court et moyen terme (cf. item précédent concernant le bouclage par retour de sortie).

L'extension au cas des systèmes commutés avec sauts autonomes et commandés de la notion d'«Input to State Stability» (ISS) [69] est une voie qui pourrait être investie pour garantir ces marges de stabilité [55] sur une commande prédictive en présence d'incertitudes ou de bruits bornés.

### **Adaptation des lois de commande**

Un autre problème bien réel concerne la régulation de systèmes pour lesquels des paramètres évoluent de façon non négligeable et nécessitent l'adaptation du correcteur. Par exemple sur une variation de charge appliquées à un convertisseur de puissance.

On peut décliner ce problème en deux sous catégories suivant que ces paramètres sont mesurés ou non.

- 
- Lorsque la mesure des paramètres est effective, la synthèse de commandes qui tiennent compte de ces variations paramétriques, doit pouvoir garantir la stabilité du système pour un gabarit fixant l’amplitude et les vitesses de variation maximum des paramètres [87].

Sur un schéma de type prédictif, la prédiction ne peut tenir compte a priori des futures variations des paramètres. Il est possible néanmoins lorsque les vitesses de variations sont limitées d’envisager le pire cas [78]. Aux instants d’échantillonnages, le problème de commande optimale est transformé en un problème de min-max. A court terme, l’extension des résultats que nous avons obtenus dans le rejet de perturbation  $H_\infty$  sur les jeux différentiels discontinus [39] à cette formulation, peut être un moyen de répondre au problème.

Une alternative peut également être envisagée à partir du calcul des fonctions de sensibilité vis à vis des variations paramétriques. La synthèse d’un correcteur prédictif -adaptatif induisant une sensibilité réduite de la réponse aux erreurs de prédiction liées aux variations paramétriques est une autre voie d’investigation qui pourrait être menée en parallèle avec la précédente.

- Lorsque la mesure des paramètres n’est pas ou partiellement disponible, on aborde alors le problème de l’estimation paramétrique qui est un problème ouvert sur la classe des systèmes considérés [11, 79]. Le couplage entre l’estimateur paramétrique et la commande conduit à des schémas de commande adaptative pour lesquels très peu de résultats sont actuellement disponibles dans le domaine des systèmes dynamiques hybrides contrairement au cas simple des systèmes linéaires invariants [47, 10].

Nous envisageons, à court et moyen termes, d’appliquer des méthodes algébriques [49] d’estimation et d’identification en ligne sur la classe des systèmes commutés. Ces méthodes pour lesquelles l’estimation est obtenue via des intégrations sur horizon glissant des sorties ont de bonnes propriétés de filtrage et robustesse et se révèlent moins sensibles que des méthodes classiques de type gradient ou à base de filtre étendu de Kalman.

Dans ce contexte, la séparation des échelles de temps des boucles de régulations et d’estimations peut être une solution pour garantir la stabilité que l’on peut aborder par une formulation de type perturbation singulière mais les effets des discontinuités sur la dynamique de l’ensemble n’ont jamais été évalués [134].

On peut aussi envisager une synthèse globale du correcteur et de l’estimateur et on rejoint un problème similaire évoqué lors de la synthèse d’un retour dynamique [4].

## Activités contractuelles et collaborations industrielles

Comment nous l’avons signalé au chapitre sur la modélisation des systèmes complexes, le développement de modèles de commande est une de nos préoccupations.

pations. Cet objectif est essentiel à la mise en place d'algorithmes de commande capables de piloter efficacement et en temps réel des installations complexes.

Modéliser ces systèmes et comprendre leurs comportements est la première tâche essentielle au développement de méthodes de commandes avancées. Ces systèmes complexes sont en général distribués, hétérogènes, en réseaux et de grandes dimensions (EDP, hybride, grands réseaux, bioprocédés, ...) et font apparaître des problèmes d'échelles.

L'amélioration des rendements, de la fiabilité et de l'efficacité de ces procédés est un défi important. La complexité des modèles est cependant un frein qui limite le développement d'outils pour le contrôle et l'optimisation de ces systèmes. Simplifier les modèles disponibles et développer des modèles pour la prise de décision et l'optimisation du fonctionnement devient alors un enjeu aux retombées économiques et sociétales évidentes.

Cette activité à caractère applicatif que nous avons développé sur des collaborations industrielles (Siemens (thèse de Olivier Auchet), ArcelorMittal, ... ) est une source importante de problèmes concrets (fours verriers, procédés thermiques (coopers), laminoirs (planeité, cristallographie), etc.). Elle s'inscrit dans l'activité contractuelle de notre laboratoire. Je tiens à la maintenir dans la durée.

# Bibliographie

- [1] A.Bemporad, A.Giua, and C.Seatzu. An algorithm for the optimal control of continuous time switched linear systems. In *IEEE Computer Society, Proceeding of the Sixth workshop on Discrete Event Systems*, 2002.
- [2] A.Bemporad, D.Corona, A.Giua, and C.Seatzu. Optimal state-feedback quadratic regulation of linear hybrid automata. In *IFAC Conf. on Analysis and Design of Hybrid Systems*, 2003.
- [3] V. Acary and B. Brogliato. *Numerical methods for nonsmooth dynamical systems*, volume 35. Lecture notes in applied and computational mechanics, Springer, 2008.
- [4] V. Adetola, D. DeHaan, and M. Guay. Adaptive model predictive control for constrained nonlinear systems. *Systems & Control Letters*, 58 :320–326, 2009.
- [5] A. Al-Alawi and S. A.-A. and S.M. Islam. Predictive control of an integrated pv-diesel water and power supply system using an artificial neural network. *Journal of Renewable Energy*, 32 :1426–1439, 2007.
- [6] M. Alamir. A benchmark for optimal control problem solvers for hybrid nonlinear systems. *Automatica*, 42 :1593 – 1598, 2006.
- [7] M. Alamir and S. Attia. On solving optimal control problems for switched nonlinear systems by strong variations algorithms. In *Proceedings of NOL-COS 2004 Symposium on Nonlinear Control Systems*. Stuttgart, Germany, 2004.
- [8] S. Almer, H. Fujioka, U. Jonsson, C.-Y. Kao, D. Patino, P. Riedinger, T. Geyer, G. Beccuti, G. Papafotiou, M. Morari, A. Wernrud, and A. Rantzer. Hybrid control techniques for switched mode dc-dc converters part i : The step-down topology. In *Proceedings of IEEE 26th American Control Conference*, volume 1, pages 5450–5457. New York City, USA, 2007.
- [9] S. Almer, U. Jonsson, C. Y. Kao, and J. Mari. Global stability analysis of dc-dc converters using sampled-data modeling. In *Proceedings of IEEE 24th American Control Conference*, volume 1, pages 4549–4554, 2004.
- [10] B. D. Anderson and A. Dehghani. Challenges of adaptive control : past, permanent and future. *Annual Reviews in Control*, 32 :123–135, 2008.
- [11] B. D. O. Anderson. Failures of adaptive control theory and their resolution. *Communications in Information and Systems*, 5(1) :1–20, 2005.

- [12] V. Andrieu and L. Praly. A unifying point of view on output feedback designs for global asymptotic stabilization. *Automatica*, 45 :1789–1798, 2009.
- [13] T. Aprille and T. Trick. Steady-state analysis of nonlinear circuits with periodic inputs. In *Proceedings of the IEEE*, volume 60, pages 108 – 114, 1972.
- [14] Z. Artstein. Stabilization with relaxed controls. *Nonlinear Anal.*, 7(11) :1163–1173, 1983.
- [15] J.-P. Aubin and A. Cellina. *Differential inclusions*, volume 264 of *Fundamental Principles of Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [16] O. Aucht. *Contribution à la modélisation simplifiée des fours verriers*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Lorraine, 2004.
- [17] O. Aucht, P. Riedinger, O. Malassé, and C. Iung. First-principles simplified modelling of glass furnaces combustion chambers. *Control Engineering Practice Elsevier*, 16(12) :1443– 1456, 2008.
- [18] A. Bacciotti and L. Mazzi. An invariance principle for nonlinear switched systems. *Systems Control Lett.*, 54(11) :1109–1119, 2005.
- [19] M. Baja, D. Patino, H. Cormerais, P. Riedinger, and J. Buisson. Hybrid control of a three-level three-cell converter. In *Proceedings of IEEE 26th American Control Conference*, volume 1, pages 5450–5457. New York City, USA, 2007.
- [20] M. Baja, D. Patino, P. Riedinger, H. Cormorais, J. Buisson, and C. Iung. Alternative control methods for a four-level three-cell dc-dc converter. *In review. IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2009.
- [21] R. Bellman. *Dynamic Programming*. Princeton University Press, 1957.
- [22] A. Bensoussan and J. L. Lions. *Impulse Control and Quasi-Variational Equalities*. Gauthier Villars, 1984.
- [23] L. Berkowitz. Optimal control theory. *Applied Mathematical Sciences*, 12, 1974.
- [24] O. Béthoux and J.-P. Barbot. Commande permettant le contrôle du convertisseur multicellulaire série à nombre non premier de cellules. In *Conférence Internationale Francophone en Automatique*. Bordeaux, France, 2006.
- [25] J. T. Betts. *Practical methods for optimal control using nonlinear programming*. Advanced design and control, Siam, 2001.
- [26] B. Bonnard, C. Bernard, and M. Chyba. *Singular Trajectories and their Role in Control Theory*. Series : Mathématiques et Applications, Springer SMAI, 2003.
- [27] M. Branicky, V. Borkar, and S. Mitter. A unified framework for hybrid control : Model and optimal control theory. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43(1), 1998.

- 
- [28] M. S. Branicky. Multiple Lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems. *IEEE Trans. Automat. Control*, 43(4) :475–482, 1998. Hybrid control systems.
- [29] M. S. Branicky and S. K. Mitter. Algorithms for optimal control. In *IEEE Conf. on Decision and Control*, pages 2661–2666, 1995.
- [30] B. Brogliato. Some results on optimal control with unilateral state constraints. *Nonlinear Analysis*, 70 :3626–3657, 2009.
- [31] J. Buisson, H. Cormerais, and P. Richard. Analysis of the bond graph model of hybrid physical systems with ideal switches. *Journal of Systems and Control Engineering*, 216(11) :47–72, 2002.
- [32] J. Buisson, H. Cormerais, M. Zainea, H. Gueguen, and E. Godoy. Formal approach to compute hybrid automata model for linear physical systems with switches. In *Proceedings of the 2004 IEEE Conference on Computer Aided Control Systems Design*, volume 1, pages 47–52, Taipei, Taiwan, 2004.
- [33] V. Chellaboina, S. P. Bhat, and W. M. Haddad. An invariance principle for nonlinear hybrid and impulsive dynamical systems. *Nonlinear Anal.*, 53(3-4) :527–550, 2003.
- [34] Y. Chitour, F. Jean, and E. Trélat. Genericity results for singular trajectories. *Journal of differential Geometry*, 73(1) :45 – 73, 2006.
- [35] L. Chua and P. Lin. *Computer aided analysis of electronic circuits*. Prentice Hall, 1975.
- [36] G. Colin, Y. Chamaillard, A. Charlet, G. Bloch, and G. Corde. Exact and linearized neural predictive control : A turbocharged si engine example. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 129 :527–533, 2007.
- [37] D. Corona, A. Giua, and C. Seatzu. Optimal feedback switching laws for homogeneous hybrid automata. In *IEEE Conference on Control and Decision*, 2003.
- [38] J. Cortes. Discontinuous dynamical systems. *IEEE Control Systems Magazine*, 4 :36 – 73, June 2008.
- [39] J. Daafouz and P. Riedinger. Disturbance attenuation control for a class of hybrid systems. In *European Control Conference*, 2001.
- [40] J. Daafouz, P. Riedinger, and C. Iung. Stability analysis and control synthesis for switched systems : a switched Lyapunov function approach. *IEEE Trans. Automat. Control*, 47(11) :1883–1887, 2002.
- [41] R. A. Decarlo, M. S. Branicky, S. Pettersson, and B. Lennartson. Perspectives and results on the stability and stabilizability of hybrid systems. *Proceedings of the IEEE*, 88(7) :1069–1082, 2000.
- [42] F. Defay. *Commande Prédictive Directe d’un Convertisseur Multicellulaire Triphasé Pour Une Application de Filtrage Actif*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Toulouse, 2008.

- [43] O. O. den Camp et P. Gerlings. Fast hybrid simulation models. In *6th Int. Seminar on Mathematical Modeling and Advanced Numerical Methods in Furnace Design and Operation, Velke Karlovice, Czech Republic*, 2001.
- [44] A. Dmitruk and A. Kaganovich. The hybrid maximum principle is a consequence of pontryagin maximum principle. *Systems & Control Letters*, 57 :964–970, 2008.
- [45] M. Egerstedt, Y. Wardi, and F. Delmotte. Optimal control of switching times in switched dynamical systems. In *IEEE Conference on Decision and Control*, 2003.
- [46] A. El-Aroudi, M. Debbat, and L. Martinez-Salamero. Poincaré maps modeling and local orbital stability analysis of discontinuous piecewise affine periodically driven systems. *Nonlinear dynamics Journal*, 50 :431 – 445, 2007.
- [47] M. Fiacchini, T. Alamo, C. Albea, and E. Camacho. Adaptive model predictive control of the hybrid dynamics of a fuel cell system. In *IEEE International Conference on Control Applications*, 2007.
- [48] D. Flieller, P. Riedinger, and J. P. Louis. Computation and stability of limit cycles in hybrid systems. *Nonlinear Analysis*, 64(2) :352–367, January 2006.
- [49] M. Fliess, C. Join, and H. Sira-Ramirez. Non-linear estimation is easy. *International Journal of Modelling, Identification and Control*, 4(1) :12 – 27, 2008.
- [50] H. Fujioka, C.-Y. Kaob, S. Almérc, and U. Jönsson. Robust tracking with  $h_\infty$  performance for pwm systems. *Automatica*, 45 :1808–1818, 2009.
- [51] G. Gateau. *Contribution à la commande des convertisseurs statiques multicellulaires série*. Thèse de Doctorat. Institut National Polytechnique de Toulouse, 1997.
- [52] P. E. Gill, W. Murray, and M. H. Wright. *Practical Optimization*. London Academic Press, 1981.
- [53] R. Goebel, R. G. Sanfelice, and A. R. Teel. Invariance principles for switching systems via hybrid systems techniques. *Systems Control Lett.*, 57(12) :980–986, 2008.
- [54] J. Golcalves, A. Megretski, and M. Dahleh. Global analysis of piecewise linear systems using impact maps and surface lyapunov functions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48 :2089 – 2106, 2003.
- [55] P. J. Goulart and E. C. Kerrigan. Input-to-state stability of robust receding horizon control with an expected value cost. *Automatica*, 44 :1171–1174, 2008.
- [56] S. Hedlund and A. Rantzer. Optimal control of hybrid systems. In *IEEE Conf. on Decision and Control*, 1999.
- [57] S. Hedlund and A. Rantzer. Convex dynamic programming for hybrid systems. *IEEE Transactions in Automatic Control*, 47(9) :1536–1540, 2002.

- 
- [58] V. Hernandez, R. Silva, and H. Sira-Ramirez. On the stability of limit cycles in resonant dc-to-dc power converters. In *Proceedings of the 42th Conference on Decision and Control*, volume 2, pages 1141–1146, 2003.
- [59] J. Hespanha and A. S. Morse. Stability of switched systems with average dwell-time. In *38th IEEE Conf. on Decision and Control*, pages 2655–2660, 1999.
- [60] J. P. Hespanha. Uniform stability of switched linear systems : extensions of LaSalle’s invariance principle. *IEEE Trans. Automat. Control*, 49(4) :470–482, 2004.
- [61] F. Huliehel and S. Ben-Yaakov. Low frequency sampled data models of switched mode dc-dc converters. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 6(1) :55–61, 1991.
- [62] B. Ingalls, E. D. Sontag, and Y. Wang. An infinite-time relaxation theorem for differential inclusions. In *Proceedings of the American Mathematical Society*, volume 131, pages 487–499. Providence, USA, 2003.
- [63] B. Ingalls, E. D. Sontag, and Y. Wang. An infinite-time relaxation theorem for differential inclusions. *Proceedings of the 2002 American Mathematical Society*, 131(2) :487–499, 2003.
- [64] H. Iu and C. Tse. Instability and bifurcation in parallel connected buck converters under a master slave current sharing scheme. In *Proceedings of IEEE Power Electronics Specialist Conference*, volume 2, pages 708 – 713. Galway, Ireland, 2000.
- [65] J. Yong. Systems governed by ordinary differential equations with continuous, switching and impulse controls. *Appl. Math. Optim.*, 20(223-235), 1989.
- [66] M. V. Kothare, V. Balakrishnan, and M. Morari. Robust constrained model predictive control with finite terminal weighting matrix. *Automatica*, 32(10) :1361–1379, 1996.
- [67] A. Krener. The higher order maximal principle and its application to singular extremals. *SIAM Journal of Control and Optimization*, 15(2) :256–293, 1975.
- [68] J. S. Lai and F. Z. Peng. Multilevel converters-a new breed of power converters. *IEEE Transactions on Industrial Applications*, 32(3) :2348 – 2356, 1996.
- [69] M. Lazar and W. Heemels. Predictive control of hybrid systems : Input-to-state stability results for sub-optimal solutions. *Automatica*, 45(1) :180–185, 2009.
- [70] D. Liberzon. *Switching in systems and control*. Systems & Control : Foundations & Applications. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2003.
- [71] B. Lincoln and A. Rantzer. Relaxed optimal control of piecewise linear systems. In *IFAC Conference on Analysis and Design of Hybrid Systems*, 2003.



- [72] H. Logemann and E. P. Ryan. Non-autonomous systems : asymptotic behaviour and weak invariance principles. *J. Differential Equations*, 189(2) :440–460, 2003.
- [73] J. Lygeros, K. Johansson, S. Simić, J. Zhang, and S. Sastry. Dynamical properties of hybrid automata. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48(1) :2–17, 2003.
- [74] J. Lygeros, K. H. Johansson, S. N. Simic, J. Zhang, and S. S. Sastry. Dynamical properties of hybrid automata. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 48(1) :2–16, 2003.
- [75] K. Mahabir, G. Verghese, J. Thottuvellil, and A. Heyman. Linear averaged and sampled data models for large signal control of high power factor converter. In *Proceedings of IEEE Power Electronics Specialists Conference*, pages 372 – 381. San Antonio, Texas, 1990.
- [76] J. L. Mancilla-Aguilar and R. A. García. An extension of LaSalle’s invariance principle for switched systems. *Systems Control Lett.*, 55(5) :376–384, 2006.
- [77] S. Mariéthoz, S. Almer, M. Bâja, A. G. Beccuti, D. Patino, A. Wernrud, J. Buisson, H. Cormerais, T. Geyer, H. Fujioka, U. T. Jonsson, C.-Y. Kao, M. Morari, G. Papafotiou, A. Rantzer, and P. Riedinger. Comparison of hybrid control techniques for buck and boost dc-dc converters. *IEEE Transactions on Control Systems Technology (TCST)*, 2010 (To appear).
- [78] D. Mayne, S. Rakovi, R. Vintera, and E. Kerriganb. Characterization of the solution to a constrained  $h_\infty$  optimal control problem. *Automatica*, 42 :371–382, 2006.
- [79] D. Mayne, S. Rakovic, R. Findeisen, and F. Allgower. Robust output feedback model predictive control of constrained linear systems. *Automatica*, 42(7) :1217–1222, 2006.
- [80] D. Q. Mayne!, B. Rawlings, C. V. Rao, and P. O. M. Scokaert. Constrained model predictive control : Stability and optimality. *Automatica*, 36 :789–814, 2000.
- [81] J. McDanell and W. Powers. Necessary conditions for joining optimal singular and nonsingular subarcs. *SIAM Journal of Control and Optimization*, 9 :161–173, 1971.
- [82] T. A. Meynard, M. Fadel, and N. Aouda. Modeling of multilevel converters. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 44(3) :356 – 364, june 1997.
- [83] V. Michel. Singular optimal control - the state of the art. Technical report, University of Kaiserslautern, 1996.
- [84] R. Middlebrook and S. Cuk. General unified approach to modelling switching dc to dc converters in discontinuous conduction mode. In *Proceedings of IEEE Power Electronics Specialists Conference*, pages 36–57. California, USA, 1977.

- 
- [85] R. Middlebrook and G. Wester. Low-frequency characterization of switched dc dc converters. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, AES9 :376 – 385, 1973.
- [86] E. Möllerstedt and B. Bernhardsson. Out of control because of harmonics - an analysis of the harmonic response of an inverter locomotive. *IEEE Control Systems Magazine*, 20(4) :70–81, 2000.
- [87] R. C. L. F. Oliveira and P. L. D. Peres. Robust stability analysis and control design for time-varying discrete-time polytopic systems with bounded parameter variation. In *American Control Conference, Seattle, USA*, pages 3094–3099, 2008.
- [88] J.-S. Pang and D. E. Stewart. Differential variational inequalities. *Mathematical Programming, Springer Berlin*, 113(2) :345–424, 2008.
- [89] D. Patino. *Pilotage des cycles limites dans les systèmes dynamiques hybrides. Application aux alimentations électriques statiques*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Lorraine, 2009.
- [90] D. Patino, P. Riedinger, and C. Iung. Une approche prédictive pour la commande d’un convertisseur multicellulaire. In *JD-JN-MACS’07*, volume 3, pages 50–55. Lyon, Septembre, 2007.
- [91] D. Patino, P. Riedinger, and C. Iung. Predictive control approach for multicellular converters. In *Proceedings of 34th IEEE Industrial Electronics Society*. Orlando, USA, 2008.
- [92] D. Patino, P. Riedinger, and C. Iung. Synthèse de commandes optimales pour les systèmes commutés cycliques. applications aux convertisseurs de puissance. In *5ième Conférence Internationale Francophone d’Automatique*. Bucarest, Rumanie, 2008.
- [93] D. Patino, P. Riedinger, and C. Iung. Practical optimal state feedback control law for continuous-time switched affine systems with cyclic steady state. *International Journal of Control*, 82(7) :1357 – 1376, 2009.
- [94] D. Patino, P. Riedinger, and F. Ruiz. A predictive control approach for dc-dc power converters and cyclic switched systems. In *IEEE ICIT 2010, International Conference on Industrial technology, Chili, mars 2010.*, 2010.
- [95] L. R. Petzold and U. M. Ascher. *Computer Methods for Ordinary Differential Equations and Differential-Algebraic Equations*. Siam, 1998.
- [96] B. Piccoli. Necessary conditions for hybrid optimization. In *IEEE Conf. on Decision and Control*, pages 410–415, 1999.
- [97] L. Pontryagin, V. . G. Boltyanskii, R. Gamkrelidze, and E. F. Mishchenko. *The Mathematical Theory of Optimal Processes*. Pergamon, 1964.
- [98] W. Powers. On the order of singular optimal control problems. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 32(4) :479–489, 1980.
- [99] A. Rantzer. Piecewise linear quadratic optimal control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2000.

- [100] P. Riedinger. *Contribution à la commande optimale des systèmes dynamiques hybrides*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Lorraine, 1999.
- [101] P. Riedinger. Comments on "optimally switched linear systems". *Automatica*, 45 :1588–1590, 2009.
- [102] P. Riedinger, J. Daafouz, and C. Iung. Suboptimal switched control in context of singular arcs. In *Proceedings of the 42nd IEEE Conference in Decision and Control*, volume 6, pages 6254 – 6259. Hawaii, USA, 2003.
- [103] P. Riedinger, J. Daafouz, and C. Iung. About solving hybrid control problems. In *17th IMACS World Congress*. Paris, 2005.
- [104] P. Riedinger and C. Iung. Optimal control for hybrid systems : An hysteresis example. In *IEEE System, Man and Cybernetics*, pages 188–193, 1999.
- [105] P. Riedinger, C. Iung, and F. Kratz. An optimal control approach for hybrid systems. *European Journal of Control*, 9(5) :449–458, 2003.
- [106] P. Riedinger, F. Kratz, C. Iung, and C. Zanne. Linear quadratic optimization for hybrid systems. In *IEEE Conf. on Decision and Control*, pages 3059–3064, 1999.
- [107] P. Riedinger, M. Sigalotti, and J. Daafouz. On the observability of the flying capacitor converter. In , *In proceeding European Control Conference, Budapest Hongrie*, 2009.
- [108] P. Riedinger, M. Sigalotti, and J. Daafouz. Observabilité d'un convertisseur multi-niveaux via le principe d'invariance de lasalle. In *6ième Conférence Internationale Francophone d'Automatique, CIFA'2010*, 2010.
- [109] P. Riedinger, M. Sigalotti, and J. Daafouz. On the characterization of invariants sets of switched linear systems. *Automatica*, 46 :1047–1052, 2010.
- [110] P. Riedinger, C. Zanne, and F. Kratz. Time optimal control of hybrid systems. In *Proceeding of the American Conference on Control (ACC'99)*. San Diego, USA, June 1999.
- [111] H. Robbins. A generalized legendre-clebsch-condition for the singular cases of optimal control. *IBM Journal of Research and Development*, 11(4) :361–372, 1967.
- [112] A. Rondepierre. *Algorithmes hybrides pour le controle optimal des systèmes non linéaires*. Institut National Polytechnique de Grenoble, 2006.
- [113] E. Rozenvasser. General sensitivity equations of discontinuous systems. *Automation and remote control*, 28 :400–404, 1967.
- [114] A. Rusnak, M. Fikar, K. Najim, and A. Meszaros. Generalized predictive control based on neural networks. *Neural Processing Letters*, 4 :107–112, 1996.
- [115] D. Ruxton and D. Bell. Junction times in singular optimal control. *Journal of Applied Mathematics and Computation*, 70 :143–154, 1995.

- 
- [116] E. P. Ryan. An integral invariance principle for differential inclusions with applications in adaptive control. *SIAM J. Control Optim.*, 36(3) :960–980, 1998.
- [117] J. A. Sanders and F. Verhulst. *Averaging methods in nonlinear dynamical systems*, volume 59 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1985.
- [118] S. Sanders, J. M. Noworolski, X. Z. Liu, G. C. V. Sender, and J. M. Noworolski. Generalized averaging method for power conversion circuits. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 6(2) :251–159, April 1991.
- [119] R. G. Sanfelice, R. Goebel, and A. R. Teel. Invariance principles for hybrid systems with connections to detectability and asymptotic stability. *IEEE Trans. Automat. Control*, 52(12) :2282–2297, 2007.
- [120] A. L. Schwartz. *Theory and Implementation of Numerical Methods Based on Runge-Kutta Integration for Solving Optimal Control Problems*. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, 1989.
- [121] U. Serres, J.-C. Vivalda, and P. Riedinger. On the convergence of linear switched systems. *accepté provisoirement à IEEE Transaction in Automatic Control en avril 2009.*, 2009.
- [122] U. Serres, J.-C. Vivalda, and P. Riedinger. On a class of switched linear systems. In *accepté à 8th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems, Nolcos*, 2010.
- [123] M. Shaikh and P. Caines. On the optimal control of hybrid systems : Analysis and algorithms for trajectory and schedule optimization. In *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, volume 3, pages 2144–2149, Acapulco, Mexico, 2003.
- [124] M. Shaikh and P. Caines. On the hybrid optimal control problem : Theory and algorithms. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 52(9) :1587–1603, september 2007.
- [125] D. Shevitz and B. Paden. Lyapunov stability theory of nonsmooth systems. *IEEE Trans. Automat. Control*, 39(9) :1910–1914, 1994.
- [126] R. Shorten, F. Wirth, O. Mason, K. Wulff, and C. King. Stability criteria for switched and hybrid systems. *SIAM Rev.*, 49(4) :545–592, 2007.
- [127] E. Silva, B. McGrath, D. Quevedo, and G. Goodwin. Predictive control of a flying capacitor converter. In *Proceeding of IEEE American Control Conference*, volume 1, pages 3763–3768, New York, USA, 2007.
- [128] S.Sander and G. Verghese. Lyapunov-based control for switched power converters. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 7(1), 1992.
- [129] H. J. Sussmann. Subanalytic sets and feedback control. *J. Differential Equations*, 31(1) :31–52, 1979.
- [130] H. J. Sussmann. A maximum principle for hybrid optimal control problems. In *Proceedings of the IEEE 38nd Conference on Decision and Control*, pages 425–430, Phoenix, AZ, USA, 1999.

- [131] E. Trélat. *Contrôle optimal : théorie & applications*. Vuibert, Collection "Mathématiques Concrètes", 2005.
- [132] V. Utkin. *Sliding modes in control and optimization*. Springer-Verlag, 1992.
- [133] I. Vapnyarskii. An existence theorem for optimal control in the boltz problem, some of its applications and necessary conditions for teh optimality of moving and singular systems. *U.S.S.R. Computational Mathematics & Mathematical Physic*, 7 :22–54, 1967.
- [134] V. Veliov. A generalization of the tikhonov theorem for singularly perturbed differential inclusions. *Journal of dynamical and control systems*, 3(3) :291–319, 1997.
- [135] G. C. Verghese, M. E. Elbuluk, and J. G. Kassakian. A general approach to sampled-data modeling for power electronic circuits. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 1 :76–89, 1986.
- [136] Y. Wardi, M. Egerstedt, M. Boccadoro, and E. Verriest. Optimal control of switching surfaces. In *IEEE Conference on Decision and Control*, 2004.
- [137] X. Xu and P. J. Antsaklis. An approach for solving general switched linear quadratic optimal control problems. In *IEEE Conf. on Decision and Control*, 2001.
- [138] L. F.-Y. YU. Modelling of switching regulator power stages with and without zero-inductor-current dwell time. *IEEE Trans. on Ind. Elec. and Contr. Instrumentation*, 26(3) :142–150, 1979.
- [139] V. M. Zavala and L. T. Biegler. The advanced-step nmpc controller : Optimality, stability and robustness. *Automatica*, 45 :86–93, 2009.
- [140] J. Zaytoon and et al. *Systèmes Dynamiques Hybrides*. Hermes Sciences, 2001.